

Análisis numérico de sólidos bidimensionales
en grandes deformaciones elasto-viscoplásticas
con acoplamiento termomecánico

Walter B. Castelló

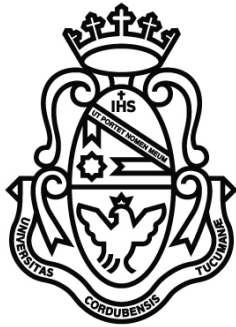
Tesis Doctoral
Córdoba, Argentina
2012



UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA



Imagen en marca de agua en la portada: prensa de excéntrica (diseño de 1870) para trabajos de estampación, forja y embutición, en metales.



UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA
Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales
Departamento de Estructuras

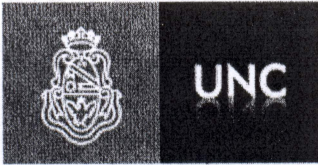
**ANÁLISIS NUMÉRICO DE SÓLIDOS
BIDIMENSIONALES EN GRANDES
DEFORMACIONES
ELASTO-VISCOPLÁSTICAS CON
ACOPLAMIENTO TERMOMECAÁNICO**

WALTER BRAULIO CASTELLÓ

Trabajo presentado para optar al título de Doctor de la
Universidad Nacional de Córdoba en el área Ciencias de
la Ingeniería

Dirigida por: **Dr. Fernando G. Flores**

Córdoba, 2012



Doctorado en Ciencias de la Ingeniería
Escuela de Cuarto Nivel Académico
Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales
Universidad Nacional de Córdoba
República Argentina

Avda. Vélez Sarsfield 1601 – Tel. 54 351 433 4404 - 5000 Córdoba

Acta Tribunal de Tesis de Doctorado

En la Ciudad de Córdoba, el día primero de Junio de 2012, se reúne el Tribunal de Tesis designado por la Carrera del Doctorado en Ciencias de la Ingeniería para examinar y calificar la tesis del Ing. Walter Braulio Castelló, Titulada: “Análisis numérico de sólidos bidimensionales en grandes deformaciones elasto-viscoplásticas con acoplamiento termomecánico”.

El tribunal, integrado por el Dr. Diego Javier Celentano, el Dr. Carlos García Garino y el Dr. Alfredo Edmundo Huespe, después de haber analizado la tesis durante el período previo a su defensa y de presenciar su exposición oral, acuerda por unanimidad calificar la Tesis como:

APROBADA

A los efectos de dejar constancia se firma la presente acta.

Dr. Diego J. Celentano
Pontificia Universidad
Católica de Chile

Dr. Carlos García Garino
Universidad Nacional de Cuyo

Dr. Alfredo E. Huespe
Universidad Nacional del Litoral

ANÁLISIS NUMÉRICO DE SÓLIDOS BIDIMENSIONALES EN GRANDES DEFORMACIONES ELASTO-VISCOPLÁSTICAS CON ACOPLAMIENTO TERMOMECAÁNICO

RESUMEN

En esta tesis se ha desarrollado una herramienta numérica basada en el método de elementos finitos, para simular computacionalmente procesos de conformado plástico de metales en frío y en caliente, en particular problemas de forjado y extrusión en dos dimensiones. Este tipo de problemas exhiben además de grandes deformaciones elasto-viscoplásticas, importantes distorsiones en la geometría, contacto con las herramientas y acoplamiento termomecánico. Se ha empleado una aproximación en deformaciones impuestas sobre un triángulo lineal, la cual ha sido modificada para mejorar su eficiencia computacional. Se ha aplicado una Formulación Lagrangeana Actualizada asociada a un modelo elasto-viscoplástico generalizado basado en la descomposición multiplicativa del tensor de deformaciones. Además se ha desarrollado una estrategia de remallado automático por zonas, el cual está asociado a un esquema de transferencia de variables basada en el *Super-convergent Patch Recovery*. Para el problema térmico se ha empleado una aproximación lineal sobre un triángulo de tres nudos, y se ha implementado un esquema de acoplamiento termomecánico del tipo escalonado isotérmico. La integración de las ecuaciones de gobierno del problema termomecánico acoplado se realiza de manera explícita. Los resultados obtenidos en esta tesis muestran un comportamiento adecuado de la herramienta computacional desarrollada. La aproximación elemental implementada muestra una excelente precisión en los resultados, hecho que se mantiene aun con mallas pobres y elevada distorsión en los elementos. En lo que respecta a las grandes distorsiones de la geometría, el remallado por zonas y el esquema de transferencia mantienen de manera adecuada la eficiencia de cálculo y el nivel de precisión de la herramienta numérica. En lo concerniente al problema elasto-viscoplástico, el modelo implementado presenta resultados correctos en el rango de viscosidad típica de los metales. Por último en las aplicaciones con acoplamiento termomecánico, el esquema propuesto en esta tesis muestra resultados muy próximos a los obtenidos por otros autores, aun cuando la aproximación empleada en las ecuaciones térmicas es la más simple en aplicaciones bidimensionales.

NUMERICAL ANALYSIS OF TWO-DIMENSIONAL SOLIDS IN LARGE ELASTIC-VISCOPLASTIC STRAINS WITH THERMOMECHANICAL COUPLING

SUMMARY

A numerical tool, based in the finite element method, for the computational simulation of hot and cold forming processes of metals was developed. In particular forging and extrusion problems in two dimensions are considered. The processes of interest exhibit large elasto-viscoplastic strains, as well as significant distortions in the geometry, contact with the tools and thermomechanical coupling. An assumed strain approach on a previous simplex triangle is considered where several modifications have been introduced to improve its computational efficiency. Here an Updated Lagrangian Formulation is applied, associated with a generalized elastic-viscoplastic model based on multiplicative decomposition of the deformation tensor. In addition a new strategy for an automatic local re meshing has been developed in conjunction with a variable transfer scheme based on the so-called Super-convergent Patch Recovery. For thermo-mechanical problems a simple linear approximation of the temperature has been considered. An isothermal staggered thermomechanical coupling scheme has been implemented within an explicit (forward Euler) integration approach of both the momentum and the heat balance equations. Results obtained in this thesis show an appropriate behavior of the computational tool developed. The modified finite element used exhibits excellent accuracy in the results. This holds even with poor meshes and highly distorted elements. The local re-meshing and transfer scheme maintain the efficiency of evaluation and the numerical accuracy of the tool in an appropriate manner when large distortions of the geometry occur. With regard to the elastic-viscoplastic material behavior, the implemented model shows correct results in typical viscosity range for metals. Finally, in the thermo-mechanical coupling applications, the scheme proposed in this thesis shows very close results to those reported by other authors, although the approach considered in the thermal problem is the simplest for two-dimensional applications.

ANALYSE NUMÉRIQUE DE SOLIDES BIDIMENSIONNELS DANS DE GRANDES DÉFORMATIONS ÉLASTO-VISCOPLASTIQUES AVEC COUPLAGE THERMOMÉCANIQUE

RESUME

Dans cette thèse on développe un outil numérique, basée sur la méthode des éléments fini, pour simuler computationnellement des processus de conformée plastique de métaux en froid et à chaud, en particulier problèmes de forge et extrusion dans deux dimensions. Ce type de problèmes exhibent outre de grands déformations élasto-viscoplastiques, importantes distorsions dans la géométrie, le contact avec les outils et le couplage thermomécanique. On a employé un rapprochement dans des déformations imposées sur un triangle linéaire, laquelle a été modifiée pour améliorer son efficacité de calcul. On a appliqué une Formulation Lagrangienne mise à jour associée à un modèle élasto-viscoplastique généralisé basé sur la décomposition multiplicative du tenseur de déformations. On a développé une stratégie de remaillage automatique par des zones, lequel est associé à un schéma de transfert de variables basée sur le appelé Super-convergent Patch Recovery. Pour le problème thermique on a employé un rapprochement linéaire sur un triangle de trois noeuds, et aussi on a employé un schéma de couplage thermomécanique du type échelonné isotherme. La intégration des équations de gouvernement du problème couplé thermomécanique est effectuée de manière explicite. Les résultats obtenus dans cette thèse montrent un comportement adéquat de la outil computationnel développé. Le rapprochement élémentaire appliquée montre une excellente précision dans les résultats, fait qui est encore maintenue avec maille pauvre et distorsion importante dans les éléments. En ce qui concerne les grandes distorsions de la géométrie, le remaillage par des zones et le schéma de transfert maintiennent de manière adéquate la efficacité de calcul et le niveau de précision de la outil numérique. En ce qui concerne le problème élasto-viscoplastique, le modèle mis en œuvre présente des résultats corrects dans la gamme de viscosité typique de métaux. Enfin, dans les applications de couplage thermomécaniques, le schéma proposé dans cette thèse montre des résultats très proches de ceux obtenus par des autres auteurs, même lorsque le rapprochement pour les équations thermiques est la plus simple pour les applications en deux dimensions.

A Carolina y Facundo, los motivos de mi existencia,
gracias por acompañarme en esta etapa

A mis padres, mis hermanos y mis amigos,
que siempre están

Agradecimientos

Estas líneas son una simple retribución a quienes de alguna manera han participado en el desarrollo de este trabajo y a aquellos con quienes he compartido el camino en esta etapa de mi vida.

En primer lugar debo agradecer a dos personas que son las artífices de que me encuentre terminando la carrera del doctorado, Fernando Flores y Julio Massa. Julio es quien me invitó a ser parte del cuerpo de docentes del Dpto. de Estructuras, y eso fue el puntapié inicial de mis estudios de postgrado. Fernando no solo ha sido mi director, si no que también ha sido un guía excepcional y además debo destacar su continua predisposición para atender mis consultas. A ambos, tanto Fernando como Julio, les agradezco profundamente las posibilidades que me han ofrecido.

A mis amigos Cristian Maldonado, Andrés Prato y Martín Blank, Miguel Ruiz, Leonardo Cocco, Carlos Estrada, Fernando Reche y Mauricio Giordano, por los buenos momentos compartidos, esos que quedan por siempre en la memoria.

A mis actuales compañeros de docencia, que antes fueron mis maestros, Alejandro Brewer, Sergio Preidikman, José Stuardi, Eduardo Zapico, Jorge García y Sergio Elaskar. Por sus enseñanzas en todos estos años, desde la carrera de ingeniería hasta mi formación como doctorando, parte de cada uno de ellos se encuentra en este trabajo. Una mención particular merece “el doc” José Tamagno, por sus enseñanzas y por el apoyo que me ha brindado en el comienzo de mi carrera de posgrado.

Les debo un agradecimiento especial a Carlos Estrada y Gerald Pirard, que han tenido la difícil tarea de corregir mi francés.

Deseo agradecer también el apoyo financiero de CONICET (Argentina) el cual me ha brindado un beca en el periodo 2005-2009, y al Dpto. de Estructuras de Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la U.N.C. que nos ha permitido un lugar para realizar este trabajo. Por otra parte la utilización del programa STAMPAK (2011) ha sido posible gracias al apoyo de la empresa Quantech ATZ (www.quantech.es).

A mi familia, Carolina y Facundo por el amor que me dan, las alegrías compartidas, y por el tiempo que me han cedido para realizar y escribir esta tesis. A mis padres y hermanos, Braulio, Zulema, Edgar y Roger por todo el apoyo, el amor y los momentos compartidos.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Descripción del problema	1
1.2. Objetivos generales y específicos	2
1.3. Contenido de este trabajo	3
2. Modelos constitutivos para metales dúctiles	7
2.1. Introducción	7
2.2. Modelos constitutivos elasto-plásticos	8
2.2.1. Modelo basado en la descomposición aditiva	9
2.2.2. Modelo basado en la descomposición multiplicativa	10
2.2.3. Conciliación de los modelos aditivo y multiplicativo	12
2.3. Modelos constitutivos elasto-viscoplásticos	14
2.3.1. Modelos viscoplásticos para metales	15
2.3.2. Modelo constitutivo elasto-viscoplástico generalizado	17
3. Ecuaciones de gobierno del problema termomecánico elasto-viscoplástico	19
3.1. Introducción	19
3.2. Ecuaciones de gobierno en el acoplamiento termomecánico	20
3.2.1. Ecuaciones de balance en la mecánica del continuo	20
3.2.2. Principio de desplazamientos virtuales	23
3.2.3. Ecuaciones de gobierno del problema termomecánico con contacto	25
3.3. Modelo constitutivo termo-elasto-plástico	27
3.3.1. Cinemática asociada al modelo constitutivo	28
3.3.2. Problema termoelástico	29
3.3.3. Problema termo-plástico	31
3.4. Generalización al modelo constitutivo termo-elasto-viscoplástico	35
3.4.1. Problema termo-viscoplástico generalizado	37
4. Formulación del problema aplicando el método de elementos finitos	39
4.1. Introducción	39
4.2. Esquema de interpolación elemental	40
4.2.1. Técnicas de interpolación en elementos bidimensionales	40
4.2.2. Elemento triangular con deformaciones impuestas	42
4.3. Ecuaciones de gobierno empleando el método de elementos finitos	47
4.3.1. Ecuación de equilibrio mecánico	48
4.3.2. Ecuación de equilibrio térmico	52
4.3.3. Esquema de integración de las ecuaciones de equilibrio	59
4.4. Algoritmo de integración de la ecuación constitutiva	61
4.4.1. Esquema de integración J_2 termo-elasto-viscoplástico generalizado	61

4.4.2.	Solución iterativa de la función de fluencia generalizada	62
5.	Restauración de mallas distorsionadas	67
5.1.	Introducción	67
5.2.	Estrategias empleadas en la restauración de mallas distorsionadas	68
5.2.1.	Regeneración total de la malla	69
5.2.2.	Regeneración de malla por zonas	69
5.3.	Transferencia de las variables entre mallas	70
5.3.1.	Transferencia de variables por suavizado nodal	72
5.3.2.	Transferencia de variables empleando el SPR	73
6.	Simulaciones numéricas I	77
6.1.	Introducción	77
6.2.	Problemas en deformaciones moderadas	77
6.2.1.	Embutición de una lámina con un punzón	78
6.2.1.1.	Embutición de una lámina rectangular con un punzón cilíndrico	78
6.2.1.2.	Embutición de una lámina circular con un punzón hemiesférico	80
6.2.2.	Plegado externo de tubos cilíndricos de pared delgada	82
6.2.3.	Acortamiento de un tocho cilíndrico	84
6.3.	Problemas en grandes deformaciones	87
6.3.1.	Extrusión hacia atrás de un tocho cilíndrico	87
6.3.2.	Forjado de un disco con una matriz sinusoidal	90
6.3.3.	Acortamiento de tubos cilíndricos	92
6.4.	Discusión de resultados	95
7.	Simulaciones numéricas II	97
7.1.	Introducción	97
7.2.	Problemas elasto-viscoplásticos	97
7.2.1.	Tracción de una placa plana con un agujero	98
7.2.1.1.	Pequeñas deformaciones	98
7.2.1.2.	Grandes deformaciones	99
7.2.2.	Cilindro con presión interna y externa	101
7.3.	Problemas con acoplamiento termomecánico	102
7.3.1.	Impacto no isotérmico de un proyectil en una pared rígida	103
7.3.2.	Acortamiento no isotérmico de un tocho cilíndrico	106
7.3.3.	Extrusión directa no isotérmica de un tocho cilíndrico	109
7.4.	Discusión de resultados	112
8.	Conclusiones	115
8.1.	Introducción	115
8.2.	Conclusiones de esta tesis	115
8.3.	Contribuciones de esta tesis	117
8.4.	Futuras líneas de investigación	118

A. Mecánica del continuo para grandes deformaciones	121
A.1. Introducción	121
A.2. Cinemática del problema en grandes deformaciones	121
A.2.1. Conceptos básicos de la cinemática	122
A.2.2. Cinemática asociada a la descomposición multiplicativa	126
A.3. Ecuaciones de la mecánica del continuo	131
A.3.1. Leyes de conservación	131
A.3.2. Principio de trabajo virtuales	137
A.4. Formulación débil del problema termomecánico	141
A.4.1. Ecuación de equilibrio térmico para un problema termoplástico en deformaciones finitas	141
A.4.2. Ecuaciones de gobierno a partir del principio de desplazamientos virtuales	146
B. Algoritmo de contacto en deformaciones finitas	151
B.1. Introducción	151
B.2. Descripción general del problema de contacto	152
B.2.1. Cinemática del contacto	152
B.2.1.1. Contacto normal	153
B.2.1.2. Contacto tangencial	154
B.2.2. Ecuaciones constitutivas para la interface de contacto	154
B.2.2.1. Contacto normal	155
B.2.2.2. Contacto tangencial	156
B.2.3. Contacto termomecánico	158
B.2.4. Forma débil de la contribución por contacto	159
B.3. Algoritmo de contacto bidimensional	160
Bibliografía	163

Capítulo 1

Introducción

1.1. Descripción del problema

En la actualidad los procesos de conformado de metales se emplean cotidianamente en la fabricación de piezas para diferentes tipos de industrias. Estas aplicaciones abarcan desde las partes para distintas áreas en las industrias: automotriz, naval, aeroespacial, y de recipientes y envases; como así también la fabricación de la maquinaria empleada en las industrias mencionadas.

Entre estos procesos se encuentran el conformado másico o volumínico de metales como el forjado por estampa y el forjado por extrusión. En lo que respecta al forjado por estampa, consiste en colocar una pieza metálica entre dos matrices que al cerrarse conforman una cavidad con la forma y dimensiones que se desean obtener para la pieza final. A medida que avanza el proceso, ya sea empleando punzones o prensas, el material se va deformando y adoptando la forma geométrica de las matrices hasta que adquiere la geometría deseada. En el caso del forjado por extrusión, habitualmente aplicado a piezas con simetría de revolución, a partir de la fuerza realizada por un punzón la pieza es obligada a pasar por una matriz que posee la geometría final deseada. En el resto de esta tesis se emplearán los términos forjado y extrusión para hacer referencia al forjado por estampa y forjado por extrusión, respectivamente.

En las décadas pasadas estos procesos involucraban una importante labor experimental en la fase de desarrollo, para la obtención de nuevas piezas y la definición de las herramientas necesarias para llevar a cabo el proceso de conformado. Tradicionalmente este tipo de práctica involucra una mayor libertad de diseño del proceso en las etapas tempranas cuando aun los herramentales no se han definido, pero esas libertades disminuyen muy rápidamente en la medida que la etapa de experimentación avanza debido principalmente a que los herramentales ya han sido construidos. En otras palabras en la medida que se toma conocimiento sobre la factibilidad del conformado de una pieza y los detalles involucrados en dicho proceso, nos enfrentamos con el hecho de que las herramientas empleadas ya han sido construidas y resulta muy difícil y costoso modificarlas.

En este contexto es donde se han desarrollado de manera vertiginosa las técnicas de modelado numérico de procesos, dado que la posibilidad de que un ingeniero pueda simular en la computadora un diseño conceptual durante la fase temprana de desarrollo representa un importante ventaja. En particular cuando se trata de aplicaciones industriales, algunos de los temas de mayor interés actual en la ingeniería de productos están relacionados con la reducción de los costos y la disminución de los retrasos en la producción, además de pretenderse siempre una mejora continua de la calidad. Tras el objetivo de tomar decisiones

bien fundamentadas y rápidas con respecto a la posibilidad de mejorar determinados productos y procesos, la industria se vale cada día más de la simulación numérica por elementos finitos. Inclusive puede decirse que el análisis por elementos finitos se ha convertido en una herramienta fundamental en el diseño y/o reingeniería del producto. Más aun el empleo de modelos numéricos en el estudio de procesos de deformación en semicaliente y frío, permite satisfacer la creciente demanda del mercado de productos *net-shape* y *near-net-shape* para evitar los costos asociados al maquinado y terminación de piezas.

Desde un punto de vista físico estos procesos están dominados por fenómenos altamente complejos, esto conlleva a que cambios insignificantes en algunas variables como: las características (mecánicas y térmicas) del material de la pieza, la geometría de las herramientas, las condiciones del contacto pieza-herramientas (lubricación y terminación superficial), la temperatura y velocidad del proceso, entre otras; conlleven a la aparición de resultados no satisfactorios como pliegues, grietas o la rotura de la pieza. Debido a esto una herramienta numérica, para el análisis de estos procesos, debe ser capaz de lidiar de manera eficiente y robusta con los fenómenos físicos involucrados.

En esta tesis resultan de interés los procesos de forjado y extrusión de piezas con un eje de revolución o piezas de sección constante, que pueden analizarse como problemas bidimensionales axilsimétricos o en deformación plana, respectivamente.

1.2. Objetivos generales y específicos

El objetivo general de esta tesis es desarrollar una herramienta computacional, basada en el método de los elementos finitos, capaz de simular numéricamente procesos de conformado plástico de metales en frío y en caliente, en particular problemas de forjado y extrusión en dos dimensiones. La herramienta numérica debe permitir el análisis de problemas donde el metal es sometido a grandes deformaciones elasto-viscoplásticas con acoplamiento termomecánico, y ser capaz de lidiar con aspectos físicos complejos tales como: flujo plástico isócoro, cambios importantes de la geometría, contacto con las herramientas y autocontacto, plasticidad dependiente de la velocidad de deformación, generación de calor por fricción y el acoplamiento entre deformaciones y temperatura.

A los fines de lograr el objetivo propuesto en esta tesis se implementará una formulación numérica adecuada, dentro del código de solución explícita de las ecuaciones de movimiento STAMPACK (2011) basado en el método de los elementos finitos.

Los objetivos particulares de este trabajo consisten en la implementación de:

- un modelo constitutivo basado en la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de deformaciones, dado que resulta el más adecuado para estudiar metales con comportamiento isótropo en grandes deformaciones elasto-plásticas.
- un elemento triangular en deformaciones impuestas, el cual además de lidiar con los problemas típicos de bloqueo debido al flujo plástico isócoro, es el más conveniente desde el punto de vista de aplicación en problemas industriales.
- un esquema de remallado eficiente y preciso, el cual debe mantener en valores aceptables la distorsión de los elementos y transferir adecuadamente las variables minimizando las pérdidas por interpolación.

- un algoritmo termomecánico del tipo escalonado e isotérmico, el cual además de su simpleza es el más adecuado cuando se lo emplea en códigos explícitos para la solución acoplada de las ecuaciones de equilibrio mecánica y térmica.

además de estas tareas, resulta necesario también:

- modificar el modelo constitutivo elasto-plástico para considerar los efectos de la plasticidad dependiente del tiempo, para lo cual se emplea una generalización del algoritmo elasto-plástico implementado capaz de incorporar los efectos de la viscosidad.
- desarrollar un algoritmo de solución iterativo, eficiente y robusto, para la función de fluencia generalizada asociada al modelo elasto-viscoplástico.
- extender el algoritmo de contacto existente en el código STAMPACK (2011) basado en la técnica de penalización, a fin de considerar la contribución de la fricción y el contacto con las herramientas a la generación de calor.

1.3. Contenido de este trabajo

El contenido de esta tesis se resume a continuación. El Capítulo 2 presenta una revisión de los modelos elasto-plásticos para metales más empleados: el modelo de descomposición aditiva del tensor de deformaciones y por otra parte en el modelo de descomposición multiplicativa del tensor gradiente de deformaciones, además del grado de correlación actual entre ambos modelos. También se presenta una revisión de los desarrollos actuales dentro de la modelación elasto-plástica. A partir de esta revisión es posible luego definir los modelos empleados en el estudio del comportamiento de metales frente al fenómeno de la viscoplasticidad desde un punto de vista generalizado o unificado, es decir modelos capaces de predecir el comportamiento aun frente a la ausencia de la viscosidad. Incluyéndose además algunos trabajos del área termo-elasto-viscoplástica. Por último en este capítulo se muestra el origen fenomenológico y la propuesta de un modelo generalizado del tipo Perzyna, que es el que se empleará en esta tesis.

En el Capítulo 3 se introducen las ecuaciones de gobierno del problema con acoplamiento termomecánico, para lo cual partiendo de las ecuaciones de balance en la mecánica del continuo, y considerando el principio de desplazamientos virtuales, se puede obtener la forma débil de las ecuaciones de equilibrio mecánica y térmica. Al final de este capítulo se presenta el modelo constitutivo elasto-viscoplástico dependiente de la temperatura asociado a metales, para lo cual primero se introduce un modelo elasto-plástico y luego se lo generaliza de una manera consistente para tener en cuenta los efectos viscoplásticos en forma unificada.

En el Capítulo 4 se presenta el esquema de aproximación elemental basado en deformaciones impuestas empleado en esta tesis y se desarrollan las expresiones discretas de las ecuaciones de equilibrio mecánica y térmica, introduciéndose luego el esquema de solución de las ecuaciones discretas basado en la integración explícita escalonada de las ecuaciones de gobierno del problema. Debido a que la herramienta debe ser de fácil aplicación en la industria, la aproximación propuesta posee grados de libertad con un sentido físico claro y se basa en un elemento triangular de tres nodos. En este capítulo además, se hace una revisión de las aproximaciones empleadas en el problema de sólidos en deformaciones finitas propuestas por distintos investigadores, enumerándose los diferentes inconvenientes

y ventajas de emplear elementos de bajo orden de interpolación. Por último se presenta el esquema numérico de integración del modelo constitutivo elasto-viscoplástico empleado en esta tesis, como también un método iterativo eficiente y robusto para la solución de la función de fluencia generalizada no lineal del modelo viscoplástico.

El Capítulo 5 por otra parte, se presentan las opciones más habituales para la restauración de mallas distorsionadas y además se describen los inconvenientes asociados a los esquemas de regeneración completa de la malla. Se propone además una solución a la baja eficiencia computacional de la regeneración completa de los elementos de la malla, lo cual viene dado por la restauración local o por zonas que es el esquema empleado en esta tesis. Además, dado que los esquemas de restauración deben ir acompañados de un algoritmo de transferencia de variables, se presentan las diferentes opciones y se enumeran los inconvenientes de cada caso. Por último se hace referencia al algoritmo empleado en este trabajo basado en el método denominado *Superconvergent Patch Recovery*, el cual muestra una importante conservación de las variables transferidas lo cual impacta directamente en la preservación de la precisión en los resultados.

En el Capítulo 6 se pueden encontrar los primeros resultados numéricos obtenidos con la formulación propuesta en esta tesis. En este capítulo se presenta en primer lugar serie de problemas donde la distorsión geométrica no juega un papel preponderante, de modo que no es necesario restaurar la malla para mantener la precisión de los resultados. Estos problemas en particular están asociados al estudio numérico de casos de tipo industrial representados por embutición de láminas y conformado de piezas de espesor relativamente pequeño. Luego se estudian algunas problemas ligados a procesos másicos o volumínicos como la extrusión y el forjado de metales en donde el cambio geométrico de las piezas, durante el proceso, hace necesario el uso de un algoritmo de remallado y se evidencian grandes deformaciones elasto-plásticas. Por último se presenta una breve discusión de los resultados obtenidos en el análisis de los problemas numéricos estudiados en este capítulo.

En el Capítulo 7 continuando con la validación numérica de la herramienta, se plantea inicialmente el estudio de dos casos elasto-viscoplásticos, en estos problemas se evalúa la incidencia del coeficiente de viscosidad en pequeñas y grandes deformaciones. Se observa que el modelo viscoplástico propuesto en esta tesis permite recuperar el comportamiento elástico del material cuando la viscosidad del metal es elevada. Posteriormente se presentan tres problemas donde el proceso de deformación es no isotérmico. Los dos primeros representan *benchmarks* donde el objetivo es estudiar los efectos de la velocidad y magnitud de la deformación en la generación de calor. Mientras que el tercer caso de estudio representa una aplicación industrial que consiste en la extrusión de un eje a partir de un tocho cilíndrico. Al final de este capítulo se encuentra un breve discusión de los resultados obtenidos en los casos estudiados.

El Capítulo 8 muestra un resumen de las conclusiones, obtenidas a partir de los resultados observados en esta tesis y del comportamiento de la herramienta computacional propuesta. Posteriormente se describen las contribuciones originales y aspectos destacables asociados a esta tesis, y por último se definen algunas líneas futuras de trabajo que surgen como consecuencia de este trabajo.

El Anexo A por otra parte introduce los conceptos básicos de la cinemática de sólidos en grandes deformaciones, haciendo énfasis en la definición de las magnitudes elementales de la cinemática para luego introducir las expresiones asociadas a la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de deformaciones. Además se presentan las ecuaciones de balance o equilibrio asociadas a la mecánica del continuo, en especial aquellas asociadas a la mecánica del sólido con acoplamiento termomecánico, es decir las ecuaciones de

balance de la cantidad de movimiento y balance energético. También este capítulo presenta el método de los desplazamientos virtuales como una metodología para definir la forma débil de las ecuaciones de equilibrio del problema térmico y mecánico acoplado. Por último se define la forma débil de las ecuaciones de gobierno del problema termomecánico, a partir de las cuales y aplicando el método de elementos finitos se puede obtener un esquema numérico discreto que permite simular el problema.

Para finalizar el Anexo B muestra una descripción general del problema de contacto entre dos sólidos deformables. Esto involucra la definición de la cinemática empleada para describir el cambio geométrico del contacto, como así también los conceptos asociados a la modelación constitutiva de la interface de contacto, definición de fuerzas de contacto y generación de calor, para el caso de contacto mecánico y termomecánico, respectivamente. En particular se definen aquí los términos que deben adicionarse a las ecuaciones de gobierno del problema termomecánico para considerar el contacto con las herramientas. Por último se presenta una descripción del algoritmo de contacto bidimensional implementado en el código de solución explícita de las ecuaciones termomecánicas STAMPACK (2011) basado en la técnica de penalización.

Capítulo 2

Modelos constitutivos para metales dúctiles

2.1. Introducción

El modelo constitutivo es uno de los ingredientes fundamentales en el análisis de cualquier sistema estructural o sólido, su importancia radica en que el mismo provee las relaciones necesarias entre tensiones y deformaciones. En este trabajo se consideran las hipótesis de la mecánica del continuo clásica, es decir se estudia un volumen elemental representativo del continuo el cual se encuentra sometido a un estado cuasi-uniforme de tensión. Esta hipótesis es equivalente a despreciar las heterogeneidades locales de las tensiones y las deformaciones, más aun el efecto de las heterogeneidades se observa de manera indirecta a través del uso de una determinada cantidad de *variables internas de estado*. El trabajo de Horstemeyer y Bammann (2010) muestra un bosquejo del crecimiento de los modelos de material a lo largo del tiempo, y como diferentes teorías como: la termodinámica, la plasticidad, la viscoplasticidad, el creep, los modelos de daños, la ciencia de materiales, etc., han ido permitiendo la obtención de modelos constitutivos basados en múltiples variables internas de estado permitiendo el análisis de sistemas cada vez más complejos. Es la convergencia a lo largo del tiempo de la cinemática, la cinética, la mecánica del continuo y la termodinámica, lo que le ha dado a los modelos de comportamiento de material o modelos constitutivos de materiales (basados en variables internas de estado) el impulso necesario para desarrollarse.

En algunos de los trabajos que se citan a continuación, el problema elasto-plástico es abordado desde un punto de vista puramente matemático proponiendo modelos de comportamiento del material complejos. Sin embargo no está dentro de los objetivos de este trabajo definir con rigurosidad matemática un modelo constitutivo, sino más bien definir un modelo de material desde un punto de vista ingenieril que represente de manera adecuada el comportamiento del material frente al estudio de un proceso industrial.

En este trabajo se considerarán materiales con rangos elásticos bien definidos. Luego en primera instancia se estudiarán problemas en los cuales la plasticidad es independiente del tiempo y los procesos son isotérmicos de modo que no hay acoplamiento termomecánico, luego se analizarán problemas en donde la plasticidad es dependiente del tiempo (viscoplasticidad), y por último se consideraran problemas en donde los procesos no son isotérmicos y existe acoplamiento termomecánico. Siguiendo este mismo esquema se ha desarrollado la revisión de trabajos en el área de la modelación constitutiva de metales.

El contenido de este capítulo se resume a continuación. La Sección 2.2 presenta una

revisión de los modelos elasto-plásticos para metales y dentro de esta sección se presentan los dos esquemas más empleados, en el apartado 2.2.1 el modelo de descomposición aditiva del tensor de deformaciones, y por otra parte en el apartado 2.2.2 el modelo de descomposición multiplicativa del tensor gradiente de deformaciones. Además en el apartado 2.2.3 se muestra el grado de correlación que existe en la actualidad entre estos dos modelos, y también un vistazo a los desarrollos actuales dentro de la modelación elasto-plástica. La Sección 2.3 en cambio muestra un compendio de los modelos elasto-viscoplásticos que se emplean en la actualidad. El apartado 2.3.1 presenta la revisión de los modelos empleados en el estudio del comportamiento de metales frente al fenómeno de la viscoplasticidad desde un punto de vista generalizado o unificado, es decir modelos capaces de predecir el comportamiento aun frente a la ausencia de la viscosidad. También se han incluido algunos trabajos del área termo-elasto-viscoplástica. El apartado 2.3.2 por último muestra el origen fenomenológico y la propuesta de un modelo generalizado del tipo Perzyna, que es el que se empleará en este trabajo.

2.2. Modelos constitutivos elasto-plásticos

Este apartado contiene un compendio de la revisión de modelos constitutivos elasto-plásticos, basado en los trabajos de Castelló (2005) y García Garino (1993). En lo que respecta a los modelos constitutivos elasto-plásticos poco ha cambiado respecto de las ideas originales presentadas por Naghdi (1990), Lee (1969) y sus respectivos colaboradores, sin embargo en este tiempo se ha avanzado lo suficiente en la articulación de estas teorías con los hechos experimentales conduciendo a modelos constitutivos más precisos y eficientes

Existen numerosos modelos constitutivos que han intentado describir el problema de las grandes deformaciones elasto-plásticas, como así también una gran cantidad de códigos en elementos finitos que usan estos modelos para el análisis de problemas con estas características. Y si bien existen diferentes escuelas que compiten entre sí, hasta la fecha ninguna teoría ha derivado en un modelo de aceptación generalizada, pero si se han complementado lo suficiente para obtener modelos que representan con un grado de exactitud ingenieril el comportamiento del material.

Con la excepción de unas pocas contribuciones anteriores, el análisis de las grandes deformaciones elasto-plásticas comienza a finales de la década del sesenta. Dejando de lado muchos aportes a esta área, que se abandonaron tan pronto como fueron apareciendo, las líneas de investigación principales en el campo de las deformaciones plásticas son en la actualidad:

- el concepto de una *descomposición aditiva* del tensor de deformaciones en una parte elástica y otra plástica, empleando la suposición de que ambas partes son simétricas, a partir del trabajo de Green y Naghdi (1965).
- el concepto de una *configuración intermedia libre de tensiones* junto con una *descomposición multiplicativa* del tensor gradiente de deformaciones, propuesto por Lee (1969) y Mandel (1972) en el mismo periodo.
- teorías que surgen de la generalización de las ecuaciones integrales de la viscosidad lineal, resultando en modelos sin rango elástico.

Mientras las dos primeras líneas de investigación, tratan de generalizar los conceptos de la teoría clásica de plasticidad de Prandtl-Reuss-Mises y son comparativamente muy competitivas. La tercer línea de investigación es muy diferente en sus conceptos fundamentales

y fenomenológicos, sin embargo resulta relevante en el momento de agregar los efectos viscosos al comportamiento plástico del material y será tratado en la próxima sección.

En los próximos apartados se presentan las hipótesis características y una breve reseña de los modelos basados en los conceptos de la teoría clásica de plasticidad. En el caso del modelo basado en la descomposición multiplicativa, la terminología que se emplea en los siguientes apartados corresponde al tratamiento de la cinemática de los sólidos con grandes deformaciones que se encuentra en el Apéndice A de este trabajo.

2.2.1. Modelo basado en la descomposición aditiva

Este modelo propuesto originalmente en el trabajo de Green y Naghdi (1965), fue uno de los primeros estudios rigurosos que intentaron situar el problema de la plasticidad con grandes deformaciones en el contexto de la mecánica de los medios continuos. El modelo se caracteriza por la hipótesis de la descomposición aditiva del tensor de Green-Lagrange \mathbf{E} en sus componentes *elástica* \mathbf{E}^e y *plástica* \mathbf{E}^p , según:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^p \quad (2.1)$$

$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^p \\ U &= U(\mathbf{E}, \mathbf{E}^p, \alpha) \\ f &= f(\mathbf{E}, \mathbf{E}^p, \alpha) \\ \mathbf{S} &= \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}} \end{aligned}$

Tabla 2.1 – Modelo basado en la descomposición aditiva

El cuadro 2.1 presenta un resumen de las ecuaciones que describen el modelo, en donde además de la descomposición aditiva de la deformación las otras variables involucradas son: la función de energía interna de deformación U , la función de fluencia f , el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} (establecido a partir de una función de energía libre ψ) y por último un conjunto de variables internas α elegidas de forma adecuada para describir la evolución del material. Esta formulación propuesta en el cuadro 2.1 resulta muy atractiva por su simpleza, sin embargo como también lo pone de manifiesto García Garino (1993) si bien el modelo planteado en la configuración original resulta trivialmente objetivo, trae aparejado el inconveniente de que los elementos que caracterizan el modelo están referidos a un espacio carente de significado físico en grandes deformaciones. Frente a esto, para el estudio de grandes deformaciones resulta más adecuado plantear los modelos empleando la descomposición aditiva del tensor velocidad de deformaciones \mathbf{d} sobre la configuración deformada en la suma de sus componentes elástica \mathbf{d}^e y plástica \mathbf{d}^p , de acuerdo a:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p \quad (2.2)$$

Algunas aplicaciones de este modelo son los trabajos de Löblein et al. (y 2003), Itskov (2004) y Flores y Oñate (2001). El trabajo de Löblein et al. (2003) emplea la descomposición aditiva en el análisis de sólidos ortótropos haciendo uso de la generalización de la medida de deformación a partir del tensor derecho de Cauchy-Green; por otra parte el trabajo de Itskov (2004) presenta un análisis comparativo entre modelos aditivos y multiplicativos, demostrando que a diferencia de algunos modelos aditivos los modelos multiplicativos llevan a soluciones no-espurias frente a cargas de corte simple en deformaciones finitas.

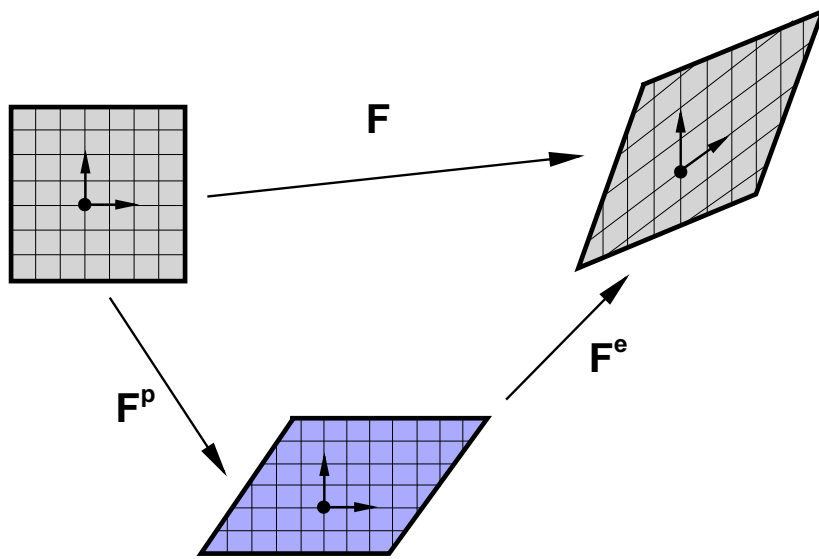


Figura 2.1 – Esquema de descomposición multiplicativa del tensor gradiente de las deformaciones.

Otro trabajo donde se aplica la descomposición aditiva del tensor de deformaciones, si bien está dedicado a láminas en grandes deformaciones es relevante en cuanto al modelo constitutivo, es el de Flores y Oñate (2001) donde se utiliza el par tensión-deformación de Hencky.

2.2.2. Modelo basado en la descomposición multiplicativa

En el caso de plasticidad cristalina algunos de los mecanismos básicos (por ejemplo movimiento de dislocaciones) han sido mucho más desarrollados y comprendidos, comparados con la plasticidad del punto de vista fenomenológico. Estos estudios a nivel movimiento de la estructura cristalina han dado lugar a este modelo constitutivo. El modelo está basado en la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de la deformación en sus componentes elástica \mathbf{F}^e y plástica \mathbf{F}^p , y tiene la forma :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p \quad (2.3)$$

el modelo resulta bastante atractivo pues en el caso de monocristales muestra una evidencia física muy importante. La Figura 2.1 muestra un esquema de la descomposición multiplicativa, y la implicancia del estado intermedio libre de tensiones definido por la parte plástica del tensor gradiente de deformaciones \mathbf{F}^p . Como resultado de los trabajos en el área de la *teoría microestructural* que describen las grandes deformaciones elasto-plásticas de monocristales (también llamada teoría del *deslizamiento en el continuo*) este modelo goza de una enorme aceptación y por tal motivo se ha extendido su uso al análisis de sólidos policristalinos bajo las hipótesis de la mecánica del continuo. La cinemática asociada a este modelo, que puede encontrarse en la mayoría de los libros de texto, ha sido definida en el Apéndice A de este trabajo.

El principal inconveniente que muestra este modelo, tal como lo pone de manifiesto García Garino (1993), es que la descomposición queda exactamente definida con la excepción de movimientos de cuerpo rígido. Este punto se convirtió durante muchos años en la discusión central entre las dos escuelas (Green y Nagdhi con sus seguidores por un lado, y

Lee y Mandel con sus colaboradores por el otro). Hoy en día se acepta que la descomposición propuesta en (2.3) define el modelo sin ambigüedades en el caso de materiales isótropos, y sin embargo en caso contrario se debe recurrir a las ideas propuestas por Mandel (1983) para definir la configuración intermedia. O bien postular leyes de evolución para el tensor velocidad de rotación plástica \mathbf{W}^p como han propuesto distintos autores.

El formato original del modelo de descomposición multiplicativa, atribuido generalmente a Lee, ha sufrido una importante evolución desde que fue postulado. De modo que actualmente el modelo de descomposición multiplicativa se caracteriza por considerar que la regla de flujo está asociada a la componente plástica del tensor de deformación \mathbf{F}^p o a una medida cinemática derivada del mismo como lo es el tensor de velocidad de deformación plástica \mathbf{L}^p . La componente plástica del tensor gradiente de la deformación \mathbf{F}^p es la variable que describe el flujo plástico a través del cristal como una serie de deslizamientos en la red cristalina. En los modelos clásicos los monocristales muestran direcciones principales asociadas a la estructura cristalina que *no se deforman con el material*, esto es lo que se asocia generalmente con la configuración intermedia, y por otro lado se considera que la deformación está asociada a la parte elástica del gradiente de deformación definida a partir de (2.3) como $\mathbf{F}^e = \mathbf{F}\mathbf{F}^{p-1}$. En el cuadro 2.2, se presenta un resumen de las ecuaciones que describen este modelo.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &= \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p \\
 W &= W(\mathbf{F}, \mathbf{F}^p, \bar{\alpha}) \\
 \bar{f} &= \bar{f}(\mathbf{F}, \mathbf{F}^p, \bar{\alpha}) \\
 \bar{g} &= \bar{g}(\mathbf{F}, \mathbf{F}^p, \bar{\alpha}) \\
 \mathbf{L}^p &= \mathbf{L}^p(\mathbf{F}, \mathbf{F}^p, \bar{\alpha}) \\
 \tau &= \rho_0 \frac{\partial W}{\partial \bar{\mathbf{C}}}
 \end{aligned}$$

Tabla 2.2 – Modelo basado en la descomposición multiplicativa

En este caso la función de energía interna de deformación W depende del gradiente de la deformación \mathbf{F} , de su componente plástica \mathbf{F}^p y de un conjunto adecuado de variables internas $\bar{\alpha}$. Cabe destacar que la función de fluencia \bar{f} y el potencial plástico \bar{g} , se formulan en la configuración intermedia. Donde $\bar{\mathbf{C}}$ (ver Apéndice A) es el tensor derecho de Cauchy-Green definido también en la configuración intermedia. La implementación de un modelo basado en la descomposición multiplicativa resulta habitualmente más compleja que el modelo aditivo. Esto se encuentra asociado con la definición de una función de energía interna que describa correctamente el comportamiento en el rango elasto-plástico del material, y se evidencia en las complicaciones que surgen durante la integración de la ecuación constitutiva.

Como se mencionó anteriormente, en el caso de materiales isótropos es suficiente con emplear la componente plástica del tensor de deformación \mathbf{F}^p o la parte simétrica del tensor de velocidad de deformación plástica \mathbf{L}^p (lo que equivale a despreciar el tensor de velocidad de rotación plástica $\mathbf{W}^p = 0$). Si se desea formular un modelo más general, es necesario incluir el tensor velocidad de rotación plástica \mathbf{W}^p (*plastic spin*) que constituye en realidad la parte antisimétrica del tensor \mathbf{L}^p . En los trabajos relacionados con la teoría del deslizamiento en el continuo, la parte asociada a la rotación del tensor \mathbf{L}^p está bien definida cuando se trata de un monocristal, pero surgen controversias muy importantes cuando se intenta aplicar el esquema tradicional de descomposición multiplicativa a *teorías puramente fenomenológicas* de plasticidad. La hipótesis de no considerar el tensor de

rotación plástica ($\mathbf{W}^p = \mathbf{0}$), aparecía como una opción arbitraria e inicialmente era resistida por muchos autores.

Algunos trabajos en el área computacional asociados a este modelo constitutivo son: el de Eterovic y Bathe (1990) donde presenta un modelo basado en la descomposición multiplicativa muy similar al mostrado en el cuadro 2.2. En su trabajo Betsch y Stein (1999) propone un modelo constitutivo basado en la descomposición multiplicativa, que emplea el tensor derecho de Cauchy-Green en la formulación cinemática de un elemento de lámina y el cambio en la componente plástica de este tensor para la regla de flujo. Por su parte Eidel y Gruttmann (2003) presenta un modelo constitutivo con descomposición multiplicativa aplicado en el contexto de las grandes deformaciones elasto-plásticas en materiales ortótropos donde, si bien hace uso de la hipótesis $\mathbf{W}^p = \mathbf{0}$, obtiene resultados muy precisos. Además de estos autores, Idesman (2003) presenta en su trabajo la comparación de tres modelos constitutivos distintos basados todos ellos en la descomposición multiplicativa. El trabajo de Idesman demuestra que a pesar de la consistencia de los diferentes modelos, los resultados suelen ser ligeramente distintos y llega a la conclusión de que estas diferencias están asociadas a la *no unicidad* de la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de deformaciones.

2.2.3. Conciliación de los modelos aditivo y multiplicativo

Haciendo una revisión de los trabajos de la última década, queda bastante claro que las escuelas de modelación constitutiva aditiva y multiplicativa, han encontrado más puntos en común y existen hoy menor cantidad de desacuerdos en varios de los aspectos que originalmente dieron lugar a las controversias. Esta conciliación, que es la que García Garino (1993) ha puesto de manifiesto en su trabajo como *unificación de ideas*, viene de la mano de la componente plástica del tensor derecho de Cauchy-Green \mathbf{C}^p :

$$\mathbf{C}^p = \mathbf{F}^{pT} \cdot \mathbf{F}^p \quad (2.4)$$

los autores que contribuyeron originalmente a esta unificación de ideas son Green y Naghdi (1971) y Sidoroff (1970) entre otros. Más aun, los trabajos muestran que desde ambas líneas de desarrollo se sirven de conceptos y definiciones que originalmente parecían incompatibles, un ejemplo de ello es el empleo de modelos constitutivos basados en la descomposición multiplicativa que de alguna manera emplean los conceptos de plasticidad anisótropa definidos en la descomposición aditiva.

Sobre este mismo camino, Miehe et al. (2002) presenta un método consistente con el propuesto por Green y Naghdi basado en la descomposición aditiva, y que sin embargo emplea como variable interna principal un *tensor métrico plástico* \mathbf{G}^p que se obtiene pre-multiplicando a la componente plástica del gradiente de deformaciones por su transpuesta igual que en la ecuación (2.4). Inclusive modelos constitutivos generalizados, consistentes con la formulación mencionada ya habían sido probados con éxito en los trabajos de Papadopoulos y Lu (1998, 2001) en el contexto de materiales isotrópicos y anisótropos respectivamente. Otro trabajo interesante es el de Bertram (1998), donde el autor se independiza de los conceptos de descomposición aditiva o multiplicativa, también deja de lado las configuraciones intermedias y se basa en la característica inherente a los materiales cristalinos por la cual solo la deformación de la red cristalina (no la del material) determina el estado tensional. Esta característica muestra que la formulación propuesta por Bertram es consistente con la descomposición multiplicativa desde el punto de vista de análisis de las deformaciones en la red cristalina (inclusive en este trabajo se demuestra que la

formulación en Bertram (1998) bajo ciertas hipótesis, puede ser consistente con el modelo de Green y Nagdhi).

En la actualidad los desarrollos dentro del área de la modelación constitutiva de metales, están orientados a definir el comportamiento anisótropo plástico de los metales con direcciones preferenciales de deformación (asociadas al direccionamiento de granos de la estructura cristalina). Un ejemplo de ello es el trabajo de Lu y Papadopoulos (2004) se presenta una teoría de análisis de deformaciones anisótropas plásticas finitas basado en la mecánica del continuo, aplicable a materiales cuya simetría está determinada por la estructura cristalina. Esta aproximación está basada en el comportamiento típico de los metales, donde la deformación plástica está dominada por el movimiento de las dislocaciones a nivel de la estructura cristalina, en donde a pesar del movimiento de las dislocaciones la estructura en general se mantiene inalterada. El objetivo del trabajo de Lu y Papadopoulos (2004) es brindar una solución, con base en la mecánica del continuo, que solucione de alguna manera el problema la definición arbitraria de la configuración intermedia (asociado principalmente a la definición de una ley que fije la evolución de la rotación del mismo). Esta teoría se basa en el uso del tensor de derecho de Cauchy-Green como variable principal, y evita la definición explícita de la configuración intermedia sin abandonar las implicancias físicas que dan lugar a la descomposición multiplicativa del tensor de deformaciones. Por su parte Sansour et al. (2007) presenta un modelo basado en la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de la deformación, y considera una regla de flujo anisótropa cuyos argumentos son la tensión y la deformación. El objetivo de esta modificación en la regla de flujo es llegar a una formulación libre del tensor velocidad de deformación plástica, similar a las empleadas en metales isótropos.

También el trabajo de Ulz (2011) muestra la relevancia de considerar el tensor de rotación plástico, en particular en algunos procesos de conformado severo de metales y cuando las piezas presentan orientación preferencial de los granos (láminas y tochos obtenidos por rolado). El trabajo de Ulz (2011) se basa en la descomposición multiplicativa del tensor de deformaciones y propone una ley de evolución del tensor plástico ligado a la posición instantánea de las direcciones principales de ortotropía del material. Una idea similar se persigue en el trabajo de Heidari et al. (2009), donde a partir de una formulación del tipo euleriana basada en la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de las deformaciones, se propone la evaluación del tensor velocidad de deformación plástico empleando la idea de tensores de velocidad corrotacional.

Un enfoque diferente se propone en el trabajo de Weissman y Sackman (2011), donde se presenta un esquema basado en la descomposición multiplicativa, pero a diferencia de los trabajos mencionados hasta aquí, se define una configuración intermedia pretensionada. Esta idea surge de algunas de las discrepancias originales entre las ideas del grupo de investigadores encabezado por Naghdi y el grupo encabezado por Lee, resulta interesante destacar que la formulación basada en la configuración intermedia libre de tensiones se recupera como un caso particular.

Otra opción es la propuesta en el trabajo de Kim et al. (2009), en la cual si bien se parte de la idea original asociada a la descomposición multiplicativa, se considera dentro de la función de energía el tensor de tensiones asimétrico de Mandel el cual realiza trabajo sobre el tensor de velocidad de rotación plástico. Este modelo evalúa de manera más natural la evolución de las direcciones de deformación preferenciales en plasticidad anisótropa, sin la necesidad de emplear leyes de evolución *ad-hoc* como las que se emplean en algunos de los trabajos citados previamente. Sobre esta misma línea de investigación, el trabajo Caminero et al. (2011) hace énfasis en el proceso de integración de la ecuación constitutiva,

lográndose un esquema general implícito del cual se desprende como caso particular el esquema propuesto por Eterovic y Bathe (1990).

Por último el trabajo de Duchêne et al. (2008) presenta una forma interesante de evaluar experimentalmente la rotación promedio de los cristales, a partir de los cambios en la textura de probetas sometidas a corte simple. En este trabajo además, se comparan los resultados con diferentes maneras de evaluar el tensor de velocidad de deformación y el tensor asimétrico de Mandel.

En conclusión puede decirse que en el caso de materiales isótropos, existe al menos una enorme concordancia de que la descomposición multiplicativa es suficiente para describir el fenómeno elasto-plástico y por este motivo también se acepta que en grandes deformaciones es el modelo más atractivo para la descripción del comportamiento del material. Por otro lado es completamente necesario fijar alguna ley que gobierne la evolución de la configuración intermedia cuando el material no es isótropo.

El modelo que se empleará en este trabajo está basado en el trabajo de García Garino (1993) y ha sido probado con éxito en Castelló y Flores (2008). El mismo no considera anisotropía por deformación plástica, es decir no contempla la anisotropía que se evidencia comúnmente en materiales originalmente isótropos y que son deformados en alguna dirección preferencia (láminas obtenidas por rolado). El motivo de no considerar un modelo plástico anisótropo se debe a que las aplicaciones industriales de conformado de metales volumínicos se hace sobre piezas que son previamente normalizadas térmicamente para facilitar la deformación plástica y el cambio de forma.

2.3. Modelos constitutivos elasto-viscoplásticos

La teoría de la viscoplasticidad describe el flujo del material producido por creep o relajación, el cual a diferencia de la plasticidad depende del tiempo. Los aspectos fenomenológicos de la viscoplasticidad pueden estudiarse por diferentes vías: ensayos de endurecimiento bajo velocidad de deformación constante, ensayos de deformación por creep bajo carga o tensión constante, ensayos de relajación a deformación constante, e inclusive ensayos cíclicos de carga-descarga. Según sea el ensayo aplicado se han encontrado diferentes resultados y diversas maneras de cuantificar el fenómeno viscoplástico, sin embargo estas cuantificaciones no necesariamente conllevan a resultados similares. Es decir existen actualmente teorías que describen adecuadamente el comportamiento viscoplástico en pequeñas deformaciones de materiales sometidos a cargas cíclicas, que sin embargo no predicen correctamente el fenómeno viscoplástico en grandes deformaciones con cargas monotónicas.

Además desde el punto de vista de los procesos de conformado de metales, se requiere un modelo constitutivo cuyo rango de aplicación pueda abarcar: las bajas temperaturas donde los efectos viscosos son despreciables, y las altas temperaturas donde la viscosidad es dominante en el flujo plástico. El análisis de estos procesos a bajas temperaturas (conformado plástico en frío) involucra aspectos complejos como el flujo plástico isócoro (sin viscosidad), importantes cambios en la geometría y contacto con las herramientas. Sin embargo, el análisis se vuelve aun más complejo cuando se considera a la temperatura como variable puesto que, además del acoplamiento termomecánico, los metales muestran un fuerte comportamiento viscoso a temperaturas superiores a un tercio de la temperatura de fusión. En conclusión, aun sin considerar el cambio en la temperatura (comportamiento isotérmico), cuando el proceso de conformado se realiza a temperaturas elevadas la viscosidad juega un rol importante en el proceso del flujo plástico.

En particular en este trabajo resulta imprescindible establecer un modelo elasto-viscoplástico capaz de describir las deformaciones viscoplásticas de metales sometidos a cargas monotónicas, es decir un estado de carga creciente y no cíclico, propio de los procesos de conformado de metales. Y que además pueda emplearse sin inconvenientes en un rango aceptable de temperaturas empleadas en aplicaciones industriales.

2.3.1. Modelos viscoplásticos para metales

En el trabajo de Chaboche (2008) se presenta una valiosa revisión de los modelos constitutivos asociados al comportamiento viscoplástico de los materiales y muy particularmente en el caso de metales, en dicho trabajo se presenta un modelo generalizado asociado a deformaciones plásticas pequeñas y moderadas, que sin embargo puede ser extendido a grandes deformaciones plásticas sin perder su validez. En dicho trabajo la generalización de la teoría constitutiva para incluir los efectos de la viscoplasticidad surge de la elección de un potencial o función viscoplástica la cual resulta dependiente de una tensión equivalente (ej.: von Mises, Hill, etc.) a partir de la cual se puede obtener una función monotónica que describe el comportamiento del parámetro de consistencia viscoplástico. El modelo de Perzyna (1966), el de Lemaitre (1971) y posteriormente Ponthot (2002), pueden obtenerse como un caso particular del modelo viscoplástico generalizado o unificado propuesto por Chaboche (2008).

Sin embargo, esta generalización no es la única posible, otros modelos donde se unifica el comportamiento plástico y viscoso se diferencian por la elección de distintas funciones para la viscosidad y en particular por la forma de evaluar del endurecimiento cinemático (el cual resulta imprescindible en los casos donde la carga es cíclica), entre estos modelos unificados se tienen los que han sido desarrollados a partir de los trabajos iniciales de Miller (1976), Bodner y Partom (1975), Robinson (1978), Cernocky y Krempl (1980) y Delobelle (1988). En el caso del modelo de Miller (1976) es un modelo viscoplástico, que no considera la parte elástica y la función viscoplástica es la combinación de un seno hiperbólico y una función potencial. Este modelo permite considerar el endurecimiento cinemático como así también el isótropo, con la característica que la ley de evolución del endurecimiento isótropo involucra además un par de variables internas asociadas al efecto de endurecimiento por velocidad de deformación plástica. El modelo de Bodner y Partom (1975) es posiblemente la teoría más cercana a la propuesta por Chaboche (2008), en esta teoría la función viscoplástica resulta de la combinación de una exponencial y una función potencial. Originalmente esta teoría consideraba endurecimiento isótropo únicamente, las versiones más actuales consideran endurecimiento direccional (anisotropía por deformación) lo cual lo hace muy interesante en el análisis elasto-viscoplástico de láminas. El modelo propuesto en el trabajo de Robinson (1978) se considera una función potencial para la viscoplasticidad, y permite evaluar los efectos del endurecimiento isótropo y cinemático. Este modelo sin embargo posee algunas desventajas asociadas principalmente a su aplicación en casos con cargas cíclicas y frente a endurecimiento cinemático. El modelo de Cernocky y Krempl (1980) también posee algunos puntos en común con el de Chaboche (2008), pero la principal diferencia es que la evolución del endurecimiento cinemático se hace en función de la velocidad total de deformación en lugar de emplear la velocidad de deformación viscoplástica. Por último el modelo propuesto en el trabajo de Delobelle (1988) proponía en sus comienzos un esquema de endurecimiento cinemático complejo, actualmente se ha mejorado el modelo en este aspecto mostrando resultados muy adecuados en aplicaciones de super-aleaciones termorresistentes. El trabajo de Chaboche (2008) presenta y compara

estos modelos, inclusive se muestra en forma gráfica el comportamiento cualitativo de la sobretensión viscoplástica con respecto de la velocidad deformación plástica (a partir del potencial o de la función viscoplástica propuesta). Este gráfico muestra que a velocidades de deformación moderadas, entre $\dot{\varepsilon}^p = 10^{-8}\text{s}^{-1}$ y $\dot{\varepsilon}^p = 10^{-4}\text{s}^{-1}$, las teorías brindan resultados similares. Fuera de este rango a muy bajas o muy altas velocidades de deformación plástica, las diferencias entre algunos de los modelos resulta importante.

El trabajo de Heeres et al. (2002) muestra por otra parte una propuesta que podría enmarcarse dentro de los modelos unificados, en donde la diferencia principal con respecto a los modelos del tipo Perzyna (1966), es que la función de fluencia resulta dependiente del tiempo de manera explícita. Este modelo presenta algunas ventajas en el estudio de fenómenos asociados principalmente a la viscoplasticidad con ablandamiento. De una manera similar en su trabajo Becker y Hackenberg (2011) propone una solución similar a partir del modelo de Freed y Walker (1993), adicionando un modelo de creep de rango completo y empleando un predictor inelástico dependiente del tiempo.

La mayor parte de los modelos viscoplásticos presentados hasta aquí han sido desarrollados principalmente para lidiar con cargas cíclicas y en pequeñas deformaciones. Y algunos de los modelos unificados mencionados muestran rangos de aplicación acotados en la temperatura, es decir no son viables para su uso en aplicaciones de conformado de metales.

Una propuesta reciente para modelar la viscoplasticidad en grandes deformaciones surge del trabajo de Henann y Anand (2009), aplicado a metales empleando un modelo basado en una doble descomposición multiplicativa la cual rige la evolución de las dos reglas de flujo que definen el modelo. La segunda descomposición multiplicativa surge de dividir la parte plástica del tensor gradiente de deformaciones en sus partes energética y disipativa $\mathbf{F}^p = \mathbf{F}_{en}^p \mathbf{F}_{dis}^p$. Sobre esta misma línea se encuentra el trabajo de Shutov y Kreißig (2008).

Se debe destacar también que existen otros tipos de teorías constitutivas no generalizadas o unificadas, las cuales no serán tenidas en cuenta en esta revisión debido a que las mismas no representan una posible aplicación al conformado de metales en todo el rango de temperaturas. Algunas de estas propuestas pueden enmarcarse dentro de modelos constitutivos: (a) con división de las deformaciones inelásticas en la suma de deformaciones plásticas más deformaciones de creep que resultan independientes entre sí, (b) basados en múltiples mecanismos de deformación y múltiples criterios de evolución de las variables que definen el modelo constitutivo, o (c) con transformaciones del tipo macro-micromecánicas.

Hasta aquí se han presentado diferentes opciones para cuantificar y establecer el comportamiento viscoplástico de los materiales, sin embargo ninguno de estos trabajos muestra el punto de vista del acoplamiento termo-mecánico. Algunos esfuerzos en este sentido son el trabajo de Adam y Ponthot (2003), en el cual se parte de un esquema aditivo y basado en un modelo hipoeelástico similar a Ponthot (2002). Una propuesta similar basada en un modelo hipoeelástico se puede encontrar en el trabajo de Andrade-Campos et al. (2006), donde la descomposición aditiva del tensor velocidad de deformación resulta la suma de la parte termoelástica y la parte viscoplástica. También Ulz (2009) en su trabajo presenta un modelo generalizado, basado en la descomposición aditiva y siguiendo algunos lineamientos sobre las restricciones termodinámicas impuestas originalmente en el trabajo de Green y Naghdi (1965). Desde el punto de vista de la descomposición multiplicativa en problemas con acoplamiento termomecánicos se puede mencionar el trabajo de Čanadija y Brnić (2004).

Otro punto de vista se presenta en el trabajo de Bertram (2003), el cual es una extensión

a la termoplasticidad basada en el concepto de isomorfismo elástico ya previamente presentado en Bertram (1998), el cual resulta coincidente con las configuraciones isóclinas propuestas por Mandel (1983).

2.3.2. Modelo constitutivo elasto-viscoplástico generalizado

A partir de lo expuesto hasta aquí se puede observar que la modelación constitutiva de la viscoplasticidad se encuentra actualmente en un estado de desarrollo incipiente, en donde coexisten planteos teóricos controversiales con aspectos fenomenológicos bien establecidos. Esta falta de uniformidad en los modelos conlleva a cada investigador emplee el modelo que es más adecuado para el tipo de problema que está estudiando, y no exista hoy una conciliación de manera similar a lo que sucede con la modelación del comportamiento elasto-plástico.

Siguiendo las ideas de Lemaitre y Chaboche (1994), en el caso de metales los resultados obtenidos por ensayos (endurecimiento, relajación, creep, etc.) pueden unificarse habitualmente en una sola ecuación uniaxial con tres parámetros, la cual representa el fenómeno viscoplástico bajo una velocidad de deformación $\dot{\varepsilon} \geq 0$ (creciente y monotónica). Para cada uno de estos ensayos se puede caracterizar la evolución de la deformación viscoplástica ε^{vp} y su velocidad de deformación $\dot{\varepsilon}^{vp}$ empleando la tensión y la temperatura como parámetros (ver Lemaitre y Chaboche (1994), pg. 263-264). Los ensayos de endurecimiento, creep y relajación (manteniendo la temperatura constante); permiten caracterizar los materiales a partir de curvas de isotensión en el espacio $(\varepsilon^{vp}, \dot{\varepsilon}^{vp})$ con un margen de error asociado al orden de los errores de medición. Esto prueba experimentalmente la existencia de una ley mecánica de estado similar a:

$$\sigma = h(\varepsilon_{vp}, \dot{\varepsilon}_{vp}) \quad (2.5)$$

la cual puede definirse en el dominio de variación de ε^{vp} y $\dot{\varepsilon}^{vp}$. Inclusive se puede observar, en un contexto más general, que los resultados obtenidos se asemejan a dos ensayos de creep bajo dos distintos niveles de tensión, y por lo tanto decir que la deformación plástica nos permite describir el endurecimiento del material con una razonable exactitud.

Si se tiene en cuenta la Ley de Norton y las curvas de endurecimiento, una razonable especificación para la función $h(\varepsilon^{vp}, \dot{\varepsilon}^{vp})$ consiste en definir esta como el producto de dos funciones potenciales. Incluyendo además la ley de elasticidad lineal, la ley de endurecimiento viscoso puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon^e + \varepsilon^{vp} \\ \sigma^e &= E\varepsilon^e \\ \sigma^{vp} &= \eta(\varepsilon^{vp})^N (\dot{\varepsilon}^{vp})^M \end{aligned} \quad (2.6)$$

en donde N , M y η son tres parámetros, los cuales son función de la temperatura y dependientes del material: M es el exponente viscoso; N es el exponente de endurecimiento, y η es el coeficiente de resistencia viscosa.

Este modelo resulta interesante dado que implica un pequeño cambio a las ecuaciones del modelo elasto-plástico propuesto originalmente por García Garino (1993). El modelo de viscoplasticidad que se utilizará en este trabajo está basado en el modelo clásico de plasticidad dependiente del tiempo propuesto en los trabajos de Perzyna (1966, 1971). Este modelo elasto-viscoplástico unificado fue adaptado inicialmente por Ponthot (2002) a una teoría constitutiva hipoeelástica, y posteriormente en los trabajos de Ponthot et al. (2005) y García Garino et al. (2006) se ha extendido al modelo elasto-plástico hiperelástico

basado en la Formulación Lagrangeana Actualizada como al empleada en Castelló y Flores (2008) y de esta manera se han incorporado los efectos viscosos a la plasticidad de una manera generalizada.

