Universidad Nacional de Córdoba
Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

ABORDAJE DE LA INTEGRAL DEFINIDA EN UN CONTEXTO DE VIRTUALIDAD

Trabajo Final de Prácticas Profesionales Docentes

Almada, Nadia Celeste
Anzil, Antonella

Equipo responsable de MyPE: Asinari Marianela, Coirini Carreras Araceli, Gerez Cuevas Nicolás, Mina María, Smith Silvina

Profesor Supervisor de Prácticas: Gerez Cuevas, Nicolás

Carrera: Profesorado en Matemática

Fecha: 03-12-2020

Fecha: 03-12-2020 Abordaje de la integral definida en un contexto de virtualidad por Almada, Nadia Celeste y Anzil, Antonella se distribuye bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional.

Clasificación:

97 Mathematical Education

97D Education and instruction in mathematics

97I50 Integral calculus (educational aspects)

Palabras Claves

Integral definida - Regla de Barrow - GeoGebra - Virtualidad - Prácticas Docentes

RESUMEN

En el presente informe se describen y analizan las prácticas de enseñanza realizadas por un par pedagógico del Profesorado en Matemática de FAMAF de la Universidad Nacional de Córdoba. Las mismas se llevaron a cabo en un tercer año de un Instituto Superior de Formación Docente. En primer lugar, se presenta una descripción sobre las medidas que se tomaron para continuar la educación afectada por la pandemia, así como una breve caracterización del vínculo docente-conocimiento-estudiantes de las clases observadas por encuentros virtuales. A continuación, la propuesta de práctica, se presentó el cálculo de integrales definidas, utilizando el software GeoGebra, con el propósito de consolidar el concepto de integral definida a través de su definición y de su interpretación geométrica. Finalmente, se expone la reflexión a modo de cierre.

ABSTRACT

In this report, a pedagogical pair teaching practice from the Faculty of Mathematics, Physics, Astronomy and Computing Sciences at University National of Córdoba is fully described and analyzed. They were carried out in a third year of a Higher Institute of Teacher Training. First, a description of the measures taken to continue education affected by the pandemic is presented, as well as a brief characterization of the teacher-knowledge-student relationship of the classes observed by virtual encounters. Next, the practice proposal, the calculation of definite integrals was presented, using the GeoGebra software, in order to consolidate the concept of definite integral through its definition and its geometric interpretation. Finally, the reflection is exposed as a closing statement.

Háblame y quizás lo olvide. Enséñame y quizás recuerde. Particípame y aprenderé.
Benjamín Franklin

ÍNDICE

1. Introducción

En la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación (FAMAF) de la ciudad de Córdoba las prácticas docentes se llevan a cabo en el cuarto año de la carrera del Profesorado en Matemática. En esta instancia final del recorrido académico a cada practicante se le asigna un curso, generalmente de educación secundaria, para que en un primer momento observe cómo el docente gestiona las clases y luego pueda realizar sus prácticas docente acompañadas del profesor orientador y supervisadas por los docentes de Metodología y Práctica de la Enseñanza.

En este contexto, la pandemia generada por el COVID-19 ha provocado una crisis sin precedentes en todos los ámbitos. En la esfera de la educación, esta emergencia ha golpeado la enseñanza presencial y por consecuencia las prácticas fueron afectadas a tal punto de llevar a los practicantes a tener el primer contacto con un curso de manera virtual.

El día 15 de marzo se sancionó la Resolución 108/20 (MEPC, 2020) cuyo primer artículo establece que "... en acuerdo con el CONSEJO FEDERAL DE EDUCACIÓN y en coordinación con los organismos competentes de todas las jurisdicciones, conforme con las recomendaciones emanadas de las autoridades sanitarias, y manteniendo abiertos los establecimientos educativos, la suspensión del dictado de clases presenciales en los niveles inicial, primario, secundario en todas sus modalidades, e institutos de educación superior, por CATORCE (14) días corridos a partir del 16 de marzo".

Luego la cuarentena fue extendida reiteradas veces cada 15 días, la cual generaba mayor incertidumbre sobre nuestras prácticas. Antes de comenzar el segundo cuatrimestre FAMAF dispuso la Resolución 168/2020 en la cual se encuentra un artículo que estaba dirigido exclusivamente para nosotros. El Artículo n° 7 establece "...que las clases de las asignaturas de los Profesorados en Matemática y en Física que requieran de prácticas presenciales en organismo de educación pública o privada se realicen en la medida en que la situación sanitaria lo permita. En caso de que no se pudieran realizar, la/el docente a cargo de las asignaturas deberá comunicar esta situación a la secretaría académica". Gracias a este artículo y a la buena reputación del equipo docente de Educación Matemática de FAMAF y de su labor es que algunas instituciones nos "abrieron las puertas" para que podamos realizar las observaciones en septiembre y nuestras prácticas con una modalidad virtual en octubre.

Inés Dussel en la videoconferencia[1] realizada en vivo en mayo del 2020 refleja los sentimientos de incertidumbre con la cual comenzamos esta experiencia, pues comenta que

> … la clase presencial tiene aspectos irreemplazables. La escuela es un espacio de encuentro que todavía no puede, al menos para mí y para varios otros, no puede ser superada por una plataforma que distribuye conocimientos y diseña con actividades. No, creo que la escuela no es eso, la escuela es un espacio de encuentro con otros, con otros lenguajes, con otras historias, con otras formas de preguntarse y de atender al mundo. (ISEP, 2020, 14m53s)

Sin embargo, también agrega una visión más optimista de este contexto que compartimos luego de varios meses de aislamiento, puesto que dice

> ...creo que está bien que no querramos tener formación a distancia, pero me parece que hay que ver cuáles son las condiciones que tenemos hoy, creo que es ineludible y es parte de nuestra responsabilidad pedagógica hacer algo en este contexto y también tratar de hacerlo lo mejor que podamos. (ISEP, 2020, 15m24s)

1.1 La institución escolar en la modalidad virtual

La institución que se nos asignó se encuentra en la ciudad de Córdoba. Este es un Instituto Superior de Formación Docente (ISFD) que forma parte del sistema de educación pública y es de gestión estatal.

El instituto cuenta con una página web en donde se encuentra la sección de noticias, en la cual publicaron avisos para leer con carácter de urgencia. El primer anuncio por la pandemia se realizó el 16 de marzo comunicando que hasta el 31 de marzo no habría clases por los anuncios del Presidente de la Nación y de las disposiciones del Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba. Además se avisó que al día siguiente según el Ministerio se resolvería la modalidad en que los agentes (docentes, coordinadores, preceptor y personal administrativo) deberán cumplir su carga laboral.

---

[1] Videoconferencia: Inés Dussel - Entre entender la emergencia y pensar nuevos horizontes https://www.youtube.com/watch?v=r_FGWI33K5c

La profesora a cargo de la asignatura Problemáticas del Análisis Matemático II del Profesorado de Educación Secundaria en Matemática, también se enfrentó a este nuevo desafío de la virtualidad, al principio no sabía si se iba a volver al aula por lo cual continuó con el dictado de los primeros dos contenidos previstos para la presencialidad, límites y significado de la derivada. Luego como se dictaminó que se continuaría con la virtualidad tuvo que seleccionar los núcleos temáticos que se podían enseñar en este contexto.

Por otro lado la docente respondía las consultas por el foro del aula virtual[2] y si eran de carácter urgente por medio de WhatsApp. Esta aula virtual está separada por las unidades curriculares, dentro de cada una aparece en verde el porcentaje de los contenidos obligatorios realizados y en rojo se enumeran los contenidos pendientes.

Visto que los horarios de las clases presenciales no se pudieron mantener en la modalidad virtual la institución dispuso para los profesores una agenda en el Google Drive en donde organizan los encuentros sincrónicos semanales y pueden gestionar cambios de horarios. La carga horaria de la unidad curricular que contaba con 6 horas cátedra semanales observada fue restringida a un encuentro sincrónico semanal de hora y media aproximadamente.

El primer acercamiento que tuvimos con los estudiantes fue a través de la participación como oyentes de los encuentros sincrónicos semanales que realizó la docente por Google Meet[3]. Además, este periodo de observación nos permitió conocer el vínculo docente - conocimiento - estudiantes.

Notamos que en los encuentros habían fuertes actitudes participativas de parte de los estudiantes gracias al vínculo de confianza con la docente, en ningún momento se notó tensión para contestar preguntas, ni siquiera cuando estas eran erróneas. Esta situación nos recuerda las palabras de P. Sadovsky (2005), "se trata de una clase en la que la discusión está habilitada y en la que los alumnos se sienten con libertad para hacer propuestas" (p. 53)

En resumen la docente presentó las fórmulas de integración por partes a través de un Genially[4], y compartió varios archivos con ejercicios de integrales para que los estudiantes

---

[2] Foro del aula virtual: es una actividad en línea que permite el intercambio de ideas y preguntas sobre un tema específico, ofreciendo a cada usuario suscrito la posibilidad de expresar sus ideas o comentarios.
[3] Google Meet es la aplicación de videoconferencias de Google, para navegadores web y dispositivos móviles.
[4] Genially, también conocido como Genial.ly, es un software en línea que permite crear presentaciones animadas e interactivas.

razonen y resuelvan de forma grupal en el encuentro. El debate y el pensamiento colectivo dominó en todos los encuentros y la calidez y trato de la docente incentivaba a que los 12 estudiantes que conforman el curso participen con cámaras y micrófonos prendidos.

Destacamos como positivo este último aspecto, porque como dice Andrés Hermann (citado en El Comercio, 2020), la cámara encendida brinda sensación de mayor "cercanía" en la clase virtual porque permite mayor interacción con los estudiantes al mirarles el rostro. "Incluso el profesor puede ver a través de las gesticulaciones y ademanes de los alumnos si están atentos y si van comprendiendo.[5]"

La importancia del pizarrón se hizo notar, ya que cuando los alumnos dictaban su respuestas muchos compañeros se perdían en el desarrollo de las mismas y debía repetir reiteradas veces los pasos. Esto se evidenció hasta que un alumno mencionó que necesitaban un pizarrón, entonces la docente recurrió a una pizarra real y reorganizó sus próximas clases apuntando con una cámara su pizarra. Este cambio se hizo muy notable y fue de mucha ayuda para todos puesto que el rol de la pizarra simplificó y unificó las resoluciones copiadas en las carpetas por los estudiantes.

Como define M. Villarreal (2013) en Humanos-con-medios- un marco para comprender la producción matemática y repensar prácticas educativas, el pizarrón es un medio que se caracteriza por su omnipresencia en la escuela. Agrega que "Una de las principales prácticas que el pizarrón permitió fue la enseñanza simultánea de lectura y escritura para la clase completa. Desde entonces, el pizarrón y el profesor se tornaron los actores centrales en la vida del aula, y copiar del pizarrón fue la principal actividad de los estudiantes."

2. La propuesta de práctica y su implementación en contextos virtuales

La unidad curricular en la cual desarrollamos nuestras prácticas se llama Problemáticas del Análisis Matemático II, es de formato asignatura[6] y se dicta de manera anual, con una carga horaria de 6 horas cátedra distribuidas en dos encuentros presenciales semanales.

[5] Recuperado de https://www.elcomercio.com/actualidad/camara-sensacion-cercania-clase-virtual.html

[6] Formato Asignatura: se define por la organización y la enseñanza de marcos disciplinares. Brinda modelos explicativos propios de las disciplinas de referencia y se caracteriza por reconocer el carácter provisional y constructivo del conocimiento. En relación a la evaluación, se proponen instancias evaluativas parciales, una instancia integradora final y exámenes finales ante una comisión evaluadora. (MEPC, 2015, p.19)

Los ejes de contenidos sugeridos por el Diseño Curricular (MEPC, 2015) que han sido desarrollados durante nuestras prácticas son:

- Aproximación a las técnicas del Cálculo diferencial e integral: Técnicas básicas de derivación y su uso para el cálculo de antiderivadas.
- La integral como herramienta para abordar problemas geométricos: El problema de la longitud de una curva, del área de una figura y del volumen de un sólido en el espacio.

Los contenidos trabajados por la docente en este transcurso del año fueron límites, continuado por derivadas y finalizando con integrales, todo esto está articulado, las derivadas son un límite y las integrales son las operaciones inversas de las derivadas, también se las conoce como antiderivadas. Las integrales se clasifican en dos grupos: indefinidas, que fueron tratadas por la docente, y definidas, que son las que nosotras tratamos.

2.1 Objetivos, metas y expectativas de logros

Los objetivos que nos propusimos alcanzar durante el desarrollo de las prácticas docentes se exponen a continuación:

- Abordar la noción de integrales definidas desde una perspectiva exploratoria y reflexiva a través de la resolución de problemas.
- Recuperar el sentido de la relación inversa entre derivadas e integrales.
- Cumplir con los tiempos establecidos para cada actividad preparada en las planificaciones de las clases.
- Adoptar una actitud de empatía y flexibilidad con los estudiantes para establecer un vínculo de confianza para con ellos, recreando la figura motivacional que ejerce la docente en el curso.

Nuestras expectativas fueron mutando a medida que íbamos observando las clases, puesto que los alumnos tenían una edad promedio de 30-35 años, varios tenían hijos y/o trabajaban. Estas condiciones nos hicieron pensar que el tiempo de dedicación extra sería un condicionante y por estas razones pensamos realizar clases cuyo nivel de dificultad no fuera elevado. Recordando los ambientes de aprendizaje del autor Skovmose (2000) las actividades propuestas en nuestra primera planificación se podían clasificar en el primer ambiente de aprendizaje, es decir, centradas en el paradigma del ejercicio y enmarcadas en una referencia matemática.

