

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales

Tesis Doctoral



**Texturas de imágenes binarias: síntesis,
restauración, *inpainting* e *imputation***

de Valeria Soledad Rulloni

para obtener el grado de Doctora en Ciencias de la Ingeniería

Director: Dr. Oscar Humberto Bustos.

Junio de 2014

**Texturas de imágenes binarias: síntesis,
restauración, *inpainting* e *imputation***

por

Valeria Soledad Rulloni

Dr. Oscar Humberto Bustos

Director

Comisión Asesora:

Dr. Oscar Humberto Bustos

FaMAF - UNC

Dr. Carlos Rinaldi

INN - CNEA

Dr. Ernesto Guillermo Abril

FCEFyN - UNC

Agradecimientos

A Oscar Bustos, por su guía y soporte, en lo académico y en lo personal.

A mi hijo Lucio, por ser mi motivo y mi apoyo.

A mi familia, porque de una u otra forma alimentaron mi confianza.

A mis amigos y colegas.

Resumen

Es notable y justificado el creciente interés por el procesamiento de imágenes, esto se debe a la incalculable utilidad de las imágenes en las aplicaciones de diversas áreas del conocimiento. En particular, las imágenes binarias son apreciadas por la reducción de información y útiles, por ejemplo, en la representación de datos de presencia-ausencia (en fitopatología, agronomía, etc.). Los modelos Gibbs-Markov abundan actualmente en el procesado de imágenes por su capacidad para modelar las interacciones presentes entre píxeles vecinos. Estas interacciones se asocian a ciertas disposiciones relativas entre los valores de los píxeles, dando un aspecto visual característico que se entiende como «textura». Siendo el modelo auto-logístico adecuado para imágenes binarias, esta tesis contiene un análisis teórico, exploratorio y experimental de las propiedades, limitaciones y alcances de dicho modelo en la caracterización de texturas (e interacción, a través de un vector de parámetros). Para este modelo con soporte infinito, de manera novedosa, se presenta y demuestra una condición suficiente (pero no necesaria) que asegura la unicidad de la distribución. Y se definen dos descriptores de texturas binarias: Uno teórico (función inyectiva pero no suryectiva, cuyo argumento es el vector de parámetros) y otro empírico (que resume la información de textura de una imagen y sirve para comparar texturas de imágenes). A partir de ellos se definen además, medidas de distancia entre imágenes y vectores, según la textura que poseen o caracterizan respectivamente.

En este contexto se formalizan dos modelos de degradación de una imagen binaria:

- Degradación por errores no sistemáticos. Se formaliza también su restauración bayesiana asumiendo el soporte (o grilla) no necesariamente finito y se muestran sus limitaciones cuando la intención es remover los errores y restaurar la textura binaria original.

- Degradación por pérdida de información en regiones de píxeles. Se proponen dos métodos de restauración (*inpainting* o *imputation*) de texturas binarias: método de restauración auto-logístico y método de restauración empírico VHDD. Ambos se implementaron con resultados satisfactorios para una amplia variedad de texturas.

Resumo

O crescente interesse no processamento de imagens é notável e justificado, e é devido à enorme utilidade das imagens nas aplicações das mais diversas áreas do conhecimento. Em particular, as imagens binárias são apreciadas pela redução de informação e úteis, por exemplo, na representação de dados de presença-ausência (por exemplo em fitopatologia, agronomia, etc.)

Os modelos de Gibbs-Markov são atualmente bastante populares no processamento de imagens pela sua capacidade de modelar as interações presentes entre pixels vizinhos. Essas interações se associam a certas disposições relativas entre os valores dos pixels, resultando em um aspecto visual característico conhecido como “textura”.

Sendo o modelo auto-logístico adequado para o tratamento de imagens binárias, este trabalho de tese desenvolve uma análise teórica, exploratória e experimental das propriedades, limitações e alcance de dito modelo na caracterização de texturas (e interações, a través de um vetor de parâmetros). Para esse modelo com suporte finito, como resultado novo, se apresenta e demonstra uma condição suficiente (mas não necessária) que garante a unicidade da distribuição. Além disto, se definem dois descritores de texturas binárias: um teórico (função injectiva mas não sobrejetiva, cujo argumento é o vetor de parâmetros), e um outro empírico (que resume a informação da textura de uma imagem e permite comparar texturas de imagens). Também, a partir deles, são definidas medidas de distância entre imagens e vetores, segundo a textura que possuem ou caracterizam, respectivamente. Ness contexto são formalizados dois modelos da degradação de uma imagem binária:

- Degradação por erros não sistemáticos. Se formaliza também sua restauração Bayesiana, assumindo o suporte (ou grade) não necessariamente finito, e se mostram suas limitações quando a intenção é remover os erros e restaurar a

textura binária original.

- Degradação por perda de informação em regiões de pixels. São propostos dois métodos de restauração (*inpainting*) de texturas binárias: método de restauração auto-logístico e método de restauração empírico VHDD. Ambos os métodos foram implementados com resultados satisfatórios para uma ampla variedade de texturas.

Abstract

The growing interest in image processing is remarkable and justified. It is due to the invaluable utility images can find in applications of a wide variety of areas of knowledge. In particular, binary images are appreciated by their information reduction and useful, for instance, in the representation of presence-absence data (like in fito pathology, agronomics, etc)

The Gibbs-Markov models are very popular in the image processing because of their capability of modeling the interactions between neighboring pixels. These interactions are associated to certain relative distribution between the values of the pixels, resulting in the characteristic visual aspect known as ‘texture’.

Being the auto-logistic model well suited for binary images analysis, the present thesis work develops a theoretical, experimental and exploratory analysis of the properties, limitations and reach of such model for characterizing textures (and interactions, through a vector of parameters). For this model with finite support, we present and demonstrate, a sufficient (but not necessary) condition, which assures the unicity of the distribution. Besides this, we define two descriptors of the binary texture: one theoretical (injective function with the parameters vector as its argument) and a second one, empirical (which summarizes the information of texture of an image and allows to compare images textures). From these descriptors as starting point, we also define measures of the distance between images and vectors, depending on the texture they have or characterize, respectively.

In that context, we formalize two models of degradation of a binary image:

- Degradation by non-systematic errors. We formalize also its Bayesian restoration assuming a support (or lattice) not necessarily finite, and we show its limitations when the objective is to remove the errors and restoring the origi-

nal binary texture.

- Degradation by information loss in pixels regions. We propose two methods of restoration (*inpainting*) of binary textures: the auto-logistic restoration method and the empiric VHDD method. We implemented both methods with successful results for a wide variety of textures.

Índice general

Agradecimientos	4
Resumen	5
Resumo	7
Abstract	9
Lista de símbolos	14
Lista de siglas	19
Introducción	20
1. Modelado de imágenes	24
1.1. Imagen y datos espaciales	24
1.2. Modelado probabilístico: Campos markovianos, potenciales y distribuciones de Gibbs	28
1.2.1. Distribuciones de Gibbs	30
1.2.2. Campos markovianos	35
1.3. Ejemplos	37
1.4. Modelo auto-logístico	44
1.5. Unicidad: Condición de Dobrushin	48
1.5.1. Condición de Dobrushin para el modelo auto-logístico	50
2. Textura	53
2.1. Texturas binarias	53

2.2. Nuevos descriptores de textura	60
2.3. Estado del arte y discusión	65
3. Estimación	69
3.1. Máxima verosimilitud (Máxima verosimilitud (MV))	69
3.2. Pseudo-máxima verosimilitud (PMV) y método de codificado (o <i>coding</i>)	70
3.3. Método del histograma	72
4. Restauración	76
4.1. Degradación por ruido: Restauración bayesiana	77
4.2. Degradación por pérdida de información: <i>inpainting</i>	85
4.3. Estado del arte y discusión	87
4.4. Dos nuevos métodos de restauración <i>inpainting</i>	89
4.4.1. Método de restauración auto-logístico	90
4.4.2. Método de restauración empírico VHDD	90
5. Criterios y medidas de similitud	92
5.1. Similitud y distancia entre imágenes	92
5.2. Similitud y distancia entre vectores de parámetros	95
6. Resultados de estimación	98
7. Resultados de restauración	107
8. Conclusiones y comentarios	119
9. Trabajos futuros	124
A. Definiciones básicas	125
A.1. Medidas de Probabilidad	127
A.2. Estadística Bayesiana	132
B. Algoritmos de simulación y optimización	133
B.1. Cadenas de Markov (de imágenes)	133
B.2. <i>Gibbs sampler</i>	134
B.3. <i>Simulated annealing</i>	136

B.4. Método de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS)	137
Bibliografía	139
Índice alfabético	142

Lista de símbolos

E	espacio de estados (espacio métrico)	24
$\mathcal{P}(A)$	partes de A	24
\mathcal{E}	σ -álgebra de Borel de E	24
S	soporte	24
x	imagen	25
$V \subseteq S$	subsoporte	26
E^V	conjunto de imágenes con soporte V	26
\tilde{a}	imagen constante	26
\mathcal{E}^V	σ -álgebra producto	26
x_V	x restringida a V	26
x^t	imagen trasladada por t	26
$V \subseteq \Delta$	subsoportes	26
$\sigma_{\Delta, V}$	proyección: $E^\Delta \rightarrow E^V$	26
σ_V	proyección: $E^S \rightarrow E^V$	26
$\sigma_{\Delta, s}$	proyección: $E^\Delta \rightarrow E^{\{s\}}$	26
σ_s	proyección: $E^S \rightarrow E^{\{s\}}$	26
$\mathcal{F} \doteq \mathcal{E}^S$	σ -álgebra producto	26
$\sigma_V \in B$	conjunto de \mathcal{F}_V	26
$\sigma_V = x_V$	conjunto de \mathcal{F}_V	26
$(F \in A)$	conjunto de \mathcal{D}	129
$(F = b)$	conjunto	129
$(f \in A)$	conjunto	129
$(f = b)$	conjunto de \mathcal{D}	129
$\mathcal{F}_V \subset \mathcal{F}$	sub σ -álgebra	27

$\mathcal{I}_V \doteq \mathcal{F}_{S \setminus V}$	sub σ -álgebra	27
\setminus	diferencia de conjuntos	27
$\#$	cardinal de un conjunto	27
\mathcal{S}	subsoportes finitos	27
$\Lambda_{M,N}$	soporte regular finito	27
Λ_N	soporte regular finito	27
$\widetilde{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{S}$	27
$\widetilde{\mathcal{F}}_V$	subsoportes en $\widetilde{\mathcal{F}}$ que intersecan a V	27
$\widetilde{\mathcal{F}}(V)$	subsoportes en $\widetilde{\mathcal{F}}$ contenidos en V	27
X	campo aleatorio	28
(Ω, \mathcal{D})	espacio medible	125
P	probabilidad	28
P_X	probabilidad	28
(Ω, \mathcal{D}, P)	espacio de probabilidad	127
(Ω, \mathbf{d})	espacio métrico	125
\mathbf{d}	métrica	125
$D(x, \delta)$	disco abierto centrado en x de radio δ	125
τ	topología (inducida por la métrica)	126
\mathcal{B}_1	σ -álgebra de Borel de \mathbb{R}	126
$\Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{S}}$	potencial	30
$\Lambda \in \mathcal{S}$	soporte finito	30
Φ_Λ	30
H_Λ	función de energía local	30
H_Λ^Φ	función de energía local	30
Z_Λ	función de partición local	30
H_s	función de energía local	30
Z_s	función de partición local	30
ρ_Λ	30
ρ_s	característica local	31
γ	especificación de Gibbs	31
γ_Λ	núcleo de probabilidad	31
μ	medida	127

ρ	función de densidad	128
$p(\cdot, \cdot)$	función de transición	128
$\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{D})$	medidas σ -finita sobre (Ω, \mathcal{D})	127
$\mathcal{P}(\Omega, \mathcal{D})$	probabilidades sobre (Ω, \mathcal{D})	127
$\mathcal{G}(\Phi)$	medidas de Gibbs para Φ	31
γ_{Λ}^0	núcleo de probabilidad	32
γ_s^0	núcleo de probabilidad	32
\mathcal{L}^{∞}	funciones acotadas	32
$\ \cdot \ _{\mathcal{L}^{\infty}}$	norma infinito	32
f	función medible	33
\bar{A}	clausura del conjunto A	33
$\gamma_{\Lambda}(f)$	función	33
\mathcal{L}	funciones quasilocales	33
$\Phi \sim \Psi$	potenciales equivalentes	34
$t + V$	subsoporte trasladado	34
τ_t	traslación por t	34
$\mathbf{0} \doteq (0, 0)$		34
δ_{ω}	probabilidad	128
1_C	función indicadora (del conjunto C)	128
Θ	conjunto de parámetros	34
$\text{int}(A)$	interior de A	34
$\underline{\theta}$	vector de parámetros	34
$\Phi^{\underline{\theta}}$	potencial parametrizado por $\underline{\theta}$	34
∂	sistema de entornos o vecindades	35
∂s	entorno de s	35
$\partial \Delta$	entorno de Δ	35
v_1, v_2, v_3, v_4		35
$\mathcal{C} \doteq \mathcal{C}(\partial)$	conjunto de los ∂ -cliques	36
\mathcal{C}_V	∂ -cliques que intersecan a V	36
$\mathcal{C}(V)$	∂ -cliques incluidos V	36
$\ \cdot \ _2$	norma euclídea	75
$P_{w\partial\Delta}$	probabilidad condicional	44

$p(x_\Lambda x_{\partial\Lambda})$	densidad condicional (a priori)	45
$p(x_\Lambda w_{\partial\Lambda}, \underline{\beta})$	45
u_{z_Λ}	46
Λ_{i_0}	46
Λ_{i_1}	46
Λ_{i_2}	46
$p(x_s w_{\partial s}, \underline{\beta})$	47
ν	suma de interacción local	48
\mathbf{u}	vector de interacción local	48
d_U	distancia uniforme	49
$\gamma_{s,t}$	interdependencia de Dobrushin entre s y t	49
$\alpha(\gamma)$	coeficiente de interdependencia de Dobrushin	49
$S \setminus t$	50
$J \doteq 3^g$	58
$Hist$	histograma de segundo orden	60
tx	función textura bajo un modelo auto-logístico	61
$prop$	vector de proporciones	61
π_s	característica local	69
f_V	función de verosimilitud	70
f_{SV}	función de verosimilitud	70
Λ^*	76
$p(x_\Lambda y_\Lambda, x_{\partial\Lambda})$	densidad condicional a posteriori	78
$x_V \oplus r_V$	suma (mod 2) de imágenes	78
$E^S \times E^S$	79
$\mathcal{F} \times \mathcal{F}$	79
R	campo aleatorio	79
Y	campo aleatorio	79
\mathcal{F}_V^X	80
\mathcal{F}_V^R	80
$\tilde{\Lambda}$	86
Δ	86
ϵ	probabilidad de error/ruido	88

dt	distancia entre imágenes según sus texturas	95
di	distancia ideal	96
de	distancia empírica	96
$\mu(A, B)$	probabilidad de intersección de conjuntos	128
$\mu(A D)$	probabilidad condicional	128
$f_n \rightarrow f$	convergencia casi seguramente (c.s.)	129
$f_n \xrightarrow{\mu} f$	convergencia en μ -medida	129
$\int f d\mu$	integral o esperanza	130
$E(f) \doteq E_\mu(f)$	esperanza	130
$\int_B f d\mu$	integral sobre B	130
$E(f \mathcal{B})$	esperanza condicional	131
$E_\mu(f \mathcal{B})$	esperanza condicional	131
$\mu(A \mathcal{B})$	probabilidad condicional	131
π	densidad de Gibbs	134
π_s	característica local	134

Lista de siglas

BFGS	Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno.....	13
c.c.	caso contrario.....	37
CCR	<i>coordinate cluster representation</i>	68
c.s.	casí seguramente.....	18
ECM	error cuadrático medio.....	92
GS	<i>Gibbs sampler</i>	42
HVS	<i>Human Visual System</i>	93
i.i.d.	independiente e idénticamente distribuido.....	75
LBP	patrones locales binarios.....	57
MAP	maximun a posteriori.....	78
MC	mínimos cuadrados.....	75
MCP	mínimos cuadrados ponderados.....	67
MRF	<i>Markov random field</i>	28
MV	Máxima verosimilitud.....	12
PMV	Pseudo-máxima verosimilitud.....	12
PS	<i>prop sampler</i>	109
q.l.	quasilocal.....	33
RICC	representación de imágenes por cúmulos coordinados.....	68
SA	<i>simulated annealing</i>	99

Introducción

Las imágenes binarias poseen dos valores posibles para cada pixel, por ejemplo: blanco-negro o 1 – 0. Estos valores pueden representar datos binarios, como por ejemplo presencia-ausencia de alguna característica en una escena, en el objetivo o en el terreno. Por su importancia, el objeto de estudio del presente trabajo es la *imagen binaria*. El enfoque de su estudio está centrado en las «texturas» que ésta pueda presentar. Se considera que la «textura» de una imagen está determinada por la disposición local relativa entre sus valores y directamente relacionada con la interacción presente entre sus píxeles. Para abordar este aspecto, en esta tesis, se describe un marco teórico por momentos «amplio», que facilite el entendimiento y que contemple además, de manera adecuada, otros tipos de imágenes. En general, es notable y justificado el creciente interés por el procesamiento de imágenes, debido a la incalculable utilidad de las imágenes en las aplicaciones de diversas áreas del conocimiento. En particular, las imágenes binarias son útiles, por ejemplo, en estudios de fitopatología agronómica, representando mapas de presencia o ausencia de enfermedades en cultivos.

Dentro de las técnicas de procesamiento de imágenes, cabe destacar la importancia de la restauración pues, debido a distorsiones, interferencias o errores, la imagen «observada» no es sino una modificación o un porcentaje de la que se quería obtener, léase «verdadera». En el presente trabajo se aborda esta problemática. Los factores que pueden modificar una imagen están asociados al tipo de imagen, al entorno, al sistema de captación o al mecanismo de construcción de la misma. Algunos ejemplos: atmósfera, nubes, interferencias, vibraciones, discretizado, errores, etc. Se entiende por restauración a la búsqueda de la imagen «verdadera» (completa), a partir de la «observada», que es el objetivo general del presente trabajo. Hay diversas técni-

cas de restauración tales como la aplicación de filtros de suavizado con la intención de quitar el ruido o la llamada deconvolución, en donde se conoce o se estima el proceso de degradación. Los filtros de suavizado tienen la desventaja de perder los detalles y texturas de las imágenes, mientras que para la deconvolución es necesario un conocimiento previo del mecanismo de degradación que ha sufrido. La restauración, en el caso de pérdida completa de regiones de datos, en la bibliografía se puede encontrar con el nombre de *inpainting* o *imputation*, abordada desde muchas aristas. Las propuestas aquí presentadas, para resolver el problema de restauración se apoyan en las ventajas de las técnicas estadísticas, tanto en cuanto a restauración en presencia de ruido como de pérdida de regiones de información. Ambas situaciones fueron abordadas con un enfoque bayesiano, el cual requiere modelar la distribución de los valores de los píxeles de la imagen. Es sabido que en el caso de las imágenes, los campos markovianos son más adecuados que el modelo de independencia espacial, pues es de esperar que píxeles cercanos en una imagen sean parecidos o cuanto menos relacionados. Los campos markovianos (generalizan la noción de cadena de Markov y) son los modelos bajo los cuales la dependencia de un píxel con el resto de la imagen sólo se circunscribe a los lugares más cercanos. Estos modelos abundan actualmente en el procesamiento de imágenes, y bajo ciertas circunstancias están caracterizados por distribuciones de Gibbs. Algunos ejemplos paramétricos pueden modelar diferentes texturas a través de la movilidad de sus parámetros. El presente trabajo contiene un análisis teórico, exploratorio y experimental de las propiedades, limitaciones y alcances del modelo auto-logístico en la caracterización de texturas e interdependencia presentes en imágenes binarias.

Para algunas herramientas teóricas y en ciertas situaciones es imprescindible suponer que la grilla donde la imagen está definida es infinita, en ese caso, la unicidad de la distribución subyacente no está asegurada. Bajo este supuesto, luego de un análisis teórico, en este trabajo se presenta y demuestra, de manera novedosa, una condición suficiente (pero no necesaria) que asegura la unicidad de la distribución en el modelo auto-logístico con entornos de primer o segundo orden.

Para todo el desarrollo computacional del presente trabajo fue utilizado el software libre R. También se utilizó este software, y su paquete *biOps* (ver [7]), para la visualización y almacenamiento de las imágenes generadas.

Si bien el objetivo del trabajo es fundamentalmente aplicado, el marco teórico que lo sustenta es abstracto y riguroso. Con la intención de lograr claridad y una lectura amena sin perder rigurosidad, en ocasiones en esta tesis, se esbozan algunos conceptos, que oportunamente son definidos de manera formal. Se utilizó \doteq para las definiciones y notaciones.

Se definen por primera vez, dos descriptores de textura de imágenes binarias.

- Uno teórico, una función inyectiva pero no suryectiva, cuyo argumento es el vector de parámetros.
- Otro empírico que resume la información de textura de una imagen y sirve para comparar texturas de imágenes.

Se define, a partir de ellos, medidas de distancia entre imágenes y vectores, según la textura que poseen o caracterizan respectivamente. Estas medidas se utilizaron en la evaluación de la estimación de parámetros y restauración.

Se formaliza el modelo de degradación por errores no sistemáticos y su restauración bayesiana asumiendo el soporte o grilla de la imagen original no necesariamente finito. Este supuesto no es fácil de manejar pero es necesario para la fundamentación teórica. Se muestran además las limitaciones de la restauración bayesiana en imágenes binarias afectadas por errores cuando la intención es removerlos y restaurar la textura original. Se intenta implementar esta metodología y no se obtienen buenos resultados. La restauración o síntesis bajo un modelo auto-logístico requiere de los parámetros del modelo, a priori desconocidos, es necesario aproximarlos mediante estimadores. En este trabajo se estudian algunos propuestos en la literatura y de que manera éstos influyen en la restauración o en la síntesis (caracterización) de las texturas. También se formaliza el modelo de degradación por pérdida de información en regiones de píxeles y se proponen dos métodos de restauración (*inpainting* o *imputation*) de texturas binarias. Los métodos son llamados:

- método de restauración auto-logístico y
- método de restauración empírico VHDD,

ambos con resultados satisfactorios para una amplia variedad de texturas.

El método de restauración auto-logístico depende de la estimación del vector de parámetros. Se presentan varios métodos de estimación en el presente trabajo, pero sólo se evalúan 3 de ellos. Se verá que el método de pseudo-máxima verosimilitud con método de optimización **BFGS** presentó los mejores resultados.

Capítulo 1

Modelado de imágenes

1.1. Imagen y datos espaciales

Una imagen (discreta) se puede definir como la representación de información organizada espacialmente en una grilla. De esta forma, el concepto de imagen se muestra equivalente al de datos bidimensionales. Las celdas de esta grilla son conocidas como píxeles y contienen datos ordenados según la ubicación de procedencia. Estos datos pueden provenir de la digitalización de algún proceso óptico o bien de la recolección de información espacial. En una imagen binaria cada dato tiene sólo dos valores posibles, como por ejemplo 0 y 1, pudiendo representar la ausencia y presencia local de alguna característica de interés. Se define el espacio de estados como el conjunto de valores posibles que tiene cada pixel y se lo denota E . En la práctica, E es un conjunto finito. Debido al interés prioritario del presente trabajo en las imágenes binarias, se asume $E = \{0, 1\}$ la mayoría de las veces. Se establece de ahora en más que E es un conjunto finito, se considera la métrica discreta (en E) y \mathcal{E} su σ -álgebra de Borel, con lo cual $\mathcal{E} = \mathcal{P}(E)$. Se define el soporte de una imagen como la grilla de píxeles en donde está definida la imagen, y se lo denota $S \subseteq \mathbb{Z}^2$ ($S \neq \emptyset$ no necesariamente finito). Luego, desde el punto de vista formal, una imagen

es una matriz:

$$x = [x_{ij}] = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1N} \\ \vdots & \ddots & \\ x_{M1} & & x_{MN} \end{bmatrix},$$

en el caso de soporte regular finito (i.e. $S = ([1, M] \times [1, N]) \cap \mathbb{Z}^2$) y un arreglo

$$x = \{x_s\}_{s \in S},$$

en el caso general.

La representación visual de una imagen depende del tipo de información que ésta contenga y de la referencia utilizada. A modo de ejemplo, la imagen de la Figura 1.1 es la representación visual de:

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & & 1 & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & 1 & & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

en donde el color negro se corresponde con el valor 0 y el blanco con el 1.

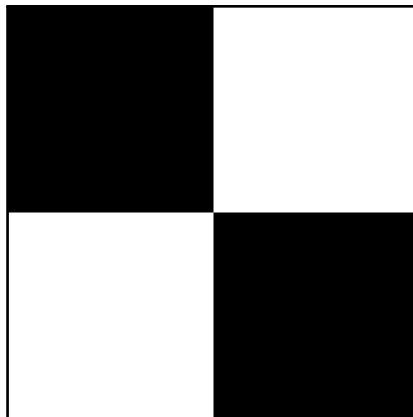


Figura 1.1: Imagen binaria

Una imagen también puede verse como una función $x : S \rightarrow E$, en donde $x(s) = x_s \in E$, para $s \in S$. Se denota E^S al conjunto de imágenes con soporte S , caso particular de:

$$E^V \doteq \{x/x : V \rightarrow E\},$$

conjunto de imágenes con soporte V y espacio de estados E ($\emptyset \neq V \subseteq S$). De ahora en más se llamará imagen a la función, a la matriz o a la representación visual de manera indistinta, entendiéndose cada alusión en el contexto que se realice.

Notación 1.1.1 Sea $a \in E$, se define la imagen que vale constantemente a , y denota $\tilde{a} \in E^S$, como la que cumple $\tilde{a}(s) = a, \forall s \in V$.

Dada una imagen $x \in E^S$:

- Su restricción a V (o proyección sobre E^V , con $\emptyset \neq V \subseteq S$) se define y denota: $x_V \in E^V$ tal que $x_V(s) = x(s) \forall s \in V$; o bien $x = \{x_s\}_{s \in V}$.
- Su traslación por $t \in S$ se define y denota $x^t \in E^S$ tal que $x^t(s) = x(s - t)$.

Definición 1.1.1 Sean $\emptyset \neq V \subseteq \Delta \subseteq \mathbb{Z}^2$, se define la proyección $\sigma_{\Delta, V} : E^\Delta \rightarrow E^V$:

$$\sigma_{\Delta, V}(x) = x_V, x \in E^\Delta.$$

Notación 1.1.2 σ_V en lugar de $\sigma_{S, V}$, $\sigma_{\Delta, s}$ en lugar de $\sigma_{\Delta, \{s\}}$, para $s \in \Delta$, y σ_s en lugar de $\sigma_{S, \{s\}}$.

Definición 1.1.2 Sean $z \in E^{V_1}$ y $w \in E^{V_2}$, para $\emptyset \neq V_1 \subseteq S$, $\emptyset \neq V_2 \subseteq S$ y $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, se define la imagen $zw \in E^{V_1 \cup V_2}$ como la que cumple

$$zw(t) = \begin{cases} z(t) & t \in V_1 \\ w(t) & t \in V_2 \end{cases}$$

Sea \mathcal{E}^V la σ -álgebra producto de E^V . Para simplificar la notación:

$$\mathcal{F} \doteq \mathcal{E}^S.$$

Para cada $B \in \mathcal{E}^V$, se define el conjunto $(\sigma_V \in B) \doteq \sigma_V^{-1}(B) \doteq \{w \in E^S / \sigma_V(w) \in B\}$ y para cada $x_V \in E^V$, el conjunto $(\sigma_V = x_V) = \{w \in E^S / \sigma_V(w) = x_V\}$

Sea ahora \mathcal{F}_V la σ -álgebra de E^S definida por:

$$\mathcal{F}_V \doteq \{(\sigma_V \in B) / B \in \mathcal{E}^V\}.$$

Se denota:

$$\mathcal{I}_V \doteq \mathcal{F}_{S \setminus V}.$$

Dado que S puede ser infinito, es conveniente identificar el conjunto de subsoportes finitos:

$$\mathcal{S} \doteq \{\Lambda \subset S / 1 \leq \#(\Lambda) < \infty\}.$$

Ejemplo: $\Lambda_{M,N} \in \mathcal{S}$ y $\Lambda_N \in \mathcal{S}$, donde: $\Lambda_{M,N} \doteq ([1, M] \times [1, N]) \cap \mathbb{Z}^2$ y $\Lambda_N \doteq \Lambda_{N,N}$, para M y N números enteros.

Notar que \mathcal{F} es la menor σ -álgebra que cumple:

$$\mathcal{F}_V \subseteq \mathcal{F}, \forall \Lambda \in \mathcal{S}.$$

También serán necesarias las siguientes notaciones y definición:

Notación 1.1.3 Para $\tilde{\mathcal{F}} \subset \mathcal{S}$:

- $\tilde{\mathcal{F}}_V \doteq \{\Lambda \in \tilde{\mathcal{F}} / \Lambda \cap V \neq \emptyset\}.$
- $\tilde{\mathcal{F}}(V) \doteq \{\Lambda \in \tilde{\mathcal{F}} / \Lambda \subset V\}.$

Definición 1.1.3 Sea $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ y $\alpha : \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathbb{R}$, se dice que existe

$$\sum_{\Lambda \in \mathcal{S}_0} \alpha(\Lambda)$$

y es a ($a \in \mathbb{R}$) si para todo $\epsilon > 0$ existe $\Delta_0 \in \mathcal{S}$ tal que

$$\Delta_0 \subset \Delta, \Delta \in \mathcal{S} \Rightarrow \left| a - \sum_{\Lambda \in \mathcal{S}_0(\Delta)} \alpha(\Lambda) \right| < \epsilon.$$

1.2. Modelado probabilístico: Campos markovianos, potenciales y distribuciones de Gibbs

El modelado estadístico asume que una imagen $x \in E^S$ es una realización de un campo aleatorio X .

Definición 1.2.1 Sea (Ω, \mathcal{D}) un espacio medible, $X : \Omega \rightarrow E^S$, se dice que X es campo aleatorio (sobre E^S) si X es \mathcal{D} -medible⁽¹⁾.

Definición 1.2.2 Sea (Ω, \mathcal{D}) un espacio medible, $X : \Omega \rightarrow E^S$ campo aleatorio y sea P una probabilidad sobre (Ω, \mathcal{D}) , se denota y define P_X , la probabilidad sobre (E^S, \mathcal{F}) que cumple:

$$P_X(A) \doteq P(X \in A), \forall A \in \mathcal{F}.$$

Para cada $V \subset S$ y $s \in S$ sean los campos aleatorios (sobre E^V y E , respectivamente):

- $X_V : \Omega \rightarrow E^V$,
- $X_s : \Omega \rightarrow E$,

definidos por:

- $X_V \doteq \sigma_V \circ X$, es decir $X_V(\omega) = x_V$, si $X(\omega) = x$
- $X_s(\omega) = x_s$, si $X(\omega) = x$ para todo $\omega \in \Omega$.

Es necesario definir (o construir) una medida μ en E^S que describa la probabilidad de que $A \in \mathcal{F}$ sea un conjunto de «realizaciones» de X , es decir $\mu(A) = P(X \in A)$ (o bien $\mu(\{x\}) = P_X(\{x\}) = P(X = x)$ cuando S es finito). Esta medida μ debe modelar la posible interacción de cada pixel con su entorno. En la práctica, la relación de cada pixel con su entorno se torna independiente a medida que uno se aleja de él, circunscribiéndose sólo a un vecindario. Los campos aleatorios que cumplen con esta propiedad son llamados campos markovianos (*Markov random fields* (MRFs) en inglés).

⁽¹⁾ $(X \in A) \in \mathcal{D}$, es decir $X^{-1}(A) \in \mathcal{D}$, $\forall A \in \mathcal{F}$

Cuando S es finito, el teorema de equivalencia de Hammersley-Clifford nos dice que cualquier campo markoviano posee una medida de Gibbs y viceversa: cualquier campo que posea una medida de Gibbs es un campo markoviano. Una medida de Gibbs cuando S es finito tiene la forma:

$$\mu(\{x\}) = P(X = x) = \frac{\exp(-H(x))}{Z},$$

en donde $Z = \sum_{z \in E^S} \exp(-H(z))$ es la constante de normalización y H la función de energía que debe contener la información «relevante» de cada x . La información «relevante» de interés es la otorgada por la interacción de cada pixel de la imagen con su entorno y se describe con unas funciones «locales» (Φ_Λ , $\Lambda \in \mathcal{S}$) llamadas potenciales, tal que:

$$H(x) = \sum_{\Lambda \in \mathcal{S}} \Phi_\Lambda(x).$$

Para S posiblemente infinito la construcción de una medida de Gibbs-Markov no es trivial sino que se la construye de manera local a través de funciones llamadas especificaciones (ver Definición 1.2.7). Se procura la existencia y unicidad de una probabilidad global tal que las especificaciones se comporten como las condicionales de esta probabilidad y localmente como medidas de Gibbs-Markov con soporte finito. Se busca un conjunto de propiedades que la caractericen y ayuden a definirla. En la descripción del próximo ejemplo, extraído de [11], se muestran las propiedades básicas que tienen que cumplir las probabilidades condicionales y, por lo tanto, las especificaciones.

Ejemplo 1.2.1 *Sea un conjunto numerable E , el espacio de estados, y S soporte finito. Sea μ una probabilidad nunca nula sobre E^S . Para cada $A \in \mathcal{F}$, $x \in E^S$ y $\Lambda \subset S$ ($\Lambda \in \mathcal{S}$), se considera:*

$$\tilde{\gamma}_\Lambda(A|x) \doteq \mu(A | \sigma_{S \setminus \Lambda} = x_{S \setminus \Lambda}).$$

Esto es la probabilidad condicional de A con respecto a μ dada la imagen x sobre los pixeles que no pertenecen a Λ (dada $x_{S \setminus \Lambda}$). Se cumple:

- *La función $\tilde{\gamma}_\Lambda(A|\cdot)$ depende de los valores fuera de Λ (es decir, evaluada en x depende de $x_{S \setminus \Lambda}$).*

- La función $\tilde{\gamma}_\Lambda(\cdot|x)$ es una probabilidad sobre (E^S, \mathcal{F}) .
- Para cada $C \in \mathcal{J}_\Lambda$ se cumple: $\tilde{\gamma}_\Lambda(A \cap C|x) = \tilde{\gamma}_\Lambda(A|x)1_C(x)$.
- Si $\Lambda \subset \Delta \in \mathcal{S}$ se cumple: $\gamma_\Delta(A|x) = \int_{E^S} \gamma_\Lambda(A|y)\gamma_\Delta(y|x)$

En las siguientes secciones y subsecciones se presentan definiciones y notaciones específicas de cada tema que titula la sección. Si bien el apéndice está destinado para las definiciones y notaciones no específicas, se presentan algunas de ellas también en las próximas secciones como notas al pie.

1.2.1. Distribuciones de Gibbs

Sea S no necesariamente finito (general) y se consideran de ahora en más todas las definiciones, supuestos y notaciones de la Sección 1.1.

Definición 1.2.3 Se dice que la colección $\Phi \doteq (\Phi_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{S}}$ es un potencial si para todo $\Lambda \in \mathcal{S}$:

- $\Phi_\Lambda : E^S \rightarrow \mathbb{R}$ es \mathcal{F}_Λ -medible (esto es $\Phi_\Lambda(x) = \phi_\Lambda(x_\Lambda)$ con ϕ_Λ función \mathcal{E}^Λ -medible)
- Existe $H_\Lambda(x) \doteq \sum_{\Delta \in \mathcal{S}_\Lambda} \Phi_\Delta(x) < \infty$ para cada $x \in E^S$. H_Λ se define como la función de energía local para Φ (notación: H_Λ^Φ en caso de ambigüedad).

Definición 1.2.4 Sea Φ un potencial, se define la función de partición local de Φ sobre Λ y se denota por Z_Λ (para cada $\Lambda \in \mathcal{S}$) a la que cumple:

$$Z_\Lambda(x) \doteq \sum_{\xi \in E^\Lambda} \exp(-H_\Lambda(\xi x_{S \setminus \Lambda})), \text{ para todo } x \in E^S \text{ y } \Lambda \in \mathcal{S}. \quad (1.1)$$

Notación 1.2.1 Para cada $s \in S$ se pondrá: H_s en lugar de $H_{\{s\}}$ y Z_s en lugar de $Z_{\{s\}}$

Definición 1.2.5 Sea Φ un potencial, se define entonces ρ_Λ (para cada $\Lambda \in \mathcal{S}$), tal que:

$$\rho_\Lambda(x) \doteq \frac{\exp(-H_\Lambda(x))}{Z_\Lambda(x)}, \forall x \in E^S. \quad (1.2)$$

Definición 1.2.6 Para cada $s \in S$ se denota y define la característica local $\rho_s \doteq \rho_{\{s\}}$, es decir:

$$\rho_s(x) = \frac{\exp(-H_s(x))}{Z_s(x)}, \forall x \in E^S. \quad (1.3)$$

Definición 1.2.7 Sea Φ un potencial, se define la especificación de Gibbs (para Φ) $\gamma \doteq (\gamma_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{S}}$ en donde:

$$\gamma_\Lambda(A|x) \doteq \sum_{\xi_{x_{S \setminus \Lambda}} \in A} \rho_\Lambda(\xi_{x_{S \setminus \Lambda}}) = \sum_{\xi_{x_{S \setminus \Lambda}} \in A} \frac{\exp(-H_\Lambda(\xi_{x_{S \setminus \Lambda}}))}{Z_\Lambda(x)}, \forall \Lambda \in \mathcal{S}, A \in \mathcal{F} \text{ y } x \in E^S.$$

Siempre que $A = (\sigma_\Lambda = x_\Lambda)$, se cumple $A \in \mathcal{F}_\Lambda$. Además se cumple:

$$\gamma_\Lambda(\sigma_\Lambda = x_\Lambda | w) = \frac{\exp(-H_\Lambda(x_\Lambda w_{S \setminus \Lambda}))}{\sum_{\xi \in E^\Lambda} \exp(-H_\Lambda(\xi w_{S \setminus \Lambda}))} = \rho_\Lambda(x_\Lambda w_{S \setminus \Lambda}), \forall \Lambda \in \mathcal{S} \text{ y } w \in E^S \quad (1.4)$$

Es de notar que, acorde con el Ejemplo 1.2.1:

- γ_Λ es núcleo de probabilidad de $(E^S, \mathcal{J}_\Lambda)$ a (E^S, \mathcal{F}) , esto es:
 - $\gamma_\Lambda(\cdot|x)$ es una probabilidad sobre (E^S, \mathcal{F}) y se la define como distribución de Gibbs sobre Λ con respecto a Φ dado x
 - y
 - $\gamma_\Lambda(A|\cdot)$ es una función real \mathcal{J}_Λ -medible.
- γ_Λ es \mathcal{J}_Λ -propio (esto es: $\gamma_\Lambda(A \cap C|\cdot) = \gamma_\Lambda(A|\cdot)1_C(\cdot)$, para $C \in \mathcal{J}_\Lambda$)
- y
- γ es consistente, esto quiere decir $\gamma_\Delta(A|x) = \int \gamma_\Lambda(A|y)\gamma_\Delta(dy|x)$ para $\Lambda \subset \Delta \in \mathcal{S}$ y $x \in E^S$

El conjunto de medidas globales de Gibbs para Φ se define:

$$\mathcal{G}(\Phi) \doteq \left\{ \nu \in \mathcal{P}(E^S, \mathcal{F}) / \int_B \gamma_\Lambda(A|x)\nu(dx) = \nu(B \cap A), \forall A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{J}_\Lambda \right\}. \quad (1.5)$$

Si $\mu \in \mathcal{G}(\Phi)$ se dirá que es una medida global de Gibbs para Φ . Se cumple que $\gamma_\Lambda(\cdot|\cdot)$ es una probabilidad condicional regular dada \mathcal{J}_Λ para μ (en símbolos

$\gamma_\Lambda(A|\cdot) \in \mu(A|\mathcal{I}_\Lambda)$), es decir que $\gamma_\Lambda(A|x)$ es la probabilidad de A con respecto a μ condicionada a $x_{S \setminus \Lambda}$. Si $\mu \in \mathcal{G}(\Phi)$, μ es la medida que se quería construir.