Por último si bien en este trabajo se han considerado problemas termomecánicos, no se ha considerado la aplicación de viscoplasticidad en estos casos. Sin embargo el empleo del modelo viscoplástico en problemas termomecánicos resulta directa a partir de la caracterización térmica de las variables que definen el modelo viscoplástico, es decir una vez establecidos los parámetros $N(\theta)$, $M(\theta)$ y $\eta(\theta)$ en función de la temperatura, se obtiene un modelo termo-elasto-viscoplástico.

Capítulo 3

Ecuaciones de gobierno del problema termomecánico elasto-viscoplástico

3.1. Introducción

El análisis de sólidos metálicos en deformaciones finitas, considerando acoplamiento termomecánico y un comportamiento elasto-viscoplástico del material, se puede llevar a cabo si se establecen adecuadamente las ecuaciones de gobierno que respeten las leyes de balance que rigen la mecánica del continuo y que sean acordes a las restricciones termodinámicas asociadas a dichos problemas.

Este capítulo está dedicado a presentar las ecuaciones de gobierno de sólidos en deformaciones finitas, en particular las ecuaciones asociado a metales en grandes deformaciones e inclusive considerando procesos no isotérmicos. El objetivo es introducir las ecuaciones que permiten estudiar y simular el comportamiento de metales en procesos industriales de conformado plástico del tipo volumínico o másico, como por ejemplo extrusión, forjado, rolado, etc. Estos procesos de conformado plástico de metales pueden llevarse a cabo a temperatura ambiente o a temperaturas elevadas, lo que se conoce como conformado en frío y conformado en caliente, respectivamente. El conformado en frío de metales involucra aspectos físicos complejos como el flujo plástico isócoro, cambios geométricos importantes y contacto con las herramientas. En el caso del conformado en caliente, además de estos aspectos se debe tener en cuenta el intercambio de temperatura con las herramientas y el medio, la generación de calor por fricción, y también el acoplamiento de la temperatura con las deformaciones. Se observa entonces que este tipo de problemas no solo involucra un conjunto de fenómenos físicos complejos en si mismos, sino que en alguna medida todos ellos se encuentran acoplados.

Se pretende entonces hacer uso de las leyes de balance del continuo para establecer las ecuaciones de equilibrio mecánica y térmica, para luego a partir de un modelo constitutivo adecuadamente fundamentado sobre los principios termodinámicos, definir las ecuaciones de gobierno del problema termomecánico. Por otra parte para definir correctamente el problema de contacto se hará uso de las ecuaciones de la mecánica del contacto. Los Apéndices A y B presentan de forma exhaustiva los desarrollos concernientes a la cinemática asociada a grandes deformaciones, las leyes de balance del continuo y los principios termodinámicos, la definición de las ecuaciones de equilibrio, y el problema del contacto.

El contenido de este capítulo es el siguiente; La Sección 3.2 presenta las ecuaciones de gobierno del problema con acoplamiento termomecánico, para lo cual partiendo de las

ecuaciones de balance en 3.2.1 y considerando el principio de desplazamientos virtuales en 3.2.2, se llega a la forma débil de las ecuaciones de equilibrio mecánica y térmica en el apartado 3.2.3. Por último se introduce el modelo constitutivo termo-elasto-viscoplástico asociado a metales, para lo cual primero se presenta un modelo elasto-plástico en la Sección 3.3 y luego en la Sección 3.4 se lo generaliza para tener en cuenta los efectos viscoplásticos de una manera unificada.

3.2. Ecuaciones de gobierno en el acoplamiento termomecánico

Las ecuaciones de gobierno del problema termomecánico en deformaciones finitas, pueden derivarse a partir de las ecuaciones de balance o conservación de la mecánica del continuo. En este apartado se presentarán las principales ecuaciones en base a las cuales se definen las ecuaciones de gobierno, y posteriormente a partir del principio de desplazamientos virtuales se obtendrá la forma débil de dichas ecuaciones. Esta forma débil es el punto de partida para la aplicación de método de elementos finitos, a fin de obtener la forma discreta de las ecuaciones de gobierno en el Capítulo 4. Este apartado presenta un compendio de las expresiones que se han desarrollado de forma completa en el Apéndice A.

3.2.1. Ecuaciones de balance en la mecánica del continuo

Las ecuaciones de gobierno de los sistemas físicos satisfacen un conjunto de ecuaciones que resultan fundamentales en la mecánica del continuo. Este conjunto de ecuaciones surge de las denominadas leyes de conservación o balance, y las mismas describen el comportamiento de algunas magnitudes físicas y termodinámicas importantes. Las ecuaciones son:

1. Conservación de la masa.
2. Conservación de la cantidad de movimiento lineal.
3. Conservación de la cantidad de movimiento angular.
4. Conservación de la energía.

Si consideramos un marco de referencia inercial, existe un balance o conservación entre el cambio en las cantidades de movimiento lineal y angular respecto de las fuerzas y momentos aplicados al cuerpo en movimiento, o bien:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_V \rho \mathbf{b}_f dV + \oint_A \mathbf{t}_n dA \quad (3.1)$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{x} \times \mathbf{v} dV = \int_V \rho \mathbf{x} \times \mathbf{b}_f dV + \oint_A \mathbf{x} \times \mathbf{t}_n dA \quad (3.2)$$

en (3.1) y (3.2) se han supuesto actuando dos tipos de fuerza, la integral en el dominio de las fuerzas másicas \mathbf{b}_f que son fuerzas por unidad de masa actuando sobre la región que se estudia, y la integral sobre el contorno del dominio del vector \mathbf{t}_n que representa fuerzas de superficie por unidad de área actual aplicadas en el contorno de la región del

cuerpo que se analiza. Además los vectores \mathbf{v} y \mathbf{x} representan la velocidad y posición de cada partícula en el dominio de análisis. En (3.1) y (3.2) no se han considerado las fuerzas y momentos puntuales, sin embargo los mismos pueden adicionarse sin generar ningún inconveniente en el análisis. Las fuerzas de superficie se suponen dependientes de la posición, el tiempo y de la superficie a través de la normal unitaria en esa parte del contorno del cuerpo. Las ecuaciones cantidad de movimiento se simplifican aun más cuando se considera conservación de la masa y que el punto respecto del cual se toman momentos está fijo.

Sin embargo la principal consecuencia del principio de cantidad de movimiento lineal (3.1) es que el vector \mathbf{t}_n depende linealmente de la normal unitaria \mathbf{n} , es decir existe un tensor de segundo orden denominado tensor de tensiones tal que:

$$\mathbf{t}_n = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad (3.3)$$

donde \mathbf{t}_n y $\boldsymbol{\sigma}$ son el vector de tensión y el tensor de tensiones de Cauchy respectivamente. Este resultado se denomina teorema de Cauchy, y la prueba se basa en la aplicación del principio de cantidad de movimiento lineal a un tetraedro infinitesimal.

Se puede establecer además la condición de simetría $\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma}$, la cual surge como consecuencia del principio de conservación de la cantidad de movimiento angular. Sin embargo se debe notar que el tensor de Cauchy es simétrico solo cuando no hay momentos distribuidos.

Igualmente existe un balance o conservación entre el cambio en la energía del sistema (interna y cinética) y la potencia desarrollada por las fuerzas y cuplas aplicadas al cuerpo más toda otra energía que intercambie el cuerpo por unidad de tiempo, lo cual resulta:

$$\frac{d}{dt} \int_V \left(\rho u + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) dV = \int_V (\rho \mathbf{b}_f \cdot \mathbf{v} + \rho h) dV + \oint_A (\mathbf{t}_n \cdot \mathbf{v} - \mathbf{q}) dA \quad (3.4)$$

en la cual, además de la potencia de las fuerzas externas, se tiene la densidad de calor h y el flujo de calor a través de la superficie \mathbf{q} . En la (3.4), al igual que en (3.1) y (3.2), no se ha considerado efectos concentrados de fuerzas, momentos o calor. El primer término de la (3.4) representa el cambio sobre la energía interna y sobre la energía cinética, empleando para ello una densidad de energía interna u y la velocidad de las partículas \mathbf{v} .

La ecuación (3.4), también denominada *Primera Ley de la Termodinámica*, es la forma termomecánica del balance de energía dado que no involucra cambios energéticos por reacciones químicas o acciones electromagnéticas.

Además de las leyes de conservación enumeradas en el comienzo de este apartado, existe un postulado el cual permite definir las ecuaciones de gobierno y actúa como una restricción sobre las relaciones constitutivas. Este postulado es la desigualdad de Clausius-Duhem o *Segunda Ley de la Termodinámica*, el mismo establece que la entropía de un cuerpo es siempre mayor a la entropía que ingresa en un cuerpo y la generada por el mismo, es decir:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \eta dV \geq \int_V \rho g dV + \oint_A \mathbf{s} dA \quad (3.5)$$

en donde η es la densidad de entropía, $g = h/\theta$ es el cambio específico de entropía generada en el cuerpo y $\mathbf{s} = -\mathbf{q}/\theta$ es el vector flujo de entropía (la entropía del sistema aumenta cuando el flujo de calor es entrante). En estas definiciones para las contribuciones a la entropía de sistema, se ha empleado la temperatura absoluta θ .

A partir de la conservación de la energía (3.4), considerando el balance de cantidad de movimiento (3.1) y la segunda ley de la termodinámica (3.5), y aplicando el teorema

de Gauss a fin de expresar todas las integrales sobre el dominio, se puede arribar a la siguiente expresión:

$$\rho \left(\theta \frac{d\eta}{dt} - \frac{du}{dt} \right) + \mathbf{d} : \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \geq 0 \quad (3.6)$$

esta expresión (3.6) resulta ser la forma local euleriana de la disipación total, los primeros dos términos corresponden a la disipación mecánica y el último término corresponde a la disipación térmica.

El problema termomecánico puede completarse a partir de un funcional que permita derivar las expresiones constitutivas adecuadamente para el problema termomecánico. Una opción muy conveniente para este fin es la función de *Energía Libre de Helmholtz* la cual puede expresarse como se muestra a continuación:

$$\Psi = \tilde{\Psi}(\mathbf{E}; \mathbf{E}^p; \theta; \alpha_i) = \bar{\Psi}(\mathbf{E}^e; \theta; \alpha_i) = u - \eta\theta \quad (3.7)$$

esta forma de expresar la energía libre es atribuida a Green y Naghdi. En (3.7), α_i representa un conjunto de variables internas que se denominan comúnmente como variables de estado, por otra parte \mathbf{E}^e y θ resultan ser la parte elástica del tensor de deformaciones de Green-Lagrange y la temperatura absoluta, que son las variables independientes del problema mecánico y térmico, respectivamente.

La principal conclusión a la cual puede arribarse a partir de las ecuaciones (3.5) y (3.7), es que la disipación plástica es siempre mayor a cero y además que el proceso de deformación plástica es irreversible.

A partir de la variación temporal de la energía libre (3.7), considerando la forma localizada euleriana de la ecuación de balance de la energía (3.4) y la disipación de energía (3.6), aplicando el método de Coleman se pueden establecer la relación constitutiva y la definición de entropía según:

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \mathbf{E}^e} \quad y \quad \eta = - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \theta} \quad (3.8)$$

y como consecuencia de las expresiones (3.8) la disipación total de energía queda establecida como la suma de la disipación térmica (cuyo término es el definido previamente en la ecuación 3.6), más la disipación mecánica la cual está asociada puramente a la disipación por deformación plástica.

Reemplazando el teorema de Cauchy (3.3) en la ecuación de balance de cantidad de movimiento (3.1), bajo adecuadas condiciones de continuidad y empleando el teorema de Gauss a fin de expresar todas las integrales de (3.1) sobre el dominio, se puede obtener la forma localizada de la ecuación de movimiento:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho(\mathbf{b}_f - \dot{\mathbf{v}}) = 0 \quad (3.9)$$

y la ecuación de equilibrio de un sólido deformable se recupera a partir de la ecuación de movimiento (3.9), cuando se considera nulas las aceleraciones ($\dot{\mathbf{v}} = 0$).

Por otra parte tomando la variación de la densidad de energía interna a partir de la ecuación de energía libre (3.7) y considerando, la forma local euleriana de la ecuación de balance energético (3.4), las expresiones (3.8) y otras definiciones termodinámicas relevantes como el tensor de dilatación térmica $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ y el calor específico C_κ que surgen como consecuencia de la aplicación del método de Coleman (las cuales han sido completamente

documentadas en el apartado A.4 del Apéndice A), se puede llegar a una expresión de la forma:

$$-\rho C_\kappa \dot{\theta} + Q + \nabla \cdot (\mathbf{K}^\theta \nabla \theta) - \theta \hat{\boldsymbol{\beta}} : \mathbf{d}^e + D_p = 0 \quad (3.10)$$

en donde los primeros cuatro términos representan el problema termoelástico, mientras que el último término es el coeficiente de disipación termoplástico o denominado también factor de acoplamiento termoplástico. Este factor de acoplamiento contiene términos asociados a la disipación puramente mecánica relacionada a la deformación plástica, y a la disipación termoplástica relacionada a la disipación plástica por cambios en la temperatura. Este término está fijado por la adopción de la función de energía libre y de las variables de estado involucradas, en caso de un modelo elasto-plástico con endurecimiento isótropo, el factor de acoplamiento termoplástico se puede evaluar como:

$$D_p = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}^p + \theta \boldsymbol{\varepsilon}^e : \frac{\partial \mathbf{C}(\theta)}{\partial \theta} : \mathbf{d}^p \quad (3.11)$$

en donde \mathbf{d}^p es el tensor velocidad de deformación plástica, mientras que el segundo término involucra el cambio en el tensor constitutivo tangente debido a un cambio en la temperatura.

3.2.2. Principio de desplazamientos virtuales

Aunque no es realmente un principio físico, el principio de trabajos virtuales guarda ciertas similitudes con el primer principio de la termodinámica. Este principio postula la evaluación del trabajo a partir de fuerzas y tensiones estáticamente admisibles, que se suponen constantes mientras realizan trabajo sobre un conjunto infinitesimal de desplazamientos cinemáticamente admisibles, es decir que las tensiones no necesitan ser las actuantes sobre el material, como así tampoco los desplazamientos deben ser los reales. En este sentido las tensiones y deformaciones pueden ser descritas en forma independiente, lo que difiere en el caso de movimiento real de un cuerpo en cual el movimiento da lugar a deformaciones las cuales generan tensiones a través de las relaciones cinemáticas del material.

Una distribución de tensiones es estáticamente admisible cuando satisface las ecuaciones de equilibrio en el interior del cuerpo y las condiciones de contorno en aquellos puntos del mismo donde se han prescrito las acciones. Existen normalmente distintas posibles distribuciones de tensiones admisibles, y todas satisfaciendo los requisitos de equilibrio. Una distribución cinemáticamente admisible es aquella que satisface las condiciones de desplazamientos prescritos en el contorno y que posea primeras derivadas parciales continuas en el interior del cuerpo. Dado que el desplazamiento virtual se considera una magnitud infinitesimal adicional a partir de la configuración de equilibrio, deben anularse en todo lugar donde el desplazamiento verdadero este prescrito como nulo.

La denominación *desplazamiento virtual* obedece a que no son desplazamientos verdaderos, sino simplemente desplazamientos hipotéticos cinemáticamente posibles.

A partir de ahora se considerará un cuerpo en equilibrio y un campo de desplazamientos virtuales $\delta \mathbf{u}$, donde estos desplazamientos deben cumplir con ciertas condiciones, como por ejemplo que tengan primeras derivadas parciales continuas y además que sean nulos $\delta u_i = 0$ en los puntos donde el desplazamiento está prescrito (esto es necesario para no violar la condición de contorno). Y las condiciones de contorno se establecerán, a partir de

la elección de un sistema cartesiano (usualmente con un eje normal al contorno) en cada punto del contorno, tal que:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{1j}\bar{n}_j = \bar{t}_1 & \quad \text{o} \quad \delta\bar{u}_1 = 0 & \quad \text{pero no ambos} \\ \bar{\sigma}_{2j}\bar{n}_j = \bar{t}_2 & \quad \text{o} \quad \delta\bar{u}_2 = 0 & \quad \text{pero no ambos} \\ \bar{\sigma}_{3j}\bar{n}_j = \bar{t}_3 & \quad \text{o} \quad \delta\bar{u}_3 = 0 & \quad \text{pero no ambos} \end{aligned}$$

En este cuerpo y bajo las condiciones establecidas, el trabajo virtual externo δW_{ext} de las fuerzas externas de contorno \mathbf{t}_n y de las fuerzas másicas $\rho\mathbf{b}_f$ se define como:

$$\delta W_{ext} = \int_A \mathbf{t}_n \cdot \delta\mathbf{u}dA + \int_V \rho\mathbf{b}_f \cdot \delta\mathbf{u}dV \quad (3.12)$$

donde se ha elegido un campo de desplazamientos infinitesimal $\delta\mathbf{u}$, y dado que no existe restricción con respecto a la magnitud de los desplazamientos verdaderos desde alguna configuración de referencia hacia alguna configuración deformada, el principio puede usarse en problemas con desplazamientos finitos.

Puede demostrarse que a partir de la ecuación (3.12), aplicando el teorema de la divergencia y considerando las ecuaciones de equilibrio (3.9), puede llegarse a:

$$\delta W_{ext} = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}dV = \int_V \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}dV \quad (3.13)$$

la cual establece que si el campo de tensiones es estáticamente admisible, el trabajo virtual de la fuerzas externas de cualquier campo de desplazamientos virtuales cinemáticamente admisible es igual a (3.13). De manera inversa, si se satisface que el trabajo virtual de las fuerzas externas prescritas es igual (3.13) para un supuesto campo de tensiones σ_{ij} y para todo campo de desplazamientos virtuales cinemáticamente admisible, entonces el campo de tensiones es estáticamente admisible (es decir satisface el equilibrio en el interior del cuerpo y las condiciones de contorno de fuerzas de superficie). Ambas propuestas conforman el Principio de Desplazamientos Virtuales.

La forma general de aplicación del principio de trabajos virtuales en su forma euleriana, resulta:

$$\delta W = \delta W_{int} + \delta W_{ext} = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}dV - \left(\int_A \mathbf{t}_n \cdot \delta\mathbf{u}dA + \int_V \rho\mathbf{b}_f \cdot \delta\mathbf{u}dV \right) = 0 \quad (3.14)$$

El principio de trabajos virtuales puede ser también definido en términos de los tensores de Piola-Kirchhoff en la configuración de referencia. Partiendo de la ecuación (3.12), considerando las relaciones y transformaciones entre las configuraciones deformada y de referencia como se muestra en el Apéndice A, se puede obtener:

$$\delta W_{ext} = \int_{V_0} \mathbf{P} : \delta\mathbf{F}dV_0 \quad (3.15)$$

en donde cabe considerar que ni \mathbf{P} ni \mathbf{F} son simétricos y por lo tanto es necesario tener algún cuidado en la evaluación del producto de ambos. La ecuación (3.15) implica que \mathbf{F} y \mathbf{P} son apropiadamente conjugados, de hecho esta ecuación es la forma que toma el principio de trabajos virtuales expresado en términos del primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff.

Por otra parte puede obtenerse una expresión equivalente en términos del segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff, para lo cual es necesario sustituir la expresión $\mathbf{P} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}$ en la (3.15). Haciendo esta sustitución en el integrando en (3.15) y operando sobre este término es fácil demostrar que:

$$\delta W_{ext} = \int_{V_0} \frac{1}{2} \mathbf{S} : \delta \mathbf{C} dV_0 \quad (3.16)$$

y alternativamente a través del tensor de deformación de Green-Lagrange cuya variación es $\delta \mathbf{E} = \frac{1}{2} \delta \mathbf{C}$, resulta en:

$$\delta W_{ext} = \int_{V_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV_0 \quad (3.17)$$

lo cual también demuestra que los tensores \mathbf{S} y \mathbf{E} son variables conjugadas en el Principio de Trabajos Virtuales.

3.2.3. Ecuaciones de gobierno del problema termomecánico con contacto

La mayor parte de los problemas en medios continuos de la física y la ingeniería, puede describirse a partir de funciones que respondan a un conjunto de ecuaciones diferenciales sobre las variables independientes del problema $\mathcal{A}(\mathbf{u})$ y respeten un conjunto condiciones de borde preestablecidas $\mathcal{B}(\mathbf{u})$. La forma débil se puede establecer a partir de la integración de las ecuaciones diferenciales en el dominio de análisis y aplicando sistemáticamente un conjunto de funciones de ponderación \mathbf{w} y $\bar{\mathbf{w}}$, para el dominio y el contorno respectivamente, lo que resulta en:

$$\int_V \mathbf{w} \mathcal{A}(\mathbf{u}) dV + \int_A \bar{\mathbf{w}} \mathcal{B}(\mathbf{u}) dA = 0 \quad (3.18)$$

este postulado establece que si la ecuación (3.18) se cumple para todo \mathbf{w} y $\bar{\mathbf{w}}$, entonces las ecuaciones diferenciales $\mathcal{A}(\mathbf{u})$ y $\mathcal{B}(\mathbf{u})$ se satisfacen para todos los puntos del dominio y el contorno. Es claro que las funciones elegidas para representar tanto \mathbf{u} , \mathbf{w} y $\bar{\mathbf{w}}$, deben ser lo suficientemente continuas para que las integrales puedan ser evaluadas.

Esta forma débil de las ecuaciones integrales, está asociada al hecho de algunos términos son susceptibles de ser integrados por partes disminuyendo el orden de las derivadas involucradas en el problema. Y esto trae aparejado alguna ventaja en la elección de las funciones de aproximación empleadas para describir el comportamiento de las variables independientes \mathbf{u} del problema. Esto sucede a expensas de que aumente el orden de derivación sobre las funciones de ponderación, es decir:

$$\int_V \mathcal{C}(\mathbf{w}) \mathcal{A}(\mathbf{u}) dV + \int_A \mathcal{D}(\bar{\mathbf{w}}) \mathcal{B}(\mathbf{u}) dA = 0 \quad (3.19)$$

en donde $\mathcal{C}(\mathbf{w})$ y $\mathcal{D}(\bar{\mathbf{w}})$ son operadores diferenciales sobre los conjuntos de funciones de ponderación sobre el dominio y contorno, respectivamente. En general esto permite elegir funciones de aproximación con un menor orden de continuidad para las variables independientes \mathbf{u} del problema en (3.19), a costa de necesitar un mayor orden de continuidad para \mathbf{w} y $\bar{\mathbf{w}}$.

En el caso de un problema termomecánico el conjunto de ecuaciones diferenciales son las presentadas en (3.9) y (3.10) en el apartado 3.2.1. Y en nuestro caso usaremos el principio de

desplazamientos virtuales de manera sistemática para establecer las ecuaciones de gobierno del problema termomecánico en forma débil equivalentes a (3.19). Se puede demostrar fácilmente que integrando las ecuaciones de equilibrio sobre un volumen diferencial y adoptando como funciones de ponderación $\mathbf{w} = \bar{\mathbf{w}} = \delta \mathbf{u}$ se recupera la ecuación (3.14), de modo que el principio de desplazamientos virtuales es precisamente la forma débil de la ecuación de equilibrio mecánico (ver el trabajo de Zienkiewicz y Taylor (2000), pg. 54-55). A continuación se presenta un resumen del apartado A.4 del Apéndice A, en donde se han desarrollado las ecuaciones de gobierno del problema termomecánico en forma débil siguiendo la metodología indicada.

El punto de partida son las ecuaciones de movimiento y equilibrio de calor, (3.9) y (3.10), respectivamente. Además de proceder a la integración sobre el dominio se han elegido, consistentemente con el método de desplazamientos virtuales, como funciones de ponderación: (a) un desplazamiento virtual $\delta \mathbf{u}$ para la ecuación de movimiento, y (b) una temperatura virtual $\delta \theta$ para la ecuación de equilibrio de calor; tal como se observa en (3.20) y (3.21), respectivamente.

$$\int_V \delta \mathbf{u} \cdot [\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho (\mathbf{b}_f - \dot{\mathbf{v}})] dV = 0 \quad (3.20)$$

$$\int_V \delta \theta [-\rho C_\kappa \dot{\theta} + Q + \nabla \cdot (\mathbf{K}^\theta \nabla \theta) - \theta \hat{\boldsymbol{\beta}} : \mathbf{d}^e + D_p] dV = 0 \quad (3.21)$$

En el caso de la ecuación de movimiento del sólido deformable resulta casi directa la definición de su forma débil, aplicando la igualdad $(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \mathbf{u} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma} : (\nabla \delta \mathbf{u})$ y reordenando los términos, para el caso de una Formulación Lagrangeana Actualizada termina siendo:

$$-\int_V \rho \dot{\mathbf{v}} \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_V \boldsymbol{\tau} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV - \left(\int_A \mathbf{t}_n \cdot \delta \mathbf{u} dA + \int_V \rho \mathbf{b}_f \cdot \delta \mathbf{u} dV \right) = 0 \quad (3.22)$$

en (3.22) la primer integral representa el trabajo virtual externo de las fuerzas de inercia, la segunda integral resulta ser el trabajo virtual interno (a partir del par conjugado: tensor de deformaciones de Almansi $\boldsymbol{\varepsilon}$ y tensor de tensiones de Kirchhoff $\boldsymbol{\tau}$) y por último las dos integrales restantes representan el trabajo virtual externo debido a las cargas aplicadas y las fuerzas másicas respectivamente.

El procedimiento es similar para la ecuación de equilibrio del calor, eligiendo las condiciones de borde adecuadas e integrando por partes el tercer término en (3.21), luego de reordenar los términos se puede llegar a:

$$-\int_V \delta \theta \rho C_\kappa \dot{\theta} dV - \int_V \nabla \delta \theta \mathbf{K}^\theta \nabla \theta dV + \int_V \delta \theta [Q - \theta \hat{\boldsymbol{\beta}} : \mathbf{d}^e + D_p] dV + \int_{A_h} \delta \theta [h_c (\theta_s - \theta_a) + h_r (\theta_s^4 - \theta_{rad}^4)] dA + \int_{A_q} \delta \theta q dA = 0 \quad (3.23)$$

la cual también está referida a la configuración deformada previa en el caso de una Formulación Lagrangeana Actualizada.

En el caso de un problema termomecánico con contacto, propio de los problemas industriales de conformado de metales, las ecuaciones (3.22) y (3.23) deben ser modificadas a los fines de incluir los términos en el contorno asociados a la interacción con las

herramientas. El Apéndice B contiene una descripción general del problema de contacto y su tratamiento, como así también un detalle del algoritmo de contacto bidimensional basado en la técnica de penalización que se ha empleado en este trabajo.

El contacto desde el punto de vista mecánico se puede observar como un vector de carga actuando sobre el contorno, el cual puede tener dirección normal ($\bar{\mathbf{n}}$) o tangencial ($\bar{\mathbf{a}}$) al contorno, la forma débil de las ecuaciones de movimiento de un sólido deformable con contacto resulta entonces:

$$\mathcal{Q}_M + \int_{A_c} (p_N \bar{\mathbf{n}} + t_T \bar{\mathbf{a}}) \delta \mathbf{u} dA = 0 \quad (3.24)$$

en (3.24) p_N y t_T son las magnitudes de las fuerzas normal y tangencial, respectivamente, en la parte del contorno A_c en la cual se evidencia contacto; mientras \mathcal{Q}_M contiene el resto de los términos establecidos previamente en (3.20).

Por otra parte desde el punto de vista térmico el contacto involucra dos aspectos fundamentales, el primero está relacionado con la transmisión de calor entre los cuerpos en contacto por conducción, y además la generación de calor por fricción. Entonces la forma débil de la ecuación de equilibrio de calor de un sólido deformable con contacto es:

$$\mathcal{Q}_T - \int_{A_c} \delta \theta \left[k_c (p_N) (\theta^2 - \bar{\theta}^1) + \zeta_c (t_T \dot{g}_T^d) \right] dA = 0 \quad (3.25)$$

el primer término de (3.25) representa la conducción por contacto en donde interviene el coeficiente de transferencia k_c y el salto o diferencia térmica entre las superficies en contacto $(\theta^2 - \bar{\theta}^1)$, el segundo término representa la generación de calor por fricción en donde interviene la efusividad relativa de la interface ζ_c y la potencia de contacto evaluada a partir de la fuerza tangencial y la velocidad de deslizamiento relativa \dot{g}_T^d . En (3.25) \mathcal{Q}_T contiene el resto de términos de la ecuación (3.21).

Las ecuaciones (3.22) a (3.25) representan las ecuaciones de gobierno del problema termomecánico con contacto en forma débil, a partir de las cuales y empleando la técnica del método de elementos finitos, se obtendrá el sistema de discreto de ecuaciones para el análisis numérico del problema.

3.3. Modelo constitutivo termo-elasto-plástico

Hasta aquí se han empleado las ecuaciones de balance de la mecánica del continuo y las relaciones cinemáticas asociadas al problema de grandes deformaciones, para establecer las ecuaciones de equilibrio del problema termomecánico. Sin embargo, es necesario definir una regla de comportamiento del material que permita vincular la cinemática del problema con el equilibrio del cuerpo, a fin de poder resolver las ecuaciones de gobierno establecidas en (3.22) y (3.23). Esta regla de comportamiento del material es lo que se denomina habitualmente *modelo constitutivo*, y a continuación se presentará un modelo constitutivo capaz de lidiar con el problema de grandes deformaciones elasto-plásticas de una manera eficiente. Además este modelo constitutivo elegido, tiene la ventaja de ser fácilmente generalizable con el fin de incluir efectos viscoplásticos.

Inicialmente se empleó un modelo constitutivo basado en la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de deformaciones siguiendo los lineamientos del modelo propuesto por Crisfield (1997a). En ese modelo empleado en Castelló (2005) la integración de la ecuación constitutiva se hace en términos de tensiones y deformaciones naturales (logarítmicas) referidas a la configuración intermedia libre de tensiones. Y dado que ese modelo

constitutivo está asociado a un esquema numérico establecido sobre una Formulación Lagrangeana Total, el algoritmo de integración involucra una descomposición espectral del tensor derecho de Cauchy-Green elástico \mathbf{C}^e , la evaluación de una función exponencial aplicada a un tensor para la actualización de \mathbf{F}^{p-1} y además una serie de transformaciones del tipo *push-forward* y *pull-back* sobre las tensiones para obtener el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} para la ecuación de equilibrio. El modelo constitutivo empleado en Castelló (2005), si bien resulta adecuado para el tratamiento del problema en grandes deformaciones elasto-plásticas, resulta poco eficiente debido a la importante cantidad de operaciones en los puntos de integración elementales. Por otra parte, una de las variables de transferencia en el remallado es un tensor (se transfiere el tensor de tensiones de Kirchhoff $\boldsymbol{\tau}$ en lugar de \mathbf{F}^{p-1} , ya que el mismo no está unívocamente definido frente a una rotación arbitraria) lo cual implica también algunas operaciones extras a nivel elemental.

En este sentido, ante la necesidad de implementar un modelo constitutivo más eficiente, se optó por el algoritmo propuesto en el trabajo de García Garino (1993) que cumple con este objetivo y muy particularmente, desde el punto de vista computacional, en la integración de la ecuación constitutiva en problemas elasto-plásticos. Además este algoritmo es susceptible de ser modificado para tratar problemas elasto-viscoplásticos, es decir se puede generalizar hacia la viscoplasticidad tal como lo han propuesto Ponthot (2002); Ponthot et al. (2005) sin modificar su simplicidad y economía de cálculo. El algoritmo de solución del problema elasto-plástico es la típica división en dos problemas: un predictor elástico y un corrector plástico, de modo que la resolución de ambos problemas sea equivalente a la solución del problema original.

3.3.1. Cinemática asociada al modelo constitutivo

En este modelo constitutivo elasto-plástico el conjunto de variables que definen completamente el problema son $\{\varphi, \vartheta, \mathbf{b}^{e-1}, e^p\}$, en donde: φ representa la función deformación o la función de cambio entre dos configuraciones, ϑ es la función intercambio de temperatura o salto térmico entre dos configuraciones, \mathbf{b}^{e-1} es la parte elástica del tensor de Finger a partir de la cual es posible definir el tensor de pequeñas deformaciones elásticas o tensor de Almansi, y e^p el parámetro de endurecimiento o deformación plástica efectiva en el caso de endurecimiento isótropo.

En este algoritmo el primer paso consiste en actualizar la configuración, de manera que siendo conocido las variables en el paso anterior $\{\varphi_n, \vartheta_n, \mathbf{b}_n^{e-1}, e_n^p\}$, de modo que suponiendo un desplazamiento incremental \mathbf{u} sobre la configuración deformada φ_n , esta se modifica según:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \varphi_{n+1}(\mathbf{X}) = \varphi_n(\mathbf{X}) + \mathbf{u}[\varphi_n(\mathbf{X})] \quad (3.26)$$

donde la nueva configuración geométrica está referida a la configuración anterior $\mathbf{x}_n = \varphi_n(\mathbf{X})$ (o último paso convergido) y al igual que los desplazamientos actuales $\mathbf{u}_n = \mathbf{u}[\varphi_n(\mathbf{X})]$ son datos; de manera que resulta trivial entonces la obtención configuración actual \mathbf{x}_{n+1} .

Del mismo modo suponiendo un incremento de temperatura Δ sobre la configuración previa ϑ_n , esta se modifica de acuerdo a:

$$\theta_{n+1} = \vartheta_{n+1}(\Theta) = \vartheta_n(\Theta) + \Delta[\vartheta_n(\Theta)] \quad (3.27)$$

en donde la temperatura está referida a la temperatura anterior $\theta_n = \vartheta_n(\Theta)$ y al igual que el incremento de temperatura actual $\Delta\theta_n = \Delta[\vartheta_n(\Theta)]$ son datos del problema.

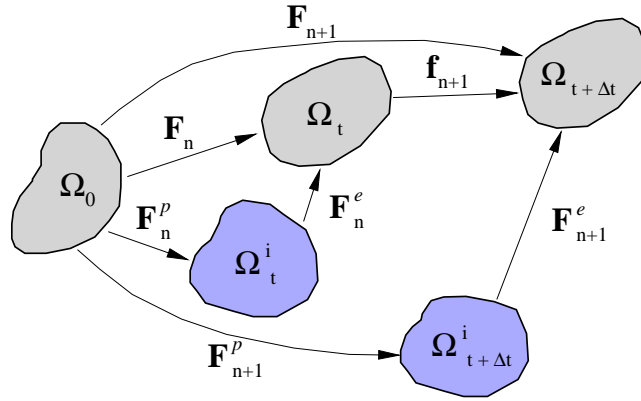


Figura 3.1 – Configuraciones de un sólido deformable y configuración intermedia.

Considerando la Figura 3.1 y la ecuación (3.26), se puede obtener el *gradiente de deformación total* en el paso actual \mathbf{F}_{n+1} como:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{n+1} &= \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \varphi_n}{\partial \mathbf{X}} + [\nabla_{x_n} \mathbf{u}_n] \frac{\partial \varphi_n}{\partial \mathbf{X}} \\ &= [\mathbf{1} + \nabla_{x_n} \mathbf{u}_n] \frac{\partial \varphi_n}{\partial \mathbf{X}} \\ &= [\mathbf{1} + \nabla_{x_n} \mathbf{u}_n] \mathbf{F}_n\end{aligned}\quad (3.28)$$

y por otra parte aplicando derivadas parciales se puede obtener:

$$\mathbf{F}_{n+1} = \frac{\partial \mathbf{x}_{n+1}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}_{n+1}}{\partial \mathbf{x}_n} \frac{\partial \mathbf{x}_n}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{f}_{n+1} \mathbf{F}_n \quad (3.29)$$

Se observa que el *gradiente relativo* \mathbf{f}_{n+1} resulta ser:

$$\mathbf{f}_{n+1} = \frac{\partial \mathbf{x}_{n+1}}{\partial \mathbf{x}_n} = \mathbf{1} + \nabla_{x_n} \mathbf{u}_n \quad (3.30)$$

o bien puede obtenerse de acuerdo a (3.29) como:

$$\mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{F}_n^{-1} \quad (3.31)$$

En la formulación propuesta en el trabajo de García Garino (1993), se emplea la inversa del gradiente de deformación relativo \mathbf{f}_{n+1}^{-1} . Por lo tanto a partir de (3.31) se puede definir según:

$$\mathbf{f}_{n+1}^{-1} = \frac{\partial \mathbf{x}_n}{\partial \mathbf{x}_{n+1}} = \mathbf{1} - \nabla_{x_n} \mathbf{u}_n \quad (3.32)$$

es decir en este caso se tiene un esquema Euleriano donde la evaluación de las derivadas de las funciones de forma debe realizarse en cada nuevo paso de tiempo y de este modo resulta en una Formulación Lagrangeana Actualizada.

3.3.2. Problema termoelástico

La definición del problema elástico se basa en establecer alguna medida de las deformaciones y tensiones elásticas. El algoritmo de cálculo que se ha empleado en este trabajo es

una adaptación del propuesto por García Garino (1993), se utiliza la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de las deformaciones de acuerdo a:

$$\mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1}^e \mathbf{F}_{n+1}^p \quad (3.33)$$

ademas se supone que la parte plástica no modifica el volumen, de modo que:

$$\det(\mathbf{F}^p) = 1 \quad (3.34)$$

y por ende:

$$\det(\mathbf{F}) = \det(\mathbf{F}^e) = J \quad (3.35)$$

En el caso del problema elástico las variables plásticas no cambian, es decir $\mathbf{F}_{n+1}^p = \mathbf{F}_n^p$, y por lo tanto a partir de la descomposición (3.33) la parte elástica del tensor gradiente de la deformación:

$$\mathbf{F}_{n+1}^{e \text{ trial}} = \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{F}_n^{p-1} \quad (3.36)$$

en la cual puede reemplazarse el gradiente de deformación total actual, por la relación expuesta en la ecuación (3.29), de modo que:

$$\mathbf{F}_{n+1}^{e \text{ trial}} = \mathbf{f}_{n+1} (\mathbf{F}_n \mathbf{F}_n^{p-1}) = \mathbf{f}_{n+1} \mathbf{F}_n^e \quad (3.37)$$

y siendo la parte elástica del tensor de Finger de prueba:

$$[\mathbf{b}_{n+1}^{e-1}]^{\text{trial}} = [\mathbf{F}_{n+1}^{e \text{ trial}-T} \mathbf{F}_{n+1}^{e \text{ trial}-1}] \quad (3.38)$$

es posible a partir de (3.37) describir la (3.38) como:

$$[\mathbf{b}_{n+1}^{e-1}]^{\text{trial}} = \mathbf{f}_{n+1}^{-T} (\mathbf{b}_n^{e-1}) \mathbf{f}_{n+1}^{-1} \quad (3.39)$$

El tensor elástico de prueba de Almansi puede calcularse empleando el tensor de Finger (3.38) a través de la siguiente ecuación:

$$\mathbf{e}_{n+1}^{e \text{ trial}} = \frac{1}{2} \left[\mathbf{1} - (\mathbf{b}_{n+1}^{e-1})^{\text{trial}} \right] \quad (3.40)$$

Así como la relación entre las tensiones y deformaciones se observa cotidianamente, también se aprecia en multitud de situaciones en donde los campos de temperatura y tensión/deformación están acoplados. Así pues, si se calienta un cuerpo este se deforma y en ciertos materiales se observa que incluso una deformación elástica produce cambios de temperatura (el llamado efecto *Gough-Joule* o *expansión de Joule*). La deformación de origen térmico es proporcional al incremento térmico y a un coeficiente de dilatación térmica que indicamos con el símbolo α , de modo que puede escribirse para un caso de tensión plana:

$$\mathbf{e}_{n+1}^{th} = f_\nu \alpha \Delta \theta_n \mathbf{1} \quad (3.41)$$

donde $f_\nu = 1$; mientras que para los casos de deformación plana y axilsimetría la expresión (3.41) debe ser premultiplicada por $f_\nu = 1 + \nu$.

Se comprueba experimentalmente que cuando se calienta uniformemente un cuerpo elástico (isótropo y homogéneo) sin restricciones, el mismo se deforma libremente sin que aparezcan tensiones. Esto implica que las deformaciones totales deben ser iguales y opuestas a las deformaciones térmicas, en función de lo cual el tensor termoelástico de prueba de Almansi puede escribirse, a partir de (3.40) y (3.41), en forma general como:

$$\mathbf{e}_{n+1}^{e \text{ trial}} = \mathbf{e}_{n+1}^{\text{trial}} - \mathbf{e}_{n+1}^{th} = \frac{1}{2} \left[(1 - f_\nu \alpha \Delta \theta_n) \mathbf{1} - (\mathbf{b}_{n+1}^e)^{-1} \right]^{\text{trial}} \quad (3.42)$$

A partir de (3.42) se puede obtener el tensor elástico de prueba de Kirchhoff, siguiendo la descomposición en tensiones volumétricas y desviadores propuestas por Lamé, de acuerdo a:

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{e \text{ trial}} = K \text{tr} \left(\mathbf{e}_{n+1}^{e \text{ trial}} \right) \mathbf{1} + 2\mu \text{dev} \left(\mathbf{e}_{n+1}^{e \text{ trial}} \right) \quad (3.43)$$

en donde K y μ son los módulos volumétrico y de corte del material, respectivamente, y siendo $\mathbf{1}$ el tensor identidad de segundo orden. En lo que sigue se adopta una relación lineal y constante entre las tensiones y deformaciones elásticas.

Por otra parte considerando (3.42) y (3.40), entonces la parte desviadora del tensor de Almansi de prueba resulta:

$$\text{dev} \left(\mathbf{e}_{n+1}^e \right) = -\frac{1}{2} \text{dev} \left(\mathbf{b}_{n+1}^e \right)^{-1} \quad (3.44)$$

donde lógicamente no intervienen las deformaciones térmicas pues las mismas son volumétricas, y la parte desviadora de la tensión de Kirchhoff queda definida finalmente por:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} &= 2\mu \text{dev} \left(\mathbf{e}_{n+1}^{e \text{ trial}} \right) \\ &= -\mu \text{dev} \left(\left[\mathbf{b}_{n+1}^e \right]^{\text{trial}} \right) \end{aligned} \quad (3.45)$$

3.3.3. Problema termo-plástico

En el problema plástico la configuración deformada permanece fija y las variables internas se actualizan de modo que satisfagan la ecuación constitutiva. El análisis de sólidos metálicos sometidos a deformaciones finitas y considerando plasticidad independiente de la velocidad de deformación, es decir ante la ausencia de efectos viscosos marcados, se hace aplicando la *condición de fluencia de Mises-Huber*. Esta función, que define el dominio elástico de las tensiones, puede escribirse como:

$$f(\boldsymbol{\tau}, e^p, \theta) = \|\text{dev}[\boldsymbol{\tau}]\| - \sqrt{\frac{2}{3}} [\sigma_0(\theta) + A'(\theta) e^p] \quad (3.46)$$

donde $\boldsymbol{\tau}$ es el tensor de tensiones de Kirchhoff (3.43), e^p es el parámetro de endurecimiento o deformación plástica efectiva, mientras que $\sigma_0(\theta)$ y $A'(\theta)$ son la tensión de fluencia y el módulo de endurecimiento del material, respectivamente, y ambos pueden verse como funciones dependientes de la temperatura.

Puede observarse en (3.46) que la dependencia de la función de fluencia con la temperatura está dada a partir de los parámetros físicos del material. En lo que sigue y a los fines de mantener la claridad, se evitará hacer referencia explícita a esta dependencia de la tensión de fluencia y del módulo de endurecimiento del material respecto de la temperatura.

La función de fluencia, considerando (3.46) y (3.45), toma entonces la forma general:

$$f_{n+1}^{\text{trial}}(\mathbf{s}, e^p, \theta) = \|\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} [\sigma_0 + A' e_n^p] \quad (3.47)$$

en donde, dependiendo del nivel alcanzado por las tensiones, se pueden presentar dos casos:

- Si $f_{n+1}^{\text{trial}} \leq 0$ corresponde a un estado de carga elástica, y por lo tanto:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{n+1} &= \mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} \\ e_{n+1}^p &= e_n^p \\ \mathbf{b}_{n+1}^{e^{-1}} &= \left(\mathbf{b}_{n+1}^e \right)^{\text{trial}} \end{aligned} \quad (3.48)$$

- Si $f_{n+1}^{\text{trial}} > 0$ corresponde a un caso de carga plástica, y se procede a la corrección por plasticidad.

La corrección por plasticidad, desde un punto de vista matemático, se reduce a definir la menor distancia medida a través de una norma energética desde un punto que es el estado de prueba a un conjunto convexo de puntos que es el dominio elástico definido por una función de fluencia. Desde un punto de vista geométrico, en el caso más general implica definir la proyección siguiendo la normal al contorno como se muestra esquemáticamente en la Figura 3.2.

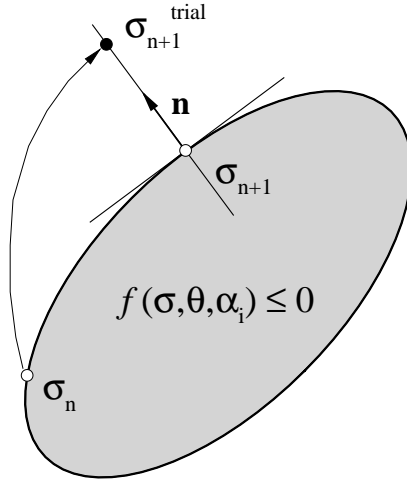


Figura 3.2 – Esquema geométrico del concepto de proyección de menor distancia

El esquema de corrección por plasticidad se simplifica aun más cuando se considera un función de fluencia del tipo de von Mises como (3.47), dado que representa un círculo en el espacio de las tensiones desviadoras, y permite establecer una solución cerrada del problema resultando en el denominado *retorno radial*.

La hipótesis característica del algoritmo de retorno radial es suponer que, la dirección del vector normal (3.49) a la superficie de fluencia no se ve alterado durante la corrección plástica o retorno a la superficie de fluencia, siendo:

$$\mathbf{n} = \frac{\partial f(\mathbf{s}, e^p, \theta)}{\partial \mathbf{s}} = \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} \quad (3.49)$$

y la hipótesis consiste en suponer que:

$$\mathbf{n}_{n+1} = \mathbf{n}_{n+1}^{\text{trial}} \quad (3.50)$$

La regla de flujo establece que la velocidad de deformación plástica asociada a la configuración deformada o actual, puede escribirse a partir de la condición de máxima disipación plástica como:

$$\mathbf{d}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial f(\boldsymbol{\tau}, e^p, \theta)}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \dot{\gamma} \mathbf{n} \quad (3.51)$$

o de manera equivalente sobre la configuración original, y en función del cambio en la parte plástica del tensor derecho de Cauchy-Green $\mathbf{C}^p = \mathbf{F}^{pT} \cdot \mathbf{F}^p$, según:

$$\dot{\mathbf{C}}^p = 2\phi^*(\dot{\gamma} \mathbf{n}) = 2\dot{\gamma} \mathbf{N} \quad (3.52)$$

donde ϕ^* implica una transformación del tipo *pull-back* para expresar la regla de flujo respecto a la configuración original. La ecuación (3.52) puede discretizarse empleando un esquema en diferencias finitas de modo que:

$$\frac{\mathbf{C}_{n+1}^p - \mathbf{C}_n^p}{\Delta t} = 2\dot{\gamma} \mathbf{N}_{n+1} \quad (3.53)$$

desde donde es posible obtener:

$$\mathbf{C}_{n+1}^p = \mathbf{C}_n^p + 2\Delta\gamma \mathbf{N}_{n+1} \quad (3.54)$$

y esta misma expresión puede reescribirse en variables espaciales, haciendo uso de una transformación del tipo *push-forward* a la que indicaremos con ϕ_* , y resulta:

$$\phi_* \mathbf{C}_{n+1}^p = \phi_* \mathbf{C}_n^p + 2\Delta\gamma \mathbf{n}_{n+1} \quad (3.55)$$

Estos términos en variables espaciales se derivan a continuación, considerando (3.33), y para el caso del primer término $\phi_* \mathbf{C}_{n+1}^p$ se tiene:

$$\begin{aligned} \phi_* \mathbf{C}_{n+1}^p &= \mathbf{F}_{n+1}^{-T} \mathbf{C}_{n+1}^p \mathbf{F}_{n+1}^{-1} \\ &= \mathbf{F}_{n+1}^e^{-T} \mathbf{F}_{n+1}^e^{-1} \end{aligned} \quad (3.56)$$

por lo tanto:

$$\phi_* \mathbf{C}_{n+1}^p = \mathbf{b}_{n+1}^e^{-1} \quad (3.57)$$

Por otra parte, para el término $\phi_* \mathbf{C}_n^p$, se calcula de manera similar y aprovechando la relación (3.31) con el tensor gradiente de deformación relativo \mathbf{f}_{n+1} , resultando en:

$$\begin{aligned} \phi_* \mathbf{C}_n^p &= \mathbf{F}_{n+1}^{-T} \mathbf{C}_n^p \mathbf{F}_{n+1}^{-1} \\ &= \mathbf{f}_{n+1}^{-T} \left[\mathbf{F}_n^{-T} \left(\mathbf{F}_{n+1}^p{}^T \mathbf{F}_{n+1}^p \right) \mathbf{F}_n^{-1} \right] \mathbf{f}_{n+1}^{-1} \\ &= \mathbf{f}_{n+1}^{-T} \left[\mathbf{F}_n^e{}^{-T} \mathbf{F}_n^e{}^{-1} \right] \mathbf{f}_{n+1}^{-1} \end{aligned} \quad (3.58)$$

con lo cual, de acuerdo (3.38), se tiene:

$$\phi_* \mathbf{C}_n^p = \mathbf{f}_{n+1}^{-T} \mathbf{b}_n^e{}^{-1} \mathbf{f}_{n+1}^{-1} = \left[\mathbf{b}_{n+1}^e{}^{-1} \right]^{\text{trial}} \quad (3.59)$$

Entonces introduciendo las ecuaciones (3.57) y (3.59) en (3.55), puede obtenerse un expresión que permite actualizar o corregir el tensor elástico de Finger:

$$\mathbf{b}_{n+1}^e{}^{-1} = \left[\mathbf{b}_{n+1}^e{}^{-1} \right]^{\text{trial}} + 2\Delta\gamma \mathbf{n}_{n+1} \quad (3.60)$$

a partir de (3.60) puede corregirse el tensor elástico de Almansi:

$$\mathbf{e}_{n+1}^e = \frac{1}{2} \left[(1 - f_\nu \alpha \Delta\theta_n) \mathbf{1} - \mathbf{b}_{n+1}^e{}^{-1} \right] \quad (3.61)$$

Recordando la ecuación (3.45), a partir de (3.60) se puede obtener la expresión que permite corregir plásticamente la parte desviadora de la tensión de Kirchhoff según:

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} - 2\mu\Delta\gamma\mathbf{n}_{n+1} \quad (3.62)$$

y el tensor de tensiones de Kirchhoff actualizado queda definido adicionando a la ecuación (3.62) la parte volumétrica de las tensiones (3.43) de modo que:

$$\tau_{n+1} = K\text{tr}(\mathbf{e}_{n+1}^e)\mathbf{1} + \mathbf{s}_{n+1} \quad (3.63)$$

en donde debe considerarse que \mathbf{e}_{n+1}^e tiene las componentes volumétricas, mecánicas y térmicas, de acuerdo a lo que se ha visto en (3.42).

Empleando la relación entre las tensiones desviadoras y el vector normal a la superficie de fluencia de acuerdo a (3.49) en la (3.62), resulta:

$$\|\mathbf{s}_{n+1}\|\mathbf{n}_{n+1} = \|\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}\|\mathbf{n}_{n+1}^{\text{trial}} - 2\mu\Delta\gamma\mathbf{n}_{n+1}^{\text{trial}} \quad (3.64)$$

que en virtud de (3.50) se puede reescribir como:

$$(\|\mathbf{s}_{n+1}\| + 2\mu\Delta\gamma)\mathbf{n}_{n+1} = \|\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}\|\mathbf{n}_{n+1} \quad (3.65)$$

y por ende se puede reescribir como una ecuación escalar:

$$\|\mathbf{s}_{n+1}\| + 2\mu\Delta\gamma = \|\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}\| \quad (3.66)$$

La condición de consistencia que debe cumplirse a partir de la función de fluencia de Mises-Huber (3.47) puede expresarse como $\|\mathbf{s}_{n+1}\| \leq R_{n+1}$, en donde R_{n+1} es el radio actualizado del cilindro de von Mises. Entonces en el límite del dominio elástico puede escribirse como:

$$\|\mathbf{s}_{n+1}\| = \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_0 + A'e_{n+1}^p) \quad (3.67)$$

Considerando una ley de endurecimiento asociativa, lo cual implica $\dot{e}^p = \dot{\gamma}\frac{\partial f(\mathbf{s}, e^p, \theta)}{\partial e^p}$, la evolución del parámetro de endurecimiento queda fijada por:

$$e_{n+1}^p = e_n^p + \sqrt{\frac{2}{3}}\Delta\gamma \quad (3.68)$$

luego reemplazando (3.68) y (3.66) en (3.67), realizando algunas operaciones algebraicas sencillas, se puede llegar a:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{s}_{n+1}\| &= \sqrt{\frac{2}{3}}\left[\sigma_0 + A'\left(e_n^p + \sqrt{\frac{2}{3}}\Delta\gamma\right)\right] \quad (3.69) \\ \|\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}\| - 2\mu\Delta\gamma &= \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_0 + A'e_n^p) + \frac{2}{3}A'\Delta\gamma \\ \|\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}\| + \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_0 + A'e_n^p) &= \frac{2}{3}A'\Delta\gamma + 2\mu\Delta\gamma \\ f_{n+1}^{\text{trial}} &= \left(\frac{2}{3}A' + 2\mu\right)\Delta\gamma \end{aligned}$$

y a partir de (3.69) se puede definir una expresión para evolución del parámetro de consistencia:

$$\Delta\gamma = \frac{3f_{n+1}^{\text{trial}}}{2A' + 6\mu} \quad (3.70)$$

3.4. Generalización al modelo constitutivo termo-elasto-viscoplástico

En este apartado se presenta una formulación viscoplástica basada en las ideas propuestas originalmente por Ponthot (2002), y posteriormente extendidas a un modelo hiperelástico en los trabajos de Ponthot et al. (2005) y García Garino et al. (2006). Estas propuestas corresponden a una formulación clásica de la viscoplasticidad o plasticidad dependiente del tiempo introducida en los trabajos de Perzyna (1966) y Perzyna (1971).

En los problemas viscoplásticos la mayor parte de la cinemática asociada a problemas con grandes deformaciones permanece sin alteraciones, es decir es posible mantener la descomposición aditiva del tensor velocidad de deformación \mathbf{d} en la suma de su parte elástica \mathbf{d}^e y su parte viscoplástica \mathbf{d}^{vp} :

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^{vp} \tag{3.71}$$

sin embargo se hace notar que la parte plástica, identificada con el supraíndice $(.)^{vp}$, involucra también los efectos viscosos. La principal diferencia entre los problemas de plasticidad independiente (plásticos) y dependientes (viscoplásticos) de la velocidad de deformación, es que la tensión efectiva $\bar{\sigma}$ no está restringida a permanecer dentro del dominio definido por la superficie de fluencia, lo cual se presenta en forma gráfica en la Figura 3.3. Es decir, no es necesario que se cumpla la relación $\bar{\sigma} \leq \sigma_y$, y por el contrario se admite la existencia de una sobretensión que se puede definir como:

$$d = \langle \bar{\sigma} - \sigma_y \rangle \tag{3.72}$$

donde $\langle . \rangle$ representa los corchetes de McAuley que puede evaluarse como $\langle x \rangle = (x + |x|) / 2$, y donde claramente el proceso de deformación inelástica tiene lugar cuando esta sobre tensión es $d > 0$.

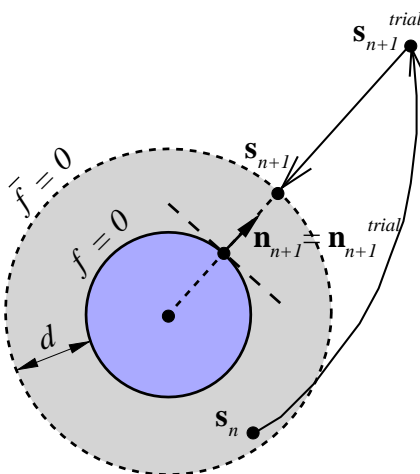


Figura 3.3 – Esquema de retorno radial y sobre tensión por viscoplasticidad.

En este trabajo se plantea un modelo viscoplástico del tipo Perzyna definido por una regla de flujo asociativa similar a la propuesta en (3.51), donde sin embargo se ha reemplazado el coeficiente de consistencia plástico γ por una función de consistencia según:

$$\mathbf{d}^{vp} = \langle \phi(d, \eta) \rangle \mathbf{n} \tag{3.73}$$

donde η es la viscosidad del material y la función ϕ debe ser monotónica creciente. La estructura de la ecuación (3.73) sugiere que la función ϕ juega el papel de una función de regularización, donde el parámetro de regularización está asociado a la viscosidad del material. En este sentido, estos tipos de modelos se pueden considerar como una *regularización de la plasticidad independiente de la velocidad de deformación* en donde el parámetro de consistencia ha sido reemplazado por una función de la sobretensión. La forma propuesta por Ponthot et al. (2005) es:

$$\phi(d, \eta) = \dot{\gamma}^{vp} = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\langle \frac{\bar{\sigma} - \sigma_y}{\eta (e^{vp})^{1/n}} \right\rangle^m \quad (3.74)$$

en donde además de la tensión efectiva $\bar{\sigma}$ y la deformación viscoplástica efectiva e^{vp} , se tienen un conjunto de parámetros dependientes del material como: la tensión de fluencia σ_y , la viscosidad del material η , y dos exponentes, n y m , que describen el comportamiento de la deformación viscoplástica efectiva y de la función de sobretensión, respectivamente.

Teniendo en cuenta las ecuaciones (3.73) y (3.74), puede verse que de manera similar al caso plástico la regla de flujo queda establecida según:

$$\mathbf{d}^{vp} = \dot{\gamma}^{vp} \mathbf{n} \quad (3.75)$$

por lo tanto considerando (3.75) se puede obtener la velocidad de deformación viscoplástica equivalente como:

$$\dot{e}^{vp} = \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{d}^{vp} : \mathbf{d}^{vp} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\gamma}^{vp} = \left\langle \frac{\bar{\sigma} - \sigma_y}{\eta (e^{vp})^{1/n}} \right\rangle^m \quad (3.76)$$

en donde, a partir de (3.76), se puede establecer una nueva expresión para la ecuación de restricción elasto-viscoplástica:

$$\bar{\sigma} - \sigma_y - \eta (e^{vp})^{1/n} (\dot{e}^{vp})^{1/m} = 0 \quad (3.77)$$

Como se observa en (3.77), $\bar{f} = 0$ es una *generalización del clásico criterio de von Mises* para el caso de materiales con plasticidad dependientes de la velocidad de deformación, y la Figura 3.3 muestra en línea de trazos el límite del dominio asociado a esta función. El criterio clásico de von Mises se recupera bajo la condición haciendo $\eta = 0$, es decir un material sin efectos viscosos. Por otra parte, el segundo caso límite se obtiene haciendo $\eta = \infty$ en cuyo caso se está en presencia de un material puramente elástico. Los parámetros n , m y η resultan dependientes del material. Según el trabajo de Lemaitre y Chaboche (1994) el exponente viscoso m varía entre 2 (materiales muy viscosos) a 100 (materiales levemente viscosos) lo cual garantiza la ley de plasticidad; además el exponente de endurecimiento n puede variar a aproximadamente entre 2 y 50; y el coeficiente de resistencia viscosa η puede tomar valores entre los 100 a 10000 MPa·s en los metales.

Si se observa el último término de la ecuación (3.77), se puede notar que es formalmente idéntico a la definición la ley de endurecimiento viscoplástica propuesta por Lemaitre y Chaboche (1994) y que se presenta en la ecuación (2.6). En este sentido, entonces es posible establecer una condición de consistencia similar a (3.46), pero asociada al problema viscoplástico según:

$$\bar{f}(\tau, e^{vp}, \dot{e}^{vp}, \theta) = \|\text{dev}[\tau]\| - \sqrt{\frac{2}{3}} [\sigma_0(\theta) + A'(\theta) e^p] - \eta(\theta) (e^{vp})^{1/n(\theta)} (\dot{e}^{vp})^{1/m(\theta)} \quad (3.78)$$

en donde nuevamente, la dependencia térmica de la función de fluencia (3.78) está definida a través de la dependencia de cada parámetro del material con la temperatura. En este caso, además de los parámetros del material asociados al endurecimiento isótropo dependientes de la temperatura, también aparecen los parámetros del endurecimiento viscoplástico con la misma dependencia. Al igual que en el caso elasto-plástico, esta dependencia de los parámetros del material con la temperatura se supondrá a lo largo de todo el trabajo, aunque no se especifique de manera directa en las ecuaciones.

3.4.1. Problema termo-viscoplástico generalizado

Siguiendo la descomposición (3.71) se puede ver que el problema termoelástico no cambia con respecto al presentado en el apartado 3.3.2. En efecto para resolver el problema elasto-viscoplástico se procede de igual manera que en el caso sin viscosidad, se divide el problema en dos un predictor elástico y un corrector viscoplástico.

El algoritmo de corrección viscoplástica se puede obtener a partir de la regla de flujo definida en (3.75), la cual puede reescribirse en la configuración original Ω_0 , en términos del tensor derecho de Cauchy-Green viscoplástico \mathbf{C}^{vp} y el multiplicador viscoplástico γ^{vp} :

$$\dot{\mathbf{C}}^{vp} = 2\phi^*(\dot{\gamma}^{vp}\mathbf{n}) = 2\dot{\gamma}^{vp}\mathbf{N} \quad (3.79)$$

donde (3.79) se puede integrar, al igual que (3.52), empleando un esquema en diferencias finitas:

$$\frac{\mathbf{C}_{n+1}^{vp} - \mathbf{C}_n^{vp}}{\Delta t} = 2\dot{\gamma}^{vp}\mathbf{N}_{n+1} \quad (3.80)$$

Siguiendo los mismos pasos que en el caso de plasticidad independiente, ver ecuaciones (3.57) y (3.59), se puede hacer un *push forward* de esta expresión hacia el estado actual, la cual resulta en:

$$\mathbf{b}_{n+1}^{e-1} = [\mathbf{b}_{n+1}^e]^{trial} + 2\Delta\gamma^{vp}\mathbf{n}_{n+1} \quad (3.81)$$

y luego a partir del tensor de Finger actualizado (3.81) y considerando (3.42), se puede definir el tensor de deformaciones de Almansi actualizado como:

$$\mathbf{e}_{n+1}^e = \frac{1}{2} \left[(1 - f_\nu \alpha \Delta\theta_n) \mathbf{1} - \mathbf{b}_{n+1}^{e-1} \right] \quad (3.82)$$

Recordando que $\mathbf{s} = -\mu \text{dev}(\mathbf{b}^{e-1})$, aplicando esta igualdad en la (3.81) es posible definir una expresión para actualizar las tensiones desviadoras y resulta:

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{trial} - 2\mu\Delta\gamma^{vp}\mathbf{n}_{n+1} \quad (3.83)$$

con lo cual el tensor de tensiones de Kirchhoff actualizado, considerando (3.82) y (3.83), queda definido como:

$$\tau_{n+1} = K \text{tr}(\mathbf{e}_{n+1}^e) \mathbf{1} + \mathbf{s}_{n+1} \quad (3.84)$$

Por otra parte, dada la ley de endurecimiento asociativa establecida en (3.75) y pudiendo ser expresada entonces como $\dot{\epsilon}^{vp} = \sqrt{\frac{2}{3}}\dot{\gamma}^{vp}$, es posible aplicando diferencias finitas obtener:

$$\frac{e_{n+1}^{vp} - e_n^{vp}}{\Delta t} = \sqrt{\frac{2}{3}}\dot{\gamma}^{vp} \quad (3.85)$$

de manera que la actualización de la deformación viscoplástica efectiva resulta:

$$e_{n+1}^{vp} = e_n^{vp} + \sqrt{\frac{2}{3}}\Delta\gamma^{vp} \quad (3.86)$$

Cabe destacar que las variables internas definidas en (3.81), (3.84) y (3.86), no pueden evaluarse a menos que se conozca el parámetro de consistencia viscoplástico $\Delta\gamma^{vp}$. Este parámetro puede obtenerse a partir de la función generalizada de von Mises definida en (3.77), la cual puede expresarse empleando las definiciones (3.83), (3.85) y (3.86) como:

$$\begin{aligned} \bar{f}(\Delta\gamma^{vp}) = & \sqrt{[\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} - 2\mu\Delta\gamma^{vp}\mathbf{n}_{n+1}] : [\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} - 2\mu\Delta\gamma^{vp}\mathbf{n}_{n+1}]} - \sqrt{\frac{2}{3}} [\sigma_y(\Delta\gamma^{vp})]_{n+1} \\ & - \eta \left(e_n^{vp} + \sqrt{\frac{2}{3}}\Delta\gamma^{vp} \right)^{1/n} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\Delta\gamma^{vp}}{\Delta t} \right)^{1/m} \end{aligned} \quad (3.87)$$

la ecuación (3.87) es una expresión no lineal en $\Delta\gamma^{vp}$ y puede resolverse fácilmente a través de algún método iterativo como por ejemplo Newton-Raphson.

Capítulo 4

Formulación del problema aplicando el método de elementos finitos

4.1. Introducción

El estudio computacional de los problemas físicos asociados a la mecánica del continuo ha ido creciendo, en la medida que los ordenadores han aumentado su capacidad de procesamiento de datos numéricos. Asociado a este crecimiento, sin duda uno de los métodos que más se ha empleado y más ha crecido en el área análisis numérico es el método de los elementos finitos.

El método de elementos finitos ha avanzado de manera vertiginosa en los últimos cincuenta años convirtiéndose en un estándar de aplicación en la industria, y además se constituido en origen de nuevos métodos de análisis computacional. Este método implica la descomposición del dominio de análisis del problema físico en una cantidad finita de subdominios o elementos de geometría simple, en donde se plantean las ecuaciones de gobierno para luego por un proceso de ensamble obtener un sistema discreto de ecuaciones algebraicas. Una vez resuelto este sistema finito de ecuaciones, es posible interpolar la solución a todo el dominio a partir de funciones de aproximación preestablecidas dentro de los elementos. En este sentido dependiendo del problema físico y su complejidad, la discretización y posterior solución del problema, resultan altamente dependientes del elemento y la aproximación elegidas.

