



FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA, FÍSICA Y
COMPUTACIÓN, UNC.

TESIS DE DOCTORADO

Distinguibilidad y correlaciones en sistemas cuánticos bipartitos

Diego G. BUSSANDRI

dirigido por

P. W. LAMBERTI



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons
Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional

Índice general

Resumen - <i>Abstract</i>	III
Trabajos	IX
Introducción	XI
Abreviaturas principales	XX
1. Variables aleatorias y sistemas cuánticos	1
1.1. Probabilidad y variables aleatorias	2
1.1.1. Entropía	3
1.2. Sistemas cuánticos: Estados y operaciones	4
1.2.1. Postulados y el principio de incerteza	5
1.2.2. Estados	6
1.2.3. Operaciones cuánticas propias	13
1.2.4. Medición y observación	20
1.2.5. Evolución de sistemas cuánticos	23
2. Distinguibilidad	33
2.1. Medidas de distancia	34
2.2. Distinguibilidad entre distribuciones de probabilidad	34
2.2.1. Medidas de distancia entre distribuciones de probabilidad	36
2.3. Distinguibilidad entre estados cuánticos	42
2.3.1. Medidas de distinguibilidad cuántica	45
3. Correlaciones	51
3.1. Correlaciones entre variables aleatorias	51
3.1.1. Matriz \mathbb{T} y la forma de fano	53
3.2. Correlaciones entre subsistemas cuánticos	55
3.2.1. Correlaciones de tipo clásico-cuántico	59
3.2.2. Correlaciones cuánticas	61
3.2.3. Enfoque generalizado	73
3.2.4. Decoherencia y correlaciones cuánticas	82
3.2.5. Criterios adicionales para cuantificar correlaciones cuánticas.	91
4. Comunicación y distinguibilidad	99
4.1. Esquema de comunicación y cantidades afines	99
4.2. Nuevas desigualdades	101
4.2.1. Medidas de distinguibilidad particulares	105
4.2.2. Ensamblados de Qubits	106
4.2.3. Ejemplo	109
4.2.4. Correlaciones clásicas-cuánticas y la $\mathcal{X}_{\mathcal{D}}$	110
Epílogo	113

Bibliografía**116**

Resumen - *Abstract*

Esta tesis se enmarca principalmente en tres importantes aristas de la teoría de información cuántica: distinguibilidad, correlaciones cuánticas y comunicación cuántica. Nuestros resultados conducen a una generalización del esquema de separabilidad de las correlaciones propuesto por Vedral y Zureck en 2001. Este enfoque involucra como medida de correlaciones de tipo cuántico al denominado *quantum discord* (QD) -cuya traducción sería “discordancia cuántica”. Esta generalización utiliza diferentes medidas de disimilitud entre estados cuánticos. Este procedimiento da lugar a una familia de medidas generalizadas cuya funcionalidad es la cuantificación de tres tipos de correlaciones: totales, clásicas y cuánticas. En simultáneo estudiamos un modo alternativo de estimar correlaciones entre subsistemas cuánticos cuyo enfoque es la conmutatividad, propuesto en 2016 por Y. Guo. La medida de correlaciones que resulta del método anterior es la *Non-commutativity measure of quantum discord* (NCMQD; en español: *Medida de no conmutatividad de discordancia cuántica*), la cual encontramos «inconsistente», puesto que depende de la representación del estado cuántico. Sin embargo, reconociendo el «grado de conmutación» de ciertos bloques específicos -que componen el estado en cuestión- como una figura de mérito predominante del comportamiento de las correlaciones cuánticas, (y también de la distinguibilidad) propusimos una medida afín y adecuada, que denominamos *Non-commutativity measure of quantum correlations* (NCMQC; en español: *Medida de no conmutatividad de las correlaciones cuánticas*). Por otro lado, desde un abordaje conceptual pero con una finalidad práctica, analizamos las propiedades de la NCMQC en el marco de la teoría de recursos. A tal fin, estudiamos las características de la misma como cuantificador de entrelazamiento (caso particular de estados puros) y su comportamiento bajo la acción de dos tipos específicos de operaciones cuánticas. Nuestros resultados insinúan fuertemente la validez de la NCMQC como medida de correlaciones cuánticas que podrían ser fuentes para ciertos algoritmos cuánticos. Con todo, y continuando por la misma vía conceptual, investigamos un comportamiento particular del QD conocido como *congelamiento de las correlaciones cuánticas* (en inglés también se puede encontrar como: *freezing phenomenon of discord-based quantum correlations*). Cabe destacar que este mismo comportamiento toma lugar al considerar otras medidas de correlaciones afines al QD. Este peculiar «fenómeno» consta de evaluar tales cuantificadores en la evolución de un estado “diagonal de Bell” según una decoherencia adiabática no disipativa, conduciendo a una región de tiempo particular en la que tales cuantificadores se mantienen constantes. Con el objetivo de analizar las potencialidades de estas correlaciones cuánticas «constates» como posibles fuentes, utilizamos dos herramientas: 1) evaluamos la NCMQC, cuya validez como cuantificador de fuentes para los estados diagonales de Bell demostramos satisfactoriamente; 2) utilizamos la forma de Fano de dos qubits, lo que nos permitió observar lo que ocurre con las correlaciones entre las magnitudes físicas de los sistemas en cuestión (que definen el estado cuántico); identificando tales correladores (léase: correlaciones entre magnitudes, NO entre subsistemas cuánticos) como clásicos o cuánticos. En resumen, mostramos que la NCMQC representa con mayor fidelidad que el QD el comportamiento -promedio- de aquellos correladores identificados como cuánticos. Finalmente, en cuanto a la transmisión de información clásica utilizando medios cuánticos, uno de los resultados con mayor relevancia de la teoría de información

cuántica, es el teorema de Holevo, que implica una desigualdad entre la información accesible y la denominada cota Holevo (ambas cantidades asociadas a la entropía relativa de von Neumann). Con todo, aquí presentamos una generalización del teorema de Holevo (en función de distintas medidas de distinguibilidad entre estados cuánticos), que involucra dos cantidades: la información accesible generalizada y la cantidad de Holevo basada en distancias (DBHQ, por sus siglas en inglés). Este resultado deriva propiedades suficientes para dar lugar a nuevas desigualdades entre las cantidades generalizadas. Asimismo, dado que la DBHQ es una cantidad similar pero más general que la familia de correlaciones clásicas generalizadas anteriormente señaladas, este último trabajo es un complemento de aquel sobre medidas generalizadas de correlaciones totales, clásicas y cuánticas.

This thesis comprises different concepts of three relevant areas of quantum information theory: distinguishability, quantum correlations and quantum communication. Our results involve a generalization of the scheme of separability of the correlations proposed by Vedral and Zureck in 2001 (which, in turn, led to the definition of the quantum discord), using different ways to quantify dissimilarity. Thus, we can obtain a new family of generalized measures whose functionality is the quantification of three different types of correlations: total, classical and quantum. Simultaneously, we study an alternative way to capture correlations between quantum subsystems through the idea of “non-commutativity”, proposed in 2016 by Y. Guo. The resulting measure is the Non-commutativity measure of quantum discord, which in turn we find «inconsistent» since it depends on the particular representation of the state. However, recognizing that the «degree of commutation» of certain specific blocks -of the quantum state- as a predominant figure of merit of the behaviour of quantum correlations (and also of distinguishability), we proposed an appropriate measure, which we call Non-commutativity measure of quantum correlations, or simpler: no commutativity. On the other hand, from a conceptual approach but with a practical purpose, we analyze the properties of non-commutability within the framework provided by the resource theory. Specifically, we study its characteristics as a measure of entanglement (for pure states) and its behaviour under the action of two specific types of quantum operations. Our results strongly suggest the validity of non-commutativity as a measure of quantum correlations that could be resources for certain quantum algorithms.

Following the same conceptual line, we investigate a particular behaviour of the quantum discord known as the freezing quantum correlations. It should be noted that, additionally, the same phenomenon takes place for other correlation measures similar to the discord. This peculiar dynamics consists of evaluating such quantifiers in the evolution of a “Bell diagonal state” according to non-dissipative adiabatic decoherence, leading to a particular time region in which such quantifiers remain constant. In order to analyze the potentialities of these “frozen” quantum correlations as possible resources, we use two different tools: 1) we evaluate the NCMQC, whose suitability as a “resource quantifier” for Bell diagonal states we demonstrate satisfactorily; 2) we use the two qubits Fano form, which allowed us to observe the correlations between the physical quantities of the systems in question (which in turn define the quantum state); identifying such correlators (i.e. correlations between magnitudes, NOT between quantum subsystems) as classical or quantum.

In summary, we show that the NCMQC represents the average behaviour of the correlators identified as quantum, in counterposition of quantum discord. Finally, regarding the transmission of classical information using quantum ensembles, one of the most famous results of the quantum information theory is the Holevo theorem, which involves an

inequality between the accessible information and the so-called Holevo bound (both quantities associated with the relative entropy of von Neumann). However, here we present a generalization of Holevo's theorem (depending on different measures of distinguishability between quantum states), which involves two quantities: generalized accessible information and the distance-based Holevo quantity (DBHQ). This result derives sufficient conditions to give rise to new inequalities between the generalized quantities. Also, given that DBHQ is a similar quantity but more general than the family of generalized classical correlations mentioned above, this last work is a complement to that of generalized measures of total, classical and quantum correlations.

A Alicia, Sergio y Amilcar, a quienes debo mis aciertos

A Sofi, el amor de todos los días

A Walter, Ana y Tristán por el trabajo y la amistad

Trabajos

- Art. I *Monoparametric family of metrics derived from classical Jensen-Shannon divergence.* Autores: Tristán M. Osán, Diego G. Bussandri, Pedro W. Lamberti. [1] DOI
- Art. II *Problem of quantifying quantum correlations with non-commutative discord.* Autores: Ana P. Majtey, Diego G. Bussandri, Tristán M. Osán, P. W. Lamberti, Andrea Valdés-Hernández. [2] DOI
- Art. III *Non-commutative measure of quantum correlations under local operations.* Autores: Diego G. Bussandri, Ana P. Majtey, Andrea Valdés-Hernández. [3] DOI
- Art. IV *Generalized approach to quantify correlations in bipartite quantum systems.* Autores: Diego G. Bussandri, Ana P. Majtey, P. W. Lamberti, T. M. Osán. [4] DOI
- Art. V *Behavior of quantum correlations under nondissipative decoherence by means of the correlation matrix.* Autores: Diego G. Bussandri, T. M. Osán, Ana P. Majtey, P. W. Lamberti. [5] DOI
- Art. VI *Generalized Holevo theorem and distinguishability notions.* Autores: Diego G. Bussandri, P. W. Lamberti. [6] DOI

Introducción

La mecánica cuántica (QM, por las siglas en inglés) es el conjunto de desarrollos e implicancias que surgen de la suposición -basada en una basta evidencia experimental [7]- de un conjunto de leyes fundamentales -o postulados- sobre el comportamiento de las denominadas *partículas subatómicas*¹. El descubrimiento de la teoría cuántica produjo un gran estruendo en la comunidad científica de principios del siglo XX, conduciendo a una revisión profunda de los cimientos del conocimiento científico de aquella época. Físicos como Planck, Einstein, Bohr, de Broglie, Born, Heisenberg, Schrödinger, Pauli, Dirac y von Neumann [9, 10] contribuyeron radicalmente a los fundamentos de la mecánica *ondulatoria* en las décadas de 1920 y 1930.

Hitos del desarrollo de la QM. Una versión sintetizada de los principales hitos en el desarrollo de la mecánica cuántica comienza con la, en ese entonces, disruptiva idea de Max Planck: *la luz interactúa con la materia como paquetes discretos de energía*, explicando el espectro de energías de radiación de cuerpo negro en 1901 [9, 11]. Unos años después, Albert Einstein, utilizando los conceptos anteriores, explicó el conocido *efecto fotoeléctrico*². Siguiendo una línea de pensamiento similar, en 1924 Louis-Victor de Broglie postuló que todo compuesto de materia subatómico, ya sea un átomo, un electrón, un fotón, etc., tiene un comportamiento dual, en ocasiones tomando identidad de «partícula», y en otras, comportándose como una «onda». En 1926, Erwin Schrödinger usó las ideas de L. de Broglie para obtener una ecuación «de onda» que gobierna la evolución de sistemas cuánticos cerrados. Su formalismo ganó gran atención principalmente por remitirse a nociones físicas, en aquel entonces, más familiares. Mientras tanto, un año antes, en 1925 Werner Heisenberg formuló una teoría cuántica -denominada *matricial*- basada principalmente en álgebra lineal, área con la cual los físicos de aquellos años no estaban plenamente familiarizados. En 1930, Paul Dirac publicó un libro de texto unificando las formulaciones de Schrödinger y Heisenberg [13]. En una edición posterior del mismo libro, Dirac incluyó la hoy en día denominada *notación de Dirac*, constituyendo una sólida base matemática para la QM básica no relativista. En el Capítulo 1 resumiremos, en términos generales, los postulados de la teoría y los principales conceptos subyacentes.

Por otra parte, la teoría cuántica da lugar ciertos comportamientos distintivos³ de los sistemas cuya dinámica gobierna. En términos generales, podemos listarlos como sigue [11]

- **Interferencia:** La materia presenta un comportamiento ondulatorio, descrito por su *estado*, lo que conlleva a la posibilidad de exhibir patrones de difracción, dando lugar a una interferencia constructiva o destructiva entre tales estados ondulatorios;

¹Para ver en detalle los límites de la teoría, en cuanto a la masa y velocidad de las partículas, ver [8].

²Fenómeno en el que la radiación electromagnética incidente en una placa metálica induce una corriente en el mismo -más allá de cierto umbral de frecuencia [12].

³de la mecánica clásica o newtoniana.

- Incerteza: Toda predicción de la QM es en términos de *probabilidades*;
- Superposición: La linealidad de las ecuaciones conlleva a la posibilidad de describir un sistema en términos de dos estados con características físicas notablemente distintas;
- **Distinguibilidad;**
- **Correlaciones cuánticas.**

Los conceptos anteriores no son intrínsecamente independientes, es decir, uno puede ser el resultado de la combinación de otros. El objeto matemático que la QM dispone para regular los comportamientos anteriores, es una matriz con propiedades específicas denominada *estado*, que tiene *la* información sobre las cantidades que interesan: las *magnitudes físicas*, también denominadas *observables*. Volviendo a las características distintivas anteriormente listadas, los conceptos de *distinguibilidad* (o *disimilitud*) y *correlaciones* son las propiedades que ocuparon principalmente nuestros estudios llevados a cabo estos últimos años: Art. I-Art. VI; y cuyo detalle se encuentra disperso por todo este trabajo. El hecho de cuantificar *disimilitud* constituye un problema teórico de central relevancia para la ciencia, tratado en el Capítulo 2. A su vez, la *distinguibilidad* es completamente dependiente del marco científico en consideración [14]. Es decir, no es lo mismo distinguir dos distribuciones de probabilidad, que dos estados cuánticos (para facilitar la lectura, utilizaremos QS, por las siglas en inglés de *quantum state*, para referir estado cuántico o estados cuánticos). En este último caso, en ocasiones es formalmente imposible distinguir completamente (i.e. con probabilidad *uno*) dos QS. Específicamente, la imposibilidad toma lugar cuando estos (en el caso de estados dados por matrices densidad) no conmutan [15]. Este es un hecho remarcable puesto que en el caso contrario, i.e. dos estados que sí lo hacen, el formalismo de la mecánica cuántica no es enteramente necesario puesto que los estados en cuestión pueden ser descritos mediante vectores estadísticos (i.e. distribuciones de probabilidad). Así, en el caso cuántico general, los QS no se pueden distinguir completamente. Este parece un hecho problemático, sin embargo, implica una ventaja de vital importancia dentro de la *teoría de información cuántica* [11, 14, 16]. Con todo, el problema de cuantificar el grado de distinguibilidad entre QS da lugar a un gran número de funcionales que aparecen naturalmente en muchas otras cantidades informacionales de la QM [16-18], como veremos más adelante. Asimismo, la contraparte clásica, es decir, cuantificar distinguibilidad entre distribuciones de probabilidad, constituye un tema de investigación importante en las áreas de *probabilidad y estadística*. Algunos de los campos de aplicación de este tipo de «medidas»⁴ son: la evaluación de riesgos en problemas de decisión estadística, detección de señales, análisis de datos, codificación, clasificación de patrones, etc. [19-21].

La divergencia Jensen-Shannon Una medida de disimilitud ampliamente utilizada es la divergencia Jensen-Shannon (JSD, por sus siglas en inglés) [22, 23]. Este cuantificador resulta ser una versión simétrica, bien comportada y acotada de la divergencia Kullback-Leibler [24]. La JSD se ha aplicado con éxito en una amplia variedad de campos de investigación como, por ejemplo, el análisis y la caracterización de secuencias simbólicas y la segmentación de imágenes digitales. Particularmente, se ha utilizado exhaustivamente en el estudio de la segmentación de secuencias de ADN, así como, en física estadística, también se consideró como una medida de la longitud de la flecha del tiempo [25].

⁴Léase: Funcional que cuantifica alguna propiedad afín, como por ejemplo: coherencia, correlaciones, distinguibilidad, distancia, grado de mezcla, grado de no conmutación, etc.

En el Capítulo 2, Sec. 2.2, estudiaremos las capacidades de la JSD para generar una familia de métricas, dependientes de un único parámetro -trabajo sintetizado en el artículo Art. I-, cuestión de interés para muchas áreas de la estadística, en particular para *la geometría de la información* y para asegurar la convergencia de muchos algoritmos iterativos [26], distinguiendo este conjunto de métricas de las ya existentes por ser cantidades basadas en información⁵ [16].

Otro marco dentro de la teoría cuántica que concentra gran atención por parte de la comunidad científica y en el cual la distinguibilidad es un concepto frecuente, es el de las correlaciones. Una de las aristas principales de nuestro trabajo, como veremos más adelante, es el estudio de la relación entre las nociones de *diferencia* entre estados cuánticos y *correlación* entre subsistemas del mismo tipo. En cuanto a esta última, el cuantificador por excelencia que determina el grado de correlación entre sistemas cuánticos es la información mutua cuántica de von Neumann \mathcal{I} [14]. Sin embargo, un sistema compuesto por varias partes, comúnmente denominado *multipartito*, puede presentar muchos tipos de correlaciones [27-29]. Uno de los de mayor importancia e interés a lo largo de los años, y que además está completamente asociado con un comportamiento «cuántico»⁶, es el *entrelazamiento* [30]. Quien por primera vez acuñó el término anterior fue E. Schrödinger (1935), después de observar algunas de sus extrañas implicancias. Einstein, Podolsky y Rosen presentaron una aparente paradoja que involucraba correlaciones (tan “fuertes” que E. Schrödinger prefirió otro término para distinguirlas: *Verschränkung*⁷) que generaron cuestionamientos sobre la consistencia de la QM [31]. Durante muchos años⁸ el entrelazamiento fue referido como el único tipo de «correlación cuántica». Sin embargo, investigaciones posteriores proporcionaron distintas evidencias que respaldan la idea de que existen estados con entrelazamiento nulo, denominados separables, cuyas correlaciones no pueden reproducirse utilizando sistemas clásicos, exhibiendo asimismo características intrínsecas cuánticas [32-38]. Como consecuencia, el estudio de las medidas de entrelazamiento se amplió para incluir la cuantificación de correlaciones cuánticas más generales [27, 28]. Una de las medidas en cuestión más utilizadas en sistemas bipartitos⁹, y la primera de este tipo, es la denominada *discordancia cuántica* (QD, por sus siglas en inglés) [39, 40]. En los párrafos subsiguientes complementaremos la información sobre Sesta medida.

Hasta aquí, hemos introducido las nociones principales para nuestra investigación desde un punto de vista conceptual, básico y fundamental. Sin embargo, desde hace ya mucho tiempo, la comunidad científica mantiene un incisivo interés en cómo utilizar sistemas cuánticos para almacenar, procesar y transferir información, dando lugar a la *teoría de información cuántica*, también denominada *Quantum Shannon theory* [11, 18, 30, 41-43]. Esta rama de la física es la combinación de dos grandes áreas del conocimiento científico del siglo XX: la teoría cuántica en cuestión y la *teoría de la información*. En palabras de Mark Wilde,

*“It was really only a matter of time before physicists, mathematicians, computer scientists, and engineers began to consider the convergence of the two subjects because the quantum theory was essentially established by 1926 and information theory by 1948.”*¹⁰

⁵Information-theoretic divergences

⁶Dos sistemas cuánticos puede estar en un estado cuyas correlaciones se pueden identificar como meramente *clásicas*.

⁷En alemán refiere a entrelazamiento.

⁸Aproximadamente, desde 1935 hasta 2001.

⁹Un sistema cuántico en el cual podemos identificar dos partes.

¹⁰Realmente era solo cuestión de tiempo antes de que los físicos, matemáticos, informáticos e ingenieros

Esta composición dió lugar a lo que podríamos llamar la “revolución de la información cuántica” o lo que algunos otros denominan la “segunda revolución cuántica” [44] (siendo la primera el descubrimiento de la teoría en si mismo).

Adicionalmente, y con respecto a una de las principales áreas de la teoría de información cuántica, los últimos veinticinco años han sido testigos de una explosión de interés sobre la idea de procesar y transmitir información utilizando sistemas *cuánticos*, generando así una marcada influencia en el desarrollo de la tecnología de la información futura [43]. Por ejemplo, en comunicaciones, el desarrollo de la criptografía cuántica se ha convertido en una posible solución a largo plazo para asegurar la seguridad de la información, *gracias a la imposibilidad formal de distinguir estados cuánticos*. Al mismo tiempo, la demanda de una capacidad computacional en constante crecimiento y el avance hacia componentes cada vez más pequeños ha conducido a una carrera entre las grandes empresas y universidades de todo el mundo, con el objetivo de realizar el primer dispositivo cuántico capaz de llevar a cabo algoritmos con una capacidad y eficiencia *no clásicas*. Por citar un caso particular, el algoritmo de Shor implica que una computadora cuántica podría quebrar la seguridad de los métodos establecidos actualmente [18, 30].

Ahora bien, numerosos desarrollos dentro de la teoría de información cuántica sugieren el hecho de que el entrelazamiento puede ser una de las principales ventajas de los algoritmos cuánticos frente a sus equivalentes clásicos [45]. En los últimos quince años, podemos encontrar nuevos trabajos sobre la posibilidad de que aquellas correlaciones cuantificadas por la QD podrían dar lugar también a un procesamiento de información con una eficiencia asociada no clásica [32-38]. En este aspecto, la importancia del QD es innegable. En primera instancia, y desde un punto de vista conceptual, generó un nuevo y enorme estruendo de posibilidades en cuanto a tipos y potencialidades de las correlaciones «cuánticas» entre subsistemas [27, 29]. Por otro lado, en la práctica el QD como medida presenta algunos inconvenientes. Por ejemplo, en este momento no existe un modo directo para verificar la presencia o no de QD en un estado cuántico bipartito arbitrario. Además, como la evaluación de la medida involucra un procedimiento de optimización complejo [46], los resultados analíticos se conocen solo en algunos casos particulares [29, 47-51].

Con el objetivo de encontrar formas alternativas de cuantificar correlaciones cuánticas, tan *generales* como aquellas asociadas a la *discordancia cuántica*, en estas dos últimas décadas se propuso una gran cantidad de medidas afines [52-62]. Como señalamos anteriormente, de particular importancia para nuestro trabajo es la medida basada en *no conmutatividad* introducida por Y. Guo, en 2016 [62]: la *Medida de no conmutatividad de discordancia cuántica*¹¹ (NCMQD, por las siglas en inglés). Al investigar este cuantificador siguiendo los *criterios necesarios* para cuantificar correlaciones de tipo cuántico, discutidos en las referencias [27, 29, 63], y otras diversas características del mismo, encontramos una inconsistencia conceptual en la definición de tal funcional; particularmente, vimos que este depende de la representación específica del estado cuántico cuyas correlaciones estamos cuantificando. Así, propusimos un funcional basado en la misma idea de conmutatividad cuyo comportamiento es coherente con una medida de correlaciones entre subsistemas cuánticos -trabajo resumido en el artículo Art. II [2], que denominamos como *Medida de no conmutatividad de correlaciones cuánticas*¹² (NCMQC, por las siglas en inglés). Por otro lado, es un hecho destacable que el grado de conmutación de ciertos bloques específicos es un elemento común tanto para el concepto de *distinguibilidad* [15], como para el de *correlaciones* [2, 62].

comenzaran a considerar la convergencia de las dos materias porque la teoría cuántica se estableció esencialmente en 1926 y la teoría de la información en 1948.

¹¹Non-commutativity measure of quantum discord,

¹²Non-commutativity measure of quantum correlations.

Una vez definida nuestra medida de QC, basada en no conmutatividad y que además satisface los criterios necesarios adecuados -ver Ref. [27, 63]-, analizamos las potencialidades de la misma como cuantificador de correlaciones cuánticas *dentro de los preceptos de la teoría de Recursos* [64]; área de la teoría de información que establece requisitos específicos para una medida adecuada de una «fuente»¹³ particular. Sumamos así dos criterios adicionales, ver Sec. 3.2.5, pudiendo demostrar como válido uno de ellos satisfactoriamente y el otro, del mismo modo, para un conjunto de estados denominados estados *diagonales de Bell* (BD, por las siglas en inglés), Sec. 1.2.2. El resultado anterior, sintetizado en el artículo Art. III, sugiere fuertemente la validez de la medida como cuantificador de QC que podrían ser *fuentes*. Asimismo, es remarcable que hasta el día de hoy, en el caso del QD, no existe una demostración sobre la validez de una de las condiciones adicionales más importantes, como es la contractividad de la medida ante la aplicación de mapas locales que preservan la conmutación, ver Sec. 3.2.5. Es decir, dentro del marco de la teoría de recursos no hay una demostración teórica formal de que las QC asociadas a la QD podrían dar lugar a un procesamiento de información con una eficiencia no clásica.

Con todo, reconocemos en la caracterización y cuantificación de correlaciones entre subsistemas un problema central en la física cuántica. El hecho de profundizar el conocimiento sobre esta rama de la teoría de información cuántica es importante no solo desde un punto de vista práctico, sino también desde un punto de vista conceptual, puesto que nuevos trabajos en esta vía pueden proporcionar información adicional sobre la física subyacente detrás de las correlaciones presentes en los sistemas cuánticos. Detectar la existencia de tales correlaciones no clásicas, como ya hemos insinuado, es el objetivo central de una medida de correlaciones cuánticas dando lugar a la posibilidad de clasificar a un sistema dado como genuinamente «cuántico», o no. A tal fin, resulta interesante investigar nuevos medios para detectar y cuantificar la presencia de tales correlaciones. Asimismo, es evidente que un cuantificador de este tipo puede estar motivado por diferentes nociones de «cuanticidad» [27, 29, 40, 62, 65-68], o medios operativos. En resumen, las medidas de QC pueden diferir, tanto formal como conceptualmente. En el Capítulo 3, realizaremos un pequeño *overview* del extenso mundo de las medidas de correlaciones cuánticas. Ahora bien, con respecto al modo de cuantificar correlaciones relacionado con el QD, investigamos y propusimos una generalización del mismo utilizando cuantificadores de distancia (o disimilitud) entre QS. Así, este resultado, establecido en el trabajo Art. IV -tratado aquí en la Sec. 3.2.3-, presenta al QD como un caso particular¹⁴ de una familia de medidas dependiente de un conjunto específico de cuantificadores de disimilitud entre QS. Esto da lugar a la posibilidad de estudiar el esquema de cuantificación *más allá* de la medida de distancia $\mathcal{D}(\cdot||\cdot)$ particular en consideración. Es decir, nuestro esquema generalizado permite estudiar cuáles *comportamientos* de la medida en cuestión -dependiente de \mathcal{D} - están relacionados exclusivamente a la medida de distinguibilidad y cuáles otros están asociados al esquema natural de cuantificación (más allá de \mathcal{D}).

Por otra parte, y para cerrar el estudio sobre correlaciones dentro de la teoría de información cuántica, investigamos un efecto peculiar del QD denominado *congelamiento de la discordancia cuántica* (en inglés, *freezing phenomena of quantum discord*) [27, 29, 69-75], resumido en el artículo Art. V, [5], y aquí en la sección 1.2.5. El «fenómeno» en cuestión consta de una región de *tiempo* en el cual es QD permanece constante, bajo una decoherencia adiabática disipativa, Sec. 1.2.3, y para ciertas condiciones iniciales, Sec. 3.2. Este comportamiento atrajo gran atención por parte de la comunidad científica por sugerir la posibilidad de contar con un determinado periodo de tiempo, en el cual

¹³Léase: Propiedad intrínsecamente cuántica que puede dar motivo a un procedimiento cuántico cuya eficiencia asociada es inalcanzable para todo proceder análogo clásico.

¹⁴Asociado enteramente a la *entropía relativa*.

las QC asociadas al discord permanecen constantes, pudiendo así ser utilizadas para el procesamiento de información. Con todo, analizamos más profundamente qué ocurre con las correlaciones cuánticas dadas por el QD, en esta situación dinámica, utilizando como herramienta la *forma de Fano*, pudiendo así identificar una matriz de correlaciones entre variables aleatorias que, a su vez, define las correlaciones entre los subsistemas en consideración.

Por último, motivados por la relación establecida entre *distinguibilidad* y *correlaciones*, señalada en nuestro trabajo Art. IV, aquí en el Capítulo 3, extendimos los resultados obtenidos a un esquema de comunicación de información clásica utilizando ensambles -o canales- cuánticos [18]. El estudio en cuestión da lugar a una generalización de la denominada cota Holevo [76], obteniendo un nuevo conjunto de desigualdades, con comportamientos notablemente distintos, que podrían brindarnos nueva información sobre las capacidades de los canales cuánticos [11].

En cuanto a la organización de este trabajo, la sección siguiente establece los **Preliminares Matemáticos** sobre los que se apoya la mecánica cuántica -incluido aquí con el objetivo final de convenir la notación. En el Capítulo 1, establecimos los conceptos de la teoría cuántica, de mayor importancia para nuestro trabajo, y los demás necesarios para los Capítulos siguientes. Las nociones de *distinguibilidad*, y *distancia*, entre distribuciones de probabilidad y estados cuánticos, son sintetizadas en el Capítulo 2. En la Sección 2.2.1 se introduce nuestro primer trabajo, Art. I, sobre la construcción de métricas, en el espacio de las distribuciones de probabilidad, basadas en la divergencia de Jensen-Shannon. Esta parte del trabajo es, también, marco teórico del Capítulo 3, en el que se presenta la mayor parte de los resultados -Art. II en Sec. 3.2.2, Art. III en Sec. 3.2.5, Art. IV en Sec. 3.2.3, Art. V en Sec. 3.2.4-, conjuntamente con una síntesis del estado general del área de las correlaciones entre sistemas cuánticos. Finalmente, en el Capítulo 4 se resume el artículo Art. VI, relativo a la generalización de la cota Holevo, en función de los conceptos incluidos en el Capítulo 2.

Bajo la suposición de la existencia de una necesidad de llevar a cabo una lectura no global, sino, por partes individuales, incluimos el Cuadro 1 que resume las secciones suficientes (ordenadas en filas) para el desarrollo de otra en un Capítulo posterior (ordenadas en columnas). Además, asumimos que para un entendimiento adecuado de una dada sección, es necesario leer cualquier otra -anterior- dentro del mismo capítulo.

Preliminares Matemáticos

La estructura matemática principal de la mecánica cuántica es el espacio de Hilbert y el compendio de operadores definidos sobre el mismo.

Cabe aclarar que, porque nuestro objetivo no es estudiar la matemática asociada a la QM en sí misma sino describir el marco teórico (y convenir la notación), los párrafos que siguen son un resumen descriptivo de los conceptos matemáticos. Si se desea profundizar en alguno de ellos, entonces lo recomendable es acudir principalmente a los libros de texto comentados al final de la presente sección. Asimismo, asumimos al lector familiarizado con los conceptos matemáticos de **espacio vectorial**, **producto escalar**, **norma de un vector**, **base**, **subespacio**, **operador lineal**, **autovectores** y **autovalores**.

Veamos entonces las definiciones de dos espacios vectoriales de suma importancia para la mecánica cuántica: los *separables* y *completos*. Un espacio vectorial es **separable** si existe un subconjunto -del mismo espacio- contable que es, en cualquier lugar, *denso*¹⁵.

¹⁵ *Denso*: Para todo vector $u \in V$ hay un elemento $v \in V$ tal que $\|u - v\| < \epsilon$, para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

	2.2	2.3	3.1.1	3.2.1	3.2.2	3.2.3	3.2.4	3.2.5	4.1	4.2	4.2.2	4.2.4
1.1	☹	☺	☹	☺	☺	☺	☺	☺	☹	☹	☹	☹
1.2.2	☺	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☺
1.2.3	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☹	☺	☺	☺	☺
1.2.4	☺	☹	☺	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☺
1.2.5	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☹	☺	☺	☺	☺	☺
2.2	.	.	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☹	☺	☺
2.3	.	.	☺	☺	☹	☹	☺	☺	☺	☹	☺	☺
3.1.1	☹	☺	☺	☺	☺	☺
3.2.1	☺	☺	☺	☺	☺	☹
3.2.2	☺	☺	☺	☺	☹	☹
3.2.3	☺	☺	☺	☺	☺	☹

Cuadro 1: El símbolo ☹ indica que para el desarrollo de la sección ubicada en la correspondiente columna, los conceptos en la sección situada en la fila correspondiente son, mínimo, necesarios. El anagrama ☺ señala lo contrario.

Del mismo modo, V es un espacio vectorial **completo** si toda *sucesión de Cauchy*¹⁶ converge a un elemento dentro del espacio.

Una vez definidos los conceptos anteriores, veamos a qué se denomina espacio de Hilbert.

Definición

Un **espacio de Hilbert** \mathcal{H} es un espacio vectorial *completo* sobre los complejos con un producto escalar $(u, v) \in \mathbb{C}$, $u, v \in \mathcal{H}$.

Otro objeto matemático de suma importancia para el formalismo de la QM es el de operador lineal acotado.

Definición

Un **operador lineal acotado** es una transformación lineal $L : V \rightarrow W$ entre los espacios vectoriales L y W (ambos tienen norma) que cumple

$$\exists \epsilon \in \mathbb{R}_{\geq 0} : \max_{\|v\|=1} \|L(v)\| \leq \epsilon.$$

Al conjunto de todos los operadores lineales acotados sobre \mathcal{H} lo denotamos como $B(\mathcal{H})$.

Dos operadores lineales particulares son *cero* 0 y la *unidad* 1 definidos por $0u = \vec{0}$ y $1u = u$ para todo $v \in \mathcal{H}$. Con respecto a la notación empleada para la identidad, en algunos artículos y libros prefieren 1_n siendo n la dimensión del espacio de Hilbert en cuestión. No será nuestra elección. A lo largo del presente trabajo, la identidad será 1 más allá de la dimensión que estemos considerando puesto que entendemos innecesaria la aclaración.

Un operador B es la **inversa** de otro A si $AB = BA = 1$ y se escribe: $B = A^{-1}$. Dos operadores **conmutan** si $[A, B] = [AB - BA] = 0$.

Definición

El operador **adjunto** de A , A^\dagger , está caracterizado por $(A^\dagger u, w) = (v, Aw)$ para todo $v, u \in \mathcal{H}$. Los operadores que cumplen $A^\dagger = A$ se denominan **autoadjuntos** (o hermitianos, hermíticos)

Los operadores autoadjuntos tienen las siguientes propiedades:

¹⁶*Sucesión de Cauchy*: Toda sucesión tal que para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ existe un número natural $N(\epsilon)$ tal que $\|v_m - v_n\| < \epsilon$ si $m, n > N(\epsilon)$, con m, n naturales.

1. Todos los autovalores son reales,
2. Dos autovectores (asociados a los autovalores λ_1 y λ_2 , respectivamente) son ortogonales¹⁷ entre sí cuando¹⁸ $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Definición

Un operador lineal U es unitario si $UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{1}$. En tal caso, $U^\dagger = U^{-1}$.

Las propiedades más importantes de este tipo de operadores son:

1. Las columnas de U forman una base ortonormal¹⁹ de \mathcal{H} (lo mismo para las filas),
2. Los operadores unitarios U preservan el producto escalar, es decir, $(v, w) = (Uv, Uw)$, $v, w \in \mathcal{H}$,
3. U también preserva la norma de V ,
4. Los autovalores de U son exponenciales complejas de la forma $e^{i\theta}$.

Un operador lineal acotado $\mathcal{O} \in B(\mathcal{H})$ es **positivo** si $(u, \mathcal{O}u) \geq 0$ para todo $u \in \mathcal{H}$. En este caso escribimos $\mathcal{O} \geq 0$. El conjunto de todos los operadores positivos es *convexo*²⁰. Asimismo, los operadores positivos son autoadjuntos y siempre admiten una raíz cuadrada. Además, si son invertibles, tienen una descomposición única en *forma polar*, es decir, \mathcal{O} se puede escribir como $\mathcal{O} = |\mathcal{O}|U$ con U un operador unitario y $|\mathcal{O}| = \sqrt{\mathcal{O}\mathcal{O}^\dagger}$.

Definición

Un operador autoadjunto A es un **proyector** sí y sólo sí $A^2 = A$. En tal caso, usualmente se denota como $P(S)$ donde S es un subespacio de \mathcal{H} , a menudo un *rayo*.

Definición

Un operador lineal acotado es un operador **trace-class** si su traza

$$\text{Tr}[A] = \sum_k (Av_k, v_k)$$

es absolutamente convergente para toda base ortonormal $\{v_k\}$ de \mathcal{H} .

El mapa bilineal $\langle A, B \rangle = \text{Tr}[A^\dagger B]$ es un producto escalar sobre el conjunto de los operadores *trace-class* y es conocido como la **norma de Hilbert-Schmidt**.

Notación de Dirac

Luego de la presentación de los elementos básicos de la teoría de espacios de Hilbert, podemos introducir la notación de Dirac típicamente utilizada en mecánica cuántica, y, en particular, en la teoría de información cuántica.

¹⁷ u y v son ortogonales sí $(u, v) = 0$.

¹⁸ Asimismo, si el espacio de Hilbert \mathcal{H} es de dimensión finita y todos los autovectores están asociados a autovalores distintos (espectro no degenerado), el conjunto de los autovectores de un operador autoadjunto forma una base de \mathcal{H} .

¹⁹ $u, v \in V$ son ortonormales si son ortogonales y ambos tienen norma uno.

²⁰ *Conjunto convexo*: Un conjunto de un espacio vectorial es convexo si éste coincide con su *cáscara convexa*. Una cáscara convexa de un conjunto $S \in V$ es la colección de todas las *combinaciones convexas* de todos los conjuntos finitos incluidos en S . Una *combinación convexa* es

$$u = \sum_j p_j u_j$$

con $\{u_j\} \subset S$ y $\{p_j\}$ un conjunto de número reales positivos que suman la identidad.

Un elemento u de \mathcal{H} ahora es denotado con un **ket**: $|u\rangle$. El adjunto asociado a $|u\rangle$, está dado por un **bra**: $\langle u|$. Seguidamente, el producto escalar (u, v) ahora se escribe como un **braket**: $\langle u|v\rangle$.

Los operadores que actúan por izquierda sobre un *ket* dan como resultado otro *ket*. Los operadores que actúan desde la derecha sobre un *bra*, dan otro *bra*. Un **ketbra**, $|v\rangle\langle w|$ es un operador que actúa sobre un *ket*, digamos $|u\rangle$, dando como resultado

$$|v\rangle\langle w|(|u\rangle) = \langle w|u\rangle |v\rangle$$

El proyector sobre el espacio unidimensional asociado al vector $|u_i\rangle$, ahora se escribe $P(|u_i\rangle) = |u_i\rangle\langle u_i|$.

Si $\{|i\rangle\}_{i=1}^n$, $n \in \mathbb{N}$, es una base ortonormal de \mathcal{H} y si las componentes de $|u\rangle, |v\rangle \in \mathcal{H}$ están dadas por

$$\begin{aligned} |u\rangle &= \sum_i \alpha_i |i\rangle \\ |v\rangle &= \sum_i \beta_i |i\rangle \end{aligned}$$

entonces matricialmente escribimos (en la base $\{|i\rangle\}$):

$$\begin{aligned} \langle u|v\rangle &= (\alpha_1^* \ \alpha_2^* \ \dots) \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \\ |u\rangle\langle v| &= \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \end{bmatrix} (\beta_1^* \ \beta_2^* \ \dots) \end{aligned}$$

El **producto tensorial** de dos vectores $|v\rangle, |w\rangle$ es $|v\rangle \otimes |w\rangle$ y entre espacios vectoriales V y W es $V \otimes W$, siendo este el espacio lineal formado por los productos tensoriales de los elementos de V con los de W . Si $\{|v_i\rangle\}_{i=1}^n$ y $\{|w_j\rangle\}_{j=1}^m$ son dos bases de V y W , respectivamente, entonces una base de $V \otimes W$ está dada por

$$\{|v_i\rangle \otimes |w_j\rangle\}_{ij=1}^{nm}.$$

Asimismo, cualquier operador lineal O sobre tal producto tensorial $V \otimes W$, con $O(|v\rangle \otimes |w\rangle) = O_v(|v\rangle) \otimes O_w(|w\rangle)$, es una combinación lineal de productos directos entre operadores lineales, es decir,

$$O = \sum_i O_v^i \otimes O_w^i.$$

Por último, el complejo conjugado de $z \in \mathbb{C}$ será denotado con z^* .

Bibliografía recomendada: Principalmente estas páginas son una síntesis de [30], y [77]. Otros libros de textos también relacionados con la mecánica cuántica y algo más profundos en cuanto al marco matemático son [21, 78-81]. En cuánto a únicamente álgebra lineal, una buena lectura es [82].

Abreviaturas principales

QC	Correlaciones cuánticas
NCMQD	Medida de no conmutatividad de discordancia cuántica
NCMQC	Medida de no conmutatividad de correlaciones cuánticas
BD	Estados diagonales en la base de Bell
QS	Estado cuántico / Estados cuánticos
JSD	Divergencia Jensen-Shannon
DBHQ	Cantidad de Holevo basada en distancias
GAI	Información accesible generalizada
MDC	Medida de distinguibilidad cuántica
VA	Variable/s aleatoria/s
BON	Base ortonormal

Variables aleatorias y sistemas cuánticos

Una de las primeras *inconsistencias* de las teorías «clásicas» es la aplicación de la mecánica -newtoniana- y el electromagnetismo al problema de un electrón orbitando alrededor de un núcleo atractivo. Tales teorías conllevan a la conclusión de que los átomos *serían* inestables (el electrón debería caer al centro del potencial en un tiempo medio dado por $t_{fall} = 1,6 \times 10^{-11} s$ [83] como consecuencia de la radiación emitida por ser una carga acelerada, según la fórmula de Larmor). Esto constituye una diferencia con la observación y la experiencia. Surgió entonces la necesidad de un nuevo enfoque y el abandono de ciertos principios fundamentales. La teoría que da lugar a estos nuevos conceptos es la denominada *Mecánica Cuántica*, que describe el movimiento de las partículas subatómicas, en los niveles de menor energía [84].

Un dato interesante sobre el desarrollo de la teoría cuántica no relativista es que su formalismo matemático fue establecido (principalmente) por W. Heisenberg y E. Schrödinger en 1925-1926 «antes» del descubrimiento del *principio de indeterminación*, que pone de manifiesto su contenido físico [85]. Dicho formalismo establece que las magnitudes físicas (velocidad, posición, energía, momento angular, etc.) de los sistemas cuánticos son *intrínsecamente* cantidades estocásticas, con una incerteza regida, en parte, por el principio de indeterminación (también denominado, “de incertidumbre”).

Nuestro trabajo involucra observables cuyos valores son puntuales (discretos) y generalmente finitos. En consecuencia, en adelante sólo consideraremos *Variables Aleatorias* discretas.

El átomo de hidrógeno. Una de las primeras situaciones experimentales que no se podían explicar con las teorías hasta entonces desarrolladas fue el espectro de energías del átomo de hidrógeno. Este sistema -cuántico- está compuesto por dos partículas: un electrón y un protón, con masas y cargas dadas por m_e , $-e$ y m_p , e , respectivamente, siendo $m_e \ll m_p$. Consideremos un referencial fijo al protón. Siguiendo los postulados de la mecánica cuántica, el electrón carece de una trayectoria dada por alguna curva $\vec{x}(t) \in \mathbb{R}^3$. Entonces, el problema a resolver ya no es encontrar la *función posición* sino una densidad de probabilidad $f(\vec{x}, t)$ para tal evento -es decir, que el electrón se encuentre en \vec{x} a tiempo t . De este modo, la *posición* del electrón es un ejemplo de variable aleatoria (VA) continua. Asimismo, el *espín* del electrón es un ejemplo frecuente de variable discreta. Ésta magnitud física no posee análogo clásico alguno y, en una medición del mismo, sólo puede tomar *dos* valores.

Veamos a continuación el marco matemático asociado a la descripción de las variables aleatorias discretas.

1.1. Probabilidad y variables aleatorias

La idea de probabilidad, chance o aleatoriedad se puede considerar antigua. Sin embargo, la axiomatización rigurosa en términos matemáticos es relativamente reciente¹. La teoría de probabilidades describe eventos intrínsecamente aleatorios denominados *experimentos*. El conjunto de todos los posibles *resultados* (asociados a tal experimento) se denomina *espacio muestral* y es normalmente denotado por Ω , siendo, también, ω un elemento de éste conjunto. Este es normalmente el enfoque, y la notación, adoptada por matemáticos.

Ejemplo Consideremos un conductor que va hacia su trabajo. En el camino, atraviesa tres semáforos. Un *resultado* es que el conductor se detenga en un semáforo, y lo denotamos con la letra *d* mientras que si continúa, el otro resultado posible, lo hacemos con la letra *c*. Luego, todas las posibilidades del *evento* -lo que ocurre cuando el conductor se acerca a los semáforos- están dadas por:

$$\Omega = \{ddd, ddc, dcd, cdd, dcc, cdc, ccd, ccc, \}$$

En este trabajo, como así también en mecánica cuántica, el espacio muestral al que generalmente nos vamos a referir es el conjunto de los posibles valores de una variable aleatoria (que a su vez es una magnitud física, también denominada observable). Mientras que los experimentos (o eventos) son *medir y observar* (una vez, o muchas) tal magnitud física.

Veamos ahora las herramientas matemáticas básicas de esta teoría. El concepto de probabilidad está relacionado con la tasa de ocurrencia de los eventos. Formalmente:

Definición

Una medida de probabilidad (o probabilidad) definida sobre Ω es una función P sobre los conjuntos de Ω y hacia los números reales, que satisface

1. $P(\Omega) = 1$,
2. Si $A \subset \Omega$ entonces $P(A) \geq 0$,
3. Si A_1 y A_2 son dos conjuntos disjuntos de Ω entonces

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

$P(\Omega)$ es la probabilidad de que ocurra alguno de los eventos de Ω entonces es lógico y deseable que ésta sea uno. Mientras que $P(A_1 \cup A_2)$ es la probabilidad de que ocurra alguno de los eventos en A_1 o en A_2 . Veamos algunas de las propiedades adicionales de la medida P .

1. Si A^c es el complemento de A , $P(A^c) = 1 - P(A)$,
2. $P(\emptyset) = 0$ ($\emptyset = \Omega^c$),
3. Si $A \subset B$ entonces $P(A) \leq P(B)$,
4. Si A y B son dos conjuntos de Ω entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Una vez definido el concepto de probabilidad, podemos adoptar un enfoque más físico -léase: el enfoque que generalmente se usan en los libros de relacionados con la física. Consecuentemente, consideremos una variable aleatoria X y sea $\{x_i\}_{i=1}^n$, $n \in \mathbb{N}$, el conjunto

¹La teoría de la probabilidad tiene sus comienzos en los juegos de azar de Gerolamo Cardano en el siglo XVI, y de Pierre de Fermat y Blaise Pascal en el siglo XVII. Christiaan Huygens publicó un libro sobre el tema en 1657, mientras que en el siglo XIX Pierre Laplace completó lo que hoy se considera la interpretación clásica de la probabilidad.

de sus posibles resultados en un experimento (el espacio muestral). Si el conjunto $\{x_i\}$ es discreto (puntual) entonces decimos que X es una variable aleatoria discreta. Si, por el contrario, X toma valores de un conjunto continuo entonces decimos que ésta es una VA continua. Como ya aclaramos anteriormente, sólo consideraremos el caso discreto. Queda entonces definir el término *distribución de probabilidad*.

Definición

Sea X una variable aleatoria discreta con $n \in \mathbb{N}$ posibles valores reales $\{x_i\}$, el evento ω_i tal que $X = x_i$ está asociado a una probabilidad $p_i = P(\omega_i)$. Al conjunto $p = \{p_i\}$, que cumple además $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, lo denominamos distribución de probabilidad de X .

Tengamos en cuenta ahora dos VA. Sean éstas X ($\Omega_X = \{x_i\}_{i=1}^n$) e Y ($\Omega_Y = \{y_j\}_{j=1}^m$), $m \in \mathbb{N}$. Entonces podemos definir una probabilidad asociada a sus resultados conjuntos.

Definición

Dadas X e Y variables aleatorias discretas, entonces el evento ω_{ij} tal que $X = x_i$ e $Y = y_j$ está asociado a una probabilidad $P_{ij} = P(\omega_{ij})$. El conjunto de tales elementos se denomina distribución de probabilidad conjunta.

Por otro lado, si conocemos P_{ij} podemos calcular las distribuciones de probabilidad *marginales* (individuales) de X (p_i) e Y (q_j), tomando las sumas siguientes:

$$p_i = \sum_j P_{ij} \quad (1.1)$$

$$q_j = \sum_{ij} P_{ij} \quad (1.2)$$

Asimismo, dada una distribución de probabilidad conjunta P_{ij} la probabilidad *condicional* de $X = x_i$ si a priori conocemos que $Y = y_j$, es,

$$P_{i|j} = \frac{P_{ij}}{q_j} \quad (1.3)$$

Un resultado importante que relaciona las probabilidades condicionales de X e Y es el teorema de Bayes, que establece:

$$q_j P_{i|j} = p_i P_{j|i} \quad (1.4)$$

1.1.1. Entropía

Un concepto crucial para la teoría de información como así también para la física es el de *entropía*. Ésta es una cantidad relacionada con el desconocimiento, o incerteza, sobre un dado evento. Concretamente, en el caso de una VA X con distribución de probabilidad $p = \{p_i\}_1^n$, definimos:

Definición

La entropía $H(X)$ de una variable aleatoria X está definida por

$$H(X) = - \sum_i p_i \log_2 p_i \quad (1.5)$$

Como éste valor depende en su totalidad de la distribución de probabilidad p , en ocasiones utilizaremos la notación $H(p)$. Cabe remarcar que como $\lim_{x \rightarrow 0} x \log_2 x = 0$ utilizamos la convención siguiente $0 \log_2 0 = 0$.

Luego, como señalábamos, la entropía $H(X)$ es una medida del desconocimiento del valor que puede tomar X en un experimento. Si la distribución p asociada a X es uniforme

($p_i = p_j \forall i, j \in [1, n] \subset \mathbb{N}$), entonces $H(X)$ toma su máximo valor. Si X tiene una distribución de probabilidad p nula salvo $p_k = 1$, para algún $k \in [1, n]$, entonces $H(X) = 0$.

Como en los casos anteriores, podemos extender el concepto de entropía a más de una VA. Consideremos X e Y dos VA con distribución de probabilidad conjunta $\{P_{ij}\}$. Definimos la entropía conjunta de estas VA como

$$H(X, Y) = - \sum_{ij} P_{ij} \log_2 P_{ij} \quad (1.6)$$

Del mismo modo, y haciendo uso de $P_{i|j}$ definimos la entropía condicional como el promedio pesado (según la distribución $p = \{p_i\}$) de la entropía H que resulta de la distribución $P_{j|i}$, es decir:

$$H(Y|X) = - \sum_i p_i \sum_j P_{j|i} \log_2 P_{j|i} \quad (1.7)$$

El siguiente teorema relaciona las entropías condicional y conjunta de X e Y .

Teorema

Regla de la cadena:

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y|X) \quad (1.8)$$

Cabe remarcar que $H(X|Y) \neq H(Y|X)$. Sin embargo, la resta $H(X) - H(Y|X) = H(Y) - H(X|Y)$ es simétrica ante el intercambio de X con Y . Utilizaremos este hecho más adelante, en la definición de *información mutua*.

Otro resultado importante sobre la entropía H es la *concauidad*, propiedad conocida como la desigualdad de Jensen.

Teorema

Dadas n distribuciones de probabilidad $\{\sigma_i\}_{i=1}^n$ asociadas a otros n pesos estadísticos $\pi = \{\pi_i\}_{i=1}^n$, la entropía H satisface

$$H \left(\sum_i \pi_i \sigma_i \right) \geq \sum_i \pi_i H(\sigma_i) \quad (1.9)$$

Resumen Definimos qué es una distribución de probabilidad, para el caso concreto de variables aleatorias, haciendo uso de la definición axiomática de probabilidad. Definimos las distribuciones de probabilidad conjunta y condicional. Introdujimos el concepto de entropía como una medida de incerteza asociada a una VA. Por último, establecimos las definiciones de entropía conjunta y condicional, para finalmente relacionar estos conceptos con la denominada regla de la cadena.

1.2. Sistemas cuánticos: Estados y operaciones

Como establecíamos en el comienzo de la sección, ahora los observables de los denominados *sistemas cuánticos* son *intrínsecamente* estocásticos, por ello la descripción de su cinemática y dinámica se realiza en términos de variables aleatorias. Sin embargo, se conoce que una teoría -cuántica- sobre el movimiento de tales sistemas involucra otras herramientas matemáticas además de vectores estadísticos y distribuciones de probabilidad. Veamos, en términos generales, los postulados de la mecánica cuántica y el formalismo asociado.

1.2.1. Postulados y el principio de incerteza

Principio de superposición: Cada sistema físico está descrito por magnitudes físicas y representado por un *espacio de Hilbert* separable y un *estado*, que a su vez es un operador lineal acotado *trace-class*, positivo y autoadjunto; normalmente denotado por ρ (ver Preliminares matemáticos). A su vez, generalmente se pide la condición de *normalización*, es decir, $\text{Tr}[\rho] = 1$; y al conjunto de todos estos operadores (lineales, acotados, positivos, autoadjuntos y de traza uno) se lo denota como $B_1^+(\mathcal{H})$.

El espacio de Hilbert en cuestión es considerado normalmente complejo. En la Sec. 1.2.2 completaremos la información acerca de tales *estados*.

La regla de Born: Cada magnitud física de un sistema cuántico está representada por un operador lineal autoadjunto O , no necesariamente acotado. Su valor de expectativa (media en infinitos experimentos iguales) está dado por $\langle O \rangle = \text{Tr}[\rho O]$, siendo ρ el estado del sistema.

Postulado de medición: Cuando una magnitud física de un sistema, en un estado ρ , es medida, el estado del sistema inmediatamente después de esta medición, y luego observado el resultado etiquetado por k , está dado por

$$\rho_k = \frac{A_k \rho A_k^\dagger}{\text{Tr}[A_k \rho A_k^\dagger]} \quad (1.10)$$

donde A_k se denomina *operador medición* y está asociado al resultado k . Además, satisfacen $\sum_{k=1}^n A_k^\dagger A_k = \mathbb{1}$ (siendo n el total de los posibles resultados de la medición). La probabilidad de obtener el resultado k es $p_k = \text{Tr}[A_k \rho A_k^\dagger]$.

El postulado anterior es de radical importancia para nuestro trabajo por lo que extendemos la información relativa al mismo en la sección 1.2.4.

Sistemas multipartitos Cada sistema físico compuesto por dos o más subsistemas es representado por el producto tensorial de los espacios de Hilbert de cada subsistema; los operadores que representan estas cantidades físicas actúan en este espacio producto.

Evolución de von-Neuman: El evolución temporal de un sistema físico asilado (que no interactúa con nada fuera de sí mismo) está dada por

$$\rho(t) = U(t)\rho(0)U^\dagger(t) \quad (1.11)$$

donde t es el **parámetro** que indica el tiempo y $U = \exp(-it\frac{H}{\hbar})$, siendo H el generador de las traslaciones temporales.

Una importante implicación² de los postulados de la mecánica cuántica es la relación de incerteza de Hisenberg-Robertson.

La dispersión de un operador autoadjunto A en un estado ρ está dada por

$$\text{Disp}_\rho A = \langle (A - \langle A \rangle \mathbb{1})^2 \rangle = \quad (1.12)$$

$$= \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 \quad (1.13)$$

²Es demostrable, no es un postulado.

donde $\langle A \rangle = \text{Tr}[\rho A]$. La raíz cuadrada de la dispersión es conocida como la *incerteza* sobre A en el estado ρ :

$$\Delta A = \sqrt{\text{Disp}_\rho A}. \quad (1.14)$$

Podemos entonces establecer el principio de incerteza relacionado con la dispersión en una medición conjunta de dos operadores A y B :

$$\langle (\Delta A)^2 \rangle \langle (\Delta B)^2 \rangle \geq \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle|^2. \quad (1.15)$$

1.2.2. Estados

En mecánica cuántica, los sistemas están descritos por un operador lineal $\rho \in B_1^+(\mathcal{H})$ denominado *matriz densidad*³. Las dos categorías de estados más representativas son los denominados estados **puros** y los **mixtos**. Los primeros son *idempotentes*, es decir $\rho^2 = \rho$, y siempre se pueden escribir del siguiente modo:

$$\rho = |\psi\rangle \langle \psi| \quad (1.16)$$

con $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ y $\langle \psi|\psi\rangle = 1$; mientras que los segundos no admiten esta descomposición. Los estados mixtos surgen de combinaciones convexas de estados puros y siempre se pueden escribir del siguiente modo:

$$\rho = \sum_{i=1}^K p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (1.17)$$

con $\{p_i\}$ una distribución de probabilidad. Claramente, un estado mixto es una *mezcla* estadística de estados puros. Una medida del grado de pureza de un estado mixto es la **purity**, definida como:

$$\mathcal{P}[\rho] = \text{Tr}[\rho^2] \quad (1.18)$$

que cumple $\frac{1}{d} \leq \mathcal{P}[\rho] \leq 1$, siendo $d \in \mathbb{N}$ la dimensión de \mathcal{H} . Si ρ es un estado puro, entonces $\mathcal{P}[\rho] = 1$. De lo contrario, \mathcal{P} es menor que uno. Por ejemplo, para el estado (1.17), tenemos que

$$\mathcal{P} \left[\sum_{i=1}^K p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \right] = \sum_{i,j=1}^K p_i p_j |\langle \psi_i|\psi_j\rangle|^2 \quad (1.19)$$

Podemos remarcar un comportamiento interesante de esta medida. Dejemos fija la distribución de probabilidad $\{p_i\}$ y consideremos dos estados mixtos distintos:

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (1.20)$$

con $|\psi_i\rangle$ ortonormales entre sí, y otro,

$$\sigma = \sum_i p_i |\phi_i\rangle \langle \phi_i| \quad (1.21)$$

³El término *matriz densidad* fue introducido por von Neumann en 1927, y lo refiere como un *operador estadístico* (1955). A su vez, la palabra *matriz densidad* fue utilizada primero por Dirac, en un sentido diferente. De acuerdo con Coleman (1963) los químicos y físicos cuánticos acordaron una nomenclatura común en la década de 1960.

con $|\phi_i\rangle$ no ortogonales entre sí (pero normalizados). Entonces

$$\mathcal{P}[\sigma] = \mathcal{P}[\rho] + \gamma \quad (1.22)$$

con $\gamma = \sum_{i \neq j} p_i p_j |\langle \phi_i | \phi_j \rangle|^2 > 0$ y $\mathcal{P}[\rho] = \sum_i p_i^2$. Así, vemos que la pureza del estado σ es mayor que la del estado ρ y que además la cantidad \mathcal{P} no sólo depende de la distribución de probabilidad $\{p_i\}$ sino también del *overlap* medio de los estados $|\phi_i\rangle \langle \phi_i|$. En otras palabras, la purity depende de *cómo se mezcla* (esto dado por la distribución de probabilidad) y a su vez de *qué es* lo que se está mezclando (si los estados tienen o no *overlap*).

