

REPRESENTACIONES DE
FORMAS CUADRÁTICAS Y
HERMÍTICAS

*Algunos aspectos geométricos y
topológicos*

Emilio Lauret

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía y Física como
parte de los requerimientos para la obtención del grado de Doctor en
Matemática de la

Universidad Nacional de Córdoba

Marzo 2011

Director: Dr. Roberto Miatello

Resumen

En esta Tesis tratamos dos problemas clásicos de la teoría de formas cuadráticas: contar el número de representaciones de una forma cuadrática y dar una nueva generalización de la constante de Hermite. Además, también consideraremos el problema de encontrar variedades isospectrales. Este problema tiene relación con contar el número de formas de escribir un entero positivo como suma de cuadrados.

Con respecto al primero, estudiaremos al mismo tiempo representaciones de formas cuadráticas, hermíticas complejas y hermíticas cuaterniónicas, donde nos restringiremos a soluciones en un orden maximal \mathcal{O} . Para ℓ un entero positivo y Q una matriz de la forma $\begin{pmatrix} A & \\ & -b \end{pmatrix}$ donde $A \in M(n \times n; \mathcal{O})$ es definida positiva y $b \in \mathbb{N}$, calculamos una fórmula asintótica, para $t \rightarrow \infty$, del número de soluciones $x \in \mathcal{O}^{n+1}$ tales que $x^*Qx = -\ell$ y $|x_{n+1}| \leq t$. Más aún, extendemos este cálculo, con menor precisión, a representar formas hermíticas definidas negativas de rango q por la forma hermítica canónica $I_{p,q}$ de signatura (p, q) . Para la prueba usaremos teoremas de puntos reticulares de P. Lax y R. Phillips ([LP]), de R. Bruggeman, R. Miatello y N. Wallach ([BMW]), y de A. Gorodnik y A. Nevo ([GN1]).

En la segunda parte, introducimos una nueva generalización de la constante de Hermite clásica, para formas de Humbert sobre un cuerpo de números K . Primero la comparamos con otras constantes ya conocidas. Además, para el caso en que K es una extensión cuadrática imaginaria de \mathbb{Q} , presentamos el cálculo explícito de los casos $-d_K < 70$ y detallamos las formas extremas absolutas respectivas. Para esto usaremos trabajos de E. Mendoza ([Me]) y K. Vogtmann ([Vo]).

En la última parte nos interesaremos en encontrar variedades compactas planas n -dimensionales con holonomía \mathbb{Z}_2^k , de tipo diagonal, que sean fuertemente isospectrales y que a su vez tengan anillos de cohomología no isomorfos, a pesar de tener los mismos números de Betti. Para esto usaremos el método de Sunada. Exhibiremos pares de variedades de este tipo para todo $k \geq 3$ y $n \geq 3 \cdot 2^{k-2}$. Además mostraremos diversos ejemplos de pares y familias, encontrados con la ayuda de un algoritmo.

Math. Subject Classification (2010): 11D85, 11D45, 11H50, 11H55, 58J53, 20H15.

Palabras y frases claves: representación por formas hermíticas, formas de Humbert, constante de Hermite, isospectralidad, variedades compactas planas.

Este trabajo estuvo parcialmente subvencionado por:
CONICET, FONCyT-ANPCyT, Secyt (UNC), FaMAF (UNC).

Abstract

In this thesis we study two classical problems of the theory of quadratic forms: to count the number of representations and to give a new generalization of the Hermite's constant. Besides, we also deal with the problem of finding isospectral manifolds. This problem is related with counting the number of forms in which an integer can be written as sum of squares.

For the first problem we study, at the same time, representations of quadratic forms, complex hermitian forms and quaternion hermitian forms, restricting ourselves to solutions over a maximal order \mathcal{O} . For ℓ a positive integer and Q a matrix with the form $\begin{pmatrix} A & \\ & -b \end{pmatrix}$ where $A \in M(n \times n; \mathcal{O})$ is positive definite and $b \in \mathbb{N}$, we compute an asymptotic formula, for $t \rightarrow \infty$, of the number of solutions $x \in \mathcal{O}^{n+1}$ such that $x^* Q x = -\ell$ and $|x_{n+1}| \leq t$. More generally, we extend this computation, with less precision, to represent negative definite Hermitian forms of rank q by the canonical Hermitian form $I_{p,q}$ of signature (p, q) . For the proof we use lattice point theorems of P. Lax and R. Phillips ([LP]), of R. Bruggeman, R. Miatello and N. Wallach ([BMW]), and of A. Gorodnik and A. Nevo ([GN1]).

For the second one, we introduce a new generalization of the classical Hermite constant, on Humbert forms over a number field K . We start by comparing it with other known constants. In addition, when K is an imaginary quadratic number field, we present the explicit calculation for the cases $-d_K < 70$ and list the respective absolute extreme forms. For this we will use results of E. Mendoza ([Me]) and K. Vogtmann ([Vo]).

In the last part, we will be interested in finding n -dimensional compact flat manifolds with holonomy \mathbb{Z}_2^k , of diagonal type, strongly isospectral, but with non isomorphic cohomology ring, despite they have the same Betti numbers. For this we will use the Sunada-method. We will exhibit pairs of manifolds of this kind for every $k \geq 3$ and $n \geq 3 \cdot 2^{k-2}$. Besides, we will show several examples of pairs and families, found with the help of an algorithm.

Math. Subject Classification (2010): 11D85, 11D45, 11H50, 11H55, 58J53, 20H15.

Key words and phrases: representation by Hermitian forms, Humbert forms, Hermite constant, isospectrality, compact flat manifolds.

This work was partially supported by:
CONICET, FONCyT-ANPCyT, Secyt (UNC), FaMAF (UNC).

Agradecimientos

A mi director Roberto Miatello, por su constante apoyo y preocupación a lo largo de toda la tesis, en especial al final ya que sin su motivación no la hubiese terminado a tiempo.

A tres personas que han sido muy importante a la hora de aconsejarme en cosas extra matemáticas; ellos son Jorge Lauret, Juan Pablo Rossetti y Cynthia Will.

Al tribunal de tesis, María Inés Icaza, Manuel O’Ryan, Ricardo Podestá y Jorge Vargas, por sus correcciones, sugerencias y preguntas.

A la FaMAF, al CIEM y al CONICET por haber contribuido en mi formación académica.

Y en general a todos los que me han apoyado durante la tesis, amigos, familia y profesores.

Índice general

Resumen	III
Abstract	V
Agradecimientos	VII
Capítulo 0. Introducción	1
0.1. Representaciones de formas hermíticas	2
0.1.1. Teoremas de puntos reticulares	3
0.1.2. Resultados	4
0.2. Constantes de Hermite	5
0.2.1. Constantes de Hermite generalizadas	5
0.2.2. Resultados	7
0.3. Sumas de cuadrados y variedades isospectrales	9
0.3.1. Variedades fuertemente isospectrales con anillos de cohomología no isomorfos	9
0.3.2. Resultados	10
Parte 1. Representaciones por formas hermíticas	13
Capítulo 1. Notación y definiciones básicas	15
1.1. Formas \mathbb{F} -hermíticas	15
1.2. Formas \mathcal{O} -hermíticas	16
Capítulo 2. Representaciones de enteros negativos por formas hermíticas de signatura $(n, 1)$	17
2.1. Espacios hiperbólicos n -dimensionales	18
2.2. Teorema de puntos reticulares	20
2.3. Masa de la representación	22
2.4. Densidades locales	25
2.4.1. Caso $p > 2$	25
2.4.2. Caso $p = 2$	25
2.4.3. Aplicación	26
2.5. Ejemplos	27
2.5.1. Forma Lorentziana	27
2.5.2. Forma $J_q = \text{diag}(I_4, -q)$ con q primo impar	31
Capítulo 3. Representaciones de formas hermíticas definidas negativas de rango q por $I_{p,q}$ sobre \mathbb{F}	35
3.1. Espacios simétricos	35
3.2. Teorema de puntos reticulares	37
3.3. Aplicaciones	38

3.3.1.	Soluciones en $\mathcal{R}(I_{p,q}, -L)$ y puntos reticulares	38
3.3.2.	Primera aplicación	39
3.3.3.	Segunda aplicación	40
3.3.4.	Tercera aplicación	41
3.3.5.	Valor del término $m_G(G_{Y,r})$	42
	Bibliografía	43
	Parte 2. Constante de Hermite	45
	Capítulo 4. Notación y definiciones básicas	47
4.1.	Formas de Humbert	47
4.2.	Alturas torcidas	48
	Capítulo 5. Constante proyectiva de Humbert-Hermite	49
5.1.	Constante clásica de Hermite y unimodular	49
5.2.	Constante de Thunder	51
5.3.	Constante de Watanabe	52
	Capítulo 6. Cálculo de $\gamma_{K,2}^p$ para extensiones cuadráticas imaginarias	55
6.1.	Espacio hiperbólico tridimensional	56
6.2.	Resultados de Mendoza	57
6.3.	Resultados de Vogtmann	61
6.4.	Ejemplos	64
6.4.1.	$K = \mathbb{Q}\sqrt{-1}$	64
6.4.2.	$K = \mathbb{Q}\sqrt{-3}$	66
6.4.3.	$K = \mathbb{Q}\sqrt{-39}$	68
6.4.4.	Tabla de resultados	73
	Bibliografía	75
	Parte 3. Sumas de cuadrados y variedades isospectrales	77
	Capítulo 7. Notación y definiciones básicas	79
7.1.	Formas cuadráticas y lattices	79
7.2.	Variedades isospectrales	80
7.3.	Grupos de Bieberbach	81
7.3.1.	Definición	81
7.3.2.	Anillos de cohomología de variedades compactas planas	82
7.3.3.	Espectro de variedades compactas planas	83
	Capítulo 8. Pares de variedades fuertemente isospectrales	87
8.1.	Grupos de Bieberbach de tipo diagonal	88
8.1.1.	Definición y construcción	88
8.1.2.	Isospectralidad	89
8.1.3.	Sus anillos de cohomología	90
8.2.	Construcción de representaciones casi-conjugadas	91
8.3.	Resultado principal	96
	Capítulo 9. Ejemplos de variedades isospectrales	103
9.1.	Algoritmo	103
9.2.	Ejemplos explícitos	107

Bibliografía

113

CAPÍTULO 0

Introducción

Una *forma cuadrática n-aria* es un polinomio homogéneo f de grado dos en n variables. Si sus coeficientes pertenecen a un cuerpo F , entonces

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n b_{i,j} x_i x_j, \quad b_{i,j} \in F.$$

Podemos escribir $a_{i,j} = a_{j,i} = (b_{i,j} + b_{j,i})/2$, lo que implica

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} x_i x_j = x^t A x,$$

donde $A = (a_{i,j})$ es una matriz simétrica $n \times n$ y $x = (x_1, \dots, x_n)^t$.

El estudio de las formas cuadráticas es casi tan antiguo como el de la matemática misma. Podemos mencionar por ejemplo el problema de encontrar la solución entera de la ecuación

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

la cual da los lados enteros de un triángulo rectángulo (ternas Pitagóricas). También, la ecuación

$$x^2 + y^2 - 2z^2 = 0,$$

expresa a los cuadrados x^2, y^2, z^2 en progresión aritmética. Dos problemas con respetables antecedentes.

Actualmente las formas cuadráticas ocupan un rol central en diversas ramas de la matemática: teoría de números, álgebra lineal, teoría de grupos (grupos ortogonales), geometría diferencial (métrica Riemanniana), topología diferencial (*intersection forms of four-manifolds*), teoría espectral (toros planos isospectrales), teoría de Lie (la forma de Killing), entre otras. Los problemas del presente trabajo provienen de la teoría de números, y el último en parte de la teoría espectral.

Al igual que la teoría de números en general, las formas cuadráticas son estudiadas desde distintas ramas de la matemática: teoría aritmética, analítica, geométrica, algebraica, combinatoria, computacional, etc., de formas cuadráticas.

Este trabajo está dividido en tres partes, en donde se consideran tres problemas provenientes de diferentes subáreas.

- El primero trata sobre *representaciones de formas hermíticas indefinidas*. Éste se enmarca dentro de la teoría aritmética, aunque es estudiada por diversos enfoques provenientes de distintas subáreas, como ya explicaremos más adelante.

- El segundo es sobre las generalizaciones de la *constante de Hermite* y *formas extremas*. Nuestro contexto será el de formas de Humbert sobre cuerpos de números, que son una generalización de las formas cuadráticas.
- El tercero es sobre la construcción de *variedades compactas planas isospectrales*. Así como las primeras variedades isospectrales fueron halladas encontrando formas cuadráticas enteras (lattices enteros) que representan los mismos enteros, las cuales inducían toros planos isospectrales, generalizaremos este concepto para encontrar variedades compactas planas de tipo diagonal isospectrales.

0.1. Representaciones de formas hermiticas

Decimos que un elemento k es representado por la forma f si la ecuación

$$f(x) = k$$

tiene solución.

La teoría aritmética de formas cuadráticas comenzó con Fermat en 1654, quién mostró entre otras cosas, que todo número primo de la forma $8n + 1$ es representable por la forma $x^2 + 2y^2$, donde x e y son enteros. Luego, Gauss fue el primero en tratar seriamente las formas cuadráticas, introduciendo definiciones y nombres que aún se usan. Uno de sus grandes logros fue la de relacionar las formas cuadráticas con los anillos de enteros de cuerpos de números cuadráticos \mathcal{O} , obteniéndose resultados sobre representaciones de formas cuadráticas a partir del estudio de la factorización en primos en el anillo \mathcal{O} . De allí la denominación *enteros de Gauss* para $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[i]$.

Se destacan los siguientes resultados provenientes de la teoría aritmética.

Euler (1749): Un número natural n puede ser representado como suma de dos cuadrados si todo número primo $p \equiv 3 \pmod{4}$ aparece en la factorización de n con un exponente par.

Legendre (1798): Todo número natural n puede ser representado como suma de tres cuadrados, excepto los de la forma $n = 4^a(8b + 7)$.

Lagrange (1772): Todo número natural puede ser representado como suma de cuatro cuadrados.

Poco después, la teoría analítica de formas cuadráticas comenzó a proveer resultados precisos sobre el número de representaciones de números enteros por formas cuadráticas definidas positivas. Por ejemplo:

Jacobi (1834): *El número de maneras de escribir un entero positivo k como suma de cuatro cuadrados está dado por*

$$8 \sum_{\substack{m|k \\ 4|m}} m.$$

Esto se aborda a través de la determinación de los coeficientes de Fourier de funciones theta (θ -functions) asociadas a la forma. Esta estrategia corresponde a la teoría analítica de formas cuadráticas.

En el caso en que la forma cuadrática es indefinida, el número de representaciones es cero o infinito. Para S una matriz simétrica no degenerada de cualquier signatura, Siegel definió $\mu(S, k)$, la *medida de la representación*

de $S[x] = k$, que en el caso definido positivo coincide con el número de representaciones. Usando nuevamente funciones theta, obtuvo una fórmula explícita de $\mu(S, k)$.

Nosotros usaremos la estrategia, en el caso indefinido, de contar soluciones en ciertos subconjuntos compactos crecientes H_t , y explicitar una fórmula asintótica para $t \rightarrow \infty$ de soluciones en H_t . La herramienta principal serán los teoremas de puntos reticulares.

0.1.1. Teoremas de puntos reticulares. El plan de la presente Tesis nació a partir del interés de aplicar teoremas de puntos reticulares a problemas en teoría de números. Para empezar explicaremos a qué llamamos teoremas de puntos reticulares.

Sea X una variedad Riemanniana y Γ un lattice del grupo de isometrías $\text{Iso}(X)$ de X . Fijamos $x, y \in X$. Estos teoremas determinan fórmulas asintóticas para $t \rightarrow \infty$, del cardinal de los conjuntos

$$\{g \in \Gamma : d(x, g(y)) < t\}.$$

El problema en su versión más simple lo planteó Gauss en 1837, preguntando: *para $r > 0$, ¿cuál es el número $N(r)$ de puntos con coordenadas enteras del plano \mathbb{R}^2 en el interior o el borde del círculo centrado en el origen de radio r ?* Él probó lo siguiente:

$$N(r) = \pi r^2 + E(r) \quad \text{y} \quad E(r) \leq 2\sqrt{2}\pi r.$$

Existen mejores acotaciones de $E(r)$ luego de Gauss. Algunos de ellos fueron realizados por Hardy y Landau. Está conjeturado que $E(r) = O(r^{1/2+\varepsilon})$. En 2007, S. Cappel y J. Shaneson subieron un trabajo a arXiv afirmando que lo habían probado, aunque K. Soundararajan anunció que había encontrado un error en la prueba.

En 1982, Peter Lax y Ralph Phillips en [LP], obtuvieron una distribución asintótica de puntos reticulares en los espacios euclídeos e hiperbólicos. El argumento hace uso de propiedades de las soluciones periódicas de la ecuación de ondas $u_{tt} = \Delta u$ y desigualdades de Sobolev. En 1987, B. M. Levitan en [Le] obtuvo un resultado similar usando la representación integral clásica de las funciones de Legendre. El problema en el caso hiperbólico ya había sido tratado con anterioridad por H. Huber (1956), S. J. Patterson (1975) y A. Selberg (no publicado).

En 1999, R. W. Bruggeman, R. J. Miatello y N. R. Wallach, en [BMW], obtuvieron una fórmula para los espacios simétricos de curvatura negativa, generalizando el error de Lax y Phillips a rango uno.

Más recientemente, A. Gorodnik y A. Nevo en [GN1] y [GN2], usando teoría ergódica, generalizaron los resultados a una familia más general que la de los grupos algebraicos semisimples (S -algebraicos).

Las aplicaciones de estos teoremas de puntos reticulares las realizamos creando un contexto en donde están en correspondencia las soluciones del problema que nos interesa y puntos de un cierto lattice. Además, la condición $d(x, g(y)) < t$ debe ser traducida a una condición aritmética sobre nuestras soluciones.

0.1.2. Resultados. El tema de representaciones por formas cuadráticas surgió a partir del trabajo [RT] de John Ratcliffe y Steven Tschantz, quienes usando el teorema de Lax y Phillips (ver [LP]) sobre puntos reticulares en espacios hiperbólicos n -dimensionales, presentaron una fórmula asintótica del número de representaciones de un entero por la forma cuadrática Lorentziana. Más precisamente, si $r(n, k, t)$ denota el número de soluciones enteras x_1, \dots, x_{n+1} a la ecuación

$$(0.1) \quad x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = k, \quad \text{tales que} \quad |x_{n+1}| \leq t,$$

ellos probaron para $n \geq 3$ que

$$(0.2) \quad r(n, k, t) = \frac{\text{Vol}(S^{n-1})}{n-1} \delta(n, k) t^{n-1} + O(t^{n-3/2}),$$

donde S^{n-1} denota la esfera unitaria $(n-1)$ -dimensional y $\delta(n, k)$ la densidad de la representación (0.1) (ver (2.18)).

El Capítulo 2 presenta una generalización de este resultado a formas hermíticas sobre los números complejos y cuaterniónicos, incluyendo formas de signatura $(n, 1)$ más generales que la Lorentziana. Más precisamente, tomamos \mathcal{O} un orden maximal de $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ y

$$(0.3) \quad Q = \text{diag}(A, -b) = \begin{pmatrix} A & \\ & -b \end{pmatrix},$$

donde $A \in M(n; \mathcal{O})$ es hermítica definida positiva y $b \in \mathbb{N}$. Queremos contar la cantidad de vectores $x \in \mathcal{O}^{n+1}$ tales que $Q[x] = -\ell$, para $\ell \in \mathbb{N}$, donde $|x_{n+1}| < t$. En los casos no reales, usamos el teorema en [BMW] de Bruggeman, Miatello y Wallach. El resultado obtenido para \mathbb{F} arbitrario es (ver Teorema 2.9)

$$(0.4) \quad r_t(Q, -\ell) = C t^{2\rho} + O(t^\tau),$$

donde 2ρ denota la suma de las raíces positivas del grupo de Lie $\text{SU}(Q, \mathbb{F})_0$, C es una constante no explicitada que depende de Q y $-\ell$, y τ es generalmente el menor autovalor del operador Laplaciano en $\Gamma \backslash \text{SU}(Q, \mathbb{F})_0 / K$ (ver (2.13)). Por ejemplo, cuando no existen autovalores excepcionales de $\Gamma \backslash \text{SU}(Q, \mathbb{F})_0 / K$, τ es $2\rho n / (n+1) + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$.

En el caso $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ pudimos explicitar más la constante C usando la teoría de Siegel (ver Teorema 2.11), obteniendo

$$(0.5) \quad r_t(Q, -\ell) = \frac{b^{\frac{n-1}{2}} \text{Vol}(S^{n-1})}{n-1} \left(\prod_p \delta_p(Q, -\ell) \right) t^{n-1} + O(t^{n-3/2}),$$

donde las densidades locales $\delta_p(Q, -\ell)$ son explícitamente calculadas en la Sección 2.4.

En el Capítulo 3, generalizamos estos resultados al contexto de representar una forma hermítica definida negativa L por la forma hermítica de signatura (p, q) canónica, es decir,

$$Q = \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix},$$

$$(0.6) \quad Q[x] = x^* Q x = |x_1|^2 + \dots + |x_p|^2 - |x_{p+1}|^2 - \dots - |x_{p+q}|^2.$$

En este caso usamos los resultados de [GN1] y [GN2] de Gorodnik y Nevo. El espacio simétrico en el que trabajamos fue $U(p, q; \mathbb{F})/(U(p; \mathbb{F}) \times U(q; \mathbb{F}))$ con $p \geq q \geq 2$, en donde la fórmula de la distancia no es tan manejable como en el caso hiperbólico $q = 1$. Por esto, las fórmulas obtenidas no corresponden al número de matrices $X \in M(n \times q; \mathcal{O})$ tales que $Q[X] = -L$ junto con una condición de desigualdad aritmética, sino que son cotas superiores o inferiores de este tipo.

0.2. Constantes de Hermite

La *constante de Hermite tradicional* puede ser definida por la fórmula

$$(0.7) \quad \gamma_n = \max_A \min_{x \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \frac{x^t A x}{(\det A)^{1/n}},$$

donde A recorre todas las formas cuadráticas definidas positivas. Esta constante aparece en diversas áreas de la matemática, en particular, es equivalente al problema del empaquetamiento de bolas del mismo radio de menor densidad. Ésta es conocida para los casos $1 \leq n \leq 8$ desde hace mucho tiempo, y recientemente para $n = 24$, hecho por H. Cohn y A. Kumar en [CK].

Existen diversas generalizaciones de ella. En nuestro caso estudiaremos una definida sobre un contexto más amplio que las formas cuadráticas: *las formas de Humbert*.

Sea K un cuerpo de números sobre \mathbb{Q} de grado $m = r + 2s$, con $\{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$ (resp. $\{\sigma_{r+1}, \dots, \sigma_m\}$) los embeddings reales (resp. complejos, con $\sigma_{r+j} = \bar{\sigma}_{r+s+j}$) de K , y \mathcal{O}_K su anillo de enteros. Una forma de Humbert sobre K se compone de una $(r + s)$ -tupla $S = (S_1, \dots, S_{r+s})$, donde $S_1, \dots, S_r \in M(n; \mathbb{R})$ son matrices simétricas definidas positivas y $S_{r+1}, \dots, S_{r+s} \in M(n; \mathbb{C})$ son matrices hermíticas definidas positivas.

La evaluación de una forma de Humbert S en un vector $v = (v_1, \dots, v_n)$ de \mathcal{O}_K^n está dada por

$$S[v] = \prod_{i=1}^r S_i[v^{\sigma_i}] \cdot \left(\prod_{i=r+1}^{r+s} S_i[v^{\sigma_i}] \right)^2,$$

donde $v^{\sigma_i} = (v_1^{\sigma_i}, \dots, v_n^{\sigma_i})^t$ y $S_i[v] = v^* S_i v$ con $v^* = \bar{v}^t$. Su determinante es dado por

$$d(S) = \left(\prod_{i=1}^r \det S_i \right) \left(\prod_{i=r+1}^{r+s} \det S_i \right)^2.$$

0.2.1. Constantes de Hermite generalizadas. Existen diversas generalizaciones de la constante de Hermite clásica (0.7). Ver por ejemplo los artículos expositivos [Co] y [Wa2]. En el contexto de formas de Humbert, la generalización clásica fue dada por M. I. Icaza en [Ic] en el año 1997, la cual está dada por

$$(0.8) \quad \gamma_{K,n} = \sup_{S \in \mathcal{P}_{K,n}} \frac{\mu(S)}{d(S)^{1/n}},$$

donde

$$(0.9) \quad \mu(S) = \min_{v \in \mathcal{O}_K \setminus \{0\}} S[v],$$

es el mínimo canónico de S . Claramente en el caso $K = \mathbb{Q}$, $\gamma_{K,n}$ coincide con la constante de Hermite clásica.

Icaza mostró que el supremo en (0.8) se realiza, en particular $\gamma_{K,n} < \infty$. Además probó una cota superior análoga a la cota de Minkowski. Luego, junto a R. Baeza en [BI], prueban una desigualdad análoga a la de Mordell.

Esta constante ha sido estudiada por varios autores. Por ejemplo, cuando K es una extensión cuadrática real de \mathbb{Q} , ha sido calculada para ciertos casos en los trabajos [BCIO], [CIO], [PW1], [PW2].

Nosotros estamos interesados en el caso cuadrático imaginario, en el cual las formas de Humbert coinciden con las formas hermíticas, aunque su evaluación es el cuadrado de la estándar, es decir

$$S[v] = (v^* S v)^2.$$

El mínimo de formas binarias hermíticas ha sido estudiado por varios autores en la década del '30. Escribamos $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$. El caso $D = 1$ fue dado por Speiser ([Sp], 1932) y extendido por Perron para $D = 1, 2, 3, 7, 11, 19$ ([Pe], 1932). Luego Oberseider ([Ob], 1934) completó los casos de cuerpos K con número de clase h_K igual a uno: $D = 43, 67, 163$; y agregó los casos $D = 6, 10, 13, 15$ ($h_K = 2$) y $D = 14, 17$ ($h_K = 4$).

Por otro lado, como \mathcal{O}_K es un \mathbb{Z} -módulo libre de rango dos, una forma binaria hermítica sobre K de determinante Δ , puede ser vista como una forma cuadrática cuaternaria sobre \mathbb{Q} de determinante $(\Delta |d_K|)^2/16$, donde $|d_K|$ es el discriminante del cuerpo K . Esta idea fue usada por Oppenheim ([Op], 1936), quien probó que

$$\gamma_{K,2} \leq \frac{|d_K|}{2},$$

y que la igualdad vale si y sólo si la ecuación $x^2 \equiv -2 \pmod{D}$ tiene solución, o equivalentemente, si todo divisor primo de D es congruente a 1 ó a 3 módulo 8.

K. Mahler dio un resumen de todos estos resultados en [Ma]. Todos los valores conocidos de $\gamma_{K,2}$, para extensiones cuadráticas imaginarias, se pueden encontrar en la columna del medio de la Tabla 0.1 en la página 8.

Como una alternativa a (0.9), en este trabajo consideraremos el *mínimo proyectivo de S* dado por

$$(0.10) \quad \mu^p(S) = \min_{v \in \mathcal{O}_K} \frac{S[v]}{N(\langle v \rangle)^2},$$

donde $N(\langle v \rangle)$ indica la norma del ideal $\langle v \rangle = v_1 \mathcal{O}_K + \cdots + v_n \mathcal{O}_K$ de \mathcal{O}_K . Análogamente, definimos la *constante proyectiva de Humbert-Hermite* por

$$(0.11) \quad \gamma_{K,n}^p = \sup_{S \in \mathcal{P}_{K,n}} \frac{\mu^p(S)}{d(S)^{1/n}}.$$

En el Capítulo 5 estudiaremos esta constante para K y n arbitrarios, comparándola con otras generalizaciones.

En el Capítulo 6 la estudiaremos para el caso particular de $n = 2$ (formas binarias) y K una extensión cuadrática imaginaria de \mathbb{Q} . En este caso usaremos herramientas geométricas introducidas por E. Mendoza en [Me] y ampliadas por K. Vogtmann en [Vo], quienes la aplicaron al estudio de la homología y cohomología de los grupos de Bianchi.

Rápidamente hablando, usaremos la clásica biyección entre las formas binarias hermíticas y el semiespacio superior \mathbb{H}^3 , la cual es invariante bajo la acción de los grupos de Bianchi $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_K)$ (ver Teorema 6.3). Por razones topológicas, existe un conjunto \mathcal{M} , el cual es un retracto celular de dimensión 2 de \mathbb{H}^3 invariante por Γ . Mendoza dio una descripción explícita de tal complejo y calculó la estructura de celdas en los casos en que el anillo \mathcal{O}_K es Euclídeo ($D = 1, 2, 3, 7, 11$). Vogtmann describió como calcular esta estructura de celdas de \mathcal{M} para cualquier cuerpo K y calculó explícitamente la homología racional de Γ para $|d_K| < 100$.

El factor $S[v]/N(\langle v \rangle)^2$ de (0.10) se puede describir como la distancia entre puntos de \mathbb{H}^3 y cúspides que viven en el borde de \mathbb{H}^3 . A partir de esto, la función $\mu^p : \mathcal{P}_{K,2} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ induce una función continua $\eta : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ (ver (6.7)).

Bajo esta correspondencia, Mendoza probó que las formas extremas proyectivas (máximos locales de μ^p) coinciden con los vértices de \mathcal{M} . Luego, usando el trabajo de Vogtmann, construimos un dominio fundamental apropiado de \mathcal{M} bajo la acción de Γ , para así obtener sus vértices y determinar las formas extremas proyectivas, en particular la forma extrema proyectiva absoluta y la constante $\gamma_{K,2}^p$.

0.2.2. Resultados. En el Capítulo 5 estudiaremos la constante $\gamma_{K,n}^p$ para K y n arbitrarios. Mostraremos que ésta existe y que se realiza para alguna forma de Humbert. Además la compararemos con algunas otras generalizaciones, comenzando con (0.8), probando entre otras cosas que

$$\gamma_{K,n}^p \leq \gamma_{K,n}$$

y que vale la igualdad cuando el cuerpo K tiene número de clase igual a uno.

También trabajaremos con constantes definidas sobre objetos más generales que las formas de Humbert. Éstas son, la constante introducida por J. Thunder la cual usa alturas torcidas globales de elementos de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_K)$ (ver [Th]), y la constante de T. Watanabe de representaciones K -racionales de grupos algebraicos reductivos (ver [Wa1]). Con esta última obtendremos una igualdad.

Como ya mencionamos en la sección anterior, en el Capítulo 6 estudiaremos $\gamma_{K,2}^p$ para cuerpos de números imaginarios cuadráticos K , calculándola explícitamente para algunos valores pequeños de $|d_K|$, más precisamente, para $|d_K| \leq 70$.

En los casos en que $h_K = 1$, $\gamma_{K,2}^p$ ya era conocida pues coincide con $\gamma_{K,2}$. En todos estos casos, ellas valen $|d_K|/2$, excepto en $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ que vale $|d_K|/3 = 7/3$. Los casos en que calculamos $\gamma_{K,2}^p$, contiene a los casos en que $\gamma_{K,2}$ es conocida. En la Tabla 0.1 se puede visualizar todos los casos

TABLA 0.1. Constantes de Hermite de formas binarias de Humbert sobre cuerpos de números cuadráticos imaginarios $K = \mathbb{Q}(\sqrt{Di})$.

$-d_K$	D	$\gamma_{K,2}^p$	$\gamma_{K,2}$	h_K
3	3	3/2	3/2	1
4	1	2	2	1
7	7	7/3	7/3	1
8	2	4	4	1
11	11	11/2	11/2	1
15	15	3	20/3	2
19	19	19/2	19/2	1
20	5	5	80/11	2
23	23	23/5		3
24	6	12	12	2
31	31	31/3		2
35	35	7		2
39	39	39/3		4
40	10	180/13	640/39	2
43	43	43/2	43/2	1
47	47	47/5		5
52	13	52/3	832/25	2
56	14	28/3	896/41	4
67	67	67/2	67/2	1
68	17	34	34	4
163	163	163/2	163/2	1

Los números en negrita significan los calculados en este trabajo.

conocidos de ambas constantes. El caso $D = 23$ no se encuentra en negrita pues ya había sido calculado por Vogtmann en [Vo].

Tenemos el siguiente teorema.

TEOREMA 0.1. *Sea $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ ($D > 0$) un cuerpo de números imaginario cuadrático. Si K tiene número de clase mayor a uno y $|d_K| \leq 70$, entonces $\gamma_{K,2}^p$ está dado como sigue:*

D	15	5	23	6	31	35	39	10
$-d_K$	15	20	23	24	31	35	39	40
$\gamma_{K,2}^p$	$\frac{15}{5}$	$\frac{20}{4}$	$\frac{23}{5}$	$\frac{24}{2}$	$\frac{31}{3}$	$\frac{35}{5}$	$\frac{39}{3}$	$\frac{40}{9}$

D	47	51	13	55	14	59	17
$-d_K$	47	51	52	55	56	59	68
$\gamma_{K,2}^p$	$\frac{47}{5}$	$\frac{51}{2}$	$\frac{52}{3}$	$\frac{55}{25}$	$\frac{56}{6}$	$\frac{59}{2}$	$\frac{68}{2}$

Como ya mencionamos en la sección anterior, el método también permite encontrar todas las formas extremas proyectivas. El número de éstas

(módulo Γ) crece demasiado cuando $|d_K|$ también lo hace, por lo que nos concentraremos en mostrar las formas extremas proyectivas absolutas, es decir, las formas que realizan la constante $\gamma_{K,2}^p$.

La Tabla 6.1 de la página 74, muestra, además de la constante $\gamma_{K,2}^p$, los puntos extremos proyectivos absolutos, que permiten hallar las formas extremas proyectivas absolutas usando el Teorema 6.3.

Los resultados de esta Segunda Parte pertenecen al trabajo [CIL], en el cual trabajé conjuntamente con los Profesores Wai Kiu Chan (Wesleyan University, USA) y María Inés Icaza (Universidad de Talca, Chile).

0.3. Sumas de cuadrados y variedades isospectrales

Si (M, g) es una variedad Riemanniana compacta de dimensión n y $0 \leq p \leq n$, denotamos por $\text{spec}_p(M)$ es el espectro, con multiplicidades, del operador de Hodge-Laplace actuando sobre p -formas suaves sobre (M, g) . Para cada p , $\text{spec}_p(M)$ es una sucesión de números reales no negativos tendiendo a ∞ . Las variedades (M, g) y (M', g') son llamadas p -isospectrales (*isospectrales* cuando $p = 0$) si $\text{spec}_p(M) = \text{spec}_p(M')$, y *fuertemente isospectrales* si todos los operadores autoadjuntos elípticos naturales sobre las variedades son isospectrales. En particular, dos variedades fuertemente isospectrales son p -isospectrales para todo p .

Los primeros ejemplos de variedades isospectrales fueron construidas a partir de formas cuadráticas enteras definidas positivas que representan a los mismos enteros (contando multiplicidades). Como sabemos, hay una correspondencia entre este tipo de formas cuadráticas y lattices enteros en espacios Euclídeos, y las variedades anteriores eran precisamente el cociente entre el espacio Euclídeo y estos lattices, es decir, *toros planos*. A partir de aquí es que buscaremos en grupos de Bieberbach, ejemplos de este tipo, a los cuales entenderemos como generalizaciones de formas cuadráticas.

Existen diversos ejemplos de variedades fuertemente isospectrales, pero todas ellas tienen anillos de cohomología isomorfos. Nosotros estamos interesados en variedades fuertemente isospectrales con anillos de cohomología diferentes, siendo no isomorfas como \mathbb{Q} -álgebras graduadas, o más generalmente, siendo no isomorfas como \mathbb{Q} -álgebras abstractas.

0.3.1. Variedades fuertemente isospectrales con anillos de cohomología no isomorfos. La conexión entre el espectro del operador de Laplace de una variedad Riemanniana M y la geometría de M ha sido objeto de estudio desde hace bastante tiempo. Este interés creció cuando M. Kac publicó su famoso artículo “*Can one hear the shape of a drum?*” (¿Se puede oír la forma de un tambor?, [Ka]). Esta frase pregunta si existen tambores planos isospectrales que no sean “superponibles”, es decir, donde uno no puede ser llevado a otro por un movimiento rígido. Esto es debido a que la frecuencia en la que un parche de tambor puede vibrar, depende de su forma. Estas frecuencias son los autovalores del Laplaciano en la región.