Este capítulo presenta la formulación del problema algebraico discreto, asociado a las ecuaciones que gobiernan el problema de sólidos con grandes deformaciones y acoplamiento termomecánico. Para ello, a partir de la forma débil de las ecuaciones de equilibrio térmica y mecánica, se plantean las contribuciones elementales siguiendo los lineamientos generales que se encuentran en los libros de texto abocados al área (ej. Bathe (1996), Hughes (2000) y Zienkiewicz y Taylor (2000)). Además se introduce un esquema de interpolación elemental en deformaciones impuestas, lo suficientemente robusto y adecuado, para tratar de manera eficiente los inconvenientes típicos que se manifiestan en el análisis de grandes deformaciones plásticas.

El contenido de este capítulo es el siguiente, en la Sección 4.2 se introduce el esquema de aproximación elemental basado en deformaciones impuestas, en principio se plantean los inconvenientes y ventajas de emplear elementos de bajo orden de interpolación y se detallan algunas soluciones propuestas por distintos investigadores en los últimos años. Luego se presenta el esquema de interpolación empleado en este trabajo. En la Sección 4.3 se desarrollan las expresiones discretas de las ecuaciones de equilibrio mecánica y térmica,

se presenta el esquema de solución de las ecuaciones discretas basado en la integración explícita escalonada de las ecuaciones de gobierno del problema. Por último la Sección 4.4 presenta el esquema numérico de integración del modelo constitutivo presentado en el Capítulo 3 y un método iterativo para la solución de la función de fluencia en el caso de que la misma sea no lineal como consecuencia del modelo viscoplástico generalizado.

4.2. Esquema de interpolación elemental

El esquema de interpolación elemental para el análisis de sólidos metálicos sometidos a grandes deformaciones y en particular la elección de un elemento adecuado para el estudio de estos problemas, está asociada con la capacidad para lidiar con al menos tres problemas importantes: (a) el bloqueo volumétrico que suele presentarse en problemas caracterizados por flujo plástico isócoro, (b) la distorsión de los elementos que viene asociada al importante cambio geométrico del dominio de análisis, y (c) el contacto con herramientas y/o autocontacto típico del estudio de conformado plástico de metales y problemas de impacto.

En lo que respecta al segundo y tercer problema mencionados en el párrafo precedente, el contacto y la distorsión elemental, los elementos que se han mostrado como más adecuados han sido los de bajo orden de interpolación. Esto se debe principalmente a que la implementación de algoritmos de contacto es susceptiblemente más simple cuando se emplean elementos de bajo orden de interpolación. Y por otra parte, estos elementos resultan menos sensibles a las grandes distorsiones cuando se los compara con elementos de alto orden de interpolación, y muestran ventajas importantes cuando se los emplea en procesos con regeneración de la malla. En particular el tema de regeneración de la malla será tratado en el Capítulo 5.

En simulaciones numéricas bidimensionales, los elementos de bajo orden de interpolación resultan ser triángulos lineales y cuadriláteros bilineales. El inconveniente con estos elementos viene asociado al problema de bloqueo en materiales cuasi-incompresibles y en problemas con flexión dominante. En otras palabras estos elementos adolecen de los fenómenos denominados bloqueo volumétrico y bloqueo por corte, respectivamente. Esto ha dado origen a diferentes técnicas de interpolación elemental cuyo objetivo era lidiar con el problema del bloqueo, las cuales se presentan brevemente en el siguiente apartado

4.2.1. Técnicas de interpolación en elementos bidimensionales

Históricamente el elemento cuadrilátero bilineal es el que presenta mayor cantidad de variantes, y las técnicas responden principalmente a subintegración, aproximación en deformaciones impuestas y/o mejoradas e inclusive formulaciones mixtas. La forma natural de evitar el bloqueo fue la subintegración o integración reducida, una de las primeras propuestas corresponden a Malkus y Hughes (1978). Si bien esta formulación es una de las más empleadas, la misma acarrea la aparición de inestabilidades denominadas *hourglass modes*. La ventaja de esta técnica radica en posibilidad de subintegrar las deformaciones de corte o las volumétricas, a fin de suprimir el bloqueo por corte o volumétrico, según corresponda. En el análisis de sólidos en deformaciones finitas, la opción más usada es subintegrar la componente volumétrica y en este caso solamente el bloqueo por corte persiste de modo que se tiene una respuesta pobre en problemas dominados por la flexión. Si bien el comportamiento de estos elementos mejora significativamente con mallas más finas, es importante destacar que algunas de estas formulaciones además de desarrollar

inestabilidad pueden no cumplir con la prueba de la parcela, como puede verse en el trabajo de Simo y Rifai (1990).

Las formulaciones mixtas, entre ellas el denominado método $\bar{\mathbf{B}}$ (o método B-barra) introducido a partir del trabajo de Hughes (1980), permiten evitar la necesidad de subintegración. Este tipo de soluciones se obtienen a partir de la aproximación de distintos campos a la vez, es decir se aproximan los desplazamientos pero a la vez el campo de tensiones, dando por resultado una formulación mixta. Este tipo de soluciones derivó posteriormente en formulaciones del tipo $\bar{\mathbf{F}}$ (o método F-barra), donde el tensor gradiente de deformación se descompone en las partes desviadora y volumétrica, las cuales se aproximan de manera diferente o se integran con cuadraturas diferentes. Un ejemplo de este tipo de aproximación se puede encontrar en el trabajo de Souza Neto et al. (1996) mostrando un buen comportamiento en problemas cuasi-incompresibles.

Otra manera de evitar el bloqueo es agregar modos internos de deformación al elemento, tal como lo propone el trabajo pionero de Wilson et al. (1973), en donde se propuso la adición de modos de desplazamiento internos incompatibles con aproximación cuadrática para mejorar el comportamiento de los cuadriláteros bilineales en problemas dominados por la flexión. Aunque rápidamente se determinó que el elemento no pasaba la prueba de la parcela para un cuadrilátero arbitrario, Taylor et al. (1976) propuso una modificación a la formulación original de Wilson de modo de posibilitar el cumplimiento de la prueba de la parcela en configuraciones arbitrarias. En esta categoría se pueden enmarcar todas los esquemas basados en las *aproximaciones en deformaciones impuestas/mejoradas* generadas a partir de los trabajos de Simo y Rifai (1990). Esta formulación, de acuerdo al trabajo de Simo et al. (1993), permite obtener casi siempre elementos libres de bloqueo, que inclusive tienen buen comportamiento en mallas con una discretización pobre y que además cumplen con la prueba de la parcela. Las inestabilidades en la malla, que surgían a partir de condiciones de cargas compresivas en las formulaciones propuestas iniciales, fueron corregidas siguiendo el trabajo de Glaser y Armero (1997) y Simo y Armero (1992). Sin embargo este mismo trabajo permitió observar que en condiciones extremas de tracción, los modos de inestabilidad siguen apareciendo. Se debe notar que estas inestabilidades en la malla desaparecen cuando se utilizan técnicas de estabilización o procedimientos de integración más finos a nivel elemental, de acuerdo a los resultados obtenidos por Simo et al. (1993), Glaser y Armero (1997), Reese et al. (2000) y Armero (2000), entre otros. Sin embargo, no existe una técnica natural de estabilización ya que el término de estabilización se ajusta empleando un parámetro de control que puede tener, o no, un significado físico y/o numérico claro (véase Glaser y Armero (1997) por ejemplo).

Algunos trabajos más recientes asociados a elementos cuadriláteros, son los de César de Sá y Natal Jorge (1999), Kasper y Taylor (2000), Bui et al. (2004) y Adam y Ponthot (2005); y en la actualidad pueden citarse los trabajos de Cervera et al. (2010a,b) y los que allí se mencionan.

Los elementos triangulares han gozado de menor aceptación en el estudio de problemas en deformaciones finitas. Esto se ve reflejado en la escasa cantidad de elementos triangulares lineales con deformaciones impuestas o mejoradas. Sin embargo los elementos triangulares poseen algunas cualidades que resultan interesantes en las aplicaciones industriales, entre ellas las más importantes son: (a) los generadores de mallas de triángulos son más robustos y eficientes que los generadores de cuadriláteros, (b) se adaptan más fácilmente a las geometrías arbitrarias facilitando la discretización, y (c) frente a distorsiones elevadas de la malla los triángulos son más versátiles por la simpleza en la implementación de esquemas de remallado automático o refinamiento adaptativo.

Algunos desarrollos en esta área han permitido obtener triángulos lineales con grados de libertad distintos de los desplazamientos, incluyendo elementos con aproximación mixta o híbrida por un lado y elementos con giros o derivadas de los desplazamientos por el otro. Se debe considerar que los grados de libertad adicionales en las aproximaciones mixtas/híbridas no tienen masa asociada, haciendo necesario el uso de esquemas especiales de integración en el tiempo cuando se aplican en códigos explícitos de acuerdo a Zienkiewicz et al. (1998). En ese sentido, considerando que los problemas altamente no lineales donde los integradores explícitos son los más robustos, ese tipo de aproximación no es la más adecuada. Inclusive la mayoría de los algoritmos que definen el comportamiento de los sólidos en el área de la mecánica no lineal están formulados en función de las deformaciones, con lo cual las aproximaciones en tensiones impuestas (mixtas/híbridas) son menos atractivas. Más aun los elementos que incluyen giros en los nodos son menos comunes, y se encuentran restringidos a problemas de tensión plana, como el trabajo de Felippa (2003) y los allí citados. Un trabajo interesante de mencionar es el de Souza Neto et al. (2003) en el cual se ha extendido el método $\bar{\mathbf{F}}$ a triángulos lineales, originalmente propuesto para cuadriláteros en Souza Neto et al. (1996), donde la parte volumétrica del gradiente de deformaciones se obtiene considerando el aporte de un determinado número de elementos vecinos.

En esta dirección, a partir de los trabajos de Flores (2003), Flores (2005) y Flores (2006) en deformaciones finitas, es que se ha implementado un elemento triangular de tres nodos con grados de libertad de desplazamiento. En este elemento la evaluación del tensor gradiente de deformaciones en el centroide cada triángulo se hace teniendo en cuenta la geometría de los tres elementos adyacentes, dando lugar a un método que puede enmarcarse dentro de los esquemas $\bar{\mathbf{F}}$ y que surge de un promedio ponderado. El elemento ha sido probado con éxito en grandes deformaciones elasto-plásticas, asociadas a un esquema Lagrangeano Total y a un esquema Lagrangeano Actualizado, en Castelló (2005) y Castelló y Flores (2008) respectivamente.

4.2.2. Elemento triangular con deformaciones impuestas

En este apartado se presenta el elemento triangular mencionado anteriormente. El punto de partida en esta aproximación es discretizar el dominio con elementos triangulares de tres nodos, sin embargo a diferencia de la aproximación lineal convencional empleada en los elementos finitos de geometría triangular, la evaluación de las deformaciones en cada triángulo se hace teniendo en cuenta la geometría de los tres elementos adyacentes. Así entonces se tiene una parcela de cuatro elementos: un elemento central (C) sobre el cual se desea evaluar la deformación y tres elementos adyacentes a los lados de ese elemento central, como se observa en la Figura 4.1a. Esta formulación usa únicamente los desplazamientos como grados de libertad nodales, lo cual simplifica la formulación y facilita la implementación computacional, a la vez que permite una rápida interpretación de los resultados.

Por otro lado se puede observar en la Figura 4.1b, que si bien se mantienen los vértices del elemento central en el espacio isoparamétrico, se agregan tres elementos vecinos que comparten los lados del elemento central. Observando la Figura 4.1 se desprende que la parcela de elementos triangulares queda definida por seis nodos, y de esta forma, si bien se parte de elementos triangulares de tres nodos se obtiene una aproximación cuadrática. Las funciones de forma se pueden obtener de la manera habitual considerando $N^I(\xi_J, \eta_J) = \delta_{IJ}$, siendo δ_{IJ} el delta de Kronecker. Estas funciones de forma no estándar son las que se presentan en la Tabla 4.1, en donde se ha empleado la definición $\zeta = 1 - \xi - \eta$.

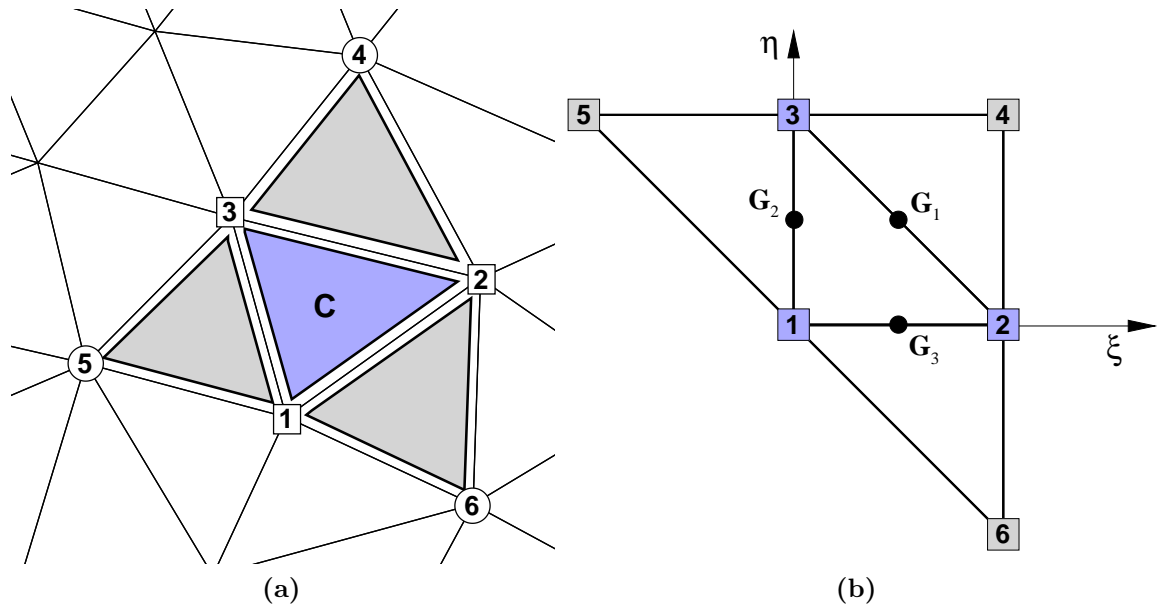


Figura 4.1 – Detalle de la parcela de elementos triangulares. (a) Coordenadas espaciales. (b) Coordenadas Naturales.

Tabla 4.1 – Funciones de forma cuadráticas asociadas a la parcela

$N^1 = \zeta + \xi\eta$	$N^2 = \xi + \eta\zeta$	$N^3 = \eta + \zeta\xi$
$N^4 = \frac{\zeta}{2}(\zeta - 1)$	$N^5 = \frac{\xi}{2}(\xi - 1)$	$N^6 = \frac{\eta}{2}(\eta - 1)$

La ventaja que supone el uso de estas funciones cuadráticas es poder definir una aproximación en deformaciones impuestas que permite evitar el problema del bloqueo volumétrico además de mejorar el comportamiento en el plano. Es importante destacar que la aproximación resulta no conforme, es decir si se interpola la geometría sobre un lado común a dos elementos, los resultados son diferentes puesto que cada elemento tiene asociada una parcela distinta. Esto no introduce ningún inconveniente, y como se observa en Flores (2006) el elemento cumple con la prueba de la parcela.

Otro aspecto interesante es que la evaluación del gradiente de deformación se hace más simple cuando se eligen puntos de integración a la mitad de cada lado del elemento central (Figura 4.1b). El gradiente de deformación a la mitad de cada lado (G_i) depende exclusivamente de la posición de los nodos asociados a los dos elementos que comparten el lado.

En este trabajo se emplea un esquema Lagrangeano Actualizado basado en la inversa del tensor gradiente relativo de deformación \mathbf{f}^{-1} , a diferencia del Langrangeano Total basado en el gradiente de deformación total \mathbf{F} presentado en el trabajo Castelló (2005) y posteriormente en Castelló y Flores (2008). Sin embargo se utilizarán algunos conceptos del esquema Lagrangeano Total, para finalmente establecer los conceptos asociados al esquema actualizado, los cuales también han sido presentados en Castelló y Flores (2008).

Siendo \mathbf{X}^I y \mathbf{x}^I las coordenadas de un nudo en la configuración de referencia (indeformada) y en la configuración actual (deformada), respectivamente, la interpolación de la

geometría resulta:

$$\mathbf{X} = \sum_{I=1}^6 N^I \mathbf{X}^I \quad (4.1)$$

$$\mathbf{x} = \sum_{I=1}^6 N^I \mathbf{x}^I \quad (4.2)$$

La matriz jacobiana asociada a la aproximación cuadrática (4.1) y (4.2) en cada punto de integración G_i , resulta:

$$\mathbf{J}_i^0 = \frac{\partial \mathbf{X}(\boldsymbol{\xi}_i)}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \sum_{I=1}^6 N_{,\xi}^I(\xi_i, \eta_i) \mathbf{X}^I \quad (4.3)$$

$$\mathbf{J}_i = \frac{\partial \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}_i)}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \sum_{I=1}^6 N_{,\xi}^I(\xi_i, \eta_i) \mathbf{x}^I \quad (4.4)$$

en donde $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta)$, el subíndice i hace referencia a los puntos de integración y el superíndice 0 está asociado a las variables definidas en la configuración indeformada u original. Estas expresiones, (4.3) y (4.4), permiten evaluar las componentes en el plano del gradiente de deformaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i &= \frac{\partial \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}_i)}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{J}_i (\mathbf{J}_i^0)^{-1} \\ &= \sum_{I=1}^6 N_{,\xi}^I(\boldsymbol{\xi}_i) (\mathbf{J}_i^0)^{-1} \mathbf{x}^I \\ &= \sum_{I=1}^6 N_{,\mathbf{X}}^I(\boldsymbol{\xi}_i) \mathbf{x}^I \end{aligned} \quad (4.5)$$

A partir de (4.5) y tras el objetivo de no perder eficiencia en los cálculos a nivel elemental, se propone emplear un solo punto de integración en el elemento central, con lo cual el gradiente de deformación promedio se define como:

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{F} dV \quad (4.6)$$

en donde la integral se puede evaluar numéricamente a partir de los puntos de integración G_i . En el caso de deformación plana, este promedio resulta simplemente:

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \mathbf{F}_i \quad (4.7)$$

mientras que en el caso de un problema axilsimétrico, siendo $r = X_1$ el radio y considerando $r_i = X_1(\boldsymbol{\xi}_i)$, el gradiente promedio se puede evaluar según:

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{2\pi \int_A r \mathbf{F} dA}{2\pi \int_A r dA} = \frac{\sum_{i=1}^3 r_i \mathbf{F}_i}{\sum_{i=1}^3 r_i} \quad (4.8)$$

la cual se puede ver como un promedio ponderado, donde se emplea el radio a cada punto de integración r_i como factor de ponderación. Reemplazando (4.5) en (4.8), el gradiente promedio resulta:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{F}} &= \frac{\sum_{i=1}^3 r_i \sum_{I=1}^6 N_{i\mathbf{X}}^I(\boldsymbol{\xi}_i) \mathbf{x}^I}{\sum_{i=1}^3 r_i} = \sum_{I=1}^6 \frac{\sum_{i=1}^3 r_i N_{i\mathbf{X}}^I(\boldsymbol{\xi}_i)}{\sum_{i=1}^3 r_i} \mathbf{x}^I \\ &= \sum_{I=1}^6 \bar{N}_{i\mathbf{X}}^I \mathbf{x}^I\end{aligned}\quad (4.9)$$

en donde se observa que el gradiente promedio, puede obtenerse a partir del empleo del promedio en las derivadas de las funciones de forma de acuerdo a la expresión en (4.9).

El gradiente promedio establecido para el caso de deformación plana y axilsimetría, ecuaciones (4.7) y (4.9), respectivamente, solo incluye las componentes contenidas en el plano. En el caso de deformación plana, el alargamiento de una fibra perpendicular al plano (dirección X_3) es simplemente $\lambda_3 = 1$. En el caso de axilsimetría, se ha optado por usar un promedio ponderado entre el alargamiento de los elementos adyacentes y el alargamiento que experimenta el elemento central. Es decir, siendo:

$(\lambda_3)_C$ el alargamiento del elemento central, el mismo se puede evaluar de la manera habitual a partir de las coordenadas de los tres nodos:

$$(\lambda_3)_C = \frac{\sum_{I=1}^3 L^I x_1^I}{\sum_{I=1}^3 L^I X_1^I}\quad (4.10)$$

$(\lambda_3)_{1-3}$ el alargamiento promedio de los elementos adyacentes al elemento central, que igualmente puede evaluarse como:

$$(\lambda_3)_{1-3} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \frac{\sum_{J=1}^3 L^J x_1^{J(k)}}{\sum_{J=1}^3 L^J X_1^{J(k)}}\quad (4.11)$$

en donde L^J son las funciones de forma estándar del triángulo de tres nodos, y $x_1^{J(k)}$ hace referencia a la coordenada radial del nodo J del elemento adyacente k . Si se evalúan estas expresiones en los centros del elemento, se puede obtener la expresión del alargamiento promedio en la dirección normal al plano, según:

$$\begin{aligned}
 \bar{\lambda}_3 &= \frac{(\lambda_3)_C + (\lambda_3)_{1-3}}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sum_{I=1}^3 x_1^I}{\sum_{I=1}^3 X_1^I} + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \frac{\sum_{J=1}^3 x_1^{J(k)}}{\sum_{J=1}^3 X_1^{J(k)}} \right) \\
 &= \sum_{I=1}^6 \bar{M}^I r^I
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Cuando un elemento adyacente no existe, ese lado del elemento central pertenece al contorno, las expresiones presentadas no puede emplearse directamente y debe hacerse una modificación:

- En la evaluación del gradiente en el plano \mathbf{F}_i , en el punto de integración correspondiente al lado que no tiene elemento adyacente, se debe usar las funciones estándar asociadas al triángulo de tres nodos. En la implementación esto puede lograrse definiendo un nudo ficticio (ver Figura 4.2), de modo que suponiendo que dicho nudo es el $I + 3$ resulta:

$$\mathbf{x}^{I+3} = \frac{\mathbf{x}^J + \mathbf{x}^K}{2} + \left(\frac{\mathbf{x}^J + \mathbf{x}^K}{2} - \mathbf{x}^I \right) = \mathbf{x}^J + \mathbf{x}^K - \mathbf{x}^I \tag{4.13}$$

se debe notar que los cuatro puntos $(I, K, I + 3, J)$ definen un paralelogramo el cual tiene asociado un Jacobiano constante que es igual al Jacobiano asociado al elemento triangular central. Además en el caso que el lado del elemento central coincida con el eje de simetría el radio es nulo, y por lo tanto también es nula la contribución de ese lado al gradiente de deformación.

- En el caso de la componente perpendicular al plano, se evalúa nuevamente empleando la ecuación (4.12) pero considerando el aporte de los únicos dos elementos adyacentes al triángulo central. Es decir para obtener $\bar{\lambda}_3$ se debe promediar el alargamiento del elemento central $(\lambda_3)_C$ con el promedio de los únicos dos elementos adyacentes existentes.

En los estudios realizados sobre distintos experimentos numéricos, se ha comprobado que aquellos elementos con un solo adyacente (donde el elemento central posee dos lados que perteneces al contorno, típicamente vértices) el esquema de aproximación propuesto no elimina completamente el efecto del bloqueo volumétrico. En estos casos, en la medida de lo posible, se modifican las conectividades automáticamente de manera que todos los elementos tengan como mínimo dos elementos adyacentes. Esta modificación se realiza en el mismo momento en que se definen los adyacentes a cada elemento (parcelas), posterior a la lectura de los elementos triangulares y sus correspondientes conectividades.

En el caso de emplear un esquema Lagrangeano Actualizado, como el propuesto en el capítulo anterior (ver Sección 3.3) donde el algoritmo está basado en la inversa del tensor gradiente relativo de deformación \mathbf{f}^{-1} , entonces el gradiente a ser evaluado resulta:

$$\bar{\mathbf{f}}^{-1} = \frac{\partial \mathbf{x}_n}{\partial \mathbf{x}_{n+1}} = \sum_{I=1}^6 \bar{N}_{/x_{n+1}}^I \mathbf{x}_n^I \tag{4.14}$$

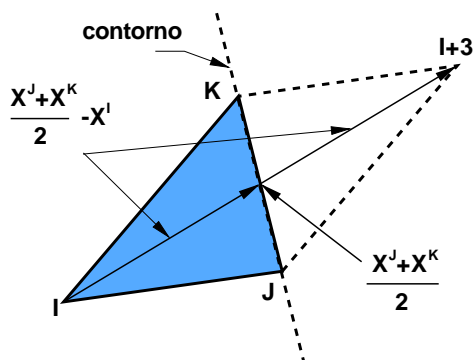


Figura 4.2 – Definición de un nodo ficticio asociado a un elemento cuyo lado pertenece al contorno del sólido.

y esto implica que tanto las derivadas de las funciones de forma $\bar{N}_{/x}^I$ como las funciones de ponderación del alargamiento \bar{M}^I , deben evaluarse cada vez que se actualice la configuración de referencia. En (4.14) \mathbf{x}_n^I hace referencia a las coordenadas de los nudos en el paso previo, y $\bar{N}_{/x_{n+1}}^I$ se obtiene de una manera similar a (4.9) (o (4.7) en el caso de deformación plana). Igualmente para los alargamientos fuera del plano se emplea una manera similar (4.12), usando la relación entre el radio en el paso previo $(x_1)_n$ y el radio en el paso actual $(x_1)_{n+1}$.

Habiendo entonces definido las funciones de forma asociadas a la aproximación elemental, y el esquema de obtención de los gradientes de deformación, se procederá a continuación obtener la forma discreta de las ecuaciones de gobierno del problema termomecánico.

4.3. Ecuaciones de gobierno empleando el método de elementos finitos

El esquema numérico propuesto para discretizar y resolver las ecuaciones de equilibrio termomecánicas está basado en el método de los elementos finitos. En esta sección se presenta el tratamiento numérico de cada término de las ecuaciones de equilibrio, en particular se emplea una notación similar a la empleada en Flores (1995) y posteriormente en Castelló (2005). En el caso de la ecuación de equilibrio mecánico o movimiento del sólido, los términos son presentados en la mayoría de los libros de texto dedicados a esa área (ver Bathe (1996), Zienkiewicz y Taylor (2000) y Hughes (2000)) y por este motivo serán presentados de manera más sucinta. Por otra parte en el caso de la ecuación de equilibrio térmico, si bien la mayor parte de los libros de texto hace referencia a los términos termoelásticos, el tratamiento de las contribuciones termoplásticas resulta muy dispar. En este sentido, se hará mayor énfasis en el tratamiento de las contribuciones termomecánicas, y para el desarrollo las expresiones que se presentan aquí se han empleado algunos aportes de los trabajos de Sluzalec (1988), Armero y Simo (1993) y Dhondt (2004). Por último se presenta un esquema de acoplamiento termomecánico del tipo “escalonado isotérmico” que resulta suficientemente preciso y adecuado cuando se utiliza una integración explícita de las ecuaciones de gobierno. En dicho esquema se supone: (a) que la temperatura es constante durante el paso de integración de las ecuaciones de movimiento, y (b) que el calor generado por la disipación mecánica es constante durante la integración de las ecuaciones que gobiernan la transferencia de calor.

4.3.1. Ecuación de equilibrio mecánico

El objetivo de este apartado es obtener la forma matricial de la ecuación de equilibrio mecánico, a partir de la forma débil de la ecuación de movimiento en la configuración de referencia actualizada que resulta:

$$-\int_V \delta \mathbf{u} \cdot \rho \ddot{\mathbf{u}} dV + \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\tau} dV - \left(\int_A \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_n dA + \int_V \delta \mathbf{u} \cdot \rho \mathbf{b}_f dV \right) = 0 \quad (4.15)$$

en donde la (4.15) muestra el trabajo virtual externo de las fuerzas de inercia, el trabajo virtual interno y por último las dos integrales restantes representan el trabajo virtual externo debido al potencial de cargas externas (fuerzas másicas y de contorno).

En el método de elementos finitos las variables nodales son interpoladas dentro de un elemento a partir de un conjunto de funciones de aproximación. Estas funciones, denominadas comúnmente funciones de forma, están asociadas a la cantidad de nodos (nn) que definen el elemento y al tipo de aproximación implementada. A partir de esta aproximación, los desplazamientos \mathbf{u} pueden interpolarse según:

$$\mathbf{u} = \sum_{I=1}^{nn} N^I \mathbf{u}^I \quad (4.16)$$

si además se considera que los desplazamientos virtuales $\delta \mathbf{u}$ son desplazamientos cinemáticamente admisibles, es decir que son compatibles con los vínculos y las restricciones cinemáticas, entonces igualmente pueden ser interpolados con:

$$\delta \mathbf{u} = \sum_{I=1}^{nn} N^I \delta \mathbf{u}^I \quad (4.17)$$

En el método de elementos finitos el dominio de análisis se subdivide en pequeñas regiones de geometrías específicas (elementos), esta etapa es la que se denomina definición de malla o discretización del dominio. En este sentido la integral de una variable arbitraria a en el dominio puede evaluarse a partir de:

$$\int_V a dV = \prod_{e=1}^{ne} \int_{V_e} a dV \quad (4.18)$$

en donde ne es la cantidad de elementos en que se ha discretizado el dominio, V_e es volumen de cada elemento y la operación \prod en (4.18) debe entenderse aquí como un proceso de ensamble. Por otra parte esta variable arbitraria puede interpolarse a nivel elemental empleando la misma aproximación (4.16), según:

$$a = \sum_{I=1}^{nn} N^I a^I = \mathbf{N} \mathbf{a}_e \quad (4.19)$$

siendo \mathbf{N} la matriz de funciones de forma asociada a (4.19) definida como:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N^1 & 0 & N^2 & 0 & \dots & N^{nn} & 0 \\ 0 & N^1 & 0 & N^2 & \dots & 0 & N^{nn} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

y con $\mathbf{a}_e = \left[a_1^1 \ a_2^1 \ \dots \ a_1^{nn} \ a_2^{nn} \right]^T$, en donde a_j^I es el valor de la variable arbitraria a en el nodo I y actuando en la dirección j .

Matriz de masa. En el caso del trabajo virtual debido a las fuerzas de inercia, considerando la subdivisión del dominio y aplicando (4.18), se obtiene la expresión:

$$\int_V \delta \mathbf{u} \cdot \rho \ddot{\mathbf{u}} dV = \prod_{e=1}^{ne} \int_{V_e} \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} dV \quad (4.21)$$

y considerando (4.19), las aceleraciones pueden interpolarse a nivel elemental como:

$$\ddot{\mathbf{u}} = \sum_{I=1}^{nn} N^I \ddot{\mathbf{u}}^I = \mathbf{N} \ddot{\mathbf{u}}_e \quad (4.22)$$

donde \mathbf{N} es la misma matriz definida en (4.20) y $\ddot{\mathbf{u}}_e = [\ddot{u}_1^1 \quad \ddot{u}_2^1 \quad \cdots \quad \ddot{u}_1^{nn} \quad \ddot{u}_2^{nn}]^T$, en donde \ddot{u}_j^I es el valor de la aceleración en el nodo I y actuando en la dirección j . Por lo tanto empleando las ecuaciones (4.17) y 4.22, la (4.21) asociada a un elemento arbitrario resulta:

$$\begin{aligned} \int_{V_e} \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} dV &= \delta \mathbf{u}_e^T \left(\int_{V_e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV \right) \ddot{\mathbf{u}}_e \\ &= \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{u}}_e \end{aligned} \quad (4.23)$$

en donde, considerando un dominio bidimensional con un espesor t , la matriz de masa consistente elemental puede reescribirse como:

$$(M_e)_{IJ} = \rho t \int_{A_e} \begin{bmatrix} N^I N^J & 0 \\ 0 & N^I N^J \end{bmatrix} dA \quad (4.24)$$

para $I = J = 1 \cdots nn$, y A_e es el área del elemento. Habitualmente para los problemas con integración explícita de las ecuaciones de movimiento, suele emplearse una matriz de masa diagonalizada o *lumped* (ver Zienkiewicz y Taylor (2000), pg. 474).

Contribución del trabajo virtual interno. En el caso del término que contiene el trabajo virtual interno el proceso es un poco más complicado pues se debe tratar de forma especial el producto $\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T : \boldsymbol{\tau}$, según sea un caso de deformación plana o axilsimetría. Considerando la definición del tensor de pequeñas deformaciones de Almansi:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} [(\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}) + (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u})^T] \quad (4.25)$$

y el tensor virtual de pequeñas deformaciones $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$, a partir de la variación de (4.25), resulta:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(\nabla_{\mathbf{x}_{n+1}} \delta \mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{x}_{n+1}}^T \delta \mathbf{u} \right) = \bar{\mathbf{B}} \delta \mathbf{u} \quad (4.26)$$

Entonces partiendo de (4.26) y considerando (4.14), se puede definir la relación entre el vector de deformaciones y el vector de desplazamiento virtuales a nivel elemental, de modo que para el caso de deformación plana se tiene:

$$\delta \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \sum_{I=1}^6 \begin{bmatrix} \bar{N}_1^I & 0 \\ 0 & \bar{N}_2^I \\ \bar{N}_2^I & \bar{N}_1^I \end{bmatrix} [\delta \mathbf{u}^I] = \bar{\mathbf{B}}_{ps} \delta \mathbf{u} \quad (4.27)$$

mientras que en el caso de axilsimetría resulta:

$$\delta \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \sum_{I=1}^6 \begin{bmatrix} \bar{N}_1^I & 0 \\ 0 & \bar{N}_2^I \\ \bar{N}_2^I & \bar{N}_1^I \\ \bar{\lambda}_3 M^I & 0 \end{bmatrix} [\delta \mathbf{u}^I] = \bar{\mathbf{B}}_{axl} \delta \mathbf{u} \quad (4.28)$$

en las ecuaciones (4.27) y (4.28), \bar{N}_j^I son las funciones de forma ponderadas o promediadas asociadas al nodo I derivadas con respecto a la dirección j . En el caso de axilsimetría también interviene la deformación en dirección normal al plano y se utiliza la expresión (4.12).

El término del trabajo virtual interno en (4.15), a partir de (4.18) y considerando (4.26), puede evaluarse como:

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T : \boldsymbol{\tau} dV = \prod_{e=1}^{nelem} \int_{V_e} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \boldsymbol{\tau} dV \quad (4.29)$$

y por lo tanto:

$$\begin{aligned} \int_{V_e} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \boldsymbol{\tau} dV &= \delta \mathbf{u}_e^T \left(\int_{V_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\tau} dV \right) \\ &= \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{p}_e(\mathbf{u}_e) \end{aligned} \quad (4.30)$$

donde se denominado $\mathbf{p}_e(\mathbf{u}_e)$ a la fuerzas internas resistentes y se hace hincapié en que son función de los desplazamientos.

Vector de cargas externas. Las fuerzas másicas asociadas al potencial de cargas externas pueden discretizarse, siguiendo el mismo criterio de (4.18), según:

$$\int_V \delta \mathbf{u}^T \rho \mathbf{b}_f dV = \prod_{e=1}^{ne} \int_{V_e} \delta \mathbf{u}^T \rho \mathbf{b}_f dV \quad (4.31)$$

y considerando que la fuerzas másicas \mathbf{b}_f pueden interpolarse a nivel elemental de igual manera que (4.19), se tiene:

$$\mathbf{b}_f = \sum_{I=1}^{nn} N^I \mathbf{b}^I = \mathbf{N} \mathbf{b}_e \quad (4.32)$$

y $\mathbf{b}_e = \left[b_1^1 \quad b_2^1 \quad \dots \quad b_1^{nn} \quad b_2^{nn} \right]^T$, en donde b_j^I es el valor de la fuerza másica en el nodo I y actuando en la dirección j . Nuevamente empleando (4.17) y (4.32) en (4.31) resulta:

$$\begin{aligned} \int_{V_e} \delta \mathbf{u}^T \rho \mathbf{b}_f dV &= \delta \mathbf{u}_e^T \left(\int_{V_e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV \right) \mathbf{b}_e \\ &= \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{M}_e \mathbf{b}_e = \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{G}_e \end{aligned} \quad (4.33)$$

en donde nuevamente aparece la matriz de masa consistente del elemento \mathbf{M}_e , y realizando el producto con el vector de fuerzas másicas \mathbf{b}_e se puede obtener un vector generalizado de fuerzas másicas en los nodos del elemento \mathbf{G}_e .

Igualmente se pueden tratar los términos de cargas impuestas en algún sector del contorno, haciendo la salvedad de que por tratarse del contorno las funciones de interpolación no son las mismas que las asociadas al dominio, de manera que tendremos:

$$\delta \mathbf{u} = \sum_{I=1}^{nc} \check{N}^I \delta \mathbf{u}^I = \check{\mathbf{N}} \delta \mathbf{u}_e \quad (4.34)$$

para los desplazamientos virtuales, y también:

$$\mathbf{t}_n = \sum_{I=1}^{nc} \check{N}^I \mathbf{t}^I = \check{\mathbf{N}} \mathbf{t}_e \quad (4.35)$$

para las cargas externas, donde nc son los nodos que definen el lado del elemento perteneciente al contorno donde se han impuesto las cargas. Y la matriz de funciones de forma del contorno $\check{\mathbf{N}}$ se obtiene como:

$$\check{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} \check{N}^1 & 0 & & \check{N}^{nc} & 0 \\ 0 & \check{N}^1 & \dots & 0 & \check{N}^{nc} \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

y $\mathbf{t}_e = \begin{bmatrix} t_1^1 & t_2^1 & \dots & t_1^{nc} & t_2^{nc} \end{bmatrix}^T$. Y la contribución de un elemento arbitrario se obtiene según:

$$\begin{aligned} \int_{A_e} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t}_n dA &= \delta \mathbf{u}_e^T \left(\int_{A_e} \check{\mathbf{N}}^T \check{\mathbf{N}} dA \right) \mathbf{t}_e \\ &= \delta \mathbf{u}_e^T \check{\mathbf{M}}_e \mathbf{t}_e = \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{g}_e \end{aligned} \quad (4.37)$$

en donde $\check{\mathbf{M}}_e$ se obtiene de manera similar a la matriz de masa pero a partir de integrales en el contorno, en el caso de problemas bidimensionales se obtiene a partir de integrales sobre un línea (lado del elemento perteneciente al contorno del dominio), tal que:

$$(\check{M}_e)_{IJ} = t \int_{S_e} \begin{bmatrix} \check{N}^I \check{N}^J & 0 \\ 0 & \check{N}^I \check{N}^J \end{bmatrix} dS$$

en este caso $I = J = 1 \dots nc$, con S_e la longitud del segmento del contorno perteneciente al elemento.

Por lo tanto a partir de las ecuaciones (4.33) y (4.37), se puede obtener un vector global de cargas nodales debido al potencial de cargas externas (másicas y contorno) a través del proceso típico de ensamble utilizado en el método de los elementos finitos y que se define según:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \prod_{e=1}^{nelem} \left[\delta \mathbf{u}_e^T \left(\int_{V_e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV \right) \mathbf{b}_e + \delta \mathbf{u}_e^T \left(\int_{A_e} \check{\mathbf{N}}^T \check{\mathbf{N}} dA \right) \mathbf{t}_e \right] \\ &= \prod_{e=1}^{nelem} \delta \mathbf{u}_e^T (\mathbf{G}_e + \mathbf{g}_e) \end{aligned} \quad (4.38)$$

Ecuación de equilibrio mecánico discreta. A partir de las ecuaciones (4.33), (4.37), (4.23) y (4.30), y reemplazándolas en la ecuación de movimiento (4.15) resulta en:

$$\begin{aligned} \prod_{e=1}^{nelem} \left\{ \delta \mathbf{u}_e^T \left(\int_{V_e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV \right) \ddot{\mathbf{u}}_e + \delta \mathbf{u}_e^T \left(\int_{V_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\tau} dV \right) \right. \\ \left. - \left[\delta \mathbf{u}_e^T \left(\int_{V_e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV \right) \mathbf{b}_e + \delta \mathbf{u}_e^T \left(\int_{A_e} \check{\mathbf{N}}^T \check{\mathbf{N}} dA \right) \mathbf{t}_e \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.39)$$

donde una vez realizado el ensamble, estas ecuaciones elementales dan origen a un sistema global de ecuaciones que tiene la forma:

$$\delta \mathbf{u}^T [\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{p}(\mathbf{u}, \theta) - (\mathbf{G} + \mathbf{g})] = 0 \quad (4.40)$$

considerando (4.38) y teniendo en cuenta el hecho que el desplazamiento virtual es totalmente arbitrario y distinto de cero, entonces el término entre corchetes en (4.40) debe ser nulo con lo cual:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{p}(\mathbf{u}, \theta, t) - \mathbf{f}(\mathbf{u}, t) = 0 \quad (4.41)$$

donde se ha puesto explícitamente la dependencia de las ecuaciones con el tiempo, y los términos en (4.41) representan la matriz de masa global \mathbf{M} del sólido, el vector de aceleraciones nodales $\ddot{\mathbf{u}}$, el vector de fuerzas internas resistentes \mathbf{p} , y el vector de cargas externas \mathbf{f} . Se ha generalizado el vector de cargas externas como una función de la deformación, y de hecho en este trabajo cuando se analicen problemas que involucren contacto las cargas serán proporcionales a la deformación experimentada por el sólido. Es decir el tratamiento de las cargas en el contorno asociadas al contacto, ver (3.24), es formalmente idéntico al tratamiento de (4.37). Dado que las deformaciones son dependientes de la temperatura, se observa que la contribución de las fuerzas internas resistentes, \mathbf{p} , son una función explícita de la temperatura.

4.3.2. Ecuación de equilibrio térmico

En este apartado, de igual manera que en el anterior, se introducirán las expresiones formales asociadas a la discretización por el método de elementos finitos de la ecuación de equilibrio térmico. Partiendo de la forma débil de la ecuación de equilibrio térmico en la configuración de referencia actualizada:

$$\begin{aligned} - \int_V \delta\theta \rho C_\kappa \dot{\theta} dV - \int_V \nabla \delta\theta \mathbf{K}^\theta \nabla \theta dV + \int_V \delta\theta [D_p - \theta \hat{\boldsymbol{\beta}} : \mathbf{d}^e] dV + \\ + \int_{A_h} \delta\theta [h_c (\theta_s - \theta_a) + h_r (\theta_s^4 - \theta_{rad}^4)] dA + \int_{A_q} \delta\theta q dA = 0 \end{aligned} \quad (4.42)$$

siendo los términos en la ecuación (4.42) las contribuciones de la capacidad calórica, el término difusivo asociado a la conductividad térmica, el tercer término incluye por otra parte el acoplamiento termoelástico y termoplástico, y por último las dos integrales en la segunda línea involucran las cargas térmicas externas asociadas a convección, radiación y flujo por conducción.

En el caso del problema térmico se ha empleado la aproximación estándar del triángulo de tres nodos (coordenadas de área, L), con estas funciones de forma la temperatura puede interpolarse a partir de los valores nodales como:

$$\theta = \sum_{I=1}^{nn} L^I \theta^I \quad (4.43)$$

e igualmente las temperaturas virtuales $\delta\theta$ pueden interpolarse según:

$$\delta\theta = \sum_{I=1}^{nn} L^I \delta\theta^I \quad (4.44)$$

y por cierto sigue siendo válido la definición ensamble establecida en (4.18).

Además la interpolación de la temperatura (4.43) puede reescribirse en forma matricial como:

$$\theta = \sum_{I=1}^{nn} L^I \theta^I = \mathbf{L}\boldsymbol{\theta}_e \quad (4.45)$$

siendo \mathbf{L} la matriz de funciones definida como:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L^1 & L^2 & \dots & L^{nn} \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

y con $\boldsymbol{\theta}_e = \begin{bmatrix} \theta^1 & \dots & \theta^{nn} \end{bmatrix}^T$, donde θ^I es el valor de la temperatura θ en el nodo I y nn el número de nodos que define el elemento (en la ecuación térmica $nn = 3$).

Matriz de capacidad. El trabajo virtual asociado al calor específico, considerando la subdivisión del dominio en elementos triangulares y aplicando (4.18), se puede expresar como:

$$\int_V \delta\theta \rho C_\kappa \dot{\theta} dV = \prod_{e=1}^{ne} \int_{V_e} \delta\theta^T \rho C_\kappa \dot{\theta} dV \quad (4.47)$$

y considerando (4.45), el cambio temporal en la temperatura puede interpolarse a nivel elemental según:

$$\dot{\theta} = \sum_{I=1}^{nn} L^I \dot{\theta}^I = \mathbf{L} \dot{\boldsymbol{\theta}}_e \quad (4.48)$$

donde \mathbf{L} es la misma matriz definida en (4.46) y $\dot{\boldsymbol{\theta}}_e = \begin{bmatrix} \dot{\theta}^1 & \dots & \dot{\theta}^{nn} \end{bmatrix}^T$, en donde $\dot{\theta}^I$ es el cambio en la temperatura del nodo I . Por lo tanto empleando las ecuaciones (4.44) y (4.48) en (4.47), resulta:

$$\begin{aligned} \int_{V_e} \delta\theta^T \rho C_\kappa \dot{\theta} dV &= \delta\boldsymbol{\theta}_e^T \left(\int_{V_e} \mathbf{L}^T \rho C_\kappa \mathbf{L} dV \right) \dot{\boldsymbol{\theta}}_e \\ &= \delta\boldsymbol{\theta}_e^T \mathbf{C}_e \dot{\boldsymbol{\theta}}_e \end{aligned} \quad (4.49)$$

en donde, considerando un dominio bidimensional con un espesor t , la matriz de capacidad consistente elemental puede reescribirse como:

$$(C_e)_{IJ} = \rho C_\kappa t \int_{A_e} L^I L^J dA \quad (4.50)$$

para $I = J = 1 \dots nn$, y A_e es el área del elemento.

Matriz de conductividad. El segundo término de la ecuación (4.42), asociado a la conductividad térmica, puede reescribirse a partir de (4.18) como:

$$\int_V \nabla \delta\theta \mathbf{K}^\theta \nabla \theta dV = \prod_{e=1}^{ne} \int_{V_e} \nabla \delta\theta^T \mathbf{K}^\theta \nabla \theta dV \quad (4.51)$$

donde el gradiente de la temperatura $\nabla \theta$, a partir de la (4.43) y (4.45), se puede expresar como:

$$\nabla \theta = \nabla \left(\sum_{I=1}^{nn} L^I \theta^I \right) = (\nabla \mathbf{L}) \boldsymbol{\theta}_e = \mathbf{B}^\theta \boldsymbol{\theta}_e \quad (4.52)$$

siendo la matriz \mathbf{B}^θ :

$$\mathbf{B}^\theta = \begin{bmatrix} L_{r1}^1 & \dots & L_{r1}^{nn} \\ L_{r2}^1 & \dots & L_{r2}^{nn} \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

en donde y bajo el mismo concepto se puede establecer el gradiente de las temperaturas virtuales:

$$\nabla \delta \theta = \mathbf{B}^\theta \delta \boldsymbol{\theta}_e \quad (4.54)$$

Empleando (4.52) y (4.54), la contribución elemental en (4.51) puede reescribirse según:

$$\begin{aligned} \int_{V_e} \nabla \delta \theta^\top \mathbf{K}^\theta \nabla \theta dV &= \delta \boldsymbol{\theta}_e^\top \left(\int_{V_e} \mathbf{B}^{\theta \top} \mathbf{K}^\theta \mathbf{B}^\theta dV \right) \boldsymbol{\theta}_e \\ &= \delta \boldsymbol{\theta}_e^\top \mathbf{K}_e^\theta \boldsymbol{\theta}_e \end{aligned} \quad (4.55)$$

donde también en el caso de un dominio bidimensional con un espesor t y considerando conductividad isotrópica k_c , la matriz de conductividad elemental puede escribirse como:

$$(K_e)_{IJ} = k_c t \int_{A_e} (L_{r1}^I L_{r1}^J + L_{r2}^I L_{r2}^J) dA \quad (4.56)$$

para $I = J = 1 \cdots nn$, y A_e es el área del elemento.

Vector termoelástico. Esta contribución está ligada a un fenómeno físico, denominado por algunos autores como efecto Gough-Joule o simplemente expansión de Joule, en el cual la temperatura produce deformaciones elásticas y viceversa. En esta contribución participan además de la temperatura y la deformación elástica, el tensor conjugado del coeficiente de dilatación térmica $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, como se observa en (4.42). Aplicando (4.18), este término puede escribirse:

$$\int_V \delta \theta \hat{\boldsymbol{\beta}} : \mathbf{d}^e dV = \prod_{e=1}^{n_e} \int_{V_e} \delta \theta^\top (\theta \hat{\boldsymbol{\beta}} : \mathbf{d}^e) dV \quad (4.57)$$

la cual luego de considerar (4.44) y (4.45), la contribución elemental resulta:

$$\int_{V_e} \delta \theta^\top (\theta \hat{\boldsymbol{\beta}} : \mathbf{d}^e) dV = \delta \boldsymbol{\theta}_e^\top \left[\int_{V_e} \mathbf{L}^\top (\hat{\boldsymbol{\beta}} : \mathbf{d}^e) \mathbf{L} dV \right] \boldsymbol{\theta}_e \quad (4.58)$$

El tensor conjugado del coeficiente de dilatación térmica puede obtenerse a partir de considerar la deformación como la superposición de los efectos mecánicos y térmicos, es decir

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{elastic} + \boldsymbol{\varepsilon}^{thermal} \quad (4.59)$$

en donde la parte térmica resulta simplemente (3.41). Aplicando la relación de Hooke y reescribiendo la ecuación constitutiva termoelástica en la forma de Lamé, se puede establecer que el tensor conjugado resulta:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = K \alpha \mathbf{1} \quad (4.60)$$

siendo en (4.60), K es módulo volumétrico del material, α es el coeficiente de dilatación térmica y $\mathbf{1}$ es el tensor identidad de segundo orden. Reemplazando (4.60) en (4.58), considerando que $\mathbf{1} : \mathbf{d}^e = \text{tr}(\mathbf{d}^e)$, entonces:

$$\begin{aligned} \int_{V_e} \delta\theta^T (\theta \hat{\beta} : \mathbf{d}^e) dV &= \delta\theta_e^T \left[\int_{V_e} \mathbf{L}^T K \alpha (\mathbf{1} : \mathbf{d}^e) \mathbf{L} dV \right] \Delta\theta_e \\ &= \delta\theta_e^T \mathbf{J}_e^\theta \Delta\theta_e = \delta\theta_e^T \mathbf{j}_e \end{aligned} \quad (4.61)$$

en la cual se ha empleado el cambio de temperatura elemental $\Delta\dot{\theta}_e$ de manera consistente con la ecuación (3.41) y posteriormente en la ecuación de equilibrio térmico es mejor tratar a (4.61) como un vector termoelástico elemental $\mathbf{j}_e^\theta = \mathbf{J}_e^\theta \Delta\theta_e$. La matriz termoelástica de un elemento, en un problema bidimensional de espesor t , resulta en la siguiente expresión:

$$\left(J_e^\theta \right)_{ij} = K \alpha \text{tr}(\mathbf{d}^e) t \int_{A_e} L^I L^J dA \quad (4.62)$$

con $I = J = 1 \dots nn$, e integrando sobre el área del elemento A_e .

Vector de disipación estructural. La disipación estructural o factor de acoplamiento termoplástico D_p involucra dos aspectos: (a) la disipación estructural propiamente dicha con origen puramente mecánico, y también (b) el cambio en la disipación estructural debido a la temperatura cuyo origen es termomecánico; de manera que considerando (4.18) este término queda:

$$\int_V \delta\theta D_p dV = \prod_{e=1}^{ne} \int_{V_e} \delta\theta^T \left(\boldsymbol{\tau} : \mathbf{d}^p + \theta \boldsymbol{\varepsilon}^e : \frac{\partial \mathbb{C}(\theta)}{\partial \theta} : \mathbf{d}^p \right) dV \quad (4.63)$$

En el caso del primer término en (4.63), la contribución elemental a partir de (4.44) resulta simplemente:

$$\int_{V_e} \delta\theta^T (\boldsymbol{\tau} : \mathbf{d}^p) dV = \delta\theta_e^T \int_{V_e} \mathbf{L}^T \dot{w}^p dV \quad (4.64)$$

siendo \dot{w}^p la potencia plástica evaluada a nivel elemental.

Por otra parte el segundo término en (4.63), que representa la parte de disipación estructural de origen termomecánico, se puede reescribir como:

$$\int_{V_e} \delta\theta^T \left(\theta \boldsymbol{\varepsilon}^e : \frac{\partial \mathbb{C}(\theta)}{\partial \theta} : \mathbf{d}^p \right) dV = \delta\theta_e^T \left[\int_{V_e} \mathbf{L}^T (\boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbb{C}_{\theta} : \mathbf{d}^p) \mathbf{L} dV \right] \Delta\theta_e \quad (4.65)$$

de modo que la contribución elemental de la disipación plástica o estructural, en un elemento arbitrario de un problema bidimensional resulta:

$$(D_{pe})_{ij} = \dot{w}^p t \int_{A_e} L^I dA + (\boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbb{C}_{\theta} : \mathbf{d}^p) t \int_{A_e} L^I L^J dA$$

con $I = J = 1 \dots nn$, e integrando igualmente a los casos anteriores sobre el área del elemento A_e .

Y el vector termoplástico elemental resultante a tener en cuenta en la ecuación de equilibrio térmico discreta es:

$$\begin{aligned} \int_{V_e} \delta\theta^T D_{pe} dV &= \delta\theta_e^T \left[\int_{V_e} (\mathbf{L}^T \dot{w}^p + \mathbf{L}^T (\boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbb{C}_{\theta} : \mathbf{d}^p) \mathbf{L} \Delta\theta_e) dV \right] \\ &= \delta\theta_e^T \mathbf{d}_{pe} \end{aligned} \quad (4.66)$$

Contribuciones térmicas en el contorno. En el problema térmico las contribuciones en el contorno pueden ser de tres tipos: (a) la imposición de un flujo de calor a través del contorno A_q , (b) convección y radiación a través del contorno libre A_h , ambos reflejados en la ecuación (4.42), y (c) conducción de calor y generación de calor por fricción por contacto en el contorno A_c , esta última si bien no se ha incluido en (4.42) se puede tratar de igual manera que las dos primeras.

Igualmente al caso de cargas mecánicas en algún sector del contorno, y haciendo la misma salvedad de que las funciones de interpolación del contorno no son las mismas que las asociadas al dominio, se tiene:

$$\theta = \sum_{I=1}^{nc} \check{L}^I \theta^I = \check{\mathbf{L}} \boldsymbol{\theta}_e \quad (4.67)$$

$$\delta\theta = \sum_{I=1}^{nc} \check{L}^I \delta\theta^I = \check{\mathbf{L}} \delta\boldsymbol{\theta}_e \quad (4.68)$$

para las temperaturas y sus incrementos virtuales, y también:

$$q = \sum_{I=1}^{nc} \check{L}^I q^I = \check{\mathbf{L}} \mathbf{q}_e \quad (4.69)$$

para el flujo calor impuesto en el contorno, donde nc son los nodos que definen el lado del elemento perteneciente al contorno con dicha imposición. Y la matriz de funciones de forma $\check{\mathbf{L}}$, nuevamente se obtiene como:

$$\check{\mathbf{L}} = \left[\check{L}^1 \quad \check{L}^1 \quad \dots \quad \check{L}^{nc} \right] \quad (4.70)$$

y $\mathbf{q}_e = \left[q^1 \quad \dots \quad q^{nc} \right]^T$, es decir los valores de flujo asociados a los nodos del elemento que pertenecen al contorno del dominio.

Para el caso de un contorno con flujo de calor impuesto, el quinto término en (4.42), aplicando el concepto (4.18), se puede definir:

$$\int_{A_q} \delta\theta q dA = \prod_{e=1}^{ne} \int_{A_{q_e}} \delta\theta^T q dA \quad (4.71)$$

y considerando las ecuaciones (4.68) y (4.69), la contribución del elemento que tenga asociado flujo de calor en uno de sus lados resulta:

$$\begin{aligned} \int_{A_{q_e}} \delta\theta^T q dA &= \delta\boldsymbol{\theta}_e^T \left(\int_{A_{q_e}} \check{\mathbf{L}}^T \check{\mathbf{L}} dA \right) \mathbf{q}_e \\ &= \delta\boldsymbol{\theta}_e^T \check{\mathbf{M}}_e^\theta \mathbf{q}_e = \delta\boldsymbol{\theta}_e^T \mathbf{q}_e^q \end{aligned} \quad (4.72)$$

en donde $\check{\mathbf{M}}_e^\theta$ es una matriz de características morfológicas similares a la matriz de masa. Esta matriz, para el caso de un problema bidimensional con un dominio de espesor t , se puede obtener a partir de integrales en sobre los segmentos del contorno según la expresión:

$$\left(\check{M}_e^\theta \right)_{IJ} = t \int_{S_e} \left[\check{L}^I \check{L}^J \right] dS \quad (4.73)$$

donde $I = J = 1 \dots nc$ son los nodos del lado elemento que pertenece al contorno y S_e la longitud de dicho lado.

En el caso de contorno libre, con la posibilidad de que exista flujo de calor por convección y/o radiación sobre la superficie libre del dominio A_h , considerando (4.18) se tiene:

$$\int_{A_h} \delta\theta \left[h_c (\theta_s - \theta_a) + h_r (\theta_s^4 - \theta_{rad}^4) \right] dA = \prod_{e=1}^{ne} \int_{A_{he}} \delta\theta^T \left[h_c (\theta_s - \theta_a) + h_r (\theta_s^4 - \theta_{rad}^4) \right] dA \quad (4.74)$$

donde el salto térmico de convección $\Delta\theta_c = (\theta_s - \theta_a)$ y el salto térmico de radiación $\Delta\theta_r = (\theta_s^4 - \theta_a^4)$, son susceptibles de ser interpolados empleando las mismas funciones de forma, de modo que:

$$\Delta\theta_c = \sum_{I=1}^{nc} \check{L}^I \Delta\theta_c^I = \check{\mathbf{L}} \Delta\theta_{ce} \quad (4.75)$$

con $\Delta\theta_{ce} = \left[(\theta_s^1 - \theta_a) \ \dots \ (\theta_s^{nc} - \theta_a) \right]^T$, es decir la diferencia entre la temperatura de la superficie y la temperatura ambiente de cada uno de los nodos que definen el lado del elemento que pertenece al contorno con convección. De igual manera se puede definir:

$$\Delta\theta_r = \sum_{I=1}^{nc} \check{L}^I \Delta\theta_r^I = \check{\mathbf{L}} \Delta\theta_{re} \quad (4.76)$$

siendo $\Delta\theta_{re} = \left[(\theta_s^4 - \theta_{rad}^4)^1 \ \dots \ (\theta_s^4 - \theta_{rad}^4)^{nc} \right]^T$, y este vector representa las diferencias entre las temperaturas de la superficie respecto de la fuente radiante (ambas elevadas a la potencia cuarta) asociadas a cada nodo del elemento que pertenece al contorno con radiación.

A partir de las ecuaciones (4.68), (4.75) y (4.76), reemplazando en (4.74) se llega a las siguientes expresiones de contribución elemental:

$$\begin{aligned} \int_{A_{he}} \delta\theta^T [h_c (\theta_s - \theta_a)] dA &= \delta\theta_e^T \left(\int_{A_{he}} \check{\mathbf{L}}^T \check{\mathbf{L}} dA \right) \Delta\theta_{ce} \\ &= \delta\theta_e^T \check{\mathbf{M}}_e^\theta \Delta\theta_{ce} = \delta\theta_e^T \mathbf{q}_e^{hc} \end{aligned} \quad (4.77)$$

$$\begin{aligned} \int_{A_{he}} \delta\theta^T [h_r (\theta_s^4 - \theta_{rad}^4)] dA &= \delta\theta_e^T \left(\int_{A_{he}} \check{\mathbf{L}}^T \check{\mathbf{L}} dA \right) \Delta\theta_{re} \\ &= \delta\theta_e^T \check{\mathbf{M}}_e^\theta \Delta\theta_{re} = \delta\theta_e^T \mathbf{q}_e^{hr} \end{aligned} \quad (4.78)$$

donde $\check{\mathbf{M}}_e^\theta$ es idéntica a (4.73) pero integrada sobre los segmentos de la parte libre del contorno. De modo que la contribución en el contorno libre, sumando (4.77) y (4.78), convección y radiación respectivamente, resulta:

$$\int_{A_{he}} \delta\theta^T \left[h_c (\theta_s - \theta_a) + h_r (\theta_s^4 - \theta_{rad}^4) \right] dA = \delta\theta_e^T \left(\mathbf{q}_e^{hc} + \mathbf{q}_e^{hr} \right) \quad (4.79)$$

Los términos de contribución térmica asociados al contacto, surgen de considerar en el contorno dos cosas: (1) el flujo de calor q_k asociado al contacto según (B.20) y (2) el flujo de calor q_f vinculado a la potencia de fricción por contacto (B.24). El tratamiento de ambos flujos es similar al término (4.71), resultando en:

$$\begin{aligned} \int_{A_{ce}} \delta\theta (q_k + q_f) dA &= \delta\boldsymbol{\theta}_e^T \left[\int_{A_{ce}} \check{\mathbf{L}}^T (q_k + q_f) dA \right] \\ &= \delta\boldsymbol{\theta}_e^T (\mathbf{q}_e^k + \mathbf{q}_e^f) \end{aligned} \quad (4.80)$$

Como puede observarse de (4.72), (4.79) y (4.80), todas las contribuciones térmicas en el contorno pueden agruparse como:

$$\int_{A_{therm}} \delta\theta q_{therm} dA = \delta\boldsymbol{\theta}_e^T (\mathbf{q}_e^q + \mathbf{q}_e^{hc} + \mathbf{q}_e^{hr} + \mathbf{q}_e^k + \mathbf{q}_e^f) \quad (4.81)$$

donde (4.81) contiene los flujos asociados a el calor entrante por el contorno: conducción, convección y radiación térmica, y además conducción y fricción por contacto.

Ecuación de equilibrio térmico discreta. En este caso también partiendo de las contribuciones elementales (4.49), (4.55), (4.61), (4.66), (4.72), (4.79), y (4.80), y reemplazándolas en la ecuación de equilibrio térmico (4.42) resulta en:

$$\begin{aligned} \prod_{e=1}^{ne} \left\{ -\delta\boldsymbol{\theta}_e^T \left(\int_{V_e} \mathbf{L}^T \rho C_\kappa \mathbf{L} dV \right) \dot{\boldsymbol{\theta}}_e - \delta\boldsymbol{\theta}_e^T \left(\int_{V_e} \mathbf{B}^{\theta T} \mathbf{K}^\theta \mathbf{B}^\theta dV \right) \boldsymbol{\theta}_e + \right. \\ \left. -\delta\boldsymbol{\theta}_e^T \left[\int_{V_e} \mathbf{L}^T K \alpha (\mathbf{1} : \mathbf{d}^e) \mathbf{L} dV \right] \Delta\boldsymbol{\theta}_e + \right. \\ \left. \delta\boldsymbol{\theta}_e^T \left[\int_{V_e} (\mathbf{L}^T \dot{w}^p + \mathbf{L}^T (\boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbb{C}_{\theta} : \mathbf{d}^p) \mathbf{L} \Delta\boldsymbol{\theta}_e) dV \right] + \right. \\ \left. \delta\boldsymbol{\theta}_e^T \left(\int_{A_{qe}} \check{\mathbf{L}}^T \check{\mathbf{L}} dA \right) \mathbf{q}_e + \delta\boldsymbol{\theta}_e^T \left(\int_{A_{he}} \check{\mathbf{L}}^T \check{\mathbf{L}} dA \right) \Delta\boldsymbol{\theta}_{ce} + \right. \\ \left. \delta\boldsymbol{\theta}_e^T \left(\int_{A_{he}} \check{\mathbf{L}}^T \check{\mathbf{L}} dA \right) \Delta\boldsymbol{\theta}_{re} + \delta\boldsymbol{\theta}_e^T \left[\int_{A_{ce}} \check{\mathbf{L}}^T (q_k + q_f) dA \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.82)$$

donde nuevamente una vez realizado el ensamble de las contribuciones, se obtiene un sistema global de ecuaciones de la forma:

$$\delta\boldsymbol{\theta}^T \left[-\mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{K}\boldsymbol{\theta} - \mathbf{j}_e(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{j}_p(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{q}(\boldsymbol{\theta}) \right] = 0 \quad (4.83)$$

considerando (4.81) (todos los flujos en el contorno unificados en $\mathbf{q}(\boldsymbol{\theta})$) y teniendo en cuenta el hecho que la temperatura virtual es totalmente arbitraria y distinta de cero, entonces el término entre corchetes en (4.83) debe ser nulo con lo cual:

$$-\mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\theta}}(t) - \mathbf{K}\boldsymbol{\theta}(t) - \mathbf{j}_e(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}, t) + \mathbf{j}_p(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}, t) + \mathbf{q}(\boldsymbol{\theta}, t) = 0 \quad (4.84)$$

donde también se introduce la dependencia explícita de las ecuaciones con el tiempo, y los términos en (4.84) representan las matrices de capacidad \mathbf{C} y de conductividad \mathbf{K} globales del sólido, los vectores de cambio de temperatura $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ y de temperatura $\boldsymbol{\theta}$, los vectores termoelástico \mathbf{j}_e y termoplástico (disipación estructural) \mathbf{j}_p globales del sólido, y por último el vector de flujos de calor global en el contorno \mathbf{q} . La dependencia explícita de los últimos tres términos respecto de la temperatura se debe a que, aun cuando las propiedades mecánicas y térmicas del material son directamente dependientes de la temperatura, las evaluaciones de estos términos en general involucran de una u otra manera la temperatura o el incremento de temperatura en los nudos.

4.3.3. Esquema de integración de las ecuaciones de equilibrio

Independientemente del tipo de esquema empleado en la solución de las ecuaciones (4.41) y (4.84) de manera simultánea y acoplada, es ampliamente conocido que un algoritmo de integración eficiente debe aprovechar la diferencia de las escalas de tiempo que existe entre ambos problemas. Este tipo de consideraciones es lo que da lugar a los algoritmos de solución escalonados, en donde el problema se subdivide en algunos problemas menores, más fáciles de tratar y con menor cantidad de inconvenientes en la formulación.

