Acotaciones de operadores integrales con condiciones de Hörmander generales

por

IBAÑEZ FIRNKORN, GONZALO HUGO

Presentado ante la
Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación
como parte de los requerimientos para la obtención
del grado de Doctor en Matemática de la

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Septiembre 2020

Directora: Dra. María Silvina Riveros

Resumen

En esta tesis estudiamos acotaciones de tres tipos de operadores integrales fraccionario y singulares con condiciones generales de tamaño y regularidad, utilizando técnicas modernas y clásicas.

Primero consideramos operadores integrales fraccionarios que cumplan condiciones fraccionarias de tamaño y L^r- Hörmander, para los cuales probamos una dominación sparse adecuada y la acotación de $L^p(w^p)$ en $L^q(w^q)$, $w \in A_{p,q}$, con control óptimo de la constante del peso.

Luego consideramos operadores integrales singulares que cumplan la condición de Hörmander H_ϕ con ϕ función de Young. Para estos operadores y sus conmutadores también estudiamos su dominación sparse y como consecuencia probamos diversos resultados, como por ejemplo, acotación en $L^p(w)$, la desigualdad de Coifman-Fefferman, acotación en el extremo y el decaimiento exponencial. Además de aplicar estos resultados al caso de operadores de Calderón-Zygmund.

El caso más general a estudiar es donde el núcleo es $K(x, y) = k_1(x-A_1y)...k_m(x-A_my)$, con A_i matrices invertibles, donde cada k_i cumple condiciones de tamaño y regularidad fraccionarias generales. Se estudió la desigualdad de Coifman-Fefferman para estos operadores y sus conmutadores, y como corolarios diversas acotaciones con el peso en la clase A_∞ y $w(Ax) \leq cw(x)$ p.p. $x \in \mathbb{R}^n$. Luego estudiando la dominación sparse apropiada y pesos que caracterizan los operadores maximales $M_{A^{-1},\alpha}$, se obtiene la acotación fuerte con control de la constante del peso para algunos casos de estos operadores.

Palabras claves: Condiciones Hörmander, Operadores Fraccionarios, Operadores Maximales, Operadores Singulares, Pesos

MSC 2010: 42B25, 42B20, 47G10

Abstract

In this Thesis we study weighted estimates for three types of singular and fractional integral operator with general conditions of size and regularity, using classical and modern techniques.

First, we consider fractional integral operators with fractional size and L^r-Hörmander condition. We prove a sparse domination and the sharp estimate from $L^p(w^p)$ to $L^q(w^q)$, $w \in A_{p,q}$.

Then, we consider singular integral operators with H_ϕ Hörmander condition, where ϕ is a Young function. For these operators and their commutators, we study the sparse domination and as consequence we prove several estimates, for example, the $L^p(w)$ boundedness, Coifman-Fefferman inequality, end-point estimate and exponential decay. Also, we apply this result to the Calderón-Zygmund operators.

We also consider a general case kernel $K(x, y) = k_1(x - A_1y)...k_m(x - A_my)$, with A_i invertible matrices, where each k_i satisfies general fractional size and regularity conditions. We study the Coifman-Fefferman inequality for these operators and their commutators, and as consequence several estimates with the weight in A_∞ and $w(Ax) \leq cw(x)$ a.e. $x \in \mathbb{R}^n$. Then, we study an appropriate sparse domination and the good weights for the maximal operator $M_{A^{-1},\alpha}$. In some particular case we also obtain the strong estimates with some control of the weight constant.

Palabras claves: Hörmander conditions, Fractional operators, Maximal operators, Singular operators, Weights

MSC 2010: 42B25, 42B20, 47G10

Agradecimientos:

Quisiera agradecer a todo el grupo de Análisis Armónico y Ecuaciones Diferenciales de FAMAF, especialmente a mi directora Silvina Riveros y a Raúl Vidal con los cuales he trabajado bastante.

A Carlos Pérez y Sheldy Ombrosi por toda su ayuda en los problemas de la tesis y la bibliografía. Además, agradecer a Carlos la estadía en Bilbao.

Por último agradecer a mis amigos, compañeros tanto de FAMAF como de los congresos.

Índice

Resumen **i**

Abstract **iii**

Introducción **1**

1 Preliminares **7**

1.1 Conceptos básicos. 7
1.2 Espacios de Orlicz. 7
1.3 Operadores Maximales. 9
1.4 Pesos. 11
1.5 Maximal Sharp y espacio BMO. 16
1.6 Operadores y cond. de regularidad y tamaño 18
1.7 Operadores Sparse. 24
1.8 Otras técnicas del analisis armónico. 27

2 Operadores fraccionares con H_r **29**

2.1 Acotación de T_α. 29
2.2 Ejemplos. 31
2.3 Dominación sparse. 33
2.4 Desigualdades sharp. 39

3 Operadores singulares con H_φ **45**

3.1 Dominación sparse. 45
3.2 Desigualdades de tipo fuerte 54
3.3 Coifman-Fefferman 59
3.4 Resultados de no acotación. 60
3.5 Estimaciones en el extremo 64
3.6 Decaimiento exponencial local. 70
3.7 Desig. en el extremo para conmutadores clásicos 72

4 Operadores fraccionarios generales **77**

4.1 Resumen histórico. 77
4.2 El operador $T_{\alpha,m}$. 80
4.3 Ejemplos 87
4.4 Maximal Sharp. 91
4.5 Desigualdades con un peso. 103
4.6 Desigualdades con dos pesos. 107
4.7 Dominación sparse. 114
4.8 Clase de pesos $\mathcal{A}_{A,p,q}$. 126
4.9 El operador maximal $M_{\alpha,A^{-1}}$. 131
4.10 Acotaciones de $T_{\alpha,m}$ con peso en $\mathcal{A}_{A,p,q}$. 134

Índice alfabético **143**

Bibliografía **144**

Introducción

La acotación de diversos operadores integrales en diferentes espacios de funciones es uno de los tema de interés del análisis armónico. Uno de los espacios en donde se estudia estas acotaciones son los espacios de Lebesgue $L^p(\mu)$ con μ una medida en $\mathbb{R}^n$. Principalmente se consideran medidas μ absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue, dx, esto nos dice que μ es de la forma wdx donde w es una función no negativa localmente integrable. A este tipo de funciones w se las llama *pesos*.

Los operadores clásicos estudiados en el análisis armónico son los operadores maximales, como el maximal de Hardy-Littlewood y la maximal fraccionaria, los operadores integrales singulares de Calderón-Zygmund y la integral fraccionaria. El maximal de Hardy-Littlewood, M, y la maximal fraccionaria, M_α con $0 < \alpha < n$ se definen, para f una función localmente integrable, como

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f| dx, \qquad M_\alpha f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_Q |f| dx.$$

Observar que si tomamos $\alpha = 0$ nos queda $M_\alpha = M$. Los operadores maximales caracterizan clases de pesos. Los pesos para los cuales M esta acotada en $L^p(w)$ son los pertenecientes a la clase de Muckenhoupt A_p. Los pesos w para los cuales M_α esta acotada $L^p(w^p)$ en $L^q(w^q)$ son los pesos fraccionarios $A_{p,q}$.

La transformada de Hilbert se define en $\mathbb{R}$, como

$$H(f)(x) = \frac{1}{\pi} v.p. \left(\frac{1}{x} * f \right)(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x-y|>\epsilon} \frac{f(y)}{x-y} dy,$$

donde la función $\frac{1}{\pi x}$ se la denomina *núcleo* de H. Es fácil ver que el núcleo de H cumple las siguientes propiedades:

$$\left| \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|}; \qquad \left| \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x} \right| \leq 2 \frac{|y|}{|x|^2},$$

si $|x| > 2|y|$.

La transformada de Hilbert esta definida en $\mathbb{R}$. En $\mathbb{R}^n$ se definen las transformadas de Riesz, R_j, cuyo núcleo es $\frac{x_j-y_j}{|x-y|^n}$ con $1 \le j \le n$. Con la transformadas de Hilbert y de Riesz como ejemplos se pueden definir los operadores integrales singulares de Calderón-Zygmund de la siguiente forma:

$$T(f)(x) = v.p. \left(K * f\right)(x),$$

donde K es el núcleo del operador que satisface condiciones como las de arriba, llamadas condiciones de tamaño y condiciones de regularidad, respectivamente. En otras palabras, el núcleo K satisface

$$|K(x)| \le \frac{c_1}{|x|^n}; \qquad\qquad |K(x-y) - K(x)| \le c_2 \frac{|y|^\delta}{|x|^{n+\delta}},$$

si $|x| > \tilde{c}|y|$. La segunda condición se llama condición de Lipschitz, denotada por H_∞^*.

Por otro lado, la integral fraccionaria o potencial de Riesz, I_α, $0 < \alpha < n$, se define como

$$I_\alpha(f)(x) = \left(\frac{1}{|x|^{n-\alpha}} * f\right)(x) = \int \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy,$$

donde el núcleo $\frac{1}{|x|^{n-\alpha}}$ también cumple una condición de tamaño y de regularidad. Otra forma de definir I_α es $I_\alpha f = c_\alpha(-\Delta)^{-\alpha/2} f$ donde el operador en la derecha es el laplaciano fraccionario ampliamente estudiado en el contexto de las ecuaciones diferenciales parciales.

Existen distintas acotaciones conocidas para los operadores integrales singulares de Calderón-Zygmund y la integral fraccionaria. Mencionaremos algunas de estas comenzando por la desigualdad de Coifman-Fefferman: Dado un operador $\mathcal{T}$ ver cuál es el operador maximal adecuado $\mathcal{M}$ que lo controla de la siguiente manera

$$\|\mathcal{T}f\|_{L^p(w)} \le c_{n,p,w} \|\mathcal{M}f\|_{L^p(w)}.$$

El maximal de Hardy-Littlewood, M, es el que controla a los operadores de Calderón-Zygmund y el maximal fraccionario, M_α, es el que controla a I_α.

La acotación de tipo fuerte (p,q), $1 < p, q < \infty$ con pares de pesos (u,v) para un operador $\mathcal{T}$ es

$$\|\mathcal{T}f\|_{L^q(v)} \le c_{n,p,q} c_{u,v} \|f\|_{L^p(u)},$$

para p, q adecuados y ciertos pesos u, v. En estos casos diremos que el operador $\mathcal{T}$ esta acotado de $L^p(u)$ en $L^q(v)$.

La acotación de tipo débil $(1,1)$ con pares de pesos (u,v) para un operador $\mathcal{T}$ es la siguiente

$$v(x \in \mathbb{R}^n : |\mathcal{T}f(x)| > \lambda) \leq c_{n,u,v} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{\lambda} u(x)dx,$$

para todo $\lambda > 0$. En estos casos diremos que $\mathcal{T}$ esta acotado de $L^1(u)$ en $L^{1,\infty}(v)$.

Observemos que en todas estas desigualdades la constante depende de los pesos involucrados. Una pregunta durante los últimos años es encontrar la mejor constante o la constante óptima con respecto al peso. El primer artículo referente a este tipo de cuestiones es [5] donde se demuestra el llamado Teorema de Buckley para la maximal de Hardy-Littlewood. Su enunciado es, $1 < p < \infty$ y $w \in A_p$,

$$\|Mf\|_{L^p(w)} \leq c_{n,p,q}[w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}} \|f\|_{L^p(w)},$$

donde el exponente de la constante del peso $[w]_{A_p}$ es óptimo. A lo largo de los últimos años se ha estudiado este tipo de desigualdades para diversos operadores y con diversas técnicas siendo el teorema más importante, el Teorema A_2 probado en [30]. En este trabajo se prueba la linealidad de exponente para el caso de operadores singulares integrales de Calderón-Zygmund en $L^2(w)$ con $w \in A_2$.

Una técnica reciente utilizada para demostrar este tipo de resultados es la dominación sparse. Esta técnica se basa en controlar puntualmente un operador por otro llamado operador sparse, el cual es suma de promedios sobre una cierta familia sparse, o por una suma finita de estos operadores. Para ilustrar esto, consideremos T un operador de Calderón- Zygmund, luego para f acotada de soporte compacto,

$$|Tf(x)| \leq c \sum_{j=1}^{3^n} A_{S_j} f(x) \quad p.p.x \in \mathbb{R}^n,$$

con

$$A_{S_j} f(x) = \sum_{Q \in S_j} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy \right) \chi_Q(x),$$

donde Q son cubos y S_j son familias sparse, que definiremos con precisión más adelante. Debido a su expresión, estudiar la acotación de los operadores sparse y encontrar la constante óptima respecto al peso requiere menos trabajo que estudiar el operador que controla puntualmente.

Las condiciones de tamaño y regularidad mencionadas son puntuales y pueden ser generalizadas por condiciones integrales. En esta tesis vamos a trabajar con operadores integrales, tanto singulares como fraccionarios, que cumplen de alguna forma estas condiciones integrales de tamaño y regularidad. Sean $0 \leq \alpha < n$ y φ es una función de Young, la condición de tamaño, $S_{\alpha,\varphi}$, se define por

$$\|K\chi_{s<|x|<2s}\|_{\varphi,B(0,2s)} \leq C|s|^{\alpha-n},$$

y la condición de Hörmander generalizada, $H_{\alpha,\varphi}$, se define por, si $R > c_\varphi|x|$,

$$\sum_{m=1}^{\infty}(2^m R)^{n-\alpha}\|(K(\cdot - x) - K(\cdot))\chi_{2^m R<|x|<2^{m+1}R}\|_{\varphi,B(0,2^{m+1}R)} \leq C_\varphi,$$

donde $\|\cdot\|_{\varphi,B}$ es el promedio dado por una norma de Luxemburg asociada a φ. Si el núcleo es bilineal se le suele pedir que cumpla las condiciones en cada variable.

En los diversos capítulos de esta tesis abordaremos distintos operadores con núcleos que cumplan las condiciones mencionadas arriba para alguna φ función de Young y estudiaremos algunas desigualdades con pesos mediante la dominación sparse y en algunos casos utilizaremos técnicas más clásicas.

En el capítulo 1 se presentaran las definiciones herramientas básicas que necesitaremos a lo largo de este trabajo, incluyendo definiciones precisas de lo dicho anteriormente. Así mismo se enunciarán resultados previos conocidos y algún marco histórico de estos resultados.

En el capítulo 2 se estudiarán operadores fraccionarios con núcleo que cumpla las condiciones $S_{\alpha,s}$ y $H_{\alpha,s}$, $1 < s < \infty$, es decir, las condiciones anteriormente presentadas con $\varphi(t) = t^s$. En otras palabras consideramos operadores de la forma

$$T_s f(x) = \int K(x-y)f(y)dy,$$

donde $K \in S_{\alpha,s} \cap H_{\alpha,s}$ con $1 < s < \infty$. Estudiando la acotación de T_s de $L^p(w^p)$ en $L^q(w^q)$, obteniendo la cota óptima respecto a la constante de los pesos $w^s \in A_{\frac{p}{s},\frac{q}{s}}$. Para obtener este resultado fue necesario encontrar una dominación sparse adecuada a estos operadores.

En el capítulo 3 se estudiarán operadores integrales singulares acotados en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y cuyo núcleo cumple una condición de Hörmander generalizada $H_\varphi = H_{0,\varphi}$. En otras palabras consideramos operadores de la forma

$$T_\varphi f(x) = \int K(x-y)f(y)dy,$$

donde $K \in H_\varphi$ y considerando también los conmutadores de orden k de T_φ. Estudiamos y obtenemos una dominación sparse adecuada. Como corolarios de esta dominación obtenemos diversos resultados con control de la constante del peso. Además aplicamos estos resultados a casos clásicos.

En el capítulo 4 se estudiarán operadores integrales singulares y fraccionarios más complejos que los mencionados anteriormente pues en este caso "permitimos que el núcleo tenga mas de una singularidad". En palabras más pecisas, dados $m \in \mathbb{N}$ y $0 \leq \alpha < n$. Sean $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m = n - \alpha$, $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$ funciones de Young y $A_1, A_2, \ldots, A_m$ matices invertibles tales que $A_i - A_j$ es invertible para $i \neq j$ y consideramos operadores de la forma

$$T_{\alpha,m} f(x) = \int K(x,y) f(y) dy,$$

con

$$K(x,y) = k_1(x - A_1 y) k_2(x - A_2 y) \cdots k_m(x - A_m y),$$

donde cada $k_i \in S_{n-\alpha_i,\psi_i} \cap H_{n-\alpha_i,\psi_i}$ y $k_i \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Primero hacemos una breve reseña histórica de este operador ampliamente estudiado por el grupo de Análisis y Ecuaciones Diferenciales de FAMAF. Luego probamos una desigualdad de tipo Coifman-Fefferman utilizando técnicas clásicas sin centrarnos en el control de la constante del peso, quedándonos en el lado izquierdo una suma finita de operadores de la forma $M_{A_i^{-1},\alpha,\varphi}$, donde $M_{A^{-1},\alpha,\varphi} f(x) = M_{\alpha,\varphi} f(A^{-1}x)$ y φ es la función complementaria de $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$. Con esta estimación y tomando pesos en las clases A_p o $A_{p,q}$ y que cumplan que $w(A_i x) \leq c w(x)$ podemos probar que estos operadores y sus conmutadores están acotados en $L^p(w)$, o de $L^p(w^p)$ en $L^q(w^q)$ en el caso fraccionario. También se prueba la acotación en los extremos del operador T_φ.

Para no imponer las condiciones de pesos clásicas y la condición $w(A_i x) \leq c w(x)$, caracterizamos los pesos en los cuales $M_{A^{-1},\alpha}$ esta acotado de $L^p(w^p)$ en $L^{q,\infty}(w^q)$, con $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ y $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$, los cuales son

$$[w]_{\mathcal{A}_{A,p,q}} = \sup_{Q \ni A^{-1}x} \frac{1}{|Q|} \int_Q w^q(Ay) dy \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{-\frac{p}{p'}}(y) dy \right)^{q/p'} < \infty,$$

donde $p' = \frac{p}{p-1}$. Además caracterizamos los pesos para que $M_{A^{-1}}$ este acotado de $L^p(w)$ en $L^{p,\infty}(w)$, con $1 < p < \infty$. Esta clase recibe el nombre de $\mathcal{A}_{A,p}$. Se prueban propiedades básicas de estas clases de pesos.

Considerando las funciones de Young $\psi_i(t) = t^{r_i}$, entonces $\varphi(t) = t^s$ con s el exponente conjugado de los r_i, probamos una dominación sparse adecuada para $T_{\alpha,m}$. Para algunos casos de matrices, probamos acotaciones de tipo fuerte con pesos en $\mathcal{A}_{A,p,q}$ o $\mathcal{A}_{A,p}$, utilizando las acotaciones sharp demostradas en el capítulo 2. En casos generales de matrices se obtiene un resultado análogo usando condiciones testing adecuadas.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo, presentaremos conceptos conocidos en el análisis armónico necesarios para comprender y demostrar los resultados obtenidos a lo largo de esta tesis.

1.1 Conceptos básicos.

Sea μ una medida positiva. Por ejemplo, podemos tomar $\mu = dx$ la medida de Lebesgue o $\mu(x) = w(x)dx$ con $w \in L^1_{\text{loc}}$ no negativa.

Decimos que un operador $\mathcal{T}$ es acotado en $L^p(\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$, si existe $C > 0$ tal que

$$\|\mathcal{T}f\|_{L^p(\mu)} \leq C\|f\|_{L^p(\mu)}.$$

Decimos que un operador $\mathcal{T}$ es acotado de $L^p(\mu)$ en $L^q(\mu)$, $1 < p, q < \infty$, si existe $C > 0$ tal que

$$\|\mathcal{T}f\|_{L^q(\mu)} \leq C\|f\|_{L^p(\mu)},$$

Definiremos la norma se $L^{q,\infty}(\mu)$, el espacio débil $L^q(\mu)$, como

$$\|f\|_{L^{q,\infty}(\mu)} = \sup_{\lambda>0} \lambda\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\})^{1/q}.$$

1.2 Espacios de Orlicz.

Comenzaremos definiendo las funciones centrales de esta tesis, las funciones de Young, dando ejemplos y propiedades importantes. A partir de ellas se definirán las condiciones de los operadores estudiados en esta tesis. Para más detalles ver [59] y [67].

Definición 1.1. Una función $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ es una *función de Young* si φ es continua, convexa, no decreciente que satisface $\varphi(0) = 0$ y $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$.

Definición 1.2. Dada una función de Young φ, la *función complementaria* $\bar{\varphi}$, se define de la siguiente forma: para $0 \le x < \infty$,

$$\bar{\varphi}(x) := \sup_{0 \le y < \infty} (xy - \varphi(y)).$$

Observar que la función complementaria $\bar{\varphi}$ de una función φ de Young cumple que

$$t \le \varphi^{-1}(t)\bar{\varphi}^{-1}(t) \le 2t.$$

Ejemplo 1.3. Funciones de Young y sus complementarias:

1. Si $\varphi(t) = t^p$, $1 \le p < \infty$ entonces $\bar{\varphi}(t) = t^{p'}$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

2. Dado $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, si $\varphi(t) = \exp\left(t^{\frac{1}{1+k+\epsilon}}\right) - 1$ con $\epsilon \ge 0$, entonces $\bar{\varphi}(t) = t(1 + \log^+(t))^{1+k+\epsilon}$.

3. Dado $1 \le r < \infty$ y $\lambda > 0$, sean $\varphi(t) = t^r(1+\log^+(t))^\lambda$ y $\psi(t) = t^r \log(e+t)^\lambda$. La función complementaria de ψ es $\bar{\psi}(t) = Ct^{r'} \log(e + t)^{-\frac{\lambda r'}{r}}$ Observar que si $t \ge 1$ entonces $\varphi(t) \simeq \psi(t)$.

Definición 1.4. Se define la *norma Luxemburg* de una función f inducida por una tal φ función de Young de la siguiente manera:

$$\|f\|_\varphi := \inf\left\{\lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) \le 1\right\}.$$

Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ medible tal que $0 < |X| < \infty$. El promedio de la norma Luxemburg de f en X viene dado por:

$$\|f\|_{\varphi,X} := \inf\left\{\lambda > 0 : \frac{1}{|X|}\int_X \varphi\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) \le 1\right\}.$$

Considerando $\varphi(t) = t^p$, el promedio de Luxemburg es

$$\|f\|_{p,X} = \|f\|_{t^p,X} = \left(\frac{1}{|X|}\int_X |f|^p\right)^{1/p}.$$

Las desigualdades más importantes de los promedios de Luxemburg son las desigualdades de tipo Hölder que generalizan las conocidas para los espacios L^p. La desigualdad de Hölder en este contexto es la siguiente

Lema 1.5 (Desigualdad de Hölder)**.** *Sea φ una función de Young y $X \subset \mathbb{R}^n$ medible tal que $0 < |X| < \infty$, entonces*

$$\frac{1}{|X|}\int_X |fg| \le 2\|f\|_{\varphi,X}\|g\|_{\bar{\varphi},X}. \tag{1.1}$$

Esta se puede generalizar de las siguientes maneras

Lema 1.6. *Sean $m \in \mathbb{N}$, $X \subset \mathbb{R}^n$ medible tal que $0 < |X| < \infty$ y $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ funciones de Young tales que $\varphi_1^{-1}(t) \cdots \varphi_m^{-1}(t) \leq ct$, entonces*

$$\frac{1}{|X|} \int_X |f_1 f_2 \cdots f_m| \leq c \|f_1\|_{\varphi_1,X} \|f_2\|_{\varphi_2,X} \cdots \|f_m\|_{\varphi_m,X}. \tag{1.2}$$

Lema 1.7. *Sean $m \in \mathbb{N}$, $X \subset \mathbb{R}^n$ medible y $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ funciones de Young tales que $\varphi_1^{-1}(t) \cdots \varphi_m^{-1}(t) \leq c\phi^{-1}(t)$, entonces*

$$\|f_1 \cdots f_m\|_{\phi,X} \leq c \|f_1\|_{\varphi_1,X} \cdots \|f_m\|_{\varphi_m,X}. \tag{1.3}$$

1.3 Operadores Maximales.

En esta sección vamos a introducir el concepto de funciones maximales, las cuales son fundamentales en el análisis armónico. Comenzaremos definiendo las funciones maximales más clásicas, la maximal de Hardy-Littlewood y la maximal fraccionaria. Luego presentaremos funciones maximales dependiendo de una función de Young. Además mencionaremos resultados sobre la acotación de estos operadores en los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Definición 1.8. [26] Dada f una función localmente integrable en $\mathbb{R}^n$ definimos la función maximal de Hardy-Littlewood como

$$Mf(x) := \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy,$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos Q en $\mathbb{R}^n$ con lados paralelos a los ejes que contengan al punto x.

Definición 1.9. Sea $0 < \alpha < n$. Dada f una función localmente integrable en $\mathbb{R}^n$ definimos la función maximal fraccionaria como

$$M_\alpha f(x) := \sup_{Q \ni x} |Q|^{\alpha/n} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy,$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos Q en $\mathbb{R}^n$ con lados paralelos a los ejes que contengan al punto x.

Estos operadores están acotados de la siguiente manera, para la Maximal de Hardy-Littlewood,

Teorema 1.10. *Si $1 < p \leq \infty$ entonces M está acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

El caso en dimensión 1 se probó en [26].

En el caso de la maximal fraccionaria, la siguiente acotación se probó en [57] para casos más generales,

Teorema 1.11. *[57] Sean $0<\alpha<n$, $1<p<n/\alpha$ y $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{n}{\alpha}$. El operador M_α está acotado de $L^p(\mathbb{R}^n)$ en $L^q(\mathbb{R}^n)$.*

De la misma manera que se definen los operadores maximales, M y M_α, se pueden definir operadores más generales usando los promedios de Luxemburg asociados a una función de Young, de la siguiente manera

Definición 1.12. Sean $0\le\alpha<n$ y φ una función de Young. Dada f una función localmente integrable en $\mathbb{R}^n$ definimos el operador maximal $M_{\alpha,\varphi}$ como

$$M_{\alpha,\varphi}f(x):=\sup_{Q\ni x}|Q|^{\alpha/n}\|f\|_{\varphi,Q},$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos Q en $\mathbb{R}^n$ con lados paralelos a los ejes que contengan al punto x.

Ejemplo 1.13. Ejemplos de operadores maximales:

- Si $\varphi(t)=t$, $M_{\alpha,\varphi}=M_\alpha$ y $M_{0,\varphi}=M$.
- Sea $1\le r<\infty$. Si $\varphi(t)=t^r$, $M_{\alpha,\varphi}=M_{\alpha,r}$ donde $M_{\alpha,r}f=M_{r\alpha}(|f|^r)^{1/r}$ y $M_{0,\varphi}=M_r$ con $M_rf=M(|f|^r)^{1/r}$.
- Sea $1\le r<\infty$ y $\lambda>0$. Si $\varphi(t)=t^r(1+\log^+t)^\lambda$ o $\varphi(t)=t^r\log(e+t)^\lambda$, como los promedios son comparables denotamos $M_{\alpha,\varphi}=M_{\alpha,L^r\log^\lambda}$. Consideremos el caso particular de $r=1$ y $\lambda=k\in\mathbb{N}$, entonces $M_{0,L\log^k}\simeq M^{k+1}$ donde M^{k+1} es la composición $k+1$ veces del operador de Hardy-Littlewood M.

Las maximales de la forma $M_\Phi=M_{0,\Phi}$, se pueden relacionar puntualmente con las maximales de la forma M_r, el resultado fue probado en [6] y en [15],

Lema 1.14. *[6, 15] Sea Φ una función de Young. Para todo $x\in\mathbb{R}^n$ y $r>1$,*

$$M_\Phi f(x)\le\left(2\sup_{t\ge\Phi^{-1}(1/2)}\frac{\Phi(t)}{t^r}\right)^{1/r}M_rf(x)=:\kappa_rM_rf(x).$$

De forma análoga se puede ver que

$$M_{\alpha,\Phi}f(x)\le c\kappa_rM_{\alpha,r}f(x). \tag{1.4}$$

Para ver si estos operadores están acotados en $L^p(\mathbb{R}^n)$, necesitamos la siguiente definición.

Definición 1.15. [62] Sean $1 < p < \infty$ y φ una función de Young. Decimos que $\varphi \in B_p$ si existe $c > 0$ tal que

$$C_{\varphi,B_p} := \int_c^\infty \frac{\varphi(t)}{t^p}\frac{dt}{t} < \infty.$$

El siguiente teorema, probado en [62], nos dice que los operadores M_φ no están acotados en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para cualquier φ,

Teorema 1.16. *[62] Sean $1 < p < \infty$ y φ una función de Young. El operador M_φ está acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$ si y solo si $\varphi \in B_p$. Más aun,*

$$\|M_\varphi f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq c C_{\varphi,B_p}^{1/p}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Para el resultado de operadores maximales fraccionarios necesitaremos la siguiente definición

Definición 1.17. [13] Sean $0 < \alpha < n$, $1 < p < n/\alpha$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{n}{\alpha}$ y φ una función de Young. Decimos que $\varphi \in B_p^\alpha$ si existe $c > 0$ tal que

$$C_{\varphi,B_p^\alpha} := \int_c^\infty \frac{\varphi(t)^{q/p}}{t^q}\frac{dt}{t} < \infty.$$

Teorema 1.18. *[13] Sean $0 < \alpha < n$, $1 < p < n/\alpha$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{n}{\alpha}$ y φ una función de Young. Si $\varphi \in B_p^\alpha$ entonces $M_{\alpha,\varphi}$ está acotado de $L^p(\mathbb{R}^n)$ en $L^q(\mathbb{R}^n)$ y*

$$\|M_{\alpha,\varphi} f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq c C_{\varphi,B_p^\alpha}^{1/q}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

1.4 Pesos.

En esta sección introduciremos los pesos relacionados a las acotaciones que se estudian en esta tesis.

Una función w se dice *peso* si w es no negativa y localmente integrable en $\mathbb{R}^n$. Existen varias clases de pesos que se relacionan con los operadores maximales definidos en la sección anterior. La primera que vamos a definir es la clase de pesos de Muckenhoupt.

Definición 1.19. Pesos de Muckenhoupt.

- Decimos que $w \in A_p$, $1 < p < \infty$, si

$$[w]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q w \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} < \infty,$$

  donde el supremo se toma sobre todos los cubos Q con lados paralelos a los ejes. Decimos que $[w]_{A_p}$ es la constante del peso w en A_p.

- Decimos que $w \in A_1$ si
$$Mw(x) \leq c_1 w(x),$$
p.p. $x \in \mathbb{R}^n$. Llamamos $[w]_{A_1}$ al ínfimo de las constantes c_1. Una definición equivalente es la siguiente
$$[w]_{A_1} = \left\| \frac{Mw}{w} \right\|_\infty .$$

- Se define $A_\infty = \bigcup_{p>1} A_p$ y tomamos la constante de Fujii-Wilson probada en [22, 81], y definida por
$$[w]_{A_\infty} = \sup_Q \frac{1}{w(Q)} \int_Q M(w\chi_Q).$$

Observemos que estas clases de pesos son crecientes, es decir que $A_p \subset A_q$ si $p < q$. Además, cumple la siguiente propiedad

Teorema 1.20 (Desigualdad de Reverse-Hölder)**.** *[8] Sea $w \in A_p$ para algún $1 \leq p \leq \infty$. Existe una constante $\varepsilon > 0$, que depende de $n, p, [w]_{A_p}$, tal que para todo cubo Q, tenemos que*
$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{1+\varepsilon} \right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \leq \frac{C}{|Q|} \int_Q w.$$

Una de las consecuencias de la desigualdad de Reverse-Hölder es que si $w \in A_p$ para algún $1 < p < \infty$ entonces existe $r < p$ tal que $w \in A_r$.

Algunas versiones óptimas o "sharp" de la desigualdad de Reverse-Hölder son

Teorema 1.21 (Desigualdad de Reverse-Hölder óptima)**.**

(a) [47] Sea $w \in A_1$. Si $r_w = 1 + \frac{1}{2^{n+1}[w]_{A_1}}$ se tiene que para todo cubo Q,
$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{r_w} \right)^{\frac{1}{r_w}} \leq \frac{2}{|Q|} \int_Q w.$$

(b) [28] Sea $w \in A_\infty$. Si $r_w = 1 + \frac{1}{2^{n+11}[w]_{A_\infty}}$ se tiene que para todo cubo Q,
$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{r_w} \right)^{\frac{1}{r_w}} \leq \frac{2}{|Q|} \int_Q w.$$

Este tipo de desigualdades de Reverse Hölder óptimas nos permiten dar una versión cuantitativa de una cararterización clásica de la clase de pesos A_∞.

Lema 1.22. *Existe $c_n > 0$ tal que para todo peso $w \in A_\infty$, todo cubo Q y todo subconjunto medible de $E \subset Q$ se cumple que*

$$\frac{w(E)}{w(Q)} \leq 2\left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^{\frac{1}{c_n[w]_{A_\infty}}}.$$

Demostración. Llamemos $r_w = 1 + \frac{1}{\tau_n[w]_{A_\infty}}$ donde $\tau_n = 2^{n+11}$. Observemos que usando la desigualdades de Reverse Hölder óptima obtenemos que

$$w(E) = |Q|\frac{1}{|Q|}\int_Q w\chi_E \leq |Q|\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{r_w}\right)^{\frac{1}{r_w}}\left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^{\frac{1}{r'_w}} \leq 2w(Q)\left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^{\frac{1}{r'_w}},$$

lo cual nos da el resultado deseado pues $r'_w \simeq c_n[w]_{A_\infty}$. □

Las clases de pesos de Muckenhoupt están relacionadas al operador Maximal de Hardy-Littlewood de la siguiente manera

Teorema 1.23. *[56] El operador maximal de Hardy-Littlewood es acotado en $L^p(w)$ si y sólo si $w \in A_p$.*

En [5] se probó el control óptimo de la constante del peso,

Teorema 1.24. *[5] Si $w \in A_p$, entonces*

$$\|Mf\|_{L^p(w)} \leq c_n[w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}}\|f\|_{L^p(w)},$$

donde el exponente de la constante del peso es óptimo.

Ahora, definiremos la clase de pesos fraccionarios relacionados al operador Maximal Fraccionario

Definición 1.25. Sean $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Decimos que un peso w esta en la clase $A_{p,q}$ si

$$[w]_{A_{p,q}} := \sup_Q\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^q\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-p'}\right)^{q/p'} < \infty.$$

Observar que si $w \in A_{p,q}$ entonces

$$w^q \in A_{1+q/p'} \text{ con } [w^q]_{1+q/p'} = [w]_{A_{p,q}},$$

y

$$w^{p'} \in A_{1+p'/q} \text{ con } [w^{p'}]_{1+p'/q} = [w]_{A_{p,q}}^{p'/q}.$$

Además $w \in A_{p,p}$ es equivalente a $w^p \in A_p$ y $w \in A_{\infty,\infty}$ es equivalente a $w^{-1} \in A_1$.

Teorema 1.26. *[57] Sean $0 < \alpha < n$, $1 < p < \infty$ y $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. El operador maximal fraccionario es acotado de $L^p(w^p)$ en $L^q(w^q)$ si y sólo si $w \in A_{p,q}$*

En [42] se probo el control óptimo de la constante del peso,

Teorema 1.27. *[42] Si $w \in A_{p,q}$, entonces*

$$\|M_\alpha f\|_{L^q(w^q)} \leq c_n [w]_{A_{p,q}}^{\frac{p'}{q}(1-\alpha/n)} \|f\|_{L^p(w^p)},$$

donde el exponente de la constante del peso es óptimo.

Para operadores maximales más generales tenemos los siguientes resultados más recientes. El primer resultado es sobre maximales asociados a $L^r \log L$, $M_{\alpha, L^r \log L}$.

Teorema 1.28. *[3] Sean $0 \leq \alpha < n$, $1 < p < \alpha/n$ y $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. Sea $\varphi(t) = t^r(1 + \log(t)^+)^\lambda$ con $1 \leq r < \infty$ y $\lambda \geq 0$. La maximal $M_{\alpha,\varphi}$ es acotada de $L^p(w^p)$ en $L^q(w^q)$ si y solo si $w^r \in A_{\frac{p}{r}, \frac{q}{r}}$.*

Por otro lado para operadores maximales donde $r = 1$ y $\alpha = 0$, se sabe bien la mejor constante, el resultado es el siguiente:

Teorema 1.29. *[54] Sean $\lambda > 0$, $1 < p < \infty$, $w \in A_p$ y $\varphi(t) = t(1 + \log(t)^+)^\lambda$, entonces*

$$\|M_\varphi f\|_{L^p(w)} \leq c [w]_{A_p}^{\frac{1+\lambda}{p-1}} \|f\|_{L^p(w)},$$

donde el exponente de la constante del peso es óptimo.

Observemos que si $\lambda = 0$ se recupera el resultado del Teorema 1.24.

En el caso de considerar M_φ con φ cualquier función de Young, tenemos el siguiente resultado,

Teorema 1.30. *[3] Sean $0 \leq \alpha < n$, $1 \leq \beta < p < n/\alpha$ y $1/q = 1/p - \alpha/n$. Sean φ y ϕ funciones de Young tales que $\varphi^{1+\frac{\rho\alpha}{n-\alpha}} \in B_{\frac{\rho n}{n-\alpha}}$ para todo $\rho > \beta(n-\alpha)/(n-\alpha\beta)$ y $\phi^{-1}(t)t^{\alpha/n} \lesssim \varphi^{-1}(t)$ para todo $t > 0$. Si w es un peso tal que $w^\beta \in A_{(\frac{p}{\beta}, \frac{q}{\beta})}$, entonces $M_{\alpha,\varphi}$ es acotado de $L^p(w^p)$ en $L^q(w^q)$.*

Existen condiciones para pesos diferentes a las clases de Muckenhoupt y a las fraccionarias, $A_{p,q}$. Nos centraremos en las siguientes condiciones Bump, las cuales se definen a partir de funciones de Young.

Definición 1.31 (Condiciones Bump)**.** Sean $1 < p < \infty$, ϕ una función de Young y w un peso. Decimos que w cumple la condición Bump de tipo $A_{p,\phi}$ si

$$[w]_{A_{p,\phi}} = \sup_Q \frac{w(Q)}{|Q|} \left\| w^{-\frac{1}{p}} \right\|_{\phi,Q}^p < \infty.$$

Se pueden definir una versión fraccionaria de estas condiciones, las cuales son las siguientes,

Definición 1.32 (Condiciones Bump fraccionarias)**.** Sean $0 < \alpha < n$, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$, ϕ una función de Young y w un peso. Decimos que w cumple la condición Bump de tipo $A_{p,q,\phi}$ si

$$[w]_{A_{p,q,\phi}} = \sup_Q \frac{w^q(Q)}{|Q|} \left\|w^{-1}\right\|_{\phi,Q}^q < \infty.$$

La condición Bump más general es la siguiente,

Definición 1.33 (Condiciones Bump generales)**.** Sean ϕ, ψ funciones de Young y w un peso. Decimos que w cumple la condición Bump de tipo $A_{\phi,\psi}$ si

$$[w]_{A_{\phi,\psi}} = \sup_Q \|w\|_{\psi,Q} \left\|w^{-1}\right\|_{\phi,Q} < \infty.$$

Observar que si $w \in A_{\phi,\psi}$ con $\phi(t) = t^q$ y $\phi(t) = t^{p'}$, entonces $w \in A_{p,q}$.

Con estas condiciones se pueden probar acotaciones del operador maximal $M_{\alpha,\phi}$, como el siguiente resultado,

Teorema 1.34. *[14] Sean $0 \le \alpha < n$, $1 < p < n/\alpha$ y $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. Sean ϕ, B y C funciones de Young tales que $B^{-1}(t)C^{-1}(t) \le c\phi^{-1}(t)$, para $t \ge t_0 > 0$. Si $C \in B_p^\alpha$ y $w \in A_{q,B}$, entonces existe una constante $c > 0$ tales que para toda $f \in L^p(w^p)$, se cumple que*

$$\int (M_{\alpha,\phi} f)^q w^q \le c \int |f|^p w^p.$$

La siguiente desigualdad es una estimación de Fefferman-Stein para el operador M_ϕ, ver [48, Lemma 2.6]

Lema 1.35. *[48] Sea ϕ una función de Young. Para cualquier peso arbitrario w tenemos que*

$$w\left(\{x \in \mathbb{R}^n : M_\phi f(x) > \lambda\}\right) \le 3^n \int_{\mathbb{R}^n} \phi\left(\frac{9^n |f(x)|}{\lambda}\right) Mw(x)dx.$$

Si además ϕ es submultiplicativa, es decir $\phi(xy) \le \phi(x)\phi(y)$, entonces

$$w\left(\{x \in \mathbb{R}^n : M_\phi f(x) > \lambda\}\right) \le c_n \int_{\mathbb{R}^n} \phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) Mw(x)dx.$$

1.5 Maximal Sharp y espacio BMO.

En esta sección definiremos el operador maximal sharp y el espacio BMO que se usarán más adelante. Enunciaremos algunas desigualdades importantes relacionadas a este operador y este espacio.

Definición 1.36. Sea $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, se define el operador maximal sharp, $M^\sharp$, como

$$M^\sharp f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q| dx,$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos Q en $\mathbb{R}^n$ con lados paralelos a los ejes que contengan al punto x y $f_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y) dy$.

Observar que para $x \in \mathbb{R}^n$,

$$M^\sharp f(x) \leq 2 \sup_{Q \ni x} \inf_{a \in \mathbb{C}} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - a| dx \leq 2M^\sharp f(x). \tag{1.5}$$

Definición 1.37. Definimos al espacio de oscilación media acotada, BMO, como el espacio de las funciones localmente integrables en $\mathbb{R}^n$, f, tales que $M^\sharp f(x) < \infty$ p.p. $x \in \mathbb{R}^n$. Consideramos este espacio con la seminorma

$$\|f\|_{BMO} = \|M^\sharp f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \text{ess} \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q| dx,$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos Q en $\mathbb{R}^n$ con lados paralelos a los ejes y $f_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f(x) dx$.

Observar que $\| \cdot \|_{BMO}$ no es una norma pues las funciones contantes tienen oscilación media igual a cero, esto es $M^\sharp f \equiv 0$. Debido a esto, consideraremos el espacio BMO cocientado por la siguiente clase de equivalencia: dos funciones son equivalentes si difieren en una constante.

El espacio BMO tiene su versión con pesos que se define de la siguiente manera

Definición 1.38. Dado w un peso. Definimos al $BMO(w)$, como el espacio de las funciones localmente integrables en $\mathbb{R}^n$, f, tales que

$$|||f|||_w = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \text{ess} \sup_{Q \ni x} \|w \chi_Q\|_\infty \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q| dx < \infty,$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos Q en $\mathbb{R}^n$ con lados paralelos a los ejes y $f_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f(x) dx$.

Observar que
$$|||f|||_w \simeq \|wM^\sharp f\|_\infty.$$
Un resultado fundamental relacionado al espacio BMO es el Teorema de John-Nirenberg.

Teorema 1.39 (John-Nirenberg). *[39] Sean $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$, Q un cubo, y $\lambda > 0$ entonces*
$$|\{x \in Q : |f(x) - f_Q| > \lambda\}| \leq e|Q|e^{-\frac{\lambda}{2^n e\|f\|_{BMO}}}.$$

Sean $w \in A_\infty$ y Q un cubo definimos el siguiente promedio de Luxemburg,
$$\|f\|_{\exp L(w),Q} = \inf\left\{\lambda > 0 \,:\, \frac{1}{w(Q)}\int_Q \exp\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) - 1\, dw < 1\right\}.$$
Combinando el Teorema John-Nirenberg y el Lema 1.22, podemos obtener el siguiente resultado,

Lema 1.40. *Sean $b \in BMO$ y $w \in A_\infty$, entonces*
$$\|b - b_Q\|_{\exp L(w),Q} \leq c_n[w]_{A_\infty}\|b\|_{BMO}; \tag{1.6}$$
más aun, si $j > 0$
$$\||b - b_Q|^j\|_{\exp L^{\frac{1}{j}}(w),Q} \leq c_{n,j}[w]^j_{A_\infty}\|b\|^j_{BMO}. \tag{1.7}$$

Demostración. Primero probaremos (1.6). Por la definición de $\|f\|_{\exp L(w),Q}$ basta probar que
$$\frac{1}{w(Q)}\int_Q \exp\left(\frac{|b(x) - b_Q|}{c_n[w]_{A_\infty}\|b\|_{BMO}}\right) dw < 2,$$
para algún c_n independiente de w, b y Q. Usando el Lema 1.22 y el Teorema 1.39
$$\frac{1}{w(Q)}\int_Q \exp\left(\frac{|b(x) - b_Q|}{\lambda}\right) dw = \frac{1}{w(Q)}\int_0^\infty e^t w\left(\{x \in Q \,:\, |b(x) - b_Q| > \lambda t\}\right) dt$$
$$\leq 2\frac{1}{w(Q)}\int_0^\infty e^t\left(\frac{|\{x \in Q \,:\, |b(x) - b_Q| > \lambda t\}|}{|Q|}\right)^{\frac{1}{c_n[w]_{A_\infty}}} w(Q)dt$$
$$\leq 2e\int_0^\infty e^t e^{-\frac{t\lambda}{c_n[w]_{A_\infty}\|b\|_{BMO}e2^n}} dt.$$

Tomando $\lambda = \alpha c_n e 2^n\|b\|_{BMO}[w]_{A_\infty}$ obtenemos
$$2e\int_0^\infty e^t e^{-\frac{t\lambda}{c_n[w]_{A_\infty}\|b\|_{BMO}e2^n}} dt = 2e\int_0^\infty e^{t(1-\alpha)}dt.$$

Tomando α tal que el lado derecho sea más chico que 2 obtenemos lo deseado.

Para terminar la prueba, observemos que para toda medida

$$\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q \exp\left(\frac{|f(x)|^j}{\lambda}\right)^{\frac{1}{j}} - 1\,d\mu = \frac{1}{\mu(Q)}\int_Q \exp\left(\frac{|f(x)|}{\lambda^{\frac{1}{j}}}\right) - 1\,d\mu.$$

En consecuencia, tenemos que

$$\||b-b_Q|^j\|_{\exp L^{\frac{1}{j}}(\mu),Q} = \|b-b_Q\|^j_{\exp L(\mu),Q}, \tag{1.8}$$

y se sigue que (1.7) vale.

□

1.6 Operadores integrales y condiciones de regularidad y tamaño.

Introduciremos los operadores integrales, tanto los singulares como los fraccionarios, relevantes para esta tesis, definidos a partir de una función K llamada núcleo. El núcleo a considerar cumple ciertas condiciones de comportamiento llamadas condiciones de regularidad y de tamaño. Primero definiremos estas condiciones para luego definir los operadores integrales más clásicos. Las generalizaciones de estos operadores trabajadas en esta tesis se definirán en los capítulos siguientes.

Primero introduzcamos una notación que será de utilidad para algunas de estas definiciones.

Notación: Vamos a denotar $|x| \sim s$ al anillo $s < |x| < 2s$. Además, dada una función de Young φ vamos a escribir

$$\|f\|_{\varphi,|x|\sim s} = \|f\chi_{|x|\sim s}\|_{\varphi,B(0,2s)}.$$

Las condiciones de regularidad o de Hörmander más clasicas son las siguientes

Definición 1.41 (Condiciones de regularidad)**.** Sea $K \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

- Condición de Hörmander H_1 [27]: Diremos que $K \in H_1$ si existe $c_1 > 0$ tal que para todo $x \neq 0$,

$$\int_{|y|\geq 2|x|} |K(x-y) - K(y)|dy \leq c_1.$$

- Condición de Hörmander H_{Dini}: Sea $\omega : [0,1] \to [0,\infty)$ una función creciente y subaditiva tal que $\omega(0) = 0$. Diremos que $K \in H_{Dini}$ si existe $c > 0$ tal que
$$|K(x-y) - K(x_0 - y)| \leq c\,\omega\left(\frac{|x-x_0|}{|y-x_0|}\right)\frac{1}{|x-y|^n},$$
para $|y - x_0| \geq 2|x - x_0|$. ω cumpliendo la siguiente condición Dini,
$$\int_0^1 \omega(t)\frac{dt}{t} < \infty.$$

- Condición de Hörmander (Lipschitz) H_∞^*: Diremos que $K \in H_\infty^*$ si existe $c, C_\infty, \delta > 0$ tales que para todo $|x| \geq c|y|$
$$|K(x-y) - K(x)| \leq C_\infty \frac{|y|^\delta}{|x|^{n+\delta}}.$$

- Condición de Hörmander H_r[20]: Diremos que $K \in H_r$ si existen $c_r > 1$ y $C_r > 0$ tales que para todo x y $R > c_r|x|$,
$$\sum_{m=1}^{\infty}(2^m R)^n \|K(\cdot - x) - K(\cdot)\|_{r,|y|\sim 2^m R} \leq C_r.$$
Decimos que $K \in H_\infty$ si K cumple la condición previa con $\|\cdot\|_{L^\infty,|x|\sim 2^m R}$ en lugar de $\|\cdot\|_{r,|x|\sim 2^m R}$.

Existe una versión con promedios de Luxembugo y funciones de Young que es la siguiente

Definición 1.42 (Condición de Hörmander H_φ)**.** [53] Sea φ una función de Young. Diremos que $K \in H_\varphi$ si existen $c_\varphi > 1$ y $C_\varphi > 0$ tales que para todo x y $R > c_\varphi|x|$,
$$\sum_{m=1}^{\infty}(2^m R)^n \|K(\cdot - x) - K(\cdot)\|_{\varphi,|y|\sim 2^m R} \leq C_\varphi.$$

Observar que hay inclusiones entre estas clases de funciones
$$H_{Dini} \subset H_\infty^* \subset H_r \subset H_s \subset H_\varphi \subset H_\psi \subset H_1,$$
con $1 < s < r < \infty$ y $\psi(t) \leq \varphi(t) \leq ct^s$ para $t > t_0$ algún $t_0 > 0$.

A partir de las definiciones anteriores de regularidad, se pueden generalizar para el caso fraccionario.

Definición 1.43 (Condición fraccionaria de Hörmander $H_{\alpha,\varphi}$)**.** [4] Sean $0 < \alpha < n$ y φ una función de Young. Diremos que $K_\alpha \in H_{\alpha,\varphi}$ si existen $c_\varphi > 1$ y $C_\varphi > 0$ tales que para todo x y $R > c_\varphi|x|$,

$$\sum_{m=1}^{\infty}(2^m R)^{n-\alpha}\|K_\alpha(\cdot - x) - K_\alpha(\cdot)\|_{\varphi,|y|\sim 2^m R} \leq C_\varphi.$$

De manera parecida a la generalización de las condiciones de regularidad podemos generalizar las condiciones de tamaño de los operadores de Calderón-Zygmund y de la integral fraccionaria.

Las condiciones de tamaño clásicas son, para $0 \leq \alpha < n$,

$$|K_\alpha(x)| \leq \frac{c}{|x|^{n-\alpha}}.$$

Podemos generalizar estas condiciones puntuales de tamaño por condiciones integrales de la siguiente forma

Definición 1.44. [4] Condición de tamaño $S_{\alpha,\varphi}$:
Sean $0 \leq \alpha < n$ y φ una función de Young. Diremos que $K_\alpha \in S_{\alpha,\varphi}$ si existe $c > 0$ tal que

$$\|K_\alpha\|_{\varphi,|x|\sim s} \leq \frac{c}{s^{n-\alpha}}.$$

Observar que podemos definir una condición analoga con la norma $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Definidas las condiciones clásicas de regularidad y tamaño podemos definir los operadores de Calderón-Zygmund y la integral fraccionaria.

Definición 1.45. Operadores integrales clásicos:

(i) Diremos que un operador T es un operador integral singular de Calderón-Zygmund si T es de tipo fuerte (2,2) y admite la siguiente representación, para $x \notin \mathrm{sop} f$

$$Tf(x) = \int K(x-y)f(y)dy,$$

donde el núcleo $K \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $K \in H^*_\infty$ y

$$|K(x)| \leq \frac{c}{|x|^n}.$$

(ii) Sea $\omega : [0,1] \to [0,\infty)$ una función creciente y subaditiva tal que $\omega(0) = 0$. Diremos que un operador T es un operador integral singular de ω-Calderón-Zygmund si T es de tipo fuerte (2,2) y admite la siguiente representación, para $x \notin sopf$

$$Tf(x) = \int K(x-y)f(y)dy,$$

donde el núcleo $K \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $K \in H_{Dini}$ y

$$|K(x)| \leq \frac{c}{|x|^n}.$$

(iii) Dado $0 < \alpha < n$. La integral fraccionaria, I_α, se define por

$$I_\alpha f(x) = \int \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy.$$

Observemos que el núcleo cumple trivialmente las condicióncs $S_{\alpha,\infty}$ y $H_{\alpha,\infty}$.

Considerando las condiciones generalizadas de Hörmander y de tamaño podemos definir los siguientes operadores integrales,

Definición 1.46. (i) Dada φ una función de Young. Definimos el operador de tipo singular T_φ al operador que admite la siguiente representación, para $x \notin sopf$

$$T_\varphi f(x) = \int K(x-y)f(y)dy,$$

donde el núcleo $K \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ tal que $K \in H_\varphi$ y T_φ es de tipo fuerte (p_0, p_0), algún $1 < p_0 < \infty$ y

(ii) Dados $0 < \alpha < n$ y φ una función de Young. Definimos el operador de tipo fraccionario T_α por $T_\alpha f(x) = K_\alpha * f(x)$ donde el núcleo $K \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ y $K \in S_{\alpha,\varphi} \cap H_{\alpha,\varphi}$.

A partir de los operadores integrales se puede definir su conmutador con una función $b \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, llamada "símbolo"

Definición 1.47. Sean $b \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y T un operador lineal, se define el conmutador de orden 1 de T como

$$T_b f(x) = [b,T]f(x) = b(x)Tf(x) - T(bf)(x),$$

otra notación es $T_b^1 f(x) = [b,T]f(x)$. Dado $k \geq 2$, el conmutador de orden k se define como

$$T_b^k = [b, T_b^{k-1}].$$

1.6.1 Acotación de operadores de Calderón-Zygmund

Estos operadores cumplen acotaciones en los espacios $L^p(w)$, vamos a enunciar las acotaciones más relevantes ya conocidas para esta tesis.

Teorema 1.48 (Lema Sharp)**.** *Sea T un operador integral singular de Calderón-Zygmund. Dados $0 < \delta < \epsilon \leq 1$, existe $C > 0$ tal que p.p. $x \in \mathbb{R}^n$*

$$M_\delta^\sharp(Tf)(x) = \left(M^\sharp(|Tf|^\delta)(x)\right)^{1/\delta} \leq CM_\epsilon(f)(x).$$

Teorema 1.49 (Teorema de Coifman-Fefferman)**.** *[8] Sea $0 < p < \infty$. Sea T un operador integral singular de Calderón-Zygmund. Existe $C > 0$ tal que para todo $w \in A_\infty$,*

$$\|Tf\|_{L^p(w)} \leq C\|Mf\|_{L^p(w)}.$$

El siguiente resultado enuncia que los operadores de Calderón-Zygmund están acotados en $L^p(w)$, en otras palabras que son de tipo fuerte (p,p) respecto al peso w.

Teorema 1.50. *Sea $1 < p < \infty$. Sea T un operador integral singular de Calderón-Zygmund. Si $w \in A_p$ entonces existe $C > 0$ tal que*

$$\|Tf\|_{L^p(w)} \leq C_w\|f\|_{L^p(w)}.$$

Existe una versión de este teorema con el control de la constante del peso que es la siguiente

Teorema 1.51. *Sea $1 < p < \infty$. Sea T un operador integral singular de Calderón-Zygmund. Si $w \in A_p$ entonces existe $C > 0$ tal que*

$$\|Tf\|_{L^p(w)} \leq C_{n,p}[w]_{A_p}^{\max\{1,\frac{1}{p-1}\}}\|f\|_{L^p(w)}. \tag{1.9}$$

Para el caso de transformada de Hilbert y las transformadas de Riesz este resultado fue probado en [65, 66]. Para operadores de Calderón-Zygmund, con $p = 2$ fue probado en [30]. El resultado para $p = 2$ es suficiente para probar el caso $p > 1$, usando el resultado de extrapolación sharp de [17].

