

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA
FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA, FÍSICA Y
COMPUTACIÓN

Trabajo Especial de Licenciatura en Matemática

**De Fourier a Wavelets: un breve recorrido por el
análisis tiempo-frecuencia**

DAVID ALEXANDER HULETT

Directora: ROCÍO DÍAZ MARTÍN

Profesor Representante: DAMIÁN FERNÁNDEZ FERREYRA

Este documento esta realizado bajo licencia Creative Commons “Reconocimiento-NoCommercial-CompartirIgual 4.0 Internacional”.



Resumen

Empezamos mencionando algunos hechos generales de integración y de la transformada continua de Fourier. Esto da pie para definir la serie de Fourier. Mediante un proceso de límite mostramos que la serie tiende a la transformada continua. Damos la motivación para la discretización de la transformada de Fourier, y vemos también cómo ésta tiende a la serie en el infinito. El análisis de Fourier presenta ciertos problemas de resolución que son subsanados en parte por las transformadas atómicas: presentamos la transformada de Fourier de tiempo corto (STFT) y su discretización, así como la transformada de wavelet y su correspondiente discretización, el análisis multirresolución (MRA). La limitación inherente de no poder tener resolución exacta en tiempo y en frecuencia se manifiesta como el principio de incertidumbre de Heisenberg. Vemos como la densidad de energía de cualquier transformada atómica puede expresarse como un promedio tiempo-frecuencia de la distribución de Wigner-Ville.

Abstract

We start by mentioning some general facts on integration and the continuous Fourier transform. This sets the stage for the definition of the Fourier series. Through a limiting process, we show how the Fourier series approaches its continuous counterpart. We give the motivation for the discretization of the Fourier transform (the FFT), which equals the Fourier series at infinity. Fourier analysis presents some resolution drawbacks that are partially mitigated by the atomic transforms: we explore the properties of the short-time Fourier transform (STFT) and its discretization. We briefly study some properties of the continuous wavelet transform, but we delve into its “algorithmification”: multiresolution analysis (MRA). The inherent limitation of Fourier analysis manifests itself as the Heisenberg’s uncertainty principle: it is impossible to achieve exact resolution both in time and in frequency. The energy density of any atomic transform can be expressed as a time-frequency average of the Wigner-Ville distribution.

Mathematics Subject Classification (2020): 42A16, 42A20, 42A38, 65T50, 65T60.

Palabras claves: Algoritmo de Cascada, Transformada de Fourier Discreta, Transformada de Fourier Rápida, Series de Fourier, Transformada de Fourier, MRA, Short Time Fourier Transform, Wavelets.

Keywords: Cascade Algorithm, Discrete Fourier Transform, Fast Fourier Transform, Fourier Series, Fourier Transform, MRA, Short Time Fourier Transform, Wavelets.

Índice

Introducción	3
1. Preliminares y Notación	5
1.1. Espacios de Hilbert	5
1.2. Integración de funciones medibles	6
1.3. Integral de Riemann vs. integral de Darboux	8
1.4. Transformada de Fourier	11
1.5. Diccionario tiempo-frecuencia	12
1.6. Teorema de muestreo	13
2. Series de Fourier	16
2.1. Introducción y definiciones	16
2.2. Un comentario sobre el orden de sumación	18
2.3. Un resultado de unicidad y una pregunta sobre convergencia	22
2.4. Continuidad α -Hölder	25
2.5. Núcleos	29
2.6. Sumación tipo Cesàro	34
2.7. Un teorema general de convergencia	37
2.8. Cierre: transición hacia la transformada continua	43
2.9. Aplicación: Principio de incertidumbre de Heisenberg	48
3. Transformada de Fourier Discreta	53
3.1. Motivación	53
3.2. Definición y propiedades	56
3.3. Inversión de la TFD	59
3.4. Cuestiones algorítmicas	65
3.5. Cierre: Serie de Fourier a partir de la TFD	68
4. STFT y transformada de wavelet	78
4.1. Transformada de Fourier de tiempo corto	79
4.2. La STFT en forma discreta	82
4.3. Transformada Wavelet Continua	87
4.4. Distribución de Wigner-Ville	91
4.5. Teorema de Balian-Low	97
5. MRA	101
5.1. Definiciones y resultados principales	101
5.2. Ejemplos	110
5.3. Conexión con subband filtering schemes	112
Referencias	118

Introducción

Desde el inicio de los tiempos, hemos descompuesto objetos complejos en partes más simples para facilitar su estudio. En el análisis, esta forma de pensar se traduce en escribir a un objeto con respecto a alguna base.

Es intuitivo pensar que las funciones $t \mapsto e^{2\pi i t n}$ poseen frecuencias “puras”: cuando la variable temporal t corre por un segundo desde 0 a 1, dicha función completa n vueltas (en sentido antihorario u horario dependiendo de si n es positivo o negativo, respectivamente) alrededor del origen. Podemos preguntarnos, para cualquier función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de período 1, si podemos expresarla como una superposición de estas funciones fundamentales:

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i x n}. \quad (0.1)$$

Si queremos despejar los a_n , podemos hacer

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i x m} dx &= \int_0^1 \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i x n} \right) e^{-2\pi i x m} dx \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \left(\int_0^1 e^{2\pi i x (n-m)} dx \right) = a_m. \end{aligned}$$

O sea, a_m viene a ser la proyección de f en la dirección de $e^{2\pi i (\cdot) m}$. Aquí presentaremos algunas condiciones suficientes para justificar el paso de la integral dentro de la suma (0.1), y también estudiaremos las distintas formas en las que dicha suma converge a f . Con un golpe de gracia que seguramente acabó con muchos puestos de trabajo, Lennart Carleson probó en 1966 que la convergencia en (0.1) vale para casi todo punto si pedimos que $f \in L^2$. Richard Hunt agravó el panorama para los analistas en 1968 generalizando el resultado para cualquier función en L^p para $1 < p \leq \infty$.

La serie de Fourier nos da un “espectro” numerable de la función f , el coeficiente a_m nos dice la cantidad de la frecuencia m que f posee. Si ahora dejamos variar ξ en todo \mathbb{R} , tiene sentido considerar el contenido de frecuencia ξ que posee f , y esta cantidad está dada, según la definición que nosotros tomamos, por

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx$$

y esto define la *transformada continua de Fourier*. Similar a (0.1), tenemos una forma de recuperar a f si conocemos su espectro, con la diferencia que la suma se convierte en una integral

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

La transformada de Fourier discreta (TFD) nos provee con una aproximación razonable de la transformada real, simplificando muchas de las cuentas en el proceso. El primero en usar algo que se parece a la TFD moderna fue Carl Friedrich Gauss en 1805, cuando estimaba la órbita del asteroide Pallas. No sólo esto, sino que también se dio cuenta que se podía reducir la cantidad de operaciones aprovechando las simetrías inherentes a los

senos y cosenos, algoritmo que hoy conocemos como la *fast Fourier transform* (FFT). Este algoritmo se popularizó recién cerca de 1965, con la publicación *An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series* por James Cooley y John Tuckey.

Si queremos analizar cómo estaba “oscilando” f cerca de un tiempo t_0 , la transformada de Fourier no nos ayuda mucho: dado un ξ_0 nos dará el contenido de frecuencia ξ_0 de f , pero no servirá para dar el contenido local de frecuencia de f . Para ello presentamos a la *transformada de tiempo corto de Fourier* (STFT): cortaremos a f por una función con soporte concentrado alrededor de t_0 , y aplicaremos la transformada de Fourier a esta nueva función. Esta transformada también se puede discretizar, usando lo que ya sabemos de la TFD.

Otra transformada atómica conocida es la de wavelet: se analiza la función en diferentes escalas:

$$\begin{aligned} Wf(u, s) &= \langle f, \psi_{u,s} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \overline{\psi\left(\frac{t-u}{s}\right)} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} (\sqrt{s}f(st)) \overline{\psi(t-u)} dt. \end{aligned}$$

Solamente discretizaremos esta transformada en forma “parcial”: para ser más precisos, seguiremos teniendo integrales, pero los parámetros de escala y traslación serán discretos. Esta parte amerita su propia teoría: el análisis multirresolución (MRA), introducido por Stephane Mallat e Yves Meyer en 1988/89. Explicaremos en detalle el algoritmo de “cascada” para calcular los coeficientes de wavelet de una función f .

Este trabajo está pensado como guía para un curso de posgrado, pero puede ser usado como material de consulta si se desea dar contenido extra en alguna materia de análisis de 3^{er}, 4^{to} ó 5^{to} año. El Capítulo 1 posee un poco de contenido preliminar que debería ser conocido para cualquier estudiante que haya tomado un curso de teoría de la medida, y salvo esto, todo lo demás es contenido que del cual se ve poco o nada en la licenciatura en Matemática. En el Capítulo 2 hemos tratado de incluir los resultados más importantes sobre la serie de Fourier y presentarlos en un marco coherente y unificado. El Capítulo 3 presenta la aplicabilidad de estos conceptos que, en aras de dictar los contenidos troncales, se suele omitir. Los Capítulos 4 y 5 son la parte más “compleja” de la tesis, donde se usan resultados de los Capítulos 1 y 2.

Si bien no hay cuentas enteramente originales, sí hay mucho trabajo realizado para compatibilizar definiciones de distintos libros y para llenar huecos importantes en las demostraciones, sobretodo en los Capítulos 4 y 5. Podría argumentarse que hay cierta originalidad en los comentarios sobre sumación, la equivalencia de integrabilidad Darboux y Riemann, el Teorema de muestreo de Shannon (si bien la prueba se me ocurrió a mí, luego encontramos una idéntica en un paper), las transiciones de lo discreto hacia lo continuo, y la forma en la cual presentamos los resultados.

1. Preliminares y Notación

En esta sección fijaremos notación y definiciones, así como algunos resultados generales sobre integración, transformada de Fourier y espacios de Hilbert que serán necesarios en numerosas ocasiones. Nos basaremos principalmente en [7] y [9].

1.1. Espacios de Hilbert

Los espacios de funciones aparecen naturalmente cuando realizamos análisis tiempo-frecuencia. En este Trabajo Final trabajaremos con aquellos que tengan estructura de espacio de Hilbert. En estos contextos tiene sentido hablar de nociones geométricas como distancias, ángulos y proyecciones ortogonales, y muchas de las ideas que sirven para probar resultados en \mathbb{R}^n se transportan naturalmente a los espacios de Hilbert.

Definición 1.1. Un *espacio de Banach* es un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ sobre \mathbb{C} ó \mathbb{R} que es completo con respecto a la métrica inducida por su norma. Más precisamente, si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ es sucesión de Cauchy, o sea, si se cumple

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : [m, n > N \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \epsilon]$$

entonces existe $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ en $(X, \|\cdot\|)$.

Definición 1.2. Un *espacio producto interno* es un espacio vectorial X sobre \mathbb{C} ó \mathbb{R} junto con un *producto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ que satisface

- (I) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ para $x, y \in X$.
- (II) $\langle \alpha x + y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ para $x, y, z \in X$, α escalar.
- (III) $\langle x, x \rangle \geq 0$ para cualquier $x \in X$.
- (IV) $\langle x, x \rangle = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Un aspecto importante y fácil de ver es que para un producto interno siempre hay asociada una norma, dada por $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición 1.3. Un *espacio de Hilbert* es un espacio producto interno $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ que es espacio de Banach con respecto a la norma inducida por su producto interno.

En este trabajo sólo consideraremos espacios de Hilbert separables ya que esto es equivalente a que tengan bases ortonormales numerables (ver por ejemplo [9, Teorema 3.52 (b)]). Es bien sabido que cualquier espacio vectorial de dimensión finita admite un producto interno y más aún, este define una estructura de Hilbert. Por supuesto, cualquier espacio de Hilbert de dimensión finita admite una base ortonormal, pues podemos construirla mediante el algoritmo de Gram-Schmidt sobre una base algebraica o (de Hamel).

Definición 1.4. Si X es espacio producto interno, $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ se dice *sucesión ortonormal* si $\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{n,m} \forall n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.1. *Cualquier espacio producto interno de dimensión infinita contiene una sucesión ortonormal.*

Demostración. Ver [10, Theorem 3.40]. □

1.2. Integración de funciones medibles

Nos restringiremos a la clase de funciones *medibles Lebesgue*. Aún así, los resultados aquí mencionados valen para espacios de medida más generales, y sus demostraciones son casi idénticas. Un análisis a fondo de este tema puede ser encontrado en [7, Chapter 1].

A efectos de ser más generales, es necesario trabajar con la recta real extendida, ésto es, le agregamos a \mathbb{R} los elementos $\pm\infty$, que satisfacen las siguientes propiedades:

$$(I) \quad -\infty < x < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$(II) \quad -\infty + x = x - \infty = -\infty, \quad \infty + x = x + \infty = \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$(III) \quad (\pm\infty)x = x(\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ \mp\infty & x < 0 \end{cases}$$

Dejamos sin definir expresiones del tipo $\infty - \infty$ ó $-\infty + \infty$. A esta extensión de \mathbb{R} se la suele denotar por $\overline{\mathbb{R}}$. La topología de $\overline{\mathbb{R}}$ está formada por los abiertos usuales de \mathbb{R} , a la cual se le agregan los entornos abiertos de $\pm\infty$, que son de la forma $\{-\infty\} \cup (-\infty, b)$ y $(a, \infty) \cup \{\infty\}$ para $a, b \in \mathbb{R}$.

Como hemos dicho, en general tendremos

- $Y = \mathbb{C}$ (con la topología usual), $Y = \mathbb{R}$ ó $Y = \overline{\mathbb{R}}$ (con la topología mencionada anteriormente).
- \mathfrak{M} será la σ -álgebra de los medibles Lebesgue, y para $E \in \mathfrak{M}$ escribiremos $|E|$ para denotar su medida de Lebesgue.
- X será algún subconjunto medible de \mathbb{R} , usualmente $X = \mathbb{R}$ ó $X = [a, b]$ con $a < b$.

La medida de Lebesgue posee varias propiedades deseables: es regular, invariante por traslaciones y *completa*: cada vez que $B \in \mathfrak{M}$ es tal que $|B| = 0$, entonces cualquier $E \subseteq B$ vuelve a ser medible Lebesgue y por monotonía vale $|E| = 0$. Dado $X \subseteq \mathbb{R}$, diremos que una propiedad vale *a.e.* (*almost everywhere*) en X si existe $E \in \mathfrak{M}$ con $|X \setminus E| = 0$ (notar que esto implica que X es medible) tal que dicha propiedad vale en E . Una terminología similar es decir que una propiedad *vale para casi todo punto* (otras expresiones son *vale en casi todas partes*, *c.t.p.*, o bien la abreviación *p.p.* de la expresión francesa *presque partout*).

El comportamiento de una función en un conjunto de medida cero será irrelevante a la hora de integrar y dos funciones que coincidan a.e. serán, a efectos prácticos, la misma. Para ser más prolijos, dado un conjunto X y \mathfrak{M} una σ -álgebra de subconjuntos de X , diremos que (X, \mathfrak{M}) es un *espacio medible*. Una función $\mu : \mathfrak{M} \rightarrow [0, \infty]$ que satisfaga $\mu(\cup_{n \in \mathbb{N}} E_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n)$ para cualquier familia $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{M}$ de medibles disjuntos será llamada una *medida*. El triple (X, \mathfrak{M}, μ) es usualmente llamado un *espacio de medida*. Una propiedad valdrá *a.e.* en X si el conjunto de puntos que no la satisfacen tiene medida μ igual a cero.

Definición 1.5. Dado (X, \mathfrak{M}) espacio medible y (Y, τ) espacio topológico, diremos que $f : X \rightarrow Y$ es *medible* si $f^{-1}(V) \in \mathfrak{M}$ para todo abierto $V \in \tau$.

Definición 1.6. Si (X, \mathfrak{M}, μ) es espacio de medida, diremos que μ es *completa* si cada vez que $B \in \mathfrak{M}$ es tal que $\mu(B) = 0$, entonces para todo $E \subseteq B$ se cumple $E \in \mathfrak{M}$.

Proposición 1.1. Si (X, \mathfrak{M}, μ) es espacio de medida con μ medida completa, $f : X \rightarrow Y$ es medible (Y espacio topológico) y $g : X \rightarrow Y$ es tal que $f = g$ a.e. en X , entonces g es medible.

Proposición 1.2. Sea (X, \mathfrak{M}) espacio medible. Si f es una función que toma valores en \mathbb{C} y escribimos $f = u + iv$, entonces f es medible en X si y sólo si u, v son medibles en X como funciones $u, v : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Damos ahora la definición de las *funciones simples*, fundamentales para desarrollar una teoría de integración.

Definición 1.7. Si (X, \mathfrak{M}) es espacio medible, diremos que $s : X \rightarrow \mathbb{R}$ es *simple* si existen medibles disjuntos A_1, \dots, A_n tales que $X = \cup_{i=1}^n A_i$ y $s = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$ para ciertos $a_i \in \mathbb{R}$, donde cada χ_{A_i} es la función característica de A_i .

Es evidente que una función simple es medible. Estamos ahora en condiciones de definir la integral de una función medible.

Definición 1.8. Sea (X, \mathfrak{M}, μ) espacio de medida y sea $E \in \mathfrak{M}$.

- Si $s = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i} : X \rightarrow [0, \infty]$ es simple, definimos

$$\int_E s(x) d\mu(x) = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i \cap E)$$

donde la convención que se usa es $0 \cdot \infty = 0$.

- Para $f : X \rightarrow [0, \infty]$ medible, definimos

$$\int_E f(x) d\mu(x) = \sup \left\{ \int_E s(x) d\mu(x) : 0 \leq s \leq f, s \text{ simple} \right\}.$$

Diremos que f es *integrable* si

$$\int_E f(x) d\mu(x) < \infty.$$

- Para $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible, definimos sus *partes positiva y negativa* por

$$f^+ = \text{máx}\{f, 0\} \quad \text{y} \quad f^- = -\text{mín}\{f, 0\}.$$

Así, se tienen f^+, f^- medibles, y

$$|f| = f^+ + f^- \quad \text{y} \quad f = f^+ - f^-.$$

Decimos que $f \in L^p(\mathbb{R})$, $0 < p < \infty$, si $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx < \infty$. Se ve que $|f|$ es integrable si y sólo si sus partes positiva y negativa lo son. En ese caso, decimos que f es integrable y se define

$$\int_E f(x) d\mu(x) = \int_E f^+(x) d\mu(x) - \int_E f^-(x) d\mu(x).$$

- Para $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ medible, vale que $|f|$ es integrable si y sólo si sus partes real ($\Re f$) e imaginaria ($\Im f$) lo son. En ese caso, decimos que f es integrable y definimos

$$\int_E f(x) d\mu(x) = \int_E \Re f(x) d\mu(x) + i \int_E \Im f(x) d\mu(x).$$

Proposición 1.3. *Suponer $f \in L^1(\mathbb{R})$. Luego, si $\{A_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ es una familia de conjuntos medibles Lebesgue tales que $\mathbb{R} = \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}} A_j$ (unión disjunta), entonces vale que*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{A_j} f(x) dx.$$

1.3. Integral de Riemann vs. integral de Darboux

Viene bien refrescar las nociones de integral que preceden al concepto más general de integral de Lebesgue. Dada una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada, existen dos formas de integrar a f ampliamente conocidas:

- Decimos que $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ es una *partición de $[a, b]$* si $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$. Definimos la *suma inferior de Darboux* y la *suma superior de Darboux*, respectivamente, por

$$L(f, P) = \sum_{k=0}^{n-1} \inf_{t \in [x_k, x_{k+1}]} f(t) (x_{k+1} - x_k) \quad U(f, P) = \sum_{k=0}^{n-1} \sup_{t \in [x_k, x_{k+1}]} f(t) (x_{k+1} - x_k)$$

Decimos que f es *integrable Darboux* si

$$\sup_P L(f, P) = \inf_P U(f, P)$$

donde el ínfimo y el supremo se toman sobre todas las particiones P del intervalo $[a, b]$, y en ese caso decimos que la *integral de Darboux de f* es cualquiera de las cantidades anteriores. Esta es quizás la noción de integral con la que uno está más familiarizado en la licenciatura.

- Una *partición etiquetada de $[a, b]$* es un par (P, t) donde $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ es una partición de $[a, b]$ y $t = (t_0, \dots, t_{n-1})$ es una elección de puntos $t_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Una *suma de Riemann de f con respecto a la partición etiquetada (P, t)* es

$$S(f, P, t) = \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k) (x_{k+1} - x_k).$$

Decimos que la *norma de P* es el número $\|P\| = \max_{0 \leq i \leq n} (x_{i+1} - x_i)$. Se dice que f es *integrable Riemann* si existe

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S(f, P, t)$$

i.e., si para algún número s , dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|P\| < \delta$ entonces

$$|S(f, P, t) - s| < \epsilon$$

para cualquier partición etiquetada (P, t) . En ese caso, decimos que la *integral de Riemann de f* es el número s .

En este trabajo aparecerán a menudo las sumas de Riemann, pero como uno está más cómodo con la integral de Darboux, es útil mostrar que estas dos definiciones son equivalentes.

Teorema 1.2. *Suponer $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Luego, f es integrable Darboux si y sólo si es integrable Riemann, y si este es el caso, la integral de Darboux coincide con la integral de Riemann.*

Antes de dar la demostración probaremos un lema donde hacemos la mayor parte del trabajo.

Lema 1.1. *Suponer $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Luego, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *Para todo $\epsilon > 0$ existe P partición de $[a, b]$ tal que*

$$U(f, P) - L(f, P) < \epsilon.$$

(b) *Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $\|P\| < \delta$ entonces*

$$U(f, P) - L(f, P) < \epsilon.$$

Demostración. (a) \Rightarrow (b). Sea $\epsilon > 0$. Tomar P_ϵ partición de $[a, b]$ tal que

$$U(f, P_\epsilon) - L(f, P_\epsilon) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sea N el número de puntos de la partición P_ϵ . Tomemos $\delta = \epsilon/(4KN)$, donde $K = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| + 1$. Suponer ahora P cualquier partición de $[a, b]$ tal que $\|P\| < \delta$. Digamos $P = \{x_0, \dots, x_n\}$. Sean

$$m_i = \inf_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) \quad M_i = \sup_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t).$$

Luego

$$U(f, P) - L(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i) (x_{i+1} - x_i).$$

Dividimos lo anterior en las sumas S_1 y S_2 : la suma S_1 se hace sobre aquellos índices i tales que $[x_i, x_{i+1}]$ no contiene a ningún punto de P_ϵ , y S_2 se hace sobre los índices restantes. Notar que entonces que cada $[x_i, x_{i+1}]$ correspondiente a S_1 está contenido en algún subintervalo que nos da la partición P_ϵ . Por las propiedades del ínfimo y del supremo, resulta

$$S_1 \leq U(f, P_\epsilon) - L(f, P_\epsilon) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por otro lado, cada $[x_i, x_{i+1}]$ correspondiente a S_2 contiene al menos un punto de P_ϵ , luego el número de subintervalos que corresponden a S_2 es menor ó igual a N . Además,

las longitudes de estos subintervalos están dominadas por $\|P\| < \delta$. Se tiene entonces $M_i - m_i < 2K$, $x_{i+1} - x_i < \delta$, luego

$$S_2 < 2K \cdot N \cdot \delta = \frac{\epsilon}{2}$$

Se sigue que

$$U(f, P) - L(f, P) = S_1 + S_2 < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

y por lo tanto vale (b).

(b) \Rightarrow (a). Esta implicación es directa. Dado $\epsilon > 0$, tomar el δ que nos da la hipótesis. Considerar la partición $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ donde $x_i = a + i \frac{b-a}{n}$, y n es lo suficientemente grande como para que $\frac{b-a}{n} < \delta$. Luego se tiene $\|P\| < \delta$ y por lo tanto

$$U(f, P) - L(f, P) < \epsilon.$$

□

Con el Lema 1.1 a mano, procedemos a la demostración del Teorema 1.2.

Demostración del Teorema 1.2. (\Rightarrow). Si f es integrable Darboux, es un hecho conocido que vale la condición (a) del Lema 1.1. Luego, por dicho Lema también vale la condición (b). Digamos que s es la integral de Darboux de f en $[a, b]$, y tomemos $\epsilon > 0$. Tomemos el δ que nos da la parte (b) del Lema 1.1. Tomar cualquier partición etiquetada (P, t) tal que $\|P\| < \delta$. Usando la notación del Lema, para cada i es evidente que $m_i \leq f(t_i) \leq M_i$. Luego

$$L(f, P) \leq S(f, P, t) \leq U(f, P)$$

y además

$$L(f, P) \leq s \leq U(f, P).$$

Como se tiene $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$, se sigue que

$$|S(f, P, t) - s| < \epsilon$$

y por lo tanto f es integrable Riemann y su integral es s .

(\Leftarrow). Sea $\epsilon > 0$. Sea s la integral de Riemann de f , y tomar δ el que nos da la hipótesis para $\epsilon/3$. Fijemos P partición de $[a, b]$ tal que $\|P\| < \delta$, digamos $P = \{x_0, \dots, x_n\}$. Sabemos que para cualquier elección de puntos $t_i \in [x_i, x_{i+1}]$ vale

$$|S(f, P, t) - s| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{1.1}$$

Fijemos $t_i \in [x_i, x_{i+1}]$ para $1 \leq i \leq n-1$. Sabemos que existe una sucesión $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq [x_0, x_1]$ tal que $f(\xi_k) \rightarrow m_0$ cuando $k \rightarrow \infty$. Por (1.1), sabemos que vale

$$\left| f(\xi_k) (x_1 - x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} f(t_i) (x_{i+1} - x_i) - s \right| < \frac{\epsilon}{3}$$

para todo k . Tomando límite de la expresión anterior cuando $k \rightarrow \infty$, resulta

$$\left| m_0 (x_1 - x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} f(t_i) (x_{i+1} - x_i) - s \right| \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Como los t_i para $i \geq 1$ eran arbitrarios, podemos repetir el proceso anterior para obtener

$$|L(f, P) - s| \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Repetiendo el razonamiento para $U(f, P)$, obtenemos

$$U(f, P) - L(f, P) \leq |U(f, P) - s| + |L(f, P) - s| \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon.$$

Pero entonces, para cualquier $\epsilon > 0$ las cantidades $\inf_P U(f, P)$, $\sup_P L(f, P)$ y s quedan “sandwitheadas” entre una suma inferior y una superior que distan a menos de ϵ . Luego f es integrable Darboux en $[a, b]$ y su integral es s . \square

1.4. Transformada de Fourier

Dada una función $f \in L^1(\mathbb{R})$, diremos que su *transformada de Fourier* es la función \widehat{f} dada por

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx. \quad (1.2)$$

Notación 1. A veces escribiremos $\mathcal{F}f$ en vez de \widehat{f} .

Esta parte está excelentemente desarrollada en [7, Chapter 9]. Esencialmente, primero se prueba que para $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ vale que $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ y, más aún, se tiene que si $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})} \quad (\text{fórmula de Plancherel})$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} d\xi \quad (\text{fórmula de Parseval}).$$

Por un argumento de densidad, la transformada se extiende a una isometría de $L^2(\mathbb{R})$ en $L^2(\mathbb{R})$ (preserva norma).

Mencionamos algunos de los teoremas más importantes, ya que los usaremos frecuentemente:

Teorema 1.3. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ entonces $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R})$ (continua y decae a 0 en $\pm\infty$) y

$$\|\widehat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Definición 1.9. Definimos su producto de convolución por

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x - y) dy$$

para funciones $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ o siempre que el integrando sea integrable.

Teorema 1.4. Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ entonces $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ y se cumple

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}.$$

Corolario 1.1. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $g \in L^2(\mathbb{R})$ entonces $f * g \in L^2(\mathbb{R})$ y vale que

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}.$$

Damos ahora dos versiones del teorema de inversión:

Teorema 1.5. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ entonces

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t) e^{ixt} dt$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}$.

Teorema 1.6. Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ y $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ entonces

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t) e^{ixt} dt.$$

1.5. Diccionario tiempo-frecuencia

Es útil conocer las transformadas de Fourier de ciertas funciones, y conocer el efecto de la transformada sobre la traslación y/o dilatación de una función. Definimos los siguientes operadores, que serán frecuentemente usados:

- *Traslación en t :* $T_t f := f(\cdot - t)$
- *Modulación por ω :* $M_\omega f := e^{i\omega \cdot} f$
- *Dilatación por $s > 0$:* $D_s f := \frac{1}{\sqrt{s}} f\left(\frac{\cdot}{s}\right)$
- El *flip operator* que cambia el signo del argumento: $\mathcal{R}f := f(-\cdot)$

Tiempo	Frecuencia
$T_t f$	$M_{-t} \widehat{f}$
$M_\omega f$	$T_\omega \widehat{f}$
$D_s f$	$D_{1/s} \widehat{f}$
$\text{sinc}(x) := \frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \chi_{[-\pi, \pi]}$

Es útil saber cómo se componen los operadores \mathcal{F} y \mathcal{R} .

Proposición 1.4. Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$. Luego vale que

(a) $\mathcal{F}(\overline{f}) = \overline{\mathcal{R}(\mathcal{F}f)}$.

(b) $\mathcal{R}(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}(\mathcal{R}f)$.

(c) Como corolario de los teoremas de inversión, vale que $\mathcal{F}(\mathcal{F}f) = \mathcal{R}f$.

1.6. Teorema de muestreo

Teorema 1.7 (Shannon). Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ es tal que $\text{supp } \hat{f} \subseteq [-\pi, \pi]$ (donde supp denota el soporte de la función), entonces f posee un representante continuo que también llamaremos f , tal que

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \text{sinc}(\cdot - n)$$

donde $\text{sinc}(x) = \frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x}$. Como consecuencia inmediata, si $\text{supp } \hat{f} \subseteq [-\Omega, \Omega]$, entonces

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{\pi n}{\Omega}\right) \text{sinc}\left(\frac{\Omega}{\pi} \cdot - n\right).$$

Demostración. Primero, como $\text{supp } \hat{f} \subseteq [-\pi, \pi]$, podemos escribir a \hat{f} en su serie de Fourier:

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(\hat{f}) e^{in\xi} \chi_{[-\pi, \pi]}(\xi)$$

donde la convergencia anterior vale para casi todo punto y en $L^2(\mathbb{R})$. La transformada de Fourier pasa dentro de la suma:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}f &= \mathcal{F}(\mathcal{F}f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(\hat{f}) T_n \hat{\chi}_{[-\pi, \pi]} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(\hat{f}) T_n[\sqrt{2\pi} \text{sinc}] \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(\hat{f}) \sqrt{2\pi} \text{sinc}(\cdot - n) \end{aligned}$$

y por lo tanto sale

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(\hat{f}) \sqrt{2\pi} \text{sinc}(\cdot + n). \quad (1.3)$$

Ahora, notar que $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$. Luego $\hat{f} \in L^2([-\pi, \pi])$ y por lo tanto $\hat{f} \in L^1([-\pi, \pi])$. Como $\text{supp } \hat{f} \subseteq [-\pi, \pi]$, se sigue que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Luego, la transformada de \hat{f} es una función $\mathcal{F}(\hat{f}) \in C_0(\mathbb{R})$, y por los teoremas de inversión sabemos que

$$f(t) = \mathcal{R}(\mathcal{F}(\hat{f})) (t)$$

para casi todo $t \in \mathbb{R}$. Así, f coincide en casi todo punto con una función continua. Llamamos f a este representante, y de esta manera vale

$$a_n(\hat{f}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(\xi) e^{-in\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{-in\xi} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(-n).$$

Reemplazando lo anterior en (1.3), sale

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(-n) \text{sinc}(\cdot + n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \text{sinc}(\cdot - n). \quad (1.4)$$

Ahora, si para $\Omega > 0$ se cumple $\text{supp } \hat{f} \subseteq [-\Omega, \Omega]$ entonces se tiene $\text{supp } \hat{f}\left(\frac{\Omega}{\pi} \cdot\right) \subseteq [-\pi, \pi]$, o sea, la transformada de $f\left(\frac{\pi}{\Omega} \cdot\right)$ tiene soporte en $[-\pi, \pi]$ y por lo probado anteriormente sale

$$f\left(\frac{\pi}{\Omega} \cdot\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{\pi n}{\Omega}\right) \text{sinc}(\cdot - n)$$

y por lo tanto

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{\pi n}{\Omega}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\Omega}{\pi} \cdot -n\right).$$

□

Observación 1.1. La convergencia en (1.4) es, en principio, únicamente en $L^2(\mathbb{R})$. Analicemos detenidamente la suma infinita de la derecha: queremos ver cómo se comporta $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\operatorname{sinc}(x - n)|^2$. Sea $x \in \mathbb{R}$, luego existe un único $n \in \mathbb{Z}$ tal que $x \in [n, n + 1)$. Notemos que

$$|k - x| \geq \begin{cases} |k - n| & \text{para } k \leq n - 1 \\ |k - n - 1| & \text{para } k \geq n + 2 \end{cases}$$

Ahora, recordando que sinc es una función continua, acotada en módulo por 1, escribimos

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\operatorname{sinc}(x - k)|^2 &= \sum_{k \neq n, n+1} |\operatorname{sinc}(x - k)|^2 + |\operatorname{sinc}(x - n)|^2 + |\operatorname{sinc}(x - n - 1)|^2 \\ &\leq \sum_{k \leq n-1} \frac{1}{|\pi(x - k)|^2} + \sum_{k \geq n+2} \frac{1}{|\pi(x - k)|^2} + 2 \\ &\leq \sum_{k \leq n-1} \frac{1}{|\pi(k - n)|^2} + \sum_{k \geq n+2} \frac{1}{|\pi(k - n - 1)|^2} + 2 \\ &= 2 \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{|\pi k|^2} + 2 = C. \end{aligned}$$

Luego, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se cumple

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(k) \operatorname{sinc}(x - k)| \leq \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(k)|^2 \right]^{1/2} \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\operatorname{sinc}(x - k)|^2 \right]^{1/2} \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

O sea, acabamos de probar que la serie en (1.4) converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$, y por el M -test de Weierstrass, uniformemente a una función continua, pues cada sumando $f(n) \operatorname{sinc}(\cdot - n)$ es una función continua. Ahora, como la igualdad en (1.4) es en $L^2(\mathbb{R})$, sabemos que existe una subsucesión que converge a f puntualmente a.e., y por lo tanto tenemos, para casi todo punto $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=-n_k}^{n_k} f(j) \operatorname{sinc}(x - j) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \operatorname{sinc}(x - n).$$

Como los lados izquierdo y derecho de la anterior igualdad son funciones continuas que coinciden a.e. en \mathbb{R} , concluimos que coinciden para todo $x \in \mathbb{R}$, o sea, la igualdad

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) \operatorname{sinc}(x - k)$$

es para todo $x \in \mathbb{R}$ y f es el límite uniforme de las sumas parciales $\sum_{k=-N}^N f(k) \operatorname{sinc}(x - k)$.

Observación 1.2. El teorema anterior nos asegura que toda $f \in L^2(\mathbb{R})$ con $\text{supp } \widehat{f} \subseteq [-\pi, \pi]$ está completamente determinada por sus valores en los enteros. Las traslaciones enteras de la función sinc juegan el rol de funciones de interpolación en los enteros:

$$\text{sinc}(n - k) = \delta_{k,n} \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

Observemos que la función $\text{sinc}(x)$ es $O(\frac{1}{|x|})$ cuando $|x| \rightarrow \infty$. En [10] encontramos un ejercicio que aporta una variación al teorema de Shannon: este sugiere que si muestreamos a f “más seguido”, entonces la serie que reconstruye a f converge más rápido.

Esto se logra de forma análoga al teorema anterior pero tomando, en lugar de la función característica $\chi_{[-\pi, \pi]}$, una función g_λ , para $\lambda > 1$, cuyo gráfico tenga la forma de un “trapecio sin base mayor”: $\text{supp } g_\lambda \subseteq \lambda[-\pi, \pi]$, lineal a trozos, $g_\lambda \equiv 1$ en $[-\pi, \pi]$ y $g_\lambda(\pm\lambda\pi) = 0$. Esta función g_λ es más “suave” que $\chi_{[-\pi, \pi]}$ y se obtiene como diferencia de dos funciones cuyos gráficos tienen la pinta de un “triángulo sin base”, a saber, funciones lineales a trozos, una soportada en $\lambda[-\pi, \pi]$, que vale 0 en $\pm\lambda\pi$ y $\frac{\lambda}{\lambda-1}$ en 0, y la otra con soporte en $[-\pi, \pi]$ y que vale 0 en los extremos de dicho intervalo y vale $\frac{1}{\lambda-1}$ en 0. En este punto sugerimos al lector ver la Figura 1 para visualizar las funciones mencionadas, ya que explicado en palabras parece todo muy complejo pero no lo es. Se puede ver que cada una de dichas funciones “triangulares” viene dada por la convolución de una función característica consigo misma. En efecto, la función “triangular” que vale 1 en 0 y 0 en $\pm 2\pi$, es $\chi_{[-\pi, \pi]} * \chi_{[-\pi, \pi]}$. Sabiendo esto y jugando con dilataciones se obtienen las otras dos funciones. Usando que la transformada de Fourier de una convolución de funciones es el producto puntual de las transformadas de dichas funciones, obtenemos $\widehat{g}_\lambda(x) = K_\lambda(x) = \frac{\cos(\pi x) - \cos(\pi \lambda x)}{\pi^2(\lambda-1)x^2}$. Procediendo de la misma manera que en la prueba del teorema de Shannon, puesto que $g_\lambda \equiv 1$ en $[-\pi, \pi]$, se obtiene

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\lambda} f\left(\frac{n}{\lambda}\right) K_\lambda\left(x - \frac{n}{\lambda}\right)$$

donde la convergencia es en $L^2(\mathbb{R})$ y uniforme. En este caso, cada $K_\lambda(x)$ es $O(\frac{1}{x^2})$ cuando $|x| \rightarrow \infty$. (Por último, se puede ver además que $\lim_{\lambda \rightarrow 1} K_\lambda(x) = \text{sinc}(x)$.)

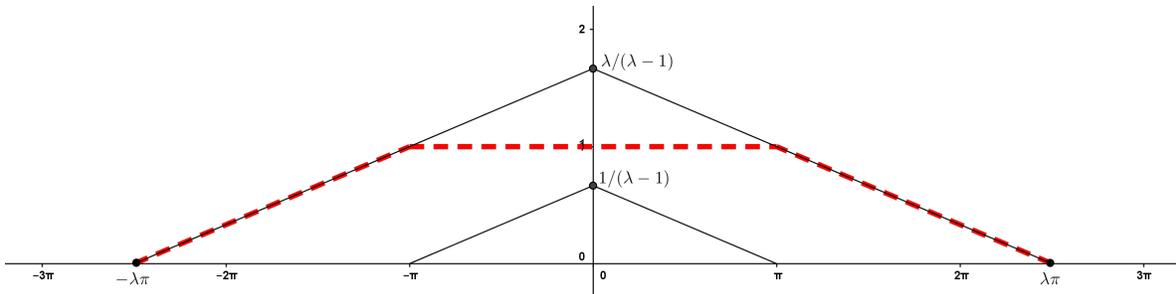


Figura 1: En líneas punteadas de color rojo, g_λ .

2. Series de Fourier

2.1. Introducción y definiciones

Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), evidentemente en un plano de existencia superior al de los meros mortales, introdujo la serie que lleva su nombre con el objetivo de estudiar la ecuación del calor en una placa delgada de metal. Publicó sus primeros resultados en su *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides*. Antes de este trabajo, sólo se conocían soluciones a la ecuación del calor en el caso en el que la fuente de calor se comporta de forma simple, como un seno o un coseno. Fue la idea del buen Fourier la de modelar una fuente de calor más complicada como una superposición de senos y cosenos.

Gracias al trabajo de Fourier fue posible establecer que cualquier función suficientemente buena puede escribirse como una superposición de funciones trigonométricas simples. En este capítulo daremos un sentido preciso al término “suficientemente buena” y estudiaremos distintos tipos de convergencia.

La bibliografía usada en este capítulo es principalmente [10].

Definición 2.1. Dada $f : [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \rightarrow \mathbb{C}$ definimos formalmente sus *coeficientes de Fourier* como

$$a_n(f) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \exp\left(-\frac{2\pi inx}{T}\right) dx \quad (n \in \mathbb{Z}). \quad (2.1)$$

Para que estos coeficientes tengan sentido debemos pedir condiciones de integrabilidad sobre f . Recordemos que

$$L^\infty[-T/2, T/2] \subseteq \dots \subseteq L^2[-T/2, T/2] \subseteq L^1[-T/2, T/2].$$

Pedimos entonces $f \in L^1([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}])$ con el objetivo de ser lo menos restrictivos posible.

Definición 2.2. La *serie de Fourier* de $f \in L^1([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}])$ es, formalmente,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(f) \exp\left(\frac{2\pi inx}{T}\right). \quad (2.2)$$

La N -ésima suma parcial de Fourier de f es

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^N a_n(f) \exp\left(\frac{2\pi inx}{T}\right).$$

Observación 2.1 (Funciones definidas en la circunferencia \mathbb{S}^1 y funciones periódicas en \mathbb{R}). Un punto en \mathbb{S}^1 es de la forma $e^{i\theta}$, con $\theta \in \mathbb{R}$, y es único módulo múltiplos enteros de 2π . Si F es una función definida en la circunferencia unitaria, $F : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}$, podemos definir una función f , con dominio la recta real, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, periódica de período 2π

$$f(\theta) = F(e^{i\theta}) \quad (\theta \in \mathbb{R}). \quad (2.3)$$

Además, toda función f definida en el intervalo $[-\pi, \pi]$, que cumpla $f(\pi) = f(-\pi)$, se extiende a una función 2π periódica en \mathbb{R} , que a su vez puede ser identificada con una función F definida sobre \mathbb{S}^1 .

Observemos también que si $f \in L^1[-\pi, \pi]$, entonces f se puede extender de forma 2π -periódica a.e. a todo \mathbb{R} y de esta forma se obtiene $f \in L^1[-\pi+c, \pi+c]$ para cualquier $c \in \mathbb{R}$.

Notar que si \mathbb{S}^1 es nuestro dominio, todo elemento $z \in \mathbb{S}^1$ es de la forma $z = e^{2\pi ix}$ para algún $x \in [0, 1)$. Luego, la expresión (2.2) se puede escribir de manera “polinomial”

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(f) z^n, \quad \text{donde } f \in L^1(\mathbb{S}^1).$$

Es natural preguntarse en qué sentido converge la serie de Fourier (2.2) a la función f . Lennart Carleson probó en 1966 un resultado de máxima importancia: si f es de cuadrado integrable, podemos asegurar que su serie de Fourier converge puntualmente a f para casi todo punto. Damos ahora una extensión del teorema de Carleson, debida a Richard Hunt (1968) quien generalizó el resultado para $p \in (1, \infty]$.

Teorema 2.1 (Carleson-Hunt). *Si $f \in L^p(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$, $1 < p \leq \infty$, y $a_n(f)$ son sus coeficientes de Fourier, entonces*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(f) \exp\left(\frac{2\pi inx}{T}\right) = f(x)$$

para casi todo $x \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$.