Típicamente estos algoritmos resultan en la división natural del problema en: (a) una fase mecánica con temperatura constante, y (b) posteriormente una fase térmica donde la configuración no se deforma. Esta subdivisión puede verse como un paso con deformaciones isotérmicas seguido de un paso con transferencia y difusión de calor sobre la geometría deformada, debido a esto el algoritmo se denomina “escalonado isotérmico”. Y si bien estos algoritmos escalonados, a diferencia de los escalonados adiabáticos planteados en términos de la entropía, resultan solamente condicionalmente estables, son lo suficientemente precisos cuando se los emplea junto a esquemas explícitos de solución de las ecuaciones de gobierno.

Los fundamentos para elegir un esquema explícito de solución de las ecuaciones (4.41) y (4.84), radica fundamentalmente en que resultan muy convenientes cuando los problemas incluyen grandes deformaciones y contacto. En particular, los esquemas explícitos además de facilitar la implementación de los algoritmos de contacto basados en técnicas de penalización, muestran una importante capacidad de convergencia a la solución aun en problemas geoméricamente complejos.

El esquema explícito elegido es del tipo *Forward Euler* y considerando una discretización en diferencias finitas para la variable temporal, las ecuaciones (4.41) y (4.84), se pueden escribir como:

$$\mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{p} - \mathbf{f} = 0 \quad (4.85)$$

$$-\mathbf{C}\Delta\dot{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{K}\boldsymbol{\theta} - \mathbf{j}_e + \mathbf{j}_p + \mathbf{q} = 0 \quad (4.86)$$

con las condiciones iniciales \mathbf{u}_0 , $\dot{\mathbf{u}}_0$ y $\boldsymbol{\theta}_0$ conocidas.

Para llevar a cabo la solución del sistema termomecánico se procede según:

1. Se mantiene la temperatura constante durante la integración de las ecuaciones de movimiento, siguiendo un esquema explícito como el siguiente:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{u}}_{t+1} &= \ddot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{M}_{lum}^{-1} (\mathbf{f}_t - \mathbf{p}_t) \\ \dot{\mathbf{u}}_{t+1} &= \dot{\mathbf{u}}_t + \ddot{\mathbf{u}}_t \Delta t_{mech} \\ \mathbf{u}_{t+1} &= \mathbf{u}_t + \dot{\mathbf{u}}_t \Delta t_{mech} \end{aligned} \quad (4.87)$$

en donde se ha hecho uso de la matriz de masa global diagonalizada \mathbf{M}_{lum} . El esquema de solución suele mejorarse planteando un algoritmo en diferencias finitas centradas para el cálculo de cada paso de tiempo. A través de las ecuaciones (4.87), se actualizan los vectores nodales de aceleraciones $\ddot{\mathbf{u}}_{t+1}$, velocidades $\dot{\mathbf{u}}_{t+1}$ y desplazamientos \mathbf{u}_{t+1} , en cada nuevo paso de tiempo $t + 1$.

2. Luego el calor generado por la disipación mecánica se mantiene constante sin cambio en la configuración deformada, y se integran las ecuaciones que gobiernan la transferencia de calor:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\theta}}_{t+1} &= \dot{\boldsymbol{\theta}}_t + \mathbf{C}_{lum}^{-1} (\mathbf{q} - \mathbf{K}\boldsymbol{\theta} - \mathbf{j}_e + \mathbf{j}_p) \\ \boldsymbol{\theta}_{t+1} &= \boldsymbol{\theta}_t + \dot{\boldsymbol{\theta}}_t \Delta t_{therm}\end{aligned}\quad (4.88)$$

donde también se hace uso de la matriz de capacidad global diagonalizada \mathbf{C}_{lum} . A través de las ecuaciones (4.88) se pueden actualizar los vectores correspondientes a la velocidad de cambio de la temperatura $\dot{\boldsymbol{\theta}}_{t+1}$ y temperatura $\boldsymbol{\theta}_{t+1}$ en nuevo paso de tiempo $t + 1$.

Además como se observa de los esquemas de integración explícita de las ecuaciones de gobierno, (4.87) y (4.88), cada esquema tiene un paso de tiempo asociado. La elección de un paso de tiempo apropiado es fundamental para lograr la solución del problema termomecánico, y si bien pequeños pasos de tiempo aseguran una convergencia estable y resultados precisos, esto atenta a la economía de cálculo pues el tiempo total de análisis numérico crece de manera importante.

Habitualmente el problema mecánico domina la selección del tiempo de integración, puesto que muestra tiempos críticos para la integración explícita menores a los tiempos críticos del problema térmico. En este trabajo el tiempo crítico del problema mecánico puede evaluarse según:

$$\Delta t_{mech} = \min \left(\frac{A_e}{l_e} \sqrt{\frac{\rho}{E}} \right) \quad (4.89)$$

donde A_e es el área del elemento, l_e es la mayor distancia entre los nodos del elemento, ρ y E son la densidad y el módulo de Young de sólido, respectivamente.

Y por otra parte, el paso de tiempo crítico asociado al problema térmico se calcula como:

$$\Delta t_{therm} = \min \left(l_e^2 \frac{C_k \rho}{K^\theta} \right) \quad (4.90)$$

donde ahora l_e es la menor distancia entre los nodos del elemento, mientras que ρ , C_k y K^θ son la densidad, el calor específico y la conductividad del sólido, respectivamente. Estas expresiones se calculan para todos los elementos, y se adopta el menor valor como paso de avance general del problema. También podría establecerse una relación entera entre los pasos de tiempo, de la forma:

$$n = \frac{\Delta t_{mech}}{\Delta t_{therm}} \quad (4.91)$$

a fin de integrar de manera sub-incremental el problema térmico, es decir integrar el problema térmico cada n pasos de integración del problema mecánico.

Para la solución del sistema termomecánico acoplado se ha implementado toda la formulación propuesta en este capítulo en el código explícito de elementos finitos STAMPACK (2011).

4.4. Algoritmo de integración de la ecuación constitutiva

En los apartados anteriores se han presentado, una aproximación elemental en deformaciones impuestas y un esquema explícito basado en un algoritmo del tipo escalonado para resolver las ecuaciones de gobierno. En esta sección se presenta el esquema de integración numérico asociado al algoritmo constitutivo termo-elasto-viscoplástico presentado en la Sección 3.4. El algoritmo constitutivo permite establecer las tensiones y deformaciones que posteriormente se utilizan para evaluar la contribución (4.30), (4.61) y (4.66); permitiendo completar el conjunto de ecuaciones necesarias para resolver el problema termomecánico acoplado.

4.4.1. Esquema de integración J_2 termo-elasto-viscoplástico generalizado

El esquema de integración del algoritmo constitutivo se ha presentado en detalle en el Capítulo 3. A continuación se presenta un resumen de las tareas enumeradas de acuerdo a como son resueltas dentro del código numérico a nivel elemental. Se parte de una configuración previa conocida $(\mathbf{X}_n, \theta_n, \mathbf{b}_n^{e-1}, \bar{e}_n^p)$, y se procede según:

1. Se actualiza la configuración y se obtiene la inversa del tensor gradiente relativo:

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n + \mathbf{u}_n \circ \mathbf{X}_n \quad (4.92)$$

$$\mathbf{f}_{n+1}^{-1} = \mathbf{1} - \nabla_{x_n} u_n = \sum_{I=1}^6 \bar{N}_{\mathbf{x}_{n+1}}^I \mathbf{x}_n^I \quad (4.93)$$

2. Se calcula la parte elástica del tensor de Finger de prueba:

$$\left(\mathbf{b}_{n+1}^{e-1}\right)^{\text{trial}} = \mathbf{f}_{n+1}^{-T} \left(\mathbf{b}_n^{e-1}\right) \mathbf{f}_{n+1}^{-1} \quad (4.94)$$

3. Se obtiene el tensor elástico de Almansi, y a partir del mismo la parte desviadora del tensor de tensiones de Kirchhoff:

$$\mathbf{e}_{n+1}^e = \frac{1}{2} \left[(1 - f_\nu \alpha \Delta \theta_n) \mathbf{1} - \left(\mathbf{b}_{n+1}^{e-1}\right)^{\text{trial}} \right] \quad (4.95)$$

$$\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} = -\mu \text{dev} \left[\left(\mathbf{b}_{n+1}^{e-1}\right)^{\text{trial}} \right] \quad (4.96)$$

4. Se comprueba la carga plástica:

$$\bar{f}_{n+1}^{\text{trial}} = \left\| \mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} \right\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_y (e_n^{vp}, \theta_n) \quad (4.97)$$

Si $\bar{f}_{n+1}^{\text{trial}} \leq 0$, en donde $\bar{f}_{n+1}^{\text{trial}}$ resulta igual a la sobretensión d , entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{n+1} &= \mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} \\ e_{n+1}^p &= e_n^p \\ \mathbf{b}_{n+1}^{e-1} &= \left(\mathbf{b}_{n+1}^{e-1}\right)^{\text{trial}} \end{aligned} \quad (4.98)$$

En caso contrario

Retorno Radial

5. Se procede al retorno radial evaluando el parámetro de consistencia viscoplástico $\Delta\gamma^{vp}$, recordando que en el caso de que los efectos viscosos sean inexistentes ($\eta = 0$) se recupera la forma clásica de retorno radial plástico en (4.99), según:

$$\begin{aligned} \Delta\gamma^{vp} \implies 0 &= \sqrt{[\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} - 2\mu\Delta\gamma^{vp}\mathbf{n}_{n+1}] : [\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} - 2\mu\Delta\gamma^{vp}\mathbf{n}_{n+1}]} & (4.99) \\ &- \sqrt{\frac{2}{3}} [\sigma_y(\Delta\gamma^{vp}, \theta_n)]_{n+1} \\ &- \eta(\theta_n) \left(e_n^{vp} + \sqrt{\frac{2}{3}}\Delta\gamma^{vp} \right)^{1/n(\theta_n)} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\Delta\gamma^{vp}}{\Delta t} \right)^{1/m(\theta_n)} \end{aligned}$$

donde:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}}{\|\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}\|} \quad (4.100)$$

y posteriormente corrigiendo la parte elástica del tensor Finger, la parte desviadora del tensor de tensiones de Kirchhoff y se actualiza el parámetro de endurecimiento:

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} - 2\mu\Delta\gamma^{vp}\mathbf{n}_{n+1} \quad (4.101)$$

$$\mathbf{b}_{n+1}^e{}^{-1} = \left(\mathbf{b}_{n+1}^e{}^{-1} \right)^{\text{trial}} + 2\Delta\gamma^{vp}\mathbf{n}_{n+1} \quad (4.102)$$

$$e_{n+1}^p = e_n^p + \sqrt{\frac{2}{3}}\Delta\gamma^{vp} \quad (4.103)$$

6. Se actualiza el tensor elástico de Almansi y el tensor de tensiones de Kirchhoff:

$$\mathbf{e}_{n+1}^e = \frac{1}{2} \left[(1 - f_\nu \alpha \Delta\theta_n) \mathbf{1} - \mathbf{b}_{n+1}^e{}^{-1} \right] \quad (4.104)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1} = K \text{tr} \left(\mathbf{e}_{n+1}^e \right) \mathbf{1} + \mathbf{s}_{n+1} \quad (4.105)$$

4.4.2. Solución iterativa de la función de fluencia generalizada

En el caso más general, cuando los tres parámetros que definen el endurecimiento viscoplástico toman los valores adecuados, la ecuación (4.99) es no lineal y debe ser resuelta por algún método iterativo. Siendo una ecuación no lineal escalar, la opción más adecuada resulta un método del tipo Newton-Raphson. La expresión de este método puede despejarse empleando una expansión en series de Taylor, que resulta:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (4.106)$$

considerando que la variable independiente es el parámetro viscoplástico $\Delta\gamma^{vp}$ y en la ecuación (4.106) resulta $f(x_n) \equiv \bar{f}(\Delta\gamma_n^{vp})$, y entonces se puede escribir:

$$\Delta\gamma_{n+1}^{vp} = \Delta\gamma_n^{vp} - \frac{\bar{f}}{\bar{f}'_{\Delta\gamma}} \quad (4.107)$$

por lo tanto es necesario conocer la derivada primera ($\bar{f}'_{\Delta\gamma}$) de la función de fluencia generalizada (4.99) respecto al parámetro de consistencia, es decir:

$$\begin{aligned}
 \bar{f}_{\Delta\gamma} = & \frac{d}{d\Delta\gamma^{vp}} \left(\sqrt{[\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} - 2\mu\Delta\gamma^{vp}\mathbf{n}_{n+1}] : [\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} - 2\mu\Delta\gamma^{vp}\mathbf{n}_{n+1}]} \right. \\
 & - \sqrt{\frac{2}{3}} [\sigma_y(\Delta\gamma^{vp}, \theta_n)]_{n+1} \\
 & \left. - \eta(\theta_n) \left(e_n^{vp} + \sqrt{\frac{2}{3}}\Delta\gamma^{vp} \right)^{1/n(\theta_n)} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\Delta\gamma^{vp}}{\Delta t} \right)^{1/m(\theta_n)} \right)
 \end{aligned} \quad (4.108)$$

en donde se puede derivar cada uno de los tres términos de de manera separada.

Derivada de la tensión equivalente. Si se tiene en cuenta que el tensor dirección del flujo plástico (4.100), y recordando además la (3.50), entonces el término asociado a la tensión equivalente se puede escribir como:

$$\bar{f}_{|\mathbf{s}|} = \left(\left[\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} - 2\mu\Delta\gamma^{vp} \frac{\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}}{\|\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}\|} \right] : \left[\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} - 2\mu\Delta\gamma^{vp} \frac{\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}}{\|\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}\|} \right] \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.109)$$

la cual se puede reordenar para obtener:

$$\bar{f}_{|\mathbf{s}|} = \left(\left(1 - \frac{2\mu\Delta\gamma^{vp}}{\|\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}\|} \right)^2 \mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} : \mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} \right)^{\frac{1}{2}} = \|\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}\| - 2\mu\Delta\gamma^{vp} \quad (4.110)$$

y por lo tanto la derivada del primer término en (4.108) resulta:

$$\frac{d\bar{f}_{|\mathbf{s}|}}{d\Delta\gamma^{vp}} = -2\mu \quad (4.111)$$

Derivada del término de endurecimiento. La parte de la ecuación asociada a la evolución de la superficie de fluencia, resulta ser una función explícita de la deformación viscoplástica efectiva, según:

$$\bar{f}_{\sigma_y} = -\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_y(\Delta\gamma^{vp}, \theta_n) \quad (4.112)$$

aplicando la regla de la cadena a (4.112), resulta:

$$\frac{d\bar{f}_{\sigma_y}}{d\gamma^{vp}} = \frac{\partial\bar{f}_{\sigma_y}}{\partial e^{vp}} \frac{\partial e^{vp}}{\partial\gamma^{vp}} \quad (4.113)$$

considerando luego una evolución de la tensión de fluencia dada por una ley de endurecimiento lineal e isotrópica como:

$$\sigma_y(\Delta\gamma^{vp}, \theta_n) = \sigma_0(\theta) + A'(\theta)e^{vp} \quad (4.114)$$

y la evolución del parámetro de endurecimiento fijada por (4.103), entonces:

$$\frac{d\bar{f}_{\sigma_y}}{d\gamma^{vp}} = -\frac{2}{3} \frac{d\sigma_y}{de^{vp}} \quad (4.115)$$

esta ecuación puede evaluarse fácilmente si se conoce como cambia la tensión de fluencia del material en función de la deformación viscoplástica o evaluarse numéricamente. En el caso de endurecimiento isótropo lineal (4.114), esta derivada resulta la pendiente de la recta de endurecimiento, que no es más que el módulo de endurecimiento $A'(\theta)$.

Derivada del término viscoplástico. La derivada del último término en (4.108) se puede obtener a partir de la derivada de una multiplicación de funciones potenciales, y siendo el término viscoplástico:

$$\bar{f}_\eta = -\eta(\theta) \left(e_n^{vp} + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\gamma^{vp} \right)^{1/n(\theta)} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\Delta\gamma^{vp}}{\Delta t} \right)^{1/m(\theta)} \quad (4.116)$$

la derivada del mismo, por simplicidad se evita hacer referencia a la función explícita de los parámetros con la temperatura, se obtiene como:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{f}_\eta}{d\gamma^{vp}} = & -\eta \left[\frac{d}{d\Delta\gamma^{vp}} \left(e_n^{vp} + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\gamma^{vp} \right)^{1/n} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\Delta\gamma^{vp}}{\Delta t} \right)^{1/m} + \right. \\ & \left. \left(e_n^{vp} + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\gamma^{vp} \right)^{1/n} \frac{d}{d\Delta\gamma^{vp}} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\Delta\gamma^{vp}}{\Delta t} \right)^{1/m} \right] \end{aligned} \quad (4.117)$$

de modo que resulta en:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{f}_\eta}{d\gamma^{vp}} = & -\eta \left[\frac{2}{n} \sqrt{\frac{2}{3}} \left(e_n^{vp} + \sqrt{\frac{2}{3}} \gamma^{vp} \right)^{(1-n)/n} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\gamma^{vp}}{\Delta t} \right)^{1/m} + \right. \\ & \left. \left(e_n^{vp} + \sqrt{\frac{2}{3}} \gamma^{vp} \right)^{1/n} \frac{1}{m\Delta t} \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\gamma^{vp}}{\Delta t} \right)^{(1-m)/m} \right] \end{aligned} \quad (4.118)$$

Esquema iterativo para la solución de la función de fluencia generalizada. La expresión final para la derivada de la función de fluencia generalizada, considerando las ecuaciones (4.111), (4.115) y (4.118), y resulta:

$$\begin{aligned} \bar{f}_{i\Delta\gamma} = & -2\mu - \frac{2}{3}A' - \eta \left[\frac{2}{n} \sqrt{\frac{2}{3}} \left(e_n^{vp} + \sqrt{\frac{2}{3}} \gamma^{vp} \right)^{(1-n)/n} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\gamma^{vp}}{\Delta t} \right)^{1/m} + \right. \\ & \left. \left(e_n^{vp} + \sqrt{\frac{2}{3}} \gamma^{vp} \right)^{1/n} \frac{1}{m\Delta t} \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\gamma^{vp}}{\Delta t} \right)^{(1-m)/m} \right] \end{aligned} \quad (4.119)$$

de modo que el incremento se puede evaluar a partir de las ecuaciones (4.99) y (4.119) según:

$$\delta(\Delta\gamma_i^{vp}) = \frac{\bar{f}(\Delta\gamma_i^{vp})}{f'(\Delta\gamma_i^{vp})} \quad (4.120)$$

y el nuevo valor resulta:

$$\Delta\gamma_{i+1}^{vp} = \Delta\gamma_i^{vp} - \delta(\Delta\gamma_i^{vp}) \quad (4.121)$$

El procedimiento que se repite hasta convergencia se presenta gráficamente en la Figura 4.3, además este esquema iterativo suele necesitar la inclusión un algoritmo de bisección debido a que existe un límite superior que es el valor del parámetro de consistencia plástico $\Delta\gamma^p$ (es decir considerando que los efectos viscosos son nulos), algo que también ha sido puesto de manifiesto en el trabajo de Souza Neto (2004). Un esquema similar basado en el método de Newton-Raphson y la adición de un esquema de Regla Falsa para capturar los casos donde la solución no pertenece al dominio de validez física del problema, ha sido propuesto en los trabajos de Andia Fages (2010) y Ribero et al. (2011).

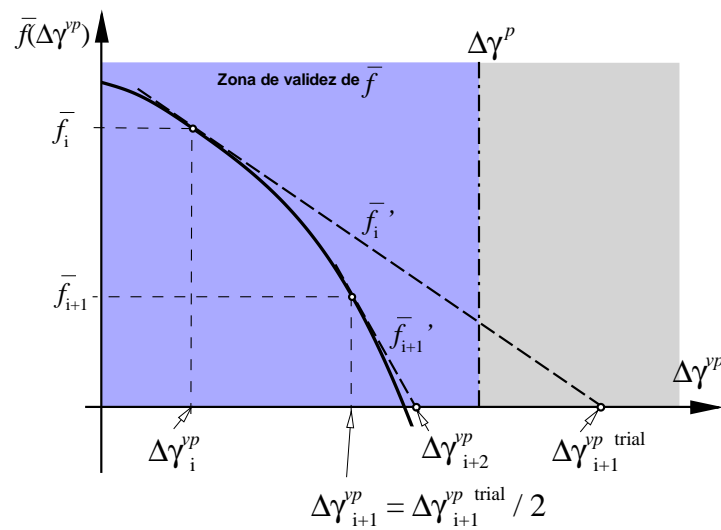


Figura 4.3 – Esquema iterativo de Newton-Raphson para evaluar el parámetro $\Delta\gamma^{vp}$

Capítulo 5

Restauración de mallas distorsionadas

5.1. Introducción

En la aplicación del método de elementos finitos, es de amplio conocimiento que los resultados dependen de la calidad de la discretización o mallado del dominio. Es decir no solo es importante la correcta subdivisión del dominio, si no que además resulta conveniente mantener la regularidad geométrica de los elementos. En los análisis de procesos industriales que involucran grandes deformaciones y cambios importantes en la geometría del dominio de estudio, se presentan distintas complicaciones asociadas a la distorsión progresiva de la malla. Estas dificultades asociadas a la distorsión elemental resultan perjudiciales para el análisis, dado que afectan de manera directa la calidad y precisión de los resultados. Y es en pos de solucionar este inconveniente, donde surge la necesidad de implementar un esquema de restauración de mallas.

La idea que se persigue con la restauración o regeneración de la malla es asegurar un apropiado mantenimiento de la calidad de la discretización en la configuración deformada, de modo que durante el avance del análisis las condiciones de la malla sean las óptimas para mantener la precisión en la solución. La importancia del remallado ha sido ampliamente reconocida por diferentes autores en los inicios de los métodos numéricos, y al menos en los últimos veinte años se ha convertido en un área en franco desarrollo. Además la utilización del remallado automático es una característica fundamental de la mayoría de los códigos computacionales actuales. Asociado a los esquemas de remallado, también se han desarrollado distintos algoritmos de transferencia de variables entre mallas. Resulta poco relevante mantener la regularidad en la geometría de los elementos de la malla, si la transferencia de variables introduce pérdidas de precisión en cada etapa de remallado.

El contenido de este capítulo se presenta a continuación. En la Sección 5.2 se presenta una descripción de las opciones de restauración de mallas distorsionadas. En esta misma sección se mencionan los inconvenientes asociados a un esquema de regeneración total de la malla. Una solución a la baja eficiencia computacional asociado con la restauración de toda la malla viene dado por la restauración local o por zonas, que es el esquema empleado en este trabajo. Por otra parte dado que los esquemas de restauración deben ir acompañados de un algoritmo de transferencia de variables, en la Sección 5.3 se presentan las diferentes opciones. Y en particular se hace referencia al algoritmo empleado en este trabajo basado en el *Superconvergent Patch Recovery*, el cual muestra una importante conservación de las variables transferidas lo cual impacta directamente en la preservación de la precisión en

los resultados.

5.2. Estrategias empleadas en la restauración de mallas distorsionadas

Las estrategias para hacer frente a la importante distorsión que presentan las mallas, en particular en la simulación de problemas con grandes deformaciones y sin contemplar cambios en la aproximación a nivel elemental, básicamente son: (a) refinamiento ya sea por subdivisión o regeneración de los elementos empleando un menor tamaño que el original de malla distorsionada, (b) restauración por remallado o regeneración manteniendo el tamaño original de los elementos, y (c) restauración por movimiento o rezonificación de los nodos de la malla.

Cada uno de estos métodos presentan ventajas y desventajas. Si se pretende capturar mejor los cambios en las variables el refinamiento es la mejor opción, mientras que si se desea mantener la economía de cálculo la rezonificación de nodos es lo más adecuado dado que se mantiene el tamaño del problema. Sin embargo, ellos involucran un aumento en el trabajo computacional en el caso de la primera opción, y un límite en la magnitud de los movimientos que pueden darse a los nodos sin que se produzca un detrimento a la calidad de los resultados en la segunda.

El remallado posee algunas ventajas interesantes para el tipo de problemas que se estudian en este trabajo, dado que además de mantener el nivel de precisión definido de antemano por el tamaño de elementos elegido en la malla original, no aumenta considerablemente el volumen de cálculos al no aumentar significativamente la cantidad de elementos. Y en los códigos explícitos además, dado que el paso de tiempo de integración depende del tamaño de elementos, el remallado resulta mucho más conveniente que el refinamiento desde el punto de vista de los tiempos de análisis. Sin embargo el principal inconveniente de este método es la transferencia de variables entre mallas, lo cual involucra habitualmente alguna pérdida de información y es por ello que debe prestársele especial atención.

Por otra parte, desde el punto de vista de la morfología de los elementos y los generadores de mallas, los elementos simples como triángulos y tetraedros (en dos y tres dimensiones respectivamente) muestran importantes ventajas cuando se los emplea en procesos de restauración de mallas. Esta ventaja está ligada principalmente a: (a) la sencillez con que se puede enriquecer y/o empobrecer localmente la malla sin la necesidad de utilizar esquemas complicados (como en el caso de cuadriláteros o hexaedros), (b) se adaptan mejor a geometrías complejas, y (c) los generadores de malla (triángulos y tetraedros) resultan ser más robustos.

Una revisión de los trabajos dedicados a la aplicación de las estrategias de restauración de mallas, muestra que principalmente está ligada a capturar fenómenos locales (gradientes) en algunas variables empleando refinamiento. Comparativamente con los trabajos en el área de refinamiento de mallas, existen relativamente pocos trabajos en donde se utilice el remallado para restaurar la geometría de la malla con el objetivo de mantener el nivel de precisión del análisis. Algunos trabajos en el área de conformado de metales son los de Son y Im (2006), Zheng et al. (2006), Castelló y Flores (2008) y Parvizian et al. (2010), en particular este último muestra la aplicación del remallado en problemas termomecánicos del tipo industrial. Otros trabajos en el área de deformaciones finitas con aplicación de remallado que pueden mencionarse son los de Borouchaki et al. (2005) y Erhart et al.

(2006), sobre este último cabe destacar que se estudian problemas de impacto en donde por general las mallas resultan severamente distorsionadas

En vista de lo expuesto, queda clara la importancia que reviste emplear alguna estrategia de remallado, ya sea con la finalidad de mejorar la precisión en los resultados o bien de facilitar la aplicación de la herramienta computacional en procesos que involucran grandes distorsiones en la malla.

5.2.1. Regeneración total de la malla

Inicialmente, ver Castelló (2005) y Castelló y Flores (2006), se utilizó una estrategia de remallado automático, con el único objetivo de evitar que la distorsión de los elementos tenga un efecto negativo en la precisión de los resultados. Esto se consigue restaurando, en la medida que sea necesario, la totalidad de los elementos de la malla que se ha distorsionado. En los trabajos mencionados, se presenta un esquema de remallado automático que respeta el tamaño de los elementos de la malla inicial del dominio, con lo cual el número de grados de libertad se mantiene en niveles similares a través de cada remallado. Las características de ese esquema de remallado es que el control del mismo no es automático, si no que se fija de antemano la cantidad de remallados que se realizarán durante el proceso de análisis. Si bien este control del remallado no resulta adecuado, no representa ningún inconveniente dado que sería posible automatizarlo a partir de una medida de distorsión elemental.

Además puede observarse que con un esquema de remallado total, en particular a partir de los resultados en Castelló y Flores (2006), muchos elementos que no se han distorsionado son reemplazados innecesariamente. En síntesis, reemplazar todos los elementos de una malla muestra algunas desventajas, principalmente que la transferencia de variables implica alguna pérdida de información (ej.: se suavizan los gradientes locales de las variables) y por lo tanto se está perdiendo algo de información en cada uno de los elementos de la malla; y además dado que si bien el remallado se hace con el mismo tamaño de los elementos de la malla original sucede que la nueva malla tiene por lo general una mayor cantidad de elementos. En este contexto es donde surge la necesidad de modificar el esquema, para que solamente sean reemplazados aquellos elementos que se han distorsionado.

5.2.2. Regeneración de malla por zonas

Habiendo explicado los inconvenientes vinculados con la restauración de todos los elementos de la malla, trataremos en este apartado el esquema asociado a un “remallado local o zonificado”, el cual reemplaza solo aquellos elementos que se han distorsionado. El objetivo es reemplazar los elementos que muestran una distorsión importante, esto incluye algunos elementos vecinos a los distorsionados y de este modo quedan definidas las zonas dentro del dominio de análisis que deben ser remalladas. Los puntos relevantes son: (a) establecer una adecuada cuantificación de la distorsión del elemento, y (b) seleccionar adecuadamente los elementos adyacentes vecinos del elemento distorsionado. En particular, este segundo punto es relativamente sencillo, pues de hecho la información de elementos vecinos se conoce desde el momento en que se generan las parcelas de triángulos definidas en la aproximación numérica (ver Apartado 4.2.2).

En lo que respecta a la distorsión elemental, existen distintos métodos para cuantificarla. Entre los más usados están los algoritmos basados en la comparación de la geometría del elemento triangular respecto de un triángulo equilátero de igual área, o bien dado que la geometría de los elementos habitualmente dista bastante de ser equilátero se puede realizar

una medición de la evolución de los ángulos internos del elemento. En esta tesis se ha empleado un criterio de cuantificación basado en la comparación de los ángulos internos, ver Figura 5.1, del cual ya se han presentado algunos resultados en los trabajos de Castelló y Flores (2007) y Castelló y Flores (2008). Este esquema no solo ha mostrado ser muy eficiente desde el punto de vista computacional, sino que además resulta muy conservativo desde el punto de vista de la pérdida de información por transferencia entre mallas.

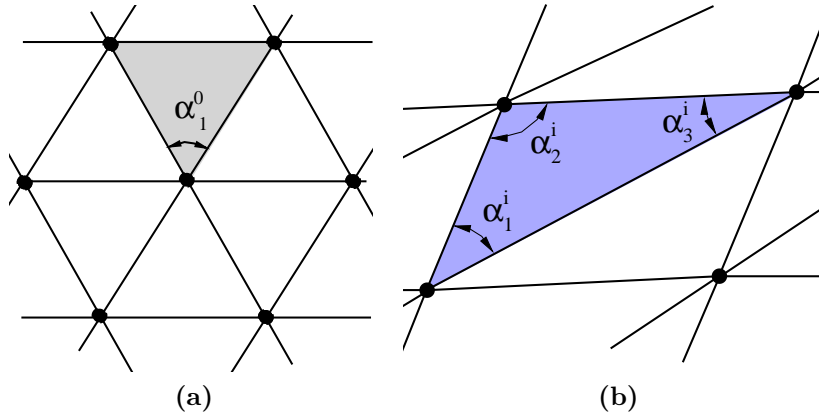


Figura 5.1 – Distorsión de un elemento triangular según su menor ángulo interno. (a) Elemento triangular en la malla original sin distorsionar. (b) Elemento distorsionado en la malla deformada.

El remallado por zona se activa automáticamente cuando la distorsión β en un elemento cualquiera es:

$$\beta = \min \left(\frac{\alpha_j^i}{\alpha_j^0} \right) < d_{\min} \quad (5.1)$$

en donde α_j^0 es el ángulo en el nodo j del elemento sin distorsionar, α_j^i es el ángulo en el nodo j del mismo elemento distorsionado en la configuración deformada actual i , y d_{\max} es la máxima distorsión admitida para cualquier elemento de la malla. Los elementos que deben ser reemplazados son aquellos que cumplen con la condición $d_{\min} < \beta < d_{\max}$. Existirá un conjunto de elementos distorsionados comprendidos en un entorno $\beta \subset [d_{\min}, d_{\max}]$ que pertenecen a la “zona a restaurar”, y este par de valores límite son definidos de antemano. Se debe prestar atención a la correcta definición de los segmentos del contorno de la zona que pertenecen al interior del dominio de análisis, y aquellos segmentos que pertenecen al contorno real del sólido que se está analizando. El código de elementos finitos escribe un fichero que es procesado posteriormente por el software GiD (2010), empleando la opción *batch file*. En este fichero se define la generación de la geometría a partir del conjunto de elementos a reemplazar, se aplican las condiciones de contorno correspondientes y se discretiza la geometría respetando el tamaño de elementos en la malla original.

5.3. Transferencia de las variables entre mallas

En los esquemas de restauración de mallas, los algoritmos de transferencia juegan un rol crucial en lo que respecta a la precisión de los resultados. Los métodos de transferencia surgen a partir de algunos desarrollos llevados a cabo en un área distinta: la “recuperación de variables”. Si bien las variables físicas reales deben ser continuas a través del dominio,

la aplicación del método de elementos finitos da lugar en algunos casos a la aparición de distribuciones que son continuas por tramos (básicamente dentro de los elementos). Este fenómeno se evidencia comúnmente en las tensiones (entre otras variables) y puede extenderse al resto de las variables internas que definen un análisis elasto-plástico de un sólido en grandes deformaciones.

Entre los primeros intentos realizados para establecer una distribución suave de estas variables en el dominio se pueden encontrar las técnicas de extrapolación y promedio, o como se las denomina habitualmente técnicas de suavizado nodal (ver Oñate (2009), pg. 329). En ese método se evalúan las variables en cada nudo a partir de la contribución de cada elemento, empleando para ello un promedio las variables que es ponderado por la masa que aporta cada elemento al nudo en cuestión. Esa técnica, cuya implementación es muy simple, tiene la desventaja de poseer una baja precisión asociado a que resulta de un promedio. Esta baja precisión asociada al suavizado puede convertirse en una pérdida sustancial de información en la medida que se requiera una importante cantidad de etapas de remallado.

Y es precisamente en esta área de recuperación de variables, donde se ha desarrollado el algoritmo denominado *Superconvergent Patch Recovery* (SPR) introducido inicialmente en el trabajo Zienkiewicz y Zhu (1992a,b) y es el que ha tenido una mayor aceptación. En este método (SPR) la distribución continua de las variables internas, a través de todo dominio, se logra por medio de la interpolación de los valores recuperados en los nodos usando funciones de forma elementales estándar. El valor nodal de la variable se calcula considerando una expansión polinómica sobre una parcela de elementos que comparten el nudo donde se desea recuperar la variable, y esta expansión polinómica debe aproximar (vía mínimo cuadrados) los valores obtenidos del análisis por elementos finitos en algunos puntos de muestreo dentro de la parcela que tienen características de superconvergencia (es decir los puntos de integración elementales). Si bien el procedimiento resulta heurístico, se ha probado lo suficiente como para admitir que brinda resultados muy precisos en problemas con pequeñas deformaciones, el trabajo de Zienkiewicz et al. (1999) y más recientemente el de Bugeda (2006) son ejemplos de ello. Más aun, el procedimiento original del SPR ha sido complementado por distintos autores, en el trabajo de Wiberg et al. (1994) se ha mejorado la formulación de modo que incluya las ecuaciones de equilibrio y contemple las condiciones de contorno aplicadas a la variable suavizada, Labbé y Garon (1995) también han mejorado la robustez del método cuando se aplica en puntos adyacentes al contorno del dominio, Yazdani et al. (1998) proponen un esquema mejorado para la recuperación de variables en problemas axilimétricos. Los trabajos como los descritos anteriormente han dado origen a los llamados métodos *Enhanced Superconvergent Patch Recovery*. Por otra parte han sido Boroomand y Zienkiewicz (1999) posiblemente los primeros en aplicar el mismo algoritmo SPR a problemas no lineales más precisamente en problemas elasto-plásticos. Más recientemente en los trabajos de Gu y Kitamura (2000) y Gu et al. (2004) se ha propuesto una modificación al método original de modo de obtener más precisión en la recuperación de tensiones en cuadriláteros y además poder aplicarlo a problemas con grandes deformaciones, adoptando como puntos de muestreo a los mismos puntos de integración sin que ello introduzca errores de importancia.

La mayoría de los trabajos asociados al SPR se han desarrollado en el campo del remallado adaptativo, donde el proceso de generación de una nueva malla se encuentra ligado a la distribución del error en los resultados del análisis por elementos finitos. Resulta posible entonces, emplearlo junto a un esquema de remallado automático, cuando se desea restaurar la malla con elementos de igual tamaño a los originales y con el único objetivo

de regularizar la discretización para no perder precisión en el análisis.

5.3.1. Transferencia de variables por suavizado nodal

El algoritmo de transferencia empleado en los trabajos de Castelló (2005) y Castelló y Flores (2005), está basado en el suavizado nodal de las variables internas, transferencia nodo a nodo por interpolación y posteriormente una nueva interpolación a los puntos de integración de los elementos (ver Figura 5.2). Sin embargo no solo la transferencia en si misma es relevante, también lo es la elección adecuada de las variables a transferir. En un problema con deformaciones finitas es posible diferenciar dos conjuntos de variables a transferir: en primer lugar las variables que definen el estado geométrico del sólido, digamos desplazamientos, asociadas generalmente a los nodos; y en segundo lugar variables que establecen el estado del material, como ser algunas variables internas que están asociadas habitualmente a los puntos de integración a nivel elemental.

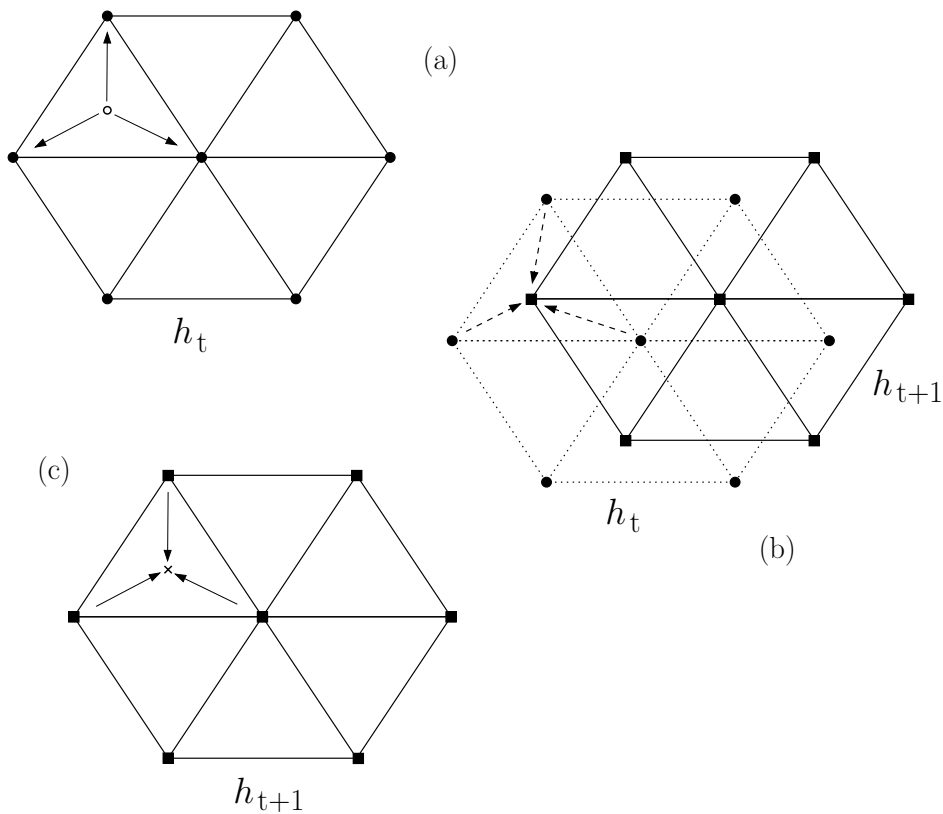


Figura 5.2 – Esquema de transferencia de variables. (a) Extrapolación desde los puntos de Gauss hacia los nodos. (b) Transferencia de variables entre mallas. (c) Interpolación desde los nodos hacia a los puntos de Gauss.

Si bien las variables que definen la evolución histórica del esquema Lagrangeano Total (empleado en Castelló (2005) y Castelló y Flores (2005)) son \mathbf{F}^{p-1} y e^p , las variables a transferir resultan ser el parámetro de endurecimiento e^p y el tensor de tensiones de Kirchhoff $\boldsymbol{\tau}$. El hecho de no transferir la inversa de la parte plástica del tensor gradiente de las deformaciones, \mathbf{F}^{p-1} , se debe a que el mismo no está unívocamente definido (cualquier rotación aplicada sobre el mismo daría igual resultado). Por lo tanto resulta preferible transferir el tensor de tensiones Kirchhoff que es una variable espacial, definida justamente

en la configuración actual que es donde se realiza el remallado, para recuperar luego a partir del mismo el tensor \mathbf{F}^{p-1} . En los trabajos mencionados se emplea un esquema de transferencia de uso habitual denominado “extrapolación/interpolación” o “suavizado e interpolación”, similar a los propuestos en los trabajos de Peric et al. (1996) y Han y Wriggers (2000). Ese esquema se ha diagramado en la Figura 5.2, emplea las mismas funciones de interpolación de la aproximación elemental y el algoritmo se puede ver en detalle en Castelló (2005). Por otra parte en ese trabajo se propuso también una manera de disminuir las pérdidas en la transferencia de variables no escalares, aplicado en particular al tensor de tensiones de Kirchhoff.

5.3.2. Transferencia de variables empleando el SPR

La implementación del método SPR en la transferencia de variables se sustenta en su capacidad de interpolar las variables de forma casi exacta, a partir de puntos de superconvergencia que generalmente resultan ser coincidentes con los puntos de integración a nivel elemental. El esquema de transferencia que se ha empleado en esta tesis es el mismo que se utilizó en los trabajos Castelló y Flores (2006), Castelló y Flores (2007) y Castelló y Flores (2008), mostrando excelentes resultados y más aun cuando se lo emplea junto al remallado por zonas. Frente a otros métodos de transferencia posibles, como por ejemplo el de suavizado nodal, el SPR presenta la ventaja de tener una menor pérdida en la información que se está transfiriendo.

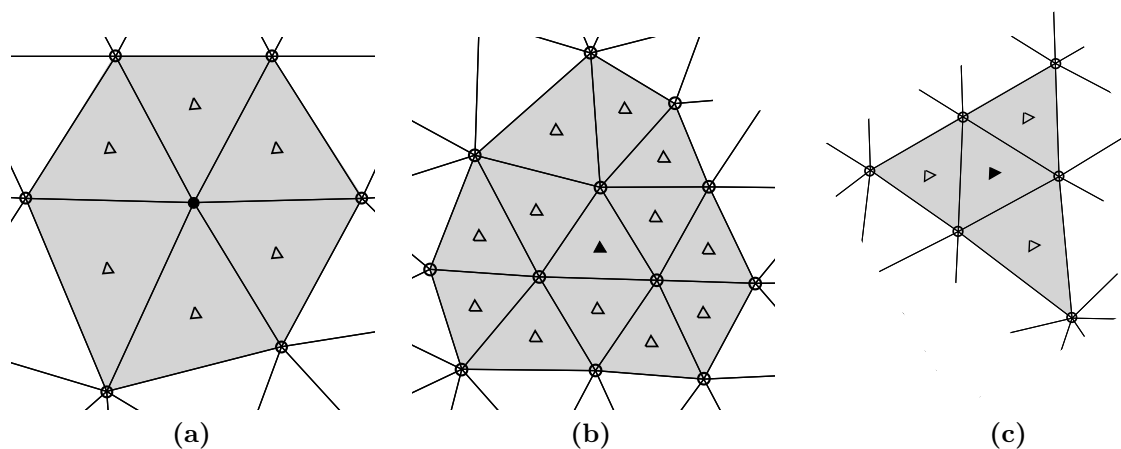


Figura 5.3 – Configuraciones de parcelas de uso habitual: (a) centrada en los nodos, (b) centrada en los elementos, (b) adyacentes a los lados del elemento central.

El método desarrollado a continuación coincide con los conceptos planteados en el trabajo de Akin (2004), y se empieza definiendo una parcela de elementos que puede ser de dos tipos: parcelas centradas en nodos o parcelas centradas en elementos. Lógicamente se tendrá un conjunto de parcelas de elementos asociadas a cada nodo de la malla en el primer caso, o a cada elemento de la malla en el segundo. Básicamente se usan tres tipos de parcelas:

- a) Parcelas centradas en nodos: un grupo de elementos que comparten un nodo.
- b) Parcelas centradas en elementos: un grupo de elementos que encierran a un elemento central.
- c) Parcelas basadas en los contornos del elemento.

En el caso (c) se tiene un grupo de elementos que comparte una cara con respecto a un elemento central, en el caso de dos dimensiones son elementos que comparten un lado con el elemento central. La Figura 5.3 muestra estos tres tipos de parcelas y, cualquiera sea el caso, es necesario conocer un listado de los elementos que conforman la parcela. La creación de este listado de elementos y la conformación de subconjuntos de elementos vecinos suele ser una tarea computacionalmente costosa. Para la aproximación que se emplea en este trabajo, la cual se define sobre un conjunto de cuatro elementos triangulares adyacentes y desde el punto de vista de la eficiencia computacional, la parcela más adecuada es la que se observa en la Figura 5.3c.

El proceso de interpolación de variables resulta de la aplicación de una expansión polinomial sobre los elementos que forman la parcela. Los coeficientes de esta expansión polinomial quedan establecidos ajustando las variables, a través de mínimos cuadrados, en puntos que tienen características de superconvergencia. Los puntos de muestreo adoptados corresponden con los de integración elemental, la Figura 5.4 muestra un detalle de la parcela usada en este trabajo.

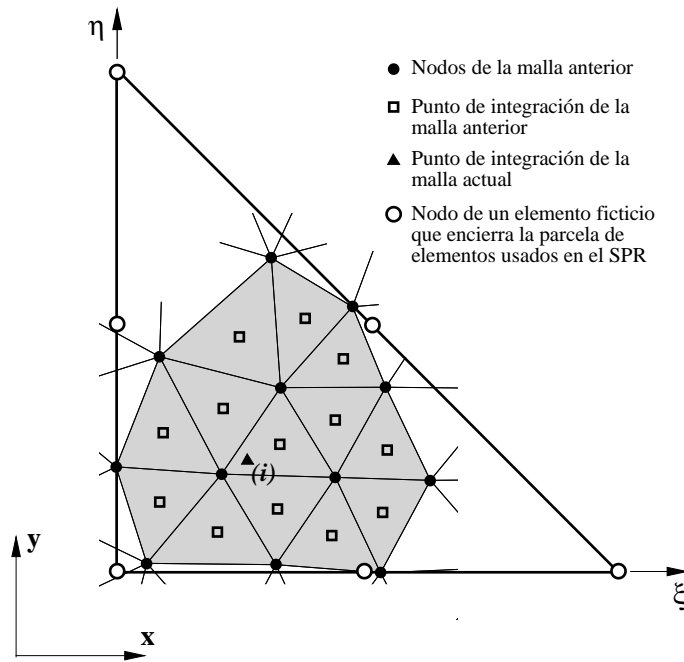


Figura 5.4 – Configuración de la parcela empleada en este trabajo y esquema de interpolación.

Las variables asociadas a los puntos de integración elemental α_i^* pueden ser interpoladas empleando un polinomio completo α_{pi}^* , donde el grado del polinomio puede ser el mismo de las funciones de aproximación elemental. Entonces la variable transferida α_i^* , podría interpolarse con la siguiente ecuación:

$$\alpha_{pi}^* = \mathbf{p}\mathbf{b}^i \tag{5.2}$$

en donde \mathbf{p} contiene la base polinómica y \mathbf{b}^i los coeficientes del polinomio. En el caso de problemas bidimensionales con funciones de aproximación elemental cuadráticas estos vectores tienen la forma $\mathbf{p} = \{1, x, y, x^2, xy, y^2\}$ y $\mathbf{b}^i = \{b_1^i, b_2^i, b_3^i, b_4^i, b_5^i, b_6^i\}^T$.

Las componentes del vector de coeficientes \mathbf{b}^i están asociadas a la variable α_i a transferir,

y surge de la minimización del siguiente residuo:

$$R_{G_i}(\mathbf{b}) = \sum_{j=1}^g \left(\hat{\alpha}_i(\mathbf{x}_j) - \alpha_{pi}^* \right)^2 = \sum_{j=1}^g \left(\hat{\alpha}_i(\mathbf{x}_j) - \mathbf{p}(\mathbf{x}_j) \mathbf{b}^i \right)^2 \quad (5.3)$$

en donde \mathbf{x}_j con $j = 1, \dots, g$, es cada uno de los puntos de integración de la malla anterior donde se conoce la variable $\hat{\alpha}_i$ y que pertenecen a la parcela empleada en el SPR. La cantidad de puntos se puede expresar como $g = mk$, siendo k la cantidad de puntos de integración elementales y m la cantidad de elementos que conforman la parcela.

Una propuesta interesante es la introducida por Akin (2004), donde \mathbf{p} resulta ser un polinomio completo de igual grado que la aproximación elemental y que responde en este caso a funciones de forma cuadráticas:

$$\mathbf{p}(\xi, \eta) = \{N^1, N^2, N^3, N^4, N^5, N^6\} \quad (5.4)$$

a fin de lograr este tipo de aproximación se elige un elemento triangular cuadrático ficticio (ver Figura 5.4) que encierra al conjunto de elementos que forman la parcela del SPR, donde el Jacobiano de la transformación resulta particularmente constante ya que los ejes paramétricos del elemento triangular ficticio son paralelos a los ejes físicos del problema.

Aplicando mínimos cuadrados a (5.3) y considerando la base polinómica (5.4), resulta entonces:

$$\sum_{j=1}^g \mathbf{p}^T(\xi_j, \eta_j) \mathbf{p}(\xi_j, \eta_j) \mathbf{b}^i = \sum_{j=1}^g \mathbf{p}^T(\xi_j, \eta_j) \hat{\alpha}_i(\xi_j, \eta_j) \quad (5.5)$$

y esta última ecuación debe ser resuelta para cada variable a transferir α_i , para lo cual es necesario la resolución de un sistema de ecuaciones de la forma:

$$\mathbf{b}^i = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{c}^i \quad (5.6)$$

donde:

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^g \mathbf{p}^T(\xi_j, \eta_j) \mathbf{p}(\xi_j, \eta_j) \quad (5.7)$$

$$\mathbf{c}^i = \sum_{j=1}^g \mathbf{p}^T(\xi_j, \eta_j) \hat{\alpha}_i(\xi_j, \eta_j) \quad (5.8)$$

en donde la matriz \mathbf{A} tiene un valor único para una determinada parcela del SPR, se aplica a todas las variables a transferir y por lo tanto solo es necesario invertirla una vez. Sin embargo el vector \mathbf{c}^i depende del valor de la variable $\hat{\alpha}_i$ que se desea transferir. El número de ecuaciones a resolver en cada parcela resulta entonces igual a la cantidad de variables en cada punto de integración multiplicada por la cantidad de coeficientes del vector \mathbf{b}^i .

Una vez que los coeficientes del vector \mathbf{b}^i asociados a cada variable a transferir α_i han sido determinados, solo resta interpolar la variable a cada punto de integración de la nueva malla empleando (5.2). Entonces para un punto de integración k en la nueva malla, que cae dentro de la parcela de la Figura 5.4, entonces la interpolación o transferencia de la variable α_i será:

$$(\alpha_i^*)_k = \mathbf{p}(\xi_k, \eta_k) \mathbf{b}^i \quad (5.9)$$

y de acuerdo a lo visto en las ecuaciones (5.2) a (5.5) el polinomio interpolante empleado en el SPR resulta dependiente del elemento empleado en la discretización del dominio y de la cantidad de elementos en cada parcela.

Capítulo 6

Simulaciones numéricas I

6.1. Introducción

El desarrollo de nuevas aproximaciones numéricas para modelar adecuadamente determinados problemas reales es un área que se encuentra en constante evolución. El estudio numérico a partir de la simulación computacional de procesos industriales, como el conformado de metales, no es ajeno a esta realidad y de hecho resulta comprobable el franco aumento de las herramientas numéricas en el proceso de desarrollo de nuevas piezas en la industria. Sin embargo antes de ser empleadas a nivel industrial, estas herramientas computacionales deben ser previamente evaluadas y validadas específicamente.

En el trabajo de Flores (2006) se presentan los resultados de la aproximación en deformaciones impuestas presentada en el Apartado 4.2.2 cuando se la somete a la prueba de la parcela, por este motivo no serán reproducidas nuevamente aquí. Este capítulo está dedicado a evaluar la formulación propuesta en este trabajo, frente a dos tipos de problemas particulares asociados a la industria del conformado de metales: el flujo plástico isócoro que se presenta cuando se trabaja sobre metales con comportamiento elasto-plástico y la distorsión geométrica asociada a los cambios de forma excesiva de las piezas producida por las herramientas. En los problemas que se presentarán a continuación no se ha tenido en cuenta efectos de plasticidad dependientes del tiempo (viscoplasticidad) y los procesos se consideran isotérmicos.

El contenido de este capítulo se resume a continuación. La Sección 6.2 presenta una serie de problemas donde la distorsión geométrica no juega un papel preponderante, de modo que no es necesario restaurar la malla para mantener la precisión de los resultados. Esta sección presenta en particular el estudio numérico de problemas de tipo industrial asociados a embutición de láminas y conformado de piezas de espesor relativamente pequeño. Por otra parte en la Sección 6.3 el cambio geométrico de las piezas durante el proceso hace necesario el uso de un algoritmo de remallado, y asociado a este cambio geométrico se evidencian grandes deformaciones elasto-plásticas. Los problemas estudiados en esta sección están ligados a procesos máscicos o volumínicos como la extrusión y el forjado de metales. Por último la Sección 6.4 presenta una breve discusión de los resultados obtenidos en el análisis de los problemas numéricos estudiados en este capítulo.

6.2. Problemas en deformaciones moderadas

En esta sección se estudian problemas en deformaciones moderadas, o bien problemas con deformaciones importantes, donde sin embargo la distorsión de la geometría no

involucra la necesidad de un cambio en la malla. Este tipo de problemas se encuentran ligados mayormente a procesos de embutición de láminas o conformados de tubos de pared delgada, aunque también se ha incluido un proceso de conformado de una pieza másica.

Los problemas que se presentan a continuación son: (a) el análisis axilsimétrico y en deformación plana del proceso de embutición de una lámina, (b) la simulación de un proceso de conformado o plegado de tubos cilíndricos de pared delgada, y (c) el estudio de la compresión de un tocho cilíndrico empleando una prensa. Los primeros dos casos tienen un origen industrial, en el sentido que responden a las características generales de los procesos utilizados en la industria para obtener piezas con aplicaciones en el área mecánica, aeronáutica, envases, etc. El tercer caso analizado es un *benchmark* empleado habitualmente para comprobar el comportamiento de elementos de sólidos.

6.2.1. Embutición de una lámina con un punzón

El problema se propuso originalmente en el trabajo de Lee et al. (1989), los ensayos experimentales fueron realizados en lo que hoy se conoce como Centro Avanzado de Materiales y Fabricación de Componentes Automotrices (CAMMAC) de la Ohio State University, y es empleado habitualmente como *benchmark* para probar el comportamiento de las aproximaciones numéricas. Este problema puede resolverse como un caso de deformación plana considerando la acción de un punzón cilíndrico sobre una lámina rectangular, o bien como un caso axilsimétrico observando la acción de un punzón hemiesférico sobre una lámina circular. En este trabajo se resuelven los casos bidimensionales correspondientes a este problema, correspondientes a deformación plana y axilsimetría, respectivamente. Los resultados de comparación han sido obtenidos del trabajo de García Garino (1993).

6.2.1.1. Embutición de una lámina rectangular con un punzón cilíndrico

La geometría del problema puede observarse en la Figura 6.1, como así también un detalle de la malla de elementos triangulares empleada. El espesor de la lámina rectangular es de 1 mm.

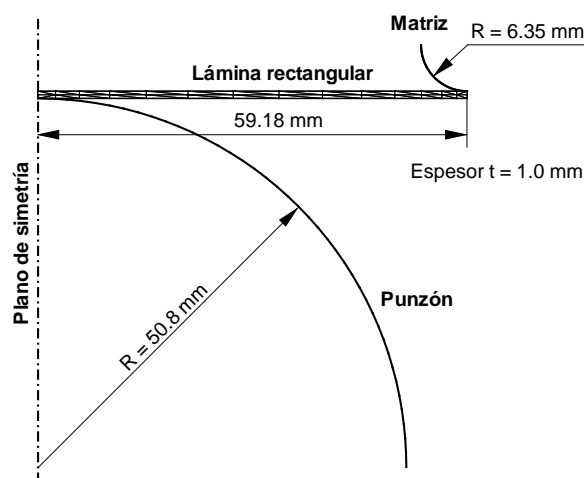


Figura 6.1 – Embutición de una lámina rectangular con un punzón cilíndrico. Geometría y discretización de la lámina.

El material es aluminio con módulo de Young $E = 69,004$ GPa y Poisson $\nu = 0,3$, el comportamiento plástico está definido por una ley de endurecimiento del tipo Ludwik-Nadai cuya expresión es $\sigma_y = 0,589 \cdot (1 \times 10^{-4} + e^p)^{0,216}$ GPa. Se considera que la superficie de la lámina está lo suficientemente lubricada como para despreciar la fricción en el contacto entre las herramientas y la lámina.

La malla empleada es del tipo estructurado, con 2 elementos en dirección del espesor y 28 elementos a lo ancho de la lámina, los elementos se han concentrado hacia el centro y el extremo de la lámina para mejorar el comportamiento del contacto entre la misma y las herramientas. La discretización empleada, considerando simetría respecto del plano central, presenta 56 (14x2x2) elementos triangulares.

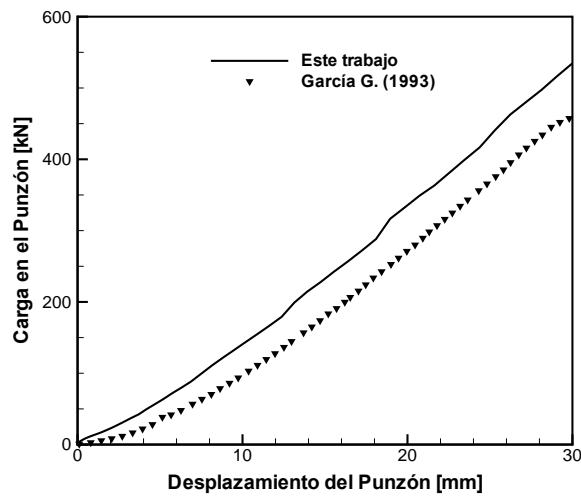


Figura 6.2 – Embutición de una lámina rectangular con un punzón cilíndrico. Curva de carga en función del desplazamiento del punzón.

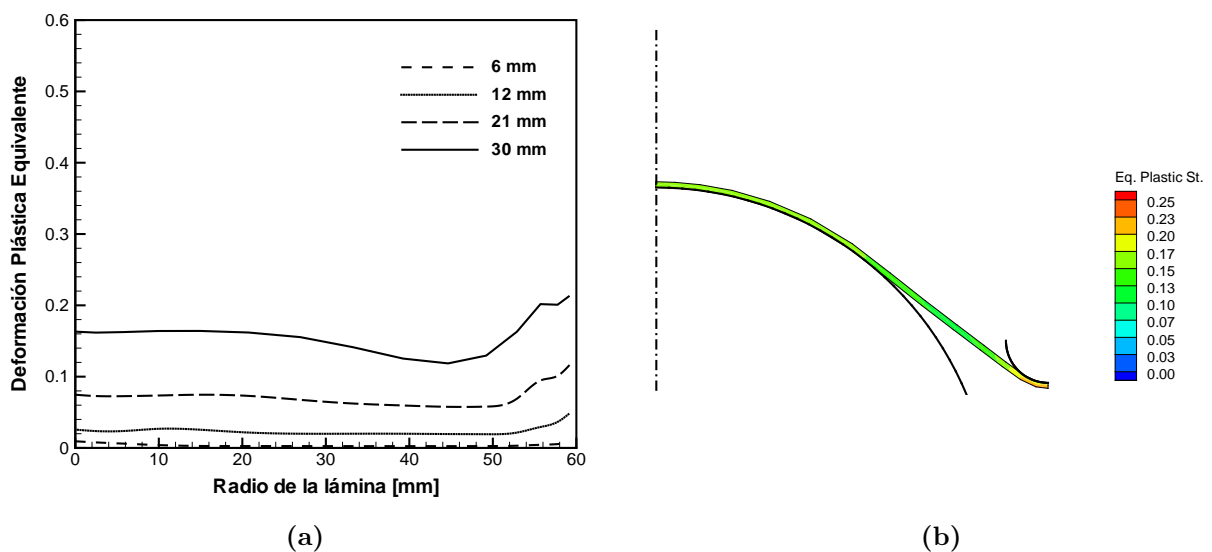


Figura 6.3 – Embutición de una lámina rectangular con un punzón cilíndrico. (a) Perfiles de deformación plástica efectiva en el centro de la lámina para distintos posiciones de avance del punzón. (b) Distribución de deformación plástica efectiva para un desplazamiento del punzón de 30 mm.

La Figura 6.2 muestra la evolución de la carga en el punzón en función del desplazamiento del mismo, se ha considerado un desplazamiento máximo del punzón de 30 mm. Se observa una respuesta levemente más rígida del elemento triangular propuesto en este trabajo, frente a la respuesta obtenida en García Garino (1993) donde se aplica un elemento cuadrilátero.

En la Figura 6.3a en tanto se presenta la evolución de las deformaciones plásticas efectivas medidas en la línea media de la lámina. Se observa que dada las condiciones de fricción inexistente en el problema, las deformaciones se concentran en el extremo que hace contacto con la matriz y están asociadas principalmente al bajo radio de curvatura de la misma. Comparativamente con los resultados presentados en García Garino (1993), las deformaciones plásticas efectivas obtenidas en este trabajo son sensiblemente menores y presentan además un comportamiento levemente distinto en la dirección del ancho de la lámina. La Figura 6.3b también muestra la distribución de deformaciones plásticas efectivas asociadas al máximo desplazamiento del punzón, se puede observa la concentración de deformaciones sobre el extremo de la lámina que hace contacto con la matriz.

6.2.1.2. Embutición de una lámina circular con un punzón hemiesférico

El caso axilsimétrico presenta deformaciones plásticas moderadas y la geometría, que resulta similar al caso anterior, se presenta en la Figura 6.4. El contacto entre las herramientas y la lámina se modela usando penalización, y para este caso el coeficiente de fricción adoptado en este trabajo es $\mu = 0,3$. Se empleó una malla estructurada, sin la concentración de elementos que se utilizó en el problema anterior, dando un total de 56 (14x2x2) elementos triangulares en la discretización. Otra diferencia respecto del caso anterior es el desplazamiento máximo del punzón que en este problema es de 60 mm.

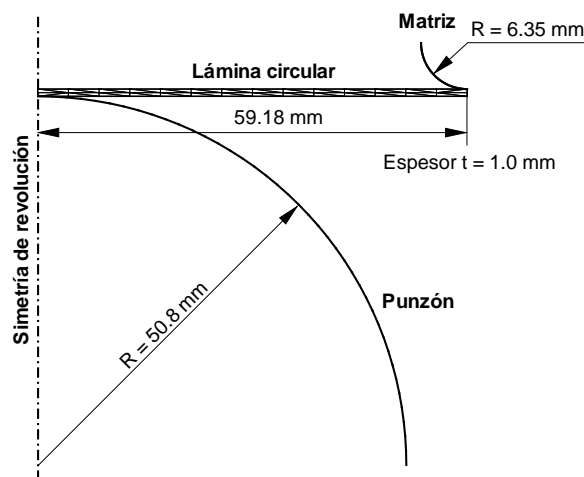


Figura 6.4 – Embutición de una lámina circular con un punzón hemiesférico. Geometría del problema y malla empleada en su análisis.

La curva de carga en función desplazamiento del punzón se ha graficado en la Figura 6.5, esta curva está de acuerdo con la mayoría de simulaciones donde se usan elementos sólidos. Se destaca la capacidad del elemento en el tratamiento de las distorsiones por corte debido al pequeño radio de la matriz y el contacto con fricción con las herramientas.

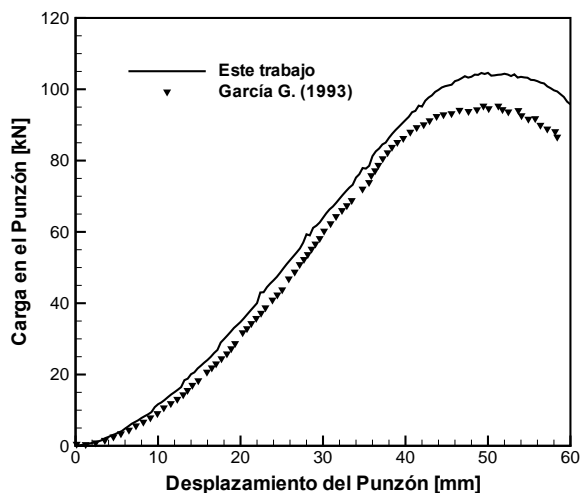


Figura 6.5 – Embutición de una lámina circular con un punzón hemiesférico. Carga en el punzón en función de la posición de avance.

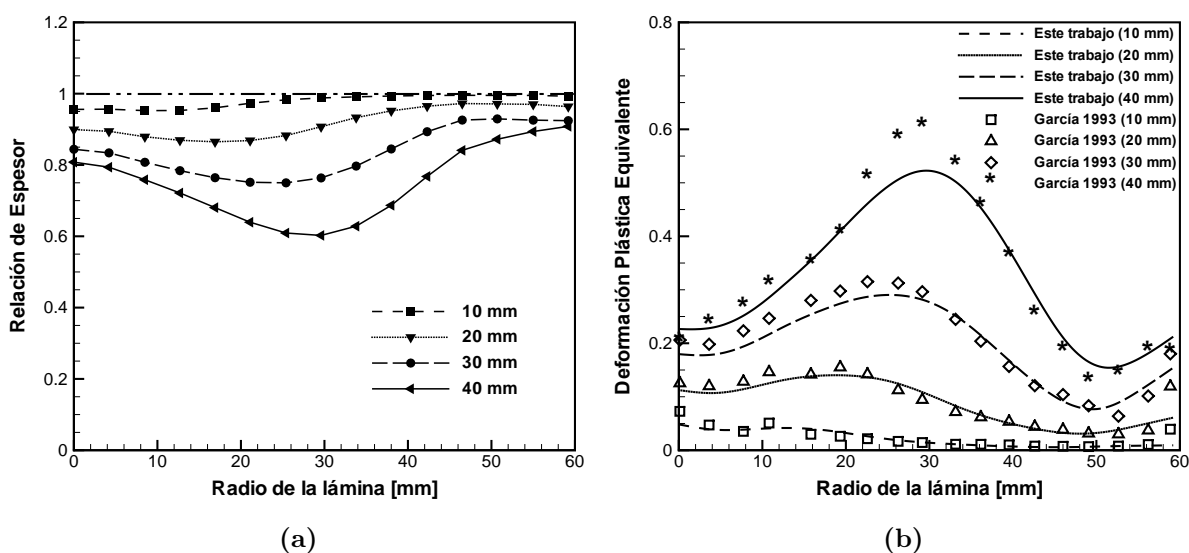


Figura 6.6 – Embutición de una lámina circular con un punzón hemiesférico. (a) Relación de espesor en función del radio para distintas posiciones de avance del punzón. (b) Perfiles de deformación plástica efectiva en función del radio.