Cuando se realizó la presentación del anteproyecto frente a nuestros docentes y compañeros, ellos nos alentaron a repensar nuestra propuesta, sin prejuzgar las capacidades del grupo de estudiantes y nos recordaron lo que Skovsmose (2000) propone que en las clases se debe generar movilidad entre los seis ambientes de aprendizaje. También plantea que los profesores y estudiantes deben encontrar “la ruta óptima” entre los ambientes y tal camino, puede ayudar a abandonar las autoridades del aula tradicional de matemáticas y hacer que los estudiantes adquieran un papel de sujeto activo en su proceso de aprendizaje.

Por lo cual, cambiamos la orientación de lo planificado basado en las dos metas que nos propusimos:

- Que los estudiantes puedan resolver situaciones problemáticas de contextos de semirrealidad a través de las integrales.
- Que los estudiantes puedan manipular el software GeoGebra como herramienta para analizar tanto geométricamente cómo algebraicamente las situaciones planteadas.

Nuestras mayores expectativas de logro fueron poder realizar un trabajo significativo con los estudiantes presentando una propuesta pensada para futuros docentes, que lo más probable es que no vayan a enseñar la Regla de Barrow en sí, sin embargo motivarlos al trabajo de modelización donde puedan utilizar integrales. Como explica el marco orientador del Diseño Curricular de la provincia de Córdoba del Profesorado de Educación Secundaria en Matemática en esta unidad curricular se debe abordar

> … la potencialidad del Cálculo Diferencial e Integral como herramienta modelizadora de fenómenos variacionales propios de distintas ciencias. Se propone, además, el descubrimiento de nuevos sentidos para los objetos del Análisis, en tanto instrumentos privilegiados de comprensión de problemáticas intra y extra-matemáticas.
>
> El tratamiento de los contenidos presentados debe ser sustentado por un trabajo que apele a modos de comprensión dinámicos, de naturaleza provisoria, con lo cual se supera una perspectiva tecnicista y formalista, y se centra la atención en la construcción de significados a partir de los objetos matemáticos tratados en Problemáticas del Análisis Matemático I. (MEPC, 2015, p.57).

Otras expectativas, no menos importantes, fueron mantener la participación activa de los estudiantes en los encuentros, que nuestra propuesta y archivos entregados genere interés en los alumnos, lograr mantener la buena asistencia a los encuentros sincrónicos por parte de los alumnos y por último que realicen las tareas propuestas para la casa.

P. Sadovsky (2005) comenta que hay un asunto de confianza en el vínculo que se entabla entre el alumno y el docente a raíz de los intercambios que sostienen ¿hasta qué punto el alumno confía en que el docente no juzgará de modo negativo las marchas y contramarchas propias de la gestación de conocimiento? Nuestro desafío fue construir este vínculo de confianza de la que habla la autora para que en los encuentros los estudiantes produzcan conocimientos gracias al intercambio de todas las ideas - erróneas, provisorias, imprecisas, pertinentes, brillantes - pues todas pueden tener valor para la producción del conocimiento.

Por último, realizar un trabajo que sea significativo para nosotras como primera experiencia en base a la planificación y dictado de clases.

2.2 Contenidos

El principal contenido trabajado a lo largo de nuestras prácticas fue la integral definida. Esto dio pie a la anunciación del Regla de Barrow que a su vez implicó recordar el Teorema Fundamental del Cálculo[7]. La Regla de Barrow permite el cálculo de la integral definida de una función a partir de cualquiera de sus primitivas. La fórmula se puede ver a continuación, donde F(x) es una antiderivada de f(x).

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Además los contenidos que se abordaron fueron funciones, áreas, gráfico de funciones (suma de funciones, valor absoluto, etc), integración por método de sustitución, análisis de funciones polinómicas de 2[do] y 3[er] grado.

[7] El Primer Teorema Fundamental del Cálculo demuestra que la derivación y la integración son operaciones inversas. Además el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, una consecuencia directa del primer teorema, es también conocido como la Regla de Barrow en honor de Isaac Barrow.

2.3 Recursos

Debido al aislamiento que estamos viviendo los recursos utilizados fueron en su totalidad tecnologías digitales. La plataforma que se utilizó para dictar los encuentros sincrónicos de las clases fue Google Meet. Luego utilizamos la pizarra colaborativa en línea, BitPaper[8], para mostrar los pasos de la resolución de los ejercicios. También se utilizó la aplicación de software libre GeoGebra ya que combina geometría, álgebra y cálculo de manera fácil e interactiva. Además se acompañó el marco teórico con diapositivas de PowerPoint y apuntes creados en PDF y compartidos con los estudiantes. Por último, los recursos para comunicarnos con los estudiantes fuera de los encuentros sincrónicos fueron el aula virtual, WhatsApp y el correo electrónico.

Todas las producciones realizadas en clase, eran subidas al aula virtual. Por otra parte, tanto la segunda y tercer clase fueron grabadas y enviadas a los alumnos.

2.4 Cronograma

Con respecto a los encuentros sincrónicos, representamos en la Tabla 1 para una mejor lectura y luego describiremos con mayor detalle en la próxima sección.

Fecha	Contenidos trabajados	Actividades desarrolladas
15/10	Regla de Barrow. Integral definida y representación geométrica.	-Análisis del llenado de un tanque con una manguera con dos funciones diferentes. -Presentación de la fundamentación teórica para poder resolver los problemas anteriores. -Estudio de la integral de una función trigonométrica. - Resolución de los primeros ejercicios de la Guía 1.
22/10	Regla de Barrow.	-Recuperación de temas de la clase anterior.

[8] BitPaper es una pizarra en línea colaborativa, es una aplicación web que ha sido desarrollada para profesores, por profesores, para permitir la colaboración tutor-alumno en tiempo real más allá de las barreras físicas y geográficas.

	Integral definida y representación geométrica. Velocidad y posición. Integrales definidas usando sustitución.	-Corrección grupal de ejercicios de la Guía 1. - Análisis de la relación entre velocidad y posición. -Integrales en la fisica (Tiro vertical). -Actividad de integral definida usando sustitución. - Resolución de los primeros ejercicios de la Guía 2.
29/10	Regla de Barrow. Integral definida y representación geométrica. Velocidad y posición. Integrales definidas usando sustitución. Parábola. Longitud de curva. Derivadas.	-Corrección grupal de los ejercicios de la Guía 2. -Debate de la velocidad del auto en movimiento. - Actividad para calcular la longitud de una curva de un túnel. - Actividad realizada en 2 grupos para calcular el área de una imagen.

Tabla 1: Cronograma de encuentros sincrónicos.

2.5 Descripción de las clases

Para comenzar, nuestras clases fueron planificadas en tres etapas, un breve contexto histórico de la Regla de Barrow, desarrollo de actividades y problemas con integrales y por último, un trabajo en grupos para que puedan realizar ellos mismos un problema que según la matriz del autor Skovsmose (2000) clasificaremos de escenario de investigación, y el tipo de referencia semirrealidad.

Como dice Teresa Rojano (2014, p. 14) "la innovación no reside en el contenido matemático que se intenta enseñar, sino en la forma de acercar al estudiante a contenidos establecidos en el programa de matemáticas oficial".

Las clases que organizamos fueron de 90 minutos, se decidió que el primer encuentro lo diera una practicante, el segundo la otra practicante y el tercero se trabajara en conjunto.

Mientras una llevaba a cabo el desarrollo de la clase la otra se encargaba de manejar las diapositivas y pestañas necesarias de soporte para lo que se estaba explicando.

Para la primera clase solicitamos a los alumnos que lean el archivo "Integral definida: Breve reseña histórica" que se puede ver en el Anexo A, enviado con dos días de anticipación.

La primera clase comenzó con la presentación de un problema de un tanque de agua, el enunciado se puede ver en la Imagen 1.

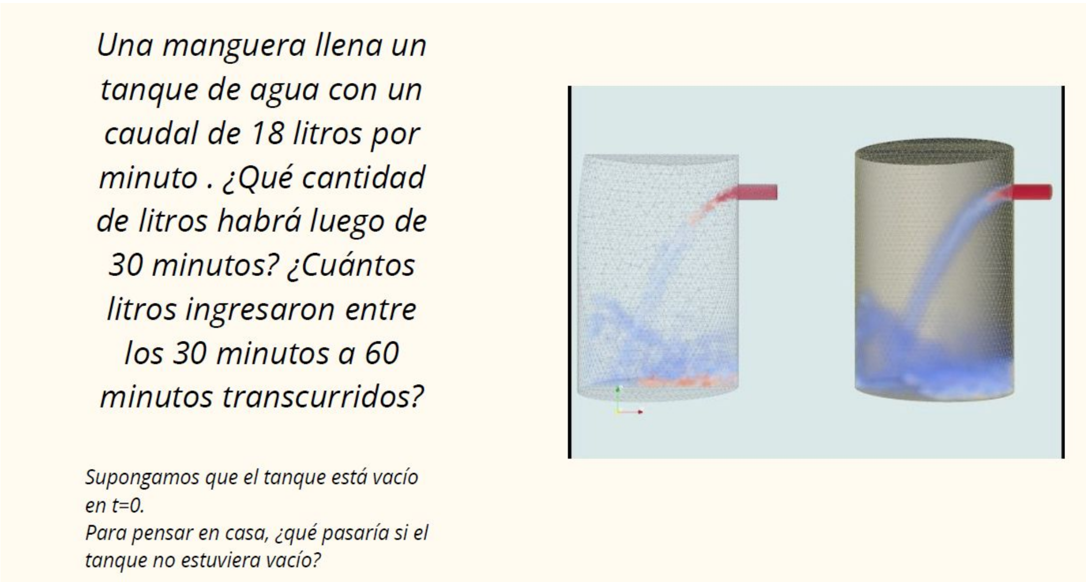


Imagen 1: Presentación del problema que se mostró a los alumnos.

Al que los alumnos pudieron resolver fácilmente, uno de ellos compartió en su pantalla la función de Volumen en función del tiempo, como se puede ver en la Imagen 2.

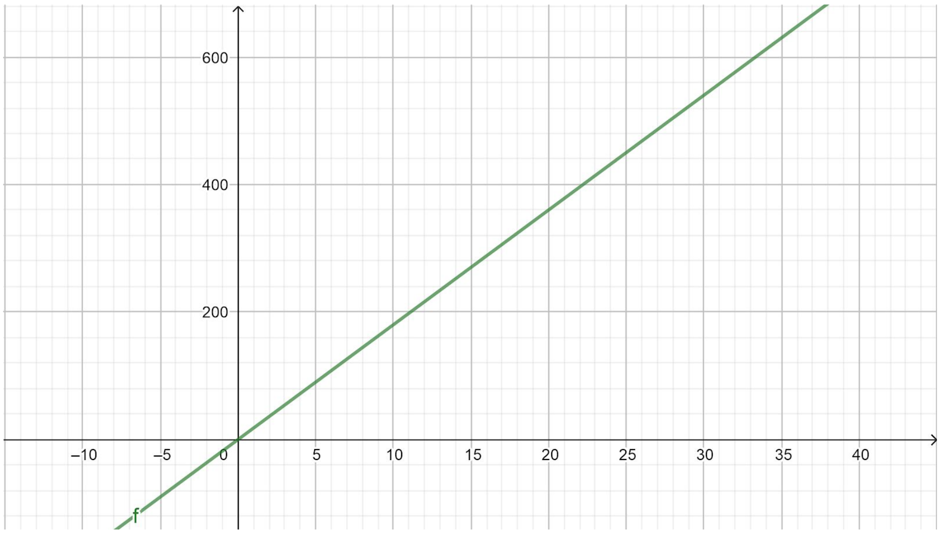


Imagen 2: Representación de lo que el alumno mostró por pantalla.

Pero cuando preguntamos sobre la función del caudal en función del tiempo no supo responder, pero sus compañeros lo ayudaron indicando que era una función constante la del caudal. Seguidamente agradecimos por su participación y continuamos presentando pantalla, con la función del caudal y establecimos la relación que el volumen correspondía al área del rectángulo con base (tiempo) y altura (caudal) como se puede ver en la Imagen 3.

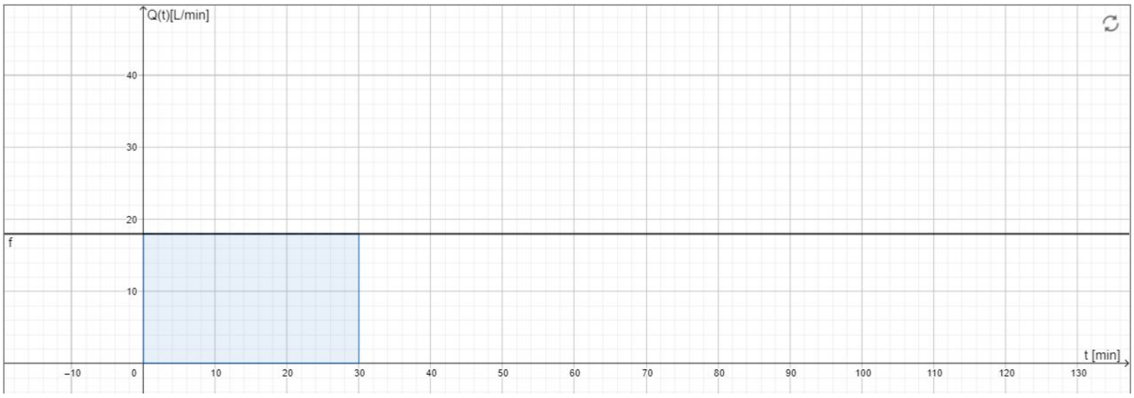


Imagen 3: Área bajo la función del caudal entre los tiempos 0[min] y 30[min].

Este problema lo llevamos a un nivel más avanzado, cambiando el caudal constante de la actividad anterior por un caudal representado por una función cuadrática, como se puede ver en la Imagen 4.

“Para resolver un problema que se nos plantea, podemos con frecuencia utilizar la solución de un problema análogo más sencillo, ya sea utilizando su método o su resultado o ambos a la vez.”(Polya, 1992, p. 61). El objetivo de este último ejercicio era que los estudiantes relacionen la tarea anterior con la presentada, abstraigan el procedimiento resuelto y lo traten de aplicar, aunque allí los alumnos no sabían cómo calcular el área que figura en la Imagen 5, ya que no hay una fórmula conocida para la figura representada.

