UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

Trabajo Especial de Licenciatura en Matemática

El Problema Matricial de Bochner

Ignacio Nicolás Bono Parisi

Directora: María Inés Pacharoni

Resumen

Comenzamos introduciendo los conceptos necesarios para poder entrar en contexto del Problema matricial de Bochner, el cual plantea la pregunta: ¿Cuáles son los pesos matriciales de tamaño $N \times N$ cuya sucesión de polinomios matriciales ortogonales son autofunciones de algún operador diferencial matricial de segundo orden?. Usaremos la teoría de Biespectralidad para poder dar una solución a ese problema para los casos en que los pesos W cumplan que su álgebra $\mathcal{D}(W)$ sea completa. También daremos un contexto específico en el cual será posible generar nuevos pesos no triviales que cumplan lo que plantea el Problema matricial de Bochner, partiendo de una suma directa de pesos clásicos escalares. En general haremos una recopilación de otros papers, principalmente los papers [3] y [4], y adicionalmente desarrollaremos algunos ejemplos que no fueron considerados allí.

Abstract

We begin by introducing the necessary concepts that are in order to enter the setting of the matrix Bochner problem, which poses the question: What are the $N \times N$ weight matrices whose associated orthogonal polynomials are eigenfunctions of a second order differential operator?. We will use bispectral theory to give a solution to said problem when the algebra $\mathcal{D}(W)$ of W is assumed to be full. We will also provide a specific scheme which will allow us to generate new non-trivial weights that satisfy the Bochner condition, starting from a direct sum of classic scalar weights. Our main sources of inspiration are [3] and [4]. We will expand on some examples which have not been considered in those works.

Mathematics Subject Classification (2020): 16D20, 34L10, 42C05, 47L80.

Palabras claves: Polinomios matriciales ortogonales, pesos matriciales, álgebra de operadores diferenciales, ad-conditions, problema biespectral, transformación biespectral de Darboux.

Keywords: Matrix orthogonal polynomials, matrix weights, algebra of differential operators, ad-conditions, bispectral problem, bispectral Darboux transformation.

Índice general

1. Introducción **5**

2. Polinomios ortogonales matriciales **9**
2.1. Preliminares . . . 9
2.1.1. Notación . . . 9
2.2. Funciones peso y producto interno . . . 10
2.3. Sucesión de polinomios ortogonales matriciales mónicos . . . 12
2.4. El álgebra $\mathcal{D}(W)$ . . . 14
2.5. Las ad-conditions . . . 18

3. La adjunta de operadores diferenciales **25**
3.1. La adjunta de $\mathfrak{D}$ en $\mathcal{D}(W)$ . . . 25
3.2. La adjunta de operadores diferenciales más generales . . . 31

4. Biespectralidad **33**
4.1. Transformación Biespectral de Darboux . . . 34
4.2. Operadores excepcionales . . . 35

5. Transformación de Darboux **37**
5.1. Operadores shift . . . 37
5.2. Álgebras de Fourier . . . 39

6. Soluciones no triviales **43**
6.1. Transformación de Darboux de pares de Bochner . . . 45
6.2. Ejemplo del tipo Hermite . . . 48
6.3. Ejemplo del tipo Jacobi . . . 50
6.4. Ejemplo del tipo Laguerre . . . 52

7. Teorema de Clasificación **55**

8. Ejemplos **61**
8.1. Ejemplos del tipo Hermite . . . 61
8.1.1. Ejemplo 1. . . . 61
8.1.2. Ejemplo 2. . . . 63
8.2. Ejemplos del tipo Jacobi . . . 65
8.2.1. Ejemplo 1. . . . 65
8.2.2. Ejemplo 2. . . . 66
8.3. Ejemplos del tipo Laguerre . . . 67
8.3.1. Ejemplo 1. . . . 67
8.3.2. Ejemplo 2. . . . 69
8.3.3. Ejemplo 3. . . . 70

Capítulo 1

Introducción

Una función peso es una función medible no nula $w : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ que satisface la condición de que los momentos $\int_{\mathbb{R}} w(x)x^n dx$ son todos finitos. Una función peso induce un producto interno en el espacio de polinomios $\mathbb{C}[x]$, definido por

$$\langle f(x), g(x)\rangle_w := \int_{\mathbb{R}} f(x)w(x)\overline{g(x)}dx.$$

Usando Gram-Schmidt se obtiene una sucesión de polinomios ortogonales $\{p(x,n)\}$ tal que $p(x,n)$ tiene grado n para cada entero $n \geq 0$. Esta sucesión es llamada sucesión de polinomios ortogonales de w, o simplemente sucesión de polinomios ortogonales si ya se sabe que nos referimos al w.

El problema de Bochner es determinar para cuáles pesos w la sucesión de polinomios ortogonales es una familia de autofunciones para algún operador diferencial de segundo orden. Bochner proporciona una solución a este problema [1]. Salvo cambios de coordenadas afines, los únicos pesos para los cuales su respectiva sucesión de polinomios ortogonales satisfacen esa propiedad, son las familias de pesos clásicos de Hermite, Laguerre, y Jacobi.

El problema de Bochner y la noción de polinomios ortogonales pueden extenderse naturalmente a polinomios matriciales. Un peso matricial de tamaño N es una función a valores matriciales $W : \mathbb{R} \to M_N(\mathbb{C})$ que es suficientemente buena (explicaremos más adelante) como para introducir un producto interno a valores matriciales no degenerado sobre el espacio de polinomios matriciales $M_N(\mathbb{C})[x]$ definido por

$$\langle P, Q\rangle_W := \int_{\mathbb{R}} P(x)W(x)Q(x)^* dx$$

donde $Q(x)^*$ se refiere a la transpuesta conjugada de $Q(x)$. Al igual que en el caso escalar, uno puede obtener una sucesión de polinomios matriciales ortogonales $\{P(x,n)\}_n$, es decir, una sucesión de polinomios tal que el grado de $P(x,n)$ es n, el coeficiente principal es una matriz no singular para todo entero $n \geq 0$, y tal que $\langle P(x,n), P(x,m)\rangle_W = 0$, para todo $n \neq m$.

Para extender el problema de Bochner a los polinomios matriciales, uno considera el álgebra de operadores diferenciales matriciales $M_N(\Omega[[x]])$, es decir, operadores de la forma

$$\mathfrak{D} = A_0(x) + \partial A_1 + \cdots + \partial^\ell A_\ell(x)$$

donde $A_i(x) \in M_N(\mathbb{C}[[x]])$, y $\mathfrak{D}$ actúa a derecha en $M_N(\mathbb{C}[[x]])$ de la siguiente forma

$$F(x) \cdot \mathfrak{D} := F(x)A_0(x) + F'(x)A_1(x) + \cdots + F^{(\ell)}(x)A_\ell(x)$$

A diferencia del caso escalar, el caso matricial es no conmutativo, luego es necesario elegir si la acción del operador será a izquierda o derecha, en este caso elegimos que actúe a derecha por compatibilidad de como definimos el producto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle_W$.

Una función $F(x)$ será llamada autofunción de un operador $\mathfrak{D}$ si existe una matriz $\Lambda \in M_N(\mathbb{C})$ tal que $F(x) \cdot \mathfrak{D} = \Lambda F(x)$.

Con estas nuevas nociones podemos establecer la versión matricial del problema de Bochner.

Problema 1.1. *(El problema matricial de Bochner). Para qué pesos matriciales W de tamaño N su respectiva sucesión de polinomios matriciales ortogonales son autofunciones de algún operador diferencial de segundo orden.*

Ya resuelto el caso escalar, uno puede dar una solución para el caso matricial. Si tomamos N pesos escalares clásicos $r_1(x), \cdots, r_N(x)$, con $\{p_i(x,n)\}_n$ sus respectivas sucesiones de polinomios ortogonales asociadas a $r_i(x)$ para cada i, $\mathfrak{d}_i$ su respectivo operador diferencial de segundo orden que tiene como autofunciones la sucesión de polinomios $\{p_i(x,n)\}_n$ con $\lambda_i(n)$ los respectivos autovalores. Tomamos W el peso que sea suma directa de estos pesos escalares clásicos,

$$W(x) = \begin{pmatrix} r_1(x) & & & \\ & r_2(x) & & \\ & & \ddots & \\ & & & r_N(x) \end{pmatrix}, \quad P(x,n) = \begin{pmatrix} p_1(x,n) & & & \\ & p_2(x,n) & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_N(x,n) \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} \mathfrak{d}_1 & & & \\ & \mathfrak{d}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathfrak{d}_N \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \Lambda_n = \begin{pmatrix} \lambda_1(n) & & & \\ & \lambda_2(n) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_N(n) \end{pmatrix}.$$

Se cumplirá que W es un peso matricial de tamaño N, que $\{P(x,n)\}$ es una sucesión de polinomios matriciales ortogonales asociada a W, $\mathfrak{D}$ un operador diferencial de segundo orden, y valdrá que

$$P(x,n) \cdot \mathfrak{D} = \Lambda_n P(x,n) \quad \forall\, n \geq 0.$$

Estas serán las soluciones triviales del Problema Matricial de Bochner.

Esta extensión matricial del Problema de Bochner no sería interesante si las únicas soluciones fueran suma directa de pesos clásicos escalares.

La primer solución no trivial a este problema fue encontrada por Pacharoni, Grünbaum y Tirao [10][9] usando módulos de Harish-Chandra para grupos simples reales y las funciones esféricas matriciales asociadas. Luego muchos otros ejemplos no triviales fueron hallados.

Sea $\mathcal{D}(W)$ el álgebra de todos los operadores diferenciales matriciales que tienen a la sucesión de polinomios matriciales ortogonales como autofunciones.

En este trabajo veremos que si $\mathcal{D}(W)$ es completa, es decir, si existe un sistema ortogonal (que definiremos luego) de N elementos simétricos $\mathfrak{D}_1, \cdots, \mathfrak{D}_N \in \mathcal{D}(W)$ tales que la suma está en $Z(W)$ (el centro de $\mathcal{D}(W)$), entonces se pueden definir $\Omega(x)$-submódulos canónicos $\mathcal{M}_i \subset \Omega(x)^{\oplus N}$ para $i = 1, \cdots, N$ que nos permitirán obtener una matriz racional $T(x)$ tal que $W(x)$ sea congruente a un peso matricial diagonal vía $T(x)$, es decir

$$W(x) = T(x) \mathrm{diag}(f_1(x), \cdots, f_N(x)) T(x)^* \tag{1.1}$$

donde $f_i(x)$ es un peso escalar clásico para todo i. Esto se usará para probar que $W(x)$ es una transformación biespectral de Darboux de una suma directa de pesos clásicos como el del ejemplo trivial visto recién.

El siguiente Teorema de Clasificación será el principal de este trabajo.

Teorema 1.2. *(Teorema de Clasificación [4]). Sea $W(x)$ un peso matricial tal que $\mathcal{D}(W)$ contiene un operador diferencial W-simétrico de orden* 2

$$\mathfrak{D} = \partial^2 D_2(x) + \partial D_1(x) + D_0(x),$$

con $D_2(x)W(x)$ definida positiva en el soporte de $W(x)$.
Entonces el álgebra $\mathcal{D}(W)$ es completa si y sólo si $W(x)$ es una transformación biespectral de Darboux de una suma directa de pesos clásicos.

Para el caso de pesos de tamaño 2, el álgebra $\mathcal{D}(W)$ es completa si y sólo si es no conmutativa. Por lo tanto si $\mathcal{D}(W)$ es no conmutativa, entonces W será transformación biespectral de Darboux de suma directa de pesos clásicos.

Capítulo 2

Polinomios ortogonales matriciales

2.1. Preliminares

En esta capítulo introduciremos la nociones básicas de la teoría de polinomios matriciales ortogonales Nos basaremos principalmente en los trabajos [12] y [4].

2.1.1. Notación

Usaremos letras mayúsculas para representar matrices, letras minúsculas para representar escalares. Usaremos mayormente letras góticas para representar operadores diferenciales y letras cursivas para representar operadores en diferencia. Por ejemplo, usaremos $f(x)$ o $F(x)$ para representar funciones en la variable x, dependiendo si es a valores escalares o matriciales respectivamente. Similarmente usaremos $\mathfrak{d}$ o $\mathfrak{D}$ para representar operadores diferenciales, nuevamente dependiendo si se trata de un operador escalar o a valores matriciales respectivamente. Además, las expresiones como $\mathscr{M}$ denotarán operadores discretos matriciales. Siempre que sea posible usaremos letras caligráficas, tales como $\mathcal{A}$, para denotar varias álgebras operadoras, subálgebras, e ideales. Habrá algunas excepciones incluyendo ciertas álgebras especiales, tales como el álgebra de todos los operadores diferenciales, que tendrán su propia notación especial.

Por razones de compatibilidad con el producto interno matricial $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ que definiremos luego, los operadores diferenciales actuarán a derecha. Por ejemplo el operador diferencial básico $\partial = \partial_x$ actúa en la función $f(x)$ de la siguiente manera

$$f(x) \cdot \partial = f'(x).$$

Un operador diferencial matricial arbitrario $\mathfrak{D} = \sum_{j=0}^{n} \partial^j A_j(x)$ actúa en las funciones a valores matriciales $F(x)$ de la siguiente manera

$$F(x) \cdot \mathfrak{D} = \sum_{j=0}^{n} F^{(j)}(x) A_j(x).$$

Como estamos considerando la acción a derecha, el álgebra de los operadores diferenciales satisfacerá la siguiente relación de conmutación

$$x\partial - \partial x = \mathrm{Id}.$$

Notar que esto se invierte de la típica identidad del álgebra de Weyl, ya que los operadores diferenciales suelen tomarse actuando a izquierda. Así nuestra álgebra de operadores diferenciales será en realidad el álgebra opuesta del álgebra de Weyl usual.

Adoptaremos además las siguientes notaciones

- Para cada anillo R denotaremos $R[x]$ el anillo de polinomios, $R(x)$ el anillo de funciones racionales, $R[[x]]$ el anillo de series de potencias y $R((x))$ el anillo de series de Laurent, todos con coeficientes en R.
- Usaremos $\Omega[x]$, $\Omega(x)$, $\Omega[[x]]$ y $\Omega((x))$ para denotar los anillos de operadores diferenciales con coeficientes en $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{C}(x)$, $\mathbb{C}[[x]]$ y $\mathbb{C}((x))$ respectivamente.
- El símbolo † denotará la W-adjunta, como la definiremos después.
- Para cada anillo R, $M_N(R)$ denotará el anillo de matrices de tamaño $N \times N$ con coeficientes en R y E_{ij} denotará el elemento en este anillo con un 1 en la entrada ij y nula en todo el resto de sus entradas.
- Dado un elemento $F \in M_N(\mathbb{C})[x]$, $F = \sum_{j=0}^{n} A_j x^j$, la involución $*$ en $M_N(\mathbb{C})[x]$ será $F^* = \sum_{j=0}^{n} A_j^* x^j$, donde A_j^* indica la matriz transpuesta conjugada de A_j.
- Los símbolos x, t y n representarán indeterminadas, a menos que se especifique de otra manera.
- Para cada subconjunto A de $\mathbb{R}$, denotaremos por $1_A(x)$ a la función característica que toma el valor 1 si $x \in A$, y 0 en caso contrario.

2.2. Funciones peso y producto interno

Definición 2.1. Un *peso matricial* $W(x)$ de tamaño N con soporte en un intervalo real (a, b) es una función a valores matriciales $W : \mathbb{R} \to M_N(\mathbb{C})$ tal que $W(x)$ es Hermitiana para todo x, W se anula fuera de (a, b), es definida positiva para casi todo punto en (a, b), y $\int_{\mathbb{R}} W(x)x^n dx < \infty$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$ (i.e. W tiene momentos finitos de todos los órdenes). Pediremos también que las entradas de W sean funciones suaves sobre $\mathbb{R}$.

Llamaremos al intervalo (a, b) el *soporte de* W.

Dado un peso matricial W con soporte en el intervalo real (a, b) de tamaño N introduciremos la siguiente forma sesquilineal hermítica en el álgebra de polinomios matriciales $M_N(\mathbb{C})[x]$.

Para cada $P, Q \in M_N(\mathbb{C})[x]$ definimos:

$$\langle P, Q\rangle_W = \langle P, Q\rangle = \int_a^b P(x)W(x)Q^*(x)dx.$$

Proposición 2.2. *Dados $P, Q, R \in M_N(\mathbb{C})[x]$, $a, b, c \in \mathbb{C}$, $T \in M_N(\mathbb{C})$ tenemos que*

i) $\langle aP + bQ, R\rangle = a\langle P, R\rangle + b\langle Q, R\rangle$.

ii) $\langle TP, Q\rangle = T\langle P, Q\rangle$.

iii) $\langle P, Q\rangle^* = \langle Q, P\rangle$.

iv) $\langle P, P\rangle \geq 0$, *y si* $\langle P, P\rangle = 0 \implies P = 0$.

Demostración. i), ii) y iii) pueden probarse fácilmente de la definición usando la linealidad de la integral. Para probar iv) necesitaremos los siguientes resultados. Ver Proposición 2.5. □

Lema 2.3. *Sean X e Y espacios métricos completos y separables, y sea E un subconjunto cerrado σ-compacto de $X \times Y$. Luego si $\pi_1 : X \times Y \to X$ es la proyección natural $\pi_1(x, y) = x$, entonces $\pi_1(E)$ es conjunto de Borel en X y existe una función medible Borel $\varphi : \pi_1(E) \to Y$ cuyo gráfico está contenido en E.*

Demostración. Sea F un subconjunto cerrado de Y. Luego $E \cap X \times Y$ es un conjunto cerrado contenido en E y por lo tanto puede ser expresado como una unión numerable de conjuntos compactos. La proyección π_1 es una función continua, entonces tenemos que $\pi(E \cap X \times Y)$ es unión numerable de conjuntos compactos y por lo tanto es un conjunto de Borel. En particular esto vale si tomamos $F = Y$, de donde $\pi_1(E)$ es conjunto de Borel.

Fijemos un subconjunto numerable denso $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en Y. Para cada $x \in \pi_1(E)$, definimos (inductivamente en k) $\varphi_k(x)$ como el primer y_n que satisface las siguientes condiciones

1. E y $\{x\} \times \overline{\mathrm{B}(y_n, \frac{1}{2^k})}$ no son disjuntos.

2. $k = 1$ o la distancia entre y_n y $\varphi_{k-1}(x)$ es menor o igual a $\frac{1}{2^{k-2}}$.

Mediante un simple argumento de inducción puede mostrarse que las funciones $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ son funciones medible Borel. Así, su límite φ (límite uniforme) es medible Borel y su gráfico está contenido en E. $\square$

Corolario 2.4. *Sean $H(N)$ el espacio vectorial real de todas las matrices Hermitianas de tamaño $N \times N$, $U(N)$ el grupo de todas las matrices complejas unitarias de tamaño $N \times N$, y $\Delta(N)$ el espacio vectorial real de todas las matrices complejas diagonales de tamaño $N \times N$.*

Existe una función medible Borel $\psi : H(N) \to U(N)$ que asocia a cada matriz Hermitiana H, una matriz unitaria $\psi(H)$ tal que $\psi(H)^* H \psi(H)$ es una matriz diagonal con coeficientes reales.

Demostración. Sea $E = \{(H, U, \Delta) \in H(N) \times U(N) \times \Delta(N) : U^* H U = \Delta\}$. Claramente E es cerrado en $H(N) \times U(N) \times \Delta(N)$ y, como tenemos que $E = \cup_{k\geq 1} E_k$ donde $E_k = \{(H, U, \Delta) \in E : \|H\| = \|\Delta\| \leq k\}$, E resutará σ-compacto. Como toda matriz Hermtiana es unitariamente equivalente a una matriz diagonal real, $\pi_1(E) = H(N)$. Aplicando aquí el Lema 2.3 eligiendo $X = H(N)$ y $Y = U(N) \times \Delta(N)$ obtenemos una función medible Borel $\phi : H(N) \to U(N) \times \Delta(N)$ cuyo gráfico está contenido en E. La prueba queda terminada eligiendo $\psi = \pi_1 \circ \phi$, $\square$

Proposición 2.5. *Sea $P = \sum_{j=0}^{n} x^j P_j \in M_N(\mathbb{C})[x]$ polinomio matricial de grado n. Entonces*

$$Ker(\langle P, P\rangle) = \cap_{0\leq j\leq n} Ker(P_j^*).$$

En particular $\langle P, P\rangle$ es no singular si P_j es no singular para algún $0 \leq j \leq n$. Más aún, $\langle P, P\rangle = 0$ implica $P = 0$.

Demostración. Como $W(x)$ es simétrica definida positiva para casi todo punto, tiene una base ortonormal de autovectores para casi todo $x \in (a, b)$. Sea $\{e_i(x)\}_{i=0}^{N}$ una base ortonormal de $\mathbb{C}^N$ tal que $W(x)e_i(x) = \alpha_i(x)e_i(x)$ para $0 \leq i \leq N$. Podemos asumir que $e_i(x), \alpha_i(x)$ son medibles por el Corolario 2.4.

Si $e \in \mathbb{C}^N$, tenemos que $P^*(x)\cdot e \in \mathbb{C}^N$ entonces $P^*(x)\cdot e = \sum_{j=1}^{N} a_j(x)e_j(x)$. Denotamos $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{C}^N}$ al producto interno usual de $\mathbb{C}^N$. Luego tenemos que

$$\begin{aligned}\langle\langle P, P\rangle e, e\rangle_{\mathbb{C}^N} = \langle \int_a^b P(x)W(x)P^*(x)dx \cdot e, e\rangle_{\mathbb{C}^N} &= \int_a^b \langle P(x)W(x)P^*(x)e, e\rangle_{\mathbb{C}^N} dx \\ &= \int_a^b \langle W(x)P^*(x)e, P^*(x)e\rangle_{\mathbb{C}^N} dx.\end{aligned}$$

Ahora,

$$W(x)P^*(x)e = W(x)\sum_{i=1}^{N} a_i(x)e_i(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i(x)W(x)e_i(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i(x)\alpha_i(x)e_i(x).$$

Por lo tanto, si $e \in \mathrm{Ker}(\langle P,P\rangle)$ tenemos que

$$0 = \langle\langle P,P\rangle e,e\rangle_{\mathbb{C}^N} = \int_a^b \sum_{i=1}^N \alpha_i(x)a_i(x)\overline{a_i}(x)dx = \int_a^b \sum_{i=1}^N \alpha_i(x)|a_i(x)|^2 dx.$$

Como cada $\alpha_i(x) \geq 0$ a.e. obtenemos que $a_i(x) = 0$, para casi todo punto, con $0 \leq i \leq N$. Esto implica que $P^*(x)e = 0$ para todo x o equivalentemente tenemos que cada coeficiente $P_j^*(x)e = 0$, para $0 \leq j \leq N$. Por lo tanto resulta que $\mathrm{Ker}(\langle P,P\rangle) \subset \cap_{j=0}^n \mathrm{Ker}(P^*)$. La otra inclusión es trivial por lo que completamos la demostración de que $\mathrm{Ker}(\langle P,P\rangle) = \cap_{j=0}^n \mathrm{Ker}(P_j^*)$. □

Corolario 2.6. *Los momentos pares del peso W, $M_{2n} = \int_a^b x^{2n}W(x)dx$, son no singulares para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sea $P = x^n I$, como la matriz identidad I es no singular, entonces $\langle P,P\rangle$ es no singular por la prpposición anterior. Como $\langle P,P\rangle = \langle x^n I, x^n I\rangle = \int_a^b x^{2n}W(x)dx$, queda probado. □

2.3. Sucesión de polinomios ortogonales matriciales mónicos

Así como vimos que una función peso induce un producto interno $\langle\ ,\ \rangle_W$ sobre el álgebra de polinomios $M_N(\mathbb{C})[x]$, también veremos que a toda función peso se le asocia una sucesión de polinomios ortogonales. Más aún, existe una única sucesión de polinomios ortogonales mónicos asociada a W.

Proposición 2.7. *Sea $V_n = \{F \in M_N(\mathbb{C})[x] : gr(F) \leq n\}$ $\forall n \geq 0$, $V_{-1} = \{0\}$. Sea $V_{n-1}^\perp = \{H \in V_n : \langle H,F\rangle = 0\ \forall F \in V_{n-1}\}$. Entonces $V_{n-1}^\perp$ es un $M_N(\mathbb{C})$-módulo a izquierda y satisface*

i) $V_n = V_{n-1} \oplus V_{n-1}^\perp$, *para todo* $n \geq 0$,

ii) $dim_{\mathbb{C}}(V_{n-1}^\perp) = N^2$, *para todo* $n \geq 0$.

iii) *Hay un único polinomio mónico* $P_n \in V_{n-1}^\perp$ *y es de grado* n, *para cada* $n \geq 0$,

Demostración. Haremos inducción en $n \geq 0$.

Si $n = 0$ entonces $V_{-1}^\perp = V_0$, por lo que se cumple que $V_0 = \{0\} \oplus V_0 = V_{-1} \oplus V_{-1}^\perp$. Observemos que $V_{-1}^\perp = V_0 = M_N(\mathbb{C})$, y la identidad I es el único polinomio mónico en $V_{-1}^\perp$ y es de grado 0.

Si $n = 1$, tenemos que $V_1 = xM_N(\mathbb{C}) \oplus M_N(\mathbb{C})$ y $\dim_{\mathbb{C}}(V_1) = 2N^2$. Buscamos un polinomio $P_1 \in V_1$ mónico que sea ortogonal a $P_0 = I$. Asi queremos $P_1 = xI + A_0 \in V_1$, con A_0 una matriz constante, tal que

$$0 = \langle P_1, P_0\rangle = \langle xI + A_0, I\rangle = \langle xI, I\rangle + \langle A_0, I\rangle = \langle xI, P_0\rangle + A_0\langle P_0, P_0\rangle.$$

Por Proposición 2.2, tenemos que $\langle P_0, P_0\rangle$ es no singular, luego P_1 queda unívocamente determinado por estas condiciones tomando $A_0 = -\langle xI, P_0\rangle\langle I, I\rangle^{-1}$.

Para verificar que $P_1 \in V_0^\perp$, tomamos $T \in V_0$, una matriz constante y resulta que $\langle P_1, T\rangle = \langle P_1, I\rangle T^* = \langle P_1, P_0\rangle T^* = 0$.

Sea $P \in V_1$, luego $P = xB_1 + B_0$ con $B_1, B_0 \in M_N(\mathbb{C})$. Observemos que $P - B_1P_1 = B_0 - B_1A_0 \in V_0$ y $B_1P_1 \in V_0^\perp$. Luego $P = B_1P_1 + (P - B_1P_1) \in V_0^\perp + V_0$, y en consecuencia obtenemos que $V_1 = V_0^\perp + V_0$. Supongamos ahora que $P \in V_0^\perp \cap V_0$ entonces $\langle P,P\rangle = 0$ y por la Proposición 2.2, resulta $P = 0$. Por lo tanto

$$V_1 = V_0 \oplus V_0^\perp.$$

Por último $\dim_{\mathbb{C}}(V_0^{\perp}) = \dim_{\mathbb{C}}(V_1) - \dim_{\mathbb{C}}(V_0) = 2N^2 - N^2 = N^2$. Luego vale la afirmación para $n = 1$.

Sea $n > 1$ y supongamos que la proposición es verdadera para todo $0 \le m < n$. En particular esto nos dice que

$$V_m = V_{m-1}^{\perp} \oplus \cdots \oplus V_0^{\perp} \oplus V_0. \tag{2.1}$$

Buscamos un polinomio de la forma $P_n = x^n I + A_{n-1}P_{n-1} + \cdots + A_0 P_0$, donde P_m es el polinomio mónico de la proposición para todo $0 \le m < n$ y satisfaga $P_n \in V_{n-1}^{\perp}$, es decir que $\langle P_n, P_m \rangle = 0$, para todo $0 \le m < n$. Usando que $\langle P_i, P_j \rangle = 0$, para $0 \le i, j < n$, $i \ne j$, tenemos

$$\begin{aligned}\langle P_n, P_m \rangle &= \langle x^n I, P_m \rangle + \underbrace{\langle A_{n-1}P_{n-1}, P_m \rangle}_{=0} + \cdots + \langle A_m P_m, P_m \rangle + \cdots + \underbrace{\langle A_0 P_0, P_m \rangle}_{=0} \\ &= \langle x^n I, P_m \rangle + A_m \langle P_m, P_m \rangle\end{aligned}$$

El coeficiente director de P_m, $0 \le m \le n-1$, es la identidad, lo que nos asegura que $\langle P_m, P_m \rangle$ es no singular. Tomando

$$A_m = -\langle x^n I, P_m \rangle \langle P_m, P_m \rangle^{-1} \quad \text{para } 0 \le m \le n-1,$$

resulta que $\langle P_n, P_m \rangle = 0$, para $0 \le m \le n-1$ y P_n resulta el único polinomio mónico con esta propiedad. Es claro que P_n es ortogonal a cada polinomio de grado menor o igual a $n-1$ por (2.1), es decir $P_n \in V_{n-1}^{\perp}$.

Para ver que $V_n = V_{n-1} \oplus V_{n-1}^{\perp}$ tomamos $P \in V_n$, de la forma $P(x) = x^n B_n + \cdots + B_0$ entonces $P - B_n P_n \in V_{n-1}$ y $B_n P_n \in V_{n-1}^{\perp}$. Luego $V_n = V_{n-1} + V_{n-1}^{\perp}$. Si $Q \in V_{n-1} \cap V_{n-1}^{\perp}$ entonces $\langle Q, Q \rangle = 0$ y por lo tanto $Q = 0$.

La dimensión de $V_{n-1}^{\perp}$ se calcula fácilmente de $V_n = V_{n-1} \oplus V_{n-1}^{\perp}$. □

Definición 2.8. Dado $W = W(x)$ un peso matricial de tamaño N, decimos que una sucesión $\{Q_n\}_{n \ge 0}$ de polinomios en $M_N(\mathbb{C})[x]$ es una sucesión de polinomios ortogonales si

i) Q_n es de grado n.

ii) $\langle Q_n, x^i I \rangle = 0$ para todo $i < n$.

iii) $\langle Q_n, x^n I \rangle$ es invertible para todo $n \ge 0$.

Corolario 2.9. *Dado $W = W(x)$ un peso matricial de tamaño N, la sucesión $\{P_n\}_{n \ge 0}$ determinada por la Proposición 2.7 es la única sucesión de polinomios mónicos ortogonales en $M_N(\mathbb{C})[x]$.*

Más aún, toda sucesión $\{Q_n\}_{n \ge 0} \subset M_N(\mathbb{C})[x]$ ortogonal es de la forma $Q_n = A_n P_n$, con $A_n \in GL_N(\mathbb{C})$ para todo $n \ge 0$.

Demostración. Ante todo tenemos que verificar que la sucesión $\{P_n\}_{n \ge 0}$ es una sucesión de polinomios ortogonales. Sabíamos que P_n es mónico y ortogonal a todo polinomio de grado menor o igual que $n-1$. Para verificar que $\langle P_n, x^n I \rangle$ es una matriz no singular, basta observar que $\langle P_n, x^n I \rangle = \langle P_n, P_n \rangle$ y en consecuencia es no singular por la Proposición 2.5.

Si $\{Q_n\}_{n \ge 0}$ es una sucesión de polinomios ortogonales, entonces $Q_n \in V_{n-1}^{\perp}$ (por ii) de la definición). Sea $Q_n = A_n P_n + A_{n-1}P_{n-1} + \cdots + A_1 P_1 + A_0$ con A_j matrices constantes. Entonces,

$$0 = \langle Q_n, P_j \rangle = A_j \langle P_j, P_j \rangle, \quad \text{para } j = 0, \ldots, n-1,$$

y

$$\underbrace{\langle Q_n, x^n I \rangle}_{\text{no singular}} = \langle Q_n, P_n \rangle = A_n \underbrace{\langle P_n, P_n \rangle}_{\text{no singular}}.$$

Por lo tanto $Q_n = A_n P_n$ con $A_n \in \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$. □

Proposición 2.10. *La sucesión de polinomios ortogonales mónicos $\{P_n\}_{n\geq 0}$ satisface una relación de recurrencia de tres términos*

$$xP_n(x) = A_nP_{n-1}(x) + B_nP_n(x) + P_{n+1}, \qquad n \geq 0, \tag{2.2}$$

donde $P_{-1}(x) = 0$, y las matrices A_n y B_n quedan determinadas por

$$A_n = \langle P_n, P_n\rangle\langle P_{n-1}, P_{n-1}\rangle^{-1}, \quad y \quad B_n = \langle xP_n, P_n\rangle\langle P_n, P_n\rangle^{-1}.$$

Demostración. El polinomio xP_n es de grado $n+1$ y por Proposición 2.7 tenemos que $xP_n = \sum_{j=0}^{n+1} V_jP_j$, para ciertas matrices V_j. En primer lugar observemos que xP_n y P_{n+1} son polinomios mónicos y por lo tanto $V_{n+1} = I$. Además

$$\langle xP_n, P_j\rangle = \langle P_n, xP_j\rangle = 0 \quad \text{para todo } j = 0, \ldots, n-2.$$

En consecuencia el polinomio xP_n tiene la forma (2.2). Para deducir ahora las expresiones de A_n y B_n hacemos

$$\langle xP_n, P_n\rangle = B_n\langle P_n, P_n\rangle \quad \text{y} \quad \langle xP_n, P_{n-1}\rangle = A_n\langle P_{n-1}, P_{n-1}\rangle.$$

□

Esta relación de recurrencia de tres términos dará lugar a un operador en diferencia $\mathscr{L}$ que introduciremos formalmente más adelante.