La Figura 6.6a por otra parte muestra el cambio en la relación de espesor, el mayor afinamiento de la lámina en la zona intermedia se debe al arrastre de material provocado por las herramientas. La Figura 6.6b presenta los perfiles de deformación plástica efectiva para las mismas posiciones de avance del punzón que se observan en el gráfico de relación de espesor. Estas curvas corresponden a valores tomados en la superficie media de la lámina circular. Los resultados concuerdan muy bien con otros publicados para este problema, y en particular con los presentados en el trabajo de García Garino (1993). Consecuentemente con el caso de deformación plana, el elemento triangular muestra mayor rigidez observándose no solo en los mayores valores de la curva de carga en el punzón, si no que además las deformaciones plásticas efectivas resultan mínimamente inferiores a las presentadas en el trabajo citado.

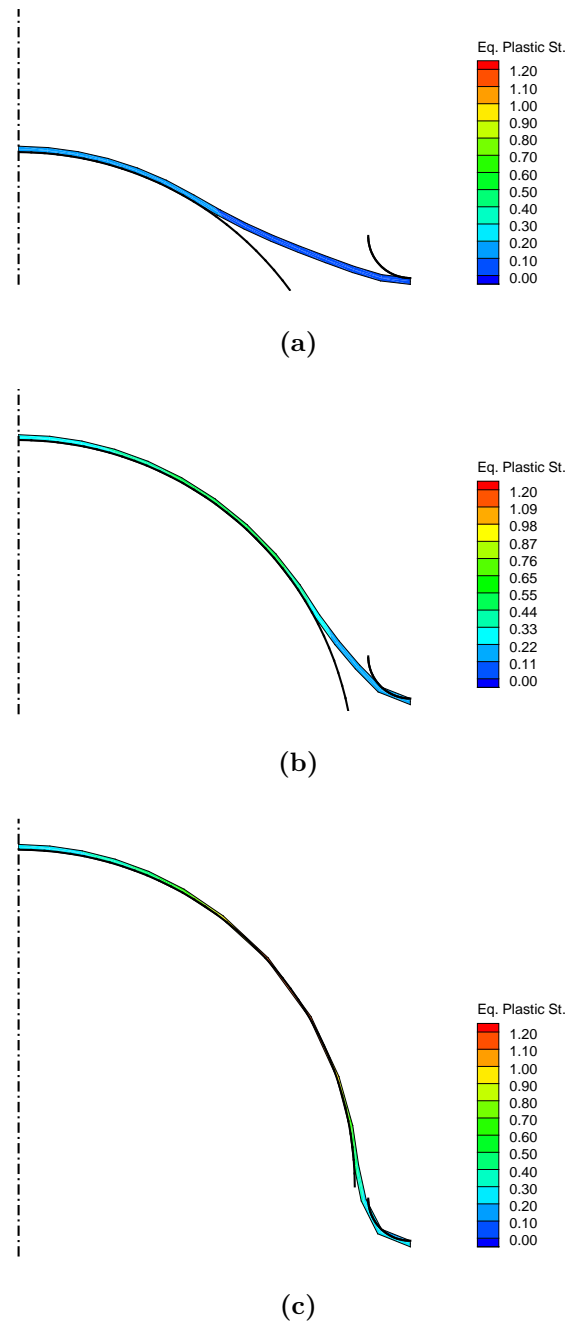


Figura 6.7 – Embutición de una lámina circular con un punzón hemiesférico. Deformadas y distribución de deformación plástica efectiva para distintas posiciones de avance. (a) 20 mm. (b) 40 mm. (c) 60 mm.

Las Figuras 6.7a-c muestran la deformada de la lámina para tres posiciones de avance del punzón: 20 mm, 40 mm y 60 mm. En estas imágenes se observa el afinamiento del espesor de la lámina en la zona intermedia entre las herramientas (punzón y matriz). Además asociado a este afinamiento, es en esa zona donde como consecuencia de la estricción de lámina se observan los mayores valores de deformación.

6.2.2. Plegado externo de tubos cilíndricos de pared delgada

Este problema ha sido tratado desde un punto de vista de aplicación industrial en el trabajo de Rosa et al. (2004), este proceso que permite obtener tubos de pared doble se

caracteriza por la compresión de un tubo sobre una matriz con una geometría adecuada que propicia la deformación radial del tubo. El objetivo del trabajo de Rosa et al. (2004) es identificar el rol de algunas variables como la lubricación y el radio de apertura de la matriz (entre otras) en la aparición de fisuras, pliegues y la inestabilidad del proceso de conformado. El material constructivo del tubo es aluminio, con módulo de Young $E = 69$ GPa, módulo de Poisson $\nu = 0,3$ y densidad $\rho = 2700$ kg/m³. El comportamiento plástico del material queda definido por un modelo de plasticidad J_2 y una regla de endurecimiento del tipo Ludwik-Nadai expresada por $\sigma_y = 0,2983 \cdot (28 \cdot 10^{-4} + e^p)^{0,086}$ GPa. La prensa se desplaza en total 38 mm produciendo el plegado externo del tubo cilíndrico.

La Figura 6.8 presenta la geometría del problema, donde se observa que se han utilizado 480 (4x60x2) elementos triangulares, este nivel de discretización del dominio (cuatro elementos en el espesor) es necesaria cuando se desea captar correctamente el proceso de plegado.

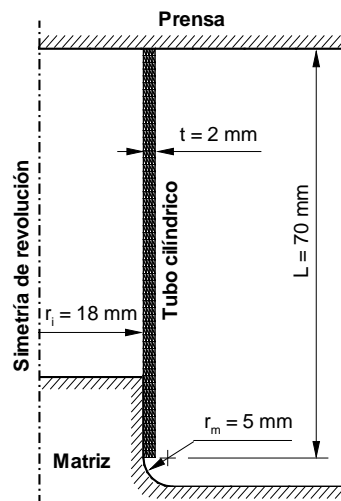


Figura 6.8 – Plegado externo de tubos cilíndricos de pared delgada. Geometría del problema y discretización empleada en su análisis.

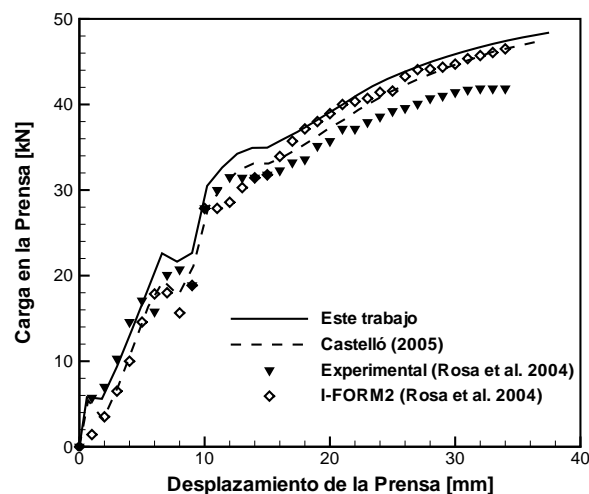


Figura 6.9 – Plegado externo de tubos cilíndricos de pared delgada. Curva de carga en función del desplazamiento de la prensa.

La Figura 6.9 muestra la curva de carga en la prensa en función del desplazamiento de la misma. Esta curva muestra un pico de cercano a 20 kN, coincidente con el instante en que el extremo del tubo ha recorrido todo el radio de empalme de la matriz, luego sigue aumentando la carga en la medida que el plegado del tubo continua. En la Figura 6.10 se observa la geometría deformada y las deformaciones plásticas efectivas para distintos estados de avance de la prensa sobre el tubo cilíndrico. Las deformadas concuerdan con los resultados obtenidos en el trabajo de Rosa et al. (2004).

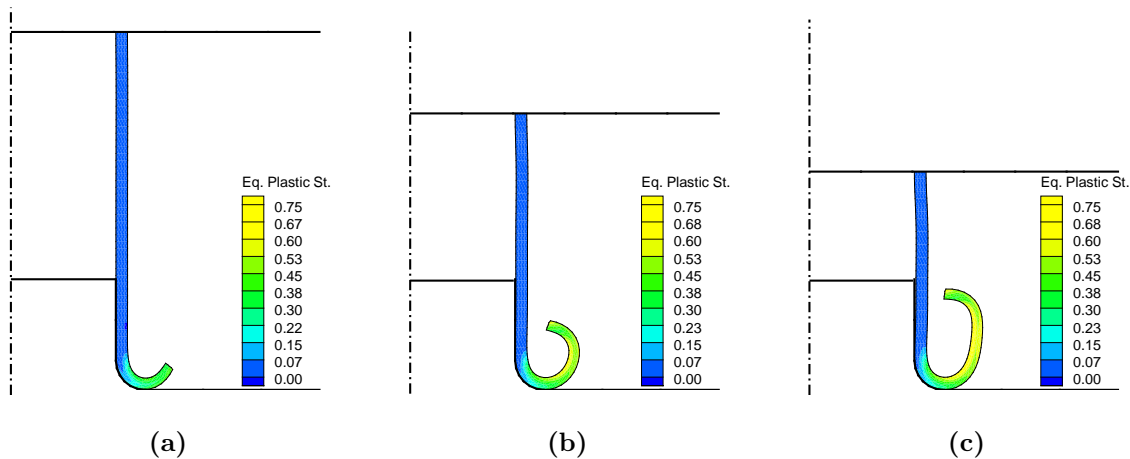


Figura 6.10 – Plegado externo de tubos cilíndricos de pared delgada. Deformadas y distribución de deformación plástica efectiva para tres posiciones de la prensa. (a) 14 mm. (b) 28 mm. (c) 38 mm.

Los resultados en general son comparativamente muy buenos frente a los mostrados en el trabajo citado, inclusive la curva de la Figura 6.9 es muy similar a las obtenidas en forma: experimental y con el código I-FORM2 (basado en elementos finitos) aplicado en ese trabajo; la misma similitud se observa con respecto a la geometría deformada. Se puede observar además que los resultados obtenidos en este trabajo son muy aproximados a los obtenidos experimentalmente hasta los 20 kN.

6.2.3. Acortamiento de un tocho cilíndrico

Este problema, introducido en el trabajo de Taylor y Becker (1983), consiste en la compresión de un tocho cilíndrico para reducir su longitud un 60 % de la longitud original. Por sus características este problema se enmarca en el campo de las grandes deformaciones elasto-plásticas, y además como consecuencia del cambio geométrico los elementos de la malla sufren una importante distorsión. Algunos códigos como ABAQUS (2010), aplican estrategias de rezoñificación de nodos a fin de suavizar la distorsión de la malla. El problema comprende un pequeño tocho cilíndrico, de 30 mm de longitud y con un radio de 10 mm, el cual se encuentra entre dos placas rígidas y se supone a estas superficies como perfectamente rugosas y no permiten el deslizamiento. El material usado es acero con un comportamiento elasto-plástico definido por el módulo de Young $E = 200$ GPa, relación de Poisson $\nu = 0,3$ y densidad de $\rho = 7833$ kg/m³. Se asume un endurecimiento isótropo lineal, donde la tensión de fluencia $\sigma_y = 700$ MPa y el módulo de endurecimiento $A' = 0,3$ GPa. La geometría se ha discretizado con un malla estructurada de 288 (12x12x2) elementos triangulares de tres nodos, como se observa en la Figura 6.11.

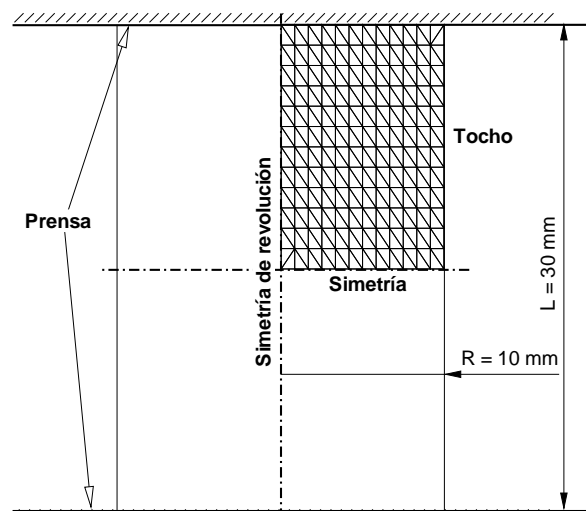


Figura 6.11 – Acortamiento de un tocho cilíndrico. Geometría del problema y malla empleada en el análisis numérico.

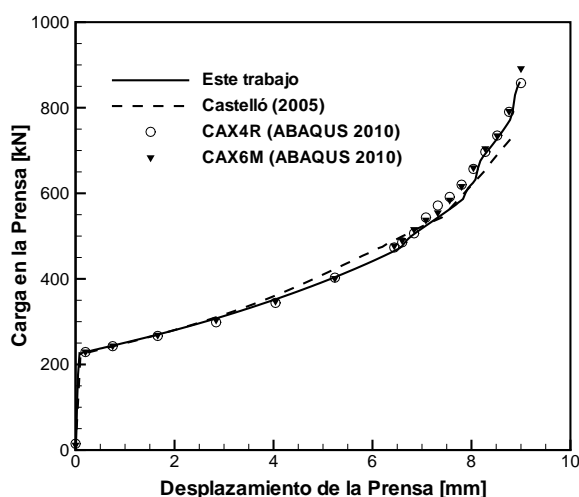


Figura 6.12 – Acortamiento de un tocho cilíndrico con remallado. Curva de carga en función del desplazamiento de la prensa.

La Figura 6.12 presenta las curvas de carga en función del desplazamiento de la prensa para las tres aproximaciones comparadas en este problema. Según se observa, las curvas muestran las mismas tendencias y niveles de carga para producir la deformación del tocho cilíndrico. También se incluyen los resultados obtenidos con la Formulación Lagrangeana Total empleada en Castelló (2005). El efecto de la distorsión en la malla se hace evidente en la curva de carga, en particular a partir de los 6 mm en el avance de la prensa, las curvas obtenidas en ABAQUS (2010) sin embargo resultan más suaves por el efecto de la rezonificación de los nodos.

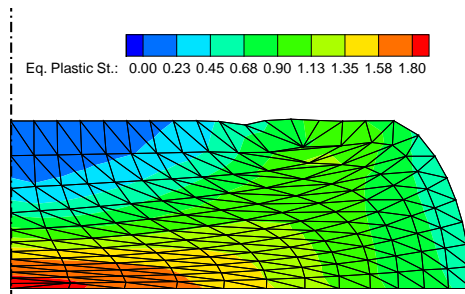
En la Figura 6.13 puede observarse que el cambio de geometría resulta muy marcado, dando lugar a una elevada distorsión de los elementos en el centro del tocho. Además la Tabla 6.1 presenta los resultados obtenidos con las tres aproximaciones diferentes: un cuadrilátero de cuatro nodos CAX4R (integración reducida y control de *hourglassing*) y un elemento triangular de seis nodos CAX6M (deformaciones mejoradas y control de

hourglassing), ambos implementados en ABAQUS (2010) y con rezoñificación de nodos; y también el elemento TR2D con la aproximación que se propone en este trabajo.

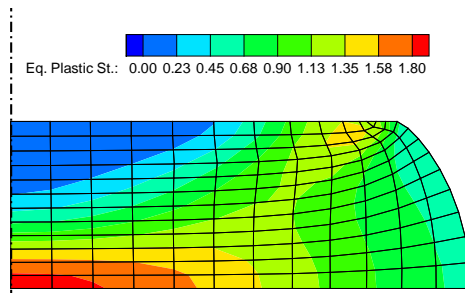
Tabla 6.1 – Acortamiento de un tocho cilíndrico con remallado. Deformación plástica efectiva máxima.

Aproximación	e_{max}^p
TR2D (Este trabajo)	1.878
CAX4R (ABAQUS 2010)	1.879
CAX6M (ABAQUS 2010)	1.901

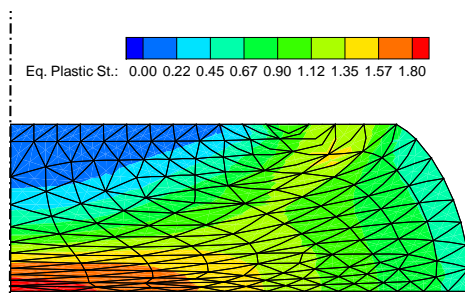
Los resultados obtenidos muestran similitudes importantes con los reportados por ABAQUS (2010) ver Tabla 6.1 y la Figura 6.13, no solo en la distribución de la deformación plástica efectiva si no también en las magnitudes. Por otra parte observando la Figura 6.13c, se puede ver que aun empleando rezoñificación de nodos en ABAQUS (2010) resulta difícil evitar la distorsión de los elementos triangulares.



(a)



(b)



(c)

Figura 6.13 – Acortamiento de un tocho cilíndrico. Distribución de la deformación plástica efectiva. (a) Este trabajo. (b)-(c) ABAQUS (2010).

6.3. Problemas en grandes deformaciones

En esta sección se presentan un conjunto de problemas que se caracterizan por mostrar grandes deformaciones y grandes distorsiones en el dominio de análisis, por este motivo en estos problemas resulta imperativo el uso de alguna técnica de restauración de mallas para preservar la calidad de los resultados. Estos problemas están ligados habitualmente a procesos de formado de piezas másicas, en particular forjado y extrusión, donde el flujo plástico del material resulta importante y además la geometría de las herramientas puede ser compleja.

Se estudian tres problemas en grandes deformaciones con axilsimetría, los cuales son: (a) la extrusión hacia atrás de un tocho metálico de geometría cilíndrica para generar un recipiente tubular, (b) el forjado de un disco con un matriz dentada a partir de una generatriz sinusoidal, y (c) el acortamiento de cilindros de pared gruesa el cual tiende a colapsar en un modo de múltiples embarrilados. De estos casos de estudio, los dos primeros pertenecen al área de conformado másico de metales con un impacto directo en aplicaciones industriales, mientras que el tercero está asociado a la creación de dispositivos de disipación de energía.

6.3.1. Extrusión hacia atrás de un tocho cilíndrico

Este problema involucra grandes deformaciones y cambios importantes en la geometría de análisis. En la extrusión hacia atrás de un tocho cilíndrico, para obtener como producto final un tubo cilíndrico, el excesivo cambio de la geometría hace necesario emplear remallado. El modelo es axilsimétrico tal como se muestra en la Figura 6.14.

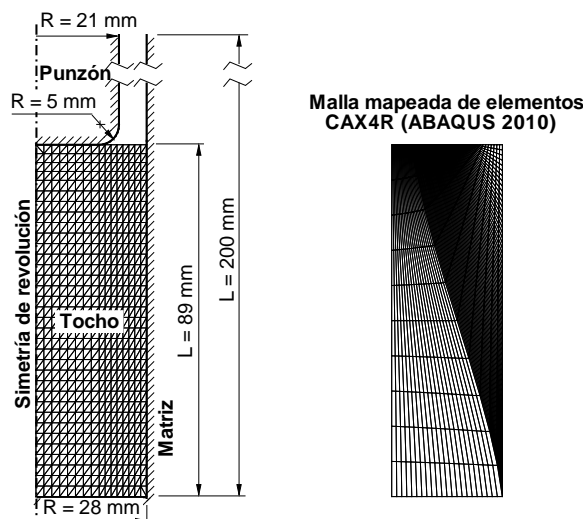


Figura 6.14 – Extrusión hacia atrás de un tocho cilíndrico. Geometría del modelo de análisis, malla original empleada en este trabajo y malla mapeada propuesta en ABAQUS (2010) para facilitar el flujo de material.

Las herramientas se tratan como cuerpos rígidos perfectamente lisos y lubricados (sin fricción), y por otra parte el tocho cilíndrico se supone construido en aluminio con módulo de Young $E = 38$ GPa, módulo de Poisson $\nu = 0,33$ y densidad $\rho = 2762$ kg/m³. El comportamiento plástico está definido por una ley de endurecimiento lineal e isotrópica, donde la tensión de fluencia $\sigma_y = 27$ MPa y el módulo de endurecimiento $A' = 1,1$ MPa. Se

ha empleado una malla inicial de 1088 (16x34x2), ver Figura 6.14, elementos triangulares para discretizar el tocho, y las herramientas se encuentran fijas con la excepción del punzón. Este punzón se desplaza una distancia de 82 mm, para generar un recipiente de aluminio de geometría tubular de aproximadamente 200 mm de longitud. En este problema fueron necesarios 22 pasos de remallado (empleando como límites de distorsión $\beta = [1/3, 2/3]$, de acuerdo al esquema de remallado presentado en el Apartado 5.2.2) con un promedio de 1060 elementos en cada paso.

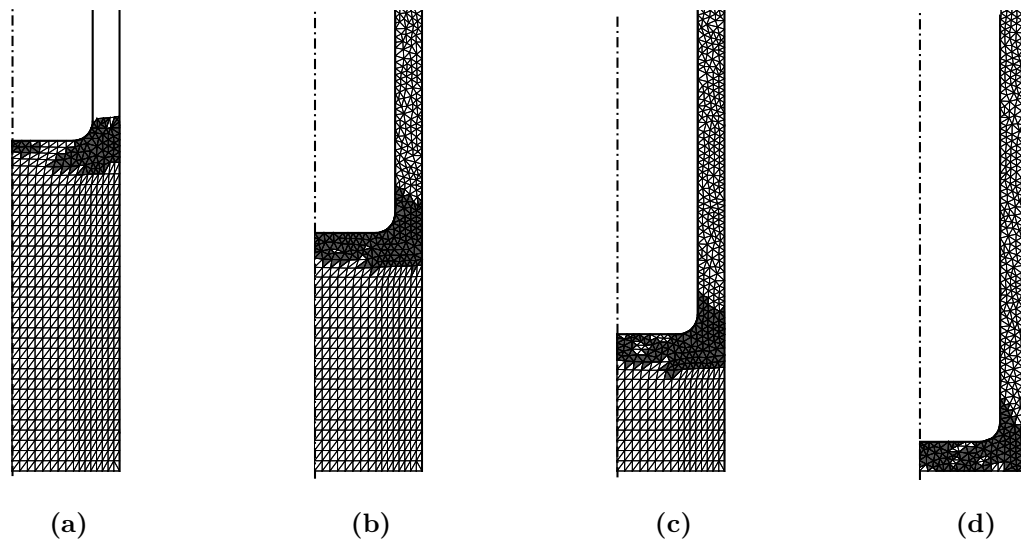


Figura 6.15 – Extrusión hacia atrás de un tocho cilíndrico. Deformadas para distintos avances del punzón y detalle del remallado por zona. (a) 3 mm. (b) 27 mm. (c) 54 mm. (d) 82 mm.

La Figura 6.15 muestra la geometría deformada del tocho cilíndrico para distintos estados de avance del punzón, y presenta también un detalle de la zona remallada (elementos sombreados). Resulta interesante observar que los elementos a reemplazar están ligados puntualmente a la zona comprimida por la cabeza del punzón, y una vez que los elementos remallados ingresan al canal definido por el conjunto punzón-matriz mantienen su geometría casi inalterada hasta el final del proceso. Este esquema de remallado por zonas permite mantener acotado el número total de elementos en la simulación sin alterar los tiempos de análisis, y disminuyendo notablemente el trabajo de transferencia de datos entre mallas.

En lo que respecta a las variables de análisis, las deformaciones plásticas efectivas obtenidas en este trabajo están de acuerdo con las reportadas por el código ABAQUS (2010). La Figura 6.16 muestra una comparativa de las geometrías deformadas finales y la distribución de deformaciones plásticas efectivas obtenidas. Hay que destacar que en ABAQUS (2010) se emplea una estrategia de discretización denominado “mapeo de deformación” (ver malla mapeada en la Figura 6.14) y además un esquema adaptativo (rezonificación de nodos) que se realiza cada diez pasos de cálculo. La estrategia de discretización mencionada muestra un buen comportamiento, sin embargo sobre el final del análisis se produce una estricción cerca del casquete del tubo, ver Figura 6.16b. Esta estricción tiene asociada una deformación plástica efectiva elevada que obedece al modelo de discretización y no al comportamiento real del material, ya que se supone que las herramientas no arrastran material por despreciarse la fricción.

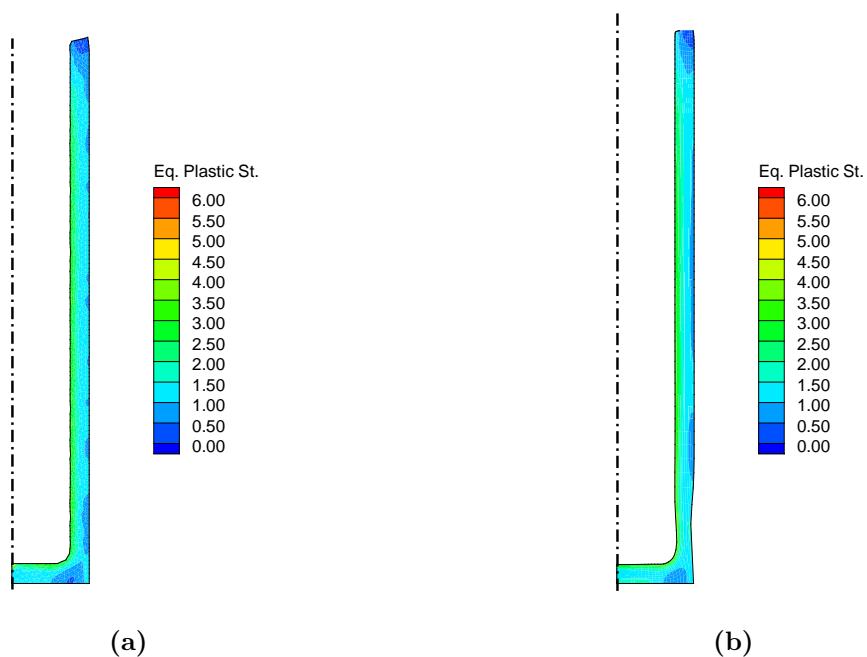


Figura 6.16 – Extrusión hacia atrás de un tocho cilíndrico, deformada y distribución de deformación plástica equivalente. (a) TR2D (este trabajo). (b) CAX4R (ABAQUS 2010).

Tabla 6.2 – Extrusión hacia atrás de un tocho cilíndrico. Máxima deformación plástica efectiva y longitud del tubo extruido.

Aproximación	$e_{max}^p [-]$	L_{max} [mm]
TR2D (este trabajo)	3.841	196.92
CAX4R (ABAQUS, 2010)	4.080	200.20

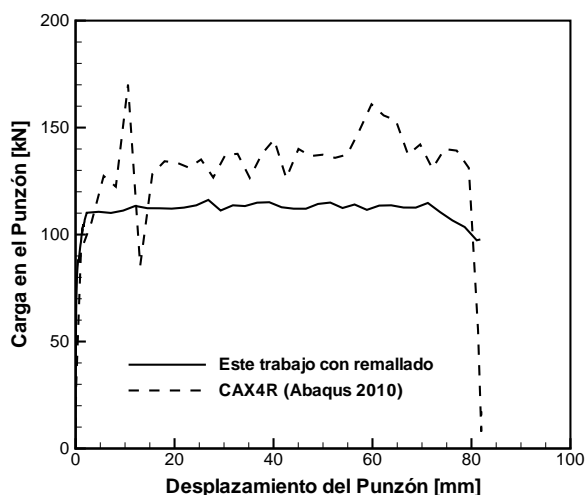


Figura 6.17 – Extrusión hacia atrás de un tocho cilíndrico. Carga en función de la posición de avance del punzón.

La Tabla 6.2 muestra los máximos valores de la deformación plástica efectiva y la longitud del tubo cilíndrico obtenidos en este trabajo y se los compara con los correspondientes a ABAQUS (2010). Por último, la Figura 6.17 muestra la historia de carga

en el punzón en la medida que el mismo avanza sobre el tocho cilíndrico. Los resultados muestran diferencias importantes, sin embargo dado que no se considera fricción con las herramientas los picos reportados por ABAQUS (2010) resultan espurios. Desde el punto de vista físico una vez que el punzón alcanza la carga que produce el flujo de material por el canal de salida, la carga sobre el mismo debe mantener un mismo nivel con muy pequeñas variaciones.

6.3.2. Forjado de un disco con una matriz sinusoidal

Desde el punto de vista técnico este problema es similar al tratado en el Apartado 6.2.3, sin embargo desde un punto de vista fenomenológico la geometría dentada de la prensa obstaculiza el flujo plástico del material en dirección radial, condicionando de este modo la forma en que el tocho se deforma.

Este caso permite evaluar el comportamiento del elemento en problemas de forjado que involucran geometrías complejas y un flujo de material importante durante el proceso. La geometría del problema, ver Figura 6.18, consiste en una matriz rígida y un disco metálico deformable de 10 mm de espesor con un radio de 20 mm. La forma de la matriz es sinusoidal con un amplitud de 5 mm y una longitud de onda de 10 mm. Durante el proceso la matriz se desplaza verticalmente a una velocidad de 2 m/seg hasta una distancia de 7,6 mm. El disco metálico está construido en acero con módulo de Young $E = 200$ GPa, módulo de Poisson $\nu = 0,3$ y densidad $\rho = 7800$ kg/m³; el comportamiento plástico está definido por una ley de endurecimiento isótropa lineal con la tensión de fluencia $\sigma_y = 100$ MPa y el módulo de endurecimiento $A' = 300$ MPa.

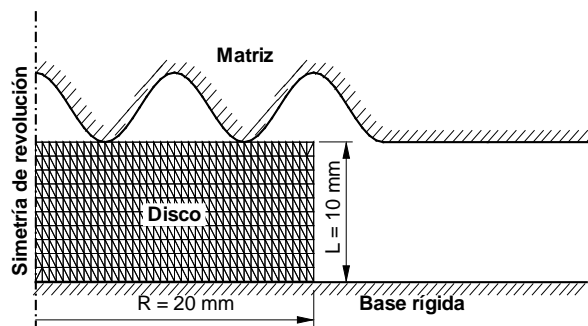


Figura 6.18 – Forjado de un disco con una matriz sinusoidal. Geometría del problema y malla original empleada en su análisis.

La cara inferior del disco se supone restringida por una superficie plana y la fricción entre las herramientas (lubricadas) y el disco metálico se considera despreciable. El disco de acero se ha discretizado originalmente con 800 (10x2x20) elementos triangulares, se han empleado 3 pasos de remallado en el análisis (límites de distorsión $\beta = [1/3, 2/3]$) y con un promedio de 850 elementos en cada una de las etapas.

La Figura 6.19 presenta las deformadas del disco para distintos estados de avance de la matriz sinusoidal, además también las zonas comprometidas en la restauración de los elementos distorsionados. En particular en este caso, y debido a la geometría de la matriz, se observa que cada etapa de remallado involucra una mayor cantidad de elementos. En la última etapa de remallado la restauración se realiza prácticamente sobre la totalidad de los elementos de la malla, esto es algo habitual en los problemas con distorsiones geométricas elevadas donde resulta necesario restaurar todo el dominio de análisis.

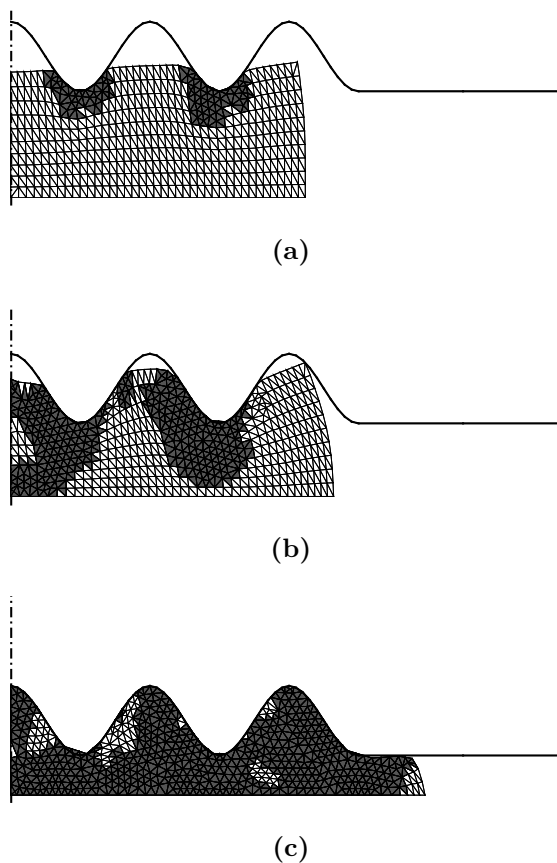


Figura 6.19 – Forjado de un disco con una matriz sinusoidal. Deformadas del disco para distintos estados de avance de la matriz. (a) 2 mm. (b) 5 mm. (c) 7 mm.

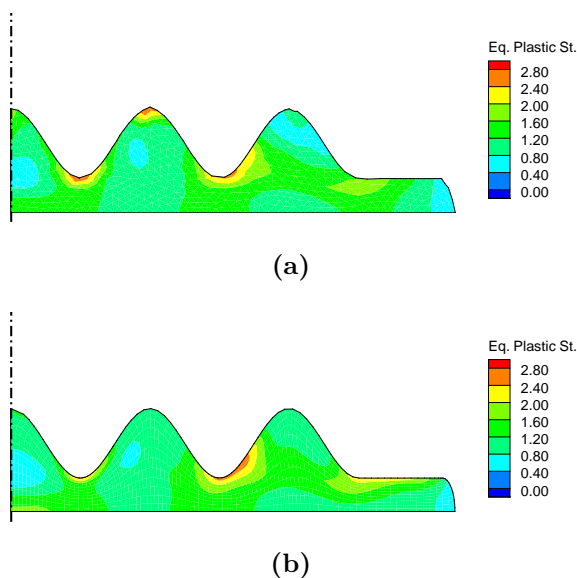


Figura 6.20 – Forjado de un disco con una matriz sinusoidal. Deformada y distribución de deformación plástica equivalente. (a) TR2D (este trabajo). (b) CAX4R (ABAQUS 2010).

La Tabla 6.3 presenta los resultados finales obtenidos con la aproximación propuesta en este trabajo, y se compara con los resultados obtenidos en ABAQUS (2010) en donde se ha usado el elemento en deformaciones mejoradas CAX4R. Los resultados obtenidos son muy

similares, aunque se debe destacar que el mallado usado en ABAQUS (2010) es mucho más fino con 1152 (12x96) elementos cuadriláteros y se aplica un remallado adaptativo basado en la re zonificación de nodos para poder completar el análisis. Además la Figura 6.20 se muestra la geometría del disco deformada en su totalidad y la distribución de las deformaciones plásticas efectivas, se puede observar que el mapa de deformaciones plásticas resulta similar en ambos códigos.

Tabla 6.3 – Forjado de un disco con una matriz sinusoidal. Máxima deformación plástica efectiva y máximo radio del disco forjado.

Aproximación	$e_{max}^p [-]$	R_{max} [mm]
TR2D (este trabajo)	2.588	31.99
CAX4R (ABAQUS 2010)	2.625	31.90

6.3.3. Acortamiento de tubos cilíndricos

Este problema, planteado por Gupta y Gupta (2005), consiste en el análisis de los modos de deformación de tubos metálicos en compresión. En particular el objetivo de este análisis es el empleo de tubos en disipadores de impacto a través de absorción de energía por plastificación del metal. Los modos de colapso de estos tubos metálicos están asociados a la relación diámetro-espesor (D/h), y pueden ser múltiples ondulaciones (tubos de pequeño espesor) o múltiples embarrilados (tubos de mayor espesor).

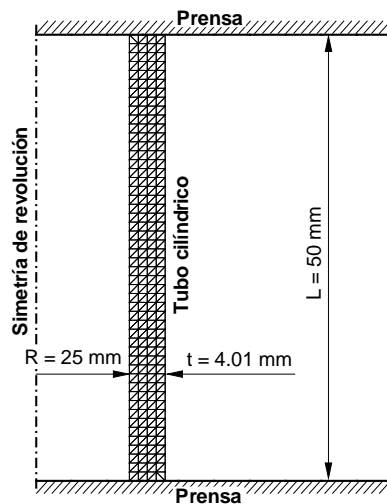


Figura 6.21 – Acortamiento de tubos cilíndricos. Geometría del problema y malla inicial empleada en el análisis.

Si bien en el trabajo de Gupta y Gupta (2005) se analizan diferentes condiciones (relaciones diámetro-espesor y fricción con las herramientas), en este trabajo se analiza el caso de un tubo metálico con un diámetro interno de 25 mm y un espesor de 4,01 mm, ver Figura 6.21. Para estas condiciones geométricas se tiene una relación $(D/h) = 6,25$ por lo que se espera que el modo de colapso sea en múltiples embarrilados. Se supone al tubo circular entre los platos de una prensa y estos se modelan como cuerpos rígidos. Se adoptan como coeficientes de fricción: en el plato superior $\mu_s = 0,45$ y en el plato inferior $\mu_i = 0,15$. El material con que está construido el tubo es aluminio y está definido por el

módulo de Young $E = 69$ GPa, relación de Poisson $\nu = 0,33$ y densidad $\rho = 2783$ kg/m³; además se adopta una ley de endurecimiento isótropa lineal con la tensión de fluencia de $\sigma_y = 240$ MPa y el módulo de endurecimiento $A' = 290$ MPa. Se utilizó una malla inicial de 400 (4x50x2) elementos triangulares para discretizar el tubo y se emplearon 3 etapas de remallado con 440 elementos en promedio por cada etapa.

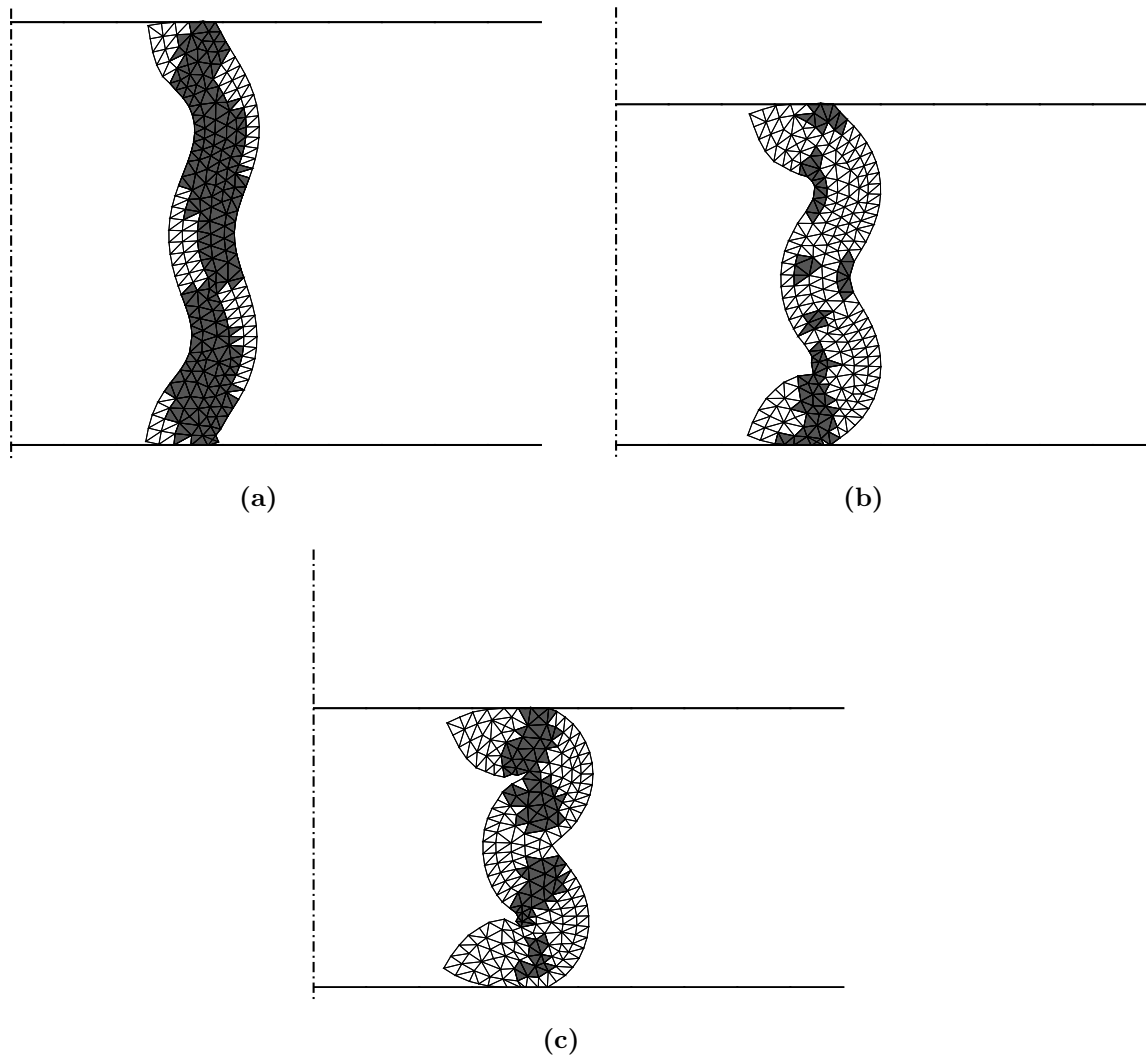


Figura 6.22 – Acortamiento de tubos cilíndricos. Deformadas para distintos estados de avance de la prensa y detalle de zonas remalladas. (a) 18 mm. (b) 24 mm. (c) 29 mm.

La Figura 6.22 muestra las deformadas para distintas posiciones de avance de la prensa. Estas deformadas son acordes a las geometrías obtenidas por Gupta y Gupta (2005) en su trabajo. En estas figuras se pueden observar las áreas sombreadas que corresponden a las zonas donde se han reemplazado los elementos distorsionados. En este caso la primer etapa de remallado es la más masiva en cuanto a cantidad de elementos, en particular esto está asociado a la distorsión de los elementos por el fuerte acortamiento que sufre el tocho. En las dos etapas restantes las zonas remalladas están ligadas a los puntos donde se producen los pliegues del material.

En la Tabla 6.4 se presentan la máxima tensión equivalente de von Mises $\bar{\sigma}$ y la máxima deformación plástica efectiva e^p obtenidas en este trabajo y se los compara con los resultados observados en Gupta y Gupta (2005). La comparación muestra un importante

similitud entre los resultados de ambos trabajos. Además la Figura 6.23 muestra los mapas de tensión equivalente y deformación plástica efectiva, los cuales concuerdan con los establecidos en el trabajo de comparación.

Tabla 6.4 – Acortamiento de tubos cilíndricos. Máxima deformación plástica efectiva y máxima tensión equivalente.

Aproximación	$\bar{\sigma}_{max}$ [MPa]	e_{max}^p [-]
TR2D (Este trabajo)	856.9	2.08
FORGE2 (Gupta y Gupta 2005)	843.6	2.30

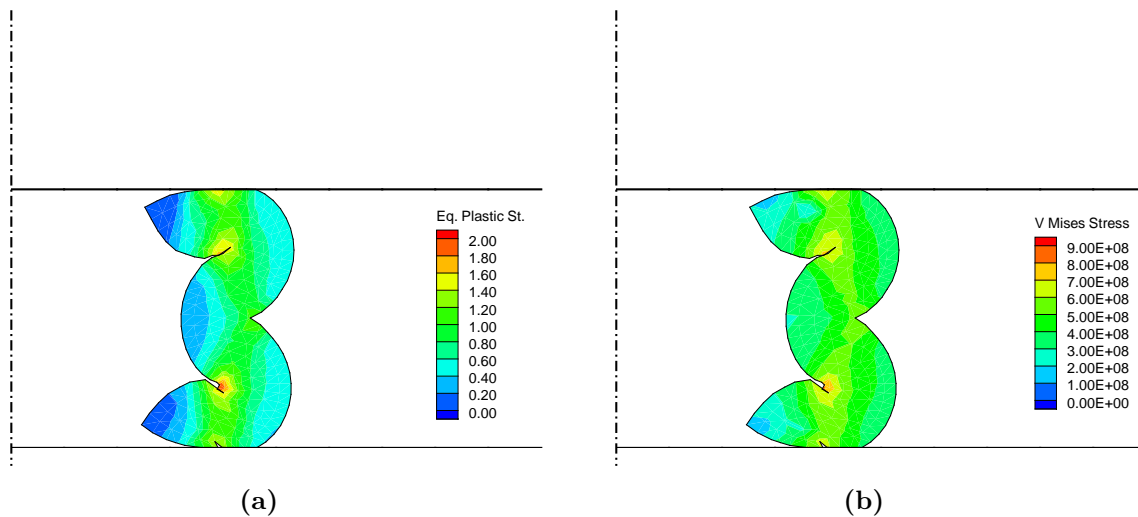


Figura 6.23 – Acortamiento de tubos cilíndricos. (a) Distribución de la deformación plástica efectiva. (b) Distribución de tensiones equivalentes de von Mises.

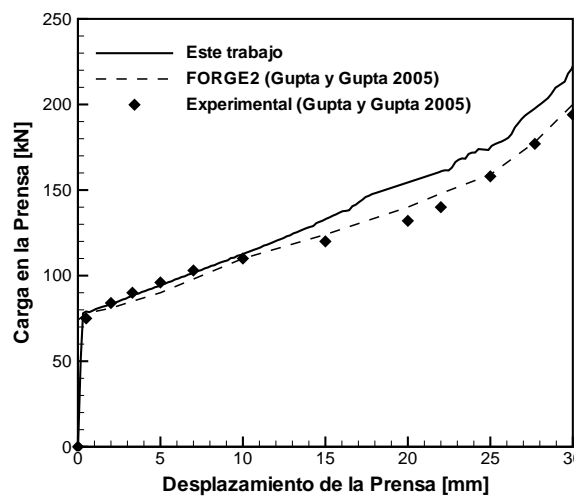


Figura 6.24 – Acortamiento de tubos cilíndricos. Gráfico de carga en la prensa en función del desplazamiento de la misma.

Por último la Figura 6.24 muestra la evolución de la carga en la prensa en función del desplazamiento de la misma. Se han graficado tres curvas: la curva que arroja la simulación con la aproximación propuesta en este trabajo, la curva que se obtiene de la simulación numérica en la Gupta y Gupta (2005) (FORGE2) y una curva experimental empleada en la validación de los resultados. Se observa que las curvas muestran la misma tendencia hasta los 10 mm de avance de la prensa, a partir de este punto existen algunas diferencias menores entre las mismas.

6.4. Discusión de resultados

En este capítulo se han estudiado problemas que permiten establecer el comportamiento de la aproximación en deformaciones impuestas y del esquema de restauración propuestos en este trabajo. Los resultados de la formulación propuesta muestran un buen desempeño en el estudio y simulación de procesos con deformaciones elasto-plásticas y distorsión de la geometría de análisis.

En lo que respecta a los resultados de la formulación basada en triángulos, que se ha presentado en los capítulos anteriores y se ha implementado en este trabajo, se comporta levemente más rígido que las formulaciones numéricas basadas en cuadriláteros. Esto se hace evidente en la evolución de las cargas necesarias para producir el conformado de las piezas metálicas en los problemas estudiados. Esto se hace evidente en las respuestas levemente superiores que arroja la formulación propuesta en este trabajo, cuando se los compara con los trabajos de otros autores en donde se aplican cuadriláteros. Aun así en el caso de la extrusión hacia atrás de un tocho cilíndrico, la respuesta del elemento parece más acertada desde el punto de vista físico del problema.

En los problemas con flexión dominante, en particular la embutición de láminas, la aproximación propuesta muestra excelentes resultados aun con baja discretización en dirección del espesor de las láminas. Más aun, los resultados se mantienen inalterados frente a la distorsión que muestran los elementos. Esto también puede observarse en el conformado de piezas másicas, donde algunas zonas los elementos triangulares se distorsionan de manera exagerada sin perder precisión en los resultados (Ej.: la zona central en el problema de compresión de tochos cilíndricos). Por otra parte si bien esta distorsión tiene poca incidencia en algunos resultados, en particular la deformación plástica efectiva, impacta de manera directa en la historia de cargas en la medida que las herramientas avanzan sobre las piezas a conformar.

En lo pertinente al remallado por zonas, se observa una buena respuesta del mismo cuando se emplea el par de variables de distorsión $\beta = (1/3, 2/3)$, el primero relacionado con el nivel crítico de distorsión y el segundo asociado con el tamaño de la zona a restaurar. Este esquema de restauración de la malla permite mantener acotados el tamaño de los elementos y también el número de elementos en el dominio de análisis. Estas dos variables mencionadas impactan directamente en los tiempos de análisis dado que, permiten mantener el paso de tiempo crítico en un nivel razonable y no aumentan excesivamente el nivel de trabajo al aumentar la cantidad de elementos, respectivamente. Los resultados muestran que las zonas restauradas en las mallas de elementos finitos están asociadas habitualmente a aquellas afectadas por las herramientas. Por último, el elemento muestra un buen comportamiento en mallas no estructuradas. Esto se desprende rápidamente del uso del remallado adaptativo, el cual rompe el mallado estructurado inicial que se usa en los dominios geométricos simples estudiados en este capítulo.

Capítulo 7

Simulaciones numéricas II

7.1. Introducción

Continuando con el objetivo de evaluar y validar la herramienta computacional propuesta en esta tesis, se pretende estudiar ahora dos tipos de problemas que muy a menudo surgen en el área del conformado volumínico de metales. Habitualmente los metales exhiben un comportamiento plástico muy diferente cuando se los somete a distintas velocidades de deformación, y más aun desarrollan calor por la deformación el cual también depende de la velocidad del proceso. En este sentido es conveniente que una herramienta de simulación numérica para la industria este en condiciones de estudiar este comportamiento elasto-viscoplástico con acoplamiento termomecánico.

En este capítulo se estudian por separado estos dos problemas, viscoplasticidad y acoplamiento termomecánico. Si bien es posible estudiar un problema que involucre estos dos fenómenos físicos, no se ha encontrado en la literatura un caso que pueda emplearse para evaluar los resultados. Los casos estudiados a continuación involucran además de viscoplasticidad o acoplamiento termomecánico, algunos fenómenos considerados en el capítulo anterior: flujo plástico isócoro y distorsión geométrica (aunque no lo suficiente como para considerar remallado).

El contenido de este capítulo es el siguiente. En la Sección 7.2 se plantea el estudio de dos casos elasto-viscoplásticos, en estos problemas se evalúa la incidencia del coeficiente de viscosidad en pequeñas y grandes deformaciones. Se observa que el modelo viscoplástico presentado en el Capítulo 3 permite recuperar el comportamiento elástico del material cuando la viscosidad del metal es elevada. Por otra parte en la Sección 7.3 se presentan tres problemas donde el proceso de deformación es no isotérmico. Los dos primeros representan *benchmarks* donde el objetivo es estudiar los efectos de la velocidad de deformación en la generación de calor. El tercer caso de estudio representa una aplicación industrial que consiste en la extrusión de un eje. Al final en la Sección 7.4 se presenta la discusión de los resultados obtenidos en los casos estudiados en este capítulo.

7.2. Problemas elasto-viscoplásticos

En esta sección se estudian sólidos metálicos sometidos a pequeñas y grandes deformaciones elasto-viscoplásticas, aplicando la formulación propuesta en el Apartado 3.4. Los problemas en deformación plana que son estudiados corresponden a aplicaciones académicas y permiten evaluar el desempeño de la formulación presentada en esta tesis.

Los problemas que se presentan a continuación son: (a) tracción de una placa plana rectangular con un agujero en su centro, y (b) el estudio de un cilindro de pared gruesa con presión interna y externa. Estos problemas permiten cuantificar los efectos de la viscosidad en los resultados obtenidos (tanto en pequeñas como grandes deformaciones).

7.2.1. Tracción de una placa plana con un agujero

Este problema en deformación plana ha sido presentado inicialmente en el trabajo de Alfano et al. (2001), en donde se realiza la cuantificación de los efectos viscoplásticos (en particular, viscosidad y velocidad de deformación) para un modelo constitutivo del tipo Perzyna con pequeñas deformaciones. En este trabajo sin embargo, se utilizarán los resultados de García Garino et al. (2006) a los fines de comparar el desempeño de la formulación propuesta en esta tesis. La Figura 7.1 muestra la geometría del problema, la cual consiste en una placa de 36 m de largo, 20 m de ancho y un orificio central de 5 m de radio. El material es un acero con las siguientes propiedades mecánicas: módulo elástico $E = 210$ GPa, coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$, tensión de fluencia $\sigma_y = 240$ MPa y módulo de endurecimiento isótropo $A' = 0$ nulo (plasticidad perfecta). El comportamiento viscoso de material está asociado un modelo viscoplástico lineal del tipo de Perzyna sin endurecimiento por deformación, con $n = \infty$ y $m = 1$; y en este trabajo se han considerado tres distintos valores para el módulo de viscosidad del material η .

Aprovechando la simetría del problema solo se ha modelado un cuarto de la placa, de acuerdo con lo que se observa en la Figura 7.1, y se han utilizado 576 elementos triangulares según se muestra en la misma figura.

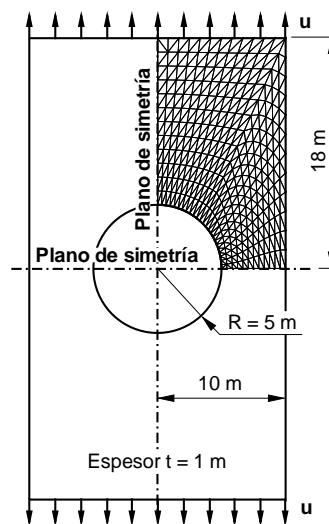


Figura 7.1 – Tracción de una placa plana con un agujero. Geometría de análisis y malla de elementos triangulares empleada en el análisis.

7.2.1.1. Pequeñas deformaciones

Para lograr deformaciones pequeñas se han desplazado los extremos de la placa una longitud $u = 50$ mm, y se han considerado en este caso tres distintos valores de $\eta = 1 \times 10^2$; 1×10^{12} ; 1×10^{15} . La Figura 7.2 muestra una comparativa de los resultados obtenidos en pequeñas deformaciones, y se observa que las curvas muestran una importante similitud con los resultados obtenidos por otros autores. En los casos límites el material presenta un

comportamiento diferente: a valores bajos de $\eta = 1 \times 10^2$ Pa·s el problema está dominado por los efectos plásticos, mientras que para elevados valores de $\eta = 1 \times 10^{15}$ Pa·s el problema es dominado por los efectos viscosos comportándose como elástico perfecto.

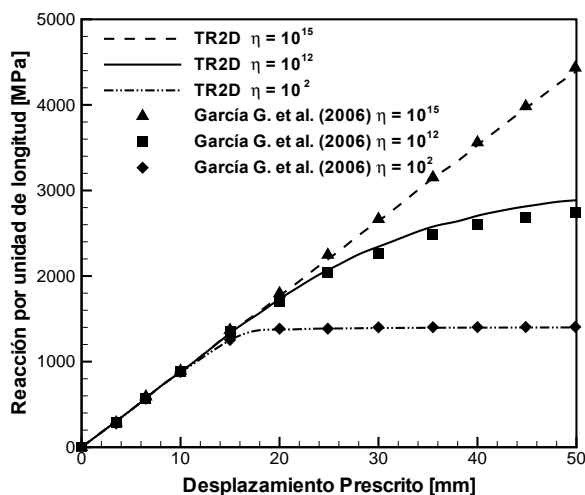


Figura 7.2 – Tracción de una placa plana con un agujero en pequeñas deformaciones. Tensión en la placa en función del desplazamiento en pequeñas deformaciones.

En la Figura 7.2 puede observarse además que existe una mínima diferencia respecto del resultado reportado en García Garino et al. (2006) para el caso viscoplástico donde el valor de $\eta = 1 \times 10^{12}$ Pa·s, donde la aproximación propuesta aquí muestra un comportamiento más rígido. Sin embargo cuando se lo compara con el trabajo de Alfano et al. (2001), los niveles de carga para este valor de viscosidad son muy parecidos.

Por otra parte la adopción de valores de viscosidad elevados, en general cuando la relación $\tau = \eta/\mu > 1$ (siendo μ el módulo de corte del material y τ el tiempo de relajación viscosa), conlleva a la aparición de inestabilidad de origen numérico. Esta inestabilidad se presenta en forma de bloqueo, lo que favorece la aparición de zonas con deformaciones viscoplásticas espurias. Se ha detectado que estas inestabilidades desaparecen cuando se disminuye el paso de tiempo de integración de las ecuaciones de movimiento, o bien si se quita energía al sistema empleando algún método de amortiguamiento de la respuesta.

7.2.1.2. Grandes deformaciones

En los problemas industriales, de acuerdo al trabajo de Lemaitre y Chaboche (1994) los metales pueden exhibir valores de viscosidad η del orden de 1×10^2 Pa·s hasta 1×10^{10} Pa·s, mientras que la sensibilidad a la velocidad de deformación n varía entre 2 para materiales muy viscosos hasta 100 para materiales con elevada fluidez, y por último en el caso del exponente m varía entre 2 y 50 lo cual define el comportamiento de endurecimiento por deformación. En consecuencia se han ensayado dos casos de grandes deformaciones, tomando los límites propuestos en el trabajo de Lemaitre y Chaboche (1994) los cuales son $\eta = 1 \times 10^2$ hasta $\eta = 1 \times 10^{10}$.

En este caso los extremos de la placa se han desplazado una distancia mucho mayor que en el caso anterior, $d = 2000$ mm, y se han considerado solo aquellos casos que resultan de interés para el análisis de problemas industriales. Los resultados obtenidos pueden verse en la Figura 7.3a, los cuales se han comparado con los obtenidos en el trabajo de García Garino et al. (2006) y los mismos se ajustan razonablemente considerando las

distintas aproximaciones. Por último la Figura 7.3b muestra el comportamiento de la carga en la placa cuando se considera un valor elevado de viscosidad, los resultados son similares al trabajo de comparación y cercanos a la respuesta elástica.

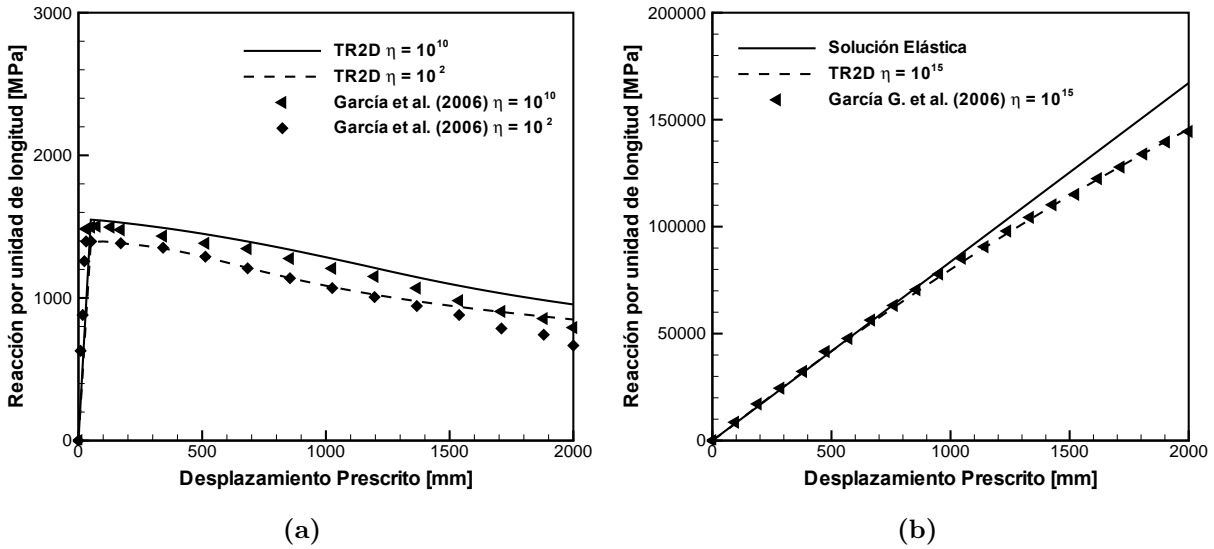


Figura 7.3 – Tracción de una placa plana con un agujero en grandes deformaciones. Evolución de la tensión con el desplazamiento del borde superior de la placa. (a) Casos de interés industrial. (b) Comportamiento elástico.

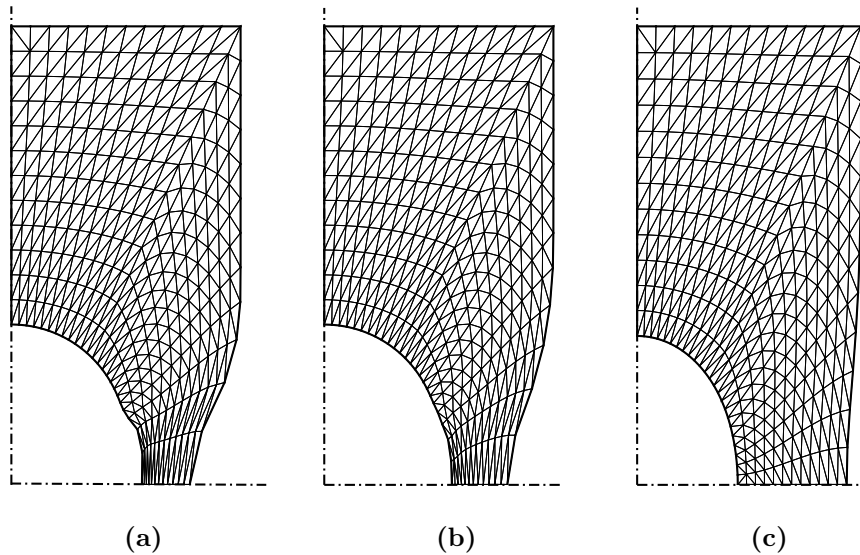


Figura 7.4 – Tracción de una placa plana con un agujero en grandes deformaciones. Deformadas de la placa en deformación plana. (a) $\eta = 1 \times 10^2$. (b) $\eta = 1 \times 10^{10}$. (c) $\eta = 1 \times 10^{15}$

La Figura 7.4 muestra las deformadas de la placa con un agujero en deformación plana, considerando los dos valores límites industriales del coeficiente de viscosidad η y también el valor correspondiente al comportamiento elástico. Comparativamente con el trabajo de García Garino et al. (2006) estas deformadas son muy similares, más aun puede

observarse en la Figura 7.4a que en el caso de $\eta = 1 \times 10^2$ (cuasi elasto-plástico) la placa muestra una zona de estricción muy marcada, mientras se puede ver en la Figura 7.4c que cuando $\eta = 1 \times 10^{15}$ el comportamiento se asemeja más a un caso elástico (sin la zona de estricción).

7.2.2. Cilindro con presión interna y externa

Este problema fue propuesto inicialmente por Bonnet y Mukherjee (1996) en deformaciones elasto-plásticas, y ha sido resuelto por Liang et al. (2007) empleando un método basado en elementos de contorno (BEM) considerando elasto-viscoplasticidad. La Figura 7.5 muestra la geometría del cilindro con un radio interno $R = 1$ y un radio externo $R = 2$, se ha aprovechado la simetría para modelar y analizar solo un cuarto del mismo. La presiones interna (P_I) y externa (P_E) tienen la misma magnitud, alcanzando un valor $P = 0,01$ para un tiempo final de análisis $t = 0,1$. El modelo de elementos finitos empleado para el análisis consta de 72 elementos triangulares.

El comportamiento del material está definido por el módulo de corte $\mu = 1$ y coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. Desde el punto de vista plástico, se asume endurecimiento isótropo según la siguiente ley $\sigma_y(e^{vp}) = 0,002 + 0,002 \cdot e^p$. El material propuesto en los trabajos de Bonnet y Mukherjee (1996) y Liang et al. (2007) responde a una ley viscoplástica potencial lineal, la cual es equivalente a tomar en el caso de esta tesis un coeficiente $n = \infty$ (sin endurecimiento multiplicativo), $m = 1$ (viscosidad lineal), y además se evalúan dos coeficientes de viscosidad $\eta = 1 \times 10^{-10}$ (para recuperar el caso elasto-plástico) y $\eta = 100$ (el cual resulta elevado si se compara el tiempo de relajación $\tau = \eta/2\mu$ para ambos casos).

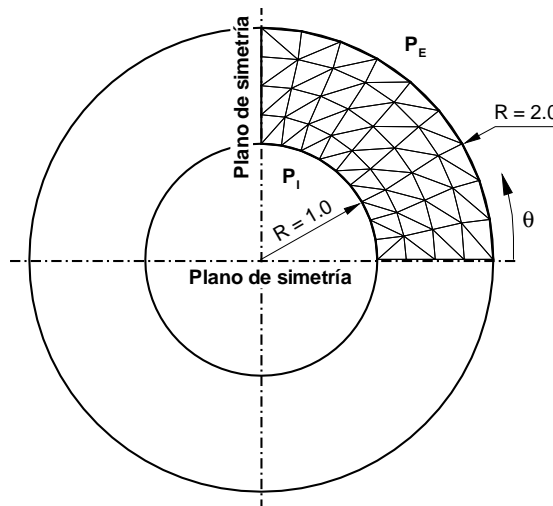


Figura 7.5 – Cilindro con presión interna y externa. Geometría del problema y malla de elementos triangulares.

Si bien el modelo elasto-viscoplásticos del trabajo de Liang et al. (2007) es similar al propuesto en este trabajo, no es precisamente el mismo, y teniendo en cuenta que el método empleado para resolver el problema en ese trabajo es distinto al empleado aquí, no debe esperarse que los resultados sean iguales. Por otra parte en el trabajo de Bonnet y Mukherjee (1996) se ha determinado la solución analítica para el caso elasto-plástico, pero no presenta resultados para el caso elasto-viscoplástico.

