

G_2 -estructuras ERP en grupos de Lie

Autora: Marina Nicolini

Director: Jorge Lauret

26 de junio de 2020

Palabras clave: G_2 -estructuras, solitones, flujo Laplaciano, extremally Ricci pinched, álgebras de Lie.



G_2 -estructuras ERP en grupos de Lie. Por Marina Nicolini. Esta obra está bajo una [Licencia Creative Commons Atribución 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Resumen

Una G_2 -estructura en una variedad diferenciable de dimensión 7 es una 3-forma diferenciable φ que cumple cierta condición de positividad, y por lo tanto induce una métrica riemanniana y una forma de volumen en la variedad. Cuando la G_2 -estructura es libre de torsión (o equivalentemente paralela respecto de la conexión de Levi-Civita inducida por la métrica), la holonomía de la variedad riemanniana queda contenida en G_2 , el grupo de Lie simple excepcional dado en la clasificación de Berger.

Tener condiciones topológicas suficientes para que una variedad admita una métrica con holonomía en G_2 es un problema abierto. Existen en la literatura muchos enfoques para probar la existencia de G_2 -estructuras paralelas. Lo interesante es que todos estos enfoques parten de una G_2 -estructura cerrada ($d\varphi = 0$) con el fin de construir una paralela. El método más reciente, introducido por Bryant, consiste en considerar la solución al llamado flujo laplaciano:

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t) = \Delta\varphi(t),$$

partiendo de una φ cerrada. Es natural entonces preguntarse cuáles son las G_2 -estructuras cerradas más lindas, en algún sentido, para luego evolucionar a través del flujo laplaciano.

Cuando φ es cerrada, la única componente de torsión que sobrevive es la 2-forma $\tau := - * d * \varphi \in \Omega_{14}^2 M$ y se dice que φ es Extremally Ricci Pinched (ERP), si se da la siguiente igualdad para la forma de torsión τ ,

$$d\tau = \frac{1}{6}|\tau|^2\varphi + \frac{1}{6} * (\tau \wedge \tau).$$

Las estructuras ERP fueron introducidas por Bryant y en el caso compacto juegan un rol importante porque son, en algún sentido, lo más cerca que puede llegar la métrica a ser Einstein. Previo a este trabajo había solo dos ejemplos conocidos de G_2 -estructuras ERP, uno dado por Bryant y el otro por Lauret, ambos homogéneos. Por otro lado, Fino y Raffero probaron que si se parte de una estructura ERP, la solución al flujo laplaciano se mantiene ERP.

En esta tesis estudiamos grupos de Lie con una G_2 -estructura ERP invariante a izquierda. En primera instancia probamos fuertes condiciones

necesarias de estructura que se deben cumplir en el álgebra de Lie para la existencia de estructuras ERP. Usando esos resultados obtuvimos luego una clasificación completa de G_2 -estructuras ERP invariantes a izquierda en grupos de Lie, salvo equivalencia y multiplicación por escalar. La clasificación consiste de exactamente cinco estructuras, todas definidas en respectivos cinco grupos de Lie completamente solubles no isomorfos dos a dos. La 3-forma resulta exacta en todos los casos excepto en el único caso donde el grupo de Lie involucrado es unimodular. Por otro lado, calculamos ciertos subgrupos de simetrías de cada estructura ERP obtenida, como así también los números de Betti y el grado de nilpotencia del nilradical de cada álgebra de Lie involucrada.

Por último, fijamos una G_2 -estructura invariante a izquierda φ (no necesariamente cerrada) en un grupo de Lie con corchete de Lie determinado por una matriz real 2×2 y tres matrices reales 4×4 . Probamos varias fórmulas que pueden ser útiles para φ , como por ejemplo el laplaciano de Hogde y las formas de torsión de φ . Más aún, aplicamos estas fórmulas para obtener una nueva familia de ejemplos de solitones de Laplace de contracción, es decir G_2 -estructuras que satisfacen la ecuación,

$$d\tau = \lambda\varphi + \mathcal{L}_X\varphi,$$

para algún $\lambda \in \mathbb{R}$ negativo y $X \in \mathfrak{X}(M)$ completo. Estas estructuras son de particular interés porque producen soluciones autosimilares al flujo laplaciano con una singularidad en tiempo finito, de las cuales se conocía solo un ejemplo en la literatura.

Índice general

1. Introducción	9
2. Preliminares	17
2.1. Álgebra Lineal	17
2.2. Representaciones irreducibles de G_2	19
2.3. El grupo de Lie G_μ	22
2.4. Subgrupos de G_2	24
2.5. G_2 -estructuras cerradas	26
2.6. Solitones	30
2.7. G_2 -estructuras ERP	32
3. Teorema de estructura	35
3.1. Estructura	36
3.2. Ejemplos y refinamientos de estructura	44
3.2.1. Caso $\dim \mathfrak{n} = 4$	45
3.2.2. Caso $\dim \mathfrak{n} = 5$	46
3.2.3. Caso $\dim \mathfrak{n} = 6$	47
4. Teorema de clasificación	49
4.1. Caso $\dim \mathfrak{n} = 4$	50
4.2. Caso $\dim \mathfrak{n} = 5$	53
4.3. Caso $\dim \mathfrak{n} = 6$	58
4.4. Simetrías	63
4.5. Otras propiedades	65
5. G_2-geometría en grupos de Lie	69
5.1. Preliminares	69
5.2. Descripción de la familia	72
5.3. Fórmulas para la torsión y el laplaciano	72
5.4. Solitones de Laplace	79

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mi director, Jorge, por el apoyo constante. Gracias por enseñarme a disfrutar de la matemática, a hacerme las preguntas y a no frustrarme si no encuentro las respuestas. Gracias también por confiar en mi y enseñarme a confiar en mi misma.

A mi familia, a mamá y papá por darme la libertad a elegir y por confiar siempre en mí. Gracias a mi abuela, por el acompañamiento constante y la comida frizada que me hacía sentir en casa. Gracias a mis hermanos, Andrés por enseñarme a tomarme la vida con mas ligereza y Juan por escucharme y aconsejarme siempre, además de enseñarme a vivir sola. Gracias familia!! Gracias a mis tías también, que me acompañan en cada paso académico, son increíbles, gracias!

Quiero agradecer a mi hermano del alma Juani, las palabras justas en los momentos indicados. Aprendo mucho de vos y crezco con cada charla. Gracias por la compañía aunque estemos lejos, gracias también Ale y Juli. A pesar de los kilómetros, siguen acompañandome en los momentos más importantes de mi vida. Les amo!

A mis compañeros de facultad. Al Berni, mi gran compañero de oficina y amigo, que me hizo los días malos un poco menos malos. Hermoso conocerte y caminar este camino acompañada. Gracias a mi sis, Ro, sos mi ejemplo como matemática. Gracias por ayudarme en cada trámite y por enseñarme a confiar en mi misma. Por presentarme a la Kari, a quien le agradezco por los mates de escalera y por las quejas interminables que con humor pesaban menos.

A mis amigos que me dan mucho amor siempre. Mis amigas de la escuela, que me acompañan desde siempre y me enseñan muchísimo de todo. Gracias miles. A la Manu y al Rami, que aunque nos veamos cada vez menos son siempre incondicionales. Gracias a mis compañeros que estuvieron presentes virtualmente en la defensa, Aru, Tefi, Dahy, Gonzi, Bruno y seguro me olvido de muchos, perdón!!

Gracias a la FaMAF y al CIEM por haberme brindado el lugar de trabajo. En particular quiero agradecer a mi comisión asesora de doctorado, al tribunal de mi tesis, y a Nancy y Claudia que me tienen toda la paciencia. Gracias a las secretarías de Codepo, en especial a Celeste, quien no se cansa de mis preguntas reiterativas y me responde siempre con una sonrisa.

También me gustaría agradecerles a CONICET, SeCyT y FONCyT por el apoyo económico.

Capítulo 1

Introducción

Dada M una variedad diferenciable de dimensión 7, una G_2 -estructura en M es una 3-forma diferenciable que es *positiva* en cada punto de M , es decir, en cada p de M es igual a

$$e^{127} + e^{347} + e^{567} + e^{135} - e^{146} - e^{236} - e^{245},$$

para alguna base $\{e_1, \dots, e_7\}$ de T_pM , donde e^{ijk} denota el producto exterior $e^i \wedge e^j \wedge e^k$. Toda 3-forma positiva determina un producto interno y una orientación en el espacio tangente al punto de manera tal que $\{e_1, \dots, e_7\}$ es base ortonormal ordenada de T_pM , por lo tanto toda G_2 -estructura induce una métrica riemanniana g y una forma de volumen en la variedad. Podemos entonces considerar el operador estrella de Hodge $*$ y el laplaciano de Hodge Δ para formas en M . Nos referimos como torsión de φ , a las componentes de $\nabla\varphi$, donde ∇ es la conexión de Levi-Civita inducida por la métrica g .

Aquellas G_2 -estructuras que son *paralelas*, i.e. $\nabla\varphi = 0$ (o equivalentemente *libres de torsión*, i.e. $d\varphi = 0$ y $d*\varphi = 0$) son las estrellas del tema pues inducen métricas con holonomía contenida en G_2 , lo que implica que la métrica es *Ricci flat*. Notar que las G_2 -estructuras homogéneas que además son paralelas resultan entonces flat. El problema principal del área radica en clasificar las variedades que admiten una métrica con holonomía en G_2 . Para probar la existencia de tales variedades existen muchos enfoques, todos ellos parten de G_2 -estructuras *cerradas* (i.e. $d\varphi = 0$). Resumimos a continuación, algunas obstrucciones topológicas que se conocen en la literatura (ver [K]):

- Una variedad diferenciable M de dimensión 7 admite una G_2 -estructura si y solo si es orientable y spin.
- Hay varias obstrucciones cohomológicas para que una M compacta admita una G_2 -estructura φ paralela, como por ejemplo que el tercer número de Betti debe ser mayor o igual a 1 (i.e. $b_3 \geq 1$); y si además (M, φ) es irreducible (i.e. $\text{Hol}(M, g) = G_2$), entonces el primer número de Betti se debe anular (i.e. $b_1 = 0$).

- No se conocen obstrucciones topológicas adicionales para que M admita una G_2 -estructura cerrada.

Para una G_2 -estructura cerrada, la única componente de torsión que sobrevive es la 2-forma τ que satisface las siguientes identidades con φ :

$$\tau = - * d * \varphi, \quad \tau \wedge \varphi = - * \tau, \quad \tau \wedge * \varphi = 0, \quad d\tau = \Delta\varphi = -d * d * \varphi.$$

El enfoque más reciente para encontrar G_2 -estructuras paralelas lo introduce Robert Bryant en [B] en 1992, donde considera las soluciones al flujo laplaciano:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t) = \Delta\varphi(t), \\ \varphi(0) = \varphi, \\ d\varphi(t) = 0. \end{cases}$$

Decimos que una solución para el flujo laplaciano es *autosimilar* si fluye de la siguiente manera:

$$\varphi(t) = c(t)f(t)^*\varphi, \quad \text{para algunos } c(t) \in \mathbb{R}^* \text{ y } f(t) \in \text{Diff}(M).$$

Es bien sabido que φ determina una solución autosimilar si y solo si

$$\Delta\varphi = c\varphi + \mathcal{L}_X\varphi, \quad \text{para algunos } c \in \mathbb{R}, X \in \mathfrak{X}(M),$$

donde \mathcal{L}_X denota la derivada de Lie respecto del campo diferenciable X de M . En tal caso, φ se dice un *solitón de Laplace* y se tiene que $c(t) = (\frac{2}{3}ct + 1)^{3/2}$. El solitón se dice *de expansión* si $c > 0$, *estable* si $c = 0$ y *de contracción* si $c < 0$ y en consecuencia las respectivas soluciones están definidas para t en $(-\frac{3}{2c}, \infty)$, $(-\infty, \infty)$, $(-\infty, -\frac{3}{2c})$. En la literatura, hay abundantes ejemplos de solitones estables y de expansión (ver [FFM, FR1, FR2, Li, L2, L3, L4, N]), mientras que previo a este trabajo solo se conocía una familia (dependiendo de un parámetro) de ejemplos de solitones de contracción, dada por Lauret en [L4, Example 4.10]. Al final del Capítulo 5 damos una familia monoparamétrica de ejemplos de solitones de Laplace de contracción que es no equivalente a la familia de Lauret. Ambas familias son importantes pues son, incluso en el caso general, las únicas soluciones conocidas del flujo laplaciano con una singularidad en tiempo finito. Como es usual, dos variedades con G_2 -estructuras (M, φ) y (M', φ') se dicen *equivalentes* si existe un difeomorfismo $f : M \rightarrow M'$ tal que $\varphi = f^*\varphi'$.

En [B, Section 4.6] Bryant prueba que el operador de Ricci y la curvatura escalar asociados a una G_2 -estructura cerrada φ se pueden escribir en términos de su torsión τ . Más aún, si φ es una G_2 -estructura cerrada en una variedad riemanniana compacta M , entonces vale la siguiente desigualdad de tipo *Ricci pinching*:

$$\int_M \text{scal}^2 * 1 \leq 3 \int_M |\text{Ric}|^2 * 1, \quad (1.1)$$

donde Ric y scal son el operador y la curvatura de Ricci asociados a la métrica g , respectivamente. Bryant prueba también que la igualdad se da si y solo si

$$d\tau = \frac{1}{6}|\tau|^2\varphi + \frac{1}{6}*(\tau \wedge \tau). \quad (1.2)$$

Es evidente, por (1.1), que en una variedad compacta M no existen G_2 -estructuras cerradas que induzcan una métrica Einstein, pues en tal caso $\text{scal}^2 = 7|\text{Ric}|^2$ en todo punto.

Una G_2 -estructura cerrada en una variedad diferenciable M (no necesariamente compacta) se dice *extremally Ricci pinched* (ERP) si su torsión τ satisface (1.2). Es decir, en el caso compacto, dentro del conjunto de G_2 -estructuras cerradas, las ERP son lo más cercano a Einstein que se puede llegar.

El hecho de ser ERP proporciona fuertes restricciones para el operador de Ricci. Más precisamente se sabe que, tanto en el caso compacto como en el homogéneo, Ric tiene un autovalor 0 de multiplicidad cuatro y un autovalor negativo de multiplicidad tres (ver Proposición 3.1.5 (iii)).

Previo a este trabajo, en la literatura se podían encontrar solo dos ejemplos de G_2 -estructuras ERP, ambos *homogéneos* (i.e. el grupo de automorfismos $\text{Aut}(M, \varphi) := \{f \in \text{Diff}(M) : f^*\varphi = \varphi\}$ actúa transitivamente en M). El primero, presentado por Bryant en [B] como el espacio homogéneo $\text{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^2/\text{SU}(2)$, el cual admite un cociente compacto localmente homogéneo (el único ejemplo ERP compacto conocido hasta ahora), y el segundo dado por Lauret en [L4] presentado como grupo de Lie soluble unimodular. Esta escasez de ejemplos nos motivó a la búsqueda de nuevos ejemplos de G_2 -estructuras ERP, y por la forma de los ya existentes restringimos el campo de búsqueda a estructuras invariantes a izquierda en grupos de Lie. La dificultad que requiere, tanto teórica como computacional, la búsqueda de nuevos ejemplos ERP, nos incentivó también a apuntar a una potencial clasificación en grupos de Lie.

Notemos que en un grupo de Lie simplemente conexo G , una G_2 -estructura invariante a izquierda queda determinada por su valor en la identidad, es decir por una 3-forma positiva en el álgebra de Lie \mathfrak{g} de G . Decimos que dos grupos de Lie con G_2 -estructuras invariantes a izquierda (G, φ) y (G', φ') son *equivariantemente equivalentes* si existe una equivalencia $f : G \rightarrow G'$ que es además un isomorfismo de grupos de Lie (esto pasa si y solo si $\varphi = df|_e^*\varphi'$, donde $df|_e : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ es el correspondiente isomorfismo de álgebras de Lie).

En el transcurso de la investigación, aparecieron nuevos ejemplos de G_2 -estructuras ERP en la literatura. Fino y Raffero dieron en [FR3] una curva de ejemplos de grupos de Lie solubles, pero que resultaron ser equivalentes al ejemplo de Bryant, a pesar de que los grupos de Lie son no isomorfos dos a dos (es decir, no son equivariantemente equivalentes). Más aún, en ese mismo artículo Fino y Raffero estudiaron la solución del flujo laplaciano partiendo de una G_2 -estructura ERP, donde mostraron que la solución existe

para todo tiempo y que siempre es ERP. Por otro lado, en su tesis bajo la dirección de Bryant, Ball dio ejemplos de G_2 -estructuras ERP en variedades no homogéneas (ver [Ba]).

En el Capítulo 3, dada un álgebra de Lie \mathfrak{g} , con una G_2 -estructura φ , analizamos las limitaciones que tiene el álgebra de Lie cuando se pide que φ sea ERP. El resultado sobresaliente del capítulo es acerca de las fuertes obstrucciones de estructura sobre \mathfrak{g} que impone la condición ERP. Debido al nivel de tecnicidad de dicho resultado, necesitamos introducir un poco de notación para poder enunciarlo.

Dado un espacio vectorial real \mathfrak{g} con base $\{e_1, \dots, e_7\}$, consideramos la 3-forma positiva

$$\begin{aligned} \varphi &= e^{127} + e^{347} + e^{567} + e^{135} - e^{146} - e^{236} - e^{245} \\ &= \omega_7 \wedge e^7 + \omega_3 \wedge e^3 + \omega_4 \wedge e^4 + e^{347}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

donde $\omega_7 := e^{12} + e^{56}$, $\omega_3 := e^{26} - e^{15}$ y $\omega_4 := e^{16} + e^{25}$, y denotamos por θ la representación usual de $\mathfrak{gl}_4(\mathbb{R})$ en $\Lambda^2(\mathbb{R}^4)^*$.

Ahora sí estamos en condiciones de enunciar el resultado principal del capítulo, que aparece en el artículo [LN1].

Teorema 1.0.1. [LN1, Theorem 4.7] *Todo grupo de Lie con una G_2 -estructura invariante a izquierda ERP es equivariantemente equivalente, salvo múltiplo, a un (G, φ) con torsión $\tau = e^{12} - e^{56}$, donde φ es como en (1.3), y se satisfacen las siguientes condiciones sobre el álgebra de Lie \mathfrak{g} de G :*

- (i) $\mathfrak{h} := \text{span}\{e_1, \dots, e_6\}$ es un ideal unimodular de \mathfrak{g} .
- (ii) $\mathfrak{g}_0 := \text{span}\{e_7, e_3, e_4\}$ es una subálgebra de Lie y $\mathfrak{g}_1 := \text{span}\{e_1, e_2, e_5, e_6\}$ un ideal abeliano de \mathfrak{g} . En particular, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \ltimes \mathfrak{g}_1$ y \mathfrak{g} es soluble.
- (iii) $\mathfrak{h}_1 := \text{span}\{e_3, e_4\}$ es una subálgebra abeliana; en particular $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \ltimes \mathfrak{g}_1$.
- (iv) $\theta(\text{ad } e_7|_{\mathfrak{g}_1})\tau = \frac{1}{3}\omega_7$, $\theta(\text{ad } e_3|_{\mathfrak{g}_1})\tau = \frac{1}{3}\omega_3$ y $\theta(\text{ad } e_4|_{\mathfrak{g}_1})\tau = \frac{1}{3}\omega_4$.
- (v) $\theta(\text{ad } e_7|_{\mathfrak{g}_1})\omega_7 + \theta(\text{ad } e_3|_{\mathfrak{g}_1})\omega_3 + \theta(\text{ad } e_4|_{\mathfrak{g}_1})\omega_4 = \tau + (\text{tr ad } e_7|_{\mathfrak{g}_0})\omega_7$.

Recíprocamente, si \mathfrak{g} satisface (i)-(v), entonces (G, φ) es una G_2 -estructura ERP con torsión $\tau = e^{12} - e^{56}$.

La prueba del teorema se encuentra en Sección 3.1, dividida en dos partes. Primero probamos que todo grupo de Lie con una estructura ERP invariante a izquierda es equivalente a (G_μ, φ) con torsión $\tau = e^{12} - e^{56}$, y luego vemos que valen los apartados (i)...(v) del teorema para dicho formato de estructura ERP.

Como una primera aplicación del teorema, obtenemos la siguiente consecuencia geométrica. Recordemos que $(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se dice un *solitón de Ricci*

(algebraico) si existen $c \in \mathbb{R}$ y $D \in \text{Der } \mathfrak{g}$ tales que $\text{Ric} = c\text{id} + D$. Dependiendo del valor de c , el solitón se dice de expansión ($c < 0$), estable ($c = 0$) o de contracción ($c > 0$). En particular, (G, g) es un solitón de Ricci con la definición usual, es decir $\text{ric}(g) = cg + \mathcal{L}_X g$ para algún $c \in \mathbb{R}$ y $X \in \mathfrak{X}(M)$ completo, que son las que determinan soluciones autosimilares al flujo de Ricci: $\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2 \text{Ric}(g(t))$.

Corolario 1.0.2. *Toda G_2 -estructura invariante a izquierda ERP en un grupo de Lie es un solitón de Laplace estable y la métrica inducida resulta un solitón de Ricci de expansión.*

Es natural preguntarse si vale la recíproca del corolario y la respuesta es que no. Fino y Raffero encontraron en [FR4] un ejemplo de un solitón de Laplace estable en un álgebra de Lie soluble no-unimodular que no es ERP. En el Capítulo 5 damos un nuevo ejemplo de este tipo.

Una consecuencia algebraica del teorema anterior es que el nilradical \mathfrak{n} del álgebra de Lie \mathfrak{g} puede tener dimensión 4, 5 o 6. El ejemplo dado por Lauret es en un grupo de Lie con nilradical de dimensión 4, mientras que el ejemplo de Bryant, en la presentación equivalente dada por Cleyton e Ivanov en [CI, Section 6], tiene un nilradical de dimensión 6. Al final del Capítulo 3 estudiamos cada uno de estos casos por separado y obtenemos ciertos refinamientos de estructura junto con tres nuevos ejemplos (no equivalentes) de G_2 -estructuras ERP, dos en el caso en que la dimensión de \mathfrak{n} es 5 y uno cuando la dimensión de \mathfrak{n} es 6.

En el Capítulo 4, obtenemos el resultado más importante de la tesis, el cual aparece en el artículo [LN2] y resumimos en el siguiente teorema. Dado un espacio vectorial \mathfrak{g} y μ un corchete de Lie en \mathfrak{g} , denotamos por G_μ al grupo de Lie simplemente conexo con álgebra de Lie (\mathfrak{g}, μ) .

Teorema 1.0.3. [LN2, Theorem 1.1] *Todo grupo de Lie con una G_2 -estructura invariante a izquierda ERP es equivalente, salvo múltiplo, a (G_μ, φ) , donde μ es exactamente uno de los siguientes corchetes de Lie dados en Cuadro 1.1:*

$$\mu_B, \quad \mu_{M1}, \quad \mu_{M2}, \quad \mu_{M3}, \quad \mu_J. \quad (1.4)$$

Más aún, con el fin de obtener una clasificación salvo equivalencia equivalente y multiplicación por escalar, exactamente las estructuras $(G_{\mu_{rt}}, \varphi)$, $r, t \in \mathbb{R}$, $(r, t) \neq (0, 0)$, deben agregarse a la Lista (1.4) (ver también Cuadro 1.1). Las estructuras $(G_{\mu_{rt}}, \varphi)$ son todas equivalentes a (G_{μ_B}, φ) y la familia de álgebras de Lie μ_{rt} , $r, t \in \mathbb{R}$ es no isomorfa dos a dos (notar que $\mu_{00} = \mu_B$).

Ver Ejemplos 4.3.1, 3.2.8, 3.2.5, 3.2.6 y 3.2.4, respectivamente, para descripciones más intuitivas de estos cinco corchetes.

La prueba del teorema está dividida en las primeras secciones del Capítulo 4, donde analizamos cada caso por separado, según la dimensión del nilradical. Al final del capítulo consideramos el problema de cómo son las

simetrías de las G_2 -estructuras (G_μ, φ) dadas en el teorema precedente. Para la G_2 -estructura unimodular completamente soluble (G_{μ_J}, φ) obtuvimos que

$$\text{Aut}(G_{\mu_J}, \varphi) = \text{SL}_2(\mathbb{Z}_3) \ltimes G_{\mu_J}, \quad \text{Iso}(G_{\mu_J}, \langle \cdot, \cdot \rangle) = (S_4 \ltimes \mathbb{Z}_2^4) \ltimes G_{\mu_J}.$$

Sin embargo, cuando el grupo de Lie es completamente soluble pero no unimodular, el grupo total de isometrías y automorfismos se torna muy difícil de calcular. Para los grupos G_B , $G_{\mu_{M1}}$, $G_{\mu_{M2}}$ y $G_{\mu_{M3}}$, calculamos en cambio los subgrupos $\text{Aut}(\mu) \cap G_2$ y $\text{Aut}(\mu) \cap \text{O}(7)$ de $\text{Iso}(G_\mu, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ y $\text{Aut}(G_\mu, \varphi)$, respectivamente. Los resultados se pueden ver en Cuadro 4.1, donde incluimos además información sobre los números de Betti y la dimensión y grado de nilpotencia del nilradical de cada una de las álgebras de Lie dadas en (1.4).

Es muy interesante el formato que se obtiene en los Capítulos 3 y 4, salvo equivalencia equivariante, para una G_2 -estructura invariante a izquierda ERP en un grupo de Lie, el cual queda determinado por una 3-forma fija φ y tres matrices que definen el corchete en el álgebra de Lie \mathfrak{g} . Este formato provee una herramienta muy útil a la hora de buscar ejemplos de G_2 -estructuras en álgebras de Lie que satisfagan otras condiciones. Más precisamente, en el Capítulo 5 nos adentramos en esta numerosa familia de G_2 -estructuras (\mathfrak{g}, φ) con φ definida como en (2.1) y \mathfrak{g} determinada por una matriz 2×2 , y tres matrices 4×4 ,

$$A_1 := \text{ad}_\mu e_7|_{\mathfrak{h}_1} = \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix}, \quad A := \text{ad}_\mu e_7|_{\mathfrak{g}_1}, \quad B := \text{ad}_\mu e_1|_{\mathfrak{g}_1}, \quad C := \text{ad}_\mu e_2|_{\mathfrak{g}_1},$$

donde $\mathfrak{h}_1 := \text{span}\{e_1, e_2\}$ y $\mathfrak{g}_1 := \text{span}\{e_3, e_4, e_5, e_6\}$ son abelianas, y la condición de Jacobi está dada por

$$[A, B] = xB + yC, \quad [A, C] = zB + wC, \quad [B, C] = 0.$$

Llamamos \mathfrak{g} al álgebra de Lie con corchete determinado por (A_1, A, B, C) , tenemos entonces una G_2 -estructura (\mathfrak{g}, φ) definida como en (1.3). En Teoremas 5.3.2 y 5.3.3, se pueden encontrar las fórmulas necesarias para calcular la torsión y el laplaciano de φ y $*\varphi$, independientemente de si la G_2 -estructura cumple alguna condición extra (como por ejemplo ser cerrada o cocerrada).

Como una aplicación de las fórmulas anteriores, en la última sección del Capítulo 5 encontramos una nueva familia monoparamétrica de G_2 -estructuras invariantes a izquierda cerradas que son solitones de Laplace. Dicha familia es de particular interés, pues dependiendo del valor del parámetro, obtenemos solitones de expansión, estables y de contracción. Comparamos con la familia de solitones de Laplace dada por Lauret en [L4, Example 4.10], y obtenemos que ambas familias son no equivalentes dos a dos. Estas dos familias son importantes porque proveen los únicos ejemplos conocidos en la literatura de soluciones al flujo laplaciano que tienen una singularidad

en tiempo finito. Además, el solitón de Laplace estable de nuestra familia se agrega al ejemplo dado por [FR4, Section 4] en la lista de solitones de Laplace estables que no son ERP.

En el Capítulo 2 introducimos la teoría necesaria para entender lo mencionado previamente. Para empezar estudiamos conceptos básicos sobre k -formas en espacios vectoriales y álgebras de Lie, como así también sobre las representaciones irreducibles de G_2 . En Sección 2.3 introducimos el grupo G_μ , para el cual calculamos numerosas fórmulas que usamos a lo largo del trabajo. En Sección 2.4 analizamos ciertos subgrupos de G_2 , que se usan para probar la no-equivalencia entre G_2 -estructuras. En Sección 2.5 nos adentramos en el mundo cerrado, consideramos en G_μ una G_2 -estructura cerrada invariante a izquierda y obtenemos los primeros resultados de estructura para el álgebra de Lie de G_μ . En las últimas secciones hay definiciones y resultados más específicos sobre G_2 -estructuras solitones y ERP.

μ_B	$de^7 = 0, \quad de^3 = \frac{1}{3}e^{37}, \quad de^4 = \frac{1}{3}e^{47}, \quad de^1 = -\frac{1}{6}e^{17}, \quad de^2 = -\frac{1}{6}e^{27},$ $de^5 = \frac{1}{3}e^{14} + \frac{1}{3}e^{23} + \frac{1}{6}e^{57}, \quad de^6 = \frac{1}{3}e^{13} - \frac{1}{3}e^{24} + \frac{1}{6}e^{67}.$
μ_{M1}	$de^7 = 0, \quad de^3 = \frac{\sqrt{30}}{30}e^{37}, \quad de^4 = \frac{\sqrt{30}}{15}e^{47},$ $de^1 = -\frac{\sqrt{5}}{30}e^{14} - \frac{10+\sqrt{30}}{60}e^{17} - \frac{\sqrt{5}}{30}e^{23} - \frac{5-\sqrt{30}}{30}e^{36} - \frac{5-\sqrt{30}}{30}e^{45} - \frac{\sqrt{5}}{30}e^{57},$ $de^2 = \frac{\sqrt{5}}{6}e^{13} + \frac{\sqrt{5}}{30}e^{24} - \frac{10-\sqrt{30}}{60}e^{27} - \frac{1}{6}e^{35} + \frac{5-\sqrt{30}}{30}e^{46} - \frac{\sqrt{5}}{30}e^{67},$ $de^5 = \frac{5+\sqrt{30}}{30}e^{14} - \frac{\sqrt{5}}{30}e^{17} + \frac{5+\sqrt{30}}{30}e^{23} - \frac{\sqrt{5}}{30}e^{36} - \frac{\sqrt{5}}{30}e^{45} + \frac{10-\sqrt{30}}{60}e^{57},$ $de^6 = \frac{1}{6}e^{13} - \frac{5+\sqrt{30}}{30}e^{24} - \frac{\sqrt{5}}{30}e^{27} + \frac{\sqrt{5}}{6}e^{35} + \frac{\sqrt{5}}{30}e^{46} + \frac{10+\sqrt{30}}{60}e^{67}.$
μ_{M2}	$de^7 = de^3 = 0, \quad de^4 = \frac{1}{3}e^{47},$ $de^1 = -\frac{1}{6}e^{13} - \frac{1}{3}e^{17}, \quad de^2 = -\frac{1}{3}e^{14} + \frac{1}{6}e^{23} - \frac{1}{3}e^{35},$ $de^5 = \frac{1}{3}e^{14} + \frac{1}{3}e^{23} - \frac{1}{6}e^{35}, \quad de^6 = -\frac{1}{3}e^{24} + \frac{1}{6}e^{36} - \frac{1}{3}e^{45} + \frac{1}{3}e^{67}.$
μ_{M3}	$de^7 = de^3 = 0, \quad de^4 = \frac{\sqrt{6}}{6}e^{47},$ $de^1 = -\frac{\sqrt{2}}{12}e^{14} - \frac{1}{6}e^{17} + \frac{\sqrt{2}}{6}e^{23} - \frac{1}{6}e^{36} - \frac{2-\sqrt{6}}{12}e^{45} - \frac{\sqrt{2}}{12}e^{57},$ $de^2 = \frac{\sqrt{2}}{6}e^{13} + \frac{\sqrt{2}}{12}e^{24} - \frac{1}{6}e^{27} - \frac{1}{6}e^{35} + \frac{2-\sqrt{6}}{12}e^{46} - \frac{\sqrt{2}}{12}e^{67},$ $de^5 = \frac{2+\sqrt{6}}{12}e^{14} - \frac{\sqrt{2}}{12}e^{17} + \frac{1}{6}e^{23} + \frac{\sqrt{2}}{6}e^{36} - \frac{\sqrt{2}}{12}e^{45} + \frac{1}{6}e^{57},$ $de^6 = \frac{1}{6}e^{13} - \frac{2+\sqrt{6}}{12}e^{24} - \frac{\sqrt{2}}{12}e^{27} + \frac{\sqrt{2}}{6}e^{35} + \frac{\sqrt{2}}{12}e^{46} + \frac{1}{6}e^{67}.$
μ_J	$de^7 = de^3 = de^4 = 0,$ $de^1 = \frac{\sqrt{2}}{6}e^{14} - \frac{1}{6}e^{17} - \frac{\sqrt{2}}{6}e^{23} - \frac{1}{3}e^{36},$ $de^2 = -\frac{\sqrt{2}}{6}e^{13} - \frac{\sqrt{2}}{6}e^{24} - \frac{1}{6}e^{27} + \frac{1}{3}e^{46},$ $de^5 = \frac{1}{2}e^{57}, \quad de^6 = \frac{1}{3}e^{13} - \frac{1}{3}e^{24} - \frac{1}{6}e^{67}.$
μ_{rt}	$de^7 = 0, \quad de^3 = \frac{\sqrt{30}}{30}e^{37} - \frac{1}{3}re^{47}, \quad de^4 = \frac{1}{3}e^{47} + \frac{1}{3}re^{37},$ $de^1 = -\frac{1}{6}e^{17} - \frac{1}{3}te^{27}, \quad de^2 = -\frac{1}{6}e^{27} + \frac{1}{3}te^{17},$ $de^5 = \frac{1}{3}e^{14} + \frac{1}{3}e^{23} + \frac{1}{6}e^{57} + \frac{1}{3}(r+t)e^{67},$ $de^6 = \frac{1}{3}e^{13} - \frac{1}{3}e^{24} + \frac{1}{6}e^{67} - \frac{1}{3}(r+t)e^{57}.$

Cuadro 1.1: Coeficientes de estructura.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Álgebra Lineal

Dado un espacio vectorial real de dimensión 7 que denotaremos por \mathfrak{g} , una 3-forma $\varphi \in \Lambda^3 \mathfrak{g}^*$ se dice *positiva* si existe $\{e_1, \dots, e_7\}$ base de \mathfrak{g} tal que

$$\varphi = e^{127} + e^{347} + e^{567} + e^{135} - e^{146} - e^{236} - e^{245}. \quad (2.1)$$

Podemos descomponer $\varphi = \omega \wedge e^7 + \rho^+$, donde ω y ρ^+ están definidas como sigue

$$\omega := e^{12} + e^{34} + e^{56}, \quad \rho^+ := e^{135} - e^{146} - e^{236} - e^{245}.$$

Denotamos por $e^{ij\dots}$ al producto exterior de 1-formas $e^i \wedge e^j \wedge \dots$. Resulta trivial que $\omega \wedge \rho^+ = 0$. La 3-forma φ determina un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y una orientación vol , de la siguiente manera

$$\langle X, Y \rangle \text{vol} = \frac{1}{6} i_X(\varphi) \wedge i_Y(\varphi) \wedge \varphi, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}. \quad (2.2)$$

El adjetivo “positiva” deriva del hecho de que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno.