Definición 1.2.8 Sea (Ω, \mathcal{D}, P) espacio de probabilidad, Φ potencial y $X : \Omega \rightarrow E^S$ campo aleatorio. Se dice que X es un campo con distribución de Gibbs para Φ si $P_X \in \mathcal{G}(\Phi)$ (esto es, P_X medida de Gibbs para Φ).

Es importante asegurar que $\mathcal{G}(\Phi) \neq \emptyset$ (existencia) y que $\#\mathcal{G}(\Phi) = 1$ (unicidad). El caso $\#\mathcal{G}(\Phi) \geq 2$ se conoce como Transición de Fase, fenómeno muy importante y estudiado principalmente en la Física Estadística (ver [1, 6, 16, 19, 23, 30, 38]).

Un potencial Φ se dice acotado si $\Phi_\Lambda \in \mathcal{L}^\infty$, para todo $\Lambda^{(2)}$. Un potencial Φ acotado, también se dice sumable si $\sum_{\Lambda \in \mathcal{I}_{\{s\}}} \|\Phi_\Lambda\|_{\mathcal{L}^\infty} < \infty$.

Como caso particular del teorema 4.23 de [23], se cumple:

$$\text{si } \Phi \text{ es sumable} \Rightarrow \mathcal{G}(\Phi) \neq \emptyset. \quad (1.6)$$

Esto es cierto pues se cumplen las hipótesis del teorema citado: E con la métrica discreta es un espacio métrico separable y completo; $\mathcal{E} = \mathcal{P}(E)$ es su σ -álgebra de Borel; λ , la medida de conteo en (E, \mathcal{E}) , es σ -finita y γ es la especificación inducida por Φ y λ , como refiere el teorema. De esta forma, la existencia de una medida global de Gibbs está asegurada cuando el potencial es sumable. Esta última, entonces, es una característica muy apreciada y buscada. Resta estudiar en que circunstancias se puede asegurar la unicidad. A continuación, se enumeran resultados y definiciones necesarias para su estudio.

Definición 1.2.9 Para cada $\Lambda \in \mathcal{I}$ se define el núcleo de probabilidad (de $(E^S, \mathcal{I}_\Lambda)$ a $(E^\Lambda, \mathcal{E}^\Lambda)$) γ_Λ^0 tal que:

$$\gamma_\Lambda^0(B|x) \doteq \gamma_\Lambda(\sigma_\Lambda \in B|x), \quad x \in E^S, \quad B \in \mathcal{E}^\Lambda.$$

Notación 1.2.2 γ_s^0 en lugar de $\gamma_{\{s\}}^0$, para $s \in S$.

⁽²⁾ $\mathcal{L}^\infty \doteq \mathcal{L}^\infty(E^S, \mathcal{F}, \mathbb{R}) \doteq \{f : E^S \rightarrow \mathbb{R} / \mathcal{F}\text{-medible} / \|f\|_{\mathcal{L}^\infty} < \infty\}$

Las definiciones y resultados que restan de esta sección son parte importante del marco teórico pero pueden saltarse en una primera lectura del trabajo.

Para $x \in E^S$ y $B \in \mathcal{E}^\Lambda$ se cumple:

$$\begin{aligned} \gamma_\Lambda^0(B|x) &= \frac{\sum_{\xi \in B} \exp(-H_\Lambda(\xi x_{S \setminus \Lambda}))}{\sum_{\xi \in E^\Lambda} \exp(-H_\Lambda(\xi x_{S \setminus \Lambda}))} \\ &= \frac{\sum_{\xi \in B} \exp(-\sum_{\Delta \in \mathcal{S}_\Lambda} \Phi_\Delta(\xi x_{S \setminus \Lambda}))}{\sum_{\xi \in E^\Lambda} \exp(-\sum_{\Delta \in \mathcal{S}_\Lambda} \Phi_\Delta(\xi x_{S \setminus \Lambda}))}. \end{aligned}$$

Definición 1.2.10 Sea $f : E^S \rightarrow \mathbb{R}$, medible, se define la función $\gamma_\Lambda(f) : E^S \rightarrow \mathbb{R}$ en cada $x \in E^S$:

$$\gamma_\Lambda(f)(x) \doteq \gamma_\Lambda(f|x) = \frac{\sum_{\xi \in E^\Lambda} f(\xi x_{S \setminus \Lambda}) \exp(-H_\Lambda(\xi x_{S \setminus \Lambda}))}{\sum_{\xi \in E^\Lambda} \exp(-H_\Lambda(\xi x_{S \setminus \Lambda}))}.$$

Definición 1.2.11 Se dice que la función $f : E^S \rightarrow \mathbb{R}$ es local si existe $\Lambda \in \mathcal{S}$ tal que f es \mathcal{F}_Λ -medible (i.e. $\exists f_\Lambda : E^\Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ \mathcal{E}^Λ -medible tal que $f(x) = f_\Lambda(x_\Lambda) = f_\Lambda \circ \sigma_\Lambda(x)$, $\forall x \in E^S$).

Notación 1.2.3 $\mathcal{L} \doteq \{f \in \mathcal{L}^\infty / f \text{ es local}\}$.

Definición 1.2.12 Se dice que la función $f : E^S \rightarrow \mathbb{R}$ es quasilocal (q.l.) si existe una sucesión de funciones locales $\{f_n\}_{n \geq 1}$ tal que:

- $f - f_n \in \mathcal{L}^\infty$ para todo $n \geq 1$

y

- $\|f - f_n\|_{\mathcal{L}^\infty} \xrightarrow[n \geq 1]{} 0$.

Definición 1.2.13 Se dice que la especificación γ es quasilocal (q.l.) si para todo $\Lambda \in \mathcal{S}$: $f \in \overline{\mathcal{L}} \Rightarrow \gamma_\Lambda(f) \in \overline{\mathcal{L}}$

Definición 1.2.14 Sea $a \in E$, un potencial Φ se dice a -normalizado si cumple $\Phi_\Lambda(\tilde{a}_A x_{S \setminus \Lambda}) = 0$ siempre que $A \subset \Lambda \in \mathcal{S}$. Por su fuerte vinculación con procesos físicos, un potencial a -normalizado también es llamado potencial de gas con estado vacío en a .

Definición 1.2.15 Se dice que dos potenciales Φ y $\Psi \doteq (\Psi_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{S}}$ son equivalentes (notación: $\Phi \sim \Psi$) si:

$$\Lambda \in \mathcal{S} \Rightarrow H_\Lambda^\Phi - H_\Lambda^\Psi \text{ es } \mathcal{I}_\Lambda\text{-medible}^{(3)}$$

Proposición 1.2.1 Se cumple que:

- $\Phi \sim \Psi \Rightarrow \mathcal{G}(\Phi) = \mathcal{G}(\Psi)$
- Para cada potencial $\Phi \exists$ único Φ^a potencial a -normalizado tal que $\Phi \sim \Phi^a$ (luego $\mathcal{G}(\Phi) = \mathcal{G}(\Phi^a)$)

Definición 1.2.16 Sea $V \subset S$ y $t \in S$ tal que $t + V = V^{(4)}$ se define $\tau_t : E^V \rightarrow E^V$ la función traslación (por t) evaluada en $x \in E^V$ se denota:

$$\tau_t(x) \doteq x^t \in E^V$$

y cumple $\tau_t(x)(s) = x^t(s) = x(s - t)$, $\forall s \in V$. Es decir, cuando $\mathbf{0} \doteq (0, 0) \in V$, el valor de x^t en el pixel t es el mismo que x en el pixel $\mathbf{0}$ (cero).

Se asume que $t + S = S$ para todo $t \in S$.

Definición 1.2.17 Se dice que un potencial Φ es invariante a traslaciones si siempre se cumple:

$$\Phi_\Lambda(x) = \Phi_{t+\Lambda}(x^t).$$

Definición 1.2.18 Sea $k \in \mathbb{N}$, $\Theta \subset \mathbb{R}^k$ conjunto de parámetros compacto con interior no vacío ($\text{int}(\Theta) \neq \emptyset$)⁽⁵⁾ llamado espacio paramétrico y sea $\Phi \doteq (\Phi_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{S}}$ tal que $\Phi_\Lambda : \Theta \times \mathcal{E}^S \rightarrow \mathbb{R}$. Si $\Phi^\theta \doteq (\Phi_\Lambda(\theta, \cdot))_{\Lambda \in \mathcal{S}}$ es un potencial para cada $\theta \in \Theta$, se dice que $(\Phi^\theta)_{\theta \in \Theta}$ es una familia de potenciales parametrizada por Θ y que el potencial Φ^θ está parametrizado por el vector de parámetros θ . Θ se dice identificable si

$$\theta_1 \in \Theta, \theta_2 \in \Theta, \theta_1 \neq \theta_2 \Rightarrow \mathcal{G}(\Phi^{\theta_1}) \cap \mathcal{G}(\Phi^{\theta_2}) = \emptyset$$

⁽³⁾ $H_\Lambda^\Phi(x) - H_\Lambda^\Psi(x) = g(x_{S \setminus \Lambda})$ con g función $\mathcal{E}^{S \setminus \Lambda}$

⁽⁴⁾ $t + V \doteq \{t + s \mid s \in V\}$, $\forall t \in S$ y $V \subseteq S$

⁽⁵⁾ $\text{int}(A) \doteq \{x \in A \mid \exists \delta > 0 \text{ tal que } D(x, \delta) \subset A\}$ = interior de A

1.2.2. Campos markovianos

Definición 1.2.19 Con la intención de definir el entorno de influencia de cada pixel se denota y define $\partial \doteq \{\partial s \in \mathcal{S} / s \in S\}$ un sistema de entornos finitos de S si cumple:

- $s \notin \partial s$
- y
- $s \in \partial t \Leftrightarrow t \in \partial s.$

∂s se denomina entorno de s y $\partial \Delta \doteq \bigcup_{s \in \Delta} \partial s \setminus \Delta$ entorno de Δ

Se asume que el sistema de entornos es invariante a traslaciones (i.e. conociendo ∂s se puede conocer ∂t desplazando el vecindario de s : $\partial t = (t - s) + \partial s$, se asume $\mathbf{0} \in S$, luego $\partial s = s + \partial \mathbf{0}, \forall s \in S$).

Sean $v_1 \doteq (1, 0)$, $v_2 \doteq (0, 1)$, $v_3 \doteq (1, 1)$ y $v_4 \doteq (-1, 1)$, útiles para los próximos ejemplos.

Ejemplo 1.2.2 Sistema de entornos de primer orden: El sistema de entornos de primer orden es el definido por $\partial \mathbf{0} \doteq \{\pm v_i\}_{i=1}^2$. Así, el entorno de primer orden de s queda:

$$\partial s = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & s - v_1 & \\ \hline s - v_2 & & s + v_2 \\ \hline & s + v_1 & \\ \hline \end{array}.$$

Ejemplo 1.2.3 Sistema de entornos de segundo orden: El sistema de entornos de segundo orden es el definido por $\partial \mathbf{0} \doteq \{\pm v_i\}_{i=1}^4$. Luego el entorno de segundo orden de s queda:

$$\partial s = \begin{array}{|c|c|c|} \hline s - v_3 & s - v_1 & s + v_4 \\ \hline s - v_2 & & s + v_2 \\ \hline s - v_4 & s + v_1 & s + v_3 \\ \hline \end{array}.$$

Definición 1.2.20 Sea ∂ un sistema de entornos, se define y denota el conjunto de los ∂ -cliques como:

$$\mathcal{C} \doteq \mathcal{C}(\partial) \doteq \{(\Lambda \in \mathcal{S} : \#(\Lambda) = 1) \text{ ó } (s \in \Lambda, t \in \Lambda, s \neq t \Rightarrow s \in \partial t)\}.$$

Si $\Lambda \in \mathcal{C}$ se dice que Λ es un ∂ -clique o un clique para ∂ .

Notar que $\partial_s \in \mathcal{S}$, $\forall s \in \mathcal{S}$, se cumple $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$.

Notación 1.2.4 ■ $\mathcal{C}(V) \doteq \{\Lambda \in \mathcal{C} : \Lambda \subset V\}$.

■ $\mathcal{C}_V \doteq \{\Lambda \in \mathcal{C} : \Lambda \cap V \neq \emptyset\}$.

Ejemplo 1.2.4 Cliques de primer orden: Sea ∂ el sistema de entornos de primer orden, el conjunto de ∂ -cliques resulta:

$$\mathcal{C} = \{\{s, s + v_i\} : s \in S, i = 1, 2\} \cup \{\{s\} : s \in S\}.$$

También se puede ver que, si ∂ es el sistema de entornos de segundo orden:

$$\{\{s, s + v_i\} : s \in S, 1 \leq i \leq 4\} \cup \{\{s\} : s \in S\} \subset \mathcal{C}$$

Notar además que $\{t, t - v_i\} = \{s, s + v_i\}$ donde $s = (t - v_i) \in S$, para $1 \leq i \leq 4$.

Definición 1.2.21 Se dice que Φ es un ∂ -potencial si $\Phi_\Lambda = 0$ para todo $\Lambda \notin \mathcal{C}$

Notar que, si Φ es un ∂ -potencial, como $\partial\mathbf{0}$ es finito, Φ es sumable y por lo tanto $\mathcal{G}(\Phi) \neq \emptyset$.

Definición 1.2.22 Dado ∂ un sistema de entornos, se dice que la especificación γ es ∂ -Markoviana si la función $\gamma_\Lambda^0(B|\cdot)$ es $\mathcal{F}_{\partial\Lambda}$ -medible, cualquiera sean $\Lambda \in \mathcal{S}$ y $B \in \mathcal{F}_\Lambda$.

Si Φ es un ∂ -potencial, γ es ∂ -markoviana, pues $\gamma_\Lambda^0(B|x)$ depende de $x_{\partial\Lambda}$. Esto se demuestra usando:

$$\gamma_\Lambda^0(B|x) = \frac{\sum_{\xi \in B} \exp\left(-\sum_{\Delta \in \mathcal{C}_\Lambda} \phi_\Delta(\xi_{\Delta \cap \Lambda} x_{\Delta \setminus \Lambda})\right)}{\sum_{\xi \in E^\Lambda} \exp\left(-\sum_{\Delta \in \mathcal{C}_\Lambda} \phi_\Delta(\xi_{\Delta \cap \Lambda} x_{\Delta \setminus \Lambda})\right)} \quad (1.7)$$

$$y \Delta \in \mathcal{C} \Rightarrow (\Delta \setminus \Lambda) \subset (\partial\Lambda) = \left(\bigcup_{s \in \Lambda} \partial s \setminus \Lambda\right).$$

Definición 1.2.23 Sea $X : \Omega \rightarrow E^S$ campo aleatorio, se dice que es un campo de Gibbs-Markov si $P_X \in \mathcal{G}(\Phi)$ y además Φ es ∂ -potencial.

1.3. Ejemplos

A continuación, se verán ejemplos de modelos definidos por ∂ -potenciales parametrizados e invariantes a traslaciones.

Ejemplo 1.3.1 Modelo auto-logístico: Sea $\partial\mathbf{0} = \{\pm v_i\}_{i=1}^g$ el sistema de entornos de primer orden (cuando $g = 1$) o de segundo orden (cuando $g = 2$). Sea $E = \{0, 1\}$ el espacio de estados. El modelo auto-logístico (de Besag) es el definido por el ∂ -potencial

$$\Phi_{\Lambda}(x) = \begin{cases} \beta_i x_t x_{t+v_i} & \Lambda = \{t, t + v_i\}, t \in S, 1 \leq i \leq g \\ \beta_0 x_t & \Lambda = \{t\} \\ 0 & \text{caso contrario (c.c.)} \end{cases}, \forall x \in E^S.$$

La función de energía local en $s \in S$ queda:

$$H_s(x) = x_s \left(\beta_0 + \sum_{i=1}^g \beta_i (x_{s+v_i} + x_{s-v_i}) \right),$$

y la característica local:

$$\rho_s(x) = \frac{\exp - (x_s (\beta_0 + \sum_{i=1}^g \beta_i (x_{s-v_i} + x_{s+v_i})))}{1 + \exp - ((\beta_0 + \sum_{i=1}^g \beta_i (x_{s-v_i} + x_{s+v_i})))}.$$

Proveniente de la física estadística, el clásico por excelencia (y uno de los más estudiados) es el modelo de Ising, en donde partículas fijas en una grilla interactúan entre sí y cada una se asocia con un valor de spin $+1$ o -1 , indicando las orientaciones de los momentos. Fue presentado por Ernest Ising en su tesis doctoral ([28]) en 1925, estableciendo las bases de la teoría de los Campos Aleatorios.

Ejemplo 1.3.2 Modelo de Ising: Sea ∂ el sistema de entornos de primer orden y $E = \{-1, 1\}$ el espacio de estados. El modelo de Ising con parámetro β (sin campo externo) es el definido por el ∂ -potencial

$$\Phi_{\Lambda}(x) = \begin{cases} \beta x_t x_{t+v_i} & \Lambda = \{t, t + v_i\}, t \in S, 1 \leq i \leq 2 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}, \forall x \in E^S.$$

Su función de energía local en s cumple:

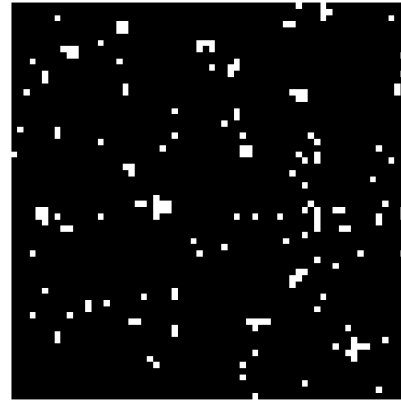
$$\begin{aligned} H_s(x) &= \beta \sum_{i=1}^2 (x_s x_{s-v_i} + x_s x_{s+v_i}) \\ &= \beta (\#\{t \in \partial s / x_t = x_s\} - \#\{t \in \partial s / x_t \neq x_s\}) \\ &= \beta (2\#\{t \in \partial s / x_t = x_s\} - 4) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \rho_s(x) &= \frac{\exp[-(2\#\{t \in \partial s / x_t = x_s\} - 4)]}{\exp[-(2\#\{t \in \partial s / x_t = x_s\} - 4)] + \exp[2\#\{t \in \partial s / x_t = x_s\} - 4]} \\ &= \frac{1}{1 + \exp[4\beta(\#\{t \in \partial s / x_t = x_s\} - 2)]}, \end{aligned}$$



(a) $\beta = 1$



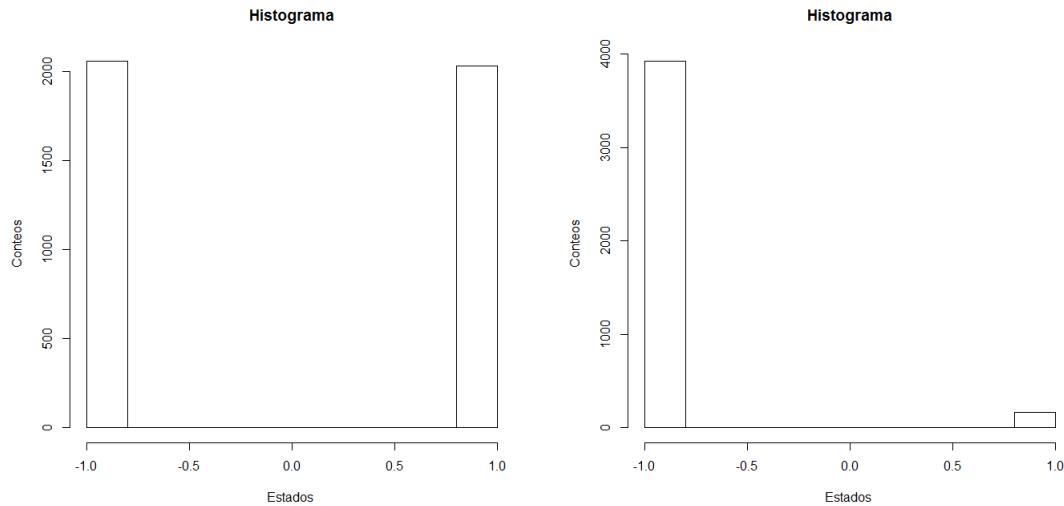
(b) $\beta = -1$

Figura 1.2: Imágenes de 64×64 bajo un modelo Ising

Observación 1.3.1 Para el modelo de Ising existe un valor crítico

$$\beta_c = \frac{\sinh^{-1}(1)}{2} = \frac{\log(1 + \sqrt{2})}{2} = 0.4402 \quad (1.8)$$

tal que:



(a) Histograma de la imagen de la Figura 1.2(a) (b) Histograma de la imagen de la Figura 1.2(b)

Figura 1.3: Histogramas

- $\#\mathcal{G}(\Phi) = 1$ cuando $\beta < \beta_c$

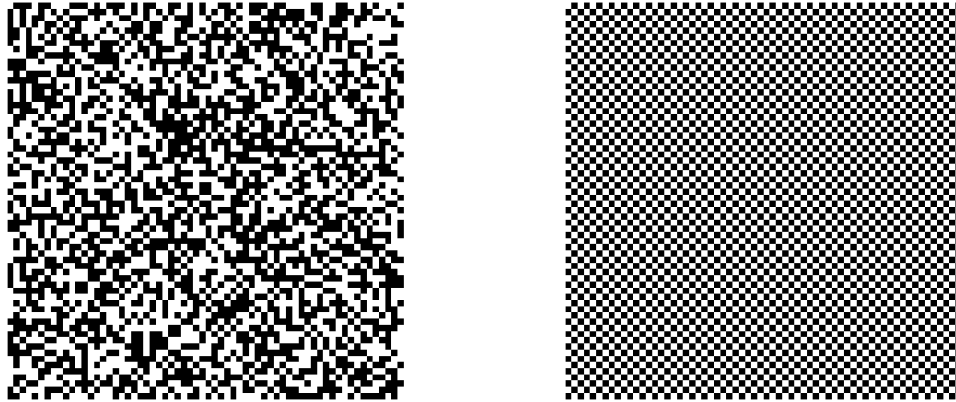
y

- $\#\mathcal{G}(\Phi) > 1$ cuando $\beta > \beta_c$ (ver pág. 100 de [23] y ejemplo en [16]).

En 1974, Besag traslada las ideas de Ising al procesamiento de imágenes. El modelo clásico de Ising no discrimina la dirección de interacción, resultando insuficiente para modelar algunas imágenes. Besag presenta, por ejemplo, el modelo auto-binomial y el auto-logístico. Cabe destacar que, entre otros, además de las propuestas de Besag, han surgido variantes del modelo de Ising como el de Ising anisotrópico, que modifica el parámetro según la dirección.

Ejemplo 1.3.3 Modelo auto-binomial: Sea ∂ el sistema de entornos de primer ($g = 2$) o segundo ($g = 4$) orden, $K \in \mathbb{N}$ y $E = \{0, 1, \dots, K\}$ el espacio de estados. El modelo auto-binomial es el definido por el ∂ -potencial:

$$\Phi_{\Lambda}(x) = \begin{cases} \beta_i x_t x_{t+v_i} & \Lambda = \{t, t + v_i\}, t \in S, 1 \leq i \leq g \\ -\log \binom{K}{x_t} + \beta_0 x_t & \Lambda = \{t\} \\ 0 & c.c. \end{cases}, \forall x \in E^S.$$



(a) $\beta = 0.3$

(b) $\beta = 3$

Figura 1.4: Imágenes de 64×64 bajo un modelo Ising.

La función de energía local en s cumple:

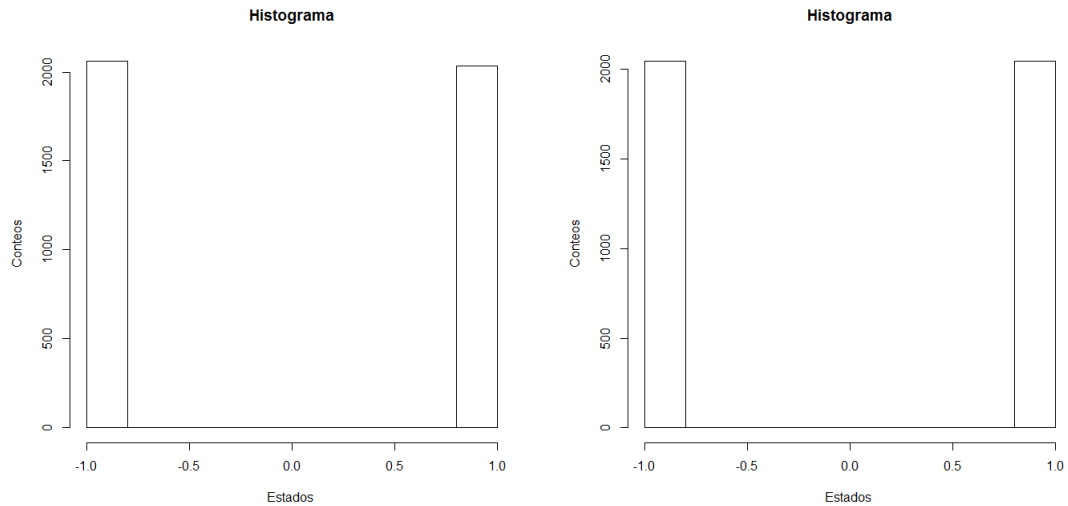
$$H_s(x) = -\log \binom{K}{x_t} + x_s \left(\beta_0 + \sum_{i=1}^g \beta_i (x_{s+v_i} + x_{s-v_i}) \right). \quad (1.9)$$

Luego:

$$\rho_s(x) = \frac{\binom{K}{x_t} \exp [-x_s (\beta_0 + \sum_{i=1}^g \beta_i (x_{s-v_i} + x_{s+v_i}))]}{(1 + \exp [-(\beta_0 + \sum_{i=1}^g \beta_i (x_{s-v_i} + x_{s+v_i}))])^K} \quad (1.10)$$

Este modelo ha sido utilizado para modelar, por ejemplo, cantidad de partículas en una grilla (extendiéndose naturalmente a una grilla tridimensional: $S \subset \mathbb{Z}^3$) en donde K es la cantidad máxima de partículas.

Observación 1.3.2 *Es fácil notar que el modelo auto-logístico es un caso particular del modelo auto-binomial ($K = 1$), del cual hereda algunas propiedades. De la misma forma que el modelo auto-binomial es útil para modelar la cantidad de partículas en una grilla, el auto-logístico lo es para modelar datos de presencia-ausencia, teniendo en cuenta además las interacciones espaciales según la dirección. Según la aplicación, los datos de presencia-ausencia pueden ser por ejemplo: presencia o ausencia de partículas (en fitopatología: presencia o ausencia de alguna enfermedad en cultivos).*



(a) Histograma de la imagen de la Figura 1.4(a) (b) Histograma de la imagen de la Figura 1.4(b)

Figura 1.5: Histogramas

Este tipo de datos se representa naturalmente con imágenes binarias, colocando un 1 en el lugar correspondiente si el lugar está «ocupado» y 0 si no. De esta forma, el modelo auto-logístico describe las interacciones de los datos al mismo tiempo que caracteriza la textura de la imagen binaria correspondiente o la textura de cualquier imagen binaria.

Los parámetros del modelo auto-binomial, así como los del auto-logístico, dan cuenta directa de las interacciones de los píxeles. El parámetro β_1 está relacionado con las interacciones verticales pues multiplica cada producto $x_s x_{s+v_1}$. En vistas de cada característica local ρ_s , $\beta_1 < 0$ favorece la homogeneidad en dirección vertical, en cambio, $\beta_1 > 0$ favorece la heterogeneidad en dirección vertical. Análogamente, β_2 lo cumple en dirección horizontal, β_3 y β_4 en las direcciones diagonales.

Notación 1.3.1 *De ahora en adelante, se denotará $\underline{\beta}$ al vector de parámetros para los modelos auto-binomial y auto-logístico según:*

- $\underline{\beta} \doteq (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) \in \mathbb{R}^5$ para el modelo de segundo orden con campo externo.
- $\underline{\beta} \doteq (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) \in \mathbb{R}^4$ para el modelo de segundo orden sin campo externo.

- $\underline{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^3$ para el modelo de primer orden con campo externo.
- $\underline{\beta} = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$ para el modelo de primer orden sin campo externo.

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ y β_4 se denominarán parámetros de interacción y β_0 campo externo. Es de notar que la dimensión (k) del vector $\underline{\beta} \in \mathbb{R}^k$ caracteriza al modelo. Por esta razón, la sola mención del vector de parámetros fijará el modelo sin necesidad de especificarlo, es decir si tiene o no campo externo y si es de primer o segundo orden.

A modo de ejemplo, las imágenes de las Figuras 1.2, 1.4, 1.6 y 1.7 fueron generadas con el algoritmo *Gibbs sampler* (GS) (cada una con 8000 iteraciones del algoritmo, ver Sección B.2). En ellas pueden visualizarse diferentes patrones o texturas, cambiando el modelo y los parámetros.

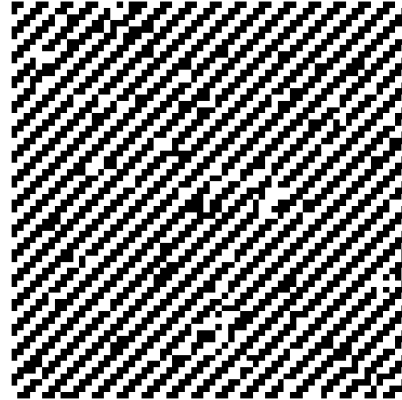
(a) $\underline{\beta} = (2, -2)$ (b) $\underline{\beta} = (0, 0, 2, -2)$

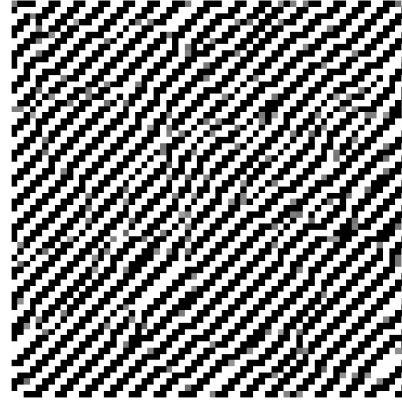
Figura 1.6: Imágenes de 64×64 bajo un modelo auto-logístico.

En las imágenes de las Figuras 1.6(a) y 1.7(a) se puede ver que, en dirección vertical, cada imagen se presenta heterogénea, modelada por el parámetro $\beta_1 = 2$ y, en dirección horizontal, homogéneas, modeladas por el parámetro $\beta_2 = -2$

En las imágenes de las Figuras 1.6(b) y 1.7(b) se puede ver que en dirección diagonal primera (con un ángulo de $-\pi/4$), la imagen se presenta heterogénea, modelada

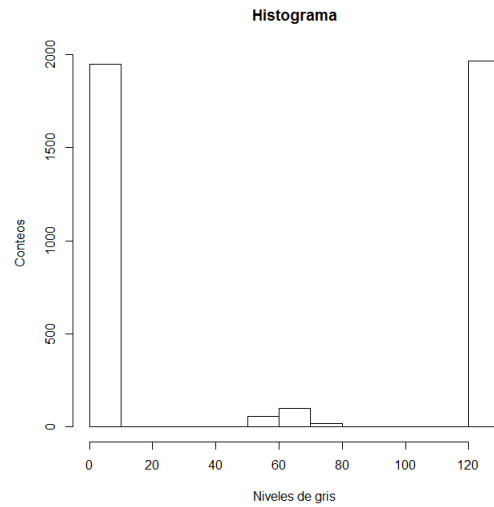
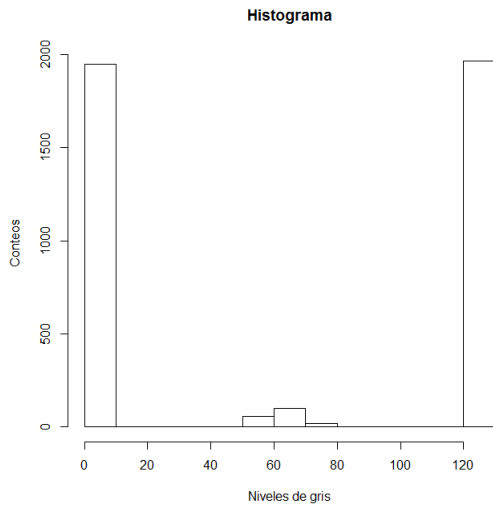


(a) $\underline{\beta} = (2, -2)$



(b) $\underline{\beta} = (0, 0, 2, -2)$

Figura 1.7: Imágenes de 64×64 bajo un modelo auto-binomial con $E = \{0, \dots, 127\}$.



(a) Histograma de la imagen de la Figura 1.7(a) (b) Histograma de la imagen de la Figura 1.7(b)

Figura 1.8: Histogramas.

por el parámetro $\beta_3 = 2$ y en dirección diagonal segunda (con un ángulo de $\pi/4$), homogénea, modelada por el parámetro $\beta_4 = -2$.

Es de notar la similitud de los histogramas de la Figura 1.8. No reflejan la evidente diferencia de texturas que muestran las imágenes de la Figura 1.7. Tampoco lo hacen los histogramas de las imágenes de la Figura 1.6. Este tipo de histograma informa solamente los conteos de las realizaciones de cada estado en E , es decir, los histogramas de las imágenes binarias sólo informan la cantidad de pixeles blancos (con valor 1) y la cantidad de pixeles negros (con valor 0), independientemente de su ubicación en la imagen y su ubicación relativa con respecto a otros pixeles blancos y/o negros. A este tipo de histogramas se los llama histogramas de primer orden.

Estos últimos párrafos dejan en evidencia la insuficiencia de los histogramas de primer orden para la discriminación de texturas y sugieren la utilización de los parámetros de interacción como marcadores característicos de textura en imágenes. Para una buena caracterización, es indispensable contar con espacios paramétricos identificables (formalmente: $\Theta \subset \mathbb{R}^k$ tal que $\underline{\beta} \in \Theta, \tilde{\underline{\beta}} \in \Theta, \underline{\beta} \neq \tilde{\underline{\beta}} \Rightarrow \mathcal{G}(\Phi^{\underline{\beta}}) \cap \mathcal{G}(\Phi^{\tilde{\underline{\beta}}}) = \emptyset$).

1.4. Modelo auto-logístico

Sea el espacio de estados $E = \{0, 1\}$, (Ω, \mathcal{D}, P) espacio de probabilidad, $X : \Omega \rightarrow E^S$, campo aleatorio (binario). Sea X , tal que sigue un modelo auto-logístico, se conoce P_X a través de sus condicionales, las especificaciones $\gamma_\Delta(\cdot|\cdot)$ ($\Delta \in \mathcal{S}$). Notar también que si $\Omega = E^S$ y X es la identidad, entonces $P = P_X$. Sea de ahora en más cualquier $\Delta \in \mathcal{S}$. Dado que Φ es un ∂ -potencial, $\gamma_\Delta(\sigma_\Delta \in B|w)$ depende sólo de $w_{\partial\Delta}$, es decir, es $\mathcal{F}_{\partial\Delta}$ -medible como función de $w \in E^S$. Para cada $w_{\partial\Delta} \in E^{\partial\Delta}$ sea $P_{w_{\partial\Delta}}$ la probabilidad sobre E^S tal que para cada $A \in \mathcal{F}$, $P_{w_{\partial\Delta}}(A)^{(6)}$ es una versión de $P(X \in A|\mathcal{F}_{\partial\Delta})$. Dado que $\gamma_\Delta(C|\cdot)$ es una versión de la probabilidad condicional $P(X \in C|\mathcal{F}_{S \setminus \Delta})$ y $\gamma_\Delta(\sigma_\Delta \in B|\cdot)$ es $\mathcal{F}_{\partial\Delta}$ -medible, $\gamma_\Delta(\sigma_\Delta \in B|\cdot)$ es una versión de $P(X_\Delta \in B|\mathcal{F}_{\partial\Delta})$. Luego, para cada $x_\Delta \in E^\Delta$, usando el caso particular $B = \{x_\Delta\} \in E^\Delta$, $P_{w_{\partial\Delta}}(X_\Delta = x_\Delta)$ y $\gamma_\Delta(\sigma_\Delta = x_\Delta|w)$ coinciden (P c.s., pues son

⁽⁶⁾función evaluada en w , pero que sólo depende de $w_{\partial\Delta}$

versiones de $P(X_\Delta = x_\Delta | \mathcal{F}_{\partial\Delta})$ y se cumple:

$$P_{w_{\partial\Delta}}(X_\Delta = x_\Delta) = \frac{e^{-\sum_{\Lambda \in \mathcal{C}_\Delta} \Phi_\Lambda(x_\Delta w_{S \setminus \Delta})}}{\sum_{z_\Delta \in E^\Delta} e^{-\sum_{\Lambda \in \mathcal{C}_\Delta} \Phi_\Lambda(z_\Delta w_{S \setminus \Delta})}} \neq 0, \quad (1.11)$$

ya que

$$P_{w_{\partial\Delta}}(X_\Delta = x_\Delta) = \gamma_\Lambda(\sigma_\Delta = x_\Delta | w) \quad (1.12)$$

$$= \gamma_\Delta^0(\{x_\Delta\} | w) \quad (1.13)$$

$$= \frac{e^{-\sum_{\Lambda \in \mathcal{C}_\Delta} \Phi_\Lambda(x_\Delta w_{S \setminus \Delta})}}{\sum_{z_\Delta \in E^\Delta} e^{-\sum_{\Lambda \in \mathcal{C}_\Delta} \Phi_\Lambda(z_\Delta w_{S \setminus \Delta})}}. \quad (1.14)$$

Es de notar también que:

$$\text{Si } P(X_{\partial\Delta} = w_{\partial\Delta}) \neq 0_{(\forall w_{\partial\Delta})} \Rightarrow P_{w_{\partial\Delta}}(A) = P(A | X_{\partial\Delta} = w_{\partial\Delta})_{(\forall w_{\partial\Delta})}$$

Luego, con un cierto abuso de notación se denota la densidad condicional de X_Λ en x_Λ dado $X_{\partial\Lambda} = w_{\partial\Lambda}$ queda:

$$p(x_\Lambda | w_{\partial\Lambda}) \doteq P_{w_{\partial\Lambda}}(X_\Lambda = x_\Lambda) = \frac{e^{-\sum_{\Delta \in \mathcal{C}_\Lambda} \Phi_\Delta(x_\Lambda w_{S \setminus \Lambda})}}{\sum_{z_\Lambda \in E^\Lambda} e^{-\sum_{\Delta \in \mathcal{C}_\Lambda} \Phi_\Delta(z_\Lambda w_{S \setminus \Lambda})}} \quad (1.15)$$

Teniendo en cuenta la forma en que el modelo auto-logístico está parametrizado por el vector $\underline{\beta}$ a través del potencial Φ , se sobrescribe la densidad $p(x_\Lambda | w_{\partial\Lambda})$ y se denota por $p(x_\Lambda | w_{\partial\Lambda}, \underline{\beta})$, dejando de manera explícita la dependencia:

$$p(x_\Lambda | w_{\partial\Lambda}, \underline{\beta}) \doteq \frac{e^{-\left(\beta_0(\sum_{t \in \Lambda} x_t) + \sum_{i=1}^g \beta_i(\sum_{t \in \Lambda_{i,0}} x_t x_{t+v_i} + \sum_{t \in \Lambda_{i,1}} x_t w_{t+v_i} + \sum_{t \in \Lambda_{i,2}} w_t x_{t+v_i})\right)}}{\sum_{z_\Lambda \in E^\Lambda} e^{-\left(\beta_0(\sum_{t \in \Lambda} z_t) + \sum_{i=1}^g \beta_i(\sum_{t \in \Lambda_{i,0}} z_t z_{t+v_i} + \sum_{t \in \Lambda_{i,1}} z_t w_{t+v_i} + \sum_{t \in \Lambda_{i,2}} w_t z_{t+v_i})\right)}} \quad (1.16)$$

donde $\beta_0 = 0$ en la expresión, si el modelo se asume sin campo externo (en ese caso β_0 no figura en el vector de parámetros $\underline{\beta}$), g puede valer 2 o 4 (según se consideren los vecindarios de primer y segundo orden, respectivamente).