La demostración de este teorema es sumamente técnica y extensa, mostrarla aquí no estaría dentro de los objetivos de este trabajo. De todas maneras, podemos estudiar algunos resultados de convergencias sin necesidad de invocar el teorema anterior.

Por ejemplo, es relativamente fácil de ver que las funciones $e_n, n \in \mathbb{Z}$, dadas por

$$e_n(x) := e^{-inx}$$

forman una base ortonormal de $L^2[0, 2\pi]$ con respecto al producto interno

$$\langle f, g \rangle_{L^2[0, 2\pi]} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

De esta manera, cuando calculamos el coeficiente $a_n(f)$ de Fourier de una función $f \in L^2[0, 2\pi]$ es simplemente la proyección de f en la dirección de e_n

$$a_n(f) = \langle f, e_n \rangle_{L^2[0, 2\pi]}.$$

Como $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es base ortonormal, tenemos la convergencia en $L^2[0, 2\pi]$

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, e_n \rangle_{L^2[0, 2\pi]} e_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(f) e_n$$

y además

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \|f\|_{L^2[0, 2\pi]}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle f, e_n \rangle_{L^2[0, 2\pi]}|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n(f)|^2.$$

Este resultado lleva nombre:

Teorema 2.2 (Plancherel/Parseval). Sea $f \in L^2[0, 2\pi]$ y sean $a_n(f)$ sus coeficientes de Fourier. Luego vale que

$$\|f\|_{L^2[0, 2\pi]}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n(f)|^2.$$

Definición 2.3. Para ser consistentes con el teorema anterior, tomaremos la norma natural de $f \in L^p[0, 2\pi]$ ($1 \leq p < \infty$) por

$$\|f\|_{L^p[0, 2\pi]} = \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Antes de seguir avanzando con resultados sobre la convergencia de las series de Fourier haremos una suerte de digresión, procurando ser cautelosos y buscando entender acabadamente los objetos definidos al comienzo de esta sección.

2.2. Un comentario sobre el orden de sumación

Quizás sea un poco extraño mencionar qué queremos decir con el símbolo $\sum_{n \in \mathbb{Z}}$ cuando ya apareció en la definición al principio de esta sección, pero todo tendrá sentido luego de considerar algunas cuestiones a continuación.

Considerar un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$. Suponer $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión de elementos de X . Como ya sabemos, podemos darle un sentido a su suma. Decimos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = s$. Un resultado fundamental que usamos constantemente es el siguiente:

Proposición 2.1. Suponer $(X, \|\cdot\|)$ es Banach y $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\| < \infty$. Luego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge (i.e., el límite de las sumas parciales existe), digamos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$. Más aún, si $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ es función biyectiva, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = s.$$

En otras palabras, la suma de cualquier reordenamiento de $\{a_n\}$ converge al mismo límite.

Demostración. Tomar $n \in \mathbb{N}$. Luego, reordenando de menor a mayor los naturales $\varphi(i)$ obtenemos

$$\sum_{k=1}^n \|a_{\varphi(k)}\| = \sum_{j=1}^{\max_{1 \leq k \leq n} \varphi(k)} \|a_j\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|a_j\| < \infty.$$

Se sigue que $\sum_{k=1}^{\infty} \|a_{\varphi(k)}\| < \infty$ y por lo tanto existe $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$. Para ver que su límite es s , tomar $\epsilon > 0$. Tomar N_0 tal que

$$n \geq N_0 \Rightarrow \sum_{k=N_0}^{\infty} \|a_k\| < \epsilon.$$

Sea M_0 tal que $\{\varphi(1), \dots, \varphi(M_0)\}$ contenga a $\{1, 2, \dots, N_0-1\}$. Suponer $n \geq M_0$. Luego, sumando algunos $\|a_k\|$ de ser necesario, se obtiene

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_{\varphi(k)} - s \right\| = \left\| \sum_{k=1}^n a_{\varphi(k)} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right\| \leq \sum_{k=N_0}^{\infty} \|a_k\| < \epsilon$$

y resulta lo que queríamos probar. \square

Establecemos entonces lo siguiente: cada vez que veamos el símbolo $\sum_{n \in \mathbb{N}}$, estaremos diciendo $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n$. De esta forma incluimos a aquellas sucesiones que no convergen absolutamente pero tales que el límite de sus sumas parciales sí existe, como el conocido ejemplo

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n}.$$

En el caso en el que la suma de los módulos o normas converja, el límite será independiente del orden de los sumandos, como ya vimos anteriormente.

En este trabajo aparecen con mucha frecuencia sucesiones indexadas con los números enteros, i.e., $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. De vuelta, para darle un sentido a la suma, decimos que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n = s$$

si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n a_k = s$. Para conectar con lo anterior, cualquier $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ induce una $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dada por $b_n = a_{\pi(n)}$, donde $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ es la biyección dada por

$$\begin{aligned} \pi(2k) &= -k \\ \pi(2k+1) &= k \end{aligned}$$

para $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Notar que ahora se cumple

$$\sum_{k=-n}^n a_k = a_0 + a_{-1} + a_1 + \dots + a_{-n} + a_n = \sum_{k=1}^{2n+1} b_k.$$

Es evidente que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \|a_n\| < \infty$ si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} \|b_n\| < \infty$. Si cualquiera de estas dos se cumple, tomar cualquier biyección $\psi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$. Esta induce una única biyección $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que

$$b_{\varphi(k)} = a_{\psi(\pi(k))}$$

dada por $\varphi = \pi^{-1} \circ \psi \circ \pi$. De esta forma, se tiene

$$\sum_{k=-n}^n a_{\psi(k)} = \sum_{k=1}^n b_{\varphi(k)}.$$

Por la Proposición 2.1, el lado derecho de la anterior igualdad tiene límite cuando $n \rightarrow \infty$, y por lo tanto el lado izquierdo también. Es decir, lo que acabamos de mostrar es que si la suma simétrica de los módulos o las normas converge, entonces la suma de cualquier reordenamiento de los a_n converge en el sentido del límite de las sumas

parciales simétricas. Para ser generales, cada vez que veamos el símbolo $\sum_{n \in \mathbb{Z}}$, lo que estaremos diciendo será $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n$. De esta forma, tenemos en cuenta casos como

$$a_n = n$$

para $n \in \mathbb{Z}$. La suma $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n$ converge a cero en el sentido del límite de de las sumas parciales simétricas, pero no converge cuando sumamos los módulos. El subíndice “ $n \in \mathbb{Z}$ ” sugiere de alguna forma que el orden de sumación no importa, y este será el caso la mayoría de las veces, ya sea cuando la serie de las normas converja, o cuando tengamos cosas del tipo

$$x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle x, e_n \rangle e_n$$

donde $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de un espacio de Hilbert (cualquier reordenamiento de una base ortonormal sigue siendo una base ortonormal).

En línea con todo lo que hemos estado diciendo, y para ver cuán salvajes pueden ponerse las cosas, vale la pena considerar la serie de Fourier de cierta función “inocente”. Su serie converge para casi todo x a $f(x)$ pero no converge absolutamente para ningún x .

Suponer a, b tales que $[a, b] \not\subset [-\pi, \pi]$. Considerar la función f 2π -periódica que en $[-\pi, \pi]$ está dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad (2.4)$$

Los coeficientes de Fourier de f están dados por

$$a_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_a^b e^{-inx} dx = \frac{e^{-ina} - e^{-inb}}{2\pi in}$$

para $n \neq 0$, y $a_0(f) = \frac{b-a}{2\pi}$. O sea, la N -ésima suma parcial de Fourier está dada por

$$S_N(f) = \frac{b-a}{2\pi} + \sum_{-N \leq k \leq N, k \neq 0} \frac{e^{-ina} - e^{-inb}}{2\pi in} e^{inx}. \quad (2.5)$$

Veamos primero que esta serie no converge absolutamente. Primero, escribimos

$$e^{-ina} - e^{-inb} = (\cos(na) - \cos(nb)) + i(\text{sen}(nb) - \text{sen}(na)).$$

Luego

$$\begin{aligned} |e^{-ina} - e^{-inb}|^2 &= (\cos(na) - \cos(nb))^2 + (\text{sen}(nb) - \text{sen}(na))^2 \\ &= \cos^2(na) - 2\cos(na)\cos(nb) + \cos^2(nb) \\ &\quad + \text{sen}^2(nb) - 2\text{sen}(nb)\text{sen}(na) + \text{sen}^2(na) \\ &= 2 - 2\cos(na - nb) = 4 \left(\frac{1 - \cos(n(b-a))}{2} \right) \\ &= 4 \text{sen}^2 \left(\frac{n(b-a)}{2} \right). \end{aligned}$$

Probamos ahora un Lema auxiliar:

Lema 2.1. Suponer $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión de números no negativos tal que $a_n \searrow 0$, i.e., que converge monótonamente decreciente a cero. Luego, si $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n |\operatorname{sen}(n\theta)| < \infty$ para algún θ que no es múltiplo entero de π , entonces

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n < \infty.$$

Demostración. Como $|\operatorname{sen}(n\theta)| \leq 1$ para todo n , se cumple $a_n |\operatorname{sen}^2(n\theta)| \leq a_n |\operatorname{sen}(n\theta)|$ para todo n y por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n |\operatorname{sen}^2(n\theta)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n |\operatorname{sen}(n\theta)| < \infty.$$

Como $a_{n-1} \geq a_n$, tenemos

$$\begin{aligned} a_n \operatorname{sen}^2(n\theta) + a_{n-1} \operatorname{sen}^2((n-1)\theta) &\geq a_n (\operatorname{sen}^2(n\theta) + \operatorname{sen}^2((n-1)\theta)) \\ &= a_n \left| \frac{1 - \cos(2n\theta)}{2} + \frac{1 - \cos(2(n-1)\theta)}{2} \right| \\ &= a_n \left| 1 - \frac{1}{2} (\cos(2n\theta) + \cos(2(n-1)\theta)) \right| \\ &= a_n |1 - \cos(\theta) \cos((2n-1)\theta)| \geq a_n |1 - |\cos(\theta) \cos((2n-1)\theta)|| \\ &\geq a_n |1 - |\cos(\theta)|| \end{aligned}$$

donde usamos la igualdad

$$\cos(2n\theta) + \cos(2(n-1)\theta) = 2 \cos(\theta) \cos((2n-1)\theta)$$

que se verifica fácilmente desarrollando cada miembro por separado y usando la identidad $\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$. Se tiene entonces

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n |1 - |\cos(\theta)|| \leq \sum_{n=2}^{\infty} a_n \operatorname{sen}^2(n\theta) + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} \operatorname{sen}^2((n-1)\theta) < \infty$$

o sea que la suma en el lado izquierdo converge. Como θ no es múltiplo entero de π , se tiene $|\cos(\theta)| \neq 1$. Concluimos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

que es lo que queríamos probar. \square

Con este Lema a mano, se lo aplicamos a la serie de Fourier de f dada en (2.4). Recordando (2.5) y que $|e^{-ina} - e^{-inb}|^2 = 4 \operatorname{sen}^2\left(\frac{n(b-a)}{2}\right)$, se tiene

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{|e^{-ina} - e^{-inb}|}{|2\pi in|} = \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{2 |\operatorname{sen}(n(b-a)/2)|}{|2\pi n|}.$$

Como se tenía $[a, b] \not\subset [-\pi, \pi]$, se tiene que $\theta = (b - a)/2$ no es múltiplo entero de π . Luego, si la serie anterior convergiera, por el Lema deberíamos tener

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{1}{|2\pi n|} < \infty$$

lo cual es absurdo.

Reiteramos: todas estas cuentas un tanto tediosas son para mostrar que la convergencia absoluta ya falla con una clase de funciones muy simples. El Teorema de Carleson-Hunt, ya mencionado anteriormente, nos asegura sin embargo que si tomamos a $\sum_{n \in \mathbb{Z}}$ como dijimos (en el sentido del límite de sumas parciales simétricas) entonces

$$f(x) = \frac{b-a}{2\pi} + \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{e^{-ina} - e^{-inb}}{2\pi in} e^{inx}$$

para casi todo x .

2.3. Un resultado de unicidad y una pregunta sobre convergencia

Retomamos el análisis de convergencia de series de Fourier. Comenzamos con el siguiente teorema de unicidad de los coeficientes de Fourier.

Teorema 2.3. [10, Capítulo 2, Teorema 2.1] *Si g y h son funciones integrables Riemann en $[-\pi, \pi]$ tales que*

$$a_n(g) = a_n(h) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

entonces $g(x_0) = h(x_0)$ para todo x_0 punto de continuidad de $g - h$. En particular, si además g y h son continuas, entonces coinciden en todo punto.

Demostración. Sea $f = g - h$. Por hipótesis, $a_n(f) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Supongamos que $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ y después generalizaremos a una función a valores complejos.

Asumamos, sin pérdida de generalidad, que f es continua en $x_0 = 0$. Supongamos que $f(0) > 0$. Pretendemos llegar a un absurdo. La estrategia a seguir será construir una sucesión de polinomios trigonométricos $\{p_k\}$ que “explote” en 0 logrando que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) p_k(x) dx = +\infty.$$

Esto nos dará una contradicción, ya que por hipótesis todos los coeficientes de Fourier de f son nulos y por lo tanto también

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) p_k(x) dx = 0$$

para cualquier polinomio trigonométrico p_k . Como f es continua alrededor de 0 y $f(0) > 0$, existe un entorno de 0 donde f es (estrictamente) positiva. En particular, existe $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ tal que

$$f(x) > \frac{f(0)}{2} \quad \forall x \in (-\delta, \delta).$$

Consideramos

$$p(x) = \varepsilon + \cos(x)$$

donde elegimos $\varepsilon > 0$ suficientemente chico de manera tal que

$$|p(x)| < 1 - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para todo } x \in [-\pi, \pi] \text{ tal que } x \notin (-\delta, \delta).$$

Por otro lado, elegimos $\eta < \delta$ tal que

$$p(x) \geq 1 + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{si } x \in (-\eta, \eta).$$

Finalmente ponemos

$$p_k(x) = (p(x))^k \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Como f es integrable Riemann en $[-\pi, \pi]$, es acotada. Sea B tal que

$$|f(x)| \leq B \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

Notemos que por un lado,

$$\begin{aligned} \left| \int_{|x| \geq \delta} f(x) p_k(x) dx \right| &\leq \int_{|x| \geq \delta} |f(x)| |p_k(x)| dx \leq \int_{|x| \geq \delta} B \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^k dx \\ &\leq 2\pi B \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^k. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Por otro lado, nuestra elección del polinomio p garantiza

$$f(x) p(x) > 0 \quad \forall x \in (-\delta, \delta).$$

Por lo tanto,

$$\int_{\eta < |x| < \delta} f(x) p_k(x) dx > 0 \quad (2.7)$$

y además

$$\int_{|x| \leq \eta} f(x) p_k(x) dx \geq 2\eta \frac{f(0)}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^k. \quad (2.8)$$

Luego, para cada $k \in \mathbb{N}$ podemos escribir

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) p_k(x) dx = \underbrace{\int_{|x| \leq \eta} f(x) p_k(x) dx}_{\text{I}} + \underbrace{\int_{\eta < |x| < \delta} f(x) p_k(x) dx}_{\text{II}} + \underbrace{\int_{|x| \geq \delta} f(x) p_k(x) dx}_{\text{III}}.$$

Como $1 - \frac{\varepsilon}{2} < 1$ y $1 + \frac{\varepsilon}{2} > 1$, por (2.8) por el término I tiende a infinito cuando $k \rightarrow \infty$, por (2.6) el término III tiende a cero cuando $k \rightarrow \infty$ y el término II es mayor a cero por (2.7). Luego

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) p_k(x) dx \rightarrow \infty \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty$$

y de esta manera llegamos al absurdo. Si $f(0) < 0$, se utilizan los mismos argumentos para llegar al absurdo. En el caso en el que f es continua en x_0 , simplemente definir

$$r(x) = f(x + x_0).$$

Es inmediato que ahora r es continua en 0 y que todos sus coeficientes de Fourier son nulos. Aplicar lo probado para obtener

$$f(x_0) = r(0) = 0.$$

Pasemos ahora al caso general en que f es una función a valores complejos. Escribimos

$$f(x) = u(x) + iv(x)$$

con $u, v : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$u = \frac{f + \bar{f}}{2} \quad v = \frac{f - \bar{f}}{2i}.$$

Como

$$a_n(\bar{f}) = \overline{a_{-n}(f)} \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

si $a_n(f) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, entonces $a_n(u) = 0 = a_n(v)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y se obtiene el resultado del teorema por lo hecho anteriormente. \square

Observación 2.2. Una vez que hayamos visto los núcleos de Fejér podremos ver que si $f \in L^p([-\pi, \pi])$, con $1 \leq p < \infty$, tiene sus coeficientes de Fourier $a_n(f) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, entonces $f = 0$ en casi todo punto.

Corolario 2.1. [10, Capítulo 2, Corolario 2.3] Si $f \in C(\mathbb{S}^1)$ es tal que su serie de Fourier converge absolutamente, es decir,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n(f)| < \infty,$$

entonces $S_N(f)(x)$ tiende uniformemente en x a $f(x)$ cuando $N \rightarrow \infty$.

Demostración. Como por hipótesis $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n(f)| < \infty$, el M -test de Weierstrass nos asegura que la serie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(f)e^{inx}$$

converge uniformemente en $[-\pi, \pi]$ a una función continua

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(f)e^{inx} = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x)$$

por ser cada suma parcial S_N un polinomio trigonométrico. Además, $a_m(g) = a_m(f)$ para todo $m \in \mathbb{Z}$. En efecto,

$$a_m(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(f)e^{inx} e^{-imx} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(f) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx \\
&= a_m(f)
\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad vale debido a la convergencia uniforme de la serie de Fourier de f . Finalmente, como f es continua, por el teorema 2.3 tenemos que $f(x) = g(x)$ para todo punto $x \in \mathbb{S}^1$. \square

Ahora sabemos, a partir del corolario anterior, que si f es una función continua sobre la circunferencia unitaria (o, equivalentemente, continua sobre $[-\pi, \pi]$ con $f(-\pi) = f(\pi)$) tal que la serie dada por los valores absolutos de sus coeficientes de Fourier converge, entonces su serie de Fourier converge uniformemente en \mathbb{S}^1 (o en $[-\pi, \pi]$) a f . Esto nos lleva a preguntarnos:

¿Qué condiciones sobre f garantizan convergencia absoluta de su serie de Fourier?

La condición de ser *suficientemente suave* dará una respuesta a la pregunta y será especificada en el próximo apartado. Como antesala, notemos que usando la regla de integración por partes se puede ver que si $f \in C^k(\mathbb{S}^1)$, entonces la sucesión de sus coeficientes de Fourier cumple que

$$a_n(f) = O\left(\frac{1}{|n|^k}\right) \quad (|n| \rightarrow \infty). \quad (2.9)$$

En particular, si $k \geq 2$ la serie de Fourier converge absolutamente.

Podemos preguntarnos, también, si hay instancias en donde la serie no converge absolutamente, pero que tenga sentido tomar el límite de las sumas parciales de Fourier, y más aún, que este límite converja a la función. Pero antes de seguir aclaremos la notación O grande y o chica que ya fue usada en (2.9) y volverá a aparecer.

Definición 2.4. Sea $(X, \|\cdot\|)$ espacio normado y sea $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sucesión de elementos de X . Dado $0 \leq \alpha$, diremos que

- $c_n = O\left(\frac{1}{|n|^\alpha}\right)$ cuando $|n| \rightarrow \infty$, si existen $K \geq 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $\|c_n\| \leq \frac{K}{|n|^\alpha}$ para $|n| \geq N$.
- $c_n = o\left(\frac{1}{|n|^\alpha}\right)$ cuando $|n| \rightarrow \infty$, si $|n|^\alpha \|c_n\| \rightarrow 0$ cuando $|n| \rightarrow \infty$.

La definición es la misma si la sucesión está indexada en \mathbb{N} , o sea, si tenemos $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Se puede ver fácilmente que “ o chiquita $\Rightarrow O$ grande”.

2.4. Continuidad α -Hölder

Definición 2.5. Sea $\alpha > 0$. Una función f se dice α -Hölder continua si $\exists C > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha \quad \forall x, y.$$

En estos casos escribimos $f \in C^\alpha$.

Observación 2.3.

- Si $\alpha > 1$, entonces f es una función constante.
- Si $\alpha = 1$, la condición de ser α -Hölder continua es la condición de Lipschitz.
- Para las funciones definidas en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ y $0 < \alpha < 1$ tenemos

$$C^1[a, b] \subsetneq \text{Lipschitz}[a, b] \subsetneq C^\alpha[a, b] \subsetneq \text{uniformemente continuas} = C[a, b]$$

Lema 2.2. Sea $\alpha > 0$. Si $f \in C^\alpha(\mathbb{R})$ periódica, de período 2π . Luego

$$a_n(f) = O\left(\frac{1}{|n|^\alpha}\right) \quad (|n| \rightarrow \infty).$$

Demostración. En primer lugar notemos que

$$a_n(T_{\pi/n}f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t - \pi/n) e^{-in(t-\pi/n)} e^{-i\pi} dt = -a_n(f).$$

Luego,

$$2a_n(f) = a_n(f) - a_n(T_{\pi/n}f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x - \pi/n)] e^{-inx} dx.$$

Entonces

$$|a_n(f)| \leq \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x - \pi/n)| dx \leq \frac{C}{4\pi} 2\pi \left|\frac{\pi}{n}\right|^\alpha = \frac{C}{2\pi^{1-\alpha}} \frac{1}{|n|^\alpha}$$

donde C es la constante dada por la continuidad α -Hölder de f . □

Observación 2.4. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ periódica, de período 2π con $f(-\pi) = f(\pi)$ es una función α -Hölder continua, entonces el lema anterior da la mejor estimación posible para la sucesión formada por sus coeficientes de Fourier.

En efecto, consideremos por ejemplo

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha} e^{i2^k x} \quad (0 < \alpha < 1).$$

Como $|\frac{1}{2^\alpha}| < 1$, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha} e^{i2^k x}$ converge absolutamente y, por el M -test de Weierstrass, uniformemente a f . La convergencia uniforme nos permite calcular los coeficientes de Fourier de f obteniendo

$$a_n(f) = \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{si } n = 2^k.$$

Por su parte, f es α -Hölder continua. Primero escribimos

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{k: 2^k \leq 1/|h|} 2^{-k\alpha} (e^{i2^k(x+h)} - e^{i2^k x})$$

$$+ \sum_{k: 2^k > 1/|h|} 2^{-k\alpha} \left(e^{i2^k(x+h)} - e^{i2^k x} \right).$$

Recordemos primero que si $|r| < 1$ entonces para $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ vale que

$$\sum_{k=N}^{\infty} r^k = \sum_{k=0}^{\infty} r^k - \sum_{k=0}^{N-1} r^k = \frac{1}{1-r} - \frac{1-r^N}{1-r} = \frac{r^N}{1-r}. \quad (2.10)$$

Por un lado,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k: 2^k > 1/|h|} 2^{-k\alpha} \left(e^{i2^k(x+h)} - e^{i2^k x} \right) \right| &\leq \sum_{k: 2^k > 1/|h|} 2^{-k\alpha} |e^{i2^k(x+h)} - e^{i2^k x}| \\ &\leq 2 \left(\sum_{k: 2^k > 1/|h|} 2^{-k\alpha} \right) \end{aligned}$$

usando que $|e^{ix} - e^{iy}| \leq 2$. Veamos esta última suma. Sea N el primer natural que satisface $2^N > 1/|h|$, luego $1/2^{N\alpha} < |h|^\alpha$ y por lo tanto, usando (2.10),

$$2 \left(\sum_{k: 2^k > 1/|h|} 2^{-k\alpha} \right) = 2 \sum_{k=N}^{\infty} 2^{-k\alpha} = 2 \frac{(1/2^\alpha)^N}{1-1/2^\alpha} \leq 2 \frac{1}{1-1/2^\alpha} |h|^\alpha = \frac{2^{\alpha+1}}{2^\alpha - 1} |h|^\alpha.$$

Por otro lado, escribimos la otra suma

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k: 2^k \leq 1/|h|} 2^{-k\alpha} \left(e^{i2^k(x+h)} - e^{i2^k x} \right) \right| &\leq \sum_{k: 2^k \leq 1/|h|} 2^{-k\alpha} |1 - e^{i2^k h}| \\ &\leq \sum_{k: 2^k \leq 1/|h|} 2^{-k\alpha} 2^k |h|. \end{aligned}$$

Usamos que $|1 - e^{i\theta}| \leq |\theta|$ si $|\theta| \leq \frac{\pi}{3}$, por eso partimos la serie y en esta parte consideramos $2^k |h| \leq 1$. Para ver esta última suma (que va de 0 a $N-1$) escribimos

$$\sum_{k: 2^k \leq 1/|h|} 2^{-k\alpha} 2^k |h| = |h| \sum_{k=0}^{N-1} (2^{1-\alpha})^k = |h| \frac{2^{(1-\alpha)N} - 1}{2^{1-\alpha} - 1} \leq (*).$$

Como $2^N \leq 1/|h|$, se tiene $2^{N(1-\alpha)} \leq 1/|h|^{1-\alpha}$ y por lo tanto

$$(*) \leq |h| \frac{1/|h|^{1-\alpha} - 1}{2^{1-\alpha} - 1} \leq \frac{1}{2^{1-\alpha} - 1} |h|^\alpha.$$

Luego, tomando $C = \max \left\{ \frac{1}{2^{1-\alpha} - 1}, \frac{2^{\alpha+1}}{2^\alpha - 1} \right\}$ resulta

$$|f(x+h) - f(x)| \leq C |h|^\alpha$$

y por lo tanto f es α -Hölder continua.

Teorema 2.4 (Teorema de Bernstein). Si $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ es α -Hölder continua con $\alpha > 1/2$, entonces su serie de Fourier converge absolutamente.

Demostración. Probaremos el teorema para $\alpha = 1$ y al ir deduciendo el resultado mencionaremos dónde es necesario pedir en general $\alpha > 1/2$. Supongamos entonces que f satisface la condición de Lipschitz con constante K , es decir,

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y| \quad \forall x, y.$$

Primero, al ser f Lipschitz en $[0, 2\pi]$, es continua. Segundo, notemos que para $h \in \mathbb{R}$ se cumple

$$a_n(T_h f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-h) e^{-inx} dx = e^{-inh} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-h) e^{-in(x-h)} dx = e^{-inh} a_n(f)$$

y por lo tanto

$$a_n(T_{-h} f - T_h f) = (e^{ihn} - e^{-ihn}) a_n(f) = 2i \operatorname{sen}(hn) a_n(f).$$

Por la identidad de Plancherel/Parseval (Teorema 2.2) se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} 4 |\operatorname{sen}(nh)|^2 |a_n(f)|^2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n(T_{-h} f - T_h f)|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h) - f(x-h)|^2 dx \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (K|2h|)^2 dx = 4K^2 |h|^2, \end{aligned}$$

o sea, se tiene

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\operatorname{sen}(nh)|^2 |a_n(f)|^2 \leq K^2 |h|^2. \quad (2.11)$$

Fijamos $p \in \mathbb{N}$ un entero positivo y elegimos $h = \pi/2^{p+1}$. De esta forma, para $2^{p-1} \leq |n| \leq 2^p$ se cumple $\frac{1}{2} \leq |\operatorname{sen}(nh)|^2 \leq 1$ y

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}: 2^{p-1} < |n| \leq 2^p} |a_n(f)|^2 &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}: 2^{p-1} < |n| \leq 2^p} 2 |\operatorname{sen}(nh)|^2 |a_n(f)|^2 \\ &\leq 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\operatorname{sen}(nh)|^2 |a_n(f)|^2 \\ &\leq \frac{2K^2\pi^2}{2^{2(p+1)}} = \frac{K^2\pi^2}{2^{2p+1}} \quad \text{por (2.11) para } h = \frac{\pi}{2^{p+1}} \end{aligned}$$

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}: 2^{p-1} < |n| \leq 2^p} |a_n(f)| \right)^2 &\leq \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}: 2^{p-1} < |n| \leq 2^p} |a_n(f)|^2 \right) \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}: 2^{p-1} < |n| \leq 2^p} 1 \right) \\ &\leq \frac{K^2\pi^2}{2^{2p+1}} 2(2^p - 2^{p-1}) = \frac{K^2\pi^2}{2} \frac{1}{2^p}. \end{aligned}$$

Entonces para cada $p \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}: 2^{p-1} < |n| \leq 2^p} |a_n(f)| \leq \frac{K\pi}{\sqrt{2}} \frac{1}{(\sqrt{2})^p}. \quad (2.12)$$

Luego, podemos escribir

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n(f)| = \sum_{p \in \mathbb{N}} \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}: 2^{p-1} < |n| \leq 2^p} |a_n(f)| \right] \leq \frac{K\pi}{\sqrt{2}} \sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{1}{(\sqrt{2})^p} < \infty$$

por ser $|1/\sqrt{2}| < 1$. Como f es continua, por el corolario 2.1 se tiene que la serie de Fourier de f converge uniformemente a f .

En el caso general $\alpha < 1$, la serie en (2.11) queda acotada por un múltiplo de $|h|^{2\alpha}$. De esta manera, la suma en (2.12) resulta menor o igual que un múltiplo positivo de $\left(\frac{1}{2^{\alpha-1/2}}\right)^p$. Si queremos conseguir una serie geométrica convergente precisamos $2\alpha - 1 > 0$, es decir, $\alpha > 1/2$. \square

Observación 2.5. Usando el mismo ejemplo que en la Observación 2.4 con $0 < \alpha \leq 1/2$, vemos que no vale la recíproca en el Teorema de Bernstein, es decir, existe una función (de hecho, infinitas) cuya serie de Fourier converge absolutamente pero f no es α -Hölder continua para $\alpha > 1/2$.

Para estudiar más resultados de convergencia de la serie de Fourier, será necesario considerar la convolución de f con ciertos “núcleos”.

2.5. Núcleos

Definición 2.6. Dadas funciones f, g definidas en \mathbb{S}^1 definimos

$$f * g(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy$$

siempre y cuando la integral anterior tenga sentido.

Proposición 2.2. [10, Capítulo 2, Proposición 3.1] Dadas $f \in L^p(\mathbb{S}^1)$, $g \in L^{p'}(\mathbb{S}^1)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, se tiene

$$f * g \in C(\mathbb{S}^1) \quad y \quad a_n(f * g) = a_n(f)a_n(g).$$

Definición 2.7. Para cada $N \in \mathbb{N}$, definimos el N -ésimo núcleo de Dirichlet por

$$D_N(x) := \sum_{n=-N}^N e^{inx}.$$

Proposición 2.3. Se tiene, para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$D_N(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)} & x \neq 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 2N + 1 & x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Demostración. Denotando $\omega = e^{ix}$ y usando las fórmulas para la serie geométrica tenemos

$$\sum_{n=0}^N \omega^n = \frac{1 - \omega^{N+1}}{1 - \omega} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^N (\omega^{-1})^n = \frac{\omega^{-N} - 1}{1 - \omega}$$

y entonces

$$\sum_{n=-N}^N \omega^n = \frac{\omega^{-N} - \omega^{N+1}}{1 - \omega} = \frac{\omega^{-N-1/2} - \omega^{N+1/2}}{\omega^{-1/2} - \omega^{1/2}}. \quad (2.13)$$

□

Observación 2.6. Podemos escribir las sumas parciales de Fourier como

$$\begin{aligned} S_N(f)(x) &= \sum_{n=-N}^N a_n(f) e^{inx} \\ &= \sum_{n=-N}^N \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy e^{inx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sum_{n=-N}^N e^{in(x-y)} dy \\ &= f * D_N(x). \end{aligned}$$

Definición 2.8. Una familia $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones $K_n : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ que cumplen

1. existe $M > 0$ tal que $\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(x)| dx \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
2. $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) dx = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y
3. para todo $\delta > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta \leq |x| < \pi} |K_n(x)| dx = 0$

se dice una familia de *buenos núcleos*.

Por ejemplo, considerando

$$K(x) = \begin{cases} C e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1, \end{cases}$$

obtenemos una familia de buenos núcleos al definir para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$K_n(x) = nK(nx)$$

y eligiendo la constante C de manera que se cumpla la parte 1. de la definición.

Teorema 2.5. [10, Capítulo 2, Teorema 4.1] Sea $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de buenos núcleos.

(a) Si f es integrable Riemann en el círculo entonces $\{f * K_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiende a $f(x)$ si x es punto de continuidad de f .

(b) Si f es continua, $\{f * K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiende a f uniformemente.

(c) Si $f \in L^p$, con $1 \leq p < \infty$, entonces $\{f * K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiende a f en norma p .

Es debido a este resultado que a veces a $\{K_n\}$ se la llama *aproximación de la identidad*. Para ver la demostración del Teorema 2.5, necesitamos antes dos lemas auxiliares.

Lema 2.3. Sea $f \in L^p(\mathbb{S}^1)$, y sea ω_p la función dada por

$$\omega_p(t) := \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Luego, ω_p es continua en $t = 0$.

Demostración. Tenemos dos casos

(I) f es continua en $[-\pi, \pi]$:

Al ser f continua en un cerrado y acotado, es uniformemente continua. Luego, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|t| < \delta$ entonces $|f(x-t) - f(x)| < \frac{\epsilon}{(2\pi)^{1/p}}$ para todo x y por lo tanto $\omega_p(t) \leq \epsilon$.

(II) f no necesariamente continua:

Notamos que

$$\omega_p(t) = \|T_t f - f\|_p.$$

Las funciones continuas en la circunferencia son densas en $L^p(\mathbb{S}^1)$. Luego, dado $\epsilon > 0$ existe $g \in C(\mathbb{S}^1)$ tal que $\|f - g\|_p < \epsilon/3$. Por otro lado, notemos que $\|T_t f - T_t g\|_p = \|f - g\|_p$, y que la parte (i) del Lema puede aplicarse a la función $t \mapsto \|T_t g - g\|_p$, encontrando $\delta > 0$ tal que $|t| < \delta \implies \|T_t g - g\|_p < \epsilon/3$. Tomando entonces $|t| < \delta$ y aplicando la desigualdad triangular resulta

$$\begin{aligned} \omega_p(t) &\leq \|T_t f - T_t g\|_p + \|T_t g - g\|_p + \|g - f\|_p \\ &\leq 2\|f - g\|_p + \|T_t g - g\|_p \leq \frac{2}{3}\epsilon + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

□

Lema 2.4 (Desigualdad integral de Minkowski). Sean (S_1, μ_1) , (S_2, μ_2) espacios de medida σ -finitos y sea $F : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$ función $(\mu_1 \times \mu_2)$ -medible. Luego, para $1 \leq p < \infty$,

$$\left(\int_{S_2} \left| \int_{S_1} F(x, y) d\mu_1(x) \right|^p d\mu_2(y) \right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_{S_1} \left(\int_{S_2} |F(x, y)|^p d\mu_2(y) \right)^{\frac{1}{p}} d\mu_1(x).$$

Más aún, si la función $x \mapsto f(x, y)$ está en $L^p(\mu_1)$ ppy y la función $y \mapsto \|f(\cdot, y)\|$ está en $L^1(\mu_2)$, entonces la función $y \mapsto f(x, y)$ está en $L^1(\mu_2)$ ppx, la función $x \mapsto \int f(x, y) d\mu_2(y)$ está en $L^p(\mu_1)$ y

$$\left\| \int f(\cdot, y) d\mu_2(y) \right\|_p \leq \int \|f(\cdot, y)\|_p d\mu_2(y).$$

Con estos lemas a mano, damos la demostración del Teorema 2.5.

Demostración del Teorema 2.5. Veamos primero la parte (c). Escribimos

$$\begin{aligned}
& \|f * K_n - f\|_p \\
& \leq \left(\int_{[-\pi, \pi]} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi]} [f(x-t) - f(x)] K_n(t) dt \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1^{\text{ra}} \text{ propiedad de } \{K_n\}) \\
& \leq \int_{[-\pi, \pi]} \frac{1}{2\pi} \left(\int_{[-\pi, \pi]} |f(x-t) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} |K_n(t)| dt \quad (\text{Minkowski}) \\
& = \frac{1}{2\pi} \int_{|t| < \delta} \left(\int_{[-\pi, \pi]} |f(x-t) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} |K_n(t)| dt \\
& \quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \left(\int_{[-\pi, \pi]} |f(x-t) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} |K_n(t)| dt \\
& \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t| < \delta} \omega_p(t) |K_n(t)| dt + \frac{\|f\|_p}{\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |K_n(t)| dt.
\end{aligned}$$

Fijar $\epsilon > 0$. Utilizamos el Lema 2.3 y tomamos $\delta > 0$ tal que $|t| < \delta \implies \omega_p(t) < \frac{\epsilon\pi}{M}$, donde M proviene de la segunda propiedad que satisface $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. De la tercera propiedad de los núcleos buenos, en el sumando derecho tomamos $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N \implies \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |K_n(t)| dt < \frac{\epsilon\pi}{2\|f\|_p}.$$

Luego, si $n > N$ entonces resulta $\|f * K_n - f\|_p < \epsilon$.

Veamos (a). La prueba procede de manera casi idéntica a (c): escribimos

$$|(f * K_n)(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi]} |f(x-t) - f(x)| |K_n(t)| dt$$

y partimos la integral de la derecha como hicimos en (c). Dado $\epsilon > 0$, elegimos $\delta > 0$ tal que

$$|t| < \delta \implies |f(x-t) - f(x)| < \frac{\epsilon\pi}{M},$$

de tal modo que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|t| < \delta} |f(x-t) - f(x)| |K_n(t)| dt \leq \frac{\epsilon}{2}. \quad (2.14)$$

Por otro lado, si $B > 0$ es una cota de f (que existe pues f es integrable en $[-\pi, \pi]$) elegimos $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N \implies \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |K_n(t)| dt < \frac{\epsilon\pi}{2B}.$$

Por lo tanto, si $n > N$ resulta

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |f(x-t) - f(x)| |K_n(t)| dt \leq \frac{2B}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |K_n(t)| dt \leq \frac{\epsilon}{2} \quad (2.15)$$

y por lo tanto

$$|(f * K_n)(x) - f(x)| \leq \epsilon.$$

Para ver (b), repetir el argumento anterior y notar que δ puede elegirse independiente de x , pues f continua en $[-\pi, \pi] \Rightarrow f$ uniformemente continua en $[-\pi, \pi]$. \square

Observación 2.7. Podemos cambiar ligeramente las hipótesis de la parte (a) del teorema anterior para obtener un resultado que utilizaremos más adelante. Suponer ahora que f es integrable Lebesgue en la circunferencia, pero que las aproximaciones de la identidad satisfacen una condición extra: para $\delta \in (0, \pi)$ se cumple

$$\sup_{\delta \leq |t| \leq \pi} |K_n(t)| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

En efecto, si es así, cuando partimos la integral el argumento utilizado para ver que vale (2.14) no cambia, pero no podemos usar que f esté acotada para ver (2.15). En cambio, escribimos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |f(x-t) - f(x)| |K_n(t)| dt &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} (|f(x-t)| + |f(x)|) |K_n(t)| dt \\ &\leq c_n \left[|f(x)| + \frac{1}{2\pi} \|f\|_{L^1[0, 2\pi]} \right] \end{aligned}$$

donde $c_n = \sup_{\delta \leq |t| \leq \pi} |K_n(t)|$. Como $c_n \rightarrow 0$ por hipótesis, el último término tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$.

Uno puede preguntarse si los núcleos de Dirichlet forman una familia de buenos núcleos. Si bien ocurre que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 1 \quad (2.16)$$

pues las integrales para $n \neq 0$ valen 0, podemos probar que para la familia $\{D_N\}$ no cumple la segunda parte de la definición:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)| dx \geq C \log(N) \quad \text{para } N \rightarrow \infty \quad (2.17)$$

para alguna constante $C > 0$. Para ver esto, primero notar que para $x \in [-\pi, \pi]$, se tiene $x/2 \in [\pi/2, \pi/2]$ y por lo tanto

$$\left| \operatorname{sen} \left(\frac{x}{2} \right) \right| \leq \left| \frac{x}{2} \right|.$$

Luego, para $x \in [-\pi, \pi]$, $x \neq 0$, vale

$$|D_N(x)| \geq 2 \frac{|\operatorname{sen}((N+1/2)x)|}{|x|}$$

y por lo tanto

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)| dx \geq 2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\operatorname{sen}((N+1/2)x)|}{|x|} dx = 2 \int_{-\pi}^{\pi} (N+1/2) \frac{|\operatorname{sen}((N+1/2)x)|}{|(N+1/2)x|} dx$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_{-\pi(N+1/2)}^{\pi(N+1/2)} \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{|x|} dx \geq 2 \int_{\pi}^{N\pi} \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{|x|} dx \\
&= 2 \sum_{k=1}^{N-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{|x|} dx \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\operatorname{sen}(x)| dx \\
&= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k} \int_0^{\pi} |\operatorname{sen}(x)| dx = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k} \\
&\geq \frac{4}{\pi} \log(N)
\end{aligned}$$

pues la última suma es una suma superior de la integral $\int_1^N \frac{1}{x} dx$.

El hecho de que $\{D_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ no sea una aproximación de la identidad puede darnos una pauta de que la convergencia puntual de $S_N(f)(x) = f * D_N(x)$ podría llegar a fallar en casos generales. Esto invita a investigar otros tipos de convergencia, como por ejemplo, la convergencia en el sentido de Cesàro.

2.6. Sumación tipo Cesàro

Definición 2.9. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Dada una serie $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ con $c_k \in X$ para todo k , sus sumas parciales son $s_n = \sum_{k=0}^n c_k$. Si consideramos el promedio de las primeras N sumas parciales

$$\sigma_N = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_{N-1}}{N}$$

decimos que $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ converge Cesàro si $\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N$ existe. σ_N es llamada la N -ésima media de Cesàro de la sucesión $\{s_k\}$ o la N -ésima suma de Cesàro de la serie $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$.

La convergencia Cesàro es más débil que la convergencia usual, por ejemplo, $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ converge Cesàro a $1/2$ pero no existe el límite en el sentido usual.

Proposición 2.4. Si la serie $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ converge a s en el sentido usual, entonces converge Cesàro a s .