Dados $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y vol , recordamos el operador estrella de Hodge para k -formas en \mathfrak{g} , $*$: $\Lambda^k \mathfrak{g}^* \rightarrow \Lambda^{7-k} \mathfrak{g}^*$, tal que para cada $\alpha \in \Lambda^k \mathfrak{g}^*$, se define $*\alpha$ como la única $(7-k)$ -forma en \mathfrak{g} tal que

$$\beta \wedge *\alpha = \langle \beta, \alpha \rangle \text{vol},$$

para todo $\beta \in \Lambda^k \mathfrak{g}^*$.

Análogamente, si llamamos \mathfrak{h} al subespacio de \mathfrak{g} con base $\{e_1, \dots, e_6\}$, consideramos $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{h}}$ y $\text{vol}_{\mathfrak{h}}$ el producto interno y la forma de volumen en \mathfrak{h} que hacen de $\{e_1, \dots, e_6\}$ una base ortonormal ordenada, entonces podemos definir $*_{\mathfrak{h}}$ el operador estrella de Hodge en \mathfrak{h} .

Si nos restringimos a \mathfrak{h} , la 2-forma $\omega = \langle J \cdot, \cdot \rangle \in \Lambda^2 \mathfrak{h}^*$ define una estructura casi compleja J , dada por $Je_i = e_{i+1}$, para $i = 1, 3, 5$. Además, podemos definir $\rho^- \in \Lambda^3 \mathfrak{h}^*$ como la siguiente 3-forma

$$\rho^- := *_{\mathfrak{h}} \rho^+ = e^{145} + e^{136} + e^{235} - e^{246}.$$

Notemos que

$$(e^1 + ie^2) \wedge (e^3 + ie^4) \wedge (e^5 + ie^6) = \rho^+ + i\rho^-,$$

donde la 3-forma de la izquierda es una forma de volumen en \mathbb{C}^3 .

$\mathrm{GL}(\mathfrak{h})$ actúa naturalmente a izquierda en cada $\Lambda^k \mathfrak{h}^*$. Es decir, si $h \in \mathrm{GL}(\mathfrak{h})$ y $\psi \in \Lambda^k \mathfrak{h}^*$, entonces

$$h \cdot \psi = \psi(h^{-1} \cdot, \dots, h^{-1} \cdot) \in \Lambda^k \mathfrak{h}^*.$$

Al derivar dicha acción, obtenemos una representación $\theta : \mathfrak{gl}(\mathfrak{h}) \longrightarrow \mathrm{End}(\Lambda^k \mathfrak{h}^*)$, que en cada $B \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{h})$, está dada por

$$\theta(B)\gamma = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 e^{tB} \cdot \gamma = -(\gamma(B \cdot, \dots, \cdot) + \dots + \gamma(\cdot, \dots, B \cdot)), \quad \forall \gamma \in \Lambda^k \mathfrak{h}^*.$$

El siguiente lema, si bien se ve muy técnico, resume útiles propiedades sobre el álgebra lineal, que utilizamos a lo largo del trabajo.

Lema 2.1.1. Sean $*$: $\Lambda^k \mathfrak{g}^* \longrightarrow \Lambda^{7-k} \mathfrak{g}^*$ y $*_{\mathfrak{h}} : \Lambda^k \mathfrak{h}^* \longrightarrow \Lambda^{6-k} \mathfrak{h}^*$ los operadores estrella de Hodge determinados por las bases ordenadas $\{e_1, \dots, e_7\}$ y $\{e_1, \dots, e_6\}$, respectivamente, entonces se cumplen las siguientes propiedades

- (i) $*\gamma = *_{\mathfrak{h}}\gamma \wedge e^7$, para toda $\gamma \in \Lambda^k \mathfrak{h}^*$.
- (ii) $*(\gamma \wedge e^7) = (-1)^k *_{\mathfrak{h}} \gamma$, para toda $\gamma \in \Lambda^k \mathfrak{h}^*$.
- (iii) $*_{\mathfrak{h}}\omega = \frac{1}{2}\omega \wedge \omega$ y $*_{\mathfrak{h}}(\omega \wedge \omega) = 2\omega$.
- (iv) $*^2 = id$ y $*_{\mathfrak{h}}^2 = (-1)^k id$ en $\Lambda^k \mathfrak{h}^*$.
- (v) $*\varphi = \frac{1}{2}\omega \wedge \omega + \rho^- \wedge e^7 = e^{3456} + e^{1256} + e^{1234} - e^{2467} + e^{2357} + e^{1457} + e^{1367}$.
- (vi) $\theta(A) *_{\mathfrak{h}} + *_{\mathfrak{h}} \theta(A^t) = -(\mathrm{tr} A) *_{\mathfrak{h}}$ en $\Lambda \mathfrak{h}^*$, para toda $A \in \mathfrak{gl}_6(\mathbb{R})$.

Demostración. Toda k -forma en \mathfrak{g} se puede escribir como $\alpha + \beta \wedge e^7$, donde $\alpha \in \Lambda^k \mathfrak{h}^*$ y $\beta \in \Lambda^{k-1} \mathfrak{h}^*$. Luego, el item (i) sale de la siguiente cuenta

$$(\alpha + \beta \wedge e^7) \wedge (*_{\mathfrak{h}}\gamma \wedge e^7) = \alpha \wedge *_{\mathfrak{h}}\gamma \wedge e^7 = \langle \alpha, \gamma \rangle_{\mathfrak{h}} \mathrm{vol}_{\mathfrak{h}} \wedge e^7 = \langle \alpha + \beta \wedge e^7, \gamma \rangle \mathrm{vol}.$$

Análogamente, podemos escribir a toda $(k+1)$ -forma en \mathfrak{g} como $\alpha + \beta \wedge e^7$, donde $\alpha \in \Lambda^{k+1} \mathfrak{h}^*$ y $\beta \in \Lambda^k \mathfrak{h}^*$, por lo que el item (ii) se sigue de lo siguiente

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta \wedge e^7) \wedge (-1)^k *_{\mathfrak{h}} \gamma &= \beta \wedge e^7 \wedge (-1)^k *_{\mathfrak{h}} \gamma = \beta \wedge *_{\mathfrak{h}}\gamma \wedge e^7 \\ &= \langle \beta, \gamma \rangle_{\mathfrak{h}} \mathrm{vol}_{\mathfrak{h}} \wedge e^7 = \langle \alpha + \beta \wedge e^7, \gamma \wedge e^7 \rangle \mathrm{vol}. \end{aligned}$$

En las pruebas anteriores usamos fuertemente que el conjunto $\{e^{i_1 \dots i_k} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq 7\}$ es una base ortonormal de k -formas. El apartado (iii) se obtiene del hecho de que

$$\omega^3 = 6e^{1 \dots 6} = 2|\omega|^3 \text{vol}_{\mathfrak{h}}.$$

Si consideramos $\alpha \in \Lambda^k \mathfrak{g}^*$, entonces

$\gamma \wedge \alpha = \alpha \wedge \gamma = \langle \alpha, * \gamma \rangle \text{vol} = * \gamma \wedge * \alpha = * \alpha \wedge * \gamma = \langle * \alpha, \gamma \rangle \text{vol} = \langle \gamma, * \alpha \rangle \text{vol}$, para toda $\gamma \in \Lambda^{7-k} \mathfrak{g}^*$, por lo que $*^2 = id$. Notar que k y $7-k$ tienen distinta paridad, mientras que k y $6-k$ tienen la misma paridad, es por esto que resulta $*_{\mathfrak{h}}^2 = (-1)^k id$.

El inciso (v) sale directamente al hacer la cuenta. Para ello es útil recordar que $*$ es lineal en $\Lambda^k \mathfrak{g}$ y que $*e^{i_1 \dots i_k} = \pm e^{j_1 \dots j_{7-k}}$, de manera tal que $e^{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_{7-k}} = \pm \text{vol}$.

Para finalizar con la prueba, veamos la parte (vi). Sean $\alpha \in \Lambda^p \mathfrak{h}^*$ y $\beta \in \Lambda^{6-p} \mathfrak{h}^*$, tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \theta(A) *_{\mathfrak{h}} \beta \rangle \text{vol}_{\mathfrak{h}} &= \langle \theta(A^t) \alpha, *_{\mathfrak{h}} \beta \rangle \text{vol}_{\mathfrak{h}} = \theta(A^t) \alpha \wedge *_{\mathfrak{h}}^2 \beta = (-1)^p \theta(A^t) \alpha \wedge \beta \\ &= (-1)^{p+1} (\text{tr } A) \alpha \wedge \beta + (-1)^{p+1} \alpha \wedge \theta(A^t) \beta \\ &= -(\text{tr } A) \alpha \wedge *_{\mathfrak{h}} *_{\mathfrak{h}} \beta - \alpha \wedge *_{\mathfrak{h}} *_{\mathfrak{h}} \theta(A^t) \beta \\ &= \langle \alpha, -(\text{tr } A) *_{\mathfrak{h}} \beta - *_{\mathfrak{h}} \theta(A^t) \beta \rangle \text{vol}_{\mathfrak{h}}, \end{aligned}$$

concluyendo la prueba del lema. \square

Notemos que $\theta(B)$ es una derivación del álgebra $\Lambda \mathfrak{h}^*$ y que $\theta(B)e^{1 \dots 6} = -(\text{tr } B)e^{1 \dots 6}$. Esto último va a ser utilizado con naturalidad a lo largo del trabajo.

2.2. Representaciones irreducibles de G_2

Al igual que en la sección anterior, consideramos \mathfrak{g} espacio vectorial 7-dimensional con base $\{e_1, \dots, e_7\}$. Como bien sabemos, $\text{GL}_7(\mathbb{R})$ actúa en $\Lambda^3 \mathfrak{g}^*$ ($h \cdot \alpha = \alpha(h^{-1} \cdot, h^{-1} \cdot, h^{-1} \cdot)$). Luego, la 3-forma φ dada en (2.1) define un grupo de Lie conexo, compacto y simple de dimensión 14 mediante

$$G_2 := \{h \in \text{GL}_7(\mathbb{R}) : h \cdot \varphi = \varphi\} \subset \text{SO}(7),$$

(ver [B, Definition 1]). Es decir, G_2 es el estabilizador de φ . El hecho de que esté contenido en $\text{SO}(7)$ es trivial puesto que φ determina un producto interno y una orientación.

Denotamos por \mathfrak{g}_2 al álgebra de Lie de G_2 y descomponemos a los espacios de 2-formas y 3-formas de \mathfrak{g} en representaciones G_2 -irreducibles como sigue:

$$\Lambda^2 \mathfrak{g}^* = \Lambda_7^2 \mathfrak{g}^* \oplus \Lambda_{14}^2 \mathfrak{g}^*, \quad \Lambda^3 \mathfrak{g}^* = \Lambda_1^3 \mathfrak{g}^* \oplus \Lambda_7^3 \mathfrak{g}^* \oplus \Lambda_{27}^3 \mathfrak{g}^*,$$

donde los subíndices denotan las dimensiones (ver [B, (2.12),(2.13)]).

Proposición 2.2.1. [B, (2.14)] *Para cada una de las componentes G_2 -irreducibles de las descomposiciones de $\Lambda^2 \mathfrak{g}^*$ y $\Lambda^3 \mathfrak{g}^*$, se tienen las siguientes descripciones,*

$$\Lambda_7^2 \mathfrak{g}^* = \{*(\alpha \wedge * \varphi) \mid \alpha \in \Lambda^1 \mathfrak{g}^*\} = \{\alpha \in \Lambda^2 \mathfrak{g}^* \mid \alpha \wedge \varphi = 2 * \alpha\}, \quad (2.3)$$

$$\Lambda_{14}^2 \mathfrak{g}^* = \{\alpha \in \Lambda^2 \mathfrak{g}^* \mid \alpha \wedge * \varphi = 0\} = \{\alpha \in \Lambda^2 \mathfrak{g}^* \mid \alpha \wedge \varphi = - * \alpha\}, \quad (2.4)$$

$$\Lambda_1^3 \mathfrak{g}^* = \{r \varphi \mid r \in \mathbb{R}\}, \quad (2.5)$$

$$\Lambda_7^3 \mathfrak{g}^* = \{*(\alpha \wedge \varphi) \mid \alpha \in \Lambda^1 \mathfrak{g}^*\}, \quad (2.6)$$

$$\Lambda_{27}^3 \mathfrak{g}^* = \{\alpha \in \Lambda^3 \mathfrak{g}^* \mid \alpha \wedge \varphi = 0, \alpha \wedge * \varphi = 0\}. \quad (2.7)$$

Demostración. Consideramos la transformación

$$\begin{aligned} T_1 : \Lambda^2 \mathfrak{g}^* &\longrightarrow \Lambda^6 \mathfrak{g}^*, \\ \alpha &\longmapsto \alpha \wedge * \varphi. \end{aligned}$$

Notemos que $T_1 \neq 0$, pues por ejemplo $T_1(e^{12}) = e^{123456}$. Como $\Lambda^6 \mathfrak{g}^*$ es una representación irreducible de G_2 de dimensión 7 y $\text{Ker } T_1 \subset \Lambda^2 \mathfrak{g}^*$ e $\text{Im } T_1 \subset \Lambda^6 \mathfrak{g}^*$ son subespacios G_2 -invariantes, resulta que T_1 es sobreyectiva y por ende $\dim \text{Ker } T_1 = 14$. Luego $\Lambda_{14}^2 \mathfrak{g}^* = \text{Ker } T_1$ pues son subespacios G_2 -invariantes de la misma dimensión, y por lo tanto obtenemos que

$$\Lambda_{14}^2 \mathfrak{g}^* = \{\alpha \in \Lambda^2 \mathfrak{g}^* \mid \alpha \wedge * \varphi = 0\}.$$

Consideramos ahora la transformación G_2 -equivariante T_2 definida por

$$\begin{aligned} T_2 : \Lambda^2 \mathfrak{g}^* &\longrightarrow \Lambda^2 \mathfrak{g}^*, \\ \alpha &\longmapsto *(\alpha \wedge \varphi). \end{aligned}$$

Es fácil ver que $T_2(\omega) = 2\omega$ y $T_2(e^{12} - e^{56}) = -e^{12} + e^{56}$, por lo que 2 y -1 son autovalores de T_2 . Es decir, hay al menos dos autoespacios de T_2 en $\Lambda^2 \mathfrak{g}^*$, que por ser G_2 -invariantes tienen que coincidir con $\Lambda_7^2 \mathfrak{g}^*$ y $\Lambda_{14}^2 \mathfrak{g}^*$. Por la descripción anterior de $\Lambda_{14}^2 \mathfrak{g}^*$ y como $\omega \wedge * \varphi = 3 \text{vol}_{\mathfrak{h}} \neq 0$, se tiene que

$$\Lambda_7^2 \mathfrak{g}^* = \{\alpha \in \Lambda^2 \mathfrak{g}^* \mid \alpha \wedge \varphi = 2 * \alpha\}, \quad \Lambda_{14}^2 \mathfrak{g}^* = \{\alpha \in \Lambda^2 \mathfrak{g}^* \mid \alpha \wedge \varphi = - * \alpha\}.$$

Sea T_3 la transformación G_2 -equivariante dada por

$$\begin{aligned} T_3 : \Lambda^1 \mathfrak{g}^* &\longrightarrow \Lambda^2 \mathfrak{g}^*, \\ \alpha &\longmapsto *(\alpha \wedge * \varphi), \end{aligned}$$

como $\Lambda^1 \mathfrak{g}^*$ es una representación irreducible de G_2 de dimensión 7 y $T_3(e^7) = \omega \neq 0$, entonces $\text{Ker } T_3 \equiv 0$ y $\dim \text{Im } T_3 = 7$. Es decir, $\text{Im } T_3$ es un subespacio G_2 -invariante de $\Lambda^2 \mathfrak{g}^*$ de dimensión 7, por lo que

$$\Lambda_7^2 \mathfrak{g}^* = \{*(\alpha \wedge * \varphi) \mid \alpha \in \Lambda^1 \mathfrak{g}^*\}.$$

Para describir las componentes irreducibles del espacio de 3-formas, consideramos

$$\begin{aligned} T_4 : \Lambda^1 \mathfrak{g}^* &\longrightarrow \Lambda^3 \mathfrak{g}^*, \\ \alpha &\mapsto *(\alpha \wedge \varphi). \end{aligned}$$

En particular $T_4(e^7) = \pm \rho^- \neq 0$ y luego $0 = \text{Ker } T_4 \subset \Lambda^1 \mathfrak{g}^*$ irreducible. Es decir, $\text{Im } T_4$ es un subespacio G_2 invariante de dimensión 7 de $\Lambda^3 \mathfrak{g}^*$, por lo que

$$\Lambda_7^3 \mathfrak{g}^* = \{*(\alpha \wedge \varphi) \mid \alpha \in \Lambda^1 \mathfrak{g}^*\}.$$

Sea

$$\begin{aligned} T_5 : \Lambda^3 \mathfrak{g}^* &\longrightarrow \Lambda^7 \mathfrak{g}^*, \\ \alpha &\mapsto \alpha \wedge * \varphi, \end{aligned}$$

$T_5 \neq 0$ pues $T_5(\varphi) = 7 \text{ vol}$. Luego $\text{Im } T_5 \simeq \Lambda_1^3 \mathfrak{g}^*$ por tener la misma dimensión, y $\text{Ker } T_5 \simeq \Lambda_7^3 \mathfrak{g}^* \oplus \Lambda_{27}^3 \mathfrak{g}^*$. Es decir

$$\Lambda_1^3 \mathfrak{g}^* = \{r\varphi \mid r \in \mathbb{R}\},$$

y si definimos

$$\begin{aligned} T_6 : \text{Ker } T_5 &\longrightarrow \Lambda^6 \mathfrak{g}^*, \\ \alpha &\mapsto \alpha \wedge \varphi, \end{aligned}$$

entonces $\rho^- = *(e^7 \wedge \varphi) \in \Lambda_7^3 \mathfrak{g}^*$ es tal que $T_6(\rho^-) = -3 \text{ vol}_\eta \neq 0$. Por lo que $\text{Ker } T_6 = \Lambda_{27}^3 \mathfrak{g}^*$, es decir

$$\Lambda_{27}^3 \mathfrak{g}^* = \{\alpha \in \Lambda^3 \mathfrak{g}^* \mid \alpha \wedge \varphi = 0, \alpha \wedge * \varphi = 0\},$$

y con esto concluimos la prueba. \square

Como G_2 -representación, $\Lambda_{14}^2 \mathfrak{g}^*$ es equivalente a la representación adjunta \mathfrak{g}_2 , luego toda $\tau \in \Lambda_{14}^2 \mathfrak{g}^*$ no nula puede ser diagonalizada, en el sentido que existe $h \in G_2$ tal que

$$h \cdot \tau = a e^{12} + b e^{34} + c e^{56}, \quad a + b + c = 0. \quad (2.8)$$

Luego, (φ, τ) es equivalente a $(\varphi, a e^{12} + b e^{34} + c e^{56})$. Es decir, salvo equivalencia podemos asumir que existe una base ortonormal orientada $\{e_1, \dots, e_7\}$ de \mathfrak{g} tal que φ es como en (2.1) y

$$\tau = a e^{12} + b e^{34} + c e^{56}, \quad a + b + c = 0, \quad a \geq b \geq 0 > c. \quad (2.9)$$

En particular,

$$\begin{aligned} \tau \wedge \tau &= 2ab e^{1234} + 2ac e^{1256} + 2bc e^{3456}, \\ \tau \wedge \tau \wedge \tau &= 6abc e^{123456}, \\ |\tau \wedge \tau| &= |\tau|^2 = a^2 + b^2 + c^2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

2.3. El grupo de Lie G_μ

En esta sección consideramos un grupo de Lie cuya álgebra de Lie tiene un ideal de codimensión uno y fijamos la notación para tal álgebra. Analizamos de qué manera depende el corchete de Lie de los corchetes de sus subálgebras.

Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie de dimensión 7 tal que \mathfrak{g} tiene un ideal \mathfrak{h} de codimensión uno. Consideramos la base $\{e_1, \dots, e_7\}$ de \mathfrak{g} tal que $\mathfrak{h} = \text{span}\{e_1, \dots, e_6\}$, es decir $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times \mathbb{R}e_7$. El corchete de Lie μ de \mathfrak{g} queda determinado por

$$\mu = \lambda + \mu_A, \quad (2.11)$$

donde λ es el corchete de Lie de \mathfrak{h} (extendido a \mathfrak{g} mediante $\lambda(\mathfrak{g}, e_7) = 0$) y μ_A es el corchete de Lie definido por una cierta $A \in \text{Der}(\mathfrak{h})$ como

$$\mu_A(e_7, v) = Av, \quad \mu_A(v, w) = 0, \quad \forall v, w \in \mathfrak{h}.$$

Denotamos por G_μ al grupo de Lie simplemente conexo con álgebra de Lie (\mathfrak{g}, μ) . Notemos que G_μ es soluble si y sólo si el álgebra de Lie (\mathfrak{h}, λ) es soluble, y es nilpotente si y sólo si (\mathfrak{h}, λ) es nilpotente y A es un mapa lineal nilpotente. Denotemos por H_λ al grupo de Lie simplemente conexo con álgebra de Lie (\mathfrak{h}, λ) y por G_A al grupo de Lie simplemente conexo con álgebra de Lie (\mathfrak{g}, μ_A) .

En resumen, el corchete de Lie en \mathfrak{g} está dado por:

$$\mu(e_i, e_j) = \lambda(e_i, e_j), \quad \mu(e_7, e_i) = Ae_i, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, 6\}.$$

Si consideramos además la métrica riemanniana y la forma de volumen en G_μ que hacen de $\{e_1, \dots, e_7\}$ una base ortonormal ordenada de $T_p M$ para cada $p \in M$, entonces tenemos $*$: $\Lambda^k \mathfrak{g}^* \rightarrow \Lambda^{7-k} \mathfrak{g}^*$ como en la sección anterior.

En el siguiente lema agrupamos algunas propiedades de formas diferenciables en un grupo de Lie.

Lema 2.3.1. *Si d_μ, d_λ, d_A denotan las diferenciales de k -formas en las álgebras de Lie (\mathfrak{g}, μ) , (\mathfrak{h}, λ) y (\mathfrak{g}, μ_A) , respectivamente, entonces se cumple lo siguiente,*

- (i) $d_\mu = d_\lambda + d_A$. Es decir, para toda $\gamma = \alpha + \beta \wedge e^7 \in \Lambda^k \mathfrak{g}^*$, $\alpha \in \Lambda^k \mathfrak{h}^*$, $\beta \in \Lambda^{k-1} \mathfrak{h}^*$ se tiene:

$$d_\mu \gamma = d_\lambda \alpha + d_\lambda \beta \wedge e^7 + d_A \alpha,$$

$$\text{y } d_A \alpha = (-1)^k \theta(A) \alpha \wedge e^7.$$

- (ii) $d_\mu e^7 = 0$, $d_A e^7 = 0$ y $d_A(\alpha \wedge e^7) = 0$, para toda $\alpha \in \Lambda^k \mathfrak{h}^*$.

- (iii) $d_\lambda \circ \theta(D) = \theta(D) \circ d_\lambda$ para toda $D \in \text{Der}(\mathfrak{h})$.

(iv) $d_\mu * e^i = (-1)^i \text{tr}(\text{ad}_\mu e_i) e^{1\dots 7}$, para toda $i = 1, \dots, 7$.

Demostración. Dados $\alpha \in \Lambda^k \mathfrak{h}^*$, $\beta \in \Lambda^{k-1} \mathfrak{h}^*$ y $i_1 < \dots < i_{k+1} \in \{1, \dots, 6\}$,

$$\begin{aligned} d_\mu \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_{k+1}}) &= \sum_{r,s} (-1)^{r+s} \alpha(\mu(e_{i_r}, e_{i_s}), e_{i_1}, \dots, \hat{e}_{i_r}, \dots, \hat{e}_{i_s}, \dots, e_{i_{k+1}}) \\ &= \sum_{r,s} (-1)^{r+s} \alpha(\lambda(e_{i_r}, e_{i_s}), e_{i_1}, \dots, \hat{e}_{i_r}, \dots, \hat{e}_{i_s}, \dots, e_{i_{k+1}}) \\ &= d_\lambda \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_{k+1}}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_\mu \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}, e_7) &= \sum_{r,s} (-1)^{r+s} \alpha(\mu(e_{i_r}, e_{i_s}), e_{i_1}, \dots, \hat{e}_{i_r}, \dots, \hat{e}_{i_s}, \dots, e_{i_k}, e_7) \\ &\quad + \sum_r (-1)^{r+k+1} \alpha(\mu(e_{i_r}, e_7), e_{i_1}, \dots, \hat{e}_{i_r}, \dots, e_{i_k}) \\ &= \sum_r (-1)^{r+k+1} \alpha(-Ae_{i_r}, e_{i_1}, \dots, \hat{e}_{i_r}, \dots, e_{i_k}) \\ &= \sum_r (-1)^{r+k+1} (-1)^{r-1} \alpha(e_{i_1}, \dots, -Ae_{i_r}, \dots, e_{i_k}) \\ &= (-1)^k \theta(A) \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = d_A \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}, e_7). \end{aligned}$$

El hecho de que $d_\mu e^7 = d_A e^7 = 0$ sale directo pues $e_7 \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \emptyset$, y en consecuencia $d_A(\alpha \wedge e^7) = 0$.

La parte (iii) ocurre pues $\theta(D)$ es precisamente menos la derivada de Lie \mathcal{L}_{X_D} , donde X_D es el campo vectorial en H_λ asociado a D .

El ítem (iv) se puede ver de la siguiente cuenta,

$$\begin{aligned} d_\mu * e^i &= (-1)^i d_\mu e^{1\dots \hat{i} \dots 7} \\ &= (-1)^i \sum_{j < i} (-1)^{j-1} e^1 \wedge \dots \wedge d_\mu e^j \wedge \dots \wedge \hat{e}^i \wedge \dots \wedge e^7 \\ &\quad + (-1)^i \sum_{i < j} (-1)^j e^1 \wedge \dots \wedge \hat{e}^i \wedge \dots \wedge d_\mu e^j \wedge \dots \wedge e^7 \\ &= (-1)^i \sum_{j < i} (-1)^{j-1} e^1 \wedge \dots \wedge (\text{ad } e_i)_{jj} e^{j\hat{i}} \wedge \dots \wedge \hat{e}^i \wedge \dots \wedge e^7 \\ &\quad + (-1)^i \sum_{i < j} (-1)^j e^1 \wedge \dots \wedge \hat{e}^i \wedge \dots \wedge (-1)(\text{ad } e_i)_{jj} e^{ij} \wedge \dots \wedge e^7 \\ &= (-1)^i \sum_j (\text{ad}_\mu e_i)_{jj} e^{1\dots 7} = (-1)^i \text{tr}(\text{ad}_\mu e_i) e^{1\dots 7}, \end{aligned}$$

y con eso concluimos la prueba del lema. \square

Además, como $\dim \mathfrak{g} = 7$, la *codiferencial* de d está definida de la siguiente manera:

$$\delta : \Lambda^{k+1} \mathfrak{g}^* \rightarrow \Lambda^k \mathfrak{g}^*, \quad \delta = (-1)^{k+1} * d_\mu *.$$

Observación 2.3.2. Si G_μ es unimodular (i.e. $\text{trad}_\mu X = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$), entonces δ coincide con la adjunta de d respecto de la métrica riemanniana inducida por $\{e_1, \dots, e_7\}$, es decir

$$\langle \alpha, \delta\beta \rangle = \langle d\alpha, \beta \rangle, \quad \forall \alpha \in \Lambda^k \mathfrak{g}^*, \beta \in \Lambda^{k+1} \mathfrak{g}^*.$$

En efecto

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \delta\beta \rangle \text{ vol} &= \alpha \wedge * \delta\beta = (-1)^{k+1} \alpha \wedge *^2 d * \beta = (-1)^{k+1} \alpha \wedge d * \beta \\ &= -d(\alpha \wedge * \beta) + d\alpha \wedge * \beta = \langle d\alpha, \beta \rangle \text{ vol}, \end{aligned}$$

la última igualdad vale pues $\alpha \wedge * \beta$ es una 6-forma en \mathfrak{g} unimodular, por lo tanto es cerrada (ver Lema 2.3.1 (iv)).

2.4. Subgrupos de G_2

En la Sección 3.1 analizamos qué condiciones de estructura son requeridas para que un grupo de Lie admita una G_2 -estructura ERP invariante a izquierda. Para ello, necesitamos hacer algunas reducciones salvo equivalencia, por lo cual es útil definir y estudiar algunos subgrupos de G_2 , como por ejemplo, el estabilizador de la 2-forma $\tau := e^{12} - e^{56}$. Es importante destacar que toda matriz en esta sección está escrita en términos de la base $\{e_7, e_3, e_4, e_1, e_2, e_5, e_6\}$.

Consideremos el subgrupo de G_2 que deja invariante al subespacio $\mathfrak{h} := \text{span}\{e_1, \dots, e_6\}$, denotado por $U_{\mathfrak{h}}$. Es sabido (ver e.g. [VM, Lemma 2.2.2]) que

$$U_{\mathfrak{h}} := \{h \in G_2 : h(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}\} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & \text{SU}(3) \end{array} \right] \cup \left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & \text{SU}(3) \end{array} \right] \tilde{g}, \quad (2.12)$$

donde \tilde{g} está definido a continuación y $\text{SU}(3)$ está definido por J como abajo

$$\tilde{g} = \begin{bmatrix} -1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & -1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & -1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & -1 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & -1 & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & \\ & & 0 & -1 & & & \\ & & 1 & 0 & & & \\ & & & & 0 & -1 & \\ & & & & 1 & 0 & \end{bmatrix},$$

es decir $\text{SU}(3) = \{h \in \text{SO}(6) : hJ = Jh\}$. Al subgrupo de G_2 que además de preservar \mathfrak{h} preserva τ lo llamamos

$$U_{\mathfrak{h}, \tau} := \{h \in G_2 : h(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}, h \cdot \tau = \tau\}, \quad (2.13)$$

y se cumple la siguiente igualdad.

Lema 2.4.1. $U_{\mathfrak{h}, \tau}$ está dado por $U_{\mathfrak{h}, \tau} = U_0 \cup U_0 g$, donde

$$U_0 := \left\{ \left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline h_1 & h_2 \\ & h_3 \end{array} \right] : h_i \in \text{SO}(2), h_1 h_2 h_3 = \text{id} \right\}, g := \begin{bmatrix} -1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & -1 & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & 1 & 0 & \\ & & & & -1 & 0 & \\ & & & & 0 & 1 & \end{bmatrix}.$$

con álgebra de Lie dada por

$$\mathfrak{u}_{\mathfrak{g}_1} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \\ & 0 & -d & b-e & -f \\ & d & 0 & -c+f & -e \\ & -b+e & c-f & 0 & -a+d \\ & f & e & a-d & 0 \end{bmatrix} : a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \right\}.$$

y el correspondiente subgrupo estabilizador de τ :

$$U_{\mathfrak{g}_1, \tau} := \{h \in G_2 : h(\mathfrak{g}_1) \subset \mathfrak{g}_1, h \cdot \tau = \tau\}, \quad (2.15)$$

con álgebra de Lie

$$\mathfrak{u}_{\mathfrak{g}_1, \tau} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \\ & 0 & -d & \frac{1}{2}b & -\frac{1}{2}c \\ & d & 0 & -\frac{1}{2}c & -\frac{1}{2}b \\ & -\frac{1}{2}b & \frac{1}{2}c & 0 & -a+d \\ & \frac{1}{2}c & \frac{1}{2}b & a-d & 0 \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Esta última se obtiene de calcular $\{H \in \mathfrak{u}_{\mathfrak{g}_1} : \theta(H)\tau = 0\}$.

2.5. G_2 -estructuras cerradas

Dada una variedad diferenciable M , de dimensión 7, decimos que una 3-forma diferenciable $\varphi \in \Omega^3 M$ es una G_2 -estructura si para cada $p \in M$, φ_p se puede escribir como en (2.1), con respecto a alguna base $\{e_1, \dots, e_7\}$ de $T_p M$. Es decir, φ_p es positiva para cada $p \in M$:

$$\varphi_p = e^{127} + e^{347} + e^{567} + e^{135} - e^{146} - e^{236} - e^{245}.$$

Cada G_2 -estructura define una métrica riemanniana en la variedad M , que denotaremos por g , y una orientación $\text{vol} \in \Omega^7 M$ (única salvo producto por escalar), que hacen de la base $\{e_1, \dots, e_7\}$ una base ortonormal y orientada de $T_p M$, para cada $p \in M$. De esta manera φ determina al operador estrella de Hodge

$$* : \Omega M \longrightarrow \Omega M, \quad \cdot \wedge * \alpha = \langle \cdot, \alpha \rangle \text{vol}.$$

y al operador laplaciano de Hodge dado por

$$\Delta : \Omega^k M \longrightarrow \Omega^k M, \quad \Delta := \delta d + d\delta,$$

donde $\delta : \Omega^{k+1} M \longrightarrow \Omega^k M$, $\delta = (-1)^{k+1} * d*$, es la codiferencial de d .

