Relación entre la tasa de interés y la tasa de descuento, aplicadas al sistema de amortización de cuotas iguales (Sistema Francés)

Elvira Carrizo

Ponencia presentada en XXXIV Jornadas Nacionales de Profesores Universitarios de Matemática Financiera realizada en 2013 en La Matanza, Buenos Aires. Argentina

RELACIONES ENTRE LA TASA DE INTERÉS Y LA TASA DE DESCUENO APLICADAS AL SISTEMA DE AMORTIZACIÓN DE CUOTAS IGUALES (SISTEMA FRANCÉS)

CARRIZO Elvira Delia

Dto. Estadística y Matemática
Facultad de Ciencias Económicas
Universidad Nacional de Córdoba

elviracarrizo@yahoo.com.ar

RELACIONES ENTRE LA TASA DE INTERÉS Y LA TASA DE DESCUENO APLICADAS AL SISTEMA DE AMORTIZACIÓN DE CUOTAS IGUALES (SISTEMA FRANCÉS)

A partir de la igualdad que se verifica en todos los sistemas de amortización de deuda, la cual establece que: "***el importe de cada cuota que amortiza la unidad monetaria adeudada al comienzo de cada una de las unidades de tiempo, es igual a la suma de la tasa de amortización correspondiente a dicha unidad de tiempo y la tasa de interés aplicada al financiamiento",*** en el presente trabajo se demuestra dicha igualdad dada en el sistema de amortización de cuotas iguales o sistema de amortizaciones acumulativas, llamado Sistema Francés, utilizando para ello, las relaciones entre la tasa de interés y la tasa de descuento.

La igualdad planteada se demuestra utilizando las equivalencias financieras entre la tasa de interés y la tasa de descuento, las que establecen: que la tasa de descuento representa el valor actual de la tasa de interés o que la tasa de interés representa el capital final o monto de la tasa de descuento"**.**

2 CONCEPTOS FINANCIEROS UTILIZADOS

2-1 Se recuerdan las relaciones entre la tasa de interés y la tasa de descuento

Se recuerda que tanto la operación de capitalización como la de actualización, pueden efectuarse utilizando la tasa de interés o la tasa de descuento, así para capitalizar la unidad monetaria en n unidades de tiempo:

$$u^{n} = (1 + i)^{n} = (1 - d)^{-n}$$

Y para actualizar la unidad monetaria en n unidades de tiempo:

$$v^{n} = (1 + i)^{-n} = (1 - d)^{n}$$

Por otro lado, también se recuerda, la conocida expresión para el cálculo de la tasa de descuento equivalente para una diferente unidad de tiempo:

$$d_{(n)} = 1 - v^{n} \qquad (1)$$

Además, a partir de las conocidas expresiones donde se calcula la tasa de interés a partir de la tasa de descuento, o la tasa de descuento a partir de la tasa de interés, surge la relación existente entre ambas tasas.

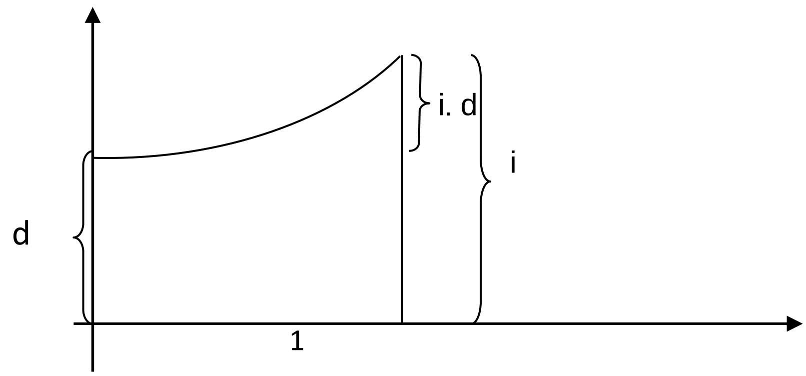
Del cálculo de la tasa de interés conocida la tasa de descuento y la tasa de descuento conocida la tasa de interés, que conocemos:

$$i = d / (1-d) \quad y \quad d = i / (1+i)$$

Surgen las relaciones entre ambas tasas, para una unidad de tiempo: la tasa de descuento es el valor actual de la tasa de interés y la tasa de interés es el valor final o monto de la tasa de descuento:

$d = i \times v$

$i = d \times u$



Se observa gráficamente las mencionadas relaciones.