El siguiente resultado enuncia que los operadores de Calderón-Zygmund son de tipo débil $(1,1)$ respecto al peso w.

Teorema 1.52. *Sean $1 < p < \infty$ y T un operador integral singular de Calderón-Zygmund. Si $w \in A_1$ entonces existe $C > 0$ tal que*

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda}\int |f(x)|w(x)dx. \tag{1.10}$$

La versión con constante óptima es,

Teorema 1.53. *[50] Sean $1 < p < \infty$ y T un operador integral singular de Calderón-Zygmund. Si $w \in A_1$ entonces existe $C_{n,T} > 0$ tal que*

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}) \leq \frac{C_{n,T}}{\lambda}[w]_{A_1} \log(e + [w]_{A_1}) \int |f(x)|w(x)dx. \quad (1.11)$$

Para el conmutador de los operadores integrales singulares de Calderón-Zygmund con símbolo $b \in BMO$ tenemos los siguientes resultados,

Teorema 1.54. *[9] Sean $1 < p < \infty$ y T un operador de Calderón-Zygmund. El operador T_b es acotado en L^p si y solo si $b \in BMO$.*

Una de las diferencias entre un operador de Calderón-Zygmund, T, y sus conmutadores es el hecho que T_b no es de tipo débil $(1,1)$. En [61] se probó que cumple una estimación en el extremo para la medida de Lebesgue y los pesos A_1.

Teorema 1.55. *[61] Sean $b \in BMO$, $k \in \mathbb{N}$ y T un operador de Calderón-Zygmund. Si $w \in A_1$, entonces*

$$\begin{aligned} w(\{x \in \mathbb{R}^n :&|T_b^k f(x)| > \lambda\}) \\ &\leq C\|b\|_{BMO}^k [w]_{A_1} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{\lambda}\left(1 + \log^+\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)\right)^k w(x)dx. \end{aligned}$$

El siguiente teorema es el lema de la maximal sharp de los conmutadores de operadores de Calderón-Zygmund

Teorema 1.56. *[61] Sea T un operador integral singular de Calderón-Zygmund. Dado $0 < \delta < \varepsilon < 1$, existe $C > 0$ tal que p.p. $x \in \mathbb{R}^n$*

$$M_\delta^\sharp(T_b f)(x) \leq C\|b\|_{BMO}\left(M_\varepsilon(Tf)(x) + M^2 f(x)\right),$$

para toda función suave f.

1.6.2 Acotación de la I_α

La integral fraccionaria cumple acotaciones entre los espacios $L^p(w^p)$ y $L^q(w^q)$ con $p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. Enunciaremos los resultados relevantes para esta tesis.

Teorema 1.57. *[57][Teorema de Coifman-Fefferman] Sea $0 < q < \frac{n}{\alpha}$. Existe $C > 0$ tal que para todo $w^q \in A_\infty$,*

$$\|I_\alpha f\|_{L^q(w^q)} \leq C\|M_\alpha f\|_{L^q(w^q)}.$$

El siguiente resultado enuncia que la integral fraccionaria está acotada de $L^p(w^p)$ en $L^q(w^q)$, en otras palabras que es de tipo fuerte (p,q) respecto al peso w.

Teorema 1.58. *[57] Sean $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ y $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. Si $w \in A_{p,q}$ entonces existe $C > 0$ tal que*

$$\|I_\alpha f\|_{L^q(w^q)} \leq C_w \|f\|_{L^p(w^p)}.$$

Existe una versión de este teorema con el control de la constante del peso que es la siguiente

Teorema 1.59. *[42] Sean $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ y $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. Si $w \in A_{p,q}$ entonces existe $C > 0$ tal que*

$$\|I_\alpha f\|_{L^q(w^q)} \leq C_{n,p} [w]_{A_{p,q}}^{(1-\frac{\alpha}{n})\max\left\{1, \frac{p'}{q}\right\}} \|f\|_{L^p(w^p)}.$$

El siguiente resultado enuncia que la integral fraccionaria esta acotada de $L^1(w)$ en $L^{q,\infty}(w^q)$ con $q = \frac{n}{n-\alpha}$.

Teorema 1.60. *[57] Si $w \in A_{1,q}$ con $q = \frac{n}{n-\alpha}$ entonces existe $C > 0$ tal que*

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda w^q(\{x \in \mathbb{R}^n : |I_\alpha f(x)| > \lambda\})^{1/q} \leq C \int |f(x)| w dx.$$

1.7 Operadores Sparse.

En los últimos años, uno de los operadores más utilizados en análisis armónico para la acotación de operadores, especialmente en espacios con pesos, son los operadores sparse que definiremos en esta sección. Su gran importancia se debe a la simpleza de su definición, la cual permite obtener estimaciones con pesos cuantitativas de una manera sencilla. En otras palabras estudiar la dependencia de la constante del peso $[w]_{A_p}$ o $[w]_{A_{p,q}}$.

Decimos que una familia de cubos diádicos $\mathcal{S}$ es una familia η-sparse con $\eta \in (0,1)$ si para cada $Q \in \mathcal{S}$ existe un subconjunto medible $E_Q \subset Q$ disjuntos dos a dos tal que

$$\eta |Q| \leq |E_Q|.$$

Definimos el operador sparse con respecto al promedio usual como

$$A_{\mathcal{S}} f(x) = \sum_{Q \in \mathcal{S}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy \right) \chi_Q(x).$$

En general, dada φ una función de Young, definimos

$$A_{\varphi,\mathcal{S}} f(x) = \sum_{Q \in \mathcal{S}} \|f\|_{\varphi,Q} \chi_Q(x).$$

También se pueden definir una versión fraccionaria de estos operadores. Sea $0 \leq \alpha < n$ y φ una función de Young

$$A_{\alpha,\varphi,\mathcal{S}}f(x) = \sum_{Q\in\mathcal{S}} |Q|^{\alpha/n}\|f\|_{\varphi,Q}\chi_Q(x).$$

En [10] e independientemente en [45], los autores prueban que es posible obtener una dominación puntual por operadores sparse para operadores de Calderón-Zygmung que cumplen una condición log-Dini. En [41] se probó que esta estimación vale para operadores maximales de Calderón-Zygmund cumpliendo una condición Dini. Más aún se puede precisar la constante que depende del operador, lo cual fue probado en [33]. En estos trabajos construir las familias sparse es relativamente complicado.

Luego, en [44] el autor obtiene la misma acotación cuantitativa que en [33], donde la construcción de la familia sparse es utilizando la descomposición de Calderón-Zygmund. El resultado es el siguiente

Teorema 1.61. *[44] Sea T un ω-Calderón-Zygmund con ω cumpliendo una condición de Dini. Luego, para toda $f \in L^1_c(\mathbb{R}^n)$, existe una familia sparse S tal que para p.p. $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$|T(x)| \leq c_{n,T,\omega} A_{\mathcal{S}}f(x),$$

donde $c_{n,T,\omega} = c_n(\|T\|_{L^2\to L^2} + C_K + \|\omega\|_{Dini})$.

Esta técnica de dominación sparse desarrollada en [44] para operadores ω-Calderón-Zygmund tiene la ventaja de que se puede adaptar y generalizar a otros casos de operadores. Algunos ejemplos son la integral fraccionaria en [1] y los conmutadores de los operadores ω-Calderón-Zygmund en [48], entre otros. Finalmente en [46] se generalizó a operadores sublineales. En esta tesis probaremos dominaciones sparse para diversos operadores.

Antes de explicar esta técnica, observemos la importancia de la dominación sparse. Como es una desigualdad puntual podemos tomar cualquier norma en un espacio de Banach X, obteniendo lo siguiente

$$\|Tf\|_X \leq c \sup_{\mathcal{S}} \|A_{\mathcal{S}}f\|_X,$$

donde el supremo es tomado sobre todas las familias sparse $\mathcal{S}$. Teniendo en cuenta la anterior desigualdad con $X = L^2$ y la desigualdad probada en [12],

$$\|A_{\mathcal{S}}f\|_{L^2\to L^2} \leq c_n[w]_{A_2},$$

se obtiene una prueba fácil del Teorema A_2, probado en [30].

La técnica del Teorema 1.61 se basa en un lema principal que involucra los siguientes operadores: el operador maximal M_T definido por

$$M_T f(x) = \sup_{Q \ni x} \operatorname*{sup\,ess}_{\xi \in Q} |T(f\chi_{\mathbb{R}^n \setminus 3Q})(\xi)|,$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos $Q \subset \mathbb{R}^n$ que contienen a x. Recordemos que el operador maximal asociado a un operador se define por,

$$T^* f(x) = \sup_{\varepsilon > 0} \left| \int_{|x-y|>\varepsilon} K(x,y) f(y) dy \right|.$$

Además, dado un cubo Q_0, para $x \in Q_0$ se define una versión local de M_T por

$$M_{T,Q_0} f(x) = \sup_{Q \ni x, Q \subset Q_0} \operatorname*{sup\,ess}_{\xi \in Q} |T(f\chi_{3Q_0 \setminus 3Q})(\xi)|.$$

El lema principal es el siguiente

Lema 1.62. *Las siguientes desigualdades puntuales valen:*

(i) para p.p. $x \in Q_0$,

$$|T(f\chi_{3Q_0}) f(x)| \leq c_n \|T\|_{L^1 \to L^{1,\infty}} |f(x)| + M_{T,Q_0} f(x);$$

(ii) para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$M_T f(x) \leq c_n (\|w\|_{Dini} + C_K) M f(x) + T^* f(x).$$

Observar que este lema son desigualdades puntuales que unicamente dependen del comportamiento local y la regularidad del operador.

Otro lema importante es el llamado truco de 3^n latices diádicos. Este resultado esta enunciado en [45] y dice lo siguiente

Lema 1.63. *[45] Dada una familia diádica de cubos $\mathcal{D}$ existen 3^n familias diádicas $\mathcal{D}_j$ tal que*

$$\{3Q : Q \in \mathcal{D}\} = \bigcup_{j=1}^{3^n} \mathcal{D}_j,$$

y para todo cubo $Q \in \mathcal{D}$ se puede encontrar un cubo R_Q en cada $\mathcal{D}_j$ tal que $Q \subset R_Q$ y $3l_Q = l_{R_Q}$.

Con estas ideas en mente y cambiando condiciones del operador se pueden estudiar dominaciones sparse para diversos operadores.

1.8 Otras técnicas del analisis armónico.

En esta sección mencionaremos otras técnicas o resultados que se usarán para probar los resultado de esta tesis

1.8.1 Técnica de extrapolación desde A_∞.

Teorema 1.64. *[11] Dados dos operadores S y T, supongamos que para algún $0 < p_0 < \infty$ vale que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^{p_0} w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |Sf(x)|^{p_0} w(x)dx,$$

para toda f en el dominio de S y T tales que el lado izquierdo sea finito, y para todo $w \in A_\infty$ con C dependiendo solo de la constante A_∞ de w. Entonces para todo p, $0 < p < \infty$, y $w \in A_\infty$ valen que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^{p} w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |Sf(x)|^{p} w(x)dx,$$

y

$$\|Tf\|_{L^{p,\infty}(w)} \leq C\|Sf\|_{L^{p,\infty}(w)}.$$

1.8.2 Método de conjugación.

Este método utiliza la técnica de la formula integral de Cauchy, ver por ejemplo [7] y [2]. Explicaremos un poco esta técnica, sea T un operador lineal, podemos escribir su conmutador de orden k, T_b^k, como la siguiente integral compleja

$$T_b^k f = \frac{d^k}{dz^k} e^{zb} T(fe^{-zb})\Big|_{z=0} = \frac{k!}{2\pi i}\int_{|z|=\epsilon} \frac{T_z(f)}{z^{k+1}} dz,$$

donde $\epsilon > 0$ y $T_z(f) = e^{zb}T(fe^{-zb})$, $z \in \mathbb{C}$. Esto se denomina la "conjugacion" de T por e^{zb}. Ahora, si $\|\cdot\|$ es una noma podemos aplicar la desigualdad de Minkowski para obtener

$$\|T_b^k f\| \leq \frac{k!}{2\pi\epsilon^k} \sup_{|z|=\epsilon} \|T_z(f)\| \qquad \epsilon > 0.$$

Observemos que con esta técnica podemos obtener la acotación del conmutador usando la acotación de la conjugación del operador, T_z. Un lema útil para esta técnica es el siguiente

Lema 1.65. *[2] Sea $1 < r, \eta < \infty$. Si $w^\eta \in A_r$ y $b \in BMO$, entonces $we^{\lambda b} \in A_r$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ que cumple*

$$|\lambda| \leq \frac{\min\{1, p-1\}}{\eta' \|b\|_{BMO}}.$$

Capítulo 2

Operadores fraccionarios con condiciones H_r

Consideraremos operadores fraccionarios de la siguiente forma

$$T_\alpha f(x) = \int K(x-y)f(y)dy, \tag{2.1}$$

con el núcleo K cumpliendo condiciones de tamaño y regularidad de la forma $S_{\alpha,r'}$ y $H_{\alpha,r'}$, donde $0 < \alpha < n$ y $1 < r' \leq \infty$. En este capítulo estudiamos la acotación de estos operadores y vemos la constante del peso con exponente óptimo.

Un ejemplo de estos operadores es la integral fraccionaria I_α pues cumple las condiciones $S_{\alpha,\infty}$ y $H_{\alpha,\infty}$. Más ejemplos serán estudiados en la sección 2.2.

Operadores de esta forma, o similares, fueron estudiados por Kurtz en [40] donde estudia acotaciones de tipo Coifman-Fefferman mediante la técnica de extrapolación y el uso del operador maximal sharp. En [4], los autores estudiaron acotaciones de tipo Coifman-Fefferman para operadores con condiciones más generales. Nosotros nos centraremos en probar la acotación de tipo fuerte con constante óptima con respecto al peso utilizando la dominación sparse explicada en los preliminares. Los resultados originales de este capitulo se encuentran en [37].

2.1 Acotación de T_α.

Primero, vamos a presentar los resultados demostrados en [40] con la notación del capítulo 1 para mayor comprensión.

En [40], Kurtz define una clases de núcleos $K(r,\alpha)$ de la siguiente manera: $K \in K(r,\alpha)$ si existe una función S en $(0,1)$ tal que

(i) $\left(\int_{R<|x|<2R} |K(x-y)-K(x)|^r dx\right)^{1/r} \leq S(\frac{|y|}{R})R^{\alpha-n/r'}, \qquad |y| < \frac{R}{2},$

(ii) $\|Tf\|_q \leq C\|f\|_{r'}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{r'} - \frac{\alpha}{n}$,

(iii) $\sum_{j=1}^{\infty} S(2^{-j}) < \infty$.

Es fácil ver que si $K_\alpha \in K(r', \alpha)$ entonces $K_\alpha \in H_{\alpha,r'}$ y el operador $T_\alpha f = K_\alpha * f$ es acotado de $L^{r'}(dx)$ en $L^q(dx)$ para $\frac{1}{q} = \frac{1}{r'} - \frac{\alpha}{n}$.

El primer resultado es la acotación del maximal sharp del operador por un operador maximal adecuado.

Teorema 2.1. *[40] Sean $0 < \alpha < n$ y $1 \leq r < n/\alpha$. Sea $K_\alpha \in H_{\alpha,r'}$ y supongamos que T_α es acotado de $L^{r'}(dx)$ en $L^q(dx)$ para $\frac{1}{q} = \frac{1}{r'} - \frac{\alpha}{n}$. Existe una constante C, tal que para $f \in L^1_{loc}$,*

$$M^\sharp(T_\alpha f)(x) \leq C M_{\alpha,r} f(x).$$

Utilizando el Teorema 2.1 y técnicas de extrapolación se obtiene una desigualdad de tipo fuerte para el operador T_α, la cual es la siguiente

Teorema 2.2. *[40] Sea $0 < \alpha < n$ y $1 \leq r < n/\alpha$. Sea $K_\alpha \in H_{\alpha,s}$ y supongamos T_α es acotado de $L^s(dx)$ en $L^q(dx)$ para $\frac{1}{q} = \frac{1}{s} - \frac{\alpha}{n}$ y todo s tal que $n/(n-\alpha) < s < r'$. Si $r < p < n/\alpha$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ y $w^r \in A_{\frac{p}{r},\frac{q}{r}}$, entonces existe una constante C_w, independiente de f pero depende de w, tal que*

$$\|T_\alpha f\|_{L^q(w^q)} \leq C_w \|f\|_{L^p(w^p)}. \tag{2.2}$$

Por otro lado, en [4] consideran que el núcleo K_α cumple condiciones de tamaño y regularidad de la forma S_α y $H_{\alpha,\phi}$, donde $0 < \alpha < n$ y ϕ es una función de Young, en particular para el caso de este capítulo basta tomar $\phi(t) = t^{r'}$ con $1 < r' \leq \infty$. Usando la condición de tamaño estudiamos la acotación de tipo Coifman-Fefferman, sin pedir que el operador sea acotado.

Teorema 2.3. *[4] Sea $0 < \alpha < n$ y $1 \leq r < n/\alpha$. Sea $K_\alpha \in S_\alpha \cap H_{\alpha,\phi}$, con $\phi(t) = t^{r'}$. Luego, para cualquier $0 < q < \infty$ y $w^q \in A_\infty$, tenemos que*

$$\|T_\alpha f\|_{L^q(w^q)} \leq C_w \|M_{\alpha,\bar{\phi}} f\|_{L^q(w^q)} = C_w \|M_{\alpha,r} f\|_{L^q(w^q)}, \tag{2.3}$$

siempre que el lado izquierdo sea finito.

Del resultado anterior y de la técnica de los buenos λ, se sigue el siguiente resultado

Proposición 2.4. *Sean $0 < \alpha < n$ y $1 \leq r < n/\alpha$. Si $K_\alpha \in S_\alpha \cap H_{\alpha,r'}$ entonces existe una contante C_w, que depende de w, tal que para $f \in L^1_{loc}(dx)$ y $w^r \in A_{1,\frac{n}{n-\alpha r}}$*

$$\sup_{\lambda>0} \lambda^r w^{\frac{rn}{n-\alpha r}}\{x \in \mathbb{R}^n : |(T_\alpha f)(x)| > \lambda\} \leq C_w \int |f|^r w^r.$$

Como $K_\alpha \in S_{\alpha,r'} \subset S_\alpha$, de los Teoremas 2.2 y 2.3 podemos observar que los pesos apropiados para una acotación fuerte del T_α son los pesos relacionados a la $M_{\alpha,r}$, es decir los $A_{\frac{p}{r},\frac{q}{r}}$. Además, el Teorema 2.2 es una acotación fuerte del T_α pero no nos da ningún control sobre la constante del peso. Inspirados por este tipo de resultados para T_α u operadores más generales de los cuales hablaremos más adelante y el control de la constante del peso para la I_α, nos lleva al primer resultado de esta tesis: probar la constante del peso óptima o sharp para la acotación tipo fuerte de T_α. El resultado es el siguiente,

Teorema 2.5. *Sean $0 < \alpha < n$ y T_α definido como en (2.1). Sean $1 \leq r < p < n/\alpha$, $1/q = 1/p - \alpha/n$. Supongamos que $K_\alpha \in S_{\alpha,r'} \cap H_{\alpha,r'}$. Si $w^r \in A_{\frac{p}{r},\frac{q}{r}}$, entonces*

$$\|T_\alpha f\|_{L^q(w^q)} \leq c_n [w^r]_{A_{\frac{p}{r},\frac{q}{r}}}^{\max\left\{1-\frac{\alpha}{n}, \frac{(p/r)'}{q}\left(1-\frac{\alpha r}{n}\right)\right\}} \|f\|_{L^p(w^p)}.$$

Esta desigualdad es óptima en el siguiente sentido

Proposición 2.6. *Sean $0 < \alpha < n$, $1 \leq r < p < n/\alpha$ y $1/q = 1/p - \alpha/n$. Supongamos que existe una función monótona $\Phi : [1,\infty) \to (0,\infty)$ tal que*

$$\|T_\alpha\|_{L^p(w^p) \to L^q(w^q)} \lesssim \Phi([w^r]_{A_{\frac{p}{r},\frac{q}{r}}}),$$

para todo $w^r \in A_{\frac{p}{r},\frac{q}{r}}$ y todo T_α definido como en (2.1) con $K_\alpha \in S_{\alpha,r'} \cap H_{\alpha,r'}$, entonces

$$\Phi(t) \gtrsim t^{\max\left\{1-\frac{\alpha}{n}, \frac{(p/r)'}{q}\left(1-\frac{\alpha r}{n}\right)\right\}}.$$

Para demostrar estos resultados se utiliza la dominación sparse y resultados similares para el operador sparse $A^\alpha_{r,\mathcal{S}}$.

2.2 Ejemplos.

Como ejemplos de este tipo de operadores tenemos la I_α, como ya comentamos antes, y los operadores con núcleo "rough" fraccionario, los cuales están definidos de la siguiente manera:

Sea Ω una función definida en S^{n-1}, la esfera unidad en $\mathbb{R}^n$. Consideraremos su extensión a $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ la cual esta definida como $\Omega(x) = \Omega(x/|x|)$. Luego, Ω es una función homogénea de grado 0, en otras palabras es radial. Para $1 \leq s \leq \infty$, el L^s-modulo de continuidad de Ω esta definido como

$$\bar{\omega}_s(t) = \sup_{|y|<t} \|\Omega(\cdot + y) - \Omega(\cdot)\|_{s,S^{n-1}}.$$

Sean $0 < \alpha < n$, $r' > \frac{n}{n-\alpha}$ y $\Omega \in L^{r'}(S^{n-1})$ tal que $\int_0^1 \bar{\omega}_{r'}(t)\frac{dt}{t} < \infty$. Sean

$$K_\alpha(x) = \frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^{n-\alpha}},$$

y $T_\alpha f(x) = K_\alpha * f(x)$. En [4], se prueba que $K_\alpha \in H_{\alpha,r'} \cap S_{\alpha,r'}$. Como $r' > \frac{n}{n-\alpha}$, su exponente conjugado $r < n/\alpha$. Luego aplicando el resultado del tipo fuerte, Teorema 2.5, obtenemos para $1 < r < p < n/\alpha$ y $1/q = 1/p - \alpha/n$

$$\|T_\alpha f\|_{L^q(w^q)} \leq c_n [w^r]_{A_{\frac{p}{r},\frac{q}{r}}}^{\max\left\{1-\frac{\alpha}{n}, \frac{(p/r)'}{q}\left(1-\frac{\alpha r}{n}\right)\right\}} \|f\|_{L^p(w^p)}.$$

Otro ejemplo es el siguiente: Sean $0 < \alpha < 1$, $\beta > 0$, $1 < r < p < 1/\alpha$ y $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \alpha$. Para r' el exponente conjugado de r, consideremos

$$k(t) = \left(\frac{1}{t\log(e/t)^{1+\beta}}\right)^{1/r'} \chi_{(0,1)}(t).$$

Sea $K(t) = k(|t+4|)$. Veamos que $K \in H_{r'} \cap S_{r'}$, primero observemos que por la desigualdad de Jensen tenemos que

$$\left(\int_{\mathbb{R}} k(t)dt\right)^{r'} = \left(\int_0^1 k(t)dt\right)^{r'} \leq \int_0^1 k(t)^{r'}dt = \int_0^1 \frac{1}{t\log(e/t)^{1+\beta}}dt = \frac{1}{\beta}.$$

Entonces $\int_{\mathbb{R}} k(t)dt \leq \beta^{-\frac{1}{r'}}$ y por lo tanto $k \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^{r'}(\mathbb{R})$. Para ver $k \in H_{r'}$, seguimos las ideas en [55]. Tomando $c_{r'} = 1$ y $R > |y|$. Para $m \geq 1$ y $2^m R < |x| \leq 2^{m+1}R$, tenemos que $2^{m-1}R < |x-y| < 2^{m+2}R$. Entonces

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{\infty} (2^m R)^{n-\frac{n}{r'}} \left(\int_{2^m R<|x|\leq 2^{m+1}R} |K(x-y) - K(x)|^{r'}\right)^{\frac{1}{r'}} \\
&\leq 2\sum_{m=1}^{\infty} (2^m R)^{\frac{n}{r}} \left(\int_{2^{m-1}R<|x+4|\leq 2^{m+2}R} |k(x)|^{r'}\right)^{\frac{1}{r'}}.
\end{aligned}$$

Como k tiene soporte en $(0,1)$, el números de términos no nulos en la sumatoria es finito. En efecto, si $R \geq 5$, entonces para todo $m \geq 1$ y x tal que $2^{m-1}R < |x+4| \leq 2^{m+2}R$ tenemos que $|x| \geq 1$ y todas las integrales son cero. Por otro lado, supongamos que $R < 5$ y sea $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2^{m_0}R \leq 5 < 2^{m_0+1}R$. Si $m \geq m_0 + 2$, siempre que $2^{m-1}R < |x+4| \leq 2^{m+2}R$ tenemos que $|x| > 1$ y entonces $k(x) = 0$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
&2\sum_{m=1}^{\infty}(2^mR)^{\frac{n}{r}}\left(\int_{2^{m-1}R<|x+4|\leq 2^{m+2}R}|k(x)|^{r'}\right)^{\frac{1}{r'}}\\
&=2\sum_{m=1}^{m_0+1}(2^mR)^{\frac{n}{r}}\left(\int_{2^{m-1}R<|x+4|\leq 2^{m+2}R}|k(x)|^{r'}\right)^{\frac{1}{r'}}\\
&\leq 2\|k\|_{r'}\sum_{m=1}^{m_0+1}(2^mR)^{\frac{n}{r}}\simeq\|k\|_{r'}=\beta^{-1/r'}.
\end{aligned}$$

Luego $K\in H_{r'}$. Para ver $K\in S_{r'}$, basta considerar $s<5$, en efecto si $s\geq 5$ tenemos que si $s<|x|<2s$ entonces $|x+4|\geq|x|-4>1$ y $K(x)=0$. Para $s<5$,

$$\begin{aligned}
\|K_\alpha\|_{r',|x|\sim s}&=\left(\frac{1}{|B(0,2s)|}\int_{s<|x|<2s}K_\alpha^{r'}(x)dx\right)^{\frac{1}{r'}}\\
&=c\left(s^{-n}\int_{s<|x|<2s}|x|^{r'\alpha}K^{r'}(x)dx\right)^{\frac{1}{r'}}\\
&\leq c\left(s^{-1+r'\alpha}\int_{s<|x|<2s}K^{r'}(x)dx\right)^{\frac{1}{r'}}\\
&\leq cs^{-\frac{1}{r'}+\alpha}\|K\|_{r'}=cs^{-1+\frac{1}{r}+\alpha}\|K\|_{r'}\leq Cs^{-1+\alpha}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que $K\in H_{r'}\cap S_{r'}$.

Ahora, sea

$$K_\alpha(x)=|x|^\alpha K(x),$$

recordemos la siguiente Proposición probada en [4]:

Proposición 2.7. *[4] Sea ϕ una función de Young. Si $K_\alpha(x)=|x|^\alpha K(x)$ con $K\in H_{\phi,k}\cap S_\phi$ entonces $K\in H_{\alpha,\phi,k}\cap S_{\alpha,\phi}$.*

Entonces tenemos que $K_\alpha\in H_{\alpha,r'}\cap S_{\alpha,r'}$. Finalmente sea $T_\alpha f=K_\alpha*f$. Aplicando el Teorema 2.5, obtenemos que para $1<r<p<1/\alpha$ y $1/q=1/p-\alpha$

$$\|T_\alpha f\|_{L^q(w^q)}\leq c_n[w^r]_{A_{\frac{p}{r},\frac{q}{r}}}^{\max\left\{1-\alpha,\frac{(p/r)'}{q}(1-\alpha r)\right\}}\|f\|_{L^p(w^p)}.$$

2.3 Dominación sparse.

Para obtener la acotación óptima del Teorema 2.5, utilizamos una versión propia de la dominación sparse inspirada en las dominaciones sparse probadas en [1, 44, 51], la cual es la siguiente

Teorema 2.8. *Sean $0 < \alpha < n$, $1 \leq r < \infty$ y T_α definido como en (2.1). Supongamos que $K_\alpha \in S_{\alpha,r'} \cap H_{\alpha,r'}$. Para cualquier $f \in L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$, existen 3^n familias sparse, $\mathcal{S}_j$, tales que para p.p. $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$|T_\alpha f(x)| \leq c \sum_{j=1}^{3^n} \sum_{Q \in \mathcal{S}_j} |Q|^{\alpha/n} \|f\|_{r,Q} \chi_Q(x) := c \sum_{j=1}^{3^n} \mathcal{A}_{\alpha,r,\mathcal{S}_j} f(x).$$

Lema 2.9. *Sean $0 < \alpha < n$, $1 \leq r < \infty$, $K_\alpha \in S_{\alpha,r'} \cap H_{\alpha,r'}$ y $Q_0 \subset \mathbb{R}^n$ un cubo. Sea T_α el operador definido en (2.1) y $\tilde{T}_\alpha$ el operador asociado al núcleo $\tilde{K}_\alpha = |K_\alpha|$. Luego,*

(i) para p.p. $x \in Q_0$,

$$|T_\alpha(f\chi_{3Q_0})(x)| \leq M_{T_\alpha,Q_0} f(x),$$

(ii) para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$M_{T_\alpha}(f)(x) \lesssim M_{\alpha,r}(x) + \tilde{T}_\alpha(|f|)(x).$$

De la última desigualdad y la Proposición 2.4 se sigue que M_{T_α} esta acotada de $L^r(dx)$ en $L^{\frac{rn}{n-\alpha r},\infty}(dx)$.

Observemos que $K_\alpha \in S_{\alpha,r'} \cap H_{\alpha,r'}$ implica que $\tilde{K}_\alpha = |K_\alpha| \in S_{\alpha,r'} \cap H_{\alpha,r'}$

Demostración. (i) Sea $x \in Q_0$ y $Q(x,s)$ un cubo centrado en x con longitud s tal que $Q(x,s) \subset Q_0$. Luego,

$$|T_\alpha(f\chi_{3Q_0})(x)| \leq |T_\alpha(f\chi_{3Q(x,s)})(x)| + |T_\alpha(f\chi_{3Q_0 \setminus 3Q(x,s)})(x)|.$$

Para el primer termino, considiremos $B(x,R)$ con $R = 3\sqrt{n}s$ entonces $3Q(x,s) \subset B(x,R)$. Como $K_\alpha \in S_{\alpha,r'}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
&|T_\alpha(f\chi_{3Q(x,s)})(x)| \\
&\quad \leq |T_\alpha(f\chi_{B(x,R)})(x)| \leq \int_{B(x,R)} |K_\alpha(x-y)||f(y)|dy \\
&\quad = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|B(x,2^{-m}R)|}{|B(x,2^{-m}R)|} \int_{B(x,2^{-m}R)} \chi_{B(x,2^{-m}R) \setminus B(x,2^{-m-1}R)} |K_\alpha(x-y)||f(y)|dy \\
&\quad \leq \sum_{m=0}^{\infty} |B(x,2^{-m}R)| \|K_\alpha\|_{r',|x|\sim 2^{-m-1}R} \|f\|_{r,B(x,2^{-m}R)} \\
&\quad \leq cM_r(f)(x) \sum_{m=0}^{\infty} (2^{-m}R)^n (2^{-m}R)^{\alpha-n} \\
&\quad = cM_r(f)(x) R^\alpha \sum_{m=0}^{\infty} (2^{-m})^\alpha = cM_r(f)(x) R^\alpha.
\end{aligned}$$

Luego,

$$|T_\alpha(f\chi_{3Q_0})(x)| \leq c_n s^\alpha M_r f(x) + M_{T_\alpha,Q_0} f(x).$$

Tomando $s \to 0$, obtenemos la desigualdad deseada.

(ii) Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y sea Q un cubo que contenga a x. Sea B_x una bola con centro R tal que $3Q \subset B_x$. Para todo $\xi \in Q$, tenemos

$$\begin{aligned}
&|T_\alpha(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus 3Q})(\xi)| \\
&\quad \leq |T_\alpha(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus B_x})(\xi) - T_\alpha(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus B_x})(x)| + |T_\alpha(f\chi_{B_x\setminus 3Q})(\xi)| + |T_\alpha(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus B_x})(x)| \\
&\quad \lesssim |T_\alpha(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus B_x})(\xi) - T_\alpha(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus B_x})(x)| + |T_\alpha(f\chi_{B_x\setminus 3Q})(\xi)| + |T_\alpha(f)(x)|.
\end{aligned}$$

Para el primer termino, como $K_\alpha \in H_{\alpha,r'}$, obtenemos

$$\begin{aligned}
|T_\alpha(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus B_x})(\xi)-&T_\alpha(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus B_x})(x)| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_x} |K_\alpha(\xi-y) - K_\alpha(x-y)||f(y)|dy \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|2^m B_x|}{|2^m B_x|} \int_{2^{m+1}B_x\setminus 2^m B_x} |K_\alpha(\xi-y) - K_\alpha(x-y)||f(y)|dy \\
&\leq c\sum_{m=0}^{\infty} (2^m R)^n \|K_\alpha(\xi-\cdot) - K_\alpha(x-\cdot)\|_{r',|y|\sim 2^m R} \|f\|_{r,2^{m+1}B_x} \\
&\leq c\sum_{m=0}^{\infty} (2^m R)^{n-\alpha} \|K_\alpha(\xi-\cdot) - K_\alpha(x-\cdot)\|_{r',|y|\sim 2^m R} M_{\alpha,r} f(x) \\
&\leq c_r M_{\alpha,r} f(x).
\end{aligned}$$

Para el segundo, observemos que existe un numero natural l tal que $B(x, 2^{-l}R) \subset 3Q$, entonces, como $K_\alpha \in S_{\alpha,r'}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
|T_\alpha(f\chi_{B_x\setminus 3Q})(\xi)| &\leq \int_{B_x\setminus 3Q} |K_\alpha(x-y)||f(y)|dy \\
&\leq \sum_{m=0}^{l-1} \int_{B(x,2^{-m}R)\setminus B(x,2^{-m-1}R)} |K_\alpha(x-y)||f(y)|dy \\
&\leq c\sum_{m=0}^{l-1} |B(x,2^{-m}R)| \|K_\alpha\|_{r',|x|\sim 2^{-m-1}R} \|f\|_{r,B(x,2^{-m}R)} \\
&\leq c\sum_{m=0}^{l-1} (2^{-m}R)^n (2^{-m}R)^{\alpha-n} \|f\|_{r,B(x,2^{-m}R)} \\
&\leq cM_{\alpha,r} f(x).
\end{aligned}$$

Finalmente obtenemos

$$|T_\alpha(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus 3Q})(\xi)| \lesssim M_{\alpha,r}f(x) + \tilde{T}_\alpha(|f|)(x).$$

$\square$

Demotración del Teorema 2.8. Primero enunciemos la siguiente afirmación:

Para todo cubo $Q_0 \in \mathbb{R}^n$, existe una familia $\frac{1}{2}$-sparse $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}(Q_0)$ tal que para $p.p. x \in Q_0$,

$$|T_\alpha(f\chi_{3Q_0})(x)| \lesssim \sum_{Q\in\mathcal{F}} |3Q|^{\alpha/n}\|f\|_{r,3Q}\chi_Q(x). \tag{2.4}$$

Una vez probada la afirmación (2.4) la demostración del teorema sigue de la siguiente manera: Tomemos una partición de $\mathbb{R}^n$ por cubos Q_j tales que $\mathrm{sop}(f) \subset 3Q_j$ para cada j. Un ejemplo de esta partición se puede tomar comenzando con un cubo Q_0 tal que $\mathrm{sop}(f) \subset Q_0$, y cubrimos a $3Q_0 \setminus Q_0$ con $3^n - 1$ cubos congruentes Q_j, cada uno satisface que $Q_0 \subset 3Q_j$. Podemos proceder de la misma manera con $9Q_0 \setminus 3Q_0$ y así en adelante. La unión de todos estos cubos cumplen las propiedades deseadas.

Podemos aplicar la afirmación (2.4) a cada cubo Q_j. Como $\mathrm{sop}(f) \subset 3Q_j$, se cumple que $p.p.\ x \in Q_j$

$$|T_\alpha f(x)|\chi_{Q_j}(x) = |T_\alpha(f\chi_{3Q_0})(x)| \lesssim \sum_{Q\in\mathcal{F}_j} |3Q|^{\alpha/n}\|f\|_{r,3Q}\chi_Q(x),$$

donde cada $\mathcal{F}_j \subset \mathcal{D}(Q_j)$ es una familia $\frac{1}{2}$-sparse. Tomando $\mathcal{F} = \bigcup_j \mathcal{F}_j$, tenemos que $\mathcal{F}$ es una familia $\frac{1}{2}$-sparse y que para $p.p. x \in \mathbb{R}^n$,

$$|T_\alpha f(x)| \lesssim \sum_{Q\in\mathcal{F}} |3Q|^{\alpha/n}\|f\|_{r,3Q}\chi_Q(x).$$

Del Lema 1.63 se sigue que existen 3^n familias diádicas tales que para todo cubo Q de $\mathbb{R}^n$ existe un cubo $R_Q \in \mathcal{D}_j$ para algún j para el cual $3Q \subset R_Q$ y $|R_Q| \leq 3^n|3Q|$. Tomando

$$\mathcal{S}_j = \{R_Q \in D_j : Q \in \mathcal{F}\},$$

y como $\mathcal{F}$ es un familia $\frac{1}{2}$-sparse, obtenemos que para cada familia $\mathcal{S}_j$ es $\frac{1}{2.9^n}$-sparse. Luego tenemos que,

$$|T_\alpha f(x)| \lesssim \sum_{j=1}^{3^n}\sum_{Q\in\mathcal{S}_j} |Q|^{\alpha/n}\|f\|_{r,Q}\chi_Q(x).$$

Para probar afirmación (2.4) basta con ver la siguiente estimación recursiva: Existe una familia numerable $\{P_j\}_j$ de cubos disjuntos dos a dos en $\mathcal{D}(Q_0)$ tales que $\sum_j P_j \leq \frac{1}{2}|Q_0|$ y

$$|T_\alpha(f\chi_{3Q_0})(x)|\chi_{Q_0}(x) \leq c|3Q_0|^{\alpha/n}\|f\|_{r,3Q_0}\chi_{Q_0}(x) + \sum_j |T_\alpha(f\chi_{3P_j})(x)|\chi_{P_j}(x), \tag{2.5}$$

para $p.p.\, x \in Q_0$. Iterando esta estimación obtenemos la afirmación (2.4) con $\mathcal{F}$ siendo la unión de todas las familias $\{P_j^k\}$ donde $\{P_j^0\} = \{Q_0\}$, $\{P_j^1\} = \{P_j\}$ y los $\{P_j^k\}$ son los cubos obtenidos en el paso k-esimo del proceso iterativo. Es claro ver que $\mathcal{F}$ es una familia $\frac{1}{2}$-sparse. En efecto, para cada P_j^k tomamos

$$E_{P_j^k} = P_j^k \setminus \bigcup_j P_j^{k+1},$$

por el proceso iterativo tenemos que $|\bigcup_j P_j^k| = \sum_j |P_j^k| \leq \frac{1}{2}|P_j^{k-1}|$ entonces $\frac{1}{2}|P_j^{k-1}| \leq |E_{P_j^{k-1}}|$.

Vamos a probar la estimación recursiva (2.5). Observemos que para cualquier familia $\{P_j\} \subset \mathcal{D}(Q_0)$ de cubos disjuntos dos a dos, tenemos que

$$\begin{aligned}
|T_\alpha(f\chi_{3Q_0})(x)|\chi_{Q_0}(x) &\leq |T_\alpha(f\chi_{3Q_0})(x)|\chi_{Q_0\setminus\cup_j P_j}(x) + \sum_j |T_\alpha(f\chi_{3Q_0})(x)|\chi_{P_j}(x) \\
&\leq |T_\alpha(f\chi_{3Q_0})(x)|\chi_{Q_0\setminus\cup_j P_j}(x) + \sum_j |T_\alpha(f\chi_{3Q_0\setminus 3P_j})(x)|\chi_{P_j}(x) \\
&\quad + \sum_j |T_\alpha(f\chi_{3P_j})(x)|\chi_{P_j}(x),
\end{aligned}$$

para casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$. Por lo tanto es suficiente ver que se puede elegir una familia numerable $\{P_j\}_j$ de cubos disjuntos dos a dos en $\mathcal{D}(Q_0)$ tal que $\sum_j P_j \leq \frac{1}{2}|Q_0|$ y para $p.p.x \in Q_0$ tenemos,

$$|T_\alpha(f\chi_{3Q_0})(x)|\chi_{Q_0\setminus\cup_j P_j}(x) + \sum_j |T_\alpha(f\chi_{3Q_0\setminus 3P_j})(x)|\chi_{P_j}(x) \lesssim |3Q_0|^{\alpha/n}\|f\|_{r,3Q_0}\chi_{Q_0}(x). \tag{2.6}$$

Definamos el conjunto E como

$$E = \{x \in Q_0 : M_{T_\alpha,Q_0}f(x) > \beta_n c|3Q_0|^{\alpha/n}\|f\|_{r,3Q_0}\},$$

por el Lema 2.9 podemos tomar β_n tal que $|E| \leq \frac{1}{2^{n+2}}|Q_0|$. En efecto,

$$|E| \leq \frac{\int_{Q_0} |f|}{\beta_n \|f\|_{r,3Q_0}} + \|M_{T_\alpha,Q_0}\|_{L^r \to L^{r,\infty}} \left(\frac{\int_{3Q_0} |f|^r}{\beta_n \|f\|_{r,3Q_0}} \right)^r$$
$$\leq \left(\frac{c}{\beta_n} + \frac{\|M_{T_\alpha,Q_0}\|_{L^r \to L^{r,\infty}}}{\beta_n^r} \right) |Q_0|,$$

y entonces tomamos $\beta_n = \max\{1, \frac{c+\|M_{T_\alpha,Q_0}\|_{L^r\to L^{r,\infty}}}{2^{n+2}}\}$.

Aplicamos la descomposición de Calderón-Zygmund a la función χ_E en Q_0 a altura $\lambda = \frac{1}{2^{n+1}}$. Existe una familia $\{P_j\} \subset \mathcal{D}(Q_0)$ de cubos disjuntos dos a dos tal que

$$\left\{ x \in Q_0 : \chi_E(x) > \frac{1}{2^{n+1}} \right\} = \bigcup_j P_j.$$

Además vale $|E \setminus \cup_j P_j| = 0$,

$$\sum_j |P_j| \leq 2^{n+1}|E| \leq \frac{1}{2}|Q_0|,$$

y

$$\frac{1}{2^{n+1}} \leq \frac{|P_j \cap E|}{|P_j|} \leq \frac{1}{2},$$

de la cual se sigue que $|P_j \cap E^c| > 0$.

Como $P_j \cap E^c \neq \emptyset$, tenemos $M_{T_\alpha,Q_0}(f)(x) \leq \beta_n c|3Q_0|^{\alpha/n}\|f\|_{r,3Q_0}$ para algún $x \in P_j$ y esto implica que

$$\sup_{\xi\in P_j} \text{ess}|T_\alpha(f\chi_{3Q_0\setminus 3P_j})(\xi)| \leq \beta_n c|3Q_0|^{\alpha/n}\|f\|_{r,3Q_0},$$

lo cual nos permite controlar el segundo termino de (2.6).

Por (i) en el Lema 2.9, para $p.p.x \in Q_0$ tenemos que

$$|T_\alpha(f\chi_{3Q_0})(x)|\chi_{Q_0\setminus\cup_j P_j}(x) \leq M_{T_\alpha,Q_0}f(x)\chi_{Q_0\setminus\cup_j P_j}(x).$$

Como $|E \setminus \cup_j P_j| = 0$ y teniendo en cuenta la definición de E, para casi todo punto $x \in Q_0 \setminus \cup_j P_j$ obtenemos

$$M_{T_\alpha,Q_0}(f)(x) \leq \beta_n c|3Q_0|^{\alpha/n}\|f\|_{r,3Q_0}.$$

Luego, $p.p.x \in Q_0 \setminus \cup_j P_j$ tenemos que

$$|T_\alpha(f\chi_{3Q_0})(x)| \leq \beta_n c|3Q_0|^{\alpha/n}\|f\|_{r,3Q_0}.$$

Por lo tanto, obtenemos la estimación deseada (2.6).

□

2.4 Desigualdades sharp.

Para probar el Teorema 2.5 basta obtener una acotación óptima para el operador sparse que controla a T_α y luego probar que es óptima para T_α, el resultado para el operador sparse es el siguiente

Teorema 2.10. *Sean $0 \le \alpha < n$, $1 \le r < p < n/\alpha$ y $1/q = 1/p - \alpha/n$. Si $w^r \in A_{\frac{p}{r},\frac{q}{r}}$, entonces*

$$\|A_{\alpha,r,\mathcal{S}} f\|_{L^q(w^q)} \le c_n [w^r]_{A_{p/r,q/r}}^{\max\left\{1-\frac{\alpha}{n}, \frac{(p/r)'}{q}\left(1-\frac{\alpha r}{n}\right)\right\}} \|f\|_{L^p(w^p)},$$

esta desigualdad es óptima en el siguiente sentido:

Si existe una función monótona $\Phi : [1,\infty) \to (0,\infty)$ tal que

$$\|A_{\alpha,r,\mathcal{S}}\|_{L^p(w^p)\to L^q(w^q)} \lesssim \Phi([w^r]_{A_{\frac{p}{r},\frac{q}{r}}}),$$

para todo $w^r \in A_{\frac{p}{r},\frac{q}{r}}$, entonces

$$\Phi(t) \gtrsim t^{\max\left\{1-\frac{\alpha}{n}, \frac{(p/r)'}{q}\left(1-\frac{\alpha r}{n}\right)\right\}}.$$

Vamos a considerar el siguiente operador sparse definido en [19], para $0 < s < \infty$ y $0 < \beta \le 1$,

$$\tilde{A}^{\beta}_{s,\mathcal{S}} g(x) = \left(\sum_{Q\in\mathcal{S}} \left(|Q|^{-\beta}\int_Q g\right)^s \chi_Q(x)\right)^{1/s}.$$

Este operador es comparable con el que venimos trabajando de la siguiente manera,

$$A_{\alpha,r,\mathcal{S}}(f) = \left(\tilde{A}^{1-\alpha/n}_{1/r,\mathcal{S}}(f^r)\right)^{1/r}.$$

Además utilizaremos la siguiente acotación,

Teorema 2.11. *[19] Sea $1 \le r < p \le q < \infty$ y $0 < \beta \le 1$. Consideremos los pesos $u, \sigma \in A_\infty$. El operador sparse $\tilde{A}^{\beta}_{s,\mathcal{S}}(\cdot\sigma)$ esta acotado de $L^p(\sigma)$en $L^q(u)$ si y solo si la caracterización $A^{\beta}_{p,q}$ de dos pesos:*

$$[u,\sigma]_{A^{\beta}_{p,q}(\mathcal{S})} := \sup_{Q\in\mathcal{S}} |Q|^{-\beta} u(Q)^{1/q} \sigma(Q)^{1/p'},$$

es finita y en este caso

$$1 \le \frac{\|\tilde{A}^{\beta}_{s,\mathcal{S}}(\cdot\sigma)\|_{L^p(\sigma)\to L^q(u)}}{[u,\sigma]_{A^{\beta}_{p,q}(\mathcal{S})}} \lesssim [\sigma]_{A_\infty}^{1/q} + [u]_{A_\infty}^{\frac{1}{s}-\frac{1}{p}}.$$

Demostración del Teorema 2.10. Sea $\sigma = w^{-(p/r)'r}$. Como los operadores son comparables, recordemos

$$A_{\alpha,r,\mathcal{S}}(f) = \left(\tilde{A}^{1-\alpha/n}_{1/r,\mathcal{S}}(f^r)\right)^{1/r},$$

entonces

$$\begin{aligned}\|A_{\alpha,r,\mathcal{S}}(f)\|^r_{L^q(w^q)} &= \|\tilde{A}^{1-\alpha/n}_{1/r,\mathcal{S}}(f^r)\|_{L^{q/r}(w^q)} = \|\tilde{A}^{1-\alpha/n}_{1/r,\mathcal{S}}(f^r\sigma^{-1}\sigma)\|_{L^{q/r}(w^q)}\\ &\lesssim [w^q,\sigma]_{A^{1-\alpha/n}_{\frac{p}{r},\frac{q}{r}}(\mathcal{S})}\left([\sigma]^{r/q}_{A_\infty} + [w^q]^{r-\frac{r}{p}}_{A_\infty}\right)\|f^r\sigma^{-1}\|_{L^{p/r}(\sigma)}.\end{aligned}$$

Observemos que

$$[w^q,\sigma]_{A^{1-\alpha/n}_{\frac{p}{r},\frac{q}{r}}(\mathcal{S})} = [w^r]^{r/q}_{A_{p/r,q/r}},$$

y

$$\|f^r\sigma^{-1}\|_{L^{p/r}(\sigma)} = \|f\|^r_{L^p(w^p)}.$$

Además como

$$[\sigma]_{A_{1+(p/r)'r/q}} = [w^r]^{(p/r)'r/q}_{A_{p/r,q/r}}; \qquad [w^q]_{A_{1+\frac{q}{r(p/r)'}}} = [w^r]_{A_{p/r,q/r}},$$

tenemos

$$\begin{aligned}\|A_{\alpha,r,\mathcal{S}}(f)\|_{L^q(w^q)} &\lesssim [w^r]^{1/q}_{A_{p/r,q/r}}\left([\sigma]^{r/q}_{A_\infty} + [w^q]^{r-\frac{r}{p}}_{A_\infty}\right)^{1/r}\|f\|_{L^p(w^p)}\\ &\leq [w^r]^{1/q}_{A_{p/r,q/r}}\left([w^r]^{(p/r)'(r/q)^2}_{A_{p/r,q/r}} + [w^r]^{\frac{r}{p'}}_{A_{p/r,q/r}}\right)^{1/r}\|f\|_{L^p(w^p)}\\ &\leq [w^r]^{1/q+\max\{(p/r)'r/q^2,\frac{1}{p'}\}}_{A_{p/r,q/r}}\|f\|_{L^p(w^p)}\\ &\leq [w^r]^{\max\{(1-\frac{\alpha r}{n})(p/r)'/q,1-\alpha/n\}}_{A_{p/r,q/r}}\|f\|_{L^p(w^p)},\end{aligned}$$

donde la última desigualdad vale pues $(1+(p/r)'r/q) = (1-\frac{\alpha r}{n})(p/r)'$ y $1/q+1/p' = 1-\alpha/n$.

Ahora veamos que el exponente de la constante es óptimo. Para esto utilizamos ejemplos de pesos y funciones similares a los utilizados en [1, 5, 57], entre otros. Sea $0<\varepsilon<1$. Si tomamos

$$w_\varepsilon(x) = |x|^{\frac{n-\varepsilon}{r(p/r)'}} \qquad \text{y} \qquad f(x) = |x|^{\frac{\varepsilon-n}{r}}\chi_{B(0,1)},$$

entonces podemos ver que

$$[w^r_\varepsilon]_{A_{\frac{p}{r},\frac{q}{r}}} \simeq \varepsilon^{-\frac{q}{r(p/r)'}} \qquad \text{y} \qquad \|fw_\varepsilon\|_{L^p} \simeq \varepsilon^{-1/p}.$$

Sea $\{Q_k\}$ el cubo con centro 0 y longitud 2^{-k} y observemos que $B(0,1) \subset Q_0$. La familia de cubos $\{Q_k\}$ es una familia $\frac{1}{2}$-sparse con $E_{Q_k} = Q_k \setminus Q_{k+1}$.

Ahora, si $x \in E_{Q_k}$, $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} A_{\alpha,r,\mathcal{S}}f(x) &\geq |Q_k|^{\alpha/n-1/r} \left(\int_{Q_k} |y|^{\varepsilon-n} dy \right)^{1/r} \\ &\gtrsim (2^{-kn})^{\alpha/n-1/r} \left(\frac{2^{-k\varepsilon}}{\varepsilon} \right)^{1/r} \gtrsim \varepsilon^{-1/r}|x|^{\alpha-n/r+\varepsilon/r}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int (A_{\alpha,r,\mathcal{S}}f)^q w_\varepsilon^q &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_{Q_k}} (A_{\alpha,r,\mathcal{S}}f)^q w_\varepsilon^q \\ &\gtrsim \varepsilon^{-q/r} \int_{B(0,\frac{1}{2})} |x|^{q(\alpha-n/r+\varepsilon/r)+q\frac{n-\varepsilon}{r(p/r)'}} dx \\ &\simeq \varepsilon^{-q/r-1}, \end{aligned}$$

pues $q(\alpha/n - 1/r + \varepsilon/r) + q\frac{n-\varepsilon}{r(p/r)'} \leq \varepsilon q/p - n$. Luego

$$\varepsilon^{-\frac{1}{r(p/r)'}-1/q} \lesssim \varepsilon^{-1/r-1/q+1/p} \lesssim \|A_{\alpha,r,\mathcal{S}}\|_{L^p(w_\varepsilon^p)\to L^q(w_\varepsilon^q)} \lesssim \Phi(\varepsilon^{-\frac{q}{r(p/r)'}}).$$

Si tomamos $t = \varepsilon^{-\frac{q}{r(p/r)'}}$, obtenemos

$$\Phi(t) \gtrsim t^{(p/r)'1/q(1-\alpha r/n)}.$$

Por otro lado, si tomamos

$$w_\varepsilon(x) = |x|^{\frac{\varepsilon-n}{q}} \qquad \text{y} \quad f(x) = |x|^{\frac{\varepsilon-n}{r}}\chi_{B(0,1)},$$

tenemos que

$$[w_\varepsilon^r]_{A_{\frac{p}{r},\frac{q}{r}}} \simeq \varepsilon^{-1} \qquad \text{y} \quad \|fw_\varepsilon\|_{L^p} \lesssim \varepsilon^{-1/p}.$$

Como $1/r + 1/q = 1/r - \alpha/n + 1/p \geq 1/p$,

$$\begin{aligned} \int f^p w_\varepsilon^p &= \int_{B(0,1)} |x|^{\frac{\varepsilon-n}{r}p+\frac{\varepsilon-n}{q}p} = \int_{B(0,1)} |x|^{p(\varepsilon(1/r+1/q)-n(1/r+1/q))} \\ &\leq \int_{B(0,1)} |x|^{p(\varepsilon(1/r+1/q)-n/p)} \simeq \varepsilon^{-1}. \end{aligned}$$

Si $x \in Q_0$,

$$A_{\alpha,r,\mathcal{S}}f(x) \geq |Q_0|^{\alpha/n-1/r} \left(\int_{Q_0} |y|^{\varepsilon-n} \right)^{1/r} \gtrsim \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{1/r} \simeq \varepsilon^{-1/r} \gtrsim \varepsilon^{-1}.$$

Como $B(0,1) \subset Q_0$ obtenemos que

$$\int (A_{\alpha,r,\mathcal{S}}f)^q w_\varepsilon^q \gtrsim \varepsilon^{-q} \int_{B(0,1)} |x|^{\varepsilon-n} dx \gtrsim \varepsilon^{-q-1},$$

luego

$$\varepsilon^{-1-1/q} \lesssim \|A_{\alpha,r,\mathcal{S}}f\|_{L^q(w_\varepsilon^q)} \lesssim \Phi(\varepsilon^{-1})\|f\|_{L^p(w_\varepsilon^p)} \lesssim \Phi(\varepsilon^{-1})\varepsilon^{-1/p}.$$

Si tomamos $t = \varepsilon^{-1}$ entonces

$$t^{1-\alpha/n} \lesssim \Phi(t).$$

□

Por último, vamos a dar un ejemplo para probar que el exponente es óptimo para nuestra familia de operadores T_α, demostrando la Proposición 2.6.