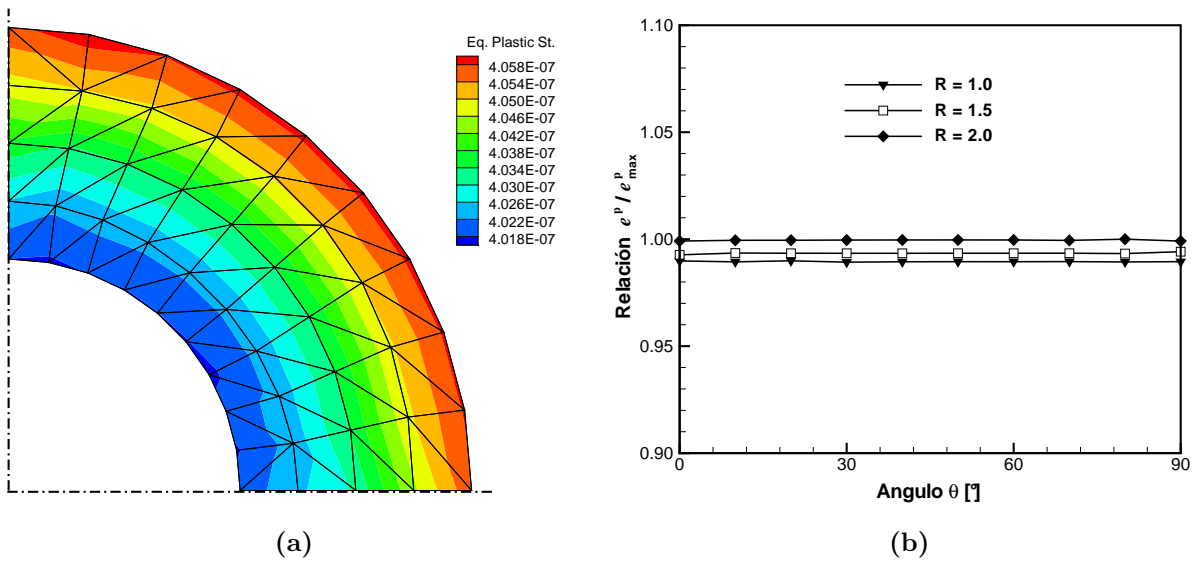


Figura 7.6 – Cilindro con presión interna y externa. (a) Distribución de deformación plástica efectiva. (b) Deformación plástica efectiva normalizada sobre las fibras interna, media y externa del cilindro.

La Figura 7.6a muestra la distribución de las deformaciones elasto-viscoplásticas en el cilindro, obtenidas con el esquema presentado en este trabajo para el caso $\eta = 1 \times 10^2$. A pesar del mapa de colores, la deformación plástica efectiva puede considerarse como constante a través del espesor del cilindro (ver Figura 7.6b) ya que solo varía un 1 %.

La Tabla 7.1 muestra un resumen de los resultados obtenidos, y se los compara con los trabajos de los autores mencionados. En el caso elasto-plástico no existen discrepancias, sin embargo en el caso elasto-viscoplástico existe una diferencia importante entre los resultados obtenidos. A partir de los resultados obtenidos en el problema anterior, es comprobable que en la medida que se aumenta el coeficiente de viscosidad η se aproxima cada vez más al caso elástico perfecto, y por lo tanto la deformación viscoplástica equivalente tiende a valores mucho más pequeños que en el caso elasto-plástico. En este sentido, los resultados obtenidos en este trabajo parecen más cercanos a la realidad dado que el comportamiento considerando una viscosidad $\eta = 1 \times 10^2$ debería aproximarse al caso elástico.

Tabla 7.1 – Cilindro con presión interna y externa. Deformación plástica efectiva máxima para los casos estudiados.

Aproximación	$\eta = 1 \times 10^{-10}$ (cuasi elasto-plástico)	$\eta = 1 \times 10^2$
Solución Exacta (Bonnet y Mukherjee 1996)	$7,6864 \times 10^{-4}$	-
BEM (Liang et al. 2007)	$7,6861 \times 10^{-4}$	$7,1314 \times 10^{-4}$
TR2D (Este trabajo)	$7,6865 \times 10^{-4}$	$4,0606 \times 10^{-7}$

7.3. Problemas con acoplamiento termomecánico

Esta sección presenta un conjunto de problemas donde las condiciones del proceso, además de involucrar grandes deformaciones, hacen necesario considerar la evolución no

isotérmica del material. Los procesos industriales de conformado de metales (extrusión, forjado, etc) involucran habitualmente a la temperatura como variable del problema. La deformación plástica, el rozamiento entre pieza y las herramientas, y la incidencia de la temperatura en el entorno de trabajo hacen que estos procesos sean de naturaleza termomecánica.

Se estudian tres problemas axilsimétricos en grandes deformaciones con acoplamiento termomecánico: (a) el impacto de un proyectil contra una pared rígida, (b) el acortamiento de un tocho cilíndrico a diferentes velocidades, y (c) la extrusión directa de un tocho cilíndrico para obtener un eje de menor diámetro. En los primeros dos casos se estudia la generación de calor por deformación plástica, y a la vez se analiza la incidencia en la generación de calor de la velocidad de deformación. El tercer caso consiste en un problema de aplicación directa a la industria, y se estudian los efectos de la generación de calor por deformación plástica y por rozamiento entre la pieza y la herramienta.

7.3.1. Impacto no isotérmico de un proyectil en una pared rígida

Este problema axilsimétrico consiste en el estudio del impacto de una barra contra una pared rígida, considerando además el acoplamiento termomecánico debido a la evolución de la deformación plástica. El caso isotérmico de este problema se utiliza habitualmente como *benchmark* para determinar el comportamiento del elemento en la simulación de problemas de impacto, y suele denominarse en la literatura como experimento de la barra de Taylor. En el trabajo de Celentano (2002) se presenta un amplio estudio de este problema con acoplamiento termomecánico, donde se analiza la incidencia del material y de la velocidad del proyectil, además de validar los resultados numéricos con ensayos experimentales. En esta tesis, sin embargo, se analiza el problema de impacto no isotérmico de un proyectil con las características presentadas en el trabajo de García y Celentano (2007).

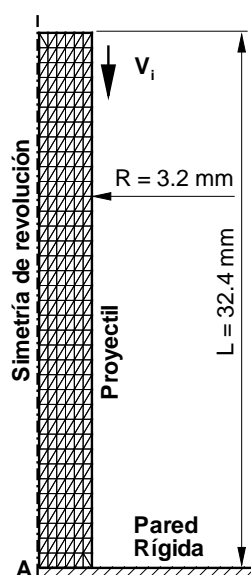


Figura 7.7 – Impacto no isotérmico de un proyectil en una pared rígida. Geometría del problema y discretización en elementos triangulares empleada.

En la Figura 7.7 se presenta un esquema de la geometría del problema. La barra de longitud 32,4 mm y radio 3,2 mm, se encuentra inicialmente sometida a una velocidad de

227 m/s. La pared rígida puede modelarse aplicando apoyos simples que solo permitan la deformación radial de esos puntos. El material del proyectil es cobre y las propiedades mecánicas del mismo son: módulo de Young $E = 117$ GPa, módulo de Poisson $\nu = 0,35$ y densidad $\rho = 8920$ kg/m³. El comportamiento plástico se considera isótropo con endurecimiento lineal definido a partir de la tensión de fluencia $\sigma_y = 400$ MPa y módulo de endurecimiento $A' = 100$ MPa. Las propiedades térmicas del cobre en tanto son: calor específico $c = 460$ J/(kg K), conductividad $K = 380$ W/(m K) y coeficiente de dilatación $\alpha = 1 \times 10^{-5}$ 1/°C. Las propiedades, tanto térmicas como mecánicas, en este problema se consideran independientes de la temperatura.

La geometría se ha discretizado con 432 (6x36x2) elementos triangulares, según se muestra en la Figura 7.7. Esta cantidad de elementos resulta acorde a los problemas de deformaciones finitas en sólidos, más aun si se considera la elevada distorsión del proyectil después del impacto.

En la Figura 7.8a se muestra una gráfica del resultado obtenido con esta aproximación (TTR2D) en la evolución en el radio de la base que se deforma por el impacto por el impacto. Esta gráfica se compara con los resultados obtenidos en García y Celentano (2007), y los arrojados por el código ABAQUS (2010) aplicando un elemento cuadrilátero con una aproximación en deformaciones finitas con acoplamiento termomecánico denominado CAX4RT. Igualmente la Figura 7.8b presenta la evolución de la temperatura en el centro de la base (ver punto A en la Figura 7.7), que es donde se concentra la mayor deformación plástica debida al impacto. Se puede observar que los resultados son comparativamente buenos. Y en lo que respecta a la evolución de la temperatura, los resultados de esta tesis y los de ABAQUS (2010) resultan menos difusivos que lo observado en el trabajo de García y Celentano (2007).

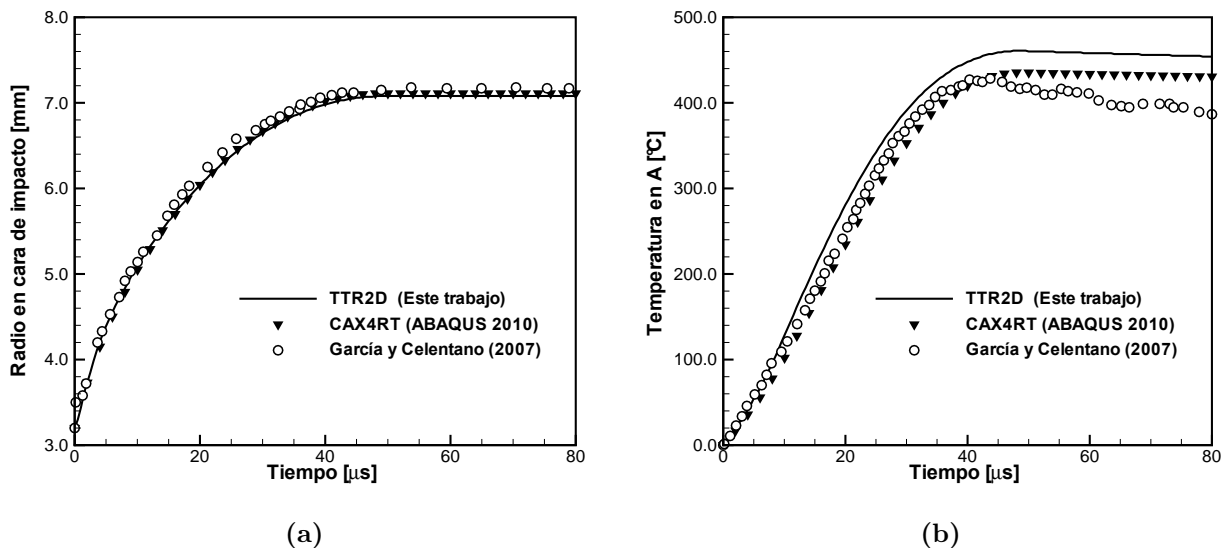


Figura 7.8 – Impacto no isotérmico de un proyectil en una pared rígida. (a) Evolución del radio de la barra en la cara de impacto. (b) Evolución de la temperatura en el centro de la cara de impacto.

Por otra parte en las Figuras 7.9 y 7.10 se puede observar la deformada después del impacto y sobre la misma la distribución de la deformación plástica efectiva y la distribución de la temperatura, respectivamente. Los resultados presentados corresponden a esta tesis (ver Figuras 7.9a y 7.10a) y a los arrojados por ABAQUS (2010) (ver Figuras

7.9b y 7.10b). Según se observa tienen una excelente concordancia, aun cuando se presenta una excesiva deformación de los elementos en el centro de la cara que hace impacto en la pared.

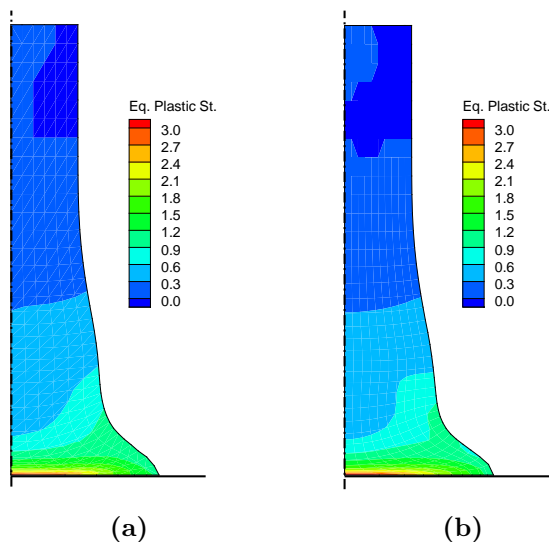


Figura 7.9 – Impacto no isotérmico de un proyectil en una pared rígida. Deformada final y distribución de la deformación plástica efectiva. (a) Este trabajo. (b) ABAQUS (2010).

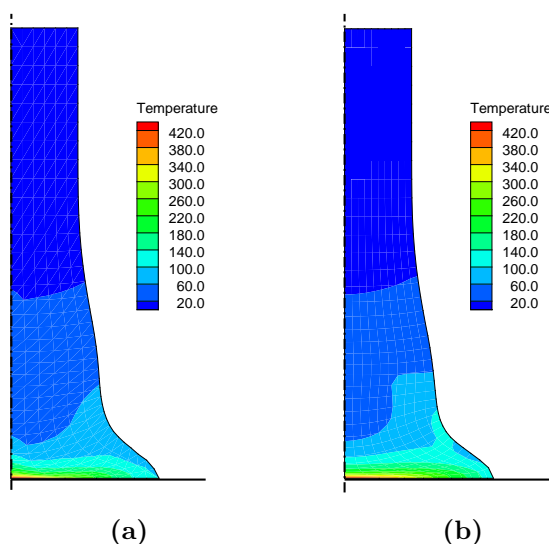


Figura 7.10 – Impacto no isotérmico de un proyectil en una pared rígida. Deformada final y distribución de la temperatura. (a) Este trabajo. (b) ABAQUS (2010).

La Tabla 7.2 también muestra una comparativa de los resultados máximos arrojados por esta aproximación, frente a los resultados obtenidos en el trabajo de García y Celentano (2007) y con el código ABAQUS (2010). Se observa que estos últimos trabajos brindan resultados muy similares, si bien utilizan aproximaciones diferentes, ya que ambos emplean elementos cuadriláteros. Los resultados obtenidos en esta tesis son cuantitativamente similares y se encuentran dentro de un rango de precisión aceptable.

Tabla 7.2 – Impacto no isotérmico de un proyectil en una pared rígida. Valores máximos obtenidos en esta tesis y comparativa con otros resultados.

Aproximación	$e_{max}^p [-]$	$\theta_{max} [^{\circ}C]$	$R_{max} [mm]$
TTR2D (Este trabajo)	3.09	461	7.08
García y Celentano (2007)	3.20	428	7.10
CAX4RT (ABAQUS 2010)	3.21	436	7.11

7.3.2. Acortamiento no isotérmico de un tocho cilíndrico

Este problema es conceptualmente similar al presentado en el Apartado 6.2.3, con la diferencia que en este caso se considera acoplamiento termomecánico y se estudia la incidencia de la velocidad de deformación en los resultados. Se consideran dos velocidades: (a) un caso rápido donde la prensa se desplaza 9 mm en $1,8 \times 10^{-3}$ s, y (b) un caso lento donde los 9 mm de desplazamiento de la prensa se logran en 1,8 s. La geometría del problema se observa en la Figura 7.11, el tocho cilíndrico de 30 mm de longitud y radio de 10 mm es comprimido por las mordazas rígidas de una prensa y se supone a estas superficies como perfectamente rugosas (no permiten el deslizamiento). La geometría se ha discretizado con un malla estructurada de 288 (12x12x2) elementos triangulares de tres nodos, como se observa en la misma figura.

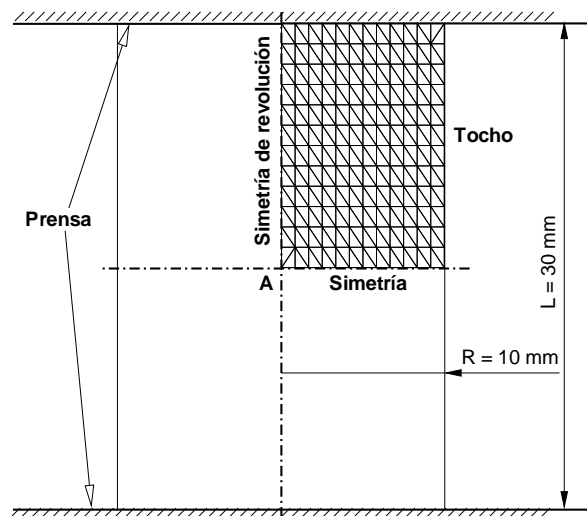


Figura 7.11 – Acortamiento no isotérmico de un tocho cilíndrico. Geometría del problema y malla empleada en el análisis.

El material usado es nuevamente acero con un comportamiento elasto-plástico definido por el módulo de Young $E = 200 \text{ GPa}$, relación de Poisson $\nu = 0,3$ y densidad de $\rho = 7833 \text{ kg/m}^3$. Se asume un endurecimiento isótropo lineal, sin embargo a diferencia del caso analizado en el Apartado 6.2.3, la tensión de fluencia $\sigma_y = \sigma_y(\theta)$ y el módulo de endurecimiento $A' = A'(\theta)$ son funciones de la temperatura según la Figura 7.12. Las propiedades térmicas empleadas para este acero son: calor específico $c = 586 \text{ J/(kg K)}$, coeficiente de dilatación $\alpha = 1,2 \times 10^{-5} \text{ 1/}^{\circ}C$ y conductividad $K = K(\theta)$ la cual también está definida en la Figura 7.12. La Tabla 7.3 muestra los parámetros mecánicos y térmicos que resultan dependientes de la temperatura.

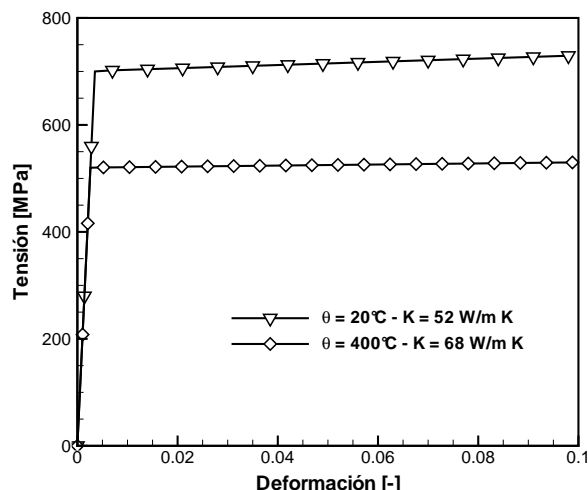


Figura 7.12 – Acortamiento no isotérmico de un tocho cilíndrico. Curvas de tensión-deformación en función de la temperatura.

Tabla 7.3 – Acortamiento no isotérmico de un tocho cilíndrico. Parámetros del material dependientes de la temperatura.

Parámetro	20 °C	400 °C
Tensión de fluencia σ_y [MPa]	700.0	520.0
Módulo de endurecimiento A' [MPa]	300.0	100.0
Conductividad térmica K [W/(m K)]	52.0	68.0

La geometría deformada del tocho cilíndrico y los niveles de deformación plástica equivalente (para el caso de carga lenta) son muy cercanos a los mostrados en el Apartado 6.2.3, la Tabla 7.4 muestra los valores máximos de la deformación plástica equivalente obtenidos en cada caso.

Tabla 7.4 – Acortamiento no isotérmico de un tocho cilíndrico. Deformaciones plásticas equivalentes máximas registradas y comparación con otros resultados.

Aproximación	e_{max}^p [-]	
	Rápido	Lento
TTR2D (Este trabajo)	2.05	1.86
CAX4RT (ABAQUS 2010)	2.09	1.97

La Figura 7.13 muestra la evolución de la temperatura en el centro del tocho cilíndrico para ambos casos, los resultados se comparan con los arrojados por ABAQUS (2010) empleando el elemento cuadrilátero CAX4RT. Se observa que la respuesta de la aproximación propuesta en esta tesis presenta pequeñas diferencias con respecto a la que se obtiene con ABAQUS (2010). La incidencia de la velocidad de deformación el proceso se observa en las mayores temperaturas para el caso rápido, esto está asociado a la falta de difusión de calor debido a los tiempos más cortos. Este es el mismo efecto que se observa en el impacto de un proyectil en el apartado anterior. Cuando los tiempos son más largos, la difusión de calor desde el centro del tocho hacia el contorno permite que las temperaturas desarrolladas sean menores.

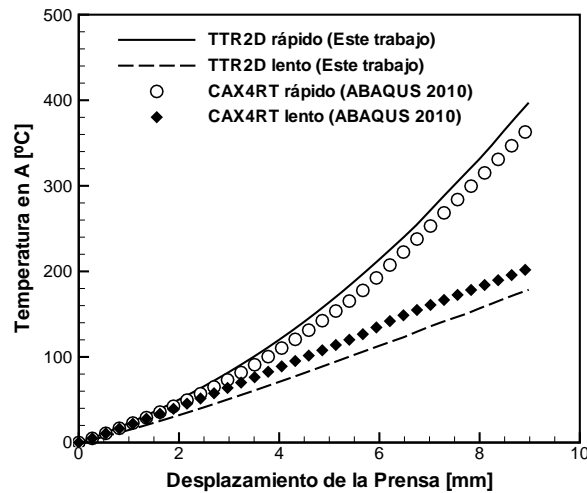


Figura 7.13 – Acortamiento no isotérmico de un tocho cilíndrico. Evolución de la temperatura en el centro del tocho en función del desplazamiento de la prensa.

Tabla 7.5 – Acortamiento no isotérmico de un tocho cilíndrico. Temperaturas máximas registradas y comparación con otros resultados.

Aproximación	Temperatura [°C]	
	Rápido	Lento
TTR2D (Este trabajo)	397.1	178.5
CAX4RT (ABAQUS 2010)	368.2	203.9

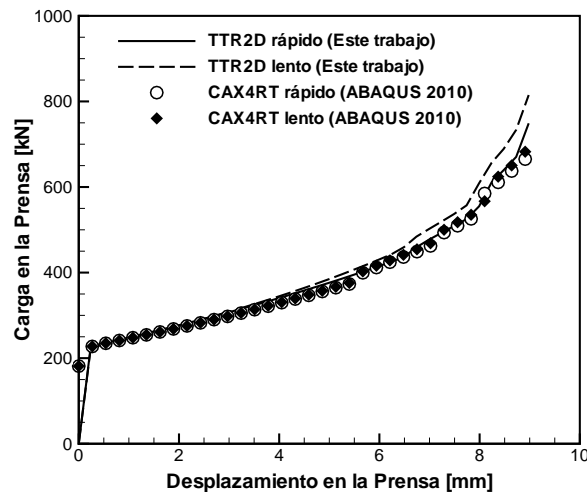


Figura 7.14 – Acortamiento no isotérmico de un tocho cilíndrico. Evolución de la carga en función del desplazamiento de la prensa.

La evolución de la carga en la prensa, necesaria para producir la deformación del tocho, se puede observar en la Figura 7.14. También se presentan los resultados obtenidos con ABAQUS (2010). Como puede verse en esta figura el efecto de la alta temperatura en el tocho, en el caso del movimiento rápido de la prensa, provoca una disminución en la carga necesaria para llevar a cabo el proceso de deformación (a altas temperaturas la

tensión de fluencia y el módulo de endurecimiento son menores). Las curvas obtenidas con el elemento TTR2D resultan muy próximas a las obtenidas con CAX4RT, solo muestran una leve diferencia sobre el final del proceso. Los valores de carga en el caso lento, difieren mínimamente del caso isotérmico estudiado en el capítulo anterior.

7.3.3. Extrusión directa no isotérmica de un tocho cilíndrico

Este problema representa una aplicación industrial concreta, básicamente consiste en la reducción del diámetro por extrusión directa de un tocho para obtener un eje cilíndrico. En este problema se considera no solamente la generación de calor por deformación plástica si no que además se tiene en cuenta el calor generado por la fricción de la barra cilíndrica con las herramientas (matriz).

La geometría del problema se presenta en la Figura 7.15, el tocho cilíndrico tiene 300 mm de largo y un radio inicial de 100 mm. El tocho recibe el movimiento de un punzón que desciende a velocidad prefijada, lo cual también puede modelarse como una velocidad aplicada sobre la superficie superior del mismo. El desplazamiento del punzón es de 25 cm y el proceso se logra en un tiempo de 11 segundos. El contacto se modela como el de un cuerpo deformable (tocho) y un sólido rígido (perfil de la matriz). La generación de calor por fricción se logra considerando una efusividad $\zeta_c = 0,5$ (lo cual implica que el calor generado se distribuye en partes iguales entre el tocho y la matriz). El coeficiente de rozamiento considerado es de $\mu = 0,1$, y la temperatura inicial del conjunto tocho-matriz es de 20 °C.

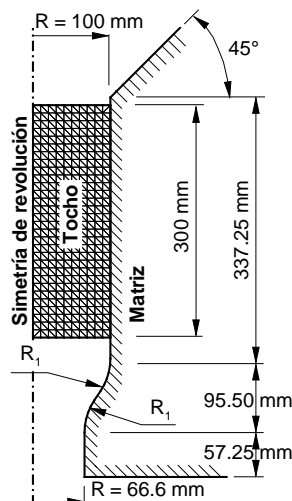


Figura 7.15 – Extrusión directa no isotérmica de un tocho cilíndrico. Geometría del problema y discretización en elementos triangulares empleada para su análisis.

El material del tocho cilíndrico es un aluminio con las siguientes características mecánicas: módulo de Young $E = 69$ GPa, relación de Poisson $\nu = 0,33$ y densidad $\rho = 2700$ kg/m³. El modelo de endurecimiento es del tipo isótropo lineal, y resulta dependiente de la temperatura de acuerdo a la Tabla 7.6. El efecto de la temperatura en el modelo de endurecimiento se puede observar en forma gráfica en la Figura 7.16. En lo que respecta a las características térmicas del material son: calor específico $c = 880$ J/(kg K), coeficiente de dilatación $\alpha = 8,42 \times 10^{-5}$ 1/°C, y conductividad térmica dependiente de la temperatura $K = 204$ W/(m K) a 0 °C y $K = 225$ W/(m K) a 300 °C.

La Figura 7.15 muestra además la malla de 600 (30x10x2) elementos empleada en la discretización de la geometría del tocho. El problema ha sido resuelto también empleando el código ABAQUS (2010) con el elemento cuadrilátero en deformaciones mejoradas para problemas termomecánicos CAX4RT y el código VULCAN con la formulación presentada en el trabajo de Celentano (2010).

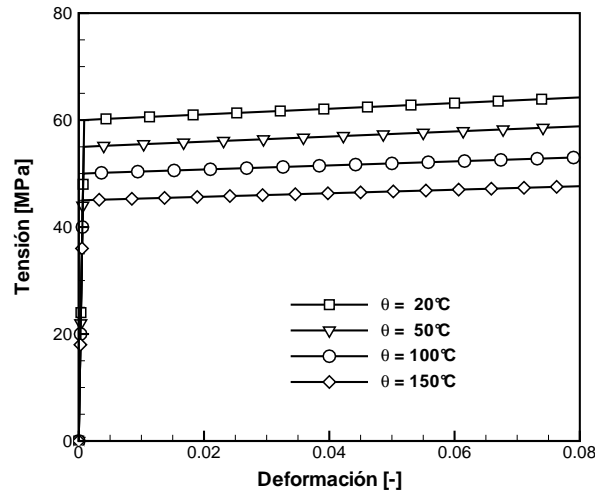


Figura 7.16 – Extrusión directa no isotérmica de un tocho cilíndrico. Curvas de tensión-deformación en función de la temperatura.

Tabla 7.6 – Extrusión directa no isotérmica de un tocho cilíndrico. Parámetros de endurecimiento plástico dependientes de la temperatura.

Parámetro	20 °C	50 °C	100 °C	150 °C
Tensión de fluencia σ_y [MPa]	60.0	55.0	50.0	45.0
Módulo de endurec. A' [MPa]	53.0	48.0	38.0	33.0

La Figura 7.17 muestra una comparativa de la distribución de las deformaciones plásticas efectivas, en la Figura 7.17a las obtenidas en esta tesis y las arrojadas por los códigos ABAQUS (2010) y VULCAN en la Figura 7.17b y Figura 7.17c, respectivamente. Se puede observar que las distribuciones son muy similares, no solo las zonas donde se presentan los mayores niveles, si no que también las magnitudes.

Respecto de la distribución de temperatura, la Figura 7.18 muestra los resultados obtenidos en este trabajo y los compara con los correspondientes a ABAQUS (2010) y VULCAN. Se puede observar que el mapa de temperaturas en el tocho es muy similar en los tres casos, ubicándose en la zona de estricción de la matriz el punto de mayor desarrollo de temperatura. En esa zona se conjugan los efectos de generación de calor por deformación plástica (estricción del tocho) y por rozamiento con las herramientas.

La Tabla 7.7 presenta los valores máximos de deformación plástica equivalente y de temperatura obtenidos con el elemento TTR2D, y se los compara con los máximos arrojados por los otros códigos. Los valores observados resultan muy próximos entre sí, con diferencias relativas menores al 8%.

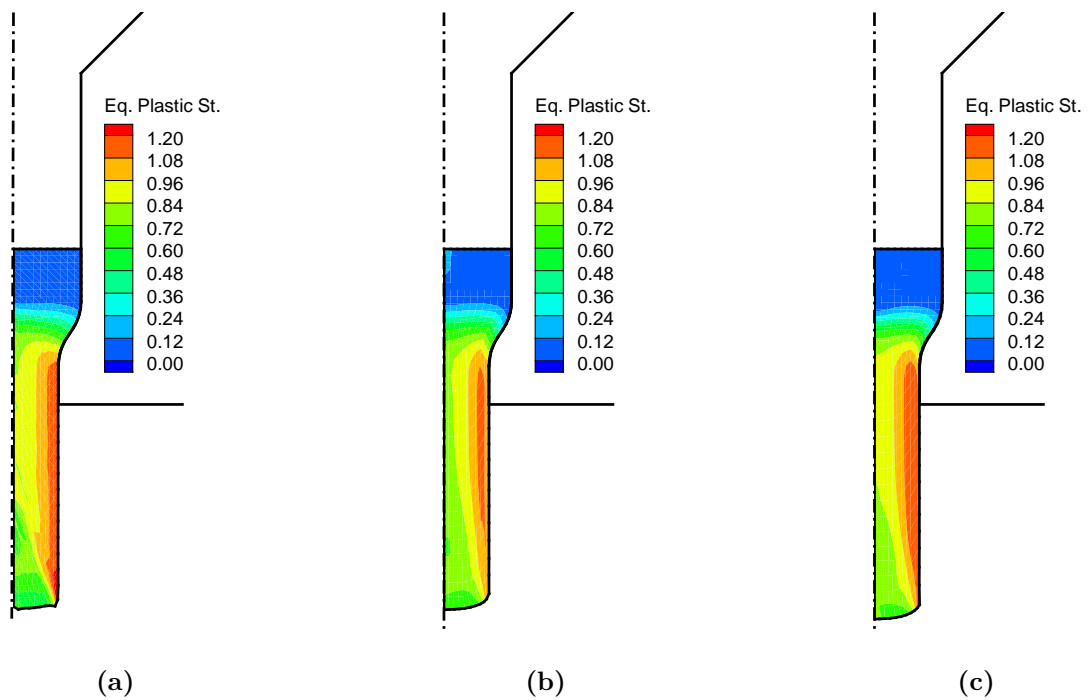


Figura 7.17 – Extrusión directa no isotérmica de un tocho cilíndrico. Distribución de la deformación plástica efectiva en la geometría deformada. (a) Este trabajo. (b) ABAQUS (2010). (c) VULCAN (formulación de Celentano (2010)).

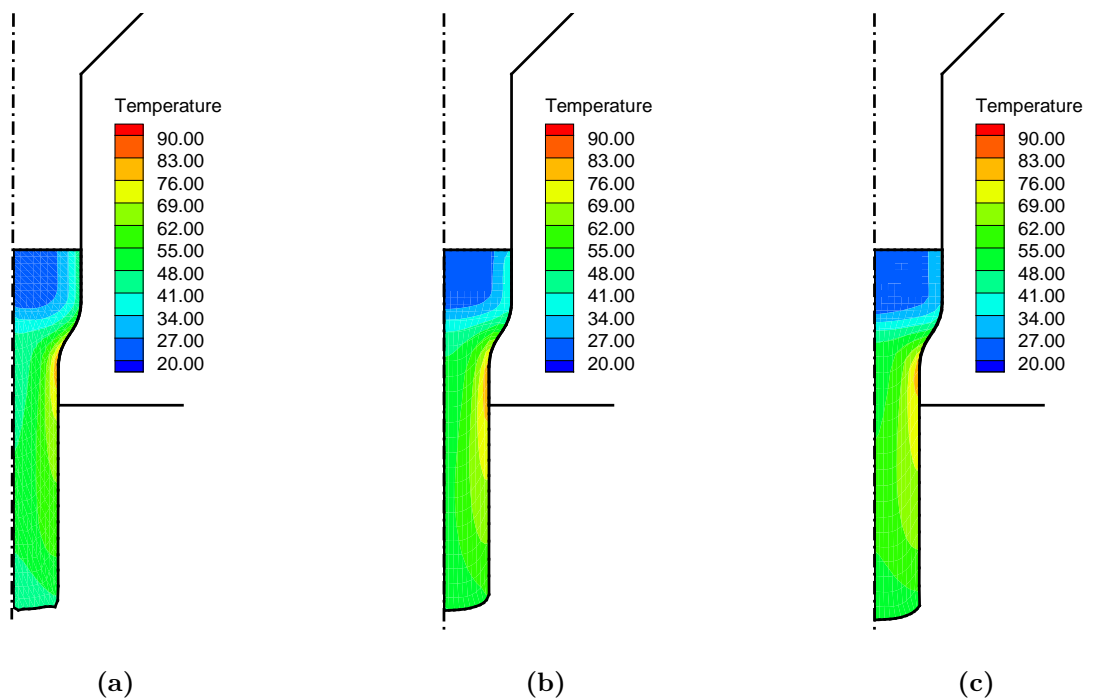


Figura 7.18 – Extrusión directa no isotérmica de un tocho cilíndrico. Distribución de la temperatura en la geometría deformada. (a) Este trabajo. (b) ABAQUS (2010). (c) VULCAN (formulación de Celentano (2010)).

Tabla 7.7 – Extrusión directa no isotérmica de un tocho cilíndrico. Valores máximos obtenidos en esta tesis y comparativa con otros resultados.

Aproximación	$e_{max}^p [-]$	$\theta_{max} [^{\circ}C]$
TTR2D (Este trabajo)	1.36	87.2
VULCAN (form. Celentano 2010)	1.25	82.8
CAX4RT (ABAQUS 2010)	1.13	81.8

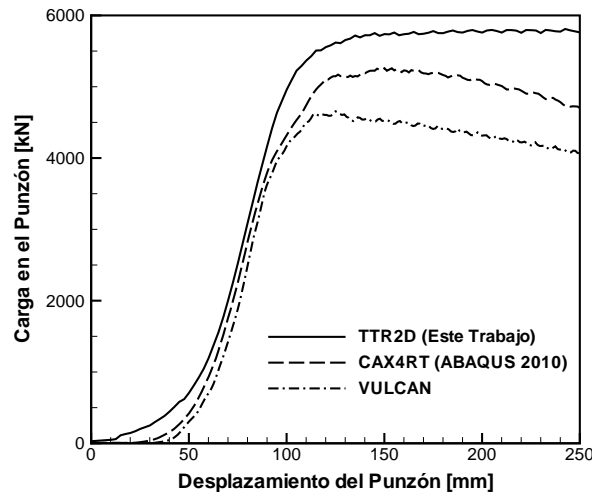


Figura 7.19 – Acortamiento no isotérmico de un tocho cilíndrico. Evolución de la carga en función del desplazamiento de la prensa.

Por último la Figura 7.19 muestra la evolución de la carga en el punzón en la medida que se produce el desplazamiento del mismo. Las discrepancias en los valores máximos de carga, que suceden cuando el tocho ha alcanzado el final del segundo radio de empalme R_1 (ver Figura 7.15), son importantes entre los tres códigos empleados en el análisis de este problema. Las diferencias son justificables debido a las distintas aproximaciones empleadas, los distintos elementos y los diferentes algoritmos de contacto empleados. El elemento triangular presentado en este trabajo presenta regularmente un comportamiento más rígido, desde el punto de vista de las cargas, con respecto a los cuadriláteros.

7.4. Discusión de resultados

Se han estudiado en este capítulo problemas de las áreas elasto-viscoplástica y termomecánica, estos problemas han permitido evaluar el comportamiento de la aproximación propuesta en esta tesis. Los resultados muestran semejanzas con respecto a los obtenidos por otros autores y códigos, y las diferencias se encuentran dentro del rango de precisión ingenieril.

La aproximación en deformaciones impuestas basada en un elemento triangular presentada en esta tesis, sigue mostrando un comportamiento levemente más rígido que los cuadriláteros empleados comúnmente en los trabajos contra los cuales se contrastan resultados. Esto no solo se observa en los trabajos donde se presenta viscoplasticidad, si no que además puede verse en los problemas con acoplamiento termomecánico.

En lo que respecta al modelo viscoplástico generalizado empleado en esta tesis, se observa que pueden recuperarse los casos límites: (a) respuesta elástica en el caso de viscosidad elevada y (b) elasto-plasticidad cuando la viscosidad es muy pequeña. El esquema de solución iterativo del tipo Newton-Raphson, empleado en la solución de la función de fluencia generalizada (ver apartado 4.4.2), muestra una convergencia rápida y adecuada sin influir de manera importante en los tiempos de análisis de los problemas. En los problemas donde los efectos de la viscosidad son muy marcados (límite elástico), se observa que la aproximación brinda valores de deformación plástica efectiva muy pequeños lo cual es consistente con la realidad física del problema. El modelo constitutivo elasto-viscoplástico generalizado empleado junto a un esquema explícito de integración de las ecuaciones de movimiento, presenta inestabilidad de naturaleza numérica que se manifiesta en forma de bloqueo volumétrico. Esta inestabilidad se hace más acentuada con grandes valores de viscosidad, y se ha conseguido disminuir sus efectos con algún método de atenuación de la respuesta (amortiguamiento y/o suavizado de la velocidad) o bien disminuyendo el paso tiempo crítico en la integración.

En los problemas con acoplamiento termomecánico se han presentado resultados comparativamente adecuados, frente a los divulgados por otros autores y los brindados por otros códigos numéricos. La respuesta de la aproximación propuesta en esta tesis se muestra menos difusiva (del punto de vista térmico), en particular en los problemas de muy corta duración (impacto). En los problemas estudiados en la Sección 7.3, los perfiles térmicos muestran similitudes cuando se los compara con otros resultados presentes en la literatura. Además los problemas donde las propiedades térmicas y mecánicas son dependientes de la temperatura, muestran la incidencia de este efecto en los resultados (asociadas al ablandamiento térmico del material). Las diferencias en los valores máximos de temperatura indicados en esta tesis se encuentran dentro del 8% lo cual es ingenierilmente aceptable considerando la aproximación empleada.

Capítulo 8

Conclusiones

8.1. Introducción

En esta tesis se ha presentado un modelo numérico capaz de simular problemas elasto-viscoplásticos en sólidos bidimensionales con grandes deformaciones y acoplamiento termomecánico. Este esquema ha sido implementado dentro de un código con integración explícita de las ecuaciones de movimiento, el cual cuenta además con un algoritmo de contacto basado en la técnica de penalización.

La formulación numérica propuesta se caracteriza por:

- una aproximación en deformaciones impuestas basada en un elemento triangular de tres nodos, donde la evaluación de las deformaciones en cada triángulo se hace teniendo en cuenta la geometría de los tres elementos adyacentes.
- un modelo constitutivo basado en la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de las deformaciones, el cual es integrado en la configuración deformada actual.
- la generalización del modelo constitutivo para tratar problemas con viscoplasticidad, a partir de un modelo matemático simple del tipo Perzyna.
- un esquema de acoplamiento termomecánico del tipo escalonado, en donde la solución consiste en la división natural de una fase mecánica con temperatura constante seguida de una fase térmica donde la configuración no se deforma.
- un algoritmo de contacto termomecánico basado en la técnica de penalización, la cual resulta ser la más adecuada para códigos con integración explícita de las ecuaciones de movimiento.

A continuación, en la Sección 8.2 se presenta un resumen de las conclusiones obtenidas a partir de los resultados observados en esta tesis. Posteriormente en la Sección 8.3 se describen las contribuciones originales que supone este trabajo. Y por último en la Sección 8.4 se definen algunas líneas futuras de trabajo que surgen como consecuencia de esta tesis.

8.2. Conclusiones de esta tesis

La aproximación numérica propuesta en esta tesis, basada en triángulos de tres nodos y solo grados de libertad de desplazamiento, muestra un excelente desempeño frente a

problemas que involucran deformaciones finitas. El comportamiento de esta aproximación se asemeja al de cuadriláteros en deformaciones impuestas/mejoradas que pueden encontrarse en la literatura, en particular frente a los problemas de bloqueo (por corte y volumétrico), y también incorpora algunas ventajas frente a estos últimos elementos como por ejemplo: (a) la facilidad para mallar geometrías arbitrarias y complejas, (b) no necesitan mallas cuasi estructuradas, y (c) simplifican los esquemas de restauración de mallas. Los resultados presentados previamente en esta tesis así lo demuestran. Además por otra parte, dado que las cuadraturas de integración numérica en triángulos son siempre menores o iguales a las cuadraturas en cuadriláteros, el empleo de triángulos supone alguna economía de cálculo frente a los esquemas que emplean cuadriláteros.

Los resultados obtenidos muestran que el modelo constitutivo basado en la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de deformaciones resulta más eficiente desde el punto de vista computacional. Esta economía de cálculo que se observa en el modelo propuesto por García Garino (1993) se sustenta en dos hechos fundamentalmente: (a) la mayor simplicidad de las operaciones involucradas, y (b) una menor cantidad de operaciones matemáticas necesarias para llevar a cabo la integración de ecuación constitutiva a nivel elemental. Por otra parte el modelo resulta muy adecuado para estudiar problemas en deformaciones finitas, en particular cuando el comportamiento del material es isótropo y los resultados brindados en esta tesis lo confirman. En lo que respecta a la plasticidad dependiente del tiempo o viscoplasticidad, el modelo empleado en este trabajo que surge de la generalización propuesta por Ponthot et al. (2005) muestra un adecuado comportamiento en el rango de aplicación a metales y el mismo no modifica significativamente la eficiencia operacional del algoritmo elasto-plástico original. Aun cuando en esta tesis se han estudiado problemas con viscosidad lineal, lo cual deriva en una solución cerrada de la función de fluencia generalizada, se ha empleado un esquema iterativo del tipo Newton-Raphson y los resultados muestran que el esquema sigue siendo económico desde el punto de vista de cálculo.

El algoritmo escalonado propuesto en la solución del problema térmico y mecánico acoplado resulta eficiente, aun cuando en este trabajo no se hace uso de la diferencia de escalas de tiempo que existe entre los dos problemas lo cual sería mucho más conveniente. Se ha utilizado un algoritmo escalonado del tipo isotérmico el cual, si bien es condicionalmente estable, resulta adecuado cuando se lo emplea dentro de un esquema explícito de integración de las ecuaciones de gobierno tal como el empleado en esta tesis. Los resultados obtenidos muestran que el comportamiento del esquema termomecánico explícito empleado es acorde al objetivo del análisis. La aproximación térmica a nivel elemental es la más simple posible en problemas bidimensionales, triángulo de tres nodos con funciones de forma lineal, lo cual se observa en las diferencias obtenidas cuando se comparan los resultados con cuadriláteros. Los resultados muestran además que las modificaciones realizadas al algoritmo de contacto, para contemplar la generación y transmisión de calor por fricción y contacto con las herramientas, respectivamente, se comportan de manera adecuada en el estudio de los problemas de aplicación industrial.

El esquema de restauración de mallas y transferencia de variables empleado en esta tesis resulta muy eficiente desde el punto de vista de los tiempos de análisis y de la precisión de los resultados obtenidos. La restauración de mallas empleando el esquema de remallado por zonas disminuye de manera importante la cantidad de operaciones en la transferencia de variables, debido principalmente a la pequeña cantidad de elementos distorsionados que son reemplazados en la malla. Solo en casos particularmente complejos, ya sea por la geometría de las herramientas o por el nivel de deformación alcanzado, las

zonas distorsionadas llegan a incluir un alto porcentaje del total de elementos de la malla. Sin embargo, aun en estos casos los tiempos de análisis siguen siendo adecuados. En los problemas estudiados en esta tesis, donde las variables de estado son dependientes de la historia de deformación, un algoritmo de transferencia inadecuado conlleva a la aparición de resultados de baja precisión. Y en lo que respecta al algoritmo de transferencia de variables empleado aquí, basado en el *Superconvergent Patch Recovery* (SPR) con funciones de interpolación cuadráticas, se observa un excelente desempeño y una mínima pérdida de información durante el proceso de transferencia y recuperación de variables.

Como conclusión general se puede decir que se ha desarrollado una herramienta de simulación computacional eficiente y precisa para estudiar problemas bidimensionales de índole industrial como el forjado y la extrusión de metales, tanto en frío como en caliente, aun considerando procesos no isotérmicos. Esta herramienta computacional muestra un buen desempeño en el análisis de problemas que involucran flujo plástico isócoro, contacto con herramientas y autocontacto, cambios importantes de la geometría, plasticidad independiente del tiempo y viscoplasticidad, y permite considerar el acoplamiento termomecánico en problemas con deformaciones finitas. Más aun la herramienta computacional desarrollada puede ser utilizada en ordenadores personales, manteniendo una excelente eficiencia de cálculo en los tiempos de análisis.

8.3. Contribuciones de esta tesis

En esta sección se presenta un resumen de los aspectos originales y las contribuciones que surgen a partir del desarrollo de esta tesis. Con respecto de los aspectos originales, se pueden mencionar que:

- se ha desarrollado una aproximación basada en un parcela de cuatro elementos triangulares que puede enmarcarse dentro los métodos $\bar{\mathbf{F}}$. En esta aproximación se evalúa el gradiente en el centro del elemento, considerando un promedio ponderado de los gradientes a cada lado del elemento central, de modo que contiene el aporte de los elementos adyacentes de la parcela. Esta aproximación difiere levemente de la original planteada en Flores (2003), y resulta más eficiente desde el punto de vista computacional.
- se ha modificado la aproximación también de manera que en problemas axilimétricos, el alargamiento en dirección circunferencial $\bar{\lambda}_3$ se evalúa de manera consistente con la forma de obtener las componente en el plano de $\bar{\mathbf{F}}$, brindando mejores soluciones y mostrando un comportamiento más flexible.
- se ha desarrollado un esquema de restauración de mallas localizado, que permite reemplazar únicamente los elementos que muestran una mayor distorsión sin la necesidad de cambiar todos los elementos de la malla. Este esquema permite ganar en eficiencia de cálculo y eliminar las pérdidas de información innecesarias en la transferencia de variables entre mallas, mejorando la precisión de los resultados.
- se ha presentado un método iterativo para la solución de ecuación de fluencia elasto-viscoplástica generalizada \bar{f} no lineal, la cual también puede implementarse en problemas viscoplásticos lineales, sin perder la economía de cálculo del esquema general de análisis por elementos finitos.

- se han unificado criterios de distintos autores asociados a la evaluación de la ecuación de equilibrio térmico, en particular en lo referente al término de acoplamiento termoplástico el cual puede modificarse rápidamente para incorporar los efectos de nuevas variables de estado (ej.: daño).

En lo concerniente a las contribuciones realizadas en esta tesis, se enumeran a continuación algunas de las tareas de implementación que han permitido desarrollar la herramienta de simulación numérica presentada en los capítulos previos. Entre las contribuciones más destacadas se pueden mencionar:

- la implementación de un elemento triangular en aproximaciones impuestas capaz de lidiar con los problemas de bloqueo, volumétrico y por corte, en el estudio de problemas con grandes deformaciones elasto-viscoplásticas y acoplamiento termomecánico.
- el desarrollo de un elemento triangular con tan buenas características en mallas gruesas (pocos elementos), permitió utilizar esquemas simples y muy eficientes de regeneración de mallas cuando los elementos se distorsionan excesivamente.
- la implementación de un esquema de transferencia de variables más elaborado basado en el SPR, consistente con la aproximación cuadrática empleada en el esquema de elementos finitos, que mantiene la eficiencia de la herramienta computacional cuando se lo aplica en conjunto con la regeneración de malla por zonas.
- la utilización de un algoritmo simple de detección de la distorsión elemental, a partir de los ángulos internos de cada elemento.
- la aplicación de un método iterativo robusto y eficiente para la solución del problema viscoplástico a nivel elemental, basado en un algoritmo del tipo Newton-Raphson con correcciones por el método de Bisección.
- la implementación de un esquema escalonado isotérmico explícito para la solución del problema termomecánico acoplado, el cual muestra simplicidad y robustez, además de precisión y eficiencia.
- la modificación del algoritmo de contacto para tratar los términos termomecánicos de manera adecuada y que resulta fácilmente modificable para considerar los efectos de la temperatura en las variables de contacto térmico.

8.4. Futuras líneas de investigación

A partir de los desarrollos realizados en esta tesis y de los resultados obtenidos, surgen algunas consideraciones a tener en cuenta para delinear las tareas a realizar a futuro.

- En lo que respecta al modelo constitutivo sería conveniente implementar algún modelo de anisotropía metálica, para poder incorporar los efectos de las direcciones favorables de crecimiento de grano, efecto que se da habitualmente en los tochos y tubos obtenidos por laminado o rolado.
- En el esquema de remallado sería adecuado establecer una medida del error a partir de alguna variable de estado, que permita cuantificar de manera consistente la distorsión de los elementos y la necesidad de restaurar la malla.

- A la luz de los resultados obtenidos surge la idea de estudiar la aplicación de una mejor aproximación del problema térmico, posiblemente una aproximación cuadrática consistente con la empleada en la formulación del problema mecánico, en donde la temperatura en un elemento se pueda evaluar considerando el aporte de los elementos adyacentes.
- Por último sería conveniente modificar la parte térmica del modelo de contacto, de modo de incorporar los cambios en la efusividad relativa y la conducción por contacto, a partir del cambio en las propiedades térmicas y mecánicas del material en función del cambio en la temperatura del proceso.
- También resulta interesante extender esta formulación en grandes deformaciones elasto-viscoplásticas con acoplamiento termomecánico a problemas en tres dimensiones, para estudiar casos de forjado de metales con matrices de geometría completamente arbitraria.

Apéndice A

Mecánica del continuo para grandes deformaciones

A.1. Introducción

Este apéndice presenta un compendio de las expresiones asociadas a la mecánica del continuo aplicadas a problemas de sólidos con grandes deformaciones. El objetivo es introducir aquellas expresiones que son empleadas a lo largo del trabajo, aunque debe considerarse que no es una revisión extensiva de la mecánica del continuo y la misma puede encontrarse en la mayoría de los libros de texto dedicados a este tópico. Las expresiones que se verán a continuación surgen de los trabajos de Lubliner (1990), Crisfield (1997b), Crisfield (1997a), Simo y Hughes (1998), Belytschko et al. (2000), García Garino (1993), Bonet y Wood (1997) y Dhondt (2004). En particular la mayor parte de los desarrollos y la formulación corresponden a los tres últimos trabajos, y se ha buscado de homogeneizar las notaciones para facilitar la lectura y posterior aplicación a este trabajo.

El contenido de este capítulo se resume a continuación. En la Sección A.2 se introducen los conceptos básicos de la cinemática de sólidos en grandes deformaciones, haciendo énfasis en la definición de las magnitudes elementales de la cinemática para luego introducir las expresiones asociadas a la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de deformaciones. La Sección A.3 presenta las ecuaciones de balance o equilibrio asociadas a la mecánica del continuo, en especial aquellas asociadas a la mecánica del sólido con acoplamiento termomecánico, es decir las ecuaciones de balance de la cantidad de movimiento y balance energético. Además en esta misma sección se presenta el método de los desplazamientos virtuales como un medio sistemático para definir la forma débil de las ecuaciones de equilibrio del problema térmico y mecánico acoplado. Por último la Sección A.4 presenta la forma débil de las ecuaciones de gobierno del problema termomecánico, a partir de las cuales y aplicando el método de elementos finitos (Capítulo 4) se puede obtener un esquema numérico que permita simular el problema.

A.2. Cinemática del problema en grandes deformaciones

La mayor parte de este apartado ha sido abordado más completamente en los trabajos de García Garino (1993) y posteriormente Castelló (2005), aquí se reescriben algunas de las expresiones que son de utilidad a este trabajo. En este apartado se presenta el

tratamiento de los cambios geométricos o *cinemática del problema*. El tratamiento adecuado de estas relaciones geométricas es un punto clave cuando se desea formular las ecuaciones constitutivas y de gobierno del problema, y más aun cuando se desean estudiar problemas que involucran grandes deformaciones elasto-viscoplásticas. A continuación se presentan algunos conceptos básicos de la cinemática de sólidos con grandes deformaciones, de manera que después sea posible definir las relaciones inherentes al modelo constitutivo elegido asociado a la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de deformación.

A.2.1. Conceptos básicos de la cinemática

El movimiento de un sólido, puede entenderse como el conjunto de posiciones en el espacio que el mismo sólido ocupa durante el proceso que se estudia. La Figura A.1 a continuación muestra esta interpretación. Esta figura permite reconocer las diferentes posiciones del sólido, comúnmente estas posiciones se denominan configuraciones y están indicadas como Ω_i . Cualquiera de estas posiciones puede tomarse como configuración de referencia, aunque usualmente se adopta como configuración de referencia a la *configuración indeformada* Ω_0 .

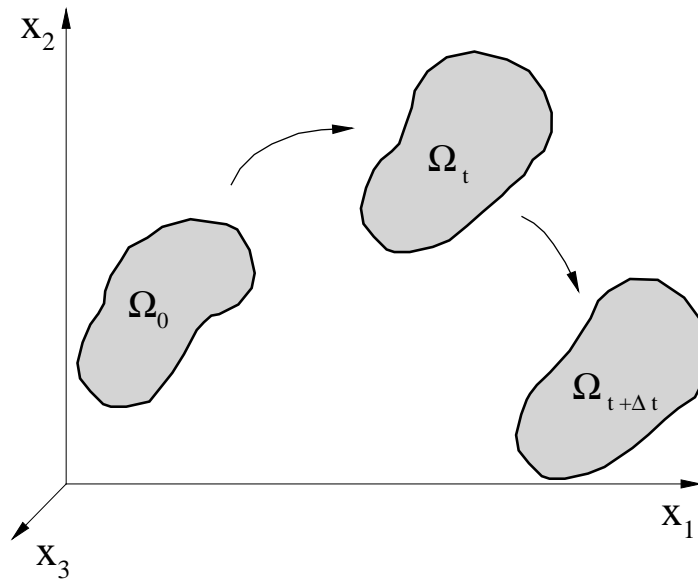


Figura A.1 – Esquema de movimiento del sólido.

En esta configuración de referencia Ω_0 se establece una relación biunívoca entre los puntos materiales \mathbf{p}_0 y un subconjunto del espacio \mathbb{R}^3 caracterizado por un sistema de coordenadas curvilíneo \mathbf{X} . Este sistema coordenado queda definido por un tensor métrico \mathbf{G} (en donde $G_i = \frac{\partial \mathbf{p}_0}{\partial X_i}$) como puede verse en la Figura A.2.

La relación entre la configuración de referencia Ω_0 y otra cualquiera Ω_t , está definida por una función $\phi(X_i, t)$. Esta función debe cumplir algunas exigencias tales como: que sea continua y derivable, biunívoca y que preserve la orientación. Luego puede escribirse:

$$\phi : (\Omega_0) \longrightarrow \Omega_t \tag{A.1}$$

de esta forma un punto material \mathbf{p}_0 se transforma en otro espacial \mathbf{p} como:

$$\mathbf{p} = \phi(\mathbf{p}_0) \Rightarrow \mathbf{p}_0 = \phi^{-1}(\mathbf{p}) \tag{A.2}$$

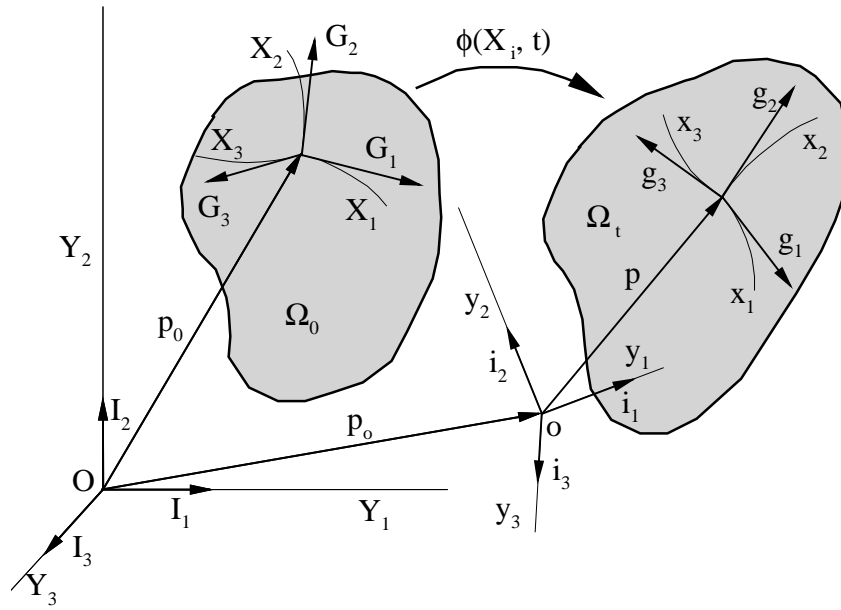


Figura A.2 – Configuraciones material y espacial del sólido.

En la Figura A.2 se puede ver que un punto espacial queda definido por un sistema de coordenadas curvilíneo \mathbf{x} y que a su vez está caracterizado por un tensor métrico espacial \mathbf{g} (con $g_i = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_i}$). Por otra parte el vector de desplazamientos \mathbf{u} relaciona a un punto material \mathbf{p}_0 definido por un vector posición \mathbf{X} con su imagen espacial \mathbf{p} asociado a un vector posición \mathbf{x} , según:

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u} \quad (\text{A.3})$$

Aprovechando la existencia de una función $\phi(\mathbf{X}, t)$, la cual suele adoptarse como la descripción matemática de la deformación, es posible obtener el operador tangente de la función de acuerdo a:

$$\mathbf{F}_I^i = \frac{\partial \phi(\mathbf{X}_i, t)}{\partial X_I} = \frac{\partial x_i}{\partial X_I} \quad (\text{A.4})$$

este operador se denomina tensor *gradiente de la deformación*, se indica con la letra \mathbf{F} y debe cumplir la condición $J = \det[\mathbf{F}] > 0$. Este tensor gradiente de la deformación, admite la descomposición polar:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \quad (\text{A.5})$$

donde \mathbf{R} es un tensor ortogonal denominado *tensor de rotación*, mientras que \mathbf{U} y \mathbf{V} son los denominados *tensores de estiramiento derecho e izquierdo* respectivamente. La operación $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ es el producto contraído de dichos los tensores \mathbf{A} y \mathbf{B} . A partir de estos elementos se pueden definir los tensores de deformación y generalizar sus relaciones.

Debido a que, tanto el tensor de estiramiento derecho \mathbf{U} y el tensor de estiramiento izquierdo \mathbf{V} son definidos positivos, admiten la descomposición espectral (autovalores y autovectores). En el caso del tensor de estiramiento derecho se obtiene:

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i \quad (\text{A.6})$$

donde los autovalores λ_i satisfacen la condición $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ y los autovectores se suponen unitarios en el caso que correspondan a un sistema cartesiano (ortonormal).

En la configuración de referencia Ω_0 se puede definir el *tensor derecho de Cauchy-Green* como:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \quad (\text{A.7})$$

a partir del cual es posible definir en la misma configuración, el *tensor de deformación de Green-Lagrange* como:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{G}) \quad (\text{A.8})$$

cabe hacer notar que, comparando las ecuaciones (A.5) y (A.7) se puede obtener la relación $\mathbf{U} = \mathbf{C}^{\frac{1}{2}}$ (o bien $\mathbf{C} = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U}^2$) y por lo tanto la (A.8) puede ser expresada fácilmente a partir de los desplazamientos \mathbf{u} .

De manera análoga, en la configuración deformada Ω_t puede definirse el *tensor izquierdo de Cauchy-Green* de acuerdo a:

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T \quad (\text{A.9})$$

en este caso también se cumple la igualdad $\mathbf{V} = \mathbf{b}^{\frac{1}{2}}$, que surge de comparar la ecuación (A.5) con la (A.9). Además puede definirse el *tensor de Finger* como:

$$\mathbf{b}^{-1} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (\text{A.10})$$

de modo que a partir del tensor métrico espacial \mathbf{g} y del tensor de Finger \mathbf{b}^{-1} se puede definir el *tensor de deformación de Almansi* \mathbf{e} en la configuración actual o deformada Ω_t mediante:

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} (\mathbf{g} - \mathbf{b}^{-1}) \quad (\text{A.11})$$

Empleando las definiciones del tensor derecho de Cauchy-Green \mathbf{C} y del tensor de Finger \mathbf{b}^{-1} , se pueden determinar expresiones que relacionan las variaciones en la longitud elemental de las fibras materiales en las configuraciones original Ω_0 y deformada Ω_t respectivamente. La generalización de estas expresiones llevan a definir transformaciones tensoriales, que hacen posible expresar los cambios elementales de longitud indistintamente en función de tensores definidos en una u otra configuración. Estas transformaciones se conocen como *push-forward* y *pull-back*.

Antes de definir estas transformaciones cabe mencionar que, asociada a la base vectorial definida por las componentes G_i (denominadas *componentes covariantes*) del tensor métrico en la configuración material existe una base recíproca con componentes G^j (llamadas *componentes contravariantes*), de modo que se cumple que $G_i \cdot G^j = \delta_i^j$ en donde $\delta_i^j = 1$ si $i = j$ y $\delta_i^j = 0$ cuando $i \neq j$. Claramente no existe ninguna restricción con respecto a que el sistema definido por G_i sea ortonormal y por ende tampoco existe esta restricción sobre el sistema definido por G^j . Además, es fácil demostrar que un vector cualquiera puede ser expresado en componentes covariantes o contravariantes, y para lo cual solo es necesario un cambio de base.

Conociendo el tensor gradiente de la deformación \mathbf{F} , el push-forward de un tensor genérico \mathbf{Z}^\sharp en componentes contravariantes en la configuración original Ω_0 será un tensor espacial o Euleriano \mathbf{z}^\sharp en la configuración deformada Ω_t , y resulta de hacer:

$$\mathbf{z}^\sharp = \mathbf{F} \cdot \mathbf{Z}^\sharp \cdot \mathbf{F}^T \quad (\text{A.12})$$

por otro lado, el push-forward de un tensor \mathbf{Z} en componentes covariantes lleva a una transformación del tipo:

$$\mathbf{z} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (\text{A.13})$$

De igual modo se puede definir el pull-back de un tensor \mathbf{z}^\sharp en componentes contravariantes en la configuración espacial Ω_t para obtener un tensor Lagrangeano o material \mathbf{Z}^\sharp en la configuración original Ω_0 , mediante:

$$\mathbf{Z}^\sharp = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{z}^\sharp \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (\text{A.14})$$

así también, el pull-back de un tensor \mathbf{z} en componentes covariantes lleva a:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{z} \cdot \mathbf{F} \quad (\text{A.15})$$

En conclusión estas operaciones, definidas por (A.12)-(A.15), permiten transformar tensores entre las configuraciones deformada Ω_t y la configuración original Ω_0 . Además se pueden generalizar estas transformaciones a dos configuraciones cualquiera, siempre y cuando se conozca el tensor gradiente de deformación que relaciona a ambas configuraciones. Se hará uso de esta propiedad cuando definamos la cinemática asociada al modelo de descomposición multiplicativa.

De la misma manera que se define el tensor gradiente de la deformación, es posible definir los tensores de velocidad de deformación u otros que derivan del cambio de dicho tensor a lo largo del proceso. Así la velocidad de las partículas será:

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad (\text{A.16})$$

y asociado a este campo de velocidades, el *tensor gradiente de la velocidad* \mathbf{l} se establece según:

$$\mathbf{l} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (\text{A.17})$$

donde se ha empleado la regla de la cadena. Este tensor gradiente de la velocidad, puede descomponerse en una parte simétrica más una parte antisimétrica, de la forma:

$$\mathbf{l} = \mathbf{d} + \mathbf{w} = \left[\frac{1}{2} (\mathbf{l} + \mathbf{l}^T) \right] + \left[\frac{1}{2} (\mathbf{l} - \mathbf{l}^T) \right] \quad (\text{A.18})$$

donde \mathbf{d} en la(A.18) es un tensor simétrico denominado tensor de alargamiento y \mathbf{w} en un tensor antisimétrico que se conoce como tensor de velocidad de rotación (*spin*). Esta descomposición ha sido muy usada por muchos autores, haciendo nulo el tensor de velocidad de rotación $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ y usando sólo la parte simétrica del tensor gradiente de la velocidad en las relaciones cinemáticas.

Siguiendo este mismo camino, en la configuración material Ω_0 el tensor velocidad de deformación puede obtenerse simplemente como la derivada material $\dot{\mathbf{E}} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, el mismo criterio puede aplicarse al tensor derecho de Cauchy-Green \mathbf{C} .

Lamentablemente, esta misma noción no puede aplicarse a los tensores definidos en la configuración espacial Ω_t debido a que las derivadas no resultan objetivas y es necesario recurrir al concepto de la derivada de tiempo convectiva. Entonces, siendo \mathbf{z} un tensor espacial definido en Ω_t y considerando un campo de velocidades definido por el tensor gradiente de velocidades \mathbf{l} , la derivada temporal convectiva se obtiene transformando el tensor espacial \mathbf{z} a la configuración material Ω_0 (pull-back), se calcula la derivada material sobre el tensor material obtenido $\mathbf{Z} = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t}$ en el paso anterior y por último se transforma este tensor material $\dot{\mathbf{Z}}$ hacia la configuración espacial Ω_t . Teniendo en cuenta las

ecuaciones (A.12)-(A.15), entonces la derivada temporal convectiva de un tensor espacial \mathbf{z} en componentes covariantes puede definirse como:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \left[\frac{\partial (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{z} \cdot \mathbf{F})}{\partial t} \right] \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (\text{A.19})$$

y desarrollando esta expresión se obtiene:

$$\dot{\mathbf{z}} = \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{l}^T \cdot \mathbf{z} + \mathbf{z} \cdot \mathbf{l} \quad (\text{A.20})$$

En el caso de la derivada temporal convectiva de un tensor espacial \mathbf{z}^\sharp en componentes contravariantes será:

$$\dot{\mathbf{z}}^\sharp = \mathbf{F} \cdot \left[\frac{\partial (\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{z}^\sharp \cdot \mathbf{F}^{-T})}{\partial t} \right] \cdot \mathbf{F}^T \quad (\text{A.21})$$

y desarrollando:

$$\dot{\mathbf{z}} = \dot{\mathbf{z}} - \mathbf{l} \cdot \mathbf{z} - \mathbf{z} \cdot \mathbf{l}^T \quad (\text{A.22})$$

Esta derivada objetiva se compone de dos términos, el primero es una derivada material $\dot{\mathbf{z}}$ y el otro asociado al flujo a través del tensor de velocidad de deformación \mathbf{l} . Esta operación se conoce en geometría diferencial moderna como la *derivada de Lie* de un tensor espacial \mathbf{z} respecto a un campo de velocidad espacial \mathbf{v} y se indica mediante $L_v(\mathbf{z})$.