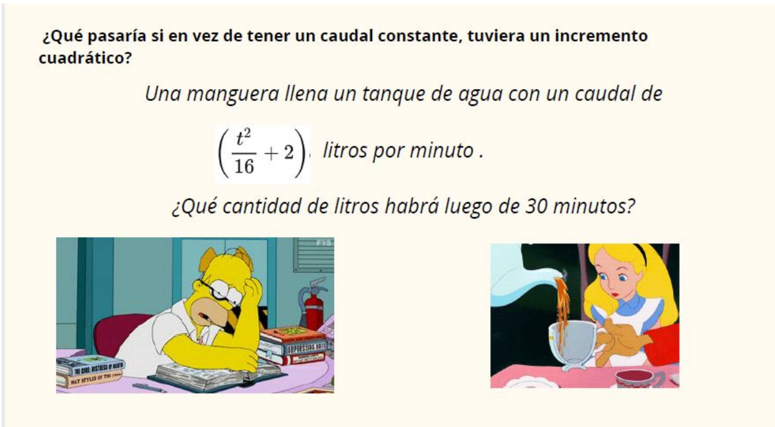


Imagen 4: Presentación del mismo problema con función del caudal distinta.

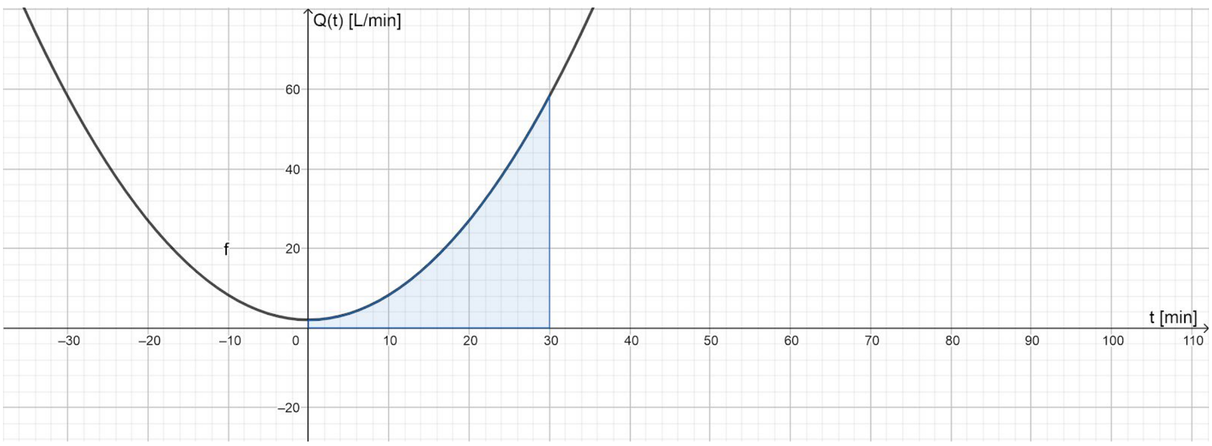


Imagen 5: Área bajo la función del caudal entre el tiempo 0[min] y 30[min].

Entonces presentamos un archivo en GeoGebra que se ve en la Imagen 6, el cual representa las sumas de Riemann, este fue extraído de los “Recursos para el aula” que brinda GeoGebra y modificado para poder ser usado en nuestra práctica.

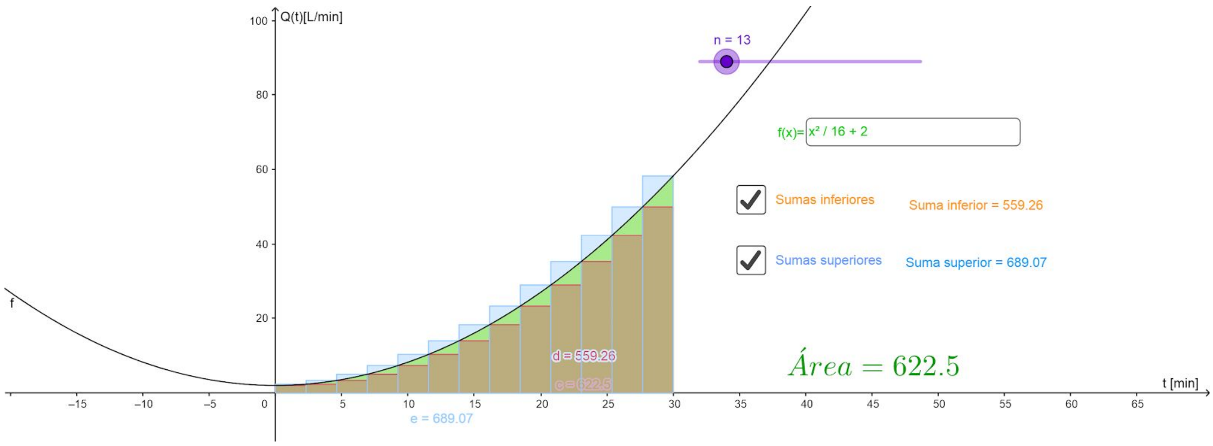


Imagen 6: Cálculo de área con suma de Riemann.

Con ese archivo abierto, íbamos haciendo preguntas para que ellos pudieran pensar, llevándolos a la idea de que tenían que aplicar límites para "tender n a infinito", y para introducir el concepto de integral definida. Continuadamente preguntamos a los alumnos si querían comentar algo de la biografía de Isaac Barrow, para luego explicar la Regla de Barrow, que nos simplifica estos cálculos.

Una vez que sabíamos cómo calcular, resolvimos en conjunto los problemas usando integrales definidas, en la pizarra digital. En un momento se generó un pequeño debate sobre la constante de integración que se suma en una integral indefinida, en el cual había dos conversaciones superpuestas, la mayoría de los alumnos estaban con el micrófono prendido, hablando y se hacía muy difícil seguir ambas conversaciones, luego de despejar las dudas se "calmó" todo. Entonces para finalizar el encuentro agregamos una función trigonométrica que ya manejaban y calculamos su integral. Esto nos sirvió para mencionar que las integrales definidas pueden dar valores negativos, o cero, y presentamos la 3^{era} propiedad que está en el Anexo B. Una vez dados todos estos contenidos nos dedicamos a que los alumnos realicen actividades de la Guía 1 que se puede ver en el Anexo C, estos se podrían clasificar según Skovsmose (2000) en el paradigma del ejercicio, matemáticas pura. A medida que los estudiantes iban resolviendo nos iban dictando para que copiemos en la pizarra digital y así todos tenían el mismo resultado, si alguno no coincidía preguntaba y se le explicaba.

La segunda clase comenzó con la recuperación y repaso del análisis realizado en el primer encuentro, acerca de la relación que existe entre el caudal y el volumen de agua en el tanque del problema planteado para pensar, también se recuperó el sentido de la constante de integración que había generado debate en la clase anterior. Luego de esta introducción, se corrigieron los ejercicios de la Guía 1 del Anexo C de forma conjunta y con el soporte de la pizarra digital para que los estudiantes no solo escuchen cuáles eran las respuestas y los pasos a resolver sino también tengan el tiempo de corregir y contrastar lo resuelto en sus carpetas.

Seguimos con la presentación de una actividad que según Ponte (2005) podría ser encuadrada en el tercer cuadrante, problema, de la Imagen 7. Donde el autor distingue las distintas tareas, a través de un plano cartesiano en donde el eje vertical representa el grado de dificultad mientras que el eje horizontal representa la apertura. También describe dos dimensiones importantes: el tiempo y el contexto. En la tarea presentada el tiempo de resolución fue de 20' aproximadamente y el contexto fue formulado en términos puramente matemáticos.

Imagen 7: Relaciones entre tipos de tareas en términos de su desafío y de apertura.

La tarea descrita, que se puede ver en la Imagen 8, no sólo permitió el razonamiento en torno al cálculo de integrales y la reflexión de área bajo la curva, sino que también permitió analizar cómo cambiaría el gráfico de la función si se le aplicaba el valor absoluto (inciso c), si se le multiplicaba una constante negativa (inciso d) y si se le sumaba una constante positiva (inciso e).

Para discusión

La gráfica de f se muestra en la figura. La región sombreada A tiene un área de 1.5 y $\int_0^6 f(x)dx = 8.1$. Usar esta información para completar los espacios en blanco

a) $\int_0^2 f(x)\,dx = \square$

b) $\int_2^6 f(x)\,dx = \square$

c) $\int_0^6 |f(x)|\,dx = \square$

d) $\int_0^2 -2f(x)\,dx = \square$

e) $\int_0^6 [2 + f(x)]\,dx = \square$

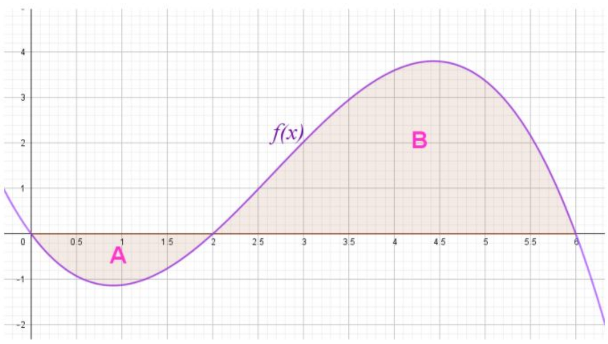


Imagen 8: Actividades presentada a los estudiantes.[9]

La clase siguió con la presentación de dos gráficas y el debate de la relación existente entre la velocidad v(t), función lineal, y la posición P(t), función cuadrática. Esto encaminó a repensar una actividad de tiro vertical, clásico ejercicio de cinemática, a través de la aplicación de la Regla de Barrow. Esto se pudo lograr gracias al reconocimiento de los elementos principales, incógnitas, datos y condición de la actividad como menciona Polya (1992), además él sugiere que para guiar al estudiante a encontrar la solución del problema hay que aplicar estrategias heurísticas[10] como preguntar ¿Cuál es la incógnita?; ¿cuáles son los datos?; ¿cuál es la condición?

Se concluyó que:

$$\int_a^b v(t)\,dt = P(b) - P(a)$$

La integral definida entre a y b de la función velocidad es igual a la resta entre la función posición evaluada en b, P(b) y la función posición evaluada en a, P(a), siendo a el tiempo inicial y b el tiempo final.

[9] Adaptada de Edwards y Larson. (2010)
[10] Las estrategias heurísticas son técnicas o reglas muy generales que nos permiten avanzar en el proceso de resolución de problemas. Al organizar la información mediante una figura o un esquema permiten plantear el problema de forma esquemática.
La heurística moderna trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas. (Polya, 1992,p. 102)

Recordando las palabra de Patricia Sadovsky (2005) la ventaja didáctica de llamar modelización a actividades como estas, en donde, en realidad hay que aplicar una operación, es contribuir a que los estudiantes tengan una visión más integrada de la actividad matemática. Además, realzar "...el valor educativo que tiene la enseñanza de esta disciplina: ofrece la posibilidad de actuar sobre una porción de la realidad a través de un aparato teórico" (p.32). Consideramos que esta visión permite apreciar el valor y el potencial del conocimiento estudiado.

Finalmente se presentó un archivo en GeoGebra con un autito que partía desde un punto de la recta, se deslizaba hacia atrás hasta otro punto y luego arrancaba su trayectoria hacia adelante. Junto con este deslizador se dejaron unas preguntas para ir pensando en la casa y resolver la próxima clase, como se puede ver en la Imagen 9.

El objetivo de la presentación de esta actividad requiere que "...los alumnos se vean confrontados a formular conjeturas, ensayar formas de validarlas, producir argumentos deductivos, arriesgar respuestas para las cuestiones que se plantean, producir formas de representación que contribuyan a arribar a las resoluciones que se buscan, reformular y reorganizar los viejos conocimientos a la luz de los nuevos que se producen, generalizar las herramientas que van emergiendo y también encontrar sus límites."(Sadovsky, 2005, p. 58)

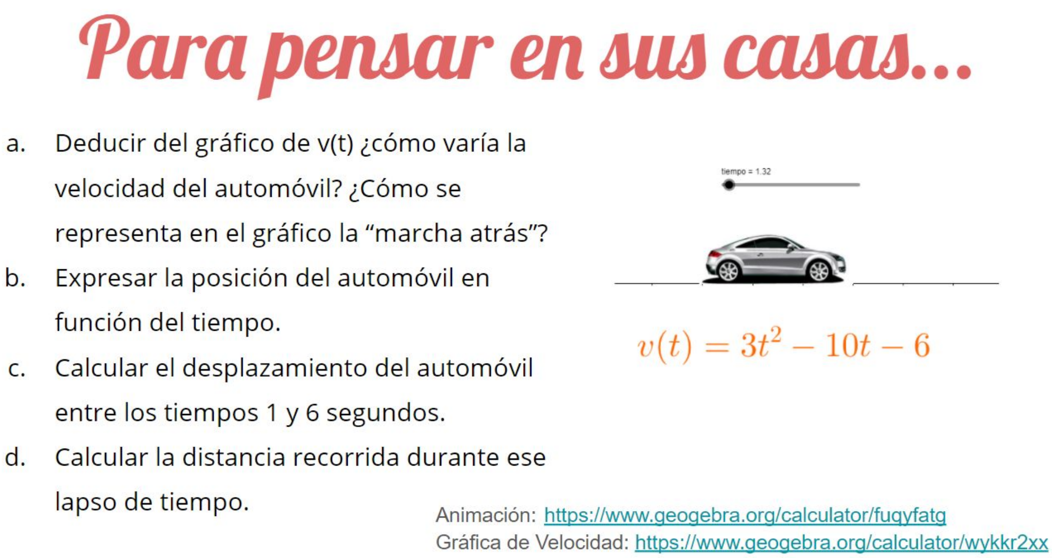


Imagen 9: Actividad propuesta para que los estudiantes piensen en sus casas.