2.4. El álgebra $\mathcal{D}(W)$

Dado un operador diferencial $\mathfrak{D} = \sum_{i=0}^{s} \partial^i F_i(x)$, $\partial = \frac{d}{dx}$, $F_i : (a,b) \to M_N(\mathbb{C})$, diremos que $\mathfrak{D}$ actúa en $P \in M_N(\mathbb{C})[x]$ de la siguiente forma:

$$P \cdot \mathfrak{D} = \sum_{i=0}^{s} \partial^i(P)(x)F_i(x).$$

La acción de estos operadores diferenciales es asociativa, es decir, si tomamos dos operadores $\mathfrak{D}_1$ y $\mathfrak{D}_2$ como arriba, entonces $(P\cdot\mathfrak{D}_1)\cdot\mathfrak{D}_2 = P\cdot(\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2)$. Por lo que tenemos un módulo a derecha.

Proposición 2.11. *Sea $W = W(x)$ un peso matricial de tamaño N y sea $\{P_n\}_{n\geq 0}$ la sucesión ortogonal de polinomios mónicos asociada a W. Sea $\mathfrak{D} = \sum_{i=0}^{s} \partial^i F_i(x)$, $\partial^i = \frac{d^i}{dx^i}$, un operador diferencial ordinario lineal a derecha de orden s tal que tiene a la sucesión de polinomios mónicos ortogonales como autofunciones, es decir,*

$$P_n \cdot \mathfrak{D} = \Lambda_n P_n \forall n \geq 0 \quad con \quad \Lambda_n \in M_N(\mathbb{C}).$$

Entonces cada coeficiente F_i es un polinomio $F_i = F_i(x) \in M_N(\mathbb{C})[x]$ y $gr(F_i) \leq i$. Más aún, $\mathfrak{D}$ está determinado por la sucesión $\{\Lambda_n\}_{n\geq 0}$.

Demostración. Probemos por inducción en n. Para $n = 0$, tenemos que $P_0 = I$ entonces $P_0\cdot\mathfrak{D} = F_0$ y $P_0\cdot\mathfrak{D} = \Lambda_0 P_0 = P_0$, por lo que se deduce que $F_0 = \Lambda_0$ es un polinomio de grado ≤ 0. (Si $F_0 = 0$, $\mathrm{gr}(F_0) = -1$).

Ahora sea j con $1 \leq j \leq s$ y supongamos por hipótesis inductiva que cada F_i, con $0 \leq i \leq j-1$ es un polinomio de grado $\leq i$. Entonces usando que P_j es mónico

$$\Lambda_j P_j = P_j \cdot \mathfrak{D} = \sum_{i=0}^{s} \partial^i(P_j)F_j = \sum_{i=0}^{j} \partial^i(P_j)F_i = j!F_j + \sum_{i=0}^{j-1} \partial^i(P_j)F_i.$$

Luego

$$F_j = \frac{1}{j!}(\Lambda_j P_j - \sum_{i=0}^{j-1} \partial^i(P_j)F_i) \in M_N(\mathbb{C})[x] \quad \text{y} \quad \operatorname{gr}(F_j) \leq j.$$

De esta igualdad resulta también que la sucesión de autovalores $\{\Lambda_n\}_{n\geq 0}$ determina los coeficientes del operador diferencial $\mathfrak{D}$. □

Para facilitar la notación, definimos para cada $v \in \mathbb{C}$

$$[v]_i = v(v-1)(v-2)\cdots(v-i+1),\ i \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad [v]_0 = 1.$$

Proposición 2.12. *Sea $\mathfrak{D} = \sum_{i=0}^{s} \partial^i F_i$, con $F_i(x) = \sum_{j=0}^{i} x^j F_j^i(\mathfrak{D})$, $F_j^i(\mathfrak{D}) \in M_N(\mathbb{C})$ y tal que tiene a la sucesión de polinomios ortogonales mónicos $\{P_n\}_{n\geq 0}$ como autofunciones. Entonces*

$$\Lambda_n = \sum_{i=0}^{s} [n]_i F_i^i(\mathfrak{D}) \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

En particular $n \mapsto \Lambda_n$ es una función polinomial a valores matriciales de grado menor o igual al orden de $\mathfrak{D}$.

Demostración. Tenemos que

$$\Lambda_n P_n(x) = P_n(x) \cdot \mathfrak{D} = \sum_{i=o}^{s} \partial^i(P_n)(x)F_i(x).$$

Comparando las igualdades término a término, tenemos que el coeficiente que acompaña a x^n en el miembro izquierdo es Λ_n, mientras que en el miembro derecho es $\sum_{i=0}^{s}[n]_i F_i^i(\mathfrak{D})$. Luego $\Lambda_n = \sum_{i=0}^{s}[n]_i F_i^i(\mathfrak{D})$. □

Definición 2.13. Dado W un peso matricial de tamaño N, sea $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión de polinomios ortogonales asociada al peso, definimos el álgebra $\mathcal{D}(W)$ como el álgebra de todos los operadores diferenciales con coeficientes a valores matriciales que actúan a derecha y tienen a Q_n como autofunción, para todo $n \geq 0$.

Notemos que si $Q_n \cdot \mathfrak{D} = \Gamma_n Q_n$ con $\Gamma_n \in M_N(\mathbb{C})$ (es decir, Γ_n autovalor de Q_n), entonces Γ_n está unívocamete determinado por $\mathfrak{D}$. En este caso escribimos $\Gamma_n(\mathfrak{D}) = \Gamma_n$. Así,

$$\mathcal{D}(W) = \{\mathfrak{D} \in M_N(\Omega[x]) : Q_n \cdot \mathfrak{D} = \Gamma_n(\mathfrak{D})Q_n,\ \Gamma_n(\mathfrak{D}) \in M_N(\mathbb{C})\ \forall n \geq 0\}.$$

Lo primero a observar es que $\mathcal{D}(W)$ depende intrínsecamente de W y no de la sucesión de polinomios ortogonales $\{Q_n\}_{n\geq 0}$.

Proposición 2.14. *Con la notación anterior, sea $\Gamma(\mathfrak{D}, n) = \Gamma_n(\mathfrak{D})$. Entonces para cada $n \geq 0$, la función $\mathfrak{D} \mapsto \Gamma(\mathfrak{D}, n)$ es una representación del álgebra $\mathcal{D}(W)$ en $M_N(\mathbb{C})$.*

Más aún, la sucesión de representaciones $\{\Gamma_n\}_{n\geq 0}$ separa elementos de $\mathcal{D}(W)$, es decir, si $\mathfrak{D}_1 \neq \mathfrak{D}_2 \implies$ existe $n \geq 0 : \Gamma_n(\mathfrak{D}_1) \neq \Gamma_n(\mathfrak{D}_2)$.

Demostración. Veamos que $\mathfrak{D} \mapsto \Gamma(\mathfrak{D}, n)$ de $\mathcal{D}(W)$ a $M_N(\mathbb{C})$ es lineal. Sean $z \in \mathbb{C}$, $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2 \in \mathcal{D}(W)$. Entonces

$$\begin{aligned} Q_n \cdot (z\mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2) &= zQ_n \cdot \mathfrak{D}_1 + Q_n \cdot \mathfrak{D}_2 = z\Gamma(\mathfrak{D}_1, n)Q_n + \Gamma(\mathfrak{D}_2, n) \\ &= (z\Gamma(\mathfrak{D}_1, n) + \Gamma(\mathfrak{D}_2, n))Q_n. \end{aligned}$$

Entonces

$$\Gamma(z\mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2, n) = z\Gamma(\mathfrak{D}_1, n) + \Gamma(\mathfrak{D}_2, n).$$

Además, para cada $n \geq 0$ el mapeo $\mathfrak{D} \mapsto \Gamma(\mathfrak{D}, n)$ no es idénticamente nulo pues $I \in \mathcal{D}(W)$ y $I \mapsto \Gamma(I, n) = I \neq 0$. Si $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2 \in \mathcal{D}(W)$, entonces

$$\begin{aligned} Q_n \cdot (\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2) &= (Q_n \cdot \mathfrak{D}_1) \cdot \mathfrak{D}_2 = (\Gamma(\mathfrak{D}_1, n)Q_n) \cdot \mathfrak{D}_2 = \Gamma(\mathfrak{D}_1, n)(Q_n \cdot \mathfrak{D}_2) \\ &= \Gamma(\mathfrak{D}_1, n)\Gamma(\mathfrak{D}_2, n)Q_n. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\Gamma(\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2, n) = \Gamma(\mathfrak{D}_1, n)\Gamma(\mathfrak{D}_2, n)$.

Finalmente escribiendo $Q_n = A_nP_n$, tenemos que si $P_n \cdot \mathfrak{D} = \Lambda_nP_n$ para todo $n \geq 0$, entonces

$$Q_n \cdot \mathfrak{D} = A_nP_n \cdot \mathfrak{D} = A_n\Lambda_nP_n = A_n\Lambda_nA_n^{-1}A_nP_n = A_n\Lambda_nA_n^{-1}Q_n.$$

De aquí deducimos que $\Gamma(\mathfrak{D}, n) = A_n\Lambda_nA_n^{-1}$. Luego por la Proposición 2.11 obtenemos que $\{\Gamma_n\}_{n\geq 0}$ separa elementos de $\mathcal{D}(W)$. □

Vale la pena observar que cada álgebra $\mathcal{D}(W)$ es una subálgebra del álgebra de Weyl $\mathbf{D}$ sobre $M_N(\mathbb{C})$ de todos los operadores diferenciales ordinarios lineales con coeficientes en $M_N(\mathbb{C})[x]$.

$$\mathbf{D} = \{\mathfrak{D} = \sum_i \partial^i F_i : F_i \in M_N(\mathbb{C})[x]\}.$$

Introduciremos también la subálgebra $\mathcal{D}$ de $\mathbf{D}$ definida por

$$\mathcal{D} = \{\mathfrak{D} = \sum_i \partial^i F_i \in \mathbf{D} : \mathrm{gr}(F_i) \leq i\}.$$

De la Proposición 2.11 se sigue que $\mathcal{D}(W) \subset \mathcal{D}$ para cada peso matricial W. Esta álgebra $\mathcal{D}$ viene con una familia $\{\Lambda_\nu\}_{\nu\in\mathbb{C}}$ de representaciones $N-$dimensionales definidas por

$$\Lambda_\nu(\mathfrak{D}) = \sum_{i=0}^{s} [\nu]_i F_i^i,$$

como nos muestra la siguiente proposición.

Proposición 2.15. *Si $\mathfrak{D} = \sum_{i=0}^s \partial^i F_i \in \mathcal{D}$ con $F_i = \sum_{j=0}^i x^j F_j^i$, entonces*

$$\Lambda_\nu(\mathfrak{D}) = \sum_{i=0}^{s} [\nu]_i F_i^i$$

define una representación Λ_ν de $\mathcal{D}$ en $M_N(\mathbb{C})$, para cada $\nu \in \mathbb{C}$.

Demostración. Veamos que Λ_ν es lineal. Sean $z \in \mathbb{C}$, $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2 \in \mathcal{D}$, entonces

$$\Lambda_\nu(z\mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2) = \sum_{i=0}^{s} [\nu]_i (zF(\mathfrak{D}_1)_i^i + F(\mathfrak{D}_2)_i^i) = z\Lambda_\nu(\mathfrak{D}_1) + \Lambda_\nu(\mathfrak{D}_2).$$

Para probar que Λ_ν es una representación es suficiente probar que

$$\Lambda_\nu((\partial^s F_s)(\partial^r G_r)) = \Lambda_\nu(\partial^s F_s)\Lambda_\nu(\partial^r G_r)$$

para todo $r, s \geq 0$, con $F_s, G_r \in M_N(\mathbb{C})[x]$.

Notemos que la Regla de Leibniz nos dice que $\partial^r(f \cdot g) = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} \partial^k(f)\partial^{r-k}(g)$, para $f, g \in C^\infty$. Luego si $P \in M_N(\mathbb{C})[x]$ tenemos que

$$P \cdot (\partial^s F_s)(\partial^r G_r) = (\partial^s(P)F_s) \cdot (\partial^r G_r) = \partial^r(\partial^s(P)F_s)G_r$$

$$= \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} \partial^{s+k}(P)\partial^{r-k}(F_s)\, G_r.$$

Entonces

$$(\partial^s F_s)(\partial^r G_r) = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \partial^{s+i} \cdot \partial^{r-i}(F_s) G_r = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \partial^{s+i} \cdot \underbrace{(F_s^{(r-i)} G_r)}_{\text{gr} \leq s+r}.$$

Por lo tanto

$$\Lambda_\nu((\partial^s F_s)(\partial^r G_r)) = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} [\nu]_{s+i} (F_s^{(r-i)} G_r)_{s+i} = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} [\nu]_{s+i} [s]_{r-i} F_s^s G_r^r.$$

Luego para finalizar, sólo queda por ver que $\displaystyle\sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} [\nu]_{s+i}[s]_r = [\nu]_s[\nu]_r$. Esto puede verse derivando r veces la siguiente identidad

$$(x^\nu)^{(s)}\, x^s = [\nu]_s x^\nu, \quad \forall x \geq 0.$$

En el lado izquierdo tenemos,

$$((x^\nu)^{(s)} x^s)^{(r)} = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (x^\nu)^{(s+i)} (x^s)^{(r-i)} = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} [\nu]_{s+i} x^{\nu-s-i} [s]_{r-i} x^{s-r+i}$$
$$= \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} [\nu]_{s+i} [s]_{r-i} x^{\nu-r}.$$

Por el lado derecho tenemos,

$$([\nu]_s x^\nu)^{(r)} = [\nu]_s [\nu]_r x^{\nu-r}.$$

Por lo tanto

$$\sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} [\nu]_{s+i} [s]_{r-i} = [\nu]_s [\nu]_r.$$

Esto completa la demostración de $\Lambda_\nu(\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2) = \Lambda_\nu(\mathfrak{D}_1)\Lambda_\nu(\mathfrak{D}_2)$. □

Definición 2.16. Decimos que un operador D es simétrico si $\langle P \cdot \mathfrak{D}, Q\rangle = \langle P, Q \cdot \mathfrak{D}\rangle$ para todo $P, Q \in M_N(\mathbb{C})[x]$.

Proposición 2.17. *Si un operador $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}$ es simétrico entonces $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}(W)$.*

Demostración. Recordemos que $V_n = \{P \in M_N(\mathbb{C})[x] : \text{gr}(P) \leq n\}$ y sea $P \in V_n$. Como $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}$, entonces veamos que $P \cdot \mathfrak{D} \in V_n$.

Si $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}$ entonces es de la forma $\mathfrak{D} = \sum_{i=0}^{s} \partial^i F_i$, con $\text{gr}(F_i) \leq i$ y tenemos que $P \cdot \mathfrak{D} = \sum_{i=0}^{s} \partial^i(P) F_i$, con $\text{gr}(\partial^i(P)F_i) \leq n - i + i = n$. Por lo tanto $P \cdot \mathfrak{D} \in V_n$.

Ahora veamos $V_{n-1}^\perp \cdot \mathfrak{D} \subset V_{n-1}^\perp$: Sea $P \in V_{n-1}^\perp$ y sea $Q \in V_{n-1}$. Por la simetría de $\mathfrak{D}$ y el hecho que $Q \cdot \mathfrak{D}$ es un polinomio de grado $\leq n-1$, resulta

$$\langle P \cdot \mathfrak{D}, Q\rangle = \langle P, Q \cdot \mathfrak{D}\rangle = 0.$$

Entonces $P \cdot \mathfrak{D} \in V_{n-1}^\perp$.

Sea $\{P_n\}_{n\geq 0}$ la sucesión ortogonal de polinomios mónicos, asociada a W. Por la Proposición 2.7 tenemos $V_n = V_{n-1} \oplus V_{n-1}^\perp$. Así tenemos que $P_n \cdot \mathfrak{D} \in V_{n-1}^\perp$ y por lo tanto $P_n \cdot \mathfrak{D} = A_n P_n$, para alguna matriz Λ_n. En consecuencia $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}(W)$, como queríamos probar. □

Observación 2.18. Si $\mathfrak{D} \in \mathbf{D} \setminus \mathcal{D}$ y es simétrica, no necesariamente $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}(W)$, pues $\mathfrak{D} = xI \in \mathbf{D} \setminus \mathcal{D}$, y como $x \in \mathbb{R}$, $\langle P \cdot xI, Q\rangle = x\langle P, Q\rangle = \langle P, Q\rangle x = \langle P, Q \cdot xI\rangle$ es simétrico. Pero ningún polinomio no nulo puede ser autofunción de este operador pues si $P \cdot xI = AP$ con $A \in M_N(\mathbb{C}) \implies \text{gr}(P \cdot xI) = \text{gr}(P) + 1 = \text{gr}(AP) \leq \text{gr}(P)$, lo cual es un absurdo.

2.5. Las ad-conditions

Tenemos de la Proposición 2.14 que para cada operador diferencial $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}(W)$ hay una sucesión de representaciones $\{\Lambda_n\}_{n\geq 0}$ del álgebra $\mathcal{D}(W)$ en el álgebra $M_N(\mathbb{C})$ de las matrices complejas de tamaño $N \times N$.

En otras palabras, tenemos un homomorfismo $\Lambda : \mathcal{D}(W) \to M_N(\mathbb{C})^{\mathbb{N}_0}$. Más aún Λ es inyectiva. En el Teorema 2.19 daremos una descripción precisa del rango de este homomorfismo. Empezaremos con un par de comentarios básicos que no involucran el álgebra $\mathcal{D}(W)$.

Recordemos que nuestro punto de partida es un peso matricial $W(x)$ sobre los reales, su sucesión de polinomios ortogonales mónicos $\{P_n\}_{n\geq 0}$ que es única, junto con la relación de recurrencia de tres términos (2.2)

$$xP_n(x) = A_nP_{n-1}(x) + B_nP_n(x) + P_{n+1}(x), \quad n \geq 0,$$

donde $P_{-1} = 0$.

Vamos a introducir la siguiente matriz tridiagonal por bloques $\mathscr{L}$,

$$\mathscr{L} = \begin{pmatrix} B_o & I & & & \\ A_1 & B_1 & I & & \\ & A_2 & B_2 & I & \\ & & A_3 & B_3 & I \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

donde $A_i, B_i \in M_N(\mathbb{C})$, I es la matriz identidad de tamaño $N \times N$. La relación de recurrencia toma la forma:

$$\mathscr{L} \cdot P = xP, \tag{2.3}$$

donde P representa el vector

$$P(x) = \begin{pmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ P_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

La primer consecuencia de (2.3) es obtenida al aplicar el operador diferencial ∂^i a ambos lados, y usando que $\mathscr{L}$ es independiente de x

$$\begin{aligned} \partial^i(\mathscr{L} \cdot P(x)) &= \partial^i(xP(x)) \\ \mathscr{L} \cdot (\partial^i(P(x))) &= i\partial^{i-1}(P(x)) + x\,\partial^i(P(x)) \end{aligned}$$

Entonces $(\mathscr{L} - xI)(\partial^i(P(x)) = i\partial^{i-1}(P(x))$.

Sea $Q(x)$ un vector de la forma $\begin{pmatrix} Q_0(x) \\ Q_1(x) \\ Q_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix}$, con $Q_0(x)$ dado y arbitrario, y supongamos que satisface la ecuación en diferencia

$$\mathscr{L} \cdot Q = x\,Q \tag{2.4}$$

Veremos a continuación que para $n \geq 1$, $Q_n(x)$ queda completamente determinado por $\mathscr{L}$ y $Q_0(x)$. En particular probaremos por inducción que

$$Q_n(x) = M_n(x)Q_0(x),$$

donde $M_n(x)$ es una matriz $N \times N$, que es un polinomio de grado n tal que sus coeficientes dependen de las matrices A_i, B_i que forman a $\mathscr{L}$.

Si n = 1, de la igualdad (2.4) obtenemos que $B_0Q_0(x) + Q_1(x) = x\,Q_0(x)$ entonces $Q_1(x) = (xI - B_0)Q_0(x)$, tomando $M_1(x) = xI - B_0$ resulta que $\mathrm{gr}(M_1(x)) = 1$ y depende sólo de B_0.

Supongamos vale para $1 \leq m \leq k$. De la identidad (2.4) resulta

$$\begin{aligned} Q_{k+1}(x) &= (xI - B_k)Q_k(x) - A_kQ_{k-1}(x) \\ &= (xI - B_k)M_k(x)Q_0(x) - A_kM_{k-1}(x)Q_0(x) \\ &= \Big((xI - B_k)M_k(x) - A_kM_{k-1}(x)\Big)Q_0(x) \end{aligned}$$

Definiendo $M_{k+1}(x) = (xI - B_k)M_k(x) - A_kM_{k-1}(x)$, es fácil ver que $\mathrm{gr}(M_{k+1}) = k + 1$, M_{k+1} sólo depende de los A_i, B_i y cumple que $Q_{k+1} = M_{k+1}Q_0$.

En particular si tomamos la sucesión de polinomios ortogonales mónicos tenemos que

$$P_n(x) = M_n(x)P_0(x) = M_n(x) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

De este modo obtenemos que las soluciones de la ecuación

$$\mathscr{L} \cdot Q = x\,Q$$

son de la forma

$$Q_n(x) = P_n(x)Q_0(x),$$

donde $Q_0(x)$ es dado.

Luego de estas observaciones, volvemos al álgebra $\mathcal{D}(W)$. Si $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}(W)$, entonces

$$P_n \cdot \mathfrak{D} = \Lambda_n P_n \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Denotamos por Λ la matriz diagonal de bloques

$$\begin{pmatrix} \Lambda_0 & & & \\ & \Lambda_1 & & \\ & & \Lambda_2 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Si $\mathcal{A}$ un álgebra, dados dos elementos $X, Y \in \mathcal{A}$, el corchete de Lie en $\mathcal{A}$ está dado por $[X, Y] = XY - YX \in \mathcal{A}$.

Para cada entero $m \geq 0$, definimos

$$\begin{aligned} (\mathrm{ad}\ \mathscr{L})^m(\Lambda) \cdot P &:= \underbrace{[\mathscr{L}, [\mathscr{L}, \cdots [\mathscr{L}, \Lambda] \cdots]]}_{m \text{ veces}} \cdot P \\ &= \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} \mathscr{L}^j \Lambda \mathscr{L}^{m-j} \cdot P = \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} \mathscr{L}^j \Lambda x^{m-j} \cdot P \\ &= \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} \mathscr{L}^j x^{m-j} \Lambda \cdot P \\ &= (\mathscr{L} - xI)^m \Lambda \cdot P. \end{aligned}$$

Teorema 2.19. *Sean $W(x)$ un peso matricial sobre $\mathbb{R}$, $\{P_n\}_{n\geq 0}$ su sucesión de polinomios ortogonales mónicos y $\mathscr{L}$ la matriz tridiagonal a bloques que nos da $\mathscr{L} \cdot P = xP$.*

Si $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}(W)$ y Λ es la matriz diagonal a bloques, donde $\Lambda_n = \Lambda_n(\mathfrak{D})$ para todo $n \geq 0$, entonces $(ad\ \mathscr{L})^{m+1}(\Lambda) = 0$ para algún m.

Recíprocamente, si Λ es una matriz diagonal a bloques que satisface esta condición para algún $m \geq 0$, entonces hay un único operador diferencial $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}(W)$ tal que $\Lambda_n = \Lambda_n(\mathfrak{D})$ para todo $n \geq 0$. Más aún, el orden de $\mathfrak{D}$ es el menor m que satisface $(ad\mathscr{L})^{m+1}(\Lambda) = 0$.

Comentario 2.20. En la demostración construiremos a $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}(W)$ explícitamente.

Demostración. Veamos que la condición $(\mathrm{ad}\mathscr{L})^{m+1}(\Lambda) = 0$ es suficiente.

Supongamos $(\mathrm{ad}\mathscr{L})^{m+1}(\Lambda) = 0$ para algún $m \geq 0$. Por lo visto anteriormente

$$(\mathrm{ad}\ \mathscr{L})^{m+1}(\Lambda) \cdot P = (\mathscr{L} - xI)^{m+1}\Lambda \cdot P = 0.$$

Definamos el vector $Q^{(m)} := (\mathscr{L} - xI)^m \Lambda \cdot P$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} \cdot Q^{(m)} &= \mathscr{L} \cdot Q^{(m)} - xQ^{(m)} + xQ^{(m)} \\
&= (\mathscr{L} - xI) \cdot Q^{(m)} + xQ^{(m)} \\
&= (\mathscr{L} - xI) \cdot ((\mathscr{L} - xI)^m \Lambda \cdot P) + xQ^{(m)} \\
&= \underbrace{(\mathscr{L} - xI)^{m+1}\Lambda \cdot P}_{=0} + xQ^{(m)} \\
&= x\, Q^{(m)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $Q^{(m)}$ satisface la ecuación, y por una observación anterior sabemos que las soluciones de esa ecuación son de la forma

$$Q_n^{(m)}(x) = P_n(x) S_0(x) \quad \text{para todo } n \geq 0$$

para algún $S_0 = S_0(x)$, donde S_0 está dado por la primer componente del vector $Q^{(m)}$.

$$S_0 = \Big((\mathscr{L} - xI)^m \Lambda \cdot P\Big)_0 = Q_0^{(m)}.$$

Definimos el vector $Q^{(m-1)} := (\mathscr{L} - xI)^{m-1}\Lambda \cdot P - \partial(P) S_0$. Veamos que $(\mathscr{L} - xI) \cdot Q^{(m-1)} = 0$,

$$\begin{aligned}
(\mathscr{L} - xI) \cdot Q^{(m-1)} &= (\mathscr{L} - xI) \cdot \Big((\mathscr{L} - xI)^{m-1}\Lambda \cdot P - \partial(P) S_0\Big) \\
&= (\mathscr{L} - xI)^m \Lambda \cdot P - (\mathscr{L} - xI)\partial(P) S_0 \\
&= \underbrace{(\mathscr{L} - xI)^m \Lambda \cdot P}_{Q^{(m)}} - \underbrace{P S_0}_{Q^{(m)}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Notar que hemos usamos un resultado que vimos antes, si $(\mathscr{L} - xI) \cdot \partial^i(P) = i\partial^{i-1}(P)$, entonces $(\mathscr{L} - xI) \cdot \partial(P) = P$. Por lo tanto $Q^{(m-1)}$ satisface la ecuación

$$\mathscr{L} \cdot Q^{(m-1)} = x\, Q^{(m-1)}$$

y en consecuencia $Q_n^{(m-1)}(x) = P_n(x) S_1(x)$ para todo $n \geq 0$ y para algún $S_1(x) = S_1$.

La expresión explícita de S_1 sale de mirar la primera componente del vector $Q^{(m-1)}$, i.e.

$$\begin{aligned}
S_1 = Q_0^{(m-1)} &= \big((\mathscr{L} - xI)^{(m-1)}\Lambda \cdot P - \partial(P) S_0\big)_0 \\
&= \big((\mathscr{L} - xI)^{(m-1)}\Lambda \cdot P\big)_0 - \big(\partial(P) S_0\big)_0.
\end{aligned}$$

Como $\partial(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ \partial(P_1) \\ \partial(P_2) \\ \vdots \end{pmatrix}$, entonces $(\partial(P)S_0)_0 = 0$ y por lo tanto

$$S_1 = ((\mathscr{L} - xI)^{m-1}\Lambda \cdot P)_0.$$

Veamos un caso más antes de hacer inducción. Definimos

$$Q^{(m-2)} := (\mathscr{L} - xI)^{m-2}\Lambda \cdot P - \partial^2(P)\frac{S_0}{2} - \partial(P)S_1.$$

Entonces

$$\begin{aligned}(\mathscr{L} - xI)Q^{(m-2)} &= (\mathscr{L} - xI)^{m-1}\Lambda \cdot P - (\mathscr{L} - xI)\partial^2(P)\frac{S_0}{2} - (\mathscr{L} - xI)\cdot\partial(P)S_1\\ &= (\mathscr{L} - xI)^{m-1}\Lambda \cdot P - 2\partial(P)\frac{S_0}{2} - PS_1\\ &= (\mathscr{L} - xI)^{m-1}\Lambda \cdot P - \partial(P)S_0 - PS_1\\ &= Q^{(m-1)} - Q^{(m-1)} = 0.\end{aligned}$$

Luego $Q^{(m-2)}$ es solución de la ecuación (2.4) y por lo tanto

$$Q_n^{(m-2)}(x) = P_n(x)S_2(x) \qquad \text{para todo } n \geq 0,$$

donde $S_2 = S_2(x)$ es $S_2 = \big((\mathscr{L} - xI)^{m-2}\Lambda \cdot P\big)_0$. Notar que hemos estado usando que $P_0(x)$ no depende de x.

Asumimos por hipótesis inductiva que tenemos definido para $0 \leq i \leq k$ vectores

$$Q^{(m-i)} := (\mathscr{L} - xI)^{(m-1)}\Lambda \cdot P - \sum_{r=1}^{i}\partial^r(P)S_{i-r}\frac{1}{r!}$$

y matrices $S_0 = S_0(x)$, $S_1 = S_1(x), \ldots, S_{k-1} = S_{k-1}(x)$ tales que $Q^{(m-i)}(x) = P(x)S_i(x)$, con $S_i(x) = \Big((\mathscr{L} - xI)^{(m-i)}\Lambda \cdot P\Big)_0$.

Definimos ahora

$$Q^{(m-k)} := (\mathscr{L} - xI)^{m-k}\Lambda \cdot P - \partial^k(P)\frac{S_0}{k!} - \partial^{k-1}(P)\frac{S_1}{(k-1)!} - \cdots - \partial(P)\frac{S_{k-1}}{1!},$$

aplicamos $(\mathscr{L} - xI)$ a ambos lados, y usamos que $(\mathscr{L} - xI)\cdot\partial^i(P) = i\partial^{i-1}(P)$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned}(\mathscr{L} - xI)\cdot Q^{(m-k)} = (\mathscr{L} - xI)^{(m-k+1)}\Lambda \cdot P - k\partial^{k-1}(P)\frac{S_0}{k!}\\ - (k-1)\partial^{k-2}(P)\frac{S_1}{(k-1)!} - \cdots - PS_{k-1}.\end{aligned}$$

Aplicando la hipótesis inductiva, obtenemos

$$\begin{aligned}(\mathscr{L} - xI)\cdot Q^{(m-k)} &= (\mathscr{L} - xI)^{(m-k+1)}\Lambda \cdot P - \sum_{r=1}^{k-1}\partial^r(P)S_{k-1-r}\frac{1}{r!} - PS_{k-1}\\ &= Q^{(m-k+1)} - Q^{(m-k+1)}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Así $\mathscr{L}\cdot Q^{(m-k)}(x) = x\,Q^{(m-k)}(x)$, es solución de la ecuación y $Q^{(m-k)} = PS_k$, para una matriz $S_k = S_k(x)$ dada por $S_k = \Big((\mathscr{L} - xI)^{m-k}\Lambda \cdot P\Big)_0$. Continuamos este proceso mientras $k \leq m$.

Para $k = m$, tenemos $Q^{(0)} = \Lambda P - \sum_{r=1}^{m}\partial^r(P)S_{m-r}\frac{1}{r!}$. Nuevamente obtenemos

$$(\mathscr{L} - xI)\cdot Q^{(0)} = (\mathscr{L} - xI)\Lambda \cdot P - (\mathscr{L} - xI)\cdot\Big(\sum_{r=1}^{m}\partial^r(P)S_{m-r}\frac{1}{r!}\Big)$$

$$
\begin{aligned}
&= Q^{(1)} - PS_{m-1} = Q^{(1)} - Q^{(1)} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Entonces $\mathscr{L} \cdot Q^{(0)}(x) = x\, Q^{(0)}$, es solución de la ecuación y $Q_n^{(0)} = P_n S_m$ para todo $n \geq 0$, donde $S_m = S_m(x) = (\Lambda P)_0 = \Lambda_0$.

