Biálgebras infinitesimales de multiplicadores y biálgebras de Lie de derivadores

Jesús Ochoa y A. Tiraboschi

19 de septiembre de 2014

Introducción

En esta comunicación se estudiarán nuevas estructuras que pueden ser de interés como soporte algebraico de ejemplos conocidos y generalizaciones de estructuras "clásicas".

Estas estructuras son "biálgebras infinitesimales de multiplicadores" (BIM) y "biálgrebras de Lie de derivadores" (BLD).

Veremos la definición precisa de BIM y un ejemplo interesante.

Daremos una idea de la definición de BLD y su relación las BIM.

Biálgebras infinitesimales

Una *biálgebra infinitesimal* es un triple (A, m, Δ) donde (A, m) is un álgebra asociativa, (A, Δ) es una cálgebra coasociativa y para cada par $a, b \in A$,

$$\Delta(ab) = \sum ab_1 \otimes b_2 + a_1 \otimes a_2 b.$$

Las biálgebras infinesimales fueron introducidas por Joni y Rota [JR] con el objetivos de proveer un marco algebraico para el cálculo de las diferencias divididas.

Aguiar en [A2] introduce algunos ejemplos nuevos, en particular prueba que el álgebras de caminos de un quiver arbitrario admite una estructura canónica de biálgebra infinitesimal.

Álgebras de Hopf de multiplicadores

La noción de *álgebra de Hopf de multiplicadores* fue introducida en [VD1].

Este concepto es una generalización del concepto de álgebra de Hopf en el caso no unitario.

En ese trabajo el autor considera un álgebra asociativa A, con o sin identidad, y una aplicación Δ de A en el álgebra de multiplicadores $M(A \otimes A)$ de $A \otimes A$, e impone ciertas condiciones a Δ (como *coasociatividad*).

El ejemplo motivador es el caso en el que A es el álgebra de funciones complejas sobre un grupo discreto infinito y donde $\Delta(f, g)(s, t) = f(st)$.

Biálgebras infinitesimales de multiplicadores

En esta comunicación se introduce la noción de *bialgebra infinitesimal de multiplicadores* y se da un ejemplo de este concepto.

Esta estructura es una mezcla de las dos estructuras mencionadas en la que el coproducto toma valores en el álgebra de multiplicadores $M(A \otimes A)$ y al mismo tiempo es una derivación en la que $M(A \otimes A)$ es considerado un A -bimódulo de la manera obvia.

Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra con producto $\cdot : A \times A \to A$. consideramos el caso en que el producto es no degenerado, en el sentido que

$$\cdot : A \times A \to A$$

es una forma bilineal no degenerada.

Biálgebras infinitesimales de multiplicadores (cont)

Sean

$$L(A) = \{\lambda \in Hom_{\mathbb{C}}(A, A) : \lambda(ab) = \lambda(a)b, \ \ \forall a, b \in A\},$$
$$R(A) = \{\rho \in Hom_{\mathbb{C}}(A, A) : \rho(ab) = a\rho(b), \ \ \forall a, b \in A\}.$$

$L(A)$ son los *multiplicadores a izquierda de A y $R(A)$ a derecha. Denotamos*

$$\mathbb{M}(A) = \{(\lambda, \rho) \in Hom_{\mathbb{C}}(A, A)^2 : \lambda \in L(A), \rho \in R(A) \text{ and } b\lambda(c) = \rho(b)c, \ \forall\, b, c \in A\}.$$

los multiplicadores de A.

$\mathbb{M}(A)$ *es un álgebra con el producto*

$$(\lambda, \rho)(\lambda', \rho') = (\lambda \circ \lambda', \rho' \circ \rho).$$

Con este producto $\mathbb{M}(A)$ es un álgebra con identidad.

Biálgebras infinitesimales de multiplicadores (cont)

Sea $a \in A$, definimos $\lambda_a,\ \rho_a \in Hom_{\mathbb{C}}(A, A)$ por $\lambda_a(b) = ab$ y $\rho_a(b) = ba$.