La primera solución fue construida por J. Milnor en 1964 en el trabajo [Mi] de sólo una página. Él explicó la manera de construir toros planos

isospectrales a partir de lattices enteros autoduales que representan los mismos enteros (con respecto al cuadrado de la norma euclídea). Él sólo mencionó el par D_{16}^* y $E_8 \oplus E_8$ en \mathbb{R}^{16} los cuales cumplen la condición anterior según probó Witt en 1941. A partir de aquí comenzó una seguidilla de ejemplos en dimensiones menores usando este mismo método: M. Kneser en 1967 en dimensión $n = 12$, Y. Kitaoka en 1976 en $n = 8$, J. H. Conway en 1986 para $n = 5, 6$. Finalmente A. Schiemann en 1990 encontró por métodos computacionales ejemplos en dimensión $n = 4$, y él mismo, en 1997 probó que no existen ejemplos para $n < 4$.

Los toros planos son las variedades compactas planas más simples, teniendo grupo de holonomía trivial. Nuestra intención es buscar nuevos ejemplos de variedades compactas planas isospectrales que no sean toros. El survey [MR3] muestra diversos ejemplos de pares y familias de este tipo. En nuestro caso, trabajaremos con grupos de Bieberbach de tipo diagonal, los cuales inducen variedades compactas planas con grupo de holonomía (de tipo diagonal) isomorfo a \mathbb{Z}_2^k , para algún $k \in \mathbb{N}$.

En este trabajo estamos interesados en variedades que sean p -isospectrales para todo valor de p . Esto hace que las variedades tengan los mismos número de Betti, es decir, las dimensiones del anillo de cohomología de ambas, coinciden en cada grado. Nuestro objetivo es encontrar variedades p -isospectrales para todo p con anillo de cohomología no isomorfos. En todos los ejemplos de pares p -isospectrales para todo p de [MR3], los anillos de cohomología son isomorfos.

Mostraremos diversas maneras de construir pares y familias de variedades con estas propiedades. En estas construcciones usaremos el método de Sunada y el estudio de las formas invariantes primitivas en el álgebra exterior. Exhibiremos diversos ejemplos que ilustran este fenómeno, obtenidos por medio de un algoritmo y con ayuda de la computadora.

0.3.2. Resultados. En primera instancia, probaremos la existencia de pares de grupos de Bieberbach Γ y Γ' de tipo diagonal con grupo de holonomía \mathbb{Z}_2^k (con $k \geq 3$) y dimensión n (con $n \geq 3 \cdot 2^{k-2} + 1 \geq 7$) que cumplen simultáneamente las siguientes propiedades:

1. Las variedades M_Γ y $M_{\Gamma'}$ inducidas por los grupos Γ y Γ' son Sunada-isospectrales, por lo tanto, fuertemente isospectrales.
2. El primer número de Betti de ambas variedades es nulo.
3. Cuando la dimensión n es par, M_Γ tiene una estructura compleja Kähler y $M_{\Gamma'}$ no.
4. Los anillos de cohomología no son isomorfos como \mathbb{Q} -álgebras graduadas.
5. Los anillos de cohomología no son isomorfos como \mathbb{Q} -álgebras abstractas para $k \leq 5$.

Estudiamos cada uno de estos aspectos.

1. Usamos el método de Sunada (Teorema 7.4) aplicado al caso particular de los grupos de Bieberbach de tipo diagonal. Esto está resumido en el Teorema 8.6, el cual dice que dos variedades compactas planas de tipo diagonal son Sunada-isospectrales si y sólo si sus números de Sunada (ver

(8.8)) coinciden. Además, el Teorema 7.4 también asegura que dos variedades Sunada-isospectrales son fuertemente isospectrales.

2. El hecho que ambas variedades tienen primer número de Betti nulo no es un detalle poco importante. Si tenemos Γ y Γ' dos grupos de Bieberbach de tipo diagonal con holonomía \mathbb{Z}_2^k de dimensión n , tales que M_Γ y $M_{\Gamma'}$ son Sunada-isospectrales, entonces las variedades $M_\Gamma \times (S^1)^m$ y $M_{\Gamma'} \times (S^1)^m$ son nuevamente Sunada-isospectrales de dimensión $n + m$. De todas maneras, estas variedades tienen primer número de Betti igual a m .

3. El Lema 8.19 asegura que cualquier variedad compacta plana con representación diagonal tiene todos sus coeficientes pares, tiene una estructura compleja Kähler. Usamos esto para probar que M_Γ tiene estructura Kähler. Además probamos que $M_{\Gamma'}$ no tiene dicha estructura, probando que las formas F' -invariantes de grado 2 no generan toda el álgebra de invariantes $\Lambda_{F'}^*$, lo cual contradice a tener una estructura Kähler.

4. Probamos fácilmente este ítem, comprobando que los números $P_{4,F}$ y $P_{4,F'}$ de formas invariantes primitivas (formas que no pueden ser obtenidas como productos exteriores de menor grado, ver Definición 8.8) de grado 4 son distintos. De todas maneras esto sólo prueba el no isomorfismo como \mathbb{Q} -álgebras graduadas.

5. El Corolario 8.10 asegura que el número total de formas invariantes primitivas $\sum_p P_p$ es un invariante. Además, la Proposición 8.14 calcula diversos casos de P_p , y ocurre que los únicos términos posibles distintos para dos variedades Sunada-isospectrales son P_4, \dots, P_{k+1} . En particular, para probar el no isomorfismo entre las álgebras, es suficiente probar que $P_{4,F} \neq P_{4,F'}$ para $k = 3$, $P_{4,F} + P_{5,F} \neq P_{4,F'} + P_{5,F'}$ para $k = 4$, y $P_{4,F} + P_{5,F} + P_{6,F} \neq P_{4,F'} + P_{5,F'} + P_{6,F'}$ para $k = 5$.

En el Capítulo 9 nos concentramos en mostrar ejemplos de variedades fuertemente isospectrales con anillos de cohomología no isomorfos como álgebras abstractas. En la Sección 9.1 desarrollamos un algoritmo que permite clasificar, para k y n fijos, todas las representaciones diagonales de \mathbb{Z}_2^k de dimensión n , agrupados con respecto a la clase de casi-conjugación. Esto permite construir en la mayoría de los casos (creemos que siempre, ver Pregunta Abierta 9.3) variedades Sunada-isospectrales con anillos de cohomología no isomorfos pues los grupos puntuales son casi-conjugados y no conjugados en $O(n)$. Numerosos ejemplos fueron encontrados con ayuda de la computadora, algunos de ellos incluidos en las Tablas 9.1, 9.2 y 9.3.

Finalmente, en la Sección 9.2 mostramos algunos ejemplos construidos a partir de los resultados encontrados por el algoritmo. En particular, el Ejemplo 9.6 muestra 8 variedades compactas planas diagonales con holonomía \mathbb{Z}_2^3 de dimensión 24, con anillos de cohomología no isomorfos de a pares, teniendo cuatro de ellas una estructura compleja Kähler y las otra no.

Estos resultados son parte del trabajo [LMR], en el cual trabajé conjuntamente con los Profesores Roberto Miatello y Juan Pablo Rossetti, ambos pertenecientes a la FaMAF, Universidad Nacional de Córdoba.

Parte 1

Representaciones por formas
hermíticas

CAPÍTULO 1

Notación y definiciones básicas

Denotaremos por \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} y \mathbb{H} , respectivamente, al anillo de enteros racionales, al cuerpo de los números racionales, reales, complejos y al álgebra de división real de cuaterniones. Sea $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ o \mathbb{H} . En \mathbb{H} tomaremos la \mathbb{R} -base canónica $\{1, i, j, k\}$ y $w = a + bi + cj + dk \mapsto \bar{w} = a - bi - cj - dk$ su conjugación canónica. Denotaremos \mathbb{Q}_p al cuerpo de los números p -ádicos y \mathbb{Z}_p a sus enteros.

Para R un anillo asociativo con unidad, denotaremos $M(m \times n; R)$ al conjunto de todas las matrices $m \times n$ con coeficientes en R y abreviaremos $M(m \times m; R)$ por $M(m; R)$. Escribiremos R^m haciendo referencia al conjunto $M(m \times 1; R)$ con la estructura de R -módulo a derecha.

Llamaremos *grupo general lineal*, $GL(m, \mathbb{F})$, al conjunto de matrices inversibles en $M(m; \mathbb{F})$. Podemos pensar a \mathbb{F}^m como un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión rm , donde $r = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{F})$. Luego, $GL(m, \mathbb{F})$ coincide con las \mathbb{R} -transformaciones lineales $g : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^m$ con $\det_{\mathbb{R}}(g) \neq 0$, que también son \mathbb{F} -lineales, i.e. que conmutan con la acción escalar a derecha de \mathbb{F} . El *grupo especial lineal*, $SL(m, \mathbb{F})$, es el grupo derivado de $GL(m, \mathbb{F})$. Cuando \mathbb{F} es conmutativo ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C}), $SL(m, \mathbb{F})$ coincide con las matrices en $M(m; \mathbb{F})$ de determinante 1.

1.1. Formas \mathbb{F} -hermíticas

Diremos que una matriz $Q \in M(m; \mathbb{F})$ es hermítica si $Q^* = Q$, donde $Q^* = \overline{Q}^t$. Denotaremos, para $x, y \in \mathbb{F}^m$ y $g \in M(m \times n; \mathbb{F})$,

$$\begin{aligned} Q(x, y) &= y^* Q x \in \mathbb{F}, \\ Q[g] &= g^* Q g \in M(n; \mathbb{F}). \end{aligned}$$

La función de $\mathbb{F}^m \times \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}$ dada por $(x, y) \mapsto Q(x, y)$, es lineal en la primera variable, conjugada-lineal en la segunda, y satisface $\overline{Q(y, x)} = Q(x, y)$. A una función de $\mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{R}$ del tipo $x \mapsto Q[x]$, la llamaremos *forma \mathbb{F} -hermítica*; en particular, si $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, entonces será *forma cuadrática*, *forma hermítica compleja* o *forma hermítica cuaterniónica* según corresponda.

A una forma \mathbb{F} -hermítica dada por Q , la llamaremos *no degenerada* si Q es inversible, y *definida positiva* si $Q[x] > 0$ para todo $x \in \mathbb{F}^n$.

Una forma hermítica Q no degenerada define el Q -grupo unitario $U(Q, \mathbb{F})$ y el Q -grupo especial unitario $SU(Q, \mathbb{F})$, como

$$\begin{aligned} (1.1) \quad U(Q, \mathbb{F}) &= \{g \in GL(m, \mathbb{F}) : Q[gx] = Q[x] \quad \forall x \in \mathbb{F}^{n+1}\} \\ &= \{g \in GL(m, \mathbb{F}) : Q[g] = Q\}, \end{aligned}$$

$$(1.2) \quad SU(Q, \mathbb{F}) = U(Q, \mathbb{F}) \cap SL(m, \mathbb{F}).$$

Esta notación es muy similar a la adoptada en [Wo].

Si $Q = I_m$ la matriz identidad $m \times m$, el Q -grupo unitario $U(Q, \mathbb{F})$ coincide con el grupo ortogonal $O(m)$, el grupo unitario $U(m)$ y el grupo simpléctico unitario $Sp(m)$, según que $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. El hecho es similar con los grupos especiales correspondientes. En general no usaremos la notación clásica $O(m), SO(m), \dots$, pues pretendemos trabajar con \mathbb{F} arbitrario.

Si $Q = I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix}$ con $p + q = m$ y $pq > 0$, los \mathbb{Q} -grupos unitarios para $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, corresponden a los grupos (indefinidos) ortogonales $O(p, q)$, unitarios $U(p, q)$ y simpléctico unitarios $Sp(p, q)$, de signatura (p, q) .

En general, si Q es una forma no degenerada, entonces $U(Q, \mathbb{F})$ es conjugado a $U(I_m, \mathbb{F})$ si y sólo si Q o $-Q$ es definida positiva. En caso contrario, existen únicos $p \geq q > 0$ con $p + q = m$, tales que $U(Q, \mathbb{F})$ es conjugado a $U(I_{p,q}, \mathbb{F})$.

1.2. Formas \mathcal{O} -hermíticas

Consideraremos \mathbb{Q} -subálgebras K de \mathbb{F} tales que $\dim_{\mathbb{Q}}(K) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{F})$ y $K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \mathbb{F}$. Un \mathbb{Z} -orden (o simplemente un *orden*) de una \mathbb{Q} -álgebra K , es un subanillo que contiene a 1, es finitamente generado, y contiene a una \mathbb{Q} -base de K . Se sabe que todo orden en K está contenido en un orden maximal. Fijaremos \mathcal{O} un orden maximal de K .

OBSERVACIÓN 1.1. En el caso $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ se cumple que $K = \mathbb{Q}$ y $\mathcal{O} = \mathbb{Z}$. Si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, K es necesariamente una extensión cuadrática imaginaria de \mathbb{Q} . Más precisamente, existe un único $D \in \mathbb{N}$ libre de cuadrados tal que $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$. En este caso, nuevamente existe un único orden maximal el cual es $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[\omega]$, donde $\omega = \sqrt{-D}$ si $D \not\equiv 3 \pmod{4}$ o $\omega = \frac{1+\sqrt{-D}}{2}$ si $D \equiv 3 \pmod{4}$.

El caso $\mathbb{F} = \mathbb{H}$ no es tan simple como los anteriores. El álgebra K resulta ser un álgebra de cuaterniones sobre \mathbb{Q} . Luego, K es generado por dos elementos α y β tales que $\alpha\beta = -\beta\alpha$ y $\alpha^2 = -a$, $\beta^2 = -b$, con a y b números racionales positivos.

A diferencia que en los casos donde K era un cuerpo de números, existen más de un orden maximal. Por ejemplo, si \mathcal{O} es un orden maximal en K , entonces $u\mathcal{O}u^{-1}$ también lo es para todo $u \in K^\times$. Como ejemplo, es conveniente pensar en los *enteros de Hurwitz*, dados por

$$\{a + bi + cj + dk \in \mathbb{H} : a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ ó } a, b, c, d \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}\}.$$

Buenas referencias son [MR] y [Kr].

En este trabajo consideraremos formas hermíticas no degeneradas Q en $M(m; \mathcal{O})$. Notemos que $Q[x] \in \mathcal{O}$ y $\overline{Q[x]} = Q[x]$ para todo $x \in \mathcal{O}^m$, por lo tanto

$$Q[x] \in \mathbb{Z} \quad \forall x \in \mathcal{O}^m.$$

DEFINICIÓN 1.2. Sea $Q \in M(m; \mathcal{O})$ hermítica no degenerada. Diremos que *la forma Q representa a $\ell \in \mathbb{Z}$* si existe $x \in \mathcal{O}^m$ tal que $Q[x] = \ell$. Más generalmente, diremos que *la forma Q representa a la forma $L \in M(n; \mathcal{O})$* (con $n < m$) si existe $X \in M(m \times n; \mathcal{O})$ tal que $Q[X] = L$.

CAPÍTULO 2

Representaciones de enteros negativos por formas hermíticas de signatura $(n, 1)$

En este capítulo consideraremos matrices en $M(n+1; \mathbb{F})$ hermíticas no degeneradas de signatura $(n, 1)$, de la forma

$$(2.1) \quad Q = \text{diag}(A, -b) = \begin{pmatrix} A & \\ & -b \end{pmatrix},$$

donde $b \in \mathbb{N}$ y $A \in M(n; \mathcal{O})$ es una matriz hermítica definida positiva. Para $\ell \in \mathbb{Z}$, estamos interesados en los elementos que representan a ℓ por Q según la Definición 1.2, es decir, los vectores $x \in \mathcal{O}^{n+1}$ tales que $Q[x] = \ell$.

Para $\ell \in \mathbb{Z}$ definimos

$$(2.2) \quad \mathcal{R}(Q, \ell) = \{x \in \mathcal{O}^{n+1} : Q[x] = \ell\}.$$

Como la forma Q es indefinida, el conjunto $\mathcal{R}(Q, \ell)$ es vacío o tiene una cantidad infinita de elementos. Como nuestra intención es contar el número de soluciones, nos restringiremos a un subespacio compacto. Para $t > 0$ definimos

$$(2.3) \quad \mathcal{R}_t(Q, \ell) = \{x \in \mathcal{R}(Q, \ell) : |x_{n+1}| \leq t\},$$

$$(2.4) \quad r_t(Q, \ell) = \#\mathcal{R}_t(Q, \ell).$$

El objetivo en este capítulo es dar una fórmula asintótica de $r_t(Q, -\ell)$ para $t \rightarrow \infty$, donde $\ell \in \mathbb{N}$ y Q representa a $-\ell$.

La herramienta principal a usar será el teorema de puntos reticulares de Bruggeman, Miatello y Wallach ([**BMW**]). Para esto primero necesitamos crear un contexto apropiado, en el que sea equivalente contar soluciones de nuestra ecuación con contar puntos reticulares. Los espacios geométricos serán los hiperbólicos, tanto reales, complejos y cuaterniónicos, usando el modelo de Klein. Luego de aplicar el teorema de puntos reticulares de [**BMW**], tendremos que “limpiar” la fórmula resultante usando resultados de la teoría analítica de formas cuadráticas.

En cada una de las siguientes secciones iremos introduciendo nuevos conceptos y resultados provenientes de áreas como la geometría, análisis, teoría analítica y aritmética de números, etc. Al final de cada una de las secciones formularemos un teorema que aplica las nociones introducidas, con el objeto de deducir una fórmula para $r_t(Q, -\ell)$. A medida que avancemos iremos perdiendo generalidad, tal como restringir el cuerpo \mathbb{F} a los números reales, por la inexistencia de resultados generales en todas las áreas.

2.1. Espacios hiperbólicos n -dimensionales

Los espacios simétricos Riemannianos de rango real 1 y curvatura negativa son los *espacios hiperbólicos* $\mathfrak{H}_{\mathbb{F}}^n$, donde \mathbb{F} es \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{H} , o los números de Cayley \mathbb{O} para $n = 2$. Este último caso no lo tendremos en cuenta. Existen varios modelos para $\mathfrak{H}_{\mathbb{F}}^n$, por ejemplo los conocidos modelos de Poincaré del semiplano y semiespacio superior para $\mathfrak{H}_{\mathbb{R}}^2$ y $\mathfrak{H}_{\mathbb{R}}^3$.

Para introducir nuestro modelo, denotaremos $\mathbb{P}\mathbb{F}^{n+1} = (\mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{F}^\times$, el espacio proyectivo n -dimensional sobre \mathbb{F} , y para $x \in \mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\}$, $[x]$ denotará el elemento correspondiente en $\mathbb{P}\mathbb{F}^{n+1}$. Esta notación no debe confundirse con $Q[x] = x^*Qx$ según la Sección 1.1.

DEFINICIÓN 2.1. El Q -modelo de Klein de $\mathfrak{H}_{\mathbb{F}}^n$, está determinado por

$$(2.5) \quad \mathbb{H}_{\mathbb{F}}^n(Q) = \{[x] \in \mathbb{P}\mathbb{F}^{n+1} : x \in \mathbb{F}^{n+1} \text{ y } Q[x] < 0\},$$

con la distancia entre dos puntos $[x], [y] \in \mathbb{H}_{\mathbb{F}}^n(Q)$ dada por

$$(2.6) \quad \cosh(d([x], [y])) = \frac{|Q(x, y)|}{|Q[x]|^{\frac{1}{2}}|Q[y]|^{\frac{1}{2}}}.$$

Para más detalles, como la descripción del elemento de línea ds^2 , ver [Mo, §19], o [EGM1, §1.5] para el caso $n = 3$.

El grupo $U(Q, \mathbb{F})$ definido en (1.1) actúa en $\mathbb{H}_{\mathbb{F}}^n(Q)$ de la siguiente manera: si $g \in U(Q, \mathbb{F})$,

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_{\mathbb{F}}^n(Q) &\longrightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{F}}^n(Q), \\ [x] &\longmapsto g([x]) = [gx]. \end{aligned}$$

Por (2.6), la acción resulta ser una isometría. Más aún, las siguientes sucesiones son exactas:

$$\begin{aligned} \{1\} &\longrightarrow Z(U(Q, \mathbb{F})) \longrightarrow U(Q, \mathbb{F}) \longrightarrow \text{Iso}(\mathbb{H}_{\mathbb{F}}^n(Q)) \longrightarrow \{1\}, \\ \{1\} &\longrightarrow Z(\text{SU}(Q, \mathbb{F})) \longrightarrow \text{SU}(Q, \mathbb{F}) \longrightarrow \text{Iso}^+(\mathbb{H}_{\mathbb{F}}^n(Q)) \longrightarrow \{1\}. \end{aligned}$$

Sea $e_{n+1} = (0, \dots, 0, 1)^t \in \mathbb{F}^{n+1}$. Luego, $[e_{n+1}] \in \mathbb{H}_{\mathbb{F}}^n(Q)$ pues $Q[e_{n+1}] = -b < 0$. La estructura de espacio simétrico de $\mathbb{H}_{\mathbb{F}}^n(Q)$ puede verse como

$$U(Q, \mathbb{F})_{[e_{n+1}]} \setminus U(Q, \mathbb{F}),$$

donde $U(Q, \mathbb{F})_{[e_{n+1}]}$ denota el subgrupo de $U(Q, \mathbb{F})$ estabilizado por $[e_{n+1}]$. Más precisamente,

$$\begin{aligned} U(Q, \mathbb{F})_{[e_{n+1}]} &= \left\{ \begin{pmatrix} g_0 & \\ & c \end{pmatrix} : g_0 \in U(A, \mathbb{F}), |c| = 1 \right\} \\ &\cong U(A, \mathbb{F}) \times U(1, \mathbb{F}). \end{aligned}$$

Consideremos $\Gamma = U(Q, \mathbb{F}) \cap M(n+1; \mathcal{O})$, el cual es un subgrupo discreto de $U(Q, \mathbb{F})$.

A partir de ahora comenzaremos a aplicar lo introducido en esta sección a nuestro problema. Por el momento consideremos $\ell \in \mathbb{Z}$ arbitrario. Si $g \in \Gamma$ y $x \in \mathcal{R}(Q, \ell)$, entonces $gx \in \mathcal{R}(Q, \ell)$, ya que $gx \in \mathcal{O}^{n+1}$ y

$$Q[gx] = x^*g^*Qgx = x^*Qx = Q[x] = \ell.$$

Luego, el grupo Γ actúa por multiplicación a izquierda en $\mathcal{R}(Q, \ell)$.

LEMA 2.2. *El conjunto $\mathcal{R}(Q, \ell)$ tiene una cantidad finita de Γ -órbitas.*

DEMOSTRACIÓN. Resulta como una aplicación del Teorema 6.9 de [BHC], el cual dice lo siguiente.

TEOREMA 2.3 (Borel y Harish-Chandra). *Sea G un grupo algebraico reductivo definido sobre \mathbb{Q} , $\pi : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ una representación racional definida sobre \mathbb{Q} , L un lattice en $V_{\mathbb{Q}}$ invariante por $G_{\mathbb{Z}}$, y X una órbita cerrada de G . Entonces $X \cap L$ consiste de un número finito de órbitas de $G_{\mathbb{Z}}$.*

Para nuestro caso tomemos $G = \mathrm{U}(Q, \mathbb{F})$ y $V = \mathbb{R}^{\vartheta(n+1)}$ donde $\vartheta = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F}$. Consideremos la inclusión $\mathbb{F}^{n+1} \hookrightarrow V$ inducida por la inclusión canónica de $\mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{R}^{\vartheta}$, y la estructura racional $V_{\mathbb{Q}}$ de V tal que la imagen L de \mathcal{O}_K^{n+1} es un lattice en $V_{\mathbb{Q}}$. Sea $\pi : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ la inclusión canónica y X la imagen del conjunto $\{x \in \mathbb{F}^{n+1} : Q[x] = \ell\}$ en V . Entonces se cumplen todas las hipótesis, por lo tanto $X \cap L$ tiene un número finito de órbitas de $G_{\mathbb{Z}} = \Gamma$, lo cual prueba el lema pues $X \cap L$ corresponde a $\mathcal{R}(Q, \ell)$ en \mathbb{F}^{n+1} . \square

A partir de ahora fijemos $\ell \in \mathbb{N}$ tal que la forma Q representa a $-\ell$. Sea F un conjunto de representantes de las (finitas) Γ -órbitas de $\mathcal{R}(Q, -\ell)$. Luego, para cada $x \in \mathcal{R}(Q, -\ell)$ existen $y \in F$ y $g \in \Gamma$ tales que $gy = x$. Notemos que $[x], [y] \in \mathbb{H}_{\mathbb{F}}^n(Q)$ pues $Q[x] = Q[y] = -\ell < 0$ y que $g([y]) = [gy] = [x]$. Esto implica

$$(2.7) \quad \cosh d([e_{n+1}], g([y])) = \frac{|Q(e_{n+1}, x)|}{|Q[e_{n+1}]|^{1/2} |Q[x]|^{1/2}} = \frac{|x_{n+1}| b^{1/2}}{\ell^{1/2}},$$

donde $x = (x_1, \dots, x_{n+1})^t \in \mathcal{O}^{n+1}$.

Fijemos $t > 0$ y tomemos $r > 0$ tal que $\cosh(r) = \ell^{-\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} t$. La ecuación (2.7) nos dice que

$$|x_{n+1}| \leq t \quad \iff \quad d([e_{n+1}], g([y])) \leq r,$$

lo que implica que

$$\mathcal{R}_t(Q, -\ell) = \bigcup_{y \in F} \{gy : g \in \Gamma, d([e_{n+1}], g([y])) \leq r\}.$$

Para $y \in \mathcal{O}^{n+1}$, sea $\Gamma_y = \{g \in \Gamma : gy = y\}$ el *estabilizador de y en Γ* . Ahora estamos en condiciones de formular el teorema principal de esta sección sobre el cardinal de este conjunto.

TEOREMA 2.4. *Sea $Q \in \mathrm{M}(n+1; \mathcal{O})$ hermítica de signatura $(n, 1)$ de la forma (2.1), y sean $t > 0$ y $\ell \in \mathbb{N}$ tal que Q representa a $-\ell$. El número $r_t(Q, -\ell)$ de elementos $x \in \mathcal{O}^{n+1}$ tales que $Q[x] = -\ell$ y $|x_{n+1}| \leq t$ está dado por*

$$(2.8) \quad r_t(Q, -\ell) = \sum_{y \in F} |\Gamma_y|^{-1} |\{g \in \Gamma : d([e_{n+1}], g([y])) \leq r\}|,$$

donde $r = \operatorname{arccosh}(\ell^{-\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} t)$.

2.2. Teorema de puntos reticulares

El objetivo en esta sección es introducir los teoremas de puntos reticulares que luego aplicaremos a la fórmula (2.8). Para Λ subgrupo discreto de $\text{Iso}^+(\mathbb{H}_{\mathbb{F}}^n(Q))$ de covolumen finito, estos teoremas dan fórmulas asintóticas de

$$(2.9) \quad N([x], [y]; r) = \# \{g \in \Lambda : d([x], g([y])) \leq r\},$$

para $r \rightarrow \infty$. Primero necesitamos introducir cierta notación. Sea

$$-\Delta : C_0^\infty(\Lambda \backslash \mathbb{H}_{\mathbb{F}}^n(Q)) \longrightarrow L^2(\Lambda \backslash \mathbb{H}_{\mathbb{F}}^n(Q))$$

el Laplaciano sobre $\mathbb{H}_{\mathbb{F}}^n(Q)$. Identificaremos $-\Delta$ con el elemento de Casimir de $\text{SU}(Q, \mathbb{F})_0$, la componente conexa de $\text{SU}(Q, \mathbb{F})$. Sean $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_N$ ($N \geq 0$) los autovalores excepcionales (contados con multiplicidad) del operador de Casimir con correspondientes autofunciones ortonormales $\varphi_1, \dots, \varphi_N$. Denotamos por 2ρ a la suma de las raíces positivas del grupo de Lie $\text{SU}(Q, \mathbb{F})_0$, más precisamente, $\rho = (n-1)/2, n, 2n+1$ para $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ respectivamente. Definimos

$$(2.10) \quad \nu_j = \sqrt{\rho^2 - \lambda_j}$$

lo que implica $0 < \nu_N \leq \nu_{N-1} \leq \dots \leq \nu_1 < \rho$. Sea $c(\nu)$ la c -función de Harish-Chandra y $\zeta = \text{Vol}(K/M)$ donde K es el subgrupo compacto maximal de $\text{SU}(Q, \mathbb{F})$ y M es el centralizador de A en K , donde $\text{SU}(Q, \mathbb{F}) = NAK$ es una descomposición de Iwasawa. En el caso real, tenemos que $\zeta = \text{Vol}(S^{n-1}) = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$, donde S^{n-1} denota la esfera $(n-1)$ -dimensional de radio 1 y $\Gamma(\cdot)$ la función Gama.

El siguiente teorema trata el caso $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$, y fue probado en [LP] por P. Lax y R. Phillips en 1982 y mejorado el término del error en [Le] por B. M. Levitan en 1987.

TEOREMA 2.5 (Lax y Phillips [LP]; Levitan [Le]). *Asumiendo la notación de arriba, para $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ resulta*

$$(2.11) \quad N([x], [y]; r) = \frac{2^{-(n-1)} \text{Vol}(S^{n-1})}{(n-1) \text{Vol}(\Lambda \backslash \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n(Q))} e^{(n-1)r} + \\ + \pi^{\frac{n-1}{2}} \sum_{j=1}^N \frac{\Gamma(\nu_j)}{\Gamma(\frac{n-1}{2} + \nu_j + 1)} \varphi_j([x]) \overline{\varphi_j([y])} e^{(\frac{n-1}{2} + \nu_j)r} + O\left(e^{rn \frac{n-1}{n+1}}\right),$$

cuando $r \rightarrow \infty$ (notar que aquí Γ corresponde a la función Gama).

En el año 1999, Bruggeman, Miatello y Wallach, en [BMW], generalizaron el teorema anterior a todos los espacios simétricos de rango real uno.

TEOREMA 2.6 (Bruggeman, Miatello y Wallach [BMW]). *Asumiendo la notación de arriba, para $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ o \mathbb{H} , resulta*

$$(2.12) \quad N([x], [y]; r) = \frac{2^{-(n-1)} \zeta}{2\rho \text{Vol}(\Lambda \backslash \mathbb{H}_{\mathbb{F}}^n(Q))} e^{2\rho r} + \\ + 2^{1-n} \zeta \sum_{j=1}^N \frac{c(\nu_j)}{\nu_j + \rho} \varphi_j([x]) \varphi_j([y]) e^{(\rho + \nu_j)r} + O\left(e^{r(2\rho \frac{n}{n+1} + \epsilon)}\right),$$

cuando $r \rightarrow \infty$, para todo $\epsilon > 0$.

Los términos principales en las fórmulas (2.11) y (2.12) coinciden cuando $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, tal como se muestra en [BMW, Remark 4.2]. Más aún, en el término del error la única diferencia es la letra ϵ en (2.12) que no está en (2.11).

En [BMW, Remark 4.2(iii)] explica que (2.12) es invariante por diferentes múltiplos positivos de la métrica Riemanniana.

Son inútiles debido al error los términos de la suma sobre j en (2.11) tales que

$$\frac{n-1}{2} + \nu_j \leq n \frac{n-1}{n+1} \quad \left(\iff \nu_j \leq \frac{(n-1)^2}{2(n+1)} \right).$$

Lo mismo ocurre con los términos en (2.12) tales que

$$\rho + \nu_j < 2\rho \frac{n}{n+1} \quad \left(\iff \nu_j < \rho \frac{n-1}{n+1} \right).$$

Nuestra intención es abreviar estas fórmulas, permitiendo que el error crezca hasta el punto en que sólo quede el término principal. Sea $\tau_{\mathbb{F}}$ definido como

$$(2.13) \quad \tau = \begin{cases} \frac{n-1}{2} + \nu_1 & \text{si } \nu_1 \geq \frac{(n-1)^2}{2(n+1)} \text{ y } \mathbb{F} = \mathbb{R}, \\ \rho + \nu_1 & \text{si } \nu_1 \geq \rho \frac{n-1}{n+1} \text{ y } \mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{H}, \\ 2\rho \frac{n}{n+1} + \epsilon & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

donde ϵ es cero si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o cualquier valor positivo si $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Cuando decimos “en caso contrario” incluye el caso en que ν_1 no exista, es decir, no haya autovalores excepcionales. Abreviaremos τ en lugar de $\tau_{\mathbb{F}}$ cuando no haya lugar a confusión.

Luego, las fórmulas (2.11) y (2.12) se reducen a

$$(2.14) \quad N([x], [y]; r) = \frac{2^{-(n-1)} \zeta}{2\rho \text{Vol}(\Lambda \backslash \mathbb{H}_{\mathbb{F}}^n(Q))} e^{2\rho r} + O(e^{r\tau}),$$

Podemos ver en (2.13) que el error en (2.14) depende del primer autovalor no nulo de Λ . No existen muchas acotaciones inferiores de λ_1 , y las que existen son para el caso real. El siguiente teorema fue probado por J. Cogdell, J.-S. Li, I. Piatetski-Shapiro y P. Sarnak en [CLPS], e independientemente por J. Elstrodt, F. Grunewald y J. Mennicke en [EGM2].

TEOREMA 2.7. *Sea Q dada por (2.1) con $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. El primer autovalor no nulo de $-\Delta$ sobre $\Gamma \backslash \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ cumple*

$$\lambda_1 \geq \frac{2n-3}{4},$$

para todo $n > 2$.

Existen muchos resultados para el caso real de dimensión dos, pero nosotros no los usaremos en este trabajo ya que nuestros resultados valen para $n > 3$.

OBSERVACIÓN 2.8. Bajo las hipótesis del teorema anterior, aplicándolo a (2.10), tenemos que

$$\nu_1 \leq \sqrt{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 - \frac{2n-3}{4}} = \frac{n-2}{2}.$$

Más aún, en el pero de los casos, si $\nu_1 = \frac{n-2}{2}$, tenemos que ν_1 cumple con la condición de (2.13) para todo $n \geq 3$, lo cual implica que (2.14) vale para $\tau = n - 3/2$.

Ahora procedemos a aplicar lo visto en la sección hasta ahora, con el objetivo de precisar una fórmula para $r_t(Q, -\ell)$, esto es, aplicar (2.14) a (2.8). Sea $\Gamma_0 = \text{SU}(Q, \mathbb{F})_0 \cap \text{M}(n+1; \mathcal{O})$. Denotemos por $\kappa = \kappa_Q$ a la cantidad finita de Γ_0 -coclasas de Γ . Tomemos $\{g_1, \dots, g_\kappa\}$ un conjunto de representantes de Γ/Γ_0 . Luego, (2.14) aplicada al par de puntos $[e_{n+1}]$ y $g_j([y]) = [g_j y]$, nos dice que

$$\#\{g \in \Gamma_0 : d([e_{n+1}], g([g_j y])) \leq r\} = \frac{2^{-(n-1)}\zeta}{2\rho \text{Vol}(\Gamma_0 \backslash \mathbb{H}_{\mathbb{F}}^n(Q))} e^{2\rho r} + O(e^{r\tau}).$$

Sumando en $1 \leq j \leq \kappa$, sabiendo que $\text{Vol}(\Gamma_0 \backslash \mathbb{H}_{\mathbb{F}}^n(Q)) = \kappa \text{Vol}(\Gamma \backslash \mathbb{H}_{\mathbb{F}}^n(Q))$, resulta que

$$\#\{g \in \Gamma : d([e_{n+1}], g([y])) \leq r\} = \frac{2^{-(n-1)}\zeta}{2\rho \text{Vol}(\Gamma \backslash \mathbb{H}_{\mathbb{F}}^n(Q))} e^{2\rho r} + O(e^{r\tau}).$$

Aplicando esta última ecuación a (2.8), resulta

$$(2.15) \quad r_t(Q, -\ell) = \frac{2^{-(n-1)}\zeta}{2\rho \text{Vol}(\Gamma \backslash \mathbb{H}_{\mathbb{F}}^n(Q))} \left(\sum_{y \in F} |\Gamma_y|^{-1} \right) e^{2\rho r} + O(e^{r\tau}).$$

Dado que $e^r \sim 2 \cosh(r) = 2b^{1/2}\ell^{-1/2}t$, podemos reemplazar el error actual por $O(t^\tau)$. Más aún, tenemos que $e^{2\rho r} = 2^{2\rho}b^\rho\ell^{-\rho}t^{2\rho} + O(t^\tau)$, y como el término que acompaña a $e^{2\rho r}$ en el lado derecho de (2.15) no depende de t , resulta que también podemos reemplazar $e^{2\rho r}$ por $2^{2\rho}b^\rho\ell^{-\rho}t^{2\rho}$. Esto prueba el siguiente teorema.