Podemos escribir $Q^{(0)} = PS_m = P\Lambda_0$ y obtenemos

$$Q^{(0)} = \Lambda P - \sum_{r=1}^{m} \partial^r(P) \frac{1}{r!} S_{m-r} = P\Lambda_0.$$

En consecuencia

$$\Lambda P = \sum_{r=1}^{m} \partial^r(P) \frac{1}{r!} S_{m-r} + P\Lambda_0.$$

Esto puede reescribirse como

$$\Lambda P = \sum_{r=0}^{m} \partial^r(P) \frac{1}{r!} S_{m-r}.$$

Lo que nos define el operador diferencial

$$\mathfrak{D} = \sum_{r=0}^{m} \partial^r \frac{S_{m-r}}{r!}.$$

Veamos el grado de S_{m-r}, para todo $0 \leq r \leq m$ usando que $S_r = ((\mathscr{L} - xI)^{m-r}\Lambda \cdot P)_0$.

Si $r = 0$, $\Lambda P = \begin{pmatrix} \Lambda_0 \\ \Lambda_1 P_1 \\ \Lambda_2 P_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$ entonces $\mathrm{gr}(S_m) = \mathrm{gr}(\Lambda_0) \leq 0$ y $\mathrm{gr}\left(((\mathscr{L} - xI)^0 \Lambda \cdot P)_1\right) = \mathrm{gr}(\Lambda_1 P_1) \leq 0 + 1 = 1$. Si $r = 1$ tenemos

$$(\mathscr{L} - xI)\Lambda \cdot P = L(\Lambda P) - x\Lambda P = \begin{pmatrix} B_0\Lambda_0 + \Lambda_1 P_1 - x\Lambda_0 \\ A_1\Lambda_0 + B_1\Lambda_1 P_1 + \Lambda_2 P_2 - x\Lambda_1 P_1 \\ \vdots \end{pmatrix},$$

entonces $\mathrm{gr}(S_{m-1}) = \mathrm{gr}(B_0\Lambda_0 + \Lambda_1 P_1 - x\Lambda_0) \leq 1$ y $\mathrm{gr}(((\mathscr{L} - xI)^1 \Lambda \cdot P)_1) \leq 1 + 1 = 2$.

Supongamos que para todo $0 \leq r < k$ se cumple que

$$\mathrm{gr}(((\mathscr{L} - xI)^{m-r}\Lambda \cdot P)_1) \leq m - r + 1 \quad \text{ y } \quad \mathrm{gr}(S_{m-r}) \leq r.$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
S_k &= ((\mathscr{L} - xI)^{m-k}\Lambda \cdot P)_0 \\
&= (\mathscr{L} \cdot ((\mathscr{L} - xI)^{m-k+1}\Lambda \cdot P))_0 - (x(\mathscr{L} - xI)^{m-k+1}\Lambda \cdot P)_0 \\
&= \underbrace{S_{m-k+1}}_{\mathrm{gr} \leq m-k+1} + \underbrace{((\mathscr{L} - xI)^{m-k+1}\Lambda \cdot P)_1}_{\mathrm{gr} \leq m-k} - \underbrace{xS_{m-k+1}}_{\mathrm{gr} \leq m-k}.
\end{aligned}
$$

Luego $\mathrm{gr}(S_k) \leq k$ y $\mathfrak{D} = \sum_{r=0}^{m} \partial^r S_{m-r} \frac{1}{r!}$ cumple que $\frac{S_{m-r}}{r!} \in V_r$ para todo $0 \leq r \leq m$, i.e. S_{m-r} es un polinomio de grado menor o igual a r y efectivamente $P_n \cdot \mathfrak{D} = \Lambda_n P_n$ para todo $n \geq 0$. Entonces $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}(W)$ es el operador buscado y el orden de $\mathfrak{D}$ es menor o igual al mínimo m tal que $(\mathscr{L} - xI)^{m+1}(\Lambda) = 0$.

Ahora veamos que la condición de que existe $m \geq 0$ tal que $(\mathscr{L} - xI)^{m+1}\Lambda = 0$ es necesaria. Partimos de que

$$P \cdot \mathfrak{D} = \Lambda P \quad \text{y} \quad \mathscr{L} \cdot P = xP.$$

Definimos la siguiente acción $\mathrm{ad}(x)(\mathfrak{D}) := [x, \mathfrak{D}] := x\mathfrak{D} - \mathfrak{D}x$. Entonces ,

$$\begin{aligned} P \cdot [x, \mathfrak{D}] &= Px \cdot \mathfrak{D} - P \cdot \mathfrak{D}x \\ &= \mathscr{L} \cdot P \cdot \mathfrak{D} - \Lambda Px = \mathscr{L}\Lambda \cdot P - \Lambda\mathscr{L} \cdot P \\ &= (\mathscr{L}\Lambda - \Lambda\mathscr{L}) \cdot P = [\mathscr{L}, \Lambda] \cdot P \\ &= \mathrm{ad}\ \mathscr{L}(\Lambda) \cdot P. \end{aligned}$$

Notemos que la acción a derecha del operador diferencial $u = [x, \mathfrak{D}]$ sobre P se ha convertido en la acción a izquierda del operador en diferencia $\beta := [\mathscr{L}, \Lambda]$ sobre el mismo vector P. Entonces tenemos que $P \cdot u = \beta \cdot P$.

Si empezamos desde ahí, tenemos

$$\begin{aligned} P \cdot [x, u] &= Px \cdot u - P \cdot ux = \mathscr{L} \cdot P \cdot u - \beta \cdot Px = \mathscr{L} \cdot P \cdot u - \beta\mathscr{L} \cdot P \\ &= [\mathscr{L}, \beta] \cdot P. \end{aligned}$$

Es decir, $P \cdot (\mathrm{ad}\ x)^2(\mathfrak{D}) = (\mathrm{ad}\mathscr{L})^2(\Lambda) \cdot P$. Si seguimos aplicando e iterando estas acciones, tenemos que para todo entero no negativo j,

$$P \cdot (\mathrm{ad}x)^j(\mathfrak{D}) = (\mathrm{ad}\mathscr{L})^j(\Lambda) \cdot P.$$

Si $\mathfrak{D}$ tiene orden m, entonces veamos que $(\mathrm{ad}x)^{m+1}(\mathfrak{D}) = 0$.

En primer lugar notemos que si $\mathfrak{D} = \sum_{i=0}^{s} \partial^i F_i$ entonces $(\mathrm{ad}\ x)(\mathfrak{D}) = \displaystyle\sum_{i=i}^{s} (\mathrm{ad}x)(\partial^i F_i)$. En efecto, si $s = 1$, $\mathfrak{D} = \partial^0 F_0 + \partial^1 F_1$ y

$$\begin{aligned} P \cdot (\mathrm{ad}x)(\mathfrak{D}) &= (Px) \cdot \mathfrak{D} - (P \cdot \mathfrak{D})x \\ &= \partial^0(Px)F_0 + \partial^1(Px) - \partial^0(P)F_0x - \partial^1(P)F_1x \\ &= \partial^0(Px)F_0 - \partial^0(P)x + \partial^1(Px)F_1 - \partial^1(P)F_1x \\ &= P \cdot (\mathrm{ad}x)(\partial^0 F_0) + P \cdot (\mathrm{ad}x)(\partial^1 F_1). \end{aligned}$$

Si $s = n + 1$, entonces $\mathfrak{D} = \displaystyle\sum_{1=0}^{n} \partial^i F_i$ y

$$\begin{aligned} P \cdot (\mathrm{ad}x)(\mathfrak{D} + \partial^{n+1}F_{n+1}) &= (Px) \cdot (\mathfrak{D} + \partial^{n+1}F_{n+1}) - P \cdot (\mathfrak{D} + \partial^{n+1}F_{n+1})x \\ &= (Px) \cdot \mathfrak{D} + (Px) \cdot (\partial^{n+1}F_{n+1}) - P \cdot \mathfrak{D}x - P \cdot (\partial^{n+1}F_{m+1})x \\ &= (Px) \cdot \mathfrak{D} - P \cdot \mathfrak{D}x + (Px) \cdot (\partial^{n+1}F_{n+1}) - P \cdot (\partial^{n+1}F_{n+1})x \\ &= P \cdot (\mathrm{ad}x)(\mathfrak{D}) + P \cdot (\mathrm{ad}x)(\partial^{n+1}F_{n+1}) \\ &= P \cdot \sum_{i=0}^{n+1} (\mathrm{ad}x)(\partial^i F_i). \end{aligned}$$

En la última igualdad, como $\mathfrak{D}$ es de orden menor o igual a n, usamos la hipótesis inductiva.

Ahora veamos que ad x le baja un grado de derivación a ∂^n. Sea $n \in \mathbb{N}$, calculamos

$$\begin{aligned}
P \cdot (\mathrm{ad}x)(\partial^{n+1}) &= \partial^{n+1}(Px) - \partial^{n+1}(P)x = \partial^n(\partial(Px)) - \partial^n(\partial(P))x \\
&= \partial^n(\partial(P)x + P) - \partial^n(\partial(P))x = \partial^n(\partial(P)x) + \partial^n(P) - \partial^n(\partial(P))x \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \partial^{n-i}(\partial(P))\partial^i(x) + \partial^n(P) - \partial^n(\partial(P))x \\
&= \binom{n}{0} \partial^n(\partial(P))x + \binom{n}{1} \partial^{n-1}(\partial(P))\partial(x) + \partial^n(P) - \partial^n(\partial(P))x \\
&= \partial^n(\partial(P))x - \partial^n(\partial(P))x + n\partial^n(P) + \partial^n(P) \\
&= (n+1)\partial^n(P).
\end{aligned}$$

Por lo tanto concluimos que

$$(\mathrm{ad}x)(\partial^n) = n\partial^{n-1} \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Veamos ahora que si $\mathfrak{D}$ es un operador de orden $\leq n$, entonces $(\mathrm{ad}x)^{n+1}(\mathfrak{D}) = 0$. Si $n = 0$,

$$P \cdot (\mathrm{ad}x)(\partial^0 F_0) = \partial^0(xP)F_0 + \partial^0(P)F_0 x = xPF_0 - PF_0 x = 0.$$

Supongamos que vale para $0 \leq k \leq n-1$

$$\begin{aligned}
(\mathrm{ad}\ x)^{n+1}(\sum_{i=0}^{n} \partial^i F_i) &= (\mathrm{ad}x)^{n+1}\Big(\underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} \partial^i F_i}_{\text{orden } \leq n-1}\Big) + (\mathrm{ad}x)^{n+1}(\partial^n F_n) \\
&= (\mathrm{ad}x)^{n+1}(\partial^n F_n) = (\mathrm{ad}x)^n((\mathrm{ad}x)(\partial^n F_n) \\
&= (\mathrm{ad}x)^n(\underbrace{n\partial^{n-1}F_n}_{\text{orden } \leq n-1}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ahora, $\mathrm{ord}(\mathfrak{D}) = m$ entonces $0 = P \cdot (\mathrm{ad}x)^{m+1}(\mathfrak{D}) = (\mathrm{ad}\mathscr{L})^{m+1}(\Lambda) \cdot P$.

Si A_{ij} denota el $ij-$bloque de la matriz de banda finita $(\mathrm{ad}\mathscr{L})^{m+1}(\Lambda)$, entonces para cada i, A_{ij} es cero, para casi todo j y $\sum_j A_{ij}P_j = 0$. Por lo tanto, tenemos

$$0 = (\sum_j A_{ij}P_jP_k) = \sum_j A_{ij}(P_j, P_k) = A_{ik}(P_k, P_k)$$

y en consecuencia $A_{ik} = 0$ para todo i, k. Así concluimos que

$$(\mathrm{ad}\ \mathscr{L})^{m+1}(\Lambda) = 0.$$

Observemos que el orden de $\mathfrak{D}$ es mayor o igual al mínimo k tal que $(\mathrm{ad}\ \mathscr{L})^{k+1}(\Lambda) = 0$ y a la vez, por lo que vimos antes, si $k \in \mathbb{N}_0$ es tal que $(\mathrm{ad}\mathscr{L})^{k+1}(\Lambda) = 0$, entonces existe un operador $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}(W)$ de orden menor o igual a k tal que $P \cdot \mathfrak{D} = \Lambda P$.

Usando que la correspondencia $\mathfrak{D} \mapsto \Lambda(\mathfrak{D})$ es una biyección, obtenemos $\mathrm{ord}(\mathfrak{D}) \leq \min\{k \in \mathbb{N}_0 : (\mathrm{ad}\mathscr{L})^{k+1}(\Lambda(\mathfrak{D})) = 0\} \leq \mathrm{ord}(\mathfrak{D})$. Entonces

$$\mathrm{ord}(\mathfrak{D}) = \min\{k \in \mathbb{N}_0 : (\mathrm{ad}\mathscr{L})^{k+1}(\Lambda(\mathfrak{D})) = 0\},$$

lo que finalmente concluye la demostración. $\square$

Capítulo 3

La adjunta de operadores diferenciales

Primero hablaremos de la adjunta de operadores diferenciales para operadores del álgebra $\mathcal{D}(W)$ dando una construcción explícita de la adjunta para cada operador, luego describiremos la adjunta para operadores en contextos un poco más generales.

3.1. La adjunta de $\mathfrak{D}$ en $\mathcal{D}(W)$

Comenzamos con algunos comentarios sobre la adjunta de un operador diferencial sobre el intervalo cerrado $[0,1]$

Dado

$$\mathfrak{d} = \sum_{i=0}^{n} f_i(x)\partial^i$$

un operador diferencial lineal con coeficientes C^∞ sobre $[0,1]$, llamamos adjunto formal de $\mathfrak{d}$ a un operador diferencial $\mathfrak{d}^*$ tal que

$$\int_0^1 \mathfrak{d}f(x)\overline{g(x)}dx = \int_0^1 f(x)\overline{\mathfrak{d}^* g(x)}dx.$$

para toda $f,g \in C^\infty([0,1])$ tales que $f(0) = f(1) = 0 = g(0) = g(1)$.

La existencia y unicidad de la adjunta formal son fáciles de establecer a patir de la integración por partes.

Una situación completamente distinta surge si buscamos un operador diferencial $\widetilde{\mathfrak{d}}$ en $[0,1]$ tal que

$$\int_0^1 \mathfrak{d}f(x)\overline{g}(x)dx = \int_0^1 f(x)\overline{\widetilde{\mathfrak{d}}g}(x)dx,$$

para toda $f,g \in C^\infty([0,1])$, sin pedir la condición de borde. Está claro que si tal $\widetilde{\mathfrak{d}}$ existe es una adjunta formal, y luego única. En este caso nos referiremos a esta como la adjunta de $\mathfrak{d}$.

Veamos a modo de ejemplo que el operador diferencial $\partial = \frac{d}{dx}$ sobre $[0,1]$ no tiene adjunta. Osea que no existe $\widetilde{\partial}$ tal que

$$\int_0^1 \partial f(x)\overline{g}(x)dx = \int_0^1 f(x)\overline{\widetilde{\partial}g}(x)dx,$$

para toda $f,g \in \mathbb{C}[x]$.
Primero veamos que el funcional en $\mathbb{C}[x]$ definido por $L(f) = c_1 f(z_1) + \cdots + c_n f(z_n)$

con $c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{C}^\times$ y con $z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$, no puede ser representado por ninguna $g \in C^\infty([0,1])$. Pues supongamos que existe $g \in C^\infty([0,1])$ tal que

$$c_1 f(z_1) + \cdots + c_n f(z_n) = \int_0^1 f(x)\overline{g}(x)dx,$$

para toda $f \in \mathbb{C}[x]$. Sea $h \in \mathbb{C}[x]$, $h(x) = (x - z_1)\cdots(x - z_n)$. Luego

$$\int_0^1 (h(x)f(x))\overline{g}(x)dx = c_1(hf)(z_1) + \cdots + c_n(hf)(z_n) = 0,$$

para toda $f \in \mathbb{C}[x]$. Luego, tomando $f = \overline{h}g$ obtenemos

$$\int_0^1 |h(x)|^2|g(x)|^2 dx = 0,$$

lo que implica que $g = 0$ lo cual es una contradicción.

Ahora asumamos que ∂ sobre el intervalo $[0,1]$ tiene una adjunta $\widetilde{\partial}$. Luego

$$\int_0^1 f(x)\overline{\widetilde{\partial}g}(x)dx = \int_0^1 \partial f(x)\overline{g}(x)dx = f(1)\overline{g}(1) - f(0)\overline{g}(0) - \int_0^1 f(x)\overline{\partial g}(x)dx,$$

es decir,

$$\int_0^1 f(x)\overline{(\widetilde{\partial}g + \partial g)}(x)dx = f(1)\overline{g}(1) - f(0)\overline{g}(0).$$

Para toda $f, g \in \mathbb{C}[x]$. Luego si fijamos g, tenemos que podemos representar el funcional lineal $L(f) = f(1)\overline{g}(1) - f(0)\overline{g}(0)$ por la función $(\widetilde{\partial}g + \partial g)$, lo cual es una contradicción de lo que vimos anteriormente.

Algo interesante pasa con los operadores diferenciales en el álgebra $\mathcal{D}(W)$ asociados al peso matricial $W = W(x)$ sobre la recta real. En esta sección estableceremos que para cada $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}(W)$ existe una única $\widetilde{\mathfrak{D}} \in \mathcal{D}(W)$ tal que $\langle P \cdot \mathfrak{D}, Q\rangle = \langle P, Q \cdot \widetilde{\mathfrak{D}}\rangle$ para todo $P, Q \in M_N(\mathbb{C})[x]$.

Proposición 3.1. *Sea $\{P_n\}$ la sucesión de polinomios mónicos ortogonales asociada al peso matricial $W = W(x)$. Dado $\mathfrak{D} = \sum_{i=0}^s \partial^i F_i \in \mathcal{D}(W)$ y $\widetilde{\mathfrak{D}} = \sum_{i=0}^s \partial^i G_i \in \mathcal{D}$. Denotamos $F_i = \sum_{j=0}^i F_i^j x^j$ y $G_i = \sum_{j=0}^i G_i^j x^j$, donde F_i^j y G_i^j son matrices constantes. Entonces para todo $n, m \geq 0$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\langle P \cdot \mathfrak{D}, Q\rangle = \langle P, Q \cdot \widetilde{\mathfrak{D}}\rangle$ *para todo* $P, Q \in M_N(\mathbb{C})[x]$ *con* $gr(P) \leq n$, $gr(Q) \leq m$.

(ii) $\sum\limits_{0\leq j\leq i\leq s} [u]_i F_j^i M_{u+v+j-i} = \sum\limits_{0\leq j\leq i\leq s} [v]_i M_{u+v+j-i}(G_i^j)^*$, *para todo* $0 \leq u \leq n$, $0 \leq v \leq m$, *donde* $M_k = \int_a^b x^k W(x)dx$ *es el* k*-ésimo momento de* W.

(iii) $\langle P_u \cdot \mathfrak{D}, P_v\rangle = \langle P_u, P_v \cdot \widetilde{\mathfrak{D}}\rangle \quad \forall\, 0 \leq u \leq n,\ 0 \leq v \leq m.$

Demostración. (i) $\implies$ (ii).

Si vale (i), en particular tenemos que $\langle x^u I \cdot \mathfrak{D}, x^v I\rangle = \langle x^u I, x^v I \cdot \widetilde{\mathfrak{D}}\rangle$. Usando que $\partial^i(x^u) = [u]_i x^{u-i}$ calculamos

$$\begin{aligned}\langle x^u I \cdot \mathfrak{D}, x^v I\rangle &= \int_a^b \sum_{i=0}^s \partial^i(x^u I)F_i(x)W(x)x^v dx = \int_a^b \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^i \partial^i(x^u)F_i^j x^{j+v}W(x)dx \\ &= \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^i \int_a^b [u]_i x^{u-i+j+v} F_i^j W(x)dx = \sum_{0\leq j\leq i\leq s} [u]_i F_i^j M_{u+v+j-i}.\end{aligned}$$

Similarmente obtenemos que

$$\langle x^u I, x^v I \cdot \widetilde{\mathfrak{D}} \rangle = \sum_{0\le j\le i\le s} [v]_i M_{u+v+j-i}(G_i^j)^*.$$

de donde se deduce (ii).

Veamos que (ii) $\implies$ (iii). Tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle P_u \cdot \mathfrak{D}, P_v \rangle &= \Big\langle \Big(\sum_{r=0}^{u} x^r P_r^u \Big) \cdot \mathfrak{D}, \sum_{q=0}^{v} x^q P_q^v \Big\rangle = \sum_{r=0}^{u} P_r^u \Big\langle x^r I \cdot \mathfrak{D}, \sum_{q=0}^{v} x^q P_q^v \Big\rangle \\
&= \sum_{\substack{0\le r\le u\\ 0\le q\le v}} P_r^u \langle x^r I \cdot \mathfrak{D}, x^q \rangle (P_q^v)^* \\
&= \sum_{\substack{0\le r\le u\\ 0\le q\le v}} P_r^u \langle x^r I, x^q I \cdot \widetilde{\mathfrak{D}} \rangle (P_q^v)^* \qquad \text{(aquí usamos que vale (ii))} \\
&= \Big\langle \sum_{r=0}^{u} x^r P_r^u, \Big(\sum_{q=0}^{v} x^q P_q^v \Big) \cdot \widetilde{\mathfrak{D}} \Big\rangle = \langle P_u, P_v \cdot \widetilde{\mathfrak{D}} \rangle.
\end{aligned}$$

Por lo tanto vale (iii).

Ahora veamos (iii) $\implies$ (i). Escribimos $P = \sum_{0\le u\le n} A_u P_u$ y $Q = \sum_{0\le v\le m} B_v P_v$ con $A_u, B_v \in M_N(\mathbb{C})$. Luego

$$\begin{aligned}
\langle P \cdot \mathfrak{D}, Q \rangle &= \Big\langle \Big(\sum_{0\le u\le n} A_u P_u \Big) \cdot \mathfrak{D}, \sum_{0\le v\le m} B_v P_v \Big\rangle = \sum_{\substack{0\le u\le n\\ 0\le v\le m}} A_u \langle P_u \cdot \mathfrak{D}, P_v \rangle (B_v)^* \\
&= \sum_{\substack{0\le u\le n\\ 0\le v\le m}} A_u \langle P_u, P_v \cdot \widetilde{\mathfrak{D}} \rangle (B_v)^* \quad \text{(aquí usamos que vale (iii))} \\
&= \langle P, Q \cdot \widetilde{\mathfrak{D}} \rangle.
\end{aligned}$$

Luego vale (i) y esto completa la demostración de la proposición. $\square$

Lema 3.2. *Para todo $b, c, d \in \mathbb{N}$ se cumple*

$$\sum_{0\le j\le d} (-1)^j \binom{c+d}{j} \binom{b+d-j}{b} = \binom{b-c}{d}.$$

Demostración. La demostración se basa en usar la siguiente identidad

$$\binom{n}{m} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(1+w)^m}{w^n+1} dw$$

que se cumple para todo $m, n \in \mathbb{N}_0$, ver por ejemplo las técnicas descritas en [6]. $\square$

Teorema 3.3. *Sea $\{P_n\}_{n\ge 0}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos asociada al peso matricial $W = W(x)$. Dado $\mathfrak{D} = \sum_{i=0}^{s} \partial^i F_i \in \mathcal{D}(W)$, sea $\widetilde{\mathfrak{D}} = \sum_{i=0}^{s} \partial^i G_i \in \mathcal{D}$, donde los G_i están definidos inductivamente por*

i) $G_0 = \langle P_0, P_0 \rangle (\Lambda_0(\mathfrak{D}))^* \langle P_0, P_0 \rangle^{-1}$.

ii) $j!\, G_j = \langle P_j, P_j \rangle (\Lambda_j(\mathfrak{D}))^* \langle P_j, P_j \rangle^{-1} - \sum_{i=0}^{j-1} \partial^i (P_j) G_i$ *para* $1 \le j \le s$.

Entonces para todo $P, Q \in M_N(\mathbb{C})[x]$ se tiene

$$\langle P \cdot \mathfrak{D}, Q\rangle = \langle P, Q \cdot \widetilde{\mathfrak{D}}\rangle.$$

Demostración. Primero observemos que de la definición, si $0 \leq m \leq s$, entonces

$$P_m \cdot \widetilde{\mathfrak{D}} = \sum_{i=0}^{s} \partial^i (P_m) G_i = m!\, G_m + \sum_{i=0}^{m-1} \partial^i (P_m) G_i = \langle P_m, P_m\rangle (\Lambda_m(\mathfrak{D}))^* \langle P_m, P_m\rangle^{-1} P_m,$$

por la definición de G_j. Entonces, si $0 \leq m \leq s$, tenemos

$$\Lambda_m(\widetilde{\mathfrak{D}}) = \langle P_m, P_m\rangle (\Lambda_m(\mathfrak{D}))^* \langle P_m, P_m\rangle^{-1}.$$

Sea $0 \leq m \leq s$ y $n \geq 0$. Luego

$$\langle P_n \cdot \mathfrak{D}, P_m\rangle = \langle \Lambda_n(\mathfrak{D}) P_n, P_m\rangle = \Lambda_n(D)\langle P_n, P_m\rangle = \delta_{n,m}\Lambda_m(D)\langle P_m, P_m\rangle$$

y

$$\begin{aligned}
\langle P_n, P_m \cdot \widetilde{\mathfrak{D}}\rangle &= \langle P_n, \langle P_m, P_m\rangle (\Lambda_m(D))^* \langle P_m, P_m\rangle^{-1} P_m\rangle \\
&= \langle P_n, P_m\rangle (\langle P_m, P_m\rangle (\Lambda_m(D))^* \langle P_m, P_m\rangle^{-1})^* \\
&= \delta_{n,m}\langle P_m, P_m\rangle (\langle P_m, P_m\rangle^{-1})^* ((\Lambda_m(D))^*)^* \langle P_m, P_m\rangle^* \\
&= \delta_{n,m}\langle P_m, P_m\rangle \langle P_m, P_m\rangle^{-1} \Lambda_m(D) \langle P_m, P_m\rangle \\
&= \delta_{n,m}\Lambda_m(D)\langle P_m, P_m\rangle.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\langle P_n \cdot \mathfrak{D}, P_m\rangle = \langle P_n, P_m \cdot \widetilde{\mathfrak{D}}\rangle.$$

Luego por Proposición 3.1 tenemos $\langle P \cdot \mathfrak{D}, Q\rangle = \langle P, Q \cdot \widetilde{\mathfrak{D}}\rangle$ para todo $P, Q \in M_N(\mathbb{C})[x]$ tal que $0 \leq \mathrm{gr}(q) \leq s$. Además por esa misma proposición sabemos que la siguiente ecuación, que llamaremos $E_{n,m}$, vale para $0 \leq m \leq s$ y $n \geq 0$

$$\sum_{0 \leq j \leq i} [n]_i F_j^i M_{n+m+j-i} = \sum_{0 \leq j \leq i \leq s} [m]_i M_{n+m+j-i} (G_j^i)^*. \tag{3.1}$$

Ahora veamos que esta ecuación (3.1), $E_{n.m}$ vale para todo $n \geq 0$ y $m \geq s$, viendo que cada $E_{n,m}$ es combinación lineal de los $E_{n,r}$ con $0 \leq r \leq s$, que sabemos que son válidas.

Comenzaremos buscando una solución $a_0, a_1, \cdots, a_s$ del siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$a_0[0]_i + a_1[1]_i + \cdots + a_s[s]_i = [m]_i \quad \text{para todo } 0 \leq i \leq s.$$

Dividiendo por $i!$, este sistema es equivalente a

$$a_0\binom{0}{i} + a_1\binom{1}{i} + \cdots + a_s\binom{s}{i} = \binom{m}{i} \quad \text{para todo } 0 \leq i \leq s.$$

Armando la matriz tenemos,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \cdots & \binom{s}{0} \\ \binom{0}{1} & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \cdots & \binom{s}{1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{0}{s} & \binom{1}{s} & \binom{2}{s} & \cdots & \binom{s}{s} \end{pmatrix}}_{A = \text{ matriz de Pascal}} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \binom{m}{0} \\ \binom{m}{1} \\ \vdots \\ \binom{m}{s} \end{pmatrix}.$$

Por ser A una matriz de Pascal sabemos que es inversible, los coeficientes de A^{-1} son $A_{ij}^{-1} = (-1)^{i+j}\binom{j}{i}$, entonces

$$a_i = \sum_{j=0}^{s} (-1)^{i+j} \binom{j}{i} \binom{m}{j} \qquad 0 \leq i \leq s.$$

Estos coeficientes $a_0, a_1. \cdots, a_s$ han sido elegidos de manera que el lado derecho de la combinación lineal $a_0 E_{n+m,0} + a_1 E_{n+m-1,1} + \cdots + a_s E_{n+m-s,s}$ sea igual al lado derecho de la ecuación $E_{n,m}$. En efecto,

$$\begin{aligned} \sum_{0\leq r\leq s} a_r \sum_{0\leq j\leq i\leq s} [r]_i M_{n+m+j-i} (G_j^i)^* &= \sum_{0\leq j\leq i\leq s} \left(\sum_{0\leq r\leq s} a_r [r]_i \right) M_{n+m+j-i} (G_i^j)^* \\ &= \sum_{0\leq j\leq i\leq s} [m]_i M_{n+m+j-i} (G_i^j)^*. \end{aligned}$$

Ahora veamos el lado izquierdo de ambas ecuaciones son el mismo. Por una parte el lado izquierdo de la ecuación $E_{n,m}$ es

$$\sum_{0\leq j\leq i\leq s} [n]_i F_j^i M_{n+m+j-i}$$

y el lado izquierdo de la ecuación $a_0 E_{n+m,0} + a_1 E_{n+m-1,1} + \cdots + a_s E_{n+m-s,s}$ es

$$\sum_{0\leq r\leq s} a_r \sum_{0\leq j\leq i\leq s} [n+m-r]_i F_j^i M_{n+m+j-i} = \sum_{0\leq j\leq i\leq s} \left(\sum_{0\leq r\leq s} a_r [n+m-r]_i \right) F_j^i M_{n+m+j-i}.$$

Por lo tanto ambas ecuaciones coincidirán si probamos que $\sum\limits_{0\leq r\leq s} a_r [n+m-r]_i = [n]_i$, Dividiendo ambos lados por $i!$, es equivalente a ver que

$$\sum_{0\leq r\leq s} a_r \binom{n+m+r}{i} = \binom{n}{i}. \tag{3.2}$$

Calculamos

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{s} a_r \binom{n+m-r}{i} &= \sum_{r=0}^{s} \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r+j} \binom{j}{r} \binom{m}{j} \binom{n+m-r}{i} \\ &= \sum_{j=0}^{s} (-1)^j \binom{m}{j} \sum_{r=0}^{j} (-1)^r \binom{j}{r} \binom{n+m-r}{i}. \end{aligned}$$

Usando la identidad del Lema 3.2 con $b = i$, $c = i - n - m + j$ y $d = n + m - i$ resulta que

$$\sum_{r=0}^{s} a_r \binom{n+m-r}{i} = \sum_{j=0}^{s} (-1)^j \binom{m}{j} \binom{n+m-j}{i-j}.$$

Nuevamente por el Lema 3.2 con $b = n + m - i$, $c = m - i$ y $d = i$, obtenemos

$$\sum_{r=0}^{s} a_r \binom{n+m-r}{i} = \binom{n}{i},$$

Lo que prueba (3.2) y concluye la demostración del teorema. $\square$

Definición 3.4. Decimos que un operador diferencial $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}(W)$ es un operador simétrico (o W-simétrico) si satisface la condición

$$\langle P \cdot \mathfrak{D}, Q \rangle = \langle P, Q \cdot \mathfrak{D} \rangle \quad \text{para todo } P, Q \in M_N(\mathbb{C})[x].$$

Por la Proposición 2.17, el conjunto $\mathcal{S}(W)$ de todos los operadores diferenciales simétricos es un subespacio real de $\mathcal{D}(W)$.

Corolario 3.5. *Para cada $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}(W)$ existe un único operador diferencial $\mathfrak{D}^\dagger \in \mathcal{D}(W)$ tal que*

$$\langle P \cdot \mathfrak{D}, Q \rangle = \langle P, Q \cdot \mathfrak{D}^\dagger \rangle,$$

para todo $P, Q \in M_N(\mathbb{C})[x]$. El mapeo $\mathfrak{D} \mapsto \mathfrak{D}^\dagger$ es una $*$-operación en el álgebra $\mathcal{D}(W)$ y ord$(\mathfrak{D})$ = ord$(\mathfrak{D}^\dagger)$. Más aún, $\mathcal{S}(W)$ es una forma real del espacio $\mathcal{D}(W)$, es decir,

$$\mathcal{D}(W) = \mathcal{S}(W) \oplus i\,\mathcal{S}(W)$$

como suma directa de espacios vectoriales reales.

Nos referiremos a $\mathfrak{D}^\dagger$ como la adjunta de $\mathfrak{D}$.