Por otro lado, como señalábamos anteriormente, el valor medio de un observable representado por un operador lineal autoadjunto A sobre \mathcal{H} , está dado por $\langle A \rangle = \text{Tr}[\rho A]$. Si el estado es puro, digamos $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$, entonces $\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle$ y su estado queda **completamente** determinado por el *ket* $|\psi\rangle$ sin necesidad de recurrir a la matriz densidad ρ .

Asimismo, se dice que un estado cuántico está en una superposición *coherente* en la representación A (con A un operador) si ρ no es diagonal en la base de autovectores de A .

Qubits

Consideremos un sistema cuántico que puede ser representado con un espacio de Hilbert de dimensión dos. Luego, cualquier conjunto de vectores ortonormales será una base del espacio, siendo éste isomorfo a \mathbb{C}^2 . Denominamos a este tipo de sistemas **qubits**, que es la unidad de información principal de la teoría de información cuántica. El motivo es que cada uno de los elementos de *cualquier* base del espacio se puede poner en correspondencia con los valores 0 y 1 de un bit de información. Veamos las distintas formas de representar qubits.

Sea entonces $|\psi\rangle = a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle \in \mathcal{H}$, con $\{|i\rangle\}_{i=0}^1$ una base ortonormal (BON), $a_i \in \mathbb{C}$ y $|a_0|^2 + |a_1|^2 = 1$. Luego, la matriz densidad asociada al estado puro $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$, en la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, resulta:

$$\rho = \begin{bmatrix} |a_0|^2 & a_0 a_1^* \\ a_0^* a_1 & |a_1|^2 \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

Ahora bien, para representar cualquier estado de un qubit podemos emplear las matrices de Pauli (MP). Éstas, más la identidad 2×2 , forman una base del espacio (de Hilbert) de las matrices complejas 2×2 , es decir, cualquier matriz compleja χ se puede descomponer del siguiente modo:

$$\chi = \sum_{i=0}^3 \beta_i \sigma_i \quad (1.24)$$

con σ_0 la matriz identidad y $\beta_i \in \mathbb{C}$. A su vez, como las matrices de Pauli son autoadjuntas, podemos descomponer cualquier operador autoadjunto Ω como:

$$\Omega = \sum_{i=0}^3 \alpha_i \sigma_i \quad (1.25)$$

con $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Utilizando esos argumentos, y teniendo en cuenta que toda matriz densidad es una matriz autoadjunta, de traza uno, podemos escribir:

$$\rho = \frac{1}{2} \left(\mathbb{1} + \sum_{i=1}^3 \alpha_i \sigma_i \right) \quad (1.26)$$

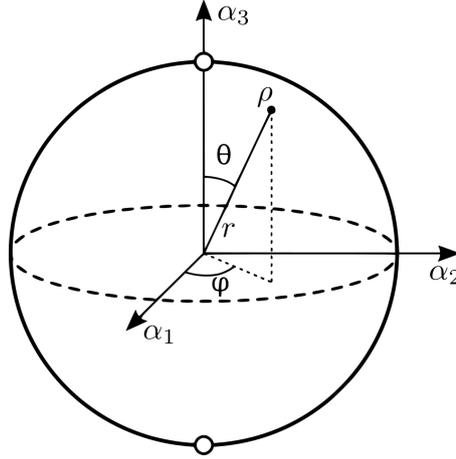


Figura 1.1: Esfera de Bloch.

considerando además que las matrices de Pauli tienen traza nula. Si adoptamos la representación que sigue para las MP^4

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

entonces toda matriz densidad se puede escribir como,

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \alpha_3 & \alpha_1 - i\alpha_2 \\ \alpha_1 + i\alpha_2 & 1 - \alpha_3 \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

En ocasiones vamos a utilizar una notación más compacta para la descomposición anterior (1.26):

$$\rho = \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}) \quad (1.29)$$

con $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ y $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. El vector $\vec{\alpha} = \text{Tr}[\rho\vec{\sigma}]$ es conocido como el *vector de Bloch* y sus componentes son coordenadas en el espacio de matrices con traza uno. Queda imponer una condición extra sobre tales coordenadas. La matriz densidad ρ es un operador positivo sí y sólo sí sus autovalores son no negativos y esto ocurre sí y sólo sí,

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \leq 1 \quad (1.30)$$

La ecuación anterior es la de una bola en \mathbb{R}^3 , cuya superficie está dada por la *esfera de Bloch*, ver Fig. 1.1. También podemos escoger coordenadas esféricas para $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, como son $\{r, \theta, \phi\}$.

Estados multipartitos *frecuentes* en la literatura

Consideremos un sistema físico formado por dos partes A y B asociadas a los espacios de Hilbert \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B , respectivamente. Como señalábamos en los Preliminares matemáticos, y utilizando el postulado **Sistemas multipartitos** de la Sec. 1.2.1, el espacio de Hilbert del sistema global $A + B$, \mathcal{H} , está dado por el *producto tensorial* de \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B , i.e. $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Una base ortonormal de este espacio es la *base producto*: $\{|ij\rangle\} = \{|i\rangle_A \otimes |j\rangle_B\}_{ij}$ con $\{|i\rangle_A\}$ y $\{|j\rangle_B\}$ las respectivas bases de \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B .

⁴Generalmente no hace falta esto, ya que lo que define a las matrices de Pauli son sus propiedades.

En el caso en que \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B son de dimensión dos, una base -denominada *producto-* de \mathcal{H} está dada por

$$|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B = |00\rangle \qquad |0\rangle_A \otimes |1\rangle_B = |01\rangle \qquad (1.31)$$

$$|0\rangle_1 \otimes |0\rangle_B = |10\rangle \qquad |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B = |11\rangle \qquad (1.32)$$

Además de estados puros y mixtos existen otras categorías, o conjuntos de estados, con propiedades específicas. En esta sección agruparemos las más utilizadas en el área, listando al menos aquellas categorías relevantes para las secciones siguientes. Sus propiedades se verán luego en la sección que corresponda.

- Comencemos entonces con los denominados **estados de Bell** [86]. Éstos son cuatro estados ortonormales entre sí (luego, forman una base de \mathcal{H}) que tienen la siguiente forma:

$$|\psi_{00}\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \qquad |\psi_{01}\rangle = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}} \qquad (1.33)$$

$$|\psi_{10}\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} \qquad |\psi_{11}\rangle = \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}} \qquad (1.34)$$

- Los **estados de Werner** [87] forman parte de un espacio de Hilbert de dimensión d^2 , $d \in \mathbb{N}$, compuesto por dos partes de dimensión d cada una. La forma de los estados de Werner está dada por:

$$\rho_W = p \frac{2}{d(d+1)} P^{sy} + (1-p) \frac{2}{d(d-1)} P^{as} \qquad (1.35)$$

con

$$P^{sy} = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + F) \qquad (1.36)$$

$$P^{as} = \frac{1}{2}(\mathbb{1} - F) \qquad (1.37)$$

$$F = \sum_{ij} |i\rangle_A \langle j| \otimes |j\rangle_B \langle i| \qquad (1.38)$$

En el caso $d = 2$, un estado de Werner muy utilizado en la literatura relacionada con *correlaciones cuánticas* es

$$\rho_w = p |\psi_{00}\rangle \langle \psi_{00}| + \frac{(1-p)}{4} \mathbb{1} \qquad (1.39)$$

cuya característica principal es que cambiando el parámetro p se puede ir de un estado de Bell a la identidad 4×4 .

- Veamos ahora la forma de los **estados GHZ** [88]. Estos son elementos de un espacio de Hilbert 2^n dimensional, conformado por n partes de dimensión 2 cada una. La expresión de los mismos es:

$$|\text{GHZ}\rangle = \frac{|0\rangle^{\otimes n} + |1\rangle^{\otimes n}}{\sqrt{2}} \qquad (1.40)$$

donde $|x\rangle^{\otimes n} = |x\rangle_1 \otimes \cdots \otimes |x\rangle_n$ con $\{|x\rangle_i\}$ una BON del i -ésimo qubit, $x \in \{0, 1\}$. Por ejemplo, para el caso de $n = 3$,

$$|\text{GHZ}\rangle = \frac{|000\rangle + |111\rangle}{\sqrt{2}} \qquad (1.41)$$

En este escenario, es decir $\mathcal{H} = \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2$ con \mathcal{H}_2 de dimensión 2 y tres subsistemas, otro estado utilizado y conocido por sus propiedades es el **estado W** [89], cuya forma es:

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle) \quad (1.42)$$

La generalización de los mismos a un espacio formado por n qubits es:

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}(|10\dots 0\rangle + |010\dots 0\rangle + \dots + |0\dots 01\rangle) \quad (1.43)$$

- Una clase importante de estados mezcla son los **isotrópicos** [90]. Al igual que los estados de Werner, son vectores de un espacio de Hilbert compuesto por dos partes de dimensión d . Asimismo, los estados isotrópicos son mixturas convexas de un estado máximamente mixto $\frac{\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}}{d}$ con otro máximamente entrelazado $|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=1}^d |j\rangle_A \otimes |j\rangle_B$ siendo $\{|j\rangle_{A,B}\}$ bases ortonormales de $\mathcal{H}_{A,B}$. Podemos expresar tales mixturas como:

$$\rho_{iso} = \frac{1-p}{d^2-1} (\mathbb{1} - |\Psi^+\rangle \langle \Psi^+|) + p |\Psi^+\rangle \langle \Psi^+| \quad (1.44)$$

con $p \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$.

- Otra categoría de estados de sistemas cuánticos de dos qubits conocida y muy utilizada en múltiples trabajos son los **estados de Bell diagonales** (BD). Éstos tienen matrices densidad reducidas máximamente mixtas, es decir, $\rho_A = \text{Tr}_B[\rho] = \frac{1}{2}\mathbb{1}$, $\rho_B = \text{Tr}_A[\rho] = \frac{1}{2}\mathbb{1}$ y se pueden expresar de la siguiente forma,

$$\rho^{BD} = \frac{1}{4} \left(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + \sum_{i=1}^3 c_i \sigma_i^A \otimes \sigma_i^B \right) \quad (1.45)$$

Asimismo, cualquier estado de dos qubits que cumple $\rho_A = \mathbb{1}/2 = \rho_B$, puede llevarse a una BD utilizando operaciones unitarias locales [47].

Los autovalores de un estado BD son:

$$\lambda_0 = \frac{1}{4}(1 - c_1 - c_2 - c_3), \quad (1.46)$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{4}(1 - c_1 + c_2 + c_3), \quad (1.47)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{4}(1 + c_1 - c_2 + c_3), \quad (1.48)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{4}(1 + c_1 + c_2 - c_3) \quad (1.49)$$

donde los coeficientes $\{c_j\}$ son tales que $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $i \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Este conjunto de estados contiene a los estados de Werner ($|c_1| = |c_2| = |c_3| = c$) de dos qubits y a los estados de Bell ($|c_i| = 1$, $|c_j| = 0$, $|c_k| = 0$, con (i, j, k) cualquier permutación de $(1, 2, 3)$), entre otros.

- Luego, en términos generales, cualquier estado ρ de dos qubits (\mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B de dimensión dos) puede siempre escribirse como [91, 92]

$$\rho = \rho_A \otimes \rho_B + \frac{1}{4} \sum_{ij} T_{ij} \sigma_i^A \otimes \sigma_j^B \quad (1.50)$$

siendo $\{\sigma_i^A\}$, $\{\sigma_i^B\}$ las matrices de Pauli, y los elementos T_{ij} están por

$$T_{ij} \doteq \langle \sigma_i^A \otimes \sigma_j^B \rangle_\rho - \langle \sigma_i^A \otimes \mathbb{1} \rangle_\rho \langle \mathbb{1} \otimes \sigma_j^B \rangle_\rho \quad (1.51)$$

Esta descomposición se denomina **forma de Fano**. En la Sec. 3.1.1 retomaremos este conjunto de estados dando una interpretación estadística a los elementos T_{ij} .

Representación de matrices densidad en dimensión finita

Al comienzo de la Sec. 1.2.1 listamos los postulados de la mecánica cuántica. En el primero de ellos, introdujimos el conjunto de estados $B_1^+(\mathcal{H})$ como los operadores lineales, acotados, positivos, autoadjuntos y de traza uno. Si el espacio de Hilbert sobre el cual actúan estos operadores es de dimensión finita $n \in \mathbb{N}$, podemos elegir una base ortonormal de este espacio: $\{|\psi_1\rangle, \dots, |\psi_n\rangle\} \subset \mathcal{H}$, y representar a ρ con una matriz compleja $n \times n$ cuyos elementos ρ_{ij} están dados por $\rho_{ij} = \langle \psi_i | \rho | \psi_j \rangle$. Cabe aclarar que utilizaremos de manera indistinta ρ para referirnos al operador o a la matriz porque ambos objetos refieren al *estado* del sistema. Asimismo, esta asociación matricial es natural y ya la hemos realizado por ejemplo en la ecuación (1.23); sin embargo, en esta sección conviene explicitarla. Luego, el espacio de las matrices densidad esta formado por todas aquellas que satisfagan:

1. $\rho = \rho^\dagger$ (autoadjuntas),
2. $\forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}, \langle \psi | \rho | \psi \rangle \geq 0$ (positivas, i.e., autovalores positivos),
3. $\text{Tr}[\rho] = 1$ (normalizadas).

Para describir el espacio de las matrices que cumplen los requisitos anteriores de una manera específica, comenzamos dando algunas propiedades básicas que tienen las matrices complejas $n \times n$. Este a su vez es un espacio de Hilbert en sí mismo si le adicionamos el producto escalar (conocido como *de Hilbert-Schmidt*):

$$\langle A | B \rangle = \text{Tr} [A^\dagger B] \quad (1.52)$$

con A, B matrices autoadjuntas $n \times n$. Por otra parte, este espacio coincide con el de operadores acotados sobre \mathcal{H} , $B(\mathcal{H})$. Recordemos que en dimensión finita, todos los operadores (y matrices) son acotados y tienen definida una *traza* (es decir, son *trace-class*). Veamos algunos resultados resumidos sobre este tipo de objetos matemáticos.

Una matriz A puede ser diagonalizada por cambios unitarios de base sí y sólo sí éste es *normal*, es decir, $[A, A^\dagger] = 0$. Las matrices hermitianas y las unitarias son normales. Una matriz normal es autoadjunta sí y sólo sí esta tiene autovalores reales. Además, cualquier operador/matriz normal se puede escribir como:

$$A = \sum_{i=1}^r \lambda_i P_i \quad (1.53)$$

con $P_i = |\phi_i\rangle \langle \phi_i|$, siendo $\{|\phi_i\rangle\}$ los r autovectores de A . Este conjunto forma una base de un subespacio de \mathcal{H} conocido como el *soporte* de A , denotado como $\text{supp}[A]$. Un subespacio ortogonal al anterior es el núcleo de A , $\text{kerr}[A]$, definido por todos los $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ tales que $A|\psi\rangle = 0$. A su vez, si A es normal se cumple $\mathcal{H} = \text{supp}[A] \oplus \text{kerr}[A]$ y el núcleo del mismo es el subespacio generado por los autovectores que tienen asociados autovalores nulos.

Volvamos ahora al espacio vectorial formado por las matrices complejas $n \times n$. Un subespacio de particular importancia es el conjunto de las matrices complejas hermitianas.

Éste es un espacio de dimensión n^2 y puede ser visto como el álgebra de Lie de $U(n)$ (grupo de Lie de todas las matrices unitarias $n \times n$). El subespacio de dimensión $n^2 - 1$ de matrices hermitianas con traza nula es, a su vez, el álgebra de Lie del grupo $SU(n)$ (grupo de Lie de las matrices unitarias $n \times n$ con determinante uno). Podemos utilizar el álgebra anterior para dar una representación de las matrices hermitianas. En consecuencia, consideremos los generadores $\{\sigma_i\}$ del grupo $SU(n)$ que cumplen,

$$\sigma_i \sigma_j = \frac{2}{n} \delta_{ij} + \sum_k d_{ijk} \sigma_k + i \sum_k f_{ijk} \sigma_k \quad (1.54)$$

siendo d_{ijk} totalmente simétrico en sus índices (y nulo para $n = 2$) mientras que f_{ijk} es totalmente antisimétrico. Entonces cualquier matriz A hermitiana $n \times n$ se puede escribir como:

$$A = \tau_0 \sqrt{\frac{2}{n}} \mathbb{1} + \sum_{i=1}^{n^2-1} \tau_i \sigma_i \quad (1.55)$$

siendo $\tau_0 = \frac{\text{Tr}[A]}{\sqrt{2N}}$ y $\tau_i = \frac{1}{2} \text{Tr}[\sigma_i A]$.

Luego, dentro del conjunto de matrices dadas por (1.55) tenemos el subconjunto de matrices complejas hermitianas positivas y de traza uno, $B_1^+(\mathcal{H})$, que nos interesa descomponer. El mismo está dado por:

$$\rho = \frac{1}{n} \mathbb{1} + \sum_{i=1}^{n^2-1} \tau_i \sigma_i \quad (1.56)$$

Esta descomposición surge con la identificación de $B(\mathcal{H})$ con un subconjunto del álgebra de Lie del grupo $SU(n)$, cambiando el origen del mismo -la matriz *cero*- por la matriz máximamente mixta $\rho_* = \frac{1}{n} \mathbb{1}$. Las coordenadas $\{\tau_i\}$ juegan un rol de coordenadas cartesianas en $B_1^+(\mathcal{H})$.

Ahora bien, podemos elegir otro modo de parametrizar las matrices ρ como un subconjunto del álgebra de Lie de $SU(n)$, utilizando las *coordenadas exponenciales* $\{x_i\} \subset \mathbb{R}$. A saber,

$$\rho = \frac{e^{-\beta H}}{\text{Tr}[e^{-\beta H}]} \quad (1.57)$$

con $H = \sum_{i=1}^{n^2-1} x_i \sigma_i$.

Cualquiera de las dos representaciones (1.56) y (1.57) nos permiten ver el espacio de las matrices densidad como un cuerpo rígido en \mathbb{R}^{n^2-1} pensado como un espacio euclidiano, esférico en el caso de $n = 2$.

Cabe remarcar que si tomamos $n = 2$ en la expresión (1.56) entonces nos queda $\rho = \frac{1}{2} \mathbb{1} + \sum_{i=1}^3 \tau_i \sigma_i$. A su vez, para obtener (1.26) a partir de la forma anterior, tenemos que tomar $\tau_i = \frac{1}{2} \alpha_i$.

Sumas convexas

En la sección 1.2.2 notábamos que toda matriz densidad $\rho \in B_1^+(\mathcal{H}_n)$ es diagonalizable por ser autoadjunta (y por lo tanto normal). En consecuencia podemos expresarla del siguiente modo:

$$\rho = \sum_{i=1}^n \lambda_i |e_i\rangle \langle e_i|, \quad \rho |e_i\rangle = \lambda_i |e_i\rangle, \quad \sum_i \lambda_i = 1 \quad (1.58)$$

Es decir, toda matriz densidad se puede escribir como la suma de sus autovectores $\{|e_i\rangle\}$. En ocasiones, $\{|e_i\rangle\}$ se denomina *ensamble de autovectores*. Por otro lado, en la misma sección definimos a los estados mixtos como sumas convexas de estados puros. Es decir, toda matriz densidad ρ se puede escribir como

$$\rho = \sum_{i=1}^r p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (1.59)$$

siendo $\{|\psi_i\rangle\}$ con $r, n \in \mathbb{N}$, un conjunto de estados puros no ortogonales. El siguiente teorema conocido como *la mixtura de Schrödinger* relaciona la suma en autovectores (1.58) con la suma convexa (1.59).

Teorema

Sea ρ una matriz densidad $n \times n$ con autovectores $\{|e_i\rangle\}$ asociados a los autovalores $\{\lambda_i\}$. Luego, ésta se puede escribir como

$$\rho = \sum_{i=1}^r p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad \sum_{i=1}^r p_i = 1,$$

con $p_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, sí y sólo sí existe una matriz unitaria U , $r \times r$, tal que

$$|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{p_i}} \sum_{j=1}^n U_{ij} \sqrt{\lambda_j} |e_j\rangle.$$

con $\{|\psi_i\rangle\}$ un conjunto de estados normalizados.

1.2.3. Operaciones cuánticas propias

Hasta aquí hemos descrito los *estados* cuánticos y el formalismo matemático asociado. En esta sección veremos resultados relacionados con las operaciones cuánticas realizables sobre los sistemas cuánticos y cómo representarlas.

Por razones prácticas es, en ocasiones, útil trabajar con una representación explícita de los cambios posibles que puede presentar un estado cuántico. Concretamente, dada una matriz densidad ρ , ¿qué características tiene el mapa $\rho \rightarrow \mathcal{E}[\rho]$ de forma tal que $\mathcal{E}[\rho]$ esté *bien definido*? Diremos que la operación $\mathcal{E}[\cdot]$ está *bien definido* si tiene las siguientes propiedades:

1. El mapa $\mathcal{E}[\cdot]$ debe respetar la convexidad del espacio de las matrices densidad, i.e.,

$$\mathcal{E}\left[\sum_i p_i \rho_i\right] = \sum_i p_i \mathcal{E}[\rho_i]$$

2. $\text{Tr}[\mathcal{E}[\rho]]$ es la probabilidad de que la transformación $\rho \rightarrow \mathcal{E}[\rho]$ ocurra. Por lo que:

$$0 \leq \text{Tr}[\mathcal{E}[\rho]] \leq 1$$

para todo operador densidad $\rho \in B_1^+(\mathcal{H}_n)$.

3. $\mathcal{E}[\cdot]$ tiene que ser un mapa *completamente positivo* (CP). Esta condición es más fuerte que la positividad del mapa, que significa que $\mathcal{E}[\rho]$ es un operador positivo (ver Preliminares Matemáticos) para todo $\rho \in B_1^+(\mathcal{H}_n)$. Para definir un mapa CP, consideremos la transformación $\mathcal{E} \otimes \mathbb{1}$ dada por

$$(\mathcal{E} \otimes \mathbb{1}) \left[\sum_{\alpha} A_{\alpha} \otimes B_{\alpha} \right] = \sum_{\alpha} \mathcal{E}[A_{\alpha}] \otimes B_{\alpha}$$

con A_α y B_α operadores que actúan sobre \mathcal{H}_n y \mathcal{H}_m , respectivamente, siendo \mathcal{H}_m un espacio de Hilbert de dimensión $m \in \mathbb{N}$. En efecto, $\mathcal{E}[\cdot]$ es una transformación completamente positiva si la operación compuesta $\mathcal{E} \otimes \mathbb{1}$ sobre el espacio $\mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_m$ mapea operadores positivos en operadores positivos para todo m . Físicamente, este es un requerimiento razonable porque la transformación compuesta puede ser vista como una operación sólo sobre el sistema que representa el espacio \mathcal{H}_n , sin influenciar lo que resta del sistema compuesto.

La caracterización de los mapas que satisfacen los requerimientos anteriores está dada por el teorema de representación debido a Kraus (1983), denominado *representación en suma de operadores*.

Teorema

Un mapa lineal $\mathcal{E}[\cdot]$ es completamente positivo y satisface $0 \leq \text{Tr}[\mathcal{E}[\rho]] \leq 1$ para todo $\rho \in B_1^+(\mathcal{H}_n)$ si y sólo si existe un conjunto contable de operadores $\{E_j\}$ tales que la operación $\mathcal{E}[\cdot]$ se puede escribir como

$$\mathcal{E}[\rho] = \sum_j E_j \rho E_j^\dagger \quad (1.60)$$

con $0 \leq \mathbb{1} - \sum_j E_j^\dagger E_j$.

Una transformación lineal CP que además cumple con $\mathbb{1} = \sum_j E_j^\dagger E_j$ se dice que *preserva la traza*, concretamente porque, en este caso, $\text{Tr}[\mathcal{E}[\rho]] = \text{Tr}[\rho]$. Luego, si ρ es una matriz densidad, entonces $\mathcal{E}[\rho]$ también lo será. Consecuentemente, normalizamos el término **operación cuántica** como un mapa CP que preserve la traza (CPTP, por sus siglas en inglés).

Ahora bien, además de la representación en suma de operadores de Kraus establecida anteriormente, existe otro modo de representar mapas CPTP, denominada **representación ambiente**.

Específicamente, todas las *operaciones cuánticas* se pueden representar matemáticamente por la composición de tres tipos de operaciones:

1. Transformaciones unitarias;
2. Extensiones de los sistemas;
3. Traza parcial (reducción de los sistemas).

Las **transformaciones unitarias** de un estado σ sobre un espacio de dimensión finita están dadas por un operador unitario U , sobre el mismo espacio, según la transformación:

$$\sigma' = U\sigma U^{-1} \quad (1.61)$$

Además, este tipo de transformaciones cumplen con el siguiente resultado debido a Kadison.

Teorema

Sea Φ un mapa de $B_1^+(\mathcal{H}_n)$ en $B_1^+(\mathcal{H}_n)$ que es biyectivo (uno a uno y sobreyectivo) que preserve la convexidad, es decir:

$$\Phi\left[\sum_i p_i\right] = \sum_i p_i \Phi[\rho_i] \quad (1.62)$$

con $\{\rho_i\} \subset B_1^+(\mathcal{H}_n)$ y $\sum_i p_i = 1$, entonces éste es de la forma

$$\Phi[\sigma] = U\sigma U^{-1} \quad (1.63)$$

siendo U un operador unitario o antiunitario⁵.

⁵Un operador antiunitario es uno tal que $\langle U\psi|U\phi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle^* = \langle\phi|\psi\rangle$ para todo $|\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathcal{H}_n$.

Por otro lado, las operaciones unitarias sobre el espacio $B_1^+(\mathcal{H}_n)$ de las matrices densidad se corresponden con rotaciones en \mathbb{R}^{n^2-1} . Concretamente, sea $\rho = \frac{1}{n}\mathbb{1} + \sum_i \tau_i \sigma_i$ (ver Ec. (1.56)) entonces

$$\rho' = U\rho U^\dagger = \frac{1}{n}\mathbb{1} + \sum_i \tau_i U\sigma_i U^\dagger = \frac{1}{n}\mathbb{1} + \sum_i \tau'_i \sigma_i \quad (1.64)$$

donde τ'_i es el vector transformado según:

$$\tau'_i = \frac{1}{2}\text{Tr}[\rho' \sigma_i] = \frac{1}{2}\text{Tr}[\sigma_i U \sigma_j U^\dagger] \tau_j = \sum_j O_{ij} \tau_j \quad (1.65)$$

con $O_{ij} = \frac{1}{2}\text{Tr}[\sigma_i U \sigma_j U^\dagger]$. Se puede ver que O es una matriz ortogonal, i.e., $(OO^T)_{ij} = \delta_{ij}$ y así U se corresponde con un rotación dada por O .

El segundo tipo de transformación tiene que ver con **extender los sistemas** cuánticos definiendo nuevos estados en espacios de Hilbert de mayor dimensión. Es decir, si tenemos $\rho \in B_1^+(\mathcal{H}_n)$, podemos definir

$$\rho' = \rho \otimes \sigma \in B_1^+(\mathcal{H}) \quad (1.66)$$

con $\sigma \in B_1^+(\mathcal{H}_k)$ y $\mathcal{H} = \mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_k$ siendo \mathcal{H}_k un espacio de Hilbert de dimensión $k \in \mathbb{N}$. La inversa de esta operación está dada por la **traza parcial** que satisface $\text{Tr}_{\mathcal{H}_k} \rho \otimes \sigma = \rho$.

Las transformaciones que se pueden realizar por medio de composiciones de estas tres operaciones cuánticas se denominan *transformaciones cuánticas propias* o *deterministas* y se pueden escribir del siguiente modo:

$$\rho' = \text{Tr}_{\mathcal{H}_k} \left[U_T(\rho \otimes |\hat{\nu}\rangle\langle\hat{\nu}|) U_T^\dagger \right] \quad (1.67)$$

con ρ el estado sobre el cual aplicamos la operación cuántica, U_T un operador unitario definido sobre $\mathcal{H} = \mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_k$ y $|\hat{\nu}\rangle\langle\hat{\nu}| \in B_1^+(\mathcal{H}_k)$ un estado puro. Ésta forma de representar ρ' es la denominada *representación ambiente*.

Asimismo, podemos reescribir ρ' como una suma tomando una base sobre el espacio \mathcal{H}_k . Sea $\{|\mu\rangle\}_{\mu=1}^k$ una BON de este espacio, entonces la traza sobre el mismo es:

$$\rho' = \text{Tr}_{\mathcal{H}_k} \left[U_T(\rho \otimes |\hat{\nu}\rangle\langle\hat{\nu}|) U_T^\dagger \right] = \sum_{\mu=1}^k \langle\mu| U_T |\hat{\nu}\rangle \rho \langle\hat{\nu}| U_T^\dagger |\mu\rangle \quad (1.68)$$

La demostración de la expresión anterior se puede hacer de varios modos, uno de ellos es tomar una base producto de $\mathcal{H} = \mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_k$, escribir $U_T(\rho \otimes |\hat{\nu}\rangle\langle\hat{\nu}|) U_T^\dagger$ como combinación lineal de los elementos de esta base y por último hacer la suma $\sum_{\mu=1}^k \langle\mu| \cdot |\mu\rangle$.

Ahora bien, los elementos $A_\mu = \langle\mu| U_T |\hat{\nu}\rangle$ son operadores definidos sobre el espacio \mathcal{H}_n , y la operación sobre ρ se puede escribir como

$$\rho' = \sum_{\mu}^k A_\mu \rho A_\mu^\dagger \quad (1.69)$$

Además, los operadores A_μ cumplen:

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=1}^k A_\mu^\dagger A_\mu &= \sum_{\mu=1}^k \langle\hat{\nu}| U_T^\dagger |\mu\rangle \langle\mu| U_T |\hat{\nu}\rangle = \langle\hat{\nu}| U_T^\dagger \sum_{\mu=1}^k |\mu\rangle \langle\mu| U_T |\hat{\nu}\rangle = \\ &= \langle\hat{\nu}| U_T^\dagger U_T |\hat{\nu}\rangle = \langle\hat{\nu}| \mathbb{1} |\hat{\nu}\rangle = \mathbb{1} \end{aligned} \quad (1.70)$$

Luego, utilizando el teorema de representación en suma de operadores, la descomposición (1.69), junto con la Ec. (1.70)), nos garantizan que ρ' es una matriz densidad y que la representación ambiente define un mapa CPTP.

Una vez representadas las operaciones realizables sobre matrices densidad, veamos tres transformaciones particulares que luego relacionaremos entre sí.

Un mapa es denominado **unital** $\Phi[\cdot]$ si deja invariante el operador identidad:

$$\Phi[\mathbb{1}] = \mathbb{1}$$

Si escribimos a Φ en la representación suma, $\Phi[\rho] = \sum_i A_i \rho A_i^\dagger$, entonces la condición para Φ unital es:

$$\Phi[\mathbb{1}] = \mathbb{1} = \sum_i A_i A_i^\dagger$$

Además, si $\Phi[\cdot]$ es un mapa CPTP, i.e., $\sum_i A_i^\dagger A_i = \mathbb{1}$, lo denominamos **bistocástico**. Otro tipo de mapas son los denominados **isotrópicos** que pueden representarse del siguiente modo:

$$\Phi^{iso}[A] = p\Gamma[A] + (1-p)\frac{\mathbb{1}}{n}\text{Tr}[A]$$

con A una matriz $n \times n$, y Γ una transformación unitaria o antiunitaria⁶. Asimismo, un mapa **completely decohering** tiene la forma:

$$\Phi^d[A] = \sum_{i=1}^n \langle i| A |i\rangle |i\rangle \langle i|$$

con $\{|i\rangle\}$ una BON de \mathcal{H}_n .

Las tres operaciones anteriores, *unital*, *completely decohering* e *isotrópicas*, están relacionadas por las operaciones que **preservan la conmutatividad** (CP, por sus siglas en inglés). Específicamente, un mapa Δ de este tipo es uno tal que $[\Delta[\rho_1], \Delta[\rho_2]] = 0$ para cualesquiera operadores ρ_1, ρ_2 que satisfacen $[\rho_1, \rho_2] = 0$. Estas transformaciones tienen formas muy específicas dependiendo de la dimensión del espacio de Hilbert sobre el cual actúan. En particular,

- Si $\dim \mathcal{H} = 2$ entonces todo mapa que preserve la conmutatividad es de dos tipos: *unital* o *completely decohering*.
- Si $\dim \mathcal{H} > 2$ entonces todo mapa que preserve la conmutatividad es también de dos tipos: *isotrópico* o *completely decohering*.

Mapas en dimensión dos

Veamos algunos de los ejemplos más importantes de operaciones cuánticas que actúan sobre $B_1^+(\mathcal{H}_2)$, con \mathcal{H}_2 un espacio de Hilbert de dimensión dos, utilizados en información y comunicación cuántica. A saber, sea $\rho \in B_1^+(\mathcal{H}_2)$:

⁶Una transformación antiunitaria $\Gamma[\cdot]$ es de la siguiente forma:

$$\Gamma[A] = U A^T U^\dagger$$

con A^T la transpuesta de A y U una matriz unitaria.

Bit-flip El canal bit-flip está definido de acuerdo con,

$$\rho \rightarrow \Phi_{BF}^p[\rho] = p\sigma_1\rho\sigma_1 + (1-p)\rho \quad (1.71)$$

Los operadores de Kraus de este canal son $\{\sqrt{p}\sigma_x, \sqrt{1-p}\mathbb{1}\}$.

Phase-flip Otro importante ejemplo de operación cuántica es el canal Phase-flip (también denominado *dephasing*), dado por:

$$\rho \rightarrow \Phi_{PF}^p[\rho] = p\sigma_z\rho\sigma_z + (1-p)\rho \quad (1.72)$$

En este caso, los operadores de Kraus son $\{\sqrt{p}\sigma_z, \sqrt{1-p}\mathbb{1}\}$.

Asimismo, para $p = \frac{1}{2}$, es remarcable la acción de $\Phi_{PF}^{1/2}$ sobre una matriz densidad general. Veamos. Sea ρ dada por

$$\begin{bmatrix} \hat{p} & \alpha \\ \alpha^* & 1 - \hat{p} \end{bmatrix}$$

con $\hat{p} \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \Phi_{PF}^{1/2}[\rho] &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{p} & \alpha \\ \alpha^* & 1 - \hat{p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \hat{p} & \alpha \\ \alpha^* & 1 - \hat{p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \hat{p} & 0 \\ 0 & 1 - \hat{p} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Concretamente, este canal anula los elementos fuera de la diagonal de ρ .

Pauli Los canales de Pauli Φ_P son una generalización de los mapas anteriores y están definidos como:

$$\Phi_P = \sum_{i,j=0}^1 p_{ij} \sigma_z^i \sigma_x^j \rho \sigma_x^j \sigma_z^i \quad (1.73)$$

siendo p_{ij} una distribución de probabilidad. Los operadores de Kraus son $\{\sqrt{p_{ij}}\sigma_z^i\sigma_x^j\}$

Depolarizing Este canal involucra la pérdida del estado ρ reemplazándolo por la matriz máximamente mixta, con probabilidad p . Es decir,

$$\rho \rightarrow \Phi_D^p[\rho] = (1-p)\rho + p\frac{\mathbb{1}}{2} \quad (1.74)$$

Amplitude Damping El canal *amplitude damping* está dado por:

$$\rho \rightarrow \Phi_{AD}[\rho] = A_0\rho A_0^\dagger + A_1\rho A_1^\dagger \quad (1.75)$$

con $A_0 = \sqrt{\gamma}|0\rangle\langle 1|$ y $A_1 = |0\rangle\langle 0| + \sqrt{1-\gamma}|1\rangle\langle 1|$, siendo $\{|i\rangle\}_{i=0}^1$ la base computacional, definida como:

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si escribimos a ρ como

$$\begin{bmatrix} \hat{p} & \alpha \\ \alpha^* & 1 - \hat{p} \end{bmatrix}$$

entonces la suma (1.75) resulta:

$$\Phi_{AD}[\rho] = \begin{bmatrix} 1 - (1-\gamma)\hat{p} & \sqrt{1-\gamma}\alpha \\ \sqrt{1-\gamma}\alpha^* & (1-\gamma)\hat{p} \end{bmatrix} \quad (1.76)$$

Una motivación de esta transformación es la evolución aleatoria de muchos sistemas físicos. En particular, consideremos que $|0\rangle$ es el estado fundamental⁷ de un átomo

⁷Estado con menor energía asociada

y que $|1\rangle$ es cualquier otro estado excitado. Supongamos que la probabilidad de que el átomo decaiga de un estado excitado al estado fundamental es γ . La operación $A_0\sigma A_0^\dagger$ con $A_0 = \sqrt{\gamma}|0\rangle\langle 1|$ (y σ una matriz densidad) lleva el estado $|1\rangle$ al $|0\rangle$ con probabilidad γ :

$$\begin{aligned} A_0|0\rangle\langle 0|A_0^\dagger &= \mathbb{0} \\ A_0|1\rangle\langle 1|A_0^\dagger &= \gamma|0\rangle\langle 0| \end{aligned}$$

Este operador de Kraus en solitario no satisface las condiciones para ser un mapa CPTP entonces definimos A_1 tal que $\sum_k A_k^\dagger A_k = \mathbb{1}$, resultando $A_1 = |0\rangle\langle 0| + \sqrt{1-\gamma}|1\rangle\langle 1|$.

Una vez establecidos los ejemplos anteriores, veamos una importante parametrización de cualquier mapa sobre $B_1^+(\mathcal{H}_2)$ en $B_1^+(\mathcal{H}_2)$. A tal fin, emplearemos la base del espacio de las matrices complejas 2×2 dada por la identidad y las matrices de Pauli.

Todo mapa $\Phi: \mathbb{C}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$ sobre una matriz C puede representarse unívocamente por una matriz \mathbb{T} 4×4 que actúa sobre las componentes de C en dicha base. Es decir, si

$$C = \vec{\omega} \cdot \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \vec{\sigma} \end{bmatrix} = \omega_0 \mathbb{1} + \sum_i \omega_i \sigma_i, \text{ tenemos que,}$$

$$C' = \Phi[C] = \vec{\omega}' \cdot \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \vec{\sigma} \end{bmatrix}$$

con $\vec{\omega}' = \mathbb{T}\vec{\omega}$.

Para el caso de matrices densidad, habíamos adoptado la convención (1.26), i.e., $\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \sum_i \alpha_i \sigma_i)$. Entonces,

$$\rho = \frac{1}{2} \left(\mathbb{1} + \sum_i \alpha_i \sigma_i \right) = \vec{d} \cdot \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \vec{\sigma} \end{bmatrix} \iff \vec{d} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ \vec{\alpha} \end{bmatrix}$$

Así,

$$\rho' = \Phi[\rho] = \vec{d}' \cdot \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \vec{\sigma} \end{bmatrix}$$

con $\vec{d}' = \mathbb{T}_\Phi \vec{d}$.

Como el objetivo es parametrizar mapas entre matrices densidad, tenemos que $\vec{d}' = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ \vec{\alpha}' \end{bmatrix}$ con $|\vec{\alpha}'| \leq 1$. Esto surge de la condición de normalización: $\text{Tr}[\Phi[\rho]] = 1$ para todo $\rho \in B_1^+(\mathcal{H}_2)$; y de la positividad de las matrices en cuestión. Por lo tanto, para cumplir con $\vec{d}' = \mathbb{T}_\Phi \vec{d}$, \mathbb{T} necesariamente tiene que ser de la forma:

$$\mathbb{T}_\Phi = \begin{bmatrix} 1 & \vec{0}^\top \\ \vec{t} & T_\Phi \end{bmatrix} \quad (1.77)$$

con $\vec{0}^\top = (0, 0, 0)$, \vec{t} un vector columna de tres componentes y T_Φ una matriz 3×3 real. Además, si $\vec{t} = \vec{0}$, tenemos que $\Phi[\mathbb{1}] = \mathbb{1}$ por lo que el mapa es *unital*.

Veamos ahora qué podemos decir de los elementos de T_Φ . Cualquier matriz real puede escribirse como

$$T_\Phi = \mathcal{O}_1 D \mathcal{O}_2^\top \quad (1.78)$$

donde \mathcal{O}_1 y \mathcal{O}_2 son matrices ortogonales y D una matriz diagonal cuyos elementos no nulos son los autovalores de T_Φ . Ahora bien, toda matriz ortogonal es una *rotación* o el producto de una rotación con una *inversión* $-\mathbb{1}$. Así:

$$T_\Phi = R_1(\pm D)R_2^T \quad (1.79)$$

donde R_1 y R_2 son rotaciones.

Por otro lado, como vimos al comienzo de esta sección, toda matriz unitaria $n \times n$ se corresponde con una rotación sobre \mathbb{R}^{n^2-1} , y viceversa. De este modo, las rotaciones R_1 y R_2 definen unitarios sobre $B_1^+(\mathcal{H}_2)$. Sean U y V las matrices unitarias correspondientes a las rotaciones R_1 y R_2^T , respectivamente. Además, como el mapa $\Sigma[D] = \sigma_3 D \sigma_3$ cambia el signo de dos de los elementos diagonales de D , podemos prescindir del signo \pm en (1.79) ya que en caso de ser necesario se puede modificar U por $U\sigma_3$ dado que este producto es también una matriz unitaria. En lo que sigue vamos a considerar, $T_\Phi = R_1 D R_2^T$.

Resumidamente, si $C = \omega_0 \mathbb{1} + \vec{\omega} \cdot \vec{\sigma}$ entonces

$$VCV^\dagger = \omega_0 \mathbb{1} + (R_2^T \vec{\omega}) \cdot \vec{\sigma} \quad (1.80)$$

y además la acción del mapa $\Phi[\cdot]$, cuya matriz asociada es \mathbb{T}_Φ , sobre C , es

$$\Phi[C] = \Phi[\omega_0 \mathbb{1} + \vec{\omega} \cdot \vec{\sigma}] = \omega_0 \mathbb{1} + (\vec{t} + T_\Phi \vec{\omega}) \cdot \vec{\sigma} \quad (1.81)$$

Sea $\Phi_D[\cdot]$ el mapa asociado a la matriz de autovalores D , definido por:

$$\Phi_D[\omega_0 \mathbb{1} + \vec{\omega} \cdot \vec{\sigma}] = \omega_0 \mathbb{1} + (\vec{t} + D\vec{\omega}) \cdot \vec{\sigma} \quad (1.82)$$

De este modo, la relación entre los mapas $\Phi[\cdot]$ y $\Phi_D[\cdot]$ es la siguiente:

$$\Phi[C] = U \Phi_D[VCV^\dagger] U^\dagger \quad (1.83)$$

siendo $\vec{t} = R_1^T \vec{t}$.

La demostración es simple. Ya señalamos que $VCV^\dagger = \omega_0 \mathbb{1} + (R_2^T \vec{\omega}) \cdot \vec{\sigma}$ entonces $\Phi_D[VCV^\dagger] = \omega_0 \mathbb{1} + (\vec{t} + D R_2^T \vec{\omega}) \cdot \vec{\sigma}$. Luego, $U \Phi_D[VCV^\dagger] U^\dagger = \omega_0 \mathbb{1} + (R_1 \vec{t} + R_1 D R_2^T \vec{\omega}) \cdot \vec{\sigma}$. Finalmente tenemos que la igualdad se dá si $\vec{t} = R_1^T \vec{t}$, puesto que $T_\Phi = R_1 D R_2^T$.

La importancia de la igualdad (1.83) radica en que, en caso de contar con una cantidad, o propiedad, Φ invariante ante transformaciones unitarias, nos permite utilizar la siguiente matriz \mathbb{T}_{Φ_D} asociada a Φ_D :

$$\mathbb{T}_{\Phi_D} = \begin{bmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{t} & D \end{bmatrix} \quad (1.84)$$

con $D = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ siendo λ_i , $i \in \{1, 2, 3\}$, los autovalores de T_Φ , que tiene significativamente menos parámetros. Asimismo, si $\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma})$ con $|\vec{\alpha}| \leq 1$, entonces la imagen de Φ_D sobre el espacio de las matrices densidad está dada por el elipsoide

$$\left(\frac{x'_1 - t'_1}{\lambda_1}\right)^2 + \left(\frac{x'_2 - t'_2}{\lambda_2}\right)^2 + \left(\frac{x'_3 - t'_3}{\lambda_3}\right)^2 \leq 1 \quad (1.85)$$

siendo $(\vec{\alpha}')_i = x'_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$. La ecuación anterior resulta de reescribir $|\vec{\alpha}| \leq 1$ expresando $\vec{\alpha}$ en función del vector de Bloch $\vec{\alpha}'$ de la matriz densidad transformada $\rho' = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \vec{\alpha}' \cdot \vec{\sigma})$ dada por Φ_D : $\vec{\alpha}' = \vec{t} + D\vec{\alpha}$.

Queda analizar bajo qué condiciones $\Phi[\cdot]$ es un mapa *completamente positivo* (condición CP).

En primer lugar cabe remarcar que $\Phi[\cdot]$ es completamente positivo sí y sólo sí $\Phi_D[\cdot]$ lo es. Por esto, vamos a establecer la condición CP para ésta última transformación. El siguiente teorema debido a Ruskai et al. (2001), resume las condiciones necesarias y suficientes para $\Phi_D[\cdot]$ completamente positivo.

Teorema

Un mapa Φ_D dado por

$$\mathbb{T}_{\Phi_D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ t'_1 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ t'_2 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ t'_3 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (1.86)$$

tal que $|t'_3| + |\lambda_3| \leq 1$ es completamente positivo sí y sólo sí satisface las desigualdades siguientes

$$(\lambda_1 + \lambda_2)^2 \leq (1 + \lambda_3)^2 - t'_3 \quad (1.87)$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \leq (1 - \lambda_3)^2 - t'_3 \quad (1.88)$$

$$\begin{aligned} & \{1 - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) - [(t'_1)^2 + (t'_2)^2 + (t'_3)^2]\}^2 \geq \\ & \geq 4 \{ \lambda_1^2 [(t'_1)^2 + \lambda_2^2] + \lambda_2^2 [(t'_2)^2 + \lambda_3^2] + \lambda_3^2 [(t'_3)^2 + \lambda_1^2] - 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \} \end{aligned} \quad (1.89)$$

donde (1.87) y (1.88) son tales que $t'_1 = t'_2 = 0$ cuando $|t'_3| + |\lambda_3| = 1$.

Como una permutación cíclica de los índices corresponde a una rotación en \mathbb{R}^3 , que puede incorporarse a los unitarios U y V en (1.83), el teorema anterior es general en el sentido de que los roles de t'_3 y λ_3 pueden cambiarse por t'_k y λ_k , para $k \in \{1, 2, 3\}$ sin pérdida de generalidad.

Por último, cabe resaltar que Φ_D preserva la *positividad* de las matrices densidad si $|t'_k| + |\lambda_k| \leq 1$, para $k \in \{1, 2, 3\}$.

1.2.4. Medición y observación

En la sección anterior, Sec. 1.2.3, describimos las operaciones cuánticas denominadas *propias*. Éstas son todas las operaciones cuánticas que se pueden llevar a cabo utilizando mapas completamente positivos que preservan la traza. Además, vimos que las operaciones CPTP se pueden realizar mediante la composición de tres tipos de operaciones: 1) *transformación unitarias*, 2) *extensiones de los sistemas* y 3) *reducciones de los sistemas* (traza parcial). Existen, además, otras transformaciones denominadas *operaciones cuánticas probabilísticas* relacionadas con el hecho de **medir** magnitudes físicas, que no se pueden realizar utilizando sólo las tres operaciones anteriores (no son mapas CP). Éstos mapas están dados por el **postulado de medición** que establecimos en la Sec. 1.2.1. Concretamente postulamos que dada una *medición* \mathcal{A} , cuyos n posibles resultados a_k están asociados a n operadores de medición A_k (que cumplen $\sum_{k=1}^n A_k^\dagger A_k = \mathbb{1}$), el estado del sistema luego de *medir y observar* el resultado k está dado por

$$\rho_k = \frac{A_k \rho A_k^\dagger}{\text{Tr} [A_k \rho A_k^\dagger]} \quad (1.90)$$

siendo ρ el estado previo a la medición. La probabilidad de obtener el resultado k -ésimo es $p_k = \text{Tr} [A_k \rho A_k^\dagger]$.

La transformación $\rho \rightarrow \rho_k$ se denomina *selección* y está dada por el hecho de observar el resultado de la medición (k -ésimo en este caso). Si medimos \mathcal{A} y no observamos (no seleccionamos) entonces el estado luego de medir es una combinación convexa de todos los resultados posibles:

$$\rho^{\mathcal{A}} = \sum_{k=1}^n p_k \rho_k = \sum_{k=1}^n A_k \rho A_k^\dagger \quad (1.91)$$

Esta transformación $\rho \rightarrow \rho^A$ sí es una operación cuántica propia, en el sentido de que es un mapa CPTP.

En una medición *proyectiva* o de von Neumann, los operadores A_k son proyectores ortogonales: $A_k = P_k$, $P_i P_j = \delta_{ij} P_i$ para $i, j = 1, \dots, n$. Asimismo, una medición de este tipo está descrita por un observable del siguiente modo:

Sea O un operador autoadjunto asociado a una magnitud física \mathcal{O} . Utilizando la descomposición espectral, podemos expresarlo como $O = \sum_i \lambda_i P_i$ con $\{\lambda_i\}$ el espectro de O y $P_i = |e_i\rangle \langle e_i|$ el proyector ortogonal al subespacio generado por el autovector $|e_i\rangle$. Luego, una medición proyectiva de la magnitud \mathcal{O} tiene como posibles resultados los autovalores λ_i y, como ya señalamos, los operadores de medición son los ortoproyectores P_i .

Por otro lado, los operadores autoadjuntos son normales y por ello diagonalizables por cambios de base unitarios, ver Sec. 1.2.2. Luego, tienen un conjunto de n autovectores ortonormales que forman una base. Vemos entonces que hay una correspondencia entre las bases ortonormales del espacio de Hilbert en cuestión con los operadores autoadjuntos que representan los observables físicos del sistema. Resumidamente, podemos pensar que dada una base cualquiera, tenemos un observable asociado y por lo tanto una medición proyectiva cuyos operadores de medición son los proyectores a los subespacios generados por los autovectores. La razón del comentario es que en las secciones siguientes parametrizaremos las distintas bases de \mathcal{H} con el objetivo de obtener una representación de todas las mediciones proyectivas sobre el mismo.

Una característica clave de las mediciones proyectivas es que son repetibles, es decir que el estado luego de medir permanece invariante ante nuevas mediciones. Sin embargo, la mayoría de las mediciones no son repetibles. En consecuencia, nos vemos obligados a adoptar un esquema más general que el anterior. Esto conduce a relajar la condición de ortogonalidad y utilizar operadores positivos E_i (*Positive Operator Valued Measures*, POVM) definidos como cualquier partición de la identidad: $\sum_{i=1}^n E_i = \mathbb{1}$, que a su vez satisfacen $E_i = E_i^\dagger$, $E_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$.

El conjunto de los $\{E_i\}$ definen una medición POVM. Una medición dentro de ésta categoría aplicada a un estado ρ produce el i -ésimo resultado con probabilidad $p_i = \text{Tr}[E_i \rho]$. Asimismo, en este formalismo los operadores de medición A_k no quedan unívocamente determinados (excepto en el caso de mediciones proyectivas $A_k = P_k$) ya que satisfacen $E_k = A_k^\dagger A_k$ (como E_k es un operador positivo, A_k es por definición la raíz cuadrada de E_k , $A_k = \sqrt{E_k}$). De este modo, las mediciones POVM también “encajan” en el postulado de medición.

Un resultado clave sobre mediciones POVM y mediciones proyectivas⁸ es el teorema de Naimark:

Teorema

Cualquier POVM $\{E_i\}$ en un espacio de Hilbert \mathcal{H} puede ser extendida a una resolución ortogonal de la identidad $\{P_i\}$ en un espacio de Hilbert ampliado tal que $E_i = \Pi P_i \Pi$, donde Π proyecta a \mathcal{H} .

Parametrizaciones de mediciones proyectivas

Resumidamente, hemos introducido el postulado de medición y vimos que existen dos instancias. La primera es *medir* y la segunda, posterior a la anterior, es *observar*. Además, si realizamos una medición \mathcal{A} cuyos operadores son $\{A_k\}$ sobre un sistema (representado por \mathcal{H}) en un estado $\rho \in B_1^+(\mathcal{H})$, resulta que inmediatamente después de *medir* el estado está dado por (1.91) y luego de *observar* el resultado k -ésimo es (1.90).

⁸Las mediciones proyectivas son equivalentes a las *projection valued measure* (PVM), definidas como una POVM tal que sus elementos son proyectores $A_k A_k = A_k$ [42]

Si los operadores de medición son ortoproyectores, $A_k = P_k$, entonces la medición se denomina *proyectiva*, o *de von Neumann*. Si en cambio la medición está dada por operadores positivos E_k (que además suman la identidad) tales que $E_k = A_k^\dagger A_k$ entonces decimos que esta medición es una POVM. Veamos a continuación dos parametrizaciones distintas de las mediciones proyectivas $\{P_k\}$ sobre un sistema representado por un espacio de Hilbert de dimensión dos.

Sea $\{|j\rangle\}_{j=1}^2$ la base computacional dada por

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.92)$$

Esta base define una medición proyectiva con operadores de medición $\{E_j = |j\rangle\langle j|\}_{j=1}^2$. Asimismo, cualquier otra medición de este tipo está dada por los operadores $P_j = V|j\rangle\langle j|V^\dagger$, con V un operador unitario definido sobre \mathcal{H}_2 . El motivo es que dada una base de \mathcal{H}_2 , en este caso $\{|j\rangle\}$, cualquier otra se puede escribir como $\{V|j\rangle\}$ siendo $P_j = V|j\rangle\langle j|V^\dagger$ el proyector al subespacio generado por $\{V|j\rangle\}$. De esta forma, nos queda parametrizar las matrices unitarias 2×2 .

Una representación útil de estos operadores es, a menos de una fase constante,

$$V = \vec{s} \cdot (\mathbb{1}, i\vec{\sigma}) \quad (1.93)$$

con $\vec{s} \in \Gamma$ y $\Gamma = \{\vec{s} \in \mathbb{R}^4 / s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1\}$.

Otra descomposición no menos importante es

$$V = e^{i\alpha} \begin{bmatrix} e^{-i\beta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\beta/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\gamma}{2} & -\sin \frac{\gamma}{2} \\ \sin \frac{\gamma}{2} & \cos \frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-i\delta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\delta/2} \end{bmatrix} \quad (1.94)$$

en la cual la segunda matriz es una rotación ordinaria y las demás pueden ser vistas como rotaciones en un plano diferente.

Mediciones en estados bipartitos

Adoptemos nuevamente el marco bipartito introducido en la Sec. 1.2.2. Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert de dimensión finita que representa un sistema físico formado por dos partes A y B , i.e., $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ y $\rho \in B_1^+(\mathcal{H})$ el estado del sistema.

El objetivo de esta sección es introducir los *estados condicionales*. Éstos resultan luego de haberse realizado una medición sobre sólo una parte de un sistema bipartito (o multipartito). Específicamente, consideremos una medición \mathcal{M} sobre \mathcal{H}_A , con operadores $\{M_k\}$. El análogo de *medir* \mathcal{M} sobre A , extendido al sistema global $A + B$, es una medición \mathcal{A} con operadores $A_k = M_k \otimes \mathbb{1}$. Luego, las ecuaciones (1.91) y (1.90) son, respectivamente,

$$\rho^{\mathcal{A}} = \sum_{k=1}^n (M_k \otimes \mathbb{1}) \rho (M_k^\dagger \otimes \mathbb{1}) \quad (1.95)$$

$$\rho_k = \frac{(M_k \otimes \mathbb{1}) \rho (M_k^\dagger \otimes \mathbb{1})}{\text{Tr} [M_k^\dagger M_k \otimes \mathbb{1} \rho]} \quad (1.96)$$

Asimismo, $\rho^{\mathcal{A}} = \sum_k p_k \rho_k$. Entonces, el estado del subsistema B *condicionado* por la medición de \mathcal{M} (y la observación del k -ésimo resultado), en la parte A , es:

$$\rho_{B|k}^{\mathcal{M}} = \text{Tr}_A[\rho_k] = \frac{\text{Tr}_A [M_k \otimes \mathbb{1} \rho M_k^\dagger \otimes \mathbb{1}]}{p_k} = \frac{\text{Tr}_A [M_k^\dagger M_k \otimes \mathbb{1} \rho]}{p_k} \quad (1.97)$$

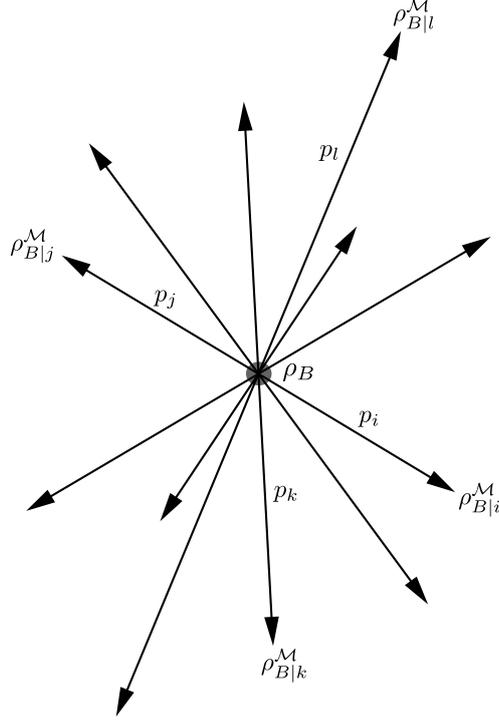


Figura 1.2: Representación de los estados condicionales y ρ_B .

Definimos entonces a los estados $\rho_{B|i}^{\mathcal{M}}$ como *estados condicionales*. En el caso más general, de una medición POVM con operadores $E_k = M_k^\dagger M_k$, tenemos que:

$$\rho_{B|i}^{\mathcal{M}} = \frac{\text{Tr}_A [E_k \otimes \mathbb{1} \rho]}{p_k} \quad (1.98)$$

y $p_k = \text{Tr} [E_k \otimes \mathbb{1} \rho]$. Ahora bien, el estado marginal $\rho_B = \text{Tr}_A [\rho]$ presenta una invariancia destacable: $\sum_k p_k \rho_{B|i}^{\mathcal{M}} = \rho_B$ para toda medición \mathcal{M} sobre A . Esto se deduce de la ecuación (1.97). De este modo, ρ_B es el estado «promedio» que representa cualquier ensamble de estados obtenido a partir de cualquier medición \mathcal{M} . La figura 1.2 intenta reproducir gráficamente las ideas anteriores.