Si denotamos por ∇ a la conexión de Levi-Civita asociada a la métrica g , llamamos *formas de torsión* de la G_2 -estructura φ a las componentes de la *torsión intrínseca* $\nabla \varphi$. Dichas componentes se pueden obtener (ver [B,

Proposition 1]) como las únicas formas diferenciales $\tau_i \in \Omega^i M$, $i = 0, 1, 2, 3$, tales que

$$d\varphi = \tau_0 * \varphi + 3\tau_1 \wedge \varphi + *\tau_3, \quad d*\varphi = 4\tau_1 \wedge *\varphi + \tau_2 \wedge \varphi. \quad (2.16)$$

En el caso particular en que la G_2 -estructura φ es cerrada en la variedad M , es decir $d\varphi = 0$, la única forma de torsión que sobrevive es la 2-forma $\tau := \tau_2 \in \Omega_{14}^2$ y por lo tanto sucede que

$$\tau = \delta\varphi = -*d*\varphi, \quad d*\varphi = \tau \wedge \varphi, \quad d\tau = \Delta\varphi. \quad (2.17)$$

En particular, φ es libre de torsión (o paralela) si y sólo si $\tau = 0$.

Con el afán de clasificar G_2 -estructuras que tienen ciertas propiedades, debemos definir una equivalencia que distinga las estructuras geoméricamente. Decimos entonces que dos variedades con G_2 -estructuras (M, φ) y (M', φ') son *equivalentes* si existe un difeomorfismo $f : M \rightarrow M'$ tal que $\varphi = f^*\varphi'$.

En el caso en que la variedad diferenciable es un grupo de Lie, llamémosle G , podemos estudiar G_2 -estructuras invariantes a izquierda en G , lo cual nos permite trabajar a nivel de álgebra de Lie como en la Sección 2. Es decir, toda G_2 -estructura invariante a izquierda en un grupo de Lie queda determinada por una 3-forma positiva en el álgebra de Lie \mathfrak{g} . En lo que sigue vamos a asumir que dicha 3-forma positiva es la dada en (2.1).

En este caso podemos considerar una distinción geométrica más fina. Dos grupos de Lie con G_2 -estructuras invariantes a izquierda (G, φ) y (G', φ') se dicen *equivariantemente equivalentes* si existe un isomorfismo de grupos de Lie $F : G \rightarrow G'$ tal que $\varphi = f^*\varphi'$, donde $f := dF|_e : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ es el correspondiente isomorfismo de álgebras de Lie. Es claro que si dos estructuras son equivariantemente equivalentes, entonces son equivalentes.

Definición 2.5.1. (G_μ, φ) es el grupo de Lie G_μ definido en la Sección 2.3, junto con la G_2 -estructura invariante a izquierda determinada por la 3-forma positiva φ en \mathfrak{g} dada en (2.1).

Notar que por (2.11), G_μ depende solo del corchete de Lie λ en el álgebra de Lie 6-dimensional $\mathfrak{h} = \text{span}\{e_1, \dots, e_6\}$ y de una matrix $A \in \text{Der}(\mathfrak{h}, \lambda)$.

A la hora de clasificar G_2 -estructuras, asumir que el grupo de Lie tiene la forma de G_μ simplifica en gran medida las cuentas. La siguiente proposición nos dice que en el caso en que la G_2 -estructura sea cerrada, lo anterior se puede asumir sin pérdida de generalidad.

Proposición 2.5.2. *Todo grupo de Lie provisto de una G_2 -estructura invariante a izquierda cerrada es equivariantemente equivalente a (G_μ, φ) para algún $\mu = \lambda + \mu_A$ tal que el ideal (\mathfrak{h}, λ) es unimodular.*

Observación 2.5.3. Si el grupo de Lie es no-unimodular, entonces $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} : \text{tr ad}_\mu X = 0\}$. Por otro lado, el par (ω, ρ^+) define una $SU(3)$ -estructura en el álgebra de Lie \mathfrak{h} , es decir $\omega \in \Lambda^2 \mathfrak{h}^*$ y $\rho^+ \in \Lambda^3 \mathfrak{h}^*$ tales que

$$\omega \wedge \rho^+ = 0, \quad \rho^+ \wedge *_\mathfrak{h} \rho^+ = \frac{2}{3} \omega^3.$$

Demostración. Sea (G, ψ) un grupo de Lie G junto con una G_2 -estructura cerrada ψ . Si \mathfrak{g} es no unimodular, entonces podemos tomar el ideal de codimensión uno $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} : \text{tr ad}_\mu X = 0\}$ de \mathfrak{g} . En el caso en que \mathfrak{g} es unimodular, se sigue de la clasificación obtenida en [FR4] que existe un ideal de codimensión uno \mathfrak{h} . Por lo tanto, existe una base $\{e_1, \dots, e_7\}$ de \mathfrak{g} tal que $\mathfrak{h} = \text{span}\{e_1, \dots, e_6\}$ y φ puede ser escrita como en (2.1). Se sigue entonces que si $\lambda := \mu|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}}$ y $A := \text{ad } e_7|_{\mathfrak{h}}$, entonces el corchete de Lie μ de \mathfrak{g} está dado por $\mu = \lambda + \mu_A$, quedando así demostrada la proposición. \square

De ahora en adelante, vamos a trabajar con G_2 -estructuras de la forma (G_μ, φ) . De acuerdo al Lema 2.3.1, (i), para (G_μ, φ) tenemos que,

$$d_\mu \varphi = d_\lambda \rho^+ + d_\lambda \omega \wedge e^7 - \theta(A) \rho^+ \wedge e^7, \quad (2.18)$$

$$d_\mu * \varphi = d_\lambda \omega \wedge \omega + d_\lambda \rho^- \wedge e^7 + \theta(A) \omega \wedge \omega \wedge e^7. \quad (2.19)$$

Luego, (G_μ, φ) es cerrada si y solo si se dan las siguientes condiciones

$$d_\lambda \omega = \theta(A) \rho^+, \quad d_\lambda \rho^+ = 0. \quad (2.20)$$

A continuación calculamos la torsión en términos de λ y A , que son las únicas variables en juego.

Proposición 2.5.4. *La 2-forma de torsión τ_μ de una G_2 -estructura cerrada (G_μ, φ) está dada por $\tau_\mu = \tau_\lambda + \tau_A$, donde*

$$\tau_\lambda := - *_\mathfrak{h} (d_\lambda \omega \wedge \omega) \wedge e^7 - *_\mathfrak{h} d_\lambda \rho^-, \quad \tau_A := (\text{tr } A) \omega + \theta(A^t) \omega.$$

Más aún, $d_\lambda \omega \wedge \omega = -\theta(A) \omega \wedge \rho^+$.

Demostración. De (2.1), se deduce que

$$\begin{aligned} *d_A * \varphi &= * \left(\frac{1}{2} \theta(A) (\omega \wedge \omega) \wedge e^7 \right) = * (\theta(A) *_\mathfrak{h} \omega \wedge e^7) \\ &= * (-(\text{tr } A) *_\mathfrak{h} \omega \wedge e^7 - *_\mathfrak{h} \theta(A^t) \omega \wedge e^7) = -(\text{tr } A) \omega - \theta(A^t) \omega, \end{aligned}$$

y

$$d_\lambda \omega \wedge \omega = \theta(A) \rho^+ \wedge \omega = \theta(A) \omega \wedge \rho^+.$$

Usando el Lemma 2.1.1, (v) calculamos,

$$\begin{aligned} d_\mu * \varphi &= d_\lambda \omega \wedge \omega + d_\lambda \rho^- \wedge e^7 + d_A * \varphi, \\ *d_\mu * \varphi &= * (d_\lambda \omega \wedge \omega) + *_\mathfrak{h} d_\lambda \rho^- + *d_A * \varphi \\ &= *_\mathfrak{h} (d_\lambda \omega \wedge \omega) \wedge e^7 + *_\mathfrak{h} d_\lambda \rho^- - (\text{tr } A) \omega - \theta(A^t) \omega, \end{aligned}$$

y así resulta la fórmula deseada. \square

Sencillamente, usando la proposición anterior y el Lema 2.3.1, obtenemos que para toda G_2 -estructura cerrada (G_μ, φ) , se cumple que

$$\begin{aligned} d_\mu \tau_\mu &= (\text{tr } A) d_\lambda \omega - d_\lambda *_{\mathfrak{h}} d_\lambda *_{\mathfrak{h}} \rho^+ + d_\lambda \theta(A^t) \omega - d_\lambda *_{\mathfrak{h}} (d_\lambda \omega \wedge \omega) \wedge e^7 \\ &= (+\theta(A) \theta(A^t) \omega - \theta(A) *_{\mathfrak{h}} d_\lambda \rho^- + (\text{tr } A) \theta(A) \omega) \wedge e^7. \end{aligned} \quad (2.21)$$

En el siguiente resultado mostramos que dos G_2 -estructuras invariantes a izquierda en dos grupos de Lie no isomorfos pueden ser equivalentes, a pesar de no ser equivariantemente equivalentes. Esto generaliza el resultado dado en [L3, Proposition 5.6] más allá del caso casi-abeliano, y la prueba también sigue las líneas de [H, Proposition 2.5].

Proposición 2.5.5. *Sea (G_μ, φ) una G_2 -estructura como antes, con $\mu = \lambda + \mu_A$. Si $D \in \mathfrak{su}(3) \cap \text{Der}(\mathfrak{h}, \lambda)$, $[D, A] = 0$ y llamamos $\mu_1 := \lambda + \mu_{A+D}$, entonces las G_2 -estructuras (G_μ, φ) y (G_{μ_1}, φ) son equivalentes.*

Observación 2.5.6. La hipótesis en la matriz D significa precisamente que

$$\begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{g}_2 \cap \text{Der}(\mathfrak{g}, \mu), \quad \mathfrak{g}_2 \cap \text{Der}(\mathfrak{g}, \mu_1).$$

Notemos que en general, los grupos de Lie G_μ y G_{μ_1} no son isomorfos. Por ejemplo, si μ es no unimodular, entonces los espectros de D y A deben coincidir salvo escalar para que μ y μ_1 sean isomorfas.

Demostración. Denotemos por \mathfrak{g}_μ al álgebra de Lie (\mathfrak{g}, μ) de G_μ . Consideramos el grupo de Lie

$$F := \text{Aut}(G_{\mu_1}) \cap \text{Aut}(G_{\mu_1}, \varphi) \simeq \text{Aut}(\mathfrak{g}_{\mu_1}) \cap G_2,$$

con álgebra de Lie $\mathfrak{f} := \text{Der}(\mathfrak{g}_{\mu_1}) \cap \mathfrak{g}_2$, el homomorfismo $\alpha : \mathfrak{g}_{\mu_1} \rightarrow \mathfrak{f}$ definido por

$$\alpha(e_7) = \begin{bmatrix} -D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha|_{\mathfrak{h}} \equiv 0,$$

y denotamos también por α al correspondiente homomorfismo de grupos de Lie $G_{\mu_1} \rightarrow F$. Si $L : G_{\mu_1} \rightarrow \text{Aut}(G_{\mu_1}, \varphi)$ es el morfismo definido por multiplicar a izquierda, entonces

$$G_1 := \{L_s \circ \alpha(s) : s \in G_{\mu_1}\} \subset \text{Aut}(G_{\mu_1}, \varphi),$$

es un subgrupo. De hecho, usando que $G_{\mu_1} = \exp \mathbb{R}e_7 \rtimes \exp \mathfrak{h}$, tenemos para $s = ah$, $t = bg$ que,

$$\begin{aligned} L_s \circ \alpha(s) \circ L_t \circ \alpha(t) &= L_s \circ L_{\alpha(s)(t)} \alpha(s) \alpha(t) = L_{s\alpha(s)(t)} \alpha(s) \alpha(t) \\ &= L_{s\alpha(s)(t)} \alpha(s) \alpha(\alpha(a)(b) \alpha(a)(g)) = L_{s\alpha(s)(t)} \alpha(s \alpha(s)(t)). \end{aligned}$$

Luego G_1 es un subgrupo de Lie conexo y cerrado de $\text{Aut}(G_{\mu_1}, \varphi)$ pues $s \mapsto L_s \circ \alpha(s)$ es continua y propia. Además, G_1 actúa simple y transitivamente en G_{μ_1} por automorfismos de φ , entonces el difeomorfismo $f : G_1 \rightarrow G_{\mu_1}$, $f(L_s \circ \alpha(s)) := (L_s \circ \alpha(s))(e) = s$ define una equivalencia entre G_2 -estructuras invariantes a izquierda $(G_1, f^*\varphi)$ y (G_{μ_1}, φ) . Por otro lado, el álgebra de Lie de G_1 está dada por

$$\mathfrak{g}_0 := \{dL|_e X + \alpha(X) : X \in \mathfrak{g}\} \subset \text{L}(\text{Aut}(G_{\mu_1}, \varphi)),$$

y si $X = X_{\mathfrak{h}} + ae_7$, $Y = Y_{\mathfrak{h}} + be_7$ pertenece a \mathfrak{g} , luego

$$\begin{aligned} & [dL|_e X + \alpha(X), dL|_e Y + \alpha(Y)] \\ &= dL|_e \mu_1(X, Y) + dL|_e \alpha(X)Y - dL|_e \alpha(Y)X + \alpha([X, Y]) \\ &= dL|_e (a(A+D)Y_{\mathfrak{h}} - b(A+D)X_{\mathfrak{h}} + \lambda(X_{\mathfrak{h}}, Y_{\mathfrak{h}}) - aDY_{\mathfrak{h}} + bDX_{\mathfrak{h}} + 0) \\ &= dL|_e (aDY_{\mathfrak{h}} - bDX_{\mathfrak{h}} + \lambda(X_{\mathfrak{h}}, Y_{\mathfrak{h}})) = dL|_e \mu(X, Y) = (dL|_e + \alpha)\mu(X, Y). \end{aligned}$$

Esto muestra que $df|_e^{-1} = dL|_e + \alpha : \mathfrak{g}_{\mu} \rightarrow \mathfrak{g}_0$ es un isomorfismo de álgebras de Lie y entonces (G_{μ}, φ) es equivalente a $(G_1, f^*\varphi)$, quedando así probada la proposición. \square

Observación 2.5.7. Si reemplazamos φ por un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en \mathfrak{g} , $\text{Aut}(G_{\mu_1}, \varphi)$ por $\text{Iso}(G_{\mu_1}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ y G_2 por $\text{O}(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, la siguiente versión Riemanniana puede ser probada de la misma manera que antes, para toda dimensión: $(G_{\mu}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es isométrica a $(G_{\mu_1}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ para toda $\mu = \lambda + \mu_A$, $\mu_1 = \lambda + \mu_{A+D}$ tal que $D \in \mathfrak{so}(\mathfrak{h}, \langle \cdot, \cdot \rangle) \cap \text{Der}(\mathfrak{h}, \lambda)$ y $[D, A] = 0$.

Observación 2.5.8. Como una aplicación de la Proposición 2.5.5, se obtiene que la familia monoparamétrica de G_2 -estructuras ERP dada en [FR3, Example 6.4] es equivalente dos a dos.

2.6. Solitones

Dada \mathfrak{g} un álgebra de Lie, consideramos el grupo de Lie simplemente conexo G con álgebra de Lie \mathfrak{g} . Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interno en \mathfrak{g} , el *operador de Ricci* de la métrica invariante a izquierda en G definida por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ está dado por

$$\text{Ric} = M - \frac{1}{2}B - S(\text{ad } H), \quad (2.22)$$

donde M es el *moment map* $M : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$,

$$\langle MX, Y \rangle = -\frac{1}{2} \sum_{ij} \langle [X, e_i], e_j \rangle \langle [Y, e_i], e_j \rangle + \frac{1}{4} \sum_{ij} \langle [e_i, e_j], X \rangle \langle [e_i, e_j], Y \rangle,$$

B es la *forma de Killing*,

$$B : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, \quad \langle B(X), Y \rangle = \text{tr ad } X \text{ ad } Y,$$

H es el *vector de curvatura media* en \mathfrak{g} , definido por

$$\langle H, X \rangle = \text{tr ad } X,$$

y $S(\text{ad } H) = \frac{\text{ad } H + \text{ad } H^t}{2}$ es la parte simétrica de $\text{ad } H$.

Definición 2.6.1. [L1] Dada un álgebra de Lie \mathfrak{g} y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interno en \mathfrak{g} , decimos que $(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un *solitón de Ricci* (algebraico) si existen $\lambda \in \mathbb{R}$ y $D \in \text{Der}(\mathfrak{g})$ tales que:

$$\text{Ric} = \lambda \text{id} + D, \quad (2.23)$$

donde Ric es el operador de Ricci definido previamente. Se dice que es de expansión si $\lambda < 0$, estable si $\lambda = 0$ y de contracción si $\lambda > 0$.

En particular, se cumple para el tensor de Ricci $\text{ric} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$, que

$$\text{ric}(g) = \lambda g - \frac{1}{2} \mathcal{L}_{X_D} g,$$

para X_D el campo invariante a izquierda en el grupo de Lie simplemente conexo G con álgebra de Lie \mathfrak{g} , definido como

$$X_D(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 f_t(p), \quad \forall p \in G, \quad (2.24)$$

donde $f_t \in \text{Aut}(G)$ es el único automorfismo tal que $df_t|_e = e^{tD}$. Es decir, (G, φ) es una solución auto-similar para el flujo de Ricci:

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2 \text{Ric}(g(t)).$$

Por otro lado, R. Bryant introdujo en [B] el siguiente flujo geométrico natural para G_2 -estructuras, el llamado *flujo laplaciano*:

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(t) = \Delta \varphi(t), \quad (2.25)$$

donde $\varphi(t)$ es una familia monoparamétrica de G_2 -estructuras cerradas en una variedad diferenciable M de dimensión 7.

Es sabido que una G_2 -estructura φ en una variedad diferenciable M fluye de manera autosimilar a lo largo del flujo laplaciano dado por (2.25), en el sentido de que las soluciones $\varphi(t)$ tienen la forma

$$\varphi(t) = c(t) f(t)^* \varphi, \quad \text{para algún } c(t) \in \mathbb{R}^* \text{ y } f(t) \in \text{Diff}(M),$$

si y sólo si

$$\Delta \varphi = c \varphi + \mathcal{L}_X \varphi, \quad \text{para algún } c \in \mathbb{R}, \quad X \in \mathfrak{X}(M) \text{ (completo),}$$

donde \mathcal{L}_X denota la derivada de Lie respecto del campo X . En tal caso, $c(t) = \left(\frac{2}{3}ct + 1\right)^{3/2}$. Análogo a la terminología que se utiliza en la teoría del flujo de Ricci, llamaremos a φ *solitón de Laplace* y diremos que es de *expansión*, *estable* o de *contracción*, si $c > 0$, $c = 0$ o $c < 0$, respectivamente.

En el particular caso en que $M = G$ es un grupo de Lie simplemente conexo con álgebra de Lie \mathfrak{g} , y φ es invariante a izquierda, tenemos la siguiente definición más amigable para trabajar.

Definición 2.6.2. [L5] Dada \mathfrak{g} un álgebra de Lie 7-dimensional \mathfrak{g} y φ una G_2 -estructura invariante a izquierda en G , decimos que (\mathfrak{g}, φ) es un *solitón de Laplace* (semi-algebraico) si existen $D \in \text{Der}(\mathfrak{g})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\Delta\varphi = \mathcal{L}_{X_D}\varphi + \lambda\varphi, \quad (2.26)$$

donde X_D es el campo invariante a izquierda en G dado en (2.24). Equivalentemente, φ se dice un solitón de Laplace en G si existen $c(t) \in \mathbb{R}^*$ y $f(t) \in \text{Aut}(G)$ tales que

$$\varphi(t) = c(t)f(t)^*\varphi$$

es una solución al flujo laplaciano $\frac{d}{dt}\varphi(t) = \Delta\varphi$.

Notar que esto implica que (G, φ) es solitón de Laplace con la definición anterior.

Observación 2.6.3. $\mathcal{L}_{X_D}\alpha = -\theta(D)\alpha$, para toda $\alpha \in \Lambda^k\mathfrak{g}^*$.

En efecto, basta probarlo para $\alpha \in \Lambda^1\mathfrak{g}^*$ pues ambas son derivaciones de $\Lambda^k\mathfrak{g}^*$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{X_D}e^i(X) &= \frac{d}{dt}\Big|_0 f_t^* e^i(X) = \frac{d}{dt}\Big|_0 e^i(df_t X) = \frac{d}{dt}\Big|_0 e^i(e^{tD} X) \\ &= e^i\left(\frac{d}{dt}\Big|_0 e^{tD} X\right) = e^i(DX) = -\theta(D)e^i(X). \end{aligned}$$

2.7. G_2 -estructuras ERP

Bryant probó la siguiente estimación para una G_2 -estructura cerrada φ en una variedad compacta M (ver [B, Corollary 3]):

$$\int_M \text{scal}^2 * 1 \leq 3 \int_M |\text{Ric}|^2 * 1,$$

y la igualdad se vale si y sólo si

$$d\tau = \frac{1}{6}|\tau|^2\varphi + \frac{1}{6}*(\tau \wedge \tau). \quad (2.27)$$

El factor 3 en el lado derecho de la desigualdad, siendo mucho menor que 7, muestra que la métrica está siempre muy lejos de ser Einstein.

Definición 2.7.1. Las G_2 -estructuras cerradas para las cuales la condición (2.27) se mantiene y $\tau \neq 0$ son llamadas *extremally Ricci-pinched* (ERP) en [B, Remark 13].

En la siguiente proposición se resumen algunos resultados generales en dichas estructuras.

Proposición 2.7.2. [B] *Sea (M, φ) una variedad diferenciable con una G_2 -estructura ERP, y asumamos que es localmente homogénea. Luego,*

(i) $\tau \wedge \tau \wedge \tau = 0$.

(ii) $d(\tau \wedge \tau) = 0$.

(iii) $d * (\tau \wedge \tau) = 0$.

(iv) $\text{Ric}|_P = -\frac{1}{6}|\tau|^2 \text{id}$, $\text{Ric}|_Q = 0$ y $\langle \text{Ric} P, Q \rangle = 0$, donde

$$P := \{X \in TM \mid \iota_X(\tau \wedge \tau) = 0\}, \quad Q := \{X \in TM \mid \iota_X * (\tau \wedge \tau) = 0\},$$

$$\text{y } \dim P = 3, \dim Q = 4.$$

Demostración. Partes (i), (ii) y (iii) siguen de [B, (4.53)], [B, (4.55)] y [B, (4.51)], respectivamente, y el hecho de que $d|\tau|^2 = 0$ ya que M es localmente homogénea. Si escribimos τ como en (2.9) en cada $p \in M$, entonces se debe cumplir que $b = 0$ y $c = -a$, pues $\tau \wedge \tau \wedge \tau = 0$ por (i), y entonces $\tau = a(e^{12} - e^{56})$. Para probar la parte (iv), consideramos la fórmula dada en [L4, (16)] para $q = \frac{1}{6}$, entonces en términos de la base $\{e_1, \dots, e_7\}$,

$$\begin{aligned} \text{Ric} &= -\frac{1}{6}|\tau|^2 \text{id} - \frac{1}{3}\tau^2 = -\frac{1}{3}a^2 \text{id} - \frac{1}{3} \text{Diag}(-a^2, -a^2, 0, 0, -a^2, -a^2, 0) \\ &= -\frac{a^2}{3} \text{Diag}(0, 0, 1, 1, 0, 0, 1) = -\frac{1}{6}|\tau|^2 \text{Diag}(0, 0, 1, 1, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

Como $\tau \wedge \tau = -2ae^{1256}$ y $* (\tau \wedge \tau) = -2ae^{347}$, se sigue que $P = \text{span}\{e_7, e_3, e_4\}$, $Q = \text{span}\{e_1, e_2, e_5, e_6\}$ y por lo tanto vale (iv), concluyendo la prueba. \square

Capítulo 3

Estructura

En el capítulo anterior definimos una G_2 -estructura ERP y probamos algunas propiedades que satisfacen las mismas. El problema, y lo que nos motivó para estudiarlas, es que solo había dos ejemplos de ellas y ambos eran (localmente) homogéneos. El primer ejemplo encontrado fue dado por Bryant, quien introduce la definición, en el espacio homogéneo $SL_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^2/SU(2)$ (ver [B, Example 1]). Este mismo ejemplo puede ser visto también (ya que son equivalentes) en el grupo de Lie soluble dado en [CI, Section 6.3] (ver también [L4, Examples 4.13, 4.10]). Un segundo ejemplo de G_2 -estructura ERP fue dado por Lauret en un grupo de Lie soluble unimodular en [L4, Example 4.7]. Vale la pena destacar que ambos ejemplos son además solitones de Laplace estables, es decir, evolucionan bajo el flujo laplaciano de la siguiente manera: existe una familia monoparamétrica $f(t) \in \text{Diff}(M)$ tal que la solución al flujo laplaciano empezando en φ está dada por $\varphi(t) = f(t)^*\varphi$ (ver Definición 2.6.2).

En la búsqueda de nuevos ejemplos, notamos que la condición de ser ERP impone fuertes restricciones en el álgebra de Lie. Es así como logramos probar el teorema de estructura que nos abrió las puertas a la clasificación. Para los lectores ansiosos, enunciamos ahora el teorema de estructura, pero antes necesitamos introducir un poco de notación. Dada φ como en (2.1), definimos

$$\omega_7 := e^{12} + e^{56}, \quad \omega_3 := e^{26} - e^{15}, \quad \omega_4 := e^{16} + e^{25}$$

de manera que

$$\varphi = \omega_3 \wedge e^3 + \omega_4 \wedge e^4 + \omega_7 \wedge e^7 + e^{347}.$$

Además denotamos por θ la representación usual de $\mathfrak{gl}_4(\mathbb{R})$ en $\Lambda^2\mathbb{R}^4$.

Teorema 3.0.1. *Todo grupo de Lie con una G_2 -estructura invariante a izquierda ERP es equivariantemente equivalente, salvo multiplicación por escalar, a un par (G, φ) con torsión $\tau = e^{12} - e^{56}$, donde φ es como en (2.1), y las siguientes condiciones se valen para el álgebra de Lie \mathfrak{g} de G :*

- (i) $\mathfrak{h} := \text{span}\{e_1, \dots, e_6\}$ es un ideal unimodular.
- (ii) $\mathfrak{g}_0 := \text{span}\{e_7, e_3, e_4\}$ es subálgebra de Lie y $\mathfrak{g}_1 := \text{span}\{e_1, e_2, e_5, e_6\}$ es ideal abeliano de \mathfrak{g} . En particular, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \ltimes \mathfrak{g}_1$ y \mathfrak{g} es soluble.
- (iii) $\mathfrak{h}_1 := \text{span}\{e_3, e_4\}$ es una subálgebra abeliana; en particular $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \ltimes \mathfrak{g}_1$.
- (iv) $\theta(\text{ad } e_7|_{\mathfrak{g}_1})\tau = \frac{1}{3}\omega_7$, $\theta(\text{ad } e_3|_{\mathfrak{g}_1})\tau = \frac{1}{3}\omega_3$ and $\theta(\text{ad } e_4|_{\mathfrak{g}_1})\tau = \frac{1}{3}\omega_4$.
- (v) $\theta(\text{ad } e_7|_{\mathfrak{g}_1})\omega_7 + \theta(\text{ad } e_3|_{\mathfrak{g}_1})\omega_3 + \theta(\text{ad } e_4|_{\mathfrak{g}_1})\omega_4 = \tau + (\text{tr ad } e_7|_{\mathfrak{g}_0})\omega_7$.

Recíprocamente, si \mathfrak{g} satisface (i)-(v), entonces (G, φ) es una G_2 -estructura ERP con torsión $\tau = e^{12} - e^{56}$.

El teorema se prueba en Sección 3.1. La idea es primero probar que todo grupo de Lie con una estructura ERP invariante a izquierda es equivalente a (G, φ) con torsión fija $\tau = e^{12} - e^{56}$, y luego ver que valen los apartados (i)...(v) para tal formato de estructura ERP.

En Sección 3.2 mostramos tres nuevos ejemplos no equivalentes a los dos ya existentes. Más aún, logramos algunos refinamientos en las restricciones de estructura del álgebra de Lie separando en tres posibles casos según la dimensión del nilradical.

3.1. Estructura

Nuestro objetivo en esta sección es descubrir y probar resultados de estructura para G_2 -estructuras ERP en grupos de Lie.

De la Sección 2.5, recordemos que los grupos de Lie con una G_2 -estructura de la forma (G_μ, φ) (ver Definición 2.5.1) cubren todas las estructuras cerradas salvo equivalencia equivariante (ver Proposición 2.5.2). El álgebra de Lie de G_μ se descompone como $\mathfrak{g} = \mathbb{R}e_7 \oplus \mathfrak{h}$, donde $\mathfrak{h} = \text{span}\{e_1, \dots, e_6\}$ es un ideal unimodular, y φ es siempre como la dada en (2.1).

La siguiente proposición nos muestra que bajo las condiciones impuestas por ser ERP, la 2-forma de torsión puede ser diagonalizada de una manera muy conveniente en relación a la estructura del álgebra de Lie. Este hecho proporciona el punto de partida desde el cual van a ser obtenidos los resultados de estructura en esta sección.

Proposición 3.1.1. *Todo grupo de Lie que tiene una G_2 -estructura invariante a izquierda ERP es equivariantemente equivalente a (G_μ, φ) , salvo múltiplo, para algún $\mu = \lambda + \mu_A$ con (\mathfrak{h}, λ) unimodular y torsión $\tau_\mu = e^{12} - e^{56}$.*

Observación 3.1.2. La $SU(3)$ -estructura (ω, ρ^+) en el álgebra de Lie \mathfrak{h} es en consecuencia *half-flat*, i.e. $d_\lambda \omega \wedge \omega = 0$ y $d_\lambda \rho^+ = 0$ (ver Proposición 2.5.4 y (2.20)).

Demostración. Sea (G, φ) un grupo de Lie junto con una G_2 -estructura invariante a izquierda ERP. Consideramos la base $\{e_1, \dots, e_7\}$ del álgebra de Lie \mathfrak{g} de G tal que φ tiene la forma de (2.1). Como la forma de torsión τ de (G, φ) pertenece a $\Lambda_{14}^2 \mathfrak{g}^*$, se sigue de (2.9) y de la Proposición 2.7.2, (i) que se puede asumir (salvo múltiplo) que está dada por $\tau = e^{12} - e^{56}$. Como primera consecuencia, $de^{347} = 0$ por Proposición 2.7.2, (iii) y entonces

$$\begin{aligned} 0 &= de^{347} = de^3 \wedge e^{47} - e^3 \wedge de^4 \wedge e^7 + e^{34} \wedge de^7 \\ &= - \sum_{i=1,2,5,6} c_{i33} e^{i347} - \sum_{i=1,2,5,6} c_{i44} e^{i347} - \sum_{i=1,2,5,6} c_{i77} e^{i347} \\ &= - \sum_{i=1,2,5,6} \text{tr ad } e_i|_{\mathfrak{g}_0} e^{i347}, \end{aligned}$$

lo que implica que

$$\text{tr ad } e_i|_{\mathfrak{g}_0} = 0, \quad \forall i = 1, 2, 5, 6, \quad (3.1)$$

donde $\mathfrak{g}_0 := \text{span}\{e_3, e_4, e_7\}$ es una subálgebra de Lie por Proposición 2.7.2, (ii). Por otro lado, $\mathfrak{g}_1 := \text{span}\{e_1, e_2, e_5, e_6\}$ es también una subálgebra (ver Proposición 2.7.2, (iii)) y por lo tanto usando Lema 2.3.1, (i), obtenemos que

$$d\tau = (\theta(\text{ad } e_3|_{\mathfrak{g}_1})\tau) \wedge e^3 + (\theta(\text{ad } e_4|_{\mathfrak{g}_1})\tau) \wedge e^4 + (\theta(\text{ad } e_7|_{\mathfrak{g}_1})\tau) \wedge e^7 + d_{\mathfrak{g}_1}\tau,$$

donde $d_{\mathfrak{g}_1} : \Lambda^k \mathfrak{g}_1^* \rightarrow \Lambda^{k+1} \mathfrak{g}_1^*$ denota la derivada exterior de $(\mathfrak{g}_1, \mu|_{\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1})$. Por otro lado, la condición de ERP en (G, φ) dice que

$$d\tau = \frac{1}{3}\varphi - \frac{1}{3}e^{347} = \frac{1}{3}\omega_3 \wedge e^3 + \frac{1}{3}\omega_4 \wedge e^4 + \frac{1}{3}\omega_7 \wedge e^7,$$

entonces $d_{\mathfrak{g}_1}\tau = 0$ y

$$\theta(\text{ad } e_3|_{\mathfrak{g}_1})\tau = \frac{1}{3}\omega_3, \quad \theta(\text{ad } e_4|_{\mathfrak{g}_1})\tau = \frac{1}{3}\omega_4, \quad \theta(\text{ad } e_7|_{\mathfrak{g}_1})\tau = \frac{1}{3}\omega_7.$$

Esto implica que las 2-formas $\tau, \omega_3, \omega_4, \omega_7$ son todas cerradas en el álgebra de Lie 4-dimensional \mathfrak{g}_1 usando que los mapas $\text{ad } e_i|_{\mathfrak{g}_1}$ son derivaciones de \mathfrak{g}_1 (ver Lema 2.3.1, (iii)), de lo que se puede ver fácilmente con la ayuda de una computadora que \mathfrak{g}_1 es abeliana. De esto y de (3.1), obtenemos que \mathfrak{g}_1 está contenida en el ideal \mathfrak{u} de \mathfrak{g} dado por $\mathfrak{u} := \{X \in \mathfrak{g} : \text{tr ad } X = 0\}$.