Entonces, λ_a y ρ_a son multiplicadores a izquierda y derecha, respectivamente.

Debido a que el producto en A es no degenerado la aplicación

$$a \mapsto (\lambda_a, \rho_a)$$

es inyectiva de A a $\mathbb{M}(A)$.

Más aún, esta aplicación es un morfismo. Es decir podemos considerar a A incluido en $\mathbb{M}(A)$.

Biálgebras infinitesimales de multiplicadores (cont)

Definición

Una aplicación lineal $\Delta : A \to \mathbb{M}(A \otimes A)$ que satisface

(a) $S(a \otimes b) = \Delta(b)(a \otimes 1)$ y $T(a \otimes b) = (1 \otimes b)\Delta(a)$ son elementos de $A \otimes A \ \forall\, a, b \in A$,

(b) Δ es coasociativa en el sentido de que

$$(1_A \otimes T) \circ (S \otimes 1_A) = (S \otimes 1_A) \circ (1_A \otimes T). \tag{1}$$

es llamada un *coproducto de A*.

Con la notación de Sweedler, introducida por Van Daele para el caso de multiplicadores, la identidad (1) puede ser leida como:

$$b_1 a \otimes b_{21} \otimes cb_{22} = b_{11} a \otimes b_{12} \otimes cb_2, \tag{2}$$

Debido a esto, el valor común en (2) se denota $b_1 a \otimes b_2 \otimes cb_3$.

Biálgebras infinitesimales de multiplicadores (cont)

Definición

Una *biálgebra infinitesimal de multiplicadores* (o ϵ-biálgebra de multiplicadores) es un triple (A, m, Δ) donde

1. (A, m) es un álgebra asociativa con un producto no degenerado
2. $\Delta : A \to \mathbb{M}(A \otimes A)$ es un coproducto en A, y
3. $\Delta(ab) = \Delta(a) \circ (1 \otimes b) + (a \otimes 1) \circ \Delta(b)$.

Es fácil comprobar que si (A, Δ) es una ϵ-biálgebra en el sentido de Aguiar [A2], con producto no degenerado, entonces es una ϵ-biálgebra de multiplicadores en el sentido de la definición anterior.

Ejemplos de ϵ-Biálgebras de multiplicadores

Sea (Q, s, t) un quiver infinito donde s y t son las aplicaciones origen y final, respectivamente. Sea $A(Q)$ y $V(Q)$ el connjunto de flechas y vértices de Q. Sea

$$\Gamma = \{\gamma : I_\gamma \to A(Q) : \text{ donde } I_\gamma \subseteq \mathbb{Z}, \\ \text{es un intervalo y } t(\gamma(i)) = s(\gamma(i+1))\},$$

el conjunto de caminos en Q.

- Si $I_\gamma = [i, .)$ entonces $s(\gamma) = \gamma(i)$, el *origen* de γ; y si $I_\gamma = (-\infty, \cdot)$ definimos $s(\gamma) = -\infty$.
- Si $I_\gamma = (\cdot, i]$, denotaremos $t(\gamma) = \gamma(i)$, el *final* of γ y si $I_\gamma = (\cdot, +\infty)$ escribimos $t(\gamma) = +\infty$.

La longitud del camino γ se define como $|\gamma| := |I_\gamma|$, el cardinal del conjunto I_γ.

Ejemplos de ϵ-Biálgebras de multiplicadores (cont.)

Dado un vértice $e \in V(Q)$ y $\gamma \in \Gamma$ definimos dos conjuntos

$$\Gamma_e(\gamma) = \{i \in I_\gamma : \ s(\gamma_i) = e\} \text{ y } \Gamma^e(\gamma) = \{i \in I_\gamma : \ t(\gamma_i) = e\}.$$

Sea

$$\Gamma' = \{\gamma \in \Gamma : \ \forall e \in V(Q), \ |\Gamma_e(\gamma)| < \infty \ \text{ y } \ |\Gamma^e(\gamma)| < \infty\} \cup \{\pm\infty\}.$$

Es decir Γ' es el conjunto de caminos $\gamma \in \Gamma$, tal que para todo $e \in V(Q)$, γ pasa por e solo una cantidad finita de veces.
Adjuntamos además los elementos $\{-\infty, +\infty\}$ (que no pertenecen a $V(Q)$).
Extendemos la definición de la aplicación origen y final a $\{-\infty, +\infty\}$ con $s(\pm\infty) = t(\pm\infty) = \pm\infty$.