Escribiendo convenientemente la función de densidad queda:

$$p(x_\Lambda | w_{\partial\Lambda}, \underline{\beta}) = \frac{e^{u_{x_\Lambda} \cdot \underline{\beta}}}{\sum_{z_\Lambda \in E^\Lambda} e^{u_{z_\Lambda} \cdot \underline{\beta}}} \quad (1.17)$$

donde \cdot es el producto interno o producto punto y $u_{z_\Lambda} \in \mathbb{R}^k$ (si $\underline{\beta} \in \mathbb{R}^k$) es llamado vector de interacciones, indexado de 0 a g si se considera el campo externo ($k = 1+g$), o bien de 1 a g ($k = g$) c.c.; definido por $u_{z_\Lambda}(0) = -\sum_{t \in \Lambda} z_t$ y para cada $i = 1, \dots, g$:

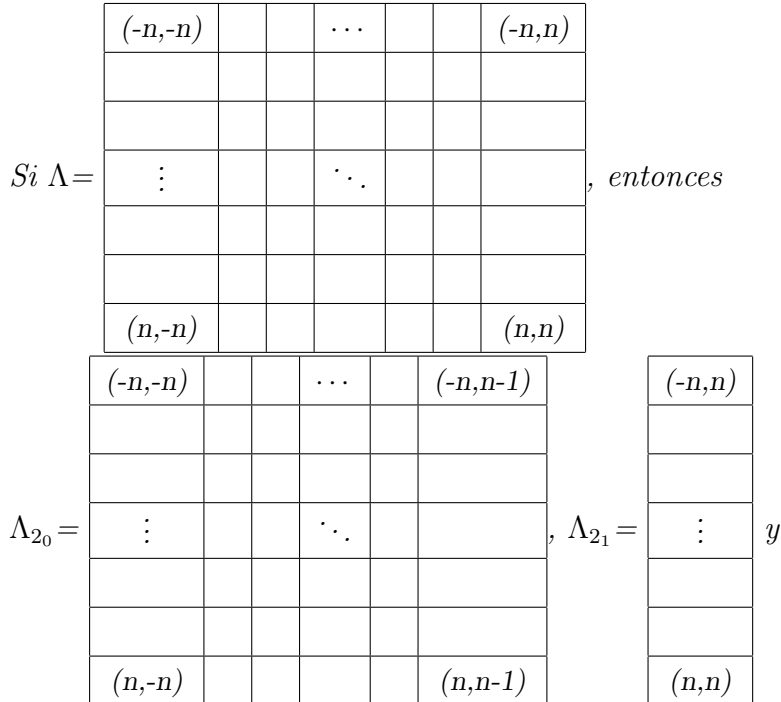
$$u_{z_\Lambda}(i) = -\sum_{t \in \Lambda_{i,0}} z_t z_{t+v_i} + \sum_{t \in \Lambda_{i,1}} z_t w_{t+v_i} + \sum_{t \in \Lambda_{i,2}} w_t z_{t+v_i},$$

donde:

- $\Lambda_{i_0} \doteq \{t \in \Lambda / t + v_i \in \Lambda\}$,
- $\Lambda_{i_1} \doteq \{t \in \Lambda / t + v_i \notin \Lambda\}$,
- $\Lambda_{i_2} \doteq \{t \notin \Lambda / t + v_i \in \Lambda\}$,

Es de notar que $\Lambda_{i_0} \cup \Lambda_{i_1} = \Lambda$ (unión disjunta) y $\Lambda_{i_2} \subset \partial\Lambda$.

Ejemplo 1.4.1 Para $i = 2$ (horizontal, $v_2 = (0, 1)$).



$$\Lambda_{2_2} = \begin{array}{|c|} \hline (-n, -n-1) \\ \hline \\ \hline \\ \hline \vdots \\ \hline \\ \hline \\ \hline (n, -n-1) \\ \hline \end{array}.$$

Ejemplo 1.4.2 Para cada $s \in S$, si $\Lambda = \{s\}$ se cumple:

- $\Lambda_{i_0} = \emptyset = \{t \in \Lambda/t + v_i \in \Lambda\}$,
- $\Lambda_{i_1} = \{s\} = \{t \in \Lambda/t + v_i \notin \Lambda\}$,
- $\Lambda_{i_2} = \{s - v_i\} = \{t \notin \Lambda/t + v_i \in \Lambda\}$.

Luego, como caso particular, la densidad condicional $p(x_s|w_{\partial s})$ coincide con la característica local en s , se la denota por $p(x_s|w_{\partial s}, \underline{\beta})$. Dejando explícita la parametrización, y escribiendo convenientemente, queda:

$$p(x_s|w_{\partial s}, \underline{\beta}) \doteq P_{w_{\partial s}}(X_s = x_s) \quad (1.18)$$

$$= \rho_s(x_s w_{S \setminus \{s\}}) \quad (1.19)$$

$$= \frac{e^{-\sum_{\Delta \in \mathcal{C}_s} \Phi_{\Delta}(x_s w_{S \setminus \{s\}})}}{\sum_{z_s \in E} e^{-\sum_{\Delta \in \mathcal{C}_s} \Phi_{\Delta}(z_s w_{S \setminus \{s\}})}} \quad (1.20)$$

$$= \frac{e^{-(\beta_0 x_s + \sum_{i=1}^g \beta_i (x_s w_{s+v_i} + w_{s-v_i} x_s))}}{\sum_{z_s \in E} e^{-(\beta_0 z_s + \sum_{i=1}^g \beta_i (z_s w_{s+v_i} + w_{s-v_i} z_s))}} \quad (1.21)$$

$$= \frac{e^{-x_s (\beta_0 + \sum_{i=1}^g \beta_i (w_{s+v_i} + w_{s-v_i}))}}{\sum_{z_s \in E} e^{-z_s (\beta_0 + \sum_{i=1}^g \beta_i (w_{s+v_i} + w_{s-v_i}))}} \quad (1.22)$$

$$= \frac{e^{-x_s (\beta_0 + \sum_{i=1}^g \beta_i (w_{s+v_i} + w_{s-v_i}))}}{1 + e^{-(\beta_0 + \sum_{i=1}^g \beta_i (w_{s+v_i} + w_{s-v_i}))}} \quad (1.23)$$

$$= \frac{e^{x_s \nu}}{1 + e^{\nu}} \quad (1.24)$$

siendo $\nu \doteq -(\beta_0 + \sum_{i=1}^g \beta_i(w_{s+v_i} + w_{s-v_i}))$ esta expresión es llamada suma de interacción local. Luego, dado el entorno $w_{\partial s}$, la probabilidad de presencia en el pixel s ($P_{w_{\partial s}}(X_s = 1)$) es:

$$p(1|w_{\partial s}, \underline{\beta}) = \frac{e^\nu}{1 + e^\nu} \quad (1.25)$$

y la probabilidad de ausencia ($P_{w_{\partial s}}(X_s = 0)$):

$$p(0|w_{\partial s}, \underline{\beta}) = \frac{1}{1 + e^\nu} \quad (1.26)$$

Es útil notar que ν es el producto interno

$$\nu = \mathbf{u} \cdot \underline{\beta} = [\mathbf{u}]^t [\underline{\beta}] \quad (1.27)$$

para $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^k$ ($\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{\{0, \dots, g\}}$ si se considera el campo externo o $\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{\{1, \dots, g\}}$ si no) definido por $\mathbf{u}(0) = -1$ y para cada $i = 1, \dots, g$:

$$\mathbf{u}(i) = -(w_{t+v_i} + w_{t-v_i}).$$

Cuando $k = 5$, la versión matricial de \mathbf{u} queda:

$$[\mathbf{u}] = \begin{bmatrix} -1 \\ -(w_{t+v_1} + w_{t-v_1}) \\ -(w_{t+v_2} + w_{t-v_2}) \\ -(w_{t+v_3} + w_{t-v_3}) \\ -(w_{t+v_4} + w_{t-v_4}) \end{bmatrix}$$

El vector \mathbf{u} es llamado usualmente vector de interacción local.

1.5. Unicidad: Condición de Dobrushin

Sea Φ , de ahora en adelante, un potencial definido como en el ejemplo 1.3.1 y X campo aleatorio que sigue un modelo auto-logístico, tal que $P_X \in \mathcal{G}(\Phi)$. El resultado 1.6 muestra que el conjunto $\mathcal{G}(\Phi)$ es no vacío, es decir, que existe alguna medida global sobre \mathcal{E}^S tal que las especificaciones de Gibbs definidas por Φ son las

probabilidades condicionales de dicha medida global. La pregunta ahora sería: ¿esa medida global es única o existen más de una? Es decir, ¿se cumple $\#\mathcal{G}(\phi) = 1$? Con la intención de responder esa pregunta, se tendría que evaluar si hay probabilidades distintas en $\mathcal{G}(\Phi)$ o encontrar condiciones para asegurar que no haya. Para esto, es necesario dar alguna definición de distancia entre probabilidades de un espacio de probabilidad $\mathcal{P}(\Omega, \mathcal{D})$.

Definición 1.5.1 Sean μ y $\tilde{\mu}$ en $\mathcal{P}(\Omega, \mathcal{D})$, se define y denota la distancia uniforme entre μ y $\tilde{\mu}$ como:

$$d(\mu, \tilde{\mu}) \doteq \sup \{ |\mu(B) - \tilde{\mu}(B)| \mid B \in \mathcal{D} \} \leq 1$$

Dobrushin (ver [23]) descubre que la forma de asegurar la unicidad de la distribución global es controlando la «dispersiones» de las características locales o bien de los núcleos de probabilidad γ_s^0 .

Definición 1.5.2 Sea γ una especificación de Gibbs, en cada sitio $s \in S$, para t también en S se define y denota la interdependencia de Dobrushin entre s y t como:

$$\gamma_{s,t} \doteq \sup \{ d(\gamma_s^0(\cdot|x), \gamma_s^0(\cdot|w)) \mid x_{S \setminus t} = w_{S \setminus t} \},$$

Se puede ver que $\gamma_{s,s} = 0$ y que si Φ es un ∂ -potencial $\gamma_{s,t} = 0$ para todo $t \notin \partial s$. Se define ahora y denota el coeficiente de interdependencia de Dobrushin a:

$$\alpha(\gamma) \doteq \sup_{s \in S} \left\{ \sum_{t \in S} \gamma_{s,t} \right\}.$$

Cuando Φ es ∂ -potencial:

$$\alpha(\gamma) = \sup_{s \in S} \left\{ \sum_{t \in \partial s} \gamma_{s,t} \right\}.$$

Definición 1.5.3 Se dice que la especificación γ satisface la condición D (Condición

de Dobrushin) si:

$$\gamma \text{ es q.l. y } \alpha(\gamma) < 1.$$

Cuando Φ es ∂ -potencial, γ es q.l., y cumple la condición D si $\alpha(\gamma) < 1$. Esta condición no es fácil de asegurar o corroborar y depende del potencial.

1.5.1. Condición de Dobrushin para el modelo auto-logístico

En esta Subsección se presenta un teorema que provee de una condición que asegura la condición de Dobrushin para el modelo auto-logístico. Esta nueva condición es una condición suficiente pero no necesaria, restringe a los parámetros de interacción y es fácil de corroborar. Define de esta forma una «región de unicidad» (ver [34]).

Teorema 1.5.1 *Sea Φ como en el Ejemplo 1.3.1(modelo auto-logístico), se cumple:*

$$2 \sum_{l=1}^g \tanh(|\beta_l|/4) < 1 \Rightarrow \#\mathcal{G}(\Phi) = 1$$

Demostración:

Sea γ la especificación de Gibbs para Φ , para demostrar el teorema basta con demostrar que $\alpha(\gamma) \leq 2 \sum_{l=1}^g \tanh(|\beta_l|/4)$.

Sea $s \in S$, $t \in \partial s$, x y w en E^S tal que $x_{S \setminus t} = w_{S \setminus t}$ ⁽⁷⁾.

Si $x_t = w_t$, entonces $x = w$ y $d(\gamma_s^{g,0}(\cdot|x), \gamma_s^0(\cdot|w)) = 0$.

Sea $x_t = 1 - w_t$, donde $t = s + v_l$ ó $t = s - v_l$, para $1 \leq l \leq g$. Sin pérdida de generalidad, se asume que $t = s - v_l$. Entonces $x_r = w_r \forall r \neq s - v_l$ y $x_{s-v_l} = 1 - w_{s-v_l}$.

Es de notar que :

$$\begin{aligned} d(\gamma_s^{g,0}(\cdot|x), \gamma_s^{g,0}(\cdot|w)) &= \sup \{ |\gamma_s^{g,0}(A|x) - \gamma_s^{g,0}(A|w)| : A \in \mathcal{E} \} \\ &= \max \{ |\gamma_s^{g,0}(A|x) - \gamma_s^{g,0}(A|w)| : A = \emptyset, E, \{0\}, \{1\} \} \end{aligned}$$

⁽⁷⁾ $S \setminus t \doteq S \setminus \{t\}$

y

$$\begin{aligned}
|\gamma_s^{g,0}(\emptyset|x) - \gamma_s^{g,0}(\emptyset|w)| &= |0 - 0| = 0 \\
|\gamma_s^{g,0}(E|x) - \gamma_s^{g,0}(E|w)| &= |1 - 1| = 0 \\
|\gamma_s^{g,0}(\{1\}|x) - \gamma_s^{g,0}(\{1\}|w)| &= |\gamma_s^{g,0}(\{0\}|x) - \gamma_s^{g,0}(\{0\}|w)|
\end{aligned}$$

(pues $\gamma_s^0(\{1\}|x) = 1 - \gamma_s^0(\{0\}|x)$), entonces:

$$\begin{aligned}
d(\gamma_s^0(\cdot|x), \gamma_s^0(\cdot|w)) &= |\gamma_s^0(\{1\}|x) - \gamma_s^0(\{1\}|w)|, \\
&= \left| \frac{e^{-(\beta_0 + \sum_{i=1}^g \beta_i(x_{s+v_i} + x_{s-v_i}))}}{1 + e^{-(\beta_0 + \sum_{i=1}^g \beta_i(x_{s+v_i} + x_{s-v_i}))}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{e^{-(\beta_0 + \sum_{i=1}^g \beta_i(w_{s+v_i} + w_{s-v_i}))}}{1 + e^{-(\beta_0 + \sum_{i=1}^g \beta_i(w_{s+v_i} + w_{s-v_i}))}} \right|, \\
&= \left| \frac{1}{1 + e^{\beta_0 + \beta_l(x_{s+v_l} + x_{s-v_l}) + \sum_{i \neq l} \beta_i(x_{s+v_i} + x_{s-v_i})}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{1 + e^{\beta_0 + \beta_l(w_{s+v_l} + w_{s-v_l}) + \sum_{i \neq l} \beta_i(w_{s+v_i} + w_{s-v_i})}} \right|, \\
&= \left| \frac{1}{1 + e^{\beta_0 + \beta_l(x_{s+v_l} + x_{s-v_l}) + \sum_{i \neq l} \beta_i(x_{s+v_i} + x_{s-v_i})}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{1 + e^{\beta_0 + \beta_l(x_{s+v_l} + (1-x_{s-v_l})) + \sum_{i \neq l} \beta_i(x_{s+v_i} + x_{s-v_i})}} \right|, \\
&= \left| \frac{1}{1 + e^{\beta_l x_{s-v_l}} e^\theta} - \frac{1}{1 + e^{\beta_l(1-x_{s-v_l})} e^\theta} \right| \quad (10) \\
&= \left| \frac{e^{\beta_l(1-x_{s-v_l})} - e^{\beta_l x_{s-v_l}}}{e^{-\theta} + e^{\beta_l(x_{s-v_l})} + e^{\beta_l(1-x_{s-v_l})} + e^{\beta_l} e^\theta} \right|, \\
&= \frac{|1 - e^{\beta_l}|}{e^{\beta_l} e^\theta + e^{-\theta} + e^{\beta_l} e^0 + e^{-0}}, \\
&\leq \frac{|1 - e^{\beta_l}|}{e^{\beta_l} e^{-\beta_l/2} + e^{-(-\beta_l/2)} + e^{\beta_l} + 1}, \\
&= \frac{|1 - e^{\beta_l}|}{(1 + e^{\beta_l/2})^2} = \frac{(1 + e^{\beta_l/2})|1 - e^{\beta_l/2}|}{(1 + e^{\beta_l/2})^2} \\
&= \frac{|1 - e^{\beta_l/2}|}{1 + e^{\beta_l/2}} = \frac{e^{|\beta_l|/2} - 1}{e^{|\beta_l|/2} + 1} = \tanh(|\beta_l|/4)
\end{aligned}$$

(pues $e^{\beta_l} e^{-\beta_l/2} + e^{\beta_l/2} \leq e^{\beta_l} e^z + e^{-z}$, $z \in \mathbb{R}$).

Luego $\gamma_{s,s-v_l} \leq \tanh(|\beta_l|/4)$ y $\sum_{t \in \partial s} \gamma_{s,t} \leq \sum_{l=1}^g 2 \tanh(|\beta_l|/4)$, $\forall s \in S$, entonces:

$$\alpha(\gamma) = \sup_{s \in S} \left\{ \sum_{t \in \partial s} \gamma_{s,t} \right\} \leq 2 \sum_{l=1}^g \tanh(|\beta_l|/4)$$

■

Observación 1.5.1 *La contrarecíproca no es cierta (\nLeftarrow)*

Demostración:

Si se indentifica el valor 0 con -1 , el modelo auto-logístico de primer orden con $\beta_0/2 = \beta_1 = \beta_2$ es el modelo de Ising con parámetro $\beta_1/4$ sin campo externo (-1)-normalizado (ver Ejemplo 3.3.33 en [12]). Si $\beta_1 = \beta_2 = 1.6$ no se cumple la hipótesis del Teorema 1.5.1. Pero se tiene unicidad pues

$$\beta_1/4 < \beta_c = (\log(1 + \sqrt{2}))/2 = 0.4402, \tag{1.28}$$

donde β_c es el parámetro crítico del modelo de Ising (ver Observación 1.3.1).

■

El Teorema 1.5.1 provee de una región para los parámetros de interacción. De ahora en más se la llama región de unicidad y se puede ver su gráfico en la Figura 1.9, correspondiente al modelo del primer orden (o cuando $\beta_3 = \beta_4 = 0$).

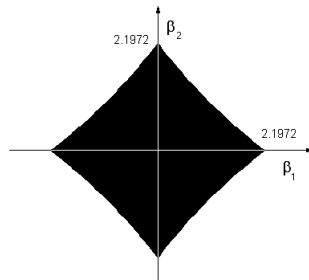


Figura 1.9: Región de unicidad

⁽¹⁰⁾ $\theta = \beta_0 + \beta_l(x_{s+v_l}) + \sum_{i \neq l} \beta_i(x_{s+v_i} + x_{s-v_i})$

Capítulo 2

Textura

2.1. Texturas binarias

Las imágenes de las Figuras de la Sección 1.3 sugieren la utilización de la distribución del proceso subyacente de cada imagen como identificador de su textura. Restringiendo el modelo del proceso subyacente al auto-logístico para imágenes binarias, esta identificación la hereda el vector de parámetros $\underline{\beta} \in \mathbb{R}^k$. La adopción de un modelo, cualquiera sea, acota la variedad de texturas a ser descriptas. A modo de ejemplo, la textura visible en la Figura 1.6(b) no se rige bajo ningún modelo auto-logístico de primer orden. Esto se esboza en la Figura 2.1, la cual proporciona información parcial pero representativa de los alcances del modelo auto-logístico de primer orden. La imagen de la Figura 2.1 fue construida acoplando 17×17 imágenes (de 64×64 pixeles) generadas con el algoritmo GS con vector de parámetros $\underline{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$, β_1 y β_2 variando de -4 a 4 , con un paso de 0.5 . Las imágenes fueron ubicadas por fila y columna respectivamente (es decir, vertical y horizontalmente), siendo la esquina superior izquierda la imagen correspondiente al vector de parámetros $\underline{\beta} = (-4, -4)$ y la esquina superior derecha la correspondiente a $\underline{\beta} = (-4, 4)$.

De la misma forma, las Figuras 2.2, 2.3 y 2.4 proporcionan información parcial de los alcances del modelo auto-logístico para 8 vecinos (vecindario de segundo orden). La imagen de la Figura 2.2 fue construida acoplando 17×17 imágenes (de 64×64 pixeles cada una) generadas con el algoritmo GS con vector de parámetros $\underline{\beta} = (0, 0, \beta_3, \beta_4)$, β_3 y β_4 variando de -4 a 4 , con un paso de 0.5 . Las imágenes

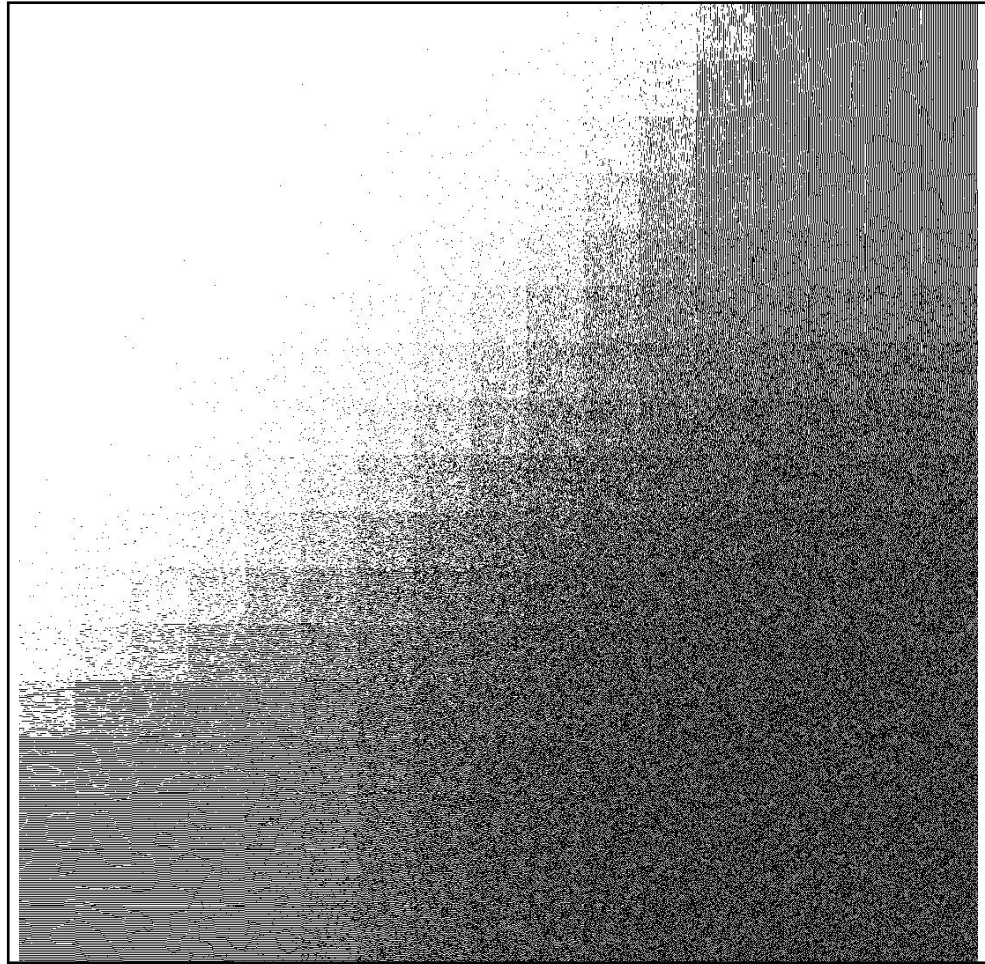


Figura 2.1: 17×17 imágenes de 64×64 píxeles bajo un modelo auto-logístico de 4 vecinos.

fueron ubicadas por fila y columna respectivamente (es decir vertical y horizontalmente), siendo la esquina superior izquierda la imagen correspondiente al vector de parámetros $\underline{\beta} = (0, 0, -4, -4)$ y la esquina superior derecha la correspondiente a $\underline{\beta} = (0, 0, -4, 4)$.

La imagen de la Figura 2.3 fue construida acoplando 17×17 imágenes (de 64×64 píxeles) generadas con el algoritmo GS con vector de parámetros $\underline{\beta} = (1, 1, \beta_3, \beta_4)$, β_3 y β_4 variando de -4 a 4 , con un paso de 0.5 . Análogamente al acople anterior las imágenes fueron ubicadas por fila y columna respectivamente (es decir vertical y horizontalmente), en este caso la esquina superior izquierda consiste de la imagen

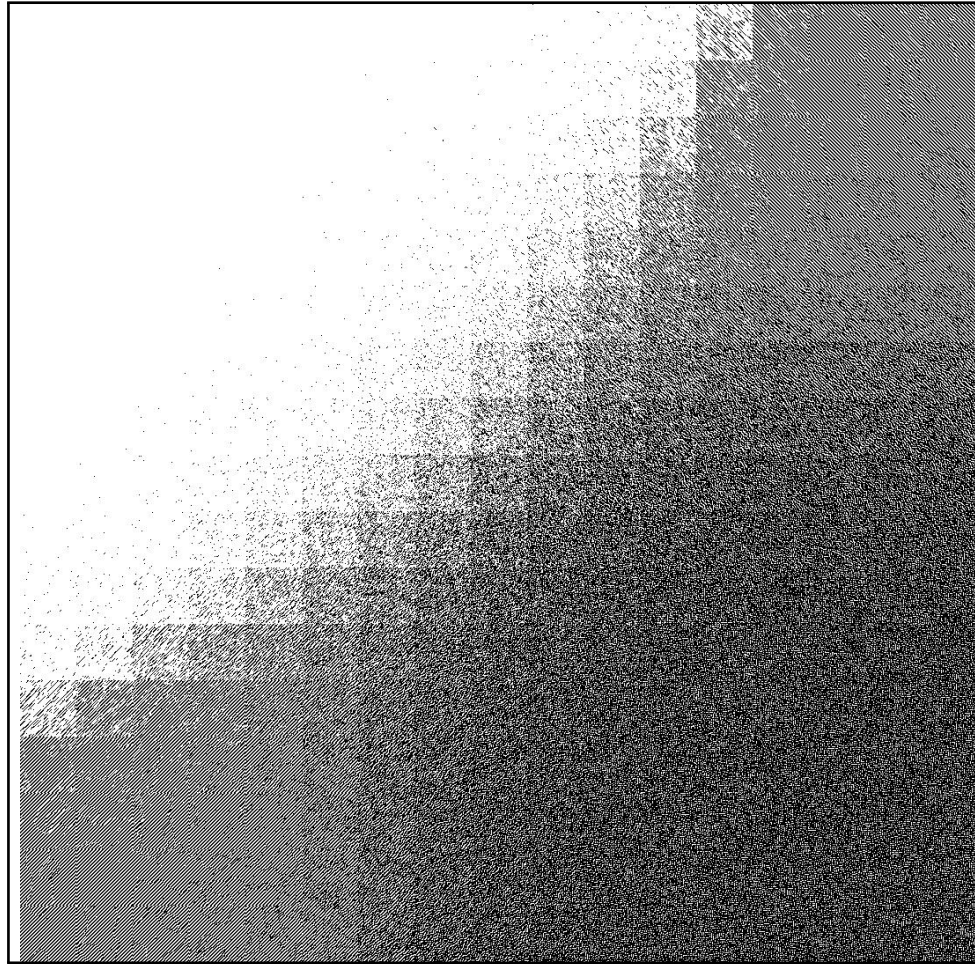


Figura 2.2: 17×17 imágenes de 64×64 píxeles bajo un modelo auto-logístico con $\underline{\beta} = (0, 0, \beta_3, \beta_4)$.

correspondiente al vector de parámetros $\underline{\beta} = (1, 1, -4, -4)$ y la esquina superior derecha es la correspondiente a $\underline{\beta} = (1, 1, -4, 4)$.

La imagen de la Figura 2.4 fue construida acoplando 17×17 imágenes (de 64×64 píxeles) generadas con el algoritmo GS con vector de parámetros $\underline{\beta} = (-1, 1, \beta_3, \beta_4)$, β_3 y β_4 variando de -4 a 4 , con un paso de 0.5 . En este caso también las imágenes fueron ubicadas por fila y columna respectivamente (es decir vertical y horizontalmente), de tal forma que en la esquina superior izquierda se encuentra la imagen correspondiente al vector de parámetros $\underline{\beta} = (-1, 1, -4, -4)$ y en la esquina superior derecha la correspondiente a $\underline{\beta} = (-1, 1, -4, 4)$.

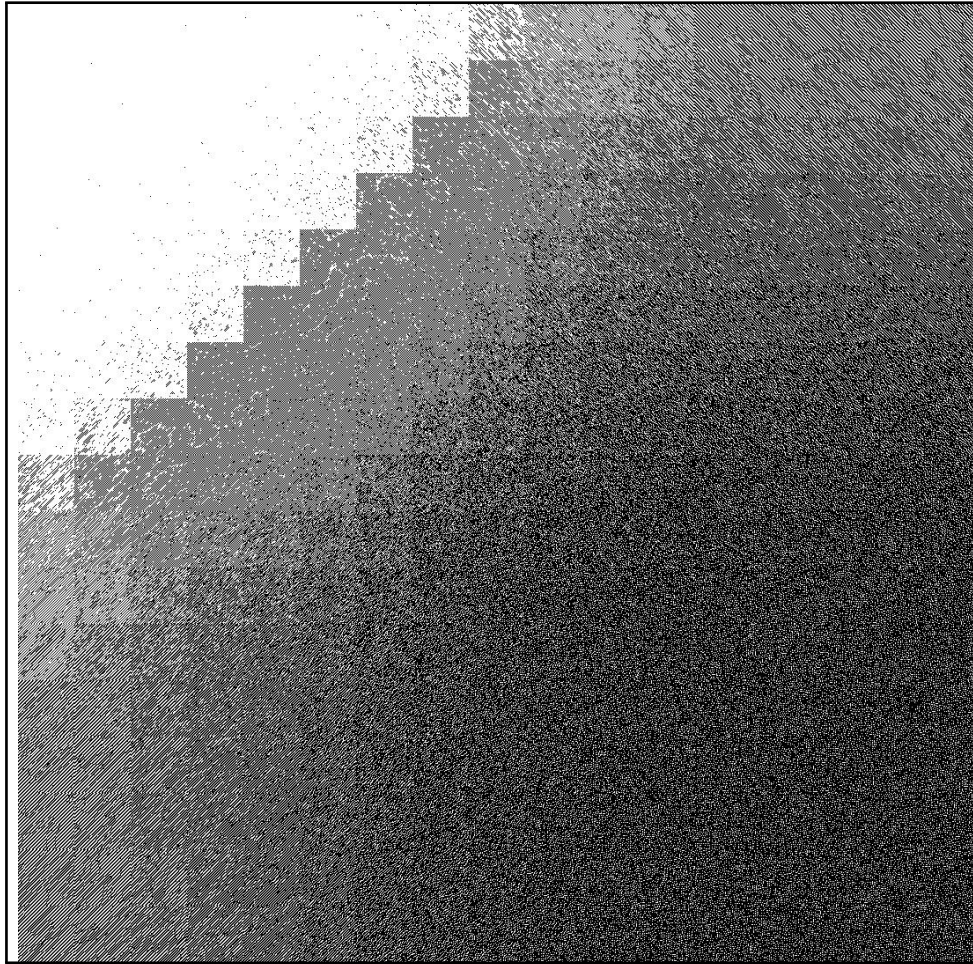


Figura 2.3: 17×17 imágenes de 64×64 píxeles bajo un modelo auto-logístico con $\underline{\beta} = (1, 1, \beta_3, \beta_4)$.

Considerando las conocidas ventajas del modelado teórico (en general) frente a técnicas *ad hoc* y la fuerte relación entre texturas y parámetros que muestran los ejemplos de la Sección 1.3 y las Figuras 2.1, 2.2, 2.3 y 2.4, las limitaciones del modelo auto-logístico para caracterizar algunas texturas binarias sólo definen el rango de alcance de la metodología. Este rango excluye a las texturas regulares, éstas son las definidas por la repetición de un arreglo rectangular llamado *texel* (texture element, de la lengua inglesa), como se muestra en la Figura 2.5.

La bibliografía sobre este tema apela en general a la noción intuitiva que se tiene del concepto «textura». Se intenta proveer una definición formal que capture esta in-

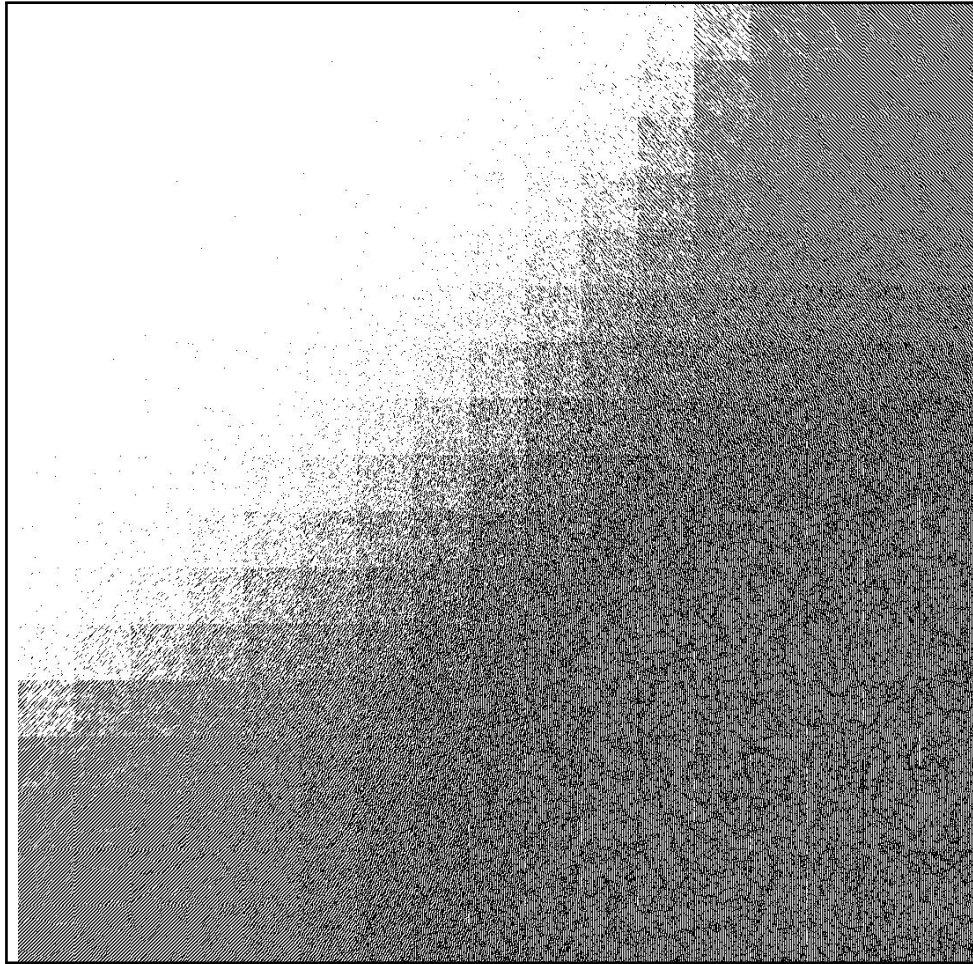
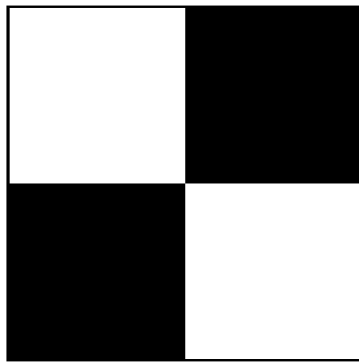


Figura 2.4: 17×17 imágenes de 64×64 píxeles bajo un modelo auto-logístico con $\underline{\beta} = (-1, 1, \beta_3, \beta_4)$.

tuición, es decir que sea capaz de identificar y discriminar texturas. Existe bibliografía que intenta formalizar este concepto. La formalización depende del tipo de imagen a ser considerada y de la técnica utilizada en el análisis. Existen muchos descriptores de textura como la entropía, contraste, energía, homogeneidad, correlación, patrones locales binarios (*LBP*), etc. (ver por ejemplo Haralick et. al. (1973)[26], Haralick (1979)[25], Alvarado y Fernández (2012)[2]). La mayoría de ellos se refiere a texturas de imágenes a niveles de gris o *RGB*, no a imágenes binarias. Apelando a la noción intuitiva antes mencionada, una imagen estaría caracterizada según la disposición relativa de los valores de sus píxeles. A modo de ejemplo en imágenes binarias, la

«textura tablero de ajedrez» es la «textura» dada localmente como en la Figura 2.5(a). Se caracteriza por la siguiente disposición relativa: los vecinos horizontales o verticales poseen valores diferentes, no así los diagonales, que poseen el mismo valor.



(a) Texel

(b) Imagen de 64×64 píxeles

Figura 2.5: «Tablero de Ajedrez»

El análisis de los ejemplos mostrados de la Sección 1.3 revela la adecuación e idoneidad del modelo para discriminar texturas visibles al ojo. Dada una imagen binaria, se desconoce en principio el proceso subyacente, y es a través de la disposición relativa de sus valores que se identifica su textura o procedencia. Una forma de resumir esta información es construyendo un histograma (de segundo orden) que refleje el conteo de las configuraciones locales presentes. Este histograma aparece implícito en [18] dando origen al método del histograma (usado para estimar el vector de parámetros $\underline{\beta}$ del modelo auto-logístico). Surge a partir de algunas observaciones útiles:

- Existen pocas configuraciones de entornos w_{∂_s} posibles, 2^{2g} si se es preciso ($2^8 = 256$, para 8 vecinos y $2^4 = 16$ para 4 vecinos).
- Existen menos aún posibles vectores de interacción, $J \doteq 3^g$, pues $-(w_{t+v_i} +$

$w_{t-v_i} \in \{0, -1, -2\}$ para $i = 1, \dots, g$ (precisamente $J = 81$, para 8 vecinos y $J = 9$ para 4 vecinos).