Si G es no unimodular, entonces \mathfrak{u} tiene dimensión 6 y podemos tomar algún $X_0 \in \langle e_3, e_4, e_7 \rangle$ de norma $|X_0| = 1$, tal que $\mathfrak{g} = \mathbb{R}X_0 \oplus \mathfrak{u}$ es una descomposición ortogonal. Tomando h en el grupo $U_{\mathfrak{g}_1, \tau}$ dado en (2.15) tal que $h(X_0) = e_7$, o sea $h \cdot \tau = \tau$ y $h(\mathfrak{g}_1) \subset \mathfrak{g}_1$. El operador h define entonces una equivalencia equivariante entre (G, φ) y (G_μ, φ) , donde $\mu := h \cdot [\cdot, \cdot]$, y tenemos que $h(\mathfrak{u}) = \mathfrak{h}$ (pues h es ortogonal) y $\tau_\mu = h \cdot \tau = \tau$.

En el caso cuando G es unimodular, está probado en [FR3, Theorem 6.7] que \mathfrak{g} debe ser isomorfa a cierta álgebra de Lie soluble. En esta prueba, solo usamos que \mathfrak{g} es soluble y argumentamos como en el principio de la prueba de [FR3, Theorem 6.7]. Recordemos de la Proposición 2.7.2, (iv) que $\text{Ric} \leq 0$ y el núcleo de Ric es \mathfrak{g}_1 . Luego, el nilradical \mathfrak{n} de \mathfrak{g} está contenido en \mathfrak{g}_1 por [D, Lemma 1] y como \mathfrak{g} es soluble, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{n}$. Por lo tanto \mathfrak{h} es un ideal de \mathfrak{g} , concluyendo la prueba. \square

El siguiente ejemplo muestra que la proposición anterior no es válida en general para G_2 -estructuras cerradas.

Ejemplo 3.1.3. Consideramos (G_μ, φ) con $\lambda(e_1, e_2) = e_3$, $\lambda(e_2, e_3) = 4e_5$ y

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Es sencillo chequear que $d_\mu\varphi = 0$ y $\tau_\mu = -2e^{12} - e^{16} - 4e^{34} - e^{37} + 6e^{56}$. Como \mathfrak{h} es el nilradical de μ , la 2-forma de torsión τ_{μ_1} de cualquier (G_{μ_1}, φ) equivariantemente equivalente a (G_μ, φ) va a satisfacer que $\tau_{\mu_1}(e_7, \cdot)$ no es idénticamente cero. De hecho, todo isomorfismo ortogonal entre G_μ y G_{μ_1} debe preservar a \mathfrak{h} y $\mathbb{R}e_7$.

La diagonalización de τ obtenida en Proposición 3.1.1 hace del problema de equivalencia un problema mucho más simple de abordar. Recordemos los subgrupos $U_{\mathfrak{h}, \tau}$ y $U_{\mathfrak{g}_1, \tau}$ de G_2 descritos en Sección 2.4.

Proposición 3.1.4. *Asumamos que (G_{μ_1}, φ) y (G_{μ_2}, φ) tienen la misma 2-forma de torsión $\tau_{\mu_1} = \tau_{\mu_2} = e^{12} - e^{56}$. Luego, son equivariantemente equivalentes si y solo si $\mu_2 = h \cdot \mu_1$ para algún $h \in U \subset G_2$, donde*

- (i) $U = U_{\mathfrak{h}, \tau}$ (ver (2.13)) si no son unimodulares; y
- (ii) $U = U_{\mathfrak{g}_1, \tau}$ (ver (2.15)) si son unimodulares y $\mathfrak{g}_1 = \text{span}\{e_1, e_2, e_5, e_6\}$ es su nilradical.

Demostración. En el caso no unimodular (i), \mathfrak{h} es un ideal característico de ambas álgebras de Lie por Proposición 2.5.2 y entonces toda equivalencia equivariante h entre ellos debe dejar \mathfrak{h} invariante y preservar τ , es decir, $h \in U_{\mathfrak{h}, \tau}$. Por otro lado, la parte (ii) sigue del hecho que h debe dejar \mathfrak{g}_1 invariante (i.e. $h \in U_{\mathfrak{g}_1}$) siendo \mathfrak{g}_1 el nilradical de ambas álgebras de Lie, y entonces $h \in U_{\mathfrak{g}_1, \tau}$ pues $h \cdot \tau = \tau$ (ver Sección 2.4).

La recíproca sigue directamente del hecho que $U \subset G_2$. \square

En vista de la Proposición 3.1.1, consideramos de ahora en adelante una G_2 -estructura cerrada (G_μ, φ) tal que

$$\tau := \tau_\mu = e^{12} - e^{56}. \quad (3.2)$$

En tal caso, por Proposición 2.5.4,

$$d_\lambda \omega \wedge \omega = 0. \quad (3.3)$$

Además, $\tau \wedge \tau = -2e^{1256}$ y $\ast(\tau \wedge \tau) = -2e^{347}$. Esto implica que (G_μ, φ) es ERP si y solo si

$$d_\mu \tau = \frac{1}{3}\varphi - \frac{1}{3}e^{347}, \quad (3.4)$$

lo cual es equivalente por Lema 2.3.1, (i) a

$$d_\lambda \tau = \frac{1}{3}\rho^+, \quad \theta(A)\tau = \frac{1}{3}(e^{12} + e^{56}). \quad (3.5)$$

Se sigue de (2.20) y Lema 2.3.1, (iii) que

$$\begin{aligned} d_\lambda \omega &= d_\lambda(e^{12} + e^{56}) + d_\lambda e^{34} = 3d_\lambda \theta(A)\tau + d_\lambda e^{34} \\ &= 3\theta(A)d_\lambda \tau + d_\lambda e^{34} = \theta(A)\rho^+ + d_\lambda e^{34} = d_\lambda \omega + d_\lambda e^{34}, \end{aligned}$$

y en consecuencia

$$d_\lambda e^{34} = 0. \quad (3.6)$$

De la proposición 2.7.2 se siguen algunas consecuencias geométricas y algebraicas.

Proposición 3.1.5. *Si (G_μ, φ) es ERP con $\tau = e^{12} - e^{56}$, entonces,*

- (i) $\mathfrak{g}_0 := \text{span}\{e_7, e_3, e_4\}$, $\mathfrak{g}_1 := \text{span}\{e_1, e_2, e_5, e_6\}$ y $\mathfrak{h}_1 := \text{span}\{e_3, e_4\}$ son subálgebras de Lie de \mathfrak{g} .
- (ii) El operador de Ricci Ric_μ de $(G_\mu, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es diagonal con respecto a $\{e_i\}$ y $\text{Ric}_\mu|_{\mathfrak{g}_0} = -\frac{1}{3}\text{id}$, $\text{Ric}_\mu|_{\mathfrak{g}_1} = 0$.
- (iii) Si Q_μ es el único operador simétrico de \mathfrak{g} tal que $\theta(Q_\mu)\varphi = d_\mu \tau$, entonces

$$\text{Ric}_\mu = -\frac{1}{3}\text{id} - 2Q_\mu; \quad \text{en particular, } Q_\mu|_{\mathfrak{g}_0} = 0, \quad Q_\mu|_{\mathfrak{g}_1} = -\frac{1}{6}\text{id}.$$

Demostración. Es bien sabido que el núcleo de toda k -forma cerrada en un álgebra de Lie es una subálgebra de Lie. Como $\tau \wedge \tau = -2e^{1256}$ y $\ast(\tau \wedge \tau) = -2e^{347}$, se sigue de la Proposición 2.7.2 (ii), (iii) que \mathfrak{g}_0 y \mathfrak{g}_1 son subálgebras de Lie de \mathfrak{g} . En particular, $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0$ es también una subálgebra. Las partes (ii) y (iii) son consecuencia directa de [L4, (15)] (para $q = \frac{1}{6}$) y [L4, (12)]. \square

En resumen, la condición de ser ERP impone fuertes restricciones para el álgebra de Lie. Más aún, en el siguiente teorema probamos cuál es la estructura que debe tener dicha álgebra de Lie. Para ello, primero introducimos un poco de notación. Consideremos

$$\mathfrak{sp}(\mathfrak{g}_1, \tau) := \{E \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_1) : -\theta(E)\tau = \tau(E\cdot, \cdot) + \tau(\cdot, E\cdot) = 0\}, \quad \tau = e^{12} - e^{56},$$

y notemos que $E \in \mathfrak{sp}(\mathfrak{g}_1, \tau)$ si y solo si, escrita en términos de la base $\{e_1, e_2, e_5, e_6\}$ tiene la siguiente forma:

$$E = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{15} & E_{16} \\ E_{21} & -E_{11} & E_{25} & E_{26} \\ E_{26} & -E_{16} & E_{55} & E_{56} \\ -E_{25} & E_{15} & E_{65} & -E_{55} \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Consideramos también las siguientes tres matrices:

$$T_7 := \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & & & \\ & 0 & & \\ & & \frac{1}{3} & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad T_3 := \begin{bmatrix} & & & \frac{1}{3} \\ & & 0 & \\ & 0 & & \\ \frac{1}{3} & & & \end{bmatrix}, \quad T_4 := \begin{bmatrix} & & 0 & \\ & & & -\frac{1}{3} \\ 0 & & & \\ & -\frac{1}{3} & & \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

para las cuales es fácil ver que

$$\theta(T_7)\tau = \frac{1}{3}\omega_7, \quad \theta(T_3)\tau = \frac{1}{3}\omega_3, \quad \theta(T_4)\tau = \frac{1}{3}\omega_4. \quad (3.9)$$

El siguiente teorema es nuestro principal resultado de estructura. Recordemos de la Proposición 3.1.1 que toda G_2 -estructura ERP invariante a izquierda en un grupo de Lie es equivariantemente equivalente a alguna (G_μ, φ) con $\tau = e^{12} - e^{56}$ y \mathfrak{h} unimodular.

Teorema 3.1.6. *Sea (G_μ, φ) una G_2 -estructura ERP con $\tau = e^{12} - e^{56}$ y \mathfrak{h} unimodular. Entonces, las siguientes condiciones valen:*

- (i) $\mathfrak{g}_0 = \text{span}\{e_7, e_3, e_4\}$ es una subálgebra de Lie y $\mathfrak{g}_1 = \text{span}\{e_1, e_2, e_5, e_6\}$ es un ideal abeliano de \mathfrak{g} . En particular, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \ltimes \mathfrak{g}_1$ y \mathfrak{g} es soluble.
- (ii) $\mathfrak{h}_1 = \text{span}\{e_3, e_4\}$ es una subálgebra abeliana (entonces $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \ltimes \mathfrak{g}_1$).
- (iii) Existen $E, F, G \in \mathfrak{sp}(\mathfrak{g}_1, \tau)$ tales que

$$A_2 = E + T_7, \quad B_2 = F + T_3, \quad C_2 = G + T_4,$$

donde $A_1 := A|_{\mathfrak{h}_1}$, $A_2 := A|_{\mathfrak{g}_1}$, $B_2 := \text{ad } e_3|_{\mathfrak{g}_1}$ y $C_2 := \text{ad } e_4|_{\mathfrak{g}_1}$. En particular, $\text{tr } A_2 = \text{tr } B_2 = \text{tr } C_2 = 0$ y $[B_2, C_2] = 0$.

Demostración. Primero probamos la parte (iii). Recordemos que \mathfrak{g}_0 , \mathfrak{g}_1 y \mathfrak{h}_1 son todas subálgebras de Lie de \mathfrak{g} . En la prueba de la Proposición 3.1.1 vimos que

$$\theta(A_2)\tau = \frac{1}{3}\omega_7, \quad \theta(B_2)\tau = \frac{1}{3}\omega_3, \quad \theta(C_2)\tau = \frac{1}{3}\omega_4,$$

y por lo tanto $A_2 - T_7$, $B_2 - T_3$ y $C_2 - T_4$ todas pertenecen a $\mathfrak{sp}(\mathfrak{g}_1, \tau)$ y de ahí sigue la primera afirmación en la parte (iii). Notemos que $\text{tr } A_2 = \text{tr } B_2 = \text{tr } C_2 = 0$ y entonces $\lambda(e_3, e_4) = 0$ (i.e. \mathfrak{h}_1 es abeliana) sigue del hecho que \mathfrak{h} es unimodular, completando la prueba de las partes (ii) y (iii).

En la prueba de la Proposición 3.1.1 también obtuvimos que \mathfrak{g}_1 es abeliano. A continuación probaremos que \mathfrak{g}_1 es un ideal, lo cual concluye la

prueba del teorema principal. Si denotamos por $B := \text{ad } e_3|_{\mathfrak{h}}$ y $C := \text{ad } e_4|_{\mathfrak{h}}$, entonces de (2.20), se sigue que

$$\begin{aligned} 0 &= d_\lambda \rho^+ = d_\lambda \omega_3 \wedge e^3 + \omega_3 \wedge d_\lambda e^3 + d_\lambda \omega_4 \wedge e^4 + \omega_4 \wedge d_\lambda e^4 \\ &= d_{\mathfrak{g}_1} \omega_3 \wedge e^3 - \theta(C_2) \omega_3 \wedge e^{34} - \omega_3 \wedge \theta(B) e^3 \wedge e^3 - \omega_3 \wedge \theta(C) e^3 \wedge e^4 \\ &\quad + d_{\mathfrak{g}_1} \omega_4 \wedge e^4 + \theta(B_2) \omega_4 \wedge e^{34} - \omega_4 \wedge \theta(B) e^4 \wedge e^3 - \omega_4 \wedge \theta(C) e^4 \wedge e^4 \\ &= (-\theta(C_2) \omega_3 + \theta(B_2) \omega_4) \wedge e^{34} - (\omega_3 \wedge \theta(B) e^3 + \omega_4 \wedge \theta(B) e^4) \wedge e^3 \\ &\quad - (\omega_3 \wedge \theta(C) e^3 + \omega_4 \wedge \theta(C) e^4) \wedge e^4. \end{aligned}$$

Como $\theta(B)e^3, \theta(B)e^4, \theta(C)e^3, \theta(C)e^4 \in \Lambda^1 \mathfrak{g}_1^*$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \omega_3 \wedge \theta(B)e^3 + \omega_4 \wedge \theta(B)e^4 = \sum_{1,2,5,6} (\omega_3 \wedge c_{i33} e^i + \omega_4 \wedge c_{i34} e^i) \\ &= (c_{133} - c_{234}) e^{126} + (c_{233} + c_{134}) e^{125} + (c_{353} - c_{364}) e^{256} + (c_{363} + c_{354}) e^{156}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} 0 &= \omega_3 \wedge \theta(C)e^3 + \omega_4 \wedge \theta(C)e^4 = \sum (\omega_3 \wedge c_{i43} e^i + \omega_4 \wedge c_{i44} e^i) \\ &= (c_{143} - c_{244}) e^{126} + (c_{243} + c_{144}) e^{125} + (c_{453} - c_{464}) e^{256} + (c_{463} + c_{454}) e^{156}. \end{aligned}$$

Más aún,

$$\begin{aligned} 0 &= d_\lambda e^{34} = d_\lambda e^3 \wedge e^4 - e^3 \wedge d_\lambda e^4 = -(\theta(B)e^3 + \theta(C)e^4) \wedge e^{34} \\ &= \sum_{1,2,5,6} (c_{3i3} + c_{4i4}) e^{i34}. \end{aligned}$$

En resumen, hemos obtenido que

$$\begin{aligned} c_{133} = -c_{144} = c_{234} = c_{243}, & \quad c_{353} = c_{364} = -c_{454} = c_{463}, & (3.10) \\ c_{134} = c_{143} = -c_{233} = c_{244}, & \quad c_{354} = -c_{363} = c_{453} = c_{464}. \end{aligned}$$

Como antes,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle [\text{ad } e_1, \text{ad } e_2](e_4), e_3 \rangle = \langle \text{ad } e_1 \text{ad } e_2(e_4) - \text{ad } e_2 \text{ad } e_1(e_4), e_3 \rangle \\ &= \sum_{i=1}^7 \langle c_{24i} \text{ad } e_1(e_i) - c_{14i} \text{ad } e_2(e_i), e_3 \rangle = \sum_{i,j=1}^7 \langle c_{24i} c_{1ij} e_j - c_{14i} c_{2ij} e_j, e_3 \rangle \\ &= \sum_{i=1}^7 (c_{24i} c_{1i3} - c_{14i} c_{2i3}) = c_{243} c_{133} + c_{244} c_{143} - c_{143} c_{233} - c_{144} c_{243} \\ &= 2(c_{133}^2 + c_{134}^2). \end{aligned}$$

Del mismo modo, se obtiene que $0 = \langle [\text{ad } e_5, \text{ad } e_6](e_4), e_3 \rangle = 2(c_{353}^2 + c_{354}^2)$. Luego, $c_{133} = c_{134} = c_{353} = c_{354} = 0$ y entonces se sigue de (3.10) que $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{g}_1$.

Por lo tanto, solo queda ver que $[\mathfrak{g}_1, e_7] \subset \mathfrak{g}_1$. Como $\tau = e^{12} - e^{56}$, \mathfrak{h} es unimodular y \mathfrak{g}_1 es abeliana, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \langle e^{13}, \tau \rangle \text{vol} = e^{13} \wedge * \tau = -e^{13} \wedge d * \varphi \\ &= -d(e^{13} \wedge * \varphi) + de^{13} \wedge * \varphi = -d(e^{123467}) + \langle de^{13}, \varphi \rangle \text{vol} \\ &= \text{tr}(\text{ad } e_5) \text{vol} + \langle de^1 \wedge e^3, \varphi \rangle \text{vol} + \langle e^1 \wedge de^3, \varphi \rangle \text{vol} = -c_{273}. \end{aligned}$$

De igual manera, se puede ver que $0 = c_{i7j}$ para cada $i \in \{1, 2, 5, 6\}$ y $j \in \{3, 4, 7\}$. Esto implica que $\langle [\mathfrak{g}_1, e_7], \mathfrak{g}_0 \rangle$ se anula y entonces \mathfrak{g}_1 es un ideal, como se esperaba. \square

La siguiente consecuencia geométrica del Teorema 3.1.6 sigue de la Proposición 2.7.2.

Corolario 3.1.7. *Toda G_2 -estructura invariante a izquierda ERP en un grupo de Lie es solitón de Laplace estable y solitón de Ricci de expansión.*

Demostración. Basta probarlo para (G_μ, φ) ERP con torsión $\tau = e^{12} - e^{56}$. En tal caso \mathfrak{g}_1 es ideal abeliano, por lo tanto sigue de la Proposición 2.7.2 (iii) que $Q_\mu \in \text{Der}(\mathfrak{g})$ y por [L3, Theorem 3.8] obtenemos que

$$\Delta \varphi = -\mathcal{L}_{X_{Q_\mu}} \varphi,$$

es decir, (G_μ, φ) es un solitón de Laplace estable. Más aún, de Proposición 2.7.2 (iii) se tiene que

$$\text{Ric}_\mu = -\frac{1}{3} \text{id} - 2Q_\mu,$$

por lo que (G_μ, φ) es un solitón de Ricci de expansión por (ver [L1, (5)]). \square

A continuación damos la recíproca del Teorema 3.1.6, la cual nos facilitará la búsqueda de ejemplos y finalmente dará pie a una clasificación completa. Denotamos por

$$\bar{\omega}_3 := e^{26} + e^{15}, \quad \bar{\omega}_4 := e^{16} - e^{25}.$$

Cabe destacar que $\{\tau, \bar{\omega}_3, \bar{\omega}_4, \omega_7, \omega_3, \omega_4\}$ es base de $\Lambda^2 \mathfrak{g}_1^*$.

Proposición 3.1.8. *Si μ denota el corchete de Lie en \mathfrak{g} tal que sus constantes de estructura están dadas por A_1, A_2, B_2 y C_2 como en el Teorema 3.1.6. Entonces (G_μ, φ) es ERP con $\tau_\mu = e^{12} - e^{56}$ si y solo si existen $E, F, G \in \mathfrak{sp}(\mathfrak{g}_1, e^{12} - e^{56})$ (ver (3.7)) tales que valen las siguientes condiciones*

- (i) $A_2 = E + T_7, B_2 = F + T_3$ y $C_2 = G + T_4$, donde T_i 's están definidas como en (3.8).
- (ii) $\theta(E^t)\omega_7 + \theta(F^t)\omega_3 + \theta(G^t)\omega_4 = -(\text{tr } A_1)\omega_7$.

	τ	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_4$	ω_7	ω_3	ω_4
T_7	$\frac{1}{3}\omega_7$	0	$-\frac{1}{3}\omega_4$	$\frac{1}{3}\tau$	0	$\frac{1}{3}\bar{\omega}_4$
T_3	$\frac{1}{3}\omega_3$	$-\frac{1}{3}\omega_7$	0	$\frac{1}{3}\bar{\omega}_3$	$\frac{1}{3}\tau$	0
T_4	$\frac{1}{3}\omega_4$	0	$-\frac{1}{3}\omega_7$	$\frac{1}{3}\bar{\omega}_4$	0	$\frac{1}{3}\tau$

Cuadro 3.1: acción de T_i en 2-formas

Observación 3.1.9. La condición de Jacobi para tal μ es equivalente a

$$[A_2, B_2] = aB_2 + cC_2, \quad [A_2, C_2] = bB_2 + dC_2, \quad [B_2, C_2] = 0, \quad (3.11)$$

donde $A_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Demostración. Primero asumimos que (G_μ, φ) es ERP con $\tau_\mu = e^{12} - e^{56}$. La parte (i) sigue del Teorema 3.1.6. Con el objetivo de probar (ii), procedemos a calcular τ_μ usando la fórmula dada en Proposición 2.5.4 y en Cuadro 3.1 (recordemos de (3.3) que $d_\lambda \omega \wedge \omega = 0$):

$$\begin{aligned} - *_{\mathfrak{h}} d_\lambda \rho^- &= - *_{\mathfrak{h}} (e^3 \wedge d_\lambda \omega_4 - e^4 \wedge d_\lambda \omega_3) = - *_{\mathfrak{h}} (e^{34} \wedge (\theta(C_2)\omega_4 + \theta(B_2)\omega_3)) \\ &= - *_{\mathfrak{g}_1} \theta(C_2)\omega_4 - *_{\mathfrak{g}_1} \theta(B_2)\omega_3 = \theta(C_2^t) *_{\mathfrak{g}_1} \omega_4 + \theta(B_2^t) *_{\mathfrak{g}_1} \omega_3 \\ &= \theta(C_2^t)\omega_4 + \theta(B_2^t)\omega_3 = \theta(G^t)\omega_4 + \theta(T_4)\omega_4 + \theta(F^t)\omega_3 + \theta(T_3)\omega_3 \\ &= \theta(G^t)\omega_4 + \theta(F^t)\omega_3 + \frac{2}{3} (e^{12} - e^{56}), \end{aligned}$$

y por otro lado,

$$\begin{aligned} (\text{tr } A)\omega + \theta(A^t)\omega &= (\text{tr } A_1)e^{34} + (\text{tr } A_1)\omega_7 + \theta(A_2^t)\omega_7 + \theta(A_1^t)e^{34} \\ &= (\text{tr } A_1)\omega_7 + \theta(E^t)\omega_7 + \frac{1}{3}(e^{12} - e^{56}). \end{aligned}$$

Luego, la parte (ii) sigue del hecho de que $\tau_\mu = e^{12} - e^{56}$.

Recíprocamente, asumamos que valen (i) y (ii). Usando (i), (2.20) y Cuadro 3.1, es fácil ver que $d_\mu \varphi = 0$ si y solo si

$$\begin{aligned} \theta(F)\omega_7 + a\omega_3 + c\omega_4 &= \theta(E)\omega_3 - \frac{1}{3}\bar{\omega}_3, \\ \theta(G)\omega_7 + b\omega_3 + d\omega_4 &= \theta(E)\omega_4, \\ \theta(F)\omega_4 &= \theta(G)\omega_3. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Pero sencillamente se obtiene que estas igualdades resultan de evaluar respectivamente $\theta([A_2, B_2])$, $\theta([A_2, C_2])$ y $\theta([B_2, C_2])$ en τ y usando que vale la

condición de Jacobi (3.11). Por otro lado, como

$$\begin{aligned} d_\lambda \omega \wedge \omega &= \frac{1}{2} d_\lambda (\omega \wedge \omega) = d_\lambda (e^{1234} + e^{3456} + e^{1256}) = d_\lambda (e^{1256}) \\ &= \theta(B_2) e^{1256} \wedge e^3 + \theta(C_2) e^{1256} \wedge e^4 = -\operatorname{tr} B_2 e^{12356} - \operatorname{tr} C_2 e^{12456} = 0, \end{aligned}$$

obtenemos de (ii) que $\tau_\mu = e^{12} - e^{56}$. Usando (3.5) y (i) obtenemos que (G_μ, φ) es ERP, quedando así probada la proposición. \square

La fuerte condición sobre la curvatura de Ricci impuesta por la condición de ser ERP (ver Proposición 3.1.5, (iii)) proporciona restricciones muy útiles en las matrices involucradas.

Proposición 3.1.10. *Si (G_μ, φ) es ERP con $\tau_\mu = e^{12} - e^{56}$, digamos $\mu = (A_1, A_2, B_2, C_2)$, entonces se cumple lo siguiente:*

- (i) $\operatorname{tr} S(A_1)^2 + \operatorname{tr} S(A_2)^2 = \frac{1}{3}$.
- (ii) $\frac{1}{2}[A_2, A_2^t] + \frac{1}{2}[B_2, B_2^t] + \frac{1}{2}[C_2, C_2^t] = (\operatorname{tr} A_1)S(A_2)$.
- (iii) $\operatorname{tr} S(A_2)S(B_2) = \operatorname{tr} S(A_2)S(C_2) = 0$.
- (iv) $\begin{bmatrix} \operatorname{tr} S(B_2)^2 & \operatorname{tr} S(B_2)S(C_2) \\ \operatorname{tr} S(B_2)S(C_2) & \operatorname{tr} S(C_2)^2 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}[A_1, A_1^t] + (\operatorname{tr} A_1)S(A_1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$,

donde $S(M) := \frac{M+M^t}{2}$, la parte simétrica de M .

Demostración. Todos los apartados son resultados directos de la Proposición 3.1.5, (ii) aplicando la fórmula para el operador de Ricci de una solvariedad dada en [L1, (25)]. \square

Notamos también que si (G_μ, φ) es ERP con $\tau_\mu = e^{12} - e^{56}$, entonces $(G_\mu, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un solvsoliton; de hecho, en términos de la descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, tenemos que

$$\operatorname{Ric}_\mu = -\frac{1}{3} \operatorname{id} + \begin{bmatrix} 0 & \\ & \frac{1}{3} \operatorname{id} \end{bmatrix} \in \mathbb{R} \operatorname{id} + \operatorname{Der}(\mu).$$

Esto nos permite usar, además de la Proposición 3.1.10, la estructura del teorema para solvsolitones [L1, Theorem 4.8].

3.2. Ejemplos y refinamientos de estructura

De acuerdo al Teorema 3.1.6, para toda (G_μ, φ) ERP con $\tau = e^{12} - e^{56}$, $\mathfrak{g}_1 = \operatorname{span}\{e_1, e_2, e_5, e_6\}$ es un ideal abeliano del álgebra de Lie (\mathfrak{g}, μ) . Luego, el nilradical \mathfrak{n} de (\mathfrak{g}, μ) contiene a \mathfrak{g}_1 y entonces $\dim \mathfrak{n} \geq 4$. Recordemos de la Proposición 3.1.8 que el corchete de Lie tiene siempre la forma $\mu =$

(A_1, A, B, C) para ciertas matrices $A_1 \in \mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})$ y $A, B, C \in \mathfrak{gl}_4(\mathbb{R})$ tales que $[B, C] = 0$.

Podemos usar la Proposición 3.1.4 para considerar el problema de equivalencia. La acción del grupo $U_{\mathfrak{h}, \tau}$ en $\mu = (A_1, A, B, C)$ puede ser descripta como sigue (ver Sección 2.4). Si $h \in U_0$, digamos $h_1 = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}$, $x^2 + y^2 = 1$ y $h_2 := \begin{bmatrix} h_3 & 0 \\ 0 & h_4 \end{bmatrix}$, $h_3, h_4 \in \text{SO}(2)$, entonces

$$h \cdot \mu = (h_1 A_1 h_1^{-1}, h_2 A h_2^{-1}, h_2(xB - yC)h_2^{-1}, h_2(yB + xC)h_2^{-1}), \quad (3.13)$$

y si $g_1 := \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}$ y $g_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, entonces

$$g \cdot \mu = (-g_1 A_1 g_1^{-1}, -g_2 A g_2^{-1}, g_2 B g_2^{-1}, -g_2 C g_2^{-1}). \quad (3.14)$$

Sea (G_μ, φ) una G_2 -estructura ERP con $\tau = e^{12} - e^{56}$ y nilradical \mathfrak{n} , digamos $\mu = (A_1, A, B, C)$. Si μ es unimodular, entonces $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}_1$ (ver la Proposición 3.2.1 a continuación) y en el caso no unimodular, $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{n} \subset \mathfrak{h}$. En cualquier caso, A_1 y A son necesariamente matrices normales por [L1, Theorem 4.8].

A continuación, estudiamos los casos $\dim \mathfrak{n} = 4, 5, 6$ por separado; notemos que μ no puede ser nilpotente porque $\text{Ric} \leq 0$ (ver [W, M]).

3.2.1. Caso $\dim \mathfrak{n} = 4$

En el caso unimodular, algunas condiciones algebraicas necesarias, probadas por Isabel Dotti [D] para $\text{Ric} \leq 0$, dieron lugar a la siguiente caracterización.

Proposición 3.2.1. *Si (G_μ, φ) es ERP con $\tau = e^{12} - e^{56}$, digamos $\mu = (A_1, A, B, C)$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes*

- (i) μ es unimodular (i.e. $\text{tr } A_1 = 0$).
- (ii) $A_1 = 0$ (en particular, A, B, C conmutan dos a dos).
- (iii) \mathfrak{g}_1 es el nilradical de μ (en particular, $\{A, B, C\}$ es linealmente independiente).

Demostración. De la Proposición 2.7.2, (iv) tenemos que $\text{Ric} \leq 0$ y el núcleo de Ric es \mathfrak{g}_1 . Si μ es unimodular, entonces el nilradical \mathfrak{n} de \mathfrak{g} está contenido en \mathfrak{g}_1 por [D, Lemma 1], pero $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{n}$ pues \mathfrak{g}_1 es un ideal abeliano de \mathfrak{g} , entonces $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}_1$. Dado que la imagen de toda derivación de un álgebra de Lie soluble está contenida en el nilradical, entonces obtenemos que $A_1 = 0$. Las implicaciones restantes son trivialmente ciertas. \square

Proposición 3.2.2. Si (G_μ, φ) es ERP con $\tau = e^{12} - e^{56}$ y μ es unimodular, digamos $\mu = (0, A, B, C)$, entonces las matrices 4×4 , A, B, C , son todas simétricas y conmutan dos a dos. Además, el conjunto $\{\sqrt{3}A, \sqrt{3}B, \sqrt{3}C\}$ es ortonormal.

Observación 3.2.3. En particular, G_μ es isomorfo al grupo de Lie dado en [L4, Example 4.7] y al Ejemplo 3.2.4 exhibido a continuación. Esto fue probado en [FR3, Theorem 6.7]. Notamos, sin embargo, que podría haber otras G_2 -estructuras ERP no equivalentes en G_μ .

Demostración. De la ecuación dada en (ii) de la Proposición 3.1.10 (recordemos que $A_1 = 0$), obtenemos que las matrices A, B, C son todas normales, multiplicando por cada uno de los tres términos (alternativamente, uno puede aplicar [L1, Theorem 4.8]). Luego $A, B, C, S(A), S(B), S(C)$ es una familia de matrices normales 4×4 que conmutan, las cuales son no nulas por Proposición 3.1.10, (i) y (iv). Es fácil ver que la única posibilidad para que esto suceda es que sean todas simétricas, y entonces el conjunto $\{\sqrt{3}A, \sqrt{3}B, \sqrt{3}C\}$ es ortonormal por Proposición 3.1.10, (i), (iii) y (iv), como era deseado. \square

Ejemplo 3.2.4. Consideramos $\mu_J := (0, A, B, C)$, donde

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & & & \\ & -\frac{1}{6} & & \\ & & \frac{1}{2} & \\ & & & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{6} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{6} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es sencillo chequear que las condiciones dadas en la Proposición 3.1.8 se cumplen para estas matrices, luego (G_{μ_J}, φ) es una G_2 -estructura ERP con $\tau = e^{12} - e^{56}$, y también que el mapa

$$h := \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & -\sqrt{6} & -2\sqrt{6} & 0 & 0 \\ -3\sqrt{2} & -3\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & -2\sqrt{3} & 0 & 0 \\ -2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\sqrt{3} \end{bmatrix} \in G_2$$

define una equivalencia equivariante entre (G_{μ_J}, φ) y [L4, Example 4.7].

La dificultad en encontrar nuevos ejemplos reside en la estructura del grupo 4-dimensional $U_{\mathfrak{g}_1, \tau}$ (ver (2.15)), que es quien provee la equivalencia equivariante.

3.2.2. Caso $\dim \mathfrak{n} = 5$

Actuando con $U_{\mathfrak{h}, \tau}$ si fuera necesario (ver (3.13)), podemos asumir en este caso que salvo equivalencia equivariante, $\mathfrak{n} = \mathbb{R}e_4 \oplus \mathfrak{g}_1$. Sea (G_μ, φ) una G_2 -estructura ERP con $\tau = e^{12} - e^{56}$ y \mathfrak{n} como antes, digamos $\mu = (A_1, A, B, C)$.