Demostración de la Proposición 2.6. Sean $0 < \alpha < 1$, $\beta > \max\{0, q/r' - 1\}$, $1 < r < p < 1/\alpha$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \alpha$ y $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$. Consideremos

$$k(t) = \left(\frac{1}{t\log(e/t)^{1+\beta}}\right)^{1/r'} \chi_{(0,1)}(t).$$

y definimos

$$K_\alpha(t) = |t+4|^\alpha k(|t+4|),$$

como vimos en la sección 2.2, $K_\alpha \in H_{\alpha,r'} \cap S_{\alpha,r'}$. Consideremos el operador $T_\alpha f = K_\alpha * f$.

Observemos que existe un t_0, $0 < t_0 < 1$ tal que k es decreciente en $(0, t_0)$. En efecto, para $0 < t < 1$

$$\begin{aligned} k'(t) &= \frac{1}{r'}\left(\frac{1}{t\log(\frac{e}{t})^{1+\beta}}\right)^{1/r'-1}\left[-\frac{\log(\frac{e}{t})^{1+\beta} + t(1+\beta)\log(\frac{e}{t})^{\beta}\frac{t}{e}(-\frac{e}{t^2})}{\left(t\log(\frac{e}{t})^{1+\beta}\right)^2}\right] \\ &= -\frac{1}{r'}\frac{\log(\frac{e}{t})^\beta}{(t\log(\frac{e}{t})^{1+\beta})^{2-1/r}}\left[\log(\frac{e}{t}) - (1+\beta)\right]. \end{aligned}$$

Luego,

$$k'(t) \leq 0 \Leftrightarrow \log(e/t) - (1+\beta) \geq 0 \Leftrightarrow t \leq e^{-\beta}.$$

Sea $0 < \varepsilon < 1$. Si tomamos $w_\varepsilon(x) = |x|^{\frac{1-\varepsilon}{r(p/r)'}}$ y $f(x) = |x+4|^{\frac{\varepsilon}{r}-1}\chi_{(-5,-3)}(x)$, entonces

$$[w_\varepsilon^r]_{A_{\frac{p}{r},\frac{q}{r}}} \simeq \varepsilon^{-\frac{q}{r(p/r)'}} \quad \text{y} \quad \|fw_\varepsilon\|_{L^p} \lesssim \varepsilon^{-1/p}.$$

Observemos que si $|x-y| \leq 1$ y $|y| \leq 1$ entonces $|x| \leq 2$ y $\mathrm{sop}(Tf) \subset [-2,2]$. Sean $x \in \mathrm{sop}(Tf)$, $|x-y| \leq 1$, y $0 \leq |y| \leq |x|/2$ entonces $\frac{1}{2}|x| \leq |x-y| \leq \frac{3}{2}|x|$ y $|x-y|^\alpha \gtrsim |x|^\alpha$.

Para $|x| \leq \frac{2}{3}t_0 \leq 2$, como k es decreciente en $(0, t_0)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
T_\alpha f(x) &= \int_{|y|\leq 1} |x-y|^{\alpha - 1/r'} \left(\frac{1}{\log(e/|x-y|)} \right)^{\frac{1+\beta}{r'}} \chi_{(0,1)}(|x-y|)|y|^{\frac{\varepsilon}{r}-1} dy \\
&\geq \int_{|y|\leq |x|/2} |x-y|^{\alpha - 1/r'} \left(\frac{1}{\log(e/|x-y|)} \right)^{\frac{1+\beta}{r'}} \chi_{(0,1)}(|x-y|)|y|^{\frac{\varepsilon}{r}-1} dy \\
&\gtrsim |x|^\alpha k\left(\frac{3}{2}|x|\right) \int_{|y|\leq |x|/2} |y|^{\frac{\varepsilon}{r}-1} dy \\
&\gtrsim |x|^\alpha k\left(\frac{3}{2}|x|\right) \frac{r}{\varepsilon} \left(\frac{|x|}{2}\right)^{\frac{\varepsilon}{r}} \\
&\gtrsim \varepsilon^{-1} |x|^{\alpha + \frac{\varepsilon}{r}} k\left(\frac{3}{2}|x|\right).
\end{aligned}$$

Luego, usando $\log(t) < \frac{t^\varepsilon}{\varepsilon}$ para $\varepsilon > 0$ y $t > 1$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |Tf(x)|^q w_\varepsilon^q(x) dx &\gtrsim \varepsilon^{-q} \int_{|x|\leq\frac{2}{3}t_0} |x|^{q\left(\alpha + \frac{\varepsilon}{r}\right)} k\left(\frac{3}{2}|x|\right)^q |x|^{q\left(\frac{1-\varepsilon}{r(p/r)'}\right)} dx \\
&\gtrsim \varepsilon^{-q} \int_{|x|\leq\frac{2}{3}t_0} k\left(\frac{3}{2}|x|\right)^q |x|^{q\left(\alpha + \frac{1}{r(p/r)'}\right)} |x|^{\varepsilon\frac{q}{r}\left(1-\frac{1}{(p/r)'}\right)} dx \\
&= \varepsilon^{-q} \int_{|x|\leq\frac{2}{3}t_0} k\left(\frac{3}{2}|x|\right)^q |x|^{\frac{q}{r}-1} |x|^{\varepsilon\frac{q}{p}} dx \\
&\simeq \varepsilon^{-q} \int_{|x|\leq\frac{2}{3}t_0} \log\left(2e/3|x|\right)^{-q(1+\beta)/r'} |x|^{\frac{q}{r}+\varepsilon\frac{q}{p}-1-\frac{q}{r'}} dx \\
&\gtrsim \varepsilon^{-q} \int_{|x|\leq\frac{2}{3}t_0} \left(\frac{|x|^\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{\frac{q}{r'}(1+\beta)} |x|^{\frac{q}{r}+\varepsilon\frac{q}{p}-1-\frac{q}{r'}} dx \\
&\gtrsim \varepsilon^{-q-1} \int_{|x|\leq\frac{2}{3}t_0} |x|^{\frac{q}{r}-\frac{q}{r'}+\varepsilon\left(\frac{q}{r'}(1+\beta)+\frac{q}{p}\right)-1} dx,
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad vale pues $\beta > \max\{0, q/r' - 1\}$.

Si $r \geq 2$, entonces

$$\frac{q}{r} - \frac{q}{r'} = q\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) \leq 0.$$

Luego,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |Tf(x)|^q w_\varepsilon^q(x)dx &\gtrsim \varepsilon^{-q-1} \int_{|x|\leq \frac{2}{3}t_0} |x|^{\frac{q}{r}-\frac{q}{r'}+\varepsilon\left(\frac{q}{r'}(1+\beta)+\frac{q}{p}\right)-1}dx \\ &\gtrsim \varepsilon^{-q-1} \int_{|x|\leq \frac{2}{3}t_0} |x|^{\varepsilon\left(\frac{q}{r'}(1+\beta)+\frac{q}{p}\right)-1}dx \\ &\gtrsim \varepsilon^{-q-2} \geq \varepsilon^{-q-1}.\end{aligned}$$

Por otra parte, si $r < 2$, tenemos que

$$\frac{q}{r} - \frac{q}{r'} = q\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) > 0.$$

Luego,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |Tf(x)|^q w_\varepsilon^q(x)dx &\gtrsim \varepsilon^{-q-1} \int_{|x|\leq \frac{2}{3}t_0} |x|^{\frac{q}{r}-\frac{q}{r'}+\varepsilon\left(\frac{q}{r'}(1+\beta)+\frac{q}{p}\right)-1}dx \\ &\gtrsim \varepsilon^{-q-1} \frac{t_0^{\frac{q}{r}-\frac{q}{r'}+\varepsilon\left(\frac{q}{r'}(1+\beta)+\frac{q}{p}\right)}}{\frac{q}{r}-\frac{q}{r'}+\varepsilon\left(\frac{q}{r'}(1+\beta)+\frac{q}{p}\right)} \\ &\gtrsim \varepsilon^{-q-1}.\end{aligned}$$

Entonces, para $1 < r < \infty$ obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}} |Tf(x)|^q w_\varepsilon^q(x)dx \gtrsim \varepsilon^{-q-1}.$$

Por lo tanto,

$$\|Tf\|_{L^q(w_\varepsilon^q)} \gtrsim \varepsilon^{-1-1/q}.$$

Luego,

$$\varepsilon^{-\frac{1}{r(p/r)'}-1/q} \lesssim \varepsilon^{-1-1/q+1/p} \lesssim \|T\|_{L^p(w_\varepsilon^p)\to L^q(w_\varepsilon^q)} \lesssim \Phi(\varepsilon^{-\frac{q}{r(p/r)'}}).$$

y

$$\Phi(t) \gtrsim t^{(p/r)'1/q(1-\alpha r)}.$$

Sea $0 < \varepsilon < 1$. Si tomamos $w_\varepsilon(x) = |x|^{\frac{\varepsilon-1}{q}}$ y $f(x) = |x+4|^{\varepsilon/r-1}\chi_{(-5,-3)}$, entonces

$$[w_\varepsilon^r]_{A_{\frac{p}{r},\frac{q}{r}}} \simeq \varepsilon^{-1} \quad \text{y} \quad \|fw_\varepsilon\|_{L^p} \lesssim \varepsilon^{-1/p}.$$

De una forma análoga a lo anterior obtenemos para $0 < |x| < \frac{2}{3}t_0$, $Tf(x) \gtrsim \varepsilon^{-1}|x|^{\alpha+\frac{\varepsilon}{r}}k\left(\frac{3}{2}|x|\right)$ y

$$\|Tf\|_{L^q(w_\varepsilon^q)} \gtrsim \varepsilon^{-1-1/q}.$$

Por lo tanto,

$$t^{1-\alpha/n} \lesssim \Phi(t).$$

□

Capítulo 3

Operadores singulares con condiciones H_φ

En este capítulo estudiamos distintas acotaciones de operadores integrales singulares cuyos núcleos cumplan alguna condición de regularidad de tipo Hörmander generalizada, es decir, que el núcleo pertenezca a H_φ donde φ es alguna función de Young.

Para los resultados que abordaremos en este capítulo, desarrollamos una dominación *sparse* para este tipo de operadores basándonos en las ideas de [48] y [49]. Luego utilizamos esta dominación para estimar desigualdades con pesos, como por ejemplo acotaciones fuertes, desigualdad de Coifman, acotaciones en el extremo $L^{\mathcal{A}}(v) \to L^1(u)$ para ciertos pesos u, v. Estos resultados se pueden encontrar en un trabajo en colaboración con Dr. Israel Rivera Ríos, [34], realizado durante mi estadía en el BCAM, Bilbao, en principios de 2017.

3.1 Dominación sparse.

Primero, definamos las clases de funciones de Young con las que vamos a trabajar, sean $1 \leq p_0 \leq p_1 < \infty$ definimos $\mathcal{Y}(p_0, p_1)$ como la clase de funciones A para las cuales existen constantes c_{A,p_0}, c_{A,p_1}, $t_A \geq 1$ tales que $t^{p_0} \leq c_{A,p_0} A(t)$ para todo $t > t_A$ y $t^{p_1} \leq c_{A,p_1} A(t)$ para todo $t \leq t_A$.

Diremos que un operador T es $\overline{A}$-Hörmander si T es acotado en L^2 y su núcleo cumple la condición de Hörmander $H_{\overline{A}}$.

Teorema 3.1. *Sean $A \in \mathcal{Y}(p_0, p_1)$ una función de Young, T un operador $\overline{A}$-Hörmander y $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Para toda función $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $b \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, existen*

3^n *familias sparse* $\mathcal{S}_j$ *tales que*

$$|T_b^m f(x)| \leq c_{n,m} C_T \sum_{j=1}^{3^n} \sum_{h=0}^{m} \binom{m}{h} \mathcal{A}_{A,\mathcal{S}_j}^{m,h}(b,f)(x),$$

donde

$$\mathcal{A}_{A,\mathcal{S}}^{m,h}(b,f)(x) = \sum_{Q\in\mathcal{S}} |b(x)-b_Q|^{m-h} \|f|b-b_Q|^h\|_{A,Q} \chi_Q(x),$$

y $\mathcal{A}_{A,\mathcal{S}}^{0,0}(b,f) = \mathcal{A}_{\mathcal{S}} f(x)$.

Antes de la demostración del Teorema, probaremos algunos lemas auxiliares.

Lema 3.2. *Sea* S *un operador lineal tal que* $S : L^1(\mu) \to L^{1,\infty}(\mu)$ *y* $\nu \in (0,1)$. *Si* E *es un conjunto medible tal que* $0 < \mu(E) < \infty$, *entonces tenemos que*

$$\int_E |Sf(x)|^\nu d\mu \leq 2\frac{\nu}{1-\nu} \|S\|_{L^1\to L^{1,\infty}}^\nu \mu(E)^{1-\nu} \|f\|_{L^1}^\nu.$$

Demostración. Para probar el lema basta seguir la constante en [18, Lema 5.16] eligiendo $C = \|S\|_{L^1\to L^{1,\infty}}$. □

Lema 3.3. *Sea* A *una función de Young. Si* T *es un operador* $\overline{A}$*-Hörmander entonces*

$$\|T\|_{L^1\to L^{1,\infty}} \leq c_n \left(\|T\|_{L^2\to L^2} + H_{\overline{A}}\right),$$

y

$$\|T\|_{L^p\to L^p} \leq c_n \left(\|T\|_{L^2\to L^2} + H_{\overline{A}}\right).$$

Demostración. Por la estimación en el extremo, siguiendo las ideas en [33, Teorema A.1] es suficiente proceder como en la prueba estándar usando la condición de Hörmander, ver por ejemplo [18, Teorema 5.10], pero con el siguiente cambio mínimo. Cuando se estima el conjunto de nivel $|\{|Tf(x)| > \lambda\}|$ en la decomposición de Calderón-Zygmund de f tenemos que tomar a nivel $\alpha\lambda$ y optimizar α al final de la prueba.

Para el tipo fuerte, como T es tipo débil (1,1) y tipo fuerte $(2,2)$ por el Teorema de Marcinkiewicz, obtenemos la acotación para $1 < p \leq 2$

$$\|T\|_{L^p\to L^p} \leq c_n \left(\|T\|_{L^2\to L^2} + H_{\overline{A}}\right).$$

Luego, por dualidad tenemos la desigualdad para $1 < p < \infty$.

□

El siguiente resultado nos permite interpolar entre L^p para obtener una desigualdad del tipo modular que sera fundamental en el control de $\mathcal{M}_T$ en el Lema 3.5.

Lema 3.4. *Sea A una función de Young tal que $A \in \mathcal{Y}(p_0, p_1)$. Si G es un operador sublineal de tipo débil (p_0, p_0) y tipo débil (p_1, p_1), entonces*

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Gf(x)| > t\}| \leq \int_{\mathbb{R}^n} A\left(c_{A,G}\frac{|f(x)|}{t}\right) dx,$$

donde $c_{A,G} = 2\max\{c_{A,p_0}, c_{A,p_1}\} \max\{\|G\|_{L^{p_0}\to L^{p_0,\infty}}, \|G\|_{L^{p_1}\to L^{p_1,\infty}}\}$

Demostración. Como $A \in \mathcal{Y}(p_0, p_1)$ existen $t_A, c_{A,p_0}, c_{A,p_1} \geq 1$ tales que $t^{p_0} \leq c_{A,p_0}A(t)$ para todo $t > t_A$ y $t^{p_1} \leq c_{A,p_1}A(t)$ para todo $t \leq t_A$.

Sea

$$\kappa = 2\max\{\|G\|_{L^{p_0}\to L^{p_0,\infty}}, \|G\|_{L^{p_1}\to L^{p_1,\infty}}\},$$

y consideremos $f(x) = f_0(x) + f_1(x)$ donde

$$\begin{aligned} f_0(x) &= f(x)\chi_{\left\{|f(x)|>\frac{1}{\kappa}t_A\lambda\right\}}(x),\\ f_1(x) &= f(x)\chi_{\left\{|f(x)|\leq\frac{1}{\kappa}t_A\lambda\right\}}(x). \end{aligned}$$

Usando la partición de f y las hipótesis de G tenemos que

$$\begin{aligned} &|\{x \in \mathbb{R}^n : |Gf(x)| > \lambda\}|\\ &\leq \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : |Gf_0(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| + \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : |Gf_1(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|\\ &\leq 2^{p_0}\|G\|^{p_0}_{L^{p_0}\to L^{p_0,\infty}} \int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{|f_0(x)|}{\lambda}\right)^{p_0} dx + 2^{p_1}\|G\|^{p_1}_{L^{p_1}\to L^{p_1,\infty}} \int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{|f_1(x)|}{\lambda}\right)^{p_1} dx\\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n}\left(\kappa\frac{|f_0(x)|}{\lambda}\right)^{p_0} dx + \int_{\mathbb{R}^n}\left(\kappa\frac{|f_1(x)|}{\lambda}\right)^{p_1} dx. \end{aligned}$$

Observemos que usando la hipótesis de A,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n}\left(\kappa\frac{|f_0(x)|}{\lambda}\right)^{p_0} dx &= \int_{\left\{|f(x)|>\frac{1}{\kappa}t_A\lambda\right\}}\left(\kappa\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{p_0} dx\\ &\leq c_{A,p_0}\int_{\left\{|f(x)|>\frac{1}{\kappa}t_A\lambda\right\}} A\left(\kappa\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx, \end{aligned}$$

y análogamente

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n}\left(\kappa\frac{|f_1(x)|}{\lambda}\right)^{p_1} dx &= \int_{\left\{|f(x)|\leq\frac{1}{\kappa}t_A\lambda\right\}}\left(\kappa\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{p_1} dx\\ &\leq c_{A,p_1}\int_{\left\{|f(x)|\leq\frac{1}{\kappa}t_A\lambda\right\}} A\left(\kappa\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx. \end{aligned}$$

Las estimaciones previas combinadas con la convexidad de A, es decir, que $cA(t) \leq A(ct)$ para todo $c \geq 1$, nos permiten concluir

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Gf(x)| > \lambda\}| \leq \int_{\mathbb{R}^n} A\left(\max\{c_{A,p_0}, c_{A,p_1}\}\kappa \frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx.$$

□

Lema 3.5. *Sean A una función de Young tal que $A \in \mathcal{Y}(p_0, p_1)$ y T un operador $\overline{A}$-Hörmander.*

(i) Para casi todo $x \in Q_0$, tenemos que

$$|T(f\chi_{3Q_0})(x)| \leq c_n \|T\|_{L^1 \to L^{1,\infty}} f(x) + \mathcal{M}_{T,Q_0} f(x).$$

(ii) Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ and $\delta \in (0,1)$ tenemos que

$$\mathcal{M}_T f(x) \leq c_{n,\delta} \left(H_A M_A f(x) + M_\delta(Tf)(x) + \|T\|_{L^1 \to L^{1,\infty}} M f(x) \right).$$

Mas aún,

$$\begin{aligned} &|\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_T f(x) > \lambda\}| \\ &\quad \leq \int_{\mathbb{R}^n} A\left(\max\{c_{A,p_0}, c_{A,p_1}\} c_{n,p_0,p_1} \left(H_{K,\overline{A}} + \|T\|_{L^2 \to L^2}\right) \frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Demostración. Para ver (i), supongamos que $x \in \operatorname{int} Q_0$, y x sea un punto de continuidad de $T(f\chi_{3Q_0})$. Para todo $\varepsilon > 0$, definimos los conjuntos

$$E_s(x) = \{y \in B(x,s) : |T(f\chi_{3Q_0})(y) - T(f\chi_{3Q_0})(x)| < \varepsilon\},$$

que cumplen $\lim_{s \to 0} \frac{|E_s(x)|}{|B(x,s)|}$, donde $B(x,s)$ es la bola abierta centrada en x y radio s. Denotemos $Q(x,s)$ al menor cubo centrado en x que contiene a $B(x,s)$. Sea $s > 0$ suficientemente pequeño para que $Q(x,s) \subset Q_0$. Entonces para p.p. $y \in E_s(x)$,

$$|T(f\chi_{3Q_0})(x)| < |T(f\chi_{3Q_0})(y)| + \varepsilon \leq |T(f\chi_{3Q_0})(y)| + M_{T,Q_0} f(x) + \varepsilon.$$

Luego, aplicando el Lema 3.3 obtenemos

$$\begin{aligned} |T(f\chi_{3Q_0})(x)| &\leq \operatorname*{ess\,inf}_{y \in E_s(x)} |T(f\chi_{3Q_0})(y)| + M_{T,Q_0} f(x) + \varepsilon \\ &\leq \|T\|_{L^1 \to L^{1,\infty}} \frac{1}{|E_s(x)|} \int_{3Q(x,s)} |f| + M_{T,Q_0} f(x) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Suponiendo que x es un punto de Lebesgue de f y tomando limite $s \to 0$ y $\varepsilon \to 0$, obtenemos la parte (i)

Para la parte (ii). Seguimos las ideas de [51]. Sean $x, x', \xi \in Q \subset \frac{1}{2} \cdot 3Q$. Entonces

$$|T(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus 3Q})(\xi)| \leq \left|\int_{\mathbb{R}^n\setminus 3Q} (K(\xi,y) - K(x',y))\, f(y)dy\right| + |Tf(x')| + |T(f\chi_{3Q})(x')|.$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^n\setminus 3Q} (K(\xi,y) - K(x',y))\, f(y)dy\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{kn}3^n l(Q)^n \frac{1}{|2^k 3Q|} \int_{2^k3Q\setminus 2^{k-1}3Q} |(K(\xi,y) - K(x',y))\, f(y)|\, dy \\
&\leq 2\sum_{k=1}^{\infty} 2^{kn}3^n l(Q)^n \left\|(K(\xi,\cdot) - K(x',\cdot))\, \chi_{2^k3Q\setminus 2^{k-1}3Q}\right\|_{\overline{A},2^k3Q} \|f\|_{A,2^k3Q} \\
&\leq c_n H_{K,\overline{A}} M_A f(x).
\end{aligned}$$

Luego, tenemos que

$$|T(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus 3Q})(\xi)| \leq c_n H_{K,\overline{A}} M_A f(x) + |Tf(x')| + |T(f\chi_{3Q})(x')|.$$

Tomando promedios en $L^\delta\left(Q, \frac{dx'}{|Q|}\right)$ con $\delta \in (0,1)$ y con respecto a x',

$$\begin{aligned}
&|T(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus 3Q})(\xi)| \\
&\leq c_{n,\delta}\left(H_{K,\overline{A}} M_A f(x) + \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf(x')|^\delta dx'\right)^{\frac{1}{\delta}} + \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf\chi_{3Q}(x')|^\delta dx'\right)^{\frac{1}{\delta}}\right) \\
&\leq c_{n,\delta}\left(H_{K,\overline{A}} M_A f(x) + M_\delta(Tf)(x) + \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf\chi_{3Q}(x')|^\delta dx'\right)^{\frac{1}{\delta}}\right).
\end{aligned}$$

Del último término podemos notar que por la desigualdad de Kolmogorov (Lema 3.2) tenemos que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf\chi_{3Q}(x')|^\delta dx'\right)^{\frac{1}{\delta}} &\leq 2\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{\frac{1}{\delta}} \|T\|_{L^1\to L^{1,\infty}} \frac{1}{|Q|}\int_{3Q} f \\
&\leq c_n \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{\frac{1}{\delta}} \|T\|_{L^1\to L^{1,\infty}} Mf(x).
\end{aligned}$$

Luego, tenemos que

$$|T(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus 3Q})(\xi)| \leq c_{n,\delta}\left(H_{K,\overline{A}} M_A f(x) + M_\delta(Tf)(x) + \|T\|_{L^1\to L^{1,\infty}} Mf(x)\right),$$

y por lo tanto

$$\mathcal{M}_T f(x) \leq c_{n,\delta} \left(H_{K,\overline{A}} M_A f(x) + M_\delta(Tf)(x) + \|T\|_{L^1 \to L^{1,\infty}} M f(x) \right). \qquad (3.2)$$

Observemos que $\|T\|_{L^1 \to L^{1,\infty}} M f(x) \leq \|T\|_{L^1 \to L^{1,\infty}} M_A f(x)$, y usando el Lema 3.3 probamos la siguiente desigualdad

$$\|T\|_{L^1 \to L^{1,\infty}} \leq c_n (H_{K,\overline{A}} + \|T\|_{L^2 \to L^2}),$$

y obtenemos

$$\begin{aligned} &|\{x \in \mathbb{R}^n : H_{K,\overline{A}} M_A f(x) + \|T\|_{L^1 \to L^{1,\infty}} M f(x) > \lambda\}| \\ &\qquad \leq c_n \int_{\mathbb{R}^n} A\left(\frac{c_n (H_{K,\overline{A}} + \|T\|_{L^2 \to L^2}) |f(x)|}{\lambda} \right) dx. \qquad (3.3) \end{aligned}$$

Centrémonos en el primer termino. Como $A \in \mathcal{Y}(p_0, p_1)$ teniendo en cuenta el Lema 3.4 obtenemos

$$|\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, M_\delta(Tf)(x) > \lambda\}| \leq \int_{\mathbb{R}^n} A\left(C_{A, M_\delta \circ T} \frac{|f(x)|}{\lambda} \right) dx,$$

donde $\kappa = 2 \max\{c_{A,p_0}, c_{A,p_1}\} \max\left\{ \|M_\delta \circ T\|_{L^{p_0} \to L^{p_0,\infty}},\, \|M_\delta \circ T\|_{L^{p_1} \to L^{p_1,\infty}} \right\}$. Ahora observemos que para todo $1 \leq p < \infty$

$$\begin{aligned} \|M_\delta(Tf)\|_{L^{p,\infty}} &= \left\| M(|Tf|^\delta) \right\|^{\frac{1}{\delta}}_{L^{\frac{p}{\delta},\infty}} \leq c_{n,p,\delta} \left\| |Tf|^\delta \right\|^{\frac{1}{\delta}}_{L^{\frac{p}{\delta},\infty}} \\ &= c_{n,p,\delta} \|Tf\|_{L^{p,\infty}} \leq c_{n,p,\delta} \|T\|_{L^p \to L^{p,\infty}} \|f\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Esta desigualdad junto con el Lema 3.3 nos permite obtener

$$\|M_\delta \circ T\|_{L^p \to L^{p,\infty}} \leq c_{n,p,\delta} \left(H_{K,\overline{A}} + \|T\|_{L^2 \to L^2} \right).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} &|\{x \in \mathbb{R}^n : M_\delta(Tf)(x) > \lambda\}| \\ &\qquad \leq \int_{\mathbb{R}^n} A\left(c_{n,p_0,p_1,\delta} \max\{c_{A,p_0}, c_{A,p_1}\} (H_{K,\overline{A}} + \|T\|_{L^2 \to L^2}) \frac{|f(x)|}{\lambda} \right) dx. \end{aligned} \qquad (3.4)$$

Como $\frac{A(t)}{t}$ es no decreciente, no es difícil ver que para $c \geq 1$ $cA(t) \leq A(ct)$. Con este hecho combinado con las ecuaciones (3.2), (3.3) y (3.4) obtenemos (3.1). $\square$

Demostración del Teorema 3.1. Con los lemas previos a nuestra disposición ya estamos en posición de probar el Teorema 3.1. Vamos a seguir la estrategia de [44, 49]. Del Lema 1.63 se sigue que existen 3^n latices diadicos tales que para todo cubo Q de $\mathbb{R}^n$ existe un cubo $R_Q \in \mathcal{D}_j$ para algún j para el cual $3Q \subset R_Q$ y $|R_Q| \leq 9^n|Q|$

Fijando un cubo $Q_0 \subset \mathbb{R}^n$. Afirmamos que existe una familia $\frac{1}{2}$-sparse $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}(Q_0)$ tal que p.p. $x \in Q_0$

$$|T_b^m(f\chi_{3Q_0})(x)| \leq c_n C_T \sum_{h=0}^{m} \binom{m}{h} \mathcal{B}_{\mathcal{F}}^{m,h}(b,f)(x), \tag{3.5}$$

donde

$$\mathcal{B}_{\mathcal{F}}^{m,h}(b,f)(x) = \sum_{Q\in\mathcal{F}} |b(x) - b_{R_Q}|^{m-h} \|f|b - b_{R_Q}|^h\|_{A,3Q}\chi_Q(x).$$

Supongamos que vale (3.5). Tomamos una partición de $\mathbb{R}^n$ por cubos Q_j tales que $\mathrm{sop}(f) \subseteq 3Q_j$ para cada j. Esto se puede hacer de la siguiente manera: Fijamos un cubo Q_0 tal que $\mathrm{sop}(f) \subset Q_0$. y cubrimos $3Q_0 \setminus Q_0$ por $3^n - 1$ cubos del mismo tamaño Q_j. Cada uno de estos cubos cumple que $Q_0 \subset 3Q_j$. Realizamos el mismo procedimiento para $9Q_0 \setminus 3Q_0$ y continuamos de esta manera. La unión de estos cubos, incluyendo a Q_0, nos da una familia de cubos que cumplen la propiedad que queríamos.

Ahora, aplicamos la afirmación a cada cubo Q_j. Entonces, como $\mathrm{sop} f \subseteq 3Q_j$, vale la siguiente desigualdad p.p. $x \in Q_j$

$$|T_b^m f(x)|\, \chi_{Q_j}(x) = \left|T_b^m(f\chi_{3Q_j})(x)\right| \leq c_n C_T \mathcal{B}_{\mathcal{F}_j}^{m,h}(b,f)(x),$$

donde cada $\mathcal{F}_j \subseteq \mathcal{D}(Q_j)$ es una familia $\frac{1}{2}$-sparse. Tomando $\mathcal{F} = \bigcup \mathcal{F}_j$ tenemos que $\mathcal{F}$ es una familia $\frac{1}{2}$-sparse y

$$|T_b^m f(x)| \leq c_n C_T \sum_{h=0}^{m} \binom{m}{h} \mathcal{B}_{\mathcal{F}}^{m,h}(b,f)(x).$$

Como $3Q \subset R_Q$ y $|R_Q| \leq 3^n|3Q|$ tenemos que $\|f\|_{A,3Q} \leq c_n\|f\|_{A,R}$. Tomando

$$\mathcal{S}_j = \{R_Q \in \mathcal{D}_j \,:\, Q \in \mathcal{F}\},$$

y usando que $\mathcal{F}$ es $\frac{1}{2}$-sparse, obtenemos que cada familia $\mathcal{S}_j$ is $\frac{1}{2\cdot 9^n}$-sparse. Por lo tento, tenemos

$$|T_b^m f(x)| \leq c_{n,m} C_T \sum_{j=1}^{3^n} \sum_{h=0}^{m} \binom{m}{h} \mathcal{A}_{\mathcal{S}_j}^{m,h}(b,f)(x).$$

Para probar la afirmación es suficiente probar la siguiente estimación recursiva: Existen cubos disjuntos dos a dos $P_j \in \mathcal{D}(Q_0)$ tales que $\sum_j |P_j| \leq \frac{1}{2}|Q_0|$ y

$$\begin{aligned}|T_b^m(f\chi_{3Q_0})(x)|\chi_{Q_0} &\leq c_n C_T \sum_{h=0}^{m} \binom{m}{h} |b(x) - b_{R_{Q_0}}|^{m-h} \|f(b - b_{R_{Q_0}})^h\|_{3Q_0}\chi_{Q_0}(x) \\ &+ \sum_j |T_b^m(f\chi_{3P_j})(x)|\chi_{P_j},\end{aligned}$$

p.p. x en Q_0. Iterando esta estimación obtenemos (3.5) con $\mathcal{F}$ siendo la unión de todas las familias $\{P_j^k\}$ donde $\{P_j^0\} = \{Q_0\}$, $\{P_j^1\} = \{P_j\}$ y $\{P_j^k\}$ son los cubos obtenidos en el paso k-esimo del proceso iterativo. Es claro que $\mathcal{F}$ es una familia $\frac{1}{2}$-sparse. En efecto, para cada P_j^k basta tomar

$$E_{P_j^k} = P_j^k \setminus \bigcup_j P_j^{k+1}.$$

Probemos la estimación recursiva. Primero, observemos que para cualquier familia arbitraria de cubos disjuntos dos a dos $P_j \in \mathcal{D}(Q_0)$ tenemos

$$\begin{aligned}&|T_b^m(f\chi_{3Q_0})(x)|\,\chi_{Q_0}(x) \\ &\leq |T_b^m(f\chi_{3Q_0})(x)|\,\chi_{Q_0\setminus\bigcup_j P_j}(x) + \sum_j |T_b^m(f\chi_{3Q_0})(x)|\,\chi_{P_j}(x) \\ &\leq |T_b^m(f\chi_{3Q_0})(x)|\,\chi_{Q_0\setminus\bigcup_j P_j}(x) + \sum_j \left|T_b^m(f\chi_{3Q_0\setminus 3P_j})(x)\right|\chi_{P_j}(x) \\ &\quad + \sum_j \left|T_b^m(f\chi_{3P_j})(x)\right|\chi_{P_j}(x).\end{aligned}$$

Entonces es suficiente mostrar que se puede elegir una familia de cubos disjuntos dos a dos $P_j \in \mathcal{D}(Q_0)$ con $\sum_j |P_j| \leq \frac{1}{2}|Q_0|$ y tal que para p.p. $x \in Q_0$

$$\begin{aligned}&|T_b^m(f\chi_{3Q_0})(x)|\,\chi_{Q_0\setminus\bigcup_j P_j}(x) + \sum_j \left|T_b^m(f\chi_{3Q_0\setminus 3P_j})(x)\right|\chi_{P_j}(x) \\ &\leq c_n C_T \sum_{h=0}^{m} \binom{m}{h} |b(x) - b_{R_{Q_0}}|^{m-h} \|f|b - b_{R_{Q_0}}|^h\|_{3Q}\chi_Q(x).\end{aligned}$$

Usando que $T_b^m f = T_{b-c}^m f$ para todo $c \in \mathbb{R}$, y también que

$$T_{b-c}^m f = \sum_{h=0}^{m} (-1)^h \binom{m}{h} T((b-c)^h f)(b-c)^{m-h},$$

obtenemos

$$
\begin{aligned}
&|T_b^m(f\chi_{3Q_0})|\chi_{Q_0\setminus\cup_j P_j}+\sum_j|T_b^m(f\chi_{3Q_0\setminus 3P_j})|\chi_{P_j}\\
&\leq \sum_{h=0}^{m}\binom{m}{h}|b-b_{R_{Q_0}}|^{m-h}|T((b-b_{R_{Q_0}})^h f\chi_{3Q_0})|\chi_{Q_0\setminus\cup_j P_j}\\
&+\sum_{h=0}^{m}\binom{m}{h}|b-b_{R_{Q_0}}|^{m-h}\sum_j|T((b-b_{R_{Q_0}})^h f\chi_{3Q_0\setminus 3P_j})|\chi_{P_j}. \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

Ahora para $h=0,1,\dots m$ definimos el conjunto E_h como

$$
\begin{aligned}
E_h &= \left\{x\in Q_0 \,:\, |b-b_{R_{Q_0}}|^h|f|>\alpha_n\||b-b_{R_{Q_0}}|^h f\|_{A,3Q_0}\right\}\\
&\cup\left\{x\in Q_0 \,:\, \mathcal{M}_{T,Q_0}\left(|b-b_{R_{Q_0}}|^h f\right)>\alpha_n C_T\||b-b_{R_{Q_0}}|^h f\|_{A,3Q_0}\right\},
\end{aligned}
$$

y llamamos $E=\bigcup_{h=0}^m E_h$. Notemos que tomando en cuenta la convexidad de A y la segunda parte del Lema 3.5,

$$
\begin{aligned}
|E_h| &\leq c_n\int_{3Q_0} A\left(\frac{\max\{c_{A,p_0},c_{A,p_1}\}c_{n,p_0,p_1}\left(H_{K,\overline{A}}+\|T\|_{L^2\to L^2}\right)|b-b_{R_{Q_0}}|^h|f|}{\alpha_n C_T\||b-b_{R_{Q_0}}|^h f\|_{A,3Q_0}}\right)dx\\
&\quad+\frac{\int_{Q_0}|b-b_{R_{Q_0}}|^h|f|}{\alpha_n\|f\|_{A,3Q_0}}\\
&\leq \frac{c_n}{\alpha_n}|Q_0|\frac{1}{|3Q_0|}\int_{3Q_0}A\left(\frac{|b-b_{R_{Q_0}}|^h|f|}{\||b-b_{R_{Q_0}}|^h f\|_{A,3Q_0}}\right)dx+3^n\frac{\frac{1}{|3Q_0|}\int_{3Q_0}|b-b_{R_{Q_0}}|^h|f|}{\alpha_n\||b-b_{R_{Q_0}}|^h f\|_{A,3Q_0}}|Q_0|\\
&\leq\left(\frac{c_n}{\alpha_n}+\frac{2\cdot 3^n}{\alpha_n}\right)|Q_0|.
\end{aligned}
$$

Eligiendo α_n suficientemente grande, tenemos que

$$|E|\leq\frac{1}{2^{n+2}}|Q_0|.$$

Aplicamos la descomposición de Calderón-Zygmund a la función χ_E en Q_0 a altura $\lambda=\frac{1}{2^{n+1}}$. Obtenemos cubos disjuntos dos a dos $P_j\in\mathcal{D}(Q_0)$ tales que

$$\chi_E(x)\leq\frac{1}{2^{n+1}},$$

para p.p. $x\notin\bigcup P_j$. De esto se sigue que $\left|E\setminus\bigcup_j P_j\right|=0$. Además como la familia cumple

$$\sum_j|P_j|=\left|\bigcup_j P_j\right|\leq 2^{n+1}|E|\leq\frac{1}{2}|Q_0|,$$

y

$$\frac{1}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{|P_j|}\int_{P_j} \chi_E(x) = \frac{|P_j \cap E|}{|P_j|} \leq \frac{1}{2},$$

se sigue que $|P_j \cap E^c| > 0$.

Observemos que para cada P_j tenemos que $P_j \cap E^c \neq \emptyset$ y $\mathcal{M}_{T,Q_0}\left(|b-b_{R_{Q_0}}|^h f\right)(x) \leq \alpha_n C_T \||b-b_{R_{Q_0}}|^h f\|_{A,3Q_0}$ para algún $x \in P_j$. Esto implica que

$$\sup_{\xi\in Q} ess \left|T(|b-b_{R_{Q_0}}|^h f\chi_{3Q_0\setminus 3Q})(\xi)\right| \leq \alpha_n C_T \||b-b_{R_{Q_0}}|^h f\|_{A,3Q_0},$$

lo cual permite controlar el término en (3.6).

Ahora, por los Lemas 3.5 y 3.3, $\|T\|_{L^1\to L^{1,\infty}} \leq c_n(H_{\overline{A}} + \|T\|_{L^2\to L^2})$ sabemos que p.p. $x \in Q_0$,

$$\left|T(|b-b_{R_{Q_0}}|^h |f|\chi_{3Q_0})(x)\right| \leq c_n C_T |b(x)-b_{R_{Q_0}}|^h |f(x)| + \mathcal{M}_{T,Q_0}\left(|b-b_{R_{Q_0}}|^h |f|\right)(x).$$

Como $\left|E\setminus \bigcup_j P_j\right| = 0$, tenemos que, por la definición de E, valen las siguientes desigualdades

$$|b(x)-b_{R_{Q_0}}|^h |f(x)| \leq \alpha_n \||b-b_{R_{Q_0}}|^h f\|_{A,3Q_0},$$

p.p. $x \in Q_0 \setminus \bigcup_j P_j$ y

$$\mathcal{M}_{T,Q_0}\left(|b-b_{R_{Q_0}}|^h |f|\right)(x) \leq \alpha_n \||b-b_{R_{Q_0}}|^h f\|_{A,3Q_0},$$

p.p. $x \in Q_0 \setminus \bigcup_j P_j$. En consecuencia,

$$\left|T((b-b_{R_{Q_0}})^h f\chi_{3Q_0})(x)\right| \leq c_n C_T \||b-b_{R_{Q_0}}|^h f\|_{A,3Q_0}.$$

Estas estimaciones permiten el control del último término en (3.6).

□

3.2 Desigualdades con un peso de tipo fuerte.

A traveś de la dominación sparse podemos obtener estimaciones cuantitativas del tipo fuerte en termino de constantes A_p, A_∞ y condiciones Bump. Los próximos teoremas, Teoremas 3.6 y 3.8 son estimaciones pesadas cuantitativas, que no son compatibles. Uno desearía, si es posible obtener algún resultado en términos de condiciones Bump que puedan generalizar el caso de pesos $A_{p/r}$ en el caso de $H_{r'}$.

Teorema 3.6. *Sean $A \in \mathcal{Y}(p_0, p_1)$ una función de Young y T un operador $\overline{A}$-Hörmander. Sean $b \in BMO$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $1 < r < \infty$, $1 \leq r < p < \infty$. Supongamos que $\mathcal{K}_{r,A} = \sup_{t>1} \frac{A(t)^{\frac{1}{r}}}{t} < \infty$. Luego, para todo $w \in A_{p/r}$,*

$$\|T_b^m f\|_{L^p(w)} \leq c_n c_T \|b\|_{BMO}^m \mathcal{K}_{r,A} [w]_{A_{p/r}}^{\frac{1}{p}} \left([w]_{A_\infty}^{\frac{1}{p'}} + [\sigma_{p/r}]_{A_\infty}^{\frac{1}{p}} \right) ([w]_{A_\infty} + [\sigma_{p/r}]_{A_\infty})^m \|f\|_{L^p(w)}, \tag{3.7}$$

donde $\sigma_{p/r} = w^{-\frac{1}{\frac{p}{r}-1}}$.

Recordemos el siguiente resultado probado en [32],

Teorema 3.7. *[32] Sea $1 < p < \infty$ y $r > 0$. Si w, σ un par de pesos, entonces*

$$\|A_{r,\mathcal{S}}(f\sigma)\|_{L^p(w)} \leq C[w,\sigma]_{A_p}^{\frac{1}{p}} \left([w]_{A_\infty}^{\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)_+} + [\sigma]_{A_\infty}^{\frac{1}{p}} \right) \|f\|_{L^p(\sigma)}.$$

Demostración del Teorema 3.6. Primero veamos la estimación para T. Combinando el Lema 1.14 y el Teorema 3.7 y teniendo en cuenta nuestra dominación sparse para T obtenemos

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_{L^p(w)} &\leq c_n c_T \sum_{j=1}^{3^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{A}_{A,\mathcal{S}_j} f)^p w \right)^{1/p} \\
&= c_n c_T \sum_{j=1}^{3^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{Q \in \mathcal{S}} \|f\|_{A,Q} \chi_Q(x) \right)^p w(x) dx \right)^{1/p} \\
&\leq c_n c_T \sum_{j=1}^{3^n} \mathcal{K}_{r,A} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{Q \in \mathcal{S}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f|^r \right)^{1/r} \chi_Q(x) \right)^p w(x) dx \right)^{1/p} \\
&= c_n c_T \sum_{j=1}^{3^n} \mathcal{K}_{r,A} \|\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^{1/r}(|f|^r)\|_{L^{p/r}(w)}^{1/r} \\
&\leq c_n c_T \mathcal{K}_{r,A} [w]_{A_{p/r}}^{\frac{1}{p/r}\frac{1}{r}} \left([w]_{A_\infty}^{\left(r - \frac{r}{p}\right)\frac{1}{r}} + [\sigma]_{A_\infty}^{\frac{1}{p/r}\frac{1}{r}} \right) \||f|^r\|_{L^{p/r}(w)}^{1/r} \\
&= c_n c_T \mathcal{K}_{r,A} [w]_{A_{p/r}}^{\frac{1}{p}} \left([w]_{A_\infty}^{\frac{1}{p'}} + [\sigma]_{A_\infty}^{\frac{1}{p}} \right) \|f\|_{L^p(w)}.
\end{aligned}$$

Para el caso del conmutador, vamos a usar el método de conjugación (ver los preliminares o [9, 7, 64] para mas detalles del método). Recordemos

$$T_b^m f = \frac{m!}{2\pi i} \int_{|z|=\varepsilon} \frac{e^{bz} T(e^{-bz} f)}{z^{m+1}} dz.$$

Si $w \in A_{p/r}$, tomando norma $L^p(w)$,

$$\begin{aligned}
\|T_b^m f\|_{L^p(w)} &\le \frac{m!}{2\pi\varepsilon^m} \sup_{|z|=\varepsilon} \|e^{bz}T(fe^{-bz})\|_{L^p(w)} \\
&\le \frac{m!}{2\pi\varepsilon^m} \sup_{|z|=\varepsilon} \|T(fe^{-bz})\|_{L^p\left(e^{\mathrm{Re}(bz)p}w\right)} \\
&\le c_n c_T \mathcal{K}_{r,A} \frac{m!}{2\pi\varepsilon^m} \sup_{|z|=\varepsilon} [e^{\mathrm{Re}(bz)p}w]_{A_{p/r}}^{\frac{1}{p}} \left([e^{\mathrm{Re}(bz)p}w]_{A_\infty}^{\frac{1}{p'}} + [e^{\text{-}\mathrm{Re}(bz)\frac{p}{p/r-1}}\sigma]_{A_\infty}^{\frac{1}{p}} \right) \|f\|_{L^p(w)}.
\end{aligned}$$

Tomando en cuenta [31, Lemma 2.1] y [28, Lemma 7.3] tenemos que $[e^{\mathrm{Re}(bz)p}w]_{A_{p/r}} \le c_{n,p/r}[w]_{A_{p/r}}$, $[e^{\mathrm{Re}(bz)p}w]_{A_\infty} \le c_n[w]_{A_\infty}$ y $[e^{\text{-}\mathrm{Re}(bz)\frac{p}{p/r-1}}\sigma]_{A_\infty} \le c_n[\sigma]_{A_\infty}$ siempre que

$$|z| \le \frac{\varepsilon_{n,p}}{\|b\|_{BMO}([w]_{A_\infty} + [\sigma]_{A_\infty})}.$$

Luego, vale

$$\|T_b^m f\|_{L^p(w)} \le c_{n,m} c_T \mathcal{K}_{r,A} [w]_{A_{p/r}}^{\frac{1}{p}} \left([w]_{A_\infty}^{\frac{1}{p'}} + [\sigma_{p/r}]_{A_\infty}^{\frac{1}{p}} \right) ([w]_{A_\infty} + [\sigma_{p/r}]_{A_\infty})^m \|b\|_{BMO}^m \|f\|_{L^p(w)}.$$

□

También es posible obtener una estimación pesada de tipo fuerte (p,p) en términos de pesos que cumplan alguna condición Bump.

Teorema 3.8. *Sea $B \in \mathcal{Y}(p_0, p_1)$ una función de Young. Sean $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $D_m(t) = e^{t^{1/m}} - 1$. Supongamos que A, C son funciones de Young con $A \in B_p$ y que existe $t_0 > 0$ tal que $A^{-1}(t)\overline{B}^{-1}(t)C^{-1}(t)\overline{D_m}^{-1}(t) \le ct$ para todo $t \ge t_0$. Sea T un operador $\overline{B}$-Hörmander. Si $w \in A_p$ cumple*

$$[w]_{A_p(C)} = \sup_Q \frac{w(Q)}{|Q|} \left\| w^{-\frac{1}{p}} \right\|_{C,Q}^p < \infty,$$

tenemos que

$$\|T_b^m f\|_{L^p(w)} \le c_{n,p} [w]_{A_\infty}^m [w]_{A_p(C)}^{\frac{1}{p}} [w]_{A_p}^{\frac{1}{p'}} \|f\|_{L^p(w)}. \tag{3.8}$$

Demostración. Es claro que es suficiente ver el resultado para el operador sparse, esto es probar que

$$\|\mathcal{A}_{B,\mathcal{S}}^{m,h}(b,f)\|_{L^p(w)} \le c_{n,p,\eta} p^{m-h+1} [w]_{A_\infty}^{m-h} [w]_{A_p(C)}^{\frac{1}{p}} [w]_{A_p}^{\frac{1}{p'}} \|b\|_{\mathrm{BMO}}^m \|f\|_{L^p(w)}$$

Usando dualidad tenemos que

$$\|\mathcal{A}_{B,\mathcal{S}}^{m,h}(b,f)\|_{L^p(w)} = \sup_{\|g\|_{L^{p'}(w)}=1} \sum_{Q \in \mathcal{S}} \left(\frac{1}{w(Q)} \int_Q |b - b_Q|^{m-h} g w \right) w(Q) \|(b - b_Q)^h f\|_{B,Q}.$$

Observemos que usando la desigualdad de Hölder (1.1),

$$\begin{aligned}\frac{1}{w(Q)}\int_Q |b(x)-b_Q|^{m-h}g(x)w(x)dx &\leq \|(b-b_Q)^{m-h}\|_{\exp L^{\frac{1}{m-h}}(w),Q}\|g\|_{L(\log L)^{m-h}(w),Q}\\ &\leq c_n[w]_{A_\infty}^{m-h}\|b\|_{\mathrm{BMO}}^{m-h}\|g\|_{L(\log L)^{m-h}(w),Q},\end{aligned}$$

y vale que

$$\begin{aligned}\sum_{Q\in S}\left(\|g\|_{L(\log L)^{m-h}(w),Q}\right)^{p'}w(E_Q) &\leq c_n[w]_{A_\infty}^{m-h}\|b\|_{\mathrm{BMO}}^{m-h}\sum_{Q\in S}\int_{E_Q}M_{L(\log L)^{m-h}(w)}(g)^{p'}w\\ &\leq c_n[w]_{A_\infty}^{m-h}\|b\|_{\mathrm{BMO}}^{m-h}\int_{\mathbb{R}^n}M_w^{m-h+1}(g)^{p'}w\\ &\leq c_n p^{(m-h+1)p'}\|g\|_{L^{p'}(w)}^{p'}.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Por (1.2) sabemos que existe $t_0>0$ tal que $A^{-1}(t)\bar{B}^{-1}(t)C^{-1}(t)\overline{D_h}^{-1}(t)\leq ct$ para todo $t\geq t_0$, usando la desigualdad de Hölder generalizada (1.3) tenemos que

$$\begin{aligned}\|f(b-b_Q)^h\|_{B,Q} &= \|fw^{\frac{1}{p}}w^{-\frac{1}{p}}(b-b_Q)^h\|_{B,Q}\\ &\leq \tilde{c}_1\|fw^{\frac{1}{p}}\|_{A,Q}\|w^{-\frac{1}{p}}\|_{C,Q}\|(b-b_Q)^h\|_{\exp L^{1/h},Q}\\ &\leq \tilde{c}_1\|b\|_{BMO}^h\|fw^{\frac{1}{p}}\|_{A,Q}\|w^{-\frac{1}{p}}\|_{C,Q}.\end{aligned}$$

Como $A\in B_p$, tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{Q\in S}\|fw^{\frac{1}{p}}\|_{A,Q}^p|E_Q| &\leq \sum_{Q\in S}\int_{E_Q}M_A(fw^{\frac{1}{p}})^p\\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n}M_A(fw^{\frac{1}{p}})^p\\ &\leq c_{n,p}\int_{\mathbb{R}^n}(fw^{\frac{1}{p}})^p = c_{n,p}\|f\|_{L^p(w)}^p.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Luego, teniendo en cuenta (3.10) y (3.9) obtenemos que

$$\begin{aligned}
&\sum_{Q\in\mathcal{S}}\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q |b-b_Q|^{m-h}gw\right) w(Q)\|(b-b_Q)^h f\|_{B,Q}\\
&\leq c_{n,p}[w]_{A_\infty}^{m-h}\sum_{Q\in S}\|fw^{\frac{1}{p}}\|_{A,Q}|E_Q|^{\frac{1}{p}}\frac{\|w^{-\frac{1}{p}}\|_{C,Q}}{|E_Q|^{\frac{1}{p}}}\frac{w(Q)}{w(E_Q)^{\frac{1}{p'}}}\|g\|_{L(\log L)^{m-h}(w),Q}w(E_Q)^{\frac{1}{p'}}\\
&\leq c_{n,p}[w]_{A_\infty}^{m-h}\|b\|_{\mathrm{BMO}}^m\sup_Q T(w,Q)\left(\sum_{Q\in S}\|fw^{\frac{1}{p}}\|_{A,Q}|E_Q|\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\qquad\left(\sum_{Q\in S}\|g\|^{p'}_{L(\log L)^{m-h}(w),Q}w(E_Q)\right)^{\frac{1}{p'}}\\
&\leq c_{n,p}p^{m-h+1}[w]_{A_\infty}^{m-h}\|b\|_{\mathrm{BMO}}^m\sup_Q T(w,Q)\|f\|_{L^p(w)}\|g\|_{L^{p'}(w)}.
\end{aligned}$$

Para terminar la prueba del resultado basta ver el control de las contantes del peso, es decir,

$$\sup_Q T(w,Q)\leq c_{n,p,\eta}[w]_{A_p(C)}^{\frac{1}{p}}[w]_{A_p}^{\frac{1}{p'}}, \tag{3.11}$$

donde $T(w,Q)=\frac{\|w^{-\frac{1}{p}}\|_{C,Q}}{|E_Q|^{\frac{1}{p}}}\frac{w(Q)}{w(E_Q)^{\frac{1}{p'}}}$. Observemos que si $w\in A_p$, se cumple que

$$w(Q)\leq c[w]_{A_p}w(E_Q).$$

Luego, tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\|w^{-\frac{1}{p}}\|_{C,Q}}{|E_Q|^{\frac{1}{p}}}\frac{w(Q)}{w(E_Q)^{\frac{1}{p'}}} &= \|w^{-1/p}\|_{C,Q}\frac{w(Q)^{1/p}}{|E_Q|^{1/p}}\frac{w(Q)^{1/p'}}{w(E_Q)^{1/p'}}\\
&= c_p\|w^{-\frac{1}{p}}\|_{C,Q}\frac{w(Q)^{1/p}}{|Q|^{1/p}}\frac{w(Q)^{1/p'}}{w(E_Q)^{1/p'}}\\
&\leq c_p[w]_{A_p(C)}^{\frac{1}{p}}\frac{w(Q)^{1/p'}}{w(E_Q)^{1/p'}}\\
&\leq c_{n,p,\eta}[w]_{A_p(C)}^{\frac{1}{p}}[w]_{A_p}^{\frac{1}{p'}}.
\end{aligned}$$

Esto prueba (3.11).

□

3.3 Estimaciones tipo Coifman-Fefferman.

En esta sección estudiamos las estimaciones de tipo Coifman-Fefferman. Obtuvimos el siguiente resultado, utilizando la técnica de cubos principales desarrollada en [58],

Teorema 3.9. *Sea B una función de Young tal que $B \in \mathcal{Y}(p_0, p_1)$. Si T es un operador $\overline{B}$-Hörmander, entonces para todo $1 \le p < \infty$ y cualquier peso $w \in A_\infty$,*

$$\|Tf\|_{L^p(w)} \le c_n [w]_{A_\infty} \|M_B f\|_{L^p(w)}. \tag{3.12}$$

Si además $b \in BMO$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y A es una función de Young, tal que $A^{-1}(t)\overline{B}^{-1}(t)\overline{C}^{-1}(t) \le t$ con $\overline{C}(t) = e^{t^{1/m}} - 1$ para $t \ge 1$, entonces para todo $1 \le p < \infty$ y cualquier peso $w \in A_\infty$,

$$\|T_b^m f\|_{L^p(w)} \le c_{n,m} \|b\|_{BMO}^m [w]_{A_\infty}^{m+1} \|M_A f\|_{L^p(w)}. \tag{3.13}$$

Demostración. Veamos el caso $m > 0$, pues la prueba para el caso $m = 0$ es análoga con mínimas modificaciones.

