

Datos Iniciales para Agujeros Negros  
extremos y la estabilidad lineal de la solución  
de Kerr extremo

por María Eugenia Gabach Clement

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía y Física  
como parte de los requerimientos para la obtención del grado de  
Doctor en Física de la

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CORDOBA

abril, 2011

© FaMAF - UNC 2011

Director de Trabajo de Tesis: Sergio Dain



## Resumen

Esta tesis se ocupa de datos iniciales para las ecuaciones de Einstein que describen un único agujero negro extremo, es decir, un agujero negro con la máxima cantidad de cargas y momento angular por unidad de masa. No sólo investigamos su existencia y propiedades, sino también, lo que nos pueden decir acerca de los agujeros negros no extremos. En ciertas partes del trabajo se incluyen diferentes tipos de materia y (en el último capítulo) una constante cosmológica. El tratamiento de las ecuaciones de vínculo de Einstein es puramente analítico, y utiliza herramientas de la teoría de ecuaciones diferenciales parciales, análisis funcional y geometría diferencial.

Podemos clasificar los resultados obtenidos en dos grandes clases. En la primera clase vemos las propiedades características de datos iniciales para agujeros negros extremos, existencia, unicidad, masa, geometría asintótica de la superficie inicial, comportamiento ante perturbaciones. Más precisamente, utilizando el Método Conforme para tratar las ecuaciones de vínculo, encontramos existencia y unicidad de solución para la ecuación de Lichnerowicz para el caso de un único agujero negro extremo conformemente plano con materia. Encontramos que, dada una familia de datos iniciales con valores dados de momento angular, momento lineal y materia, que describen datos para un agujero negro, entonces existe un dato inicial extremo. Este dato representa un límite singular en la familia y presenta características muy particulares, similares a las que se observan en los datos iniciales de Reissner-Nördstrom y Kerr. Principalmente, se ve que, partiendo de una foliación inicial en la familia con dos finales asintóticamente planos, se obtiene, al tomar el límite, un dato con un final asintóticamente plano y uno cilíndrico. El tipo de datos obtenidos se conoce como 'trumpet' en la literatura y está cobrando relevancia debido a que parecen estar mejor adaptados para la evolución numérica utilizando el método de 'puncture' móvil, uno de los más populares en relatividad numérica hasta el momento. La herramienta básica en la prueba de estos resultados es una estimación para el operador de Laplace en variedades asintóticamente planas con el origen removido.

También estudiamos perturbaciones del dato inicial de Kerr extremo, hallando existencia y unicidad de soluciones en una vecindad del dato de Kerr extremo. Las perturbaciones son axialmente simétricas y preservan la maximalidad del dato. Además, las soluciones perturbadas poseen el mismo momento angular que el dato de Kerr extremo, y más aún, la geometría asintótica del final cilíndrico, e inclusive su área no se modifican ante la deformación. Este resultado muestra que la solución de Kerr extremo no está

aislada en el conjunto de datos iniciales para las ecuaciones de Einstein y constituye un primer paso en el estudio de la estabilidad de la solución de Kerr. La técnica básica empleada para probar la estabilidad no lineal del dato de Kerr extremo es el Teorema de la Función Implícita adaptado a espacios de Sobolev con pesos en cada infinito.

En la segunda clase de resultados y motivados por el carácter especial del área del final cilíndrico en soluciones extremas hallado antes, usamos una relación entre el momento angular de Kerr extremo y una cierta funcional de masa, para obtener información acerca de datos iniciales para una gran familia de agujeros negros no extremos rotantes. Encontramos la desigualdad  $A \geq 8\pi J$ , entre el momento angular  $J$  y el área del horizonte  $A$  de un agujero negro axisimétrico. Para probar esto utilizamos las ecuaciones de vínculo de Einstein y el hecho de que el dato inicial de Kerr extremo es un mínimo global para cierta funcional de masa  $\mathcal{M}$ . Este resultado se aplica, por ejemplo, a datos que poseen una superficie fija ante transformaciones de inversión, datos que usualmente se conocen como de tipo 'wormhole' en la literatura, y son muy usados en simulaciones numéricas de colisiones de agujeros negros.

**PACS:** 04.20.Ex, 04.70.Bw, 04.25.Nx, 04.20.Dw

**Palabras clave:** Agujeros negros extremos, Datos iniciales, Momento angular, Desigualdades geométricas, Kerr.



## Abstract

This thesis deals with initial data for Einstein's equations describing a unique, extreme black hole, that is, a black hole with the maximum amount allowed of charges and angular momentum per unit mass. Not only we investigate their existence and properties, but also, what they can tell us about non-extreme black holes. In certain parts of the work different types of matter are included, and in the last chapter, a cosmological constant. The treatment of Einstein's constraint equations is purely analytical, and uses tools from the theory of partial differential equations, functional analysis and differential geometry.

We can classify the results we obtained in two classes. In the first class we see the characteristic properties of initial data for extreme black holes, existence, uniqueness, mass, asymptotic geometry of the initial surface, behavior under perturbations. More precisely, using the Conformal Method for treating the constraint equations, we find existence and uniqueness of the solution for Lichnerowicz equation for the case of a unique, extreme, conformally flat black hole with matter. We find that, given an initial data family with given values of angular momentum, linear momentum and matter, describing data for a black hole, then there exist corresponding extreme initial data. These extreme initial data represent a singular limit in the family and show very especial properties, similar to the ones observed in initial data for Reissner Nördstrom and Kerr. The main feature is that, beginning with a initial surface in the family, with two asymptotically flat ends, one obtains, by taking the singular limit, initial data with one asymptotically flat end, and one cylindrical. The kind of data thus obtained is known as 'trumpet data' in the literature and is gaining relevance due to the fact that they seem to be better adapted to evolution using the moving puncture method, one of the most popular methods in numerical relativity so far. The basic tool in the proof of these results is an estimate for the Laplace operator in asymptotically flat manifolds with the origin removed.

We also study perturbations of the initial data for extreme Kerr, finding existence and uniqueness of solutions in a neighborhood of extreme Kerr data. The perturbations are axially symmetric and preserve the maximality property of the data. Besides, the perturbed solutions possess the same angular momentum as extreme Kerr data, and, moreover, the asymptotic geometry of the cylindrical end, and even its area are not modified by the deformation. This result shows that extreme Kerr solution is not isolated in the initial data set for Einstein equations and constitutes a first step in the study of the stability of Kerr solution. The basic technic employed for proving the non linear stability of extreme Kerr data is the Implicit Function

Theorem adapted to Sobolev spaces with weights in both ends.

In the second class of results, and motivated by the especial character of the area in the cylindrical end in extreme solutions found above, we use a relation between the extreme Kerr angular momentum and a certain mass functional, to obtain information about initial data for a rich family of non extreme, rotating black holes. We find the inequality  $A \geq 8\pi J$ , between the angular momentum  $J$  and the horizon area  $A$  of an axisymmetric black hole. In order to prove this, we use the Einstein constraints and the fact that extreme Kerr initial data is a global minimum for a mass functional  $\mathcal{M}$ . This result applies, for instance, to data having a surface fixed under inversion transformations, data usually known as 'wormhole data' in the literature, and are very much used in numerical simulations of black hole collisions.

**PACS:** 04.20.Ex, 04.70.Bw, 04.25.Nx, 04.20.Dw

**Key words:** Extreme black holes, Initial data, Angular momentum, Geometrical inequalities, Kerr.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>13</b>
1.1. Agujeros negros . . . . .	13
1.2. Agujeros negros extremos . . . . .	16
1.2.1. Agujeros negros extremos en el universo . . . . .	18
1.2.2. Conjetura del Censor Cósmico . . . . .	19
1.2.3. Dualidades holográficas . . . . .	20
1.2.4. Datos iniciales <i>trompeta</i> y su evolución numérica . . . . .	21
1.3. Objetivos y organización de la tesis . . . . .	22
<b>2. Formulación de valores iniciales. Generalidades</b>	<b>26</b>
2.1. Ecuaciones de vínculo de Einstein . . . . .	27
2.2. Método conforme . . . . .	29
2.2.1. Resultados previos con el Método Conforme . . . . .	31
2.3. Datos iniciales para agujeros negros . . . . .	32
2.4. Agujeros negros estacionarios . . . . .	35
2.4.1. Schwarzschild . . . . .	35
2.4.2. Reissner Nördstrom . . . . .	38
2.4.3. Kerr . . . . .	41
<b>3. Existencia de datos iniciales extremos de Bowen-York</b>	<b>45</b>
3.1. Introducción . . . . .	45
3.2. Resultado principal . . . . .	46
3.3. Monotonía . . . . .	51
3.4. Cotas . . . . .	53
3.5. Convergencia . . . . .	58
3.6. Principio de Máximo débil sobre dominios no acotados . . . . .	62
<b>4. Datos iniciales para agujeros negros extremos conformemente planos</b>	<b>64</b>
4.1. Introducción . . . . .	64
4.2. Resultado principal . . . . .	66

4.3.	Existencia . . . . .	72
4.3.1.	Monotonía . . . . .	72
4.3.2.	Cotas . . . . .	73
4.3.3.	Convergencia . . . . .	76
4.4.	Unicidad . . . . .	77
4.5.	Masa total . . . . .	81
4.6.	$\mathcal{L}$ es un isomorfismo . . . . .	83
<b>5.</b>	<b>Perturbaciones del dato inicial para el agujero negro de Kerr extremo</b>	<b>87</b>
5.1.	Introducción . . . . .	87
5.2.	Resultado principal . . . . .	89
5.3.	Prueba del resultado principal . . . . .	93
5.4.	Decaimiento en espacios de Sobolev pesados . . . . .	102
5.5.	Propiedades del dato inicial de Kerr extremo . . . . .	104
<b>6.</b>	<b>Desigualdad entre momento angular y área del horizonte</b>	<b>107</b>
6.1.	Introducción . . . . .	107
6.2.	Resultado principal . . . . .	110
6.2.1.	Datos invariantes ante inversión por una esfera . . . . .	114
6.2.2.	Datos de garganta extremos . . . . .	118
6.3.	Area y funcional de masa $\mathcal{M}$ . . . . .	121
6.4.	Kerr extremo es un mínimo global de $\mathcal{M}$ . . . . .	124
<b>7.</b>	<b>Comentarios Finales</b>	<b>127</b>
<b>A.</b>	<b>Espacios funcionales</b>	<b>132</b>
<b>B.</b>	<b>Definiciones y teoremas</b>	<b>135</b>



*A mi familia:  
Mario, Mónica,  
Diego, Rodrigo,  
Guillermo, Pedro.*



# Agradecimientos

Es un placer agradecer a mi director, Sergio Dain, por haber sido un excelente guía a través de estos años. Con su paciencia, entendimiento, visión y entusiasmo hizo que este trabajo me llenara de satisfacciones.

A las personas que en diferentes momentos aportaron su grano y enriquecieron con ello esta tesis. Entre ellos, quiero mencionar a los integrantes del Grupo de Relatividad General y Gravitación, de la FaMAF (UNC), a Helmut Friedrich, Robert Beig, Andrés Aceña, Niall O'Murchadha, Sascha Husa y Mark Hannam.

A los miembros de la Comisión Asesora de Tesis, Oscar Reula, Gustavo Dotti, Guido Raggio y Reinaldo Gleiser. A los miembros del Tribunal de Tesis, Gustavo Dotti, Omar Ortiz y Martín Reiris.

A mis compañeros de oficina que durante estos años me han ayudado con un millar de pequeñas cosas y con los cuales compartí muy gratos momentos, Ezequiel Ferrero, Juan Perotti, Alfredo Gonzalez, Emilio Lauret, Miguel Pagano, Cesar Maglione, Agustín García, Verónica Díaz y Alejandra Alvarez.

Al personal de Posgrado de la FaMAF (UNC).

Al Consejo Nacional de Investigaciones Tecnológicas (CONICET), por el gran apoyo económico que me brindó y que me permitió desarrollar esta tesis, a través de las Becas de Posgrado Tipo I y II. Además, en parte por los subsidios PIP 6354/05 y PIP 112-200801-00754 de CONICET. A la Secretaría de Ciencia y Técnica de la Universidad Nacional de Córdoba, por el subsidio 05/B415. Al Max Planck Institute for Gravitational Physics, Albert Einstein Institute (Alemania).



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Agujeros negros

A finales del siglo XVII, Pierre Simon de Laplace [95] notó, usando la gravedad Newtoniana y la teoría corpuscular de la luz, que la luz emitida radialmente desde un cuerpo esférico de masa  $m$  y radio  $R$  eventualmente volvería hacia el cuerpo si  $R < 2Gm/c^2$ , donde  $G$  es la constante universal de la gravitación de Newton y  $c$  es la velocidad de la luz. Por ende, tal objeto sería invisible para un observador lejano.

Esta idea fue por largo tiempo abandonada, para ser retomada luego de la formulación de Einstein de la Relatividad General, cuando Schwarzschild [126] descubrió la solución exacta de las ecuaciones de campo gravitacional afuera de un cuerpo esféricamente simétrico. La novedad fue que esta solución exhibía una 'singularidad' en el radio crítico de Laplace  $R = 2Gm/c^2$ . Esto implicaba que debido al corrimiento de frecuencia en un campo gravitacional, cualquier luz emitida hacia afuera desde el radio crítico sufriría un corrimiento al rojo infinito y por lo tanto, sería incapaz de alcanzar un observador externo: una estrella con un radio menor a  $R$  aparecería 'oscura'. Sin embargo, esta noción no encontró eco entre los científicos de la época, incluyendo a Einstein.

Unos pocos años después, en 1918, Reissner [120] y Nördstrom [114] descubrieron la solución para el exterior de un cuerpo cargado eléctricamente y con simetría esférica que presentaba la misma 'singularidad' en un radio crítico análogo al caso de Schwarzschild.

Independientemente, el problema del destino de una estrella luego de haber agotado su fuente interna de producción de energía era un tema central en la década de 1920. Esto estaba relacionado con el interés en explicar la estabilidad de las enanas blancas. La respuesta a este problema fue provista esencialmente por Fowler en 1926 [64], quien probó que en tales objetos la

gravidad está balanceada por la presión de degeneración de los electrones libres. Luego, en 1931, Chandrasekhar [31], [32] mostró que existe un límite de alrededor de 1.4 masas solares para la masa de una enana blanca estable, más allá del cual la presión de degeneración sería incapaz de balancear la contracción producida por la gravedad.

Entonces, la siguiente pregunta fue acerca del destino de una estrella, contrayéndose luego de que su combustible nuclear se ha agotado. Qué sucedería si no expulsara suficiente materia-radiación como para reducir su masa por debajo del límite de Chandrasekhar? En este caso se esperaba una mayor contracción, lo que llevó eventualmente al concepto de estrella de neutrones. Este concepto comenzó en la década del 30 con Baade y Zwicky [10], [11], que lo utilizaron para explicar el origen de las supernovas y los rayos cósmicos. Sin embargo, las estrellas de neutrones tuvieron que esperar hasta 1967 para ser descubiertas. En este caso, la gravedad sería soportada por la presión de neutrones degenerados. No se tiene con certeza un límite superior para la masa de tales objetos, pero se cree que es de alrededor de tres masas solares. Para estrellas que superan este límite, no se conoce ningún proceso físico que pueda producir una presión capaz de balancear el campo gravitacional. Esto sugiere que en el proceso de implosión, la estrella es capaz de irradiar suficiente cantidad de masa-energía como para quedar por debajo del límite de la estrella de neutrones, o de lo contrario la contracción continúa hasta la formación de un estado de densidad infinita, es decir, una singularidad.

En este punto los agujeros negros reaparecieron como posible solución del rompecabezas, a partir del trabajo de Oppenheimer y Snyder [115] en 1939. Fueron capaces de construir una solución de las ecuaciones de Einstein compuesta de una esfera de polvo homogénea colapsando, unida con el vacío de la solución de Schwarzschild. La contracción gravitacional continuada de este modelo de estrella llevó a la formación de una singularidad desconectada de observadores lejanos debido a la formación de un 'horizonte de eventos', una superficie crítica análoga a la encontrada en el radio crítico de Schwarzschild.

En el transcurso del siglo veinte, a la luz de los desarrollos de la Teoría General de la Relatividad, se tornó evidente que, si esos objetos existiesen, su estructura sería mucho más rica de lo que se imaginó al inicio.

En 1963 Kerr [91] estaba investigando una clase de soluciones algebraicamente especiales de vacío que admitieran una dirección nula preferida. Encontró que entre las posibles soluciones, había una que representaba el campo gravitacional de un objeto rotante estacionario. La estructura multipolar de esta solución es muy especial debido a que está unívocamente caracterizada por dos parámetros, la masa  $m$  y el momento angular  $J$ .

En la década del 70, Hawking [78], [79], Carter [30], Israel [87], [88] y Robinson [125] probaron que el único agujero negro en vacío, asintóticamente

plano y estacionario, con un sólo horizonte no degenerado es la solución de Kerr con  $|J| < m^2$  (llamada solución de Kerr no extremo). Por lo tanto, en virtud de este teorema, la única memoria de la naturaleza, estructura y composición de cualquier objeto que colapsa para formar un agujero negro estacionario está en la masa y el momento angular, toda otra información se irradia en el proceso de colapso. Un teorema similar de unicidad para el agujero negro de Kerr con  $m = |J|$  (solución de Kerr extremo) se dio a conocer recientemente por Amsel et al. [4] (ver también el artículo reciente [40]).

El teorema de unicidad se extendió en la década del 80 por Mazur [103] y Bunting [25] al caso de un agujero negro rotante cargado eléctricamente, quedando así que un agujero negro estacionario cargado está unívocamente caracterizado por su masa, momento angular y carga. Por supuesto, uno no espera que los agujeros negros cargados tengan alguna significancia astrofísica, debido a que cualquier carga residual resultante del colapso sería rápidamente neutralizada por el medio. Sin embargo, los agujeros negros esféricos cargados juegan un papel relevante a nivel teórico porque su estructura causal es muy similar a la de los agujeros de Kerr descargados, mientras que su estructura matemática es mucho más simple.

Paralelamente al desarrollo teórico, a mediados de la década del 60, cuando los agujeros negros se volvieron levemente más populares, comenzó la búsqueda de ellos en la galaxia y el resto del universo.

La astrofísica de agujeros negros comenzó en esa década con el descubrimiento de cuasares y otros núcleos galácticos activos en galaxias distantes. Ya desde temprano pareció claro que la explicación más natural para la extraordinaria luminosidad de los núcleos activos era la expulsión de energía gravitacional a través de la acreción de gas en agujeros negros supermasivos (ver [113] y las referencias allí mencionadas por detalles, y el artículo review [119]).

Este campo de la astrofísica recibió un gran empuje en la década del 70 con el descubrimiento del sistema binario de rayos X Cygnus X-1 [18]. La estrella compacta que emitiera los rayos X en este sistema binario parecía ser inusualmente masiva, por lo que se infirió como un agujero negro. El siguiente salto importante vino cuando se mostró que la fuente A0620-00 [104], un miembro de una clase de sistemas binarios de rayos X, tiene una masa mayor que la máxima masa permitida para una estrella de neutrones. Este importante descubrimiento abrió el camino a la aparición de muchos otros candidatos a agujeros negros encontrados en otros sistemas binarios.

Hacia la década del 90, las estimaciones de tamaños y masas correspondientes a observaciones astrofísicas en los centros de galaxias apuntaban a concentraciones tan densas que no se podían explicar como clusters de estrel-

las estables, por lo que la hipótesis de un agujero negro se reforzó y resultó ser la más viable. Las masas estimadas para los agujeros negros centrales van de las  $10^6$  a las  $10^{10}$  masas solares.

Hoy hay más de cuarenta candidatos a agujeros negros en sistemas binarios de rayos X [105] y continúa creciendo la evidencia de agujeros negros supermasivos en los núcleos de galaxias próximas (ver [113]).

A pesar de que las mediciones de masa y momento angular sobre estos candidatos a agujeros negros son sugestivas, es importante tener en cuenta que aún no hay prueba definitiva de que ninguno de ellos sea realmente un agujero negro. Todo lo que sabemos es que estos objetos son demasiado masivos como para ser estrellas de neutrones. Probar que un objeto es un agujero negro requiere una demostración clara de que posee un horizonte de eventos, una tarea difícil (o quizás imposible). Sin embargo, se ha alcanzado un progreso considerable, y hay evidencias circunstanciales de que muchos de los candidatos a agujeros negros descubiertos poseen un horizonte de eventos [113].

Además de lo que hemos mencionado acerca del impacto que posee la física de agujeros negros sobre la astrofísica, cosmología y matemática física, recientemente se ha hecho notable la influencia sobre otras ramas de la ciencia natural, como física de partículas [110], y teoría de información cuántica [90], [96]. Esto no es sorprendente en vista del hecho de que debido a los teoremas de singularidad, la existencia de los agujeros negros parece ser una consecuencia inevitable de la teoría de Einstein y de sus generalizaciones modernas como supergravedad, supercuerdas [7] y teoría M, [117].

A la luz de estos resultados y observaciones, el estudio de los agujeros negros está ahora motivado no sólo por las propiedades teóricas fascinantes que estos objetos poseen, sino también por un intento de entender mejor nuestro universo.

## 1.2. Agujeros negros extremos

De acuerdo a los teoremas de unicidad mencionados antes, todas las soluciones de agujero negro estacionarias de las ecuaciones de Einstein-Maxwell están unívocamente determinadas por tres parámetros conservados: la masa  $m$ , la carga eléctrica  $Q$ , y el momento angular  $J$ , que satisfacen

$$m^2 \geq \left(\frac{J}{m}\right)^2 + Q^2 \quad \text{estacionario.} \quad (1.1)$$

En particular, la igualdad caracteriza a los agujeros negros extremos y equivale a decir que los agujeros negros extremos estacionarios poseen la máxima

cantidad de carga y momento angular por unidad de masa. Por otro lado,  $m^2 < (J/m)^2 + Q^2$  está asociada con singularidades desnudas en vez de agujeros negros.

Dada esta restricción sobre las soluciones estacionarias, es natural cuestionarse si existen restricciones similares para agujeros negros astrofísicos. En contraste con el agujero negro de Kerr que es una solución de vacío, los agujeros negros reales no existen en aislamiento y pueden, por ejemplo, estar rodeados por discos de acreción o ser componentes de sistemas binarios.

Por esta razón es interesante investigar si existen condiciones de extremalidad (ver [19]) para agujeros negros genéricos, en particular, en el caso de agujeros interactuantes. Esto es de especial interés durante colisiones de agujeros negros. Es bien conocido que luego de una colisión, el agujero negro final se establece en una de las soluciones estacionarias conocidas. Sin embargo, durante la fase de colisión altamente dinámica, no es claro si el momento angular del agujero negro está acotado. La existencia o ausencia de una condición de extremalidad nos puede ayudar a entender la física de colisiones de agujeros negros. Cuestiones similares surgen para agujeros negros que se forman a partir del colapso gravitacional de la materia.

Fuera de la familia de Kerr-Newmann hay algunos resultados recientes a favor y en contra de la posible existencia de tal cota. A favor, Dain [54], Chrusciel et al [38], [39] y Lopes Costa [45] han mostrado que para una gran clase de agujeros negros de electrovacío, axialmente simétricos y asintóticamente planos, se tiene

$$m_{ADM}^2 \geq \left( \frac{J_{ADM}}{m} \right)^2 + Q^2 \quad (1.2)$$

donde el subíndice  $ADM$  indica que estas cantidades son la masa y el momento angular ADM medidos en el infinito espacial. Más aún, la igualdad en (1.2) vale sólo para el agujero negro de Kerr-Newmann extremo. En contraste, Hennig y Ansorg [8], [81] han generado ejemplos numéricos de agujeros negros rodeados por anillos de materia rotantes para los cuales la masa y el momento angular de Komar violan la cota  $m_{Komar}^2 \geq J_{Komar}$ .

En lo que sigue, adoptamos la noción de extremalidad sugerida por la desigualdad (1.2), es decir, llamamos *agujero negro extremo* a aquel que posea los valores máximos permitidos de carga y momento angular (ADM) por unidad de masa (ADM) dentro de una dada familia. Es interesante notar que en el caso no estacionario, esta noción de extremalidad no necesariamente implica la saturación de la cota (1.2) (ver [54]).

Los agujeros negros extremos han recibido una gran atención durante los últimos años tanto en el campo de las observaciones astrofísicas, como en el de los cálculos analíticos y de las simulaciones numéricas. Veamos algunas de

las principales motivaciones para su estudio.

### 1.2.1. Agujeros negros extremos en el universo

Debido a que la carga eléctrica en los agujeros negros astrofísicos sería rápidamente neutralizada, se espera que los mismos estén completamente caracterizados por su masa y momento angular. Por esto, la noción de extremalidad en astrofísica está directamente relacionada con el spin.

A pesar de no ser tan fácilmente medible como la masa de un agujero negro, su spin se puede determinar debido a que tiene un profundo impacto sobre su comportamiento y sus propiedades (ver [105] por métodos posibles para medir el spin). Consideremos dos agujeros negros de igual masa, uno no rotante (por ejemplo, un agujero negro de Schwarzschild) y el otro un agujero altamente rotante (por ejemplo, un agujero negro de Kerr extremo). Para el agujero rotante, el radio de la órbita circular estable más interna es seis veces menor y la energía de ligadura en esta órbita, siete veces mayor que para el agujero negro no rotante. Esto refuerza el espectro de rayos X e incrementa considerablemente la eficiencia para convertir materia acreetada en radiación en los agujeros negros extremos en relación a los no rotantes.

Actualmente hay buenas evidencias observacionales sobre la existencia de agujeros negros extremos o casi extremos en el universo. Por ejemplo, en [105], basados en un análisis espectral del continuo de rayos X, McClintock *et al* argumentan que el objeto compacto primario de la fuente binaria de rayos X GRS 1915+105 es un agujero negro rápidamente rotante de Kerr. De hecho encuentran una cota inferior para el momento angular  $J/m^2 > 0,98$ . Se argumenta que los jets relativistas, además del espectro de rayos X, producidos por este sistema se deben al alto spin de su agujero negro primario. Otro ejemplo de un agujero negro (casi) extremo fue presentado por Reynolds *et al* [122] en la galaxia Seyfert MCG-6-30-15. A partir de datos del satélite XMM-Newton, que analizan el espectro de rayos, encuentran que los valores de spin están restringidos al rango  $J/m^2 > 0,93$ .

En este sentido, la importancia de entender la dinámica de los agujeros negros extremos proviene de la gran evidencia observacional en cuasares [107] y en fuentes binarias de rayos X [108], [72], donde se observan tremendos jets relativistas asociados con este tipo de agujeros negros [133].

En la última década, se ha invertido mucho esfuerzo en el modelado del comportamiento de agujeros negros en sistemas binarios y en los núcleos activos de galaxias [131], sobre todo para obtener información acerca de la distribución y evolución del momento angular de los agujeros negros en tales sistemas. Algunos modelos [130], afirman que bajo los efectos combinados de acreción y colisión binaria, la distribución de spin está fuertemente incli-

nada hacia los agujeros negros altamente rotantes, confrontando así a otros modelos de acreción de agujeros negros que no llevan a grandes valores de momento angular [17], [67].

Otro fenómeno astrofísico interesante asociado con los agujeros negros altamente rotantes se debe al retroceso predicho y observado en la colisión de agujeros negros (ver [131]). Cuando los miembros de un sistema binario de agujeros negros colisionan, el centro de masa del sistema retrocede debido al momento lineal neto no cero llevado por las ondas gravitacionales en la colisión. Si este retroceso fuese suficientemente violento, el agujero negro formado se separaría del huésped. Cálculos analíticos predijeron que las colisiones de agujeros negros no rotantes pueden alcanzar velocidades de retroceso del orden de 200 km/s (ver [92] y las referencias mencionadas allí). Si muchos agujeros negros fueron removidos así de sus huéspedes en la historia temprana del universo, esto hubiera tenido una profunda influencia sobre la conformación de galaxias y el crecimiento de agujeros negros en el universo, y hubiera dado lugar a una población de agujeros negros interestelares e intergalácticos.

Recientes experimentos numéricos han tenido en cuenta los efectos del spin en colisiones de agujeros negros y cálculos de velocidades de retroceso. El caso de agujeros altamente rotantes con spines no alineados podría resultar en una velocidad de retroceso de miles de kilómetros por segundo en algunos sistemas. Este fenómeno ha sido sugerido originalmente por cálculos numéricos [131], [55], [26], [71], [82]. Estas velocidades de retroceso excederían las velocidades de escape de galaxias elípticas masivas y por lo tanto los nuevos resultados tendrían mayor influencia sobre la evolución de agujeros negros supermasivos en galaxias y tener marcas observables en cuasares y en núcleos de galaxias activas. En particular esto resultaría en fuertes consecuencias para la frecuencia de las señales de ondas gravitacionales con LISA.

Debido a las amplias implicaciones astrofísicas, la búsqueda e identificación de tales agujeros negros en retroceso en el universo cobró gran interés en los últimos años. En el 2008, Komossa *et al* [92] presentaron un candidato a ser un agujero negro supermasivo en retroceso, el cuasar SDSSJ092712.65+294344.0. Su espectro inusual de líneas de emisión acuerdan las predicciones claves del modelo de agujero en retroceso, esto es, líneas gruesas provenientes del gas ligado al agujero en retroceso, y líneas finas, del gas dejado atrás.

### 1.2.2. Conjetura del Censor Cósmico

La conjetura del censor cósmico de Penrose [116] (ver también el artículo review reciente [99]) establece básicamente que las singularidades del espa-

ciotiempo que provienen de un colapso gravitacional completo de un cuerpo deben estar acompañadas por el horizonte de eventos de un agujero negro. Esta conjetura juega un rol fundamental en la física de agujeros negros. La validez de la conjetura es una condición necesaria para asegurar la predictibilidad de las leyes de la física en el marco de la teoría de la relatividad general.

Debido a que las soluciones extremas marcan la frontera entre agujeros negros y singularidades desnudas, resultan muy atractivas para ser usadas en la obtención de información acerca de la hipótesis del censor cósmico [16]. Por ejemplo, el agujero negro de Kerr extremo aparece como el único mínimo global de la masa total, una propiedad usada para probar la desigualdad entre masa y momento angular mencionada antes [54], que da evidencia a favor de la censura cósmica.

Desde la formulación de la conjetura, muchos estudios se realizaron con el fin de confirmarla o refutarla, y en general, son soluciones extremas las que se han utilizado en los argumentos. Entre los primeros trabajos, Wald [132] consideró un agujero negro extremo e investigó si sería posible sobre-cargarlo o sobre-rotarlo para violar la conjetura. Mostró que cuando el agujero extremo 'absorbe' una partícula de prueba rotando o cargada, su masa aumenta lo suficiente como para compensar cualquier ganancia extra de momento angular o carga durante el proceso de manera tal que la conjetura sigue valiendo.

Por otro lado, es bien conocido que cuando uno tiene en cuenta efectos cuánticos, algunos efectos clásicos asociados con agujeros negros pueden verse profundamente modificados. Por ejemplo, la teoría clásica dice que el área de un agujero negro nunca disminuye bajo ningún proceso, mientras que la mecánica cuántica muestra que se verá reducida como consecuencia de la radiación del agujero negro. A la luz de este resultado, parece natural preguntarse si la mecánica cuántica puede afectar la conjetura.

En [70] y [123] se usa un proceso de tunelamiento cuántico que lleva a la sobre-rotación del agujero negro. Consideran un agujero negro casi extremo y muestran que la probabilidad de absorber ciertas partículas es distinta de cero. Así, parecería que los efectos cuánticos podrían llevar a la violación de la conjetura (ver también [100]).

### 1.2.3. Dualidades holográficas

Como a menudo sucede en teorías físicas, las soluciones que surgen como límites asintóticos son más simples que otras soluciones y proveen información útil acerca de la teoría. Desde el punto de vista puramente clásico, hay evidencia de que los agujeros negros extremos tienen algunas propiedades especiales que los hacen más simples que los no extremos (ver la discusión en [53]). También, desde una perspectiva completamente diferente, es decir,

de las dualidades holográficas, algunas características de los agujeros negros extremos juegan un rol importante (ver [80], [12] y [73]).

Las dualidades holográficas relacionan una teoría cuántica de la gravedad con una teoría de campos cuánticos sin gravedad en menos dimensiones y se vuelven especialmente poderosas cuando se combinan con teoría de cuerdas. Por ejemplo, la correspondencia AdS/CFT (Anti de Sitter/Conformal Field Theory) es una realización concreta del principio holográfico en el sentido de que la teoría de campos conforme definida sobre la frontera del espacio Anti de Sitter captura la dinámica completa de la teoría de cuerdas en el interior.

El rol de los agujeros negros extremos en teoría de cuerdas es un tema de investigación muy activo en la actualidad (ver [118] y sus referencias, también [7] y [93]), debido a la relación entre estos objetos y estados de cuerdas masivos. Por ejemplo, el agujero negro de Reissner-Nördstrom extremo se interpreta como un estado ligado de agujeros negros de Kaluza-Klein. Por otro lado, a partir de soluciones de agujeros negros rotantes extremos [73], y tomando el límite cerca del horizonte de eventos, se obtiene una estructura asintótica similar a la del espaciotiempo Anti de Sitter. Estos espaciotiempos de vacío son completamente no singulares y se pueden utilizar para construir soluciones clásicas para todas las teorías de cuerdas [12].

Por otra parte, ciertas propiedades termodinámicas de los agujeros negros se pueden obtener a partir de cálculos en la teoría conforme de campos. Por ejemplo, la fórmula de Cardy para la entropía de la teoría conforme de campos reproduce exactamente la entropía de Bekenstein-Hawking para los agujeros negros rotantes (ver [34] y sus referencias por detalles).

#### 1.2.4. Datos iniciales *trompeta* y su evolución numérica

Finalmente, en el problema de las condiciones iniciales para agujeros negros extremos (que es el tema de esta tesis), aparece un tipo particular de geometría: geometrías con finales cilíndricos. Estas geometrías han probado ser muy útiles en los cálculos numéricos de colisiones binarias de agujeros negros. Son las llamadas condiciones iniciales 'trompeta' en este contexto, [77], [76], [97], [85] (cf. [84]). Se ha notado que cuando se evolucionan agujeros negros tipo agujeros de gusano compactificados, usando el método estándar de puncture móvil, las tajadas pierden contacto con el final asintóticamente plano extra del agujero de gusano, y rápidamente tienden asintóticamente a cilindros de área finita. También se vio que los datos maximales con esta topología cilíndrica son de hecho independientes del tiempo en una simulación de puncture móvil.

La motivación para producir datos iniciales para agujero negro en forma de 'trompeta' es que ésta es la geometría preferida por las condiciones de

gauge usadas en el método de 'puncture' móvil, que es el más popular al momento para simular sistemas binarios.

Por esta razón, una de las direcciones más prometedoras en el campo de simulaciones numéricas de colisiones binarias es la construcción de datos iniciales 'trompeta' (en contraposición a datos 'wormhole'). Estos datos tendrían la ventaja de que el código numérico no necesitaría evolucionar la rápida transición desde 'wormhole' a 'trompeta'. Además, desde el comienzo, toda la evolución del dato representaría la evolución de cantidades físicas (el movimiento de los agujeros y la evolución de sus spins, geometría superficial, etc.) y la evolución del gauge sería minimizada. Esto podría ayudar a reducir la componente de gauge en el movimiento de los agujeros negros, y el ruido inicial en las funciones de onda [76].

### 1.3. Objetivos y organización de la tesis

Debido a la creciente aparición de posibles agujeros negros extremos en diferentes escenarios astrofísicos, a su utilidad en el ámbito de la relatividad numérica para las simulaciones de colisiones binarias, y su subsecuente aplicación en mediciones de ondas gravitacionales, y a su importancia matemática, desde el punto de vista de las ecuaciones de vínculo de Einstein, el objetivo principal de esta tesis es investigar las propiedades más destacadas de estos objetos, con la esperanza de arrojar luz sobre estos y otros fenómenos observados y/o predichos, y sobre la estructura matemática de esta pequeña parte de la teoría de Einstein.

Con este propósito, estudiamos las ecuaciones de vínculo de Einstein, buscando determinar las características básicas de los datos para agujeros negros extremos, y las condiciones necesarias para su existencia. Además investigamos sus características distintivas básicas e incursionamos brevemente en el problema de su comportamiento durante la evolución temporal.

Otro tema que aborda esta tesis es el problema de la estabilidad de la solución de Kerr extremo, un desafío que ha recibido gran atención durante los últimos años, desde la prueba de la estabilidad del espaciotiempo de Minkowski. El objetivo es comprender la naturaleza del dato inicial de Kerr extremo, cómo se ubica en el espacio de soluciones de las ecuaciones de vínculo y cómo es el comportamiento de sus propiedades características ante pequeñas deformaciones.

Por otro lado, usando la noción de que las soluciones extremas yacen en el límite entre agujeros negros y singularidades desnudas, analizamos una desigualdad entre cantidades físicas locales propias de los agujeros negros, su momento angular y el área del horizonte.

Nuestro estudio es puramente analítico, aunque, en muchos casos está motivado por experimentos numéricos y observaciones astrofísicas. Las técnicas matemáticas utilizadas en las pruebas de nuestros resultados se basan en la teoría de ecuaciones en derivadas parciales elípticas, y en análisis funcional. Esencialmente, las pruebas para la primera parte de la tesis tratan con existencia y unicidad de soluciones de la ecuación de Lichnerowicz. Esta ecuación ha sido intensamente estudiada en la literatura. En particular diferentes tipos de fronteras y condiciones de decaimiento asintótico se han analizado para esta ecuación: variedades compactas, asintóticamente planas, asintóticamente hiperbólicas y asintóticamente planas con frontera interior. Sin embargo, el problema de variedades con un final asintóticamente plano y uno cilíndrico no ha sido explorado. Uno de los objetivos de esta tesis es precisamente iniciar el estudio analítico de este tipo de condiciones de borde. Usando coordenadas adaptadas, las condiciones de borde en el final cilíndrico se traducen en un comportamiento singular del factor conforme en el origen. Para tratar con esto, debemos recurrir a espacios funcionales de Sobolev no estandard, con pesos tanto en infinito como en el origen. Esta es una de las principales dificultades que encontramos en el trabajo. Si bien es cierto que se podrían usar espacios de Hölder adecuados a esta geometría, en lugar de espacios de Sobolev, estos presentan serias desventajas. En primer lugar, a menudo no son apropiados para plantear ecuaciones diferenciales parciales, ya que usualmente no se pueden realizar estimaciones analíticas suficientemente buenas para demostrar que las soluciones que construimos realmente pertenecen a dichos espacios. Además no están tan bien adaptados al problema relacionado de la evolución. Por eso, acudimos a los espacios de Sobolev, que contienen funciones menos suaves, pero que permiten probar estimaciones útiles.

La tesis está organizada de la siguiente manera.

Comenzamos dando una introducción y panorama general de la formulación de valores iniciales de la relatividad general, en el capítulo 2. Primero revisamos la descomposición 3+1 del espaciotiempo y presentamos el Método Conforme para estudiar las ecuaciones de vínculo de Einstein, que nos lleva a la ecuación de Lichnerowicz para el factor conforme. Luego planteamos un posible método de generar datos iniciales para agujeros negros, basado en el pegado isométrico de soluciones 'exteriores al agujero negro', lo que implica una geometría tipo 'wormhole', con dos infinitos asintóticamente planos. Esta representación resultará útil en la prueba de nuestros resultados, ya que el caso extremo se evidencia como un límite particular en dicha geometría. Concluimos el capítulo presentando los datos iniciales para agujeros negros estacionarios de Schwarzschild, Reissner Nördstrom y Kerr, enfatizando las propiedades que se verán afectadas y las que no, en su contraparte extrema.

Esta última sección del capítulo es crucial porque allí exponemos los argumentos y motivaciones para el problema de datos iniciales extremos, que nos guían luego en el caso no estacionario.

Luego comenzamos con los resultados propios. En el capítulo 3 probamos la existencia de datos iniciales de Bowen-York para agujeros negros rotantes extremos, sin momento lineal. Esto se realiza a partir de la familia de datos de Bowen-York no extremos. Resulta que dicha familia depende esencialmente de un único parámetro  $y$ , al tomar el límite cuando este parámetro va a cero, se obtiene un nuevo tipo de dato inicial, con la geometría asintótica extrema descrita antes, es decir un final asintóticamente plano y uno cilíndrico. Este primer caso de estudio, que ha sido y sigue siendo uno de los datos más utilizados en simulaciones numéricas de colisiones de sistemas binarios, nos ayuda a entender los fenómenos y detalles subyacentes en el proceso de tomar el límite extremo. La herramienta básica utilizada para tratar las ecuaciones de vínculo en este caso es una estimación para el operador de Laplace que nos permitirá probar la convergencia de la secuencia de soluciones no extremas. Parte de los resultados y análisis que se presentan en este capítulo han sido publicados en [56].

Luego, en el capítulo 4 extendemos el resultado anterior para familias más generales de datos iniciales para agujeros negros, con la propiedad de constituir datos conformemente planos. Mediante un procedimiento de límite análogo al utilizado para el caso de Bowen-York, mostramos que los nuevos datos obtenidos similarmente poseen un final cilíndrico y uno asintóticamente plano. Además, independientemente obtenemos la unicidad del dato extremo y demostramos que este dato límite posee la máxima cantidad de momento angular y carga por unidad de masa en la familia, una propiedad crucial para poder caracterizar esta solución como extrema. Las herramientas matemáticas que utilizamos en la prueba de existencia son similares a las utilizadas en el capítulo 3. Sin embargo, para la prueba de unicidad, resultó necesario extender el teorema que plantea al operador de Laplace  $\Delta$  como isomorfismo entre espacios de Sobolev pesados, al caso del operador lineal  $\Delta - \alpha$  donde  $\alpha$  es una función positiva con condiciones de decaimiento fijas en las regiones asintóticas. Algunos resultados de este capítulo se encuentran en el artículo [66].

En el capítulo 5, siguiendo con el análisis de soluciones extremas, estudiamos deformaciones pequeñas del dato inicial de Kerr extremo que no modifican su momento angular. Encontramos que existe una gran clase de perturbaciones que dejan invariante el área del final cilíndrico (y, por supuesto, también el final asintóticamente plano), sugiriendo así que la geometría asintótica del dato extremo es de alguna manera estable. Además, analizamos brevemente la evolución de dichos datos perturbados y encontramos que ex-

iste una gran clase de elecciones para el lapso y el shift tales que el área del final permanece constante en el tiempo. Esto sugiere que el área del cilindro asintótico puede ser relevante en la caracterización de estas soluciones extremas. Por otro lado, este resultado nos muestra que el dato para Kerr extremo no está aislado en el conjunto de soluciones de los vínculos de Einstein, sino que existe una familia de soluciones arbitrariamente próximas a él. Esto no es a priori obvio, debido a la naturaleza particular del dato de Kerr extremo, por ejemplo, como minimizador global de la masa. Además el teorema probado aquí es un primer paso en el análisis de la estabilidad de la solución de Kerr extremo. En la prueba del resultado principal utilizamos un procedimiento alternativo al empleado en los capítulos previos, basado en el teorema de la Función Implícita que involucra espacios de Sobolev pesados (con pesos tanto en infinito como en el origen). Estos resultados se encuentran publicados en el artículo [59].

En el capítulo 6, motivados por los resultados obtenidos en el capítulo 5, estudiamos la relación entre el momento angular, que es una cantidad conservada en simetría axial, y el área del horizonte de un agujero negro. Para ello utilizamos el dato inicial de Kerr extremo, siendo el área del final cilíndrico un ingrediente crucial. Con esto encontramos una desigualdad entre el momento angular y el área del horizonte para un agujero negro axisimétrico de vacío. El teorema probado presenta ciertas restricciones técnicas, pero creemos que se pueden relajar considerablemente. Esta relación resulta interesante ya que involucra cantidades locales de la solución, por lo que el control de la dinámica es más accesible. Estos resultados, entre otros aparecen en el artículo [2].

Finalmente, en el capítulo 7 presentamos los comentarios finales, perspectivas y algunos problemas abiertos.

Hemos incluidos dos apéndices. En el primero, apéndice A, describimos los espacios funcionales utilizados en la tesis. En el segundo apéndice, B, presentamos resultados conocidos de análisis funcional y teoremas de ecuaciones diferenciales que, confiamos, facilitarán la lectura de la tesis y fijarán la notación.

En lo que sigue usaremos unidades tales que la constante de gravitación universal de Newton vale  $G = 1$ , la velocidad de la luz es  $c = 1$ , y la permitividad eléctrica del vacío es  $\epsilon_0 = 1$ .

## Capítulo 2

# Formulación de valores iniciales. Generalidades

Las simulaciones numéricas completamente relativistas de sistemas binarios de agujeros negros tienen una ventaja notable sobre las técnicas aproximativas analíticas [74] (teoría de perturbaciones, análisis de límite próximo y cálculos post Newtonianos): dados los datos iniciales correctos, las simulaciones toman en cuenta toda la física en el problema. Uno puede estar limitado por los recursos computacionales y por la precisión de la técnica numérica dada, pero en principio, ningún aspecto físico se ha sobre-simplificado en los cálculos.