Consideremos ahora una medición proyectiva sobre A , es decir $\{M_k\}$ tales que $M_k M_{k'} = \delta_{k,k'} M_k$ y $M_k = M_k^\dagger$. En este caso, se puede ver que el estado global ρ^A se puede escribir como

$$\rho^A = \sum_{k=1}^n p_k M_k \otimes \rho_{B|i}^{\mathcal{M}} \quad (1.99)$$

1.2.5. Evolución de sistemas cuánticos

En esta sección veremos las ecuaciones generales que rigen la evolución de los sistemas cuánticos. A tal fin, tenemos que distinguir dos tipos de descripciones posibles. La de un *sistema cerrado* y la de un *sistema abierto*. Comencemos con la evolución de los sistemas cerrados.

En la Sec. 1.2.1, establecimos el postulado “Evolución de von-Neuman” que resumidamente describe la evolución de estos sistemas a través de operadores unitarios. Específicamente, si \mathcal{H} es el espacio de Hilbert asociado al sistema en cuestión y ρ es el estado

inicial del mismo, a tiempo t_0 , entonces:

$$\rho(t) = U(t)\rho(t_0)U^\dagger(t) \quad (1.100)$$

con $U(t) = \exp[-it\frac{H}{\hbar}]$, siendo H el hamiltoniano del sistema, que consideraremos independiente del tiempo.

Al derivar la expresión anterior, obtenemos la ecuación de Liouville-von Neuman que podemos escribir de dos modos. En su forma «natural»:

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[H, \rho(t)] \quad (1.101)$$

o de la siguiente forma,

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \mathcal{L}_s\rho(t) \quad (1.102)$$

El operador $\mathcal{L}_s = -i[H, \cdot]$ (a veces denominado *superoperador* por actuar sobre operadores) se conoce como *operador de Liouville*. Seguidamente, si H no depende explícitamente de t entonces \mathcal{L}_s tampoco. Así, agregamos una tercer forma de expresar (1.102), la forma exponencial:

$$\rho(t) = \exp[\mathcal{L}_s(t - t_0)]\rho(t_0) \quad (1.103)$$

Una vez resuelta la evolución del estado $\rho(t_0)$, el operador $\rho(t)$ nos brinda toda la información respecto del sistema. En particular, si A es un operador autoadjunto definido sobre \mathcal{H} , entonces su valor medio es $\langle A \rangle(t) = \text{Tr}[A\rho(t)]$. De ahora en más, pondremos $\hbar = 1$.

El marco establecido anteriormente define la representación de Schrödinger, caracterizada por el hecho de que la evolución del sistema está dada por $\rho(t)$. Es decir, el objeto matemático que evoluciona con el tiempo es el estado, mientras que los operadores que representan los observables no. Otra representación es la de Heisenberg, en la cual ρ no evoluciona con t pero sí lo hacen los observables físicos, por ejemplo $A(t)$. De este modo, los valores medios ahora los calculamos según $\langle A \rangle(t) = \text{Tr}[A_H(t)\rho]$ con

$$A_H(t) = U^\dagger(t)AU(t) \quad (1.104)$$

Utilizaremos un subíndice H para indicar que un operador está en la representación de Heisenberg. Luego, la ecuación de evolución para los operadores está dada por:

$$\frac{d}{dt}A_H(t) = i[H_H(t), A_H(t)] + \frac{\partial A_H(t)}{\partial t} \quad (1.105)$$

Como $\frac{d}{dt}A_H(t) = U^\dagger(t)\frac{d}{dt}A(t)U(t)$ tenemos que si A no depende explícitamente del tiempo en la representación de Schrödinger, entonces se cumple $\frac{d}{dt}A_H(t) = 0$. Lo mismo vale para el hamiltoniano H . Así, $H_H = H$ y resulta,

$$\frac{d}{dt}A_H(t) = i[H, A_H(t)] \quad (1.106)$$

Veamos ahora otra descripción de la evolución de un sistema cuántico abierto: La representación interacción. Ésta caracterización generaliza a las representaciones de Heisenberg y Schrödinger. Para definirla, escribimos al hamiltoniano del sistema como una suma de dos partes $H = H_0 + \hat{H}_I$, donde \hat{H}_I particulariza la energía respecto de las *interacciones*

propias del sistema (H_0 es el hamiltoniano considerando interacciones nulas). Cada uno de estos hamiltonianos genera un operador unitario de evolución

$$H_0 \rightarrow U_0(t) = \exp[-iH_0(t - t_0)] \quad (1.107)$$

$$\hat{H}_I \rightarrow U_I(t) = U_0^\dagger(t)U(t) \quad (1.108)$$

con $U(t) = \exp[-iH(t - t_0)]$ el operador evolución del sistema total. De este modo, el valor medio del operador A en la representación interacción se puede escribir como

$$\langle A \rangle(t) = \text{Tr}[A_I(t)\rho_I(t)] \quad (1.109)$$

con

$$A_I(t) = U_0^\dagger(t)AU_0(t) \quad (1.110)$$

$$\rho_I(t) = U_I(t)\rho U_I^\dagger(t) \quad (1.111)$$

Cabe destacar que los operadores A_I evolucionan según el hamiltoniano H_0 . Por otro lado, si $H_I = 0$, entonces la representación interacción es igual a la representación de Heisenberg, mientras que si $H_0 = 0$, entonces la representación interacción es la representación de Schrödinger.

Por último, la ecuación de movimiento para ρ_I es

$$\frac{d}{dt}\rho_I(t) = -i[H_I(t), \rho_I(t)] \quad (1.112)$$

donde $H_I = U_0^\dagger(t)\hat{H}_IU_0(t)$. Además, los operadores U_I y H_I están relacionados por:

$$i\frac{\partial}{\partial t}U_I(t) = H_I(t)U_I(t) \quad (1.113)$$

Habiendo esquematizado resumidamente las ecuaciones fundamentales de la dinámica -Hamiltoniana- de los sistemas cerrados, veamos ahora la noción de *sistema abierto*. En términos generales, un sistema S de este tipo es un subsistema que forma parte de un sistema global bipartito, caracterizado por el hecho de que todas las observaciones de interés se refieren a tal sistema. La otra parte se denomina ambiente y la denotamos con la letra B . Consecuentemente, el sistema global $S + B$ es uno cerrado y su dinámica está de acuerdo con lo establecido anteriormente. Asimismo, el sistema S , generalmente denominado como *de interés* o sistema reducido, cambia según su propia evolución y de acuerdo con la interacción con el ambiente.

Denotemos como \mathcal{H}_S y \mathcal{H}_B a los espacios de Hilbert asociados a los sistemas S y B , respectivamente, y sea \mathcal{H} el espacio del sistema global, que a su vez es igual a $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_B$. El Hamiltoniano del sistema puede ser considerado como

$$H = H_S \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_B + H_I \quad (1.114)$$

donde H_X es el hamiltoniano libre -sin interacciones- del sistema X ($X \in \{S, B\}$), y H_I es el hamiltoniano que describe las interacciones entre el sistema y el ambiente.

Si el estado de $S + B$ está dado por ρ , los valores medios de todos los observables de S son

$$\langle A \rangle = \text{Tr}[A\rho_S] \quad (1.115)$$

con $\rho_S = \text{Tr}_B[\rho]$ el estado del sistema reducido. La evolución de ésta última matriz densidad es la cuestión de central interés en la descripción de los sistemas cuánticos abiertos. Veamos qué tipo de operación describe tal evolución.

Como ya señalamos, ρ evoluciona unitariamente según (1.100) por ser un sistema cerrado,

$$\rho(t) = U(t)\rho(t_0)U^\dagger(t) \quad (1.116)$$

Por otro lado, al comienzo de la sección 1.2.3, vimos que si $\rho(t_0) = \rho_S(t_0) \otimes \rho_B$, con $\rho_B(t) = |\hat{\nu}\rangle\langle\hat{\nu}|$ un estado puro, entonces la matriz densidad $\rho_S(t)$ está dada por un mapa CPTP, que se puede escribir como

$$\rho_S(t) = \text{Tr}_B \left[U(t)\rho(t_0)U^\dagger(t) \right] = \sum_{\mu} A_{\mu}(t)\rho_S(t_0)A_{\mu}^{\dagger}(t) \quad (1.117)$$

$$A_{\mu}(t) = \langle\mu|U(t)|\hat{\nu}\rangle \quad (1.118)$$

siendo $\{|\mu\rangle\}$ alguna BON de \mathcal{H}_B , y los operadores A_{μ} cumpliendo $\sum_{\mu} A_{\mu}^{\dagger}A_{\mu} = \mathbb{1}$.

Podemos generalizar lo anterior a cualquier estado ρ_B (no sólo puro) y el mapa también será uno CPTP. A tal fin, tomemos la descomposición espectral del estado inicial del subsistema B ,

$$\rho_B = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} |\phi_{\alpha}\rangle\langle\phi_{\alpha}| \quad (1.119)$$

con $\{\lambda_B\}$ un conjunto de números positivos que suman uno y $\{|\phi_{\alpha}\rangle\}$ la base de autovectores de ρ_B . Así, los operadores de Kraus del mapa que describe la evolución $\rho_S(t_0) \rightarrow \rho_S(t) = \sum_{\alpha\beta} W_{\alpha\beta}(t)\rho_S(t_0)W_{\alpha\beta}^{\dagger}(t)$ están dados por:

$$W_{\alpha\beta}(t) = \sqrt{\lambda_{\beta}} \langle\phi_{\alpha}|U(t)|\phi_{\beta}\rangle \quad (1.120)$$

Como vemos, estos operadores también satisfacen $\sum_{\alpha\beta} W_{\alpha\beta}^{\dagger}W_{\alpha\beta} = \mathbb{1}$, lo que garantiza $\text{Tr}[\rho_S] = 1$.

En ocasiones es adecuado optar por otro tipo de representación de la evolución del sistema S , como por ejemplo puede ser la que se obtiene haciendo uso de un *mapa dinámico*. Éste está dado por una matriz $V(t)$ que actúa sobre el operador densidad $\rho_S(t_0)$,

$$\rho_S(t) = V(t)\rho_S(t_0) = \sum_{\alpha\beta} W_{\alpha\beta}(t)\rho_S(t_0)W_{\alpha\beta}^{\dagger} \quad (1.121)$$

Digresión El ejemplo más simple de mapa dinámico es el caso de un sistema cerrado. La ecuación (1.103) sugiere que $V(t) = \exp[\mathcal{L}_s(t - t_0)]$.

Éste mapa V constituye una familia $\{V(t) \mid t \geq t_0\}$, tales que $V(t_0) = \mathbb{1}$. Además, bajo ciertas condiciones físicas derivadas de un análisis microscópico de los sistemas, se justifica no tener en cuenta los efectos de memoria en la evolución del sistema reducido. Ésta se denomina una evolución no Markoviana. Así, V satisface:

$$V(t_1 + t_2) = V(t_1)V(t_2), \quad t \geq t_0 \quad (1.122)$$

Consecuentemente, la familia $\{V(t) \mid t \geq t_0\}$ constituye un *semigrupo dinámico cuántico*; entonces tenemos que existe un mapa lineal \mathcal{L} -un superoperador- que es el generador de tal semigrupo, y nos permite representar a $V(t)$ en forma exponencial:

$$V(t) = \exp \mathcal{L}(t - t_0) \quad (1.123)$$

El mapa \mathcal{L} es una generalización del operador de Liouville \mathcal{L}_S para sistemas cerrados. Por último, la matriz densidad del sistema reducido satisface la ecuación maestra cuántica Markoviana:

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \mathcal{L}\rho_S(t) \quad (1.124)$$

Decoherencia adiabática no disipativa

Hasta aquí representamos la evolución de los sistemas cuánticos. Veamos a continuación un modelo cuya dinámica podemos resolver de manera exacta.

Previamente introdujimos el Hamiltoniano de un sistema cuántico abierto como:

$$H = H_S \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_B + H_I \quad (1.125)$$

Resolvamos la evolución para el caso adiabático, es decir, no hay intercambio de energía entre el ambiente y el sistema de interés. Seguidamente, una cantidad conservada del sistema es H_S , así $[H_S \otimes \mathbb{1}, H] = 0$. Como $[H_S \otimes \mathbb{1}, H] = [H_S \otimes \mathbb{1}, H_I]$ dado que H_S y H_B actúan sobre diferentes espacios de Hilbert, la condición de adiabaticidad es $[H_S \otimes \mathbb{1}, H_I] = 0$.

Con respecto al ambiente, estudiaremos el caso de osciladores armónicos no interactuantes, también conocido como un reservorio de bosones. Éste sistema, tratado como un «ambiente» tiene una influencia sobre S idéntica a una fuerza aleatoria externa. Otra posible aplicación de este modelo está relacionada con *mediciones* cuánticas en donde se considera al reservorio ambiente como parte de un dispositivo de medición, puesto que este «monitorea» continuamente las cantidades físicas relacionadas con los operadores que están acoplados al baño [93-95].

Ambientes Oscilatorios La representación de entornos por una gran cantidad de osciladores armónicos tiene una larga historia que se remonta a la electrodinámica cuántica y a los modelos de ondas de espín y de gases de electrones [96]. Los entornos de osciladores corresponden a un cuasicontinuo de modos de campo bosónico no localizados, que dan lugar a una decoherencia irreversible en el sistema de interés. Con “modos no localizados” queremos decir que la función de onda de cada oscilador armónico se extiende sobre una extensa región espacial. Esta propiedad es característica de los entornos de osciladores armónicos. Asimismo, tales ambientes desempeñan un papel principal en la modelización de los procesos de decoherencia [84].

Por otro lado, se demostró que bajo ésta influencia un oscilador cuántico en un estado inicial arbitrario se ve afectado por el fenómeno de **decoherencia**, i.e., los elementos fuera de la diagonal del estado del sistema de interés se anulan con el tiempo, en la autobase dada por el Hamiltoniano de interacción. En relación a ésta última, estudiaremos una descrita por un Hamiltoniano *producto*, es decir, $H_I = \Lambda_S \otimes P_B$. Teniendo en cuenta que estamos pensando en condiciones adiabáticas: $[H_S \otimes \mathbb{1}, H_I] = 0$, surge entonces una propiedad para el operador Λ_S ,

$$[\Lambda_S, H_S] = 0 \quad (1.126)$$

Asimismo, las expresiones para los Hamiltonianos del ambiente son,

$$H_B = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}} \quad (1.127)$$

$$P_B = \sum_{\mathbf{k}} (g_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} + g_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{\dagger}) \quad (1.128)$$

con $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ ($a_{\mathbf{k}}$) el operador de creación (aniquilación), y $\omega_{\mathbf{k}} \in \mathbb{R}$, $g_{\mathbf{k}} \in \mathbb{C}$ ($g_{\mathbf{k}}^* \in \mathbb{C}$ denota el complejo conjugado de $g_{\mathbf{k}}$) son constantes de acoplamiento. Cabe destacar que \mathbf{k} , que puede ser un vector en una, dos o tres dimensiones, indica los modos del reservorio que tienen frecuencia $\omega_{\mathbf{k}}$.

En síntesis, vamos a tratar con el Hamiltoniano siguiente para el sistema global $S + B$:

$$H = H_S \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \Lambda_S \otimes \sum_{\mathbf{k}} (g_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} + g_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger) \quad (1.129)$$

con $[H_S, \Lambda_S] = 0$.

Digresión Señalábamos anteriormente que el hamiltoniano (1.129) se corresponde con el de un sistema S , cuya energía es H_S , en interacción con un reservorio formado por osciladores armónicos no interactuantes. Veamos concretamente qué representa H .

Sean $p_{\mathbf{k}}$ y $q_{\mathbf{k}}$ los operadores de momento y posición, respectivamente, correspondientes a un oscilador armónico en el modo \mathbf{k} , cuya frecuencia de oscilación es $\omega_{\mathbf{k}}$ y su masa $m_{\mathbf{k}}$, entonces la energía asociada al conjunto no interactuante de los mismos está dada por

$$H_B = \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{2m_{\mathbf{k}}} p_{\mathbf{k}}^2 + \frac{1}{2} m_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}^2 q_{\mathbf{k}}^2 \right) \quad (1.130)$$

La interacción de S con B está dada por el acoplamiento del observable Λ_S con las coordenadas $q_{\mathbf{k}}$ de cada oscilador:

$$H_I = \Lambda_S \otimes \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} q_{\mathbf{k}} \quad (1.131)$$

Para llegar a la expresión (1.129) establecemos las relaciones estándar siguientes entre $a_{\mathbf{k}}$, $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ y $p_{\mathbf{k}}$, $q_{\mathbf{k}}$:

$$q_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{1}{2m_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}}}} (a_{\mathbf{k}} + a_{\mathbf{k}}^\dagger) \quad (1.132)$$

$$p_{\mathbf{k}} = -i\sqrt{\frac{m_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}}}{2}} (a_{\mathbf{k}} - a_{\mathbf{k}}^\dagger) \quad (1.133)$$

con $g_{\mathbf{k}}$ proporcional a $c_{\mathbf{k}}$ y eliminando el sumando constante $\sum_{\mathbf{k}} \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}$.

Elegimos como base de referencia la formada por los autovectores comunes de H_S y Λ_S :

$$H_S |i\rangle = E_i |i\rangle \quad (1.134)$$

$$\Lambda_S |i\rangle = \lambda_i |i\rangle \quad (1.135)$$

Supongamos que el estado inicial es no correlacionado -entre S y B - y además que cada oscilador está independientemente en un estado $\theta_{\mathbf{k}}$ termalizado a temperatura T :

$$\rho_S(0) \otimes \prod_{\mathbf{k}} \theta_{\mathbf{k}} \quad (1.136)$$

con

$$\theta_{\mathbf{k}} = Z_{\mathbf{k}}^{-1} \exp(-\beta\omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}) \quad (1.137)$$

$$Z_{\mathbf{k}} \equiv (1 - e^{-\beta\omega_{\mathbf{k}}})^{-1} \quad (1.138)$$

con $Z_{\mathbf{k}}$ la función partición para el oscilador \mathbf{k} -ésimo y $\beta = \frac{1}{k_B T}$. De acuerdo con la Ec. (1.117),

$$\rho_S(t) = \text{Tr}_B \left[e^{-iHt} \left(\rho_S(0) \otimes \prod_{\mathbf{k}} \theta_{\mathbf{k}} \right) e^{iHt} \right] \quad (1.139)$$

Para simplificar la notación, prescindiremos de ahora en más del subíndice S para denotar los estados del sistema S . Así,

$$\rho(t) = \text{Tr}_B \left[e^{-iHt} \left(\rho(0) \otimes \prod_{\mathbf{k}} \theta_{\mathbf{k}} \right) e^{iHt} \right] \quad (1.140)$$

y los elementos de $\rho(t)$ en la base de referencia que elegimos son

$$\rho_{mn}(t) = \text{Tr}_B \left[\langle m | e^{-iHt} \left(\rho(0) \otimes \prod_{\mathbf{k}} \theta_{\mathbf{k}} \right) e^{iHt} | n \rangle \right] \quad (1.141)$$

Asimismo, definiendo los operadores (que actúan sobre \mathcal{H}_B) $h_{\mathbf{k}} = E_{\mathbf{k}} \mathbb{1} + \sum_{\mathbf{k}} M_{\mathbf{k}} + \lambda_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}} J_{\mathbf{k}}$ con $M_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}}$ y $J_{\mathbf{k}} = g_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} + g_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{\dagger}$, podemos reescribir la expresión anterior como

$$\rho_{mn}(t) = \rho_{mn}(0) \text{Tr} \left[\langle m | e^{-ih_{\mathbf{k}}t} \prod_{\mathbf{k}} \theta_{\mathbf{k}} e^{ih_{\mathbf{k}}t} | n \rangle \right] \quad (1.142)$$

Para reservorios de bosones (como es nuestro caso) o de espines, los operadores $\{\theta_{\mathbf{k}} = Z_{\mathbf{k}}^{-1} \exp(-\beta \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}})\}$ conmutan. Entonces, (1.142) resulta:

$$\rho_{mn}(t) = \rho_{mn}(0) e^{i(E_n - E_m)t} \prod_{\mathbf{k}} \left\{ \text{Tr} \left[e^{-i(M_{\mathbf{k}} + \lambda_{\mathbf{k}} J_{\mathbf{k}})t} \theta_{\mathbf{k}} e^{i(M_{\mathbf{k}} + \lambda_{\mathbf{k}} J_{\mathbf{k}})t} \right] \right\} \quad (1.143)$$

donde cada traza se realiza en el espacio de un único oscilador armónico. El cálculo de

$$S_{mn,\mathbf{k}} = \text{Tr} \left[e^{-i(M_{\mathbf{k}} + \lambda_{\mathbf{k}} J_{\mathbf{k}})t} \theta_{\mathbf{k}} e^{i(M_{\mathbf{k}} + \lambda_{\mathbf{k}} J_{\mathbf{k}})t} \right] \quad (1.144)$$

se puede llevar a cabo utilizando identidades de operadores [97, 98] o mediante propiedades de los estados coherentes [99]. En cualquier caso, tenemos que

$$S_{mn,\mathbf{k}} = \exp \left(-\omega_{\mathbf{k}} |g_{\mathbf{k}}|^2 P_{mn,\mathbf{k}} \right) \quad (1.145)$$

$$P_{mn,\mathbf{k}} = 2(\lambda_m - \lambda_n)^2 \left[\text{sen} \left(\frac{\omega_{\mathbf{k}} t}{2} \right) \right]^2 \coth \left(\frac{\beta \omega_{\mathbf{k}}}{2} \right) + i(\lambda_m^2 - \lambda_n^2) [\text{sen}(\omega_{\mathbf{k}} t) - \omega_{\mathbf{k}} t] \quad (1.146)$$

De este modo, los elementos de matriz de $\rho(t)$ son:

$$\rho_{mn}(t) = \rho_{mn}(0) e^{i(E_n - E_m)t - i(\lambda_m^2 - \lambda_n^2)\Delta(t)} e^{-\frac{1}{4}(\lambda_m - \lambda_n)^2 \Gamma(t)} \quad (1.147)$$

$$\Gamma(t) = 8 \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}^{-2} |g_{\mathbf{k}}|^2 \left[\text{sen} \left(\frac{\omega_{\mathbf{k}} t}{2} \right) \right]^2 \coth \left(\frac{\beta \omega_{\mathbf{k}}}{2} \right) \quad (1.148)$$

$$\Delta(t) = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}^{-2} |g_{\mathbf{k}}|^2 [\text{sen}(\omega_{\mathbf{k}} t) - \omega_{\mathbf{k}} t] \quad (1.149)$$

Para particularizar el efecto de la interacción en la evolución de $\rho(t)$, reescribimos (1.147) de la siguiente forma

$$\rho_{mn}(t) = [\rho_{mn}(t)]_{g_{\mathbf{k}}=0} e^{-i(\lambda_m^2 - \lambda_n^2)\Delta(t)} e^{-\frac{1}{4}(\lambda_m - \lambda_n)^2 \Gamma(t)} \quad (1.150)$$

donde $\rho_{mn}(t)|_{g_{\mathbf{k}}=0}$ no tienen en cuenta la interacción con el ambiente y $\{\lambda_n\}$ son los autovalores de Λ_S . Cabe destacar que la diagonal ($m = n$) de $\rho(t)$ permanece invariante con el tiempo y con la interacción. Además, $\Gamma(t)$ se denomina función de *decoherencia* (o factor de decoherencia), concretamente porque si ésta es una función creciente con el tiempo, entonces los elementos fuera de la diagonal decrecen (siempre que $\lambda_m \neq \lambda_n$).

La función decoherencia $\Gamma(t)$. Veamos cómo realizar la suma sobre \mathbf{k} en (1.148).

Primero asumiremos que el ambiente tiene una densidad continua de *modos* \mathbf{k} . Por lo tanto, podemos adoptar una descripción «continua» por medio de la descomposición espectral $J(\omega)$,

$$\sum_{\mathbf{k}} |g_{\mathbf{k}}|^2 \rightarrow \int_0^\infty d\omega J(\omega) \quad (1.151)$$

Así, la Ec. (1.148) resulta

$$\Gamma(t) = 8 \int_0^\infty d\omega \frac{J(\omega)}{\omega^2} [\text{sen}(\frac{\omega t}{2})]^2 \coth(\frac{\beta\omega}{2}) \quad (1.152)$$

Consideraremos una densidad espectral “ohmica” para frecuencias pequeñas $J(\omega) \propto \omega$ y con una frecuencia de corte ω_c :

$$J(\omega) = \frac{J_0}{4} \omega e^{-\omega/\omega_c} \quad (1.153)$$

De este modo, reemplazando $2 [\text{sen}(\frac{\omega t}{2})]^2 = 1 - \cos(\omega t)$ y $\beta = \frac{1}{k_B T}$ resulta

$$\Gamma(t) = J_0 \int_0^\infty d\omega e^{-\omega/\omega_c} \frac{1 - \cos(\omega t)}{\omega} \coth(\frac{\omega}{2k_B T}) \quad (1.154)$$

Si ahora además asumimos que la energía térmica $k_B T$ del ambiente es pequeña en comparación de la frecuencia de corte, i.e., $k_B T \ll \omega_c$, suposición que es enteramente razonable, entonces podemos resolver de manera exacta la integral anterior. De esta forma, $\Gamma(t) = \Gamma_{fluc}(t) + \Gamma_{ter}(t)$ con⁹

$$\Gamma_{fluc}(t) = \frac{1}{2} \ln(1 + \omega_c^2 t^2) \quad (1.155)$$

$$\Gamma_{ter}(t) \approx \ln \left[\frac{\sinh(\pi k_B T t)}{\pi k_B T t} \right] \quad (1.156)$$

siendo Γ_{fluc} la contribución (exacta) debido a las fluctuaciones del vacío (que no dependen de la temperatura del reservorio) y Γ_{ter} la contribución asociada a las fluctuaciones térmicas del ambiente.

La función $\Delta(t)$. Calcularemos ahora la suma sobre \mathbf{k} en la Ec. (1.149) teniendo en cuenta la densidad espectral dada por (1.153)

$$\sum_{\mathbf{k}} |g_{\mathbf{k}}|^2 \rightarrow \int_0^\infty d\omega \frac{1}{4} \omega e^{-\omega/\omega_c} \quad (1.157)$$

De este modo, (1.149) resulta

$$\Delta(t) = \frac{1}{4} \int_0^\infty d\omega \frac{e^{-\omega/\omega_c}}{\omega} [\text{sen}(\omega t) - \omega t] = \frac{1}{4} [\arctan(\omega_c t) - \omega_c t] \quad (1.158)$$

⁹Tomando de ahora en más $J_0 = 1$.

Escalas de tiempo en la tasa de decoherencia. Veamos ahora cuál de los dos sumandos que contribuyen a $\Gamma(t)$, es decir: Γ_{fluc} o Γ_{ter} , es el que domina la evolución, y en qué escalas de tiempo lo hace.

Identificamos tres escalas temporales delimitadas por la frecuencia de corte ω_c^{-1} y el *tiempo de correlación térmico* $(k_B T)^{-1}$. Definimos entonces el Régimen corto para tiempos $t \ll \omega_c^{-1} \ll (k_B T)^{-1}$, el Régimen medio, para $\omega_c^{-1} \ll t \ll (k_B T)^{-1}$, y por último el Régimen largo para los tiempos tales que $\omega_c^{-1} \ll (k_B T)^{-1} \ll t$.

Régimen corto El sumando dominante es $\Gamma_{fluc}(t)$ que podemos aproximar, cortando la serie de Taylor del mismo en el primer orden, según

$$\Gamma_{fluc}(t) \approx \frac{1}{2} \Lambda^2 t^2 \quad (1.159)$$

La contribución térmica $\Gamma_{ter}(t)$ es despreciable en este régimen temporal.

Régimen medio En esta región ocurre lo mismo que en la anterior, en el sentido de que podemos obviar el sumando $\Gamma_{ter}(t)$. La aproximación de la Ec. (1.155) es

$$\Gamma_{fluc}(t) \approx \ln \Lambda t \quad (1.160)$$

Régimen largo En este caso, la contribución dominante es $\Gamma_{ter}(t)$. Utilizando

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \approx \frac{1}{2}e^x, \text{ si } x \gg 1 \quad (1.161)$$

vemos que

$$\Gamma_{ter}(t) \approx \pi k_B T t \gg \Gamma_{fluc}(t) \quad (1.162)$$

De este modo, $\Gamma(t) \approx \pi k_B T t = \gamma t$ con $\gamma = \pi k_B T$.

El modelo espín-bosón. Este caso particular de decoherencia adiabática corresponde a un sistema de dos niveles en interacción con un reservorio de osciladores no interactuantes. Este modelo fue extensamente estudiado en el contexto de disipación y decoherencia en sistemas cuánticos abiertos por la posibilidad de resolverlo exactamente y, además, por su injerencia en la computación cuántica [100].

El modelo consta en particular del acoplamiento (en alguna dirección) del «espín», por ejemplo en dirección z , con la posición de los osciladores. Consideremos este caso particular. El estado del sistema está dado por una matriz densidad 2×2 y $\Lambda_S = \sigma_z$, siendo sus autovalores $\lambda_m = (-1)^m$, con $m \in \{0, 1\}$. En consecuencia, la evolución (1.147) resulta:

$$\rho(t) = \begin{bmatrix} \rho_{00} & \rho_{10} e^{-\Gamma(t)} \\ \rho_{01} e^{-\Gamma(t)} & \rho_{11} \end{bmatrix} \quad (1.163)$$

con $\rho_{ij} = \rho_{ij}(t)|_{g_k=0}$ ($i, j \in \{0, 1\}$).

La acción del ambiente como un canal cuántico. En la sección 1.2.3 definimos los canales cuánticos principales sobre estados en dimensión dos. Uno de los mismos es el canal *phase-flip* definido por (1.72). La acción de este canal sobre una matriz densidad ρ es

$$\Phi_{PF}^p[\rho] = \begin{bmatrix} \rho_{00} & \rho_{01}(1-2p) \\ \rho_{10}(1-2p) & \rho_{11} \end{bmatrix} \quad (1.164)$$

Tomando $p = \frac{1}{2}[1 - e^{-\Gamma(t)}]$ recuperamos la Ec. (1.163). Vemos entonces que podemos expresar la evolución anterior como el canal phase-flip aplicado sobre ρ . Ahora bien, la

importancia de esta asociación radica en que si tenemos un sistema bipartito $A+B$ donde cada una de las partes está sometida a una evolución independiente de la otra (cada una con su ambiente) representadas por dos canales cuánticos específicos cuyos operadores de Krauss son $\{E_i^A\}$ y $\{E_j^B\}$, para A y B , respectivamente, entonces dado un estado inicial del sistema global σ , el estado evolucionado será:

$$\Phi[\sigma] = \sum_{ij} E_i^A \otimes E_j^B \sigma (E_i^A)^\dagger \otimes (E_j^B)^\dagger \quad (1.165)$$

Cabe destacar que no es la misma situación considerar al sistema $A+B$ dentro de un ambiente común, porque en la ecuación anterior asumimos la independencia de las evoluciones de A y de B .

Resumen Luego de haber establecido los postulados de la mecánica cuántica, revisamos las nociones de *estado cuántico*, particularizando algunas *expresiones* analíticas frecuentes en la teoría de información cuántica en el caso de dimensión finita. Asimismo, vimos una representación para las matrices densidad $n \times n$ en función de los generadores del álgebra de Lie del grupo $SU(n)$. Luego, expresamos el espacio de las matrices densidad como uno convexo, estableciendo el teorema denominado *la mixtura de Schrödinger*, que relaciona de algún modo los estados mixtos con los puros.

Una vez asentadas las bases sobre la descripción matemática de los estados cuánticos, vimos qué transformaciones sobre los mismos son adecuadas y cómo representarlas, concentrándonos en el caso de dimensión dos (sumamente importante para el Capítulo siguiente). A continuación, tratamos los mapas que representan mediciones de magnitudes físicas, para luego focalizar en el caso bipartito.

Por último, vimos cómo representar evoluciones temporales de sistemas abiertos y cerrados, ejemplificando un caso particular conocido como *decoherencia adiabática no disipativa*.

Distinguibilidad

El concepto de disimilitud, diferencia o distinguibilidad es sumamente frecuente en muchas áreas del conocimiento e incluso en la vida cotidiana. Por ejemplo, es de algún modo *básico* para el humano distinguir objetos, sonidos, sabores, tamaños, formas, etc. A su vez, la idea de distinguibilidad consta de tal generalidad que, fuera de las ciencias exactas, es prácticamente inadvertida. La situación cambia en el marco de las ciencias exactas. La disimilitud es un asunto intrínsecamente matemático y relacionado con, entre otras cosas, el concepto de *distancia*. La matemática surge, entre otros motivos, debido a la necesidad de cuantificar tales abstracciones, es decir, distinguibilidad y distancia.

En términos generales, una *medida* es un cuantificador (funcionales matemáticos que toman objetos específicos y devuelven un número real positivo) de alguna característica particular. Asimismo, una *medida de distinguibilidad* puede ser una *medida de distancia*. Éstas últimas medidas incluyen, por citar algunos casos, a las *divergencias*, *distancias* y *métricas*. Vemos entonces, por ahora de manera abstracta, que no existe un único modo de cuantificar disimilitud. Más aún, que hasta sería inusual postular la existencia de una única medida de distinguibilidad. Consideremos un ejemplo para ampliar lo anterior. Nos preguntemos cómo distinguir de manera cualitativa dos «historias» (dos textos escritos). Un *criterio* -el que podría ser más directo- es, por ejemplo, observar si cada una de las palabras de ambas historias coinciden o no. Asimismo, este método supone una gran diferencia para una misma historia escrita en dos idiomas distintos. Otra *noción* de disimilitud es decidir -de algún modo- si tales historias tienen iguales personajes y si los hechos que acontecen son distintos o no. Sin embargo, dos historias con hechos y personajes distintos pueden generar «efectos» iguales. Es decir que en algún otro *criterio* éstas historias serían iguales. La conclusión que queremos introducir es que una medida de disimilitud es, en general, consecuencia de un método o criterio de distinguibilidad que pretende diferenciar cualidades específicas.

Por otro lado, es también llamativa la relación entre las ideas de «distancia» y «diferencia». Nuevamente, fuera de las matemáticas, esta conexión no es naturalmente intuitiva. Por ejemplo, dos ciudades *lejanas* pueden ser más parecidas, con respecto a algún criterio, que otras dos *cercanas*. El motivo es que el globo terrestre no está ordenado según la noción de disimilitud. Ahora bien, dentro de las matemáticas la situación es distinta dado que generalmente contamos con un espacio de parámetros **ordenado**¹ -donde parecido significa cercano. Éstos conjuntos de parámetros definen los «elementos» cuya diferencia queremos estimar. Cuanto más parecidos sean, más similares serán los objetos en comparación; así, una distancia en este espacio conlleva a una medida de distinguibilidad.

Los elementos cuya diferencia nos interesa cuantificar son las distribuciones de probabilidad y los estados cuánticos. Éstas medidas están relacionadas con un amplio y variado conjunto de áreas de la *teoría de información*; algunas de éstas son la teoría de comunicaciones clásicas y cuántica, el análisis de señales dependientes del tiempo, correlaciones en sistemas clásicos y cuánticos, entre otras.

Uno de los mejores ejemplos de la importancia de las medidas de distinguibilidad entre estados cuánticos es uno debido a C. A. Fuchs, incluido en el prolegómeno de su tesis

¹Un ejemplo de estos espacios son conjuntos de \mathbb{R}^n , con $n \in \mathbb{N}$.

doctoral [16]. Resumidamente, éste se relaciona con la pregunta: ¿Por qué la cinemática de un electrón no puede ser descrita en términos clásicos? La respuesta aceptada por la comunidad es que cuando uno intenta discernir la posición de un electrón, necesariamente perturba su momento; y viceversa. Así, no existen medios operacionales para determinar la trayectoria del electrón. En términos cuánticos, las mediciones necesarias para precisar la posición y el momento de la partícula modifican el estado de la misma. Para dar sustento a la afirmación anterior es enteramente necesario un *modo de comparar* el estado antes y después de haberse realizado las mediciones correspondientes, es decir, un medida de distinguibilidad.

En este capítulo sintetizaremos las principales medidas de distinguibilidad entre distribuciones de probabilidad y estados cuánticos, y sus propiedades.

2.1. Medidas de distancia

Como señalábamos anteriormente, las medidas de distinguibilidad están relacionadas con las medidas de «distancia», definidas según:

Definición

Una medida de distancia $\mathcal{D}(\cdot|\cdot)$ es un funcional $\mathcal{D} : \mathcal{Z} \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ con las siguientes propiedades. Sean $x, y, z \in \mathcal{Z}$,

Pd.a (*No negatividad*). Para todo x, y , $\mathcal{D}(x|y) \geq 0$

Pd.b (*Identidad de indiscernibles*). $\mathcal{D}(x|y) = 0$ sí y sólo sí $x = y$

Se suele utilizar el término *divergencia* para un funcional con las propiedades anteriores. Del mismo modo, si $\mathcal{D}(\cdot|\cdot)$ además satisface

Pd.c (*Simetría*). Para todo x, y , $\mathcal{D}(x|y) = \mathcal{D}(y|x)$

se denomina *distancia*. Por último, una *métrica* es una distancia que satisface:

Pd.d (*Desigualdad triangular*). Para todo x, y, z , $\mathcal{D}(x, y) \leq \mathcal{D}(x|z) + \mathcal{D}(z|y)$

El conjunto \mathcal{Z} contiene los elementos cuya distancia nos interesa. En las dos secciones siguientes, \mathcal{Z} toma la identidad de las distribuciones de probabilidad, para luego ser el conjunto de los estados cuánticos (matrices densidad).

2.2. Distinguibilidad entre distribuciones de probabilidad

En la Sec. (1.1) definimos “distribución de probabilidad” como un conjunto de n números reales positivos $p = \{p_i\}$, que suman la identidad $\sum_i p_i = 1$. Asimismo, $p_i = P(\omega_i)$ con ω_i un evento de algún espacio muestral y $P(\cdot)$ una medida de probabilidad.

A fines prácticos, consideraremos al conjunto \mathcal{Z} de todas las distribuciones p como una hipersfera del espacio euclídeo $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$. Éste es también el espacio de parámetros *ordenado* que define las distribuciones de probabilidad. Por este motivo, una medida de distancia en \mathcal{Z} es una medida de disimilitud entre distribuciones de probabilidad.

La necesidad de cuantificar disimilitud entre distribuciones de probabilidad se puede encontrar en variadas áreas de las ciencias exactas, como son la mecánica estadística, el análisis de secuencias simbólicas, correlaciones clásicas y cuánticas, etc. [16-18, 101]. Más aún, cómo distinguir dos distribuciones p es un problema ampliamente estudiado, con un vasto marco teórico.

Veamos a continuación una aplicación particular que da lugar al uso de medidas de distancia y que además nos permite establecer la situación general de las mismas.

La evaluación de características. El artículo “*Use of distance measures, information measures and error bounds in feature evaluation*” de Ben-Bassat del año 1982 [102] introduce el problema de *clasificar* (en m clases distintas) un dado objeto observando sus características. La formalización es como sigue. Adoptemos un enfoque Bayesiano: Consideremos que la clase «verdadera» del objeto en cuestión es una variable aleatoria C que puede tomar los valores $\{1, 2, \dots, m\}$. Además, supongamos que la incerteza inicial con respecto a la clase está dada por la distribución $\Pi = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m\}$. En cuanto a las características, sea F el conjunto de todas ellas, con X_j la j -ésima característica. Por completitud, supongamos que Γ_j es el espacio muestral de la variable aleatoria X_j . La probabilidad de obtener $X_j = x_j$, si el objeto pertenece a la clase i , está dada por $P_i(x_j)$. La probabilidad de que el objeto sea de clase i , dado que $X_j = x_j$, está dada por el teorema de Bayes (1.4):

$$\hat{\pi}_i(x_j) = \frac{\pi_i P_i(x_j)}{\sum_{k=1}^m \pi_k P_k(x_j)} \quad (2.1)$$

siendo $q_j = \sum_{k=1}^m \pi_k P_k(x_j)$ la probabilidad de obtener $X_j = x_j$ (más allá de la clase del objeto) y $\pi_i P_i(x_j) = P_{ij}$ la probabilidad conjunta de obtener $X_j = x_j$ y $C = i$. La probabilidad *a posteriori* (2.1) es clave en la identificación de la clase del objeto. Concretamente, la clase t tal que

$$\hat{\pi}_t(x_j) = \text{máx}\{\hat{\pi}_1(x_j), \hat{\pi}_2(x_j), \dots, \hat{\pi}_m(x_j)\}$$

es la más probable (con probabilidad $\hat{\pi}_t(x_j)$) para el objeto según el resultado de la característica $X_j = x_j$. Si un ente elige la clase t según la estrategia anterior (conocida como estrategia de Bayes), la probabilidad media -teniendo en cuenta todos los resultados posibles de una característica aleatoria X - de éxito en la decisión está dada por

$$P_s(X) = \sum_{x \in \Gamma} q(x) \text{máx}\{\hat{\pi}_1(x), \hat{\pi}_2(x), \dots, \hat{\pi}_m(x)\} \quad (2.2)$$

con Γ el espacio muestral de X . Podemos reescribir la ecuación anterior usando (2.1),

$$P_s(X) = \sum_{x \in \Gamma} \text{máx}\{\pi_1 P_1(x), \pi_2 P_2(x), \dots, \pi_m P_m(x)\} \quad (2.3)$$

Contrariamente, la probabilidad de *error* en la decisión de la clase del objeto siguiendo la estrategia de Bayes está dada por

$$P_e(X) = \sum_{x \in \Gamma} \text{mín}\{\pi_1 P_1(x), \pi_2 P_2(x), \dots, \pi_m P_m(x)\} \quad (2.4)$$

Consideremos ahora el caso $m = 2$, $\pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{2}$. Entonces, P_e resulta,

$$P_e(X) = \frac{1}{2} \sum_{x \in \Gamma} \text{mín}\{P_1(x), P_2(x)\} \quad (2.5)$$

Si examinamos rápidamente el comportamiento del funcional P_e veremos que constituye una herramienta para distinguir distribuciones de probabilidad. Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, podemos construir una distancia entre las distribuciones $P_1(x)$ y $P_2(x)$ como sigue,

$$D_e(P_1||P_2) = 1 - 2P_e(X) \quad (2.6)$$

Si las distribuciones son ortogonales² entonces P_e es nula, mientras que si son idénticas, P_e es igual a $\frac{1}{2}$. Así, $0 \leq D_e \leq 1$.

La probabilidad de error parece ser la construcción más intuitiva y adecuada para el tratado de la clasificación de clases. Más aún, si nuestro objetivo es minimizar la tasa de error en la clasificación entonces la función más adecuada a tener en cuenta es P_e . Esto define la noción de distinguibilidad sobre la cual está construida P_e . Sin embargo, si el objetivo es usar esta cantidad para discernir qué característica X es *mejor* observar para identificar la clase del objeto -esto es: Y es *mejor* que X si $P_e(Y) < P_e(X)$ - se sigue que en ocasiones P_e no es el funcional más adecuado; y existe una amplia literatura sobre la evaluación de las características de un objeto para identificar su clase.

Reglas de evaluación de características. Siguiendo el artículo [102], generalicemos la solución que encontramos anteriormente. Una regla para evaluar características es un funcional $U : F \rightarrow \mathbb{R}$, con F el conjunto de características en cuestión (variables aleatorias). Según ésta regla, decimos que X e Y son indiferentes si $U(X) = U(Y)$, que X es preferida ante Y si $U(X) < U(Y)$, y lo contrario. Podemos clasificarlas en categorías. Reglas derivadas de **1)** medidas de información, **2)** medidas de distancia, y de **3)** medidas de dependencia. Nos concentremos en **2)** para el caso de dos clases ($m = 2$).

Antes, tengamos en cuenta lo siguiente. En el caso de la probabilidad de error, aceptamos que X es preferida ante Y si $P_e(X) < P_e(Y)$, y lo mismo para la función U . Ahora bien, para el funcional D_e , la relación es distinta. Si vale $P_e(X) < P_e(Y)$ entonces se cumple $D_e(P_1(x)||P_2(x)) > D_e(P_1(y)||P_2(y))$. En resumen, X es preferida ante Y , si vale

$$D_e(P_1(x)||P_2(x)) > D_e(P_1(y)||P_2(y))$$

Para generar una regla de evaluación utilizando distinguibilidad, denotemos con $D(X)$ una medida de distancia entre las distribuciones $P_1(x)$ y $P_2(x)$. Del mismo modo que para D_e , diremos que X es preferida ante Y si $D(X) > D(Y)$, y lo contrario. La idea detrás de esta regla de clasificación es que cuanto más *distintas* sean las distribuciones P_1 y P_2 para la característica X , más fácil es identificar la clase, es decir, $C = 1$ o $C = 2$. Esto a su vez fundamentado por la estrategia de Bayes, formalizado por la ecuación (2.6). Algunas medidas de distinguibilidad consideradas para este problema son el coeficiente de Bhattacharyya, las distancias de Kolmogorov, Matusita, Kullback-Liebler y Lissack-Fu [102].

2.2.1. Medidas de distancia entre distribuciones de probabilidad

Veamos en términos generales las expresiones analíticas de las medidas de distancia entre distribuciones de probabilidad mayormente utilizadas en la literatura. El «catálogo» de distancias/divergencias siguientes está hecho sobre la base de que todas los funcionales siguientes cumplen los requisitos para ser mínimamente considerados *divergencias*, ver Sec. 2.1.

Sean $p, q \in \mathcal{Z}$ dos distribuciones de probabilidad, con elementos $\{p_i\}$ y $\{q_j\}$, respectivamente. Definimos entonces:

Distancia $K(p||q)$:

En el área de la criptografía, una medida frecuentemente utilizada es la distancia Kolmogorov, definida por

$$K(p||q) = \frac{1}{2} \sum_i |p_i - q_i| \quad (2.7)$$

²Dos distribuciones de probabilidad $p_1 = \{p_1^i\}_{i=1}^n$ y $p_2 = \{p_2^i\}_{i=1}^n$ son ortogonales si no existe $i \in [1, n] \subset \mathbb{N}$ tal que p_1^i y p_2^i son distintos de cero [17].

A su vez, se puede probar que la distancia de Kolmogorov es exactamente la distancia que surge de la probabilidad de error con $m = 2$, $\pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{2}$, concretamente, la ecuación (2.6) para las distribuciones p y q .

Coficiente Bhattacharyya $B(p||q)$:

Una cantidad que no es una medida de distancia *en sí misma* pero que define una noción de distinguibilidad es el coeficiente Bhattacharyya:

$$B(p||q) = \sum_i \sqrt{p_i q_i} \tag{2.8}$$

Una característica importante de $B(\cdot||\cdot)$ es la facilidad con la que se puede calcular. De su definición además podemos inferir que es un tipo de *overlap* entre ambas distribuciones [103-105]. Distribuciones ortogonales suponen un coeficiente $B = 0$ mientras que para distribuciones idénticas $B = 1$. Teniendo en cuenta lo anterior, podemos entonces definir una medida de distancia del siguiente modo:

$$D_{Bh}(p||q) = \arccos B(p||q) \tag{2.9}$$

Distancia $H_e(p||q)$:

Introducida en forma integral por E. Hellinger en 1909 [106, 107], la distancia Hellinger es principalmente utilizada en el área de la probabilidad y la estadística.

La distancia Hellinger entre p y q se define como

$$H_e(p||q) = \frac{1}{2} \sum_i (\sqrt{p_i} - \sqrt{q_i})^2 \tag{2.10}$$

A su vez, podemos ver que esta distancia no es otra cosa que el coeficiente de Bhattacharyya definido anteriormente: $H_e(p||q) = 1 - B(p||q)$.

Divergencia $H_r(p||q)$:

Propuesta por Kullback and Leibler en el año 1951, la entropía relativa $H_r(p||q)$ es una de las medidas de distancia más utilizadas en la teoría de información:

$$H_r(p||q) = \sum_i p_i \log_2 \frac{p_i}{q_i} \tag{2.11}$$

Por otro lado, $H_r(p||q)$ es una medida de la ineficiencia en suponer que la distribución de una variable aleatoria X es q cuando en realidad la distribución «verdadera» es p .

Para justificar lo anterior tenemos primero que definir el modo correcto de cuantificar la idea de *sorpresa* ante un resultado $X = x_i$, que suponemos con probabilidad q_i . Una medida acorde es $-\log_2 q_i$.

Una medida de «sorpresa». Éste es un concepto de particular importancia para la noción de distinguibilidad asociada a la entropía relativa. Supongamos que un evento ocurre con probabilidad p_i . Deseamos cuantificar lo “sorprendidos” que estamos cuando tal evento ocurre. El primer modo que podríamos proponer es tomar $1/p_i$, porque a menor probabilidad mayor es $1/p_i$, un comportamiento acorde con la idea que queremos cuantificar. Sin embargo, si el evento en cuestión estuviese compuesto por dos eventos independientes entonces es lógico suponer que la sorpresa debería ser la suma de las sorpresas asociadas a los eventos independientes. Esto no ocurre si usamos la medida $1/p_i$. Así, si en cambio proponemos $\log_2 \frac{1}{p_i}$ la propiedad anterior se satisface. Además, para una distribución de probabilidad p , la incerteza $H(p)$ es el promedio de las sorpresas de los posibles eventos (Shannon and Weaver, 1949).

Dado que el resultado $X = x_j$ ocurre con probabilidad p_j , tenemos que la *sorpresa* promedio asociada a X está dada por

$$-\sum_i p_i \log_2 q_j$$

Por otro lado, conocemos que la incerteza (intrínseca del proceso aleatorio) es $H(p)$. La entropía relativa es igual a la resta de la sorpresa promedio con la incerteza $H(p)$. Si éstas cantidades son iguales, entonces es natural la ineficiencia en la suposición sea nula. En cambio, si asumimos una distribución de probabilidad errónea (por ej. q) entonces es natural que la sorpresa promedio sea mayor que la incerteza $H(p)$.

En la definición anterior, utilizamos la convención $0 \log_2 \frac{0}{0} = 0$, $0 \log_2 \frac{0}{q} = 0$ y $p \log_2 \frac{p}{0} = \infty$. Por lo tanto, si existen p_i y q_i tales que $p_i > 0$ y $q_i = 0$, entonces $H_r(p||q) = \infty$.

Distancia $J(p||q)$:

Una distancia que surge de la simetrización de la entropía relativa es la Divergencia Jeffreys-Kullback-Leibler también conocida como Divergencia J :

$$J(p||q) = H_r(p||q) + H_r(q||p) \quad (2.12)$$

Distancia $JS(p||q)$:

Otra distancia derivada de la entropía relativa es la Divergencia Jensen-Shannon entre dos distribuciones de probabilidad p y q , con pesos estadísticos π_1 y π_2 , respectivamente:

$$JS(p||q) = H(\pi_1 p + \pi_2 q) - \pi_1 H(p) - \pi_2 H(q) \quad (2.13)$$

Originada en el campo de la teoría de información [22, 23], la Divergencia Jensen-Shannon (JSD) (por sus siglas en inglés) está siempre bien definida y acotada (a diferencia de la entropía relativa que puede divergir). Asimismo, la generalización de la distancia JSD a un caso de n distribuciones de probabilidad está dada por:

$$JS_\pi(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = H\left(\sum_i \pi_i \sigma_i\right) - \sum_i \pi_i H(\sigma_i) \quad (2.14)$$

con $JS_\pi(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ una medida de la distancia conjunta entre el conjunto de distribuciones de probabilidad $\{\sigma_i\}$ asociadas a los pesos estadísticos $\pi = \{\pi_i\}$.

La positividad de JS_π está dada por la concavidad de la entropía H , ver Ec. (1.9).

Divergencia $\chi^2(p||q)$ y $\Psi(p||q)$:

Otra importante divergencia para la estadística y el análisis de datos es la χ^2 :

$$\chi^2(p||q) = \sum_i \frac{(p_i - q_i)^2}{q_i} = \sum_i \frac{p_i^2}{q_i} - 1 \quad (2.15)$$

Cabe remarcar que ésta divergencia, al igual que la entropía relativa, no está acotada (puede resultar infinita en algunos casos). Asimismo, todas las divisiones $\frac{0}{0}$ se tratan como idénticamente nulas.

Una distancia que se ha estudiado y que podemos definir haciendo uso de χ^2 es la distancia χ^2 simetrizada:

$$\Psi(p||q) = \chi^2(p||q) + \chi^2(q||p) = \sum_i \frac{(p_i - q_i)^2 (p_i + q_i)}{p_i q_i} \quad (2.16)$$

Distancia $\Delta(p||q)$:

La discriminación triangular Δ es una distancia relativamente nueva (propuesta por F. Topsøe en el año 2000 [108]):

$$\Delta(p||q) = \sum_i \frac{|p_i - q_i|^2}{p_i + q_i} \tag{2.17}$$

La importancia de la misma radica en que es una versión “equivalente” de la divergencia de Jensen-Shannon (2.14) cuyo cálculo es en ocasiones más simple [109].

Divergencias Csiszár. Una generalización que involucra las divergencias anteriormente listadas, son las denominadas *Divergencias Csiszár*. Éstas están definidas a través de funciones $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, continuas y convexas en todo su dominio. En consecuencia, también son denominadas *f*-divergencias.

Definición

Una *f*-divergencia entre dos distribuciones p y q , está dada por

$$D_f(p||q) = \sum_i q_i f\left(\frac{p_i}{q_i}\right) \tag{2.18}$$

Las propiedades del funcional D_f claramente dependen de la función real f . Si $f(1) = 0$ tenemos que se cumple:

1. *No negatividad e Identidad de indiscernibles:* $D_f(p||q) \geq 0$ con $D_f(p||q) = 0 \iff p = q$.
2. *Unicidad:* $D_{f_1}(p||q) = D_f(p||q) \iff \exists c \in \mathbb{R}$ tal que $f_1(u) = f(u) + c(u - 1)$.

Si además, $\exists c \in \mathbb{R}$ tal que:

$$f^*(u) - f(u) = c(u - 1) \tag{2.19}$$

donde $f^*(u) = uf(\frac{1}{u})$, entonces el funcional $D_f(p||q)$ tiene la siguiente propiedad,

3. *Simetría:* $D_f(p||q) = D_f(q||p)$

Asimismo, una cota general para una divergencia Csiszár (cuya función f no necesariamente es tal que $f(1) = 0$) está dada por[110, 111]:

4. *Rango de valores:* $f(1) \leq D_f(p||q) \leq f(0) + \lim_{u \rightarrow 0} uf(1/u)$.

Veamos algunos casos particulares de divergencias Csiszár y sus funciones f respectivas.

▪ **Distancia Kolmogorov.**

$$K(p||q) = \frac{1}{2} \sum_i |p_i - q_i| \qquad f_K(u) = \frac{1}{2}|u - 1| \tag{2.20}$$

▪ **Distancia Hellinger.**

$$H(p||q) = \frac{1}{2} \sum_i (\sqrt{p_i} - \sqrt{q_i})^2 \qquad f_{H_e}(u) = \frac{1}{2}(u - 1)^2 \tag{2.21}$$

▪ **Entropía relativa.**

$$H_r(p||q) = \sum_i p_i \log_2 \frac{p_i}{q_i} \qquad f_{H_r}(u) = u \log_2 u \tag{2.22}$$

- **Divergencia Jeffreys-Kullback-Leibler.**

$$J(p||q) = H_r(p||q) + H_r(q||p) \quad f_J(u) = (u - 1) \log_2(u) \quad (2.23)$$

- **Divergencia de Jensen-Shannon.**

$$JS(p||q) = \frac{1}{2} [H_r(p||m) + H_r(q||m)] \quad (2.24)$$

$$f_{JS}(u) = \frac{(1+u) + u \log_2 u - (1+u) \log_2(1+u)}{2} \quad (2.25)$$

con $m = \frac{p+q}{2}$.

- **Divergencia χ^2 .**

$$\chi^2(p||q) = \sum_i \frac{(p_i - q_i)^2}{q_i} \quad f_\chi(u) = (u - 1)^2 \quad (2.26)$$

- **Divergencia χ^2 simetrizada.**

$$\Psi(p||q) = \chi^2(p||q) + \chi^2(q||p) \quad f_\Psi(u) = (u - 1)^2 \left(\frac{1}{u} + 1\right) \quad (2.27)$$

- **Discriminación triangular.**

$$\Delta(p||q) = \sum_i \frac{|p_i - q_i|^2}{p_i + q_i} \quad f_\Delta(u) = \frac{(u - 1)^2}{u + 1} \quad (2.28)$$

Métricas

Si consideramos que el conjunto de las distribuciones de probabilidades es una bola en \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$, entonces surge que una medida de distancia enteramente plausible entre distribuciones es la distancia euclídea (o euclidiana):

$$D_E(p||q) = \sqrt{\sum_i (p_i - q_i)^2} \quad (2.29)$$

Ésta medida es también una métrica, es decir, que además cumple la desigualdad triangular, propiedad Pd.d. Asimismo, vimos que la idea de un «único» modo de diferenciar distribuciones no es razonable. Además, en aplicaciones como reconocimiento de patrones, *machine learning*, estadística, optimización, y otras ramas de la matemática aplicada y la teoría de información clásica, es recomendable el uso de divergencias basadas en información (en inglés, *information-theoretic divergences*) [19]. Todas las divergencias/distancias consideradas anteriormente son de este tipo [17].

Por otro lado, hasta aquí nos ocupamos de etiquetar a las medidas de distancia como «divergencias» o «distancias», según lo definido en la Sec. 2.1. Ahora bien, algunas de las distancias basadas en información listadas anteriormente pueden también ser «métricas», bajo ciertas modificaciones. La distinción entre métrica y distancia, marcada la desigualdad triangular, es de radical importancia en muchas ocasiones. Por ejemplo, las condiciones para ser una métrica son prerequisites para numerosas propiedades de convergencia de muchos algoritmos iterativos [26].

El objetivo de esta parte del trabajo, es definir nuevas (es decir, diferentes de la distancia euclídea) métricas basadas en información.

En [106] Endres y Schindelin introdujeron una métrica en el espacio de distribuciones de probabilidad haciendo uso de la divergencia Jensen-Shannon JS . En particular, probaron que la distancia

$$D_{\frac{1}{2}}(p||q) = [JS(p||q)]^{1/2}$$

satisface la *desigualdad triangular*. Inspirados en este trabajo, Lu y Li [26] probaron que $\Delta_{\alpha}(p||q) = [\Delta(p||q)]^{\alpha}$ cumple con la desigualdad triangular sí y sólo sí $\alpha \in (0, \frac{1}{2}] \subset \mathbb{R}$, con lo que obtuvieron un conjunto de nuevas métricas a partir de la discriminación triangular. Nuestro primer artículo -Art. I, [1]- resume la demostración del siguiente resultado:

Teorema

La distancia $D_{\alpha}(p||q) = [JS(p||q)]^{\alpha}$, con $\alpha \in (0, \frac{1}{2}] \subset \mathbb{R}$ es una métrica.