Demostración. La existencia de $\mathfrak{D}^\dagger$ fue probada en el Teorema 3.3. Veamos la unicidad del operador. Si existiera otro operador $\widetilde{\mathfrak{D}} \in \mathcal{D}(W)$ tal que

$$\langle P \cdot \mathfrak{D}, Q \rangle = \langle P, Q \cdot \widetilde{\mathfrak{D}} \rangle,$$

para todo polinomios $P, Q \in M_N(\mathbb{C})[x]$ entonces

$$\langle P \cdot \mathfrak{D}, Q \rangle = \langle P,\, Q \cdot \mathfrak{D}^\dagger \rangle = \langle P, Q \cdot \widetilde{\mathfrak{D}} \rangle \qquad \text{para todo } P, Q.$$

En consecuencia $\langle P,\, Q \cdot (\widetilde{\mathfrak{D}} - \mathfrak{D}^\dagger) \rangle = 0$, para todo polinomios P, Q. En particular tomando $P = Q \cdot (\widetilde{\mathfrak{D}} - \mathfrak{D}^\dagger)$ obtenemos que $Q \cdot (\widetilde{\mathfrak{D}} - \mathfrak{D}^\dagger) = 0$, para todo Q y por lo tanto $\widetilde{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D}^\dagger$.

Veamos ahora que † es una involución. Sean P, Q polinomios arbitrarios. Entonces

$$\begin{aligned} \langle P \cdot \mathfrak{D}, Q \rangle = \langle P,\, Q \cdot \mathfrak{D}^\dagger \rangle = \Big(\langle Q \cdot \mathfrak{D}^\dagger, P \rangle \Big)^* = \left(\langle Q, P \cdot (\mathfrak{D}^\dagger)^\dagger \rangle \right)^* \\ = \langle P \cdot (\mathfrak{D}^\dagger)^\dagger, Q \rangle, \end{aligned}$$

para todo $P, Q \in M_N(\mathbb{C})[x]$. De donde deducimos fácilmente que $\mathfrak{D} = (\mathfrak{D}^\dagger)^\dagger$.

Por otra parte es fácil de ver que

$$(\mathfrak{D}_1 + \lambda \mathfrak{D}_2)^\dagger = \mathfrak{D}_1^\dagger + \overline{\lambda} \mathfrak{D}_2^\dagger \qquad \text{y} \quad (\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2)^\dagger = \mathfrak{D}_2^\dagger \mathfrak{D}_1^\dagger,$$

para todo $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2 \in \mathcal{D}(W)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Luego $\dagger$ es una $*$-operación en el álgebra $\mathcal{D}(W)$.

Veamos ahora que $\operatorname{ord}(\mathfrak{D}) = \operatorname{ord}(\mathfrak{D}^\dagger)$. Por la construcción de $\mathfrak{D}^\dagger$, dada en el Teorema 3.3, tenemos que $\operatorname{ord}(\mathfrak{D}^\dagger) \leq \operatorname{ord}(\mathfrak{D})$. Por otro lado, tenemos que $\operatorname{ord}(\mathfrak{D}) = \operatorname{ord}((\mathfrak{D}^\dagger)^\dagger) \leq \operatorname{ord}(\mathfrak{D}^\dagger)$.

Veamos que $\mathcal{S}(W)$ es una forma real de $\mathcal{D}(W)$. Sea $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}(W)$, entonces

$$\mathfrak{D} = \frac{\mathfrak{D} + \mathfrak{D}^\dagger}{2} + i \frac{-i\mathfrak{D} + i\mathfrak{D}^\dagger}{2} \in \mathcal{S}(W) + i\,\mathcal{S}(W).$$

Si $\mathfrak{D} \in \mathcal{S}(W) \cap i\,\mathcal{S}(W)$ tenemos que $i\mathfrak{D} = (i\mathfrak{D})^\dagger = -i\mathfrak{D}^\dagger$, entonces $\mathfrak{D} = -\mathfrak{D}$ y por lo tanto $\mathfrak{D} = 0$. $\mathcal{D}(W) = \mathcal{S}(W) \oplus i\mathcal{S}(W)$ y se completa la demostración del corolario. $\square$

Corolario 3.6. *Si $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ es una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a un peso W y $\{\Gamma_n\}_{n\geq 0}$ es la correspondiente sucesión de representaciones de $\mathcal{D}(W)$, entonces*

$$\Gamma_n(D^\dagger) = \langle Q_n, Q_n\rangle \Gamma_n(\mathfrak{D})^* \langle Q_n, Q_n\rangle^{-1}, \quad \textit{para todo } \mathfrak{D} \in \mathcal{D}(W).$$

En particular, si $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ es una sucesión ortonormal de polinomios entonces $\mathfrak{D}$ es simétrico si y sólo si $\Gamma_n(\mathfrak{D})$ es Hermitiana para todo $n \geq 0$.

Demostración. Veamos que $\Gamma_n(\mathfrak{D}^\dagger) = \langle Q_n, Q_n\rangle \Gamma_n(\mathfrak{D})^* \langle Q_n, Q_n\rangle^{-1}$. Tenemos que

$$\Gamma_n(\mathfrak{D})\langle Q_n, Q_n\rangle = \langle \Gamma_n(\mathfrak{D})Q_n, Q_n\rangle = \langle Q_n \cdot \mathfrak{D}, Q_n\rangle = \langle Q_n, Q_n \cdot \mathfrak{D}^\dagger\rangle = \langle Q_n, Q_n\rangle (\Gamma_n(\mathfrak{D}^\dagger))^*.$$

Entonces $\langle Q_n, Q_n\rangle^{-1}\Gamma_n(\mathfrak{D})\langle Q_n, Q_n\rangle = (\Gamma_n(\mathfrak{D}^\dagger))^*$. Tomando $*$ a ambos miembros demostramos la primera parte del enunciado.

Supongamos ahora que $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ es una sucesión ortonormal de polinomios, es decir $\langle Q_n, Q_n\rangle = I$, para todo $n \geq 0$. Si $\mathfrak{D}$ es simétrico, entonces

$$\Gamma_n(\mathfrak{D}) = \Gamma_n(\mathfrak{D}^\dagger) = \Gamma_n(\mathfrak{D})^* = \Gamma_n(\mathfrak{D})^*,$$

y por lo tanto $\Gamma_n(\mathfrak{D})$ es una matriz Hermitiana. Recíprocamente si $\Gamma_n(\mathfrak{D})$ es Hermitiana entonces

$$\Gamma_n(\mathfrak{D}^\dagger) = \Gamma_n(\mathfrak{D})^* = \Gamma_n(\mathfrak{D})^* = \Gamma_n(\mathfrak{D}) \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

Luego $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^\dagger$ pues $\{\Gamma_n(\mathfrak{D})\}_{n\geq 0}$ es una representación que separa puntos. □

Corolario 3.7. *Si $\mathfrak{D} \in \mathcal{S}(W)$, luego existe una sucesión de polinomios ortonormales $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ en $M_N(\mathbb{C})[x]$ tal que $\Gamma_n(\mathfrak{D})$ es diagonal para todo $n \geq 0$.*

Demostración. Si $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ es ortonormal, entonces $\Gamma_n(\mathfrak{D})$ es Hermitiana y por lo tanto diagonalizable en una base ortonormal, es decir existe una sucesión de matrices unitarias $\{U_n\}_{n\geq 0}$ tales que $U_n\Gamma_n(\mathfrak{D})U_n^{-1} = \Delta_n(\mathfrak{D})$ es una matriz diagonal para todo $n \geq 0$.

Luego $\{U_nQ_n\}_{n\geq 0}$ es una sucesión de polinomios ortonormal tal que

$$(U_nQ_n) \cdot \mathfrak{D} = U_n\Gamma_n(\mathfrak{D})Q_n = U_n\Gamma_n(\mathfrak{D})U_n^{-1}U_nQ_n = \Delta_n(\mathfrak{D})(U_nQ_n).$$

Esto completa la demostración. □

3.2. La adjunta de operadores diferenciales más generales

Definición 3.8. Un operador lineal no acotado en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es una función lineal T definida en un subconjunto denso de $\mathcal{H}$ llamado el dominio de T. La adjunta de T es un operador lineal no acotado T^* con dominio $\{y \in \mathcal{H} : x \to \langle Tx, y\rangle \text{ es continua}\}$ definida por $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ para todo x e y en el dominio de T y T^*, respectivamente.

Comentario 3.9. Algunos autores no requieren que un operador lineal no acotado esté definido en un subconjunto denso. Sin embargo, es necesario para que Hahn-Banach implique la existencia de T^*, así que lo haremos parte de la definición. Como estaremos trabajando con operadores diferenciales con coeficientes racionales, esta definición será suficiente para nosotros.

El álgebra de operadores diferenciales también tiene una operación adjunta natural $*$ llamada la adjunta formal.

Definición 3.10. La adjunta formal sobre $M_N(\Omega((x)))$ es la única involución que extiende la conjugación Hermitiana sobre $\Omega((x))$ y manda $\partial_x I$ a $-\partial_x I$.

Ahora consideremos específicamente el espacio de Hilbert $\mathcal{H} = L^2([-1,1])$. La adjunta formal es definida de manera tal que la adjunta de operador no acotado y su adjunta formal coincidan en un subconjunto de $\mathcal{H}$ cuya clausura tenga codimensión finita. Sin embargo, como mostraremos en el siguiente ejemplo, la adjunta formal puede no ser igual a la adjunta de $\mathfrak{D}$ como operador lineal no acotado.

Ejemplo 3.11. Sea $\mathcal{H} = L^2([-1,1])$ con el producto interno usual y consideremos dos polinomios $p(x), q(x)$. La adjunta formal del operador diferencial $\mathfrak{D} = \partial_x$ es $\partial_x^* = -\partial_x$ y por otra parte

$$\begin{aligned}\langle p(x)\cdot\partial_x, q(x)\rangle &= \int_{-1}^{1} p'(x)\overline{q(x)}dx \\ &= p(1)\overline{q(1)} - p(0)\overline{q(0)} - \int_{-1}^{1} p(x)\overline{q'(x)}dx \\ &= \langle p(x), q(x)\cdot\partial_x^*\rangle + p(1)\overline{q(1)} - p(0)\overline{q(0)}.\end{aligned}$$

Como hay un término extra en el lado derecho, la adjunta formal de ∂_x no coincide con la adjunta como operador lineal no acotado sobre este dominio.

Más general un peso matricial $W(x)$ define un espacio de Hilbert de funciones a valores matriciales $M_N(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es el espacio de Hilbert $L^2(tr(W(x))dx)$ de funciones a valores complejas sobre (x_0, x_1) el soporte de $W(x)$. Cada operador diferencial a valores matriciales $\mathfrak{D} \in M_N(\Omega[[x]])$ con coeficientes adecuados definirá un operador lineal no acotado sobre $M_N(\mathcal{H})$. Hay de hecho una elección natural de la adjunta formal aquí teniendo en cuenta la forma del producto interno.

Definición 3.12. Sea $W(x)$ un peso matricial con soporte en un intervalo (a,b) que contiene al 0 y sea $\mathfrak{D} \in M_N(\Omega[[x]])$. Llamamos una adjunta formal de $\mathfrak{D}$ con respecto a $W(x)$, o $W(x)$-adjunta formal de $\mathfrak{D}$ al único operador diferencial $\mathfrak{D}^\dagger \in M_N(\Omega[[x]])$ definido sobre (a,b) por

$$\mathfrak{D}^\dagger := W(x)\mathfrak{D}^* W(x)^{-1}.$$

Un operador $\mathfrak{D}$ es llamado $W(x)$-simétrico formal si $\mathfrak{D}^\dagger = \mathfrak{D}$.

Ejemplo 3.13. Sea $\mathfrak{D} = \sum_{i=0}^n \partial_x^i F_i(x) \in M_N(\Omega[[x]])$, entonces

$$\mathfrak{D}^\dagger = W(x)\sum_{i=0}^{n}(-1)^i F_i^*(x)\partial_x^i W(x)^{-1}.$$

Definición 3.14. Sea $W(x)$ un peso matricial y sea $\mathfrak{D} \in M_N(\Omega[x])$. Decimos que $\mathfrak{D}$ es W-adjuntable si existe un operador diferencial $\widetilde{\mathfrak{D}} \in M_N(\Omega[x])$ que satisface

$$\langle P\cdot\mathfrak{D}, Q\rangle_W = \langle P, Q\cdot\widetilde{\mathfrak{D}}\rangle_W, \quad \forall P, Q \in M_N(\mathbb{C})[x].$$

En este caso, decimos que $\widetilde{\mathfrak{D}}$ es la adjunta de $\mathfrak{D}$ con respecto a $W(x)$, o alternativamente la $W(x)$-adjunta de $\mathfrak{D}$. Si $\mathfrak{D} = \widetilde{\mathfrak{D}}$, entonces $\mathfrak{D}$ es llamado W-simétrico.

Proposición 3.15. *Sea $W(x)$ un peso matricial y sea $\mathfrak{D} \in M_N(\Omega[x])$ un operador diferencial matricial. Si $\mathfrak{D}$ es W-adjuntable, entonces su W-adjunta es igual a la W-adjunta formal $\mathfrak{D}^\dagger$.*

Comentario 3.16. En particular como probamos que todo operador diferencial $\mathfrak{D}$ en $\mathcal{D}(W)$ tiene adjunta, coincidirá que la adjunta formal $\mathfrak{D}^\dagger = W(x)\mathfrak{D}^* W(x)^{-1}$ será igual a la adjunta de $\mathfrak{D}$ (a la que también llamamos $\mathfrak{D}^\dagger$) y así no habrá inconsistencia en la notación usada.

Capítulo 4

Biespectralidad

La noción de biespectralidad surgió de preguntas originalmente planteadas por Duistermaat y Grünbaum de encontrar funciones localmente meromorfas $\psi(x, y)$ que definan una familia de autofunciones para un operador diferencial fijo que actúe en x y una familia de autofunciones de otro operador diferencial que actúe en y. A los ejemplos de funciones $\psi(x, y)$ que cumplan esta propiedad se las refiere como funciones biespectrales en la literatura. Un ejemplo simple de una función biespectral es la función exponencial $\psi(x, y) = e^{xy}$.

Ejemplo 4.1. La función exponencial $\psi(x, y) = e^{xy}$ satisface

$$\partial_x \cdot \psi(x, y) = y\psi(x, y), \text{ y } \partial_y \cdot \psi(x, y) = x\psi(x, y).$$

Entonces $\psi(x, y)$ define una función biespectral.

Desde su concepción, el concepto de biespectralidad ha sido generalizado en varias direcciones naturales, particularmente en direcciones que incluyen ciertos aspectos no conmutativos. Para empezar, presentaremos la biespectralidad en términos muy generales.

Comentario 4.2. Dado que las álgebras en sí son completamente abstractas, esto no refleja si los elementos en sí son escalares o matriciales.

A lo largo de este trabajo asumiremos que las álgebras son asociativas y con identidad. Sin embargo no asumieremos que son conmutativas.

Definición 4.3. Definimos una álgebra operadora como una álgebra $\mathcal{A}$ con una subálgebra fija $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, a la que nos referiremos como la subálgebra de operadores multiplicativos de $\mathcal{A}$. Un contexto biespectral es una terna $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{H})$ donde $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son álgebras operadoras y $\mathcal{H}$ es un $\mathcal{A}, \mathcal{B}$-bimódulo. Una terna biespectral es una terna (a, b, ψ) con $a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}$ no constantes y $\psi \in \mathcal{H}$ que satisface la propiedad de que ψ tiene anulador a izquierda y a derecha trivial, y

$$a \cdot \psi = \psi \cdot g, \text{ y } \psi \cdot b = f \cdot \psi$$

para alguna $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ y $g \in \mathcal{M}(\mathcal{B})$. En este caso ψ forma parte de una terna biespectral, llamaremos a ψ biespectral.

En el caso clásico, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son ambas álgebras de operadores diferenciales con subálgebra de operadores multiplicativos que consisten de las funciones donde los operadores diferenciales actúan (por ejemplo polinomios, funciones holomorfas, funciones suaves, etc). Sin embargo, como es claro de la definición, la biespectralidad es una construcción mucho más general. En este trabajo tendrá importante relevancia el caso cuando las subálgebras de operadores multiplicativos $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ y $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ son no conmutativas.

Dado $\psi \in \mathcal{H}$ biespectral, definiremos naturalmente ciertas subálgebras de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$.

Definición 4.4. Sea $\psi \in \mathcal{H}$ biespectral. Definimos las álgebras de Fourier a izquierda y derecha $\mathcal{F}_L(\psi)$ y $\mathcal{F}_R(\psi)$ como

$$\mathcal{F}_L(\psi) = \{a \in \mathcal{A} : \exists b \in \mathcal{B},\ a \cdot \psi = \psi \cdot b\},\ \mathcal{F}_R(\psi) = \{b \in \mathcal{B} : \exists a \in \mathcal{A},\ a \cdot \psi = \psi \cdot b\}.$$

Definimos las álgebras biespectrales de Fourier a izquierda y derecha $\mathcal{B}_L(\psi)$ y $\mathcal{B}_R(\psi)$ como

$$\mathcal{B}_L(\psi) = \{a \in \mathcal{A} : \exists g \in \mathcal{M}(\mathcal{B}),\ a \cdot \psi = \psi \cdot g\},\ \mathcal{B}_R(\psi) = \{b \in \mathcal{B} : \exists f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}),\ f \cdot \psi = \psi \cdot b\}$$

Como los anuladores a izquierda y derecha de ψ son triviales, hay un isomorfismo natural $b_\psi : \mathcal{F}_L(\psi) \to \mathcal{F}_R(\psi)$ dado por $a \cdot \psi = \psi \cdot b_\psi(a)$.

Definición 4.5. Sea $\psi \in \mathcal{H}$ biespectral. Llamaremos mapa generalizado de Fourier al isomorfismo natural

$$b_\psi : \mathcal{F}_L(\psi) \longrightarrow \mathcal{F}_R(\psi)$$

definido por la identidad

$$a \cdot \psi = \psi \cdot b_\psi(a).$$

Comentario 4.6. El nombre mapa generalizado de Fourier viene del primer ejemplo. En ese caso, $\mathcal{A} = \Omega(x)$, $\mathcal{B} = \Omega(y)^{\mathrm{op}}$ y $\psi = e^{xy}$. Luego $\mathcal{F}_L(\psi) = \Omega[x]$, $\mathcal{F}_R(\psi) = \Omega[y]^{\mathrm{op}}$ y el mapa generalizado de Fourier es de hecho la transformada de Fourier:

$$b_\psi : \sum_{i,j=0}^{r} a_{ij} x^i \partial_x^j \mapsto \sum_{i,j=0}^{r} a_{ij} y^j \partial_y^i,$$

donde para un álgebra $\mathcal{A}$, denotamos por $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ la misma álgebra con el producto opuesto.

4.1. Transformación Biespectral de Darboux

En la práctica muchas de las familias importantes de ternas biespectrales surgen de ejemplos más simples u obvios a través de transformaciones biespectrales de Darboux.

Definición 4.7. Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{H})$ un contexto biespectral, y sean $\psi, \widetilde{\psi} \in \mathcal{H}$ biespectrales. Decimos que $\widetilde{\psi}$ es una transformación biespectral de Darboux de ψ si existen $u, \widetilde{u} \in \mathcal{F}_R(\psi)$ y unidades $p, \widetilde{p} \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ y unidades $q, \widetilde{q} \in \mathcal{M}(\mathcal{B})$ tales que

$$\widetilde{\psi} = p^{-1} \cdot \psi \cdot u q^{-1} \text{ y } \psi = \widetilde{p}^{-1} \cdot \widetilde{\psi} \cdot \widetilde{q}^{-1} \widetilde{u}.$$

En el caso en que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ o $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ sea no conmutativo, decimos que es una transformación biespectral de Darboux no conmutativa.

Se sigue de la definición que

$$\psi \cdot (u q^{-1} \widetilde{q}^{-1} \widetilde{u}) = p \widetilde{p} \cdot \psi,$$

y

$$\widetilde{p} p \cdot \widetilde{\psi} = \widetilde{\psi} \cdot (\widetilde{q}^{-1} \widetilde{u} u q^{-1}).$$

Teorema 4.8. *Si $\widetilde{\psi}$ es una transformación biespectral de Darboux de ψ, luego ψ es una transformación biespectral de Darboux de $\widetilde{\psi}$.*

Teorema 4.9. *Supongamos que $\widetilde{\psi}$ es una transformación biespectral de Darboux de ψ. Entonces para todo $a \in \mathcal{F}_L(\psi)$ se tiene*

$$\widetilde{p} a p \cdot \widetilde{\psi} = \widetilde{\psi} \cdot \widetilde{q}^{-1} \widetilde{u} b_\psi(a) u q^{-1},$$

$$p^{-1} b_\psi^{-1}(u) a b_\psi^{-1}(\widetilde{u}) \widetilde{p}^{-1} \cdot \widetilde{\psi} = \widetilde{\psi} \cdot q b_\psi(a) \widetilde{q}.$$

Demostración. Ver Geiger, Horozov y Yakimov [8]. □

4.2. Operadores diferenciales preservadores de grado de filtración y excepcionales

Cada operador diferencial $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}(W)$ tiene una base completa, como $M_N(\mathbb{C})$-módulo, de $M_N(\mathbb{C})[x]$ como autofunciones. También sabemos que para cualquier polinomio $Q(x) \in M_N(\mathbb{C})[x]$ el grado de $Q(x) \cdot \mathfrak{D}$ será a lo sumo el grado de $Q(x)$. Llamaremos a estos operadores preservadores de grado de filtración.

Definición 4.10. Un operador diferencial a valores matriciales $\mathfrak{D} \in M_N(\Omega(x))$ se dice que preserva el grado de filtración si para todo polinomio $Q(x) \in M_N(\mathbb{C})[x]$ se cumple que $Q(x) \cdot \mathfrak{D}$ es un polinomio de grado no mayor al grado de $Q(x)$. Y diremos que preserva el grado si cumple que $Q(x) \cdot \mathfrak{D}$ es un polinomio del mismo grado que $Q(x)$.

Los operadores diferenciales preservadores de grado de filtración deberán tener necesariamente coeficientes polinomiales.

Proposición 4.11. *Un operador $\mathfrak{D} \in M_N(\Omega(x))$ preserva el grado de filtración si y sólo si*

$$\mathfrak{D} = \sum_{i=0}^{\ell} \partial^i A_i(x)$$

con $A_i(x) \in M_N(\mathbb{C})[x]$ un polinomio de grado a lo sumo i para todo i.

Demostración. Supongamos $\mathfrak{D} \in M_N(\Omega(x))$. Luego podemos escribir

$$\mathfrak{D} = \sum_{i=0}^{\ell} \partial^i A_i(x)$$

para ciertas funiones racionales a valores matriciales $A_i(x) \in M_N(\mathbb{C}(x))$. Es claro que si $A_i(x) \in M_N(\mathbb{C})[x]$ es un polinomio de a lo sumo grado i para todo i, luego $\mathfrak{D}$ preserva el grado de filtración.

Para probar la recíproca, supongamos que $\mathfrak{D}$ preserva el grado de filtración y que para algún i la función racional a valores matriciales $A_i(x)$ no es un polinomio de grado a lo sumo i. Sea j el menor entero no negativo tal que $A_j(x)$ no es un polinomio de grado menor o igual a j. Calculamos

$$\frac{1}{j!} x^j \cdot \mathfrak{D} = A_j(x) + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{(j-i)!} x^{j-i} A_i(x).$$

Como $\mathfrak{D}$ preserva el grado de filtración el lado izquierdo de la igualdad de arriba será un polinomio de grado a lo sumo j. Además la suma del lado derecho es un polinomio de grado a lo sumo j, entonces concluimos que

$$A_j(x) = \sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{(j-i)!} x^{j-i} A_i(x) - \frac{1}{j!} x^j \cdot \mathfrak{D}$$

es un polinomio de grado a lo sumo j. Esto nos da una contradicción y así la demostración queda completa. □

Una conjugación de Darboux $\widetilde{\mathfrak{D}}$ de $\mathfrak{D}$ puede tener todavía muchos polinomios que sean autofunciones, pero no necesariamente serán una base completa de $M_N(\mathbb{C})[x]$. Por esta razón $\widetilde{\mathfrak{D}}$ puede tener coeficientes racionales no polinomiales. Esto nos lleva a considerar la noción de operadores diferenciales excepcionales.

Definición 4.12. Un operador diferencial $\mathfrak{d} \in \Omega(x)$ es llamado excepcional si tiene autofunciones polinomiales de todos los órdenes, salvo una cantidad finita.
Más precisamente, $\mathfrak{d}$ es excepcional si existe un subconjunto finito $\{m_1, \dots, m_k\} \subset \mathbb{N}_0$ tal que existe un polinomio $p(n)$ de grado $n \in \mathbb{N}_0$ que es autofunción de $\mathfrak{d}$ si y sólo si $n \notin \{m_1, \dots, m_k\}$. Los valores $m_1, \dots, m_k$ son llamados grados excepcionales de $\mathfrak{d}$.

Ejemplo 4.13. Los operadores diferenciales clásicos

$$\partial^2 - \partial 2x, \qquad \partial^2 + \partial(b + 1 - x), \qquad \partial^2(1 - x^2) + \partial(b - a + (b + a - 2)x)$$

de Hermite, Laguerre y Jacobi respectivamente tienen como autofunciones polinomios de todos los grados, luego son operadores excepcionales.

Ejemplo 4.14. El operador diferencial

$$\mathfrak{d} = \partial^2 - \partial\left(2x + \frac{4x}{1 + 2x^2}\right)$$

es un operador diferencial excepcional con grados excepcionales 1 y 2.

Podemos crear nuevos operadores diferenciales excepcionales a partir de otros, vía una conjugación de Darboux.

Definición 4.15. Sean $\mathfrak{d}, \widetilde{\mathfrak{d}} \in \Omega(x)$. Decimos que $\widetilde{\mathfrak{d}}$ es una conjugación de Darboux de $\mathfrak{d}$ si existe un operador diferencial $\mathfrak{h} \in \Omega(x)$ tal que $\mathfrak{h}\mathfrak{d} = \widetilde{\mathfrak{d}}\mathfrak{h}$.

Proposición 4.16. *Si $\widetilde{\mathfrak{d}}$ es una conjugación de Darboux de $\mathfrak{d}$, luego $\mathfrak{d}$ es una conjugación de Darboux de $\widetilde{\mathfrak{d}}$.*

Demostración. Supongamos $\widetilde{\mathfrak{d}}$ es una conjugación de Darboux de $\mathfrak{d}$. Luego existe un operador diferencial $\mathfrak{h} \in \Omega(x)$ tal que $\mathfrak{h}\mathfrak{d} = \widetilde{\mathfrak{d}}\mathfrak{h}$. Esto implica que $\mathrm{Ker}(\mathfrak{h}) \cdot \widetilde{\mathfrak{d}} \subset \mathrm{Ker}(\mathfrak{h})$. El Kernel tiene dimensión finita, luego podemos elegir un polinomio $q(\widetilde{\mathfrak{d}}) \in \mathbb{C}[\widetilde{\mathfrak{d}}]$ con $\mathrm{Ker}(\mathfrak{h} \cdot q(\widetilde{\mathfrak{d}})) = 0$. Esto implica que existe $\widetilde{\mathfrak{h}}$ tal que $q(\widetilde{\mathfrak{d}}) = \mathfrak{h}\widetilde{\mathfrak{h}}$. En particular $\widetilde{\mathfrak{d}}$ conmuta con $\mathfrak{h}\widetilde{\mathfrak{h}}$ entonces

$$\mathfrak{h}\mathfrak{d}\widetilde{\mathfrak{h}} = \widetilde{\mathfrak{d}}\mathfrak{h}\widetilde{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}\widetilde{\mathfrak{h}}\widetilde{\mathfrak{d}}.$$

Como $\Omega(x)$ es un dominio íntegro, esto implica que $\mathfrak{d}\widetilde{\mathfrak{h}} = \widetilde{\mathfrak{h}}\widetilde{\mathfrak{d}}$. Luego $\mathfrak{d}$ es una conjugación de Darboux de $\widetilde{\mathfrak{d}}$. □

Proposición 4.17. *Sea $\mathfrak{d}$ un operador diferencial excepcional tal que es una conjugación de Darboux de $\widetilde{\mathfrak{d}}$. Si $\mathfrak{h}\widetilde{\mathfrak{d}} = \mathfrak{d}\mathfrak{h}$ con $\mathfrak{h} \in \Omega[x]$ (los coeficientes de $\mathfrak{h}$ sean polinomios). Entonces $\widetilde{\mathfrak{d}}$ es excepcional.*

Demostración. Para todo n, salvo una cantidad finita, existe un polinomio $p(x, n)$ de grado n que es autofunción de $\mathfrak{d}$. Esto implica que $p(x, n) \cdot \mathfrak{h}$ es un polinomio autofunción de $\widetilde{\mathfrak{d}}$. Como los coeficientes de $\mathfrak{h}$ son polimonios e existe un entero $m \in \mathbb{Z}$ tal que el grado de $p(x, n) \cdot \mathfrak{h}$ es $n + m$, salvo finitos n's. Consecuentemente $\widetilde{\mathfrak{d}}$ es excepcional. □

Definición 4.18. Diremos que un operador diferencial $\mathfrak{d} \in \Omega(x)$ preserva el grado de filtración si para todo polinomio $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ la función $p(x) \cdot \mathfrak{d}$ es un polinomio de grado a lo sumo el grado de $p(x)$.

Algo interesante de los operadores diferenciales excepcionales es que los operadores excepcionales de órdenes bajos siempre vienen de una conjugación de Darboux de algún operador diferencial que preserva el grado de filtración. Para orden 0 y 1, puede mostrarse que los operadores diferenciales excepcionales de orden 0 y 1 son necesariamente preservadores del grado de filtración. Sin embargo para orden 2 este resultado requiere un cálculo mucho mas significativo que se puede encontrar en [7].

Teorema 4.19. . *Si $\mathfrak{d}$ es un operador diferencial excepcional de orden 2, luego $\mathfrak{d}$ es una conjugación de Darboux de un operador diferencial que preserva el grado de filtración.*

Capítulo 5

Transformación biespectral de Darboux de pesos matriciales

5.1. W-adjunta de álgebras de operadores diferenciales matriciales y operadores shift

En lo que sigue nos restringiremos al siguiente contexto biespectral.

Específicamente consideraremos el contexto biespectral $(M_N(\mathcal{S}), M_N(\Omega[x])^{op}, \mathcal{P})$ donde $\mathcal{P}$ es el conjunto de todas las funciones $P : \mathbb{C} \times \mathbb{N}_0 \to M_N(\mathbb{C})$ tales que para cada n fijo, $P(x, n)$ es una función racional a valores matriciales en la variable x. Equivalentemente, $\mathcal{P}$ es el conjunto de todas las sucesiones semi-infinitas de funciones racionales matriciales. El álgebra $M_N(\Omega[x])^{op}$ es el álgebra de operadores diferenciales matriciales, actuando a derecha. La subálgebra multiplicativa $\mathcal{M}(M_N(\Omega[x])^{op})$ es $M_N(\mathbb{C})[x]$. El álgebra $\mathcal{S}$ es el conjunto de los operadores discretos en la variable n y la subálgebra multiplicativa $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ de $\mathcal{S}$ consiste de todas las funciones $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$. Mas explícitamente $\mathcal{S}$ es el conjunto de los operadores $\mathscr{M}$ de la forma

$$\mathscr{M} = \sum_{j=0}^{k} a_j(n)\mathscr{D}^j + \sum_{j=1}^{\ell} b_j(n)(\mathscr{D}^*)^j,$$

con $a_j, b_j : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$ y $\mathscr{D}, \mathscr{D}^*$ son los operadores que actúan en sucesiones de la siguiente manera

$$(\mathscr{D} \cdot a)(n) = a(n+1), \quad \text{y} \quad (\mathscr{D}^* \cdot a)(n) = \begin{cases} a(n-1), & n \neq 0, \\ 0 \quad , & n = 0. \end{cases}$$

Comentario 5.1. El operador $\mathscr{D}^*$ es la adjunta del operador $\mathscr{D}$ en el espacio de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N}_0)$, eso explica la notación. Más aún, $\mathscr{D}\mathscr{D}^* = 1$ entonces $\mathscr{D}^*$ es una inversa a derecha de $\mathscr{D}$. Sin embargo $\mathscr{D}^*\mathscr{D} = 1 - \delta_{0n}$ (con $\delta_{0n}a(n) = 0$ si $n \neq 0$, $\delta_{0n}a(n) = 1$ si $n = 0$), entonces $\mathscr{D}^*$ no es del todo la inversa a izquierda de $\mathscr{D}$.