Por esto, nos enfrentamos con un tema delicado, los datos iniciales deben ser físicamente correctos. Producir datos iniciales 'buenos' involucra encontrar soluciones físicamente realistas de las ecuaciones de vínculo de la relatividad general, y proveer los parámetros físicos apropiados para estas soluciones.

En este capítulo presentamos las ecuaciones de vínculo de Einstein y el método conforme, que es uno de los procedimientos más populares para atacarlas. Además damos una breve reseña acerca de los resultados obtenidos y de los problemas aún abiertos. Luego describimos el tipo de datos iniciales para agujeros negros que utilizaremos en gran parte de esta tesis, y analizaremos su aplicación para agujeros negros extremos. Finalmente, presentamos datos iniciales para agujeros negros estacionarios (Schwarzschild, Reissner-Nördstrom y Kerr), desde el punto de vista del método conforme. Esta última sección es de gran importancia, ya que se analizan foliaciones apropiadas de los agujeros negros, del mismo tipo que las que luego se emplean para agujeros negros no estacionarios. Además se plantea un procedimiento de límite para obtener, a partir de una familia de datos no extremos, el dato inicial extremo. Esto es muy relevante porque establece las bases, motivaciones e interpretaciones que usaremos en los próximos capítulos.

## 2.1. Ecuaciones de vínculo de Einstein

En mecánica newtoniana, una solución completa de las ecuaciones de movimiento requiere la especificación de valores iniciales para la posición y velocidad de cada cuerpo en movimiento. En teorías de campo, una solución completa de las ecuaciones de campo requiere la especificación del campo y su derivada temporal a un instante de tiempo.

Se puede hacer un planteo similar en relatividad general. Como las ecuaciones de campo de Einstein son ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden para la métrica  $g_{\alpha\beta}$  del espaciotiempo, esperaríamos que una solución completa requiera de la especificación de  $g_{\alpha\beta}$  y  $\partial_t g_{\alpha\beta}$  a un instante de tiempo. A pesar de que esto es esencialmente correcto, es deseable convertir este planteo no covariante en algo más geométrico.

Una de las diferencias más impactantes entre la teoría Newtoniana y la relatividad general es que en esta última, el campo gravitacional adquiere sus propias características dinámicas. Su evolución temporal es complicada aún en ausencia de materia. Esto contrasta con el hecho de que en la teoría Newtoniana, el campo gravitatorio se anula cuando no hay materia presente. La ecuación de campo, es decir, la ecuación de Poisson, junto con las condiciones de borde de que el campo se anule en el infinito, se combinan para dar este resultado. Las ecuaciones de Einstein, que son las ecuaciones de campo de la relatividad general, permiten situaciones idealizadas que representan ondas gravitacionales en un universo de otro modo vacío, sin fuentes materiales. Esto refleja la diferente naturaleza matemática de las ecuaciones en ambos casos. La ecuación de Poisson es elíptica, mientras que las ecuaciones de Einstein son esencialmente hiperbólicas [65].

El problema de valores iniciales de la relatividad general comienza con la selección de una hipersuperficie espacial  $\mathcal{S}$  que representa un 'instante de tiempo' en el espaciotiempo. Esta hipersuperficie se puede elegir libremente y sobre ella ubicamos coordenadas arbitrarias  $x^a$ . La métrica del espaciotiempo  $g_{\alpha\beta}$ , evaluada sobre  $\mathcal{S}$ , tiene componentes que caracterizan los desplazamientos fuera de la hipersuperficie. No se le puede dar significado a estas componentes sólo en término de las propiedades geométricas de  $\mathcal{S}$ . Para dar valores iniciales con sentido para la métrica del espaciotiempo, debemos considerar desplazamientos sólo dentro de la hipersuperficie. En otras palabras, los valores iniciales para  $g_{\alpha\beta}$  sólo pueden ser seis componentes de la métrica inducida  $\tilde{h}_{ab} = g_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta$ , donde  $\{e_a^\alpha := \partial x^\alpha / \partial x^a\}$  son vectores tangentes a  $\mathcal{S}$ . Las cuatro componentes restantes son arbitrarias, y esto refleja la libertad completa al elegir las coordenadas del espaciotiempo  $x^\alpha$ .

Similarmente, los valores iniciales para la derivada temporal de la métrica deben estar descriptos por un 2-tensor que contenga la información acerca de

la derivada de la métrica en la dirección normal a la hipersuperficie. La curvatura extrínseca de la hipersuperficie  $\tilde{K}_{ab} = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_n g_{\alpha\beta})e_a^\alpha e_b^\beta$ , con  $n^\alpha$  el campo vectorial normal a la hipersuperficie  $\mathcal{S}$  es claramente la elección apropiada.

El problema de valores iniciales de la relatividad general consiste entonces de la especificación de dos campos tensoriales simétricos,  $\tilde{h}_{ab}$  y  $\tilde{K}_{ab}$ , sobre una hipersuperficie espacial  $\mathcal{S}$ . Se puede ver que la traza de la curvatura extrínseca  $\tilde{K}$  es igual a la expansión de una congruencia de geodésicas que intersectan a la hipersuperficie ortogonalmente (y tal que su vector tangente es igual a  $n^a$  sobre la hipersuperficie). De este resultado concluimos que la hipersuperficie es convexa si  $\tilde{K} > 0$  (la congruencia es divergente), o cóncava si  $\tilde{K} < 0$  (la congruencia es convergente). Finalmente, cuando la curvatura extrínseca tiene traza cero,  $\tilde{K} = 0$ , en cuyo caso la superficie se denomina maximal, uno garantiza que la métrica pasa suavemente a una métrica familiar (por ejemplo, la de Minkowski) en el infinito, y que las superficies son espaciales y penetran el horizonte de eventos. Superficies maximales son las que utilizaremos en el desarrollo de esta tesis.

La métrica y curvatura extrínseca no se pueden elegir libremente. Deben satisfacer las ecuaciones de vínculo de la relatividad general. Estas están dadas por las ecuaciones de Gauss-Codazzi, junto con las ecuaciones de campo de Einstein, y toman la siguiente forma sobre  $\mathcal{S}$

$$\tilde{R} + (\text{tr}\tilde{K})^2 - \tilde{K} \cdot \tilde{K} = 16\pi\tilde{\rho} \quad (2.1)$$

y

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{K} - \tilde{\nabla} \text{tr}\tilde{K} = 8\pi\tilde{j}, \quad (2.2)$$

donde la densidad de materia-energía de la superficie es

$$\tilde{\rho} = n^\alpha n^\beta \tilde{T}_{\alpha\beta} \quad (2.3)$$

y las corrientes en la superficie están dadas por

$$\tilde{j}_a = e_a^\alpha n^\beta \tilde{T}_{\alpha\beta}, \quad (2.4)$$

con  $\tilde{T}_{\alpha\beta}$  el tensor energía-tensiones del espaciotiempo. Las componentes restantes de las ecuaciones de campo de Einstein proveen las ecuaciones de evolución para  $\tilde{h}_{ab}$  y  $\tilde{K}_{ab}$ .

Las cuatro ecuaciones cuasi lineales (2.1) y (2.2) forman un sistema elíptico indeterminado para las doce componentes de la 3-métrica y de la curvatura extrínseca. Si se toma en cuenta la libertad de realizar transformaciones de las tres coordenadas y se considera a  $\mathcal{S}$  como determinada esencialmente por la curvatura extrínseca media  $\frac{1}{3}\tilde{K}$ , el conteo de funciones nos da dos grados de libertad para el campo gravitacional.

## 2.2. Método conforme

Esta sección está basada en los trabajos de Murchadha y York [111], [112] y de Bartnik [14].

Como mencionamos anteriormente, las ecuaciones de vínculo de Einstein constituyen un sistema indeterminado para la 3-métrica y la curvatura extrínseca de la hipersuperficie inicial. Por lo tanto, es importante separar las cantidades especificables libremente, o independientes, de las dependientes, que se determinan en término de las independientes como soluciones de las ecuaciones de valores iniciales. Los datos independientes describen los grados de libertad de onda del campo gravitacional y las partes libres, los grados de libertad de las fuentes. Los datos dependientes son potenciales generalizados y su comportamiento de largo alcance en un espacio asintóticamente plano determina la masa y los momentos angular y lineal del campo gravitacional.

El método más popular para obtener un sistema determinado de ecuaciones iniciales es el Método conforme (ver [35] y sus referencias). Hay cuatro ideas que subyacen a este método. 1) Los datos de Cauchy se refieren sólo al estado físico instantáneo de un campo gravitacional, por lo que es natural utilizar como datos iniciales a  $\tilde{h}_{ab}$  y parte de la curvatura extrínseca  $\tilde{K}_{ab}$ , que no dependen de cómo el sistema coordenado se continúa afuera de la hipersuperficie inicial. 2) Para una dada 3-geometría, representada por  $\tilde{h}_{ab}$ , la curvatura extrínseca se puede descomponer ortogonalmente y covariantemente en una parte transversal sin traza, una parte sin traza determinada por un vector, y una parte de traza proporcional a la métrica. 3) El escalar que determina la parte de traza en dicha descomposición se puede considerar como una función libremente especificable que sirve para identificar las superficies espaciales. El escalar particular que usaremos se denota  $\tau = \frac{2}{3}\tilde{K}$ . Esto mide la tasa de contracción de los elementos de 3-volumen locales con respecto al tiempo propio local. 4) Los datos independientes son invariantes con respecto a transformaciones conformes de la métrica.

Finalmente, el factor conforme y parte de la curvatura extrínseca son los datos dependientes que actúan como potenciales generalizados de largo alcance para el campo gravitacional.

Entonces el primer paso que tomamos para obtener el sistema determinado es introducir como datos libres a una métrica conforme  $h_{ab}$  y un tensor simétrico sin traza ni divergencia  $K_{ab}$  que están relacionados con los datos iniciales a través de una transformación conforme

$$\tilde{h}_{ab} = \Phi^4 h_{ab}, \quad (2.5)$$

$$\tilde{K}_{ab} = \Phi^{-2} K_{ab} + \Phi^{-2} (LW)_{ab} + \frac{1}{3} \tau \Phi^4 h_{ab}, \quad (2.6)$$

donde la parte longitudinal de  $\tilde{K}_{ab}$  está dada por

$$(LW)^{ab} = \nabla^a W^b + \nabla^b W^a - \frac{2}{3} h^{ab} \nabla_c W^c. \quad (2.7)$$

Ahora el vínculo de momento (2.2) se puede escribir como tres ecuaciones que determinan  $W$ , considerando a  $\tau$  y  $\tilde{j}^a$  como dados:

$$\nabla_b (LW)_b^a = \frac{2}{3} \Phi^6 \nabla_b \tau - 8\pi j_b, \quad (2.8)$$

donde las corrientes rescaleadas están dadas por [36]

$$\tilde{j} = j \Phi^{-10}. \quad (2.9)$$

De esta ecuación vemos que la parte transversal sin traza de  $\tilde{K}^{ab}$  no está restringida. La parte sin traza de  $\tilde{K}^{ab}$  es esencialmente el *shear* del campo normal  $n^a$  que genera la superficie inicial. De (2.8) vemos que la parte vinculada del *shear* tiene como fuentes locales a las corrientes  $j^a$  y a la contracción  $\tilde{\nabla} \tau \neq 0$ . En particular, para el caso en que estos dos campos sean cero, el tensor  $\tilde{K}_{ab}$ , sin traza ni divergencia se puede prescribir arbitrariamente.

En segundo lugar el vínculo hamiltoniano más general queda

$$\Delta_h \Phi = \frac{R_h}{8} \Phi - \frac{1}{8} (K^{ab} + LW^{ab}) (K_{ab} + LW_{ab}) \Phi^{-7} + \frac{1}{12} 3\tau^2 \Phi^5 - 2\pi \rho \Phi^{-3} \quad (2.10)$$

y las fuentes escaleadas están relacionadas con los valores iniciales de la fuentes físicas mediante

$$\rho = \bar{\rho} \Phi^8. \quad (2.11)$$

Este escaleo de la densidad de materia, junto con el correspondiente a las corrientes (2.9) incluye, por ejemplo, fuentes de fluidos genéricas, sin ecuaciones de campo independientes, fuentes electromagnéticas y campos de Yang-Mills [36].

Las cantidades libremente especificables  $h_{ab}$ ,  $K_{ab}$  y  $\tau$  conformemente invariantes constituyen los datos independientes. En el caso de problemas de no vacío, se deben prescribir las corrientes y la densidad de energía sobre la hipersuperficie inicial. Es conveniente prescribir solamente aquellas características de  $\tilde{j}^a$  y  $\tilde{\rho}$  que son consistentes con un conocimiento a priori de la métrica inicial solo a menos de un factor conforme, esto es  $j$  y  $\rho$ .

La interpretación física del factor conforme comenzó con Brill quien mostró que la parte de  $\Phi$  que decae asintóticamente como  $\mathcal{O}(r^{-1})$  contiene la masa gravitacional total del sistema si el dato inicial se supone asintóticamente Schwarzschild. Se sabe que

$$m = -\frac{1}{2\pi} \int_{\infty} \nabla \Phi \cdot dS \quad (2.12)$$

donde se supone que la métrica de base  $\tilde{h}$  se aproxima asintóticamente a la métrica plana más rápido que  $\mathcal{O}(r^{-1})$ . Esta suposición se justifica por el requisito de que la energía total  $m$  sea finita. En tal caso, se mostró que  $\tilde{h} \rightarrow \delta + \mathcal{O}(r^{-(3/2+\epsilon)})$ ,  $\epsilon > 0$ , donde  $\delta$  es la 3-métrica Euclídea. Aplicando el teorema de Gauss, podemos expresar la energía como

$$m = -\frac{1}{2\pi} \int_V \Delta\Phi \sqrt{\tilde{h}} dV. \quad (2.13)$$

### 2.2.1. Resultados previos con el Método Conforme

Desde la formulación del método conforme, la pregunta clave es la siguiente: Para qué elecciones de 3-variedades y datos libres se pueden resolver las ecuaciones (2.8) y (2.10)? Se han obtenido muchos resultados en diferentes casos, y aún quedan muchos por determinar. En lo que viene a continuación, seguimos las líneas de [14].

El valor de la curvatura media,  $\tau$ , es el factor más importante en separar los conjuntos de datos libres para los cuales sabemos si existe o no una solución, de los conjuntos que aún no sabemos. Para datos libres suficientemente suaves, con curvatura media constante, el problema de existencia está completamente determinado y se sabe que para todos, salvo ciertos casos especiales, existe solución cuando la variedad es compacta [35], [86], o asintóticamente plana [23], [28] o asintóticamente hiperbólica [6], [5]. Cuando la variedad es compacta con borde, la mayoría de los casos aún están sin resolver.

Finalmente, para variedades asintóticamente planas con frontera interior, hay algunas situaciones determinadas y otras no resueltas. Este caso ha recibido un creciente interés por su aplicabilidad numérica en los últimos años, desencadenando a su vez un importante desarrollo analítico. De hecho, esta motivación a llevado a Dain [50] y Maxwell [102] a dar condiciones suficientes sobre datos libres asintóticamente planos con condiciones de contorno interiores sobre horizontes aparentes para que exista solución. Por otro lado, el problema con condiciones asintóticas en la frontera interior de tipo cilíndrico, ha permanecido prácticamente inexplorado analíticamente hasta el presente.

La situación es muy diferente para datos con curvatura media no constante, sin control sobre la norma del gradiente de  $\tau$ . Casi nada se sabe en este caso (ver las referencias en [14]).

Para finalizar esta discusión acerca de la implementación del método conforme para encontrar soluciones de las ecuaciones de vínculo, es importante notar dos hechos. Primero, el mapa desde los conjuntos de datos libres a

las soluciones de los vínculos es sobreyectivo. En segundo lugar, para todos los conjuntos de datos libres para los cuales se sabe que existe solución (salvo para el caso muy especial de métrica plana,  $K_{ab} = 0$  y  $\tau = 0$  sobre  $T^3$ ), la solución es única. Como consecuencia de esto, aquellos conjuntos de datos libres para los cuales existen soluciones parametrizan el espacio de datos iniciales que satisfacen los vínculos. Se deduce que, una vez determinado exactamente qué datos libres se mapean con soluciones, habremos hecho un progreso significativo en entender los grados de libertad de la teoría de Einstein.

En vista del rol dominante que juega el método conforme como herramienta para el análisis matemático y numérico de los vínculos, es importante remarcar sus limitaciones. Como mencionamos antes, el método conforme reemplaza el sistema de ecuaciones de vínculo indeterminado original (cuatro ecuaciones a ser resueltas para doce incógnitas), por un sistema determinado de carácter elíptico. Esto es muy útil para una gran variedad de estudios (tales como la cuestión de la parametrización). Sin embargo, es una mala idea para un número de otros problemas, por ejemplo, para el problema de la posible extensión suave de una dada solución de los vínculos prescrita en una bola de radio finito, a una solución completa, asintóticamente plana. Para estas cuestiones resulta más conveniente tratar con el sistema original (ver [44]).

### 2.3. Datos iniciales para agujeros negros

Para modelar un sistema aislado de uno o más agujeros negros en vacío, el conjunto de datos  $(\mathcal{S}, \tilde{h}_{ab}, \tilde{K}_{ab})$  debe satisfacer varios requisitos. Los sistemas aislados son modelados típicamente con datos iniciales asintóticamente planos. Esto requiere que la métrica  $\tilde{h}_{ab}$  se aproxime a la métrica Euclídea y que  $\tilde{K}_{ab}$  decaiga a cero a grandes distancias en  $\mathcal{S}$ . Más aún, las ecuaciones de Einstein de vacío imponen una condición de compatibilidad sobre  $\tilde{K}_{ab}$ ,  $\tilde{h}_{ab}$  y su escalar de curvatura  $\tilde{R}$  dada por las ecuaciones de vínculo de Einstein. Finalmente, estos datos para agujeros negros deben evolucionar en un espaciotiempo que contenga un horizonte de eventos, y la intersección de este horizonte de eventos con la superficie inicial debe contener tantas componentes conexas como agujeros negros.

Un horizonte de eventos es la frontera de la región que puede enviar señales al infinito. Es una propiedad global de un espaciotiempo y no se puede ubicar en un conjunto de datos iniciales sin evolucionarlos. Esto plantea un serio obstáculo en la creación de datos iniciales para agujeros negros. Para atacar este problema, se suelen crear datos iniciales que contengan horizontes

aparentes. No hay una definición consistente de horizonte aparente en la literatura. Algunas definiciones incluyen la frontera de una región atrapada, o la superficie marginalmente atrapada más exterior. Una de las definiciones más usadas es la siguiente [101]. Un horizonte aparente es una superficie que instantáneamente no se está expandiendo ni contrayendo a medida que evoluciona bajo el flujo de sus geodésicas nulas ortogonales salientes (al infinito). Sobre la frontera de  $\mathcal{S}$ , la expansión ante este flujo está dada por la llamada convergencia

$$\theta_+ = -\text{tr}\tilde{K}_{ab} + \tilde{K}_{ab}\tilde{\nu}^a\tilde{\nu}^b + \tilde{\nabla}_a\tilde{\nu}^a, \quad (2.14)$$

donde  $\tilde{\nu}^a$  es la normal unitaria exterior de  $\partial\mathcal{S}$ . Por lo tanto, con esta última definición,  $\partial\mathcal{S}$  es un horizonte aparente si  $\theta_+ = 0$ . Esta definición es interesante porque es una propiedad local y constituye una condición de borde natural.

La motivación para usar horizontes aparentes proviene de la conjetura del censor cósmico. Suponiendo que el dato inicial asintóticamente Euclídeo evoluciona en un espaciotiempo débilmente censurado, cualquier horizonte aparente presente en el dato inicial deberá estar contenido en la región del agujero negro del espaciotiempo. Para generar espaciotiempos con múltiples agujeros negros, se construyen datos iniciales con múltiples horizontes aparentes. Si los horizontes aparentes están adecuadamente separados, se conjetura que estarán asociados a agujeros negros diferentes.

Un camino interesante para crear datos iniciales que contengan horizontes aparentes, sugerido inicialmente por Thornburg [128], es trabajar con una variedad con frontera y prescribir que la frontera sea un horizonte aparente.

Por lo tanto, buscamos un dato asintóticamente Euclídeo  $(\mathcal{S}, \tilde{h}, \tilde{K})$  que satisfagan las ecuaciones (ver [102] por detalles)

$$\tilde{R} - |\tilde{K}|^2 + \text{tr}\tilde{K}^2 = 0 \quad (2.15)$$

$$\tilde{\nabla}_a\tilde{K}^{ab} - \tilde{\nabla}^b\text{tr}\tilde{K} = 0 \quad (2.16)$$

$$-\text{tr}\tilde{K} + \tilde{K}_{ab}\tilde{\nu}^a\tilde{\nu}^b + \tilde{\nabla}_a\tilde{\nu}^a = 0, \quad \text{sobre } \partial\mathcal{S}. \quad (2.17)$$

Podemos relacionar estas ecuaciones con las cantidades libres conformemente relacionadas  $(h_{ab}, K_{ab})$  definiendo la normal unitaria  $\nu^a$  relativa a la métrica de fondo mediante

$$\tilde{\nu}^a = \Phi^{-2}\nu^a. \quad (2.18)$$

Luego, el método conforme traduce las ecuaciones anteriores, en el caso maximal (i.e  $\text{tr}K = 0$ ) en las siguientes ecuaciones

$$\Delta\Phi - \frac{R}{8}\Phi + \frac{K_{ab}K^{ab}}{8\Phi^7} = 0 \quad (2.19)$$

$$\nabla_a K^{ab} = 0 \quad (2.20)$$

$$4\nu^a \nabla_a \ln \Phi + \nabla_a \nu^a + \frac{K_{ab} \nu^a \nu^b}{\Phi^4} = 0, \quad \text{sobre } \partial\mathcal{S}. \quad (2.21)$$

Una manera alternativa de crear datos iniciales para agujeros negros es considerar una tajada espacial del espaciotiempo y utilizar dos copias de la región exterior conectadas mediante un puente tipo Einstein-Rosen ubicado en el horizonte aparente. Por lo tanto, la superficie  $\mathcal{S}$  va desde un infinito espacial al otro, correspondiente a la segunda región. De esta forma, se convierte el problema de valores de contorno (2.19)-(2.21) definido en la región exterior al horizonte aparente, en un problema sobre una variedad con un punto removido (en general  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ), donde el segundo infinito asintóticamente plano se ha compactificado a un punto llamado 'puncture' que, en coordenadas apropiadas, se suele representar por el origen (al menos en el caso de un único agujero negro).

Este método, conocido como el método de 'puncture' en el contexto de relatividad numérica, funciona notablemente bien en simulaciones de agujeros negros (ver [24], [75] y el artículo de review [84] por un análisis de la implementación de métodos numéricos que involucran un 'puncture' en el dato). Inicialmente, cada agujero negro se describe convenientemente en coordenadas que no alcanzan las singularidades físicas, sino que a medida que las coordenadas se acercan a la singularidad, siguen en cambio un agujero de gusano hacia otra copia del espaciotiempo asintóticamente plano exterior. En esta construcción, la geometría está capturada por una única función, un factor conforme  $\Phi$  que diverge adecuadamente en cada 'puncture'.

Con este método, las ecuaciones a resolver son (2.19) y (2.20) con las condiciones de borde  $\Phi \rightarrow 1$  cuando  $r \rightarrow \infty$  y  $\Phi = O(r^{-1})$  para  $r \rightarrow 0$ , donde  $r$  es una coordenada adaptada a los finales asintóticamente planos. Estas condiciones para el comportamiento del factor conforme garantizan que ambos finales son asintóticamente planos.

De esta forma, es posible generar datos para agujeros negros no extremos como el de Schwarzschild, Reissner Nördstrom y Kerr (ver en las siguientes secciones). Sin embargo, no resuelven el problema de los agujeros negros extremos. Veremos que la condición de borde en el origen  $\Phi = O(r^{-1})$  no es compatible con la noción de extremalidad adoptada. Lo que sucede es que en el caso extremo la foliación mencionada,  $(\mathcal{S}, \tilde{h}_{ab}, \tilde{K}_{ab})$ , deja de poseer dos regiones asintóticamente planas en el límite extremo. El final en  $r \rightarrow 0$  se convierte en un infinito cilíndrico, por lo que la condición de borde para el factor conforme debe ser diferente.

El problema del límite extremo será analizado para los agujeros negros estacionarios en el resto del presente capítulo. El caso no estacionario será

estudiado en los capítulos 3, 4 y 5.

## 2.4. Agujeros negros estacionarios

En esta sección presentamos datos iniciales para agujeros negros estacionarios y describimos sus propiedades distintivas que serán de utilidad en los capítulos venideros.

### 2.4.1. Schwarzschild

La métrica del espaciotiempo de Schwarzschild con masa  $m$  en coordenadas usuales  $(t, \tilde{r}, \theta, \phi)$  está dada por

$$g = - \left( 1 - \frac{2m}{\tilde{r}} \right) dt^2 + \frac{d\tilde{r}^2}{1 - \frac{2m}{\tilde{r}}} + \tilde{r}^2 d\Omega^2. \quad (2.22)$$

Consideremos como superficie de datos iniciales  $\mathcal{S}$ , una superficie a  $t = \text{constante}$ , con métrica inducida

$$\tilde{h} = \frac{d\tilde{r}^2}{1 - \frac{2m}{\tilde{r}}} + \tilde{r}^2 d\Omega^2 \quad (2.23)$$

donde la coordenada radial  $\tilde{r}$  barre el rango  $\tilde{r} \in (2m, \infty)$  para describir la región exterior al agujero negro.

Consideremos ahora la transformación de coordenadas que cambian la coordenada radial esférica  $\tilde{r}$  por la coordenada isotrópica  $r$ , mediante la expresión

$$\tilde{r} = r \left( 1 + \frac{m}{2r} \right)^2, \quad (2.24)$$

y al invertir esta relación, vemos que aparecen dos ramas para  $r$  en función de  $\tilde{r}$

$$r = \frac{\tilde{r} - m \pm \sqrt{\tilde{r}(\tilde{r} - 2m)}}{2}, \quad (2.25)$$

con  $r \in (0, \infty)$ . Estas dos ramas coinciden para  $\tilde{r} = 2m$ , donde  $r = m/2$ . Mediante este cambio de coordenadas, lo que hacemos es pasar, de cubrir sólo el exterior del agujero negro, a cubrir dos copias idénticas del mismo, conectadas por un agujero de gusano con superficie minimal en  $r = m/2$ .

En estas coordenadas, la métrica  $\tilde{h}$  inducida en la superficie  $\mathcal{S}$  toma la forma

$$\tilde{h} = \left( 1 + \frac{m}{2r} \right)^4 (dr^2 + r^2 d\Omega^2) = \Phi^4 \delta, \quad (2.26)$$

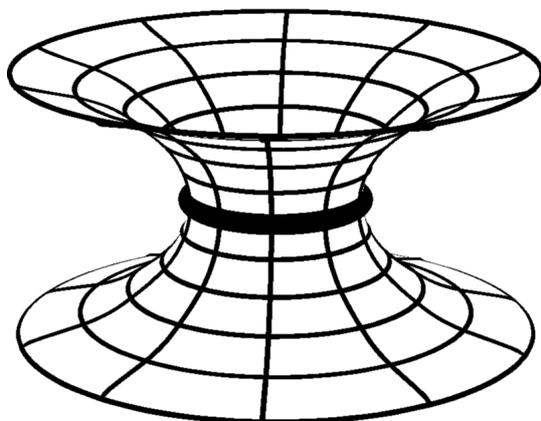


Figura 2.1: Diagrama embebido de una tajada 2-dimensional ( $t = \text{constante}$ ,  $\theta = \pi/2$ ) de la solución de Schwarzschild. El círculo oscuro en el medio representa la superficie minimal (garganta) que conecta las dos regiones asintóticamente planas.

donde  $\delta$  es la 3-métrica Euclídea y el factor conforme está dado por

$$\Phi = 1 + \frac{m}{2r}. \quad (2.27)$$

En las nuevas coordenadas, el infinito espacial  $i_0$  se representa por el límite  $r \rightarrow \infty$ . Además, el segundo infinito quedó compactificado a un punto  $r \rightarrow 0$ . La métrica intrínseca (2.26) satisface las condiciones estandar de decaimiento asintóticamente plano en ambas regiones. Esto también se aprecia a partir de la expresión (2.27) ya que el hecho de que  $\Phi = O(r^{-1})$  en el origen y  $\Phi \sim 1$  en el infinito refleja la naturaleza asintóticamente plana de las dos regiones.

La superficie  $\mathcal{S}$  va desde un infinito espacial al otro. La topología de esta superficie es  $\mathcal{S} = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  e intersecta a la esfera de bifurcación (indicada por un círculo oscuro en 2.1). La tajada es isométrica a través de esta esfera, es decir, los datos físicos  $\tilde{h}_{ab}$ ,  $\tilde{K}_{ab}$  son invariantes ante la transformación de inversión por la esfera de radio  $r = m/2$ , realizada por la transformación de coordenadas  $(r, \theta, \phi) \rightarrow (m^2/4r, \theta, \phi)$ . La esfera de bifurcación sobre la tajada es tanto una superficie minimal como un horizonte aparente.

Para el problema no estacionario, en el cual no se conocen las soluciones explícitas de los vínculos, resulta necesario trabajar únicamente con dichas ecuaciones (en realidad, sólo con la ecuación de Lichnerowicz). Por esto, es interesante notar que la forma (2.27) para el factor conforme  $\Phi$  también se puede obtener resolviendo la ecuación de Lichnerowicz con datos libres ( $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ,  $\delta_{ab}$ ,  $K_{ab} = 0$ )

$$\Delta\Phi = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \quad (2.28)$$

donde  $\Delta$  es el operador de Laplace plano en tres dimensiones. Para imponer las condiciones de borde en infinito y el origen, resulta conveniente introducir un parámetro positivo  $\mu$ , y una función  $u_\mu$  mediante la expresión

$$\Phi = 1 + \frac{\mu}{2r} + u_\mu. \quad (2.29)$$

Luego, las condiciones de frontera se traducen a  $u_\mu$ . Se requiere que  $u_\mu$  sea una función regular en  $\mathbb{R}^3$  y que tienda a cero en  $r \rightarrow \infty$ .

Con esto, la ecuación para  $u_\mu$  es

$$\Delta u_\mu = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^3, \quad u_\mu \rightarrow 0 \quad \text{en el infinito.} \quad (2.30)$$

Sabemos que la única solución de esta ecuación con estas condiciones de borde es  $u_\mu = 0$ , por lo que, el factor conforme queda simplemente  $\Phi = 1 + \mu/2r$ . Al calcular la masa del agujero negro, encontramos que  $m = \mu$ , lo que nos lleva a la expresión dada por (2.26).

Este caso es un ejemplo canónico del tipo de geometría asintótica presente en los datos iniciales para agujeros negros no extremos que usaremos en gran parte de esta tesis. Debido a que el agujero negro de Schwarzschild no posee un límite extremo, para poder analizar el comportamiento en este límite será necesario recurrir a los datos de Reissner Nördstrom o Kerr.

A pesar de esto, es interesante notar que el espaciotiempo de Schwarzschild admite una foliación muy especial que posee la misma geometría asintótica que los datos extremos de Reissner Nördstrom y Kerr [76]. Veamos algunas de sus propiedades.

La superficie que consideraremos ahora también es conformemente plana, pero no está embebida en el espaciotiempo con curvatura extrínseca cero. Más concretamente, partimos de la métrica para el espaciotiempo de Schwarzschild, en coordenadas  $(t, \hat{r}, \theta, \phi)$  en la forma

$$g_{\alpha\beta} = -\alpha^2 dt^2 + \tilde{h}_{ab}(dx^a + \beta^a dt)(dx^b + \beta^b dt) \quad (2.31)$$

donde el lapse y el shift están dados por

$$\alpha = \sqrt{1 - \frac{2m}{\hat{r}} + \frac{C^2}{\hat{r}^4}} \quad (2.32)$$

$$\beta^{\hat{r}} = \frac{\alpha C}{\hat{r}^2}, \quad \beta^a = 0 \quad \text{para } a \neq \hat{r} \quad (2.33)$$

y la constante  $C$  es  $C = 3\sqrt{3}m^2/4$ . La nueva coordenada radial  $\hat{r}$  está en el rango  $\hat{r} \in (3m/2, \infty)$ .

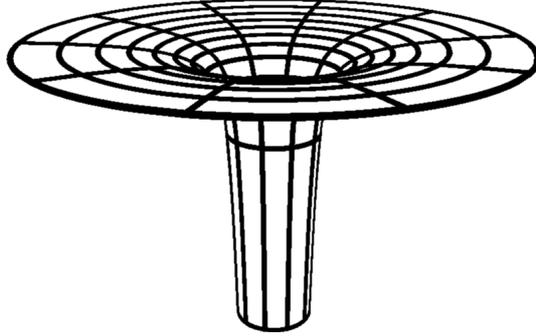


Figura 2.2: Diagrama embebido de la tajada 2-dimensional  $\mathcal{S}'$  de la solución de Schwarzschild. Hay un final asintóticamente plano (arriba) y un final asintóticamente cilíndrico (abajo).

La métrica inducida sobre una superficie  $\mathcal{S}' = \{t = \text{constante}\}$  toma la forma

$$\tilde{h} = \frac{d\hat{r}^2}{1 - \frac{2m}{\hat{r}} + \frac{C^2}{\hat{r}^4}} + \hat{r}^2 d\Omega^2. \quad (2.34)$$

y la curvatura extrínseca está dada por

$$K_{ab} = \frac{C}{\hat{r}^3} (3n_a n_b - \delta_{ab}). \quad (2.35)$$

Esta superficie espacial  $\mathcal{S}'$  tiene la misma topología  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  que  $\mathcal{S}$ , sin embargo, la geometría asintótica es diferente. Tiene un final asintóticamente plano y uno cilíndrico ubicado en el límite  $\hat{r} \rightarrow 3m/2$ , ver figura 2.2. El final cilíndrico se aproxima asintóticamente al horizonte de eventos. En oposición a lo que ocurre en el caso asintóticamente plano, este final está en la región de campo fuerte del espaciotiempo. Notemos que  $(\mathcal{S}', \tilde{h}_{ab})$  es una variedad Riemanniana completa sin borde que yace enteramente en la región exterior al agujero negro.

## 2.4.2. Reissner Nördstrom

Consideremos datos iniciales para un agujero negro de Reissner Nördstrom de carga  $q$  y masa  $m$ . La métrica del espaciotiempo en coordenadas canónicas tipo Schwarzschild  $(t, \tilde{r}, \theta, \phi)$  está dada por

$$g = - \left( 1 - \frac{2m}{\tilde{r}} + \frac{q^2}{\tilde{r}^2} \right) dt^2 + \frac{d\tilde{r}^2}{1 - \frac{2m}{\tilde{r}} + \frac{q^2}{\tilde{r}^2}} + \tilde{r}^2 d\Omega^2. \quad (2.36)$$

Esta métrica se reduce a la solución de Schwarzschild cuando  $q = 0$ , sin embargo, para  $q \neq 0$  las propiedades del espaciotiempo son notablemente diferentes. Esta solución muestra divergencias en las componentes de la métrica o su inversa en  $\tilde{r} = 0$  y en

$$\tilde{r} = \tilde{r}_{\pm} \equiv m \pm \sqrt{m^2 - q^2}. \quad (2.37)$$

La singularidad en  $\tilde{r} = 0$  es una singularidad de curvatura no removible, mientras que las de  $\tilde{r} = \tilde{r}_{\pm}$  son singularidades coordenadas que se pueden remover con una extensión analítica adecuada de la métrica.

La métrica (2.36) describe un agujero negro si  $|q| \leq m$ . Cuando  $|q| = m$  la solución se llama el agujero negro de Reissner Nördstrom extremo. Finalmente, si  $|q| > m$  la solución es una singularidad desnuda.

Los datos iniciales para el agujero negro de Reissner Nördstrom jugarán un papel muy importante en lo que sigue, por lo que resulta conveniente revisarlos en detalle en el contexto del método conforme, que es el que utilizaremos en la mayor parte de esta tesis.

Tomemos una tajada  $\mathcal{S} = \{t = \text{constante}\}$  en las coordenadas canónicas y definimos el radio isotrópico  $r$  por

$$\tilde{r} = r + m + \frac{m^2 - q^2}{4r}. \quad (2.38)$$

La métrica intrínseca sobre la tajada es conformemente plana, y está embebida en el espaciotiempo con curvatura extrínseca cero,

$$\tilde{h}_{ab} = \Phi_{\mu}^4 \delta_{ab}, \quad \tilde{K}_{ab} = 0, \quad (2.39)$$

donde el factor conforme, que hemos denotado como  $\Phi_{\mu}$ , está dado explícitamente por

$$\Phi_{\mu} = \sqrt{1 + \frac{m}{r} + \frac{\mu^2}{4r^2}}, \quad (2.40)$$

donde el parámetro positivo  $\mu$  está definido en términos de  $m$  y  $q$  por

$$m = \sqrt{q^2 + \mu^2}. \quad (2.41)$$

Es muy importante enfatizar que cuando  $q$  está fijo, la masa total del dato  $m$  es una función monótonamente creciente con  $\mu$ , y alcanza su mínimo valor posible para  $\mu = 0$ , en cuyo caso se llega al límite extremo  $m = |q|$ .

Se puede ver que el factor conforme es invariante ante la transformación de escala  $(r, m, q) \rightarrow (\lambda r, \lambda m, \lambda q)$  para cualquier número real  $\lambda$ . Esta invariancia de escala implica que en realidad, el dato inicial depende (conformemente) sólo de un parámetro. Con esto en mente, elegimos fijar la carga del dato, y

así obtenemos una familia monoparamétrica de datos iniciales, parametrizada por  $\mu > 0$ . Es decir que para cada valor de  $\mu > 0$  obtenemos un dato inicial particular de Reissner Nördstrom no extremo  $\Phi_\mu$ . Por otro lado, el dato extremo ( $m = |q|$ ) se obtiene tomando el límite  $\mu \rightarrow 0$  en la familia  $\Phi_\mu$ .

Estas apreciaciones acerca de la solución de Reissner Nördstrom fueron la motivación y guía principal en la búsqueda, identificación y caracterización de soluciones extremas de las ecuaciones de Einstein a lo largo de toda la tesis. Veamos, por tanto, algunas propiedades más de este dato. Hemos notado, teniendo en cuenta que la solución  $\Phi_\mu$ , y de allí, la masa del dato, son explícitas, que el límite extremo se puede obtener tomando  $\mu \rightarrow 0$ . Para el caso no estacionario, sería interesante identificar este límite en la ecuación satisfecha por el factor conforme.

El factor conforme  $\Phi_\mu$  satisface la ecuación de Lichnerowicz con materia dada por

$$\Delta\Phi_\mu = -\frac{q^2}{4r^4\Phi_\mu^3}. \quad (2.42)$$

con condiciones de contorno en cero y en infinito dadas por  $\Phi_\mu = O(r^{-1})$  en  $r \rightarrow 0$  y  $\Phi \sim 1$  en  $r \rightarrow \infty$ . Esto significa, de la misma forma que para el dato de Schwarzschild, que este dato de Reissner Nördstrom no extremo posee dos regiones asintóticamente planas, con finales en  $r \rightarrow \infty$  y en  $r \rightarrow 0$ . Estas dos regiones son isométricas y están conectadas mediante la superficie minimal ubicada en  $r = \mu/2$  (ver figura 2.1 en la sección anterior para una representación cualitativa de la geometría del dato inicial).

También definimos la función  $u_\mu(x)$  por

$$\Phi_\mu = 1 + \frac{\mu}{2r} + u_\mu(x), \quad (2.43)$$

es decir, tenemos

$$u_\mu(x) = \sqrt{1 + \frac{m}{r} + \frac{\mu^2}{4r^2}} - 1 - \frac{\mu}{2r}. \quad (2.44)$$

Como consecuencia de las ecuaciones de vínculo, la función  $u_\mu$  satisface

$$\Delta u_\mu = -\frac{q^2}{4r^4 \left(1 + \frac{\mu}{2r} + u_\mu\right)^3}. \quad (2.45)$$

Además,  $u_\mu \geq 0$ ,  $u_\mu(x)$  es suave en  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  y, para  $\mu > 0$ , tenemos  $u_\mu \in C^0(\mathbb{R}^3)$ . Los valores de la función y sus derivadas en el origen están dados por

$$u_\mu(0) = \frac{m}{\mu} - 1 \quad \frac{du_\mu}{dr}(0) = -\frac{q^2}{\mu^3}. \quad (2.46)$$

Notemos que ambos valores divergen a medida que  $\mu \rightarrow 0$ . De hecho, esto es de alguna forma sugerido por la ecuación (2.45). Cuando  $\mu$  es estrictamente positivo, el lado derecho de (2.45) se comporta como  $O(r^{-1})$  cerca del origen, ya que el término dominante es  $\mu/2r$ . Esto admite la posibilidad de  $u_\mu$  acotada (e incluso derivable) en el origen. Sin embargo, cuando  $\mu = 0$ , el lado derecho de (2.45) va como  $O(r^{-4})$  en  $r \sim 0$  si uno asume una solución regular, lo que es una inconsistencia. Esto implica que la función en el límite  $\mu \rightarrow 0$  ya no satisface las mismas condiciones de contorno en el origen que las soluciones para  $\mu > 0$ , y debe ser singular allí.

En el caso de Reissner Nördstrom, aprovechando que las soluciones son explícitas, (2.44), se verifica que en el límite  $\mu = 0$  correspondiente al caso extremo, la solución efectivamente toma la forma singular

$$u_0(x) := \lim_{\mu \rightarrow 0} u_\mu(x) = \sqrt{1 + \frac{|q|}{r}} - 1. \quad (2.47)$$

Más precisamente vemos que la solución extrema diverge como  $r^{-1/2}$ . Este comportamiento divergente en el origen aparecerá como una característica clave del límite extremo. La geometría asintótica de la tajada  $\mathcal{S}$  en el dato extremo toma la forma cualitativa mostrada en la figura 2.2 con un final asintóticamente plano y uno cilíndrico.

Finalmente, a partir de la expresión explícita (2.44) deducimos una propiedad importante que posee la secuencia de soluciones  $u_\mu$ , que será de gran utilidad en los capítulos próximos. Esta es la monotonía de la secuencia con el parámetro  $\mu$ , dicho de otra forma, la secuencia  $u_\mu$  es punto a punto creciente a medida que  $\mu \rightarrow 0$  y está acotada por la solución extrema  $u_0$ , es decir

$$u_{\mu_1}(x) < u_{\mu_2} < u_0(x), \quad \text{para } \mu_1 > \mu_2 > 0 \quad \text{y} \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}. \quad (2.48)$$

En contraste, el factor conforme satisface la propiedad opuesta

$$\Phi_{\mu_1}(x) > \Phi_{\mu_2} > \Phi_0(x), \quad \text{para } \mu_1 > \mu_2 > 0 \quad \text{y} \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}. \quad (2.49)$$

### 2.4.3. Kerr

Consideremos un agujero negro de Kerr con masa  $m$  y momento angular  $J$ . Esta solución describe un agujero negro no extremo rotante estacionario si  $m > \sqrt{|J|}$ . Cuando  $m = \sqrt{|J|}$  se obtiene el agujero negro extremo, y si  $m < \sqrt{|J|}$ , la solución contiene una singularidad desnuda.

La métrica del espaciotiempo para el agujero negro de Kerr no extremo en coordenadas de Boyer-Lindquist  $(t, \tilde{r}, \theta, \phi)$ , está dada por

$$g = -\frac{\Delta \sin^2 \theta}{\eta} dt^2 + \eta (d\phi - \Omega dt)^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} d\tilde{r}^2 + \Sigma d\theta^2 \quad (2.50)$$

donde  $\eta$  es el cuadrado de la norma del vector de Killing axial

$$\eta^\mu = \left( \frac{\partial}{\partial \phi} \right)^\mu, \quad \eta = g_{\nu\mu} \eta^\nu \eta^\mu, \quad (2.51)$$

que toma la forma

$$\eta = \frac{(\tilde{r}^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta}{\Sigma} \sin^2 \theta. \quad (2.52)$$

Las funciones  $\Delta$  y  $\Sigma$  están dadas por

$$\Delta = \tilde{r}^2 - 2m\tilde{r} + a^2, \quad \Sigma = \tilde{r}^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (2.53)$$

y  $\Omega$  es la velocidad angular

$$\Omega = \frac{2J\tilde{r} \sin^2 \theta}{\eta \Sigma}. \quad (2.54)$$

Aquí  $a = J/m$  es el momento angular por unidad de masa.