Demostración. Supongamos primero que $s_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Queremos ver que $\sigma_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Sea $\epsilon > 0$, y sea $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N_1 \implies \|s_n\| < \epsilon/2$. Sea $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N_2 \implies (\|s_0\| + \cdots + \|s_{N_1-1}\|)/n < \epsilon/2$. Sea $N = \max\{N_1, N_2\} + 1$. Luego, para $n \geq N$ se tiene

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{s_0 + \cdots + s_{n-1}}{n} \right\| &\leq \underbrace{\frac{\|s_0\| + \cdots + \|s_{N_1-1}\|}{n}}_{< \epsilon/2} + \frac{\overbrace{\|s_{N_1}\|}^{< \epsilon/2} + \cdots + \overbrace{\|s_{n-1}\|}^{< \epsilon/2}}{n} \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{n - N_1}{n} \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.
\end{aligned}$$

Supongamos ahora que $s_n \rightarrow s$ cuando $n \rightarrow \infty$. Escribimos

$$\left\| \frac{s_0 + \cdots + s_{n-1}}{n} - s \right\| = \left\| \frac{s_0 + \cdots + s_{n-1}}{n} - \frac{n}{n} s \right\| = \left\| \frac{(s_0 - s) + \cdots + (s_{n-1} - s)}{n} \right\| \rightarrow 0$$

repetiendo la prueba anterior con $s_n - s$ en vez de s_n . \square

Lema 2.5. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ espacio de Banach, y sea $\{c_n\} \subseteq X$ sucesión que satisface $c_n = o(1/n)$ cuando $n \rightarrow \infty$. Luego, si $\sum c_n$ es sumable Cesàro a σ entonces converge a σ en el sentido usual.*

Demostración. Sean s_n y σ_n las sumas parcial y de Cesàro de $\sum c_n$ respectivamente. Se tiene

$$\begin{aligned} \|s_n - \sigma_n\| &= \left\| s_n - \frac{s_0 + \cdots + s_{n-1}}{n} \right\| = \left\| \frac{ns_n - [s_0 + \cdots + s_{n-1}]}{n} \right\| \\ &= \left\| \frac{\sum_{i=0}^n nc_i - [nc_0 + (n-1)c_1 + \cdots + 2c_{n-2} + c_{n-1}]}{n} \right\| \\ &= \left\| \frac{c_1 + \cdots + (n-2)c_{n-2} + (n-1)c_{n-1}}{n} \right\|. \end{aligned}$$

Ahora, recordar la primera parte de la prueba de la Proposición 2.4, donde sólo usamos que $s_n \rightarrow 0$. En nuestro caso, por hipótesis se tiene $nc_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Concluimos que $\|s_n - \sigma_n\| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, y por lo tanto $\|s_n - \sigma\| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. \square

Observación 2.8. De igual manera definimos las medias de Cesàro si la sucesión $\{c_k\}$ está indexada por los enteros y tomamos las sumas parciales de forma simétrica, i.e., $s_n = \sum_{k=-n}^n c_k$. Los resultados de convergencia no cambian.

Hemos visto que los núcleos de Dirichlet no son buenos núcleos. Sin embargo, podemos “mejorarlos” considerando sus sucesivas N -ésimas medias de Cesàro.

Definición 2.10. El N -ésimo núcleo de Fejér está dado por

$$F_N(x) = \frac{D_0(x) + \cdots + D_{N-1}(x)}{N}.$$

La N -ésima media de Cesàro de las sumas parciales de la serie de Fourier de f es

$$\sigma_N(f)(x) := (f * F_N)(x).$$

Tenemos una buena expresión para estos núcleos:

Lema 2.6. *Para $N \in \mathbb{N}$, vale que*

$$F_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{N} \frac{\text{sen}^2(Nx/2)}{\text{sen}^2(x/2)} & x \neq 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ N & x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Demostración. Llamemos $\omega = e^{ix}$ y recordemos la expresión (2.13) para $D_N(x)$. Luego

$$\begin{aligned} N F_N(x) &= \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\omega^{-n} - \omega^{n+1}}{1 - \omega} = \frac{1}{1 - \omega} \left[\sum_{n=0}^{N-1} \omega^{-n} - \omega \sum_{n=0}^{N-1} \omega^n \right] \\ &= \frac{1}{1 - \omega} \left[\frac{1 - \omega^{-N}}{1 - \omega^{-1}} - \frac{1 - \omega^N}{\omega^{-1} - 1} \right] = \frac{2 - \omega^{-N} - \omega^N}{2 - \omega^{-1} - \omega}. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\text{sen}^2(Nx/2)}{\text{sen}^2(x/2)} &= \left(\frac{\text{sen}(Nx/2)}{\text{sen}(x/2)} \right) \left(\frac{\text{sen}(Nx/2)}{\text{sen}(x/2)} \right) = \left(\frac{\omega^{N/2} - \omega^{-N/2}}{\omega^{1/2} - \omega^{-1/2}} \right) \left(\frac{\omega^{N/2} - \omega^{-N/2}}{\omega^{1/2} - \omega^{-1/2}} \right) \\ &= \frac{2 - \omega^{-N} - \omega^N}{2 - \omega^{-1} - \omega} \end{aligned}$$

o sea que estas expresiones coinciden y obtenemos lo que queremos. Para $x = 2\pi k$ la cuenta es directa. \square

Proposición 2.5. *Los núcleos de Fejér forman una familia de buenos núcleos.*

Demostración. Veamos que se verifican las condiciones de la definición.

1. Para cada $N \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} D_k(x) dx = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_k(x) dx = 1$$

por la cuenta hecha en (2.16).

2. Por la expresión obtenida en el Lema 2.6, el núcleo F_N es no negativo $\forall N \in \mathbb{N}$. Luego, por la expresión obtenida en el punto anterior se tiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F_N(x)| dx = \int_{-\pi}^{\pi} F_N(x) dx = 2\pi \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

3. Suponer $0 < \delta < \pi$. Notemos que para $\delta \leq |x| \leq \pi$ se tiene $\delta/2 \leq |x/2| \leq \pi/2$ y por lo tanto $|\text{sen}(x/2)| \geq c_\delta$, de donde $F_N(x) \leq 1/Nc_\delta^2$ para todo N . Luego

$$\int_{\delta \leq |x| \leq \pi} |F_N(x)| dx \leq \frac{2\pi}{Nc_\delta^2} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } N \rightarrow \infty.$$

\square

Observación 2.9. Es importante aclarar que los núcleos de Fejér cumplen lo mencionado en la Observación 2.7, esto es, que para $0 < \delta < \pi$ vale que

$$\sup_{\delta \leq |t| \leq \pi} |F_N(t)| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } N \rightarrow \infty.$$

Simplemente hacer la misma cuenta para probar que los F_N cumplen la condición 3 de la definición de ser buenos núcleos. Por lo tanto, los núcleos de Fejér cumplen el Teorema 2.5 cambiando f integrable Riemann por f integrable Lebesgue en la parte (a).

Corolario 2.2. *Los polinomios trigonométricos son densos en $L^p [0, 2\pi]$ para $1 \leq p < \infty$.*

Demostración. Sea $f \in L^p [0, 2\pi]$. Para cada n entero no negativo, la suma parcial $S_n(f)$ de Fourier es un polinomio trigonométrico. Luego, para cada $N \in \mathbb{N}$ la N -ésima media de Cesàro de las sumas parciales de Fourier es también un polinomio trigonométrico por ser suma de polinomios trigonométricos. Por la Definición 2.10 sabemos que

$$\sigma_N(f)(x) = (f * F_N)(x).$$

Por el Teorema 2.5, como $\{F_N\}$ es una familia de buenos núcleos, por la parte (c) sabemos que

$$\|f * F_N - f\|_{L^p [0, 2\pi]} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } N \rightarrow \infty.$$

O sea, f puede ser aproximada por polinomios trigonométricos en norma p , y queda probado el corolario. \square

El trabajo hecho anteriormente tiene como resultado el siguiente Teorema.

2.7. Un teorema general de convergencia

Teorema 2.6. *Suponer $f \in L^p(\mathbb{S}^1)$, con $1 \leq p < \infty$. Luego valen las siguientes afirmaciones:*

- (a) *Si f es continua en x_0 entonces la serie de Fourier en x_0 de f es Cesàro sumable a $f(x_0)$.*
- (b) *Si f posee una discontinuidad de salto en x_0 , esto es, existen los límites por derecha y por izquierda $f(x_0^+)$ y $f(x_0^-)$ respectivamente, entonces la serie de Fourier de f en el punto x_0 es Cesàro sumable a*

$$\frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}.$$

- (c) *Si f es continua, entonces su serie de Fourier es sumable Cesàro uniformemente a f .*
- (d) *La serie de Fourier de f es sumable Cesàro en norma p a f .*

Además, si los coeficientes de Fourier de f satisfacen $a_n(f) = o(1/|n|)$ cuando $|n| \rightarrow \infty$ se cumple

- (e) *Si f es continua en x_0 entonces su serie de Fourier converge a $f(x_0)$ en x_0 .*
- (f) *Si f tiene una discontinuidad de salto en x_0 entonces la serie de Fourier en x_0 converge a*

$$\frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}.$$

- (g) *Si f es continua entonces su serie de Fourier converge a f uniformemente.*

(h) La serie de Fourier de f tiende a f en norma p .

Demostración. (a) Si $f \in L^p(\mathbb{S}^1)$ entonces f es integrable Lebesgue en el círculo. Luego, por la Observación 2.9, f cumple la parte (a) del Teorema 2.5 cuando consideramos las convoluciones contra los núcleos de Fejér F_N . Lo que estamos diciendo es que

$$|\sigma_N(f)(x_0) - f(x_0)| = |(f * F_N)(x_0) - f(x_0)| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } N \rightarrow \infty$$

en los puntos x_0 de continuidad de f . O sea, la serie de Fourier de f es Cesàro sumable a $f(x)$ en los puntos de continuidad de f .

(b) Suponer primero que f tiene discontinuidad de salto en $x = 0$. Por la expresión obtenida en el Lema 2.6, sabemos que F_N es par para todo N . Luego

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 F_N(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} F_N(x) dx = \frac{1}{2}.$$

Definimos ahora f_1, f_2 dadas por

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [-\pi, 0] \\ f(0^-) & x \in (0, \pi] \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} f(0^+) & x \in [-\pi, 0) \\ f(x) & x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Como los límites laterales $f(0^-), f(0^+)$ existen tenemos que f_1 y f_2 son continuas en $x = 0$. Ahora escribimos

$$\begin{aligned} \sigma_N(f)(0) &= (f * F_N)(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) F_N(x) dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(x) F_N(x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x) dx - \int_0^{\pi} f(0^-) dx + \int_{-\pi}^{\pi} f_2(x) dx - \int_{-\pi}^0 f(0^+) dx \right] \\ &= \sigma_N(f_1)(0) + \sigma_N(f_2)(0) - \frac{1}{2} [f(0^-) + f(0^+)] \\ &\rightarrow \frac{1}{2} [f(0^-) + f(0^+)] \quad \text{cuando } N \rightarrow \infty \end{aligned}$$

pues aplicamos la parte (a) a las funciones f_1 y f_2 que son continuas en 0.

En el caso en el que f tiene una discontinuidad de salto en x_0 . Luego $g(x) = f(x+x_0)$ posee discontinuidad de salto en $x = 0$ y por lo tanto, como F_N es par,

$$\begin{aligned} \sigma_N(f)(x_0) &= (f * F_N)(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) F_N(t - x_0) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-x_0}^{\pi-x_0} f(u+x_0) F_N(u) du \\ &= \sigma_N(g)(0) \rightarrow \frac{1}{2} [g(0^-) + g(0^+)] = \frac{1}{2} [f(x_0^-) + f(x_0^+)]. \end{aligned}$$

(c) Aplicar la parte (b) del Teorema 2.5 para ver que $\sigma_N(f) = f * F_N$ tiende a f uniformemente si f es continua.

- (d) Aplicar la parte (c) del Teorema 2.5 usando que los núcleos de Fejér son buenos núcleos.
- (e) Por la parte (a), sabemos que la serie de Fourier de f en x_0 es Cesàro sumable a $f(x_0)$. Por otro lado, los sumandos de la serie de Fourier en x_0 (estos son $a_n(f)e^{inx_0}$) satisfacen $|a_n(f)e^{inx_0}| = |a_n(f)| = o(1/|n|)$ cuando $|n| \rightarrow \infty$. Luego, por el Lema 2.5 la serie $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(f) e^{inx_0}$ converge a $f(x_0)$ en el sentido usual.
- (f) De vuelta, por (b) la serie de Fourier en x_0 converge en el sentido de Cesàro al promedio $(f(x_0^-) + f(x_0^+))/2$. Como los sumandos cumplen la condición extra de decaimiento, el Lema 2.5 asegura que la serie converge en el sentido usual al mismo límite.
- (g) Pensar al espacio $C[0, 2\pi]$ equipado con la norma infinito $\|\cdot\|_\infty$. La parte (c) nos dice que la serie de Fourier es sumable Cesàro a f en este espacio. Los sumandos de la serie satisfacen $\|a_n(f)e^{in\cdot}\|_\infty = |a_n(f)| = o(1/|n|)$ cuando $|n| \rightarrow \infty$. Invocando al Lema 2.5 sale que la serie de Fourier converge uniformemente a f .
- (h) Similar a lo anterior, considerar el espacio $L^p(\mathbb{S}^1)$ equipado con su norma natural $\|\cdot\|_p$. La parte (d) nos dice que la serie de Fourier es sumable Cesàro a f en este espacio. Los sumandos de la serie satisfacen $\|a_n(f)e^{in\cdot}\|_p = |a_n(f)| = o(1/|n|)$ cuando $|n| \rightarrow \infty$. Luego, por el Lema 2.5 la serie de Fourier converge a f en norma p .

□

Corolario 2.3. Si $f \in L^p(\mathbb{S}^1)$ para $1 \leq p \leq \infty$, y además $a_n(f) = 0 \forall n \in \mathbb{Z}$, entonces $f = 0$ a.e. en \mathbb{S}^1 .

Demostración. Si $p = \infty$, entonces $f \in L^p(\mathbb{S}^1)$ para todo $1 \leq p < \infty$. Suponer entonces que f cumple esta última afirmación. Por la parte (d) del teorema anterior, sabemos que $\sigma_N(f)$ converge a f en norma p . Pero sabemos que

$$\sigma_N(f)(x) = \frac{S_0(f)(x) + \cdots + S_{N-1}(f)(x)}{N} = 0$$

para todo x , pues los coeficientes de Fourier de f son todos nulos. Luego

$$\|f\|_p = \left\| \lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N(f) \right\|_p = \lim_{N \rightarrow \infty} \|\sigma_N(f)\|_p = 0$$

y por lo tanto $f = 0$ a.e. en \mathbb{S}^1 .

□

Proposición 2.6. Si $f, g \in L^2[0, 2\pi]$, entonces

$$a_n(fg) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_n(f)a_{k-n}(g).$$

Demostración. Simplemente notar que para $n \in \mathbb{Z}$ fijo,

$$\Lambda_1(f, g) := a_n(fg) \quad \Lambda_2(f, g) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_n(f)a_{k-n}(g)$$

definen formas bilineales continuas en $L^2[0, 2\pi] \times L^2[0, 2\pi]$, pues

$$|\Lambda_1(f, g)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)| |g(x)| dx \leq \|f\|_{L^2[0, 2\pi]} \|g\|_{L^2[0, 2\pi]}$$

$$|\Lambda_2(f, g)| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_n(f)| |a_{k-n}(g)| \leq \|a(f)\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \|a(g)\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} = \|f\|_{L^2[0, 2\pi]} \|g\|_{L^2[0, 2\pi]}.$$

Basta entonces ver que Λ_1 y Λ_2 coinciden en un subconjunto denso. Por el corolario 2.2,

$$\left\{ \left(\sum_{k=-N}^N c_k e^{ik\cdot}, \sum_{j=-M}^M d_j e^{ij\cdot} \right) : c_k, d_j \in \mathbb{C}, N, M \in \mathbb{N} \right\}$$

es denso en $L^2[0, 2\pi] \times L^2[0, 2\pi]$. Es suficiente entonces ver que $\Lambda_1(e^{ik\cdot}, e^{ij\cdot}) = \Lambda_2(e^{ik\cdot}, e^{ij\cdot})$, y esto es trivial. \square

Observación 2.10. La aplicación

$$\begin{aligned} (L^1[0, 2\pi], \|\cdot\|_1) &\longrightarrow (c_0, \|\cdot\|_\infty) \\ f &\mapsto (a_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} \end{aligned} \quad (2.18)$$

donde c_0 denota el espacio vectorial de las sucesiones que tienden a 0 en $\pm\infty$, es lineal, continua e inyectiva pero no es sobreyectiva. En efecto, la linealidad sale de la propiedad de linealidad de la integral. La continuidad se ve rápidamente acotando uniformemente los coeficientes de Fourier

$$|a_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)| dx = \|f\|_{L^1[0, 2\pi]} \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

La inyectividad es consecuencia de que los núcleos de Fejér sean buenos núcleos, y la no sobreyectividad se desprende de que los núcleos de Dirichlet **no** sean buenos núcleos y de los teoremas que son pilares en el Análisis Funcional. En primer lugar, si $f, g \in L^1[0, 2\pi]$ son tales que $a_n(f) = a_n(g)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, entonces $f * F_N = g * F_N$ para todo $N \in \mathbb{N}$. Luego,

$$\|f - g\|_{L^1[0, 2\pi]} \leq \|f - f * F_N\|_{L^1[0, 2\pi]} + \|f * F_N - g\|_{L^1[0, 2\pi]} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } N \rightarrow \infty,$$

por lo que f y g coinciden en $L^1[0, 2\pi]$. En segundo lugar, si suponemos que la aplicación (2.18), que denotamos por \mathbf{F} , es sobreyectiva, tendríamos, por el teorema de la Aplicación Abierta, que su inversa \mathbf{F}^{-1} es continua. Si consideramos los núcleos de Dirichlet D_N tenemos que estas son funciones en $L^1[0, 2\pi]$ tales que $\|\mathbf{F}(D_N)\|_\infty = 1$ para todo N , puesto que

$$a_n(D_N) = \begin{cases} 1 & \text{si } |n| \leq N \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Luego, usando (2.17)

$$\|\mathbf{F}^{-1}\| = \|\mathbf{F}^{-1}\| \|\mathbf{F}(D_N)\|_\infty \geq \|\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{F}(D_N))\|_{L^1[0, 2\pi]} = \|D_N\|_{L^1[0, 2\pi]} \rightarrow \infty \quad \text{si } N \rightarrow \infty$$

obteniendo una contradicción.

Para cerrar esta sección veamos algunos ejemplos de series de Fourier truncadas hasta un N de funciones definidas en $[-\pi, \pi]$ tomadas de ejercicios del Capítulo 2 del libro [10]. Calculamos de antemano las expresiones exactas de los coeficientes de las series de Fourier de cada una de las funciones. Por cada ejemplo graficaremos la función discretizada en M puntos y la serie truncada discretizada en M puntos en un mismo cuadro, permitiendo ver de manera experimental el llamado *fenómeno de Gibbs*: pequeñas perturbaciones que aumentan hacia los puntos de discontinuidad y que no se pueden solucionar agregando más coeficientes de Fourier.

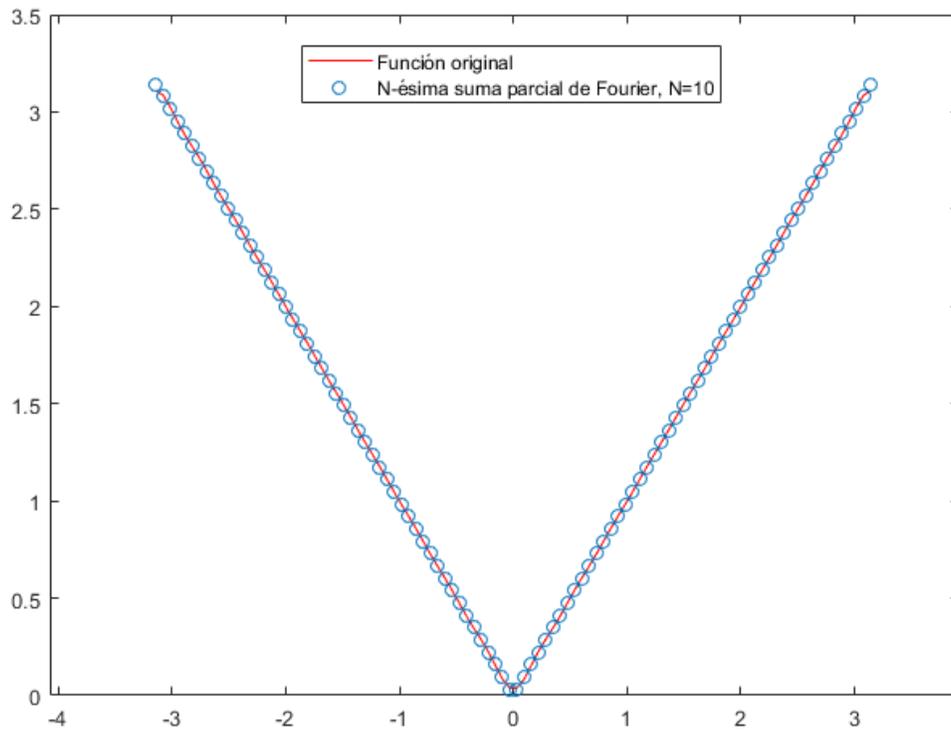


Figura 2: La función original es 2π -periódica y está definida como $f(x) = |x|$ en $[-\pi, \pi)$. Su N -ésima suma parcial está dada por una serie de cosenos $S_N(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^N \frac{-4}{\pi(2k-1)^2} \cos((2k-1)x)$. Tanto la función original como la suma parcial están discretizadas en $M = 100$ puntos equiespaciados.

Los siguientes dos ejemplos corresponden a funciones no continuas en un punto y en dos puntos, respectivamente, dentro del intervalo $[-\pi, \pi)$. En estos casos se puede ver experimentalmente que la serie no converge uniformemente y por eso se produce el fenómeno de Gibbs. Por su parte vemos que el Teorema 2.6 se cumple experimentalmente.

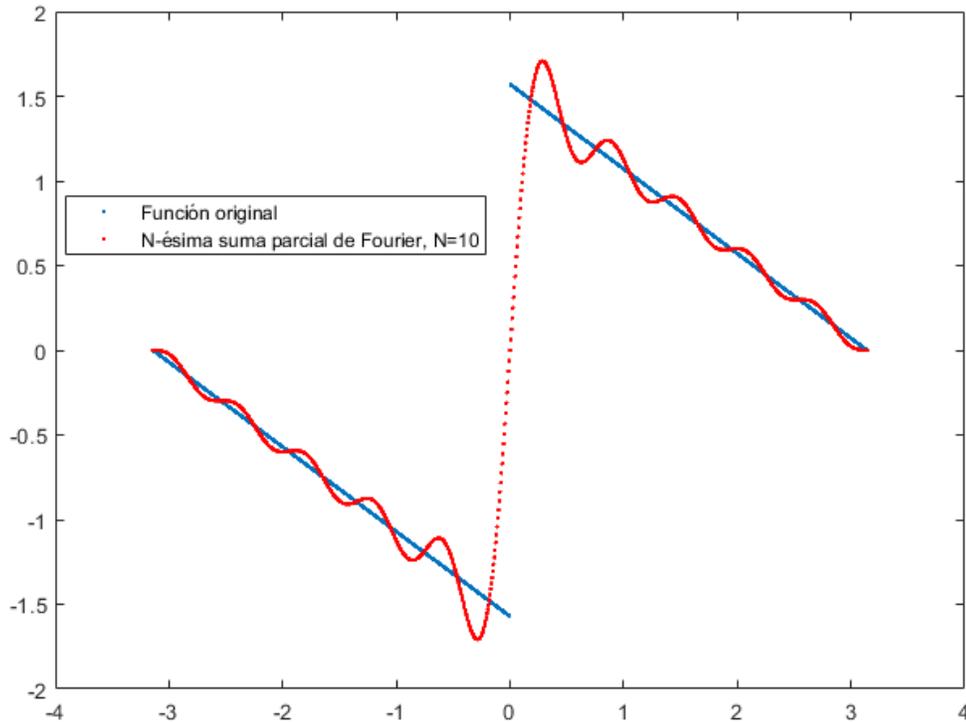


Figura 3: La función original es 2π -periódica y está definida como $f(x) = -\frac{\pi+x}{2}$ en $(-\pi, 0)$ y como $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$ en $(0, \pi)$. Su N -ésima suma parcial está dada por una serie de senos $S_N(x) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \text{sen}(kx)$. Tanto la función original como la suma parcial están discretizadas en $M = 1001$ puntos equiespaciados.

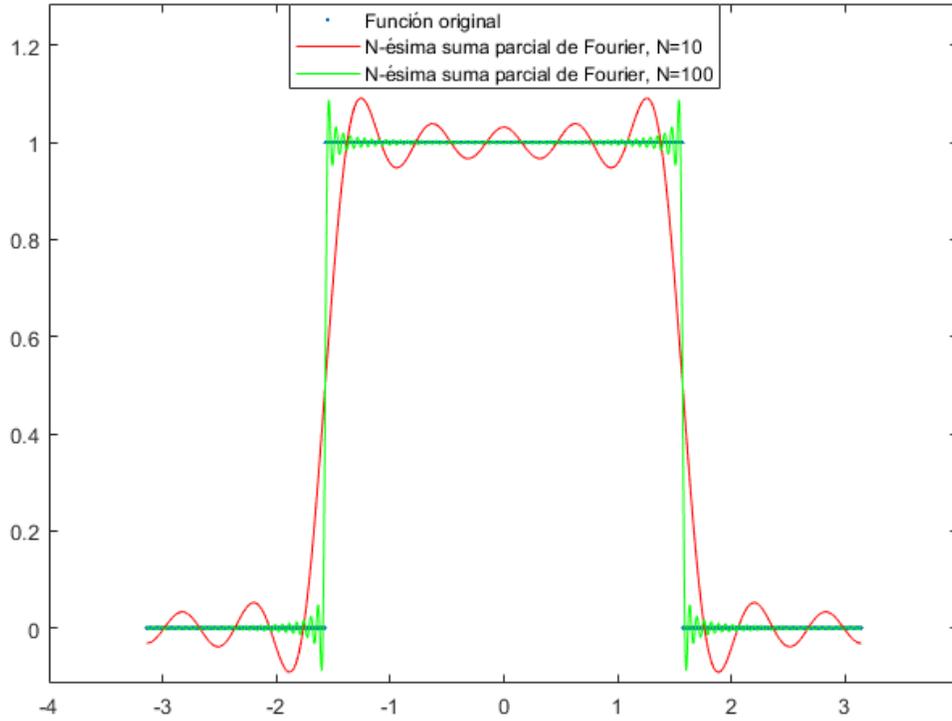


Figura 4: La función original es 2π -periódica y está definida como la función característica del intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ en $[-\pi, \pi)$. Su N -ésima suma parcial está dada por una serie de cosenos $S_N(x) = \frac{1}{2} + 2 \sum_{k=1}^N \text{sen}(k\frac{\pi}{2}) \frac{\cos(kx)}{k\pi}$. Tanto la función original como sus sumas parciales de Fourier están discretizadas en $M = 1001$ puntos equiespaciados.

2.8. Cierre: transición hacia la transformada continua

Es esclarecedor ver cómo la serie de Fourier se “aproxima” de alguna forma a la transformada continua de Fourier. Esto puede ser hecho en dos maneras:

1. Quizás lo más rápido de ver es lo siguiente: suponer que $\text{supp } f \subseteq [-M, M]$, y tomemos T tal que $T/2 > M$, luego $\text{supp } f \subseteq [-T/2, T/2]$. Digamos que $a_n(f_T)$ son los coeficientes de Fourier de f vista como una función T -periódica. Luego

$$a_n(f_T) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-\frac{2\pi i n t}{T}} dt = \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-\frac{2\pi i n t}{T}} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{T} \hat{f}\left(\frac{2\pi n}{T}\right). \quad (2.19)$$

En particular, si tomamos $T = 2\pi N$ con $N \in \mathbb{N}$, nos queda

$$\sqrt{2\pi} N a_n(f_{2\pi N}) = \hat{f}\left(\frac{n}{N}\right).$$

O sea, cuando grafiquemos n/N vs. $\sqrt{2\pi} N a_n(f_{2\pi N})$, a medida que N sea cada vez más grande obtendremos una malla $\{n/N\}$ cada vez más fina, y con esto una aproximación cada vez mejor del gráfico de \hat{f} .

2. Con hipótesis un poco más fuertes sobre f , podemos obtener una forma más débil del teorema de inversión para la transformada de Fourier a partir de los resultados que conocemos para la serie. (Esto está inspirado a partir de la lectura de [3, Capítulo 2] y la resolución de [10, Capítulo 5, Ejercicio 1].)

En las Figuras 5 y 6 esquematizamos el procedimiento del primer punto, tomando como ejemplo la función característica del intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Esto ha sido inspirado de [3].

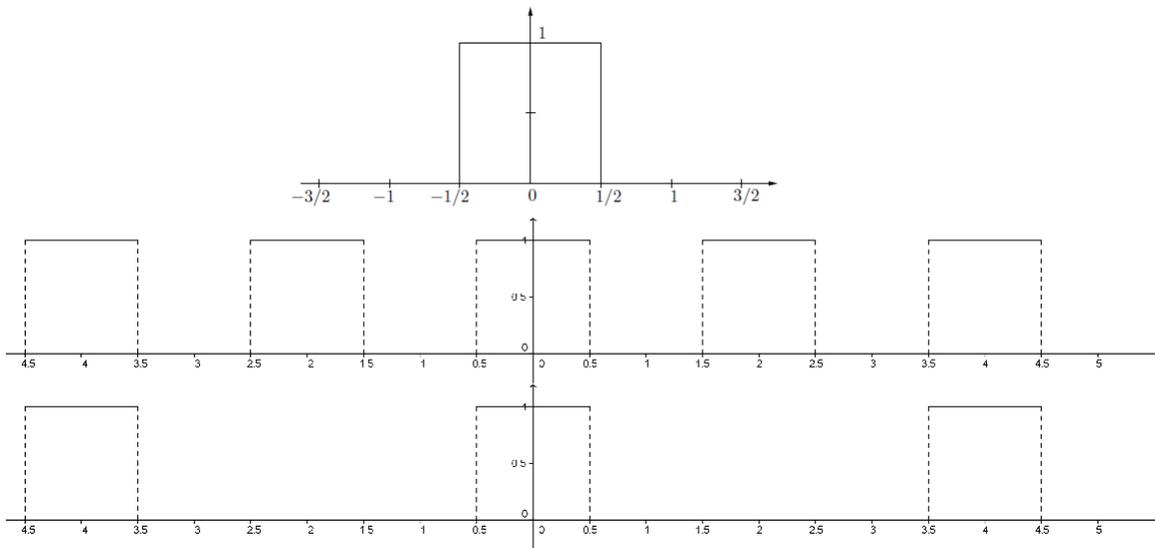


Figura 5: El gráfico superior corresponde al de $f = \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$, mientras que los siguientes corresponden a su 2-periodización f_2 y a su 4-periodización f_4 .

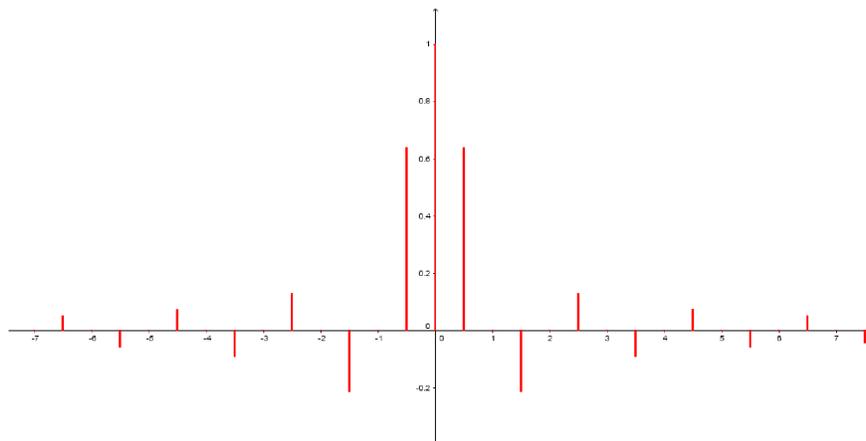


Figura 6: En color rojo se han señalado los segmentos de la forma $[(n/2, 0), (n/2, \frac{\text{sen}(\pi n/2)}{\pi n/2})]$, con $n \in \mathbb{Z}$, donde $\frac{\text{sen}(\pi n/2)}{\pi n/2} = \int_{-1}^1 \chi_{[-1/2, 1/2]}(t) e^{-2\pi i n t/2} dt = 2a_n(f_2)$ como en (2.19) con $T = 2$.

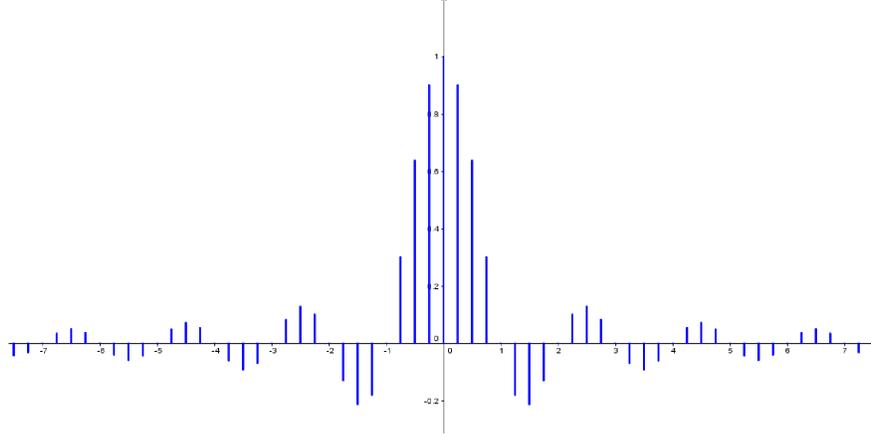


Figura 7: En color azul se han señalado los segmentos de la forma $[(n/4, 0), (n/4, \frac{\text{sen}(\pi n/4)}{\pi n/4})]$, con $n \in \mathbb{Z}$, donde $\frac{\text{sen}(\pi n/4)}{\pi n/4} = \int_{-2}^2 \chi_{[-1/2, 1/2]}(t) e^{-2\pi i n t} dt = 4a_n(f_4)$ como en (2.19) con $T = 4$. Vemos que se va formando la silueta de la función $\frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x}$ que es la transformada de Fourier de $f = \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$, es decir, $\frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x} = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(t) e^{-2\pi i t x} dt$.

Para ver el segundo punto, introducimos primero una nueva definición:

Definición 2.11. Diremos que una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es de *decrecimiento moderado* si f es continua y si para alguna constante $A \geq 0$ vale que

$$|f(x)| \leq \frac{A}{1+x^2}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Proposición 2.7. *Suponer F de decrecimiento moderado. Luego, F es integrable sobre \mathbb{R} , y además se cumple*

$$\int_{\mathbb{R}} F(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \delta \sum_{n \in \mathbb{Z}} F(\delta n).$$

Demostración. Por ser F de decrecimiento moderado, es evidente que es integrable. Notemos también que para cada $\delta > 0$, la serie $\sum_{n \in \mathbb{Z}} F(\delta n)$ no sólo está bien definida sino que además converge absolutamente. Sea $\epsilon > 0$. Escribimos

$$\left| \int_{\mathbb{R}} F(x) dx - \delta \sum_{n \in \mathbb{Z}} F(\delta n) \right| \leq \underbrace{\left| \int_{\mathbb{R}} F(x) dx - \int_{-N}^N F(x) dx \right|}_I + \underbrace{\left| \int_{-N}^N F(x) dx - \delta \sum_{n \in \mathbb{Z}} F(\delta n) \right|}_{II}.$$

Notar que I puede hacerse más pequeño que $\epsilon/2$ si elegimos N suficientemente grande (nuevamente por ser F de crecimiento moderado). Ahora escribimos

$$II \leq \underbrace{\left| \int_{-N}^N F(x) dx - \delta \sum_{|n| \leq \lfloor \frac{N}{\delta} \rfloor} F(\delta n) \right|}_{II.I} + \underbrace{\left| \delta \sum_{|n| > \lfloor \frac{N}{\delta} \rfloor} F(\delta n) \right|}_{II.II}.$$

Es un tanto tedioso, pero debemos ser rigurosos. Notar que la suma dentro de II.I se parece bastante a una suma de Riemann, pero falta un poco de refinamiento para que podamos afirmar esto. Escribimos

$$\begin{aligned}
\delta \sum_{|n| \leq \lfloor \frac{N}{\delta} \rfloor} F(\delta n) &= \delta F\left(-\delta \left\lfloor \frac{N}{\delta} \right\rfloor\right) + \cdots + \delta F\left(\delta \left\lfloor \frac{N}{\delta} \right\rfloor\right) \\
&= \overbrace{-\left|N - \delta \left\lfloor \frac{N}{\delta} \right\rfloor\right| F(-N)}^{(*)} \\
&\quad + \overbrace{\left(\left|N - \delta \left\lfloor \frac{N}{\delta} \right\rfloor\right| F(-N) + \delta F\left(-\delta \left\lfloor \frac{N}{\delta} \right\rfloor\right) + \cdots + \left|N - \delta \left\lfloor \frac{N}{\delta} \right\rfloor\right| F\left(\delta \left\lfloor \frac{N}{\delta} \right\rfloor\right)\right)}^{(**)} \\
&\quad + \underbrace{\delta \left(\left\lfloor \frac{N}{\delta} \right\rfloor + 1\right) - N}_{(***)} F\left(\delta \left\lfloor \frac{N}{\delta} \right\rfloor\right).
\end{aligned}$$

Primero, dado δ fijo, llamemos $k = \lfloor N/\delta \rfloor$. Luego se tiene $k \leq N/\delta < k + 1$ y por lo tanto $\delta k \leq N < \delta k + \delta$. De aquí se tienen tres cosas:

- $0 \leq N - \delta k < \delta$, o sea, $|N - \delta \lfloor N/\delta \rfloor| \leq \delta$.
- $\delta k - N \leq 0$, luego $0 \leq \delta k + \delta - N = (\delta k - N) + \delta \leq \delta$ y por lo tanto $|\delta(\lfloor N/\delta \rfloor + 1) - N| \leq \delta$.
- $\delta k \leq N$, i.e., $\delta \lfloor N/\delta \rfloor \leq N$.

Ahora, como F es continua, es acotada en $[-N, N]$. Por los ítems anteriores, tanto (*) como (***) se van a cero cuando $\delta \rightarrow 0^+$. Por otro lado, notar que (**) es una suma de Riemann para F en el intervalo $[-N, N]$, donde la partición es $P = \{-N, -\delta \lfloor N/\delta \rfloor, \dots, \delta \lfloor N/\delta \rfloor, N\}$ y la elección de puntos corresponde al extremo izquierdo de cada subintervalo. Notar que la norma de P (esto es, la longitud del subintervalo más largo) es δ . Como F es Riemann integrable en $[-N, N]$, podemos entonces hacer a (**) tan próximo a $\int_{-N}^N F(x) dx$ como se quiera. Luego

$$\text{II.I} \leq \left| \int_{-N}^N F(x) dx - (**) \right| + |(*)| + |(***)|$$

puede hacerse tan pequeño como se quiera tomando δ suficientemente chico.

Por último, examinemos II.II. Sea A la constante en la condición de decrecimiento moderado de F . Sea G la función dada por $G(x) = A/(1 + x^2)$. Luego

$$\text{II.II} \leq \delta \sum_{|n| \geq \lfloor \frac{N}{\delta} \rfloor + 1} G(\delta n).$$

No es difícil convencerse que esta última suma es la integral de la función escalón

$$\sum_{n \geq \lfloor \frac{N}{\delta} \rfloor + 1} G(\delta n) \chi_{((n-1)\delta, n\delta]} + \sum_{n \leq -(\lfloor \frac{N}{\delta} \rfloor + 1)} G(\delta n) \chi_{[n\delta, (n+1)\delta)}.$$

Ahora, como G es creciente en $(-\infty, 0]$ y decreciente en $[0, \infty)$, esta función escalón es menor o igual a

$$G(\chi_{(-\infty, -\lfloor N/\delta \rfloor]} + \chi_{[\lfloor N/\delta \rfloor, \infty)}).$$

Resumiendo, podemos escribir

$$\text{II.II} \leq \int_{-\infty}^{-\lfloor N/\delta \rfloor} G(x) dx + \int_{\lfloor N/\delta \rfloor}^{\infty} G(x) dx.$$

Como G es integrable, II.II se hace tan próximo a cero como uno quiera, eligiendo δ pequeño.

Todo lo anterior nos permite concluir que existe δ_0 tal que para $0 < \delta < \delta_0$ se cumple que $\text{II} < \epsilon/2$, que era lo que queríamos ver. \square

Volvamos ahora al punto 2. Suponer f continua tal que $\text{supp } f \subseteq [-M, M]$, tal que su transformada \hat{f} es una función de decrecimiento moderado. Similar al punto 1, tomar T tal que $T/2 > M$, y considerar a la periodización con período T , f_T , de la función $f|_{[-T/2, T/2]}$. Notar que f_T es continua al serlo f . Recordemos que sus coeficientes de Fourier estaban dados por

$$a_n(f_T) = \frac{\sqrt{2\pi}}{T} \hat{f}\left(\frac{2\pi n}{T}\right).$$

Como f_T es T -periódica y continua, la función $f_T\left(\frac{T}{2\pi}\cdot\right)$ es una función continua, 2π -periódica, y sus coeficientes de Fourier están dados por

$$\begin{aligned} a_n\left(f_T\left(\frac{T}{2\pi}\cdot\right)\right) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_T\left(\frac{T}{2\pi}x\right) e^{-inx} dx \\ &= \frac{(2\pi/T)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{T}{2\pi}x\right) e^{-\frac{2\pi in}{T}\left(\frac{T}{2\pi}x\right)} \frac{T}{2\pi} dx \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-\frac{2\pi inx}{T}} dx = a_n(f_T) = \frac{\sqrt{2\pi}}{T} \hat{f}\left(\frac{2\pi n}{T}\right). \end{aligned}$$

Ahora, como \hat{f} es de decrecimiento moderado, se tiene que la serie de Fourier de $f_T\left(\frac{T}{2\pi}\cdot\right)$ converge absolutamente. Como $f_T\left(\frac{T}{2\pi}\cdot\right)$ es continua, por el corolario 2.1 se tiene que

$$f_T\left(\frac{T}{2\pi}x\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n\left(f_T\left(\frac{T}{2\pi}\cdot\right)\right) e^{inx} = \frac{\sqrt{2\pi}}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(\frac{2\pi n}{T}\right) e^{inx}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, uniformemente. Luego se tiene

$$f_T(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(\frac{2\pi n}{T}\right) e^{\frac{2\pi inx}{T}}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, uniformemente. Notemos que $f(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} f_T(x)$. Ahora, tomando $\delta = 2\pi/T$ y tomando límite cuando $T \rightarrow \infty$, resulta

$$f(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} f_T(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \delta \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\delta n) e^{ix\delta n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

aplicando la proposición 2.7 a la función $\xi \mapsto \widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}$, que es de decrecimiento moderado. Obtenemos así la versión débil de la fórmula de inversión para la transformada de Fourier continua.

2.9. Aplicación: Principio de incertidumbre de Heisenberg

Con las herramientas que nos provee la serie de Fourier, podemos mostrar dos facetas o aspectos del principio de incertidumbre de Heisenberg: “una función no puede estar exactamente localizada en tiempo y en frecuencia a la vez”.