Comentario 5.2. Para nosotros, las sucesiónes estarán siempre indexadas sobre $\mathbb{N}_0$. Con esto en mente, siempre tomaremos el valor de la sucesión para enteros negativos como 0, a menos que se indique lo contrario. Además, n será tratada como una indeterminada.

Sea $W(x)$ un peso matricial y sea $P(x, n)$ su respectiva sucesión de polinomios ortogonales mónicos. La relación de recurrencia de tres términos de $P(x, n)$, dada en (2.2) nos dice que existe $\mathscr{L} \in M_N(\mathcal{S})$ de la forma

$$\mathscr{L} = \mathscr{D} + A(n) + B(n)\mathscr{D}^*$$

tal que

$$\mathscr{L} \cdot P(x,n) = P(x,n)\,x,$$

Así, si $\mathcal{D}(W)$ contiene un operador diferencial $\mathfrak{D}$ de orden positivo, luego $P(x,n)$ será biespectral con respecto a este contexto biespectral.

Como probamos en el Corolario 3.5, la álgebra $\mathcal{D}(W)$ es cerrada bajo la aplicación W-adjunta $\dagger$. Como las álgebras biespectrales a izquierda y derecha de P son isomorfas, la involución $\dagger$ de $\mathcal{B}_R(P)$ induce una involución en $\mathcal{B}_L(P)$. Más aún, la involución $\dagger$ es en realidad la restricción de una involución de un álgebra aún más grande. En efecto, la álgebra de Fourier a derecha $\mathcal{F}_R(P)$ es cerrada bajo $\dagger$. Así $\mathcal{F}_L(P)$ es cerrada bajo la involución inducida por el mapa generalizado de Fourier. Para probar esto, primero describiremos la involución inducida.

Notemos en primer lugar que $M_N(\mathcal{S})$ tiene una operación natural $*$ que extiende la conjugación Hermitiana de las matrices y manda $\mathscr{D}$ a $\mathscr{D}^*$ y viceversa. Más específicamente, está definido por

$$\left(\sum_{j=0}^{\ell} A_j(n)\mathscr{D}^j + \sum_{j=1}^{m} B_j(n)(\mathscr{D}^*)^j\right)^* := \sum_{j=0}^{\ell} A_j(n-j)^*(\mathscr{D}^*)^j + \sum_{j=1}^{m} B_j(n+j)^*\mathscr{D}^j$$

Con esto en mente, definiremos la W-adjunta en $M_N(\mathcal{S})$.

Definición 5.3. La W-adjunta de un operador shift $\mathscr{M} \in M_N(\mathcal{S})$ está definida por

$$\mathscr{M}^\dagger := \|P(x,n)\|_W^2 \mathscr{M}^* \|P(x,n)\|_W^{-2},$$

donde $\|P(x,n)\|_W^2 = \langle P(x,n), P(x,n)\rangle_W$ es la sucesión de matrices Hermitianas en $M_N(\mathbb{C})$ definida por la W-norma de la sucesión de los polinomios ortogonales mónicos del peso matricial $W(x)$.

El siguiente lema muestra que esta operación adjunta se comporta bien con respecto al producto interno definido por el peso matricial $W(x)$.

Dado $\mathscr{M} \in M_N(\mathcal{S})$, si es necesario escribiremos $\mathscr{M} = \mathscr{M}_n$ para enfatizar que el operador shift está actuando en el lugar n de la variable discreta.

Lema 5.4. *Sea $P(x,n)$, la sucesión de polinomios ortogonales mónicos asociada a un peso W. Sea $\mathscr{M} \in M_N(\mathcal{S})$. Entonces*

$$\langle \mathscr{M}_n \cdot P(x,n), P(x,m)\rangle_W = \langle P(x,n), \mathscr{M}_m^\dagger \cdot P(x,m)\rangle_W.$$

Demostración. Por linealidad, es suficiente con ver que la identidad de arriba es válida para $\mathscr{M}_n = A(n)\mathscr{D}^\ell$ y para $\mathscr{M}_n = A(n)(\mathscr{D}^*)^\ell$, donde $A(n)$ es una sucesión de matrices, y ℓ un entero no negativo.

Supongamos que $\mathscr{M}_n = A(n)\mathscr{D}^\ell$, entonces $\mathscr{M}_n^* = A(n-\ell)^*(\mathscr{D}^*)^\ell$ y en consecuencia

$$\mathscr{M}_n^\dagger = \|P(x,n)\|_W^2 A(n-\ell)^* \|P(x,n-\ell)\|_W^{-2} (\mathscr{D}^*)^\ell.$$

Calculamos

$$\begin{aligned}
\langle \mathscr{M}_n \cdot P(x,n), P(x,m)\rangle_W &= \langle A(n) \cdot P(x,n+\ell), P(x,m)\rangle_W \\
&= A(n)\|P(x,m)\|_W^2 \delta_{n+\ell,n} \\
&= \|P(x,n)\|_W^2 \|P(x,m-\ell)\|_W^{-2} A(m-\ell) \|P(x,m)\|_W^2 \delta_{n,m-l} \\
&= \langle P(x,n), \|P(x,m)\|_W^2 A(m-\ell)^* \|P(x,m-\ell)\|_W^{-2} \cdot P(x,m-\ell)\rangle_W \\
&= \langle P(x,n), \mathscr{M}_m^\dagger \cdot P(x,m)\rangle_W.
\end{aligned}$$

El segundo caso sale de manera análoga y asi completamos la demostración del lema. $\square$

5.2. Las álgebras de Fourier de los polinomios ortogonales matriciales

Queremos describir las álgebras de Fourier a izquierda y derecha de P. El siguiente teorema describe las correspondientes álgebras de Fourier en este caso. Para probarlo, primero necesitaremos de un lema para caracterizar los operadores diferenciales contenidos en el álgebra de los endomorfismos $M_N(\mathbb{C})$-lineales a izquierda de $M_N(\mathbb{C}[x])$.

Para cada par de elementos a, b de un álgebra $\mathcal{A}$, denotamos

$$Ad_a(b) := ab - ba \quad \text{y} \quad Ad_a^{k+1}(b) := Ad_a^k(Ad_a(b)).$$

Lema 5.5. *Supongamos que* $\Phi : M_N(\mathbb{C})[x] \to M_N(\mathbb{C})[x]$ *es un* $M_N(\mathbb{C})$*-endomorfismo a izquierda. Si* $Ad_{xI}^{\ell+1}(\Phi) = 0$ *para algún entero* $\ell \geq 0$ *luego existe un operador diferencial* $\mathfrak{D} \in M_N(\Omega[x])$ *de orden a lo sumo* ℓ *tal que* $\Phi(P(x)) = P(x) \cdot \mathfrak{D}$ *para todo* $P \in M_N(\mathbb{C})[x]$.

Demostración. Recordemos que un $M_N(\mathbb{C})[x]$-endomorfismo a izquierda de $M_N(\mathbb{C})[x]$ es de la forma $P(x) \mapsto P(x)A(x)$ para alguna función $A(x) \in M_N(\mathbb{C})[x]$.

Procedemos por inducción en ℓ. Si $\ell = 0$, entonces

$$x\Phi(P(x)) - \Phi(xP(x)) = Ad_{xI}(\Phi) = 0,$$

entonces $\Phi(xP(x)) = x\Phi(P(x))$ para todo $P \in M_N(\mathbb{C})[x]$. Como Φ es un $M_N(\mathbb{C})$-endomorfismo a izquierda de $M_N(\mathbb{C})[x]$ se sigue que Φ es un $M_N(\mathbb{C})[x]$-endomorfismo a izquierda de $M_N(\mathbb{C})[x]$, luego $\Phi(P(x)) = P(x)A(x)$ para todo $P(x) \in M_N(\mathbb{C})[x]$, $\mathfrak{D} = A(x)$ es un operador diferencial de orden 0 que cumple con lo que establece el lema, luego vale para $\ell = 0$.

Supongamos por hipótesis inductiva que lo que establece el lema es válido para todo $\ell \leq m$. Ahora supongamos que $Ad_{xI}^{m+1}(\Phi) = 0$. Luego $Ad_{xI}(\Phi)$ es un M_N-endomorfismo de $M_N(\mathbb{C})[x]$ con $Ad_{xI}^m(Ad_{xI}(\Phi)) = 0$. Luego por hipótesis inductiva existe un operador diferencial $\mathfrak{D} \in M_N(\Omega[x])$ de orden a lo sumo m tal que

$$Ad_{xI}(\Phi)(P(x)) = P(x) \cdot \mathfrak{D}$$

para todo $P \in M_N(\mathbb{C})[x]$. Escribimos $\mathfrak{D} = \sum_{j=0}^m \partial^j A_j(x)$ y definimos un nuevo $M_N(\mathbb{C})$-endomorfismo Ψ de $M_N(\mathbb{C})[x]$ dado por

$$\Psi(P(x)) = \Phi(P(x)) - \left(P(x) \cdot \sum_{j=0}^m \partial^{j+1} \frac{1}{j+1} A_j(x) \right).$$

Calculamos

$$Ad_{xI}(\Psi)(P(x)) = \Psi(xP(x)) - x\Psi(P(x)) = Ad_{xI}(\Psi)(P(x)) - P(x) \cdot \sum_{j=0}^m \partial^j A_j(x) = 0.$$

Luego existe una función $A(x) \in M_N(\mathbb{C})[x]$ tal que $\Psi(P(x)) = P(x)A(x)$ para todo $P(x) \in M_N(\mathbb{C})[x]$. Así, para todo $P(x)$ tenemos

$$\Phi(P(x)) = P(x) \cdot \left(\sum_{j=0}^m \partial^{j+1} \frac{1}{j+1} A_j(x) + A(x) \right).$$

Hemos obtenido el operador diferencial de orden a lo sumo $m+1$ buscado, luego por inducción queda probado el lema. $\square$

Recordemos que para nuestro contexto biespectral $(M_N(\mathcal{S}), M_N(\Omega[x])^{op}, \mathcal{P})$, dado un peso W y $P(x,n)$ su respectiva sucesión de polinomios ortogonales matriciales mónicos, si existe $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}(W)$, tomando $\mathscr{L}$ el operador discreto de la relación de recurrencia de tres términos, entonces tenemos que $(\mathscr{L}, \mathfrak{D}, P)$ es una terna biespectral. La sucesión $P(x,n)$ resulta biespectral respecto en este contexto y las álgebras de Fourier están dadas por

$$\mathcal{F}_L(P) = \{\mathscr{M} \in M_N(\mathcal{S}) \,:\, \exists \mathfrak{D} \in M_N(\Omega[x]) \text{ tal que } \mathscr{M} \cdot P(x,n) = P(x,n) \cdot \mathfrak{D}\},$$
$$\mathcal{F}_R(P) = \{\mathfrak{D} \in M_N(\Omega[x])^{op} \,:\, \exists \mathscr{M} \in M_N(\mathcal{S}) \text{ tal que } P(x,n) \cdot \mathfrak{D} = \mathscr{M} \cdot P(x,n)\}.$$

$$\mathcal{B}_L(P) = \{\mathscr{M} \in M_N(\mathcal{S}) \,:\, \exists A(x) \in M_N(\mathbb{C})[x] \text{ tal que } \mathscr{M} \cdot P(x,n) = P(x,n) \cdot A(x)\},$$
$$\mathcal{B}_R(P) = \{\mathfrak{D} \in M_N(\Omega[x])^{op} \,:\, \exists A : \mathbb{N}_0 \to M_N(\mathbb{C}) \text{ tal que } P(x,n) \cdot \mathfrak{D} = A(n) \cdot P(x,n)\}.$$

Teorema 5.6. *Sea $W(x)$ un peso matricial y sea $P(x,n)$ la sucesión de polinomios matriciales ortogonales mónicos asociada a $W(x)$, y sea $\mathscr{L} \in M_N(\mathcal{S})$ con $\mathscr{L} \cdot P(x,n) = P(x,n)x$. Luego las álgebras de Fourier de $P(x,n)$ están dadas por*

$$\mathcal{F}_L(P) = \{\mathscr{M} \in M_N(\mathcal{S}) \,:\, Ad_{\mathscr{L}}^{k+1}(\mathscr{M}) = 0 \textit{ para algún } k \geq 0\},$$
$$\mathcal{F}_R(P) = \{\mathfrak{D} \in M_N(\Omega[x])^{op} \,:\, \mathfrak{D} \textit{ es } W\textit{-adjuntable y } \mathfrak{D}^\dagger \in M_N(\Omega[x])\}.$$

Demostración. Primero probaremos la igualdad de $\mathcal{F}_L(P)$.

Si $\mathscr{M} \in \mathcal{F}_L(P)$, luego $\mathscr{M} \cdot P(x,n) = P(x,n) \cdot \mathfrak{D}$. Si $\mathfrak{D}$ tiene orden ℓ, luego como vimos en las cuentas de la demostración del Teorema 2.19 tendremos que $Ad_{xI}^{\ell+1}(\mathfrak{D}) = 0$. Aplicando el mapa generalizado de Fourier, esto implica que $Ad_{\mathscr{L}}^{\ell+1}(\mathscr{M}) = 0$. Así tenemos que vale la contención

$$\mathcal{F}_L(P) \subset \{\mathscr{M} \in M_N(\mathcal{S}) \,:\, Ad_{\mathscr{L}}^{k+1}(\mathscr{M}) = 0 \text{ para algún } k \geq 0\}.$$

Veamos la otra contención. Supongamos que $\mathscr{M} \in M_N(\mathcal{S})$ con $Ad_{\mathscr{L}}^{\ell+1}(\mathscr{M}) = 0$ para algún entero ℓ. Consideremos el $M_N(\mathbb{C})$-endomorfismo a izquierda Φ de $M_N(\mathbb{C})[x]$ inducido por

$$\Phi : P(x,n) \mapsto \mathscr{M} \cdot P(x,n).$$

Para cada $Q(x) \in M_N(\mathbb{C})[x]$, escribimos $Q(x) \cdot \Phi$ para denotar $\Phi(Q)(x)$. Luego para todo n tenemos

$$P(x,n) \cdot Ad_{xI}^{\ell+1}(\Phi) = Ad_{\mathscr{L}}^{\ell+1}(\mathscr{M}) \cdot P(x,n).$$

En consecuencia $Ad_{xI}^{\ell+1}(\Phi) = 0$ y por el lema previo tenemos que

$$\mathscr{M} \cdot P(x,n) = \Phi(P(x,n)) = P(x,n) \cdot \mathfrak{D},$$

para algún operador diferencial $\mathfrak{D} \in M_N(\Omega[x])$ para todo n. En particular $\mathscr{M} \in \mathcal{F}_L(P)$. Esto prueba la otra contención, luego vale

$$\mathcal{F}_L(P) = \{\mathscr{M} \in M_N(\mathcal{S}) \,:\, Ad_{\mathscr{L}}^{k+1}(\mathscr{M}) = 0 \text{ para algún } k \geq 0\}.$$

Veamos ahora la igualdad para $\mathcal{F}_R(P)$. Sea $\mathfrak{D} \in M_N(\Omega[x])$ W-adjuntable con $\mathfrak{D}^\dagger \in M_N(\Omega[x])$. Luego podemos escribir

$$\mathfrak{D} = \sum_{i=0}^{\ell} \partial^i A_i(x), \text{ y } \mathfrak{D}^\dagger = \sum_{i=0}^{\ell} \partial^i B_i(x)$$

para ciertos polinomios $A_i(x), B_i(x) \in M_N(\mathbb{C})[x]$. Sea m el grado máximo de todos los grados de estos polinomios. Luego podemos escribir

$$P(x,n) \cdot \mathfrak{D} = \sum_{j=0}^{n+m} C(n,j) P(x,n)$$

para ciertas matrices $C(n,j) \in M_N(\mathbb{C})$, definidas por

$$C(n,j) = \langle P(x,n) \cdot \mathfrak{D}, P(x,j)\rangle_W \|P(x,j)\|_W^{-2}.$$

Luego usando la W-adjuntabilidad, vemos que

$$C(n,j) = \langle P(x,n), P(x,j) \cdot \mathfrak{D}^\dagger\rangle_W \|P(x,j)\|_W^{-2}$$

y por lo tanto $C(n,j)$ es cero si $n-j > m$. Así

$$P(x,n) \cdot \mathfrak{D} = \sum_{j=n-m}^{n+m} C(n,j)P(x,j) = \mathscr{M} \cdot P(x,n)$$

para

$$\mathscr{M} = \sum_{j=0}^{m} C(n,n+j)\mathscr{D}^j + \sum_{j=1}^{m} C(n,n-j)(\mathscr{D}^*)^j.$$

Por lo tanto $\mathfrak{D} \in \mathcal{F}_R(P)$. Más aún, como $Ad_x^{\ell+1}(\mathfrak{D}) = 0$ sabemos que $Ad_{\mathscr{L}}^{\ell+1}(\mathscr{M}) = 0$. Esto prueba

$$\mathcal{F}_R(P) \supset \{\mathfrak{D} \in M_N(\Omega[x])^{op} \,:\, \mathfrak{D} \text{ es } W\text{-adjuntable y } \mathfrak{D}^\dagger \in M_N(\Omega[x])\}.$$

Ahora supongamos $\mathfrak{D} \in \mathcal{F}_R(P)$. Luego exite $\mathscr{M} \in M_N(\mathcal{S})$ tal que $\mathscr{M} \cdot P(x,n) = P(x,n) \cdot \mathfrak{D}$. Luego $Ad_{\mathscr{L}}^{\ell+1}(\mathscr{M}) = 0$ para ℓ el orden de $\mathfrak{D}$. Como xI es †-simétrico, luego también lo es $\mathscr{L}$. Se sigue que $Ad_{\mathscr{L}}^{\ell+1}(\mathscr{M}^\dagger) = 0$ y por lo tanto $\mathscr{M}^\dagger \cdot P(x,n) = P(x,n) \cdot \widetilde{\mathfrak{D}}$ para algún operador $\widetilde{\mathfrak{D}} \in \mathcal{F}_R(P)$. Notar que por el lema previo para todo $m \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}\langle P(x,n) \cdot \mathfrak{D}, P(x,m)\rangle_W &= \langle \mathscr{M}_n \cdot P(x,n), P(x,m)\rangle_W \\ &= \langle P(x,n), \mathscr{M}_m^\dagger \cdot P(x,m)\rangle_W \\ &= \langle P(x,n), P(x,m) \cdot \widetilde{\mathfrak{D}}\rangle_W.\end{aligned}$$

Esto implica que $\langle P \cdot \mathfrak{D}, Q\rangle_W = \langle P, Q \cdot \widetilde{\mathfrak{D}}\rangle_W$ para todo polinomio $P, Q \in M_N(\mathbb{C})[x]$, por lo tanto $\mathfrak{D}$ es W-adjuntable y $\mathfrak{D}^\dagger = \widetilde{\mathfrak{D}} \in M_N(\Omega[x])$. Esto prueba

$$\mathcal{F}_R(P) = \{\mathfrak{D} \in M_N(\Omega[x])^{op} \,:\, \mathfrak{D} \text{ es } W\text{-adjuntable y } \mathfrak{D}^\dagger \in M_N(\Omega[x])\}.$$

□

Corolario 5.7. *Sea $W(x)$ un peso matricial y $P(x,n)$ la sucesión de polinomios matriciales ortogonales mónicos asociada. Las álgebras de Fourier a izquierda y derecha $\mathcal{F}_L(P)$ y $\mathcal{F}_R(P)$ son cerradas bajo †. Por lo tanto para todo $\mathscr{M} \in \mathcal{F}_L(P)$ tenemos que $b_p(\mathscr{M}^\dagger) = b_p(\mathscr{M})^\dagger$.*

Demostración. Es claro por lo que establece el teorema anterior que $\mathcal{F}_R(P)$ es cerrada bajo †. Mostramos en la prueba del teorema anterior que si $b_p(\mathscr{M}) = \mathfrak{D}$, entonces $b_p(\mathscr{M}^\dagger) = \mathfrak{D}^\dagger$. Luego vale $b_p(\mathscr{M}^\dagger) = b_p(\mathscr{M})^\dagger$. Como b_p es un isomorfismo, esto implica que $\mathcal{F}_L(P)$ es también cerrada bajo †. □

Definición 5.8. Sean $W(x)$ y $\widetilde{W}(x)$ pesos matriciales y sean $P(x,n)$ y $\widetilde{P}(x,n)$ sus respectivas sucesiones de polinomios ortogonales matriciales mónicos. Diremos que $\widetilde{P}(x,n)$ es una transformación biespectral de Darboux de $P(x,n)$ si existen operadores diferenciales $\mathfrak{T}, \widetilde{\mathfrak{T}} \in \mathcal{F}_R(P)$, polinomios $F(x), \widetilde{F}(x)$ y sucesiones de matrices $C(n), \widetilde{C}(n)$ que son no singulares para casi todo n y tales que

$$C(n)\widetilde{P}(x,n) = P(x,n) \cdot \mathfrak{T}F^{-1}(x) \text{ y } \widetilde{C}(n)P(x,n) = \widetilde{P}(x,n) \cdot \widetilde{F}^{-1}(x)\widetilde{\mathfrak{T}}. \tag{5.1}$$

Diremos que $\widetilde{W}(x)$ es una transformación biespectral de Darboux de $W(x)$ si $\widetilde{P}(x,n)$ es una transformación biespectral de Darboux de $P(x,n)$.

Comentario 5.9. No pediremos que $C(n), \widetilde{C}(n)$ sean no singulares para todo n, porque de hacerlo podríamos eliminar algunas transformaciones biespectrales de Darboux muy importantes, incluyendo algunas triviales. En particular la anulación de $C(n)$ o $\widetilde{C}(n)$ se corresponden con los "polos"de los autovalores, que ocurren naturalmente. Por ejemplo, deberíamos esperar que cualquier $\mathfrak{T}, \widetilde{\mathfrak{T}} \in \mathcal{B}_R(P)$ que no sean divisores de cero definan una transformación biespectral de Darboux de P en sí mismo. Sin embargo, si pedimos que $C(n), \widetilde{C}(n)$ no tengan polos luego esta transformación trivial deberá ser descartada. Esta es una característica del caso biespectral discreto, que no aparece en el caso continuo, ya que en este último tratamos con autovalores meromorfos que ya pueden tener polos.

El siguiente ejemplo muestra como uno puede usar la transformación biespectral de Darboux para disminuir el grado mínimo distinto de cero de un elemento en $\mathcal{D}(W)$ incrementando artificialmente el tamaño del peso $W(x)$.

Ejemplo 5.10. Podemos usar la transformación biespectral de Darboux para crear artificialmente un nuevo peso w para el cual el álgebra $\mathcal{D}(w)$ contiene un operador diferencial de menor orden pagando el precio de aumentar el tamaño del peso como en el siguiente procedimiento. Sean $W(x)$ y $\widetilde{W}(x)$ pesos matriciales de tamaño $N \times N$ que son uno transformación biespectral de Darboux del otro. Denotamos por $P(x,n)$ y $\widetilde{P}(x,n)$ sus respectivas sucesiónes de polinomios matriciales ortogonales mónicos. Así

$$\widetilde{P} = p^{-1} \cdot P \cdot \mathfrak{d} q^{-1} \text{ y } P = \widetilde{p}^{-1} \cdot \widetilde{P} \cdot \widetilde{q}^{-1} \widetilde{\mathfrak{d}},$$

para ciertos $\mathfrak{d}, \widetilde{\mathfrak{d}} \in \mathcal{F}_R(P)$ y ciertas funciones $q, \widetilde{q} \in \mathcal{F}_R(P)$, $p, \widetilde{p} \in \mathcal{F}_L(P)$.

De aquí obtenemos que las dos sucesiónes son autofunciones de operadores diferenciales de orden $\operatorname{ord}(\mathfrak{d}) + \operatorname{ord}(\widetilde{\mathfrak{d}})$. Pues

$$P \cdot (\mathfrak{d} q^{-1} \widetilde{q}^{-1} \widetilde{\mathfrak{d}}) = p\widetilde{p} \cdot P \;\text{ y }\; \widetilde{p}p \cdot \widetilde{P} = \widetilde{P} \cdot (\widetilde{q}^{-1} \widetilde{\mathfrak{d}} \mathfrak{d} q^{-1}).$$

Ahora, si creamos el siguiente peso diagonal a bloques $w(x) = \begin{pmatrix} W(x) & 0 \\ 0 & \widetilde{W}(x) \end{pmatrix}$, tenemos que $p(x,n) = \begin{pmatrix} P(x,n) & 0 \\ 0 & \widetilde{P}(x,n) \end{pmatrix}$ es la sucesión de polinomios ortogonales mónicos asociada a $w(x)$, y se cumple que es autofunción del operador diferencial

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{d} q^{-1} \\ \widetilde{q}^{-1} \widetilde{\mathfrak{d}} & 0 \end{pmatrix}$$

que es de orden $\max\{\operatorname{ord}(\mathfrak{d}), \operatorname{ord}(\widetilde{\mathfrak{d}})\}$ y se satisface

$$\begin{pmatrix} 0 & p \\ \widetilde{p} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P(x,n) & 0 \\ 0 & \widetilde{P}(x,n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(x,n) & 0 \\ 0 & \widetilde{P}(x,n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{d} q^{-1} \\ \widetilde{q}^{-1} \widetilde{\mathfrak{d}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Capítulo 6

Soluciones no triviales al Problema Matricial de Bochner

Como mencionamos en la Introducción, el Problema Matricial de Bochner plantea la siguiente pregunta: para qué pesos matriciales W de tamaño N, existe un operador diferencial $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}(W)$ de orden 2.

Para el caso $N = 1$, es decir, para el caso en que el peso sea escalar, el problema fue resuelto por Bochner. Salvo cambios de coordenadas afines, las únicas familias de pesos escalares w que cumplen tener un operador diferencial $\mathfrak{d}$ de orden 2 en $\mathcal{D}(w)$ son las familias de Hermite, Jacobi y Laguerre.

El peso escalar de Hermite.

Está dado por

$$w(x) = e^{-x^2}.$$

El operador diferencial de segundo orden en $\mathcal{D}(w)$ es

$$\mathfrak{d} = \partial^2 + \partial(-2x).$$

Su sucesión de polinomios ortogonales mónicos está dada por

$$p(x,n) = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

La sucesión de autovalores de $\mathfrak{d}$ es

$$\Lambda_n(\mathfrak{d}) = -2n.$$

El peso escalar de Jacobi.

Está dado por

$$w(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} 1_{(-1,1)}(x), \qquad \alpha, \beta > -1.$$

Una sucesión de polinomios ortogonales está dada por

$$p^{(\alpha,\beta)}(x,n) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n}\left((1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right).$$

El operador diferencial de segundo orden en $\mathcal{D}(w)$ es

$$\mathfrak{d} = \partial^2(1-x^2) + \partial(\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)x).$$

La sucesión de autovalores de $\mathfrak{d}$ es

$$\Lambda_n(\mathfrak{d}) = -n^2 - (\alpha+\beta+1)n.$$

El peso escalar de Laguerre

El peso escalar de Laguerre es

$$w(x) = x^{\alpha} e^{-x} 1_{(0,\infty)}(x) \qquad \alpha > -1.$$

Su sucesión de polinomios ortogonales mónicos es

$$p_{\alpha}(x,n) = (-1)^n x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x} x^{n+\alpha}).$$

El operador diferencial de segundo orden en $\mathcal{D}(w)$ es

$$\mathfrak{d} = \partial^2 x + \partial(\alpha + 1 - x).$$

y la sucesión de autovalores de $\mathfrak{d}$ es $\Lambda_n(\mathfrak{d}) = -n$.

Ecuaciones de simetría

Para $N > 1$, queremos construir nuevos pesos, no triviales, que sean solución al problema matricial de Bochner partiendo de suma directa de pesos clásicos.

Definición 6.1. Dados $W, \widetilde{W}$ pesos matriciales de tamaño N, decimos que $\widetilde{W}$ es equivalente o similar a W si existe una matriz constante $M \in M_N(\mathbb{C})$ no singular tal que $\widetilde{W} = MWM^*$.

En este caso, si $\{P(x,n)\}$ es la sucesión de polinomios ortogonales matriciales mónicos asociada a W, entonces $\{MP(x,n)M^{-1}\}$ es la sucesión de polinomios ortogonales matriciales mónicos asociada a $\widetilde{W}$.

Además, si $\mathfrak{D}$ es un operador simétrico en $\mathcal{D}(W)$, entonces $M\mathfrak{D}M^{-1}$ es un operador simétrico en $\mathcal{D}(\widetilde{W})$.

Definición 6.2. Un peso matricial W se dice reducible si existe una matriz constante no singular $A \in M_N(\mathbb{C})$ tal que $AW(x)A^*$ es suma directa de pesos matriciales de tamaño más pequeño.

Se prueba en [13] que un peso matricial $W(x)$ es reducible si y sólo si $\mathcal{D}(W)$ contiene una matriz constante idempotente distinta de I y 0.

Comentario 6.3. Sea W un peso matricial, supongamos $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}(W)$ de orden m. Entonces $\widetilde{\mathfrak{D}} := \mathfrak{D} + \mathfrak{D}^{\dagger} \in \mathcal{D}(W)$ cumple que tiene orden m, y es simétrico.

En particular $\mathcal{D}(W)$ tiene algún operador de orden 2 si y sólo si tiene algún operador simétrico de orden 2.

Teorema 6.4. *([5] y [11]) Sea W un peso matricial. Sea $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}(W)$ de la forma*

$$\mathfrak{D} = \partial^2 F_2(x) + \partial F_1(x) + F_0(x)$$

con $F_i \in M_N(\mathbb{C})[x]$ y $gr(F_i) \leq i$ para $i = 0, 1, 2$. Entonces $\mathfrak{D}$ es un operador diferencial simétrico de segundo orden si y sólo si cumple las siguientes condiciones de simetría

a) $F_2 W = W F_2^*$.

b) $F_1 W = 2(W F_2^*)' - W F_1^*$.

c) $F_0 W = (W F_2^*)'' - (W F_1^*)' + W F_0^*$.

y las condiciones de borde

d) F_2W *y* $(F_2W)' - F_1W$ *se anulan al acercarse a los extremos del intervalo del soporte de* W.

Comentario 6.5. En este caso, $(W, \mathfrak{D})$ es una solución del Problema Matricial de Bochner.

Notar que las primeras tres condiciones se traducen en que $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^\dagger$, es decir a que el operador sea igual a su adjunta formal, mientras que la última condición implica que la adjunta formal de $\mathfrak{D}$ es una adjunta. Si se cumplen las condiciones de arriba, implica que W satisface la ecuación no conmutativa de Pearson

$$2(F_2W)' = WF_1^* + F_1W. \tag{6.1}$$

6.1. Transformación de Darboux de pares de Bochner

Definición 6.6. Definimos como par de Bochner a un par $(W, \mathfrak{D})$, donde W es un peso matricial y $\mathfrak{D}$ un operador simétrico de orden 2 en $\mathcal{D}(W)$.

Definición 6.7. Sea $(W, \mathfrak{D})$ un par de Bochner, y sea $\{P(x, n)\}$ la sucesión de polinomios matriciales mónicos ortogonales asociada a W. Decimos que un par de Bochner $(\widetilde{W}, \widetilde{\mathfrak{D}})$ es una transformación de Darboux del par de Bochner $(W, \mathfrak{D})$ si existen operadores diferenciales $\mathfrak{v}$ y $\mathfrak{n}$ tales que $\mathfrak{D} = \mathfrak{v}\mathfrak{n}$, $\widetilde{\mathfrak{D}} = \mathfrak{n}\mathfrak{v}$, y $\widetilde{P}(x, n) := P(x, n) \cdot \mathfrak{v}$ define una sucesión de polinomios ortogonales asociada a $\widetilde{W}$.

Comentario 6.8. La idea será crear nuevos pares de Bochner partiendo de alguno trivial $(W, \mathfrak{D})$ factorizando a $\mathfrak{D} = \mathfrak{v}\mathfrak{n}$. En principio no hay por qué esperar que cualquier factorización de $\mathfrak{D} = \mathfrak{v}\mathfrak{n}$ cumpla que al conmutarla nos genere un nuevo operador $\widetilde{\mathfrak{D}} = \mathfrak{n}\mathfrak{v}$ para el cual exista algun peso $\widetilde{W}$ con $\widetilde{\mathfrak{D}} \in \mathcal{D}(\widetilde{W})$. Por eso proporcionaremos un contexto específico donde las factorizaciones se hagan de manera más metódica para asegurar que como resultado obtengamos otro par de Bochner (en particular el nuevo par de Bochner será solución al Problema Matricial de Bochner).