Tomamos una superficie espacial  $\mathcal{S} = \{t = \text{constante}\}$  y definimos el radio isotrópico  $r$  a través de la expresión

$$\tilde{r} = r + m + \frac{m^2 - a^2}{4r}. \quad (2.55)$$

A partir de (2.50) deducimos que la métrica intrínseca sobre esta superficie no es conformemente plana, sino que toma la forma axialmente simétrica

$$\tilde{h}_{ab} = \Phi_\mu^4 h_{ab}, \quad h = e^{2q} (dr^2 + r^2 d\theta^2) + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (2.56)$$

con

$$e^{2q} = \frac{\Sigma \sin^2 \theta}{\eta}, \quad \Phi_\mu^4 = \frac{\eta}{\rho^2}. \quad (2.57)$$

Notemos que el factor conforme depende de un parámetro positivo  $\mu$ , definido en términos de la masa y el momento angular a través de

$$m = \sqrt{a^2 + \mu^2}. \quad (2.58)$$

De manera similar al caso de Reissner Nördstrom, vemos a partir de esta expresión, que si el momento angular permanece fijo, entonces la masa total del dato es una función monótonamente creciente con  $\mu$ . Más aún, debido a la invariancia de escala del factor conforme  $(r, m, J) \rightarrow (\lambda r, \lambda m, \lambda^2 J)$ , deducimos que el dato inicial depende (conformemente) solamente de un parámetro.

Como hicimos con el dato de Reissner Nördstrom, elegimos dejar fijo el momento angular y variar el parámetro positivo  $\mu$ . De esta forma obtenemos una secuencia de soluciones de Kerr,  $(\mathcal{S}, \tilde{h}_{ab}^\mu, \tilde{K}_{ab}^\mu)$  para cada valor  $\mu > 0$ . Entonces, por (2.58), el dato inicial extremo,  $|J| = m^2$  (o  $a = m$ ), corresponde a tomar el límite  $\mu \rightarrow 0$  en dicha familia.

El potencial del twist del vector de Killing  $\eta^\alpha$  está dado por

$$\omega = 2J(\cos^3 \theta - 3 \cos \theta) - \frac{2Ja^2 \cos \theta \sin^4 \theta}{\Sigma}. \quad (2.59)$$

La función lapso y el vector shift para esta foliación están dados por

$$\alpha = \frac{r}{\sqrt{\Sigma + a^2(1 + 2a(r+a)/\Sigma) \sin^2 \theta}}, \quad (2.60)$$

$$\beta^\phi = -\frac{2a^2 \sin^2 \theta (r+a)}{\Sigma^3} r^2. \quad (2.61)$$

En simetría axial, la curvatura extrínseca se puede escribir en términos del potencial del twist en la forma

$$\tilde{K}_{ab} = \frac{2}{\eta} S_{(a} \eta_{b)}, \quad S_a = \frac{1}{\eta} \tilde{\epsilon}_{abc} \eta^b \partial^c \omega, \quad (2.62)$$

donde  $\tilde{\epsilon}_{abc}$  denota el elemento de volumen con respecto a la métrica  $\tilde{h}_{ab}$ . La ventaja de esta forma particular de escribir  $\tilde{K}_{ab}$  es que resulta fácil verificar a partir de (2.62) que  $\tilde{K}_{ab}$  satisface el vínculo de momento. Discutiremos y usaremos este hecho en la sección 5.3. En particular, tenemos que  $\tilde{K}_{ab}$  tiene traza cero

$$\tilde{K} = 0. \quad (2.63)$$

Es decir, que estos datos iniciales son superficies maximales.

La variedad Riemanniana  $(\mathcal{S}, \tilde{h}_{ab})$  tiene dos finales asintóticamente planos (ver figura 2.1). Esta geometría asintótica es idéntica a la tajada análoga de la extensión de Kruskal para el agujero negro de Schwarzschild. La superficie  $\mathcal{S}$  intersecta a la esfera de bifurcación y es isométrica a través de esta esfera. La esfera de bifurcación sobre la tajada es tanto una superficie minimal como un horizonte aparente. En coordenadas isotrópicas, uno de los infinitos asintóticamente planos se representa por el límite  $r \rightarrow \infty$  y el otro por  $r \rightarrow 0$ . La métrica intrínseca y la segunda forma fundamental satisfacen las condiciones estandar de decaimiento asintóticamente plano.

$$\tilde{h}_{ab} = \delta_{ab} + O(r^{-1}), \quad \partial \tilde{h}_{ab} = O(r^{-2}) \quad \tilde{K}_{ab} = O(r^{-3}), \quad \text{cuando } r \rightarrow \infty, \quad (2.64)$$

donde  $\delta_{ab}$  es la métrica plana. El fuerte decaimiento de la segunda forma fundamental implica que el momento lineal del dato inicial es cero. El momento angular está contenido en el término  $O(r^{-3})$  de  $\tilde{K}_{ab}$ . Por otro lado, a partir de las expresiones explícitas (2.57) y (2.52), se puede verificar el comportamiento  $\Phi_\mu = O(r^{-1})$  en  $r \rightarrow 0$  y  $\Phi_\mu \sim 1$  en  $r \rightarrow \infty$  cuando  $\mu > 0$ .

En el caso extremo  $m = \sqrt{|J|}$  (o  $\mu = 0$ ) la estructura global del espaciotiempo cambia. La superficie espacial  $\mathcal{S}$  tiene la misma topología  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  que en el caso no extremo, sin embargo, la geometría asintótica de la variedad Riemanniana  $(\mathcal{S}, \tilde{h}_{ab})$  es diferente. Tiene un final asintóticamente plano y uno cilíndrico, análogo al caso extremo del dato de Reissner Nördstrom (ver figura 2.2). El final cilíndrico se aproxima asintóticamente al horizonte de eventos. En oposición a lo que ocurre en el caso asintóticamente plano, este final está en la región de campo fuerte del espaciotiempo. Notemos que  $(\mathcal{S}, \tilde{h}_{ab})$  es una variedad Riemanniana completa sin borde que yace enteramente en la región exterior al agujero negro.

Como mencionamos antes, este cambio en la geometría asintótica del final  $r = 0$  se evidencia en el comportamiento del factor conforme  $\Phi_\mu$  (2.57). Esto es, para el dato no extremo, con  $\mu > 0$ ,  $\Phi_\mu = O(r^{-1})$  cerca del origen, reflejando la naturaleza asintóticamente plana del final. Pero para el caso extremo  $\mu = 0$ ,  $\Phi_0 := \lim_{\mu \rightarrow 0} \Phi_\mu = O(r^{-1/2})$  mostrando el carácter cilíndrico de este final en el límite.

## Capítulo 3

# Existencia de datos iniciales extremos de Bowen-York

### 3.1. Introducción

En este capítulo estudiamos el límite extremo en la familia de datos iniciales de Bowen-York que describen a un único agujero negro axisimétrico, no estacionario y con momento angular. Encontramos que en dicho límite las condiciones de contorno para la ecuación de Lichnerowicz sufren un cambio reflejando el cambio en la geometría asintótica, uno de los finales se transforma de asintóticamente plano a cilíndrico.

Habiendo fijado el momento angular, la familia de Bowen-York depende de un parámetro positivo que aquí denominamos  $\mu$ . Un inconveniente es que estos datos no están dados explícitamente. Están prescritos como soluciones de una ecuación elíptica no lineal (esencialmente, el vínculo Hamiltoniano) con condiciones de contorno apropiadas. Para el caso  $\mu > 0$  es sabido que esta ecuación tiene una solución única. Sin embargo, el valor  $\mu = 0$  representa un límite singular para esta ecuación. En varios trabajos (ver [55], [97]) se exploró este límite numéricamente. Estos cálculos numéricos indican que en el límite se obtiene una nueva solución. El propósito de este capítulo es probar esto. Es decir, probaremos que la secuencia de soluciones de la ecuación de Lichnerowicz para el dato de Bowen-York, converge a una solución límite cuando  $\mu \rightarrow 0$ . Llamamos a esta nueva solución de las ecuaciones de vínculo, los datos de Bowen-York extremos. Más adelante (sección 4.5) verificaremos que la denominación *extremo* está justificada en el sentido de que corresponde al dato con máximo momento angular por unidad de masa en la familia. También probaremos que la solución (como fue mostrado numéricamente en [55]) tiene un comportamiento similar al de los datos iniciales de Kerr-

Newman extremos discutidos antes.

En los últimos años, debido a la gran efervescencia de las simulaciones de sistemas binarios de agujeros negros, los datos *punctured* basados en la curvatura extrínseca de Bowen-York (ver [20], [74], [22] y el artículo de review [43]) han recibido la mayor atención en la comunidad de la relatividad numérica. Los datos de Bowen-York extremos construidos aquí representan los datos con máximo momento angular por unidad de masa en esta familia, y por lo tanto, tienen aplicaciones en escenarios astrofísicos en los cuales los agujeros negros altamente rotantes son relevantes (ver la discusión en la sección 1.2 y los artículos [55], [97]). Una ventaja de estos datos iniciales es que, debido a ser conformemente planos, su implementación resulta más simple que otros datos para agujeros negros rotantes, como el dato para el agujero de Kerr. Además los momentos angulares y spins de agujeros negros múltiples se pueden especificar fácilmente, ya que las propiedades globales de estos datos son parámetros libres. Sin embargo, un problema que surge en las simulaciones numéricas es que aparece radiación gravitacional espuria (ver [74] y sus referencias por más detalles). El salto inicial de radiación espuria se debe en parte a la forma de la curvatura extrínseca y crece con el momento angular asignado a cada agujero negro. Además para sistemas binarios de masas desiguales la radiación espuria imparte un impulso inicial a los agujeros negros.

## 3.2. Resultado principal

En esta sección describimos los datos libres de Bowen-York (para más detalle, ver el trabajo original [20]), planteamos formalmente el problema del límite extremo, mencionado en la introducción 3.1, presentamos el resultado principal del capítulo y discutimos sus hipótesis e implicancias.

Los datos iniciales de Bowen-York son datos conformemente planos de la forma

$$(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \Phi^4 \delta_{ab}, \Phi^{-2} K_{ab}) \quad (3.1)$$

donde  $\delta$  es la 3-métrica Euclídea (la métrica libre),  $\Phi$  un factor conforme positivo y los tensores  $K_{ab}$  libres propuestos, soluciones de las ecuaciones

$$\nabla^a K_{ab} = 0, \quad \delta^{ab} K_{ab} = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \quad (3.2)$$

están dados por

$$K_{ab}^\pm = \frac{3}{2r^2} (P_a n_b + P_b n_a - (\delta_{ab} - n_a n_b) P^c n_c) \mp \quad (3.3)$$

$$\mp \frac{3\mu^2}{2r^4} (P_a n_b + P_b n_a + (\delta_{ab} - 5n_a n_b) P^c n_c) \quad (3.4)$$

y

$$K_{ab} = \frac{3}{r^3} (\epsilon_{cad} J^d n^c n_b + \epsilon_{cbd} J^d n^c n_a) \quad (3.5)$$

donde  $P^a$  y  $J^a$  son vectores constantes que representan el momento lineal y el momento angular del dato respectivamente,  $n_a$  es la normal unitaria a una esfera  $r = \text{constante}$  en el espacio plano,  $\epsilon_{abc}$  es el elemento de volumen con respecto a la métrica plana y  $\mu$  es un parámetro positivo.

Estos tensores transforman, ante inversión por una esfera de radio  $\mu/2$  de manera tal que el dato inicial es invariante. Además (3.3) corresponde a una fuente con momento lineal  $P$  sin momento angular intrínseco, mientras que (3.5) corresponde a una fuente con momento angular intrínseco  $J$ , sin momento lineal. Notemos que el tensor (3.5) no depende del parámetro  $\mu$ . Una vez determinada la solución  $K_{ab}$  del vínculo de momento, sólo resta resolver la ecuación de Lichnerowicz para el factor conforme,

$$\Delta\Phi = -\frac{K^2}{8\Phi^7} \quad \text{en } \mathcal{S} \quad (3.6)$$

con condiciones de borde apropiadas.

El problema de valores de contorno para el factor conforme  $\Phi$ , junto con las propiedades ante inversión que satisface el tensor de curvatura extrínseca libre aseguran que la superficie de datos iniciales contenga dos regiones asintóticamente planas que son isométricas y que están conectadas por un puente de tipo Einstein-Rosen que contiene una 2-superficie cerrada de área minimal. Esta superficie o garganta, aunque no es esféricamente simétrica, está, sin embargo, fija ante la inversión que define la isometría de las dos regiones asintóticamente planas. Estas propiedades nos llevan a interpretar el dato como que representa una tajada a través del espaciotiempo de un agujero negro. Como la curvatura extrínseca física  $\tilde{K}_{ab}$  es diferente de cero, el horizonte aparente en general no coincidirá con la superficie minimal. Sin embargo, para el caso en que el momento lineal es cero,  $P = 0$ , ambas superficies coinciden.

Recordemos que la existencia de un horizonte aparente significa, suponiendo válida la hipótesis del censor cósmico, que la evolución del dato contendrá un horizonte de eventos. La intersección del horizonte con la superficie inicial será una 2-superficie cerrada que necesariamente yace afuera de, o coincide con, el horizonte aparente.

En este capítulo nos restringiremos al caso de un único agujero negro rotante de Bowen York, sin momento lineal, con condiciones de borde tipo ‘puncture’. Es decir que el tensor libre de curvatura extrínseca está dado por

(3.5) y el factor conforme  $\Phi$  satisface la ecuación elíptica no lineal (3.6) en  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , que toma la siguiente forma

$$\Delta\Phi = F(x, \Phi), \quad \text{en } \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \quad (3.7)$$

donde

$$F(x, \Phi) = -\frac{9J^2 \sin^2 \theta}{4r^6 \Phi^7}, \quad (3.8)$$

y  $J^2 = J^a J^b \delta_{ab}$ ,  $\Delta$  es el laplaciano plano en tres dimensiones y  $x$  denota coordenadas esféricas  $(r, \theta)$ .

Para prescribir las condiciones de borde tipo 'puncture', para agujeros negros asintóticamente planos, utilizamos un procedimiento similar al que realizamos en la sección 2.4, para analizar los datos de Schwarzschild, Reissner-Nördstrom y Kerr. Introducimos un parámetro  $\mu > 0$  y definimos la función  $u_\mu$  en  $\mathbb{R}^3$  a través de la expresión

$$\Phi \equiv \Phi_\mu := 1 + \frac{\mu}{2r} + u_\mu. \quad (3.9)$$

Insertando esta definición en la ecuación (3.7) obtenemos la siguiente ecuación para  $u_\mu$

$$\Delta u_\mu = F(x, \Phi_\mu), \quad (3.10)$$

donde, en términos de  $u_\mu$ , la función  $F$  toma la forma

$$F(x, \Phi_\mu) = -\frac{9J^2 \sin^2 \theta}{4r^6 (1 + \frac{\mu}{2r} + u_\mu)^7}. \quad (3.11)$$

Luego, la ecuación (3.10) se resuelve en  $\mathbb{R}^3$  sujeta al comportamiento asintótico

$$u_\mu \rightarrow 0 \quad \text{cuando } r \rightarrow \infty. \quad (3.12)$$

Para todo  $\mu > 0$  existe una única solución de (3.10) que satisface (3.12) (pero que no se conoce explícitamente). Una prueba de esto está dada en [22] basada en [27]. También es posible probar este resultado usando una versión apropiada adaptada del teorema de sub y supersoluciones presentado en [36] o usando una compactificación de  $\mathbb{R}^3$  como en los teoremas de existencia en [15] [49].

Notemos que la ecuación (3.10) depende, en principio de dos parámetros,  $J$  y  $\mu$ . Sin embargo, existe una invariancia de escala para esta ecuación ([55]). Esto es, si tenemos una solución  $u(\mu, J, x)$  para parámetros  $\mu$  y  $J$ , entonces la función evaluada en los parámetros rescaleados  $u(\lambda\mu, \lambda^2 J, \lambda x)$ , donde  $\lambda$  es un número positivo arbitrario, también es solución. Esto significa que la

solución depende no trivialmente sólo de un parámetro. Elegimos fijar  $J$  y variar  $\mu$ .

En el resto del capítulo, denotaremos por  $u_\mu$  a la única solución, acotada en el origen, de (3.10), con condición de contorno (3.12) para cualquier  $\mu > 0$  dado. Tenemos que  $u_\mu \geq 0$  y  $u_\mu \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ , donde  $C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^3)$  denota a los espacios de Hölder (ver el apéndice A por la definición de estos espacios funcionales).

Como dijimos en la introducción, estamos interesados en estudiar el límite de la secuencia de soluciones cuando el parámetro  $\mu$  va a cero,

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} u_\mu := u_0. \quad (3.13)$$

Veremos que este límite existe y satisface la ecuación

$$\Delta u_0 = -\frac{9J^2 \sin^2 \theta}{4r^6(1+u_0)^7}, \quad (3.14)$$

que se puede obtener poniendo  $\mu = 0$  en la ecuación (3.10).

Remarcamos que cuando  $\mu > 0$ , el lado derecho de (3.10) es acotado en  $\mathbb{R}^3$  (esto, por supuesto, está relacionado con el hecho de que la solución  $u_\mu$  es dos veces diferenciable en el origen para  $\mu > 0$ ). Mientras que en el caso extremo,  $\mu = 0$ , el lado derecho de (3.14) se vuelve singular en el origen, y por lo tanto no podemos esperar que la solución  $u_0$  sea  $C^2$  en  $r = 0$ .

El siguiente teorema constituye el resultado principal del presente capítulo. Para formular el teorema usaremos espacios de Sobolev pesados, denotados por  $H^{r,2,\delta}$ , definidos en [13] (ver la ecuación (A.16) en el apéndice A).

**Teorema 3.2.1.** *(i) Existe una solución  $u_0$  de la ecuación (3.14) en  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  tal que  $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$  y  $u_0$  satisface las siguientes cotas*

$$u_0^- \leq u_0 \leq u_0^+, \quad (3.15)$$

donde las funciones  $u_0^+$  y  $u_0^-$  están dadas por

$$u_0^+ = \sqrt{1 + \frac{|q|}{r}} - 1, \quad |q| = \sqrt{3|J|}, \quad (3.16)$$

y

$$u_0^- = Y_{00}(\theta)\chi_1(r) - \frac{Y_{20}(\theta)}{5^{3/2}}\chi_2(r). \quad (3.17)$$

Aquí  $Y_{00}$  y  $Y_{20}$  son los armónicos esféricos (ver la ecuación (3.56)) y las funciones elementales radiales  $\chi_1(r)$  y  $\chi_2(r)$  están dadas explícitamente en la sección 3.4 (ecuaciones (3.64) y (3.65)).

(ii) Además tenemos que  $u_0 \in H^{r2,\delta}$  para  $-1 < \delta < -1/2$  y  $u_0$  es el límite de la secuencia

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} u_\mu = u_0, \quad (3.18)$$

en la norma  $H^{r2,\delta}$ .

Las cotas (3.15) obtenidas en la parte (i) del teorema 3.2.1 implican

$$u_0 = O(r^{-1}) \quad \text{para } r \rightarrow \infty, \quad (3.19)$$

$$u_0 = O(r^{-1/2}) \quad \text{para } r \rightarrow 0. \quad (3.20)$$

Estas cotas muestran que la solución límite  $u_0$  se comporta de manera diferente en el origen, de los elementos de la secuencia  $u_\mu$ . Este comportamiento confirma los cálculos numéricos presentados en [55] y [97], y está relacionado con el cambio de uno de los infinitos desde asintóticamente plano a cilíndrico en el límite extremo. Para ver esto, calculamos el área de las 2-superficies  $r = \text{constante}$  con respecto a la métrica física  $\Phi_\mu^4 \delta_{ab}$ . El área está dada por

$$A_\mu(r) = 2\pi r^2 \int_0^\pi \Phi_\mu^4 \sin \theta d\theta, \quad (3.21)$$

donde  $A_\mu(r)$  denota el área de la superficie de radio constante igual a  $r$ , calculada para el dato con parámetro  $\mu$ .

Como mencionamos antes, para  $\mu > 0$  la superficie  $r = \mu/2$  es una superficie de área mínima. También, para  $\mu > 0$  tenemos

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A_\mu(r) = \lim_{r \rightarrow 0} A_\mu(r) = \infty, \quad (3.22)$$

lo que refleja el hecho de que el dato tiene dos infinitos asintóticamente planos. Más aún, estas regiones asintóticas son isométricas y están conectadas por la superficie minimal en  $r = \mu/2$ . La situación cambia en el límite extremo. Usando las cotas (3.15) podemos obtener las siguientes cotas para el área en este límite

$$0 < 2,37\pi|J| \leq A_0(0) \leq 12\pi|J|. \quad (3.23)$$

Vemos que el punto  $r = 0$  tiene área finita no cero. Esto muestra que  $r = 0$  no es un infinito asintóticamente plano. Es un infinito cilíndrico similar al que está presente en Kerr y Reissner Nördstrom extremos. Por otro lado, el comportamiento a medida que  $r \rightarrow \infty$  es idéntico tanto en el caso extremo como en el no extremo. Es decir, este infinito siempre es asintóticamente plano.

Notemos que en la parte (i) del teorema 3.2.1 no se dice nada acerca del comportamiento de las derivadas de  $u_0$  cerca del origen, ni del decaimiento

cerca del infinito. El comportamiento de las derivadas de  $u_0$  en estas regiones se analiza en la parte (ii) con los espacios de Sobolev pesados. En particular, estos espacios proveen una norma para la convergencia de la secuencia y sus derivadas en  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ .

Queremos mencionar dos puntos importantes que serán analizados en el próximo capítulo. El primero es la unicidad de la solución  $u_0$ . Veremos que este dato  $u_0$ , entre una familia más general de soluciones extremas, es única en el espacio  $H^{2,\delta}$ .

El segundo punto está relacionado con el comportamiento de la masa total en la secuencia  $u_\mu$ . La masa total  $m$  del dato con valor de parámetro  $\mu$  es dada por

$$m = \mu + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{9J^2 \sin^2 \theta}{4r^6 (1 + \frac{\mu}{2r} + u_\mu)^7} dx, \quad (3.24)$$

donde  $dx$  es el elemento de volumen Euclídeo en  $\mathbb{R}^3$ . Notemos que la masa no se puede calcular explícitamente a priori como función de  $\mu$  y  $J$  puesto que involucra a la solución  $u_\mu$ . Los cálculos numéricos muestran que la masa decrece a medida que  $\mu \rightarrow 0$  (ver [55] [48]). Esta es la razón principal por la cual llamamos a esta solución, el dato de Bowen York extremo (ya que si  $J$  está fijo, a menor masa, mayor cantidad de momento angular por unidad de masa tiene el dato). Más adelante probaremos esto analíticamente.

Finalmente, antes de pasar a la prueba del teorema 3.2.1, queda abierto el tema relacionado con la existencia de superficies minimales y horizontes en el límite  $\mu \rightarrow 0$ . Creemos que la solución extrema no tiene superficie minimal ni horizonte aparente (en analogía con el dato extremo de Kerr-Newman). Esto también se indica en los cálculos numéricos, pero no ha sido aún formalmente demostrado.

La prueba del teorema 3.2.1 se divide naturalmente en tres partes presentadas en las secciones 3.3, 3.4 y 3.5. El plan de la prueba se presenta a continuación.

*Demostración.* Primero mostramos que la secuencia  $u_\mu$  es punto a punto monótonamente creciente a medida que  $\mu$  decrece. Esto se prueba en el lema 3.3.1. Luego mostramos que existe una función  $u_0^+$ , independiente de  $\mu$ , que es una cota superior para esta secuencia para todo  $\mu$ . Esto se demuestra en el lema 3.4.1 y constituye la parte más importante de la prueba. A partir de esta cota superior construimos una cota inferior  $u_0^-$  en el lema 3.4.2. Combinando estos lemas y usando estimaciones elípticas standard para el operador de Laplace en conjuntos abiertos que no contienen el origen, probamos que el límite (3.18) existe y  $u_0$  es suave afuera del origen. Ver lema 3.5.1. Esto prueba la parte (i) del teorema. Finalmente la parte (ii) es probada en el lema 3.5.2.  $\square$

### 3.3. Monotonía

La función  $F(x, \Phi)$  definida por (3.8) es no decreciente en  $\Phi$ . Este hecho, junto con el principio de máximo para el operador de Laplace, nos permitirá probar la monotonía de la secuencia  $u_\mu$  con respecto al parámetro  $\mu$ .

La propiedad de  $F$  de ser no decreciente, se escribe convenientemente de la siguiente manera. Sean  $\Phi_1, \Phi_2$  funciones positivas tales que  $\Phi_1 \geq \Phi_2$ , entonces tenemos

$$F(x, \Phi_1) - F(x, \Phi_2) = (\Phi_1 - \Phi_2)H(\Phi_2, \Phi_1) \geq 0, \quad (3.25)$$

donde hemos definido la función no negativa  $H(\Phi_2, \Phi_1) = H(\Phi_1, \Phi_2)$  como

$$H(\Phi_2, \Phi_1) = \frac{9J^2 \sin^2 \theta}{4r^6} \sum_{i=0}^6 \Phi_1^{i-7} \Phi_2^{-1-i} \geq 0, \quad (3.26)$$

y hemos usado la siguiente identidad elemental para números reales  $a$  y  $b$

$$\frac{1}{a^p} - \frac{1}{b^p} = (b - a) \sum_{i=0}^{p-1} a^{i-p} b^{-1-i}. \quad (3.27)$$

En nuestro caso las funciones  $\Phi$  están dadas por (3.9) con  $\mu \geq 0$ , y como  $u_\mu \geq 0$  para  $\mu > 0$ , de (3.9) obtenemos una cota superior para  $H$

$$|H(\Phi_{\mu_2}, \Phi_{\mu_1})| \leq \frac{9J^2 r^2 \sin^2 \theta}{4} \sum_{i=0}^6 \left(r + \frac{\mu_1}{2}\right)^{i-7} \left(r + \frac{\mu_2}{2}\right)^{-1-i}, \quad (3.28)$$

lo que muestra que  $H$  es acotada en  $\mathbb{R}^3$  si  $\mu_1, \mu_2 > 0$ . Tomando  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ , en el lado derecho de (3.28) encontramos la siguiente cota que es independiente de  $\mu$

$$|H(\Phi_{\mu_2}, \Phi_{\mu_1})| \leq \frac{63J^2 \sin^2 \theta}{4r^6} \quad (3.29)$$

pero que diverge en el origen.

El resultado principal de esta sección se resume en el siguiente lema

**Lema 3.3.1.** *Suponga  $\mu_1 \geq \mu_2 > 0$  entonces tenemos  $u_{\mu_1}(x) \leq u_{\mu_2}(x)$  en  $\mathbb{R}^3$ .*

*Demostración.* Definimos  $w$  por

$$w(x) = u_{\mu_2}(x) - u_{\mu_1}(x). \quad (3.30)$$

Usando la ecuación (3.10), obtenemos que  $w$  satisface

$$\Delta w = F(x, \Phi_{\mu_2}) - F(x, \Phi_{\mu_1}). \quad (3.31)$$

Usamos (3.25) para escribir esta ecuación del modo siguiente

$$\Delta w - wH(\Phi_{\mu_2}, \Phi_{\mu_1}) = \frac{\mu_2 - \mu_1}{2r} H(\Phi_{\mu_2}, \Phi_{\mu_1}), \quad (3.32)$$

donde  $H$  está dado por (3.26). Teniendo en cuenta que  $H \geq 0$  y que por hipótesis tenemos  $\mu_2 - \mu_1 \leq 0$ , entonces el lado derecho de (3.32) es negativo. También tenemos que  $w \rightarrow 0$  a medida que  $r \rightarrow \infty$  (debido a (3.12)). Luego, podemos aplicar el Principio de Máximo para el operador de Laplace para concluir que  $w \geq 0$  en  $\mathbb{R}^3$ . Usamos una versión del principio de Máximo para dominios no acotados dada en [36]. Enfatizamos que esta versión clásica del principio de máximo se puede aplicar en el presente caso porque  $w$  es  $C^{2,\alpha}$  y  $H$  es acotado en  $\mathbb{R}^3$  cuando  $\mu_1, \mu_2 > 0$ .  $\square$

Notablemente, la secuencia  $\Phi_\mu$  tiene el comportamiento opuesto al de la secuencia  $u_\mu$ , es decir  $\Phi_\mu$  es creciente con respecto a  $\mu$ . Esto se prueba en el siguiente lema.

**Lema 3.3.2.** *Suponga  $\mu_1 > \mu_2 > 0$  entonces tenemos  $\Phi_{\mu_1}(x) \geq \Phi_{\mu_2}(x)$  en  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ .*

*Demostración.* La prueba es similar a la del lema previo, sin embargo, como  $\Phi_\mu$  es singular en el origen, es necesario excluir este punto del dominio. Para manejar esto, sea  $\Omega$  definido como  $\mathbb{R}^3 \setminus B_\epsilon$  donde  $B_\epsilon$  es una pequeña bola de radio  $\epsilon$  centrada en el origen. Definimos ahora a  $w$  como la diferencia de funciones  $\Phi$

$$w = \Phi_{\mu_2} - \Phi_{\mu_1} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{2r} + u_{\mu_2} - u_{\mu_1}. \quad (3.33)$$

Luego, tenemos

$$\Delta w - wH(\Phi_{\mu_1}, \Phi_{\mu_2}) = 0, \quad (3.34)$$

donde  $H$  está dada por (3.26). Como  $u_\mu$  es acotada en  $\mathbb{R}^3$  para  $\mu > 0$ , el primer término del lado derecho de (3.33) dominará para  $r$  suficientemente pequeño. Luego, para  $\mu_1 > \mu_2 > 0$  existe  $\epsilon$  suficientemente pequeño tal que  $w$  es negativa sobre  $\partial B_\epsilon$ . Considere la ecuación (3.33) en  $\Omega$ . La función  $w$  es negativa sobre  $\partial B_\epsilon$  y tiende a cero en el infinito. Luego, podemos aplicar el principio de máximo en  $\Omega$  para obtener  $w \leq 0$  en  $\Omega$  (en este caso necesitamos modificar levemente la versión del principio de máximo dada en [36] para incluir la frontera interior  $\partial B_\epsilon$ , pero esta modificación es directa). Como  $\epsilon$  es arbitrario tenemos que  $\Phi_{\mu_1}(x) \geq \Phi_{\mu_2}(x)$  en  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  si  $\mu_1 > \mu_2 > 0$ , y el lema queda probado.  $\square$

### 3.4. Cotas

En esta sección damos cotas para la secuencia  $u_\mu$ . El resultado principal de esta sección está dado por el teorema 3.4.1 donde construimos una cota superior  $u_0^+$ , basada en el dato inicial para el agujero negro de Reissner Nördstrom (ver sección 2.4.2 para una descripción del dato de Reissner Nördstrom), que no depende de  $\mu$ . La cota inferior se construye luego directamente usando esta cota superior en el lema 3.4.2. La forma asintótica de estas cotas determina el comportamiento de la solución de Bowen-York extremo.

**Teorema 3.4.1.** *Sea  $q$  una constante tal que*

$$|q| \geq \sqrt{3|J|}, \quad (3.35)$$

donde  $J$  es el momento angular del dato de Bowen-York  $u_\mu$ . Luego para todo  $\mu > 0$  tenemos

$$u_\mu(x) \leq u_\mu^+(x) < u_0^+(x), \quad (3.36)$$

donde  $u_\mu^+$  y  $u_0^+$  son las soluciones no extrema y extrema de Reissner Nördstrom respectivamente

$$u_\mu^+ = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{q^2 + \mu^2}}{r} + \frac{\mu^2}{4r^2}} - 1 - \frac{\mu}{2r} \quad (3.37)$$

y

$$u_0^+ = \sqrt{1 + \frac{q}{r}} - 1. \quad (3.38)$$

*Demostración.* A partir de la ecuación de Lichnerowicz para el dato de Reissner Nördstrom (ver 2.45)

$$\Delta u_\mu^+ = -\frac{q^2}{4r^4 \left(1 + \frac{\mu}{2r} + u_\mu^+\right)^3} \quad (3.39)$$

y suponiendo que la condición (3.35) vale, obtenemos

$$\Delta u_\mu^+ \leq -\frac{9J^2 \sin^2 \theta}{q^2 4r^4 (\Phi_\mu^+)^3}, \quad (3.40)$$

con  $\Phi_\mu^+ = 1 + \frac{\mu}{2r} + u_\mu^+$ .

Luego, como  $m \geq |q|$  tenemos

$$(\Phi_\mu^+)^4 \geq \left(1 + \frac{|q|}{r}\right)^2 \geq \frac{q^2}{r^2}, \quad (3.41)$$

lo que nos da

$$\Delta u_\mu^+ \leq -\frac{9J^2 \sin^2 \theta}{4r^6 (\Phi_\mu^+)^7} = F(x, \Phi_\mu^+). \quad (3.42)$$

Ahora, definimos la diferencia

$$w = u_\mu^+ - u_\mu. \quad (3.43)$$

Usando la ecuación (3.14) y (3.42) obtenemos

$$\Delta w \leq F(x, \Phi_\mu^+) - F(x, \Phi_\mu). \quad (3.44)$$

Usamos la fórmula (3.25) para concluir que

$$\Delta w - wH(\Phi_\mu^+, \Phi_\mu) \leq 0. \quad (3.45)$$

Notemos que la función  $w$  no es  $C^2$  en el origen porque  $u_\mu^+$  no es  $C^2$  allí. Sin embargo, la función  $w$  es una solución débil de (3.45) también en el origen, y podemos aplicar una versión débil del principio de máximo para dominios no acotados, ver, por ejemplo, [101]. En esta referencia, se prueba el principio de máximo para soluciones  $H^2$ . Esta función  $w$  satisface dicha propiedad y como  $w$  va a cero a medida que  $r \rightarrow \infty$ , concluimos que  $w \geq 0$ .  $\square$

Como  $F$  es no decreciente, una vez que encontramos una cota superior para la secuencia, la construcción de la cota inferior es directa. Es decir, definimos  $u_\mu^-(x)$  como la solución de la siguiente ecuación lineal de Poisson

$$\Delta u_\mu^- = F(x, \Phi_\mu^+) = -\frac{9J^2 \sin^2 \theta}{4r^6 \left(1 + \frac{m}{r} + \frac{\mu^2}{4r^2}\right)^{7/2}}, \quad (3.46)$$

con la condición de decaimiento

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u_\mu^- = 0, \quad (3.47)$$

y probamos el siguiente lema.

**Lema 3.4.2.** *Sea  $u_\mu^-$  la solución de (3.46) con la condición asintótica (3.47). Tenemos que para todo  $\mu > 0$*

$$u_\mu^-(x) \leq u_\mu(x), \quad (3.48)$$

y

$$\frac{\mu}{2r} + u_\mu^-(x) \geq u_0^-(x). \quad (3.49)$$

La función  $u_0^-$  se puede escribir en la forma (3.17) y su comportamiento asintótico está dado por

$$u_0^-(x) = \frac{C_1}{r} + O(r^{-2}), \quad \text{cuando } r \rightarrow \infty, \quad (3.50)$$

$$u_0^-(x) = \frac{C_2}{\sqrt{r}} + O(1), \quad \text{cuando } r \rightarrow 0. \quad (3.51)$$

donde  $C_1, C_2$  son constantes positivas.

*Demostración.* En primer lugar, usando la función de Green para el operador de Laplace, construimos explícitamente la solución de la ecuación

$$\Delta u_\mu^-(x) = F, \quad (3.52)$$

donde  $F$  está dada por

$$F = \sin^2 \theta R(\mu, r), \quad (3.53)$$

y

$$R(\mu, r) = -\frac{18J^2}{8r^6 \left(1 + \frac{m}{r} + \frac{\mu^2}{4r^2}\right)^{7/2}}. \quad (3.54)$$

La solución se construye integrando la función de Green, es decir

$$u_\mu^-(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{F(x')}{|x - x'|} dx'. \quad (3.55)$$

Luego expandimos la función de Green y  $F$  en términos de los armónicos esféricos (ver, por ejemplo, [89]). La dependencia angular de la fuente  $F$  está dada por  $\sin^2 \theta$ , que tiene una expansión en términos de los siguientes armónicos esféricos

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3 \cos^2 \theta - 1), \quad (3.56)$$

esto es

$$\sin^2 \theta = \frac{2}{3} \sqrt{4\pi} \left( Y_{00} - \frac{Y_{20}}{\sqrt{5}} \right). \quad (3.57)$$

Luego, se sigue que la dependencia angular de la solución también se puede expandir en términos de estos dos armónicos. Es decir,  $u_\mu^-$  tiene la forma (3.17) donde las funciones radiales  $\chi_1(r)$  y  $\chi_2(r)$  están dadas por las siguientes integrales

$$\chi_1 = \int_0^r R(r', \mu) \frac{1}{r} r'^2 dr' + \int_r^\infty R(r', \mu) \frac{1}{r'} r'^2 dr', \quad (3.58)$$

$$\chi_2 = \int_0^r R(r', \mu) \frac{r'^2}{r^3} dr' + \int_r^\infty R(r', \mu) \frac{r'^2}{r'^3} dr'. \quad (3.59)$$

Calculando estas integrales, encontramos

$$\begin{aligned} \chi_1 = & \frac{2\sqrt{\pi}J^2}{5rq^6} \left( -8(4\mu^2 + 3q^2)(2r + \mu) + \right. \\ & + \frac{(4\mu^2 + 3q^2)(16r^4 + \mu^4) + 4mr(5q^2 + 8\mu^2)(4r^2 + \mu^2) +}{(r^2 + mr + \frac{\mu^2}{4})^{3/2}} \\ & \left. + \frac{6r^2(5q^4 + 16\mu^4 + 20q^2\mu^2)}{(r^2 + mr + \frac{\mu^2}{4})^{3/2}} \right), \quad (3.60) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \chi_2 = & \frac{2\sqrt{\pi}J^2}{5r^3q^6} \left( -8(2r + \mu)(16r^4 - 8r^3\mu + 4r^2\mu^2 - 2r\mu^3 + \mu^4) + \right. \\ & + \frac{256r^8 + \mu^8 + 6rm(64r^6 + \mu^6) + 96r^6(q^2 + 2\mu^2)}{(r^2 + mr + \frac{\mu^2}{4})^{3/2}} + \\ & \left. + \frac{4r^3m(2\mu^2 - q^2)(4r^2 + \mu^2) + 6r^2(2\mu^6 + \mu^4q^2 + r^2q^4)}{(r^2 + mr + \frac{\mu^2}{4})^{3/2}} \right). \quad (3.61) \end{aligned}$$

A partir de las estimaciones elípticas estandar, o directamente de la expresión explícita, deducimos que  $u_\mu^- \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^3)$  para  $\mu > 0$ . Su comportamiento asintótico está dado por

$$u_\mu^- = \frac{64J^2}{5r(2m + \mu)^3} + O(r^{-2}) \quad r \rightarrow \infty, \quad (3.62)$$

y

$$u_\mu^-(r = 0) = \frac{4J^2(2m - \mu)^3}{5\mu q^6}. \quad (3.63)$$

Cuando  $\mu = 0$  las funciones radiales (3.60)–(3.61) se reducen a

$$\chi_1|_{\mu=0} = \frac{4J^2\sqrt{\pi}}{5q^4\sqrt{r}} \left( \frac{24r^2 + 40qr + 15q^2}{(r + q)^{3/2}} - 24\sqrt{r} \right), \quad (3.64)$$

$$\chi_2|_{\mu=0} = \frac{4J^2\sqrt{\pi}}{5q^6\sqrt{r}} \left( \frac{128r^4 + 192r^3q + 48r^2q^2 - 8q^3r + 3q^4}{(r + q)^{3/2}} - 128r^{5/2} \right). \quad (3.65)$$

En este caso, los comportamientos asintóticos están dados por

$$u_0^- = \frac{8J^2}{5rq^3} + O(r^{-2}) \quad r \rightarrow \infty, \quad (3.66)$$

y

$$u_0^- = \frac{9J^2(17 - \cos^2 \theta)}{25q^{7/2}\sqrt{r}} + O(1) \quad r \rightarrow 0, \quad (3.67)$$

lo que prueba las expresiones (3.50)-(3.51).

Es interesante mencionar que es posible construir una cota inferior positiva para  $u_\mu^-$  (y por lo tanto, para  $u_\mu$ ) que es esféricamente simétrica y tiene el comportamiento correcto en el origen y en infinito. De (3.17) deducimos que

$$u_\mu^- \geq Y_{00} \left( \chi_1 - \frac{1}{5}\chi_2 \right) \geq 0. \quad (3.68)$$

Probemos ahora la desigualdad (3.48). Como de costumbre, tomamos la diferencia  $w = u_\mu - u_\mu^-$ , luego, usando la ecuación (3.46) tenemos

$$\Delta w = F(x, \Phi_\mu) - F(x, \Phi_\mu^+) = (u_\mu - u_\mu^+)H(\Phi_\mu, \Phi_\mu^+). \quad (3.69)$$

Como  $u_\mu - u_\mu^+ \leq 0$  por el lema 3.4.1 obtenemos  $\Delta w \leq 0$  y luego, por el principio de máximo, encontramos  $w \geq 0$ .

Para probar la desigualdad (3.49) usamos un argumento similar al de la prueba del lema 3.3.2. Notemos que podemos, en principio, deducir (3.49) a partir de la expresión explícita para  $u_\mu^-$ , sin embargo, esta fórmula es tan complicada que no resulta conveniente. □

Notemos que la secuencia  $u_\mu^-$  es monótona en  $\mu$ , como la secuencia de Bowen York. Esto es, para  $\mu_1 \geq \mu_2 \geq 0$ , obtenemos

$$u_{\mu_1}^-(x) \leq u_{\mu_2}^-(x) \leq u_0^-(x), \quad (3.70)$$

y también para  $\mu_1 > \mu_2 > 0$  tenemos

$$\Phi_{\mu_1}^-(x) \geq \Phi_{\mu_2}^-(x) \geq \Phi_0^-(x) \quad (3.71)$$

donde  $\Phi^-$  se define como

$$\Phi_\mu^- = 1 + \frac{\mu}{2r} + u_\mu^-. \quad (3.72)$$

Este resultado indica que la monotonía de las soluciones es una propiedad muy particular de la forma en que la ecuación depende del parámetro  $\mu$ . En el próximo capítulo veremos de hecho que esta característica (y otras) se puede generalizar considerablemente.

### 3.5. Convergencia

En esta sección probamos que la secuencia  $u_\mu$  converge en el límite  $\mu \rightarrow 0$ . Comenzamos con la convergencia interior, en conjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , ya que los teoremas empleados son más familiares, y luego, extendemos la prueba a todo  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ . Para la prueba interior utilizaremos los espacios de Lebesgue  $L^2$  y de Sobolev  $H^2$  estandard (ver el apéndice A), para la prueba en  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  se necesitan espacios de Sobolev y Lebesgue con pesos en infinito y en el origen.

**Lema 3.5.1.** *Sea  $U$  una bola abierta arbitraria contenida en  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  tal que la clausura de  $U$  no contiene el origen. Luego la secuencia  $u_\mu$  converge en la norma  $H^2(U)$ . Más aún, la función límite*

$$u_0 = \lim_{\mu \rightarrow 0} u_\mu, \quad (3.73)$$

es una solución de la ecuación (3.14) en  $U$  y  $u_0 \in C^\infty(U)$ .

*Demostración.* Dada la bola abierta  $U$ , siempre existe una bola abierta  $U'$  contenida en  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  tal que  $U \subset\subset U'$ . El conjunto  $U'$  es importante en lo que sigue, para poder usar estimaciones elípticas interiores estandard.

Elegimos  $x \in U'$  y consideramos la secuencia de números reales  $u_\mu(x)$  para  $\mu \rightarrow 0$ . Por el lema 3.3.1 la secuencia  $u_\mu$  es no decreciente a medida que  $\mu$  va a cero, y por el lema 3.4.1 está acotada por arriba (y la cota no depende de  $\mu$ ) por  $u_\mu(x) \leq u_0^+(x)$ . Notemos que es importante que la clausura de  $U'$  no contenga al origen  $\{0\}$ , ya que  $u_0^+$  no es acotada allí. Se sigue que la secuencia converge punto a punto a un límite  $u_0(x)$ . Para probar la convergencia en la norma  $L^2$ , usamos el teorema de convergencia dominada de Lebesgue (ver el apéndice B). En particular, esto implica que la secuencia converge en  $L^2(U')$ , i.e. la secuencia  $u_\mu$  es Cauchy en  $L^2(U')$

$$\lim_{\mu_1, \mu_2 \rightarrow 0} \|w\|_{L^2(U)} = 0, \quad (3.74)$$

donde  $w = u_{\mu_2} - u_{\mu_1}$ .

Para probar que la secuencia  $u_\mu$  es una secuencia de Cauchy en  $H^2(U)$  usamos la estimación elíptica estandard para el operador de Laplace (ver e.g. [69])

$$\|w\|_{H^2(V)} \leq C (\|\Delta w\|_{L^2(U)} + \|w\|_{L^2(U)}) \quad (3.75)$$

donde la constante  $C$  depende sólo de  $U$  y  $U'$ .