Sea $m > 0$. Usando el Teorema 3.1, basta controlar cada $\mathcal{A}_{A,\mathcal{S}}^{m,h}(b, f)$. Tomando en cuenta el Lema 1.40 y la desigualdad de Hölder (1.2), obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{A}_{B,\mathcal{S}}^{m,h}(b, f) g w dx = \sum_{Q \in \mathcal{S}} \frac{1}{w(Q)} \int_Q |b(x) - b_Q|^{m-h} g(x) w(x) dx\, w(Q) \|(b - b_Q)^h f\|_{B,Q}$$
$$\le \sum_{Q \in \mathcal{S}} \|(b - b_Q)^{m-h}\|_{\exp L^{\frac{1}{m-h}}(w),Q} \|g\|_{L(\log L)^{m-h}(w),Q} w(Q) \|(b - b_Q)^h\|_{\exp L^{\frac{1}{h}},Q} \|f\|_{A,Q}$$
$$\le c_n [w]_{A_\infty}^{m-h} \|b\|_{\mathrm{BMO}}^m \sum_{Q \in \mathcal{S}} \|g\|_{L(\log L)^{m-h}(w),Q} \|f\|_{A,Q} w(Q).$$

Sea $\mathcal{F}$ es la familia de cubos principales en el sentido usual, esto es

$$\mathcal{F} = \cup_{k=0}^{\infty} \mathcal{F}_k,$$

con $\mathcal{F}_0 :=$\{cubos maximales en $\mathcal{S}$\} y

$$\mathcal{F}_{k+1} := \bigcup_{F \in \mathcal{F}_k} \mathrm{ch}_{\mathcal{F}}(F), \qquad \mathrm{ch}_{\mathcal{F}}(F) = \{Q \subsetneq F \text{ maximal tales que } \tau(Q) > 2\tau(F)\},$$

donde $\tau(Q) = \|g\|_{L(\log L)^{m-h}(w),Q} \|f\|_{A,Q}$ y $\pi(Q)$ es el mínimo cubo principal que contiene a Q. Observemos que

$$\begin{aligned}\sum_{Q\in\mathcal{S}}\|g\|_{L(\log L)^{m-h}(w),Q}\|f\|_{A,Q}w(Q) &\leq \sum_{F\in\mathcal{F}}\|g\|_{L(\log L)^{m-h}(w),F}\|f\|_{A,F}\sum_{Q\in\mathcal{S},\pi(Q)=F}w(Q)\\ &\leq c_n[w]_{A_\infty}\sum_{F\in\mathcal{F}}\|g\|_{L(\log L)^{m-h}(w),F}\|f\|_{A,F}w(F)\\ &\leq c_n[w]_{A_\infty}\int_{\mathbb{R}^n}(M_Af)(M_{L\log L^{m-h}(w)}g)wdx\\ &\leq c_n[w]_{A_\infty}\int_{\mathbb{R}^n}(M_Af)(M_w^{m-h+1}g)wdx.\end{aligned}$$

En este punto notemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}(M_Af)(M_w^{m-h+1}g)wdx &\leq \|M_Af\|_{L^p(w)}\|M_w^{m-h+1}g\|_{L^{p'}(w)}\\ &\leq c_np^{m-h+1}\|M_Af\|_{L^p(w)}\|g\|_{L^{p'}(w)},\end{aligned}$$

y combinando nos quedaría

$$\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{A}^{m,h}_{B,\mathcal{S}}(b,f)gwdx \leq c_n[w]_{A_\infty}p^{m-h+1}\|M_Af\|_{L^p(w)}\|g\|_{L^{p'}(w)}.$$

Por lo tanto, tomando supremos en $\|g\|_{L^{p'}(w)}=1$ se prueba la desigualdad deseada. □

3.4 Resultados de no acotación.

Los siguientes resultados muestran que existe algún rango de exponentes en donde los operadores que estamos estudiando son no acotados. Esto generaliza el resultado probado en [55] para operadores que cumplen condiciones del estilo H_r.

Teorema 3.10. *Sean $1\leq r<\infty$, $1\leq p<r'$ y $\frac{p}{r'}<\gamma<1$. Sea A una función de Young y supongamos que existe $c_A>0$ tal que*

$$A^{-1}(t)\simeq\frac{t^{\frac{1}{r}}}{\varphi(t)}\qquad \textit{para } t>c_A,$$

donde φ es una función positiva que cumple para todo $s\in(0,1)$, existe $c_s>0$ tal que para toda $t>c_s$, $0<\varphi(t)<\kappa_st^s$. Existe un operador T cumpliendo una condición A-Hörmander tal que

$$\|T\|_{L^p(w)\to L^{p,\infty}(w)}=\infty,$$

donde $w(x)=|x|^{-\gamma n}$.

De este resultado, utilizando técnicas de extrapolación, usando ideas de [55], se puede probar que la acotación de Coifman Fefferman (3.12) no vale para operadores maximales que no son lo suficientemente grandes, esto es

Teorema 3.11. *Sea $1 \leq r < \infty$. Sea A una función de Young que cumpla las mismas condiciones que en el Teorema 3.10. Sea $w \in A_\infty$. Existe un operador T cumpliendo una condición A-Hörmander tal que para cada $1 < q < r'$ y $B(t) \leq ct^q$, la siguiente desigualdad*

$$\|Tf\|_{L^p(w)} \leq c\|M_B f\|_{L^p(w)}, \tag{3.14}$$

no vale para ningún $0 < p < \infty$ y cualquier constante c dependiente de w.

Demostración del Teorema 3.10. Vamos a seguir el esquema de la demostración de [55, Teorema 3.2], considerando el núcleo que aparece en [53, Teorema 5]

$$k(t) = A^{-1}\left(\frac{1}{t^n\,(1-\log t)^{1+\beta}}\right)\chi_{(0,1)}(t), \qquad \beta > 0.$$

Observemos que $K(x) = k(|x|) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. En efecto, por la convexidad de A nos permite usar la desigualdad de Jensen para obtener

$$\begin{aligned}
&A\left(\frac{1}{|B(0,1)|}\int_{\mathbb{R}^n} A^{-1}\left(|x|^{-n}\left(\log\frac{e}{|x|}\right)^{-(1+\beta)}\chi_{(0,1)}(|x|)\right)dx\right)\\
&= A\left(\frac{1}{|B(0,1)|}\int_{|x|<1} A^{-1}\left(|x|^{-n}\left(\log\frac{e}{|x|}\right)^{-(1+\beta)}\right)dx\right)\\
&\leq \frac{1}{|B(0,1)|}\int_{|x|<1} |x|^{-n}\left(\log\frac{e}{|x|}\right)^{-(1+\beta)}dx \leq c_{n,\beta}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} A^{-1}\left(|x|^{-n}\left(\log\frac{e}{|x|}\right)^{-(1+\beta)}\chi_{(0,1)}(|x|)\right)dx \leq A^{-1}\left(c_{n,\beta}\right)|B(0,1)|,$$

y luego $K(x) \in L^1$. Definamos ahora $\tilde{K}(x) = K(x-\eta)$ con $|\eta| = 4$, y consideremos el operador

$$Tf(x) = \tilde{K} * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-\eta-y)f(y)dy. \tag{3.15}$$

Como $\tilde{K} \in L^1$, tenemos que $T : L^q \to L^q$ para todo $1 < q < \infty$. Observemos que el núcleo $\tilde{K}$ cumple una condición A-Hörmander, probado en [53, Teorema 5].

Asumamos que el operador T actuá de $L^p(w)$ sobre $L^{p,\infty}(w)$. Tomemos

$$f(x) = |x+\eta|^{-\frac{\gamma_1 n}{p}} \chi_{\{|x+\eta|<1\}}(x) \in L^p(\mathbb{R}^n),$$

con $\gamma_1 \in (0,1)$ a elegir. Si $|x+\eta| < 1$ entonces $3 < |x| < 5$ y más aun

$$\begin{aligned} \sup_{\lambda>0} \lambda^p w\left\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\right\} &\leq c \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| w(x) dx \right) \\ &\leq c \frac{1}{3^{n\gamma}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx \right) < \infty. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Sea $0 < s < \min\left\{\frac{1}{3r'}, \frac{\gamma_1}{p}\right\}$ fijo. Sabemos que $\varphi(u) < \kappa_s u^s$ para todo $u > c_s$. Sea $t_1 \in (0,1)$ tal que para cada $t \in (0, t_1)$ teníamos que $\frac{1}{t^n(1-\log t)^{1+\beta}} > \max\{c_A, c_s\}$. Entonces, para $t \in (0, t_1)$

$$\begin{aligned} k(t) t^{-\frac{\gamma_1 n}{p}+n} &= A^{-1} \left(\frac{1}{t^n (1-\log t)^{1+\beta}} \right) t^{-\frac{\gamma_1 n}{p}+n} \\ &\simeq \frac{1}{t^{\frac{n}{r}} (1-\log t)^{\frac{1+\beta}{r}} \varphi\left(\frac{1}{t^n (1-\log t)^{1+\beta}} \right)} t^{-\frac{\gamma_1 n}{p}+n} \\ &\geq \frac{1}{\kappa_s} \frac{1}{(1-\log t)^{\frac{1+\beta}{r}} \left(\frac{1}{t^n(1-\log t)^{1+\beta}} \right)^s} t^{-\frac{\gamma_1 n}{p}} \\ &= \frac{1}{\kappa_s} (1-\log t)^{(1+\beta)\left(s-\frac{1}{r}\right)} t^{-\frac{\gamma_1 n}{p}+ns} = \frac{1}{\kappa_s} h(t). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Podemos tomar $0 < t_0 \leq t_1$ tal que se cumpla la última desigualdad y que $h(t)$ y $k(t)$ sean decreciente en $(0, t_0)$, notar que en el caso de h el hecho de que sea decreciente se sigue de que $s < \frac{\gamma_1}{p}$. Tomemos $\delta_0 = \frac{2}{3} t_0$. Observemos que para $|x| < \delta_0$, obtenemos que

$$\begin{aligned} Tf(x) &= \int_{|\eta+y|<1} K(x-\eta-y)|y+\eta|^{-\frac{\gamma_1 n}{p}} dy = \int_{|y|<1} K(x-y)|y|^{-\frac{\gamma_1 n}{p}} dy \\ &= \int_{|y|<1} k(|x-y|)|y|^{-\frac{\gamma_1 n}{p}} dy \geq k\left(\frac{3}{2}|x|\right) \int_{|y|<\frac{|x|}{2}} |y|^{-\frac{\gamma_1 n}{p}} dy \\ &\geq k\left(\frac{3}{2}|x|\right) \frac{|x|^{-\frac{\gamma_1 n}{p}}}{2^{-\frac{\gamma_1 n}{p}}} |x|^n \geq c \frac{1}{\kappa_s} h\left(\frac{3|x|}{2}\right). \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se sigue de (3.17). Ahora, tomando en cuenta que h

es decreciente en $(0,t_0)$ tenemos que

$$\begin{aligned}\sup_{\lambda>0}\lambda^p w\left\{x\in\mathbb{R}^n\,:\,|Tf(x)|>\lambda\right\} &\geq \sup_{\lambda>0}\lambda^p w\left\{|x|<\delta_0\,:\,c\frac{1}{\kappa_s}h\left(\frac{3|x|}{2}\right)>\lambda\right\}\\ &\geq c\sup_{\lambda>h(t_0)}\lambda^p w\left\{|x|<\delta_0\,:\,h\left(\frac{3|x|}{2}\right)>\lambda\right\}\\ &\geq c\sup_{0<t<t_0}h(t)^p w\left\{|x|<\frac{2t}{3}\right\}\\ &= c\sup_{0<t<t_0}(1-\log t)^{(1+\beta)\left(s-\frac{1}{r}\right)p}\,t^{-\gamma_1 n+pns}\int_{|y|<\frac{2t}{3}}|x|^{-\gamma n}dy\\ &\simeq \sup_{0<t<t_0}(1-\log t)^{(1+\beta)\left(\frac{1}{2}-p\right)}\,t^{-\gamma_1 n+pns+n-\gamma n}.\end{aligned} \tag{3.18}$$

Observemos que

$$-\gamma_1 n+pns+n-\gamma n<0 \iff 1+ps<\gamma_1+\gamma.$$

Por lo tanto, tomando $\gamma_1=1-\frac{p}{r'2}$ tenemos que, como $s<\frac{1}{3r'}$,

$$\gamma_1+\gamma=1-\frac{p}{r'2}+\gamma>1-\frac{p}{r'2}+\frac{p}{r'}=1+\frac{p}{2r'}\geq 1+ps.$$

En otras palabras,

$$-\gamma_1 n+pns+n-\gamma n<0.$$

Con esta desigualdad y (3.18), obtenemos que

$$\sup_{\lambda>0}\lambda^p w\left\{x\in\mathbb{R}^n\,:\,|Tf(x)|>\lambda\right\}=\infty.$$

Lo cual contradice (3.16) y queda demostrado el teorema.

□

Demotración del Teorema 3.11. Supongamos que (3.14) vale con M_B, $B(t)\leq ct^q$ para todo $t\geq c$, $1<q<r'$ y para todos los operadores que cumplan las hipótesis del Teorema 3.11. Usando un argumento como en [55, Demostración del Teorema 3.1], es suficiente probar que no vale la estimación para algún $0<p_0<\infty$. Sea p_0 tal que $q<p_0<r'$. Supongamos que para todo $w\in A_1\subseteq A_\infty$ tenemos que $\|Tf\|_{L^{p_0,\infty}(w)}\leq c\|M_Bf\|_{L^{p_0,\infty}(w)}$. Entonces, observemos que

$$\|Tf\|_{L^{p_0,\infty}(w)}\leq c\|M_Bf\|_{L^{p_0,\infty}(w)}\leq c\|M_qf\|_{L^{p_0,\infty}(w)}\leq c\|f\|_{L^{p_0,\infty}(w)}.$$

y esto vale en particular para pesos de la forma $w(x)=|x|^{-n\gamma}$ con $\gamma\in\left(\frac{p_0}{r'},1\right)$ contradiciendo el Teorema 3.10.

□

3.5 Estimaciones en el extremo

En esta subsección presentamos algunas estimaciones en el extremo que se pueden obtener siguiendo las ideas en [16, 48]. Para mayor claridad enunciaremos de manera separada los resultados para el operador y sus conmutadores.

Teorema 3.12. *Sean $A \in \mathcal{Y}(p_0, p_1)$ una función de Young y T un operador $\overline{A}$-Hörmander. Supongamos que A es sub-multiplicativa, es decir, $A(xy) \le A(x)A(y)$. Luego, tenemos que para todo peso w, y toda función de Young φ,*

$$w\left(\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, Tf(x) > \lambda\}\right) \le c_{n,A,T}\kappa_\varphi \int_{\mathbb{R}^n} A\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) M_\varphi w(x)dx, \tag{3.19}$$

donde

$$\kappa_\varphi = \int_1^\infty \frac{\varphi^{-1}(t)A(\log(e+t)^2)}{t^2\log(e+t)^3}dt.$$

Para el caso de conmutadores tenemos el siguiente resultado

Teorema 3.13. *Sean $b \in BMO$ y $m \in \mathbb{N}$. Sean $A_0, \dots, A_m$ funciones de Young tales que $A_0 \in \mathcal{Y}(p_0, p_1)$ y $A_j^{-1}(t)\bar{A}_0^{-1}(t)\bar{C}_j^{-1}(t) \le t$ con $\bar{C}_j(t) = e^{t^{\frac{1}{j}}}$ para $t \ge 1$. Sea T un operador $\bar{A}_0$-Hörmander. Supongamos que cada A_j es sub-multiplicativo, es decir, $A_j(xy) \le A_j(x)A_j(y)$. Luego, tenemos que para todo peso w, y toda familia de funciones de Young $\varphi_0, \dots, \varphi_m$,*

$$w\left(\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, T_b^m f(x) > \lambda\}\right) \le c_{n,A,T}\sum_{h=0}^m \left(\kappa_{\varphi_h}\int_{\mathbb{R}^n} A_h\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) M_{\Phi_{m-h}\circ\varphi_h} w(x)dx\right), \tag{3.20}$$

donde $\Phi_j(t) = t\log(e+t)^j$, $0 \le j \le m$,

$$\kappa_{\varphi_h} = \begin{cases} \alpha_{n,m,h} + c_n\int_1^\infty \frac{\varphi_h^{-1}\circ\Phi_{m-h}^{-1}(t)A_h(\log(e+t)^{4(m-h)})}{t^2\log(e+t)^{3(m-h)+1}}dt & \text{si } 0 \le h < m, \\ \int_1^\infty \frac{\varphi_h^{-1}(t)A_h(\log(e+t)^2)}{t^2\log(e+t)^3}dt & \text{si } h = m. \end{cases}$$

Las demostraciones de estos teoremas siguen la estrategia presentada en [16] y generalizada en [48] Sea A una función de Young cumpliendo

$$A(4t) \le \Lambda_A A(t) \qquad (t > 0,\ \Lambda_A \ge 1). \tag{3.21}$$

Sea $\mathcal{D}$ un latice diadico y $k \in \mathbb{N}$. Denotemos

$$\mathcal{F}_k = \left\{Q \in \mathcal{D} \,:\, 4^{k-1} < \|f\|_{A,Q} \le 4^k\right\}.$$

Recordemos el siguiente lema probado en [48, Lema 4.3],

Lema 3.14. *Supongamos que la familia $\mathcal{F}_k$ es $\left(1-\frac{1}{2\Lambda_A}\right)$ – sparse. Sean w un peso y E un conjunto medible con $w(E)<\infty$. Luego para toda función de Young φ, tenemos que*

$$\int_E \left(\sum_{Q\in\mathcal{F}_k} \chi_Q\right) w dx \leq 2^k w(E) + \frac{4\Lambda_A}{\overline{\varphi}^{-1}\left((2\Lambda_A)^{2^k}\right)} \int_{\mathbb{R}^n} A\left(4^k|f|\right) M_\varphi w dx.$$

Usando el lema anteriores, podemos demostrar el Teorema 3.12.

Demostración del Teorema 3.12. Primero vamos a establecer una estimación en el extremo para el operador sparse $\mathcal{A}_{\mathcal{S},A}$. Esta estimación combinada con el Teorema 3.1 nos permiten probar el Teorema 3.12. Vamos a seguir la estrategia de demostración ideado en [48] generalizando lo de [16].

Sea

$$E=\left\{x\in\mathbb{R}^n : \mathcal{A}_{\mathcal{S},A}f(x)>4,\ M_A f(x)\leq \frac{1}{4}\right\}.$$

Por homogeneidad y tomando en cuenta el Lema 1.35, basta probar que

$$w(E)\leq c\kappa_\varphi \int_{\mathbb{R}^n} A\left(|f(x)|\right) M_\varphi w dx. \tag{3.22}$$

Denotemos $\mathcal{S}_k=\left\{Q\in\mathcal{S} : 4^{-k-1}<\|f\|_{A,Q}\leq 4^{-k}\right\}$ y sea

$$T_k f(x)=\sum_{Q\in\mathcal{S}_k}\|f\|_{A,Q}\chi_Q(x).$$

Si $E\cap Q\neq\emptyset$ para algún $Q\in\mathcal{S}$ entonces tenemos que $\|f\|_{A,Q}\leq\frac{1}{4}$ y necesariamente se cumple que

$$\mathcal{A}_{\mathcal{S},A}f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k f(x) \qquad x\in E.$$

Como A es sub-multiplicativa, satisface (3.21) con $\Lambda_A = A(4)$. Usando el Lema 3.14 con $\mathcal{F}_k=\mathcal{S}_k$ combinado con el hecho que $T_k f(x)\leq 4^{-k}\sum_{Q\in\mathcal{S}_k}\chi_Q(x)$ tenemos que

$$\int_E T_k f w dx \leq 2^{-k}w(E) + c\frac{4^{-k+1}A(4^k)}{\overline{\varphi}^{-1}\left((2\Lambda_A)^{2^k}\right)}\int_{\mathbb{R}^n} A(|f|) M_\varphi w dx. \tag{3.23}$$

Teniendo esta desigualdad en cuenta, obtenemos

$$\begin{aligned} w(E) &\leq \frac{1}{4}\int_E \mathcal{A}_{\mathcal{S},A} f w dx \leq \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\int_E T_k f w dx \\ &\leq \frac{1}{4}w(E) + c\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4^{-k}A(4^k)}{\overline{\varphi}^{-1}\left(2^{2^k}\right)}\int_{\mathbb{R}^n} A(|f|) M_\varphi w dx. \end{aligned}$$

Ahora, notemos que

$$\int_{2^{2^{k-1}}}^{2^{2^k}} \frac{1}{t\log(e+t)}dt \geq c. \tag{3.24}$$

Como $\frac{A(t)}{t}$ es no decreciente y usando lo anterior, tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^{-k}A(4^k)}{\overline{\varphi}^{-1}\left(2^{2^k}\right)} &\leq c\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^{2^{k-1}}}^{2^{2^k}} \frac{1}{t\log(e+t)}dt\frac{4^{-k}A(4^k)}{\overline{\varphi}^{-1}\left(2^{2^k}\right)} \\
&\leq c\frac{A(4)}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^{2^{k-1}}}^{2^{2^k}} \frac{1}{t\overline{\varphi}^{-1}(t)\log(e+t)}dt\frac{A(4^{k-1})}{4^{k-1}} \\
&\leq c\frac{A(4)}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^{2^{k-1}}}^{2^{2^k}} \frac{A(\log(e+t)^2)}{t\overline{\varphi}^{-1}(t)\log(e+t)\log(e+t)^2}dt \\
&\leq c\int_1^\infty \frac{\varphi^{-1}(t)A(\log(e+t)^2)}{t^2\log(e+t)^3}dt.
\end{aligned}$$

Con lo cual queda probado el Teorema 3.12.

□

Demostración del Teorema 3.13. Supongamos que $m>0$. Teniendo en cuenta el Teorema 3.1, basta probar una desigualdad en el extremo para cada

$$\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^{m,h}(b,f)(x) = \sum_{Q\in\mathcal{S}} |b(x)-b_Q|^{m-h}\|f|b-b_Q|^h\|_{B,Q}\chi_Q(x).$$

Consideremos dos casos. Primero supongamos que $h=m$. Entonces tenemos que

$$\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^{m,m}(b,f)(x) = \sum_{Q\in\mathcal{S}} \|f|b-b_Q|^m\|_{B,Q}\chi_Q(x) \leq \|b\|_{BMO}^m \sum_{Q\in\mathcal{S}} \|f\|_{A_m,Q}\chi_Q(x),$$

y análogamente a lo utilizado en la prueba anterior,

$$w\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n : \sum_{Q\in\mathcal{S}}\|f\|_{A_m,Q}\chi_Q(x)>\lambda\right\}\right) \leq c\kappa_{\varphi_m}\int_{\mathbb{R}^n} A_m\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)M_{\varphi_m}w(x)dx,$$

donde

$$\kappa_{\varphi_m} = \int_1^\infty \frac{\varphi_m^{-1}(t)A_m(\log(e+t)^2)}{t^2\log(e+t)^3}dt.$$

Ahora consideremos el caso $0 \leq h < m$. Usando la desigualdad de Hölder generalizada, si $h > 0$ tenemos que

$$\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^{m,h}(b,f)(x) \leq c\|b\|_{BMO}^{h} \sum_{Q\in\mathcal{S}} |b(x)-b_Q|^{m-h}\|f\|_{A_h,Q}\chi_Q(x) = \mathcal{T}_b^h f(x).$$

Definimos

$$E = \{x : |\mathcal{T}_b^h f(x)| > 8, M_{A_h} f(x) \leq 1/4\}.$$

Por la desigualdad de Fefferman-Stein (Lema 1.35) y la homogeneidad, es suficiente asumir que $\|b\|_{BMO} = 1$ y mostrar que

$$w(E) \leq cC_\varphi \int_{\mathbb{R}^n} A_h\left(|f|\right) M_{(\Phi_{m-h}\circ\varphi_h)(L)} w dx.$$

Sea

$$\mathcal{S}_k = \{Q \in \mathcal{S} \,:\, 4^{-k-1} < \|f\|_{A_h,Q} \leq 4^{-k}\},$$

y para $Q \in \mathcal{S}_k$, sea

$$F_k(Q) = \left\{x \in Q : |b(x)-b_Q|^{m-h} > \left(\frac{3}{2}\right)^k\right\}.$$

Si $E \cap Q \neq \emptyset$ para algún $Q \in \mathcal{S}$, entonces $\|f\|_{A_h,Q} \leq 1/4$. Mas aún, para $x \in E$,

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{T}_b^h f(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{Q\in\mathcal{S}_k} |b(x)-b_Q|^{m-h}\|f\|_{A_h,Q}\chi_Q(x)\\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty}(3/2)^k \sum_{Q\in\mathcal{S}_k} \|f\|_{A_h,Q}\chi_Q(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{Q\in\mathcal{S}_k} |b(x)-b_Q|^{m-h}\|f\|_{A_h,Q}\chi_{F_k(Q)}(x)\\
&\equiv \mathcal{T}_1 f(x) + \mathcal{T}_2 f(x).
\end{aligned}$$

Si definimos $E_i = \{x \in E : \mathcal{T}_i f(x) > 4\}, i = 1, 2.$, tenemos que

$$w(E) \leq w(E_1) + w(E_2). \tag{3.25}$$

Usando (3.23), con cualquier función ψ_h

$$\int_{E_1} (\mathcal{T}_1 f) w dx \leq \Big(\sum_{k=1}^{\infty}(3/4)^k\Big) w(E_1) + c_A\Lambda_A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3/8)^k A_h(4^k)}{\overline{\psi_h}^{-1}\left(2^{2^k}\right)} \int_{\mathbb{R}^n} A_h(|f|) M_{\psi_h} w dx.$$

Esta desigualdad combinada con $w(E_1) \leq \frac{1}{4}\int_{E_1}(\mathcal{T}_1 f) w dx$, implica

$$w(E_1) \leq c_A\Lambda_A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3/8)^k A_h(4^k)}{\overline{\psi_h}^{-1}\left(2^{2^k}\right)} \int_{\mathbb{R}^n} A_h(|f|) M_{\psi_h} w dx.$$

Observemos que usando (3.24) tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(3/8)^k A_h(4^k)}{\overline{\psi_h}^{-1}\left(2^{2^k}\right)} &= \sum_{k=1}^{\infty}2^k\frac{A_h(4^k)}{\overline{\psi_h}^{-1}\left(2^{2^k}\right)4^k}\\ &\leq c\sum_{k=1}^{\infty}2^k\frac{A_h(4^k)}{\overline{\psi_h}^{-1}\left(2^{2^k}\right)4^k}\int_{2^{2^{k-1}}}^{2^{2^k}}\frac{1}{t\log(e+t)}dt\\ &\leq c\int_1^{\infty}\frac{\psi_h^{-1}(t)\,A_h(\log(e+t)^2)}{t^2\log(e+t)^3}dt.\end{aligned}$$

Como $\frac{A_h(t)}{t}$ es no decreciente

$$\frac{A_h(\log(e+t)^2)}{\log(e+t)^2}\leq\frac{A_h(\log(e+t)^{3(m-h)})}{\log(e+t)^{3(m-h)}}\leq\frac{A_h(\log(e+t)^{4(m-h)})}{\log(e+t)^{3(m-h)}},$$

tenemos que $c\int_1^{\infty}\frac{\psi_h^{-1}(t)A_h(\log(e+t)^{4(m-h)})}{t^2\log(e+t)^{3(m-h)}}dt$, y tomando $\psi_h=\Phi_{m-h}\circ\varphi_h$,

$$w(E_1)\leq c\kappa_h\int_{\mathbb{R}^n}A_h(|f|)M_{\Phi_{m-h}\circ\varphi_h}w dx.$$

Ahora estimemos $w(E_2)$. Como en la demostración de [48, Lema 4.3], para $Q\in\mathcal{S}_k$, podemos definir subconjuntos disjuntos dos a dos $E_Q\subseteq Q$ y probar que

$$1\leq\frac{c}{|Q|}\int_{E_Q}A_h(4^k|f|)dx.$$

Por lo tanto,

$$w(E_2)\leq\frac{1}{4}\|\mathcal{T}_2 f\|_{L^1}c\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{Q\in\mathcal{S}_k}\frac{1}{4^k}\left(\frac{1}{|Q|}\int_{F_k(Q)}|b-b_Q|^{m-h}w dx\right)\int_{E_Q}A_h(4^k|f|)dx. \tag{3.26}$$

Aplicando dos veces la desigualdad de Hölder generalizada (1.3), obtenemos la siguiente desigualdad

$$\frac{1}{|Q|}\int_{F_k(Q)}|b-b_Q|^{m-h}w dx\leq c_n\|w\chi_{F_k(Q)}\|_{L(\log L)^{m-h},Q}. \tag{3.27}$$

Definamos ahora $\Phi_{m-h}(t)=t\log(e+t)^{m-h}$ y Ψ_{m-h} como

$$\Psi_{m-h}^{-1}(t)=\frac{\Phi_{m-h}^{-1}(t)}{\varphi_h^{-1}\circ\Phi_{m-h}^{-1}(t)}.$$

Como $\varphi_h(t)/t$ y Φ son función estrictamente crecientes, Ψ_{m-h} también es estrictamente creciente. Luego, usando la desigualdad de Hölder generalizada (1.3) tenemos que

$$\begin{aligned} \|w\chi_{F_k(Q)}\|_{L(\log L)^{m-h},Q} &\leq 2\|\chi_{F_k(Q)}\|_{\Psi,Q}\|w\|_{(\Phi_{m-h}\circ\varphi_h),Q} \\ &= \frac{2}{\Psi^{-1}_{m-h}(|Q|/|F_k(Q)|)}\|w\|_{(\Phi_{m-h}\circ\varphi_h),Q}. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Teniendo en cuenta que el Teorema 1.39 nos asegura que $|F_k(Q)| \leq \alpha_k|Q|$, donde $\alpha_k = \min(1, e^{-\frac{(3/2)^{\frac{k}{m-h}}}{2^n e}+1})$. Estos hechos junto con (3.27) y (3.28) nos permiten probar que

$$\frac{1}{|Q|}\int_{F_k(Q)} |b-b_Q|^j w dx \leq \frac{c_n}{\Psi^{-1}_{m-h}(1/\alpha_k)}\|w\|_{(\Phi_{m-h}\circ\varphi_h),Q}.$$

De esta desigualdad y (3.26) se sigue que

$$\begin{aligned} w(E_2) &\leq c_n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\Psi^{-1}_{m-h}(1/\alpha_k)4^k}\sum_{Q\in\mathcal{S}_k}\|w\|_{(\Phi_{m-h}\circ\varphi_h),Q}\int_{E_Q} A_h(4^k|f|)dx \\ &\leq c_n\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\Psi^{-1}_{m-h}(1/\alpha_k)}\frac{A_h(4^k)}{4^k}\Big)\int_{\mathbb{R}^n} A_h(|f|)M_{(\Phi_{m-h}\circ\varphi_h)(L)}w(x)dx. \end{aligned}$$

Observemos ahora que podemos tomar $c_{n,m,h}$ tal que para todo $k > c_{n,m,h}$ tenemos $\frac{1}{\alpha_{k-1}} = e^{\frac{(3/2)^{\frac{k-1}{m-h}}}{2^n e}-1} \geq \max\{e^2, 4^k\}$. Notemos que,

$$\int_{\frac{1}{\alpha_{k-1}}}^{\frac{1}{\alpha_k}} \frac{1}{t\log(e+t)}dt \geq c.$$

Si $\frac{1}{\beta} = (m-h)\frac{\log 4}{\log(3/2)}$, como A es sub-multiplicativa y $\frac{A(t)}{t}$ es no decreciente, obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\Psi^{-1}_{m-h}(1/\alpha_k)}\frac{A_h(4^k)}{4^k} &\leq \alpha_{n,h,m} + \sum_{k=c_{n,m,h}}^{\infty}\frac{1}{\Psi^{-1}_{m-h}(1/\alpha_k)}\frac{A_h(4^k)}{4^k} \\ &\leq \alpha_{n,h,m} + c_n\frac{A(4)}{4}\int_1^{\infty}\frac{1}{\Psi^{-1}_{m-h}(t)}\frac{1}{t\log(e+t)}\frac{A_h(\log(e+t)^{1/\beta})}{\log(e+t)^{1/\beta}}dt \\ &\leq \alpha_{n,h,m} + c_n\int_1^{\infty}\frac{\varphi_h^{-1}\circ\Phi^{-1}_{m-h}(t)}{\Phi^{-1}_{m-h}(t)}\frac{1}{t\log(e+t)}\frac{A_h(\log(e+t)^{4(m-h)})}{\log(e+t)^{4(m-h)}}dt \\ &\simeq \alpha_{n,h,m} + c_n\int_1^{\infty}\frac{\varphi_h^{-1}\circ\Phi^{-1}_{m-h}(t)A_h(\log(e+t)^{4(m-h)})}{t^2\log(e+t)^{3(m-h)+1}}dt. \end{aligned}$$

□

3.6 Decaimiento exponencial local.

Otra consecuencia del resultado de dominación sparse es la siguiente estimación local, inspirada en el resultado de [60].

Teorema 3.15. *Sean B una función de Young tal que $B \in \mathcal{Y}(p_0, p_1)$ y T un operador $\bar{B}$-Hörmander. Sea f una función tal que sop$f \subseteq Q$. Existen constantes c_n y α_n tales que*

$$\left|\left\{x \in Q : \frac{|Tf(x)|}{M_B f(x)} > \lambda\right\}\right| \leq c_n e^{-\alpha_n \frac{\lambda}{c_T}} |Q|. \tag{3.29}$$

Si además $m \in \mathbb{N}$, $b \in BMO$ y A es una función de Young que cumple que $A^{-1}(t)\bar{B}^{-1}(t)\bar{C}^{-1}(t) \leq t$ con $\bar{C}(t) = e^{t^{1/m}}$ para $t \geq 1$, entonces existen constantes $c_{n,m}$ y $\alpha_{n,m}$ tales que

$$\left|\left\{x \in Q : \frac{|T_b^m f(x)|}{M_A f(x)} > \lambda\right\}\right| \leq c_{n,m} e^{-\alpha_{n,m}\left(\frac{\lambda}{c_T \|b\|_{BMO}^m}\right)^{\frac{1}{m+1}}} |Q| \qquad \lambda > 0. \tag{3.30}$$

Demotración del Teorema 3.15. Recordemos que en [60, Teorema 2.1], se demostró que

$$\left|\left\{x \in Q : \sum_{R \in \mathcal{S},\, R \subseteq Q} \chi_R(x) > t\right\}\right| \leq c e^{-\alpha t} |Q|. \tag{3.31}$$

Supongamos que $\mathrm{sop}(f) \subset Q_0$. Es fácil ver que (3.5) vale con b_{R_Q} reemplazado por b_{3Q}. Entonces tenemos que para casi todo $x \in Q_0$,

$$|T_b^m(f)(x)| = |T_b^m(f\chi_{3Q_0})(x)| \leq c_{n,m} c_T \sum_{h=0}^{m} \mathcal{C}_{B,\mathcal{F}}^{m,h}(b, f),$$

donde

$$\mathcal{C}_{B,\mathcal{F}}^{m,h}(b, f) = \sum_{Q \in \mathcal{F}} |b(x) - b_{3Q}|^{m-h} \|f|b - b_{3Q}|^h\|_{B,3Q} \chi_Q(x),$$

y $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}(Q_0)$ es una familia sparse. Para un poco más de claridad vamos a considerar dos casos. Si $m = 0$ entonces solo tenemos que trabajar con $\mathcal{C}_{B,\mathcal{F}}^{0,0}(b, f) = \sum_{Q \in \mathcal{F}} \|f\|_{B,3Q} \chi_Q(x)$. En este caso teniendo en cuenta que

$$\frac{\sum_{Q \in \mathcal{F}} \|f\|_{B,3Q} \chi_Q(x)}{M_B f(x)} \leq \sum_{Q \in \mathcal{F}} \chi_Q(x),$$

por una aplicación directa de (3.31) obtenemos (3.29).

Para el caso $m > 0$. Primero observemos

$$|b(x) - b_{3Q}|^{m-h} \leq c_{n,m}\|b\|_{BMO}^{m-h} + c_{n,m}|b(x) - b_Q|^{m-h},$$

y por la desigualdad de Hölder generalizada (1.3) y (1.8),

$$\||b - b_{3Q}|^h f\|_{B,3Q} \leq \|b\|_{BMO}^h \|f\|_{A,3Q}.$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned}
&\left|\left\{x \in Q_0 \,:\, \frac{\mathcal{A}_{B,\mathcal{F}}^{m,h}(b,f)}{M_A f} > \lambda\right\}\right| \\
&\leq \left|\left\{x \in Q_0 \,:\, \frac{\sum_{Q\in\mathcal{F}} \|f\|_{A,3Q}\chi_Q(x)}{M_A f} > \frac{\lambda}{2c_{n,m}\|b\|_{BMO}^m c_T}\right\}\right| \\
&+ \left|\left\{x \in Q_0 \,:\, \frac{\sum_{Q\in\mathcal{F}} |b(x) - b_Q|^{m-h}\|f\|_{A,3Q}\chi_Q(x)}{M_A f} > \frac{\lambda}{2c_{n,m}\|b\|_{BMO}^h c_T}\right\}\right| \\
&= I + II.
\end{aligned}$$

Para I observemos que

$$\frac{\sum_{Q\in\mathcal{F}} \|f\|_{A,3Q}\chi_Q(x)}{M_A f} \leq \sum_{Q\in\mathcal{S}} \chi_Q(x),$$

y entonces por una aplicación directa de (3.31) probamos

$$\left|\left\{x \in Q_0 \,:\, \frac{\sum_{Q\in\mathcal{F}} \|f\|_{A,3Q}\chi_Q(x)}{M_A f} > \frac{\lambda}{2c_{n,m}\|b\|_{BMO}^m c_T}\right\}\right| \leq ce^{-\alpha\frac{\lambda}{2c_{n,m}\|b\|_{BMO}^m c_T}}|Q|.$$

Enfoquemonos en II. El Lema 5.1 en [48] proporciona una familia sparse $\tilde{\mathcal{F}}$ tal que para todo $Q \in \mathcal{F}$,

$$|b(x) - b_Q| \leq c_n \sum_{P\in\tilde{\mathcal{F}}, P\subseteq Q} \left(\frac{1}{|P|}\int_P |b(x) - b_P|dx\right)\chi_P(x).$$

Como $b \in BMO$, tenemos que para todo $Q \in \mathcal{F}$,

$$|b(x) - b_Q| \leq c_n \sum_{P\in\tilde{\mathcal{F}}, P\subseteq Q} \left(\frac{1}{|P|}\int_P |b(x) - b_P|dx\right)\chi_P(x) \leq c_n\|b\|_{BMO} \sum_{P\in\tilde{\mathcal{F}}, P\subseteq Q_0} \chi_P(x).$$

Esto nos permite probar

$$\begin{aligned}
&\frac{\sum_{Q\in\mathcal{F}}|b(x)-b_Q|^{m-h}\|f\|_{A,3Q}\chi_Q(x)}{M_Af}\\
&\leq c_{n,m,h}\|b\|_{BMO}^{m-h}\sum_{Q\in\mathcal{F}}\left(\sum_{P\in\tilde{\mathcal{F}},P\subseteq Q_0}\chi_P(x)\right)^{m-h}\chi_Q(x)\\
&\leq c_{n,m,h}\|b\|_{BMO}^{m-h}\left(\sum_{P\in\tilde{\mathcal{F}},P\subseteq Q_0}\chi_P(x)\right)^{m-h+1}\chi_Q(x),
\end{aligned}$$

y usando de nuevo (3.31),

$$\begin{aligned}
II &\leq \left|\left\{x\in Q_0\ :c_{n,m,h}\|b\|_{BMO}^{m-h}\left(\sum_{P\in\tilde{\mathcal{F}},P\subseteq Q_0}\chi_P(x)\right)^{m-h+1}>\frac{\lambda}{2c_{n,m}\|b\|_{BMO}^{h}c_T}\right\}\right|\\
&=\left|\left\{x\in Q_0\ :c_{n,m,h}\sum_{P\in\tilde{\mathcal{F}},P\subseteq Q_0}\chi_P(x)>\left(\frac{\lambda}{2c_{n,m}\|b\|_{BMO}^{m}c_T}\right)^{\frac{1}{m-h+1}}\right\}\right|\\
&\leq ce^{-\alpha\left(\frac{\lambda}{2c_{n,m}\|b\|_{BMO}^{m}c_T}\right)^{\frac{1}{m-h+1}}}|Q|,
\end{aligned}$$

como queríamos probar. Controlando todos los decaimientos por el peor de todos, es decir, cuando $h=0$, el teorema queda probado.

□

3.7 Desigualdades en el extremo para conmutadores de Coifman-Rochberg-Weiss.

En [61] se probó que los conmutadores de los operadores de Calderón-Zygmund no son de tipo débil $(1,1)$, pero en cambio cumplen una estimación en el extremo para la medida de Lebesque y los pesos A_1. En [63] C. Pérez y G. Pradolini obtuvieron una estimación en el extremo con pesos arbitrarios y luego C. Pérez y I. Rivera-Ríos en [64] obtuvieron una versión cuantitativa de esos resultados, esta es

$$w\left(\{x\in\mathbb{R}^n\ :\ |T_b^m f(x)|>\lambda\}\right)\leq c\frac{1}{\varepsilon^{m+1}}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi_m\left(\frac{|f|}{\lambda}\right)M_{L(\log L)^{m+\varepsilon}}w\qquad \varepsilon>0,$$

donde $\Phi_m(t) = t\log(e+t)^m$. De este resultado es posible recuperar la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} & w\left(\{x \in \mathbb{R}^n : |T_b^m f(x)| > \lambda\}\right) \\ & \leq c[w]_{A_\infty}^m \log(e+[w]_{A_\infty})^{m+1} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_m\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) Mw \qquad w \in A_\infty \\ & \leq c[w]_{A_1}[w]_{A_\infty}^m \log(e+[w]_{A_\infty})^{m+1} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_m\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) w \qquad w \in A_1. \end{aligned}$$

En el caso de $m = 1$ se probó en [48] que el salto de $\frac{1}{\varepsilon}$ es lineal el lugar de $\frac{1}{\varepsilon^2}$. Esto mejora la dependencia del factor logarítmico en la constante A_∞, es decir,

$$\begin{aligned} & w\left(\{x \in \mathbb{R}^n : |[b,T]f(x)| > \lambda\}\right) \\ & \leq c[w]_{A_\infty} \log(e+[w]_{A_\infty}) \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_1\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) Mw \qquad w \in A_\infty \\ & \leq c[w]_{A_1}[w]_{A_\infty} \log(e+[w]_{A_\infty}) \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_1\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) w \qquad w \in A_1. \end{aligned}$$

En el siguiente resultado, probamos los conmutadores de orden superior tienen el mismo salto lineal.

Teorema 3.16. *Sea T un operador de ω-Calderón-Zygmund con ω cumpliendo una condición Dini. Sean m un entero no negativo y $b \in BMO$. Luego, tenemos que para todo peso w y todo $\varepsilon > 0$,*

$$\begin{aligned} w\left(\{x \in \mathbb{R}^n : |T_b^m f(x)| > \lambda\}\right) & \leq c_{n,m,T}\frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_m\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) M_{L(\log L)^m(\log\log L)^{1+\varepsilon}} w(x)dx \\ w\left(\{x \in \mathbb{R}^n : |T_b^m f(x)| > \lambda\}\right) & \leq c_{n,m,T}\frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_m\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) M_{L(\log L)^{m+\varepsilon}} w(x)dx, \end{aligned} \tag{3.32}$$

donde $\Phi_m(t) = t\log(e+t)^m$ y $C_T = C_K + \|T\|_{L^2\to L^2} + \|\omega\|_{Dini}$. Si además $w \in A_\infty$ entonces

$$w\left(\{x \in \mathbb{R}^n : T_b^m f(x) > \lambda\}\right) \leq c_{n,m,T}[w]_{A_\infty}^m \log\left(e+[w]_{A_\infty}\right) \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_m\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) Mw(x)dx. \tag{3.33}$$

Más aún, si $w \in A_1$ entonces vale que

$$w\left(\{x \in \mathbb{R}^n : T_b^m f(x) > \lambda\}\right) \leq c_{n,m,T}[w]_{A_1}[w]_{A_\infty}^m \log\left(e+[w]_{A_\infty}\right) \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_m\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) w(x)dx. \tag{3.34}$$

Demostración. Como T es un operador ω-Calderón-Zygmund, sabemos que satisface una condición L^∞-Hörmander con $H_\infty \leq c_n\left(\|\omega\|_{\mathrm{Dini}} + c_K\right)$, en otras palabras T cumple una condición $\bar{A}$-Hörmander con $A_0(t) = t$. Llamemos $\Phi_j(t) = t\log(e+t)^j$. Vamos a aplicar el Teorema 3.13 con $A_j(t) = \Phi_j(t)$, por lo que tenemos elegir adecuadamente cada φ_h para obtener la estimación deseada para cada término

$$\kappa_{\varphi_h}\int_{\mathbb{R}^n} A_h\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) M_{\Phi_{m-h}\circ\varphi_h} w(x)dx.$$

Consideremos tres casos. Supongamos primero $0 < h < m$, entonces

$$\begin{aligned}
\kappa_{\varphi_h} &= \alpha_{n,m,h} + c_n\int_1^\infty \frac{\varphi_h^{-1}\circ\Phi_{m-h}^{-1}(t)A_h(\log(e+t)^{4(m-h)})}{t^2\log(e+t)^{3(m-h)+1}}dt\\
&\lesssim \alpha_{n,m,h} + c_n\int_1^\infty \frac{\varphi_h^{-1}(t)\log(e+\log(e+\Phi_{m-h}(t))^{4(m-h)})^h}{\Phi_{m-h}(t)^2\log(e+\Phi_{m-h}(t))^{1-(m-h)}}\Phi'_{m-h}(t)dt\\
&\lesssim \alpha_{n,m,h} + c_n\int_1^\infty \frac{\varphi_h^{-1}(t)\log(e+\log(e+\Phi_{m-h}(t))^{4(m-h)})^h}{t\Phi_{m-h}(t)\log(e+\Phi_{m-h}(t))^{1-(m-h)}}dt\\
&\lesssim \alpha_{n,m,h} + c_n\int_1^\infty \frac{\varphi_h^{-1}(t)\log(e+\log(e+\Phi_{m-h}(t))^{4(m-h)})^h}{t^2\log(e+t)}dt.
\end{aligned}$$

Si tomamos $\varphi_h(t) = t\log(e+t)\log(e+\log(e+t))^{1+\epsilon}$, $\epsilon > 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\kappa_{\varphi_h} &\lesssim \alpha_{n,m,h} + c_n\int_1^\infty \frac{\log(e+\log(e+\Phi_{m-h}(t))^{4(m-h)})^h}{t\log(e+t)^2\log(e+\log(e+t))^{1+\epsilon}}dt\\
&\lesssim \alpha_{n,m,h} + c_n\int_1^\infty \frac{dt}{t\log(e+t)\log(e+\log(e+t))^{1+\epsilon}}\\
&\lesssim \frac{1}{\varepsilon},
\end{aligned}$$

y observemos también que

$$\Phi_{m-h}\circ\varphi_h \lesssim t\log(e+t)^m\log(e+\log(e+t))^{1+\varepsilon}. \tag{3.35}$$

Luego para $0 < h < m$, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\kappa_{\varphi_h}\int_{\mathbb{R}^n} A_h\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) M_{\Phi_{m-h}\circ\varphi_h} w(x)dx\\
&\quad\leq c\frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi_m\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) M_{L(\log L)^m(\log\log L)^{1+\varepsilon}} w(x)dx.
\end{aligned}$$

Para el caso $h = 0$, análogamente al primer caso obtenemos

$$\begin{aligned}\kappa_{\varphi_0} &= \alpha_{n,m} + c_n \int_1^\infty \frac{\varphi_0^{-1}\circ\Phi_m^{-1}(t)A_0(\log(e+t)^{4m})}{t^2\log(e+t)^{3m+1}}dt\\ &\lesssim \alpha_{n,m} + c_n \int_1^\infty \frac{\varphi_0^{-1}(t)}{t^2\log(e+t)}dt.\end{aligned}$$

Basta tomar $\varphi_0(t) = t\log(e+\log(e+t))^{1+\varepsilon}$, luego tenemos que $\kappa_{\varphi_0} < \frac{1}{\varepsilon}$ y

$$\Phi_m\circ\varphi_0 \lesssim \varphi_0(t)\log(e+t)^m = t\log(e+t)^m\log(e+\log(e+t))^{1+\varepsilon}. \tag{3.36}$$

En consecuencia, como $A_0(t) = t$,

$$\kappa_{\varphi_0}\int_{\mathbb{R}^n} A_0\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) M_{\Phi_m\circ\varphi_0}w(x)dx \le c\frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f(x)|}{\lambda}M_{L(\log L)^m(\log\log L)^{1+\varepsilon}}w(x)dx.$$

Para terminar consideremos el caso $h = m$. Observemos que

$$\begin{aligned}\kappa_{\varphi_m} &= \int_1^\infty \frac{\varphi_m^{-1}(t)\,A_m(\log(e+t)^2)}{t^2\log(e+t)^3}dt\\ &= \int_1^\infty \frac{\varphi_m^{-1}(t)\log(e+\log(e+t)^2)^m}{t^2\log(e+t)}dt,\end{aligned}$$

y tomando $\varphi_m(t) = t\log(e+t)^m\log(e+\log(e+t))^{1+\varepsilon}$, obtenemos $\kappa_{\varphi_m} < \frac{1}{\epsilon}$ y como $\Phi_0(t) = t$,

$$\begin{aligned}&\kappa_{\varphi_m}\int_{\mathbb{R}^n} A_m\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) M_{\Phi_0\circ\varphi_m}w(x)dx\\ &\quad\le c\frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi_m\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) M_{L(\log L)^m(\log\log L)^{1+\varepsilon}}w(x)dx.\end{aligned}$$

Juntando todas las desigualdades anteriores, nos queda

$$\begin{aligned}w\left(\{x\in\mathbb{R}^n : T_b^m f(x) > \lambda\}\right) &\le c_n C_T \sum_{h=0}^m \left(\kappa_{\varphi_h}\int_{\mathbb{R}^n} A_h\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) M_{\Phi_{m-h}\circ\varphi_h}w(x)dx\right)\\ &\le c_{n,m}C_T\frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi_m\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) M_{L(\log L)^m(\log\log L)^{1+\varepsilon}}w(x)dx.\end{aligned}$$

De una forma análoga podemos obtener que

$$w\left(\{x\in\mathbb{R}^n : T_b^m f(x) > \lambda\}\right) \le c_{n,m}C_T\frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi_m\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) M_{L(\log L)^{m+\varepsilon}}w(x)dx.$$

Ahora veamos las desigualdades que faltan. Suponiendo que $w \in A_\infty$. Para probar (3.33) vamos argumentar como en [29, Corolario 1.4]. Como $\log(t) \leq \frac{t^\alpha}{\alpha}$, para todo $t \geq 1$ tenemos que

$$\frac{1}{\varepsilon} M_{L(\log L)^{m+\varepsilon}} w \leq c \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\alpha^{m+\varepsilon}} M_{1+(m+\varepsilon)\alpha} w.$$

Tomando $(m+\varepsilon)\alpha = \frac{1}{\tau_n [w]_{A_\infty}}$ donde τ_n es elegido como en el Teorema 1.21 y usando este teorema obtenemos

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\alpha^\varepsilon} M_{1+(m+\varepsilon)\alpha} w = \frac{1}{\varepsilon} \left((m+\varepsilon)\tau_n \varepsilon [w]_{A_\infty}\right)^{m+\varepsilon} M_{1+\frac{1}{\tau_n [w]_{A_\infty}}} w \leq c_m \frac{1}{\varepsilon} [w]_{A_\infty}^{m+\varepsilon} M w.$$

Finalmente tomando $\varepsilon = \frac{1}{\log(e+[w]_{A_\infty})}$ tenemos

$$\frac{1}{\varepsilon} M_{L(\log L)^{m+\varepsilon}} w \leq c_m \frac{1}{\varepsilon} [w]_{A_\infty}^{m+\varepsilon} M w \leq c_m \log(e + [w]_{A_\infty}) [w]_{A_\infty}^m M w.$$

Esta desigualdad combinada con (3.32) nos permite probar (3.33). La prueba de (3.34) se sigue de (3.33) y usando que $w \in A_1$.

$\square$

Capítulo 4

Operadores fraccionarios generales

En este capítulo nos centraremos en operadores integrales de tipo singular y fraccionario más generales que los previos, en el sentido de que pueden tener más de una singularidad. Los operadores que vamos a estudiar en este capítulo son de la forma: dados $0 \leq \alpha < n$ y $m \in \mathbb{N}$

$$T_{\alpha,m}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k_1(x - A_1 y) \cdots k_m(x - A_m y) f(y) dy, \tag{4.1}$$

para ciertas matrices invertibles $A_1, \ldots, A_m$ tales que $A_i - A_j$ es invertible para $i \neq j$ y las funciones $k_i \in S_{n-\alpha_i,\psi_i} \cap H_{n-\alpha_i,\psi_i}$, con ψ_i funciones de Young y $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = n - \alpha$.

Los resultados originales desarrollados en este capítulo se pueden encontrar en los trabajos en colaboración con Dra. M. Silvina Riveros, Dr. Raúl Vidal [35, 36, 38].

Primero daremos un contexto histórico de este tipo de operadores estudiados en el grupo de análisis armónico y ecuaciones diferenciales de FAMAF-UNC. Luego, las secciones se dividen en dos grupos dependiendo las hipótesis que le pedimos a los pesos. Las secciones 4.2, 4.4 y 4.5 les pedimos que los pesos w estén A_∞ y que $w(Ax) \leq c_{n,A,w} w(x)$ p.p. $x \in \mathbb{R}^n$. A partir de la sección 4.6 definimos una nueva clase de pesos, $\mathcal{A}_{A,p,q}$ que implica la hipótesis $w(Ax) \leq c_{n,A,w} w(x)$ p.p. $x \in \mathbb{R}^n$.

4.1 Resumen histórico.

Este tipo de operadores fueron estudiados por primera vez en [68] donde para probar la acotación del operador maximal fraccionario en $L^p(\mathcal{H}^3)$, $p > 1$, donde $\mathcal{H}^3$ es el grupo de Heisenberg 3-dimensional, analizan la acotación en $L^2(\mathbb{R})$ del operador

$$Tf(x) = \int |x-y|^{-\alpha}|x+y|^{\alpha-1}f(y)dy,$$

con $0 < \alpha < 1$. Luego, en [23] generalizan el operador anterior a $\mathbb{R}^n$ y prueban la acotación en $L^p(\mathbb{R}^n)$ y el tipo débil (1,1) del operador

$$Tf(x) = \int |x-y|^{-\alpha}|x+y|^{-n+\alpha}f(y)dy,$$

con $0 < \alpha < n$. El núcleo de este tipo de operadores es $K(x,y) = |x-y|^{-\alpha}|x+y|^{-n+\alpha}$.

Una generalización natural es cambiar las funciones $|\cdot|^{-\alpha}$ y $|\cdot|^{-n+\alpha}$ por funciones localmente integrables k_1, k_2 con ciertas condiciones, otra generalización es aumentar el numero de funciones en el núcleo, pasar de 2 a una cantidad $m \in \mathbb{N}$. Las primeras generalizaciones de este estilo fueron estudiadas en [24, 25], tomando las funciones $k_1, \ldots, k_2$ de la siguiente manera: Sean $1 < q_1, \ldots, q_m < \infty$ tales que $\frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_m} = 1 - r$, con $0 \leq r < 1$. Definimos

$$k_i(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{jn/q}\varphi_{i,j}(2^j x),$$

para ciertas $\varphi_{i,j}$ funciones medibles. Dados $a_1, \ldots, a_m$ números reales no nulos distintos, definen el operador

$$Tf(x) = \int K(x,y)f(y)dy,$$

con $K(x,y) = k_1(x-a_1y)k_2(x-a_2y)\cdots k_m(x-a_my)$ y estudian la acotación en $L^p(\mathbb{R}^n)$. En [75] se prueba la acotación $L^p(\mathbb{R}^n) \to H^q(\mathbb{R}^n)$, con $1 < p < 1/r$ y $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - r$. Para el caso $r = 0$, en [78] se obtuvo la acotación en $L^p(w)$ para w un peso potencias en alguna clase de Muckenhoupt adecuada.