Lema 6.9. *Sea* $W(x)$ *un peso matricial de tamaño* N *con soporte en* (x_0, x_1). *Sea*

$$\mathfrak{v} = \partial F_1(x) + F_0(x)$$

un operador diferencial matricial, con $F_1, F_0 \in M_N(\mathbb{C}[x])$. *Si* $F_1(x_i)W(x_i) = 0$ *para* $i = 0, 1$, *entonces* $\mathfrak{v}$ *tiene adjunta.*

Demostración. Para todo par de polinomios $P(x), Q(x) \in M_N(\mathbb{C})[x]$, integrando por partes obtenemos que

$$\langle P(x) \cdot \mathfrak{v}, Q(x) \rangle_W = P(x)F_1(x)W(x)Q(x)^*|_{x_0}^{x_1} + \langle P(x), Q(x) \cdot \mathfrak{v}^\dagger \rangle.$$

Entonces si $F_1(x_i)W(x_i) = 0$ para $i = 0, 1$ la adjunta formal $\mathfrak{v}^\dagger$ de $\mathfrak{v}$ es la adjunta. □

Teorema 6.10. *(Main Theorem Casper)[3]. Sea* $(W, \mathfrak{D})$ *un par de Bochner con soporte en* (x_0, x_1), *con* $\lim_{x \to x_i} (|x|^n + 1)W(x) = 0$ *para* $i = 0, 1$ *y* $n \geq 0$. *Sea*

$$\mathfrak{D} = \partial^2 a_2(x)I + \partial a_1(x) + a_0(x) \in \mathcal{D}(W),$$

preservador de grados. con $a_0(x), a_1(x)$ *polinomios matriciales tales que* $a_1(x)^\dagger = a_1(x)$, $a_2(x)$ *es un polinomio escalar que no se anula en* (x_0, x_1). *Supongamos también que existen polinomios matriciales* $v_0(x)$, $v_1(x)$ *que satisfagan lo siguiente*

- $gr(v_i) = i$, $det(v_i(x)) \neq 0$ *en* (x_0, x_1) *para* $i = 1, 0$ *y* $(v_0 v_1^{-1})^\dagger = v_0 v_1^{-1}$.

- $\int_{x_0}^{x_1} x^n a_2(x) v_1^{-1}(x) W(x)(v_1(x)^{-1})^* dx < \infty \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0$.
- $(v_0(x)v_1(x)^{-1})^2 a_2(x) + (v_0(x)v_1(x)^{-1})' a_2(x) + (v_0(x)v_1(x)^{-1}) a_1(x) + a_0(x) = 0$.

Entonces se cumple lo siguiente

a) *Existe una función suave a valores matriciales f definida en (x_0, x_1) que satisface $v_1 f(v_1 f)^\dagger = a_2 I$.*

b) *$\widetilde{W} = fWf^*$ es un peso matricial.*

c) *$\mathfrak{v} := \partial v_1(x) - v_0(x)$ y $\mathfrak{n} := -f(x)f^\dagger(x)\mathfrak{v}^\dagger$ son preservadores de grado y $\mathfrak{D} = \mathfrak{v}\mathfrak{n}$.*

d) *$\widetilde{P}(x, n) := P(x, n) \cdot \mathfrak{v}$ es una sucesión de polinomios ortogonales matriciales con respecto a $\widetilde{W}$.*

e) *$(\widetilde{W}, \widetilde{\mathfrak{D}})$ es un par de Bochner con $\widetilde{\mathfrak{D}} = \mathfrak{n}\mathfrak{v}$.*

Este teorema no es lo más general posible. La idea es descomponer al operador diferencial $\mathfrak{D}$ como $\mathfrak{D} = -\mathfrak{v} f f^\dagger \mathfrak{v}^\dagger$ tal que $\mathfrak{v}$ sea preservador de grado y W-adjuntable. Este teorema simplemente proporciona un contexto específico donde esto se cumple. Incluso más generalmente, con esta factorización uno puede encontrar una conjugación de Darboux entre los operadores $\mathfrak{D}$ y $\widetilde{\mathfrak{D}}$, se tiene que $\mathfrak{D}\mathfrak{v} = \mathfrak{v}\widetilde{\mathfrak{D}}$. Es también importante notar que la f del teorema no es única. Para encontrar tal f, escribimos a $W(x)$ como producto de dos funciones matriciales $u(x)u^*(x)$, lo cual puede hacerse por ser $W(x)$ Hermitiana. Luego $u^{-1}v_1^{-1}a_2(v_1^\dagger)^{-1}u$ es también Hermitiana, y luego puede escribirse como producto de funciones a valores matriciales hh^*. Luego tomando $f = uhu^{-1}$ completamos la construcción de nuestra f buscada.

Demostración. a) Notemos que como $\det(v_1(x)) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, la función $v_1(x)^{-1}$ está bien definida. Más aún, como $W(x)$ es suave y definida positiva en el soporte (x_0, x_1), podemos factorizar $W(x) = u(x)u(x)^*$ para cierta función suave $u(x)$ y de rango completo sobre (x_0, x_1). Luego, como $\mathfrak{D}$ es un operador W-simétrico, el coeficiente director a_2 es W-simétrico. Entonces $v_1^{-1}a_2(v_1^{-1})^\dagger$ es también W-simétrico, y en consecuencia $u^{-1}v_1^{-1}a_2(v_1^{-1})^\dagger u$ es suave y Hermitiana sobre (x_0, x_1). Luego podemos factorizarlo como

$$u^{-1}v_1^{-1}a_2(v_1^{-1})^\dagger u = hh^*$$

para cierta función suave h sobre (x_0, x_1). Tomamos $f = uhu^{-1}$, tenemos que

$$ff^\dagger = uhu^{-1}W(uhu^{-1})W^{-1} = uhh^*u^{-1} = v_1^{-1}a_2(v_1^{-1})^\dagger.$$

Luego hacemos $a_2 I = v_1 f f^\dagger v_1^\dagger = v_1 f(v_1 f)^\dagger$ y así vale a).

b) De la definición de f, tenemos que $|\det(f)|^2 = |\det(h)|^2 = |\det(v_1)|^{-2}a_2^4 \neq 0$ sobre (x_0, x_1). Por lo tanto $f(x)$ tiene rango completo para todo $x \in (x_0, x_1)$, y se sigue que $\widetilde{W}(x) = f(x)W(x)f(x)^*$ es definida positiva para todo $x \in (x_0, x_1)$. Más aún, $\widetilde{W}$ es suave sobre (x_0, x_1) ya que es el producto de tres funciones a valores matriciales suaves. Por lo tanto para probar que $\widetilde{W}(x)$ es un peso matricial, solo queda probar que $\widetilde{W}(x)$ tiene momentos finitos de todos los órdenes.

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_1} x^n \widetilde{W} dx &= \int_{x_0}^{x_1} x^n fWf^* dx = \int_{x_0}^{x_1} x^n uhu^{-1}uu^*(uh(u^{-1})^*)^* dx \\
&= \int_{x_0}^{x_1} x^n uhh^*(u^{-1})^* dx = \int_{x_0}^{x_1} x^n v_1^{-1}a_2(v_1^{-1})^\dagger W dx \\
&= \int_{x_0}^{x_1} x^n a_2 v_1^{-1} W(v_1^{-1})^* < \infty, \qquad \text{por hipótesis.}
\end{aligned}$$

Luego $\widetilde{W}$ tiene momentos finitos de todos los órdenes y resulta un peso matricial.

c) Calculamos

$$\begin{aligned}\mathfrak{n} &= -v_1^{-1}a_2(v_1^{-1})^\dagger \mathfrak{v}^\dagger = -v_1^{-1}a_2(\partial - v_0v_1^{-1})^\dagger \\ &= -v_1^{-1}a_2(-\partial - W'W^{-1} - (v_0v_1^{-1})^\dagger) \\ &= \partial v_1^{-1}a_2 + v_1^{-1}a_2W'W^{-1} + v_1^{-1}a_2(v_0v_1^{-1})^\dagger + (v_1^{-1}a_2)'.\end{aligned} \tag{6.2}$$

Luego, la ecuación no conmutativa de Pearson (6.1) nos dice que

$$(v_1^{-1}a_2)' = (v_1^{-1})'a_2 + v_1^{-1}\frac{1}{2}(a_1 + a_1^\dagger - v_1^{-1}a_2W'W^{-1}.$$

Substituyendo en (6.2) y simplificando, obtenemos

$$\mathfrak{n} = \partial v_1^{-1}a_2 - v_0^{-1}a_0 + v_0^{-1}[(v_0v_1^{-1})a_2(v_0v_1^{-1})^\dagger - (v_0v_1^{-1})^2a_2].$$

Luego usando el hecho de que $(v_0v_1^{-1})^\dagger = v_0v_1^{-1}$ el último sumando se cancela, y nos quedamos con

$$\mathfrak{n} = \partial v_1^{-1}a_2 - v_0^{-1}a_0.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathfrak{v}\mathfrak{n} &= (\partial v_1 - v_0)(\partial v_1^{-1}a_2 - v_0^{-1}a_0) \\ &= \partial^2 a_2 + \partial[(v_1)'v_1^{-1}a_2 - v_0v_1^{-1}a_2 - v_1v_0^{-1}a_0] + a_0 \\ &= \partial^2 a_2 + \partial[-(v_0v_1^{-1})^{-1}(v_0v_1^{-1})'a_2 - v_0v_1^{-1}a_2 - v_1v_0^{-1}a_0] + a_0 \\ &= \partial^2 a_2 + \partial[-(v_0v_1^{-1})^{-1}(v_0v_1^{-1})'a_2 + (v_0v_1^{-1})^2a_2 + a_0] + a_0 \\ &= \partial^2 a_2 + \partial a_1 + a_0 = \mathfrak{D}.\end{aligned}$$

Tenemos que $\mathfrak{v}$ es preservador de grado de filtración pues si no lo fuera, existiría un polinomio no nulo $Q(x) \in M_N(\mathbb{C})[x]$ con $Q(x)\cdot\mathfrak{v} = 0$. Como $\mathfrak{D}$ es preservador de grado. Entonces

$$\operatorname{gr}(Q(x)) = \operatorname{gr}(Q(x)\cdot\mathfrak{D}) = \operatorname{gr}(Q(x)\cdot\mathfrak{v}\mathfrak{n}) = \operatorname{gr}((Q(x)\cdot\mathfrak{v})\cdot\mathfrak{n}) = \operatorname{gr}(0) = -\infty.$$

Esto nos da una contradicción y por lo tanto $\mathfrak{v}$ es preservador de grado. Como $\mathfrak{D} = \mathfrak{v}\mathfrak{n}$ con $\mathfrak{D}$ y $\mathfrak{v}$ preservadores de grado, obtenemos que $\mathfrak{n}$ también preserva grados.

d) La suposición de que $\lim_{x\to x_i}(|x|^n+1)W(x) = 0$ implica que $\mathfrak{v}$ es W-adjuntable por el Lema 6,9. Además, notemos que

$$\begin{aligned}\langle P(x,m)\cdot\mathfrak{v}f, P(x,n)\cdot\mathfrak{v}f\rangle_W &= \int_{x_0}^{x_1} P(x,m)\cdot\mathfrak{v}f(x)W(x)(P(x,n)\cdot\mathfrak{v}f)^*dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} P(x,m)\cdot\mathfrak{v}W(x)(W(x)^{-1}f(x)W(x))(P(x,n)\cdot\mathfrak{v}f)^*dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} P(x,m)\cdot\mathfrak{v}W(x)(f^\dagger)^*(P(x,n)\cdot\mathfrak{v}f)^*dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} P(x,m)\cdot\mathfrak{v}W(x)(P(x,n)\cdot\mathfrak{v}ff^\dagger)^*dx \\ &= \langle P(x,m), P(x,n)\cdot\mathfrak{v}ff^\dagger\rangle_W.\end{aligned}$$

Usando esto, calculamos

$$\begin{aligned}\langle\widetilde{P}(x,m),\widetilde{P}(x,n)\rangle_{\widetilde{W}} &= \langle P(x,m)\cdot\mathfrak{v}, P(x,n)\cdot\mathfrak{v}\rangle_{\widetilde{W}} = \langle P(x,m)\cdot\mathfrak{v}f, P(x,n)\cdot\mathfrak{v}f\rangle_W \\ &= \langle P(x,m)\cdot\mathfrak{v}, P(x,n)\cdot\mathfrak{v}ff^\dagger\rangle_W = \langle P(x,m), P(x,n)\cdot\mathfrak{v}ff^\dagger\mathfrak{v}^\dagger\rangle_W \\ &= \langle P(x,m), P(x,n)\cdot(\mathfrak{v}\mathfrak{n})\rangle_W = \langle P(x,m), P(x,n)\cdot\mathfrak{D}\rangle_W.\end{aligned}$$

Como $\mathfrak{D}$ es preservador de grados, el cálculo de arriba implica que los polinomios $\widetilde{P}(x,n)$ forman una sucesión ortogonal respecto de $\widetilde{W}$.

e) Sabemos que $P(x,n)\cdot\mathfrak{D} = \Lambda_n P(x,n)$ para ciertos $\Lambda_n \in M_N(\mathbb{C})$, para todo $n \geq 0$. Calculamos

$$\widetilde{P}(x,n)\cdot\widetilde{\mathfrak{D}} = P(x,n)\cdot(\mathfrak{v}\mathfrak{n}\mathfrak{v}) = P(x,n)\cdot(\mathfrak{D}\mathfrak{n}) = \Lambda_n P(x,n)\cdot\mathfrak{v} = \Lambda_n \widetilde{P}(x,n).$$

Como $\widetilde{P}(x,n)$ es una sucesión ortogonal del peso $\widetilde{W}$, se sigue que $\widetilde{\mathfrak{D}} \in \mathcal{D}(\widetilde{W})$. Para completar la prueba, debemos ver que $\widetilde{\mathfrak{D}}$ es $\widetilde{W}$-simétrico. Como $\widetilde{\mathfrak{D}} \in \mathcal{D}(\widetilde{W})$, sabemos que $\widetilde{\mathfrak{D}}$ es $\widetilde{W}$-adjuntable, luego es suficiente con probar que $\widetilde{\mathfrak{D}}$ es formalmente $\widetilde{W}$-simétrica, es decir

$$\widetilde{W}(\widetilde{\mathfrak{D}})^*(\widetilde{W})^{-1} = \widetilde{\mathfrak{D}}.$$

Calculamos

$$\begin{aligned}
\widetilde{W}(\widetilde{\mathfrak{D}})^*(\widetilde{W})^{-1} &= fWf^*(ff^\dagger\mathfrak{v}^\dagger\mathfrak{v})^*(f^*)^{-1}W^{-1}f^{-1}\\
&= fWf^*\mathfrak{v}^*(\mathfrak{v}^\dagger)^*(f^\dagger)^*f^*(f^*)^{-1}W^{-1}f^{-1}\\
&= fWf^*\mathfrak{v}^*(\mathfrak{v}^\dagger)^*W^{-1}f^{-1} = fW(\mathfrak{v}f)^*(\mathfrak{v}f)^{\dagger *}W^{-1}f^{-1}\\
&= fW((\mathfrak{v}f)^\dagger(\mathfrak{v}f))^*W^{-1}f^{-1} = f((\mathfrak{v}f)^\dagger(\mathfrak{v}f))^\dagger f^{-1}\\
&= f(\mathfrak{v}f)^\dagger(\mathfrak{v}f)f^{-1} = ff^\dagger\mathfrak{v}^\dagger\mathfrak{v} = \widetilde{\mathfrak{D}}.
\end{aligned}$$

Esto completa la demostración del teoerema. □

Vamos a aplicar el teorema para dar algunos ejemplos explícitos. Primero observemos algo que será de ayuda para poder encontrar los polinomios v_0, v_1. Supongamos v_0, v_1 cumplen las hipótesis del teorema, luego $\tau(x) := a_2(x)v_0v_1(x)^{-1}$ será un polinomio Hermitiano de grado 1

$$\tau = \tau_1 x + \tau_0$$

que cumplirá la ecuación diferencial

$$\tau(x)^2 + \tau(x)'a_2(x) - \tau(x)a_2' + \tau(x)a_1(x) + a_0a_2(x) = 0.$$

Si escribimos $a_2(x) = a_{20} + a_{21}x + a_{22}x^2$ y $a_1(x) = a_{11}x + a_{10}$ para ciertos $a_{20}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{C}$ y $a_{11}, a_{10} \in M_N(\mathbb{C})$, y comparando coeficientes de varios grados, obtenemos un sistema de tres ecuaciones para las dos incógnitas matriciales τ_1, τ_0:

$$\begin{aligned}
\tau_1^2 - \tau_1 a_{22} + \tau_1 a_{11} + a_0 a_{22} &= 0\\
\tau_1\tau_0 + \tau_0\tau_1 - 2\tau_0 a_{22} + \tau_1 a_{10} + \tau_0 a_{11} + a_0 a_{21} &= 0\\
\tau_0^2 + \tau_1 a_{20} - \tau_0 a_{21} + \tau_0 a_{10} + a_0 a_{20} &= 0.
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Entonces si $a_0 + \tau_1$ es no singular, tomamos

$$v_0(x) = -(a_0 + \tau_1) \quad \text{y} \quad v_1(x) = \tau(x) - a_2' I + a_1(x).$$

6.2. Ejemplo del tipo Hermite

Consideremos el par de Bochner $(W, \mathfrak{D})$, con

$$W(x) = \begin{pmatrix} e^{-x^2} & 0 \\ 0 & e^{-x^2} \end{pmatrix}$$

suma directa del peso clásico de Hermite, y

$$\mathfrak{D} = \partial^2 I + \partial(-2x)I + B,$$

con B una matriz Hermitiana 2×2, es decir tomamos el operador diferencial $\mathfrak{D}$ que sea una diagonal de operadores clásicos $\mathfrak{d}$ de Hermite mas una matriz Hermitiana B.

La sucesión de polinomios ortogonales asociada a W es de la forma $P(x,n) = p(x,n)I$, es decir un múltiplo escalar de la identidad, donde $p(x,n)$ es la sucesión de polinomios escalares de Hermite clásicos. Por lo tanto $P(x,n)$ conmuta con B y es fácil verificar que $P(x,n) \cdot \mathfrak{D} = (\lambda(n)I + B)P(x,n)$, si $\lambda(n)$ es el autovalor de los polinomios escalares. Por lo tanto $\mathfrak{D}$ está en $\mathcal{D}(W)$ y además se cumple que $\mathfrak{D}$ es simétrico. Luego $(W, \mathfrak{D})$ es un par de Bochner.

En la notación del procedimiento general para obtener nuevos ejemplos, tenemos $a_{22} = 0$, $a_{21} = 0$, $a_{20} = 1$, $a_{11} = -2I$, $a_{10} = 0$, $a_0 = B$, $\tau(x) = \tau_1 x + \tau_0$. Reemplazando en (6.3), nos queda:

$$\begin{aligned} \tau_1^2 - 2\tau_1 &= 0, \\ \tau_1\tau_0 + \tau_0\tau_1 - 2\tau_0 &= 0, \\ \tau_0^2 + \tau_1 + B &= 0. \end{aligned} \tag{6.4}$$

La matriz τ_1 es Hermitiana y por lo tanto diagonalizable. Como buscamos pesos salvo equivalencias, podemos suponer que τ_1 es diagonal.

De la primera ecuación obtenemos que τ_1 tendrá alguna de las siguientes formas

$$\text{i) } \tau_1 = 0I, \qquad \text{ii)} \tau_1 = 2I, \qquad \text{iii) } \tau_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{iv) } \tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Notemos que el caso iv) es equivalente al caso iii).

En el primer caso, $\tau_1 = 0$, de la segunda y tercera ecuación en (6.4) obtenemos $\tau_0 = 0$ y $B = 0$. Así $a_0 + \tau_1 = B + \tau_1 = 0$ es singular y no nos sirve.

En el segundo caso, $\tau_1 = 2I$, de la segunda y tercera ecuaciones obtenemos $\tau_0 = 0$ y $B = -2I$, entonces $a_0 + \tau_1 = 0$ es singular y tampoco nos sirve.

Veamos al tercer caso, donde $\tau_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Sea $\tau_0 = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix}$. Entonces, de la segunda ecuación en (6.4) resulta

$$\begin{pmatrix} 4a & 2c \\ 2c & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2a & 2c \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = 0.$$

Esto implica que $a = d = 0$. Entonces $\tau_0 = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix}$.

De la tercera ecuación obtenemos que

$$B = \begin{pmatrix} -2 - c^2 & 0 \\ 0 & -c^2 \end{pmatrix}.$$

Así $a_0 + \tau_1 = B + \tau_1 = -c^2 I$ es no singular si $c \neq 0$. Entones definimos $v_0 = -(a_0 + \tau_1) = c^2 I$ y tomamos

$$v_1(x) = \tau(x) - a_2' I + a_1(x) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix} - 2xI = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & -2x \end{pmatrix}.$$

Descomponemos $W(x) = uu^*$, con $u = \sqrt{e^{-x^2}} I$ y hacemos

$$u^{-1} v_1^{-1} a_2 (v_1^\dagger)^{-1} u = \frac{1}{c^4} \begin{pmatrix} 4x^2 + c^2 & 2xc^2 \\ 2xc^2 & c^2 \end{pmatrix} = hh^*$$

y

$$f = uhu^{-1} = \frac{1}{c}\begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si hacemos el cambio de variables $c = \frac{2}{a}$, nos queda que

$$\widetilde{W}(x) = fWf^* = e^{-x^2}\frac{4}{a^2}\begin{pmatrix} 1+a^2x^2 & ax \\ ax & 1 \end{pmatrix}.$$

y

$$\mathfrak{v} = \partial v_1 - v_0 = \partial \frac{1}{a}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2ax \end{pmatrix} - \frac{4}{a^2}I,$$
$$\mathfrak{n} = -ff^\dagger \mathfrak{v}^\dagger = \partial \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a^2x & a \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{a^2}{2}+1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces tenemos que

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{v}\mathfrak{n} = \partial^2 I + \partial(-2x)I + \begin{pmatrix} \frac{4}{a^2}+2 & 0 \\ 0 & \frac{4}{a^2} \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\mathfrak{D}} = \mathfrak{n}\mathfrak{v} = \partial^2 I + \partial\begin{pmatrix} -2x & 2a \\ 0 & -2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{a^2}+2 & 0 \\ 0 & \frac{4}{a^2} \end{pmatrix}.$$

Así obtenemos para cada $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ un nuevo par de Bochner $(\widetilde{W}, \widetilde{\mathfrak{D}})$, que será solución no trivial del Problema Matricial de Bochner.

Como buscamos pesos salvo equivalencias, notemos que si tomamos $M = \frac{2}{a}I$, entonces $\widetilde{W}$ será equivalente a $M\widetilde{W}M^*$, y $M\widetilde{\mathfrak{D}}M^{-1}$ será su operador de orden 2 simétrico. Además podemos sumarle al operador $M\widetilde{\mathfrak{D}}M^{-1}$ cualquier múltiplo de la identidad y seguirá siendo de orden 2 simétrico, y seguirá estando en $\mathcal{D}(M\widetilde{W}M^*)$. Entonces obtenemos esta nueva representación de la familia de pesos encontrados, para $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

$$\widetilde{W}_a(x) = e^{-x^2}\begin{pmatrix} 1+a^2x^2 & ax \\ ax & 1 \end{pmatrix} \quad \widetilde{\mathfrak{D}}_a = \partial^2 I + \partial\begin{pmatrix} -2x & 2a \\ 0 & -2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.3. Ejemplo del tipo Jacobi

Consideramos el par de Bochner $(W, \mathfrak{D})$, con

$$W(x) = \begin{pmatrix} x^\alpha(1-x)^\beta & 0 \\ 0 & x^\alpha(1-x)^\beta \end{pmatrix} 1_{(0,1)}(x)$$

una suma directa de pesos clásicos de Jacobi de parámetros $\alpha, \beta > -1$, y tomamos el operador

$$\mathfrak{D} = \partial^2 x(1-x)I + \partial(\alpha+1-(\alpha+\beta+2)x)I + B,$$

con B una matriz Hermitiana 2×2.

Notar que elegimos una parametrización diferente al peso de Jacobi escalar que presentamos antes, en esta parametrización su soporte se encuentra en el intervalo $(0,1)$.

En este caso tenemos

$$a_{22} = -1, \quad a_{21} = 1, \quad a_{20} = 0, \quad a_{11} = -(\alpha+\beta+2)I, \quad a_{10} = (\alpha+1)I, \quad a_0 = B$$

y $\tau(x) = \tau_1 x + \tau_0$.

Reemplazando en (6.3), nos queda:

$$\begin{aligned} \tau_1^2 + \tau_1 - (\alpha+\beta+2)\tau_1 - B = 0,\\ \tau_1\tau_0 + \tau_0\tau_1 + 2\tau_0 + (\alpha+1)\tau_1 - (\alpha+\beta+2)\tau_0 + B = 0,\\ \tau_0^2 - \tau_0 + (\alpha+1)\tau_0 = 0. \end{aligned}$$

De la tercera ecuación obtenemos que $\tau_0^2 + \alpha\tau_0 = 0$. Repetimos como hicimos en el ejemplo de Hermite y obtenemos los siguientes casos

$$\text{i) } \tau_0 = 0, \qquad \text{ii) } \tau_0 = -\alpha I, \qquad \text{iii) } \tau_0 = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

i) Para el primer caso, $\tau_0 = 0$, obtenemos $f = \frac{\sqrt{x-x^2}}{-\alpha x+\alpha}$, $B = -\beta(\alpha+1)I$,

$$\widetilde{W}(x) = \frac{1}{\alpha^2}\begin{pmatrix} x^{\alpha+1}(1-x)^{\beta-1} & 0 \\ 0 & x^{\alpha+1}(1-x)^{\beta-1} \end{pmatrix} 1_{(0,1)}(x).$$

$$\mathfrak{v} = \partial\alpha(1-x)I - \alpha\beta I, \qquad \mathfrak{n} = \partial\frac{x}{\alpha}I + \frac{\alpha+1}{\alpha}I.$$

Por último

$$\widetilde{\mathfrak{D}} = \mathfrak{n}\mathfrak{v} = \partial^2 x(1-x) + \partial(\alpha+2-(\alpha+\beta+2)x - \beta(\alpha+1)I.$$

De este modo obtenemos un par trivial de Bochner $(\widetilde{W}, \widetilde{\mathfrak{D}})$, donde $\widetilde{W}$ es suma directa de pesos de Jacobi escalares de parámetros $\alpha+1$ y $\beta-1$. El β tiene que ser mayor a 0 para que se cumpla que $\widetilde{W}$ sea un peso matricial.

ii) Para el segundo caso, si tomamos $\tau_0 = -\alpha I$ obtendremos que $f = \frac{\sqrt{x-x^2}}{\beta x}$, $B = -\alpha(\beta+1)I$

$$\widetilde{W}(x) = \frac{1}{\beta^2}\begin{pmatrix} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta+1} & 0 \\ 0 & x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta+1} \end{pmatrix}.$$

$$\mathfrak{v} = \partial\,(-\beta x)I - \alpha\beta I, \qquad \mathfrak{n} = \partial\,\frac{x-1}{\beta}I + \frac{\beta+1}{\beta}I,$$

$$\widetilde{\mathfrak{D}} = \mathfrak{n}\mathfrak{v} = \partial^2\, x(1-x) + \partial(\alpha - (\alpha+\beta)x)I - \alpha(\beta+1)I.$$

Nuevamente obtuvimos un par de Bochner trivial $(\widetilde{W}, \widetilde{\mathfrak{D}})$, con $\widetilde{W}$ una suma directa de pesos clásicos de Jacobi de parámetros $\alpha-1$ y $\beta+1$. Ahora α deberá ser > 0 para que se cumpla la condición de momentos finitos de $\widetilde{W}$ y así sea un peso matricial.

iii) En el tercer caso, $\tau_0 = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y tenemos que

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{\alpha((a-\alpha-\beta)\sqrt{x-x^2}}\begin{pmatrix} -ax+\alpha & -\nu x \\ -\nu x & (a-\alpha-\beta)x \end{pmatrix},\\ B &= \begin{pmatrix} \alpha(a-\alpha-\beta)-a & -\nu \\ -\nu & a-\beta+1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

con $\nu = \sqrt{(\alpha-a)(a-\alpha-\beta)}$. El peso $\widetilde{W}$, salvo por el múltiplo $\alpha^2(a-\alpha-\beta)^2$ es

$$\widetilde{W}_{a,\alpha,\beta}(x) = x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\begin{pmatrix} x^2\nu^2 + (ax-\alpha)^2 & (\alpha x^2+\beta x^2-\alpha x)\nu \\ (\alpha x^2+\beta x^2-\alpha x)\nu & -x^2\beta(a-\alpha-\beta) \end{pmatrix}.$$

Notar que si $\alpha, \beta > 0$ entonces $\widetilde{W}_{a.\alpha,\beta}$ tiene momentos finitos de todos los órdenes y resulta ser un peso matricial.

Además

$$\mathfrak{v} = \partial \begin{pmatrix} (a-\alpha-\beta)x & \nu x \\ \nu x & -ax+\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha(a-\alpha-\beta) & 0 \\ 0 & \alpha(a-\alpha-\beta) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{n} = \partial\, & \frac{1}{\alpha(a-\alpha-\beta)} \begin{pmatrix} -ax+\alpha & -x\nu \\ -x\nu & x(a-\alpha-\beta) \end{pmatrix} \\ & + \frac{1}{\alpha(a-\alpha-\beta)} \begin{pmatrix} \alpha(a-\alpha-\beta)-a & -\nu \\ -\nu & (\alpha+1)(a-\alpha-\beta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

El operador diferencial obtenido es

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathfrak{D}}_{a,\alpha,\beta} = \mathfrak{n}\mathfrak{v} = & \partial^2 x(1-x)I + \partial \begin{pmatrix} (-\alpha-\beta-2)x+\alpha & \frac{-2\nu}{a-\alpha-\beta} \\ 0 & (-\alpha-\beta-2)x+\alpha+2 \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} \alpha(a-\alpha-\beta)-a & -\nu \\ -\nu & a-\beta+1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Obtenemos entonces una nueva familia de pares de Bochner no triviales $(\widetilde{W}_{a,\alpha,\beta}, \widetilde{\mathfrak{D}}_{a,\alpha,\beta})$, con $\alpha, \beta > 0$.

6.4. Ejemplo del tipo Laguerre

Consideramos el par de Bochner $(W, \mathfrak{D})$, donde W es la suma directa del peso clásico de Laguerre de parámetro $\alpha > -1$,

$$W(x) = \begin{pmatrix} x^\alpha e^{-x} & 0 \\ 0 & x^\alpha e^{-x} \end{pmatrix} 1_{(0,\infty)}(x) \quad \text{y} \quad \mathfrak{D} = \partial^2 xI + \partial(\alpha+1-x)I + B$$

con B una matriz Hermitiana 2×2. Entonces tenemos que

$$a_{22} = 0, \quad a_{21} = 1, \quad a_{20} = 0, \quad a_{11} = -I, \quad a_{10} = (\alpha+1)I,\ a_0 = B.$$

Escribimos $\tau(x) = \tau_1 x + \tau_0$ las ecuaciones (6.3) resultan

$$\begin{aligned} \tau_1^2 - \tau_1 &= 0, \\ \tau_1\tau_0 + \tau_0\tau_1 + (\alpha+1)\tau_1 - \tau_0 + B &= 0, \\ \tau_0^2 + \alpha\tau_0 &= 0. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Mirando la tercera ecuación y diagonalizando la matriz Hermitiana τ_0, nos quedan los siguientes casos a considerar

$$\text{i) } \tau_0 = -\alpha I, \quad \text{ii) } \tau_0 = 0, \qquad \text{iii) } \tau_0 = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

.

i) Si $\tau_0 = -\alpha I$, obtenemos $f = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $B = -\alpha I$,

$$\widetilde{W}(x) = \begin{pmatrix} x^{\alpha-1}e^{-x} & 0 \\ 0 & x^{\alpha-1}e^{-x} \end{pmatrix} 1_{(0,\infty)}(x).$$

Acá α deberá ser mayor a 0 para que $\widetilde{W}$ tenga momentos finitos de todos los órdenes. Además $\mathfrak{v} = \partial - xI - \alpha I$, $\mathfrak{n} = \partial(-I) + I$ y tenemos

$$\widetilde{\mathfrak{D}} = \mathfrak{n}\mathfrak{v} = \partial^2 xI + \partial(\alpha - x)I - \alpha I.$$

Nuevamente en este caso obtenemos un par de Bochner trivial, ya que $\widetilde{W}$ es suma directa de pesos de Laguerre escalares de parámetro $\alpha - 1$ y $\widetilde{\mathfrak{D}} = \mathfrak{d}I - \alpha I$, con $\mathfrak{d}$ el operador diferencial escalar clásico de Laguerre de parámetro $\alpha - 1$.

ii) En el caso $\tau_0 = 0$, obtenemos que $f = \frac{\sqrt{x}}{\alpha} I$, $B = -(\alpha+1)I$,

$$\widetilde{W}(x) = \frac{1}{\alpha^2}\begin{pmatrix} x^{\alpha+1}e^{-x} & 0 \\ 0 & x^{\alpha+1}e^{-x} \end{pmatrix} 1_{(0,\infty)}(x).$$

$$\mathfrak{v} = \partial\, \alpha I - \alpha I, \quad \mathfrak{n} = \partial\, \frac{x}{\alpha} I + \frac{(\alpha+1)}{\alpha} I, \quad \text{y} \quad \tilde{\mathfrak{D}} = \mathfrak{n}\mathfrak{v} = \partial^2 xI + \partial(\alpha + 2 - x)I - (\alpha+1).$$

Nuevamente obtenemos un par de Bochner trivial, esta vez $\widetilde{W}$ es suma directa de pesos clásicos de Laguerre de parámetro $\alpha + 1$.

iii) En el tercer caso, $\tau_0 = \left(\begin{smallmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Llamamos $\tau_1 = \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ y $\tau_1^2 = \left(\begin{smallmatrix} a^2+c^2 & ac+dc \\ ac+dc & d^2+c^2 \end{smallmatrix}\right)$. De la segunda ecuación en (6.5) obtenemos que $B = \begin{pmatrix} -a + a\alpha - \alpha & -c \\ -c & -d\alpha - d \end{pmatrix}$ y de la ecuación $\tau_1^2 - \tau_1 = 0$ obtenemos

$$a^2 + c^2 - a = 0, \quad ac + dc - c = 0, \quad d^2 + c^2 - d = 0. \tag{6.6}$$

Consideremos los casos $c = 0$, y $c \neq 0$.