La diferencia  $w$  satisface la ecuación (3.32), luego obtenemos

$$\|\Delta w\|_{L^2(U)} = \left\| Hw + H \frac{\mu_2 - \mu_1}{r} \right\|_{L^2(U)}, \quad (3.76)$$

$$\leq \|Hw\|_{L^2(U)} + (\mu_1 - \mu_2) \left\| \frac{H}{r} \right\|_{L^2(U)}. \quad (3.77)$$

Las funciones  $H$  y  $H/r$  están acotadas en  $U'$  (ver la ecuación (3.29)) por una constante independiente de  $\mu$ . luego, a partir de la desigualdad (3.76) obtenemos

$$\|\Delta w\|_{L^2(U')} \leq C (\|w\|_{L^2(U')} + (\mu_1 - \mu_2)), \quad (3.78)$$

donde  $C$  no depende de  $\mu$ . Usando la estimación (3.75) obtenemos finalmente

$$\|w\|_{H^2(U)} \leq C (\|w\|_{L^2(U')} + (\mu_1 - \mu_2)). \quad (3.79)$$

A partir de esta desigualdad y la convergencia en  $L^2$  dada por (3.74) concluimos que

$$\lim_{\mu_1, \mu_2 \rightarrow 0} \|w\|_{H^2(U)} = 0. \quad (3.80)$$

y por lo tanto  $u_0 = \Phi_0 - 1 \in H^2(U)$ . Por el mismo argumento también tenemos que  $u_0$  es una solución fuerte (ver [69] para la definición de soluciones fuertes de ecuaciones elípticas) de la ecuación (3.14) en  $U$ .

Usando las estimaciones elípticas estandard una vez más e iterando usando la ecuación (3.14) tenemos que  $u_0 \in C^\infty(U)$ . Esta iteración se puede realizar del siguiente modo. Por el teorema del *embeddig* de Sobolev, tenemos que  $u_0 \in C^\alpha(U)$ . Luego, se sigue que  $F(x, \Phi_0) \in C^\alpha(U)$ . Pero por las estimaciones de Hölder para el operador de Laplace (ver [69]) se deduce que  $u_0 \in C^{2,\alpha}(U')$ . Podemos iterar este argumento para obtener que  $u_0$  es suave en  $U$ .  $\square$

En el teorema previo no hemos analizado el decaimiento de la solución  $u_0$  en el infinito ni su comportamiento en el origen. Para hacer esto se requieren estimaciones más precisas. En particular, debido a la singularidad de la solución en el origen, necesitamos utilizar normas de Sobolev pesadas no sólo en el infinito, sino también en  $r = 0$ . Utilizaremos los espacios de Sobolev pesados definidos en [13] y denotados aquí por  $H^{k,\delta}$  (las definiciones de las correspondientes normas se presentan en el apéndice A). Estos espacios están definidos para variedades asintóticamente planas con el origen removido y son especialmente apropiados para nuestros cálculos porque la cota superior uniforme de la secuencia  $u_\mu$  pertenece a uno de ellos. Concretamente, tenemos

$$u_\mu^+(x) \in H^{2,\delta} \quad \text{para } -1 < \delta < -1/2, \quad (3.81)$$

y para todo  $\mu \geq 0$ . Podemos entender el rango anterior para  $\delta$  notando que la solución extrema de Reissner Nördstrom va como  $r^{-1/2}$  a medida que  $r \rightarrow 0$ , y como  $r^{-1}$  a medida que  $r \rightarrow \infty$ . También se puede ver que, si consideramos sólo las soluciones con  $\mu > 0$ , entonces el intervalo permitido para  $\delta$  se expande a  $(-1, 0)$  reflejando el hecho de que en este caso, las funciones son acotadas en el origen (en la sección 5.4 del capítulo 5 profundizaremos este análisis de la relación entre los límites posibles al rango de  $\delta$  y el comportamiento de las funciones en el espacio correspondiente).

**Lema 3.5.2.** *La secuencia  $u_\mu$  es Cauchy en la norma  $H^{2,\delta}$  para  $-1 < \delta < -1/2$ .*

*Demostración.* La prueba es similar a la del lema previo, la principal diferencia es que tenemos que tener en cuenta el comportamiento singular de las funciones en el origen.

Primero notamos que el mismo argumento presentado antes nos permite probar convergencia en los espacios de Lebesgue pesados  $L^{2,\delta}$ . En efecto, consideremos la secuencia  $u_\mu r^{-\delta-3/2}$  para  $-1 < \delta < -1/2$ . Esta secuencia es acotada punto a punto por  $u_0^+ r^{-\delta-3/2}$  y monótonamente creciente a medida que el parámetro  $\mu$  va a cero, lo que significa que es a.e. convergente punto a punto a una función  $u_0 r^{-\delta-3/2}$ . Luego, podemos usar el teorema de convergencia dominada (ya que  $u_0^+ r^{-\delta-3/2}$  es sumable en  $\mathbb{R}^3$  para los valores dados del peso  $\delta$ ) para encontrar que la nueva secuencia converge en  $L^2(\mathbb{R}^3)$ . Pero esto implica que la secuencia original  $u_\mu$  converge en  $L^{2,\delta}$ , con  $\delta \in (-1, -1/2)$ . Es decir

$$\lim_{\mu_1, \mu_2 \rightarrow 0} \|w\|_{L^{2,\delta}} = 0, \quad (3.82)$$

donde  $w$  es la diferencia introducida arriba, en la ecuación (3.30).

Para probar que la secuencia  $u_\mu$  es una secuencia de Cauchy también en el espacio de Sobolev pesado  $H^{2,\delta}$  con  $\delta \in (-1, -1/2)$ , aplicaremos la siguiente estimación (ver, e.g. [13])

$$\|w\|_{H^{2,\delta}} \leq C \|\Delta w\|_{L^{2,\delta-2}}, \quad (3.83)$$

donde la constante  $C$  depende sólo de  $\delta$ .

Como antes, obtenemos

$$\|\Delta w\|_{L^{2,\delta-2}} = \left\| Hw + H \frac{\mu_2 - \mu_1}{r} \right\|_{L^{2,\delta-2}} \quad (3.84)$$

$$\leq \|Hw\|_{L^{2,\delta-2}} + (\mu_1 - \mu_2) \left\| \frac{H}{r} \right\|_{L^{2,\delta-2}}. \quad (3.85)$$

A partir de la definición de la norma  $L'^{2,\delta}$  dada en el apéndice A obtenemos

$$\|Hw\|_{L'^{2,\delta-2}} \leq \sup_{\mathbb{R}^3} |Hr^2| \|w\|_{L'^{2,\delta}}, \quad (3.86)$$

y entonces, usando (3.84) tenemos

$$\|\Delta w\|_{L'^{2,\delta-2}} \leq C \left( \sup_{\mathbb{R}^3} |Hr^2| \|w\|_{L'^{2,\delta}} + (\mu_1 - \mu_2) \left\| \frac{H}{r} \right\|_{L'^{2,\delta-2}} \right). \quad (3.87)$$

El paso crucial en la prueba es acotar, en (3.87), las normas correspondientes de  $H$  y  $H/r$ . En este punto es donde los espacios de Sobolev pesados juegan su papel, ya que las normas no son acotadas si no se considera el peso en el origen.

Para acotar  $Hr^2$  usamos

$$H \leq \frac{63J^2 \sin^2 \theta}{4r^6} 7 (1 + u_0^-)^{-8}, \quad (3.88)$$

hallada en (3.29).

Por el teorema 3.4.2 sabemos que  $u_0^-$  va a cero en el infinito con lo que  $H$  decae como  $r^{-6}$ . En el origen, por el lema 3.4.2, sabemos que  $u_0^- = \mathcal{O}(r^{-1/2})$ , entonces,  $H$  crece como  $r^{-2}$ . Luego,  $r^2H$  es finito para todo valor del parámetro  $\mu$ .

Para el otro término, tenemos

$$\left\| \frac{H}{r} \right\|_{L'^{2,\delta-2}} = \left( \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}} \left| \frac{H}{r} \right|^2 r^{-2\delta+1} dx \right)^{1/2} \quad (3.89)$$

y usando nuevamente la cota inferior como en (3.88) encontramos que esta norma también es finita para  $\delta \in (-1, -1/2)$ . Luego, podemos escribir

$$\|w\|_{H'^{2,\delta}} \leq C (\|w\|_{L'^{2,\delta}} + (\mu_1 - \mu_2)), \quad (3.90)$$

donde la constante  $C$  no depende de  $\mu$ . Esto y la ecuación (3.82) nos da, en el límite  $\mu_1, \mu_2 \rightarrow 0$

$$\lim_{\mu_1, \mu_2 \rightarrow 0} \|w\|_{H'^{2,\delta}} = 0. \quad (3.91)$$

Entonces, la secuencia  $u_\mu$  es Cauchy en la norma  $H'^{2,\delta}$ , con  $\delta \in (-1, -1/2)$ .  $\square$

Notemos que este teorema también implica que  $u_0$  es una solución fuerte en los espacios de Sobolev  $H'^{2,\delta}$  de la ecuación (3.14) también en el origen.

### 3.6. Principio de Máximo débil sobre dominios no acotados

En esta última sección probamos la versión del principio del máximo débil utilizada en la parte principal de este capítulo y el siguiente. Esta versión se aplica para dominios no acotados y soluciones débiles.

Sea  $B$  un dominio acotado en  $\mathbb{R}^n$  (en este trabajo siempre hemos trabajado en  $\mathbb{R}^3$ , sin embargo, la dimensión no juega ningún rol aquí). Consideremos el siguiente dominio no acotado  $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus B$ . Permitimos la posibilidad de que  $B$  sea vacío, en cuyo caso tenemos  $\Omega = \mathbb{R}^n$ .

**Teorema 3.6.1.** *Supongamos que  $u \in H_{loc}^1(\Omega)$  satisfice*

$$\Delta u - au \leq 0 \text{ in } \Omega, \quad (3.92)$$

donde  $a \geq 0$  es una función medible y acotada. También suponemos que

$$u \geq 0 \text{ in } \partial\Omega, \quad (3.93)$$

y

$$u \rightarrow 0 \text{ as } r \rightarrow \infty. \quad (3.94)$$

Entonces,  $u \geq 0$  en  $\Omega$ .

Observemos que como la función  $u$  sólo es débilmente diferenciable, las desigualdades en este teorema deben entenderse en sentido débil. En el caso donde  $\partial\Omega$  es vacío no tenemos la condición (3.93).

*Demostración.* Tomemos  $\epsilon > 0$ . Definimos la función  $\nu = \max\{-\epsilon - u, 0\}$ . Como  $u \geq 0$  sobre  $\partial\Omega$  y  $u \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow \infty$ , entonces  $\nu$  tiene soporte compacto en  $\Omega$ . Denotamos por  $\Omega^+$  al soporte de  $\nu$ . También tenemos que  $\nu \in H^1(\Omega)$  (ver [69]). Entonces, podemos usar  $\nu$  como función de prueba para la desigualdad (3.92). Integrando por partes obtenemos

$$\int_{\Omega} \partial\nu\partial u + a\nu u \geq 0. \quad (3.95)$$

Supongamos que  $-\epsilon - u > 0$  en algún punto de  $\Omega$ , entonces el soporte  $\Omega^+$  de  $\nu$  es no vacío. Como  $\partial\nu = -\partial u$  en  $\Omega^+$ , usando (3.95) obtenemos

$$0 \geq \int_{\Omega^+} a\nu u \geq \int_{\Omega^+} |\partial u|^2, \quad (3.96)$$

donde en la primera desigualdad hemos usado la hipótesis  $a \geq 0$ . Luego, concluimos que  $u$  (y por ende  $\nu$ ) es constante en  $\Omega^+$ . Como  $\nu$  tiene soporte compacto, esto implica que  $\nu$  es cero y obtenemos una contradicción. Entonces, hemos probado que  $-\epsilon \leq u$  para  $\epsilon$  positivo, arbitrario. Poniendo  $\epsilon \rightarrow 0$  obtenemos el resultado deseado.  $\square$

# Capítulo 4

## Datos iniciales para agujeros negros extremos conformemente planos

### 4.1. Introducción

En este capítulo continuamos con el estudio analítico de datos iniciales para agujeros negros extremos, comenzado en el capítulo anterior, donde se probó la existencia de datos iniciales extremos construidos a partir de la familia de datos para agujeros negros rotantes de Bowen-York. Se mostró que las soluciones *no extremas* constituyen una familia monoparamétrica (para momento angular fijo) de datos iniciales, que fueron llamadas  $u_\mu$  para cada valor positivo del parámetro  $\mu$ . Luego, se identificó la solución límite  $\mu \rightarrow 0$  como la extrema, debido a sus similitudes con las análogas de Kerr extremo y Reissner-Nördstrom extremo.

Respecto a esto, lo que queremos mostrar aquí es que los mismos fenómenos ocurren en una clase más amplia de datos iniciales para agujeros negros, más específicamente, en datos iniciales maximales, conformemente planos, sin corrientes en la hipersuperficie inicial, indicando que existe una solución extrema para cada familia de datos iniciales para agujeros negros bajo las hipótesis anteriores, y sugiriendo que el carácter cilíndrico de uno de los finales asintóticos es una propiedad general entre agujeros negros extremos.

Enfatizamos que aquí no sólo trataremos con una clase más rica de datos iniciales, sino que también probaremos que la solución extrema es única en el espacio funcional apropiado, un punto crucial faltante en el capítulo anterior para el caso más simple del agujero negro de Bowen-York rotante. Además, la prueba de unicidad refinará el comportamiento singular de la solución

extrema cerca del origen.

Hemos decidido separar el caso particular de Bowen-York (presentado en el capítulo 3) de la familia más general presentada en este capítulo por dos razones. Primero, porque, como mencionamos antes, los datos para un agujero rotante de Bowen-York son unos de los más conocidos y utilizados en experimentos numéricos, siendo por esto más familiares y accesibles. Y segundo, porque los datos libres (3-métrica y curvatura extrínseca) son más simples que en el caso general, lo que nos permitió obtener resultados más concretos.

Los datos iniciales conformemente planos tienen ciertas ventajas y desventajas frente a datos no conformemente planos. Entre las primeras podemos citar el hecho de que en general las ecuaciones de vínculo son más sencillas que en el caso no conformemente plano. Además, veremos más adelante que se conoce una expresión explícita para el tensor de curvatura extrínseca general que posee las propiedades de tener traza y divergencia cero, lo que facilita algunas estimaciones. La principal desventaja es que el agujero negro que mejor describe a los agujeros negros astrofísicos, es decir el agujero negro de Kerr, no posee una foliación en superficies con 3-métricas conformemente planas. Otro inconveniente aparece cuando se realizan evoluciones numéricas. El hecho de que la métrica libre sea plana introduce una explosión corta, no física de radiación al comienzo de la simulación (ver [55] y sus referencias). Pero a pesar de este salto inicial, no parece haber un comportamiento no físico en las soluciones, que se asocie con los datos conformemente planos, y esta elección sigue siendo la más popular.

Un punto muy importante, que merece ser destacado es que estudiar el caso general, conformemente plano, nos permite identificar las fuentes que producen el cambio en la geometría asintótica de uno de los finales desde plana a cilíndrica. En particular veremos que el momento lineal del dato no interviene en este cambio, quedando el mismo a cargo del momento angular (como en el caso visto de Bowen York rotante), de la posible materia presente (si tiene el comportamiento adecuado, como por ejemplo, en el dato de Reissner Nördstrom) o de la foliación particular que se considere (como la foliación del espaciotiempo de Schwarzschild discutida en la sección 2.4.1).

Otro tema relevante es el comportamiento de la masa en la familia de datos iniciales a medida que el parámetro  $\mu$  va a cero, ya que esperaríamos que si el momento angular y las cargas se mantienen constante, entonces la masa debería decrecer o al menos, debería ser mínima en el límite (para dar la máxima cantidad de momento angular y cargas por unidad de masa). De esta forma el límite  $\mu \rightarrow 0$  estaría formalmente asociado con el límite extremo, y la solución límite sería efectivamente la solución extrema. Este comportamiento fue sugerido por simulaciones numéricas [55], [48] en el caso

del dato de Bowen-York rotante, y será verificado analíticamente aquí.

El capítulo está organizado de la siguiente manera. Primero, en la sección 4.2 presentamos el problema y las ecuaciones involucradas, y exponemos el resultado principal. También discutimos las hipótesis e implicancias físicas y geométricas más relevantes de los datos extremos obtenidos. En la sección 4.3 probamos la existencia de este dato inicial a través de un procedimiento de límite análogo al utilizado en el capítulo anterior, y en la sección 4.4 probamos que es única en el espacio funcional apropiado. Además, en la sección 4.5 analizamos el comportamiento de la masa en el límite, y finalmente, en la sección 4.6 demostramos un teorema acerca del operador de Laplace como un isomorfismo entre espacios de Sobolev, que será de gran utilidad en este y el próximo capítulo.

## 4.2. Resultado principal

Consideremos el conjunto de datos iniciales conformemente planos

$$(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \Phi^4 \delta_{ab}, \Phi^{-2} K_{ab}) \quad (4.1)$$

donde  $\delta_{ab}$  es la 3-métrica Euclídea,  $K_{ab}$  es la curvatura extrínseca libre, sin traza ni divergencia

$$\nabla^a K_{ab} = 0, \quad \delta^{ab} K_{ab} = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \quad (4.2)$$

y  $\Phi$  satisface la ecuación de Lichnerowicz en presencia de materia descrita por la densidad de energía  $\rho$

$$\Delta \Phi = -\frac{K^2}{8\Phi^7} - \frac{2\pi\rho}{\Phi^3} := F(x, \Phi) \quad \text{en } \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}. \quad (4.3)$$

En esta ecuación, todas las derivadas y productos punto se refieren a la métrica plana en  $\mathbb{R}^3$  y las fuentes escaleadas están relacionadas con los valores iniciales de las fuentes físicas mediante

$$\rho = \bar{\rho}\Phi^8. \quad (4.4)$$

Como mencionamos en el capítulo 2, este escaleo incluye, fuentes de fluidos genéricas, fuentes electromagnéticas y campos de Yang-Mills [36].

Ubicamos coordenadas esféricas  $r, \theta, \phi$ , imponemos la condición de energía  $\rho \geq 0$  y planitud asintótica, tanto en infinito como en el origen. Este último requisito se realiza introduciendo el parámetro positivo  $\mu$ , definiendo la nueva función  $u_\mu$  en todo  $\mathbb{R}^3$  mediante la expresión

$$\Phi := \Phi_\mu = 1 + \frac{\mu}{2r} + u_\mu \quad \mu > 0 \quad (4.5)$$

y pidiendo que  $u_\mu$  decaiga a cero en infinito y esté bien definida en el origen.

La ecuación correspondiente para  $u_\mu$  es

$$\Delta u_\mu = -\frac{K^2}{8\left(1 + \frac{\mu}{2r} + u_\mu\right)^7} - \frac{2\pi\rho}{\left(1 + \frac{\mu}{2r} + u_\mu\right)^3} = F(x, \Phi_\mu) \quad \text{en } \mathbb{R}^3. \quad (4.6)$$

En [46] se probó que cualquier solución suave sin traza de  $\nabla^a K_{ab} = 0$  en  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  es de la forma

$$K = K_P + K_J + K_A + K_G + K_\lambda \quad (4.7)$$

donde los primeros cuatro términos del lado derecho están dados por

$$K_G^{ab} = \frac{3}{2r^4} (-G^a n^b - G^b n^a - (\delta^{ab} - 5n^a n^b) G^c n_c) \quad (4.8)$$

$$K_J^{ab} = \frac{3}{r^3} (n^a \epsilon^{bcd} J_c n_d + n^b \epsilon^{acd} J_c n_d) \quad (4.9)$$

$$K_A^{ab} = \frac{A}{r^3} (3n^a n^b - \delta^{ab}) \quad (4.10)$$

$$K_P^{ab} = \frac{3}{2r^2} (P^a n^b + P^b n^a - (\delta^{ab} - n^a n^b) P^c n_c). \quad (4.11)$$

En estas expresiones,  $A \geq 0$  es una constante,  $J^a$  es el momento angular del dato,  $P^a$  es su momento lineal en infinito, y  $G^a$ , el momento lineal en el origen. El último término,  $K_\lambda$  es un tensor simétrico que depende de una función escalar  $\lambda$  y que puede hacerse suave o suave con soporte compacto a través de elecciones adecuadas de  $\lambda$  en la forma  $\lambda = \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{r}$  con  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  funciones  $C^\infty$  en  $\mathbb{R}^3$  (ver teorema 4.3 de [46]). Como  $K_\lambda$  se puede controlar completamente mediante formas apropiadas de  $\lambda$ , en lo que sigue, omitiremos este término de todos los cálculos. Más aún, restringiremos la atención al caso en que  $G \equiv 0$ , es decir, 2-tensores que tengan la forma

$$K = K_P + K_J + K_A. \quad (4.12)$$

Notemos que en el capítulo anterior, sólo hemos considerado el caso  $K = K_J$  (dato inicial para un agujero negro de Bowen-York rotante), y sin materia.

Para uso posterior, es conveniente aquí escribir la forma explícita de  $K^2$

$$K^2 = 6 \frac{A^2 + 3J^2 \sin^2 \theta}{r^6} + \frac{12AP^a n_a + 18\epsilon_{abc} n^a P^b J^c}{r^5} + \frac{9(P^2 + 2(P^a n_a)^2)}{2r^4} \quad (4.13)$$

donde  $n^a := x^a/r$  es el vector radial unitario,  $x^a$  son coordenada Cartesianas sobre  $\mathbb{R}^3$ , y hemos orientado nuestros ejes coordenados de manera tal que  $J^a$  está en la dirección  $z$ .

En lo que sigue, también supondremos que la densidad de energía  $\rho$  tiene un decaimiento apropiado en ambos finales. En [127] se muestra que para tener una energía-momento total finita se deben imponer ciertas condiciones de contorno para la densidad de energía  $\rho$  sobre  $\mathcal{S}$  (también se discuten condiciones de borde para la densidad de corrientes). Tal condición sobre una variedad asintóticamente plana es

$$\rho = O(r^{-4}) \quad \text{cuando } r \rightarrow \infty. \quad (4.14)$$

Nos resta imponer condiciones sobre la frontera interior  $r = 0$ . Como este punto representa otro infinito asintóticamente plano (para  $\mu > 0$ ), realizando una transformación de coordenadas que lleve el origen al infinito vemos que

$$\rho = O(r^{-4}) \quad \text{cuando } r \rightarrow 0, \quad (4.15)$$

por lo tanto, podemos escribir

$$\rho = \frac{\sigma(x/r)}{8\pi r^4} \quad (4.16)$$

donde  $\sigma$  es alguna función regular, no negativa en  $\mathbb{R}^3$ . La dependencia en las coordenadas de  $\sigma$  aseguran que esta función es acotada en  $\mathbb{R}^3$ .

Bajo las hipótesis supuestas sobre la materia y  $K$ , la ecuación (4.6) es regular en  $\mathbb{R}^3$  cuando  $\mu > 0$  (el tipo de ecuación es similar al del caso de Bowen-York rotante analizado en el capítulo anterior), y existe una única solución  $C^1(\mathbb{R}^3)$  positiva  $u_\mu$  para cada  $\mu > 0$ . Notemos que esta función es menos regular que la solución de Bowen-York rotante en vacío, que resulta ser  $C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ . Esto se debe a la presencia de materia de la forma (4.16). Recordemos que este es el comportamiento que observamos en la solución de Reissner Nördstrom. Específicamente, teniendo en cuenta que  $\Phi$  diverge como  $\mu/r$  en el origen, encontramos que el término de la curvatura extrínseca diverge, a lo sumo como  $r^{-6}$  (ver ecuación (4.13))

$$\frac{K^2}{\Phi^7} = O(r) \quad \text{cuando } r \rightarrow 0, \quad (4.17)$$

mientras que el término de materia va en la forma

$$\frac{\rho}{\Phi^3} = O(r^{-1}) \quad \text{cuando } r \rightarrow 0. \quad (4.18)$$

Esta pérdida relativa de regularidad nos forzará a ser más cuidadosos con los teoremas que utilicemos en las diferentes partes de la prueba, pero no ocasionará mayores inconvenientes.

Como queremos investigar el límite  $\mu \rightarrow 0$ , definimos la solución extrema  $u_0$  como la solución de la ecuación singular

$$\Delta u = -\frac{K^2}{8(1+u)^7} - \frac{2\pi\rho}{(1+u)^3} \quad (4.19)$$

que será construida como el límite

$$u_0 := \lim_{\mu \rightarrow 0} u_\mu \quad (4.20)$$

en la secuencia de soluciones de las ecuaciones no extremas (4.6). Notamos que la ecuación (4.19) se obtiene de (4.6) si ponemos  $\mu = 0$ . Encontraremos que este límite singular de hecho existe, que es la única solución de (4.19), y que tiene algunas propiedades similares a los casos más familiares de las soluciones extremas de Kerr y Reissner-Nördstrom.

Como mencionamos antes, los espacios funcionales naturales que surgen en este problema son espacios de Sobolev pesados  $H_\delta^2$  [13] (ver el apéndice A). La ventaja de usar estos espacios es que tratan con pesos en ambos finales, el infinito y el origen, y por lo tanto, incluyen funciones con ciertas propiedades de decaimiento en infinito y que son divergentes en  $r = 0$ . Como nuestras funciones principales serán singulares en el origen, no podemos usar los espacios de Sobolev estándar  $H^2$  o  $H_\delta^2$  (ver [13] para más detalles y propiedades de todos estos espacios). En particular es importante remarcar que si una función  $f \in H_\delta^2$  luego  $f = o(r^\delta)$  en infinito y el origen (ver la sección 5.4 por la prueba de este resultado).

Usamos estos espacios en el planteo de nuestro resultado principal.

**Teorema 4.2.1.** *Sean  $J$ ,  $A$  y  $P$  constantes no negativas con  $J$  o  $A$  diferentes de cero,  $K_{ab}$  dado por (4.12), y  $\rho$  que satisface (4.16). Luego existe una única solución  $u_0 \in H_\delta^2$ ,  $\delta \in (-1, -1/2)$  de la ecuación (4.19) tal que  $u_0$  es  $C^\infty$  en  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , y se puede escribir como*

$$u_0(x) = \frac{V(\theta, \phi)}{\sqrt{r}(1+b\sqrt{r})} + U(x) \quad (4.21)$$

donde  $V \in C^\infty(S^2)$  es una función positiva que depende sólo de  $J$  y  $A$ ,  $b$  es una constante fija y positiva, que posiblemente depende de  $A$ ,  $J$  y  $P$ , y  $U \in H_{-1/2}^2$  es  $o(r^{-1/2})$  cerca del origen.

Más aún, tenemos que  $u_0$  es el límite de la secuencia

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} u_\mu = u_0, \quad (4.22)$$

en la norma  $H_\delta^2$ .

Antes de entrar en la prueba, discutamos los puntos principales que expone el teorema.

Este resultado prueba la existencia de una familia de datos iniciales extrema, conformemente plana y de no vacío, parametrizada por el momento angular del dato,  $J$ , su momento lineal  $P$  y la constante  $A$ . Enfatizamos que el teorema no requiere que ambos  $A$  y  $J$  sean no nulos, sino que sólo supone que uno de ellos lo es.

De hecho uno podría relajar esta condición, aceptando el caso  $A = J \equiv 0$ , bajo la cláusula de que exista una constante positiva  $c$  tal que  $\sigma(x) \geq c$  al menos en una vecindad del origen, y las conclusiones del teorema seguirían siendo válidas. De esta forma, el dato de Reissner Nördstrom quedaría incluido en esta familia ya que posee  $J = A = P \equiv 0$  con  $\sigma = q^2 > 0$  donde  $q$  es la carga eléctrica (constante) del agujero negro.

Las hipótesis del teorema sí incluyen al dato de Bowen-York rotante analizado en el capítulo anterior, al poner  $A = P = \sigma \equiv 0$  y momento angular no cero, y también una foliación particular del agujero negro de Schwarzschild (ver la sección 2.4.1, donde se discute brevemente esta solución, sin embargo el límite cilíndrico en el dato de Schwarzschild no se corresponde con la noción de extremidad considerada aquí, es decir, la de máximas 'cargas' por unidad de masa) cuando  $P = J = \sigma \equiv 0$ . Por otro lado, este teorema no incluye el dato inicial de Kerr, ya que se ha probado [129] que no existe foliación del espaciotiempo de Kerr (incluyendo Kerr extremo) que sea conformemente plana. Para estudiar el caso extremo en el dato de Kerr son necesarios otros métodos, que presentamos en los capítulos 5 y 6 debido a la complejidad que surge al considerar métricas no conformemente planas.

La propiedad principal que observamos al realizar este procedimiento de límite es el cambio en la estructura global del dato inicial. La geometría asintótica se mueve desde tener dos finales asintóticamente planos a tener un final asintóticamente plano y uno cilíndrico. Por supuesto que esta propiedad se traduce en propiedades especiales en la 3-métrica física  $\tilde{h}$ , que muestra una naturaleza asintótica cilíndrica en el origen y el decaimiento usual cuando  $r \rightarrow \infty$ .

Notemos que el hecho de que  $u_0 \in H_\delta^2$  con  $\delta \in (-1, -1/2)$  implica que la función límite es una solución fuerte de la ecuación (4.19) también en el origen. El primer término de la descomposición (4.21) determina completamente la geometría asintótica del final en  $r = 0$ , mientras que el hecho de que  $U \in H_{-1/2}^2$  implica que esta función es  $o(r^{-1/2})$  en  $r \rightarrow 0$  y por lo tanto no contribuye a esta característica.

Concretamente, el comportamiento  $O(r^{-1/2})$  del primer término en (4.21)

cerca del origen es el responsable de la naturaleza cilíndrica del final, debido a que la métrica física tiene la forma asintótica

$$\tilde{h}_{ij} \approx \frac{V(\theta, \phi)}{r^2} \delta_{ij} \quad \text{cuando } r \rightarrow 0 \quad (4.23)$$

y por lo tanto especifica su área seccional límite  $A_0(r = 0)$  (el subíndice '0' indica que el área de la superficie se calcula para el dato con valor de parámetro  $\mu = 0$ ) a través de la expresión

$$A_0(r = 0) := \lim_{r \rightarrow 0} A_0(r) = \lim_{r \rightarrow 0} \oint_{B_r} \Phi_0^4 r^2 \sin \theta d\theta d\phi = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} V^4 \sin \theta d\theta d\phi, \quad (4.24)$$

donde  $B_r$  es una bola de radio  $r$  centrada en el origen y  $A_0(r)$  su área superficial. Como  $V$  es una función acotada, estrictamente positiva sobre  $S^2$ , esta área es finita y diferente de cero. Claramente, en el caso no extremo ( $\mu > 0$ ),  $\Phi_\mu = O(r^{-1})$  cuando  $r \rightarrow 0$  (ver la ecuación (4.5)), y por ende  $A_\mu(r \rightarrow 0) \rightarrow \infty$  mostrando que el origen es un final asintóticamente plano. Como se mencionó en el capítulo anterior, el mismo fenómeno ocurre cuando tomamos el límite extremo en los datos iniciales de Reissner Nördstrom, Kerr y Bowen-York rotante.

Más aún, en el caso extremo estudiado aquí, debido a la ecuación satisfecha por la función  $V$  (ver abajo, ecuación (4.58)), podemos escribir la dependencia explícita de  $V$  en los parámetros del dato como  $V = V(\theta, \phi; J, A, \sigma)$ . Esto implica, usando la ecuación (4.24), que el área del final cilíndrico está parametrizada únicamente por el momento angular, la constante  $A$  y posiblemente materia (si  $\sigma > 0$  cerca del origen), mientras que el momento lineal no juega ningún rol en este final. Notamos también, a partir de las ecuaciones (4.9), (4.10) y (4.11), que existe una diferencia significativa entre el momento lineal y las demás cantidades, específicamente  $K_A$  y  $K_J$  divergen como  $r^{-3}$  cerca del origen, mientras  $K_P$  lo hace como  $r^{-2}$ .

El análisis anterior sugiere una manera simple de distinguir si cierto término en el lado derecho de la ecuación de Lichnerowicz contribuye al cambio asintótico en el límite  $\mu \rightarrow 0$ . Consideremos un término de la forma  $-f(x)\Phi^s$  donde  $f$  es una función dada y  $k$  es un número entero, es decir que la ecuación para  $u_\mu$  se puede escribir como

$$\Delta u_\mu = -f(x)\Phi_\mu^k. \quad (4.25)$$

Luego, para que en el límite  $\mu \rightarrow 0$  se obtenga un final cilíndrico, la función  $f$  debe ser

$$f(x) = O(r^{\frac{k-5}{2}}) \quad \text{cuando } r \rightarrow 0. \quad (4.26)$$

Esto implica que sólo contribuye al final cilíndrico el término de  $K^2$  que vaya como  $r^{-6}$ , y la materia que diverja como  $r^{-4}$  en  $r = 0$ .

La prueba de este teorema está dividida en dos partes, una prueba de existencia, en la sección 4.3, y una prueba de unicidad, presentada en la sección 4.4.

### 4.3. Existencia

El plan de la prueba de existencia es análogo al descrito en el capítulo 3 para el caso de Bowen-York: primero probamos que la secuencia  $u_\mu$  es monótonamente creciente punto a punto a medida que  $\mu$  decrece (sección 4.3.1). Luego mostramos que existe una función  $u_0^+$ , independiente de  $\mu$ , que es una cota superior para esta secuencia para todo  $\mu$  (sección 4.3.2). De esta cota superior construimos una cota inferior  $u_0^-$ . Finalmente probamos convergencia en el espacio funcional de Sobolev apropiado (sección 4.3.3).

Debido a la similitud de las ecuaciones involucradas con el caso de Bowen-York rotante, omitimos aquí algunos detalles.

#### 4.3.1. Monotonía

Primero mostramos que si  $\mu_1 \geq \mu_2 > 0$  luego  $u_{\mu_1}(x) \leq u_{\mu_2}(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^3$ .

Definimos  $w$  como

$$w(x) = u_{\mu_2}(x) - u_{\mu_1}(x), \quad (4.27)$$

luego usamos la ecuación (4.6) y el hecho de que la función  $F$  definida en (4.3) es no decreciente, para obtener que  $w$  satisface

$$\Delta w - wH = \frac{\mu_2 - \mu_1}{2r} H, \quad (4.28)$$

donde  $H = H(\Phi_2, \Phi_1)$  es una función no negativa y simétrica en sus argumentos, dada por

$$H(\Phi_2, \Phi_1) = \frac{K^2}{8} \sum_{i=0}^6 \Phi_1^{i-7} \Phi_2^{-1-i} + 2\pi\rho \sum_{i=0}^2 \Phi_1^{i-3} \Phi_2^{-1-i}. \quad (4.29)$$

Como  $u_\mu \geq 0$  para  $\mu > 0$ , tenemos la cota  $H(\Phi_1, \Phi_2) \leq H(1 + \frac{\mu_1}{r}, 1 + \frac{\mu_2}{r})$  que es finita para todo  $x \in \mathbb{R}^3$  cuando  $\mu_1, \mu_2 > 0$ .

Como  $H \geq 0$  y por hipótesis tenemos  $\mu_2 - \mu_1 \leq 0$ , luego el lado derecho de (4.28) es negativo. También tenemos que  $w \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow \infty$ , y por lo

tanto, podemos aplicar el Principio de Máximo para el operador de Laplace para concluir que  $w \geq 0$  en  $\mathbb{R}^3$ . Notamos que, como  $u_\mu$  es  $C^1(\mathbb{R}^3)$ , se debe utilizar un Principio de Máximo adecuado a estos espacios, como el presentado en el Lema 5.2 de [101]. Además este teorema se puede aplicar porque  $H$  es acotado en  $\mathbb{R}^3$  cuando  $\mu_1, \mu_2 > 0$ .

Notablemente, la secuencia  $\Phi_\mu$  tiene el comportamiento opuesto al de la secuencia  $u_\mu$ , es decir  $\Phi_\mu$  es creciente punto a punto con respecto a  $\mu$ . Esto se puede probar usando el Principio de Máximo y el hecho de que  $u_\mu$  es acotada en el origen, mientras que  $\mu/2r$  no lo es (ver el lema en la sección 3.6 para una prueba completa en una situación similar).

### 4.3.2. Cotas

Veremos aquí que, como en el capítulo anterior, la solución de Reissner Nördstrom juega un rol fundamental en la prueba del teorema, ya que da una cota superior uniforme para la secuencia de soluciones  $u_\mu$ , y porque a partir de ella, se puede construir una secuencia de cotas inferiores  $u_\mu^-$  con el comportamiento apropiado en el límite  $\mu \rightarrow 0$ .

**Lema 4.3.1.** *(Cota superior) Sea  $Q$  una constante positiva tal que*

$$Q^2 \geq \sigma + 7P^2 + 3A + 9J, \quad (4.30)$$

donde  $\sigma, P, A$  y  $J$  fueron introducidos en el teorema 4.2.1.

Entonces, para todo  $\mu > 0$  tenemos

$$u_\mu(x) \leq u_\mu^+(x) < u_0^+(x), \quad (4.31)$$

donde

$$u_\mu^+ = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{Q^2 + \mu^2}}{r} + \frac{\mu^2}{4r^2}} - 1 - \frac{\mu}{2r} \quad (4.32)$$

y

$$u_0^+ = \sqrt{1 + \frac{Q}{r}} - 1. \quad (4.33)$$

*Demostración.* Para probar la primera desigualdad de (4.31), calculamos, a partir de (4.32)

$$I := \Delta u_\mu^+ - F(x, u_\mu^+) = -\frac{Q^2}{4r^4 (\Phi_\mu^+)^3} + \frac{K^2}{8(\Phi_\mu^+)^7} + \frac{\sigma}{4r^4 (\Phi_\mu^+)^3} \quad (4.34)$$

donde  $\Phi_\mu^+ := 1 + \mu/2r + u_\mu^+$  es el factor conforme de Reissner Nördstrom para la foliación usual  $t = \text{const}$ , y  $r$ , el radio isotrópico. Ahora, suponiendo que la condición (4.30) vale, escribimos

$$I \leq \frac{1}{4r^4(\Phi_\mu^+)^3} \left( \frac{K^2 r^4}{2(\Phi_\mu^+)^4} - (7P^2 + 3A + 9J) \right). \quad (4.35)$$

Luego, usamos  $\Phi_\mu^+ \geq \Phi_0^+ = \sqrt{1 + Q/r}$  y la siguiente cota para  $K^2$ , obtenida a partir de la expresión explícita (4.13)

$$K^2 \leq \frac{6A^2 + 18J^2}{r^6} + \frac{12AP + 18PJ}{r^5} + \frac{27P^2}{2r^4}, \quad (4.36)$$

para encontrar  $I \leq 0$ , lo cual implica

$$\Delta u_\mu^+ \leq F(x, u_\mu^+). \quad (4.37)$$

Ahora definimos la diferencia  $w = u_\mu^+ - u_\mu$ , y usando las ecuaciones (4.6) y (4.37) obtenemos

$$\Delta w - wH(\Phi_\mu^+, \Phi_\mu) \leq 0, \quad (4.38)$$

con  $H$  definido en la ecuación (4.29). Notemos que la función  $w$  no es  $C^2$  en el origen porque ni  $u_\mu$  ni  $u_\mu^+$  lo son  $C^2$  (la función  $u_\mu$  sería  $C^2$  en el caso de que la función de materia,  $\sigma$  se anule en el origen apropiadamente), y por lo tanto, no satisface la desigualdad (4.38) en el sentido clásico en el origen. Sin embargo tenemos  $w \in H_{loc}^1$  (de hecho  $w$  es  $C^1$ ) y entonces satisface (4.38) en sentido débil también en el origen. También tenemos que  $w$  va a cero cuando  $r \rightarrow \infty$ . Por lo tanto podemos aplicar el Principio de Máximo [101] para concluir que  $w \geq 0$ , i.e  $u_\mu^+ \geq u_\mu$ .

Finalmente, la desigualdad  $u_\mu^+ < u_0^+$  para  $\mu > 0$  se puede verificar directamente a partir de las expresiones explícitas (4.32)-(4.33).  $\square$

**Lema 4.3.2.** *(Cota inferior) Sea  $u_\mu^-$  con  $\mu \geq 0$  la solución de la ecuación lineal*

$$\Delta u_\mu^- = -\frac{K^2}{8(\Phi_\mu^+)^7}. \quad (4.39)$$

Tenemos que para todo  $\mu > 0$

$$u_\mu^-(x) \leq u_\mu(x) \quad (4.40)$$

y

$$\Phi_\mu^-(x) \geq \Phi_0^-(x), \quad \text{donde} \quad \Phi_\mu^- := 1 + \frac{\mu}{2r} + u_\mu^-. \quad (4.41)$$

Además,

$$u_0^- = O(r^{-1/2}) \quad \text{cuando} \quad r \rightarrow 0. \quad (4.42)$$

*Demostración.* La solución  $u_\mu^-$  para todo  $\mu \geq 0$  se puede construir explícitamente usando la solución fundamental del operador de Laplace. A partir de estimaciones elípticas estandar deducimos que  $u_\mu^- \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^3)$  para  $\mu > 0$ .

Probemos la desigualdad (4.40). Como es usual, tomamos la diferencia  $w = u_\mu - u_\mu^-$ , entonces tenemos

$$\Delta w = F(x, \Phi_\mu) - F(x, \Phi_\mu^+) = (u_\mu - u_\mu^+)H(\Phi_\mu, \Phi_\mu^+). \quad (4.43)$$

Como  $u_\mu - u_\mu^+ \leq 0$  por el lema 4.3.1 y  $H \geq 0$ , obtenemos  $\Delta w \leq 0$ , con  $w \rightarrow 0$  en infinito, por lo tanto, el Principio de Máximo da  $w = u_\mu - u_\mu^- \geq 0$ .

La desigualdad (4.41) se puede verificar usando el lema en la sección 3.6, o de manera explícita.

Finalmente, para verificar el decaimiento de la cota inferior  $u_0^-$  que satisface

$$\Delta u_0^- = -\frac{K^2}{8(\Phi_0^+)^7} \quad (4.44)$$

la escribimos como

$$u_0^- = \frac{V^-}{\sqrt{r}(1+b\sqrt{r})} + U^-, \quad (4.45)$$

donde  $b$  es una constante fija positiva,

$$V^- = \frac{3}{Q^{7/2}} \left( A^2 + \frac{J^2}{25}(51 - 3\sin^2 \theta) \right) \geq \frac{3}{Q^{7/2}} \left( A^2 + \frac{46}{25}J^2 \right) > 0 \quad (4.46)$$

y  $U^-$  soluciona la ecuación lineal remanente

$$\Delta U^- = \Delta \left( u_0^- - \frac{V^-}{\sqrt{r}(1+b\sqrt{r})} \right) := \ell(x). \quad (4.47)$$

Mediante un cálculo explícito se puede ver que  $\ell \in L'_{-5/2}$ , y como el Laplaciano es un isomorfismo  $\Delta : H'_{-1/2} \rightarrow L'_{-5/2}$  (ver [13]) encontramos  $U^- \in H'_{-1/2}$ . Por el lema de la sección 5.4 esto implica que  $U^-$  es  $o(r^{-1/2})$  cerca del origen, y así hemos probado el decaimiento de  $u_0^-$  en (4.42). Enfatizamos, de todos modos que  $U^-$  se puede encontrar de forma cerrada explícita, en términos de unos pocos armónicos esféricos, aunque no es necesario para nuestros propósitos aquí. Además, el hecho de que  $U^- \in H'_{-1/2}$  implique que  $U^- = o(r^{-1/2})$  en el origen no es un resultado trivial y será probado en la sección 5.4.  $\square$

### 4.3.3. Convergencia

En esta sección probamos que la secuencia  $u_\mu$  es Cauchy en la norma  $H_\delta'^2$  para  $-1 < \delta < -1/2$ , lo que se traduce en probar

$$\lim_{\mu_1, \mu_2 \rightarrow 0} \|u_{\mu_1} - u_{\mu_2}\|_{H_\delta'^2} = 0. \quad (4.48)$$

Consideremos la secuencia  $u_\mu r^{-\delta-3/2}$  para  $-1 < \delta < -1/2$ . Esta secuencia está acotada punto a punto por  $u_0^+ r^{-\delta-3/2}$  y es monótonamente creciente a medida que el parámetro  $\mu$  va a cero, lo que significa que es a.e. convergente punto a punto a una función  $u_0 r^{-\delta-3/2}$ . Luego, como  $u_0^+ r^{-\delta-3/2}$  es sumable en  $\mathbb{R}^3$  para los valores dados del peso  $\delta$ , encontramos que la nueva secuencia converge en  $L^2(\mathbb{R}^3)$ . Pero esto implica que la secuencia original  $u_\mu$  converge en  $L_\delta'^2$ , con  $\delta \in (-1, -1/2)$ . Es decir

$$\lim_{\mu_1, \mu_2 \rightarrow 0} \|w\|_{L_\delta'^2} = 0, \quad (4.49)$$

donde  $w := u_{\mu_1} - u_{\mu_2}$  y por conveniencia tomamos  $\mu_1 \geq \mu_2$ .

Para probar que la secuencia  $u_\mu$  es una secuencia de Cauchy también en el espacio pesado de Sobolev  $H_\delta'^2$  con  $\delta \in (-1, -1/2)$ , aplicaremos la siguiente estimación (ver [13])

$$\|w\|_{H_\delta'^2} \leq C \|\Delta w\|_{L_{\delta-2}^2}, \quad (4.50)$$

donde la constante  $C$  depende sólo de  $\delta$ .