La clase concluyó con la demostración en la pizarra de cómo resolver integrales definidas por sustitución, como se ve en la Imagen 10, y cómo los límites de integración también se veían afectados al cambio de variable. El ejemplo presentado sirvió de ayuda para que los estudiantes puedan resolver los ejercicios de la Guía 2 que se encuentra en el Anexo D.

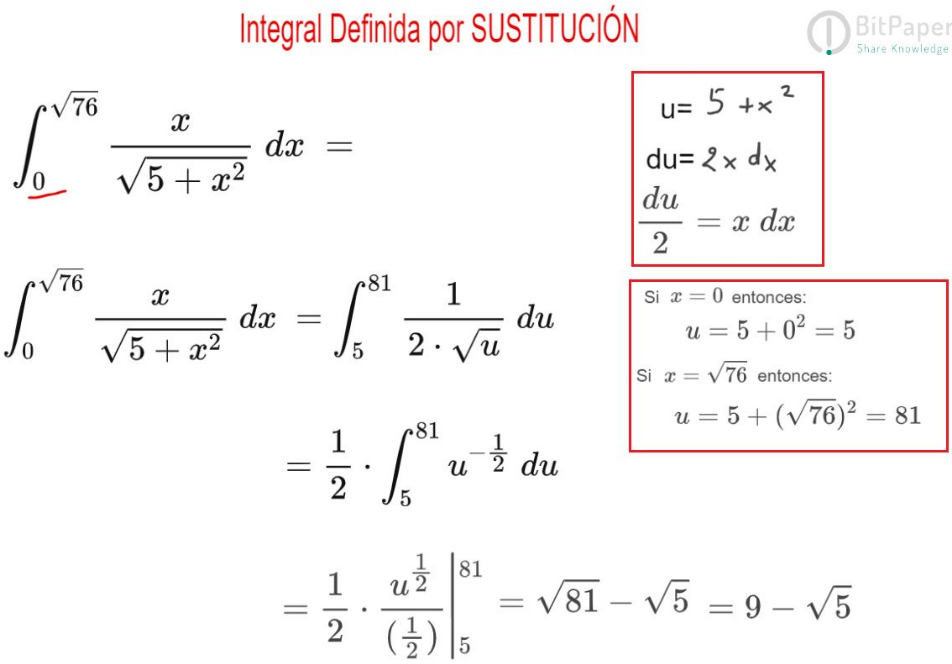


Imagen 10: Imagen extraída de la pizarra BitPaper con el ejemplo resuelto de integral definida por sustitución.

Durante el desarrollo de los ejercicios surgió duda del nombre del “palito” que acompaña la primitiva. Decidimos enseñar esta notación, que no tiene nombre propio pero creemos que es la más clara y sencilla dentro de las otras posibles notaciones para evaluar una primitiva en los límites de integración. “Una buena notación debe ser clara, concisa y fácil de retener en la memoria; debe evitar toda interpretación dudosa y utilizar las que puedan ser útiles. El orden de los signos y las relaciones entre ellos deben sugerir el orden y las relaciones de los objetos a los que corresponden ”(Polya, 1992, p.130)

Previamente a la tercera clase enviamos un apunte de GeoGebra que se puede ver en el Anexo E, en este se encuentra un tutorial de cómo hacer un deslizador, ya que en la segunda clase a los alumnos les llamó la atención eso, y también cómo calcular el área entre dos curvas con tres intersecciones, utilizando GeoGebra.

En la tercera clase corregimos los ejercicios de la Guía 2 que se ve en el Anexo D, en ella se presentaron algunas inquietudes cuando cambiamos el orden de los extremos de integración que están dentro de las propiedades de la integral definida en el Anexo B. Luego recuperamos la actividad propuesta en la clase anterior del autito donde presentamos la gráfica de velocidad y de posición, algunos alumnos pudieron relacionar la Imagen 11 con otro ejemplo, un alumno le explicaba a su compañera: ...imaginate que es como si quisieras correr para atrás contra una pared, y tenes que ir lo más rápido posible ¿qué vas a hacer? acelerar primero y después te das vuelta y empezás a desacelerar hasta que llegas a la pared. Lo cual nos sirvió muchísimo para que los demás compañeros puedan entender cómo se comportaba esa velocidad que era cuadrática desde el tiempo 0 hasta que la velocidad era nula.

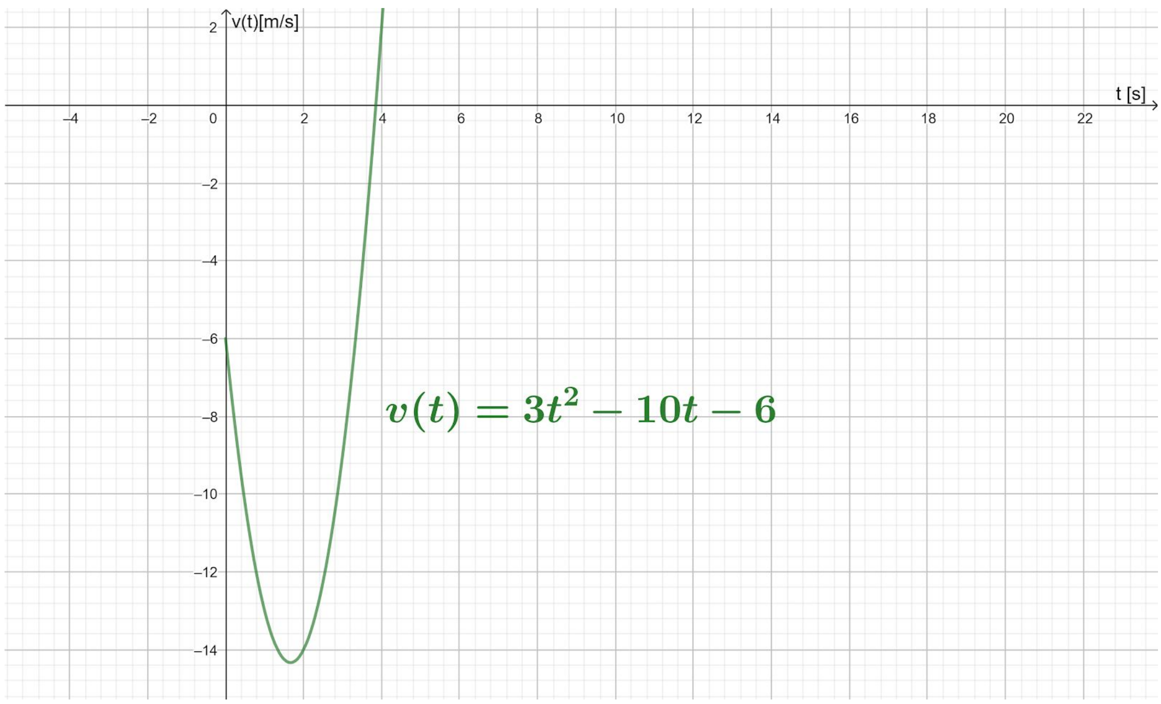


Imagen 11: Gráfica de la función velocidad del autito.

Luego presentamos otro problema, que se puede ver en la Imagen 12, en un contexto hipotético de Ingeniería en el que el cálculo del área de una superficie no resulta como aplicación directa de la integral, sino que el concepto de integral se utiliza para calcular la longitud de un arco de una curva y, a partir de esto, se puede calcular el área. Para este problema una de las practicantes recurrió a una hoja de papel A4 y por la cámara mostró cómo se podría ejemplificar el túnel con ese recurso, para que deducir el cálculo de la superficie del túnel se reduzca a multiplicar la base por la altura del rectángulo, siendo la altura la longitud del arco. Ésto ayudó a la hora de que los alumnos puedan comprender el problema, por otro lado se mostró una primera idea de cómo uno calcularía si no supiera la fórmula de longitud de arco, que sería aproximar la curva por segmentos y sumando las longitudes de ellos, como se ve en la Imagen 13.

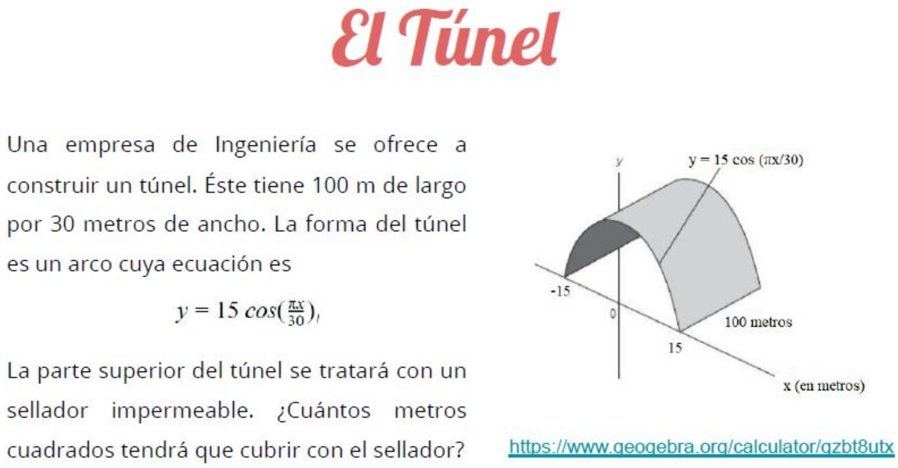


Imagen 12: Presentación del problema que se mostró a los alumnos.

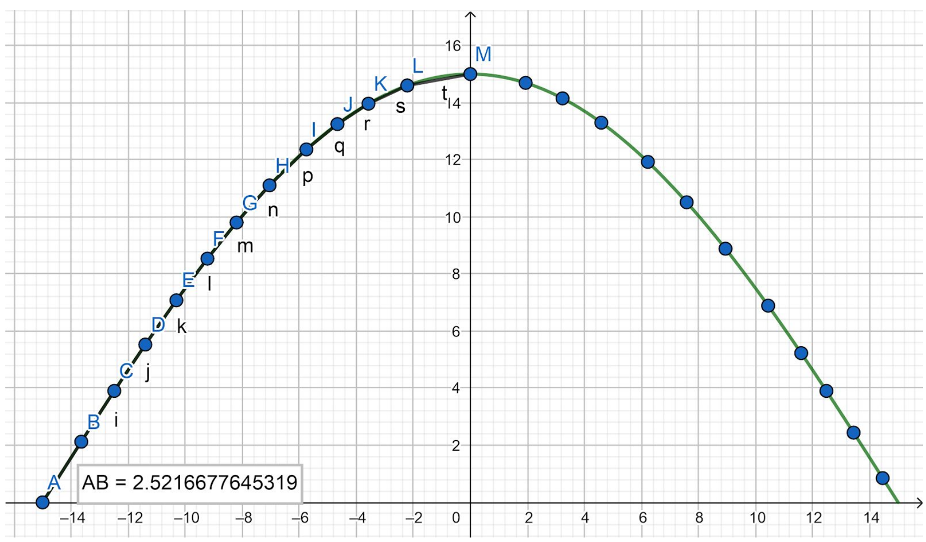


Imagen 13: Cálculo de la longitud de curva utilizando segmentos.

Le comentamos que había una forma más simple usando la fórmula de longitud de arco, que se encontraba en el Apunte presentado a comienzo de clase (Anexo B):

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

También se recuperaron los contenidos de derivadas, porque necesitaron aplicarlo, entonces una vez que teníamos la función a integrar se utilizó el recurso GeoGebra como se puede ver la Imagen 14 para poder resolver de manera rápida una integral tan difícil.

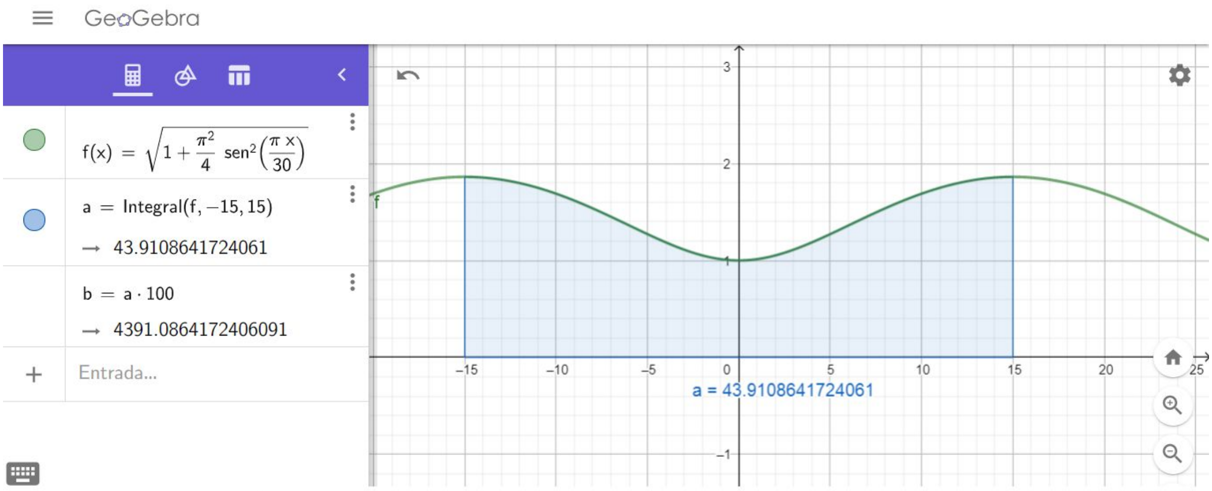


Imagen 14: Cálculo de la integral de la función f(x).