TEOREMA 2.9. *Sea $Q \in \text{M}(n+1; \mathcal{O})$ hermítica de signatura $(n, 1)$ de la forma (2.1), y sean $t > 0$ y $\ell \in \mathbb{N}$ tal que Q representa a $-\ell$. El número $r_t(Q, -\ell)$ de elementos $x \in \mathcal{O}^{n+1}$ tales que $Q[x] = -\ell$ y $|x_{n+1}| \leq t$, está dado por*

$$(2.16) \quad r_t(Q, -\ell) = \frac{2^{2\rho-(n-1)}b^\rho\zeta}{2\rho\ell^\rho \text{Vol}(\Gamma \backslash \mathbb{H}_{\mathbb{F}}^n(Q))} \left(\sum_{y \in F} |\Gamma_y|^{-1} \right) t^{2\rho} + O(t^\tau),$$

donde τ está dado por (2.13). En el caso $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ y $n > 2$, vale para $\tau = n - \frac{3}{2}$.

2.3. Masa de la representación

El término $\sum_{y \in F} |\Gamma_y|^{-1}$ en (2.16) es llamado *la masa de la representación* $Q[x] = -\ell$. Calcular este número es el objetivo de esta sección. Lamentablemente nos tendremos que restringir al caso $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ por no tener conocimientos de la existencia de trabajos análogos al de Siegel en los casos hermíticos.

Nuestra referencia principal será [Si2, Ch. IV] de C. L. Siegel, la cual desarrolla la teoría de representaciones de enteros por formas cuadráticas enteras indefinidas, generalizando el número de representaciones de una forma cuadrática entera definida positiva *a la medida del grupo de unidades de* Γ .

Escogemos $v \in \mathbb{R}^n$ y $R \in M((n+1) \times n; \mathbb{R})$ tales que la matriz

$$W = \begin{pmatrix} -\ell & v \\ v^t & R \end{pmatrix}$$

tiene signatura $(n, 1)$. Para $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $Q[y] = -\ell$, denotemos por $U(Q, \mathbb{R})_y$ al subgrupo de elementos $U \in U(Q, \mathbb{R})$ tal que $Uy = y$. Notemos que el estabilizador de y en Γ es $\Gamma_y = U(Q, \mathbb{R})_y \cap GL(n+1, \mathbb{Z})$. Consideremos las superficies

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(Q, W) &= \{X \in M(n+1; \mathbb{R}) : Q[X] = W\}, \\ \mathcal{S}^*(Q, W, y) &= \{X = (y | Y) \in M(n+1; \mathbb{R}) : Q[X] = W\}. \end{aligned}$$

El grupo $U(Q, \mathbb{R})$ actúa por multiplicación a izquierda sobre $\mathcal{S}(Q, W)$, al igual que el grupo $U(Q, \mathbb{R})_y$ sobre $\mathcal{S}^*(Q, W, y)$. Tomamos un elemento de volumen $d\omega$ en $\mathcal{S}(Q, W)$ tal que $|\det(WQ^{-1})|^{1/2} d\omega$ es invariante por $U(Q, \mathbb{R})$. Análogamente tomamos $d\omega^*$ en $\mathcal{S}^*(Q, W, y)$, donde $|\det(WQ^{-1})|^{1/2} d\omega^*$ es invariante por $U(Q, \mathbb{R})_y$ (ver la primera página de [Si1] o [Si2, Ch IV §5, §6]).

Siegel, en [Si1], define *la medida de la representación de* $-\ell \in \mathbb{Z}$ *por* Q como

$$(2.17) \quad \mu(Q, -\ell) = \sum_{y \in F} \frac{\text{Vol}(\Gamma_y \backslash \mathcal{S}^*(Q, W, y))}{\text{Vol}(\Gamma \backslash \mathcal{S}(Q, W))}.$$

Llamemos $\mathcal{A}_q(Q, -\ell)$ ($q \in \mathbb{N}$) al número de soluciones enteras, incongruentes módulo q , de la ecuación $Q[x] \equiv -\ell \pmod{q}$; más precisamente

$$\mathcal{A}_q(Q, -\ell) = \#\{x \in \mathbb{Z}^{n+1} \pmod{q} : Q[x] \equiv -\ell \pmod{q}\}.$$

Para un número primo positivo p , definimos la *densidad p -ádica local* de la representación de $-\ell$ por Q , como

$$(2.18) \quad \delta_p(Q, -\ell) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{A}_{p^j}(Q, -\ell)}{p^{nj}},$$

donde j recorre los números naturales.

El siguiente teorema es llamado *la fórmula de la masa (o peso) de Siegel* (ver [Si1, Theorem 1]).

TEOREMA 2.10. *Si* $n > 3$ *entonces*

$$(2.19) \quad \mu(Q, -\ell) = \prod_p \delta_p(Q, -\ell),$$

donde p recorre el conjunto de los número primos.

Ahora comenzaremos a aplicar esta teoría a nuestro trabajo, asumiendo que $n > 3$. Necesitamos obtener a partir del Teorema 2.10 el valor del término $\sum_{y \in F} |\Gamma_y|^{-1}$.

Por [Si2, Ch IV, Thm 7] resulta

$$(2.20) \quad \text{Vol}(\Gamma \backslash \mathcal{S}(Q, W)) = \frac{\text{Vol}(\Gamma \backslash \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n(Q))}{|\det Q|^{(n+1)/2}} \prod_{j=1}^n \frac{\pi^{j/2}}{\Gamma(j/2)}.$$

Sea $\mathcal{F}(y)$ un dominio fundamental de la acción de Γ_y sobre $\mathcal{S}^*(Q, W, y)$. Por definición

$$\text{Vol}(\Gamma_y \backslash \mathcal{S}^*(Q, W, y)) = \left| \frac{\det W}{\det Q} \right|^{1/2} \int_{\mathcal{F}(y)} d\omega^*,$$

pero la medida sobre $\mathcal{S}^*(Q, W, y)$ es Γ_y -invariante, por lo que

$$\text{Vol}(\Gamma_y \backslash \mathcal{S}^*(Q, W, y)) = \frac{1}{|\Gamma_y|} \left| \frac{\det W}{\det Q} \right|^{1/2} \int_{\mathcal{S}^*(Q, W, y)} d\omega^*.$$

El Teorema 6 de [Si2] nos dice que

$$\int_{\mathcal{S}^*(Q, W, y)} d\omega^* = |\det Q|^{-n/2} \ell^{-(n-1)/2} |\det W|^{-1/2} \prod_{j=1}^n \frac{\pi^{j/2}}{\Gamma(j/2)}.$$

De esta forma, tenemos que

$$(2.21) \quad \text{Vol}(\Gamma_y \backslash \mathcal{S}^*(Q, W, y)) = \frac{1}{|\Gamma_y| |\det Q|^{(n+1)/2} \ell^{(n-1)/2}} \prod_{j=1}^n \frac{\pi^{j/2}}{\Gamma(j/2)}.$$

Reemplazando (2.20) y (2.21) dentro de (2.17), obtenemos que

$$\mu(Q, -\ell) = \frac{1}{\ell^{\frac{n-1}{2}} \text{Vol}(\Gamma \backslash \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n(Q))} \sum_{y \in F} |\Gamma_y|^{-1}.$$

Ahora podemos obtener una fórmula para el término $\sum_{y \in F} |\Gamma_y|^{-1}$. Reemplazándolo en (2.16), recordando que el caso real tenemos que $2\rho = n - 1$ y $\zeta = \text{Vol}(\Gamma \backslash \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n(Q))$, obtenemos el siguiente teorema.

TEOREMA 2.11. *Sea $Q \in \mathbb{M}(n+1; \mathbb{Z})$ simétrica de signatura $(n, 1)$ de la forma (2.1) con $n > 3$, y sean $t > 0$ y $\ell \in \mathbb{N}$ tal que Q representa a $-\ell$. El número $r_t(Q, -\ell)$ de elementos $x \in \mathbb{Z}^{n+1}$ tales que $Q[x] = -\ell$ y $|x_{n+1}| \leq t$, está dado por*

$$(2.22) \quad r_t(Q, -\ell) = \frac{b^{\frac{n-1}{2}} \text{Vol}(S^{n-1})}{n-1} \left(\prod_p \delta_p(Q, -\ell) \right) t^{n-1} + O(t^\tau),$$

donde τ está dado por (2.13). Además (2.22) también vale para $\tau = n - \frac{3}{2}$.

Vemos que este resultado coincide con [RT, Theorem 3] para el caso particular de $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ y $Q = I_{n,1}$ ($\because b = 1$), para $n > 3$. Ellos siguieron trabajando con esta fórmula, calculando explícitamente el término $\prod \delta_p(I_{n,1}, -\ell)$ en su caso particular, escribiéndolo de una manera elegante usando *Series L de Dirichlet*. En nuestro caso, debido a la generalidad de la forma Q , daremos sólo un método para calcular cada término $\delta_p(Q, -\ell)$, y veremos algunos ejemplos.

2.4. Densidades locales

En esta sección pretendemos calcular explícitamente $\delta_p(Q, -\ell)$, la densidad p -ádica local dada por (2.18), incluido en la fórmula del Teorema 2.11, y así terminar de dar una fórmula explícita para $r_t(Q, -\ell)$ en el caso $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Para esto haremos uso del trabajo [Ya] de T. Yang, que calcula estos términos.

Asumiremos que para cada p primo, la matriz $p^{-1}Q$ no es entera, esto es, que $p^{-1}Q[x]$ no siempre es entero para $x \in \mathbb{Z}^{n+1}$. Escribamos $-\ell = \alpha p^a$ con $a \in \mathbb{N}_0$ y $\alpha \in \mathbb{Z}$ no divisible por p .

Recordemos que \mathbb{Q}_p y \mathbb{Z}_p denotan al cuerpo y a los enteros p -ádicos respectivamente. Además, $\left(\frac{a}{b}\right)$ denotará el símbolo de Hilbert.

2.4.1. Caso $p > 2$. Podemos asumir que la matriz Q es \mathbb{Z}_p -equivalente a una matriz de la forma

$$(2.23) \quad \text{diag}(\varepsilon_1 p^{l_1}, \dots, \varepsilon_{n+1} p^{l_{n+1}})$$

tales que ε_i sean coprimos a p y que $0 = l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_{n+1}$. Para cada $k \geq 0$, consideraremos

$$\begin{aligned} H(k) &= \{1 \leq i \leq n+1 : l_i - k < 0 \text{ es impar}\}, \\ h(k) &= \#H(k), \\ d_k &= k + \frac{1}{2} \sum_{l_i < k} (l_i - k), \\ v_k &= \left(\frac{-1}{p}\right)^{[h(k)/2]} \prod_{i \in H(k)} \left(\frac{\varepsilon_i}{p}\right), \\ f_k &= \begin{cases} -\frac{1}{p} & \text{si } h(k) \text{ es par,} \\ \left(\frac{\alpha}{p}\right) \frac{1}{\sqrt{p}} & \text{si } h(k) \text{ es impar.} \end{cases} \end{aligned}$$

Ahora estamos en condiciones de enunciar el Teorema que usaremos en esta sección. Éste es una adaptación a nuestro caso de [Ya, Thm. 3.1].

TEOREMA 2.12 (Yang [Ya]). *Bajo la notación introducida recién, tenemos*

$$(2.24) \quad \delta_p(Q, -\ell) = 1 + (1 - p^{-1}) \sum_{\substack{0 < k \leq a \\ h(k) \text{ es par}}} v_k p^{d_k} + v_{a+1} f_{a+1} p^{d_{a+1}}.$$

2.4.2. Caso $p = 2$. Por [Ca, Lemma 8.4.1], una matriz simétrica no singular S sobre \mathbb{Q}_2 es \mathbb{Z}_2 -equivalente a una matriz de la forma

$$(2.25) \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_1 2^{l_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_L 2^{l_L} \end{pmatrix} \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^M \varepsilon'_i 2^{m_i} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^N \varepsilon''_j 2^{n_j} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \right),$$

donde $\varepsilon_h, \varepsilon'_i, \varepsilon''_j \in \mathbb{Z}_2^*$, l_h, m_i y n_j son todos enteros. Tal como supusimos al comenzar la sección, es necesario que el menor entero de l_h, m_i y n_j sea

cero. Notemos que $L + 2M + 2N = n + 1$. La forma cuadrática inducida por (2.25) es

$$Q[x] = \sum_{h=1}^L \varepsilon_h 2^{l_h} x_h^2 + \sum_{i=1}^M \varepsilon'_i 2^{m_i} y_{i,1} y_{i,2} + \sum_{j=1}^N \varepsilon''_j 2^{n_j} (z_{j,1}^2 + z_{j,1} z_{j,2} + z_{j,2}^2),$$

para

$$x = (x_1, \dots, x_L, y_{1,1}, y_{1,2}, \dots, y_{M,1}, y_{M,2}, z_{1,1}, z_{1,2}, \dots, z_{N,1}, z_{N,2})^t \in \mathbb{Z}_2^{n+1}.$$

Para cada $k > 0$, consideraremos

$$\begin{aligned} H(k) &= \{1 \leq h \leq L : l_h - k < 0 \text{ es impar}\}, \\ h(k) &= \#H(k), \\ p_k &= (-1)^{\sum_{n_j < k} (n_j - k)}, \\ \varepsilon(k) &= \prod_{h \in H(k-1)} \varepsilon_h, \\ d_k &= k + \frac{1}{2} \sum_{l_h < k-1} (l_h - k + 1) + \sum_{m_i < k} (m_i - k) + \sum_{n_j < k} (n_j - k), \\ \gamma_k &= \begin{cases} 0 & \text{si } l_h = k - 1 \text{ para algún } h, \\ 1 & \text{caso contrario,} \end{cases} \\ \mu_k &= \alpha 2^{a-k+3} - \sum_{l_h < k-1} \varepsilon_h. \end{aligned}$$

Además se tiene

$$\left(\frac{2}{x}\right) = \begin{cases} (2, x)_2 & \text{si } x \in \mathbb{Z}_2^*, \\ 0 & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

ψ es el carácter ‘canónico’ $x \mapsto e^{-2\pi i \lambda(x)}$ de \mathbb{Q}_2 , donde $\lambda : \mathbb{Q}_2 \rightarrow \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}_2 \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, y χ_C es la función característica del conjunto C .

Con esta notación podemos enunciar el siguiente teorema, que es una adaptación a nuestro caso de [Ya, Thm. 4.1].

TEOREMA 2.13 (Yang [Ya]). *Bajo la notación introducida recién, tenemos*

$$(2.26) \quad \delta_2(Q, -\ell) = 1 + \sum_{\substack{0 < k \leq a+3 \\ h(k-1) \text{ es impar}}} \gamma_k p_k \left(\frac{2}{\mu_k \varepsilon(k)}\right) 2^{d_k - 3/2} \\ + \sum_{\substack{0 < k \leq a+3 \\ h(k-1) \text{ es par}}} \gamma_k p_k \left(\frac{2}{\varepsilon(k)}\right) 2^{d_k - 1} \psi\left(\frac{\mu_k}{8}\right) \chi_{4\mathbb{Z}_2}(\mu_k).$$

2.4.3. Aplicación. Estamos en condiciones de resumir lo visto en esta sección.

TEOREMA 2.14. *Sea $Q \in M(n; \mathbb{Z})$ simétrica de signatura $(n, 1)$ de la forma (2.1) con $n > 3$ tal que $p^{-1}Q$ no es entera para todo p primo, y sean $t > 0$ y $\ell \in \mathbb{N}$ tal que Q representa a $-\ell$. El número $r_t(Q, -\ell)$ de elementos*

$x \in \mathbb{Z}^{n+1}$ tales que $Q[x] = -\ell$ y $|x_{n+1}| \leq t$, está dado por

$$(2.27) \quad r_t(Q, -\ell) = \frac{b^{\frac{n-1}{2}} \text{Vol}(S^{n-1})}{n-1} \left(\prod_p \delta_p(Q, -\ell) \right) t^{n-1} + O(t^\tau),$$

donde τ está dado por (2.13) y $\delta_p(Q, -\ell)$ está dado por (2.24) y (2.26) según corresponda. Además (2.27) también vale para $\tau = n - \frac{3}{2}$.

2.5. Ejemplos

En esta última sección aplicaremos nuestras fórmulas a ejemplos concretos. Comenzaremos con la forma cuadrática Lorentziana $I_{n,1}$, la cual fue estudiada en [RT]. Veremos que nuestros resultados coinciden con estos, y además trabajaremos con otras formas cuadráticas con sólo un poco más de trabajo.

2.5.1. Forma Lorentziana. Tomemos

$$(2.28) \quad Q = I_{n,1} = \begin{pmatrix} I_n & \\ & -1 \end{pmatrix}.$$

En este caso tenemos que $b = 1$ en (2.27). El único término que no conocemos es el producto de las densidades p -ádicas locales. Comencemos a calcular la p -densidad local para $p > 2$.

Supongamos que p es un primo impar. Aquí, según (2.23), tenemos que $\varepsilon_i = 1$ para todo $1 \leq i \leq n$, $\varepsilon_{n+1} = -1$ y $l_i = 0$ para todo i . Luego tenemos que

$$H(k) = \begin{cases} \llbracket 1, n+1 \rrbracket & \text{si } k \text{ es impar,} \\ \emptyset & \text{si } k \text{ es par,} \end{cases} \quad \text{y} \quad h(k) = \begin{cases} n+1 & \text{si } k \text{ es impar,} \\ 0 & \text{si } k \text{ es par,} \end{cases}$$

Esto implica que

$$d_k = \frac{1-n}{2} k \quad \text{y} \quad v_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ es par,} \\ \left(\frac{-1}{p}\right)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1} & \text{si } k \text{ es impar.} \end{cases}$$

Para simplificar la fórmula (2.24), debemos separar en casos dependiendo la paridad de n . Usemos la siguiente notación, recordando que $-\ell = \alpha p^a$, con α y p coprimos:

$$\sigma = \begin{cases} \left(\frac{(-1)^{(n-1)/2}}{p}\right) & \text{si } n \text{ es impar,} \\ \left(\frac{(-1)^{(n-2)/2}\alpha}{p}\right) & \text{si } n \text{ es par,} \end{cases} \quad \text{y} \quad r = \begin{cases} p^{-((n-1)/2)} & \text{si } n \text{ es impar,} \\ p^{-(n-1)} & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Sea n impar. Se prueba que $p^{d_k} = r^k$ y $v_k = \sigma^k$ para todo k . Notemos que $h(k)$ es par para todo k , así $f_k = -1/p$, y por (2.24) tenemos que

$$(2.29) \quad \begin{aligned} \delta_p(I_{n,1}, -\ell) &= 1 + (1 + p^{-1}) \sum_{k=1}^a \sigma^k r^k - \frac{\sigma^{a+1} r^{a+1}}{p} \\ &= \sum_{k=0}^a (\sigma r)^k - \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{a+1} (\sigma r)^k \\ &= \frac{(\sigma r)^{a+1} - 1}{\sigma r - 1} \left(1 - \frac{\sigma r}{p}\right). \end{aligned}$$

Sea n par. Se prueba que $p^{d_k} = r^{\frac{k}{2}}$ y que

$$v_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ es par,} \\ \left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{n+1}{2}} & \text{si } k \text{ es impar.} \end{cases}$$

En este caso vale que $h(k)$ es par si y sólo si k es par. Luego (2.24) implica que

$$\delta_p(I_{n,1}, -\ell) = 1 + (1 + p^{-1}) \sum_{\substack{0 < k \leq a \\ k \text{ par}}} r^{\frac{k}{2}} + v_{a+1} f_{a+1} r^{\frac{a+1}{2}}.$$

Pero se puede comprobar que

$$v_{a+1} f_{a+1} r^{\frac{a+1}{2}} = \begin{cases} -r^{\frac{a+1}{2}}/p & \text{si } a \text{ es impar,} \\ \sigma r^{\frac{a+1}{2}}/p^{1/2} & \text{si } a \text{ es par.} \end{cases}$$

Entonces, si a es impar tenemos que

$$\begin{aligned} (2.30) \quad \delta_p(I_{n,1}, -\ell) &= 1 + (1 + p^{-1}) \sum_{j=1}^{\frac{a-1}{2}} r^j - r^{\frac{a+1}{2}}/p \\ &= \sum_{j=0}^{\frac{a-1}{2}} r^j - \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{\frac{a+1}{2}} r^j \\ &= \frac{r^{\frac{a+1}{2}} - 1}{r - 1} \left(1 - \frac{r}{p}\right) \\ &= \frac{r^{\frac{a+1}{2}} - 1}{r - 1} (1 - p^{-n}), \end{aligned}$$

y si a es par tenemos que

$$\begin{aligned} (2.31) \quad \delta_p(I_{n,1}, -\ell) &= 1 + (1 + p^{-1}) \sum_{j=1}^{\frac{a}{2}} r^j + \frac{\sigma}{p^{\frac{1}{2}}} r^{\frac{a+1}{2}} \\ &= r^{\frac{a}{2}} + \sum_{j=0}^{\frac{a}{2}-1} r^j - \frac{1}{p} \left(\sum_{j=1}^{\frac{a}{2}} r^j - \sigma p^{\frac{1}{2}} r^{\frac{a+1}{2}} \right) \\ &= r^{\frac{a}{2}} + \frac{r^{\frac{a}{2}} - 1}{r - 1} - \frac{1}{p} \left(r \frac{r^{\frac{a}{2}} - 1}{r - 1} - \sigma p^{\frac{1}{2}} r^{\frac{a+1}{2}} \right) \\ &= \frac{r^{\frac{a}{2}} - 1}{r - 1} \left(1 - \frac{r}{p}\right) + r^{\frac{a}{2}} \left(1 + \frac{\sigma}{p^{\frac{1}{2}}} r^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= \frac{r^{\frac{a}{2}} - 1}{r - 1} (1 - p^{-n}) + r^{\frac{a}{2}} \left(1 + \sigma p^{\frac{-n}{2}}\right). \end{aligned}$$

Estas densidades ya habían sido calculadas por Siegel (ver [RT, Lemma 11]).

Ahora calculemos $\delta_2(I_{n,1}, -\ell)$. Aquí, según (2.25), tenemos que $L = n+1$, $M = N = 0$, $\varepsilon_i = 1$ para todo $1 \leq i \leq n$, $\varepsilon_{n+1} = -1$, y $l_i = 0$ para todo i .

En este caso tenemos que

$$\begin{aligned}
 H(k) &= \begin{cases} \llbracket 1, n+1 \rrbracket & \text{si } k \text{ es impar,} \\ \emptyset & \text{si } k \text{ es par,} \end{cases} & h(k) &= \begin{cases} n+1 & \text{si } k \text{ es impar,} \\ 0 & \text{si } k \text{ es par,} \end{cases} \\
 d_k &= \begin{cases} 1 & \text{si } k = 1, \\ k - \frac{(k-1)(n+1)}{2} & \text{si } k > 1, \end{cases} & \varepsilon(k) &= \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ es impar,} \\ -1 & \text{si } k \text{ es par,} \end{cases} \\
 p_k &= 1 \quad \text{y} & \gamma_k &= \begin{cases} 0 & \text{si } k = 1, \\ 1 & \text{si } k > 1, \end{cases}
 \end{aligned}$$

Supongamos que $-\ell$ no es par. En este caso $a = 0$, y como además $\gamma_1 = 0$, (2.26) implica que

$$\begin{aligned}
 (2.32) \quad \delta_2(I_{n,1}, -\ell) &= 1 + \sum_{\substack{k=2, \\ h(k-1) \text{ impar}}}^3 \left(\frac{2}{(-1)^{k+1} \mu_k} \right) 2^{k - \frac{(k-1)(n+1)}{2} - \frac{3}{2}} \\
 &+ \sum_{\substack{k=2, \\ h(k-1) \text{ par}}}^3 \left(\frac{2}{(-1)^{k+1}} \right) 2^{k - \frac{(k-1)(n+1)}{2} - 1} \psi\left(\frac{\mu_k}{8}\right) \chi_{4\mathbb{Z}_2}(\mu_k) \\
 &= \begin{cases} 1 + \sum_{k=2}^3 2^{-\frac{(k-1)(n-1)}{2}} \psi\left(\frac{\mu_k}{8}\right) \chi_{4\mathbb{Z}_2}(\mu_k) & \text{si } n \text{ es impar,} \\ 1 + \left(\frac{2}{-\mu_2}\right) 2^{-\frac{n}{2}} + 2^{1-n} \psi\left(\frac{\mu_3}{8}\right) \chi_{4\mathbb{Z}_2}(\mu_3) & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Trabajemos con μ_k para seguir calculando (2.32).

$$\mu_k = -2^{3-k} \ell - (n-1) = \begin{cases} -2\ell - (n-1) & \text{si } k = 2, \\ -\ell - (n-1) & \text{si } k = 3, \end{cases}$$

por lo tanto

$$(2.33) \quad \chi_{4\mathbb{Z}_2}(\mu_k) = \begin{cases} \frac{1 + (-1)^{\frac{n-3}{2}}}{2} & \text{si } k = 2 \text{ y } n \text{ impar,} \\ 0 & \text{si } k = 3 \text{ y } n \text{ impar,} \\ \frac{1 + (-1)^{\frac{n+l-1}{2}}}{2} & \text{si } k = 3 \text{ y } n \text{ par.} \end{cases}$$

Reemplazando (2.33) en (2.32), notamos que solamente nos interesa el valor de $\psi(\mu_2/8)$ cuando $n \equiv 3 \pmod{4}$. Similarmente, $\psi(\mu_3/8)$ cuando n es par y $n+l \equiv 1 \pmod{4}$. No es difícil ver que

$$(2.34) \quad \psi(\mu_k) = \begin{cases} (-1)^{\frac{-2\ell-n+1}{4}} & \text{si } k = 2 \text{ y } n \equiv 3 \pmod{4}, \\ (-1)^{\frac{1-(n+l)}{4}} & \text{si } k = 3, n \text{ par y } n+l \equiv 1 \pmod{4}. \end{cases}$$

Sólo resta calcular, cuando n es par, el valor de $\left(\frac{2}{-\mu_2}\right) = (2, -\mu_2)_2$. Usando por ejemplo el Teorema 1 del Capítulo III de [Se], obtenemos rápidamente

que

$$(2.35) \quad \left(\frac{2}{-\mu_2} \right) = \begin{cases} -1 & \text{si } n \equiv 0 \text{ mód } 8, \\ 1 & \text{si } n \equiv 2 \text{ mód } 8, \\ 1 & \text{si } n \equiv 4 \text{ mód } 8, \\ -1 & \text{si } n \equiv 6 \text{ mód } 8. \end{cases}$$

Finalmente, reemplazando en (2.32) los valores de (2.33), (2.34) y (2.35), obtenemos que

$$(2.36) \quad \delta_2(I_{n,1}, -\ell) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 1 \text{ mód } 4, \\ 1 + (-1)^{\frac{-2\ell-n+1}{4}} 2^{-\frac{n-1}{2}} & \text{si } n \equiv 3 \text{ mód } 4, \\ 1 - 2^{-\frac{n}{2}} + (-1)^{\frac{1-(n+\ell)}{4}} 2^{1-n} \omega_{n,\ell} & \text{si } n \equiv 0 \text{ mód } 8, \\ 1 + 2^{-\frac{n}{2}} + (-1)^{\frac{1-(n+\ell)}{4}} 2^{1-n} \omega_{n,\ell} & \text{si } n \equiv 2 \text{ mód } 8, \\ 1 + 2^{-\frac{n}{2}} + (-1)^{\frac{1-(n+\ell)}{4}} 2^{1-n} \omega_{n,\ell} & \text{si } n \equiv 4 \text{ mód } 8, \\ 1 - 2^{-\frac{n}{2}} + (-1)^{\frac{1-(n+\ell)}{4}} 2^{1-n} \omega_{n,\ell} & \text{si } n \equiv 6 \text{ mód } 8, \end{cases}$$

donde

$$\omega_{n,\ell} = \begin{cases} 1 & \text{si } n + \ell \equiv 1 \text{ mód } 4, \\ 0 & \text{si } n + \ell \not\equiv 1 \text{ mód } 4. \end{cases}$$

Finalmente, para este caso donde ℓ es impar, el valor de $\delta_2(I_{n,1}, -\ell)$ está dado por la siguiente tabla.

	1	3	5	7
0	$1 + 2^{-\frac{n}{2}} + 2^{1-n}$	$1 + 2^{-\frac{n}{2}}$	$1 + 2^{-\frac{n}{2}} - 2^{1-n}$	$1 + 2^{-\frac{n}{2}}$
1	1	1	1	1
2	$1 + 2^{-\frac{n}{2}}$	$1 + 2^{-\frac{n}{2}} - 2^{1-n}$	$1 + 2^{-\frac{n}{2}}$	$1 + 2^{-\frac{n}{2}} + 2^{1-n}$
3	$1 - 2^{-\frac{n-1}{2}}$	$1 + 2^{-\frac{n-1}{2}}$	$1 - 2^{-\frac{n-1}{2}}$	$1 + 2^{-\frac{n-1}{2}}$
4	$1 + 2^{-\frac{n}{2}} - 2^{1-n}$	$1 + 2^{-\frac{n}{2}}$	$1 + 2^{-\frac{n}{2}} + 2^{1-n}$	$1 + 2^{-\frac{n}{2}}$
5	1	1	1	1
6	$1 - 2^{-\frac{n}{2}}$	$1 - 2^{-\frac{n}{2}} + 2^{1-n}$	$1 - 2^{-\frac{n}{2}}$	$1 - 2^{-\frac{n}{2}} - 2^{1-n}$
7	$1 + 2^{-\frac{n-1}{2}}$	$1 - 2^{-\frac{n-1}{2}}$	$1 + 2^{-\frac{n-1}{2}}$	$1 - 2^{-\frac{n-1}{2}}$

Aquí la primer fila indica ℓ mód 8 y la primer columna n mód 8. También puede escribirse por la fórmula

$$(2.37) \quad \delta_2(I_{n,1}, -\ell) = 1 + 2^{\frac{1-n}{2}} \operatorname{sen} \left(\frac{(n+1+2\ell)\pi}{4} \right) + 2^{1-n} \xi(n, -\ell),$$

donde

$$\xi(n, -\ell) = \begin{cases} 1 & \text{si } n + \ell \equiv 1 \text{ mód } 8, \\ -1 & \text{si } n + \ell \equiv 5 \text{ mód } 8, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Más aún, calculando de manera similar en el caso en que $-\ell \equiv 2$ mód 4, i.e. $-\ell$ es par pero no divisible por 4, (2.37) también vale. El caso en que $-\ell$ es divisible por 4 sale de igual manera, aunque requiere más cuentas (ver [RT, Theorem 9]).

Ratcliffe y Tschantz fueron los primeros en calcular la 2-densidad local para este caso particular de la forma cuadrática Lorentziana $I_{n,1}$. Además

escribieron en [RT, Theorem 12] el valor de $\prod_p \delta_p(I_{n,1}, -\ell)$ de manera explícita, haciendo uso de series L de Dirichlet.

Finalmente, para $n > 3$, $\ell \in \mathbb{N}$ y $t > 0$, el número $r_t(I_{n,1}, -\ell)$ de elementos $x = (x_1, \dots, x_{n+1})^t \in \mathbb{Z}^{n+1}$ tales que

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = -\ell \quad \text{y} \quad |x_{n+1}| \leq t,$$

está dado por

$$(2.38) \quad r_t(I_{n,1}, -\ell) = \frac{\text{Vol}(S^{n-1})}{n-1} \left(\prod_p \delta_p(Q, -\ell) \right) t^{n-1} + O\left(t^{n-\frac{3}{2}}\right),$$

donde $\delta_p(Q, -\ell)$ con $p > 0$ está dado por (2.29), (2.30) y (2.31) según corresponda, y $\delta_2(Q, -\ell)$ está dado por (2.37) si ℓ no es múltiplo de 4 o como en [RT, Thm 9] si 4 divide a ℓ .

Las Tablas I–V en [RT] muestran, para valores pequeños de ℓ , cálculos numéricos de $r_t(I_{n,1}, -\ell)$ para varios números t grandes, comparando al mismo tiempo el valor de $r_t(I_{n,1}, -\ell)/t^{n-1}$ con el coeficiente principal de (2.38).

2.5.2. Forma $J_q = \text{diag}(I_4, -q)$ con q primo impar. En este ejemplo consideraremos la forma cuadrática dada por

$$J_q = \begin{pmatrix} I_4 & \\ & -q \end{pmatrix},$$

donde q es un número primo positivo impar. Aquí tenemos que $n = 4$, $A = I_4$ y $b = q$.

Al igual que en el ejemplo de la forma Lorentziana, lo único que resta de calcular es el producto de las densidades locales. Para simplificar el cálculo de la 2-densidad local, asumiremos que el número $-\ell$ es impar.

Sea $p > 2$ primo diferente de q . Escribamos $-\ell = \alpha p^a$, con α y p coprimos. Siguiendo (2.23) tenemos que $\varepsilon_j = 1$ para todo $1 \leq j \leq 4$, $\varepsilon_5 = -q$ y $l_j = 0$ para todo j . Por esta razón, los elementos $H(k)$, $h(k)$, d_k y f_k quedan igual que en el ejemplo de la Subsección 2.5.1, y el único que resulta diferente es

$$v_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ es par,} \\ \left(\frac{-q}{p}\right) & \text{si } k \text{ es impar.} \end{cases}$$

Trabajando de manera análoga como en el ejemplo anterior, obtenemos que

$$(2.39) \quad \delta_p(J_q, -\ell) = \begin{cases} (1-p^{-4}) \frac{p^{-\frac{3(a+1)}{2}} - 1}{p^{-3} - 1} & \text{si } a \text{ es impar,} \\ (1-p^{-4}) \frac{p^{-\frac{3a}{2}} - 1}{p^{-3} - 1} + \frac{1 + \left(\frac{-\alpha q}{p}\right) p^{-2}}{p^{\frac{3a}{2}}} & \text{si } a \text{ es par.} \end{cases}$$

Ahora calculemos $\delta_2(J_q, -\ell)$. Recordemos que $-\ell$ es impar, por lo que según lo tomado en la Subsección 2.4.2, tenemos que $a = 0$ y $\alpha = -\ell$. Además tenemos que $L = 5$, $M = N = 0$, $\varepsilon_i = 1$ para todo $1 \leq i \leq 4$, $\varepsilon_5 = -q$, y $l_i = 0$ para todo i . Nuevamente los valores de $H(k)$, $h(k)$, p_k ,

d_k, γ_k , son los mismos que en el ejemplo anterior, con $n = 4$. Los elementos diferentes son

$$\varepsilon(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ es par,} \\ -q & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases} \quad \text{y} \quad \mu_k = -2^{3-k}\ell - 4 + q,$$

para todo $k > 1$.

Luego, (2.26) y algunos simples cálculos implican que

$$(2.40) \quad \begin{aligned} \delta_2(J_q, -\ell) &= 1 + \left(\frac{2}{-q\mu_2}\right)2^{-2} + \psi\left(\frac{\mu_3}{8}\right)\chi_{4\mathbb{Z}_2}(\mu_3)2^{-3} \\ &= 1 - (-1)^{\frac{\ell-q}{2}}2^{-2} - \frac{1+(-1)^{\frac{q-\ell}{2}}}{2}(-1)^{\frac{q-\ell}{4}}2^{-3} \\ &= \begin{cases} 1 + 2^{-2} & \text{si } q - \ell \equiv 2 \pmod{4}, \\ 1 - 2^{-2} - 2^{-3} & \text{si } q - \ell \equiv 0 \pmod{8}, \\ 1 - 2^{-2} + 2^{-3} & \text{si } q - \ell \equiv 4 \pmod{8}. \end{cases} \end{aligned}$$

Ahora supongamos $p = q$. Nuevamente escribamos $-\ell = \alpha q^a$, con α y q coprimos. Según (2.23) tenemos que $\varepsilon_j = 1$ y $l_j = 0$ para todo $1 \leq j \leq 4$, $\varepsilon_5 = -1$ y $l_5 = 1$. Esto implica que

$$\begin{aligned} H(k) &= \begin{cases} \llbracket 1, 4 \rrbracket & \text{si } k \text{ es impar,} \\ \{5\} & \text{si } k \text{ es par,} \end{cases} & d_k &= \frac{1-3k}{2}, \\ h(k) &= \begin{cases} 4 & \text{si } k \text{ es impar,} \\ 1 & \text{si } k \text{ es par,} \end{cases} & v_k &= \left(\frac{-1}{q}\right)^{k+1}. \end{aligned}$$

Luego, por (2.24) tenemos que

$$(2.41) \quad \begin{aligned} \delta_q(J_q, -\ell) &= 1 + (1 - q^{-1}) \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impar}}}^a q^{\frac{1-3k}{2}} + \left(\frac{-1}{q}\right)^a f_{a+1} q^{\frac{1-3(a+1)}{2}} \\ &= 1 + \frac{1 - q^{-1}}{q} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{a-1}{2} \rfloor} (q^{-3})^j + \left(\frac{-1}{q}\right)^a f_{a+1} q^{\frac{1-3(a+1)}{2}} \\ &= \begin{cases} 1 + \frac{1 - q^{-1}}{q} \frac{q^{-\frac{3a}{2}} - 1}{q^{-3} - 1} + q^{-\frac{3a}{2}-2} & \text{si } a \text{ es par,} \\ 1 + \frac{1 - q^{-1}}{q} \frac{q^{-\frac{3(a+1)}{2}} - 1}{q^{-3} - 1} + \left(\frac{l}{q}\right) q^{-\frac{3(a+1)}{2}} & \text{si } a \text{ es impar.} \end{cases} \end{aligned}$$

Finalmente obtenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 2.15. *Sea $J_q = \text{diag}(I_4, -q) \in M(5; \mathbb{Z})$ con q un número primo impar, $\ell \in \mathbb{N}$ impar y $t > 0$. El número $r_t(J_q, -\ell)$ de elementos $x \in \mathbb{Z}^5$ tales que $J_q[x] = -\ell$ y $|x_5| \leq t$, está dado por*

$$(2.42) \quad r_t(J_q, -\ell) = \frac{2\pi^2 q^{3/2}}{3} \left(\prod_p \delta_p(J_q, -\ell) \right) t^3 + O\left(t^{5/2}\right),$$

donde $\delta_p(J_q, -\ell)$ está dado por (2.39), (2.40) o (2.41) según corresponda.