De las ecuaciones satisfechas por  $u_{\mu_1}$  y  $u_{\mu_2}$  calculamos

$$\|\Delta w\|_{L_{\delta-2}^2} = \left\| Hw + H \frac{\mu_2 - \mu_1}{r} \right\|_{L_{\delta-2}^2} \quad (4.51)$$

$$\leq \|Hw\|_{L_{\delta-2}^2} + (\mu_1 - \mu_2) \left\| \frac{H}{r} \right\|_{L_{\delta-2}^2}, \quad (4.52)$$

donde  $H = H(\Phi_{\mu_1}, \Phi_{\mu_2})$  fue definido en (4.29). De la definición de la norma  $L_\delta'^2$  dada en el apéndice A obtenemos

$$\|Hw\|_{L_{\delta-2}^2} \leq \sup_{\mathbb{R}^3} |Hr^2| \|w\|_{L_\delta'^2}, \quad (4.53)$$

y por ende, usando la expresión explícita de  $H$  se puede ver que

$$H(\Phi_{\mu_1}, \Phi_{\mu_2}) \leq H(\Phi_0^-, \Phi_0^-), \quad (4.54)$$

y entonces  $Hr^2$  es acotado en  $\mathbb{R}^3$  y la norma de  $H/r$  es finita para  $\delta \in (-1, -1/2)$ . Luego, podemos escribir

$$\|w\|_{H_\delta'^2} \leq C \left( \|w\|_{L_\delta'^2} + (\mu_1 - \mu_2) \right), \quad (4.55)$$

donde la constante  $C$  no depende de  $\mu$ . Esto y la ecuación (4.49) dan

$$\lim_{\mu_1, \mu_2 \rightarrow 0} \|w\|_{H_\delta^2} = 0, \quad (4.56)$$

mostrando que la secuencia  $u_\mu$  es Cauchy en la norma  $H_\delta^2$ , con  $\delta \in (-1, -1/2)$ .

Esta pertenencia de la solución extrema al espacio  $H_\delta^2$  implica que  $u_0 = O(r^{-1/2})$  cerca del origen y  $u_0 = O(r^{-1})$  en el infinito (ver sección 5.4).

De esta manera hemos completado la prueba de existencia de solución de (4.19) en el espacio de Sobolev  $H_\delta^2$ .

## 4.4. Unicidad

En esta sección probamos que la solución encontrada arriba por el procedimiento de límite,  $u_0 = \lim_{\mu \rightarrow 0} u_\mu$ , es la única solución a la ecuación (4.19).

La estrategia es la siguiente. Dada una solución  $u \in H_\delta^2$  de (4.19), primero mostramos que se puede descomponer unívocamente como

$$u = \frac{V}{\sqrt{r}(1 + b\sqrt{r})} + U \quad (4.57)$$

donde  $V$  es una función  $C^\infty$  sobre la 2-esfera  $S^2$  (Lema 4.4.1),  $b$  es una constante fija positiva, que depende posiblemente de  $A$ ,  $J$  y  $P$ , y  $U \in H_{-1/2}^2$  es única para una dada solución  $u$  (Lema 4.4.2). Luego mostramos que si existen dos de tales soluciones  $u$ , deben ser iguales (Lema 4.4.3).

La descomposición (4.57), junto con la ecuación asociada para  $V$ , necesarias en la prueba de unicidad estuvieron inspiradas por el trabajo de Hanam, Husa y O'Murchadha [77], donde se asume una expansión de  $\Phi_0$  válida cerca del origen de la forma  $\Phi_0 = D(\theta)/\sqrt{r} + O(\sqrt{r})$  y analizan una ecuación similar para datos iniciales axisimétricos y para  $A \neq 0$ . Enfatizamos que en el resultado presentado aquí no requerimos que  $A$  sea distinto de cero y además, los datos no poseen ninguna simetría.

Tratemos primero con  $V$ . Definimos  $V$  como la solución de

$$\Delta_0 V - \frac{1}{4}V = -\frac{3A^2 + 9J^2 \sin^2 \theta}{4V^7} - \frac{\sigma_0}{4V^3} \quad \text{en } S^2 \quad (4.58)$$

donde  $\sigma_0 := \sigma(r=0, \theta, \phi)$  es una función suave y acotada sobre la 2-esfera  $S^2$  (ver [127] donde se discuten condiciones de paridad para la densidad de energía con el propósito de garantizar la finitud de la integral para el momento angular. Concretamente, se impone que  $\sigma$  sea una función par de sus coordenadas. Sin embargo, este resultado no es necesario para nuestros

cálculos, y sólo utilizaremos la continuidad de la función  $\sigma$  en el origen) y  $\Delta_0$  es el operador de Laplace-Beltrami sobre  $S^2$ :

$$\Delta_0 V := \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta V) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\phi^2 V. \quad (4.59)$$

Escribimos la ecuación (4.58) como  $LV = g(V)$  donde

$$L := \Delta_0 - \frac{1}{4}, \quad g(V) := -\frac{3A^2 + 9J^2 \sin^2 \theta}{4V^7} - \frac{\sigma_0}{4V^3} \quad (4.60)$$

y obtenemos el siguiente lema:

**Lema 4.4.1.** *Existe una única solución positiva  $V \in C^\infty(S^2)$  de la ecuación  $LV = g(V)$ , tal que*

$$c_- \leq V \leq c_+, \quad (4.61)$$

con

$$c_+ = \left( 2 \sup_{S^2} (\sigma_0) + \sqrt{6A^2 + 18J^2} \right)^{1/4} > 0 \quad (4.62)$$

y

$$c_- = \frac{3}{c_+^7} (A^2 + J^2) > 0. \quad (4.63)$$

*Demostración.* Encontraremos una sub y una supersolución, ambas funciones positivas,  $C^\infty$  sobre  $S^2$  para la ecuación  $LV = g(V)$ , de manera tal que el teorema de Sub-super solución (ver, por ejemplo, [86] donde se discute el teorema sobre variedades compactas) garantiza la existencia y la unicidad de la solución a esta ecuación.

Verifiquemos que la constante  $c_+$  dada por

$$c_+ := \left( 2 \sup_{S^2} (\sigma_0) + \sqrt{6A^2 + 18J^2} \right)^{1/4} \quad (4.64)$$

es una supersolución para el operador  $L$ . Aplicando el operador  $L$  a  $c_+$  tenemos

$$Lc_+ = -\frac{c_+}{4} = -\frac{c_+^4}{8c_+^3} - \frac{c_+^8}{8c_+^7} \leq -\frac{\sigma_0}{4c_+^3} - \frac{3A^2 + 9J^2 \sin^2 \theta}{4c_+^7} = g(c_+) \quad (4.65)$$

lo que muestra que  $c_+$  es una supersolución.

Ahora verificamos que la función  $C^\infty$ ,  $v_-$ , definida por

$$v_- := \frac{3}{c_+^7} \left( A^2 + \frac{J^2}{25} (51 - 3 \sin^2 \theta) \right) > \frac{3}{c_+^7} (A^2 + J^2) := c_- > 0 \quad (4.66)$$

es una subsolución para  $LV = g(V)$ . Remarcamos que la propiedad  $c_- > 0$  se satisface porque estamos suponiendo que  $A$  o  $J$  son diferentes de cero. De hecho, si ambos parámetros fuesen cero, pero la función  $\sigma$  fuese estrictamente positiva cerca del origen, el lema aún valdría, con otro valor para la constante  $c_-$ . Notemos también que  $v_- = V^- Q^{7/2} / c_+^7$ , donde  $V^-$  fue definida en la prueba del Lema 3.2.

Se puede verificar explícitamente que  $v_- < c_+$ , entonces calculamos, usando la expresión explícita (4.66)

$$Lv_- = -\frac{3A^2 + 9J^2 \sin^2 \theta}{4c_+^7} \geq g(c_+) \geq g(v_-) \quad (4.67)$$

donde en la última desigualdad hemos utilizado el hecho de que la función  $g$  es una función creciente de su argumento. Esto muestra que  $v_-$  es efectivamente la subsolución buscada.

Finalmente, usando el teorema de la Sub-supersolución [86], concluimos que existe una única solución positiva  $V \in C^\infty(S^2)$  a la ecuación (4.58) que satisface

$$0 < c_- \leq v_- \leq V \leq c_+. \quad (4.68)$$

y el lema queda probado.

Notemos que por el principio de máximo fuerte [62], sabemos a priori que existe cierta constante positiva  $c_-$  tal que  $0 < c_- \leq V$ . Sin embargo, una función constante no es una subsolución para  $LV = g(V)$  a menos que supongamos explícitamente que  $A \neq 0$ , por lo que no podríamos utilizar el teorema de Sub y super soluciones.  $\square$

Ahora tratamos la función  $U$ . La definimos como la solución de la ecuación

$$\Delta U = \Delta \left( u - \frac{V}{\sqrt{r}(1 + b\sqrt{r})} \right) \quad (4.69)$$

donde  $b$  es una constante fija positiva, introducida aquí para obtener las unidades correctas.

Es claro que, como  $u \in H_\delta'^2$  y  $V \in C^\infty(S^2)$  existe, entonces  $U$  existe y pertenece, al menos, a  $H_\delta'^2$ . Queremos verificar que es única para cada  $u$  y que de hecho pertenece a  $H_{-1/2}'^2$ , lo cual implicaría que  $U$  diverge como  $o(r^{-1/2})$  cerca del origen.

Para tal fin, usando las ecuaciones satisfechas por  $u$  y  $V$  escribimos la ecuación de arriba en la forma

$$\left( \Delta - \frac{h}{4r^2} \right) U = f \quad (4.70)$$

donde  $h$  y  $f$  no dependen de  $U$  y están dadas por

$$h = h_1 + h_2 \quad (4.71)$$

con

$$h_1 := (3A^2 + 9J^2 \sin^2 \theta) \sum_{i=0}^6 \frac{(\sqrt{r} + \sqrt{ru})^{i-7}}{[(1 + b\sqrt{r})^{1/7} V]^{i+1}} \quad (4.72)$$

$$h_2 := \sigma_0 \sum_{i=0}^2 \frac{(\sqrt{r} + \sqrt{ru})^{i-3}}{[(1 + b\sqrt{r})^{1/3} V]^{i+1}} \quad (4.73)$$

y

$$\begin{aligned} f := & \frac{6AP^a n_a + 9\epsilon_{abc} n^a P^b J^c}{4r^5(1+u)^7} - \frac{\sigma - \sigma_0}{4r^4(1+u)^3} - \frac{9(P^2 + 2(P^a n_a)^2)}{16r^4(1+u)^7} \\ & + \frac{h_1}{4r^{5/2}} \left[ \sqrt{r} + V \left( \frac{1}{1+b\sqrt{r}} - (1+b\sqrt{r})^{1/7} \right) \right] + \\ & \frac{h_2 V}{4r^{5/2}} \left( \frac{1}{1+b\sqrt{r}} - (1+b\sqrt{r})^{1/3} \right) + \frac{Vb}{4r^2(1+b\sqrt{r})^3} (1-b\sqrt{r}) \end{aligned} \quad (4.74)$$

Notemos que, debido al comportamiento conocido  $u = O(r^{-1/2})$  en el origen, y la positividad de  $V$ ,  $h$  es acotado en  $\mathbb{R}^3$  y  $f \in L'_{-5/2}$  (usamos  $\sigma - \sigma_0 \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow 0$ ).

Luego probamos el siguiente lema

**Lema 4.4.2.** *Sea  $u \in H_{\delta}^{\prime 2}$  una solución extrema de (4.19). Definimos  $V$  por el Lema 4.1. y  $U$  como la solución de (4.70) con  $h$  y  $f \in L'_{-5/2}$  dadas en (4.71)-(4.74). Entonces tenemos que para cada  $u$ , la solución  $U$  es única y  $U \in H_{-1/2}^{\prime 2}$ .*

*Demostración.* Escribimos la ecuación (4.70) como  $\mathcal{L}U = f$  con  $\mathcal{L} := \Delta - \frac{h}{4r^2}$ . Luego, como el operador  $\mathcal{L}$  es un isomorfismo  $H_{-1/2}^{\prime 2} \rightarrow L_{-5/2}^{\prime 2}$  (ver la sección 4.6 por la prueba), obtenemos que para cada  $f$  (es decir, para cada solución  $u$  de (4.19)) existe una única  $U \in H_{-1/2}^{\prime 2}$  que satisface la ecuación anterior.  $\square$

Con estos dos lemas tenemos

$$\Delta \left[ u - \left( \frac{V}{\sqrt{r}(1+b\sqrt{r})} + U \right) \right] = 0 \quad (4.75)$$

y como el operador de Laplace es un isomorfismo  $H_{\delta}^{\prime 2} \rightarrow L_{\delta-2}^{\prime 2}$  concluimos

$$u = \frac{V}{\sqrt{r}(1+b\sqrt{r})} + U. \quad (4.76)$$

Con estos resultados estamos listos para probar la unicidad de la solución extrema.

**Lema 4.4.3.** *La solución  $u$  de la ecuación (4.19) es única en  $H_\delta'^2$ .*

*Demostración.* Supongamos, por el contrario, que existen dos soluciones tales,  $u$  y  $\tilde{u}$ , y escribimos

$$u = \frac{V}{\sqrt{r}(1+b\sqrt{r})} + U, \quad \tilde{u} = \frac{V}{\sqrt{r}(1+b\sqrt{r})} + \tilde{U} \quad (4.77)$$

(notemos que las mismas  $V$  y  $b$  aparece en ambas soluciones) y definimos la diferencia

$$w = u - \tilde{u} = U - \tilde{U}. \quad (4.78)$$

Vemos que  $w \in H_{-1/2}'^2$ , porque  $U$  y  $\tilde{U}$  lo hacen, por el Lema 4.2. Luego, en virtud de las ecuaciones satisfechas por  $u$ ,  $\tilde{u}$  tenemos

$$\begin{aligned} \Delta w &= -\frac{K^2}{8} \left( \frac{1}{(1+u)^7} - \frac{1}{(1+\tilde{u})^7} \right) - \frac{\sigma}{4r^4} \left( \frac{1}{(1+u)^3} - \frac{1}{(1+\tilde{u})^3} \right) \\ &= H(1+u, 1+\tilde{u})w \end{aligned} \quad (4.79)$$

donde  $H \geq 0$  fue definido en (3.26). Pero a partir de las expresiones explícitas, tenemos que  $H = O(r^{-2})$  en  $r \rightarrow 0$ , y va a cero en infinito, por lo tanto podemos aplicar el teorema de la sección 4.6 ( $\Delta - H(1+u, 1+\tilde{u}) : H_{-1/2}'^2 \rightarrow L_{-5/2}'^2$  es un isomorfismo) para concluir que  $w \equiv 0$ , y entonces  $u \equiv \tilde{u}$ .  $\square$

Este resultado completa la prueba de nuestro resultado principal, teorema 4.2.1, sobre la existencia y unicidad de la solución extrema (4.19).

## 4.5. Masa total

Las secciones anteriores nos muestran que el límite  $\mu \rightarrow 0$  realiza la transición desde un dato con geometría tipo 'wormhole' (es decir, con dos regiones asintóticamente planas) hacia un dato con geometría tipo 'trompeta' (un final asintóticamente plano y uno cilíndrico). Sin embargo, esta propiedad geométrica no define a los agujeros negros extremos. Hemos visto que, al menos en el caso estacionario, existe una foliación del agujero negro de Schwarzschild que posee esta geometría asintóticamente cilíndrica, pero no se corresponde con ningún límite extremo, ya que Schwarzschild no tienen ni momento angular ni materia. La noción de extremalidad que usamos está asociada con la idea física de que el agujero negro extremo posee la máxima cantidad posible de carga y momento angular por unidad de masa permitida en la familia.

En esta sección veremos que en realidad, el límite  $\mu \rightarrow 0$  nos lleva efectivamente desde el caso no extremo al extremo para un gran número de familias de datos iniciales.

Recordemos que para una familia de datos iniciales  $(\mathcal{S}, \Phi_\mu^4 \delta_{ab}, \Phi_\mu^{-2} K_{ab}, \rho)$ , la masa ADM de un elemento de la familia con parámetro  $\mu$  es

$$m_\mu = \frac{\mu}{2} - \frac{1}{4\pi} \int_{R^3} \Delta u_\mu dx = \frac{\mu}{2} + \frac{1}{4\pi} \int_{R^3} \frac{K^2}{8 \left(1 + \frac{\mu}{2r} + u_\mu\right)^7} + \frac{2\pi\rho}{\left(1 + \frac{\mu}{2r} + u_\mu\right)^3} dx \quad (4.80)$$

de donde vemos que para calcular la masa total del dato es preciso conocer explícitamente la solución  $u_\mu$ . Sin embargo, para obtener información acerca del comportamiento de la masa con  $\mu$ , es suficiente tener en cuenta que la masa está contenida en el término de orden  $r^{-1}$  del factor conforme (ver por ejemplo [20]).

Utilizando esta información, veremos que la masa total del dato es una función decreciente del parámetro  $\mu$ . Esto implica que tomar el límite  $\mu \rightarrow 0$ , manteniendo el momento angular y la materia fijos, nos lleva al dato con la mínima masa en la familia, o en otras palabras, al dato con máximo momento angular y materia por unidad de masa en la familia.

**Lema 4.5.1.** *Sea  $(\mathcal{S}, \Phi_\mu^4 \delta_{ab}, \Phi_\mu^{-2} K_{ab}, \rho)$  una familia de datos iniciales conformemente planos como los descritos antes, con parámetro  $\mu \geq 0$  y densidad de energía  $\rho$ . Entonces la masa total es una función monótonamente creciente con el parámetro  $\mu$ . Más aún, la masa del dato  $(\mathcal{S}, \Phi_0^4 h_{ab}, \Phi_0^{-2} K_{ab})$  obtenido al tomar el límite  $\mu \rightarrow 0$  es la mínima entre todos los elementos de la familia.*

*Demostración.* Consideremos dos elementos de la familia de datos, con  $\mu_1 \geq \mu_2$ . Luego, hemos visto que por la propiedad de monotonía de  $\Phi_\mu$  tenemos

$$\Phi_{\mu_1}(x) \geq \Phi_{\mu_2}(x). \quad (4.81)$$

Entonces, si escribimos el factor conforme aislando el término de masa, de la forma

$$\Phi_\mu = 1 + \frac{m_\mu}{r} + w_\mu \quad (4.82)$$

donde

$$w_\mu = o(r^{-1}) \quad \text{cuando } r \rightarrow \infty, \quad (4.83)$$

obtenemos la siguiente secuencia de desigualdades

$$\Phi_{\mu_1} \geq \Phi_{\mu_2} \quad (4.84)$$

$$1 + \frac{m_{\mu_1}}{r} + w_{\mu_1} \geq 1 + \frac{m_{\mu_2}}{r} + w_{\mu_2} \quad (4.85)$$

$$\frac{m_{\mu_1}}{r} + w_{\mu_1} \geq \frac{m_{\mu_2}}{r} + w_{\mu_2}. \quad (4.86)$$

Multiplicamos ambos miembros por  $r$

$$m_{\mu_1} + rw_{\mu_1} \geq m_{\mu_2} + rw_{\mu_2} \quad (4.87)$$

y como esta desigualdad vale para todo  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , podemos tomar el límite  $r \rightarrow \infty$  para obtener

$$m_{\mu_1} \geq m_{\mu_2}, \quad (4.88)$$

ya que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r w_{\mu} = 0 \quad (4.89)$$

por la propiedad (4.83). Y esto muestra que la masa es una función creciente con  $\mu$ . Al tomar el límite  $\mu \rightarrow 0$  encontramos que la masa del dato con  $\mu = 0$  debe ser menor o igual que la masa de un dato no extremo en la familia.  $\square$

## 4.6. $\mathcal{L}$ es un isomorfismo

En esta sección probamos que el mapa lineal  $\mathcal{L} : H'_{-1/2} \rightarrow L'_{-5/2}$  es un isomorfismo. Este importante resultado es usado no sólo en la prueba de unicidad de la solución extrema para el caso conformemente plano de este capítulo, sino que además, resulta útil en un estudio de perturbaciones del dato inicial de Kerr extremo analizado más adelante. Mencionamos que en [13] se prueba que el operador de Laplace es un isomorfismo  $\Delta : H'_{\delta} \rightarrow L'_{\delta-2}$ , resultado que utilizamos en la prueba del siguiente teorema.

**Teorema 4.6.1.** *El mapa lineal  $\mathcal{L}$  definido por*

$$\mathcal{L}u := -\Delta u + \alpha u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \quad (4.90)$$

*es un isomorfismo  $H'_{-1/2} \rightarrow L'_{-5/2}$ , donde  $\alpha \geq 0$  está dada por*

$$\alpha := \frac{h}{4r^2}, \quad (4.91)$$

*y  $h \geq 0$ , definida en (4.71) es una función acotada sobre  $\mathbb{R}^3$ .*

Descomponemos la prueba en dos partes. Primero probamos la existencia de una única solución débil para la ecuación (4.90) (Lema 4.6.2), y luego encontramos que es regular (en el Lema 4.6.3).

**Lema 4.6.2.** *Existe una única solución débil  $u \in H'_{-1/2}$  de (4.90) para cada  $f \in L'_{-5/2}$ , donde  $\alpha \geq 0$  está dado en (4.91).*

*Demostración.* Para  $u, v \in H_{-1/2}^1$ , definimos la forma bilineal

$$B[u, v] := \int_{\mathbb{R}^3} Du \cdot Dv + \alpha uv \, dx \quad (4.92)$$

que corresponde al operador lineal  $\mathcal{L}u := -\Delta u + \alpha u$ , donde  $\alpha$  fue definido en (4.91) y  $dx$  representa la forma de volumen Euclídeo en  $\mathbb{R}^3$ .

Verifiquemos que  $B[ \cdot, \cdot ]$  satisface las hipótesis del Teorema de Lax-Milgram (ver el apéndice B). Primero, tenemos

$$|B[u, v]| = \left| \int_{\mathbb{R}^3} Du \cdot Dv + \alpha uv \, dx \right| \leq \left| \int_{\mathbb{R}^3} Du \cdot Dv \, dx \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^3} \alpha uv \, dx \right|. \quad (4.93)$$

Usando la expresión para  $\alpha$  y la desigualdad de Hölder, obtenemos

$$\begin{aligned} |B[u, v]| &\leq |Du|_{L^2} |Dv|_{L^2} + C \left| \int_{\mathbb{R}^3} \frac{uv}{r^2} \, dx \right| \leq \\ &\leq |Du|_{L^2} |Dv|_{L^2} + C \left| \frac{u}{r} \right|_{L^2} \left| \frac{v}{r} \right|_{L^2} = \\ &= |Du|_{L_{-3/2}^2} |Dv|_{L_{-3/2}^2} + C |u|_{L_{-1/2}^2} |v|_{L_{-1/2}^2} \leq \\ &\leq \max\{1, C\} \left( |Du|_{L_{-3/2}^2} |Dv|_{L_{-3/2}^2} + |u|_{L_{-1/2}^2} |v|_{L_{-1/2}^2} \right) \leq \\ &= \max\{1, C\} |u|_{H_{-1/2}^1} |v|_{H_{-1/2}^1} \end{aligned} \quad (4.94)$$

verificando así la hipótesis de suryectividad del Teorema de Lax-Milgram.

Ahora nos movemos a la condición de coercitividad. Tenemos

$$B[u, u] = \int_{\mathbb{R}^3} (Du)^2 + \alpha u^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^3} (Du)^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}^3} \alpha u^2 \, dx. \quad (4.95)$$

Usando el hecho de que  $\alpha$  es no negativa, y la desigualdad de Poincaré (ver [13], Teorema 1.3), obtenemos

$$\begin{aligned} B[u, u] &\geq \int_{\mathbb{R}^3} (Du)^2 \, dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (Du)^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (Du)^2 \, dx = \\ &= \frac{1}{2} |Du|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} |Du|_{L^2}^2 \geq \frac{1}{2} |Du|_{L^2}^2 + \frac{1}{4} |u|_{L_{-1/2}^2}^2 \geq \\ &\geq \frac{1}{4} \left( |Du|_{L^2}^2 + |u|_{L_{-1/2}^2}^2 \right) = \frac{1}{4} |u|_{H_{-1/2}^1}^2 \end{aligned} \quad (4.96)$$

verificando que  $\mathcal{L}$  es un operador 1-1.

Ahora fijamos  $f \in L_{-5/2}^2$  y definimos  $\langle f, v \rangle := (f, v)_{L^2}$ , donde  $(f, v)_{L^2}$  denota el producto interno  $L^2$ . Verifiquemos que ésta es una funcional lineal

acotada sobre  $L^2_{-1/2}$ , y por lo tanto, sobre  $H^2_{-1/2}$ . Sea  $v \in H^2_{-1/2}$ , entonces tenemos

$$\begin{aligned}
\langle f, v \rangle &= \int_{\mathbb{R}^3} f v dx = \int_{\mathbb{R}^3} f r^{\frac{-2(-5/2)-3}{2}} v r^{\frac{-2(-1/2)-3}{2}} dx \leq \\
&\leq \left| f r^{\frac{-2(-5/2)-3}{2}} \right|_{L^2} \left| v r^{\frac{-2(-1/2)-3}{2}} \right|_{L^2} = |f|_{L^2_{-5/2}} |v|_{L^2_{-1/2}} \leq \\
&\leq |f|_{L^2_{-5/2}} |v|_{H^1_{-1/2}}
\end{aligned} \tag{4.97}$$

como queríamos probar.

Luego, con estas tres condiciones satisfechas, el Teorema de Lax-Milgram establece que existe una única  $u \in H^2_{-1/2}$  tal que

$$B[u, v] = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in H^1_{-1/2}, \tag{4.98}$$

es decir, tal que

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\mathcal{L}u - f)v dx = 0, \quad \forall v \in H^1_{-1/2}. \tag{4.99}$$

Por lo tanto  $u$  es la única solución débil de  $\mathcal{L}u = f$ .  $\square$

A continuación probamos que la 'regularidad' de  $u$  se extiende a la segunda derivada.

**Lema 4.6.3.** *Sea  $f \in L^2_{-5/2}$ . Suponga que  $u \in H^1_{-1/2}$  es una solución débil de  $\mathcal{L}u = f$ . Entonces  $u \in H^2_{-1/2}$*

*Demostración.* Sea  $u \in H^1_{-1/2}$  la única solución débil de

$$\mathcal{L}u = \Delta u - \alpha u = -f, \tag{4.100}$$

entonces verificamos que  $\tilde{f} := f - \alpha u \in L^2_{-5/2}$ , es decir

$$\begin{aligned}
|\tilde{f}|_{L^2_{-5/2}} &= |\alpha u - f|_{L^2_{-5/2}} \leq C \left( |\alpha u|_{L^2_{-5/2}} + |f|_{L^2_{-5/2}} \right) \\
&\leq C \left( \left| \frac{u}{r^2} \right|_{L^2_{-5/2}} + |f|_{L^2_{-5/2}} \right) = C \left( |u|_{L^2_{-1/2}} + |f|_{L^2_{-5/2}} \right) \\
&\leq C \left( |u|_{H^1_{-1/2}} + |f|_{L^2_{-5/2}} \right).
\end{aligned} \tag{4.101}$$

Como el operador de Laplace es un isomorfismo  $\Delta : H^2_{-1/2} \rightarrow L^2_{-5/2}$ , [13], entonces existe una única  $\tilde{u} \in H^2_{-1/2}$  tal que

$$\Delta \tilde{u} = -f + \alpha u. \tag{4.102}$$

Pero esto implica que  $\tilde{u}$  también es una solución débil de la ecuación anterior. Como, por el lema 4.6.2, la solución débil es única, encontramos que  $\tilde{u} = u \in H'_{-1/2}$   $\square$

Estos dos lemas muestran que existe una única solución  $u \in H'_{-1/2}$  que resuelve la ecuación  $-\Delta u + \alpha u = f$  a.e, para cada  $f \in L'_{-5/2}$ . Esto, a su vez, significa que  $\mathcal{L} := -\Delta + \alpha$  es un isomorfismo  $H'_{-1/2} \rightarrow L'_{-5/2}$ , probando el teorema 4.6.1.

# Capítulo 5

## Perturbaciones del dato inicial para el agujero negro de Kerr extremo

### 5.1. Introducción

La perturbación de datos iniciales está íntimamente relacionada con las nociones básicas de estabilidad de las soluciones. Consideremos un espaciotiempo solución de las ecuaciones de Einstein correspondiente a un cierto conjunto de datos iniciales. Una de las ideas más intuitivas acerca de la estabilidad de esta solución es que si deformamos levemente el conjunto de datos iniciales, entonces obtendremos un nuevo espaciotiempo, solución de las ecuaciones de Einstein, tal que en algún entorno de la superficie inicial, dicha solución está en algún sentido próximo al espaciotiempo original.

Más allá de la topología que utilicemos para cuantificar la proximidad de las soluciones, es interesante, para lo que nos ocupa aquí, destacar que para poder estudiar la estabilidad de un agujero negro extremo, es conveniente probar la existencia de datos iniciales que sean próximos al dato inicial que origina el espacio-tiempo extremo. Debido a la singularidad de las ecuaciones involucradas en el límite extremo, probar la existencia de datos extremos perturbados no es tarea fácil.

Por ejemplo, en el caso de perturbaciones no lineales, no es posible utilizar los teoremas estándar de existencia de soluciones a ecuaciones elípticas (ver, por ejemplo, [69], [62]), ya que nos encontramos con uno de los siguientes problemas: 1) la métrica libre de fondo no es continua o 2) los coeficientes de la ecuación no presentan la regularidad mínima requerida para aplicar los teoremas de existencia que hay en la literatura [36], [13], [101].

Una estrategia posible para tratar las perturbaciones no lineales de un agujero negro extremo es la siguiente: Partimos de la ecuación de Lichnerowicz para el factor conforme no extremo (es decir, con valor de parámetro  $\mu > 0$ ) y perturbamos los tensores libre  $h_{ab}$  y  $K_{ab}$  con una perturbación adecuada que no dependa de  $\mu$ . Luego, aplicamos el mismo procedimiento de límite empleado en los capítulos anteriores para probar existencia de solución a la nueva ecuación extrema. Sin embargo, en el caso de métricas no conformemente planas (como la de un dato inicial para el agujero negro de Kerr), esta estrategia resulta menos conveniente debido a la mayor complejidad de las ecuaciones involucradas. Otra estrategia (que es la que empleamos en este capítulo) es utilizar el teorema de la función implícita para la perturbación de la ecuación de Lichnerowicz.

Las perturbaciones lineales del agujero negro de Kerr y el problema de su estabilidad lineal, representan uno de los grandes problemas abiertos de la relatividad general (ver la reseña [63] y las referencias allí citadas). En particular, existen muy pocos trabajos sobre el caso extremo en este contexto (ver [24] donde se realizan perturbaciones numéricas de datos iniciales tipo 'trompeta').

Como mencionamos en el capítulo 1, en vacío, el único agujero negro estacionario es el agujero negro de Kerr, caracterizado por la masa  $m$  y el momento angular  $J$ , los cuales satisfacen  $m^2 \geq |J|$ . El caso límite  $m = \sqrt{|J|}$  se llama agujero negro extremo y representa el agujero negro estacionario con la máxima cantidad de momento angular por unidad de masa.

La diferencia crucial entre el dato para Kerr y los datos conformemente planos analizados en los capítulos 3 y 4 es la naturaleza de la 3-métrica inicial. En el espaciotiempo de Kerr (extremo y no extremo) no existe foliación en superficies espaciales con métricas inducidas conformemente planas [129]

Al menos tres objetivos nos motivan a estudiar perturbaciones del dato para el agujero negro de Kerr extremo. El primero es determinar si esta solución, que es especial en el sentido de los teoremas de unicidad mencionado en la introducción, capítulo 1, y de ser la única solución que alcanza el mínimo para la masa entre una familia general de datos axisimétricos de vacío, está aislada en el conjunto de datos iniciales para las ecuaciones de Einstein, o existe una vecindad de soluciones próximas. Un segundo objetivo es el hecho de que la 'estabilidad' del dato de Kerr extremo es un buen punto de partida para entender la estabilidad del espaciotiempo de Kerr extremo, siguiendo las ideas mencionadas al comienzo de la presente sección. Finalmente, teniendo en cuenta que el agujero negro de Kerr es uno de los mejores modelos para los agujeros negros astrofísicos, y, en particular, Kerr extremo modelaría agujeros altamente rotantes que se supones presentes en muchos fenómenos reales, creemos que esto también es un primer paso para entender la dinámica

de estos sistemas físicos.

Con esta motivación, en este capítulo estudiamos y probamos la existencia de una familia de datos iniciales que están próximos al dato de Kerr extremo en una norma apropiada. En particular, la geometría asintótica de estos datos iniciales es la misma que la geometría de Kerr extremo. Estos datos, son axisimétricos y, en general, no estacionarios. Es importante enfatizar que la existencia de estas condiciones iniciales es, a priori, de ninguna manera obvia debido al carácter de la geometría de Kerr extremo.

El capítulo está organizado de la siguiente manera. En la sección 5.2 comenzamos con un repaso de algunas de las propiedades más importantes del agujero negro de Kerr extremo. Luego, presentamos nuestro resultado principal evitando detalles técnicos y discutimos las hipótesis e implicancias del mismo. También mostramos que la geometría asintóticamente cilíndrica de uno de los finales se preserva durante la evolución. En la sección 5.3 exponemos nuestro teorema principal en forma precisa y lo probamos. Como dijimos antes, la herramienta analítica central usada en la prueba es el teorema de la función implícita. Finalmente en la sección 5.4 incluimos la prueba de una característica del decaimiento de funciones que pertenecen a espacios de Sobolev, y en la sección 5.5 damos la demostración de una propiedad del dato inicial de Kerr extremo que juega un rol central en la prueba del resultado principal.

## 5.2. Resultado principal

Consideremos, en un agujero negro de Kerr extremo con masa  $m$  y momento angular  $J = \pm m^2$ , la superficie  $\mathcal{S} = \{t = \text{constante}\}$ . Como mencionamos en la sección 2.4.3, esta superficie tiene un final asintóticamente plano y uno cilíndrico. El final cilíndrico se aproxima asintóticamente al horizonte de eventos. En oposición a lo que ocurre en el caso asintóticamente plano, este final está en la región de campo fuerte del espaciotiempo. Notemos que  $(\mathcal{S}, \tilde{h}_{ab})$  es una variedad Riemanniana completa sin borde que yace enteramente en la región exterior al agujero negro.

La métrica intrínseca sobre esta superficie es (ver sección 2.4.3, tomando  $\mu = 0$ )

$$\tilde{h}_{ab}^0 = \Phi_0^4 h_{ab}^0, \quad h^0 = e^{2q_0} (dr^2 + r^2 d\theta^2) + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (5.1)$$

con

$$e^{2q_0} = \frac{\Sigma \sin^2 \theta}{\eta}, \quad \Phi_0^4 = \frac{\eta}{\rho^2} \quad (5.2)$$

y

$$\omega_0 = 2J(\cos^3 \theta - 3 \cos \theta) - \frac{2Jm^2 \cos \theta \sin^4 \theta}{\Sigma}. \quad (5.3)$$

La curvatura extrínseca en términos del potencial del twist queda

$$\tilde{K}_{ab}^0 = \frac{2}{\eta} S_{(a} \eta_{b)}, \quad S_a = \frac{1}{\eta} \tilde{\epsilon}_{abc} \eta^b \partial^c \omega_0, \quad (5.4)$$

donde  $\tilde{\epsilon}_{abc}$  denota el elemento de volumen con respecto a la métrica  $\tilde{h}_{ab}$ .

En coordenadas isotrópicas, el final asintóticamente plano está dado por el límite  $r \rightarrow \infty$  y el final cilíndrico por el límite  $r \rightarrow 0$ . Las condiciones asintóticas para la métrica y la segunda forma fundamental en el final  $r \rightarrow \infty$  están dadas por

$$h_{ij} = \delta_{ij} + o(r^{-1/2}), \quad \partial h_{ij} = o(r^{-3/2}), \quad (5.5)$$

$$K_{ij} = O(r^{-3}) \quad (5.6)$$

Como mencionamos en la sección 2.4.3, en el límite  $r \rightarrow 0$  el factor conforme  $\Phi_0$  diverge como  $r^{-1/2}$ . Esto, sin embargo, es solamente un problema de coordenadas. Para verlo, ponemos  $s = -\ln r$ , luego el final cilíndrico corresponde a  $s \rightarrow \infty$ , y la métrica tiene la forma

$$\tilde{h}^0 = (\sqrt{r}\Phi_0)^4 (e^{2q_0}(ds^2 + d\theta^2) + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (5.7)$$

Las funciones  $\sqrt{r}\Phi_0$  y  $q_0$  son suaves y uniformemente acotadas en todo el rango  $-\infty < s < \infty$  (ver lema 5.5.2). En particular, la variedad Riemanniana  $(\mathcal{S}, \tilde{h}_{ab}^0)$  tiene curvatura acotada.

Es interesante notar que la métrica (5.7) y la segunda forma fundamental (5.4) tienen un límite bien definido  $s \rightarrow \infty$  como datos iniciales. Es decir

$$\tilde{h}^0 = m^2(1 + \cos^2 \theta) (ds^2 + d\theta^2) + \frac{4m^2 \sin^2 \theta}{(1 + \cos^2 \theta)} d\phi^2, \quad \text{cuando } s \rightarrow \infty, \quad (5.8)$$

donde hemos usado los límites (5.88)–(5.89). La curvatura extrínseca  $\tilde{K}_0^{ab}$  tiene la forma (5.4) donde  $\omega_0$  es remplazada por su valor límite (5.90) y todas las otras cantidades se calculan con respecto a la métrica (5.8). De hecho estas son soluciones de las ecuaciones de vínculo. Aislan la geometría cilíndrica cortando el final asintóticamente plano. En particular, la métrica (5.8) tiene escalar de Ricci no negativo, dado por el límite (5.91) y tiene otra simetría, de traslaciones en  $s$ . Estos datos iniciales límite son tajadas  $t = \text{constante}$  de la geometría de vacío 4-dimensional descrita en [12], conocida como Kerr extremo cerca del horizonte. Esta geometría también ha sido estudiada en

[29] (ver ec. (5.63) en esa referencia). En el capítulo 6 veremos que este tipo de datos resultan muy útiles en el estudio de una desigualdad entre el área del horizonte y el momento angular para datos axialmente simétricos. De hecho, la métrica (5.8) juega un rol fundamental.

Un parámetro relevante para los datos de agujero negro es el área del final cilíndrico. Consideremos el área  $A(r)$  de las superficies  $r = \text{constante}$  de la métrica para Kerr extremo (5.1). En el límite  $r \rightarrow 0$  tenemos

$$A(0) = \lim_{r \rightarrow 0} A(r) = 8\pi|J|. \quad (5.9)$$

Esta cantidad corresponde al área del horizonte de eventos del agujero negro. Finalmente, por completitud, mencionamos que la ergoregión sobre  $\mathcal{S}$  está dada en estas coordenadas por

$$0 < r < m \sin \theta. \quad (5.10)$$

Hemos descrito una clase particular de datos iniciales para el agujero negro de Kerr extremo que va desde  $i_c$  a  $i_0$ . Existen datos iniciales similares en los agujeros negros de Reissner-Nordström y Kerr-Newman. Incluso para el agujero negro de Schwarzschild también existe un dato inicial que tiene la misma geometría asintótica (ver [76] y sus referencias). Todos estos ejemplos son estacionarios. Más aún, todos estos datos surgen como un límite singular en el que la geometría cambia. La primera evidencia numérica sobre la existencia de datos cilíndricos no estacionarios con una estructura similar a la descrita arriba fue dada en [55] y la primera prueba analítica fue provista en los capítulos 3 y 4 (ver [56], [66]). Estos datos también se obtienen como límite singular a partir de datos no extremos. El punto que queremos mostrar en este capítulo es el siguiente: dado el dato inicial de Kerr extremo, existe una vecindad de datos similares? El siguiente teorema, que constituye el resultado principal de este capítulo, da una respuesta afirmativa a esta pregunta.

**Teorema 5.2.1.** *Sea  $(\mathcal{S}, \tilde{h}_{ab}^0, \tilde{K}_{ab}^0)$  el dato inicial de Kerr extremo descrito arriba con momento angular  $J$  y masa  $m = \sqrt{|J|}$ . Luego existe un pequeño  $\lambda_0 > 0$  tal que para  $-\lambda_0 < \lambda < \lambda_0$  existe una familia de datos iniciales  $(\mathcal{S}, \tilde{h}_{ab}(\lambda), \tilde{K}_{ab}(\lambda))$  (i.e., soluciones de los vínculos sobre  $\mathcal{S}$ ) con las siguientes propiedades:*

- (I) *Tenemos  $\tilde{h}_{ab}(0) = \tilde{h}_{ab}^0$  y  $\tilde{K}_{ab}(0) = \tilde{K}_{ab}^0$ . La familia es diferenciable en  $\lambda$  y está cerca de Kerr extremo con respecto a una norma apropiada que involucra dos derivadas de la métrica.*

(II) *Los datos tienen la misma geometría asintótica que el dato inicial de Kerr extremo. El momento angular y el área del final cilíndrico en la familia no dependen de  $\lambda$ , tienen el mismo valor que en  $(\mathcal{S}, \tilde{h}_{ab}^0, \tilde{K}_{ab}^0)$ , es decir  $J$  y  $8\pi|J|$  respectivamente.*

(III) *Los datos son axialmente simétricos y maximales (i.e.  $\tilde{K}(\lambda) = 0$ ).*

En la sección 5.3 proveemos una versión más precisa de este teorema (teorema 5.3.1). En cambio, discutamos aquí otras propiedades relevantes de la familia de datos iniciales  $(\mathcal{S}, \tilde{h}_{ab}(\lambda), \tilde{K}_{ab}(\lambda))$ .

Mencionamos que el momento angular de la familia permanece constante en la evolución, sin embargo, la masa total no. Como consecuencia de teoremas generales [54] [38] tenemos la siguiente desigualdad para todo  $\lambda$

$$m(\lambda) \geq \sqrt{|J|}, \quad (5.11)$$

con igualdad sólo para  $\lambda = 0$  (i.e. para Kerr extremo). Esta familia alcanza el mínimo local en Kerr extremo estudiado en [51]. Es decir que cualquier elemento de la familia con  $\lambda \neq 0$  representa un conjunto de datos iniciales no extremo, ya que vale (5.11). Sin embargo, la geometría asintótica del dato es de la misma naturaleza que en el caso extremo. Esto nos da otra muestra de que no es correcto asociar unívocamente la noción de extremalidad con la presencia de un final cilíndrico en el dato inicial.

La desigualdad (5.11) nos permite definir la siguiente cantidad positiva

$$E(\lambda) = m(\lambda) - \sqrt{|J|}. \quad (5.12)$$

La energía  $E$  provee (si suponemos la censura cósmica) una cota superior para la cantidad total de radiación emitida por el sistema hacia el infinito nulo por estos datos iniciales (ver la discusión en [53]).

Consideremos ahora algunos aspectos acerca de la evolución de estos datos. En el caso asintóticamente plano, es bien sabido que el comportamiento en infinito se preserva por la evolución si imponemos las condiciones de decaimiento apropiadas para el lapso y el shift. Por supuesto que esto es importante, ya que está relacionado a la conservación de la masa total del espaciotiempo. La pregunta natural es si este tipo de persistencia ante la evolución también se observa para el final cilíndrico. Para estudiar esta cuestión necesitamos datos no estacionarios como los construidos aquí.

Consideremos un miembro de la familia para algún  $\lambda \neq 0$  (omitiremos el  $\lambda$  en la notación en lo que sigue). Tomemos un corto período de tiempo  $t$ , entonces tenemos

$$\tilde{h}_{ab}(t) \approx \tilde{h}_{ab}(0) + \dot{\tilde{h}}_{ab}(0)t \quad (5.13)$$

$$\tilde{K}_{ab}(t) \approx \tilde{K}_{ab}(0) + \dot{\tilde{K}}_{ab}t, \quad (5.14)$$

donde el punto denota derivada temporal. Las derivadas temporales  $\dot{\tilde{h}}_{ab}$ ,  $\dot{\tilde{K}}_{ab}$  se pueden calcular usando las ecuaciones de evolución

$$\dot{\tilde{h}}_{ab} = 2\alpha\tilde{K}_{ab} + \mathcal{L}_\beta\tilde{h}_{ab}, \quad (5.15)$$

$$\dot{\tilde{K}}_{ab} = \nabla_a\nabla_b\alpha + \mathcal{L}_\beta\tilde{K}_{ab} + \alpha(2\tilde{K}_a^c\tilde{K}_{bc} - \tilde{K}\tilde{K}_{ab} - \tilde{R}_{ab}), \quad (5.16)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta^a$  son el lapso y shift de la foliación,  $\mathcal{L}$  denota la derivada de Lie y  $\tilde{R}_{ab}$  es el tensor de Ricci de  $\tilde{h}_{ab}$ . Si queremos preservar la geometría cilíndrica en la evolución, debemos tener

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \dot{\tilde{h}}_{ab} = 0, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \dot{\tilde{K}}_{ab} = 0. \quad (5.17)$$

A partir de las ecuaciones (5.15)–(5.16) deducimos las siguientes condiciones para el lapso

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \alpha = \lim_{s \rightarrow \infty} \partial\alpha = \lim_{s \rightarrow \infty} \partial^2\alpha = 0 \quad (5.18)$$

y el shift

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \beta^a = \lim_{s \rightarrow \infty} \partial\beta^a = 0, \quad (5.19)$$

donde  $\partial$  denota derivadas parciales con respecto a las coordenadas espaciales. Notemos que para la foliación particular de Boyer-Lindquist de Kerr extremo, estos requisitos son satisfechos (ver las ecuaciones (2.60)–(2.61) en la sección 2.4.3). Las condiciones (5.18) y (5.19) son análogas a las condiciones asintóticamente planas para el lapso y el shift.