Por último nos separamos en dos grupos, e hicimos una actividad como se ve en la Imagen 15, que se puede clasificar como de exploración según la matriz de Ponte (2005) ya mencionada, de desafío medio, de respuesta abierta ya que no tiene una única respuesta sino aproximaciones. El enunciado que nosotras dimos oralmente fue: “En esta actividad necesitamos ayudar a un pintor con nuestros conocimientos matemáticos. El pintor nos mandó una foto que le mandó su cliente, con Antonella/Nadia la pusimos en el GeoGebra para que calculemos cuánto necesitará de pintura para pintar el interior del ojo. La unidad de medida de los ejes está en cm. Sólo necesita que le digamos cuántos cm^2 va a tener el ojo.”

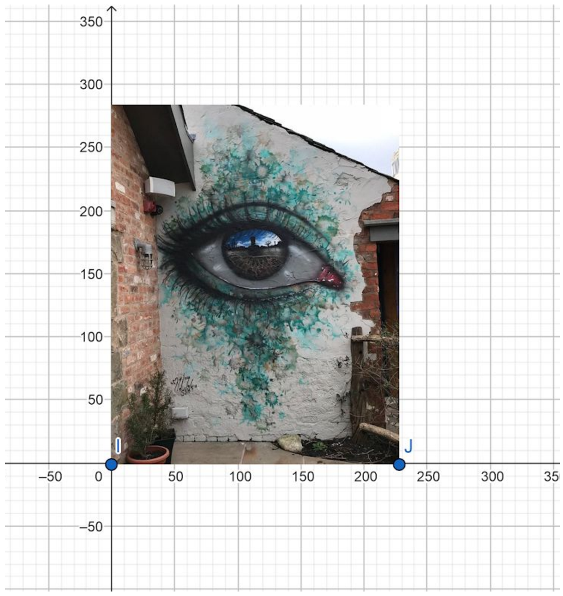


Imagen 15: Archivo presentado en GeoGebra para los alumnos.

En esta actividad recuperaron cómo se podía construir una parábola y utilizaron varias herramientas del GeoGebra, para la construcción de la misma, en ambos casos fue a "prueba y error" hasta que pudieron contornear el ojo. El primer grupo consideró que era adecuado poner el mismo foco para ambas parábolas, a diferencia del segundo grupo que utilizó dos focos, una vez que enmarcaron el ojo se ayudaron con el apunte de GeoGebra (Anexo E) para poder calcular la integral definida entre los dos puntos. En las Imagen 16 e Imagen 17 se pueden ver las producciones de los alumnos.

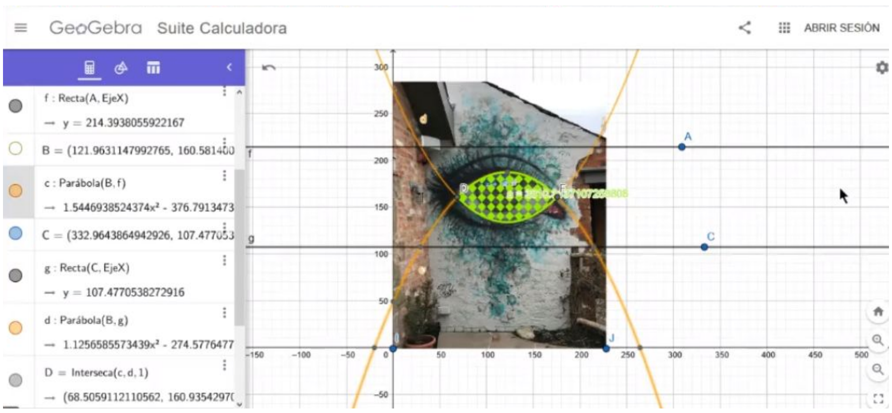


Imagen 16: Producción del primer grupo.

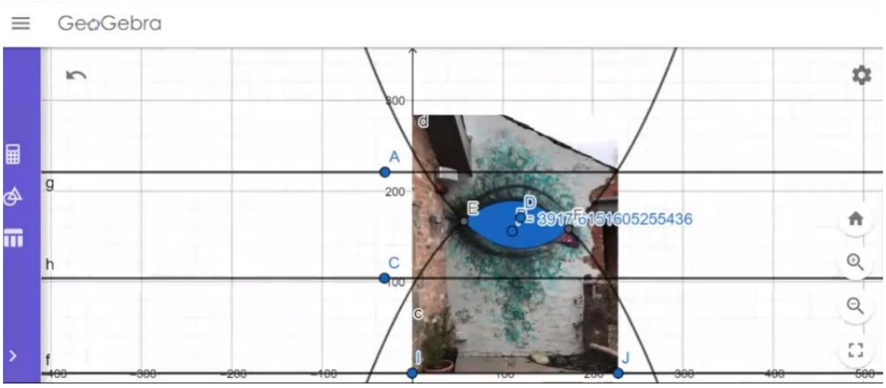


Imagen 17: Producción del segundo grupo.

2.6 Reflexiones

En este contexto de virtualidad al no tener un contacto directo con alumnos, ver sus miradas, sus expresiones, ya que el Google Meet al presentar la pantalla te deja ver a lo sumo 6 personas en la barra del costado, y al no ver sus producciones en las carpetas, nos ha sido difícil notar si de verdad estaban entendiendo. En este caso la educación estuvo atravesada por las tecnologías digitales, desde el internet, el celular, la computadora, como dice M. Villarreal (2013) el uso de las TICs en ambientes educativos ha sido extensamente discutido e investigado en educación matemática, pero en el 2020 no hubiera sido posible continuar con la enseñanza y realizar nuestras prácticas sin el uso de ellas.

Pierre Lévy (OEI, 2005) comenta sobre el "nomadismo", concepto que usa para explicar que las cosas de hoy en día cambian muy rápidamente, también nos dice que tenemos que aprender de forma continua, a lo largo de toda la vida, debemos mantenernos en movimiento, conscientes, de nuestro entorno y de lo que sucede. Todo cambia constantemente y nosotros debemos acostumbrarnos a esta auto-transformación que debería acompañar a la transformación del entorno. (Organización de Estados Iberoamericanos, 2015, 21m09s). Consideramos las palabras del autor como alentadoras para este contexto y llegamos a pensar que tuvimos la suerte de que nuestras prácticas fueran al final del ciclo lectivo, brindando la posibilidad de aprender de nuestros docentes quienes también tuvieron que transitar el nomadismo.

En cuanto a la comunicación con los estudiantes, esta fue buena en todos los encuentros sincrónicos, tal vez nos hubiera gustado tener otro contacto como estar en el grupo de

WhatsApp para que nos pudieran realizar consultas de carácter urgente y no solo las horas que estábamos dando las clases.

2.7 Dificultades en el uso de los recursos digitales

La pandemia provocada por el COVID-19 ha modificado radicalmente la educación, los docentes que dictaban sus clases frente al aula ahora lo hacen frente a las pantallas. En muchas ocasiones han replicando la clase presenciales con la ayuda de cámara y micrófono. Sin embargo, la situación general más vivenciada y comentada en este contexto fue que el docente hace preguntas y nadie contesta, no ve gestos, no sabe si sus estudiantes están escuchando, o si siquiera están.

> Desde este punto de vista, pueden señalarse algunas características que diferencian la comunicación mediada por ordenador de la comunicación tradicional (cara a cara):
>
> - Anonimato
> - Distanciamiento físico
> - Tiempo. La CMO[11] puede ser sincrónica, es decir en tiempo real, o asincrónica. El tiempo asincrónico hace que el usuario tenga minutos, horas o incluso días antes de responder al mensaje.
> - Ausencia de comunicación no verbal. (Cuadrado, Martin-Mora y Fernández, 2015, p. 183)

En nuestro país, los docentes de todos los niveles prácticamente no tenían experiencias de educación a distancia por lo que la virtualidad se tornó una gran dificultad. En lo digital, lo más vivenciado fue que las plataformas se caen, que no emiten sonido, que no proyectan o que los docentes no tienen capacitación suficiente para manejarlas debido al escaso empleo que ya se tenían en las escuelas y en la formación de los mismos con las tecnologías. También el estar sentado en muchos casos se volvió una acción nueva para los docentes, y es por estas razones mencionadas que lo más escuchado fue que los docentes se sienten angustiados, agotados y hasta, en algunas situaciones, frustrados.

Dada esta situación temíamos que la tecnología podía ser un arma de doble filo, así como son nuestras aliadas para llevar a cabo el desarrollo de las clases planificadas podrían ser ella a boicotearnos lo preparado. Un simple corte de luz, una actualización del sistema de

[11] CMO: Comunicación Mediante Ordenador.

la computadora en el momento menos esperado, caída o baja velocidad del internet, etc., hacen que la clase deba ser cancelada o reprogramada. Pero en nuestra corta experiencia, recordemos que fueron sólo 3 encuentros sincrónicos, no hemos vivenciado las situaciones que estaban atravesando los profesores en general. Hemos tenidos que trabajar con distintas computadoras ya que no contábamos con máquinas nuevas que pudieras hacer de forma rápida la transición de una pestaña a otra, pero lo pudimos solucionar dividiendonos las tareas y organizándonos previamente.

3. La evaluación de los aprendizajes en contextos virtuales

En la introducción de este trabajo ya se mencionaron algunas resoluciones que se sancionaron para que la educación de todos los niveles pudiera continuar fuera de la presencialidad en tiempos de emergencia sanitaria. Entre los aspectos a ajustar y a reorganizar están las políticas de evaluación de los aprendizajes, teniendo en cuenta la situación de cada estudiante, ya que las condiciones en que se dictaron los contenidos fueron de forma heterogénea y desigual en todo el país. En este contexto el Ministerio de Educación dictaminó el primero de octubre del 2020 la resolución 381/20. Esta establece en el Art. 1° que la acreditación de aprendizajes correspondiente al ciclo académico del corriente año para los estudiantes del Nivel Superior de Formación Docente y Formación Técnica Superior se realice sobre los contenidos priorizados desde el mes de octubre hasta el mes de marzo/abril de 2021. Este proceso fue denominado “Trayecto de acreditación de las Unidades Curriculares de Nivel Superior”.

Además, la resolución está dividida según la modalidad de acreditación de los espacios curriculares: asignaturas, seminarios y talleres, prácticas docentes y prácticas profesionales.

En el tercer artículo se establece la acreditación de asignaturas que es el formato de “Problemática del análisis matemático II”, y dos condiciones: de estudiantes promocional o regular, en ambos se tiene en cuenta la continuidad pedagógica y evidencias de aprendizaje en la evaluación formativa. En el caso de los alumnos que estén promocionables podrán acceder al coloquio integrador, dando la libertad al docente de elegir el formato, soporte y recursos, también recomendando que sea una evaluación oral y escrita, en encuentros sincrónicos o asincrónicos. Mientras que en el caso de los alumnos regulares tendrán que realizar el examen final.

La docente orientadora nos comentó luego de asistir a la reunión institucional que según la DGES[12] entre el 1 de octubre y el 20 de noviembre se tenían que llevar a cabo los coloquios integradores, tampoco se debían dictar temas nuevos, pero como nuestras prácticas y temarios ya estaban pactados con antelación entre el 15 al 29 de octubre, se hizo una excepción.

Cómo plantean Gvirtz y Palamidessi (1998) la evaluación atiende tanto a los procesos (estrategias, ritmo y clima de trabajo, recursos, formas de comunicación) como a los resultados. Pero no hay que subestimar la importancia de medir productos: resultados y procesos deben ser analizados de manera integrada.

Por ello en un principio en nuestras planificaciones se estableció junto con la docente orientadora, entregar un trabajo práctico con nota. Este trabajo contaba con 5 enunciados, donde el primero se puede ver en la Imagen 18. En este ejercicio se eligieron los límites de integración de tal forma que la función fuera negativa en el primer intervalo (-3; 0.56) y positiva en el segundo intervalo de (0.56;1). En esta actividad la idea era que a partir de una imagen puedan identificar los límites de integración, y calcular la integral. También valorar la explicación de los pasos para promover el uso de un lenguaje de mayor precisión, ya que los alumnos serán futuros formadores.

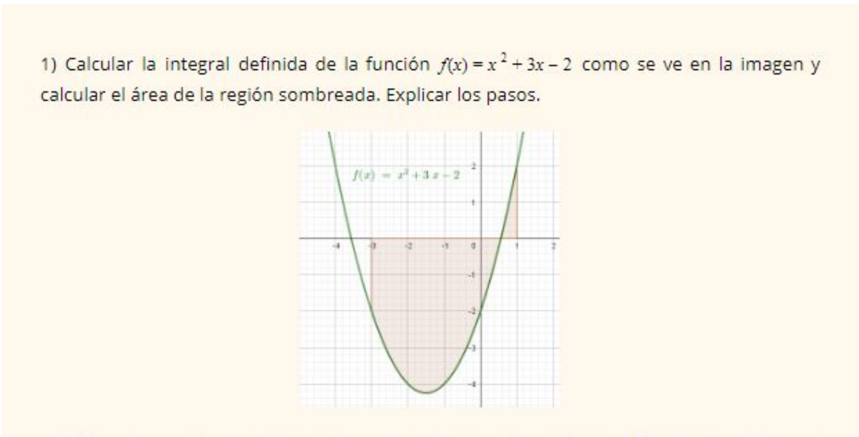


Imagen 18: Primer enunciado propuesto en el Trabajo Práctico.

Para el segundo enunciado, pedimos a los estudiantes que trabajen con GeoGebra y analicen los gráficos y los puntos de intersección entre f(x) y g(x) como se puede ver en la

[12] Dirección General de Educación Superior. Córdoba, Argentina

Imagen 19. La idea de este enunciado era que ellos a partir de las gráficas de las funciones puedan relacionar los límites de integración e identificar cuál de las dos funciones era mayor que la otra en los distintos intervalos. En el Anexo E se encuentra el ejercicio resuelto paso a paso.

> 2) Utilizando GeoGebra calcular el área de la región del plano limitada entre las gráficas de las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = x^3 + 3x^2$. Expresar el resultado de forma analítica.

Imagen 19: Segundo enunciado propuesto en el Trabajo Práctico.