Estos vectores pueden enumerarse de la siguiente forma: \mathbf{u} tendrá índice (o número) $j = 1 - \sum_{i=1}^g \mathbf{u}(i)3^{i-1} = 1 + \sum_{i=1}^g (w_{t+v_i} + w_{t-v_i})3^{i-1}$, se denota por \mathbf{u}_j ($j \in \{1, \dots, J\}$). Se dirá, además, que un pixel tiene índice j si su vector de entornos tiene índice j . Por ejemplo:

$$\blacksquare [\mathbf{u}_1] = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{índice } j = 1 = 1 - \sum_{i=2}^g 0 \cdot 3^{i-1}),$$

$$\blacksquare [\mathbf{u}_2] = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{índice } j = 2 = 1 + 1 \cdot 3^0 - \sum_{i=2}^g 0 \cdot 3^{i-1}),$$

$$\blacksquare [\mathbf{u}_3] = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{índice } j = 3 = 1 + 2 \cdot 3^0 - \sum_{i=2}^g 0 \cdot 3^{i-1}), \text{ etc..}$$

Esta asignación es biunívoca: fijado el índice, se recupera el vector de interacción local, pues se cumple $-\mathbf{u}_j(i) = j - 1 - \sum_{l=1}^{i-1} \mathbf{u}(l)3^{l-1} \pmod{3^i}$ con $i = 1, \dots, g$ y siempre $\mathbf{u}_j(0) = -1$.

Recordando que el vocablo pixel (picture element) proveniente de la lengua inglesa, es el nombre del elemento más pequeño que puede distinguirse en una imagen, algunos autores llaman pixel al sitio y otros al sitio y al valor de la imagen en el

sitio, esto último significa que (s, x_s) es el pixel central de la porción de imagen:

x_{s-v_3}	x_{s-v_1}	x_{s+v_4}
x_{s-v_2}	x_s	x_{s+v_2}
x_{s-v_4}	x_{s+v_1}	x_{s+v_3}

De una u otra forma, en la porción de imagen:

0	1	0
0	0	1
0	1	1

el pixel central tiene índice $15 = 1 + 2 + 3 + 3^2$, es decir, tiene vector de interacción local

$$[\mathbf{u}_{15}] = \begin{bmatrix} -1 \\ -(x_{t+v_1} + x_{t-v_1}) \\ -(x_{t+v_2} + x_{t-v_2}) \\ -(x_{t+v_3} + x_{t-v_3}) \\ -(x_{t+v_4} + x_{t-v_4}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Es importante notar que existen $2 \cdot J$ configuraciones locales posibles según el modelo auto-logístico, pues hay J entornos relevantes para el modelo y cada uno tiene dos valores posibles para el pixel central (0 ó 1).

2.2. Nuevos descriptores de textura

Definición 2.2.1 Se define formalmente el histograma de segundo orden como la función $Hist : E^{\Lambda \cup \partial \Lambda} \rightarrow (\mathbb{N} \cup 0)^{\{0,1\} \times J}$ tal que $Hist(x_{\Lambda \cup \partial \Lambda})$ es una matriz de dimensión $2 \times J$, que para cada $l = 0, 1$ y $j = 1, \dots, J$ cumple:

$$Hist(x_{\Lambda \cup \partial \Lambda})(l, j) = \#\{s \in \Lambda / x_s = l, s \text{ tiene índice } j\}. \quad (2.1)$$

A la matriz $Hist(x_{\Lambda \cup \partial \Lambda})$ se le llama histograma de segundo orden de la imagen $x_{\Lambda \cup \partial \Lambda}$ (notar que $Hist(x_{\Lambda \cup \partial \Lambda})(1, j)$ contiene la cantidad de pixeles de x_Λ con valor 1 y j -ésimo vector de entornos y $Hist(x_{\Lambda \cup \partial \Lambda})(0, j)$ contiene la cantidad de pixeles de

x_Λ con valor 0 y j -ésimo vector de entornos). ⁽¹⁾

El método del histograma y la relevancia del modelo auto-logístico, sugieren una definición formal de una función de textura en imágenes binarias. Intenta reflejar la noción intuitiva y es función de un vector de parámetros.

Definición 2.2.2 Se define la función textura para el modelo auto-logístico como $tx : \mathbb{R}^k \rightarrow (0, 1)^J$ tal que :

$$tx(\underline{\beta}) \doteq \left(\frac{e^{\underline{\beta}u_1}}{1 + e^{\underline{\beta}u_1}}, \dots, \frac{e^{\underline{\beta}u_J}}{1 + e^{\underline{\beta}u_J}} \right)$$

Es de notar la asociación con el histograma de segundo orden, pues:

- $\frac{Hist(x_{\Lambda \cup \partial \Lambda})(1, j)}{Hist(x_{\Lambda \cup \partial \Lambda})(1, j) + Hist(x_{\Lambda \cup \partial \Lambda})(0, j)}$ es la proporción de «presencia» en pixeles de $x_{\Lambda \cup \partial \Lambda}$ con j -ésimo vector de interacción local (si $Hist(x_{\Lambda \cup \partial \Lambda})(1, j) + Hist(x_{\Lambda \cup \partial \Lambda})(0, j) \neq 0$) y
- $\frac{e^{\underline{\beta}u_j}}{1 + e^{\underline{\beta}u_j}}$, bajo el modelo auto-logístico, es la probabilidad de «presencia» en pixeles con j -ésimo vector de interacción local.

Ambas definiciones motivan, de esta forma, la presentación de un indicador empírico de la textura de una imagen binaria. Este indicador, llamado vector de proporciones, está fuertemente relacionado con la función tx y la siguiente definición del vector de proporciones.

Definición 2.2.3 Se define el vector de proporciones como la función $prop : E^{\Lambda \cup \partial \Lambda} \rightarrow [0, 1]^J$ tal que $prop(x_{\Lambda \cup \partial \Lambda})$ es un vector de dimensión J que cumple:

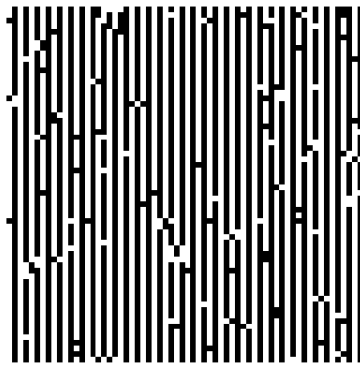
$$prop(x_{\Lambda \cup \partial \Lambda})(j) \doteq \begin{cases} \frac{1}{2} & t_j = 0 \\ \frac{s_j}{t_j} & c.c. \end{cases},$$

donde $s_j \doteq Hist(x_{\Lambda \cup \partial \Lambda})(1, j)$ y $t_j \doteq Hist(x_{\Lambda \cup \partial \Lambda})(0, j) + Hist(x_{\Lambda \cup \partial \Lambda})(1, j)$, para cada $j = 1, \dots, J$. Al vector $prop(x_{\Lambda \cup \partial \Lambda})$ se le llama vector de proporciones de la imagen

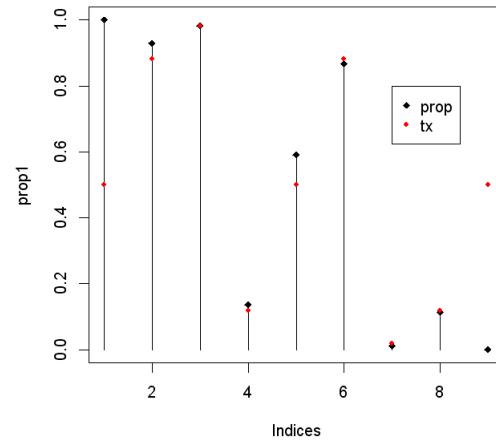
⁽¹⁾Esta definición puede extenderse fácilmente para el modelo auto-binomial (ver Ejemplo 1.3.3) $Hist : E^{\Lambda \cup \partial \Lambda} \rightarrow (\mathbb{N} \cup 0)^{E \times \tilde{J}}$, con $\tilde{J} = (2K + 1)^g$. $Hist(x_{\Lambda \cup \partial \Lambda})(l, j)$ definido como en la ecuación 2.1 para $l = 0, \dots, K$ y $j = 1, \dots, \tilde{J}$

$x_{\Lambda \cup \partial \Lambda}$. Es de notar que, dados los pixeles de índice j de x_{Λ} , $prop(x_{\Lambda \cup \partial \Lambda})(j)$ contiene la proporción de ellos con valor 1.

Ejemplo 2.2.1 Usando *GS* se generó una imagen, $x_{\Lambda \cup \partial \Lambda}$ de 64×64 pixeles, bajo un modelo auto-logístico con $\underline{\beta} = (-2, 2)$. La imagen $x_{\Lambda \cup \partial \Lambda}$ (donde $\Lambda = \{2, \dots, 63\}^2$, luego $\Lambda \cup \partial \Lambda = \Lambda_{64}$) puede visualizarse en la Figura 2.6(a).



(a) Imagen $x_{\Lambda \cup \partial \Lambda}$ de 64×64



(b) Vectores $prop(x_{\Lambda \cup \partial \Lambda})$ y $tx(\underline{\beta})$

Figura 2.6: Modelo auto-logístico con $\underline{\beta} = (-2, 2)$.

Ejemplo 2.2.2 Usando *GS* se generó una imagen, $x_{\Lambda \cup \partial \Lambda}$ de 64×64 pixeles, bajo un modelo auto-logístico con $\underline{\beta} = (1, 1, -2, 2)$. La imagen $x_{\Lambda \cup \partial \Lambda}$ (donde $\Lambda = \{2, \dots, 63\}^2$) puede visualizarse en la Figura 2.7(a).

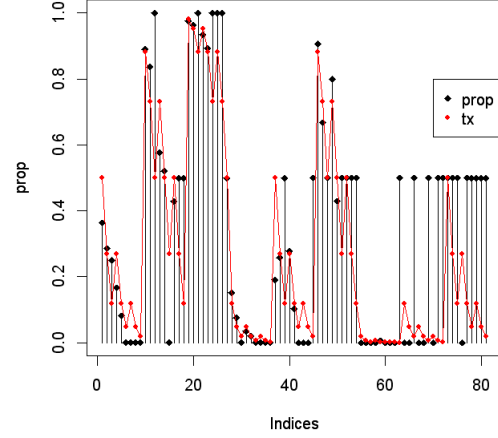
En las figuras 2.6(b) y 2.7(b) se superponen, a modo comparativo, los vectores $prop(x_{\Lambda \cup \partial \Lambda})$ y $tx(\underline{\beta})$, dejando visible la dualidad entre el vector ideal de textura y el vector empírico $prop$ (es decir, la dualidad entre las probabilidades condicionales del modelo y las proporciones de la imagen generada bajo el modelo).

Proposición 2.2.1 tx es una función inyectiva⁽²⁾.

⁽²⁾ A y B conjuntos, $f : A \rightarrow B$; se dice que f es inyectiva si $f(a) = f(c) \Rightarrow a = c$



(a) Imagen $x_{\Lambda \cup \partial \Lambda}$ de 64×64



(b) Vectores $prop(x_{\Lambda \cup \partial \Lambda})$ y $tx(\underline{\beta})$

Figura 2.7: Modelo auto-logístico con $\underline{\beta} = (1, 1, -2, 2)$.

Es de notar que la proposición 2.2.1 nos «asegura» la identificabilidad del modelo.

Demostración: Se realiza la demostración para $k = 5$, el caso más general, la demostración es análoga para $k = 2, 3, 4$. Sea $\underline{\beta} \in \mathbb{R}^k$ y $\tilde{\underline{\beta}} \in \mathbb{R}^k$, tal que $tx(\underline{\beta}) = tx(\tilde{\underline{\beta}})$.

Luego se cumple: $\frac{e^{\underline{\beta} \cdot \mathbf{u}_j}}{1+e^{\underline{\beta} \cdot \mathbf{u}_j}} = \frac{e^{\tilde{\underline{\beta}} \cdot \mathbf{u}_j}}{1+e^{\tilde{\underline{\beta}} \cdot \mathbf{u}_j}} \forall j = 1, \dots, J$. En particular:

$$\blacksquare \text{ Para } j = 1, [\mathbf{u}_1] = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } \frac{e^{\underline{\beta} \cdot \mathbf{u}_1}}{1+e^{\underline{\beta} \cdot \mathbf{u}_1}} = \frac{e^{\tilde{\underline{\beta}} \cdot \mathbf{u}_1}}{1+e^{\tilde{\underline{\beta}} \cdot \mathbf{u}_1}}, \text{ luego } \underline{\beta}_0 = \tilde{\underline{\beta}}_0.$$

$$\blacksquare \text{ Para } j = 2 = 1+3^0, [\mathbf{u}_1] = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } \frac{e^{\underline{\beta} \cdot \mathbf{u}_2}}{1+e^{\underline{\beta} \cdot \mathbf{u}_2}} = \frac{e^{\tilde{\underline{\beta}} \cdot \mathbf{u}_2}}{1+e^{\tilde{\underline{\beta}} \cdot \mathbf{u}_2}}. \text{ Luego } \underline{\beta}_0 + \underline{\beta}_{-1} = \tilde{\underline{\beta}}_0 + \tilde{\underline{\beta}}_{-1},$$

$$\text{entonces } \underline{\beta}_{-1} = \tilde{\underline{\beta}}_{-1}.$$

■ Para $j = 4 = 1 + 3^1$, $[\mathbf{u}_4] = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\frac{e^{\beta \cdot \mathbf{u}_4}}{1+e^{\beta \mathbf{u}_4}} = \frac{e^{\tilde{\beta} \mathbf{u}_4}}{1+e^{\tilde{\beta} \mathbf{u}_4}}$. Luego $\underline{\beta}_0 + \underline{\beta}_2 = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_2$,
entonces $\underline{\beta}_2 = \tilde{\beta}_2$.

■ Para $j = 10 = 1 + 3^2$, $[\mathbf{u}_8] = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\frac{e^{\beta \cdot \mathbf{u}_{10}}}{1+e^{\beta \mathbf{u}_{10}}} = \frac{e^{\tilde{\beta} \mathbf{u}_{10}}}{1+e^{\tilde{\beta} \mathbf{u}_{10}}}$. Luego $\underline{\beta}_0 + \underline{\beta}_3 = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_3$, entonces $\underline{\beta}_3 = \tilde{\beta}_3$.

■ Para $j = 28 = 1 + 3^3$, $[\mathbf{u}_{28}] = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $\frac{e^{\beta \cdot \mathbf{u}_{28}}}{1+e^{\beta \mathbf{u}_{28}}} = \frac{e^{\tilde{\beta} \mathbf{u}_{28}}}{1+e^{\tilde{\beta} \mathbf{u}_{28}}}$. Luego $\underline{\beta}_0 + \underline{\beta}_4 = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_4$, entonces $\underline{\beta}_4 = \tilde{\beta}_4$.

Luego $\underline{\beta} = \tilde{\beta}$, y se concluye que tx es inyectiva. ■

Proposición 2.2.2 tx no es suryectiva⁽³⁾ (es decir $tx(\mathbb{R}^k) \subsetneq (0, 1)^J$).

La Proposición 2.2.2 pone en evidencia las limitaciones antes mencionadas, hay algunas texturas binarias que no pueden ser explicadas por el modelo.

Demostración: Es cierto que:

$$(r_1, r_2, r_3, \dots, r_J) \in tx(\mathbb{R}^k) \Rightarrow r_2 = \frac{1}{1 + \exp \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{r_3} - 1 \right) + \ln \left(\frac{1}{r_1} - 1 \right) \right]}. \quad (2.2)$$

⁽³⁾ A y B conjuntos, $f : A \rightarrow B$; se define y denota la imagen de f a $f(A) \doteq \{b \in B : \exists a \in A, b = f(a)\}$; se dice que f es suryectiva (o sobreyectiva) si $f(A) = B$

Se cumple pues:

$(r_1, r_2, r_3, \dots, r_J) \in tx(\mathbb{R}^k) \Leftrightarrow \exists \underline{\beta}^* \in \mathbb{R}^k$ tal que $T_x(\underline{\beta}^*) = (r_1, r_2, r_3, \dots, r_J)$ (es decir $r_j = \frac{e^{\underline{\beta}^* \cdot \mathbf{u}_j}}{1 + e^{\underline{\beta}^* \cdot \mathbf{u}_j}} \forall j = 1, \dots, J$).

Luego, si $(r_1, r_2, r_3, \dots, r_J) \in tx(\mathbb{R}^k)$, se cumple:

1. $r_1 = \frac{1}{1 + e^{-\underline{\beta}_0^*}}$ (y equivalentemente $\underline{\beta}_0^* = \ln\left(\frac{1}{r_1} - 1\right)$),
2. $r_2 = \frac{1}{1 + e^{-\underline{\beta}_0^* + \underline{\beta}_1^*}}$,
3. $r_3 = \frac{1}{1 + e^{-\underline{\beta}_0^* + 2\underline{\beta}_1^*}}$ (y equivalentemente $\underline{\beta}_0^* + 2\underline{\beta}_1^* = \ln\left(\frac{1}{r_1} - 1\right)$).

Por 1 y 3, se cumple $\underline{\beta}_1^* = \frac{1}{2} \left(\ln\left(\frac{1}{r_1} - 1\right) - \underline{\beta}_0^* \right) = \frac{1}{2} \left(\ln\left(\frac{1}{r_3} - 1\right) - \ln\left(\frac{1}{r_1} - 1\right) \right)$.
Y por 2 se cumple:

$$r_2 = \frac{1}{1 + \exp\left[\frac{\underline{\beta}_0^* + \underline{\beta}_1^*}{2}\right]} = \frac{1}{1 + \exp\left[\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{r_3} - 1\right) + \ln\left(\frac{1}{r_1} - 1\right)\right]}. \quad (2.3)$$

Luego, por Ecuación 2.2, si $(r_1, r_2, r_3, \dots, r_J) \in tx(\mathbb{R}^k)$, $r_1 = \frac{1}{2}$ y $r_3 = \frac{1}{2}$ entonces

$$r_2 = \frac{1}{1 + \exp\left[\frac{1}{2}(\ln(1) + \ln(1))\right]} = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots) \in (0, 1)^J$ pero $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots) \notin tx(\mathbb{R}^k)$, con lo cual

$$tx(\mathbb{R}^k) \subsetneq (0, 1)^J.$$

Se concluye, de esta forma, que tx es suryectiva. ■

2.3. Estado del arte y discusión

Hassner y Sklansky, en 1980 (ver [27]), introdujeron los campos markovianos en el modelado de texturas binarias. Geman y Geman, en 1984, generalizan esta idea y utilizan los campos Gibbs-Markov para el modelado de imágenes. Bajo este

modelo, proponen un enfoque bayesiano y la relajación estocástica (simulated annealing) para la restauración de imágenes. En su trabajo puede verse que este tipo de restauración tiene buenos resultados cuando las imágenes originales contienen regiones homogéneas (de baja energía). Pero se verá a continuación que, en el caso de texturas más definidas, los resultados no son tan buenos en general, pues no se cumple el supuesto de baja energía (ver Capítulo 4). Cross y Jain, en 1983 [17], utilizan el modelo auto-binomial. Derin y Elliott, en 1987 [18], segmentan imágenes que se asume poseen M texturas, cada una modelada por una distribución de Gibbs-Markov, utilizando un criterio bayesiano basado en el estimador MAP (maximum a posteriori). En este contexto, una buena segmentación depende de la estimación de los parámetros del modelo. Ellos proponen el método del histograma y lo comparan informalmente con el método de codificado presentado por Besag en 1974. Evalúan su nuevo método para algunos ejemplos, fijan 4 vectores de parámetros, luego los estiman usando realizaciones generadas con el algoritmo GS, y comparan las estimaciones con los 4 vectores originales. Una de las estimaciones no resultó numéricamente buena, pero, la imagen generada utilizando la estimación resultó muy parecida a la imagen generada utilizando el vector original. Los autores explican que una imagen puede ser típica de varias distribuciones, dadas por distintos vectores de parámetros. Esta situación sienta las bases de la utilización del vector de textura propuesto en el presente trabajo como criterio de evaluación de una buena estimación, en lugar de la distancia euclídea entre vectores. Derin y Elliot marcan como desventaja, con respecto al de codificado, la falta de interpretación del método propuesto. En 1999, Borges presenta el método del histograma específicamente para el modelo auto-logístico con vecindario de segundo orden, muestra sus limitaciones, algunas variantes, y propone un nuevo estimador, pero dentro del mismo marco teórico. En el Capítulo 3 del presente trabajo, el estimador propuesto por Derin y Elliot será llamado estimador clásico y el desarrollado por Borges, estimador C de Borges. En este trabajo se logra una buena interpretación del método del histograma con la definición del vector de textura (función tx , ideal), el de proporciones (función $prop$, empírica) y el histograma de segundo orden (función $Hist$, empírica), mostrando además la evidente relación entre ellos. Todos directamente relacionados e inspirados por el método del histograma, propuesto por Derin y Elliot, y por la medida utilizada por Borges para

la comparación de las estimaciones calculadas en su trabajo. Para comparar dos vectores de parámetros, Borges utiliza el cuadrado de la distancia entre las probabilidades condicionales, es decir de los vectores formados por las probabilidades condicionales para uno y otro vector de parámetros.

$$d_B(\underline{\beta}, \widehat{\underline{\beta}}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{81} \left(\frac{e^{\underline{\beta} \mathbf{u}_i}}{1 + e^{\underline{\beta} \mathbf{u}_i}} - \frac{e^{\widehat{\underline{\beta}} \mathbf{u}_i}}{1 + e^{\widehat{\underline{\beta}} \mathbf{u}_i}} \right)^2}$$

El vector formado por las probabilidades condicionales no es otra cosa que el vector de textura propuesto en el presente trabajo. La técnica *LBP* (ver [2]) sirve para caracterizar texturas monocromáticas (con varios niveles de gris). Alvarado y Fernández (2012) evalúan el desempeño de esta técnica para detectar anomalías y fallas en texturas de tejidos (conocidas). *LBP* considera para cada pixel los 8 vecinos más cercanos y calcula un vector de dimensión 8. Para $i = 1, \dots, 8$, el i -ésimo lugar vale 1 si el nivel de gris del i -ésimo vecino es mayor al del pixel y vale 0 c.c.. Existen 8^2 vectores posibles para cada pixel. *LBP* define como descriptor de la textura de una imagen al histograma dado por los conteos de estos vectores presentes en la imagen (otro tipo de histograma de segundo orden, de dimensión 8^2). Es notable la analogía con el histograma de segundo orden definido en el presente trabajo. Existen varios trabajos que utilizan esta técnica para clasificación de texturas. En general las clases patrón en donde serán asignadas las nuevas texturas deben estar bien definidas; esto en la práctica no siempre es posible y tampoco es el objetivo del presente trabajo. Calder et al. (1995)([14]) separan una imagen con G niveles de gris en G planos separados de imágenes binarias, asumiendo en cada una de ellas un modelo auto-logístico. Es recalable el diseño experimental que implementaron para la comparación de estimadores (estimadores de *MV* y mínimos cuadrados ponderados (*MCP*)). Realizaron un muestreo aleatorio del espacio paramétrico y, para cada vector obtenido de la muestra, simulaban una imagen, obteniendo de esta forma una muestra de imágenes. Cada una de estas imágenes fue utilizada para estimar el vector de parámetros que la generó y consecuentemente se compararon las estimaciones con los vectores de la muestra según el método utilizado. Es de hacer notar que en la literatura de procesamiento de imágenes no se encuentra muy a menudo este tipo de estudios. Siendo que la inferencia (o extrapolación) del desempeño de alguna metodología ha-

cia otros casos no contemplados en el estudio se torna poco confiable y carece de rigor científico. Para una buena generalización y amplitud en las conclusiones de cualquier experimento, se busca una buena elección de las imágenes a ser procesadas (la menor subjetividad y la mayor variedad posible) y una buena cantidad de casos. En Calder et al.(1995,[14]), se calcularon las distancias euclídeas de los vectores estimados a los vectores originales de la muestra. Al entender de la autora, la elección de la distancia euclídea entre los vectores de parámetros es cuestionable como criterio de comparación, pues la proximidad de éstos no tiene una relación directa con la similitud de las texturas correspondientes (ver Sección 5.2).

La técnica de representación de imágenes por cúmulos coordinados (*RICC*) (o coordinate cluster representation (*CCR*)) sirve para describir texturas y está basada en un histograma de segundo orden similar al propuesto en el presente trabajo. Se eligen las dimensiones de una ventana rectangular, se consideran todas las configuraciones posibles para esa ventana y luego se realiza un histograma con los conteos de cada una de las configuraciones presentes en la imagen. En [31] se evalúa su robustez para clasificar imágenes afectadas por ruido pertenecientes a un conjunto prefijado de texturas «patrones»; se darán más detalles en la Sección 4.3.

Capítulo 3

Estimación

Bajo el modelo auto-logístico el espacio paramétrico \mathbb{R}^k resulta identificable, pues el potencial Φ es 0-normalizado (ver [23]). Se busca el único $\underline{\beta} \in \mathbb{R}^k$ tal que $P_X \in \mathcal{G}(\Phi^{\underline{\beta}})$.

A diferencia de la estadística tradicional, la inferencia en procesamiento de imágenes en general, se basa en una sola imagen, es decir, en una sola muestra o realización de la distribución de interés: la imagen observada. Para la estadística, y en la práctica, una observación resulta insuficiente para estimar los parámetros de la distribución subyacente. Los campos Gibbs-Markov mejoran esta situación mediante el uso de las probabilidades condicionales locales y la observación del comportamiento local en cada lugar de la imagen. Se considera el valor de cada pixel de la imagen como una realización de una variable aleatoria, con distribución condicional de Gibbs, dados los valores de su entorno. De esta forma, aumenta considerablemente la cantidad de «realizaciones» u observaciones para estimar al vector de parámetros.

MV busca estimar $\underline{\beta}$ maximizando la densidad (conjunta) $p(x_\Lambda | x_{\partial\Lambda}, \underline{\beta})$. *PMV* estima $\underline{\beta}$ maximizando el producto de las características locales y el método del histograma estimando las características locales $(\pi_s(x) = p(x_{\{s\}} | x_{\partial s}, \underline{\beta}))$ con $s \in \Lambda$.

3.1. Máxima verosimilitud (MV)

El estimador de *MV* de un vector de parámetros que describe una muestra de interés se define como el argumento que maximiza la llamada función de verosimilitud;

esta función es la densidad conjunta de la muestra pensada como función del vector de parámetros a estimar. En el caso del modelo auto-logístico, el estimador de *MV* del vector de parámetros $\underline{\beta}$ se define como el argumento que maximiza la función de verosimilitud $f_V : \mathbb{R}^k \rightarrow (0, 1)$, definida por:

$$f_V(\underline{\beta}) \doteq p(x_\Lambda | x_{\partial\Lambda}, \underline{\beta}) \quad (3.1)$$

donde se asumen conocidos la imagen x_Λ , su entorno $x_{\partial\Lambda}$ y

$$p(x_\Lambda | w_{\partial\Lambda}, \underline{\beta}) = \frac{e^{-\left(\beta_0(\sum_{t \in \Lambda} x_t) + \sum_{i=1}^g \beta_i (\sum_{t \in \Lambda_{i,0}} x_t x_{t+v_i} + \sum_{t \in \Lambda_{i,1}} x_t w_{t+v_i} + \sum_{t \in \Lambda_{i,2}} w_t x_{t+v_i})\right)}}{\sum_{z_\Lambda \in E^\Lambda} e^{-\left(\beta_0(\sum_{t \in \Lambda} z_t) + \sum_{i=1}^g \beta_i (\sum_{t \in \Lambda_{i,0}} z_t z_{t+v_i} + \sum_{t \in \Lambda_{i,1}} z_t w_{t+v_i} + \sum_{t \in \Lambda_{i,2}} w_t z_{t+v_i})\right)}} \quad (3.2)$$

definido en la Ecuación 1.16. Existen $2^{\#\Lambda}$ imágenes $z_\Lambda \in E^\Lambda$ posibles. Luego, la cantidad de sumandos del denominador de la expresión de la Ecuación 3.2 asciende a $2^{\#\Lambda}$. A modo de ejemplo, $\Lambda = \Lambda_{64}$ es un soporte pequeño pero la cantidad de sumandos en la expresión a maximizar es de 2^{4096} . Es por esto que la maximización resulta prácticamente intratable. Debido a la dificultad de tratar con la función de verosimilitud surge el estimador de *PMV*. Puede interpretarse como una variante del estimador de *MV* en donde se supone, a sabiendas de lo contrario, que las variables aleatorias que conforman el campo (o proceso) subyacente son independientes entre si.

3.2. PMV y método de codificado (o *coding*)

El estimador de *PMV* se define como el argumento que maximiza la llamada función de pseudo-verosimilitud; esta función es el producto de las densidades o características locales. En el caso del modelo auto-logístico, el estimador de *PMV* del vector de parámetros $\underline{\beta}$ se define como el argumento que maximiza la función de pseudo-verosimilitud $f_{SV} : \mathbb{R}^k \rightarrow (0, 1)$, definida por:

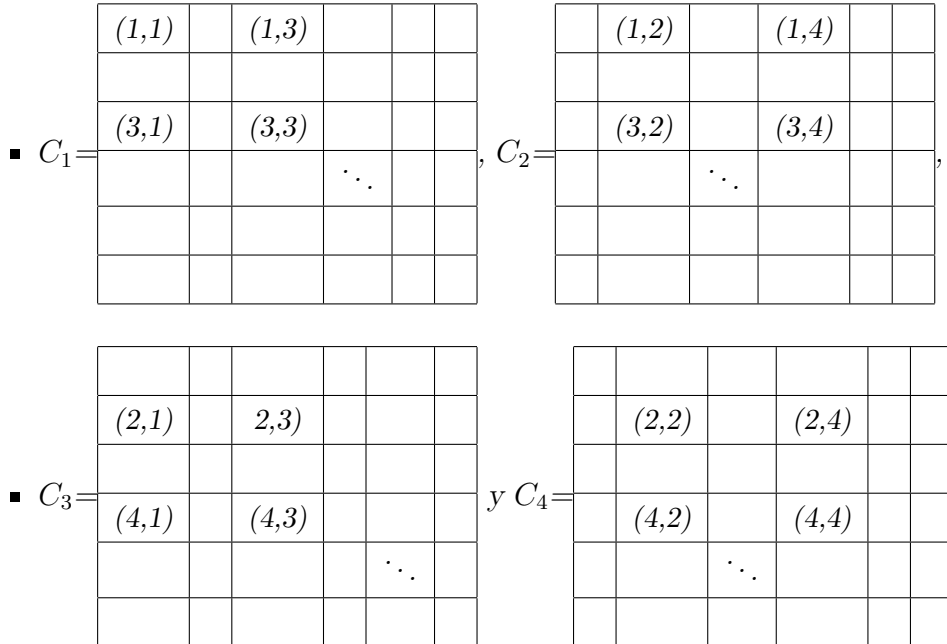
$$f_{SV}(\underline{\beta}) \doteq \prod_{s \in \Lambda} p(x_s | x_{\mathcal{P}_s}, \underline{\beta}). \quad (3.3)$$

Este método busca maximizar el producto de las densidades condicionales de la misma forma que *MV* busca maximizar la densidad conjunta.

El estimador de codificado (coding) se define como el argumento que maximiza la función de verosimilitud sobre un soporte C llamado conjunto de codificado. Un conjunto C se llama de codificado si se cumple:

$$p(x_C|x_{\mathcal{P}C}, \underline{\beta}) \doteq \prod_{s \in C} p(x_s|x_{\mathcal{P}s}, \underline{\beta}). \quad (3.4)$$

Es de notar que cuando C es un conjunto de codificado, la función de verosimilitud sobre C coincide con la de pseudo-verosimilitud sobre C . En la práctica, se define una partición del soporte Λ formada por conjuntos de codificado ($\Lambda = \bigcup_{i=1}^n C_i$, unión disjunta, C_i conjunto de codificado), luego se calculan n estimadores de codificado (uno por cada C_i) y el estimador de codificado se define entonces como el promedio de ellos. A modo de ejemplo, una partición del soporte Λ dada por el vecindario de segundo orden (8 vecinos) es $\Lambda_n = \bigcup_{i=1}^4 C_i$ dada por:



En la práctica, el método de codificado arroja resultados análogos a *PMV*. Por esta razón, en el presente trabajo se utilizó *PMV*. La ventaja del método de codificado es que la «independencia» de los conjuntos de codificado facilitaría la programación

en paralelo del algoritmo, este tipo de programación reduce considerablemente el tiempo de la estimación.

3.3. Método del histograma

Este método fue propuesto en [18] para estimar el vector de parámetros $\underline{\beta}$ del modelo auto-logístico y se basa en la probabilidad condicional de «presencia» dada por la Ecuación 1.25, es decir:

$$p(1|w_{\partial s}, \underline{\beta}) = \frac{e^{\nu}}{1 + e^{\nu}},$$

y en algunas observaciones útiles.

La primera:

- Existen pocas configuraciones de entornos $w_{\partial s}$ posibles: 2^{2g} exactamente ($2^8 = 256$, para 8 vecinos y $2^4 = 16$ para 4 vecinos).
- Existen menos aún posibles vectores de interacción: J ⁽¹⁾ precisamente ($J = 81$, para 8 vecinos y $J = 9$ para 4 vecinos).

Si se indexan estos vectores con $j = 1, \dots, J$, se cuenta con J ecuaciones de la forma:

$$\nu_j = \mathbf{u}_j \cdot \underline{\beta} = [\mathbf{u}_j]^t [\underline{\beta}].$$

De esta forma, se pueden etiquetar los pixeles de la imagen según su vector de interacción, un pixel tendrá la etiqueta j si su vector de interacción es igual a \mathbf{u}_j .

La segunda:

El poder contar con una imagen lo suficientemente grande ⁽²⁾ para poder estimar la probabilidad de «presencia» en un pixel etiquetado por j :

$$p_j = \frac{e^{\nu_j}}{1 + e^{\nu_j}}$$

para cada $j = 1, \dots, J$.

⁽¹⁾Recordar que $J = 3^g$

⁽²⁾y lo suficientemente «variada» para encontrar varias veces cada \mathbf{u}_j

Una vez estimadas estas probabilidades, pueden estimarse las sumas de interacción:

$$\nu_j = \ln \frac{p_j}{1 - p_j}$$

y luego será posible estimar el vector de parámetros del modelo $\underline{\beta}$ resolviendo el sistema:

$$\mathbf{U} [\underline{\beta}] = \underline{\nu}, \quad (3.5)$$

donde:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} [\mathbf{u}_1]^t \\ [\mathbf{u}_2]^t \\ \vdots \\ [\mathbf{u}_J]^t \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \underline{\nu} = \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \vdots \\ \nu_J \end{bmatrix}$$

En la práctica, este sistema no tiene solución exacta, pues se basa en el modelo asumido y en estimaciones (con errores) de las sumas ν_j , más aún, a veces no es posible estimarlas a todas. Si es el caso, deben eliminarse esas filas del sistema. Bajo estas consideraciones el Método del Histograma consta principalmente de dos partes bien definidas:

1. estimar las sumas de interacción local ν_j (a través de las probabilidades de presencia p_j) y
2. estimar $\underline{\beta}$ que mejor se ajuste al sistema dado por la Ecuación 3.5 (el abordaje tradicional es Mínimos Cuadrados).

En detalle:

1. Estimación de las sumas de interacción local

En [8] se describen varios estimadores basados en las estimaciones de las probabilidades p_j : El clásico, el de mínimo sesgo cuadrado, el de mínimo sesgo cuadrado revisitado, proponiéndose también uno novedoso. En este trabajo, a modo ilustrativo, se resume el clásico (propuesto por Derin y Elliot), ver [8] para detalles de los restantes.

Estimador clásico:

Sea $j = 1, \dots, J$, se realiza un histograma sobre los píxeles con etiqueta j , se obtienen dos valores: s_j , la cantidad de píxeles con valor 1 (presencia) y t_j , la cantidad de píxeles con valor 0 (ausencia), es decir $s_j + t_j$ es la cantidad de píxeles con etiqueta j . Luego el estimador clásico de la probabilidad de presencia es la media de la variable aleatoria Bernoulli X_s (fijada la etiqueta j), es decir:

$$\hat{p}_j = \frac{s_j}{s_j + t_j},$$

con lo cual el estimador natural de la suma local de interacción es:

$$\hat{\nu}_j = \ln \frac{\hat{p}_j}{1 - \hat{p}_j} = \ln \frac{s_j}{t_j},$$

Este estimador está bien definido siempre y cuando $s_j > 0$ y $t_j > 0$. En los casos en los cuales esto no se cumple, el estimador no puede ser calculado y no puede usarse la fila correspondiente. El estimador C de Borges resuelve ese problema.

Estimador C de Borges:

Definición 3.3.1 Se define el estimador C de Borges de ν_j como:

$$\hat{\nu}_j \doteq C_{s_j, t_j},$$

donde:

- $C_{s,t} = \sum_{m=t+1}^s \frac{1}{m}$, si $s > t$;
- $C_{s,t} = -C_{t,s}$, si $s < t$;
- $C_{s,t} = 0$, si $s = t$.

2. Estimación de $\underline{\beta}$

Las sumas de interacción local ν_j no son conocidas, se usan sus estimaciones $\hat{\nu}_j$ y se asume que $\nu_j = \hat{\nu}_j + \eta_j$ donde η_j se considera el error de estimación. Luego, la Ecuación 3.5 queda:

$$\mathbf{U}[\underline{\beta}] = \underline{\hat{\nu}} + \underline{\eta}, \quad (3.6)$$

donde el vector

$$\underline{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_{3^g} \end{bmatrix}$$

se asume aleatorio, y cada componente con media 0 y matriz de covarianza W . Si se considera que el conjunto de componentes es independiente e idénticamente distribuido (i.i.d.) ⁽³⁾ se estima $\underline{\beta}$ utilizando mínimos cuadrados (MC), esto es $\hat{\underline{\beta}}_C$, tal que minimiza la suma de cuadrados $\sum_{j=1}^{3^g} (\mathbf{u}_j \cdot \underline{\beta} - \hat{v}_j)^2$. También se puede utilizar mínimos cuadrados generalizados, MCP o algún estimador robusto.

⁽³⁾es decir, $W = \sigma I$ donde I es la matriz identidad de tamaño $J \times J$

Capítulo 4

Restauración

En restauración, se supone que existe una imagen de interés $x \in E^S$ ideal e inobservable y que en realidad se dispone de una imagen de datos y , observable en un soporte finito $\Lambda^* \doteq \Lambda \cup \partial\Lambda \in \mathcal{S}$, resultado de una modificación de x . Esta modificación puede ser provocada por el mecanismo de captación de la imagen, el discretizado de los datos, la acción de ruidos o interferencias. En una imagen degradada pueden encontrarse distorsiones y/o errores. El modelo general de degradación en restauración de imágenes es:

$$y_{\Lambda^*} = F(x \odot r),$$

donde:

- F es la función de distorsión y error,
- $(r_s)_{s \in S}$ el ruido y
- \odot la operación inversible⁽¹⁾ que describe la forma en la que el ruido se presenta en la imagen.