En el caso particular en que $\ell = 1$, tenemos

$$(2.43) \quad r_t(J_q, -1) = \frac{2\pi^2 q^{3/2}}{3} (1 + 2^{-2})(1 + q^{-2}) \prod_{p \neq 2, q} \left(1 + \left(\frac{q}{p}\right) p^{-2}\right) t^3 + O\left(t^{5/2}\right),$$

Representaciones de formas hermíticas definidas negativas de rango q por $I_{p,q}$ sobre \mathbb{F}

En este capítulo consideraremos la matriz hermítica canónica no degenerada de signatura (p, q) , es decir

$$(3.1) \quad I_{p,q} = \text{diag}(I_p, -I_q) = \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix}.$$

Asumiremos que $p \geq q > 0$ y denotaremos $n = p + q$.

Para $L \in M(q; \mathcal{O})$ una matriz hermítica definida positiva, estamos interesados en los elementos que representan a $-L$ por $I_{p,q}$ según la Definición 1.2 (pág. 16), es decir, las matrices $X \in M(n \times q; \mathcal{O})$ tales que

$$I_{p,q}[X] = -L.$$

Sea

$$(3.2) \quad \mathcal{R}(I_{p,q}, -L) = \{X \in M(n \times q; \mathcal{O}) : I_{p,q}[X] = -L\}.$$

Al igual que en el capítulo anterior, podemos notar que como la forma $I_{p,q}$ es indefinida, el conjunto $\mathcal{R}(I_{p,q}, -L)$ es vacío o tiene una cantidad infinita de elementos.

En este caso no daremos inmediatamente una condición de pertenencia (dependiente de un parámetro $t > 0$) a las soluciones X (ver (2.3)). Aquí no hay una elección canónica y trataremos varios casos en la Sección 3.3.

3.1. Espacios simétricos

Consideraremos los espacios simétricos

$$\mathfrak{B}_{\mathbb{F}}^{(p,q)} = \text{U}(I_{p,q}, \mathbb{F}) / (\text{U}(p; \mathbb{F}) \times \text{U}(q; \mathbb{F})),$$

donde $pq > 0$. Estos son comúnmente llamados de TIPO *BD I*, TIPO *A III* y TIPO *C II*, para $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ respectivamente (ver [He, Chap. X, Table V]).

Para introducir el modelo que usaremos para este espacio denotaremos

$$\tilde{\mathfrak{B}}_{\mathbb{F}}^{(p,q)} = \{X \in M(n \times q; \mathbb{F}) : I_{p,q}[X] = -I_q\}.$$

El grupo $\text{U}(q; \mathbb{F}) = \text{U}(I_q, \mathbb{F})$ actúa por derecha en $\tilde{\mathfrak{B}}_{\mathbb{F}}^{(p,q)}$ pues si $h \in \text{U}(q; \mathbb{F})$ y $X \in \tilde{\mathfrak{B}}_{\mathbb{F}}^{(p,q)}$, entonces

$$I_{p,q}[Xh] = h^* X^* I_{p,q} X h = h^* (-I_q) h = -I_q[h] = -I_q.$$

Al espacio de coclases lo denotaremos como

$$(3.3) \quad \mathfrak{B}_{\mathbb{F}}^{(p,q)} = \tilde{\mathfrak{B}}_{\mathbb{F}}^{(p,q)} / \text{U}(q; \mathbb{F}).$$

Para $X \in \tilde{\mathfrak{B}}_{\mathbb{F}}^{(p,q)}$, denotemos por $[X]$ la clase de X en $\mathfrak{B}_{\mathbb{F}}^{(p,q)}$.

El próximo paso es darle a $B_{\mathbb{F}}^{(p,q)}$ la estructura de espacio simétrico de $\mathfrak{B}_{\mathbb{F}}^{(p,q)}$. Claramente el grupo $U(p, q; \mathbb{F}) = U(I_{p,q}, \mathbb{F})$ actúa por multiplicación a izquierda en $\widetilde{B}_{\mathbb{F}}^{(p,q)}$ y esta acción baja al cociente

$$\begin{aligned} B_{\mathbb{F}}^{(p,q)} &\longrightarrow B_{\mathbb{F}}^{(p,q)}, \\ [X] &\longmapsto g([X]) = [gX]. \end{aligned}$$

Sea $E = (0_{p,q}, I_q)^t \in M(n \times q; \mathbb{F})$. Tenemos que $E \in \widetilde{B}_{\mathbb{F}}^{(p,q)}$ pues $I_{p,q}[E] = -I_q$.

PROPOSICIÓN 3.1. *El subgrupo $U(p, q; \mathbb{F})_{[E]}$ de $U(p, q; \mathbb{F})$ de elementos que fijan a $[E]$ coincide con*

$$\left\{ \begin{pmatrix} g_1 & \\ & g_2 \end{pmatrix} : g_1 \in U(p; \mathbb{F}), g_2 \in U(q; \mathbb{F}) \right\} \cong U(p; \mathbb{F}) \times U(q; \mathbb{F})$$

y la acción de $U(p, q; \mathbb{F})$ sobre $B_{\mathbb{F}}^{(p,q)}$ es transitiva.

DEMOSTRACIÓN. Sea $g \in (B_{\mathbb{F}}^{(p,q)})_{[E]}$. Entonces $[gE] = [E]$, es decir, existe $h \in U(q; \mathbb{F})$ tal que $gE = Eh$. Escribiendo $g = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{pmatrix}$, la igualdad $gE = Eh$ implica que $g_2 = 0$ y $g_4 = h$. Además $I_{p,q}[g] = I_{p,q}$ lo cual implica

$$\begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1^* & g_3^* \\ 0 & h^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ g_3 & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1^*g_1 & -g_3^*h \\ -h^*g_3 & -h^*h \end{pmatrix},$$

por lo tanto $g_1 \in U(p; \mathbb{F})$ y $g_3 = 0$ pues I_q y h son matrices inversibles. Esto prueba la primera afirmación.

Ahora probemos la transitividad. Es suficiente mostrar que para $X \in \widetilde{B}_{\mathbb{F}}^{(p,q)}$ existe $g \in U(p, q; \mathbb{F})$ tal que $g([E]) = [X]$. Llamemos x_{p+1}, \dots, x_n los vectores columnas de X . Por el Teorema de Witt (ver [O'M, Thm. 42:17]), la aplicación $e_{p+i} \mapsto x_{p+i}$ ($1 \leq i \leq q$), se extiende a una isometría de \mathbb{F}^n a \mathbb{F}^n con respecto a la forma hermítica $I_{p,q}$. Luego, existen y_1, \dots, y_p vectores de \mathbb{F}^n tales que la matriz $g = (y_1, \dots, y_p, x_{p+1}, \dots, x_n) \in U(p, q; \mathbb{F})$, la cual claramente cumple que $gE = X$. \square

Finalmente, esta proposición induce una biyección

$$B_{\mathbb{F}}^{(p,q)} \cong U(p, q; \mathbb{F}) / U(p, q; \mathbb{F})_{[E]},$$

la cual recibe la estructura de espacio simétrico $\mathfrak{B}_{\mathbb{F}}^{(p,q)}$ inducido por el automorfismo involutivo $g \mapsto I_{p,q}gI_{p,q}^{-1}$ de $U(p, q; \mathbb{F})$. El libro [KN, Ch. XI, §10] describe este modelo en el caso hermítico complejo.

Ahora describiremos para este modelo la función distancia asociada con la métrica $(U(p; \mathbb{F}) \times U(q; \mathbb{F}))$ -invariante. Fijemos $[X], [Y] \in B_{\mathbb{F}}^{(p,q)}$. Denotaremos

$$\lambda_1 = \lambda_1([X], [Y]) \geq \dots \geq \lambda_q = \lambda_q([X], [Y])$$

los valores singulares de la matriz $A = X^*Y$, esto es, los autovalores de $\sqrt{A^*A}$, o equivalentemente de $\sqrt{AA^*}$. Para ver que está bien definida, tomemos $X_1 = Xh_1$ y $Y_1 = Yh_2$ con $h_1, h_2 \in U(q; \mathbb{F})$. Entonces $A_1 = X_1^*Y_1 = h_1^*X^*Yh_2$ y por lo tanto $\sqrt{A_1^*A_1} = \sqrt{h_2^*Y^*Xh_1h_1^*X^*Yh_2} = \sqrt{(Ah_2)^*(Ah_2)}$, matriz cuyo autovalores coinciden con los de $\sqrt{(Ah_2)(Ah_2)^*} = \sqrt{AA^*}$.

Ahora denotemos $\psi_1 \leq \dots \leq \psi_q$, los *ángulos hiperbólicos* entre $[X]$ e $[Y]$, dados por

$$\psi_j = \psi_j([X], [Y]) = \cosh^{-1}(\lambda_j).$$

Finalmente,

$$(3.4) \quad d([X], [Y]) = \sqrt{\psi_1^2 + \dots + \psi_q^2}.$$

Todo esto puede encontrarse en [Ne], en donde está desarrollado detalladamente el caso dual $U(p+q; \mathbb{F})/(U(p; \mathbb{F}) \times U(q; \mathbb{F}))$.

Notemos que para $q = 1$, este modelo es el del hiperboloide n -dimensional, el cual es muy similar al modelo de Klein tomado en el capítulo anterior. Además fácilmente se ve que las fórmulas de las distancias (2.6) y (3.4) coinciden.

3.2. Teorema de puntos reticulares

En esta sección introduciremos el teorema de puntos reticulares que usaremos en este caso, obtenido por A. Gorodnik y A. Nevo ([GN1] y [GN2]). Primero introduciremos notación desde [GN1, §1.1 y §1.2].

Sea G un grupo semisimple no compacto y Γ un subgrupo discreto de G de volumen cofinito. Fijemos cualquier métrica Riemanniana invariante a izquierda en G y tomemos

$$\Omega_\varepsilon = \{g \in G : d(g, e) < \varepsilon\}.$$

Sea m_G una medida de Haar a izquierda sobre G .

DEFINICIÓN 3.2. Una familia creciente $\{G_t\}_{t>0}$ de subconjuntos acotados de Borel de G se llaman *admisibles*, si existe $c > 0$ tal que para todo t suficientemente grande y ε suficientemente pequeño

$$\begin{aligned} \Omega_\varepsilon \cdot G_t \cdot \Omega_\varepsilon &\subset G_{t+c\varepsilon}, \\ m_G(G_{t+\varepsilon}) &\leq (1+c\varepsilon) \cdot m_G(G_t). \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 3.3. Sea β_t la *medida de probabilidad sobre G* obtenida como la restricción de la medida de Haar sobre G_t , normalizada por $m_G(G_t)$. Se dice que la acción tiene una *brecha espectral fuerte* si cada factor simple tiene una brecha espectral. Los conjuntos G_t (y los promedios β_t) serán llamados *balanceados* si todo factor simple H y todo subconjunto compacto Q de su complemento, se cumple que $\beta_t(QH) \rightarrow 0$. Además, G_t serán llamados *bien balanceados* si la convergencia es en una tasa específica (para más especificaciones ver [GN1, §3.5]).

Ahora estamos en condiciones de enunciar el teorema de puntos reticulares a usar en este capítulo.

TEOREMA 3.4 (Gorodnik y Nevo [GN1]). *Sea G un grupo de Lie semi-simple conexo con centro finito, y ningún factor compacto no trivial. Sea G_t una familia admisible de conjuntos, y sea Γ un lattice de G . Consideramos la medida de Haar m_G normalizada de manera que en cualquier dominio fundamental de Γ en G sea uno.*

1. Si Γ es un lattice irreducible, o los conjuntos G_t son balanceados, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|\Gamma \cap G_t|}{m_G(G_t)} = 1.$$

2. Si $(G/\Gamma, m_{G/\Gamma})$ tiene una brecha espectral fuerte, o los conjuntos G_t son bien balanceados, entonces, para todo $\varepsilon > 0$

$$\frac{|\Gamma \cap G_t|}{m_G(G_t)} = 1 + O_\varepsilon \left(\exp \left(\frac{-t(\theta - \varepsilon)}{\dim G + 1} \right) \right),$$

donde $\theta > 0$ depende de G_t y la brecha espectral de G/Γ , via

$$\theta = \liminf_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} \log \|\pi_{G/\Gamma}(\beta_t)\|_{L_0^2(G/\Gamma)}.$$

3.3. Aplicaciones

Como mencionamos en la introducción de este capítulo, no existe una manera canónica de tomar una condición aritmética sobre los coeficientes de las matrices $X \in \mathcal{R}(I_{p,q}, -L)$ que se traduzca en una condición sobre los puntos reticulares $g \in \Gamma$ que involucre la distancia. De todas maneras, en esta sección lograremos aplicar varias veces el Teorema 3.4, obteniendo cotas superiores e inferiores para varias condiciones aritméticas diferentes.

3.3.1. Soluciones en $\mathcal{R}(I_{p,q}, -L)$ y puntos reticulares. Escribamos $L = S^t S$ con $S \in \text{GL}(q; \mathbb{F})$. Si $X \in \mathcal{R}(I_{p,q}, -L)$ tenemos que

$$I_{p,q}[XS^{-1}] = -I_q, \quad \text{por lo tanto } XS^{-1} \in \widetilde{\text{B}}_{\mathbb{F}}^{(p,q)}.$$

Usaremos este hecho para incluir los elementos que queremos contar dentro del espacio simétrico $\text{B}_{\mathbb{F}}^{(p,q)}$, para luego contar puntos reticulares bajo cierta condición.

Sea $\Gamma = \text{U}(I_{p,q}, \mathbb{F}) \cap \text{GL}(n, \mathcal{O})$. Notemos que Γ actúa por multiplicación a izquierda en $\mathcal{R}(I_{p,q}, -L)$.

LEMA 3.5. *El conjunto $\mathcal{R}(I_{p,q}, -L)$ tiene una cantidad finita de Γ -órbitas.*

DEMOSTRACIÓN. Resulta de la misma manera que el Lema 2.2, aunque adaptando ciertas cosas tales como $G = \text{U}(I_{p,q}, \mathbb{F})$, $V = \mathbb{R}^{\vartheta \cdot n \cdot q}$ y la representación $\pi : G \rightarrow \text{GL}(V)$ que debe ser la inducida por la acción de G de multiplicar a izquierda en $M(n \times q; \mathcal{O})$. El resto es análogo. \square

Sea F un conjunto de representantes de las coclases de la acción de Γ sobre $\mathcal{R}(I_{p,q}, -L)$. Luego si $X \in \mathcal{R}(I_{p,q}, -L)$ existen $g \in \Gamma$ e $Y \in F$ tales que $X = gY$. Rápidamente notamos que

$$(3.5) \quad \mathcal{R}(I_{p,q}, -L) = \bigcup_{Y \in F} \{gY : g \in \Gamma\}.$$

La dificultad para este caso en que $q > 2$, es que la fórmula (3.4) de la distancia no es lineal con respecto a los ángulos hiperbólicos ψ_j . Luego, no se puede practicar nuevamente el método de la fórmula (2.7) como cuando $q = 1$. Por lo tanto, daremos conteos con distintas condiciones.

Introduciremos más notación para poder aplicar el Teorema 3.4. Denotemos $G = U(I_{p,q}, \mathbb{F})$, $\Gamma = G \cap \text{GL}(n, \mathcal{O})$, $K = U(I_p, \mathbb{F}) \times U(I_q, \mathbb{F})$. Para $r > 0$ e $Y \in F$ fijos, sea

$$(3.6) \quad \begin{aligned} G_{Y,r} &= \{g \in G : d([E], g \cdot [YS^{-1}]) < r\} \\ &= \{g \in G : d(eK, g \cdot yK) < r\}, \end{aligned}$$

donde $[YS^{-1}] \leftrightarrow yK$ es la identificación con respecto a la biyección $B_{\mathbb{F}}^{(p,q)} \leftrightarrow G/K$.

PROPOSICIÓN 3.6. *Los conjuntos $G_{Y,t}$ son admisibles.*

DEMOSTRACIÓN. Resulta del primer inciso del Teorema 3.14 de [GN1], aunque en un contexto más amplio. \square

También usaremos varias veces la fórmula de la distancia entre $[E]$ y $[XS^{-1}]$, donde $X \in R(I_{p,q}, -L)$. Si $X = \begin{pmatrix} V \\ U \end{pmatrix} \in \mathcal{R}(I_{p,q}, -L)$ donde $V \in M(p \times q; \mathbb{R})$ y $U \in M(q; \mathbb{R})$, y denotamos $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ a los autovalores singulares de US^{-1} , entonces por (3.4) tenemos

$$(3.7) \quad d([E], [XS^{-1}]) = \sqrt{\sum_{j=1}^q (\cosh^{-1}(\lambda_j))^2}.$$

3.3.2. Primera aplicación. Comenzaremos con un ejemplo sencillo pero de poca utilidad aritmética. Para $r > 0$ contaremos el cardinal del conjunto

$$\mathcal{R}_1(I_{p,q}, -L, r) = \{X \in \mathcal{R}(I_{p,q}, -L) : d([E], [XS^{-1}]) < r\}$$

Análogamente a (3.5), tenemos que

$$(3.8) \quad \begin{aligned} |\mathcal{R}_1(I_{p,q}, -L, r)| &= \left| \bigcup_{Y \in F} \{gY : g \in \Gamma, d([E], g \cdot [YS^{-1}]) < r\} \right| \\ &= \sum_{Y \in F} |\{gY : g \in \Gamma, d([E], g \cdot [YS^{-1}]) < r\}| \\ &= \sum_{Y \in F} \frac{1}{|\Gamma_Y|} |\{g \in \Gamma : d([E], g \cdot [YS^{-1}]) < r\}|, \end{aligned}$$

donde $\Gamma_Y = \{g \in \Gamma : gY = Y\}$. Usando (3.6) podemos escribir a (3.8) como

$$|\mathcal{R}_1(I_{p,q}, -L, r)| = \sum_{Y \in F} |\Gamma_Y|^{-1} |G_{Y,r} \cap \Gamma|.$$

Finalmente el Teorema 3.4 implica que

$$(3.9) \quad |\mathcal{R}_1(I_{p,q}, -L, r)| \sim \sum_{Y \in F} |\Gamma_Y|^{-1} m_G(G_{Y,r}).$$

El motivo por el que aseguramos al principio de esta subsección que este ejemplo tiene poca utilidad aritmética, es que la condición impuesta a la solución X de $I_{p,q}[X] = -L$ no tiene una traducción muy útil. Ésta, por (3.7), está dada por

$$\sqrt{\sum_{j=1}^q (\cosh^{-1}(\lambda_j))^2} < r,$$

en la cual no se ve ninguna expresión simple que dependa de los coeficientes de la matriz X .

3.3.3. Segunda aplicación. La estrategia en este caso será ‘encerrar’ el conjunto a contar, por otros dos conjuntos que sí tengan condiciones más ‘aritméticas’.

Sabemos que

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{q} \|x\|_2,$$

donde $\|x\|_1 = \sum_1^q |x_j|$ y $\|x\|_2 = (\sum_1^q x_j^2)^{1/2}$, para $x \in \mathbb{R}^q$. Esta desigualdad y (3.7), aplicados a $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_q) = (\cosh^{-1}(\lambda_1), \dots, \cosh^{-1}(\lambda_q))$, aseguran que

$$(3.10) \quad d([E], [XS^{-1}]) \leq \|\psi\|_1 \leq \sqrt{q} d([E], [XS^{-1}]).$$

Comencemos por el caso $q = 2$ por ser más simple. Si aplicamos \cosh a la desigualdad del lado izquierdo, resulta que

$$\begin{aligned} \cosh(d([E], [XS^{-1}])) &\leq \cosh(\psi_1 + \psi_2) = \cosh(\psi_1) \cosh(\psi_2) + \\ &\quad + \sinh(\psi_1) \sinh(\psi_2) = \lambda_1 \lambda_2 + \sqrt{\lambda_1^2 - 1} \sqrt{\lambda_2^2 - 1} \leq 2\lambda_1 \lambda_2. \end{aligned}$$

Análogamente, aplicando \cosh en la derecha, resulta que

$$\begin{aligned} \cosh(\sqrt{2} d([E], [XS^{-1}])) &\geq \cosh(\psi_1 + \psi_2) \\ &= \lambda_1 \lambda_2 + \sqrt{\lambda_1^2 - 1} \sqrt{\lambda_2^2 - 1} \geq \lambda_1 \lambda_2. \end{aligned}$$

Uniendo ambas tenemos

$$\frac{1}{2} \cosh(d([E], [XS^{-1}])) \leq \det(US^{-1}) = \lambda_1 \lambda_2 \leq \cosh(\sqrt{2} d([E], [XS^{-1}])).$$

Se ve luego de algunas cuentas que para q arbitrario obtenemos

$$(3.11) \quad \frac{\det(S)}{2^{q-1}} \cosh(d([E], [XS^{-1}])) \leq \det(U) \leq \det(S) \cosh(\sqrt{q} d([E], [XS^{-1}])).$$

Esta desigualdad nos permitirá encerrar nuestro conjunto a contar por otros countables por el Teorema 3.4. Para $r > 0$ definimos

$$(3.12) \quad \mathcal{R}_2(I_{p,q}, -L, r) = \{X = \begin{pmatrix} V \\ U \end{pmatrix} \in \mathcal{R}(I_{p,q}, -L) : |\det(U)| \leq r\}.$$

Para cada $Y \in F$, (3.11) implica

$$\begin{aligned} &|\{X \in \Gamma \cdot Y : |\det(S)| \cosh(\sqrt{q} d([E], [XS^{-1}])) \leq r\}| \\ &\leq |\mathcal{R}_2(I_{p,q}, -L, r) \cap \Gamma \cdot Y| \\ &\leq \left| \left\{ X \in \Gamma \cdot Y : \frac{|\det(S)|}{2^{q-1}} \cosh(d([E], [XS^{-1}])) \leq r \right\} \right|. \end{aligned}$$

Tomando

$$\begin{aligned} t_1 = t_1(r) &= q^{-1/2} \cosh^{-1} \left(\frac{r}{|\det(S)|} \right), \\ t_2 = t_2(r) &= \cosh^{-1} \left(\frac{2^{q-1} r}{|\det(S)|} \right), \end{aligned}$$

por (3.6), podemos reescribirla como

$$(3.13) \quad |\Gamma_Y|^{-1} |G_{Y,t_1} \cap \Gamma| \leq |\mathcal{R}_2(I_{p,q}, -L, r) \cap \Gamma \cdot Y| \leq |\Gamma_Y|^{-1} |G_{Y,t_2} \cap \Gamma|.$$

Finalmente obtenemos

$$(3.14) \quad \sum_{Y \in F} |\Gamma_Y|^{-1} |G_{Y,t_1} \cap \Gamma| \leq |\mathcal{R}_2(I_{p,q}, -L, r)| \leq \sum_{Y \in F} |\Gamma_Y|^{-1} |G_{Y,t_2} \cap \Gamma|.$$

El Teorema 3.4 asegura que $|G_{Y,r} \cap \Gamma| \sim m_G(G_{Y,r})$ para cada $Y \in F$ y r suficientemente grande, por lo tanto

$$(3.15) \quad \sum_{Y \in F} |\Gamma_Y|^{-1} m_G(G_{Y,t_1}) \leq |\mathcal{R}_2(I_{p,q}, -L, r)| \leq \sum_{Y \in F} |\Gamma_Y|^{-1} m_G(G_{Y,t_2}).$$

3.3.4. Tercera aplicación. En este caso supondremos $q = 2$. Escribimos $X = \begin{pmatrix} V \\ U \end{pmatrix} \in \mathcal{R}(I_{p,2}, -L)$ con $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Al igual que en la Segunda aplicación tenemos que

$$d([E], [XS^{-1}]) = \|\psi\|_2 \leq \|\psi\|_1 = \cosh^{-1}(\lambda_1) + \cosh^{-1}(\lambda_2).$$

En este caso usaremos el hecho de que la función \cosh^{-1} es cóncava, por lo que cumple

$$\cosh^{-1}(\lambda_1) + \cosh^{-1}(\lambda_2) \leq \cosh^{-1}\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right).$$

Esto implica que

$$\cosh(d([E], [XS^{-1}])) \leq \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \frac{1}{2} \text{Tr}(US^{-1}).$$

Para $r > 0$ definimos

$$\mathcal{R}_3(I_{p,2}, -L, r) = \{X = \begin{pmatrix} V \\ U \end{pmatrix} \in \mathcal{R}(I_{p,q}, -L) : \text{Tr}(US^{-1}) < 2r\}.$$

El inconveniente es que la condición $\text{Tr}(US^{-1}) < 2r$ no depende únicamente de las coordenadas a, b, c, d de la matriz U . Para poder obtener un resultado más preciso, a partir de ahora supondremos que $L = kI_2$, para algún $k \in \mathbb{N}$. Luego $S = \sqrt{k}I_2$ y $\text{Tr}(US^{-1}) = \frac{1}{\sqrt{k}} \text{Tr}(U)$.

Ahora tenemos

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}_3(I_{p,2}, -kI_2, r)| &= \left| \left\{ X = \begin{pmatrix} V \\ U \end{pmatrix} \in \mathcal{R}(I_{p,2}, -kI_2) : \text{Tr}(U) < 2\sqrt{k}r \right\} \right| \\ &\leq \left| \left\{ X \in \mathcal{R}(I_{p,2}, -kI_2) : \cosh\left(d([E], [\frac{1}{\sqrt{k}}X])\right) < r \right\} \right|. \end{aligned}$$

Llamando $t_1 = t_1(r) = \cosh^{-1}(r)$ podemos escribir

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}_3(I_{p,2}, -kI_2, r)| &\leq \left| \bigcup_{Y \in F} \left\{ g \cdot Y : d([E], g \cdot [\frac{1}{\sqrt{k}}Y]) \leq t_1 \right\} \right| \\ &= \sum_{Y \in F} |\Gamma_Y|^{-1} |\{g \in \Gamma : d([E], g \cdot [\frac{1}{\sqrt{k}}Y]) \leq t_1\}| = \sum_{Y \in F} |\Gamma_Y|^{-1} |G_{Y,t_1} \cap \Gamma|. \end{aligned}$$

Nuevamente, el Teorema 3.4 aplicado a esta fórmula implica que

$$(3.16) \quad |\mathcal{R}_3(I_{p,2}, -kI_2, r)| \leq \sum_{Y \in F} |\Gamma_Y|^{-1} m_G(G_{Y,t_1}).$$

3.3.5. Valor del término $m_G(G_{Y,r})$. Vemos que en las fórmulas finales (3.9), (3.15) y (3.16) de las aplicaciones, siempre aparece el término $m_G(G_{Y,t})$ para cierto t que depende de r . Lamentablemente no hay cálculos explícitos, pero sí asintóticos, por lo que sólo mencionaremos uno, [**GO**, Corollary 5.8]. Notemos que $m_G(G_{Y,r}) = m_G(G_{E,r})$. Abreviaremos $G_r = G_{E,r}$.

Para enunciar este teorema necesitamos introducir algo de notación. Sea G un grupo de Lie semisimple conexo no compacto con centro finito y $G = KA^+K$ una descomposición de Cartan. Sea \mathfrak{a} el álgebra de Lie de A y $\|\cdot\|$ la norma en \mathfrak{a} inducida por una métrica Riemanniana invariante d sobre el espacio simétrico $K\backslash G$, es decir, $\|y\| = d(K, \exp(y)K)$ para $y \in \mathfrak{a}$. Para $t > 0$, sea $\mathfrak{a}_t = \{y \in \mathfrak{a} : \|y\| < t\}$. Sea $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi^+} m_\alpha \alpha$, donde Φ es un sistema de raíces del álgebra de Lie \mathfrak{g} de G , Φ^+ el subconjunto de las raíces positivas, y m_α la multiplicidad de la raíz α . Sea $\delta = \max\{2\rho(y) : y \in \bar{\mathfrak{a}}_1\}$.

PROPOSICIÓN 3.7 (Gorodnik y Oh). *Para algún $C > 0$ tenemos que*

$$(3.17) \quad m_G(G_t) \sim C \cdot t^{(\mathrm{rk}_{\mathbb{R}}(G)-1)/2} e^{\delta t}.$$

Además, al no estar explícita la constante C de la proposición, no lograremos mejorar demasiado nuestras fórmulas.

Bibliografía

- [AB] M. ALSINA Y P. BAYER. “Quaternion orders, quadratic forms, and Shimura curves”. *CMR Monograph Series* **22**. American Mathematical Society (2004).
- [BHC] A. BOREL Y HARISH-CHANDRA. “Arithmetic subgroups of algebraic groups”. *Ann. of Math. (2)* **75**:3 (1962), 485–535.
- [BMW] R. BRUGGEMAN, R. MIATELLO, N. WALLACH. “Resolvent and lattice points on symmetric spaces of strictly negative curvature”. *Math. Ann.* **315**:4 (1999), 617–639.
- [Ca] J. W. S. CASSELS. “Rational quadratic forms”. *London Mathematical Society Monographs* **13**. Academic Press Inc. (1978).
- [CLPS] J. COGDELL, J.-S. LI, I. PIATETSKI-SHAPIRO Y P. SARNAK. “Poincaré series for $SO(n, 1)$ ”. *Acta Math.* **167**:3–4 (1991), 229–285.
- [EGM1] J. ELSTRODT, F. GRUNEWALD Y J. MENNICKE. “Groups acting on hyperbolic space”. *Harmonic analysis and number theory. Springer Monograph in Mathematics*. Springer-Verlag (1988).
- [EGM2] J. ELSTRODT, F. GRUNEWALD Y J. MENNICKE. “Kloosterman sums for Clifford algebras and a lower bound for the positive eigenvalues of the Laplacian for congruence subgroups acting on hyperbolic spaces”. *Invent. Math.* **101**:3 (1990), 641–685.
- [GN1] A. GORODNIK Y A. NEVO. “The ergodic theory of lattice subgroups”. *Annals of Mathematics Studies* **172**. Princeton University Press (1999).
- [GN2] A. GORODNIK Y A. NEVO. “Counting lattices points”. Por aparecer en *J. Reine Angew Math (Crelles Journal)*.
- [GO] A. GORODNIK Y H. OH. “Orbits of discrete subgroups on a symmetric space and the Furstenberg boundary”. *Duke Math. J.* **139**:3 (2007), 483–525.
- [He] S. HELGASON. “Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces”. *Pure and Applied Mathematics* **80**. Academic Press Inc. (1978).
- [Kr] A. KRIEG. “Modular forms on half-spaces of quaternions”. *Lecture Notes in Mathematics* **1143**. Springer-Verlag (1985).
- [Kn] A. W. KNAPP. “Lie groups beyond an introduction”. *Progress in Mathematics* **140**. Birkäuser Boston Inc. (2002).
- [KN] S. KOBAYASHI Y K. NOMIZU. “Foundations of differential geometry. Vol. II”. *Wiley Classics Library*. John Wiley & Sons Inc. (1996).
- [LP] P. LAX Y R. PHILLIPS. “The asymptotic distribution of lattice points in Euclidean and non-Euclidean spaces”. *J. Funct. Anal.* **46**:3 (1982), 280–350.
- [Le] B. M. LEVITAN. “Asymptotic formulas for the number of lattice points in Euclidean and Lobachevskii spaces”. *Uspekhi Mat. Nauk* **42**:3(255) (1987), 13–35, 255.
- [MR] C. MACLACHLEN Y A. W. REID. “The arithmetic of hyperbolic 3-manifolds”. *Graduate Texts in Mathematics* **219**. Springer-Verlag (2003).
- [Mo] G. D. MOSTOW. “Strong rigidity of locally symmetric spaces”. *Annals of Mathematics Studies* **78**. Princeton University Press (1973).
- [Ne] Y. NERETIN. “On Jordan angles and the triangle inequality in Grassmann manifolds”. *Geom. Dedicata* **86**:1–3 (2001), 81–92.
- [RT] J. RATCLIFFE Y S. TSCHANTZ. “On the representation of integers by the Lorentzian quadratic form”. *J. Funct. Anal.* **150**:2 (1997), 498–525.
- [Se] J. P. SERRE. “A course in arithmetic”. Springer-Verlag(1973).

- [Si1] C. L. SIEGEL. "On the theory of indefinite quadratic forms". *Ann. of Math. (2)* **45** (1944), 577–622.
- [Si2] C. L. SIEGEL. "Lectures on quadratic forms". Tata Institute of Fundamental Research (1967).
- [Wo] J. WOLF. "Spaces of constant curvature". Publish or Perish Inc. (1984).
- [Ya] T. YANG. "An explicit formula for local densities of quadratic forms". *J. Number Theory* **72:2** (1998), 309–356.

Parte 2

Constante de Hermite

CAPÍTULO 4

Notación y definiciones básicas

En esta segunda parte consideraremos un cuerpo de números K sobre \mathbb{Q} de grado m . Denotaremos por d_K a su discriminante y por h_K a su número de clase. Además \mathcal{O}_K será su anillo de enteros. Escribimos $m = r + 2s$ con $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ y $\sigma_{r+1}, \dots, \sigma_m$ los embeddings reales y complejos de K en \mathbb{C} respectivamente.

4.1. Formas de Humbert

DEFINICIÓN 4.1. Una *forma de Humbert definida positiva de dimensión n sobre K* es una $(r + s)$ -tupla

$$S = (S_1, \dots, S_{r+s}),$$

donde S_1, \dots, S_r son matrices simétricas reales definidas positivas de dimensión n y S_{r+1}, \dots, S_{r+s} matrices hermíticas complejas definidas positivas de dimensión n . Al conjunto de tales formas lo denotaremos $\mathcal{P}_{K,n}$. Abreviaremos a tales formas simplemente como *formas de Humbert n -dimensionales*.

Sea S una forma de Humbert n -dimensional. Para $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{O}_K^n$ la evaluación de la forma S en el vector entero v está dada por

$$S[v] = \prod_{i=1}^r S_i[v^{\sigma_i}] \cdot \left(\prod_{i=r+1}^{r+s} S_i[v^{\sigma_i}] \right)^2,$$

donde

$$v^{\sigma_i} = (v_1^{\sigma_i}, \dots, v_n^{\sigma_i})^t \quad \text{y} \quad S_i[v] = v^* S_i v$$

con $v^* = \bar{v}^t$. Su determinante $d(S)$ está dado por

$$d(S) = \left(\prod_{i=1}^r \det S_i \right) \left(\prod_{i=r+1}^{r+s} \det S_i \right)^2.$$

Si \mathfrak{b} es un ideal fraccionario en \mathcal{O}_K , denotaremos por $[\mathfrak{b}]$ a su clase en el grupo de clases \mathcal{J}_K de K , y $N(\mathfrak{b})$ su norma. Si $\beta \in K$, $N(\beta)$ es la norma del elemento $\beta \in K$, el cual coincide con la norma del ideal fraccionario generado por β .

Sea $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{O}_K^n$ un vector n -dimensional con coordenadas en \mathcal{O}_K . Denotaremos al ideal entero $v_1 \mathcal{O}_K + \dots + v_n \mathcal{O}_K$ por $\langle v \rangle$. Diremos que v es un *vector unimodular* si $\langle v \rangle = \mathcal{O}_K$.