Como $D_{\alpha}(p||q)$ cumple con las propiedades Pd.a, Pd.b y Pd.c dado que $JS(p||q)$ es una distancia, resta demostrar que $D_{\alpha}(p||q)$ además satisface la desigualdad triangular Pd.d. A tal fin, primero introduciremos un resultado general sobre métricas para las divergencias Csiszár.

Teorema

Sea D_f una divergencias Csiszár donde f satisface las propiedades 1, 3, y además $f(1) = 0$. Si existe $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que la función

$$h_{\alpha}(u) = \frac{(1 - u^{\alpha})^{1/\alpha}}{f(u)} \tag{2.30}$$

es no creciente para $u \in [0, 1)$, entonces $D_{\alpha}(p||q) = [D_f(p||q)]^{\alpha}$ es una métrica.

Como la divergencia de JSD es en efecto una f -divergencia, con $f_{JS}(u) = \frac{1}{2} [(1 + u) + u \log_2 u - (1 + u) \log_2(1 + u)]$ veamos que la función $h_{\alpha}(u) = \frac{(1-u^{\alpha})^{1/\alpha}}{f_{JS}(u)}$ es decreciente o constante en el intervalo $[0, 1) \subset \mathbb{R}$. Analicemos entonces el signo de la derivada de $h_{\alpha}(u)$. Luego de cierta álgebra, tenemos que

$$\frac{dh_{\alpha}(u)}{du} = - \frac{(1 - u^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}-1} \{u \log_2 u + (u + u^{\alpha})[1 - \log_2(1 + u)]\}}{2u[f_{JS}(u)]^2} \tag{2.31}$$

De la ecuación anterior vemos que el signo de $\frac{dh_{\alpha}(u)}{du}$ depende únicamente de

$$u \log_2 u + (u + u^{\alpha})[1 - \log_2(1 + u)] \tag{2.32}$$

De este modo, veamos bajo qué condiciones vale $u \log_2 u + (u + u^{\alpha})[1 - \log_2(1 + u)] \geq 0$. Así,

$$\begin{aligned} u \log_2 u + (u + u^{\alpha})[1 - \log_2(1 + u)] \geq 0 &\Leftrightarrow \\ u^{\alpha} [1 - \log_2(1 + u)] \geq u \log_2(1 + u) - u - u \log_2(u) &\Leftrightarrow \\ u^{\alpha} \log_2 \left(\frac{2}{1 + u} \right) \geq u \log_2 \left(\frac{1 + u}{2u} \right) &\Leftrightarrow \\ u^{\alpha} \geq u \frac{\log_2 \left(\frac{1+u}{2u} \right)}{\log_2 \left(\frac{2}{1+u} \right)} = u \frac{\ln \left(\frac{1+u}{2u} \right)}{\ln \left(\frac{2}{1+u} \right)} &\tag{2.33} \end{aligned}$$

Conocemos que la última desigualdad (2.33) vale para $\alpha = \frac{1}{2}$, dado que $D_{1/2}(p||q)$ es métrica [106], entonces se cumple:

$$u^{1/2} \geq u \frac{\log_2 \left(\frac{1+u}{2u} \right)}{\log_2 \left(\frac{2}{1+u} \right)} \tag{2.34}$$

Como para $u \in (0, 1)$, $u^x \leq u^y$ si $x \geq y$, tenemos que

$$u^\beta \geq u^{1/2} \geq u \frac{\log_2 \left(\frac{1+u}{2u} \right)}{\log_2 \left(\frac{2}{1+u} \right)} \quad (2.35)$$

para $\beta \in (9, \frac{1}{2}]$. De este modo, $h_\alpha(u)$ resulta no creciente para $u \in [0, 1)$ y $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$. Por lo tanto, se sigue que $D_\alpha(p||q)$ es una métrica para tales valores de α en el espacio de las distribuciones de probabilidad. Por completitud, de la misma forma, deducimos que $D_\alpha(p||q)$ no es métrica si $\alpha \geq 1$.

Resumen Hemos definido el concepto de medida de distancia en el espacio de distribuciones de probabilidad, entre los cuales se encuentran los de *divergencia*, *distancia* y *métrica*. Abordamos el panorama general de tales medidas mediante la aplicación al problema de *la evaluación de características*. Introdujimos las principales medidas de distancia basadas en información y una clase general: *las divergencias Csizsár*. Por último, establecimos dos resultados relativos a la construcción de métricas a través de distancias basadas en información, como son, $D_\alpha(p||q)$ y $\Delta_\alpha(p||q)$.

2.3. Distinguibilidad entre estados cuánticos

Como señalamos anteriormente, hay cierta arbitrariedad en la definición de las medidas de distinguibilidad. Por esto, la comunidad que estudia la información clásica y cuántica ha encontrado conveniente utilizar diferentes tipos de medidas.

El objetivo de esta sección es introducir cuantificadores de disimilitud entre estados cuánticos. A continuación, veremos que la distinguibilidad de tales estados está dada por *medidas de distancia* entre matrices densidad. Volvemos entonces a la Sección 2.1 con $\mathcal{Z} = B_1^+(\mathcal{H})$ y $\dim \mathcal{H} = n \in \mathbb{N}$.

Veamos algunas propiedades con las que una medida de distancia entre estados cuánticos $\mathcal{D}(\cdot||\cdot)$ bien definida debería contar. Como las ya enumeradas al comienzo de la Sec. 2.1 valen también para el caso cuántico, presentamos las propiedades siguientes como una continuación de la lista anterior.

En primer lugar, es razonable que la «distancia» entre dos matrices densidad no se vea afectada de un cambio de base común, lo que conlleva a la invariancia de una medida de distancia ante transformaciones unitarias:

Pd.e Una medida de distancia $\mathcal{D}(\cdot||\cdot)$ es invariante ante transformaciones unitarias si cumple

$$\mathcal{D}(\rho||\sigma) = \mathcal{D}(U\rho U^\dagger||U\sigma U^\dagger) \quad (2.36)$$

con U una matriz unitaria $n \times n$, y $\rho, \sigma \in B_1^+(\mathcal{H})$.

De igual forma, es coherente que las medidas de distancia cuánticas satisfagan la *aditividad restringida*; característica relacionada con agregar al espacio de Hilbert \mathcal{H} , otro espacio \mathcal{H}_m de dimensión $m \in \mathbb{N}$.

Pd.f Una medida $\mathcal{D}(\cdot||\cdot)$ cumple con la aditividad restringida si $\mathcal{D}(\rho||\sigma) = \mathcal{D}(\rho \otimes \chi||\sigma \otimes \chi)$ con $\chi \in B_1^+(\mathcal{H}_m)$.

La igualdad anterior es razonable porque el estado $\alpha = \rho \otimes \chi$ es uno que hace referencia a dos estados inconexos, ρ y χ , de dos subsistemas diferentes e independientes. Lo mismo vale para $\beta = \sigma \otimes \chi$. Entonces la única diferencia entre α y β está en los estados ρ y σ . Vemos entonces que las dos propiedades anteriores son *básicas* para un cuantificador de distancia entre matrices densidad. Cabe remarcar que los casos particulares que más adelante listaremos, en general, las satisfacen.

Otras características, más fuertes que las anteriores, son las siguientes:

Pd.g Sea $\mathcal{E}[\cdot]$ un mapa CPTP. Una medida $\mathcal{D}(\cdot||\cdot)$ es *contractiva* si $\mathcal{D}(\rho||\sigma) \geq \mathcal{D}(\mathcal{E}[\rho]||\mathcal{E}[\sigma])$.

La contractividad de una medida es fundamental para muchas aplicaciones particulares. Esta implica que ninguna operación cuántica puede incrementar la distancia entre dos estados cuánticos. Asimismo, una medida que es contractiva inmediatamente es invariante ante transformaciones unitarias y cumple con la aditividad restringida. Veamos por qué. Sea $\mathcal{D}(\cdot||\cdot)$ una medida de distancia (ya sea divergencia, distancia o métrica) contractiva. En primer lugar, como vimos anteriormente en la Sec. 1.2.3, una transformación unitaria es un caso particular de mapa CPTP. Así, sea U un operador unitario, entonces

$$\mathcal{D}(\rho||\sigma) \geq \mathcal{D}(U\rho U^\dagger||U\sigma U^\dagger) = \mathcal{D}(\rho||\sigma) \geq \mathcal{D}(\rho'||\sigma')$$

con $\rho' = U\rho U^\dagger$ y $\sigma' = U\sigma U^\dagger$. Si aplicamos la operación unitaria inversa, tenemos que

$$\mathcal{D}(\rho||\sigma) \geq \mathcal{D}(\rho'||\sigma') \geq \mathcal{D}(U^\dagger\rho'U||U^\dagger\sigma'U) = \mathcal{D}(\rho||\sigma) \quad (2.37)$$

De las desigualdades anteriores resulta la invariancia en cuestión:

$$\mathcal{D}(\rho||\sigma) = \mathcal{D}(\rho'||\sigma')$$

Observemos qué ocurre con la aditividad restringida. La operación a considerar, sobre los estados cuánticos ρ y σ , agrega un estado χ a través del producto tensorial. La transformación *inversa* a la anterior es la traza parcial, en este caso sobre \mathcal{H}_m . Ambas operaciones son mapas CPTP³. Sea $\Phi_{PT}[x] = x \otimes \chi$ y $\Phi_{TP}[y] = \text{Tr}_{\mathcal{H}_m}[y]$, con $y \in B_1^+(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_m)$, entonces vale:

$$\mathcal{D}(\rho||\sigma) \geq \mathcal{D}(\Phi_{PT}[\rho]||\Phi_{PT}[\sigma]) \geq \mathcal{D}(\Phi_{TP}[\Phi_{PT}[\rho]]||\Phi_{TP}[\Phi_{PT}[\sigma]]) = \quad (2.38)$$

$$= \mathcal{D}(\rho||\sigma) \quad (2.39)$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{D}(\rho||\sigma) = \mathcal{D}(\Phi_{PT}[\rho]||\Phi_{PT}[\sigma])$$

Cabe destacar que la invariancia anterior se puede generalizar. Es decir, si contamos con una distancia $\mathcal{D}(\cdot||\cdot)$ contractiva. Entonces, ésta será invariante ante todas las operaciones $\Phi[\cdot]$ CPTP tales que su operación inversa $\Phi^{-1}[\cdot]$ existe y además es un mapa CPTP. La demostración de lo anterior consta básicamente de las desigualdades (2.38) con $\Phi_{PT} = \Phi$ y $\Phi_{TP} = \Phi^{-1}$.

Por otro parte, con respecto a la *mezcla* de estados cuánticos, establecemos la propiedad siguiente. Consideremos una distribución de probabilidad $\{p_i\}$ y un conjunto de estados cuánticos $\{\rho_i\} \subset B_1^+(\mathcal{H})$,

Pd.h $\mathcal{D}(\cdot||\cdot)$ es convexa en alguna de sus entradas si

$$\mathcal{D}\left(\sum_i p_i \rho_i || \sigma\right) \leq \sum_i p_i \mathcal{D}(\rho_i || \sigma)$$

³Cabe aclarar que las operaciones cuánticas de traza parcial y producto tensorial tienen dominio e imagen distintas, es decir, toman un elemento de un espacio y devuelven uno en otro espacio distinto.

Finalmente, algunas medidas de distancia también satisfacen las siguientes desigualdades:

Pd.i $\mathcal{D}(\cdot||\cdot)$ es conjuntamente convexa si

$$\mathcal{D}\left(\sum_i p_i \rho_i \middle| \middle| \sum_i q_i \sigma_i\right) \leq \sum_i p_i \mathcal{D}(\rho_i || \sigma_i)$$

con $\{q_i\}$ una distribución de probabilidad.

Pd.j $\mathcal{D}(\cdot||\cdot)$ es aditiva si $\mathcal{D}(\rho_1 \otimes \rho_2 || \sigma_1 \otimes \sigma_2) = \mathcal{D}(\rho_1 || \sigma_1) + \mathcal{D}(\rho_2 || \sigma_2)$ con $\rho_1, \sigma_1 \in B_1^+(\mathcal{H})$ y $\rho_2, \sigma_2 \in B_1^+(\mathcal{H}_m)$.

Hasta aquí, tuvimos en cuenta características que las medidas *usuales* frecuentemente satisfacen. Existen muchas otras importantes propiedades que puntualizaremos más adelante caso por caso.

Retomemos entonces la cuestión de cómo distinguir estados cuánticos. Técnicamente, una matriz densidad no es más que una matriz cuadrada con algunas propiedades adicionales. De este modo, una noción de distancia entre matrices podría servirnos para cuantificar al menos «distancia» en un espacio de parámetros ordenado (ver discusión al principio del capítulo). Sin embargo, debemos considerar que los estados cuánticos no son medibles, es decir, no los podemos determinar mediante observaciones directas. Así, el único medio *físico* para llevar a cabo una distinción es realizando *mediciones*. En la Sección 1.2.1 vimos que los resultados de tales mediciones son intrínsecamente estocásticos y que los observables se pueden considerar variables aleatorias. En pocas palabras, dados dos estados cuánticos de un mismo sistema, al efectuar mediciones sobre éste obtendremos dos *distribuciones de probabilidad*. La distinguibilidad estará dada por una medida de distancia entre tales distribuciones. Volvemos entonces a la sección anterior, donde describimos varias medidas de distancia *basadas en información* entre vectores estadísticos. Queda entonces sólo una cuestión por dilucidar ¿Qué observable tenemos que medir? Dicho de otro modo ¿Qué medición realizaremos sobre los subsistemas? La respuesta es simple: *La mejor*, donde en este caso significa, *la que nos provea mayor «distancia» entre las distribuciones*. Este procedimiento define una medida de distinguibilidad entre estados cuánticos.

En la Sección 1.2.4 revisamos el postulado de medición y observación en mecánica cuántica. Establecimos además que una medición POVM $\mathcal{E} = \{E_i\}$, sobre un sistema en un estado ρ , produce el i -ésimo resultado con probabilidad $p_i = \text{Tr}[E_i \rho]$. Luego, si el sistema se encontrase en otro estado σ , la probabilidad cambia según: $q_i = \text{Tr}[E_i \sigma]$. Ambas distribuciones de probabilidad $p_{\mathcal{E}} = \{p_i\}$ y $q_{\mathcal{E}} = \{q_i\}$ dependen de la medición \mathcal{E} . En consecuencia, establecemos:

Definición

Una medida de distinguibilidad cuántica (MDC) $d(\cdot||\cdot)$ entre $\rho, \sigma \in B_1^+(\mathcal{H})$, es de la forma

$$d(\rho||\sigma) = \max_{\mathcal{E}} D(p_{\mathcal{E}}||q_{\mathcal{E}}) \quad (2.40)$$

con $D(\cdot||\cdot)$ una medida de distancia en el espacio de las distribuciones de probabilidad. Ver Sec. 2.2.1. El máximo se toma sobre todas las mediciones POVM posibles. La definición anterior establece también una medida de distancia entre estados cuánticos, pero como su naturaleza emerge de un procedimiento de distinguibilidad basado en *mediciones* entonces preferimos distinguirla utilizando la notación $d(\cdot||\cdot)$ y el nombre *medida de distinguibilidad cuántica*. Resumidamente, en términos generales, una medida de distancia $\mathcal{D}(\cdot||\cdot)$ cuántica -léase: entre estados cuánticos- puede ser, o no, una MDC.

Con todo, aparece la cuestión sobre qué ocurre con los demás cuantificadores de distancia entre estados cuánticos que no son de la forma (2.40). Evidentemente, éstos también son considerados medidas de disimilitud. La diferencia entre las MDC y las demás medidas de distancia está en que las primeras tienen un asidero físico y una interpretación operacional. Así, la utilización de una medida fuera del conjunto de las MDC como cuantificador de disimilitud debe llevarse a cabo con precaución y teniendo en cuenta sus limitaciones. Por otro lado, en ocasiones, tales medidas se calculan con mayor facilidad y son útiles para encontrar desigualdades entre ciertas cantidades. Veamos a continuación algunos de los casos particulares con mayor fama en el área.

2.3.1. Medidas de distinguibilidad cuántica

El primer paso en el procedimiento que describimos para la construcción de medidas de distinguibilidad cuántica es elegir una divergencia, distancia, métrica (o algún coeficiente proporcional a éstas) en el espacio de las distribuciones de probabilidad. Comencemos con el caso, de algún modo, más «natural»: la **probabilidad de error** P_e , dada por la Ec. (2.5). En la Sec. 2.2, vimos que P_e (Ec. (2.5)) es la probabilidad de equivocación en la identificación de la *clase* de un objeto asociado a dos distribuciones de probabilidad (con incerteza inicial $1/2$ en cada caso). Podemos entonces aplicar lo anterior al problema de *distinguir* dos estados cuánticos -qu juegan el papel de *clases*- asociados a dos distribuciones de probabilidad dadas por una medición POVM. En efecto, la medida P_e evaluada en las distribuciones $p_{\mathcal{E}}$ y $q_{\mathcal{E}}$ es la probabilidad de error al distinguir dos estados cuánticos por medio de la POVM \mathcal{E} . Por lo tanto, siguiendo el procedimiento dado por (2.40), al maximizar sobre tales mediciones, resulta:

$$P_e(\rho||\sigma) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \text{Tr}|\rho - \sigma| \right) \quad (2.41)$$

La expresión analítica anterior fue primeramente obtenida por Helstrom [112], quien además probó que la POVM óptima (la que maximiza) es de hecho una PVM. Como este resultado, y las optimizaciones que siguen, son ampliamente conocidas en área de la distinguibilidad cuántica⁴ obviaremos las demostraciones dado que no nos interesa hacer foco en tal cuestión. Sin embargo, cabe destacar que las maximizaciones o minimizaciones a realizar según la Ec. (2.40), constituyen un problema sumamente complejo que requiere de un profundo análisis caso por caso.

Las nociones de distinguibilidad dadas por la probabilidad de error y la **distancia Kolmogorov**, Ec. (2.7), están estrechamente relacionadas. Concretamente:

$$P_e(p||q) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} K(p||q) \quad (2.42)$$

Así, resulta que la contraparte cuántica de $K(p||q)$ es

$$K(\rho||\sigma) = \max_{\mathcal{E}} K(p_{\mathcal{E}}||q_{\mathcal{E}}) \quad (2.43)$$

El resultado de la misma se conoce como *distancia traza*:

$$K(\rho||\sigma) = \frac{1}{2} \text{Tr}|\rho - \sigma| \quad (2.44)$$

donde $|\rho - \sigma| = \sqrt{(\rho - \sigma)^\dagger (\rho - \sigma)} = \sqrt{(\rho - \sigma)^2}$. La última igualdad vale si los operadores ρ y σ son autoadjuntos, como es el caso de matrices densidad.

⁴Puede usted escribir en su buscador web preferido *quantum state discrimination* y seguramente el primer ejemplo que encontrará será tal cálculo de Helstrom.

Analicemos ahora el **coeficiente Bhattacharyya** (2.8). El análogo cuántico $B(\rho||\sigma)$ formalmente está dado por:

$$B(\rho||\sigma) = \min_{\mathcal{E}} B(p_{\mathcal{E}}||q_{\mathcal{E}}) \quad (2.45)$$

Como esta cantidad no es en realidad una distancia, sino, un *overlapp* en el sentido de que si dos distribuciones (o estados) son iguales $B(\rho||\sigma)$ es máximo, y si son ortogonales entonces resulta nulo, es natural cambiar la maximización en la ecuación (2.40) por una minimización. Consecuentemente, se puede demostrar que ésta resulta:

$$B(\rho||\sigma) = \text{Tr} \left[\sqrt{\sqrt{\rho}\sigma\sqrt{\rho}} \right] \quad (2.46)$$

La cantidad $F(\rho||\sigma) = [B(\rho||\sigma)]^2$ es probablemente la noción de distinguibilidad entre estados más utilizada, conjuntamente con la versión cuántica de la entropía relativa que veremos más adelante, y se denomina **fidelidad**.

De la misma forma, utilizando la Ec. (2.46) podemos obtener la versión cuántica de la función D_{Bh} (Ec. (2.9)):

$$d_{Bh}(\rho||\sigma) = \text{arc cos } B(\rho||\sigma) \quad (2.47)$$

Ésta medida también es frecuentemente denominada **ángulo** [18].

Otra noción de distinguibilidad dada por la Ec. (2.45) es la que surge de la distancia Hellinger $H_e(p||q)$, Ec. (2.10). Expresando ésta cantidad como

$$H_e(p||q) = 1 - B(p||q) \quad (2.48)$$

y reemplazándola en (2.40) de inmediato vemos que:

$$H_e(\rho||\sigma) = 1 - B(\rho||\sigma) \quad (2.49)$$

Asimismo, de la expresión anterior surge otra medida de distancia ampliamente utilizada en la literatura de la información cuántica, conocida como la **distancia Bures** $d_B(\rho||\sigma)$:

$$d_B(\rho||\sigma) = \sqrt{2(1 - \sqrt{F(\rho||\sigma)})} \quad (2.50)$$

Con todo, los casos particulares listados hasta aquí son los únicos que, por medio de la Ec. (2.40), derivaron en expresiones cerradas para medidas de distinguibilidad cuántica. Ahora bien, fuera de ésta categoría de cuantificadores de disimilitud, existen muchos otros y de radical relevancia. Una medida que merece especial atención es la **entropía relativa cuántica** (o la entropía relativa de von Neumann) $S(\rho||\sigma)$, que a su vez es una de las más utilizadas y forma parte de muchos cuantificadores de distintos tipos de información cuántica -entrelazamiento, información de von Neumann, discord, etc. En palabras de Vedral: “*The quantum relative entropy will be the most important quantity in classifying and quantifying quantum correlations*”⁵. Sin embargo, su expresión analítica no resulta de introducir la Ec. (2.11) en (2.40). No obstante, la consideramos una medida de distinguibilidad cuántica. La justificación es debida a Hiai y Petz [14], quienes probaron que

$$S(\rho||\sigma) = \text{Tr} [\rho (\log_2 \rho - \log_2 \sigma)] = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(\rho||\sigma) \quad (2.51)$$

⁵“La entropía relativa cuántica será la cantidad más importante para clasificar y cuantificar correlaciones cuánticas.”

donde

$$S_N(\rho||\sigma) = \max_{\mathcal{A}} \frac{1}{N} H_r(p^{\mathcal{A}}||q^{\mathcal{A}}) \quad (2.52)$$

con $p_i^{\mathcal{A}} = \text{Tr} [A_i \rho^N]$ y $q_i^{\mathcal{A}} = \text{Tr} [A_i \sigma^N]$, siendo $\rho^N = \rho \otimes \rho \cdots \otimes \rho$, $\sigma^N = \sigma \otimes \sigma \cdots \otimes \sigma$ el producto de N copias de los estados, respectivamente, y \mathcal{A} una POVM actuando sobre los mismos. Como señalamos anteriormente, la Ec. (2.52) no es exactamente (2.40) pero sí responde a una idea similar. Con todo, cabe destacar que la entropía relativa cuántica $S(\rho||\sigma)$ cumple con

$$P_N = e^{-NS(\rho||\sigma)} \quad (2.53)$$

siendo P_N la probabilidad de confundir los estados cuánticos ρ y σ , luego de haberse realizado N mediciones sobre σ (para $N \gg 1$).

Luego de haberse introducido el correlato cuántico de la entropía relativa $H_r(p||q)$, son directas las extensiones cuánticas de las divergencias derivadas de ésta. Así, las divergencias Jeffreys-Kullback-Leibler $J(\rho||\sigma)$ y Jensen-Shannon $JS(\rho||\sigma)$ resultan [113]:

$$J(\rho||\sigma) = S(\rho||\sigma) + S(\sigma||\rho) \quad (2.54)$$

$$JS(\rho||\sigma) = \frac{1}{2} [S(\rho||\alpha) + S(\sigma||\alpha)] \quad (2.55)$$

con $\alpha = \frac{\rho + \sigma}{2}$. Del mismo modo, la divergencia JSD generalizada cuántica es:

$$JS_{\pi}(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n) = \sum_i \pi_i S(\rho_i||\alpha_{\pi}) \quad (2.56)$$

siendo $\alpha_{\pi} = \sum_i \pi_i \rho_i$. La divergencia JSD cuántica atrajo la atención de la comunidad científica principalmente en los últimos años. En los capítulos siguientes veremos que esta cantidad es, para grupos de estados y probabilidades específicos, un cuantificador de correlaciones clásicas (técnicamente: clásicas-cuánticas) (Capítulo 3); y, además, la denominada cota Holevo (Capítulo 4).

Presentemos ahora el caso de la **distancia Hellinger cuántica**. Anteriormente vimos que la medida de distinguibilidad cuántica que surge de la distancia Hellinger estadística (2.10) está dada por la ecuación (2.49) y además que está estrechamente relacionada con la distancia Bures. Sin embargo, ésta última no es la única *extensión* cuántica basada en $H_e(p||q)$. La distancia Hellinger cuántica fue concebida como la extensión «natural» de (2.10) [66]:

$$\mathcal{D}_{He}(\rho||\sigma) = \sqrt{\text{Tr} [(\sqrt{\rho} - \sqrt{\sigma})^2]} = \sqrt{2 - 2A(\rho||\sigma)} \quad (2.57)$$

donde

$$A(\rho||\sigma) = \text{Tr} [\sqrt{\rho}\sqrt{\sigma}] \quad (2.58)$$

se denomina **afinidad**. En suma, $\mathcal{D}_{He}(\rho||\sigma)$ y $A(\rho||\sigma)$ son medidas análogas a la distancia Bures y la fidelidad, respectivamente, con propiedades informacionales similares pero más fáciles de calcular [66]. Además, en términos generales, para dos estados ρ y σ que conmutan, ambas extensiones coinciden con $H_r(p||q)$.

Abordamos ahora las medidas de distancia y/o distinguibilidad inducidas por normas de operadores. Uno de los conjuntos con mayor fama en información cuántica es la norma Schatten, o norma- p , definida por:

$$|A|_p = \{\text{Tr} [|A|^p]\}^{1/p} \quad (2.59)$$

con $|A| = \sqrt{A^\dagger A}$ y $p \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Por otro lado, las normas dadas por (2.59) tienen muchas propiedades notables, y han sido ampliamente estudiadas [11]. Uno de los resultados más importantes es una generalización de la desigualdad de Cauchy-Schwartz, dada por:

Teorema

Sean $p, q \in [1, \infty] \subset \mathbb{R}$, tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y $A, B \in B(\mathcal{H})$, entonces

$$|\langle A, B \rangle| = |\text{Tr}\{A^\dagger, B\}| \leq |A|_p |B|_q \quad (2.60)$$

El resultado anterior se conoce como la desigualdad de Hölder.

Las distancias inducidas por la norma Schatten están definidas como

$$\mathcal{D}_p(\rho||\sigma) = |\rho - \sigma|_p \quad (2.61)$$

y las denominamos **distancias Schatten**. Cabe destacar dos casos particulares: para $p = 1$ tenemos la distancia traza (o distancia de Kolmogorov) y para $p = 2$ la **distancia Hilbert-Schmidt** $\mathcal{D}_{HS}(\rho||\sigma)$. Ésta última cantidad está basada en la norma de operadores Hilbert-Schmidt (HS):

$$|A|_2 = \sqrt{\text{Tr}[A^\dagger A]} \quad (2.62)$$

con $A \in B(\mathcal{H})$. Así, la medida de distancia en cuestión es

$$\mathcal{D}_{HS}(\rho||\sigma) = |\rho - \sigma|_2 = \sqrt{\text{Tr}[(\rho - \sigma)^2]} \quad (2.63)$$

Si los operadores de estado ρ y σ conmutan entonces $\mathcal{D}_{HS}(\rho||\sigma)$ coincide con la distancia euclídea (2.29). No obstante, esta medida no tiene un asidero operacional⁶ como muchos de los casos considerados anteriormente. Más aún, no es una cantidad contractiva; algo que en ocasiones es básico para el análisis de la información concerniente a los sistemas cuánticos. En pocas palabras, ésta medida no debería ser utilizada como cuantificador de distinguibilidad. A pesar de ello, $\mathcal{D}_{HS}(\rho||\sigma)$ puede ser útil para calcular y acotar la distancia traza [11]. También, por la extrema facilidad con que se calcula (en el sentido de que no involucra por ejemplo siquiera una diagonalización de ningún operador), puede servir para dar una “primer idea” de distinguibilidad cuando ciertos cálculos se tornan sumamente complicados. Por otro lado, una cualidad destacable del conjunto de las distancias Schatten, dadas por (2.61), es que algunas pueden tener una interpretación operacional en términos de mediciones cuánticas, como es el caso de la distancia traza, o pueden no tenerlo, como la distancia HS.

Con respecto a las propiedades, listadas al comienzo de las secciones 2.1 y 2.3, que cada medida de distinguibilidad y/o distancia satisface, presentamos el Cuadro 2.1. Por otro lado, como todas las cantidades que hemos considerado cumplen la identidad de indiscernibles (Prop. Pd.b) y son no negativas (Prop. Pd.a), no hemos incluido éstas en la tabla en cuestión.

Expresiones para Qubits

Veamos cuáles son las expresiones analíticas de las principales medidas de distinguibilidad, y de los coeficientes que las definen, para sistemas representados por espacios de Hilbert de dimensión 2. A tal fin, supongamos que ρ y σ están asociados a los vectores

⁶tampoco informacional, es decir, no es el análogo «natural» de una noción de distinguibilidad entre distribuciones, como por ejemplo la distancia Hellinger cuántica

Dist. y Propiedades	Pd.c	Pd.d	Pd.g	Pd.e	Pd.f	Pd.h
Dist. Traza Ec. (2.44)	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Dist. Ángulo Ec. (2.47)	✓	✓	✓	✓	✓	✗
Dist. Bures Ec. (2.50)	✓	✓	✓	✓	✓	◆
Entrop. Relativa Ec. (2.51)	✗	✗	✓	✓	✓	✓
JSD cuántica Ec. (2.55)	✓	✗	✓	✓	✓	✓
Dist. Hellinger Ec. (2.57)	✓	✓	✓	✓	✓	◆
Dist. HS Ec. (2.63)	✓	✓	✗	✓	✗	✓

Cuadro 2.1: Principales propiedades de las medidas de distinguibilidad. Hemos empleado el símbolo ◆ para puntualizar que la distancia en cuestión *al cuadrado* satisface la propiedad correspondiente [11, 18, 56-58, 66, 114]

de Bloch $\vec{r}_1 \in \mathbb{R}^3$ y $\vec{r}_2 \in \mathbb{R}^3$, respectivamente, (ver Ec. (1.26)):

$$\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \vec{r}_1 \cdot \vec{\sigma}) \quad (2.64)$$

$$\sigma = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \vec{r}_2 \cdot \vec{\sigma}) \quad (2.65)$$

Teniendo en cuenta lo establecido anteriormente, las distancias traza y Hilbert-Schmidt resultan (a menos de una constante multiplicativa) iguales para los estados en cuestión:

$$\mathcal{D}_{HS}(\rho||\sigma) = \sqrt{2}K(\rho||\sigma) = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \quad (2.66)$$

En cuanto a la distancia Bures, podemos calcular la fidelidad entre ρ y σ utilizando la fórmula:

$$F(\rho||\sigma) = \text{Tr}[\rho\sigma] + 2\sqrt{\det\rho\det\sigma} \quad (2.67)$$

Similar es el caso de la distancia Hellinger, definida por la afinidad, cuya expresión analítica es:

$$A(\rho||\sigma) = \frac{(1 + \sqrt{1 - |\vec{r}_1|^2})(1 + \sqrt{1 - |\vec{r}_2|^2}) + \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{(\sqrt{1 + |\vec{r}_1|} + \sqrt{1 - |\vec{r}_1|})(\sqrt{1 + |\vec{r}_2|} + \sqrt{1 - |\vec{r}_2|})} \quad (2.68)$$

La divergencia Jensen-Shannon cuántica, y también cualquier otra divergencia que dependa de la entropía relativa, se pueden calcular por medio de:

$$S(\rho) = -\text{Tr}[\rho \log_2 \rho] = 1 - \frac{1}{2} \log_2(1 - |\vec{r}_1|) - \frac{|\vec{r}_1|^2}{2} \log_2\left(\frac{1 + |\vec{r}_1|}{1 - |\vec{r}_1|}\right) \quad (2.69)$$

No es casual que finalicemos la sección de *Distinguibilidad* con la cantidad anterior, denominada **entropía de von Neumann**.

Algunas propiedades de la entropía de von Neumann

$S(\cdot)$ es el análogo cuántico de la entropía entre dos VA, ver Ec. (1.1.1), y una de las piedras angulares de la información cuántica, cuya destacada aparición en la misma es en el área de correlaciones cuánticas que involucra, como veremos en el Capítulo siguiente, dos cuantificadores denominados *entrelazamiento* y *discordancia cuántica*.

Las principales características de este funcional son:

- $S(\rho) = 0 \iff \rho$ es un estado puro,
- $S(\rho)$ es máxima e igual a $\log_2 n$ ($n = \dim \mathcal{H}$) para el estado máximamente mixto $\rho_{mm} = \frac{1}{n} \mathbb{1}$,
- $S(\rho) = S(U\rho U^\dagger)$, U una matriz unitaria $n \times n$,
- $S(\rho)$ es cóncava, $S(\sum_i p_i \rho_i) \geq \sum_i p_i S(\rho_i)$,
- $S(\rho)$ es aditiva: $S(\rho_A \otimes \rho_B) = S(\rho_A) + S(\rho_B)$,
- $S(\rho)$ es subaditiva, es decir, $S(\rho) \leq S(\rho_A) + S(\rho_B)$ con $\rho_A = \text{Tr}_B[\rho]$ y $\rho_B = \text{Tr}_A[\rho]$

Resumen Luego de haber visto los principales modos de distinguir distribuciones de probabilidad, en esta sección extendimos los conceptos de distinguibilidad al caso cuántico. Así, primero revisamos los criterios necesarios para que una medida particular conduzca a una de disimilitud adecuada entre estados cuánticos. Luego, definimos el concepto de medida de distinguibilidad -para el caso cuántico-, utilizando cuantificadores de distancia en el espacio de las distribuciones de probabilidad. Seguidamente, presentamos los casos particulares más importantes para nuestro trabajo, sus expresiones analíticas para el caso de estados en dimensión dos y una tabla con las principales propiedades de las medidas de distinguibilidad más conocidas.

Correlaciones

En este capítulo consideraremos dos tipos de correlaciones: aquellas entre variables aleatorias (Sec. 3.1); y, en segundo lugar, correlaciones entre subsistemas cuánticos (Sec. 3.2). La estructura que adoptamos es exactamente la de los dos capítulos anteriores, en el sentido de que primeramente tratamos los conceptos de la teoría de probabilidad y estadística clásicas, para luego introducir los de la información cuántica -en el capítulo 1 definimos distribuciones de probabilidad y *luego* estados cuánticos; lo mismo en el capítulo 2, donde introdujimos medidas de distinguibilidad entre distribuciones y después entre estados cuánticos.

El punto de contacto entre la información clásica y la cuántica está en la definición intrínseca de «observable» (magnitud física) como una variable aleatoria. Veamos ahora algunos preliminares básicos de la teoría estadística [21]. Sea X una variable aleatoria discreta real cuyos posibles valores son $\{x_i\}_{i=1}^n$, asociados cada uno a una distribución de probabilidad $p = \{p_i\}_{i=1}^n$.

Definición

El valor medio de X (o valor esperado) está dado por

$$\langle X \rangle = \sum_i p_i x_i \quad (3.1)$$

Siempre trabajaremos con variables aleatorias cuya media está definida y es un número real, es decir, no diverge.

Otro funcional que caracteriza el comportamiento de X es qué tan *dispersos* (o variados) son los resultados de los experimentos $X = x_i$. Una medida de lo anterior es la siguiente.

Definición

La varianza de X se define como el valor medio de la variable $(X - \langle X \rangle)^2$:

$$\text{Var}(X) = \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 \quad (3.2)$$

Un interesante resultado derivado de la varianza es la desigualdad de Chebyshev:

Teorema

Sea $P(\cdot)$ una medida de probabilidad bien definida (ver Cap. 1) tenemos que

$$P(|X - \langle X \rangle| > t) \leq \frac{\text{Var}(X)}{t^2} \quad (3.3)$$

con $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ y $P(|X - \langle X \rangle| > t)$ la probabilidad de obtener $|X - \langle X \rangle| > t$ en un experimento.

3.1. Correlaciones entre variables aleatorias

Una vez definidas la varianza y el valor medio de una variable aleatoria, estudiemos una medida de asociación entre VA denominada **correlación** definida en términos de la **covariancia**. En consecuencia, consideremos ahora otra VA discreta Y (además de X), con resultados $\{y_j\}_{j=1}^n$ asociados a la distribución $q = \{q_j\}_{j=1}^n$.

Definición

La covariancia entre X e Y está dada por

$$\text{Cov}(X, Y) = \langle (X - \langle X \rangle)(Y - \langle Y \rangle) \rangle \quad (3.4)$$

Podemos también reescribir la cantidad anterior como:

$$\text{Cov}(X, Y) = \langle XY \rangle - \langle X \rangle \langle Y \rangle \quad (3.5)$$

De esta última ecuación deducimos que si X es independiente de Y , entonces $\text{Cov}(X, Y) = 0$ dado que $\langle XY \rangle = \langle X \rangle \langle Y \rangle$. Cabe destacar que la *vuelta* de la afirmación anterior no tiene por qué ser cierta, es decir, podemos obtener $\text{Cov}(XY) = 0$ y las variables no ser independientes, como sería el caso de $\langle XY \rangle = \langle X \rangle \langle Y \rangle = 0$. Otro comportamiento notable de la medida es que su positividad implica que cuando X tiende a ser más grande que su valor medio, Y también, mientras que la negatividad de la covariancia indica que si una tiende a ser mayor que su valor medio, entonces la otra tiende a ser menor. Teniendo en cuenta las propiedades de la covariancia, podemos definir un coeficiente de correlación entre las variables X e Y :

Definición

Si X e Y son dos VA conjuntamente distribuidas, con varianzas asociadas no nulas, y una covariancia finita, entonces la correlación entre X e Y está dada por

$$\text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \text{Var}(Y)}} \quad (3.6)$$

Luego, un resultado importante sobre el comportamiento de la medida $\text{Corr}(\cdot)$ es:

Teorema

Sean X e Y dos VA tales que la correlación (3.6) esté bien definida, entonces

$$-1 \leq \text{Corr}(X, Y) \leq 1 \quad (3.7)$$

Más aún, $\text{Corr}(X, Y) = \pm 1$ sí y sólo sí existen constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $Y = a + bX$.

Consideremos ahora un concepto sumamente relacionado a la correlación previamente definida por la Ec. (3.6).

Definición

Sean X y Y dos variables aleatorias discretas con probabilidad conjunta $P = \{P_{ij}\}$, probabilidades marginales $p = \{p_i\}$ y $q = \{q_j\}$, respectivamente. La **información mutua** $I(X, Y)$ es la entropía relativa entre las distribuciones P y $p \times q$:

$$I(X, Y) = \sum_{ij} P_{ij} \log_2 \frac{P_{ij}}{p_i q_j} = H_r(P || p \times q) \quad (3.8)$$

La información mutua es una medida de la cantidad de información que una variable aleatoria contiene sobre la otra. Asimismo, es la reducción de la incerteza de una debido al conocimiento de la otra [20]. Así, vemos que $I(X, Y)$ es también una medida del grado de correlación entre las variables aleatorias X e Y . Por otro lado, es importante notar que la Ec. (3.8) se puede reescribir en términos de las entropías definidas en la Sec. 1.1.1:

$$I(X, Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X) = \quad (3.9)$$

$$= H(Y) + H(X) - H(X, Y) \quad (3.10)$$

3.1.1. Matriz \mathbb{T} y la forma de fano

En cuanto al término «correlaciones», hasta aquí definimos los conceptos de *covarianza*, *correlación* e *información mutua* entre dos variables aleatorias X e Y . Un caso ejemplar donde aparecen de manera natural «correlaciones» entre variables aleatorias lo encontramos en la Sec. 1.2.2 donde escribimos algunos estados de sistemas cuánticos bipartitos frecuentemente utilizados en el área de información cuántica. En particular, vimos que un estado ρ de un sistema conformado por dos partes A y B asociadas a un espacio de Hilbert de dimensión dos (cada una), siempre se puede descomponer en función de los estados marginales ρ_A , ρ_B , y los elementos T_{ij} , según la *forma de Fano* dada por la Ec. (1.50),

$$\rho = \rho_A \otimes \rho_B + \frac{1}{4} \sum_{ij} T_{ij} \sigma_i^A \otimes \sigma_j^B$$

siendo T_{ij} -ver Ec. (1.51)-:

$$T_{ij} = \langle \sigma_i^A \otimes \sigma_j^B \rangle_\rho - \langle \sigma_i^A \otimes \mathbb{1} \rangle_\rho \langle \mathbb{1} \otimes \sigma_j^B \rangle_\rho$$

Podemos ahora darle una interpretación a estos elementos. T_{ij} es la *covarianza* entre los observables (variables aleatorias) \mathcal{S}_i^A (magnitud física asociada a σ_i^A) y \mathcal{S}_j^B (magnitud física asociada a σ_j^B). Utilizando las propiedades de la *traza* se puede probar que la *correlación* entre \mathcal{S}_i^A y \mathcal{S}_j^B resulta

$$C_{ij} = \frac{T_{ij}}{\sqrt{\text{Var}(\mathcal{S}_i^A) \text{Var}(\mathcal{S}_j^B)}} \quad (3.11)$$

donde $\text{Var}(\mathcal{S}_k^X) = \langle (\sigma_k^X)^2 \rangle - \langle \sigma_k^X \rangle = \text{Tr}[\rho_X (\sigma_k^X)^2] - \text{Tr}[\rho_X \sigma_k^X]$ con $k \in \{i, j\}$ y $X \in \{A, B\}$. Vemos entonces que todo estado bipartito, sobre un espacio de Hilbert de dimensión cuatro, queda enteramente definido por dos conceptos clásicos. El de *covarianza* y el de *valor medio* de una variable aleatoria. Este último entra en juego en la definición de los estados marginales, concretamente porque si $\rho_X = \sum_{i=0} \alpha_i^X \sigma_i^X$ (ver Ec. (1.26)), con $\sigma_0^X = \mathbb{1}$ y $\alpha_0^X = \frac{1}{2}$, entonces $\alpha_i^X = \frac{1}{2} \langle \sigma_i^X \rangle$.

Con todo, más allá de que los elementos T_{ij} son estrictamente covarianzas, la matriz \mathbb{T} formada por éstos se denomina *matriz de correlaciones*.

Digresión *Eliminando parámetros.* Supongamos que contamos con una medida, o propiedad, invariante ante transformaciones unitarias locales de la forma $U = U_A \otimes U_B$, y que, además, nos interesa evaluarla en un conjunto de estados como el dado por la forma de Fano, Ec. (1.50). ¿Podemos, utilizando transformaciones unitarias locales, reducir la cantidad de elementos de \mathbb{T} no nulos? La respuesta es afirmativa [47, 65]. Veamos de qué modo. Consideremos la matriz:

$$\chi = \sum_{ij} W_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j \quad (3.12)$$

Por el teorema de descomposición en valores singulares, la matriz W con elementos $[W]_{ij} = W_{ij}$ siempre se puede diagonalizar utilizando dos matrices reales ortogonales -grupo $O(3)$ -,

$$W = O^a \text{diag}\{c_1, c_2, c_3\} O^b \quad (3.13)$$

Asimismo, como vimos en la Sec. 1.2.2, las matrices unitarias $U(2)$ actuando sobre operadores en $B(\mathcal{H})$, con $\dim \mathcal{H} = 2$, se corresponden con el grupo $O(3)$ actuando sobre matrices reales 3×3 (es decir, sobre las coordenadas). En consecuencia, sean U y V los unitarios correspondientes a O^a y O^b , dados por

$$U\sigma_j U^\dagger = \sum_{m=1}^3 O_{jm}^a \sigma_m \quad (3.14)$$

$$V\sigma_k V^\dagger = \sum_{n=1}^3 O_{kn}^b \sigma_n \quad (3.15)$$

tenemos que

$$U \otimes V \left(\sum_{ij} W_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j \right) U^\dagger \otimes V^\dagger = \sum_{m=1}^3 c_m \sigma_m \otimes \sigma_m \quad (3.16)$$

Podemos entonces aplicar lo anterior a la diagonalización de \mathbb{T} en

$$\rho = \rho_A \otimes \rho_B + \frac{1}{4} \sum_{ij} T_{ij} \sigma_i^A \otimes \sigma_j^B \quad (3.17)$$

definiendo U y V , como en (3.14) y (3.15), tales que

$$U \otimes V \left(\sum_{ij} T_{ij} \sigma_i^A \otimes \sigma_j^B \right) U^\dagger \otimes V^\dagger = \sum_{m=1}^3 t_m \sigma_m^A \otimes \sigma_m^B \quad (3.18)$$

con $T = O^a \text{diag}\{t_1, t_2, t_3\} O^b$. Luego,

$$\tilde{\rho} = U \otimes V \rho U^\dagger \otimes V^\dagger = \tilde{\rho}_A \otimes \tilde{\rho}_B + \sum_i t_i \sigma_i^A \otimes \sigma_i^B \quad (3.19)$$

con $\tilde{\rho}_A = U \rho_A U^\dagger$ y $\tilde{\rho}_B = V \rho_B V^\dagger$. De este modo, $\tilde{\rho}$ es una matriz unitariamente equivalente (según unitarios *locales*) a ρ , y su matriz $\tilde{\mathbb{T}}$ es diagonal:

$$\tilde{\mathbb{T}} = \text{diag}\{t_1, t_2, t_3\}$$

Dentro de este esquema, hay un caso importante que puntualizar. El de los estados BD ρ^{BD} , ver Ec. (1.45) en la Sec. 1.2.2, donde

$$\rho_A = \rho_B = \frac{1}{2} \mathbb{1}$$

$$T_{ij} = c_i \delta_{ij}$$

siendo δ_{ij} la delta de Kronecker. Teniendo en cuenta las igualdades anteriores, las varianzas resultan

$$\text{Var}(\mathcal{S}_k^X) = 1 \quad (3.20)$$

entonces los elementos c_i son las «correlaciones» entre las variables \mathcal{S}_i^A y \mathcal{S}_i^B . Teniendo en cuenta la **Digresión** anterior, la «clase» de los estados de Bell es una no tan particular dado que la única pérdida de generalidad es tomar los estados marginales como $\frac{1}{2} \mathbb{1}$.

Resumen Vimos las nociones de valor medio, varianza, covarianza, correlación e información mutua para el caso de variables aleatorias. Una vez establecidos los conceptos anteriores, revisamos la interpretación de los elementos T_{ij} presentes en la forma de Fano incluida en el Cap. 1.

3.2. Correlaciones entre subsistemas cuánticos

Veamos ahora cómo caracterizar las correlaciones existentes en estados de sistemas cuánticos bipartitos. Sean A y B dos subsistemas cuánticos que conjuntamente forman el sistema $A + B$, que representaremos con el espacio de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Una medida estándar de correlaciones entre los subsistemas A y B está dada por la **información mutua cuántica** o *correlación de información* (según el mismísimo A. Holevo [77, 115]):

$$\mathcal{I}(\rho) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho) \quad (3.21)$$

con $S(\cdot)$ la entropía de von Neumann, ver Ec. (2.69), y $\rho_A = \text{Tr}_B[\rho]$, $\rho_B = \text{Tr}_A[\rho]$. La cantidad $\mathcal{I}(\rho)$ es la extensión a *sistemas cuánticos* de la información mutua, Ec. (3.8), entre variables aleatorias. A su vez, la positividad de la medida se debe a la propiedad de subaditividad de la entropía $S(\rho)$ [14].

Luego de haber definido la información mutua cuántica, estamos en posición de caracterizar estados bipartitos según sus correlaciones. Identificaremos tres conjuntos [27, 29]. Los **estados producto** son aquellos que no cuentan con correlaciones de ningún tipo y se pueden escribir como

$$\rho_p = \alpha \otimes \beta \quad (3.22)$$

con $\alpha \in B(\mathcal{H}_A)$ y $\beta \in B(\mathcal{H}_B)$. Denotemos al conjunto de los mismos como \mathcal{PS} . Adicionalmente, dado cualquier estado ρ (con o sin correlaciones entre las partes), el producto tensorial de sus estados marginales es el estado *no correlacionado* que surge de éste: $\rho_A \otimes \rho_B$. Una pregunta que puede surgir entonces es ¿Cuánta *información* perdemos al tomar las trazas parciales y construir el estado $\rho_A \otimes \rho_B$? Podemos tener una medida de tal información tomando la entropía relativa cuántica entre ρ y $\rho_A \otimes \rho_B$: $S(\rho || \rho_A \otimes \rho_B)$, ver Ec. (2.51). Es un hecho notable que la cantidad anterior coincide con la información mutua cuántica:

$$\mathcal{I}(\rho) = S(\rho || \rho_A \otimes \rho_B) \quad (3.23)$$

Por otro lado, de esta última ecuación vemos fácilmente que si un estado coincide con sus marginales (i.e., es de la forma (3.22)) entonces $\mathcal{I}(\rho_p) = 0$, lo que es esperable y necesario que ocurra debido a la interpretación con que $\mathcal{I}(\cdot)$ cuenta.

Veamos ahora estados dotados de correlaciones entre subsistemas pero contruidos de una forma específica. Supongamos que contamos con *dos* variables aleatorias X e Y que producen $n \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{N}$ símbolos $\{x_i\}_{i=1}^n$ y $\{y_j\}_{j=1}^m$, respectivamente. Además, consideremos que la probabilidad $P(X = x_i \wedge Y = y_j) = p_{ij}$ es la probabilidad conjunta de ambas variables -con $P(\cdot)$ una medida de probabilidad bien definida, ver Sec. 1.1. Representemos los valores de X e Y utilizando estados del sistema cuántico $A + B$. En consecuencia, asociemos los resultado $X = x_i$ con los elementos $|i\rangle_A$ de una base del espacio de Hilbert \mathcal{H}_A . Lo mismo para los resultados de la variable Y con una base $|j\rangle_B$ de \mathcal{H}_B :

$$X = x_i \rightarrow M_i^A = |i\rangle_A \langle i_A| \quad (3.24)$$

$$Y = y_j \rightarrow M_j^B = |j\rangle_B \langle j_B| \quad (3.25)$$

Si se desconocen los resultados de las variables, entonces el estado global del sistema $A + B$ es

$$\rho_{cc} = \sum_{ij} p_{ij} M_i^A \otimes M_j^B \quad (3.26)$$

Luego, las probabilidades marginales $p_i = \sum_j p_{ij}$ y $q_j = \sum_i p_{ij}$ nos brindan toda la información de los estados de A y B , respectivamente, mientras que el comportamiento aleatorio de las variables X e Y está regido por la probabilidad conjunta p_{ij} . Más aún, resulta $\mathcal{I}(\rho_{cc}) = I(X, Y)$, con $I(X, Y)$ la información de von Neumann de las variables X e Y , ver Ec. (3.8). En conclusión, no es necesario en este caso adoptar el formalismo matricial de la mecánica cuántica para describir al sistema en cuestión. Así, ρ_{cc} -Ec. (3.26)- se denomina **estado clásico** o *estado clásico-clásico*, y sus correlaciones reciben el mismo nombre. Por otro lado, simbolizamos el conjunto de los mismos con \mathcal{CCS} .

Ahora bien, consideremos una situación algo más compleja. Supongamos $X = x_i$ (con probabilidad p_i) correlacionado como en el caso anterior, es decir, con un elemento de una base del espacio \mathcal{H}_A , y también con la preparación de un estado ρ_B^i en el subsistema B . O sea:

$$X = x_i \rightarrow M_i^A \text{ (en } A) \wedge \rho_B^i \text{ (en } B) \quad (3.27)$$

Entonces,

$$\rho_i = M_i^A \otimes \rho_B^i \quad (3.28)$$

representa el estado global $A + B$ cuando $X = x_i$. Si por el contrario desconocemos el resultado de la variable X , el estado de $A + B$ es

$$\rho_c = \sum_{i=1}^n p_i M_i^A \otimes \rho_B^i \quad (3.29)$$

Luego, el comportamiento del sistema A , por construcción, está completamente determinado por la distribución de probabilidad p . En un experimento, el resultado $X = x_i$, con probabilidad p_i , determina que A está en un estado $M_i^A = |i_A\rangle \langle i_A|$ puro y, además, un *autovector* del observable definido por la base¹ $\{|i_A\rangle\}$ lo que implica que los valores de todos las magnitudes físicas de A tienen un comportamiento aleatorio descrito completamente por la distribución de probabilidad² $p = \{p_i\}$.

Sin embargo, no ocurre lo mismo con el subsistema B . Si tomamos un observable \mathcal{B} , cuyo operador autoadjunto O_B tiene autovectores $\{B_i\}$, entonces la probabilidad de obtener el resultado k -ésimo \hat{p}_k , en una medición de \mathcal{B} , y el valor medio $\langle O_B \rangle$ están dados por

$$\hat{p}_k = \text{Tr} [\mathbb{1} \otimes B_k \rho] = \sum_i p_i \text{Tr} [B_k \rho_B^i] \quad (3.30)$$

$$\langle O_B \rangle = \text{Tr} [O_B \rho] = \sum_i p_i \text{Tr} [O_B \rho_B^i] \quad (3.31)$$

¹En la Sec. 1.2.4 notamos la correspondencia entre operadores autoadjuntos (que representan magnitudes físicas) y bases.

²Para ver lo anterior, tomamos un observable \mathcal{A} , cuyo operador autoadjunto tiene autovectores $\{A_i\}$, relacionados a los elementos $\{M_i\}$ por un unitario U_A :

$$\{A_i = U M_i U^\dagger\}$$

Así, la probabilidad de obtener el i -ésimo resultado asociado a A_i , en una medición de \mathcal{A} , es

$$q_i = \text{Tr} [A_i \otimes \mathbb{1} \rho] = \sum_j p_j \text{Tr} [U_A M_i U_A^\dagger M_j]$$

completamente determinado por $\{p_j\}$

Así, vemos que el comportamiento de los observables del subsistema B no se puede describir completamente con un vector estadístico (como en (3.26)) puesto que está regido por el estado «cuántico» $\rho_B = \sum_i p_i \rho_B^i$.

En resumen, ρ_c se denomina estado **clásico-cuántico** [67, 68, 116] (también, en ocasiones, “ A -clásico”). Referiremos al conjunto de los mismos como \mathcal{CS} . Asimismo, decimos que ρ_c tiene correlaciones de tipo *clásico-cuántico*, dadas por la correspondencia

$$|i_B\rangle \rightarrow \rho_B^i \quad (3.32)$$

Queda por realizar una generalización directa. Supongamos ahora que: si $X = x_i$ se prepara un estado ρ_A^i , en el subsistema A , mientras que en B , como en el caso anterior, se hace lo propio con ρ_B^i . El estado global, si se desconoce el resultado de la variable X , es:

$$\rho_s = \sum_i p_i \rho_A^i \otimes \rho_B^i \quad (3.33)$$

El conjunto de los estados de este tipo, denominado **separables** [27], que denotaremos por \mathcal{SS} , es uno muy importante dentro de la teoría de información cuántica y fueron considerados durante mucho tiempo estados «clásicamente correlacionados». En palabras de R. F. Werner (1989) [87]:

*“Since there are usually very different ways of preparing the same state W ; classical correlation does not mean that the state has actually been prepared in the manner described, but only that its statistical properties can be reproduced by a classical mechanism. The terminology “classically correlated” is further justified by the observation that in classical probability theory all states have this property. States in probability theory are given by probability measures, and the state of a composite system is given by a probability measure on a product space. Like every probability measure this can be represented as a limit of convex combinations of measures concentrated on a single point. And since the point measures on a product space are product measures, we conclude that any probability measure on a product space can be represented as a limit of convex combinations of product measures, i.e., is classically correlated in the above sense.”*³

Después del año 2001 aproximadamente, luego de nuevas consideraciones en el área de la información cuántica [39, 40], los estados separables dejaron de ser referidos como «correlacionados clásicamente», para ser catalogados como estados **cuánticos-cuánticos**⁴ abandonando la idea de que éstos sólo cuentan con correlaciones de tipo clásico. La justificación de Werner se resume en que los estados en teoría de probabilidades clásica se pueden describir completamente utilizando distribuciones de probabilidad, lo que es correcto también para el caso de los estados ρ_s (están determinados por las probabilidades p_i). La diferencia está en que no podemos determinar el comportamiento de los observables físicos de los sistemas A y B utilizando *únicamente*⁵ distribuciones de probabilidad como ya hemos explicado al momento de introducir los estados clásicos-cuánticos \mathcal{CS} .

³Dado que existen muchas formas de preparar el mismo estado W ; correlación clásica no significa que el estado ha sido preparado de la forma descrita anteriormente, sino que sus propiedades estadísticas pueden ser reproducidas por un mecanismo clásico. La terminología “clásicamente correlacionados” se justifica enteramente observando que todos los estados en teoría de probabilidades clásica tienen ésta propiedad. Los estados en teoría de probabilidades están dados por medidas de probabilidad, y el estado de un sistema compuesto está definido por una medida de probabilidad en un espacio producto. Como toda medida de probabilidad de este tipo puede ser representada como un límite de combinaciones complejas de medidas concentradas en un único punto, y dado que las medidas puntuales en un espacio producto pueden ser representadas como un límite de combinaciones convexas de medidas producto, i.e., es correlacionado clásicamente en el sentido anterior.

⁴Cabe aclarar que el término *estados separables* es el más frecuentemente utilizado históricamente.

⁵Sí podríamos determinar el comportamiento de los observables utilizando sólo distribuciones de pro-

Deterministic quantum computation with a single qubit. Veamos un caso particular donde es posible utilizar los estados separables, Ec. (3.33), para realizar cálculos con una eficiencia **no clásica** [32, 35, 37].

El protocolo *deterministic quantum computation with a single qubit* (DQC1) consta de un sistema bipartito $A + B$, con A , denominado *qubit de control*, representado por un espacio de Hilbert de dimensión dos $\mathcal{H}_A \simeq \mathbb{C}^2$ y B por un espacio de dimensión 2^n :

$$\mathcal{H}_B \simeq \underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^2}_{n \text{ veces}}$$

El objetivo del modelo DQC1 es calcular la traza (normalizada) de una matriz unitaria U . Inicialmente, asumimos que el sistema está en el estado producto:

$$\rho_i = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \alpha\sigma_z) \otimes \sigma_n$$

siendo $\sigma_n = \frac{1}{2^n} \underbrace{\mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}}_{n \text{ veces}} = \frac{1^n}{2^n}$ el estado de B y $\alpha \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$. La primer operación

que realizamos es aplicar un *puerta* (también denominada *compuerta*) de Hadamard⁶ H , dada por

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

sobre el qubit de control. De este modo

$$\rho_i \rightarrow \rho_1 = H \otimes \mathbb{1} \rho_i H^\dagger \otimes \mathbb{1} = \left[\left(\frac{1-\alpha}{2} \right) \mathbb{1} + |+\rangle \langle +| \right] \otimes \sigma_n \quad (3.34)$$

La segunda operación consta de una transformación unitaria, dada por U , sobre el subsistema B si el estado del qubit de control es $|1\rangle$. Si, por el contrario, tenemos que el estado de este es $|0\rangle$, no se realiza ninguna operación. El mapa $S = |0\rangle \langle 0| \otimes \mathbb{1} + |1\rangle \langle 1| \otimes U$ representa la transformación condicional anterior. Nótese que U y σ_n , a priori, tienen que tener el mismo tamaño.