Con los elementos desarrollados hasta aquí, es posible derivar las expresiones necesarias para el análisis cinemático del problema de grandes deformaciones elasto-plásticas en el contexto de una descomposición multiplicativa del tensor de deformaciones.

A.2.2. Cinemática asociada a la descomposición multiplicativa

La característica esencial, asociada a la descripción micromecánica del modelo de descomposición multiplicativa, es la introducción de una *configuración intermedia* con respecto a la cual se caracteriza la respuesta elástica del material. Aquí se hará uso de las relaciones cinemáticas desarrolladas en el apartado anterior, y se tomarán además algunos conceptos del trabajo de Simo y Hughes (1998).

Todas las propiedades y definiciones aplicadas a las configuraciones original Ω_0 y deformada Ω_t presentados en el apartado anterior, son válidas aquí también. La configuración intermedia, como se observa en la Figura A.3 está indicada como Ω_t^i definida por un sistema de coordenadas cartesianas $\bar{\mathbf{X}}$ y se caracteriza por un tensor métrico $\bar{\mathbf{G}}$.

A partir de la definición del gradiente de deformación (A.4) y aplicando la regla de la cadena se obtiene:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \bar{\mathbf{X}}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p \quad (\text{A.23})$$

que se conoce como la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de la deformación en su parte elástica \mathbf{F}^e y plástica \mathbf{F}^p , definidas según:

$$\mathbf{F}^e = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \bar{\mathbf{X}}} \quad \mathbf{F}^p = \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}}{\partial \mathbf{X}} \quad (\text{A.24})$$

Se supone que el flujo plástico es isócoro, es decir que la parte plástica no modifica el volumen y de este modo se observa que el $J^p = \det(\mathbf{F}^p) = 1$, por ende:

$$J = \det[\mathbf{F}] = \det[\mathbf{F}^e] = J^e \quad (\text{A.25})$$

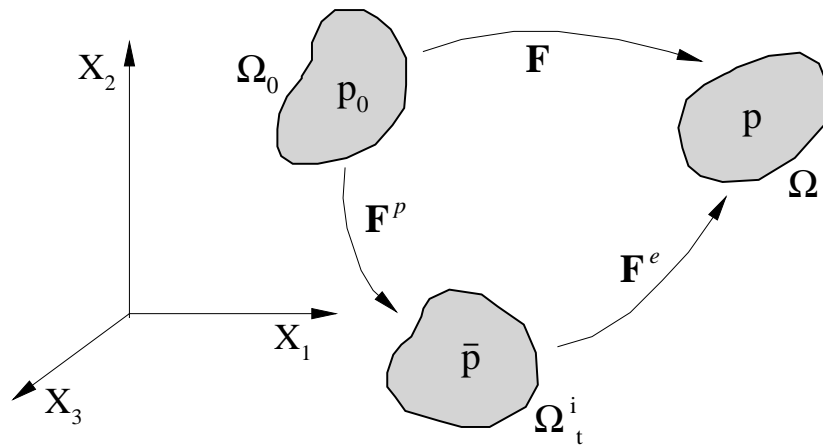


Figura A.3 – Configuración intermedia en la descomposición multiplicativa.

y es posible definir entonces:

$$\bar{\mathbf{F}}^e = J^{-1/3} \mathbf{F}^e \quad (\text{A.26})$$

donde $\bar{\mathbf{F}}^e$ en (A.26) es la parte de volumen constante del gradiente de deformación.

Desde un punto de vista micromecánico para el caso de plasticidad cristalina, el flujo plástico puede ser visto como el *flujo del material a través de su red cristalina asociado al movimiento de las dislocaciones*. Si se considera un cristal con una red cristalina simple, como se observa en la Figura A.4, podrá verse que el flujo plástico está caracterizado por el tensor gradiente plástico de la deformación \mathbf{F}^p y se manifiesta como una deformación plástica por corte siguiendo una de las direcciones de deslizamiento principal de la red cristalina.

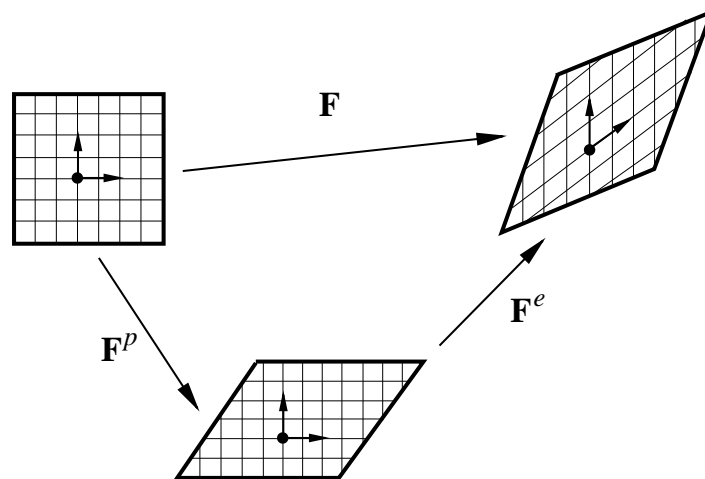


Figura A.4 – Aspecto micromecánico de la deformación elasto-plástica de un cristal simple.

Lógicamente si la deformación total del cristal se descompone de manera que $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p$, entonces \mathbf{F}^e tiene asociada la deformación causada por la rotación y alargamiento de la red cristalina, tal como se observa en la Figura A.4. Este mecanismo puede extenderse a casos más complejos, donde los planos de deslizamiento son múltiples y en varias direcciones. Motivados por la simpleza de este mecanismo, muchos autores han trabajado con este modelo en el área de la elasto-plasticidad con deformaciones moderadas y grandes.

Desde un punto de vista fenomenológico, se puede interpretar a \mathbf{F}^{e-1} como una deformación local que libera de tensiones al entorno de cada partícula (en la configuración actual Ω_t) que se transforma con este tensor. Y de acuerdo con este punto de vista, la configuración intermedia definida a partir de la inversa de la parte elástica del tensor gradiente de deformación \mathbf{F}^{e-1} , se suele denominar *configuración intermedia libre de tensiones*.

Tal como fue notado por Lee (1969), la descomposición multiplicativa *no es única* y se manifiesta en el hecho de que la configuración intermedia queda definida salvo ante un rotación de cuerpo rígido según un tensor de rotación arbitrario \mathbf{Q} , es decir si se toma $\mathbf{F}^e \mathbf{Q}$ y $\mathbf{Q}^T \mathbf{F}^p$ la ecuación (A.23) da el mismo resultado. Sin embargo tal como lo observan distintos autores, en el caso de materiales isótropos si bien esta rotación rígida modifica la parte elástica del tensor de deformaciones, también lo hace en la misma manera sobre las tensiones y por lo tanto no se altera el estado tensional resultante.

Siguiendo la notación usual de la mecánica del continuo, y los desarrollos presentados en el apartado anterior, el tensor derecho de Cauchy-Green puede definirse de manera similar a (A.7), través de:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \quad (\text{A.27})$$

además de este, podemos obtener otro tensor haciendo:

$$\mathbf{C}^p = \mathbf{F}^{pT} \cdot \mathbf{F}^p \quad (\text{A.28})$$

el tensor (A.28) representa la *parte plástica del tensor derecho de Cauchy-Green*, este tensor no había sido derivado en el apartado anterior y surge como consecuencia del esquema de descomposición multiplicativa.

Partiendo de (A.27) y (A.28) se pueden definir tensores de deformación Lagrangeanos, de la forma:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{1}) \quad (\text{A.29})$$

que es el tensor de deformación de Green-Lagrange totalmente equivalente a (A.8) y por otro lado es posible definir:

$$\mathbf{E}^p = \frac{1}{2} (\mathbf{C}^p - \mathbf{1}) \quad (\text{A.30})$$

que es la parte plástica del tensor de deformación de Green-Lagrange.

En las ecuaciones (A.29) y (A.30), $\mathbf{1}$ representa el tensor unitario simétrico con componentes δ_{ij} consecuencia de que el sistema de referencia es cartesiano (es decir los tensores métricos \mathbf{G} , \mathbf{g} y $\bar{\mathbf{G}}$ son idénticamente iguales a $\mathbf{1}$ debido a que en todas las configuraciones los sistemas que se han adoptado son cartesianos). Hay que considerar que los tensores \mathbf{C} , \mathbf{C}^p , \mathbf{E} y \mathbf{E}^p , son objetos asociados a la configuración de referencia Ω_0 .

De la misma manera que se obtuvieron estas relaciones, es posible también obtener tensores Eulerianos asociados a la configuración deformada Ω_t como:

$$\mathbf{b}^{-1} = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T)^{-1} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (\text{A.31})$$

donde se define el tensor de Finger similar a la definición en (A.10), partiendo de la inversa del tensor izquierdo de Cauchy-Green. Igualmente se obtiene:

$$\mathbf{b}^{e-1} = \mathbf{F}^{e-T} \cdot \mathbf{F}^{e-1} \quad (\text{A.32})$$

y a partir de estas dos expresiones se determina el tensor de Almansi similar a la definición en (A.11), y que se repite a continuación:

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} (\mathbf{1} - \mathbf{b}^{-T}) \quad (\text{A.33})$$

es también posible determinar un nuevo tensor, la *parte elástica del tensor de Almansi*, cuya definición es:

$$\mathbf{e}^e = \frac{1}{2} (\mathbf{1} - \mathbf{b}^{e-1}) \quad (\text{A.34})$$

Que surge como consecuencia del modelo, por la existencia de la configuración intermedia, y está asociado a la transformación impuesta por la parte elástica del tensor gradiente de la deformación \mathbf{F}^e . Se puede observar que se usa indistintamente la misma notación para el tensor unitario simétrico $\mathbf{1}$ en la definición de las medidas de deformación Euleriana (A.33) y (A.34).

Si se observan las ecuaciones (A.17) y (A.23) se puede notar que es factible emplear la descomposición multiplicativa en el gradiente de la velocidad, de modo que aplicando la regla de la cadena:

$$\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{F}}^e \cdot \mathbf{F}^{e-1} + \dot{\mathbf{F}}^p \cdot \mathbf{F}^{p-1} = \mathbf{l}^e + \mathbf{l}^p \quad (\text{A.35})$$

donde queda de manifiesto que el tensor gradiente de la velocidad puede descomponerse en la suma de sus partes elástica y plástica. La ecuación (A.35) resulta importante en la definición de la evolución de la configuración intermedia.

Igualmente las partes plástica y elástica del tensor gradiente de la velocidad pueden verse como la suma de una parte simétrica más otra parte antisimétrica, de forma tal que:

$$\mathbf{l}^e = \mathbf{d}^e + \mathbf{w}^e \quad (\text{A.36})$$

y también:

$$\mathbf{l}^p = \mathbf{d}^p + \mathbf{w}^p \quad (\text{A.37})$$

en donde se tiene, de acuerdo a (A.18), los tensores de alargamiento y velocidad de rotación, en sus partes elástica (A.36) y plástica (A.37).

Además de estas ecuaciones (A.27)-(A.37), se pueden definir otras relaciones cinemáticas e inclusive encontrar algunas similitudes con la descomposición aditiva del tensor de deformaciones, propio del modelo aditivo de Green y Naghdi (1965), como lo manifiesta García Garino (1993) en su trabajo. Hay que destacar que en el caso de procesos elásticos, la configuración intermedia permanece fija y como consecuencia de esto el tensor \mathbf{F}^p es constante, lo que implica un gradiente de velocidad de deformación plástico \mathbf{l}^p nulo.

Hasta aquí las expresiones introducidas responden a un enfoque netamente lagrangeano y se obtienen a partir del tensor gradiente total de deformaciones \mathbf{F}_n , el cual relaciona el sólido deformado en la configuración Ω_t con la configuración original indeformada Ω_0 . Este enfoque lagrangeano total es el que se empleo en el trabajo previo de Castelló (2005). Sin embargo en el trabajo de García Garino (1993) se propone un esquema del tipo lagrangeano actualizado, en el cual se actualiza continuamente la configuración de referencia, el cual mejora la eficiencia del algoritmo y en particular en la integración de la ecuación constitutiva.

Este enfoque lagrangeano actualizado surge de considerar las ecuaciones (A.1) a (A.4), y de acuerdo con la Figura A.5 se puede obtener el *gradiente de deformación total* en el paso actual \mathbf{F}_{n+1} asociado a la configuración $\Omega_{t+\Delta t}$ como:

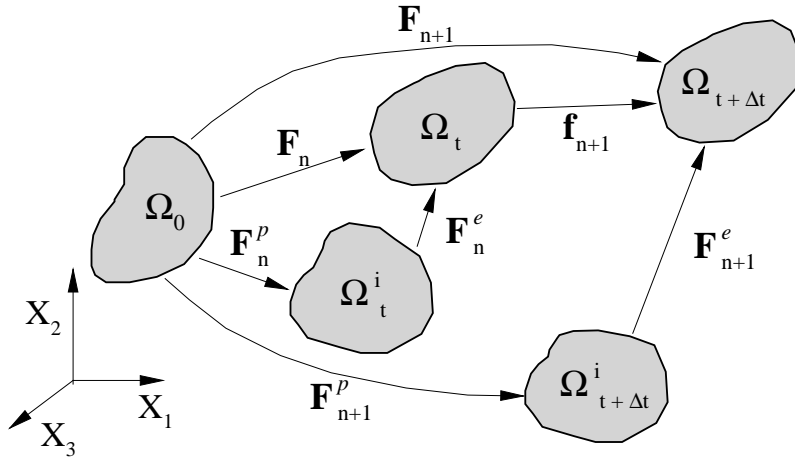


Figura A.5 – Esquema de la configuración intermedia y gradiente relativo.

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{n+1} &= \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \phi_n}{\partial \mathbf{X}} + [\nabla_{x_n} \mathbf{u}_n] \frac{\partial \phi_n}{\partial \mathbf{X}} \\ &= [\mathbf{1} + \nabla_{x_n} \mathbf{u}_n] \mathbf{F}_n\end{aligned}\quad (\text{A.38})$$

y por otra parte aplicando derivadas parciales se puede obtener:

$$\mathbf{F}_{n+1} = \frac{\partial \mathbf{x}_{n+1}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}_{n+1}}{\partial \mathbf{x}_n} \frac{\partial \mathbf{x}_n}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{f}_{n+1} \mathbf{F}_n \quad (\text{A.39})$$

Se puede observar entonces, a partir de las ecuaciones (A.38) y (A.39), que el *gradiente relativo* \mathbf{f}_{n+1} puede evaluarse según:

$$\mathbf{f}_{n+1} = \frac{\partial \mathbf{x}_{n+1}}{\partial \mathbf{x}_n} = \mathbf{1} + \nabla_{x_n} \mathbf{u}_n \quad (\text{A.40})$$

o bien puede obtenerse de acuerdo a (A.39) como:

$$\mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{F}_n^{-1} \quad (\text{A.41})$$

y a partir de esta última, considerando la descomposición (A.23), la parte elástica del tensor gradiente de deformaciones en la configuración actual resulta:

$$\mathbf{F}_{n+1}^e = \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{F}_n^{p-1} = \mathbf{f}_{n+1} (\mathbf{F}_n \mathbf{F}_n^{p-1}) = \mathbf{f}_{n+1} \mathbf{F}_n^e$$

De modo que el tensor de Finger elástico, que permite luego evaluar la ecuación (A.34), se puede obtener con:

$$\mathbf{b}_{n+1}^{e-1} = [\mathbf{F}_{n+1}^{e-T} \mathbf{F}_{n+1}^e]^{-1} = \mathbf{f}_{n+1}^{-T} (\mathbf{b}_n^{e-1}) \mathbf{f}_{n+1}^{-1}$$

es por este motivo que en la formulación propuesta por García Garino (1993) se emplea la inversa del gradiente de deformación relativo \mathbf{f}_{n+1}^{-1} , por lo tanto a partir de (A.40) y (A.41) se puede definir:

$$\mathbf{f}_{n+1}^{-1} = \frac{\partial \mathbf{x}_n}{\partial \mathbf{x}_{n+1}} = \mathbf{1} - \nabla_{x_n} \mathbf{u}_n = \mathbf{F}_n \mathbf{F}_{n+1}^{-1} \quad (\text{A.42})$$

A.3. Ecuaciones de la mecánica del continuo

En esta sección se presentan las leyes de conservación o balance asociadas a la mecánica del continuo, además de algunas relaciones entre tensiones y deformaciones que resultan conjugadas desde el punto de vista del trabajo. Estas leyes representan el punto de partida para obtener las leyes de gobierno del problema termomecánico que se aborda a lo largo de este trabajo. Las formulaciones presentadas a continuación están basadas en los trabajos de Dhondt (2004) y Bonet y Wood (1997), sin embargo algunas de ellas han sido modificadas para adecuarlas al enfoque que se hace en este trabajo sobre los problemas termomecánicos.

A.3.1. Leyes de conservación

Las leyes de conservación son un conjunto de principios los cuales describen el comportamiento de algunas magnitudes físicas y termodinámicas importantes como: la masa, la cantidad de movimiento lineal, la cantidad de movimiento angular, y la energía. Estas leyes serán definidas a continuación y se obtendrán las expresiones necesarias para a posteriori, en la Sección A.4 y a partir del Principio de Trabajos Virtuales, encontrar las ecuaciones a discretizar aplicando el método de elementos finitos.

Conservación de la masa. Todo punto material en el espacio tiene una propiedad estrictamente positiva denominada *masa*, se asume que esta propiedad está distribuida de manera continua en un cuerpo y esto da lugar a la definición de densidad $\rho(\mathbf{X}, t)$. Por definición la densidad de un punto material en la configuración de referencia ${}^0\Omega$ y en el instante de tiempo inicial t_0 es:

$$\rho_0(\mathbf{X}, t_0) = \lim_{\Delta V_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta V_0} \quad (\text{A.43})$$

de modo que alternativamente puede definirse la densidad en la configuración deformada o actual según:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta V} \quad (\text{A.44})$$

la ley de conservación de masa establece que la *velocidad de cambio de la masa de un sistema es nula*, o bien puede escribirse como:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V \rho dV \right) = 0 \quad (\text{A.45})$$

Antes de proseguir con las ecuaciones de balance, se introducirán las transformaciones que sufren el volumen, la densidad y la superficie entre dos configuraciones diferentes. En primer lugar un pequeño elemento de volumen dV_0 en la configuración original Ω_0 está relacionado con un elemento dV en la configuración deformada Ω_t , según:

$$dV = J dV_0 \quad (\text{A.46})$$

donde $J = \det[\mathbf{F}]$, esta expresión puede obtenerse a partir de la distorsión que sufre un volumen elemental desde la configuración original hacia la configuración deformada. De igual manera en el caso de la densidad, considerando la conservación de la masa, la transformación está dada por:

$$\rho = J^{-1} \rho_0 \quad (\text{A.47})$$

Por último en el caso de la transformación de superficies es algo más elaborado, puesto que un elemento de área $d\mathbf{A}$ es un vector (con magnitud dA y dirección \mathbf{n}) como se observa en la Figura A.6. Si consideramos un vector arbitrario $d\mathbf{L}_0$ en la configuración indeformada, el mismo vector en la configuración actual resulta $d\mathbf{L} = \mathbf{F}d\mathbf{L}_0$, y por lo tanto si consideramos la relación (A.46) entonces:

$$Jd\mathbf{L}_0 \cdot d\mathbf{A}_0 = (\mathbf{F}d\mathbf{L}_0) \cdot d\mathbf{A} \quad (\text{A.48})$$

de modo que la relación entre dos elementos de área en las configuraciones material Ω_0 y la configuración deformada Ω_t se define a partir según:

$$\mathbf{n}dA = J\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0dA_0 \quad (\text{A.49})$$

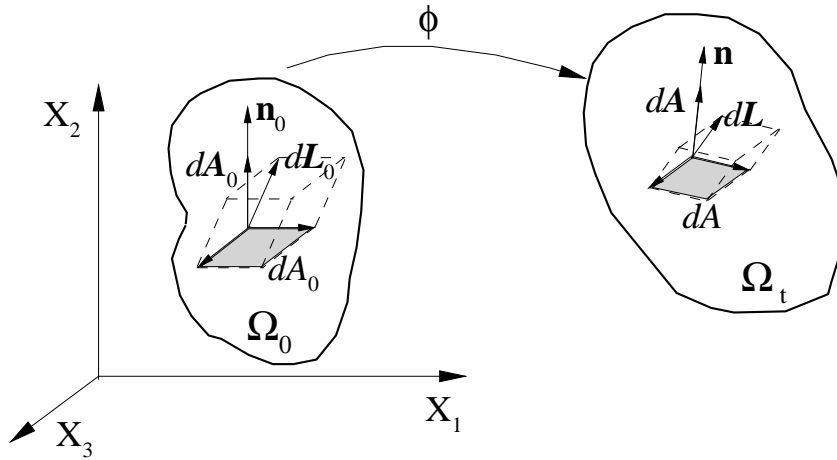


Figura A.6 – Cambios geométricos entre las configuraciones indeformada y actual

Una noción importante en las leyes de balance lo constituye el principio de localización de las mismas, es decir surge de la hipótesis fuerte de que las leyes son válidas para cualquier cuerpo indiferentemente de su tamaño. Este principio da lugar a la forma diferencial o local de las ecuaciones de balance, a partir de (A.46) la ecuación (A.45) puede escribirse:

$$\int_{V_0} \frac{d}{dt} \rho J dV_0 = 0 \quad (\text{A.50})$$

y dado que esta expresión debe satisfacerse para cualquier volumen, entonces:

$$\frac{d}{dt} (\rho J) = 0 \quad (\text{A.51})$$

la cual, siendo $J = \det [\mathbf{F}]$, resulta:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot \mathbf{v} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{A.52})$$

que resulta equivalente a:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{A.53})$$

La forma espacial establecida en la (A.51), puede reescribirse rápidamente a la forma material aprovechando (A.47) (referida a la configuración original) como:

$$\frac{d}{dt}(\rho_0) = 0 \quad (\text{A.54})$$

Conservación de la cantidad de movimiento lineal. La cantidad de movimiento asociada a una partícula de masa infinitesimal dm con una velocidad \mathbf{v} , está dada por:

$$\mathbf{v}dm = \rho\mathbf{v}dV \quad (\text{A.55})$$

el principio de conservación de cantidad de movimiento establece que *la velocidad de cambio de la cantidad de movimiento es igual a la fuerza total actuando sobre el cuerpo*, y estas fuerzas involucran fuerzas sobre el volumen cuerpo resultantes de acciones distantes como la gravedad, fuerzas sobre el contorno del cuerpo resultantes de fricción por contacto o presión, y fuerzas concentradas. En particular para las fuerzas sobre volumen y sobre la superficie se puede establecer:

$$d\mathbf{f}_b = \rho\mathbf{b}_f dV \quad (\text{A.56})$$

$$d\mathbf{f}_a = \mathbf{t}_n dA \quad (\text{A.57})$$

en donde \mathbf{b}_f es el vector fuerza por unidad de volumen y \mathbf{t}_n el vector fuerza por unidad de área. Por lo tanto denominando \mathbf{f}_c a las fuerzas concentradas, el principio puede escribirse como:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho\mathbf{v}dV = \int_V \rho\mathbf{b}_f dV + \oint_A \mathbf{t}_n dA + \sum \mathbf{f}_c \quad (\text{A.58})$$

Esta ecuación es susceptible de ser escrita en forma local, sin embargo previamente se debe trabajar con el término en el contorno para poder expresarlo como una integral de volumen. Para esto se emplea el Teorema de Cauchy y se expresa al vector fuerza por unidad de superficie a partir de la proyección del tensor de tensiones en la dirección de la normal a la superficie, de modo que resulta:

$$\oint_A \mathbf{t}_n dA = \oint_A \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dA = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV \quad (\text{A.59})$$

por lo tanto la ecuación (A.58), considerando (A.46), puede escribirse localmente según:

$$\frac{d}{dt}(\rho\mathbf{v})J = \rho\mathbf{b}_f J + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} J \quad (\text{A.60})$$

o bien, aplicando la ecuación de balance másica (A.51) y dividiendo ambos miembros por J , se obtiene:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho\mathbf{b}_f + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{A.61})$$

siendo esta última la forma local de la ley de cantidad de movimiento lineal en aquellos puntos donde no existen cargas concentradas.

En el caso de este principio resulta un poco más complejo encontrar la forma material equivalente a la ecuación (A.61). Una opción es emplear la (A.49), en la (A.59), y luego aplicar el Teorema de Cauchy:

$$\oint_A \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dA = \oint_{A_0} J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0 dA_0 = \int_{V_0} \nabla_0 \cdot \mathbf{P} dV_0 \quad (\text{A.62})$$

en donde $\mathbf{P} = J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}$ es el tensor de tensiones medido en la configuración original indeformada al que llamaremos primer tensor de Piola-Kirchhoff el cual es no simétrico debido al gradiente de deformaciones \mathbf{F} . Ahora aplicando las ecuaciones (A.46) y (A.47), en la (A.58), se llega a una expresión como la siguiente:

$$\rho_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho_0 \mathbf{b}_f + \nabla_0 \cdot \mathbf{P} \quad (\text{A.63})$$

Conservación de la cantidad de movimiento angular. La cantidad de movimiento angular de una partícula infinitesimal de masa dm , cuya velocidad de movimiento es \mathbf{v} y cuya posición en el espacio está definida por \mathbf{x} , y dada por:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{v} dm = \mathbf{x} \times \mathbf{v} \rho dV \quad (\text{A.64})$$

y similarmente el momento de una fuerza \mathbf{f} aplicada en un punto \mathbf{x} puede evaluarse como $\mathbf{m} = \mathbf{x} \times \mathbf{f}$. Y el principio de conservación de la cantidad de movimiento angular establece que *la velocidad de cambio en la cantidad de movimiento angular es igual al momento total y las cuplas actuando sobre el cuerpo*, o bien:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{x} \times \mathbf{v} dV = \int_V \rho \mathbf{x} \times \mathbf{b}_f dV + \oint_A \mathbf{x} \times \mathbf{t}_n dA + \sum \mathbf{x} \times \mathbf{f}_c + \sum \mathbf{m}_c \quad (\text{A.65})$$

en donde \mathbf{m}_c son los momentos concentrados. Esta ecuación asume que no existen momentos distribuidos, lo cual representa básicamente que esta ecuación es válida para teorías no polares.

La forma de local de la ecuación (A.65), sin considerar la fuerzas y momentos concentrados, teniendo en cuenta la ecuación (A.60) resulta:

$$\frac{d}{dt} (\rho J \mathbf{x} \times \mathbf{v}) = \rho J \mathbf{x} \times \mathbf{b}_f + \nabla \cdot (J \mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma}) \quad (\text{A.66})$$

o bien puede reescribirse como:

$$\frac{d}{dt} (\rho J) \mathbf{x} \times \mathbf{v} + J \mathbf{x} \times \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho J \mathbf{x} \times \mathbf{b}_f + J \nabla \cdot \mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma} + J \mathbf{x} \times \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{A.67})$$

y reordenando algunos términos:

$$\frac{d}{dt} (\rho J) \mathbf{x} \times \mathbf{v} + J \mathbf{x} \times \left(\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \rho \mathbf{b}_f - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) = J \nabla \cdot \mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{A.68})$$

la cual en virtud de las ecuaciones (A.51) y (A.61), resulta:

$$\nabla \cdot \mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (\text{A.69})$$

una importante consecuencia de (A.69) (ver el trabajo Dhondt (2004), pg. 32) es que el tensor de tensiones de Cauchy es simétrico:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad (\text{A.70})$$

Conservación de la energía. Este principio establece que *la velocidad de cambio de la suma de energía cinética y energía interna es igual a la suma de la potencia de todas las fuerzas y cuplas aplicadas al cuerpo más toda otra energía que intercambie el cuerpo por unidad de tiempo*. La energía cinética de un cuerpo puede expresarse como:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_V (\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} dV \quad (\text{A.71})$$

y la potencia de todas las fuerzas y cuplas según:

$$\mathcal{W} = \int_V \rho \mathbf{b}_f \cdot \mathbf{v} dV + \oint_A \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{v} dA + \sum \mathbf{f}_c \cdot \mathbf{v}_c + \sum \mathbf{m}_c \cdot \boldsymbol{\omega}_c \quad (\text{A.72})$$

en donde $\boldsymbol{\omega}_c$ es la velocidad angular de la partícula donde está aplicada el momento concentrado \mathbf{m}_c .

La energía interna se asume distribuida de manera continua en el cuerpo de manera que puede definirse a partir de una densidad de energía interna de modo que:

$$\mathcal{U} = \int_V \rho u dV \quad (\text{A.73})$$

Otros tipos de energía pueden ser de origen térmico, por reacciones químicas, o acciones electromagnéticas, etc.; en particular en este trabajo las acciones relevantes son de origen termomecánicas, por ende solo se incluirán los términos asociados a la energía térmica:

$$\mathcal{Q} = - \oint_A \mathbf{q} dA + \int_V \rho h dV + \sum H_c \quad (\text{A.74})$$

en donde \mathbf{q} es el flujo de calor a través del área dA (el signo negativo implica pérdida de calor cuando el flujo es saliente), h es la densidad de calor y H_c las fuentes de calor concentradas. A partir de las ecuaciones (A.71) a (A.74), el principio de conservación de la energía se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \left(\rho u + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) dV &= \int_V (\rho \mathbf{b}_f \cdot \mathbf{v} + \rho h) dV + \oint_A (\mathbf{t}_n \cdot \mathbf{v} - \mathbf{q}) dA \\ &+ \sum \mathbf{f}_c \cdot \mathbf{v}_c + \sum \mathbf{m}_c \cdot \boldsymbol{\omega}_c + \sum H_c \end{aligned} \quad (\text{A.75})$$

esta es la también llamada *primera ley de la termodinámica*.

La forma local de la (A.75), considerando el Teorema de Cauchy (ver ecuación A.59) y sin tener en cuenta las acciones concentradas mecánicas y térmicas, resulta:

$$\frac{d}{dt} \left(\rho J u + \frac{1}{2} \rho J \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) = J \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) - J \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho J \mathbf{b}_f \cdot \mathbf{v} + \rho J h \quad (\text{A.76})$$

siendo:

$$\nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = (\nabla \mathbf{v}) : \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \quad (\text{A.77})$$

entonces la (A.76) puede reescribirse como:

$$\rho J \frac{du}{dt} + J \mathbf{v} \cdot \left(\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{b}_f \right) = J (\nabla \mathbf{v}) : \boldsymbol{\sigma} - J \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho J h \quad (\text{A.78})$$

la cual en virtud de la (A.61) termina siendo:

$$\rho \frac{du}{dt} = (\nabla \mathbf{v}) : \boldsymbol{\sigma} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho h \quad (\text{A.79})$$

en donde se observa que la velocidad de cambio de la energía interna por unidad de tiempo es igual a la potencia deformativa $(\nabla \mathbf{v}) : \boldsymbol{\sigma}$, el flujo de calor $-\nabla \cdot \mathbf{q}$, y la potencia de la fuente térmica ρh . La potencia deformativa puede reescribirse considerando la siguiente ecuación como:

$$(\nabla \mathbf{v}) : \boldsymbol{\sigma} = \left(\nabla \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) : \boldsymbol{\sigma} = \left(\frac{d}{dt} \nabla \mathbf{x} \right) : \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{A.80})$$

De modo que la ecuación (A.79) puede reescribirse entonces como:

$$\rho \frac{du}{dt} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} : \boldsymbol{\sigma} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho h \quad (\text{A.81})$$

la cual a partir de (A.16) y (A.18), considerando que el producto entre un tensor simétrico y uno asimétrico resulta nulo, se puede escribir en función del tensor velocidad de deformación:

$$\rho \frac{du}{dt} = \mathbf{d} : \boldsymbol{\sigma} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho h \quad (\text{A.82})$$

y su forma material, considerando las ecuaciones (A.47) y (A.49), como:

$$\rho_0 \frac{du}{dt} = \dot{\mathbf{F}} : \mathbf{P} - \nabla_0 \cdot \mathbf{q}_0 + \rho_0 h \quad (\text{A.83})$$

en donde se observa nuevamente el primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff \mathbf{P} , y el vector de flujo de calor medido en la configuración original \mathbf{q}_0 .

El primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff (al igual que el tensor gradiente de deformaciones) es un tensor de dos puntos, es decir el mismo no está completamente relacionado con la configuración material. Es habitual entonces trabajar con el segundo tensor de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} , el cual posee la ventaja de ser simétrico, el mismo puede definirse a partir del pull-back del vector diferencial de fuerzas en la configuración actual:

$$d\mathbf{F}_a = \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{f}_a = \mathbf{F}^{-1} (\mathbf{t}_n dA) \quad (\text{A.84})$$

la cual, según las ecuaciones (A.49) y (A.62), puede escribirse como:

$$d\mathbf{F}_a = \mathbf{F}^{-1} \left(J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0 dA_0 \right) = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}_0 dA_0 = \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}_0 dA_0 \quad (\text{A.85})$$

donde el segundo tensor de Piola-Kirchhoff queda definido como $\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} = J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}$. Por otra parte el primer término del miembro derecho de la ecuación (A.82), a partir de la (A.85), se puede reescribir como:

$$\mathbf{d} : \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{d} : \left(J^{-1} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T \right) = J^{-1} \left(\mathbf{F}^T d\mathbf{F} \right) : \mathbf{S} \quad (\text{A.86})$$

en la ecuación (A.86) la expresión entre paréntesis en el último término es el pull-back del tensor velocidad de de deformaciones, el cual en la configuración material resulta el cambio temporal en el tensor de deformaciones de Lagrange $\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^T d\mathbf{F}$. De modo que la versión de la ecuación (A.82) completamente asociada a la configuración material, teniendo en cuenta la (A.46) y (A.86), resulta:

$$\rho_0 \frac{du}{dt} = \dot{\mathbf{E}} : \mathbf{S} - \nabla_0 \cdot \mathbf{q}_0 + \rho_0 h \quad (\text{A.87})$$

Desigualdad de Clausius-Duhem. Este principio, denominado también segunda ley de la termodinámica, establece que *la velocidad de cambio de la entropía de un cuerpo nunca es menor que la suma del flujo de entropía que ingresa al cuerpo más la entropía generada por fuentes en el cuerpo*. La entropía aparece en termodinámica como una función de estado relacionada con el calor. Es decir este principio se puede escribir de la forma:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} \geq \mathcal{G} + \oint_A \mathbf{s}dA \quad (\text{A.88})$$

donde a los fines prácticos se puede definir la entropía a partir de un función densidad de entropía η y e igualmente para las fuentes g , según:

$$\mathcal{H} = \int_V \rho\eta dV \quad (\text{A.89})$$

y

$$\mathcal{G} = \int_V \rho g dV \quad (\text{A.90})$$

de modo que la ecuación (A.88) se puede reescribir como:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho\eta dV \geq \int_V \rho g dV + \oint_A \mathbf{s}dA \quad (\text{A.91})$$

en donde no han sido tenidas en cuentas algunas contribuciones electromagnéticas y químicas.

Aplicando las mismas ecuaciones e ideas empleadas en los restantes principios, se puede obtener la forma localizada de la desigualdad de Clausius-Duhem, siendo:

$$\rho \frac{d\eta}{dt} \geq \rho g + \nabla \cdot \mathbf{s} \quad (\text{A.92})$$

y posteriormente desde el punto de vista material la ecuación (A.92) puede escribirse como:

$$\rho_0 \frac{d\eta}{dt} \geq \rho_0 g + \nabla_0 \cdot \mathbf{s}_0 \quad (\text{A.93})$$

en donde de la misma manera que en la ecuación (A.83), \mathbf{s}_0 es el vector flujo de entropía medido sobre la configuración inicial.

A.3.2. Principio de trabajo virtuales

Entre los métodos variacionales más involucrados en el desarrollo de la mecánica del continuo, el principio de los desplazamientos virtuales a jugado un papel fundamental. También llamado principio de trabajos virtuales, resulta similar al primer principio de la termodinámica aunque no es realmente un principio físico, el trabajo se calcula a partir de fuerzas y tensiones estáticamente admisibles que se suponen constantes mientras realizan trabajo sobre un conjunto infinitesimal de desplazamientos cinemáticamente admisibles. Es decir las tensiones no necesitan ser las actuantes sobre el material, como así tampoco los desplazamientos deben ser los reales. Por otra parte las tensiones y deformaciones pueden ser descritas en forma independiente, lo que difiere en el caso de movimiento real de un cuerpo en cual el movimiento da lugar a deformaciones las cuales generan tensiones a través de las relaciones cinemáticas del material.

Una distribución de tensiones estáticamente admisible se define como aquella que satisface las ecuaciones de equilibrio en el interior del cuerpo y las condiciones de contorno en aquellos puntos del mismo donde se han prescrito las acciones. Existen normalmente distintas posibles distribuciones de tensiones admisibles, todas satisfaciendo los requisitos de equilibrio. Una distribución cinemáticamente admisible es aquella que satisface las condiciones de desplazamientos prescritos en el contorno y que posea primeras derivadas parciales continuas en el interior del cuerpo. Dado que el desplazamiento virtual se considera un magnitud infinitesimal adicional a partir de la configuración de equilibrio, debe anularse en todo lugar donde el desplazamiento verdadero este prescrito como nulo.

Si se considera un cuerpo en una configuración de equilibrio determinada, se supone además que a cada punto del cuerpo se le imprime un desplazamiento virtual infinitesimal δu_i a partir de la mencionada configuración, también se considera que los desplazamiento virtuales δu_i tienen primeras derivadas parciales continuas respecto de x_i (con $i = 1, \dots, 3$) y que además $\delta u_i = 0$ en aquellos puntos del contorno donde los desplazamientos verdaderos están prescritos (satisfacer las condiciones de contorno implica que no se permiten desplazamientos virtuales adicionales δu_i donde las condiciones de contorno fijan el valor de u_i). La denominación desplazamiento virtual obedece a que no son desplazamientos verdaderos, sino simplemente desplazamientos hipotéticos cinemáticamente posibles.

Las condiciones de contorno puede establecerse, a partir de la elección de un sistema cartesiano (usualmente con un eje normal al contorno), en cada punto del contorno y se exige que:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{1j}\bar{n}_j = \bar{t}_1 & \quad \text{o} \quad \delta\bar{u}_1 = 0 & \quad \text{pero no ambos} \\ \bar{\sigma}_{2j}\bar{n}_j = \bar{t}_2 & \quad \text{o} \quad \delta\bar{u}_2 = 0 & \quad \text{pero no ambos} \\ \bar{\sigma}_{3j}\bar{n}_j = \bar{t}_3 & \quad \text{o} \quad \delta\bar{u}_3 = 0 & \quad \text{pero no ambos} \end{aligned}$$

El trabajo virtual externo δW_{ext} , de las fuerzas externas de contorno t_i y de las fuerzas másicas b_i se define:

$$\delta W_{ext} = \int_A \sigma_{ij}n_j \delta u_i dA + \int_V \rho b_i \delta u_i dV \quad (\text{A.94})$$

donde se puede utilizar el teorema de la divergencia y resulta:

$$\delta W_{ext} = \int_V \left[\sigma_{ij} \frac{\partial (\delta u_i)}{\partial x_j} + \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i \right) \delta u_i \right] dV \quad (\text{A.95})$$

El término entre paréntesis se anula debido a las ecuaciones de equilibrio. Y por otro lado se tiene $\frac{\partial (\delta u_i)}{\partial x_j} = \delta \varepsilon_{ij} + \delta \omega_{ij}$ en donde:

$$\delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{A.96})$$

$$\delta \omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{A.97})$$

que son las deformaciones y rotaciones virtuales asociadas a los campos de desplazamientos virtuales infinitesimales. Se debe destacar que si bien se ha establecido un campo de desplazamientos infinitesimal, no existe restricción con respecto a la magnitud de los desplazamientos verdaderos desde alguna configuración de referencia hacia alguna configuración de equilibrio, por lo cual el principio puede usarse en problemas con desplazamientos y deformaciones finitas.

Reemplazando (A.96) y (A.97) en (A.95), resulta:

$$\sigma_{ij} \frac{\partial (\delta u_i)}{\partial x_j} = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \sigma_{ij} \delta \omega_{ij} \quad (\text{A.98})$$

donde el segundo término es nulo por tratarse del producto entre un tensor simétrico y otro antisimétrico. En consecuencia la ecuación (A.95) toma la forma:

$$\delta W_{ext} = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \quad (\text{A.99})$$

Esta ecuación establece que si el campo de tensiones es estáticamente admisible, el trabajo virtual de la fuerzas externas de cualquier campo de desplazamientos virtuales cinemáticamente admisible es igual a (A.99). De manera inversa, si se satisface que el trabajo virtual de las fuerzas externas prescritas es igual (A.99) para un supuesto campo de tensiones σ_{ij} y para todo campo de desplazamientos virtuales cinemáticamente admisible, entonces el campo de tensiones es estáticamente admisible (es decir satisface el equilibrio en el interior del cuerpo y las condiciones de contorno de fuerzas de superficie). Ambas propuestas conforman el Principio de Desplazamientos Virtuales.

La prueba de la proposición inversa se hace partiendo de la hipótesis:

$$\int_A \bar{t}_i \delta \bar{u}_i dA + \int_V \rho b_i \delta u_i dV = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \quad (\text{A.100})$$

luego sumando y restando $\bar{\sigma}_{ij} \bar{n}_j \delta \bar{u}_i$ en la integral de superficie, agregando $\sigma_{ij} \delta \omega_{ij} = 0$ en la integral de volumen a la derecha. Notando además que $\bar{\sigma}_{ij} \bar{n}_j \delta \bar{u}_i = \sigma_{ij} n_j \delta u_i$, entonces:

$$\int_A [\bar{t}_i - \bar{\sigma}_{ij} \bar{n}_j] \delta \bar{u}_i dA + \int_A \sigma_{ij} n_j \delta u_i dA + \int_V \rho b_i \delta u_i dV = \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial (\delta u_i)}{\partial x_j} dV \quad (\text{A.101})$$

usando el teorema de la divergencia en la segunda integral, la ecuación anterior se transforma a:

$$\int_A [\bar{t}_i - \bar{\sigma}_{ij} \bar{n}_j] \delta \bar{u}_i dA + \int_V \left[\frac{\partial (\sigma_{ij} \delta u_i)}{\partial x_j} + \rho b_i \delta u_i \right] dV = \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial (\delta u_i)}{\partial x_j} dV \quad (\text{A.102})$$

con lo cual se obtiene:

$$\int_A (\bar{t}_i - \bar{\sigma}_{ij} \bar{n}_j) \delta \bar{u}_i dA + \int_V \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i \right) \delta u_i dV = 0 \quad (\text{A.103})$$

La ecuación (A.103) se satisface para cualquier δu_i , entonces los términos entre paréntesis en las integrales deben anularse. Es fácil demostrar para la integral de volumen que si se supone un punto interior donde δu_i es positivo por ser continuo también existirá un entorno donde será positivo, y allí además es positivo el término entre paréntesis. Luego la integral definida a partir del producto de dos números positivos debería ser también positiva, lo cual es una contradicción pues la integral en un entorno esférico alrededor del punto en estudio tiene la forma:

$$\int_{esfera} \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i \right) \delta u_i dV = 0 \quad (\text{A.104})$$

y de la misma manera se puede probar que el término entre paréntesis de la integral de superficie debe anularse. En consecuencia se demuestra que la distribución de tensiones

supuesta satisface las condiciones de contorno de fuerzas y con esto se completa la prueba de que es estáticamente admisible.

Se debe notar que este principio no tiene nada que ver con la conservación de energía. Y por lo tanto puede aplicarse incluso cuando la energía mecánica no se conserva, por ejemplo para el caso de deformaciones plásticas.

El principio de trabajos virtuales puede ser también definido en términos de los tensores de Piola-Kirchhoff en la configuración de referencia. El trabajo virtual de las fuerzas externas sobre un campo de desplazamientos virtuales infinitesimales $\delta \mathbf{u}$ a partir de la configuración deformada es:

$$\delta W_{ext} = \int_A \mathbf{t}_n \cdot \delta \mathbf{u} dA + \int_V \rho \mathbf{b}_f \cdot \delta \mathbf{u} dV \quad (\text{A.105})$$

sin embargo $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$ y entonces $\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{x}$. Por otra parte como se definió anteriormente $\mathbf{t}_n d\mathbf{A} = \mathbf{t}_{n0} d\mathbf{A}_0$, donde \mathbf{t}_{n0} es el pseudo-vector de tensión que da la fuerza sobre el elemento deformado $d\mathbf{A}_0$ por unidad de área indeformada, luego:

$$\delta W_{ext} = \int_{A_0} \mathbf{t}_{n0} \cdot \delta \mathbf{x} dA + \int_{V_0} \rho \mathbf{b}_f [\mathbf{x}(\mathbf{X})] \cdot \delta \mathbf{x} J dV \quad (\text{A.106})$$

donde $J = \det[\mathbf{F}] = \frac{\rho_0}{\rho}$ es el determinante jacobiano por el cambio a coordenadas materiales para obtener la integral sobre el volumen indeformado, con lo cual:

$$\rho_0 \mathbf{b}_f = J \rho \mathbf{b}_f [\mathbf{x}(\mathbf{X})] \quad (\text{A.107})$$

que denota la fuerza másica en la configuración deformada por unidad de volumen indeformado, donde $\rho_0 \mathbf{b}_f$ es la fuerza másica por unidad de masa. Por lo tanto siendo $\mathbf{t}_{n0} = \mathbf{P} \mathbf{n}_0$, resulta:

$$\delta W_{ext} = \int_{A_0} (\mathbf{P} \mathbf{n}_0) \cdot \delta \mathbf{x} dA + \int_{V_0} \rho_0 \mathbf{b}_f \cdot \delta \mathbf{x} dV \quad (\text{A.108})$$

donde \mathbf{P} es el primer tensor de Piola-Kirchhoff. Trabajando en componentes cartesianas rectangulares y transformando la integral de área a una integral sobre volumen (a través del teorema de la divergencia) se obtiene:

$$\delta W_{ext} = \int_{V_0} \left[P_{ij} \frac{\partial (\delta x_i)}{\partial X_j} + \left(\frac{\partial P_{ij}}{\partial X_j} + \rho_0 b_i \right) \delta x_i \right] dV \quad (\text{A.109})$$

La expresión entre paréntesis se anula por las ecuaciones de movimiento en forma referencial (A.63), considerando que las fuerzas másicas no intervienen (equilibrio estático $d\mathbf{v}/dt = 0$). Por otra parte:

$$\frac{\partial (\delta x_i)}{\partial X_j} = \delta \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \delta F_{ij} \quad (\text{A.110})$$

es la componente del cambio virtual del tensor gradiente de deformaciones $\delta \mathbf{F}$.

Entonces se obtiene:

$$\delta W_{ext} = \int_{V_0} P_{ij} \delta F_{ij} dV = \int_{V_0} \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{F} dV \quad (\text{A.111})$$

en donde se debe considerar que ni \mathbf{P} ni \mathbf{F} son simétricos y por lo tanto es necesario tener algún cuidado en la evaluación de esta ecuación. La ecuación (A.111) implica que

\mathbf{F} y \mathbf{P} son apropiadamente conjugados, de hecho esta ecuación es la forma que toma el principio de trabajos virtuales expresado en términos del primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff.

Para obtener una expresión equivalente en términos del segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff, se puede sustituir la expresión $\mathbf{P} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}$ o en forma equivalente $P_{ij} = S_{kj} \frac{\partial (\delta x_i)}{\partial X_k}$ en (A.111), con lo cual:

$$\delta W_{ext} = \int_{V_0} S_{ji} \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial (\delta x_k)}{\partial X_j} dV \quad (\text{A.112})$$

Y de acuerdo a la ecuación (A.7) llevada a su forma indicial, se tiene:

$$C_{ij} = F_{ki} F_{kj} = \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} \quad (\text{A.113})$$

luego:

$$\delta C_{ij} = \frac{\partial (\delta x_k)}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} + \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial (\delta x_k)}{\partial X_j} \quad (\text{A.114})$$

A partir de la simetría de los tensores \mathbf{S} y \mathbf{C} puede demostrarse que el producto $S_{ji} \delta C_{ij}$ es igual a dos veces el integrando en la ecuación (A.112) y por ende esa ecuación puede ser escrita como:

$$\delta W_{ext} = \int_{V_0} \frac{1}{2} \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{C} dV \quad (\text{A.115})$$

y alternativamente a través de (A.29) donde se introduce el tensor de deformación de Green-Lagrange definido como $\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{1})$, se puede obtener $\delta \mathbf{E} = \frac{1}{2} \delta \mathbf{C}$, resultando en:

$$\delta W_{ext} = \int_{V_0} \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{E} dV \quad (\text{A.116})$$

lo cual también demuestra que los tensores \mathbf{S} y \mathbf{E} son variables conjugadas en el Principio de Trabajos Virtuales.

A.4. Formulación débil del problema termomecánico

A continuación se definen las ecuaciones que gobiernan el problema de sólidos en grandes deformaciones con acoplamiento termomecánico, estas ecuaciones se derivan a partir de las ecuaciones de balance presentadas previamente y aplicando el principio de desplazamientos virtuales ya establecido en el apartado anterior. Las ecuaciones así obtenidas, son del tipo integral y se las denomina comúnmente forma débil de las ecuaciones de gobierno. En el caso de la ecuación de equilibrio mecánico de un sólido deformable ya ha sido ampliamente establecida en la mayor parte de los libros de texto, por lo tanto se hará énfasis en el siguiente apartado en la definición de la ecuación de equilibrio térmico para problemas termoplásticos en deformaciones finitas.

A.4.1. Ecuación de equilibrio térmico para un problema termoplástico en deformaciones finitas

Considerando que para procesos térmicos el flujo de entropía \mathbf{s} y las fuentes de entropía g pueden escribirse en función del flujo de calor y las fuentes de calor, divididas por la temperatura absoluta respectivamente, o bien:

$$\mathbf{s} = -\frac{\mathbf{q}}{\theta} \quad (\text{A.117})$$

$$g = \frac{h}{\theta} \quad (\text{A.118})$$

la segunda ley de la termodinámica en su forma local Euleriana expresada en (A.92), empleando (A.117) y (A.118), se puede escribir como:

$$\rho \frac{d}{dt} \eta \geq \rho \frac{h}{\theta} - \nabla \cdot \frac{\mathbf{q}}{\theta} \quad (\text{A.119})$$

el último término de (A.119) puede expandirse y resulta:

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{q}}{\theta} = \frac{(\nabla \cdot \mathbf{q}) \theta - \mathbf{q} \cdot \nabla \theta}{\theta^2} \quad (\text{A.120})$$

de manera que reemplazando (A.120) en (A.119), la segunda ley de la termodinámica toma la forma:

$$\rho \frac{d\eta}{dt} - \rho \frac{h}{\theta} + \frac{1}{\theta} \nabla \cdot \mathbf{q} - \frac{1}{\theta^2} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \geq 0 \quad (\text{A.121})$$

premultiplicando por la temperatura absoluta θ y despejando la desigualdad se obtiene:

$$\rho \theta \frac{d\eta}{dt} - \rho h + \nabla \cdot \mathbf{q} - \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \geq 0 \quad (\text{A.122})$$

combinando las ecuaciones (A.122) y (A.82), se puede obtener:

$$\rho \theta \frac{d\eta}{dt} - \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \geq \rho \frac{du}{dt} - \mathbf{d} : \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{A.123})$$

de modo que:

$$\mathcal{D} = \rho \left(\theta \frac{d\eta}{dt} - \frac{du}{dt} \right) + \mathbf{d} : \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \geq 0 \quad (\text{A.124})$$

en la ecuación (A.124) se puede distinguir dos partes una mecánica y una térmica de acuerdo a:

$$\mathcal{D}_{mec} = \rho \left(\theta \frac{d\eta}{dt} - \frac{du}{dt} \right) + \mathbf{d} : \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{A.125})$$

$$\mathcal{D}_{ter} = \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \quad (\text{A.126})$$

en particular la $\mathcal{D}_{mec} \geq$ es conocida como desigualdad de Clausius-Planck. La forma local Lagrangeana de la ecuación (A.124) puede escribirse a partir de (A.87), como:

$$\mathcal{D} = \rho_0 \left(\theta \frac{d\eta}{dt} - \frac{du}{dt} \right) + \dot{\mathbf{E}} : \mathbf{S} - \frac{J}{\theta} \mathbf{q}_0 \cdot \nabla \theta \geq 0 \quad (\text{A.127})$$

A partir de la Energía Libre de Helmholtz, que resulta ser un potencial termodinámico muy apropiado, se desarrolla la formulación del modelo constitutivo que se propone. Entre las distintas maneras en que se puede expresar, se ha elegido para esta formulación la forma de Green-Naghdi (ver el trabajo de Lubliner (1990)):

$$\Psi = \tilde{\Psi}(\mathbf{E}; \mathbf{E}^p; \theta; \alpha_i) = \bar{\Psi}(\mathbf{E}^e; \theta; \alpha_i) = u - \eta \theta \quad (\text{A.128})$$

siendo α_i el conjunto de variables internas que definen el proceso, mientras que \mathbf{E}^e y θ son las variables libres de los problemas mecánico y térmico, respectivamente.

La variación temporal de la energía libre será:

$$\dot{\bar{\Psi}} = \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \mathbf{E}^e} : \dot{\mathbf{E}}^e + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i \equiv \dot{u} - \dot{\eta}\theta - \eta\dot{\theta} \quad (\text{A.129})$$

sustituyendo en (A.129) a partir de la forma local Euleriana de la primera ley de la termodinámica (A.82), resulta:

$$\dot{\bar{\Psi}} = \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \mathbf{E}^e} : \dot{\mathbf{E}}^e + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \theta} : \dot{\theta} + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i \equiv \frac{\mathbf{d} : \boldsymbol{\sigma}}{\rho} + \left[h - \frac{\nabla \cdot \mathbf{q}}{\rho} - \dot{\eta}\theta \right] - \eta\dot{\theta} \quad (\text{A.130})$$

en donde considerando las ecuaciones (A.122) y (A.124), el término entre corchetes puede reemplazarse por $-\mathcal{D} - \frac{1}{\theta\rho} \mathbf{q} \cdot \nabla\theta = r - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{q} - \dot{\eta}\theta$, y se puede escribir la (A.130) como:

$$\dot{\bar{\Psi}} = \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \mathbf{E}^e} : \dot{\mathbf{E}}^e + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i \equiv \frac{\mathbf{d} : \boldsymbol{\sigma}}{\rho} - \mathcal{D} - \frac{1}{\theta\rho} \mathbf{q} \cdot \nabla\theta - \eta\dot{\theta} \quad (\text{A.131})$$

cuya forma Lagrangeana resulta de considerar la transformación $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = \frac{1}{J} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}$ (ver ecuación A.86). Esto es:

$$\mathcal{D} = \left[\frac{1}{J\rho} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \mathbf{E}^e} : \dot{\mathbf{E}}^e \right] - \left[\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \theta} + \eta \right] \dot{\theta} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i - \frac{1}{\theta\rho} \mathbf{q} \cdot \nabla\theta \geq 0 \quad (\text{A.132})$$

Sustituyendo las expresiones de la masa y la potencia interna en forma referencial en (A.132), resulta la disipación en una forma local Lagrangeana:

$$\mathcal{D} = \left[\frac{\mathbf{S}}{\rho_0} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \mathbf{E}^e} \right] : \dot{\mathbf{E}}^e + \frac{\mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}^p}{\rho_0} - \left[\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \theta} + \eta \right] \dot{\theta} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i - \frac{1}{\theta\rho} \mathbf{q} \cdot \nabla\theta \geq 0 \quad (\text{A.133})$$

$$\rho_0 \mathcal{D} = \left[\mathbf{S} - \rho_0 \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \mathbf{E}^e} \right] : \dot{\mathbf{E}}^e + \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}^p - \rho_0 \left[\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \theta} + \eta \right] \dot{\theta} - \rho_0 \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i - \frac{J}{\theta} \mathbf{q} \cdot \nabla\theta \geq 0 \quad (\text{A.134})$$

que resulta, luego de aplicar el método de Coleman, sujeta a las siguientes relaciones constitutivas:

a) puesto que tanto $\dot{\mathbf{E}}^e$ como $\dot{\theta}$ representan variaciones temporales arbitrarias de las variables libres, para garantizar el cumplimiento de la desigualdad de Clausius (A.134), para un dado estado termodinámico, sus multiplicadores deben ser idénticamente nulos, de donde surge que: la ley constitutiva, y la definición de entropía son:

$$\begin{cases} \mathbf{S} = \rho_0 \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \mathbf{E}^e} \\ \eta = -\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \theta} \end{cases} \quad (\text{A.135})$$

b) y por otro lado, surge que la disipación por unidad de masa, vale:

$$\mathcal{D} = \frac{\mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}^p}{\rho_0} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i - \frac{1}{\theta\rho} \mathbf{q} \cdot \nabla\theta \geq 0 \quad (\text{A.136})$$

donde los primeros dos términos son la *disipación plástica* o *disipación mecánica*, y el último término es la *disipación térmica*. La forma local Euleriana equivalente a (A.136) se puede obtener de la misma manera y resulta:

$$\mathcal{D} = \frac{\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}^p}{\rho} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i - \frac{1}{\theta \rho} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \geq 0 \quad (\text{A.137})$$

A partir de la (A.135) se pueden derivar otras expresiones relacionadas con el comportamiento termodinámico del material, entre ellos se puede obtener el tensor de rigidez tangente del material:

$$\mathbb{C}(\alpha_i) = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}^e} = \rho_0 \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \mathbf{E}^e \partial \mathbf{E}^e} \quad (\text{A.138})$$

el cual es un tensor constitutivo de cuarto orden que relaciona los tensores de tensión \mathbf{S} y deformación \mathbf{E}^e ; además puede obtener el tensor conjugado del coeficiente de dilatación térmica:

$$\boldsymbol{\beta}(\alpha_i) = -\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \theta} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \theta \partial \mathbf{E}^e} \quad (\text{A.139})$$

y por último también puede establecerse el calor específico a deformación y volumen constante por unidad de temperatura:

$$\frac{C_\kappa}{\theta} = \frac{\partial \eta}{\partial \theta} = -\frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \theta^2} \quad (\text{A.140})$$

en donde a partir de la (A.128), despejando la energía interna y derivando respecto de la temperatura absoluta:

$$C_\kappa = \left. \frac{\partial u}{\partial \theta} \right|_{\mathbf{E}=\text{cte.}} = \frac{\partial}{\partial \theta} (\bar{\Psi} + \eta \theta) = \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \theta} + \eta + \theta \frac{\partial \eta}{\partial \theta} = \theta \frac{\partial \eta}{\partial \theta} = -\theta \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \theta^2} \quad (\text{A.141})$$

A continuación, se pretende dar una presentación formal de la ecuación de balance térmico, considerando los términos mecánicos en forma acoplada. Para ello se parte de la definición de la energía libre de Helmholtz (A.128), de donde se deduce la densidad de energía interna como:

$$u = \bar{\Psi} + \eta \theta = \bar{\Psi} - \theta \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \theta} \quad (\text{A.142})$$

cuya variación temporal será:

$$\dot{u} = \dot{\bar{\Psi}} - \dot{\theta} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \theta} - \theta \frac{\partial \dot{\bar{\Psi}}}{\partial \theta} \quad (\text{A.143})$$

y sustituyendo en la (A.143) $\bar{\Psi}$ y $\dot{\bar{\Psi}}$, según (A.128) y (A.129), la variación de energía interna puede expresarse como:

$$\dot{u} = \left[\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \mathbf{E}^e} - \theta \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \mathbf{E}^e \partial \theta} \right] : \dot{\mathbf{E}}^e + \left[\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \alpha_i} - \theta \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \alpha_i \partial \theta} \right] \dot{\alpha}_i - \theta \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \theta^2} \dot{\theta} \quad (\text{A.144})$$

Teniendo en cuenta la forma Lagrangeana del primer principio de la termodinámica según (A.87), se tiene:

$$\dot{u} = \frac{\mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}}{\rho_0} + h - \frac{J}{\rho_0} \nabla_0 \cdot \mathbf{q}_0 = \dot{u} = \frac{\mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}^e}{\rho_0} + \frac{\mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}^p}{\rho_0} + h - \frac{J}{\rho_0} \nabla_0 \cdot \mathbf{q}_0 \quad (\text{A.145})$$

reemplazando en (A.144) se tiene:

$$\left[\frac{\mathbf{S}}{\rho_0} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \mathbf{E}^e} + \theta \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \mathbf{E}^e \partial \theta} \right] : \dot{\mathbf{E}}^e + \frac{\mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}^p}{\rho_0} - \left[\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \alpha_i} - \theta \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \alpha_i \partial \theta} \right] \dot{\alpha}_i + \theta \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \theta^2} \dot{\theta} + h - \frac{J}{\rho_0} \nabla_0 \cdot \mathbf{q}_0 = 0 \quad (\text{A.146})$$

Considerando las ecuaciones (A.135), (A.139) y (A.140), la ecuación (A.146) queda:

$$-\frac{\theta}{\rho_0} \boldsymbol{\beta} : \dot{\mathbf{E}}^e + \frac{\mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}^p}{\rho_0} - \left[\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \alpha_i} - \theta \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \alpha_i \partial \theta} \right] \dot{\alpha}_i - C_\kappa \dot{\theta} + h - \frac{J}{\rho_0} \nabla_0 \cdot \mathbf{q}_0 = 0 \quad (\text{A.147})$$

multiplicando por ρ_0 ambos miembros, adoptando $Q_0 = \rho_0 h$, se tiene:

$$Q_0 - J \nabla_0 \cdot \mathbf{q}_0 - \rho_0 C_\kappa \dot{\theta} + \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}^p - \theta \boldsymbol{\beta} : \dot{\mathbf{E}}^e - \rho_0 \left[\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \alpha_i} - \theta \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \alpha_i \partial \theta} \right] \dot{\alpha}_i = 0 \quad (\text{A.148})$$

Sustituyendo en ésta última la ecuación de Fourier ($q_i = -K^\theta \nabla \theta$) y la disipación (A.136), queda:

$$\begin{aligned} \rho_0 C_\kappa \dot{\theta} = & Q + J \nabla_0 \cdot (\mathbf{K}^\theta \nabla_0 \theta) - \theta \boldsymbol{\beta} : \dot{\mathbf{E}}^e + \\ & \left[\rho_0 \mathcal{D} + \frac{J}{\theta} \left(-\mathbf{K}^\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + m^0 \theta \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \alpha_i \partial \theta} \dot{\alpha}_i \right] \end{aligned} \quad (\text{A.149})$$

donde los últimos tres términos del segundo miembro forman D_p^0 que es el *factor de acoplamiento termoplástico*, $\theta \boldsymbol{\beta} : \dot{\mathbf{E}}^e$ es el *factor de acoplamiento termoelástico* conocido como efecto Gough-Joule, y K_{ij}^θ es el *coeficiente de conductividad térmica* (el cual puede verse como anisótropo en el caso más general). Y siendo (A.149) la ecuación del calor acoplada con el problema mecánico, se puede escribir como:

$$\rho_0 C_\kappa \dot{\theta} = Q_0 + J \nabla_0 \cdot (\mathbf{K}^\theta \nabla_0 \theta) - \theta \boldsymbol{\beta} : \dot{\mathbf{E}}^e + D_p^0 \quad (\text{A.150})$$

Si se toma la ecuación (A.136) y los últimos cuatro términos de la (A.149), la expresión para el factor de acoplamiento termoplástico resulta:

$$D_p^0 = S_{ij} \dot{E}_{ij}^p - \rho_0 \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i + \rho_0 \theta \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial E_{ij}^p \partial \theta} \dot{E}_{ij}^p + \rho_0 \theta \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \alpha_i \partial \theta} \dot{\alpha}_i \quad (\text{A.151})$$

Siendo el significado de los términos de la ecuación (A.151), las siguientes partes de la disipación:

- $\rho_0 \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial E_{ij}^p} \dot{E}_{ij}^p = S_{ij} \dot{E}_{ij}^p$: Es la parte de la disipación plástica producida por la variable S_{ij} , conjugada de la deformación plástica E_{ij}^p , producida durante una variación temporal de esta última. Es decir, que es parte de la disipación total puramente mecánica.
- $\rho_0 \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i = q_\alpha \dot{\alpha}_i$: Es la parte de la disipación plástica producida por las variables q_α , conjugadas de las variables internas plásticas α_i , producida durante una variación temporal de esta última. Es decir, que también es parte de la disipación total puramente mecánica.

- $\rho_0 \theta \frac{\partial \left(\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \dot{E}_{ij}^p} \right)}{\partial \theta} \dot{E}_{ij}^p = \theta \frac{\partial (S_{ij} \dot{E}_{ij}^p)}{\partial \theta} = \theta \frac{\partial S_{ij}}{\partial \theta} \dot{E}_{ij}^p = \theta E_{kl}^e \frac{\partial C_{ijkl}^o(\theta)}{\partial \theta} \dot{E}_{ij}^p$: Es el cambio que se produce en la disipación plástica $(S_{ij} \dot{E}_{ij}^p)$, durante un cambio en la temperatura θ . Es decir, que es parte de la disipación total termomecánica.
- $\rho_0 \theta \frac{\partial \left(\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \dot{\alpha}_i} \right)}{\partial \theta} \dot{\alpha}_i = \theta \frac{\partial (q_\alpha \dot{\alpha}_i)}{\partial \theta}$: Es el cambio que se produce en la disipación plástica $(q_\alpha \dot{\alpha}_i)$, producida durante un cambio en la temperatura θ . Es decir, que es parte de la disipación total termomecánica.