Otra generalización es: dados $a_1, a_2, \ldots, a_m$ números reales no nulos distintos, tomamos el núcleo

$$K(x,y) = |x-a_1y|^{-\alpha_1}|x-a_2y|^{-\alpha_2}\cdots|x-a_my|^{-\alpha_m},$$

con $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m = n-\alpha$ y $0 \leq \alpha < n$. El operador T asociado a este núcleo fue estudiado en [21, 69, 74] donde estudian las acotaciones: con $\alpha = 0$, en $L^p(w)$ con $w \in A_p$ tal que $w(a_ix) \leq cw(x)$ para todo $1 \leq i \leq m$ y p.p. $x \in \mathbb{R}^n$; de L^∞ en BMO; de $H^p(\mathbb{R}^n)$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$ con $\alpha = 0$ y que no esta acotado en $H^p(\mathbb{R})$; y acotaciones en espacios $BMO^\delta(w)$ con $m = 2$ y $\alpha_1 + \alpha_2 \leq n$.

Se puede reemplazar los números a_i por matrices reales $n \times n$, A_i, quedando como núcleo

$$K(x,y) = |x-A_1y|^{-\alpha_1}|x-A_2y|^{-\alpha_2}\cdots|x-A_my|^{-\alpha_m},$$

observar que si $A_i = a_i I$ estamos en el caso anterior. Varios autores estudiaron el operador T asociado a este núcleo con diversas condiciones en las matrices A_i, en [73] se estudio este operador con matrices singulares A_i tales que $A_1 + \cdots + A_m$ es invertible y cambiando la condición de los α_i obteniendo la acotación de $H^p(\mathbb{R}^n)$ en $L^q(\mathbb{R}^n)$ con p y q adecuados. En [76, 72] se consideran matrices ortogonales A_i tales que $A_i - A_j$ es invertible con $i \neq j$, se prueban acotaciones de $L^{p(\cdot)}$ en $L^{q(\cdot)}$ y de $H^{p(\cdot)}$ en $L^{q(\cdot)}$, respectivamente. Si dada una matriz invertible A tal que $A^M = I$ para algún $M \in \mathbb{N}$, consideramos $A_1, \ldots, A_m$ distintas potencias de A, en [80] se probaron acotaciones de tipo fuerte y débil $(p(\cdot), q(\cdot))$. Otro caso a destacar es tomando $A_1, \ldots, A_m$ matrices invertibles tales que

$$A_i - A_j \text{ es invertible con } i \neq j,$$

en [70] se prueba la acotación de $L^p(w^p)$ en $L^q(w^q)$ con $0 \leq \alpha < n$, $1 < p < n/\alpha$ y las desigualdades en los extremos $p = 1$ y $p = n/\alpha$, con w en la clase de pesos adecuadas y además que cumple

$$w(A_i x) \leq c w(x),$$

para todo $1 \leq i \leq m$ y p.p. $x \in \mathbb{R}^n$. En [79] se estudio el operador en el contexto de espacios de Lebesgue variables y se obtuvo las acotaciones de tipo fuerte y débil en $(p(\cdot), q(\cdot))$.

La última generalización que comentaremos va a ser cuando cada k_i tiene la forma de un núcleo *rough* fraccionario, es decir,

$$k_i(x) = \frac{\Omega_i(x/|x|)}{|x|^{\alpha_i}},$$

con $\Omega_i \in L^{p_i}$, algún $1 < p_i \leq \infty$, tal que su L^{p_i}-modulo de continuidad cumple alguna condición Dini. Dadas $A_1, \ldots, A_m$ matrices invertibles tales que $A_i - A_j$ es invertible con $i \neq j$, se define

$$K(x, y) = k_1(x - A_1 y) k_2(x - A_2 y) \ldots k_m(x - A_m y),$$

con $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = n - \alpha$, $o \leq \alpha < n$. En [71] se estudio el operador T asociado a ese núcleo y se obtuvieron la acotación de $L^p(w^p)$ en $L^q(w^q)$ con $1 < p < n/\alpha$ y las desigualdades en los extremos $p = 1$ y $p = n/\alpha$, con w en la clase de pesos adecuadas y además que cumple

$$w(A_i x) \leq c w(x),$$

para todo $1 \leq i \leq m$ y p.p. $x \in \mathbb{R}^n$.

4.2 El operador $T_{\alpha,m}$.

Sean $0 \leq \alpha < n$, $m \in \mathbb{N}$ y sea $T_{\alpha,m}$ el operador integral definido por (4.1). Consideraremos las siguientes hipótesis:

(H1) Para $1 \leq i \leq m$, sean Ψ_i funciones de Young y $0 \leq \alpha_i < n$ tales que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = n - \alpha$.

(H2) Para $1 \leq i \leq m$, sean A_i matrices invertibles que cumple $A_i - A_j$ es invertible con $j \neq i$.

(H3) Si $\alpha = 0$, supongamos que $T_{0,m}$ es acotado de L^{p_0} en L^{p_0} para algún $1 < p_0 < \infty$.

Una hipótesis importante es que $k_i \in S_{n-\alpha_i,\Psi_i}$ para todo $1 \leq i \leq m$, es decir que cada k_i cumplen una condición de tamaño fraccionaria. Una de las razones por la que estas condiciones son importantes se ve reflejada en el siguiente lema.

Lema 4.1. *Sea $0 \leq \alpha < n$, $m, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Suponemos (H1) y (H2) valen. Sean $\varphi_k(t) = t \log(e+t)^k$ y ϕ la función complementaria de $\Psi_1, \ldots, \Psi_m, \overline{\varphi_k}$.*

Sean $B = B(c_B, R)$ la bola de centro c_B con radio R y $z \in \cup_{j=1}^m A_j^{-1} B(c_B, 2R)$. Si $k_i \in S_{n-\alpha_i,\Psi_i}$ para todo $1 \leq i \leq m$ entonces existe una constante positiva C tal que

$$\int_B |K(y,z)| dy \leq C R^{\alpha},$$

con $K(y,z) = k_1(y - A_1 z) k_2(y - A_2 z) \ldots k_m(y - A_m z)$.

Demostración. Probaremos solamente el caso $m = 2$, el caso general es análogo. Sean $\tilde{B}_j = A_j^{-1} B(c_B, 2R)$. Supongo que $z \in \tilde{B}_1 \subset \cup_{j=1}^m \tilde{B}_j$.

$$\int_B |K(y,z)| dy = \int_{\{y \in B : |y - A_1 z| \leq |y - A_2 z|\}} |K(y,z)| dy + \int_{\{y \in B : |y - A_2 z| \leq |y - A_1 z|\}} |K(y,z)| dy.$$

Observemos que si $y \in B$ y como $z \in \tilde{B}_1$, tenemos que $|y - A_1 z| \leq |y| + |A_1 z| \leq 3R < 4R$ y $B \subset B(A_1 z, 4R)$. Para el primer término, considero los siguientes conjuntos

$$C_j = \left\{ y \in B : |y - A_1 z| \leq |y - A_2 z|, |y - A_1 z| \sim 2^{-j-1} R \right\},$$

notar que $C_j \subset B(A_1 z, 2^{-j} R) = B_{1,j}$. Luego

$$
\begin{aligned}
&\int_{\{y\in B:|y-A_1z|\le|y-A_2z|\}}|K(y,z)|dy \le \sum_{j=-2}^{\infty}\int_{C_j}|K(y,z)|dy\\
&\le \sum_{j=-2}^{\infty}\frac{|B(A_1z,2^{-j}R)|}{|B(A_1z,2^{-j}R)|}\int_{B(A_1z,2^{-j}R)}\chi_{C_j}(y)|k_1(y-A_1z)||k_2(y-A_2z)|dy\\
&\le \sum_{j=-2}^{\infty}|B_{1,j}|\|k_1(\cdot-A_1z)\chi_{C_j}\|_{\Psi_1,B_{1,j}}\|k_2(\cdot-A_2z)\chi_{C_j}\|_{\Psi_2,B_{1,j}}\|1\|_{\phi,B_{1,j}}\|1\|_{\varphi,B_{1,j}}\\
&= c\sum_{j=-2}^{\infty}|B_{1,j}|\|k_1(\cdot-A_1z)\chi_{C_j}\|_{\Psi_1,B_{1,j}}\|k_2(\cdot-A_2z)\chi_{C_j}\|_{\Psi_2,B_{1,j}}. \qquad (4.2)
\end{aligned}
$$

Veamos $\|k_i(\cdot-A_iz)\chi_{C_j}\|_{\Psi_i,B_{1,j}}\lesssim(2^{-j}R)^{\alpha_i}$ para $i=1,2$.
Si $i=1$, como $C_j\subset B_{1,j}\setminus B_{1,j+1}$ tenemos

$$
\begin{aligned}
\|k_1(\cdot-A_1z)\chi_{C_j}\|_{\Psi_1,B_{1,j}} &\le \|k_1(\cdot-A_1z)\|_{\Psi_1,|\cdot-A_1z|\sim 2^{-j-1}R} = \|k_1\|_{\Psi_1,|y|\sim 2^{-j-1}R}\\
&\le (2^{-j-1}R)^{-\alpha_1}, \qquad (4.3)
\end{aligned}
$$

donde la última desigualdad vale pues $k_1\in S_{n-\alpha_1}$.

Si $i=2$, tenemos que si $y\in C_j$ entonces $|y-A_2z|\ge|y-A_1z|>2^{-j-1}R$, entonces

$$
\begin{aligned}
\|k_2(\cdot-A_2z)\chi_{C_j}\|_{\Psi_2,B_{1,j}} &\le \|k_2(\cdot-A_2z)\|_{\Psi_2,|\cdot-A_1z|\sim 2^{-j-1}R}\\
&\le \sum_{k=0}^{\infty}\|k_2(\cdot-A_2z)\chi_{C_j}\|_{\Psi_2,|\cdot-A_2z|\sim 2^{-j+k-1}R}\\
&\le \sum_{k=0}^{\infty}(2^{-j+k-1}R)^{-\alpha_2} = (2^{-j-1}R)^{-\alpha_2}\sum_{k=0}^{\infty}(2^{-\alpha_2})^k\\
&= (2^{-j}R)^{-\alpha_2}\frac{2^{\alpha_2}}{1-2^{-\alpha_2}}. \qquad (4.4)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, usando (4.3), (4.4) y $\alpha_1+\alpha_2=n-\alpha$ la integral en (4.2) nos queda

$$
\int_{\{y\in B:|y-A_1z|\le|y-A_2z|\}}|K(y,z)|dy \le C\sum_{j=-2}^{\infty}(2^{-j}R)^{n-\alpha_1-\alpha_2} = CR^{\alpha}\sum_{j=-2}^{\infty}(2^{\alpha})^{-j}\simeq R^{\alpha}.
$$

Análogamente podemos probar que

$$
\int_{\{y\in B:|y-A_2z|\le|y-A_1z|\}}|K(y,z)|dy \lesssim R^{\alpha}.
$$

Luego, si $z \in A_j^{-1}B(c_B, 2R)$ para algún $1 \le j \le m$ entonces

$$\int_B |K(x,y)|dy \le CR^\alpha.$$

$\square$

Observación 4.2. *Observar que en las hipótesis anteriores si tomamos $\alpha = 0$ entonces $m > 1$. En efecto, si $\alpha = 0$ y $m = 1$ implica que $\alpha_1 = n$. entonces $T_{0,1}$ tiene un comportamiento similar al de un operador integral singular y la condición de tamaño no tendría sentido en este caso. Aún así los resultados siguientes son ciertos, ver por ejemplo [53].*

A continuación mostraremos la buena definición del operador entre los espacios que vamos a trabajar y que el operador es de tipo débil $(1,1)$ con respecto a la medida de Lebesgue.

Lema 4.3. *Sean $0 \le \alpha < n$, $m \in \mathbb{N}$ y sea $T_{\alpha,m}$ el operador integral definido por (4.1). Supongamos que valen las hipótesis $(H1), (H2), (H3)$. Sea ϕ la función complementaria de $\Psi_1, \dots, \Psi_m$. Si $k_i \in S_{n-\alpha_i,\Psi_i}$ Sean $\frac{n-\alpha}{ns} < q < \infty$ y $\nu \in A_s$ para algún $s > 1$. Si $f \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ entonces $T_{\alpha,m}f \in L^q(\nu)$.*

Observación 4.4. *Algunos ejemplos de estos pesos son:*

i) Sean $1 \le r < p < \infty$ y $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. Si $w^r \in A_{\frac{p}{r},\frac{q}{r}}$, entonces $w^q \in A_s$ con $s = \frac{q}{n}(n-\alpha)$.

ii) Sea $\alpha = 0$, $1 \le r < q = p < \frac{n}{\alpha}$ y $w \in A_{\frac{p}{r}}$.

iii) Sea Ψ una función de Young y $w \in A_{p,\Psi}$. Si $t^{q'} \le c\Psi(t)$ entonces $w^q \in A_q$. Por otro lado, si $t^{p'} \le c\Psi(t)$ entonces $w \in A_{p,q}$.

Demotración del Lema 4.3. Lo probaremos para $m = 2$. Sean $T = T_{\alpha,2}$ y $M = \max_{1\le j\le 2} \|A_j\|$. Supongamos que sop$f \subset B(0,R)$. Si $|x| > 2MR$ y $y \in$ sop$f$, entonces para $1 \le i \le 2$, $|A_i y| \le MR < \frac{|x|}{2}$ y

$$\frac{|x|}{2} \le |x| - RM \le |x - A_i y| \le |x| + |A_i y| < \frac{3}{2}|x|.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
|Tf(x)| &= \left| \int_{B(0,R)} k_1(x - A_1 y)k_2(x - A_2 y)f(y)dy \right| \\
&\le \left| \int_{\{y \in B(0,R): |x - A_2 y| \le |x - A_1 y|\}} k_1(x - A_1 y)k_2(x - A_2 y)f(y)dy \right| \\
&\quad + \left| \int_{\{y \in B(0,R): |x - A_1 y| \le |x - A_2 y|\}} k_1(x - A_1 y)k_2(x - A_2 y)f(y)dy \right|.
\end{aligned}$$

Vamos a estimar el primer término, el segundo se prueba de forma análoga. Sea

$$Z = \{y : |x - A_1 y| \leq 4|x|\}.$$

Por la desigualdad de Hölder y como $k_i \in S_{n-\alpha_i,\Psi_i}$, análogamente a Lema anterior, obtenemos que

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{y\in B(0,R):|x-A_2y|\leq|x-A_1y|} k_1(x - A_1y)k_2(x - A_2y)f(y)dy \right| \\
&\leq \frac{|Z \cap B(0,R)|}{|Z \cap B(0,R)|}\|f\|_{L^\infty} \int_{y\in B(0,R):|x-A_2y|\leq|x-A_1y|} |k_1(x - A_1y)k_2(x - A_2y)|dy \\
&\leq \|f\|_{L^\infty}|Z \cap B(0,R)|\|k_1(x - A_1\cdot)\chi_{\{y:\frac{|x|}{2}\leq|x-A_1y|<\frac{3}{2}|x|\}}\|_{\Psi_1,Z} \\
&\qquad \|k_2(x - A_2\cdot)\chi_{\{y:\frac{|x|}{2}\leq|x-A_2y|<\frac{3}{2}|x|\}}\|_{\Psi_2,Z} \\
&\leq c\|f\|_{L^\infty}|B(0,R)||x|^{-\alpha_1-\alpha_2} \\
&\leq c\|f\|_{L^\infty}R^n|x|^{\alpha-n} \\
&\leq c|x|^{\alpha-n}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si $|x| > 2MR$, entonces $|Tf(x)| \leq c|x|^{\alpha-n}$.
Por otro lado, si $|x| < 2MR$, $|x - A_iy| \leq |x| + |A_iy| < 3MR$. Procediendo como antes obtenemos que $|Tf(x)| \leq cR^{\alpha-n}$ y para $1 \leq r < \infty$,

$$\int_{B(0,2MR)} |Tf(x)|^r dx < C.$$

Luego, procedemos como en la demostración del Lema 3.2 en [71]. Sea $\nu \in A_s$ para algún $s > 1$, por la desigualdad de Hölder obtenemos que

$$\begin{aligned}
\int |Tf(x)|^q\nu(x)dx &= \left(\int_{|x|>2MR} |Tf(x)|^q\nu(x)dx\right) + \left(\int_{|x|>2MR} |Tf(x)|^q\nu(x)dx\right) \\
&\leq C\left(\int_{|x|>2MR} \frac{\nu(x)}{|x|^{q(n-\alpha)}}dx\right) + \left(\int_{|x|>2MR} |Tf(x)|^q\nu(x)dx\right).
\end{aligned}$$

Como $\nu \in A_s$ existe $\tilde{r} < s$ tal que $\nu \in A_{\tilde{r}}$, luego para $k \in \mathbb{N}$, $\nu(B(0, 2^{k+1}MR)) \leq C2^{kn\tilde{r}}$. Notar que $\frac{n-\alpha}{ns} < q$ y $\tilde{r} < s$, entonces tenemos que $n\tilde{r} - q(n-\alpha) < 0$. Luego,

$$\begin{aligned}
\int_{|x|>2MR} \frac{\nu(x)}{|x|^{q(n-\alpha)}}dx &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^kMR<|x|\leq2^{k+1}MR} \frac{\nu(x)}{|x|^{q(n-\alpha)}}dx \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-kq(n-\alpha)}\nu(B(0, 2^{k+1}MR)) \\
&\leq C\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(-q(n-\alpha)+n\tilde{r})} < C.
\end{aligned}$$

Por la desigualdad de Hölder con $\epsilon > 0$ a determinar

$$\begin{aligned}\int_{|x|<2MR} |Tf(x)|^q \nu(x)dx &\leq \left(\int_{|x|<2MR} |Tf(x)|^{q\frac{1+\epsilon}{\epsilon}} dx\right)^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}} \left(\int_{|x|<2MR} \nu(x)^{1+\epsilon} dx\right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \\ &\leq C \left(\int_{|x|<2MR} \nu(x)^{1+\epsilon} dx\right)^{\frac{1}{1+\epsilon}},\end{aligned}$$

donde la última desigualdad es por lo visto antes. Por Reverse Hölder existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\left(\int_{|x|<2MR} \nu(x)^{1+\epsilon} dx\right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} < C.$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\int |Tf(x)|^q \nu(x)dx \leq C.$$

□

Teorema 4.5. *Sean $m \in \mathbb{N}$ y sea $T_{0,m}$ el operador integral definido por* (4.1). *Supongamos que valen las hipótesis $(H1), (H2), (H3)$. Sea ϕ la función complementaria de $\Psi_1, \ldots, \Psi_m$. Si $k_i \in S_{n-\alpha_i,\Psi_i} \cap H_{n-\alpha_i,\Psi_i}$ entonces $T_{0,m}$ es de tipo débil $(1,1)$ respecto a la medida de Lebesgue, esto es*

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |T_{0,m}f(x)| > \lambda\}| \leq \frac{c}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f|,$$

para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Vamos a considerar solo el caso $m = 2$ y $T = T_{0,2}$.
Sea f en el espacio de Schwartz y $\lambda > 0$. Por la descomposición de Calderón-Zygmund para f a altura λ, tenemos $\Omega_\lambda = \cup_j Q_j$, donde Q_j son cubos diadicos disjuntos en $\mathbb{R}^n$. Entonces existe g y $h = \sum_j h_j$ funciones tales que $f = g + h$, $\|g\|_{p_0} \leq c_n \lambda^{1/p_0'} \|f\|_1^{1/p_0}$, $\mathrm{sop}(h_j) \subset Q_j$ y $\int h_j = 0$. Luego,

$$\begin{aligned}|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}| &\leq |\{x \in \mathbb{R}^n : |Tg(x)| > \lambda/2\}| + |\{x \in \mathbb{R}^n : |Th(x)| > \lambda/2\}| \\ &= I + II.\end{aligned}$$

Para I, usando el hecho de que T es de tipo débil (p_0, p_0), pues vale $(H4)$, obtenemos que

$$I = |\{x \in \mathbb{R}^n : |Tg(x)| > \lambda/2\}| \leq c\frac{2^{p_0}}{\lambda^{p_0}} \|g\|_{p_0}^{p_0} \leq c\frac{2^{p_0}}{\lambda^{p_0}} \|f\|_1 \lambda^{p_0-1} = \frac{c}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f|.$$

Para II, sean $\tilde{Q}_{j,i}$ cubos con centro $A_i c_j$ y $l(\tilde{Q}_{j,i}) = 4Ml(Q_j)$, donde $M = \max\limits_{1\le i\le 2}\|A_i\|$,

$$
\begin{aligned}
II &= |\{x\in\mathbb{R}^n : |Th(x)|>\lambda/2\}| \\
&\le |\{x\in\bigcup_j(\tilde{Q}_{j,1}\cup\tilde{Q}_{j,2}) : |Th(x)|>\lambda/2\} + |\{x\notin\bigcup_j(\tilde{Q}_{j,1}\cup\tilde{Q}_{j,2}) : |Th(x)|>\lambda/2\} \\
&\le |\bigcup_j(\tilde{Q}_{j,1}\cup\tilde{Q}_{j,2})| + |\{x\notin\bigcup_j(\tilde{Q}_{j,1}\cup\tilde{Q}_{j,2}) : |Th(x)|>\lambda/2\}.
\end{aligned}
$$

Para el primer término, tenemos que

$$
\begin{aligned}
|\bigcup_j(\tilde{Q}_{j,1}\cup\tilde{Q}_{j,2})| &\le \sum_j |\tilde{Q}_{j,1}|+|\tilde{Q}_{j,2}| = 2\sum_j(4Ml(Q_j))^n \\
&= 2(4M)^n\sum_j l(Q_j)^n = 2(4M)^n|\bigcup_j Q_j| \\
&\le \frac{c}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n}|f|.
\end{aligned}
$$

Para el segundo término, obtenemos que

$$
\begin{aligned}
|\{x\notin\bigcup_j(\tilde{Q}_{j,1}\cup\tilde{Q}_{j,2}) : |Th(x)|>\lambda/2\}| &\le \frac{2c}{\lambda}\int_{(\bigcup_j(\tilde{Q}_{j,1}\cup\tilde{Q}_{j,2}))^c}|Th(x)|dx \\
&\le \frac{2c}{\lambda}\sum_j\int_{(\bigcup_j(\tilde{Q}_{j,1}\cup\tilde{Q}_{j,2}))^c}\int_{Q_j}|K(x,y)-K(x,c_j)||h_j(y)|\,dy\,dx \\
&= \frac{2c}{\lambda}\sum_j\int_{Q_j}|h_j(y)|\int_{(\tilde{Q}_{j,1}\cup\tilde{Q}_{j,2})^c}|K(x,y)-K(x,c_j)|\,dx\,dy.
\end{aligned}
$$

Si

$$
\int_{(\tilde{Q}_{j,1}\cup\tilde{Q}_{j,2})^c}|K(x,y)-K(x,c_j)|dx \le C, \tag{4.5}
$$

entonces

$$
|\{x\notin\bigcup_j(\tilde{Q}_{j,1}\cup\tilde{Q}_{j,2}) : |Th(x)|>\lambda/2\}| \le \frac{C}{\lambda}\sum_j\int_{Q_j}|h_j(y)|dy \le \frac{C}{\lambda}\|f\|_1.
$$

Por lo tanto, T es de tipo débil $(1,1)$.

Ahora, probemos (4.5). Observemos que $B_{j,i} = B(A_i c_j, 2Ml(Q_j)) \subset \tilde{Q}_{j,i}$, entonces

$$\int_{(\tilde{Q}_{j,1}\cup\tilde{Q}_{j,2})^c} |K(x,y) - K(x,c_j))|dx \leq \sum_{l=1}^{2} \int_{Z^l} |K(x,y) - K(x,c_j)|dx,$$

donde

$$Z^l = (B_{j,1} \cup B_{j,2})^c \cap \{x : |x - A_l y| \leq |x - A_r y|, r \neq l, 1 \leq r \leq 2\}.$$

Escribimos el integrando como

$$\begin{aligned} |K(x,y) - K(x,c_j)| \leq & |k_1(x - A_1 y) - k_1(x - A_1 c_j)||k_2(x - A_2 y)| \\ & + |k_1(x - A_1 c_j)||k_2(x - A_2 y) - k_2(x - A_2 c_j)|. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Veamos solo el primer término, pues el segundo se prueba de manera análoga. Para $t \in \mathbb{N}$,

$$D_t^l = \{x \in Z^l : |x - A_l c_j| \sim 2^t l(Q_j)\}.$$

Observemos que $D_t^l \subset \{x : |x - A_l c_j| \sim 2^t l(Q_j)\} \subset B(A_l c_j, 2^{t+1} l(Q_j)) =: \tilde{B}_t^l$. Por la desigualdad de Hölder generalizada, tenemos que

$$\begin{aligned} &\int_{(\tilde{Q}_{j,1}\cup\tilde{Q}_{j,2})^c} |k_1(x - A_1 y) - k_1(x - A_1 c_j)||k_2(x - A_2 y)|dx \\ &\leq \sum_{l=1}^{2} \sum_{t=1}^{\infty} \int_{D_t^l} |k_1(x - A_1 y) - k_1(x - A_1 c_j)||k_2(x - A_2 y)|dx \\ &\leq \sum_{l=1}^{2} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{|\tilde{B}_t^l|}{|\tilde{B}_t^l|} \int_{\tilde{B}_t^l} \chi_{D_t^l} |k_1(x - A_1 y) - k_1(x - A_1 c_j)||k_2(x - A_2 y)|dx \\ &\leq C \sum_{l=1}^{2} \sum_{t=1}^{\infty} |\tilde{B}_t^l| \|k_1(\cdot - A_1 y) - k_1(\cdot - A_1 c_j))\chi_{D_t^l}\|_{\Psi_1,\tilde{B}_t^l} \|k_2(\cdot - A_2 y)\chi_{D_t^l}\|_{\Psi_2,\tilde{B}_t^l}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Para $l = 1$, como $k_2 \in S_{n-\alpha_2,\Psi_2}$, obtenemos que

$$\|k_2(\cdot - A_2 y)\chi_{D_t^1}\|_{\Psi_2,\tilde{B}_t^1} \leq c(2^t Ml(Q_j))^{-\alpha_2}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
&\sum_{t=1}^{\infty}|\tilde{B}_t^1|\|k_1(\cdot - A_1y) - k_1(\cdot - A_1c_j))\chi_{D_t^1}\|_{\Psi_1,\tilde{B}_t^1}\|k_2(\cdot - A_2y)\chi_{D_t^1}\|_{\Psi_2,\tilde{B}_t^1}\\
&\qquad \le c\sum_{t=1}^{\infty}(2^tMl(Q_j))^{n-\alpha_2}\|k_1(\cdot - A_1y) - k_1(\cdot - A_1c_j))\chi_{D_t^1}\|_{\Psi_1,\tilde{B}_t^1}\\
&\qquad \le C\sum_{t=1}^{\infty}(2^tMl(Q_j))^{\alpha_1}\|k_1(\cdot - A_1y) - k_1(\cdot - A_1c_j))\chi_{D_t^1}\|_{\Psi_1,\tilde{B}_t^1}\\
&\qquad \le C,
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad vale si $k_1 \in H_{n-\alpha_1,\Psi_1}$.

Si $l = 2$, como $k_2 \in S_{n-\alpha_2,\Psi_2}$, obtenemos que

$$\|k_2(\cdot - A_2y)\chi_{D_t^2}\|_{\Psi_2,\tilde{B}_t^2} \le c(2^tMl(Q_j))^{-\alpha_2}.$$

Procediendo como en (4.7) tenemos que

$$\begin{aligned}
&\sum_{t=1}^{\infty}|\tilde{B}_t^2|\|k_1(\cdot - A_1y) - k_1(\cdot - A_1c_j))\chi_{D_t^2}\|_{\Psi_1,\tilde{B}_t^2}\|k_2(\cdot - A_2y)\chi_{D_t^2}\|_{\Psi_2,\tilde{B}_t^2}\\
&\qquad \le C\sum_{t=1}^{\infty}(2^tMl(Q_j))^{\alpha_1}\|k_1(\cdot - A_1y) - k_1(\cdot - A_1c_j))\chi_{D_t^2}\|_{\Psi_1,\tilde{B}_t^2}\\
&\qquad \le C.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
&\int_{(\tilde{Q}_{j,1}\cup\tilde{Q}_{j,2})^c}|k_1(x - A_1y) - k_1(x - A_1c_j)||k_2(x - A_2y)|dx\\
&\le C\sum_{l=1}^{2}\sum_{t=1}^{\infty}|\tilde{B}_t^l|\|k_1(\cdot - A_1y) - k_1(\cdot - A_1c_j))\chi_{D_t^l}\|_{\Psi_1,\tilde{B}_t^l}\|k_2(\cdot - A_2y)\chi_{D_t^l}\|_{\Psi_2,\tilde{B}_t^l}\\
&\le C,
\end{aligned}$$

así queda probado (4.5). □

4.3 Ejemplos

En esta sección daremos un ejemplo del operador que estudiamos y ejemplos de las matrices y pesos con los cuales trabajaremos.

4.3.1 Ejemplos de $T_{\alpha,m}$

Presentaremos un ejemplo de este tipo de operadores diferentes de los clásicos.

Sean $1 \leq r < \infty$ y r' el exponente conjugado de r.
Sean $\Psi_1(t) = t^r$,$\Psi_2(t) = \exp(t) - 1$ y $\phi(t) = t^r \log(e+t)^{r'}$. Observar que

$$\Psi_1^{-1}(t)\Psi_2^{-1}(t)\phi^{-1}(t) \simeq t^{1/r}\log(e+t)\frac{t^{1/r'}}{\log(e+t)} = t,$$

entonces ϕ es la función complementaria de Ψ_1, Ψ_2.
Para $\beta_i > 0$, $i = 1, 2$, definimos

$$\tilde{k}_i(t+4) = \Psi_i^{-1}\left(\frac{1}{t(1-\log(t))^{1+\beta_i}}\right)\chi_{(0,1)}(t).$$

Observemos que

$$\int_{\mathbb{R}} \Psi_i(\tilde{k}_i(t))dt = \int_0^1 \frac{1}{t(1-\log(t))^{1+\beta_i}}dt = \frac{1}{\beta_i} < \infty.$$

Si $s > 1$, entonces $\tilde{k}_i\chi_{s<|x|\leq 2s} \equiv 0$. Si $s < 1$, tenemos que

$$\begin{aligned}\|\tilde{k}_i\|_{\Psi_i,|x|\sim s} = \|\tilde{k}_i\chi_{s<|x|\leq 2s}\|_{\Psi_i,B(0,2s)} &\leq 1 + \frac{1}{4s}\int_s^{2s}\Psi_i(\tilde{k}_i(t))dt \\ &\leq 1 + \frac{1}{4s}\left(\frac{1}{\beta_i}\right) \leq \frac{1}{s}\left(1 + \frac{1}{4\beta_i}\right).\end{aligned}$$

Luego, $\tilde{k}_i \in S_{\Psi_i}$. Además usando las ideas expuestas en la sección 2.2, se prueba que $\tilde{k}_i \in H_{\Psi_i}$.

Sea $0 < \alpha, \alpha_1, \alpha_2 < 1$ tales que $\alpha_1 + \alpha_2 = 1 - \alpha$. Por la Proposición 2.7, sabemos que si $k_i(t) = t^{1-\alpha_i}\tilde{k}_i(t)$ entonces $k_i \in H_{1-\alpha_i,\Psi_i} \cap S_{1-\alpha_i,\Psi_i}$. Definimos el operador

$$Tf(x) = \int k_1(x - A_1y)k_2(x - A_2y)f(y)dy, \tag{4.8}$$

donde k_i son las definidas antes y A_1, A_2 son matrices invertibles tales que $A_1 - A_2$ es invertible.

4.3.2 Ejemplos de matrices

En este capítulo consideramos matrices $\mathbb{R}^{n\times n}$ invertibles, es decir, en $GL(n, \mathbb{R})$. En esta subsección mostraremos algunos ejemplos de estas matrices, como lo son las matrices de rotaciones, las dilataciones y contracciones.

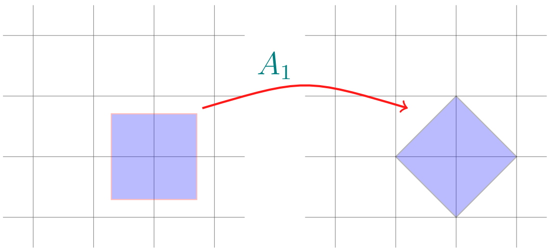
En el caso $n = 1$, las matrices son de la forma $A = (a)$ con $a \neq 0$, entonces aplicarle la matriz a un intervalo nos da otro intervalo. Para el caso $n = 2$, las matrices pueden ser rotaciones, dilataciones, contracciones, dilatar sobre una dirección y contraer en otra, entre otras.

Observar que si A es una rotación de $k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, o una dilatación pura cI, el conjunto AQ sigue siendo un cubo con lados paralelos a los ejes. En cambio, existen matrices A que al aplicar sobre un cubo, Q, le cambian la forma, es decir AQ puede ser un rombo o un rectángulo dependiendo de la matriz. Para ilustrar esto tenemos los siguientes ejemplos:

Por ejemplo si A_1 es una matriz de rotación en un angulo de $\frac{\pi}{4}$, es decir

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$

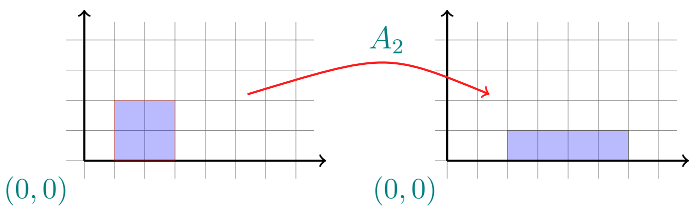
gráficamente si aplicamos A_1 a un cubo da como resultado lo siguiente



Otro ejemplo, si la matriz A_2 es una dilatación en el eje x y una contracción en el eje y. Esto es

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

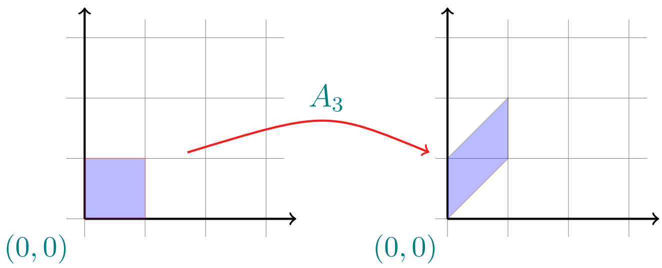
gráficamente sería



El último ejemplo que mostraremos es el caso si A_3 es la siguiente matriz

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

gráficamente sería



4.3.3 Ejemplos de pesos

Ahora mencionaremos algunos ejemplos de pesos con los que trabajaremos.

1. Sea $w(x) = |x|^{-\delta}$ con $0 < \delta < n$. Sabemos que $w \in A_1$ y cumple $w(Ax) \leq C_{w,A}w(x)$.

2. Si $w(x) = \begin{cases} \log\left(\frac{1}{|x|}\right) & \text{if } |x| \leq \frac{1}{e} \\ 1 & \text{if } |x| > \frac{1}{e} \end{cases}$, entonces $w \in A_1$ y cumple que $w(Ax) \leq C_{w,A}w(x)$.

3. Sean $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto medible y $t \geq 3$, definimos que

$$w = t\chi_E + \chi_{\mathbb{R}\setminus E}.$$

En [28, Lema 8.1], los autores mostraron que $w \in A_\infty$ con $[w]_{A_\infty} \leq 4\log(t)$. Por otro lado, sea $A = a \neq 0$, se puede ver que $w(ax) \lesssim w(x)$. En efecto,

$$w(ax) = t\chi_{a^{-1}E}(x) + \chi_{\mathbb{R}\setminus a^{-1}E}(x).$$

Si $x \notin E \cup a^{-1}E$, entonces $w(ax) = 1 = w(x)$.
Si $x \in E \cap a^{-1}E$, entonces $w(ax) = t = w(x)$.
Si $x \in E \setminus a^{-1}E$, entonces $w(ax) = 1 \leq t = w(x)$.
Si $x \in a^{-1}E \setminus E$, entonces $w(ax) = t \geq 1 = w(x)$ y $t^{-1}w(ax) \leq 1 = w(x)$
Por lo tanto, $w(ax) \leq tw(x)$. Más aún, $w \in A_{A,p}$ para algún $1 < p < \infty$ y para toda $A \in GL(1, \mathbb{R})$

Para estos ejemplos se usa la propiedad de que si A es invertible entonces para todo $x \neq 0$, tenemos que

$$\frac{|x|}{\|A^{-1}\|} \leq |Ax| \leq \|A\||x|.$$

4.4 Maximal Sharp.

En esta sección veremos la acotación de tipo Cofman-Fefferman para el operador $T_{\alpha,m}$ y sus conmutadores con pesos A_∞ tales que $w(A_ix) \leq cw(x)$. Para probar este resultado necesitamos acotación de la maximal Sharp. También comentaremos algunos ejemplos en Tabla 4.1.

Teorema 4.6. *Sean $0 \leq \alpha < n$, $m \in \mathbb{N}$ y sea $T_{\alpha,m}$ el operador integral definido por (4.1). Suponiendo que (H1), (H2) y (H3) valen. Sea ϕ es la función complementaria de $\Psi_1, \ldots, \Psi_m$. Si $k_i \in S_{n-\alpha_i,\Psi_i} \cap H_{n-\alpha_i,\Psi_i}$ entonces existe una constante positiva C tal que para $0 < \delta \leq 1$ y $f \in L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$*

$$M^\sharp_\delta |T_{\alpha,m}f|(x) := M^\sharp \left(|T_{\alpha,m}f|^\delta\right)(x)^{1/\delta} \leq C \sum_{i=1}^m M_{\alpha,\phi}f(A_i^{-1}x). \tag{4.9}$$

Para las estimaciones con pesos vamos a necesitar una condición extra como planteamos en un principio esta es: que exista una constante positiva $c > 0$ tal que

$$w(A_ix) \leq cw(x), \tag{4.10}$$

$p.p. x \in \mathbb{R}^n$ y para todo $1 \leq i \leq m$.

Teorema 4.7. *Sean $0 \leq \alpha < n$, $m \in \mathbb{N}$ y sea $T_{\alpha,m}$ el operador integral definido por (4.1). Supongamos que valen (H1), (H2) y (H3). Sean $0 < p < \infty$ y ϕ la función complementaria de $\Psi_1, \ldots, \Psi_m$. Si $k_i \in S_{n-\alpha_i,\Psi_i} \cap H_{n-\alpha_i,\Psi_i}$ entonces existe una constante positiva C tal que para $f \in L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ y $w \in A_\infty$,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T_{\alpha,m}f(x)|^p w(x)dx \leq C \sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} |M_{\alpha,\phi}f(A_i^{-1}x)|^p w(x)dx, \tag{4.11}$$

siempre que el lado izquierdo sea finito.
Más aún, si w cumple que (4.10), entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T_{\alpha,m}f(x)|^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |M_{\alpha,\phi}f(x)|^p w(x)dx.$$

Las versiones de los teoremas anteriores para el caso del conmutador son los siguientes.

Teorema 4.8. *Sean $0 \leq \alpha < n$, $m \in \mathbb{N}$ y sea $T_{\alpha,m}$ el operador integral definido por (4.1). Suponiendo que (H1), (H2) y (H3) valen. Sean $b \in BMO$ y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Sea $\varphi_k(t) = t\log(e+t)^k$ y sea ϕ la función complementaria de $\Psi_1, \ldots, \Psi_m, \overline{\varphi_k}$. Si*

$k_i \in S_{n-\alpha_i,\Psi_i} \cap H_{n-\alpha_i,\Psi_i,k}$, entonces existe una constante positiva $C = C(n, \alpha, A_1, \ldots, A_m)$ tal que, para $0 < \delta < \epsilon \leq 1$ y $f \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$M_\delta^\sharp |T_{\alpha,m,b}^k f|(x) \leq C \sum_{l=0}^{k-1} \|b\|_{BMO}^{k-l} M_\epsilon(T_{\alpha,m,b}^l)(x) + C\|b\|_{BMO}^k \sum_{i=1}^m M_{\alpha,\phi} f(A_i^{-1}x). \tag{4.12}$$

Teorema 4.9. *Sean $0 \leq \alpha < n$, $m \in \mathbb{N}$ y sea $T_{\alpha,m}$ el operador integral definido por (4.1). Supogamos que valen (H1), (H2) y (H3). Sean $b \in BMO$ y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Sea $\varphi_k(t) = t\log(e+t)^k$ y sea ϕ la función complementaria de $\Psi_1, \ldots, \Psi_m, \overline{\varphi_k}$. Si $k_i \in S_{n-\alpha_i,\Psi_i} \cap H_{n-\alpha_i,\Psi_i,k}$, entonces existe $C > 0$ tal que para $0 < p < \infty$, $f \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $w \in A_\infty$,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T_{\alpha,m,b}^k f(x)|^p w(x)dx \leq C\|b\|_{BMO}^{kp} \sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} |M_{\alpha,\phi} f(x)|^p w(A_i x)dx, \tag{4.13}$$

siempre que el lado izquierdo sea finito.
Más aún, si w cumple (4.10), entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T_{\alpha,m,b}^k f(x)|^p w(x)dx \leq C\|b\|_{BMO}^{kp} \int_{\mathbb{R}^n} |M_{\alpha,\phi} f(x)|^p w(x)dx.$$

Observación 4.10. *Observar que para el caso del conmutador se pide $k_i \in H_{n-\alpha_i,\Psi_i,k}$ que es más débil que la hipótesis de $k_i \in H_{n-\alpha_i,\Psi_i}$*

En la siguiente tabla se ilustran algunos ejemplos para estos resultados.

Tabla 4.1: Ejemplos

	$\Psi_i \quad 1 \leq i \leq m$	ϕ	$M_{\alpha,\phi}$
(i)	∞	$t\log(e+t)^k$	$M_{\alpha,L\log L^k}$
(ii)	t^{r_i}, $1 < r_i < \infty$	$t^s\log(e+t)^{sk}$, $\sum_{i=1}^m \frac{1}{r_i} + \frac{1}{s} = 1$	$M_{\alpha,L^s\log L^{sk}}$
(iii)	$\Psi_1 = t^r$, $1 < r < \infty$ $\Psi_2(t) = \exp(t) - 1$	$t^{r'}\log(e+t)^{(k+1)r'}$	$M_{\alpha,L^{r'}\log L^{r'(k+1)}}$

El ejemplo (i) con $m = 1$ es el ejemplo clásico probado en [4], (ii) con $k = 0$ abarca el ejemplo de los núcleos *rough* fraccionarios probado en [71]. El último fue explicado en la sección anterior.

Primero, recordemos algunas propiedades de las funciones de BMO,

Lema 4.11. *Sea $b \in BMO$.*

1. *Para subconjuntos medibles cualquiera $X_1 \subset X_2 \subset \mathbb{R}^n$ tales que $|X_1|, |X_2| > 0$, tenemos que*
$$|b_{X_1} - b_{X_2}| \leq \frac{|X_2|}{|X_1|}\|b\|_{BMO}.$$
En particular, si $\tilde{B}$ es un conjunto medible y $\tilde{B}_i = A_i^{-1}\tilde{B}$, A_i matrices invertibles $1 \leq i \leq m$, entonces
$$|b_{\tilde{B}} - b_{(\cup_{l=1}^m \tilde{B}_l)\cup\tilde{B}}| \leq (1 + \sum_{l=1}^{m} |det(A_l^{-1})|)\|b\|_{BMO}.$$

2. *Sean $B = B(c_B, R)$ una bola de centro c_B y radio R, y $B^j = B(c_B, 2^j R)$. Entonces,*
$$|b_B - b_{B^j}| \leq cj\|b\|_{BMO}.$$

En la demostración del Teorema 4.6, seguimos ideas clásicas como en [71], entre otros.

Demostración del Teorema 4.6. Para facilitar la lectura vamos a considerar sólo el caso de 2 matrices y el conmutador de orden 1, es decir, caso $m = 2$ y $k = 1$, el caso generar se prueba de manera análoga. Denotamos $[b, T_\alpha] = T^1_{\alpha,2,b}$.

Sean $f \in L^\infty_c$, $b \in BMO$ y $0 < \delta < \epsilon \leq 1$. Sean $x \in \mathbb{R}^n$ y $B = B(c_B, R)$ una bola que contenga a x, con centro c_B y radio R. Denotamos por $\tilde{B} = B(c_B, 2R)$ y para $1 \leq i \leq 2$, $\tilde{B}_i = A_i^{-1}\tilde{B}$. Sea $f_1 = f\chi_{\tilde{B}_1\cup\tilde{B}_2}$ y $f_2 = f - f_1$.
Por (1.5), basta probar que
$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B |f(x) - a|^\delta dx\right)^{1/\delta} \leq C\|b\|_{BMO}M_\epsilon(T_\alpha f)(x) + C\|b\|_{BMO}\sum_{l=1}^{2} M_{\alpha,\varphi}f(A_l^{-1}x).$$
para algún a y con las cotas que no dependan de B. Lo probaremos para $a := T_\alpha((b - b_{\tilde{B}\cup\tilde{B}_1\cup\tilde{B}_2})f_2)(c_B) < \infty$.
Primero escribiremos
$$\begin{aligned}[b, T_\alpha f](x) &= [b - b_{\tilde{B}\cup\tilde{B}_1\cup\tilde{B}_2}, T_\alpha f](x)\\ &= (b(x) - b_{\tilde{B}\cup\tilde{B}_1\cup\tilde{B}_2})T_\alpha f(x) - T_\alpha((b - b_{\tilde{B}\cup\tilde{B}_1\cup\tilde{B}_2})f)(x).\end{aligned}$$

Ahora, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|B|}\int_B |[b,T_\alpha f](y)-a|^\delta dy\right)^{1/\delta}\\
&\quad\leq \left(\frac{1}{|B|}\int_B |(b(y)-b_{\tilde{B}\cup\tilde{B}_1\cup\tilde{B}_2})T_\alpha f(y)|^\delta dy\right)^{1/\delta}\\
&\quad+ \left(\frac{1}{|B|}\int_B |T_\alpha((b-b_{\tilde{B}\cup\tilde{B}_1\cup\tilde{B}_2})f_1)(y)|^\delta dy\right)^{1/\delta}\\
&\quad+ \left(\frac{1}{|B|}\int_B |T_\alpha((b-b_{\tilde{B}\cup\tilde{B}_1\cup\tilde{B}_2})f_2)(y)-T_\alpha((b-b_{\tilde{B}\cup\tilde{B}_1\cup\tilde{B}_2})f_2)(c_B)|^\delta dy\right)^{1/\delta}\\
&\quad= I+II+III.
\end{aligned}\tag{4.14}$$

Veamos cada término por separado con $0<\alpha<n$. Para estimar el primer término, I, sea $q=\epsilon/\delta>1$, por el Lema 4.11 y la desigualdad de Hölder para q y q' obtenemos que

$$\begin{aligned}
I &\leq \left(\frac{1}{|B|}\int_B |(b(y)-b_{\tilde{B}})T_\alpha f(y)|^\delta dy\right)^{1/\delta} + |b_{\tilde{B}}-b_{\tilde{B}\cup\tilde{B}_1\cup\tilde{B}_2}|\left(\frac{1}{|B|}\int_B |T_\alpha f(y)|^\delta dy\right)^{1/\delta}\\
&\leq \left(\frac{1}{|B|}\int_B |(b(y)-b_{\tilde{B}})|^{q'\delta} dy\right)^{1/q'\delta}\left(\frac{1}{|B|}\int_B |T_\alpha f(y)|^{q\delta} dy\right)^{1/q\delta}\\
&\quad + C\|b\|_{BMO}M_\delta(T_\alpha f)(x)\\
&\leq C\|b\|_{BMO}M_\epsilon(T_\alpha f)(x)+C\|b\|_{BMO}M_\delta(T_\alpha f)(x)\\
&\leq C\|b\|_{BMO}M_\epsilon(T_\alpha f)(x).
\end{aligned}$$

Para II, utilizando la desigualdad de Jensen, Lema 4.11 y Lema 4.1 tenemos que

$$
\begin{aligned}
II &\leq \frac{1}{|B|}\int_B |T_\alpha((b-b_{\tilde{B}\cup\tilde{B}_1\cup\tilde{B}_2})f_1)(y)|dy\\
&\leq \frac{1}{|B|}\int_B\int_{\tilde{B}_1\cup\tilde{B}_2} |K(y,z)||b(z)-b_{\tilde{B}\cup\tilde{B}_1\cup\tilde{B}_2}||f_1(z)|dzdy\\
&\leq \sum_{i=1}^{2}\frac{1}{|B|}\int_{\tilde{B}_i} |b(z)-b_{\tilde{B}\cup\tilde{B}_1\cup\tilde{B}_2}||f_1(z)|\int_B |K(y,z)|dydz.\\
&\leq CR^\alpha\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{|B|}\int_{\tilde{B}_i} |b(z)-b_{\tilde{B}\cup\tilde{B}_1\cup\tilde{B}_2}||f(z)|dz\\
&\leq CR^\alpha\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{|\tilde{B}_i|}\int_{\tilde{B}_i} (|b(z)-b_{\tilde{B}_i}|+|b_{\tilde{B}_i}-b_{\tilde{B}\cup\tilde{B}_1\cup\tilde{B}_2}|)|f(z)|dz\\
&\leq C\sum_{i=1}^{2}\left[R^\alpha\|b-b_{\tilde{B}_i}\|_{\exp L,\tilde{B}_i}\|f\|_{\phi,\tilde{B}_i}+\|b\|_{BMO}M_\alpha f(A_i^{-1}x)\right]\\
&\leq C\|b\|_{BMO}\sum_{i=1}^{2}M_{\alpha,\phi}f(A_i^{-1}x).
\end{aligned}
$$

Para el último termino, III, por la desigualdad de Jensen obtenemos que

$$
\begin{aligned}
III &\leq \frac{1}{|B|}\int_B |T_{\alpha,2}((b-b_{\tilde{B}\cup\tilde{B}_1\cup\tilde{B}_2})f_2)(y)-T_{\alpha,2}((b-b_{\tilde{B}\cup\tilde{B}_1\cup\tilde{B}_2})f_2)(c_B)|dy\\
&\leq \frac{1}{|B|}\int_B\int_{(\tilde{B}_1\cup\tilde{B}_2)^c} |K(y,z)-K(c_B,z)||b(z)-b_{\tilde{B}\cup\tilde{B}_1\cup\tilde{B}_2}||f(z)|dzdy\\
&\leq \frac{1}{|B|}\int_B\sum_{l=1}^{2}\int_{Z^l} |K(y,z)-K(c_B,z)||b(z)-b_{\tilde{B}\cup\tilde{B}_1\cup\tilde{B}_2}||f(z)|dzdy,
\end{aligned}
$$

donde

$$Z^l=(\tilde{B}_1\cup\tilde{B}_2)^c\cap\{z:|c_B-A_lz|\leq|c_B-A_rz|, r\neq l, 1\leq r\leq 2\}.$$

Estimemos $|K(y,z)-K(c_B,z)|$ para $y\in B$ y $z\in Z^l$, para esto escribimos

$$
\begin{aligned}
|K(y,z)-K(c_B,z)| \leq& |k_1(y-A_1z)-k_1(c_B-A_1z)||k_2(y-A_2z)|\\
&+|k_1(c_B-A_1z)||k_2(y-A_2z)-k_2(c_B-A_2z)|. \qquad (4.15)
\end{aligned}
$$

Por simplicidad estimaremos solo el primer término de (4.15), el otro se prueba de manera análoga. Para $j\in\mathbb{N}$, sea

$$D_j^l=\{z\in Z^l:|c_B-A_lz|\sim 2^{j+1}R\}.$$

Observar que $D_j^l \subset \{z : |c_B - A_l z| \sim 2^{j+1}R\} \subset A_l^{-1}B(c_B, 2^{j+2}R) =: \tilde{B}_{l,j}$. Usando la desigualdad de Hölder generalizada y el Lema 4.11 obtenemos que

$$
\begin{aligned}
&\int_{Z^l} |k_1(y - A_1 z) - k_1(c_B - A_1 z)||k_2(y - A_2 z)||b(z) - b_{\tilde{B}\cup\tilde{B}_1\cup\tilde{B}_2}||f(z)|dz \\
&\quad \leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{D_j^l} |k_1(y - A_1 z) - k_1(c_B - A_1 z)||k_2(y - A_2 z)||b(z) - b_{\tilde{B}\cup\tilde{B}_1\cup\tilde{B}_2}||f(z)|dz \\
&\quad \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\tilde{B}_{l,j}|}{|\tilde{B}_{l,j}|} \int_{\tilde{B}_{l,j}} \Bigg[\chi_{\{z:|c_B - A_l z|\sim 2^{j+1}R\}} \chi_{D_j^l} |k_1(y - A_1 z) - k_1(c_B - A_1 z)||k_2(y - A_2 z)| \\
&\qquad\qquad \left(|b(z) - b_{\tilde{B}_{l,j}}| + |b_{\tilde{B}_{l,j}} - b_{\tilde{B}\cup\tilde{B}_1\cup\tilde{B}_2}| \right) |f(z)| \Bigg] dz \\
&\quad \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\tilde{B}_{l,j}| \|(k_1(y - A_1\cdot) - k_1(c_B - A_1\cdot))\chi_{D_j^l}\|_{\Psi_1,|c_B - A_l z|\sim 2^{j+1}R} \\
&\qquad \|k_2(y - A_2\cdot)\chi_{Z^l}\|_{\Psi_2,|c_B - A_l z|\sim 2^{j+1}R} \left(\|b - b_{\tilde{B}_l^j}\|_{\exp L, \tilde{B}_{l,j}} + cj\|b\|_{BMO} \right) \|f\|_{\phi,\tilde{B}_{l,j}} \\
&\quad \leq c\|b\|_{BMO} \sum_{j=1}^{\infty} |\tilde{B}_{l,j}| j \|(k_1(y - A_1\cdot) - k_1(c_B - A_1\cdot))\chi_{D_j^l}\|_{\Psi_1,|c_B - A_l z|\sim 2^{j+1}R} \\
&\qquad\qquad \|k_2(y - A_2\cdot)\chi_{D_j^l}\|_{\Psi_2,|c_B - A_l z|\sim 2^{j+1}R} \|f\|_{\phi,\tilde{B}_{l,j}}.
\end{aligned}
$$

Notar que $|c_B - A_l z|/2 \leq |y - A_l z| < 2|c_B - A_l z|$ y si $|c_B - A_l z| \sim 2^{j+1}R$ entonces $2^j R \leq |y - A_l z| \leq 2^{j+2}R$. Luego tenemos que

$$
\begin{aligned}
&\|k_l(y - A_l\cdot)\chi_{D_j^l}\|_{\Psi_l,|c_B - A_l z|\sim 2^{j+1}R} \\
&\qquad \leq \|k_l(y - A_l\cdot)\|_{\Psi_l,|y - A_l z|\sim 2^j R} + \|k_l(y - A_l\cdot)\|_{\Psi_l,|y - A_l z|\sim 2^{j+1}R} \\
&\qquad \leq \|k_l(\cdot)\|_{\Psi_l,|x|\sim 2^j R} + \|k_l(\cdot)\|_{\Psi_l,|x|\sim 2^{j+1}R} \\
&\qquad \leq c(2^j R)^{-\alpha_l},
\end{aligned}
$$

donde la última desigualdad vale pues $k_l \in S_{n-\alpha_l,\Psi_l}$. Además, por hipótesis

$$\|k_l(c_B - A_l\cdot)\chi_{D_j^l}\|_{\Psi_l,|c_B - A_l z|\sim 2^{j+1}R} \leq c(2^{j+1}R)^{-\alpha_l}.$$

Para $r \neq l$, vamos a probar

$$\|k_r(y - A_r\cdot)\chi_{D_j^l}\|_{\Psi_r,|c_B - A_l z|\sim 2^{j+1}R} \leq c(2^j R)^{-\alpha_r}. \tag{4.16}$$

Si $z \in D_j^l$ entonces $|c_B - A_r z| \geq |c_B - A_l z| \geq 2^{j+1}R$, esto es $D_j^l \subset A_r^{-1}B(c_B, 2^{j+1}R)^c$. Luego $D_j^l \subset A_l^{-1}B(c_B, 2^{j+2}R) \subset A_r^{-1}B(c_B, 2^{t+j+2}R)$ para algún $t > 1$ tal que

$2^t \geq \|A_r A_l^{-1}\|$. Escribamos $D_j^l = \bigcup_{k=j}^{j+t} (D_j^l)_{k,r}$ donde

$$(D_j^l)_{k,r} = \{z \in D_j^l : |c_B - A_r z| \sim 2^{k+1} R\}.$$

Observemos que $(D_j^l)_{k,r} \subset \{z : |c_B - A_r z| \sim 2^{j+1} R\}$. Como $k_r \in S_{n-\alpha_r, \Psi_r}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|A_l^{-1} B(c_B, 2^{j+2}R)|} \int_{A_l^{-1} B(c_B, 2^{j+2}R)} \Psi_r \left(\frac{k_r(y - A_r z) \chi_{\cup_{k=j}^{j+t} (D_j^l)_{k,r}}(z)}{\lambda} \right) dz \\
&= \frac{1}{|A_l^{-1} B(c_B, 2^{j+2}R)|} \int_{A_l^{-1} B(c_B, 2^{j+2}R) \cap (\cup_{k=j}^{j+t} (D_j^l)_{k,r})} \Psi_r \left(\frac{k_r(y - A_r z)}{\lambda} \right) dz \\
&= \sum_{k=j}^{j+t} \frac{1}{|A_l^{-1} B(c_B, 2^{j+2}R)|} \int_{A_l^{-1} B(c_B, 2^{j+2}R) \cap (D_j^l)_{k,r}} \Psi_r \left(\frac{k_r(y - A_r z)}{\lambda} \right) dz \\
&= \sum_{k=j}^{j+t} \frac{1}{|A_l^{-1} B(c_B, 2^{j+2}R)|} \int_{(D_j^l)_{k,r}} \Psi_r \left(\frac{k_r(y - A_r z) \chi_{(D_j^l)_{k,r}}(z)}{\lambda} \right) dz \\
&\leq \sum_{k=j}^{j+t} \frac{|A_r^{-1} B(c_B, 2^{k+2}R)|}{|A_l^{-1} B(c_B, 2^{j+2}R)|} \frac{1}{|A_r^{-1} B(c_B, 2^{k+2}R)|} \\
&\qquad \int_{A_r^{-1} B(c_B, 2^{k+2}R)} \Psi_r \left(\frac{k_r(y - A_r z) \chi_{(D_j^l)_{k,r}}(z)}{\lambda} \right) dz \\
&\leq \sum_{k=j}^{j+t} \frac{|\det(A_r^{-1})|}{|\det(A_l^{-1})|} 2^{(k-j)n} \frac{1}{|A_r^{-1} B(c_B, 2^{k+2}R)|} \\
&\qquad \int_{A_r^{-1} B(c_B, 2^{k+2}R)} \Psi_r \left(\frac{k_r(y - A_r z) \chi_{(D_j^l)_{k,r}}(z)}{\lambda} \right) dz.
\end{aligned}$$

Como $R > |c_B - A_r z| \geq |c_B - A_l z|$, para todo $R > 0$, entonces $A_l^{-1} B(c_B, R) \subset A_r^{-1} B(c_B, R)$. Luego, $|A_l^{-1} B(c_B, R)| \leq |A_r^{-1} B(c_B, R)|$ y $|\det(A_r^{-1})| \geq |\det(A_l^{-1})|$.