4.2. Alturas torcidas

Denotaremos \mathbb{A}_K , o simplemente \mathbb{A} si no hay lugar a confusión, al anillo de adeles de K . Además, $M(K)$ denotará el conjunto de valuaciones de K . Para cada $v \in M(K)$, K_v será la completación de K en v y \mathcal{O}_v será el subanillo compacto maximal de K_v cuando v es finito.

Sea α_v la medida de Haar sobre K_v tomada de tal manera que $\alpha_v(\mathcal{O}_v) = 1$ si v es finita; α_v es la medida de Lebesgue usual de \mathbb{R} si v es real y el doble de la medida usual sobre \mathbb{C} si v es compleja. Denotaremos $|\cdot|_v$ al valor absoluto en K_v normalizado de tal manera que $\alpha_v(xC) = |x|_v \alpha_v(C)$, donde C es cualquier subconjunto compacto de K_v de medida no nula.

Para $x = (x_1, \dots, x_n) \in K_v^n$, la *altura local* $H_v(x)$ está definida por

$$H_v(x) = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|_v^2 \right)^{1/(2m)} & \text{si } v \text{ es real;} \\ \left(\sum_{i=1}^n |x_i|_v \right)^{1/m} & \text{si } v \text{ es compleja;} \\ \left(\max_{1 \leq i \leq n} |x_i|_v \right)^{1/m} & \text{si } v \text{ es finita.} \end{cases}$$

Para $g \in \text{GL}_n(\mathbb{A})$, la *altura torcida global* H_g es definida por

$$H_g(x) = \prod_v H_v(gx), \quad x \in K^n.$$

Constante proyectiva de Humbert-Hermite

La constante de Hermite tradicional de dimensión n puede ser definida por la fórmula

$$(5.1) \quad \gamma_n = \max_A \min_{x \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \frac{x^t A x}{(\det A)^{1/n}},$$

donde A recorre todas las formas cuadráticas definidas positivas. Existen varias generalizaciones de esta constante (ver [Co] y [Wa2]). El objetivo de este capítulo es introducir una nueva generalización y buscar relaciones con las ya existentes.

Esta nueva constante será definida sobre un contexto más amplio que las formas cuadráticas: *las formas de Humbert*. A partir de ahora, y por el resto del capítulo, K será un cuerpo de números. Sea S una forma de Humbert n -dimensional sobre K , según lo introducido en la Sección 4.1.

DEFINICIÓN 5.1. El *mínimo proyectivo de S* está dado por

$$(5.2) \quad \mu^p(S) = \inf_{v \in \mathcal{O}_K^n} \frac{S[v]}{N(\langle v \rangle)^2}.$$

Además, la *constante proyectiva de Humbert-Hermite* es

$$(5.3) \quad \gamma_{K,n}^p = \sup_{S \in \mathcal{P}_{K,n}} \frac{\mu^p(S)}{d(S)^{1/n}}.$$

La denominación *proyectiva* proviene naturalmente del hecho que el factor

$$\frac{S[v]}{N(\langle v \rangle)^2}$$

es invariante por multiplicación por escalares.

En cada sección de este capítulo introduciremos una o varias constantes que generalizan la constante de Hermite clásica (5.1), y luego finalizaremos con un teorema que las relaciona con nuestra constante $\gamma_{K,n}^p$. En la primera introduciremos la constante clásica de Hermite sobre formas de Humbert definida por M. I. Icaza (ver [Ic]) y la constante unimodular. En la segunda sección veremos la constante de Thunder, y finalmente, en la tercera, la constante de Watanabe para grupos algebraicos reductivos y representaciones K -racionales fuertes de estos grupos.

5.1. Constante clásica de Hermite y unimodular

Primero consideremos la generalización clásica de la constante de Hermite para formas de Humbert. Sea S una forma de Humbert de dimensión

n sobre K . Llamaremos el *mínimo canónico de S* al número

$$(5.4) \quad \mu(S) = \inf_{v \in \mathcal{O}_K^n \setminus \{0\}} S[v].$$

Usando este mínimo, M. I. Icaza (ver [Ic]) definió la *constante de Hermite-Humbert de K de dimensión n* como

$$(5.5) \quad \gamma_{K,n} = \sup_{S \in \mathcal{P}_{K,n}} \frac{\mu(S)}{d(S)^{1/n}}.$$

La teoría de reducción de formas de Humbert sobre cuerpos de números asegura que $\gamma_{K,n} < \infty$. Más aún, el ínfimo de (5.4) y el supremo de (5.5), existen y son realizados. Claramente $\gamma_{\mathbb{Q},n}$ coincide con la constante de Hermite clásica γ_n .

Ahora introduzcamos una variación de la constante anterior. Se llama *mínimo unimodular de S* al número

$$(5.6) \quad \mu^u(S) = \min_{\langle v \rangle = \mathcal{O}_K} S[v],$$

es decir, al valor mínimo tomado por la forma de Humbert sobre los vectores unimodulares (ver Capítulo 4). Se dice que $v \in \mathcal{O}_K^n \setminus \{0\}$ es un *vector minimal de S* si $S[v] = \mu(S)$. En general, un vector minimal no necesariamente es unimodular, tal como mostró A. M. Berge (ver [BI, §2]).

En analogía con (5.5), uno define la *constante de Hermite-Humbert unimodular* por

$$(5.7) \quad \gamma_{K,n}^u = \sup_{S \in \mathcal{P}_{K,n}} \frac{\mu^u(S)}{d(S)^{1/n}}.$$

En este caso el supremo de (5.7) no siempre es realizado ya que incluso algunas veces da ∞ , tal como veremos más adelante.

Ahora presentamos el siguiente teorema que relaciona las constantes $\gamma_{K,n}^p$, $\gamma_{K,n}$ y $\gamma_{K,n}^u$ dadas por (5.3), (5.5) y (5.7).

TEOREMA 5.2. *Tenemos que*

$$(5.8) \quad \gamma_{K,n}^p \leq \gamma_{K,n} \leq \gamma_{K,n}^u.$$

Además, valen las igualdades cuando $h_K = 1$.

DEMOSTRACIÓN. La desigualdad de la izquierda es clara pues $\mu^p(S) \leq \mu(S)$ para toda forma de Humbert S , desde que $N(\langle v \rangle)^2 \geq 1$ para todo $v \in \mathcal{O}_K^n$. La de la derecha resulta porque el máximo de (5.7) es tomado sólo sobre los elementos $v \in \mathcal{O}_K^n$ unimodulares, en cambio en (5.5) es tomado sobre todos los elementos no nulos de \mathcal{O}_K^n .

Ahora supongamos que $h_K = 1$. Primero probemos que si $v \in \mathcal{O}_K^n$ es minimal, entonces es unimodular. Como \mathcal{O}_K es principal, existe $\beta \in \mathcal{O}_K$ tal que $\langle v \rangle = \beta \mathcal{O}_K$. Pero $v/\beta \in \mathcal{O}_K^n$ por lo tanto $S[v] \leq S[v/\beta] = S[v]/N(\beta)^2$ lo que implica que $N(\beta) = 1$ y por lo tanto v es unimodular.

Para probar las igualdades es suficiente probar que $\mu^p(S) = \mu(S) = \mu^u(S)$. Sea v un vector minimal, entonces $N(\langle v \rangle) = 1$, por lo tanto $\mu^p(S) = \mu(S)$. La segunda es clara. \square

En el Capítulo 6 calcularemos la constante $\gamma_{K,2}^p$ para varias extensiones cuadráticas imaginarias K de \mathbb{Q} , y veremos que $\gamma_{K,2}^p < \gamma_{K,2}$ para la mayoría de los casos en que $h_K > 1$, pero no en todos (ver la Tabla 0.1). Además veremos que $\gamma_{K,2}^u = \infty$ si y sólo si $h_K > 1$.

COROLARIO 5.3. *Tenemos que $\gamma_{K,n}^p < \infty$. Por lo tanto el supremo y el ínfimo en (5.3) pueden ser reemplazados por máximo y mínimo, i.e.*

$$\gamma_{K,n}^p = \max_{S \in \mathcal{P}_{K,n}} \min_{v \in \mathcal{O}_K^n} \frac{S[v]}{N(\langle v \rangle)^2 d(S)^{1/n}}.$$

5.2. Constante de Thunder

J. Thunder mostró que la constante clásica de Hermite (5.1) puede escribirse como

$$\gamma_n = \max_{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})} \min_{x \in \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{Q})} \frac{H_g(x)^{2m}}{|\det(g)|_{\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}}^{2/n}};$$

recordemos que $m = \dim_{\mathbb{Q}}(K) = r + 2s$. Llamaremos *constante de Thunder n -dimensional sobre K* a

$$(5.9) \quad \gamma_n(K) = \max_{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_K)} \min_{x \in \mathbb{P}^{n-1}(K)} \frac{H_g(x)^{2m}}{|\det(g)|_{\mathbb{A}_K}^{2/n}}.$$

En [Th], Thunder mostró que tal constante existe, dio una cota inferior y otra superior, y probó una generalización de la desigualdad de Mordell.

TEOREMA 5.4. *Tenemos que*

$$\gamma_{K,n}^p \leq \gamma_n(K)^m.$$

DEMOSTRACIÓN. El grupo $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ puede descomponerse como

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}) = \bigcup_{i=1}^{h_K} \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\infty}) \lambda_i \mathrm{GL}_n(K)$$

donde $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\infty}) = \mathrm{GL}_n(K_{\infty}) \prod_{v \nmid \infty} \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_{K_v})$ (ver [OW]) y $\mathrm{GL}_n(K_{\infty}) = \prod_{v|\infty} \mathrm{GL}_n(K_v)$ es considerado como un subgrupo de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$. Podemos asumir que $\lambda_1 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\infty})$. Esto implica que la constante de Thunder se puede reescribir como

$$(5.10) \quad \gamma_n(K) = \max_{1 \leq i \leq h_K} \mu_i,$$

donde

$$(5.11) \quad \mu_i = \max_{g \in \mathrm{GL}_n(K_{\infty})} \min_{x \in K^n \setminus \{0\}} \frac{H_{g\lambda_i}(x)^2}{|\det(g\lambda_i)|_{\mathbb{A}}^{2/(nm)}}.$$

Por otro lado, podemos interpretar a una forma de Humbert S como una sucesión $\{S_v : v|\infty\}$, con S_v una matriz $n \times n$, simétrica o hermítica definida positiva, según v sea real o compleja. Cada S_v puede ser escrito como $g_v^* g_v$ para algún $g_v \in \mathrm{GL}_n(K_v)$, y $N_K(\langle x \rangle) = \prod_{v|\infty} H_v(x)^{-1}$ para todo $x \in K^n \setminus \{0\}$. Por lo tanto,

$$(5.12) \quad \gamma_{K,n}^p = \sup_{g \in \mathrm{GL}_n(K_{\infty})} \inf_{x \in K^n \setminus \{0\}} \frac{H_g(x)^{2m}}{|\det(g)|_{\mathbb{A}}^{2/n}}.$$

Esto implica que $\gamma_{K,n}^p = \mu_1^m$. Finalmente (5.10) y (5.11) prueban el teorema. \square

5.3. Constante de Watanabe

De manera similar a la sección anterior, T. Watanabe mostró que la constante clásica de Hermite (5.1) puede escribirse como

$$\gamma_n = \max_{g \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})} \min_{x \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \|\pi_1(g)(x)\|_\infty^2,$$

donde (π_1, V_1) denota la 1-representación exterior de GL_n y $\|\cdot\|_\infty$ la métrica Euclídea usual en $V_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Escogiendo una función altura apropiada $\|\cdot\|_{\mathbb{A}_\mathbb{Q}}$ sobre $\mathrm{GL}(V_1, \mathbb{A}_\mathbb{Q})V_1(\mathbb{Q})$ y un vector de peso máximo $v_1 \in V_1(\mathbb{Q})$, entonces γ_n es adélicamente escrito como

$$\gamma_n = \max_{g \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{A}_\mathbb{Q})/\mathrm{SL}_n(\mathbb{Q})} \min_{\gamma \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Q})} \|\pi_1(g\gamma)v_1\|_{\mathbb{A}_\mathbb{Q}}^2.$$

Luego, reemplazando SL_n , (π_1, V_1) y v_1 por un grupo algebraico reductivo conexo arbitrario G sobre K , una representación K -racional fuerte (π, V_π) y un vector de peso máximo $x_0 \in V_\pi(K)$, respectivamente, él definió

$$(5.13) \quad \gamma_\pi^G = \max_{g \in G(\mathbb{A})^1/G(K)} \min_{\gamma \in G(K)} \|\pi(g\gamma)x_0\|_{\mathbb{A}}^{2/m}.$$

Llamaremos a esta constante, la *constante de Watanabe n -dimensional sobre K de la representación (π, V) del grupo G* .

Watanabe en [Wa1] mostró que tal constante existe usando la teoría de reducción de Borel, dio una cota inferior, y luego en [Wa3] probó una generalización de la desigualdad de Mordell. Para el caso en que $G = \mathrm{GL}_n$ y $\pi = \pi_1$, la constante γ_π^G coincide con $\gamma_n(K)$.

OBSERVACIÓN 5.5. En general, si tomamos Q un subgrupo K -parabólico de G y una representación $\pi : G \rightarrow \mathrm{GL}(V_\pi)$ tal que el estabilizador de la línea de peso máximo sea Q , entonces

$$\gamma_\pi^G = \max_{g \in G(\mathbb{A})^1} \min_{x \in Q(K) \setminus G(K)} H_\pi(xg)^2,$$

donde H_π es la función de altura global de V_π .

TEOREMA 5.6. *Especializando en $G = \mathrm{SL}_n$ y $\pi = \rho$ la representación natural de SL_n , tenemos que*

$$(5.14) \quad \gamma_{K,n}^p = (\gamma_\rho^{\mathrm{SL}_n})^m.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $g \in \mathrm{GL}_n(K_\infty)$. Para cada $v \mid \infty$ existe $a_v \in K_v$ tal que $\det(a_v g_v) = 1$. En particular, la matriz $h_v = a_v g_v$ está en $\mathrm{SL}_n(K_v)$. Definimos $h \in \mathrm{SL}_n(K_\infty) \leq \mathrm{SL}_n(\mathbb{A})$ tomando $h_v = a_v g_v$ para todo $v \mid \infty$ y $h_v = 1$ para todo $v \nmid \infty$. Entonces para cada $v \mid \infty$ tenemos que

$$H_{h_v}(x)^2 = H_v(a_v g_v x)^2 = |a_v|_v^{2/m} H_v(g_v x)^2 = \frac{H_{g_v}(x)^2}{|\det(g_v)|_v^{2/(mn)}}.$$

Como SL_n tiene la propiedad de aproximación fuerte (asumiendo que $n \geq 2$), resulta que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{A}) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{A}_\infty)\mathrm{SL}_n(K)$. Ahora podemos reescribir (5.12) como

$$(5.15) \quad \gamma_{K,n}^p = \max_{h \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{A})} \min_{x \in K^n \setminus \{0\}} H_h(x)^{2m}.$$

Finalmente, comparando la ecuación en la Observación 5.5 y (5.15), y teniendo en cuenta que $SL_n(\mathbb{A}) = SL_n(\mathbb{A})^1$ porque SL_n es semisimple, el teorema queda probado. \square

CAPÍTULO 6

Cálculo de $\gamma_{K,2}^p$ para extensiones cuadráticas imaginarias

El objetivo del presente capítulo es calcular, para K una extensión cuadrática imaginaria de los números racionales, la constante proyectiva de Hermite

$$(6.1) \quad \gamma_{K,2}^p = \sup_{S \in \mathcal{P}_{K,n}} \inf_{v \in \mathcal{O}_K^n} \frac{S[v]}{N(\langle v \rangle)^2 d(S)^{1/n}}$$

(ver la Definición 5.1). Ya mencionamos en la introducción que la constante clásica $\gamma_{K,2}$ dada por (5.5) ha sido calculada en varios casos (ver la Tabla 0.1 en la pág. 8). Para el caso de la constante unimodular $\gamma_{K,2}^u$ dada por (5.7), tenemos que $\gamma_{K,2}^u = \infty$ si y sólo si $h_K > 1$ (ver [Ma]).

Además buscaremos las formas extremas respectivas, las cuales las definimos en general de la siguiente manera.

DEFINICIÓN 6.1. Las formas de Humbert que son un máximo local (absoluto) de la aplicación

$$S \longmapsto \frac{\mu^p(S)}{d(S)^{1/n}}$$

son llamados *formas extremas proyectivas (absolutas)*.

En todo este capítulo, K será una extensión cuadrática imaginaria de los números racionales $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$, donde asumimos que $D > 0$ es un entero libre de cuadrados. Consideraremos la \mathbb{Z} -base de \mathcal{O}_K que consiste de 1 y ω donde $\omega = (1 + \sqrt{D}i)/2$ si $-D$ es congruente a 1 mód 4, y $\omega = \sqrt{D}i$ en caso contrario.

La primera sección introducirá el contexto geométrico en el que trabajaremos. La segunda mostrará parte del trabajo de Mendoza, que permite obtener una fórmula reducida de (6.1). La Sección 6.3 ayudará a calcular la fórmula obtenida, por medio de un algoritmo que trabaja para todos los casos. En la Sección 6.4, como ejemplo, implementamos el método a los casos $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ y $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-39})$. Este último es no trivial pues tiene número de clase igual a cuatro. Finalmente, la última sección muestra la Tabla 6.1, que reúne para todos los cuerpos tales que $|d_K| < 70$, la constante $\gamma_{K,2}^p$ y los puntos extremos proyectivos absolutos, los cuales permiten obtener las formas extremas proyectivas absolutas usando el Teorema 6.3.

El Teorema 0.1 y la Tabla 0.1 en la Introducción, resumen los resultados obtenidos en este capítulo.

6.1. Espacio hiperbólico tridimensional

El objetivo de esta sección es introducir el contexto geométrico en el cual trabajaremos. Veremos que las formas hermiticas binarias están en correspondencia con los puntos del espacio hiperbólico tridimensional \mathbb{H}^3 y las formas extremas estarán en correspondencia con los vértices de ciertas superficies en \mathbb{H}^3 .

Recordemos que $\mathcal{P}_{K,2}$ denota el conjunto de formas de Humbert binarias definidas positivas sobre K . Siguiendo la Definición 4.1, los elementos de $\mathcal{P}_{K,2}$ corresponden a 1-tuplas $S = (S_1)$ donde S_1 es una forma hermitica binaria definida positiva. Además, $d(S) = (\det S_1)^2$. Simplemente identificaremos una forma de Humbert $S \in \mathcal{P}_{K,2}$ con un elemento en el conjunto

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & c \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) : ac - |b|^2 > 0, c > 0 \right\}.$$

En este caso, si $v = (\alpha, \beta)^t \in \mathcal{O}_K^2$, entonces

$$S[v] = \left((\bar{\alpha} \ \bar{\beta}) \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right)^2 = (a|\alpha|^2 + b\bar{\alpha}\beta + \bar{b}\alpha\bar{\beta} + c|\beta|^2)^2,$$

$$d(S) = (\det S)^2.$$

La evaluación y el determinante es el cuadrado de la evaluación y determinante canónico.

Consideremos la acción del grupo $GL_2(\mathbb{C})$ sobre $\mathcal{P}_{K,2}$ dada por

$$S \mapsto g \cdot S = |\det g| (g^{-1})^* S (g^{-1}).$$

Notemos que cada elemento en $GL_2(\mathbb{C})$ deja invariante al conjunto

$$\mathcal{P}_{K,2}(\Delta) = \{S \in \mathcal{P}_{K,2} : d(S) = \Delta\},$$

para todo $\Delta > 0$.

Sea \mathbb{H}^3 el espacio hiperbólico (real) tridimensional. Usaremos el modelo del semiespacio superior del espacio euclídeo tridimensional, dentro de $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$, i.e.

$$\mathbb{H}^3 = \{(z, \zeta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : \zeta > 0\}.$$

Existe una acción natural de $GL_2(\mathbb{C})$ sobre \mathbb{H}^3 dado por

$$(6.2) \quad g \cdot (z, \zeta) = \left(\frac{(az + b)\overline{(cz + d)} + a\bar{c}\zeta^2}{|cz + d|^2 + |c|^2\zeta^2}, \frac{|\det g| \zeta}{|cz + d|^2 + |c|^2\zeta^2} \right).$$

OBSERVACIÓN 6.2. En realidad la acción dada por (6.2) no parece natural. Podemos pensar al espacio hiperbólico tridimensional como el subconjunto de elementos de los cuaterniones \mathbb{H} , que tienen la k -coordenada igual a cero y la j -coordenada mayor a cero, i.e.

$$\mathbb{H}^3 = \{z + \zeta j \in \mathbb{H} : z \in \mathbb{C}, \zeta > 0\}.$$

La correspondencia entre los modelos es $(z, \zeta) \leftrightarrow z + \zeta j$.

Ahora, la acción (6.2) se convierte en

$$(6.3) \quad g \cdot P = (aP + b)(cP + d)^{-1},$$

donde $P \in \mathbb{H}^3$, $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$ con determinante positivo, y el inverso del elemento $cP + d$ es tomado en \mathbb{H} . Es simple chequear que esta acción

está bien definida, esto es, $g \cdot P$ en (6.3) vive en \mathbb{H}^3 . Si $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ no tiene determinante positivo, entonces $g \cdot P$ es definido por $(\epsilon g) \cdot P$, donde ϵ satisface $|\epsilon| = 1$ y $\det(\epsilon g) > 0$.

Ahora, esta acción luce similar a la acción de Möbius de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sobre \mathbb{H}^2 . Para una situación más general ver [EGM, Prop. 5.1].

Restringiremos nuestra atención al subgrupo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Éste actúa sobre \mathbb{H}^3 por isometrías. De hecho, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ es el grupo completo de isometrías de \mathbb{H}^3 que preservan orientaciones.

TEOREMA 6.3. *El mapeo $\Phi : \mathcal{P}_{K,2} \rightarrow \mathbb{H}^3$ definido por*

$$\Phi \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & c \end{pmatrix} = \left(\frac{-b}{a}, \frac{\sqrt{\Delta(S)}}{a} \right),$$

es $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ -equivariante. Además, el mapeo $\Phi_\Delta = \Phi|_{\mathcal{P}_{K,2}(\Delta)} : \mathcal{P}_{K,2}(\Delta) \rightarrow \mathbb{H}^3$ es una biyección para todo $\Delta > 0$. La función inversa de Φ_Δ está dada por

$$\Psi_\Delta(z, \zeta) = \frac{\sqrt{\Delta}}{\zeta} \begin{pmatrix} 1 & -z \\ -\bar{z} & |z|^2 + \zeta^2 \end{pmatrix}.$$

DEMOSTRACIÓN. Simples cálculos. □

La acción de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ sobre \mathbb{H}^3 se extiende sobre el borde de \mathbb{H}^3 . Identificamos este borde con $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, donde los elementos en \mathbb{C} corresponden a los elementos en $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ con segunda componente igual a cero. Esta acción es precisamente la clásica acción de Möbius. A partir de ahora, un punto en el espacio hiperbólico extendido $P \in \bar{\mathbb{H}}^3$ lo escribiremos como $P = (z, \zeta)$ con $z \in \mathbb{C}$ y $\zeta \geq 0$ (si $P \neq \infty$), o $P = \infty$.

DEFINICIÓN 6.4. Llamaremos a $\lambda \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ una *cúspide* si $\lambda \in K \subset \mathbb{C}$ o $\lambda = \infty$. Al conjunto de cúspides lo identificaremos con $\mathbb{P}^1(K)$. Para $\lambda \in \mathbb{P}^1(K)$, la escribiremos siempre como $\lambda = \alpha/\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathcal{O}_K$ si $\lambda \in K$, o $\lambda = 1/0$ si $\lambda = \infty$.

Notemos que el subgrupo $\mathrm{GL}_2(K)$ preserva el conjunto de cúspides.

Siguiendo la teoría clásica, asociaremos a cada cúspide $\lambda = \alpha/\beta$ el elemento del grupo de clase \mathcal{J}_K de \mathcal{O}_K representado por el ideal fraccionario $\langle \alpha, \beta \rangle$. Se ve fácilmente que este mapeo está bien definido. Más aún, este mapeo identifica cúspides $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_K)$ -equivalentes e induce una biyección entre $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_K) \backslash \mathbb{P}^1(K)$ y \mathcal{J}_K (ver [EGM1, §7.2] en la Bibliografía de la Parte 1).

Usualmente restringiremos la acción al subgrupo discreto $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_K)$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Estos grupos son llamados los *grupos de Bianchi*. La órbita de la acción restringida de $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_K)$ sobre el conjunto de cúspides está en correspondencia con los elementos del grupo de clase de \mathcal{O}_K .

6.2. Resultados de Mendoza

Ahora estamos en condiciones de describir la estrategia de Mendoza ([Me]). Comenzamos introduciendo la definición de *distancia entre un punto $P = (z, \zeta) \in \mathbb{H}^3$ y una cúspide λ* , la cual está dada por

$$(6.4) \quad d(P, \lambda) = \frac{|\beta z - \alpha|^2 + |\beta|^2 \zeta^2}{\zeta N\langle \alpha, \beta \rangle}.$$

Esta definición no depende de la elección de α y β , como veremos en las siguientes observaciones.

OBSERVACIÓN 6.5 (Interpretación geométrica). Sea $\lambda \in K$. El número $N_\lambda = N\langle\alpha, \beta\rangle/|\beta|^2$ no depende de la elección de los enteros α y β con $\lambda = \alpha/\beta$. Ahora podemos escribir a (6.4) como

$$d(P, \lambda) = \frac{|P - \lambda|^2}{\zeta N_\lambda}.$$

Si λ y μ son dos cúspides, denotaremos con $S(\lambda, \mu)$ al conjunto de puntos en \mathbb{H}^3 tales que son equidistantes a estas cúspides, más precisamente,

$$S(\lambda, \mu) = \{P \in \mathbb{H}^3 : d(P, \lambda) = d(P, \mu)\}.$$

Estos conjuntos resultan ser semiesferas o planos perpendiculares al borde \mathbb{C} , es decir, planos geodésicos en \mathbb{H}^3 . En particular, $S(\infty, \lambda)$ es una semiesfera centrada en λ con radio $\sqrt{N_\lambda}$.

OBSERVACIÓN 6.6 (Interpretación aritmética). Tomemos $S = \Psi_\Delta(P) \in \mathcal{P}_{K,2}(\Delta)$ y $v = (\alpha, \beta)^t \in \mathcal{O}_K^2$ donde $\lambda = \alpha/\beta$. Entonces

$$(6.5) \quad d(P, \lambda)^2 = \frac{S[v]}{\Delta N\langle\alpha, \beta\rangle^2} = \left(\frac{v^* S v}{\sqrt{\Delta} N\langle\alpha, \beta\rangle} \right)^2.$$

Además de poder relacionar la distancia con la evaluación de una forma de Humbert, (6.5) implica la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 6.7. Si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathcal{O}_K)$ con $\det(g) \neq 0$, $P \in \mathbb{H}^3$ y $\lambda = \alpha/\beta \in \mathbb{P}^1(K)$, entonces

$$d(g \cdot P, g \cdot \lambda) = \frac{|\det g| N\langle\alpha, \beta\rangle}{N\langle g(\alpha, \beta)\rangle} d(P, \lambda).$$

En particular $d(g \cdot P, g \cdot \lambda) = d(P, \lambda)$ para todo $g \in \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_K)$.

Otra consecuencia de (6.5) es precisamente la explicación de porqué trabajamos en este contexto geométrico considerando \mathbb{H}^3 con la distancia (6.4). La constante proyectiva $\gamma_{K,2}^p$ dada por (6.1) cumple la siguiente ecuación.

$$(6.6) \quad \gamma_{K,2}^p = \sup_{P \in \mathbb{H}^3} \inf_{\lambda \in \mathbb{P}^1(K)} d(P, \lambda)^2.$$

En el resto de esta sección probaremos resultados sobre la existencia de esta constante y de reducción de la misma, que usaremos luego para calcularla explícitamente.

Un número positivo $c \in \mathbb{R}$ es llamado una *constante de reducción superior* para el cuerpo K , si para cada $P \in \mathbb{H}^3$ existe al menos una cúspide λ de K tal que $d(P, \lambda) \leq c$. La *constante de reducción superior óptima* es el ínfimo de todas las constantes de reducción superior.

TEOREMA 6.8 (Mendoza [Me]). Sea $P \in \mathbb{H}^3$.

1. Para cada número real $c > 0$, existe sólo un número finito de cúspides λ tales que $d(P, \lambda) \leq c$.
2. El número $\sqrt{|d_K|}/2$ es una constante de reducción superior.

3. Sea $\eta : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$(6.7) \quad \eta(P) = \min_{\lambda \in \mathbb{P}^1(K)} d(P, \lambda).$$

Entonces η es continua e invariante por la acción de $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_K)$.

4. La función η alcanza un valor máximo absoluto sobre \mathbb{H}^3 , el cual coincide con la constante de reducción superior óptima.

DEMOSTRACIÓN. Ver en [Me], Teorema 1.1.12 para 1, Teorema 1.2.2 para 2 y §2 para 3 y 4 \square

Aplicando este teorema a (6.6) tenemos que

$$(6.8) \quad \gamma_{K,2}^p \leq \frac{|d_K|}{2}.$$

EJEMPLO 6.9. En algunos casos vale la igualdad en (6.8), y en éstos es posible determinar $\gamma_{K,2}^p$ con cierta facilidad. Ilustraremos esto en el caso $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$. Tomemos $P_0 = \left(\frac{1+i}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \in \mathbb{H}^3$. Queremos mostrar que $\eta(P_0) = \sqrt{2}$.

Por un simple cálculo obtenemos que $d(P_0, \infty) = \sqrt{2}$. Luego, es suficiente probar que $d(P_0, \lambda) \geq \sqrt{2}$ para todo $\lambda \in K$. Por (6.4), esto es equivalente a mostrar que

$$|P_0 - \lambda|^2 \geq N_\lambda,$$

para todo λ . Si λ cumple que $|\frac{1+i}{2} - \lambda|^2 \geq \frac{1}{2}$, entonces $|P_0 - \lambda|^2 = |\frac{1+i}{2} - \lambda|^2 + \frac{1}{2} \geq 1 \geq N_\lambda$. Sino, entonces $|\frac{1+i}{2} - \lambda|^2 < \frac{1}{2}$, lo que implica que $\lambda \notin \mathcal{O}_K$, por lo tanto $|P_0 - \lambda|^2 = |\frac{1+i}{2} - \lambda|^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$. Pero $\frac{1}{2} \geq N_\lambda$ (ver el Lema 6.21).

Sabemos que vale la igualdad en (6.8) en los casos $D = 1, 2, 3, 11, 19, 43, 67, 163$ (todos los casos tales que $h_K = 1$ excepto $D = 7$), $D = 6$ ($h_K = 2$), y $D = 17$ ($h_K = 4$).

Ahora presentamos otro resultado de Mendoza, el cual nos ayudará a reducir la igualdad en (6.6).

DEFINICIÓN 6.10. Sea $\lambda \in \mathbb{P}^1(K)$. El conjunto minimal $H(\lambda)$ de λ es el conjunto de puntos en \mathbb{H}^3 tales que su distancia a λ es menor o igual a la distancia a cualquier otra cúspide. Más precisamente,

$$H(\lambda) = \{P \in \mathbb{H}^3 : d(P, \lambda) \leq d(P, \mu) \quad \forall \mu \neq \lambda\}.$$

OBSERVACIÓN 6.11. Es claro que la función $\eta(P) = d(P, \lambda)$ para todo $P \in H(\lambda)$. Además, recordando la Observación 6.5, podemos interpretar al conjunto $H(\infty)$ como la clausura del conjunto de puntos de \mathbb{H}^3 que están arriba de todas las semiesferas $S(\infty, \lambda)$ para todas las cúspides finitas λ .

Abreviemos $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_K)$ y $h = h_K$. Además denotemos $\Gamma(\lambda)$ al estabilizador de λ en Γ . Es claro que $\Gamma(\lambda)$ deja invariante a $H(\lambda)$. Sean $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h\}$ un conjunto de representantes de las $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_K)$ -órbitas en el conjunto de cúspides.

Por la regla de transformación dada en la Proposición 6.7, no es difícil ver que

$$\Gamma \cdot (H(\lambda_1) \cup \dots \cup H(\lambda_h)) = \mathbb{H}^3.$$

Sea T_i un dominio fundamental de $H(\lambda_i)$ bajo la acción de $\Gamma(\lambda_i)$. Luego, es claro que el conjunto

$$T_1 \cup \cdots \cup T_h$$

es un dominio fundamental de \mathbb{H}^3 bajo la acción de Γ . Esto nos dice que si queremos calcular el máximo global de η , como es invariante por $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_K)$ por el Teorema 6.8, es suficiente determinar su máximo sobre este dominio fundamental. Así

$$\gamma_{K,2}^p = \max_{1 \leq i \leq h} \max_{P \in T_i} d(P, \lambda_i)^2.$$

Aún podremos reducir más la ecuación para $\gamma_{K,2}^p$. Para esto denominemos *conjunto de incidencia minimal* al conjunto formado por la unión de los bordes de todos los conjuntos minimales. Más precisamente,

$$(6.9) \quad \mathcal{M} = \bigcup_{\lambda} \partial H(\lambda) = \bigcup_{\lambda \neq \mu} H(\lambda) \cap H(\mu).$$

LEMA 6.12 (Mendoza [Me]). *Si η alcanza su máximo local en un punto P , entonces P está en \mathcal{M} .*

DEMOSTRACIÓN. Sea $M = \eta(P)$. Supongamos que $P \notin \mathcal{M}$. Como \mathcal{M} es cerrado, existe una bola abierta (euclídea) B con centro en P y radio r contenida en $\mathbb{H}^3 \setminus \mathcal{M}$. Llamemos λ a la única cúspide tal que $\eta(P) = d(P, \lambda)$ (ver Observación 6.11). Entonces es evidente que existe un punto P_1 en la bola B tal que $d(P_1, \lambda) > d(P, \lambda) = \eta(P)$, lo cual contradice la hipótesis de máximo local. \square

El conjunto de incidencia minimal \mathcal{M} fue introducido para calcular homologías enteras y racionales de grupos de Bianchi. Esto es así pues \mathcal{M} es un retracto celular de dimensión 2 de \mathbb{H}^3 que es invariante por $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_K)$. Para más información ver [Me] y [Vo].

Este lema junto con la Proposición 6.7 transforma (6.6) en

$$(6.10) \quad \gamma_{K,2}^p = \max_{P \in \mathcal{M}} \eta(P)^2 = \max_{1 \leq i \leq h_K} \max_{P \in \tilde{T}_i} d(P, \lambda_i)^2,$$

donde \tilde{T}_i denota un dominio fundamental de $\partial H(\lambda_i)$ bajo la acción de $\Gamma(\lambda_i)$. La siguiente sección estará destinada a determinar los conjuntos \tilde{T}_i , los cuales fueron estudiados en [Vo] por K. Vogtmann.

Concluimos esta sección con la traducción de la noción de forma extrema en este contexto geométrico. Los puntos en los cuales la función η tiene un máximo local (absoluto) serán llamados *puntos extremos (absolutos)*. Siguiendo [Me], los puntos extremos coinciden con los vértices de \mathcal{M} . Luego, por Definición 6.1 y las definiciones de η y d , tenemos la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 6.13. *El mapeo Φ definido en el Teorema 6.3 identifica formas extremas (absolutos) con puntos extremos (absolutos).*

6.3. Resultados de Vogtmann

Esta sección contiene un resumen de parte del trabajo hecho K. Vogtmann en [Vo]. Estos resultados nos ayudarán a encontrar dominios fundamentales convenientes \tilde{T}_i de $\partial H(\lambda_i)$ bajo la acción de $\Gamma(\lambda_i)$, los cuales son necesarios para calcular $\gamma_{K,2}^p$ usando (6.10). Más aún, los vértices de estos conjuntos determinarán los puntos extremos.

Dado una cúspide finita λ , asociamos a ésta el menor número natural n tal que $\alpha = n\lambda \in \mathcal{O}_K$ y la matriz

$$L = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ n & 0 \end{pmatrix}.$$

Para $\lambda = \infty$, tomamos $\alpha = 1$, $n = 0$ y $L = \text{Id}_2$ la matriz identidad. Los elementos λ, n, α, L se mantendrán fijos en lo que resta de este capítulo.

El siguiente teorema será la herramienta principal para encontrar nuestros dominios fundamentales. Éste es un algoritmo para construirlo.