Dada una función ψ definida en \mathbb{R} con $\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$, podemos interpretar que $|\psi|^2$ define la densidad de probabilidad asociada a la medida μ_t , definida en espacio temporal \mathbb{R} , dada por $d\mu_t(x) := |\psi(x)|^2 dx$. Análogamente, como $\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\widehat{\psi}\|_{L^2(\mathbb{R})}$, $|\widehat{\psi}|^2$ es la densidad de la medida de probabilidad μ_ω en el espacio de frecuencias \mathbb{R} dada por $d\mu_\omega(\xi) := |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi$. Esto es, pensemos que la probabilidad de encontrarnos en el intervalo temporal (a, b) o en el intervalo de frecuencias (α, β) vienen dadas, respectivamente, por

$$\mu_t((a, b)) = \int_a^b |\psi(x)|^2 dx \quad \text{y} \quad \mu_\omega((\alpha, \beta)) = \int_\alpha^\beta |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi.$$

Asociadas a estas medidas de probabilidad, tenemos sus esperanzas (valor más “representativo”)

$$E_t := \int_{\mathbb{R}} x |\psi(x)|^2 dx \quad E_\omega := \int_{\mathbb{R}} \xi |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi$$

y las varianzas (dispersión alrededor del valor esperado)

$$\sigma_t^2 := \int_{\mathbb{R}} (x - E_t)^2 |\psi(x)|^2 dx \quad \sigma_\omega^2 := \int_{\mathbb{R}} (\xi - E_\omega)^2 |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi.$$

Nos referiremos a la varianza por *incertidumbre*. El siguiente teorema dará una cota por abajo para el producto de incertezas ligadas los valores esperados

$$(\text{incertidumbre en tiempo}) \times (\text{incertidumbre en frecuencia}) = \sigma_t \sigma_\omega \geq \frac{1}{2}.$$

Esto es, para ninguna función ψ podremos tener, simultáneamente, cero incertidumbre en tiempo y en frecuencia. Siempre vamos a tener la desventaja de que si achicamos una de las incertidumbres, se agranda la otra. Desde la mecánica cuántica ψ se interpreta como la “función de estados” de una “partícula” que viaja en la recta real y el principio de incertidumbre refleja la imposibilidad de medir su “posición” y “momento” a la vez.

Teorema 2.7. [10, Teorema 4.1, capítulo 5] *Suponer $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, esto es, ψ es una función que satisface*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^n |\psi^{(m)}(x)| < \infty$$

para todos $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, y que además cumple $\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx = 1$. Luego vale que

$$\left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |\psi(x)|^2 dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq \frac{1}{4}.$$

Más aún, en general vale

$$\left(\int_{\mathbb{R}} (x - x_0)^2 |\psi(x)|^2 dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} (\xi - \xi_0)^2 |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq \frac{1}{4}$$

para todos $x_0, \xi_0 \in \mathbb{R}$.

Demostración. Primero, integrando por partes escribimos

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx = x |\psi(x)|^2 \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} - \int_{\mathbb{R}} x \frac{d}{dx} |\psi(x)|^2 dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}} x \frac{d}{dx} (\psi(x) \overline{\psi(x)}) dx = - \int_{\mathbb{R}} (x \psi'(x) \overline{\psi(x)} + x \overline{\psi'(x)} \psi(x)) dx \end{aligned}$$

y por lo tanto, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} 1 &\leq \int_{\mathbb{R}} |x \psi'(x) \overline{\psi(x)} + x \overline{\psi'(x)} \psi(x)| dx \leq 2 \int_{\mathbb{R}} |x \psi(x)| |\psi'(x)| dx \\ &\leq 2 \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |\psi(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |\psi'(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Por otro lado, se tiene, nuevamente integrando por partes,

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}'(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \psi'(x) e^{-ix\xi} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\psi(x) e^{-ix\xi} \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} + \int_{\mathbb{R}} \psi(x) i \xi e^{-ix\xi} dx \right] \\ &= i \xi \widehat{\psi}(\xi) \end{aligned}$$

y entonces, como la transformada de Fourier preserva el producto interno,

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi'(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \psi'(x) \overline{\psi'(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}'(\xi) \overline{\widehat{\psi}'(\xi)} d\xi = \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi.$$

Entonces, (2.20) resulta

$$\frac{1}{2} \leq \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |\psi(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}$$

y obtenemos así lo primero que queríamos probar. En el caso más general, usar las propiedades de la transformada y aplicar lo anterior a la función $x \mapsto e^{-ix\xi_0} \psi(x+x_0)$. \square

La otra forma de ver el principio de incertidumbre es mediante el siguiente teorema:

Teorema 2.8. *Suponer $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ función continua. Entonces f y \widehat{f} no pueden estar simultáneamente compactamente soportadas a menos que $f \equiv 0$.*

Demostración. Suponer que f y \widehat{f} están compactamente soportadas. Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $\text{supp } f \subseteq [0, \pi]$. Considerar la periodización $f_{2\pi}$ con período 2π de la función $f|_{[0, 2\pi]}$. Sus coeficientes de Fourier están dados por

$$a_n(f_{2\pi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_{2\pi}(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-inx} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{f}(n).$$

Pero como \widehat{f} también está compactamente soportada, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n(f_{2\pi}) = 0$ para $|n| > N$. Es evidente entonces que la serie de Fourier de $f_{2\pi}$ converge absolutamente. Como $f_{2\pi}$ es continua por serlo f , tenemos, por el Corolario (2.1),

$$f_{2\pi}(x) = \sum_{k=-N}^N a_k(f_{2\pi}) e^{inx}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. En particular, tenemos

$$f(x) = f_{2\pi}(x) = \sum_{k=-N}^N a_k(f_{2\pi}) e^{inx} \quad (2.21)$$

para todo $x \in [0, 2\pi]$. Pero entonces se tiene

$$0 = \sum_{k=-N}^N a_k(f_{2\pi}) e^{inx}$$

para todo $x \in [\pi, 2\pi]$, y como el término derecho es un polinomio trigonométrico, debe tenerse $a_n(f_{2\pi}) = 0$ para $|n| \leq N$. Entonces, volviendo a (2.21), obtenemos que $f(x) = 0$ para todo $x \in [0, 2\pi]$, y por lo tanto $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. \square

Tenemos otra forma un tanto más refinada del anterior teorema que nos dice un poco más.

Teorema 2.9. *Suponer $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que \widehat{f} tiene soporte compacto. Luego, si f se anula a.e. en algún intervalo, entonces $f = 0$ a.e. en \mathbb{R} .*

Demostración. Primero, como \widehat{f} tiene soporte compacto por hipótesis y además es continua por ser $f \in L^1(\mathbb{R})$, se tiene $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Suponer $\text{supp } \widehat{f} \subseteq [a, b]$. Por el Teorema 1.5, se tiene

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

para casi todo x . O sea, f coincide a.e. con una función continua (al tener $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, su transformada de Fourier es continua). Como lo que queremos probar es un resultado a.e., nada cambia si trabajamos con el representante continuo de f , que por conveniencia también llamamos f . La igualdad anterior vale entonces para todo punto. Queremos ahora derivar a f . Notemos que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \widehat{f}(\xi) \left[\frac{e^{i\xi(x+h)} - e^{i\xi x}}{h} \right] d\xi.$$

Analicemos el término entre corchetes. Digamos $\varphi_\xi(x) = e^{i\xi x}$. Se tiene

$$e^{i\xi(x+h)} - e^{i\xi x} = \varphi_\xi(x+h) - \varphi_\xi(x) = \left(\int_0^1 \varphi'_\xi(x+th) dt \right) h = \left(i\xi \int_0^1 e^{i\xi(x+th)} dt \right) h$$

y por lo tanto

$$\frac{|e^{i\xi(x+h)} - e^{i\xi x}|}{|h|} \leq |\xi| \left(\int_0^1 |e^{i\xi(x+th)}| dt \right) = |\xi| \leq \max\{|a|, |b|\}$$

para $h \neq 0$, $\xi \in [a, b]$. Pero entonces, llamando $\psi_h(\xi) = \widehat{f}(\xi)(e^{i\xi(x+h)} - e^{i\xi x})/h$, resultan las ψ_h acotadas por $\xi \mapsto |\widehat{f}(\xi)| \max\{|a|, |b|\}$ que es integrable en $[a, b]$. Luego, por el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue resulta

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \lim_{h \rightarrow 0} \psi_h(\xi) d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \widehat{f}(\xi) (i\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

Aplicando el mismo argumento anterior, puede verse que

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \widehat{f}(\xi) (i\xi)^n e^{i\xi x} d\xi \quad (2.22)$$

para $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Suponer ahora que f se anula en un intervalo $[c, d]$. Tomando $x_0 = (c + d)/2$, escribimos

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \widehat{f}(\xi) e^{i\xi(x-x_0)} e^{i\xi x_0} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \widehat{f}(\xi) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\xi(x-x_0))^n}{n!} \right] e^{i\xi x_0} d\xi$$

desarrollando la expresión $e^{i\xi(x-x_0)}$ en su serie. Como la serie de la exponencial converge uniformemente a su límite, el intervalo $[a, b]$ tiene medida finita y \widehat{f} es acotada, podemos pasar la integral dentro de la suma. obteniendo así

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\int_a^b \widehat{f}(\xi) (i\xi)^n e^{i\xi x_0} d\xi \right] (x-x_0)^n \quad (2.23)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Como f se anulaba en $[c, d]$, se tiene $f^{(n)}(x_0) = 0$ para todo $n \geq 0$. Combinando (2.22) y (2.23), concluimos que

$$f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

que es lo que queríamos probar. \square

Observación 2.11. Lo mismo que dice el teorema anterior puede decirse si cambiamos los roles de f y \widehat{f} : si $f \in L^1(\mathbb{R})$ posee soporte compacto y \widehat{f} se anula en algún intervalo (no hace falta aclarar el a.e. pues \widehat{f} es continua) entonces $\widehat{f} = 0$ en \mathbb{R} . En efecto, si $\text{supp } f \subseteq [a, b]$, usamos los mismos argumentos de antes para pasar las derivadas con respecto a ξ dentro de la integral:

$$\widehat{f}^{(n)}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b f(x) (-ix)^n e^{-ix\xi} dx.$$

Expandimos a \widehat{f} en su serie, igual a lo que se hizo con f :

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b f(x) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix(\xi - \xi_0))^n}{n!} \right] e^{ix\xi_0} dx.$$

La integral pasa dentro de la suma usando nuevamente el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue, usando que f es integrable y que si tenemos una familia de funciones continuas que converge uniformemente, entonces están uniformemente acotadas por una función continua a partir de cierto N :

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left[\int_a^b f(x) (-ix)^n e^{-ix\xi_0} dx \right] (\xi - \xi_0)^n.$$

Luego, si \widehat{f} se anula alrededor de ξ_0 , se tiene $\widehat{f}^{(n)}(\xi_0) = 0$ para todo n y por lo tanto $\widehat{f}(\xi) = 0$ para todo ξ .

Observación 2.12. La demostración del Teorema 2.9 es virtualmente idéntica a una versión del Teorema de Paley-Wiener, que relaciona el decaimiento de \widehat{f} con la analiticidad de f , o viceversa: si f es integrable en \mathbb{R} y su transformada posee soporte compacto, entonces f es la restricción de una función analítica en todo \mathbb{C} . En efecto, bajo estas hipótesis probamos que $\Re f$ y $\Im f$ pueden escribirse en series de potencias cuyos radios de convergencia (que no dependen de x) son infinitos, y por lo tanto poniendo $z \in \mathbb{C}$ en vez de x , f se convierte en una función que es analítica en todo el plano complejo.

3. Transformada de Fourier Discreta

3.1. Motivación

Para este capítulo nos basamos enteramente en [3]. Para dar la motivación para la transformada discreta será necesario cambiar momentáneamente la definición de transformada de Fourier. En vez de tomar

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-it\xi} dt$$

diremos que la transformada es

$$\mathcal{F}_{2\pi}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2\pi i \xi t} dt.$$

Mediante un simple cambio de variables vemos que la relación entre esta nueva definición y la anterior está dada por

$$\mathcal{F}_{2\pi}(f)(\xi) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(2\pi\xi).$$

Es inmediato que valen todas las propiedades usuales que se han mencionado anteriormente. Vale aclarar que para esta definición, el teorema de Shannon 1.7 cambia ligeramente: ahora, si f es tal que $\text{supp } \mathcal{F}_{2\pi}(f) \subseteq [-\Omega, \Omega]$ entonces f queda totalmente determinada si muestreamos a razón de 2Ω puntos por segundo, esto es, si conocemos las evaluaciones

$$f\left(\frac{n}{2\Omega}\right) \quad \text{para } n \in \mathbb{Z}.$$

Antes de proseguir recordaremos nociones básicas de Teoría de Distribuciones (ver [8]), el lector familiarizado puede esquivar la siguiente observación.

Observación 3.1. En el apartado 1.4 se mencionaron los teoremas clásicos respecto de la Transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$ y $L^2(\mathbb{R})$. Allí definimos la transformada de Fourier de una función de clase L^1 y extendimos la definición por densidad a $L^2(\mathbb{R})$. En $L^2(\mathbb{R})$ perdemos la expresión (1.2) pero se tiene que \mathcal{F} (y también $\mathcal{F}_{2\pi}$) es isometría $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})}$ (resp. $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\mathcal{F}_{2\pi}(f)\|_{L^2(\mathbb{R})}$). Cabe mencionar que el llamado “espacio natural” para la transformada de Fourier es el espacio de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de las funciones C^∞ que decaen más rápido que cualquier polinomio. Allí la transformada de Fourier es un isomorfismo isométrico (donde la norma que es preservada es $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R})}$). El espacio de distribuciones temperadas \mathcal{S}' en \mathbb{R} se define como todos los funcionales lineales y continuos del espacio de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ en \mathbb{C} (como referencia ver [8]). Entre los elementos de este enorme espacio se destaca la delta de Dirac de un punto $u_0 \in \mathbb{R}$, definida por

$$\delta_{u_0}(\varphi) = \varphi(u_0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Esta distribución puede ser interpretada como una medida que concentra la masa en el punto u_0 en este caso, es decir,

$$\delta_{u_0}(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } u_0 \in A \\ 0 & \text{si } u_0 \notin A \end{cases} \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}.$$

La transformada de Fourier es definida sobre \mathcal{S}' a partir de tomar \mathcal{F} de las “funciones de prueba”, es decir, dada $T \in \mathcal{S}'$ definimos \widehat{T} por

$$\widehat{T}(\varphi) := T(\widehat{\varphi}) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

o bien

$$\mathcal{F}_{2\pi}(T)(\varphi) := T(\mathcal{F}_{2\pi}(\varphi)) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

En particular, para la delta de Dirac obtenemos

$$\widehat{\delta_{u_0}}(\varphi) = \widehat{\varphi}(u_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-iu_0x} dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

o bien

$$\mathcal{F}_{2\pi}(\delta_{u_0})(\varphi) = \mathcal{F}_{2\pi}(\varphi)(u_0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-2\pi i u_0 x} dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Dada una función f localmente integrable (es decir, que restringida a compactos es de clase L^1) podemos definir la distribución

$$f(\varphi) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \quad (3.1)$$

Luego, podemos escribir

$$\widehat{\delta_{u_0}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-iu_0 \cdot} \quad \text{o bien} \quad \mathcal{F}_{2\pi}(\delta_{u_0}) = e^{-2\pi i u_0 \cdot}. \quad (3.2)$$

Recíprocamente, como la función $e^{i\xi_0 \cdot}$, si bien no es integrable, es localmente integrable, vista como una distribución como en (3.1), podemos calcular su transformada de Fourier y, usando la Fórmula de Inversión, resulta

$$\widehat{e^{i\xi_0 \cdot}}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(t) e^{i\xi_0 t} dt = \sqrt{2\pi} \varphi(\xi_0) = \sqrt{2\pi} \delta_{\xi_0}(\varphi) \quad (3.3)$$

o bien

$$\mathcal{F}_{2\pi}(e^{2\pi i \xi_0 \cdot})(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_{2\pi}(\varphi)(t) e^{2\pi i \xi_0 t} dt = \varphi(\xi_0) = \delta_{\xi_0}(\varphi).$$

Y hasta aquí llega por el momento nuestro repaso de Teoría de Distribuciones.

Retomemos nuestro objetivo. Para definir la Transformada de Fourier Discreta (TFD) pensemos que estamos trabajando con una función f esencialmente soportada en tiempo en un intervalo $[0, T]$ y esencialmente soportada en frecuencia en $[0, M]$, teniendo presente que esto sólo puede ser aproximadamente verdad (ver Teorema 2.8). Como las modulaciones en tiempo producen traslaciones en frecuencia, si $\text{supp } \mathcal{F}_{2\pi}(f) \subseteq [a, b]$, no es tan relevante saber los valores de a y b , lo verdaderamente importante es conocer $b - a$. Podemos pensar entonces que f es de ancho de banda $M/2$ y por ende la conozcamos completamente luego de muestrearla a una tasa de M . La cantidad de muestras que tendremos serán M por unidad de tiempo, es decir, $N := MT$.

$$\begin{array}{ccccccc}
t_0 & t_1 & t_2 & & & & t_{N-1} & t_N \\
| & | & | & & & & | & | \\
\hline
0 & \frac{1}{M} & \frac{2}{M} & & \cdots & & \frac{N-1}{M} & T
\end{array}$$

Hacemos la suposición que conocer a los puntos $f(t_n)$ para $n = 0, 1, \dots, N - 1$ es conocer a f razonablemente bien. O sea, la discretización de f es el vector

$$(f(t_0), f(t_1), \dots, f(t_{N-1})).$$

Si hacemos un poco de abuso de notación, también podemos escribir

$$f_{\text{discreta}}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) \delta_{t_n}(t).$$

Si aplicamos la transformada de Fourier continua, queda

$$\mathcal{F}_{2\pi} f_{\text{discreta}}(s) = \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) \mathcal{F}_{2\pi}(\delta_{t_n})(s) = \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) e^{-2\pi i t_n s}.$$

Análogamente a la discretización que realizamos al comienzo, bajo nuestras suposiciones podemos pensar que la transformada de Fourier de f tiene ancho de banda $T/2$. Por lo tanto quedaría determinada por sus muestras distanciadas cada $1/T$ en su *dominio esencial* $[0, M]$. Esto da un total de $N = MT$ puntos de muestreo que coincide con la cantidad anterior dada al discretizar la función en tiempo.

$$\begin{array}{ccccccc}
s_0 & s_1 & s_2 & & & & s_{N-1} & s_N \\
| & | & | & & & & | & | \\
\hline
0 & \frac{1}{T} & \frac{2}{T} & & \cdots & & \frac{N-1}{T} & M
\end{array}$$

En vez de evaluar a $\mathcal{F}_{2\pi} f$ en estos puntos, discretizamos a $\mathcal{F}_{2\pi} f_{\text{discreta}}$ y nos queda el vector

$$(\mathcal{F}_{2\pi} f_{\text{discreta}}(s_0), \mathcal{F}_{2\pi} f_{\text{discreta}}(s_1), \dots, \mathcal{F}_{2\pi} f_{\text{discreta}}(s_{N-1})), \quad \text{donde } s_n = \frac{n}{T}.$$

Definimos entonces la TFD de f como

$$F(s_m) = \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) e^{-2\pi i t_n s_m} \quad 0 \leq m \leq N - 1.$$

Es natural suponer que F aproxima a $\mathcal{F}_{2\pi} f$. En efecto, conocer a los valores $\mathcal{F}_{2\pi} f(s_m)$ es conocer a $\mathcal{F}_{2\pi} f$ razonablemente bien. Veamos ahora cómo se relacionan $F(s_m)$ (la discretización de la transformada de la discretización de f) y $\mathcal{F}_{2\pi} f(s_m)$ (la discretización de la transformada continua de f). Tomar a Δt como el espacio entre las muestras en tiempo, i.e., $\Delta t = 1/M$. Como f es limitada en tiempo a $[0, T]$, podemos escribir

$$\mathcal{F}_{2\pi} f(s_m) = \int_0^T f(t) e^{-2\pi i s_m t} dt \approx \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) e^{-2\pi i s_m t_n} \Delta t$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) e^{-2\pi i s_m t_n} = \frac{1}{M} F(s_m).$$

O sea, salvo un factor de M , la cantidad $F(s_m)$ nos da una aproximación de $\mathcal{F}_{2\pi} f(s_m)$. Vale aclarar un punto más: de la definición $t_n = \frac{n}{M}$, $s_m = \frac{m}{T}$ se tiene

$$F(s_m) = \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) e^{-2\pi i s_m t_n} = \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) e^{-2\pi i n m / (MT)} = \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) e^{-2\pi i n m / N}$$

lo cual sugiere una independencia de las muestras s_m, t_n , en el sentido que sólo nos interesarán los subíndices m, n y la cantidad N de muestras.

3.2. Definición y propiedades

Lo anteriormente mencionado es la motivación final para la definición: si tomamos $\mathbf{f}[n] = f(t_n)$ (a la que nosotros nos referiremos por “señal”) y $\mathbf{F}[m] = F(s_m)$, tenemos una definición de transformada discreta que toma como input un vector en \mathbb{C}^N y devuelve otro vector en \mathbb{C}^N :

$$\mathbf{F}[m] = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{f}[n] e^{-2\pi i n m / N} \quad \text{para } 0 \leq m \leq N-1.$$

Definición 3.1. Sea $\mathbf{f} = (\mathbf{f}[0], \mathbf{f}[1], \dots, \mathbf{f}[N-1])$ vector en \mathbb{C}^N . Definimos su *transformada discreta de Fourier* por

$$\underline{\mathcal{F}} \mathbf{f}[m] := \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{f}[n] e^{-2\pi i n m / N} \quad \text{para } 0 \leq m \leq N-1. \quad (3.4)$$

Conviene introducir un poco de notación: dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^N$ podemos definir

$$\mathbf{x}\mathbf{y} := (\mathbf{x}[0]\mathbf{y}[0], \mathbf{x}[1]\mathbf{y}[1], \dots, \mathbf{x}[N-1]\mathbf{y}[N-1])$$

$$\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}} := \left(\frac{\mathbf{x}[0]}{\mathbf{y}[0]}, \frac{\mathbf{x}[1]}{\mathbf{y}[1]}, \dots, \frac{\mathbf{x}[N-1]}{\mathbf{y}[N-1]} \right) \quad \text{cuando los cocientes tengan sentido}$$

$$\mathbf{x}^p := (\mathbf{x}[0]^p, \mathbf{x}[1]^p, \dots, \mathbf{x}[N-1]^p) \quad \text{cuando cada potencia tiene sentido, se toma } 0^0 = 1$$

Como la definición de la TFD involucra una exponencial compleja, es útil definir

$$\omega = e^{2\pi i / N}.$$

Cuando sea necesario, aclararemos

$$\omega_N = e^{2\pi i / N}.$$

Notar que ahora $\omega_N^0 = 1, \omega_N^1, \omega_N^2, \dots, \omega_N^{N-1}$ son las N -ésimas raíces de la unidad. Ahora definimos

$$\boldsymbol{\omega} = (1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{N-1}).$$

Es útil definir también

$$\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1) \quad \mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0).$$

Con esto a mano, notar que ahora se tiene

$$\underline{\mathcal{F}} \mathbf{f}[m] = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}[k] e^{-2\pi i k m / N} = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}[k] \omega^{-k m} = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}[k] \omega^{-k} [m]$$

y de esta manera obtenemos una *forma vectorial* de la TDF, dada por

$$\underline{\mathcal{F}} \mathbf{f} = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}[k] \omega^{-k}. \quad (3.5)$$

De lo anterior se obtiene inmediatamente que

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathcal{F}} \mathbf{f}[0] \\ \underline{\mathcal{F}} \mathbf{f}[1] \\ \underline{\mathcal{F}} \mathbf{f}[2] \\ \vdots \\ \underline{\mathcal{F}} \mathbf{f}[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega^{-1} & \omega^{-2} & \dots & \omega^{-(N-1)} \\ 1 & \omega^{-2} & \omega^{-4} & \dots & \omega^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{-(N-1)} & \omega^{-2(N-1)} & \dots & \omega^{-(N-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}[0] \\ \mathbf{f}[1] \\ \mathbf{f}[2] \\ \vdots \\ \mathbf{f}[N-1] \end{bmatrix}$$

Por si ya no era obvio, lo anterior nos dice que $\underline{\mathcal{F}} : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ es un operador lineal, y que la matriz de $\underline{\mathcal{F}}$ en la base canónica de \mathbb{C}^N es la anterior. A menudo identificaremos el operador $\underline{\mathcal{F}}$ con la matriz anterior.

En el caso continuo, se tenía $\mathcal{F}f(-\xi) = \overline{\mathcal{F}f(\xi)}$ cuando f era una función a valores reales. Obtenemos un resultado análogo para el caso discreto cuando N es par.

Proposición 3.1. *Suponer \mathbf{f} vector en \mathbb{R}^N con N par. Luego el espectro de \mathbf{f} se “parte” en $N/2$, i.e., vale*

$$\underline{\mathcal{F}} \mathbf{f} \left[\frac{N}{2} + j \right] = \overline{\underline{\mathcal{F}} \mathbf{f} \left[\frac{N}{2} - j \right]}$$

para $0 \leq j \leq \frac{N}{2} - 1$. En particular, $\underline{\mathcal{F}} \mathbf{f} [N/2]$ es real.

Demostración. Veamos lo último. Tenemos

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{F}} \mathbf{f} [N/2] &= \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f} \omega^{-k} [N/2] = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}[k] \omega^{-k N/2} = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}[k] e^{-\pi i k} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \mathbf{f}[k] \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Para lo otro, escribimos

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{F}} \mathbf{f} \left[\frac{N}{2} + j \right] &= \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}[k] \omega^{-k} \left[\frac{N}{2} + j \right] = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}[k] \omega^{-j k} \omega^{-N k/2} = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}[k] \omega^{-j k} (-1)^k \\ \underline{\mathcal{F}} \mathbf{f} \left[\frac{N}{2} - j \right] &= \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}[k] \omega^{-k} \left[\frac{N}{2} - j \right] = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}[k] \omega^{j k} \omega^{-N k/2} = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}[k] \omega^{j k} (-1)^k \end{aligned}$$

Como $\overline{\omega^{j k}} = \omega^{-j k}$ obtenemos lo deseado. \square

Notar ahora que la definición de la TDF

$$\underline{\mathcal{F}} \mathbf{f}[m] = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}[k] \omega^{-km} \quad (3.6)$$

sugiere una propiedad de periodicidad. Como $\omega^{-k(m+N)} = \omega^{-km} \omega^{-kN} = \omega^{-km}$, se cumple

$$\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}[k] \omega^{-k(m+N)} = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}[k] \omega^{-km} = \underline{\mathcal{F}} \mathbf{f}[m].$$

Luego tiene perfecto sentido definir $\underline{\mathcal{F}} \mathbf{f}[m + N]$ como el lado izquierdo de la igualdad anterior. Más aún, haciendo la misma cuenta podemos definir $\underline{\mathcal{F}} \mathbf{f}[m + nN]$ para $n \in \mathbb{Z}$, y se cumple

$$\underline{\mathcal{F}} \mathbf{f}[m + nN] = \underline{\mathcal{F}} \mathbf{f}[m] \quad (3.7)$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Entonces, en vez de pensar que $\underline{\mathcal{F}} \mathbf{f}$ es un vector en \mathbb{C}^N , podemos pensar que es una sucesión $\{\underline{\mathcal{F}} \mathbf{f}[m]\}_{m \in \mathbb{Z}}$ de período N . De esta manera, la igualdad (3.6) vale para todo $m \in \mathbb{Z}$.

De la misma manera podemos pensar en una señal \mathbf{f} en \mathbb{C}^N como una sucesión $\{\mathbf{f}[m]\}_{m \in \mathbb{Z}}$ periódica de período N , definiendo $\mathbf{f}[p] = \mathbf{f}[q]$ si y sólo si $p \equiv q \pmod{N}$. El vector ω se extiende de manera natural definiendo $\omega[m] = \omega^m$. Dependiendo del contexto, será más conveniente pensar en $\underline{\mathcal{F}} \mathbf{f}$ como un vector o como una sucesión periódica, pero a efectos prácticos serán lo mismo. Notar que con esta periodización, ahora tenemos la igualdad entre sucesiones

$$\underline{\mathcal{F}} \mathbf{f} = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}[k] \omega^{-k}.$$

Probamos ahora un análogo al caso continuo: cuando una función es periódica, vale calcular sus coeficientes de Fourier sobre cualquier intervalo cuya longitud sea el período. En el caso discreto, “la TFD puede ser definida sobre cualquier conjunto de N índices consecutivos”.

Proposición 3.2. *Dada una señal \mathbf{f} de período N , y $p \in \mathbb{Z}$, vale*

$$\underline{\mathcal{F}} \mathbf{f} = \sum_{k=p}^{p+N-1} \mathbf{f}[k] \omega^{-k}.$$

Demostración. Sea nN el único múltiplo de N tal que $p \leq nN \leq p + N - 1$. Luego

$$\sum_{k=p}^{p+N-1} \mathbf{f}[k] \omega^{-k} = \sum_{k=p}^{nN-1} \mathbf{f}[k] \omega^{-k} + \sum_{k=nN}^{p+N-1} \mathbf{f}[k] \omega^{-k} = (*).$$

Ahora escribimos las sumas anteriores como

$$\sum_{k=p}^{nN-1} \mathbf{f}[k] \omega^{-k} = \sum_{k=p}^{nN-1} \mathbf{f}[k - (n-1)N] \omega^{-(k-(n-1)N)} = \sum_{k=p-(n-1)N}^{N-1} \mathbf{f}[k] \omega^{-k}$$

$$\sum_{k=nN}^{p+N-1} \mathbf{f}[k] \omega^{-k} = \sum_{k=nN}^{p+N-1} \mathbf{f}[k - nN] \omega^{-(k-nN)} = \sum_{k=0}^{p-(n-1)N-1} \mathbf{f}[k] \omega^{-k}.$$

Se sigue que

$$(*) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}[k] \omega^{-k} = \underline{\mathcal{F}} \mathbf{f}.$$

□

3.3. Inversión de la TFD

Podemos definir un análogo a la delta de Dirac para el caso discreto sin mucho problema.

Definición 3.2. Como vector en \mathbb{C}^N , definimos, para $0 \leq k \leq N-1$,

$$\delta_k[m] = \begin{cases} 1 & \text{si } k = m \\ 0 & \text{si } k \neq m \end{cases}$$

Como sucesión periódica, se define

$$\delta_k[m] = \begin{cases} 1 & \text{si } k \equiv m \pmod{N} \\ 0 & \text{si } k \not\equiv m \pmod{N} \end{cases}$$

Notar que, tanto en el sentido de vectores como de sucesiones, se cumple

$$\underline{\mathcal{F}} \delta_k = \sum_{n=0}^{N-1} \delta_k[n] \omega^{-k} = \omega^{-k}. \quad (3.8)$$

Los δ_k pueden ser vistos como base de \mathbb{C}^N y también como base del espacio de las sucesiones N -periódicas.

Definición 3.3. Dados vectores o sucesiones N -periódicas \mathbf{x}, \mathbf{y} , definimos el producto interno

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{x}[k] \overline{\mathbf{y}[k]}.$$

De vuelta, el producto interno puede ser definido sobre cualquier conjunto de $N-1$ índices consecutivos y el resultado no cambia. Asociado a este producto interno tenemos, por supuesto, la norma

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}.$$

Proposición 3.3. *Se cumple*

$$\omega^k \cdot \omega^\ell = \begin{cases} 0 & \text{si } k \not\equiv \ell \pmod{N} \\ N & \text{si } k \equiv \ell \pmod{N} \end{cases}$$

Demostración. Primero, recordar que $\omega^{kN} = 1$ para cualquier entero k . Segundo,

$$1 + z + z^2 + \dots + z^{N-1} = \begin{cases} \frac{1 - z^N}{1 - z} & \text{si } z \neq 1 \\ N & \text{si } z = 1 \end{cases}$$

Si $k \not\equiv 0 \pmod{N}$ entonces $\omega^k \neq 1$. Si $k \equiv 0 \pmod{N}$ entonces $\omega^{k\ell} = 1$ para cualquier entero ℓ y por lo tanto

$$1 + \omega^k + \omega^{2k} + \dots + \omega^{(N-1)k} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \not\equiv 0 \pmod{N} \\ N & \text{si } k \equiv 0 \pmod{N} \end{cases}$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} \omega^k \cdot \omega^\ell &= \sum_{n=0}^{N-1} \omega^k[n] \overline{\omega^\ell[n]} = \sum_{n=0}^{N-1} \omega^k[n] \omega^{-\ell}[n] = \sum_{n=0}^{N-1} \omega^{k-\ell}[n] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \omega^{(k-\ell)n} = \begin{cases} 0 & \text{si } k - \ell \not\equiv 0 \pmod{N} \\ N & \text{si } k - \ell \equiv 0 \pmod{N} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \not\equiv \ell \pmod{N} \\ N & \text{si } k \equiv \ell \pmod{N} \end{cases} \end{aligned}$$

que es lo que queríamos ver. \square

Al ser los ω^k ortogonales, tenemos que $\{\mathbf{1}, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{N-1}\}$ es una base de \mathbb{C}^N , y también base del espacio de las sucesiones N -periódicas. Además, ahora sabemos cómo actúa $\underline{\mathcal{F}}$ en esta base:

$$\underline{\mathcal{F}} \omega^k[\ell] = \sum_{n=0}^{N-1} \omega^k[n] \omega^{-n\ell} = \omega^k \cdot \omega^\ell = \begin{cases} 0 & \text{si } k \not\equiv \ell \pmod{N} \\ N & \text{si } k \equiv \ell \pmod{N} \end{cases}$$

O sea, esto nos dice que

$$\underline{\mathcal{F}} \omega^k = N \delta_k.$$

Similar al caso continuo, dada una señal periódica \mathbf{f} , podemos definir su *señal revertida* por

$$\mathbf{f}^-[m] = \mathbf{f}[-m].$$

En forma vectorial, la señal revertida de \mathbf{f} está dada por

$$\mathbf{f}^- = (\mathbf{f}[N], \mathbf{f}[N-1], \dots, \mathbf{f}[1]).$$

Lema 3.1. *Revertir una señal produce lo siguiente:*

(a) $(\mathbf{f} + \alpha \mathbf{g})^- = \mathbf{f}^- + \alpha \mathbf{g}^-.$

(b) $\delta_k^- = \delta_{-k}.$

(c) Para k entero se cumple $(\omega^k)^- = \omega^{-k}.$

(d) Se cumple $\mathbf{f}^- = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}[k] \delta_{-k}.$

Demostración. (a) Es trivial.

(b) Se tiene

$$\delta_k^- [m] = \delta_k [-m] = 1 \iff k \equiv -m \pmod{N} \iff -k \equiv m \pmod{N}$$

de donde sale lo deseado.

(c) $(\omega^k)^- [m] = \omega^k [-m] = \omega^{-km} = \omega^{-k} [m].$

(d) Aplicar las partes (a) y (b) a $\mathbf{f} = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}[k] \delta_k.$

□

Estamos ahora listos para el teorema de inversión.

Teorema 3.1. *La TFD satisface $\underline{\mathcal{F}} \mathbf{f}^- = (\underline{\mathcal{F}} \mathbf{f})^-$. Además, si definimos*

$$\underline{\mathcal{F}}^{-1} \mathbf{f} = \frac{1}{N} (\underline{\mathcal{F}} \mathbf{f})^-$$

entonces $\underline{\mathcal{F}}^{-1}$ es la inversa de $\underline{\mathcal{F}}$.

Demostración. Para ver lo primero, recordar que por la proposición (3.2) y el lema (3.1) podemos escribir

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{F}} \mathbf{f}^- &= \sum_{k=-(N-1)}^0 \mathbf{f}^- [k] \omega^{-k} = \sum_{k=-(N-1)}^0 \mathbf{f} [-k] \omega^{-k} = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f} [k] \omega^k \\ &= \left(\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f} [k] \omega^{-k} \right)^- = (\underline{\mathcal{F}} \mathbf{f})^-. \end{aligned}$$

Para lo segundo, primero notar que

$$\underline{\mathcal{F}} \underline{\mathcal{F}} \mathbf{f} = \underline{\mathcal{F}} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f} [k] \omega^{-k} \right) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f} [k] \underline{\mathcal{F}} \omega^{-k} = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f} [k] N \delta_{-k} = N \mathbf{f}^-.$$

Luego se tiene

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{F}}^{-1} \underline{\mathcal{F}} \mathbf{f} &= \frac{1}{N} (\underline{\mathcal{F}} \underline{\mathcal{F}} \mathbf{f})^- = \frac{1}{N} (N \mathbf{f}^-)^- = \mathbf{f} \\ \underline{\mathcal{F}} \underline{\mathcal{F}}^{-1} \mathbf{f} &= \underline{\mathcal{F}} \left(\frac{1}{N} (\underline{\mathcal{F}} \mathbf{f})^- \right) = \frac{1}{N} \underline{\mathcal{F}} \underline{\mathcal{F}} \mathbf{f}^- = (\mathbf{f}^-)^- = \mathbf{f} \end{aligned}$$

y por lo tanto $\underline{\mathcal{F}}^{-1}$ es efectivamente la inversa de la TDF. □

Es interesante ver algunas propiedades más de la TDF, principalmente para remarcar lo bien que se transportan las propiedades del caso continuo al caso discreto. Las definiciones siguientes justifican de alguna manera la necesidad de pensar en los vectores de \mathbb{C}^N como sucesiones N -periódicas.

Definición 3.4.

(a) Dada una señal \mathbf{f} definimos su *traslación en n* por

$$\tau_n \mathbf{f}[m] = \mathbf{f}[m - n].$$

(b) Diremos que la *modulación por n* de una señal \mathbf{f} es la señal

$$\begin{aligned} \omega^n \mathbf{f} &= (1, \omega^n, \omega^{2n}, \dots, \omega^{(N-1)n})(\mathbf{f}[0], \mathbf{f}[1], \dots, \mathbf{f}[N-1]) \\ &= (\mathbf{f}[0], \omega^n \mathbf{f}[1], \dots, \omega^{(N-1)n} \mathbf{f}[N-1]). \end{aligned}$$

Proposición 3.4. *Similar al caso continuo, para una señal \mathbf{f} se cumple*

(a) $\underline{\mathcal{F}}(\omega^n \mathbf{f}) = \tau_n(\underline{\mathcal{F}} \mathbf{f}).$

(b) $\underline{\mathcal{F}}(\tau_n \mathbf{f}) = \omega^{-n}(\underline{\mathcal{F}} \mathbf{f}).$

Demostración. (a) Calculamos

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{F}}(\omega^n \mathbf{f})[m] &= \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{kn} \mathbf{f}[k] \omega^{-km} = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}[k] \omega^{-k(m-n)} \\ \tau_n(\underline{\mathcal{F}} \mathbf{f}) &= \tau_n \left(\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}[k] \omega^{-k} \right) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}[k] \tau_n \omega^{-k} \end{aligned}$$

de donde sale que

$$\begin{aligned} \tau_n(\underline{\mathcal{F}} \mathbf{f})[m] &= \left(\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}[k] \tau_n \omega^{-k} \right) [m] = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}[k] \tau_n \omega^{-k}[m] \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}[k] \omega^{-k(m-n)} \end{aligned}$$

y por lo tanto se tiene $\underline{\mathcal{F}}(\omega^n \mathbf{f}) = \tau_n(\underline{\mathcal{F}} \mathbf{f}).$

(b) Primero, es trivial chequear que $\tau_n \delta_k = \delta_{k+n}$. Luego

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{F}}(\tau_n \mathbf{f}) &= \underline{\mathcal{F}} \tau_n \left(\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}[k] \delta_k \right) = \underline{\mathcal{F}} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}[k] \tau_n \delta_k \right) = \underline{\mathcal{F}} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}[k] \delta_{k+n} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}[k] \underline{\mathcal{F}} \delta_{k+n} = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}[k] \omega^{-(k+n)} \\ \omega^{-n}(\underline{\mathcal{F}} \mathbf{f}) &= \omega^{-n} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}[k] \omega^{-k} \right) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}[k] \omega^{-(k+n)} \end{aligned}$$

pues el producto puntual distribuye sobre la suma. Luego se obtiene lo deseado. \square

Ya definimos el producto puntual entre dos vectores \mathbf{x}, \mathbf{y} . La definición es la misma para sucesiones N -periódicas \mathbf{x}, \mathbf{y} . Definimos ahora otro producto, el de convolución.

Definición 3.5. Dadas señales \mathbf{f}, \mathbf{g} definimos su *convolución* por

$$(\mathbf{f} * \mathbf{g})[m] = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}[k] \mathbf{g}[m - k].$$

Proposición 3.5. *El producto de convolución es conmutativo.*

Demostración. Primero, notar que $(\mathbf{f} * \mathbf{g})[m]$ consiste en sumar las entradas $0, 1, \dots, N-1$ de la sucesión $\mathbf{f} \tau_m \mathbf{g}^-$. Como dicha sucesión es N -periódica, el resultado es independiente del conjunto de N índices consecutivos sobre el cual sumemos. Luego podemos escribir

$$\begin{aligned} (\mathbf{f} * \mathbf{g})[m] &= \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}[k] \mathbf{g}[m - k] = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{g}[m - k] \mathbf{f}[m - (m - k)] \\ &= \sum_{k=m-N+1}^m \mathbf{g}[k] \mathbf{f}[m - k] = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{g}[k] \mathbf{f}[m - k] = (\mathbf{g} * \mathbf{f})[m]. \end{aligned}$$

□

Es interesante ver cómo se comporta $\underline{\mathcal{F}}$ con respecto a los tres productos que ahora conocemos: el escalar, el puntual y el de convolución.

Teorema 3.2. *Sean \mathbf{f}, \mathbf{g} señales N -periódicas. Luego se cumple*

(a) *Identidad de Plancherel/Parseval:* $\underline{\mathcal{F}} \mathbf{f} \cdot \underline{\mathcal{F}} \mathbf{g} = N(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})$.

(b) $\underline{\mathcal{F}}(\mathbf{f} \mathbf{g}) = \frac{1}{N}(\underline{\mathcal{F}} \mathbf{f} * \underline{\mathcal{F}} \mathbf{g})$.

(c) $\underline{\mathcal{F}}(\mathbf{f} * \mathbf{g}) = \underline{\mathcal{F}} \mathbf{f} \underline{\mathcal{F}} \mathbf{g}$.