La determinación de F y \odot define el modelo y depende de la aplicación. Algunas veces son prácticamente conocidas y en otras ocasiones el desafío es develarlas, convirtiéndose este problema en otra área de investigación. En muchos ejemplos, la función de distorsión y error F se asume prácticamente como una mera proyección

⁽¹⁾esto es, que exista una operación inversa $\tilde{\odot}$ tal que $(a \odot b)\tilde{\odot}b = (a\tilde{\odot}b) \odot b = a$

a E^{Λ^*} . Bajo este supuesto, el modelo más utilizado en imágenes ópticas es el aditivo ($y_{\Lambda^*} = x_{\Lambda^*} + r_{\Lambda^*}$). Análogamente, el modelo multiplicativo ($y_s = x_s \cdot r_s, s \in \Lambda^*$) es el que mejor describe el fenómeno speckle, característico de las imágenes de radar. Hay otros casos en que el ruido es despreciable o inexistente pero hay pérdidas de información, es decir, se requiere x_{Δ} y se conoce $y_{\Lambda^*} = \sigma_{\Delta, \Lambda^*}(x_{\Delta})$ para $\Lambda^* \subsetneq \Delta$.

Definición 4.0.2 Dado el modelo de degradación, se define como restauración la búsqueda (o recuperación) de la imagen ideal x usando la imagen observada y_{Λ^*} . Esta definición es muy amplia, depende del problema, del modelo y de cuáles son las características más importantes de x que se quieren restaurar o recuperar. En este trabajo se asumen dos modelos de degradación, definiéndose de esta forma dos tipos de restauración:

- **Degradación por ruido** (aleatorio e independiente); en este caso la restauración buscará estimar x_{Λ^*} , es decir, quitar el ruido.
- **Degradación por pérdida de información**; en este caso la restauración buscará estimar x_{Δ} , con $\Lambda^* \subsetneq \Delta$. En la literatura también llamado inpainting o recuperación de información faltante.

En ambos casos, y sobre todo en el segundo, la restauración de $x \in E^S$ con S infinito también se puede definir como la búsqueda de la medida μ sobre E^S tal que x sea una realización de dicha medida.

4.1. Degradación por ruido: Restauración bayesiana

En este modelo se asume que no hay distorsión, que la degradación depende únicamente de la presencia de ruido del tipo error. Se cuenta con una imagen binaria $y_{\Lambda^*} \in E^{\Lambda^*}$ ($E = \{0, 1\}$ y $\Lambda^* \in \mathcal{S}$, o bien $y \in E^S$), ésta es la imagen observada de una imagen ideal binaria $x^{(2)}$ con errores no sistemáticos (ruido). Luego, asumiendo que $r = (r_s)_{s \in S} \in E^S$ es el ruido, se tiene:

$$y_{\Lambda^*} = x_{\Lambda^*} \oplus r_{\Lambda^*}, \quad (4.1)$$

⁽²⁾es decir, $x \in E^S$, notar que ambas son binarias

donde

$$a \oplus b \doteq a + b \pmod{2} = \begin{cases} 1 & a \neq b \\ 0 & a = b \end{cases} = \begin{cases} a & b = 0 \\ 1 - a & b = 1 \end{cases}, \text{ para } a \text{ y } b \text{ en } \{0, 1\}$$

y para todo $V \subset S$, $x_V \in E^V$, $r_V \in E^V$, se define

$$x_V \oplus r_V \doteq (x_s \oplus r_s)_{s \in V}.$$

Con la intención de restaurar x_Λ , se asume un enfoque bayesiano. El enfoque bayesiano explota la información que se tiene del objeto que se quiere estimar a través de la distribución a priori. Dado que la imagen que se quiere estimar es una imagen binaria, el modelo auto-logístico es una buena elección. Luego, bajo el modelo de degradación por ruido aleatorio e independiente, asumiendo un modelo auto-logístico, la **densidad a priori** (condicional al entorno $x_{\partial\Lambda}$, ver Ecuación 1.15) toma la forma:

$$p(x_\Lambda | x_{\partial\Lambda}) = \frac{e^{-\sum_{\Delta \in \mathcal{C}_\Lambda} \Phi_\Delta(x_\Lambda x_{S \setminus \Lambda})}}{\sum_{z_\Lambda \in E^\Lambda} e^{-\sum_{\Delta \in \mathcal{C}(\Lambda)} \Phi_\Delta(z_\Lambda x_{S \setminus \Lambda})}}, \quad (4.2)$$

donde Φ es como en el Ejemplo 1.3.1.

La **densidad a posteriori** condicional al entorno $x_{\partial\Lambda}$ dada la imagen observada y_Λ se verá que resulta:

$$p(x_\Lambda | y_\Lambda, x_{\partial\Lambda}) = \frac{\left(\frac{\epsilon}{1-\epsilon}\right)^{\sum_{s \in \Lambda} y_s \oplus x_s} e^{-\sum_{\Delta \in \mathcal{C}_\Lambda(\partial)} \Phi_\Delta(x)}}{\sum_{z_\Lambda \in E^\Lambda} \left(\frac{\epsilon}{1-\epsilon}\right)^{\sum_{s \in \Lambda} y_s \oplus z_s} e^{-\sum_{\Delta \in \mathcal{C}_\Lambda(\partial)} \Phi_\Delta(z_\Lambda x_{S \setminus \Lambda})}} \quad (4.3)$$

donde ϵ es la probabilidad de error en cada pixel (o proporción de error aleatorio).

Un estimador muy utilizado, basado en la densidad a posteriori, es el estimador maximun a posteriori (**MAP**) que consiste en encontrar x_Λ , argumento que maximiza $p(x_\Lambda | y_\Lambda, x_{\partial\Lambda})$. Para esto (y para cualquier procedimiento que use $p(x_\Lambda | y_\Lambda, x_{\partial\Lambda})$), se debe conocer $x_{\partial\Lambda}$, pero en este modelo de degradación esto no es cierto. Se lo reemplaza por $y_{\partial\Lambda}$, como se hace generalmente en la práctica, por esta razón debe conocerse $y_{\Lambda^*} = y_\Lambda y_{\partial\Lambda}$. De todas formas, la expresión de la Ecuación 4.3, así como la de la

Ecuación 4.2, resulta intratable debido al excesivo número de sumandos del denominador. Nótese que este inconveniente es análogo al de máxima verosimilitud para la estimación del vector de parámetros β (cuando x_Λ es conocida). Una alternativa es obtener x_Λ , una realización de la densidad $p(\cdot|y_\Lambda, x_{\partial\Lambda})$, es decir de $p(\cdot|y_\Lambda, y_{\partial\Lambda})$, reemplazando de manera pertinente $y_{\partial\Lambda}$ por $x_{\partial\Lambda}$. Esta alternativa es viable utilizando el algoritmo **GS**. Fijado $y \in E^S$, para cualquier $\Delta \in \mathcal{S}$, $p(\cdot|y_\Delta, x_{\partial\Delta})$ es la densidad de la probabilidad $\tilde{\gamma}_\Delta^0(|x)$ (sobre E^Δ), donde $\tilde{\gamma}$ es la especificación de una medida de Gibbs dada por el potencial $\tilde{\Phi} = (\tilde{\Phi}_\Delta)_{\Delta \in \mathcal{S}}$ definido por:

$$\tilde{\Phi}_\Delta(x) = \begin{cases} \Phi_\Delta(x) & \#(\Delta) \geq 2 \\ \Phi_s(x) + (\ln(\epsilon) - \ln(1 - \epsilon))(x_s \oplus y_s) & \Delta = \{s\} \end{cases} \quad (4.4)$$

Para obtener la densidad a priori y la densidad a posteriori se considera lo siguiente:

Sea el conjunto de pares posibles de imágenes ideal y ruido:

$$E^S \times E^S \doteq \{(x, r) / x \in E^S, r \in E^S\};$$

y la σ -álgebra producto sobre $E^S \times E^S$ denotada por:

$$\mathcal{F} \times \mathcal{F}.$$

Sean entonces, X , R e Y , campos aleatorios relativos a las imágenes ideal, ruido y observada, respectivamente, tal que:

- $X : E^S \times E^S \rightarrow E^S$,
- $R : E^S \times E^S \rightarrow E^S$, e
- $Y : E^S \times E^S \rightarrow E^S$;

definidos por:

- $X((x, r)) = x$,
- $R((x, r)) = r$, para todo $(x, r) \in E^S \times E^S$, e
- $Y = X \oplus R$, esto es $Y(\omega) = X(\omega) \oplus R(\omega)$, para todo $\omega \in E^S \times E^S$.

Luego, para cada $V \subset S$ y $s \in S$, sean los campos:

- $X_V : E^S \times E^S \rightarrow E^V$,
- $R_V : E^S \times E^S \rightarrow E^V$,
- $Y_V : E^S \times E^S \rightarrow E^V$,
- $X_s : E^S \times E^S \rightarrow E$,
- $R_s : E^S \times E^S \rightarrow E$,
- $Y_s : E^S \times E^S \rightarrow E$,

definidos por:

- $X_V \doteq \sigma_V \circ X$, es decir $X_V((x, r)) = x_V$,
- $R_V \doteq \sigma_V \circ R$, es decir $R_V((x, r)) = r_V$,
- $Y_V \doteq \sigma_V \circ Y$, es decir $Y_V = X_V \oplus R_V$,
- $X_s((x, r)) = x_s$,
- $R_s((x, r)) = r_s$,
- $Y_s = X_s \oplus R_s$, para todo $(x, r) \in E^S \times E^S$.

Se definen las sub σ -álgebras de $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$:

- $\mathcal{F}_V^X \doteq \{(X_V \in B) / B \in \mathcal{E}^V\} \subset \mathcal{F} \times \mathcal{F}$
- y
- $\mathcal{F}_V^R \doteq \{(R_V \in B) / B \in \mathcal{E}^V\} \subset \mathcal{F} \times \mathcal{F}$.

Se considera P la probabilidad conjunta subyacente, tal que $(E^S \times E^S, \mathcal{F} \times \mathcal{F}, P)$ es un espacio de probabilidad y, según los supuestos de degradación, cumple:

$$P(X \in A, R \in B) = P(X \in A) \cdot P(R \in B), \forall A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F}. \quad (4.5)$$

Es decir, X y R se consideran campos aleatorios independientes entre si. Como también se asume que R es un campo aleatorio *i.i.d.*, es decir, se cumple $P(R \in B) = \lambda^S(B)$ para todo $B \in \mathcal{F}$, con λ^S la probabilidad producto sobre E^S . Esto es $P(R_\Lambda = r_\Lambda) = \prod_{s \in \Lambda} P(R_s = r_s) = \prod_{s \in \Lambda} \lambda(\{r_s\})$, con λ probabilidad sobre E . Se asume que $\lambda(\{a\}) = \epsilon^a(1 - \epsilon)^{1-a}$, con $a \in \{0, 1\}$. Luego, cada R_s tiene distribución de Bernoulli de parámetro ϵ ($0 < \epsilon < 1$ la probabilidad de error en cada pixel, que modela la proporción de errores en la imagen), esto es $P(R_s = 1) = \lambda(\{1\}) = \epsilon = 1 - \lambda(\{0\})$ para todo $s \in S$.

El enfoque bayesiano explota la información que se tiene del objeto que se quiere estimar a través de la distribución a priori (P_X). Dado que la imagen que se quiere estimar es una imagen binaria, un modelo auto-logístico es una buena elección para la distribución a priori ($P_X \in \mathcal{G}(\Phi)$, como en el Ejemplo 1.3.1). Se conoce P_X a través de sus condicionales, las especificaciones $\gamma_\Delta(\cdot|\cdot)$. Sea, de ahora en más, cualquier $\Delta \in \mathcal{S}$. Dado que Φ es un ∂ -potencial $\gamma_\Delta(\sigma_\Delta \in B|w)$ depende sólo de $w_{\partial\Delta}$, es decir es $\mathcal{F}_{\partial\Delta}^X$ -medible como función de $(w, r) \in E^S \times E^S$. Para cada $w_{\partial\Delta} \in E^{\partial\Delta}$ sea $P_{w_{\partial\Delta}}$ la probabilidad sobre $E^S \times E^S$ tal que para cada $A \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$, $P_{w_{\partial\Delta}}(A)$ es una versión de $P(A|\mathcal{F}_{\partial\Delta}^X)$ ⁽³⁾. Dado que $\gamma_\Delta(C|\cdot)$ es una versión de la probabilidad condicional $P(X \in C|\mathcal{F}_{S \setminus \Delta}^X)$ y $\gamma_\Delta(\sigma_\Delta \in B|\cdot)$ es $\mathcal{F}_{\partial\Delta}^X$ -medible, $\gamma_\Delta(\sigma_\Delta \in B|\cdot)$ es una versión de $P(X_\Delta \in B|\mathcal{F}_{\partial\Delta}^X)$. Luego, para cada $x_\Delta \in E^\Delta$, análogamente a la Ecuación 1.11, se cumple:

$$P_{w_{\partial\Delta}}(X_\Delta = x_\Delta) = \frac{e^{-\sum_{\Lambda \in \mathcal{C}_\Delta} \Phi_\Delta(x_\Delta w_{S \setminus \Delta})}}{\sum_{z_\Delta \in E^\Delta} e^{-\sum_{\Lambda \in \mathcal{C}_\Delta} \Phi_\Delta(z_\Delta w_{S \setminus \Delta})}} \neq 0,$$

pues

$$P_{w_{\partial\Delta}}(X_\Delta = x_\Delta) = \gamma_\Delta(\sigma_\Delta = x_\Delta|w) \tag{4.6}$$

$$= \gamma_\Delta^0(\{x_\Delta\}|w) \tag{4.7}$$

$$= \frac{e^{-\sum_{\Lambda \in \mathcal{C}_\Delta} \Phi_\Delta(x_\Delta w_{S \setminus \Delta})}}{\sum_{z_\Delta \in E^\Delta} e^{-\sum_{\Lambda \in \mathcal{C}_\Delta} \Phi_\Delta(z_\Delta w_{S \setminus \Delta})}}. \tag{4.8}$$

⁽³⁾función evaluada en (w, r) , pero que sólo depende de $w_{\partial\Delta}$

Notar también que:

$$\text{Si } P(X_{\partial\Delta} = w_{\partial\Delta}) \neq 0, \text{ entonces } P_{w_{\partial\Delta}}(A) = P(A|X_{\partial\Delta} = w_{\partial\Delta})$$

Luego, con la intención de restaurar x_Λ , bajo el modelo de degradación por ruido, se establece la **densidad condicional a priori** (de X_Λ en x_Λ dado $X_{\partial\Lambda} = w_{\partial\Lambda}$):

$$p(x_\Lambda|x_{\partial\Lambda}) \doteq P_{x_{\partial\Lambda}}(X_\Lambda = x_\Lambda) = \frac{e^{-\sum_{\Delta \in \mathcal{C}_\Lambda} \phi_\Delta(x_\Lambda x_{S \setminus \Lambda})}}{\sum_{z_\Lambda \in E^\Lambda} e^{-\sum_{\Delta \in \mathcal{C}(\Lambda)} \phi_\Delta(z_\Lambda x_{S \setminus \Lambda})}} \quad (4.9)$$

La **densidad condicional a posteriori** de X_Λ en x_Λ dada la observación $Y_\Lambda = y_\Lambda$ (y dado $X_{\partial\Lambda} = x_{\partial\Lambda}$) resulta

$$p(x_\Lambda|y_\Lambda, x_{\partial\Lambda}) = \frac{\left(\frac{\epsilon}{1-\epsilon}\right)^{\sum_{s \in \Lambda} y_s \oplus x_s} e^{-\sum_{\Delta \in \mathcal{C}_\Lambda} \Phi_\Delta(x)}}{\sum_{z_\Lambda \in E^\Lambda} \left(\frac{\epsilon}{1-\epsilon}\right)^{\sum_{s \in \Lambda} y_s \oplus z_s} e^{-\sum_{\Delta \in \mathcal{C}_\Lambda} \Phi_\Delta(z_\Lambda x_{S \setminus \Lambda})}}, \quad (4.10)$$

pues se la define como

$$p(x_\Lambda|y_\Lambda, x_{\partial\Lambda}) \doteq P_{x_{\partial\Lambda}}(X_\Lambda = x_\Lambda | Y_\Lambda = y_\Lambda).$$

Utilizando el teorema de Bayes y Ecuación 1.11, se cumple

$$P_{x_{\partial\Lambda}}(X_\Lambda = x_\Lambda | Y_\Lambda = y_\Lambda) = \frac{P_{x_{\partial\Lambda}}(Y_\Lambda = y_\Lambda | X_\Lambda = x_\Lambda) P_{x_{\partial\Lambda}}(X_\Lambda = x_\Lambda)}{\sum_{z_\Lambda \in E^\Lambda} P_{x_{\partial\Lambda}}(Y_\Lambda = y_\Lambda | X_\Lambda = z_\Lambda) P_{x_{\partial\Lambda}}(X_\Lambda = z_\Lambda)}, \quad (4.11)$$

en donde

$$P_{x_{\partial\Lambda}}(Y_{\Lambda} = y_{\Lambda} | X_{\Lambda} = z_{\Lambda}) = \frac{P_{x_{\partial\Lambda}}(Y_{\Lambda} = y_{\Lambda}, X_{\Lambda} = z_{\Lambda})}{P_{x_{\partial\Lambda}}(X_{\Lambda} = z_{\Lambda})} \quad (4.12)$$

$$= \frac{P_{x_{\partial\Lambda}}(X_{\Lambda} \oplus R_{\Lambda} = y_{\Lambda}, X_{\Lambda} = z_{\Lambda})}{P_{x_{\partial\Lambda}}(X_{\Lambda} = z_{\Lambda})} \quad (4.13)$$

$$= \frac{P_{x_{\partial\Lambda}}(R_{\Lambda} = y_{\Lambda} \oplus z_{\Lambda}, X_{\Lambda} = z_{\Lambda})}{P_{x_{\partial\Lambda}}(X_{\Lambda} = z_{\Lambda})} \quad (4.14)$$

$$= \frac{P(R_{\Lambda} = y_{\Lambda} \oplus z_{\Lambda}) \cancel{P_{x_{\partial\Lambda}}(X_{\Lambda} = z_{\Lambda})}}{\cancel{P_{x_{\partial\Lambda}}(X_{\Lambda} = z_{\Lambda})}} \quad (4.15)$$

$$= P(R_{\Lambda} = y_{\Lambda} \oplus z_{\Lambda}) \quad (4.16)$$

$$= \prod_{s \in S} \epsilon^{y_s \oplus z_s} (1 - \epsilon)^{1 - (y_s \oplus z_s)} \quad (4.17)$$

$$= (1 - \epsilon)^{\#\Lambda} \left(\frac{\epsilon}{1 - \epsilon} \right)^{\sum_{s \in \Lambda} y_s \oplus z_s} \neq 0. \quad (4.18)$$

En imágenes binarias, un ruido del tipo error (0 en vez de 1 o viceversa) produce en la imagen variaciones iguales (en tamaño o altura) a las variaciones producto de la textura de la imagen. Específicamente, de pixel a pixel, o bien no hay cambio (magnitud 0) o bien son de magnitud 1 (cuando se pasa de valor 0 a 1 o de valor 1 a 0). Por este motivo, en imágenes binarias «texturadas» y con errores, resulta prácticamente imposible discriminar la variaciones dadas por el ruido de aquellas dadas por la textura original de la imagen. En este tipo de imágenes se produce un fenómeno muy especial: una amplia variedad de texturas tiene la particularidad de que si el error se produjo en el 100 % de la imagen (es decir todos los pixeles fueron cambiados de valor), la textura resultante es la misma que la original. Un ejemplo bien claro de esto es el de la textura «tablero de ajedrez». Ver imagen de la Figura 2.5(b). De esta forma, se estaría hablando de dos modelos de degradación, uno con ruido completo y otro sin ruido.

Otro ejemplo es el de la imagen de la Figura 4.2(b), una realización del modelo auto-logístico con parámetro $\underline{\beta} = (-1.03, 0.11, -0.1, -0.3, -0.24)$, visualmente con la misma textura que la imagen de la figura 4.2(a), realización del modelo de degradación de un auto-logístico con parámetro $\underline{\beta} = (0, 1, 1, -2, -2)$ más un error aleatorio independiente Bernoulli de parámetro $\epsilon = 0.1$. Es de notar la diferencia

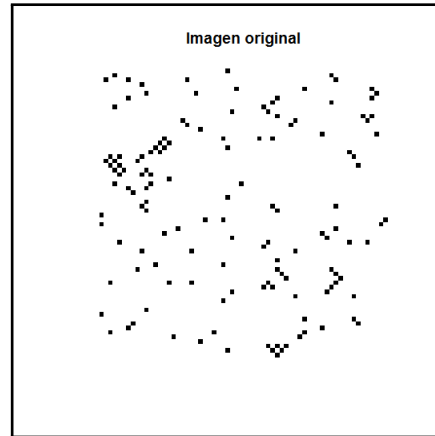


Figura 4.1: $\underline{\beta} = (0, 1, 1, -2, -2)$

de modelos y la similitud de las imágenes. Esto dificulta fuertemente la restauración bajo este tipo de modelo, si no se tiene más información disponible. Si se desconoce el vector de parámetros de la imagen ideal (es decir la textura original) y, a la vez, cuál es el porcentaje de error, es prácticamente imposible discriminarlos. Los intentos de restauración bayesiana (ver algoritmo en [20]) no tuvieron buenos resultados. Para solucionar este problema será necesario tener disponible más información. Es interés de la autora seguir indagando en ese sentido.

Definición 4.1.1 Se define, y denota, la función textura para el modelo auto-logístico con errores a $tx : \mathbb{R}^k \times (0, 1) \rightarrow (0, 1)^J$ tal que :

$$tx(\underline{\beta}, \epsilon) \doteq \left(\frac{\epsilon + (1 - \epsilon)e^{\beta \mathbf{u}_1}}{1 + e^{\beta \mathbf{u}_1}}, \dots, \frac{\epsilon + (1 - \epsilon)e^{\beta \mathbf{u}_J}}{1 + e^{\beta \mathbf{u}_J}} \right)$$

Es destacable el abuso de notación, pues coincide con el de textura para el modelo auto-logístico. Pero también debe notarse que la función textura para el modelo auto-logístico es un caso particular de la función textura para el modelo auto-logístico con errores cuando $\epsilon = 0$, es decir, cuando no hay errores. Se sobrentenderá la que corresponda según esté o no presente el parámetro ϵ .

Se intentó con esta nueva medida de textura reflejar la similitud de las imágenes de la Figura 4.2 y se logró. La distancia euclídea entre $tx((0, 1, 1, -2, -2), 0.1)$ y $tx((-1.03, 0.11, -0.1, -0.3, -0.24))$ dió 2, 22 y la distancia euclídea entre los vectores

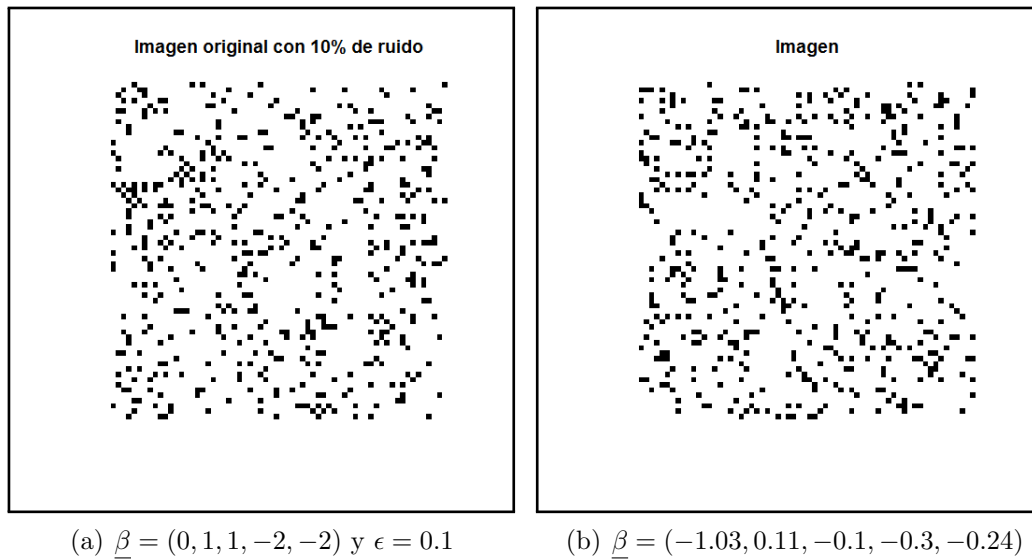


Figura 4.2: Imágenes con textura similar.

de proporciones de las imágenes de la Figura 4.2 dió 2.28. También es interés de la autora seguir indagando en esta línea de investigación, tanto de manera teórica como práctica.

4.2. Degradación por pérdida de información: *in-painting*

Muchas veces, en la práctica, se tienen pérdidas de información en amplias regiones en una imagen. Estas pérdidas pueden deberse, entre otros, a errores sistemáticos o a fallas en el sistema de captación. Un caso conocido es el de las imágenes Landsat 7 (ver [35] y Figura 4.3). Una falla en el instrumento corrector SLC, a bordo del satélite, provoca la superposición de datos, derivando en pérdidas de información en regiones de las imágenes desde el 31 de mayo de 2003. Éstas fueron afectadas principalmente en los bordes laterales, atenuándose hacia el centro. La situación de pérdida de información en amplias regiones de una imagen no es tan inusual. Las imágenes satelitales ópticas son habitualmente afectadas por la presencia de nubes. En imágenes en general, la pérdida de información puede deberse a la presencia de

algún objeto entre la escena y el sensor, o bien errores en el sensor, o en la toma de datos, etc.

En este modelo, se asume que no hay ruido y, en particular en este trabajo, que se cuenta con $x_{\tilde{\Lambda}} = y_{\tilde{\Lambda}} \in E^{\tilde{\Lambda}}$ imagen binaria ($E = \{0, 1\}$) observada sobre $\tilde{\Lambda} \in \mathcal{S}$ y se requiere $x_{\Delta} \in E^{\Delta}$ con $\tilde{\Lambda} \subsetneq \Delta \in \mathcal{S}$, es decir se necesita $x_{\Delta \setminus \tilde{\Lambda}}$, con $\Delta \setminus \tilde{\Lambda} \neq \emptyset$.

Ejemplo 4.2.1 *Falla del satélite Landsat 7*

Sea $\Delta = \Lambda_{MN}$, $x_{\tilde{\Lambda}}$ la imagen de la Figura 4.3, donde $\Delta \setminus \tilde{\Lambda}$ es la región de color negro.



Figura 4.3: Imagen Landsat 7 con pérdida de información.

Ejemplo 4.2.2 Sea $\Delta = \Lambda_{64}$, $x_{\tilde{\Lambda}}$ la imagen de la Figura 4.4, donde $\Delta \setminus \tilde{\Lambda}$ es la región de color gris.

Sea X el campo aleatorio subyacente tal que $x_{\tilde{\Lambda}}$ y $x_{\Delta \setminus \tilde{\Lambda}}$ serían realizaciones de las proyecciones $X_{\tilde{\Lambda}}$ y $X_{\Delta \setminus \tilde{\Lambda}}$ respectivamente. Se asume con naturalidad que X sigue un modelo Auto-logístico (ver Sección 1.4). Notar que las definiciones de la Sección 1.4 son similares a las de la Sección 4.1 pero se prescinde del campo R . De esta forma, si P es la probabilidad subyacente, se asume que $P_X \in \mathcal{G}(\Phi^\beta)$, donde Φ^β es como en el Ejemplo 1.3.1.

Como se vio en la Sección 1.4, la densidad del campo X_Λ dado el entorno $w_{\partial\Lambda}$, bajo el modelo Auto-logístico con vector de parámetros $\underline{\beta}$ tiene la forma:

$$p(x_\Lambda | w_{\partial\Lambda}, \underline{\beta}) = \frac{e^{-\left(\beta_0(\sum_{t \in \Lambda} x_t) + \sum_{i=1}^g \beta_i (\sum_{t \in \Lambda_{i,0}} x_t x_{t+v_i} + \sum_{t \in \Lambda_{i,1}} x_t w_{t+v_i} + \sum_{t \in \Lambda_{i,2}} w_t x_{t+v_i})\right)}}{\sum_{z_\Lambda} e^{-\left(\beta_0(\sum_{t \in \Lambda} z_t) + \sum_{i=1}^g \beta_i (\sum_{t \in \Lambda_{i,0}} z_t z_{t+v_i} + \sum_{t \in \Lambda_{i,1}} z_t w_{t+v_i} + \sum_{t \in \Lambda_{i,2}} w_t z_{t+v_i})\right)}} \quad (4.19)$$

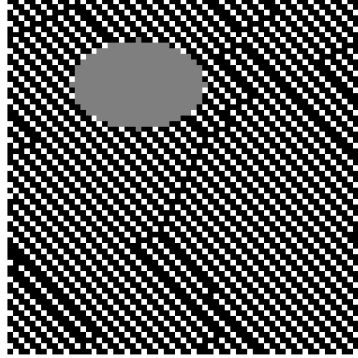


Figura 4.4: Imagen Binaria 64 x 64 pixeles con pérdida de información.

La propuesta de recuperación (o restauración) de x_Λ es generar una realización de la densidad $p(x_{\Delta \setminus \tilde{\Lambda}} | x_{\partial(\Delta \setminus \tilde{\Lambda})}, \underline{\beta})$ utilizando el algoritmo *GS*. Para esto es necesario estimar al parámetro $\underline{\beta}$, pues no es conocido. En este trabajo se intenta estimarlo utilizando *MV*, *PMV* y el método de histograma con algunas variantes. Como se asume que la distribución de Gibbs es invariante a traslaciones, notar que el vector de parámetros $\underline{\beta}$ rige cada densidad $p(x_V | x_{\partial V}, \underline{\beta})$ para cualquier $V \subset S$. Es natural utilizar las realizaciones que se tienen de las densidades $p(x_V | x_{\partial V}, \underline{\beta})$ para todo V tal que $V^* = V \cup \partial V \subset \tilde{\Lambda}$ pues se conoce x_V y $x_{\partial V}$, ya que se conoce $x_{\tilde{\Lambda}}$. Sea entonces $\Lambda \in \mathcal{S}$ el mayor subsoporte posible tal que $\Lambda^* \subset \tilde{\Lambda}$. *MV* busca estimar $\underline{\beta}$ maximizando la realización de la densidad (conjunta) $p(x_\Lambda | x_{\partial \Lambda}, \underline{\beta})$. *PMV* estima $\underline{\beta}$ maximizando el producto de las características locales y el método del histograma utiliza los conteos de las realizaciones de las características locales ($p(x_{\{s\}} | x_{\partial s}, \underline{\beta})$ con $s \in \Lambda$, luego $\partial s \subset \Lambda^*$).

4.3. Estado del arte y discusión

En 1984, Geman y Geman utilizan los campos Gibbs-Markov para el modelado de imágenes. Bajo este modelo, proponen un enfoque bayesiano y la relajación estocástica (simulated annealing) para la restauración de imágenes. En su trabajo,

puede verse que este tipo de restauración tiene buenos resultados cuando las imágenes originales contienen regiones homogéneas (de baja energía). Pero se verá en este trabajo que, en el caso de texturas más definidas, los resultados no son tan buenos en general, pues no se cumple el supuesto de baja energía. Derin y Elliott en 1987 [18], segmentan imágenes que se asume poseen M texturas, cada una modelada por una distribución de Gibbs-Markov, utilizando un criterio (bayesiano) basado en el estimador *MAP*. En este contexto, una buena segmentación y clasificación de texturas depende de la estimación de los parámetros del modelo (ver Capítulo 3). Friggesi y Piccioni (1990) (ver [20]) consideran el modelo binario de Ising isotrópico, degradado por ruido multiplicativo, análogo al modelo de degradación por ruido aditivo binario expuesto en el presente trabajo. Luego de la degradación, en ambos casos, la imagen degradada, vuelve a ser binaria. En el modelo de degradación estudiado por Friggesi y Piccioni, los valores posibles de los píxeles de la imagen binaria, de la imagen ruido y de la observada son 1 y -1 . El ruido es del tipo error aleatorio. Por esto, la «presencia» de ruido en un píxel se modela por la multiplicación del valor -1 con probabilidad ϵ (pues cambia el valor original), situación análoga a la suma módulo 2 del valor 1 en el modelo de degradación presentado en la Sección 4.1. De la misma forma, la «ausencia» de ruido se modela con la multiplicación por 1 en el de Ising de Friggesi y Piccioni, y por la suma (módulo 2) del valor 0 en el modelo auto-logístico. Tantas analogías motivaron un intento por trasladar los resultados del citado trabajo. Este traslado no fue trivial ni posible, dado que la estimación del parámetro asociado con el ruido se basa en la isotropía del modelo de Ising asumido por Friggesi y Piccioni. Bajo la perspectiva de que restaurar una imagen de textura con ruido es recuperar la textura original, el trabajo de Kurmyshev et al. (2003)[31] se basa en la técnica *RICC* para clasificar texturas binarias que han sido afectadas por ruido. Esta técnica está orientada prioritariamente para el procesamiento de texturas regulares. Considera que, de la misma forma que un píxel (picture element) es la unidad más pequeña que se encuentra en una imagen, un texel se define como el elemento más pequeño que se encuentra en una textura (regular). De esta forma, un texel es un bloque de píxeles que se repiten a lo largo y ancho conformando una textura regular como se muestra en la Figura 4.5.

En el trabajo de Kurmyshev et al. (2003) consideran un conjunto finito de tex-

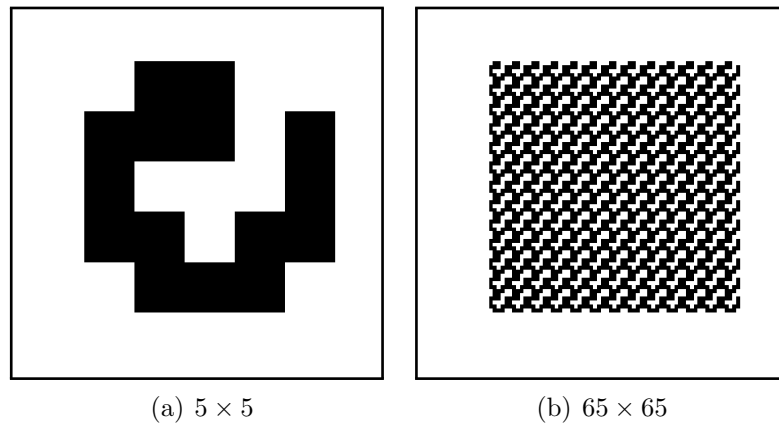


Figura 4.5: Texel e imagen con textura regular.

turas regulares simuladas, cada una, con su texel correspondiente. Evalúan la robustez de *RICC* para clasificar dichas texturas afectadas por distintos niveles de ruido. Esta técnica utiliza, como descriptor de la textura, también un histograma de segundo orden. Y realiza la clasificación según cercanía a los histogramas de las texturas regulares patrón. Es importante notar que las texturas patrón están bien definidas, y las imágenes a restaurar (clasificar) provienen de ese número finito de clases a las que se le agrega ruido. Si bien el objetivo es el mismo, las condiciones de restauración dadas en el trabajo citado son mucho más benévolas que las dadas en el presente trabajo. Se intenta restaurar una imagen de la cual no se conoce el porcentaje de ruido y, de la textura, lo único que se sabe es que proviene de un modelo auto-logístico (con su amplia e infinita variedad de texturas).

4.4. Dos nuevos métodos de restauración *inpainting*

Dado el modelo de restauración definido en la Sección 4.2, se cuenta con una imagen binaria x_Λ (observada sobre $\Lambda \in \mathcal{S}$) y se requiere $x_\Delta \in E^\Delta$ con $\Lambda \subsetneq \Delta \in \mathcal{S}$

4.4.1. Método de restauración auto-logístico

El método de restauración auto-logístico consiste en la aplicación de los siguientes pasos:

1. estimar el vector de parámetros $\underline{\beta}$ con algún estimador de los presentados, utilizando ,para esto, la imagen observada x_Λ . A esta estimación se la denotará $\widehat{\underline{\beta}}(x_\Lambda)$.
2. generar una muestra (o realización) sobre $\Delta \setminus \Lambda$ utilizando el algoritmo GS bajo un modelo auto-logístico con vector de parámetros $\widehat{\underline{\beta}}(x_\Lambda)$.

4.4.2. Método de restauración empírico VHDD

El método de restauración empírico VHDD (de cuatro direcciones, vertical, horizontal y diagonales) evita la estimación del vector de parámetros y utiliza el vector de proporciones $prop(x_\Lambda)$. Es similar al método anterior, en el sentido que consiste en una modificación del algoritmo GS.

Definición 4.4.1 Dada una imagen observada $x_{A \cup \partial A}$, se requiere generar una imagen x_B con igual textura que $x_{A \cup \partial A}$ ($A \in \mathcal{S}$, $B \in \mathcal{S}$, $B \cap (A \cup \partial A) \neq \emptyset$). El método de restauración empírico VHDD intentará generar x_B con igual vector de proporciones que $x_{A \cup \partial A}$ y consiste en los siguientes pasos:

1. Calcular el vector de proporciones $p = (p_1, \dots, p_{81}) = prop(x_{A \cup \partial A})$.
2. Definir $(s_i)_{i \geq 1}$, una sucesión en B tal que $\#\{i/s_i = s\} = \infty$ para todo $s \in B$, es decir, una forma de recorrer el soporte B en donde pase infinitas veces por cada sitio.
3. Comenzar el proceso iterativo enumerado por i , para $i = 0$, proponiendo una imagen binaria inicial cualquiera $x_B^{(0)}$.
4. Dada $x_B^{(i-1)}$, considerar

$$x_B^{(i)} \doteq x_{B \setminus s_i}^{(i-1)} \xi_{s_i}$$

donde ξ_{s_i} es una realización de una Bernoulli con parámetro p_j , cuando el sitio s_i , de la imagen $x_B^{(i-1)}$ tiene índice j .

5. Terminar el proceso para $i = I$, con I máximo de iteraciones.

6. Y definir $\widehat{x}_B \doteq x_B^{(I)}$.

Nótese la similitud con el algoritmo **GS**, los procedimientos coinciden salvo en el paso 4, donde VHDD utiliza el j -ésimo lugar del vector de proporciones (p_j) , y **GS** utiliza el j -ésimo lugar del vector de textura $tx(\underline{\beta})$; lo cual es notable también.

Capítulo 5

Criterios y medidas de similitud

La noción de similitud está relacionada con la característica de interés del estudio en cuestión. El presente trabajo tiene como objeto de estudio las texturas presentes en imágenes binarias. Con este horizonte, se mostrarán algunos criterios usuales de comparación de imágenes, se los analizará según su relevancia en la comparación de texturas, presentándose nuevos criterios, acordes a la problemática. De la misma forma se analizará la similitud entre vectores de parámetros, en este caso del modelo auto-logístico.