Recordando que el interés o descuento es la diferencia entre el capital final y el capital inicial, además **en una unidad de tiempo**, el interés es igual al capital inicial multiplicado por la tasa de interés y el descuento es igual el capital final multiplicado por la tasa de descuento.

Para n = 1, entoces:

$i - d = d \times i = i \times d$ (2)

El interés o descuento, es igual a la diferencia entre la tasa de interés (capital final) y la tasa de descuento (capital inicial) e igual también al interés del capital inicial o descuento del capital final

Para una unidad de tiempo cuya magnitud sea n veces mayor a la unidad de tiempo de las tasas de interés (i) y de descuente (d), se presentan las siguientes relaciones.

La tasa de descuento equivalente es el valor actual de la tasa de interés equivalente:

$d_{(n)} = i_{(n)} \times v^{n}$ (3)

La tasa de interés equivalente es el monto o valor final de la tasa de descuento equivalente:

$i_{(n)} = d_{(n)} \times u^{n}$ (4)

El interés o descuento que surge de la diferencia entre el capital al final de las “n” unidades de tiempo, según se expresa en (4) y el capital al inicio de las mismas, expresado en (3), es igual al capital inicial multiplicado por su respectiva tasa de interés equivalente, e igual al capital final multiplicado por su respectiva la tasa de descuento equivalente.

$$i_{(n).} - d_{(n)} = d_{(n)} \times i_{(n).} = i_{(n).} \times d_{(n)} \qquad (5)$$

Además, a partir de (3), se expresa el operador de actualización, v^{n} como el cociente entre el capital inicial y el capital final :

$$v^{n} = d_{(n)} / i_{(n)} \qquad (6)$$

Mediante estas ultimas relaciones se comprueba en el sistema de amortización de cuotas iguales, que "***el importe de cada cuota que amortiza $1 de saldo adeudado, es igual a la suma de la tasa de amortización correspondiente y la tasa de interés aplicada al financiamiento".***

2 – 2 Se mencionan algunas relaciones conocidas en los sistemas de amortización de deuda.

Para demostrar las equivalencias financieras planteadas, es necesario utilizar algunas de las conocidas relaciones que se presentan en todo sistema de amortización, y otras que se dan en el sistema de amortizaciones acumulativas (Sistema Francés)

- ***En todo Sistema de amortización de deuda***

El importe financiado, representa el valor actual de las n cuotas que lo amortizan.

$$S_0 \sum_{p=1}^{n} C_p (1+i)^{-p}$$

Siendo i la tasa de interés de la operación

El interés de cada unidad de tiempo es calculado sobre el saldo adeudado al comienzo de la unidad de tiempo correspondiente:

$I_1 = S_0 . i$
$I_2 = S_1 i$
…………….
$I_n = S_{n-1} . i$

Las cuotas están compuestas por el importe amortizado y el importe del interés abonado en cada unidad de tiempo:

$c_1 = t_1 + I_1$
$c_2 = t_2 + I_2$
…………….
$c_n = t_n + I_n$

- ***En el Sistema de amortización de deuda de cuotas iguales o sistema de amortizaciones acumulativas. (Sistema Francés)***

El importe financiado se simboliza y se calcula:

$$S_0 = c\sum_{p=1}^{n}(1+i)^{-p} = c\, a_{n\urcorner} = c\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = c\,\frac{1-v^n}{i} \qquad (7)$$