En este capítulo hemos supuesto vacío por simplicidad. Esperamos que un resultado análogo al teorema (5.1) valga para el agujero negro de Kerr-Newman. En este caso, la desigualdad (5.11) debería reemplazarse por la versión generalizada a carga, probada recientemente [41], [45].

### 5.3. Prueba del resultado principal

Una característica particular de simetría axial es que nos permite reducir las ecuaciones de vínculo a solamente una ecuación escalar para el factor conforme (la llamada ecuación de Lichnerowicz). Este procedimiento es bien conocido (ver, por ejemplo, [54] y sus referencias). Repasémoslo brevemente. Consideremos la métrica

$$h_{ab} = e^{-2q}(dr^2 + r^2d\theta^2) + r^2\sin^2\theta d\phi^2, \quad (5.20)$$

donde  $q = q(r, \theta)$  es una función arbitraria. Esta métrica será usada como un fondo conforme para la métrica física  $\tilde{h}_{ab}$ . Primero discutimos cómo construir soluciones del vínculo de momento a partir de un potencial axialmente

simétrico arbitrario  $\omega(r, \theta)$ . Consideremos el siguiente tensor

$$K^{ab} = \frac{2}{\rho^2} S^{(a} \eta^{b)}, \quad (5.21)$$

donde

$$S^a = \frac{1}{2\rho^2} \epsilon^{abc} \eta_b \partial_c \omega, \quad (5.22)$$

y  $\epsilon_{abc}$  denota el elemento de volumen con respecto a  $h_{ab}$ ,  $D$  es la conexión con respecto a  $h_{ab}$  y  $\rho = r \sin \theta$  es el radio cilíndrico. Los índices sobre cantidades no tildadas se mueven con  $h_{ab}$  y su inversa  $h^{ab}$ . El tensor  $K^{ab}$  es simétrico, sin traza, y satisface la siguiente ecuación (ver, por ejemplo el apéndice en [47])

$$D_a K^{ab} = 0, \quad (5.23)$$

para  $g$  y  $\omega$  arbitrarios. La ecuación (5.23) esencialmente resuelve (a menos de un factor conforme) el vínculo de momento. Supongamos que tenemos una solución  $\Phi$  de la ecuación de Lichnerowicz

$$\Delta_h \Phi - \frac{R}{8} \Phi = -\frac{K_{ab} K^{ab}}{8\Phi^7}, \quad (5.24)$$

donde  $\Delta_h$  es el Laplaciano con respecto a  $h_{ab}$  y  $R$  es el escalar de Ricci de  $h_{ab}$ . Consideremos el rescaleo

$$\tilde{h}_{ab} = \Phi^4 h_{ab}, \quad \tilde{K}_{ab} = \Phi^{-2} K_{ab}. \quad (5.25)$$

Luego, como consecuencia de (5.23) el par  $(\tilde{h}_{ab}, \tilde{K}_{ab})$  satisface los vínculos. Es decir, el problema se reduce a resolver la ecuación (5.24). Esta ecuación se puede escribir de la siguiente manera remarcablemente simple en simetría axial:

$$\Delta \Phi = -\frac{(\partial \omega)^2}{16\rho^4 \Phi^7} - \frac{\Delta_2 q}{4} \Phi, \quad (5.26)$$

donde,  $\Delta$  y  $\Delta_2$  son los operadores de Laplace planos en tres y dos dimensiones respectivamente (ver (5.92)).

Para resolver la ecuación (5.26) necesitamos imponer condiciones de contorno apropiadas. En nuestro caso, estas son condiciones asintóticamente planas en infinito (es decir, en el límite  $r \rightarrow \infty$ ) y condiciones en el origen que representen el final cilíndrico. Ambas condiciones serán incorporadas en la definición del espacio de Sobolev pesado usado en la prueba del teorema 5.2.1 como se explicará más adelante

En particular, el dato inicial de Kerr extremo satisface esta ecuación, es decir

$$\Delta \Phi_0 = -\frac{(\partial \omega_0)^2}{16\rho^4 \Phi_0^7} - \frac{\Delta_2 q_0}{4} \Phi_0. \quad (5.27)$$

La idea es perturbar la ecuación (5.26) alrededor de la solución de Kerr extremo tomando

$$q_0 + \lambda q, \quad \omega_0 + \lambda \omega, \quad (5.28)$$

para ciertas funciones fijas  $q$  y  $\omega$  y pequeño  $\lambda$ , y luego encontrar una solución  $u$  definida por

$$\Phi = \Phi_0 + u. \quad (5.29)$$

Insertando (5.28) y (5.29) en la ecuación (5.26) y usando la ecuación para el dato de Kerr obtenemos nuestra ecuación final

$$G(\lambda, u) = 0, \quad (5.30)$$

donde hemos definido

$$G(\lambda, u) = \Delta u + \frac{(\partial w_0 + \lambda \partial w)^2}{16\rho^4(\Phi_0 + u)^7} - \frac{\partial w_0^2}{16\rho^4\Phi_0^7} + \lambda \frac{\Delta_2 q}{4}(\Phi_0 + u) + \frac{\Delta_2 q_0}{4}u. \quad (5.31)$$

Luego, el teorema 5.2.1 es una consecuencia directa del siguiente teorema de existencia para la ecuación (5.30).

**Teorema 5.3.1.** *Sea  $w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma)$  y  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ . Entonces, existe  $\lambda_0 > 0$  tal que para todo  $\lambda \in (-\lambda_0, \lambda_0)$  existe una solución  $u(\lambda) \in H_{-1/2}^2$  de la ecuación (5.30). La solución  $u(\lambda)$  es continuamente diferenciable en  $\lambda$  y satisface  $\Phi_0 + u(\lambda) > 0$ . Más aún, para pequeño  $\lambda$  y pequeño  $u$  (en la norma  $H_{-1/2}^2$ ) la solución  $u(\lambda)$  es la única solución de la ecuación (5.30).*

Hemos usado la siguiente notación:  $\Gamma$  denota el eje  $\rho = 0$ ,  $C_0^\infty(\Omega)$  son funciones suaves con soporte compacto en  $\Omega$  y  $H_{-1/2}^2$  denota los espacios de Sobolev pesados definidos en el apéndice A.

Analicemos ahora de qué manera este teorema prueba el teorema presentado en la sección 5.2. El teorema 5.3.1 provee la existencia de la solución perturbada, lo que prueba directamente el ítem (I) del teorema 5.2.1. La norma mencionada allí es la norma para el espacio de Sobolev pesado,  $H_{-1/2}^2$ . Por construcción, la solución obtenida es axialmente simétrica. También es maximal, ya que el tensor  $K_{ab}^0$  no posee traza. Esto prueba el ítem (iii). Para probar el ítem (ii) notamos que por hipótesis, la perturbación  $\omega$  se anula en el eje, y por lo tanto, el momento angular de la familia de datos iniciales es el mismo que en el dato de Kerr extremo no perturbado. La perturbación  $u$  pertenece al espacio de Sobolev  $H_{-1/2}^2$  y por lo tanto (ver lema 5.4.1) se comporta en el infinito y el origen como  $o(r^{-1/2})$ . El decaimiento de  $u$  a medida que  $r \rightarrow \infty$  asegura que la perturbación es asintóticamente plana en infinito. Notemos que la perturbación cambia la masa del dato con respecto

a la de Kerr extremo, debido a que esta condición de decaimiento permite un término de orden  $O(r^{-1})$  no cero para  $u$ . Por otro lado, el comportamiento de  $u$  en el origen garantiza que no se modifica la geometría cilíndrica del dato inicial de Kerr extremo, ya que posee una tasa de decaimiento más fuerte en ese final. Recordemos que para el factor conforme no perturbado tenemos  $\lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{r} \Phi_0 = g(\theta) > 0$  (ver la ecuación (5.88)). En particular, el área del final cilíndrico (que está determinada por la integral de la función  $g(\theta)$ ), es preservada por la perturbación. Esto es, el área del final cilíndrico no depende de  $\lambda$ .

*Demostración.* La demostración se basa en el teorema de la Función Implícita (ver el apéndice B, en el resto de la prueba seguiremos la notación introducida en esa sección) para el mapa  $G$  definido en la ecuación (5.31). La prueba se divide en dos pasos.

En el primer paso encontramos los espacios de Banach apropiados  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  requeridos por el teorema B.0.7, junto con las vecindades  $U \subset X$  y  $V \subset Y$ , tales que  $G : V \times U \rightarrow Z$  define un mapa  $C^1$ . La parte delicada de este paso es tomar en cuenta en la definición de los espacios de Banach, el decaimiento en infinito y el comportamiento singular en el origen de las funciones de fondo  $\Phi_0$ ,  $q_0$  y  $\omega_0$ . En particular, es claro a partir de la ecuación, que no podemos esperar que la solución  $u$  sea regular en el origen, y por ende, los espacios de Sobolev standard no son apropiados. Además, la presencia de las funciones de fondo singulares  $\Phi_0$ ,  $q_0$  y  $\omega_0$  en el mapa  $G$  nos previene de usar teoremas standard (por ejemplo la regla de la cadena en espacios de Sobolev) para probar que  $G$  es  $C^1$ . Necesitamos calcular explícitamente las derivadas parciales funcionales a partir de sus definiciones como límites. Esto hace que esta parte de la prueba sea laboriosa. El comportamiento asintótico de las funciones de Kerr de fondo es típico de cualquier dato con un final asintóticamente plano y uno cilíndrico, y es el ingrediente principal que necesitamos en este paso.

En el segundo paso probamos que la derivada  $D_2G(0, 0)$  es un isomorfismo entre  $Y$  y  $Z$ . En esta parte usamos propiedades muy específicas del dato inicial de Kerr extremo (es decir, el lema 5.5.1) que no son válidas para datos genéricos. Ver el comentario después de la prueba del lema 5.5.1. Este paso representa la parte clave de la prueba.

**Paso 1.** Para manejar el decaimiento en infinito y el comportamiento singular en el origen de las funciones  $\Phi_0$ ,  $q_0$  y  $\omega_0$  usaremos los espacios de Sobolev pesados definidos en el apéndice A. Elegimos  $X = \mathbb{R}$ ,  $Y = H_{-1/2}^2$  y  $Z = L_{-5/2}^2$ . También elegimos  $U = \mathbb{R}$ . Es claro que el mapa  $G$  sólo está bien definido cuando  $\Phi_0 + u > 0$ . Por lo tanto, necesitamos encontrar una vecindad apropiada  $V$  de 0 en el espacio de Banach  $Y$  tal que esta condición

se satisface. Consideremos  $V$  dado por la bola abierta

$$\|u\|_{H'^2_{-1/2}} < \xi, \quad (5.32)$$

donde la constante  $\xi$  se calcula como sigue. A partir del lema 5.4.1 tenemos que para  $u \in V$

$$\sqrt{r}|u| \leq C_0\xi, \quad (5.33)$$

donde la constante  $C_0$  es una constante de Sobolev independiente de  $u$ . Por el lema 5.5.2 tenemos

$$\sqrt{r}\Phi_0 \geq \sqrt{m}. \quad (5.34)$$

Luego, si escogemos  $\xi$  tal que

$$\frac{\sqrt{m}}{C_0} > \xi > 0, \quad (5.35)$$

tenemos que para todo  $u \in V$

$$\sqrt{r}(\Phi_0 + u) \geq \sqrt{m} - C_0\xi > 0. \quad (5.36)$$

La constante  $\xi$  permanecerá fija por el resto de la prueba.

Primero probamos que  $G : \mathbb{R} \times V \rightarrow L'^2_{-5/2}$  está bien definido como mapa. Es decir, necesitamos verificar que para  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $u \in V$  obtenemos  $G(\lambda, u) \in L'^2_{-5/2}$ . Calculemos la norma  $L'^2_{-5/2}$  de  $G(\lambda, u)$ . Usando la definición (5.31) y la desigualdad triangular tenemos

$$\begin{aligned} \|G(\lambda, u)\|_{L'^2_{-5/2}} &\leq \|\Delta u\|_{L'^2_{-5/2}} + \left\| \frac{\lambda \partial \omega (2\partial \omega_0 + \lambda \partial \omega)}{16\rho^4(\Phi_0 + u)^7} \right\|_{L'^2_{-5/2}} + \\ &\quad + \frac{\lambda}{4} \|(\Phi_0 + u)\Delta_2 q\|_{L'^2_{-5/2}} + \\ &\quad + \left\| \frac{(\partial \omega_0)^2}{16\rho^4} \left[ \frac{1}{(\Phi_0 + u)^7} - \frac{1}{\Phi_0^7} \right] \right\|_{L'^2_{-5/2}} + \frac{1}{4} \|u\Delta_2 q_0\|_{L'^2_{-5/2}}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

A partir de la definición de la norma  $H'^2_{-1/2}$  es claro que el primer término en el lado derecho de (5.37) es acotado. Para los términos segundo y tercero usamos la hipótesis de que  $\omega$  tiene soporte compacto afuera del eje y  $q$  soporte compacto afuera del origen, junto con la cota inferior (5.36), para concluir que estos términos también son acotados. Los términos delicados son los últimos dos.

Para el cuarto término procedemos de la siguiente manera. Usando la siguiente identidad elemental para números reales  $a$  y  $b$

$$\frac{1}{a^p} - \frac{1}{b^p} = (b - a) \sum_{i=0}^{p-1} a^{i-p} b^{-1-i} \quad (5.38)$$

encontramos que

$$r^{-4} \left( \frac{1}{\Phi_0^7} - \frac{1}{(\Phi_0 + u)^7} \right) = uH, \quad (5.39)$$

donde  $H$  está dado por

$$H = \sum_{i=0}^6 (\sqrt{r}(\Phi_0 + u))^{i-7} (\sqrt{r}\Phi_0)^{-1-i}. \quad (5.40)$$

Usando las desigualdades (5.34) y (5.36) obtenemos

$$H \leq C, \quad (5.41)$$

donde la constante  $C$  depende sólo del parámetro de masa  $m$  de la solución de fondo de Kerr extremo. En lo que sigue denotaremos genéricamente por  $C$  a las constantes que dependen a lo sumo de  $m$ . Entonces tenemos

$$\left\| \frac{(\partial\omega_0)^2}{\rho^4} \left[ \frac{1}{(\Phi_0 + u)^7} - \frac{1}{\Phi_0^7} \right] \right\|_{L^2_{-5/2}} \leq \left\| \frac{C}{r^6} (r^4 u H) \right\|_{L^2_{-5/2}} \quad (5.42)$$

$$= C \|u\|_{L^2_{-1/2}} \leq C \|u\|_{H^2_{-1/2}}, \quad (5.43)$$

donde hemos usado la cota (5.98) en el lema 5.5.2 para acotar el factor con  $\omega_0$  en la primera desigualdad en (5.42). La última desigualdad en (5.42) se deduce de la definición del espacio de Sobolev pesado  $H^2_{-1/2}$ .

Para el quinto término, que involucra  $q_0$ , usamos la cota (5.99) en el lema 5.5.2, para encontrar

$$\|u\Delta_2 q_0\|_{L^2_{-5/2}} \leq C \left\| \frac{u}{r^2} \right\|_{L^2_{-5/2}} = C \|u\|_{L^2_{-1/2}} \leq C \|u\|_{H^2_{-1/2}}. \quad (5.44)$$

Estos cálculos muestran que todas las normas involucradas en  $\|G(\lambda, u)\|_{L^2_{-5/2}}$  son finitas, y por lo tanto  $G : \mathbb{R} \times V \rightarrow L^2_{-5/2}$  es un mapa bien definido.

Ahora probaremos que  $G$  es  $C^1$  entre los espacios de Sobolev mencionados. Denotemos por  $D_1G(\lambda, u)$  la derivada parcial de Fréchet de  $G$  con respecto al primer argumento evaluada en  $(\lambda, u)$  y por  $D_2G(\lambda, u)$  la derivada parcial con respecto al segundo argumento. Por definición, las derivadas parciales son operadores lineales entre los siguientes espacios

$$D_1G(\lambda, u) : \mathbb{R} \rightarrow L^2_{-5/2}, \quad (5.45)$$

$$D_2G(\lambda, u) : H^2_{-1/2} \rightarrow L^2_{-5/2}. \quad (5.46)$$

Usamos la notación  $D_1G(\lambda, u)[\gamma]$  para denotar el operador  $D_1G(\lambda, u)$  actuando sobre  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Es decir,  $D_1G(\lambda, u)[\gamma]$  define una función sobre  $L^2_{-5/2}$ . Del

mismo modo denotamos por  $D_2G(\lambda, u)[v]$  al operador actuando sobre una función  $v \in H_{-1/2}^2$ .

Proponemos como candidatos para estas derivadas parciales los siguientes operadores lineales

$$D_1G(\lambda, u)[\gamma] = \left( \frac{2(\partial w_0 + \lambda \partial w) \cdot \partial w}{16\rho^4(\Phi_0 + u)^7} + \frac{\Delta_2 q}{4}(\Phi_0 + u) \right) \gamma, \quad (5.47)$$

$$D_2G(\lambda, u)[v] = \Delta v + \left( -\frac{7(\partial w_0 + \lambda \partial w)^2}{16\rho^4(\Phi_0 + u)^8} + \lambda \frac{\Delta_2 q}{4} + \frac{\Delta_2 q_0}{4} \right) v. \quad (5.48)$$

Estos operadores surgen al tomar formalmente las siguientes derivadas direccionales al mapa  $G$

$$\frac{d}{dt}G(\lambda + t\gamma, u)|_{t=0} = D_1G(\lambda, u)[\gamma], \quad (5.49)$$

$$\frac{d}{dt}G(\lambda, u + tv)|_{t=0} = D_2G(\lambda, u)[v]. \quad (5.50)$$

Para probar que el mapa  $G : \mathbb{R} \times V \rightarrow Z$  es  $C^1$  necesitamos probar los siguientes items:

(a) Los operadores lineales (5.47) y (5.48) son acotados, es decir

$$\|D_1G(\lambda, u)[\gamma]\|_{L_{-5/2}^2} \leq C_1 |\gamma|, \quad (5.51)$$

$$\|D_2G(\lambda, u)[v]\|_{L_{-5/2}^2} \leq C_2 \|v\|_{H_{-1/2}^2}, \quad (5.52)$$

donde las constantes  $C_1$  y  $C_2$  no dependen de  $\gamma$  ni  $v$  respectivamente.

(b) Los operadores (5.47) y (5.48) son continuos en  $(\lambda, u)$  con respecto a las normas operador. Es decir, para cada  $\delta > 0$  existe  $\epsilon > 0$  tal que

$$|\lambda_1 - \lambda_2| < \epsilon \Rightarrow \|D_1G(\lambda_1, u) - D_1G(\lambda_2, u)\|_{\mathcal{L}(X, Z)} < \delta, \quad (5.53)$$

y

$$\|u_1 - u_2\|_{H_{-1/2}^2} < \epsilon \Rightarrow \|D_1G(\lambda, u_1) - D_1G(\lambda, u_2)\|_{\mathcal{L}(Y, Z)} < \delta, \quad (5.54)$$

donde las normas operador usadas en el lado derecho de estas desigualdades están definidas en el apéndice B.

(c) Los operadores (5.47) y (5.48) son las derivadas parciales de Fréchet de  $G$  (ver la definición en el apéndice B). Esto es

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\|G(\lambda + \gamma, u) - G(\lambda, u) - D_1G(\lambda, u)[\gamma]\|_{L_{-5/2}^2}}{|\gamma|} = 0, \quad (5.55)$$

y

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\|G(\lambda, u+v) - G(\lambda, u) - D_2G(\lambda, u)[v]\|_{L'^2_{-5/2}}}{\|v\|_{H'^2_{-1/2}}} = 0. \quad (5.56)$$

Realizando cálculos similares a los anteriores es directo probar (a) y también la siguiente estimación

$$\|D_1G(\lambda_1, u) - D_1G(\lambda_2, u)\|_{L'^2_{-5/2}} \leq C|\lambda_1 - \lambda_2|, \quad (5.57)$$

donde  $C$  no depende de  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ . A partir de la desigualdad (5.57) se deduce la continuidad con respecto a  $\lambda$ , ecuación (5.53) del item (b). De hecho, la estimación (5.57) es un poco más fuerte porque da continuidad uniforme.

La continuidad en la dirección de  $u$  es más delicada. Usando nuevamente la identidad (5.38) tenemos

$$r^{-9/2} \left( \frac{1}{(\Phi_0 + u_1)} - \frac{1}{(\Phi_0 + u_2)} \right) = (u_2 - u_1)H, \quad (5.58)$$

donde

$$H = \sum_{i=0}^7 (\sqrt{r}(\Phi_0 + u_1))^{i-8} (\sqrt{r}(\Phi_0 + u_2))^{-1-i}. \quad (5.59)$$

Usando que  $u_1, u_2 \in V$  y la cota inferior (5.36) obtenemos

$$H \leq C. \quad (5.60)$$

Usamos la cota superior (5.98), junto con (5.60) para encontrar

$$\|D_1G(\lambda, u_1) - D_1G(\lambda_2, u_2)\|_{L'^2_{-5/2}} \leq C \left\| \frac{v(u_1 - u_2)}{r^{3/2}} \right\|_{L'^2_{-5/2}}. \quad (5.61)$$

Acotamos el lado derecho de (5.61) de la siguiente manera

$$\left\| \frac{v(u_1 - u_2)}{r^{3/2}} \right\|_{L'^2_{-5/2}} = \left( \int_{\mathbb{R}^3} \frac{v^2(u_1 - u_2)^2}{r} dx \right)^{1/2}, \quad (5.62)$$

$$= \left( \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(\sqrt{r}v)^2(u_1 - u_2)^2}{r^2} dx \right)^{1/2} \quad (5.63)$$

$$\leq C \|v\|_{H'^2_{-1/2}} \left( \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(u_1 - u_2)^2}{r^2} dx \right)^{1/2} \quad (5.64)$$

$$\leq C \|v\|_{H'^2_{-1/2}} \|u_1 - u_2\|_{H'^2_{-1/2}}. \quad (5.65)$$

La ecuación (5.62) es solamente la definición de la norma  $L_{-5/2}^2$  y la ecuación (5.63) es un arreglo trivial de factores. La desigualdad crucial es (5.64) donde hemos usado el lema 5.4.1. Finalmente, la línea (5.65) sigue de la definición de las normas  $H_{-1/2}^2$ . Por ende, obtenemos nuestra desigualdad final

$$\|D_1G(\lambda, u_1) - D_1G(\lambda_2, u_2)\|_{L_{-5/2}^2} \leq C \|v\|_{H_{-1/2}^2} \|u_1 - u_2\|_{H_{-1/2}^2}. \quad (5.66)$$

A partir de esta desigualdad, se sigue la continuidad (5.54).

Ahora probamos (c). El primer límite (5.55) es directo. La parte delicada es el segundo límite (5.56). Seguimos un argumento similar al del cálculo anterior. Primero calculamos

$$G(\lambda, u + v) - G(\lambda, u) - D_2G(\lambda, u)[v] = \frac{(\partial\omega_0 + \lambda\partial\omega)^2}{16\rho^4} \left( \frac{1}{(\Phi_0 + u + v)^7} - \frac{1}{(\Phi_0 + u)^7} + \frac{7v}{(\Phi_0 + u)^8} \right). \quad (5.67)$$

Tenemos

$$r^{-9/2} \left( \frac{1}{(\Phi_0 + u + v)^7} - \frac{1}{(\Phi_0 + u)^7} + \frac{7v}{(\Phi_0 + u)^8} \right) = v^2 H, \quad (5.68)$$

con

$$H = \frac{1}{(\sqrt{r}(\Phi_0 + u + v))^7 (\sqrt{r}(\Phi_0 + u))^8} \sum_{\substack{i+j+k=6 \\ i,j,k \geq 0}} C_{ijk} (\sqrt{r}\Phi_0)^i (\sqrt{r}u)^j (\sqrt{r}v)^k, \quad (5.69)$$

donde  $C_{ijk}$  son constantes numéricas. Para acotar  $H$  usamos las cotas superior e inferior para  $\Phi_0$  dadas por (5.97) y el hecho de que  $u, v \in V$  (y por tanto satisfacen la cota (5.33)). Obtenemos

$$|H| \leq C \frac{(r+m)^{6/2}}{(\sqrt{(r+m)} - C_0\xi)^{15}} \leq C. \quad (5.70)$$

Luego tenemos

$$\|G(\lambda, u + v) - G(\lambda, u) - D_2G(\lambda, u)[v]\|_{L_{-5/2}^2} \leq C \left\| \frac{r^{9/2} v^2 H}{r^6} \right\|_{L_{-5/2}^2}, \quad (5.71)$$

$$= \left\| \frac{v^2}{r^{3/2}} \right\|_{L_{-5/2}^2}. \quad (5.72)$$

Usando el mismo argumento que empleamos en las ecuaciones (5.62)–(5.65) finalmente obtenemos la estimación deseada

$$\|G(\lambda, u + v) - G(\lambda, u) - D_2G(\lambda, u)[v]\|_{L_{-5/2}^2} \leq C \left( \|v\|_{H_{-1/2}^2} \right)^2. \quad (5.73)$$

De (5.73) se deduce (5.56).

*Paso 2.* Probaremos que  $D_2G(0, 0) : H_{-1/2}'^2 \rightarrow L_{-5/2}'^2$  es un isomorfismo. Escribimos este operador lineal de la siguiente forma

$$D_2G(0, 0)[v] = \Delta v - \alpha v, \quad (5.74)$$

donde

$$\alpha = 7 \frac{(\partial\omega_0)^2}{16\rho^4\Phi_0^8} - \frac{\Delta_2 q_0}{4}. \quad (5.75)$$

Por el lema 5.5.1 tenemos que  $\alpha = hr^{-2}$  donde  $h$  es una función positiva y acotada en  $\mathbb{R}^3$ . En el capítulo anterior se ha probado que bajo tales condiciones para  $\alpha$  el mapa (5.74) es un isomorfismo entre  $H_{-1/2}'^2$  y  $L_{-5/2}'^2$ .

Hemos satisfecho todas las hipótesis del Teorema de la Función Implícita. Entonces, existe una vecindad  $W = (-\lambda_0, \lambda_0)$  del origen en  $\mathbb{R}$  tal que vale la conclusión del teorema 5.3.1.  $\square$

**Comentarios:** Hemos impuesto a las funciones perturbativas  $\omega$  y  $q$  que tengan soporte compacto. Esto se puede relajar demandando un comportamiento apropiado en el eje y en el origen.

Los datos axialmente simétricos considerados aquí no son los más generales, ya que estamos suponiendo, en la forma de la métrica (5.20) que el vector de Killing axial es hipersuperficie ortogonal a la superficie  $\mathcal{S}$  (pero, por supuesto, tiene twist no cero en el espaciotiempo). Esta simplificación nos permite usar la expresión explícita (5.21) para la segunda forma fundamental, y esperamos que este resultado se pueda generalizar sin esta suposición. Sin embargo, es importante enfatizar que dado un dato como el construido en este teorema, la evolución temporal descrita en la sección 5.2, bajo las condiciones para el lapso y el shift (5.18)–(5.19), desarrollarán datos iniciales con esta misma geometría asintótica para los cuales el vector de Killing no es superficie ortogonal. Y por lo tanto, obtenemos a partir de nuestra familia, datos iniciales no triviales para los cuales el vector de Killing no es hipersuperficie ortogonal.

## 5.4. Decaimiento en espacios de Sobolev pesados

Los espacios pesados de Sobolev de Bartnik  $W_\delta^{k,p}$  [13], definidos en el apéndice A y usados a lo largo de toda la tesis son apropiados para estudiar geometrías con un final cilíndrico y uno asintóticamente plano ya que tienen pesos tanto en el infinito como en el origen.

En este trabajo solamente usamos los casos  $n = 3$  y  $p = 2$ , que han sido denotados como  $H_\delta^k = W_\delta^{k,2}$  y las normas correspondientes como  $\|f\|_{L_\delta^2} = \|f\|'_{2,\delta}$  and  $\|f\|_{H_\delta^k} = \|f\|'_{k,2,\delta}$ .

El siguiente lema juega un rol fundamental en la prueba del teorema 5.3.1 y en otros puntos de la tesis, ya que establece que si una función  $u$  pertenece al espacio  $H_\delta^2$ , entonces  $u = o(r^{-\delta})$  en el origen y en infinito. Más generalmente tenemos el siguiente resultado.

**Lema 5.4.1.** *Supongamos que  $u \in W_\delta^{k,p}$  con  $n - kp < 0$ , entonces tenemos la siguiente estimación*

$$r^{-\delta}|u| \leq C \|u\|'_{k,p,\delta}. \quad (5.76)$$

Más aún, tenemos

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^{-\delta}|u| = \lim_{r \rightarrow \infty} r^{-\delta}|u| = 0. \quad (5.77)$$

Usaremos este lema sólo para el caso particular  $p = 2$ ,  $n = 3$ ,  $k = 2$  y  $\delta = -1/2$ , sin embargo, presentamos la demostración para el caso general debido a que puede poseer otras aplicaciones.

*Demostración.* Esta prueba está adaptada de [13], Teorema 1.2, donde el planteo se realiza para espacios pesados solamente en infinito (es decir, espacios  $W_\delta^{k,p}$  en la notación de [13] y del apéndice A en esta tesis).

Sea  $B_R$  la bola de radio  $R$  centrada en el origen, y sea  $A_R$  el anillo  $A_R = B_{2R} \setminus B_R$ . Definimos la función rescaleada

$$u_R(x) := u(Rx). \quad (5.78)$$

Luego, la propiedad fundamental de rescaleo de los espacios  $W_\delta^{k,p}$  (cf. ecuación luego de la ecuación (1.3) en [13]) está dada por

$$\|u_R\|_{k,p,\delta;A_1} = R^\delta \|u\|_{k,p,\delta;A_R}, \quad (5.79)$$

donde hemos usado la misma notación que [13] para normas sobre subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ .

Tenemos

$$\sup_{A_R} r^{-\delta}|u| = \sup_{A_1} R^{-\delta} r^{-\delta}|u_R|, \quad (5.80)$$

$$\leq CR^{-\delta} \|r^{-\delta} u_R\|_{k,p;A_1}, \quad (5.81)$$

$$\leq CR^{-\delta} \|u_R\|'_{k,p,\delta;A_1}, \quad (5.82)$$

$$= C \|u\|'_{k,p,\delta;A_R}. \quad (5.83)$$

La línea (5.80) es un cambio trivial de coordenadas. Para la desigualdad (5.81) hemos usado la estimación de Sobolev standard sobre el dominio

acotado  $A_1$ , que es válida para  $n - kp < 0$ . Hemos denotado la norma de Sobolev estandar sobre un dominio  $\Omega$  por  $\|\cdot\|_{k,p;\Omega}$ . Es importante notar que la constante  $C$  no depende de  $R$ , ya que el dominio  $A_1$  tampoco lo hace. La desigualdad en (5.82) se deduce del hecho de que sobre el dominio  $A_1$  las dos normas (estandar y pesada) son equivalentes. Finalmente, en (5.83) aplicamos la propiedad de rescado (5.79).

Consideremos el conjunto de anillos  $A_{2^j}$  y definimos  $u_j = u|_{A_{2^j}}$ . Es claro que

$$u = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j. \quad (5.84)$$

Luego, usamos la estimación (5.80) sobre  $A_{2^j}$  y sumamos sobre todos los  $j$

$$(\sup r^{-\delta}|u|)^p \leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} (\sup r^{-\delta}|u_j|)^p \leq C \sum_{j=-\infty}^{\infty} \|u_j\|_{k,p,\delta}^p, \quad (5.85)$$

$$= C \|u\|_{k,p,\delta}^p. \quad (5.86)$$

lo que prueba (5.76).

Para probar (5.77) observamos que la suma  $\sum_{j=-\infty}^{\infty} (\sup r^{-\delta}|u_j|)^p$  es una suma infinita de números reales positivos que es acotada, por lo tanto, en el límite debemos tener

$$\lim_{j \rightarrow \pm\infty} (\sup r^{-\delta}|u_j|) = 0, \quad (5.87)$$

lo que es equivalente a (5.77).  $\square$

## 5.5. Propiedades del dato inicial de Kerr extremo

En esta última sección probaremos algunas propiedades del dato inicial de Kerr extremo que son de gran utilidad en la prueba del teorema 5.3.1. Debido a que la solución de Kerr se conoce explícitamente, las siguientes propiedades podrían, en principio verificarse mediante el cálculo directo. Sin embargo, en el lema 5.5.1, resulta conveniente apelar a otras técnicas ya que los cálculos se tornan demasiado laboriosos.

Como nos interesa obtener propiedades del dato de Kerr extremo en el final cilíndrico, es decir, cuando  $r \rightarrow 0$ , observemos el límite asintótico, hacia

dicho final para las siguientes funciones.

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{r} \Phi_0 = \left( \frac{4m^2}{1 + \cos^2 \theta} \right)^{1/4}, \quad (5.88)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} e^{2q_0} = \left( \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right)^2, \quad (5.89)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \omega_0 = -\frac{8J \cos \theta}{1 + \cos^2 \theta}, \quad (5.90)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} R = \frac{2 \sin^2 \theta}{m^2 (1 + \cos^2 \theta)^3}. \quad (5.91)$$

donde  $R$  es el escalar de Ricci de la métrica  $h_{ab}$  definida en 5.1, y las demás funciones fueron introducidas en la sección 5.2. En lo que sigue, usamos  $\Delta$  para denotar el operador de Laplace plano en tres dimensiones, y el operador de Laplace 2-dimensional  $\Delta_2$  está dado por

$$\Delta_2 = \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r) + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2. \quad (5.92)$$

El siguiente lema juega un papel crucial en la prueba del teorema 5.3.1.

**Lema 5.5.1.** *Sean  $q_0$  y  $\Phi_0$  dados por (5.2) y  $\omega_0$  por (5.3). Entonces la función  $\alpha$  definida en (5.75), tiene la forma  $\alpha = hr^{-2}$  donde  $h \geq 0$  y  $h$  es acotado en  $\mathbb{R}^3$ .*

*Demostración.* A partir del vínculo Hamiltoniano

$$-\frac{\Delta_2 q_0}{4} = \frac{\Delta \Phi_0}{\Phi_0} + \frac{(\partial \omega_0)^2}{16\eta^2} \quad (5.93)$$

y la ecuación de estacionaridad satisfecha por el dato inicial de Kerr extremo (ver [9])

$$\frac{\Delta \Phi_0}{\Phi_0} = -\frac{(\partial \omega_0)^2}{4\eta^2} + \frac{(\partial \Phi_0)^2}{\Phi_0^2} \quad (5.94)$$

obtenemos

$$-\frac{\Delta_2 q_0}{4} = -\frac{3}{16} \frac{(\partial \omega_0)^2}{\eta^2} + \frac{(\partial \Phi_0)^2}{\Phi_0^2}. \quad (5.95)$$

Entonces

$$\alpha = \frac{(\partial \omega_0)^2}{4\eta^2} + \frac{(\partial \Phi_0)^2}{\Phi_0^2}, \quad (5.96)$$

que es claramente una cantidad no negativa. Mediante un cálculo explícito se puede ver que  $\alpha$  es de hecho una función estrictamente positiva. Como no

necesitamos esta propiedad para nuestros propósitos, omitimos los detalles. También, por medios explícitos, notamos que  $\alpha$  es  $O(r^{-2})$  en el origen, y  $O(r^{-4})$  en infinito, siendo por otro lado acotada. Por esto debe existir una función positiva  $h$  tal que  $\alpha = hr^{-2}$ .  $\square$

Es importante notar que en la prueba del lema 5.5.1 hemos usado el hecho de que Kerr extremo satisface las ecuaciones de Einstein estacionarias y también que la topología de Kerr extremo nos permite elegir estas coordenadas. En particular, la prueba falla para Kerr no extremo. Ver una discusión similar en [52] al final de la página 6868.

**Lema 5.5.2.** Sean  $\Phi_0$ ,  $q_0$  y  $\omega_0$  definidas por (5.2) y (5.3), y supongamos que  $m > 0$ . Entonces tenemos las siguientes cotas:

$$\sqrt{m} \leq \sqrt{r+m} \leq \sqrt{r}\Phi_0 \leq \sqrt{2}\sqrt{r+m}, \quad (5.97)$$

$$\frac{(\partial\omega_0)^2}{\rho^4} \leq 116\frac{m^4}{r^6}, \quad (5.98)$$

$$|\Delta_2 q_0| \leq \frac{90}{r^2}. \quad (5.99)$$

*Demostración.* La desigualdad (5.97) ha sido probada en [9] (ver las ecuaciones (10) y (12) en esta referencia).

Tenemos

$$(\partial\omega_0)^2 = \frac{4m^4\rho^6 F}{r^8\Sigma^4} \quad (5.100)$$

donde

$$F = 4r^2 a^4 \tilde{r}^2 \sin^2(2\theta) + (3\tilde{r}^4 + a^2\tilde{r}^2 + a^2(\tilde{r}^2 - a^2)\cos^2\theta)^2 \quad (5.101)$$

y  $\tilde{r} = r + m$ . Entonces

$$F \leq 4r^2 a^4 \tilde{r}^2 + (3\tilde{r}^4 + a^2\tilde{r}^2 + a^2\tilde{r}^2)^2 \leq 29(r+a)^8. \quad (5.102)$$

También encontramos, acotando  $\Sigma \geq (r+a)^2$  y  $\rho \leq r$ , que

$$(\partial\omega_0)^2 \leq \frac{4a^4\rho^4 29(r+a)^8}{r^6(r+a)^8} = 116\frac{m^4}{r^2}. \quad (5.103)$$

Finalmente, usando las expresiones explícitas para  $\Phi_0$  y  $\omega_0$  se puede verificar, luego de un cálculo laborioso pero directo, la cota sobre  $|\Delta_2 q_0|$ .  $\square$

# Capítulo 6

## Desigualdad entre momento angular y área del horizonte

### 6.1. Introducción

Las desigualdades que involucran cantidades geométricas con interpretación física juegan un rol muy importante en relatividad general. El ejemplo más relevante es el teorema de la positividad de la masa. La masa  $m$  en relatividad general se representa por una cantidad puramente geométrica sobre una variedad Riemanniana masa y mide la cantidad total de energía, y por lo tanto debería ser positiva desde un punto de vista físico.

Para agujeros negros, el primer ejemplo de desigualdad geométrica es la desigualdad de Penrose que relaciona el área del horizonte  $A$  del agujero con la masa total del espaciotiempo

$$\sqrt{\frac{A}{16\pi}} \leq m. \quad (6.1)$$

Otro ejemplo es la desigualdad entre masa y momento angular para agujeros negros axialmente simétricos discutida en la sección 1.2

$$\sqrt{|J|} \leq m, \quad (6.2)$$

y su generalización para incluir cargas. Estas desigualdades están íntimamente relacionadas con la conjetura del censor cósmico. Se pueden interpretar como indicaciones indirectas, pero relevantes de la validez de esta conjetura.

La masa total es una cantidad global, mientras que el área y el momento angular en simetría axial son cantidades cuasi-locales, es decir contienen información acerca de una región acotada del espaciotiempo. Resulta interesante este tipo de desigualdades ya que permiten alcanzar un mayor control sobre la dinámica del agujero negro, con respecto a sus versiones globales.

Con este espíritu, en [59] se formuló la siguiente conjetura:

**Conjetura 6.1.1.** *Considere un conjunto de datos iniciales axialmente simétricos, de vacío, completos y asintóticamente planos para las ecuaciones de Einstein. Entonces vale la siguiente desigualdad*

$$8\pi|J| \leq A, \quad (6.3)$$

donde  $A$  y  $J$  son el área y el momento angular de una componente conexa del horizonte aparente.

En [60] se presentaron evidencias para la validez de la conjetura 6.1.1. Estas evidencias son las siguientes: en una clase particular de datos iniciales, llamados datos iniciales de garganta extremos, la primera variación del área, con momento angular fijo, es cero y la segunda variación es definido positiva evaluada en el dato inicial de garganta extremo de Kerr. Esto indica que el área del dato inicial de garganta extremo de Kerr es un mínimo en esta clase de datos. Como el dato de Kerr extremo satisface la igualdad en (6.3) se deduce que el área de un dato inicial de garganta genérico satisface (6.3). El ingrediente clave para este análisis es una fórmula que relaciona las variaciones del área del dato de garganta extremo con la variación de una funcional de masa apropiadamente definido.

Sin embargo, como se notó en [60], para poder usar estos argumentos para probar la conjetura 6.1.1, hay dos puntos principales que necesitan estudiarse. El primero es el siguiente. Es bien conocido que una segunda variación no negativa es una condición necesaria para un mínimo local pero no es suficiente. Para probar que Kerr extremo es un mínimo local es necesario proveer estimaciones extras de manera similar a [51]. Como se remarcó en [60] se espera que el mismo análisis se aplique a este caso también. Sin embargo, para probar que Kerr extremo es un mínimo global (que es, precisamente lo que necesitamos probar) se necesita un ingrediente diferente, ya que a priori no es claro cómo relacionar el área y la funcional de masa mencionada antes lejos de la solución de Kerr extremo.

El segundo punto es cómo extender el resultado de datos iniciales de garganta extremos para incluir los datos iniciales para agujeros negros asintóticamente planos físicamente relevantes mencionados en la conjetura. En [60] se propone un procedimiento de límite que en principio podría reducir el caso general al caso de garganta extremo. Este procedimiento de límite es similar en espíritu al límite extremo del dato inicial de Kerr extremo. Sin embargo, no es para nada claro cómo construir este límite en general. Un candidato natural sería un dato inicial que esté próximo a Kerr. Pero incluso para esta clase de datos la construcción parece ser difícil.

El propósito de este capítulo es atacar los dos puntos mencionados antes. Para el primero damos una respuesta completa y óptima, es decir, probamos que el dato inicial de garganta extremo de Kerr es un mínimo global en esta clase. En el centro de nuestro argumento yace una desigualdad remarcable que relaciona el área y la funcional de masa para datos iniciales de garganta extremos. Esta desigualdad es la generalización global de los argumentos locales presentados en [60].

Para el segundo punto damos una respuesta parcial. Probamos la conjetura para una clase de datos iniciales que posee varias restricciones técnicas. Sin embargo, a pesar de esto, esta clase es relevante en sí misma. Incluye datos iniciales que poseen una isometría que deja fija una superficie bidimensional. Este tipo de datos pueden describir agujeros negros rotantes distorsionados lejos del equilibrio. Han sido intensamente usados en simulaciones numéricas [21]. La bien conocida familia de datos de Bowen-York [20] es un caso particular, donde la métrica es conformemente plana. Nuestra prueba no yace sobre un procedimiento de límite. Es interesante remarcar que es un argumento puramente local, que usa la fórmula de masa para estimar de manera simple el área de la superficie minimal.

Finalmente, extendemos la validez de la conjetura 6.1.1 para incluir una constante cosmológica positiva (y por lo tanto datos iniciales no asintóticamente planos). Esta generalización es relevante porque existe un contraejemplo a la desigualdad (6.3) para el caso de constante cosmológica negativa, como se mencionó en [19]. Veremos que la inclusión de la constante cosmológica fortalece el rol de un escalar de Ricci no negativo. Por otro lado, resulta interesante físicamente esta inclusión, debido a los resultados que confirman el paradigma cosmológico actual (ver [3] y sus referencias). Esto es, que nuestro universo posee una componente de energía oscura equivalente a una constante cosmológica positiva. La primera indicación de esto se obtuvo cuando se analizaron datos de supernovas y apuntaron a una expansión acelerada del universo. A pesar de que esta constante cosmológica contribuye despreciablemente a la densidad de energía total en el universo temprano, se vuelve el término dominante del tensor de energía tensiones en el futuro.

El plan del capítulo es el siguiente. En la sección 6.2 presentamos nuestro resultado principal, dado por el teorema 6.2.1. También discutimos el alcance del teorema y analizamos ejemplos relevantes. La prueba de este resultado consiste de dos partes principales, explicadas en las secciones 6.3 y 6.4.

El resultado principal de la sección 6.3 es una estimación para el área en términos de la funcional de masa. En la sección 6.4 mencionamos un argumento variacional que establece que el mínimo global de la funcional de masa está dado por el dato inicial de garganta extremo de Kerr.