El estado final del sistema resulta

$$\rho_f = S \rho_1 S^\dagger = \frac{1}{2^{n+1}} \left(|0\rangle \langle 0| \otimes \mathbb{1}^n + \alpha |1\rangle \langle 0| \otimes U + \alpha |0\rangle \langle 1| \otimes U^\dagger + |1\rangle \langle 1| \otimes \mathbb{1} \right) \quad (3.35)$$

Como $|0\rangle \langle 1|$ -y $|1\rangle \langle 0|$ - no son matrices densidad, la expresión anterior para ρ_f no muestra a primera vista que este sea un estado separable. Para probar lo anterior, tomamos

$$U = \sum_i e^{i\phi_i} |e_i\rangle \langle e_i|$$

babilidad si admitimos la existencia de *variables ocultas*, pero este caso no quiere decir nada dado que existen estados netamente cuánticos, incluso con entrelazamiento no nulo, que admiten una descomposición en variables ocultas [87].

⁶Esta operación constituye una transformación unitaria sobre un único qubit. Transforma a los estados $\{|i\rangle\}$ de la base computacional según

$$\begin{aligned} |0\rangle &\rightarrow |+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \\ |1\rangle &\rightarrow |-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

con $\{|e_i\rangle\}$ la base de autovectores de U ($\phi_i \in \mathbb{R}$). Luego, podemos describir la Ec. (3.35) como

$$\rho_f = \frac{1}{2^n} \sum_j \rho_A^j \otimes |e_j\rangle \langle e_j| \quad (3.36)$$

$$\rho_A^j = \frac{\left(|\psi_j\rangle \langle \psi_j| + |\psi'_j\rangle \langle \psi'_j| \right)}{2}$$

siendo $|\psi_j\rangle = \cos \theta |0\rangle + e^{i\phi_j} \sin \theta |1\rangle$ y $|\psi'_j\rangle = \sin \theta |0\rangle + e^{i\phi_j} \cos \theta |1\rangle$ con $\sin 2\theta = \alpha$. Así, ρ_f toma la expresión dada por la Ec. (3.33) [117].

Ahora bien, volviendo a la Ec. (3.35) vemos que el estado marginal del qubit de control está dado por

$$\rho_A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\alpha}{2^n} \text{Tr}[U^\dagger] \\ \frac{\alpha}{2^n} \text{Tr}[U] & 1 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

De este modo, calculando los valores de expectación de los observables σ^x y σ^y del subsistema A podemos estimar la traza normalizada de la matriz U ,

$$\langle \sigma^x \rangle = \text{Tr}[\sigma^x \rho_A] = \frac{\alpha}{2^n} \text{Re}\{\text{Tr}[U]\} \quad (3.38)$$

$$\langle \sigma^y \rangle = \text{Tr}[\sigma^y \rho_A] = \frac{\alpha}{2^n} \text{Im}\{\text{Tr}[U]\} \quad (3.39)$$

La correlación

$$\rho_A^j \rightarrow |e_j\rangle \langle e_j| \quad (3.40)$$

definida por el estado ρ_f nos permite obtener, realizando mediciones sobre A , información de las operaciones realizadas sobre B (es decir, sobre la aplicación condicional del unitario U). Por otro lado, como señalamos anteriormente, no hay un algoritmo clásico que pueda realizar la tarea anterior de manera eficiente [35, 37, 118]. Este es uno de los motivos por los cuales la comunidad científica estudia las correlaciones entre subsistemas, ya sean de un estado cuántico aleatorio ρ como las de uno separable ρ_s . Veamos los distintos modos de cuantificarlas.

3.2.1. Correlaciones de tipo clásico-cuántico

Hemos entonces identificado tres conjuntos de estados denotados como \mathcal{PS} (producto), \mathcal{CCS} (clásicos-clásicos), \mathcal{CS} (clásicos-cuánticos) y \mathcal{SS} (separables)⁷. También, hemos señalado que las correlaciones entre los subsistemas A y B , en el estado dado por la Ec. (3.26), cuantificadas por la información de von Neumann, cumplen

$$\mathcal{I}(\rho_{cc}) = I(X, Y) \quad (3.41)$$

Es decir, las correlaciones entre A y B resultan iguales a las respectivas entre las variables X e Y , y están definidas completamente por la distribución de probabilidad conjunta $\{p_{ij}\}$ [27-29].

Ahora bien, dado un estado $\rho \in B_+^1(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$, ¿Cuál es el método por el cual podemos cuantificar las correlaciones clásicas-clásicas que este contiene? Ya hemos insinuado la respuesta en la sección anterior. Consideremos \mathcal{M}_A y \mathcal{M}_B dos observables con autovalores y autovectores dados por $\{a_i\} \subset \mathbb{R}$, $\{|i\rangle_A\} \subset \mathcal{H}_A$ y $\{b_i\} \subset \mathbb{R}$, $\{|i\rangle_B\} \subset \mathcal{H}_B$, de los sistemas

⁷Este conjuntos están ordenados según $\mathcal{PS} \subset \mathcal{CCS} \subset \mathcal{CS} \subset \mathcal{SS}$.

A y B , respectivamente. Las matrices densidad que surgen de estos autovalores (estados puros) son los proyectores ortogonales $\{M_i^x = |i\rangle_x \langle i|_x\}^\dagger$, con $x \in \{A, B\}$, y definen una medición von Neumann, ver Sec. 1.2.4. De este modo, el estado luego de medir localmente los observables \mathcal{M}_A y \mathcal{M}_B , sin observar el resultado, se puede escribir como

$$\rho^{\mathcal{M}} = \sum_{ij} p_{ij}^{\mathcal{M}} M_i^A \otimes M_j^B \quad (3.42)$$

con $p_{ij}^{\mathcal{M}} = \text{Tr} [\rho M_i^A \otimes M_j^B]$ y la información de von Neumann resulta

$$\mathcal{I}(\rho^{\mathcal{M}}) = I(\mathcal{M}_A, \mathcal{M}_B) \quad (3.43)$$

De este modo, para cuantificar las correlaciones entre los *subsistemas* A y B , tenemos que deshacernos de la dependencia de observables aleatorios como son \mathcal{M}_A y \mathcal{M}_B . Así, definimos una medida de las correlaciones clásicas-clásicas presentes en el estado ρ como el máximo de $\mathcal{I}(\rho^{\mathcal{M}})$ sobre todas las magnitudes física de A y B

$$\mathcal{J}_{cc}(\rho) = \max_{\mathcal{M}_A, \mathcal{M}_B} \{\mathcal{I}(\rho^{\mathcal{M}})\} \quad (3.44)$$

La maximización anterior es equivalente a tomar el máximo sobre todas las mediciones de von Neumann locales sobre los sistemas A y B .

Para cuantificar correlaciones *clásicas-cuánticas* utilizamos el mismo esquema [39, 40], midiendo un observable \mathcal{M}_A sobre el subsistema A . Ya hemos introducido este tipo de mediciones en la Sec. 1.2.4. Dado un estado bipartito cualquiera $\rho \in B_+^1(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$, el estado que resulta luego de la medición es, ver Ec. (1.99),

$$\rho^{\mathcal{M}_A} = \sum_i p_i M_i^A \otimes \rho_{B|i}^{\mathcal{M}_A} \quad (3.45)$$

con $\rho_{B|i}^{\mathcal{M}_A} = \frac{\text{Tr}_A[M_i^A \otimes \mathbb{1} \rho]}{p_i}$ y $p_i = \text{Tr} [M_i^A \otimes \mathbb{1} \rho]$. Este es un estado *clásico-cuántico* e implica una correlación (con probabilidad p_i):

$$|i\rangle_A \rightarrow \rho_{B|i}^{\mathcal{M}_A} \quad (3.46)$$

Una medida de las correlaciones de este tipo está dada por $I(\rho^{\mathcal{M}_A})$; consecuentemente, una medida de las correlaciones *clásicas-cuánticas* entre A y B presentes en el estado ρ es [39, 40]:

$$\mathcal{J}(\rho) = \max_{\mathcal{M}_A} \{I(\rho^{\mathcal{M}_A})\} \quad (3.47)$$

Sobre la computabilidad de $\mathcal{J}(\cdot)$. Para un QS general, el cálculo de \mathcal{J} implica una optimización sobre las mediciones \mathcal{M}_A , lo que dificulta obtener una expresión analítica cerrada. En particular, la maximización debe tomarse sobre un determinado conjunto de mediciones en el subsistema con A . Tal conjunto puede, por ejemplo, ser el de las mediciones de von Neumann *-proyectivas-* o el caso de las mediciones generalizadas POVM. Como se muestra en las Refs. [119, 120], el número de operadores que conforman la medición POVM no necesita ser mayor al cuadrado de la dimensión del sistema. Por lo tanto, para estados en $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, la medición óptima no tiene más de cuatro operadores [121]. Además, en el caso general, se argumentó que en $\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^m$, a lo sumo se requieren $m(m+1)$ elementos para la optimización [230], lo que implica que en $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, una POVM con tres elementos es suficiente. Es claro que para un QS bipartito arbitrario en una

dimensión cualquiera, el proceso de optimización sobre el conjunto de las mediciones proyectivas, o de las POVM, es generalmente difícil de realizar, tanto analítica como numéricamente. Más aún, Huang [46] mostró que el tiempo requerido para calcular \mathcal{J} crece exponencialmente con el aumento de la dimensión del espacio de Hilbert, lo que implica que el cálculo de QD es N_P -complete [18].

3.2.2. Correlaciones cuánticas

En términos generales, hemos introducido hasta aquí que un QS $\rho \in B_+^1(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$ puede implicar distintos tipos de correlaciones. Para cada uno de estos existe un gran número de medidas de correlaciones entre subsistemas bipartitos [27-29]. Una de las mejores formas de presentar tales cuantificadores es asociándolos con los conjuntos de estados \mathcal{PS} , \mathcal{CCS} , \mathcal{CS} y \mathcal{SS} . Ya hemos identificado a las correlaciones clásicas-clásicas y clásicas-cuánticas con los conjuntos \mathcal{CCS} y \mathcal{CS} . Veamos cómo, dado un estado arbitrario, podemos *cuantificar* los distintos tipos de correlaciones que este puede poseer. Adoptemos, en primer lugar, un enfoque geométrico [122].

A tal fin, sea $\mathcal{D}(\cdot||\cdot)$ una medida de distancia definida sobre el espacio $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, ver Sec. 2.3. Podemos definir medidas geométricas de correlaciones cuánticas como sigue [27, 56-58]:

$$D_g(\rho) = \min_{\chi \in \mathcal{CCS}} \mathcal{D}(\rho||\chi) = \mathcal{D}(\rho||\chi^o) \quad (\text{QCM}) \quad (3.48)$$

$$E_g(\rho) = \min_{\sigma \in \mathcal{SS}} \mathcal{D}(\rho||\sigma) = \mathcal{D}(\rho||\sigma^o) \quad (\text{EM}) \quad (3.49)$$

$$Q = \min_{\lambda \in \mathcal{CS}} \mathcal{D}(\sigma^o||\lambda) \quad (\text{QDM}) \quad (3.50)$$

$$C = \min_{\pi \in \mathcal{PS}} \mathcal{D}(\chi^o||\pi) \quad (\text{MGCC}) \quad (3.51)$$

donde D_g es una medida de correlaciones cuánticas (QCM) -por las siglas en inglés-, E_g de *entrelazamiento* (EM), Q cuantifica *disonancia cuántica* (QDM por las siglas de Quantum dissonance measure; y cuantifica correlaciones de tipo cuántico-cuántico) y C_g es una medida -geométrica- de correlaciones clásicas-cuánticas (MGCC).

Por otro lado, resumidamente, podemos generalizar el modo anterior de cuantificar correlaciones a cualquier *propiedad* de un estado cuántico (por ejemplo, *coherencia*):

$$C_a(\rho) = \min_{\alpha \in \Gamma} \mathcal{D}(\rho||\alpha) \quad (3.52)$$

donde Γ es el conjunto de los estados que no poseen tal propiedad; así $C_a(\rho)$ podría ser una *medida* de esta «propiedad» cuya grado queremos cuantificar. Luego, cabe la salvedad siguiente. Decimos *podría* puesto que en general se cuenta con ciertos requisitos -relativos a lo que queremos cuantificar- que deberían ser analizados. En el caso de correlaciones cuánticas, revisaremos las condiciones para una medida en la sección siguiente. Sin embargo, debemos puntualizar que la interpretación de $D_g(\rho)$ como medida específicamente de correlaciones cuánticas debe hacerse con precaución dado que ésta cantidad presenta algunos comportamiento peculiares [123-125].

Direccionalidad de las correlaciones cuánticas. Dadas dos variables aleatorias X e Y cuya distribución de probabilidad conjunta es $P = \{p_{ij}\}$. Es fácil de ver, utilizando la regla de Bayes, que

$$I(X, Y) = I(Y, X)$$

lo que implica que la variable X está correlacionada con Y del mismo modo que Y lo está con X . Esta propiedad de simetría, en el caso de las correlaciones **cuánticas** entre subsistemas cuánticos bipartitos $A + B$, es válida *únicamente* en el caso de estados *puros*. Sin embargo, los estados mixtos no presentan tal cualidad, permitiendo por ejemplo que A se encuentre «más» correlacionado con B , y viceversa. Esto tiene que ver con que ahora tenemos otra figura de mérito que determina las correlaciones cuánticas: la *cuantividad*. Volveremos a tratar este tema con mayor detalle al definir la *discordancia cuántica*. Sin embargo, cabe remarcar que una medida de correlaciones cuánticas tiene direccionalidad $A \rightarrow B$ si se anula en todo estado clásico-cuántico -Ec. (3.29). Todas las medidas de correlaciones cuánticas que consideramos en este trabajo tienen direccionalidad $A \rightarrow B$, salvo que se indique lo contrario.

Volviendo a las medidas (3.48)-(3.51), los casos particulares más importantes de medidas geométricas involucran la entropía relativa (2.51) [14], la divergencia Jensen-Shannon [113] (2.55), la distancia Bures (2.50) [56-58], Helliger (2.57) [56-58], Hilbert-Schmidt (2.63) y la traza (2.44) [126].

Como ya hemos señalado, en nuestro trabajo nos enfocamos principalmente en correlaciones más generales que el *entrelazamiento*, por lo cual obviaremos algunos resultados importantes sobre este último para centrarnos en la definición y caracterización de correlaciones más generales.

Verschränkung fue la palabra que E. Shchödinger utilizó por primera vez para referirse al denominado *entrelazamiento*, propiedad de los sistemas cuánticos, considerada durante mucho tiempo *el* rasgo distintivo de la mecánica cuántica.

Un estado *puro* -ver Sec. 1.2.2- de un sistema cuántico bipartito $A + B$ se denomina *entrelazado* si este no es factorizable, es decir, si no es un estado producto. El entrelazamiento es un tipo de correlación cuántica [27].

Además, es la única correlación cuántica posible en el caso de estados puros. Por otra parte, un estado *mixto* está *entrelazado* cuando este no se puede representar como una mixtura estadística de estados producto, i.e., cuando no se puede expresar como un estado separable, ver Sec. (1.2.2), (3.33).

Para estados puros, una forma de cuantificar *entanglement* es evaluando la entropía de von Neumann $S(\cdot)$ -(2.69)- en uno de los estados marginales:

$$E(\psi) = -\text{Tr} [\rho_A \log_2 \rho_A] = \text{Tr} [\rho_B \log_2 \rho_B] \quad (3.53)$$

resultando una medida simétrica ante el intercambio de los subsistemas A y B .

En el caso más general de estados mixtos, la medida más básica de este tipo de correlaciones es el *entrelazamiento de formación* [127, 128]. Podemos definirlo como sigue. Dada una matriz densidad ρ de un sistema bipartito $A + B$, consideremos todas las representaciones del mismo en mixturas de estados *puros*, como sigue:

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (3.54)$$

En consecuencia, el entrelazamiento de formación es

$$E(\rho) = \text{mín} \sum_i p_i E(\psi_i) \quad (3.55)$$

donde el mínimo se toma sobre todas las representaciones.

Al realizar el cálculo para el caso de A y B sistemas de dos niveles, surge una cantidad que caracteriza el comportamiento del entrelazamiento, denominada *conurrencia* C . Sea $\psi \in \mathcal{H}$ con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, un estado puro del sistema global $A + B$, tenemos que

$$E(\psi) = \mathcal{E}(C(\psi)) \quad (3.56)$$

con

$$C(\psi) = |\langle \psi | \phi \rangle| \quad (3.57)$$

$|\phi\rangle = \sigma_2 |\psi^*\rangle$, siendo $|\psi^*\rangle$ el complejo conjugado de $|\psi\rangle$, y

$$\mathcal{E}(C) = h\left(\frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2}\right) \quad (3.58)$$

$$h(x) = -x \log_2 x - (1 - x) \log_2(1 - x) \quad (3.59)$$

En caso de tener un estado mixto $\rho \in B_+^1(\mathcal{H})$, el entrelazamiento de formación resulta [128],

$$E(\rho) = \mathcal{E}(C(\rho)) \quad (3.60)$$

donde $C(\rho) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}$ siendo λ_i los autovalores de la matriz $R = \sqrt{\sqrt{\rho}\sigma\sqrt{\rho}}$ con $\sigma = \sigma_2 \otimes \sigma_2 \rho^* \sigma_2 \otimes \sigma_2$, y ρ^* el complejo conjugado de ρ .

La **discordancia cuántica** fue la primer cantidad propuesta como cuantificador de correlaciones de este tipo. Introducido en el año 2001, simultáneamente por L. Henderson, V. Vedral [40] y H. Ollivier, W. Zurek [39] (éstos últimos adoptaron el término), en forma separada, el QD está definido como

$$\mathcal{Q}(\rho) = \mathcal{I}(\rho) - \mathcal{J}(\rho) \quad (3.61)$$

donde $\mathcal{I}(\rho)$ es la información mutua cuántica (3.21) mientras que $\mathcal{J}(\rho)$ es la medida de correlaciones de tipo clásico-cuántico, introducida anteriormente (3.47). Dado que $\mathcal{I}(\rho)$ «captura» todas las correlaciones en el estado ρ y $\mathcal{J}(\rho)$ únicamente las de tipo clásico-cuántico, podemos asumir que $\mathcal{Q}(\rho)$ es una medida de correlaciones particularmente «cuánticas». Por otro lado, de la misma definición de la medida

$$\mathcal{Q}(\rho) = \mathcal{I}(\rho) - \max_{\mathcal{M}_A} \{I(\rho^{\mathcal{M}_A})\} = \mathcal{I}(\rho) - \mathcal{I}(\rho^{\mathcal{M}_A^o}) \quad (3.62)$$

vemos que el QD es el cambio -mínimo- en la información producto de la medición óptima \mathcal{M}_A^o ; es decir, el QD determina el cambio en la información mutua \mathcal{I} al afectar la *cuantidad* de uno de los subsistemas, en este caso A . También, de la (3.62) vemos que este es idénticamente nulo si $\rho \in \mathcal{CS}$, es decir, es un estado clásico-cuántico. Las propiedades de la medida serán revisadas más adelante, en las secciones 3.2.3 y 3.2.5. Quedan, sin embargo, dos cuestiones destacables. Por un lado, el QD se resume al *entrelazamiento de formación* (que también coincide con la medida geométrica $E_g(\cdot)$ -Ec. (3.49)- con la entropía relativa S como medida distancia) para el caso de estado puros, lo que sugiere el hecho de que tales estados no tienen correlaciones cuánticas de distinto tipo que el *entanglement*. Más aún, para todo estado puro, la cantidad de correlaciones clásicas-cuánticas, cuantificada por \mathcal{J} , es igual a cantidad de correlaciones cuánticas, dadas por \mathcal{Q} [129].

¿Mediciones proyectivas o POVM? Aunque predominantemente trataremos con el caso en el que las mediciones \mathcal{M}_A (o \mathcal{M}_B), por medio de las cuales obtenemos la medida \mathcal{J} , son *proyectivas*, como señalamos anteriormente, también han sido consideradas las mediciones generalizadas POVM, ver Sec. 1.2.4, ya presentes en uno de las primeras definiciones del discordancia cuántica [14]. En general, una definición del QD que utiliza el enfoque POVM para las mediciones sobre uno de los subsistemas, es útil para relacionar la medida con otras cantidades relevantes como son la Información accesible y la cota Holevo [20, 76]. Realizando una POVM, sin embargo, podemos «abrir» un sistema físico, por lo que debe usarse con precaución mientras que, este enfoque, provee de interpretaciones termodinámicas del QD [130-132]. Es remarcable que las mediciones óptimas son proyectivas para el caso de estados bipartitos de rango 2 [133], aunque puede existir estado conformados por dos sistemas de dos niveles, para los cuales la medición óptima no es proyectiva [133-136].

Por otro parte, en la sección 3.2 analizamos el protocolo DQC1 donde vimos cómo estimar la traza de una matriz unitaria, utilizando estados separables, y mediciones sobre un único sistema de dos niveles, denominado *qubit control*. También, señalamos que no existe un algoritmo clásico con una eficiencia comparable [32, 37]. La pregunta que surge es ¿cuál es la «fuente» de esta eficiencia no clásica?, i.e. ¿qué característica intrínsecamente cuántica tienen los estados involucrados tal que la eficiencia del protocolo no es comparable con los algoritmos clásicos? Miremos entonces más profundamente las correlaciones en el estado ρ_f dado por la Ec. (3.35). Ya hemos identificado a ρ_f con un estado separable por lo que el entrelazamiento es nulo (con respecto a la bipartición *qubit control*|*reservorio de n qubits*). Asimismo, en [37] aproximaron el QD para estados aleatorios (distribuidos según la medida de Haar), para $n \rightarrow \infty$, obteniendo:

$$\mathcal{Q}_{DQC1} = 2 - h\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) - \log_2\left(1 + \sqrt{1-\alpha^2}\right) - (1 - \sqrt{1-\alpha^2}) \log_2 e \quad (3.63)$$

siendo $h(\cdot)$ la entropía binaria de Shannon, dada por la Ec. (3.59)

Vemos entonces que el QD es, en general, no nulo en el estado ρ_f . En consecuencia, durante mucho tiempo se creyó que la «fuente» en cuestión eran las correlaciones cuantificadas por el QD. Sin embargo, existen muchos trabajos que sugieren otras posibilidades [53, 137-140], y el debate continua hasta hoy en día. Un ejemplo particular de por qué el QD *no* sería la fuente del protocolo DQC1 es que si tomamos una matriz unitaria $U = e^{i\phi}A$ tal que $A^2 = \mathbb{1}$, entonces la discordancia es idénticamente nula [53] y el modelo DQC1 conserva todas sus características.

Correlaciones cuánticas cuantificadas por la *no conmutatividad*

Aparte del QD, existen muchas otras formas de cuantificar correlaciones “no clásicas-cuánticas.” Algunas de éstas son el *Quantum Work Deficit* (QWD) [130-132], el *Quantum Deficit* [141] y la *Measurement Induced Non-locality* (MIN) [142]. Cabe mencionar que la lista de medidas de correlaciones cuánticas se extendió considerablemente en estos últimos dieciocho años. Podemos encontrar otras en los artículos [29, 143-149]. Una buena fuente de información sobre el panorama general de las medidas de correlaciones cuánticas es el *review*, del año 2016, de Gerardo Adesso, Thomas R. Bromley, Marco Cianciaruso [27] (quienes denominaron a su propio artículo como el ABC -nótese las iniciales de los apellidos- de las medidas de correlaciones cuánticas) donde incluyeron un resumen de los tipos, o clases, de cuantificadores que existen en la actualidad. Una característica común que se vislumbra en el artículo es que la mayoría de las medidas en cuestión involucran un

proceso de *optimización* (ya sea una minimización, o maximización) sobre un conjunto particular de operadores, o mapas. Asimismo -también en 2016- Yu Guo introduce un nuevo modo de cuantificar correlaciones cuánticas [62] cuya cualidad destacable es su facilidad con la que podemos calcularla, concretamente porque no implica optimización alguna. La medida en cuestión se denomina *Medida de no conmutatividad de discordancia cuántica* (NCMQD, por las siglas en inglés) $D_G(\cdot)$ y es una cantidad radical para nuestro trabajo.

La idea detrás de la NCMQD es, en primera instancia, dado un estado ρ bipartito, tomar la descomposición:

$$\rho = \sum_{ij} A_{ij} \otimes |i_B\rangle \langle j_B| \quad (3.64)$$

donde $\{|i_B\rangle\}$ es una BON del espacio \mathcal{H}_B y $A_{ij} = \text{Tr}_B [\mathbb{1} \otimes |j_B\rangle \langle i_B| \rho]$. Si ρ_c es tal que los bloques A_{ij} conmutan todos ellos entre sí, entonces existe una base $\{|i_A\rangle\}$ de \mathcal{H}_A que los diagonaliza. De esto modo,

$$A_{ij} = \sum_{\alpha} \Gamma_{ij}^{\alpha} |\alpha_A\rangle \langle \alpha_A| = \Gamma_{ij}^{\alpha} |\alpha_A\rangle \langle \alpha_A| \quad (3.65)$$

En la última igualdad utilizamos la convención de suma de índices repetidos. Por simplicidad, continuaremos empleándola en algunas de las ecuaciones que siguen. Luego, introduciendo la igualdad anterior en la Ec. (3.64) vemos que

$$\rho_c = \Gamma_{ij}^{\alpha} |\alpha_A\rangle \langle \alpha_A| \otimes |i_B\rangle \langle j_B| \quad (3.66)$$

que podemos expresar como

$$\rho_c = p^{\alpha} |\alpha_A\rangle \langle \alpha_A| \otimes \frac{\Gamma_{ij}^{\alpha}}{p^{\alpha}} |i_B\rangle \langle j_B| \quad (3.67)$$

La descomposición anterior implica que si ρ_c es tal que $[A_{ij}, A_{kl}] = 0$ para todo i, j, k, l , entonces este es un estado clásico-cuántico, ver Ec. (3.29), con discordancia cuántica idénticamente nula.

Además, si $\rho_c = p_{\alpha} |\alpha_A\rangle \langle \alpha_A| \otimes \rho_B^{\alpha} \in \mathcal{CS}$ los bloques A_{ij} son

$$A_{ij} = \text{Tr}_B [\mathbb{1} \otimes |j_B\rangle \langle i_B| \rho_c] = p_{\alpha} |\alpha_A\rangle \langle \alpha_A| \text{Tr} [|j_B\rangle \langle i_B| \rho_B^{\alpha}] = \quad (3.68)$$

$$= p_{\alpha} \langle i_B | \rho_B^{\alpha} | j_B \rangle |\alpha_A\rangle \langle \alpha_A| \quad (3.69)$$

Se sigue entonces que $[A_{ij}, A_{kl}] = 0$ para ρ_c . Con todo, hemos visto que

$$\mathcal{Q}(\rho) = 0 \iff [A_{ij}, A_{kl}] = 0 \quad (3.70)$$

con \mathcal{Q} el QD.

Las consideraciones anteriores motivan la definición de $D_G(\rho)$, como la cantidad de *no conmutación* de los bloques A_{ij} [62]. Así,

$$D_G(\rho) = \sum_{\Omega} N([A_{ij}, A_{kl}]) \quad (3.71)$$

con Ω el conjunto de todos los posibles pares sin importar el orden, y $N(\cdot)$ un norma de matrices. Y. Guo trabajó con la norma Hilbert-Schmidt $|\cdot|_2$, dada por la Ec. (2.62) y la norma traza, Ec. (2.59) con $p = 1$. En lo que sigue, consideraremos únicamente el caso

de la norma Hilbert-Schmidt por implicar resultados similares y ser más fácil de calcular. En consecuencia, de ahora en más, la NCMQD queda definida por

$$D_G(\rho) = \sum_{\Omega} |[A_{ij}, A_{kl}]|_2 \quad (3.72)$$

El problema de la NCMQD. Analicemos ahora más profundamente la definición de la medida. El estudio que sigue fue sintetizado en el trabajo Art. II, [2]. La NCMQD se basa en tomar la descomposición (3.64), utilizando una base $\{|i_B\rangle\}$ particular del espacio \mathcal{H}_B . Si fijamos esta base, la medida cumple con todas los requerimientos necesarios para cuantificar correlaciones de tipo cuántico [62]. Sin embargo, las correlaciones en un estado ρ son independientes de cómo lo representemos. Esto implica que la NCMQD debería ser independiente de la elección de la base $\{|i_B\rangle\}$. Así, el problema de la medida en cuestión es justamente el anterior: La medida depende de la representación que escojamos para ρ . Para ejemplificar la dependencia con la base $\{|i_B\rangle\}$, tomemos $\dim \mathcal{H}_A = \dim \mathcal{H}_B = 2$ y consideremos el estado

$$\begin{aligned} \rho &= |\psi\rangle \langle\psi| \\ |\psi\rangle &= a_{ij} |i_A\rangle \otimes |j_B\rangle \end{aligned} \quad (3.73)$$

siendo $a_{ij} \in \mathbb{C}$, $\sum_{ij} |a_{ij}|^2 = 1$, y $i, j \in \{0, 1\}$. Luego, si calculamos D_G para la base $\{|j_B\rangle\}$ en la que está escrita ρ en la Ec. (3.73), tenemos

$$D_G(\rho) = C \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\sqrt{C^2 + 4|(\rho_B)_{01}|^2} + 2|(\rho_B)_{01}| \right) \right] \quad (3.74)$$

donde $C = 2|ad - bc|$ es la concurrencia de Wootters -Ec. (3.57)- y $(\rho_B)_{01} = |ab^* + c^*d|$, la coherencia de la matriz reducida $\rho_B = \text{Tr}_A[\rho]$. Aquí podemos identificar dos problemas. El primero es que si realizamos el cálculo nuevamente para el caso en el que intercambiamos los subsistemas A y B , $D_G(\cdot)$ cambia según

$$(\rho_B)_{01} \rightarrow (\rho_A)_{01} = |a^*c + b^*d| \quad (3.75)$$

Más allá de que la NCMQD no tiene por qué ser simétrica, es sabido que las correlaciones cuánticas de un estado puro sí lo son. Así, no deberíamos notar diferencia alguna en la Ec. (3.74) ante el intercambio $A \leftrightarrow B$. Ahora bien, este podría ser otro defecto adicional de la medida inconexo con el problema de la dependencia con la base. Para ver que ambos inconvenientes están relacionados, calculemos $D_G(\rho)$ para ρ ahora escrita en la *descomposición de Schmidt*:

$$|\psi\rangle = \sqrt{\lambda_n} |\lambda_n\rangle |v_n^A\rangle \otimes |u_n^B\rangle \quad (3.76)$$

siendo λ_n los autovalores de ρ_A y ρ_B , que a su vez satisfacen $\lambda_0 + \lambda_1 = 1$, y $\{|v_n^A\rangle\}$ y $\{|u_n^B\rangle\}$ los autovectores, respectivamente.

$$D_G(\rho)|_{\text{Schd. Desc.}} = C \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} C \right) \quad (3.77)$$

De la ecuación anterior sacamos dos conclusiones: 1) Efectivamente la medida cambia con la base de \mathcal{H}_B , 2) Ahora sí $D_G(\rho)$, calculada en la base dada por la descomposición de Schmidt, es simétrica (ante el intercambio $A \leftrightarrow B$).

En la figura 3.1 mostramos el efecto de la dependencia con la representación, calculando D_G para 10^6 estados puros ρ aleatorios bipartitos de sistemas de dos niveles, distribuidos

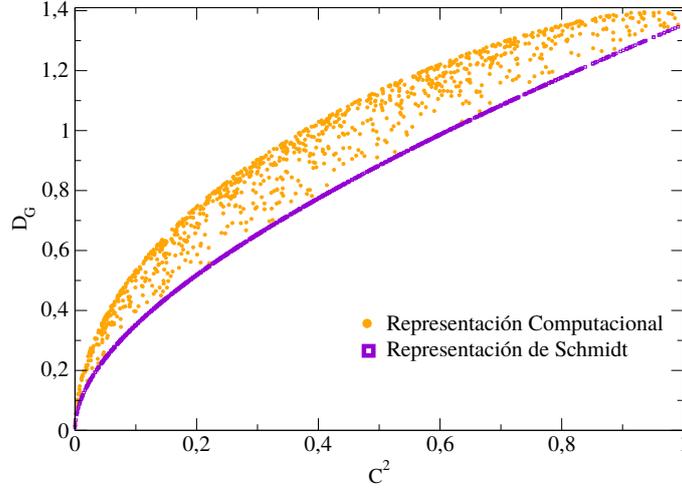


Figura 3.1: $D_G(\rho)$ para 10^6 estados puros bipartitos, de dos niveles, generados aleatoriamente como una función del cuadrado de la concurrencia C . Los círculos de *color naranja* corresponden al cálculo utilizando la base computacional, mientras que los cuadrados de *color púrpura*, al mismo con la base dada por la descomposición de Schmidt. Todas las cantidades graficadas son adimensionales.

de acuerdo a la medida Haar, para la base computacional y para la misma dada por la descomposición de Schmidt.

Con todo, analíticamente es fácil de ver que para cualquier otra base la medida no es simétrica y es mayor a la cantidad $D_G(\rho)|_{\text{Schd. Desc.}}$ (siempre en el caso de A y B sistemas de dos niveles). En el artículo Art. II utilizamos este hecho para proponer una medida de correlaciones cuánticas $d(\rho)$, basada en la idea de *no conmutación* de Y. Guo, pero que además no depende de la representación de ρ , y se reduce a una medida legítima de entrelazamiento para estados puros:

$$d(\rho) = \min_{\mathcal{R}} D_G(\rho) \quad (3.78)$$

siendo \mathcal{R} el conjunto de todas las representaciones de ρ , de la forma (3.64). Denominamos a la cantidad $d(\rho)$ como *Medida de no conmutatividad de correlaciones cuánticas* (NCMQC, por sus siglas en inglés). Sin embargo, la «solución» que hemos encontrado al problema de la NCMQD deshace una de sus principales ventajas, i.e. la posibilidad de cuantificar correlaciones cuánticas sin un proceso de optimización. Por otro lado, la NCMQC puede ser calculada con mayor facilidad que la discordancia cuántica. Además, la definición de $d(\rho)$ es complemente distinta y disruptiva con respecto a los esquemas de cuantificación de la mayoría de las cantidades propuestas en estos últimos dieciocho años. De esta forma, la NCMQC puede proveer información valiosa sobre la correlación de los sistemas. En la sección 3.2.5 revisaremos las propiedades de la medida como cuantificador de correlaciones cuánticas.

Para el caso de estados mixtos, en la ref. [62] Y. Guo evaluó (utilizando la base computacional) D_G en algunos estados «famosos» como los estados de Werner, Ec. (1.39), los isotrópicos, Ec. (1.44) y un subconjunto de los estados BD -Ec. (1.45). Para comparar el comportamiento de ambas medidas, evaluamos $d(\rho)$ en estos mismos conjuntos, agregando algunos más generales. Veamos resumidamente cómo parametrizamos las re-

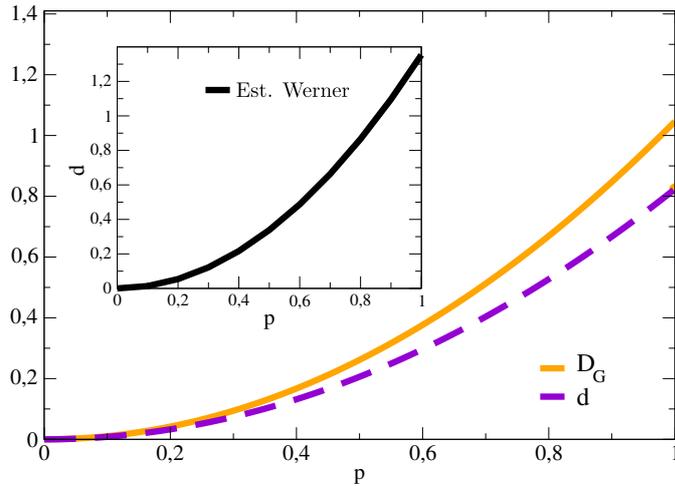


Figura 3.2: $D_G(\rho)$ en la base computacional (línea naranja sólida), y d (línea púrpura punteada) como funciones del parámetro p para el estado (3.81). El punto naranja representa la medida para el estado puro en la base de Schmidt. Inset: $D'_G(\rho)$ para un estado de Werner, i.e., el estado dado por la Eq.(3.82). En esta caso, la medida D_G es de por sí independiente de la representación. Todas las cantidades graficadas son adimensionales..

presentaciones de ρ .

En vista de la Ec. (3.64), sea $|i'_B\rangle = U_B |i_B\rangle$ una BON dada por el unitario U_B y $\{|i_B\rangle\}$ la base computacional, entonces, podemos escribir a ρ como (sumando sobre índices repetidos)

$$\rho = A'_{ij} \otimes |i'_B\rangle \langle j'_B| \quad (3.79)$$

El operador A'_{ij} toma la forma

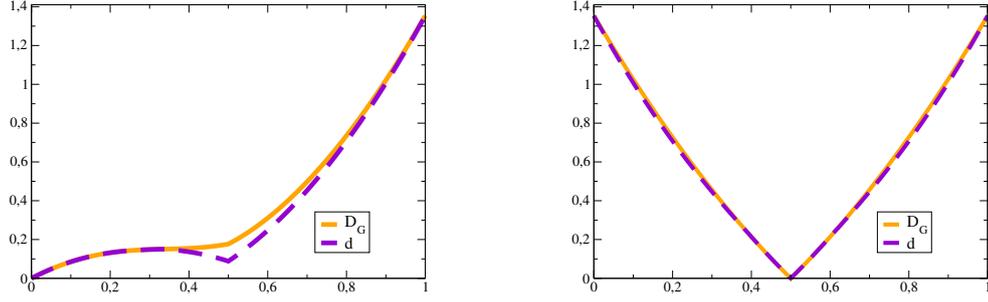
$$A'_{ij} = \text{Tr}_B [(\mathbb{1}_A \otimes |j'_B\rangle \langle i'_B|)\rho] \quad (3.80)$$

Ahora, con estos nuevos operadores primados podemos calcular $d(\rho)$ tomando el mínimo sobre el conjunto de todos los operadores unitarios U_B . Dos parametrizaciones de estos últimos con las que hemos trabajado están dadas por las ecuaciones (1.93) y (1.94), en la Sec. 1.2.4. Veamos los comportamientos de las medidas para los estados siguientes:

$$\rho_a = (1-p)\frac{\mathbb{1}}{4} + p|\psi_1\rangle \langle \psi_1| \quad (3.81)$$

$$\rho_b = (1-p)\frac{\mathbb{1}}{4} + p|\beta_{00}\rangle \langle \beta_{00}| \quad (3.82)$$

con $|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle)$ y $\{|\beta_{ij}\rangle\}$ los estados de Bell dados por $|\beta_{ij}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|0, j\rangle + (-1)^i |1, 1 \oplus j\rangle]$. Por definición, ρ_b es también un estado de Werner -ver Sec. 1.2.2. La Fig. 3.2 muestra los gráficos de las cantidades D_G y d evaluadas en los estados ρ_a y ρ_b como funciones de $p \in [0, 1]$. Vemos que ambas cantidades son funciones monótonamente crecientes y para los estados ρ_b (Werner) D_G es invariante ante el cambio de representación.



(a) D_G (línea sólida naranja) y d (línea púrpura punteada) como funciones de p para ρ_1 . Todas las cantidades graficadas son adimensionales.

(b) D_G (línea sólida naranja) y d (línea púrpura punteada) como funciones de p para ρ_2 . Todas las cantidades graficadas son adimensionales.

Figura 3.3: Los gráficos de $D_G(\cdot)$ y $d(\cdot)$ evaluadas en los estados dados por las ecuaciones (3.83) y (3.84).

Como segundo ejemplo, calculamos la NCMQC d para algunos estados BD. Específicamente:

$$\rho_1 = p |\beta_{11}\rangle \langle \beta_{11}| + \frac{1-p}{2} (|\beta_{01}\rangle \langle \beta_{01}| + |\beta_{00}\rangle \langle \beta_{00}|) \quad (3.83)$$

$$\rho_2 = p |\beta_{11}\rangle \langle \beta_{11}| + (1-p) |\beta_{01}\rangle \langle \beta_{01}| \quad (3.84)$$

El gráfico de las medidas se muestra en las figuras 3.3(a) y 3.3(b).

Analizando las figuras anteriores, vemos que las medidas $D_G(\cdot)$ y $d(\cdot)$ tienen comportamientos análogos para los estados (3.84). Es decir, si «ordenamos» a los mismos según el grado de correlación, cuantificado ya sea por $D_G(\cdot)$ o $d(\cdot)$, obtendremos el mismo resultado en ambos casos. No obtenemos la misma situación cuando evaluamos a las medidas en los estados (3.83), puesto que la NCMQD estima un grado de correlación creciente con p , mientras que la NCMQC indica «menos correlaciones» en $p = 0,5$ que en $p = 0,3$. Ver Fig. 3.3(a).

Las medidas no conmutativas y los estados BD. Además de los argumentos que hemos presentado hasta aquí sobre la necesidad de minimizar D_G respecto de las representaciones de ρ , un cálculo conceptualmente descriptivo de lo que ocurre con dicha optimización es evaluar las medidas en los estados BD generales dados por la Ec. (1.45). Comencemos con D_G en la base computacional $\{|i\rangle\}$. Los estados tienen la forma siguiente,

$$\rho^{BD} = \frac{1}{4} (\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + c_i \sigma_i \otimes \sigma_i)$$

En la ecuación anterior omitimos los supraíndices A y B de las matrices de Pauli $\{\sigma_i\}$ ya que no agregan información relevante. Luego, los bloques A_{ij} están dados por

$$A_{ij} = \text{Tr}_B [\mathbb{1} \otimes |j\rangle \langle i| \rho^{BD}] = \frac{1}{4} (\mathbb{1} \delta_{ij} + c_k \sigma_k \sigma_k^{ij}) \quad (3.85)$$

donde $\sigma_k^{ij} = \text{Tr} [|j\rangle \langle i| \sigma_k] = \langle i| \sigma_k |j\rangle$. Seguidamente, los conmutadores resultan,

$$\begin{aligned}
[A_{ij}, A_{kl}] &= \frac{1}{4^2} c_\alpha \sigma_\alpha^{ij} c_\beta \sigma_\beta^{kl} [\sigma_\alpha, \sigma_\beta] = \\
&= \frac{1}{4^2} \left(\sum_{\alpha > \beta} c_\alpha \sigma_\alpha^{ij} c_\beta \sigma_\beta^{kl} [\sigma_\alpha, \sigma_\beta] + \sum_{\alpha < \beta} c_\alpha \sigma_\alpha^{ij} c_\beta \sigma_\beta^{kl} [\sigma_\alpha, \sigma_\beta] \right) = \\
&= \frac{1}{4^2} \left(\sum_{\alpha > \beta} c_\alpha \sigma_\alpha^{ij} c_\beta \sigma_\beta^{kl} [\sigma_\alpha, \sigma_\beta] + c_\beta \sigma_\beta^{ij} c_\alpha \sigma_\alpha^{kl} [\sigma_\beta, \sigma_\alpha] \right) = \\
&= \frac{1}{4^2} \left(\sum_{\alpha > \beta} c_\alpha \sigma_\alpha^{ij} c_\beta \sigma_\beta^{kl} [\sigma_\alpha, \sigma_\beta] - c_\beta \sigma_\beta^{ij} c_\alpha \sigma_\alpha^{kl} [\sigma_\alpha, \sigma_\beta] \right) = \\
&= \frac{1}{4^2} \sum_{\alpha > \beta} c_\alpha c_\beta F_{\alpha\beta}^{ijkl} [\sigma_\alpha, \sigma_\beta] \tag{3.86}
\end{aligned}$$

siendo $F_{\alpha\beta}^{ijkl} = \sigma_\alpha^{ij} \sigma_\beta^{kl} - \sigma_\beta^{ij} \sigma_\alpha^{kl}$. Tomando la norma Hilbert-Schmidt, tenemos:

$$\| [A_{ij}, A_{kl}] \|_2 = \frac{1}{\sqrt{2^5}} \sqrt{|c_1 c_2 F_{12}^{ijkl}|^2 + |c_2 c_3 F_{23}^{ijkl}|^2 + |c_3 c_1 F_{31}^{ijkl}|^2} \tag{3.87}$$

Realizando la suma correspondiente, obtenemos

$$D_G(\rho^{BD}) = \frac{1}{\sqrt{2^3}} \left(|c_1 c_2| + 2\sqrt{(c_3 c_1)^2 + (c_3 c_2)^2} \right) \tag{3.88}$$

Por otro lado, recordando la asociación entre operadores autoadjuntos y variables aleatorias señalada en el Capítulo 1; si s_i^A y s_j^B son las variables aleatorias representadas por los operadores σ_i en los subsistemas A y B , entonces ρ^{BD} está dado por las correlaciones (cuyo coeficiente es c_i) entre s_i^A y s_i^B . Con todo, la *cantidad* de correlaciones en el estado ρ^{BD} no se ve alterada si intercambiamos, por ejemplo, los ejes 1 y 2, resultando la correlación c_1 entre los observables s_2^A y s_2^B y c_2 entre s_1^A y s_1^B . Mirando la Ec. (3.88), vemos que D_G no evidencia la invariancia anterior.

Calculemos ahora la NCMQC $d(\cdot)$. A tal fin, consideremos $\{|i\rangle = U|i\rangle_c\}$, con U un operador unitario y $\{|i\rangle_c\}$ la base computacional. Parametrizando U según la Ec. (1.93),

$$U = \mathbf{s} \cdot (\mathbb{1}, i\boldsymbol{\sigma})$$

e introduciendo $|i\rangle = U|i\rangle_c$ en la Ec. (3.86), podemos ver la dependencia analítica de la medida D_G respecto de la base dada por $\mathbf{s} = (s_0, s_1, s_2, s_3)$:

$$\begin{aligned}
D_G(\rho^{BD})|_{\mathbf{s}} &= \frac{1}{\sqrt{2^3}} \sqrt{c_2^2 c_3^2 z_1(\mathbf{s})^2 + c_1^2 c_3^2 z_2(\mathbf{s})^2 + c_2^2 c_1^2 z_3(\mathbf{s})^2} + \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{c_2^2 c_3^2 \zeta_1(\mathbf{s}) + c_1^2 c_3^2 \zeta_2(\mathbf{s}) + c_2^2 c_1^2 \zeta_3(\mathbf{s})} \tag{3.89}
\end{aligned}$$

con $\zeta_i(\mathbf{s}) = 1 - z_i(\mathbf{s})^2$, $|\mathbf{s}| = 1$ y,

$$z_1(\mathbf{s}) = 2(-s_0 s_2 + s_1 s_3) \tag{3.90}$$

$$z_2(\mathbf{s}) = 2(s_0 s_1 + s_2 s_3) \tag{3.91}$$

$$z_3(\mathbf{s}) = s_0^2 + s_3^2 - s_1^2 - s_2^2 \tag{3.92}$$

En la sección siguiente -Sec. 3.2.3- veremos que estos coeficientes definen las componentes de los estados (del subsistema B , Ecs. (3.146) y (3.147)) que resultan luego de haberse realizado una medición bipartita -dada por \mathbf{s} - sobre el subsistema A . Se puede verificar que

$$z_1^2 + z_2^+ z_3^2 = 1$$

para todo vector \mathbf{s} .

Para minimizar la Ec. (3.89) consideremos la función $f(\mathbf{x})$:

$$f(\mathbf{x}) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \alpha_i x_i^2} + 2\sqrt{\sum_{i=1}^3 \alpha_i (1 - x_i^2)}, \quad (3.93)$$

$$g(\mathbf{x}) = \sum_i x_i^2 = 1, \quad (3.94)$$

con $g(\mathbf{x}) = 1$ y $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. De este modo, $D_G(\rho)|_{\mathbf{s}}$ es un caso particular de $f(\mathbf{x})$: $\alpha_1 = (c_2 c_3)^2$, $\alpha_2 = (c_1 c_3)^2$, $\alpha_3 = (c_2 c_1)^2$ y las variables $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ representan las cantidades $\mathbf{z} = (z_1(\mathbf{s}), z_2(\mathbf{s}), z_3(\mathbf{s}))$.

Siguiendo el método de los multiplicadores de Lagrange,

$$\frac{\partial f}{\partial x_p} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_p}, \quad (3.95)$$

con $p \in \{1, 2, 3\}$. Así, podemos escribir las siguientes igualdades:

$$\frac{\alpha_k x_k}{\sqrt{\phi(\mathbf{x})}} - 2 \frac{\alpha_k x_k}{\sqrt{\alpha - \phi(\mathbf{x})}} = 2\lambda x_k, \quad (3.96)$$

$$\frac{\alpha_i x_i}{\sqrt{\phi(\mathbf{x})}} - 2 \frac{\alpha_i x_i}{\sqrt{\alpha - \phi(\mathbf{x})}} = 2\lambda x_i, \quad (3.97)$$

$$\frac{\alpha_j x_j}{\sqrt{\phi(\mathbf{x})}} - 2 \frac{\alpha_j x_j}{\sqrt{\alpha - \phi(\mathbf{x})}} = 2\lambda x_j, \quad (3.98)$$

donde $\phi(\mathbf{x}) = \sum_p \alpha_p x_p^2$, $\alpha = \sum_p \alpha_p$ y i, j, k ($i \neq j \neq k$) son números pertenecientes al $\{1, 2, 3\}$.

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir α_k , α_i y α_j distintos de cero. En vista del vínculo $g(x_1, x_2, x_3) = 1$, Ec. (3.94), supongamos que $x_k = 0$, $x_i = 0$ y $x_j = 1$. Entonces, las Ecs. (3.96) y (3.97) se cumplen y la Ec. (3.98) se puede satisfacer pidiendo

$$\lambda = \frac{\alpha_j}{2\sqrt{\phi(\mathbf{x})}} - \frac{\alpha_j}{\sqrt{\alpha - \phi(\mathbf{x})}}. \quad (3.99)$$

Luego, teniendo en cuenta la permutación de i, j, k , tenemos tres puntos extremales. A saber: $\mathbf{x}_e \in \{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$.

Tomemos ahora $x_k = 0$, y $x_i \neq 0$, $x_j \neq 0$. Entonces, tenemos tres cantidades x_i , x_j y λ por determinar, teniendo en cuenta (3.97), (3.98) y $x_i^2 + x_j^2 = 1$. Seguidamente,

$$\lambda = \frac{\alpha_i}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\phi(\mathbf{x})}} - \frac{2}{\sqrt{\alpha - \phi(\mathbf{x})}} \right). \quad (3.100)$$

Ahora bien, si $\alpha_i \neq \alpha_j$ de la Ec. (3.98) obtenemos

$$\frac{1}{\sqrt{\phi(\mathbf{x})}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha - \phi(\mathbf{x})}}. \quad (3.101)$$

La igualdad en la Ec. (3.101) vale sí y sólo sí $\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{5}\alpha$. Por lo tanto, los puntos extremales están dados por

$$x_k = 0, \quad (3.102)$$

$$x_1^2 + x_j^2 = 1, \quad (3.103)$$

$$\alpha_i x_i^2 + \alpha_j x_j^2 = \frac{1}{5} \sum_{p=1}^3 \alpha_p. \quad (3.104)$$

Por el contrario, si $\alpha_i = \alpha_j$, las Ecs. (3.97) y (3.98) se cumplen trivialmente. Se puede verificar que el caso general, i.e., $x_k \neq 0$, $x_i \neq 0$ and $x_j \neq 0$, se puede resolver siguiendo los cálculos anteriores y dá los mismos valores para los extremos $\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{5}\alpha$.

En resumen, tenemos dos tipos de puntos extremales. Primero,

$$\mathbf{x}_e \in \{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$$

Segundo, \mathbf{x}_e tal que $\sum_p x_p^2 = 1$ y $\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{5}\alpha$.

Veamos ahora cuáles de estos corresponde a un mínimo de la función $f(\mathbf{x})$. Consideremos el caso unidimensional $\hat{f}(\phi(\mathbf{x})) = \sqrt{\phi(\mathbf{x})} + 2\sqrt{\alpha - \phi(\mathbf{x})}$. Es fácil de ver que esta es una función cóncava de $\phi(\mathbf{x})$ con un extremo en $\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{5}\alpha$. Por lo tanto, este caso corresponde a un máximo local. Así, el mínimo de la función debería estar en los puntos límite:

$$\phi_{\min} = \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{G}} \{\phi(\mathbf{x})\}, \quad (3.105)$$

$$\phi_{\max} = \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{G}} \{\phi(\mathbf{x})\}, \quad (3.106)$$

siendo $\mathcal{G} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : g(\mathbf{x}) = 1\}$. Siguiendo [47], como $\phi(\mathbf{x}) = \sum_p \alpha_p x_p^2 \leq c_+ \sum_p x_p^2 = c_+$ y $\phi(\mathbf{x}) = \sum_p \alpha_p x_p^2 \geq c_- \sum_p x_p^2 = c_-$, tenemos que,

$$\phi_{\min} = c_- = \min\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, \quad (3.107)$$

$$\phi_{\max} = c_+ = \max\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}. \quad (3.108)$$

Estos valores de $\phi(\mathbf{x})$ coinciden con nuestros primeros tipos de puntos extremales \mathbf{x}_e . Como consecuencia, el mínimo de la función $f(\mathbf{x})$ resulta:

$$f_{\min} = \min\{ \sqrt{\alpha_1} + 2\sqrt{\alpha_2 + \alpha_3}, \sqrt{\alpha_2} + 2\sqrt{\alpha_1 + \alpha_3}, \sqrt{\alpha_3} + 2\sqrt{\alpha_2 + \alpha_1} \}.$$

Finalmente, la medida optimizada $d(\rho)$ puede escribirse como:

$$d(\rho^{BD}) = \frac{1}{\sqrt{2^3}} \min\{ |c_1 c_2| + 2\sqrt{(c_2 c_3)^2 + (c_1 c_3)^2}, \\ |c_2 c_3| + 2\sqrt{(c_1 c_2)^2 + (c_1 c_3)^2}, \\ |c_1 c_3| + 2\sqrt{(c_1 c_2)^2 + (c_2 c_3)^2} \}. \quad (3.109)$$

Es importante notar que los puntos extremales

$$\mathbf{z}_e = (z_1^e, z_2^e, z_3^e) \in \{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$$

pueden ser siempre alcanzados por una adecuada elección de los vectores \mathbf{s} [47].

Volviendo ahora a la Ec. (3.88), y comparando con la medida optimizada $d(\rho^{BD})$ vemos que efectivamente esta última sí satisface la invariancia ante rotaciones de los ejes de las esferas de Bloch de los subsistemas A y B . La optimización anterior, en conjunto con un análisis dinámico sobre las correlaciones presentes en los estados de Bell -que veremos más adelante- se puede encontrar en el artículo Art. v, [5].

3.2.3. Enfoque generalizado

Luego de este primer contacto con las medidas de correlaciones cuánticas, veamos un modo de generalizar el esquema de cuantificación de correlaciones asociado a la *discor-dancia cuántica*. A tal fin, consideremos primeramente las propiedades que una medida de correlaciones adecuada debería presentar.

Criterios necesarios para cuantificar correlaciones. El conjunto de requerimientos que un funcional debe satisfacer para ser considerado una medida de correlaciones (ya sean generales, clásicas o cuánticas) continúa siendo un tema de estudio y en continuo avance. Sin embargo, existen ciertos criterios, denominados *necesarios* [27, 29, 63], que son de algún modo triviales e incuestionables.

Veamos a continuación una lista con los requisitos necesarios para establecer medidas de correlaciones totales ($\tilde{\mathcal{T}}$), cuánticas ($\tilde{\mathcal{Q}}$) y clásicas (o clásicas-cuánticas) ($\tilde{\mathcal{J}}$), en un esquema bipartito [63]. Sean $\rho \in B_+^1(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$, $\rho_A = \text{Tr}_B[\rho]$ y $\rho_B = \text{Tr}_A[\rho]$:

C.N.1) Los estados producto no tienen correlaciones:

$$\tilde{\mathcal{T}}(\rho_A \otimes \rho_B) = \tilde{\mathcal{Q}}(\rho_A \otimes \rho_B) = \tilde{\mathcal{J}}(\rho_A \otimes \rho_B) = 0; \quad (3.110)$$

C.N.2) Todas las medidas de correlaciones deben ser invariantes ante transformaciones unitarias *locales*;

C.N.3) Todas las medidas de correlaciones deben ser no negativas;

C.N.4) $\tilde{\mathcal{T}}(\cdot)$ debe ser no creciente ante operaciones locales;

C.N.5) Una medida de correlaciones cuánticas $\tilde{\mathcal{Q}}(\cdot)$ debe anularse en todo estado clásico-cuántico:

$$\tilde{\mathcal{Q}}(\rho_c) = 0, \quad \forall \rho_c \in \mathcal{SC} \quad (3.111)$$

De acuerdo con [63], una cantidad que no satisface alguno de los puntos anteriores, no es considerada una medida válida. En cuanto al caso particular de correlaciones cuánticas, consideraremos, en la Sec. 3.2.5, los criterios «adicionales» discutidos en [27].

Medidas generalizadas de correlaciones totales. La primer medida de correlaciones entre subsistemas cuánticos que vimos es la información mutua $\mathcal{I}(\cdot)$, ver Sec. 3.2, Ec. (3.21). Ésta es por excelencia *la* cantidad que cuantifica el grado de correlación (de cualquier tipo; de ahí el término *correlaciones totales*) en un sistema bipartito. Por otro lado, la ecuación (3.23),

$$\mathcal{I}(\rho) = S(\rho || \rho_A \otimes \rho_B)$$

sugiere una estrecha relación la *distinguibilidad* entre estados cuánticos, tratado en el Capítulo 2. Específicamente, la información mutua cuántica es la «distancia» entre ρ y el estado producto que surge de este último, $\rho_A \otimes \rho_B$, cuantificada por la *entropía relativa* $S(\cdot || \cdot)$ -Ec. (2.51). Podemos entonces «desglosar» la información mutua $\mathcal{I}(\cdot)$ en dos procedimientos. 1) El método: Cuantificar la *diferencia* entre ρ y su separable $\rho_A \otimes \rho_B$, y 2) usar como medida de distinguibilidad la entropía relativa $S(\cdot || \cdot)$.