TEOREMA 6.14 (Vogtmann [Vo]). *Asumamos $|d_K| > 4$. Sea $\lambda \in \mathbb{P}^1(K)$. Sea \mathcal{P} un dominio fundamental para el lattice $n\langle\alpha, n\rangle^{-2}$ en \mathbb{C} . Un dominio fundamental de $\partial H(\lambda)$ bajo la acción $\Gamma(\lambda)$, está dado por la unión de las celdas*

$$H(\lambda) \cap H(L(\gamma/m)),$$

tales que

- (i) m es un entero tal que $0 < m < N\langle\alpha, n\rangle(-d_K/2)$;
- (ii) $\gamma \in \mathcal{O}_K$ y $\gamma/m \in \mathcal{P}$;
- (iii) $\dim(H(\lambda) \cap H(L(\gamma/m))) = 2$.

Este dominio será denotado por $I(\lambda)$.

El teorema usa la palabra “celda” pues la intersección de dos conjuntos minimales es, o un punto, o un segmento de geodésica, o una porción acotada de un plano geodésico.

Cuando $|d_K| > 4$, el grupo $\Gamma(\infty)$ coincide con el grupo de traslaciones de \mathbb{C} por elementos en \mathcal{O}_K . Cuando $|d_K| \leq 4$ (i.e. $D = 1, 3$) existen unidades en K diferentes de ± 1 . Por lo tanto el conjunto $\Gamma(\infty)$ contiene más elementos que las traslaciones por \mathcal{O}_K , más precisamente, algunas rotaciones dependiendo de D . En la Sección 6.4 consideraremos estos casos como ejemplos, usando el mismo teorema.

Cuando el cuerpo K tiene número de clase 1, entonces existe una sola órbita sobre el grupo $\text{SL}_2(\mathcal{O}_K)$ en el conjunto de cúspides. Luego, (6.10) nos asegura que para calcular $\gamma_{K,2}^p$ es suficiente determinar un dominio fundamental para $\Gamma(\infty)\backslash\mathcal{M}$. El Teorema 6.14 nos dice cómo hacerlo.

Más aún, los puntos extremos son puntos en donde la función η obtiene un valor máximo local, pero

$$(6.11) \quad \eta(z, \zeta) = \frac{1}{\zeta} \quad \text{para todo } (z, \zeta) \in H(\infty).$$

Entonces, como el dominio $I(\infty)$ es una unión de celdas de la forma $H(\infty) \cap H(\mu)$ para ciertos μ , los puntos en donde la función (6.11) toma sus valores máximos locales son en los que tiene ζ -coordenada mínima localmente, y éstos coinciden con los vértices de $I(\infty)$.

En el caso general, debemos determinar h_K dominios fundamentales de la acción de $\Gamma(\lambda_i)$ sobre $\partial H(\lambda_i)$, para cada $[\lambda_i]$. Desafortunadamente, si $\lambda \neq \infty$, el conjunto minimal $H(\lambda)$ no luce tan ordenado como $H(\infty)$, pues este último es “visto” desde arriba, y la función η está dada por (6.11).

Para compensar esta desventaja, Vogtmann introdujo las siguientes nociones. Consideremos la λ -distancia desde un punto $P \in \mathbb{H}^3$ a una cúspide μ definida como

$$(6.12) \quad d_\lambda(P, \mu) = d(L(P), L(\mu)).$$

Como en la sección previa, para $\mu, \nu \in \mathbb{P}^1(K)$ definimos

$$\begin{aligned} S_\lambda(\mu, \nu) &= \{P \in \mathbb{H}^3 : d_\lambda(P, \mu) = d_\lambda(P, \nu)\} \quad y \\ H_\lambda(\mu) &= \{P \in \mathbb{H}^3 : d_\lambda(P, \mu) \leq d_\lambda(P, \nu) \quad \forall \nu \in \mathbb{P}^1(K)\}. \end{aligned}$$

El conjunto $H_\lambda(\mu)$ es llamado *conjunto λ -minimal de μ* . Notar que

$$(6.13) \quad L(H_\lambda(\mu)) = H(L(\mu)).$$

OBSERVACIÓN 6.15. Al igual que en la Observación 6.11, $S_\lambda(\infty, \mu)$ es una semiesfera centrada en $\mu = \gamma/\delta$ con radio

$$\sqrt{\frac{N\langle L(\gamma, \delta) \rangle}{N\langle \alpha, n \rangle |\delta|^2}}.$$

Más aún, $H_\lambda(\infty)$ es el conjunto de puntos en \mathbb{H}^3 que viven por encima de todas las semiesferas $S_\lambda(\infty, \mu)$ para toda cúspide finita μ .

PROPOSICIÓN 6.16. *El grupo $L^{-1}\Gamma(\lambda)L$ actúa en $\partial\mathbb{H}^3 \setminus \{\infty\} = \mathbb{C}$ por traslaciones por elementos del ideal fraccionario $n\langle \alpha, n \rangle^{-2}$. Más precisamente,*

$$(6.14) \quad \left\{ \begin{pmatrix} \epsilon & \epsilon^{-1}x \\ 0 & \epsilon^{-1} \end{pmatrix} : \epsilon \in K^\times, x \in n\langle \alpha, n \rangle^{-2} \right\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Ver [Vo, Prop. (4.7)]. □

En la Sección 6.4 nos encargaremos de determinar $I(\lambda)$ para ciertos cuerpos K particulares. De todas maneras, si la cúspide λ es finita, no seguiremos de manera precisa el algoritmo dado por el Teorema 6.14 por las desventajas que recién mencionamos. De todas maneras, notemos que el conjunto $I(\lambda)$ es formado por la unión, sobre algunas cúspides γ/m , de los conjuntos $H(\lambda) \cap H(L(\gamma/m))$. Por lo tanto, $L^{-1}(I(\lambda))$ resulta ser la unión de los conjuntos $L^{-1}(H(\lambda) \cap H(L(\gamma/m)))$ sobre las cúspides γ/m que satisfacen (i), (ii) y (iii) del Teorema 6.14. Más aún, por (6.13), tenemos que

$$L^{-1}(H(\lambda) \cap H(L(\gamma/m))) = H_\lambda(\infty) \cap H_\lambda(\gamma/m).$$

Análogamente al caso $\lambda = \infty$ (Observación 6.11), el conjunto $H_\lambda(\infty) \cap H_\lambda(\gamma/m)$ es la porción de semiesfera $S_\lambda(\infty, \gamma/m)$ que vive fuera de todas las semiesferas $S(\infty, \mu)$, con μ cualquier cúspide finita. Esto permite encontrar estos subconjuntos de manera similar al caso $\lambda = \infty$. Resumimos todo lo anterior en la siguiente observación para luego citarla.

OBSERVACIÓN 6.17. *Para una cúspide finita λ , debemos encontrar un dominio fundamental I_λ para $\partial H_\lambda(\infty)$ bajo la acción de $L^{-1}\Gamma(\lambda)L$, usando el mismo algoritmo dado por el Teorema 6.14. Finalmente resulta*

$$L(I_\lambda) = I(\lambda).$$

En principio es necesario determinar h_K dominios fundamentales diferentes. Vogtmann notó que hay algunas simetrías entre ellos. Por ejemplo, usando que

$$d_{\bar{\lambda}}((\bar{z}, \zeta), \bar{\mu}) = d_\lambda((z, \zeta), \mu),$$

uno puede obtener fácilmente el siguiente lema.

LEMA 6.18. *El conjunto $H_\lambda(\infty)$ es la reflexión de $H_{\bar{\lambda}}(\infty)$ con respecto al plano $\text{Im } z = 0$.*

Este resultado es muy útil para ciertos cuerpos. Por ejemplo, supongamos que existe una cúspide λ tal que $\mathcal{J}_K = \{[\infty], [\lambda], [\bar{\lambda}]\} \simeq \mathbb{Z}_3$ ($h_K = 3$), donde denotamos $[\mu]$ a la clase del ideal $\langle \gamma, \delta \rangle$ para una cúspide $\mu = \gamma/\delta \in K$. Luego, por el lema, no es necesario determinar $H_{\bar{\lambda}}(\infty)$ si ya conocemos $H_\lambda(\infty)$. Más aún, para determinar $\gamma_{K,2}^p$ es suficiente encontrar el mínimo de η en $\partial H(\infty)$ y en $\partial H(\lambda)$.

Otra simetría más complicada sigue del siguiente teorema.

TEOREMA 6.19 (Vogtmann [Vo]). *Sea λ una cúspide tal que $[\lambda]^2 = 1$. Si μ y ν son cúspides tales que $[\mu][\lambda] = [\nu]$, entonces existe $g \in \text{GL}_2(\mathcal{O}_K)$ tal que*

$$g(H(\mu)) = H(\nu).$$

IDEA DE LA DEMOSTRACIÓN. Escribimos $\lambda = \alpha/\beta$. Desde que $[\lambda]^2 = 1$, uno puede probar que existe una matriz

$$(6.15) \quad g = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathcal{O}_K) \quad \text{tal que} \quad \begin{cases} \langle \alpha, \beta \rangle = \langle x, y \rangle = \langle z, w \rangle, \\ |\det(g)| = N\langle \alpha, \beta \rangle, \end{cases}$$

y que induce un isomorfismo $g : \mathcal{O}_K \oplus \mathcal{O}_K \longrightarrow \langle \alpha, \beta \rangle \oplus \langle \alpha, \beta \rangle$. Esto implica que

$$\langle g(s, t) \rangle = \langle xs + yt, zs + wt \rangle = \langle s, t \rangle \langle \alpha, \beta \rangle \quad \text{para todo } (s, t) \in \mathcal{O}_K^2,$$

por lo que concluimos que $[g \cdot \mu] = [\mu][\lambda] = [\nu]$ y $N\langle g(s, t) \rangle = N\langle s, t \rangle N\langle \alpha, \beta \rangle$. Escribiendo $\mu = \gamma/\delta$ y aplicando la Proposición 6.7, resulta

$$d(g \cdot P, g \cdot \mu) = \left(\frac{|\det g| N\langle \gamma, \delta \rangle}{N\langle g(\gamma, \delta) \rangle} \right) d(P, \mu) = d(P, \mu).$$

Por lo tanto g lleva $H(\mu)$ a $H(g \cdot \mu)$. Luego, la primera afirmación queda probada desde que cualquier conjunto minimal asociado a una cúspide puede ser mapeado por un elemento de $\text{SL}_2(\mathcal{O}_K)$, a otro conjunto minimal de una cúspide equivalente por $\text{SL}_2(\mathcal{O}_K)$ (ver [Vo, Proposition 5.2]). La segunda afirmación es clara. \square

OBSERVACIÓN 6.20. Supongamos que $[\lambda]$ es no trivial tal que $[\lambda]^2 = 0$. Sea g dada por (6.15), la matriz construida como en la demostración del teorema anterior. Podemos asumir que satisface $g(\infty) = \lambda$. Si \tilde{T}_∞ es un dominio

fundamental de $\Gamma(\infty) \backslash \partial H(\infty)$, el Teorema 6.19 dice que $g(\tilde{T}_\infty)$ es un dominio fundamental para la acción de $\Gamma(\lambda)$ sobre $\partial H(\lambda)$. Estas observaciones facilitarán los cálculos de $\gamma_{K,2}^p$ pues

$$(6.16) \quad \begin{aligned} \max_{P \in \partial H(\lambda)} d(P, \lambda)^2 &= \max_{P \in \tilde{T}_\infty} d(g \cdot P, g \cdot \infty)^2 \\ &= \max_{P \in \tilde{T}_\infty} d(P, \infty)^2 \\ &= \max_{(z, \zeta) \in \tilde{T}_\infty} \frac{1}{\zeta^2}, \end{aligned}$$

y entonces no es necesario calcular $\max_{P \in \partial H(\lambda)} d(P, \lambda)^2$ pues debemos calcular el lado derecho. Por un argumento similar, para cualquier μ existe $g \in \text{GL}_2(K)$ tal que $g(H(\mu)) = H(\nu)$ donde $[\nu] = [\lambda][\mu]$. Finalmente, el mínimo de η sobre $\partial H(\nu)$ es igual al mínimo sobre $\partial H(\mu)$.

Concluimos esta sección con un lema de teoría algebraica de números que nos ayudará a acotar el tamaño de las semiesferas $S_\lambda(\mu, \nu)$.

LEMA 6.21. *Sea $\mu = \gamma/m$ una cúspide finita, donde m es el menor natural tal que $m\mu \in \mathcal{O}_K$. Entonces*

$$N\langle L(\gamma, m) \rangle = N\langle \alpha\gamma + m, n\gamma \rangle \leq \begin{cases} m & \lambda = \infty, \\ n^2 m & \lambda \neq \infty. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. Ver [Vo, Lemma 4.3]. □

6.4. Ejemplos

Hemos introducido todos los ingredientes y resultados necesarios para calcular $\gamma_{K,2}^p$ y encontrar las formas extremas para cualquier K . Para esto hay que encontrar el dominio fundamental $I(\lambda)$ de $\Gamma(\lambda) \backslash \partial H(\lambda)$ vía el algoritmo de Vogtmann (Teorema 6.14). De todas maneras, cuando $|d_K|$ crece, la determinación de este dominio fundamental se vuelve más difícil. La razón puede ser resumida así: cuando $|d_K|$ crece, el número complejo ω está cada vez más lejos de 0 y, por lo tanto, más conjuntos $H(\lambda) \cap H(L(\gamma/m))$ son necesarios, según el Teorema 6.14.

A continuación realizaremos tres ejemplos. Los dos primeros serán básicos pues serán los de menor discriminante, esto es, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ y $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$. El último será $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-39})$, el cuerpo con número de clase igual a 4 de determinante mínimo. Recordemos que para $\delta, \beta \in \mathcal{O}_K$, $[\delta/\beta]$ denota la clase del ideal $\langle \delta, \beta \rangle$ en grupo de clases \mathcal{J}_K .

6.4.1. $K = \mathbb{Q}\sqrt{-1}$. El anillo $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[i]$ es llamado el *anillo de enteros de Gauss* y $\omega = i$. En este caso el grupo de clases \mathcal{J}_K es trivial, por lo que toda cúspide es Γ -equivalente a ∞ . Esto nos dice que es suficiente determinar un dominio fundamental de $\mathcal{M} = \partial H(\infty)$ bajo la acción de $\Gamma(\infty)$. Para esto, primero usaremos el Teorema 6.14, aunque el hecho que no se cumpla la hipótesis $|d_K| > 4$ nos obligará a trabajar un poco más luego de obtener $I(\infty)$.

Fijemos como dominio fundamental para el lattice $\mathbb{Z}[i]$, el clásico conjunto

$$\mathcal{P} = \{x + yi : 0 \leq x, y < 1\}.$$

Como mencionamos en la Observación 6.11, el conjunto $H(\infty)$ es la clausura del conjunto de puntos que viven “arriba” de todas las semiesferas $S(\mu, \infty)$, donde μ una cúspide finita. También mencionamos (Observación 6.5) que la semiesfera $S(\mu, \infty)$ tiene radio $\sqrt{N_\lambda}$, el cual es igual a 1 para el caso $\mu = \frac{0}{1}$. Además es fácil comprobar que las semiesferas $S(\mu, \infty)$ y $S(\mu + \beta, \infty)$ tienen el mismo radio para cualquier $\beta \in \mathbb{Z}[i]$.

La Figura 6.1 muestra la semiesfera $S(0, \infty)$ en el medio, rodeada por las ocho semiesferas $S(\mu, \infty)$ con $\mu \in \{\pm 1, \pm i, \pm(1 \pm i)\}$. Llamemos A al casquete de $S(0, \infty)$ que sobresale (parte oscura). Se puede ver por simples cálculos que los cuatro vértices de A son los puntos

$$(6.17) \quad \left(\pm \frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Llamemos $P_0 = ((1+i)/2, 1/\sqrt{2})$, el cual es el mismo que en el Ejemplo 6.9, en donde se presentó un cálculo de $\gamma_{K,2}^p$ diferente.

Consideremos para este caso el subgrupo de Γ dado por

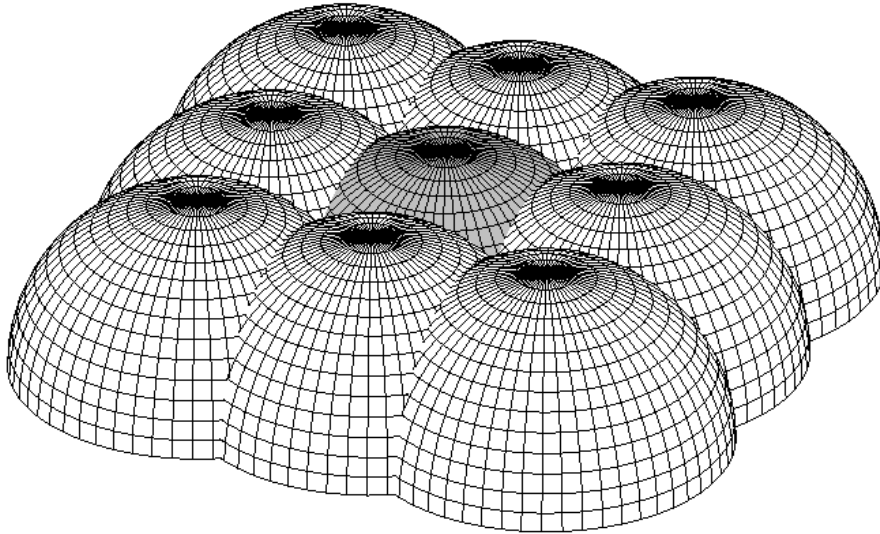
$$\Gamma_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \beta \in \mathbb{Z}[i] \right\}.$$

Notemos que por (6.14), Γ_0 tiene índice 4 en

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} \epsilon & \beta \\ 0 & \epsilon^{-1} \end{pmatrix} : \epsilon \in \{\pm 1, \pm i\}, \beta \in \mathbb{Z}[i] \right\}.$$

Nuestro primer objetivo es probar que el conjunto A es un dominio fundamental para $\partial H(\infty)$ bajo la acción de Γ_0 . Para esto, primero probemos que $A = H(\infty) \cap H(0)$, verificando que todo punto de A está fuera (o sobre) cualquier semiesfera $S(\mu, \infty)$ con μ una cúspide finita. En el gráfico se muestra que esto es cierto para $S(\mu, \infty)$ con $\mu \in \{\pm 1, \pm i, \pm(1 \pm i)\}$, y es claro que también vale para todos los demás $\mu \in \mathbb{Z}[i]$.

FIGURA 6.1. $I(\infty)$ para $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$



Sea $\mu = \delta/k$ con $\delta \in \mathbb{Z}[i]$ y $k \in \mathbb{N}$ mínimo tal que $k\mu \in \mathbb{Z}[i]$. Supongamos que $k \geq 2$. Por el Lema 6.21, la semiesfera $S(\mu, \infty)$ tiene radio

$$\sqrt{N_\mu} = \sqrt{\frac{N\langle \delta, k \rangle}{k^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Pero claramente los puntos en A con coordenada $z\eta$ mínima son los vértices (6.17). Dicha ζ -coordenada mínima es $1/\sqrt{2} \geq 1/\sqrt{k}$ para todo $k \geq 2$. Esto implica que la esfera $S(\mu, \infty)$ a lo sumo incluye algún vértice de A , pero nunca ningún punto de A puede estar del mismo lado de μ con respecto a la semiesfera. Esto prueba que $H(0) \cap H(\infty) = A$.

Por el momento, a partir de la Observación 6.11, sabemos que $H(\infty)$ está contenido en la clausura del conjunto de puntos por encima de las semiesferas $S(\mu, \infty)$ con $\mu \in \mathbb{Z}[i]$; a tal conjunto lo denominaremos J . Con la misma prueba que recién, si $\lambda \notin \mathbb{Z}[i]$ es una cúspide finita, se ve que la semiesfera $S(\lambda, \infty)$ a lo sumo contiene a un punto de J , más precisamente a un elemento de la Γ_0 -órbita de P_0 por $\mathbb{Z}[i]$, lo que implica que $\dim(H(\lambda) \cap H(\infty)) = 0$.

Hasta ahora sabemos que A es un dominio fundamental para $\Gamma_0 \backslash \partial H(\infty)$. Con esto estamos en condiciones de calcular $\gamma_{K,2}^p$. Por (6.10) tenemos

$$(6.18) \quad \gamma_{K,2}^p = \max_{P \in A} d(P, \infty)^2 = d(P_0, \infty)^2 = \frac{1}{(\sqrt{2})^2} = 2.$$

Un conjunto de representantes de las clases de $\Gamma_0 \backslash \Gamma$ son las matrices

$$\begin{pmatrix} i & \\ & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & \\ & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}.$$

La primera de ellas genera a las demás, y actúa en \mathbb{H}^3 por una rotación por $\pi/2$ (90 grados) alrededor el eje de la coordenada ζ . Esto implica que un dominio fundamental de \mathcal{M} bajo la acción de Γ es la intersección de A con el primer cuadrante $\{(z, \zeta) \in \mathbb{H}^3 : \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

En particular, los vértices de A son todos Γ -equivalentes a P_0 , por lo que la única forma extrema de determinante $\Delta > 0$ salvo equivalencia por Γ es la inducida por P_0 , que aplicando la Proposición 6.7 resulta

$$S = \Psi(P_0) = \sqrt{2\Delta} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1+i}{2} \\ -\frac{1-i}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

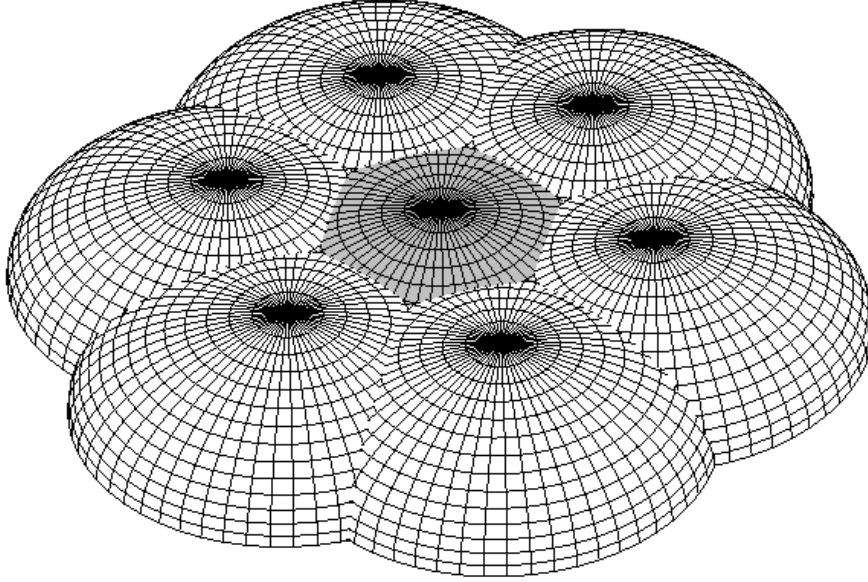
Más precisamente, para $\Delta = 1$,

$$S \left[\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right] = 2 \left(|\alpha|^2 - \operatorname{Re} \left(\frac{1+i}{2} \bar{\alpha} \beta \right) + |\beta|^2 \right)^2.$$

6.4.2. $K = \mathbb{Q}\sqrt{-3}$. El anillo $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ es llamado el *anillo de enteros de Eisenstein*, y $\omega = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$. Nuevamente el grupo de clases \mathcal{J}_K es trivial. Otra vez aplicaremos el Teorema 6.14, a pesar de que K no cumpla la hipótesis $|d_K| > 4$. Fijamos

$$\mathcal{P} = \{x + y\omega : 0 \leq x, y < 1\},$$

como dominio fundamental para el lattice \mathcal{O}_K . Análogamente al caso anterior, las semiesferas $S(\mu + \beta, \infty)$ tienen radio igual a 1 para cualquier $\beta \in \mathbb{Z}[i]$.

FIGURA 6.2. $I(\infty)$ para $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ 

La Figura 6.2 muestra la semiesfera $S(0, \infty)$ en el medio, rodeada por las seis semiesferas $S(\mu, \infty)$ con $\mu \in \{\pm 1, \pm \omega, \pm(1 - \omega)\}$. Llamemos A al casquete de $S(0, \infty)$ que sobresale (parte oscura). Sea $P_0 = (i/\sqrt{3}, \sqrt{2}/\sqrt{3})$, el cual es un vértice de A . Consideremos

$$\Gamma_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \beta \in \mathcal{O}_K \right\}.$$

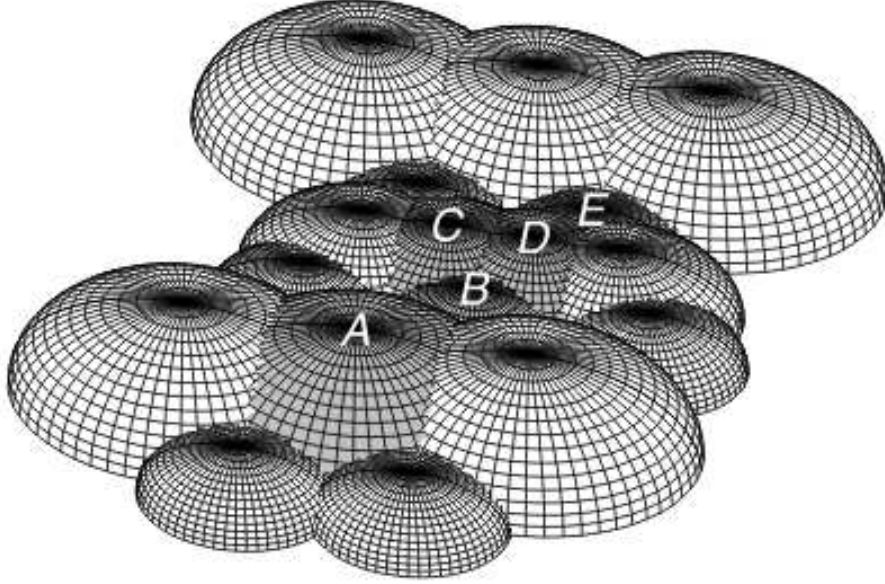
En este caso Γ_0 tiene índice 3 en Γ , por haber precisamente tres unidades en \mathcal{O}_K . Veamos que $A = H(\infty) \cap H(0)$, verificando que todo punto de A está fuera (o sobre) cualquier semiesfera $S(\mu, \infty)$ con μ una cúspide finita. En el gráfico se muestra que esto es cierto para $S(\mu, \infty)$ con $\mu \in \mathcal{O}_K$.

Sea $\mu = \delta/k$ con $\delta \in \mathcal{O}_K$ y $k \in \mathbb{N}$ mínimo tal que $k\mu \in \mathcal{O}_K$. Supongamos que $k \geq 2$. La semiesfera $S(\mu, \infty)$ tiene radio $\sqrt{N_\mu} = \sqrt{N\langle \delta, k \rangle}/k^2 \leq 1/\sqrt{k}$ por el Lema 6.21. Pero para $k \geq 2$, se tiene que $1/\sqrt{k} < \sqrt{2/3}$, donde $\sqrt{2/3}$ es el valor mínimo de la coordenada ζ que toman los puntos de A . Esto implica que todos los puntos de A están en el “lado de afuera” de las semiesferas $S(\mu, \infty)$ y por lo tanto $H(0) \cap H(\infty) = A$.

Con la misma prueba que arriba, resulta que A es un dominio fundamental de \mathcal{M} bajo la acción de Γ_0 . Luego, por (6.10), tenemos que

$$(6.19) \quad \gamma_{K,2}^p = \max_{P \in A} d(P, \infty)^2 = d(P_0, \infty)^2 = \frac{3}{2}.$$

Finalmente, la matriz $\begin{pmatrix} \omega & \\ & 1 \end{pmatrix}$ genera un conjunto de tres representantes de $\Gamma_0 \backslash \Gamma$, y actúa en \mathbb{H}^3 por una rotación por $2\pi/3$ (120 grados) alrededor del eje de la coordenada ζ . Esto implica que un dominio fundamental de \mathcal{M} bajo la acción de Γ es la intersección de A con $\{(z, \zeta) \in \mathbb{H}^3 : \text{Re}(z) >$

FIGURA 6.3. $I(\infty)$ para $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-39})$ 

$0, \text{Im}(z) + \text{Re}(z) > 0\}$. En particular, los vértices de A son todos $\text{GL}_2(\mathcal{O}_K)$ -equivalentes a P_0 , pero P_0 y \bar{P}_0 no son Γ -equivalentes, tal como lo muestra la Tabla 6.1 en la página 74.

Finalmente, las únicas formas extremas de determinante $\Delta > 0$ salvo equivalencia por Γ , son

$$S_1 = \Psi(P_0) = \sqrt{\frac{\Delta}{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -i \\ i & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad S_2 = \Psi(\bar{P}_0) = \sqrt{\frac{\Delta}{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & i \\ -i & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Más precisamente, para $\Delta = 1$,

$$S_{1,2} \left[\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \left(\sqrt{3}|\alpha|^2 \pm 2i\text{Re}(\bar{\alpha}\beta) + \sqrt{3}|\beta|^2 \right)^2.$$

6.4.3. $K = \mathbb{Q}\sqrt{-39}$. Aquí $\omega = (1 + \sqrt{39}i)/2$. El grupo de clases \mathcal{J}_K de K es isomorfo al grupo cíclico de orden 4. El elemento $\theta = [\omega/2]$ es un generador. Usaremos la siguiente realización de \mathcal{J}_K :

$$\mathcal{J}_K = \left\{ \theta^0 = [\infty], \theta^1 = \left[\frac{\omega}{2} \right], \theta^2 = \left[\frac{1+\omega}{3} \right], \theta^3 = \left[\frac{1+\omega}{2} \right] \right\}.$$

Para cada cúspide λ en $\{\infty, \omega/2, (1+\omega)/3, (1+\omega)/2\}$, encontraremos un dominio fundamental I_λ para $\partial H_\lambda(\infty)$ bajo la acción de $L^{-1}\Gamma(\lambda)L$ tal como lo explicamos en la Observación 6.17.

Si escribimos a una cúspide μ como δ/k , estaremos asumiendo que k es el menor entero positivo tal que $k\mu \in \mathcal{O}_K$.

♣ Caso $\lambda_0 = \infty$. Fijamos $\mathcal{P} = \{x + y\omega \in \mathbb{C} : 0 \leq x, y < 1\}$ como el dominio fundamental para el lattice \mathcal{O}_K . Por el Teorema 6.14, necesitamos considerar solamente los conjuntos $H(\infty) \cap H(\gamma/m)$ para $0 < m < 39/2 < 20$ y $\gamma = a + b\omega$ con $0 \leq a, b < m$.

Mencionamos en la Observación 6.11 que $H(\infty)$ es el conjunto de puntos que vive por encima de todas las semiesferas $S(\mu, \infty)$ con μ una cúspide finita. Dibujamos las semiesferas $S(\delta/k, \infty)$ para $1 \leq k \leq 3$ tales que δ/k está en \mathcal{P} , o “cerca” de \mathcal{P} para encerrar el dominio.

Recordemos que por la Observación 6.5, la semiesfera $S(\delta/k, \infty)$ tiene radio igual a la raíz cuadrada de $N_{\delta/k} = N\langle\delta, k\rangle/k^2$. Además, es fácil chequear que el radio de $S(\delta/k + \beta, \infty)$ es $\sqrt{N_{\delta/k}}$ para cualquier $\beta \in \mathcal{O}_K$.

El dibujo obtenido se muestra en la la Figura 6.3. Una breve descripción es la siguiente:

- el hexágono oscuro más grande llamado A está sobre la semiesfera $S(0, \infty)$, la cual tiene radio 1;
- los paralelogramos oscuros más pequeños llamados B y E están sobre las semiesferas $S((1 + \omega)/3, \infty)$ y $S((2 + 2\omega)/3, \infty)$ respectivamente, las cuales tienen radio $1/\sqrt{3}$;
- los paralelogramos oscuros más grandes C y D están sobre las semiesferas $S(\omega/2, \infty)$ y $S((1 + \omega)/2)$ respectivamente, las cuales tienen radio $1/\sqrt{2}$;
- las demás semiesferas $S(\delta/k, \infty)$ no oscuras ni denotadas con ninguna letra no satisfacen $\delta/k \in \mathcal{P}$. Pero éstas encierran las partes oscuras en las que estamos interesados.

Nuestro objetivo es probar que

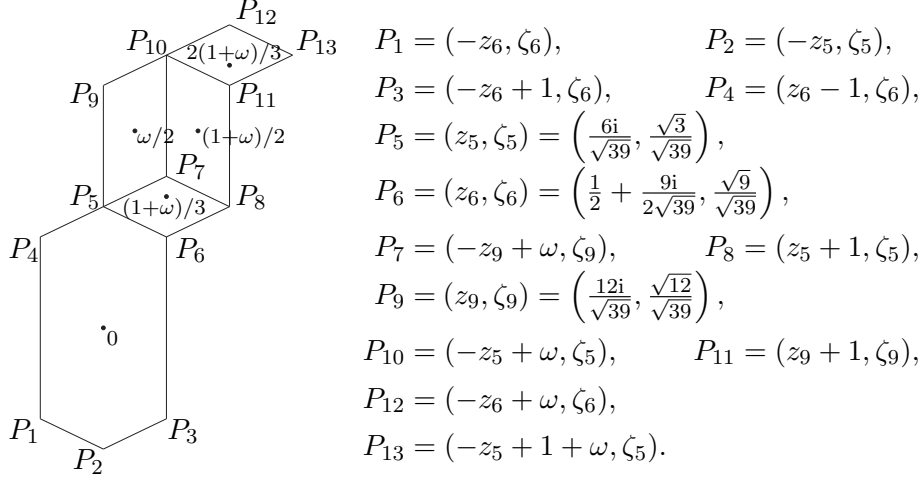
$$\begin{aligned} A &= H(0) \cap H(\infty), & B &= H\left(\frac{1+\omega}{3}\right) \cap H(\infty), \\ C &= H\left(\frac{2+2\omega}{3}\right) \cap H(\infty), & D &= H\left(\frac{\omega}{2}\right) \cap H(\infty), \\ E &= H\left(\frac{1+\omega}{2}\right) \cap H(\infty). \end{aligned}$$

Más aún, probaremos que la unión de estas 2-celdas serán el dominio fundamental $I(\infty)$ dado por el Teorema 6.14. Denotaremos por J_0 la unión de todas ellas. En la Figura 6.4 hemos dibujado la proyección ortogonal de J_0 sobre \mathbb{C} con las coordenadas explícitas de los vértices.

La Observación 6.11 nos dice que el conjunto $H(\gamma/m) \cap H(\infty)$ son los puntos dentro de $S(\gamma/m, \infty)$ que están fuera de todas las demás semiesferas $S(\delta/k, \infty)$. Supongamos que para una cúspide $\gamma/m \in \mathcal{P}$ con $1 \leq m \leq 3$, la semiesfera $S(\gamma/m, \infty)$ no aparece en la Figura 6.3 (por ejemplo $\gamma/m = 1/2, \omega/3$). Esto quiere decir que, o $H(\gamma/m) \cap H(\infty)$ es vacío, o que su dimensión es menor a dos.

Para mostrar que $J_0 = I(\infty)$ es suficiente probar que cualquier semiesfera $S(\delta/k, \infty)$ no cubre estrictamente ningún punto de J_0 , es decir que puede contener puntos de J_0 pero no puede intersectar ningún punto del abierto comprendido por encima de J_0 . Esto parece imposible pues existen infinitas cúspides δ/k , pero el radio de $S(\delta/k, \infty)$ decrece cuando k crece.

La semiesfera $S(\delta/k, \infty)$ tiene radio $\sqrt{N\langle\delta, k\rangle/k^2}$, por lo tanto menor o igual que $1/\sqrt{k}$, por el Lema 6.21. Vimos que el mínimo de la coordenada ζ de los puntos de J_0 es $\sqrt{3}/\sqrt{39}$, el cual es realizado en P_5 . Si $1/\sqrt{k} \leq \sqrt{3}/\sqrt{39}$ entonces claramente $S(\delta/k, \infty)$ no estará sobre ningún punto de J_0 . Esto nos asegura que es suficiente mostrar que $S(\delta/k, \infty)$ no cubre ningún punto de J_0 para $k < 13$.

FIGURA 6.4. Proyección de $I(\infty)$ sobre \mathbb{C} para $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-39})$ 

Esto nos dice que es necesario chequear que sólo una cantidad finita de semiesferas no cubren ninguna parte de J_0 . Después de realizar estos cálculos, los cuales no incluimos por una cuestión de espacio, concluimos que

$$J_0 = I(\infty).$$

♣ Caso $\lambda_1 = \omega/2$. La matriz asociada a λ_1 introducida al comienzo de la Sección 6.3 es

$$L = \begin{pmatrix} \omega & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se puede verificar que

$$(6.20) \quad 2\langle \omega, 2 \rangle^{-2} = 2\mathbb{Z} \oplus \frac{1-\omega}{2}\mathbb{Z}.$$

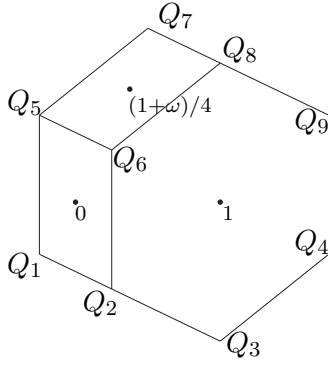
Fijamos $\mathcal{P} = \{x + y(1 - \omega)/2 \in \mathbb{C} : 0 \leq x, y < 1\}$ como un dominio fundamental en \mathbb{C} bajo la acción de $L^{-1}\Gamma(\lambda_1)L$.