Demostración. (a) Escribimos

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{F}} \mathbf{f} \cdot \underline{\mathcal{F}} \mathbf{g} &= \left(\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}[k] \omega^{-k} \right) \cdot \left(\sum_{\ell=0}^{N-1} \mathbf{g}[\ell] \omega^{-\ell} \right) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} \mathbf{f}[k] \overline{\mathbf{g}[\ell]} \omega^{-k} \cdot \omega^{-\ell} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}[k] \overline{\mathbf{g}[k]} N = N(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}). \end{aligned}$$

(b) Primero notemos que para k, ℓ enteros se tiene

$$\delta_k \delta_\ell = \begin{cases} \delta_k & \text{si } k \equiv \ell \pmod{N} \\ \mathbf{0} & \text{si } k \not\equiv \ell \pmod{N} \end{cases}$$

Luego tenemos

$$\underline{\mathcal{F}}(\mathbf{f} \mathbf{g}) = \underline{\mathcal{F}} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}[k] \delta_k \sum_{\ell=0}^{N-1} \mathbf{g}[\ell] \delta_\ell \right) = \underline{\mathcal{F}} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} \mathbf{f}[k] \mathbf{g}[\ell] \delta_k \delta_\ell \right)$$

$$= \mathcal{F} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}[k] \mathbf{g}[k] \delta_k \right) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}[k] \mathbf{g}[k] \mathcal{F} \delta_k = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}[k] \mathbf{g}[k] \omega^{-k}.$$

Por lo tanto, se tiene

$$\underline{\mathcal{F}}(\mathbf{f} \mathbf{g})[m] = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}[k] \mathbf{g}[k] \omega^{-k}[m] = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}[k] \mathbf{g}[k] \omega^{-km}. \quad (3.9)$$

Por otro lado, tenemos

$$\begin{aligned} (\underline{\mathcal{F}} \mathbf{f} * \underline{\mathcal{F}} \mathbf{g})[m] &= \sum_{k=0}^{N-1} \underline{\mathcal{F}} \mathbf{f}[k] \underline{\mathcal{F}} \mathbf{g}[m-k] \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{r=0}^{N-1} \mathbf{f}[r] \omega^{-rk} \right) \left(\sum_{s=0}^{N-1} \mathbf{g}[s] \omega^{-s(m-k)} \right) \\ &= \sum_{r=0}^{N-1} \sum_{s=0}^{N-1} \mathbf{f}[r] \mathbf{g}[s] \omega^{-sm} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \omega^{sk} \omega^{-rk} \right) \\ &= \sum_{r=0}^{N-1} \sum_{s=0}^{N-1} \mathbf{f}[r] \mathbf{g}[s] \omega^{-sm} \omega^s \cdot \omega^r = N \underline{\mathcal{F}}(\mathbf{f} \mathbf{g})[m] \end{aligned}$$

donde la última igualdad vale por la ortogonalidad de los ω^s y por (3.9).

(c) Escribimos

$$\begin{aligned} (\underline{\mathcal{F}} \mathbf{f} \underline{\mathcal{F}} \mathbf{g})[m] &= (\underline{\mathcal{F}} \mathbf{f}[m])(\underline{\mathcal{F}} \mathbf{g}[m]) = \left(\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}[k] \omega^{-km} \right) \left(\sum_{\ell=0}^{N-1} \mathbf{g}[\ell] \omega^{-\ell m} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} \mathbf{f}[k] \mathbf{g}[\ell] \omega^{-(k+\ell)m} \\ \underline{\mathcal{F}}(\mathbf{f} * \mathbf{g})[m] &= \sum_{k=0}^{N-1} (\mathbf{f} * \mathbf{g})[k] \omega^{-km} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} \mathbf{f}[\ell] \mathbf{g}[k-\ell] \omega^{-km} \\ &= \sum_{\ell=0}^{N-1} \mathbf{f}[\ell] \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{g}[k-\ell] \omega^{-km} = \sum_{\ell=0}^{N-1} \mathbf{f}[\ell] \omega^{-\ell m} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{g}[k-\ell] \omega^{-(k-\ell)m} \\ &= \sum_{\ell=0}^{N-1} \mathbf{f}[\ell] \omega^{-\ell m} \sum_{k=-\ell}^{-\ell+N-1} \mathbf{g}[k] \omega^{-km} = \sum_{\ell=0}^{N-1} \mathbf{f}[\ell] \omega^{-\ell m} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{g}[k] \omega^{-km} \\ &= \sum_{\ell=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}[\ell] \mathbf{g}[k] \omega^{-(k+\ell)m} \end{aligned}$$

pues la sucesión $\mathbf{g}\omega^{-m}$ es N -periódica y no importa cuál sea el conjunto de N índices consecutivos sobre el cual sumamos. Se tiene entonces $(\underline{\mathcal{F}} \mathbf{f} \underline{\mathcal{F}} \mathbf{g})[m] = \underline{\mathcal{F}}(\mathbf{f} * \mathbf{g})[m]$. \square

Corolario 3.1. *Del punto (a) del anterior Teorema, sale que $\underline{\mathcal{F}}$ es un múltiplo de una isometría: si definimos la norma (ya sea para vectores en \mathbb{C}^N o señales N -periódicas) por*

$$\|\mathbf{f}\| = \sqrt{\mathbf{f} \cdot \mathbf{f}}$$

entonces

$$\|\underline{\mathcal{F}} \mathbf{f}\| = \sqrt{N} \|\mathbf{f}\|.$$

3.4. Cuestiones algorítmicas

Daremos ahora una idea de cómo podemos explotar algunas propiedades de simetría para reducir el costo computacional de calcular la TDF. Notemos que si calculamos la TDF en forma “cruda”, tenemos una multiplicación matriz-vector, algo del orden de $O(N^2)$. Factorizando la matriz $\underline{\mathcal{F}}$ de manera inteligente podemos reducir la cantidad de operaciones sustancialmente.

Antes, un poco de notación. Recordar que tomábamos $\omega_N = e^{2\pi i/N}$. Diremos que

$$\omega[p, q] = \omega_p^q = e^{\frac{2\pi i q}{p}}.$$

Veamos algunas igualdades interesantes. Suponemos a partir de ahora que N es par.

$$\omega[N, -2nm] = e^{\frac{-4\pi i nm}{N}} = e^{\frac{-2\pi i nm}{N/2}} = \omega[N/2, -nm] \quad (3.10)$$

$$\omega[N, -(2n+1)m] = \omega[N, -m] \omega[N, -2nm] = \omega[N, -m] \omega[N/2, -nm] \quad (3.11)$$

Escribimos ahora la TFD de \mathbf{f} partiendo la suma entre los índice pares y los impares. El subíndice N indica que se toma la TFD de un vector en \mathbb{C}^N . Aplicando (3.10) y (3.11), se tiene

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{F}}_N \mathbf{f}[m] &= \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{f}[n] \omega[N, -nm] \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \mathbf{f}[2n] \omega[N, -(2n)m] + \sum_{n=0}^{N/2-1} \mathbf{f}[2n+1] \omega[N, -(2n+1)m] \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \mathbf{f}[2n] \omega[N/2, -nm] + \sum_{n=0}^{N/2-1} \mathbf{f}[2n+1] \omega[N, -m] \omega[N/2, -nm] \\ &= \underbrace{\sum_{n=0}^{N/2-1} \mathbf{f}[2n] \omega[N/2, -nm]}_I + \omega[N, -m] \underbrace{\sum_{n=0}^{N/2-1} \mathbf{f}[2n+1] \omega[N/2, -nm]}_{II}. \end{aligned}$$

Notar que ahora I y II son *casi* las m -ésimas componentes de las TFD de los vectores

$$\mathbf{f}_{\text{par}} = (\mathbf{f}[0], \mathbf{f}[2], \dots, \mathbf{f}[N-2]) \quad \mathbf{f}_{\text{impar}} = (\mathbf{f}[1], \mathbf{f}[3], \dots, \mathbf{f}[N-1])$$

Decimos “casi” pues m va entre 0 y $N-1$, si queremos hacer aparecer $\underline{\mathcal{F}}_N$ debemos hacer algo más:

- Si $0 \leq m \leq N/2 - 1$, entonces verdaderamente podemos escribir

$$\underline{\mathcal{F}}_N \mathbf{f}[m] = \underline{\mathcal{F}}_{N/2} \mathbf{f}_{\text{par}}[m] + \omega[N, -m] \underline{\mathcal{F}}_{N/2} \mathbf{f}_{\text{impar}}[m].$$

- En vez de considerar los índices que van entre $N/2$ y $N-1$, podemos hacer que m vaya entre 0 y $N/2 - 1$ y escribir estos índices en la forma $m + N/2$. Nos preguntamos ahora qué expresión tiene $\underline{\mathcal{F}}_N \mathbf{f}[m + N/2]$.

Notemos que

$$\omega[N/2, -(m + N/2)n] = \omega[N/2, -nm] \omega[N/2, -n(N/2)] = \omega[N/2, -nm] \quad (3.12)$$

pues $\omega[N/2, -n(N/2)] = 1$. Nada cambia entonces en I. Como II aparece acompañado por el factor $\omega[N, -m]$, y este queda como

$$\omega[N, (-m + N/2)] = \omega[N, -m] \omega[N, -N/2] = -\omega[N, -m] \quad (3.13)$$

pues $\omega[N, -N/2] = e^{-\frac{2\pi i(N/2)}{N}} = e^{-\pi i} = -1$. Luego, juntando (3.12) y (3.13), podemos escribir, para $0 \leq m \leq N/2 - 1$,

$$\underline{\mathcal{F}}_N \mathbf{f}[m + N/2] = \underline{\mathcal{F}}_{N/2} \mathbf{f}_{\text{par}}[m] - \omega[N, -m] \underline{\mathcal{F}}_{N/2} \mathbf{f}_{\text{impar}}[m].$$

Resumiendo, tenemos

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{F}}_N \mathbf{f} &= \begin{bmatrix} \underline{\mathcal{F}}_N \mathbf{f}[0 : N/2 - 1] \\ \underline{\mathcal{F}}_N \mathbf{f}[N/2 : N - 1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathcal{F}}_{N/2} \mathbf{f}_{\text{par}} + \Omega_{N/2} \underline{\mathcal{F}}_{N/2} \mathbf{f}_{\text{impar}} \\ \underline{\mathcal{F}}_{N/2} \mathbf{f}_{\text{par}} - \Omega_{N/2} \underline{\mathcal{F}}_{N/2} \mathbf{f}_{\text{impar}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \underline{\mathcal{F}}_{N/2} & \Omega_{N/2} \underline{\mathcal{F}}_{N/2} \\ \underline{\mathcal{F}}_{N/2} & -\Omega_{N/2} \underline{\mathcal{F}}_{N/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\text{par}} \\ \mathbf{f}_{\text{impar}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Id_{N/2} & \Omega_{N/2} \\ Id_{N/2} & -\Omega_{N/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathcal{F}}_{N/2} & 0 \\ 0 & \underline{\mathcal{F}}_{N/2} \end{bmatrix} P \mathbf{f} \quad (3.14) \end{aligned}$$

donde

- $\underline{\mathcal{F}}_{N/2}$ es la TFD de orden $N/2$, esto es, la matriz con entradas $\underline{\mathcal{F}}_{N/2}[i, j] = \omega[N/2, -ij]$.
- $Id_{N/2}$ es la matriz identidad de tamaño $N/2$.
- $\Omega_{N/2}$ es una matriz diagonal con entradas $\Omega_{N/2}[i, i] = \omega[N, -i]$.
- P es la matriz de permutación que hace el “sorting” de índices pares e impares, esto es,

$$P[i, j] = \begin{cases} 1 & \text{si } [i, j] = [m, 2m] \text{ para algún } 0 \leq m \leq N/2 - 1 \\ 1 & \text{si } [i, j] = [m + N/2, 2m + 1] \text{ para algún } 0 \leq m \leq N/2 - 1 \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Recordemos que si no hacemos nada y calculamos la DFT directamente, deberemos efectuar algo del orden de $O(N^2)$ operaciones. Con la factorización (3.14) que acabamos de hacer (llamada la *transformada rápida de Fourier*), podremos bajar ese costo a $O(N \log_2(N))$ operaciones, teorema que probamos a continuación.

Teorema 3.3. *Suponer que N es una potencia de 2. Luego, el costo de calcular la TDF utilizando el algoritmo anterior es de $O(N \log_2(N))$ operaciones.*

Demostración. Sea $C(N)$ el número de operaciones (multiplicaciones y sumas) que se necesitan para calcular la TDF de orden N vía la transformada rápida. Notar que para

calcular $\underline{\mathcal{F}}_N \mathbf{f}[0 : N/2 - 1]$ se necesitan $C(N/2)$ operaciones más $N/2$ sumas más $N/2$ productos, es decir

$$C(N/2) + N/2 + N/2 = C(N/2) + N$$

operaciones. La misma cantidad de operaciones se necesitan para calcular $\underline{\mathcal{F}}_N \mathbf{f}[N/2 : N - 1]$. O sea, para calcular $\underline{\mathcal{F}}_N$ a partir de las $\underline{\mathcal{F}}_{N/2}$ se necesitan

$$C(N) = 2C(N/2) + 2N \quad (3.15)$$

operaciones. Sea ahora $n = \log_2(N)$, y sea

$$T(k) = \frac{C(2^k)}{2^k}.$$

Luego se tiene $C(2^k) = 2^k T(k)$. Notar que $n - 1 = \log_2(N/2)$ y por lo tanto

$$T(n - 1) = \frac{C(N/2)}{N/2} = 2 \frac{C(N/2)}{N}, \quad \text{ó} \quad NT(n - 1) = 2C(N/2).$$

Sustituyendo esto en la fórmula de recursión (3.15) se tiene

$$NT(n) = NT(n - 1) + 2N$$

y entonces

$$T(n) = T(n - 1) + 2.$$

Repetiendo la igualdad anterior, se obtiene

$$T(n) = T(0) + 2n$$

pero como $T(0) = C(1) = 0$ (pues ninguna operación se necesita para calcular la DTF de orden 1) y por lo tanto sale que

$$T(n) = 2n.$$

Concluimos que

$$C(N) = NT(n) = 2Nn = 2N \log_2(N)$$

y esto es lo que queríamos probar. □

Observación 3.2. Notar que no estamos contando el costo computacional del “sorting” de los índices pares e impares, que debería tenerse en cuenta. Puede verse que esto es del orden $O(N \log_2(N))$, pero no veremos la demostración aquí. Además, vale aclarar que contamos el producto de dos números complejos zw como *una* operación, así como también contamos su suma $z + w$ como una sola operación. Como nos importa sólo el orden de la cantidad de operaciones, esto no supone ningún problema.

3.5. Cierre: Serie de Fourier a partir de la TFD

Al principio, dimos una motivación para definir una forma discreta de la transformada de Fourier a partir de lo que conocemos de la transformada continua, y dimos un argumento un tanto informal de cómo la DFT se aproxima a la transformada continua si muestreamos a la función a un paso suficientemente fino. Esta es sólo una de las tantas manifestaciones de la ley general “lo continuo se consigue a través de un proceso limitante de lo discreto”. Haremos ahora una suerte de camino inverso, la transición de DFT a la serie de Fourier de una función periódica. Al contrario de la motivación, haremos las cosas de una manera más rigurosa, inspirados por [10, Capítulo 7, Ejercicios 1, 2 y 3]. Hay dos formas de “tomar límite” y pasar a la serie.

1. Salvo un factor de escala, la n -ésima componente de la TDF de la discretización de una función f periódica tiende al n -ésimo coeficiente de Fourier de f cuando la tasa de muestreo tiende a infinito.
2. Con ciertas condiciones de suavidad sobre f , podemos deducir que coincide con su serie de Fourier en todo punto a partir de lo que ya conocemos de la TDF.

Veamos primero el punto 1. Suponer que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función continua 1-periódica. Sean

$$a(n) = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i x n} dx$$

sus coeficientes de Fourier. Para cada $N \in \mathbb{N}$, sea \mathbf{f}_N su discretización N -periódica, esto es,

$$\mathbf{f}_N[n] = f\left(\frac{n}{N}\right).$$

Luego, si definimos los *coeficientes discretos de Fourier* de f por

$$a_N(n) = \frac{1}{N} \underline{\mathcal{F}}_N \mathbf{f}_N[n]$$

entonces vale que

$$a_N(n) \rightarrow a(n) \quad \text{cuando } N \rightarrow \infty.$$

Para ver esto, simplemente notar que

$$a_N(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}_N[k] e^{\frac{-2\pi i k n}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{k}{N}\right) e^{\frac{-2\pi i k n}{N}}$$

es una suma de Riemann para la función $x \mapsto f(x)e^{-2\pi i x n/N}$, que es integrable en $[0, 1]$. La partición es $P = \{0, 1/N, \dots, (N-1)/N\}$ y la elección de puntos corresponde al extremo izquierdo de cada subintervalo. Como la norma de esta partición es $\|P\| = 1/N$, que tiende a cero cuando $N \rightarrow \infty$, obtenemos lo deseado.

Ahora, concentremos nuestra atención en el punto 2, que es el que requerirá más trabajo. Necesitamos antes un lema auxiliar:

Lema 3.2. (a) Suponer $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ función clase C^2 . Suponer $a \in \mathbb{R}$ y sea $h > 0$. Luego existe $\xi \in (a - h, a + h)$ tal que

$$g(a + h) - 2g(a) + g(a - h) = h^2 g''(\xi).$$

(b) Suponer $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ clase C^1 . Si f' es acotada entonces f es Lipschitz, esto es, existe $\alpha \geq 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y| \quad \text{para todos } x, y \in \mathbb{R}.$$

(c) Suponer $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ clase C^2 . Si f'' es acotada entonces existe una constante $\beta \geq 0$ tal que

$$|f(a + h) + f(a - h) - 2f(a)| \leq \beta h^2 \quad \text{para todo } a \in \mathbb{R}, h \geq 0.$$

Demostración. (a) Considerar la función φ dada por

$$\varphi(t) = g(a + t) + g(a - t) - 2g(a) - \left(\frac{t}{h}\right)^2 (g(a + h) + g(a - h) - 2g(a)).$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= g'(a + t) - g'(a - t) - \frac{2t}{h^2} (g(a + h) + g(a - h) - 2g(a)) \\ \varphi''(t) &= g''(a + t) + g''(a - t) - \frac{2}{h^2} (g(a + h) + g(a - h) - 2g(a)) \end{aligned}$$

Es trivial chequear que $\varphi(-h) = \varphi(0) = \varphi(h) = 0$, por el Teorema de Rolle sale que φ' tiene ceros en $(-h, 0)$ y en $(0, h)$. Luego φ'' tiene al menos un cero en $(-h, h)$, i.e., existe $c \in (-h, h)$ tal que

$$g(a + h) + g(a - h) - 2g(a) = h^2 \frac{g''(a - c) + g''(a + c)}{2}$$

Pero por hipótesis g'' es continua, y la cantidad $(g''(a - c) + g''(a + c))/2$ está entre $g''(a - c)$ y $g''(a + c)$. Luego, por el Teorema del valor intermedio existe $\xi \in [a - c, a + c] \in (a - h, a + h)$ tal que

$$g(a + h) + g(a - h) - 2g(a) = h^2 \frac{g''(a - c) + g''(a + c)}{2} = h^2 g''(\xi).$$

(b) Escribimos $f = u + iv$, donde u y v son funciones clase C^1 a valores reales. Como f' es acotada, u' y v' lo son. Aplicamos el Teorema del valor medio a u y v :

$$|u(x) - u(y)| = |u'(\xi_1)| |x - y|, \quad |v(x) - v(y)| = |v'(\xi_2)| |x - y|.$$

Si α_1, α_2 son las cotas de u' y v' respectivamente, tomar $\alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$ y resulta

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \sqrt{|u(x) - u(y)|^2 + |v(x) - v(y)|^2} \\ &= \sqrt{|u'(\xi_1)|^2 |x - y|^2 + |v'(\xi_2)|^2 |x - y|^2} \\ &\leq \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} |x - y| = \alpha |x - y|. \end{aligned}$$

- (c) Nuevamente, escribimos $f = u + iv$. Como f'' es acotada, u'' , v'' lo son. Sean β_1 , β_2 las cotas de u'' y v'' respectivamente, y tomemos $\beta = \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}$. El argumento es similar al anterior, aplicamos la parte (a) del Lema a las funciones u , v . \square

Con esto a mano, probamos la siguiente proposición:

Proposición 3.6. *Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ función 1-periódica. Con la misma notación que en el punto 1, vale que*

- (a) *Si f es clase C^1 , entonces para $|n| \leq N/2$ se cumple*

$$|a_N(n)| \leq \frac{C_1}{|n|}$$

para una constante C_1 que no depende de n ni de N .

- (b) *Si f es clase C^2 , entonces para $|n| \leq N/2$ se cumple*

$$|a_N(n)| \leq \frac{C_2}{|n|^2}$$

para una constante C_2 que no depende de n ni de N .

Demostración. (a) Recordemos la notación $\omega^\ell[n] = e^{2\pi i \ell n/N}$. Escribimos

$$\begin{aligned} a_N(n)(1 - \omega^\ell[n]) &= \frac{1}{N}(\mathcal{F}_N \mathbf{f}_N - \omega^\ell \mathcal{F}_N \mathbf{f}_N)[n] = \frac{1}{N}(\mathcal{F}_N \mathbf{f}_N - \mathcal{F}_N(\tau_{-\ell} \mathbf{f}_N))[n] \\ &= \frac{1}{N} \mathcal{F}_N(\mathbf{f}_N - \tau_{-\ell} \mathbf{f}_N)[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (\mathbf{f}_N[k] - \mathbf{f}_N[k + \ell]) \omega^{-k}[n] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(f\left(\frac{k}{N}\right) - f\left(\frac{k + \ell}{N}\right) \right) \omega^{-k}[n]. \end{aligned}$$

Aquí usamos la Proposición 3.4. Por hipótesis, f' es continua en \mathbb{R} y por lo tanto continua en $[0, 1]$ y por lo tanto acotada en este intervalo. Pero f es 1-periódica, de donde sale que f' también lo es, y esto nos permite afirmar que f' está acotada en \mathbb{R} . Aplicamos la parte (b) del Lema 3.2 a f . Sea α una constante de Lipschitz para f . Luego

$$|a_N(n)| |1 - \omega^\ell[n]| \leq \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left| f\left(\frac{k}{N}\right) - f\left(\frac{k + \ell}{N}\right) \right| \leq \alpha \frac{|\ell|}{N}. \quad (3.16)$$

Suponer que $|n| \leq N/2$. Tomar ℓ un entero tal que $\left| \ell - \frac{N}{2n} \right| \leq \frac{1}{2}$. Luego se cumple $\left| \frac{\ell n}{N} - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{|n|}{2N} \leq \frac{1}{4}$ y por lo tanto $\frac{1}{4} \leq \frac{\ell n}{N} \leq \frac{3}{4}$, de donde $\frac{\pi}{2} \leq \frac{2\pi \ell n}{N} \leq \frac{3\pi}{2}$. O sea, el número $\omega^\ell[n]$ está en la mitad izquierda de la circunferencia unitaria, y por ende

$$|1 - \omega^\ell[n]| \geq 1.$$

Por otro lado, como $|\ell - \frac{N}{2n}| \leq \frac{1}{2}$ se cumple $|\frac{\ell}{N} - \frac{1}{2n}| \leq \frac{1}{2N} \leq \frac{1}{4|n|}$. Luego

$$\frac{|\ell|}{N} \leq \left| \frac{\ell}{N} - \frac{1}{2n} \right| + \left| \frac{1}{2n} \right| \leq \frac{1}{4|n|} + \frac{1}{2|n|} = \frac{3}{4} \frac{1}{|n|}. \quad (3.17)$$

Con los comentarios anteriores, (3.16) queda

$$|a_N(n)| \leq |a_N(n)| |1 - \omega^\ell[n]| \leq \alpha \frac{|\ell|}{N} \leq \frac{3\alpha}{4} \frac{1}{|n|}.$$

Tomando $C_1 = 3\alpha/4$ resulta lo que queríamos probar.

(b) Usando la cuenta hecha al principio del inciso anterior, escribimos

$$\begin{aligned} a_N(n)(2 - \omega^\ell[n] - \omega^{-\ell}[n]) &= a_N(n)(1 - \omega^\ell[n]) + a_N(n)(1 - \omega^{-\ell}[n]) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(f\left(\frac{k}{N}\right) - f\left(\frac{k+\ell}{N}\right) \right) \omega^{-k}[n] \\ &\quad + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(f\left(\frac{k}{N}\right) - f\left(\frac{k-\ell}{N}\right) \right) \omega^{-k}[n] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(2f\left(\frac{k}{N}\right) - f\left(\frac{k+\ell}{N}\right) - f\left(\frac{k-\ell}{N}\right) \right) \omega^{-k}[n]. \end{aligned}$$

Aplicamos ahora la parte (c) del Lema 3.2 a la función f , sea β la constante que necesitamos. Luego

$$\begin{aligned} |a_N(n)| |(2 - \omega^\ell[n] - \omega^{-\ell}[n])| &\leq \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left| \left(2f\left(\frac{k}{N}\right) - f\left(\frac{k+\ell}{N}\right) - f\left(\frac{k-\ell}{N}\right) \right) \right| \\ &\leq \beta \left(\frac{\ell}{N} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Suponer nuevamente $|n| \leq N/2$. Ahora, eligiendo ℓ como en el inciso anterior y recordando lo hecho en (3.17), escribimos

$$\left(\frac{\ell}{N} \right)^2 \leq \frac{9}{16} \frac{1}{|n|^2}.$$

Por otro lado, $(\omega^\ell[n] + \omega^{-\ell}[n]) = 2 \cos(2\pi\ell n/N) \leq 0$ pues ya sabíamos que $\frac{\pi}{2} \leq 2\pi\ell n \leq \frac{3\pi}{2}$. Luego vale que

$$|2 - \omega^\ell[n] + \omega^{-\ell}[n]| \geq 2.$$

Con estos comentarios, (3.18) queda

$$|a_N(n)| \leq \frac{\beta}{2} \left(\frac{\ell}{N} \right)^2 \leq \frac{9\beta}{32} \frac{1}{|n|^2}.$$

Luego, eligiendo $C_2 = 9\beta/32$ obtenemos lo que queremos. \square

Llegamos ahora al resultado que mencionamos al inicio: con todas estas herramientas, podemos deducir un caso especial de la fórmula de inversión para series de Fourier.

Teorema 3.4. *Suponer $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ función 1-periódica, clase C^2 . Luego*

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n) e^{2\pi i n x}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demostración. Tomar N natural impar. Definimos, para $n \in \mathbb{Z}$,

$$A_N(n) = \begin{cases} a_N(n) & \text{si } |n| < N/2 \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Veamos primero que el Teorema vale para $x = 0$. Primero, por el Teorema 3.1, vale que

$$\begin{aligned} f(0) &= \mathbf{f}_N[0] = \mathcal{F}_N^{-1} \mathcal{F}_N \mathbf{f}_N[0] = \mathcal{F}_N \left(\frac{1}{N} \mathcal{F}_N \mathbf{f}_N \right) [0] \\ &= \sum_{|k| < N/2} \frac{1}{N} \mathcal{F}_N \mathbf{f}_N[k] = \sum_{|k| < N/2} a_N(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_N(k). \end{aligned}$$

Notar que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |A_N(k)| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{C_2}{|k|^2}$$

donde C_2 es la constante que nos da la parte (b) de la Proposición (3.6). O sea, $\{A_N\}_{N \text{ impar}}$ es una familia de funciones integrables cuyas integrales están dominadas por el miembro derecho de la desigualdad anterior. Además, para k fijo vale que

$$\lim_{N \text{ impar}, N \rightarrow \infty} A_N(k) = \lim_{N \text{ impar}, N \rightarrow \infty} a_N(k) = a(k)$$

por lo dicho sobre el punto 1 al comienzo de esta subsección. Luego, por el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue aplicado a la medida discreta, vale que

$$f(0) = \lim_{N \text{ impar}, N \rightarrow \infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_N(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lim_{N \text{ impar}, N \rightarrow \infty} A_N(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a(k)$$

y por lo tanto el teorema vale para $x = 0$. □

Consideramos ahora un punto arbitrario $t_0 \in \mathbb{R}$. Primero, notemos que $T_{-t_0}f$ es una función 1-periódica, clase C^2 . Sus coeficientes de Fourier están dados por

$$\begin{aligned} a_k(T_{-t_0}f) &= \int_0^1 f(x + t_0) e^{-2\pi i x k} dx = e^{2\pi i t_0 k} \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i x k} dx \\ &= e^{2\pi i t_0 k} a(k). \end{aligned}$$

Aplicamos el caso $x = 0$ a la función $T_{-t_0}f$ y obtenemos

$$f(t_0) = (T_{-t_0}f)(0) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k(T_{-t_0}f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a(k) e^{2\pi i t_0 k}$$

que es lo que queríamos.

Para cerrar este capítulo mostraremos la implementación computacional de lo trabajado hasta el momento usando el comando “fft” de Matlab u Octave. Supondremos que f está soportada en $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ y B será el espectro que se va a observar (en la notación anterior $B = \frac{M}{2}$ y observaremos frecuencias en $[-\frac{M}{2}, \frac{M}{2}]$). Fijados T y B queda determinado el número de muestras en tiempo y en frecuencia $N = 2BT$, aunque fijados dos de los tres parámetros T , B y N , el tercero queda completamente determinado (por lo que en realidad uno podría elegir N y (T ó B) pero no será nuestro caso). Lo más trabajoso es interpretar la información que devuelve el programa y saber cómo introducir las órdenes para que los resultados sean los deseados. Puede ser útil recordar que si f es real entonces $\hat{f}(-y) = \overline{\hat{f}(y)}$, y también tener presentes las demás simetrías dadas en este capítulo.

Para facilitar nuestro trabajo también usamos los comandos “linspace”, “abs”, “fliplr” de Matlab u Octave, pero no usamos “ifft”.

Pasemos a dar un esquema de lo que hemos programado. En todos los ejemplos que mostraremos a continuación $T = 1$ y $B = 1000$.

INICIALIZACIÓN DE LA SEÑAL

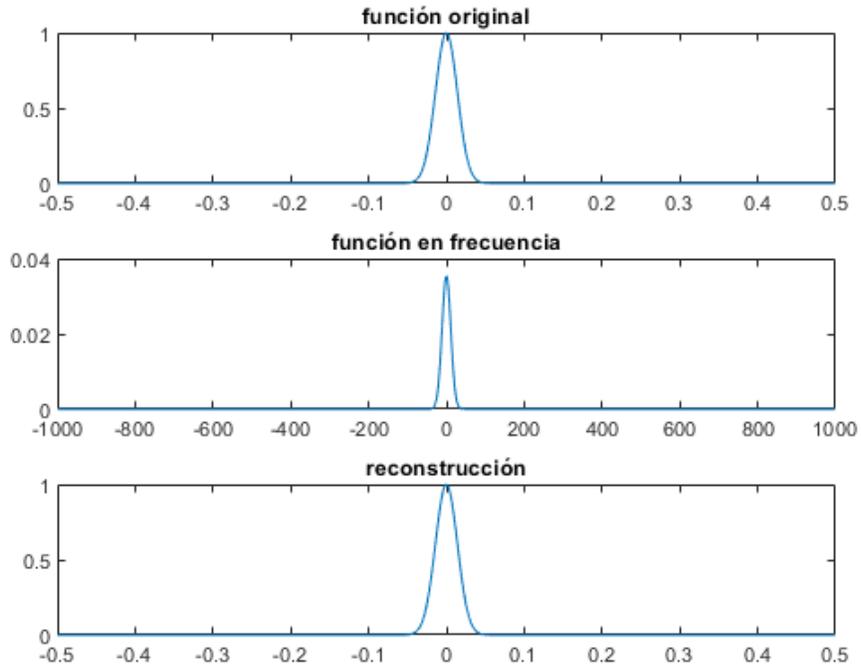
T	A elegir por el usuario.
B	A elegir por el usuario.
$N = 2BT$	Número de muestras.
$\text{dom} = \text{linspace}(-\frac{T}{2}, \frac{T-1}{2B} - \frac{T}{2}, N)$	Dominio de f .
f	Introducir la función.
$\text{plotear}(\text{dom}, f)$	Graficar función original.

ANÁLISIS EN EL DOMINIO FRECUENCIAL

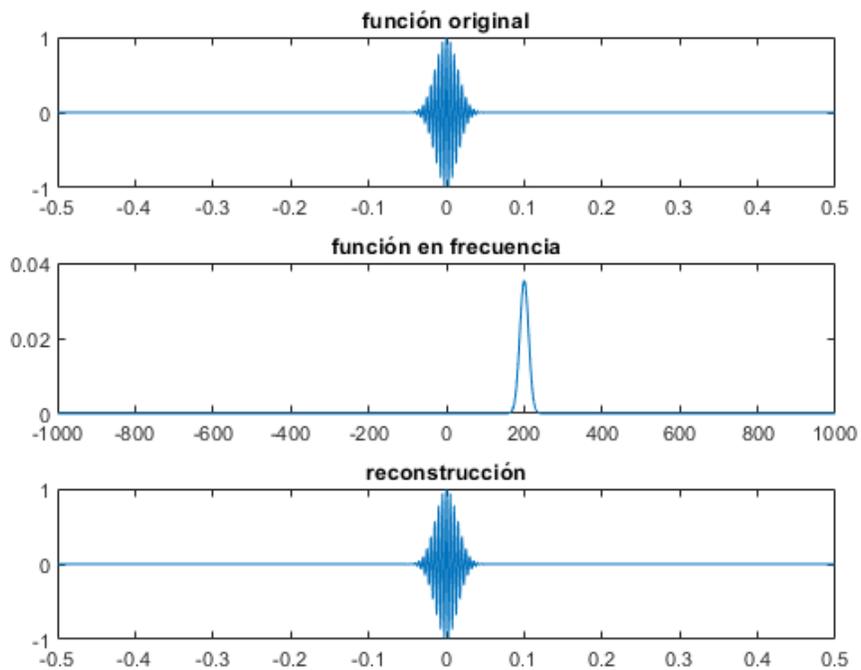
$\text{TFC} = \text{fft}(f)/(2B)$	Aproximación de la
$\text{TFC} = [\text{TFC}(N/2 + 1 : N) \text{ TFC}(1 : N/2)]$	transformada de Fourier continua.
$\text{dom}^+ = \text{linspace}(0, 2B - \frac{1}{T}, N)$	Dominio de la
$\text{dom}^- = \text{linspace}(-B + \frac{1}{T}, -\frac{1}{T}, \frac{N}{2})$	aproximación de la
$\text{dominio de TFC} = [\text{dom}^- \text{ dom}^+(1 : N/2)]$	transformada de Fourier continua.
$\text{plotear}(\text{dominio de TFC}, \text{abs}(\text{TFC}))$	Graficar el valor absoluto de la aproximación de \hat{f} .

RECONSTRUCCIÓN

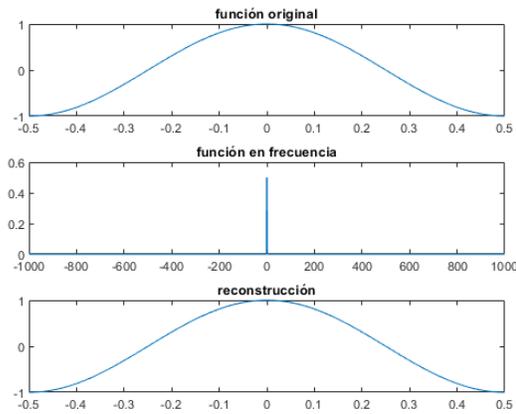
$\text{reconstr} = \text{fft}(\text{fft}(f))/N$	
$\text{reconstr}(2 : N) = \text{fliplr}(\text{reconstr}(2 : N))$	Vector de reconstrucción de f .
$\text{plotear}(\text{dom}, \text{reconstr})$	Graficar la reconstrucción.



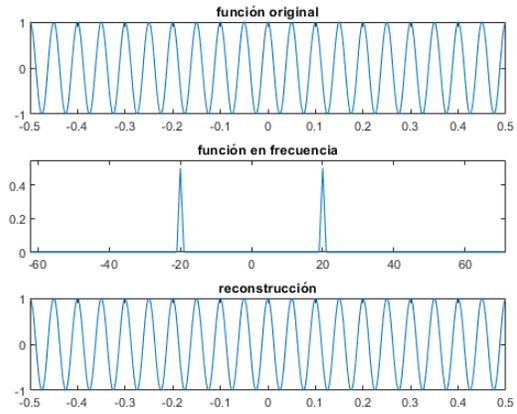
$$f(x) = \exp(-2\pi 400x^2) \text{ (función Gaussiana)}$$



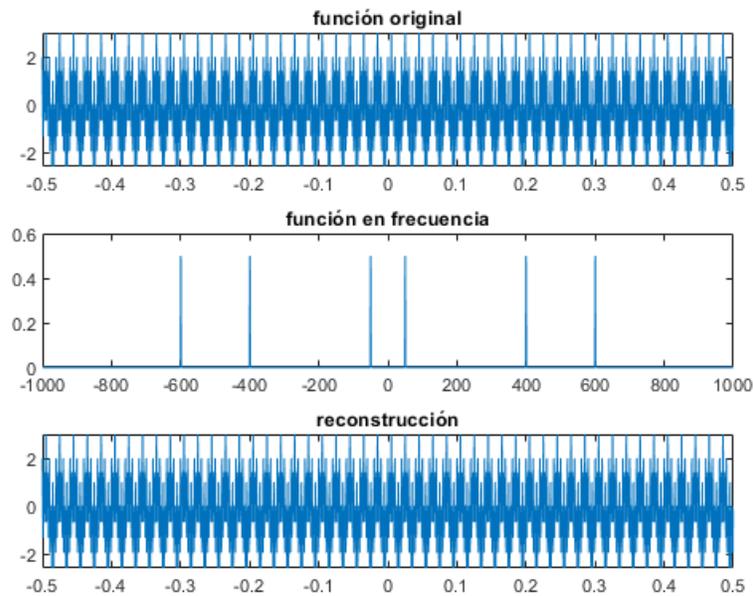
$f(x) = \exp(2\pi i 200x) \exp(-2\pi 400x^2)$ (función Gaussiana modulada). Evidenciamos la traslación en frecuencia debida a la modulación.



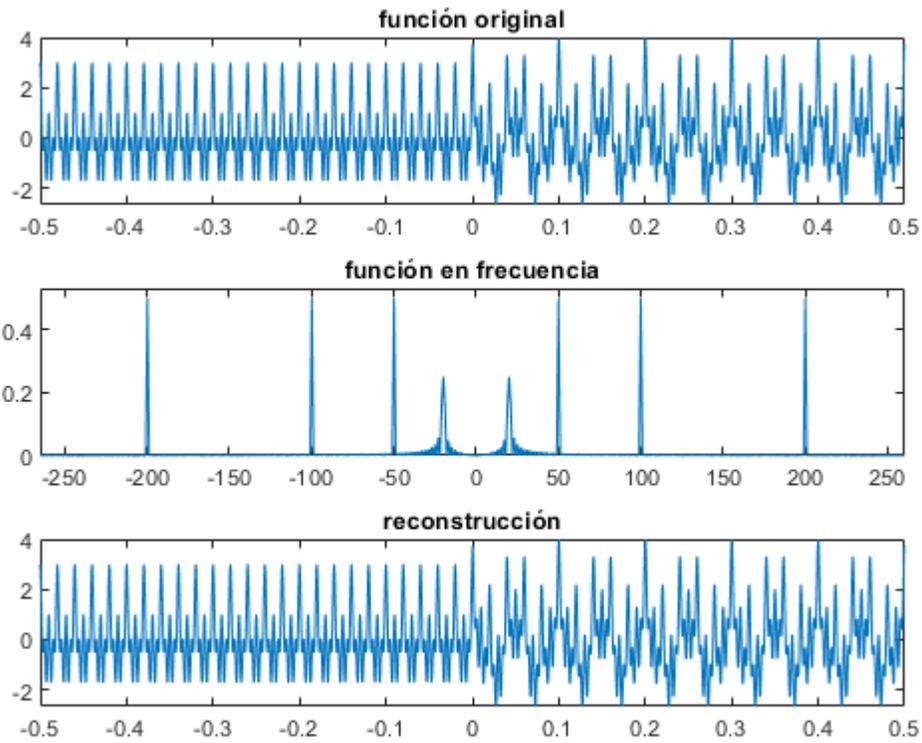
$$f(x) = \cos(2\pi x)$$



$$f(x) = \cos(2\pi 20x). \text{ Recordar } \cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}.$$



$f(x) = \cos(2\pi 600x) + \cos(2\pi \alpha x) + \cos(2\pi 50x)$. Vemos la linealidad de la transformada y la buena localización en frecuencia de la función coseno. Invitamos al lector a deducir el valor de α a partir del gráfico de frecuencias.



$f(x) = \cos(2\pi 200x) + \cos(2\pi 20x)\chi_{[0, \frac{1}{2}]}(x) + \cos(2\pi 100x) + \cos(2\pi 50x)$. Vemos la presencia de la silueta de una función sinc alrededor de las frecuencias ± 20 debido a que hemos cortado a $\cos(2\pi 20x)$ por una función característica.

4. STFT y transformada de wavelet

En esta sección nos basaremos en [5] y [1]. Una de las desventajas de la transformada de Fourier continua es que no está bien localizada en el tiempo; dada una función f , la cantidad $\hat{f}(\xi)$ nos dice cuánto de la frecuencia ξ la función f posee, pero no nos podrá decir en qué tiempo dicha frecuencia está localizada. Una forma de lidiar con este problema es “cortar” f multiplicándola por una característica o alguna función “campana” con soporte concentrado alrededor de un t_0 , y aplicar Fourier a esta nueva función. Con suerte esto nos dirá qué frecuencias prevalecen en f cerca del instante t_0 .

Proyectaremos a la función f sobre las direcciones de una familia de *átomos tiempo-frecuencia*, esto es, una familia $\{\varphi_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ de funciones de cuadrado integrable y de norma 1, γ podría ser un multi-índice. En los ejemplos que consideraremos tendremos $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$.