Ejemplos de ϵ-Biálgebras de multiplicadores (cont.)

Definición

El *álgebra generalizada de caminos* de Q es el espacio vectorial $k_\infty Q$ con base Γ' y donde la multiplicación es la concatenación de caminos siempre que fuera posible. Es cero en otro caso. Los símbolos agregados $\pm\infty$ son idempotentes por definición.

La razón por la cual se agregaron los símbolos $\pm\infty$ es que son necesarios para que el producto en álgebra generalizada de caminos $k_\infty Q$ sea no degenerado.

En $k_\infty Q$ es posible definir un coproducto de la siguiente manera: si $\gamma = \cdots \gamma_i \gamma_{i+1} \cdots$, entonces

$$\Delta(\gamma) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \cdots \gamma_{i-2}\gamma_{i-1} \otimes \gamma_{i+1}\gamma_{i+2} \cdots .$$

Ejemplos de ϵ-Biálgebras de multiplicadores (cont.)

La definición de más arriba es intuitiva. Más formalmente, en término de multiplicadores, tenemos, que para $\gamma \in \Gamma$ definimos $\Delta(\gamma) = (\Delta_\lambda(\gamma), \Delta_\rho(\gamma)) \in M(A \otimes A)$ por las fórmulas:

$$\Delta_\lambda(\gamma)(\gamma' \otimes \gamma'') = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \cdots \gamma_{i-2}\gamma_{i-1}\gamma' \otimes \gamma_{i+1}\gamma_{i+2} \cdots \gamma'',$$

$$\Delta_\rho(\gamma)(\gamma' \otimes \gamma'') = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \gamma' \cdots \gamma_{i-2}\gamma_{i-1} \otimes \gamma''\gamma_{i+1}\gamma_{i+2} \cdots .$$

Debido a que $\Gamma^e(\gamma)$ and $\Gamma_e(\gamma)$ son finitos las dos sumas están bien definidas.
Definimos $\Delta(\pm\infty) = 0$ y extendemos Δ linealmente a $k_\infty Q$.

Proposición

Sea (Q, s, t) un quiver. Entonces $(k_\infty Q, m, \Delta)$ es una ϵ-biálgebra de multiplicadores.

Ejemplos de ϵ-Biálgebras de multiplicadores (cont.)

Sea L un poset y sea $\mathcal{P}$ el conjunto de subposets de L con máximo y mínimo. Si $P \in \mathcal{P}$ denotamos 1_P and 0_P al máximo y mínimo, respectivamente.
Sea $A_{\mathcal{P}}$ el k-espacio vectorial con base $\mathcal{P}$ con el siguiente producto:

$$P * Q = \begin{cases} P \cup Q & \text{if } 1_P = 0_Q \quad \text{con el orden heredado,} \\ 0 & \qquad\qquad\qquad \text{en otro caso.} \end{cases}$$

para $P, Q \in \mathcal{P}$ y este producto se extiende linealmente a $A_{\mathcal{P}}$.
Sea $\Delta : A_{\mathcal{P}} \to M(A_{\mathcal{P}} \otimes A_{\mathcal{P}})$ la aplicación dada por

$$\Delta(P) = \sum_{x \in P - \{1_P\}} (-\infty, x] \otimes [x, +\infty)$$

Entonces $(\mathcal{P}, *, \Delta)$ es una ϵ-biálgebra de multiplicadores.