De manera análoga que en caso anterior, consideraremos las semiesferas

$$S_{\lambda_1}(\delta/k, \infty)$$

para $1 \leq k \leq 4$ y δ/k en \mathcal{P} o cerca de \mathcal{P} para encerrar el dominio. Las semiesferas $S_{\lambda_1}(\gamma/m, \infty)$ con $\gamma/m \in \mathcal{P}$, como uno puede ver en el gráfico resultante, son $S_{\lambda_1}(0, \infty)$ y $S_{\lambda_1}(\omega/2, \infty)$, ambas de radio $1/\sqrt{2}$, y $S_{\lambda_1}(1, \infty)$ de radio igual a 1. Argumentos similares como los usados en el caso previo, siguiendo la Observación 6.15, prueban que la parte visible de estas semiesferas son $H_{\lambda_1}(0) \cap H_{\lambda_1}(\infty)$, $H_{\lambda_1}(\omega/2) \cap H_{\lambda_1}(\infty)$ y $H_{\lambda_1}(1) \cap H_{\lambda_1}(\infty)$ respectivamente. Denotamos por J_1 la unión de todas ellas. La Figura 6.5 exhibe la proyección ortogonal de J_1 sobre \mathbb{C} y las coordenadas explícitas de los vértices.

Para probar que J_1 coincide con I_{λ_1} , es suficiente probar que cualquier semiesfera $S_{\lambda_1}(\delta/k, \infty)$ no cubre estrictamente ningún punto de J_1 . Un análisis similar al hecho en el caso anterior muestra que hay una cantidad finita

FIGURA 6.5. Proyección de $I_{\omega/2}$ sobre \mathbb{C} para $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-39})$ 

$$Q_1 = (w_1, \xi_1) = \left(-\frac{1}{4} - \frac{9i}{4\sqrt{39}}, \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{39}}\right),$$

$$Q_2 = (-w_5, \xi_5),$$

$$Q_4 = (w_1 + 2, \xi_1),$$

$$Q_3 = (w_5 + 2 - \frac{1+\omega}{2}, \xi_5),$$

$$Q_5 = (w_5, \xi_5) = \left(-\frac{1}{4} + \frac{15i}{4\sqrt{39}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{39}}\right),$$

$$Q_6 = (-w_1, \xi_1),$$

$$Q_7 = (w_1 + \frac{1+\omega}{2}, \xi_1),$$

$$Q_8 = (-w_5 + \frac{1+\omega}{2}, \xi_5),$$

$$Q_9 = (w_5 + 2, \xi_5).$$

de casos para chequear. Por falta de espacio no incluimos estos cálculos, pero se concluye que

$$J_1 = I_{\lambda_1}(\infty).$$

♣ Caso $\lambda_2 = (1 + \omega)/3$. Notemos que $[\lambda_2]^2 = 1$. Luego, siguiendo la Idea de la demostración del Teorema 6.19, tomamos

$$g = \begin{pmatrix} 1 + \omega & 2 - \omega \\ 3 & -1 - \omega \end{pmatrix}.$$

Esta matriz satisface los requerimientos dados en (6.15) pues $\langle \alpha_2, n_2 \rangle = \langle 1 + \omega, 3 \rangle = \langle 2 - \omega, -1 - \omega \rangle$, $\det(g) = 3 = N\langle \alpha_2, n_2 \rangle$, donde $\alpha_2 = 1 + \omega$, $n_2 = 3$ y por lo tanto $\lambda_2 = \alpha_2/n_2$. Más aún, $g(\infty) = \lambda_2$ y $g(\lambda_2) = \infty$. Finalmente, El Teorema 6.19 implica que

$$H(\lambda_2) = g(H(\infty)).$$

Esto implica que el conjunto $g(I(\infty))$ es un dominio fundamental para $\partial H(\lambda_2)$ bajo la acción de $\Gamma(\lambda_2)$. Este conjunto coincide con el dominio fundamental $I(\lambda_2)$ por el Teorema 6.14, para cierta elección de \mathcal{P} .

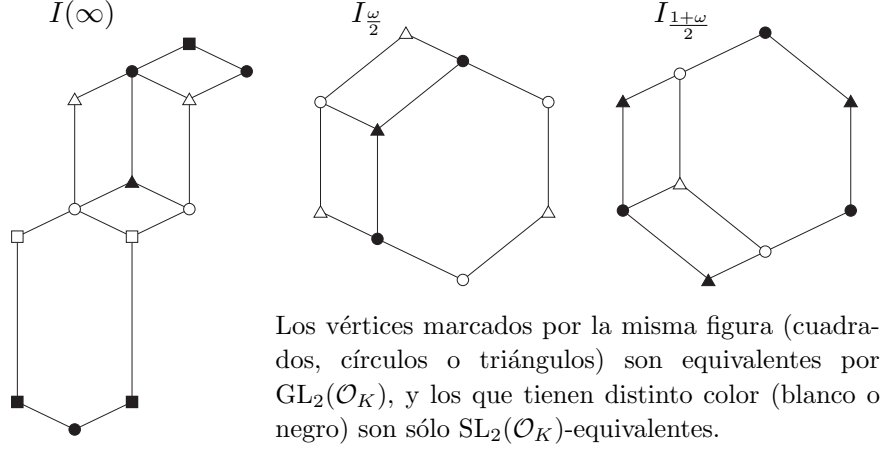
♣ Caso $\lambda_3 = (1 + \omega)/2$. El Lema 6.18 asegura para este caso que $\partial H_{\lambda_3}(\infty)$ es la reflexión de $\partial H_{\lambda_1}(\infty)$ con respecto al plano $\text{Im}(z) = 0$, pues $[\lambda_3] = \theta^{-3} = \theta = [\lambda_1]$.

Luego, por la Observación 6.17, el conjunto $\overline{I_{\lambda_1}}$ coincide con el dominio fundamental I_{λ_3} para cierta elección de \mathcal{P} .

En este momento podemos asegurar que todo punto del conjunto de incidencia minimal \mathcal{M} (ver (6.9)) es Γ -equivalente a un punto de uno de los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned} I(\infty), & & I(\lambda_2) = g(I(\infty)), \\ I(\lambda_1) = \begin{pmatrix} \omega & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} (I_{\lambda_1}), & & I(\lambda_3) = \begin{pmatrix} 1 + \omega & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} (I_{\lambda_3}). \end{aligned}$$

FIGURA 6.6. Puntos extremos módulo $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_K)$ -equivalencia para $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-39})$



Sea I la unión de estos cuatro conjuntos. No podemos asegurar que este conjunto I sea un dominio fundamental de \mathcal{M} bajo la acción de Γ , pero es evidente que todo punto de \mathcal{M} es $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_K)$ -equivalente a un punto de I .

El siguiente paso es determinar un conjunto de representantes de los conjuntos de vértices de I bajo la acción de Γ . Esto lo hacemos pues recordemos que el conjunto de vértices de I son los puntos extremos (ver la Definición 6.1), los cuales están en correspondencia con las formas extremas (ver Proposición 6.13).

Claramente $\{P_1, P_2, P_5, P_6, P_7, P_9\}$ es un conjunto de representantes de los vértices de $I(\infty)$ bajo la acción de $\Gamma(\infty)$. Notemos que el grupo $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)$ es generado por los elementos de Γ y la matriz $\begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$, la cual actúa sobre \mathbb{H}^3 como $(z, \zeta) \mapsto (-z, \zeta)$. Esto nos dice que los pares (P_2, P_5) , (P_1, P_6) y (P_7, P_9) son $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)$ -equivalentes, por lo tanto $\{P_5, P_6, P_9\}$ son un conjunto de representantes de los vértices de $I(\infty)$ bajo la acción $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)$. Estos hechos están ilustrados en el gráfico de la izquierda de la Figura 6.6.

Los vértices de $g(I(\infty))$ son de la forma $\{g(P_j) : 1 \leq j \leq 13\}$. Se puede chequear fácilmente que la 2-celda sobre $S((1 + \omega)/3, \infty)$ es llevada sobre sí misma por g . Más precisamente,

$$g(P_5) = P_8, \quad g(P_8) = P_5, \quad g(P_6) = P_6, \quad g(P_7) = P_7.$$

Por otro lado, también es fácil chequear que $ghg^{-1} \in \Gamma$ para todo $h \in \Gamma$. Esto implica que dos puntos son Γ -equivalentes si y sólo si sus correspondientes imágenes sobre g son Γ -equivalentes. Estos hechos fuerzan a que cualquier vértice en $g(I(\infty))$ sean Γ -equivalente a algún vértice en $I(\infty)$.

Sea $L = \begin{pmatrix} \omega & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Por (6.14) y (6.20) tenemos que

$$L^{-1} \Gamma(\lambda) L = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 2a + \frac{1-\omega}{2}b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Describimos la acción de $L^{-1} \Gamma(\lambda_1) L$ sobre los vértices de I_{λ_1} en la Figura 6.6. Se puede chequear que todos los vértices en I_{λ_1} son equivalente por

$L^{-1}\Gamma(\lambda_1)L$ a uno de $\{Q_1, Q_2, Q_5, Q_6\}$. Además,

$$L(Q_1) = P_9, \quad L(Q_2) = P_{10}, \quad L(Q_5) = P_5, \quad L(Q_6) = P_7.$$

Esto nos dice que cada uno de los vértices de $I(\lambda_1) = L(I_{\lambda_1})$ es Γ -equivalente a un vértice de $I(\infty)$, es decir, a uno de los puntos de $\{P_1, P_2, P_5, P_6, P_7, P_9\}$. La misma prueba vale para λ_3 .

Finalmente concluimos que los puntos $\{P_1, P_2, P_5, P_6, P_7, P_9\}$ son los puntos extremos de la acción Γ . Estos puntos contienen toda la información necesaria para obtener la constante de Humbert-Hermite proyectiva $\gamma_{K,2}^p$ y las formas extremas proyectivas, para $K = \mathbb{Q}(\sqrt{39}i)$.

Por (6.10), $\gamma_{K,2}^p = \max_{P \in I} \eta(P)^2$. Pero este máximo es realizado en un vértice de I , los cuales son Γ -equivalentes a los vértices de $I(\infty)$, sin que cambie el valor de η pues ésta es Γ -invariante. De esta forma obtenemos que

$$(6.21) \quad \gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{-39}),2}^p = \max_{j \in \{1,2,5,6,7,9\}} d(P_j, \infty) = \max_{j \in \{1,2,5,6,7,9\}} \frac{1}{\zeta_j^2} = \frac{39}{3} = 13.$$

Para concluir listamos las formas extremas proyectivas (ver Definición 6.1) de determinante 1, aplicando el mapeo $\Psi = \Psi_1$ del Teorema 6.3 a los representantes de los puntos extremos bajo la acción de Γ :

$$\begin{aligned} \Psi \left(\pm \frac{6i}{\sqrt{39}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{39}} \right) &= \begin{pmatrix} \sqrt{13} & \mp \sqrt{12}i \\ \pm \sqrt{12}i & \sqrt{13} \end{pmatrix}, \\ \Psi \left(\pm \frac{15i}{\sqrt{39}}, \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{39}} \right) &= \begin{pmatrix} \sqrt{13/3} & \mp 5i \\ \pm 5i & 2\sqrt{39} \end{pmatrix}, \\ \Psi \left(\pm \frac{12i}{\sqrt{39}}, \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{39}} \right) &= \begin{pmatrix} \sqrt{13/4} & \mp \sqrt{12}i \\ \pm \sqrt{12}i & 2\sqrt{13} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Todas estas formas realizan su mínimo en $(1, 0)$, el cual es el vector asociado con la cúspide $\infty = 1/0$.

6.4.4. Tabla de resultados. El mismo procedimiento que en los ejemplos anteriores funciona para obtener la constante $\gamma_{K,2}^p$ de Humbert-Hermite proyectiva y las formas extremas proyectivas para cualquier cuerpo de números cuadrático imaginario K . La Tabla 6.1 muestra los resultados para todos los cuerpos K que cumplen $|d_K| < 70$. En la última columna sólo incluimos los puntos extremos proyectivos absolutos pues la cantidad de éstos crece demasiado cuando $|d_K|$ sube, siendo imposible incluirlos en la tabla.

TABLA 6.1. Puntos extremos

$-d_K$	D	$\gamma_{K,2}^p$	h_K	ptos. proy. extrem. abs.
3	3	3/2	1	$(\pm \frac{i}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$
4	1	4/2	1	$(\frac{1}{2} + \frac{i}{\sqrt{4}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}})$
7	7	7/3	1	$(\pm \frac{2i}{\sqrt{7}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}})$
8	2	8/2	1	$(\frac{1}{2} + \frac{2i}{\sqrt{8}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}})$
11	11	11/2	1	$(\pm \frac{3i}{\sqrt{11}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}})$
15	15	15/5	2	$(\pm \frac{5i}{\sqrt{15}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{15}})$
19	19	19/2	1	$(\pm \frac{6i}{\sqrt{19}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{19}})$
20	5	20/4	2	$(\pm \frac{4i}{\sqrt{20}}, \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{20}})$
23	23	23/5	3	$(\pm \frac{8i}{\sqrt{23}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{23}})$
24	6	24/2	2	$(\frac{1}{2} \pm \frac{4i}{\sqrt{24}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{24}})$
31	31	31/3	3	$(\pm \frac{11i}{\sqrt{31}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{31}})$
35	35	35/5	2	$(\pm \frac{10i}{\sqrt{35}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{35}})$
39	39	39/3	4	$(\pm \frac{6i}{\sqrt{39}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{39}})$
40	10	180/13	2	$(\frac{1}{2} \pm \frac{22i}{3\sqrt{40}}, \frac{\sqrt{26}}{3\sqrt{40}}),$ $(\pm \frac{1}{6} \pm \frac{6i}{\sqrt{40}}, \frac{\sqrt{26}}{3\sqrt{40}})$
43	43	43/2	1	$(\pm \frac{16i}{\sqrt{43}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{43}})$
47	47	47/5	5	$(\pm \frac{18i}{\sqrt{47}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{47}}),$ $(\pm \frac{29i}{2\sqrt{47}}, \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{47}})_{\frac{\omega}{2}}$
51	51	51/2	2	$(\pm \frac{7i}{\sqrt{51}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{51}}),$ $(\pm \frac{10i}{\sqrt{51}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{51}})$
52	13	52/3	2	$(\pm \frac{7i}{\sqrt{52}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{52}}),$ $(\frac{1}{2} \pm \frac{6i}{\sqrt{52}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{52}})$
55	55	176/19	4	$(\pm \frac{35i}{4\sqrt{55}}, \frac{\sqrt{95}}{4\sqrt{55}}),$ $(\pm (\frac{3}{10} + \frac{19i}{2\sqrt{55}}), \frac{\sqrt{95}}{5\sqrt{55}}),$ $(\pm (\frac{7}{10} + \frac{19i}{2\sqrt{55}}), \frac{\sqrt{95}}{5\sqrt{55}})$
56	14	56/6	4	$(\frac{1}{2} \pm \frac{6i}{\sqrt{14}}, \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{56}}),$ $(\frac{1}{2} + \frac{53i}{11\sqrt{14}}, \frac{\sqrt{6}}{11\sqrt{56}})_{\frac{1+\omega}{3}}$
59	59	59/2	3	$(\pm \frac{23i}{\sqrt{59}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{59}}),$ $(\frac{1}{2} + \frac{23i}{2\sqrt{59}}, \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{59}})_{\frac{2+\omega}{3}}$
67	67	67/2	1	$(\pm \frac{20}{\sqrt{67}}i, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{67}})$
68	17	68/2	4	$(\frac{1}{2} \pm \frac{7i}{2\sqrt{17}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{68}}),$ $(\frac{1}{2} + \frac{95i}{18\sqrt{17}}, \frac{\sqrt{2}}{9\sqrt{68}})_{\frac{1+\omega}{3}}$

Todo punto extremo vive en $H(\infty)$ excepto cuando el punto tiene una cúspide μ como subíndice, lo cual indica que el punto está en $H(\mu)$.

Bibliografía

- [BI] R. BAEZA Y M. I. ICAZA. “On Humbert-Minkowski’s constant for a number field”. *Proc. Amer. Math. Soc.* **125**:11 (1997), 3195–3202.
- [BCIO] R. BAEZA, R. COULANGEON, M. I. ICAZA Y M. O’RYAN. “Hermite’s constant for quadratic number fields”. *Experiment. Math.* **10**:4 (2001), 543–551.
- [CIL] W. K. CHAN, M. I. ICAZA Y E. LAURET. “On a generalized Hermite constant for imaginary quadratic number fields”. Enviado.
- [CK] H. COHN Y A. KUMAR. “Optimality and uniqueness of the Leech lattice among lattices”. *Ann. of Math. (2)* **170**:3 (2009), 1003–1050.
- [Co] R. COULANGEON. “On generalized Hermite constants”. En el acta del congreso *Third Voronoi Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations*. Kyev 22–28 septiembre 2003.
- [CIO] R. COULANGEON, M. I. ICAZA Y M. O’RYAN. “Lenstra’s constant and extreme forms in number fields”. *Experiment. Math.* **16**:4 (2007), 455–462.
- [EGM] J. ELSTRODT, F. GRUNEWALD Y J. MENNICKE. “Vahlen’s group of Clifford matrices and spin-groups”. *Math. Z.* **196**:3 (1987), 369–390.
- [Ic] M. I. ICAZA. “Hermite constant and extreme forms for algebraic number fields”. *J. London Math. Soc. (2)* **55**:1 (1997), 11–22.
- [Ma] K. MAHLER. “On the minimum of positive definite hermitian forms”. *J. London Math. Soc. (1)* **14**:2 (1939), 137–143.
- [Me] E. MENDOZA. *Cohomology of PGL_2 over imaginary quadratic integers*. Bonn Mathematical Publications, **128**. Dissertation, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität, Bonn (1979).
- [Ob] H. OBERSEIDER. “Über das minimum positiver hermitescher formen”. *Math. Z.* **38**:1 (1934), 591–632.
- [O’M] O. T. O’MEARA. “Introduction to quadratic forms”. Springer-Verlag (1971).
- [OW] S. OHNO Y T. WATANABE. “Estimates of Hermite constants for algebraic number fields”. *Comment. Math. Univ. St. Paul.* **50**:1 (2001), 53–63.
- [Op] A. OPPENHEIM. “The minima of positive definite Hermitian binary quadratic forms”. *Math. Z.* **38**:1 (1934), 538–545.
- [Pe] O. PERRON. “Über das minimum positiver Hermitescher formen”. *Math. Z.* **36**:1 (1933), 148–160.
- [PW1] M. E. POHST Y M. WAGNER. “On the computation of Hermite-Humbert constants: the algorithm of Cohn revisited”. *J. Algebra* **322**:3 (2009), 936–947.
- [PW2] M. E. POHST Y M. WAGNER. “On the computation of Hermite-Humbert constants for real quadratic number fields”. *J. Théor. Nombres Bordeaux* **17**:3 (2005), 905–920.
- [Sp] A. SPEISER. “Über die minima hermitescher formen”. *J. Reine Angew Math (Crelles Journal)* **167** (1932), 88–97.
- [Th] J. THUNDER. “Higher-dimensional analogs of Hermite’s constant”. *Michigan Math. J.* **45**:2 (1998), 301–314.
- [Vo] K. VOGTMANN. “Rational homology of Bianchi groups”. *Math. Ann.* **272**:3 (1985), 399–419.
- [Wa1] T. WATANABE. “On an analog of Hermite’s constant”. *J. Lie Theory* **10**:1 (2000), 33–52.
- [Wa2] T. WATANABE. “A survey on generalized Hermite constants”. *Sūrikaiseikikenkyūsho Kōkyūroku* **1200** (2001), 65–70.

- [Wa3] T. WATANABE. “Fundamental Hermite constants of linear algebraic groups”. *J. Math. Soc. Japan* **55**:4 (2003), 1061–1080.

Parte 3

Sumas de cuadrados y variedades isospectrales

Notación y definiciones básicas

En este capítulo introduciremos herramientas y resultados conocidos con los que trabajaremos en el resto de esta parte. Comenzaremos explicando la relación entre lattices (o retículos) en el espacio euclídeo y formas cuadráticas definidas positivas. La siguiente sección introducirá las definiciones básicas sobre isospectralidad entre variedades Riemannianas. Luego introduciremos los grupos de Bieberbach, estudiando de las variedades compactas planas, la teoría general de sus anillos de cohomología y sus respectivos espectros.

7.1. Formas cuadráticas y lattices

Comenzaremos considerando formas cuadráticas sobre el cuerpo de los números reales. Éstas están parametrizadas por matrices cuadradas simétricas, pues son de la forma

$$A[x] = x^t A x = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i, j} x_i x_j = \sum_{1 \leq i \leq n} a_{i, i} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2a_{i, j} x_i x_j,$$

donde $A = A^t = (a_{i, j}) \in M(n; \mathbb{R})$ y $x = (x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$.

La forma es *no singular* si $\det(A) \neq 0$. En este caso su *dimensión* es n . La forma A es *definida positiva* si $A[x] > 0$ para todo $x \neq 0$.

Dos formas cuadráticas definidas positivas A y A' con igual determinante se dicen *equivalentes* si existe una matriz $U \in GL(n, \mathbb{Z})$ tal que

$$A' = U A U^t.$$

Notar que las formas A y A' representan a los mismos números sobre \mathbb{Z}^n .

Diremos que la forma A es *entera* si $A[x] \in \mathbb{Z}$ para todo $x \in \mathbb{Z}^n$, lo cual es equivalente a que $a_{i, i} \in \mathbb{Z}$ y $2a_{i, j} \in \mathbb{Z}$ para todo i y j .

En este trabajo llamaremos *lattice* a todo \mathbb{Z} -submódulo de \mathbb{R}^n de rango n . Si Λ es un lattice existe una base $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ de \mathbb{R}^n tal que $\Lambda = \mathbb{Z}\lambda_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\lambda_n$. Ésta será llamada una *base entera de Λ* y la matriz M construida colocando como filas los vectores de una base entera, será llamada una *matriz generadora de Λ* . La matriz $A = M M^t$ es llamada una *matriz de Gram de Λ* . El *determinante de Λ* es $\det(A) = \det(M)^2$.

Diremos que dos lattices Λ y Λ' son *equivalentes* si

$$M' = U M B,$$

donde $U \in GL(n, \mathbb{Z})$ y $B \in O(n)$. En particular, si M_1 y M_2 son matrices generadoras de Λ , entonces existe $U \in GL(n, \mathbb{Z})$ tal que $M_1 = U M_2$ y tal que $A_1 = U A_2 U^t$.

Consideraremos al espacio vectorial \mathbb{R}^n con el producto interno canónico $\langle x, y \rangle = \sum_i x_i y_i$ y su base ortonormal canónica $\{e_1, \dots, e_n\}$. Diremos que un lattice Λ es *entero* si $\langle \lambda, \lambda' \rangle \in \mathbb{Z}$ para todo $\lambda, \lambda' \in \Lambda$.

Existe una correspondencia entre las formas cuadráticas reales definidas positivas de dimensión n y los lattices en \mathbb{R}^n . Sea Λ es un lattice con base entera $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Entonces, si $\lambda = \sum_i x_i \lambda_i \in \Lambda$ tenemos

$$\begin{aligned} \|\lambda\|^2 &= \|x_1 \lambda_1 + \dots + x_n \lambda_n\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \langle \lambda_i, \lambda_j \rangle \\ &= x^t M M^t x = A[x], \end{aligned}$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n)^t$. Si tomamos otra matriz generadora $M' = UM$ de Λ ($U \in \text{GL}(n, \mathbb{Z})$), resultará la forma cuadrática $A' = UAU^t$, la cual es equivalente a A . Además, si Λ es un lattice entero, la forma A es entera.

Recíprocamente, si A es una forma cuadrática definida positiva de dimensión n , por el teorema de descomposición existe M tal que $A = MM^t$, la cual define un lattice.

7.2. Variedades isospectrales

A una variedad Riemanniana M le podemos asociar el operador de *Laplace-de Rham*, el cual es la generalización del operador de Laplace $\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ en \mathbb{R}^n . Este operador se define como

$$\Delta : C_c^\infty(M) \rightarrow L^2(M), \quad \Delta(f) = d^*d(f).$$

donde d es la derivada exterior y d^* es la coderivada. Sólo consideraremos variedades Riemannianas compactas por lo que $\Delta : C^\infty \rightarrow L^2(M)$. Más generalmente, para cada $0 \leq p \leq n = \dim(M)$, podemos definir el p -operador de *Hodge-Laplace* sobre p -formas suaves, como

$$\Delta_p : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^p(M), \quad \Delta_p(\omega) = d^*d(\omega) + dd^*(\omega).$$

El p -espectro de la variedad M se define como el conjunto

$$(7.1) \quad \text{spec}_p(M) = \{(\lambda, d_\lambda) : \lambda \geq 0 \text{ es autovalor de } \Delta_p \text{ y } d_\lambda = \dim \mathcal{H}_\lambda > 0\}$$

donde \mathcal{H}_λ es el autoespacio del operador Δ_p asociado a λ . Usualmente se llama simplemente *espectro* a $\text{spec}_0(M)$.

DEFINICIÓN 7.1. Sea M_1 y M_2 variedades Riemannianas. Las variedades M_1 y M_2 se dicen p -*isospectrales* (solo *isospectrales* para $p = 0$) si

$$\text{spec}_p(M_1) = \text{spec}_p(M_2).$$

Además, M_1 y M_2 se dicen *fuertemente isospectrales* si todos los operadores elípticos autoadjuntos naturales sobre las variedades son isospectrales.

OBSERVACIÓN 7.2. Los p -operadores de Hodge-Laplace son operadores elípticos autoadjuntos naturales, por lo que dos variedades fuertemente isospectrales son en particular p -isospectrales para todo p .

Ahora introduciremos el método de Sunada, centrándonos en cómo aplicarlo a variedades compactas planas. Si G es un grupo y $g \in G$, denotaremos por $[g]$ a la G -clase de conjugación de g .

DEFINICIÓN 7.3. Si G es un grupo finito y F, F' son subgrupos de G , (G, F, F') es llamado un *triple de Sunada* si existe una biyección $\varphi : F \leftrightarrow F'$ tal que $\varphi(x) = g_x x g_x^{-1}$, para algún $g_x \in G$. Equivalentemente, $\#([g] \cap F) =$

$\#([g] \cap F')$ para cada $g \in G$, donde $[g]$ denota la clase de conjugación de g . En este caso diremos que F y F' son *casi-conjugados* en G .

TEOREMA 7.4. (*T. Sunada [Su]*). *Sea M una variedad Riemanniana compacta. Si $G \subset \text{Iso}(M)$ y F, F' son subgrupos de G actuando libremente sobre M tales que (G, F, F') es un triple de Sunada, entonces $F \backslash M$ y $F' \backslash M$ son fuertemente isospectrales (ver [DG]).*

DEFINICIÓN 7.5. Las variedades $F \backslash M$ y $F' \backslash M$ (fuertemente isospectrales) construidas por el teorema anterior son llamadas *Sunada-isospectrales*.

7.3. Grupos de Bieberbach

Una variedad plana es una variedad Riemanniana con curvatura constantemente nula. El cubrimiento universal de una variedad plana completa es el espacio Euclídeo. Esto se usa para probar los teoremas de Bieberbach de que todas las variedades compactas planas son finitamente cubiertas por toros. Más aún, todas ellas son de la forma $\Gamma \backslash \mathbb{R}^n$ donde Γ es un grupo discreto y cocompacto de $\text{Iso}(\mathbb{R}^n)$ libre de torsión, i.e. un grupo de Bieberbach.

7.3.1. Definición. El grupo de isometrías de \mathbb{R}^n está dado por

$$\text{Iso}(\mathbb{R}^n) = \text{O}(n) \ltimes \mathbb{R}^n,$$

con la operación dada por

$$(B, b) \cdot (B', b') = (BB', B'b + b'),$$

y la acción sobre \mathbb{R}^n por

$$(B, b) \cdot v = B(b + v).$$

Escribiremos a cualquier elemento $\gamma \in \text{Iso}(\mathbb{R}^n)$ de la forma $\gamma = BL_b$, con $B \in \text{O}(n)$ y L_b la traslación por $b \in \mathbb{R}^n$. En este caso, $BL_b \cdot B'L_{b'} = BB'L_{B'b+b'}$.

Un subgrupo discreto y cocompacto Γ de $\text{Iso}(\mathbb{R}^n)$ es llamado un *grupo cristalográfico*. Si además Γ es libre de torsión, entonces Γ es llamado un *grupo de Bieberbach*. Tales grupos actúan de manera propia y libremente discontinua. Luego $M_\Gamma = \Gamma \backslash \mathbb{R}^n$ resulta una variedad compacta plana.

Las traslaciones de un grupo de Bieberbach Γ forman un subgrupo normal abeliano maximal de índice finito, L_Λ , donde Λ es un lattice de rango máximo en \mathbb{R}^n que es estable por B para todo $BL_b \in \Gamma$, i.e. $B\Lambda = \Lambda$. Además se tiene la sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow \Lambda \rightarrow \Gamma \rightarrow \Psi \rightarrow 0$$

donde $\Psi = \Lambda \backslash \Gamma$ es un grupo finito llamado *grupo de holonomía de Γ* , el cual determina el grupo de holonomía lineal de la variedad Riemanniana M_Γ . Consideremos $r : \text{O}(n) \ltimes \mathbb{R}^n \rightarrow \text{O}(n)$ la proyección a la primera coordenada. El grupo $F = r(\Gamma)$ es llamado *grupo puntual de Γ* , el cual es isomorfo a Ψ .

Existe una acción de Ψ sobre Λ inducida por la acción de Γ por conjugación. Esta define una representación entera de Ψ llamada la *representación de holonomía*. Se puede ver a la variedad $M_\Gamma = \Gamma \backslash \mathbb{R}^n$ como un cociente del toro $T^n = \Lambda \backslash \mathbb{R}^n$ bajo la acción libre de Ψ por isometrías: $M_\Gamma \cong \Psi \backslash T^n$.

OBSERVACIÓN 7.6. Hay una cantidad finita de grupos de Bieberbach para cada dimensión n , salvo isomorfismo. Más aún, $\Gamma_1 \cong \Gamma_2$ si y sólo si Γ_1 y Γ_2 son conjugados en $\text{Aff}(\mathbb{R}^n) = \text{GL}(n) \ltimes \mathbb{R}^n$.

EJEMPLOS 7.7. Veamos algunos ejemplos simples de grupos de Bieberbach y sus variedades asociadas.

1. *Toros planos.* Las variedades compactas planas más simples son los *toros planos* $T_\Lambda = \mathbb{R}^n / \Lambda$, con Λ un lattice en \mathbb{R}^n y grupo de holonomía trivial.
2. *Botella de Klein.* Sea

$$\Gamma = \left\langle BL_{\frac{e_2}{2}}, L_{\mathbb{Z}^2} \right\rangle, \quad \text{donde } B = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $\gamma = BL_b$ entonces $\gamma(x, y) = (-x, y + \frac{1}{2})$ y tenemos $\gamma^2 = L_{e_2}$. El cociente $\Gamma \backslash \mathbb{R}^2$ es la variedad comúnmente llamada botella de Klein.

3. *Variedad de Hantzsche-Wendt.* Hay diez grupos de Bieberbach en dimensión $n = 3$, salvo isomorfismo. Las variedades asociadas son llamadas *platycosm* (*universos planos*, ver [RC]). Entre ellas está la variedad de Hantzsche-Wendt o *didicosm*. Ésta puede ser definida como

$$\Gamma = \left\langle \gamma_1 = B_1 L_{\frac{e_1+e_2}{2}}, \quad \gamma_2 = B_2 L_{\frac{e_2+e_3}{2}}, \quad L_{\mathbb{Z}^3} \right\rangle,$$

donde

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B_2 = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}.$$

Tenemos que $F = \{\text{Id}, B_1, B_2, B_{12} = B_1 B_2\} \cong \mathbb{Z}_2^2$.

7.3.2. Anillos de cohomología de variedades compactas planas.

Como mencionamos en la introducción, en los próximos capítulos estamos interesados en pares o familias de variedades fuertemente isospectrales (por lo tanto p -isospectrales para todo p), las cuales tendrán los mismos números de Betti, pero que tengan anillos de cohomología no isomorfos de a pares.

El anillo de cohomología sobre \mathbb{Q} de una variedad compacta plana M_Γ con grupo de holonomía $\Psi \simeq F$ puede ser calculado usando la sucesión espectral de Hochschild-Serre, la cual da

$$(7.2) \quad H^*(M_\Gamma, \mathbb{Q}) \cong \Lambda_F^*(\mathbb{Q}^n),$$

el anillo de F -invariantes en la \mathbb{Q} -álgebra exterior $\Lambda^*(\mathbb{Q}^n)$ (ver [Hi]). Usaremos las abreviaturas

$$\Lambda_F^* = \sum_{p=0}^n \Lambda_F^p(\mathbb{Q}^n) \quad \text{y} \quad \Lambda_F^p = \Lambda_F^p(\mathbb{Q}^n),$$

para $0 \leq p \leq n$. En particular, $\dim(\Lambda_F^p) = \beta_p$ es el p -ésimo número de Betti de la variedad M_Γ .

OBSERVACIÓN 7.8. Notemos los siguientes hechos.

1. $\sum_{r=p}^n \Lambda_F^r$ es un ideal en Λ_F^* , para cada p .

2. $\sum_{r=1}^n \Lambda_F^r$ es un ideal maximal de Λ_F^* y cualquier elemento η en $\Lambda_F^* \setminus \sum_{r=1}^n \Lambda_F^r$ es inversible. Para comprobar esto, tomemos $\eta = 1 + \delta \in \Lambda_F^*$ tal que δ tiene componente de grado cero nula, i.e. $\delta_0 = 0$. Entonces

$$(1 + \delta) \wedge \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \underbrace{\delta \wedge \cdots \wedge \delta}_i \right) = 1,$$

por lo tanto

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \underbrace{\delta \wedge \cdots \wedge \delta}_i \in \Lambda_F^*.$$

Para diferenciar dos anillos de cohomología tenemos que buscar invariantes de estas álgebras. Para un grupo de Bieberbach con grupo de holonomía trivial, tenemos el grupo de derivaciones y automorfismos del álgebra exterior Λ^* calculado en [Dj]. La estructura de la subálgebra Λ_F^* de Λ^* puede ser mucho más complicada.

EJEMPLOS 7.9. Veamos los anillos de F -invariantes para los Ejemplos 7.7.

1. *Toros planos.* Como los toros tienen grupo puntual trivial, entonces el anillo de invariantes Λ_F^* es toda el álgebra exterior $\Lambda^*(\mathbb{Q}^n)$.
2. *Botella de Klein.* Tenemos que $F \cong \mathbb{Z}_2$ y

$$\Lambda_F^* = \text{span}\{1, e_2\} \cong \mathbb{Q}[x]/\langle x^2 \rangle.$$

3. *Hantzsche-Wendt.* Es fácil comprobar que

$$\Lambda_F^* = \text{span}\{1, e_1 \wedge e_2 \wedge e_3\} \cong \mathbb{Q}[x]/\langle x^2 \rangle.$$

Dentro de la Sección 9.2 veremos ejemplos más complicados.

7.3.3. Espectro de variedades compactas planas. En esta subsección determinaremos el espectro (ver (7.1)) de las variedades compactas planas $\Gamma \backslash \mathbb{R}^n$, donde Γ es un grupo de Bieberbach. Comenzaremos por el caso más simple de los toros planos. Sea Λ un lattice entero en \mathbb{R}^n (ver Sección 7.1) y Λ^* el lattice dual de Λ , i.e.

$$\Lambda^* = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle v, \lambda \rangle \in \mathbb{Z} \quad \forall \lambda \in \Lambda\}.$$

Para cada $v \in \Lambda^*$, definimos la función

$$f_v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{dada por} \quad f_v(x) = e^{2\pi i \langle v, x \rangle}.$$

Claramente la función f_v es Λ -invariante, por lo tanto induce una función desde $T_\Lambda = \Lambda \backslash \mathbb{R}^n$ a \mathbb{C} . Además

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f_v = 2\pi i v_j f_v, \quad \text{por lo tanto} \quad -\Delta f_v = -\sum_{j=1}^n (2\pi i)^2 v_j^2 f_v = 4\pi^2 \|v\|^2 f_v.$$

Se prueba que $\langle f_v, f_{v'} \rangle = 0$ si y sólo si $v \neq v'$, y por el teorema de Stone-Weierstrass resulta que el conjunto $\{f_v : v \in \Lambda^*\}$ es un sistema ortogonal completo de $L^2(T_\Lambda)$.