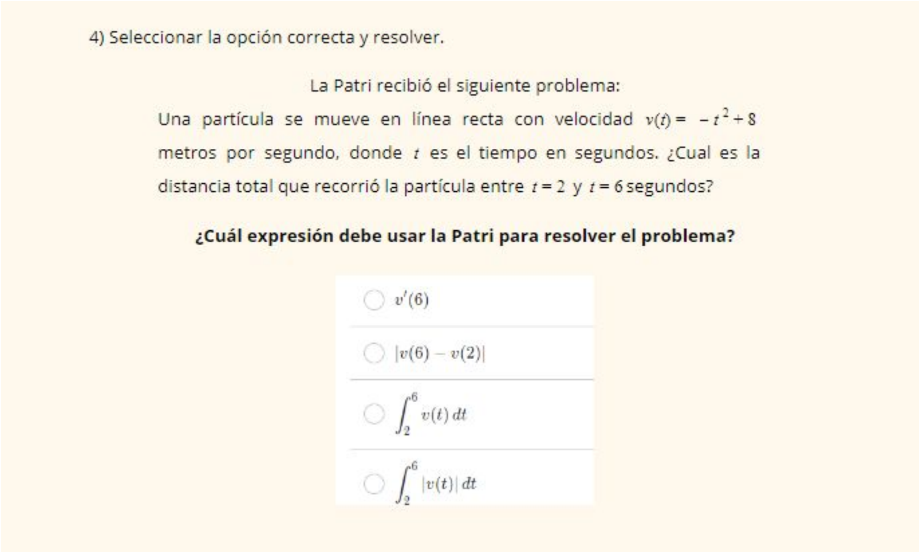
En cuanto al tercer enunciado que se ve en la Imagen 20, el objetivo era que los estudiantes puedan aplicar propiedades de las integrales vistas en clase y realizar en sus carpetas las cuentas para llegar al resultado y luego verificarlo con la herramienta "Integral[13]" de GeoGebra.

> 3) Resolver analíticamente la siguiente integral definida.
>
> $$\int_0^{\Pi} (3\cos x - \frac{4}{x+1})dx$$
>
> Una vez resuelta analíticamente, utilizar GeoGebra para corroborar el resultado.

Imagen 20: Tercer enunciado propuesto en el Trabajo Práctico.

En el enunciado 4 que se ve en la Imagen 21, la propuesta fue presentar un problema para pensar detenidamente con múltiples respuestas para analizar, ya que sólo pedía seleccionar la expresión de la distancia total entre dos tiempos dados.

[13] Integral(<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>).



4) Seleccionar la opción correcta y resolver.

La Patri recibió el siguiente problema:

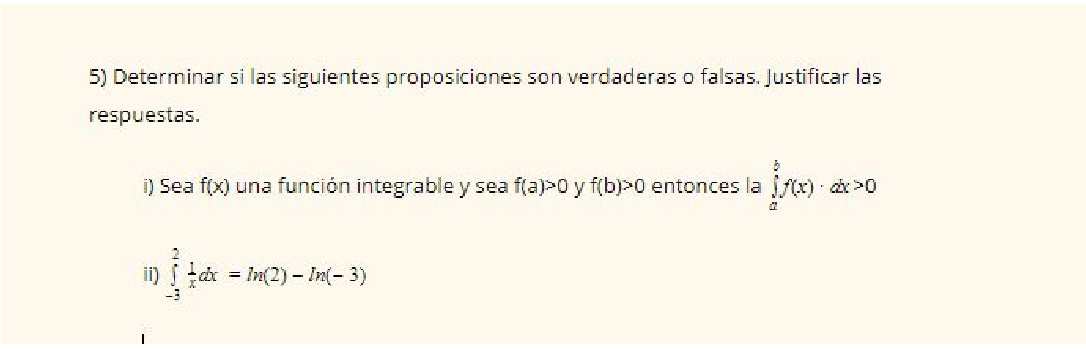
Una partícula se mueve en línea recta con velocidad $v(t) = -t^2 + 8$ metros por segundo, donde t es el tiempo en segundos. ¿Cual es la distancia total que recorrió la partícula entre $t = 2$ y $t = 6$ segundos?

¿Cuál expresión debe usar la Patri para resolver el problema?

- $v'(6)$
- $|v(6) - v(2)|$
- $\int_2^6 v(t)\,dt$
- $\int_2^6 |v(t)|\,dt$

Imagen 21: Cuarto enunciado propuesto en el Trabajo Práctico.

El último enunciado que se muestra en la Imagen 22, trataba de un verdadero falso, en donde el primer ítem fue de producción propia y el segundo lo extrajimos de un apunte de la colección ‘Matemática para la Formación Docente’ (MEPC, 2019) que elaboró la DGES junto con FAMAF. Estos estaban pensados para que los alumnos analicen en detalle las integrales, el dominio de las funciones y piensen un contraejemplo.



5) Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justificar las respuestas.

i) Sea f(x) una función integrable y sea f(a)>0 y f(b)>0 entonces la $\int_a^b f(x) \cdot dx > 0$

ii) $\int_{-3}^{2} \frac{1}{x} dx = ln(2) - ln(-3)$

Imagen 22: Quinto enunciado propuesto en el Trabajo Práctico.

Luego de la reunión que tuvo la docente con los directivos el 14 de octubre nos avisó que no podíamos entregar el trabajo práctico porque ella acreditaría en una sola instancia en el coloquio integrador. Igualmente la docente ya había realizado una instancia de evaluación formativa[14] a mitad de año e hizo devoluciones individuales. Como dice Perrenoud (2008):

> Ningún médico se preocupa en clasificar a sus pacientes, de menos enfermo a más grave. Menos aún sueña con administrarles un tratamiento colectivo. Se esfuerza en precisar para cada uno un diagnóstico personalizado. [...], la evaluación formativa debería tener la misma función en una pedagogía diferenciada. (p.15)

En nuestras prácticas no pudimos vivenciar una instancia evaluativa. Pero evaluar, tal y como se refleja en el texto de Gvirtz y Palamidessi (1998) “no es simplemente estimar productos o rendimientos para asignar una nota; evaluar no es solamente medir y clasificar a los alumnos en función de los resultados de esa medición.”. También consideran que “evaluar es emitir un complejo juicio de valor con la finalidad de comprobar un saber pero que, a su vez, se relaciona estrechamente con la necesidad de mejorar los procesos de enseñanza.” (p. 12)

Por lo tanto, teniendo en cuenta las perspectivas de los autores pudimos hacer una evaluación, ya que los estudiantes fueron demostrando la construcción del conocimiento y adquisición de las técnicas de integración al explicar los razonamientos y desarrollos de los ejercicios y las actividades realizadas.

4. Reflexiones sobre una experiencia singular

Las prácticas docentes fueron muy esperadas por nosotras desde que empezamos el cursado, aunque después de las primeras tres semanas de cuarentena empezamos a dudar sobre la posibilidad de realizarlas, ya que el cronograma indicaba que en el mes de mayo estaríamos comenzando las observaciones en las escuelas, pero estas permanecían cerradas por el protocolo de seguridad sanitaria.

La constante extensión de la cuarentena nos trajo incertidumbres, desaliento, incerteza. En una reunión junto con los docentes se presentaron los casos posibles para hacer las prácticas presenciales, pero éstas dependían de si volvíamos a la presencialidad en agosto.

[14] Evaluación formativa se orienta a recolectar datos del proceso de enseñanza y aprendizaje, se realiza con el objetivo de mejorar los procesos de enseñanza y de aprendizaje. (Gvirtz y Palamidessi, 1998, cap.8 p.12)

Los dos escenarios posibles eran terminar con el cursado de la materia en febrero y el peor de los escenarios era cursar nuevamente en 2021 (una parte de la materia), lo cual nos trajo mucha angustia a todo los estudiantes que cursamos.

Viendo y considerando la situación sanitaria en agosto nos confirman que podíamos realizar nuestras prácticas, pero de manera virtual. Esto nos llenó de alegría y preguntas: ¿Cómo van a ser? ¿Cuánto tiempo? ¿Cómo nos van a evaluar? ¿Cómo resultaría significativa esta experiencia tan lejana al aula?

Como si fuera poca la incertidumbre que generaba esta situación nos presentaron un reto mayor: realizar las prácticas en un tercer año de un Instituto Superior de Formación Docente. Esta noticia nos impactó, ya que a todos nuestros compañeros les habían asignado un curso del secundario. Sin embargo, el mismo día que se presentaron las asignaciones de escuelas, tomamos este desafío con entusiasmo y pusimos nuestras energías para que resultara una experiencia significativa.

Los grandes abismos con los que nos topamos a la hora de comparar la presencialidad con la virtualidad fueron: la falta de antecedentes de la educación en la virtualidad en FAMAF y depender de las tecnologías digitales para realizar las clases.

A pesar de todo lo mencionado consideramos que esta experiencia fue valiosa para nuestro aprendizaje, porque nos desafió a transmitir conocimientos fuera de los hábitos tradicionales e innovadora porque nos hizo reflexionar sobre la formación pedagógica y tecnológica necesaria para que la propuesta de enseñanza en línea sean significativas.

Aunque el trabajo docente, en su mayoría, se lleva a cabo de forma individual dentro del aula reconocemos que el diálogo y la colaboración entre colegas es fundamental para enriquecer el trabajo aúlico, mejorar las estrategias, y sumar nuevos hábitos para la enseñanza. En nuestra práctica el trabajo colaborativo y el vínculo entre el par pedagógico fue un pilar fundamental para que esta experiencia resulte provechosa porque pudimos discutir las ideas, analizarlas, planificarlas, construir y aprender pero sobretodo contar con un soporte a la hora de dictar la clase.

Por último, consideramos dos beneficios de la virtualidad, el primero fue contar con las grabaciones de los encuentros sincrónicos para poder recuperar lo trabajado en clase, poder vernos en el rol de docente y corregirnos para aspectos futuros. El segundo beneficio, más personal, fue que al ser ambas de otras localidades pudimos aprovechar más el tiempo ya que nos ahorró el viaje que llevaba entre tres y cuatro horas (ida y vuelta) desde nuestras casas a la facultad.

Algo más que queremos comentar que nos resultó gratificante, es que la docente orientadora nos hizo notar que estaba a gusto con nuestras prácticas, y nos elogió diciendo que le hicimos honor al nombre de la unidad curricular.

5. Referencias

- Cuadrado Gordillo, I., Martín-Mora Parra, G. y Fernández Antelo, I. (2015), La expresión de las emociones en la Comunicación Virtual: El Ciberhabla, *Icono 14,* 13(1), 180-207.
- Edwards, B. y Larson, R. (2010). *Cálculo 1*. México D.F. México: McGraw-Hill Interamericana
- Gvirtz, S.; Palamidessi, M. (2008). *El ABC de la tarea docente: currículum y enseñanza*, Buenos Aires: Editorial Aique.
- MEPC (Ministerio de Educación de la provincia de Córdoba, 2015). Diseño Curricular del profesorado en Educación Secundaria en Matemática.
- Polya, G. (1992). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Ed. Trillas. (Obra original publicada en 1945).
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. En Grupo de Trabalho de Investigação (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM
- Rojano, T. (2014). El futuro de las tecnologías digitales en la educación matemática: prospectiva a 30 años de la investigación en el campo. *Educación Matemática*, 25 años, marzo de 2014, 11-30.
- Sadovsky, P. (2005). *Enseñar Matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. *Revista EMA*, 6(1), 3-26.
- Villarreal, M. (2013). Humanos-con-medios: un marco para comprender la producción matemática y repensar prácticas educativas. En E. Miranda y N. Bryan (Comp.), *Formación de profesores, Currículum, Sujetos y Prácticas Educativas. La perspectiva de la investigación en Argentina y Brasil*, (pp. 85- 122). Córdoba: UNC.

5.1 Webgrafía

- El Comercio (27 de mayo de 2020). Cámara encendida 'brinda sensación de mayor cercanía' en clase virtual, opinan especialistas. Recuperado de https://www.elcomercio.com/actualidad/camara-sensacion-cercania-clase-virtual.html

- ISEP [Tecnología Educativa - BA]. (2020, Mayo 7). Inés Dussel - Entre entender la emergencia y pensar nuevos horizontes [archivo de video]. Recuperado de https://youtu.be/r_FGWI33K5c

- OEI [Organización de Estados Iberoamericanos OEI]. Entrevista a Pierre Lévy: Veinte años de inteligencia colectiva - [archivo de video]. Recuperado de https://youtu.be/zt-qlA36LzQ

- MEPC (Ministerio de Educación de la provincia de Córdoba, 2019). Matemática para la formación docente. Recuperado de https://dges-cba.infd.edu.ar/sitio/wp-content/uploads/2020/04/P_ANALISIS_MATEMATICO_II.pdf

6. Anexos

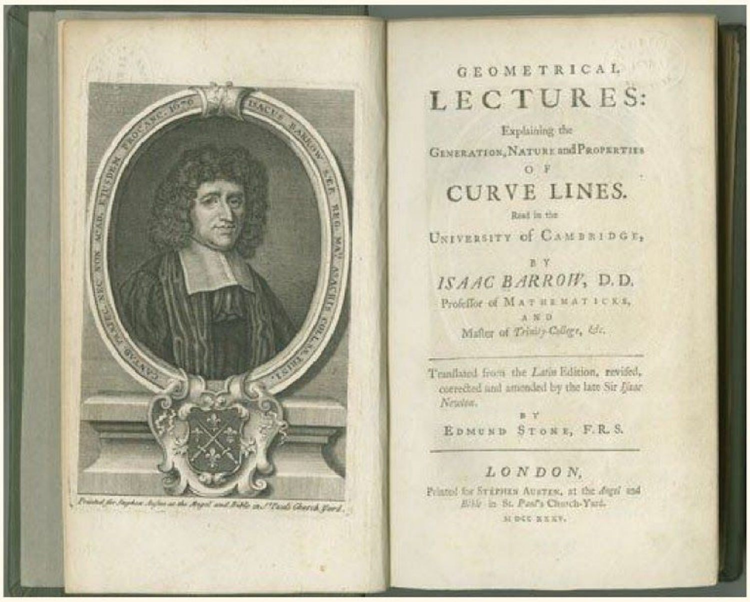
6.1 Anexo A: (Apunte de Historia)

PROBLEMÁTICAS DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO II (OCTUBRE)
ALMADA, NADIA - ANZIL, ANTONELLA

INTEGRAL DEFINIDA: BREVE RESEÑA HISTÓRICA

—

Presentaremos a: Isaac Barrow



Introducción

En este PDF se podrá encontrar una breve reseña histórica, el Primer Teorema Fundamental del Cálculo y la Regla de Barrow.