5.1. Similitud y distancia entre imágenes

*Hay criterios de comparación de imágenes pixel a pixel, consisten en la comparación uno a uno de los pixeles de las imágenes a comparar. Una de las medidas usuales es la resta de los valores en el sitio correspondiente, se obtiene de esta forma un valor de comparación por cada pixel. Esta es una situación engorrosa: el exceso de información dificulta las conclusiones y más cuando la comparación debe hacerse entre varias imágenes. Esto conlleva a resumir la información en una medida global tal como lo son el error cuadrático medio (*ECM*) o el índice Q , definidos a continuación.*

Definición 5.1.1 *Sea el espacio de estados $\tilde{E} \subset \mathbb{R}^t$, $t \in \mathbb{N}$. Se define el *ECM* entre*

dos imágenes, $x \in \tilde{E}^\Lambda$ y $z \in \tilde{E}^\Lambda$, de la siguiente forma:

$$ECM(x, z) = \sqrt{\sum_{s \in \Lambda} \frac{d(x_s, z_s)^2}{\#\Lambda}}, \quad (5.1)$$

en donde d es la distancia euclídea en \tilde{E} .

La medida ECM se define a partir de la comparación de las imágenes lugar a lugar, resultando muy sensible a pequeños corrimientos en las imágenes (falta de corrección). Luego, esta medida resulta poco aplicable en general, y en texturas en particular, cuando la característica a comparar no requiere de exactitud de ubicación. Por ejemplo, el corrimiento en un pixel a la izquierda (o derecha) de una imagen «tablero de ajedrez» repercute en el máximo valor posible de ECM , pues todos los lugares modificaron sus valores, pero ambas imágenes (la original y la desplazada) poseen la misma textura.

Además, los valores de ECM dependen de la escala de las imágenes, y es por esta razón que no se pueden tener valores de referencia para los resultados de las comparaciones. Wang y Bovik (2002)[37] propusieron un índice de calidad de imagen Q . Esta medida es objetiva, universal y fácil de calcular, está matemáticamente definida y ningún modelo Human Visual System (HVS) fue explícitamente utilizado en su definición. Modela las distorsiones como una combinación de tres factores: pérdida de correlación, distorsión en la luminosidad y distorsión en el contraste.

Definición 5.1.2 Sea el soporte $\tilde{E} \subset \mathbb{R}^t$ y $t \in \mathbb{N}$, se define el índice Q entre dos imágenes, $x \in \tilde{E}^\Lambda$ y $z \in \tilde{E}^\Lambda$, de la siguiente forma:

$$Q = \frac{4\sigma_{xz}\bar{x}\bar{z}}{(\sigma_x^2 + \sigma_z^2)[\bar{x}^2 + \bar{z}^2]},$$

en donde

$$\bar{x} = \frac{1}{\#\Lambda} \sum_{s \in \Lambda} x_s, \quad \bar{z} = \frac{1}{\#\Lambda} \sum_{s \in \Lambda} z_s,$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{\#\Lambda} \sum_{s \in \Lambda} (x_s - \bar{x})^2, \quad \sigma_z^2 = \frac{1}{\#\Lambda} \sum_{s \in \Lambda} (z_s - \bar{z})^2,$$

$$\sigma_{xz} = \frac{1}{\#\Lambda} \sum_{s \in \Lambda} (x_s - \bar{x})(z_s - \bar{z}).$$

El rango de valores posibles para Q es $[-1, 1]$; el valor más alto es obtenido cuando $x_s = z_s$ para todo $s \in \Lambda$.

Se divide a la imagen en M pequeñas regiones y el índice se aplica en cada una de ellas, obteniéndose Q_i , el índice de la i -ésima región con $i = 1, \dots, M$. El índice de calidad general está dado por:

$$Q = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M Q_i$$

Es de notar por su definición, la medida **ECM**, así como el índice Q , no es muy adecuads para imágenes binarias específicamente. Otro criterio utilizado para comparar imágenes es el otorgado por el histograma de primer orden, es un histograma de los datos presentes en cada imagen sin considerar su ubicación. Este tipo de histograma resulta insuficiente para discriminar texturas. Más aún en imágenes binarias, ya que el histograma en estos casos, contiene únicamente la proporción de 0's y 1's presentes en cada imagen.

Hay criterios más informativos y discriminantes, son los basados en los histogramas de segundo orden (como por ejemplo **CCR**. Los cuales consideran la posición relativa de los pixeles, contando las configuraciones locales presentes en la imagen, independientemente de su ubicación. El criterio utilizado sería que dos imágenes son iguales en textura si contienen las mismas configuraciones locales y en las mismas proporciones. Existen otros descriptores de texturas que son útiles para medir similitud, como por ejemplo **LBP** para imágenes monocromas con varios niveles de gris. En este trabajo se considera que la información relevante la contiene el histograma de segundo orden definido en la Sección 2.2. Luego, el vector de proporciones es la medida utilizada y propuesta en este trabajo como descriptor empírico de la textura. Se define entonces, la distancia entre las imágenes x_{Λ^*} y z_{Λ^*} según sus texturas, como

la distancia euclídea entre $prop(x_{\Lambda^*})$ y $prop(z_{\Lambda^*})$ y se denota $dt(x_{\Lambda^*}, z_{\Lambda^*})$. Luego, dos imágenes, x_{Λ^*} y z_{Λ^*} , se dirán similares en textura si $dt(x_{\Lambda^*}, z_{\Lambda^*})$ es pequeña.

5.2. Similitud y distancia entre vectores de parámetros

En Calder et al. (1995,[14]) se intentó medir la cercanía o alejamiento de dos vectores al medir la distancia euclídea entre ellos. Con el criterio de que mientras más pequeña es la distancia euclídea entre ellos más parecidos son los vectores. Pero, al analizar el contexto se toma conciencia de que se pierde la característica objetivo (caracterizar texturas) y surgen las siguientes preguntas: ¿Qué significa que dos vectores estén cerca o a poca distancia? ¿Por qué se busca que el estimador esté cerca del vector de parámetros? Fue en el intento por responder estas preguntas que el criterio de distancia euclídea empezó a cuestionarse. Existen muchas situaciones en las que vectores a igual distancia euclídea derivan en comparaciones visuales totalmente diferentes. A modo de ejemplo, fijado el vector de parámetros $\underline{\beta} = (-3, 0.5)$, sean $\underline{\beta}_* = (-3, -2)$ y $\tilde{\underline{\beta}} = (-3, 3)$ de igual distancia a $\underline{\beta}$ ($d(\underline{\beta}, \underline{\beta}_*) = d(\underline{\beta}, \tilde{\underline{\beta}}) = 2.5$).

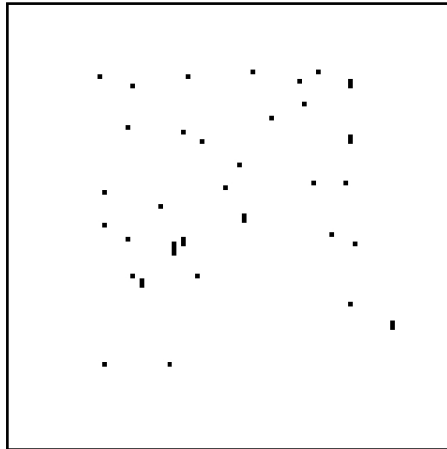


Figura 5.1: Imagen de 64×64 bajo Modelo auto-logístico con $\underline{\beta} = (-3, 0.5)$.

Al comparar visualmente las texturas de las imágenes de las Figuras 5.1 y 5.2(a) puede notarse cierta similitud entre ellas (correspondientes a $\underline{\beta}$ y $\underline{\beta}_*$) y, al comparar las imágenes de las Figuras 5.1 y 5.2(b) (correspondientes a $\underline{\beta}$ y $\tilde{\underline{\beta}}$), la diferencia

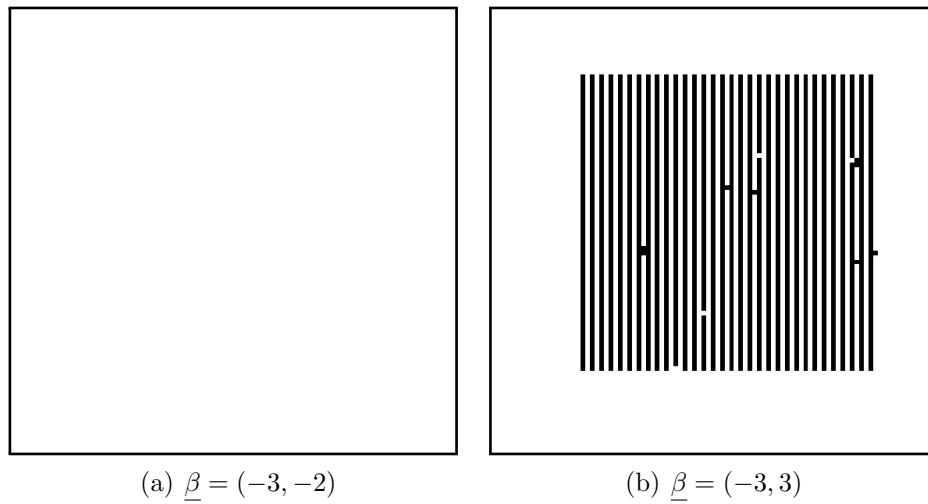


Figura 5.2: Imágenes de 64×64 bajo modelo auto-logístico.

entre las texturas es más notable. Ambos pares corresponden a texturas generadas por vectores a igual distancia entre si. Pero al utilizar la definición de textura para la comparación, la distancia entre $tx(\underline{\beta})$ y $tx(\underline{\beta}_*)$ es 0.88, menor que 1.14, distancia entre $tx(\underline{\beta})$ y $tx(\underline{\beta}_2)$. Estos resultados reflejan las comparaciones visuales y, en el contexto del presente trabajo, la importancia del vector de parámetros radica en la caracterización de texturas. Se asume, entonces, que dos vectores de parámetros, $\underline{\beta}$ y $\tilde{\beta}$, se consideran próximos si las texturas que caracterizan son cercanas o parecidas. Es por esto que en esta tesis se proponen dos medidas para evaluar similitud entre dos vectores, según la cercanía entre las texturas que caracterizan:

1. La distancia euclídea entre $tx(\underline{\beta})$ y $tx(\tilde{\beta})$, llamada distancia ideal entre $\underline{\beta}$ y $\tilde{\beta}$ y denotada $di(\underline{\beta}, \tilde{\beta})$.
2. La distancia euclídea entre $prop(x_{\Lambda^*}(\underline{\beta}))$ y $prop(x_{\Lambda^*}(\tilde{\beta}))$, llamada distancia empírica entre $\underline{\beta}$ y $\tilde{\beta}$ y denotada $de(\underline{\beta}, \tilde{\beta})$, donde $x_{\Lambda^*}(\underline{\beta})$ y $x_{\Lambda^*}(\tilde{\beta})$ son imágenes generadas por el algoritmo *GS* utilizando los vectores $\underline{\beta}$ y $\tilde{\beta}$ respectivamente.

Es de notar que la distancia ideal (entre $\underline{\beta}$ y $\tilde{\beta}$) es objetiva y repetible, pues sólo depende de los vectores $\underline{\beta}$ y $\tilde{\beta}$. Por el contrario, y algo a tener en cuenta, la distancia empírica resulta no ser una distancia propiamente dicha⁽¹⁾, más bien es una aproxi-

⁽¹⁾ $de(\underline{\beta}, \underline{\beta})$ en general no es 0

mación empírica de la ideal que depende de generaciones aleatorias, la cantidad de iteraciones realizadas, etc. La definición de ésta es importante por relación con la distancia entre imágenes dt , pues $de(\underline{\beta}, \tilde{\underline{\beta}}) = dt(x_{\Lambda^*}(\underline{\beta}), x_{\Lambda^*}(\tilde{\underline{\beta}}))$.

Capítulo 6

Resultados de estimación

Para la evaluación del desempeño de los estimadores se recuerda, en este contexto, que la importancia del vector de parámetros radica en la caracterización de texturas. Para ello, se utilizaron las distancias ideal y empírica (d_i y d_e). Los vectores $\underline{\beta}$ y $\tilde{\underline{\beta}}$ se dicen próximos si $d_i(\underline{\beta}, \tilde{\underline{\beta}})$ (o bien $d_e(\underline{\beta}, \tilde{\underline{\beta}})$) es un valor pequeño. En cuanto al diseño experimental, se eligieron convenientemente $768 = 34^4$ muestras en \mathbb{R}^5 del vector de parámetros, $\underline{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)^{(i)}$, $i = 1, \dots, 768$, todas las combinaciones posibles de:

- $\beta_0 \in \{-1, 0, 1\}$;
- $\beta_1 \in \{-1.8, 0, 2.21, 1.65\}$; ⁽¹⁾
- $\beta_2 \in \{-0.93, 0, 1.15, 3.94\}$; ⁽²⁾
- $\beta_3 \in \{-3.71, 0, 1.37, 3.78\}$; ⁽³⁾
- $\beta_4 \in \{-1.38, 0, 1.16, 1.62\}$. ⁽⁴⁾

⁽¹⁾ -1.8 seleccionado aleatoriamente en el intervalo $[-4, -0.5]$, 2.21 y 1.65 seleccionado aleatoriamente en el intervalo $[0.5, 4]$

⁽²⁾ -0.93 seleccionado aleatoriamente en el intervalo $[-4, -0.5]$, 1.15 y 3.94 seleccionado aleatoriamente en el intervalo $[0.5, 4]$

⁽³⁾ -3.71 seleccionado aleatoriamente en el intervalo $[-4, -0.5]$, 1.37 y 3.78 seleccionado aleatoriamente en el intervalo $[0.5, 4]$

⁽⁴⁾ -1.38 seleccionado aleatoriamente en el intervalo $[-4, -0.5]$, 1.16 y 1.62 seleccionado aleatoriamente en el intervalo $[0.5, 4]$

Se generaron 768 imágenes, una por cada vector. Se utilizaron estas imágenes para estimar los vectores $\underline{\beta}^{(i)}$ con los tres métodos elegidos. De los métodos presentados (para realizar una análisis más exhaustivo) se eligieron sólo 3:

- el de *PMV* con *BFGS* (similar o mejor que Newton Raphson), denotado por $\underline{\beta}_{BFGS}^{(i)}$;
- el de simulated annealing (*SA*), denotado por $\underline{\beta}_{SA}^{(i)}$; y
- el del método del histograma utilizando el estimador propuesto por Borges, denotado por $\underline{\beta}_C^{(i)}$.

Se evaluó el desempeño de los estimadores utilizando dos medidas de similitud, una «ideal» y otra «empírica». Se calculó la textura del estimador y su distancia euclídea a la textura del vector original:

- $di_{BFGS}^{(i)} \doteq di(\underline{\beta}_{BFGS}^{(i)}, \underline{\beta}^{(i)})$,
- $di_{SA}^{(i)} \doteq di(\underline{\beta}_{SA}^{(i)}, \underline{\beta}^{(i)})$ y
- $di_C^{(i)} \doteq di(\underline{\beta}_C^{(i)}, \underline{\beta}^{(i)})$.

Por cada vector de parámetros estimado, se generó una imagen de 64×64 pixeles, bajo un modelo auto-logístico, asociada al vector estimado utilizando el algoritmo *GS* y denotada por: $x_{BFGS}^{(i)}$, $x_{SA}^{(i)}$ o $x_C^{(i)}$, según corresponda⁽⁵⁾. La segunda medida se calculó de la siguiente forma:

- $de_{BFGS}^{(i)} \doteq de(\underline{\beta}_{BFGS}^{(i)}, \underline{\beta}^{(i)})$,
- $de_{SA}^{(i)} \doteq de(\underline{\beta}_{SA}^{(i)}, \underline{\beta}^{(i)})$ y
- $de_C^{(i)} \doteq de(\underline{\beta}_C^{(i)}, \underline{\beta}^{(i)})$.

Bajo el criterio de que un estimador es mejor que otro si di (o bien de) es más pequeña, se compararon los 3 métodos, de a pares. Para cada comparación se utilizó un test t de contrastes de medias para muestras apareadas con $(n - 1) = 767$ grados de libertad. Se obtuvieron los siguientes resultados para la muestra:

⁽⁵⁾es decir, $x_{BFGS}^{(i)} \doteq x(\underline{\beta}_{BFGS}^{(i)})$, etc.

1. Se acepta la hipótesis alternativa de que $di_{BFGS} < di_{SA}$, con estadístico $t = -31.1725$ y $p\text{-valor} < 2.2e - 16$, altamente significativo.
2. Se acepta la hipótesis alternativa de que $di_{BFGS} < di_C$, con estadístico $t = -31.1725$ y $p\text{-valor} < 2.2e - 16$, altamente significativo.
3. Se acepta la hipótesis alternativa de que $di_{SA} < di_C$, con estadístico $t = -10.9698$ y $p\text{-valor} < 2.2e - 16$, altamente significativo.

Se obtuvieron resultados análogos utilizando *de*. Se concluye fuertemente que el método de *PMV* con *BFGS* es mejor que los restantes y que *simulated annealing* tiene un mejor desempeño que el del método del histograma. Es de notar que estas conclusiones se trasladan directamente al desempeño en *inpainting* para el método de restauración auto-logístico. Debido a la excesiva cantidad de muestras, es posible que el test sea demasiado sensible a marcar diferencias significativas. Por este motivo, se extrajo una submuestra de tamaño 60, elegida aleatoriamente de la muestra original. Se realizó el mismo test t con $(n - 1) = 59$ grados de libertad. Se obtuvieron los siguientes resultados para la submuestra:

1. Se acepta la hipótesis alternativa de que $di_{BFGS} < di_{SA}$, con estadístico $t = -8.6898$ y $p\text{-valor} = 1.885e - 12$, altamente significativo.
2. Se acepta la hipótesis alternativa de que $di_{BFGS} < di_C$, con estadístico $t = -11.9734$ y $p\text{-valor} < 2.2e - 16$, altamente significativo.
3. Se acepta la hipótesis alternativa de que $di_{SA} < di_C$, con estadístico $t = -3.67$ y $p\text{-valor} = 0.0002616$, altamente significativo.

Se obtuvieron resultados análogos utilizando *de*. En la Figura 6.1 se puede visualizar claramente la superioridad del método *BFGS*, mostrando casi siempre una baja distancia a la textura ideal. Análogamente, y con las mismas conclusiones, en la Figura 6.2 se puede visualizar la distancia a la textura empírica de los tres métodos. En las Figuras 6.3, 6.4 y 6.5 pueden verse los gráficos de $(di_{BFGS} - di_{SA})$, $(di_{BFGS} - di_C)$ y $(di_{SA} - di_C)$, respectivamente, según la submuestra.⁽⁶⁾ Se eligieron aleatoriamente 3

⁽⁶⁾Nótese que se verifica el supuesto de normalidad homocedástica, necesario para el uso del test t que se realizó.

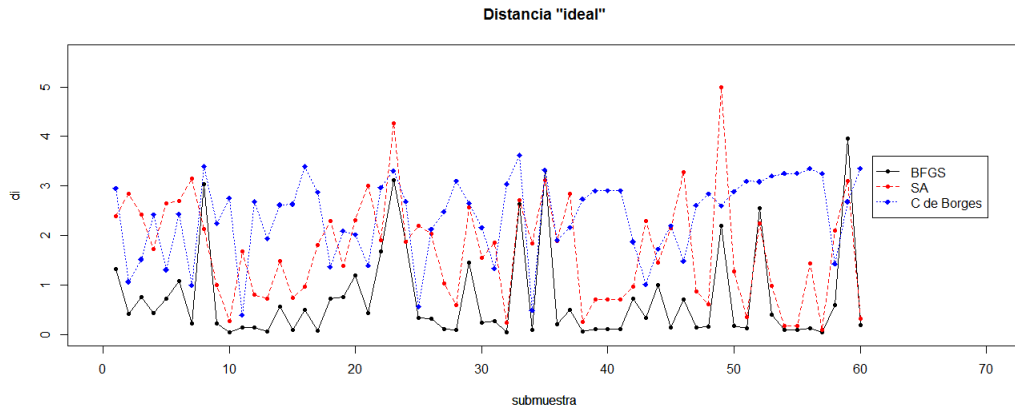


Figura 6.1: Gráfico de $d_{i_{BFGS}}$, $d_{i_{SA}}$ y d_{i_C} en la submuestra

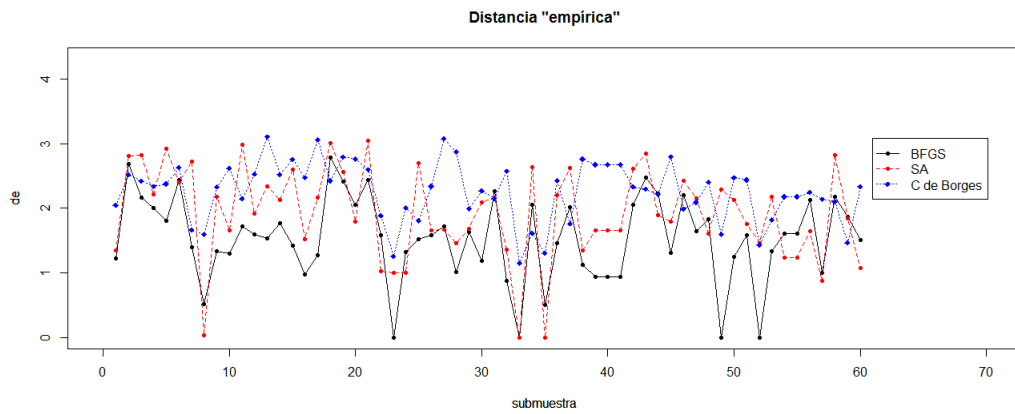


Figura 6.2: Gráfico de $d_{e_{BFGS}}$, $d_{e_{SA}}$ y d_{e_C} en la submuestra

vectores de la muestra: $\underline{\beta}^{(i)}$, con $i = 201, 432$ y 597 , y sus respectivas estimaciones. Se observaron los efectos de las distintas estimaciones de cada vector en la restauración de cada textura dada por el método auto-logístico. Se muestran las imágenes $x^{(i)}$, $x_{BFGS}^{(i)}$, $x_{SA}^{(i)}$ y $x_{C}^{(i)}$, en la Figura 6.6, cuando $i = 201$; en la Figura 6.7 cuando $i = 432$; y en la Figura 6.8, cuando $i = 597$.

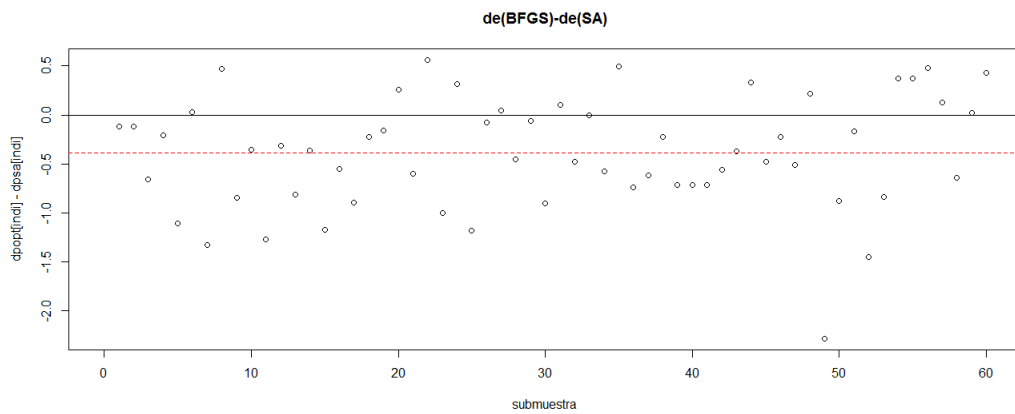


Figura 6.3: Gráfico de $di_{BFGS} - di_{SA}$ en la submuestra

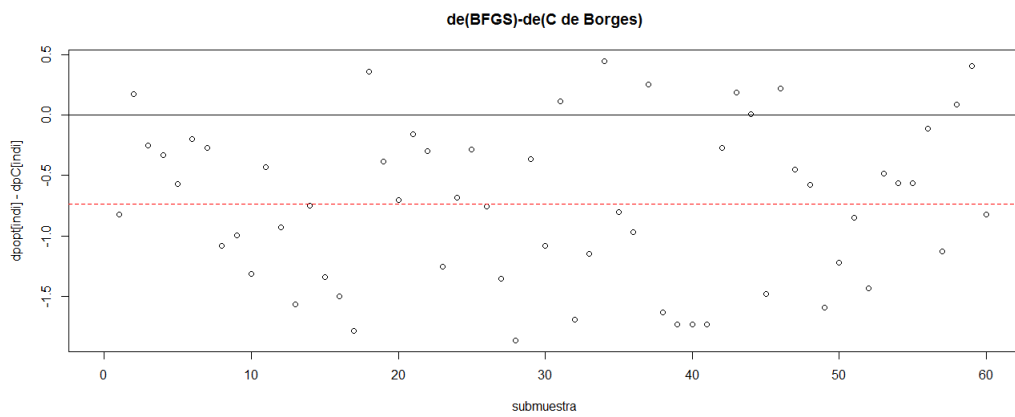


Figura 6.4: Gráfico de $di_{BFGS} - di_C$ en la submuestra

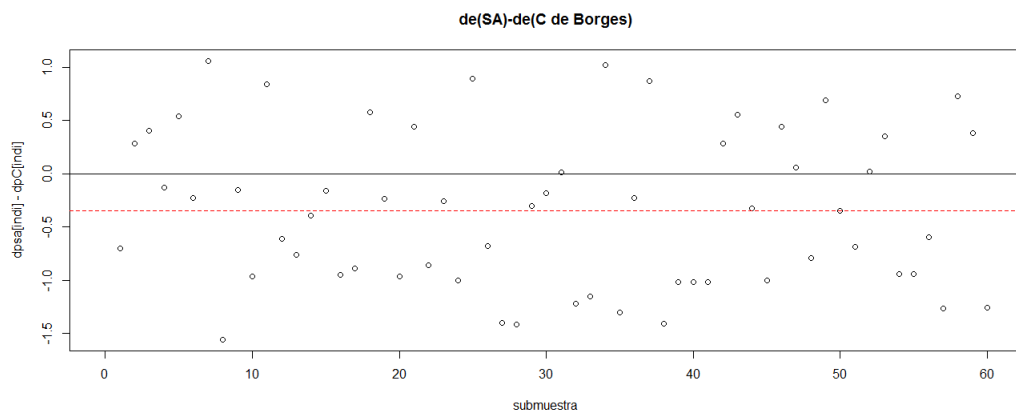


Figura 6.5: Gráfico de $di_{SA} - di_C$ en la submuestra

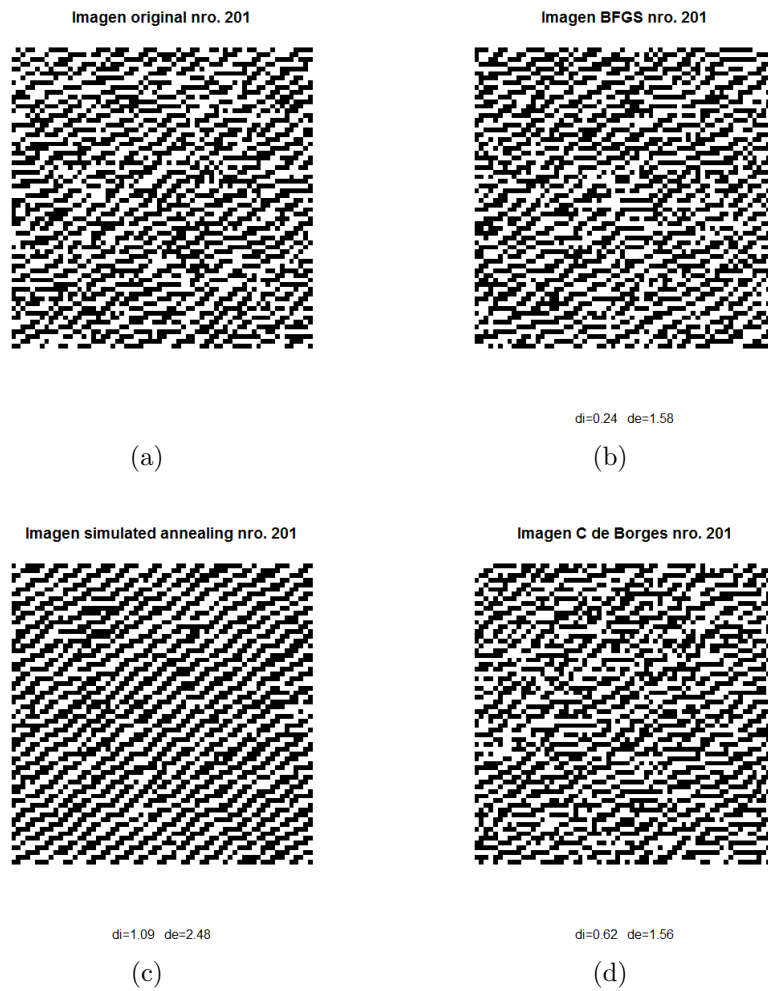


Figura 6.6: Imágenes muestra nro 201.

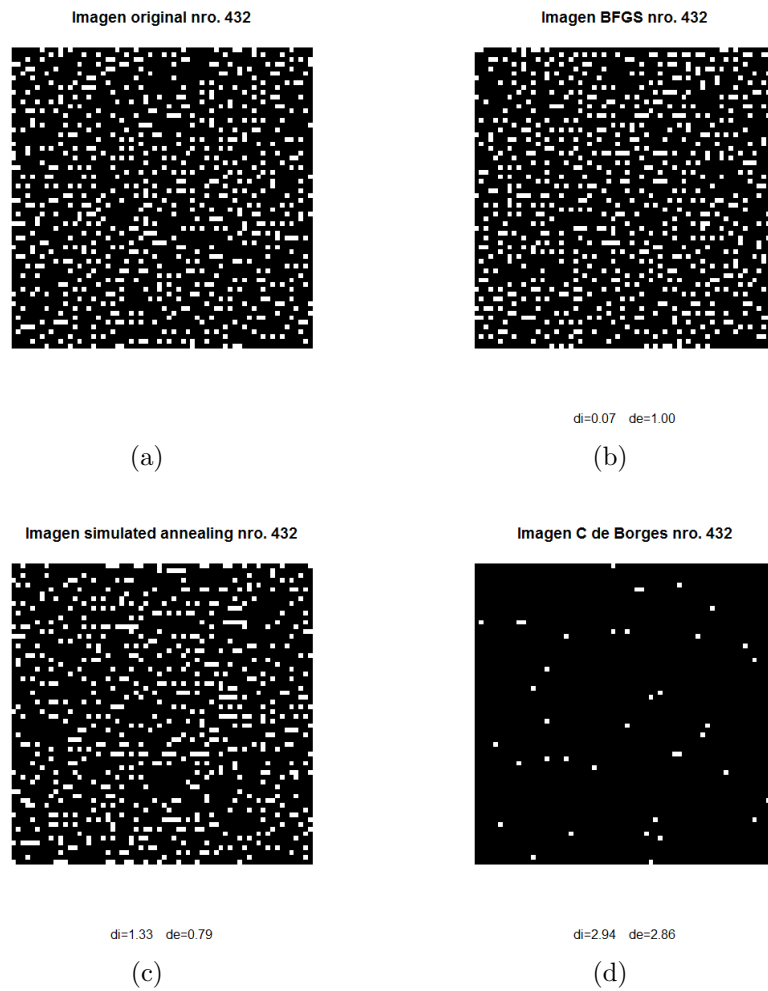


Figura 6.7: Imágenes muestra nro 432.

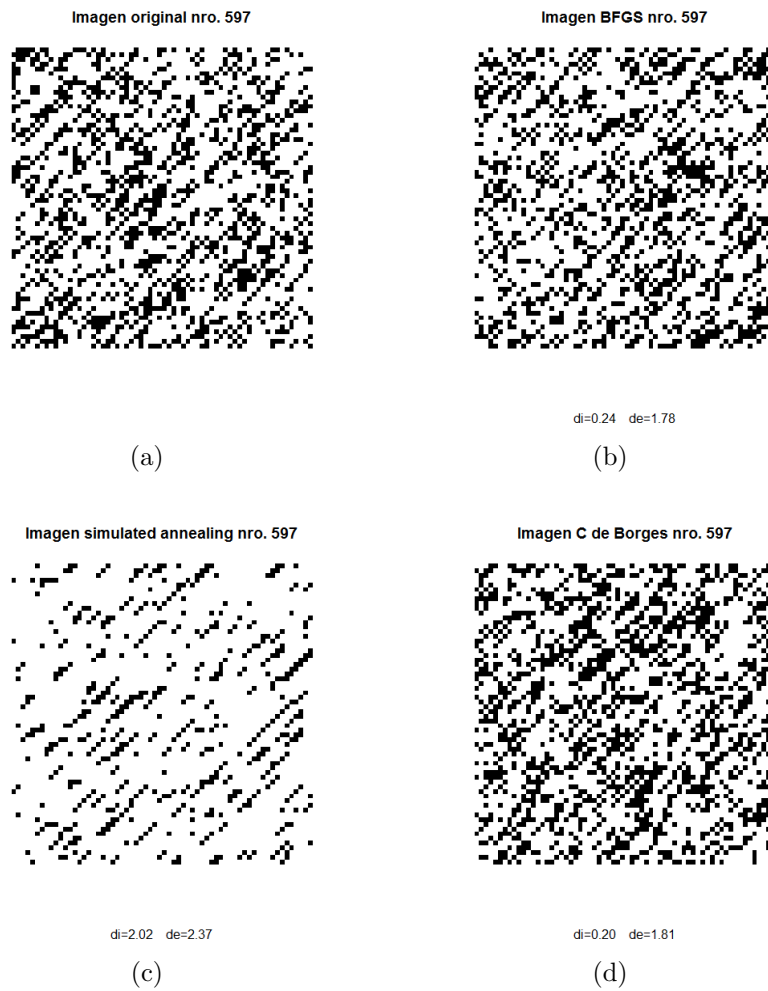


Figura 6.8: Imágenes muestra nro 597.

Capítulo 7

Resultados de restauración

En este capítulo, bajo el modelo de degradación por pérdida de información, se presentan los dos métodos de restauración propuestos en la Sección 4.2. Para esto, se generaron 4 imágenes a restaurar y se «simularon» pérdidas de información en cada una. Se aplicaron ambos métodos, devolviendo buenos resultados, y visualmente similares, en los casos de texturas no regulares. El desempeño de los métodos para restaurar texturas regulares perfectas no resultó tan bueno (ver Figuras 7.11(a) y 7.13). Esto puede deberse a que en general, en las texturas regulares, la dependencia espacial local no se rige bajo un modelo aleatorio simétrico. Las imágenes de 64×64 píxeles de las Figuras 7.1(a), 7.4(a) y 7.7(a) fueron generadas bajo un modelo autológico por el algoritmo GS con vectores de parámetros $\underline{\beta} = (1, 1, 3, -3)$, $\underline{\beta} = (20, -20, -20, 10, 10)$ y $\underline{\beta} = (-1, 1, -1, 1)$, respectivamente. La imagen de la figura 7.11(a) fue generada regularmente, repitiendo el «texel» de la Figura 7.10. En las Figuras 7.2, 7.5, 7.8 y 7.12 puede verse los resultados de las estimaciones del vector de parámetros según los distintos métodos. En la primer columna se encuentra una codificación de los nombres de los métodos:

- «orig» se corresponde con el control, dado por el vector original $\underline{\beta}$;
- «mlg» se corresponde con el método clásico del histograma,
- «opt» se corresponde con el método PMV con BFGS,
- «sim ann» se corresponde con el método PMV con simulated annealing,

- «new raph» se corresponde con el método *PMV* con Newton Raphson,
- «new raph2» se corresponde con el método *PMV* con una modificación de Newton-Raphson y
- «borg» se corresponde con el estimador *C* de Borges.

La columna «alfa» se refiere a la estimación del parámetro β_0 y cada columna «bi» a la estimación del parámetro β_i , con $i = 1, \dots, 4$. La columna «mf» se refiere a la evaluación de la función de verosimilitud (en el vector de parámetros de cada fila). La columna «NA» no presenta información relevante.

Ejemplo 7.0.1 En la Figura 7.1(a) se encuentra la imagen x_Λ , generada usando *GS* bajo un modelo auto-logístico con vector de parámetros $\underline{\beta} = (1, 1, 3, -3)$ (es decir, usando $tx(\underline{\beta})$). En la Figura 7.1(b) se puede ver el gráfico simultáneo de los vectores $tx(\underline{\beta})$ y $prop(x_\Lambda)$. Se desconoce $x_{\Delta \setminus \Lambda}$, donde $\Lambda \subsetneq \Delta = \Lambda_{64}$ y $\Delta \setminus \Lambda$ se ve de color gris en la Figura 7.1(a).

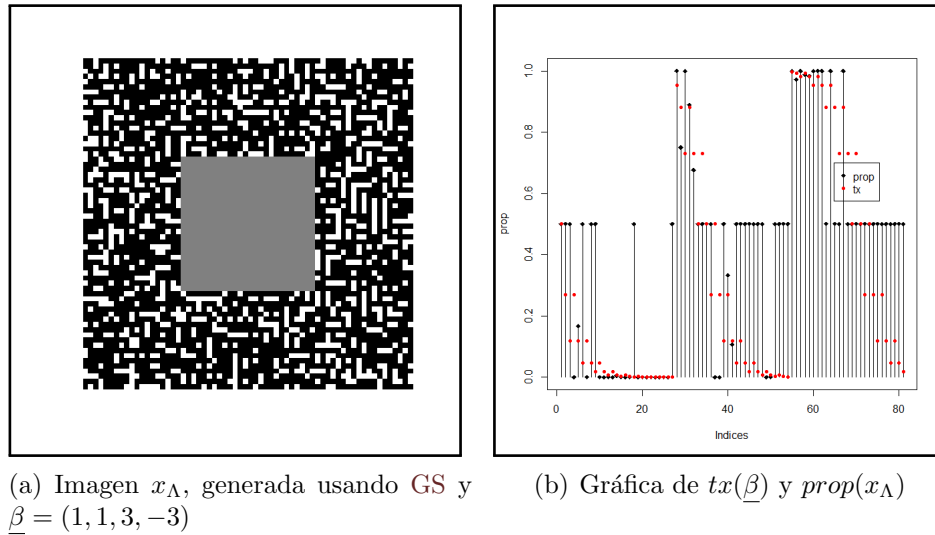


Figura 7.1: Imagen a restaurar.

En la Figura 7.2 se encuentran las estimaciones de $\underline{\beta}$, realizadas utilizando la imagen x_Λ de la Figura 7.1(a). Se eligió la estimación $\hat{\underline{\beta}}_{OPT} = (1.3, 0.7, 3.3, -2.9)$ para el método de restauración auto-logístico, es decir, se generó $\hat{x}_{\Lambda_{64} \setminus \Lambda}$ usando *GS*

	b1	b2	b3	b4	mf
orig	1.0000	1.0000	3.0000	-3.0000	303.7167
mlg	0.1583	0.1283	3.6872	-0.0832	1292.6265
opt	1.3225	0.6841	3.3044	-2.9272	301.9512
sim ann	1.6227	1.1978	3.1500	-3.1970	311.8678
new raph	1.3683	1.0948	1.9359	-7.2802	847.4457
new raph2	0.9950	0.7474	2.1170	-2.5351	323.2882
borg	0.1907	0.1941	1.2547	-1.3644	618.3563

Figura 7.2: Estimadores de $\underline{\beta}$, usando x_Λ de Figura 7.1

y $\hat{\underline{\beta}}_{OPT}$. De esta manera la imagen restaurada por el método de restauración auto-logística queda $x_\Lambda \hat{x}_{\Lambda_{64} \setminus \Lambda}$ y puede visualizarse en la Figura 7.3(a). Para la restauración empírica VHDD se generó $\tilde{x}_{\Lambda_{64} \setminus \Lambda}$ utilizando el algoritmo prop sampler (PS) con el vector de proporciones $prop(x_\Lambda)$. De esta forma, la imagen restaurada queda $x_\Lambda \tilde{x}_{\Lambda_{64} \setminus \Lambda}$, y se observa en la Figura 7.3(b).