Si consideramos $\lambda = \frac{|\det(A_r^{-1})|}{|\det(A_l^{-1})|}\mu$ y usando que Ψ_r es convexa, tenemos que

$$\sum_{k=j}^{j+t} \frac{|\det(A_r^{-1})|}{|\det(A_l^{-1})|} 2^{(k-j)n} \frac{1}{|A_r^{-1}B(c_B, 2^{k+2}R)|}$$

$$\int_{A_r^{-1}B(c_B,2^{k+2}R)} \Psi_r\left(\frac{|\det(A_l^{-1})|}{|\det(A_r^{-1})|}\frac{k_r(y-A_rz)\chi_{(D_j^l)_{k,r}}(z)}{\mu}\right)dz$$

$$\leq \sum_{k=j}^{j+t} 2^{(k-j)n}\frac{1}{|A_r^{-1}B(c_B, 2^{k+2}R)|}\int_{A_r^{-1}B(c_B,2^{k+2}R)} \Psi_r\left(\frac{k_r(y-A_rz)\chi_{(D_j^l)_{k,r}}(z)}{\mu}\right)dz$$

$$\leq 2^{tn}\sum_{k=j}^{j+t} \frac{1}{|A_r^{-1}B(c_B, 2^{k+2}R)|}\int_{A_r^{-1}B(c_B,2^{k+2}R)} \Psi_r\left(\frac{k_r(y-A_rz)\chi_{(D_j^l)_{k,r}}(z)}{\mu}\right)dz \leq 1.$$

Finalmente, tomando $\mu = (t+1)2^{tn}\sum_t^{j+t}\|k_r(y-A_r\cdot)\|_{\Psi_r,|c_B-A_rz|\sim 2^{k+1}R} \geq (t+1)2^{tn}\|k_r(y-A_r\cdot)\|_{\Psi_r,|c_B-A_rz|\sim 2^{k+1}R}$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\|k_r(y-A_r\cdot)\chi_{D_j^l}\|_{\Psi_r,|c_B-A_lz|\sim 2^{j+1}R} &= \|k_r(y-A_r\cdot)\chi_{\cup_{k=j}^{j+t}(D_j^l)_{k,r}}\|_{\Psi_r,|c_B-A_lz|\sim 2^{j+1}R} \\
&\leq \frac{|\det(A_r^{-1})|}{|\det(A_l^{-1})|}(t+1)2^{tn}\sum_{k=j}^{t+j}\|k_r(y-A_r\cdot)\|_{\Psi_r,|c_B-A_rz|\sim 2^{k+1}R} \\
&\lesssim \sum_{k=j}^{j+t}\|k_r(\cdot)\|_{\Psi_r,|x|\sim 2^kR} + \|k_r(\cdot)\|_{\Psi_r,|x|\sim 2^{k+1}R} \\
&\lesssim \sum_{k\geq j}(2^kR)^{-\alpha_r} = c(2^jR)^{-\alpha_r},
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad vale pues $k_r \in S_{n-\alpha_r,\Psi_r}$.

Ahora para $l=1$, como $k_2 \in S_{n-\alpha_2,\Psi_2}$ y por lo probado antes, obtenemos que

$$\begin{aligned}
&\int_{Z^1}|k_1(y-A_1z)-k_1(c_B-A_1z)||k_2(y-A_2z)||b(z)-b_{\tilde{B}\cup\tilde{B}_1\cup\tilde{B}_2}||f_2(z)|dz \\
&\quad\leq c\|b\|_{BMO}\sum_{j=1}^{\infty}(2^jR)^{n-\alpha_2}j\|(k_1(y-A_1\cdot)-k_1(c_B-A_1\cdot))\chi_{D_j^1}\|_{\Psi_1,|c_B-A_1z|\sim 2^{j+1}R}\|f\|_{\phi,\tilde{B}_1^j} \\
&\quad\leq c\|b\|_{BMO}M_{\alpha,\phi}f(A_1^{-1}x) \\
&\qquad\qquad\sum_{j=1}^{\infty}(2^jR)^{n-\alpha_2-\alpha}j\|(k_1(y-A_1\cdot)-k_1(c_B-A_1\cdot))\chi_{D_j^1}\|_{\Psi_1,|c_B-A_1z|\sim 2^{j+1}R} \\
&\quad\leq c\|b\|_{BMO}M_{\alpha,\phi}f(A_1^{-1}x),
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad vale pues $k_1 \in H_{n-\alpha_1,\Psi_1,1}$.

Para $l = 2$ observemos que

$$\|(k_1(y - A_1\cdot) - k_1(c_B - A_1\cdot))\chi_{D_j^2}\|_{\Psi_1,|c_B - A_2 z|\sim 2^{j+1}R}$$
$$\leq \sum_{k\geq j} \|(k_1(y - A_1\cdot) - k_1(c_B - A_1\cdot))\chi_{(D_j^2)_{k,1}}\|_{\Psi_1,|c_B - A_1 z|\sim 2^{k+1}R}.$$

Luego, obtenemos que

$$\sum_{j=1}^{\infty}(2^j R)^{\alpha_1} j\|(k_1(y - A_1\cdot) - k_1(c_B - A_1\cdot))\chi_{D_j^1}\|_{\Psi_1,|c_B - A_1 z|\sim 2^{j+1}R}$$
$$\leq \sum_{j=1}^{\infty}(2^j R)^{\alpha_1} j\sum_{k\geq j}\|(k_1(y - A_1\cdot) - k_1(c_B - A_1\cdot))\chi_{(D_j^2)_{k,1}}\|_{\Psi_1,|c_B - A_1 z|\sim 2^{k+1}R}$$
$$\leq \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k\geq j} 2^{\alpha_1(j-k)}(2^k R)^{\alpha_1} k\|(k_1(y - A_1\cdot) - k_1(c_B - A_1\cdot))\chi_{(D_j^2)_{k,1}}\|_{\Psi_1,|c_B - A_1 z|\sim 2^{k+1}R}$$
$$\leq \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{k}(2^{-\alpha_1})^{k-j}\right)(2^k R)^{\alpha_1} k\|(k_1(y - A_1\cdot) - k_1(c_B - A_1\cdot))\chi_{(D_j^2)_{k,1}}\|_{\Psi_1,|c_B - A_1 z|\sim 2^{k+1}R}$$
$$\leq c\sum_{k=1}^{\infty}(2^k R)^{\alpha_1} k\|(k_1(y - A_1\cdot) - k_1(c_B - A_1\cdot))\chi_{(D_j^2)_{k,1}}\|_{\Psi_1,|c_B - A_1 z|\sim 2^{k+1}R} \leq c,$$

donde la última desigualdad vale pues $k_1 \in H_{n-\alpha_1,\Psi_1,1}$.

Luego, como en el caso de $l = 1$, obtenemos que

$$\int_{Z^2}|k_1(y - A_1 z) - k_1(c_B - A_1 z)||k_2(y - A_2 z)||b(z) - b_{\tilde{B}\cup\tilde{B}_1\cup\tilde{B}_2}||f(z)|dz$$
$$\leq c\|b\|_{BMO} M_{\alpha,\varphi} f(A_l^{-1}x).$$

Por lo tanto,

$$III \leq c\|b\|_{BMO}\sum_{l=1}^{2} M_{\alpha,\varphi} f(A_l^{-1}x).$$

Para el caso $\alpha = 0$. Los términos I y III son análogos al caso anterior $0 < \alpha < n$. Para II, en cambio, observemos que T_0 es de tipo débil $(1, 1)$ con respecto a la medida de Lebesgue (ver Teorema 4.5), como $0 < \delta < 1$ usando la desigualdad de Kolmogorov (ver por ejemplo el Lema 5.16 en [18]) obtenemos que

$$II \leq \frac{C}{|B|}\int_{\mathbb{R}^n}|f_1(y)|dy = \sum_{i=1}^{2}\frac{C}{|B|}\int_{\tilde{B}_i}|f_1(y)|dy \leq C\sum_{i=1}^{2} Mf(A_i^{-1}f(x)),$$

con lo cual obtenemos el resultado deseado.

$\square$

Demostración del Teorema 4.7. Por la técnica de extrapolación (ver Teorema 1.64), para ver que (4.11) vale para todo $0 < p < \infty$ y todo $w \in A_\infty$ es suficiente ver que vale para algún $0 < p_0 < \infty$ y todo $w \in A_\infty$. Veamos que (4.11) vale para p_0, el cual podemos tomar tal que $\frac{n-\alpha}{n} < p_0 < \infty$.

Sea $w \in A_\infty$, existe $r > 1$ tal que $w \in A_r$. Sea $0 < \delta < 1$ tal que $1 < r < p_0/\delta$, entonces $w \in A_{p_0/\delta}$. Luego, por el Lema 4.3, tenemos que $\|T_{\alpha,m}f\|_{L^{p_0}(w)} < \infty$, y $\|(T_{\alpha,m}f)^\delta\|_{L^{p_0/\delta}(w)} < \infty$.

Aplicando la desigualdad de Fefferman-Stein y el Teorema 4.6 obtenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |T_{\alpha,m}f(x)|^{p_0} w(x)dx &\le \int_{\mathbb{R}^n} |M(T_{\alpha,m}f)^\delta(x)|^{p_0/\delta} w(x)dx \\
&\le \int_{\mathbb{R}^n} (M_\delta^\sharp(T_{\alpha,m}f)(x))^{p_0} w(x)dx \\
&\le C\sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} (M_{\alpha,\phi}f(A_i^{-1}x))^{p_0} w(x)dx.
\end{aligned}$$

por lo tanto, para todo $w \in A_\infty$, (4.11) vale para p_0, esto es

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T_{\alpha,m}f(x)|^{p_0} w(x)dx \le C\sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} (M_{\alpha,\phi}f(A_i^{-1}x))^{p_0} w(x)dx. \tag{4.17}$$

Luego, como mencionamos antes, usando extrapolación (4.11) vale para todo $0 < p < \infty$ y $w \in A_\infty$.

Si w cumple (4.10), tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |T_{\alpha,m}f(x)|^{p} w(x)dx &\le C\sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} (M_{\alpha,\phi}f(A_i^{-1}x))^{p} w(x)dx \\
&= C\sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} (M_{\alpha,\phi}f(x))^{p} w(A_i x)dx \\
&\le C\sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} (M_{\alpha,\phi}f(x))^{p} w(x)dx.
\end{aligned}$$

□

Demostración del Teorema 4.9. Por la técnica de extrapolación (ver Teorema 1.64), para ver que (4.11) vale para todo $0 < p < \infty$ y todo $w \in A_\infty$ es suficiente ver que vale para algún $0 < p_0 < \infty$ y todo $w \in A_\infty$.

Veamos que (4.11) vale para p_0, el cual podemos tomar tal que $\frac{n-\alpha}{n} < p_0 < \infty$.

Primero consideremos el caso en el cual w y $b \in L^\infty$. Por homogeneidad, podemos asumir que $\|b\|_{BMO} = 1$. Procedemos por inducción en k.

Cuando $k=0$, escribimos $T^0_{\alpha,m,b}=T_{\alpha,m}$. Como $k_i\in H_{n-\alpha_i,\Psi_i,0}=H_{n-\alpha_i,\Psi_i}$, el Teorema 4.7 implica que

$$\int_{\mathbb{R}^n}|T_{\alpha,m}f(x)|^p w(x)dx\leq C\sum_{i=1}^m\int_{\mathbb{R}^n}|M_{\alpha,\phi}f(x)|^p w(A_ix)dx.$$

Supongamos que el resultado vale para todo $0\leq j\leq k-1$, veamos que vale para k. Fijamos $\Psi_1,\dots,\Psi_m$ y ϕ tales que $\Psi_1^{-1}(t)\cdots\Psi_m^{-1}(t)\overline{\varphi_k}^{-1}(t)\phi^{-1}(t)\lesssim t$ para $t\geq t_0$, para algún $t_0>0$, con $\varphi_k(t)=t\log(e+t)^k$ y $k_i\in S_{n-\alpha_i,\Psi_i}\cap H_{n-\alpha_i,\Psi_i,k}$.

Sea $f\in L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$. Sin perdida de generalidad, podemos asumir que $\|M_{\alpha,\phi}f\|_{L^{p_0}(w_{A_i})}$ y $\|T^k_{\alpha,m,b}f\|_{L^{p_0}(w)}$ son finitos, para $i=1,...,m$. Sea $w\in A_\infty$, existe $r>1$ tal que $w\in A_r$. Sea $0<\delta<1$ tal que $1<r<p_0/\delta$, luego $w\in A_{p_0/\delta}$. Queremos usar la desigualdad de Fefferman-Stein. Para esto necesitamos ver que $\|M_\delta(T^k_{\alpha,m,b}f)\|_{L^{p_0}(w)}$ es finito. Notar que como $w\in A_{p_0/\delta}$ con $p_0/\delta>1$ tenemos que

$$\|M_\delta(T^k_{\alpha,m,b}f)\|_{L^{p_0}(w)}=\|M(T^k_{\alpha,m,b}f)^\delta\|^{\frac{1}{\delta}}_{L^{\frac{p_0}{\delta}}(w)}\leq C\|T^k_{\alpha,m,b}f\|_{L^{p_0}(w)}<\infty.$$

Luego, por la desigualdad de Fefferman-Stein y el Lema 4.6, para todo ϵ tal que $\delta<\epsilon<1$, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}|T^k_{\alpha,m,b}f(x)|^{p_0}w(x)dx&\leq\int_{\mathbb{R}^n}|M(T^k_{\alpha,m,b}f)^\delta(x)|^{p_0/\delta}w(x)dx\\&\leq\int_{\mathbb{R}^n}(M^\sharp_\delta(T^k_{\alpha,m,b}f)(x))^{p_0}w(x)dx\\&\leq C\sum_{l=0}^{k-1}\|(M_\epsilon(T^l_{\alpha,m,b}f)\|^{p_0}_{L^{p_0}(w)}+C\sum_{i=1}^m\int_{\mathbb{R}^n}(M_{\alpha,\phi}f(A_i^{-1}x))^{p_0}w(x)dx.\end{aligned}\tag{4.18}$$

Como $\delta<q/r<1$, podemos tomar $\epsilon>0$ tales que $\delta<\epsilon<p_0/r<1$, y entonces $w\in A_{p_0/\epsilon}$. Por lo tanto,

$$\|(M_\epsilon(T^l_{\alpha,m,b}f)\|_{L^{p_0}(w)}=\|(M(|T^l_{\alpha,m,b}f|^\epsilon)\|^{1/\epsilon}_{L^{p_0/\epsilon}(w)}\leq c\|T^l_{\alpha,m,b}f\|_{L^{p_0}(w)}.$$

Notar que para $0\leq l\leq k-1$ y para todo $t\geq e$, tenemos que

$$\Psi_1^{-1}(t)\cdots\Psi_m^{-1}(t)\overline{\varphi_l}^{-1}(t)\phi^{-1}(t)\leq\Psi_1^{-1}(t)\cdots\Psi_m^{-1}(t)\overline{\varphi_k}^{-1}(t)\phi^{-1}(t)\lesssim t.$$

Además, $k_i\in S_{n-\alpha_i,\Psi_i}\cap H_{n-\alpha_i,\Psi_i,k}\subset S_{n-\alpha_i,\Psi_i}\cap H_{n-\alpha_i,\Psi_i,l}$. Luego, por hipótesis inductiva tenemos que para todo $0\leq l\leq k-1$,

$$\|(M_\epsilon(T^l_{\alpha,m,b}f)\|^{p_0}_{L^{p_0}(w)}\leq c\|T^l_{\alpha,m,b}f\|^{p_0}_{L^{p_0}(w)}\leq c\sum_{i=1}^m\int_{\mathbb{R}^n}(M_{\alpha,\phi}f(A_i^{-1}x))^{p_0}w(x)dx,$$

siempre que el término del medio sea finito. Por el momento, asumamos que ese es el caso. Con la última desigualdad y (4.18) se sigue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T^k_{\alpha,m,b}f(x)|^{p_0}w(x)dx \leq C\sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}^n}(M_{\alpha,\phi}f(x))^{p_0}w(A_ix)dx.$$

Observemos que en ningún momento usamos que w y $b \in L^\infty$, esto es necesario para ver que $\|T^l_{\alpha,m,b}\|_{L^{p_0}(w)} < \infty$ para todo $0 \leq l \leq k-1$. Como $w \in L^\infty$ y $T_{\alpha,m} : L^q(dx) \to L^{p_0}(dx)$, con $\frac{1}{p_0} = \frac{1}{q} - \frac{\alpha}{n}$,

$$\begin{aligned}\|T^l_{\alpha,m,b}f\|_{L^{p_0}(w)} &= \left\|\sum_{j=1}^l c_{l,j}b^{l-j}T_{\alpha,m}(b^jf)\right\|_{L^{p_0}(w)} \leq \|w\|_\infty \left\|\sum_{j=1}^l c_{l,j}b^{l-j}T_{\alpha,m}(b^jf)\right\|_{L^{p_0}} \\ &\leq C\|w\|_\infty \|b\|^l_\infty \|f\|_{L^q} < \infty,\end{aligned}$$

pues $f \in L^\infty_c$. Por lo tanto, para w y $b \in L^\infty$, vale (4.11), esto es

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T^k_{\alpha,m,b}f(x)|^{p_0}w(x)dx \leq C\|b\|^{kp_0}_{BMO}\sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}^n}(M_{\alpha,\phi}f(x))^{p_0}w(A_ix)dx,$$

donde C no depende de $\|b\|_{L^\infty}$ ni de $\|w\|_{L^\infty}$ (C solo depende de la constante A_∞ de w, p_0, k, T).

Para todo peso $w \in A_\infty$, definimos $w_N = \min\{w, N\}$, entonces $w_N \in A_\infty$ y $[w_N]_{A_\infty} \leq C[w]_{A_\infty}$ con C independiente de N. Como $w_N \in L^\infty$ entonces vale (4.11) con C independiente de N. Tomando $N \to \infty$ y usando el teorema de convergencia monótona concluimos que vale (4.11) para todo $w \in A_\infty$.

Consideremos el caso general, para $b \in BMO$. Si $N \in \mathbb{N}$ definimos $b_N = b\chi_{[-N,N]} + N\chi_{(N,\infty)} - N\chi_{(-\infty,-N)}$, entonces $b_N \in L^\infty$, $|b_N(x) - b_N(y)| \leq |b(x) - b(y)|$ y $\|b_N\|_{BMO} = \|b_N\|_{BMO} \leq 2\|b\|_{BMO}$. Podemos aplicar el resultado anterior con b_N en lugar de b, entonces

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |T^k_{\alpha,m,b_N}f(x)|^{p_0}w(x)dx &\leq C\|b_N\|^{kp_0}_{BMO}\sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}^n}(M_{\alpha,\phi}f(x))^{p_0}w(A_ix)dx \\ &\leq C\|b\|^{kp_0}_{BMO}\sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}^n}(M_{\alpha,\phi}f(x))^{p_0}w(A_ix)dx,\end{aligned}$$

donde C no depende de N. Como $f \in L^\infty_c$ se sigue que para $0 \leq l \leq k$, $(b_N)^lf \to b^lf$ cuando $N \to \infty$ en L^p para $p > 1$. Como $T_{\alpha,m}$ es acotado de L^p en L^q, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$, tenemos que $T_{\alpha,m}((b_N)^lf) \to T_{\alpha,m}(b^lf)$ cuando $N \to \infty$ en L^q. Pasando a una subsuseción la convergencia es en casi todo punto y como

$$T^k_{\alpha,m,b_N}f(x) = \sum_{l=0}^k C_{l,k}b^{k-l}_N(x)T_{\alpha,m}(b^l_Nf)(x),$$

tenemos que $T^k_{\alpha,m,b_{N_j}}f(x) \to T^k_{\alpha,m,b}f(x)$ p.p. $x \in \mathbb{R}^n$ cuando $j \to \infty$. Luego utilizando el lema de Fatou, obtenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |T^k_{\alpha,m,b}f(x)|^{p_0}w(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{j\to\infty} |T^k_{\alpha,m,b_{N_j}}f(x)|^{p_0}w(x)dx \\ &\leq \liminf_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |T^k_{\alpha,m,b_{N_j}}f(x)|^{p_0}w(x)dx \\ &\leq C\|b\|^{kp_0}_{BMO} \sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} (M_{\alpha,\phi}f(x))^{p_0}w(A_ix)dx.\end{aligned}$$

Podemos concluir que vale (4.11) para cualquier $b \in BMO$.

Luego, como mencionamos, usando extrapolación obtenemos que vale (4.11) para todo $0 < p < \infty$, $b \in BMO$ y $w \in A_\infty$.

Si w cumple la condición (4.10), entonces tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |T^k_{\alpha,m,b}f(x)|^{p}w(x)dx &\leq C \sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} (M_{\alpha,\phi}f(x))^{p}w(A_ix)dx \\ &\leq C \sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} (M_{\alpha,\phi}f(x))^{p}w(x)dx.\end{aligned}$$

□

4.5 Desigualdades con un peso.

En esta sección veremos algunas estimaciones con pesos que se obtienen como corolario de los teoremas de la sección anterior.

Recordemos la constante κ_r definida en el Lema 1.14, que relaciona funciones de Young, Φ, con t^r, $1 < r < \infty$,

$$\kappa_r = \left(2 \sup_{t \geq \Phi^{-1}(1/2)} \frac{\Phi(t)}{t^r} \right)^{1/r}.$$

Primero, veamos la acotación en el espacio BMO pesado, ver definición en la sección 1.5, con pesos en la clase $A(\frac{n}{\alpha r}, \infty)$.

Teorema 4.12. *Sean $0 \leq \alpha < n$, $m \in \mathbb{N}$ y sea $T_{\alpha,m}$ el operador integral definido por (4.1). Supongamos que valen (H1), (H2) y (H3). Sean ϕ la función complementaria de $\Psi_1, \dots, \Psi_m$ y $k_i \in S_{n-\alpha_i,\Psi_i} \cap H_{n-\alpha_i,\Psi_i}$. Supongamos que existe $r > 1$ tal que $\kappa_r < \infty$. Si $w^r \in A_{\frac{n}{\alpha r},\infty}$ y cumple (4.10), entonces existe una constante $C > 0$ tal que para $f \in L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$, se cumple que*

$$\||T_{\alpha,m}f|\|_w \leq C\|fw\|_{L^{n/\alpha}}.$$

Demostración. Observemos primero que si $w^r \in A_{\frac{n}{\alpha r},\infty}$ entonces $\|wM_{\alpha,s}f\|_\infty \leq C\|fw\|_{L^{n/\alpha}}$. Esta desigualdad está probada en [71], aún asi daremos la prueba para una mayor comprensión.

En efecto, por la desigualdad de Hölder obtenemos que

$$\int_B |f(x)|^r dx \leq \left(\int_B |f(x)|^{\frac{n}{\alpha}} w^{\frac{n}{\alpha}}(x)dx\right)^{\frac{\alpha}{n}} \left(\int_B w^{-r\left(\frac{n}{\alpha r}\right)'}\right)^{\frac{1}{\left(\frac{n}{\alpha r}\right)'}}.$$

Para $x \in B$, como $w^r \in A_{\frac{n}{\alpha r},\infty}$ tenemos que

$$\begin{aligned} w(x)&\left(\frac{1}{|B|^{1-\frac{\alpha r}{n}}}\int_B |f(x)|^r dx\right)^{1/r} \\ &\leq \|w^r\chi_B\|_\infty^{\frac{1}{r}} \left(\int_B |f(x)|^{\frac{n}{\alpha}} w^{\frac{n}{\alpha}}(x)dx\right)^{\frac{\alpha}{n}} \left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{-s\left(\frac{n}{\alpha r}\right)'}\right)^{\frac{1}{\left(\frac{n}{\alpha r}\right)'}} \\ &\leq [w^r]_{A_{\frac{n}{\alpha r},\infty}} \left(\int_B |f(x)|^{\frac{n}{\alpha}} w^{\frac{n}{\alpha}}(x)dx\right)^{\frac{\alpha}{n}} \leq [w^r]_{A_{\frac{n}{\alpha r},\infty}} \|fw\|_{L^{n/\alpha}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|wM_{\alpha,r}f\|_\infty \leq C\|fw\|_{L^{n/\alpha}}.$$

Ahora, usando el Teorema 4.6 y la desigualdad (1.4) obtenemos que

$$\begin{aligned} \||T_{\alpha,m}f|\|_w \simeq \|wM^\sharp(T_{\alpha,m})\|_\infty &\leq C\sum_{i=1}^m \|wM_{\alpha,\phi}f(A_i^{-1}\cdot)\|_\infty = C\sum_{i=1}^m \|w(A_i\cdot)M_{\alpha,\phi}f\|_\infty \\ &\leq C\sum_{i=1}^m \|wM_{\alpha,\phi}f\|_\infty \leq Cm\kappa_r\|wM_{\alpha,r}f\|_\infty \lesssim \|fw\|_{L^{n/\alpha}}. \end{aligned}$$

□

Ahora, veamos la acotación tipo débil $(r, \frac{rn}{n-\alpha r})$ respecto a la medida $w(x)dx$ del operador.

Teorema 4.13. *Sean $0 \leq \alpha < n$, $m \in \mathbb{N}$ y sea $T_{\alpha,m}$ el operador integral definido por (4.1). Supongamos que valen (H1), (H2) y (H3). Sean ϕ la función complementaria de $\Psi_1, \ldots, \Psi_m$ y $k_i \in S_{n-\alpha_i,\Psi_i} \cap H_{n-\alpha_i,\Psi_i}$. Supongamos que existe $1 < r$ tal que $\kappa_r < \infty$. Si $w^r \in A(1, \frac{n}{n-\alpha r})$ y cumple (4.10) entonces existe una constante $C > 0$ tal que para $f \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, se cumple que*

$$\sup_{\lambda>0}\lambda(w^{\frac{rn}{n-\alpha r}}\{x \in \mathbb{R}^n : |T_{\alpha,m}f(x)| > \lambda\})^{\frac{n-\alpha r}{rn}} \leq C\left(\int |f(x)|^r w^r(x)dx\right)^{1/r}.$$

Demostración. Sea $t > 1$ tal que $\frac{1}{t} = \frac{1}{r} - \frac{\alpha}{n} = \frac{n-\alpha r}{rn}$. Por Teorema 4.7 y la desigualdad (1.4) tenemos que

$$\begin{aligned}(w^t\{x \in \mathbb{R}^n : |T_{\alpha,m}f(x)| > \lambda\})^{\frac{1}{t}} &\leq C(w^t\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^m M_{\alpha,\phi}f(A_i^{-1}x) > c\gamma\lambda\})^{\frac{1}{t}} \\ &\leq C(w^t\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^m M_{\alpha,r}f(A_i^{-1}x) > c\gamma\lambda\})^{\frac{1}{t}} \\ &\leq C(w^t\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^m M_{\alpha r}(|f|^r)(A_i^{-1}x) > \lambda^r\})^{\frac{1}{t}},\end{aligned}$$

donde la última desigualdad vale pues $M_{\alpha,r}(f) = M_{\alpha r}(|f|^r)$ donde $M_{\alpha r}$ es la maximal fraccionario con αr.

Como w cumple (4.10), obtenemos

$$\begin{aligned}\sup_{\lambda>0}\lambda(w^t\{x \in \mathbb{R}^n : |T_{\alpha,m}f(x)| > \lambda\})^{\frac{1}{t}} &\leq C\sup_{\lambda>0}\lambda(w^t\{x \in \mathbb{R}^n : M_{\alpha r}|f|^r(x) > \lambda^r\})^{\frac{1}{t}} \\ &\leq C\left(\int |f|^r(x)w^r(x)dx\right)^{1/r},\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se sigue del hecho que $w^r \in A_{1,\frac{n}{n-\alpha r}}$ y que $M_{\alpha r}$ es de tipo débil $(1, \frac{n}{n-\alpha r})$, es decir es de tipo débil $(1, t/r)$. □

El tipo fuerte de $T_{\alpha,m}$ se sigue de la acotación de $M_{\alpha,\phi}$ probada en [3], ver Teorema 1.30 en los Preliminares.

Teorema 4.14. *Sean $0 \leq \alpha < n$, $m \in \mathbb{N}$ y sea $T_{\alpha,m}$ el operador integral definido por (4.1). Supongamos que valen (H1), (H2) y (H3). Sean ϕ la función complementaria de $\Psi_1, \ldots, \Psi_m$ y $k_i \in S_{n-\alpha_i,\Psi_i} \cap H_{n-\alpha_i,\Psi_i}$. Sean $1 \leq r < p < n/\alpha$ y $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. Sean η y φ funciones de Young tales que $\eta^{-1}(t)t^{\frac{\alpha}{n}} \lesssim \varphi^{-1}(t)$ para todo $t > 0$. Si $\varphi^{1+\frac{sn}{n-\alpha}} \in B_{\frac{sn}{n-\alpha}}$ para todo $s > r(n-\alpha)/(n-\alpha r)$ y $w^r \in A(\frac{p}{r}, \frac{q}{r})$ cumple (4.10), entonces*

$$\|T_{\alpha,m}f\|_{L^q(w^q)} \leq C\|f\|_{L^p(w^p)}.$$

Demostración. Como $w^r \in A_{\frac{p}{r},\frac{q}{r}}$, por el Lema 4.3 tenemos que si $f \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ entonces $T_{\alpha,m}f \in L^q(w^q)$. Ahora, del Teorema 4.7 y Teorema 1.30, obtenemos que

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |T_{\alpha,m}f(x)|^q w^q(x)dx\right)^{1/q} &\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |M_{\alpha,\phi}f(x)|^q w^q(x)dx\right)^{1/q} \\ &\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w^p(x)dx\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

□

Observemos que los Teoremas 4.12 y 4.13 dependen de un exponente auxiliar r. Este exponente r da lugar a una clase de pesos que son suficientes para probar una acotación de $T_{\alpha,m}$, pero se podría considerar otro tipo de clases de pesos para ver una acotación. Tomando una clase de pesos que cumplan una condición estilo Bump como las definidas en los preliminares y que no dependan del exponente r, nos permitirá probar otra desigualdad de tipo fuerte para este operador.

Del Teorema 1.34 y el Teorema 4.7 podemos obtener acotaciones del operador $T_{\alpha,m}$ desde $L^p(w^p)$ en $L^q(w^q)$ con condiciones estilo Bump,

Teorema 4.15. *Sean $0 \leq \alpha < n$, $m \in \mathbb{N}$ y sea $T_{\alpha,m}$ el operador integral definido por (4.1). Supongamos que valen (H1), (H2) y (H3). Sean ϕ la función complementaria de $\Psi_1, \ldots, \Psi_m$ y $k_i \in S_{n-\alpha_i,\Psi_i} \cap H_{n-\alpha_i,\Psi_i}$. Sean $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ y $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. Sean ϕ, B y C funciones de Young tales que $B^{-1}(t)C^{-1}(t) \leq c\phi^{-1}(t)$, para $t \geq t_0 > 0$. Si $C \in B_p^\alpha$ y $w \in A_{q,B}$ cumple (4.10), entonces existe una constante $c > 0$ tales que para toda $f \in L^p(w^p)$, se cumple que*

$$\|T_{\alpha,m}f\|_{L^q(w^q)} \leq c\|f\|_{L^p(w^p)}.$$

Demostración. Como $w \in A_{q,B}$, por el Lema 4.3 tenemos que si $f \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ entonces $T_{\alpha,m}f \in L^q(w^q)$. Ahora, del Teorema 4.7 y Teorema 1.34, obtenemos que

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |T_{\alpha,m}f(x)|^q w^q(x)dx\right)^{1/q} &\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |M_{\alpha,\phi}f(x)|^q w^q(x)dx\right)^{1/q} \\ &\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w^p(x)dx\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

□

Para el caso del conmutador de orden k de $T_{\alpha,m}$ solo obtenemos la acotación de $L^p(w^p)$ en $L^q(w^q)$.

Teorema 4.16. *Sean $0 \leq \alpha < n$, $m \in \mathbb{N}$ y sea $T_{\alpha,m}$ el operador integral definido por (4.1). Supongamos que valen (H1), (H2) y (H3). Sean $b \in BMO$ y $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Sean $\varphi_k(t) = t\log(e+t)^k$, ϕ la función complementaria de $\Psi_1, \ldots, \Psi_m, \overline{\varphi_k}$ y $k_i \in S_{n-\alpha_i,\Psi_i} \cap H_{n-\alpha_i,\Psi_i,k}$. Sean $1 < p < n/\alpha$ y $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. Supongamos además que se cumple alguna de las siguientes hipótesis:*

(a) Supongamos que existe $1 < r < p$ tal que $\kappa_r < \infty$. Sea η una función de Young tal que $\eta^{-1}(t)t^{\frac{\alpha}{n}} \lesssim \phi^{-1}(t)$ para todo $t > 0$. Si $\phi^{1+\frac{sn}{n-\alpha}} \in B_{\frac{sn}{n-\alpha}}$ para todo $s > r(n-\alpha)/(n-\alpha r)$ y $w^r \in A(\frac{p}{r}, \frac{q}{r})$,

(b) Supongamos que existe B y C funciones de Young tales que $B^{-1}(t)C^{-1}(t) \leq \tilde{c}\phi^{-1}(t)$, $t > t_0 > 0$, $C \in B_p^\alpha$ y $w \in A_{q,B}$,

(c) Supongamos que el operador $T_{\alpha,m}$ es acotado de $L^p(w^p)$ en $L^q(w^q)$ para todo $w \in A_{p,q}$.

Si w cumple la condición (4.10) entonces existe $c > 0$ tal que para toda $f \in L^p(w^p)$,

$$\|T^k_{\alpha,m,b}f\|_{L^q(w^q)} \leq c\|b\|^k_{BMO}\|f\|_{L^p(w^p)}.$$

Demostración. Primero, observar que si se cumple la hipótesis (a) o (b) entonces tenemos que $M_{\alpha,\phi}$ es acotado de $L^p(w^p)$ en $L^q(w^q)$.
Luego, por el Teorema 4.9 y como w cumple (4.10),

$$\|T^k_{\alpha,m,b}f\|_{L^q(w^q)} \leq c\|b\|^k_{BMO}\|M_{\alpha,\phi}f\|_{L^q(w^q)} \leq c\|b\|^k_{BMO}\|f\|_{L^p(w^p)}.$$

Si se cumple la hipótesis (c), utilizaremos la técnica de la formula integral de Cauchy para $T = T_{\alpha,m}$. Sea $w \in A_{p,q}$ y $\nu = we^{Re(z)b}$, donde $Re(z)$ es la parte real del complejo z. Si $\nu \in A_{p,q}$, entonces

$$\|T_z f\|_{L^q(w^q)} = \|T(fe^{-zb})\|_{L^q(\nu^q)} \leq c\|fe^{-zb}\|_{L^p(\nu^p)} = c\|f\|_{L^p(w^p)},$$

pues T es acotado de $L^p(\nu^p)$ en $L^q(\nu^q)$.

Veamos que $\nu \in A_{p,q}$. Si $w \in A_{p,q}$ entonces $w^q \in A_{1+\frac{q}{p'}}$ y existe $r > 1$ tal que $w^{qr} \in A_{1+\frac{q}{p'}}$. Sea $\epsilon_0 = \frac{\min\{1,\frac{p'}{q}\}}{qr'\|b\|_{BMO}}$, si $|z| = \epsilon_0$ entonces

$$|qRe(z)| \leq q|z| = \frac{\min\{1,\frac{p'}{q}\}}{r'\|b\|_{BMO}}.$$

Por el Lema 1.65, tenemos que $\nu^q \in A_{1+\frac{q}{p'}}$ y $\nu \in A_{p,q}$. Por lo tanto,

$$\|T^k_b f\|_{L^p(w^p)} \leq \frac{1}{2\pi\epsilon_0^k}\sup_{|z|=\epsilon_0}\|T_z(f)\|_{L^p(w^p)} \leq \frac{1}{2\pi c^k_{p,q}}\|b\|^k_{BMO}\|f\|_{L^q(w^q)}.$$

□

4.6 Desigualdades con dos pesos.

En esta sección vamos a probar desigualdades del operador $T = T_{\alpha,m}$ con pares de pesos (u, v). Para esto consideramos al operador adjunto T^* definido como

$$T^*g(x) = \int \tilde{k}_1(x - A_1^{-1}y)\cdots\tilde{k}_m(x - A_m^{-1}y)g(y)dy,$$

donde $\tilde{k}_i(x) = k_i(-A_i x)$. Si T^* cumple las mismas hipótesis que T es decir, cumple (H1), (H2) y (H3), existe ϕ la función complementaria de $\Psi_1, \dots, \Psi_m$ y $\tilde{k}_i \in S_{n-\alpha_i,\Psi_i} \cap H_{n-\alpha_i,\Psi_i}$, entonces por Teorema 4.7 tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T^* f(x)|^q w(x)dx \leq c \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{m} (M_{\alpha,\phi} f(A_i x))^q \, w(x)dx.$$

para todo $0 < q < \infty$ y $w \in A_\infty$.

Teorema 4.17. *Sea ϕ una función de Young, $0 \leq \alpha < n$ y $1 < p < \infty$. Supongamos que existen funciones de Young $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ tales que $\mathcal{E} \in B_{p'}$ y $\mathcal{E}^{-1}(t)\mathcal{F}^{-1}(t) \leq \phi^{-1}(t)$.*

Sea T un operador lineal tal que su adjunto T^* cumple

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T^* f(x)|^q w(x)dx \leq c \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{m} (M_{\alpha,\phi} f(A_i x))^q \, w(x)dx, \tag{4.19}$$

para todo $0 < q < \infty$ y $w \in A_\infty$.

Sea $\mathcal{D}(t) = \mathcal{F}(t^{1/p})$. Si $\mathcal{D}$ es una función de Young entonces para todo peso u,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p u(x)dx \leq c \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \sum_{i=1}^{m} M_{\alpha p,\mathcal{D}} u(A_i x)dx. \tag{4.20}$$

Tabla 4.2: Ejemplos

$M_{\alpha,\phi}$	Rango del p	$M_{\alpha p,\mathcal{D}}$
$M_{\alpha,L\log L^k}$	$1 < p < \infty$	$M_{\alpha,L\log L^{(k+1)p-1+\varepsilon}}$
$M_{\alpha,L^{r'}\log L^{r'(k+1)}}$	$1 < p < r$	$M_{\alpha,L^{\left(\frac{r}{p}\right)'}\log L^{\left(\frac{r}{p}\right)'((k+1)+p-1)+\varepsilon}}$

Para la prueba de la acotación con pares de pesos necesitamos los siguientes resultados auxiliares

Lema 4.18. *(a) [62] Sean $1 < p < \infty$ y Φ una función de Young. Si $\Phi \in B_p$ entonces para todo peso ν tenemos que*

$$\int |M_\Phi f(x)|^p \nu(x)dx \leq c \int |f(x)|^p M\nu(x)dx.$$

(b) [52] Si $r > 1$, entonces

$$M(M_r) \approx M_r.$$

Proposición 4.19. *Sea $\mathcal{D}$ una función de Young, A una matriz invertible y $w_A(x) = w(Ax)$. Luego,*

$$M_{\alpha,\mathcal{D}}(w_A)(A^{-1}x) \leq c_{A,n} M_{\alpha,\mathcal{D}}(w)(x),$$

para casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. Fijando $x \in \mathbb{R}^n$ consideramos la bola $B = B(A^{-1}x, r)$, entonces tenemos que

$$\frac{1}{|B|}\int_B \mathcal{D}\left(\frac{w(Ay)}{\lambda}\right) dy = \frac{1}{|AB|}\int_{AB} \mathcal{D}\left(\frac{w(z)}{\lambda}\right) dz.$$

Luego, $x \in AB$ y

$$\|w_A\|_{\mathcal{D},B} = \|w\|_{\mathcal{D},AB}.$$

Sea $\|A\| = \sup_{x\neq 0}\frac{|Ax|}{|x|}$. Existen bolas $B_1 = B(x, \frac{r}{\|A^{-1}\|})$ y $B_2 = B(x, \|A\|r)$ tales que $B_1 \subset AB \subset B_2$, luego

$$\|w\|_{\mathcal{D},AB} \leq \|A^{-1}\|^n \|A\|^n \|w\|_{\mathcal{D},B_2}.$$

Por lo tanto,

$$M^c_{\alpha,\mathcal{D}}(w_A)(A^{-1}x) \leq \|A^{-1}\|^n\|A\|^n M^c_{\alpha,\mathcal{D}}w(x),$$

donde

$$M^c_{\alpha,\mathcal{D}}f(y) := \sup_{r>0}|B(y,r)|^{\alpha/n}\|f\|_{\mathcal{D},B(y,r)}.$$

$\square$

Ahora estamos en condiciones de probar el Teorema 4.17,

Demostración del Teorema 4.17. Sea u un peso y $\nu(x) = M_{\alpha p,\mathcal{D}}u(x)$. Por dualidad, (4.20) es equivalente a

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T^* f(x)|^{p'} \nu(x)^{1-p'} dx \leq c \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^m |f(A_i x)|^{p'} u(x)^{1-p'} dx.$$

Como $\nu = M_{\alpha p,\mathcal{D}}u^{1-p'} \in A_\infty$, ver [4], entonces por la Proposición 4.19 y el hecho de que $\mathcal{E} \in B_{p'}$ tenemos que para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} M_{\alpha,\mathcal{F}}(u^{1/p}_{A_i^{-1}})(A_i x)^{p'} \nu(x)^{1-p'} &= M_{\alpha p,\mathcal{D}}(u_{A_i^{-1}})(A_i x)^{p'/p}\nu(x)^{1-p'} \\ &\leq M_{\alpha p,\mathcal{D}}(u)(x)^{p'/p}\nu(x)^{1-p'} \leq c, \end{aligned}$$

y

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |T^* f(x)|^{p'} \nu(x)^{1-p'} dx &\leq c \int_{\mathbb{R}^n} M_{\alpha,\phi} f(A_i x)^{p'} \nu(x)^{1-p'} dx \\
&\leq c \int_{\mathbb{R}^n} M_{\mathcal{E}}(f u_{A_i^{-1}}^{-1/p})(A_i x)^{p'} M_{\alpha,\mathcal{F}}(u_{A_i^{-1}}^{1/p})(A_i x)^{p'} \nu(x)^{1-p'} dx \\
&\leq c \int_{\mathbb{R}^n} M_{\mathcal{E}}(f u_{A_i^{-1}}^{-1/p})(A_i x)^{p'} dx \\
&\leq c \int_{\mathbb{R}^n} |f(A_i x) u_{A_i^{-1}}^{-1/p}(A_i x)|^{p'} dx = c \int_{\mathbb{R}^n} |f(A_i x)|^{p'} u(x)^{1-p'} dx.
\end{aligned}
$$

□

Ahora daremos una estimación en el extremo para $T_{0,m,b}^k$ que es consecuencia de los Teoremas 4.7 y 4.17. Esta estimación es de la forma

$$
u\{x \in \mathbb{R}^n : |T_{0,m,b}^k f(x)| > \lambda\} \leq c \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) Su(x) dx, \tag{4.21}
$$

para pares de pesos (u, Su), donde u es un peso cualquiera y S es un operador maximal apropiado y $\varphi_k(t) = t \log(e+t)^k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Teorema 4.20. *Sean $m \in \mathbb{N}$ y $T_{0,m}$ un operador tal que se cumplen (H1), (H2) y (H3). Sea ϕ la función complementaria de $\Psi_1, \dots, \Psi_m$. Supongamos que $k_i \in S_{n-\alpha_i,\Psi_i} \cap H_{n-\alpha_i,\Psi_i}$.*

(a) Si existe $r > 1$ tal que $t^r \leq c\phi(t)$ para $t \geq t_0 > 0$ entonces (4.21) vale para pares de pesos $\left(u, \sum_{i=1}^{m} (M_\phi u(A_i \cdot)) \right)$.

(b) Supongamos que existen funciones de Young $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ tales que $\mathcal{E} \in B_{p'}$ y $\mathcal{E}^{-1}(t)\mathcal{F}^{-1}(t) \leq \phi^{-1}(t)$. Si $\mathcal{D}(t) = \mathcal{F}(t^{1/p})$ es una función de Young, entonces (4.21) vale para todo par de pesos $\left(u, \sum_{i=1}^{m} (M_{\mathcal{D}} u(A_i \cdot)) \right)$.

Observación 4.21. *Observemos que los pares de pesos dados en (a) son mejores que los dados en (b), pues $\phi^{-1}(t) \gtrsim \mathcal{D}^{-1}(t)$. En efecto, como $\mathcal{E} \in B_{p'}$ entonces $\mathcal{E}(t) \lesssim t^{p'}$. Además $\phi(t) \geq t$ por ser función de Young. Luego, si $\mathcal{E}^{-1}(t)\mathcal{F}^{-1}(t) \leq \phi^{-1}(t)$, tenemos que*

$$
\mathcal{F}^{-1}(t) \lesssim t^{1/p}.
$$

Por lo tanto,

$$
\phi^{-1}(t) \geq \mathcal{E}^{-1}(t)\mathcal{F}^{-1}(t) \gtrsim t^{-1/p'} \mathcal{F}^{-1}(t)^{1-p} \mathcal{F}^{-1}(t)^p \gtrsim \mathcal{F}^{-1}(t)^p = \mathcal{D}^{-1}(t).
$$

Demostración. Consideremos $m = 2$ y $T = T_{0,2}$. El caso general se prueba de manera análoga. Sea u un peso, supongamos que $u \in L_c^\infty$ (en otro caso considerar $u_N = \min\{u, N\}\chi_{B(0,N)}$ y usar el teorema de convergencia monótona). Sea $0 \leq f \in L_c^\infty$. Por la descomposición de Calderón-Zygmund de f a altura λ, existen cubos diádicos $\{Q_j\}_j$ tales que

$$\lambda < \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f \leq 2^n \lambda.$$

Escribimos $f = g + h$ donde

$$g = f\chi_{\mathbb{R}^n \setminus \cup_j Q_j} + \sum_j f_{Q_j}\chi_{Q_j}, \qquad h = \sum_j h_j = \sum_j (f - f_{Q_j})\chi_{Q_j},$$

f_{Q_j} denota el promedio de la f sobre Q_j. Además $0 \leq g \leq 2^n\lambda$ c.t.p. y cada h_j tiene integral 0. Sea $\tilde{Q}_{j,i}$ el cubo centrado en $A_i c_j$ con longitud $2\sqrt{n}Ml(Q_j)$, donde $M = \max_{1\leq i\leq 2} \|A_i\|$, $\tilde{\Omega} = \bigcup_j \left(\tilde{Q}_{j,1} \cup \tilde{Q}_{j,2}\right)$ y $\tilde{u} = u\chi_{\mathbb{R}^n \setminus \tilde{\Omega}}$. Entonces

$$\begin{aligned} u\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\} &\leq u(\tilde{\Omega}) + u\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \tilde{\Omega} : |Th(x)| > \lambda/2\} \\ &\qquad + u\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \tilde{\Omega} : |Tg(x)| > \lambda/2\} \\ &= I + II + III. \end{aligned}$$

Para I, observamos que $|\tilde{Q}_{j,i}| = (42\sqrt{n}M)^n|Q_j|$. Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} I = u\left(\bigcup_j \left(\tilde{Q}_{j,1} \cup \tilde{Q}_{j,2}\right)\right) &\leq \sum_j \left[u(\tilde{Q}_{j,1}) + u(\tilde{Q}_{j,2})\right] \\ &\leq \frac{c_n}{\lambda} \sum_j \left[\frac{u(\tilde{Q}_{j,1})}{|\tilde{Q}_{j,1}|} + \frac{u(\tilde{Q}_{j,2})}{|\tilde{Q}_{j,2}|}\right] \int_{Q_j} f \\ &\leq \frac{c_n}{\lambda} \sum_j \int_{Q_j} \left[Mu(A_1x) + Mu(A_2x)\right] f(x)dx, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se cumple pues $x \in Q_j$ implica que $A_i x \in \tilde{Q}_{j,i}$.

Para estimar II, recodemos que las funciones h_j tienen integral 0, entonces

$$\begin{aligned} II = u\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \tilde{\Omega} : |Th(x)| > \lambda/2\} &\leq \frac{2}{\lambda} \sum_j \int_{\mathbb{R}^n \setminus \tilde{\Omega}} |Th_j(x)|u(x)dx \\ \leq \frac{2}{\lambda} \sum_j \int_{\mathbb{R}^n \setminus \tilde{\Omega}} &\left| \int_{Q_j} (K(x,y) - K(x,c_j))h_j(y)dy \right| u(x)dx \\ \leq \frac{2}{\lambda} \sum_j \int_{Q_j} |h_j(y)| &\int_{\mathbb{R}^n \setminus \left(\tilde{Q}_{j,1} \cup \tilde{Q}_{j,2}\right)} |(K(x,y) - K(x,c_j))|\, u(x)dxdy. \end{aligned}$$

Afirmamos que para todo $y \in Q_j$ tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus\left(\tilde{Q}_{j,1}\cup\tilde{Q}_{j,2}\right)} |(K(x,y)-K(x,c_j))|\, u(x)dx \leq c \operatorname*{ess\,inf}_{x\in Q_j} \left[M_\Phi u(A_1x)+M_\Phi u(A_2x)\right]. \tag{4.22}$$

Usando esta desigualdad tenemos que

$$\begin{aligned} II &\leq \frac{c}{\lambda}\sum_j \operatorname*{ess\,inf}_{Q_j}\left[M_\Phi u(A_1\cdot)+M_\Phi u(A_2\cdot)\right]\int_{Q_j}|h_j(y)|dy \\ &\leq \frac{c}{\lambda}\sum_j \int_{Q_j} f(y)\left[M_\Phi u(A_1y)+M_\Phi u(A_2y)\right]dy. \end{aligned}$$

Ahora, probemos que vale (4.22). Usando (4.15), obtenemos que

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n\setminus\left(\tilde{Q}_{j,1}\cup\tilde{Q}_{j,2}\right)} |(K(x,y)-K(x,c_j))|\, u(x)dx \\ &\qquad\leq \int_{Z^1\cup Z^2} |k_1(x-A_1y)-k_1(x-A_1c_j)||k_2(x-A_2y)|u(x)dx \\ &\qquad\quad+\int_{Z^1\cup Z^2} |k_1(x-A_1c_j)||k_2(x-A_2y)-k_2(x-A_2c_j)|u(x)dx, \end{aligned}$$

donde $Z^i=\mathbb{R}^n\setminus\left(\tilde{Q}_{j,1}\cup\tilde{Q}_{j,2}\right)\cap\{x:|x-A_iy|\leq|x-A_ry|, r\neq i\}$.

Solo vamos a acotar el primer término, el otro se sigue de manera análoga. Usando la desigualdad generalizada de Hölder y observando que $|\tilde{Q}_{j,i}|=(42\sqrt{n}M)^n|Q_j|$, tenemos que

$$\begin{aligned} &\int_{Z^1} |k_1(x-A_1y)-k_1(x-A_1c_j)||k_2(x-A_2y)|u(x)dx \\ &\leq c\sum_{t=1}^{\infty}|Q^t|\|k_1(\cdot-A_1y)-k_1(\cdot-A_1c_j)\chi_{Q^{t+1}\setminus Q^t}\|_{\Psi_1,Q^{t+1}}\|k_2(\cdot-A_2y)\chi_{Q^{t+1}\setminus Q^t}\|_{\Psi_2,Q^{t+1}}\|u\|_{\Phi,Q^{t+1}}, \end{aligned}$$

donde Q^t es el cubo centrado en A_1c_j de longitud $2^t\sqrt{n}Ml(Q_j)$. Observar que $Q^1=\tilde{Q}_{j,1}$.