El importe de la cuota que amortiza el financiamiento mediante el sistema acumulativo, se simboliza y se calcula:

$$S_0\, a^{-1}_{n\urcorner} = S_0 \,.i / (1 - v^n)$$

El importe de la cuota que financia la unidad monetaria, en este sistema de amortización de deuda, se expresa y calcula:

$$a^{-1}_{n\urcorner} = i / (1 - v^n)$$

En el caso particular del sistema de amortización de deuda de cuotas iguales, se recuerdan sus componentes:

$$c = t_1 + I_1 = t_2 + I_2 = t_n + I_n$$

Además, en este sistema de amortización, en la composición de las cuotas el importe de las amortizaciones es creciente respecto a la amortización anterior, cada una de las cuales puede calcularse mediante la amortización anterior o mediante la primera amortización o en función de la cuota, a partir de la amortización en función de la cuota, la amortización de la primera, segunda y última cuota del financiamiento, se expresan:

$$t_1 = c\,(1+i)^{-n} = c\,v^n \qquad (8)$$

$$t_2 = c\,(1+i)^{-(n-1)} = c\,v^{n-1} \qquad (9)$$

…………………………

$$t_n = c\,(1+i)^{-1} = c\,v \qquad (10)$$

Se observan para la primera, segunda y última unidad de tiempo, las expresiones para determinar la composición de cada una de las cuotas del Sistema Francés o sistema de amortizaciones acumulativas para financiar la unidad monetaria al comienzo de cada unidad de tiempo:

$$c/S_0 = t_1/S_0 + I_1/S_0 \qquad (11)$$

$$c/S_1 = t_2/S_1 + I_2/S_1 \qquad (12)$$

$$c/S_{n-1} = t_n/S_{n-1} + I_n/S_{n-1} \qquad (13)$$

- ***Tasa de amortización***

En todos los sistemas de amortización de deuda, la tasa de amortización, se define como, la amortización real en una unidad de tiempo, para un saldo adeudado de un peso ($ 1), así, para la primera, segunda y última unidad de tiempo:

$\theta_1 = t_1 / S_0$

$\theta_2 = t_2 / S_1$

....

$\theta_n = t_n / S_{n-1}$

En el sistema de amortización de deuda de cuotas iguales o Sistema Francés, teniendo en cuenta el cálculo para cada unidad de tiempo, de los intereses por un lado y de la tasa de amortización por el otro, la composición de cada cuota que amortiza la unidad monetaria adeudada al comienzo de cada unidad de tiempo, entonces está representada también, por la suma de la tasa de amortización de la unidad de tiempo correspondiente más la tasa de interés del financiamiento, para la primera, segunda y última:

$$c / S_0 = t_1 / S_0 + I_1 / S_0 \longrightarrow a^{-1}_{n\rceil} = \theta_1 + i \qquad (14)$$

$$c / S_1 = t_2 / S_1 + I_2 / S_1 \longrightarrow a^{-1}_{n-1\rceil} = \theta_2 + i \qquad (15)$$

....

$$c / S_{n-1} = t_n / S_{n-1} + I_n / S_{n-1} \longrightarrow a^{-1}_{1\rceil} = \theta_n + i \qquad (16)$$

Las igualdades expresadas en (14), (15) y (16) son las que en el presente trabajo se pretenden demostrar a través de las relaciones entre la tasa de interés y la tasa de descuento

3 DEMOSTRACIÓN DE LA IGUALDAD PLANTEADA

Se intenta demostrar, mediante las relaciones entre la tasa de interés y la tasa de descuento, que en el sistema de amortización de cuotas iguales, "*el importe de cada cuota que amortiza la unidad monetaria adeudada al comienzo de cada una de las unidades de tiempo, es igual a la suma de la tasa de amortización correspondiente a dicha unidad de tiempo y la tasa de interés aplicada al financiamiento".*

Para la primera unidad de tiempo, en la expresión (11) se despeja el importe del interés correspondiente a dicha unidad de tiempo para un saldo adeudado de un peso, como sigue:

$$I_1 / S_0 = c / S_0 - t_1 / S_0 \qquad (17)$$

En el segundo miembro de la expresión (17) se remplazan a S_0 y t_1 por sus iguales según (7) y (8) respectivamente.