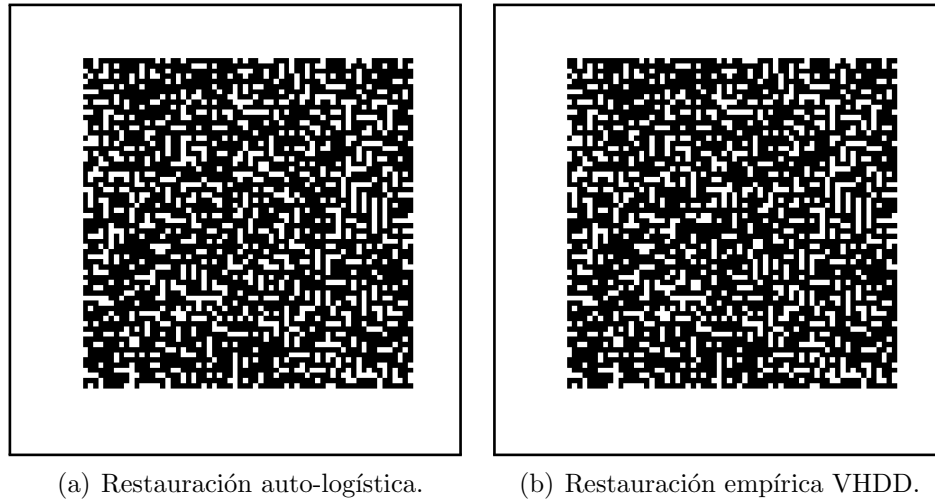


Figura 7.3:

Ejemplo 7.0.2 En la Figura 7.4(a) se encuentra la imagen x_Λ , generada usando GS bajo un modelo auto-logístico con vector de parámetros $\underline{\beta} = (20, -20, -20, 10, 10)$ (es decir, usando $tx(\underline{\beta})$). En la Figura 7.4(b) se puede ver el gráfico simultáneo de los vectores $tx(\underline{\beta})$ y $prop(x_\Lambda)$. Se desconoce $x_{\Delta \setminus \Lambda}$, donde $\Lambda \subsetneq \Delta = \Lambda_{64}$ y $\Delta \setminus \Lambda$ se ve de color gris en la Figura 7.4(a).

En la Figura 7.5 se encuentran las estimaciones de $\underline{\beta}$, realizadas utilizando la imagen x_Λ de la Figura 7.4(a).

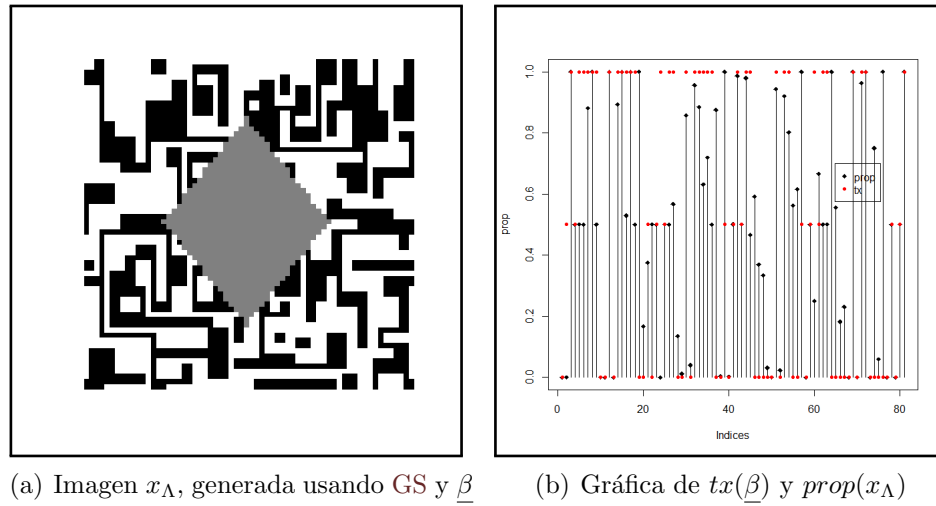


Figura 7.4: Imagen a restaurar.

	alfa	b1	b2	b3	b4	mf
orig	20.0000	-20.0000	-20.0000	10.0000	10.0000	917.0270
mlg	2.2724	-1.0434	-0.9030	0.4702	0.2999	2088.3101
opt	6.4414	-6.0812	-5.9712	2.7336	2.8645	591.8300
sim ann	5.3998	-3.9095	-3.9002	1.9124	0.9573	694.3030
new raph	4.1763	-4.2471	-4.2152	2.0851	2.1352	629.8173
new raph2	4.1763	-4.2471	-4.2152	2.0851	2.1352	629.8173
borg	1.8776	-1.2366	-0.6562	0.1294	-0.0364	1508.6295

Figura 7.5: Estimadores de $\underline{\beta}$, usando x_Λ de Figura 7.4

Se eligió la estimación $\hat{\underline{\beta}}_{OPT} = (6.44, -6.08, -5.97, 2.73, 2.86)$ para el método de restauración auto-logístico, es decir, se generó $\hat{x}_{\Lambda_{64} \setminus \Lambda}$ usando GS y $\hat{\underline{\beta}}_{OPT}$. De esta manera la imagen restaurada por el método de restauración auto-logística queda $x_\Lambda \hat{x}_{\Lambda_{64} \setminus \Lambda}$ y puede visualizarse en la Figura 7.6(a). Para la restauración empírica VHDD se generó $\tilde{x}_{\Lambda_{64} \setminus \Lambda}$ utilizando el algoritmo PS con el vector de proporciones $prop(x_\Lambda)$. De esta forma, la imagen restaurada queda $x_\Lambda \tilde{x}_{\Lambda_{64} \setminus \Lambda}$, y se observa en la Figura 7.6(b).

Ejemplo 7.0.3 En la Figura 7.7(a) se encuentra la imagen x_Λ , generada usando GS bajo un modelo auto-logístico con vector de parámetros $\underline{\beta} = (-1, 1, -1, 1)$ (es decir, usando $tx(\underline{\beta})$). En la Figura 7.1(b) se puede ver el gráfico simultáneo de los vectores $tx(\underline{\beta})$ y $prop(x_\Lambda)$. Se desconoce $x_{\Delta \setminus \Lambda}$, donde $\Lambda \subsetneq \Delta = \Lambda_{64}$ y $\Delta \setminus \Lambda$ se ve de color gris en la Figura 7.1(a).



Figura 7.6:

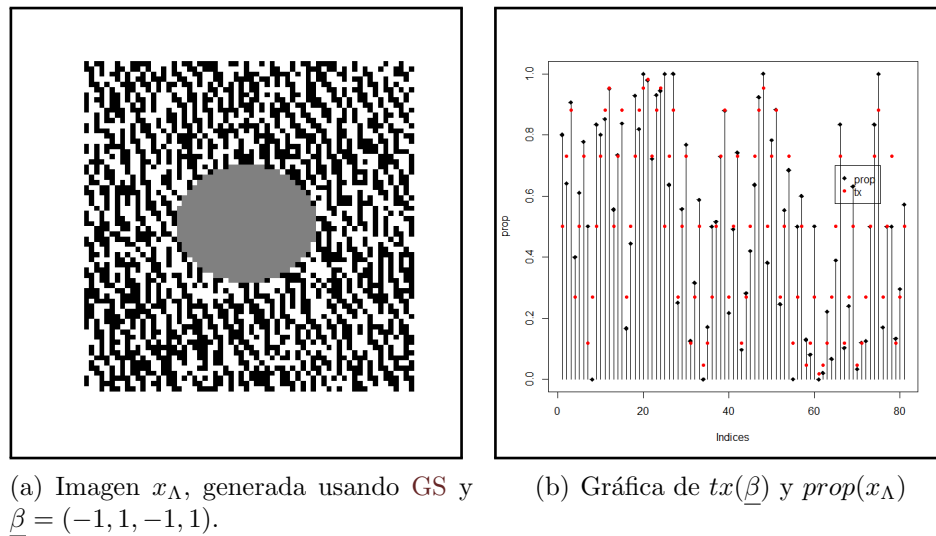


Figura 7.7: Imagen a restaurar.

En la Figura 7.8 se encuentran las estimaciones de $\underline{\beta}$, realizadas utilizando la imagen x_Λ de la Figura 7.7(a).

Se eligió la estimación $\hat{\underline{\beta}}_{OPT} = (-1.12, 0.95, -0.93, 1.05)$ para el método de restauración auto-logístico, es decir, se generó $\hat{x}_{\Lambda_{64} \setminus \Lambda}$ usando GS y $\hat{\underline{\beta}}_{OPT}$. De esta manera la imagen restaurada por el método de restauración auto-logística queda $x_\Lambda \hat{x}_{\Lambda_{64} \setminus \Lambda}$ y puede visualizarse en la Figura 7.9(a). Para la restauración empírica VHDD se gen-

	b1	b2	b3	b4	mf	NA
orig	-1.0000	1.0000	-1.0000	1.0000	1856.856	0
mlg	-0.1241	0.4457	-0.1247	0.6061	2440.434	28
opt	-1.1199	0.9565	-0.9275	1.0488	1852.876	0
sim ann	-0.5115	0.5116	-0.3058	0.9556	2129.707	0
new raph	-1.1199	0.9565	-0.9275	1.0488	1852.876	0
new raph2	-1.1199	0.9565	-0.9275	1.0488	1852.876	0
borg	-1.0971	0.7790	-0.8912	1.1380	1857.165	0

Figura 7.8: Estimadores de $\underline{\beta}$, usando x_Λ de Figura 7.7

eró $\tilde{x}_{\Lambda_{64} \setminus \Lambda}$ utilizando el algoritmo *PS* con el vector de proporciones $prop(x_\Lambda)$. De esta forma, la imagen restaurada queda $x_\Lambda \tilde{x}_{\Lambda_{64} \setminus \Lambda}$, y se observa en la Figura 7.9(b).

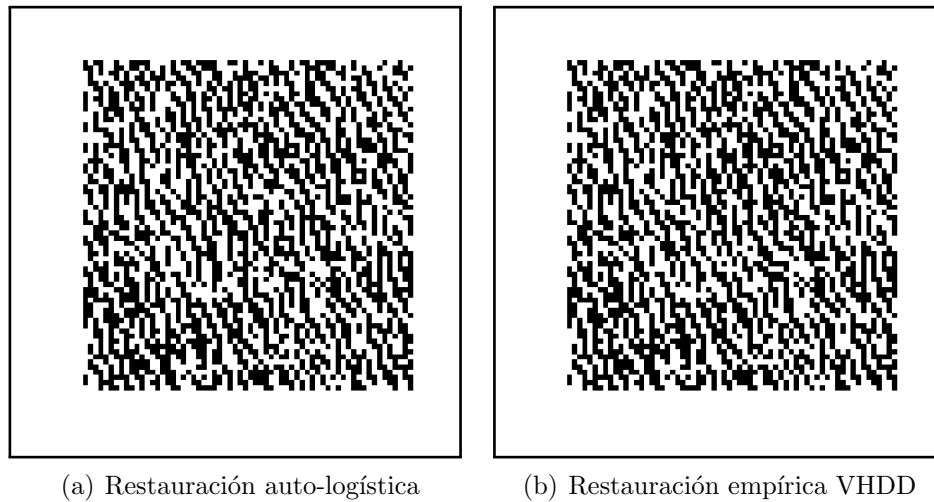


Figura 7.9:

Ejemplo 7.0.4 En la Figura 7.11(a) se encuentra la imagen x_Λ , generada regularmente, repitiendo el «texel» de la Figura 7.10. Se desconoce $x_{\Delta \setminus \Lambda}$, donde $\Lambda \subsetneq \Delta = \Lambda_{64}$ y $\Delta \setminus \Lambda$ se ve de color gris en la Figura 7.11(a). En la Figura 7.12 se encuentran las estimaciones de $\underline{\beta}$, realizadas utilizando la imagen x_Λ de la Figura 7.11(a). En la Figura 7.11(b) se puede ver el gráfico simultáneo de los vectores $tx(\hat{\underline{\beta}}_{OPT})$ y $prop(x_\Lambda)$, donde $\hat{\underline{\beta}}_{OPT} = (-3.75, 1.05, 0.61, 0.75, 0.68)$ fue estimado usando x_Λ .

Se eligió la estimación $\hat{\underline{\beta}}_{OPT} = (-3.75, 1.05, 0.61, 0.75, 0.68)$ para el método de restauración auto-logístico, es decir, se generó $\hat{x}_{\Lambda_{64} \setminus \Lambda}$ usando *GS* y $\hat{\underline{\beta}}_{OPT}$. De esta manera la imagen restaurada por el método de restauración auto-logística queda

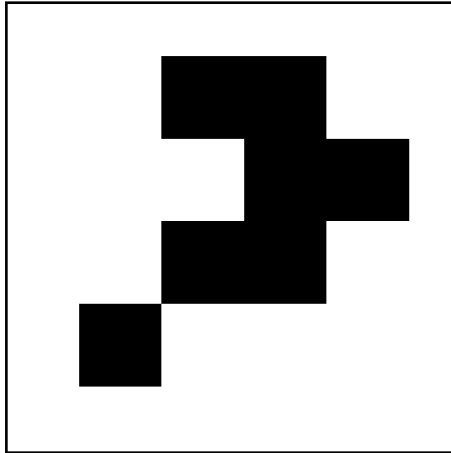
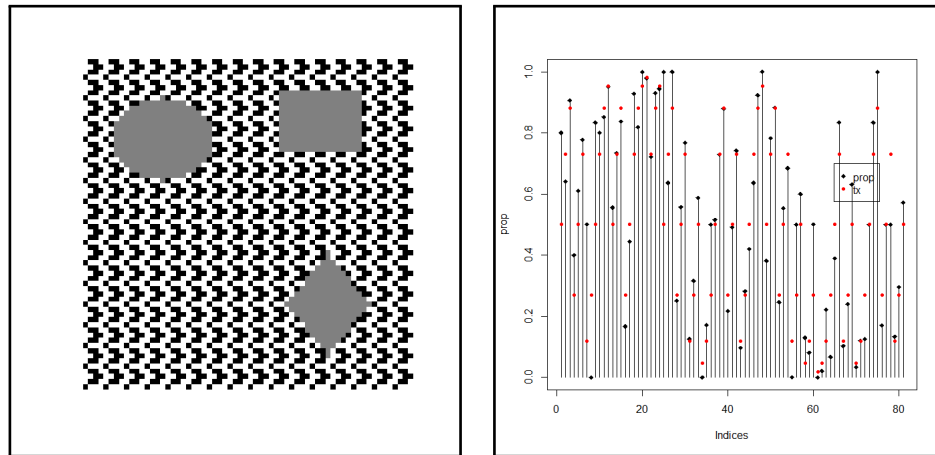


Figura 7.10: Texel de 4×4 píxeles.



(a) Imagen x_Λ , generada regularmente repitiendo el texel de Figura 7.10 sobre Λ_{64} evitando $\Lambda_{64} \setminus \Lambda$ (b) Gráfica de $tx(\hat{\beta}_{OPT})$ y $prop(x_\Lambda)$.

Figura 7.11: Imagen a restaurar.

$x_\Lambda \hat{x}_{\Lambda_{64} \setminus \Lambda}$ y puede visualizarse en la Figura 7.13(a). Para la restauración empírica VHDD se generó $\tilde{x}_{\Lambda_{64} \setminus \Lambda}$ utilizando el algoritmo PS con el vector de proporciones $prop(x_\Lambda)$. De esta forma, la imagen restaurada queda $x_\Lambda \tilde{x}_{\Lambda_{64} \setminus \Lambda}$, y se observa en la Figura 7.13(b).

Los ejemplos presentados hasta ahora han sido simulados de manera controlada, ya sea por el algoritmo GS o por la repetición de un texel. Los siguiente y últimos

	alfa	b1	b2	b3	b4	mf	NA
orig	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	2664.458	19
mlg	-0.7296	0.4279	0.3455	0.2443	0.2106	2807.575	35
opt	-3.7477	1.0461	0.6104	0.7526	0.6845	2363.222	0
sim ann	-6.1580	2.2257	2.0139	1.6489	-0.2344	3094.271	65
new raph	-3.7477	1.0461	0.6104	0.7526	0.6845	2363.222	0
new raph2	-3.7477	1.0461	0.6104	0.7526	0.6845	2363.222	0
borg	-0.4640	0.4489	-0.0012	0.0048	-0.0024	2502.140	2

Figura 7.12: Estimadores de $\underline{\beta}$, usando x_Λ de Figura 7.11

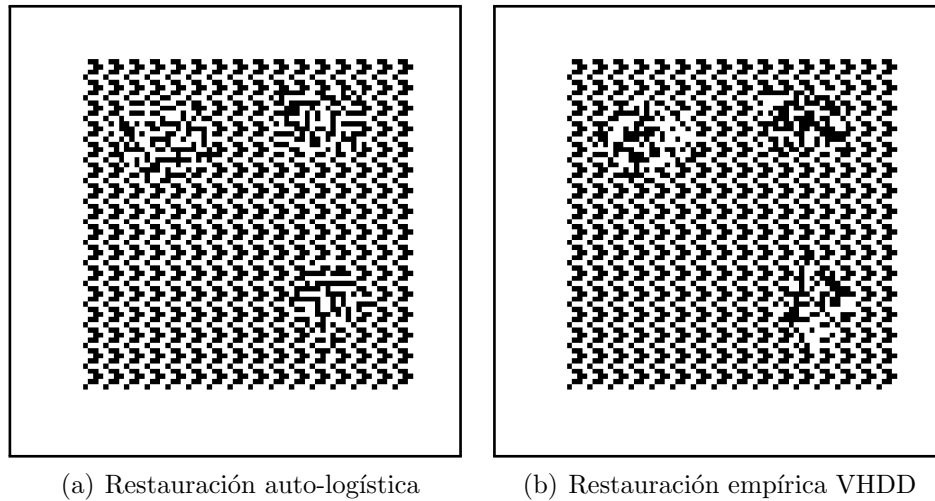


Figura 7.13:

proviene de imágenes reales obtenidas de la base Brodatz [9]. Las imágenes de esta base son monocromáticas, no son binarias. Para trabajar con ellas se las binarizó por «saturación», esto es, a los píxeles cuyo valor supera el valor promedio de la imagen se les asigna el valor 1 y a los restantes se les asigna el valor 0.

Ejemplo 7.0.5 Imagen 15 de base Brodatz

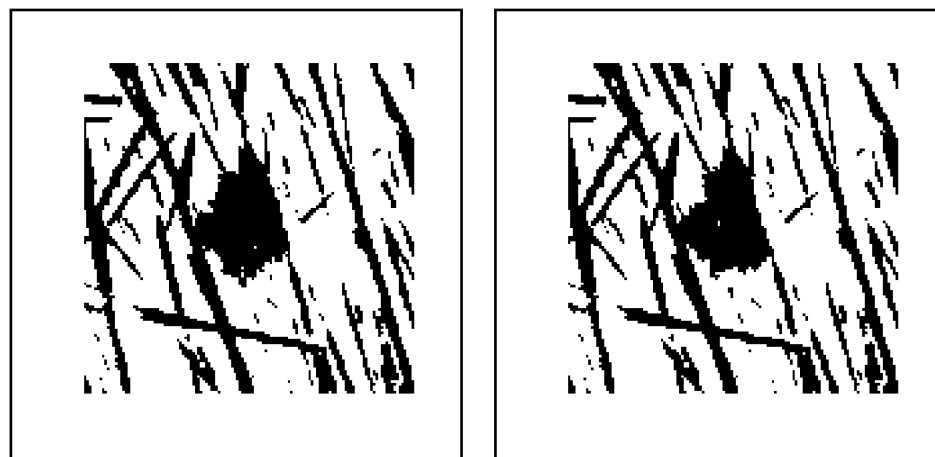
En la Figura 7.14(a) se encuentra la imagen *D15.jpg* de la base Brodatz y en la Figura 7.14(b) se encuentra x_Λ , una subimagen binarizada de 7.14(a) de 128×128 , evitando $\Delta \setminus \Lambda$, donde $\Lambda \subsetneq \Delta = \Lambda_{128}$ y $\Delta \setminus \Lambda$ se ve de color gris en la Figura 7.14(b). De esta manera la imagen restaurada por el método de restauración auto-logística queda $x_\Lambda \hat{x}_{\Lambda_{128} \setminus \Lambda}$ y puede visualizarse en la Figura 7.15(a). Para la restauración empírica VHDD se generó $\tilde{x}_{\Lambda_{128} \setminus \Lambda}$ utilizando el algoritmo PS con el vector de proporciones $prop(x_\Lambda)$. De esta forma, la imagen restaurada queda $x_\Lambda \tilde{x}_{\Lambda_{128} \setminus \Lambda}$, y se observa

en la Figura 7.15(b).



(a) Imagen 15 de Brodatz (b) Subimagen binarizada 128×128

Figura 7.14:



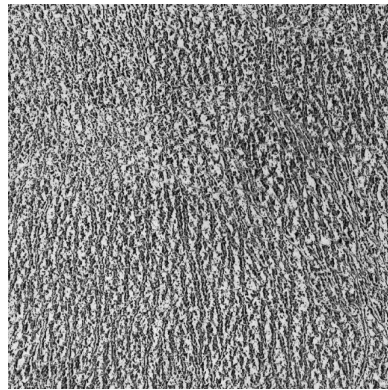
(a) Restauración auto-logística (b) Restauración empírica VHDD

Figura 7.15:

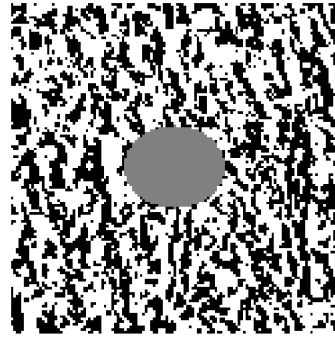
Ejemplo 7.0.6 Imagen 24 de base Brodatz

En la Figura 7.16(a) se encuentra la imagen *D15.jpg* de la base Brodatz y en la Figura 7.16(b) se encuentra x_Λ , una subimagen binarizada de 7.16(a) de 128×128 , evitando $\Delta \setminus \Lambda$, donde $\Lambda \subsetneq \Delta = \Lambda_{128}$ y $\Delta \setminus \Lambda$ se ve de color gris en la Figura 7.16(b).

De esta manera la imagen restaurada por el método de restauración auto-logística queda $x_{\Lambda} \hat{x}_{\Lambda_{128} \setminus \Lambda}$ y puede visualizarse en la Figura 7.17(a). Para la restauración empírica VHDD se generó $\tilde{x}_{\Lambda_{128} \setminus \Lambda}$ utilizando el algoritmo *PS* con el vector de proporciones $\text{prop}(x_{\Lambda})$. De esta forma, la imagen restaurada queda $x_{\Lambda} \tilde{x}_{\Lambda_{128} \setminus \Lambda}$, y se observa en la Figura 7.17(b).

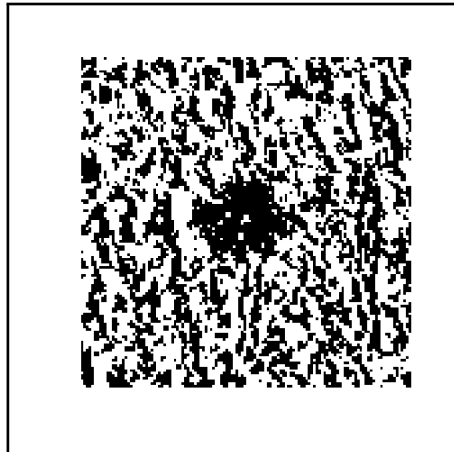


(a) Imagen 24 de Brodatz

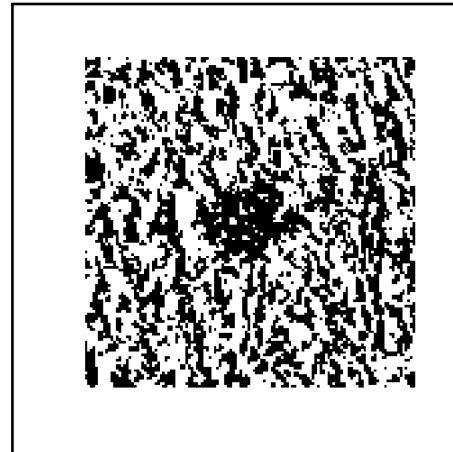


(b) Subimagen binarizada 128×128

Figura 7.16:



(a) Restauración auto-logística

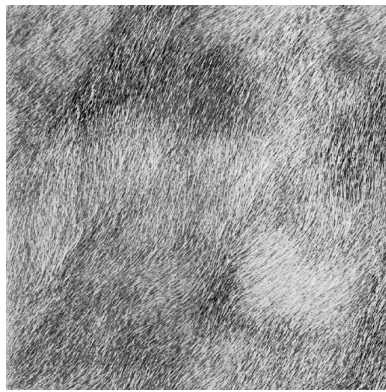


(b) Restauración empírica VHDD

Figura 7.17:

Ejemplo 7.0.7 Imagen 93 de base Brodatz

En la Figura 7.18(a) se encuentra la imagen *D93.jpg* de la base Brodatz y en la Figura 7.18(b) se encuentra x_Λ , una subimagen binarizada de 7.18(a) de 128×128 , evitando $\Delta \setminus \Lambda$, donde $\Lambda \subsetneq \Delta = \Lambda_{128}$ y $\Delta \setminus \Lambda$ se ve de color gris en la Figura 7.18(b). De esta manera la imagen restaurada por el método de restauración auto-logística queda $x_\Lambda \hat{x}_{\Lambda_{128} \setminus \Lambda}$ y puede visualizarse en la Figura 7.19(a). Para la restauración empírica VHDD se generó $\tilde{x}_{\Lambda_{128} \setminus \Lambda}$ utilizando el algoritmo *PS* con el vector de proporciones $\text{prop}(x_\Lambda)$. De esta forma, la imagen restaurada queda $x_\Lambda \tilde{x}_{\Lambda_{128} \setminus \Lambda}$, y se observa en la Figura 7.19(b).



(a) Imagen 93 de Brodatz

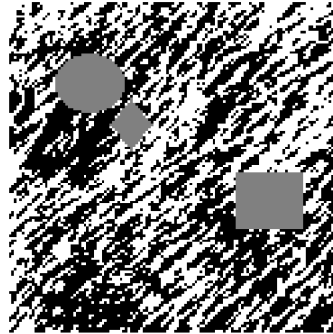
(b) Subimagen binarizada 128×128

Figura 7.18:

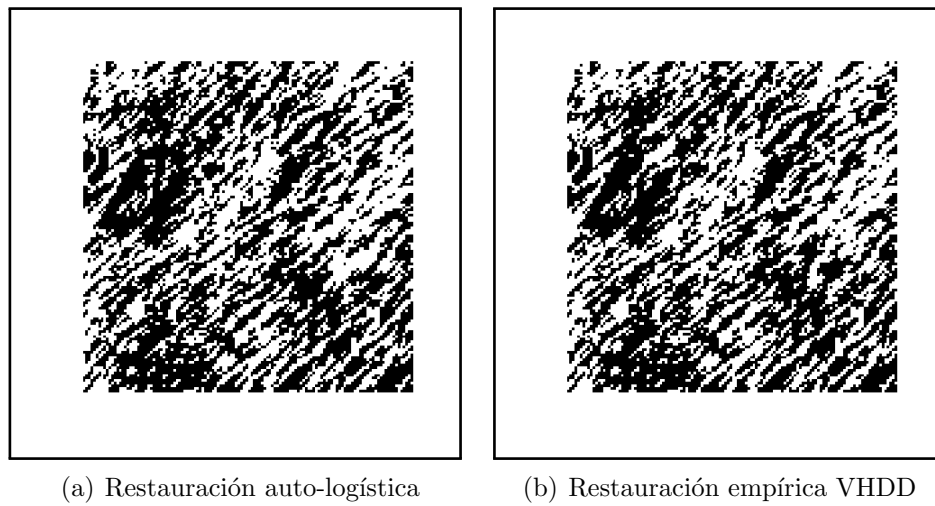


Figura 7.19:

Capítulo 8

Conclusiones y comentarios

El análisis teórico, exploratorio y experimental del modelo auto-logístico, así como de otros modelos Gibbs-Markov, confirmó la idoneidad de estos modelos para la caracterización (o síntesis) de las texturas a través de sus parámetros. Son destacables y novedosos los resultados mostrados en la Sección 1.5.1 sobre la unicidad de la distribución global del modelo auto-logístico, cuando se incorpora el soporte infinito. Estos resultados restringen el espacio paramétrico para asegurar la unicidad, de manera suficiente pero no necesaria. Si bien el resultado teórico es atractivo, es en principio desalentador en un sentido práctico, pues la restricción paramétrica limita la capacidad de modelado de algunas texturas.

Luego de algunas reflexiones, se llegó a la conclusión de que para caracterizar una textura no es necesaria la unicidad de la distribución. De todas formas, la falta de unicidad de la distribución global puede influir en la convergencia de los algoritmos de generación de imágenes, tales como el GS. El software utilizado en el presente trabajo para el desarrollo computacional, R (ver [32]), fue originalmente desarrollado para aplicaciones estadísticas, por lo que la implementación para imágenes recién está en sus comienzos. Su paquete biOps (desarrollado en la Universidad Nacional de Córdoba, ver [7]) abre paso en este ámbito, pues contiene una amplia y completa librería de funciones destinadas al procesamiento y análisis de imágenes. Se utilizó dicho paquete exitosamente para la visualización y almacenamiento de las imágenes generadas en esta tesis, pero se reconocieron, en este aspecto, algunas restricciones del paquete. A la fecha ya se encuentran disponibles nuevos paquetes para la lectura,

visualización y escritura de imágenes en una amplia gama de formatos.

Puede verse, especialmente en la Sección 1.1 y el Capítulo 2, que el modelo auto-logístico resulta idóneo para la caracterización de una amplia variedad de texturas de imágenes binarias a través del vector de parámetros $\underline{\beta}$. En general, las texturas regulares no pertenecen a este grupo. Esto resulta ser así pues el modelo auto-logístico es un modelo aleatorio simétrico (e invariante a traslaciones) y en las texturas regulares existe un patrón rígido (que se repite sistemáticamente) y en general no es simétrico. La forma en la que el modelo describe el comportamiento inter-pixel y caracteriza la textura visible en la imagen; la consideración del método del histograma y la analogía presente en varios descriptores de texturas revisados en el estado del arte (ver Sección 2.3) inspiraron la definición, en esta tesis, de los nuevos descriptores de textura:

- La función *Hist*, definida para cada imagen como una matriz que contiene los conteos de las configuraciones locales relevantes ⁽¹⁾ presentes en la imagen.
- La función *prop*, que al evaluarse en cada imagen devuelve un vector de proporciones (proporción de valores 1's según cada configuración de entorno relevante), calculado utilizando los valores dados por la matriz que devuelve la función *Hist*.

y finalmente

- La función *textura* para el modelo auto-logístico, denotada *tx*, que al evaluarse en cada vector de parámetros $\underline{\beta}$, devuelve un vector de probabilidades (probabilidad de que un pixel tenga valor 1 según cada entorno relevante).

Estas 3 funciones resultan ser buenos descriptores de textura. *Hist* y *prop* se calculan empíricamente mientras que *tx* funciona como un descriptor teórico (ideal) para cada vector $\underline{\beta}$. En resumen, se proponen dos descriptores de textura de imágenes binarias: Una función inyectiva pero no suryectiva del vector de parámetros $\underline{\beta}$ Y una función empírica de una imagen que resume la información de su textura. Se destacan sólo dos pues la información de *Hist* se resume en *prop*, quedando esta última como descriptor de la textura de una imagen binaria, a través de un vector de proporciones,

⁽¹⁾relevantes según el modelo auto-logístico, ver el último párrafo de la Sección 2.1.

directamente comparable con el vector de probabilidades que devuelve la función tx . Esta fuerte relación entre los ámbitos empíricos y teóricos es muy destacable pues logra exitosamente la caracterización de la textura de una imagen a través del vector de parámetros. Puesto que el vector $prop(x_{\Lambda^*})$ representa la textura de la imagen binaria x_{Λ^*} y el vector $tx(\underline{\beta})$ representa la textura de una imagen ideal caracterizada por el vector $\underline{\beta}$. Ambos vectores tienen la misma longitud y cada lugar representa el mismo valor, ya sea logrado empíricamente con una proporción, o idealmente con una probabilidad. Esto puede verse en las Figuras 2.6(b) y 2.7(b) donde se superponen los vectores $prop(x_{\Lambda^*})$ y $tx(\underline{\beta})$. Esto manifiesta la relación (o dualidad) entre el vector ideal de textura y el vector empírico $prop$. Luego, esta relación provee de un marco de trabajo excelente para abordar y combinar los conceptos teóricos y los empíricos con mayor naturalidad y conciencia. Es notable el descubrimiento de la función tx , pues es altamente ventajoso contar con una función teórica de la textura. Y también es notable el estudio de esta función. tx resultó ser inyectiva, evidenciando la identificabilidad del modelo (unicidad del vector de parámetros). También resultó ser no suryectiva, evidenciando las limitaciones del modelo, es decir no todas las texturas binarias están caracterizadas por un modelo auto-logístico.

El marco de trabajo dado por estas funciones contiene medidas de similitud y luego criterios de evaluación, éstos están descriptos en el Capítulo 6. A modo de ejemplo, cuando se requiere comparar las texturas de dos imágenes de manera empírica, conviene utilizar la distancia entre imágenes según sus texturas dt (definida por la función $prop$). Si se requiere evaluar el desempeño de un estimador del vector de parámetros o comparar el desempeño de dos estimadores se utiliza la distancia ideal di (definida por la función tx) o bien la distancia empírica de (definida por la función $prop$ y algún generador de imágenes aleatorio como lo es GS).

Entre los aportes del presente trabajo también se destaca la formalización del modelo de degradación por errores no sistemáticos, así como la formalización de su respectiva restauración bayesiana asumiendo al soporte o grilla de la imagen original no necesariamente finito. Según el enfoque elegido, el aspecto que se intenta restaurar en una imagen corrompida es su textura original. Teniendo esto como objetivo, la restauración bayesiana del modelo de degradación por errores no sistemáticos se mostró inviable si no se tiene más información que la descrita en el modelo. Se

hicieron varias experiencias para distintas situaciones dentro del contexto planteado y no se obtuvieron buenos resultados en ninguno de los casos. Esta situación es esperable en imágenes binarias, pues los cambios dados por errores (del valor 0 al valor 1 o viceversa) tienen la misma magnitud que los cambios dados por las texturas, confundiendo unos con otros e imposibilitando su discriminación.

La restauración o síntesis bajo un modelo auto-logístico requiere de los parámetros del modelo, a priori desconocidos, es necesario aproximarlos mediante estimadores. En este trabajo se estudian algunos propuestos en la literatura y de que manera éstos influyen en la restauración o en la síntesis (caracterización) de las texturas.

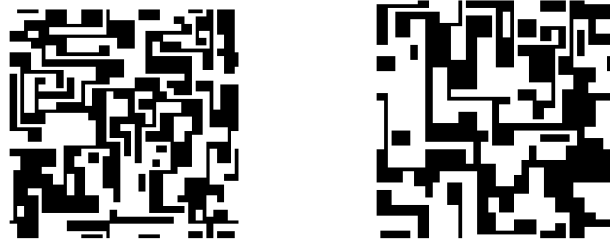
También se formaliza el modelo de degradación por pérdida de información en regiones de píxeles y se proponen dos métodos de restauración (inpainting o imputation) de texturas binarias:

- método de restauración auto-logístico y
- método de restauración empírico VHDD.

Ambos métodos dieron buenos resultados sobre todo cuando las texturas a restaurar cumplieran los supuestos del modelo auto-logístico (una amplia variedad de texturas, ver Figuras 7.1, 7.3, 7.7, 7.9, 7.16(b), 7.17, 7.18(b) y 7.19) y no tan buenos cuando las texturas a restaurar son regulares y/o no cumplen los supuestos de simetría (ver Figuras 7.11, 7.13, 7.14(b) y 7.15).

El ejemplo de las Figuras 7.4 y 7.6 pone en evidencia que ambos métodos de restauración propuestos dependen de la cantidad de iteraciones de cada algoritmo de generación. En el caso del algoritmo GS, por ejemplo, cuando el vector de parámetros $\underline{\beta}$ está muy alejado de la región de unicidad, la cantidad de iteraciones influye en los resultados visuales, pues la convergencia depende de la falta de unicidad de la distribución global (ver Figura 8.1).

El método de restauración auto-logístico depende de la estimación del vector de parámetros. Por más que se presentan varios métodos de estimación en el presente trabajo, sólo se evalúan 3 de ellos. Se concluye que el método PMV con método de optimización BFGS muestra mejores resultados que los restantes y que simulated annealing tiene un mejor desempeño que el del método del histograma. Estas conclusiones se ven de manera contundente en el análisis del estadístico t de la muestra



(a) 500 iteraciones de GS

(b) 8000 iteraciones de GS

Figura 8.1: Imágenes de 64×64 , bajo un modelo auto-logístico con $\underline{\beta} = (20, -20, -20, 10, 10)$

completa y en el de la submuestra. Se vió además, en algunos ejemplos, que los resultados de estimación de *simulated annealing* no son estables, dependen de generaciones aleatorias y al repetir el cálculo, devuelve valores diferentes. Todas estas conclusiones sobre estimación son trasladables al desempeño en inpainting para el método de restauración auto-logístico. En la evaluación de la estimación de parámetros y restauración se utilizaron las distancias derivadas de los descriptores propuestos. Por otro lado estas distancias reflejan visualmente, en los ejemplos elegidos, la validación de su uso para la comparación de texturas (recordar la equivalencia entre dt y de , ver Figuras 6.6, 6.7 y 6.8).

Capítulo 9

Trabajos futuros

Es de mucho interés seguir indagando en las propiedades de la función textura, en las propiedades estadísticas de esta función evaluada en estimadores clásicos, como el de máxima verosimilitud. De esta forma definir, si es posible, algún test de hipótesis con ella.

Quedan abiertos, temas tales como:

- *La estimación del parámetro ϵ y del vector de parámetros $\underline{\beta}$ simultáneamente, asumiendo el modelo de degradación por ruido bajo el modelo auto-logístico. Donde ϵ está relacionado con el ruido (errores), y el vector $\underline{\beta}$ con la imagen ideal.*
- *Programación en paralelo de los algoritmos utilizados y la creación de un paquete del software R, útil para el análisis, síntesis y restauración de texturas binarias.*

Es intención de la autora continuar trabajando en estos temas.

Apéndice A

Definiciones básicas

Definición A.0.1 Sea Ω un conjunto y $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, se dice que \mathcal{D} es una σ -álgebra sobre Ω si:

1. $\emptyset \in \mathcal{D}$ (\mathcal{D} contiene al conjunto vacío)
2. $A \in \mathcal{D} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{D}$ (si \mathcal{D} contiene un conjunto, contiene al complemento)
3. $A_i \in \mathcal{D}, \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{D}$

En ese caso se dice que (Ω, \mathcal{D}) es un espacio medible.