Biálgebras de Lie de derivadores

Definición

Una *biálgebra de Lie de derivadores* es una colección $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], \delta, \zeta, T_1, T_2)$ donde:

- $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ es una álgebra de Lie,
- $\delta, \zeta : \mathfrak{g} \to Der(\mathfrak{g}, \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})$ son derivaciones y
- $T_1, T_2 : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ son aplicaciones lineales.

Estos datos satisfacen:

- **Antisimetría**. δ, ζ son *antisimétricos*.
- **CoJacobi generalizada**. Para todo $a, b, x \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned}(Id + \sigma + \sigma^2)(\zeta(b) \otimes Id)(T_1(a \otimes x)) = \\ (Id + \sigma + \sigma^2)(\delta(a) \otimes Id)(\tau(T_2(x \otimes b))). \quad (3)\end{aligned}$$

  donde σ es la permutación cíclica y τ es la transposición.

El par (δ, ζ) se denomina el *co-corchete* de $\mathfrak{g}$.

Ejemplos de biálgebras de Lie de derivadores

Recordemos la definición de biálgebra de Lie.

Definición

Una *biálgebra de Lie* es un triple $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], \delta)$ donde $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ es un álgebra de Lie, $\delta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ es una derivación y se satisfacen las siguientes condiciones,

- (**Antisimetría**) $\tau \circ \delta = -\delta$ y
- (**CoJacobi**) $(Id + \sigma + \sigma^2)(\delta \otimes Id)\delta = 0$.

Ejemplo

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie de dimensión 1 todas las estructuras de biálgebras de Lie son triviales, esto es iguales a cero.

Ejemplo

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie simple y Δ un sistema de raices de $\mathfrak{g}$. Definimos $r = \sum_{\alpha \in \Delta^+} e_\alpha \wedge e_{-\alpha}$. La derivación determinada por r da una estructura de biálgebra de Lie a $\mathfrak{g}$.

Ejemplos de biálgebras de Lie de derivadores (cont.)

Ejemplo

Sea $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], \beta)$ una biálgebra de Lie y sea $\alpha : \mathfrak{g} \to k$ una aplicación lineal. Definimos

$$\delta, \zeta : \mathfrak{g} \to Der(\mathfrak{g}, \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}) \text{ por } \delta(x) = \zeta(x) = \alpha(x)\beta$$

y

$$\begin{gathered} T_1, T_2 : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \text{ por} \\ T_1(a \otimes x) = \alpha(a)\beta(x) \text{ y} \\ T_2(x \otimes b) = \alpha(b)\beta(x). \end{gathered}$$

La colección $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], \delta, \zeta, T_1, T_2)$ es una biálgebra de Lie de derivadores.

Ejemplos de biálgebras de Lie de derivadores (cont.)

Ejemplo

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión 2 y sea $\{X, Y\}$ una base de $\mathfrak{g}$ tal que $[X, Y] = X$. Consideremos la derivación $\beta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ definida por $\beta(X) = X \wedge Y$ y $\beta(Y) = 0$.

Definimos los operadores $\iota_X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ y $\iota_Y : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ por $\iota_X(Z) = Z \wedge X$ y $\iota_Y(Z) = Z \wedge Y$, respectivamente.

Sea $\delta = \zeta$ as $\delta(X) = \iota_Y$ y $\delta(Y) = X$ y extendemos linealmente. Claramente δ es una $Der(\mathfrak{g}, \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})$ derivación de $\mathfrak{g}$.

Si tomamos $T_1 = T_2 = Id : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, entonces $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot], \delta, \delta, Id, Id)$ es una biálgebra de Lie de derivadores.