La transformada correspondiente de f será

$$Tf(\gamma) := \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\varphi_\gamma(t)} dt = \langle f, \varphi_\gamma \rangle.$$

Como la transformada de Fourier es una isometría, se tiene

$$Tf(\gamma) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\varphi_\gamma(t)} dt = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \widehat{\overline{\varphi_\gamma}}(\xi) dt.$$

La información que nos da $\langle f, \varphi_\gamma \rangle$ es representada en el plano tiempo frecuencia (t, ω) por una región cuya ubicación y área depende de la dispersión tiempo-frecuencia de φ_γ . Como

$$\|\varphi_\gamma\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \int_{\mathbb{R}} |\varphi_\gamma(t)|^2 dt = 1,$$

$|\varphi_\gamma(\cdot)|^2$ puede interpretarse como una función de densidad de probabilidad con valor esperado

$$u_\gamma := E_t(\gamma) = \int_{\mathbb{R}} x |\varphi_\gamma(x)|^2 dx. \quad (4.1)$$

La varianza está dada por

$$\sigma_t^2(\gamma) = \int_{\mathbb{R}} (x - E_t(\gamma))^2 |\varphi_\gamma(x)|^2 dx \quad (4.2)$$

$|\widehat{\varphi_\gamma}(\cdot)|^2$ también puede ser pensada como una densidad de probabilidad, centrada en

$$\omega_\gamma := E_\omega(\gamma) = \int_{\mathbb{R}} \xi |\widehat{\varphi_\gamma}(\xi)|^2 d\xi \quad (4.3)$$

y la dispersión alrededor de ξ_γ está dada por

$$\sigma_\omega^2(\gamma) = \int_{\mathbb{R}} (\xi - E_\omega(\gamma))^2 |\widehat{\varphi_\gamma}(\xi)|^2 d\xi. \quad (4.4)$$

Es esperable pensar que las proyecciones $\langle f, \varphi_\gamma \rangle = \langle \hat{f}, \widehat{\varphi_\gamma} \rangle$ dependerán de cómo se distribuyan $|\varphi_\gamma|^2$ y $|\widehat{\varphi_\gamma}|^2$ alrededor de sus valores centrales respectivos $E_t(\gamma)$ y $E_\omega(\gamma)$. De hecho, la *resolución tiempo-frecuencia* de φ_γ está representada en el plano tiempo-frecuencia (t, ξ) por una *caja de Heisenberg* centrada en $(u_\gamma, \omega_\gamma)$, cuyo ancho en tiempo

es $\sigma_t(\gamma)$ y su ancho en frecuencia es $\sigma_\omega(\gamma)$ (ver Figura 10). El principio de incertidumbre de Heisenberg (ver Teorema 2.7) nos da una cota inferior del área de estas cajas, siempre y cuando los átomos φ_γ sean suficientemente buenos:

$$\sigma_t \sigma_\omega \geq \frac{1}{2}. \quad (4.5)$$

Si para $(t, \xi) \in \mathbb{R}^2$ existe un único átomo φ_γ tal que $(u_\gamma, \xi_\gamma) = (t, \omega)$ entonces podemos medir la “energía” de f en un entorno de (t, ω) mediante la fórmula

$$P_T f(t, \xi) = P_T f(u_\gamma, \omega_\gamma) := |\langle f, \varphi_\gamma \rangle|^2 = \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\varphi_\gamma(x)} dx \right|^2. \quad (4.6)$$

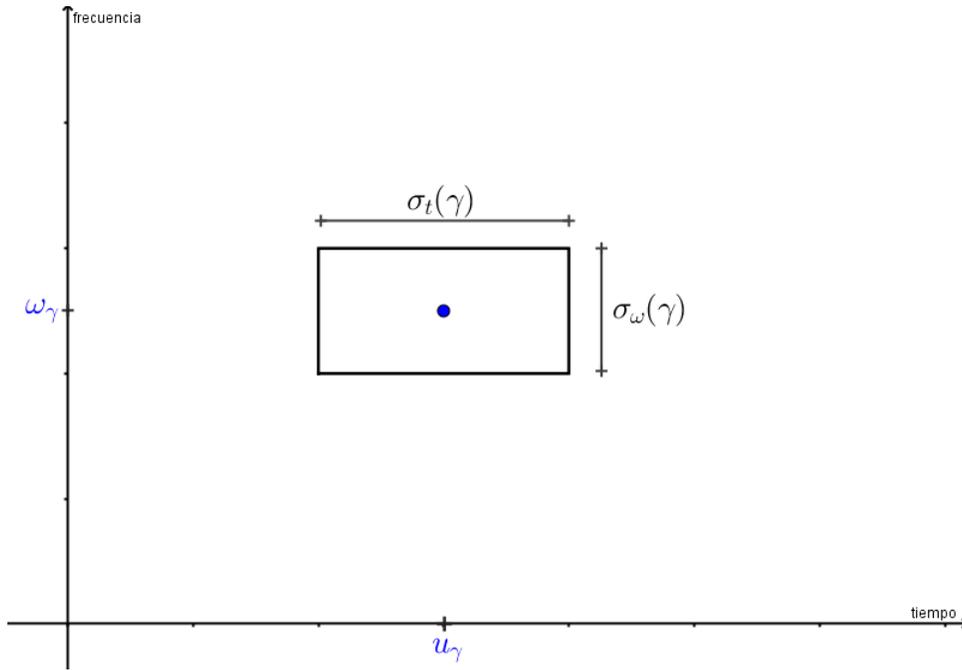


Figura 10: Heisenberg box.

4.1. Transformada de Fourier de tiempo corto

Veremos una familia de átomos con una propiedad interesante: todas sus cajas de Heisenberg poseen el mismo ancho y la misma altura.

Definición 4.1. Sea $g \in L^2(\mathbb{R})$, g real, simétrica (i.e., $g(t) = g(-t)$) con $\|g\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$, a la cual nos referiremos por función *ventana*. La trasladamos en u y la modulamos por ξ , definiendo

$$g_{u,\xi}(t) := e^{i\xi t} g(t - u).$$

La transformada de Fourier de tiempo corto de f en el instante t y en la frecuencia ξ es

$$Sf(u, \xi) := \langle f, g_{u,\xi} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) g(t - u) e^{-i\xi t} dt.$$

Por simplicidad nos referiremos a esta transformada por STFT por sus siglas en inglés *short time Fourier transform*.

Una cuenta trivial muestra que, como g es par, se tiene \hat{g} real y par, y por lo tanto

$$\begin{aligned} E_t(u, \xi) &= u & E_\omega(u, \xi) &= \xi \\ \sigma_t^2(u, \xi) &= \sigma_t^2(0, 0) = \sigma_t^2 & \sigma_\omega^2(u, \xi) &= \sigma_\omega^2(0, 0) = \sigma_\omega^2 \end{aligned}$$

La expresión para la medida de energía de f para esta transformada es directa: para cada (u, ξ) en el plano tiempo frecuencia, el átomo centrado en (u, ξ) es simplemente $g_{u, \xi}$. Ver Figura 11.

En este caso (4.6) lleva el nombre de *espectrograma* y sus valores están dados por

$$P_S f(E_t(u, \xi), E_\omega(u, \xi)) = P_S f(u, \xi) = |Sf(u, \xi)|^2 = \left| \int_{\mathbb{R}} f(t) g(t - u) e^{-i\xi t} dt \right|^2. \quad (4.7)$$

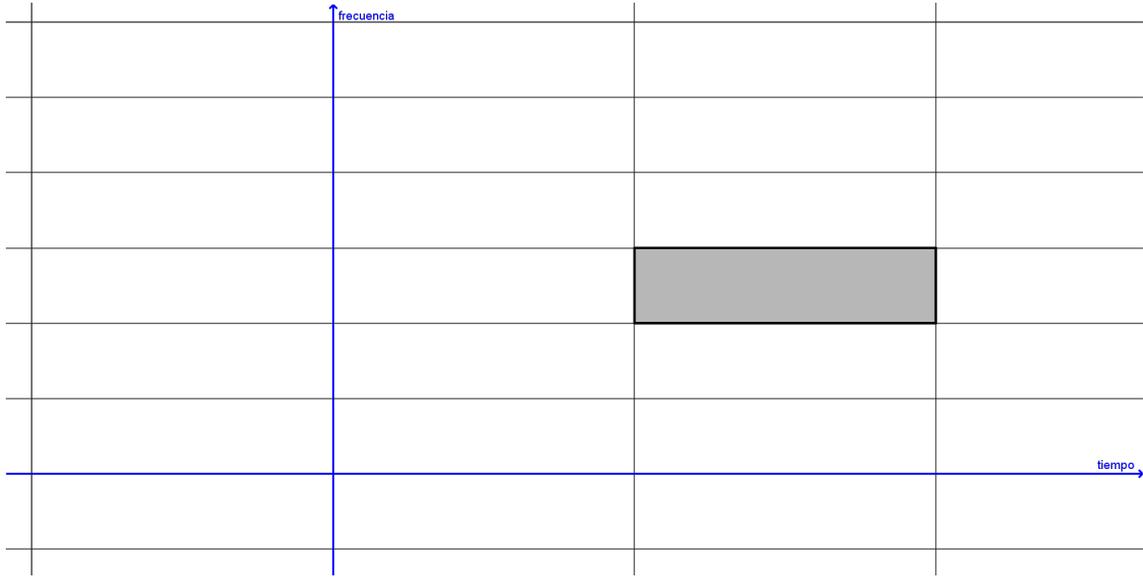


Figura 11: Esquema de las cajas de Heisenberg asociadas a la STFT.

Cuando los índices (u, ξ) varían a través de \mathbb{R}^2 , las cajas de Heisenberg de los átomos $g_{u, \xi}$ cubren todo el plano tiempo-frecuencia. Es esperable entonces poder recuperar a f a partir de sus transformada $Sf(u, \xi)$. El siguiente teorema da una fórmula de reconstrucción *débil* y prueba que la energía (i.e., la norma) es conservada. Sólo con hipótesis más fuertes tendremos que vale una reconstrucción verdadera.

Teorema 4.1. *Supongamos que $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Luego, se cumple*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |Sf(u, \xi)|^2 d\xi du. \quad (4.8)$$

Además, f , se recupera de una forma débil a partir de Sf , i.e., para $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ se cumple

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} Sf_1(u, \xi) \overline{Sf_2(u, \xi)} d\xi du. \quad (4.9)$$

Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ y $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ y además se cumple

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |Sf(u, \xi) g(t - u)| d\xi du < \infty$$

entonces vale la reconstrucción verdadera, esto es,

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} Sf(u, \xi) g(t - u) e^{i\xi t} d\xi du \quad (4.10)$$

para casi todo $t \in \mathbb{R}$.

Demostración. Notemos que (4.9) es una consecuencia inmediata de (4.8) por la identidad de polarización. Escribimos

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} |Sf(u, \xi)|^2 du \right] d\xi = \int_{\mathbb{R}} \|Sf(\cdot, \xi)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 d\xi.$$

Notar que $Sf(\cdot, \xi) = e^{-i\xi \cdot} f * g$, como $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $g \in L^2(\mathbb{R})$, la convolución vuelve a caer en $L^2(\mathbb{R})$. Se tiene

$$\mathcal{F}(Sf(\cdot, \xi)) = \mathcal{F}(e^{-i\xi \cdot} f) \mathcal{F}(g) = (T_{-\xi} \hat{f}) \hat{g}.$$

Como $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ es isometría, se tiene

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \|Sf(\cdot, \xi)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} \|\mathcal{F}(Sf(\cdot, \xi))\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega + \xi) \hat{g}(\omega)|^2 d\omega \right] d\xi = \int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(\omega)|^2 \left[\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega + \xi)|^2 d\xi \right] d\omega \\ &= \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \|\hat{g}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \|g\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2, \end{aligned}$$

o sea, queda probado (4.8), i.e., $\|Sf\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$, y por lo tanto también sale (4.9).

Para ver (4.10), cambiamos el orden de integración y escribimos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} Sf(u, \xi) \overline{g(t - u) e^{-i\xi t}} du \right] d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \langle Sf(\cdot, \xi), g(t - \cdot) e^{-i\xi t} \rangle d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \langle \mathcal{F}(Sf(\cdot, \xi)), \mathcal{F}(g(t - \cdot) e^{-i\xi t}) \rangle d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega + \xi) \hat{g}(\omega) \overline{e^{-i\xi t} e^{-it\omega} \hat{g}(\omega)} d\omega \right] d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(\omega)|^2 \underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega + \xi) e^{it(\omega + \xi)} d\xi \right]}_{f(t) \text{ para casi todo } t} d\omega = \|\hat{g}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 f(t) = f(t) \end{aligned}$$

para casi todo $t \in \mathbb{R}$, que es lo que queríamos ver. En esta última cuenta el cambio de límite está justificado pues la función $(\omega, \xi) \mapsto |\hat{g}(\omega)|^2 |\hat{f}(\omega + \xi)|$ está en $L^1(\mathbb{R}^2)$. \square

4.2. La STFT en forma discreta

Así como pudimos dar una forma discreta de la transformada continua de Fourier, podemos hacer lo mismo con la transformada corta de Fourier usando lo que ya sabemos de la TFD. En vez de una integral, tendremos una suma; en vez de un dominio continuo, el dominio será \mathbb{Z} .

Definición 4.2. Suponer $N \in \mathbb{N}$, y sea \mathbf{g} señal real N -periódica de norma 1. Para $m, \ell \in \mathbb{Z}$ definimos

$$\mathbf{g}_{m,\ell}[n] = \mathbf{g}[n - m] e^{2\pi i n \ell / N}.$$

Dada \mathbf{f} cualquier vector en \mathbb{C}^N o señal N -periódica, definimos su *transformada discreta de tiempo corto* por

$$S \mathbf{f}[m, \ell] = \mathbf{f} \cdot \mathbf{g}_{m,\ell} = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{f}[n] \mathbf{g}[n - m] e^{-2\pi i n \ell / N}.$$

Observación 4.1. Notemos que, con la notación de la parte de la TFD, tenemos

$$S \mathbf{f}[m, \ell] = \sum_{n=0}^{N-1} (\mathbf{f}[n] \tau_m \mathbf{g}[n]) \omega^{-n}[\ell] = \underline{\mathcal{F}}(\mathbf{f} \tau_m \mathbf{g})[\ell].$$

Escrito en forma vectorial, tenemos

$$S \mathbf{f}[m, 0 : N - 1] = \underline{\mathcal{F}}(\mathbf{f} \tau_m \mathbf{g}).$$

Podemos pensar a $S \mathbf{f}$ como una matriz tamaño $N \times N$, donde la fila m es la TFD de $\mathbf{f} \tau_m \mathbf{g}$. Una forma para calcular $S \mathbf{f}$ de manera es eficiente es aplicar el algoritmo de la transformada rápida en cada fila, y así el costo operacional sería de $O(N^2 \log(N))$ operaciones.

Al contrario del caso continuo, la fórmula de reconstrucción de \mathbf{f} a partir de $S \mathbf{f}$ se puede probar sin problemas. Análogo al caso continuo, $S \mathbf{f}$ preserva la energía de \mathbf{f} en algún sentido. El siguiente teorema ha sido esencialmente tomado de [5, Teorema 4.2].

Teorema 4.2. *Suponer \mathbf{f} señal N -periódica. Luego valen las siguientes:*

(a) *La energía es preservada:*

$$\sum_{n=0}^{N-1} |\mathbf{f}[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} |S \mathbf{f}[m, \ell]|^2.$$

(b) *Podemos recuperar a \mathbf{f} si conocemos a $S \mathbf{f}$:*

$$\mathbf{f}[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} S \mathbf{f}[m, \ell] \mathbf{g}[n - m] e^{2\pi i \ell n / N}.$$

Demostración. (a) Con la Observación 4.1, y usando la identidad de Plancherel/Parseval para la TFD (Teorema 3.2), escribimos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} |S \mathbf{f}[m, \ell]|^2 &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \|S \mathbf{f}[m, 0 : N-1]\|^2 = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \|\mathcal{F}(\mathbf{f} \tau_m \mathbf{g})\|^2 \\
&= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} N \|\mathbf{f} \tau_m \mathbf{g}\|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |\mathbf{f}[n]|^2 \left[\sum_{m=0}^{N-1} |\mathbf{g}[n-m]|^2 \right] \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} |\mathbf{f}[n]|^2
\end{aligned}$$

pues \mathbf{g} tenía norma 1 y estamos sumando el cuadrado de sus entradas sobre un conjunto de N índices consecutivos.

(b) Empezamos por el lado derecho: recordando la inversión de la TFD (Teorema 3.1), y la Observación 4.1,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} S \mathbf{f}[m, \ell] \mathbf{g}[n-m] e^{2\pi i \ell n / N} &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{g}[n-m] \sum_{\ell=0}^{N-1} S \mathbf{f}[m, \ell] e^{-2\pi i \ell (-n) / N} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{g}[n-m] \mathcal{F}(S \mathbf{f}[m, 0 : N-1])[-n] \\
&= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{g}[n-m] \mathcal{F}(\mathcal{F}(\mathbf{f} \tau_m \mathbf{g}))[-n] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{g}[n-m] N (\mathbf{f} \tau_m \mathbf{g})[n] \\
&= \mathbf{f}[n] \sum_{m=0}^{N-1} |\mathbf{g}[n-m]|^2 = \mathbf{f}[n].
\end{aligned}$$

□

Concluimos esta sección con implementaciones de la STFT. Utilizaremos tanto nomenclatura como lo ya pensado en la Sección 3.5, pero utilizaremos los comandos “fftshift” e “ifft” para no jugar a mano con las simetrías de la TFD. Supondremos que nuestra función f está soportada en $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ y que $[0, B]$ ($B = \frac{M}{2}$) es el espectro que se va a observar. En los ejemplos que implementamos $T = 1$, $B = 200$ y $f(x) = \text{sen}(2\pi 100(x + \frac{T}{2})^3) + \text{sen}(2\pi 50(x + \frac{T}{2})^2) + \exp(-(50x)^2)$. Uno puede experimentar con distintas funciones ventana g con norma L^2 igual a 1, simétricas y reales, pero en este trabajo sólo mostraremos los resultados considerando como función ventana la gaussianita $g = \exp(-(30x)^2)$ normalizada. Puntualizamos también que hemos usado los comandos “zeros”, “norm” (para normalizar) de Matlab u Octave.

INICIALIZACIÓN DE LA SEÑAL Y LA VENTANA

T	A elegir por el usuario.
B	A elegir por el usuario.
$N = 2BT$	Número de muestras.
$\text{dom} = \text{linspace}(-\frac{T}{2}, \frac{T-1}{2B} - \frac{T}{2}, N)$	Dominio de f .
f	Introducir la función.
g	Introducir la ventana.
$g = \text{cyclic}(g, N/2)$	
$g = g/\text{norm}(g, 2)$	Normalización.

ANÁLISIS MEDIANTE STFT

$\text{STFT} = \text{zeros}(N, N)$	Inicialización de la matriz STFT.
$\text{STFT-no-shift} = \text{zeros}(N, N)$	Inicialización de matriz STFT auxiliar.
for desde $m = 0$ hasta $N - 1$	
$h = \text{cyclic}(g, m)$	
$\text{plotear}(\text{dom}, h)$	Graficar ventana que se va trasladando.
$h = h f$	Cortar a la función.
$\text{plotear}(\text{dom}, h)$	Graficar la función cortada por ventana.
$\text{transf} = \text{fftshift}(\text{fft}(h))$	Análisis en frecuencia.
$\text{STFT-no-shift}(m + 1, :) = \text{fft}(h)$	
$\text{STFT}(m + 1, :) = \text{fftshift}(\text{fft}(h))$	Armado de la matriz STFT.
$\text{dom-st} = \text{linspace}(-B + \frac{1}{T}, B - \frac{1}{T}, N)$	Dominio en frecuencia.
$\text{plotear}(\text{dom-st}, \text{abs}(\text{transf})/2B)$	Graficar STFT paso a paso.
end for	

RECONSTRUCCIÓN

$\text{reconstr} = \text{zeros}(1, N)$	Inicializar vector para reconstruir.
for desde $m = 0$ hasta $N - 1$	
$\text{reconstr} = \text{reconstr} + \text{cyclic}(g, m) \text{ ifft}(\text{STFT-no-shift}(m + 1, :))$	
end	Usamos el Teorema 4.2.
$\text{plotear}(\text{dom}, \text{reconstr})$	Graficar la inversión mediante STFT.

En el programa anterior hemos usado la siguiente función auxiliar: Función de tras-

lación en \mathbb{Z}_N a la que hemos llamado “cyclic”. El vector u de entrada de la función debe ser un vector fila. La congruencia será módulo la longitud de del vector u (por ello usaremos los comandos “size” y “mod” de Matlab u Octave).

```

function v = cyclic(u, m)
    N = size(u, 2)
    m = mod(m, N)
    v(1 : m) = u(N - m + 1 : N)
    v(m + 1 : N) = u(1 : N - m)
end function

```

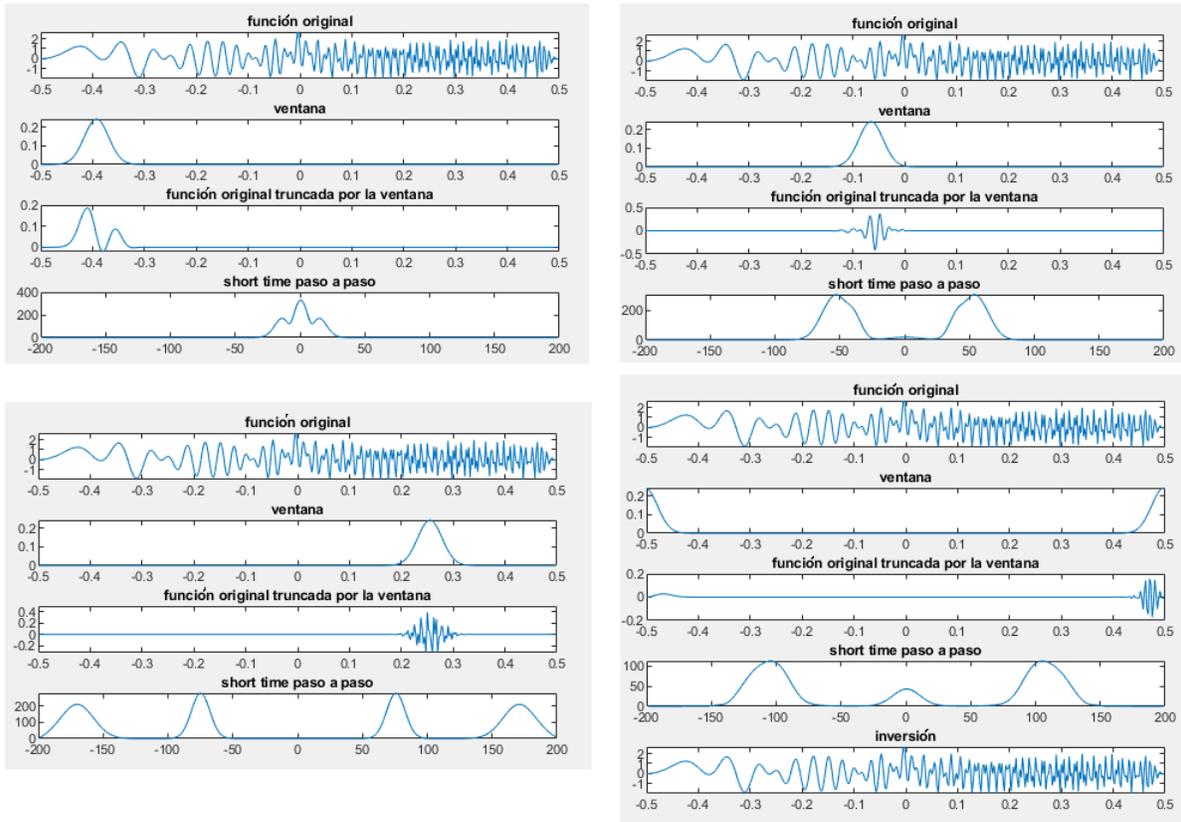


Figura 12: Resultados obtenidos mediante STFT Discreta. Se ve el análisis de frecuencia cortando en distintos tiempos, es decir, un análisis tiempo-frecuencia “localizado”. Se analizó la función $f(x) = \sin(2\pi 100(x + \frac{1}{2})^3) + \sin(2\pi 50(x + \frac{1}{2})^2) + \exp(-(50x)^2)$ con una ventana $g(x) = \exp(-(30x)^2)$ normalizada.

El espectrograma que obtuvimos es el siguiente y se podrá entender mejor luego de leer la Sección 4.4.

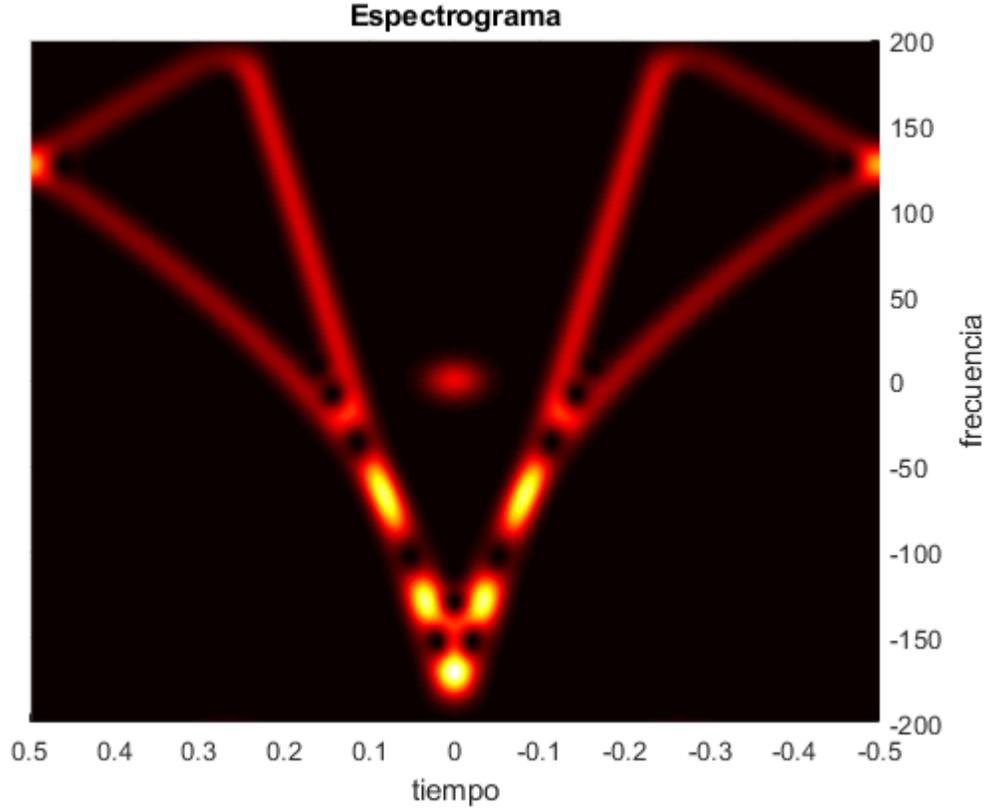


Figura 13: Espectrograma de $f(x) = \text{sen}(2\pi 100(x + \frac{1}{2})^3) + \text{sen}(2\pi 50(x + \frac{1}{2})^2) + \exp(-(50x)^2)$, con ventana $g(x) = \exp(-(30x)^2)$ normalizada. No incluimos las correcciones por simetrías al hacer el gráfico. Sintéticamente muestra las variaciones en tiempo de la frecuencia. Centrada en $(0, 0)$ vemos la componente del término $\exp(-(50x)^2)$ de f que, al ser una gaussiana centrada en 0, tanto ella como su transformada de Fourier están concentradas alrededor de 0. Luego vemos una figura reflejada a derecha e izquierda, solicitamos mirar sólo un lado. Tenemos una recta y otra curva que es en efecto parte de una parábola. La recta corresponde al término $\text{sen}(2\pi 50(x + \frac{1}{2})^2)$, donde las frecuencias de este seno varían como la derivada de su argumento, que es una recta. La parábola está asociada al término $\text{sen}(2\pi 100(x + \frac{1}{2})^3)$, siendo la derivada de $y = 2\pi 100(x + \frac{1}{2})^3$ una función cuadrática. Los trazos no son perfectos, la resolución o dispersión es uniforme y está dada por las desviaciones σ_t y σ_ω asociadas a la ventana g .

4.3. Transformada Wavelet Continua

A veces, cuando la función analizada tiene una resolución tiempo-frecuencia no uniforme, es necesario conocer sus proyecciones sobre átomos cuyas cajas de Heisenberg sean de tamaño variable.

Ahora, en vez de trasladar y modular una ventana g , dilataremos y trasladaremos una *wavelet madre* $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ con promedio cero:

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 0.$$

Por ejemplo, podemos considerar que ψ es una función impar o bien la derivada (de cualquier orden) de una función que tanto ella como sus derivadas decaen a 0 en $\pm\infty$ (este último caso tiene aplicaciones a “detección de bordes” [5, Capítulo 6]).

Definición 4.3. Sea $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 0$ y $\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$. Obtenemos una familia de átomos tiempo-frecuencia dilatando y trasladando a ψ : para $u \in \mathbb{R}$, $s > 0$, definimos

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) = (T_u D_s \psi)(t).$$

Con estos átomos, definimos la transformada wavelet de $f \in L^2(\mathbb{R})$ por

$$Wf(u, s) = \langle f, \psi_{u,s} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \overline{\psi\left(\frac{t-u}{s}\right)} dt. \quad (4.11)$$

Calcular las cajas de Heisenberg para los átomos $\psi_{u,s}$ es ligeramente más tedioso. Tenemos

$$\begin{aligned} E_t(u, s) &= \int_{\mathbb{R}} t |\psi_{u,s}(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} t \frac{1}{s} \left| \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) \right|^2 dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{t-u}{s} \left| \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) \right|^2 + \frac{u}{s} \left| \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) \right|^2 \right] dt \\ &= s E_t(0, 1) + u, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_t^2(u, s) &= \int_{\mathbb{R}} (t - E_t(u, s))^2 |\psi_{u,s}(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} (t - s E_t(0, 1) - u)^2 \frac{1}{s} \left| \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) \right|^2 dt \\ &= s^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{s} \left(\frac{t-u}{s} - E_t(0, 1) \right)^2 \left| \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) \right|^2 dt = s^2 \sigma_t^2(0, 1). \end{aligned}$$

En el lado de frecuencia, tenemos

$$\begin{aligned} E_\omega(u, s) &= \int_{\mathbb{R}} \omega |\hat{\psi}_{u,s}(\omega)|^2 d\omega = \int_{\mathbb{R}} \omega |e^{-iu\omega} \sqrt{s} \hat{\psi}(s\omega)|^2 d\omega \\ &= \int_{\mathbb{R}} \omega s |\hat{\psi}(s\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{s} \int_{\mathbb{R}} s (s\omega) |\hat{\psi}(s\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{s} E_\omega(0, 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_\omega^2(u, s) &= \int_{\mathbb{R}} (\omega - E_\omega(u, s))^2 |\widehat{\psi}_{u,s}(\omega)|^2 d\omega \\
&= \frac{1}{s^2} \int_{\mathbb{R}} \left(\omega - \frac{1}{s} E_\omega(0, 1) \right)^2 |e^{-i\omega u} \sqrt{s} \widehat{\psi}(s\omega)|^2 d\omega \\
&= \frac{1}{s^2} \int_{\mathbb{R}} s (s\omega - E_\omega(0, 1))^2 |\widehat{\psi}(s\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{s^2} \sigma_\omega^2(0, 1).
\end{aligned}$$

Es usual considerar $E_t(0, 1) = 0$ (que se cumple por ejemplo si ψ es impar) y entonces, denotando $\eta := E_\omega(0, 1)$, tenemos

$$E_t(u, s) = u \quad \sigma_t(u, s) = s\sigma_t(0, 1) \quad E_\omega(u, s) = \frac{\eta}{s} \quad \sigma_\omega(u, s) = \frac{\sigma_\omega(0, 1)}{s}.$$

De lo anterior se ve claramente cómo varían las dimensiones de las cajas de Heisenberg de los átomos $\psi_{s,u}$ según en qué punto (s, u) estemos parados (ver Figura 14). Por su parte, en este caso (4.6) lleva el nombre de *escalograma* y sus valores están dados por

$$P_W f \left(u, \frac{\eta}{s} \right) = |Wf(u, s)|^2 = \left| \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \overline{\psi \left(\frac{t-u}{s} \right)} dt \right|^2. \quad (4.12)$$

A diferencia de los espectrogramas, la resolución de los escalogramas no es uniforme.

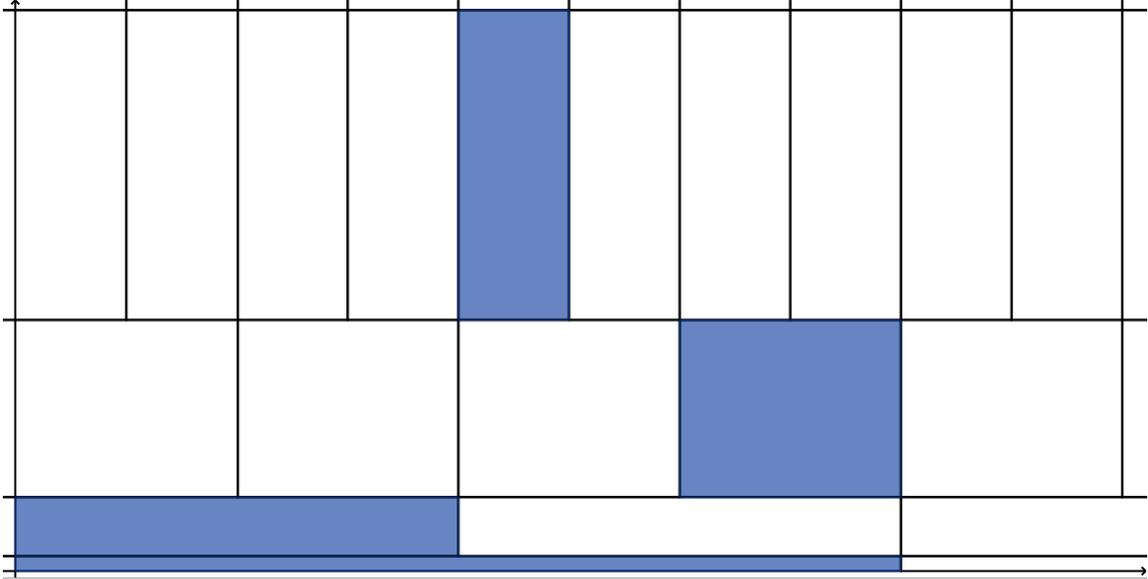


Figura 14: Esquema de las cajas de Heisenberg asociadas a la transformada de wavelet. Si bien sus dimensiones varían, el área $\sigma_t(u, s)\sigma_\omega(u, s)$ es la misma para todo (u, s) .

Así como en el caso de la transformada de Fourier de tiempo corto, con la transformada de wavelet también tenemos una suerte de fórmula de reconstrucción que, nuevamente, vale en un sentido débil.

Teorema 4.3. *Suponer que ψ es como en la definición de transformada wavelet, y suponer además que es real y que satisface la condición de admisibilidad*

$$C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{\xi} d\xi \in (0, \infty). \quad (4.13)$$

Para $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, vale que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} |Wf(u, s)|^2 \frac{1}{s^2} du ds. \quad (4.14)$$

Además, si $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ entonces vale que

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \left[\int_{\mathbb{R}} Wf(u, s) \overline{Wg(u, s)} du \right] \frac{1}{s^2} ds. \quad (4.15)$$

Demostración. Para ver (4.14), primero escribimos

$$Wf(u, s) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \overline{\psi\left(\frac{t-u}{s}\right)} dt = (f * D_s \overline{\mathcal{R}\psi})(u). \quad (4.16)$$

Al estar $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ la convolución anterior está, para cada s fijo y vista como función de u , en $L^2(\mathbb{R})$. Podemos aplicar la transformada de Fourier: (usar la Proposición 1.4)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(Wf(\cdot, s)) &= \widehat{f} D_{1/s} \mathcal{F}(\overline{\mathcal{R}\psi}) = \widehat{f} D_{1/s} \overline{\mathcal{R}(\mathcal{F}(\mathcal{R}\psi))} \\ &= \widehat{f} D_{1/s} \overline{\mathcal{R}(\mathcal{F}\psi)} = \widehat{f} D_{1/s} \mathcal{F}\psi. \end{aligned}$$

Escribimos el término derecho de (4.14):

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} |Wf(u, s)|^2 \frac{1}{s^2} du ds &= \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \|Wf(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \frac{ds}{s^2} \\ &= \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \|\mathcal{F}(Wf(\cdot, s))\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \frac{ds}{s^2} \\ &= \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \frac{1}{s^2} \left[\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\omega)|^2 |(D_{1/s} \overline{\mathcal{F}\psi})(\omega)|^2 d\omega \right] ds \\ &= \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\omega)|^2 \left[\int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(s\omega)|^2}{s} ds \right] d\omega \\ &= \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\omega)|^2 \underbrace{\left[\int_0^\infty \omega \frac{|\widehat{\psi}(s\omega)|^2}{s\omega} ds \right]}_{I(\omega)} d\omega. \end{aligned}$$

Como ψ era real por hipótesis, es fácil chequear que vale $\overline{\widehat{\psi}(-\xi)} = \widehat{\psi}(\xi)$ y por lo tanto $|\widehat{\psi}(-\xi)|^2 = |\widehat{\psi}(\xi)|^2$ para casi todo ξ , y de esto se deduce que

$$I(\omega) = C_\psi \quad \forall \omega \neq 0$$

y queda por lo tanto probado (4.14).

Notemos entonces que la transformada de wavelet es una aplicación lineal

$$W : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2\left(\mathbb{R} \times (0, \infty), du \frac{ds}{s^2}\right)$$

que además es una isometría por lo que acabamos de ver. Luego, por la identidad de polarización sale (4.15). \square

La identidad (4.15) da cuenta de una fórmula de inversión “en sentido débil” para la transformada de wavelet continua, en el sentido que no hemos recuperado los valores $f(x)$ para casi todo punto sino que sólo conocemos sus proyecciones $\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$ contra toda $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ (o contra toda $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$). Nos preguntamos entonces bajo qué hipótesis adicionales sobre la wavelet ψ para qué conjunto de funciones f vale

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \int_\lambda^\infty \int_{\mathbb{R}} Wf(u, s) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) du \frac{1}{s^2} ds \quad \text{para casi todo } t \in \mathbb{R}. \quad (4.17)$$

Supongamos que ψ es a valores reales y simétrica. Si $\psi, f \in L^2(\mathbb{R})$, por (4.16), tenemos que para cada s fijo, $Wf(\cdot, s)$ es una función continua y acotada. Si además $\psi, f \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $Wf(\cdot, s)$ está en $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. De forma análoga a (4.16) podemos escribir

$$\int_{\mathbb{R}} Wf(u, s) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) du = (Wf(\cdot, s) * D_s \psi)(t)$$

y para cada s fijo define una función en $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ continua y acotada. Si aplicamos transformada de Fourier y usamos (4.16) obtenemos

$$\mathcal{F}(Wf(\cdot, s) * D_s \psi)(\omega) = \hat{f}(\omega) |D_{1/s} \hat{\psi}|^2(\omega). \quad (4.18)$$

Si miramos a la función anterior como función de la variable s y asumimos que C_ψ es finita, como en la hipótesis (4.13), tenemos que vive en $L^1((0, \infty), \frac{ds}{s^2})$. En efecto, para ω fijo tenemos

$$\int_0^\infty |D_{1/s} \hat{\psi}|^2(\omega) \frac{ds}{s^2} = \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(s\omega)|^2}{s} ds = C_\psi < \infty. \quad (4.19)$$

Luego, llamemos h a la función auxiliar

$$h(t) := \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} Wf(u, s) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) du \frac{1}{s^2} ds = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty (Wf(\cdot, s) * D_s \psi)(t) \frac{ds}{s^2}.$$

Si pido $h \in L^1(\mathbb{R})$, le aplicamos transformada de Fourier y obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{h}(\omega) &= \frac{1}{C_\psi} \mathcal{F} \left(\int_0^\infty (Wf(\cdot, s) * D_s \psi)(t) \frac{ds}{s^2} \right) \\ &= \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \hat{f}(\omega) |D_{1/s} \hat{\psi}|^2(\omega) \frac{ds}{s^2} = \hat{f}(\omega) \end{aligned}$$

(implicando $h = f$ a.e.) donde para que valga la segunda igualdad debemos asegurarnos que vale un cambio en los órdenes de integración y para ello podemos por ejemplo pedir

$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty |(Wf(\cdot, s) * D_s \psi)(u)| \frac{ds}{s^2} du < \infty \quad \text{ó} \quad \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} |(Wf(\cdot, s) * D_s \psi)(u)| du \frac{ds}{s^2} < \infty.$$

Sin embargo, obtener (4.17) no es trivial y podemos recomendar al lector interesado el artículo [6].

4.4. Distribución de Wigner-Ville

Veremos que los espectrogramas, escalogramas y todas las distribuciones cuadráticas como (4.6) en el plano tiempo-frecuencia pueden ser escritas como un promedio tiempo-frecuencia de la llamada distribución de Wigner-Ville, definida formalmente como:

$$\begin{aligned} P_{WV}f(u, \xi) &:= \int_{\mathbb{R}} f\left(u + \frac{\tau}{2}\right) \overline{f\left(u - \frac{\tau}{2}\right)} e^{-i\tau\xi} d\tau \\ &= \sqrt{2\pi} \mathcal{F}\left(f\left(u + \frac{\cdot}{2}\right) \overline{f\left(u - \frac{\cdot}{2}\right)}\right)(\xi) \end{aligned} \quad (4.20)$$

o equivalentemente, usando Parseval,

$$\begin{aligned} P_{WV}f(u, \xi) &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}\left(f\left(u + \frac{\cdot}{2}\right) e^{-i\xi\frac{\cdot}{2}}\right)(\gamma) \overline{\mathcal{F}\left(f\left(u - \frac{\cdot}{2}\right) e^{i\xi\frac{\cdot}{2}}\right)(\gamma)} d\gamma \\ &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}\left(\xi + \frac{\gamma}{2}\right) \overline{\widehat{f}\left(\xi - \frac{\gamma}{2}\right)} e^{i\gamma u} d\gamma \\ &= \sqrt{2\pi} \mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{f}\left(\xi + \frac{\cdot}{2}\right) \overline{\widehat{f}\left(\xi - \frac{\cdot}{2}\right)}\right)(u). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Consideraremos P_{WV} aplicada a funciones tales que (4.20), o bien (4.21), esté bien definida.

Notar que P_{WV} es real por ser la transformada de Fourier de $f_u := f(u + \frac{\cdot}{2}) \overline{f(u - \frac{\cdot}{2})}$ que cumple $f_u(x) = \overline{f_u(-x)}$. Se ve fácilmente que P_{WV} es una aplicación no lineal. De hecho, es una *forma cuadrática* (o “distribución cuadrática” -de allí su nombre-). Es decir, $P_{WV}(af) = |a|^2 P_{WV}(f)$ para toda función f y para todo escalar $a \in \mathbb{C}$ y la aplicación $(f, g) \mapsto P_{WV}(f + g) - P_{WV}(f) - P_{WV}(g)$ es bilineal sobre \mathbb{R} como cuerpo de escalares. Por lo tanto, $I_{WV}(f, g) := \frac{P_{WV}(f+g) - P_{WV}(f) - P_{WV}(g)}{2}$ es una forma bilineal simétrica y además $I_{WV}(f, f) = P_{WV}(f)$.

En la definición, tiempo y frecuencia tienen roles “simétricos”; se correlaciona a f con sus propias traslaciones en tiempo y frecuencia. Pero lo más importante aún es que P_{WV} localiza la estructura tiempo-frecuencia de f : si la energía de f está bien concentrada en tiempo alrededor de u_0 y está bien concentrada en frecuencia alrededor de ξ_0 , entonces $P_{WV}f$ tiene energía concentrada en (u_0, ξ_0) con dispersión igual a la dispersión tiempo-frecuencia de f (como se puede ver en la siguiente proposición y en los ejemplos).