Definición A.0.2 Sea $\mathbf{d} : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que \mathbf{d} es una métrica en Ω si para todo a, b y c en Ω se cumple:

1. $\mathbf{d}(a, b) \geq 0$
2. $\mathbf{d}(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$
3. $\mathbf{d}(a, b) = \mathbf{d}(b, a)$
4. $\mathbf{d}(a, c) \leq \mathbf{d}(a, b) + \mathbf{d}(b, c)$

En ese caso se dice que (Ω, \mathbf{d}) es un espacio métrico. Luego se define el disco abierto centrado en x de radio $\delta > 0$: $D(x, \delta) \doteq \{y \in \Omega / \mathbf{d}(x, y) < \delta\}$.

Definición A.0.3 Sea \mathbf{d} una métrica sobre Ω , se dice que \mathbf{d} es la métrica discreta si cumple:

$$\mathbf{d}(a, b) = \begin{cases} 0 & a = b \\ 1 & a \neq b \end{cases}, \text{ para todo } a \text{ y } b \text{ en } \Omega.$$

Salvo mención de lo contrario, en los ejemplos de este trabajo, se considera la métrica discreta.

Definición A.0.4 Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en (Ω, \mathbf{d}) se dice que es de Cauchy si para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{d}(a_k, a_m) < \epsilon$ para todo $k \geq N$ y $m \geq N$.

Definición A.0.5 Se dice que un espacio métrico es completo si toda sucesión de Cauchy en el espacio converge.

Definición A.0.6 Se dice que un espacio métrico es separable si posee un subconjunto denso y a lo sumo numerable.

Definición A.0.7 Un espacio Ω se dice topológico si posee una topología τ , esto es:

1. $\tau \subset \mathcal{P}(\Omega)$
2. $\emptyset \in \tau, \Omega \in \tau$
3. $A \in \tau, B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$
4. $\bigcup_{A \in \tau_0} A \in \tau$, para $\tau_0 \subset \tau$

Los conjuntos que forman τ son llamados abiertos, y sus complementos cerrados.

Definición A.0.8 Se dice que τ es la topología inducida por la métrica si:

$$A \in \tau \Leftrightarrow \forall x \in A \exists \delta > 0 \text{ tal que } D(x, \delta) \subset A$$

Salvo mención de lo contrario, en los ejemplos de espacios métricos en este trabajo, τ denota la topología inducida por la métrica.

Definición A.0.9 Se llama σ -álgebra de Borel de un espacio métrico a la menor sigma álgebra que contiene a τ . Se denota por \mathcal{B}_1 a la σ -álgebra de Borel sobre \mathbb{R} ⁽¹⁾.

⁽¹⁾con la métrica dada por distancia euclídea, $d(x, y) = |x - y|$

Observación A.0.1 Considerando Ω con la métrica discreta, se cumple:

1. $D(x, \delta) = \{x\}$,
2. $\tau = \mathcal{P}(\Omega)$ y
3. la σ -álgebra de Borel también es $\mathcal{P}(\Omega)$

A.1. Medidas de Probabilidad

Definición A.1.1 Se dice que $\mu : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ es una medida sobre (Ω, \mathcal{D}) si:

1. $\mu(\emptyset) = 0$ y
2. $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$, siempre que $A_i \in \mathcal{D}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$

Definición A.1.2 Sea μ una medida (sobre (Ω, \mathcal{D})) dice que es σ -finita si existe $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, una sucesión en \mathcal{D} que cumple:

1. $\Omega = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ y
2. $\mu(A_i) < \infty$, $i \in \mathbb{N}$.

Notación A.1.1 $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{D}) \doteq \{\mu/\mu \text{ es medida } \sigma\text{-finita sobre } (\Omega, \mathcal{D})\}$.

Definición A.1.3 Se dice que $P : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ es una probabilidad sobre (Ω, \mathcal{D}) si:

1. P es una medida sobre (Ω, \mathcal{D}) y
2. $P(\Omega) = 1$

Notación: $\mathcal{P}(\Omega, \mathcal{D}) \doteq \{P/P \text{ es probabilidad sobre } (\Omega, \mathcal{D})\}$.

Definición A.1.4 Se dice que (Ω, \mathcal{D}, P) es un espacio de probabilidad si (Ω, \mathcal{D}) es un espacio medible y P una probabilidad sobre (Ω, \mathcal{D}) .

Definición A.1.5 Para cada $\omega \in \Omega$ se define y denota δ_ω , la probabilidad sobre (Ω, \mathcal{D}) que cumple:

$$\delta_\omega(C) \doteq 1_C(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in C \\ 0 & \omega \notin C \end{cases}, \forall C \in \mathcal{D}$$

Definición A.1.6 Sea μ una probabilidad sobre (Ω, \mathcal{D}) , A , B y D en \mathcal{D} tal que $\mu(D) \neq 0$, se denota

$$\mu(A, B) \doteq \mu(A \cap B),$$

luego se define y denota la probabilidad condicional de A dado D por:

$$\mu(A|D) \doteq \frac{\mu(A, D)}{\mu(D)}$$

Esta definición está sujeta a que $\mu(D) \neq 0$, en general y en este trabajo son relevantes los casos en que $\mu(D) = 0$. Se extenderá la definición de probabilidad condicional para incluir los casos no contemplados.

Definición A.1.7 Para Ω un espacio finito o infinito numerable, sea $\rho : \Omega \rightarrow [0, 1]$, se llama función densidad sobre Ω si cumple:

- $\rho(y) \geq 0$ y
- $\sum_{y \in \Omega} \rho(y) = 1$.

Ejemplo A.1.1 Para Ω un espacio finito o infinito numerable. Si μ es una probabilidad sobre Ω , $\rho : \Omega \rightarrow [0, 1]$ definida por $\rho(y) = \mu(\{y\})$ para todo $y \in \Omega$, es una función de densidad sobre (Ω, \mathcal{D}) (y viceversa).

Definición A.1.8 Para Ω un espacio finito o infinito numerable. Sea $p : \Omega \times \Omega \rightarrow [0, 1]$, $p(\cdot, \cdot)$ se llama función de transición sobre Ω si para cada $x \in \Omega$, $p(x, \cdot)$ es una función de densidad sobre Ω , esto es:

- $p(x, y) \geq 0$ y
- $\sum_{y \in \Omega} p(x, y) = 1$.

Definición A.1.9 Sean (Ω, \mathcal{D}) , $(\Omega_1, \mathcal{D}_1)$ espacios medibles, un mapeo $F : \Omega \rightarrow \Omega_1$ y una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Bajo las notaciones: $(F \in A) \doteq F^{-1}(A) \doteq \{\omega / F(\omega) \in A\}$, $\forall A \in \mathcal{D}_1$ y $(f \in A) \doteq f^{-1}(A) \doteq \{\omega / f(\omega) \in A\}$, $\forall A \in \mathcal{B}_1$, se dice que :

1. F es un mapeo \mathcal{D} -medible, medible o que $F \in \mathcal{D}$ si: $(F \in A) \in \mathcal{D}$ para todo $A \in \mathcal{D}_1$;
2. f es una función \mathcal{D} -medible, medible o que $f \in \mathcal{D}$ si: $(f \in A) \in \mathcal{D}$ para todo $A \in \mathcal{B}_1$ (equivalentemente para todo A abierto de \mathbb{R})
3. f es simple si existen n , $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$ y A_1, A_2, \dots, A_n en \mathcal{D} , disjuntos de a pares tal que $\mu(A_1) \neq 0, \mu(A_2) \neq 0, \dots, \mu(A_n) \neq 0$ y

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i}(x), x \in \Omega$$

(a esta expresión se la llama la representación canónica de f).

Notación A.1.2 Otras notaciones útiles: $(F = b) \doteq F^{-1}(b) \doteq \{\omega / F(\omega) = b\}$, $\forall b \in \Omega_1$ y $(f = b) \doteq f^{-1}(b) \doteq \{\omega / f(\omega) = b\}$, $\forall b \in \mathbb{R}$

Definición A.1.10 Sea f una función medible y sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles se dice que:

1. f_n converge a f c.s. (notación: $f_n \rightarrow f$ c.s.) si

$$\mu(\{x \in \Omega / f_n(x) \text{ no converge a } f(x)\}) = 0$$

2. f_n converge en μ -medida a f (notación: $f_n \xrightarrow{\mu} f$) si

$$\epsilon > 0 \Rightarrow \mu(\{x \in \Omega / |f_n(x) - f_m(x)| \geq \epsilon\}) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$$

Definición A.1.11 Sea (Ω, \mathcal{D}) espacio medible,

1. Si f es simple y

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i}(x), x \in \Omega$$

es su representación canónica, se dice que f es μ -integrable o integrable. Se define y denota su integral (con respecto a μ):

$$\int f d\mu \doteq \int f(x)\mu(dx) \doteq \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i)$$

2. Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones simples, se dice que es de Cauchy en μ -media si para todo $\epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{N}$ se cumple:

$$\int |f_n - f_m| d\mu < \epsilon^{(2)}$$

3. Si f es \mathcal{D} -medible y $\mu(f \neq 0) < \infty \exists (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión de funciones simples de Cauchy en μ -media tal que $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Se define y denota la integral de f (con respecto a μ):

$$\int f d\mu \doteq \int f(x)\mu(dx) \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x)\mu(dx).$$

También conocida como esperanza de f , con notación alternativa:

$$E(f) \doteq E_\mu(f) \doteq \int f d\mu.$$

Si $\int f d\mu < \infty$ se dice que f es μ -integrable o integrable. Se define y denota la integral de f en $B \in \mathcal{D}$ como:

$$\int_B f d\mu \doteq \int_B f(x)\mu(dx) \doteq \int f(x)1_B(x)\mu(dx)$$

Definición A.1.12 Sea \mathcal{B} una σ -álgebra tal que $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}$, μ una probabilidad sobre Ω , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ función \mathcal{D} -medible y $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Se dice que g es (una versión de) la esperanza condicional de f dado \mathcal{B} con respecto a μ si g es \mathcal{B} -medible y

$$\int_B g d\mu = \int_B f d\mu, \forall B \in \mathcal{B}.$$

⁽²⁾ $|f_n - f_m|$ también es función simple

Se denota el conjunto de todas las versiones de la esperanza condicional de f por:

$$E(f|\mathcal{B}) \doteq E_\mu(f|\mathcal{B}) \doteq \{g \text{ } \mathcal{B}\text{-medible} / \int_B g d\mu = \int_B f d\mu, \forall B \in \mathcal{B}\}$$

Observación A.1.1 Es de notar que si $g \in E_\mu(f|\mathcal{B})$ y $h \in E_\mu(f|\mathcal{B})$, entonces $\mu(g = h) = 1$

Definición A.1.13 Sea $A \in \mathcal{D}$ ⁽³⁾ y $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Se dice que g es (una versión de) la probabilidad condicional de A dado \mathcal{B} con respecto a μ si g es \mathcal{B} -medible y

$$\int_B g d\mu = \int_B 1_A d\mu = \mu(A \cap B), \forall B \in \mathcal{B}.$$

Es decir: si g es (una versión de) la esperanza condicional de 1_A dado \mathcal{B} . Se denota por $\mu(A|\mathcal{B})$ al conjunto de todas las versiones de la probabilidad condicional de A dado \mathcal{B} , y cumple: $\mu(A|\mathcal{B}) = E_\mu(1_A|\mathcal{B})$.

Definición A.1.14 Sea $\tilde{\gamma}(\cdot) : \mathcal{D} \times \Omega \rightarrow [0, 1]$, se dice que es una probabilidad condicional regular dada $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}$ (para μ) si:

1. La función $\omega \rightarrow \tilde{\gamma}(A|\omega)$ es una versión de $\mu(A|\mathcal{B})$, para cada $A \in \mathcal{D}$ y
2. $A \rightarrow \tilde{\gamma}(A|\omega)$ es una probabilidad sobre (Ω, \mathcal{D}) , para cada $\omega \in \Omega$.

Teorema A.1.1 Teorema de Bayes Sea $G \in \mathcal{B}$ y $f(a|\cdot)$ una versión de $\mu(A|\mathcal{B})$, se cumple:

$$\mu(G|A) = \frac{\int_G f(A|\omega)\mu(d\omega)}{\int_\Omega f(A|\omega)\mu(d\omega)} = \frac{\int_G \mu(A|\mathcal{B})d\mu}{\int_\Omega \mu(A|\mathcal{B})d\mu} \quad (\text{A.1})$$

Si \mathcal{B} está generado por una partición de Ω (i.e. $\Omega = \bigcup_j G_j$ y $\mu(G_j) > 0$), el Teorema se reduce a

$$\mu(G_j|A) = \frac{\mu(A|G_j)\mu(G_j)}{\sum_j \mu(A|G_j)\mu(G_j)} \quad (\text{A.2})$$

⁽³⁾ $A \in \mathcal{D} \Rightarrow 1_A$ es \mathcal{D} -medible

A.2. Estadística Bayesiana

Bajo un modelo paramétrico, con parámetro $\alpha \in \Gamma \subset \mathbb{R}^p$ (con $p \in \mathbb{N}$), la estadística Bayesiana busca estimar α utilizando cualquier conocimiento previo que se tenga del parámetro fijando una Distribución a Priori $p(\alpha)$, densidad de la distribución de los valores posibles de α . Sea (x_1, x_2, \dots, x_n) el vector de datos (realización de (X_1, X_2, \dots, X_n) vector aleatorio) y sea $P((x_1, x_2, \dots, x_n)|\alpha)$ la probabilidad conjunta fijado el parámetro α . Luego, por el teorema de Bayes, la probabilidad a Posteriori se calcula

$$P(\alpha|(x_1, \dots, x_n)) = \frac{P((x_1, x_2, \dots, x_n)|\alpha)P(\alpha)}{\sum_{\tilde{\alpha} \in \Gamma} P((x_1, x_2, \dots, x_n)|\tilde{\alpha})p(\alpha)} \quad (\text{A.3})$$

si la probabilidad a priori $p(\alpha)$ es probabilidad puntual (Γ discreta) o

$$P(\alpha|(x_1, \dots, x_n)) = \frac{P((x_1, x_2, \dots, x_n)|\alpha)P(\alpha)}{\int_{\tilde{\alpha} \in \Gamma} P((x_1, x_2, \dots, x_n)|\tilde{\alpha})p(\alpha)} \quad (\text{A.4})$$

si la probabilidad a priori $p(\alpha)$ es continua.

Apéndice B

Algoritmos de simulación y optimización

B.1. Cadenas de Markov (de imágenes)

A continuación se presenta el marco teórico necesario para construir una cadena de Markov de imágenes. Se tiene la intención de que esta cadena converja a una realización de un proceso bajo una distribución de Gibbs.

Sea $\Delta \in \mathcal{S}$ (soporte finito), sea $\Omega_* = E^\Delta \times \dots \times E^\Delta \times \dots = (E^\Delta)^{\mathbb{N} \cup \{0\}}$ (el conjunto de todas las sucesiones de imágenes en E^Δ , es decir $\omega \in \Omega_* \Rightarrow \omega = (\omega(i))_{i \geq 0}$ tal que $\omega(i) \in E^\Delta$) y sea $\mathcal{D}_* \doteq (\mathcal{E}^\Delta)^{\mathbb{N} \cup \{0\}}$ la σ -álgebra producto. Notar que E^Δ es un espacio finito. Fijada una función de densidad ρ y una sucesión de funciones de transición $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sobre $(E^\Delta, \mathcal{E}^\Delta)$. Sea

$$P(\cdot; \rho, (p_n))$$

la única probabilidad sobre $(\Omega_*, \mathcal{D}_*)$ que cumple:

$$P(\{\omega \in \Omega_* / \omega(0) = x_0, \omega(1) = x_1, \dots, \omega(n) = x_n\}; \rho, (p_n)) = \rho(x_0) p_1(x_0, x_1) \cdots p_n(x_{n-1}, x_n).$$

Notación B.1.1 Se pondrá:

- $P(\cdot; x, (p_n))$ en lugar de $P(\cdot; \delta_x, (p_n))$, para cada $x \in E^\Delta$

- $P(\cdot; \rho, p)$ en lugar de $P(\cdot; \rho, (p_n))$ si $p_n = p$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Sea $(X_n)_{n \geq 0}$ una sucesión de campos aleatorios \mathcal{D}_* -medibles tal que para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $X_n : \Omega_* \rightarrow E^\Delta$ está definido por $X_n(\omega) = \omega(n)$, para cada $\omega \in \Omega_*$, y se cumple:

- $P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n; \rho, (p_n)) = \rho(x_0) p_1(x_0, x_1) p_2(x_1, x_2) \cdots p_n(x_{n-1}, x_n)$, luego también se cumple:
- $P(X_0 = x; \rho, (p_n)) = \rho(x)$ y

$$\begin{aligned} P(X_n = y | X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x; \rho, (p_n)) &= p_n(x, y) \\ &= P(X_n = y | X_{n-1} = x; \rho, (p_n)), \end{aligned}$$

Es decir $(X_n)_{n \geq 0}$ es una $P(\cdot; \rho, (p_n))$ -cadena de Markov. A ρ se la llama densidad inicial y a las funciones de transición p_n kernels de Markov.

B.2. Gibbs sampler

Definición B.2.1 Sea $\Delta \in \mathcal{S}$ (soporte finito), sea π una densidad sobre $(E^\Delta, \mathcal{E}^\Delta)$ se dice que es de Gibbs si para cada $x_\Delta \in E^\Delta$:

$$\pi(x_\Delta) = \frac{\exp\left(-\sum_{\Lambda \in \mathcal{S}(\Delta)} \Phi_\Lambda(x_\Delta)\right)}{\sum_{z_\Delta \in E^\Delta} \exp\left(-\sum_{\Lambda \in \mathcal{S}(\Delta)} \Phi_\Lambda(z_\Delta)\right)} \quad (\text{B.1})$$

donde $\Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{S}(\Delta)}$ es un potencial. Para cada $s \in \Delta$ se define su característica local π_s como la función definida sobre E^Δ , que para cada x_Δ cumple:

$$\pi_s(x_\Delta) = \frac{\exp\left(-\sum_{\Lambda \in \mathcal{S}_{\{s\}}(\Delta)} \Phi_\Lambda(x_\Delta)\right)}{\sum_{z_s \in E} \exp\left(-\sum_{\Lambda \in \mathcal{S}_{\{s\}}(\Delta)} \Phi_\Lambda(z_s, x_{\Delta \setminus \{s\}})\right)}. \quad (\text{B.2})$$

La realización de una imagen proveniente de una densidad de Gibbs es intratable debido al alto número de sumandos en el denominador de la Ecuación B.1. *GS* es un algoritmo que fijada una distribución de Gibbs, utiliza sus características locales para

generar una sucesión de imágenes proveniente de una sucesión de campos aleatorios cuyas densidades convergen a la densidad de Gibbs.

Sea $(s_k)_{k \geq 1}$ una sucesión en Δ tal que $\#\{k/s_k = s\} = \infty$ para todo $s \in S$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ sea p_k la función de transición sobre $(E^\Delta, \mathcal{E}^\Delta)$ dada por:

$$p_k(v, y) = \begin{cases} \pi_{s_k}(y) & \text{si } y_{\Delta \setminus \{s_k\}} = v_{\Delta \setminus \{s_k\}} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Sea x_0 una imagen (inicial) cualquiera de E^Δ , se define ahora por inducción una sucesión $(X_n)_{n \geq 0}$ de campos aleatorios tal que sea una $P(\cdot; x_0, (p_n))$ -cadena de Markov. Sea X_0 la función constante que cumple $X_0(\omega) = x_0$, para todo $\omega \in \Omega_*$. Sea $k \geq 0$, se suponen definidas X_0, \dots, X_k , se define ahora X_{k+1} . Sea X_{k+1} definida sobre Ω_* tal que para cada $\omega \in \Omega_*$:

$$(X_{k+1}(\omega))_t = \begin{cases} (X_k(\omega))_t & \text{si } t \neq s_{k+1}, \\ \eta_{s_{k+1}}(\omega) & \text{si } t = s_{k+1}, \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

donde $P(\eta_s = \varsigma_s | X_k = v, X_{k-1} = \dots, X_0 = x_0; x_0, (p_k)) = \pi_s(\varsigma_s v_{\Delta \setminus \{s\}})$.

Luego $(X_n)_{n \geq 0}$ es una $P(\cdot; x_\Delta, (p_n))$ -cadena de Markov como en la Sección B.1. El teorema de Geman y Geman asegura que para todo $y \in E^\Delta$ se cumple:

$$P(X_n = y; x_0, (p_n)) \rightarrow_n \pi(y),$$

es decir la densidad de X_n converge a la densidad de Gibbs.

Como casos particulares, al considerar un campo aleatorio $X : \omega \rightarrow E^S$ (S infinito) con distribución de Gibbs-Markov ($P_X \in \mathcal{G}(\Phi)$, con Φ ∂ -potencial), la densidad de X_Λ (condicional al entorno $x_{\partial\Lambda}$) es una distribución de Gibbs sobre E^Λ :

$$\pi(x_\Lambda) = p(x_\Lambda | x_{\partial\Lambda}) \doteq P_{x_{\partial\Lambda}}(X_\Lambda = x_\Lambda) = \frac{e^{-\sum_{\Delta \in \mathcal{C}_\Lambda} \Phi_\Delta(x_\Lambda x_{S \setminus \Lambda})}}{\sum_{z_\Lambda \in E^\Lambda} e^{-\sum_{\Delta \in \mathcal{C}_\Lambda} \Phi_\Delta(z_\Lambda w_{S \setminus \Lambda})}}, \quad (\text{B.5})$$

para el potencial $\tilde{\Phi} = (\Phi_\Delta)_{\Delta \in \mathcal{S}(\Lambda^*)}$. Cuyas características locales cumplen:

$$\pi_s(x_\Lambda) = \frac{e^{-\sum_{\Delta \in \mathcal{C}_{\{s\}}} \Phi_\Delta(x_{\{s\}} x_{S \setminus \Lambda})}}{\sum_{z_{\{s\}} \in E^{\{s\}}} e^{-\sum_{\Delta \in \mathcal{C}_{\{s\}}} \Phi_\Delta(z_{\{s\}} w_{S \setminus \{s\}})}}$$

donde $x_{\partial\Lambda}$ está fijo y funciona como parámetro.

De la misma forma la densidad a posteriori condicional al entorno $x_{\partial\Lambda}$ dada la imagen observada y_Λ , definida en la Sección 4.1, dada por:

$$\pi(x_\Lambda) = p(x_\Lambda | y_\Lambda, x_{\partial\Lambda}) = \frac{\left(\frac{\epsilon}{1-\epsilon}\right)^{\sum_{s \in \Lambda} y_s \oplus x_s} e^{-\sum_{\Delta \in \mathcal{C}_\Lambda(\partial)} \Phi_\Delta(x)}}{\sum_{z_\Lambda \in E^\Lambda} \left(\frac{\epsilon}{1-\epsilon}\right)^{\sum_{s \in \Lambda} y_s \oplus z_s} e^{-\sum_{\Delta \in \mathcal{C}_\Lambda(\partial)} \Phi_\Delta(z_\Lambda x_{S \setminus \Lambda})}}, \quad (\text{B.6})$$

donde $x_{\partial\Lambda}$ e y_Λ están fijos y funcionan como parámetros al igual que ϵ (probabilidad de error en cada pixel). Esta densidad cumple ser de Gibbs sobre E^Λ para el potencial $\tilde{\Phi} = (\tilde{\Phi}_\Delta)_{\Delta \in \mathcal{S}(\Lambda^*)}$ definido por:

$$\tilde{\Phi}_\Delta(x_\Lambda) = \begin{cases} \Phi_\Delta(x) & \#(\Delta) \geq 2 \\ \Phi_s(x) + (\ln(\epsilon) - \ln(1-\epsilon))(x_s \oplus y_s) & \Delta = \{s\}, s \in \Lambda \end{cases}, \quad (\text{B.7})$$

donde Φ es como el Ejemplo 1.3.1.

B.3. Simulated annealing

El método busca el argumento que maximiza una función $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$. El método es un algoritmo iterativo enumerado por i tal que $0 \leq i \leq I$, I = número máximo de iteraciones. Definida una sucesión de números $\{c_i\}_{i \geq 0}$ convergentes a 0, el algoritmo consiste de los siguientes pasos:

1. Para $i = 0$: Seleccionar un punto inicial $\underline{\beta}^{(0)} \in \mathbb{R}^k$.
2. Para $i \geq 0$: Se selecciona $\underline{\beta}_d = \underline{\beta}^{i-1} +$ pequeña distorsión.
3. Si $f(\underline{\beta}_d) \geq f(\underline{\beta}^{i-1}) \Rightarrow \underline{\beta}^{(i)} \doteq \underline{\beta}_d$, sino:

$$\underline{\beta}^{(i)} \doteq \begin{cases} \underline{\beta}_d & \text{con probabilidad } \exp\left(\frac{f(\underline{\beta}_d) - f(\underline{\beta}^{i-1})}{c_i}\right) \\ \underline{\beta}^{i-1} & \text{caso contrario} \end{cases}$$

4. Si $i = I$, definir como estimador $\widehat{\underline{\beta}}_{SA} \doteq \underline{\beta}^{(i)}$ y parar, sino $i \doteq i + 1$ y volver al paso 2.

Dependiendo de que argumento se considere y que valores se dejen fijos o se consideren conocidos, este método encontrar o bien la imagen (fijando el vector de parámetros, análogamente a Gibbs sample) o bien el vector de parámetros dejando fija y conocida la imagen, argumento que maximice la función de verosimilitud. Esta última es la que se implementa en el presente trabajo.

La desventaja de este modelo es el largo tiempo de demora en la estimación. Otro dato a tener en cuenta es que debido a la aleatorización incorporada en el algoritmo, en el estudio exploratorio se pudo ver como, utilizando la misma imagen de entrada y la misma cantidad de iteraciones del algoritmo, se obtienen resultados diferentes. Las estimaciones del vector del parámetros resultaron diferentes y las imágenes generadas por éstas también resultaron diferentes en cuanto a la evaluación visual.

B.4. Método de BFGS

El *BFGS* es el método quasi-Newton más popular (según Peter Blomgren) y no necesita las derivadas segundas (es decir no necesita de la matriz Hessiana). El método busca el argumento que maximiza una función $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$. El método consiste en un algoritmo conformado por los siguientes pasos:

1. Seleccionar un punto inicial $\underline{\beta}^{(0)} \in \mathbb{R}^k$.

Inicializar $A^{(0)} = I_{k \times k}$, $i = 0$.

2. Para $i \geq 0$. Calcular $g^{(i)} = -\nabla f(x^{(i)})$

Si $\|g^{(i)}\| \approx 0 \Rightarrow \widehat{\underline{\beta}} = \underline{\beta}^{(i)}$ y parar.

Sino, calcular $\underline{\beta}^{(i+1)} = \underline{\beta}^{(i)} + t^{(i)} A^{(i)} g^{(i)}$, donde $t^{(i)} \geq 0$ se elige minimizando $f(x^{(i)} + t^{(i)} A^{(i)} g^{(i)})$

3. Calcular $p^{(i)} = \underline{\beta}^{(i+1)} - \underline{\beta}^{(i)} \in \mathbb{R}^k$, $q^{(i)} = g^{(i+1)} - g^{(i)} \in \mathbb{R}^k$,
 $A^{(i+1)} = A^{(i)} + \left[1 + \frac{(q^{(i)})^t A^{(i)} q^{(i)}}{(p^{(i)})^t q^{(i)}} \right] \frac{p^{(i)} (p^{(i)})^t}{(p^{(i)})^t q^{(i)}} - \frac{p^{(i)} (q^{(i)})^t A^{(i)} + A^{(i)} q^{(i)} (p^{(i)})^t}{(p^{(i)})^t q^{(i)}}$, Si $\|p^{(i)}\| \approx 0 \Rightarrow \widehat{\underline{\beta}} = \underline{\beta}^{(i)}$ y parar. Sino, $i = i + 1$ y volver al paso 2.

En la práctica, las búsquedas lineales son inexactas y la matriz A puede volverse indefinida o singular debido a errores de redondeo acumulados. Con lo cual conviene reinicializarla periódicamente usando la matriz identidad. Existe bastante evidencia empírica que indica que este método es menos susceptible a las búsquedas lineales inexactas que otros métodos y que requiere también menos reinicializaciones. Estudios experimentales y la práctica sugieren que el método *BFGS* es superior a Newton-Raphson y otros "métodos Newton". En el software R este método puede implementarse con la función «*constrOptim*». Esta función otorga la ventaja de poder realizar la optimización con restricciones dadas por inequaciones lineales. Si bien la región de unicidad no es una región definida por inequaciones lineales, puede definirse una región de este tipo muy «ajustada» a ésta que también asegure unicidad. Con lo cual si se busca la estimación del vector de parámetros del modelo autobinomial sobre una región que asegure unicidad se cuenta con la mencionada función para poder realizarlo.

Bibliografía

- [1] S. Albeverio, Y. Kondratieva, M. Röckner, y T. Tsikalenko. *Uniqueness of gibbs states on loop lattices*. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, 324(12):1401–1406, 1997.
- [2] J. Alvarado y J. Fernández. *Análisis de textura de imágenes a escala de grises utilizando patrones locales binarios (lbp)*. *Revista Electrónica de la Facultad de Ingeniería*, 1:1–6, 2012.
- [3] J. E. Besag. *Nearest-neighbour systems and the auto-logistic model for binary data*. *Jr. R. Stat. Soc. B*, 1:75–83, 1972.
- [4] J. E. Besag. *Spatial interaction and the statistical analysis of lattice systems (with discussion)*. *Jr. R. Stat. Soc. B*, 2:192–236, 1974.
- [5] J. E. Besag. *On the statistical analysis of dirty pictures (with discussion)*. *Jr. R. Stat. Soc. B*, 48:259–302, 1986.
- [6] V. Betz y J. Lorinczi. *Uniqueness of gibbs measures relative to brownian motion*. *Annales de l'Institut Henri Poincaré (B) Probability and Statistics*, 39:877 – 889, 2003.
- [7] M. Bordese y W. Alini. *biOps: Image processing and analysis, 2013*. URL <http://CRAN.R-project.org/package=biOps>. *R package version 0.2.2*.
- [8] C. Borges. *On the estimation of markov random field parameters*. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 21 No. 3:0–0, 1999.
- [9] P. Brodatz. *Textures: A Photographic Album for Artists and Designers*. *Dover, New York*, 1966.

-
- [10] O. H. Bustos, A.C. Frery, y M. M. Lucini. *M-estimators of roughness and scale for ga_0 -modeled sar imagery*. EURASIP Journal on Applied Signal Processing, 2002:1:105–114, 2002.
- [11] O. H. Bustos, A.C. Frery, y S.M Ojeda. *Strong markov processes in image processing*. Brazilian Journal of Probability and Statistics, 12 No. 2:149–194, 1998.
- [12] O.H. Bustos y A. Guerrero. *Breve introducción a la matemática de la estadística espacial*. *Ensaio Matemáticos, Volume 20, 2011*, Sociedade Brasileira de Matemática, 2011.
- [13] O.H. Bustos y S.M Ojeda. *Campos Aleatorios Markovianos en Procesamiento de Imágenes*. *Trabajos de Matemática, Serie B 25/94, Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba, 1994*.
- [14] B. Calder, S. Linnett, y D. Carmichael. *Improvements in mrf parameter estimation*. In proceeding of: Multiresolution Modelling and Analysis in Image Processing and Computer Vision, IEE Colloquium on Source: IEEE Xplore, 77:3/1–3/6, 1995.
- [15] B. Chalmond. *An iterative gibbsian technique for reconstruction of m-ary images*. Pattern Recognition, 22(6):747–761, 1989.
- [16] F. Comets. *Detecting phase transition for gibbs measures*. The Annals of Applied Probability, 7, No. 2:545–563, 1997.
- [17] G. R. Cross y A. K. Jain. *Markov random field texture models*. IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence, 5:25–39, 1983.
- [18] H. Derin y H. Elliott. *Modeling and segmentation of noisy and textured images using random fields*. IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence, 9:39–55, 1987.
- [19] J. Fröhlich, R. Israel, E. Lieb, y B. Simon. *Phase transitions and reflection positivity. i. general theory and long range lattice models*. Communications in Mathematical Physics, 62:1–34, 1978.

-
- [20] A. Frigessi y M. Piccioni. *Parameter estimation for two-dimensional ising fields corrupted by noise*. Stochastic Processes and their Applications, 34:297–311, 1990.
- [21] A. Frigessi y M. Piccioni. *Consistent parameter estimation for 2-d ising fiels corrupted by noise: Numerical experiments*. Lecture Notes-Monograph Series, Institute of Mathematical Statistics, 20:78–89, 1991.
- [22] S. Geman y D. Geman. *Stochastic relaxation, gibbs distributions and the bayesian restoration of images*. EURASIP Journal on Applied Signal Processing, PAMI-6:721–741, 1984.
- [23] H. O. Georgii. *Gibbs Measure and Phase Transitions*. De Gruyter, Berlin, 1988.
- [24] X. Guyon. *Champs aléatoires sur un réseau*. Masson, Paris, 1993.
- [25] R. Haralick. *Statistical and structural approaches to texture*. Proceedings of the IEEE, 67(5):786–804, 1979.
- [26] R. Haralick, K. Shanmugam, y I. Dinstein. *Textural features for image classification*. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, SMC-3 No.6:610–621, 1973.
- [27] M. Hassner y J. Sklansky. *The use of markov random fields as models of texture*. Computer Graphics and Image Processing, 12-4:357–370, 1980.
- [28] E. Ising. *Beitrag zur theorie des ferromagnetismus*. Z. Phys, 31:253–258, 1997.
- [29] J.-O. Johansson. *Parameter-estimation in the auto-binomial model using the coding- and pseudo-likelihood method approached with simulated annealing and numerical optimization*. Pattern Recognition Letters, 22:1233–1246, 2001.
- [30] D. Képa y Y. Kozitsky. *Uniqueness of gibbs states of a quantum system on graphs*. Reports on Mathematical Physics, 59:281–288, 2007.
- [31] E. Kurmyshev, F. Cuevas, y R. Sánchez Yáñez. *Noisy binary texture recognition using the coordinated cluster transform*. Computación y Sistemas, 6 (3):196–203, 2003.

-
- [32] R Core Team. R: A Language and Environment for Statistical Computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2013. URL <http://www.R-project.org/>.
- [33] J.A. Richards y J. Xiuping. Remote Sensing Digital Image Analysis: an Introduction. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [34] V. Rulloni. Uniqueness condition for an auto-logistic model. Statistics and Probability Letters, 87:1–6, 2014.
- [35] V. Rulloni, O. Bustos, y A. G. Flesia. Large gap imputation in remote sensed imagery of the environment. Computational Statistics and Data Analysis, 56:2388–2403, 2012.
- [36] M. Schröder, K. Seidel, y M. Datcu. Gibbs random field models for image content characterization. International Geoscience and Remote Sensing Symposium, 1:258–260, 1997.
- [37] Z. Wang y A. Bovik. A universal image quality index. IEEE Signal Processing Letters, 9 (3):81–84, 2002.
- [38] D. Weitz. Combinatorial criteria for uniqueness of gibbs measures. Random Structures and Algorithms, 27(4):445–475, 2005.
- [39] G. Winkler. Image Analysis, Random Fields and Dynamic Monte Carlo Methods - A Mathematical Introduction. Springer-Verlag, Berlin, 1995.

Índice alfabético

- ∂ -Markoviana*, 36
- ∂ -cliques, conjunto de los*, 35
- ∂ -potencial*, 36
- σ -álgebra*, 125
- σ -álgebra de Borel de un espacio métrico*, 126
- σ -finita, medida*, 127
- α -normalizado, potencial*, 33
- índice de un píxel*, 59
- índice de un vector de entornos*, 59
- coding*, 71
- inpainting*, 77

- abierto, conjunto*, 126
- acotado, potencial*, 32
- auto-binomial, modelo*, 39
- auto-logístico, modelo*, 37

- Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno, método de*, 137

- cadena de Markov*, 134
- cadena de Markov (de imágenes)*, 133
- campo aleatorio*, 28
- campo de Gibbs-Markov*, 36
- campo externo*, 42
- característica local*, 31, 134
- cerrado, conjunto*, 126

- codificado, estimador de*, 71
- coeficiente de interdependencia de Dobrushin*, 49
- completo, espacio métrico*, 126
- condición D*, 49

- degradación por pérdida de información*, 77
- degradación por ruido*, 77
- degradación, modelo general de*, 76
- densidad (condicional) a posteriori*, 78
- densidad (condicional) a priori*, 78
- densidad condicional*, 45
- densidad condicional a posteriori*, 82
- densidad condicional a priori*, 82
- Densidad de Gibbs*, 134
- diagonal primera*, 42
- diagonal segunda*, 43
- disco abierto centrado en x de radio δ* , 125
- distancia empírica*, 96
- distancia entre imágenes según sus texturas*, 94
- distancia ideal*, 96
- distancia uniforme*, 49
- distribución de Gibbs sobre Λ con respecto a Φ dado x* , 31

- energía local, función de, 30
entorno de Δ , 35
entorno de s , 35
entornos finitos, sistema de, 35
equivalencia de potenciales, 34
error cuadrático medio, 92
espacio de estados, 24
espacio de probabilidad, 127
espacio métrico, 125
espacio medible, 125
espacio paramétrico, 34
especificación de Gibbs, 31
esperanza condicional, 130
estimador C de Borges, 74
estimador de codificado, 71
estimador de máxima verosimilitud, 69
estimador de pseudo-máxima verosimilitud, 70
función de densidad, 128
función de pseudo-verosimilitud, 70
función de transición, 128
función de verosimilitud, 69
función suryectiva, 62, 64
Gibbs sampler, 134
histograma de segundo orden, 60
identificable, conjunto de parámetros, 34
imagen, 24
imagen binaria, 24
imagen de una función, 64
independiente e idénticamente, 81
inducida por la métrica, topología, 126
integrable, 130
integrable, función simple, 130
integral, 130
interdependencia de Dobrushin entre s y t , 49
interior de un conjunto, 34
invariante a traslaciones, potencial, 34
invariante a traslaciones, sistema de entornos, 35
Ising, modelo de, 37
kernels de Markov, 134
local, función, 33
método de restauración auto-logístico, 90
método de restauración empírico VHDD, 90
métrica, 125
métrica discreta, 126
medible, mapeo, 129
medible, función, 129
medida, 127
núcleo de probabilidad, 31
parámetros de interacción, 42
parametrizada, familia de potenciales, 34
parametrizado, potencial, 34
partición, 131
partición local, función de, 30
pixel, 59
potencial, 30
primer orden, sistema de entornos de, 35
probabilidad, 127

- probabilidad condicional, 131
proyección, 26
- quasilocal, especificación, 33
quasilocal, función, 33
- recuperación de información faltante, 77
representación canónica de una función
 simple, 129
restauración, 77
- segundo orden, sistema de entornos de,
 35
- separable, espacio métrico, 126
simple, función, 129
simulated annealing, 136
soporte, 24
sucesión de Cauchy, 126
sucesión de Cauchy en μ -media, 130
suma de interacción local, 48
sumable, potencial, 32
- Teorema de Bayes, 131
texel, 56
textura para el modelo auto-logístico, 61
textura para el modelo auto-logístico con
 errores, 84
texturas regulares, 56
topológico, espacio, 126
topología, 126
traslación, función, 34
- vector de interacción local, 48
vector de interacciones, 46
vector de proporciones, 61