En el Capítulo anterior 2, hemos visto que existen muchas medidas de distinguibilidad bien definidas, algunas incluso *basadas en información*, que podrían enriquecer cualquier estudio cuya principal figura de mérito involucrada sea el concepto de disimilitud entre estados cuánticos. Con todo, en el Art. IV trabajamos con las medidas que surgen de

utilizar el mismo método que \mathcal{I} , señalado en 1), pero generalizando 2), i.e., estudiamos las propiedades de $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(\rho)$ dada por

$$\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(\rho) = \mathcal{D}(\rho || \rho_A \otimes \rho_B) \quad (3.112)$$

con $\mathcal{D}(\cdot || \cdot)$ una medida de distancia entre estados cuánticos. Una vez generalizado el modo de cuantificar correlaciones entre subsistemas, utilizando el mismo esquema que en la Ec. (3.47), quedan inmediatamente definidas las medidas de correlaciones de tipo clásico-cuántico,

$$\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(\rho) = \max_{\mathcal{M}_A} \{ \mathcal{T}_{\mathcal{D}}(\rho^{\mathcal{M}_A}) \} = \mathcal{T}_{\mathcal{D}}(\rho^{\mathcal{M}_A^o}) \quad (3.113)$$

con \mathcal{M}_A^o la medición óptima; y también las medidas de correlaciones cuánticas

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}(\rho) = \mathcal{T}_{\mathcal{D}}(\rho) - \mathcal{J}_{\mathcal{D}}(\rho) \quad (3.114)$$

Luego, si por otro lado probásemos que $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}$ es una medida válida de correlaciones totales (probando que satisface los criterios necesarios a tal fin) entonces veríamos que $\mathcal{J}_{\mathcal{D}}$ cuantifica la cantidad máxima de correlaciones en el estado que resulta -de ρ - luego de haberse realizado cualquier medición \mathcal{M}_A . Adicionalmente, la *pérdida* en la cantidad de correlaciones antes y después de medir \mathcal{M}_A^o , es lo que define a la cantidad $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$.

Ahora bien, para definir de manera adecuada las medidas $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}$, $\mathcal{J}_{\mathcal{D}}$ y $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$, tenemos que ver que éstas satisfacen las propiedades *necesarias* enumeradas anteriormente. En particular, veamos qué condiciones tienen que cumplir los funcionales $\mathcal{D}(\cdot || \cdot)$ de manera tal que las medidas de correlaciones en cuestión satisfagan las condiciones C.N.1)-C.N.5). Nótese que vamos a considerar *medidas de distancia* -cuya definición y propiedades fueron revisadas en el Capítulo 2, Secciones 2.1 y 2.3- por lo que en cualquier caso $\mathcal{D}(\cdot || \cdot)$ es una cantidad no negativa -Pd.a, Sec. 2.1- y satisface la identidad de indiscernibles -Pd.b, Sec. 2.1.

Análisis de los criterios para $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}$.

Las siguientes proposiciones, cuyas demostraciones son directas, establecen condiciones necesarias para la medida \mathcal{D} de manera tal que $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}$ cumpla los requisitos en cuestión.

Proposición I Si $\mathcal{D}(\cdot || \cdot)$ es una medida de distancia invariante ante transformaciones unitarias locales -Pd.e, Sec. 2.3- entonces $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}$ cumple las condiciones C.N.1)-C.N.3).

Proposición II Si, adicionalmente, $\mathcal{D}(\cdot || \cdot)$ es una medida de distancia *contractiva* -Pd.g- entonces $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}$ cumple con C.N.4).

Como señalamos anteriormente, en la Sec. 2.3, una medida de distancia contractiva es también invariante ante transformaciones unitarias de sus argumentos, así, podemos escribir:

Colorario I Sea $\mathcal{D}(\cdot || \cdot)$ una medida de distancia contractiva -Pd.g- entonces $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}$ satisface C.N.1)-C.N.4)

Antes de analizar las propiedades de \mathcal{D} para obtener $\mathcal{J}_{\mathcal{D}}$ bien definida según las condiciones C.N.1)-C.N.5), analicemos un comportamiento adicional que sería razonable que \mathcal{D} cumpla.

La condición de banderas. Sean $\rho_c, \sigma_c \in \mathcal{CS}$ (Sec. 3.2.1) dados por

$$\rho_c = p_i |i\rangle \langle i| \otimes \rho_B^i \quad (3.115)$$

$$\sigma_c = p_i |i\rangle \langle i| \otimes \sigma_B^i \quad (3.116)$$

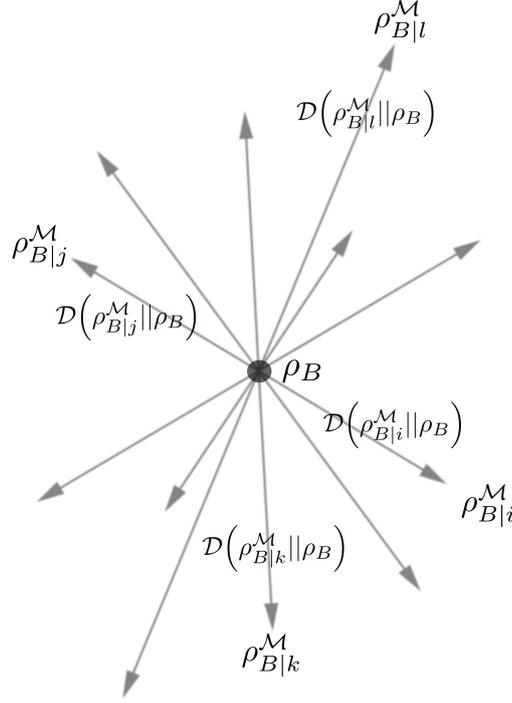


Figura 3.4: Representación de $\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(\rho)$ dada por la Ec. (3.119).

entonces, como los estados anteriores se pueden reescribir del siguiente modo (utilizando la base de \mathcal{H}_A)

$$\rho_c = \begin{bmatrix} p_1 \rho_B^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 \rho_B^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \rho_B^n \end{bmatrix} \quad \sigma_c = \begin{bmatrix} p_1 \sigma_B^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 \sigma_B^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \sigma_B^n \end{bmatrix} \quad (3.117)$$

es razonable que una medida de distancia \mathcal{D} entre ambos estados esté determinada por $\mathcal{D}(\rho_B^i || \sigma_B^i)$ (con un “peso” p_i). Específicamente, vamos a trabajar con cuantificadores de distancia tales que estos cumplan la *condición de banderas* [58]:

$$\mathcal{D}(\rho_c || \sigma_c) = p_i \mathcal{D}(\rho_B^i || \sigma_B^i) \quad (3.118)$$

Análisis de los criterios para $\mathcal{J}_{\mathcal{D}}$.

Ahora bien, si \mathcal{D} satisface la condición de banderas entonces podemos reescribir $\mathcal{J}_{\mathcal{D}}$ como

$$\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(\rho) = \max_{\mathcal{M}} \left\{ p_i^{\mathcal{M}} \mathcal{D}(\rho_{B|i}^{\mathcal{M}} || \rho_B) \right\} \quad (3.119)$$

donde $\mathcal{M} = \{M_i\}$ es una medición de von Neumann sobre el subsistema A , $p_i^{\mathcal{M}} = \text{Tr}[M_j \otimes \mathbb{1} \rho]$ y $\rho_{B|i}^{\mathcal{M}} = \frac{\text{Tr}_B[M_j \otimes \mathbb{1} \rho]}{p_i^{\mathcal{M}}}$. Nótese que la Ec. (3.119) nos permite reinterpretar $\mathcal{J}_{\mathcal{D}}$ como la distinguibilidad *media* máxima entre el conjunto de los estados condicionales $\{\rho_{B|i}^{\mathcal{M}}\}$ y el estado marginal del subsistema B , ρ_B , antes de haberse realizado medición alguna sobre A . La figura 3.4 representa gráficamente la interpretación de la ecuación (3.119). Con respecto a las propiedades de $\mathcal{J}_{\mathcal{D}}$, tenemos que vale:

Proposición III Si $\mathcal{D}(\|\cdot\|)$ es una medida de distancia invariante ante transformaciones unitarias locales -Pd.e, Sec. 2.3- entonces $\mathcal{J}_{\mathcal{D}}$ cumple los criterios C.N.1)-C.N.3)

Para probar lo anterior, supongamos que el sistema está en un estado producto $\sigma = \sigma_A \otimes \sigma_B$. En este caso, se puede ver que $\sigma_{B|j}^{\mathcal{M}} = \sigma_B$ para toda medición \mathcal{M} . Así, $\mathcal{D}(\sigma_{B|j}^{\mathcal{M}} \| \sigma_B) = 0$. Por lo tanto, hemos visto que $\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(\sigma) = 0$, criterio C.N.1).

Seguidamente, probemos que C.N.2) es un requisito que cumple $\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(\rho)$ siempre que la distancia \mathcal{D} es invariante ante transformaciones unitarias locales -Pd.e.

En consecuencia, consideremos $\sigma = U\rho U^\dagger$ con $U = U_A \otimes U_B$. Entonces, $\sigma_{B|j}^{\mathcal{M}} = U_B \rho_{B|j}^{\mathcal{M}'} U_B^\dagger$ y $\sigma_B = U_B \rho_B U_B^\dagger$, siendo $\mathcal{M}' = \{U_A M_j U_A^\dagger\}$. Se sigue que

$$\mathcal{D}(\sigma_{B|j}^{\mathcal{M}} \| \sigma_B) = \mathcal{D}(U_B \rho_{B|j}^{\mathcal{M}'} U_B^\dagger \| U_B \rho_B U_B^\dagger) = \mathcal{D}(\rho_{B|j}^{\mathcal{M}'} \| \rho_B) \quad (3.120)$$

Adicionalmente, se puede que p'_j para el estado σ es $p'_j = \text{Tr}[M_j \otimes \mathbb{1}\sigma] = \text{Tr}[M'_j \otimes \mathbb{1}\rho]$. Por lo tanto,

$$\mathcal{J}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{M}}(\sigma) = \mathcal{J}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{M}'}(\rho) \quad (3.121)$$

donde hemos utilizando la notación $\mathcal{J}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{M}}(\sigma) = \mathcal{T}_{\mathcal{D}}(\sigma^{\mathcal{M}})$. Debido a que \mathcal{M}' es la medición que surge de transformar unitariamente (según U_A) a los elementos de M , tenemos que:

$$\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(\sigma) = \max_{\{\mathcal{M}\}} \mathcal{J}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{M}}(\sigma) = \max_{\{\mathcal{M}\}} \mathcal{J}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{M}'}(\rho) = \max_{\{\mathcal{M}\}} \mathcal{J}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{M}}(\rho) = \mathcal{J}_{\mathcal{D}}(\rho) \quad (3.122)$$

Así, hemos demostrado que C.N.2) se cumple para $\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(\rho)$.

Finalmente, la positividad de $\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(\rho)$ -C.N.3)- se sigue de que estamos considerando medidas de distancia que por definición son no negativas.

Por otro lado, en cuanto a las propiedades razonables que $\mathcal{J}_{\mathcal{D}}$ debe satisfacer para ser considerado un cuantificador de correlaciones de tipo clásico-cuántico, podemos agregar un criterio adicional a las lista C.N.1)-C.N.5), considerando el valor de la misma evaluada en el caso particular de estados clásicos-cuánticos. Así, dado ρ_c -Ec. (3.115)- es razonable que la mejor medición que podemos realizar para obtener información del subsistema B está dada por una proyección sobre los vectores de estado $\{|i\rangle\}$ [40], i.e., $\mathcal{J}_{\mathcal{D}}$ debería cumplir con

$$\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(\rho_c) = p_i \mathcal{D}(\rho_B^i \| \rho_B) \quad (3.123)$$

con $\rho_B = p_k \rho_B^k$. La proposición siguiente establece una condición suficiente sobre \mathcal{D} de manera tal que $\mathcal{J}_{\mathcal{D}}$ cumpla lo anterior.

Proposición IV Sea $\mathcal{D}(\|\cdot\|)$ una medida de distancia convexa en alguna de sus entradas, (propiedad Pd.h, Sec. 2.3), entonces $\mathcal{J}_{\mathcal{D}}(\rho_c)$ satisface (3.123).

Veamos cómo demostrarla. Los estados condicionales $\rho_{B|j}^{\mathcal{M}}$ pueden escribirse como⁸

$$\rho_{B|j}^{\mathcal{M}} = \frac{p_i q_{ij}}{p'_j} \rho_B^i \quad (3.124)$$

siendo $p'_j = p_i q_{ij}$ y $q_{ij} = \text{Tr}[M_j N_i^A]$ con $N_i^A = |i\rangle\langle i|$ la base en la que está escrita ρ_c , (3.115). Por lo tanto, tenemos

$$\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(\rho_c^{\mathcal{M}}) = p'_j \mathcal{D}\left(\frac{p_i q_{ij}}{p'_j} \rho_B^i \| \rho_B\right). \quad (3.125)$$

⁸Recordemos: las sumas están implícitas cuando hay índices repetidos en productos distintos, dentro de un mismo miembro

Como la distancia $\mathcal{D}(\cdot||\cdot)$ cumple la propiedad Pd.h, vale,

$$\mathcal{D}\left(\frac{p_i q_{ij}}{p'_j} \rho_B^i || \rho_B\right) \leq \frac{p_i q_{ij}}{p'_j} \mathcal{D}(\rho_B^i || \rho_B). \quad (3.126)$$

Usando que $\sum_j M_j = \mathbb{1}$ y $\text{Tr}[N_i^A] = 1$ se sigue que $\sum_j q_{ij} = 1$. Así, multiplicando la desigualdad anterior por p'_j y sumando sobre j , obtenemos

$$\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(\rho_c^{\mathcal{M}}) \leq p_i \mathcal{D}(\rho_B^i || \rho_B) \quad (3.127)$$

para cualquier medición \mathcal{M} , con igualdad para $\mathcal{M}^o = \{N_i^A\}$. Luego, se cumple (3.123).

Cabe destacar que no hemos impuesto ninguna condición relacionada con la simetría de $\mathcal{D}(\cdot||\cdot)$. Por lo tanto, de acuerdo con la última proposición, los estados condicionales $\rho_B^{\mathcal{M}}|_j$ deberían “entrar” en el argumento para el cual la distancia es convexa.

Análisis de los criterios para $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$.

Para la medida $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$ aplican los criterios C.N.1)-C.N.3) y C.N.5). Por otro lado, si tenemos que \mathcal{D} es una medida de distancia, vemos que: $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(\rho_A \otimes \rho_B) = \mathcal{J}_{\mathcal{D}}(\rho_A \otimes \rho_B) = 0$, en consecuencia, se sigue por definición que $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}(\rho_A \otimes \rho_B) = 0$ para cualquier estado producto -C.N.1). Adicionalmente, si \mathcal{D} es *invariante ante transformaciones unitarias locales*, tenemos que $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}$ y $\mathcal{J}_{\mathcal{D}}$ también lo son; luego, $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$ satisface la misma invariancia C.N.2). Asimismo, si \mathcal{D} es una cantidad *contractiva* ante mapas CPTP -Pd.g- entonces $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}$ también lo es. Como las mediciones de von Neumann son mapas CPTP, se sigue que

$$\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(\rho) \geq \mathcal{T}_{\mathcal{D}}(\rho^{\mathcal{M}}) \quad (3.128)$$

para toda medición \mathcal{M} . Luego, es evidente que $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}(\rho) = \mathcal{T}_{\mathcal{D}}(\rho) - \mathcal{T}_{\mathcal{D}}(\rho^{\mathcal{M}^o}) \geq 0$ siendo \mathcal{M}^o la medición *óptima*; así $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$ cumple con C.N.3). Resta ver que $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$ se anula en los estados clásicos cuánticos de la forma (3.115). Esta propiedad (C.N.5)) es evidente si pedimos que \mathcal{D} sea *convexa en alguna de sus entradas* -Pd.h- dado que así vale la igualdad (3.123) y por lo tanto $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}(\rho_c) = 0$.

Resumidamente, hemos probado la siguiente proposición:

Proposición V Si $\mathcal{D}(\cdot||\cdot)$ es una medida de distancia invariante ante transformaciones unitarias locales -Pd.e-, contractiva -Pd.g- y convexa en alguna de sus entradas -Pd.h- entonces $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$ cumple con C.N.1)-C.N.3) y C.N.5)

Cabe aclarar que en el caso de la entropía relativa, i.e., $\mathcal{D}(\cdot||\cdot) = S(\cdot||\cdot)$ tenemos que \mathcal{T}_S es la información de von Neumann \mathcal{I} , y \mathcal{Q}_S resulta igual a la *discordancia cuántica*. Así, como $S(\cdot||\cdot)$ es una medida de distancia que cumple con la condición de banderas (3.118) y además con los requisitos Pd.e (invariante ante transformaciones unitarias de sus argumentos), Pd.g (contractiva), y Pd.h (convexa), tenemos que el QD satisface también las condiciones necesarias enumeradas hasta aquí.

¿Qué medidas de distancia cumplen las condiciones necesarias?

Resumidamente, hemos visto que si \mathcal{D} es una medida de distancia que cumple con la condición de banderas -(3.118)- y además con las condiciones Pd.e, Pd.g y Pd.h -ver Sec. 2.3- entonces la terna de medidas generalizadas $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}$, $\mathcal{J}_{\mathcal{D}}$ y $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$ satisfacen los criterios C.N.1)-C.N.5). En el capítulo anterior, Sec. 2.3 resumimos las propiedades de las principales medidas de distancia. Vemos entonces que la distancia traza (2.44), Bures (2.50) (al cuadrado), Hellinger (2.57) (al cuadrado), la JSD cuántica (2.55) y, como ya hemos

señalado, la entropía relativa (2.51) cumplen los criterios necesarios que hemos considerado anteriormente para \mathcal{D} . Sin embargo, queda analizar si éstas distancias satisfacen la condición de Banderas, Ec. (3.118). Se puede demostrar que efectivamente todas las medidas anteriores lo hacen. Veamos los casos más representativos.

Distancia Traza:

Sean ρ_1 y ρ_2 dos matrices densidad. La distancia traza está dada por (2.44)

$$K(\rho_1||\rho_2) = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\sqrt{(\rho_1 - \rho_2)^2} \right]$$

Elijamos $\rho_1 = p_i E_i \otimes \rho_i$ y $\rho_2 = p_j E_j \otimes \rho$, siendo $E_j = |j\rangle \langle j|$ y $\{|j\rangle\}$ una base ortonormal del subsistema A . Entonces,

$$(\rho_1 - \rho_2)^2 = \sum_i p_i^2 E_i \otimes (\rho_i - \rho)^2. \quad (3.129)$$

Como $\left(\sum_i p_i E_i \otimes \sqrt{(\rho_i - \rho)^2} \right)^2 = \sum_i p_i^2 E_i \otimes (\rho_i - \rho)^2$ se sigue

$$\sqrt{(\rho_1 - \rho_2)^2} = \sum_i p_i E_i \otimes \sqrt{(\rho_i - \rho)^2}. \quad (3.130)$$

Consecuentemente,

$$K(\rho_1||\rho_2) = \frac{1}{2} \sum_i p_i \text{Tr} \left[\sqrt{(\rho_i - \rho)^2} \right] = \sum_i p_i d_{Tr}(\rho_i||\rho). \quad (3.131)$$

JSD cuántica:

La JSD cuántica está dada por (2.55)

$$JS(\rho_1||\rho_2) = S\left(\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}\right) - \frac{1}{2}S(\rho_1) - \frac{1}{2}S(\rho_2) \quad (3.132)$$

siendo $S(\cdot)$ (2.69) la entropía de von Neumann que evaluada en un estado clásico-cuántico, resulta:

$$S(\rho_1) = -\text{Tr} [\rho_1 \log \rho_1] = H(p) + \sum_i p_i S(\rho_i) \quad (3.133)$$

En esta última ecuación, $H(p) = -\sum_i p_i \log p_i$ representa la entropía de Shannon. Así,

$$S\left(\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}\right) = H(p) + \sum_i p_i S\left(\frac{\rho_i + \rho}{2}\right) \quad (3.134)$$

$$S(\rho_1) = H(p) + \sum_i p_i S(\rho_i) \quad (3.135)$$

$$S(\rho_2) = H(p) + \sum_i p_i S(\rho). \quad (3.136)$$

Se sigue que

$$JS(\rho_1||\rho_2) = \sum_i p_i \left[S\left(\frac{\rho_i + \rho}{2}\right) - \frac{1}{2}S(\rho_i) - \frac{1}{2}S(\rho) \right] = \sum_i p_i JS(\rho_i||\rho) \quad (3.137)$$

Expresiones analíticas para los estados de Bell

Veamos ahora cómo obtener las expresiones analíticas de las medidas generalizadas ($\mathcal{T}_{\mathcal{D}}$, $\mathcal{J}_{\mathcal{D}}$, $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$) para los casos de las *distancias Traza* (\mathcal{T}_{Tr} , \mathcal{J}_{Tr} , \mathcal{Q}_{Tr}), *Bures* (\mathcal{T}_B , \mathcal{J}_B , \mathcal{Q}_B) y *Hellinger* (\mathcal{T}_{He} , \mathcal{J}_{He} , \mathcal{Q}_{He}) al cuadrado, la *JSD cuántica* (\mathcal{T}_{JS} , \mathcal{J}_{JS} , \mathcal{Q}_{JS}) y la *entropía relativa* \mathcal{I} , \mathcal{J} , \mathcal{Q} , evaluadas en el conjunto de los estados BD, ver Sec. 1.2.2. Nótese que utilizaremos las distancias Bures y Hellinger al cuadrado porque satisfacen la propiedad de convexidad Pd.h -ver Cuadro 2.1.

Sea

$$\rho = \frac{1}{4}(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + c_i \sigma_i \otimes \sigma_i) \quad (3.138)$$

como en la Ec. (1.45). Los autovalores de ρ están dados por [47]

$$\lambda_0 = \frac{1}{4}(1 - c_1 - c_2 - c_3) \quad (3.139)$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{4}(1 - c_1 + c_2 + c_3) \quad (3.140)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{4}(1 + c_1 - c_2 + c_3) \quad (3.141)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{4}(1 + c_1 + c_2 - c_3) \quad (3.142)$$

Cabe aclarar que los coeficientes c_i son tales que $\{\lambda_i\}$ forman una distribución de probabilidad, $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. También, $\rho_A = \frac{1}{2}\mathbb{1}$ y $\rho_B = \frac{1}{2}\mathbb{1}$. Ahora bien, para calcular $\mathcal{J}_{\mathcal{D}}$ es preciso realizar una optimización sobre el conjunto de todas las mediciones -von Neumann- realizables sobre el subsistema A . Consecuentemente, tomamos

$$\{E_j = |j\rangle\langle j| \mid j \in \{0, 1\}\} \quad (3.143)$$

la medición tal que $\{|j\rangle\}$ es la base computacional. Cualquier otra medición proyectiva está dada por una transformación unitaria

$$\mathcal{M} = \{M_j = V|j\rangle\langle j|V^\dagger\} \quad (3.144)$$

con V un operador unitario 2×2 . Una parametrización conveniente, que ya hemos utilizado por ejemplo en el cálculo de la NCMQC para este mismo conjunto de estados Ec. (3.109), es

$$V = \mathbf{s} \cdot (\mathbb{1}_2, i\boldsymbol{\sigma}), \quad (3.145)$$

con $\mathbf{s} \in \Gamma$, y $\Gamma = \{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^4 \mid s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1\}$.

Una vez parametrizadas las mediciones posibles con el vector \mathbf{s} , y considerando los estados BD dados por (1.45), los estados condicionales del subsistema B -Ec. (1.98)- están dados por [47]

$$\rho_{B|0}^{BD}(\mathbf{s}) = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + c_i z_i(\mathbf{s})\sigma_i) \quad (3.146)$$

$$\rho_{B|1}^{BD}(\mathbf{s}) = \frac{1}{2}(\mathbb{1} - c_i z_i(\mathbf{s})\sigma_i) \quad (3.147)$$

Los coeficientes $z_i(\mathbf{s})$, que determinan las componentes en la esfera de Bloch asociada al subsistema B , de los estados condicionales, están definidos según las ecuaciones (3.90)-(3.92).

Con todo, el cálculo de las cantidades $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}$ para las medidas de distancia anteriormente listadas se puede realizar de manera directa diagonalizando ρ . Así, estas resultan:

$$\mathcal{T}_{Tr}(\rho) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 \left| \lambda_i - \frac{1}{4} \right| \quad (3.148)$$

$$\mathcal{T}_B(\rho) = 2 - \sum_{i=0}^3 \sqrt{\lambda_i} = \mathcal{T}_{He}(\rho) \quad (3.149)$$

$$\mathcal{T}_{JS}(\rho) = \frac{1}{2} \sum_i \lambda_i \log_2 \lambda_i - \frac{1}{8} \sum_i (1 + 4\lambda_i) \log_2 \left(\frac{1 + 4\lambda_i}{8} \right) - 1 \quad (3.150)$$

$$\mathcal{I}(\rho) = 2 + \sum_i \lambda_i \log_2 \lambda_i \quad (3.151)$$

Consideremos ahora el caso de las medidas generalizadas $\mathcal{J}_{\mathcal{D}}$. Al evaluar las cantidades en cuestión en los estados BD, es fácil de ver que surgen funcionales crecientes con la cantidad

$$\theta(\mathbf{s}) = \sqrt{c_1^2 z_1(\mathbf{s})^2 + c_2^2 z_2(\mathbf{s})^2 + c_3^2 z_3(\mathbf{s})^2} \quad (3.152)$$

Por lo tanto, resta maximizar $\theta(\mathbf{s})$. A tal fin, notando que los coeficientes $z_i(\mathbf{s})$ son tales que $\sum_{i=1}^3 z_i(\mathbf{s})^2 = 1$, vale:

$$\theta(\mathbf{s}) \leq c = \max\{|c_1|, |c_2|, |c_3|\}$$

para todo $\mathbf{s} \in \Gamma$. En la ref. [47] realizan el mismo procedimiento de maximización para el caso de la discordancia cuántica, es decir, para la entropía relativa como medida de distancia. Luego, dados (c_1, c_2, c_3) fijos, siempre existe un \mathbf{s}^o tal que $c = \theta(\mathbf{s}^o)$ [47]. Entonces se sigue que,

$$c = \max_{\mathbf{s} \in \Gamma} \{\theta(\mathbf{s})\} \quad (3.153)$$

Con todo, las expresiones analíticas resultan:

$$\mathcal{J}_{Tr}(\rho) = \frac{1}{2}c \quad (3.154)$$

$$\mathcal{J}_B(\rho) = 2 - \sqrt{1-c} - \sqrt{1+c} = \mathcal{J}_{He}(\rho) \quad (3.155)$$

$$\mathcal{J}_{JS}(\rho) = \frac{1}{4} \log_2 \left[\frac{-4^2(c^2-1)}{(4-c^2)^2} \right] + \frac{1}{4}c \left[\log_2 \left(\frac{2-c^2+c}{(2+c)(1-c)} \right) \right] \quad (3.156)$$

$$\mathcal{J}(\rho) = \frac{(1-c)}{2} \log_2(1-c) + \frac{(1+c)}{2} \log_2(1+c) \quad (3.157)$$

Una vez obtenidas las cantidades $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}$ y $\mathcal{J}_{\mathcal{D}}$, podemos obtener de inmediato la expresión para $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}} = \mathcal{T}_{\mathcal{D}} - \mathcal{J}_{\mathcal{D}}$.

Un hecho remarcable es que la medición von Neumann \mathcal{M}^o , que maximiza el funcional $\mathcal{J}_{\mathcal{D}}$, es la misma para los cinco casos que hemos considerado.

Expresión analítica de \mathcal{Q}_{Tr} para cualquier ρ de dos qubits

Veamos ahora cómo calcular las medidas generalizadas de correlaciones \mathcal{T}_{Tr} , \mathcal{J}_{Tr} y \mathcal{Q}_{Tr} , utilizando la distancia traza dada por la Ec. (2.44), para un estado bipartito $\hat{\rho}$ cuyas

partes A y B son representadas por dos espacios de Hilbert de dimensión dos. A tal fin, utilizamos la Forma de Fano de la matriz $\hat{\rho}$, Ec. (1.50),

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B + \frac{1}{4} \sum_{ij} T_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j$$

con T_{ij} las covarianzas definidas en (1.51). Teniendo en cuenta que las medidas de correlaciones que surgen de la distancia traza son invariantes ante transformaciones unitarias locales, en lugar de la expresión anterior para $\hat{\rho}$ consideremos la siguiente:

$$\rho = \rho_A \otimes \rho_B + \frac{1}{4} \sum_i T_{ii} \sigma_i \otimes \sigma_i \quad (3.158)$$

La deducción de la Ec. (3.19) justifica que existe un transformación unitaria local tal que, aplicada a $\hat{\rho}$, resulte ρ dado por la ecuación anterior. Dicho esto, podemos ahora sin pérdida de generalidad, calcular las medidas en cuestión para el estado ρ con T diagonal. Ahora bien, en cuanto al cálculo de las expresiones analíticas, la medida \mathcal{T}_{Tr} no implica complejidad alguna, puesto que es la suma de la raíz cuadrada de los autovalores de $(\rho - \rho_A \otimes \rho_B)^2$. Por otro lado, la medida de correlaciones clásicas-cuánticas \mathcal{J}_{Tr} , involucra una maximización sobre todas las posibles mediciones \mathcal{M} sobre A de la cantidad -Ec. (3.119)-

$$\mathcal{T}_{Tr}(\rho^{\mathcal{M}}) = \sum_k p_k K(\rho_{B|k}^{\mathcal{M}} || \rho_B) \quad (3.159)$$

donde usamos la *condición de banderas*, y $p_k = \text{Tr}[M_k \otimes \mathbb{1}\rho] = \text{Tr}[M_k \rho_A]$.

A tal fin, tenemos que calcular primero la distancia traza entre $\rho_{B|k}^{\mathcal{M}}$ y ρ_B . Utilizando la Ec. (3.158), se puede ver que

$$\rho_{B|k}^{\mathcal{M}} = \rho_B + \frac{(-1)^k}{4p_k} \sum_i T_{ii} z_i(\mathbf{s}) \sigma_i \quad (3.160)$$

donde M_k y $z_i(\mathbf{s})$ están dados por las Ec. (3.144) y (3.90)-(3.92), respectivamente. Con lo cual,

$$(\rho_{B|k}^{\mathcal{M}} - \rho_B)^2 = \frac{1}{(4p_k)^2} \left(\sum_j \alpha_j \sigma_j \right)^2 \quad (3.161)$$

siendo $\alpha_j = T_{jj} z_j(\mathbf{s})$. Como $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbb{1} + i \sum_k \epsilon_{ijk} \sigma_k$ se sigue que

$$\left(\sum_j \alpha_j \sigma_j \right)^2 = \sum_j \alpha_j^2 \mathbb{1} \quad (3.162)$$

con ϵ_{ijk} el símbolo de Levy-Civita y δ_{ij} la delta de Kronecker. En la igualdad anterior usamos que $\sum_{ij} \alpha_i \alpha_j \sum_k \epsilon_{ijk} \sigma_k = 0$.

Con todo,

$$\sqrt{(\rho_{B|k}^{\mathcal{M}} - \rho_B)^2} = \frac{1}{4p_k} \sqrt{\sum_j \alpha_j^2} \mathbb{1} \quad (3.163)$$

Por lo tanto,

$$\sum_k p_k K(\rho_{B|k} || \rho_B) = \frac{1}{2} |\bar{\alpha}| = \frac{1}{2} \sqrt{\sum_i \alpha_i^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\sum_j (T_{jj} z_j(\mathbf{s}))^2} \quad (3.164)$$

Como $\sum_j z_j(\mathbf{s})^2 = 1$ entonces $\sqrt{\sum_j (T_{jj} z_j(\mathbf{s}))^2} \leq \sqrt{T_o^2}$ con

$$T_o = \text{máx}\{|T_{11}|, |T_{22}|, |T_{33}|\} \quad (3.165)$$

Así, la medida de correlaciones clásicas-cuánticas dada por la distancia traza, en nuestro enfoque generalizado, resultan:

$$\mathcal{J}_{Tr}(\rho) = \frac{1}{2} |T_o| \quad (3.166)$$

Siguiendo este procedimiento, podemos calcular $\mathcal{Q}_{Tr} = \mathcal{T}_{Tr} - \mathcal{J}_{Tr}$.

3.2.4. Decoherencia y correlaciones cuánticas

Las *computadoras cuánticas* son dispositivos basados en sistemas del mismo tipo sobre los cuales es posible realizar distintas operaciones. Asimismo, tales sistemas pueden tomar estados iniciales, o *inputs*, que representan una superposición coherente de muchos otros estados posibles. Esta configuración inicial evoluciona a una superposición de estados finales, conocidos también como *outputs*. Los algoritmos cuánticos, i.e. secuencias de transformaciones unitarias con un fin dado, afectan simultáneamente cada elemento de la superposición generando un procesamiento masivo de información en paralelo, que da lugar a la resolución de problemas considerados intratables por una computadora clásica (Deutsch 1985, Deutsch & Jozsa 1992, Bernstein & Vazirani 1993, Simon 1994, Shor 1994, etc.) [84, 99, 100]. Esta característica distintiva, que poseen las *computadoras cuánticas*, en ocasiones se denomina «speedup».

El fenómeno denominado *decoherencia* es el principal obstáculo para la implementación directa de los dispositivos cuánticos anteriormente introducidos. Como vimos en el Capítulo 1, Sec. 1.2.5, la decoherencia hace referencia a la pérdida de los elementos fuera de la diagonal de la matriz densidad del sistema de interés, en la autobase del hamiltoniano de interacción. Tales elementos representan las correlaciones cuánticas en el sistema [99] responsables del anteriormente mencionado *speedup*.

Una descripción fenomenológica general que modela los efectos físicos más importantes que pueden ocurrir en la interacción de sistemas finitos (representados por espacios de Hilbert en dimensión finita) con ambientes *clásicos* es la *decoherencia adiabática*, que hemos trabajado al final del Capítulo 1, en la Sec. 1.2.5, siendo un caso de singular interés el conocido “modelo espín-bosón.”

En la presente sección analizaremos dos cuestiones principales 1) el comportamiento de la *discordancia cuántica*, medida que hemos introducido como representativa de las correlaciones cuánticas presentes en un sistema bipartito, entre dos espines⁹ no interactuantes acoplados cada uno a un reservorio de bosones que da lugar a una decoherencia adiabática no disipativa, como la descrita en la Sec. 1.2.5, y 2) las correlaciones cuánticas *entre variables aleatorias* que, luego de un análisis específico, identificamos como *cuánticas*.

La configuración anterior hace referencia al fenómeno conocido como *congelamiento* de la discordancia cuántica¹⁰. Veamos más en detalle a qué estamos haciendo referencia. Consideremos dos espines *A* y *B* que conjuntamente están en un estado de Bell diagonal.

⁹i.e. sistemas de dos niveles

¹⁰Freezing quantum discord

Como señalamos anteriormente, ambos espines están acoplados a un baño térmico de bosones. Si el hamiltoniano global que representa la energía de cada uno de los espines y su ambiente es -Ver (1.129), Sec. 1.2.5-

$$H = H_S \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \Lambda_S \otimes \sum_{\mathbf{k}} (g_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} + g_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger) \quad (3.167)$$

entonces la evolución del sistema $A + B$ está dada por la Ec. (1.165),

$$\Phi[\rho^{BD}] = \sum_{ij} E_i^A \otimes E_j^B \rho^{BD} (E_i^A)^\dagger \otimes (E_j^B)^\dagger \quad (3.168)$$

donde $\{E_i^X\}$, $X \in \{A, B\}$, son los operadores de Krauss del canal *phase-flip* (1.72),

$$E_0^X = \sqrt{p} \sigma_z \quad (3.169)$$

$$E_1^X = \sqrt{1-p} \mathbb{1} \quad (3.170)$$

con $p = \frac{1}{2}[1 - e^{-\Gamma(t)}]$, $\Gamma(t)$ la función de decoherencia y ρ^{BD} dado por (1.45),

$$\rho^{BD} = \frac{1}{4} \left(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + \sum_{i=1}^3 c_i(0) \sigma_i^A \otimes \sigma_i^B \right)$$

Realizando los cálculos correspondientes vemos que el estado evolucionado $\rho(t)$ permanece dentro del conjunto de los estados BD, según:

$$\Phi[\rho^{BD}] = \rho(t) = \frac{1}{4} \left(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + \sum_{i=1}^3 c_i(t) \sigma_i^A \otimes \sigma_i^B \right) \quad (3.171)$$

donde

$$c_1(t) = c_1(0) e^{-2\gamma t} \quad (3.172)$$

$$c_2(t) = c_2(0) e^{-2\gamma t} \quad (3.173)$$

$$c_3(t) = c_3(0) \quad (3.174)$$

En lo que sigue, como $0 \leq \Gamma(t)$ y tiende a infinito con t , sin pérdida de generalidad tomaremos $\Gamma(t) = \gamma t$. La evolución anterior se corresponde también con una dinámica markoviana dada por

$$\frac{d}{dt} \rho_X = \gamma [\sigma_j^X \rho_X \sigma_j^X - \rho_X] / 2 \quad (3.175)$$

con γ el factor de decaimiento [69-71, 150], $X \in \{A, B\}$ y $\{\sigma_j^X\}$ el conjunto de las matrices de Pauli correspondiente a cada subsistema.

Las ecuaciones (3.172)-(3.174) nos permiten obtener el QD en función del parámetro t , reemplazando en las Ecs. (3.151) y (3.157), de la sección anterior [69-74, 150].

Ahora bien, como se ha notado en muchos trabajos [70-72, 74, 150], el *congelamiento* de la discordancia cuántica toma lugar bajo las siguientes condiciones iniciales [72]:

$$c_2(0) = -c_1(0)c_3(0) \quad (3.176)$$

$$|c_1(0)| > |c_3(0)| \quad (3.177)$$

Así, en este caso, el QD permanece constante para todo $t \in [0, t^*]$, donde $t^* = -\frac{1}{2\gamma} \log c_0$, con $c_0 = \frac{|c_3(0)|}{|c_1(0)|}$. Sin embargo, para $t > t^*$ este empieza a decaer con t . Ver Fig. 3.6.

Este fenómeno atrajo gran atención principalmente por sugerir la posibilidad de realizar algoritmos cuánticos utilizando, como *fente* del speedup, las correlaciones cuánticas asociadas al QD, que a su vez serían «constantes» durante un periodo dado por t^* . Más aún, se ha visto que otras medidas “*tipo discord*” -y basadas en medidas de distancia entre estados- conocidas en el área de correlaciones cuánticas, presentan este mismo fenómeno de congelamiento, para múltiples intervalos de t [29, 72]. Sin embargo, es natural preguntarse si este fenómeno es un mero accidente matemático, debido a la elección particular de ciertas medidas de correlaciones, o si corresponde a un hecho físico que puede realmente dar lugar a QC constantes con t que podrían ser además «fuentes» de ciertos algoritmos cuánticos. El estudio que sigue puede encontrarse en el artículo Art. v.

Análisis vía la Matriz \mathbb{T} . Para tratar con la cuestión anterior, abordemos el enfoque sobre las correlaciones presentes en los estados cuánticos que introdujimos en la Sec. 3.1.1. Vimos que todo estado bipartito cuyos subsistemas A y B son sistemas de dos niveles, se puede escribir como -ver Ec. (1.50)-:

$$\rho = \rho_A \otimes \rho_B + \frac{1}{4} \sum_{ij} T_{ij} \sigma_i^A \otimes \sigma_j^B \quad (3.178)$$

con -Ec. (1.51)-

$$T_{ij} = \langle \sigma_i^A \otimes \sigma_j^B \rangle_\rho - \langle \sigma_i^A \otimes \mathbb{1} \rangle_\rho \langle \mathbb{1} \otimes \sigma_j^B \rangle_\rho$$

También, al comienzo de este capítulo, observamos que los coeficientes T_{ij} son la covarianza entre los observables \mathcal{S}_i^A del subsistema A (representado por el operador σ_i^A) y \mathcal{S}_j^B de B (representado por el operador σ_j^B). Además, señalamos que la *correlación* entre las magnitudes físicas anteriores está dada por

$$C_{ij} = \frac{T_{ij}}{\sqrt{\text{Var}(\mathcal{S}_i^A) \text{Var}(\mathcal{S}_j^B)}}$$

Por otro lado, como el estado ρ está definido por los estados marginales ρ_A y ρ_B y las covarianzas T_{ij} , se sigue que las correlaciones entre los subsistemas A y B , presentes en ρ , también están definidas por estos mismos elementos.

Veamos ahora un método general para contrastar el comportamiento de las covarianzas entre las variables aleatorias que definen a ρ (en el enfoque anterior, dadas por \mathcal{S}_i^A y \mathcal{S}_j^B) con el comportamiento de las medidas de correlaciones \mathcal{I} , \mathcal{J} y \mathcal{Q} , teniendo presente el objetivo final de analizar el fenómeno del congelamiento de la medida \mathcal{Q} .

Como vimos anteriormente, el estado ρ , escrito en la *forma de Fano* (3.178), no es más que la suma de su estado producto (que no cuenta con correlación alguna) y de la matriz¹¹ $\frac{1}{4} \sum_{ij} T_{ij} \sigma_i^A \otimes \sigma_j^B$. De lo anterior, resulta claro que *las correlaciones* entre los subsistemas A y B están dadas por los coeficientes de la matriz \mathbb{T} . Concretamente, la información mutua de von Neumann \mathcal{I} tiene un comportamiento representativo de los elementos T_{ij} . Puesto que en el caso de los estados de Bell, las variables aleatorias \mathcal{S}_i^X , $X \in \{A, B\}$, tienen varianzas que resultan 1 -y entonces las covarianzas T_{ij} son correlaciones- llamaremos a los elementos T_{ij} *correladores*, para distinguir estas correlaciones (entre variables aleatorias \mathcal{S}_i^A y \mathcal{S}_j^B) de las correlaciones entre los subsistemas A y B -cuantificadas por las cantidades \mathcal{I} , \mathcal{J} y \mathcal{Q} .

¹¹Esta matriz tiene traza nula, por lo que no es un estado.

Ahora bien, para calcular el QD hay que *dividir* las correlaciones clásicas¹² y las cuánticas. Para llevar a cabo una identificación similar, realizamos una medición \mathcal{M} , sobre el subsistema A , dada por $\mathbf{s} \in \Gamma$ (estamos usando la parametrización definida por la Ec. (1.57)). Así, resulta el estado *clásico-cuántico* $\rho^{\mathcal{M}}$ cuyas correlaciones (del mismo tipo) son cuantificadas por la cantidad $\mathcal{J}^{\mathcal{M}}(\rho) = \mathcal{I}(\rho^{\mathcal{M}})$. Con todo, se sigue que si descomponemos a $\rho^{\mathcal{M}}$ como

$$\rho^{\mathcal{M}} = \rho_A^{\mathcal{M}} \otimes \rho_B + \frac{1}{4} \sum_{ij} T_{ij}(\mathbf{s}) \sigma_i^A \otimes \sigma_j^B \quad (3.179)$$

con $\rho_A^{\mathcal{M}} = \sum_j M_j \rho_A M_j$, entonces la medida de correlaciones $\mathcal{J}^{\mathcal{M}}(\rho)$ será representativa de los elementos de la matriz $T_{ij}(\mathbf{s})$. Siguiendo las consideraciones anteriores, si \mathbf{s}_M es la medición óptima para la cual $\mathcal{J}^{\mathcal{M}}$ es un máximo, tenemos que la medida de correlaciones de tipo clásico-cuántico $\mathcal{J}(\rho)$ estará dada por los elementos $T_{ij}(\mathbf{s}_M)$ que, asimismo, podemos denominar como *correladores clásicos*¹³.

Aún así, ¿qué elementos de T_{ij} representa la medida de correlaciones cuánticas \mathcal{Q} ? Teniendo en cuenta que la discordancia es la *pérdida* de información como consecuencia de la medición óptima \mathbf{s}_M , la idea de nuestro método se centra en contrastar la matriz \mathbb{T} antes de medir con la que resulta luego de tal medición $\mathbb{T}(\mathbf{s}_M)$. Los elementos T_{ij} invariantes, es decir, presentes también en $\mathbb{T}(\mathbf{s}_M)$, están asociados a \mathcal{J} , por lo tanto aquellos T_{ij} *eliminados* por la medición \mathbf{s}_M , que además constituyen la única diferencia -en cuanto a las correlaciones- entre ρ y $\rho^{\mathcal{M}}$, deberían ser representados por \mathcal{Q} . Asimismo, nos referiremos a estos coeficientes como *correladores cuánticos*.

Consideremos ahora el caso de los estados BD, dados por

$$\rho = \rho^{BD} = \frac{1}{4} \left(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + \sum_i c_i \sigma_i \otimes \sigma_i \right) \quad (3.180)$$

La matriz de correlaciones \mathbb{T} toma la forma

$$\mathbb{T} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix} \quad (3.181)$$

Luego del álgebra correspondiente, cuando una medición parametrizada por las ecuaciones (3.144) y (3.145) se realiza sobre el subsistema A , se puede verificar que la matriz de correlaciones asociada con el estado luego de la medición (Ec. (3.179) con $\rho = \rho^{BD}$) puede ser escrita como,

$$\mathbb{T}(\mathbf{s}) = \begin{bmatrix} c_1 z_1(\mathbf{s})^2 & c_2 z_1(\mathbf{s}) z_2(\mathbf{s}) & c_3 z_1(\mathbf{s}) z_3(\mathbf{s}) \\ c_1 z_1(\mathbf{s}) z_2(\mathbf{s}) & c_2 z_2(\mathbf{s})^2 & c_3 z_2(\mathbf{s}) z_3(\mathbf{s}) \\ c_1 z_1(\mathbf{s}) z_3(\mathbf{s}) & c_2 z_2(\mathbf{s}) z_3(\mathbf{s}) & c_3 z_3(\mathbf{s})^2 \end{bmatrix} \quad (3.182)$$

Por otro lado, vimos que la medición \mathcal{M}^o óptima, dada por el vector \mathbf{s}_M , es tal que $\theta(\mathbf{s}) = \sqrt{c_1^2 z_1(\mathbf{s})^2 + c_2^2 z_2(\mathbf{s})^2 + c_3^2 z_3(\mathbf{s})^2}$ -Ec. (3.152)- es máximo, es decir

$$\theta(\mathbf{s}_M) = c = \max\{|c_1|, |c_2|, |c_3|\}$$

Más específicamente, tenemos los siguientes posibles casos:

¹²Siendo estrictos: clásicas-cuánticas

¹³Mas allá de que los elementos $T_{ij}(\mathbf{s}_M)$, en general, no son *correlaciones* sino covarianzas y tampoco son elementos de un estado $\rho^{\mathcal{M}}$ completamente clásico, sino, clásico-cuántico; estos definen las correlaciones \mathcal{J} -universalmente denominada *correlaciones clásicas*- por lo que de ahí preferimos simplificar el nombre

1. Si $c = |c_1| \Rightarrow |z_1(\mathbf{s}_M)| = 1, z_2(\mathbf{s}_M) = z_3(\mathbf{s}_M) = 0;$
2. Si $c = |c_2| \Rightarrow |z_2(\mathbf{s}_M)| = 1, z_1(\mathbf{s}_M) = z_3(\mathbf{s}_M) = 0;$
3. Si $c = |c_3| \Rightarrow |z_3(\mathbf{s}_M)| = 1, z_2(\mathbf{s}_M) = z_1(\mathbf{s}_M) = 0.$

con $z_i(\mathbf{s}_M)$ dados por (3.90)-(3.92).

De este modo, la matriz $\mathbb{T}(\mathbf{s}_M)$ recupera la forma diagonal en la base de Bell, con sólo un elemento no nulo dado por $c = \max\{|c_1|, |c_2|, |c_3|\}$. Por ejemplo,

- Si $c = |c_1|,$

$$\mathbb{T}(\mathbf{s}_M) = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.183)$$

- Si $c = |c_2|,$

$$\mathbb{T}(\mathbf{s}_M) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.184)$$

- Si $c = |c_3|,$

$$\mathbb{T}(\mathbf{s}_M) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}. \quad (3.185)$$

Antes de continuar con el análisis vía la matriz \mathbb{T} , veamos un comportamiento propio de los estados BD. Como señalamos anteriormente, el estado luego de medir \mathcal{M} sobre A se puede descomponer como -ver Ec. (3.45) con $\rho = \rho^{BD}$ -

$$\rho^{\mathcal{M}} = \sum_i p_i M_i \otimes \rho_{B|i}^{BD} \quad (3.186)$$

con $\rho_{B|i}^{BD}$ los estados condicionales dados por las Ec. (3.146) y (3.147):

$$\rho_{B|i}^{BD}(\mathbf{s}) = \frac{1}{2} \left(\mathbb{1} + (-1)^i \sum_k c_k z_k(\mathbf{s}) \sigma_k \right) \quad (3.187)$$

Luego, $\rho^{\mathcal{M}}$ es en principio un estado de clásico-cuántico, por lo que vimos en la Sec. 3.2.1. Sin embargo, podemos verificar directamente que los estados condicionales $\rho_{B|i}^{BD}$ conmutan:

$$\left[\rho_{B|i}^{BD}, \rho_{B|j}^{BD} \right] = \frac{1}{4} (-1)^i (-1)^j \left[\sum_k c_k z_k(\mathbf{s}) \sigma_k, \sum_k c_k z_k(\mathbf{s}) \sigma_k \right] = \mathbb{0} \quad (3.188)$$

En consecuencia, dado que existe una base común que los diagonaliza, $\rho^{\mathcal{M}}$ -Ec. (3.45)- es en realidad un estado clásico-clásico que no contiene correlaciones cuánticas¹⁴. Esta

¹⁴Es decir, existen dos variables aleatorias X y Y , que corresponden a magnitudes físicas del sistema cuántico $A + B$, tales que la información mutua cuántica $\mathcal{I}(\rho^{\mathcal{M}}) = I(X, Y)$ con $I(X, Y)$ la información mutua clásica dada por la Ec. (3.8).

es una simetría notable de los estados BD, debida a que los estados marginales son proporcionales a la identidad.

Entonces, recapitulando, teniendo en cuenta que luego de una medición un estado dado por la Ec. (3.180), puede exhibir únicamente correlaciones clásicas, los elementos de la matriz $\mathbb{T}(\mathbf{s}_M)$ -Ecs. (3.183)-(3.185)- que permanecen invariantes luego de la medición óptima \mathcal{M}^o pueden ser asociados con correlaciones de tipo clásico [39, 40, 47]. Así, los estados BD presentan sólo correlaciones clásicas en la dirección dada por $c = \max\{|c_1|, |c_2|, |c_3|\}$. Por otro lado, aquellos elementos de \mathbb{T} eliminados por la medición \mathcal{M}^o pueden ser identificados como correladores cuánticos. Por ejemplo, supongamos que $c = |c_1|$, entonces contrastando las matrices dadas por las Ecs. (3.181) y (3.183), los correladores cuánticos son c_2 y c_3 (dado que son eliminados por \mathcal{M}^o) mientras que c_1 es uno clásico. En pocas palabras, y únicamente para el caso de los estados BD, tenemos sólo un correlador clásico dado por $\max\{|c_1|, |c_2|, |c_3|\}$ mientras que los restantes son de tipo cuántico.

Volvemos ahora al análisis del congelamiento del QD; fenómeno implicado por las condiciones (3.176) y (3.177). La cuestión que intentamos dilucidar es si el hecho de que el QD se mantenga constante, por un período t^* , implica que los correladores cuánticos asociados a la medida \mathcal{Q} se comporten del mismo modo. ¿Por qué nos interesa contrastar el QD con los correladores en cuestión? Simplemente porque los elementos T_{ij} son las correlaciones entre los observables físicos (\mathcal{S}_i^A y \mathcal{S}_j^B) de los subsistemas A y B , sobre los cuales se realizan las operaciones que involucran los algoritmos cuánticos. Así, éstos elementos T_{ij} son los que modelan el comportamiento de los sistemas A y B a lo largo de un posible procesamiento de información. Si sus *correladores* son meramente clásicos entonces no habría necesidad de recurrir a matrices densidad para describir el «estado» de los sistemas y tales algoritmos podrían ser realizados empleando sistemas *clásicos*. Analicemos entonces la matriz \mathbb{T} -Ec. (3.181)- para el estado evolucionado dado por la Ec. (3.171), resulta

$$\mathbb{T} = \begin{bmatrix} c_1(0)e^{-2\gamma t} & 0 & 0 \\ 0 & c_2(0)e^{-2\gamma t} & 0 \\ 0 & 0 & c_3(0) \end{bmatrix} \quad (3.189)$$

Para ilustrar el comportamiento de los correladores y las correlaciones entre los subsistemas, cuantificadas por \mathcal{I} , \mathcal{J} y \mathcal{Q} , consideremos dos configuraciones iniciales.

Ejemplo 1: Sin “freezing”

Supongamos las constantes iniciales dadas por $c_1(0) = c_0$, $c_2(0) = -c_0$, $c_3(0) = c_0$ y $c_1(t) = c_1(0)e^{-2\gamma t}$, $c_2(t) = c_2(0)e^{-2\gamma t}$ y $c_3(t) = c_3(0)$. Como $c_1(t)$ y $c_2(t)$ decaen con el tiempo, es claro que $c(t) = \max\{|c_1(t)|, |c_2(t)|, |c_3(t)|\} = c_0$. En este caso, tenemos,

$$\mathbb{T} = \begin{bmatrix} c_0e^{-2\gamma t} & 0 & 0 \\ 0 & -c_0e^{-2\gamma t} & 0 \\ 0 & 0 & c_0 \end{bmatrix} \quad (3.190)$$

y luego de la medición óptima,

$$\mathbb{T}(\mathbf{s}_M) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_0 \end{bmatrix} \quad (3.191)$$

para todo $t \in [0, \infty)$. Por lo tanto, el elemento invariante es $T_{33} = c_0$. Así, T_{33} es un correlador clásico. Por otro lado, como los elementos $c_1(t)$ y $c_2(t)$ -que decaen con el

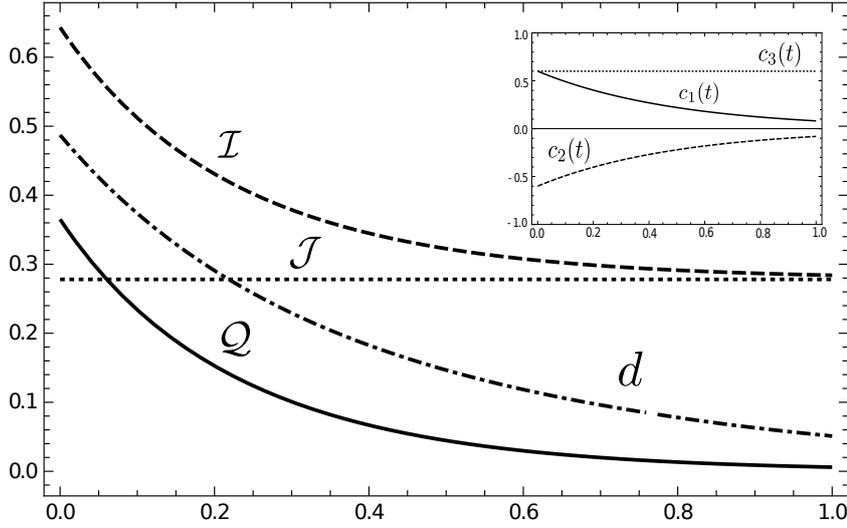


Figura 3.5: Dinámica de \mathcal{Q} (línea sólida), \mathcal{I} (línea a trazos), \mathcal{J} (línea punteada) y d (línea a trazos y puntos) como funciones de t ($\gamma = 1$) para $c_1(0) = -c_2(0) = c_3(0) = 0,6$. Todas las cantidades son adimensionales.

tiempo- son eliminados por el proceso de medición estos están asociados a las correlaciones cuánticas del estado $\rho(t)$ y los denominamos correladores cuánticos. Siguiendo nuestro análisis, la discordancia cuántica \mathcal{Q} debería decaer con el tiempo mientras que las correlaciones clásicas-cuánticas \mathcal{J} deberían permanecer constantes -al igual que T_{33} . Asimismo, la información mutua \mathcal{I} debería decaer con el tiempo hasta un punto no nulo, como la media de los elementos $c_i(t)$. Todas las medidas de correlaciones entre subsistemas, \mathcal{I} , \mathcal{J} y \mathcal{Q} , como se puede ver figura 3.5, se condicen con los comportamientos anteriormente señalados.

Ejemplo 2: Congelamiento de la discordancia cuántica

Supongamos las condiciones iniciales siguientes: $c_1(0) = 1$, $c_2(0) = -c_0$, y $c_3(0) = c_0$. La configuración anterior implica el congelamiento del QD. Graficamos el comportamiento de las medidas de correlaciones (totales, clásicas-cuánticas y cuánticas) y el de los correladores $T_{ii} = c_i(t)$ en la figura 3.6.

En este caso existe un cambio en la “forma” de la matriz $\mathbb{T}(\mathbf{s}_M)$ en t^* (efecto que da lugar a la *transición repentina* entre las correlaciones clásicas-cuánticas \mathcal{J} y la discordancia cuántica, señalada en [70]), ya que la medición óptima antes y después de t^* cambia de acuerdo con

- $t < t^* \Rightarrow |z_1(\mathbf{s}_M)| = 1, z_2(\mathbf{s}_M) = z_3(\mathbf{s}_M) = 0;$
- $t > t^* \Rightarrow |z_3(\mathbf{s}_M)| = 1, z_2(\mathbf{s}_M) = z_1(\mathbf{s}_M) = 0.$

Así, la matriz de correlación toma la forma,

$$\mathbb{T} = \begin{bmatrix} e^{-2\gamma t} & 0 & 0 \\ 0 & -c_0 e^{-2\gamma t} & 0 \\ 0 & 0 & c_0 \end{bmatrix} \quad (3.192)$$

y luego de realizar la medición óptima, para $t \in (t^*, \infty)$ tenemos $c(t) = |c_3| = |c_0|$ lo que da lugar a la siguiente matriz,

$$\mathbb{T}(\mathbf{s}_M) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_0 \end{bmatrix} \quad (3.193)$$

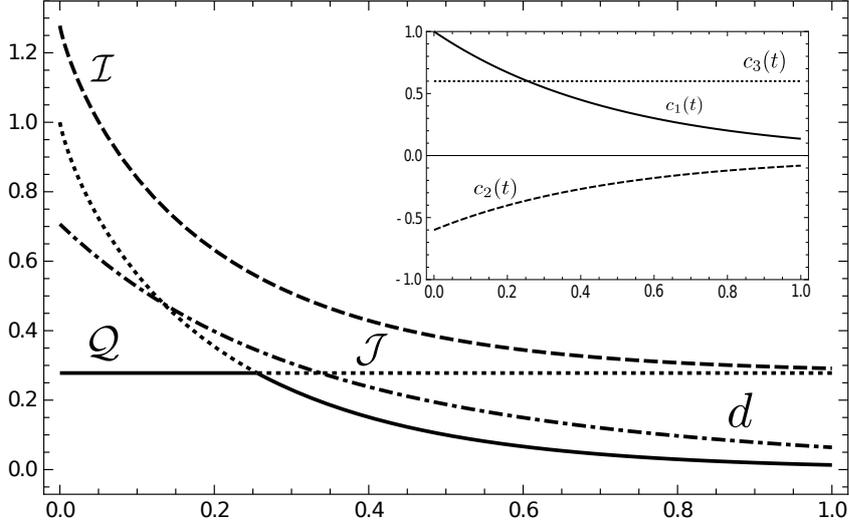


Figura 3.6: Dinámica de \mathcal{Q} (línea sólida), \mathcal{I} (línea a trazos), \mathcal{J} (línea punteada) y d (línea a trazos punteada) como funciones de t ($\gamma = 1$) para $c_1(0) = 1$, $c_3(0) = -c_2(0) = 0,6$ y $k = 3$. Todas las cantidades son adimensionales.