Se sigue de [L1, Theorem 4.8] que A_1, A, B son normales y $[A, B] = 0$, y como $[e_7, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n}$, se obtiene que

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}, \quad d \neq 0, \quad [A, C] = dC.$$

Notemos que $[A, C] = dC$ implica que C es nilpotente (aunque no es novedad pues $e_4 \in \mathfrak{n}$). Actuando con g como en (3.14) en caso de ser necesario, se puede asumir que salvo equivalencia equivariante $d > 0$.

Los siguientes dos corchetes de Lie proveen ejemplos de nuevas G_2 -estructuras ERP (G_μ, φ) con $\tau = e^{12} - e^{56}$ y $\mathfrak{n} = \mathbb{R}e_4 \oplus \mathfrak{g}_1$ por Proposición 3.1.8.

Ejemplo 3.2.5. Consideramos $\mu_{M2} := (A_1, A, B, C)$, donde

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \\ & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ -\frac{1}{3} & 0 & & \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Es fácil chequear que el nilradical \mathfrak{n} es 3-pasos nilpotente.

Ejemplo 3.2.6. Sea $\mu_{M3} := (A_1, A, B, C)$ dada por

$$A_1 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix}, \quad A = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$B = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 2-\sqrt{6} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -2+\sqrt{6} \\ 2+\sqrt{6} & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -2-\sqrt{6} & 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

En este caso, el nilradical \mathfrak{n} es 2-pasos nilpotente.

Bajo las condiciones dadas en la Proposición 3.1.8, (i), consideramos las posibles formas para las matrices normales A y B . Con la ayuda de una computadora (en nuestro caso lo hicimos con Maple), se puede chequear que la única manera para que se cumpla que $[A, B] = 0$ es que A y B sean simétricas.

3.2.3. Caso $\dim \mathfrak{n} = 6$

En este caso, tenemos que $\mathfrak{n} = \mathfrak{h}$ y por ende B y C son nilpotentes. Sea (G_μ, φ) una G_2 -estructura ERP con $\tau = e^{12} - e^{56}$ y nilradical $\mathfrak{n} = \mathfrak{h}$, digamos $\mu = (A_1, A, B, C)$. Usando (3.13), podemos asumir salvo equivalencia equivariante que se cumple una de las siguientes dos opciones

- (i) $A_1 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$, con $a \leq d$, $a + d > 0$ (en particular, $[A, B] = aB$, $[A, C] = dC$),

- (ii) o $A_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, con $a > 0$, $b \neq 0$ (en particular, $[A, B] = aB - bC$, $[A, C] = bB + aC$).

Notemos que del ítem (i) se desprende que B y C son nilpotentes, que ya lo sabíamos pues $e_3, e_4 \in \mathfrak{n}$.

Ejemplo 3.2.7. A continuación, presentamos el ejemplo dado por R. Bryant en [B, Example 1], como así también en [CI, Section 6.3] y [L4, Examples 4.13, 4.10], en el formato $\mu_B := (A_1, A, B, C)$. Consideramos

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \\ & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & & & \\ & -\frac{1}{6} & & \\ & & \frac{1}{6} & \\ & & & \frac{1}{6} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} & 0 & 0 & \\ 0 & \frac{1}{3} & & \\ \frac{1}{3} & 0 & & \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} & 0 & 0 & \\ \frac{1}{3} & 0 & & \\ 0 & -\frac{1}{3} & & \end{bmatrix}.$$

Notemos que el nilradical \mathfrak{n} es 2-pasos nilpotente.

El siguiente es un ejemplo nuevo con un nilradical de dimensión 6 que es 4-pasos nilpotente.

Ejemplo 3.2.8. Consideramos $\mu_{M1} := (A_1, A, B, C)$, donde

$$A_1 := \frac{1}{30} \begin{bmatrix} \sqrt{30} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{30} \end{bmatrix}, \quad A := \frac{1}{60} \begin{bmatrix} -10-\sqrt{30} & 0 & -2\sqrt{5} & 0 \\ 0 & -10+\sqrt{30} & 0 & -2\sqrt{5} \\ -2\sqrt{5} & 0 & 10-\sqrt{30} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{5} & 0 & 10+\sqrt{30} \end{bmatrix},$$

$$B := \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{5} & 0 & 5-\sqrt{30} \\ 5\sqrt{5} & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 5+\sqrt{30} & 0 & \sqrt{5} \\ 5 & 0 & -5\sqrt{5} & 0 \end{bmatrix}, \quad C := \frac{1}{30} \begin{bmatrix} -\sqrt{5} & 0 & 5-\sqrt{30} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 & -5+\sqrt{30} \\ 5+\sqrt{30} & 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & -5-\sqrt{30} & 0 & -\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

Observación 3.2.9. Vale la pena destacar que los cinco ejemplos dados en esta sección (i.e. Ejemplos 3.2.4, 3.2.5, 3.2.6, 3.2.7, 3.2.8) son no equivalentes dos a dos (incluso salvo múltiplo). De hecho, los grupos de Lie solubles subyacentes son no isomorfos dos a dos, y como son completamente solubles, entonces las correspondientes métricas invariantes a izquierda no pueden ser isométricas salvo múltiplo (ver [A]).

Capítulo 4

Clasificación

En el capítulo anterior probamos fuertes restricciones de estructura para que un álgebra de Lie admita una G_2 -estructura ERP. Usamos estas condiciones de estructura para encontrar tres nuevos ejemplos de G_2 -estructuras ERP, no equivalentes a los dos ya existentes. En este capítulo probamos que estos cinco ejemplos son los únicos invariantes a izquierda en grupos de Lie salvo equivalencia y múltiplo. Para ello, consideramos el grupo de Lie simplemente conexo G_μ con álgebra de Lie (\mathfrak{g}, μ) junto con la G_2 -estructura invariante a izquierda definida por la 3-forma positiva en \mathfrak{g} dada por

$$\varphi := e^{127} + e^{347} + e^{567} + e^{135} - e^{146} - e^{236} - e^{245} = \omega \wedge e^7 + \rho^+,$$

donde $\{e_1, \dots, e_7\}$ es una base de \mathfrak{g} (ortonormal respecto del producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ inducido por φ). Los resultados obtenidos en este capítulo se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 4.0.1. *Todo grupo de Lie con una G_2 -estructura ERP invariante a izquierda es equivalente, salvo múltiplo, a (G_μ, φ) , donde μ es exactamente uno de los siguientes corchetes de Lie (para más detalle ver Cuadro 1.1):*

$$\mu_B, \quad \mu_{M1}, \quad \mu_{M2}, \quad \mu_{M3}, \quad \mu_J. \quad (4.1)$$

Más aún, con el objetivo de obtener una clasificación completa salvo equivalencia equivariante y multiplicación por escalar, debemos agregar a la lista (4.1) las estructuras $(G_{\mu_{rt}}, \varphi)$, $r, t \in \mathbb{R}$, $(r, t) \neq (0, 0)$, (dadas también en Cuadro 1.1). Las estructuras $(G_{\mu_{rt}}, \varphi)$ son todas equivalentes a (G_{μ_B}, φ) y la familia de álgebras de Lie μ_{rt} , $r, t \in \mathbb{R}$ es no-isomorfa dos a dos (notar que $\mu_{00} = \mu_B$).

La prueba del teorema se encuentra dividida en tres secciones dependiendo de la dimensión del nilradical, puesto que en el capítulo anterior probamos algunos refinamientos de estructura que en cada caso facilitaron las cuentas.

Habiendo logrado una clasificación completa de estructuras ERP en grupos de Lie salvo equivalencia y multiplicación por escalar, es natural hacerse otras preguntas que caracterizan a cada una de las cinco estructuras ERP dadas en el teorema. En las últimas secciones de este capítulo estudiamos las simetrías en cada una de las estructuras dadas, como así también calculamos los números de Betti y el grado de nilpotencia del nilradical en cada uno de los ejemplos.

4.1. Caso $\dim \mathfrak{n} = 4$

En esta sección, obtenemos una clasificación, salvo equivalencia equivariante y multiplicación por escalar, de G_2 -estructuras invariantes a izquierda ERP en grupos de Lie con nilradical de dimensión igual a 4.

Recordemos de la Sección 3.2 que existe un único grupo de Lie G involucrado en este caso. Sabemos que φ es una G_2 -estructura ERP si y solo si $-\varphi$ lo es, por lo tanto es suficiente considerar G_2 -estructuras con una orientación dada.

Dado μ un corchete de Lie tal que (G_μ, φ) es ERP, la órbita $\mathrm{GL}_7^+(\mathbb{R}) \cdot \mu$ parametriza al conjunto de G_2 -estructuras ERP en G_μ con la misma orientación que φ , debido a la equivalencia equivariante,

$$(G_{h \cdot \mu}, \varphi) \simeq (G_\mu, \varphi(h \cdot, h \cdot, h \cdot)), \quad \forall h \in \mathrm{GL}_7(\mathbb{R}).$$

Por Teorema 3.0.1, asumimos que toda (G_μ, φ) ERP tiene la estructura $\mu = (A_1, A, B, C)$ como en Sección 3. Es decir, el corchete de Lie está dado por las matrices $A_1 \in \mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})$ y $A, B, C \in \mathfrak{gl}_4(\mathbb{R})$ tales que

$$[A, B] = (A_1)_{11}B + (A_1)_{21}C, \quad [A, C] = (A_1)_{12}B + (A_1)_{22}C \quad \text{y} \quad [B, C] = 0,$$

$$\theta(A)\tau = \frac{1}{3}\omega_7, \quad \theta(B)\tau = \frac{1}{3}\omega_3 \quad \text{y} \quad \theta(C)\tau = \frac{1}{3}\omega_4.$$

Sean (G_μ, φ) y $(G_{h \cdot \mu}, \varphi)$ G_2 -estructuras ERP con $\tau_\mu = \tau_{h \cdot \mu} = e^{12} - e^{56}$ para alguna $h \in \mathrm{GL}_7(\mathbb{R})$, tal que $\det h > 0$. Como ambas, $(G_\mu, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ y $(G_{h \cdot \mu}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, son solvsolitones por Corolario 3.1.7, sigue de la unicidad de los solvsolitones (salvo isometría equivariante y múltiplo) en un grupo de Lie dado (ver [L1] o [BL]) que podemos asumir $h \in \mathrm{SO}(7)$. Luego, $\mathrm{Ric}_{h \cdot \mu} = h \mathrm{Ric}_\mu h^{-1}$.

Por otro lado, como $\tau_\mu = \tau_{h \cdot \mu} = e^{12} - e^{56}$, se tiene que $\mathrm{Ric}_{h \cdot \mu} = \mathrm{Ric}_\mu = -\frac{1}{3} \mathrm{Diag}(1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$ por Proposición 2.7.2, (iv). Por lo tanto, h queda como sigue

$$h = \begin{bmatrix} h_1 & \\ & h_2 \end{bmatrix}, \quad h_1 \in \mathrm{O}(3), \quad h_2 \in \mathrm{O}(4), \quad \det h_1 = \det h_2, \quad (4.2)$$

con respecto a la descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, donde $\mathfrak{g}_0 = \mathrm{span}\{e_7, e_3, e_4\}$ y $\mathfrak{g}_1 = \mathrm{span}\{e_1, e_2, e_5, e_6\}$ como antes.

Con respecto a la matriz J de τ en la base $\{e_1, e_2, e_5, e_6\}$, dada por

$$J := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

uno obtiene la siguiente descomposición ortogonal clásica

$$\begin{aligned} \mathfrak{sl}_4(\mathbb{R}) &= \mathfrak{so}(4) \oplus \text{sym}_0(4), & \text{sym}_0(4) &= \mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{p}_2, \\ \mathfrak{sp}(2, \mathbb{R}) &= \mathfrak{u}(2) \oplus \mathfrak{p}_1, & \mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}) &= \mathfrak{u}(2) \oplus \mathfrak{p}_2, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathfrak{sl}_4(\mathbb{R}) &= \{H \in \mathfrak{gl}_4(\mathbb{R}) \mid \text{tr } H = 0\} \\ \mathfrak{so}(4) &= \{H \in \mathfrak{gl}_4(\mathbb{R}) \mid H^t = -H\} \\ \text{sym}_0(4) &= \{H \in \mathfrak{gl}_4(\mathbb{R}) \mid H^t = H, \text{tr } H = 0\} \\ \mathfrak{sp}(2, \mathbb{R}) &= \{A \in \mathfrak{gl}_4(\mathbb{R}) : A^t J + J A = 0\} \\ \mathfrak{u}(2) &= \{A \in \mathfrak{gl}_4(\mathbb{R}) : A^t = -A, [A, J] = 0\} \\ \mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}) &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b & e & f \\ -b & a & -f & e \\ k & l & c & d \\ -l & k & -d & c \end{bmatrix} : a, \dots, f \in \mathbb{R} \right\}, \end{aligned}$$

$$\mathfrak{p}_1 := \{A \in \text{sym}_0(4) : AJ = JA\} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & e & f \\ b & -a & -f & e \\ e & -f & c & d \\ f & e & d & -c \end{bmatrix} : a, \dots, f \in \mathbb{R} \right\}, \quad (4.3)$$

y $\mathfrak{p}_2 := \{A \in \text{sym}_0(4) : AJ + JA = 0\}$ tiene la siguiente base ortogonal,

$$T_7 := \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \quad T_3 := \frac{1}{6} \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{bmatrix}, \quad T_4 := \frac{1}{6} \begin{bmatrix} & & 0 & 0 \\ & & 1 & -1 \\ 1 & 0 & & \\ 0 & -1 & & \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Notemos que $|T_i|^2 = \frac{1}{9}$ para $i = 3, 4, 7$, y

$$\theta(T_7)\tau = \frac{1}{3}\omega_7, \quad \theta(T_3)\tau = \frac{1}{3}\omega_3, \quad \theta(T_4)\tau = \frac{1}{3}\omega_4. \quad (4.5)$$

Conforme a los resultados de estructura dados en Sección 2, cada G_2 -estructura ERP con $\dim \mathfrak{n} = 4$ tiene $A_1 = 0$, por lo que queda determinada por una subálgebra abeliana $\mathfrak{a} = \text{span}\{A, B, C\} \subset \text{sym}_0(4)$ donde $\{A, B, C\}$ es base ortogonal tal que $|A|^2 = |B|^2 = |C|^2 = \frac{1}{3}$ y

$$A = E + T_7, \quad B = F + T_3, \quad C = G + T_4,$$

donde $E, F, G \in \mathfrak{p}_1$ están unívocamente determinadas. Luego, $\{E, F, G\}$ es un conjunto ortogonal de norma $|E|^2 = |F|^2 = |G|^2 = \frac{2}{9}$.

El único ejemplo conocido en este caso es $\mu_J := (0, A, B, C)$, dado en Ejemplo 3.2.4. Recordemos que las matrices A, B y C están dadas por

$$A = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 3 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 0 & 2 \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

y entonces las respectivas E , F y G resultan

$$E = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 2 & \\ & & & -2 \end{bmatrix}, \quad F = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Recordemos además de [FR3, Theorem 6.7] (ver también Observación 3.2.3), que G_{μ_J} es el único grupo de Lie unimodular que admite una G_2 -estructura invariante a izquierda ERP. Podría suceder que en G_{μ_J} haya otra G_2 -estructura no equivariantemente equivalente a φ que sea también ERP. En la proposición siguiente mostramos que G_{μ_J} admite exactamente una G_2 -estructura ERP salvo equivalencia equivariante y multiplicación por escalar.

Proposición 4.1.1. *(G_{μ_J}, φ) es la única G_2 -estructura ERP, salvo equivalencia equivariante y multiplicación por escalar, en la clase de grupos de Lie unimodulares con una G_2 -estructura.*

Observación 4.1.2. Recordemos, de Proposición 3.2.1, que todo grupo de Lie con una G_2 -estructura ERP es unimodular si y solo si tiene nilradical de dimensión igual a 4.

Demostración. Denotamos por $\mathfrak{a} = \text{span}\{A_J, B_J, C_J\}$ a la subálgebra abeliana asociada a μ_J y asumimos que $\bar{\mathfrak{a}} \subset \text{sym}_0(4)$ es otra subálgebra abeliana ERP con correspondiente base

$$\{\bar{A} = \bar{E} + T_7, \bar{B} = \bar{F} + T_3, \bar{C} = \bar{G} + T_4\}.$$

Es sabido que existe $h_2 \in \text{SO}(4)$ tal que $h_2 \mathfrak{a} h_2^{-1} = \bar{\mathfrak{a}}$. Si $h_1 \in \text{SO}(3)$ está definida en términos de la base anterior por $h_2 A h_2^{-1} = h_1 \bar{A}$, $h_2 B h_2^{-1} = h_1 \bar{B}$ y $h_2 C h_2^{-1} = h_1 \bar{C}$, entonces $\bar{\mu} = h \cdot \mu_J$, donde h es como en (4.2). Luego, podemos asumir salvo equivalencia equivariante que $h_1 = \text{id}$, dado que existe $u \in U_{\mathfrak{g}_1, \tau}$ (ver (2.15)) tal que $u|_{\mathfrak{g}_0} = h_1^{-1}$; por lo tanto

$$h_2(E+T_7)h_2^{-1} = \bar{E}+T_7, \quad h_2(F+T_7)h_2^{-1} = \bar{F}+T_3, \quad h_2(G+T_7)h_2^{-1} = \bar{G}+T_4. \quad (4.7)$$

Se sigue de (4.3) y (4.4) que

$$\langle \bar{A}e_1, e_1 \rangle = a - \frac{1}{6}, \quad \langle \bar{A}e_2, e_2 \rangle = -a - \frac{1}{6}, \quad \text{para algún } a \in \mathbb{R},$$

pero como $\text{Spec}(\bar{A}) = \{-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\}$, obtenemos que $a = 0$ y e_1, e_2 son ambos autovectores de \bar{A} con autovalor $-\frac{1}{6}$. Así, \bar{E} tiene la forma

$$\bar{E} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ c & d \\ d & -c \end{bmatrix}, \quad c, d \in \mathbb{R}, \quad c^2 + d^2 = \frac{1}{9},$$

y entonces existe

$$u = \begin{bmatrix} \text{id} & \\ & u_2 \end{bmatrix} \in U_{\mathfrak{g}_1, \tau}, \quad u_2 := \begin{bmatrix} u_3 & \\ & u_3^{-1} \end{bmatrix} \in U(2), \quad u_3 \in \text{SO}(2),$$

tal que $u_2 \bar{E} u_2^{-1} = E$ (ver también (3.13)). Notemos que $u_2 T_i u_2^{-1} = T_i$ para $i = 3, 4, 7$. Esto nos permite asumir que $\bar{E} = E$, salvo equivalencia equivariante. Ahora sigue de (4.7) que h_2 conmuta con A y entonces $h_2 e_5 = \pm e_5$, lo cual implica que

$$\bar{F} e_5 = -T_3 e_5 = -\frac{1}{6} e_2, \quad \bar{G} e_5 = -T_4 e_5 = -\frac{1}{6} e_1.$$

Por (4.3), las matrices \bar{F} y \bar{G} se simplifican considerablemente como a continuación

$$\bar{F} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} a & b & 0 & 1 \\ b & -a & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{G} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} a' & b' & -1 & 0 \\ b' & -a' & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

y la condición $[\bar{B}, \bar{C}] = 0$ implica que

$$\bar{B} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} a & b & 0 & 2 \\ b & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -b & a & 0 & 0 \\ a & b & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad a^2 + b^2 = 2.$$

Notemos que μ_J corresponde a $a = 0$, $b = -\sqrt{2}$. Finalmente, recordemos de (4.7) que \bar{B} y \bar{C} son respectivamente conjugados a B y C , entonces $\text{tr } \bar{B}^3 = \frac{1}{18} a$ no puede depender de a , entonces $a = 0$, y en consecuencia $\text{tr } \bar{C}^3 = \pm \frac{\sqrt{2}}{18}$ (el signo viene de $b = \pm\sqrt{2}$), y así obtenemos que $\bar{\mu} = \mu_J$, concluyendo la prueba. \square

4.2. Caso $\dim \mathfrak{n} = 5$

En esta sección clasificamos, salvo equivalencia equivariante y múltiplo, todas las G_2 -estructuras invariantes a izquierda ERP en grupos de Lie con nilradical de dimensión 5. Hay solo dos ejemplos conocidos en este caso, dado en Sección 3 (ver Ejemplos 3.2.5 y 3.2.6), que a continuación recordaremos.

En primer lugar, recordemos de Sección 3 la base de $\Lambda^2 \mathfrak{g}^*$ dada por

$$\mathcal{B} := \{\tau, \bar{\omega}_3, \bar{\omega}_4, \omega_7, \omega_3, \omega_4\}, \quad (4.8)$$

donde τ , $\bar{\omega}_i$ y ω_j son las ya definidas en Sección 3, es decir

$$\begin{aligned} \tau &= e^{12} - e^{56}, & \bar{\omega}_3 &= e^{26} + e^{15}, & \bar{\omega}_4 &= e^{16} - e^{25}, \\ \omega_7 &= e^{12} + e^{56}, & \omega_3 &= e^{26} - e^{15}, & \omega_6 &= e^{16} + e^{25}. \end{aligned}$$

De ahora en adelante, escribimos a todas las matrices en $\mathfrak{gl}_6(\mathbb{R})$ en términos de la base ortogonal \mathcal{B} . Notemos que cada elemento de \mathcal{B} tiene norma igual a $\sqrt{2}$.

A continuación recordamos los Ejemplos 3.2.5 y 3.2.6 de G_2 -estructuras ERP con nilradical de dimensión 5, y calculamos además las matrices de $\theta(A)$, $\theta(B)$ y $\theta(C)$ donde θ es la representación $\theta : \mathfrak{gl}_4(\mathbb{R}) \rightarrow \text{End}(\Lambda^2 \mathfrak{g}_1^*)$.

Ejemplo 4.2.1. Sea $(G_{\mu_{M2}}, \varphi)$ la G_2 -estructura ERP con corchete de Lie μ_{M2} dado por

$$(A_1)_{M2} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{M2} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_{M2} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & 2 & \\ & 2 & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \quad C_{M2} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & & & \\ -1 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se puede chequear sencillamente que

$$\theta(A)e^i = - \sum_{j=1,2,5,6} A_{ij}e^j,$$

y por lo tanto

$$\theta(A)e^1 = \frac{1}{3}e^1, \quad \theta(A)e^2 = \theta(A)e^5 = 0, \quad \theta(A)e^6 = -\frac{1}{3}e^6.$$

Luego en la base \mathcal{B} , $\theta(A)$ actúa de la siguiente manera:

$$\theta(A)\tau = \frac{1}{3}\omega_7, \quad \theta(A)\bar{\omega}_3 = \frac{1}{3}\omega_3, \quad \theta(A)\bar{\omega}_4 = 0$$

$$\theta(A)\omega_7 = \frac{1}{3}\tau, \quad \theta(A)\omega_3 = -\frac{1}{3}\bar{\omega}_3, \quad \theta(A)\omega_4 = 0.$$

Repetiendo esto para B y C obtenemos que respecto a la base \mathcal{B} de $\Lambda^2 \mathfrak{g}_1^*$, las matrices de $\theta(A_{M2})$, $\theta(B_{M2})$ y $\theta(C_{M2})$ están dadas respectivamente por:

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & -1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \\ -1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 4.2.2. La G_2 -estructura ERP $(G_{\mu_{M3}}, \varphi)$ tiene corchete de Lie μ_{M3} dado por

$$(A_1)_{M3} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix}, \quad A_{M3} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$B_{M3} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad C_{M3} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 2-\sqrt{6} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -2+\sqrt{6} \\ 2+\sqrt{6} & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -2-\sqrt{6} & 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Es fácil ver que $\theta(A_{M3})$, $\theta(B_{M3})$ y $\theta(C_{M3})$ son respectivamente iguales a

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} & \\ 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{6} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

Nuestro objetivo en esta sección es mostrar que, salvo equivalencia equi-variante y múltiplo, los dos ejemplos anteriores son los únicos ejemplos de G_2 -estructuras invariantes a izquierda ERP en grupos de Lie con nilradical de dimensión 5.

Consideramos el operador $*_{\mathfrak{g}_2} : \Lambda^2 \mathfrak{g}_2^* \rightarrow \Lambda^2 \mathfrak{g}_2^*$, cuya matriz en términos de \mathcal{B} está dada por

$$[*_{\mathfrak{g}_2}] = \begin{bmatrix} -\text{id} & \\ & \text{id} \end{bmatrix} \in \mathfrak{gl}_6(\mathbb{R}).$$

Si $M \in \mathfrak{sl}_4(\mathbb{R})$, entonces $\theta(M)*_{\mathfrak{g}_2} = -\theta(M^t)*_{\mathfrak{g}_2}$ por Lema 2.1.1 (vi), y como $\theta(M)^t = \theta(M^t)$, lo que estamos diciendo es que $\theta(M) \in \mathfrak{so}(3, 3)$ para toda $M \in \mathfrak{sl}_4(\mathbb{R})$, esto es:

$$\theta(M) = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2^t & M_3 \end{bmatrix}, \quad M_1^t = -M_1, \quad M_3^t = -M_3, \quad (4.9)$$

para algunas $M_1, M_2, M_3 \in \mathfrak{gl}_3(\mathbb{R})$. Notemos que $\theta : \mathfrak{sl}_4(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{so}(3, 3)$ es claramente un isomorfismo. Más aún, es el isomorfismo clásico que se conoce entre $\mathfrak{sl}_4(\mathbb{R})$ y $\mathfrak{so}(3, 3)$.

Proposición 4.2.3. *Todo grupo de Lie con una G_2 -estructura invariante a izquierda ERP y un nilradical 5-dimensional es equivariantemente equivalente (salvo múltiplo) a $(G_{\mu_{M_2}}, \varphi)$ o a $(G_{\mu_{M_3}}, \varphi)$.*

Demostración. Por lo visto en Sección 3.2.2 para el caso $\dim \mathfrak{n} = 5$, podemos asumir que el corchete de Lie μ de una G_2 -estructura ERP (G_μ, φ) está dado por $\mu = (A_1, A, B, C)$, donde A, B son simétricas, C es nilpotente y $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \\ & \delta \end{bmatrix}$, $\delta > 0$. Como $\text{tr } A = \text{tr } B = \text{tr } C = 0$, las matrices $\theta(A), \theta(B), \theta(C)$ tienen la forma dada en (4.9) con respecto a la base \mathcal{B} .

Del Teorema 3.0.1 (iv) y (v) se puede ver que

$$\theta(A) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} & & 1 & 0 & 0 \\ & a_{24} & a_{25} & a_{26} & \\ & a_{34} & a_{35} & a_{36} & \\ 1 & a_{24} & a_{34} & & \\ 0 & a_{25} & a_{35} & & \\ 0 & a_{26} & a_{36} & & \end{bmatrix}, \quad \theta(B) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} & 0 & 1 & 0 \\ & b_{24} & b_{25} & b_{26} \\ & b_{34} & b_{35} & b_{36} \\ 0 & b_{24} & b_{34} & \\ 1 & b_{25} & b_{35} & \\ 0 & b_{26} & b_{36} & \end{bmatrix},$$

$$\theta(C) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c_{23} & c_{24} & c_{25} & -(a_{24}+b_{25}) \\ 0 & -c_{23} & 0 & c_{34} & c_{35} & -(a_{34}+b_{35}) \\ 0 & c_{24} & c_{34} & 0 & c_{45} & 3\delta \\ 0 & c_{25} & c_{35} & -c_{45} & 0 & 0 \\ 1 & -(a_{24}+b_{25}) & -(a_{34}+b_{35}) & -3\delta & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

para algunos $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in \mathbb{R}$. Ahora, como A_1, A, B, C satisfacen Jacobi y θ es una representación, sabemos que si

$$R := [\theta(A), \theta(C)] - \delta\theta(C), \quad S := [\theta(A), \theta(B)], \quad T := [\theta(B), \theta(C)],$$

entonces $R = S = T = 0$. De las primeras columnas de R, S y T obtenemos directamente que

$$c_{25} = b_{26}, \quad c_{35} = b_{36}, \quad b_{24} = a_{25}, \quad b_{34} = a_{35}, \quad c_{24} = a_{26}, \quad c_{34} = a_{36}, \quad c_{45} = 0.$$

A continuación listamos las demás expresiones nulas obtenidas de $R = S = T = 0$ que vamos a necesitar más adelante:

$$T(4 \dots 6, 2 \dots 3) = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -3b_{26}\delta - a_{35}c_{23} & -3b_{36}\delta + a_{25}c_{23} \\ -b_{35}c_{23} & b_{25}c_{23} \\ 3a_{25}\delta - b_{36}c_{23} & 3a_{35}\delta + b_{26}c_{23} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.10)$$

$$R(4 \dots 6, 2 \dots 3) = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -6a_{26}\delta - a_{34}c_{23} & -6a_{36}\delta + a_{24}c_{23} \\ -3b_{26}\delta - a_{35}c_{23} & -3b_{36}\delta + a_{25}c_{23} \\ 3(2a_{24} + b_{25})\delta - a_{36}c_{23} & 3(2a_{34} + b_{35})\delta + a_{26}c_{23} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.11)$$

$$T(6, 5) = \frac{1}{9} (b_{26}^2 + b_{36}^2 + b_{25}^2 + b_{35}^2 + b_{25}a_{24} + b_{35}a_{34} - 1) = 0 \quad (4.12)$$

$$R(6, 4) = \frac{1}{9} (a_{26}^2 + a_{36}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2 + a_{24}b_{24} + a_{34}b_{35} + 9\delta^2 - 1) = 0. \quad (4.13)$$

donde $T(i \dots j, k \dots l) = \begin{bmatrix} T(i,k) & \dots & T(i,l) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T(j,k) & \dots & T(j,l) \end{bmatrix}$, y es análogo para R .

El resto de la prueba va a estar dividido en dos casos, cada caso nos va a guiar a uno de los ejemplos conocidos.

Asumimos en primer lugar que $c_{23} = 0$. Se sigue de (4.10), (4.11) y $\delta > 0$ que

$$b_{26} = b_{36} = a_{25} = a_{35} = a_{26} = a_{36} = 0, b_{25} = -2a_{24}, b_{35} = -2a_{34}.$$

De (4.12) y (4.13), tenemos que $a_{24}^2 + a_{34}^2 = \frac{1}{2}$ y $\delta = \frac{\sqrt{6}}{6}$, por lo tanto $\theta(A)$, $\theta(B)$ y $\theta(C)$ son respectivamente iguales a

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} & & 1 & 0 & 0 \\ & & a_{24} & 0 & 0 \\ & & a_{34} & 0 & 0 \\ 1 & a_{24} & a_{34} & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \end{bmatrix}, \frac{1}{3} \begin{bmatrix} & & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & -2a_{24} & 0 \\ & & 0 & -2a_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 1 & -2a_{24} & -2a_{34} & & \\ 0 & 0 & 0 & & \end{bmatrix}, \frac{1}{6} \begin{bmatrix} & & 0 & 0 & 2 \\ & & 0 & 0 & 2a_{24} \\ & & 0 & 0 & 2a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & & \sqrt{6} \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 2 & 2a_{24} & 2a_{34} & & -\sqrt{6} \end{bmatrix},$$

donde $a_{24}^2 + a_{34}^2 = \frac{1}{2}$. Notemos que cuando $a_{24} = 0$ y $a_{34} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, obtenemos $\theta(A_{M_3})$, $\theta(B_{M_3})$ y $\theta(C_{M_3})$ del Ejemplo 3.2.6, y actuando con $h := \begin{bmatrix} \text{id} & & \\ u & & \\ & u^{-1} & \end{bmatrix} \in U_0$ como en (3.13), tenemos que $\theta(h_1 A_{M_3} h_1^{-1})$, $\theta(h_1 B_{M_3} h_1^{-1})$ y $\theta(h_1 C_{M_3} h_1^{-1})$ están dadas por

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} & & 2 & 0 & 0 \\ & & \sqrt{2}s & 0 & 0 \\ & & \sqrt{2}c & 0 & 0 \\ 2 & \sqrt{2}s & \sqrt{2}c & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \end{bmatrix}, \frac{1}{3} \begin{bmatrix} & & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & -\sqrt{2}s & 0 \\ & & 0 & -\sqrt{2}c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 1 & -\sqrt{2}s & -\sqrt{2}c & & \\ 0 & 0 & 0 & & \end{bmatrix}, \frac{1}{6} \begin{bmatrix} & & 0 & 0 & 2 \\ & & 0 & 0 & \sqrt{2}s \\ & & 0 & 0 & \sqrt{2}c \\ 0 & 0 & 0 & & \sqrt{6} \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 2 & \sqrt{2}s & \sqrt{2}c & & -\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

donde $h_1 := \begin{bmatrix} u & & \\ & u^{-1} & \end{bmatrix}$ y $\theta(h_1) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & c & s & & \\ & -s & c & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$, $c^2 + s^2 = 1$. Esto implica que

hemos cubierto todos los ejemplos con $c_{23} = 0$. En otra palabras, si $c_{23} = 0$, entonces la G_2 -estructura ERP definida por (A_1, A, B, C) es equivariantemente equivalente a μ_{M_3} .