Si $c = 0$ entonces $a = 0, 1$ y $d = 0, 1$. recordemos que necesitamos que $\tau_1 + a_0$ sea no singular, entonces resulta que $a = 0$ y $d = 1$, osea $\tau_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Entonces obtenemos $f = \sqrt{x}\begin{pmatrix} -\frac{1}{x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -\alpha - 1 \end{pmatrix}$ y

$$\widetilde{W}(x) = \begin{pmatrix} x^{\alpha-1}e^{-x} & 0 \\ 0 & \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha}e^{-x} \end{pmatrix} 1_{(0,\infty)}(x).$$

Notemos que si $\alpha > 0$, $\widetilde{W}$ tiene momentos finitos de todos los órdenes. Además tenemos

$$\mathfrak{v} = \partial \begin{pmatrix} -x & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} - \alpha I, \qquad \mathfrak{n} = \partial \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{x}{\alpha} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} + 1 \end{pmatrix}$$

y

$$\widetilde{\mathfrak{D}} = \mathfrak{n}\mathfrak{v} = \partial^2 xI + \partial \begin{pmatrix} -x + \alpha & 0 \\ 0 & -x + \alpha + 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -\alpha - 1 \end{pmatrix}.$$

Obtuvimos nuevamente un par de Bochner trivial, donde en este caso $\widetilde{W}$ es suma directa de pesos clásicos de Laguerre uno de parámetro $\alpha - 1$, y otro de parámetro $\alpha + 1$.

Ahora nuestro último caso. Supongamos $c \neq 0$, entonces de (6.6) resulta

$$a = 1 - d \qquad \text{y} \qquad c = \pm\sqrt{d - d^2}.$$

Podemos suponer que $c = \sqrt{d - d^2}$, ya que en el caso $c = -\sqrt{d - d^2}$, obtendremos un peso equivalente.

Entonces $\tau_1 = \begin{pmatrix} 1-d & \sqrt{d-d^2} \\ \sqrt{d-d^2} & d \end{pmatrix}$ y $\tau_0 = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y obtenemos

$$ff^* = \frac{1}{xd^2\alpha^2}\begin{pmatrix} (x-\alpha)^2 - d(x-\alpha)^2 + d\alpha^2 & -\sqrt{d-d^2}(\alpha - x)x \\ -\sqrt{d-d^2}(\alpha-x)x & dx \end{pmatrix}.$$

Llamando $\nu = \frac{\sqrt{1-d}}{\sqrt{d}}$, y multiplicando por $d^3\alpha^2$ obtenemos que

$$\widetilde{W}_{\alpha,\nu}(x) = x^{\alpha-1}e^{-x}\begin{pmatrix} (x-\alpha)^2\nu^2 + \alpha^2 & \nu(x-\alpha)x \\ \nu(x-\alpha)x & x^2 \end{pmatrix} 1_{(0,\infty)}(x).$$

Pedimos la condición $\alpha > 0$ para que $\widetilde{W}_{\alpha,\nu}$ tenga los momentos de todos los órdenes finitos. Además

$$\begin{aligned}
\mathfrak{v} &= \partial \begin{pmatrix} -\frac{x}{\nu^2+1} & -\frac{\nu}{\nu^2+1}x \\ -\frac{\nu}{\nu^2+1}x & \frac{x}{\nu^2+1} - x + \alpha \end{pmatrix} - \frac{\alpha}{\nu^2+1}I, \\
\mathfrak{n} &= \partial\,\frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} -x-(\alpha-x)(\nu^2+1) & -\nu x \\ -\nu x & x \end{pmatrix} + \frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} \nu^2+\alpha & -\nu \\ -\nu & \alpha+1 \end{pmatrix}, \\
\widetilde{\mathfrak{D}}_{\alpha,\nu} = \mathfrak{n}\mathfrak{v} &= \partial^2 xI + \partial \begin{pmatrix} \alpha - x & -2\nu \\ 0 & \alpha - x + 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\nu^2+1}\begin{pmatrix} -\nu^2-\alpha & \nu \\ \nu & -\alpha-1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Así obtenemos una familia de pares de Bochner no triviales $(\widetilde{W}_{\alpha,\nu}, \widetilde{\mathfrak{D}}_{\alpha,\nu})$.

Capítulo 7

Teorema de Clasificación

En esta sección enunciaremos varios resultados sin entrar demasiado en detalles, muchos de ellos los enunciaremos sin demostración. La idea será dar los ingredientes necesarios para poder contar de manera resumida un bosquejo de la demostración del Teorema de Clasificación, la cual nos servirá para poder mostrar de manera explícita el resultado con algunos ejemplos. Todas las demostraciones de esta sección se encuentran en [4].

Comentario 7.1. En la sección anterior construimos nuevos pares de Bochner $(\widetilde{W}, \widetilde{\mathfrak{D}})$ partiendo de pares triviales $(W, \mathfrak{D})$, donde W era una suma directa de pesos escalares clásicos. Si $P(x,n)$ es la sucesión de polinomios mónicos ortogonales asociada a W, en particular teníamos que $\mathfrak{D} = \mathfrak{v}\mathfrak{n}$ y $\{P(x,n) \cdot \mathfrak{v}\}$ es una sucesión de polinomios ortogonales respecto al peso $\widetilde{W}$.

Tenemos entonces que si $\{Q(x,n)\}$ es la sucesión de polinomios ortogonales mónicos asociada a $\widetilde{W}$, existe una sucesión de matrices no singulares $A_n \in M_N(\mathbb{C})$ tal que, para todo $n \geq 0$
$$P(x,n) \cdot \mathfrak{v} = A_n Q(x,n).$$
Entonces $P(x,n) \cdot \mathfrak{v}\mathfrak{n} = A_n Q(x,n) \cdot \mathfrak{n}$, es decir
$$A_n Q(x,n) \cdot \mathfrak{n} = P(x,n) \cdot \mathfrak{D} = \Lambda_n(\mathfrak{D}) P(x,n)$$
Equivalentemente
$$A_n^{-1} \Lambda_n(\mathfrak{D}) P(x,n) = Q(x,n) \cdot \mathfrak{n}.$$
Como $\Lambda_n(\mathfrak{D})$ es la sucesión de autovalores del operador $\mathfrak{D}$, una diagonal de operadores escalares clásicos, entonces, en este caso, esta sucesión de autovalores será no singular para casi todo n. Así la sucesión $A_n^{-1}\Lambda_n(\mathfrak{D})$ resultará ser no singular para casi todo n.

Se puede probar que existen polinomios $q_1(x)$, $q_2(x)$ tales que $\mathfrak{v}q_1(x)$ y $q_2(x)\mathfrak{n}$ pertenecen a $\mathcal{F}_R(P)$. Entonces se cumple que
$$\begin{aligned} P(x,n) \cdot (\mathfrak{v}q_1(x)) q_1(x)^{-1} &= A_n Q(x,n) \\ Q(x,n) \cdot q_2(x)^{-1} (q_2(x)\mathfrak{n}) &= A_n^{-1} \Lambda_n(\mathfrak{D}) P(x,n). \end{aligned}$$
En otras palabras, el peso $\widetilde{W}$ es una transformación biespectral de Darboux del peso W, de acuerdo a la definición (5.1).

Entonces todos los nuevos pesos solución al Problema de Bochner obtenidas en la sección anterior resultarán ser transformaciones biespectrales de Darboux de sumas directas de pesos clásicos.

Definición 7.2. Llamaremos $Z(W)$ al centro de $\mathcal{D}(W)$, es decir,
$$Z(W) := \{\mathfrak{D} \in \mathcal{D}(W) \text{ tal que } \mathfrak{D}\widetilde{\mathfrak{D}} = \widetilde{\mathfrak{D}}\mathfrak{D} \quad \forall \widetilde{\mathfrak{D}} \in \mathcal{D}(W)\}.$$

Definición 7.3. Sea W un peso matricial de tamaño N. Diremos que el álgebra $\mathcal{D}(W)$ es completa si existen $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \cdots, \mathfrak{D}_N \in \mathcal{D}(W)$ operadores simétricos que cumplan que $\mathfrak{D}_i\mathfrak{D}_j = 0$ para todo $i \neq j$, y tales que $\mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2 + \cdots + \mathfrak{D}_N$ es un elemento de $Z(W)$ que no es divisor de cero.

Teorema 7.4. *Sea W un peso matricial 2×2, y supongamos que el álgebra asociada $\mathcal{D}(W)$ es no conmutativa. Entonces $\mathcal{D}(W)$ es completa.*

Proposición 7.5. *Sean $W(x)$ y $\widetilde{W}(x)$ pesos matriciales. Supongamos que $\mathcal{D}(W)$ es completa y que $\widetilde{W}$ es una transformación biespectral de Darboux de $W(x)$. Entonces $\mathcal{D}(\widetilde{W})$ es completa.*

Definición 7.6. Sea $W(x)$ un peso matricial. Llamaremos un sistema ortogonal de $\mathcal{D}(W)$ a una colección de operadores simétricos $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \cdots, \mathfrak{D}_N \in \mathcal{D}(W)$ tales que $\mathfrak{D}_i\mathfrak{D}_j = 0$ para todo $i \neq j$.

Teorema 7.7. *Sea $W(x)$ un peso matricial irreducible de tamaño $N > 1$ y el álgebra $\mathcal{D}(W)$ completa, y sea $P(x,n)$ la sucesión de polinomios mónicos ortogonales asociada. Luego para todo $\mathfrak{D} \in M_N(\Omega(x))$ tenemos que $\mathfrak{D}^\dagger \in M_N(\Omega(x))$ y existe un polinomio $q(x) \in \mathbb{C}[x]$ con $q(x)\mathfrak{D}, \mathfrak{D}q(x) \in \mathcal{F}_R(P)$.*

Teorema 7.8. *Sea $W(x) = diag(f_1(x), \cdots, f_N(x))$ un peso matricial suma directa de N pesos escalares clásicos $f_1(x), \cdots, f_N(x)$. Entonces el álgebra $\mathcal{D}(W)$ es completa.*

Demostración. Sea $\mathfrak{D}_i = E_{ii}$ la matriz de tamaño $N \times N$ que tiene un 1 en la entrada ii de la diagonal, y cero en todo el resto.

Veamos que $\mathfrak{D}_i \in \mathcal{D}(W)$. En efecto, la sucesión de polinomios ortogonales mónicos asociada a W es $P(x,n) = \mathrm{diag}(p_1(x,n), \cdots, p_N(x,n))$, donde $p_i(x,n)$ es la sucesión de polinomios ortogonales mónicos asociada al peso $f_i(x)$. Entonces

$$P(x,n) \cdot \mathfrak{D}_i = p_i(x,n)E_{ii} = E_{ii}P(x,n)$$

Así la sucesión de polinomios ortogonales es autofunción del operador $\mathfrak{D}_i$ y por lo tanto $\mathfrak{D}_i \in \mathcal{D}(W)$.

Por otra parte es fácil ver que $\mathfrak{D}_i$ es simétrico para todo i, que se cumple $\mathfrak{D}_i\mathfrak{D}_j = 0$ si $i \neq j$, y además $\mathfrak{D}_1 + \cdots + \mathfrak{D}_N = I \in Z(W)$. Por lo tanto el álgebra $\mathcal{D}(W)$ es completa. $\square$

Nos enfocaremos exclusivamente en los casos en que el álgebra $\mathcal{D}(W)$ sea completa. A partir de ahora los elementos $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \cdots, \mathfrak{D}_N$ denotarán un sistema ortogonal de $\mathcal{D}(W)$ tales que

$$\mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2 + \cdots + \mathfrak{D}_N \in Z(W)$$

y no es divisor de cero.

Teorema 7.9. *Para cada $\mathfrak{D}_i$ definimos el siguiente $\Omega(x)$-módulo a izquierda*

$$\mathcal{M}_i := \{\vec{u} \in \Omega(x)^{\oplus N} \ : \ \vec{u}^T\mathfrak{D}_j = \vec{0}^T \, \forall \, i \neq j\}.$$

Entonces $\mathcal{M}_i$ es cíclico. Es decir, existe $\vec{u}_i$ tal que $\mathcal{M}_i = \Omega(x)\vec{u}_i$.

Demostración. El anillo $\Omega(x)$ es un dominio de ideales principales. El módulo $\mathcal{M}_i$ es un submódulo del módulo libre $\Omega^{\oplus N}$ en este DIP, luego es también libre. Más aún, $\mathcal{M}_i$ contiene todas las transpuestas de los vectores fila de $\mathfrak{D}_i$. Como $\mathfrak{D}_i$ es no nulo, esto implica que $\mathcal{M}_i$ es no nulo. En particular, cada uno de los $\mathcal{M}_i$ tendrá rango al menos 1 como $\Omega(x)$-módulo.

Ahora si $\vec{u} \in \mathcal{M}_i \cap \mathcal{M}_j$ para algún $i \neq j$, entonces $\vec{u}^T\mathfrak{D}_k = \vec{0}^T$ para todo $1 \leq k \leq N$. Esto a su vez implicaría que $\vec{u}^T(\mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2 + \cdots + \mathfrak{D}_N) = \vec{0}^T$. Como $\mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2 + \cdots + \mathfrak{D}_N$

no es divisor de cero, esto implica que $\vec{u}^T = \vec{0}^T$. Así $\mathcal{M}_i \cap \mathcal{M}_j = \vec{0}$ para todo $i \neq j$. Como cada $\mathcal{M}_i$ es un submódulo de $\Omega(x)^{\oplus N}$, se sigue de inmediato que $\mathcal{M}_i$ es módulo libre de rango 1 para todo i. Así se sigue que $\mathcal{M}_i$ es cíclico y completamos la demostración del teorema. □

Fijamos alguna elección de generadores $\vec{u}_i$ de $\mathcal{M}_i$ para $i = 1, \cdots, N$ y definimos $\mathfrak{U}$ el operador diferencial matricial cuyas filas son $\vec{u}_1^T, \cdots, \vec{u}_N^T$

$$\mathfrak{U} = [\vec{u}_1\, \vec{u}_2\, \cdots\, \vec{u}_N]^T.$$

Cada uno de los $\vec{u}_i$ puede ser escrito como

$$\vec{u}_i = \sum_{j=0}^{\ell_i} \partial^j \vec{u}_{ji}(x)$$

para ciertos $\vec{u}_{0i}(x), \cdots, \vec{u}_{\ell_i i} \in \mathbb{C}(x)^{\oplus N}$ con $\vec{u}_{\ell_i i}(x)$ no idénticamente cero. Definimos a $U(x)$ la matriz cuyas filas son $\vec{u}_{\ell_1 1}(x) \cdots \vec{u}_{\ell_N N}(x)$

$$U(x) = [\vec{u}_{\ell_1 1}(x)\, \vec{u}_{\ell_2 2}(x)\, \cdots\, \vec{u}_{\ell_N N}(x)].$$

$U(x)$ resulta ser una unidad en $M_N(\mathbb{C}(x))$.

Para cada i, tenemos que

$$\vec{u}_i^T \mathfrak{D}_i \mathfrak{D}_j = \vec{0}^T \quad \text{para todo } j \neq i.$$

Más aún, por cómo definimos los $\vec{u}_i$ tenemos que $\vec{u}_i^T \mathfrak{D}_j = \vec{0}^T$ para todo $i \neq j$. Luego $(\vec{u}_i^T \mathfrak{D}_i)^T \in \mathcal{M}_i$ para todo i, y entonces por ser un módulo cíclico generado por $\vec{u}_i$ tendremos que existe $\mathfrak{v}_i \in \Omega(x)$ tal que $\mathfrak{v}_i \vec{u}_i^T = \vec{u}_i^T \mathfrak{D}_i$. Sea m_i el orden de $\mathfrak{v}_i$ y escribimos

$$\mathfrak{v}_i = \sum_{j=0}^{m_i} \partial^j v_{ji}(x), \tag{7.1}$$

para ciertas funciones racionales $v_{ji}(x)$.

Teorema 7.10. *Sea $W(x)$ un peso tal que el álgebra $\mathcal{D}(W)$ completa y sean $\mathfrak{D}_1, \cdots, \mathfrak{D}_N$, $\mathfrak{U}$ y $U(x)$ como antes. El operador diferencial matricial $\mathfrak{U}W(x)\mathfrak{U}^*$ es diagonal con coeficiente director*

$$diag(r_1(x), \cdots, r_N(x)) = U(x)W(x)U(x)^*$$

donde $r_i(x) = \vec{u}_{\ell_i i}(x)^T W(x) \vec{u}_{\ell_i i}(x)^{T*}$.

Comentario 7.11. La matriz $U(x)$ y los $r_i(x)$ no son exactamente iguales a $T(x)$ y a las $f_i(x)$ de (1.1). En particular $r_i(x)$ no será necesariamente un peso escalar clásico. Pero sí puede verse que los $r_i(x)$ serán pesos escalares clásicos multiplicados por alguna función racional.

Teorema 7.12. *Supongamos que $W(x)$ es un peso matricial con el álgebra $\mathcal{D}(W)$ completa y tal que $\mathcal{D}(W)$ contiene algún operador diferencial de segundo orden simétrico cuyo coeficiente director multiplicado por $W(x)$ sea definido positivo en el soporte de $W(x)$. Entonces existen operadores diferenciales matriciales $\mathfrak{T}, \widetilde{\mathfrak{T}} \in M_N(\Omega(x))$ tales que*

$$\mathfrak{T}\widetilde{\mathfrak{T}} = diag(p_1(\mathfrak{d}_i), \cdots, p_N(\mathfrak{d}_N)) \;\; y \;\; \widetilde{\mathfrak{T}} E_{ii} \mathfrak{T} = q(\mathfrak{D}_i) \tag{7.2}$$

para todo i, donde $\mathfrak{d}_i \in \Omega(x)$ es un operador diferencial de orden 1 o 2, p_i y q son polinomios no nulos.

En la demostración de este teorema se ve que para los $\mathfrak{v}_i$ que definimos antes en (7.1), existen polinomios $p_i \in \mathbb{C}[x]$, operadores diferenciales $\mathfrak{d}_i \in \Omega(x)$ de orden a lo sumo 2 y operadores diferenciales $\mathfrak{h}_i \in \Omega(x)$ tales que

$$\mathfrak{h}_i \mathfrak{v}_i = p_i(\mathfrak{d}_i)\mathfrak{h}_i. \tag{7.3}$$

En otras palabras, $\mathfrak{v}_i$ es una conjugación de Darboux de $p_i(\mathfrak{d}_i)$ y se toma entonces

$$\mathfrak{T} = \mathrm{diag}(\mathfrak{h}_i, \cdots, \mathfrak{h}_N)\mathfrak{U}.$$

$\widetilde{\mathfrak{T}}$ tendrá una definición un poco más complicada que no mencionaremos aquí.

Lema 7.13. *Para todo i la función $v_{m_i i}(x)$ definida en (7.1) es un polinomio en x que se anula en los puntos finitos de los extremos del soporte (x_0, x_1) de $W(x)$.*

Lema 7.14. *Para todo $1 \leq i \leq N$, sea $h_i(x,n)$ una sucesión de polinomios ortogonales clásicos y sea*

$$P(x,n) = diag(h_1(x,n-m), \cdots, h_N(x,n-m))$$

para todo entero $n \geq \ell$ para ciertos enteros fijos ℓ, m con $\ell \geq 0$. Entonces para todo i, existe una sucesión de polinomios ortogonales clásicos $\widetilde{p}_i(x,n)$ tal que

$$\widetilde{P}(x,n) := diag(\widetilde{p}_1(x,n), \cdots, \widetilde{p}_N(x,n))$$

es una transformación biespectral de Darboux de $P(x,n)$.

Finalmente al principal teorema de este trabajo, que es el Teorema de Clasificación de pares de Bochner, dado por Casper y Yakimov en [4].

Teorema 7.15. *Sea $W(x)$ un peso matricial tal que $\mathcal{D}(W)$ contiene un operador diferencial W-simétrico de orden 2*

$$\mathfrak{D} = \partial^2 D_2(x) + \partial D_1(x) + D_0(x),$$

con $D_2(x)W(x)$ definida positiva en el soporte de $W(x)$.

Entonces el álgebra $\mathcal{D}(W)$ es completa si y sólo si $W(x)$ es una transformación biespectral de Darboux de una suma directa de pesos clásicos.

Demostración. Supongamos que $W(x)$ es un peso matricial y que $\mathcal{D}(W)$ contiene un operador diferencial simétrico de segundo orden cuyo coeficiente director multiplicado por $W(x)$ es definido positivo en el soporte de $W(x)$. Sin perder generalidad podemos suponer que $W(x)$ es un peso matricial de tamaño $N > 1$ unitariamente irreducible.

En primer lugar supongamos que $W(x)$ es transformación biespectral de Darboux de una suma directa de pesos clásicos $f_1(x) \oplus f_2(x) \oplus \cdots \oplus f_N(x)$, entonces por el Teorema 7.8, el álgebra

$$\mathcal{D}(f_1(x) \oplus \cdots \oplus f_N(x))$$

es completa. Luego por la Proposición 7.5, el álgebra $\mathcal{D}(W)$ también es completa.

Supongamos que $\mathcal{D}(W)$ completa. Entonces existe un sistema ortogonal $\mathfrak{D}_1, \cdots, \mathfrak{D}_N \in \mathcal{D}(W)$ tal que $\mathfrak{D}_1 + \cdots + \mathfrak{D}_N \in Z(W)$. Además tenemos los módulos canónicos $\mathcal{M}_i = \Omega(x)\vec{u}_i$. Definimos entonces $\mathfrak{U}$ y $U(x)$ como explicamos previamente. Entonces,

$$U(x)W(x)U(x)^* = \mathrm{diag}(r_1(x), \cdots, r_N(x)),$$

donde $r_i(x)$ es un peso escalar clásico $f_i(x)$ multiplicado por alguna función racional. Además

$$\mathfrak{v}_i \vec{u}_i^T = \vec{u}_i^T \mathfrak{D}_i.$$

Por el Teorema 7.12 sabemos que existen operadores diferenciales $\mathfrak{T}, \widetilde{\mathfrak{T}} \in M_N(\Omega(x))$ tales que $\mathfrak{T}\widetilde{\mathfrak{T}} = \mathrm{diag}(p_1(\mathfrak{d}_1), \cdots, p_N(\mathfrak{d}_N))$ para ciertos operadores diferenciales $\mathfrak{d}_i \in \Omega(x)$ de orden 1 o 2, y polinomios $p_i \in \mathbb{C}[x]$. También sabemos que existen $\mathfrak{h}_1, \cdots, \mathfrak{h}_N \in \Omega(x)$ tales que

$$\mathfrak{h}_i \mathfrak{v}_i = p_i(\mathfrak{d}_i)\mathfrak{h}_i.$$

Resulta entonces que $\mathfrak{d}_i$ es de orden 2, y mas aún es un operador diferencial clásico asociado al peso $f_i(x)$.

A partir de acá se puede mostrar, usando varios de los resultados enunciados y algunos otros, que esto implica que $W(x)$ es una transformación biespectral de Darboux de la suma directa de pesos clásicos

$$f_1(x) \oplus \cdots \oplus f_N(x).$$

$\square$

Capítulo 8

Ejemplos

En este capítulo, veremos algunos ejemplos de pesos matriciales 2×2 cuya álgebra $\mathcal{D}(W)$ sea completa y contenga algún operador diferencial simétrico de segundo orden cuyo coeficiente director multiplicado por W sea definido positivo en el soporte de $W(x)$.

Recordemos que en el caso 2×2, el álgebra $\mathcal{D}(W)$ sólo necesitará tener al menos dos elementos que no conmuten entre ellos para ser completa.

Para cada ejemplo buscaremos explícitamente un sistema ortogonal $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2 \in \mathcal{D}(W)$ con $\mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2 \in Z(W)$, encontraremos los generadores de los módulos canónicos $\mathcal{M}_i$, y calcularemos los $\mathfrak{v}_i \in \Omega(x)$ que serán conjugaciones de Darboux de $p_i(\mathfrak{d}_i)$ para ciertos polinomios $p_i \in \mathbb{C}[x]$ y operadores diferenciales clásicos $\mathfrak{d}_i$.

Por suerte para nosotros, en los ejemplos que calculamos resultó que $\mathfrak{v}_i$ ya es un polinomio valuado en un operador diferencial clásico, así no estará la complicación de tener que buscar la conjugación.

Las cuentas en esta sección fueron verificadas usando el programa Maple 17.

8.1. Ejemplos del tipo Hermite

8.1.1. Ejemplo 1.

Sea $a \in \mathbb{R}$, consideramos el peso matricial

$$W(x) = e^{-x^2} \begin{pmatrix} 1 + a^2x^2 & ax \\ ax & 1 \end{pmatrix}.$$

El siguiente operador diferencial de orden 2 es simétrico y está en $\mathcal{D}(W)$

$$\mathfrak{D} = \partial^2 I + \partial \begin{pmatrix} -2x & 2a \\ 0 & -2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Además en $\mathcal{D}(W)$ tenemos los siguientes operadores simétricos de orden 4

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}_1 &= \partial^4 \begin{pmatrix} -\frac{a}{8} & \frac{a^2x}{8} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \partial^3 \begin{pmatrix} \frac{ax}{4} & \frac{1-a^2x^2}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{ax}{4} \end{pmatrix} + \partial^2 \begin{pmatrix} \frac{a^2+1}{2a} & x(-\frac{a^2}{2} - 1) \\ \frac{x}{2} & \frac{1-a^2x^2}{2a} \end{pmatrix} \\
&\quad + \partial \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a^2+2}{2a^2} \\ \frac{a^2+1}{a^2} & -\frac{x(a^2+2)}{a} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a^2+2}{a^3} \end{pmatrix}, \\
\mathfrak{D}_2 &= \partial^4 \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a^2x}{8} \\ 0 & -\frac{a}{8} \end{pmatrix} + \partial^3 \begin{pmatrix} \frac{ax}{4} & \frac{a^2x^2-2a^2-1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{ax}{4} \end{pmatrix} + \partial^2 \begin{pmatrix} \frac{3a^2+2-2a^2x^2}{4a} & x(a^2+1) \\ -\frac{x}{2} & \frac{a^2+2}{4a} \end{pmatrix} \\
&\quad + \partial \begin{pmatrix} -\frac{x(a^2+2)}{a} & \frac{a^4+3a^2+2}{2a^2} \\ -\frac{1}{a^2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{a^2+2}{a^3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Sea b_P el isomorfismo de Fourier (el mapa generalizado de Fourier)

$$P(x,n)\cdot \mathfrak{D} = b_P^{-1}(\mathfrak{D})P(x,n).$$

Si $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}(W)$, entonces $b_P^{-1}(\mathfrak{D}) = \Lambda_n(\mathfrak{D})$ nos da la sucesión de autovalores de $\mathfrak{D}$. Los autovalores de $\mathfrak{D}_1$ y $\mathfrak{D}_2$ son $\Lambda_1(n)$, $\Lambda_2(n)$ respectivamente. Siendo

$$\Lambda_1(n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda(n) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \Lambda_2(n) = \begin{pmatrix} \lambda(n) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

con

$$\lambda(n) = -\frac{a^4n^2 + a^4n + 4a^2n + 2a^2 + 4}{2a^3}.$$

Entonces $b_P^{-1}(\mathfrak{D}_1) = \Lambda_1(n)$ y $b_P^{-1}(\mathfrak{D}_2) = \Lambda_2(n)$. Por lo tanto

$$b_P^{-1}(\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2) = \Lambda_1(n)\Lambda_2(n) = 0 = \Lambda_2(n)\Lambda_1(n) = b_P^{-1}(\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_1).$$

Además

$$b_P^{-1}(\mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2) = \Lambda_1(n) + \Lambda_2(n) = \lambda(n)I \in Z(M_N(\mathbb{C})[n]).$$

Entonces, por ser b_P un isomorfismo, tenemos que $\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2 = 0 = \mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_1$ y que $\mathfrak{D}_1+\mathfrak{D}_2 \in Z(W)$. Por lo tanto $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ forman el sistema ortogonal buscado.

Tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 &= \{\vec{u} \in \Omega(x)^{\oplus 2} \,:\, \vec{u}^T\mathfrak{D}_2 = \vec{0}\} = \Omega(x)\vec{u}_1, \\ \mathcal{M}_2 &= \{\vec{u} \in \Omega(x)^{\oplus 2} \,:\, \vec{u}^T\mathfrak{D}_1 = \vec{0}\} = \Omega(x)\vec{u}_2, \end{aligned}$$

con

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} \partial\left(-\frac{a}{2}\right) \\ \partial\frac{a^2x}{2} + 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \partial\left(-\frac{a}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Tenemos entonces

$$\mathfrak{U} = \begin{pmatrix} \partial(-\frac{a}{2}) & \partial\frac{a^2x}{2} + 1 \\ 1 & \partial(-\frac{a}{2}) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U(x) = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} & \frac{a^2x}{2} \\ 0 & -\frac{a}{2} \end{pmatrix}.$$

Calculamos

$$U(x)W(x)U(x)^* = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{4}e^{-x^2} & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{4}e^{-x^2} \end{pmatrix}.$$

Así obtenemos una suma directa de pesos clásicos de Hermite por una función racional.

Ahora calculemos $\mathfrak{v}_1$ y $\mathfrak{v}_2$. Tenemos

$$\vec{u}_1^T\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{v}_1\vec{u}_1^T \quad \text{y} \quad \vec{u}_2^T\mathfrak{D}_2 = \mathfrak{v}_2\vec{u}_2^T,$$

con $\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{v}_2 = -\frac{a}{2}\mathfrak{d}^2 + \frac{a^2+4}{4a}\mathfrak{d} - \frac{a^2+2}{a^3}$ y $\mathfrak{d} = \partial^2 + \partial(-2x)$ el operador diferencial escalar clásico de Hermite. Así $\mathfrak{v}_i$ es igual a un polinomio evaluado $\mathfrak{d}$ para $i = 1, 2$.

En consecuencia $W(x)$ es una transformación biespectral de Darboux de suma directa de pesos escalares clásicos de Hermite.

8.1.2. Ejemplo 2.

Dado $a \in \mathbb{R}$, consideramos el peso matricial

$$W(x) = e^{-x^2} \begin{pmatrix} 1 + a^2x^4 & ax^2 \\ ax^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

En el álgebra $\mathcal{D}(W)$ tenemos el siguiente operador simétrico de orden 2

$$\mathfrak{D} = \partial^2 I + \partial \begin{pmatrix} -2x & 4ax \\ 0 & -2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2a \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Para hallar el sistema ortogonal en $\mathcal{D}(W)$, en este caso necesitamos operadores de orden 8.