## 6.2. Resultado principal

Un dato inicial para las ecuaciones de Einstein, con constante cosmológica  $\Lambda$ , consiste de una 3-variedad Riemanniana  $\mathcal{S}$ , junto con sus primera y segunda formas fundamentales,  $\tilde{h}_{ab}$  y  $\tilde{K}_{ab}$  respectivamente, que satisfacen los vínculos de Einstein de vacío en  $\mathcal{S}$

$$\tilde{R} + \tilde{K}^2 - \tilde{K}_{ab}\tilde{K}^{ab} = 2\Lambda, \quad (6.4)$$

$$\tilde{\nabla}^a \tilde{K}_{ab} - \tilde{\nabla}_b \tilde{K} = 0. \quad (6.5)$$

En estas ecuaciones,  $\tilde{K} = \tilde{h}^{ab}\tilde{K}_{ab}$ , El escalar de Ricci  $\tilde{R}$ , las contracciones y las derivadas covariantes se calculan con respecto a  $\tilde{h}_{ab}$ . La presencia de la constante cosmológica  $\Lambda$  permite datos no asintóticamente planos que describen datos de tipo de Sitter ( $\Lambda > 0$ ) o anti-de Sitter ( $\Lambda < 0$ ).

Cuando los datos iniciales son maximales (i.e.  $\tilde{K} = 0$ ) las ecuaciones de vínculo se simplifican considerablemente. En particular, cuando  $\Lambda \geq 0$ , el escalar de curvatura  $\tilde{R}$  es no negativo. La condición  $\tilde{R} \geq 0$  juega un papel crucial en este capítulo.

Los datos iniciales son axialmente simétricos si existe un campo vectorial de Killing axial  $\eta^a$  tal que

$$\mathcal{L}_\eta \tilde{h}_{ab} = 0, \quad \mathcal{L}_\eta \tilde{K}_{ab} = 0, \quad (6.6)$$

donde  $\mathcal{L}$  denota la derivada de Lie. El desarrollo de Cauchy de tal dato será un espaciotiempo axialmente simétrico.

Para una métrica axialmente simétrica, siempre es posible [38] elegir coordenadas locales  $(r, \theta, \phi)$  tales que

$$\tilde{h} = e^\sigma [e^{2q}(dr^2 + r^2 d\theta^2) + r^2 \sin^2 \theta (d\phi + v_r dr + v_\theta d\theta)^2], \quad (6.7)$$

donde  $\sigma, q, v_r$  y  $v_\theta$  son funciones regulares de  $r$  y  $\theta$ . En estas coordenadas, el vector de Killing está dado por

$$\eta^a = (\partial_\phi)^a, \quad (6.8)$$

y el cuadrado de su norma es

$$\eta = \eta^a \eta_a = e^\sigma r^2 \sin^2 \theta. \quad (6.9)$$

Las condiciones de regularidad sobre la métrica  $\tilde{h}$  en el eje  $\Gamma$  implican que

$$q|_\Gamma = 0, \quad (6.10)$$

donde  $\Gamma$  denota el eje polar  $r \sin \theta = 0$ .

El potencial de twist  $\omega$  del campo de Killing axial del espaciotiempo se puede calcular en términos de la segunda forma fundamental  $\tilde{K}_{ab}$  como sigue (ver [54] por detalles). Definimos el vector  $S^a$  por

$$S_a = \tilde{K}_{ab}\eta^b - \eta^{-1}\eta_a\tilde{K}_{bc}\eta^b\eta^c \quad (6.11)$$

luego, definimos  $\tilde{K}_a$  por

$$\tilde{K}_a = \epsilon_{abc}S^b\eta^c \quad (6.12)$$

donde  $\epsilon_{abc}$  es el elemento de volumen con respecto a la métrica plana. En virtud de las ecuaciones de vínculo, el vector  $\tilde{K}_a$  es el gradiente de un campo escalar que es el potencial de twist, es decir

$$\tilde{K}_a = \frac{1}{2}\nabla_a\omega. \quad (6.13)$$

En este capítulo estudiaremos la geometría de superficies  $r = \text{constante}$ . Para estas superficies existen dos cantidades relevantes. La primera es el momento angular. Para datos axialmente simétricos el momento angular  $J$  asociado con una 2-superficie cerrada arbitraria  $\mathcal{N}$  en  $\mathcal{S}$  es una cantidad física bien definida (la integral de Komar del vector de Killing, ver [54] y las referencias allí mencionadas). Entonces se define el momento angular de  $\mathcal{N}$  por la siguiente integral

$$J_{\mathcal{N}} := \oint_{\mathcal{N}} \pi_{ab}\eta^a n^b ds_h, \quad (6.14)$$

donde  $\pi_{ab} = K_{ab} - Kh_{ab}$  y  $n^a$ ,  $ds_h$  son, respectivamente, el vector unitario normal y el elemento de superficie con respecto a  $h_{ab}$ . Debido a las propiedades de la forma  $\pi_{ab}n^b$  en simetría axial, para tener momento angular  $J$  distinto de cero, la variedad  $\mathcal{S}$  debe tener una topología no trivial, por ejemplo, que  $\mathcal{S}$  tenga más de un final. Sea  $\mathcal{N}_{\infty}$  cualquier superficie cerrada en un dado final tal que encierre la correspondiente bola en  $\mathbb{R}^3$ . El momento angular total del final está definido por  $J := J_{\mathcal{N}_{\infty}}$ .

En el caso de datos iniciales de la forma (6.7), el momento angular está determinado por el potencial  $\omega$  de la siguiente manera

$$J = \frac{1}{8}(\omega(r, \theta = \pi) - \omega(r, \theta = 0)). \quad (6.15)$$

La segunda cantidad relevante para este estudio es el área de la superficie. La 2-métrica inducida en tal superficie es

$$\gamma_{ab} = e^{\sigma}r^2 [e^{2q}d\theta^2 + \sin^2\theta(d\phi + v_{\theta}d\theta)^2] \quad (6.16)$$

y, notablemente, su determinante no depende de  $v_\theta$  ni  $v_r$ ,

$$\det(\gamma_{ab}) = e^{2\sigma+2q} r^4 \sin^2 \theta. \quad (6.17)$$

Luego, el área de la superficie  $r = \text{constante}$  está dada por

$$A = \int_{S^2} \sqrt{\det(\gamma_{ab})} d\theta d\phi = \int_{S^2} e^{\sigma+q} r^2 dS = 2\pi r^2 \int_0^\pi e^{\sigma+q} \sin \theta d\theta, \quad (6.18)$$

donde  $dS = \sin \theta d\theta d\phi$  es el elemento de superficie sobre la 2-esfera unidad y en la última igualdad hemos usado la simetría axial.

Otra cantidad geométrica útil es la segunda forma fundamental de la 2-superficie  $\chi_{ij}$  dada por

$$\chi_{ij} = -\gamma_i^k \nabla_k n_j \quad (6.19)$$

donde  $n_i = e^{\sigma/2+q} (dr)_i$  es la normal unitaria a la superficie. La curvatura media de la superficie es un concepto importante en lo que sigue y toma la forma

$$\chi = \chi_i^i = e^{-\sigma/2-q} \left( \partial_r(\sigma + q) + \frac{2}{r} \right), \quad (6.20)$$

La curvatura media  $\chi$  está relacionada con las derivadas radiales del área  $A$  de la siguiente manera. Para la primera derivada tenemos

$$\partial_r A = \int_{S^2} e^{\frac{3}{2}\sigma+2q} r^2 \chi dS, \quad (6.21)$$

y para la segunda derivada,

$$\partial_r^2 A = \int_{S^2} \left[ e^{\frac{3}{2}\sigma+2q} r^2 \partial_r \chi + \chi \partial_r (r^2 e^{\frac{3}{2}\sigma+2q}) \right] dS. \quad (6.22)$$

El caso  $\chi = 0$  será relevante para nuestros propósitos. Para ese caso tenemos

$$\partial_r A = 0, \quad \partial_r^2 A = \int_{S^2} e^{\frac{3}{2}\sigma+2q} r^2 \partial_r \chi dS. \quad (6.23)$$

El siguiente teorema constituye el resultado principal del presente capítulo.

**Teorema 6.2.1.** *Considere datos iniciales maximales, de vacío, axisimétricos, con constante cosmológica no negativa como se describen arriba. Suponga que existe una superficie  $\Sigma = \{r = \text{constante}\}$  donde se satisfacen las siguientes condiciones locales*

$$\chi = 0, \quad (6.24)$$

$$\partial_r \chi \geq 0, \quad (6.25)$$

$$\partial_r q = 0. \quad (6.26)$$

Entonces tenemos

$$8\pi|J| \leq A \quad (6.27)$$

donde  $A$  es el área y  $J$  el momento angular de  $\Sigma$ .

Discutamos las hipótesis de este teorema. El teorema es un resultado puramente local, en particular, no hay condiciones sobre la asintótica del dato inicial. También hemos introducido la constante cosmológica, generalizando de este modo la validez de la conjetura 6.1.1. Como mencionamos en la introducción, en [19] se ha presentado un contraejemplo a la desigualdad (6.3) con constante cosmológica negativa. Datos maximales con constante cosmológica no negativa (como los requeridos en las hipótesis del teorema) tienen escalar de Ricci no negativo. Esta es la propiedad crucial que nos permite probar (6.27).

La primera restricción importante del teorema es que sólo se permiten superficies  $r = \text{constant}$ . En el caso general, el horizonte en esta conjetura no será tal superficie. Esta elección particular de foliación adaptada a las coordenadas cilíndricas simplifica considerablemente las estimaciones. Un problema abierto relevante es cómo extender estos resultados para incluir superficies generales.

Por las ecuaciones (6.21) y (6.23), deducimos que las condiciones (6.24) y (6.25) implican que el área de la superficie  $\Sigma$  es un mínimo local. Es decir,  $\Sigma$  es una superficie minimal<sup>1</sup>. Si éstas fueran las únicas hipótesis en el teorema, entonces la conjetura 6.1.1 sería probada para datos iniciales que tienen una superficie minimal global  $r = \text{constante}$ . Por definición, el área de tal superficie minimal es menor o igual que el área de cualquier otra superficie, en particular, el horizonte. Sin embargo, para poder probar la desigualdad (6.27) requerimos la condición extra (6.26). Esta es una restricción técnica que no esperamos sea necesaria. De todos modos, es importante enfatizar que esta también es una condición geométrica, ya que se puede escribir en términos de  $\chi$  y la componente  $\chi_{ij}\eta^i\eta^j$  de la curvatura extrínseca  $\chi_{ij}$  de  $\Sigma$  como

$$\chi = 0 \quad \text{y} \quad \chi_{ij}\eta^i\eta^j = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_r q = 0. \quad (6.28)$$

Este resultado se puede ver de la siguiente manera

$$\chi_{ij}\eta^i\eta^j = -\gamma_i^k \nabla_k n_j \eta^i \eta^j = -\nabla_i n_j \eta^i \eta^j = -\nabla_i (n_j \eta^j) \eta^i + n_j (\nabla_i \eta^j) \eta^i, \quad (6.29)$$

pero el primer término en la última expresión es cero porque  $\eta^i$  y  $n_i$  son ortogonales. Entonces

$$\chi_{ij}\eta^i\eta^j = n^j (\nabla_i \eta_j) \eta^i = -n^j (\nabla_j \eta_i) \eta^i \quad (6.30)$$

---

<sup>1</sup>En la literatura también es común llamar minimal a una superficie que posea  $\chi = 0$ . En este trabajo usamos el término extremo para tal superficie, y reservamos el término minimal para las superficies que, además, son minimizadoras del área.

ya que  $\eta^i$  es un campo vectorial de Killing. Finalmente tenemos

$$\chi_{ij}\eta^i\eta^j = -\frac{1}{2}n^j\nabla_j\eta = -\frac{1}{2}n^r\partial_r\eta = -\frac{1}{2}n^r r^2 \sin^2\theta e^\sigma \left( \partial_r\sigma + \frac{2}{r} \right), \quad (6.31)$$

donde, en la segunda igualdad, hemos hecho uso de la simetría axial. Por lo tanto  $\chi_{ij}\eta^i\eta^j = 0$  junto con  $\chi = 0$ , implican  $\partial_r q = 0$  (ver la ecuación (6.20)).

Esta forma alternativa de escribir las hipótesis del teorema 6.2.1 da una descripción más geométrica de la superficie considerada. En particular, las superficies totalmente geodésicas satisfacen (6.28) (y más aún, cuando  $v_r = v_\theta \equiv 0$ , la condición (6.28) implica que  $\Sigma$  es totalmente geodésica).

Presentamos ahora la prueba del teorema 6.2.1.

*Prueba del teorema 6.2.1.* La prueba se divide en dos partes principales descritas en las secciones 6.3 y 6.4. Primero obtenemos una desigualdad que relaciona el área con la funcional de masa. Esto está dado por el lema 6.3.2. Aquí usamos las hipótesis (6.24), (6.25) y (6.26). Luego, usando el lema probado en el artículo [2] (que reproducimos aquí en el lema 6.4.1) acotamos la funcional de masa por el momento angular y obtenemos el resultado deseado.  $\square$

Antes de pasar a los detalles de la prueba, veamos dos ejemplos clave en los cuales se puede aplicar el teorema. Los datos tienen que satisfacer las ecuaciones de vínculo (6.4)–(6.5), y por lo tanto, las funciones  $\sigma$ ,  $q$  y  $\omega$  no se pueden elegir independientemente. Entonces, no es claro a priori qué tipo de datos, si hay alguno, satisface las condiciones (6.24)–(6.26). Afortunadamente, existe una clase particularmente relevante de datos iniciales que satisface todas estas condiciones. Esto es, datos iniciales con una isometría que deja invariante la superficie  $\Sigma$ . Esta isometría también se conoce como ‘inversión a través de la garganta’ en la literatura. Discutamos esta familia de ejemplos en más detalle.

### 6.2.1. Datos invariantes ante inversión por una esfera

Consideremos una 3-variedad Riemanniana con métrica axisimétrica dada por

$$\tilde{h}_{ab} = e^\sigma h_{ab}, \quad h_{ab} = e^{2q}(dr^2 + r^2 d\theta^2) + r^2 \sin^2\theta (d\phi + v_r dr + v_\theta d\theta)^2. \quad (6.32)$$

Decimos que  $\tilde{h}$  es invariante ante una transformación de inversión por una superficie de radio constante  $\Sigma = \{r = R = \text{constante}\}$  si

$$\tilde{h}(r, \theta, \phi) = \tilde{h}(\bar{r}, \theta, \phi) \quad (6.33)$$

donde la transformación de inversión está dada por el mapa

$$r \rightarrow \bar{r} = \frac{R^2}{r}, \quad \theta \rightarrow \bar{\theta} = \theta, \quad \phi \rightarrow \bar{\phi} = \phi. \quad (6.34)$$

Esta invariancia implica que los coeficientes de  $\tilde{h}$  satisfacen

$$\tilde{h}_{ab}(r, \theta, \phi) = \frac{\partial \bar{x}^c}{\partial x^a} \frac{\partial \bar{x}^d}{\partial x^b} \tilde{h}_{cd}(\bar{r}, \theta, \phi), \quad (6.35)$$

donde  $\bar{x}^a$  son las coordenadas  $(\bar{r}, \theta, \phi)$  y  $x^a$  las coordenadas  $(r, \theta, \phi)$ . Por simplicidad, de ahora en más sólo haremos explícita la dependencia de las funciones en las coordenadas  $r, \bar{r}$ .

Veamos en detalle cuales son las condiciones sobre las funciones métricas  $\sigma, q, v_r, v_\theta$  cuando la métrica es invariante ante la inversión.

Comencemos con el coeficiente  $\phi\phi$ . la condición (6.35) implica

$$\sigma(r) = \sigma(\bar{r}) + 4 \ln \left( \frac{R}{r} \right). \quad (6.36)$$

Para analizar los demás coeficientes es útil tener en cuenta que

$$d\bar{r} = -\frac{\bar{r}}{r} dr \quad (6.37)$$

con lo cual, el coeficiente  $r\phi$  implica

$$v_r(r) = -\frac{\bar{r}}{r} v_{\bar{r}}(\bar{r}). \quad (6.38)$$

El coeficiente de  $\theta\phi$  da

$$v_\theta(r) = v_\theta(\bar{r}) \quad (6.39)$$

y el coeficiente de  $\theta\theta$  da

$$q(r) = q(\bar{r}). \quad (6.40)$$

Diferenciamos las ecuaciones (6.40), (6.36) y (6.39) con respecto a  $r$  y evaluamos sobre la superficie de isometría  $\Sigma$ , teniendo en cuenta que  $\bar{r}(r = R) = R$ . Obtenemos

$$\partial_r q(r)|_R = 0 \quad (6.41)$$

$$\partial_r \sigma + \frac{2}{r} \Big|_R = 0 \quad (6.42)$$

$$\partial_r v_\theta|_R = 0. \quad (6.43)$$

Finalmente, a partir de (6.38) deducimos

$$v_r|_R = 0. \quad (6.44)$$

Nuevamente mencionamos que las ecuaciones (6.41)-(6.44) representan las condiciones que deben satisfacer las funciones métricas para el caso en que el dato inicial sea invariante ante inversión por la superficie  $\Sigma$ . Notemos también, que estas condiciones restringen las primeras derivadas radiales de las funciones  $q, \sigma$  y  $v_\theta$ , mientras que en el caso de  $v_r$  impone la anulación de la función sobre la superficie, no habiendo requisitos sobre sus derivadas.

En [68] se ha probado que una superficie compacta que es invariante ante una isometría es una superficie totalmente geodésica y por lo tanto una superficie extremal (i.e.  $\chi = 0$ ). Es decir, la condición (6.24) se satisface. Es directo verificar que la condición (6.26) también se satisface debido a la isometría. Notemos que la isometría sólo impone condiciones sobre las derivadas radiales de primer orden de las funciones del dato evaluadas en la superficie invariante  $\Sigma$ . La condición (6.25), que es una condición sobre las segundas derivadas de la métrica, no es automáticamente satisfecha. De hecho, una superficie podría ser un máximo local y aún ser invariante ante la isometría. Sin embargo, para una rica clase de datos esta superficie es un mínimo global. Para analizar este punto es mejor discutir ejemplos concretos.

Un ejemplo canónico de este tipo de dato isométrico es una tajada  $t = \text{constante}$  (en las coordenadas estandar de Boyer-Lindquist) del agujero negro no extremo de Kerr. La geometría de estos datos (que es la misma que la del agujero negro de Schwarzschild) es la bien conocida figura mostrada en la figura 6.1. La superficie minimal global que conecta las dos hojas satisface todas las hipótesis del teorema. En este caso la superficie minimal coincide con el horizonte aparente. El dato para el agujero negro de Kerr constituye un ejemplo no trivial del teorema. Aunque la desigualdad (6.27) por supuesto se puede calcular explícitamente para Kerr, el teorema presenta una prueba alternativa de ella.

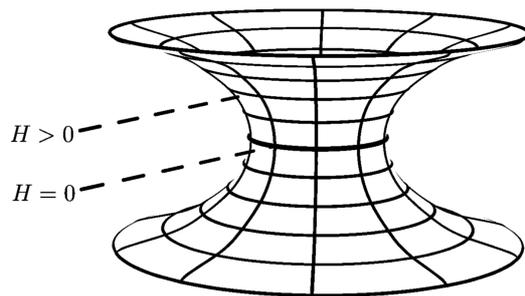


Figura 6.1: Dato inicial con una isometría. El dato tiene una superficie minimal global en el medio. La conjetura 6.1.1 se prueba para este tipo de datos.

Para datos iniciales de agujero negro más generales, las condiciones de isometría fueron introducidas en [109] y desde entonces han sido amplia-

mente usadas para construir datos iniciales para simulaciones numéricas de agujeros negros. Un ejemplo bien conocido es la familia conformemente plana (i.e.  $q = 0$ ) de datos iniciales de agujero negro introducida por Bowen y York, que hemos discutido en el capítulo 3. Otro caso conformemente plano fue analizado en [48]. Ejemplos no conformemente planos han sido estudiados en [21]. En todos estos ejemplos se han construido datos iniciales de agujero negro con la geometría mostrada en la figura 6.1. Estos datos representan agujeros negros distorsionados y pueden, en principio, estar lejos del equilibrio. Sin embargo, es importante enfatizar que para que la superficie invariante  $\Sigma$  permanezca un mínimo global del área, la distorsión no debería producir superficies minimales extras, como en el caso mostrado en la figura 6.2. En ese caso el teorema todavía se aplica para la superficie  $\Sigma$  pero como no da el mínimo global del área, no podemos probar la conjetura.

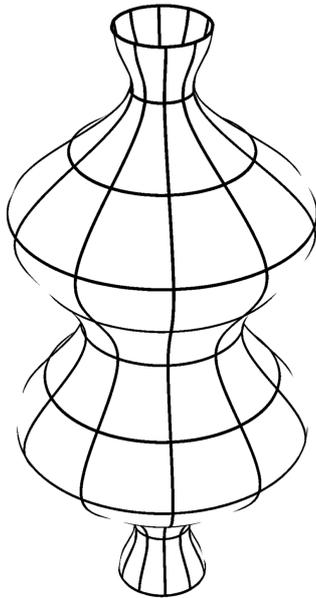


Figura 6.2: Un ejemplo de dato con una isometría. El teorema se aplica a la superficie minimal en el medio, pero la conjetura no se puede probar en este caso porque hay otras superficies minimales con menor área.

Las condiciones que aseguran que la superficie de isometría proporcione un mínimo para el área han sido estudiadas para algunos ejemplos en [20]. Existe también mucha evidencia para todos estos ejemplos mostrando que si la distorsión con respecto a Kerr no es muy severa, entonces la superficie de isometría da de hecho un mínimo global para el área (por ejemplo, ver [42]). Es interesante notar que en muchos de estos ejemplos el horizonte y la superficie minimal no coinciden [42]. También, este tipo de datos isométricos

pueden representar datos iniciales de agujeros negros binarios (de hecho esta es una de las principales aplicaciones de estos datos, ver [109], [20])). En el caso de agujeros negros binarios, existen dos superficies minimales que son invariantes ante la isometría. Es remarcable que estas superficies también satisfacen las condiciones (6.24), (6.25) y (6.26). Pero no son superficies  $r = \text{constante}$ , y por lo tanto, el teorema no se aplica a ellas.

También es importante mencionar que la condición de isometría se preserva ante la evolución (de hecho se ha usado explícitamente para evoluciones numéricas, ver [21]) y por ende puede jugar un rol muy útil en el estudio analítico del problema de la estabilidad de agujeros negros para este tipo de datos.

Resumimos la discusión anterior en el siguiente corolario.

**Corolario 6.2.2.** *Considere datos iniciales maximales axisimétricos y de vacío, con una constante cosmológica no negativa como los descritos arriba. Suponga que existe una isometría que deja fija una superficie  $\Sigma = \{r = \text{constante}\}$ . Suponga también que el área de esta superficie es un mínimo global. Entonces la conjetura 6.1.1 es válida para estos datos.*

## 6.2.2. Datos de garganta extremos

Existe otra clase de datos iniciales que no está estrictamente incluida en la formulación de la conjetura 6.1.1, pero que juega un rol importante en la prueba como caso límite. Y también, podría tener futuras aplicaciones interesantes. Estos son los datos iniciales de garganta extremos introducidos en [60]. Este tipo de dato es un caso especial de datos axialmente simétricos discutidos arriba donde está presente una simetría adicional. Para introducirlos, es conveniente realizar el cambio de coordenadas  $s = -\ln r$  a la métrica (6.7). También definimos la función  $\varsigma$  por

$$\varsigma = \sigma + 2 \ln r. \quad (6.45)$$

Entonces, el elemento de línea (6.7) se escribe como

$$h = e^\varsigma [e^{2q}(ds^2 + d\theta^2) + \sin^2 \theta (d\phi + v_s ds + v_\theta d\theta)^2]. \quad (6.46)$$

Suponga que  $\varsigma$ ,  $q$ ,  $v_s$  y  $v_\theta$  no dependen de  $s$ , entonces  $\partial_s$  es un vector de Killing de  $h$  (además de  $\partial_\phi$ ). Si también  $\mathcal{L}_{\partial_s} K_{ij} = 0$  entonces decimos que  $(S, h_{ij}, K_{ij})$  es un dato inicial de garganta extremo. La geometría de estos datos es cilíndrica (ver la figura 6.3), debido a que  $S$  es  $S^2 \times \mathbb{R}$  y las secciones  $s = \text{constante}$  son esferas topológicas que son isométricas entre sí.

Para estos datos el potencial de twist  $\omega$  está definido del mismo modo que para datos axialmente simétricos generales, y ahora es una función que

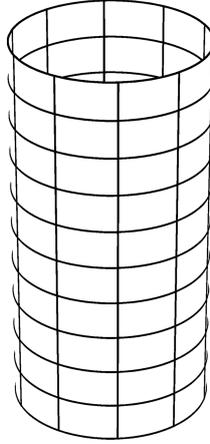


Figura 6.3: Geometría cilíndrica de datos iniciales de garganta extremos.

depende sólo de  $\theta$ . Como los datos son simétricos con respecto a traslaciones en la dirección  $s$ , el momento angular y el área asociados con estos datos no dependen de  $s$ . Están dados por

$$J = \frac{1}{8}(\omega(\pi) - \omega(0)), \quad (6.47)$$

$$A = 2\pi \int_0^\pi e^{\varsigma+q} \sin \theta \, d\theta, \quad (6.48)$$

que son las expresiones correspondientes a (6.15) y (6.18).

Notemos que por la independencia de  $s$  (y por ende de  $r$ ) de las funciones, las condiciones (6.24), (6.25) y (6.26) se satisfacen para datos iniciales de garganta extremos. Entonces tenemos el siguiente corolario del teorema 6.2.1.

**Corolario 6.2.3.** *Para un dato inicial de garganta extremo vale la desigualdad*

$$8\pi|J| \leq A, \quad (6.49)$$

donde  $A$  y  $J$  son el área y el momento angular del dato dados por (6.47) y (6.48).

Este corolario extiende significativamente los resultados presentados en [60] en dos direcciones. Primero, se aplica al dato inicial de garganta extremo general. El vector de Killing  $\partial_s$  no necesariamente debe ser hipersuperficie ortogonal. De hecho, el resultado se aplica a una clase más general de datos, la única condición requerida es que las funciones  $\varsigma$ ,  $q$  y  $\omega$  no dependan de  $s$ . Pero no se impone condición sobre  $v_s$  y  $v_\theta$ . Estas funciones podrían depender

de  $s$ , en cuyo caso el dato no admitiría el campo de Killing  $\partial_s$  pero el corolario todavía valdría.

Una funcional particularmente relevante para esta clase de datos es la funcional de masa  $\mathcal{M}$ , definida como (ver [60])

$$\mathcal{M} = \int_0^\pi \left( |\partial_\theta \zeta|^2 + 4\zeta + \frac{|\partial_\theta \omega|^2}{\eta^2} \right) \sin \theta \, d\theta. \quad (6.50)$$

Esta funcional juega un rol fundamental en la prueba del teorema 6.2.1 y tiene dos propiedades importantes. La primera es que es posible relacionarla con el área  $A$ . La segunda propiedad es que es esencialmente equivalente a la energía de un mapa armónico. Ambas propiedades constituyen el corazón de la prueba del teorema 6.2.1, serán explicadas en las secciones 6.3 y 6.4 respectivamente.

La segunda extensión con respecto a [60] es que es un resultado global y no uno local. Como mencionamos en la introducción, para probar este resultado usamos una desigualdad remarcable que relaciona el área y la funcional de masa. Esto se explica en la sección 6.3.

La importancia de datos iniciales de garganta extremos reside en que aparecen naturalmente como geometría límite de datos iniciales con un final cilíndrico. El ejemplo canónico de estos datos es el dato del agujero negro de Kerr extremo. Ver la figura 6.4 para una representación de la geometría de estos datos. En el final cilíndrico, todas las derivadas con respecto a  $r$  de las funciones relevantes decaen a cero, pero no las funciones mismas. Estas tienen un límite bien definido. Estas funciones límite definen los datos iniciales de garganta extremos (para detalles de esta construcción, ver [60]).

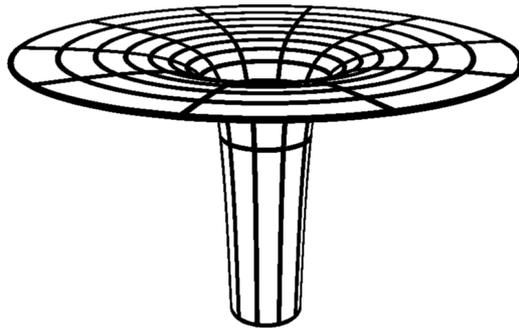


Figura 6.4: Geometría de un dato inicial extremo. El dato tiene un final asintóticamente plano (arriba) y un final cilíndrico (abajo).

Notablemente, el corolario anterior se aplica al área límite del final cilíndrico del dato del agujero negro extremo. Esta área límite no está directamente relacionada con la conjetura 6.1.1 porque no es un horizonte. Pero aún

así tiene aplicaciones interesantes. Kerr extremo es por supuesto, un ejemplo donde la igualdad vale. Pero también hay otros ejemplos como los construidos en [55] [56] [66] [60].

### 6.3. Area y funcional de masa $\mathcal{M}$

El propósito de esta sección es obtener una cota inferior para el área  $A$  de la superficie  $\Sigma$  mencionada en el teorema 6.2.1 en términos de la funcional de masa  $\mathcal{M}$ , (6.50). Todos los cálculos que siguen son locales, ningún comportamiento asintótico es supuesto.

La ecuación Hamiltoniana (6.4), junto con la condición de maximalidad,  $K = 0$ , dan

$$R = K_{ab}K^{ab} + 2\Lambda. \quad (6.51)$$

En [54] se ha probado que

$$K_{ab}K^{ab} \geq \frac{1}{2} \frac{|\partial\omega|^2}{\eta^2} e^{-\sigma-2q}, \quad (6.52)$$

donde  $\omega$  es el potencial de twist introducido en (6.13). Insertando (6.52) en (6.51) y usando la condición  $\Lambda \geq 0$ , uno obtiene la cota

$$R \geq \frac{1}{2} \frac{|\partial\omega|^2}{\eta^2} e^{-\sigma-2q}. \quad (6.53)$$

El escalar de Ricci  $R$  en términos de las funciones de la métrica  $\sigma$ ,  $q$ ,  $v_r$  y  $v_\theta$  es

$$R = -2e^{-\sigma-2q} \left( \Delta\sigma + \Delta_2q + \frac{1}{4}|\partial\sigma|^2 + \frac{1}{4}\sin^2\theta e^{-2q}(v_{r,\theta} - v_{\theta,r})^2 \right), \quad (6.54)$$

donde  $\Delta$  y  $\Delta_2$  son los operadores de Laplace en tres y dos dimensiones respectivamente, y  $\partial$  denota derivadas parciales. A partir de (6.53) y (6.54) finalmente obtenemos

$$|\partial\sigma|^2 + \frac{|\partial\omega|^2}{\eta^2} \leq -4(\Delta\sigma + \Delta_2q). \quad (6.55)$$

Escribimos esta desigualdad explícitamente en coordenadas esféricas y acomodamos los términos de la siguiente manera

$$(\partial_\theta\sigma)^2 + \frac{(\partial_\theta\omega)^2}{\eta^2} \leq -4(\partial_\theta^2q + \Delta_0\sigma) - f - g \quad (6.56)$$

donde  $\Delta_0$  es el operador de Laplace sobre  $S^2$  actuando sobre funciones axialmente simétricas

$$\Delta_0\sigma = \frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta\sigma), \quad (6.57)$$

y

$$f = 4r^2\partial_r^2(\sigma + q), \quad (6.58)$$

$$g = 4r\partial_r(2\sigma + q) + r^2(\partial_r\omega)^2 + r^2\frac{(\partial_r\omega)^2}{\eta^2}. \quad (6.59)$$

Ahora integramos (6.56) en la 2-esfera unidad. Usando

$$\int_{S^2}\Delta_0\sigma dS = 0 \quad (6.60)$$

y (ver [60])

$$\int_{S^2}\partial_\theta^2 q dS = -\int_{S^2}q dS, \quad (6.61)$$

obtenemos

$$\int_{S^2}(\partial_\theta\sigma)^2 + \frac{(\partial_\theta\omega)^2}{\eta^2}dS \leq 4\int_{S^2}q dS - F - G, \quad (6.62)$$

donde hemos definido

$$F = \int_{S^2}f dS, \quad G = \int_{S^2}g dS. \quad (6.63)$$

Para hacer contacto con la funcional de masa  $\mathcal{M}$ , escribimos el lado izquierdo de la desigualdad (6.62) en términos de  $\varsigma$ , definida en (6.45),

$$\int_{S^2}(\partial_\theta\varsigma)^2 + \frac{(\partial_\theta\omega)^2}{\eta^2}dS \leq 4\int_{S^2}q dS - F - G. \quad (6.64)$$

Sumando un término de la forma  $4\int_{S^2}\varsigma dS$  a ambos lados de (6.64) obtenemos una cota superior para  $\mathcal{M}$ ,

$$2\pi\mathcal{M} \leq 4\int_{S^2}(\varsigma + q)dS - F - G. \quad (6.65)$$

Esto se escribe más convenientemente en la forma

$$\frac{\mathcal{M}}{8} + \frac{F+G}{16\pi} \leq \frac{1}{2}\int_0^\pi(\varsigma + q)\sin\theta d\theta, \quad (6.66)$$

donde hemos integrado el lado derecho sobre  $\phi$ . Para nuestro futuro propósito, es útil exponenciar la desigualdad anterior

$$e^{\frac{\mathcal{M}}{8}} e^{\frac{F+G}{16\pi}} \leq e^{\frac{1}{2}\int_0^\pi(\varsigma+q)\sin\theta d\theta}. \quad (6.67)$$

Queremos remarcar que al pasar de (6.62) a (6.64) parece haber una inconsistencia concerniente a las unidades. Sin embargo, como al final tomamos la exponencial de esta desigualdad, el resultado final, (6.67), tiene las dimensiones correctas de área.

Deseamos utilizar esta desigualdad para acotar el área de las superficies  $r = \text{constante}$ . Escribimos el área de estas superficies en la forma (ver la ecuación (6.18))

$$\frac{A}{4\pi} = \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{\varsigma+q} \sin \theta d\theta, \quad (6.68)$$

luego, usando la desigualdad de Jensen para la función exponencial

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi e^{\varsigma+q} \sin \theta d\theta \geq e^{\frac{1}{2} \int_0^\pi \varsigma+q \sin \theta d\theta} \quad (6.69)$$

lo que da

$$\frac{A}{4\pi} \geq e^{\frac{1}{2} \int_0^\pi \varsigma+q \sin \theta d\theta}. \quad (6.70)$$

Finalmente, juntamos las desigualdades (6.67) y (6.70) para obtener

$$A \geq 4\pi e^{\frac{\mathcal{M}}{8}} e^{\frac{F+G}{16\pi}}, \quad (6.71)$$

y esto da una cota para el área de la superficie  $r = \text{constante}$  a través del funcional  $\mathcal{M}$  y derivadas radiales de  $\sigma$  y  $q$ .

Este resultado prueba el siguiente lema.

**Lema 6.3.1.** *El área  $A$  de una superficie  $r = \text{constante}$  satisface la desigualdad (6.71), donde  $F$  y  $G$  están definidas en (6.63) y  $\mathcal{M}$  está evaluada en  $r$ .*

Remarcamos que para obtener la desigualdad (6.71) sólo hemos usado el vínculo Hamiltoniano, la condición de maximalidad, la positividad de la constante cosmológica  $\Lambda$  y la cota (6.52) para el cuadrado de la curvatura extrínseca. Más aún, vale para cualquier superficie  $r = \text{constante}$ .

La desigualdad (6.71) es el ingrediente crucial para probar el siguiente lema.

**Lema 6.3.2.** *Si las condiciones (6.24)-(6.26) del teorema 6.2.1 valen para la superficie  $\Sigma$  de  $r$  constante, entonces su área  $A$  satisface*

$$A \geq 4\pi e^{\frac{(\mathcal{M}-8)}{8}} \quad (6.72)$$

donde  $\mathcal{M}$  es la funcional de masa (6.50) evaluada en la superficie  $\Sigma$ .

*Demostración.* Tomemos la desigualdad (6.71) y evaluémosla en la superficie particular  $\Sigma$  mencionada en el teorema 6.2.1. Notemos que (6.24) y (6.26) restringen las derivadas radiales de primer orden de  $\sigma$  y  $q$ , mientras que (6.25) da una condición sobre las derivadas radiales de segundo orden de  $\sigma + q$ . Más precisamente, en virtud de (6.24) y (6.25) tenemos

$$F|_{\Sigma} = \int_{\Sigma} 4r^2 \partial_r^2 (\sigma + q) dS \geq 32\pi \quad (6.73)$$

y las condiciones (6.24) y (6.26) dan

$$G|_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \left[ 4r \partial_r (2\sigma + q) + r^2 (\partial_r \sigma)^2 + r^2 \frac{(\partial_r \omega)^2}{\eta^2} \right] dS = -48\pi. \quad (6.74)$$

Por lo tanto, la desigualdad (6.71) evaluada en  $\Sigma$  da

$$A \geq 4\pi e^{\frac{(\mathcal{M}-8)}{8}}, \quad (6.75)$$

donde  $\mathcal{M}$  también debe ser evaluada en  $\Sigma$ .  $\square$

## 6.4. Kerr extremo es un mínimo global de $\mathcal{M}$

En esta sección reproducimos brevemente lo expuesto en la sección 4 de [2] para mostrar que el dato inicial de garganta extremo de Kerr es un mínimo global de la funcional de masa (6.50), y completar así la prueba del teorema 6.2.1.

El dato inicial de garganta extremo de Kerr depende sólo de un parámetro, el momento angular  $J$ , y está dado por (usando un subíndice ‘0’ para indicar que nos referimos a este caso particular)

$$\varsigma_0 = \ln(4|J|) - \ln(1 + \cos^2 \theta), \quad \omega_0 = -\frac{8J \cos \theta}{1 + \cos^2 \theta}, \quad q_0 = \ln \frac{1 + \cos^2 \theta}{2}. \quad (6.76)$$

Evaluando (6.48) para estos datos, obtenemos

$$A_0 = 8\pi|J|, \quad (6.77)$$

y evaluando (6.50)

$$\mathcal{M}_0 = 8(\ln(2|J|) + 1). \quad (6.78)$$

Una propiedad crucial del funcional  $\mathcal{M}$  es que está relacionado íntimamente con la energía asociada con un mapa armónico particular. Para ver esto, se restringe el dominio de integración en (6.50), definiendo

$$\mathcal{M}_{\Omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \left( |D\varsigma|^2 + 4\varsigma + \frac{|D\omega|^2}{\eta^2} \right) dS, \quad (6.79)$$

donde  $\Omega \subset S^2$ , tal que  $\Omega$  no incluye los polos, y se define el funcional

$$\tilde{\mathcal{M}}_\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_\Omega \frac{|\partial\eta|^2 + |\partial\omega|^2}{\eta^2} dS. \quad (6.80)$$

La relación entre  $\mathcal{M}_\Omega$  y  $\tilde{\mathcal{M}}_\Omega$  está dada por

$$\tilde{\mathcal{M}}_\Omega = \mathcal{M}_\Omega + 4 \int_\Omega \log \sin \theta dS + \oint_{\partial\Omega} (4\varsigma + \log \sin \theta) \frac{\partial \log \sin \theta}{\partial n} ds, \quad (6.81)$$

donde  $n$  denota la normal exterior a  $\Omega$  y  $ds$  es el elemento de superficie sobre el borde  $\partial\Omega$ . El segundo término en el lado derecho es una constante numérica no divergente, pero el término de borde diverge en los polos.

La funcional  $\tilde{\mathcal{M}}$  define una energía para los mapas  $(\eta, \omega) : S^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ , donde  $\mathbb{H}^2$  denota el plano hiperbólico.

Las soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange para la energía  $\tilde{\mathcal{M}}$  se llaman mapas armónicos sobre  $S^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ . Como  $\mathcal{M}$  y  $\tilde{\mathcal{M}}$  difieren sólo por una constante y términos de borde, tiene las mismas ecuaciones de Euler-Lagrange. La relación (6.81) es central en la prueba de que el mínimo global de  $\mathcal{M}$  se alcanza en el dato inicial de garganta extremo de Kerr. Este resultado se presenta en el siguiente lema.

**Lema 6.4.1.** *Sean  $\varsigma$  y  $\omega$  funciones regulares sobre la esfera tales que la funcional  $\mathcal{M}$  es finita. Asuma también que  $\partial_\theta \omega = 0$  para  $\theta = 0, \pi$ . Entonces*

$$\mathcal{M} \geq 8(\ln(2|J|) + 1). \quad (6.82)$$

donde  $J$  está definido en términos de  $\omega$  por (6.47).

Es importante remarcar que la condición  $\partial_\theta \omega = 0$  para  $\theta = 0, \pi$  es automáticamente satisfecha por datos iniciales suaves, como consecuencia de la regularidad en el eje.

*Demostración.* El corazón de la prueba es el uso de un teorema debido a Hildebrandt, Kaul y Widman [83] para mapas armónicos. En ese trabajo se muestra que si el dominio para el mapa es compacto, conexo, con frontera no vacía y la variedad blanco tiene curvatura seccional negativa, entonces, los minimizadores de la energía armónica con condiciones de borde de Dirichlet existen, son suaves y satisfacen las ecuaciones asociadas de Euler-Lagrange. Es decir, los mapas armónicos son minimizadores de la energía armónica para dadas condiciones de borde de Dirichlet. También, las soluciones del problema de valores de contorno de Dirichlet son únicas cuando la variedad blanco tienen curvatura seccional negativa. Por lo tanto, se usará la relación

entre  $\mathcal{M}$  y a la energía armónica  $\tilde{\mathcal{M}}$  para probar que los minimizadores de  $\tilde{\mathcal{M}}$  también son minimizadores de  $\mathcal{M}$ . Hay dos dificultades principales al hacer esto. Primero, la energía armónica  $\tilde{\mathcal{M}}$  no está definida para las funciones que estamos considerando si el dominio de integración incluye los polos. Segundo, no estamos tratando con un problema de Dirichlet. Para superar estas dificultades la esfera se divide en tres regiones de acuerdo a la figura 6.5. La extensión de las diferentes regiones depende del valor de un parámetro positivo  $\epsilon$ , de tal manera que cuando  $\epsilon$  va a cero, las regiones  $\Omega_I$  y  $\Omega_{II}$  se reducen hacia los polos, mientras que la región  $\Omega_{III}$  se extiende para cubrir toda la esfera. Luego se usa una función partición para interpolar entre el dato inicial de garganta extremo de Kerr en la región  $\Omega_I$  y datos iniciales de garganta extremos generales en la región  $\Omega_{III}$ , construyendo datos iniciales interpolantes. Esto resuelve las dos dificultades en el sentido de que ahora el problema de Dirichlet sobre la región  $\Omega_{IV} = \Omega_{II} \cup \Omega_{III}$  se puede considerar, y la energía armónica está bien definida para este dominio de integración. Esto nos permite mostrar que la funcional de masa para el dato de Kerr es menor o igual a la funcional de masa para el dato interpolante auxiliar en toda la esfera. El paso final es mostrar que a medida que  $\epsilon$  va a cero, la funcional de masa para el dato auxiliar converge a la funcional de masa para el dato general original. Hay una sutileza en este paso. Esto es, la función partición necesita ser elegida apropiadamente para que la convergencia sea posible.

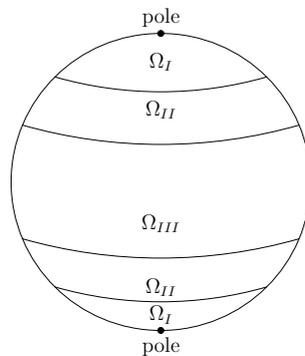


Figura 6.5: Las diferentes regiones en las cuales se divide la esfera.

□

# Capítulo 7

## Comentarios Finales

En esta tesis hemos estudiado datos iniciales para agujeros negros extremos. Hemos analizado existencia, unicidad, propiedades básicas, comportamiento ante perturbaciones, y finalmente, los hemos utilizado para obtener una desigualdad geométrica válida para una gran clase de agujeros negros no extremos.

Teniendo en cuenta que hemos incluido las discusiones más importantes en el cuerpo de cada capítulo, a continuación presentamos las conclusiones más relevantes, las perspectivas y los problemas aún abiertos.

En el capítulo 3 hemos estudiado el límite extremo de la familia de datos iniciales de Bowen-York. Hemos encontrado que la solución extrema existe y tiene propiedades similares a las del dato extremo del agujero negro de Kerr.

Como se mencionó en dicho capítulo, existe una caracterización variacional del límite extremo. Los datos iniciales extremos, y por lo tanto, los datos con infinitos cilíndricos, aparecen naturalmente como un mínimo de la masa en una clase apropiada de datos. El ejemplo presentado aquí incorpora una nueva clase de datos en la cual vale este principio variacional. Como dijimos en la sección 3.2, esperamos que este mínimo de la masa (i.e. la solución extrema) no tenga horizonte. Más aún, esperamos que una pequeña perturbación de una solución extrema (en particular, del dato de Bowen-York extremo) siempre tenga un horizonte. Sería interesante probar o refutar esta conjetura.

Otro punto importante que queremos mencionar es la relación entre la gravedad superficial de un agujero negro y el parámetro  $\mu$  que realiza la transición desde el caso no extremo al extremo. Recordemos que la gravedad superficial [61] mide la falla del 'parámetro tiempo de Killing' en coincidir con el 'parámetro tiempo afín' sobre el horizonte.