En el caso simple de un material metálico cuyo comportamiento es elasto-plástico con endurecimiento isótropo y cuya única variable interna plástica es la propia deformación plástica \mathbf{E}^p , el término de acoplamiento se reduce a la siguiente expresión:

$$D_p^0 = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}^p + \theta \mathbf{E}^e : \frac{\partial \mathbb{C}^o(\theta)}{\partial \theta} : \dot{\mathbf{E}}^p \quad (\text{A.152})$$

en esta última, si se supone un material isótropo, el tensor constitutivo $\mathbb{C}^o(\theta)$ dependerá de la evolución del módulo de Young y del coeficiente de Poisson con la temperatura.

La forma local euleriana de la ecuación (A.150) se puede obtener directamente partiendo de las ecuaciones (A.82) y (A.137) considerando la (A.128) definida en variables eulerianas, y resulta:

$$\rho C_\kappa \dot{\theta} = Q + \nabla \cdot (\mathbf{K}^\theta \nabla \theta) - \theta \hat{\boldsymbol{\beta}} : \mathbf{d}^e + D_p \quad (\text{A.153})$$

y con la disipación plástica evaluada a partir de:

$$D_p = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}^p + \theta \boldsymbol{\varepsilon}^e : \frac{\partial \mathbb{C}(\theta)}{\partial \theta} : \mathbf{d}^p \quad (\text{A.154})$$

A.4.2. Ecuaciones de gobierno a partir del principio de desplazamientos virtuales

Para la obtención de la ecuación de movimiento del sólido deformable en forma débil, se puede partir de la ecuación en coordenadas locales (o asociada a la configuración deformada o actual), que se define según (A.61) como:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b}_f = \rho \dot{\mathbf{v}} \quad (\text{A.155})$$

utilizando el principio de los desplazamientos virtuales, es decir dada una función de prueba o ponderación $\delta \mathbf{u}$, la forma débil de la ecuación (A.155) resulta:

$$\int_V [\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho (\mathbf{b}_f - \dot{\mathbf{v}})] \delta \mathbf{u} dV = 0 \quad (\text{A.156})$$

en donde se debe considerar que $(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \mathbf{u} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma} : (\nabla \delta \mathbf{u})$, y por lo tanto:

$$\int_V \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u}) dV - \int_V \boldsymbol{\sigma} : (\nabla \delta \mathbf{u}) dV + \int_V \rho (\mathbf{b}_f - \dot{\mathbf{v}}) \cdot \delta \mathbf{u} dV = 0 \quad (\text{A.157})$$

si además se aplica el teorema de la divergencia al primer término y además considerando que el gradiente del desplazamiento virtual (segundo término) resulta ser la deformada virtual, se obtiene:

$$\int_A (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \delta \mathbf{u} dA - \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV + \int_V \rho (\mathbf{b}_f - \dot{\mathbf{v}}) \cdot \delta \mathbf{u} dV = 0 \quad (\text{A.158})$$

la cual, en virtud de (A.59), resulta:

$$\int_V \rho \dot{\mathbf{v}} \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV - \left(\int_A \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} dA + \int_V \rho \mathbf{b}_f \cdot \delta \mathbf{u} dV \right) = 0 \quad (\text{A.159})$$

La ecuación (A.159) resulta ser la forma débil de las ecuaciones de movimiento en la configuración actualizada en términos del tensor de Cauchy y obtenida a partir del principio de desplazamientos virtuales. La primer integral representa el trabajo virtual externo de las fuerzas de inercia, la segunda integral resulta ser el trabajo virtual interno y por último las dos integrales restantes representan el trabajo virtual externo debido a las cargas aplicadas y las fuerzas másicas respectivamente.

Procediendo de la misma forma a partir de la ecuación (A.63), se puede obtener la forma débil de las ecuaciones de movimiento en la configuración de referencia y resulta:

$$\int_{V_0} \rho_0 \dot{\mathbf{v}} \cdot \delta \mathbf{u} dV_0 - \int_{V_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV_0 - \left(\int_{A_0} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{u} dA_0 + \int_{V_0} \rho_0 \mathbf{b}_f \cdot \delta \mathbf{u} dV_0 \right) = 0 \quad (\text{A.160})$$

Por otra parte, la ecuación de equilibrio térmico en forma débil puede obtenerse a partir de la transformación del problema diferencial (A.150) en uno integral, para lo cual resulta indispensable definir las condiciones de borde, que son básicamente de dos tipos:

a) Condiciones de Dirichlet o de temperatura impuesta

$$\theta = \theta_p \quad (\text{A.161})$$

b) Condiciones de Cauchy o denominadas de carga de frontera:

$$q = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} + f(\theta - \theta_{ref}) \quad (\text{A.162})$$

Siendo θ_p y θ_{ref} las temperaturas prescritas y temperatura de referencia respectivamente, q y \mathbf{q} al flujo de calor y vector de calor por conducción, \mathbf{n} la normal saliente a la superficie en un punto y por último $f(\theta - \theta_{ref})$ es una función de transferencia de calor que puede estar ligada a la radiación o la convección.

La condición de Cauchy (A.162), a la vez se puede particularizar en tres subcondiciones:

b1) Condición de superficie aislada o de Neumann; donde el flujo de calor y los coeficientes de transferencia a través de la frontera son nulos:

$$q = h = 0; \quad \text{por lo tanto:} \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{A.163})$$

b2) Condición de conducción por la frontera, donde el coeficiente de transferencia de calor por la frontera es nulo:

$$h = 0; \quad \text{por lo tanto:} \quad q = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{K}^\theta \nabla \theta \cdot \mathbf{n} \quad (\text{A.164})$$

b3) Condición de convección y/o radiación por la frontera, donde el correspondiente flujo de calor es nulo

$$q = 0; \quad \text{por lo tanto:} \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = h_c(\theta_s - \theta_a) + h_r(\theta_s^4 - \theta_{rad}^4) \quad (\text{A.165})$$

En (A.165) θ_s , θ_a y θ_{rad} representan la temperatura de la superficie, la temperatura ambiente y la de la fuente radiante, respectivamente. Mientras que h_c y h_r son los coeficientes de transmisión de calor por convección y radiación respectivamente.

La forma débil de la ecuación de gobierno de transferencia de calor, se puede obtener multiplicando la (A.153) por una función de prueba $\delta\theta$ (o temperatura virtual) e integrando en el dominio:

$$\int_V \delta\theta \left[-\rho C_\kappa \dot{\theta} + Q + \nabla \cdot (\mathbf{K}^\theta \nabla \theta) - \theta \hat{\boldsymbol{\beta}} : \mathbf{d}^e + D_p \right] dV = 0 \quad (\text{A.166})$$

en donde integrando por partes el tercer término:

$$\int_V \delta\theta \nabla \cdot (\mathbf{K}^\theta \nabla \theta) dV = \int_A \delta\theta \mathbf{K}^\theta \nabla \theta \cdot \mathbf{n} dA - \int_V \nabla \delta\theta \mathbf{K}^\theta \nabla \theta dV \quad (\text{A.167})$$

reemplazando en (A.166) se tiene:

$$\begin{aligned} - \int_V \delta\theta \rho C_\kappa \dot{\theta} dV - \int_V \nabla \delta\theta \mathbf{K}^\theta \nabla \theta dV + \int_V \delta\theta \left[Q - \theta \hat{\boldsymbol{\beta}} : \mathbf{d}^e + D_p \right] dV + \\ \int_A \delta\theta \mathbf{K}^\theta \nabla \theta \cdot \mathbf{n} dA = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.168})$$

Multiplicando las ecuaciones (A.164) y (A.165) por $\delta\theta$ e integrando en el contorno:

$$\begin{aligned} \int_A \delta\theta (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) dA &= \int_A \delta\theta (\mathbf{K}^\theta \nabla \theta) \cdot \mathbf{n} dA \\ &= \int_{A_h} \delta\theta \left[h_c (\theta_s - \theta_a) + h_r (\theta_s^4 - \theta_{rad}^4) \right] dA + \int_{A_q} \delta\theta q dA \end{aligned} \quad (\text{A.169})$$

en donde A_h y A_q son las partes del contorno con convección/radiación y conducción, respectivamente. Además en (A.169) se debe considerar que en el contorno donde se impone la temperatura, A_θ , la función de prueba $\delta\theta = 0$.

Reemplazando (A.169) en (A.166) se obtiene:

$$\begin{aligned} - \int_V \delta\theta \rho C_\kappa \dot{\theta} dV - \int_V \nabla \delta\theta \mathbf{K}^\theta \nabla \theta dV + \int_V \delta\theta \left[Q - \theta \hat{\boldsymbol{\beta}} : \mathbf{d}^e + D_p \right] dV + \\ \int_{A_h} \delta\theta \left[h_c (\theta_s - \theta_a) + h_r (\theta_s^4 - \theta_{rad}^4) \right] dA + \int_{A_q} \delta\theta q dA = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.170})$$

Las ecuaciones de gobierno que permiten resolver el problema termomecánico en deformaciones finitas asociadas a una configuración de referencia actualizada Ω_{n+1} , considerando la relación entre dos diferenciales de volumen $dV_{n+1} = JdV_n$, resultan entonces:

$$\int_V \rho \dot{\mathbf{v}} \cdot \delta \mathbf{u} dV = \int_V \boldsymbol{\tau} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV + \left(\int_A \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} dA + \int_V \rho \mathbf{b}_f \cdot \delta \mathbf{u} dV \right) \quad (\text{A.171})$$

$$\begin{aligned} \int_V \delta\theta \rho C_\kappa \dot{\theta} dV &= - \int_V \nabla \delta\theta \mathbf{K}^\theta \nabla \theta dV + \int_V \delta\theta \left[Q - \theta \hat{\boldsymbol{\beta}} : \mathbf{d}^e + D_p \right] dV + \\ &\int_{A_h} \delta\theta \left[h_c (\theta_s - \theta_a) + h_r (\theta_s^4 - \theta_{rad}^4) \right] dA + \int_{A_q} \delta\theta q dA \end{aligned} \quad (\text{A.172})$$

en donde se ha evitado el subíndice n que indica la configuración de referencia para una mayor claridad y se ha reemplazado el tensor de Cauchy por el de Kirchhoff ($\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma}$). Las ecuaciones (A.171) y (A.172) deben resolverse de manera simultanea e iterativa dado que se encuentran acopladas: el cambio en las deformaciones inducen cambios en la temperatura y los cambios en la temperatura inducen deformaciones.

Apéndice B

Algoritmo de contacto en deformaciones finitas

B.1. Introducción

Los problemas industriales de conformado de metales involucran invariablemente el contacto entre las piezas metálicas y las herramientas (punzón, matriz, pisadores, etc.) con las cuales se produce la deformación plástica sobre las mismas. El estudio de los problemas de contacto ha evolucionado de la mano del crecimiento de las técnicas numéricas de simulación, sin embargo al día de hoy los modelos de contacto complejos resultan en algunos casos difíciles de implementar. O más aun, debido a la naturaleza estocástica de la microsuperficie de los metales, los modelos más realistas están basados en algoritmos estadísticos y es aquí donde resulta complicado lograr la correlación de los parámetros físicos que definen el modelo matemático. Un compendio de los modelos de contacto con y sin fricción, su implementación numérica y algunos detalles asociados a la discretización de superficies en contacto pueden encontrarse en el trabajo de Wriggers (2002).

En este trabajo se ha priorizado de manera continua la aplicación de modelos simples y con significado físico claro, bajo esa misma línea de trabajo se han empleado esquemas de contacto basados en técnicas de penalización, los cuales están disponibles en el código de solución explícita de las ecuaciones de gobierno del problema termomecánico en deformaciones finitas STAMPACK (2011). Y para poder llevar a cabo el análisis de problemas termomecánicos con contacto, se ha modificado el algoritmo de contacto bidimensional de manera de poder evaluar las contribuciones a la ecuación de conservación de la energía. Los detalles generales del algoritmo de contacto implementado en Stampack se pueden ver en el trabajo de Flores (2000).

El contenido de este capítulo se describe a continuación. En la Sección B.2 se presenta una descripción general del problema de contacto a partir del trabajo de Wriggers (2002) y de las referencias que allí se mencionan, esto involucra la definición de la cinemática empleada para describir el cambio geométrico del contacto en el apartado B.2.1. Posteriormente los apartados B.2.2 y B.2.3 introducen algunos conceptos asociados a la modelación constitutiva de la interface de contacto, definición de fuerzas de contacto y generación de calor, para el caso de contacto mecánico y termomecánico, respectivamente. El apartado B.2.4 por otra parte presenta los términos que deben adicionarse a las ecuaciones de gobierno del problema termomecánico para considerar el contacto con las herramientas. Por último la Sección B.3 presenta una descripción del algoritmo de contacto bidimensional implementado en el código de solución explícita de las ecuaciones termomecánicas, para lo

cual se ha tomado como base el trabajo de Flores (2000).

B.2. Descripción general del problema de contacto

Una importante cantidad de problemas de ingeniería involucran de alguna manera el fenómeno de contacto y fricción. En la interacción entre dos cuerpos, tanto el área de contacto como las fuerzas involucradas, son parte de la solución del problema con lo cual su naturaleza es altamente no lineal. Debido a esta no linealidad en los comienzos del análisis de problemas de contacto se emplearon modelos simplificados, sin embargo de la mano de la creciente capacidad computacional se han ido generando modelos de contacto y fricción sumamente complejos capaces de incorporar aspectos tales como el desgaste, generación de calor, etc.

El rango de aplicación de la mecánica del contacto abarca desde problemas relativamente simples como la interacción entre suelo y las fundaciones en construcciones civiles, como así también problemas de mayor complejidad como el impacto de vehículos sobre dichas estructuras. En el área de mecánica de suelos un problema de contacto complejo es la formación de bandas de corte, y como afecta este fenómeno a la estabilidad de taludes. En la ingeniería mecánica la mayor parte de los problemas involucran contacto, desde la simpleza del contacto entre dos engranajes hasta la complejidad del contacto en el estampado de láminas y el forjado de piezas másicas, el análisis de impacto de vehículos, el contacto de los neumáticos en movimiento, entre otros casos habituales.

El uso de técnicas numéricas para el análisis de problemas de contacto permitió elaborar modelos cada vez más complejos, sin embargo el desarrollo de algoritmos eficientes y robustos para ser usados en simulaciones numéricas requiere conocer adecuadamente la física del problema, los conceptos de la tribología y la cinemática del contacto. A continuación se presentará una descripción general del tratamiento del problema de contacto y en la sección subsiguiente los detalles del algoritmo de contacto empleado en este trabajo.

B.2.1. Cinemática del contacto

La cinemática en el problema del contacto se reduce a la definición de los cambios geométricos durante la aproximación entre dos o más cuerpos. En deformaciones finitas, es decir cuando los cuerpos no se consideran como rígidos indeformables, esta descripción cinemática debe ser lo suficientemente general para involucrar los cambios geométricos debido al contacto mismo. Por otra parte dos cuerpos que inicialmente se encuentran alejados en sus configuraciones iniciales, pueden verse en contacto en la configuración actual, y esto hace que la formulación del problema de contacto tenga un enfoque del tipo euleriano.

Si se consideran dos cuerpos elásticos como los mostrados en la Figura B.1, ocupando los dominios Ω^α (con $\alpha = 1, 2$) y cuyo contorno está separado en tres partes: una parte donde se prescriben las cargas Γ_f^α , otra donde se conocen los desplazamientos Γ_u^α , y una última donde los cuerpos hacen contacto denominada Γ_c^α . En esta parte del contorno donde los cuerpos entran en contacto es donde se formularán las ecuaciones cinemáticas que describen el contacto normal y el tangencial.

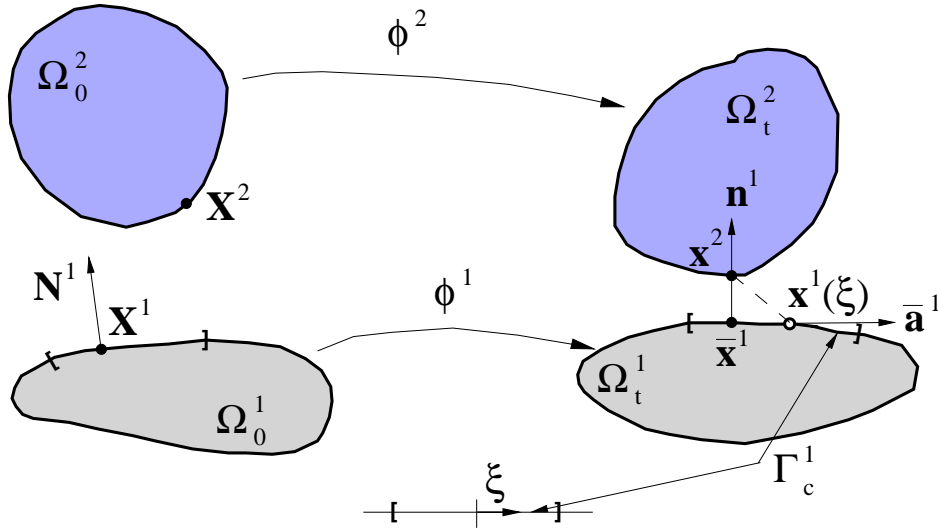


Figura B.1 – Configuraciones deformadas de los cuerpos y mínima distancia

B.2.1.1. Contacto normal

Si se asume que los dos cuerpos hacen contacto, ver Figura B.1, entonces se debe cumplir la condición de no penetración:

$$(\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1) \cdot \mathbf{n}^1 \geq 0 \quad (\text{B.1})$$

en donde \mathbf{x}^α denota las coordenadas en la configuración deformada asociadas al contorno de un dominio Ω^α , y la normal \mathbf{n}^1 es la normal en el contorno del dominio deformado Ω_t^1 al cual suele definírsele como cuerpo maestro. Se puede observar en la Figura B.1, que a todo punto \mathbf{x}^2 en Γ_c^2 le corresponde un punto $\bar{\mathbf{x}}^1 = \mathbf{x}^1(\xi)$ en Γ_c^1 que puede establecerse a partir de la minimización de:

$$d^1(\xi) = \|\mathbf{x}^2 - \bar{\mathbf{x}}^1\| = \min_{\mathbf{x}^1 \in \Gamma_c^1} \|\mathbf{x}^2 - \hat{\mathbf{x}}^1(\xi)\| \quad (\text{B.2})$$

la minimización de la ecuación (B.2), considerando la parametrización del contorno Γ_c^1 en coordenadas convectivas o naturales ξ , lleva a la siguiente expresión:

$$\frac{d}{d\xi} d^1(\xi) = -\frac{\mathbf{x}^2 - \hat{\mathbf{x}}^1(\xi)}{\|\mathbf{x}^2 - \hat{\mathbf{x}}^1(\xi)\|} \cdot \frac{d}{d\xi} \hat{\mathbf{x}}^1(\xi) = 0 \quad (\text{B.3})$$

en donde el segundo término de la multiplicación es el vector tangente al contorno $\bar{\mathbf{a}}^1$ en el punto de prueba, por lo tanto el primer término debe ser coincidente en dirección al vector normal al contorno \mathbf{n}^1 para que se cumpla la igualdad.

Una vez que ha sido establecido el punto $\bar{\mathbf{x}}^1$, se puede definir la condición de no penetración a partir de la ecuación (B.1) de acuerdo a:

$$g_N = (\mathbf{x}^2 - \bar{\mathbf{x}}^1) \cdot \mathbf{n}^1 \geq 0 \quad (\text{B.4})$$

o bien como una función:

$$\bar{g}_N = \begin{cases} (\mathbf{x}^2 - \bar{\mathbf{x}}^1) \cdot \mathbf{n}^1 & \text{si } (\mathbf{x}^2 - \bar{\mathbf{x}}^1) \cdot \mathbf{n}^1 < 0 \\ 0 & \text{para todo otro caso} \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

la ecuación (B.5) permite establecer la magnitud de la penetración o brecha de un cuerpo sobre el otro, y por ende puede ser usado con algún método de penalización.

B.2.1.2. Contacto tangencial

En la dirección tangencial el contacto puede mostrar dos casos: el primero de ellos es cuando un punto no se le permite deslizar sobre la superficie maestra dando lugar a una *condición de adherencia*, y en segundo lugar cuando a los puntos de un cuerpo se les permite deslizar sobre la superficie maestra dando lugar a una *condición de deslizamiento*.

Condición de adherencia. Este es el caso más simple y la condición de no deslizamiento puede obtenerse a partir de (B.3) considerando que en el caso de adherencia de una superficie a la otra no existe modificación en las coordenadas convectivas durante el movimiento de los cuerpos es decir $\dot{\xi} = 0$. Por lo tanto:

$$g_T = (\mathbf{x}^2 - \bar{\mathbf{x}}^1) \cdot \bar{\mathbf{a}}^1 = 0 \quad (\text{B.6})$$

cabe destacar que la condición de adherencia se observa cuando las superficies están en contacto, es decir $g_N = (\mathbf{x}^2 - \bar{\mathbf{x}}^1) \cdot \mathbf{n}^1 = 0$, de modo que pueden combinarse (B.4) y (B.6) para dar una forma más general:

$$\mathbf{x}^2 - \bar{\mathbf{x}}^1 = 0 \quad (\text{B.7})$$

Condición de deslizamiento. En el caso de haber deslizamiento entre las superficies en contacto, este puede evaluarse a partir del cambio en la proyección $\bar{\mathbf{x}}^1$ sobre la superficie maestra del punto \mathbf{x}^2 . Es decir en el caso de deslizamiento con fricción es necesario integrar las velocidades relativas para obtener la traza de \mathbf{x}^2 sobre el contorno de contacto Γ_c^1 , y el desplazamiento relativo del punto \mathbf{x}^2 sobre la superficie de contacto puede definirse:

$$dg_T = \|\bar{\mathbf{a}}^1\| d\xi = \frac{d\bar{\mathbf{x}}^1}{d\xi} d\xi \quad (\text{B.8})$$

de modo que integrando:

$$g_T = \int_{\xi_0}^{\xi} \|\bar{\mathbf{a}}^1\| d\xi = \int_{t_0}^t \|\dot{\xi} \bar{\mathbf{a}}^1\| dt \quad (\text{B.9})$$

en donde el cambio de variables en la segunda integral de (B.9) responde a la expresión $d\xi = \dot{\xi} dt$.

B.2.2. Ecuaciones constitutivas para la interface de contacto

Los modelos de contacto han evolucionado en las últimas décadas, y la elección de aplicación entre uno u otro modelo está asociada principalmente al nivel de precisión que se desee obtener en el análisis. Aquí también se debe hacer una división en lo que respecta a contacto normal y tangencial. Desde el punto de vista del contacto normal los modelos constitutivos habituales resultan: la restricción geométrica donde las tensiones de contacto derivan directamente de la condición de no penetración, y un modelo más elaborado del tipo elástico o elasto-plástico en donde se propone una función similar a la de fluencia para las tensiones de contacto. En el contacto tangencial con adherencia el enfoque es el mismo que en el caso de contacto normal. La diferencia se encuentra en el contacto con

deslizamiento, donde la fricción entre las caras se puede definir a partir de una ecuación de evolución. Esta ecuación de evolución suele estar definida a partir de la presión normal, velocidad de deslizamiento, temperatura, rugosidad de la superficie, temperatura, etc.

B.2.2.1. Contacto normal

Las diferentes propuestas para la evaluación de la fuerza en la interface de contacto se diferencian principalmente en la precisión de los resultados que brindan. En particular se pueden observar métodos de baja precisión como la imposición de la condición de no penetración de manera unilateral, y métodos más complejos que especifican relaciones constitutivas para el comportamiento de la interface.

La condición de no penetración definida en la ecuación (B.4) establece que el contacto tiene lugar cuando se da la condición $g_N = 0$, y en ese caso el vector tracción en el contorno puede definirse como:

$$\mathbf{t}^1 = \boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \bar{\mathbf{n}}^1 = p_N^1 \bar{\mathbf{n}}^1 + t_T^1 \bar{\mathbf{a}}^1 \quad (\text{B.10})$$

el cual es distinto de cero y además actúa sobre las dos superficies en contacto ($\mathbf{t}^2 = -\mathbf{t}^1$). En la ecuación (B.10), $p_N < 0$ dado que no se considera posibilidad de adherencia en el contacto normal, sin embargo la fuerza de fricción puede ser nula ($t_T = 0$) en el caso de contacto sin fricción. Siendo que $p_N < 0$ cuando $g_N = 0$, y además $p_N = 0$ cuando $g_N > 0$, se puede generalizar:

$$g_N \geq 0, \quad p_N \leq 0, \quad p_N g_N = 0 \quad (\text{B.11})$$

que son las condiciones de Hert-Signorini-Moreau para contacto sin fricción, las cuales son equivalentes a las condiciones de Kuhn-Tucker empleadas en la descripción de carga-descarga en modelos constitutivos elasto-plásticos.

Los modelos constitutivos de contacto se diferencian entre sí de acuerdo a la forma en que calculan p_N . El fenómeno físico de la micromecánica del contacto involucra aspectos como la dureza y rugosidad superficial, sin embargo estas variables no son las únicas en juego y podrían presentarse aspectos más complejos como el estado de las superficies (lubricación, óxido, etc.) y reacciones químicas asociadas a la fricción y temperatura. La mayor parte de los modelos surgen a partir de ensayos y se aplican modelos probabilísticos para la rugosidad superficial.

Más allá de la complejidad matemática de cada modelo constitutivo de contacto, básicamente el mismo puede describirse de una manera simple como:

$$p_N = c_N (g_N)^n \quad (\text{B.12})$$

en donde g_N es la función de brecha establecida en (B.5), y los parámetros c_N y n se obtienen por ensayos. En el caso donde $n = 1$ se obtiene la forma equivalente a la imposición de la fuerza de contacto por penalización. Esta ley constitutiva resulta en una regularización de las condiciones (B.11) como se observa en la Figura B.2. Si bien esta descripción de la carga de contacto es simple, su implementación en modelos numéricos puede acarrear inconvenientes asociados a la elevada rigidez que la ecuación muestra cuando el contacto se da en pequeñas partes del contorno.

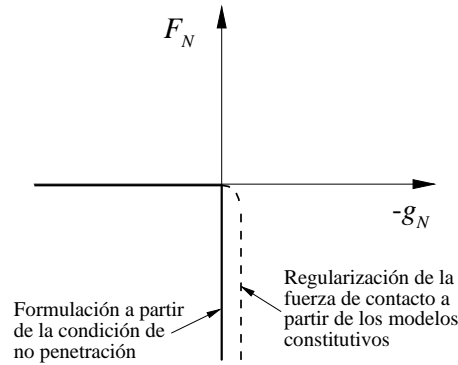


Figura B.2 – Regularización de la fuerza de contacto en función de la brecha normal

B.2.2.2. Contacto tangencial

La modelación constitutiva del contacto tangencial, más precisamente la modelación de la fricción, es posiblemente uno de los puntos más importantes en el problema de contacto. La rama de la ciencia que estudia este tópico es denominada “tribología”, cubriendo fenómenos como la fricción, adherencia, desgaste, lubricación, y acoplamiento térmico y eléctrico. En particular se hará énfasis en los aspectos principales como fricción y adherencia en este apartado. La forma más simple de ecuación constitutiva para la fricción es la ley de Coulomb, sin embargo existen algunos modelos más elaborados basados en la micromecánica que brindan resultados con mayor precisión.

En el contacto con adherencia la condición puede obtenerse a partir de la ecuación (B.6), la cual conlleva a establecer una restricción no lineal sobre el movimiento en la zona de contacto. Asociada a esta restricción resulta trivial la aparición de una reacción o fuerza de apoyo.

En el contacto tangencial la mayor riqueza desde el punto de vista de su modelación constitutiva está asociada al contacto tangencial con fricción. La ley de Coulomb establece que una vez alcanzada una tensión tangencial límite, ver Figura B.3, las superficies en contacto muestran movimiento relativo entre sí lo que se denomina habitualmente deslizamiento y es descrita por la siguiente ecuación:

$$t_T = -\mu |p_N| \dot{g}_T \quad \text{si } |t_T| > \mu |p_N| \quad (\text{B.13})$$

en donde μ es el coeficiente de deslizamiento, el mismo es constante en la forma clásica de la ley de Coulomb y depende de las superficies sólidas en contacto.

La ecuación (B.13) puede regularizarse a partir de algún tipo de función que brinde una transición suave entre el estado adherido y el estado de deslizamiento. La Figura B.3 muestra la situación, y la forma general que adopta la ley de Coulomb es:

$$t_T = -\mu |p_N| f(\dot{g}_T) \quad (\text{B.14})$$

en donde $f(\dot{g}_T)$ es la función de regularización, adoptándose comúnmente una función potencial, exponencial o definida por tramos.

La (B.14) no es la única forma posible de regularizar la ley de Coulomb, una forma muy habitual es usar una analogía de la descomposición aditiva elasto-plástica en la modelación de la fricción. El uso de esta analogía se basa en dos razones fundamentales: la primera está asociada al hecho de que permite regularizar la ley de Coulomb, y la segunda está basada en las observaciones experimentales en ensayos de fricción de metales. Estos ensayos

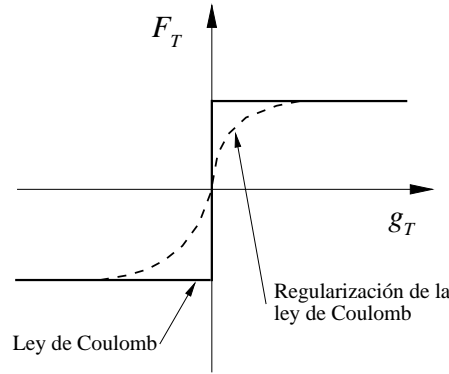


Figura B.3 – Ley de Coulomb y regularización de la fuerza tangencial

sugieren el uso de una descomposición del movimiento tangencial (g_T) en una parte elástica o adhesiva (g_T^a) más una parte plástica o de deslizamiento (g_T^d), o de manera similar:

$$g_T^a = g_T - g_T^d \quad (\text{B.15})$$

esta forma además de una regularización de evolución de la fricción, involucra un interpretación física interesante en el sentido de que plantea la aparición de microdesplazamientos elásticos g_T^a en la interface de contacto. La forma más simple de modelar la parte elástica o adhesiva es con una relación lineal:

$$t_T = c_T g_T^a \quad (\text{B.16})$$

sin embargo no es la única posibilidad, se puede reemplazar la constante elástica c_T por un tensor constitutivo más complejo para incluir las direcciones de anisotropía por ejemplo.

Por otra parte la componente plástica, o de deslizamiento, del contacto friccional responde a una ley de evolución, de modo que aplicando los conceptos estándar de la teoría elasto-plástica se puede llegar a una forma simple para una función de deslizamiento (equivalente a la función de fluencia) según:

$$f_d(t_T) = |t_T| - \mu |p_N| \leq 0 \quad (\text{B.17})$$

y a partir de (B.17) la ecuación de evolución para el deslizamiento plástico, aplicando el principio de máxima disipación, resulta:

$$\dot{g}_T^d = \dot{\kappa} \frac{\partial f_d(t_T)}{\partial t_T} = \dot{\kappa} |t_T| \quad (\text{B.18})$$

en donde (B.17) y (B.18) cumplen las condiciones de carga y descarga de Kuhn-Tucker.

Algunas otras formulaciones que siguen la misma línea difieren en la elección de la función de deslizamiento, proponiendo algunas formas más complejas en lugar de la (B.17) incorporando variables como el área real de carga, la temperatura y variables internas como el deslizamiento efectivo, etc.

En el caso del conformado de metales, en especial el caso de conformado másico (forjado, extrusión, etc.), la forma clásica de la ley de Coulomb conlleva la aparición de tensiones de deslizamiento plástico muy elevadas inclusive por encima de la tensión de fluencia del material. Esto suele corregirse de forma práctica aplicando un límite de tensión de deslizamiento plástico, de la forma:

$$f_d(t_T) = |t_T| - \text{mín}(\mu |p_N|, \sigma_y) \leq 0 \quad (\text{B.19})$$

en donde σ_y es la tensión de fluencia del material. Esta ecuación se puede encontrar en los libros de texto dedicados a la mecánica del contacto como ecuación de Coulomb-Orowan (ver Figura B.4).

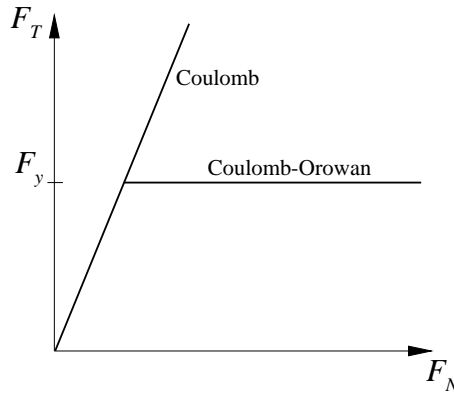


Figura B.4 – Modificación del modelo clásico de Coulomb por fluencia

B.2.3. Contacto termomecánico

El análisis de un problema donde se evidencia contacto entre dos cuerpos sólidos a diferente temperatura, involucra además de la fuerza de contacto normal y tangencial, algunos otros aspectos como la conducción por contacto, la generación de calor por fricción, e inclusive reacciones químicas activadas por la temperatura. Entre estos aspectos adicionales, los dos primeros son los más relevantes cuando uno se refiere al problema de conformado de metales.

La transmisión de calor por contacto entre dos superficies, considerando la ecuación de Fourier, puede evaluarse según:

$$q_k = -k_c(p_N, \theta^1, \theta^2) (\theta^2 - \bar{\theta}^1) \quad (\text{B.20})$$

en donde además de la diferencia térmica entre las superficies en contacto $(\theta^2 - \bar{\theta}^1)$, se tiene el coeficiente de conducción térmica $k_c(p_N, \theta^1, \theta^2)$ que depende de las temperaturas de las superficies y también de la presión de contacto. En lo que se refiere a la definición del coeficiente de conducción de calor por contacto existen modelos complejos basados en esquemas estadísticos y de contacto puntual (*spots models*). Si bien estos modelos se pueden calibrar a partir de ensayos, esta tarea resulta bastante difícil dada la naturaleza del fenómeno de fricción y de la cantidad de parámetros intervinientes.

Existe sin embargo un modelo simplificado para la evaluación del coeficiente de conducción en contacto basados en la dureza Vickers de la superficie H_v , el coeficiente de resistencia térmica o conducción a temperatura ambiente k_{c0} , y un exponente n ; el cual resulta:

$$k_c(p_N) = k_{c0} \left(\frac{p_N}{H_v} \right)^n \quad (\text{B.21})$$

la ventaja de (B.21) es que depende de solo tres parámetros (un mayor facilidad para calibrar por ensayos) y además la dureza Vickers puede relacionarse fácilmente con la tensión de fluencia del material. Esta relación podría permitir además obtener una formulación dependiente de la temperatura a partir de una ley de evolución del tipo $H_v = \hat{H}_v(\sigma_y(\theta))$.

La generación de calor por fricción en las superficies de contacto puede obtenerse a partir de la potencia de fricción y la efusividad relativa entre las superficies. La efusividad térmica de un material se define a partir del producto del coeficiente de transferencia de calor por conducción, k , por la capacidad térmica a volumen específico, c , según la siguiente expresión:

$$e = \sqrt{k\rho c} \quad (\text{B.22})$$

en donde ρ es la densidad del material. A partir de la efusividad de las superficies en contacto, se puede establecer la efusividad relativa como:

$$\zeta_c = \frac{e^1}{e^1 + e^2} \quad (\text{B.23})$$

de modo que la efusividad relativa puede adoptar los valores $0 < \zeta_c < 1$. La generación de calor por fricción puede entonces evaluarse:

$$q_f = -\zeta_c \dot{w}_f = -\zeta_c (t_T \dot{g}_T^d) \quad (\text{B.24})$$

en donde se hace uso de las magnitudes definidas por las ecuaciones (B.16) y (B.18) para establecer la potencia de fricción.

B.2.4. Forma débil de la contribución por contacto

La formulación del problema de valores en el contorno no difiere del problema del movimiento de sólidos deformables planteado en el Apéndice A, solo es necesario agregar aquellos términos debido al contacto. Para incorporar los términos asociados al contacto en las ecuaciones que gobiernan el problema termomecánico (A.171) y (A.172), se considera un problema de contacto unilateral. Se denomina contacto unilateral al que se produce entre una superficie sólida rígida y un cuerpo sólido deformable.

La forma débil de las ecuaciones de gobierno del problema termomecánico con contacto resultan:

$$\left\{ \int_V \rho \dot{\mathbf{v}} \delta \mathbf{u} dV - \int_V \boldsymbol{\tau} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV - \left(\int_A \mathbf{t} \delta \mathbf{u} dA + \int_V \rho \mathbf{b} \delta \mathbf{u} dV \right) \right\} + C_c^M = 0 \quad (\text{B.25})$$

$$\left\{ - \int_V \delta \theta \rho C_\kappa \dot{\theta} dV - \int_V \nabla \delta \theta \mathbf{K}^\theta \nabla \theta dV + \int_V \delta \theta [Q - \theta \hat{\boldsymbol{\beta}} : \mathbf{d}^e + D_p] dV + \int_{A_h} \delta \theta [h_c (\theta_s - \theta_a) + h_r (\theta_s^4 - \theta_{rad}^4)] dA_h + \int_{A_q} \delta \theta q dA_q \right\} + C_c^T = 0 \quad (\text{B.26})$$

en donde C_c^M y C_c^T son las contribuciones de contacto a la parte mecánica y térmica del problema, respectivamente. Los términos de contribución de la parte mecánica están asociados al contacto normal y tangencial, de modo que la forma débil de los mismos se define a partir de (B.10) como:

$$C_c^M = \int_{A_c} \mathbf{t} \delta \mathbf{u} dA = \int_{A_c} (p_N \bar{\mathbf{n}} + t_T \bar{\mathbf{a}}) \delta \mathbf{u} dA \quad (\text{B.27})$$

Mientras que los términos de contribución a la parte térmica están asociados a la transferencia de calor por contacto y la generación de calor por fricción, de modo que en virtud de (B.20) y (B.24), se tiene:

$$C_c^T = \int_{A_c} \delta \theta q_c dA = - \int_{A_c} \delta \theta \left[k_c (p_N) (\theta^2 - \bar{\theta}^1) + \zeta_c (t_T \dot{g}_T^d) \right] dA \quad (\text{B.28})$$

B.3. Algoritmo de contacto bidimensional

En este trabajo se ha empleado un algoritmo bidimensional de contacto basado en la técnica de penalización, que es la más ampliamente utilizada con esquemas de integración explícita de las ecuaciones de movimiento debido a que es directamente compatible con estos esquemas. Otras técnicas de implementación como los multiplicadores de Lagrange, presentan inconvenientes en la solución explícita de los mismos puesto que los multiplicadores no tienen masa asociada y es necesario resolver entonces un sistema acoplado.

El algoritmo de contacto se encuentra disponible en el software STAMPAK (2011), y ha sido modificado para incorporar los efectos térmicos del contacto. El esquema calcula las fuerzas nodales equivalentes de manera directa, los detalles de este esquema de cálculo pueden verse en Flores (2000) y las referencias que allí se mencionan. El algoritmo de contacto está basado en el sistema típico de dos superficies incidente-objetivo (o *slave-master*, respectivamente), en donde la superficie incidente (*slave*) corresponde al sólido deformable y la superficie objetivo (*master*) es la superficie rígida asociada a herramientas en un problema de contacto unilateral. En este algoritmo se debe verificar que los nodos que describen la superficie incidente no penetren la superficie objetivo, con el consiguiente inconveniente de que no se asegura que puntos intermedios de la superficie objetivo puedan penetrar la superficie incidente. Para evitar esto, muchas veces asociado a una pobre discretización de las superficies en contacto, puede emplearse un esquema simétrico de contacto o de doble pasada. Este esquema de doble pasada implica verificar dos veces el par de contacto e invirtiendo la condición incidente-objetivo en la segunda pasada, lo que resulta costoso y muchas veces es preferible evitar.

Entonces dado un par de contacto como el observado en la Figura B.5, la penetración de un nudo I perteneciente a superficie incidente puede evaluarse a partir de la (B.4) como la distancia mínima g_N^I medida sobre la normal \mathbf{n} de la superficie objetivo (o alguna medida ponderada de la normal si la superficie no es suave, ej.: nudos de la superficie objetivo). Valores positivos de g_N^I implican que no hay contacto y no dan lugar a fuerzas de interacción, mientras que valores negativos de g_N^I representan efectivamente penetración y dan lugar a fuerzas proporcionales a su magnitud.

La fuerza normal de contacto \mathbf{f}_N^I aplicada sobre el nudo incidente se supone igual a:

$$\mathbf{f}_N^I = - \frac{\gamma_N}{2 (\Delta t)^2} m^I g_N^I \mathbf{n} = -c_N g_N^I \mathbf{n} \quad (\text{B.29})$$

en donde m^I es la masa asociada al nudo incidente, g_N^I la penetración del nudo incidente en la superficie objetivo, \mathbf{n} la normal a la superficie objetivo en el punto de incidencia, y Δt el incremento de tiempo en el esquema de integración explícita. El parámetro γ_N es el factor de penalización normal el cual se adopta de forma que los valores de penetración sean

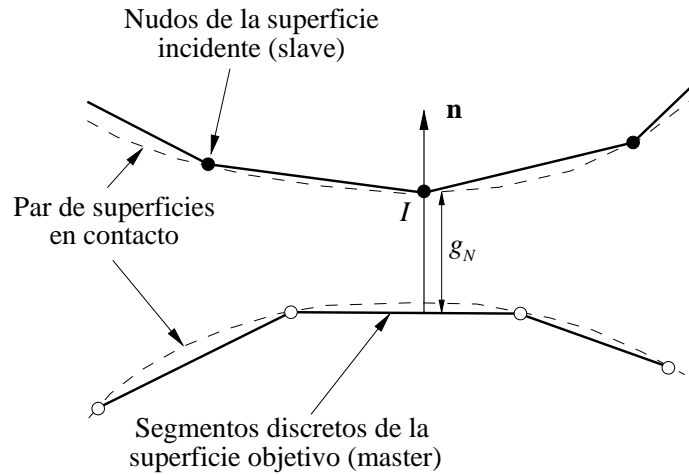


Figura B.5 – Esquema de un par de superficies incidente-objetivo en dos dimensiones

aceptablemente pequeños y además que no se afecte de manera significativa el incremento de tiempo en el esquema de integración. Mientras que el parámetro c_N es el coeficiente de penalización normal. En el trabajo de Flores (2000) se puede encontrar algunos detalles adicionales respecto de este parámetro.

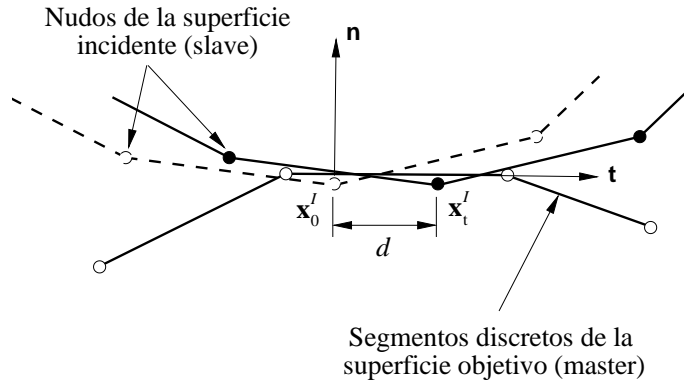


Figura B.6 – Evaluación del deslizamiento por fricción

En este algoritmo de contacto el tratamiento de la fricción se hace siguiendo una ley de Coulomb “no clásica”. Un nudo I de la superficie incidente entra en contacto con la superficie objetivo, en un determinado instante de tiempo, en un punto \mathbf{x}_0^I . En instantes posteriores, y en forma similar a la fuerza normal, se calcula la fuerza tangencial como:

$$\mathbf{f}_T^I = -\frac{\gamma_T}{2(\Delta t)^2} m^I (\mathbf{x}_t^I - \mathbf{x}_0^I) = -c_T (\mathbf{x}_t^I - \mathbf{x}_0^I) \quad (\text{B.30})$$

o de forma equivalente:

$$\mathbf{f}_T^I = -c_T d \mathbf{t} \quad (\text{B.31})$$

siendo \mathbf{x}_t^I la posición del punto de incidencia después de un incremento de tiempo Δt de acuerdo a la Figura B.6, y γ_T el factor de penalización tangencial (puede ser similar a γ_N , aunque no es estrictamente necesario). El parámetro c_T es el coeficiente de penalización

tangencial y \mathbf{t} es la dirección de la fuerza tangencial. La magnitud del desplazamiento d , es equivalente a g_T en la ecuación (B.15).

La ley de Coulomb, ver ecuación (B.13), especifica que el valor de fuerza tangencial no puede exceder de:

$$|\mathbf{f}_T| < \mu |\mathbf{f}_N| \quad (\text{B.32})$$

con μ el coeficiente de fricción. El valor de μ puede ser constante (ley clásica de Coulomb) o depender de la magnitud de $|\mathbf{f}_N|$. Por otro lado es posible definir un valor de μ_S (fricción estática) el cual define la máxima fuerza tangencial permitida (condición de adherencia) y un valor μ_D (fricción dinámica) el cual es válido una vez alcanzado el máximo y las superficies deslizan una sobre otra. Una vez superada la fuerza de adherencia debe realizarse una actualización de la posición del punto incidente, esta actualización se hace de forma conceptualmente idéntica al algoritmo de plasticidad infinitesimal, siguiendo los lineamientos propuestos en la generalización de la ley de Coulomb basado en la analogía de la descomposición elasto-plástica del desplazamiento tangencial como se presenta en el Apartado B.2.2.

Luego si no hubo deslizamiento relativo y $|\mathbf{f}_T| < \mu_S |\mathbf{f}_N|$, entonces \mathbf{x}_0 no cambia.

Mientras que si se supera el valor de $\mu_S |\mathbf{f}_N|$, entonces:

$$\mathbf{f}_T = -\mu_D |\mathbf{f}_N| \mathbf{t} \quad (\text{B.33})$$

y se actualiza el valor de \mathbf{x}_0 a:

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_t - \left(\frac{\mu_D |\mathbf{f}_N|}{c_T} \right) \mathbf{t} \quad (\text{B.34})$$

El trabajo de Flores (2000) presenta también algunos detalles asociados a la definición de la superficie objetivo (*master*) en caso de un algoritmo de contacto tridimensional y también respecto del esquema de búsqueda de contacto. Las consideraciones hechas en dicho trabajo son válidas para este algoritmo, con la salvedad que la superficie objetivo está definida por segmentos rectos con dos nodos en sus extremos y que en dicho trabajo no se consideran los aportes a la ecuación de la energía

El algoritmo de contacto bidimensional original de STAMPAK (2011), ha sido modificado para tener en cuenta las contribuciones térmicas asociadas a la transmisión de calor por contacto y la generación de calor por fricción. Para ello se han adicionado al esquema de contacto las ideas presentadas en el Apartado B.2.3.

Bibliografía

- ABAQUS. *Student Edition, version 6.10.1*. Simulia, Dassault Systèmes Corporation, Providence, EE.UU., 2010.
- Adam L. y Ponthot J.P. A coupled thermo-viscoplastic formulation at finite strains for the numerical simulation of superplastic forming. *Journal of Materials Processing Technology*, 139:514–520, 2003.
- Adam L. y Ponthot J.P. Thermomechanical modeling of metals at finite strains: first and mixed order finite elements. *International Journal of Solids and Structures*, 42:5615–5665, 2005.
- Akin J. *Finite Element Analysis with Error Estimators*. Butterworth-Heinemann, London, 2004.
- Alfano G., De Angelis F., y Rosatti L. General solution procedures in elasto/viscoplasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190:5123–5147, 2001.
- Andia Fages S. *Estudio de sensibilidad de la solución de la ecuación no lineal de consistencia de un modelo constitutivo elasto-viscoplastico*. Tesis de licenciatura, Universidad Nacional de Cuyo, Mendoza, Argentina, 2010.
- Andrade-Campos A., Menezes L., y Teixeira-Dias F. Numerical analysis of large deformation processes at elevated temperatures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:3947–3959, 2006.
- Armero F. On the locking and stability of finite elements in finite deformation plane strain problems. *Computers and Structures*, 75:261–290, 2000.
- Armero F. y Simo J. A priori stability estimates and unconditionally stable product formula algorithms for nonlinear coupled thermoplasticity. *International Journal of Plasticity*, 9:749–782, 1993.
- Bathe K.J. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, New Jersey, 1996.
- Becker M. y Hackenberg H.P. A constitutive model for rate dependent and rate independent inelasticity. application to in718. *International Journal of Plasticity*, 27:596–619, 2011.
- Belytschko T., Liu W., y Moran B. *Nonlinear finite elements for continua and structures*. John Wiley and Sons, Ltd, 2000.
- Bertram A. An alternative approach to finite plasticity based on material isomorphisms. *International Journal of Plasticity*, 15:353–374, 1998.

- Bertram A. Finite thermoplasticity based on isomorphisms. *International Journal of Plasticity*, 19:2027–2050, 2003.
- Betsch P. y Stein E. Numerical implementation of multiplicative elasto-plasticity into assumed strain elements with application to shells at large strains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 179:215–245, 1999.
- Bodner S. y Partom Y. Constitutive equations for elastic-viscoplastic strain-hardening materials. *Journal of Applied Mechanics*, 42:385–389, 1975.
- Bonet J. y Wood R. *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. Cambridge University Press, United Kingdom, 1997.
- Bonnet M. y Mukherjee S. Implicit bem formulations for usual and sensitivity problems in elastoplasticity using the consistent tangent operator concept. *International Journal of Solids*, 33:4461–4480, 1996.
- Boroomand B. y Zienkiewicz O. Recovery procedures in error estimation and adaptivity, part ii: adaptivity in nonlinear problems of elasto-plasticity behaviour. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176:127–146, 1999.
- Borouchaki H., Laug P., Cherouat A., y Saanouni K. Adaptive remeshing in large plastic strain with damage. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 63:1–36, 2005.
- Bugeda G. A new adaptive remeshing scheme based on the sensitivity analysis of the spr pointwise error estimation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:462–478, 2006.
- Bui Q., Papeleux L., y Ponthot J.P. Numerical simulation of springback using enhanced assumed strain elements. *Journal of Materials Processing Technology*, 153-154:314–318, 2004.
- Caminero M., Montans F., y Bathe K.J. Modeling large strain anisotropic elasto-plasticity with logarithmic strain and stress measures. *Computers and Structures*, 89:826–843, 2011.
- Castelló W. *Análisis bidimensional de sólidos con grandes deformaciones usando un elemento triangular con deformaciones impuestas*. Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina, 2005.
- Castelló W. y Flores F. Un elemento triangular en deformaciones impuestas para sólidos bidimensionales con grandes deformaciones. *Mecánica Computacional*, XXIV:595–616, 2005.
- Castelló W. y Flores F. Análisis bidimensional de sólidos con grandes deformaciones aplicando un elemento con deformaciones impuestas. *Mecánica Computacional*, XXV:329–349, 2006.
- Castelló W. y Flores F. Análisis bidimensional de sólidos con grandes deformaciones aplicando remallado adaptativo. *Mecánica Computacional*, XXVI:844–862, 2007.

- Castelló W. y Flores F. A triangular finite element with local remeshing for the large strain analysis of axisymmetric solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198:332–343, 2008.
- Celentano D. Thermomechanical analysis of de taylor impact test. *Journal of Applied Physics*, 91(6):3675–3686, 2002.
- Celentano D. Thermomechanical simulation and experimental validation of wire drawing processes. *Journal of Materials Processing Technology*, 25(7):546–556, 2010.
- Cernocky E. y Krempl E. A theory of thermoviscoplasticity based on infinitesimal total strain. *International Journal of Solids and Structures*, 16:723–741, 1980.
- Cervera M., Chiumenti M., y Codina R. Mixed stabilized finite element methods in nonlinear solid mechanics - part i: Formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199:2559–2570, 2010a.
- Cervera M., Chiumenti M., y Codina R. Mixed stabilized finite element methods in nonlinear solid mechanics - part ii: Strain localization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199:2571–2589, 2010b.
- César de Sá J. y Natal Jorge R. New enhanced strain element incompressible problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44:229–248, 1999.
- Chaboche J.L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories. *International Journal of Plasticity*, 24:1642–1693, 2008.
- Crisfield M. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures: Advanced Topics vol. 2*. Jhon Wiley and Sons, Ltd, 1997a.
- Crisfield M. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures: Essentials vol. 1*. Jhon Wiley and Sons, Ltd, 1997b.
- Delobelle P. Sur les lois de comportement viscoplastique à variables internes. *Rev. Phys. Appl.*, 23:1–61, 1988.
- Dhondt G. *The finite element method for three-dimensional thermomechanical applications*. Jhon Wiley and Sons, Ltd, 2004.
- Duchêne L., Lelotte T., Flores P., Bouvier S., y Habraken A.M. Rotation of axes for anisotropic metal in fem simulations. *International Journal of Plasticity*, 24:397–427, 2008.
- Eidel B. y Gruttmann F. Elastoplastic orthotropy at finite strains: multiplicative formulation and numerical implementation. *Computational Materials Science*, 28:732–742, 2003.
- Erhart T., Wall W., y Ramm E. Robust adaptive remeshing strategy for large deformation, transient impact simulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 65:2139–2166, 2006.

- Eterovic A. y Bathe K. A hyperelastic-based large strain elasto-plastic constitutive formulation with combined isotropic-kinematic hardening using logarithmic stress and strain measures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 30:1099–1115, 1990.
- Felippa C. A study of optimal membrane triangles with drilling freedoms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192:2125–2168, 2003.
- Flores F. *Introducción al análisis no lineal de estructuras*. Cálculo Estructural Avanzado, Dpto de Estructuras, F.C.E.F. y N. - U.N.C., Córdoba, 1995.
- Flores F. Un algoritmo de contacto para el análisis explícito de procesos de embutición. *Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 16:421–432, 2000.
- Flores F. Un elemento triangular 2-d en deformaciones lineales impuestas para deformaciones finitas. *Mecánica Computacional*, XXII:1906–1920, 2003.
- Flores F. *An assumed strain triangular element for finite deformations analysis in two dimensions*. Applications of Computational Mechanics in Structures and Fluids (Idelsohn y Sonzogni Eds), CIMNE, Barcelona (España), 2005.
- Flores F. A two-dimensional linear assumed strain triangular element for finite deformation analysis. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 73(6):970–976, 2006.
- Flores F. y Oñate E. A basic thin shell triangle with only translational dofs for large strain plasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51(1):57–93, 2001.
- Freed A. y Walker K. Viscoplasticity with creep and plasticity bounds. *International Journal of Plasticity*, 9:213–242, 1993.
- García C. y Celentano D. Análisis del impacto de una bala de cabeza plana contra una pared rígida. *VI Encuentro de Modelos Físicos y Matemáticos en Ingeniería*, 15-16 Noviembre de 2007, UNiversidad de Santiago de Chile, 2007.
- García Garino C. *Un modelo numérico para el análisis de sólidos elasto-plásticos sometidos a grandes deformaciones*. PhD thesis, E.T.S. Ingenieros de Caminos. Universidad Politécnica de Catalunya, 1993.
- García Garino C., Ponthot J.P., Mirasso A., Koeune R., Jeunechamps P.P., y Cargelío C. Numerical simulation of large strain rate dependent j2 problems. *Mecánica Computacional*, XXV:1927–1946, 2006.
- GiD. *The personal pre and post processor, version 9.0*. International Center for Numerical Methods in Engineering, UPC, Barcelona, 2010.
- Glaser S. y Armero F. On the formulation of enhanced strain finite elements in finite deformations. *Engineering Computations*, 14:757–791, 1997.
- Green A. y Naghdi P. A general theory of an elastic-plastic continuum. *Archives of Rational Mechanics and Analysis*, 18:251–281, 1965.
- Green A. y Naghdi P. Some remarks on elastic-plastic deformation at finite strains. *International Journal of Engineering Science*, 13:1219–1229, 1971.

- Gu H. y Kitamura M. A modified recovery procedure to improve the accuracy of stress at central area of bilinear quadrilateral element. *Journal of Society Naval Architects Japan*, 188:486–496, 2000.
- Gu H., Zong Z., y Hung K. A modified superconvergent patch recovery method and its application to large deformation problems. *Finite Elements in Analysis and Design*, 40:665–687, 2004.
- Gupta P. y Gupta N. Multiple barrelling in axial compression of cylindrical tubes. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 2:195–217, 2005.
- Han C.S. y Wriggers P. An h-adaptive method for elasto-plastic shell problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 189:651–671, 2000.
- Heeres O., Suiker A., y de Borst R. A comparison between the perzyna viscoplastic model and the consistency viscoplastic model. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 21:1–12, 2002.
- Heidari M., Vafai A., y Desai C. An eulerian multiplicative constitutive model of finite elastoplasticity. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 28:1088–1097, 2009.
- Henann D. y Anand L. A large deformation theory for rate-dependent elastic-plastic materials with combined isotropic and kinematic hardening. *International Journal of Plasticity*, 25:1833–1878, 2009.
- Horstemeyer M. y Bammann D. Historical review of internal state variable theory for inelasticity. *International Journal of Plasticity*, 26:1310–1334, 2010.
- Hughes T.J.R. Generalisation of selective integration procedures to anisotropic and nonlinear media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 15:1413–1418, 1980.
- Hughes T.J.R. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Pub., 2000.
- Idesman A. Comparison of different isotropic elastoplastic models at finite strains used in numerical analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192:4659–4674, 2003.
- Itskov M. On the application of the additive decomposition of generalized strain measures in large strain plasticity. *Mechanics Research Communications*, 31:507–517, 2004.
- Kasper E. y Taylor R. A mixed-enhanced strain method - part i: Geometrically linear problems. *Computers and Structures*, 75:237–250, 2000.
- Kim D.N., Montáns F., y Bathe K.J. Insight into a model for large strain anisotropic elasto-plasticity. *Computational Mechanics*, 44:651–668, 2009.
- Labbé P. y Garon A. A robust implementation of zienkiewicz and zhu s local patch recovery method. *Communications in Applied Numerical Methods*, 11:427–434, 1995.
- Lee E. Elastic-plastic deformation at finite strains. *Journal of Applied Mechanics*, 36:1–6, 1969.

- Lee J., Wagoner R., y Nakamachi E. *A benchmark test for sheet metal forming analysis*. Technical Report, Ohio State University, 1989.
- Lemaitre J. *Sur la détermination des lois de comportement des matériaux élasto-viscoplastiques*. Thèse de doctorat d'état, Univ. Paris VI, 1971.
- Lemaitre J. y Chaboche J.L. *Mechanics of solid material*. Cambridge University Press, 1994.
- Liang L., Liu Y., y Xu B. Design sensitivity analysis for parameters affecting geometry, elastic-viscoplastic material constant and boundary condition by consistent tangent operator-based boundary element method. *International Journal of Solids and Structures*, 44:2571–2592, 2007.
- Löblein J., Schröder J., y Gruttman F. Application of generalized measures to an orthotropic finite elasto-plasticity model. *Computational Materials Science*, 28:696–703, 2003.
- Lu J. y Papadopoulos P. A covariant formulation of anisotropic finite plasticity: theoretical developments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193:5339–5358, 2004.
- Lubliner J. *Plasticity Theory*. Macmillan Publishing Company, 1990.
- Malkus D. y Hughes T. Mixed finite element methods reduced and selective integration techniques: a unification of concepts. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 15:63–81, 1978.
- Mandel J. Plasticité classique et viscoplasticité. *CISM Courses and Lectures, Springer-Verlag, Wien*, 97, 1972.
- Mandel J. Sur la définition de la vitesse de déformation élastique et en grande transformation élastoplastique. *International Journal of Solids and Structures*, 19:573–578, 1983.
- Miehe C., Apel N., y Lambrecht M. Anisotropic additive plasticity in the logarithmic strain space: modular kinematic formulation and implementation based on incremental minimization principles for standard materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191:5383–5425, 2002.
- Miller A. An inelastic constitutive model for monotonic, cyclic, and creep deformation: Part i. equations development and analytical procedures. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 98 (2):97–105, 1976.
- Naghdi P. A critical review of the state of finite plasticity. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 41:315–394, 1990.
- Oñate E. *Structural Analysis with the Finite Element Method, Linear Statics*. International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE), 2009.
- Papadopoulos P. y Lu J. A general framework for the numerical solution of problems in finite elasto-plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 159:1–18, 1998.

- Papadopoulos P. y Lu J. On the formulation and numerical solution of problems in anisotropic finite plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190:4889–4910, 2001.
- Parvizian F., Schneidt A., Svendsen B., y Mahnken R. Thermo-mechanically coupled modeling and simulation of hot metal-forming processes using adaptive remeshing method. *GAMM-Mitteilungen*, 33:95–115, 2010.
- Peric D., Hochard C., Dutko M., y Owen D. Transfer operators for evolving meshes in small strain elasto-plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 137:331–344, 1996.
- Perzyna P. Fundamental problems visco-plasticity. *Advanced in Applied Mechanics, G. Kuerti editor, Academic Press*, 9:243–377, 1966.
- Perzyna P. Thermodynamic theory of plasticity. In Chia-Shun Yih, editor, *Advanced in Applied Mechanics, Academic Press*, 11:313–355, 1971.
- Ponthot J.P. Unified stress update algorithm for the numerical simulation of large deformation elasto-plastic and elasto-viscoplastic processes. *International Journal of Plasticity*, 18:91–126, 2002.
- Ponthot J.P., Garino C., y Mirasso A. Large strain elasto/viscoplastic constitutive model. theory and numerical scheme. *Mecánica Computacional*, XXIV:441–454, 2005.
- Reese S., Wriggers P., y Reddy B. A new locking-free brick element technique for large deformation problems in elasticity. *Computers and Structures*, 75:291–304, 2000.
- Ribero M., van Hooijdonk J., Andia S., Mirasso A., y García Garino C. Análisis de un modelo elasto-viscoplastico no-lineal. *Mecánica Computacional*, XXX:787–803, 2011.
- Robinson D. *A unified creep-plasticity model for structural metals at high temperature*. Report ORNL-TM-5969, Oak Ridge Nat. Lab., 1978.
- Rosa P., Baptista R., Rodrigues J., y Martins P. Inversão externa de tubos metálicos de parede fina. *Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecánica*, 8:79–90, 2004.
- Sansour C., Karsaj I., y Sorić J. On anisotropic flow rules in multiplicative elastoplasticity at finite strains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196:1294–1309, 2007.
- Shutov A. y Kreißig R. Finite strain viscoplasticity with nonlinear kinematic hardening: Phenomenological modeling and time integration. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197:2015–2029, 2008.
- Sidoroff F. Quelques réflexions sur le principe d'indifférence matérielle pour un milieu ayant un état relâché. *C.R. Acad. Sc. Paris*, 271:1026–1029, 1970.
- Simo J. y Armero F. Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33:1413–1449, 1992.

- Simo J., Armero F., y Taylor R. Improved versions of assumed enhanced strain tri-linear elements for 3d finite deformation problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 110:359–386, 1993.
- Simo J. y Hughes T. *Computational Inelasticity*. Springer-Verlag New York, Inc., 1998.
- Simo J. y Rifai M. A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29:1595–1638, 1990.
- Sluzalec A. An analysis of thermal effects of coupled thermo-plasticity in metal forming processes. *Communications in Applied Numerical Methods*, 4:675–685, 1988.
- Son I.H. y Im Y.T. Localized remeshing techniques for three-dimensional metal forming simulations with linear tetrahedral elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 67:672–696, 2006.
- Souza Neto E. A simple robust numerical integration algorithm for a power-law viscoplastic model under both high and low rate-sensitivity. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 20:1–17, 2004.
- Souza Neto E., Peric D., Dutko M., y Owen D.R.J. Design of simple low order finite elements for large strain analysis of nearly incompressible solids. *International Journal of Solids and Structures*, 33:3277–3296, 1996.
- Souza Neto E., Pires F., y Owen D. A new \bar{f} based method for linear triangles and tetrahedra in the finite strain analysis of nearly incompressible solids. *VII International Conference on Computational Plasticity COMPLAS 2003, CIMNE, Barcelona*, 2003.
- STAMPACK. *A General Finite Element System for Sheet Stamping and Forming Problems, v7.1.0*. Quantech ATZ, Barcelona, España, 2011.
- Taylor L. y Becker E. Some computational aspects of large deformation rate dependent plasticity problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 41:251–278, 1983.
- Taylor R., Beresford P., y Wilson E. A non-conforming element for stress analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 10:1211–1219, 1976.
- Ulz M. A green-naghdi approach to finite anisotropic rate-independent and rate-dependent thermo-plasticity in logarithmic lagrangean strain-entropy space. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198:3262–3277, 2009.
- Ulz M. A finite isoclinic elasto-plasticity model with orthotropic yield function and notion of plastic spin. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200:1822–1832, 2011.
- Čanadija M. y Brnić J. Associative coupled thermoplasticity at finite strain with temperature-dependent material parameters. *International Journal of Plasticity*, 20:1851–1874, 2004.
- Weissman S. y Sackman J. Elastic.plastic multiplicative decomposition with a stressed intermediate configuration. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200:1607–1618, 2011.

- Wiberg N., Abdulwahab F., y Ziukas S. Enhanced superconvergent patch recovery incorporating equilibrium and boundary conditions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37:3417–3440, 1994.
- Wilson E., Taylor R., Doherty W., y Ghaboussi J. Incompatible displacement models. *Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics, New York, Academic Press*, 1973.
- Wriggers P. *Computational Contact Mechanics*. John Wiley and Sons, Ltd, 2002.
- Yazdani A., Gakwaya A., y Dhatt G. An improved superconvergent patch recovery technique for the axisymmetrical problems. *Computers and Structures*, 66:799–821, 1998.
- Zheng P., Chan L., y Lee T. Finite-element analysis of a combined fine-blanking and extrusion process. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 66:404–430, 2006.
- Zienkiewicz O., Boroomand B., y Zhu J. Recovery procedures in error estimation and adaptivity, part i: adaptivity in linear problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176:111–125, 1999.
- Zienkiewicz O., Rojek J., Taylor R., y Pastor M. Triangles and tetrahedra in explicit dynamic codes for solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43:565–583, 1998.
- Zienkiewicz O. y Taylor R. *The Finite Element Method: The basis*. Butterworth-Heinemann, 2000.
- Zienkiewicz O. y Zhu J. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. part i: The recovery technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33:1331–1364, 1992a.
- Zienkiewicz O. y Zhu J. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. part ii: Error estimates and adaptivity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33:1365–1382, 1992b.