Volviendo a la derivada...

El concepto de derivada presupone los de función y de límite funcional, los cuales tuvieron una larga evolución hasta alcanzar su significado actual, por eso la definición de derivada es relativamente reciente. No obstante, técnicas en las que podemos reconocer el uso, más o menos explícito, de derivadas, se han venido usando desde el siglo XVII, incluso antes de que Newton y Leibnitz, en el último tercio de dicho siglo, las formularán en términos de *fluxiones* y de *cocientes diferenciales* respectivamente. Durante los siglos XVIII y XIX las derivadas fueron ampliamente desarrolladas y aplicadas a campos muy diversos y no fueron definidas en los términos actuales hasta el último tercio del siglo XIX.

Primero, la derivada fue usada, después descubierta, explorada y desarrollada y, finalmente, definida. (Judith V. Grabiner, historiadora de las matemáticas)

Con la invención de la geometría analítica, había una enorme variedad de nuevas curvas para cuyo estudio no servían los métodos tradicionales. Los matemáticos del siglo XVII se vieron en la necesidad de inventar nuevas técnicas para calcular tangentes. En el periodo de 1630 a 1660 empiezan a usarse técnicas en las que podemos apreciar el uso de derivadas.

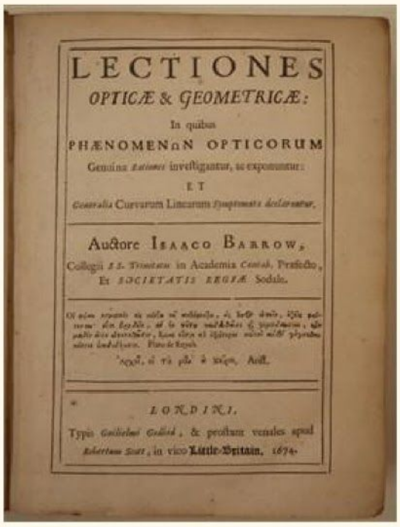
Biografía Isaac Barrow:

Isaac Barrow nació en Londres en 1630. Además de matemático, fue un teólogo cristiano. Fue profesor de geometría en 1660 en Gresham College, de griego en 1662 en la Universidad de Cambridge y en 1663 fue el primero en ser nombrado Profesor Lucasiano (Lucasian Chair of Mathematics). Este título es la Cátedra de Matemáticas de la Universidad de

Cambridge, a la cual renunció y dejó a su discípulo Isaac Newton (1642-1726) en 1669.

Su aportación más importante para las matemáticas fue el Primer Teorema Fundamental del Cálculo, este teorema demuestra que la derivación y la integración son operaciones inversas. Además el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, una consecuencia directa del teorema mencionado anteriormente, es también conocido como la Regla de Barrow en honor de Isaac Barrow.

Resultado fundamental de Barrow:


LECTIONES
OPTICÆ & GEOMETRICÆ:
In quibus
PHÆNOMENΩN OPTICORUM
Genuina Rationes investigantur, ac exponuntur:
ET
Generalia Curvarum Linearum Symptomata declarantur.

Auctore ISAACO BARROW,
Collegii SS. Trinitatis in Academia Cantab. Præfecto,
Et SOCIETATIS REGIÆ Sodale.

LONDINI,
Typis Gulielmi Godbid, & prostant venales apud
Robertum Scott, in vico Little-Britain. 1674.

Barrow en 1669 publicó sus *Lectiones Opticae et Geometricae* en el que se aproxima al actual proceso de diferenciación al determinar tangentes a curvas y estableció que la derivación y la integración son procesos inversos. Lo que Newton y Leibniz hicieron fue usar esta relación,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x)$$

en la forma del teorema fundamental del cálculo.

Regla de Barrow

También conocido como Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, la Regla de Barrow nombrada así en honor a Isaac Barrow, nos dice que

Si f es continua en *[a,b]*, entonces $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ donde $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, es decir, una función tal que $F'(x) = f(x)$.

Demostración:

Sea $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ .De acuerdo con el Teorema Fundamental del Cálculo, sabemos que $g'(x) = f(x)$, es decir, g es una antiderivada de f. Si F es cualquier otra antiderivada de f en *[a,b]*, entonces la diferencia entre F y g es una constante:

$$F(x) = g(x) + C \qquad \text{para } a < x < b.$$

Si hacemos $x = a$ en la fórmula para *g(x)*, obtenemos $g(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$.

Entonces, al aplicar la ecuación $F(x) = g(x) + C$ con $x = b$ y $x = a$, tenemos:

$$F(b) - F(a) = [g(b) + C] - [g(a) + C]$$

$$= g(b) - g(a) = g(b) + 0 = \int_a^b f(t)\,dt \qquad \blacksquare$$

Dato curioso:

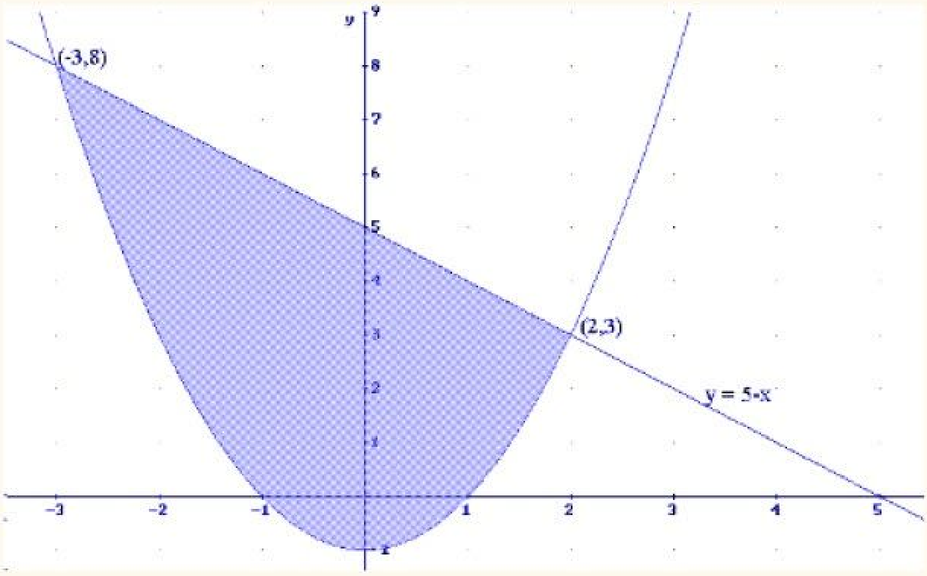
Para Leibniz una integral es una suma de infinitos rectángulos infinitesimales, el símbolo que ideó para representarlas, "∫" tiene forma de una "s" alargada como las que en aquel tiempo se usaban en la imprenta; además, es la primera letra de la palabra latina summa, o sea, "suma".

6.2 Anexo B: (Apunte teórico)

PROBLEMÁTICAS DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO II (OCTUBRE)

ALMADA, NADIA - ANZIL, ANTONELLA

INTEGRAL DEFINIDA: APUNTE TEÓRICO

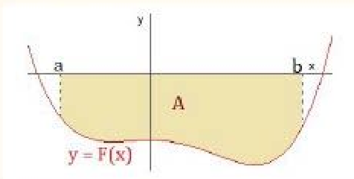


Introducción

En este PDF se podrán encontrar la interpretación geométrica de la integral definida, propiedades y la fórmula del arco trabajada en la segunda clase.

Interpretación Geométrica

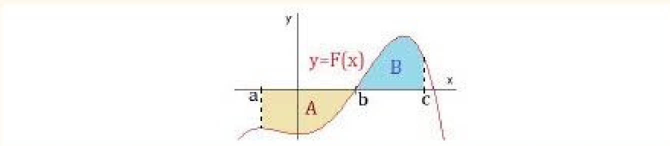
Si la región se encuentra en el semiplano inferior (y≤0), entonces, la integral sigue siendo el área de la región, pero con signo negativo:



Por lo tanto, el área es el valor absoluto de la integral:

$$A = \left| \int_a^b F(x)dx \right|$$

Si la región se encuentra dividida por el eje de las abscisas, para calcular el área se debe calcular una integral definida para cada región.



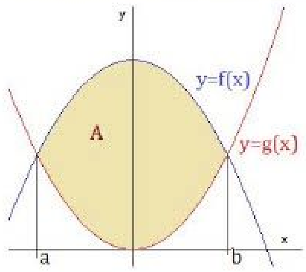
En las regiones de la parte superior, el resultado es positivo. En las regiones de las parte inferior, es negativo.

En el caso de la representación, el área de la región es:

$$A + B = \left| \int_a^b F(x)dx \right| + \int_b^c F(x)dx$$

Si no se calculan las integrales por separado, el resultado de la integral es menor o igual que el área, puesto que estamos sumando áreas positivas y negativas.

Si la región se encuentra encerrada entre las gráficas de las funciones f y g en el intervalo [a,b] viene dada por la integral de la resta de las funciones:



$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Observar que la integral anterior es la resta de las áreas que encierran, por separado, ambas gráficas con el eje de abscisas:

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx =$$
$$= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

Consideraciones:

El integrando debe ser la función cuya gráfica está arriba menos la función cuya gráfica está abajo. (si f(x) $\geq$ g(x) entonces f(x)-g(x)$\geq$0)

Observa que los extremos del intervalo de la integral son los puntos donde las gráficas intersectan.

Propiedades de la Integral Definida

La definición de la integral definida de f en el intervalo [a,b] especifica que a<b. Ahora, es conveniente, sin embargo, extender la definición para cubrir casos en los cuales a= b o a>b. Geométricamente, las siguientes dos definiciones parecen razonables. Por ejemplo,tiene sentido definir el área de una región de ancho cero y altura finita igual a 0.

1. Si f está definida en $x = a$, entonces se define $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

2. Si f es integrable en $[a, b]$, entonces se define $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.

3. Si f es integrable en los tres intervalos cerrados determinados por a,b y c, con a<c<b entonces :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Integrales por Sustitución

Antes de hacer la sustitución hay que determinar los nuevos límites de integración pues deben quedar con respecto de la nueva variable a integrar. Veamos un ejemplo.

Calcular la siguiente integral por el método de sustitución.

$$\int_0^1 x(x^2 + 1)^3\,dx.$$

Solución

Para calcular esta integral, sea $u = x^2 + 1.$

Derivamos de ambos lados $du = 2x\,dx$

Antes de sustituir vamos a determinar los nuevos límites superior e inferior de integración.

Límite inferior

Cuando $x = 0$, $u = 0^2 + 1 = 1$.

Límite superior

Cuando $x = 1$, $u = 1^2 + 1 = 2$.

Ahora, es posible sustituir para obtener

$$\int_0^1 x(x^2+1)^3\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2+1)^3(2x)\,dx$$

Límites de integración para x.

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 u^3\,du$$

Límites de integración para u.

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{u^4}{4}\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(4 - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{15}{8}.$$

Longitud de Arco

Si la función f(x) representa una curva suave en el intervalo [a,b] la longitud de arco de f entre a y b viene dada por:

$$\boxed{\ell = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx}$$

Para ver una deducción y una mayor comprensión de esta expresión, aconsejamos que vean el siguiente video:

https://www.youtube.com/watch?v=tT9KSD0TlpU

6.3 Anexo C: (Guía 1)

PROBLEMÁTICAS DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO II (OCTUBRE)
ALMADA, NADIA - ANZIL, ANTONELLA

INTEGRAL DEFINIDA: GUÍA 1

Resolver las siguientes integrales directas.

1) $\int_{2}^{6} 8\,dx =$
2) $\int_{1}^{4} 4 \cdot x^2 dx =$
3) $\int_{-2}^{1} (2 \cdot x^2 + 3)\,dx =$
4) $\int_{0}^{4} \frac{x}{2}\,dx =$
5) $\int_{0}^{6} e^x\,dx =$
6) Elegir un ejercicio de los anteriores y representarlo en GeoGebra.
7) $\int_{0}^{1} x\,dx =$
8) $\int_{0}^{1} x^2\,dx =$

Ejercicio adicional:

Utilizando GeoGebra encontrar los puntos de intersección entre las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$.

6.4 Anexo D: (Guía 2)

2

PROBLEMÁTICAS DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO II (OCTUBRE)

ALMADA, NADIA - ANZIL, ANTONELLA

INTEGRAL DEFINIDA:
GUÍA 2

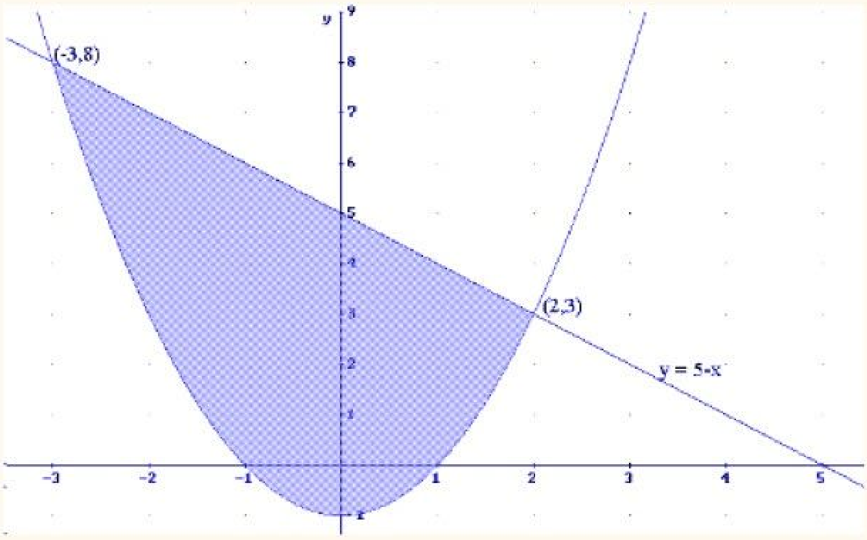
Resolver las siguientes integrales por sustitución.