Proposición 4.1. [5, Proposition 4.2]

- Si $\text{supp}(f) \subseteq [u_0 - \frac{T}{2}, u_0 + \frac{T}{2}]$, entonces para todo $\xi \in \mathbb{R}$, $\text{supp}(P_{WV}f(\cdot, \xi)) \subseteq [u_0 - \frac{T}{2}, u_0 + \frac{T}{2}]$.
- Si $\text{supp}(\widehat{f}) \subseteq [\xi_0 - \frac{\omega}{2}, \xi_0 + \frac{\omega}{2}]$, entonces para todo $u \in \mathbb{R}$, $\text{supp}(P_{WV}f(u, \cdot)) \subseteq [\xi_0 - \frac{\omega}{2}, \xi_0 + \frac{\omega}{2}]$.

Demostración. Como para $u \in \mathbb{R}$, tenemos que $\text{supp}(f(\frac{(\cdot)+2u}{2})) \subseteq [2(u_0 - u) - T, 2(u_0 - u) + T]$ y $\text{supp}(f(\frac{2u - (\cdot)}{2})) \subseteq [-2(u_0 - u) - T, -2(u_0 - u) + T]$, resulta que para cada $\xi \in \mathbb{R}$,

el soporte de $(P_{WV}f)(\cdot, \xi)$ está contenido en la intersección de dichos dos intervalos, es decir, en $[u_0 - \frac{T}{2}, u_0 + \frac{T}{2}]$. La otra parte de la Proposición sigue de argumentos análogos. \square

Ejemplo: Si f es una gaussiana centrada en $(0, 0)$, entonces su transformada de Fourier también es una gaussiana centrada en $(0, 0)$ y por la proposición anterior obtenemos que $P_{WV}(f)$ está concentrada en $(0, 0)$. Concretamente, si $f(t) = Ce^{-at^2}$, para algún $a > 0$, entonces por un lado

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} e^{-i\xi x} dx = \frac{C}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\xi^2}{a}}$$

y, por otro lado, eligiendo $C = (8a\pi)^{1/4}$,

$$P_{WV}(f)(u, \xi) = C^2 e^{-2au^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{a\tau^2}{2}} e^{-i\tau\xi} d\tau = C^2 \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-2au^2} e^{-\frac{\xi^2}{2a}} = |f(u)|^2 |\widehat{f}(\xi)|^2.$$

Para los próximos ejemplos necesitaremos recordar nociones básicas de la Teoría de Distribuciones dadas en la Observación 3.1.

Ejemplos:

- $P_{WV}(\delta_{u_0}) = \delta_{u_0}$.
- $P_{WV}\left(\frac{e^{i\xi_0 \cdot}}{\sqrt{2\pi}}\right) = \delta_{\xi_0}$.

Para ver la primera identidad, como vimos en (3.2) la transformada de Fourier de δ_{u_0} es una función, por esta razón usaremos (4.21) como definición de $P_{WV}(\delta_{u_0})$. Entonces

$$\begin{aligned} P_{WV}(\delta_{u_0})(\cdot, \xi) &= \sqrt{2\pi} \mathcal{F}^{-1} \left(\widehat{\delta_{u_0}} \left(\xi + \frac{\cdot}{2} \right) \overline{\widehat{\delta_{u_0}} \left(\xi - \frac{\cdot}{2} \right)} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1} (e^{-iu_0(\xi + \frac{\cdot}{2})} e^{iu_0(\xi - \frac{\cdot}{2})}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1} (e^{-iu_0 \cdot}) = \delta_{u_0}. \end{aligned}$$

En cambio, para la segunda identidad usamos (4.20) con la definición de la transformada de Fourier como en (3.3),

$$P_{WV}(e^{i\xi_0 \cdot})(u, \cdot) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F} \left(e^{i\xi_0(u + \frac{\cdot}{2})} \overline{e^{i\xi_0(u - \frac{\cdot}{2})}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F} (e^{i\xi_0 \cdot}) = \delta_{\xi_0}.$$

¿Cómo se comporta P_{WV} ante traslaciones, modulaciones, dilataciones?

- *Phase shift*: Dado $\phi \in \mathbb{R}$, $P_{WV}(e^{i\phi} f(\cdot)) = P_{WV}(f)$. En efecto:

$$\begin{aligned} (P_{WV}(e^{i\phi} f(\cdot)))(u, \xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\phi} f\left(u + \frac{\tau}{2}\right) \overline{e^{-i\phi} f\left(u - \frac{\tau}{2}\right)} e^{-i\tau\xi} d\tau \\ &= (P_{WV}(f))(u, \xi). \end{aligned}$$

- *Traslación en frecuencia:* $P_{WV} \circ M_{\xi_0} = [\text{Id} \times T_{\xi_0}] \circ P_{WV}$. En efecto,

$$\begin{aligned} (P_{WV} (e^{i\xi_0 \cdot} f(\cdot))) (u, \xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi_0(u+\frac{\tau}{2})} f\left(u - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i\xi_0(u-\frac{\tau}{2})} \overline{f\left(u + \frac{\tau}{2}\right)} e^{-i\tau\xi} d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} f\left(u + \frac{\tau}{2}\right) \overline{f\left(u + \frac{\tau}{2}\right)} e^{-i\tau(\xi-\xi_0)} d\tau \\ &= P_{WV} f(u, \xi - \xi_0). \end{aligned}$$

- *Traslación en tiempo:* $P_{WV} \circ T_{u_0} = [T_{u_0} \times \text{Id}] \circ P_{WV}$. En efecto,

$$\begin{aligned} (P_{WV} (f(\cdot - u_0))) (u, \xi) &= \int_{\mathbb{R}} f\left(u - u_0 + \frac{\tau}{2}\right) \overline{f\left(u - u_0 - \frac{\tau}{2}\right)} e^{-i\tau\xi} d\tau \\ &= P_{WV} f(u - u_0, \xi). \end{aligned}$$

- *Dilatación:* $(P_{WV} \circ D_s) = [D_s \times D_{1/s}] \circ P_{WV}$. En efecto,

$$\begin{aligned} \left(P_{WV} \left(\frac{1}{\sqrt{s}} f\left(\frac{\cdot}{s}\right)\right)\right) (u, \xi) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{s} f\left(\frac{u + \tau/2}{s}\right) \overline{f\left(\frac{u - \tau/2}{s}\right)} e^{-i\tau\xi} d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{s} f\left(\frac{u}{s} + t/2\right) \overline{f\left(\frac{u}{s} - t/2\right)} e^{-its\xi} dt \\ &= (P_{WV} (f)) \left(\frac{u}{s}, s\xi\right). \end{aligned}$$

Para justificar los próximos resultados, recordemos que la transformada de Fourier de la función $h(x) = x$, pensada como distribución temperada, se deduce (usando la fórmula de Inversión) del siguiente modo: sea $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \widehat{x}(g) &= x(\widehat{g}) = \int_{\mathbb{R}} x \widehat{g}(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x g(\omega) e^{-ix\omega} d\omega dx \\ &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g(\omega) \frac{d}{d\omega} e^{-ix\omega} d\omega dx = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g'(\omega) e^{-ix\omega} d\omega dx \\ &= -i \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}'(x) dx = -ig'(0) = -i\delta'(g). \end{aligned} \tag{4.22}$$

Lema 4.1. *Se tiene que*

$$\int_{\mathbb{R}} \xi (P_{WV} g)(u, \xi) d\xi = -\frac{i}{2} [g'(u)\overline{g(u)} - g(u)\overline{g'(u)}]. \tag{4.23}$$

En particular, si g es a valores reales, entonces (4.23) es igual a 0.

Demostración. Por definición de P_{WV} ,

$$\int_{\mathbb{R}} \xi (P_{WV} g)(u, \xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \xi g(u + \tau/2) \overline{g(u - \tau/2)} e^{-i\xi\tau} d\tau d\xi$$

Para cada $u \in \mathbb{R}$, definimos $h_u(\tau) := g(u + \tau/2) \overline{g(u - \tau/2)}$. Luego, usando (4.22)

$$\int_{\mathbb{R}} \xi (P_{WV} g)(u, \xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \xi h_u(\tau) e^{-i\xi\tau} d\tau d\xi$$

$$= \widehat{\xi}(h_u) = -i h'_u(0) = -\frac{i}{2} [g'(u)\overline{g(u)} - g(u)\overline{g'(u)}].$$

□

Proposición 4.2. [5, Proposition 4.4] *Se tiene*

$$|\widehat{f}(\xi)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} P_{WV} f(u, \xi) du \quad y \quad |f(u)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} P_{WV} f(u, \xi) d\xi. \quad (4.24)$$

Observación 4.2. Interpretemos a $|f(t)|^2$ y $|\widehat{f}(\xi)|^2$ como densidades de energía en tiempo y frecuencia respectivamente. Como la transformada de Fourier es una isometría, se cumple la ley de conservación $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi$. El resultado anterior sugiere que podemos recuperar estas densidades calculando las *integrales marginales* de la distribución $P_{WV}f$.

Demostración. Sea $g_\xi(u) = P_{WV}f(u, \xi)$. Entonces $\widehat{g}_\xi(\gamma) = \sqrt{2\pi} \widehat{f}(\xi + \gamma/2) \overline{\widehat{f}(\xi - \gamma/2)}$. Por la Fórmula de Inversión para la Transformada de Fourier se tiene

$$\sqrt{2\pi} |\widehat{f}(\xi)|^2 = \widehat{g}_\xi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g_\xi(u) du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} P_{WV} f(u, \xi) du.$$

La otra identidad se prueba de forma análoga: Consideramos

$$h_u(\xi) = P_{WV} f(u, \xi) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F} \left(f \left(u + \frac{\cdot}{2} \right) \overline{f \left(u - \frac{\cdot}{2} \right)} \right) (\xi).$$

Entonces $\mathcal{F}^{-1}(h_u)(\tau) = \sqrt{2\pi} f(u + \frac{\tau}{2}) \overline{f(u - \frac{\tau}{2})}$ y al evaluar en $\tau = 0$ obtenemos la otra identidad. □

Proposición 4.3. [5, Proposition 4.3] *Sea $f_a(t) = a(t)e^{i\phi(t)}$, donde a y ϕ son funciones a valores reales. Entonces, su frecuencia instantánea es el promedio relativo a $P_{WV}f_a$, es decir,*

$$\phi'(u) = 2\pi \frac{\int_{\mathbb{R}} \xi P_{WV} f_a(u, \xi) d\xi}{\int_{\mathbb{R}} P_{WV} f_a(u, \xi) d\xi}. \quad (4.25)$$

Demostración. Por un lado, usando el Lema 4.1 tenemos

$$\int_{\mathbb{R}} \xi (P_{WV} f_a)(u, \xi) d\xi = a^2(u) \phi'(u).$$

Por otro lado, usando la Proposición 4.2,

$$a^2(u) = |f_a(u)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (P_{WV} f_a)(u, \xi) d\xi.$$

□

Observación 4.3. Para cada u fijo (4.25) tiene “la pinta” de *centro de masa*, es decir, que para cada u fijo podemos interpretar que la masa de $P_{WV}(u, \xi)$ está concentrada en un entorno de la frecuencia instantánea $\phi'(u)$. (Tener presente esto a la hora de analizar la Figura 13.)

Por ejemplo, si consideramos un *chirp lineal* $f(t) = \frac{1}{2\pi} e^{iat^2}$, su frecuencia instantánea es $\phi'(u) = 2au$ y

$$P_{WV}f(u, \cdot) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(e^{ia(u+\frac{\cdot}{2})^2} e^{-ia(u-\frac{\cdot}{2})^2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(e^{i2au(\cdot)}) = \delta_{2au}.$$

Luego, multiplicar por un chirp lineal produce traslaciones en frecuencia por la frecuencia instantánea del chirp, es decir, $P_{WV}(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{iat^2} h(t))(u, \xi) = P_{WV}h(u, \xi - 2au)$.

Teorema 4.4. [5, Teorema 4.6] (Teorema de Moyal) P_{WV} es unitaria en el siguiente sentido:

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t)} dt \right|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} P_{WV}f(u, \xi) \overline{P_{WV}g(u, \xi)} dud\xi.$$

Demostración. De (3.3) se deduce que $\hat{1} = \sqrt{2\pi}\delta_0$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} P_{WV}f(u, \xi) \overline{P_{WV}g(u, \xi)} dud\xi &= \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f\left(u + \frac{\tau'}{2}\right) \overline{f\left(u - \frac{\tau'}{2}\right)} g\left(u - \frac{\tau}{2}\right) \overline{g\left(u + \frac{\tau}{2}\right)} e^{-i\xi\tau'} e^{i\xi\tau} d\tau' d\tau d\xi du \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g\left(u - \frac{\tau}{2}\right) \overline{g\left(u + \frac{\tau}{2}\right)} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f\left(u + \frac{\tau'}{2}\right) \overline{f\left(u - \frac{\tau'}{2}\right)} e^{-i\xi\tau'} d\tau' \right) e^{i\xi\tau} d\xi \right) d\tau du \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g\left(u - \frac{\tau}{2}\right) \overline{g\left(u + \frac{\tau}{2}\right)} \left(\int_{\mathbb{R}} \sqrt{2\pi} \mathcal{F}\left(f\left(u + \frac{\cdot}{2}\right) \overline{f\left(u - \frac{\cdot}{2}\right)}\right) e^{i\xi\tau} d\xi \right) d\tau du \\ &= 2\pi \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g\left(u - \frac{\tau}{2}\right) \overline{g\left(u + \frac{\tau}{2}\right)} f\left(u + \frac{\tau}{2}\right) \overline{f\left(u - \frac{\tau}{2}\right)} d\tau du \\ &= 2\pi \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g(u') \overline{g(u' + \tau)} f(u' + \tau) \overline{f(u')} du' d\tau \\ &= 2\pi \int_{\mathbb{R}} g(u') \overline{f(u')} \int_{\mathbb{R}} \overline{g(u' + \tau)} f(u' + \tau) d\tau du' \\ &= 2\pi \left(\int_{\mathbb{R}} \overline{g(u') f(u')} du' \right) \left(\int_{\mathbb{R}} \overline{g(v)} f(v) dv \right) \end{aligned}$$

donde al final de la prueba intercambiamos límites de integración dos veces y usamos los cambios de variable $u' = u - \tau/2$, $du' = du$ (es decir la medida du es invariante ante la traslación por $\tau/2$) y luego $v = u' + \tau$, $dv = d\tau$ (o dicho de otro modo, la medida $d\tau$ es invariante ante traslación por $-u'$). \square

El teorema anterior puede interpretarse como una ley de conservación de energía. A pesar de las buenas propiedades vinculadas a la relación tiempo-frecuencia, P_{WV} tiene dos grandes problemas: interferencia y positividad. En cuanto al segundo punto, se puede ver, por ejemplo, que las funciones gaussianas y sus traslaciones en tiempo y modulaciones en frecuencia son las únicas funciones cuya distribución P_{WV} permanece

positiva. Las interferencias son producidas por las propiedades cuadráticas de P_{WV} . Aparecen por ejemplo al calcular $P_{WV}(f_1 + f_2)$:

$$P_{WV}(f_1 + f_2) = P_{WV}(f_1) + P_{WV}(f_2) + I(f_1, f_2),$$

donde $I(f_1, f_2)$ es el término de interferencia dado por $I(f_1, f_2) = P_{WV}(f_1, f_2) + P_{WV}(f_2, f_1)$; estos últimos son los términos cruzados

$$P_{WV}(h, g) = \int_{\mathbb{R}} h(u + \tau/2) \overline{g(u - \tau/2)} e^{-i\xi\tau} d\tau.$$

Se pueden remover “promediando” P_{WV} con núcleos adecuados obteniendo densidades tiempo-frecuencia que además sean positivas. Pero esto reduce la resolución. Los espectrogramas y los escalogramas son ejemplos de distribuciones cuadráticas que se obtienen suavizando la distribución P_{WV} .

$$P_{\theta}f(u, \xi) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} P_{WV}f(u', \xi') \theta(u, u', \xi, \xi') du' d\xi'.$$

Sea $\{\phi_{\gamma}\}_{\gamma \in \Gamma}$ una familia de átomos que cubren el plano tiempo-frecuencia, es decir, para cada (u, ξ) existe un único $\phi_{\gamma(u, \xi)}$ centrado en (u, ξ) . La densidad de energía tiempo-frecuencia asociada a la familia $\{\phi_{\gamma}\}_{\gamma \in \Gamma}$ está dada por

$$Pf(u, \xi) = |\langle f, \phi_{\gamma(u, \xi)} \rangle|^2.$$

Por el Teorema 4.4 de Moyal

$$Pf(u, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} P_{WV}f(u', \xi') P_{WV}\phi_{\gamma(u, \xi)}(u', \xi') du' d\xi'.$$

Es decir, el núcleo con el que estamos suavizando a P_{WV} obteniendo P está dado por la transformada de Wigner-Ville de los átomos:

$$\theta(u, u', \xi, \xi') = \frac{1}{2\pi} P_{WV}\phi_{\gamma(u, \xi)}(u', \xi').$$

En particular mencionamos los siguientes dos ejemplos que son objeto de estudio de este trabajo final.

Ejemplo: Short-time Fourier transform. Los átomos son $\phi_{\gamma(u, \xi)}(t) = g(t - u)e^{i\xi t}$.

$$P_{WV}\phi_{\gamma(u, \xi)}(u', \xi') = P_{WV}g(u' - u, \xi' - \xi).$$

Ejemplo: La transformada de wavelet. Aquí, los átomos están dados por $\phi_{\gamma(u, \xi)}(t) = \psi_{u, s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}}\psi(\frac{t-u}{s})$, donde $\xi = \eta/s$, η es el centro en frecuencia de ψ .

$$P_{WV}\phi_{\gamma(u, \xi)}(u', \xi') = \frac{1}{2\pi} P_{WV}\psi((u' - u)/s, s\xi').$$

Teorema 4.5. [5, Teorema 4.7] (Teorema de Wigner) No existe una forma cuadrática no negativa P que satisfaga (4.24).

Demostración. Supongamos que existe una forma cuadrática P tal que $Pf(u, \xi) \geq 0$ para toda f apropiada, para todo $(u, \xi) \in \mathbb{R}^2$ que además cumpla (4.24). Entonces, si f es tal que su soporte está contenido en un conjunto I , tenemos que $Pf(u, \xi) = 0$ para casi todo $u \notin I$.

Ahora, a esta forma cuadrática le asociamos la forma bilineal simétrica

$$I_P(f, g) := \frac{P(f+g) - P(f) - P(g)}{2}.$$

Sean $f_1, f_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ funciones no nulas soportadas en los intervalos acotados I_1 e I_2 , respectivamente, con $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ (i.e. $f_1 f_2 = 0$), cuyas transformadas de Fourier son a valores reales y tales que $P(f_1)$ y $P(f_2)$ no son idénticamente nulas. Para $f = af_1 + bf_2$, con $a, b \in \mathbb{R}$ arbitrarios, tenemos

$$Pf = |a|^2 P(f_1) + 2ab I_P(f_1, f_2) + |b|^2 P(f_2). \quad (4.26)$$

Como $Pf_1(u, \xi) = 0$ para casi todo $u \in I_2$, usando la positividad de P y el hecho que (4.26) vale para todo a, b , obtenemos que $I_P(f_1, f_2)(u, \xi) = 0$ para casi todo $u \in I_2$. Argumentando de manera similar al permutar los roles de f_1 y f_2 , obtenemos $I_P(f_1, f_2)(u, \xi) = 0$ para casi todo $u \in I_1$. Luego

$$Pf = |a|^2 P(f_1) + |b|^2 P(f_2). \quad (4.27)$$

(En (4.27) observamos que se han removido totalmente los términos de interferencia.)

Si integramos con respecto a u , usando (4.24), queda

$$|a\widehat{f_1}(\xi) + b\widehat{f_2}(\xi)|^2 = |\widehat{f}(\xi)|^2 = |a|^2 |\widehat{f_1}(\xi)|^2 + |b|^2 |\widehat{f_2}(\xi)|^2.$$

Así, $\widehat{f_1} \widehat{f_2} = 0$. Como ambas son funciones continuas, esto nos dice que alguna se anula en todo un intervalo, asumir sin pérdida de generalidad que es $\widehat{f_1}$. Luego, por la Observación 2.11 que sigue al Teorema 2.9, se deduce que $\widehat{f_1}$ es idénticamente nula y por lo tanto f_1 es idénticamente nula. Esto contradice que $P(f_1) \neq 0$. \square

4.5. Teorema de Balian-Low

Hay ciertas “limitaciones” inherentes a la transformada de tiempo corto. Esencialmente, si tenemos la fortuna que

$$g_{n,m}(t) = e^{imt} g(t-n)$$

forman una base ortonormal (con $m, n \in \mathbb{Z}$) entonces tendremos la desgracia que vistos como átomos de la STFT tienen una mala localización tiempo-frecuencia, algo que enunciamos más formalmente en el siguiente teorema, tomado principalmente de [2].

Teorema 4.6 (Balian-Low). *Sea $g \in L^2(\mathbb{R})$ tal que g es derivable y $g' \in L^1(\mathbb{R})$. Si $\{g_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$, entonces se da alguna de las siguientes:*

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 |g(x)|^2 dx = +\infty \quad \text{ó} \quad \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi = +\infty. \quad (4.28)$$

Demostración. Definimos los operadores Q, P dados por

$$(Qf)(x) = x f(x) \quad (Pf)(x) = -i f'(x).$$

Supongamos por el absurdo que ambas integrales en (4.28) son finitas. Por un lado, se tiene

$$\int_{\mathbb{R}} |(Qg)(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} x^2 |g(x)|^2 dx.$$

Por otro lado, fijemos $c \in \mathbb{R}$. Por hipótesis, tanto $g' \chi_{(-\infty, c]}$ y $g' \chi_{[c, \infty)}$ están en $L^1(\mathbb{R})$, luego

$$\int_{-\infty}^c g'(t) dt = g(c) - \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \quad \int_c^{\infty} g'(t) dt = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) - g(c).$$

O sea, los límites cuando $x \rightarrow \pm\infty$ de $g(x)$ existen. Como g es de cuadrado integrable, necesariamente estos límites deben ser cero. Luego podemos integrar por partes:

$$\begin{aligned} \widehat{g}'(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g'(t) e^{-it\xi} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[g(t) e^{-it\xi} \Big|_{t=-\infty}^{t=\infty} - \int_{\mathbb{R}} g(t) (-i\xi) e^{-it\xi} dt \right] \\ &= (i\xi) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(t) e^{-it\xi} d\xi = i\xi \widehat{g}(\xi). \end{aligned}$$

Por hipótesis, el lado derecho de la anterior igualdad está en $L^2(\mathbb{R})$, por lo que el lado izquierdo también lo está. Por identidad de Plancherel/Parseval, se tiene

$$\int_{\mathbb{R}} |(Pg)(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} -ig'(x) \overline{-ig'(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}'(\xi) \overline{\widehat{g}'(\xi)} d\xi = \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi.$$

Se tiene entonces Qg y Pg en $L^2(\mathbb{R})$. Suponer que valen las siguientes:

$$\langle Qg, Pg \rangle = \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \langle Qg, g_{n,m} \rangle \langle g_{n,m}, Pg \rangle \quad (4.29)$$

$$\langle Qg, g_{n,m} \rangle = e^{-imn} \langle g_{-n,-m}, Qg \rangle \quad \text{para todos } n, m \in \mathbb{Z} \quad (4.30)$$

$$\langle Pg, g_{n,m} \rangle = e^{-imn} \langle g_{-n,-m}, Pg \rangle \quad \text{para todos } n, m \in \mathbb{Z} \quad (4.31)$$

Notemos que las anteriores implican

$$\begin{aligned} \langle Pg, Qg \rangle &= \overline{\langle Qg, Pg \rangle} = \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \overline{\langle Qg, g_{n,m} \rangle} \overline{\langle g_{n,m}, Pg \rangle} \\ &= \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} e^{imn} \overline{\langle g_{-n,-m}, Qg \rangle} \langle Pg, g_{n,m} \rangle \\ &= \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} e^{imn} \langle Qg, g_{-n,-m} \rangle e^{-imn} \langle g_{-n,-m}, Pg \rangle = \langle Qg, Pg \rangle. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Pero por otro lado, usando integración por partes, tenemos

$$\langle Qg, Pg \rangle = \int_{\mathbb{R}} x g(x) \overline{-ig'(x)} dx = \left[\overline{-ig(x)} g(x) \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} \right] - \int_{\mathbb{R}} \overline{-ig(x)} [g(x) + xg'(x)] dx$$

$$\begin{aligned}
&= -i \int_{\mathbb{R}} g(x) \overline{g(x)} dx + \int_{\mathbb{R}} -ig'(x) \overline{xg(x)} dx \\
&= -i \langle g, g \rangle + \langle Pg, Qg \rangle = -i + \langle Pg, Qg \rangle.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Que vale pues tanto $ig(x)$ y $g(x)$ se van a cero cuando $x \rightarrow \pm\infty$. Ahora, juntando (4.32) y (4.33), resulta $i = 0$, absurdo.

Veamos entonces que valen (4.29), (4.30) y (4.31). Como Qg y Pg eran de cuadrado integrable y $\{g_{n,m}\}$ era una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$,

$$\langle Qg, Pg \rangle = \left\langle \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \langle Qg, g_{n,m} \rangle g_{n,m}, Pg \right\rangle = \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \langle Qg, g_{n,m} \rangle \langle g_{n,m}, Pg \rangle.$$

Para ver (4.30), notemos que $n \langle g, g_{n,m} \rangle = 0$ para todo n : esto vale evidentemente para $n = 0$, si $n \neq 0$ entonces usamos la ortogonalidad de $g_{n,m}$ y $g_{0,0} = g$. Luego

$$\begin{aligned}
\langle Qg, g_{n,m} \rangle &= \langle Qg, g_{n,m} \rangle - n \langle g, g_{n,m} \rangle = \int_{\mathbb{R}} g(x)(x-n) \overline{g(x-n)} e^{-imx} dx \\
&= e^{-imn} \int_{\mathbb{R}} g(x+n) \overline{g(x)} e^{-im(x+n)} dx = e^{-imn} \langle g_{-n,-m}, Qg \rangle
\end{aligned}$$

Para ver (4.31), integramos por partes para obtener

$$\begin{aligned}
\langle Pg, g_{n,m} \rangle &= -i \int_{\mathbb{R}} g'(x) \overline{g(x-n)} e^{-imx} dx \\
&= -i \left(\left[g(x) \overline{g(x-n)} e^{-imx} \right]_{x=-\infty}^{x=\infty} \right. \\
&\quad \left. - \int_{\mathbb{R}} g(x) \left[\overline{g'(x-n)} e^{-imx} + \overline{g(x-n)} (-im) e^{-imx} \right] dx \right) \\
&= m \int_{\mathbb{R}} g(x) \overline{g(x-n)} e^{-imx} dx + \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-imx} \overline{-ig'(x-n)} dx \\
&= m \langle g, g_{n,m} \rangle + e^{-imn} \int_{\mathbb{R}} g(x+n) e^{-imx} \overline{-ig'(x)} dx \\
&= e^{-imn} \langle g_{-n,-m}, Pg \rangle
\end{aligned}$$

pues $m \langle g, g_{n,m} \rangle = 0$ para $m = 0$ y para $m \neq 0$ usamos la ortogonalidad de $g_{n,m}$ y g . \square

Este teorema sugiere que las cajas de Heisenberg asociadas a la STFT tienen necesariamente alguna de sus dos dimensiones, σ_t ó σ_ω , infinitas (ver Figura 15 a continuación) si los átomos nos dan una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$. Es por ello que no estudiaremos bases ortonormales del $L^2(\mathbb{R})$ cuyos elementos sean átomos de la STFT, sino que buscaremos bases ortonormales del $L^2(\mathbb{R})$ de wavelets. En el próximo capítulo veremos uno de los más relevantes esquemas que dan bases ortonormales de wavelets.

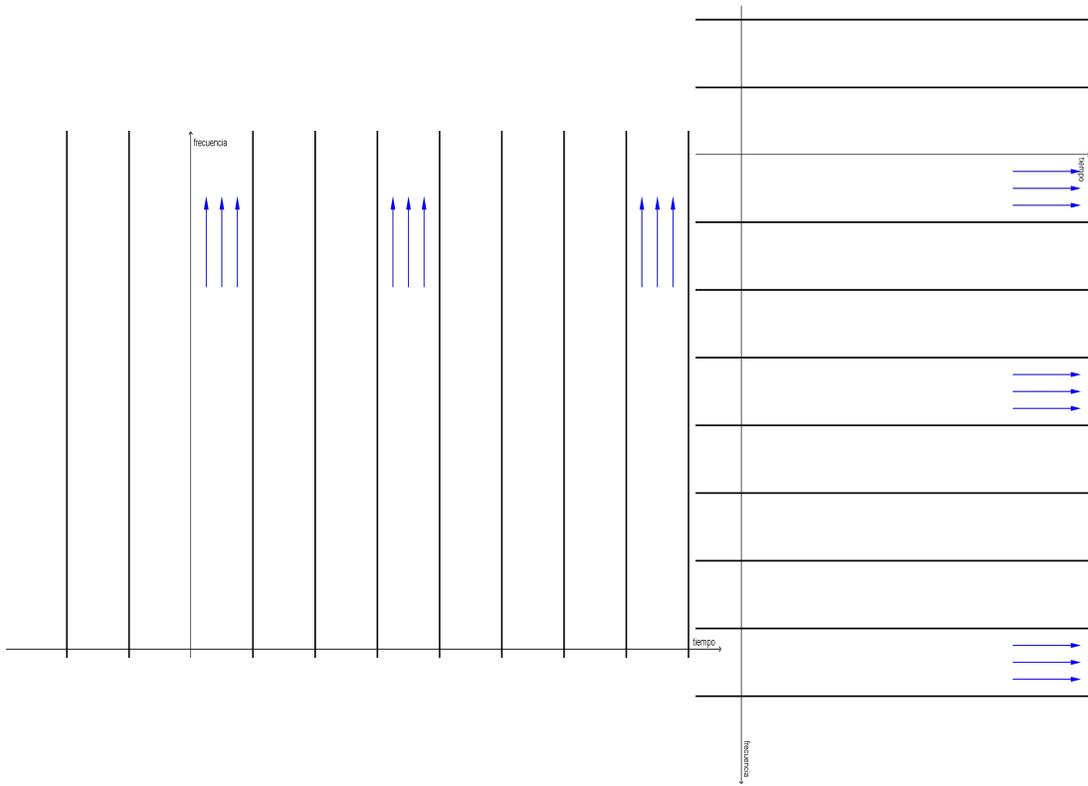


Figura 15: Esquemas posibles de las cajas de Heisenberg asociadas a la STFT de acuerdo al Teorema de Balian-Low.

5. MRA

En este capítulo explicaremos en detalle una sección de [1]. Estudiaremos una forma de construir bases ortonormales de wavelets del espacio $L^2(\mathbb{R})$. Lo haremos a partir del *análisis multirresolución*, MRA por sus siglas en inglés, también conocido como *análisis multiescala*. Fue introducido por Meyer y Mallat en 1988/89. El hecho de que en el capítulo anterior sólo hayamos incluido un apartado para la Short-Time Fourier Transform Discreta y no para la Transformada de Wavelet Discreta se debe a que la “algoritmización” de la transformada de wavelet que a nivel práctico es la más relevante deviene de diseños de MRA.

5.1. Definiciones y resultados principales

Definición 5.1. Un análisis multirresolución consiste en una familia de espacios de aproximación sucesivos $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$. Más precisamente, los V_j son subespacios cerrados de $L^2(\mathbb{R})$ que satisfacen

1. $V_j \subseteq V_{j+1} \quad \forall j \in \mathbb{Z}$
2. $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$
3. $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$
4. Propiedad de escala: $f \in V_j \iff f(2^{-j}\cdot) \in V_0$
5. Invariancia de V_0 por traslaciones enteras: $f \in V_0 \implies f(\cdot - n) \in V_0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$
6. Existe $\varphi \in V_0$ tal que $\{\varphi_{0,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es base ortonormal de V_0 , donde el subíndice (j, n) indica trasladar en n y luego dilatar por 2^{-j} , o sea, $\varphi_{j,n}(x) = 2^{j/2} \varphi(2^j x - n)$. A φ se le suele llamar *función de escala* del MRA.

Observación 5.1. La condición 4 de la definición de MRA equivale a

$$f \in V_j \iff f(2\cdot) \in V_{j+1} \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Demostración. (\implies) Si vale 4., sea $f \in V_j$. Sea $g = f(2\cdot)$, queremos ver que $g \in V_{j+1}$. Por 4., esto equivale a ver que $g(2^{-(j+1)}\cdot) \in V_0$. Pero $g(2^{-(j+1)}\cdot) = f(2^{-j}\cdot) \in V_0$. Suponer que f es tal que $g = f(2\cdot) \in V_{j+1}$. Ahora $f \in V_j$ si y sólo si $f(2^{-j}\cdot) \in V_0$, pero $f(2^{-j}\cdot) = g(2^{-(j+1)}\cdot) \in V_0$. (\impliedby) Suponer que vale el si y sólo si de la afirmación, veamos que vale 4. Luego $f \in V_j$. Aplicando la hipótesis de manera sucesiva, obtenemos

$$f(2^{-1}\cdot) \in V_{j-1} \iff f(2^{-2}\cdot) \in V_{j-2} \iff \dots \iff f(2^{-j}\cdot) \in V_0.$$

□

Llamaremos P_j a la proyección ortogonal $P_j : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow V_j$.

Lema 5.1. Para cada $f \in L^2(\mathbb{R})$ se tiene

$$\lim_{j \rightarrow \infty} P_j(f) = f \quad y \quad \lim_{j \rightarrow \infty} P_{-j}(f) = 0.$$

Demostración. Veamos primero que $\{\|P_{-j}f\|\}_{j \in \mathbb{N}}$ es convergente. Como $V_{-j-1} \subseteq V_{-j}$, se tiene $\|P_{-j-1}f\| \leq \|P_{-j}f\| \forall j \in \mathbb{N}$. Luego la sucesión es monótona decreciente y acotada inferiormente, por lo que existe $\lim_{j \rightarrow \infty} P_{-j}f$. Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Tenemos

$$\|P_{-m}f - P_{-n}f\|^2 = \|P_{-m}f\|^2 - 2\Re\langle P_{-m}f, P_{-n}f \rangle + \|P_{-n}f\|^2.$$

Si $m < n$, entonces $V_{-n} \subseteq V_{-m}$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} P_{-m}P_{-n} &= P_{-n} = P_{-n}^* = (P_{-m}P_{-n})^* = P_{-n}^*P_{-m}^* = P_{-n}P_{-m}, \quad \text{luego} \\ \langle P_{-m}f, P_{-n}f \rangle &= \langle P_{-m}f, P_{-n}^2f \rangle = \langle P_{-n}^*P_{-m}f, P_{-n}f \rangle = \langle P_{-n}P_{-m}f, P_{-n}f \rangle = \\ &= \langle P_{-n}f, P_{-n}f \rangle = \|P_{-n}f\|^2, \end{aligned}$$

pero entonces

$$\|P_{-m}f - P_{-n}f\|^2 = \|P_{-m}f\|^2 - 2\|P_{-n}f\|^2 + \|P_{-n}f\|^2 = \|P_{-m}f\|^2 - \|P_{-n}f\|^2.$$

Como $\{\|P_{-j}f\|\}_{j \in \mathbb{N}}$ era convergente, sale que $\{P_{-j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ es sucesión de Cauchy en $L^2(\mathbb{R})$, que es completo. Luego existe $\lim_{j \rightarrow \infty} P_{-j}f$.

Veamos que $Pf := \lim_{j \rightarrow \infty} P_{-j}f = 0$. Sea $j \in \mathbb{N}$ y $\epsilon > 0$. Luego existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|P_{-N}f - Pf\| < \epsilon$. Pero al tener $N > j$ se cumple $P_{-N}f \in V_{-N} \subseteq V_{-j}$. Como $\epsilon > 0$ era cualquiera, se tiene $Pf \in \overline{V_{-j}} = V_{-j}$. Luego $Pf \in \bigcap_{j \in \mathbb{N}} V_{-j} = \{0\}$, y por lo tanto $Pf = 0$.

Veamos ahora que $\lim_{j \rightarrow \infty} P_jf = f$. Sea $\epsilon > 0$. Como $f \in L^2(\mathbb{R}) = \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j}$, existe $f_\epsilon \in \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ tal que $\|f_\epsilon - f\| < \epsilon$. Luego $f_\epsilon \in V_j$ para algún $j \in \mathbb{N}$. Sea $n \geq j$. Luego $f_\epsilon \in V_j \subseteq V_n$ y por definición de P_n tenemos

$$\|P_n f - f\| \leq \|f_\epsilon - f\| < \epsilon.$$

De este modo $P_n f \rightarrow f$ cuando $n \rightarrow \infty$. □

Observación 5.2. La propiedad 5. de la definición de MRA implica que

$$f(\cdot - 2^{-j}n) \in V_j \quad \forall f \in V_j, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Recordemos que los espacios V_j estaban encajados de manera ascendente. Tiene sentido definir, entonces, a W_j como el complemento ortogonal de V_j en V_{j+1} , de tal manera que

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j.$$

De ahora en más llamamos Q_j a la proyección ortogonal $Q_j : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow W_j$.

La idea principal del análisis multiresolución es construir una base ortonormal $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ a partir de una *wavelet madre* ψ , que construiremos explícitamente. Veamos cómo hacerlo.

Observación 5.3. En un MRA con función de escala φ , para j fijo vale que $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de V_j .

Proposición 5.1. *En el contexto de un MRA con función de escala φ , se cumplen las siguientes afirmaciones:*

- (a) Para $f \in L^2(\mathbb{R})$, vale $P_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k}$, donde la igualdad vale en $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R})}$.
- (b) Para cada j , $Q_j = P_{j+1} - P_j$.
- (c) Los espacios de detalle W_j son ortogonales entre sí. Más aún, se cumple

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j := \left\{ \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_j : \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|f_j\|^2 < \infty, f_j \in W_j \forall j \in \mathbb{Z} \right\}.$$

- (d) Los espacios W_j tienen la misma propiedad de escala de los espacios V_j . Más precisamente, vale que $f \in W_j \iff f(2^{-j}\cdot) \in W_0$.

Demostración.

- (a) Definición de base ortonormal.
- (b) Equivale a ver que $P_{j+1} = Q_j + P_j$. Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$. Basta ver que para cualquier $g \in V_{j+1}$, se cumple

$$\|(P_j + Q_j)f - f\| \leq \|g - f\|.$$

En efecto, escribimos $g = g_1 + g_2$, con $g_1 \in V_j$, $g_2 \in W_j$. Se tiene $\|P_j f - f\| \leq \|g_1 - f\|$, por lo tanto

$$\|P_j f\|^2 - 2\Re\langle P_j f, f \rangle + \|f\|^2 \leq \|g_1\|^2 - 2\Re\langle g_1, f \rangle + \|f\|^2, \quad \text{luego} \quad (5.1)$$

$$\|P_j f\|^2 - 2\Re\langle P_j f, f \rangle \leq \|g_1\|^2 - 2\Re\langle g_1, f \rangle. \quad (5.2)$$

De igual manera vemos que

$$\|Q_j f\|^2 - 2\Re\langle Q_j f, f \rangle \leq \|g_2\|^2 - 2\Re\langle g_2, f \rangle.$$

Notar que $\langle P_j f, Q_j f \rangle = 0$, y por lo tanto

$$\begin{aligned} \|(P_j + Q_j)f - f\| \leq \|g - f\| &\iff \|(P_j + Q_j)f - f\|^2 \leq \|g - f\|^2 \\ \iff \|P_j f + Q_j f\|^2 - 2\Re\langle P_j f + Q_j f, f \rangle + \|f\|^2 &\leq \|g_1 + g_2\|^2 - 2\Re\langle g_1 + g_2, f \rangle + \|f\|^2 \\ \iff \left(\|P_j f\|^2 - 2\Re\langle P_j f, f \rangle \right) + \left(\|Q_j f\|^2 - 2\Re\langle Q_j f, f \rangle \right) &\leq \\ \left(\|g_1\|^2 - 2\Re\langle g_1, f \rangle \right) + \left(\|g_2\|^2 - 2\Re\langle g_2, f \rangle \right), & \end{aligned}$$

que se satisface por (5.1) y (5.2).

- (c) Para ver que los W_j son ortogonales entre sí, suponer $m < n$. Luego $W_m \subseteq V_{m+1} \subseteq V_n$. Como W_n es ortogonal a V_n , resulta $W_m \perp W_n$. Para ver lo segundo, tomar $f \in L^2(\mathbb{R})$ y escribimos

$$\sum_{j=-N}^N Q_j f = \sum_{j=-N}^N P_{j+1} f - P_j f = P_{-N+1} f - P_{-N} f + \dots + P_{N+1} f - P_N f = P_{N+1} f - P_{-N} f.$$

Por el Lema 5, el término de la derecha tiende a f en $L^2(\mathbb{R})$, y por lo tanto $\sum_{j \in \mathbb{Z}} Q_j f$ converge a f .

- (d) Queremos ver que $f \in W_j$ si y sólo si $f(2^{-j}\cdot) \in W_0$. Suponer entonces $f \in W_j$. Por definición, $f \in V_{j+1}$ y $f \perp V_j$. Luego $f(2^{-j}\cdot) \in V_1$. Además, para $g \in V_0$, se cumple $g(2^j\cdot) \in V_j$ y

$$\langle f(2^{-j}\cdot), g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(2^{-j}x)\overline{g(x)}dx = 2^j \int_{\mathbb{R}} f(u)\overline{g(2^ju)}du = 2^j \langle f, g(2^j\cdot) \rangle = 0.$$

De aquí sale que $f(2^{-j}\cdot) \perp V_0$, y por lo tanto $f(2^{-j}\cdot) \in W_0$. Ver que $f(2^{-j}\cdot) \in W_0 \implies f \in W_j$ se logra de manera similar. □

Observación 5.4. Para $f \in L^2(\mathbb{R})$, podemos escribir $\langle f, \varphi_{j,n} \rangle = f * \varphi_{j,0}^* \left(\frac{n}{2^j} \right)$, donde $\varphi^*(x) := \overline{\varphi(x)}$.

Con esta última proposición a mano, nuestra tarea de encontrar la wavelet madre ψ se reduce a encontrar $\psi \in W_0$ tal que sus traslaciones enteras formen una base ortonormal de W_0 . A continuación mencionamos algunos resultados interesantes sobre φ y W_0 .