Como $k_2\in S_{n-\alpha_2,\Phi_2}$, obtenemos que

$$\|k_2(\cdot-A_2y)\chi_{Q^{t+1}\setminus Q^t}\|_{\Psi_2,Q^{t+1}}\leq c|Q^t|^{-\alpha_2/n}.$$

Además, si $x\in Q_j$ entonces para todo $t\in\mathbb{N}$ tenemos que $A_1x\in\tilde{Q}_{j,1}\subset Q^t$ y

$$|Q^t|^{\frac{\alpha}{n}}\|u\|_{\Phi,Q^{t+1}}\leq c\operatorname*{ess\,inf}_{Q_j} M_\Phi u(A_1\cdot).$$

Luego,

$$\begin{aligned}
&\int_{Z^1} |k_1(x - A_1y) - k_1(x - A_1c_j)||k_2(x - A_2y)|u(x)dx \\
&\qquad \leq c \operatorname*{ess\,inf}_{Q_j} M_\Phi u(A_1\cdot) \sum_{t=1}^{\infty} |Q^t|^{\frac{\alpha_1}{n}} \|k_1(\cdot - A_1y) - k_1(\cdot - A_1c_j)\chi_{Q^{t+1}\setminus Q^t}\|_{\Psi_1,Q^{t+1}} \\
&\qquad \leq c \operatorname*{ess\,inf}_{Q_j} M_\Phi u(A_1\cdot),
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad vale pues $k_1 \in H_{n-\alpha_1,\Psi_1}$.

De forma análoga, obtenemos que

$$\int_{Z^2} |k_1(x - A_1y) - k_1(x - A_1c_j)||k_2(x - A_2y)|u(x)dx \leq c \operatorname*{ess\,inf}_{Q_j} M_\Phi u(A_2\cdot).$$

La estimación de III es diferente en cada caso. Primero supongamos que valen las hipótesis en (a). Para $p > 1$, usando el Teorema 4.7, el hecho de que $M_r u \in A_1$ y el Lema 4.18, obtenemos que

$$\begin{aligned}
III &= u\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \tilde{\Omega} : |Tg(x)| > \lambda/2\} \leq \frac{2^p}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} |Tg(x)|^p \tilde{u}(x)dx \\
&\leq \frac{2^p}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} |Tg(x)|^p M_r\tilde{u}(x)dx \leq \frac{c}{\lambda^p} \sum_{i=1}^{2} \int_{\mathbb{R}^n} |M_\Phi g(A_i^{-1}x)|^p M_r\tilde{u}(x)dx \\
&\leq \frac{c}{\lambda^p} \sum_{i=1}^{2} \int_{\mathbb{R}^n} |g(A_i^{-1}x)|^p M(M_r\tilde{u})(x)dx \leq \frac{c}{\lambda^p} \sum_{i=1}^{2} \int_{\mathbb{R}^n} |g(A_i^{-1}x)|^p M_r\tilde{u}(x)dx \\
&\leq \frac{c}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p \sum_{i=1}^{2} M_r\tilde{u}(A_ix)dx \leq \frac{c}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p \sum_{i=1}^{2} M_\Phi\tilde{u}(A_ix)dx,
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad vale pues $t^r \leq \Phi(t)$ para $t \geq t_0 > 0$.

Como $g \leq 2^n\lambda$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
III &\leq \frac{c}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p \sum_{i=1}^{2} M_\Phi\tilde{u}(A_ix)dx \\
&\leq \frac{c}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)| \sum_{i=1}^{2} M_\Phi\tilde{u}(A_ix)dx \\
&\leq \frac{c}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \sum_{i=1}^{2} M_\Phi\tilde{u}(A_ix)dx.
\end{aligned}$$

Si valen las hipótesis en (b), utilizando el Teorema 4.17, tenemos que

$$
\begin{aligned}
III = u\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \tilde{\Omega} : |Tg(x)| > \lambda/2\} &\leq \frac{2^p}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} |Tg(x)|^p \tilde{u}(x) dx \\
&\leq \frac{c}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} g(x)^p \sum_{i=1}^{m} M_{\mathcal{D}} u(A_i x) dx \\
&\leq \frac{c}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \sum_{i=1}^{m} M_{\mathcal{D}} u(A_i x) dx.
\end{aligned}
$$

Por la observación 4.21 obtenemos el resultado deseado. □

4.7 Dominación sparse.

En esta sección probaremos una dominación sparse adecuada para este tipo de operadores.

Teorema 4.22. *Sean $0 \leq \alpha < n$, $m \in \mathbb{N}$ y $T_{\alpha,m}$ el operador integral definido por (4.1). Para $1 \leq i \leq m$, sean $1 < r_i \leq \infty$, $s \geq 1$ definido por $\frac{1}{r_1} + \cdots + \frac{1}{r_m} + \frac{1}{s} = 1$ y $0 \leq \alpha_i < n$ tales que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = n - \alpha$. Sean $k_i \in S_{n-\alpha_i,r_i} \cap H_{n-\alpha_i,r_i}$ y A_i matrices invertibles que cumplen $(H2)$. Supongamos que (H3) vale. Existen una constante $c > 0$ y 3^n familias $\frac{1}{2.9^n}$-sparse, $\{\mathcal{S}_j\}_{j=1}^{3^n}$, tales que p.p. $x \in \mathbb{R}^n$, y para $f \in L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$*

$$|T_{\alpha,m} f(x)| \leq c \sum_{j=1}^{3^n} \sum_{i=1}^{m} \sum_{Q \in \mathcal{S}_j} |Q|^{\alpha/n} \|f\|_{s,Q} \chi_Q(A_i^{-1} x). \tag{4.23}$$

Definimos los operadores sparse $A_{\alpha,s,\mathcal{S}}$ por

$$A_{\alpha,s,\mathcal{S}} f(A_i^{-1} x) = \sum_{Q \in \mathcal{S}_i} |Q|^{\alpha/n} \|f\|_{s,Q} \chi_Q(A_i^{-1} x).$$

Para probar este teorema, vamos a considerar solo el caso $m = 2$, el caso general, los siguientes resultados y las demostración son análogas.

Necesitamos, alguna acotación en el extremos para $M_{T_{\alpha,2}}$, el gran maximal truncado de $T_{\alpha,2}$, esta definido por

$$M_{T_{\alpha,2}} f(x) = \sup_{\substack{Q_1 \ni A_1^{-1} x \\ Q_2 \ni A_2^{-1} x}} \operatorname*{sup\,ess}_{\xi \in Q_1 \cup Q_2} |T_{\alpha,2}(f \chi_{\mathbb{R}^n \setminus 3(Q_1 \cup Q_2)})(\xi)|,$$

y la versión local

$$M_{T_{\alpha,2},Q_0^1\cup Q_0^2}f(x)=\sup_{\substack{Q_0^1\subset Q_1\ni A_1^{-1}x\\ Q_0^2\subset Q_2\ni A_2^{-1}x}}\ \operatorname*{sup\,ess}_{\xi\in Q_1\cup Q_2}|T_{\alpha,2}(f\chi_{3(Q_0^1\cup Q_0^2)\setminus 3(Q_1\cup Q_2)})(\xi)|,$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos Q_i tales que $Q_i\subset Q_0^i$ para $i=1,2$.

Los siguientes lemas son las acotaciones en el extremo para $0<\alpha<n$ y $\alpha=0$ por separado.

Lema 4.23. *Sea $0<\alpha<n$. Para cada $1\leq i\leq 2$, sea $0<\alpha_i<n$ tal que $\alpha_1+\alpha_2=n-\alpha$ y $1<r_i\leq\infty$, $s\geq 1$ tal que $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{s}=1$. Sean matrices invertibles A_i que cumplen la hipótesis (H2) y $k_i\in S_{n-\alpha_i,r_i}\cap H_{n-\alpha_i,r_i}$. Las siguientes afirmaciones valen*

(i) para casi todo $A_i^{-1}x\in Q_0^i$

$$|T_{\alpha,2}(f\chi_{3(Q_0^1\cup Q_0^2)})(x)|\leq M_{T_{\alpha,2},Q_0^1\cup Q_0^2}f(x),$$

(ii) para todo $x\in\mathbb{R}^n$

$$M_{T_{\alpha,2}}(f)(x)\lesssim\sum_{i=1}^{m}M_{\alpha,s}(A_i^{-1}x)+\tilde{T}_{\alpha,2}(|f|)(x),$$

donde el operador $\tilde{T}_{\alpha,2}$ es el asociado al núcleo $|K(x,y)|$.

Más aun,

$$|\{x\in\mathbb{R}^n:M_{T_{\alpha,2}}(f)(x)>\lambda\}|^{\frac{n-\alpha s}{n}}\lesssim\int_{\{x\in Q:f(x)\geq\lambda|Q|^{\alpha/n}/c\}}\left(\frac{|f(x)|}{\lambda|Q|^{\alpha/n}}\right)^{s}dx.$$

Observación 4.24. *Observemos que para $i=1,2$ $k_i\in S_{n-\alpha_i,r_i}\cap H_{n-\alpha_i,r_i}$ implica que $|k_i|\in S_{n-\alpha_i,r_i}\cap H_{n-\alpha_i,r_i}$*

Para el caso $\alpha=0$,

Lema 4.25. *Para cada $1\leq i\leq 2$, sea $0<\alpha_i<n$ tal que $\alpha_1+\alpha_2=n$ y $1<r_i\leq\infty$, $s\geq 1$ tal que $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{s}=1$. Sean matrices invertibles A_i que cumplen la hipótesis (H2) y $k_i\in S_{n-\alpha_i,r_i}\cap H_{n-\alpha_i,r_i}$. Supongamos que $T=T_{0,2}$ cumple la hipótesis (H3). Las siguientes afirmaciones valen*

(i) para casi todo $A_i^{-1}x\in Q_0^i$

$$|T(f\chi_{3(Q_0^1\cup Q_0^2)})(x)|\leq\|T\|_{L^1\to L^{1,\infty}}\sum_{i=1}^{m}|f(A_i^{-1}x)|+M_{T,Q_0^1\cup Q_0^2}f(x),$$

(ii) para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$M_T(f)(x) \lesssim \sum_{i=1}^{m} \left[M_s f(A_i^{-1}x) + \|T\|_{L^1\to L^{1,\infty}} Mf(A_i^{-1}x)\right] + M_\delta(Tf)(x).$$

Más aun,

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M_T(f)(x) > \lambda\}| \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \left(c\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^s dx.$$

Demostración del Teorema 4.22. Afirmamos que para cualquiera $Q_0^1, \ldots, Q_0^m$, existen familias $\frac{1}{2}$-sparse $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{D}(Q_0^i)$, $i = 1, \ldots, m$, tales que p.p. $x \in \bigcup_{i=1}^m A_i Q_0^i$

$$|T_{\alpha,m}(f\chi_{3\bigcup_{i=1}^m Q_0^i})(x)| \leq c\sum_{i=1}^{m}\sum_{Q\in\mathcal{F}_i} |3Q|^{\alpha/n}\|f\|_{\phi,3Q}\chi_Q(A_i^{-1}x). \tag{4.24}$$

Una vez probada la afirmación (4.24). Sea $\mathcal{D}$ una familia de cubos diadicas tales que existe $Q_0 \in \mathcal{D}$ y sop$f \subset Q_0$. Tomamos los cubos Q_j tales que sop$f \subset 3Q_j$. Comenzamos con el cubo Q_0 y cubrimos a $3Q_0 \setminus Q_0$ con $3^n - 1$ cubos congruentes. Cada uno de estos cumple que $Q_0 \subset 3Q_j$. Podemos hacer lo mismo con $9Q_0 \setminus 3Q_0$ y continuar recursivamente. La unión de todo estos cubos incluido Q_0, cumplen la propiedad deseada.

Podemos aplicar la afirmación a cada cubo Q_j, de la siguiente manera: sean $Q_0^1 = \cdots = Q_0^m = Q_j$ existe una familia $\frac{1}{2}$-sparse $\mathcal{F}_j \subset \mathcal{D}(Q_j) \subset \mathcal{D}$ tal que p.p. $x \in \bigcup_{i=1}^m A_i Q_0^i$

$$|T_{\alpha,m}(f\chi_{3Q_j})(x)|\chi_{\bigcup_{i=1}^m A_i Q_j}(x) \leq c\sum_{i=1}^{m}\sum_{Q\in\mathcal{F}_j} |3Q|^{\alpha/n}\|f\|_{\phi,3Q}\chi_Q(A_i^{-1}x).$$

Tomando $\mathcal{F} = \bigcup \mathcal{F}_j$, es una familia $\frac{1}{2}$-sparse. Luego,

$$|T(f)(x)| \leq c\sum_{i=1}^{m}\sum_{Q\in\mathcal{F}} |3Q|^{\alpha/n}\|f\|_{\phi,3Q}\chi_Q(A_i^{-1}x).$$

Si tomamos $R_Q \in \mathcal{D}_j$ tal que $\{3Q : Q \in \mathcal{F}\} \subset \bigcup_{j=1}^{3^n} \mathcal{D}_j$ familias diadicas, $|R_Q| \leq 3^n|3Q|$, esto se debe al Lema 1.63. Sea

$$\mathcal{S}_j = \{R_Q \in \mathcal{D}_j : Q \in \mathcal{F}\},$$

como $\mathcal{F}$ es una familia $\frac{1}{2}$-sparse, $\mathcal{S}_j$ es una familia $\frac{1}{2.9^n}$-sparse. Luego tenemos que

$$|T(f)(x)| \leq c\sum_{j=1}^{3^n}\sum_{i=1}^{m} \mathcal{A}_{\alpha,r,\mathcal{S}} f(A_i^{-1}x).$$

Ahora, probemos la afirmación (4.24). Para esto es suficiente probar la siguiente estimación recursiva: para cada $1 \leq i \leq m$ existe una familia numerable $\{P_j^i\}_j$ de cubos disjuntos dos a dos en $\mathcal{D}(Q_0^i)$ tal que $\sum_j P_j^i \leq \frac{1}{2}|Q_0^i|$ y

$$
\begin{aligned}
|T_{\alpha,m}(f\chi_{3\bigcup_{i=1}^m Q_0^i})(x)|\chi_{\bigcup_{i=1}^m A_iQ_0^i}(x) \leq c&\sum_{i=1}^m \sum_{Q\in\mathcal{F}_i} |3Q|^{\alpha/n}\|f\|_{\phi,3Q}\chi_Q(A_i^{-1}x)\\
&+\sum_j |T_{\alpha,m}(f\chi_{3\bigcup_{i=1}^m P_j^i})(x)|\chi_{\cup_{i=1}^m A_iP_j^i}(x),
\end{aligned}
$$

p.p. $x \in \bigcup_{i=1}^m A_iQ_0^i$. Observar que para cualquier familia $\{P_j^i\}_j \subset \mathcal{D}(Q_0^i)$ de cubos disjuntos dos a dos, tenemos que

$$
\begin{aligned}
&|T_{\alpha,m}(f\chi_{3\bigcup_{i=1}^m Q_0^i})(x)|\chi_{\bigcup_{i=1}^m A_iQ_0^i}(x)\\
&\leq |T_{\alpha,m}(f\chi_{3\bigcup_{i=1}^m Q_0^i})(x)|\chi_{\bigcup_{i=1}^m A_i(Q_0^i\setminus\cup_j P_j^i)}(x) + \sum_j |T_{\alpha,m}(f\chi_{3\bigcup_{i=1}^m Q_0^i})(x)|\chi_{\bigcup_{i=1}^m A_iP_j^i}(x)\\
&\leq |T_{\alpha,m}(f\chi_{3\bigcup_{i=1}^m Q_0^i})(x)|\chi_{\bigcup_{i=1}^m A_i(Q_0^i\setminus\cup_j P_j^i)}(x) + \sum_j |T_{\alpha,m}(f\chi_{\bigcup_{i=1}^m 3(Q_0^i\setminus P_j^i)})(x)|\chi_{\bigcup_{i=1}^m A_iP_j^i}(x)\\
&\quad+\sum_j |T_{\alpha,m}(f\chi_{3\bigcup_{i=1}^m P_j^i})(x)|\chi_{\bigcup_{i=1}^m A_iP_j^i}(x),
\end{aligned}
$$

p.p. $x \in \mathbb{R}^n$. Es suficiente ver que podemos elegir una familia numerable $\{P_j^i\}_j$ de cubos disjuntos dos a dos en $\mathcal{D}(Q_0^i)$ tales que $\sum_j |P_j^i| \leq \frac{1}{2}|Q_0^i|$ y p.p. $x \in \bigcup_{i=1}^m A_iQ_0^i$,

$$
\begin{aligned}
|T_{\alpha,m}(f\chi_{3\bigcup_{i=1}^m Q_0^i})(x)|\chi_{\bigcup_{i=1}^m A_i(Q_0^i\setminus\cup_j P_j^i)}(x) &+ \sum_j |T_{\alpha,m}(f\chi_{\bigcup_{i=1}^m 3(Q_0^i\setminus P_j^i)})(x)|\chi_{\bigcup_{i=1}^m A_iP_j^i}(x)\\
&\leq c\sum_{i=1}^m \sum_{Q\in\mathcal{F}_i} |3Q|^{\alpha/n}\|f\|_{\phi,3Q}\chi_Q(A_i^{-1}x).
\end{aligned}
$$

Definimos $E = \bigcup_{i=1}^m E_\alpha^i$ de la siguiente manera: si $\alpha = 0$

$$
E_0^i = \{x \in Q_0^i : |f(x)| > \gamma_n\|f\|_{s,3Q_0^i}\}\cup\{x \in Q_0^i : M_{T_{0,m},\cup_i Q_0^i}(f)(x) > \gamma_n c\sum_{i=1}^m \|f\|_{s,3Q_0^i}\},
$$

y si $\alpha > 0$,

$$
E_\alpha^i = \{x \in Q_0^i : M_{T_{\alpha,m},\cup_i Q_0^i}(f) > \gamma_n c\sum_{i=1}^m |3Q_0^i|^{\alpha/n}\|f\|_{s,3Q_0^i}\}.
$$

Veamos ahora que podemos tomar γ_n tal que $|E| \leq \frac{1}{2^{n+2}} \sum_{i=1}^{m} |Q_0^i|$.

Si $\alpha = 0$, por el Lema 4.25 sabemos que $M_{T_{0,m}}$ es de tipo débil $(s, 1)$, entonces

$$\begin{aligned}
|E_0^i| &\leq \frac{\int_{Q_0^i} |f(x)|dx}{\gamma_n \|f\|_{s,3Q_0^i}} + c \int_{\cup_{i=1}^m 3Q_0^i} \left(\frac{|f(x)|}{\gamma_n c \sum_{i=1}^m \|f\|_{s,3Q_0^i}} \right)^s dx \\
&\leq |3Q_0^i| \frac{\frac{1}{|3Q_0^i|} \int_{3Q_0^i} |f(x)|dx}{\gamma_n \|f\|_{s,3Q_0^i}} + c \sum_{i=1}^m \frac{1}{\gamma_n^s c^s} \int_{3Q_0^i} \left(\frac{|f(x)|}{\sum_{i=1}^m \|f\|_{s,3Q_0^i}} \right)^s dx \\
&\leq \frac{|3Q_0^i|}{\gamma_n} + c \sum_{i=1}^m \frac{|3Q_0^i|}{\gamma_n^s c^s} \frac{1}{|3Q_0^i|} \int_{3Q_0^i} \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{s,3Q_0^i}} \right)^s dx \\
&= \frac{|3Q_0^i|}{\gamma_n} + c \sum_{i=1}^m \frac{|3Q_0^i|}{\gamma_n^s c^s} \\
&\leq \left(\frac{1}{\gamma_n} + \frac{c^{1-s}}{\gamma_n^s} \right) \sum_{i=1}^m |3Q_0^i|.
\end{aligned}$$

Luego, basta tomar γ_n tal que

$$m \left(\frac{1}{\gamma_n} + \frac{c^{1-s}}{\gamma_n^s} \right) \leq \frac{1}{2^{n+2}}.$$

En el caso de $\alpha > 0$, por el Lema 4.23 sabemos que $M_{T_{\alpha,m}}$ es de tipo débil $(s, \frac{n}{n-\alpha s})$, entonces

$$\begin{aligned}
|E_\alpha^i|^{\frac{n-\alpha s}{n}} &\leq c_1 \int_{3\cup Q_0^i} \left(\frac{|f(x)|}{\gamma_n c_2 |3Q_0^i|^{\alpha/n} \|f\|_{s,3Q_0^i}} \right)^s dx \\
&\leq C \sum_{i=1}^m \frac{1}{\gamma_n^s |3Q_0^i|^{s\alpha/n}} \int_{3Q_0^i} \left(\frac{|f(x)|}{\sum_{i=1}^m \|f\|_{s,3Q_0^i}} \right)^s dx \\
&\leq C \sum_{i=1}^m \frac{|3Q_0^i|}{\gamma_n^s |3Q_0^i|^{s\alpha/n}} \frac{1}{|3Q_0^i|} \int_{3Q_0^i} \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{s,3Q_0^i}} \right)^s dx \\
&= \frac{C}{\gamma_n^s} \sum_{i=1}^m |3Q_0^i|^{1-s\alpha/n}.
\end{aligned}$$

Luego,

$$|E_\alpha^i| \leq \frac{C 3^n}{\gamma_n^{\frac{sn}{n-\alpha s}}} \sum_{i=1}^m |Q_0^i|,$$

basta tomar γ_n tal que

$$mC3^n\gamma_n^{-\frac{sn}{n-\alpha s}} \leq \frac{1}{2^{n+2}}.$$

Aplicamos la descomposición de Calderon-Zygmund a la función $\chi_{E^i_\alpha}$ en Q^i_0 a altura $\lambda = \frac{1}{2^{n+1}}$. Existen cubos $P^i_j \in \mathcal{D}(Q^i_0)$ disjuntos dos a dos tales que

$$\chi_{E^i_\alpha}(x) \leq \frac{1}{2^{n+1}} \qquad p.p.\ x \notin \cup P^i_j.$$

Además, tenemos que $|E^i_\alpha \setminus \cup_j P^i_j| = 0$,

$$\sum_j |P^i_j| = \left|\bigcup_j P^i_j\right| \leq 2^{n+1}|E^i_\alpha| \leq 2^{n+1}|E| \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m |Q^i_0|,$$

y

$$\frac{1}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{|P_j|}\int_{P_j} \chi_{E^i_\alpha}(x)dx = \frac{|P_j \cap E^i_\alpha|}{|P_j|} \leq \frac{1}{2},$$

de las últimas desigualdades se sigue que $|P_j \cap (E^i_\alpha)^c| > 0$. En efecto,

$$|P^i_j| = |P^i_j \cap (E^i_\alpha)| + |P^i_j \cap (E^i_\alpha)^c| \leq \frac{1}{2}|P^i_j| + |P^i_j \cap (E^i_\alpha)^c|,$$

entonces $\frac{1}{2}|P^i_j| < |P^i_j \cap (E^i_\alpha)^c|$.

Para $i = 1, \ldots, m$, observemos que como $P^i_j \cap (E^i_\alpha)^c \neq \emptyset$, $M_{T,\cup_i Q^i_0}(f)(x) \leq \gamma_n c \sum_{i=1}^m \|f\|_{s,3Q^i_0}$ para algún $x \in A_i P^i_j$ y esto implica que

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\xi \in P^i_j} \left| T_{\alpha,m}(f\chi_{\cup_i 3(Q^i_0 \setminus P^i_j)})(\xi)\right| \leq \gamma_n c\|f\|_{s,3Q^i_0}.$$

Luego,

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\xi \in \cup_{i=1}^m P^i_j} \left| T_{\alpha,m}(f\chi_{\cup_i 3(Q^i_0 \setminus P^i_j)})(\xi)\right| \leq \gamma_n c\sum_{i=1}^m \|f\|_{s,3Q^i_0}.$$

Por otro lado, si $\alpha = 0$, por el inciso (i) del Lema 4.25 sabemos que p.p. $x \in A_i Q^i_0$

$$|T(f\chi_{3(\cup_i Q^i_0)})(x)| \leq \|T\|_{L^1 \to L^{1,\infty}} \sum_{i=1}^m |f(A_i^{-1}x)| + M_{T,\cup_i Q^i_0} f(x).$$

Si $x \in Q^i_0 \setminus \cup_j P^i_j$, como $|E^i_\alpha \setminus \cup_j P^i_j| = 0$ tenemos que, por la definición de E, p.p. $x \in Q^i_0 \setminus \cup_j P^i_j$

$$|f(x)| \leq \gamma_n \|f\|_{s,3Q^i_0} \leq \gamma_n \sum_{i=1}^m \|f\|_{s,3Q^i_0},$$

y también que p.p. $x \in Q_0^i \setminus \cup_j P_j^i$, $M_{T,\cup_{i=1}^m Q_0^i} f(x) \leq \gamma_n \sum_{i=1}^m \|f\|_{s,3Q_0^i}$. Luego,

$$\left|T_{\alpha,m}(f\chi_{3\cup_i Q_0^i})(x)\right| \leq \gamma_n c \sum_{i=1}^{m} \|f\|_{s,3Q_0^i}.$$

Con estas acotaciones obtenemos la desigualdad deseada.

Si $\alpha > 0$ por el inciso (i) del Lema 4.23 sabemos que p.p. $A_i^{-1}x \in Q_0^i$

$$|T_{\alpha,m}(f\chi_{3\cup_i Q_0^i})(x)| \leq M_{T_{\alpha,m},\cup_i Q_0^i} f(x),$$

luego procedemos análogamente al caso anterior.

□

4.7.1 Prueba de los lemas auxiliares

En este subsección vamos a probar los Lemas 4.23 y 4.25.

Demostración del Lema 4.23. (i): Para $i = 1, 2$, sea $\tilde{Q}^i$ un cubo centrado en $A_i^{-1}x$ con longitud de lado ρ tal que $\tilde{Q}^i \subset Q_0^i$.

$$|T_{\alpha,2}(f\chi_{3(Q_0^1\cup Q_0^2)})(x)| \leq |T_{\alpha,2}(f\chi_{3(\tilde{Q}^1\cup\tilde{Q}^2)})(x)| + |T_{\alpha,2}(f\chi_{3(Q_0^1\cup Q_0^2)\setminus 3(\tilde{Q}^1\cup\tilde{Q}^2))})(x)|.$$

Sea B^i una bola centrada en $A_i^{-1}x$ con radio $R = 3/2\sqrt{n}\rho$, entonces $3\tilde{Q}^i \subset B^i$,

$$|T_{\alpha,2}(f\chi_{3(\tilde{Q}^1\cup\tilde{Q}^2)})(x)| \leq |T_{\alpha,2}(f\chi_{B^1\cup B^2})(x)| \leq |T_{\alpha,2}(f\chi_{B^1})(x)| + |T_{\alpha,2}(f\chi_{B^2})(x)|.$$

Para B^1, consideramos los conjuntos

$$X^1 = B^1 \cap \{z : |x - A_1 z| \leq |x - A_2 z|\},$$

y $X^2 = B^1 \setminus X^1$.

Para X^1, descomponemos el conjunto con los siguientes conjuntos

$$C_j^1 = \{z : |x - A_1 z| \sim 2^{-j} R\|A_1\|\},$$

donde $\|A_1\| = \sup\limits_{x\neq 0} \frac{|A_1 x|}{|x|}$. Observemos que $X^1 \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} C_j^1$. Sea $\tilde{B}_j = A_1^{-1}B(x, 2^{-j}R\|A_1\|)$.

Como $k_1 \in S_{n-\alpha_1,r_1}$ y $k_2 \in S_{n-\alpha_2,r_2}$, usando la desigualdad de Hölder tenemos que

$$\begin{aligned}
&\int_{X^1} |k_1(x-A_1z)||k_2(x-A_2z)||f(z)|dz \\
&\quad \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\tilde{B}_{j+1}|}{|\tilde{B}_{j+1}|} \int_{C^1_{j+1}} |k_1(x-A_1z)||k_2(x-A_2z)||f(z)|dz \\
&\quad \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\tilde{B}_{j+1}| \|k_1(x-A_1\cdot)\chi_{C^1_{j+1}}\|_{r_1,\tilde{B}_{j+1}} \|k_2(x-A_2\cdot)\chi_{C^1_{j+1}}\|_{r_2,\tilde{B}_{j+1}} \|f\|_{s,\tilde{B}_{j+1}} \\
&\quad \leq M_s(f)(A_1^{-1}x) \sum_{j=1}^{\infty} (2^{-j}R\|A_1\|)^n (2^{-j}R\|A_1\|)^{\alpha-n} = cM_s(f)(A_1^{-1}x)R^{\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j\alpha} \\
&\quad = cM_s(f)(A_1^{-1}x)R^{\alpha}.
\end{aligned}$$

De manera análoga, obtenemos que

$$\int_{X^2} |k_1(x-A_1z)||k_2(x-A_2z)||f(z)|dz \leq cM_s(f)(A_2^{-1}x)R^{\alpha}.$$

Por lo tanto, tenemos que para todo $R > 0$,

$$|T_{\alpha,2}(f\chi_{3(\tilde{Q}^1\cup\tilde{Q}^2)})(x)| \leq c\left(M_s(f)(A_1^{-1}x) + M_s(f)(A_2^{-1}x)\right) R^{\alpha} + M_{T_{\alpha,2},Q_0^1\cup Q_0^2} f(x).$$

Si hacemos tender $\rho \to 0$, tenemos que $R \to 0$, y por lo tanto

$$|T_{\alpha,2}(f\chi_{3(\tilde{Q}^1\cup\tilde{Q}^2)})(x)| \leq M_{T_{\alpha,2},Q_0^1\cup Q_0^2} f(x).$$

(ii): Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y para $i = 1, 2$, sea Q_i un cubo que contenga a $A_i^{-1}x$. Sea B_x una bola tal que $3(Q_1 \cup Q_2) \subset B_x$. Para todo $\xi \in Q_1 \cup Q_2$, tenemos que

$$\begin{aligned}
|T_{\alpha,2}(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus 3(Q_1\cup Q_2)})(\xi)| &\leq |T_{\alpha,2}(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus B_x})(\xi) - T_{\alpha,2}(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus B_x})(x)| \\
&\quad + |T_{\alpha,2}(f\chi_{B_x\setminus 3(Q_1\cup Q_2)})(\xi)| + |T_{\alpha,2}(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus B_x})(x)| \\
&\lesssim |T_{\alpha,2}(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus B_x})(\xi) - T_{\alpha,2}(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus B_x})(x)| \\
&\quad + |T_{\alpha,2}(f\chi_{B_x\setminus 3(Q_1\cup Q_2)})(\xi)| + \tilde{T}_{\alpha,2}(|f|)(x), \qquad (4.25)
\end{aligned}$$

donde el operador $\tilde{T}_{\alpha,2}$ es el asociado al núcleo $|K(x,y)|$.

Sean

$$Z^1 = B_x^c \cap \{z : |x - A_1z| \leq |x - A_2z|\},$$

y

$$Z^2 = B_x^c \cap \{z : |x - A_2z| \leq |x - A_1z|\}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}|T_{\alpha,2}(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus B_x})(\xi) - T_{\alpha,2}(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus B_x})(x)| &\leq \int_{B_x^c} |K(\xi,y) - K(x,y)||f(y)|dy \\ &\leq \int_{Z^1} |K(\xi,y) - K(x,y)||f(y)|dy + \int_{Z^2} |K(\xi,y) - K(x,y)||f(y)|dy.\end{aligned}$$

Para $j \in \mathbb{N}$, sea $R = \frac{l(Q)}{2\|A_1^{-1}\|}$ donde $\|A_1^{-1}\| = \sup_{x\neq 0} \frac{|A_1^{-1}x|}{|x|}$ y

$$D_j^1 = \{z \in Z^1 : |x - A_1 z| \sim 2^{j+1}R\}.$$

Observemos que $A_1^{-1}B(x,2R) \subset 3Q_1$,

$$D_j^1 \subset \{z : |x - A_1 z| \sim 2^{j+1}R\} \subset A_1^{-1}B(x, 2^{j+2}R) =: \tilde{B}_{1,j}$$

y $Z^1 \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} D_j^1$.

Si $K(x,y) = k_1(x - A_1 y)k_2(x - A_2 y)$, entonces

$$\begin{aligned}|K(\xi,y) - K(x,y)| \leq& |k_1(\xi - A_1 y) - k_1(x - A_1 y)||k_2(\xi - A_2 y)| \\ &+ |k_1(x - A_1 y)||k_2(\xi - A_2 y) - k_2(x - A_2 y)|.\end{aligned}$$

Luego, usando la desigualdad de Hölder tenemos

$$\begin{aligned}&\int_{Z^1} |k_1(\xi - A_1 y) - k_1(x - A_1 y)||k_2(\xi - A_2 y)||f(y)|dy \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\tilde{B}_{1,j}|}{|\tilde{B}_{1,j}|} \int_{\tilde{B}_{1,j}} \chi_{D_j^1}(y)|k_1(\xi - A_1 y) - k_1(x - A_1 y)||k_2(\xi - A_2 y)||f(y)|dy \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |\tilde{B}_{1,j}| \|(k_1(\xi - A_1\cdot) - k_1(x - A_1\cdot))\chi_{D_j^1}\|_{r_1,\tilde{B}_{1,j}} \|k_2(\xi - A_2\cdot)\chi_{D_j^1}\|_{r_2,\tilde{B}_{1,j}} \|f\|_{s,\tilde{B}_{1,j}} \\ &\leq M_{\alpha,s}f(A_1^{-1}x) \sum_{j=1}^{\infty} |\tilde{B}_{1,j}|^{1-\alpha} \|(k_1(\xi - A_1\cdot) - k_1(x - A_1\cdot))\chi_{D_j^1}\|_{r_1,\tilde{B}_{1,j}} \\ &\qquad \|k_2(\xi - A_2\cdot)\chi_{D_j^1}\|_{r_2,\tilde{B}_{1,j}}.\end{aligned}$$

Si $z \in D_j^1$ entonces $|x - A_2 z| \geq |x - A_1 z| \geq 2^{j+1}R$. Luego, escribimos $D_j^1 = \bigcup_{k\geq j} (D_j^1)_{k,2}$ donde

$$(D_j^1)_{k,2} = \{z \in D_j^1 : |x - A_2 z| \sim 2^{k+1}R\}.$$

Como $k_2 \in S_{n-\alpha_2,r_2}$, tenemos que

$$\|k_2(\xi - A_2\cdot)\chi_{D_j^1}\|_{r_2,\tilde{B}_{1,j}} \lesssim (2^j R)^{-\alpha_2}.$$

Como $k_1 \in H_{n-\alpha_1,r_1}$ y $\alpha_1+\alpha_2 = n-\alpha$,

$$\begin{aligned}
&\int_{Z^1} |k_1(\xi - A_1y) - k_1(x-A_1y)||k_2(\xi - A_2y)||f(y)|dy \\
&\qquad \lesssim M_{\alpha,\phi} f(A_1^{-1}x) \sum_{j=1}^{\infty} |\tilde{B}_{1,j}|^{1-\alpha/n-\alpha_2/n} \|(k_1(\xi - A_1\cdot) - k_1(x-A_1\cdot))\chi_{D_j^1}\|_{r_1,\tilde{B}_{1,j}} \\
&\qquad \lesssim M_{\alpha,s} f(A_1^{-1}x).
\end{aligned}$$

De forma análoga se prueba que

$$\int_{Z^1} |k_1(x-A_1y)||k_2(\xi - A_2y) - k_2(x-A_2y)||f(y)|dy \lesssim M_{\alpha,s} f(A_1^{-1}x).$$

Por lo tanto, obtenemos que

$$|T_{\alpha,2}(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus B_x})(\xi) - T_{\alpha,2}(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus B_x})(x)| \lesssim M_{\alpha,s} f(A_1^{-1}x) + M_{\alpha,s} f(A_2^{-1}x). \tag{4.26}$$

Para el segundo termino de (4.25), tenemos que

$$\begin{aligned}
|T_{\alpha,2}(f\chi_{B_x\setminus 3(Q_1\cup Q_2)})(\xi)| &\le \int_{B_x\setminus 3(Q_1\cup Q_2)} |k_1(\xi - A_1y)||k_2(\xi - A_2y)||f(y)|dy \\
&\le \int_{Y^1} |k_1(\xi - A_1y)||k_2(\xi - A_2y)||f(y)|dy \\
&\quad + \int_{Y^2} |k_1(\xi - A_1y)||k_2(\xi - A_2y)||f(y)|dy,
\end{aligned}$$

donde

$$Y^1 = (B_x \setminus 3(Q_1 \cup Q_2)) \cap \{z : |x - A_1z| \le |x - A_2z|\},$$

y $Y^2 = \mathbb{R}^n \setminus Y^1$. observemos que para $i = 1, 2$, $Y^i \subset A_i^{-1}B(x, 2^lR) \setminus A_i^{-1}B(x, 2R)$ para algún $l \in \mathbb{N}$ y denotamos $B_j^i = A_i^{-1}B(x, 2^jR)$. Luego, por la desigualdad de Hölder obtenemos que

$$\begin{aligned}
&\int_{Y^1} |k_1(\xi - A_1y)||k_2(\xi - A_2y)||f(y)|dy \\
&\quad \le \sum_{j=1}^{l-1} \frac{|B_{j+1}^1|}{|B_{j+1}^1|} \int_{B_{j+1}^1\setminus B_j^1} |k_1(\xi - A_1y)||k_2(\xi - A_2y)||f(y)|dy \\
&\quad \le \sum_{j=1}^{l-1} |B_{j+1}^1| \|k_1(\xi - A_1\cdot)\chi_{B_{j+1}^1\setminus B_j^1}\|_{r_1,B_{j+1}^1} \|k_2(\xi - A_2\cdot)\chi_{B_{j+1}^1\setminus B_j^1}\|_{r_2,B_{j+1}^1} \|f\|_{s,B_{j+1}^1}.
\end{aligned}$$

Como $k_2 \in S_{n-\alpha_2,r_2}$, procediendo como antes tenemos que

$$\|k_2(\xi - A_2\cdot)\chi_{B_{j+1}^1\setminus B_j^1}\|_{r_2,B_{j+1}^1} \lesssim (2^{j+1}R)^{-\alpha_2}.$$

Como $k_1 \in S_{n-\alpha_1,r_1}$ y $\alpha_1+\alpha_2 = n-\alpha$, obtenemos que

$$\begin{aligned}\int_{Y^1} &|k_1(\xi - A_1y)||k_2(\xi - A_2y)||f(y)|dy \\ &\leq cM_{\alpha,s}f(A_1^{-1}x)\sum_{j=1}^{l-1}|B^1_{j+1}|^{1-\alpha/n-\alpha_2/n}\|k_1(\xi - A_1\cdot)\chi_{B^1_{j+1}\setminus B^1_j}\|_{r_1,B^1_{j+1}} \\ &\leq cM_{\alpha,s}f(A_1^{-1}x),\end{aligned}$$

y de forma análoga,

$$\int_{Y^2}|k_1(\xi - A_1y)||k_2(\xi - A_2y)||f(y)|dy \lesssim M_{\alpha,s}f(A_2^{-1}x).$$

Por (4.25), (4.26) y las últimas desigualdades, obtenemos que

$$|T_{\alpha,2}(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus 3(Q_1\cup Q_2)})(\xi)| \lesssim M_{\alpha,s}f(A_1^{-1}x) + M_{\alpha,s}f(A_2^{-1}x) + \tilde{T}_{\alpha,2}(|f|)(x).$$

Usando la desigualdad de Coifman-Fefferman en el Teorema 4.7 para $\tilde{T}_{\alpha,2}(|f|)$ y el hecho de que $M_{\alpha,s}$ es de tipo débil $(s, \frac{ns}{n-\alpha s})$, obtenemos la desigualdad deseada. □

Demostración del Lema 4.25. Seguimos las ideas en [44] y del lema anterior. En este caso daremos los cambios de la prueba.

(i) Para $i = 1, 2$, sea $A_i^{-1}x \in \mathrm{int}Q_0^i$ y supongamos que $A_i^{-1}x$ es un punto de aproximación continua de $T(f\chi_{3Q_0^i})$. Para todo $\epsilon > 0$ y $\rho > 0$ definimos

$$E^i_\rho = \{y \in B(A_i^{-1}x, \rho) : |T(f\chi_{3Q_0^i})(y) - T(f\chi_{3Q_0^i})(x)| < \epsilon/2\},$$

entonces $\lim_{\rho\to 0}\dfrac{|E^i_\rho|}{|B(A_i^{-1}x,\rho)|} = 1$. Sea $Q(A_i^{-1}x, \rho)$ el menor cubo centrado en $A_i^{-1}x$ que contiene a $B(A_i^{-1}x, \rho)$. Tomemos ρ tal que $Q(A_i^{-1}x, \rho) \subset Q_0^i$.
Luego, p.p. $y \in \bigcup_{i=1}^m E^i_\rho$ tenemos que

$$|T(f\chi_{3(Q_0^1\cup Q_0^2)})(x)| \leq \|T\|_{L^1\to L^{1,\infty}}\sum_{i=1}^m|f(A_i^{-1}x)| + M_{T,Q_0^1\cup Q_0^2}f(x).$$

(ii) Sean Q_1, Q_2 cubos tales que $A_i^{-1}x \in Q_i$ y sea $\xi \in \bigcup_{i=1}^m Q_i$. Luego

$$\begin{aligned}
|T(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus 3\bigcup_{i=1}^m Q_i})(\xi)| &\leq |T(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus 3\bigcup_{i=1}^m Q_i})(\xi) - |T(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus 3\bigcup_{i=1}^m Q_i})(x')| \\
&\quad + |Tf(x')| + |T(f\chi_{3\bigcup_{i=1}^m Q_i})(x')| \\
&\leq |T(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus 3\bigcup_{i=1}^m Q_i})(\xi) - |T(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus 3\bigcup_{i=1}^m Q_i})(x')| \\
&\quad + |Tf(x')| + \sum_{i=1}^m |T(f\chi_{3Q_i})(x')|.
\end{aligned}$$

De forma análoga al caso fraccionario, como $k_i \in S_{n-\alpha_i,\Psi_i} \cap H_{n-\alpha_i,\Psi_i}$ para $i = 1,\dots,m$, tenemos que

$$|T(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus 3\bigcup_{i=1}^m Q_i})(\xi) - |T(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus 3\bigcup_{i=1}^m Q_i})(x')| \leq c\sum_{i=1}^m M_s f(A_i^{-1}x).$$

Ahora, sea Q un cubo tal que $\bigcup_{i=1}^m Q_i \subset Q$ y $x \in Q$, tomando el promedio en $(L^\delta(Q), \frac{dx'}{|Q|})$ con $0 < \delta < 1$, obtenemos que

$$|T(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus 3\bigcup_{i=1}^m Q_i})(\xi)| \leq c\sum_{i=1}^m M_\phi f(A_i^{-1}x) + M_\delta(Tf)(x) + \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |T(f\chi_{3Q_i})(x')|^\delta dx'\right)^{1/\delta}.$$

Del último término, por la desigualdad de Kolmogorov tenemos que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |T(f\chi_{3Q_i})(x')|^\delta dx'\right)^{1/\delta} &\leq c\|T\|_{L^1\to L^{1,\infty}}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f\chi_{3Q_i}(x')|dx' \\
&\leq c\|T\|_{L^1\to L^{1,\infty}}\frac{1}{|Q_i|}\int_{3Q_i} |f(x')|dx' \\
&\leq c\|T\|_{L^1\to L^{1,\infty}} Mf(A_i^{-1}x).
\end{aligned}$$

Luego, obtenemos que

$$M_T(f)(x) \lesssim \sum_{i=1}^m \left[M_s f(A_i^{-1}x) + \|T\|_{L^1\to L^{1,\infty}} Mf(A_i^{-1}x)\right] + M_\delta(Tf)(x).$$

Ahora, probaremos la desigualdad en el extremo. Observemos que para $p = p_0$

$$\begin{aligned}
\|M_\delta(Tf)\|_{L^{p,\infty}} &= \|M(|Tf|^\delta)\|_{L^{p/\delta,\infty}}^{1/\delta} \\
&\leq c\||Tf|^\delta\|_{L^{p/\delta,\infty}}^{1/\delta} = c\|Tf\|_{L^{p,\infty}} \\
&\leq c\|T\|_{L^p\to L^{p,\infty}}\|f\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

Luego, usando el Lema 3.4,

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M_\delta(Tf)(x) > \lambda\}| \lesssim \int_{\mathbb{R}^n}\left(c\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^s dx.$$

Como M_s es de tipo débil (s,s), obtenemos la desigualdad deseada. □

4.8 Clase de pesos $\mathcal{A}_{A,p,q}$.

Comencemos estudiando los pesos adecuados para los cuales el operador maximal, $M_{\alpha,A^{-1}}$, $0 \leq \alpha < n$, definido por

$$M_{\alpha,A^{-1}}f(x) = M_\alpha f(A^{-1}x),$$

esta acotado de $L^p(w^p)$ en $L^{q,\infty}(w^q)$, es decir

$$\sup_{\lambda>0} \lambda\, w^q \left(\{x \in \mathbb{R}^n : M_{\alpha,A^{-1}}f(x) \geq \lambda\}\right)^{1/q} \leq C_{n,A,w} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p w^p\right)^{1/p}.$$

Supongamos que $M_{\alpha,A^{-1}}$ es acotado de $L^p(w^p)$ en $L^{q,\infty}(w^q)$, $0 < \alpha < n$. Sea Q un cubo tal que $\frac{1}{|Q|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_Q f > \lambda$. Si $A^{-1}x \in Q$ entonces $M_{\alpha,A^{-1}}f(x) \geq \lambda$. Luego, $w^q(AQ)^{1/q} \leq w^q \left(\{x \in \mathbb{R}^n : M_{\alpha,A^{-1}}f(x) \geq \lambda\}\right)^{1/q}$.

Como $M_{\alpha,A^{-1}}$ es acotado de $L^p(w^p)$ en $L^{q,\infty}(w^q)$ tenemos que,

$$\begin{aligned} \lambda w^q(AQ)^{1/q} &\leq \lambda w^q \left(\{x \in \mathbb{R}^n : M_{\alpha,A^{-1}}f(x) \geq \lambda\}\right)^{1/q} \\ &\leq C_{n,A,w} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p w^p\right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Luego

$$\frac{1}{|Q|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \left(\int_Q f\right) w^q(AQ)^{1/q} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p w^p\right)^{1/p}. \tag{4.27}$$

Si $p > 1$, tomamos $f = w^{-p'}\chi_Q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, y obtenemos

$$\frac{1}{|Q|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \left(\int_Q w^{-p'}\right) w^q(AQ)^{1/q} \leq C \left(\int_Q w^{-p'p} w^p\right)^{1/p} = C \left(\int_Q w^{-p'}\right)^{1/p},$$

entonces, como $1 - \frac{\alpha}{n} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p'}$

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_{AQ} w^q\right)^{1/q} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{-p'}\right)^{1-\frac{1}{p}} \leq C,$$

o en cambio

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w_A^q\right)^{1/q} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{-p'}\right)^{1/p'} \leq C.$$

En el caso de $\alpha = 0$, de forma análoga obtenemos que si $M_{A^{-1}}$ es acotado de $L^p(w)$ en $L^{p,\infty}(w)$ con $p > 1$ entonces, como $\frac{p}{p'} = p - 1$,

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w_A\right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} \leq C.$$

Definimos las clases de pesos $\mathcal{A}_{A,p}$ y $\mathcal{A}_{A,p,q}$. Diremos que $w \in \mathcal{A}_{A,p}$ con $1 < p < \infty$ si

$$[w]_{\mathcal{A}_{A,p}} = \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q w(Ax)dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q w^{-\frac{p'}{p}}(x)dx \right)^{p-1} \leq \infty. \tag{4.28}$$

Además diremos que $w \in \mathcal{A}_{A,1}$ si

$$M(w_A)(x) \leq c_w w(x), \tag{4.29}$$

p.p. $x \in \mathbb{R}^n$. La constante $[w]_{\mathcal{A}_{A,1}}$ es el menor valor de c_w para el cual la desigualdad (4.29) vale.

Diremos que $w \in \mathcal{A}_{A,p,q}$, $1 < p \leq \infty$, $1 \leq q < \infty$ si

$$[w]_{\mathcal{A}_{A,p,q}} = \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q w^q(Ax)dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q w^{-p'}(x)dx \right)^{\frac{1}{p'}} \leq \infty. \tag{4.30}$$

Observación 4.26. *Si $w \in \mathcal{A}_{A,p,p}$ entonces $w^p \in \mathcal{A}_{A,p}$.*

Veamos las propiedades de esta clase de pesos. Una de las más importantes es la siguiente

Proposición 4.27. *Sean $0 \leq \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ y $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. Si $w \in \mathcal{A}_{A,p,q}$, entonces $w(Ax) \leq [w]_{\mathcal{A}_{A,p,q}} w(x)$ p.p. $x \in \mathbb{R}^n$.*

Demostración. Recordemos que $w_A(x) = w(Ax)$. Usando la desigualdad de Hölder tenemos que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{w_A^q(Q)}{|Q|} \right)^{1/q} &= \left(\frac{w_A^q(Q)}{|Q|} \right)^{1/q} \frac{1}{|Q|} \int_Q w w^{-1} \\
&\leq \left(\frac{w_A^q(Q)}{|Q|} \right)^{1/q} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{-p'} \right)^{1/p'} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^p \right)^{1/p} \\
&\leq [w]_{\mathcal{A}_{A,p,q}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^p \right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
w_A^q(Q) &\leq [w]_{\mathcal{A}_{A,p,q}}^q |Q|^{1-\frac{q}{p}} \left(w^p(Q) \right)^{q/p} \\
&= [w]_{\mathcal{A}_{A,p,q}}^q |Q|^{-\frac{\alpha}{n} q} \left(w^p(Q) \right)^{q/p}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, sea $x \in \mathbb{R}^n$, el Teorema de Diferenciación de Lebesgue implica que

$$w_A^q(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{|Q_\varepsilon|} \int_{Q_\varepsilon} w_A^q(y)dy,$$

donde Q_ε es un cubo centrado en x cuya longitud de lados es 2ε. Luego, obtenemos que

$$\begin{aligned}
w(Ax) = (w_A^q(x))^{1/q} &= \left(\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{|Q_\varepsilon|} \int_{Q_\varepsilon} w_A^q(y)dy \right)^{1/q} \\
&\leq c_{p,q} \lim_{\varepsilon \to 0} [w]_{\mathcal{A}_{A,p,q}} |Q_\varepsilon|^{-\frac{1}{q} - \frac{\alpha}{n}} \left(w^p(Q_\varepsilon)\right)^{1/p} \\
&= c_{p,q}[w]_{\mathcal{A}_{A,p,q}} \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{1}{|Q_\varepsilon|} \int_{Q_\varepsilon} w^p(y)dy \right)^{1/p} \\
&= c_{p,q}[w]_{\mathcal{A}_{A,p,q}} w(x).
\end{aligned}$$

□

Estas clases cumplen propiedades similares a las clases de pesos Muckenhoupt y las clases de pesos fraccionarios. Mencionaremos las que nos parecen más importantes omitiendo algunas demostraciones.

Proposición 4.28. *Sea w un peso. Valen las siguientes afirmaciones*

(i) Si $p < q$ entonces $\mathcal{A}_{A,p} \subset \mathcal{A}_{A,q}$.

(ii) Si $w \in \mathcal{A}_{A,p}$ entonces $w^{1-p'} \in \mathcal{A}_{A^{-1},p'}$.

(iii) Si $w_0 \in \mathcal{A}_{A,1}$ y $w_1 \in \mathcal{A}_{A^{-1},1}$ entonces $w = w_0 w_1^{1-p} \in \mathcal{A}_{A,p}$.

(iv) Si $w \in \mathcal{A}_{A,p,q}$ entonces $w^q \in \mathcal{A}_{A,1+\frac{q}{p'}}$ y $w^{-p'} \in \mathcal{A}_{A^{-1},1+\frac{p'}{q}}$.

Proposición 4.29. *Sean $1 < p < \infty$, A una matiz invertible y $w \in \mathcal{A}_{A,p}$. Valen las siguientes afirmaciones*

(i)

$$|det(A)|^{-1} \sup_Q \left(\frac{|AQ \cap Q|}{|Q|} \right)^p \leq [w]_{\mathcal{A}_{A,p}}. \tag{4.31}$$

(ii) La propiedad "A-doblante": Para todo $\lambda \geq 1$ y todo cubo Q tenemos que

$$w_A(\lambda Q) \leq \lambda^{np} [w]_{\mathcal{A}_{A,p}} w(Q),$$

donde λQ es un cubo de mismo centro que Q y lado λ veces el lado de Q.

Observación 4.30. *Observemos que (4.31) no implica que la constante $\mathcal{A}_{A,p}$ deba ser más grande que uno como sucede con los pesos de Muckenhoupt.*

Proposición 4.31. *Sean $1 < p < \infty$, w un peso, $\sigma = w^{-p'/p}$ y A, B matrices invertibles.*

(i) Si $w \in \mathcal{A}_{A,p} \cap \mathcal{A}_{A^{-1},p}$ entonces $w \in \mathcal{A}_p$ y $[w]_{\mathcal{A}_p} \leq [w]_{\mathcal{A}_{A,p}}[w]_{\mathcal{A}_{A^{-1},p}}$.

(ii) Si $w \in \mathcal{A}_{A,p} \cap \mathcal{A}_{B,p}$ entonces $w \in \mathcal{A}_{AB,p}$ y $[w]_{\mathcal{A}_{AB,p}} \lesssim [w]_{\mathcal{A}_{A,p}}[w]_{\mathcal{A}_{B,p}}$.

(iii) Sea Q un cubo. Si $w \in \mathcal{A}_{A,p}$ entonces $\frac{1}{|Q|}\int_Q (w_A w^{-1})^{1/p} \leq [w]_{\mathcal{A}_{A,p}}^{1/p}$.

Observación 4.32. *Sean A una matriz invertible y Q un cubo. Existen cubos Q_1, Q_2 tales que $Q_1 \subset AQ \subset Q_2$ y $|Q_1|, |Q_2| \sim |AQ| = |detA||Q|$.*
Para el caso de una bola, $B = B(A^{-1}x, r)$, es suficiente tomar $B_1 = B(x, \frac{r}{\|A^{-1}\|})$ y $B_2 = (x, r\|A\|)$, donde $\|A\| = \sup_{x\neq 0}\frac{|Ax|}{|x|}$. Luego $B_1 \subset AB \subset B_2$.
Para el caso de un cubo Q, podemos tomar bolas $B, \tilde{B}$ tales que $B \subset Q \subset \tilde{B}$ y aplicando lo anterior obtenemos $B_1 \subset AB \subset AQ \subset A\tilde{B} \subset \tilde{B}_2$. Luego existen Q_1, Q_2 cubos tales que $Q_1 \subset B_1$ y $B_2 \subset Q_2$.

Demostración. (*i*) Sean $w \in \mathcal{A}_{A,p} \cap \mathcal{A}_{A^{-1},p}$ y Q un cubo. Por la desigualdad de Hölder tenemos que

$$1 = \frac{|Q|^p}{|Q|^p} \leq \frac{1}{|Q|}\int_Q w_A \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \sigma_A\right)^{p-1}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q w(x)dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q w^{-\frac{p'}{p}}(x)dx\right)^{p-1}\\
&\leq \frac{1}{|Q|}\int_Q w\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \sigma_A\right)^{p-1}\frac{1}{|Q|}\int_Q w_A\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \sigma\right)^{p-1}\\
&\leq [w]_{\mathcal{A}_{A,p}}\frac{1}{|Q|}\int_Q w\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \sigma_A\right)^{p-1}.
\end{aligned}$$

Si tomamos $\tilde{Q}$ un cubo tal que $AQ \subset \tilde{Q}$ y $|\tilde{Q}| \sim |AQ|$, entonces

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|Q|}\int_Q w\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \sigma_A\right)^{p-1}\\
&= \frac{1}{|Q|}\int_Q w(AA^{-1}x)dx\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \sigma(Ax)dx\right)^{p-1}\\
&= \frac{1}{|AQ|}\int_{AQ} w(A^{-1}x)dx\left(\frac{1}{|AQ|}\int_{AQ} \sigma(x)dx\right)^{p-1}\\
&\lesssim \frac{1}{|\tilde{Q}|}\int_{\tilde{Q}} w(A^{-1}x)dx\left(\frac{1}{|\tilde{Q}|}\int_{\tilde{Q}} \sigma(x)dx\right)^{p-1}\\
&\lesssim [w]_{\mathcal{A}_{A^{-1},p}}.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q w(x)dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q w^{-\frac{p'}{p}}(x)dx\right)^{p-1} \lesssim [w]_{\mathcal{A}_{A,p}}[w]_{\mathcal{A}_{A^{-1},p}}.$$

Por lo tanto, $w \in \mathcal{A}_p$ y $[w]_{\mathcal{A}_p} \leq [w]_{\mathcal{A}_{A,p}}[w]_{\mathcal{A}_{p,A}}$.