1) $\int_{-1}^{1} x(x^2+1)^3\,dx =$
2) $\int_{1}^{2} 2x^2\sqrt{x^3+1}\,dx =$
3) $\int_{0}^{2} \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\,dx =$
4) $\int_{0}^{\pi/2} cos(\frac{2x}{3})\,dx =$
5) $\int_{0}^{3} (-x+1)^3\,dx =$
6) Elegir un ejercicio de los anteriores y representarlo en Geogebra (en función de x y en función de u)

6.5 Anexo E: (Apunte de GeoGebra)

PROBLEMÁTICAS DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO II (OCTUBRE)
ALMADA, NADIA - ANZIL, ANTONELLA

INTEGRAL DEFINIDA: APUNTE GEOGEBRA

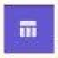


Introducción

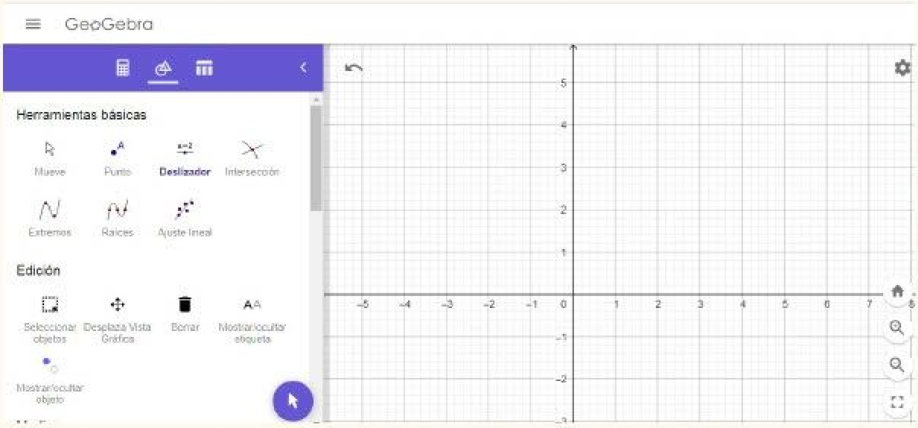
En este PDF se encontrarán los pasos para realizar una imagen con movimiento y calcular el área entre dos curvas que se intersecan en 3 puntos.

Insertar una imagen con movimiento usando deslizador.

Para comenzar, en la barra que se encuentra a la izquierda, aparecen tres iconos:

 Álgebra,  Herramientas,  Tabla.

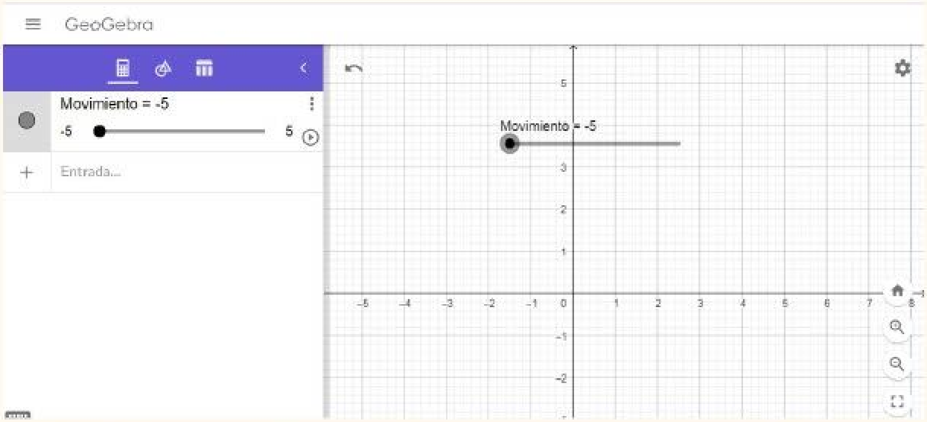
Seleccionando  salen las herramientas básicas, entre ellas se encuentra el deslizador.



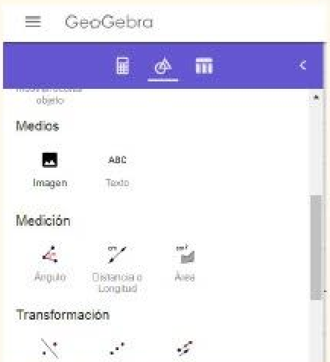
Una vez que se selecciona el deslizador aparece en pantalla:

Donde se puede cambiar el nombre (en este ejemplo se llama *Movimiento* el deslizador), el incremento, el valor mínimo que puede tomar, el valor máximo,etc.

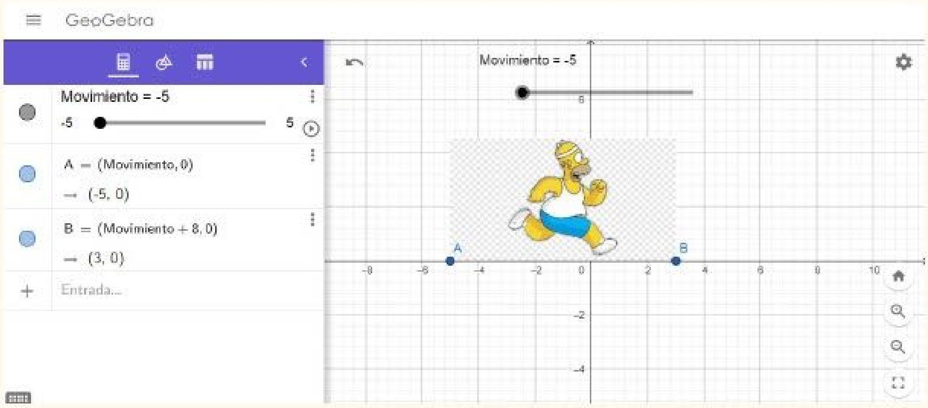
Una vez que se hace click en el **ok** aparece el deslizador en el plano y en el *Álgebra*.



Ingresando nuevamente a *Herramientas*, buscar la sección *Medios* y hacer click en *Imagen*.

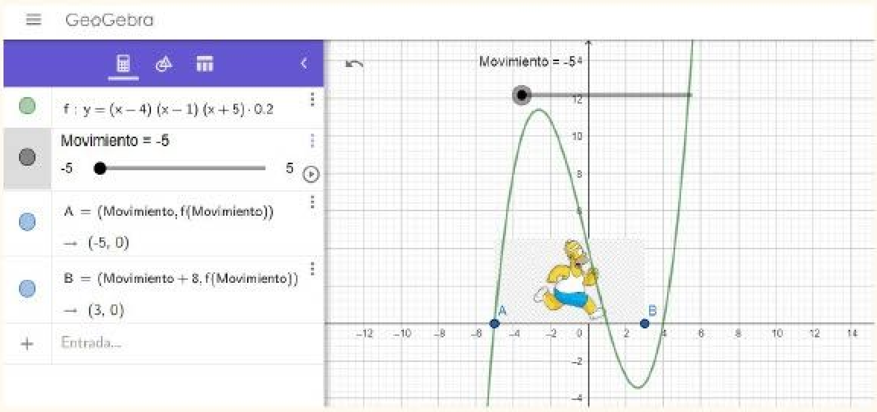


Una vez que se inserta la imagen seleccionada, se inserta con los puntos A y B que son los extremos inferiores. Para que el movimiento sea en dirección del eje x, cambiar la "coordenada y" de los puntos A y B por 0. Luego para activar el deslizador en la imagen cambiar la "coordenada x" del A y B por *Movimiento* y *Movimiento + (ancho de imagen)* respectivamente. (Si quedara fijo[1] el punto B, la imagen se agranda y achica con el deslizador funcionando)



https://www.geogebra.org/calculator/rabdqxac

Sin embargo, no es el único movimiento que se puede dar a la imagen, por ejemplo se le puede asignar una función cúbica y hacer mover a *Homero* como se indica en la imagen:



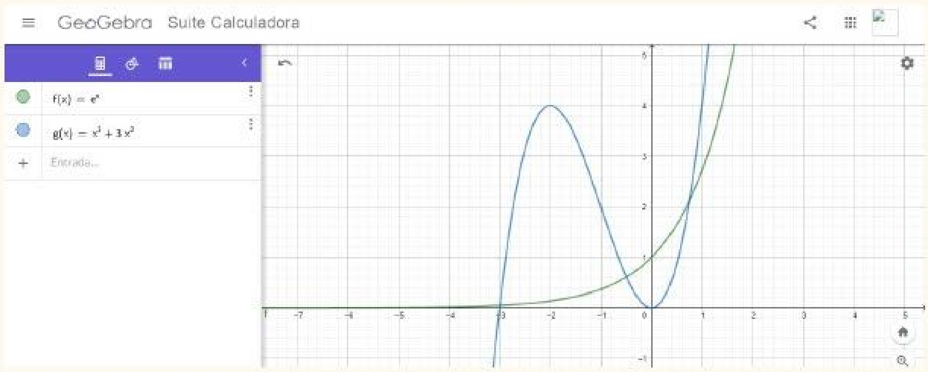
https://www.geogebra.org/calculator/rzqrvtcf

[1] Pueden probar en el link fijando el B en (8,0).

Usando las imágenes con deslizadores se pueden hacer muchas cosas. En GeoGebra hay un archivo de una montaña rusa creada por Carlos Sanchez, en la cual usa derivada para que el carrito no pierda su tamaño y recorra toda la curva con respecto a la pendiente: https://www.geogebra.org/m/zjF5xh66

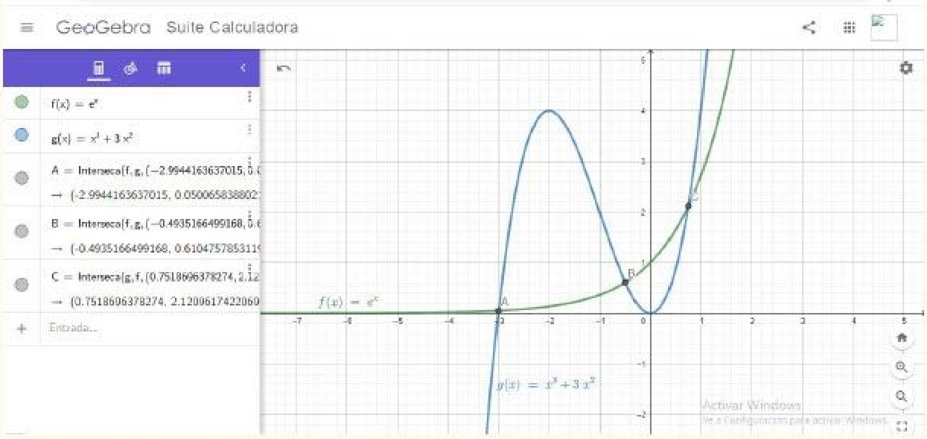
Calcular el área entre dos curvas con 3 intersecciones.

Si se quiere calcular el área de la región del plano limitada entre las gráficas de las funciones $f(x) = e^{x}$ y $g(x) = x^{3} + 3 \cdot x^{2}$, lo primero que se hace es graficarlas.



Los puntos de intersección se pueden encontrar fácilmente usando la herramienta *Intersección*.

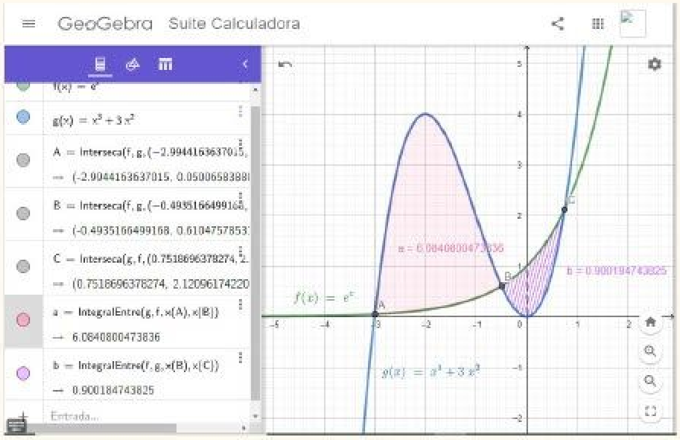
Luego, se marcan los puntos en la gráfica donde se ven las intersecciones. En la imagen que se ve a continuación, quedan los puntos A, B y C.



El próximo paso es integrar desde la coordenada x del punto A a la coordenada x del punto B de la función que está por encima (La azul que sería *g(x)*) y la función que está por debajo que sería *f(x)*. Luego calcular la integral desde la primer coordenada del punto B a la primer coordenada del punto C de la función que está por encima (que ahora es *f(x)*) y la que está por debajo que es *g(x)*.

Se pueden utilizar los siguientes comandos:

- ***IntegralEntre(<Función>, <Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>)***
- ***x(PUNTO)***



Se puede observar el área (Rosa) de la primera integral y el área (Violeta) de la segunda integral. El paso que sigue es sumar ambas integrales:

Finalmente el área encerrada entre $f(x) = e^{x}$ y $g(x) = x^{3} + 3 \cdot x^{2}$ es 6.98 aproximadamente.

Los abajo firmantes, miembros del Tribunal de Evaluación del Trabajo Final de Prácticas de *Metodología y Práctica de la Enseñanza*, damos Fe que el presente ejemplar impreso se corresponde con el aprobado del Tribunal.