1. Como $\varphi \in V_0 \subseteq V_1$, y $\{\varphi_{1,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ era base ortonormal de V_1 , podemos escribir

$$\varphi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \varphi_{1,n},$$

donde la igualdad es en el sentido de $L^2(\mathbb{R})$. Se tiene

$$h_n = \langle \varphi, \varphi_{1,n} \rangle \quad \text{y} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} |h_n|^2 = 1. \quad (5.3)$$

Podemos reescribir esto como

$$\varphi = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \varphi(2\cdot - n) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n (T_n \varphi)(2\cdot). \quad (5.4)$$

La identidad (5.4) se denomina *ecuación de escala*. Aplicando la transformada de Fourier a ambos lados

$$\widehat{\varphi} = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \widehat{(T_n \varphi)}(2\cdot) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n e^{-in\frac{\cdot}{2}} \widehat{\varphi} \left(\frac{\cdot}{2} \right).$$

Tenemos entonces

$$\widehat{\varphi}(\xi) = m_0(\xi/2) \widehat{\varphi}(\xi/2) \quad (5.5)$$

donde

$$m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n e^{-in\xi}. \quad (5.6)$$

La igualdad (5.5) vale a.e. en \mathbb{R} . Por el teorema de Carleson, sale que la igualdad en (5.6) también vale a.e. en \mathbb{R} . Notar además que m_0 es una función 2π -periódica.

2. La ortonormalidad de las $\varphi(2\cdot - n)$ da algunas propiedades especiales de m_0 . Se tiene

$$\delta_{k,0} = \langle \varphi, \varphi(\cdot - k) \rangle = \langle \widehat{\varphi}, \widehat{\varphi(\cdot - k)} \rangle \quad (\text{Parseval})$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\xi) \overline{\widehat{\varphi}(\xi)} e^{-ik\xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 e^{ik\xi} d\xi \\
&= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{l2\pi}^{(l+1)2\pi} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 e^{ik\xi} d\xi \quad (\text{Proposición 1.3}) \tag{5.7}
\end{aligned}$$

Ahora, realizando un cambio de variables, para $l \in \mathbb{Z}$ resulta

$$\int_{l2\pi}^{(l+1)2\pi} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 e^{ik\xi} d\xi = \int_0^{2\pi} |\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi l)|^2 e^{ik\xi} d\xi. \tag{5.8}$$

Juntando (5.7), (5.8) y [7, Teorema 1.38], la suma pasa dentro de la integral y podemos escribir

$$\delta_{k,0} = \int_0^{2\pi} e^{ik\xi} \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi l)|^2 d\xi. \tag{5.9}$$

También por [7, Teorema 1.38], sale que la función $\eta(\xi) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi l)|^2$ está bien definida a.e. en \mathbb{R} . Más aún, $\eta \in L^1([0, 2\pi])$. Notar que (5.9) nos dice que los coeficientes de Fourier de η son todos nulos, menos el coeficiente $a_0(\eta) = (2\pi)^{-1}$. Por el corolario 2.3, deducimos que

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi l)|^2 = \eta(\xi) = (2\pi)^{-1} \quad \text{a.e.} \tag{5.10}$$

Ahora, haciendo $\zeta = \xi/2$ y recordando (5.5), escribimos

$$\begin{aligned}
(2\pi)^{-1} &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi l)|^2 = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left| m_0 \left(\frac{1}{2}(\xi + 2\pi l) \right) \right|^2 \left| \widehat{\varphi} \left(\frac{1}{2}(\xi + 2\pi l) \right) \right|^2 \\
&= \sum_{l \in \mathbb{Z}} |m_0(\zeta + \pi l)|^2 |\widehat{\varphi}(\zeta + \pi l)|^2. \tag{5.11}
\end{aligned}$$

Podemos partir la suma (5.11) entre los l pares y los l impares, obteniendo

$$\begin{aligned}
(2\pi)^{-1} &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} |m_0(\zeta + 2\pi l)|^2 |\widehat{\varphi}(\zeta + 2\pi l)|^2 + \sum_{l \in \mathbb{Z}} |m_0(\zeta + \pi(2l+1))|^2 |\widehat{\varphi}(\zeta + \pi(2l+1))|^2 \\
&= |m_0(\zeta)|^2 \underbrace{\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\zeta + 2\pi l)|^2}_{=(2\pi)^{-1}} + |m_0(\zeta + \pi)|^2 \underbrace{\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\zeta + \pi + 2\pi l)|^2}_{=(2\pi)^{-1}} \\
&= |m_0(\zeta)|^2 (2\pi)^{-1} + |m_0(\zeta + \pi)|^2 (2\pi)^{-1} \quad \text{para casi todo } \zeta.
\end{aligned}$$

Pero entonces resulta

$$1 = |m_0(\zeta)|^2 + |m_0(\zeta + \pi)|^2 \quad \text{para casi todo } \zeta. \tag{5.12}$$

3. Caractericemos ahora a W_0 . Notemos que $f \in W_0$ si y sólo si $f \in V_1$ y $f \perp V_0$. Para $f \in V_1$, podemos escribir

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \varphi_{1,n} = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \varphi(2 \cdot -n)$$

donde $f_n = \langle f, \varphi_{1,n} \rangle$. En el lado de Fourier, esto queda

$$\widehat{f} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{-in \frac{\cdot}{2}} \widehat{\varphi} \left(\frac{\cdot}{2} \right).$$

De aquí sale, entonces,

$$\widehat{f}(\xi) = m_f(\xi/2)\widehat{\varphi}(\xi/2) \quad (5.13)$$

donde

$$m_f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{-in\xi}. \quad (5.14)$$

Notar que se hizo con f lo mismo que se hizo con φ . La igualdad (5.13) vale a.e., y la igualdad (5.14) vale a.e. por el teorema de Carleson. Como $f \perp V_0$, tenemos $\langle f, \varphi_{0,n} \rangle = 0 \forall n \in \mathbb{Z}$. Por Parseval, esto es lo mismo que

$$0 = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{in\xi} \overline{\widehat{\varphi}(\xi)} d\xi$$

para cualquier $n \in \mathbb{Z}$. Con los mismos razonamientos utilizados en (5.7), (5.8) y (5.9) la anterior igualdad se convierte en

$$0 = \int_0^{2\pi} e^{in\xi} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(\xi + 2\pi l) \overline{\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi l)} d\xi.$$

Nuevamente, por [7, Teorema 1.38] la suma dentro de la integral anterior define una función en $L^1([0, 2\pi])$ cuyos coeficientes de Fourier son todos nulos. Se sigue que

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(\xi + 2\pi l) \overline{\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi l)} = 0 \quad \text{para casi todo } \xi. \quad (5.15)$$

Por el mismo teorema, la serie anterior converge absolutamente para casi todo ξ . Esto, sumado a (5.5), (5.10) y (5.13), nos permite partir (5.15) entre los l pares y los l impares y obtener

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} m_f(\zeta + \pi l) \overline{m_0(\zeta + \pi l)} |\widehat{\varphi}(\zeta + \pi l)|^2 \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} m_f(\zeta + 2\pi l) \overline{m_0(\zeta + 2\pi l)} |\widehat{\varphi}(\zeta + 2\pi l)|^2 \\ &\quad + \sum_{l \in \mathbb{Z}} m_f(\zeta + 2\pi l + \pi) \overline{m_0(\zeta + 2\pi l + \pi)} |\widehat{\varphi}(\zeta + 2\pi l + \pi)|^2 \\ &= m_f(\zeta) \overline{m_0(\zeta)} \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\zeta + 2\pi l)|^2 + m_f(\zeta + \pi) \overline{m_0(\zeta + \pi)} \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\zeta + \pi + 2\pi l)|^2 \\ &= m_f(\zeta) \overline{m_0(\zeta)} (2\pi)^{-1} + m_f(\zeta + \pi) \overline{m_0(\zeta + \pi)} (2\pi)^{-1}. \end{aligned}$$

Nos queda entonces

$$0 = m_f(\zeta) \overline{m_0(\zeta)} + m_f(\zeta + \pi) \overline{m_0(\zeta + \pi)} \quad \text{para casi todo } \zeta. \quad (5.16)$$

Como $m_0(\zeta)$ y $m_0(\zeta + \pi)$ no pueden anularse simultáneamente en un conjunto de medida no nula (por 5.12) tiene sentido definir la función λ dada por

$$\lambda(\zeta) = \begin{cases} \frac{m_f(\zeta)}{m_0(\zeta + \pi)} & m_0(\zeta + \pi) \neq 0 \\ \frac{-m_f(\zeta + \pi)}{m_0(\zeta)} & m_0(\zeta) \neq 0. \end{cases}$$

De (5.16), sale que λ está bien definida, es 2π -periódica y es tal que

$$\lambda(\zeta) + \lambda(\zeta + \pi) = 0 \quad \text{a.e.} \quad (5.17)$$

y además

$$m_f(\zeta) = \lambda(\zeta) \overline{m_0(\zeta + \pi)} \quad \text{a.e.} \quad (5.18)$$

Definimos ahora

$$\nu(\zeta) := \lambda(\zeta/2 + \pi) e^{-i\zeta/2}. \quad (5.19)$$

Notar que sustituyendo (5.18) y (5.19) en (5.13) obtenemos

$$\widehat{f}(\xi) = e^{i\xi/2} \overline{m_0(\xi/2 + \pi)} \nu(\xi) \widehat{\varphi}(\xi/2). \quad (5.20)$$

Veamos que $\nu \in L^2([0, 2\pi])$. Efectivamente, por (5.18),

$$\begin{aligned} \infty &> \int_0^{2\pi} |m_f(\xi)|^2 d\xi = \int_0^{2\pi} |\lambda(\xi)|^2 |m_0(\xi + \pi)|^2 d\xi \\ &= \int_0^\pi |\lambda(\xi)|^2 |m_0(\xi + \pi)|^2 d\xi + \int_\pi^{2\pi} |\lambda(\xi)|^2 |m_0(\xi + \pi)|^2 d\xi \\ &= \int_0^\pi |\lambda(\xi)|^2 [|m_0(\xi + \pi)|^2 + |m_0(\xi)|^2] d\xi \quad (\text{usar (5.17)}) \\ &= \int_0^\pi |\lambda(\xi)|^2 d\xi \quad (\text{usar (5.12)}) \end{aligned}$$

Luego, recordando (5.17) y cómo habíamos definido a ν en (5.19)), podemos escribir

$$\int_0^{2\pi} |\nu(\xi)|^2 d\xi = \int_0^{2\pi} |\lambda(\xi/2 + \pi)|^2 d\xi = 2 \int_0^\pi |\lambda(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

Hemos visto, entonces, que

$$f \in W_0 \implies \widehat{f}(\xi) = \overbrace{e^{i\xi/2} \overline{m_0(\xi/2 + \pi)} \nu(\xi)}^{m_f(\xi/2)} \widehat{\varphi}(\xi/2) \quad \text{para casi todo } \xi \quad (5.21)$$

donde ν es una función 2π -periódica de cuadrado integrable en $[0, 2\pi]$. Queremos ahora probar una suerte de resultado recíproco: afirmamos que si $f \in V_1$ y además \widehat{f} admite una escritura como en (5.20) entonces $f \perp V_0$. En efecto, para $n \in \mathbb{Z}$ se tiene

$$\langle f, \varphi(\cdot - n) \rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{\varphi(\cdot - n)} \rangle = \int_0^{2\pi} e^{in\xi} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(\xi + 2\pi l) \overline{\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi l)} d\xi.$$

El intercambio de límites está justificado por los mismos argumentos de (5.7), (5.8) y (5.9). La serie dentro de la integral converge absolutamente y define una función en $L^1([0, 2\pi])$. Partiendo la suma los l pares e impares obtenemos

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(\xi + 2\pi l) \overline{\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi l)} = \left(m_f(\zeta) \overline{m_0(\zeta)} + m_f(\zeta + \pi) \overline{m_0(\zeta + \pi)} \right) (2\pi)^{-1} = 0$$

para casi todo ζ .

4. Teniendo a mano esta caracterización de W_0 , ya tenemos un candidato para la wavelet ψ . La igualdad (5.20) sugiere escribir

$$\widehat{\psi}(\xi) = e^{i\xi/2} \overline{m_0(\xi/2 + \pi)} \widehat{\varphi}(\xi/2). \quad (5.22)$$

Antes de ver que la definición es buena, suponer por un momento que lo es. En ese caso, para $f \in W_0$ podemos escribir $\widehat{f}(\xi) = \nu(\xi) \widehat{\psi}(\xi)$ con $\nu \in L^2([0, 2\pi])$ o sea,

$$\widehat{f}(\xi) = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \nu_k e^{-in\xi} \right) \widehat{\psi}(\xi) \quad (5.23)$$

o equivalentemente

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \nu_k \psi(\cdot - k)$$

de donde sale que $\{\psi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ genera a W_0 . Para ver que ψ pertenece a V_1 , basta escribir

$$\psi = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{h_n} (-1)^n \varphi(2 \cdot + (n+1)).$$

Por las propiedades de escala de V_1 , sale que $\psi \in V_1$. Aplicando la transformada de Fourier, vemos que $\widehat{\psi}$ satisface (5.22). Recordemos la caracterización de W_0 : considerar a ψ en vez de f , y notemos que ψ admite una escritura como en (5.20) con $\nu(\xi) \equiv 1$. Luego $\psi \perp V_0$, y por lo tanto $\psi \in W_0$. La ortonormalidad de las $\psi(\cdot - k)$ es fácil de chequear:

$$\begin{aligned} \langle \psi, \psi(\cdot - k) \rangle &= \langle \widehat{\psi}, \widehat{\psi(\cdot - k)} \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{ik\xi} |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_0^{2\pi} e^{ik\xi} \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(\xi + 2\pi l)|^2. \end{aligned}$$

Ahora, recordando (5.22) y utilizando los argumentos usuales para asegurar intercambio de límites y convergencia,

$$\begin{aligned} \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi l)|^2 &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} |m_0(\xi/2 + \pi l + \pi)|^2 |\widehat{\varphi}(\xi/2 + \pi l)|^2 \\ &= |m_0(\xi/2 + \pi)|^2 \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi/2 + 2\pi l)|^2 \\ &\quad + |m_0(\xi/2)|^2 \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi/2 + \pi + 2\pi l)|^2 \\ &= (2\pi)^{-1} \left[|m_0(\zeta)|^2 + |m_0(\zeta + \pi l)|^2 \right] \quad \text{a.e.} \quad (\text{por (5.10)}) \\ &= (2\pi)^{-1} \quad \text{a.e.} \quad (\text{por (5.12)}) \end{aligned}$$

De aquí sale que $\langle \psi, \psi(\cdot - k) \rangle = \delta_{k,0}$. Recordando el comentario hecho en (5.23), se deduce que $\{\psi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de W_0 .

El fruto del trabajo hecho en los últimos cuatro puntos es la demostración del siguiente teorema.

Teorema 5.1. *Supongamos que $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ es una escalera de subespacios cerrados de $L^2(\mathbb{R})$ que satisfacen las seis condiciones de la definición de un MRA. Luego existe una base ortonormal $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ dada por una wavelet madre ψ tal que*

$$P_{j+1} = P_j + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \cdot, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}. \quad (5.24)$$

Una posibilidad para la construcción de la wavelet ψ es

$$\widehat{\psi}(\xi) = e^{i\xi/2} \overline{m_0(\xi/2 + \pi)} \widehat{\varphi}(\xi/2)$$

(con m_0 definido como en (5.6), (5.3)), o equivalentemente

$$\psi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{h_{-n-1}} (-1)^{n-1} \varphi_{1,n}. \quad (5.25)$$

Una observación importante es que el MRA no determina unívocamente a ψ . Cualquier función $\psi^\#$ que satisfaga

$$\widehat{\psi^\#}(\xi) = \rho(\xi) \widehat{\psi}(\xi) \quad (5.26)$$

donde ρ es una función 2π -periódica con $|\rho(\xi)| \equiv 1$, también cumple que $\{\psi^\#(\cdot - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es base ortonormal de W_0 . En efecto, tenemos

$$\langle \psi^\#, \psi^\#(\cdot - n) \rangle = \langle \widehat{\psi^\#}, \widehat{\psi^\#(\cdot - n)} \rangle = \langle \rho \widehat{\psi}, e^{-in\cdot} \rho \widehat{\psi} \rangle = \langle \psi, \psi(\cdot - n) \rangle$$

Como ρ es de cuadrado integrable en $[0, 2\pi]$, podemos escribir

$$\widehat{\psi^\#}(\xi) = \rho(\xi) \widehat{\psi}(\xi) = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \rho_k e^{-ink} \right) \widehat{\psi}(\xi)$$

o equivalentemente

$$\psi^\# = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \rho_k \psi(\cdot - k)$$

de donde sale que $\psi^\# \in W_0$. Para ver que las traslaciones enteras de $\psi^\#$ generan W_0 , notar que para $f \in W_0$ tenemos, por (5.21),

$$\widehat{f}(\xi) = \nu(\xi) (\rho(\xi))^{-1} \widehat{\psi^\#}(\xi)$$

Procediendo como en (5.23) con $\tilde{\nu}(\xi) = \nu(\xi)(\rho(\xi))^{-1}$ en vez de ν , resulta lo que se quiere probar.

Esta libertad nos permite definir, en vez de (5.25),

$$\psi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \varphi_{1,n} \quad (5.27)$$

donde $g_n = (-1)^n \overline{h_{-n+1}}$. Esto se logra tomando $\rho(\xi) = -e^{-i\xi}$.

Observación 5.5. Un MRA se puede construir como hemos hecho nosotros, a partir de los subespacios de aproximación $\{V_j\}$. También se puede obtener a partir de la función de escala φ o a partir de los coeficientes h_n de la ecuación de escala (5.4) llamados los coeficientes de filtro de la wavelet correspondiente al MRA.

En primer lugar notamos que la ecuación de escala (5.4) es una condición necesaria sobre φ pero no es suficiente para que esta sea una función de escala asociada a un MRA. Por ejemplo, la función $\varphi(x) = (1 - |x|)\chi_{\{|x| \leq 1\}}(x)$ satisface la siguiente ecuación de escala

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\varphi(2x - 1) + \varphi(2x) + \frac{1}{2}\varphi(2x + 1).$$

Sin embargo, φ y $\varphi(\cdot \pm 1)$ no son ortogonales.

Hemos visto que si $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ es función de escala asociada a un MRA entonces dado m_0 como en (5.6), este satisface necesariamente (5.12). El Teorema de Mallat-Meyer [5, Teorema 7.2] muestra no sólo el hecho mencionado anteriormente sino una suerte de recíproca. Pero antes de pasar a dicho resultado veamos el siguiente resultado tomado de [2, Teorema 1.7]

Sea $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ una colección de subespacios cerrados de $L^2(\mathbb{R})$ que cumple todas las condiciones de la Definición 5.1 de MRA excepto la número 2. Si la función de escala φ dada por la condición 6. de dicha definición es tal que $|\widehat{\varphi}|$ es continua en 0, entonces $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$ si y sólo si $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$.

Este resultado nos dice que si φ es una función de escala integrable asociada a un MRA entonces tenemos otra condición necesaria para m_0 además de la condición (5.12). En efecto, de (5.5) se deduce que m_0 es continua en 0 y

$$m_0(0) = 1. \tag{5.28}$$

Pasemos entonces a enunciar teorema recíproco asegura las condiciones suficientes sobre m_0 para dar paso a un MRA:

Si m_0 es una función 2π -periódica, C^1 en un entorno del cero, satisfaciendo (5.12), (5.28) y que $\inf\{|m_0(\xi)| : |\xi| \leq \frac{\pi}{2}\} > 0$, entonces $\widehat{\varphi}(\xi) := \prod_{p=1}^{\infty} m_0(2^{-p}\xi)/\sqrt{2\pi}$ es la transformada de Fourier de una función de escala $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ asociada a un MRA.

5.2. Ejemplos

Para esta parte utilizamos principalmente [4].

- El sistema de Haar en $L^2(0, 1)$ está dado por

$$\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, k \leq 2^j - 1} \cup \{\chi_{[0,1]}\}$$

donde

$$\begin{aligned} \psi(t) &:= \chi_{[0,1/2)}(t) - \chi_{[1/2,1)}(t) \\ \psi_{j,k}(t) &:= 2^{j/2} \psi\left(2^j \left(t - \frac{k}{2^j}\right)\right). \end{aligned}$$

Es fácil ver que forman un sistema ortonormal.

Denotamos los intervalos diádicos por $I_{j,k} = [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$. Para j fijo, los intervalos de longitud 2^{-j} forman una partición de $[0, 1]$. Cada función $\psi_{j,k}$ está asociada a un intervalo $I_{j,k}$. Consideramos, para cada $f \in L^2(0, 1)$, las proyecciones

$$Q_j(f) := \sum_{0 \leq k < 2^{j-1}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}$$

y definimos las sumas parciales de Haar $P_0(f) := \int_0^1 f(t) dt$ y

$$P_M(f) := \sum_{0 \leq j \leq M} Q_j(f) + P_0(f).$$

De este modo vemos rápidamente que

$$P_1(f) = \left(\int_0^{1/2} f(t) dt \right) \chi_{[0,1/2)} + \left(\int_{1/2}^1 f(t) dt \right) \chi_{[1/2,1)}$$

(donde en general denotamos $f_I = \frac{1}{|I|} \int_I f$). Más generalmente

$$P_M(f) = \sum_k \left(\frac{1}{|I_{M,k}|} \int_{I_{M,k}} f(t) dt \right) \chi_{I_{M,k}}$$

donde la suma sobre k se mueve abarcando a todos los intervalos " $I_{M,k}$ " que son de longitud 2^{-M} y forman una partición de $[0, 1]$. De este modo, dado $x \in [0, 1]$, fijado M , existe un k para el cual $x \in I_{M,k}$, tenemos entonces que $P_M(f)(x) = \int_{I_{M,k}} f(t) dt$. Para toda $f \in C([0, 1])$, sus promedios $P_M(f)$ convergen, cuando $M \rightarrow \infty$, a f uniformemente. Luego, si $f \in C([0, 1])$ su correspondiente serie de Fourier-Haar converge uniformemente a f .

Finalmente, para la convergencia en $\|\cdot\|_2$ usaremos que las funciones continuas son densas en $L^2(0, 1)$. Dada $f \in L^2(0, 1)$, para cualquier $\varepsilon > 0$, existen funciones g y h tales que $f = g + h$, donde $g \in C([0, 1])$ y h tiene $\|h\|_2$ pequeña, $\|h\|_2 < \varepsilon/4$. Por lo visto antes, sabemos que para M suficientemente grande

$$\|P_M(g) - g\|_2 \leq \|P_M(g) - g\|_\infty < \varepsilon/2.$$

Como $\|P_M(f)\|_2 \leq \|f\|_2$ para todo M , usando desigualdad triangular conseguimos

$$\|P_M(f) - f\|_2 \leq \|P_M(g) - g\|_2 + \|P_M(h) - h\|_2 \leq \varepsilon/2 + 2\|h\|_2 < \varepsilon.$$

- Shannon MRA: [4, Ejemplos 10.1 y 10.5]

El esquema de Fourier no provee un MRA.

Para $j \geq 0$ entero, sea V_j el conjunto de todos los polinomios trigonométricos $\sum_{|k| \leq j} a_k e^{2\pi i k t}$ de grado a lo sumo j . Dada $f \in L^2([0, 1])$, su proyección a V_j está dada por la j -ésima suma parcial de Fourier $S_j f$. Tenemos, por lo tanto, que $S_j f$ es la proyección ortogonal de f sobre V_j . Para cada $j \geq 0$, el subespacio de W_j es el formado por los polinomios de grado exactamente $j+1$ dados por

el detalle $a_{-(j+1)}(f)e^{-2\pi i(j+1)t} + a_{(j+1)}(f)e^{2\pi i(j+1)t}$ para alguna $f \in L^2$. Además, como sabemos que $\{e^{2\pi i k(\cdot)}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2([0, 1])$, tenemos $L^2([0, 1]) = V_0 \oplus \bigoplus_{j=0}^{\infty} W_j$.

Los subespacios V_j no cumplen la propiedad de dilatación por duplicación 4. Esta se logra si consideramos solamente el conjunto de subespacios $\{V_{2^j}\}_{j \geq 0}$. Para esta elección, la proyección de una función f a los nuevos subespacios de detalle está dada por los subespacios $S_{2^{j+1}}f(t) - S_{2^j}f(t) = \sum_{2^j < |k| \leq 2^{j+1}} a_k(f)e^{2\pi i k t}$. Se logra así un MRA indexado en los enteros no negativos y comenzando por V_0 .

Para lograr efectivamente un MRA uno debe considerar pasar a las frecuencias continuas. En $L^2(\mathbb{R})$ consideramos las proyecciones ortogonales, indexadas en $j \in \mathbb{Z}$, dadas por $P_j f(x) = \int_{|\omega| \leq 2^j} \hat{f}(\omega) e^{2\pi i \omega x} d\omega$. Esto da lugar al MRA de Shannon cuya función de escala φ es tal que su transformada de Fourier es la función característica de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

5.3. Conexión con subband filtering schemes

El análisis multirresolución lleva naturalmente a una forma rápida y jerárquica de calcular los coeficientes de una función f con respecto a la base wavelet asociada al MRA. Supongamos que tenemos de antemano los productos internos de f contra las $\varphi_{0,k}$. Es fácil obtener los coeficientes $\langle f, \psi_{-j,k} \rangle$ para $j \geq 1$. Recordando cómo había quedado la wavelet en (5.27), escribimos

$$\psi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \varphi_{1,n}$$

donde $g_n = (-1)^n \overline{h_{-n+1}}$. De esta forma

$$\begin{aligned} \psi_{-j,k} &= 2^{-j/2} \psi(2^{-j} \cdot - k) = 2^{-j/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \varphi_{1,n}(2^{-j} \cdot - k) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n 2^{-j/2} \sqrt{2} \varphi(2(2^{-j} \cdot - k) - n) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \varphi_{-j+1, 2k+n} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_{n-2k} \varphi_{-j+1, n}. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Se sigue que

$$\langle f, \psi_{-1,k} \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{g_{n-2k}} \langle f, \varphi_{0,n} \rangle.$$

Notar que los $\langle f, \psi_{-1,k} \rangle$ se consiguen convolucionando la sucesión $\{\langle f, \varphi_{0,n} \rangle\}$ con la sucesión $\{g_n^* = \overline{g_{-n}}\}$ y quedándonos solamente con las entradas pares. Similarmente, tenemos

$$\langle f, \psi_{-j,k} \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{g_{n-2k}} \langle f, \varphi_{-j+1,n} \rangle \tag{5.30}$$

que puede ser usado para calcular los $\langle f, \psi_{-j,k} \rangle$ por medio de la misma operación (convolución con g^* , diezmado por un factor de 2) a partir de los $\langle f, \varphi_{-j+1,k} \rangle$ si estos son conocidos. Por (5.4),

$$\varphi_{-j,k} = 2^{-j/2} \varphi(2^{-j} \cdot - k) = 2^{-j/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \varphi_{1,n}(2^{-j} \cdot - k)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n 2^{\frac{-j+1}{2}} \varphi(2^{-j+1} \cdot - (2k + n)) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \varphi_{-j+1, 2k+n} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{n-2k} \varphi_{-j+1, n}
\end{aligned} \tag{5.31}$$

y por lo tanto

$$\langle f, \varphi_{-j, k} \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{h_{n-2k}} \langle f, \varphi_{-j+1, n} \rangle. \tag{5.32}$$

El procedimiento a seguir es ahora claro: empezando con los $\langle f, \varphi_{0, k} \rangle$, calculamos los $\langle f, \psi_{-1, k} \rangle$ mediante (5.30) y los $\langle f, \varphi_{-1, k} \rangle$ mediante (5.32). Después, usamos (5.30) y (5.32) para obtener los $\langle f, \psi_{-2, k} \rangle$ y los $\langle f, \varphi_{-2, k} \rangle$ a partir de los $\langle f, \varphi_{-1, k} \rangle$, y así sucesivamente. En cada paso, no sólo calculamos los coeficientes de wavelet $\langle f, \psi_{-j, k} \rangle$ del correspondiente nivel $-j$, también se consiguen los $\langle f, \varphi_{-j, k} \rangle$ del mismo nivel, que serán necesarios para el cálculo de los próximos coeficientes de wavelet.

El proceso también puede ser visto como el cómputo de aproximaciones cada vez más groseras de f , junto con la diferencia en “información” (recordar la parte (b) de la proposición 5.1) entre dos niveles sucesivos. En este contexto, si empezamos con la aproximación $f^0 = P_0 f$, y descomponemos $f^0 \in V_0 = V_{-1} \oplus W_{-1}$ como $f^0 = f^{-1} + \delta^{-1}$, y $\delta^{-1} = f^0 - f^{-1} = Q_{-1} f$ es lo que se “pierde” en la transición $f^0 \rightarrow f^{-1}$. Como en estos espacios tenemos las bases ortonormales conocidas, escribimos

$$f^0 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n^0 \varphi_{0, n}, \quad f^{-1} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n^{-1} \varphi_{-1, n}, \quad \delta^{-1} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^{-1} \psi_{-1, n}$$

donde $c_k^0 = \langle f, \varphi_{0, k} \rangle$, y por (5.30), (5.32) se tiene

$$c_k^{-1} = \langle f, \varphi_{-1, k} \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{h_{n-2k}} c_n^0, \quad d_k^{-1} = \langle f, \psi_{-1, k} \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{g_{n-2k}} c_n^0.$$

Luego, valen las igualdades

$$c^{-1} = h^* * c^0[2\cdot] \quad d^{-1} = g^* * c^0[2\cdot]. \tag{5.33}$$

De igual manera $f^{-1} \in V_{-1} = V_{-2} \oplus W_{-2}$ puede descomponerse como $f^{-1} = f^{-2} + \delta^{-2}$, con $f^{-2} \in V_{-2}$, $\delta^{-2} \in W_{-2}$. Nuevamente tenemos

$$f^{-2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n^{-2} \varphi_{-2, n}, \quad \delta^{-2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^{-2} \psi_{-2, n}.$$

Razonando de manera igual a la anterior se obtienen

$$c^{-2} = h^* * c^{-1}[2\cdot] \quad d^{-2} = g^* * c^{-1}[2\cdot]$$

y así seguimos sucesivamente. Una representación esquemática del proceso puede verse en la Figura 16.

En la práctica, nos detendremos luego de un número finito de niveles, i.e., habremos reescrito la información en c^0 como $d^{-1}, d^2, \dots, d^{-J}$ y una aproximación grosera final

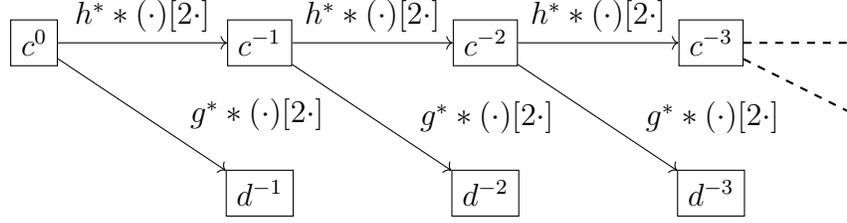


Figura 16: Algoritmo de cascada.

c^{-j} . Así como podemos conocer los c^j y los d^j para $j < n_0$ si conocemos c^{n_0} , es posible “ir hacia adelante” y reconstruir c^{j+1} a partir de c^j y d^j .

$$f^{j+1} = f^j + \delta^j = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n^j \varphi_{j,n} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^j \psi_{j,n}.$$

Luego, haciendo uso de (5.29) y (5.31),

$$\begin{aligned} c_k^{j+1} &= \langle f^{j+1}, \varphi_{j+1,k} \rangle = \left\langle \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n^j \varphi_{j,n} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^j \psi_{j,n}, \varphi_{j+1,k} \right\rangle \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n^j \langle \varphi_{j,n}, \varphi_{j+1,k} \rangle + \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^j \langle \psi_{j,n}, \varphi_{j+1,k} \rangle \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n^j \left\langle \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{l-2n} \varphi_{j+1,l}, \varphi_{j+1,k} \right\rangle + \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^j \left\langle \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_{l-2n} \varphi_{j+1,l}, \varphi_{j+1,k} \right\rangle \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[h_{k-2n} c_n^j + g_{k-2n} d_n^j \right] \end{aligned} \quad (5.34)$$

En términos de ingeniería eléctrica, (5.33) y (5.34) son los pasos de análisis y de síntesis de un *subband filtering scheme* con reconstrucción exacta. Una sucesión entrante $\{c_n^0\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es convolucionada contra un filtro pasa bajo y un filtro pasa alto. Las sucesiones resultantes son submuestreadas, es decir, sólo nos quedamos con las entradas pares. Esto es exactamente lo que pasa en (5.33). Para ver en más detalle cómo este algoritmo de cascada es similar a pasar por un filtro, cualquier sucesión $\{c_n^0\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de cuadrado sumable puede ser interpretada como las muestras de una función $\gamma \in L^2(\mathbb{R})$ de ancho de banda π , i.e., $\text{supp } \hat{\gamma} \subseteq [-\pi, \pi]$ (ver teorema 1.7):

$$\gamma = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma(n) \text{sinc}(\cdot - n)$$

Una operación de filtrado corresponde a “cortar” a $\hat{\gamma}$ con una función $\hat{\alpha}$, con α de ancho de banda π , digamos

$$\hat{\alpha} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{-in} \chi_{[-\pi, \pi]}. \quad (5.35)$$

Para facilitar cuestiones de convergencia, supongamos que $\hat{\alpha} \hat{\gamma} \in L^2(\mathbb{R})$. Esto pasa, en particular, si $\hat{\alpha} \in L^\infty(\mathbb{R})$. El resultado es otra función de ancho de banda limitado, $\alpha * \gamma$,

$$\widehat{\alpha * \gamma} = \hat{\alpha} \hat{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[\sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{n-m} c_m \right] e^{-in} \chi_{[-\pi, \pi]}.$$

La expresión entre corchetes está justificada por la proposición 2.6. Más aún, por teorema 1.7, la suma entre corchetes es el valor $\alpha * \gamma(n)$, y

$$\alpha * \gamma = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[\sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{n-m} c_m \right] \text{sinc}(\cdot - n).$$

El filtro α se dice *pasa bajo* si $\hat{\alpha}$ está concentrado principalmente en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, y *pasa alto* si $\hat{\alpha}$ está concentrado principalmente en $\{\xi : \pi/2 \leq |\xi| \leq \pi\}$. Los filtros *pasa bajo* y *pasa alto* “ideales” son

$$\hat{\alpha}_L = \chi_{[-\pi, \pi]} \quad \text{y} \quad \hat{\alpha}_H = \chi_{\{\pi/2 \leq |\xi| \leq \pi\}}.$$

Notar que estos filtros satisfacen la hipótesis adicional $\hat{\alpha}_L, \hat{\alpha}_H \in L^\infty(\mathbb{R})$. Los correspondientes a_n para estos filtros (como en (5.35)) son

$$a_n^L = \begin{cases} \frac{1}{2} & n = 0 \\ 0 & n = 2k, k \neq 0 \\ \frac{(-1)^k}{(2k+1)\pi} & n = 2k+1 \end{cases} \quad (5.36)$$

$$a_n^H = \begin{cases} \frac{1}{2} & n = 0 \\ 0 & n = 2k, k \neq 0 \\ \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)\pi} & n = 2k+1 \end{cases} \quad (5.37)$$

Cuando el filtro *pasa bajo* ideal α_L es aplicado a γ , el resultado es una función de ancho de banda limitado con $\text{supp } \widehat{\alpha_L * \gamma} \subseteq [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Luego (ver (1.7))

$$\alpha_L * \gamma = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[\sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{2n-m}^L c_m \right] \text{sinc}\left(\frac{\cdot}{2} - n\right). \quad (5.38)$$

Para ver qué ocurre cuando aplicamos el filtro *pasa alto* ideal α_H a γ , hace falta un poco de imaginación. Afirmamos que $\alpha_H * \gamma$ es la traslación en frecuencia de una función cuya transformada tiene soporte en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Para darle sentido a esta afirmación, escribimos (recordar (1.7))

$$\widehat{\alpha_H * \gamma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n e^{-in} \chi_{[-\pi, \pi]}$$

donde $b_n = (\alpha_H * \gamma)(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{n-m}^H c_m$. Consideramos ahora la función auxiliar

$$F = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n e^{-in(\cdot + \pi)} \chi_{[-\pi, \pi]} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n (-1)^n e^{-in\cdot} \chi_{[-\pi, \pi]}.$$

Ahora F es la transformada de Fourier de una función continua \tilde{F} de ancho de banda π . De vuelta por (1.7), tenemos $\tilde{F}(n) = b_n(-1)^n$, y \tilde{F} está totalmente determinada por sus valores en $2\mathbb{Z}$.

$$\tilde{F} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_{2n} \operatorname{sinc}\left(\frac{\cdot}{2} - n\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_{2n} (T_n \operatorname{sinc})\left(\frac{\cdot}{2}\right)$$

Aplicando Fourier, obtenemos

$$\begin{aligned} F = \tilde{F} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_{2n} 2 \widehat{T_n \operatorname{sinc}}(2 \cdot) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_{2n} 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i2n \cdot} \chi_{[-\pi, \pi]}(2 \cdot) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_{2n} e^{-i2n \cdot} \chi_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \end{aligned}$$

F es el límite puntual a.e. (por Carleson) y en $L^2(\mathbb{R})$ de la serie anterior. Es fácil chequear que

$$\widehat{(\alpha_H * \gamma)}(\xi) = \begin{cases} 0 & |\xi| \leq \frac{\pi}{2} \vee |\xi| \geq \pi \\ F(\xi + \pi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_{2n} e^{-i2n\xi} \chi_{[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]}(\xi) & \xi \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \\ F(\xi - \pi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_{2n} e^{-i2n\xi} \chi_{[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]}(\xi) & \xi \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

de donde se deduce que

$$\widehat{\alpha_H * \gamma} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_{2n} e^{-i2n\xi} \left[\chi_{[-\pi, -\frac{\pi}{2}]} + \chi_{[\frac{\pi}{2}, \pi]} \right]. \quad (5.39)$$

Es directo calcular la transformada de los términos de esta sumatoria:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i2nx} \left[\chi_{[-\pi, -\frac{\pi}{2}]}(x) + \chi_{[\frac{\pi}{2}, \pi]}(x) \right] e^{-ix\xi} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} e^{ix(2n-\xi)} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{ix(2n-\xi)} dx \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-i\pi(2n-\xi)/2} - e^{i\pi(2n-\xi)/2}}{i(2n+\xi)} + \frac{e^{i\pi(2n-\xi)} - e^{-i\pi(2n-\xi)}}{i(2n+\xi)} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{-\operatorname{sen}(\pi(2n-\xi)/2) + \operatorname{sen}(\pi(2n-\xi))}{\frac{2n-\xi}{2}} \right] \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sinc}((\xi-2n)/2) [2 \cos(\pi(\xi-2n)/2)]. \end{aligned}$$

Reemplazando b_{2n} y la expresión anterior en (5.39), finalmente queda

$$\alpha_H * \gamma = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{2n-m}^H c_m \right) \operatorname{sinc}((\cdot - 2n)/2) [2 \cos(\pi(\cdot - 2n)/2) - 1]. \quad (5.40)$$

Ahora, en principio, la convergencia de la suma (5.40) es sólomente en $L^2(\mathbb{R})$. Utilizando los mismos argumentos de la demostración del teorema 1.7 vemos que la convergencia es puntual y para todo punto. Sólo falta aclarar que el término con el coseno está uniformemente acotado por 2, y que $\{(\alpha_H * \gamma)(n)\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$. También en (5.38) vale la evaluación punto a punto. Como solo las entradas pares de las convoluciones $a^L * c$ y $a^H * c$ son suficientes para caracterizar a $\alpha_L * \gamma$ y $\alpha_H * \gamma$ absolutamente, tiene sentido conservar sólomente estas. Ésta es la heurística detrás de diezmar por un factor de dos luego de convolucionar. Reconstruir los c_m originales de las dos sucesiones filtradas y submuestreadas

$$c_n^L = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{2n-m}^L c_m, \quad c_n^H = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{2n-m}^H c_m \quad (5.41)$$

es fácil. Primero, recordar que $\hat{\alpha}_L + \hat{\alpha}_H = \chi_{[-\pi, \pi]}$ y por lo tanto

$$\hat{\gamma} = \chi_{[-\pi, \pi]} \hat{\gamma} = (\hat{\alpha}_L + \hat{\alpha}_H) \hat{\gamma}$$

o equivalentemente

$$\gamma(\xi) = (\alpha_L * \gamma)(\xi) + (\alpha_H * \gamma)(\xi) \quad \text{para todo } \xi.$$

En particular, para $m \in \mathbb{Z}$, (recordando (5.38) y (5.40))

$$\begin{aligned} c_m &= \gamma(m) = (\alpha_L * \gamma)(m) + (\alpha_H * \gamma)(m) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \text{sinc}\left(\frac{m}{2} - n\right) \left[c_n^L + c_n^H \left[2 \cos\left(\frac{\pi}{2}(m - 2n)\right) - 1 \right] \right]. \end{aligned}$$

Distinguiendo entre los m pares e impares, obtenemos

$$\begin{aligned} c_{2m} &= c_m^L + c_m^H \\ c_{2m+1} &= 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[\frac{(-1)^{m-n}}{\pi(2(m-n)+1)} c_n^L + \frac{(-1)^{m-n+1}}{\pi(2(m-n)+1)} c_n^H \right]. \end{aligned}$$

Ahora, recordando la definición de los a_n^L y a_n^H de (5.36) y (5.37), lo anterior puede ser reescrito como

$$c_m = 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[a_{m-2n}^L c_n^L + a_{m-2n}^H c_n^H \right]. \quad (5.42)$$

Esta última operación de reconstrucción puede ser vista como

- Intercalar las sucesiones $\{c_n^L\}$ y $\{c_n^H\}$ con ceros, i.e., construirse nuevas sucesiones con ceros en las entradas impares y en las entradas pares colocar las c_n^L , c_n^H consecutivas;
- Convolucionar estas sucesiones “sobremuestreadas” con los filtros a^L , a^H ;
- Sumar los dos resultados y multiplicar por 2.

Referencias

- [1] INGRID DAUBECHIES. *Ten Lectures on Wavelets*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992.
- [2] EUGENIO HERNÁNDEZ, GUIDO WEISS. *A first course on wavelets*. CRC Press, 1996.
- [3] BRAD OSGOOD. *Lecture Notes for EE 261, The Fourier Transform and its Applications*. Electrical Engineering Department, Stanford University, 2007.
- [4] MARÍA CRISTINA PEREYRA, LESLEY A. WARD. *Harmonic Analysis: From Fourier to Wavelets*. American Mathematical Society, 2012.
- [5] STÉPHANE MALLAT. *A wavelet tour of signal processing*. Academic Press, 1999.
- [6] MURALI RAO, HRVOJE SIKIC, RENMING SONG. *Application of Carleson's theorem to wavelet inversion*. Control Cybern, **23**, 761–771 (1994).
- [7] WALTER RUDIN. *Real & Complex Analysis*. McGraw-Hill, 1987.
- [8] WALTER RUDIN. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, 1991.
- [9] BRYAN P. RYNNE, MARTIN A. YOUNGSON. *Linear Functional Analysis*. Springer-Verlag, 2008.
- [10] ELIAS M. STEIN, RAMI SHAKARCHI. *Fourier analysis: an introduction*. Princeton University Press, 2011.