$$I_1 / S_0 = \frac{c}{c\,\frac{1-v^n}{i}} - \frac{c\,v^n}{c\,\frac{1-v^n}{i}}$$

Surge la siguiente expresión, donde se demuestra la igualdad planteada, a través de las relaciones entre la tasa de interés y la tasa de descuento:

$$I_1 / S_0 = \frac{1}{\frac{1-v^n}{i}} - \frac{v^n}{\frac{1-v^n}{i}}$$

Se remplazan en la expresión anterior a v^n y $(1 - v^n)$ por sus iguales según (6) y (1) respectivamente.

$$I_1 / S_0 = \frac{1}{d_{(n)} / i} - \frac{d_{(n)} / i_{(n)}}{d_{(n)} / i}$$

Se resuelve:

$$I_1 / S_0 = i / d_{(n)} - i / i_{(n)} = (i \times i_{(n)} - i \times d_{(n)}) / d_{(n)} \times i_{(n)} = i (i_{(n)} - d_{(n)}) / d_{(n)} \times i_{(n)} = i$$

Se aplican las relaciones entre las tasas de interés y de descuento, según lo expresado en (5) la diferencia entre las tasas equivalentes de interés y de descuento ($i_{(n)} - d_{(n)}$) es igual al producto entre ambas tasas ($d_{(n)} \times i_{(n)}$), lo que verifica la igualdad expresada en (11), ya que el importe del interés correspondiente a la 1er unidad de tiempo para un saldo adeudado de un peso es la tasa de interés del financiamiento

$$I_1 / S_0 = S_0\, i / S_0 = i$$

Al haber demostrado la igualdad expresada en (11), mediante las relaciones entre la tasa de interés y la tasa de descuento, queda entonces demostrado, que utilizando las relaciones entre las mencionadas tasas, se verifica la igualdad expresada en (14), o sea que, la cuota que amortiza la unidad monetaria adeudada al comienzo de la operación financiera, es la suma de la tasa de amortización de la primera unidad de tiempo más la tasa de interés aplicada al financiamiento.

$$a^{-1}_{\overline{n|}} = \theta_1 + i$$

Ahora volviendo al razonamiento inicial, en la expresión (12) se despeja el importe del interés de la 2da unidad de tiempo para un saldo adeudado de un peso, como sigue:

$$I_2 / S_1 = c / S_1 - t_2 / S_1 \qquad (18)$$

En el segundo miembro de la expresión (18) se remplazan a S_1 por la expresión que permite el cálculo del valor actual de n-1 cuotas iguales y vencidas y a t_2 por su igual según (9).

$$I_2 / S_1 = \frac{c}{c\,\frac{1-v^{n-1}}{i}} - \frac{c\,v^{n-1}}{c\,\frac{1-v^{n-1}}{i}}$$

Surge la siguiente expresión, luego de operar algebraicamente y remplazar según corresponda.

$$I_2 / S_1 = \frac{1}{d_{(n-1)} / i} - \frac{d_{(n-1)}/i_{(n-1)}}{d_{(n-1)}/i}$$

Se resuelve procediendo como se hizo para la primera unidad de tiempo, aplicando las relaciones entre la tasa de interés y la tasa de descuento, respetando el número de unidades de tiempo:

$$I_2 / S_1 = i / d_{(n-1)} - i / i_{(n-1)} = (i \times i_{(n-1)} - i \times d_{(n-1)}) / d_{(n-1)} \times i_{(n-1)} = i .(i_{(n-1)} - d_{(n-1)}) / d_{(n-1)} \times i_{(n-1)} = i$$

Se aplican las relaciones entre las tasas de interés y de descuento, según la expresión (5) la diferencia entre las tasas equivalentes de interés y de descuento ($i_{(n-1)} - d_{(n-1)}$) es igual al producto entre ambas tasas ($d_{(n-1} \times i_{(n-1)}$), lo que verifica la igualdad expresada en (12), ya que el importe del interés correspondiente a la 2da unidad de tiempo para un saldo adeudado de un peso es la tasa de interés del financiamiento

$$I_2 / S_1 = S_1\, i / S_1 = i$$

Al quedar demostrada la igualdad expresada en (12), utilizando para ello las relaciones entre las tasas de interés y de descuento, queda demostrado que utilizando dichas relaciones entre las mencionadas tasas, se verifica la igualdad expresada en (15), o sea que, la cuota que amortiza la unidad monetaria adeudada al comienzo de la segunda unidad de tiempo es la suma de la tasa de amortización correspondiente a dicha unidad de tiempo más la tasa de interés aplicada a la operación financiera.