Con todo, $T_{33} = c_0$ es el correlador clásico mientras que $T_{11} = e^{-2\gamma t}$, $T_{22} = -c_0 e^{-2\gamma t}$ son los correladores cuánticos. Este análisis se condice con los comportamientos en la figura 3.6 donde se puede ver que mientras la medida de correlaciones clásicas-cuánticas \mathcal{J} se mantiene constante, la discordancia \mathcal{Q} decae con t . Sin embargo, para $t \in [0, t^*)$ tenemos $c(t) = |c_1(t)|$. Por lo tanto, la matriz de correlaciones toma la forma,

$$\mathbb{T}(\mathbf{s}_M) = \begin{bmatrix} e^{-2\gamma t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.194)$$

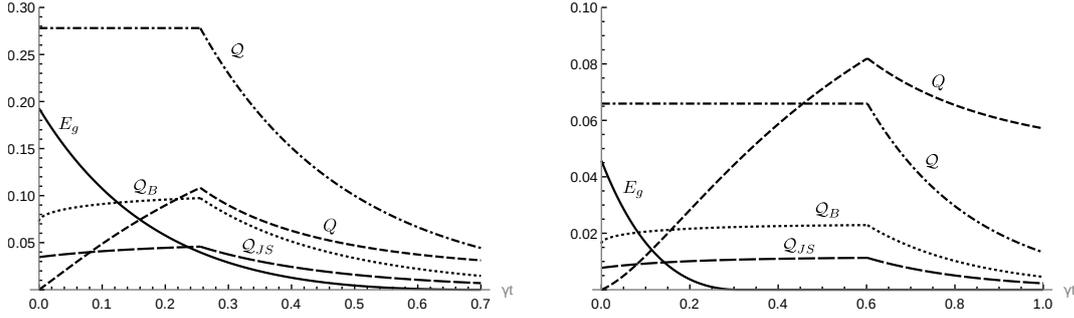
Si comparamos las Ecs. (3.194) y (3.192), podemos ver que ahora $T_{11} = e^{-2\gamma t}$ es un correlador clásico y $T_{22} = -c_0 e^{-2\gamma t}$, $T_{33} = c_0$ son cuánticos. La medida de correlaciones clásicas-cuánticas decae con el tiempo del mismo modo que la información mutua cuántica (por lo tanto, el QD se mantiene constante en este período). Analizando las correspondientes matrices, este comportamiento parece controversial puesto que sólo uno de los correladores cuánticos se mantiene invariante con t (T_{33}).

En las figuras 3.5 y 3.6 incluimos el comportamiento de la medida no conmutativa NCMQC -cuya expresión analítica para este caso está dada por la Ec. 3.109- mostrando que en ningún caso esta se mantiene constante, representando con mayor «fidelidad»¹⁵ el comportamiento promedio de los correladores identificados como cuánticos.

Entrelazamiento, disonancia y las medidas generalizadas $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$.

Por otro lado, el análisis de las correlaciones vía la matriz \mathbb{T} para el caso de estados BD bajo una evolución dada por la Ec. (1.165) es también válido para las medidas generalizadas $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}$, $\mathcal{J}_{\mathcal{D}}$ y $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$, para los casos particulares considerados en la la Sec. 3.2.3 puesto que la medición óptima \mathcal{M}^o es la misma para todas los funcionales \mathcal{D} considerados en tal sección.

¹⁵La NCMQC decae con t hasta un punto no nulo en t^* . La representatividad de los correladores por parte de esta medida es similar a la misma de la información mutua cuántica.



(a) Dinámica de las medidas generalizadas para las distancias Hellinger/Bures Q_B , la discordancia cuántica Q , el entrelazamiento E_g y la disonancia Q como funciones de t ($\gamma = 1$) para $c_1(0) = 1$, $c_2(0) = -c_3(0)$, $c_3(0) = 0,6$. Todas las cantidades son adimensionales.

(b) Dinámica de las medidas generalizadas para las distancias Hellinger/Bures Q_B y la discordancia cuántica Q , el entrelazamiento E_g y la disonancia Q como funciones de t para $c_1(0) = 1$, $c_2(0) = -c_3(0)$, $c_3(0) = 0,3$. Todas las cantidades son adimensionales.

Figura 3.7: Medidas generalizadas para las distancias Bures (Hellinger) y la JSD cuántica, en comparación con la discordancia cuántica, la disonancia y entrelazamiento geométricos.

En las figuras 3.7(a) y 3.7(b) ilustramos los comportamientos de las medidas generalizadas de correlaciones cuánticas para los casos de las distancias Bures (Hellinger) al cuadrado, la JSD cuántica y la entropía relativa (que da lugar a la discordancia cuántica), en comparación con las medidas geométricas de entrelazamiento E_g y disonancia Q -Ecs. (3.49) y (3.50), con \mathcal{D} la entropía relativa S . La medida restante Q_{Tr} tienen un comportamiento similar al de Q_B y Q_{JS} , es decir, *creciente* en los periodos en los que la discordancia cuántica permanece constante. Por otro lado, la disonancia muestra un crecimiento similar [70] bajo las condiciones de *freezing* (3.176) y (3.177); comportamiento contrapuesto al del entrelazamiento que presenta un decaimiento con t . En la referencia [70], los autores insinúan una posible motivación al congelamiento del QD, conjeturando que el mismo en general es representativo de la “suma” del entrelazamiento y la disonancia. Como, en la región de *freezing* el entrelazamiento cae con t mientras que la disonancia crece, parecería lógico, bajo la consideración anterior, que el QD sea constante. Podemos ver fácilmente un contraejemplo de la afirmación anterior en la figura 3.7(b), en la cual existe una región (dentro de $[0, t^*]$) en la que: a) la disonancia, b) el entrelazamiento es nulo y c) el QD es constante, lo que implicaría un crecimiento del QD. Más aún, podemos elegir condiciones iniciales $\{c_i(0)\}$ tales que exista una región de congelamiento del QD y para la cual el entrelazamiento es nulo, mientras que la disonancia es monótonamente creciente.

Con todo, el análisis vía la matriz \mathbb{T} indica que aquellos correladores identificados como cuánticos en promedio decaen con t . Así, Q_{Tr} , Q_{JS} , Q_B , Q_{He} y Q presentan comportamientos no representativos de los correladores anteriores. Sin embargo, un hecho notable es que las medidas generalizadas de correlaciones totales \mathcal{I}_{Tr} , \mathcal{I}_{JS} , \mathcal{I}_B , \mathcal{I}_{He} y \mathcal{I} , representan todas ellas el comportamiento promedio de los elementos de la matriz \mathbb{T} -Ec. (3.181). Lo mismo ocurre con las medidas de correlaciones clásicas-cuánticas: \mathcal{J}_{Tr} , \mathcal{J}_{JS} , \mathcal{J}_B , \mathcal{J}_{He} y \mathcal{J} , cuyos «perfiles» son similares a los correladores identificados como *clásicos*. La conclusión anterior es de radical importancia, concretamente porque parece sugerir que el enfoque aditivo para cuantificar correlaciones (es decir, plantear que la «cantidad» de correlaciones totales en un estado es la suma de la cantidad de correlaciones clásicas-cuánticas y cuánticas: $\mathcal{T}_{\mathcal{D}} = \mathcal{J}_{\mathcal{D}} + Q_{\mathcal{D}}$) es al menos discutible.

Analicemos ahora más profundamente la NCMQC, como cuantificador de correlaciones

cuánticas que podrían ser «fuentes» según la teoría de recursos.

3.2.5. Criterios adicionales para cuantificar correlaciones cuánticas.

Como vimos al comienzo de la presente sección -Sec. 3.2- una de las medidas más utilizadas de correlaciones cuánticas en sistemas bipartitos es la *discordancia cuántica* [39, 40], que esencialmente cuantifica la discrepancia entre dos versiones cuánticas de dos expresiones -clásicamente equivalentes- para la información mutua cuántica. Aunque desde el punto de vista conceptual, el QD es relevante para evaluar los posibles «recursos» cuánticos para el procesamiento de la información, este presenta algunos inconvenientes prácticos. Por ejemplo, en este momento no existe un criterio simple y directo para verificar la presencia de *discord* en un determinado QS bipartito. Además, como vimos anteriormente, teniendo en cuenta que la evaluación del QD implica un procedimiento de optimización, las expresiones analíticas del mismo se conocen solo en algunos casos particulares [29]. Por otra parte, en general, el cálculo del QD es una tarea compleja, debido a que tal procedimiento de optimización involucra un barrido sobre un conjunto completo de mediciones sobre uno de los subsistemas [46].

Con el objetivo de encontrar caminos alternativos para cuantificar correlaciones cuánticas, se han propuesto varias medidas afines, además del QD [29, 52, 62], y se ha discutido sobre el conjunto de propiedades *deseables* que tales medidas de correlaciones *bien comportadas* deberían satisfacer [27, 28, 63].

Hasta aquí hemos revisado las condiciones necesarias C.N.1)-C.N.5), en la Sec. 3.2.3. A continuación, nos enfocaremos en aquellos criterios que son relevantes *en el contexto de las teorías de recursos* [27]. A su vez, estas teorías resumidamente establecen que una medida válida, sobre una *resource* particular, debería ser monótonamente no creciente bajo la aplicación de ciertas operaciones denominadas *libres*. Para un sistema bipartito $A + B$, y considerando como «fuente» las correlaciones cuánticas (con respecto al subsistema A) estos mapas *libres* son las Operaciones Locales que Preservan la Conmutatividad (LCPO, por las siglas en inglés) en A y las operaciones locales en B (i.e. mapas CPTP -ver Sec. 1.2.3). Según vimos en la sección 1.2.3, un LCPO corresponde a un mapa $\Delta[\cdot]$ completamente positivo que preserva la traza, es decir CPTP, y además la conmutatividad [27], es decir, $[\Delta[\rho], \Delta[\sigma]] = 0 \quad \forall \rho, \sigma$ tal que $[\rho, \sigma] = 0$.

Con todo, a continuación nos enfocaremos en analizar la validez de los siguientes criterios *adicionales*,

C.N.4) La cantidad de correlaciones cuánticas (en sentido $A \rightarrow B$) no debe crecer ante la aplicación de mapas LCPO en A ;

C.N.5) La cantidad de correlaciones cuánticas (en sentido $A \rightarrow B$) no debe crecer ante la realización de operaciones cuánticas sobre el subsistema B ,

para el casos de la NCMQC -Ec (3.78)..

La NCMQC bajo las operaciones libres.

Antes de analizar el criterio C.N.4), repasemos algunas propiedades importantes sobre los mapas LCPO, primeramente señaladas en la Sec. 1.2.3.

Sea Δ_A un mapa LCPO. Si $\dim \mathcal{H}_A = 2$, entonces todo mapa LCPO en A es *unital* o *completely decohering* [151], que también es unital¹⁶. Por lo tanto, para $\dim \mathcal{H}_A = 2$, todo

¹⁶Recordemos que un mapa $\Phi[\cdot]$ se dice que es unital si $\Phi[\mathbb{1}] = \mathbb{1}$, ver Sec. 1.2.3 mientras que un mapa *completely decohering* $\Phi[\cdot]$ es tal que $\Phi[\rho] = \sum_i p_i |i\rangle \langle i|$, por alguna base ortonormal $\{|i\rangle\}$ y probabilidades $\{p_i\}$.

Δ_A es un mapa unital. Si en cambio $\dim \mathcal{H}_A > 2$, los LCPO son *isotrópicos* o *completely decohering* [116, 152].

Para calcular la NCMQC tenemos que descomponer el estado del sistema global como

$$\rho = \sum_{i,j} A_{ij} \otimes |i_B\rangle\langle j_B| \quad (3.195)$$

donde $\{|i_B\rangle\}$ es un BON de \mathcal{H}_B , y

$$A_{ij} = \text{Tr}_B[(\mathbb{1}_A \otimes |j_B\rangle\langle i_B|)\rho] \quad (3.196)$$

Sea ρ' el estado que resulta de la aplicación del mapa $\Phi = \Delta_A \otimes \mathbb{1}_B$,

$$\rho' = (\Delta_A \otimes \mathbb{1}_B)[\rho] \quad (3.197)$$

Teniendo en cuenta la Ec. (3.196) tenemos que

$$A'_{ij} = \text{Tr}_B[\mathbb{1}_A \otimes |j_B\rangle\langle i_B| \rho'] \quad (3.198)$$

con

$$\rho' = \sum_{ij} \Delta_A[A_{ij}] \otimes |i_B\rangle\langle j_B| \quad (3.199)$$

De este modo, de la Ec. (3.195) podemos identificar $A'_{ij} = \Delta_A[A_{ij}]$. Luego, los conmutadores que tenemos que caracterizar son los siguientes:

$$[A'_{ij}, A'_{kl}] = [\Delta_A[A_{ij}], \Delta_A[A_{kl}]]. \quad (3.200)$$

Tenemos entonces que ver que la NCMQC para ρ' es menor o igual que la NCMQC evaluada en ρ . Las afirmaciones siguientes están hechas para una representación de los estados, dada por la base $\{|i_B\rangle\}$, fija pero sobre la cual no hemos impuesto condición alguna. Esto sería equivalente a la medida D_G (NCMQD). Sin embargo, las demostraciones que siguen también valen para la base óptima que da lugar a la medida NCMQC.

Supongamos entonces $\dim \mathcal{H}_A = 2$. Comencemos expresando las matrices 2×2 $\{A_{ij}\}$ y $\{A'_{ij}\}$ en términos de la matriz identidad 2×2 $\mathbb{1}_2$, y $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, con $\{\sigma_i\}$ las matrices de Pauli; así

$$A_{ij} = \mathbf{d}_{ij} \cdot (\mathbb{1}_2, \boldsymbol{\sigma}), \quad (3.201)$$

$$A'_{ij} = \mathbf{e}_{ij} \cdot (\mathbb{1}_2, \boldsymbol{\sigma}), \quad (3.202)$$

donde $\mathbf{d}_{ij} = (d_{ij}^0, d_{ij}^1, d_{ij}^2, d_{ij}^3)$ y $\mathbf{e}_{ij} = (e_{ij}^0, e_{ij}^1, e_{ij}^2, e_{ij}^3)$ son vectores complejos. El conmutador $[A_{ij}, A_{kl}]$ resulta

$$[A_{ij}, A_{kl}] = \beta_{ijkl}^{(12)} \sigma_3 + \beta_{ijkl}^{(31)} \sigma_2 + \beta_{ijkl}^{(23)} \sigma_1 \quad (3.203)$$

donde hemos definido $\beta_{ijkl}^{(mn)} = 2i(d_{ij}^m d_{kl}^n - d_{ij}^n d_{kl}^m)$. Esto da como resultado,

$$\|[A_{ij}, A_{kl}]\|_2^2 = 2 \left(|\beta_{ijkl}^{(12)}|^2 + |\beta_{ijkl}^{(31)}|^2 + |\beta_{ijkl}^{(23)}|^2 \right). \quad (3.204)$$

Teniendo en cuenta la igualdad en Ec. (3.202), obtenemos expresiones equivalentes para las matrices $\{A'_{ij}\}$:

$$\|[A'_{ij}, A'_{kl}]\|_2^2 = 2 \left(|\eta_{ijkl}^{(12)}|^2 + |\eta_{ijkl}^{(31)}|^2 + |\eta_{ijkl}^{(23)}|^2 \right), \quad (3.205)$$

siendo $\eta_{ijkl}^{(mn)} = 2i \left(e_{ij}^m e_{kl}^n - e_{ij}^n e_{kl}^m \right)$.

Ahora, como estamos considerando mapas sobre sistemas de dos niveles, utilizamos la parametrización que hemos establecido en la Sec. 1.2.3. Recapitulando, vimos que todo mapa completamente positivo que preserva la traza Φ es un espacio bidimensional que mapea el operador $\hat{M} = \mathbf{m} \cdot (\mathbb{1}_2, \boldsymbol{\sigma})$ en $\hat{M}' = \mathbf{m}' \cdot (\mathbb{1}_2, \boldsymbol{\sigma})$, está completamente caracterizado por la siguiente transformación de los vectores correspondientes:

$$\mathbf{m}' = \mathbb{T} \mathbf{m}, \quad (3.206)$$

donde

$$\mathbb{T} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{t}^\top & T \end{bmatrix}, \quad (3.207)$$

con $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$, $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)$, y T la matriz 3×3 dada por

$$T = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

tal que

$$|\lambda_k| \leq 1 - |t_k| \leq 1 \quad (3.208)$$

Luego, para mapas unital vale: $\mathbf{t} = \mathbf{0}$. Cabe destacar que esta es una parametrización general para cualquier mapa que preserva la traza aplicado sobre matrices 2×2 , a menos de transformaciones unitarias -ver Sec. 1.2.3-, que no nos interesan puesto que ya hemos visto que la medida de correlaciones en cuestión es invariante ante las mismas.

Consecuentemente, la Ec. (3.206) implica $\mathbf{e}_{ij} = \mathbb{T} \mathbf{d}_{ij}$, con $\mathbf{t} = \mathbf{0}$, y por consiguiente $\eta_{ijkl}^{(mn)} = \lambda_m \lambda_n \beta_{ijkl}^{(mn)}$. Teniendo en cuenta (3.208) resulta $|\eta_{ijkl}^{(mn)}|^2 \leq |\beta_{ijkl}^{(mn)}|^2$, y comparando las Ecs. (3.204) y (3.205) vemos que

$$\|[A'_{ij}, A'_{kl}]\|_2 \leq \|[A_{ij}, A_{kl}]\|_2. \quad (3.209)$$

Esta desigualdad implica que para cualquier mapa LCPO (unital) sobre A , cuya matriz resultante sea ρ' vale:

$$D_G(\rho') \leq D_G(\rho)$$

siendo $D_G(\rho)$ la medida de no conmutatividad -Ec. (3.72)- para una descomposición aleatoria dada por la Ec. (3.195). Por lo tanto, consecuentemente, tenemos que la medida NCMQC $d(\cdot)$ -Ec. (3.78)-, no se incrementa bajo cualquier LCPO siempre que $\dim \mathcal{H}_A = 2$.

Supongamos ahora $\dim \mathcal{H}_A > 2$, en tal caso cualquier mapa LCPO es *completely decohering*, o isotrópico. El primer caso es trivial, dado que cualquier mapa *completely decohering* en A mapea un estado ρ en uno clásico-cuántico (3.29). Dado que $D_G(\rho) = d(\rho) = 0$ siempre que $\rho \in \mathcal{CS}$ (conjunto de los estados clásico-cuánticos), se sigue de manera directa que D_G o d no crecen ante la aplicación de este tipo de mapas en A . Por lo tanto, en lo que sigue nos concentramos únicamente en mapas isotrópicos sobre A .

Un mapa isotrópico Φ^{iso} se puede representar como

$$\Phi^{\text{iso}}[\rho] = p \Gamma[\rho] + (1-p) \frac{\mathbb{1}_d}{d} \text{Tr} \rho, \quad (3.210)$$

con $d = \dim \mathcal{H}$, y Γ una operación unitaria o antiunitaria [27, 116, 152]. Como se explica en detalle en la ref. [153], para que el mapa Φ^{iso} sea completamente positivo, el parámetro p debe estar en $\frac{-1}{d^2-1} \leq p \leq 1$ cuando Γ es un unitario, y, por otro lado, tiene que estar en

el conjunto dado por $\frac{-1}{d-1} \leq p \leq \frac{1}{d+1}$ en el caso restante de Γ antiunitario. Cabe destacar que $p^2 \leq 1$ en cualquier caso.

De la Ec. (3.200) con $\Delta_A = \Phi^{\text{iso}}$ tenemos que

$$[A'_{ij}, A'_{kl}] = p^2 [\Gamma[A_{ij}], \Gamma[A_{kl}]]. \quad (3.211)$$

Para el caso unitario escribimos $\Gamma[\rho] = U\rho U^\dagger$, entonces

$$[A'_{ij}, A'_{kl}] = p^2 U[A_{ij}, A_{kl}]U^\dagger, \quad (3.212)$$

y por lo tanto

$$\|[A'_{ij}, A'_{kl}]\|_2 = p^2 \|[A_{ij}, A_{kl}]\|_2 \leq \|[A_{ij}, A_{kl}]\|_2. \quad (3.213)$$

Como en el caso de la Ec. (3.209), esto último implica

$$D_A(\rho') \leq D_A(\rho), \quad d_A(\rho') \leq d_A(\rho). \quad (3.214)$$

Para el caso antiunitario tenemos $\Gamma[\rho] = U\rho^\top U^\dagger$, así

$$[A'_{ij}, A'_{kl}] = p^2 U[A_{ij}^\top, A_{kl}^\top]U^\dagger, \quad (3.215)$$

entonces, teniendo en cuenta la invariancia de la norma de Hilbert-Schmidt ante la transposición de su argumento, llegamos a

$$\|[A'_{ij}, A'_{kl}]\|_2 = p^2 \|[A_{ij}^\top, A_{kl}^\top]\|_2 \leq \|[A_{ij}, A_{kl}]\|_2, \quad (3.216)$$

Con todo, llegamos finalmente a demostrar el comportamiento no creciente de la medida D_G y, por lo tanto, de la NCMQC $d(\cdot)$ (Eq. (3.214)) bajo mapas isotrópicos en A .

Veamos ahora el caso del segundo criterio adicional C.N.5), considerando $\dim \mathcal{H}_A = \dim \mathcal{H}_B = 2$, y tomando la clase de estados ρ tales que ρ_A y ρ_B son máximamente mixtos. Esto es, analizaremos el criterio C.N.5) para los estados BD (1.45):

$$\rho = \frac{1}{4} \left(\mathbb{1}_A \otimes \mathbb{1}_B + \sum_k c_k \sigma_k \otimes \sigma_k \right), \quad (3.217)$$

con c_k constantes reales. La Ec. (3.196) resulta:

$$A_{ij} = \frac{1}{4} \mathbb{1}_A \delta_{ij} + \frac{1}{4} \sum_k c_k \sigma_k^{ij} \sigma_k, \quad (3.218)$$

donde $\sigma_k^{ij} = \langle i_B | \sigma_k | j_B \rangle$. Los conmutadores entonces toman las expresiones

$$[A_{ij}, A_{kl}] = \frac{i}{8} \left[c_1 c_2 \alpha_{ijkl}^{(12)} \sigma_3 + c_1 c_3 \alpha_{ijkl}^{(31)} \sigma_2 + c_2 c_3 \alpha_{ijkl}^{(23)} \sigma_1 \right], \quad (3.219)$$

con $\alpha_{ijkl}^{(mn)} = \sigma_m^{ij} \sigma_n^{kl} - \sigma_n^{ij} \sigma_m^{kl}$. Esto nos da

$$\|[A_{ij}, A_{kl}]\|_2^2 = \frac{1}{2^5} \left(|c_1 c_2|^2 \left| \alpha_{ijkl}^{(12)} \right|^2 + |c_1 c_3|^2 \left| \alpha_{ijkl}^{(31)} \right|^2 + |c_2 c_3|^2 \left| \alpha_{ijkl}^{(23)} \right|^2 \right). \quad (3.220)$$

Consideremos ahora el estado transformado $\rho' = (\mathbb{1}_A \otimes \Phi)\rho$, obtenido bajo la aplicación de un mapa Φ CPTP sobre el subsistema B ,

$$\rho' = \frac{1}{4} \left(\mathbb{1}_A \otimes \Phi[\mathbb{1}_B] + \sum_k c_k \sigma_k \otimes \Phi[\sigma_k] \right). \quad (3.221)$$

Denotando con \mathbf{x}_j el vector que tiene 1 en la j -ésima ($j = 1, 2, 3$) posición, y ceros en las demás entradas, podemos definir $\mathbf{s}_j = (0, \mathbf{x}_j)$ y escribir $\mathbf{s}_j \cdot (\mathbb{1}, \boldsymbol{\sigma}) = (0, \mathbf{x}_j) \cdot (\mathbb{1}, \boldsymbol{\sigma}) = \sigma_j$. Con esto, y escribiendo $\mathbb{1}_B = \mathbf{d} \cdot (\mathbb{1}, \boldsymbol{\sigma})$ con $\mathbf{d} = (1, \mathbf{0})$, teniendo en cuenta la Ec. (3.206), obtenemos

$$\Phi[\mathbb{1}_B] = \mathbb{1}'_B = (\mathbb{T}\mathbf{d}) \cdot (\mathbb{1}, \boldsymbol{\sigma}) = (1, \mathbf{t}) \cdot (\mathbb{1}, \boldsymbol{\sigma}), \quad (3.222)$$

$$\Phi[\sigma_j] = \sigma'_j = (\mathbb{T}\mathbf{s}_j) \cdot (\mathbb{1}, \boldsymbol{\sigma}) = \lambda_j[\mathbf{s}_j \cdot (\mathbb{1}, \boldsymbol{\sigma})] = \lambda_j\sigma_j. \quad (3.223)$$

Utilizando las Ecs. (3.221)-(3.223) calculamos los conmutadores que resultan de la aplicación del mapa,

$$\begin{aligned} \left\| \left[A'_{ij}, A'_{kl} \right] \right\|_2^2 &= \frac{1}{2^5} \left(|\lambda_1\lambda_2|^2 |c_1c_2|^2 |\alpha_{ijkl}^{12}|^2 + \right. \\ &\left. + |\lambda_1\lambda_3|^2 |c_1c_3|^2 |\alpha_{ijkl}^{31}|^2 + |\lambda_2\lambda_3|^2 |c_2c_3|^2 |\alpha_{ijkl}^{23}|^2 \right) \end{aligned} \quad (3.224)$$

Finalmente, dado que $|\lambda_j| \leq 1$ (Ec. (3.208)), comparando las Ecs. (3.220) y (3.224) vemos que

$$\left\| \left[A'_{ij}, A'_{kl} \right] \right\|_2^2 \leq \left\| \left[A_{ij}, A_{kl} \right] \right\|_2^2, \quad (3.225)$$

y así llegamos a la Ec. (3.209), que demuestra el comportamiento no creciente de D_G y $d(\cdot)$ ante operaciones realizadas sobre B para los estados BD (1.45).

Los resultados anteriores están resumidos en el artículo Art. III.

¿Qué podemos decir sobre el comportamiento de las medidas generalizadas $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$ bajo las operaciones libres? El criterio C.N.4) es tema de estudio todavía para nosotros y constituye un enorme desafío derivar condiciones para la medida de distancia \mathcal{D} de manera tal que la cantidad de correlaciones cuánticas $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$ lo satisfaga. Más aún, es remarcable el hecho de el criterio C.N.4) no está demostrado para la principal medida de correlaciones cuánticas: la discordancia $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$ con \mathcal{D} la entropía relativa cuántica S . Sin embargo, sí se ha demostrado que el segundo criterio adicional C.N.5) [123] sea en efecto válido para el QD. En el caso de las medidas generalizadas, hemos podido derivar una condición suficiente sobre \mathcal{D} para la valía de la condicional adicional en cuestión sobre $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$. A saber:

Proposición VI Si $\mathcal{D}(\cdot|\cdot)$ satisface todas las condiciones necesarias para $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$ bien definido (ver Sec. 3.2.3) además de la propiedad siguiente:

- Dado $\sigma_{ABE} \in \mathcal{B}_1^+(\mathcal{H}_{ABE})$, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_E$, la cantidad

$$\mathcal{D}(\sigma_{ABE}|\sigma_{AE} \otimes \sigma_B) - \mathcal{D}(\sigma_{AB}|\sigma_A \otimes \sigma_B) \quad (3.226)$$

es invariante ante el intercambio de los subsistemas B y E . Siendo las matrices σ en los argumentos de $\mathcal{D}(\cdot|\cdot)$ las matrices reducidas de σ_{ABE} ; Por ejemplo: $\sigma_{AE} = \text{Tr}_B[\sigma_{ABE}]$

entonces $\mathcal{Q}_d(\rho)$ no crece ante operaciones locales sobre el subsistema B .

En la referencia [123] está demostrada la validez del criterio C.N.5) para el caso de la discordancia cuántica. La prueba hace uso de las propiedades de la entropía de von Neumann. Sin embargo, la Proposición (VI) puede ser reproducida siguiendo la misma línea de razonamientos empleada en Ref. [123].

Cabe aclarar que, si la condición suficiente sobre \mathcal{D} no se cumple, $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}(\rho)$ podría cumplir de igual modo el criterio adicional que nos ocupa. En tal caso, un análisis caso por caso es necesario para determinar la validez del mismo.

Cerramos entonces lo referente a las correlaciones en sistemas cuánticos bipartitos. Antes de pasar a otros temas, es importante marcar el cambio de paradigma en el área de Correlaciones dentro de la información cuántica, utilizando como figuras de mérito dos frases: La primera, de E. Schrödinger, refiriéndose al entrelazamiento [154],

*“When two systems, of which we know the states by their respective representation, enter into a temporary physical interaction due to known forces between them and when after a time of mutual influence the systems separate again, then they can no longer be described as before, viz., by endowing each of them with a representative of its own. I would not call that one but rather the characteristic trait of quantum mechanics.”*¹⁷

y la segunda de S. Luo [67],

*“The most significant characteristic of quantum mechanics is the noncommutativity, which has the physical consequence that generic measurements usually disturb the quantum system and thus destroy quantum correlations, in striking contrast to the classical realm in which unperturbed measurements are always possible.”*¹⁸

Resumen Definimos la información mutua cuántica presentándola como uno de los principales cuantificadores de correlaciones entre subsistemas cuánticos. Clasificamos los estados bipartitos en función de sus correlaciones como clásicos-clásicos, clásicos-cuánticos, cuánticos-cuánticos (o separables en el contexto del entrelazamiento) y cuánticos. Resumimos el algoritmo DQC1 para calcular la traza de una matriz unitaria, que utiliza una bipartición de estados cuánticos-cuánticos. Incluimos una medida de correlaciones clásicas-clásicas y clásicas-cuánticas basada en la información de von Neumann. Presentamos el panorama general de correlaciones en un estado bipartito cuántico haciendo uso de un enfoque geométrico. Definimos entrelazamiento y la discordancia cuántica, como medidas correlaciones cuánticas. Vimos cómo cuantificar alternativamente QC estimando el grado de conmutación de ciertos bloques específicos. Señalamos los problemas principales de la medida NCMQD. Propusimos una medida afín y adecuada basada en la anterior denominada NCMQC.

En cuanto al esquema de cuantificación asociado a la discordancia cuántica, presentamos una generalización en función del concepto de distinguibilidad, derivando condiciones suficientes para las medidas de distancia en cuestión. Presentamos las principales expresiones analíticas para el caso de dimensión estados BD.

Analizamos el fenómeno de congelamiento del QD, que involucra una *decoherencia adiabática no disipativa*, utilizando la forma de Fano y la NCMQC, mostrando que

¹⁷“Cuando dos sistemas, de los cuales conocemos sus respectivos estados, entran en una interacción física temporal debido a fuerzas entre ellos y, después de un tiempo de influencia mutua entre ellos, los sistemas se separan nuevamente, entonces ya no pueden describirse como antes, es decir, dotando a cada uno de ellos de una representatividad propia. No denominaría a esto como una propiedad, sino como el rasgo característico de la mecánica cuántica.”

¹⁸La característica más significativa de la mecánica cuántica es la no conmutatividad, que tiene la consecuencia física de que las mediciones genéricas perturban -generalmente- el sistema cuántico y, por lo tanto, destruyen las correlaciones cuánticas, en contraste con el caso *clásico* en que las mediciones no perturbadoras siempre son posibles.

ésta última representa la media de los *correladores* identificados como cuánticos con mayor fidelidad que la discordancia.

Por último, estudiamos los criterios adicionales para cuantificar correlaciones cuánticas que *podrían* ser fuentes, en el caso de la NCMQC y las medidas generalizadas en función de la distinguibilidad. Este estudio señala fuertemente la validez de la NCMQC como medida de una fuente, según la teoría de recursos (para el caso de estados BD, hemos podido reproducir las demostraciones satisfactoriamente).

Comunicación y distinguibilidad

Los primeros investigadores en la teoría de información cuántica se preocuparon por la cuestión de transmitir información clásica¹ utilizando medios ópticos [11]. Seguidamente, las investigaciones de aquel entonces condujeron al uso del formalismo de la QM puesto que los medios empleados para la transmisión de información eran haces de luz *coherente*². Los primeros investigadores de la teoría de la información cuántica fueron Helstrom, Gordon, Stratonovich y Holevo. Gordon (1964) conjeturó por primera vez una cota para la cantidad de información clásica codificable utilizando estados cuánticos (i.e. sistemas cuánticos) y Levitin (1969) conjeturó otro límite sin prueba alguna. Luego, en 1973, Holevo proporcionó la demostración de la conjetura de Levitin [76]. Este importante límite ahora se conoce como *la cota Holevo*, y es útil para probar *converse theorems* (teoremas sobre optimización) en la teoría cuántica de Shannon [20]. La implicancia más simple de la cota Holevo es que no se puede transmitir más de un *bit clásico* de información utilizando un *qubit* (i.e. un sistema de dos niveles).

Veamos a continuación cómo modelar la transmisión de información clásica utilizando medios cuánticos, y cómo se definen «información accesible» y la «cota Holevo».

4.1. Esquema de comunicación y cantidades afines

Consideremos un sistema cuántico Q representado por un espacio de Hilbert \mathcal{H}_Q . Este sistema es compartido por dos entidades, comúnmente denominadas como *Alice* y *Bob*. En un esquema de comunicación, el primero tiene una fuente de información clásica $X = \{x_0, \dots, x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, y $p_i = \text{Prob}(X = x_i)$ la cual refiere a la probabilidad de ocurrencia del valor x_i .

Si tenemos $X = x_i$, entonces Alice prepara un estado cuántico ρ_i perteneciente al ensamble $\{\rho_0, \dots, \rho_n\} \subset B_1^+(\mathcal{H}_Q)$. El objetivo central es comunicar a la contraparte -Bob- el resultado $X = x_i$ por medio del *ensamble de estados* $\{\rho_i\}$. En consecuencia, Bob realiza una medición sobre el sistema Q descrita por la POVM $\mathcal{M} = \{M_0, \dots, M_m\}$, $m \in \mathbb{N}$.

El resultado de la medición constituye una nueva variable aleatoria $Y^{\mathcal{M}} = \{y_0, \dots, y_m\}$ con una probabilidad de ocurrencia dada por $q_j = \text{Tr}[M_j \rho]$ siendo $\rho = \sum_i p_i \rho_i$.

La probabilidad condicional de obtener el resultado de la medición $Y^{\mathcal{M}} = y_j$ dado que $X = x_i$, como vimos anteriormente en la Sec. 1.1, es $q_{j|i} = \text{Tr}[\sqrt{M_j} \rho_i \sqrt{M_j}]$; por lo tanto, la probabilidad conjunta de las variables X e $Y^{\mathcal{M}}$ está dada por $P(X = x_i, Y^{\mathcal{M}} = y_j) = P_{ij} = p_i q_{j|i}$.

Como es de esperarse, la información que Bob obtiene sobre X depende de medición particular que realice, \mathcal{M} , mientras que esta información *obtenida* la podemos cuantificar haciendo uso de la *información mutua* -Ec. (3.8)- $I(X, Y^{\mathcal{M}})$ [155] que podemos escribir

¹Información clásica es todo aquello que se puede ser transmitido como un conjunto finito de símbolos (“A mathematical theory of communication”, C. E. Shannon).

²Los estados de luz coherentes son estados cuánticos especiales que un láser «coherente» emite idealmente.

como:

$$I(X, Y^{\mathcal{M}}) = H(X) + H(Y^{\mathcal{M}}) - H(X, Y^{\mathcal{M}}) \quad (4.1)$$

donde, ver Sec. 1.1,

$$\begin{aligned} H(X) &= - \sum_{i=0}^n p_i \log p_i = H(p) \\ H(Y^{\mathcal{M}}) &= - \sum_{j=0}^m q_j \log q_j = H(q) \\ H(X, Y^{\mathcal{M}}) &= - \sum_{i,j=0}^{n,m} P_{ij} \log P_{ij} = H(P) \end{aligned}$$

La *información accesible* $I_S(X, Y)$ está definida como el máximo de $I(X, Y^{\mathcal{M}})$ sobre las mediciones posibles [18, 76, 77, 155]:

$$I_S(X, Y) = \max_{\mathcal{M}} I(X, Y^{\mathcal{M}}) = I(X, Y^{\mathcal{M}^o}) \quad (4.2)$$

con \mathcal{M}^o la medición que maximiza, denominada *óptima*.

El teorema de Holevo [18, 76] establece que:

$$I_S(X, Y) \leq S(\rho) - \sum_i p_i S(\rho_i) = \mathcal{X}_S$$

con $S(\rho)$ la entropía de von Neumann -Ec. (2.69)- y \mathcal{X}_S la *cota Holevo* o *información de Holevo*.

Una característica intrínseca de un *ensamble* cuántico es la “cuanticidad” asociada directamente a la no conmutación de sus elementos. Esta propiedad, además, relaciona la información accesible I_S con la cota Holevo \mathcal{X}_S . Específicamente, si los elementos del conjunto conmutan, entonces se tiene $I_S = \mathcal{X}_S$, de lo contrario, la desigualdad es estricta: $\mathcal{X}_S > I_S$ [15]. Podemos cuantificar esta «no conmutación» utilizando la NCMQC (3.78) $d(\cdot)$, introducida en el artículo Art. II y revisada en el Capítulo anterior, Sec. 3.2. Otra figura de mérito sobre un ensamble particular de estados cuánticos es el grado de mezcla que este presenta, dado por la *purity*, o pureza, ver Capítulo 1, Sec. 1.2.2.

Por otra parte, aunque la cantidad de Holevo \mathcal{X}_S se puede obtener a través de mediciones sobre un largo número de copias del mismo estado, regularmente no es *ajustada* en el caso de un estado único (sin copias) [156], como el establecido anteriormente. Algunos autores se han preguntado si la cota Holevo se puede mejorar, estableciendo una desigualdad alternativa con un comportamiento adecuado y más cercano a la información accesible [41, 157]. Dar una respuesta cerrada a la pregunta anterior excede el objetivo de esta sección; en su lugar, nos enfocamos en probar que la cota Holevo es un caso particular de un resultado más general, en función del concepto de *distinguibilidad*. Lo que sigue dió lugar a nuestro artículo Art. VI, [6].

Distinguibilidad, conmutación y el teorema de Holevo. Nuestro esquema de comunicación, según hemos visto, involucra las variables aleatorias X e Y . La primera está asociada a la distribución de probabilidad $p = \{p_i\}$, y define el resultado particular que se desea comunicar. La segunda variable define el resultado $Y = y_j$ y depende de dos factores: 1) del ensamble $\{p_i, \rho_i\}$ de estados cuánticos, 2) de la medición \mathcal{M} que *Bob* realiza sobre el subsistema Q con el objetivo de obtener información sobre el

resultado de X . Ahora bien, ¿Bajo qué condiciones *Bob* -a través de sus mediciones \mathcal{M} (cuyos resultados *son* la variable Y)- es capaz de determinar el resultado de X con certeza absoluta? Una pregunta enteramente equivalente es ¿Bajo qué condiciones *Bob* es capaz de *distinguir* los estados $\{\rho_i\}$? La respuesta, que podemos encontrar en [15], relaciona *conmutación* con *distinguibilidad* y las cantidades involucradas en el teorema de Holevo; veamos cómo.

Primero, notemos que, utilizando el teorema de Bayes -ver Sec. 1.1-, podemos reescribir $I(X, Y^{\mathcal{M}})$ como

$$I(X, Y^{\mathcal{M}}) = H(p) - H(p_c) \quad (4.3)$$

con $H(p_c) = -\sum_j q_j \sum_i p_{i|j} \log p_{i|j}$ con $p_{i|j} = P_{ij}/q_j$ la probabilidad condicional de obtener el resultado $X = x_i$ dado $Y = y_j$. De este modo, $-\sum_i p_{i|j} \log p_{i|j}$ es la *incerteza* sobre el resultado de la variable X luego de haberse medido y observado $Y = y_j$. Así, $H(p_c)$ es la incerteza -promedio- sobre X luego de haberse medido Y .

Por otro lado, se puede ver que una cota de la cantidad de Holevo \mathcal{X}_S está dada por $H(p)$ [15]:

$$\mathcal{X}_S \leq H(p) \quad (4.4)$$

Si los estados $\{\rho_i\}$ son mutuamente conmutativos tenemos igualdad en (4.4) [18]. Con todo, tenemos que

$$I(X, Y^{\mathcal{M}}) = H(p) - H(p_c) \leq \mathcal{X}_S \leq H(p) \quad (4.5)$$

Si la información accesible (dada por la medición \mathcal{M}^o) es igual a la cota Holevo se sigue

$$H(p) - H(p_c) \leq H(p) \quad (4.6)$$

Como $I_S(X, Y) = \mathcal{X}_S$ sí y sólo sí los estados $\{\rho_i\}$ conmutan [15], y dado que en este caso también vale $\mathcal{X}_S = H(p)$, la desigualdad (4.6) implica $H(p_c) = 0$; de este modo, vemos que si $I_S(X, Y) = \mathcal{X}_S$ entonces la incerteza sobre el resultado de X luego de haberse medido \mathcal{M}^o es nula y podemos distinguir los estados $\{\rho_i\}$ (consecuentemente también podemos identificar el valor de X).

Ahora bien, si por otro lado podemos identificar el resultado de X con probabilidad uno (sin incerteza), existe una medición \mathcal{M}^o tal que $H(p_c) = 0$. La desigualdad (4.5) se convierte en $H(p) \leq \mathcal{X}_S \leq H(p)$. Se sigue de inmediato que $H(p) = \mathcal{X}_S$ lo que implica: $I_S(X, Y) = \mathcal{X}_S$. Como lo anterior vale sí y sólo sí $\{\rho_i\}$ conmutan hemos mostrado que

$$I_S(X, Y) = \mathcal{X}_S \iff H(p_c) = 0 \iff \{\rho_i\} \text{ conmutan} \quad (4.7)$$

lo que determina la relación señalada entre distinguibilidad, conmutación y el teorema de Holevo.

4.2. Nuevas desigualdades

Siguiendo [20], y como hemos definido en la Ec. (3.8), la información mutua $I(X, Y)$ entre dos variables aleatorias X e Y es la conexión intrínseca con la entropía relativa de

Shannon H_r -Ec. (1.1.1). Específicamente, en el contexto establecido anteriormente en la Sec. 4.1, podemos reescribir la Ec. (4.1) de la forma:

$$\begin{aligned} I(X, Y^{\mathcal{M}}) &= H(p) + H(q) - H(P) = \\ &= \sum_{i,j=0}^{n,m} P_{ij} \log \frac{P_{ij}}{p_i q_j} = H_r(P||p \times q) \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde $H_r(P||p \times q)$ la entropía relativa de Shannon entre la distribución de probabilidad conjunta $P = \{P_{ij}\}$ y su contraparte no correlacionada es $p \times q = \{p_i q_j\}$. Además, H_r es una medida de *distancia* entre las distribuciones de probabilidades anteriores [14] -ver Sec. 2.2. Por lo tanto, la igualdad (4.8) señala una nueva conexión entre *distinguibilidad* y la información compartida por las variables aleatorias X e $Y^{\mathcal{M}}$. La cota Holevo también puede reescribirse utilizando la entropía relativa de von Neumann $S(\cdot||\cdot)$, dada por la Ec. (2.69)- [14], resultando:

$$\mathcal{X}_S = S(\rho) - \sum_i p_i S(\rho_i) = \sum_i p_i S(\rho_i||\rho)$$

con $\rho = \sum_i p_i \rho_i$. Por lo tanto, el teorema de Holevo toma la siguiente forma:

$$H_r(P||p \times q) \leq \sum_i p_i S(\rho_i||\rho)$$

En otras palabras, la *distinguibilidad* entre la distribución de probabilidad conjunta P y $p \times q$ es menor o igual que la media de la *distinguibilidad* entre los estados $\{\rho_i\}$, utilizando como medida de distancia la entropía relativa de von Neumann. Generalicemos entonces la desigualdad previa para medidas de distancia generales $\mathcal{D}(\cdot||\cdot)$ derivando las propiedades necesarias para dar lugar a una cota válida. A tal fin, trabajaremos con dos espacios auxiliares de Hilbert \mathcal{H}_P y \mathcal{H}_M siendo $\{|i_P\rangle\}_{i=0}^n$ y $\{|j_M\rangle\}_{j=0}^m$, dos bases ortogonales de los mismos, respectivamente.

Teorema 4.2.1 *Sea $\mathcal{D}(\cdot||\cdot)$ una medida de distancia contractiva ante mapas CPTP, Propiedad Pd.g, Sec. 2.1, que además cumple con la condición de banderas Ec. (3.118), entonces:*

$$D(P||p \times q) \leq \sum_i p_i \mathcal{D}(\rho_i||\rho) \equiv \mathcal{X}_{\mathcal{D}} \quad (4.9)$$

siendo

$$D(P||p \times q) \equiv \mathcal{D}(\rho_{cc}||\rho_{cc}^P \otimes \rho_{cc}^M) \quad (4.10)$$

con

$$\begin{aligned} \rho_{cc} &= \sum_{ij=0}^{nm} P_{ij} |i_P\rangle \langle i_P| \otimes |j_M\rangle \langle j_M| \\ \rho_{cc}^P \otimes \rho_{cc}^M &= \sum_{kl=0}^{nm} p_k q_l |k_P\rangle \langle k_P| \otimes |l_M\rangle \langle l_M| \end{aligned}$$

Llamaremos a $\mathcal{X}_{\mathcal{D}}$, Cantidad de Holevo basada en distancias³ (DBHQ).

³En inglés: *Distance Based Holevo Quantity*

Aclaración sobre la notación: Para cualquier medida de distancia razonable, $\mathcal{D}(\rho_{cc}||\rho_{cc}^P \otimes \rho_{cc}^M)$ constituye una distancia estadística (o divergencia) entre las distribuciones de probabilidad P y $p \times q$ (dado que los estados ρ_{cc} y $\rho_{cc}^P \otimes \rho_{cc}^M$ conmutan y son diagonales en la base ortonormal $\{|ij\rangle_{PM}\}$ de $\mathcal{H}_P \otimes \mathcal{H}_M$). Por lo tanto, elegimos la notación $D(P||p \times q) = \mathcal{D}(\rho_{cc}||\rho_{cc}^P \otimes \rho_{cc}^M)$ para enfatizar lo anterior. Asimismo, $D(P||p \times q)$ depende de la medición \mathcal{M} , mientras que $\mathcal{X}_{\mathcal{D}}$ sólo depende del ensamble $\{p_i, \rho_i\}$. Entonces, teniendo en cuenta la Ec. (4.2), elegimos:

$$I_{\mathcal{D}}(X, Y) \equiv \max_{\mathcal{M}} D(P||p \times q) \quad (4.11)$$

Denominaremos a la cantidad $I_{\mathcal{D}}(X, Y)$ como la *información accesible generalizada* (GAI). La interpretación de la cantidad anterior depende, claramente, de la medida de distancia utilizada.

Prueba Consideremos el esquema de comunicación establecido en la Sec. 4.1 y los espacios de Hilbert \mathcal{H}_P y \mathcal{H}_M introducidos anteriormente.

Conectemos cada resultado de X con un elemento de la base ortonormal de \mathcal{H}_P , $|i_P\rangle$. Por otro lado, tales eventos están asociados con una preparación específica, por ejemplo, si $X = x_i$ entonces $\rho = \rho_i$ (el estado del sistema compartido Q). Estas asociaciones están representadas por el estado:

$$\rho_c = \sum_{i=0}^n p_i |i_P\rangle \langle i_P| \otimes \rho_i \quad (4.12)$$

Ahora bien, si Bob realiza una medición representada por POVM \mathcal{M} y sus resultados se almacenan en el subsistema M bajo las siguientes prescripciones: Cuando no se realizó ninguna medición, elige el estado $|0_M\rangle$. Si, en cambio, Bob obtiene el resultado de la medición $Y^{\mathcal{M}} = y_j$, entonces este asocia $Y^{\mathcal{M}} = y_j$ con un elemento de la base ortonormal de \mathcal{H}_M ; digamos, $|j_M\rangle$. Estas dos recetas se resumen en los estados:

$$\rho_0 = \sum_{i=0}^n p_i |i_P\rangle \langle i_P| \otimes \rho_i \otimes |0_M\rangle \langle 0_M| \quad (4.13)$$

$$\rho_{\mathcal{M}} = \sum_{i,j=0}^{n,m} p_i |i_P\rangle \langle i_P| \otimes \sqrt{M_j} \rho_i \sqrt{M_j} \otimes |j_M\rangle \langle j_M| \quad (4.14)$$

Por otra parte, $\rho_{\mathcal{M}}$ se puede obtener de la aplicación de una operación cuántica CPTP $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$, es decir, $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\rho_0) = \rho_{\mathcal{M}}$ [18].

El estado que describe la información adquirida por Bob sobre la variable X es:

$$\rho_{cc} = \sum_{i,j=0}^{n,m} P_{ij} |i_P\rangle \langle i_P| \otimes |j_M\rangle \langle j_M| \quad (4.15)$$

Las contrapartes *no correlacionadas* de los estados (4.12), (4.13), (4.14) y (4.15) son,

respectivamente:

$$\rho_c^P \otimes \rho_c^Q = \sum_{i,j} p_i p_j |i_P\rangle \langle i_P| \otimes \rho_j \quad (4.16)$$

$$\rho_0^P \otimes \rho_0^{QM} = \sum_{i,j} p_i p_j |i_P\rangle \langle i_P| \otimes \rho_j \otimes |0_M\rangle \langle 0_M| \quad (4.17)$$

$$\rho_{\mathcal{M}}^P \otimes \rho_{\mathcal{M}}^{QM} = \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\rho_0^P \otimes \rho_0^{QM}) = \quad (4.18)$$

$$= \sum_{i,j,k} p_i p_k |i_P\rangle \langle i_P| \otimes \sqrt{M_j} \rho_k \sqrt{M_j} \otimes |j_M\rangle \langle j_M| \quad (4.19)$$

$$\rho_{cc}^P \otimes \rho_{cc}^M = \sum_{i,j=0}^{n,m} p_i q_j |i_P\rangle \langle i_P| \otimes |j_M\rangle \langle j_M| \quad (4.20)$$

Consideremos ahora una medida de distancia $\mathcal{D}(\cdot||\cdot)$ contractiva Pd.g y que satisface la condición de Banderas (3.118). Luego, debido a la propiedad de aditividad restringida (ver Sec. 2.1, Prop. Pd.f; que \mathcal{D} cumple por ser contractiva), es directo ver que

$$\mathcal{D}(\rho_c||\rho_c^P \otimes \rho_c^Q) = \mathcal{D}(\rho_0||\rho_0^P \otimes \rho_0^{QM})$$

Utilizando la contractividad Pd.g, tenemos

$$\mathcal{D}(\rho_0||\rho_0^P \otimes \rho_0^{QM}) \geq \mathcal{D}(\rho_{\mathcal{M}}||\rho_{\mathcal{M}}^P \otimes \rho_{\mathcal{M}}^{QM})$$

Además, teniendo en cuenta que tomar la traza parcial sobre un subsistema es una operación cuántica CPTP [11, 18], se sigue que:

$$\mathcal{D}(\rho_{\mathcal{M}}||\rho_{\mathcal{M}}^P \otimes \rho_{\mathcal{M}}^{QM}) \geq \mathcal{D}(\rho_{cc}||\rho_{cc}^P \otimes \rho_{cc}^M)$$

Finalmente, combinando (4.16)-(4.20) y usando la condición de banderas (3.118) obtenemos:

$$\mathcal{D}(\rho_c||\rho_c^P \otimes \rho_c^Q) = \sum_i p_i \mathcal{D}(\rho_i||\rho) \geq \mathcal{D}(\rho_{cc}||\rho_{cc}^P \otimes \rho_{cc}^M) = D(P||p \times q)$$

Es importante remarcar que el teorema de Holevo se recupera si elegimos como medida de distancia la entropía relativa $S(\cdot||\cdot)$ -Ec (2.51).

Por otro lado, se puede ver que si los estados $\{\rho_i\}$ conmutan, vale que para cualquier medida de distancia *razonable* (que cumple con las condiciones del Teorema 4.2.1), se tiene una igualdad en (4.9). Por el contrario, depende de la medida de distancia \mathcal{D} si una igualdad en (4.9) implica la conmutación de los estados $\{\rho_i\}$. Este es un punto que merece ser comentado: las implicaciones de la desigualdad (4.9) dependen notablemente de la distancia utilizada.

En síntesis, la prueba de la cota Holevo utiliza la subaditividad fuerte de la entropía de von Neumann $S(\cdot)$, pero también, como hemos visto, se puede rehacer utilizando la monotonía de la entropía relativa cuántica $S(\cdot||\cdot)$. Además, la cantidad de Holevo \mathcal{X}_S se puede expresar en términos de la divergencia generalizada de Jensen-Shannon -Ec. (2.14)- entre los elementos del ensamble, utilizados en el protocolo de comunicación [113], lo que sugiere una estrecha relación entre la cota Holevo y la noción de distinguibilidad entre estados cuánticos. Por otra parte, en [158] obtuvieron un límite *Holevo-type* utilizando la medida de distancia Hilbert-Schmidt -Ec. (2.59) con $p = 2$ - y en [159, 160] los autores propusieron y estudiaron una cantidad denominada *información generalizada de Holevo*, utilizando un enfoque geométrico que involucra medidas de distancia $\mathcal{D}(\cdot||\cdot)$ entre estados cuánticos. Los trabajos anteriores motivan la generalización del teorema de Holevo por medio de medidas de distancia. El resultado, resumido en la Ec. (4.11), constituye un conjunto de nuevas desigualdades entre la denominada *Distance Based Holevo Quantity* $\mathcal{X}_{\mathcal{D}}$ y la *Información Accesible Generalizada* $I_{\mathcal{D}}$.

4.2.1. Medidas de distinguibilidad particulares

Como hemos visto, una medida de distancia es un objeto matemático con propiedades específicas. Sin embargo, es sabido que no todas ellas pueden considerarse medidas de distinguibilidad, por lo definido en la Sec. 2.3.1. La razón de esto es que la única forma física de distinguir dos estados cuánticos es a través de un proceso de medición. En mecánica cuántica, los eventos son intrínsecamente estocásticos y, por lo tanto, los resultados de la medición están asociados con una distribución de probabilidad. En consecuencia, si uno tiene un criterio para distinguir dos distribuciones de probabilidad, entonces es posible obtener una *medida de distinguibilidad* entre dos estados cuánticos midiendo y optimizando las posibles mediciones, ver Capítulo 2, Sec. 2.3.1 y las refs. [17, 18].

El propósito principal de esta sección es usar las nuevas desigualdades (4.9) y aplicarlas a nociones específicas de distinguibilidad. Siguiendo la Sec. 2.3.1, consideraremos tres nociones diferentes de distinguibilidad que son de interés para la criptografía cuántica: la distancia de Kolmogorov K -Ec. (2.7) en el caso clásico, Ec. (2.44) en el cuántico-, la probabilidad de error P_e , dada por la Ec. (2.5) en el caso de distribuciones de probabilidad y por $P_e(\rho||\sigma) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}K(\rho||\sigma)$ en la contraparte cuántica- y el coeficiente de Bhattacharyya, cuya expresión clásica es (2.8) y la cuántica está dada por la Ec. (2.46). Cabe recordar que el cuadrado de $B(\rho||\sigma)$ es la conocida *fidelidad*.

Nuevas desigualdades basadas en información.

La desigualdad correspondiente para la noción de distinguibilidad de Kolmogorov es

$$K(P||p \times q) \leq \sum_i p_i K(\rho_i||\rho) = \mathcal{X}_K \quad (4.21)$$

Cabe destacar que, incluso cuando los estados del ensamble $\{\rho_i\}$ no conmutan, es posible alcanzar la igualdad en (4.21), como se mostrará en la sección 4.2.3, analizando el caso de un ensamble conformado por sistemas de dos niveles. Este es un comportamiento destacable, y contrapuesto al de la cota Holevo.

La probabilidad de error entre dos distribuciones p y q es

$$P_e(p||q) = \frac{1}{2} \sum_i \min\{p_i, q_i\}$$

y está relacionada con la noción de Kolmogorov K a través de:

$$P_e(p||q) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}K(p||q)$$

entonces, vale

$$P_e(\rho||\sigma) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}K(\rho||\sigma)$$

Luego, tenemos una interpretación alternativa de la desigualdad (4.21) dentro de la noción de probabilidad de error:

$$P_e(P||p \times q) \geq \sum_i p_i P_e(\rho_i||\rho) = \mathcal{X}_{P_e} \quad (4.22)$$

Finalmente, queda por considerar el coeficiente Bhattacharyya B , cuyas expresiones son (2.8) y (2.46), relacionado, en el caso cuántico, con el cuadrado de la *distancia Bures*

-Ec. (2.50)- de la siguiente forma:

$$d_B^2(\rho||\sigma) = 2[1 - B(\rho||\sigma)]$$

La distancia Bures (al cuadrado) satisface las condiciones establecidas en el teorema 4.2.1, lo que conlleva a la desigualdad:

$$B(P||p \times q) \geq \sum_i p_i B(\rho_i||\rho) = \mathcal{X}_B \quad (4.23)$$

Teniendo en consideración que $F(\rho||\sigma) \geq \text{Tr}(\rho\sigma)$ obtenemos una nueva desigualdad dada por:

$$B(P||p \times q) \geq \mathcal{P}[\rho] \quad (4.24)$$

con $\mathcal{P}[\rho] = \text{Tr}[\rho^2]$ la *pureza* -Ec. (1.18)- del estado que se entrega a Bob.

4.2.2. Ensamblados de Qubits

Ahora, consideraremos un conjunto de estados $\{\rho_i\}$ de sistemas de dos niveles, es decir, $\dim \mathcal{H}_Q = 2$, ver Sec. 4.1, y restringiremos nuestros cálculos, en cuanto a la información accesible (4.11), a mediciones *proyectivas* de von Neumann. Nuestro propósito es identificar la diferencia entre las cantidades usuales, dadas por la *entropía relativa*, es decir, I_S y \mathcal{X}_S , y las cantidades generalizadas DBHQ y GAI. Bajo el precepto anterior, las mediciones de von Neumann tienen una principal ventaja debido a su representación de Bloch.

A tal fin, sea V un operador unitario dado por (representación, Ec. (1.93))

$$V = \vec{s} \cdot (\mathbb{1}, i\vec{\sigma})$$

con $\vec{s} \in \Gamma$, $\Gamma = \{\vec{s} \in \mathbb{R}^4 / s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1\}$. Las mediciones de Bob sobre el sistema \mathcal{H}_Q están dadas por

$$\mathcal{E} = \{E_j\}_{j=0}^1 \quad (4.25)$$

siendo $E_j = V^* |j\rangle \langle j| V$, y $\{|j\rangle\}_{j=0}^1$ las bases computacionales [47].

Luego, como hemos visto en el Capítulo anterior -3-, en repetidas ocasiones al realizar un cálculo que involucra mediciones proyectivas, los vectores de Bloch de los operadores de medición E_j están dados por $\text{Tr}(E_j \vec{\sigma}) = (-1)^j \vec{z}$ siendo $\vec{z} = (z_1(\vec{s}), z_2(\vec{s}), z_3(\vec{s}))$ donde -ver Ecs. (3.90)-(3.92)-,

$$z_1(\vec{s}) = 2(-s_0 s_2 + s_1 s_3) \quad (4.26)$$

$$z_2(\vec{s}) = 2(s_0 s_1 + s_2 s_3) \quad (4.27)$$

$$z_3(\vec{s}) = s_0^2 + s_3^2 - s_1^2 - s_2^2 \quad (4.28)$$

Así,

$$E_j = \frac{1}{2} [\mathbb{1} + (-1)^j \vec{z} \cdot \vec{\sigma}] \quad (4.29)$$

La dirección⁴ dada por \vec{z} caracteriza la medición \mathcal{E} . Es importante notar que \vec{z} cubre la esfera de Bloch, es decir, es posible medir en cualquier dirección.