Supongamos ahora que $c_{23} \neq 0$. La ecuación (4.10) implica que $b_{25} = b_{35} = 0$ y

$$a_{25} = \frac{3b_{36}\delta}{c_{23}}, \quad a_{35} = -\frac{3b_{26}\delta}{c_{23}}, \quad b_{26}(c_{23}^2 - 9\delta^2) = 0, \quad b_{36}(c_{23}^2 - 9\delta^2) = 0.$$

Por (4.12), resulta que $b_{26}^2 + b_{36}^2 = 1$, y se obtiene de las ecuaciones anteriores que $c_{23}^2 = 9\delta^2$. Por otro lado, de (4.11) tenemos que

$$a_{26} = -\frac{6a_{34}\delta}{c_{23}}, \quad a_{36} = \frac{6a_{24}\delta}{c_{23}}, \quad a_{24}(c_{23}^2 - 36\delta^2) = 0, \quad a_{34}(c_{23}^2 - 36\delta^2) = 0.$$

Así $a_{24} = a_{34} = 0$ y entonces (4.13) nos da que $9\delta^2 = 1$. Por lo tanto,

$$\theta(A) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & c_{23}b_{36} & 0 \\ & & & 0 & -c_{23}b_{26} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & c_{23}b_{36} & -c_{23}b_{26} & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \end{bmatrix},$$

$$\theta(B) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} & 0 & 1 & 0 \\ & c_{23}b_{36} & 0 & b_{26} \\ & -c_{23}b_{26} & 0 & b_{36} \\ 0 & c_{23}b_{36} & -c_{23}b_{26} & \\ 1 & 0 & 0 & \\ 0 & b_{26} & b_{36} & \end{bmatrix}, \quad \theta(C) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & c_{23} & 0 & b_{26} \\ & & & 0 & 0 & b_{36} \\ 0 & -c_{23} & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & 1 \\ 0 & b_{26} & b_{36} & & & \\ 1 & 0 & 0 & -1 & & \end{bmatrix},$$

donde $a_{25}^2 + a_{35}^2 = 1$, $\delta = \frac{1}{3}$ y $c_{23} = \pm 1$. Notemos que cuando $a_{25} = -1$, $a_{35} = 0$ y $c_{23} = -1$, obtenemos $\theta(A_{M_2}), \theta(B_{M_2}), \theta(C_{M_2})$ del Ejemplo 3.2.5, y si actuamos con $h \in U_0$ como en el caso en que $c_{23} = 0$, entonces $\theta(h_1 A_{M_2} h_1^{-1}), \theta(h_1 B_{M_2} h_1^{-1})$ y $\theta(h_1 C_{M_2} h_1^{-1})$ son respectivamente iguales a

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & -c & 0 \\ & 0 & s & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \\ 0 & -c & s & \\ 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{3} \begin{bmatrix} & 0 & 1 & 0 \\ & -c & 0 & s \\ & s & 0 & c \\ 0 & -c & s & \\ 1 & 0 & 0 & \\ 0 & s & c & \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{3} \begin{bmatrix} & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & -1 & 0 & s \\ & & & 0 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & 1 \\ 0 & s & c & & & \\ 1 & 0 & 0 & -1 & & \end{bmatrix},$$

Las matrices anteriores cubren todos los casos cuando $c_{23} = -1$. Para lograr los casos cuando $c_{23} = 1$, actuamos con

$$\bar{h} := \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -\text{id} & & \\ & u & & \\ & & & -u^{-1} \end{bmatrix} \in U_0, \quad \bar{h}_1 := \begin{bmatrix} u & \\ & -u^{-1} \end{bmatrix}, \quad \theta(\bar{h}_1) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & c & s & & \\ & -s & c & & \\ & & & 1 & \\ & & & & -1 & \\ & & & & & -1 \end{bmatrix},$$

tal que $c^2 + s^2 = 1$, y así obtenemos que $\theta(\bar{h}_1 A_{M_2} \bar{h}_1^{-1}), \theta(\bar{h}_1 B_{M_2} \bar{h}_1^{-1})$ y $\theta(\bar{h}_1 C_{M_2} \bar{h}_1^{-1})$ son respectivamente iguales a

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & c & 0 \\ & 0 & -s & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \\ 0 & c & -s & \\ 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}, \quad -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} & 0 & 1 & 0 \\ & c & 0 & s \\ & -s & 0 & c \\ 0 & c & -s & \\ 1 & 0 & 0 & \\ 0 & s & c & \end{bmatrix}, \quad -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 & s \\ & & & 0 & 0 & c \\ -1 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & 1 \\ 0 & s & c & & & \\ 1 & 0 & 0 & -1 & & \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, si $c_{23} \neq 0$, entonces (A_1, A, B, C) es equivariantemente equivalente a μ_{M_2} , lo cual completa la prueba de la proposición. \square

4.3. Caso $\dim \mathfrak{n} = 6$

Al igual que en la Sección 4.2, en esta sección probamos que los dos ejemplos conocidos de G_2 -estructuras en grupos de Lie son en realidad los únicos con nilradical de dimensión 6, salvo equivalencia y múltiplo. Sin embargo, para completar la clasificación salvo equivalencia equivariante, debemos agregar una familia alrededor de uno de los ejemplos que depende de dos parámetros.

Ejemplo 4.3.1. Sea (G_{μ_B}, φ) la G_2 -estructura ERP dada en Ejemplo 3.2.7, con corchete de Lie μ_B dado por

$$(A_1)_B = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \quad A_B = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \quad B_B = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} & & 0 & \\ & 1 & 0 & \\ & & 0 & \\ 1 & & & \end{bmatrix}, \quad C_B = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} & & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & \\ & & 0 & 0 \\ 0 & -1 & & \end{bmatrix},$$

de lo que sigue que

$$\theta(A_B) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} & & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \end{bmatrix}, \quad \theta(B_B) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} & & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & \\ 0 & 0 & 0 & & \end{bmatrix}, \quad \theta(C_B) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} & & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & \end{bmatrix}.$$

Éste fue el primer ejemplo de G_2 -estructura ERP encontrado por Bryant en [B, Example 1].

Ejemplo 4.3.2. Para cada par $r, t \in \mathbb{R}$, sea $(G_{\mu_{rt}}, \varphi)$ la G_2 -estructura con corchete de Lie dado por

$$(A_1)_{rt} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -r \\ r & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{rt} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & -2t \\ 2t & -1 & & \\ & & 1 & 2(r+t) \\ & & -2(r+t) & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_{rt} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} & & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \end{bmatrix}, \quad C_{rt} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} & & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & -1 & \end{bmatrix}.$$

Notemos que cuando $r = t = 0$ uno obtiene el ejemplo μ_B anterior. Por 2.5.5, se sigue que $(G_{\mu_{rt}}, \varphi)$ es equivalente a (G_{μ_B}, φ) y en consecuencia es ERP para todo $r, t \in \mathbb{R}$. Más aún, como

$$\mathbb{R}^* \text{Spec}(\text{ad}_{\mu_{rt}} e_7|_{\mathfrak{h}}) = \mathbb{R}^* \left\{ \frac{1}{3} + ir, \frac{1}{3} + ir, -\frac{1}{6} + it, -\frac{1}{6} + it, \frac{1}{6} - i(r+t), \frac{1}{6} - i(r+t) \right\},$$

es invariante por isomorfismos, se obtiene que la familia de álgebras de Lie $\{\mu_{rt} : r, t \in \mathbb{R}\}$ es no isomorfa dos a dos dado que el conjunto anterior cambia con cada par (r, t) . En particular, la familia de G_2 -estructuras $\{(G_{\mu_{rt}}, \varphi) : r, t \in \mathbb{R}\}$ es no equivariantemente equivalente dos a dos.

Es fácil ver que $\theta(A_{rt})$, $\theta(B_{rt})$ y $\theta(C_{rt})$ están respectivamente dadas por

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} & & r+2t & 1 & 0 & 0 \\ & & -r-2t & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & -r \\ 0 & 0 & 0 & & & r \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{3} \begin{bmatrix} & & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & \\ 0 & 0 & 0 & & \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{3} \begin{bmatrix} & & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & \end{bmatrix}.$$

Este ejemplo fue encontrado por Fino y Raffero en el caso en que $t = 0$, en [FR3, Example 6.4].

Ejemplo 4.3.3. Sea $(G_{\mu_{M1}}, \varphi)$ la G_2 -estructura ERP dada en Ejemplo 3.2.8 con corchete de Lie μ_{M1} dado por

$$(A_1)_{M1} = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} \sqrt{30} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{30} \end{bmatrix}, \quad A_{M1} = \frac{1}{60} \begin{bmatrix} -10-\sqrt{30} & 0 & -2\sqrt{5} & 0 \\ 0 & -10+\sqrt{30} & 0 & -2\sqrt{5} \\ -2\sqrt{5} & 0 & 10-\sqrt{30} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{5} & 0 & 10+\sqrt{30} \end{bmatrix},$$

$$B_{M1} = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{5} & 0 & 5-\sqrt{30} \\ 5\sqrt{5} & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 5+\sqrt{30} & 0 & \sqrt{5} \\ 5 & 0 & -5\sqrt{5} & 0 \end{bmatrix}, \quad C_{M1} = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} -\sqrt{5} & 0 & 5-\sqrt{30} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 & -5+\sqrt{30} \\ 5+\sqrt{30} & 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & -5-\sqrt{30} & 0 & -\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

Se puede chequear fácilmente que $30\theta(A_{M1})$, $30\theta(B_{M1})$ y $15\theta(C_{M1})$ son respectivamente iguales a

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{30} & 0 & 0 \\ 2\sqrt{5} & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 2\sqrt{5} & 0 \\ 0 & -\sqrt{30} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6\sqrt{5} & -\sqrt{30} & 0 & 0 \\ 0 & -4\sqrt{5} & 0 & 0 \\ -6\sqrt{5} & 0 & \sqrt{30} & 0 \\ 0 & -\sqrt{30} & 0 & -\sqrt{30} \\ 10 & 0 & -4\sqrt{5} & -\sqrt{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & \sqrt{30} \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & \sqrt{5} & -\sqrt{30} \end{bmatrix}.$$

A continuación probamos el resultado principal de esta sección.

Proposición 4.3.4. *Todo grupo de Lie con una G_2 -estructura invariante a izquierda ERP y con un nilradical 6-dimensional es equivariantemente equivalente (salvo múltiplo) a $(G_{\mu_{M1}}, \varphi)$ o a $(G_{\mu_{rt}}, \varphi)$, para algún $r, t \in \mathbb{R}$.*

Demostración. De la Sección 3.2.3 para el caso $\dim \mathfrak{n} = 6$, podemos asumir que dada una G_2 -estructura (G_μ, φ) ERP, el corchete de Lie μ está dado por $\mu = (A_1, A, B, C)$, donde A_1 y A son normales y B y C son nilpotentes.

Consideramos primero el caso cuando A_1 y A son simétricas, entonces podemos asumir que $A_1 = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}$, donde $\alpha + \delta > 0$ y $\delta \geq \alpha$ (ver Sección 3.2.3). De la misma manera que en la prueba de la Proposición 4.2.3, primero computamos la forma de $\theta(A)$, $\theta(B)$ y $\theta(C)$ aplicando las condiciones provistas por Teorema 3.0.1, (iv) y (v). De la nulidad de la primera columna de cada una de las matrices dadas por la condición de Jacobi:

$$R := [\theta(A), \theta(B)] - \alpha\theta(B) = 0, \quad S := [\theta(A), \theta(C)] - \delta\theta(C) = 0,$$

$$T := [\theta(B), \theta(C)] = 0,$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} c_{25} &= b_{26}, & c_{35} &= b_{36}, & c_{24} &= a_{26}, & c_{34} &= a_{36}, \\ b_{24} &= a_{25}, & b_{34} &= a_{35}, & b_{45} &= 3\alpha, & c_{45} &= b_{46} = 0, \end{aligned} \quad (4.14)$$

y entonces

$$\theta(A) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ 1 & a_{24} & a_{34} \\ 0 & a_{25} & a_{35} \\ 0 & a_{26} & a_{36} \end{bmatrix}, \quad \theta(B) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ b_{23} & a_{25} & b_{25} & b_{26} \\ a_{35} & b_{35} & b_{36} \\ 0 & -b_{23} & a_{35} & 3\alpha \\ 0 & a_{25} & a_{35} & 3\alpha \\ 1 & b_{25} & b_{35} & -3\alpha \\ 0 & b_{26} & b_{36} \end{bmatrix},$$

$$\theta(C) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} & & c_{23} & 0 & 0 & 1 \\ & -c_{23} & & a_{26} & b_{26} & -(a_{24}+b_{25}) \\ 0 & a_{26} & a_{36} & a_{36} & b_{36} & -(a_{34}+b_{35}) \\ 0 & b_{26} & b_{36} & & 0 & 3\delta \\ 1 & -(a_{24}+b_{25}) & -(a_{34}+b_{35}) & -3\delta & & \end{bmatrix}.$$

Notemos que b_{23} y α no se pueden anular simultáneamente, pues en tal caso $\theta(B)$ y entonces B serían simétricas, lo cual es una contradicción pues B es nilpotente.

A continuación escribimos las ecuaciones dadas por la nulidad de R, S, T que serán necesitadas en lo que resta de la prueba:

$$S[4 \dots 5, 2 \dots 3] = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -6\delta a_{26} - a_{34}c_{23} & -6\delta a_{36} + a_{24}c_{23} = 0 \\ -3\delta b_{26} - a_{35}c_{23} & -3\delta b_{36} + a_{25}c_{23} \end{bmatrix} = 0, \quad (4.15)$$

$$R[4 \dots 5, 2 \dots 3] = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -6\alpha a_{25} - a_{34}b_{23} & -6\alpha a_{35} + a_{24}b_{23} \\ 3\alpha(a_{24} - b_{25}) - a_{35}b_{23} & 3\alpha(a_{34} - b_{35}) + a_{25}b_{23} \end{bmatrix} = 0, \quad (4.16)$$

$$R[6, 4] = \frac{1}{9}(a_{25}a_{26} + a_{35}a_{36} - a_{24}b_{26} - a_{34}b_{36}) = 0, \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} R[3, 2] &= \frac{1}{9}(a_{34}a_{25} + a_{35}b_{25} + a_{36}b_{26} - a_{24}a_{35} - a_{25}b_{35} - a_{26}b_{36} + 3\alpha b_{23}) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$R[5, 4] = \frac{1}{9}(a_{25}^2 + a_{35}^2 - b_{25}a_{24} - b_{35}a_{34} - 1 + 9)\alpha^2 = 0, \quad (4.19)$$

$$T[5, 2 \dots 3] = \frac{1}{9}[b_{23}b_{36} - b_{35}c_{23} - 3a_{26}\alpha - b_{23}b_{26} + b_{25}c_{23} - 3a_{36}\alpha] = 0, \quad (4.20)$$

$$S[6, 2 \dots 3] = \frac{1}{9}[3\delta(2a_{24} + b_{25}) - a_{36}c_{23} \quad 3\delta(2a_{34} + b_{35}) + a_{26}c_{23}] = 0, \quad (4.21)$$

$$T[6, 2 \dots 3] = \frac{1}{9}[-b_{23}(a_{34} + b_{35}) + 3a_{25}\delta - b_{36}c_{23} \quad b_{23}(a_{24} + b_{25}) + 3a_{35}\delta + b_{26}c_{23}] = 0. \quad (4.22)$$

La prueba está dividida en dos pasos, dependiendo del valor de c_{23} . El caso cuando $c_{23} \neq 0$ nos lleva a una contradicción, y en el caso que $c_{23} = 0$, el valor de b_{23} determina si la G_2 -estructura ERP μ es equivariantemente equivalente a μ_B o a μ_{M1} .

Asumimos primero que $c_{23} \neq 0$, entonces de (4.15) resulta

$$a_{34} = -\frac{6\delta}{c_{23}}a_{26}, \quad a_{24} = \frac{6\delta}{c_{23}}a_{36}, \quad a_{35} = -\frac{3\delta}{c_{23}}b_{26}, \quad a_{25} = \frac{3\delta}{c_{23}}b_{36}.$$

Reemplazando estos valores en (4.16) y (4.17), y teniendo en cuenta que b_{23} y α no pueden ser simultáneamente nulos, obtenemos que $a_{26} = a_{36} = b_{26} = b_{36} = 0$. En consecuencia, tenemos que $0 = S[3, 2] = \frac{1}{3}\delta c_{23}$, lo cual es una contradicción.

Asumimos ahora que $c_{23} = 0$, luego $a_{26} = a_{36} = b_{26} = b_{36} = 0$ por (4.15) y de (4.21), obtenemos que $b_{25} = -2a_{24}$ y $b_{35} = -2a_{34}$.

Si $b_{23} = 0$, entonces $\alpha \neq 0$ y se sigue de (4.16) que $a_{24} = a_{34} = a_{25} = a_{35} = 0$ y

$$0 = S[6, 4] = -\frac{1}{9} + \delta^2, \quad 0 = T[6, 5] = -\frac{1}{9} + \alpha\delta.$$

Por lo tanto, $\delta = \alpha = \frac{1}{3}$ y entonces $\theta(A) = \theta(A_B)$, $\theta(B) = \theta(B_B)$, $\theta(C) = \theta(C_B)$, esto es, obtenemos que $\mu = \mu_B$. De lo contrario, si $b_{23} \neq 0$, entonces

por (4.16) se tiene que

$$a_{25} = -\frac{9\alpha}{b_{23}}a_{34}, \quad a_{35} = \frac{9\alpha}{b_{23}}a_{24},$$

por lo tanto, de (4.16) y (4.18), se desprende que

$$a_{24}^2 + a_{34} = 6\alpha^2, \quad b_{23}^2 = 54\alpha^2,$$

pero (4.19) y el hecho de que $\alpha + \delta > 0$ implican que $\alpha^2 = \frac{1}{30}$, y por (4.22)

$$\alpha = \frac{\sqrt{30}}{30}, \quad \delta = 2\frac{\sqrt{30}}{30}, \quad b_{23} = \frac{3}{5}\epsilon\sqrt{5}, \quad \epsilon := \pm 1,$$

de lo que sigue que $30\theta(A)$, $30\theta(B)$ y $15\theta(C)$ están respectivamente dadas por

$$\begin{bmatrix} & & 10 & 0 & 0 \\ & & 10a_{24} & -5\sqrt{6}\epsilon a_{34} & 0 \\ & & 10a_{34} & 5\sqrt{6}\epsilon a_{24} & 0 \\ 10 & 10a_{24} & 10a_{34} & & \\ 0 & -5\sqrt{6}\epsilon a_{34} & 5\sqrt{6}\epsilon a_{24} & & \\ 0 & 0 & 0 & & \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} & & 0 & 10 & 0 \\ & & 6\sqrt{5}\epsilon & -5\sqrt{6}\epsilon a_{34} & -20a_{24} \\ & -6\sqrt{5}\epsilon & 5\sqrt{6}\epsilon a_{24} & -20a_{34} & 0 \\ 0 & -5\sqrt{6}\epsilon a_{34} & 5\sqrt{6}\epsilon a_{24} & \sqrt{30} & \\ 10 & -20a_{24} & -20a_{34} & -\sqrt{30} & \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{30} & \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} & & 0 & 0 & 5 \\ & & 0 & 0 & 5a_{24} \\ & & 0 & 0 & 5a_{34} \\ & & & \sqrt{30} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{30} \\ 5 & 5a_{24} & 5a_{34} & -\sqrt{30} & \end{bmatrix}.$$

Denotemos por $\theta(A)(\epsilon, a_{24}, a_{34})$, $\theta(B)(\epsilon, a_{24}, a_{34})$ y $\theta(C)(\epsilon, a_{24}, a_{34})$ las matrices anteriores. Notemos que

$$\theta(A)\left(1, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \theta(A_{M1}),$$

$$\theta(B)\left(1, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \theta(B_{M1}),$$

$$\theta(C)\left(1, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \theta(C_{M1}).$$

Si actuamos en μ_{M1} con $h \in U_0$ como en la prueba de Proposición (4.2.3), entonces obtenemos la G_2 -estructura equivariantemente equivalente para la cual las matrices $\theta(h_1A_{M1}h_1^{-1})$, $\theta(h_1B_{M1}h_1^{-1})$ y $\theta(h_1C_{M1}h_1^{-1})$ están dadas respectivamente por

$$\theta(A)\left(1, \frac{s}{\sqrt{5}}, \frac{c}{\sqrt{5}}\right), \quad \theta(B)\left(1, \frac{s}{\sqrt{5}}, \frac{c}{\sqrt{5}}\right), \quad \theta(C)\left(1, \frac{s}{\sqrt{5}}, \frac{c}{\sqrt{5}}\right).$$

Por otro lado, si actuamos en μ_{M1} con $\bar{h} \in U_0$ como en la prueba de Proposición (4.3.4), entonces obtenemos

$$\theta(A)\left(-1, \frac{s}{\sqrt{5}}, \frac{c}{\sqrt{5}}\right), \quad -\theta(B)\left(-1, \frac{s}{\sqrt{5}}, \frac{c}{\sqrt{5}}\right), \quad -\theta(C)\left(-1, \frac{s}{\sqrt{5}}, \frac{c}{\sqrt{5}}\right).$$

Por consiguiente, logramos todas las matrices anteriores, es decir si $c_{23} = 0$ y $b_{23} \neq 0$, entonces μ es equivariantemente equivalente a μ_{M1} .

En segundo lugar, consideramos el caso en que $\mu = (A_1, A, B, C)$, donde A_1 y A son normales pero al menos una de ellas no es simétrica, entonces $A_1 = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \delta \end{bmatrix}$, donde $\beta = 0$ o $\alpha = \delta$ (ver Sección 3.2.3). En este caso, Teorema 3.0.1, (iv) y (v) y la nulidad de las primeras columnas de las matrices dadas por las condiciones de Jacobi:

$$\begin{aligned} [\theta(A), \theta(B)] &= \alpha\theta(B) - \beta\theta(C), \\ [\theta(A), \theta(C)] &= \beta\theta(B) + \delta\theta(C), \\ [\theta(B), \theta(C)] &= 0; \end{aligned}$$

implican todas las condiciones dadas en (4.14) más las siguientes

$$a_{45} = 0, \quad a_{46} = 0, \quad a_{56} = 3\beta,$$

y entonces

$$\theta(A) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} & & 1 & 0 & 0 \\ & -a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ & 1 & a_{24} & a_{34} & \\ 0 & a_{25} & a_{35} & & 3\beta \\ 0 & a_{26} & a_{36} & -3\beta & \end{bmatrix}, \quad \theta(B) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} & & & 0 & 1 & 0 \\ & & b_{23} & a_{25} & b_{25} & b_{26} \\ & -b_{23} & & a_{35} & b_{35} & b_{36} \\ 0 & a_{25} & a_{35} & & 3\alpha & \\ 1 & b_{25} & b_{35} & -3\alpha & & \\ 0 & b_{26} & b_{36} & 0 & & \end{bmatrix},$$

$$\theta(C) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} & & & 0 & 0 & 1 \\ & & c_{23} & a_{26} & b_{26} & -(a_{24}+b_{25}) \\ & -c_{23} & & a_{36} & b_{36} & -(a_{34}+b_{35}) \\ 0 & a_{26} & a_{36} & & 3\delta & \\ 0 & b_{26} & b_{36} & 0 & & \\ 1 & -(a_{24}+b_{25}) & -(a_{34}+b_{35}) & -3\delta & & \end{bmatrix}.$$

Del siguiente hecho:

$$\theta(E) = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & a-b & & & \\ & b-a & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & 0 & a+b & \\ & & & -(a+b) & 0 & \end{bmatrix}, \quad \text{para toda } E = \begin{bmatrix} 0 & -a & & & & \\ a & 0 & & & & \\ & & 0 & -b & & \\ & & b & 0 & & \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

obtenemos que $\text{ad } e_7|_{\mathfrak{h}} = \tilde{A} + D$, donde \tilde{A} y D son las partes simétricas y antisimétricas respectivamente, dadas por

$$\tilde{A} := \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \\ & & S(A) \end{bmatrix}, \quad D := \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 6\beta & & & & \\ -6\beta & 0 & & & & \\ & & 0 & -a_{23}-3\beta & & \\ & & a_{23}+3\beta & 0 & & \\ & & & & 0 & a_{23}-3\beta \\ & & & & -a_{23}+3\beta & 0 \end{bmatrix},$$

y $S(A)$ denota la parte simétrica de A . Dado que $D \in \text{Der}(\mathfrak{h}) \cap \mathfrak{su}(3)$ y conmuta con $\text{ad } e_7|_{\mathfrak{h}}$ pues A es normal, se sigue de Proposición 2.5.5 que (A_1, A, B, C) es equivalente como G_2 -estructura a $(S(A_1), S(A), B, C)$, la cual tiene que ser ERP por lo probado en la primer parte de esta prueba. Por el caso trabajado previamente, $(S(A_1), S(A), B, C)$ debe ser precisamente μ_B , ya que μ_{M1} no admite una derivación en $\mathfrak{su}(3)$ (ver Sección 4.4). Esto implica que $\mu = \mu_{rt}$, donde $r = -3\beta$, $t = \frac{1}{2}a_{23} + \frac{3}{2}\beta$, completando la prueba de la proposición. \square

4.4. Simetrías

El objetivo en esta sección es aportar alguna idea sobre las simetrías de cada una de las G_2 -estructuras ERP obtenidas en el Teorema de clasificación 4.0.1.

El grupo de isometrías de una métrica Riemanniana invariante a izquierda en un grupo de Lie n -dimensional puede ser muy complicado de calcular, incluso en el caso completamente soluble. Sin embargo, no es difícil ver que $\text{Iso}(G_\mu, \langle \cdot, \cdot \rangle) = KG_\mu$, donde $K := \text{Iso}(G_\mu, \langle \cdot, \cdot \rangle)_e$ es el subgrupo de isotropía en la identidad y G_μ denota el subgrupo de traslaciones a izquierda. Es fácil ver que las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) G_μ es normal en $\text{Iso}(G_\mu, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

(ii) $\text{Iso}(G_\mu, \langle \cdot, \cdot \rangle) = K \ltimes G_\mu$.

(iii) $K = \text{Aut}(G_\mu) \cap \text{Iso}(G_\mu, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, el cual está identificado con el grupo

$$\text{Aut}(\mu) \cap \text{O}(n), \quad \text{O}(n) := \text{O}(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle),$$

de automorfismos ortogonales del álgebra de Lie.

Es sabido que esto vale cuando μ es unimodular y completamente soluble (ver [GW]). En cualquier caso, el subgrupo de isometrías de $(G_\mu, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ dado por

$$(\text{Aut}(\mu) \cap \text{O}(n)) \ltimes G_\mu,$$

está siempre presente y es menos difícil de calcular.

Por otro lado, dado un grupo de Lie (G_μ, φ) con una G_2 -estructura invariante a izquierda, podemos considerar el subgrupo de automorfismos de (G_μ, φ) dado por

$$(\text{Aut}(\mu) \cap G_2) \ltimes G_\mu \subset \text{Aut}(G_\mu, \varphi) \subset \text{Iso}(G_\mu, \langle \cdot, \cdot \rangle),$$

donde $\text{Aut}(G_\mu, \varphi) := \{f \in \text{Aut}(G_\mu) : f^*\varphi = \varphi\}$. Como $G_2 \subset \text{SO}(7)$ (donde el producto interno es el definido por φ), obtenemos que

$$\text{Aut}(\mu) \cap G_2 \subset \text{Aut}(\mu) \cap \text{O}(7). \quad (4.23)$$

Notemos que $(\text{Aut}(\mu) \cap G_2) \ltimes G_\mu = \text{Aut}(G_\mu, \varphi)$ también se mantiene en el caso unimodular completamente soluble.

En este contexto, computamos a continuación los dos grupos dados en (4.23) para cada estructura ERP que aparece en el Teorema 4.0.1. Es simple ver que el álgebra de Lie $\text{Der}(\mu) \cap \mathfrak{so}(7)$ de $\text{Aut}(\mu) \cap \text{O}(7)$ es siempre cero excepto por μ_B y μ_{rt} , donde coincide con \mathfrak{u}_0 , el álgebra de Lie 2-dimensional del grupo de Lie $U_0 \simeq S^1 \times S^1$ dado en Sección 2.4. Esto implica que los grupos dados en (4.23) son todos finitos en los otros cuatro casos.

A continuación resumimos el resultado de los cálculos de los G_2 -automorfismos. La cuenta es sencilla, aunque larga en algunos casos, primero calculamos para cada μ el grupo de automorfismos ortogonales del álgebra de Lie, y a lo obtenido le exigimos que fije a la 3-forma φ , es decir, que esté en G_2 . Todas las matrices a continuación están escritas en términos de la base $\{e_7, e_3, e_4, e_1, e_2, e_5, e_6\}$.

- $\text{Aut}(\mu_B) \cap G_2 = \text{Aut}(\mu_{rt}) \cap G_2 = U_0 \simeq S^1 \times S^1$.
- $\text{Aut}(\mu_{M1}) \cap G_2 = \langle f_0 \rangle \simeq \mathbb{Z}_2$, donde $f_0 := \text{Diag}(1, 1, 1, -1, -1, -1, -1)$.
- $\text{Aut}(\mu_{M2}) \cap G_2 = \langle f_0 \rangle \simeq \mathbb{Z}_2$.
- $\text{Aut}(\mu_{M3}) \cap G_2 = \langle f_1 \rangle \simeq \mathbb{Z}_4$, donde $f_1|_{\mathfrak{g}_0} := \text{Diag}(1, -1, -1)$ y

$$f_1|_{\mathfrak{g}_1} := \begin{bmatrix} 0 & -1 & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & \\ & & 0 & -1 & & & \\ & & 1 & 0 & & & \end{bmatrix}.$$

- $\text{Aut}(\mu_J) \cap G_2 \simeq \text{SL}_2(\mathbb{Z}_3)$, el grupo tetraédrico binario de orden 24. En efecto, es fácil verificar que este grupo tiene orden 24, solo un elemento de orden 2 y ningún elemento de orden 12, condición que caracteriza a $\text{SL}_2(\mathbb{Z}_3)$ entre los grupos de orden 24.

Observación 4.4.1. De la presentación original de (G_{μ_B}, φ) como espacio homogéneo $(G/K, \psi)$ provisto de una G_2 -estructura G -invariante ψ dado en [B, Example 1], donde

$$G/K = (\text{SL}_2(\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^2) / \text{SU}(2),$$

obtenemos que $\text{Aut}(G_{\mu_B}, \varphi)$ en realidad contiene un subgrupo 6-dimensional isomorfo a $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ y que $\text{SU}(2) \subset \text{Aut}(G_{\mu_B}, \varphi)_e$. Como $\text{Aut}(\mu_B) \cap G_2 = S^1 \times S^1$, esto muestra que hay automorfismos de (G_{μ_B}, φ) que no son composiciones de automorfismos y traslaciones a izquierda. No sabemos si este es también el caso para los otros ejemplos, excepto por el caso unimodular μ_J (ver Corolario 4.4.2 a continuación).

Por otro lado, en lo que concierne a isometrías, hemos obtenido lo siguiente:

- $\text{Aut}(\mu_B) \cap \text{O}(7) = \langle f_2 \rangle \ltimes U_0 \simeq \mathbb{Z}_2 \ltimes (S^1 \times S^1)$, donde $f_2 := \text{Diag}(1, 1, -1, 1, -1, -1, 1)$.
- $\text{Aut}(\mu_{rt}) \cap \text{O}(7) = U_0 \simeq S^1 \times S^1$.
- $\text{Aut}(\mu_{M1}) \cap \text{O}(7) = \langle f_0, f_3 \rangle \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, donde $f_3 := \text{Diag}(1, -1, 1, -1, 1, -1, 1)$.

- $\text{Aut}(\mu_{M2}) \cap \text{O}(7) = \langle f_0, f_2, f_4 \rangle \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, donde $f_4|_{\mathfrak{g}_0} := I$ y

$$f_4|_{\mathfrak{g}_1} := \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & -1 & \\ & -1 & 0 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

- $\text{Aut}(\mu_{M3}) \cap \text{O}(7) = \langle f_3, f_5, f_6 \rangle \simeq D_4 \times \mathbb{Z}^2$, donde D_4 es el grupo diedral de grado cuatro (y orden 8), $f_5|_{\mathfrak{g}_0} := \text{Diag}(1, -1, 1)$, $f_6|_{\mathfrak{g}_0} := \text{Diag}(1, 1, -1)$ y

$$f_5|_{\mathfrak{g}_1} := \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{6} & 0 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{6} & 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{6} & 0 \end{bmatrix}, \quad f_6|_{\mathfrak{g}_1} := \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -\sqrt{6} & 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -\sqrt{6} & 0 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

En efecto, los generadores satisfacen las siguientes relaciones:

$$f_3^2 = f_5^4 = (f_3 f_5)^2 = e, \quad f_3 f_6 = f_6 f_3, \quad f_5 f_6 = f_6 f_5.$$

- $\text{Aut}(\mu_J) \cap \text{O}(7) \simeq S_4 \times \mathbb{Z}_2^4$, donde S_4 es el grupo simétrico de grado cuatro (y orden 24), pues es isomorfo al centralizador en $\text{O}(4)$ del toro maximal $\langle A, B, C \rangle$ de $\mathfrak{sl}_4(\mathbb{R})$ (ver (4.6)).

Corolario 4.4.2. *Los grupos de automorfismos e isometrías de la G_2 -estructura (G_{μ_J}, φ) están respectivamente dados por:*

$$\text{Aut}(G_{\mu_J}, \varphi) = \text{SL}_2(\mathbb{Z}_3) \times G_{\mu_J}, \quad \text{Iso}(G_{\mu_J}, \langle \cdot, \cdot \rangle) = (S_4 \times \mathbb{Z}_2^4) \times G_{\mu_J}.$$

4.5. Otras propiedades

De la clasificación obtenida en Capítulo 4, podemos observar diversas propiedades obtenidas para G_2 -estructuras invariantes a izquierda ERP, que enumeramos a continuación.

- μ_B fue encontrado originalmente por Bryant en [B], μ_J por Lauret en [L4], los ejemplos μ_{M_i} los encontramos al realizar esta tesis y están publicados en [LN1] y la curva de ejemplos dada en [FR3] pertenece a la familia de 2 parámetros μ_{rt} .
- Todas las G_2 -estructuras ERP dadas en Cuadro 1.1 tienen 2-forma de torsión $\tau = e^{12} - e^{56}$.
- Del Teorema 4.0.1, se desprende que toda G_2 -estructura ERP ψ , en un grupo de Lie no unimodular G , es exacta. En efecto, (G, ψ) es equivalente a (G_{μ_B}, φ) , $(G_{\mu_{M1}}, \varphi)$, $(G_{\mu_{M2}}, \varphi)$ o $(G_{\mu_{M3}}, \varphi)$ las cuales satisfacen la siguiente igualdad para φ :

$$\varphi = d_\mu (3\tau - (\text{tr } A_1)^{-1} e^{34}), \quad A_1 := \text{ad}_\mu e_7|_{\text{span}\{e_3, e_4\}}.$$

Notamos que $(\text{tr } A_1)^{-1} = \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{30}}{3}, 3, \sqrt{6}$ para μ dado por μ_B (o μ_{rt}), μ_{M1} , μ_{M2} , μ_{M3} , respectivamente.