Para el agujero negro de Kerr-Newmann, la gravedad superficial está dada

por

$$\kappa = \frac{r_+ - m}{r_+^2 + a^2} \quad (7.1)$$

donde  $r_+ = m + \sqrt{m^2 - a^2 - q^2}$  y  $a = J/m$ . Mide la fuerza requerida por un observador en infinito para mantener una partícula de masa unidad, estacionaria en el horizonte de eventos.

En general, para el caso estacionario,

$$\kappa = \frac{\mu}{r_+^2 + a^2}, \quad (7.2)$$

aunque hay que tener en cuenta que esta expresión no es válida para el agujero negro de Schwarzschild, ya que la gravedad superficial es constante e igual a  $1/4m$ , Schwarzschild no posee un límite extremo, sino que posee una foliación particular que admite un límite con características similares a las presentes en foliaciones de agujeros negros extremos.

Teniendo esto presente, cabe preguntarse si se podría generalizar la definición de gravedad superficial para superficies que no son el horizonte de eventos, de manera tal de obtener una identificación entre este concepto y el parámetro  $\mu$  en el caso no estacionario.

Otro punto interesante es la relación entre el límite extremo  $\mu \rightarrow 0$  y el límite estacionario hallado en el agujero negro de Schwarzschild. Sería interesante encontrar (si existieran) foliaciones en las soluciones de Reissner-Nördstrom y Kerr que posean esta propiedad de tener un final cilíndrico. Si tal fuera el caso, valdría la pena estudiar la analogía en más detalle, para determinar si se trata de una mera coincidencia o hay alguna conexión más profunda entre el límite estacionario y el extremo (recordemos que la solución de Kerr extremo representa un mínimo global para la energía entre las soluciones axisimétricas para agujeros negros). Más generalmente, la pregunta sería: Dado un espaciotiempo que describa un agujero negro genérico no extremo. Bajo qué condiciones existe una foliación con una superficie que posea un final asintóticamente plano y uno cilíndrico? Siempre es posible encontrarla? Responder esta cuestión resultaría de gran importancia en el campo de la relatividad numérica, donde estas foliaciones parecen ser de suma utilidad en simulaciones de colisiones de agujeros negros.

En este sentido, en el capítulo 4 hemos aprendido que dada una familia de datos iniciales para agujeros negros maximal, conformemente planos (parametrizada por el parámetro  $\mu > 0$ ), teniendo momento angular y lineal y posiblemente algunos tipos de materia, siempre existe un límite especial y singular ( $\mu = 0$ ), llamado el dato inicial extremo de la familia, que tiene una geometría completamente diferente a la geometría de los demás elementos de

la familia original. Es decir, que mientras los datos no extremos en la familia tienen una geometría de tipo agujero de gusano (dos finales asintóticamente planos), el límite extremo tiene un final asintóticamente plano y uno cilíndrico. Más aún, este cambio puede ser producido por el momento angular, la materia, o la presencia de otro término singular en la ecuación de vínculo (el término que contiene la constante  $A$ ). Cualquiera de estos factores puede transformar un final asintóticamente plano en cilíndrico. Por otro lado el momento lineal del dato no juega ningún rol en realizar esta transición, ya que no puede producir el comportamiento deseado en el origen.

Enfatizamos que el comportamiento observado cerca de  $r = 0$  de la solución  $u_0$  no está presente cuando  $G$  es no cero. Esto equivaldría a decir que el final en el origen tiene momento lineal no cero. También deja de ser cierto cuando tratamos con el caso de vacío y con  $J$  y  $A$  nulos, es decir cuando el dato posee solamente momento lineal, ya que no hay ningún término que produzca el final cilíndrico.

Como mencionamos en la sección 4.2, el teorema 4.2.1 también se puede aplicar sin mayores modificaciones a tensores  $K$  que incluyan un término  $K_\lambda$  para funciones complejas apropiadas  $\lambda$ . Sin embargo, los cálculos se tornan más complicados y no parece ofrecer ninguna información relevante extra acerca de los fenómenos subyacentes.

A diferencia de lo que ocurre con el final  $r \rightarrow 0$ , la geometría asintótica del otro final, en  $r \rightarrow \infty$ , no parece sufrir ningún cambio relevante. Sin embargo, sí existe un efecto al tomar el límite extremo sobre la masa ADM. Hemos probado que la masa total es un mínimo en el límite  $\mu = 0$ , lo que da sentido al nombre 'extremo' para estos datos iniciales, ya que las cargas y el momento angular por unidad de masa alcanzan sus máximos valores en el caso extremo. Sería de gran relevancia analizar este comportamiento en más detalle, aislando, si fuese posible, la intervención de las diferentes cantidades  $(A, J, \sigma, P)$  en dicho límite. En particular sería interesante determinar si la constante  $A$  tiene algún impacto. Recordemos que el caso  $J = P = \sigma \equiv 0$  representa un dato para Schwarzschild, por lo que tomar el límite  $\mu \rightarrow 0$  nos lleva a un dato para el espaciotiempo de Minkowski (en el caso de Schwarzschild,  $\mu = m$ ).

El caso de datos iniciales no conformemente planos parece ser más difícil si se intenta el presente procedimiento de límite. Primero porque la presencia del escalar de Ricci en la ecuación de Lichnerowicz, que en general no posee un signo definido, e incluso podría depender del parámetro  $\mu$ , como en el caso del dato inicial de Kerr, podría complicar la tarea de encontrar cotas apropiadas para las soluciones no extremas  $u_\mu$ . Y segundo, porque no es fácil hallar en la literatura resultados matemáticos básicos como el Principio de Máximo, o el resultado del operador de Laplace como isomorfismo entre

espacios de Sobolev pesados. Esto se debe al comportamiento singular de las funciones y ecuaciones involucradas. Sin embargo, creemos que el caso de simetría axial se podría encarar de esta manera y que podría ser una herramienta útil, aunque laboriosa en el estudio de perturbaciones del dato inicial de Kerr extremo.

Como comentario final acerca del capítulo 4 queremos remarcar que hay dos situaciones en las cuales algunos pasos de la prueba del teorema 4.2.1 se tornan más simples. Uno es cuando  $\sigma_0$  (i.e. el valor de la función de materia  $\sigma$  en  $r = 0$ ) es una función estrictamente positiva, y el otro es cuando  $A \neq 0$ . En ambos casos podemos construir cotas inferiores apropiadas para  $u_\mu$  (y también para  $V$  en la sección 4.4) mucho más fácilmente. Por ejemplo, cuando  $\sigma \geq k > 0$ , donde  $k$  es alguna constante, la cota inferior  $u_\mu^-$  se puede tomar como

$$u_\mu^- = \sqrt{1 + \frac{m}{r} + \frac{\mu^2}{4r^2}} - 1 - \frac{\mu}{2r}, \quad m := \sqrt{k + \mu^2}. \quad (7.3)$$

Esto de hecho es lo que ocurre, por ejemplo, cuando la materia consiste de un de un campo electromagnético asociado con una carga eléctrica  $q$  (en este caso  $\sigma = q^2$ ). Cuando  $A \neq 0$ , la subsolución  $\Phi_\mu^-$  se puede tomar como el factor conforme correspondiente al dato inicial del agujero negro de Schwarzschild (ver [77] por detalles). Más aún, debido a estas observaciones, cuando  $A$  o  $\sigma$  son no cero, el término que contiene el momento angular se vuelve irrelevante en el cambio cualitativo de comportamiento del final  $r \rightarrow 0$  al tomar el límite. Sin embargo, el momento angular sí intervendría en el valor del área del final cilíndrico.

En el capítulo 5 hemos probado la existencia de una familia de datos iniciales próxima al dato inicial de Kerr extremo. Esta familia representa el dato inicial natural para estudiar la evolución cerca de un agujero negro extremo en simetría axial, en el espíritu de [57] [58].

Existen problemas relevantes abiertos en esta área que se pueden resolver al nivel de los datos iniciales. Como hemos visto en la sección 5.2, el dato para el agujero negro de Kerr extremo yace afuera de la región del agujero negro, y por lo tanto no contiene superficies atrapadas. Contiene la familia  $(\mathcal{S}, \tilde{h}_{ab}(\lambda), \tilde{K}_{ab}(\lambda))$  superficies atrapadas para  $\lambda > 0$ ? Si estos datos no tienen superficies atrapadas, entonces existe una chance de que también estén fuera del agujero negro. Por supuesto, esto sólo se puede responder luego de que se analice una evolución temporal completa. Por otro lado, si hay superficies atrapadas, entonces los datos necesariamente penetran en el agujero negro. La formación de superficies atrapadas para  $\lambda > 0$  arbitrario pero pequeño indicaría que el dato de Kerr extremo es un elemento muy especial en la familia  $(\mathcal{S}, \tilde{h}_{ab}(\lambda), \tilde{K}_{ab}(\lambda))$ . En ese caso, este tipo de datos podría ser muy útil

en el estudio de desigualdades geométricas que relacionan momento angular y área de superficies atrapadas (ver la sección 8 en el artículo [99]).

En el capítulo 6 hemos obtenido una desigualdad local entre el momento angular de un agujero negro y el área del horizonte. Nuestro resultado se aplica a horizontes definidos como superficies  $r = \text{constante}$ . Como mencionamos antes, sería muy interesante poder generalizar esta relación a superficies más generales, ya que son las que surgen, por ejemplo, en espacios que contienen dos agujeros negros. Creemos que con las técnicas presentadas en el capítulo 6, la extensión es posible.

# Apéndice A

## Espacios funcionales

En este apéndice revisamos los espacios funcionales de Hölder y Sobolev. Para más detalles sobre las definiciones en variedades compactas, ver [69]. Para definiciones de espacios de Sobolev en variedades asintóticamente planas con pesos en infinito, ver, por ejemplo [36] y [33]. Para espacios sobre variedades asintóticamente planas con pesos en dos infinitos, ver [13].

Comencemos con algunas definiciones necesarias para introducir los espacios de Hölder.

Si  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función acotada y continua, escribimos

$$\|u\|_{C(\mathbb{R}^n)} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |u(x)|. \quad (\text{A.1})$$

La seminorma  $\gamma$ -Hölder de  $u$  es

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{x,y \in \mathbb{R}^n; x \neq y} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma} \right\}, \quad (\text{A.2})$$

y la norma  $\gamma$ -Hölder es

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} := \|u\|_{C(\mathbb{R}^n)} + [u]_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)}. \quad (\text{A.3})$$

Luego, el espacio de Hölder  $C^{k,\gamma}(\mathbb{R}^n)$  consiste de todas las funciones  $u \in C^k(\mathbb{R}^n)$  para las cuales la norma

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\mathbb{R}^n)} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\mathbb{R}^n)} + \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \quad (\text{A.4})$$

es finita, donde  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  es un multiíndice de orden  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$  y

$$D^\alpha u := \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} u. \quad (\text{A.5})$$

Esto implica que el espacio  $C^{k,\gamma}(\mathbb{R}^n)$  consiste de las funciones  $u$  que son  $k$  veces continuamente diferenciables y cuyas derivadas parciales de orden  $k$  son Hölder continuas con exponente  $\gamma$ . Estas funciones son bien comportadas y el espacio de Hölder es un espacio de Banach.

Consideremos ahora los espacios de Sobolev. Dependiendo de la variedad sobre la cual están definidas las funciones correspondientes, podemos clasificarlos en tres tipos. Los espacios estandard sobre variedades compactas, los que poseen peso en infinito (para variedades asintóticamente planas), y los que poseen pesos tanto en infinito como en el origen del sistema de coordenada (para variedades, por ejemplo, con dos finales, uno en infinito y otro en un punto interior). Para esto necesitaremos el concepto de derivada débil [62].

Sean  $u, v \in L^1_{loc}(U)$ , y  $\alpha$  un multiíndice. Decimos que  $v$  es la derivada parcial débil de orden  $\alpha$  de  $u$ , escrita como  $D^\alpha u = v$ , si

$$\int_U u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v \phi dx \quad (\text{A.6})$$

para todas las funciones  $\phi$  infinitamente diferenciables de soporte compacto en  $U$ .

Pasemos ahora a la definición de espacios de Sobolev sobre variedades compactas. Fijamos  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $k$  un entero no negativo y  $U$  un espacio abierto compacto de  $\mathbb{R}^n$ . El espacio de Sobolev  $W^{k,p}(U)$  consiste de todas las funciones localmente sumables  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  tales que para cada multiíndice  $\alpha$  con  $|\alpha| \leq k$ ,  $D^\alpha u$  existe en sentido débil y pertenece a  $L^p(U)$ .

Si  $p = 2$ , el espacio obtenido es un espacio de Hilbert y usualmente se denota

$$H^k(U) = W^{k,2}. \quad (\text{A.7})$$

Si  $u \in W^{k,p}(U)$ , definimos su norma por

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(U)}, \quad p < \infty, \quad (\text{A.8})$$

$$\|f\|_{W^{k,p}(U)} = \text{ess sup}_U |D^\alpha u|, \quad p = \infty. \quad (\text{A.9})$$

Para el caso de variedades asintóticamente planas seguiremos la convención de índices de Bartnik [13], que difiere de la presentada en trabajos anteriores (cf. [36], [69], [62]), pero que tiene la ventaja de que los pesos reflejan claramente el crecimiento permitido de las funciones en los finales de la variedad.

Sea

$$\sigma(x) := (1 + |x|^2)^{1/2}. \quad (\text{A.10})$$

El espacio  $L_\delta^p$  es el espacio de funciones medibles en  $L_{loc}^p$  que son finitas en la norma  $\|\cdot\|_{L^p, \delta}$ :

$$\|f\|_{L_\delta^p} = \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \sigma^{-p\delta-n} dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty \quad (\text{A.11})$$

y

$$\|f\|_{L^p, \delta} = \text{ess sup}_{\mathbb{R}^n} \sigma^{-\delta} |f(x)|, \quad p = \infty. \quad (\text{A.12})$$

Cuando  $p < \infty$ , el espacio usual  $L^p$  surge como  $L_{-n/p}^p$ . Luego, el espacio  $W_\delta^{k,p}$  se define como el espacio de funciones en  $L_\delta^p$  con derivadas débiles en el espacio  $L^p$  pesado adecuadamente. La norma es

$$\|f\|_{W_\delta^{k,p}} := \sum_0^k \|D^j f\|_{L_{\delta-j}^p}. \quad (\text{A.13})$$

A partir de estas definiciones, Bartnik introduce los espacios con peso en el origen mediante expresiones análogas.

$$\|f\|'_{L^p, \delta} = \left( \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}} |f|^p r^{-p\delta-3} dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty \quad (\text{A.14})$$

$$\|f\|'_{L^p, \delta} = \text{ess sup}_{\mathbb{R}^n} r^{-\delta} |f(x)|, \quad p = \infty \quad (\text{A.15})$$

y

$$\|f\|'_{W_\delta^{k,p}} := \sum_0^k \|D^j f\|'_{L_{\delta-j}^p}. \quad (\text{A.16})$$

# Apéndice B

## Definiciones y teoremas

Existen tres teoremas de análisis de la teoría de ecuaciones en derivadas parciales que nos permiten determinar, para cualquier conjunto de datos libres, si existe o no una solución de la ecuación de Lichnerowicz. A continuación los planteamos brevemente ya que son de gran utilidad en esta tesis.

**Teorema B.0.2.** *Principio de Máximo [36]: Sea  $(\mathcal{S}, h_{ab})$  una variedad asintóticamente plana. Suponga que una función  $\Phi$  sobre  $\mathcal{S}$  satisface una desigualdad de la forma*

$$\Delta_h \Phi + v \cdot D\Phi - c\Phi \leq 0 \tag{B.1}$$

donde el punto denota el producto escalar en la métrica  $h_{ab}$ , mientras que  $v$  y  $c$  son respectivamente un campo vectorial y una función sobre  $\mathcal{S}$ , ambos acotados. Suponga que  $c \geq 0$  sobre  $\mathcal{S}$ . Luego, si  $\Phi$  tiende a  $k > 0$  en infinito, entonces existe un número  $l > 0$  tal que  $\Phi \geq l$  sobre  $\mathcal{S}$ . Si  $\Phi$  tiende a  $0$  en infinito, entonces  $\Phi \geq 0$  sobre  $\mathcal{S}$ .

Luego tenemos el teorema de Yamabe, que establece que para cualquier métrica Riemanniana  $h$  sobre una 3-variedad compacta, existe una métrica relacionada conformemente que tiene curvatura escalar constante. Esto nos permite particionar el conjunto de métricas Riemannianas sobre la variedad en tres clases dependiendo del signo del escalar de curvatura. Para plantear el teorema es útil la siguiente definición. La variedad asintóticamente plana  $(\mathcal{S}, h_{ab})$  está en la clase de Yamabe positiva si para cada función  $f$  sobre  $\mathcal{S}$ , con  $f \neq 0$  suave de soporte compacto, vale

$$\int_{\mathcal{S}} [|Df|^2 + R_h f^2] dx > 0. \tag{B.2}$$

donde  $dx$  es la forma de volumen sobre  $\mathcal{S}$  correspondiente a la métrica  $h_{ab}$ .

**Teorema B.0.3.** *Teorema de Yamabe[36]: La variedad asintóticamente plana  $\mathcal{S}, h_{ab}$  es conforme a una variedad con cero escalar de curvatura, es decir, la ecuación  $\Delta_h \Phi - R_h \Phi = 0$  tiene una solución  $\Phi > 0$ , si y sólo si  $(\mathcal{S}, h_{ab})$  está en la clase de Yamabe positiva.*

**Teorema B.0.4.** *Teorema de Sub y Super soluciones [62]: Sea  $S$  una variedad compacta y  $f : S \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  contenida en  $C^1(S \times \mathbb{R}^+)$ . Suponga que existe un par de funciones  $\Phi_- : S \rightarrow \mathbb{R}^+$  y  $\Phi_+ : S \rightarrow \mathbb{R}^+$  tales que son sub y supersoluciones respectivamente del problema*

$$\Delta \Phi = f, \quad (\text{B.3})$$

es decir, se satisface

$$\Delta \Phi_- \geq f, \quad (\text{B.4})$$

$$\Delta \Phi_+ \leq f. \quad (\text{B.5})$$

Además se tiene  $\Phi_- \leq \Phi_+$  en  $S$ . Entonces existe una solución débil  $\Phi$  de (B.3) tal que

$$\Phi_- \leq \Phi \leq \Phi_+, \quad \text{a.e. en } S. \quad (\text{B.6})$$

Otro teorema de gran utilidad en las pruebas de convergencia es el siguiente.

**Teorema B.0.5.** *Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue [94]: Sea  $f_n$  una secuencia de mapas en  $L^p$  que converge puntualmente casi en todos lados a  $f$ . Supongamos que existe  $g \in L^p$  tal que  $g \geq 0$  y tal que  $|f_n| \leq g$ . Luego  $f$  está en  $L^p$  y  $f_n$  es  $L^p$ -convergente a  $f$ .*

Ahora introducimos un principio simple de análisis funcional (ver [62]), que provee en ciertas circunstancias la existencia y unicidad de una solución débil a problemas de condiciones de contorno. Suponemos que  $H$  es un espacio de Hilbert real, con norma  $\| \cdot \|$  y producto interno  $( \cdot, \cdot )$ . Sea  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  el par de  $H$  con su espacio dual.

**Teorema B.0.6.** *Teorema de Lax Milgram: Supongamos que*

$$B : H \times H \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{B.7})$$

es un mapa bilineal, para el cual existen constantes  $\alpha, \beta > 0$  tales que

$$i) \quad |B(u, v)| \leq \alpha \|u\| \|v\|, \quad (u, v \in H) \quad (\text{B.8})$$

y

$$ii) \quad \beta \|u\|^2 \leq B(u, u) \quad (u \in H). \quad (\text{B.9})$$

Finalmente, sea  $f : H \rightarrow \mathbb{R}$  una funcional lineal acotada sobre  $H$ .

Entonces existe un único elemento  $u \in H$  tal que

$$B(u, v) = \langle f, v \rangle \quad (\text{B.10})$$

para todo  $v \in H$ .

Por último, para facilitar la lectura del capítulo 5 y también para fijar la notación, reproducimos en este apéndice resultados bien conocidos de cálculo diferencial en espacios de Banach referidos al Teorema de la Función Implícita (ver, por ejemplo [1], [37], y también los libros de texto más introductorios [106], [121]).

Sean  $X$  y  $Z$  espacios de Banach. Sea  $A : X \rightarrow Z$  un operador lineal acotado. Denotamos por  $\mathcal{L}(X, Z)$  el conjunto de los operadores lineales acotados de  $X$  en  $Z$ . El conjunto  $\mathcal{L}(X, Z)$  es un espacio de Banach con la norma operador definida por

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X, Z)} = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|A(x)\|_Z}{\|x\|_X}. \quad (\text{B.11})$$

Sea  $x$  un punto en  $X$  y sea  $G$  un mapa de una vecindad de  $x$  en  $Z$ . Entonces  $G$  se llama diferenciable de Fréchet en el punto  $x$  si existe un operador lineal  $DG(x) \in \mathcal{L}(X, Z)$  tal que

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\|G(x+v) - G(x) - DG(x)[v]\|}{\|x\|_X} = 0. \quad (\text{B.12})$$

El mapa  $G$  se llama continuamente diferenciable (i.e.  $C^1$ ) si la derivada  $DG(x)$  de un elemento de  $\mathcal{L}(X, Z)$  depende continuamente de  $x$ . Es decir, para cada  $\delta > 0$  existe  $\epsilon > 0$  tal que

$$\|x_1 - x_2\|_X < \epsilon \Rightarrow \|DG(x_1) - DG(x_2)\|_{\mathcal{L}(X, Z)} < \delta. \quad (\text{B.13})$$

Sean  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  espacios de Banach y sea  $G$  un mapa  $G : X \times Y \rightarrow Z$ , de manera similar definimos las derivadas parciales con respecto al primer argumento por  $D_1G(x, y)$  y con respecto al segundo argumento por  $D_2G(x, y)$ .

**Teorema B.0.7** (Teorema de la Función Implícita). *Supongamos que  $U$  es una vecindad de 0 en  $X$ ,  $V$  es una vecindad de 0 en  $Y$ , y  $G : X \times Y \rightarrow Z$  es  $C^1$ . Supongamos que  $G(0, 0) = 0$  y  $D_2G(0, 0) : Y \rightarrow Z$  define un operador acotado y es un isomorfismo, Entonces existe una vecindad  $W$  del origen en  $X$  y un mapa continuamente diferenciable  $f : W \rightarrow Y$  tal que  $G(x, f(x)) = 0$ . Más aún, para pequeños  $x$  y  $y$ ,  $f(x)$  es la única solución y de la ecuación  $G(x, y) = 0$ .*

# Bibliografía

- [1] R. Abraham, J.E. Marsden, and T. Ratiu. *Manifolds, tensor analysis, and applications*, volume 75 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1988.
- [2] A. Aceña, S. Dain y M.E. Gabach Clement. *Horizon area-Angular momentum inequality for a class of axially symmetric black hole initial data*. gr-qc/1012.2416, 2010.
- [3] S. Akcay y R. Matzner. *The Kerr-de Sitter Universe*. gr-qc/1011.0479, 2010.
- [4] A.J. Amsel, G.T. Horowitz, D. Marolf, y M.M. Roberts. *Uniqueness of Extremal Kerr and Kerr-Newman Black Holes*. Physical Review D 81 024033, 2010. gr-qc/0906.2367v3.
- [5] L. Andersson, P.T. Chrusciel y H. Friedrich. *On the regularity of solutions to the Yamabe equations and the existence of smooth hyperboloidal initial data for Einstein's field equations*. Communications in Mathematical Physics, 149:587–612, 1992.
- [6] L. Andersson and P.T. Chrusciel. *On asymptotic behavior of solutions of the constraint equations in general relativity with "hyperboloidal boundary conditions"*. Dissertations in Mathematics, 355:1–100, 1996.
- [7] L. Andrianopoli, R. D'Auria, S. Ferrara y M. Trigiante. *Extremal Black Holes in Supergravity*. Lecture Notes in Physics 737 661–727, 2008. hep-th/0611345.
- [8] M. Ansorg y J. Hennig. *Inner Cauchy horizon of axisymmetric and stationary black holes with surrounding matter in Einstein-Maxwell theory*. Physical Review Letters 102, 221102, 2009. gr-qc/0903.5405.
- [9] G.A. Avila and S. Dain. *The Yamabe invariant for axially symmetric two Kerr black holes initial data*. Classical and Quantum Gravity, 25:225002, 2008. gr-qc/0805.2754.

- [10] W. Baade y F. Zwicky. *Cosmic rays from supernovae*. Proceedings of the National Academy of Sciences U.S. 20, 259–263, 1934.
- [11] W. Baade y F. Zwicky. *On supernovae*. Proceedings of the National Academy of Sciences U.S. 20, 254–259, 1934.
- [12] J.M. Bardeen and G.T. Horowitz. *The extreme Kerr throat geometry: A vacuum analog of  $AdS(2) \times S(2)$* . Physical Review D, 60 104030, 1999. hep-th/9905099.
- [13] R. Bartnik. *The mass of an asymptotically flat manifold*. Communications in Pure and Applied Mathematics, 39(5):661–693, 1986.
- [14] R. Bartnik y J. Isenberg. *The constraint equations*. In P.T. Chruściel and H. Friedrich, editors, *The Einstein equations and large scale behavior of gravitational fields*, pages 1–38. Birkhäuser Verlag, Basel Boston Berlin, 2004. gr-qc/0405092.
- [15] R. Beig y N. O’Murchadha. *Trapped surfaces in vacuum spacetimes*. Classical and Quantum Gravity, 11(2):419–430, 1994.
- [16] R. Beig y N. O’Murchadha. *Late time behavior of the maximal slicing of the Schwarzschild black hole*. Physical Review D 57,8,4728, 1998. gr-qc/9706046.
- [17] E. Berti y M. Volonteri. *Cosmological black hole spin evolution by mergers and accretion*. Astrophysical Journal 684:822, 2008. astro-ph/0802.0025.
- [18] C.T. Bolton. *Identification of Cygnus X-1 with HDE 226868*. Nature, 235, 271, 1972.
- [19] I. Booth y S. Fairhurst. *Extremality conditions for isolated and dynamical horizons*. Physical Review D 77, 084005, 2008. gr-qc/0708.2209.
- [20] J.M. Bowen y J.W. York, Jr. *Time-asymmetric initial data for black holes and black-hole collisions*. Physical Review D, 21(8):2047–2055, 1980.
- [21] S. Brandt y E. Seidel. *Evolution of distorted rotating black holes. I. Methods and tests*. Physical Review D. 52 856, 1995.
- [22] S. Brandt y B. Brügmann. *A simple construction of initial data for multiple black holes*. Physical Review Letters, 78(19):3606–3609, 1997.

- [23] D.R. Brill y M. Cantor. *The Laplacian on asymptotically flat manifolds and the specification of scalar curvature*. Compositions in Mathematics, 43:317, 1981.
- [24] J.D. Brown. *Probing the puncture for black hole simulations*. Physical Review D 80:88, 84042, 2009. gr-qc/0908.3814.
- [25] G.L. Bunting. *Proof of the uniqueness conjecture for black holes*. PhD Thesis. Univ. of England, Armindale, N.S.W, 1983.
- [26] Campanelli, Lousto, Zlochower, y Merrit. *Maximum Gravitational Recoil*. Physical Review Letters 98, 231102. 2007.
- [27] M. Cantor. *A necessary and sufficient condition for York data to specify an asymptotically flat spacetime*. Journal of Mathematical Physics, 20(8):1741–1744, 1979.
- [28] M. Cantor. *Elliptic operators and the decomposition of tensor fields* Bulletin of the American Mathematical Society, 5, 3, 235–262, 1981,
- [29] B. Carter. *Black hole equilibrium states*. In *Black holes/Les astres occlus (École d'Été Phys. Théor., Les Houches, 1972)*, pages 57–214. Gordon and Breach, New York, 1973.
- [30] B. Carter. *An axisymmetric black hole has only two degrees of freedom*. Physical Review Letters 26, 331–333, 1970.
- [31] S. Chandrasekhar. *The density of white dwarf stars*. Phil. Mag. 11, 592–596, 1931.
- [32] S. Chandrasekhar. *The maximum mass of ideal white dwarf*. Astrophysical Journal 74, 81-82, 1931.
- [33] B. Charbonneau. *Analytic Aspects of Periodic Instantons* PhD. Thesis at the Massachusetts Institute of Technology, 2004.
- [34] C.M. Chen, Y.M. Huang y S.J. Zou. *Holographic Duals of Near-extremal Reissner-Nördstrom Black Holes*. hep-th/1001.2833, 2010.
- [35] Y. Choquet-Bruhat y J.W. York, Jr. *The Cauchy problem*. General Relativity and Gravitation. Ed. A. Held, New York. 99–172, 1980.
- [36] Y. Choquet-Bruhat, J. Isenberg, and J.W. York, Jr. *Einstein constraint on asymptotically Euclidean manifolds*. Physical Review D, 61:084034, 1999, gr-qc/9906095.

- [37] Y. Choquet-Bruhat, C. de Witt-Mortte, and M. Dillard-Bleick. *Analysis, Manifolds and Physics*. North-Holland, Amsterdam, 1977.
- [38] P.T. Chrusciel. *Mass and angular-momentum inequalities for axisymmetric initial data sets I. Positivity of mass* Annales of Physics, 323(10):2566–2590, 2008. gr-qc/0710.3680.
- [39] P.T. Chrusciel, Y. Li, y G. Weinstein. *Mass and angular-momentum inequalities for axisymmetric initial data sets. II. Angular-momentum*. Annales of Physics, 323(10):2591–2613, 2008. gr-qc/0712.4064.
- [40] P.T. Chrusciel and J. Lopes Costa. On uniqueness of stationary vacuum black holes, 2008. gr-qc/0806.0016.
- [41] P. T. Chrusciel y J. Lopes Costa. *Mass, angular-momentum, and charge inequalities for axisymmetric initial data*. Classical and Quantum Gravity, 26:235013, 2009, gr-qc/0909.5625.
- [42] G. Cook y J. W. York. *Apparent horizons for boosted or spinning black holes*. Physical Review D, 41, 4, 1077–1085, 1990.
- [43] G. Cook. *Initial data for numerical Relativity*. Living Reviews in Relativity, 3(5):2000–5, 53 pp. (electronic), 2001.
- [44] J. Corvino. *Scalar Curvature Deformation and a Gluing Construction for the Einstein Constraint Equations*. Communications in Mathematical Physics 214, 1, 137–189, 1999.
- [45] J. L. Costa. *Proof of a Dain Inequality with charge*. Journal of Physics A, Mathematical and General 43, 285202, 2009.
- [46] S. Dain y H. Friedrich. *Asymptotically Flat Initial Data with Prescribed Regularity at Infinity*. Communications in Mathematical Physics 222 569-609, 2001. gr-qc/0102047.
- [47] S. Dain. *Initial data for a head on collision of two Kerr-like black holes with close limit*. Physical Review D, 64(15):124002, 2001. gr-qc/0103030.
- [48] S. Dain, C.O. Lousto, y R. Takahashi. *New conformally flat initial data for spinning black holes*. Physical Review D, 65(10):104038, 2002. gr-qc/0201062.
- [49] S. Dain. *Asymptotically flat and regular Cauchy data*. En J. Frauendiener and H. Friedrich, editors, *The Conformal Structure of Spacetimes: Geometry, Analysis, Numerics*, volume 604 of *Lecture Notes in Physics*. Springer, 2002, gr-qc/0203021.

- [50] S. Dain. *Trapped surfaces as boundaries for the constraint equations*. Classical and Quantum Gravity, 21, 2, 555–573, 2003. gr-qc/0308009.
- [51] S. Dain. *Proof of the (local) angular momentum-mass inequality for axisymmetric black holes*. Classical and Quantum Gravity, 23:6845–6855, 2006. gr-qc/0511087.
- [52] S. Dain. *A variational principle for stationary, axisymmetric solutions of einstein’s equations*. Classical and Quantum Gravity, 23:6857–6871, 2006. gr-qc/0508061.
- [53] S. Dain. *The inequality between mass and angular momentum for axially symmetric black holes*. International Journal of Modern Physics D, 17(3-4):519–523, 2008. gr-qc/0707.3118.
- [54] S. Dain. *Proof of the angular momentum-mass inequality for axisymmetric black holes*. Journal of Differential Geometry, 79(1):33–67, 2008. gr-qc/0606105.
- [55] S. Dain, C. O. Lousto, and Y. Zlochower. *Extra-Large Remnant Recoil Velocities and Spins from Near- Extremal-Bowen-York-Spin Black-Hole Binaries*. Physical Review D, 78,024039, 2008. gr-qc/0803.0351.
- [56] S. Dain and M.E. Gabach Clément. *Extreme Bowen-York initial data*. Classical and Quantum Gravity, 26:035020, 2009. gr-qc/0806.2180.
- [57] S. Dain. *Axisymmetric evolution of Einstein equations and mass conservation*. Classical and Quantum Gravity, 25:145021, 2008. gr-qc/0804.2679.
- [58] S. Dain y O.E. Ortiz. *On well-posedness, linear perturbations and mass conservation for axisymmetric Einstein equation*. gr-qc/0912.2426, 2009.
- [59] S. Dain y María E. Gabach Clement. *Small deformations of extreme Kerr black hole initial data*. gr-qc/1001.0178, 2010.
- [60] S. Dain. *Extreme throat initial data set horizon area–angular momentum inequality for axisymmetric black holes*. Physical Review D 82 104010, 2010. gr-qc/1008.0019.
- [61] F. De Felice y C.J.S. Clarke. *Relativity on curved manifolds*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990. ISBN 0-521-26639-4
- [62] L.C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

- [63] Finster, Felix y Kamran, Niky y Smoller, Joel y Yau, Shing-Tung. *Linear Waves in the Kerr Geometry: A Mathematical Voyage to Black Hole Physics*. Bull. Amer. Math. Soc. 46, 635-659, 2009. gr-qc/0801.1423.
- [64] R.L. Fowler. *Dense matter*. Mon. Nat. R. Astron. Soc. 87, 114–122, 1926.
- [65] H. Friedrich y A. Rendall. *The Cauchy Problem for Einstein Equations*. Einstein’s Field Equations and their Physical Interpretation, ed. B.G. Schmidt (Springer, Berlin, 2000). gr-qc/0002074.
- [66] M. E. Gabach Clément. *Conformally flat black hole initial data, with one cylindrical end*, Classical and Quantum Gravity 27 125010, 2010. gr-qc/0911.0258.
- [67] C. Gammie, S. Shapiro, y J. McKinney. *Black Hole Spin Evolution*. *Astrophysical Journal* 602:312-319, 2004. astro-ph/0310886.
- [68] G. Gibbons. and S. Hartnoll. Physical Review D, 66:064024, 2002.
- [69] D. Gilbarg y N.S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition.
- [70] M. Gleb Wataghin y A. Saa. *Overspinning a nearly extreme black hole and the Weak Cosmic Censorship conjecture*. Physical Review D, 78 081503, 2008. gr-qc/0804.3921.
- [71] J. Gonzalez, U. Sperhake, B. Brügmann, M. Hannam, S. Husa. Physical Review Letters, 98, 091101, 2007.
- [72] Gou et al. Astrophysical Journal 701, 1076, 2009.
- [73] M. Guica, T. Hartman, W. Song, and A. Strominger. *The Kerr/CFT Correspondence*. Physical Review D, 80:124008, 2009. hep-th/0809.4266.
- [74] M. Hannam, S. Husa, B. Brügmann, J. Gonzáles y U. Sperhake. *Beyond the Bowen-York extrinsic curvature for spinning black holes*. Classical and Quantum Gravity 24 12 S15-S24, 2007. gr-qc/0612001.
- [75] Mark Hannam, Sascha Husa, Denis Pollney, Bernd Brügmann, y Niall O Murchadha. *Geometry and Regularity of Moving Punctures* Physical Review Letters 99, 241102, 2007.
- [76] M. Hannam, S. Husa, F. Ohme, B. Bruegmann, and N. O’Murchadha. *Wormholes and trumpets: the Schwarzschild spacetime for the moving-puncture generation*. Physical Review D 78:064020, 2008. gr-qc/0804.0628.

- [77] M. Hannam, S. Husa, and N. O. Murchadha. *Bowen-York trumpet data and black-hole simulations*. Physical Review D 80:124007, 2009. gr-qc/0908.1063.
- [78] S.W. Hawking. *Gravitational radiation from colliding black holes*. Physical Review Letters 26, 1344–1346, 1971.
- [79] S.W. Hawking. *Black holes in general relativity*. Communications in Mathematical Physics 25, 152-166, 1972.
- [80] S.W. Hawking y M. M. Taylor-Robinson. *Evolution of near-extremal black holes*. Physical Review D 55:1212, 7680-7692, 1997. hep-th/9702045.
- [81] J. Hennig, M. Ansorg. *The inner Cauchy horizon of axisymmetric and stationary black holes with surrounding matter in Einstein-Maxwell theory: study in terms of soliton methods*. Annales Henri Poincare 10:1075-1095, 2009. gr-qc/0904.2071.
- [82] F. Herrmann, I. Hinder, D. Shoemaker, P. Laguna, y R. Matzner. *Gravitational Recoil from Spinning Binary Black Hole Mergers*. Astrophysical Journal 661, 430-436, 2007. gr-qc/0701143.
- [83] Hildebrandt, Stéfan y Kaul, Helmut y Widman, Kjell-Ove, *An existence theorem for harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Acta Mathematica, 138, 1–16, 1977.
- [84] I. Hinder. *The current status of binary black hole simulations in numerical relativity*. Classical and Quantum Gravity 27, 114004. gr-qc/1001.5161, 2010.
- [85] J. D. Immerman and T. W. Baumgarte. *Trumpet-puncture initial data for black holes*. Physical Review D 80:061501, 2009. gr-qc/0908.0337.
- [86] J. Isenberg. *Constant mean curvature solutions of the Einstein constraint equations on closed manifolds*. Classical and Quantum Gravity, 12 2249-2274, 1995.
- [87] W. Israel. *Event horizons in static vacuum spacetimes*. Physical Reviews 164, 1776–1779, 1967.
- [88] W. Israel. *Event horizons in electrovac spacetimes*. Communications in Mathematical Physics 8, 245–260, 1968.

- [89] J.D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley, third edition edition, 1999.
- [90] R. Kallosh y A. Linde. *Strings, black holes, and quantum information*. Physical Review D 73, 104033, 2006, hep-th/0602061.
- [91] R.P. Kerr. *Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics*. Physical Review Letters, 11, 237–238, 1963.
- [92] S. Komossa, H. Zhou y H. Lu. *A recoiling supermassive black hole in the quasar SDSSJ092712.65+294344.0?*. Astrophysical Journal 678:L81, 2008. astro-ph/0804.4585.
- [93] Hari K. Kunduri, James Lucietti y Harvey S. Reall. *Near-horizon symmetries of extremal black holes*. Classical and Quantum Gravity 24 4169, 2007. hep-th/0705.4214.
- [94] S. Lang. *Real and Functional Analysis*. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [95] P.S. Laplace. *Le Systeme du monde*. Vol. 11, Paris. Publicado en inglés como 'The System of the world', W. Flint, London, 1809, 1795.
- [96] P. Levey. *Stringy black holes and the geometry of entanglement*. Physical Review D 74, 024030, 2006. hep-th/0603136.
- [97] G. Lovelace, R. Owen, H.P. Pfeiffer, y T. Chu. *Binary-black-hole initial data with nearly-extremal spins*. Physical Review D 78:084017, 2008. gr-qc/08054192.
- [98] Y. Liu, Z.B. Etienne, S.L. Shapiro *Evolution of near-extremal-spin black holes using the moving puncture technique* Physical Review D 80.121503, 2010. gr-qc/1001.4077.
- [99] M. Mars. *Present status of the Penrose inequality*. Classical and Quantum Gravity, 26:193001, 2009. gr-qc/0906.5566.
- [100] G.E.A. Matsas y A.R.R. da Silva. *Overspinning a nearly extreme charged black hole via a quantum tunneling process*. Physical Review Letters 99, 181301, 2007. gr/qc:0706.3198.
- [101] D. Maxwell. *Rough solutions of the Einstein constraint equations*. J. Reine Angew. Math., 590:1–29, 2006. gr-qc/0405088.

- [102] D. Maxwell. *Solutions of the Einstein constraint equations with apparent horizon boundaries*. Communications in Mathematical Physics, 253, 3, 561–583, 2005. gr-qc/0307117.
- [103] P.O. Mazur. *Proof of uniqueness of the Kerr Newman Black hole solution*. Journal of Physics A, Mathematical and General 15, 3173, 1982.
- [104] J.E. McClintock y R.A. Remillard. *The black hole binary A0620-00*. Astrophysical Journal, 308, 110, 1986.
- [105] J.E. McClintock, R. Shafee, R. Narayan, R.A. Remillard, S.W. Davis, y L.X. Li. *The spin of the near-extreme kerr black hole grs 1915+105*. Astrophysical Journal, 652(1):518–539, 2006.
- [106] R.C. McOwen. *Partial Differential Equation*. Prentice Hall, New Jersey, 1996.
- [107] Miller et al. *Evidence for Rapidly Spinning Black Holes in Quasars*. Astrophysical Journal Letters. 642, L111, 2006.
- [108] J.M. Wang, Y.M. Chen, L.C. Ho y R.J. McLure. Astrophysical Journal 697, 900, 2009.
- [109] C.W. Misner. *The Method of Images in Geometrostatics* Annals of Physics (N.Y.), 24, 102–117 1963.
- [110] A. Mitra. *Why General Theory of Relativity Allows the Existence of Only Extremal Black Holes*. hep-th/9905182, 1999.
- [111] N. O’Murchadha y J. York. *Initial Value problem of general Relativity. I. General formulation and physical interpretation*. Physical Review D, 10:428–436, 1974.
- [112] N. O’Murchadha y J. York. *Initial Value problem of general Relativity. II. Stability of solutions of the initial-value equations*. Physical Review D, 10:437–446, 1974.
- [113] R. Narayan. *Black Holes in Astrophysics*. New Journal of Physics 7 199, 2005. gr-qc/0506078.
- [114] G. Nördstrom. *On the energy of the gravitational field in Einstein’s theory*. Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. 20, 1268–1245, 1918.
- [115] J.R. Oppenheimer y H. Snyder. *On continued gravitational contraction*. Physical Reviews 56, 455-459, 1939.

- [116] Roger Penrose. *Gravitational collapse and space-time singularities*. Physical Review Letters 14, 57–59, 1965.
- [117] B. Pioline. *Lectures on black holes, topological strings and quantum attractors*. Classical and Quantum Gravity 23 S981, 2006. hep-th/0607227.
- [118] J. Rahmfeld. *Extremal Black Holes as Bound States*. Physics Letters B 372, 3-4, 198–203, 1996. hep-th/9512089.
- [119] M.J. Reid. *Is there a Supermassive Black Hole at the Center of the Milky Way?* Int. Journal of Modern Physics, D 18:889–910, 2009. 0808.2624.
- [120] H. Reissner. *Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie*. Annals of Physics (Alemania) 50, 106–120, 1916.
- [121] M. Renardy y R.C. Rogers. *An introduction to partial differential equations*, volume 13 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 2004.
- [122] C.S. Reynolds, L.W. Brenneman y D. Garofalo. *Black Hole Spin in AGN and GBHCs*. Astrophysical Space Science 300, 71, 2005.
- [123] M. Richartz y A. Saa. *Overspinning a nearly extreme black hole and the Weak Cosmic Censorship conjecture*. Physical Review D 78, 081503(R), 2008. gr-qc/0804.3921.
- [124] O. Rinne. *Axisymmetric Numerical Relativity*. PhD Thesis, University of Cambridge, 2005. gr-qc/0601064, 2006.
- [125] D.C. Robinson. *Uniqueness of the Kerr black hole*. Physical Review Letters 34, 1975.
- [126] K. Schwarzschild. *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie*. Sitzber. Deut. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math.-Phys. Tech., 189–196, 1916.
- [127] L.B. Szabados *The Poincaré Structure and the Centre-of-Mass of Asymptotically Flat Spacetimes*. Lecture Notes in Physics 692, 157–184, 2006.
- [128] J. Thornburg. *Coordinates and boundary conditions for the general relativistic initial data problem*. Classical and Quantum Gravity 4, 1119–1131, 1987.

- [129] J.A. Valiente Kroon. *Asymptotic expansions of the Cotton-York tensor on slices of stationary spacetimes*. Classical and Quantum Gravity 21:3237-3250, 2004. gr-qc/0402033.
- [130] M. Volonteri, P. Madau, E. Quataert, y M. J. Rees. *The distribution and cosmic evolution of massive black hole spins*. Astrophysical Journal 620:69-77, 2005. astro-ph/0410342.
- [131] M. Volonteri. *Evolution of massive black hole spins*. astro-ph.HE/1002.3827.
- [132] R. Wald. *Gedanken experiments to destroy a black hole*. Annals of Physics 82, 548, 1974.
- [133] S. Zhang. *Astrophysical Black Holes in the Physical Universe*. astro-ph/1003.0291, 2010.