Obtuvimos los siguientes operadores diferenciales simétricos $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2 \in \mathcal{D}(W)$.

$$\mathfrak{D}_1 = \partial^8 F_8 + \partial^7 F_7 + \partial^6 F_6 + \partial^5 F_5 + \partial^4 F_4 + \partial^3 F_3 + \partial^2 F_2 + \partial F_1 + F_0,$$

$$\mathfrak{D}_2 = \partial^8 G_8 + \partial^7 G_7 + \partial^6 G_6 + \partial^5 G_5 + \partial^4 G_4 + \partial^3 G_3 + \partial^2 G_2 + \partial G_1 + G_0,$$

donde los coeficientes de $\mathfrak{D}_1$ son

$$F_8 = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 0 & a^6x^2 \\ 0 & a^5 \end{pmatrix},$$

$$F_7 = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & a^6x(x^2-2) \\ 0 & a^5x \end{pmatrix},$$

$$F_6 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} a^5x^2 & -31a^6x^2 + 14a^6 + 5a^6x^4 + a^4 \\ a^4 & -3a^5 + 5a^2x^2 \end{pmatrix},$$

$$F_5 = \begin{pmatrix} -a^5x(x^2-3) & -a^6x^5 + 18a^6x^3 - 30a^6x - 2a^4x \\ -a^4x & -a^5x^3 + 3a^5x \end{pmatrix},$$

$$F_4 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -42a^5x^2 + 4a^5x^4 + 30a^5 + 4a^3 & -90a^6 + 273a^6x^2 - 12a^4 - 50a^6x^4 + 24a^4x^2 \\ -2a^4 + 4a^4x^2 & 3a^5 - 10a^5x^2 + 4a^3 \end{pmatrix},$$

$$F_3 = \begin{pmatrix} 8a^5x^3 - 24a^5x - 4a^3x & -40a^6x^3 + 66a^6x - 8a^4x^3 + 20a^4x \\ 0 & -4a^3x \end{pmatrix},$$

$$F_2 = \begin{pmatrix} 12a^5x^2 - 6a^5 + 8a^3x^2 - 2a^3 & -30a^6x^2 + 9a^6 - 36a^4x^2 + 15a^4 + 4a^2 \\ 4a^2 & -2a^3 \end{pmatrix},$$

$$F_1 = \begin{pmatrix} 16a^3x & -32a^4x - 16a^2x \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F_0 = \begin{pmatrix} 8a(a^2+2) & -4a^2(a^2+2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Los coeficientes de $\mathfrak{D}_2$ están dados por

$$G_8 = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} a^5 & -a^6x^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G_7 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -a^5x & a^6x^3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G_6 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -11a^5 + 5a^5x^2 & 11a^6x^2 - 5a^6x^4 - a^4 \\ -a^4 & a^5x^2 \end{pmatrix},$$

$$
\begin{aligned}
G_5 &= \begin{pmatrix} -a^5x^3 + 12a^5x & a^6x^5 - 12a^6x^3 + 2a^4x \\ a^4x & -a^5x^3 \end{pmatrix}, \\
G_4 &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -50a^5x^2 + 93a^5 + 4a^3 & 50a^6x^4 - 93a^6x^2 - 24a^4x^2 + 28a^4 \\ -4a^4x^2 + 18a^4 & 4a^5x^4 - 18a^5x^2 + 4a^3 \end{pmatrix}, \\
G_3 &= \begin{pmatrix} -40a^5x - 4a^3x & 40a^6x^3 + 8a^4x^3 - 28a^4x \\ -8a^4x & 8a^5x^3 - 4a^3x \end{pmatrix}, \\
G_2 &= \begin{pmatrix} -30a^5 - 10a^3 & a^2(30a^4x^2 + 36a^2x^2 - 27a^2 - 4) \\ -4a^2(3a^2+1) & 12a^5x^2 + 8a^3x^2 - 10a^3 \end{pmatrix} \\
G_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 16a^2x(2a^2+1) \\ 0 & 16a^3x \end{pmatrix}, \\
G_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 4a^2(a^2+2) \\ 0 & 8a(a^2+2) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Tenemos entonces que

$$
b_P^{-1}(\mathfrak{D}_1) = \begin{pmatrix} \lambda(n) & \mu(n) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b_P^{-1}(\mathfrak{D}_2) = \begin{pmatrix} 0 & -\mu(n) \\ 0 & \lambda(n) \end{pmatrix},
$$

con

$$
\begin{aligned}
\lambda(n) &= a(a^2n^2 - a^2n + 4)(a^2n^2 + 3a^2n + 2a^2 + 4), \\
\mu(n) &= -\frac{1}{2}a^2(2a^2n^3 - a^2n^2 - a^2n + 8n + 4)(a^2n^2 + 3a^2n + 2a^2 + 4).
\end{aligned}
$$

Entonces se verifica que

$$
b_P^{-1}(\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2) = 0 = b_P^{-1}(\mathfrak{D}_2 \quad \text{y} \quad \mathfrak{D}_1) b_P^{-1}(\mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2) = \lambda(n)I.
$$

Entones $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ forman el sistema ortogonal buscado.

Tenemos los módulos $\mathcal{M}_1 = \Omega(x)\vec{u}_1$ y $\mathcal{M}_2 = \Omega(x)\vec{u}_2$ con

$$
\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \partial^2 \frac{a}{4} + \partial(-ax) - \frac{a}{2} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} \partial^2\left(-\frac{a}{4}\right) \\ \partial^2 \frac{a^2}{4}x^2 + 1 \end{pmatrix}.
$$

Tenemos $\mathfrak{U} = \begin{pmatrix} \vec{u}_1^T \\ \vec{u}_2^T \end{pmatrix}$, con $U(x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{a}{4} \\ -\frac{a}{4} & \frac{a^2}{4}x^2 \end{pmatrix}$. Calculamos

$$
U(x)W(x)U(x)^* = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{16}e^{-x^2} & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{16}e^{-x^2} \end{pmatrix}.
$$

Por lo tanto obtenemos una suma directa de pesos clásicos de Hermite multiplicado por una función racional.

Se cumple que

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{v}_1 &= \frac{a^5}{16}\mathfrak{d}^4 - \frac{a^5}{4}\mathfrak{d}^3 + \left(-\frac{a^5}{4} + 2a^3\right)\mathfrak{d}^2 + (a^5 - 4a^3)\mathfrak{d} + 8a(a^2+2), \\
\mathfrak{v}_2 &= \frac{a^5}{16}\mathfrak{d}^4 - \frac{a^5}{4}\mathfrak{d}^3 + \left(-\frac{a^5}{4} + 2a^3\right)\mathfrak{d}^2 + (a^5 - 4a^3)\mathfrak{d} + 8a(3a^4 + 7a^2 + 2).
\end{aligned}
$$

Ambos son polinomios evaluados en $\mathfrak{d}$, siendo $\mathfrak{d} = \partial^2 + \partial(-2x)$ el operador diferencial escalar clásico de Hermite.

En consecuencia $W(x)$ es una transformación biespectral de Darboux de suma directa de pesos clásicos de Hermite.

8.2. Ejemplos del tipo Jacobi

8.2.1. Ejemplo 1.

Sean $\alpha, \beta, v \in \mathbb{R}$ tales que $|\alpha-\beta| < |v| < \alpha+\beta+2$. Consideramos el siguiente peso matricial estudiado en [2]

$$W(x) = x^\alpha (1-x)^\beta (W_2 x^2 + W_1 x + W_0) 1_{(0,1)}(x),$$

con

$$W_2 = \begin{pmatrix} \frac{v(v+2+\alpha+\beta)}{v+\alpha-\beta} & 0 \\ 0 & \frac{v(-v+2+\alpha+\beta}{v-\alpha+\beta} \end{pmatrix},$$

$$W_1 = \begin{pmatrix} -(v+\alpha+\beta+2) & (\alpha+\beta+2) \\ (\alpha+\beta+2) & -(-v+\alpha+\beta+2) \end{pmatrix},$$

$$W_0 = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\alpha & \alpha \end{pmatrix}.$$

Sabemos que $\mathcal{D}(W)$ admite el siguiente operador diferencial simétrico de segundo orden

$$\mathfrak{D} = \partial^2 x(1-x)I + \partial \begin{pmatrix} -x(\alpha+\beta+4)+\alpha+2-\frac{\alpha-\beta}{v} & \frac{v-\alpha+\beta}{v} \\ \frac{v+\alpha-\beta}{v} & -x(\alpha+\beta+4)+\alpha+2+\frac{\alpha-\beta}{v} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El álgebra $\mathcal{D}(W)$ admite además dos operadores simétricos de orden 4, $\mathfrak{D}_1$ y $\mathfrak{D}_2$ que cumplen

$$b_P^{-1}(\mathfrak{D}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda(n) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b_P^{-1}(\mathfrak{D}_2) = \begin{pmatrix} \lambda(n) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las expresiones explícitas de tales operadores son bastante complicadas y extensas, por lo que sólo mostramos la expresión de su autovalor

$$\begin{aligned} \lambda(n) = {} & \alpha^4 + 4\alpha^3\beta + 8\alpha^3 n + 6\alpha^2\beta^2 + 24\alpha^2\beta n + 24\alpha^2 n^2 - 2\alpha^2 v^2 + 4\alpha\beta^3 + 24\alpha\beta^2 n \\ & + 48\alpha\beta n^2 - 4\alpha\beta v^2 + 32\alpha n^3 - 8\alpha n v^2 + \beta^4 + 8\beta^3 n + 24\beta^2 n^2 - 2\beta^2 v^2 + 32\beta n^3 \\ & - 8\beta n v^2 + 16n^4 - 8n^2 v^2 + v^4 + 12\alpha^3 + 36\alpha^2\beta + 72\alpha^2 n + 36\alpha\beta^2 + 144\alpha\beta n \\ & + 144\alpha n^2 - 12\alpha v^2 + 12\beta^3 + 72\beta^2 n + 144\beta n^2 - 12\beta v^2 + 96n^3 - 24 n v^2 + 52\alpha^2 \\ & + 104\alpha\beta + 208\alpha n + 52\beta^2 + 208\beta n + 208 n^2 - 20 v^2 + 96\alpha + 96\beta + 192 n + 64. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathfrak{D}_1$ y $\mathfrak{D}_2$ forman el sistema ortogonal buscado ya que $\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_1 = 0$ y $\mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2 \in Z(W)$.

Entonces

$$\mathcal{M}_1 = \Omega(x)\vec{u}_1, \quad \text{y} \quad \mathcal{M}_2 = \Omega(x)\vec{u}_2,$$

con

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} \partial\left(-\frac{1}{2}\frac{v+\alpha-\beta}{v}\right) \\ \partial\left(x - \frac{v+\alpha-\beta}{2v}\right) + \frac{(-v+2+\alpha+\beta)}{2} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} \partial\left(x + \frac{(-v+\alpha-\beta)}{2v}\right) + \frac{(v+2+\alpha+\beta)}{2} \\ \partial\frac{(-v+\alpha-\beta)}{2v} \end{pmatrix}.$$

Tenemos

$$U(x) = \begin{pmatrix} \frac{v+\alpha-\beta}{-2v} & x - \frac{v+\alpha-\beta}{2v} \\ x + \frac{(-v+\alpha-\beta)}{2v} & \frac{-v+\alpha-\beta}{2v} \end{pmatrix}$$

y calculamos

$$U(x)W(x)U(x)^* = x^{\alpha+2}(1-x)^{\beta+2}\begin{pmatrix} \frac{v(\alpha+\beta-v+2)}{-v+\alpha-\beta} & 0 \\ 0 & \frac{v(\alpha+\beta+v+2)}{v+\alpha-\beta} \end{pmatrix} 1_{(0,1)}(x).$$

Por lo tanto obtenemos una suma directa de pesos clásicos de Jacobi multiplicado por alguna función racional. En principio no sabemos aún de qué parámetros será, pues puede que estos estén afectados por algún factor $x(1-x)$.

Tenemos que

$$\mathfrak{U}\mathfrak{D}_1 = \begin{pmatrix} \mathfrak{v}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathfrak{U} \quad \text{y} \quad \mathfrak{U}\mathfrak{D}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{v}_2 \end{pmatrix}\mathfrak{U}.$$

Calculamos entonces $\mathfrak{v}_1$ y $\mathfrak{v}_2$. Obtenemos que

$$\begin{aligned} \mathfrak{v}_1 = \mathfrak{v}_2 = & 16\mathfrak{d}^2 - \Big(8(\alpha+\beta)^2 - 8v^2 + 48(\alpha+\beta) + 64\Big)\,\mathfrak{d} \\ & + \Big(\alpha^4 + 4\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 - 2\alpha^2v^2 + 4\alpha\beta^3 - 4\alpha\beta v^2 + \beta^4 - 2\beta^2v^2 + v^4 \\ & \quad + 12\alpha^3 + 36\alpha\beta^2 - 12\alpha v^2 + 12\beta^3 - 12\beta v^2 + 52\alpha^2 + 104\alpha\beta + 52\beta^2 \\ & \quad - 20v^2 + 96(\alpha+\beta) + 64\Big). \end{aligned}$$

Donde $\mathfrak{d} = \partial^2 x(1-x) + \partial(\alpha + 2 - (\alpha+\beta+4)x)$ es el operador diferencial escalar clásico de Jacobi de parámetros $\alpha+1$, $\beta+1$.

Así resulta que $W(x)$ es transformación de Darboux de una suma directa de pesos clásicos de Jacobi de parámetros $\alpha+1$, $\beta+1$.

8.2.2. Ejemplo 2.

Sean $a, r \in \mathbb{R}$, con $r > 0$ y consideramos el siguiente peso matricial

$$W(x) = (1-x^2)^{\frac{r}{2}-1}\begin{pmatrix} a(x^2-1) & -rx \\ -rx & (r-a)(x^2-1)+r \end{pmatrix} 1_{(-1,1)}(x).$$

Los siguientes operadores diferenciales simétricos de segundo orden están en $\mathcal{D}(W)$

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathfrak{D}}_1 &= \partial^2\begin{pmatrix} 1-x^2 & 0 \\ 0 & 1-x^2 \end{pmatrix} + \partial\begin{pmatrix} -(r+2)x & -2 \\ -2 & -(r+2)x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2a+r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \widetilde{\mathfrak{D}}_2 &= \partial^2\begin{pmatrix} -1 & -x \\ x & x^2 \end{pmatrix} + \partial\begin{pmatrix} 0 & a-r \\ a+2 & (r+2)x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^2-ar+a-r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Construimos entonces los siguientes operadores simétricos de orden 4

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_1 &= (-2a^2+2ar+r)\widetilde{\mathfrak{D}}_2 + \widetilde{\mathfrak{D}}_2^2 + (a^4 - 2a^3r + a^2r^2 - a^2r + ar^2 - a^2 + ar)I, \\ \mathfrak{D}_2 &= (2a^2-2ar+4a-3r)\widetilde{\mathfrak{D}}_1 + (2a^2-2ar+4a-3r)\widetilde{\mathfrak{D}}_2 + \widetilde{\mathfrak{D}}_1^2 - \widetilde{\mathfrak{D}}_2^2. \end{aligned}$$

Aplicamos el isomorfismo de Fourier y calculamos

$$b_P^{-1}(\mathfrak{D}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda(n) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b_P^{-1}(\mathfrak{D}_2) = \begin{pmatrix} \lambda(n) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde

$$\lambda(n) = a^4 - 2a^3r - 2a^2n^2 - 2a^2nr + a^2r^2 + 2anr^2 + 2an^2r + n^4 + 2n^3r + n^3r$$

$$+ n^2r^2 - 2a^2n - a^2r + 2anr + ar^2 + 2n^3 + 3n^2r + nr^2 - a^2 + ar + n^2 + n.$$

Por lo tanto se cumple que

$$\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2 = 0 = \mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_1 \quad \text{y} \quad \mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2 \in Z(W).$$

En consecuencia estos operadores forman el sistema ortogonal buscado. Ahora calculamos $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$. Obetenemos que

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} \partial \\ \partial x + (r-a) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} \partial x + a \\ \partial \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\mathfrak{U} = \begin{pmatrix} \partial & \partial x + (r-a) \\ \partial x + a & \partial \end{pmatrix} \text{ y la matriz } U(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora calculamos

$$U(x)W(x)U(x)^* = \begin{pmatrix} (r-a)(1-x^2)^{\frac{r}{2}+1} & 0 \\ 0 & a(1-x^2)^{\frac{r}{2}+1} \end{pmatrix} 1_{(-1,1)}(x).$$

Obtenemos una suma directa de pesos clásicos de Jacobi multiplicados por una función racional. Resulta que

$$\begin{aligned} \vec{u}_1^T\widetilde{\mathfrak{D}}_2 &= -\mathfrak{d}\vec{u}_1^T \\ \vec{u}_2^T\widetilde{\mathfrak{D}}_2 &= (a^2 - ar + a - r)\vec{u}_2^T \\ \vec{u}_2^T\widetilde{\mathfrak{D}}_1 &= (\mathfrak{d} + (r-2a))\vec{u}_2^T. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \vec{u}_1^T\mathfrak{D}_1 &= (-2a^2 + 2ar + r)\vec{u}_1^T\widetilde{\mathfrak{D}}_2 + \vec{u}_1^T\widetilde{\mathfrak{D}}_2^2 + (a^4 - 2a^3r + a^2r^2 - a^2r + ar^2 - a^2 + ar)\vec{u}_1^T \\ &= (-2a^2 + 2ar + r)(-\mathfrak{d})\vec{u}_1^T + \mathfrak{d}^2\vec{u}_1^T + (a^4 - 2a^3r + a^2r^2 - a^2r + ar^2 - a^2 + ar)\vec{u}_1^T \\ &= (\mathfrak{d}^2 - (-2a^2 + 2ar + r)\mathfrak{d} + a^4 - 2a^3r + a^2r^2 - a^2r + ar^2 - a^2 + ar)\vec{u}_1^T \\ &= \mathfrak{v}_1\vec{u}_1^T. \end{aligned}$$

De manera similar obtenemos que

$$\vec{u}_2^T\mathfrak{D}_2 = p_2(\mathfrak{d})\mathfrak{D}_2 = \mathfrak{v}_2\mathfrak{D}_2$$

para un polinomio $p_2 \in \mathbb{C}[x]$. Entonces $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2$ son polinomios en $\mathbb{C}[\mathfrak{d}]$, siendo $\mathfrak{d} = \partial^2(1-x^2) + \partial(-r-2)x$ el operador diferencial escalar asociado al peso clásico de Jacobi $(1-x^2)^{\frac{r}{2}-1}$.

Concluimos que $W(x)$ es una transformación biespectral de Darboux de una suma directa de pesos clásicos de Jacobi $(1-x^2)^{\frac{r}{2}-1}$.

8.3. Ejemplos del tipo Laguerre

8.3.1. Ejemplo 1.

Sea $\alpha > -1$ y $a \in \mathbb{R}$. Consideramos el siguiente peso matricial

$$W(x) = x^\alpha e^{-x} \begin{pmatrix} x(1+a^2x) & ax \\ ax & 1 \end{pmatrix} 1_{(0,\infty)}(x).$$

El siguiente operador diferencial simétrico de segundo orden está en $\mathcal{D}(W)$

$$\mathfrak{D} = \partial^2 xI + \partial \begin{pmatrix} -x+\alpha+2 & ax \\ 0 & -x+\alpha+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & a(\alpha+1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tenemos que los siguientes operadores $\mathfrak{D}_1$ y $\mathfrak{D}_1$ son simétricos, de orden 4 y están en $\mathcal{D}(W)$. Expplícitamente

$$\mathfrak{D}_1 = \partial^4 F_4 + \partial^3 F_3 + \partial^2 F_2 + \partial F_1 + F_0$$

con

$$\begin{aligned}
F_4 &= \begin{pmatrix} 0 & -x^3 a \\ 0 & -x^2 \end{pmatrix}, \\
F_3 &= \begin{pmatrix} x^2 & -\frac{x^2(2a^2\alpha - a^2x + 8a^2 + 1)}{a} \\ \frac{x}{a} & -2\alpha x + x^2 - 4x \end{pmatrix}, \\
F_2 &= \begin{pmatrix} \frac{a(a^2\alpha - a^2x + 5a^2 + 1)}{a^2} & -\frac{x(a^2\alpha^2 - a^2\alpha x + 9a^2\alpha - 5a^2x + 14a^2 + 2\alpha - 2x + 4)}{a^3} \\ \frac{-x+\alpha+2}{a} & -\frac{a^2\alpha^2 - a^2\alpha x + 3a^2\alpha - 2a^2x + 2a^2 - x}{a^2} \end{pmatrix}, \\
F_1 &= \begin{pmatrix} \frac{2a^2(\alpha - x + 2) + \alpha - 2x + 2}{a^2} & \frac{-(2a^4\alpha(\alpha - x + 3) + 4a^4(-x+1) + a^2\alpha(\alpha - 2x + 3) + a^2(-5x+2) - x)}{a^3} \\ -\frac{1}{a^3} & \frac{\alpha+1}{a^2} \end{pmatrix}, \\
F_0 &= \begin{pmatrix} \frac{1-a^2}{a^4} & \frac{(a^2\alpha + a^2 + \alpha + 1)}{a^3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\mathfrak{D}_2 = \partial^4 G_4 + \partial^3 G_3 + \partial^2 G_2 + \partial G_1 + G_0$$

$$\begin{aligned}
G_4 &= \begin{pmatrix} -x^2 & x^3 a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
G_3 &= \begin{pmatrix} -2\alpha x + x^2 - 6x & \frac{x^2(2a^2\alpha - a^2x + 6a^2 + 1)}{a} \\ -\frac{x}{a} & x^2 \end{pmatrix}, \\
G_2 &= \begin{pmatrix} -\frac{a^2\alpha(\alpha - x + 5) - 5a^2x + 6a^2 - x}{a^2} & \frac{x(a^2\alpha(\alpha - x + 5) - 5a^2x + 6a^2 + 2\alpha - 2x + 4)}{a} \\ -\frac{-x+\alpha+2}{a} & \frac{x(a^2\alpha - a^2x + 2a^2 + 1)}{a^2} \end{pmatrix}, \\
G_1 &= \begin{pmatrix} \frac{2a^2\alpha + 4a^2 + \alpha + 2}{a^2} & -\frac{2a^4\alpha x + 4a^4x - a^2\alpha^2 + 2a^2\alpha x - 3a^2\alpha + 5a^2x - 2a^2 + x}{a^3} \\ \frac{2a^2+1}{a^3} & -\frac{2a^2x - \alpha + 2x + 1}{a^2} \end{pmatrix}, \\
G_0 &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{(a^2+1)(\alpha+1)}{a^3} \\ 0 & -\frac{a^2+1}{a^4} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Aplicando el isomorfismo de Fourier obtenemos que

$$b_P^{-1}(\mathfrak{D}_1) = \begin{pmatrix} \lambda(n) & \mu(n) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } b_p^{-1}(\mathfrak{D}_2) = \begin{pmatrix} 0 & -\mu(n) \\ 0 & \lambda(n) \end{pmatrix},$$

con

$$\begin{aligned}
\mu(n) = \frac{1}{a^3}\Big(&a^4\alpha n^2 + a^4n^3 + a^4\alpha n + 2a^4n^2 + a^4n + 2a^2\alpha n + 2a^2n^2 + a^2\alpha \\
&+ 3a^2n + a^2 + \alpha + n + 1\Big), \\
\lambda(n) = -\frac{1}{a^4}&(a^2n + a^2 + 1)(a^2n + 1).
\end{aligned}$$

Así vemos que $\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2 = 0 = \mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_1$ y que $\mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2 \in Z(W)$. Luego $\mathfrak{D}_1$ y $\mathfrak{D}_2$ forman el sistema ortogonal buscado.

Tenemos que

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a} \\ \partial x + (\alpha+1) \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -\partial a \\ \partial a^2 x + 1 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$U(x) = \begin{pmatrix} 0 & x \\ -a & a^2 x \end{pmatrix}.$$

Entonces calculamos

$$U(x)W(x)U(x)^* = \begin{pmatrix} x^{\alpha+2}e^{-x} & 0 \\ 0 & a^2 x^{\alpha+1} e^{-x} \end{pmatrix} 1_{(0,\infty)}(x)$$

y obtenemos una suma directa de pesos clásicos de Laguerre multiplicados por funciones racionales.

Calculamos $\mathfrak{v}_1$ y $\mathfrak{v}_2$ y nos quedan

$$\mathfrak{v}_1 = -\mathfrak{d}_1^2 + \frac{a^2+2}{a^2}\mathfrak{d}_1 - \frac{a^2+1}{a^4} \qquad \text{y} \qquad \mathfrak{v}_2 = -\mathfrak{d}_2^2 + \frac{a^2+2}{a^2}\mathfrak{d}_2 - \frac{a^2+1}{a^4}.$$

Siendo $\mathfrak{d}_1 = \partial^2 x + \partial(\alpha+2-x)$ el operador clásico de Laguerre de parámetro $\alpha+1$, y $\mathfrak{d}_2 = \partial^2 x + \partial(\alpha+1-x)$ el operador clásico de Laguerre de parámetro α.

Concluimos así que $W(x)$ es una transformación de Darboux de una suma directa de pesos clásicos de Laguerre uno de parámetro $\alpha+1$ y el otro de parámetro α.

8.3.2. Ejemplo 2.

Sean $a, \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > -1$. Consideramos el siguiente peso matricial

$$W(x) = x^{\alpha}e^{-x}\begin{pmatrix} 1+a^2x^2 & ax \\ ax & 1 \end{pmatrix} 1_{(0,\infty)}(x).$$

El siguiente operador diferencial simétrico de segundo orden está en $\mathcal{D}(W)$

$$\mathfrak{D} = \partial^2 x I + \partial \begin{pmatrix} \alpha+1-x & 2ax \\ 0 & \alpha+1-x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & a(\alpha+1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Encontramos un sistema ortogonal formado por dos operadores simétricos $\mathfrak{D}_1$ y $\mathfrak{D}_2$, ambos de orden 8, solo escribiremos sus autovalores. Tenemos que

$$b_P^{-1}(\mathfrak{D}_1) = \begin{pmatrix} 0 & \mu(n) \\ 0 & \lambda(n) \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad b_P^{-1}(\mathfrak{D}_2) = \begin{pmatrix} \lambda(n) & -\mu(n) \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned}
\lambda(n) &= (a^2\alpha n + a^2n^2 + 1)(a^2\alpha n + a^2n^2 + a^2\alpha + 2a^2n + a^2 + 1), \\
\mu(n) &= a(a^2\alpha^2 n + 3a^2\alpha n^2 + 2a^2n^3 + a^2\alpha n + a^2n^2 + \alpha + 2n + 1)\times \\
&\qquad (a^2\alpha n + a^2n^2 + a^2\alpha + 2a^2n + a^2 + 1).
\end{aligned}$$

Ahora $\mathcal{M}_1 = \Omega(x)\vec{u}_1$ y $\mathcal{M}_2 = \Omega(x)\vec{u}_2$, con

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} \partial^2(-ax) + \partial(-\alpha-1)a \\ \partial^2 a^2x^2 + \partial(\alpha+1)a^2x + 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \\ \partial^2 x + \partial(-2x+\alpha+1) - (\alpha+1) \end{pmatrix}.$$

Tenemos que

$$U(x) = \begin{pmatrix} -ax & a^2x^2 \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

y calculamos

$$U(x)W(x)U(x)^* = x^{\alpha+2}e^{-x} \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} 1_{(0,\infty)}(x).$$

Por lo tanto nos queda una suma directa de pesos clásicos de Laguerre multiplicados por funciones racionales.

Si $\mathfrak{d} = \partial^2 x + \partial(\alpha+1-x)$ es el operador diferencial asociado al peso clásico de Laguerre de parámetro α resulta que

$$\begin{aligned} \mathfrak{v}_1 = \mathfrak{v}_2 = & a^4\mathfrak{d}^4 - (2\alpha+2)a^4\mathfrak{d}^3 + (a^4\alpha^2 + 3a^4\alpha + a^4 + 2a^2)\mathfrak{d}^2 \\ & - a^2(a^2\alpha^2 + a^2\alpha + 2\alpha + 2)\mathfrak{d} + (a^2\alpha + a^2 + 1). \end{aligned}$$

Por lo tanto $W(x)$ es una transformación biespectral de Darboux de una suma directa de pesos clásicos de Laguerre de parámetro α.

8.3.3. Ejemplo 3.

Sean $a, \alpha \in \mathbb{R}$, con $\alpha > -1$. Tomamos el peso matricial

$$W(x) = x^{\alpha}e^{-1} \begin{pmatrix} (1+a^2)x^2 & ax \\ ax & 1 \end{pmatrix} 1_{(0,\infty)}(x).$$

Tenemos que $\mathcal{D}(W)$ admite el siguiente operador diferencial simétrico de segundo orden

$$\mathfrak{D} = \partial^2 x + \partial \begin{pmatrix} \alpha+3-x & 0 \\ 0 & \alpha+1-x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & a(\alpha+1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Encontramos un sistema ortogonal formado por dos operadores simétricos de orden 4, cuyos autovalores son

$$b_p^{-1}(\mathfrak{D}_1) = \begin{pmatrix} 0 & \mu(n) \\ 0 & \lambda(n) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b_P^{-1}(\mathfrak{D}_2) = \begin{pmatrix} \lambda(n) & -\mu(n) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

con

$$\begin{aligned} \mu(n) &= (a^2n + a^2 + \alpha + n + 2)(a^2\alpha n + a^2n + \alpha^2 + \alpha n + 2\alpha + n + 1)a, \\ \lambda(n) &= (a^2n + \alpha + n + 1)(a^2n + a^2 + \alpha + n + 2). \end{aligned}$$

En este caso tenemos

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} \partial \\ \partial\left(-\frac{a^2+1}{a}\right)x - \frac{\alpha+1}{a} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} \partial(-1)+1 \\ -a(\alpha+1) \end{pmatrix}$$

y

$$U(x) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a^2+1}{a}x \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos

$$U(x)W(x)U(x)^* = x^{\alpha+2}e^{-x} \begin{pmatrix} \frac{(\alpha^2+1}{a} & 0 \\ 0 & (a^2+1) \end{pmatrix} 1_{(0,\infty)}(x).$$

Por lo tanto es suma directa de pesos clásicos de Laguerre multiplicados por funciones racionales.

Escribimos $\vec{u}_1^T\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{v}_1\vec{u}_1^T$, y llamamos $\mathfrak{d} = \partial^2 x + \partial(\alpha + 2 - x)$ al operador diferencial asociado al peso escalar clásico de Laguerre de parámetro $\alpha + 1$. Entonces

$$\vec{u}_2^T\mathfrak{D}_2 = \mathfrak{v}_2\vec{u}_2^T$$

y

$$\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{v}_2 = (a^2+1)^2\mathfrak{d}^2 - (a^4 + 2a^2\alpha + 4a^2 + 2\alpha + 3)\mathfrak{d} - (a^2\alpha + a^2 + \alpha^2 + 3\alpha + 2).$$

Concluimos que $W(x)$ es una transformación biespectral de Darboux de una suma directa de pesos clásicos de Laguerre de parámetro $\alpha + 1$.

Bibliografía

[1] S. Bochner. *Über Sturm-Liouvillesche polynomsysteme.* Mathematische Zeitschrift, 29(1):730–736, 1929.

[2] C. Calderón, Y. Gonzalez, I. Pacharoni, S. Simondi e I. Zurrián. 2×2 *Hypereometric operators with diagonal eigenvalues.* Journal of approximation theory, 2019 vol. 248

[3] W. R. Casper. *Biespectral Operator Algebras.* PhD thesis, 2017. Univ of Washington.

[4] W. R. Casper y M. Yakimov. *The Matrix Bochner Problem.* 2020 American J. Math. (to appear). Ver también arXiv:1803.04405v2 [math.RA] 2018.

[5] A. J. Durán y F. A. Grünbaum. *Orthogonal matrix polynomials satisfying second-order differential equations.* International Mathematics Research Notices, 2004 (10):461–484.

[6] G.P. Egorychev. *Integral representation and the computation of combinatorial sums*, Translations of Mathematical Monographs, AMS. **59** (1984), 1-286.

[7] M. García-Ferrero, D. Gómez-Ullate y R. Milson. *A Bochner type classification theorem for exceptional orthogonal polynomials.* arXiv preprint arXiv:1603.04358, 2016.

[8] J. Geiger, E. Horozov y M. Yakimov. *Noncommutative bispectral Darboux transformations.* Trans. Amer. Math. Soc., 369(8):5889-5919, 2017.

[9] F. A. Grünbaum, I. Pacharoni y J. Tirao. *An invitation to matrix-valued spherical functions: linearization of products in the case of complex projective space* $P_2(\mathbb{C})$. In *Modern signal processing*, volume 46 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 147-160. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004 Academic Press, 1999.

[10] F. A. Grünbaum, I. Pacharoni y J. Tirao. *Matrix value spherical functions associated to the complex projective plane.* J. Funct. Anal., 188(2):350-441, 2002.

[11] F. A. Grünbaum, I. Pacharoni y J. Tirao. *Matrix valued orthogonal polynomials of the Jacobi type.* Indag.Mathem. 14 nrs. 3,4 (2003), 353- 366.

[12] F. A. Grünbaum y J. Tirao. *The Algebra of Differential Operators Associated to a Weight Matrix.* Integral Equations Operator Theory, 58(4):449-475, 2007.

[13] J. Tirao e I. Zurrián. *Reducibility of matrix weights.* The Ramanujan Journal, 45(2):349-374, 2018.