⁴Decimos dirección porque es un vector de módulo uno, a veces denominado *versor*.

Ahora bien, si los estados del ensamble están dados por

$$\rho_i = \frac{1}{2} \left(\mathbb{1} + \vec{\beta}_i \cdot \vec{\sigma} \right) \quad (4.30)$$

$$\rho = \frac{1}{2} \left(\mathbb{1} + \vec{\beta}_m \cdot \vec{\sigma} \right) \quad (4.31)$$

donde $\rho = \sum_i p_i \rho_i$ y por tanto $\vec{\beta}_m = \sum_i p_i \vec{\beta}_i$, realizando los cálculos correspondientes, las probabilidades P_{ij} y $p_i q_j$ (ver 4.1) están dados por:

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \frac{p_i}{2} \left[1 + (-1)^j \vec{\beta}_i \cdot \vec{z} \right] \\ p_i q_j &= \frac{p_i}{2} \left[1 + (-1)^j \vec{\beta}_m \cdot \vec{z} \right] \end{aligned}$$

Dado un ensamble de operadores $\{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n\}$, cada uno con probabilidad p_i , la *no conmutatividad* de los mismos está dada por:

$$\mathcal{N}_c = \frac{1}{2} \sum_{k,l=0}^n \left\| [p_k \rho_k, p_l \rho_l] \right\|_2$$

donde $\|A\|_2 = \sqrt{\text{Tr}[A^\dagger A]}$ es la norma de Hilbert-Schmidt. La definición anterior está basada en la NCMQC $d(\cdot)$, dada por (3.78). Incluso, podemos ver que \mathcal{N}_c coincide con esta medida, calculada en dirección $B \rightarrow A$, para el estado ρ_c :

$$\hat{d}(\rho_c) = \mathcal{N}_c \quad (4.32)$$

con ρ_c dado por Ec. (4.12) y $\hat{d}(\cdot)$ la NCMQC en dirección $B \rightarrow A$. Luego del cálculo correspondiente, obtenemos:

$$\mathcal{N}_c = \sum_{k,l=0}^n \frac{p_k p_l}{2\sqrt{2}} \sqrt{|\vec{\beta}_k| |\vec{\beta}_l|^2 - (\vec{\beta}_k \cdot \vec{\beta}_l)^2} = \sum_{k,l=0}^n \frac{p_k p_l}{2\sqrt{2}} |\vec{\beta}_k \times \vec{\beta}_l| \quad (4.33)$$

En el caso del estado (4.31), la pureza \mathcal{P} resulta:

$$\mathcal{P}[\rho] = \text{Tr}[\rho^2] = \frac{1}{2} \left(1 + |\vec{\beta}_m|^2 \right) \quad (4.34)$$

Veamos ahora las expresiones generalizadas para la DBHQ $\mathcal{X}_{\mathcal{D}}$ y $D(P||p \times q)$ -Ec. (4.10)- para las medidas de distinguibilidad consideradas en la Sec. 4.2.1. Hemos omitido la probabilidad de error P_e porque las expresiones son totalmente análogas a la noción de Kolmogorov. Cabe aclarar que la hemos incluido anteriormente por la interpretación que brinda a la cantidad Ec. (4.10).

Para la *distancia de Kolmogorov*

$$\mathcal{X}_K = \frac{1}{2} \sum_i p_i \left| \vec{\beta}_i - \vec{\beta}_m \right| \quad (4.35)$$

$$K(P||p \times q) = \frac{1}{2} \sum_i \left| (\vec{\beta}_i - \vec{\beta}_m) \cdot \vec{z} \right| \quad (4.36)$$

y para el *coeficiente de Bhattacharyya*

$$\mathcal{X}_B = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_i p_i \sqrt{1 + \vec{\beta}_i \cdot \vec{\beta}_m + \sqrt{(1 - |\vec{\beta}_i|^2)(1 - |\vec{\beta}_m|^2)}} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} B(P||p \times q) &= \\ &= \sum_i \frac{p_i}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + (\vec{\beta}_i \cdot \vec{z})(\vec{\beta}_m \cdot \vec{z}) + \sqrt{[1 - (\vec{\beta}_i \cdot \vec{z})^2][1 - (\vec{\beta}_m \cdot \vec{z})^2]}} \end{aligned} \quad (4.38)$$

En el caso de la *entropía relativa*, la cota Holevo y $H_r(P||p \times q)$ toman la forma

$$\mathcal{X}_S = \frac{1}{2} \left[\sum_i p_i f(|\vec{\beta}_i|) \right] - \frac{1}{2} f(|\vec{\beta}_m|) \quad (4.39)$$

$$H_r(P||p \times q) = \frac{1}{2} \left[\sum_i p_i f(|\vec{\beta}_i \cdot \vec{z}|) \right] - \frac{1}{2} f(|\vec{\beta}_m \cdot \vec{z}|) \quad (4.40)$$

donde $f(x) = (1+x) \log_2(1+x) + (1-x) \log_2(1-x)$ es menos la entropía binaria de Shannon.

Así, una vez obtenidas las expresiones analíticas para la noción de Kolmogorov, podemos establecer el siguiente resultado:

Teorema 4.2.2 *Para cualquier ensamble de dos qubit (ver (4.30) y (4.31), con $n = 2$) vale:*

$$I_K(X, Y) = \max_{\mathcal{E}} K(P, p \times q) = \mathcal{X}_K$$

Prueba Por definición, tenemos que

$$\begin{aligned} \vec{\beta}_m &= \hat{p} \vec{\beta}_0 + (1 - \hat{p}) \vec{\beta}_1 \\ K(P, p \times q) &= \frac{1}{2} \hat{p} |(\vec{\beta}_0 - \vec{\beta}_m) \cdot \vec{z}| + \frac{1}{2} (1 - \hat{p}) |(\vec{\beta}_1 - \vec{\beta}_m) \cdot \vec{z}| \\ \mathcal{X}_K &= \frac{1}{2} \hat{p} |\vec{\beta}_0 - \vec{\beta}_m| + \frac{1}{2} (1 - \hat{p}) |\vec{\beta}_1 - \vec{\beta}_m| \end{aligned}$$

Eligiendo $\vec{z} = \frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}$ donde $\vec{\beta} = \vec{\beta}_0 - \vec{\beta}_1$ sigue

$$\mathcal{X}_K = \hat{p}(1 - \hat{p}) |\vec{\beta}| = K(P, p \times q) \Big|_{\vec{z} = \frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}}$$

Por lo tanto, $I_K = K(P, p \times q) \Big|_{\vec{z} = \frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}}$.

Nótese que el teorema anterior es válido también para una información accesible (4.11) definida a partir de mediciones POVM, implicando que, en el caso particular que estamos considerando, estas no son necesarias.

Finalmente, estudiaremos el comportamiento de $I_{\mathcal{D}}$ y $\mathcal{X}_{\mathcal{D}}$ (para las nociones de Kolmogorov y Bhattacharyya) en contraste con las cantidades conocidas I_S y \mathcal{X}_S , utilizando la medida de no conmutatividad \mathcal{N}_c y la pureza \mathcal{P} como figura de mérito para las propiedades del conjunto.

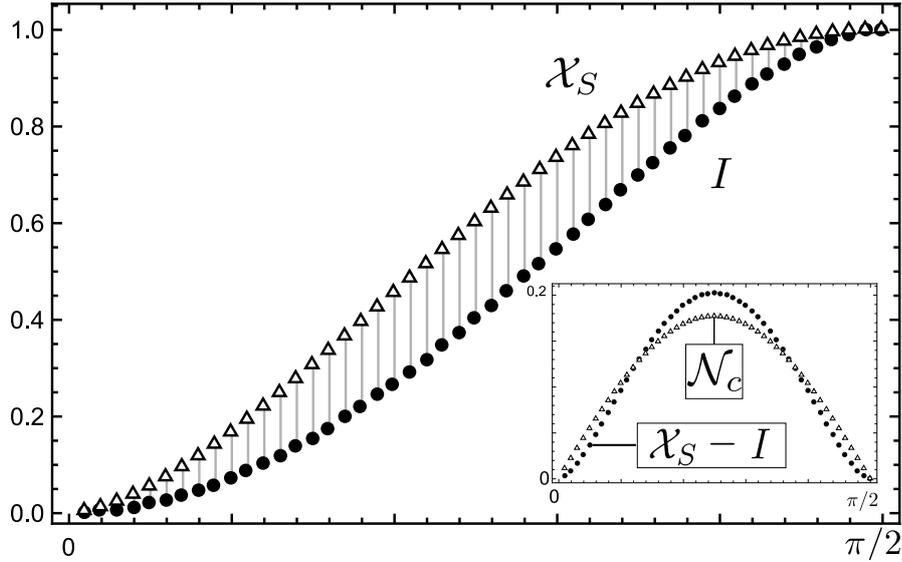


Figura 4.1: Comparación entre I , \mathcal{X}_S y \mathcal{N}_c para el ensemble (4.41) y (4.42) y $\hat{p} = 1/2$. Todas las cantidades graficadas son adimensionales.

4.2.3. Ejemplo

Consideremos un ensemble compuesto por dos estados puros $\{\rho_0, \rho_1\}$, siendo [18, 161, 162]

$$\rho_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

$$\rho_1 = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

con probabilidades $p_0 = \hat{p}$ y $p_1 = 1 - \hat{p}$. Para $\theta = 0$, $\rho_0 = \rho_1$, mientras que para $\theta = \frac{\pi}{2}$, los estados conmutan. Los correspondientes vectores de Bloch son (Ecs. (4.30) y (4.31)):

$$\vec{\beta}_0 = (0, 0, 1) \quad (4.43)$$

$$\vec{\beta}_1 = (\sin 2\theta, 0, \cos 2\theta) \quad (4.44)$$

$$\vec{\beta}_m = ((1 - \hat{p}) \sin 2\theta, 0, \hat{p} + (1 - \hat{p}) \cos 2\theta) \quad (4.45)$$

Consecuentemente, realizando el álgebra correspondiente, la no conmutatividad \mathcal{N}_c y la pureza \mathcal{P} toman las siguientes expresiones analíticas -Ecs. (4.33) y (4.34):

$$\mathcal{N}_c = \frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{\sqrt{2}} |\sin 2\theta|$$

$$\mathcal{P}[\rho] = 1 - 2\hat{p}(1 - \hat{p})(\sin \theta)^2$$

Adicionalmente, la expresión para \mathcal{X}_K (y también para I_K , ver Teo. 4.2.2) es

$$\mathcal{X}_K = 2\hat{p}(1 - \hat{p}) |\sin \theta|$$

Los casos restantes, es decir, \mathcal{X}_D e I_D para la entropía relativa $S(\cdot||\cdot)$ y el coeficiente de Bhattacharyya B , constituyen ejemplos más interesantes y complejos. De este modo, calculamos la información accesible generalizada para las medidas de distancia anteriores

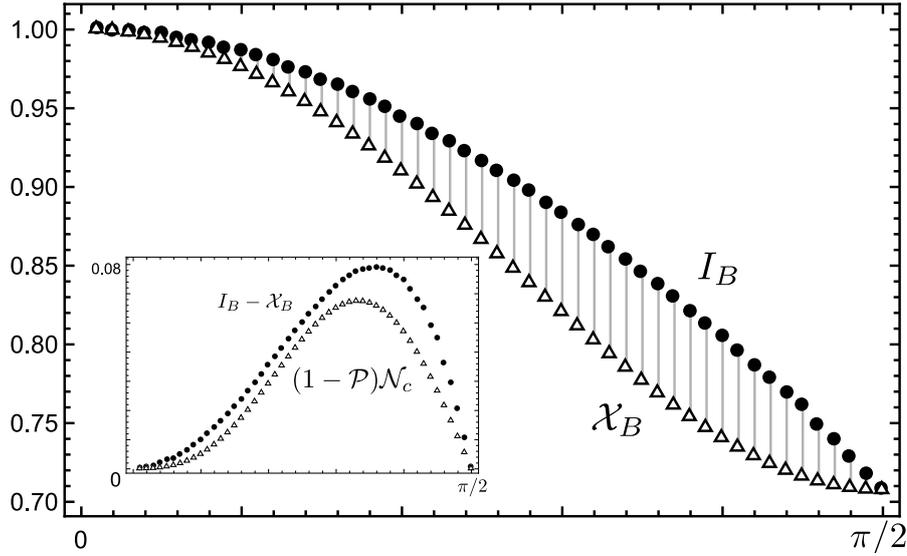


Figura 4.2: Comparación entre I_B , \mathcal{X}_B , \mathcal{P} y \mathcal{N}_c para el ensamble (4.41), (4.42) y $\hat{p} = 1/2$. Todas las cantidades graficadas son adimensionales.

-Ecs. (4.38) y (4.40)- con $\hat{p} = \frac{1}{2}$ para $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Por otro lado, insertando las Ecs. (4.43)-(4.45) en la igualdad dada por la Ec. (4.37) y (4.39) podemos obtener las expresiones analíticas para la \mathcal{X}_D .

La figura 4.1 muestra el comportamiento de \mathcal{X}_S y I_S . La diferencia entre estas cantidades, $\mathcal{X}_S - I_S$, crece y decrece de acuerdo a la no conmutatividad \mathcal{N}_c . En contraparte, la figura 4.2 contiene los perfiles de las funciones \mathcal{X}_B y I_B dependientes del parámetro θ . En este caso, la diferencia $I_B - \mathcal{X}_B$ no presenta exactamente el mismo comportamiento que \mathcal{N}_c . Sin embargo, graficando la cantidad $(1 - \mathcal{P})\mathcal{N}_c$ podemos concluir que $I_B - \mathcal{X}_B$ contiene información sobre la pureza \mathcal{P} y la no conmutatividad \mathcal{N}_c del ensamble.

4.2.4. Correlaciones clásicas-cuánticas y la \mathcal{X}_D

Resumidamente, como vimos en las Sec. 4.1 y Sec. 4.2, la Ec. (4.12) representa la asignación entre los elementos de la base $\{|i_P\rangle\}$, de \mathcal{H}_P , con el conjunto de estados $\{\rho_i\} \subset B_1^+(\mathcal{H}_Q)$ que constituyen el medio de comunicación. A su vez, los vectores $|i_P\rangle$ están en correspondencia con los eventos $X = x_i$, que tienen un comportamiento netamente *clásico*, y una probabilidad de ocurrencia dada por p_i . De hecho, la inclusión de los espacios \mathcal{H}_P y \mathcal{H}_M en la Sec. 4.2 tiene como único objetivo reescribir el esquema de comunicación dentro del formalismo de la mecánica cuántica para así poder demostrar las *nuevas desigualdades* (4.2.1) [18]. Sin embargo, si P es el sistema (clásico) representado por \mathcal{H}_P , tenemos que ρ_c -(4.12)- es el estado del sistema global $P + Q$. Más aún, en el capítulo anterior vimos que ρ_c pertenece a un conjunto que hemos definido como *estados clásicos-cuánticos CS* -ver Sec. 3.2.1. El estado ρ_c es el nexo entre lo desarrollado en este capítulo y el anterior, puesto que nos permite establecer una conexión entre la DBHQ - \mathcal{X}_D - y la medida de correlaciones clásicas-cuánticas generalizadas \mathcal{J}_Q , definidas en las Sec. 3.2.1 y 3.2.3.

Específicamente, la cota Holevo es la información compartida entre los sistemas P y Q , cuantificada por \mathcal{T}_D -ver Sec. 3.2.3, Ec. (3.112). Así,

$$\mathcal{T}_D(\rho_c) = \mathcal{X}_D \quad (4.46)$$

De ahora en más, para ser consistentes, supondremos una medida de distancia \mathcal{D} con las condiciones del Teo. 4.2.1. Ahora bien, si P es un sistema cuántico al igual que Q

y además ρ es el estado global de ambos sistemas, tomando el ensamble dado por los estados

$$\rho_{Q|i}^{\mathcal{M}} = \frac{\text{Tr}_P [M_i \otimes \mathbb{1} \rho]}{p_i^{\mathcal{M}}}$$

y las probabilidades $p_i = \text{Tr} [M_i \otimes \mathbb{1} \rho]$ siendo \mathcal{M} una medición proyectiva sobre P formada por los operadores $M_i = |i_P\rangle \langle i_P|$, tenemos que

$$\rho_c = \sum_i p_i^{\mathcal{M}} |i_P\rangle \langle i_P| \otimes \rho_{Q|i}^{\mathcal{M}} \quad (4.47)$$

Luego, tomando el máximo sobre las mediciones proyectivas posibles sobre P de $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(\rho_c)$ tenemos que ésta cantidad es la medida de correlaciones clásicas-cuánticas⁵ $\mathcal{J}_{\mathcal{D}}$ definida en la Ec. (3.113).

De este modo, vemos que la medida generalizada de correlaciones de tipo clásico-cuántico $\mathcal{J}_{\mathcal{D}}$ es un caso particular de la cota DBHQ $\mathcal{X}_{\mathcal{D}}$ evaluada en el ensamble compuesto por los de estados *condicionales* que resultan luego de la medición \mathcal{M}^o óptima; es decir, la medición que maximiza -ver, por ejemplo, la Ec. (3.62). Decir que las cantidades anteriores son iguales es caer en una simplificación errónea dado que son *conceptualmente* diferentes. Para el caso $\mathcal{D} = S$, con S la entropía relativa, tenemos que la DBHQ es la cota Holevo y \mathcal{J}_S es la medida \mathcal{J} que da lugar a la *discordancia cuántica*. Esta relación ha sido ya resaltada en algunos artículos, por ejemplo, los trabajos [163] y [164]. En este último artículo, notando la relación anteriormente establecida, se reconoce al QD como el *recurso mínimo* necesario para una *quantum key distribution*⁶ segura y se lo pone en un lugar de principal importancia en la criptografía cuántica.

Por otro lado, continuando con la misma línea de pensamiento, para calcular la información *accesible* generalizada $I_{\mathcal{D}}$ para el ensamble dado por el estado de la Ec. (4.47) tenemos que realizar una medición sobre el subsistema Q , y maximizar la cantidad resultante $D(P||p \times q)$ dada por la Ec. (4.10). Según hemos visto, el teorema 4.2.1 establece que la maximización anterior es siempre menor o igual que la DBHQ para cualquier ensamble de estados, en particular para (4.47). Además, la cantidad $I_{\mathcal{D}}$, en términos de correlaciones entre los subsistemas P y Q , para el ensamble en cuestión, es la medida generalizada de correlaciones cuánticas-clásicas evaluada en ρ_c , pero como este estado es por definición uno de tipo clásico-cuántico tenemos que la información accesible generalizada para $\{\rho_{Q|i}^{\mathcal{M}^o}\}$ coincide con la medida de correlaciones clásicas-clásicas entre P y Q . En el caso de \mathcal{D} igual a la entropía relativa S , tenemos que sólo habrá igualdad entre la información accesible (i.e. correlaciones clásicas-clásicas) y la cota Holevo (i.e. correlaciones clásicas-cuánticas) si el ensamble de estados $\{\rho_{Q|i}^{\mathcal{M}^o}\}$ es mutuamente conmutativo, es decir, si ρ_c no presenta correlaciones cuánticas en dirección $Q \rightarrow P$. El teorema 4.2.2 indica que, en la noción de Kolmogorov (i.e. DBHQ dada por \mathcal{X}_K y la GAI dada por I_K), no tiene por qué ocurrir lo mismo, dado que para el caso de ensambles de estados dos dos *qubits*, $\mathcal{X}_K = I_K$. Adicionalmente, teniendo en cuenta el resultado establecido en el capítulo anterior, Sec. 3.2.3, dado por la Ec. (3.166), podemos calcular la medida de correlaciones clásicas-cuánticas \mathcal{J}_{Tr} (que en este esquema es igual a la cota \mathcal{X}_K) para cualquier estado ρ de dos qubits y mediciones proyectivas. Lo anterior, de manera directa, nos da la información accesible generalizada, en la noción de Kolmogorov, puesto que por el teorema 4.2.2 esta coincide con \mathcal{X}_k y, en consecuencia, con la medida de

⁵Presentes en el estado *rho* y entre los subsistemas P y Q .

⁶Distribución de claves cuánticas

correlaciones \mathcal{J}_{Tr} . Así, en esta noción de distinguibilidad, la cantidad de correlaciones clásicas-cuánticas es igual al grado de correlación de tipo clásicas-clásicas (I_K).

Resumen En este capítulo, hemos propuesto una generalización del teorema de Holevo mediante medidas de distancia, puntualizando en las nociones criptográficas de distinguibilidad. En particular, hemos obtenido las nuevas desigualdades correspondientes a las nociones de Kolmogorov, el coeficiente de Bhattacharyya y la probabilidad de error. Para explorar los comportamientos de las cantidades generalizadas (DBHQ y GAI) en estos tres casos, hemos calculado las expresiones analíticas correspondientes para el caso de ensambles de *qubits*, utilizando mediciones de von Neumann proyectivas, mostrando que DBHQ y GAI son iguales para la noción de distinguibilidad de Kolmogorov ($I_K = \mathcal{X}_K$) para cualquier ensamble de dos qubits. También hemos obtenido las expresiones analíticas para la no conmutatividad (medida por \mathcal{N}_c) y la pureza (medida por \mathcal{P}) del conjunto como una función de los vectores Bloch de los estados que componen el ensamble. Finalmente, hemos considerado en ejemplo de dos estados puros en los que hemos calculado numéricamente la información accesible I_S y I_B . Al usar la no conmutatividad y la pureza como elementos característicos de las propiedades del ensamble, encontramos que: 1) $\mathcal{X}_S - I_S$ aumenta y disminuye con la no conmutatividad \mathcal{N}_c y 2) la diferencia de las cantidades generalizadas para la noción Bhattacharyya, es decir, $I_B - \mathcal{X}_B$, captura no solo la no conmutatividad del conjunto sino también la pureza mostrando un comportamiento más rico que el caso de entropía relativa.

Finalmente, revisamos la relación existente entre las cantidades DBHQ y GAI con las medidas de correlaciones entre subsistemas cuánticos $\mathcal{J}_{\mathcal{D}}$ estudiadas en el Capítulo 2.

Epílogo

El objetivo -que podríamos adjetivar como *asintótico*- de este trabajo es realizar un compendio de la relación existente entre las nociones de *distinguibilidad* de estados cuánticos y *correlaciones* entre subsistemas del mismo tipo, que a su vez comprenda nuestras investigaciones de los últimos años. Lo haremos de acuerdo a un «ordenado temporal» para los resultados, según cómo los fuimos obteniendo.

A saber, comenzamos en el año 2015 estudiando correlaciones en sistemas cuánticos bipartitos en dimensión finita. A fines de 2016, empezamos con el análisis de la *medida no conmutativa de discordancia cuántica* $D_G(\cdot)$ de correlaciones cuánticas propuesta en ese mismo año por Y. Guo [62]. Los resultados obtenidos en tal investigación muestran que, en general, la NCMQD depende de la base que utilicemos para Descomponer el estado cuyas correlaciones queremos estimar, Ec. (3.64). Primero, enfocándonos en el caso de estados puros mostramos que D_G es una función de la concurrencia de Wootters C , dada por la (3.57), del estado puro y la coherencia de la matriz de densidad reducida. Como consecuencia de esta última dependencia, D_G es una cantidad *dependiente de la representación* que, en un caso general, produce resultados diferentes cuando se considera la bipartición $A|B$ o $B|A$. Estas son características indeseables para cualquier medida de QC en el caso de estados puros. Para avenir este comportamiento dependiente de la representación, sugerimos una medida alternativa $d(\cdot)$, denominada *medida de no conmutatividad de correlaciones cuánticas*. La NCMQC $d(\cdot)$ involucra un procedimiento de minimización sobre el conjunto de las bases locales que, en el caso de estados puros, realizamos analíticamente. En ese caso, la representación óptima resulta ser la de Schmidt, ver Fig. 3.1. Además, a diferencia de $D_G(\cdot)$, $d(\cdot)$ se reduce a una medida de entrelazamiento legítima en el caso de estados puros. Luego, numéricamente calculamos la nueva medida $d(\cdot)$ para algunos estados arbitrarios (mixtos) típicos, Figs. 3.2-3.3(b) y mostramos explícitamente que también para los estados mixtos, $D_G(\cdot)$ depende de la representación. Como consecuencia, en la mayoría de los casos de interés, nuestros resultados indican que el uso de D_G puede resultar en una sobre-estimación de las QC. Sin embargo, con respecto a los estados mixtos arbitrarios, vale la pena mencionar que el procedimiento de optimización involucrado en el cálculo de $d(\cdot)$ puede ser difícil de realizar en contraposición con la medida propuesta por Guo que tiene la ventaja de ser fácilmente computable; asimismo, la cantidad D_G podría usarse como un estimador cualitativo de la presencia de correlaciones cuánticas. Adicionalmente, y a continuación de la investigación anterior, estudiamos el comportamiento de la NCMQC $d(\cdot)$ bajo la acción de operaciones locales, ya sea en el subsistema A o B . Específicamente, vimos que la medida en cuestión no aumenta bajo ningún mapa LCPO sobre el subsistema A , una característica que fortalece el comportamiento de la NCMQC, no demostrada para el QD. En este sentido, aunque solo hemos analizado el caso de la *no conmutatividad* cuantificado por la norma de Hilbert-Schmidt, parecería posible llevar a cabo un estudio análogo que implique comportamientos como el anterior en el caso general de cualquier norma arbitraria que satisfaga propiedades básicas (como, por ejemplo, la invariancia bajo la transposición de su argumento, o ante transformaciones unitarias). También mostramos que cuando se consideran los estados BD $d(\cdot)$ no aumenta bajo operaciones locales arbitrarias en el subsistema B . Aunque el resultado es únicamente válido para este conjunto restringido de estados, y su extensión

a estados bipartitos arbitrarios aún está pendiente, nuestros resultados representan un importante avance con respecto a las potencialidades de la NCMQC mostrándola como un cuantificar válido para una teoría de recursos de QC generales.

En simultáneo con el trabajo anterior, desde 2015 en adelante estudiamos los distintos enfoques de cuantificación de correlaciones que involucraban medidas de distinguibilidad. La síntesis de aquellas ideas dio lugar a un enfoque general de cuantificación de diferentes tipos de correlaciones mediante el uso de *medidas de distancias*, resultando así un nuevo conjunto de cuantificadores de correlaciones. Seguidamente, analizamos las propiedades que las medidas de distancia empleadas deben cumplir para obtener cuantificadores de correlaciones con un comportamiento adecuado. Resumidamente vimos que las medidas de distancia invariantes ante transformaciones unitarias Pd.e y contractivas ante la aplicación de mapas CPTP Pd.g, dan lugar a medidas de correlaciones *bien comportadas*, ver condiciones: C.N.1)-C.N.5). Adicionalmente, para obtener medidas de correlaciones clásicas-cuánticas, las distancias deben verificar, además de las propiedades anteriores, el requisito de *convexidad* Pd.h en al menos una de sus entradas. Además, sumando como requisito *razonable* la condición de banderas (3.118) para las medidas distancias, vimos que todo el esquema de cuantificación ($\mathcal{T}_{\mathcal{D}}$, $\mathcal{J}_{\mathcal{D}}$ y $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$) es razonablemente adecuado conteniendo una medida de correlaciones cuánticas $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$ que cumple con las condiciones necesarias listadas. también deben satisfacer un requisito adicional no demasiado restrictivo (cf. Sec. Ref sec: dprop, propiedad ref PRQC). También determinamos una condición suficiente sobre \mathcal{D} para asegurar la contractividad de las medidas de QC bajo cualquier mapa CPTP sobre el subsistema B , dada por la ecuación (3.226). En resumen, vimos que es posible construir cuantificadores de diferentes tipos de correlaciones dentro de un marco consistente, generalizando la relación entre distinguibilidad y correlaciones, siguiendo el esquema de cuantificación de la medida de referencia en el área: la *discordancia cuántica*.

Ya en 2018, y a continuación de los trabajos anteriores en los que revisamos los conceptos de *medidas de distancia*, *correlaciones* y, ahora también, *conmutación* entre los bloques constituyentes de los QS, nos preocupamos por la interpretación misma de la *discordancia cuántica*. Concretamente, ¿Qué implica, en cuanto al procesamiento de información, un congelamiento del QD? La pregunta es amplia y ambiciosa. Para ganar intuición sobre una posible respuesta, y sumar una consideración diferente basada en nuevas herramientas e ideas, empleamos la forma de Fano y la matriz \mathbb{T} para ver más allá del comportamiento del QD. Específicamente, estudiamos las correlaciones presentes en un sistema cuántico bipartito formado por dos qubits en un estado inicial con marginales máximamente mixtos, bajo una evolución particular: la *decoherencia adiabática no disipativa* no interactuantes. Por medio de la representación de Fano del estado del sistema, identificamos una matriz de correlaciones -entre variables aleatorias- que, a su vez, define el estado ρ global. A partir del estudio de los elementos de esta matriz de correlaciones \mathbb{T} , ver Ec. (3.11), antes y después de realizar mediciones sobre uno de los subsistemas, pudimos identificar las correlaciones *clásicas* y las *cuánticas* (denominadas *correladores* para distinguirlas de las correlaciones entre *subsistemas*) presentes en un estado BD. Además, suponiendo las condiciones inicial $c_i(0)$ para tener *freezing* del QD, pudimos aplicar el formalismo anteriormente establecido al fenómeno de «congelación» del QD bajo. Así, vimos que los correladores cuánticos pueden *no permanecer constantes* en promedio; comportamiento representado con mayor fiabilidad por la NCMQC $d(\cdot)$, medida cuya potencialidad para representar «fuentes», según la *resource theory*, ya habíamos resaltado. Concluimos entonces que el fenómeno de congelamiento del QD no equivale directamente a la congelación de los correladores entre las variables aleatorias que representa el estado ρ . Naturalmente, nuestras conclusiones pueden extenderse a otras medidas o cuantificadores de correlaciones cuánticas que eventualmente reflejen el

mismo tipo de comportamiento de congelación y un esquema de cuantificación similar que involucre la misma *medición óptima*. Con todo, y en resumen, se debe tener precaución al momento de interpretar la discordancia cuántica y su congelamiento como una «fuente» que permanece invariante con el tiempo.

También en 2018, en simultáneo con las investigaciones anteriores, notamos la relación entre las correlaciones clásicas-cuánticas y la cota Holevo [76]. Así, propusimos una generalización del teorema de Holevo mediante medidas de distancia, centrando nuestros estudios en nociones criptográficas de distinguibilidad 2.3. En particular, hemos obtenido nuevas desigualdades, correspondientes a las nociones de Kolmogorov⁷ -Ecs. 2.7 y 2.44- y de Bhattacharyya -Ecs. (2.8) y (2.45). Para explorar los comportamientos de las cantidades generalizadas (DBHQ y GAI) en los casos anteriores, calculamos las expresiones analíticas correspondientes para el caso de ensambles de estados de sistemas de dos niveles -utilizando mediciones de von Neumann- demostrando que DBHQ y GAI son iguales para la noción de distinguibilidad de Kolmogorov ($I_K = \mathcal{X}_K$) para cualquier ensamble de qubits de dos elementos. También obtuvimos las expresiones analíticas para la no conmutatividad (medida por \mathcal{N}_c -Ec. (4.33)- que a su vez coincide con la NCMQC calculado en *sentido* $B \rightarrow A$) y la pureza (medida por \mathcal{P} -Ec. (1.18)) del ensamble como funciones de los vectores Bloch de los estados en cuestión. Finalmente, consideramos el caso de un ensamble de dos estados puros en los que calculamos numéricamente la información accesible I_S -Ec. (4.2) y GAI -Ec. (4.11)- para la noción de distinguibilidad de Bhattacharyya. Al usar la no conmutatividad \mathcal{N}_c y la pureza \mathcal{P} como figuras de mérito de las propiedades del conjunto, vimos que: 1) $\mathcal{X}_S - I_S$ crece o decrece si la no conmutatividad lo hace; y 2) Para la noción Bhattacharyya, es decir, $I_B - \mathcal{X}_B$, captura no solo la no conmutatividad del ensamble, sino también la pureza mostrando un comportamiento más rico que en el caso de la entropía relativa como medida de *distinguibilidad*.

El estudio anterior cierra el enfoque general de cuantificación de información (tanto de correlaciones como de, por ejemplo, información accesible) en función de la noción de distinguibilidad, determinando un conjunto de condiciones necesarias impuestas sobre las medidas de distancia, con el objeto de generar funcionales bien definidos. Con todo, encontramos en la cuantificación de la *conmutación* una herramienta fundamental en el estudio de la *cuantidad* de los sistemas y estados cuánticos. Sugiriendo, entre otras cosas, que tanto *distinguibilidad* como *correlaciones cuánticas* son dos “caras” distintas, pero estrechamente relacionadas, de la *conmutatividad*.

⁷Dándole interpretación a las cantidades resultantes utilizando la *probabilidad de error*.

Bibliografía

- [1] Tristán M Osán, Diego G Bussandri y Pedro W Lamberti. “Monoparametric family of metrics derived from classical Jensen–Shannon divergence”. En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 495 (2018), págs. 336-344.
- [2] Ana Paula Majtey y col. “Problem of quantifying quantum correlations with non-commutative discord”. En: *Quantum Information Processing* 16.9 (2017), pág. 226.
- [3] Bussandri D G, Majtey AP y Valdés-Hernández A. “Non-commutative measure of quantum correlations under local operations”. En: *Quantum Information Processing* 18.2 (2019), pág. 47.
- [4] Bussandri D. G., Majtey A. P. y Valdés-Hernández A. “Generalized approach to quantify correlations in bipartite quantum systems.” En: *Quantum Inf. Process.* 18.47 (2019).
- [5] DG Bussandri y col. “Behavior of quantum correlations under nondissipative decoherence by means of the correlation matrix”. En: *arXiv preprint arXiv:1905.13717* (2019).
- [6] Diego G Bussandri y Pedro W Lamberti. “Generalized Holevo theorem and distinguishability notions”. En: *arXiv preprint arXiv:1907.07707* (2019).
- [7] Werner Heisenberg. *The physical principles of the quantum theory*. Courier Corporation, 1949.
- [8] Harald Fritzsche. *Elementary particles: building blocks of matter*. World Scientific, 2005.
- [9] Werner Heisenberg. “Development of concepts in the history of quantum theory”. En: *The physicist’s conception of nature*. Springer, 1973, págs. 264-275.
- [10] Dirk Ter Haar. *The old quantum theory*. Elsevier, 2016.
- [11] Mark M Wilde. *Quantum information theory*. Cambridge University Press, 2013.
- [12] Robert Eisberg y Robert Resnick. “Quantum physics of atoms, molecules, solids, nuclei, and particles”. En: *Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles, 2nd Edition, by Robert Eisberg, Robert Resnick, pp. 864. ISBN 0-471-87373-X. Wiley-VCH, January 1985.* (1985), pág. 864.
- [13] Paul Adrien Maurice Dirac. *The principles of quantum mechanics*. 27. Oxford university press, 1981.
- [14] Vedral V. “The role of relative entropy in quantum information theory”. En: *Rev Mod Phys* 74 (2002).
- [15] Tan Y-g y col. “Distinguishing quantum states with holevo bound and its applications to spatially separated Bell states”. En: *Int J Theor Phys* 53 (2014).
- [16] Christopher A Fuchs. “Distinguishability and accessible information in quantum theory”. En: *arXiv preprint quant-ph/9601020* (1996).

- [17] Fuchs C A y van de Graaf J. “Cryptographic distinguishability measures for quantum-mechanical states”. En: *IEEE Transactions on Information Theory* 4 (1999).
- [18] Michael A. Nielsen e Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. Cambridge University Press, 2010. DOI: 10.1017/CB09780511976667.
- [19] Philip Chodrow. “Divergence, entropy, information: An opinionated introduction to information theory”. En: *arXiv preprint arXiv:1708.07459* (2017).
- [20] Thomas M Cover y Joy A Thomas. *Elements of information theory*. John Wiley & Sons, 2012.
- [21] J. A. Rice. *Mathematical Statistics and data analysis*. University of California, Berkeley, 2007.
- [22] C. Rao. “A general class of coefficients of divergence of one distribution from another”. En: *IMS-Lectures Notes* 10 (1987), págs. 217-240.
- [23] J. Lin. “Divergence measures based on the Shannon entropy”. En: *IEEE Trans. Inform. Theory* 37 (1 1991), págs. 145-151. DOI: 10.1109/18.61115.
- [24] Solomon Kullback. *Information theory and statistics*. Dover Publications New York, 1968.
- [25] Edward H. Feng y Gavin E. Crooks. “Length of Time’s Arrow”. En: *Phys. Rev. Lett.* 101 (9 ago. de 2008), págs. 090602-. DOI: 10.1103/physrevlett.101.090602.
- [26] Guoxiang Lu y Bingqing Li. “A class of new metrics based on triangular discrimination”. En: *Information* 6.3 (2015), págs. 361-374.
- [27] Adesso G., Bromley T. R. y Cianciaruso M. “Measures and applications of quantum correlations”. En: *J. Phys. A: Math. Theor.* 49.473001 (2016).
- [28] Modi K. y col. “The classical-quantum boundary for correlations: Discord and related measures”. En: *Rev. Mod. Phys.* 84.1655 (2012).
- [29] Anindita Bera y col. “Quantum discord and its allies: a review of recent progress”. En: *Reports on Progress in Physics* 81.2 (2017), pág. 024001.
- [30] Jaeger G. *Quantum Information An Overview*. Springer, 2007.
- [31] Albert Einstein, Boris Podolsky y Nathan Rosen. “Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?” En: *Physical review* 47.10 (1935), pág. 777.
- [32] Laflamme R. Knill E. “Power of One Bit of Quantum Information”. En: *Phys. Rev. Lett.* 81.5672 (1988).
- [33] Braunstein S. L. y col. “Separability of very noisy mixed states and implications for NMR Quantum computing”. En: *Phys. Rev. Lett.* 83.1054 (1999).
- [34] Meyer D. A. “Sophisticated Quantum Search Without Entanglement”. En: *Phys. Rev. Lett.* 85.2014 (2000).
- [35] Caves C. M. Datta A. Flammia S. T. “Entanglement and the power of one qubit”. En: *Phys. Rev. A* 72.042316 (2005).
- [36] Vidal G. Datta A. “Role of entanglement and correlations in mixed-state quantum computation”. En: *Phys. Rev. Lett.* 75.042310 (2007).
- [37] Caves C. M. Datta A. Shaji A. “Quantum Discord and the Power of One Qubit”. En: *Phys. Rev. Lett.* 100.050502 (2008).

- [38] Lanyon B. P. y col. “Experimental Quantum Computing without Entanglement”. En: *Phys. Rev. Lett.* 101.200501 (2008).
- [39] Zurek W.H. Ollivier H. “Quantum Discord: A Measure of the Quantumness of Correlations”. En: *Phys. Rev. Lett.* 88.017901 (2001).
- [40] Vedral V. Henderson L. “Classical, quantum and total correlations”. En: *J. Phys. A* 34.6899 (2001).
- [41] Fannes M Roga W y Życzkowski K. “Universal Bounds for the Holevo Quantity, Coherent Information, and the Jensen-Shannon Divergence”. En: *Phys Rev Lett* 105 (1999).
- [42] Masahito Hayashi y col. *Introduction to Quantum Information Science*. Springer, 2014.
- [43] Stephen Barnett. *Quantum information*. Vol. 16. Oxford University Press, 2009.
- [44] Jonathan P Dowling y Gerard J Milburn. “Quantum technology: the second quantum revolution”. En: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 361.1809 (2003), págs. 1655-1674.
- [45] Horodecki R. y col. “Quantum entanglement”. En: *Rev. Mod. Phys.* 81.865 (2009).
- [46] Huang Y. “Computing quantum discord is NP-complete”. En: *New J. Phys.* 77.033027 (2014).
- [47] Luo S. “Quantum discord for two-qubit systems”. En: *Phys. Rev. A* 77.042303 (2008).
- [48] Alber G. Ali M. Rau A. R. P. “Quantum discord for two-qubit X states”. En: *Phys. Rev. A* 81.042105 (2010).
- [49] Chen Q. y col. “Quantum discord of two-qubit X states”. En: *Phys. Rev. A* 84.042313 (2011).
- [50] Adesso G Girolami D. “Quantum discord for general two-qubit states: Analytical progress”. En: *Phys. Rev. A* 83.052108 (2011).
- [51] Sai Vinjanampathy y ARP Rau. “Quantum discord for qubit–qudit systems”. En: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 45.9 (2012), pág. 095303.
- [52] Hu M-L. y Fan H. “Measurement-induced nonlocality based on the trace norm.” En: *New J. Phys.* 17.033004 (2015).
- [53] Brukner C. Dakić B. Vedral V. “Necessary and sufficient condition for nonzero quantum discord”. En: *Phys. Rev. Lett* 105.190502 (2010).
- [54] Terno D. R. Brodutch A. “Quantum discord, local operations, and Maxwell’s demons”. En: *Phys. Rev. A* 81.062103 (2010).
- [55] Paula F. M., de Oliveira T. R. y Sarandy M. S. “Geometric quantum discord through the Schatten 1–norm”. En: *Phys. Rev. A* 87.064101 (2013).
- [56] Spehner D. y Orszag M. “Geometric quantum discord with Bures distance”. En: *New J. Phys.* 15.103001 (2013).
- [57] Spehner D. y Orszag M. “Geometric quantum discord with Bures distance: the qubit case”. En: *J. Phys. A: Math. Theor.* 47.035302 (2014).
- [58] D. Spehner y col. “Geometric Measures of Quantum Correlations with Bures and Hellinger Distances”. En: *Quantum Science and Technology*. Springer, Cham (2017).

- [59] Jakóbczyk L. “Spontaneous emission and quantum discord: Comparison of Hilbert–Schmidt and trace distance discord”. En: *Phys. Lett. A* 378 (2014).
- [60] A. Kheirollahi, S. J. Akhtarshenas y Mohammadi. H. “Quantifying nonclassicality of correlations based on the concept of nondisruptive local state identification”. En: *Quantum Inf. Process* 15.1585 (2016).
- [61] Luo S. y Fu S. “Hybrid potential model of the α -cluster structure of ^{212}Po ”. En: *Phys. Rev. A* 82.034302 (2010).
- [62] Guo Y. “Non-commutativity measure of quantum discord”. En: *Sci. Rep.* 6.25241 (2016).
- [63] Aharon Brodutch y Kavan Modi. “Criteria for measures of quantum correlations”. En: *arXiv preprint arXiv:1108.3649* (2011).
- [64] Michal Horodecki y Jonathan Oppenheim. “(Quantumness in the context of) resource theories”. En: *International Journal of Modern Physics B* 27.01n03 (2013), pág. 1345019.
- [65] Lu X.-M. y col. “Optimal measurements to access classical correlations of two-qubit states”. En: *Phys. Rev. A* 83.012327 (2011).
- [66] S. Luo y Q. Zhang. “Informational distance on quantum-state space”. En: *Phys. Rev. A* 69.032106 (2004).
- [67] Shunlong Luo. “Using measurement-induced disturbance to characterize correlations as classical or quantum”. En: *Physical Review A* 77.2 (2008), pág. 022301.
- [68] Shunlong Luo y Shuangshuang Fu. “Geometric measure of quantum discord”. En: *Physical Review A* 82.3 (2010), pág. 034302.
- [69] J. Maziero y col. “Classical and quantum correlations under decoherence”. En: *Phys. Rev. A* 80.044102 (2009).
- [70] Mazzola L., Piilo J. y Maniscalco S. “Sudden Transition between Classical and Quantum Decoherence”. En: *Phys. Rev. Lett.* 104.200401 (2010).
- [71] Mazzola L., J. Piilo y S. Maniscalco. “Frozen discord in non-Markovian dephasing channels”. En: *Int. J. Quantum Inf.* 09.981 (2011).
- [72] M. Cianciaruso y col. “Universal freezing of quantum correlations within the geometric approach”. En: *Sci. Rep.* 5.10177 (2015).
- [73] R. Lo Franco y col. “Revival of quantum correlations without system-environment back-action”. En: *Phys. Rev. A* 85.032318 (2012).
- [74] R. Lo Franco y col. “Dynamics of quantum correlations in two-qubit systems within non-Markovian environments”. En: *Int. J. Mod. Phys. B* 27.1345053 (2013).
- [75] Roberto Grimaudo y col. “Dynamics of quantum discord of two coupled spin-1/2’s subjected to time-dependent magnetic fields”. En: *Results in Physics* 13 (2019), pág. 102147.
- [76] Holevo A S Holevo. “Bounds for the quantity of information transmitted by a quantum communication channel”. En: *Probl Peredachi Inf* 9.177 (1973).
- [77] A. Holevo. *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory*. Edizioni della Normale, 2011.
- [78] D. Petz M. Ohya. *Quantum entropy and its use*. Springer-Verlag, 1993.
- [79] A. Messiah. *Quantum mechanics*. North-Holland Publishing company, Amsterdam, 1966.

- [80] R. Bhatia. *Matrix Analysis*. Springer, 1997.
- [81] G. Teschl. *Mathematical Methods in Quantum Mechanics*. American Mathematical Society, 2009.
- [82] P. D. Lax. *Linear Algebra and its applications*. New York University, 2007.
- [83] James D Olsen y Kirk T McDonald. “Classical lifetime of a bohr atom”. En: *eprint: <http://www.physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/orbitdecay.pdf>*. pdf (2005).
- [84] Maximilian A Schlosshauer. *Decoherence: and the quantum-to-classical transition*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [85] E. M. Lifshitz L. D. Landau. *Mecánica cuántica no relativista*. Academia de Ciencias, U.R.S.S., 1963.
- [86] John S Bell. “On the einstein podolsky rosen paradox”. En: *Physics Physique Fizika* 1.3 (1964), pág. 195.
- [87] Reinhard F Werner. “Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model”. En: *Physical Review A* 40.8 (1989), pág. 4277.
- [88] Daniel M Greenberger, Michael A Horne y Anton Zeilinger. “Going beyond Bell’s theorem”. En: *Bell’s theorem, quantum theory and conceptions of the universe*. Springer, 1989, págs. 69-72.
- [89] Wolfgang Dür, Guifre Vidal y J Ignacio Cirac. “Three qubits can be entangled in two inequivalent ways”. En: *Physical Review A* 62.6 (2000), pág. 062314.
- [90] Pranaw Rungta y Carlton M Caves. “Concurrence-based entanglement measures for isotropic states”. En: *Physical Review A* 67.1 (2003), pág. 012307.
- [91] U. Fano. “Correlations of two excited electrons”. En: *Rep. Prog. Phys.* 46.97 (1983).
- [92] J. H. Schlienz y G. Mahler. “Description of entanglement”. En: *Phys. Rev. A.* 52.4396 (1995).
- [93] W Zurek. “Physics Today 44 (October 1991) 36”. En: *Los Alamos Science* 27 (2002), págs. 2-25.
- [94] WG Unruh y Wojciech H Zurek. “Reduction of a wave packet in quantum Brownian motion”. En: *Physical Review D* 40.4 (1989), pág. 1071.
- [95] Wojciech H Zurek, Salman Habib y Juan Pablo Paz. “Coherent states via decoherence”. En: *Physical Review Letters* 70.9 (1993), pág. 1187.
- [96] NV Prokof’ev y PCE Stamp. “Giant spins and topological decoherence: a Hamiltonian approach”. En: *Journal of Physics: Condensed Matter* 5.50 (1993), pág. L663.
- [97] NG Van Kampen. “A soluble model for quantum mechanical dissipation”. En: *Journal of statistical physics* 78.1-2 (1995), págs. 299-310.
- [98] Jiushu Shao, Mo-Lin Ge y Hu Cheng. “Decoherence of quantum-nondemolition systems”. En: *Physical Review E* 53.1 (1996), pág. 1243.
- [99] Dima Mozysky y Vladimir Privman. “Adiabatic decoherence”. En: *Journal of statistical Physics* 91.3-4 (1998), págs. 787-799.
- [100] G Massimo Palma, Kalle-Antti Suominen y Artur Ekert. “Quantum computers and dissipation”. En: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 452.1946 (1996), págs. 567-584.

- [101] Michel Marie Deza y Elena Deza. “Encyclopedia of distances”. En: *Encyclopedia of distances*. Springer, 2009, págs. 1-583.
- [102] Moshe Ben-Bassat. “35 Use of distance measures, information measures and error bounds in feature evaluation”. En: *Handbook of statistics 2* (1982), págs. 773-791.
- [103] Thomas Kailath. “The divergence and Bhattacharyya distance measures in signal selection”. En: *IEEE transactions on communication technology* 15.1 (1967), págs. 52-60.
- [104] Godfried Toussaint. “Some functional lower bounds on the expected divergence for multihypothesis pattern recognition, communication, and radar systems”. En: *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* 4 (1971), págs. 384-385.
- [105] Godfried Toussaint. “Comments on”The Divergence and Bhattacharyya Distance Measures in Signal Selection””. En: *IEEE Transactions on Communications* 20.3 (1972), págs. 485-485.
- [106] Dominik Maria Endres y Johannes E Schindelin. “A new metric for probability distributions”. En: *IEEE Transactions on Information theory* (2003).
- [107] Jean Tajar y col. “A comparison between divergence measures for network anomaly detection”. En: *2011 7th International Conference on Network and Service Management*. IEEE. 2011, págs. 1-5.
- [108] Flemming Topsøe. “Some inequalities for information divergence and related measures of discrimination”. En: *IEEE Transactions on information theory* 46.4 (2000), págs. 1602-1609.
- [109] Amir Yehudayoff. “Pointer chasing via triangular discrimination.” En: *Electronic Colloquium on Computational Complexity (ECCC)*. Vol. 23. 151. 2016, pág. 2.
- [110] I. Vajda. “On f -divergence and singularity of probability measures”. En: *Period. Math. Hungar.* 2 (1972), págs. 223-234.
- [111] F. Österreicher e I. Vajda. “A new class of metric divergences on probability spaces and its applicability in statistics”. En: *Ann. Inst. Stat. Math.* 55 (2003), págs. 639-653. DOI: 10.1007/BF02517812.
- [112] C.W. Helstrom. *Quantum Detection and Estimation Theory*. Mathematics in Science and Engineering : a series of monographs and textbooks. Academic Press, 1976. ISBN: 9780123400505.
- [113] Majtey A. P., P. W. Lamberti y Prato D. P. “Jensen-Shannon divergence as a measure of distinguishability between mixed quantum states”. En: *Phys. Rev. A* 72 (5 nov. de 2005), pág. 052310. DOI: 10.1103/physreva.72.052310.
- [114] Paulina Marian y Tudor A Marian. “Hellinger distance as a measure of Gaussian discord”. En: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 48.11 (2015), pág. 115301.
- [115] Alexander S Holevo. *Quantum systems, channels, information: a mathematical introduction*. Vol. 16. Walter de Gruyter, 2012.
- [116] Hu X. y col. “Necessary and sufficient conditions for local creation of quantum correlation”. En: *Phys. Rev. A*. 85.032102 (2012).
- [117] M Hor-Meyll y col. “Deterministic quantum computation with one photonic qubit”. En: *Physical Review A* 92.1 (2015), pág. 012337.
- [118] Animesh Datta. “Studies on the role of entanglement in mixed-state quantum computation”. En: *arXiv preprint arXiv:0807.4490* (2008).

- [119] Giacomo Mauro D’Ariano, Paoloplacido Lo Presti y Paolo Perinotti. “Classical randomness in quantum measurements”. En: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 38.26 (2005), pág. 5979.
- [120] Edward Davies. “Information and quantum measurement”. En: *IEEE Transactions on Information Theory* 24.5 (1978), págs. 596-599.
- [121] S Hamieh, R Kobes y H Zaraket. “Positive-operator-valued measure optimization of classical correlations”. En: *Physical Review A* 70.5 (2004), pág. 052325.
- [122] K. Modi y col. “Unified View of Quantum and Classical Correlations”. En: *Phys. Rev. Lett* 104.080501 (2010).
- [123] M. Piani. “Problem with geometric discord”. En: *Phys. Rev. A* 86.034101 (2012).
- [124] T. Tufarelli y col. “The geometric approach to quantum correlations: computability versus reliability”. En: *J. Phys. A: Math. Theor.* 46.275308 (2013).
- [125] F. M. Paula y col. “Overcoming ambiguities in classical and quantum correlation measures”. En: *EPL* 108.10003 (2014).
- [126] Wojciech Roga, Dominique Spehner y Fabrizio Illuminati. “Geometric measures of quantum correlations: characterization, quantification, and comparison by distances and operations”. En: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 49.23 (2016), pág. 235301.
- [127] C.H. Bennett y col. “Mixed State Entanglement and Quantum Error Correction”. En: *Phys. Rev. A* 59.1070 (1999).
- [128] William K Wootters. “Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits”. En: *Physical Review Letters* 80.10 (1998), pág. 2245.
- [129] Nan Li y Shunlong Luo. “Total versus quantum correlations in quantum states”. En: *Physical Review A* 76.3 (2007), pág. 032327.
- [130] J. Oppenheim y col. “Thermodynamical Approach to Quantifying Quantum Correlations”. En: *Phys. Rev. Lett.* 89.180402 (2002).
- [131] Michał Horodecki y col. “Local information as a resource in distributed quantum systems”. En: *Physical review letters* 90.10 (2003), pág. 100402.
- [132] Michał Horodecki y col. “Local versus nonlocal information in quantum-information theory: formalism and phenomena”. En: *Physical Review A* 71.6 (2005), pág. 062307.
- [133] Fernando Galve, Gian Luca Giorgi y Roberta Zambrini. “Orthogonal measurements are almost sufficient for quantum discord of two qubits”. En: *EPL (Europhysics Letters)* 96.4 (2011), pág. 40005.
- [134] Barbara Synak-Radtke y Michał Horodecki. “Classical information deficit and monotonicity on local operations”. En: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 37.47 (2004), pág. 11465.
- [135] Matthias D Lang, Carlton M Caves y Anil Shaji. “Entropic measures of non-classical correlations”. En: *International Journal of Quantum Information* 9.07n08 (2011), págs. 1553-1586.
- [136] Mingjun Shi y col. “Optimal measurement for quantum discord of two-qubit states”. En: *Physical Review A* 85.6 (2012), pág. 064104.
- [137] Adriano Barenco y col. “Elementary gates for quantum computation”. En: *Physical review A* 52.5 (1995), pág. 3457.
- [138] Alastair Kay. “Degree of quantum correlation required to speed up a computation”. En: *Physical Review A* 92.6 (2015), pág. 062329.

- [139] Animesh Datta y Sevag Gharibian. “Signatures of nonclassicality in mixed-state quantum computation”. En: *Physical Review A* 79.4 (2009), pág. 042325.
- [140] Felipe F Fanchini y col. “Conservation law for distributed entanglement of formation and quantum discord”. En: *Physical Review A* 84.1 (2011), pág. 012313.
- [141] AK Rajagopal y RW Rendell. “Separability and correlations in composite states based on entropy methods”. En: *Physical Review A* 66.2 (2002), pág. 022104.
- [142] Shunlong Luo y Shuangshuang Fu. “Measurement-induced nonlocality”. En: *Physical review letters* 106.12 (2011), pág. 120401.
- [143] M Daoud, R Ahl Laamara y W Kaydi. “Unified scheme for correlations using linear relative entropy”. En: *Physics Letters A* 378.47 (2014), págs. 3501-3508.
- [144] Jacek Jurkowski. “Quantum discord derived from Tsallis entropy”. En: *International Journal of Quantum Information* 11.01 (2013).
- [145] Xi-Wen Hou, Zhi-Peng Huang y Su Chen. “Quantum discord through the generalized entropy in bipartite quantum states”. En: *The European Physical Journal D* 68.4 (2014), pág. 87.
- [146] Kaushik P Seshadreesan, Mario Berta y Mark M Wilde. “Rényi squashed entanglement, discord, and relative entropy differences”. En: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 48.39 (2015), pág. 395303.
- [147] Kaushik P Seshadreesan y Mark M Wilde. “Fidelity of recovery, squashed entanglement, and measurement recoverability”. En: *Physical Review A* 92.4 (2015), pág. 042321.
- [148] Avijit Misra y col. “Quantum correlation with sandwiched relative entropies: Advantageous as order parameter in quantum phase transitions”. En: *Physical Review E* 91.5 (2015), pág. 052125.
- [149] Mahmoud Mahdian y Mohammad Bager Arjmandi. “Comparison of quantum discord and relative entropy in some bipartite quantum systems”. En: *Quantum Information Processing* 15.4 (2016), págs. 1569-1583.
- [150] P. Haikka, T. H. Johnson y S. Maniscalco. “Non-Markovianity of local dephasing channels and time-invariant discord”. En: *Phys. Rev. A* 87.010103 (2013).
- [151] A. Streltsov, H. Kampermann y D. Bruß. “Behavior of Quantum Correlations under Local Noise.” En: *Phys. Rev. Lett.* 107.170502 (2011).
- [152] Y. Guo y J. Hou. “Necessary and sufficient conditions for the local creation of quantum discord”. En: *J. Phys. A: Math. Theor.* 46.155301 (2013).
- [153] T. R. Bromley y col. “There is more to quantum interferometry than entanglement”. En: *Phys. Rev. A* 95.052313 (2017).
- [154] Erwin Schrödinger. *The interpretation of quantum mechanics: Dublin seminars (1949-1955) and other unpublished essays*. Ox Bow Pr, 1995.
- [155] Sasaki M y col. “Accessible information and optimal strategies for real symmetrical quantum sources”. En: *Phys Rev A* 59 (1999).
- [156] Grassl M Han R Leuchs G. “Residual and destroyed accessible information after measurements”. En: *Phys Rev Lett* 120 (2018).
- [157] Lloyd S Giovannetti V y Maccone L 2012. “Achieving the Holevo Bound via sequential measurements”. En: *Phys Rev A* 85 (1999).
- [158] Tamir B y Cohen E. “A Holevo-Type Bound for a Hilbert Schmidt Distance Measure”. En: *Journal of Quantum Information Science* 5 (2015).

-
- [159] Naresh Sharma y Naqeeb Ahmad Warsi. “Fundamental bound on the reliability of quantum information transmission”. En: *Physical review letters* 110.8 (2013), pág. 080501.
- [160] Mark M Wilde, Andreas Winter y Dong Yang. “Strong converse for the classical capacity of entanglement-breaking and Hadamard channels via a sandwiched Rényi relative entropy”. En: *Communications in Mathematical Physics* 331.2 (2014), págs. 593-622.
- [161] Medeiros R A Guedes E B de Assis F M. *Quantum zero-Error Information Theory*. Springer, 2016.
- [162] Życzkowski K. Bengtsson I. *Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement*. 2006.
- [163] Michael Zwolak y Wojciech H Zurek. “Complementarity of quantum discord and classically accessible information”. En: *Scientific reports* 3 (2013), pág. 1729.
- [164] Stefano Pirandola y col. “Optimality of Gaussian discord”. En: *Physical review letters* 113.14 (2014), pág. 140405.