Más aún, (G_{μ_J}, φ) no es exacta, y la prueba es sencilla. Supongamos que φ es exacta, usando la condición de ser ERP obtenemos que e^{347} es exacta. Es decir, existe $0 \neq \alpha \in \Lambda^2 \mathfrak{g}^*$ tal que $d\alpha = e^{347}$. Esto implica que existen $i, j \in \{1, \dots, 6\}$ tales que $0 \neq \langle de^{ij}, e^{347} \rangle$, lo cual es una contradicción pues en este caso el corchete está dado sólo por las matrices (A, B, C) .

- $\mathfrak{h} := \text{span}\{e_1, \dots, e_6\}$ es un ideal unimodular en todos los casos y la correspondiente SU(3)-estructura $(\mathfrak{h}, \omega, \rho^+)$ es siempre *half-flat* (i.e. $d\omega^2 = 0$ y $d\rho^+ = 0$). Además, (G_{μ_B}, φ) es *coupled* (i.e. $d\omega = \frac{1}{3}\rho^+$). Para μ_J , consideramos el ideal de codimensión 1 definido por $\mathfrak{h}_1 := \{e_1 - e_2 + e_7\}^\perp$, es fácil ver que la correspondiente SU(3)-estructura es *symplectic half-flat* (i.e. $d\omega_1 = 0$ y $d\rho_1^+ = 0$).
- Todas las álgebras de Lie dadas en (4.1) son completamente solubles y la única unimodular es μ_J . En [FR3, Theorem 6.7], Fino y Raffero probaron que G_{μ_J} es el único grupo de Lie unimodular que admite una G_2 -estructura invariante a izquierda ERP. La pregunta de si G_{μ_J} admite un retículo todavía está abierta.
- Para cada μ en (4.1), el grupo de Lie simplemente conexo G_μ es el único grupo de Lie con álgebra de Lie μ ; en efecto, el centro de G_μ es trivial pues el centro del álgebra de Lie lo es y la función exponencial es un difeomorfismo.
- Dada \mathfrak{g} álgebra de Lie, llamemos $d_k : \Lambda^k \mathfrak{g}^* \rightarrow \Lambda^{k+1} \mathfrak{g}^*$ a la derivada exterior en k -formas de \mathfrak{g} y definimos

$$H_k := \frac{\text{Ker } d_k}{\text{Im } d_{k-1}},$$

el k -ésimo grupo de cohomología de \mathfrak{g} . A partir de esto se definen, para $k = 0, \dots, 6$, el *número de Betti* $b_k = \dim H_k$. Para cada álgebra de Lie dada en Cuadro 1.1, hemos calculado b_0, \dots, b_6 , y están dados en Cuadro 4.1, junto con información sobre los respectivos nilradicales \mathfrak{n} .

- Respecto de las simetrías, para cada ejemplo incluimos en Cuadro 4.1 el subgrupo de automorfismos de φ y el subgrupo de isometrías de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ que son también automorfismos del grupo de Lie (ver Sección 4.4 para mayor detalle).

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	dim \mathfrak{n}	gr. nilp.	$\text{Aut}(\mu) \cap G_2$	$\text{Aut}(\mu) \cap O(7)$
μ_B	1	2	2	2	2	0	6	2-pasos	$S^1 \times S^1$	$\mathbb{Z}_2 \times (S^1 \times S^1)$
μ_{M1}	1	0	0	1	1	0	6	4-pasos	\mathbb{Z}_2	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
μ_{M2}	2	1	0	1	2	1	5	3-pasos	\mathbb{Z}_2	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
μ_{M3}	2	2	2	2	2	1	5	2-pasos	\mathbb{Z}_4	$D_4 \times \mathbb{Z}_2$
μ_J	3	3	1	1	3	3	4	abeliano	$\text{SL}_2(\mathbb{Z}_3)$	$S_4 \times \mathbb{Z}_2^4$
μ_{rt}	1	2	2	2	2	0	6	2-pasos	$S^1 \times S^1$	$S^1 \times S^1$

Cuadro 4.1: Números de Betti, nilradical \mathfrak{n} y simetrías.

Capítulo 5

G_2 -geometría en una familia de grupos de Lie

A lo largo del trabajo, muchos de los ejemplos de G_2 -estructuras invariantes a izquierda en grupos de Lie, han estado determinados por una 3-forma fija φ en un álgebra de Lie con corchete dado por una matriz real 2×2 y tres matrices reales 4×4 que cumplen cierta condición implicada por Jacobi. Este formato está presente en numerosos ejemplos de G_2 -estructuras que satisfacen diversas propiedades. Por tal motivo, dedicamos este capítulo para dejar plasmadas varias fórmulas que creemos pueden ser útiles, como ser por ejemplo el laplaciano de Hodge y las formas de torsión de φ .

Al final del capítulo aplicamos dichas fórmulas para obtener una nueva familia monoparamétrica de G_2 -estructuras cerradas que son solitones de Laplace de expansión, estables o de contracción, dependiendo del valor del parámetro. Comparamos la familia obtenida de solitones de contracción con la dada por Lauret y vemos que resultan no equivalentes, siendo ambos los únicos ejemplos de soluciones al flujo laplaciano con singularidad en tiempo finito.

5.1. Preliminares

Dada \mathfrak{g} álgebra de Lie de dimensión 7 con base $\{e_1, \dots, e_7\}$, denotamos por \mathfrak{g}_1 al subespacio $\text{span}\{e_3, e_4, e_5, e_6\}$. Como siempre, fijamos φ la G_2 -estructura definida como en (2.1):

$$\varphi = e^{127} + e^{347} + e^{567} + e^{135} - e^{146} - e^{236} - e^{245},$$

donde $\{e_1, \dots, e_7\}$ resulta una base ortonormal orientada respecto del producto interno definido por φ .

De manera análoga a como hicimos en el Capítulo 3, tenemos una base

de $\Lambda^2 \mathfrak{g}_1^*$ dada por

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_7 &:= e^{34} - e^{56}, & \bar{\omega}_1 &= e^{35} + e^{46}, & \bar{\omega}_2 &:= -e^{36} + e^{45}, \\ \omega_7 &:= e^{34} + e^{56}, & \omega_1 &:= e^{35} - e^{46}, & \omega_2 &:= -e^{36} - e^{45}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Es fácil ver que $\{\bar{\omega}_7, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \omega_7, \omega_1, \omega_2\}$ es una base ortogonal de $\Lambda^2 \mathfrak{g}_1^*$, donde cada elemento tiene norma igual a 2. Más aún, el operador estrella de Hodge en \mathfrak{g}_1 , $*_{\mathfrak{g}_1} : \Lambda^2 \mathfrak{g}_1^* \rightarrow \Lambda^2 \mathfrak{g}_1^*$, actúa de la siguiente manera:

$$*_{\mathfrak{g}_1} \bar{\omega}_i = -\bar{\omega}_i, \quad *_{\mathfrak{g}_1} \omega_i = \omega_i, \quad i = 1, 2, 7,$$

por lo que su matriz en dicha base resulta igual a $\text{Diag}(-1, -1, -1, 1, 1, 1)$.

Análogamente a lo que obtuvimos en Lema 2.1.1 (vi), es fácil ver que

$$*_{\mathfrak{g}_1} \theta(M)\alpha = -\theta(M^t) *_{\mathfrak{g}_1} \alpha - \text{tr } M *_{\mathfrak{g}_1} \alpha, \quad \forall M \in \mathfrak{gl}_4(\mathbb{R}). \quad (5.2)$$

Luego, podemos generalizar el resultado obtenido en (4.9) para toda $M \in \mathfrak{gl}_4(\mathbb{R})$ de la siguiente manera:

$$\theta(M) = \left[\begin{array}{c|c} M_1 - \frac{\text{tr } M}{2} \text{id} & M_2 \\ \hline M_2^t & M_4 - \frac{\text{tr } M}{2} \text{id} \end{array} \right], \quad M_1^t = -M_1, \quad M_4^t = -M_4,$$

para $M_1, M_2, M_4 \in \mathfrak{gl}_3(\mathbb{R})$. Notar que para $\text{tr } M = 0$, θ define el isomorfismo clásico entre $\mathfrak{sl}_4(\mathbb{R})$ y $\mathfrak{so}(3, 3)$.

Observación 5.1.1. $\text{tr } \theta(M) = -3 \text{tr } M$, para toda $M \in \mathfrak{gl}_4(\mathbb{R})$.

Volviendo al álgebra de Lie 7-dimensional \mathfrak{g} , sabemos que la derivada exterior y el operador estrella de Hodge llevan k -formas en $k+1$ y $7-k$ formas respectivamente, es decir

$$d_k : \Lambda^k \mathfrak{g}^* \rightarrow \Lambda^{k+1} \mathfrak{g}^*, \quad * : \Lambda^k \mathfrak{g}^* \rightarrow \Lambda^{7-k} \mathfrak{g}^*.$$

Se define la *codiferencial* de d como sigue:

$$\delta_k : \Lambda^{k+1} \mathfrak{g}^* \rightarrow \Lambda^k \mathfrak{g}^*, \quad \delta_k := (-1)^{k+1} * d_{6-k} *.$$

Definición 5.1.2. Dada \mathfrak{g} álgebra de Lie de dimensión 7, el *operador laplaciano de Hodge* en k -formas se define como:

$$\Delta_k : \Lambda^k \mathfrak{g}^* \rightarrow \Lambda^k \mathfrak{g}^*, \quad \Delta_k := d_{k-1} \delta_{k-1} + \delta_k d_k.$$

Reemplazando por el valor de la codiferencial obtenemos la siguiente fórmula para el laplaciano en un álgebra de Lie de dimensión 7:

$$\Delta \alpha = (-1)^k (d * d * - * d * d) \alpha, \quad \forall \alpha \in \Lambda^k \mathfrak{g}^*,$$

donde se sobreentienden los subíndices de Δ y d . En particular, para la 3-forma φ vale que

$$\Delta\varphi = -d*d*\varphi + *d*d\varphi, \quad \Delta*\varphi = d*d\varphi - *d*d*\varphi.$$

Por otro lado, Bryant prueba en [B, Proposition 1] que podemos escribir a $d\varphi$ y $d*\varphi$ de acuerdo a la descomposición de $\Lambda^3\mathfrak{g}^*$ y $\Lambda^4\mathfrak{g}^*$ dada en Sección 2.2 de la siguiente manera:

$$d\varphi = \tau_0*\varphi + 3\tau_1\wedge\varphi + *\tau_3, \quad d*\varphi = 4\tau_1\wedge*\varphi + \tau_2\wedge\varphi,$$

donde $\tau_0 \in \mathbb{R}$, $\tau_1 \in \Lambda^1\mathfrak{g}^*$, $\tau_2 \in \Lambda_{14}^2\mathfrak{g}^*$ y $\tau_3 \in \Lambda_{27}^3\mathfrak{g}^*$ son las *formas de torsión* de φ . Usando las definiciones de $\Lambda_{14}^2\mathfrak{g}^*$ y $\Lambda_{27}^3\mathfrak{g}^*$ y teniendo en cuenta la siguiente identidad para G_2 -estructuras probada por Bryant en [B, (3.8)]:

$$*\varphi\wedge*d*\varphi + *d\varphi\wedge\varphi = 0,$$

resulta que

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \frac{1}{7}*(d\varphi\wedge\varphi), & \tau_2 &= -*d*\varphi + 4*(\tau_1\wedge*\varphi), \\ \tau_1 &= -\frac{1}{12}*(d\varphi\wedge\varphi), & \tau_3 &= *d\varphi - \tau_0\varphi - 3*(\tau_1\wedge\varphi). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Supongamos además que \mathfrak{g} es un álgebra de Lie soluble, a la cual descomponemos como $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ donde \mathfrak{n} es el nilradical de \mathfrak{g} . En [L1, (25)], Lauret da la siguiente fórmula para calcular el operador de Ricci de $(g, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ con \mathfrak{a} ortogonal a \mathfrak{n} ,

$$\begin{aligned} \langle \text{Ric } A, A \rangle &= -\frac{1}{2}\Sigma\|[A, A_i]\|^2 - \text{tr } S(\text{ad } A|_{\mathfrak{n}})^2, \\ \langle \text{Ric } A, X \rangle &= -\frac{1}{2}\Sigma\langle [A, A_i], [X, A_i] \rangle - \frac{1}{2}\text{tr}(\text{ad } A|_{\mathfrak{n}})^t \text{ad } X|_{\mathfrak{n}} \\ &\quad - \frac{1}{2}\langle [H, A], X \rangle, \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \langle \text{Ric } X, X \rangle &= \frac{1}{4}\Sigma\langle [A_i, A_j], X \rangle^2 + \frac{1}{2}\Sigma\langle [\text{ad } A_i|_{\mathfrak{n}}, (\text{ad } A_i|_{\mathfrak{n}})^t](X), X \rangle \\ &\quad - \frac{1}{2}\Sigma\langle [X, X_i], X_j \rangle^2 + \frac{1}{4}\Sigma\langle [X_i, X_j], X \rangle^2 - \langle [H, X], X \rangle, \end{aligned}$$

donde $\{X_i\}$ es base ortonormal de \mathfrak{n} , $\{A_i\}$ es base ortonormal de \mathfrak{a} , $A \in \mathfrak{a}$, $X \in \mathfrak{n}$. El operador S en el resultado anterior se define como $S(M) = \frac{M+M^t}{2}$, es decir, tomar la parte simétrica de M .

El operador de Ricci es una herramienta útil para probar que dos G_2 -estructuras son no equivalentes, puesto que dos estructuras equivalentes deben tener operadores de Ricci conjugados y en particular deben coincidir sus autovalores (contando multiplicidad).

5.2. Descripción de la familia

Como bien hace referencia el título del capítulo, estudiamos algunas nociones de G_2 -estructuras en una familia especial de grupos de Lie, a la cual describimos en esta sección.

Sea \mathfrak{g} álgebra de Lie de dimensión 7 con base $\{e_1, \dots, e_7\}$ y corchete de Lie μ determinado por

$$A_1 = \text{ad } e_7|_{\mathfrak{h}_0} = \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix}, \quad A = \text{ad } e_7|_{\mathfrak{g}_1}, \quad B = \text{ad } e_1|_{\mathfrak{g}_1}, \quad C = \text{ad } e_2|_{\mathfrak{g}_1},$$

donde $\mathfrak{h}_0 = \text{span}\{e_1, e_2\}$ es abeliano, $\mathfrak{g}_0 = \text{span}\{e_7, e_1, e_2\}$ es subálgebra, $\mathfrak{g}_1 = \text{span}\{e_3, e_4, e_5, e_6\}$ es ideal abeliano y $\mathfrak{h} = \text{span}\{e_1, \dots, e_6\}$ es unimodular, es decir $\text{tr } B = \text{tr } C = 0$. Pedimos además que

$$[A, B] = xB + yC, \quad [A, C] = zB + wC, \quad [B, C] = 0,$$

para que se satisfaga la condición de Jacobi. Denotamos por $G_{A_1, A, B, C}$ al grupo de Lie simplemente conexo con álgebra de Lie \mathfrak{g} y llamamos φ a la G_2 -estructura invariante a izquierda en $G_{A_1, A, B, C}$ definida como en (2.1). En particular $G_{A_1, A, B, C}$ es soluble y el nilradical de \mathfrak{g} tiene dimensión mayor o igual a 4.

En Sección 5.1 definimos algunos operadores necesarios para estudiar ciertos flujos de G_2 -estructuras, como por ejemplo el flujo laplaciano y el co-flujo laplaciano. En particular, para estudiar dichos flujos en esta generosa familia de G_2 -estructuras $(G_{A_1, A, B, C}, \varphi)$, es conveniente tener algunas fórmulas, como por ejemplo $*d*d\varphi$ y $d*d*\varphi$, en términos de A_1, A, B y C (ver Sección 5.3).

Si bien este enfoque parece restrictivo, debemos notar que todos los ejemplos de G_2 -estructuras ERP dados en Capítulo 3 están presentados en este formato. Más aún, probamos que todas las G_2 -estructuras invariantes a izquierda ERP son equivariantemente equivalentes a una $(G_{A_1, A, B, C}, \varphi)$.

5.3. Fórmulas para la torsión y el laplaciano

Sea $(G_{A_1, A, B, C}, \varphi)$ la G_2 -estructura invariante a izquierda definida en la sección anterior, queremos dejar expresadas en términos de A_1, A, B y C algunas fórmulas necesarias para calcular las formas de torsión y el laplaciano de φ .

Para ello, recordemos la definición de $\theta(M) : \Lambda^1 \mathfrak{g}_1^* \rightarrow \Lambda^1 \mathfrak{g}_1^*$ para $M \in \mathfrak{gl}_4(\mathbb{R})$:

$$\theta(M)e^{i+2} = - \sum_{j=1}^4 M_{ij} e^{j+2}, \quad i \in \{1, \dots, 4\}. \quad (5.5)$$

La siguiente proposición resume las fórmulas para calcular la derivada exterior de toda k -forma en \mathfrak{g} .

Proposición 5.3.1. Dadas $\alpha \in \Lambda^i \mathfrak{g}_1^*$ y $\beta \in \Lambda^j \mathfrak{g}_0^*$ tenemos que

- (i) $d\alpha = (-1)^i (\theta(A)\alpha \wedge e^7 + \theta(B)\alpha \wedge e^1 + \theta(C)\alpha \wedge e^2)$.
- (ii) $d e^1 = -\theta(A_1)e^1 \wedge e^7 = (x e^1 + z e^2) \wedge e^7$.
- (iii) $d e^2 = -\theta(A_1)e^2 \wedge e^7 = (y e^1 + w e^2) \wedge e^7$.
- (iv) $d e^7 = 0$.
- (v) $*(\alpha \wedge \beta) = (-1)^{ij} *_{\mathfrak{g}_1} \alpha \wedge *_{\mathfrak{g}_0} \beta$.

Demostración. Para ver (i), basta probarlo para 1-formas. De la definición del corchete, si $i = 1, 2, 3, 4$, tenemos que

$$[e_7, e_{i+2}] = A e_i = \sum_{j=1}^4 A_{ji} e^{j+2} \Rightarrow \langle d e^j, e^{7(i+2)} \rangle = -A_{ji}.$$

Análogamente para B y C . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} d e^{j+2} &= \sum_{i=1}^4 \left(A_{ji} e^{(i+2)7} + B_{ji} e^{(i+2)1} + C_{ji} e^{(i+2)2} \right), \\ &= -\theta(A) e^j \wedge e^7 - \theta(B) e^j \wedge e^1 - \theta(C) e^j \wedge e^2, \end{aligned}$$

para todo $j = 1, 2, 3, 4$. Es decir vale (i) para 1-formas. Items (ii), (iii) salen de la misma manera, y (iv) se debe a que \mathfrak{h} es ideal.

Para probar (v) notemos que $|\alpha \wedge \beta|^2 = |\alpha|^2 |\beta|^2$, luego

$$\begin{aligned} (\alpha \wedge \beta) \wedge (*_{\mathfrak{g}_1} \alpha \wedge *_{\mathfrak{g}_0} \beta) &= (-1)^{j(4-i)} \alpha \wedge *_{\mathfrak{g}_1} \beta \wedge \alpha \wedge *_{\mathfrak{g}_0} \beta \\ &= (-1)^{ij} |\alpha|^2 e^{3456} \wedge |\beta|^2 e^{127} = (-1)^{ij} |\alpha|^2 |\beta|^2 \text{ vol}, \end{aligned}$$

por lo que vale (v). □

En el siguiente teorema exhibimos fórmulas para $d\varphi$, $*d\varphi$, $d*d\varphi$ y $*d*d\varphi$ en términos de A_1 , A , B y C . Recordamos de (5.1) la definición de ω_i para $i = 1, 2, 7$.

Teorema 5.3.2. Dada \mathfrak{g} álgebra de Lie de dimensión 7 con corchete de Lie definido por $\mu = (A_1, A, B, C)$ como en Sección 5.2 y φ la G_2 -estructura definida en (2.1), se tiene que

- (i) $\varphi = e^{127} + \omega_7 \wedge e^7 + \omega_1 \wedge e^1 + \omega_2 \wedge e^2$,
- (ii) $d\varphi = (\theta(B)\omega_2 - \theta(C)\omega_1) \wedge e^{12} + (\theta(B)\omega_7 - \theta(A)\omega_1 + x\omega_1 + y\omega_2) \wedge e^{17} \\ + (\theta(C)\omega_7 - \theta(A)\omega_2 + z\omega_1 + w\omega_2) \wedge e^{27}$,

$$\begin{aligned}
\text{(iii)} \quad *d\varphi &= (-\theta(B^t)\omega_2 + \theta(C^t)\omega_1) \wedge e^7 \\
&\quad + (\theta(B^t)\omega_7 - \theta(A^t)\omega_1 - (\text{tr } A)\omega_1 - x\omega_1 - y\omega_2) \wedge e^2 \\
&\quad + (-\theta(C^t)\omega_7 + \theta(A^t)\omega_2 + (\text{tr } A)\omega_2 + z\omega_1 + w\omega_2) \wedge e^1, \\
\text{(iv)} \quad d * d\varphi &= \theta(B)(-\theta(B^t)\omega_2 + \theta(C^t)\omega_1) \wedge e^{17} \\
&\quad + \theta(C)(-\theta(B^t)\omega_2 + \theta(C^t)\omega_1) \wedge e^{27} \\
&\quad + \theta(A)(-\theta(B^t)\omega_7 + \theta(A^t)\omega_1 + (\text{tr } A)\omega_1 + x\omega_1 + y\omega_2) \wedge e^{27} \\
&\quad + \theta(B)(\theta(B^t)\omega_7 - \theta(A^t)\omega_1 - (\text{tr } A)\omega_1 - x\omega_1 - y\omega_2) \wedge e^{12} \\
&\quad + \theta(A)(\theta(C^t)\omega_7 - \theta(A^t)\omega_2 - (\text{tr } A)\omega_2 - z\omega_1 - w\omega_2) \wedge e^{17} \\
&\quad + \theta(C)(\theta(C^t)\omega_7 - \theta(A^t)\omega_2 - (\text{tr } A)\omega_2 - z\omega_1 - w\omega_2) \wedge e^{12}, \\
\text{(v)} \quad *d * d\varphi &= \theta(B^t)(\theta(B)\omega_2 - \theta(C)\omega_1) \wedge e^2 + \theta(C^t)(\theta(C)\omega_1 - \theta(B)\omega_2) \wedge e^1 \\
&\quad + \theta(A^t)(-\theta(B)\omega_7 + \theta(A)\omega_1 - x\omega_1 - y\omega_2) \wedge e^1 \\
&\quad + (\text{tr } A)(-\theta(B)\omega_7 + \theta(A)\omega_1 - x\omega_1 - y\omega_2) \wedge e^1 \\
&\quad + \theta(A^t)(-\theta(C)\omega_7 + \theta(A)\omega_2 - z\omega_1 - w\omega_2) \wedge e^2 \\
&\quad + (\text{tr } A)(-\theta(C)\omega_7 + \theta(A)\omega_2 - z\omega_1 - w\omega_2) \wedge e^2 \\
&\quad + \theta(B^t)(\theta(B)\omega_7 - \theta(A)\omega_1 + x\omega_1 + y\omega_2) \wedge e^7 \\
&\quad + \theta(C^t)(\theta(C)\omega_7 - \theta(A)\omega_2 + z\omega_1 + w\omega_2) \wedge e^7.
\end{aligned}$$

Demostración. El apartado (i) sigue directamente de las definiciones de φ y ω_i 's. Para ver (ii) aplicamos las fórmulas de Proposición 5.3.1.

$$\begin{aligned}
d\varphi &= d e^{12} \wedge e^7 + d\omega_7 \wedge e^7 + d\omega_1 \wedge e^1 + \omega_1 \wedge d e^1 + d\omega_2 \wedge e^2 + \omega_2 \wedge d e^2 \\
&= (\theta(B)\omega_7 \wedge e^1 + \theta(C)\omega_7 \wedge e^2) \wedge e^7 \\
&\quad + (\theta(A)\omega_1 \wedge e^7 + \theta(C)\omega_1 \wedge e^2) \wedge e^1 + \omega_1 \wedge (x e^1 + z e^2) \wedge e^7 \\
&\quad + (\theta(A)\omega_2 \wedge e^7 + \theta(B)\omega_2 \wedge e^1) \wedge e^2 + \omega_2 \wedge (y e^1 + w e^2) \wedge e^7 \\
&= \theta(B)\omega_7 \wedge e^{17} + \theta(C)\omega_7 \wedge e^{27} + \\
&\quad - \theta(A)\omega_1 \wedge e^{17} - \theta(C)\omega_1 \wedge e^{12} + x\omega_1 \wedge e^{17} + z\omega_1 \wedge e^{27} \\
&\quad - \theta(A)\omega_2 \wedge e^{27} + \theta(B)\omega_2 \wedge e^{12} + y\omega_2 \wedge e^{17} + w\omega_2 \wedge e^{27},
\end{aligned}$$

sacando factor común obtenemos la fórmula deseada para $d\varphi$. Para probar (iii) aplicamos Proposición 5.3.1 (v) a la fórmula obtenida anteriormente,

$$\begin{aligned}
*d\varphi &= *_{\mathfrak{g}_1} (\theta(B)\omega_2 - \theta(C)\omega_1) \wedge *_{\mathfrak{g}_0} e^{12} \\
&\quad + *_{\mathfrak{g}_1} (\theta(B)\omega_7 - \theta(A)\omega_1 + x\omega_1 + y\omega_2) \wedge *_{\mathfrak{g}_0} e^{17} \\
&\quad + *_{\mathfrak{g}_1} (\theta(C)\omega_7 - \theta(A)\omega_2 + z\omega_1 + w\omega_2) \wedge *_{\mathfrak{g}_0} e^{27} \\
&= (-\theta(B^t)\omega_2 + \theta(C^t)\omega_1) \wedge e^7 \\
&\quad - (-\theta(B^t)\omega_7 + \theta(A^t)\omega_1 + \text{tr } A \omega_1 + x\omega_1 + y\omega_2) \wedge e^2 \\
&\quad + (-\theta(C^t)\omega_7 + \theta(A^t)\omega_2 + \text{tr } A \omega_2 + z\omega_1 + w\omega_2) \wedge e^1.
\end{aligned}$$

La última igualdad sale por (5.2). Los apartados (iv) y (v) salen de la misma manera aplicando Proposición 5.3.1. \square

Resumimos en el siguiente teorema las fórmulas de $*\varphi$, $d * \varphi$, $*d * \varphi$ y $d * d * \varphi$

Teorema 5.3.3. *Dada \mathfrak{g} álgebra de Lie de dimensión 7 con corchete de Lie definido por $\mu = (A_1, A, B, C)$ como en Sección 5.2 y φ la G_2 -estructura definida en (2.1), se tiene que*

$$(i) \quad *\varphi = e^{3456} + \omega_7 \wedge e^{12} + \omega_1 \wedge e^{27} - \omega_2 \wedge e^{17},$$

$$(ii) \quad d * \varphi = -\text{tr } A e^{34567} + (\theta(A)\omega_7 - \text{tr } A_1 \omega_7 + \theta(B)\omega_1 + \theta(C)\omega_2) \wedge e^{127},$$

$$(iii) \quad *d * \varphi = -\text{tr } A e^{12} + *_{\mathfrak{g}_1} (\theta(A)\omega_7 - \text{tr } A_1 \omega_7 + \theta(B)\omega_1 + \theta(C)\omega_2),$$

$$(iv) \quad d * d * \varphi = \text{tr } A_1 \text{tr } A e^{127}$$

$$\begin{aligned}
&-\theta(A)((\text{tr } A_1 + \text{tr } A)\omega_7 + \theta(A^t)\omega_7 + \theta(B^t)\omega_1 + \theta(C^t)\omega_2) \wedge e^7 \\
&-\theta(B)((\text{tr } A_1 + \text{tr } A)\omega_7 + \theta(A^t)\omega_7 + \theta(B^t)\omega_1 + \theta(C^t)\omega_2) \wedge e^1 \\
&-\theta(C)((\text{tr } A_1 + \text{tr } A)\omega_7 + \theta(A^t)\omega_7 + \theta(B^t)\omega_1 + \theta(C^t)\omega_2) \wedge e^2.
\end{aligned}$$

La prueba es análoga a la de Teorema 5.3.2, sale directamente aplicando las fórmulas de Proposición 5.3.3.

Los siguientes corolarios muestran condiciones necesarias y suficientes para que φ sea cerrada o cocerrada. Dichas fórmulas se aplican luego para calcular, en cada caso, las formas de torsión dadas en (5.3) en función de A_1, A, B y C .

Corolario 5.3.4. *φ es cerrada si y solo si*

$$\begin{aligned}
\theta(A)\omega_1 &= \theta(B)\omega_7 + x\omega_1 + y\omega_2, \\
\theta(A)\omega_2 &= \theta(C)\omega_7 + z\omega_1 + w\omega_2, \\
\theta(B)\omega_2 &= \theta(C)\omega_1.
\end{aligned}$$

En tal caso, la única forma de torsión que sobrevive es $\tau_2 = - * d * \varphi$ y el laplaciano resulta $\Delta\varphi = d\tau_2 = -d * d * \varphi$. Ambas fórmulas se obtienen de Teorema 5.3.3 (iii),(iv).

Corolario 5.3.5. φ es cocerrada si y solo si

$$\text{tr } A = 0, \quad \theta(A)\omega_7 + \theta(B)\omega_1 + \theta(C)\omega_2 = (\text{tr } A_1)\omega_7.$$

Cuando esto sucede, las formas de torsión que sobreviven son $\tau_0 = \frac{1}{7} * (*d\varphi \wedge \varphi)$ y $\tau_3 = *d\varphi - \tau_0\varphi$ y el laplaciano de Hodge queda $\Delta\varphi = *d * d\varphi = *d\tau_3 + \tau_0 * d\varphi$, cuya fórmula se puede ver en Teorema 5.3.2 (v).

En el caso general, más allá de lo cerrado o cocerrado, las fórmulas de torsión también se pueden calcular en función de A_1 , A , B y C . En la siguiente proposición resumimos los resultados obtenidos.

Proposición 5.3.6. Dada \mathfrak{g} álgebra de Lie de dimensión 7 con corchete de Lie definido por $\mu = (A_1, A, B, C)$ como en Sección 5.2 y φ la G_2 -estructura definida en (2.1), entonces

- (i) $\tau_0 = \frac{2}{7} (a_{46} - a_{64} + a_{53} - a_{35} + b_{35} + b_{64} - b_{53} - b_{46} + c_{54} + c_{63} - c_{45} - c_{36} + z - y)$,
- (ii) $\tau_1 = -\frac{1}{12}(a_{64} + a_{35} - a_{46} - a_{53} + b_{43} + b_{65} - b_{34} - b_{56}) \wedge e^2 - \frac{1}{12}(a_{36} + a_{45} - a_{63} - a_{54} + c_{56} + c_{34} - c_{65} - c_{43}) \wedge e^1 - \frac{1}{12}(b_{63} + b_{54} - b_{36} - b_{45} + c_{46} + c_{53} - c_{64} - c_{35} + 2(\text{tr } A_1 + \text{tr } A)) \wedge e^7$,
- (iii) $\tau_2 = \frac{1}{3}(\text{tr } A - 2 \text{tr } A_1 + b_{45} + b_{36} - b_{54} - b_{63} + c_{35} + c_{64} - c_{53} - c_{46})e^{12} + \frac{1}{3}(a_{64} + a_{35} - a_{46} - a_{53} + b_{65} + b_{43} - b_{56} - b_{34})e^{17} + \frac{1}{3}(a_{54} + a_{63} - a_{45} - a_{36} + c_{65} + c_{43} - c_{56} - c_{34})e^{27} + \frac{1}{3}(\text{tr } A_1 - 2a_{33} - 2a_{44} + a_{55} + a_{66})e^{34} + \frac{1}{3}(2c_{46} - 2c_{35} - 2b_{45} - 2b_{36} - c_{53} + c_{64} - b_{63} - b_{54})e^{34} + \frac{1}{3}(-2a_{54} + 2a_{36} + 2c_{56} + 2c_{34} + a_{63} - a_{45} + c_{65} + c_{43} - 3b_{55} - 3b_{33})e^{35} + \frac{1}{3}(-2a_{64} - 2a_{35} - 2b_{65} + 2b_{34} - a_{46} - a_{53} - b_{56} + b_{43} + 3c_{66} + 3c_{33})e^{36} + \frac{1}{3}(a_{64} + a_{35} + b_{65} - b_{34} + 2a_{46} + 2a_{53} + 2b_{56} - 2b_{43} + 3c_{55} + 3c_{44})e^{45} + \frac{1}{3}(-a_{54} + a_{36} + c_{56} + c_{34} + 2a_{63} - 2a_{45} + 2c_{65} + 2c_{43} + 3b_{66} + 3b_{44})e^{46} + \frac{1}{3}(\text{tr } A_1 + a_{33} + a_{44} - 2a_{55} - 2a_{66})e^{56}$

$$+\frac{1}{3}(-c_{46} + c_{35} + b_{45} + b_{36} + 2c_{53} - 2c_{64} + 2b_{63} + 2b_{54})e^{56},$$

$$\begin{aligned} \text{(iv) } \tau_3 &= \tau_0 e^{127} + (-\theta(B^t)\omega_2 + \theta(C^t)\omega_1 - \tau_0\omega_7 - 3\lambda_1\omega_2 + 3\lambda_2\omega_1) \wedge e^7 \\ &+ (\theta(B^t)\omega_7 - \theta(A^t)\omega_1 - (\text{tr } A + x + 3\lambda_7)\omega_1 + (-y - \tau_0)\omega_2 + 3\lambda_1\omega_7) \wedge e^2 \\ &+ (-\theta(C^t)\omega_7 + \theta(A^t)\omega_2 + (z - \tau_0)\omega_1 + (\text{tr } A + w + 3\lambda_7)\omega_2 - 3\lambda_2\omega_7) \wedge e^1, \end{aligned}$$

donde $\lambda_1 = \langle \tau_1, e^1 \rangle$, $\lambda_2 = \langle \tau_1, e^2 \rangle$ y $\lambda_7 = \langle \tau_1, e^7 \rangle$.