$$a^{-1}_{\overline{n-1}|} = \theta_2 + i$$

Para demostrarlo en la última unidad de tiempo, cuando se han abonada n-1 cuotas y falta solo un pago para cancelar el importe financiado, en la expresión (13) se procede de igual manera que para la primera y segunda unidad de tiempo, donde se despeja el interés correspondiente a esta última unidad de tiempo:

$$I_n / S_{n-1} = c / S_{n-1} - t_n / S_{n-1} \qquad (19)$$

En el segundo miembro de la expresión (19) se remplazan a S_{n-1} por la expresión que permite su cálculo y a t_n según la expresión (14).

$$I_n / S_{n-1} = \frac{C}{C\,\frac{1-v}{i}} - \frac{C\,v}{C\,\frac{1-v}{i}}$$

Surge la siguiente expresión, donde se demuestra la igualdad a través de las relaciones entre la tasa de interés y la tasa de descuento:

$$I_n / S_{n-1} = \frac{1}{(1-v)/i} - \frac{v}{(1-v)/i}$$

Se remplazan en la expresión anterior a v y (1 – v) por sus iguales según (5) y (1) respectivamente, en esta situación para n = 1, se resuelve:

$$I_n / S_{n-1} = \frac{1}{d/i} - \frac{d/i}{d/i} = i / d - 1 = (i - d) / d = (i . d) / d = i$$

Se aplican las relaciones entre la tasa de interés y la tasa de descuento, según la expresión (2) la diferencia entre la tasa de interés y la tasa de descuento (i– d), representa el interés o descuento, lo que es igual al producto entre la tasa de interés y la tasa de descuento (d × i), lo que verifica la igualdad expresada en (13), ya que el importe del interés correspondiente a la última unidad de tiempo para la unidad monetaria adeudada al comienzo de esa unidad de tiempo, es la tasa de interés del financiamiento

$$I_n / S_{n-1} = S_{n-1}\, i / S_{n-1} = i$$

Al haber demostrado la igualdad expresada en (13), mediante las relaciones entre la tasa de interés y la tasa de descuento, entonces queda demostrado, que utilizando las relaciones entre las tasas de interés y de descuento, se verifica la igualdad expresada en (16), o sea que, la cuota que amortiza la unidad monetaria adeudada al comienzo de la última unidad de tiempo, es la suma de la tasa de amortización de esa unidad de tiempo más la tasa de interés aplicada al financiamiento,

$$a^{-1}{}_{1\urcorner} = \theta_n + i$$

4 Conclusión

En el trabajo, se aplican las relaciones entre las tasas de interés y de descuento, para confirmar en el Sistema Francés, la igualdad entre la cuota y sus componentes. Se demuestra para el sistema de amortización de cuotas iguales o sistema de amortizaciones acumulativas, que **el importe de cada una de las cuotas para la unidad monetaria adeudada al comienzo de cada unidad de tiempo es igual a la tasa de amortización de la unidad de tiempo correspondiente más la tasa de interés aplicada al financiamiento,** utilizando para ello, las relaciones entre las tasas de interés y la tasa de descuento, las que establecen que “la tasa de descuento representa el valor actual de la tasa de interés o que la tasa de interés es igual al capital final o monto de la tasa de descuento” lo que permita expresar que, “la tasa de interés menos la tasa de descuento es igual al interés de la tasa de descuento o el descuento de la tasa de interés”.

5 Bibliografía

Carrizo, José Fernando; 2001, Conceptos Básicos de Matemática Financiera; Córdoba; Cooperadora Facultad de Ciencias Económicas Universidad Nacional de Córdoba.