Para (ii), procedemos de manera similar al inciso anterior, sea R un cubo tal que $BQ \subset R$ y $|\tilde{Q}| \sim |BQ|$. Luego,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|}\int_Q w_{AB}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \sigma\right)^{p-1} &= \frac{1}{|BQ|}\int_{BQ} w_{AB}\left(\frac{1}{|BQ|}\int_{BQ} \sigma_{B^{-1}}\right)^{p-1}\\
&\leq \frac{1}{|BQ|}\int_{BQ} w_A\left(\frac{1}{|BQ|}\int_{BQ} \sigma\right)^{p-1}\frac{1}{|BQ|}\int_{BQ} w\left(\frac{1}{|BQ|}\int_{BQ} \sigma_{B^{-1}}\right)^{p-1}\\
&\lesssim \frac{1}{|R|}\int_R w_A\left(\frac{1}{|R|}\int_R \sigma\right)^{p-1}\frac{1}{|Q|}\int_Q w_B\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \sigma\right)^{p-1}\\
&\leq [w]_{\mathcal{A}_{A,p}}[w]_{\mathcal{A}_{B,p}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$[w]_{\mathcal{A}_p} \lesssim [w]_{\mathcal{A}_{A,p}}[w]_{\mathcal{A}_{B,p}}.$$

Por último, (iii) se obtiene de la desigualdad de Hölder

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \left(w_A w^{-1}\right)^{1/p} \leq \frac{1}{|Q|}\left(\int_Q w_A\right)^{1/p}\left(\int_Q w^{-\frac{p'}{p}}\right)^{1/p'} \leq [w]_{\mathcal{A}_{A,p}}^{1/p}.$$

$\square$

Los siguientes resultados muestran una relación entre esta nueva clases de pesos y los pesos de Muchenhoupt que cumplen la condición $w_A \lesssim w$, i.e. $w(Ax) \leq cw(x)$ p.p.$x \in \mathbb{R}^n$.

Proposición 4.33. *Sean $1 < p < \infty$, A una matriz invertible y w un peso. Si $w \in A_p$ y $w_A \lesssim w$ entonces $w \in \mathcal{A}_{A,p}$.*

Teorema 4.34. *Sean $1 < p < \infty$, A una matriz invertible y w un peso. Luego,*

$$w \in \mathcal{A}_{A,p} \cap \mathcal{A}_{A^{-1},p} \qquad \text{si y solo si} \qquad w \in A_p \text{ y } w_A \sim w.$$

Observación 4.35. *Observemos que tenemos las siguientes inclusiones*

$$A_{p,q} \cap \{w : w_A \lesssim w\} \subset \{w : w \text{ cumple la condición testing de } M_{\alpha,A^{-1}}\} \subset \mathcal{A}_{A,p,q}.$$

La condición testing de $M_{\alpha,A^{-1}}$ se definirá con precisión en la siguiente sección

Ahora mostraremos algunos casos de matrices en los cuales la clase $\mathcal{A}_{A,p}$ es una subclase de la clase de Muckenhoupt $\mathcal{A}_p$.

Proposición 4.36. *Sean $1 < p < \infty$, w un peso y A una matriz invertible.*

(i) Si $A^{-1} = A$ y $w \in \mathcal{A}_{A,p}$ entonces $w \in \mathcal{A}_p$ y $[w]_{\mathcal{A}_p} \lesssim [w]^2_{\mathcal{A}_{A,p}}$.

(ii) Si $A^N = A$ para algún $N \in \mathbb{N}$ y $w \in \mathcal{A}_{A,p}$ entonces $w \in \mathcal{A}_p$ y $[w]_{\mathcal{A}_p} \lesssim [w]^N_{\mathcal{A}_{A,p}}$.

4.9 El operador maximal $M_{\alpha,A^{-1}}$.

En la sección anterior vimos que si $M_{\alpha,A^{-1}}$ es acotado de $L^p(w^p)$ en $L^{q,\infty}(w^q)$ entonces $\mathcal{A}_{A,p,q}$. En esta sección vamos a ver otros resultados de acotación para $M_{\alpha,A^{-1}}$ con pesos $\mathcal{A}_{A,p,q}$.

Teorema 4.37. *Sean A matriz invertible, $0 \leq \alpha < n$, $1 < p \leq \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. Sea w un peso. El operador $M_{\alpha,A^{-1}}$ esta acotado de $L^p(w^p)$ en $L^{q,\infty}(w^q)$ si y solo si $w \in \mathcal{A}_{A,p,q}$. Más aún,*

$$\|M_{\alpha,A^{-1}}f\|_{L^{q,\infty}(w^q)} \leq C[w]_{\mathcal{A}_{A,p,q}}\|f\|_{L^p(w^p)}.$$

Este teorema se prueba de forma similar a los teoremas de tipo débil de la maximal de Hardy-Litllewood y la maximal fraccionaria, teniendo en cuenta la siguiente proposición

Proposición 4.38. *Sean A matriz invertible, w un peso, $\lambda > 0$. Luego*

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : |M_{\alpha,A^{-1}}f(x)| > \lambda\}) = w_A(\{x \in \mathbb{R}^n : |M_\alpha f(x)| > \lambda\}),$$

donde $w_A(x) = w(Ax)$.

Demostración. Por la definición del operador maximal tenemos que

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : |M_{\alpha,A^{-1}}f(x)| > \lambda\}) = w(\{x \in \mathbb{R}^n : |M_\alpha f(A^{-1}x)| > \lambda\}).$$

Luego,

$$\begin{aligned} w(\{x \in \mathbb{R}^n : |M_{\alpha,A^{-1}}f(x)| > \lambda\}) &= w(\{x \in \mathbb{R}^n : |M_\alpha f(A^{-1}x)| > \lambda\}) \\ &= w(\{Ay \in \mathbb{R}^n : |M_\alpha f(y)| > \lambda\}) \\ &= w(A\{y \in \mathbb{R}^n : |M_\alpha f(y)| > \lambda\}) \\ &= w_A(\{y \in \mathbb{R}^n : |M_\alpha f(y)| > \lambda\}). \end{aligned}$$

□

Demostración del Teorema 4.37 . La ida ya fue probada en la sección anterior. Por la proposición 4.38, tenemos que

$$\begin{aligned} \|M_{\alpha,A^{-1}}\|_{L^{q,\infty}(w^q)} &= \sup_{\lambda>0} \lambda w^q(\{x \in \mathbb{R}^n : |M_{\alpha,A^{-1}}f(x)| > \lambda\})^{1/q} \\ &= \sup_{\lambda>0} \lambda w_A^q(\{x \in \mathbb{R}^n : |M_\alpha f(x)| > \lambda\})^{1/q}. \end{aligned}$$

De manera análoga a la prueba para M_α, por la descomposición de Calderón-Zygmund para f a altura $\frac{\lambda}{2^{2n-\alpha}}$, existe una familia de cubos $\{Q_j\}$ tales que

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |M_\alpha f(x)| > \lambda\} \subset \cup_j Q_j^3$$

y

$$\lambda < \frac{1}{|Q_j|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_{Q_j} f \leq 2^{n-\alpha}\lambda,$$

donde Q_j^3 es el cubo con tres veces el lado y mismo centro que Q_j. Luego,

$$\begin{aligned}
\lambda^q w_A^q(\{x\in\mathbb{R}^n : |M_\alpha f(x)|>\lambda\}) &\le \lambda^q \sum_j \int_{Q_j^3} w_A^q(x)dx\\
&= \sum_j \lambda^q 3^n |Q_j| \frac{1}{|Q_j^3|}\int_{Q_j^3} w_A^q(x)dx\\
&\le 3^n \sum_j \left(\frac{1}{|Q_j|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int_{Q_j} f\right)^q |Q_j| \frac{1}{|Q_j^3|}\int_{Q_j^3} w_A^q(x)dx\\
&\le 3^n \sum_j |Q_j|^{1-q(1-\frac{\alpha}{n})}\left(\int_{Q_j} fw^p\right)^{\frac{q}{p}}\left(\int_{Q_j} w^{-p'}\right)^{\frac{q}{p'}} \frac{1}{|Q_j^3|}\int_{Q_j^3} w_A^q(x)dx\\
&\le 3^n \sum_j |Q_j|^{-\frac{q}{p'}}\left(\int_{Q_j} fw^p\right)^{\frac{q}{p}}\left(\int_{Q_j^3} w^{-p'}\right)^{\frac{q}{p'}} \frac{1}{|Q_j^3|}\int_{Q_j^3} w_A^q(x)dx\\
&\le 3^{n+\frac{q}{p'}}[w]^q_{\mathcal{A}_{A,p,q}} \sum_j \left(\int_{Q_j} fw^p\right)^{\frac{q}{p}}\\
&\le 3^{n+\frac{q}{p'}}[w]^q_{\mathcal{A}_{A,p,q}} \|f\|^q_{L^p(w^p)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si $w\in\mathcal{A}_{A,p,q}$ entonces

$$\|M_{\alpha,A^{-1}}f\|_{L^{q,\infty}(w^q)} \le C[w]_{\mathcal{A}_{A,p,q}}\|f\|_{L^p(w^p)}.$$

□

Para la acotación de $L^p(w^p)$ en $L^q(w^q)$ del operador $M_{\alpha,A^{-1}}$, estudiamos la acotación $L^p(\sigma)$ en $L^q(u)$ para el operador $M_{\alpha,r}(\cdot\sigma)$, con (u,σ) pares de pesos. En [77], el autor prueba el siguiente resultado

Proposición 4.39. *[77] Sean $0\le\alpha<n$, $1<p\le q<\infty$, y un par de pesos (u,v), son equivalentes:*

(i) El par (u,v) cumple la condición testing

$$\mathcal{M}_{\alpha,p,q} = \sup_Q\ v(Q)^{-1/p}\left(\int_Q M_\alpha(\chi_Q v)^q u\right)^{1/q} < \infty. \tag{4.32}$$

(ii) Para toda $f\in L^p(v)$, existe $C_{n,p,q,\alpha}>0$ tal que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} M_\alpha(fv)^q u\right)^{1/q} \le C_{n,p,q,\alpha}\mathcal{M}_{\alpha,p,q}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f|^p v\right)^{1/p}.$$

Luego, se puede probar un resultado análogo para $M_{\alpha,r}$,

Proposición 4.40. *Sean* $0 \leq \alpha < n$, $1 < r < p \leq q < \infty$ *y* (u,σ) *un par de pesos, son equivalentes:*

(i) El par (u,σ) *cumplen la condición testing*

$$\mathcal{M}_{\alpha,r,p,q} = \sup_{Q} \; v^r(Q)^{-r/p} \left(\int_Q M_{\alpha,r}(\chi_Q v)^q u \right)^{r/q} < \infty,$$

donde $v = \sigma^{\frac{(p/r)'}{p'}}$.

(ii) Para todo $f \in L^p(\sigma)$, *existe* $\tilde{C}_{n,p,q,\alpha} > 0$ *tal que*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} M_{\alpha,r}(f\sigma)^q u \right)^{1/q} \leq \tilde{C}_{n,p,q,\alpha} \mathcal{M}_{\alpha,r,p,q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \sigma \right)^{1/p}.$$

Observar que, si tomamos $u = w_A^q$ y $\sigma = w^{-p'}$, tenemos que $[w]_{\mathcal{A}_{A,\frac{p}{r},\frac{q}{r}}} \leq \mathcal{M}_{\alpha,r,p,q}$ y para $g = f\sigma^{-1}$, tenemos que $M_{\alpha,r,A^{-1}} : L^p(w^p) \to L^q(w^q)$.

Corolario 4.41. *Sean* $0 \leq \alpha < n$, $1 < r < p \leq q < \infty$ *y* w *un peso, son equivalentes:*

(i) El peso w *cumple la condición testing*

$$\mathcal{M}_{\alpha,A,r,p,q} = \sup_{Q} \; v^r(Q)^{-r/p} \left(\int_Q M_{\alpha,r,A^{-1}}(\chi_Q v)^q w^q \right)^{r/q} < \infty,$$

con $v = w^{(p/r)'}$.

(ii) Para todo $g \in L^p(w^p)$, *existe* $C_{n,p,\alpha} > 0$ *tal que*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} M_{\alpha,r,A^{-1}}(g)^q w^q \right)^{1/q} \leq C_{n,p,\alpha} \mathcal{M}_{\alpha,A,r,p,q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g|^p w^p \right)^{1/p}.$$

Notar que si $r = 1$ escribimos $\mathcal{M}_{\alpha,A,p,q} = \mathcal{M}_{\alpha,A,r,p,q}$.

4.10 Acotaciones de $T_{\alpha,m}$ con peso en $\mathcal{A}_{A,p,q}$.

En algunos casos del operador $T_{\alpha,m}$ y ciertas matrices A_i obtenemos una acotación con algún control sobre la constante del peso.

Teorema 4.42. *Sean $0 \leq \alpha < n$, $m \in \mathbb{N}$ y $T_{\alpha,m}$ el operador integral definido por (4.1). Para $1 \leq i \leq m$, sea $0 \leq \alpha_i < n$ tal que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = n - \alpha$. Sea $k_i \in S_{n-\alpha_i,r_i} \cap H_{n-\alpha_i,r_i}$ y sean matrices A_i que cumplen la hipótesis (H2). Supongamos que (H3) vale.*

Si existe $s \geq 1$ tal que $\frac{1}{r_1} + \cdots + \frac{1}{r_m} + \frac{1}{s} = 1$, $A_j = A_i^{-1}$ para algún $j \neq i$, $s < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ y $w^s \in \bigcap_{i=1}^m \mathcal{A}_{A_i,\frac{p}{s},\frac{q}{s}}$ para todo $1 \leq i \leq m$, entonces

$$\|T_{\alpha,m}f\|_{L^q(w^q)} \leq C\|f\|_{L^p(w^p)} \sum_{i=1}^m [w^s]_{\mathcal{A}_{A_i,\frac{p}{s},\frac{q}{s}}}^{\max\left\{1-\frac{\alpha}{n}, \frac{(p/s)'}{q}\left(1-\frac{\alpha s}{n}\right)\right\}}.$$

Demostración. Como $A_j = A_i^{-1}$ para algún $j \neq i$ y $w^s \in \bigcap_{i=1}^m \mathcal{A}_{A_i,\frac{p}{s},\frac{q}{s}}$ para todo $1 \leq i \leq m$, entonces $w^s \in \mathcal{A}_{\frac{p}{s},\frac{q}{s}}$, $w_{A_i} \sim w$ y $w_{A_l} \lesssim w$ con $l \neq i$. Por la dominación sparse, Teorema 4.22, tenemos que

$$T_{\alpha,m}f(x) \leq C \sum_{j=1}^{3^n} \sum_{i=1}^m \mathcal{A}_{\alpha,s,\mathcal{S}_j}(A_i^{-1}x).$$

Luego, como $w_{A_i}^q, w^p \in \mathcal{A}_\infty$, por el Teorema 2.10 obtenemos que

$$\|A_{\alpha,s,\mathcal{S}}f\|_{L^q(w_{A_i}^q)} \leq c_n [w^s]_{A_{p/s,q/s}}^{\max\left\{1-\frac{\alpha}{n}, \frac{(p/s)'}{q}\left(1-\frac{\alpha s}{n}\right)\right\}} \|f\|_{L^p(w^p)}.$$

Por lo tanto,

$$\|T_{\alpha,m}f\|_{L^q(w^q)} \leq C\|f\|_{L^p(w^p)} \sum_{i=1}^m [w^s]_{\mathcal{A}_{A_i,\frac{p}{s},\frac{q}{s}}}^{\max\left\{1-\frac{\alpha}{n}, \frac{(p/s)'}{q}\left(1-\frac{\alpha s}{n}\right)\right\}}.$$

$\square$

En el caso del operador

$$T_{\alpha,2}f(x) = \int \frac{f(y)}{|x - A_1y|^{\alpha_1}|x - A_2y|^{\alpha_2}} dy, \tag{4.33}$$

tenemos la siguiente caracterización de los pesos,

Teorema 4.43. *Sean $0 \leq \alpha < n$, $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 < n$ tal que $\alpha_1 + \alpha_2 = n - \alpha$. Sean $1 < p < n/\alpha$ y $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. Sean A_1, A_2 matrices invertibles tal que $A_1 - A_2$ es invertible. Sea $T_{\alpha,2}$ el operador definido por (4.33). Sea w un peso. Si $T_{\alpha,2} : L^p(w^p) \to L^q(w^q)$ entonces $w \in \mathcal{A}_{A_1,p,q} \cap \mathcal{A}_{A_2,p,q}$.*
Más aún, si $A_2 = A_1^{-1}$ o $A_1 = -I$ y $A_2 = I$, entonces $T_{\alpha,2} : L^p(w^p) \to L^q(w^q)$ si y solo si $w \in \mathcal{A}_{A_1,p,q} \cap \mathcal{A}_{A_2,p,q}$.

Observación 4.44. *Este resultado generaliza el Teorema 3.2 y Corolario 3.3 en [21], donde los autores consideran $p = q$, $\alpha = 0$, $w^p(x) = |x|^\beta \in A_p$, $A_1 = -I$ y $A_2 = I$.*

Demostración. Consideremos $\alpha_1 + \alpha_2 = n - \alpha$. Sea $B = B(c_B, R)$ y $B_i = A_i^{-1}B$. Si $f = \chi_{B_1}$ y $T_{\alpha,2}(\cdot\sigma) : L^p(\sigma) \to L^q(u)$ entonces

$$\sigma(\chi_{B_1})^{-1/p}\left(\int T_{\alpha,2}(\chi_{B_1}\sigma)(x)^q u(x)dx\right)^{1/q} < \infty.$$

Si $x \in B$ y $y \in B_1$, entonces

$$|x - A_1y| \leq |x - c_B| + |c_B - A_1y| \leq R + C_AR = (1 + C_A)R.$$

Si $|x - A_2y| \leq |x - A_1y|$, entonces

$$|x - A_1y|, |x - A_2y| \lesssim R,$$

y

$$\frac{\sigma(y)}{|x - A_1y|^{\alpha_1}|x - A_2y|^{\alpha_2}} \geq \frac{\sigma(y)}{|x - A_1y|^{n-\alpha}} \geq C\frac{\sigma(y)}{R^{n-\alpha}}.$$

Si $|x - A_1y| \leq |x - A_2y|$, entonces

$$\frac{\sigma(y)}{|x - A_1y|^{\alpha_1}|x - A_2y|^{\alpha_2}} \geq \frac{\sigma(y)}{|x - A_2y|^{n-\alpha}}.$$

Si $2^j|x - A_1y| \leq |x - A_2y| \leq 2^{j+1}|x - A_1y|$

$$\frac{1}{|x - A_2y|^{n-\alpha}} \geq 2^{(\alpha-n)(j+1)}\frac{1}{|x - A_1y|^{n-\alpha}} \geq 2^{(\alpha-n)(j+1)}R^{n-\alpha},$$

y

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(2^{\alpha-n}\right)^j = \frac{1}{1 - 2^{\alpha-n}} - 1 = \frac{2^{\alpha-n}}{1 - 2^{\alpha-n}}.$$

Si $|x - A_1y| \leq |x - A_2y|$, entonces

$$\frac{\sigma(y)}{|x - A_1y|^{\alpha_1}|x - A_2y|^{\alpha_2}} \geq 2^{\alpha-n}\frac{2^{\alpha-n}}{1 - 2^{\alpha-n}}\frac{\sigma(y)}{R^{n-\alpha}}.$$

Por lo tanto, si $x \in B$ y $y \in B_1$,

$$\frac{\sigma(y)}{|x - A_1y|^{\alpha_1}|x - A_2y|^{\alpha_2}} \geq C_{n,\alpha,A}\frac{\sigma(y)}{R^{n-\alpha}}.$$

Obtenemos un caso analogo si $y \in B_2$.

Luego, si $x \in B$

$$T_{\alpha,2}(\chi_{B_1}\sigma)(x) \geq R^{\alpha-n}\sigma(B_1) = |B|^{\alpha/n-1}\sigma(B_1),$$

y tenemos que

$$\begin{aligned}
\sigma(B_1)^{-1/p}\left(\int T_{\alpha,2}(\chi_{B_1}\sigma)(x)^q u(x)dx\right)^{1/q} &\geq \sigma(B_1)^{-1/p}\left(\int_B T_{\alpha,2}(\chi_{B_1}\sigma)(x)^q u(x)dx\right)^{1/q} \\
&\geq \sigma(B_1)^{-1/p}\left(\int_B |B|^{q(\alpha/n-1)}\sigma(B_1)^q u(x)dx\right)^{1/q} \\
&\geq \sigma(B_1)^{-1/p}|B|^{(\alpha/n-1)}\sigma(B_1)u(B)^{1/q} \\
&= |B|^{1/q}u(B)^{1/q}|B_1|^{1/p'}\sigma(B_1)^{1/p'} \\
&= |B|^{\alpha/n-1}u(B)^{1/q}\sigma_{A_1^{-1}}(B)^{1/p'}.
\end{aligned}$$

Si $u = w^q$ y $\sigma = w^{-p'}$ concluimos que si $T_{\alpha,2}(\cdot\sigma) : L^p(\sigma) \to L^q(u)$ entonces $w \in \cap_{i=1}^2 \mathcal{A}_{A_i,p,q}$.

En el caso de $A_1 = A$ y $A_2 = A^{-1}$: si $w \in \mathcal{A}_{A,p,q} \cap \mathcal{A}_{A^{-1},p,q}$ entonces $w \in A_p$, $w_A \sim w$ y $T_{\alpha,2} : L^p(w^p) \to L^q(w^q)$. Por otro lado, si $T_{\alpha,2} : L^p(w^p) \to L^q(w^q)$ entonces $T_{\alpha,2}(\cdot\sigma) : L^p(\sigma) \to L^q(w^q)$ donde $\sigma = w^{-p'}$ y $w \in \mathcal{A}_{A,p,q} \cap \mathcal{A}_{A^{-1},p,q}$.

En el caso de $A_1 = -I$ y $A_2 = I$: si $w \in \mathcal{A}_{-I,p,q} \cap \mathcal{A}_{p,q}$ entonces $w \in A_p$, $w_{-I} \sim w$ y $T_{\alpha,2} : L^p(w^p) \to L^q(w^q)$. Por otro lado, si $T_{\alpha,2} : L^p(w^p) \to L^q(w^q)$ entonces $T_{\alpha,2}(\cdot\sigma) : L^p(\sigma) \to L^q(w^q)$ donde $\sigma = w^{-p'}$ y $w \in \mathcal{A}_{-I,p,q} \cap \mathcal{A}_{p,q}$. $\square$

Para el caso de operador $T_{\alpha,m}$ general, definimos las siguientes constantes testing para un par de pesos (u, v). Sea $\mathcal{D}$ una familia de cubos diadicos, $1 \leq r < \frac{n}{\alpha}$ y $1 < p \leq q < \frac{n}{\alpha}$,

$$\mathcal{T}_{A,r,out,\mathcal{D}} = \sup_{R\in\mathcal{D}} v(R)^{-1/p}\left\|\sum_{Q\in\mathcal{D}:R\subset Q}|Q|^{\alpha/n-1/r}\left(\int_Q v\chi_R\right)^{1/r}\chi_Q\right\|_{L^q(u_A)} < \infty,$$

$$\mathcal{T}^*_{A,r,out,\mathcal{D}} = \sup_{R\in\mathcal{D}} u_A(R)^{-1/q'}\left\|\sum_{Q\in\mathcal{D}:R\subset Q}|Q|^{\alpha/n-1/r}v(Q)^{\frac{1}{r}-1}\left(\int_Q u_A\chi_R\right)\chi_Q\right\|_{L^{p'}(v)} < \infty,$$

$$\mathcal{T}_{A,r,in,\mathcal{D}} = \sup_{R\in\mathcal{D}} v(R)^{-1/p}\left\|\sum_{Q\in\mathcal{D}:Q\subset R}|Q|^{\alpha/n-1/r}v(Q)^{1/r}\chi_Q\right\|_{L^q(u_A)} < \infty,$$

$$\mathcal{T}^*_{A,r,in,\mathcal{D}} = \sup_{R\in\mathcal{D}} u_A(R)^{-1/q'} \left\| \sum_{Q\in\mathcal{D}:Q\subset R} |Q|^{\alpha/n-1/r} v(Q)^{\frac{1}{r}-1} u_A(Q)\chi_Q \right\|_{L^{p'}(v)} < \infty.$$

Además, usaremos la siguiente notación:

$$\mathcal{T}_{r,out,\mathcal{D}} := \mathcal{T}_{I,r,out,\mathcal{D}},\ \mathcal{T}^*_{r,out,\mathcal{D}} := \mathcal{T}^*_{I,r,out,\mathcal{D}},\ \mathcal{T}_{r,in,\mathcal{D}} := \mathcal{T}_{I,r,in,\mathcal{D}} \text{ and } \mathcal{T}^*_{r,in,\mathcal{D}} := \mathcal{T}^*_{I,r,in,\mathcal{D}},$$

donde I es la matriz identidad. También para $r = 1$,

$$\mathcal{T}_{A,out,\mathcal{D}} := \mathcal{T}_{A,1,out,\mathcal{D}},\ \mathcal{T}^*_{A,out,\mathcal{D}} := \mathcal{T}^*_{A,1,out,\mathcal{D}},\ \mathcal{T}_{A,in,\mathcal{D}} := \mathcal{T}_{A,1,in,\mathcal{D}} \text{ and } \mathcal{T}^*_{A,in,\mathcal{D}} := \mathcal{T}^*_{A,1,in,\mathcal{D}}.$$

Consideramos 3^n familias diadicas $\{\mathcal{D}_j\}$, definidas en [45], con la siguiente propiedad: todo conjunto acotado esta contenido en algún cubo diadico $Q \in \mathcal{D}_j$.

Teorema 4.45. *Sean $0 \le \alpha < n$ y $1 < r < p \le q < \infty$. Sean A una matriz invertible y $\mathcal{S}$ una familia sparse de una familia de cubos diadicos $\mathcal{D}$. Sea (u, v) un par de pesos y $\sigma = v^{\frac{p'}{(p/r)'r}}$. Si (u, v) cumple condiciónes de testing locales, $\mathcal{T}_{r,out,\mathcal{D}}, \mathcal{T}^*_{r,out,\mathcal{D}} < \infty$, entonces*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{A}_{\alpha,r,\mathcal{S}}(f\sigma)^q u\right)^{1/q} \le C_{n,p,\alpha}(\mathcal{T}_{r,out,\mathcal{D}} + \mathcal{T}^*_{r,out,\mathcal{D}}) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \sigma\right)^{1/p}.$$

Si $\mathcal{T}^*_{r,out,\mathcal{D}} < \infty$ entonces

$$\mathcal{A}_{\alpha,r,\mathcal{S}} : L^p(\sigma) \to L^{q,\infty}(u).$$

Más aún, si $u = w_A^q$ y $v = w^{-r(p/r)'}$, entonces $\sigma = w^{-p'}$ y

$$\mathcal{A}_{\alpha,r,\mathcal{S}} : L^p(w^p) \to L^q(w_A^q).$$

Se puede probar un resultado análogo con condiciones testing globales, $\mathcal{T}_{r,in,\mathcal{D}}$ y $\mathcal{T}^*_{r,in,\mathcal{D}}$

Como en el capítulo 2, vamos a considerar el operador sparse definido en [19], para $\mathcal{S}$ una familia sparse, $0 < t < \infty$ y $0 < \beta \le 1$

$$\tilde{\mathcal{A}}^\beta_{t,\mathcal{S}} g(x) = \left(\sum_{Q\in\mathcal{S}} \left(|Q|^{-\beta}\int_Q g\right)^t \chi_Q(x)\right)^{1/t}.$$

Observemos que

$$\mathcal{A}_{\alpha,r,\mathcal{S}}(f) = \left(\tilde{\mathcal{A}}^{1-r\alpha/n}_{1/r,\mathcal{S}}(f^r)\right)^{1/r}. \tag{4.34}$$

El próximo lema sigue la misma demostración que la Proposición 3.1 in [19] considerando constantes testing $\tilde{\mathcal{T}}_{t,out}$ en lugar de $\tilde{\mathcal{T}}_{t,in}$.

Lema 4.46. *[19] Sean $1 < p \leq q < \infty$, $t \in (0,p)$, $\beta \in (0,1]$, $\mathcal{S}$ una colección sparse de cubos diadicos y (u,v) un par de pesos. Definamos las constantes testing*

$$\tilde{\mathcal{T}}_{t,out} = \sup_{R\in\mathcal{S}} v(R)^{-t/p} \left\| \sum_{Q\in\mathcal{S}:R\subset Q} |Q|^{-\beta t} \left(\int_Q v\chi_R\right)^t \chi_Q \right\|_{L^{q/t}(u)},$$

$$\tilde{\mathcal{T}}^*_{t,out} = \sup_{R\in\mathcal{S}} u(R)^{-1/(q/t)'} \left\| \sum_{Q\in\mathcal{S}:R\subset Q} |Q|^{-\beta t} v(Q)^{t-1} \left(\int_Q u\chi_R\right) \chi_Q \right\|_{L^{(p/t)'}(v)}.$$

Si $\tilde{\mathcal{T}}_{t,out}, \tilde{\mathcal{T}}^*_{t,out} < \infty$ entonces

$$\|\tilde{\mathcal{A}}^\beta_{t,\mathcal{S}}(v\cdot)\|^t_{L^p(v)\to L^q(u)} \lesssim \tilde{\mathcal{T}}_{t,out} + \tilde{\mathcal{T}}^*_{t,out}.$$

Demostración del Teorema 4.45. Usando (4.34), obtenemos que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{A}_{\alpha,r,\mathcal{S}}(f\sigma)^q u\right)^{1/q} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\tilde{\mathcal{A}}^{1/r,1-\alpha/n}_{\mathcal{S}}(f^r\sigma^r)\right)^{q/r} u\right)^{1/q}$$
$$= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\tilde{\mathcal{A}}^{1/r,1-\alpha/n}_{\mathcal{S}}(f^r\sigma^r v^{-1} v)\right)^{q/r} u\right)^{1/q}.$$

Si (u,v) cumple que $\tilde{\mathcal{T}}_{1/r,out}, \tilde{\mathcal{T}}^*_{1/r,out}$ con $p/r, q/r$ y $\beta = 1-\alpha/n$, entonces, por el Lema 4.46, obtenemos que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{A}_{\alpha,r,\mathcal{S}}(f\sigma)^q u\right)^{1/q} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\tilde{\mathcal{A}}^{1/r,1-\alpha/n}_{\mathcal{S}}(f^r\sigma^r v^{-1} v)\right)^{q/r} u\right)^{(r/q)1/r}$$
$$\leq C_{n,p,\alpha}(\tilde{\mathcal{T}}_{1/r,out} + \tilde{\mathcal{T}}^*_{1/r,out}) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f^r\sigma^r v^{-1}|^{p/r} v\right)^{(r/p)1/r}$$
$$= C_{n,p,\alpha}(\tilde{\mathcal{T}}_{1/r,out} + \tilde{\mathcal{T}}^*_{1/r,out}) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p\sigma^p v^{1-p/r}\right)^{1/p}.$$

Como $v = \sigma^{r\frac{(p/r)'}{p'}}$, entonces

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{A}_{\alpha,r,\mathcal{S}}(f\sigma)^q u\right)^{1/q} \leq C_{n,p,\alpha}(\tilde{\mathcal{T}}_{1/r,out} + \tilde{\mathcal{T}}^*_{1/r,out}) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p\sigma\right)^{1/p},$$

observemos que si el par $(u,v) = (u, \sigma^{r\frac{(p/r)'}{p'}})$ cumple que $\mathcal{T}_{r,out,\mathcal{D}}, \mathcal{T}^*_{r,out,\mathcal{D}} < \infty$, con α, p, q entonces el par (u,v) cumple $\tilde{\mathcal{T}}_{1/r,out}, \tilde{\mathcal{T}}^*_{1/r,out} < \infty$ con $\beta = 1-\alpha/n$, p/r y q/r. Más aún, $\tilde{\mathcal{T}}_{1/r,out} \leq \mathcal{T}_{r,out,\mathcal{D}}$ and $\tilde{\mathcal{T}}^*_{1/r,out} \leq \mathcal{T}^*_{r,out,\mathcal{D}}$.

Luego, obtenemos que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{A}_{\alpha,r,\mathcal{S}}(f\sigma)^q u\right)^{1/q} \leq C_{n,p,\alpha}(\mathcal{T}_{r,out,\mathcal{D}} + \mathcal{T}^*_{r,out,\mathcal{D}}) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \sigma\right)^{1/p}.$$

Si consideramos las contantes testing $\mathcal{T}_{r,in,\mathcal{D}}$ y $\mathcal{T}^*_{r,in,\mathcal{D}}$, la prueba es similar usando ideas en [43] □

En el caso del operador $T_{\alpha,m}$, el resultado con condiciones testing que obtenemos es el siguiente

Teorema 4.47. *Sean $0 \leq \alpha < n$, $m \in \mathbb{N}$ y $T_{\alpha,m}$ el operador integral definido por (4.1). Para $1 \leq i \leq m$, sea $0 \leq \alpha_i < n$ tales que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = n - \alpha$. Sean $k_i \in S_{n-\alpha_i,r_i} \cap H_{n-\alpha_i,r_i}$ y las matrices A_i que cumplen (H2). Supongamos que (H3) vale.*

Supongamos que existe $s \geq 1$ tal que $\frac{1}{r_1} + \cdots + \frac{1}{r_m} + \frac{1}{s} = 1$ y (u, v) son pesos tales que para 3^n familias diadicas, $\{\mathcal{D}_j\}$, las condiciones testing $\mathcal{T}_{A_i,s,out,\mathcal{D}_j} < \infty$ y $\mathcal{T}^*_{A_i,s,out,\mathcal{D}_j} < \infty$ para todo $1 \leq i \leq m$, $1 \leq s < p < \frac{n}{\alpha}$. Luego, existe $c > 0$ que no depende de f ni del par (u, v) tal que

$$\|T_{\alpha,m}(f\sigma)\|_{L^q(u)} \leq c\|f\|_{L^p(\sigma)} \sum_{j=1}^{3^n} \sum_{i=1}^{m} (\mathcal{T}_{A_i,s,out,\mathcal{D}_j} + \mathcal{T}^*_{A_i,s,out,\mathcal{D}_j}),$$

donde $\sigma = v^{\frac{p'}{(p/s)'}}$.

Es posible probar un resultado análogo utilizando las condiciones $\mathcal{T}_{A_i,s,in,\mathcal{D}_j}$, $\mathcal{T}^*_{A_i,s,in,\mathcal{D}_j}$ en lugar de $\mathcal{T}_{A_i,s,out,\mathcal{D}_j}$, $\mathcal{T}^*_{A_i,s,out,\mathcal{D}_j}$.

Para el caso de que cada $r_i = \infty$, $1 \leq i \leq m$, obtenemos el siguiente resultado con dos pesos

Teorema 4.48. *Sean $0 \leq \alpha < n$, $m \in \mathbb{N}$ y $T_{\alpha,m}$ el operador integral definido por(4.1). Para $1 \leq i \leq m$, sean $0 \leq \alpha_i < n$ tales que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = n - \alpha$. Sean $k_i \in S_{n-\alpha_i,\infty} \cap H_{n-\alpha_i,\infty}$ y las matrices A_i que cumplan (H2). Supongamos que (H3) vale.*

Sean $1 < p \leq q < \frac{n}{\alpha}$. Si (u, v) es un par de pesos tal que $(u_{A_i}, v) \in \mathcal{M}_{\alpha,p,q}$ y $(v, u_{A_i}) \in \mathcal{M}_{\alpha,q',p'}$ para $i = 1, \ldots, m$, entonces,

$$T_{\alpha,m} : L^p(v) \to L^q(u).$$

Dado w un peso. Tomando el par $(u, v) = (w^q_{A_i}, w^{-p'})$ en el resultado anterior obtenemos el siguiente resultado

Corolario 4.49. *Sean $0 \leq \alpha < n$, $m \in \mathbb{N}$ y sea $T_{\alpha,m}$ el operador integral definido por(4.1). Para $1 \leq i \leq m$, sean $0 \leq \alpha_i < n$ tales que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = n - \alpha$. Sea $k_i \in S_{n-\alpha_i,\infty} \cap H_{n-\alpha_i,\infty}$ y sean las matrices A_i que cumplen (H2). Supongamos que (H3) vale.*

Sean $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ y $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. Si w es un peso tal que $w \in \mathcal{M}_{\alpha,A_i,p,q} \cap \mathcal{M}_{\alpha,A_i,q',p'}$, para $i = 1, \ldots, m$, entonces,

$$T_{\alpha,m} : L^p(w^p) \to L^q(w^q).$$

Demostración del Teorema 4.47. Por hipótesis y usando el resultado de dominación sparse, Teorema 4.22, obtenemos que

$$|T_{\alpha,m} f(x)| \leq c \sum_{j=1}^{3^n} \sum_{i=1}^{m} \mathcal{A}_{\alpha,s,\mathcal{S}_j} f(A_i^{-1}x),$$

entonces

$$\|T_{\alpha,m}(f\sigma)\|_{L^q(u)} \leq c \sum_{j=1}^{3^n} \sum_{i=1}^{m} \|\mathcal{A}_{\alpha,s,\mathcal{S}_j}(f\sigma)\|_{L^q(u_{A_i})}.$$

Como $\mathcal{T}_{A_i,s,out,\mathcal{D}_j}, \mathcal{T}^*_{A_i,s,out,\mathcal{D}_j} < \infty$, para $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq 3^n$, por el Teorema 4.45 tenemos que

$$\|\mathcal{A}_{\alpha,s,\mathcal{S}_j}(f\sigma)\|_{L^q(u_{A_i})} \lesssim (\mathcal{T}_{A_i,s,out,\mathcal{D}_j} + \mathcal{T}^*_{A_i,s,out,\mathcal{D}_j})\|f\|_{L^p(\sigma)},$$

entonces

$$\|T_{\alpha,m}(f\sigma)\|_{L^q(u)} \leq c\|f\|_{L^p(\sigma)} \sum_{j=1}^{3^n} \sum_{i=1}^{m} (\mathcal{T}_{A_i,s,out,\mathcal{D}_j} + \mathcal{T}^*_{A_i,s,out,\mathcal{D}_j}).$$

□

Para la demostración del Teorema 4.48 necesitamos el siguiente resultado

Lema 4.50. *Sea (u, v) un par de pesos tales que $(u_A, v) \in \mathcal{M}_{\alpha,p,q}$ y $(v, u_A) \in \mathcal{M}_{\alpha,q',p'}$, entonce, $\mathcal{T}_{A,out,\mathcal{D}} < \infty$ y $\mathcal{T}^*_{A,out,\mathcal{D}} < \infty$ respectivamente, para toda familia de cubos diadico $\mathcal{D}$.*

Demostración. Veremos solamente que $\mathcal{T}_{A,out,\mathcal{D}} < \infty$, el otro caso se prueba de manera análoga.

Sea R un cubo y $x \in R$, sea $Q_k \in \mathcal{D}$ tal que $R \subset Q_k$ entonces $l(Q_k) = 2^k l(R)$,

$$\begin{aligned}
\sum_{Q \in \mathcal{D}: R \subset Q} |Q|^{\alpha/n - 1/r} \left(\int_Q v\chi_R \right)^{1/r} \chi_Q(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} |Q_k|^{\alpha/n-1/r} \left(\int_{Q_k} v\chi_R \right)^{1/r} \chi_{Q_k}(x) \\
&= |R|^{\alpha/n-1/r} \left(\int_R v \right)^{1/r} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(\alpha/n-1/r)} \\
&\leq CM_{\alpha,r}(v\chi_R)(x)\chi_R(x).
\end{aligned}$$

Luego,

$$\mathcal{T}_{A,r,out,\mathcal{D}} \leq C \sup_{R \in \mathcal{D}} v(R)^{-1/p} \left\| M_{\alpha,r}(v\chi_R)(x)\chi_R(x) \right\|_{L^q(u_A)} = C[u_A, v]_{\mathcal{M}_{\alpha,p,q}}.$$

□

Demostración del Teorema 4.48. La prueba se sigue del Teorema 4.47 y el Lema anterior.

□

Índice alfabético

BMO, 16
$BMO(w)$, 16

Bump, 14
- fraccionarias, 15
- generales, 15

Condición,
- de tamaño $S_{\alpha,\varphi}$, 20

Conmutador, 21

Función complementaria, 8
Función de Young, 7

Hölder, 8
- generalizada, 9

Hörmander
- $H_{\alpha,\varphi}$, 20
- H_{φ}, 19

Integral fraccionaria, 21

John-Nirenberg, 17

Maximal,
- M_T, 26
- $M_{\alpha,\varphi}$, 10
- T^*, 26
- de Hardy-Litllewood, 9
- fraccionaria, 9
- Sharp $M^\sharp$, 16

Operador
- ω-Calderón-Zygmund , 20
- Calderón-Zygmund, 20

Pesos,
- $\mathcal{A}_{A,p,q}$, 127
- $\mathcal{A}_{A,p}$, 127
- Fraccionarios, 13
- Muckenhoupt, 11

Reverse-Hölder, 12

Sparse, 24

Young, funciones de, 8

Bibliografía

[1] Accomazzo, N., Martínez-Perales, J. C., and Rivera-Ríos, I. P. On bloom type estimates for iterated commutators of fractional integrals. *To appear in Indiana University Mathematics Journal* (2018).

[2] Bényi, Á., Martell, J. M., Moen, K., Stachura, E., and Torres, R. H. Boundedness results for commutators with BMO functions via weighted estimates: a comprehensive approach. *arXiv preprint arXiv:1710.08515* (2017).

[3] Bernardis, A., Dalmasso, E., and Pradolini, G. Generalized maximal functions and related operators on weighted Musielak-Orlicz spaces. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 39*, 1 (2014), 23–50.

[4] Bernardis, A. L., Lorente, M., and Riveros, M. S. Weighted inequalities for fractional integral operators with kernel satisfying Hörmander type conditions. *Math. Inequal. Appl 14*, 4 (2011), 881–895.

[5] Buckley, S. M. Estimates for operator norms on weighted spaces and reverse Jensen inequalities. *Transactions of the American Mathematical Society 340*, 1 (1993), 253–272.

[6] Caldarelli, M., Lerner, A., and Ombrosi, S. On a counterexample related to weighted weak type estimates for singular integrals. *Proceedings of the American Mathematical Society 145*, 7 (2017), 3005–3012.

[7] Chung, D., Pereyra, M., and Perez, C. Sharp bounds for general commutators on weighted lebesgue spaces. *Transactions of the American Mathematical Society 364*, 3 (2012), 1163–1177.

[8] Coifman, R., and Fefferman, C. Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals. *Studia Mathematica 51*, 3 (1974), 241–250.

[9] Coifman, R. R., Rochberg, R., and Weiss, G. Factorization theorems for Hardy spaces in several variables. *Annals of Mathematics* (1976), 611–635.

[10] Conde-Alonso, J. M., and Rey, G. A pointwise estimate for positive dyadic shifts and some applications. *Mathematische Annalen 365*, 3-4 (2016), 1111–1135.

[11] Cruz-Uribe, D., Martell, J. M., and Pérez, C. Extrapolation from A_∞ weights and applications. *Journal of Functional Analysis 213*, 2 (2004), 412–439.

[12] Cruz-Uribe, D., Martell, J. M., and Pérez, C. Sharp weighted estimates for classical operators. *Advances in Mathematics 229*, 1 (2012), 408–441.

[13] Cruz-Uribe, D., and Moen, K. A fractional muckenhoupt-wheeden theorem and its consequences. *Integral Equations and Operator Theory 76*, 3 (2013), 421–446.

[14] Cruz-Uribe, D. V., Martell, J. M., and Pérez, C. *Weights, extrapolation and the theory of Rubio de Francia*, vol. 215. Springer Science & Business Media, 2011.

[15] Di Plinio, F., and Lerner, A. K. On weighted norm inequalities for the Carleson and Walsh–Carleson operator. *Journal of the London Mathematical Society 90*, 3 (2014), 654–674.

[16] Domingo-Salazar, C., Lacey, M., and Rey, G. Borderline weak-type estimates for singular integrals and square functions. *Bulletin of the London Mathematical Society* (2015).

[17] Dragičević, O., Grafakos, L., Pereyra, M. C., and Petermichl, S. Extrapolation and sharp norm estimates for classical operators on weighted lebesgue spaces. *Publicacions Matematiques* (2005), 73–91.

[18] Duoandikoetxea, J., and Zuazo, J. D. *Fourier analysis*, vol. 29. American Mathematical Soc., 2001.

[19] Fackler, S., and Hytönen, T. P. Off-diagonal sharp two-weight estimates for sparse operators. *New York J. Math 24* (2018), 21–42.

[20] Fefferman, C., and Stein, E. M. H^p spaces of several variables. *Acta mathematica 129* (1972), 137–193.

[21] Ferreyra, E. V., and Flores, G. J. Weighted estimates for integral operators on local BMO type spaces. *Mathematische Nachrichten 288*, 8-9 (2015), 905–916.

[22] Fujii, N. Weighted bounded mean oscillation and singular integrals. *Math. Japon 22*, 5 (1977), 529–534.

[23] Godoy, T., and Urciuolo, M. About the L^p-boundedness of some integral operators. *Revista de la Unión Matemática Argentina 38*, 3 (1993), 192–195.

[24] Godoy, T., and Urciuolo, M. About the L^p-boundedness of integral operators with kernels of the form $k_1(x - -y)k_2(x + y)$. *Mathematica Scandinavica* (1996), 84–92.

[25] Godoy, T., and Urciuolo, M. On certain integral operators of fractional type. *Acta Mathematica Hungarica 82*, 1-2 (1999), 99–105.

[26] Hardy, G. H., and Littlewood, J. E. A maximal theorem with function-theoretic applications. *Acta Mathematica 54*, 1 (1930), 81–116.

[27] Hörmander, L., et al. Estimates for translation invariant operators in L^p spaces. *Acta Mathematica 104*, 1-2 (1960), 93–140.

[28] Hytönen, T., and Pérez, C. Sharp weighted bounds involving A_∞. *Anal. PDE 6*, 4 (2013), 777–818.

[29] Hytönen, T., and Pérez, C. The $L \log L^\varepsilon$ endpoint estimate for maximal singular integral operators. *Journal of Mathematical Analysis and Applications 428*, 1 (2015), 605–626.

[30] Hytönen, T. P. The sharp weighted bound for general Calderón—Zygmund operators. *Annals of mathematics* (2012), 1473–1506.

[31] Hytönen, T. P. The Holmes–Wick theorem on two-weight bounds for higher order commutators revisited. *Archiv der Mathematik 107*, 4 (2016), 389–395.

[32] Hytönen, T. P., and Li, K. Weak and strong A_p-A_∞ estimates for square functions and related operators. *Proceedings of the American Mathematical Society 146*, 6 (2018), 2497–2507.

[33] Hytönen, T. P., Roncal, L., and Tapiola, O. Quantitative weighted estimates for rough homogeneous singular integrals. *Israel Journal of Mathematics 218*, 1 (2017), 133–164.

[34] Ibañez-Firnkorn, G. H., and Rivera-Ríos, I. P. Sparse and weighted estimates for generalized Hörmander operators and commutators. *Monatshefte für Mathematik 191*, 1 (2020), 125–173.

[35] Ibañez-Firnkorn, G. H., and Riveros, M. S. Certain fractional type operators with Hörmander conditions. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 43* (2018), 913–929.

[36] Ibañez-Firnkorn, G. H., and Riveros, M. S. Commutators of certain fractional type operators with Hörmander conditions, one-weighted and two-weighted inequalities. *To appear in Math. Ineq. and App. arXiv preprint arXiv:1804.10095* (2018).

[37] Ibañez-Firnkorn, G. H., Riveros, M. S., and Vidal, R. E. Sharp bounds for fractional operator with $L^{\alpha,r'}$-Hörmander conditions. *arXiv preprint arXiv:1804.09631* (2018).

[38] Ibañez-Firnkorn, G. H., Riveros, M. S., and Vidal, R. E. Necessary condition on the weight for maximal and integral operators with rough kernels. *arXiv preprint arXiv:2007.01400* (2020).

[39] John, F., and Nirenberg, L. On functions of bounded mean oscillation. *Communications on pure and applied Mathematics 14*, 3 (1961), 415–426.

[40] Kurtz, D. S. Sharp function estimates for fractional integrals and related operators. *Journal of the Australian Mathematical Society 49*, 1 (1990), 129–137.

[41] Lacey, M. T. An elementary proof of the A_2 bound. *Israel Journal of Mathematics 217*, 1 (2017), 181–195.

[42] Lacey, M. T., Moen, K., Pérez, C., and Torres, R. H. Sharp weighted bounds for fractional integral operators. *Journal of Functional Analysis 259*, 5 (2010), 1073–1097.

[43] Lacey, M. T., Sawyer, E. T., and Uriarte-Tuero, I. Two weight inequalities for discrete positive operators.

[44] Lerner, A. K. On pointwise estimates involving sparse operators. *New York J. Math 22* (2016), 341–349.

[45] Lerner, A. K., and Nazarov, F. Intuitive dyadic calculus: the basics. *Expositiones Mathematicae* (2018).

[46] Lerner, A. K., and Ombrosi, S. Some remarks on the pointwise sparse domination. *The Journal of Geometric Analysis 30*, 1 (2020), 1011–1027.

[47] Lerner, A. K., Ombrosi, S., and Pérez, C. Sharp A_1 bounds for Calderón-Zygmund operators and the relationship with a problem of Muckenhoupt and Wheeden. *International Mathematics Research Notices 2008*, 9 (2008), rnm161–rnm161.

[48] Lerner, A. K., Ombrosi, S., and Rivera-Ríos, I. P. On pointwise and weighted estimates for commutators of Calderón-Zygmund operators. *Advances in Mathematics 319* (2017), 153–181.

[49] Lerner, A. K., Ombrosi, S., and Rivera-Ríos, I. P. Commutators of singular integrals revisited. *Bulletin of the London Mathematical Society* (2019).

[50] Lerner, A. K., Ombrosi, S. J., and Pérez Moreno, C. A_1 bounds for Calderón-Zygmund operators related to a problem of Muckenhoupt and Wheeden. *Mathematical Research Letters, 16 (1), 149-156.* (2009).

[51] Li, K. Sparse domination theorem for multilinear singular integral operators with L^r-Hörmander condition. *The Michigan Mathematical Journal 67*, 2 (2018), 253–265.

[52] Lorente, M., Martell, M. J., Pérez, C., and Riveros, M. S. Generalized Hörmander conditions and weighted endpoint estimates. *Studia Mathematica 195*, 2 (2009), 157–192.

[53] Lorente, M., Riveros, M. S., and de la Torre, A. Weighted estimates for singular integral operators satisfying Hörmander's conditions of Young type. *Journal of Fourier analysis and Applications 11*, 5 (2005), 497–509.

[54] Luque, T., Pérez, C., and Rela, E. Optimal exponents in weighted estimates without examples. *Mathematical Research Letters 22*, 1 (2015), 183–201.

[55] Martell, J., Pérez, C., and Trujillo-González, R. Lack of natural weighted estimates for some singular integral operators. *Transactions of the American Mathematical Society 357*, 1 (2005), 385–396.

[56] Muckenhoupt, B. Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function. *Transactions of the American Mathematical Society* (1972), 207–226.

[57] Muckenhoupt, B., and Wheeden, R. Weighted norm inequalities for fractional integrals. *Transactions of the American Mathematical Society 192* (1974), 261–274.

[58] Muckenhoupt, B., and Wheeden, R. L. Some weighted weak-type inequalities for the Hardy-Littlewood maximal function and the Hilbert transform. *Indiana University Mathematics Journal 26*, 5 (1977), 801–816.

[59] O'Neil, R. Fractional integration in Orlicz spaces. I. *Transactions of the American Mathematical Society 115* (1965), 300–328.

[60] Ortiz-Caraballo, C., Pérez, C., and Rela, E. Exponential decay estimates for singular integral operators. *Mathematische Annalen 357*, 4 (2013), 1217–1243.

[61] Pérez, C. Endpoint estimates for commutators of singular integral operators. *Journal of functional analysis 128*, 1 (1995), 163–185.

[62] Pérez, C. On sufficient conditions for the boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator between weighted Lp-spaces with different weights. *Proceedings of the London Mathematical Society 3*, 1 (1995), 135–157.

[63] Pérez, C., and Pradolini, G. Sharp weighted endpoint estimates for commutators of singular integrals. *Michigan Math. J 49*, 1 (2001), 23–37.

[64] Pérez, C., and Rivera-Ríos, I. P. Three observations on commutators of singular integral operators with BMO functions. *Harmonic Analysis, Partial Differential Equations, Banach Spaces, and Operator Theory (Volume 2)* (2017), 287–304.

[65] Petermichl, S. The sharp bound for the hilbert transform on weighted lebesgue spaces in terms of the classical characteristic. *American journal of mathematics* (2007), 1355–1375.

[66] Petermichl, S. The sharp weighted bound for the riesz transforms. *Proceedings of the American Mathematical Society 136*, 4 (2008), 1237–1249.

[67] Rao, M. M., and Ren, Z. Theory of Orlicz spaces, volume 146 of Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 1991.

[68] Ricci, F., and Sjögren, P. Two-parameter maximal functions in the Heisenberg group. *Mathematische Zeitschrift 199*, 4 (1988), 565–575.

[69] Riveros, M. S., and Urciuolo, M. Weighted inequalities for integral operators with some homogeneous kernels. *Czechoslovak Mathematical Journal 55*, 2 (2005), 423–432.

[70] Riveros, M. S., and Urciuolo, M. Weighted inequalities for fractional type operators with some homogeneous kernels. *Acta Mathematica Sinica. English Series 29*, 3 (2013), 449.

[71] Riveros, M. S., and Urciuolo, M. Weighted inequalities for some integral operators with rough kernels. *Open Mathematics 12*, 4 (2014), 636–647.

[72] Rocha, P. Boundedness of generalized Riesz potentials on the variable Hardy spaces. *Journal of the Australian Mathematical Society 104*, 2 (2018), 255–273.

[73] Rocha, P. A remark on certain integral operators of fractional type. *Canadian Mathematical Bulletin 61*, 2 (2018), 370–375.

[74] Rocha, P., and Urciuolo, M. On the $H^p - L^p$ boundedness of some integral operators. *Georgian Math. J 18* (2011), 801–808.

[75] Rocha, P., and Urciuolo, M. On the $H^p - L^q$ boundedness of some fractional integral operators. *Czechoslovak Mathematical Journal 62*, 3 (2012), 625–635.

[76] Rocha, P., and Urciuolo, M. About integral operators of fractional type on variable Lp spaces. *Georgian Mathematical Journal 20*, 4 (2013), 805–816.

[77] Sawyer, E. A characterization of a two-weight norm inequality for maximal operators. *Studia Mathematica 75*, 1 (1982), 1–11.

[78] Urciuolo, M. Weighted inequalities for integral operators with almost homogeneous kernels. *Georgian Mathematical Journal 13*, 1 (2006), 183–191.

[79] Urciuolo, M., and Vallejos, L. A generalization of the boundedness of certain integral operators in variable Lebesgue spaces. *To appear in Journal of Mathematical Inequalities, arXiv preprint arXiv:1809.01256*.

[80] Urciuolo, M., and Vallejos, L. $L^{p(\cdot)} - L^{q(\cdot)}$ boundedness of some integral operators obtained by extrapolation techniques. *Georgian Mathematical Journal* (2018).

[81] Wilson, J. M. Weighted inequalities for the dyadic square function without dyadic A_∞. *Duke Mathematical Journal 55*, 1 (1987), 19–49.