Para la prueba usamos el siguiente resultado, el cual sigue de (5.5).

Observación 5.3.7. Dada $M \in \mathfrak{gl}_4(\mathbb{R})$, con $M = [m_{ij}]$ para $i, j \in \{3, 4, 5, 6\}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \theta(M)\omega_7 &= -(m_{33} + m_{44})e^{34} + (m_{63} - m_{45})e^{35} - (m_{46} + m_{53})e^{36} \\ &+ (m_{64} + m_{35})e^{45} + (m_{36} - m_{54})e^{46} - (m_{55} + m_{66})e^{56}, \\ \theta(M)\omega_1 &= -(m_{54} + m_{63})e^{34} - (m_{33} - m_{55})e^{35} + (m_{43} - m_{56})e^{36} \\ &+ (m_{65} - m_{34})e^{45} + (m_{44} + m_{66})e^{46} + (m_{45} + m_{36})e^{56}, \\ \theta(M)\omega_2 &= (m_{64} - m_{53})e^{34} + (m_{43} + m_{65})e^{35} + (m_{33} + m_{66})e^{36} \\ &+ (m_{44} + m_{55})e^{45} + (m_{56} + m_{54})e^{46} + (m_{35} - m_{46})e^{56}. \end{aligned}$$

Demostración. Por Teorema 5.3.2 (i) y (ii), tenemos que

$$\begin{aligned} d\varphi \wedge \varphi &= ((\theta(B)\omega_2 - \theta(C)\omega_1) \wedge \omega_7 \\ &- (\theta(B)\omega_7 - \theta(A)\omega_1 + x\omega_1 + y\omega_2) \wedge \omega_2 \\ &+ (\theta(C)\omega_7 - \theta(A)\omega_2 + z\omega_1 + w\omega_2) \wedge \omega_1) \wedge e^{127} \\ &= 2(\theta(A)\omega_1 \wedge \omega_2 + \theta(B)\omega_2 \wedge \omega_7 + \theta(C)\omega_7 \wedge \omega_2 + z - y) \wedge e^{127}, \end{aligned}$$

luego sigue de (5.3) que

$$\tau_0 = \frac{1}{7} * (d\varphi \wedge \varphi) = \frac{2}{7} *_{\mathfrak{g}_1} (\theta(A)\omega_1 \wedge \omega_2 + \theta(B)\omega_2 \wedge \omega_7 + \theta(C)\omega_7 \wedge \omega_2 + z - y),$$

y la fórmula requerida para τ_0 sigue aplicando Observación 5.3.7.

Para τ_1 , notemos primero que si $\alpha \in \Lambda^2 \mathfrak{g}_1^*$ es tal que $*_{\mathfrak{g}_1} \alpha = \alpha$, entonces $*_{\mathfrak{g}_1} \beta \wedge \alpha = \beta \wedge \alpha$, para toda $\beta \in \Lambda^2 \mathfrak{g}_1^*$. En efecto,

$$*_{\mathfrak{g}_1} \beta \wedge \alpha = \langle \beta, \alpha \rangle = \beta \wedge * \alpha = \beta \wedge \alpha.$$

Por Teorema 5.3.2, tenemos que

$$\begin{aligned}
*d\varphi \wedge \varphi &= - *_{\mathfrak{g}_1}(\theta(B)\omega_2 - \theta(C)\omega_1) \wedge \omega_1 \wedge e^{17} \\
&\quad - *_{\mathfrak{g}_1}(\theta(B)\omega_2 - \theta(C)\omega_1) \wedge \omega_2 \wedge e^{27} \\
&\quad - *_{\mathfrak{g}_1}(\theta(B)\omega_7 - \theta(A)\omega_1 + x\omega_1 + y\omega_2) \wedge \omega_7 \wedge e^{27} \\
&\quad + *_{\mathfrak{g}_1}(\theta(B)\omega_7 - \theta(A)\omega_1 + x\omega_1 + y\omega_2) \wedge \omega_1 \wedge e^{12} \\
&\quad + *_{\mathfrak{g}_1}(\theta(C)\omega_7 - \theta(A)\omega_2 + z\omega_1 + w\omega_2) \wedge \omega_7 \wedge e^{17} \\
&\quad + *_{\mathfrak{g}_1}(\theta(C)\omega_7 - \theta(A)\omega_2 + z\omega_1 + w\omega_2) \wedge \omega_2 \wedge e^{12} \\
&= (\theta(B)\omega_1 + \theta(A)\omega_7) \wedge \omega_2 \wedge e^{17} - (\theta(C)\omega_2 + \theta(A)\omega_7) \wedge \omega_1 \wedge e^{27} \\
&\quad - (\theta(B)\omega_1 + \theta(C)\omega_2) \wedge \omega_7 \wedge e^{12} + 2(\operatorname{tr} A + \operatorname{tr} A_1)e^{123456}.
\end{aligned}$$

Luego, de (5.3) tenemos que

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= - \frac{1}{12} * (*d\varphi \wedge \varphi) \\
&= - \langle \theta(B)\omega_1 + \theta(A)\omega_7, \omega_2 \rangle e^2 - \langle \theta(C)\omega_2 + \theta(A)\omega_7, \omega_1 \rangle e^1 \\
&\quad - \langle \theta(B)\omega_1 + \theta(C)\omega_2, \omega_7 \rangle e^7 + 2(\operatorname{tr} A + \operatorname{tr} A_1)e^7,
\end{aligned}$$

y usando el resultado dado en Observación 5.3.7 obtenemos la igualdad deseada para τ_1 . Para ahorrar notación, llamamos λ_1 , λ_2 y λ_7 a los coeficientes de τ_1 tales que $\tau_1 = \lambda_1 e^1 + \lambda_2 e^2 + \lambda_7 e^7$, y obtenemos que

$$* (\tau_1 \wedge * \varphi) = \lambda_1 e^{27} - \lambda_2 e^{17} + \lambda_7 e^{12} + \lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2 + \lambda_7 \omega_7,$$

por lo que junto con Teorema 5.3.3 (iii) implican que

$$\begin{aligned}
\tau_2 &= - *d * \varphi + 4 * (\tau_1 \wedge * \varphi), \\
&= \operatorname{tr} A e^{12} + (\operatorname{tr} A_1 + \operatorname{tr} A)\omega_7 + \theta(A^t)\omega_7 + \theta(B^t)\omega_1 + \theta(C^t)\omega_2 \\
&\quad + 4(\lambda_1 e^{27} - \lambda_2 e^{17} + \lambda_7 e^{12} + \lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2 + \lambda_7 \omega_7) \\
&= (\operatorname{tr} A + 4\lambda_7)e^{12} + 4\lambda_1 e^{27} - 4\lambda_2 e^{17} + (\operatorname{tr} A_1 + \operatorname{tr} A + 4\lambda_7)\omega_7 \\
&\quad + 4\lambda_1 \omega_1 + 4\lambda_2 \omega_2 + \theta(A^t)\omega_7 + \theta(B^t)\omega_1 + \theta(C^t)\omega_2.
\end{aligned}$$

La fórmula esperada en (iii) sigue de aplicar Observación 5.3.7 a la igualdad anterior. Para concluir calculamos

$$* (\tau_1 \wedge \varphi) = (\lambda_1 \omega_2 - \lambda_2 \omega_1) \wedge e^7 - (\lambda_1 \omega_7 - \lambda_7 \omega_1) \wedge e^2 + (\lambda_2 \omega_7 - \lambda_7 \omega_2) \wedge e^1,$$

y así obtenemos de (5.3) que

$$\begin{aligned}
\tau_3 &= *d\varphi - \tau_0\varphi - 3 * (\tau_1 \wedge \varphi) \\
&= \tau_0 e^{127} + (-\theta(B^t)\omega_2 + \theta(C^t)\omega_1 - \tau_0\omega_7 - 3\lambda_1\omega_2 + 3\lambda_2\omega_1) \wedge e^7 \\
&\quad + (\theta(B^t)\omega_7 - \theta(A^t)\omega_1 - (\operatorname{tr} A + x + 3\lambda_7)\omega_1 + (-y - \tau_0)\omega_2 + 3\lambda_1\omega_7) \wedge e^2 \\
&\quad + (-\theta(C^t)\omega_7 + \theta(A^t)\omega_2 + (z - \tau_0)\omega_1 + (\operatorname{tr} A + w + 3\lambda_7)\omega_2 - 3\lambda_2\omega_7) \wedge e^1,
\end{aligned}$$

que era lo que queríamos probar. \square

Notemos que si aplicamos los resultados dados en Observación 5.3.7 podemos obtener una fórmula precisa para τ_3 en función de los coeficientes de A_1 , A , B y C que definen a la G_2 -estructura (\mathfrak{g}, φ) .

Otro operador que se puede calcular en función de A_1 , A , B y C es el operador de Ricci, el cual resulta útil para probar por ejemplo que dos G_2 -estructuras son no equivalentes. Usando la fórmula dada en (5.4), el operador de Ricci resulta $\text{Ric}_\mu|_{\mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_1} = 0$, $\text{Ric}_\mu|_{\mathfrak{g}_0}$ dado por:

$$\left[\begin{array}{c|cc} -\text{tr}(S_A^2) & -\text{tr}(S_A B) & -\text{tr}(S_A C) \\ \hline -\text{tr}(S_A B) & \begin{bmatrix} \text{tr}(S_B^2) & \text{tr}(S_B C) \\ \text{tr}(S_B C) & \text{tr}(S_C^2) \end{bmatrix} & +\frac{1}{2}[A_1, A_1^t] - (\text{tr } A_1 + \text{tr } A)S_{A_1} \\ -\text{tr}(S_A C) & & \end{array} \right]$$

$$\text{y } \text{Ric}_\mu|_{\mathfrak{g}_1} = \frac{1}{2} ([A, A^t] + [B, B^t] + [C, C^t]) - (\text{tr } A_1 + \text{tr } A)S_A,$$

donde $S_M = S(M)$ denota la parte simétrica de una matriz M , es decir $S_M = \frac{M+M^t}{2}$.

5.4. Solitones de Laplace

Recordemos de Sección 2.6 que dada una G_2 -estructura φ en un álgebra de Lie \mathfrak{g} , decimos que φ es un solitón de Laplace (semi-algebraico) si existen un número real λ y una derivación D de \mathfrak{g} , tales que

$$\Delta\varphi = \lambda\varphi + \mathcal{L}_{X_D}\varphi, \quad (5.6)$$

o análogamente $\Delta\varphi = \lambda\varphi - \theta(D)\varphi$ por Observación 2.6.3. Se dice que (\mathfrak{g}, φ) es un solitón de Laplace de contracción, estable o de expansión dependiendo si λ es menor, igual o mayor a cero respectivamente.

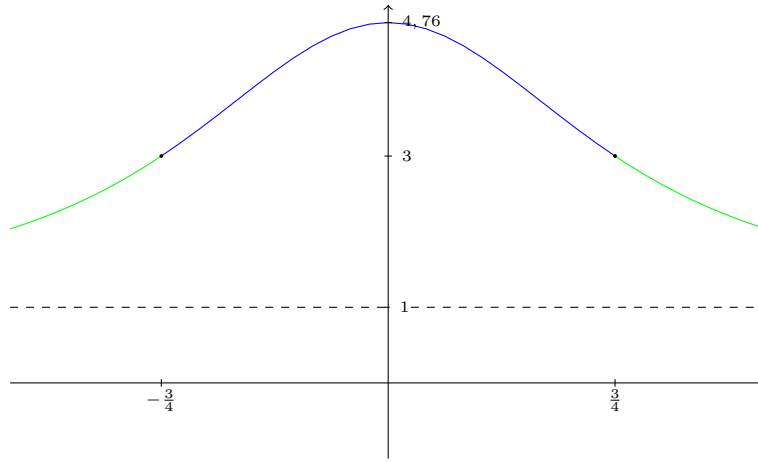
En la actualidad se conocen muchos ejemplos de solitones de Laplace estables y de expansión (ver [FFM, FR1, FR2, Li, L2, L3, L4, N]), pero no ocurre lo mismo con los solitones de contracción. Previo a este trabajo, solo se conocía una familia de ejemplos de solitones de Laplace de contracción dada por Lauret y que reescribimos a continuación.

Ejemplo 5.4.1. [L4, Example 4.10] Consideramos la familia de álgebras de Lie solubles $\{\mathfrak{s}_a : a \in \mathbb{R}\}$ con base $\{e_1, \dots, e_7\}$ y corchete de Lie dado por

$$[e_1, e_3] = -e_6, [e_1, e_4] = -e_5, [e_2, e_3] = -e_5, [e_2, e_4] = e_6, [e_7, e_i] = (A_a)_{ii}e_i,$$

donde $A_a := \frac{1}{4} \text{Diag}(1 + 4a, 1 + 4a, 1 - 4a, 1 - 4a, 2, 2)$.

Es fácil ver, usando las fórmulas dadas en Corolario 5.3.4, que la G_2 -estructura φ definida como en (2.1) es cerrada para todo $a \in \mathbb{R}$. Aplicando

Figura 5.1: Gráfico de la funcional F para $(\mathfrak{s}_a, \varphi)$.

además las fórmulas de Teorema 5.3.2, obtenemos que la 2-forma de torsión y el laplaciano de φ resultan,

$$\begin{aligned} \tau_a &= \frac{1}{2}(3-4a)e^{12} + \frac{1}{2}(3+4a)e^{34} - 3e^{56}, \\ \Delta_a \varphi &= \frac{1}{4}(1+4a)(-3+4a)e^{127} + \frac{1}{4}(-1+4a)(3+4a)e^{347} + 3e^{567} \\ &\quad + 3e^{135} - 3e^{146} - 3e^{236} - 3e^{245}, \end{aligned}$$

y el operador de Ricci:

$$\text{Ric}_a = \frac{1}{4} \text{Diag}(-6-8a, -6-8a, -6+8a, -6+8a, 0, 0, -3-16a^2).$$

Fue probado en [L4, Example 4.10] que $(\mathfrak{s}_a, \varphi)$ es un solitón de Laplace, es decir satisface (5.6) para $\lambda_a = -\frac{9}{2} + 8a^2$ y

$$D_a = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} (-15+8a+16a^2) \text{id}_2 & & \\ & (-15-8a+16a^2) \text{id}_2 & \\ & & (-30+32a^2) \text{id}_2 \\ & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Se tiene entonces que es de contracción ($\lambda < 0$) si $-\frac{3}{4} < a < \frac{3}{4}$, es estable si $a = \pm \frac{3}{4}$ y de expansión en los demás casos. Denotamos por scal_a a la curvatura escalar y calculamos la siguiente funcional:

$$F(a) := \frac{\text{scal}_a^2}{|\text{Ric}_a|^2} = \frac{(27+16a^2)^2}{153+352a^2+256a^4},$$

cuyo gráfico está dado por la Figura 5.1. El color verde indica los puntos en los cuales $(\mathfrak{s}_a, \varphi)$ es un solitón de Laplace de expansión, mientras que los azules indican cuando es de contracción.

El máximo valor de F se da cuando $a = 0$ y en tal caso

$$F(0) = \frac{81}{17} \approx 4,76.$$

Por otro lado, se cumple lo siguiente

$$F(a) = 3 \Leftrightarrow a = \pm \frac{3}{4} \Leftrightarrow (\mathfrak{s}_a, \varphi) \text{ es un solitón de Laplace estable.}$$

Más aún, se tiene que $(\mathfrak{s}_a, \varphi)$ es un solitón de Ricci si y solo si $a = \pm \frac{3}{4}$. En tal caso, el múltiplo de la identidad para el cual vale la ecuación (2.23) es -3 , es decir $(\mathfrak{s}_a, \varphi)$ es un solitón de Ricci de expansión cuando $a = \pm \frac{3}{4}$.

Observación 5.4.2. $(\mathfrak{s}_a, \varphi)$ es equivalente a $(\mathfrak{s}_{-a}, \varphi)$ para todo $a \in \mathbb{R}$, con isomorfismo dado por

$$h_a := \begin{bmatrix} & \text{id}_2 & \\ \text{id}_2 & & \\ & & -\text{id}_2 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \in G_2.$$

A continuación damos el ejemplo ya mencionado en la introducción, de una G_2 -estructura cerrada invariante a izquierda que es solitón de Laplace estable pero no es ERP. Es decir, no satisface la siguiente ecuación:

$$d\tau = \frac{1}{6}|\tau|^2 + \frac{1}{6} * (\tau \wedge \tau).$$

Ejemplo 5.4.3. [FR4, Section 4] Sea \mathfrak{g}_{FR} el álgebra de Lie soluble con base $\{e_1, \dots, e_7\}$ y corchete de Lie dado por

$$[e_1, e_4] = -2e_5, [e_2, e_4] = 2e_6, [e_7, e_i] = A_{ii}e_i,$$

donde $A := \text{Diag}(0, 0, 1, -1, -1, -1, 0)$.

Por Corolario 5.3.4, la 3 forma φ dada en (2.1) resulta cerrada y usando las fórmulas de Teorema 5.3.2 su 2-forma de torsión resulta:

$$\tau = 2e^{12} + 2e^{34} - 4e^{56}.$$

Fino y Raffero probaron que $(\mathfrak{g}_{FR}, \varphi)$ es un solitón de Laplace estable, más precisamente cumple la ecuación

$$d\tau = \Delta\varphi = \mathcal{L}_{X_D}\varphi,$$

para $D = \text{Diag}(0, 0, -4, 4, 4, 4, 0) \in \text{Der}(\mathfrak{g}_{FR})$.

Vale la pena destacar que si definimos el campo invariante a izquierda $X := -4e_7$ en el grupo de Lie simplemente conexo G_{FR} con álgebra de Lie \mathfrak{g}_{FR} , entonces se cumple

$$d\tau = \Delta\varphi = \mathcal{L}_X\varphi = d(\iota_X\varphi),$$

donde φ denota a la 3-forma invariante a izquierda en G_{FR} .

Por otro lado, la curvatura de Ricci resulta

$$\text{Ric} = \text{Diag}(-2, -2, 2, -6, 0, 0, -4),$$

y la funcional F ,

$$F := \frac{\text{scal}^2}{|\text{Ric}|^2} = \frac{9}{4} = 2,25.$$

Observación 5.4.4. No vale la recíproca de Corolario 3.1.7.

Es fácil ver que φ no satisface la condición de ERP, en efecto

$$-8(e^{146} + e^{245} - e^{567}) = d\tau \neq \frac{1}{6}|\tau|^2\varphi + \frac{1}{6}*(\tau \wedge \tau) = 4\varphi + \frac{4}{3}(e^{567} - 2e^{127} - 2e^{347}).$$

Inspirados por las fórmulas de la sección anterior y la falta de ejemplos de solitones de Laplace de contracción, los cuales son muy importantes pues producen las únicas soluciones conocidas del flujo laplaciano que explotan en tiempo finito, comenzamos a explorar la familia $G_{A_1, A, B, C}$ en busca de nuevos ejemplos. La búsqueda fue exitosa y en la siguiente proposición exhibimos una nueva familia de ejemplos de solitones de Laplace no equivalente dos a dos a los ejemplos previos.

Teorema 5.4.5. *Consideramos la familia de grupos de Lie solubles simplemente conexos G_s , con respectivas álgebras de Lie \mathfrak{g}_s para $s \in \mathbb{R}$, con base $\{e_1, \dots, e_7\}$ y corchete de Lie dado por*

$$[e_1, e_3] = -e_6, \quad [e_1, e_4] = -e_5, \quad [e_2, e_3] = -e_5, \quad [e_7, e_i] = (A_s)_{ii}e_i,$$

para $i = 1, \dots, 6$ y $A_s = \text{Diag} \left(\frac{3}{8} + s, -\frac{1}{8} + s, \frac{3}{8} - s, -\frac{1}{8} - s, \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right)$. Para la G_2 -estructura (G_s, φ) , donde φ está definida como en (2.1) valen las siguientes afirmaciones para todo $s \in \mathbb{R}$:

- (i) φ es cerrada.
- (ii) $\tau_s = \frac{5-8s}{4} e^{12} + \frac{5+8s}{4} e^{34} - \frac{5}{2} e^{56}$ es la 2-forma de torsión de φ .
- (iii) $\Delta\varphi = \frac{64s^2-32s-5}{16} e^{127} + \frac{64s^2+32s-5}{16} e^{347} + \frac{5}{2} (e^{135} - e^{146} - e^{236} + e^{567})$.
- (iv) (G_s, φ) es un solitón de Laplace de contracción, estable y de expansión para $s \in \left(-\frac{\sqrt{15}}{8}, \frac{\sqrt{15}}{8} \right)$, $s = \pm \frac{\sqrt{15}}{8}$ y $s \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{15}}{8} \right) \cup \left(\frac{\sqrt{15}}{8}, \infty \right)$, respectivamente.
- (v) $(G_s, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es solitón de Ricci (de expansión) si y solo si $s = \pm \frac{5}{8}$.
- (vi) (G_s, φ) es equivalente a (G_{-s}, φ) para todo $s \in \mathbb{R}$.
- (vii) $\{\mathfrak{g}_s : s \in \mathbb{R}\}$ es no isomorfa dos a dos a $\{\mathfrak{s}_a : a \in \mathbb{R}\}$, la familia dada en Ejemplo 5.4.1.

Por lo tanto,

$$\begin{cases} \lambda < 0, & -\frac{\sqrt{15}}{8} < s < \frac{\sqrt{15}}{8}, \\ \lambda = 0, & s = \pm \frac{\sqrt{15}}{8}, \\ \lambda > 0, & \text{caso contrario,} \end{cases},$$

con lo que queda probado (iv).

Para demostrar (v) primero debemos calcular el operador de Ricci, usando la fórmula dada en Sección 5.3, denotado por Ric_s , el cual resulta:

$$\frac{1}{16} \text{Diag}(-25 - 24s, -5 - 24s, -25 + 24s, -5 + 24s, 10, -10, -15 - 64s^2).$$

Debemos ver cuándo existe $\lambda_s \in \mathbb{R}$ tal que $\text{Ric}_s - \lambda_s \text{id} \in \text{Der } \mathfrak{g}_s$.

Es fácil ver que $\lambda_s = -\frac{5}{2}$ usando por ejemplo que $[e_1, e_3] = -e_6$. Por otro lado, para que se anule en e_7 se tiene que $s = \pm \frac{5}{8}$. Es decir, $(\mathfrak{g}_{\pm 5/8}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un solitón de Ricci de expansión, o sea

$$\begin{aligned} \text{Ric}_{\frac{5}{8}} &= -\frac{5}{2} \text{id} + \frac{5}{8} \text{Diag}(0, 2, 3, 5, 5, 3, 0), \\ \text{Ric}_{-\frac{5}{8}} &= -\frac{5}{2} \text{id} + \frac{5}{8} \text{Diag}(3, 5, 0, 2, 5, 3, 0), \end{aligned}$$

que era lo que queríamos probar.

El apartado (vi) resulta cierto, pues

$$h_s : (\mathfrak{g}_s, \varphi) \rightarrow (\mathfrak{g}_{-s}, \varphi), \quad h_s := \begin{bmatrix} & \text{id}_2 & & \\ \text{id}_2 & & & \\ & & -\text{id}_2 & \\ & & & 1 \end{bmatrix},$$

define un isomorfismo entre las álgebras de Lie \mathfrak{g}_s y \mathfrak{g}_{-s} tal que $h_s \cdot \varphi = \varphi$, es decir $h_s \in G_2$. Esto implica que $(\mathfrak{g}_s, \varphi) \simeq (\mathfrak{g}_{-s}, \varphi)$, para todo $s \in \mathbb{R}$.

Por último, para la prueba de (vi) necesitamos introducir notación. Dado un corchete de Lie κ en el álgebra 6-dimensional $\mathfrak{h} := \text{span}\{e_1, \dots, e_6\}$, definimos

$$\mathcal{A}_\kappa = \{X \in \mathfrak{h} : \dim(\text{Im}(\text{ad}_\kappa X)) = 1\}.$$

Notemos que si llamamos $\kappa_s := \mu_s|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}}$ entonces $e_2, e_4 \in \mathcal{A}_{\kappa_s}$ para todo s , luego $\mathcal{A}_{\kappa_s} \neq \emptyset$.

Ahora sí, supongamos que existen $a, s \in \mathbb{R}$ tales que \mathfrak{g}_s y \mathfrak{s}_a son isomorfos, entonces los respectivos nilradicales deben ser isomorfos. En otras palabras, si llamamos $\xi_a := \mu_a|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}}$, entonces (\mathfrak{h}, κ_s) es isomorfo a (\mathfrak{h}, ξ_a) . Este isomorfismo manda \mathcal{A}_{κ_s} en \mathcal{A}_{ξ_a} , y por ello debe existir $0 \neq X \in \mathcal{A}_{\xi_a}$,

digamos $X = \sum_{i=1}^6 a_i e_i$, para a_i números reales, luego

$$\text{ad}_{\mathfrak{s}_a}(X) = \sum_{i=1}^6 a_i \text{ad}_{\mathfrak{s}_a}(e_i) = \left[\begin{array}{cccc|c} & & & & 0_{4 \times 2} \\ a_4 & a_3 & -a_2 & -a_1 & \\ a_3 & -a_4 & -a_1 & a_2 & \end{array} \right].$$

Como debe tener rango igual a uno, entonces existen $x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$ tales que

$$x a_4 + y a_3 = 0, \quad x a_3 - y a_4 = 0, \quad x a_2 + y a_1 = 0, \quad -x a_1 + y a_2 = 0.$$

Puesto que $\det \begin{bmatrix} a_i & a_j \\ a_j & -a_i \end{bmatrix} = -(a_i^2 + a_j^2)$, es sencillo probar que las ecuaciones anteriores implican que a_1, a_2, a_3, a_4 son todos iguales a cero, es decir $ad_{\mathfrak{g}_a}(X) = 0$ lo cual es una contradicción pues debe tener rango igual a uno. Por lo tanto (\mathfrak{h}, ξ_a) y (\mathfrak{h}, κ_s) son no isomorfos, lo que implica que \mathfrak{g}_s y \mathfrak{g}_a son no isomorfos. Con lo que concluimos la prueba de la proposición. \square

Observación 5.4.7. Una prueba alternativa de que no pueden ser isomorfas \mathfrak{g}_a y \mathfrak{g}_s se debe a que si lo fueran, las derivaciones de \mathfrak{h} deberían ser conju-gadas (salvo múltiplo) por un automorfismo de \mathfrak{h} , y por lo tanto deberían serlo restringidas al centro que es $\text{span}\{e_5, e_6\}$. Claramente esto no sucede pues $A_a|_{\langle e_5, e_6 \rangle}$ tiene dos autovalores iguales y $A_s|_{\langle e_5, e_6 \rangle}$ tiene dos autovalores distintos.

Proposición 5.4.8. *Para la familia de G_2 -estructuras obtenida en la pro-posición anterior, calculamos la funcional*

$$F(s) := \frac{\text{scal}_s^2}{|\text{Ric}_s|^2} = \frac{(75 + 64s^2)^2}{1725 + 4224s^2 + 4096s^4},$$

y obtenemos que,

- F alcanza su máximo en $s = 0$, y resulta $F(0) = \frac{75}{23} \approx 3,26 > 3$.
- $F(s) = 3$ si y solo si $s = \pm \frac{1}{8} \sqrt{-12 + 3\sqrt{41}} \approx \pm 0,34$.
- $F(s) = \frac{135}{49} \approx 2,75$ para todo s tal que (G_s, φ) es solitón de Laplace estable, es decir para $s = \pm \frac{\sqrt{15}}{8}$.
- $F(s) = 2,5$ para todo s tal que $(G_s, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es solitón de Ricci de expansión, es decir para $s = \pm \frac{5}{8}$.

La Figura 5.2 muestra el gráfico de $F(s)$ definida en el corolario anterior. Análogo al Ejemplo 5.4.1, el color verde en el gráfico indica el valor de $F(s)$ en los puntos donde $(\mathfrak{g}_s, \varphi)$ es solitón de Laplace de expansión, y por el contrario el azul en donde es de contracción.

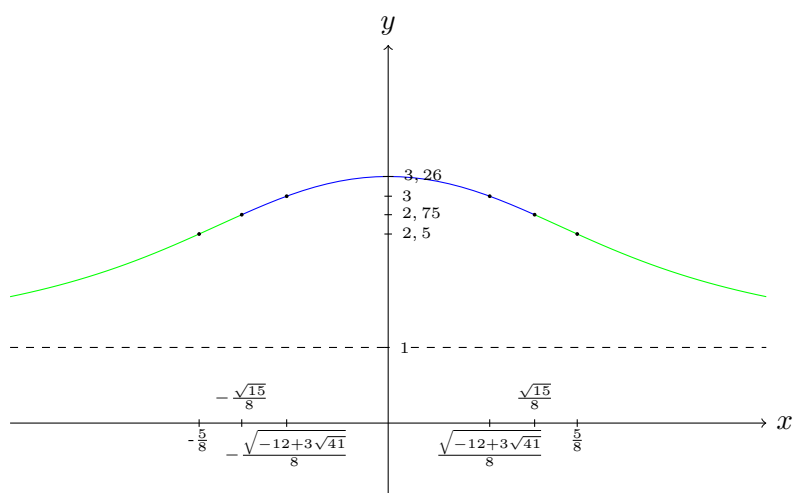


Figura 5.2: Gráfico de la funcional F para $(\mathfrak{g}_s, \varphi)$.

Bibliografía

- [A] D. ALEKSEEVSKII, Conjugacy of polar factorizations of Lie groups, *Mat. Sb.* **84** (1971), 14-26; *English translation: Math. USSR-Sb.* **13** (1971), 12-24.
- [Ba] G. BALL, Seven-Dimensional Geometries With Special Torsion, Ph.D. dissertation, Duke Univ..
- [BL] C. BÖHM, R. LAFUENTE, The Ricci flow on solvmanifolds of real type, *Adv. Math.* **352** (2019), 516-540.
- [B] R. BRYANT, Some remarks on G_2 -structures, Proc. Gökova Geometry-Topology Conference (2005), 75-109.
- [CI] R. CLEYTON, S. IVANOV, Curvature decomposition of G_2 -manifolds. *J. Geom. Phys.* **58** (2008), 1429-1449.
- [D] I. DOTTI, Metrics with nonpositive Ricci curvature on semidirect products, *Quart. J. Math.* **37** (1986), 309-314.
- [FFM] M. FERNÁNDEZ, A. FINO, A. RAFFERO, Laplacian flow of closed G_2 -structures inducing nilsolitons, *J. Geom. Anal.* **26** (2016), 1808-1837.
- [FR1] A. FINO, A. RAFFERO, Closed warped G_2 -structures evolving under the Laplacian flow, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (2017), doi: 10.2422/2036 – 2145,201709_004.
- [FR2] A. FINO, A. RAFFERO, Closed G_2 -structures on non-solvable Lie groups, *Rev. Matem. Complutense*, in press.
- [FR3] A. FINO, A. RAFFERO, A class of eternal solutions to the G_2 -Laplacian flow, preprint 2018 (arXiv).
- [FR4] A. FINO, A. RAFFERO, Remarks on homogeneous solitons of the G_2 -Laplacian flow, preprint, to appear in Comptes Rendus Mathématique.
- [GW] C. S. GORDON, E. N. WILSON, Isometry groups of Riemannian solvmanifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.* **307** (1988), 245-269.

- [H] J. HEBER, Geometric and algebraic structure of noncompact homogeneous Einstein spaces, Univ. Augsburg, 1997.
- [K] S. KARIGIANNIS, Introduction to G_2 -geometry, *Fields Institute Communications*; Springer, in press (arXiv).
- [L1] J. LAURET, Ricci soliton solvmanifolds, *J. reine angew. Math.* **650** (2011), 1-21.
- [L2] J. LAURET, Geometric flows and their solitons on homogeneous spaces, *Rendiconti del Seminario Matematico di Torino*, **74** (2016), 55-93.
- [L3] J. LAURET, Laplacian flow of homogeneous G_2 -structures and its solitons, *Proc. London Math. Soc.* **114** (2017), 527-560.
- [L4] J. LAURET, Laplacian solitons: Questions and homogeneous examples, *Diff. Geom. Appl.* **54** (2017), 345-360.
- [L5] J. LAURET, The search for solitons on homogeneous spaces, preprint 2019 (arXiv).
- [LN1] J. LAURET, M. NICOLINI, Extremally Ricci pinched G_2 -structures on Lie groups, *Comm. Anal. Geom.*, in press (arXiv).
- [LN2] J. LAURET, M. NICOLINI, The classification of ERP G_2 -structures on Lie groups, *Ann. Mat. Pura App.*, in press (arXiv).
- [Li] C. LIN, Laplacian solitons and symmetry in G_2 -geometry, *J. Geom. Phys.* **64** (2013), 111-119.
- [M] J. MILNOR, Curvature of left-invariant metrics on Lie groups, *Adv. Math.* **21**(1976), 293-329.
- [N] M. NICOLINI, Laplacian solitons on nilpotent Lie groups, *Bull. Belgian Math. Soc.* **25** (2018), 183-196.
- [VM] H. VAN LE, M. MUNIR, Classification of compact homogeneous spaces with invariant G_2 -structures, *Adv. Geom.* **12** (2012), 303-328.
- [W] J.A. WOLF, Homogeneity and bounded isometries in manifolds of negative curvature, *Illinois J. Math.* **8** (1964), 14-18.