De ϵ-biálgebras de multiplicadores a biálgebras de derivadores

Definición

Sea (A, μ, Δ) una ϵ-biálgebra de multiplicadores. El *bibalanceador* de A es $\mathbb{B} : A \to End(A \otimes A)^2$, donde $\mathbb{B}(a) = (\underline{\mathbb{B}}(a), \overline{\mathbb{B}}(a))$ con

$$\underline{\mathbb{B}}(a)(x \otimes y) = (x \otimes 1)\tau\Delta(y)(1 \otimes a) - \tau\Delta(y)(1 \otimes ax) + (1 \otimes y)\Delta(x)(a \otimes 1) - \Delta(x)(ay \otimes 1), \quad (4)$$

y

$$\overline{\mathbb{B}}(a)(x \otimes y) = (xa \otimes 1)\tau\Delta(y) - (a \otimes 1)\tau\Delta(y)(1 \otimes x) + (1 \otimes ya)\Delta(y) - (1 \otimes a)\Delta(x)(y \otimes 1). \quad (5)$$

Diremos que $\mathbb{B}$ es *simétrica* si $\underline{\mathbb{B}}(a) = \underline{\mathbb{B}}(a) \circ \tau$ y $\overline{\mathbb{B}}(a) = \overline{\mathbb{B}}(a) \circ \tau$, para toda $a \in A$. Direos que A is *bibalanceada* si su bibalanceador es igual a cero.

De ϵ-biálgebras de multiplicadores a biálgebras de derivadores (cont.)

Proposición

Sea (A, μ, Δ) una ϵ-biálgebra de multiplicadores. Definimos las siguientes aplicaciones

$$\delta : A \to Hom_k(A, A \otimes A), \quad x \mapsto \delta_a(x) := \Delta(x)(a \otimes 1) - \tau(\Delta(x)(a \otimes 1)),$$

$$\zeta : A \to Hom_k(A, A \otimes A), \quad x \mapsto \zeta^a(x) := (1 \otimes a)\Delta(x) - \tau((1 \otimes a)\Delta(x)).$$

Entonces,

$$\delta_a[x, y] = x \cdot \delta_a(y) - y \cdot \delta_a(x) + \underline{\mathbb{B}}(a)(y \otimes x) - \underline{\mathbb{B}}(a)(x \otimes y),$$

y

$$\zeta^a[x, y] = x \cdot \zeta^a(y) - y \cdot \zeta^a(x) + \overline{\mathbb{B}}(a)(y \otimes x) - \overline{\mathbb{B}}(a)(x \otimes y).$$

De ϵ-biálgebras de multiplicadores a biálgebras de derivadores (cont.)

Teorema

Sea (A, μ, Δ) una ϵ-biálgebra de multiplicadores. Si el bibalanceador de A es simétrico entonces las aplicaciones

$$\delta : A \to Der(A, A \otimes A), \quad x \mapsto \delta_a(x) := (1 \otimes a)\Delta(x) - \tau((1 \otimes a)\Delta(x)),$$

$$\zeta : A \to Der(A, A \otimes A), \quad x \mapsto \zeta^a(x) := \Delta(x)(a \otimes 1) - \tau(\Delta(x)(a \otimes 1)),$$

están bien definidas. Más aún, si definimos $T_1, T_2 : A^{Lie} \otimes A^{Lie} \to A^{Lie} \otimes A^{Lie}$ por

$$T_1(u \otimes v) = (1 \otimes u)\Delta(v), \quad T_2(u \otimes v) = \Delta(u)(v \otimes 1),$$

entonces la colección $(A,\ m - m \circ \tau,\ \delta,\ \zeta, T_1, T_2)$ es una biágebra de Lie de derivadores.

Bibliografía

- M. AGUIAR, *Infinitesimal Hopf algebras*, Contemporary Mathematics **267**, 1 - 30 (2000)

- M. AGUIAR, *On the associative analog of Lie Biálgebras*, Journal of Algebra **244** , 492-532 (2001). OK

- S.A JONI AND G.C. ROTA, *Coalgebras and Biálgebras in combinatorics*, Studies in Applied Mathematics **61**, 93-139 (1979). Reprinted in *Gian Carlo Rota on combinatorics: Introductory papers and comentaries*, (Josehp P.S. Kung, Ed.), Birkhäuser, Boston (1995). OK

- A. VAN DAELE, *Multiplier Hopf algebras*, Transactions of AMS, **342**, 917–932 (1994). OK

- A. VAN DAELE, *an algebraic framework for group duality*, **140**, 323 - 366 (1998).

¡Gracias!