Luego, para cada $\mu \geq 0$, el autoespacio de $-\Delta|_{T_\Lambda}$ con autovalor $4\pi^2 \mu$ está dado por

$$\mathcal{H}_\mu = \text{span}_{\mathbb{R}}\{f_v : v \in \Lambda_\mu^*\},$$

donde $\Lambda_\mu^* = \{v \in \Lambda^* : \|v\|^2 = \mu\}$. Finalmente,

$$\text{spec}(T_\Lambda) = \{(4\pi^2\mu, N_\Lambda(\mu)) : \mu \geq 0, N_\Lambda(\mu) = \#\Lambda_\mu^* = \dim \mathcal{H}_\mu > 0\}.$$

Ahora supongamos que Γ es un grupo de Bieberbach con lattice de traslaciones $\Lambda = \mathbb{R}^n \cap \Gamma$. Si $\gamma = BL_b \in \Gamma$, con $B \in O(n)$, $b \in \Lambda \subset \mathbb{R}^n$, tenemos que

$$(7.3) \quad (f_v \circ \gamma)(x) = f_v(\gamma(x)) = e^{2\pi i \langle v, Bx+Bb \rangle} = e^{2\pi i \langle B^{-1}v, b \rangle} f_{B^{-1}v}(x),$$

por lo tanto cada elemento de Γ preserva \mathcal{H}_μ . Esto implica que

$$(7.4) \quad L^2(\Gamma \backslash \mathbb{R}^n) \cong L^2(\Lambda \backslash \mathbb{R}^n)^\Gamma = \bigoplus_\mu \mathcal{H}_\mu^\Gamma,$$

donde $\mathcal{H}^\Gamma = \{f \in \mathcal{H} : f \circ \gamma = f \quad \forall \gamma \in \Gamma\}$. Para cada μ sea $N_\Gamma(\mu) = \dim \mathcal{H}_\mu^\Gamma$, el cual también suele ser denotado por $d_{\mu, \Gamma}$. Por (7.4) se tiene

$$\text{spec}(M_\Gamma) = \{(4\pi^2\mu, N_\Gamma(\mu)) : \mu \geq 0, N_\Gamma(\mu) > 0\}.$$

EJEMPLO 7.10. Sea Γ el grupo de Bieberbach que induce la botella de Klein, el cual fue definido en el ítem 2 de los Ejemplos 7.7. En este caso

$$\Lambda = \Lambda^* = \mathbb{Z}^2, \quad F = \{\text{Id}_2 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}\}.$$

Sea $\mu \in \mathbb{N}$ tal que $N_\Lambda(\mu) > 0$, lo que es equivalente a que pueda escribirse como suma de dos cuadrados. Tomemos $f = \sum_{v \in \Lambda_\mu} \alpha_v f_v \in \mathcal{H}_\mu^\Gamma$, o equivalentemente $f \in \mathcal{H}_\mu$ tal que $f \circ BL_{\frac{e_2}{2}} = f$. Luego tenemos que

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= f\left(BL_{\frac{e_2}{2}}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)\right) = f\left(\begin{pmatrix} -x \\ y+\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right) = \sum_{v \in \Lambda_\mu} \alpha_v f_v\left(\begin{pmatrix} -x \\ y+\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right) \\ &= \sum_{(a,b) \in \Lambda_\mu} \alpha_{(a,b)} e^{2\pi i(-ax+by+b/2)} = \sum_{(a,b) \in \Lambda_\mu} \alpha_{(a,b)} (-1)^b f_{\begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \\ &= \sum_{(a,b) \in \Lambda_\mu} \alpha_{(-a,b)} (-1)^b f_{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

Esto prueba que

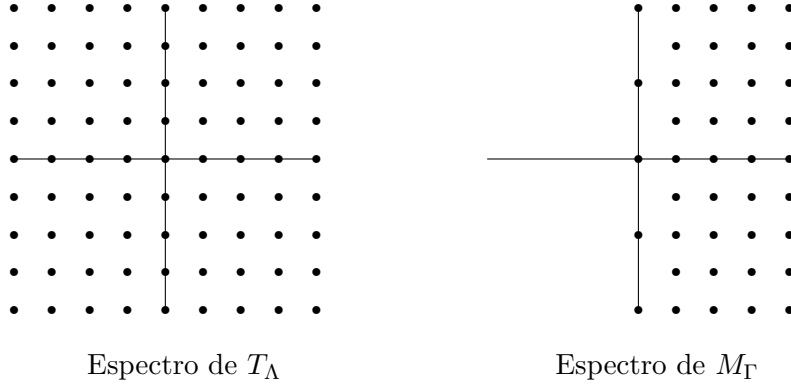
$$\alpha_{(a,b)} = (-1)^b \alpha_{(-a,b)} \quad \forall (a,b) \in \Lambda_\mu.$$

No es difícil ver que esta condición implica que el espacio vectorial real \mathcal{H}_μ^Γ está generado por (la restricción a M_Γ de) las funciones

$$\begin{aligned} f_{(0,b)}(x,y) &= e^{2\pi i b y} && \text{si } b \text{ es par,} \\ (f_{(a,b)} + f_{(-a,b)})(x,y) &= 2e^{2\pi i b y} \cos(2\pi a x) && \text{si } a \in \mathbb{N} \text{ y } b \text{ es par,} \\ (f_{(a,b)} - f_{(-a,b)})(x,y) &= 2e^{2\pi i b y} \text{sen}(2\pi a x) && \text{si } a \in \mathbb{N} \text{ y } b \text{ es impar.} \end{aligned}$$

Notemos que la dimensión de \mathcal{H}_μ^Γ se ha reducido, pues los vectores $(0,b) \in \Lambda_\mu$ con b impar han desaparecido y los vectores (a,b) y $(-a,b)$ cuentan ahora como una dimensión en lugar de dos. Esto último lo hemos graficado en la Figura 7.1.

FIGURA 7.1. Gráficos de espectros de toro plano y la botella de Klein



Finalmente, se puede verificar que

$$N_\Gamma(\mu) = \begin{cases} N_\Lambda(\mu)/2 & \text{si } \mu \text{ no es un cuadrado,} \\ N_\Lambda(\mu)/2 - 1 & \text{si } \mu = c^2 \text{ con } c \text{ impar,} \\ N_\Lambda(\mu)/2 + 1 & \text{si } \mu = c^2 \text{ con } c \text{ par.} \end{cases}$$

EJEMPLO 7.11. Ahora sea Γ el grupo de Bieberbach que induce la variedad de Hantzsche-Wendt, dada en el ítem 3 de los Ejemplos 7.7. En este caso $\Lambda = \Lambda^* = \mathbb{Z}^3$ y

$$F = \left\{ \text{Id}_3, B_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}, B_{12} = B_1 B_2 = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Sea $\mu \in \mathbb{N}$ tal que $N_\Lambda(\mu) > 0$, lo que es equivalente a que pueda escribirse como suma de tres cuadrados. Similarmente al caso anterior, se puede probar que $f = \sum_{v \in \Lambda_\mu} \alpha_v f_v \in \mathcal{H}_\mu^\Gamma$ si y sólo si

$$\begin{cases} \alpha_{(a,b,c)} = (-1)^{a-b} \alpha_{(a,-b,-c)} \\ \alpha_{(a,b,c)} = (-1)^{b-c} \alpha_{(-a,b,-c)} \\ \alpha_{(a,b,c)} = (-1)^{c-a} \alpha_{(-a,-b,c)} \end{cases} \quad \forall (a,b,c) \in \Lambda_\mu.$$

De manera similar, pero con muchas más cuentas necesarias, resulta que \mathcal{H}_μ^Γ es generado por la unión de los conjuntos

$$\begin{aligned} & \{f_{(a,0,0)} + f_{(-a,0,0)}, f_{(0,a,0)} + f_{(0,-a,0)}, f_{(0,0,a)} + f_{(0,0,-a)} : a \in 2\mathbb{N}_0\}, \\ & \{f_{(a,b,c)} + (-1)^{a-b} f_{(a,-b,-c)} + (-1)^{b-c} f_{(-a,b,-c)} + (-1)^{c-a} f_{(-a,-b,c)} : \\ & \quad (a,b,c) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z} \text{ con al menos dos de ellos no nulos}\} \end{aligned}$$

CAPÍTULO 8

Pares de variedades fuertemente isospectrales

Para A una forma cuadrática entera definida positiva y μ un número entero, el problema de contar el número de representaciones $N_A(\mu)$ de μ por A , se traduce en el lenguaje de lattices (ver la Sección 7.1) a contar el número $N_\Lambda(\mu)$ de vectores $\lambda \in \Lambda$ tal que $\|\lambda\|^2 = m$. El cálculo de estos números se facilita introduciendo la *serie theta asociada*, la cual es

$$\Theta_\Lambda(z) = \sum_{\lambda \in \Lambda} q^{\langle \lambda, \lambda \rangle} = \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} q^{A[x]} = \sum_{\mu=0}^{\infty} N_A(\mu) q^\mu,$$

donde $q = e^{\pi iz}$. Se prueba que $\Theta_\Lambda(z)$ es una función holomorfa en z para $\text{Im}(z) \geq 0$.

Ahora supongamos que el lattice Λ es autodual (i.e. $\Lambda = \Lambda^*$). Entonces el número de representaciones de μ por A , es decir el número de vectores $x \in \mathbb{Z}^n$ tales que $A[x] = \mu$, coincide con la dimensión del autoespacio de Δ_{T_Λ} con autovalor $4\pi^2\mu$, esto es,

$$(8.1) \quad N_A(\mu) = N_\Lambda(\mu) = \dim \mathcal{H}_\mu.$$

Pensaremos a los grupos de Bieberbach como una generalización de las formas cuadráticas enteras definidas positivas. Sea Γ un grupo de Bieberbach con lattice de traslaciones $\Lambda = \Gamma \cap \mathbb{R}^n$ y grupo puntual $F = r(\Gamma)$.

Pensaremos a Γ como el lattice Λ (o la forma cuadrática A) unido al grupo F actuando en los vectores del lattice Λ .

Dado $\mu \in \mathbb{N}$, diremos que Γ representa a μ si $N_\Gamma(\mu) > 0$, y éste número será precisamente el número de veces que Γ representa a μ .

Además, definimos de manera análoga la Serie de Theta de Γ como

$$\Theta_\Gamma(z) = \sum_{\lambda \in F \backslash \Lambda} q^{\langle \lambda, \lambda \rangle} = \sum_{\mu=0}^{\infty} N_\Gamma(\mu) q^\mu.$$

Ahora estamos en condiciones de explicar nuestro objetivo en este capítulo. Un problema clásico es el de encontrar dos lattices enteros que representen los mismos números, o equivalentemente, que tengan la misma función theta. Hemos visto en el comienzo de la Subsección 7.3.3 que lattices enteros autoduales que representan los mismos números inducen toros planos isospectrales. Estamos interesados en encontrar variedades compactas planas isospectrales, lo cual se puede pensar como grupos de Bieberbach que representen lo mismos números (la misma cantidad de veces).

A partir del método de Sunada obtendremos grupos de Bieberbach Γ y Γ' , que inducen variedades compactas planas fuertemente isospectrales. En particular ellas son p -isospectrales para todo $0 \leq p \leq n$, por lo tanto sus números de Betti coinciden

$$\dim \Lambda_F^p = \beta_p(\Gamma) = \beta_p(\Gamma') = \dim \Lambda_{F'}^p.$$

Vemos que los anillos de formas invariantes por sus grupos puntuales Λ_F^* y $\Lambda_{F'}^*$, tienen la misma dimensión en cada grado, aunque no por esto estas álgebras deben ser isomorfas.

Nuestro objetivo es buscar pares de grupos de Bieberbach con variedades asociadas fuertemente isospectrales con anillos de cohomología no isomorfos.

8.1. Grupos de Bieberbach de tipo diagonal

Para cumplir el objetivo recién propuesto, restringiremos nuestra búsqueda a variedades compactas planas que provienen de grupos de Bieberbach de tipo diagonal, esto es, con grupo puntual de matrices diagonales con ± 1 en sus entradas, y por lo tanto isomorfo a \mathbb{Z}_2^k para algún k . Estos grupos son los que tienen la acción de holonomía más simple entre aquellos grupos de Bieberbach con grupo de holonomía \mathbb{Z}_2^k .

8.1.1. Definición y construcción. Un grupo de Bieberbach Γ es llamado de *tipo diagonal* si existe una \mathbb{Z} -base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ del lattice Λ tal que para cualquier elemento $BL_b \in \Gamma$, $Be_i = \pm e_i$ para $1 \leq i \leq n$. Por conjugación por una matriz ortogonal, si es necesario, podemos asumir que el lattice Λ de Γ es el lattice canónico \mathbb{Z}^n . De esta manera, el grupo puntual F contiene matrices diagonales con ± 1 como coordenadas no nulas.

LEMA 8.1. *Sea $\Gamma = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_k, L_\lambda : \lambda \in \mathbb{Z}^n \rangle$ un grupo de Bieberbach de tipo diagonal, con $\gamma_i = B_i L_{b_i}$, donde $b_i \in \mathbb{R}^n$ y $B_i e_j = \pm e_j$, para cada i, j . Entonces Γ puede ser conjugado por una traslación L_μ , $\mu \in \mathbb{R}^n$, a un grupo Γ' tal que $2b \in \mathbb{Z}^n$ para cualquier $\gamma = BL_b \in \Gamma'$.*

El lema anterior nos permite asumir que cada elemento $\gamma \in \Gamma$ puede ser escrito de una única manera como $\gamma = BL_b L_\lambda$, donde las coordenadas de b son 0 o $1/2$ y $\lambda \in \mathbb{Z}^n$.

Ahora veamos algunas condiciones suficientes para obtener un grupo de Bieberbach de tipo de diagonal. Para $1 \leq i \leq k$, consideremos $B_i \in M(n; \mathbb{R})$ matrices diagonales con ± 1 en sus entradas y b_i vectores de \mathbb{R}^n con 0 o $1/2$ en sus entradas. Definamos

$$(8.2) \quad F = \langle B_i : 1 \leq i \leq n \rangle,$$

$$(8.3) \quad \Gamma = \langle B_i L_{b_i} L_\lambda : 1 \leq i \leq n \text{ y } \lambda \in \mathbb{Z}^n \rangle.$$

Sea $I = \{i_1, \dots, i_h\} \subset \{1, \dots, k\}$ con h elementos diferentes. Denotaremos $B_I = B_{i_1} \dots B_{i_h}$ (si $h > 0$) y $B_\emptyset = \text{Id}_n$. Luego $F = \{B_I : I \subset \{1, \dots, k\}\}$. Tomemos $b_I \in \{0, \frac{1}{2}\}^n$, como los únicos vectores tales que $(b_I)_j \equiv \sum_{i \in I} (b_i)_j \pmod{\mathbb{Z}}$ para todo j si $h > 0$, y b_\emptyset el vector nulo. Notemos que $b_i = b_{\{i\}}$ para todo i .

PROPOSICIÓN 8.2 (Dotti y Miatello [DM]). *Supongamos que el grupo F dado por (8.2) es isomorfo a \mathbb{Z}_2^k y no contiene a $-\text{Id}_n$. Además asumamos que se cumple la siguiente condición:*

$$(8.4) \quad \text{para cada } I \neq \emptyset, \exists j : (b_I)_j = \frac{1}{2} \text{ y } B_{j,j} = 1.$$

Entonces el grupo Γ dado por (8.3) es un grupo de Bieberbach de tipo diagonal.

DEMOSTRACIÓN. Resulta de [DM, Proposition 2.1]. Notar que la condición (i) de [DM, Proposition 2.1] es canónicamente cumplida para este caso, pues aquí sólo estamos considerando grupos diagonales. \square

8.1.2. Isospectralidad. En general, para aplicar el método de Sunada (Teorema 7.4) en el contexto de variedades compactas planas arbitrarias M_Γ y $M_{\Gamma'}$, tomamos $M = \Lambda \backslash \mathbb{R}^n$, F y F' los grupos puntuales de Γ y Γ' que actúan en M por la acción de los grupos de holonomía $\Lambda \backslash \Gamma$ y $\Lambda \backslash \Gamma'$, y un grupo finito $G \subset \text{Iso}(\mathbb{R}^n)$ adecuado que contenga a ambos. Entonces F y F' actúan libremente en M y $F \backslash M \approx \Gamma \backslash \mathbb{R}^n = M_\Gamma$, $F' \backslash M \approx \Gamma' \backslash \mathbb{R}^n = M_{\Gamma'}$.

Ahora trabajemos en el caso diagonal. Usaremos las siguientes definiciones durante el resto del trabajo.

DEFINICIÓN 8.3. Sea F un subgrupo de $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$ de tipo diagonal, es decir, todos sus elementos son matrices diagonales con ± 1 en sus entradas. Para $B \in F$ definimos

$$(8.5) \quad n_B = \dim(\mathbb{R}^n)^B = \#\{1 \leq i \leq n : Be_i = e_i\}, .$$

Si $0 \leq s \leq n$, definimos

$$(8.6) \quad c_s(F) = \#\{B \in F : n_B = s\}.$$

El vector $(c_0(F), \dots, c_n(F))$ será llamado el *patrón de F* .

DEFINICIÓN 8.4. Sea Γ un grupo de Bieberbach de tipo diagonal. Si $BL_bL_\lambda \in \Gamma$, con $b \in \{0, \frac{1}{2}\}^n$ y $\lambda \in \mathbb{Z}^n$, definimos

$$(8.7) \quad n_{B, \frac{1}{2}} = \#\{1 \leq i \leq n : Be_i = e_i \text{ y } b \cdot e_i = \frac{1}{2}\}.$$

Para $0 \leq t \leq s \leq n$, los *números de Sunada de Γ* están definidos por

$$(8.8) \quad c_{s,t}(\Gamma) = \#\{BL_b \in F : n_B = s \text{ y } n_{B, \frac{1}{2}} = t\}.$$

OBSERVACIÓN 8.5. Si Γ es un grupo de Bieberbach, entonces es libre de torsión, por lo tanto $n_B \geq 1$ para todo $B \in F$. Se puede comprobar que

$$c_{n,0}(\Gamma) = 1, \quad c_s(F) = \sum_t c_{s,t}(\Gamma) \quad \text{y} \quad \sum_{s,t} c_{s,t}(\Gamma) = |F|.$$

Los números $c_{s,t}$ serán usados para probar la isospectralidad de varias variedades compactas planas de tipo diagonal.

TEOREMA 8.6. [MR2, Proposition 3.5] *Sean Γ y Γ' grupos de Bieberbach de tipo diagonal. Entonces M_Γ y $M_{\Gamma'}$ son Sunada-isospectrales (ver Definición 7.5) si y sólo si Γ y Γ' tienen los mismos números de Sunada, es decir, $c_{s,t}(\Gamma) = c_{s,t}(\Gamma')$ para todo $0 \leq t \leq s \leq n$.*

Terminamos esta subsección con un teorema que asegura que el método de Sunada es la única forma de encontrar variedades compactas planas de tipo diagonal isospectrales. Ver [MR3, Remark 3.12] para más información.

TEOREMA 8.7. [MR3, Proposition 3.11] *Si Γ y Γ' son grupos de Bieberbach de tipo diagonal, entonces M_Γ y $M_{\Gamma'}$ son variedades isospectrales si y sólo si son Sunada-isospectrales.*

8.1.3. Sus anillos de cohomología. Ahora pasemos a estudiar el anillo de cohomología a este tipo particular de grupos de Bieberbach. Notemos por (7.2) que este anillo sólo depende del grupo puntual F , y no del resto de Γ . Por esto trabajaremos de una manera más general, sólo asumiendo que F es un subgrupo de $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$ de tipo diagonal, i.e. sus elementos son matrices diagonales con ± 1 en sus entradas. Luego $F \cong \mathbb{Z}_2^k$ para algún $1 \leq k \leq n$. Por Proposición 8.2 tenemos que si F proviene de un grupo de Bieberbach Γ , entonces $-\text{Id}_n \notin F$.

DEFINICIÓN 8.8. Dado un subconjunto ordenado $I = \{i_1, \dots, i_p\} \subset \{1, \dots, n\}$, denotaremos $e_I = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p} \in \Lambda_F^p$. La forma e_I es llamada *primitiva* si no puede ser obtenida como producto de formas F -invariantes de grado menor que p . Denotaremos por \mathcal{P}_F^p al conjunto de todas las formas primitivas de grado p , por $\Lambda_{F, \text{prim}}^p$ al subespacio generado por \mathcal{P}_F^p y por $P_{p,F}$ al cardinal de \mathcal{P}_F^p .

Claramente el conjunto de todos las formas primitivas es un conjunto generador de Λ_F^* de cardinalidad $\sum_{p=0}^n P_{p,F}$. Veremos que esta cardinalidad es mínima entre todos los conjuntos generadores de Λ_F^* .

TEOREMA 8.9. *Dado F un subgrupo finito de tipo diagonal de $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$, sea \mathcal{G} un conjunto de generadores del álgebra Λ_F^* . Entonces $\#\mathcal{G} \geq \sum_{p=0}^n P_{p,F}$. Más aún, si \mathcal{G} es un conjunto generador minimal, entonces $\#\mathcal{G} = \sum_{p=0}^n P_{p,F}$.*

DEMOSTRACIÓN. Denotemos por

$$(8.9) \quad \mathcal{G}_p = \left\{ \eta = \sum_{r=p}^n \eta_r \in \mathcal{G} : \eta_r \in \Lambda_F^r, \eta_p \neq 0 \right\},$$

i.e. los elementos en \mathcal{G} que tienen componente minimal no nula de grado p .

Claramente \mathcal{G}_0 es no vacío, pues sino no podríamos obtener el elemento 1 como suma de productos de elementos de \mathcal{G} . Luego, usando los elementos del conjunto \mathcal{G}_0 , podemos eliminar la componente de grado cero de todos ellos excepto de uno, restándoles un múltiplo escalar. Así, podemos reemplazar el conjunto generador inicial \mathcal{G} por otro conjunto generador con la misma cardinalidad, tal que $\mathcal{G}_0 = \{\eta^{(0)}\}$ tiene solo un elemento con $\eta_0^{(0)} = 1$.

Ahora, la menor componente en Λ_F^1 de los elementos en \mathcal{G}_1 debe generar Λ_F^1 , de otra manera no podría generar el subespacio Λ_F^1 con sumas y productos en \mathcal{G} . Así podemos seleccionar un subconjunto \mathcal{S}_1 de \mathcal{G}_1 con $P_{1,F}$ elementos, tal que la componente no nula de grado minimal genere Λ_F^1 . Más aún, podemos sustraer por combinaciones lineales de elementos en \mathcal{S}_1 a la componente de grado de los elementos en $\mathcal{G}_1 \setminus \mathcal{S}_1$. Luego, nuevamente reemplazamos el conjunto por otro conjunto (también denotado) \mathcal{G} que cumple:

- $\#\mathcal{G}_0 = 1$;

- $\#\mathcal{G}_1 = P_{1,F}$;
- genera Λ_F^* ;
- tiene la misma cardinalidad que el inicial.

Finalmente, reemplazando los elementos en \mathcal{S}_1 por combinaciones lineales de ellos, podemos asumir que sus términos de menor grado varían en el conjunto de F -invariantes e_j 's, es decir, por el conjunto de todas las formas primitivas $e_j \in \Lambda_F^1$.

De manera similar podemos asumir inductivamente que hemos reemplazado el conjunto generado original \mathcal{G} por otro conjunto de la misma cardinalidad tal que \mathcal{G}_r es igual a $P_{r,F}$ para cada $r \leq p$ y el término de menor grado de los elementos en \mathcal{G}_r , corren por el conjunto de formas primitivas $e_J \in \Lambda_F^r$ con $|J| = r$.

Ahora consideremos los elementos en \mathcal{G}_{p+1} . Necesariamente deben haber al menos $P_{p+1,F}$ de ellos, tales que su $(p+1)$ -componente, junto con sumas de productos de elementos en \mathcal{G}_r con $r \leq p$, generen todo Λ_F^{p+1} . Nuevamente podemos sustraer de los elementos en \mathcal{G}_{p+1} , combinaciones lineales de productos exteriores de elementos de menor grado tal que su término de menor grado vive en el espacio generado por \mathcal{P}_F^{p+1} . De hecho, podemos fijar un subconjunto de cardinalidad $P_{p+1,F}$ tal que sus términos de grado mínimo son una base del espacio \mathcal{P}_F^{p+1} . Finalmente, por argumentos de álgebra lineal, podemos cambiar este conjunto por uno tal que sus términos de grado mínimo corran exactamente por las formas invariantes $e_J \in \mathcal{P}_F^{p+1}$.

De esta misma manera, en n pasos, obtenemos un nuevo conjunto de generadores de la \mathbb{Q} -álgebra Λ_F^* de cardinalidad $\sum_{p=1}^n P_{p,F} \leq \#\mathcal{G}$. Claramente si \mathcal{G} es minimal, entonces $\sum_{p=1}^n P_{p,F} = \#\mathcal{G}$. Esto completa la prueba del teorema. \square

COROLARIO 8.10. *Sean F y F' subgrupos finitos de tipo diagonal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Si, Λ_F^* y $\Lambda_{F'}^*$ son isomorfas como \mathbb{Q} -álgebras, entonces*

$$(8.10) \quad \sum_{p=1}^n P_{p,F} = \sum_{p=1}^n P_{p,F'}.$$

Más aún, si son isomorfas como \mathbb{Q} -álgebras graduadas, entonces $P_{p,F} = P_{p,F'}$ para todo $0 \leq p \leq n$.

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema previo, $\sum_{p=1}^n P_{p,F}$ es la cardinalidad de un conjunto generador minimal en Λ_F^* , por lo tanto éste debe ser un invariante bajo isomorfismos. La segunda afirmación es clara. \square

8.2. Construcción de representaciones casi-conjugadas

En esta sección construiremos pares de representaciones casi-conjugadas las cuales nos permitirán construir grupos de Bieberbach de tipo diagonal isospectrales que tendrán anillos de cohomología no isomorfos. Estas representaciones jugarán el papel de los subgrupos F de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ de tipo diagonal.

DEFINICIÓN 8.11. Un monomorfismo $\rho : \mathbb{Z}_2^k \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ tal que $\mathrm{Im}(\rho)$ es un subgrupo de tipo diagonal de matrices diagonales será llamado una *representación entera diagonal* de \mathbb{Z}_2^k , o simplemente una *representación diagonal* de \mathbb{Z}_2^k .

Un *carácter* de \mathbb{Z}_2^k es un homomorfismo $\chi : \mathbb{Z}_2^k \rightarrow \{\pm 1\}$. El conjunto de todos los caracteres es denotado por $\widehat{\mathbb{Z}_2^k} \cong \mathbb{Z}_2^k$. Algunas veces, será conveniente identificar caracteres de \mathbb{Z}_2^k con subconjuntos de $\{1, \dots, k\}$. Sea f_1, \dots, f_k la base canónica de \mathbb{Z}_2^k . Para $I \subset \{1, \dots, k\}$ denotaremos $\chi_I : \mathbb{Z}_2^k \rightarrow \{\pm 1\}$, el carácter dado por

$$\chi_I(f_i) = \begin{cases} -1 & \text{if } i \in I, \\ 1 & \text{if } i \notin I, \end{cases} \quad \text{para } 1 \leq i \leq k.$$

Así $\chi_{I_1}\chi_{I_2} = \chi_{I_1 \Delta I_2}$ para $I_1, I_2 \subset \{1, \dots, k\}$, donde $I_1 \Delta I_2 = (I_1 \cup I_2) \setminus (I_1 \cap I_2)$ denota la diferencia simétrica de conjuntos.

A partir de ahora fijaremos un orden total \prec en $\widehat{\mathbb{Z}_2^k}$ (o equivalentemente en los subconjuntos de $\{1, \dots, k\}$) con el único requerimiento que $\chi_\emptyset = 1$ sea el primer elemento.

Cualquier representación diagonal n -dimensional de \mathbb{Z}_2^k puede ser descompuesta como una suma $\rho = \sum_I q_I \chi_I$, con $q_I \in \mathbb{N}_0$ y $n = \sum_I q_I$, donde la suma recorre todos los subconjuntos de $\{1, \dots, k\}$. Recíprocamente, si $r = 2^k$, para cada elección de números $q_I \in \mathbb{N}_0$, definimos la representación diagonal $\rho = \sum_I q_I \chi_I$ tal que

$$(8.11) \quad \rho(f) = \text{diag} \left(\underbrace{\chi_{J_1}(f), \dots, \chi_{J_1}(f)}_{q_{J_1}}, \dots, \underbrace{\chi_{J_r}(f), \dots, \chi_{J_r}(f)}_{q_{J_r}} \right),$$

para $f \in \mathbb{Z}_2^k$, donde los caracteres χ_{J_i} están ordenados por \prec . Si ρ es una representación diagonal que se descompone como $\sum_I q_I \chi_I$, y ρ' es la representación inducida por esta elección de coeficientes q_I dada por (8.11), entonces ρ y ρ_1 son representaciones equivalente, más aún, sólo difieren en una permutación de índices.

DEFINICIÓN 8.12. Para ρ una representación diagonal de \mathbb{Z}_2^k , denotaremos por F a la imagen $\text{Im}(\rho) \cong \mathbb{Z}_2^k$ de ρ , y por $B_I = \rho(f_{i_1} \dots f_{i_h}) \in F$ donde $I = \{i_1, \dots, i_h\} \subset \{1, \dots, k\}$ con $h > 0$ y $B_\emptyset = \text{Id}_n$.

A modo de abreviatura, para $I = \{i_1, \dots, i_h\} \subset \{1, \dots, k\}$, usualmente escribiremos

$$(8.12) \quad B_{i_1 \dots i_h}, q_{i_1 \dots i_h}, \chi_{i_1 \dots i_h}, q_0, \chi_0, \quad \text{en lugar de } B_I, q_I, \chi_I, q_\emptyset, \chi_\emptyset,$$

respectivamente.

Sean ρ y ρ' representaciones diagonales de \mathbb{Z}_2^k . Es fácil chequear que estas representaciones son equivalentes si y sólo si los grupos F y F' son conjugados en $O(n)$. Por ejemplo, $\rho = 2\chi_1 + \chi_2 + \chi_{12}$ y $\rho' = \chi_1 + 2\chi_2 + \chi_{12}$ son dos representaciones diagonales equivalentes de \mathbb{Z}_2^3 . La equivalencia entre las representaciones se logra por el automorfismo α de \mathbb{Z}_2^3 dado por $f_1 \leftrightarrow f_2$, i.e. $\rho \circ \alpha = \rho'$. Además $F' = QFQ^t$ donde

$$Q = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}.$$

Necesitaremos algo más de notaciones. Para $p \geq 1$, sea

$$(8.13) \quad \mathcal{A}_p = \left\{ \{I_1, \dots, I_p\} : \chi_{I_1} \dots \chi_{I_p} = 1 \text{ y ningún subproducto propio de ellos es igual a } 1 \right\}.$$

EJEMPLO 8.13. En \mathbb{Z}_2^3 hay ocho caracteres:

$$\chi_0, \chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_{12}, \chi_{13}, \chi_{23}, \chi_{123}.$$

Se puede comprobar que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \{\{\chi_0\}\}, \\ \mathcal{A}_2 &= \left\{ \begin{aligned} &\{\chi_1, \chi_1\}, \{\chi_2, \chi_2\}, \{\chi_3, \chi_3\}, \{\chi_{12}, \chi_{12}\}, \\ &\{\chi_{13}, \chi_{13}\}, \{\chi_{23}, \chi_{23}\}, \{\chi_{123}, \chi_{123}\}, \end{aligned} \right\}, \\ \mathcal{A}_3 &= \left\{ \begin{aligned} &\{\chi_1, \chi_2, \chi_{12}\}, \{\chi_1, \chi_3, \chi_{13}\}, \{\chi_1, \chi_{23}, \chi_{123}\}, \{\chi_2, \chi_3, \chi_{23}\}, \\ &\{\chi_2, \chi_{13}, \chi_{123}\}, \{\chi_3, \chi_{12}, \chi_{123}\}, \{\chi_{12}, \chi_{13}, \chi_{23}\}, \end{aligned} \right\}, \\ \mathcal{A}_4 &= \left\{ \begin{aligned} &\{\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_{123}\}, \{\chi_1, \chi_2, \chi_{13}, \chi_{23}\}, \{\chi_1, \chi_3, \chi_{12}, \chi_{23}\}, \\ &\{\chi_1, \chi_{12}, \chi_{13}, \chi_{123}\}, \{\chi_2, \chi_3, \chi_{12}, \chi_{13}\}, \\ &\{\chi_2, \chi_{12}, \chi_{23}, \chi_{123}\}, \{\chi_3, \chi_{13}, \chi_{23}, \chi_{123}\}, \end{aligned} \right\}, \\ \mathcal{A}_p &= \emptyset, \quad \text{para todo } p \geq 4. \end{aligned}$$

Por razones de estética, a los elementos de \mathcal{A}_p los hemos expresado como conjuntos de caracteres y no de subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$.

La siguiente proposición da algunas fórmulas que serán usadas en la siguiente sección para calcular los elementos primitivos de ciertos grupos de Bieberbach de tipo diagonal.

PROPOSICIÓN 8.14. Sea $\rho = \sum_I q_I \chi_I$ una representación diagonal de \mathbb{Z}_2^k .

(i) El número $P_{p,F}$ de formas F -invariantes primitivas de grado p (ver Definición 8.8) está dado por las siguientes expresiones:

$$(8.14) \quad P_{0,F} = 1, \quad P_{1,F} = q_\emptyset, \quad P_{2,F} = \sum_{I \neq \emptyset} \binom{q_I}{2},$$

$$(8.15) \quad P_{p,F} = \sum_{\{I_1, \dots, I_p\} \in \mathcal{A}_p} q_{I_1} \cdots q_{I_p} \quad \text{para } 3 \leq p \leq k+1,$$

donde \mathcal{A}_p es como en (8.13). Más aún, $P_{p,F} = 0$ para todo $p > k+1$.

(ii) Si $\beta_p = \dim \Lambda_F^p$ para $0 \leq p \leq n$, entonces

$$\beta_0 = P_{0,F} = 1, \quad \beta_1 = P_{1,F}, \quad \beta_2 = \binom{q_\emptyset}{2} + P_{2,F},$$

$$\beta_3 = \binom{q_\emptyset}{3} + q_\emptyset P_{2,F} + P_{3,F},$$

$$\beta_4 = \sum_{\emptyset \neq I} \binom{q_I}{4} + \sum_{\emptyset \neq I_1 \prec I_2} \binom{q_{I_1}}{2} \binom{q_{I_2}}{2} + q_\emptyset P_{3,F} + \binom{q_\emptyset}{2} P_{2,F} + \binom{q_\emptyset}{4} + P_{4,F}.$$

En particular, si $q_\emptyset = 0$, entonces

$$(8.16) \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = P_{2,F}, \quad \beta_3 = P_{3,F}, \quad \beta_4 = \sum_{\emptyset \neq I_1 \prec I_2} \binom{q_{I_1}}{2} \binom{q_{I_2}}{2} + P_{4,F}.$$

DEMOSTRACIÓN. Claramente $P_{0,F} = 1$. Por (8.11), el grupo F actúa sobre cada $e_j \in \mathbb{R}^n$ por un carácter de $F = \mathbb{Z}_2^k$, digamos ψ_j . Por lo tanto, para cualquier p , las formas invariantes indescomponibles de grado p son de

la forma $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \dots \wedge e_{i_p}$ donde los correspondientes caracteres satisfacen $\psi_{i_1} \psi_{i_2} \dots \psi_{i_p} = 1$ y ellos son primitivos si y sólo si ningún subproducto propio de los ψ_{i_j} es igual a uno. Ahora, si escribimos $\chi_{I_j} = \psi_j$ para algún $I_j \subset \{1, \dots, k\}$, la condición anterior es equivalente a $\{I_1, \dots, I_p\} \in \mathcal{A}_h$, y consecuentemente (8.15) sigue. Más aún, en esta situación, es necesario que $\psi_{i_1}, \psi_{i_2}, \dots, \psi_{i_{p-1}}$ sean linealmente independientes, por lo tanto $p - 1 \leq k$. Esto completa la prueba de (i).

Las expresiones en (ii) pueden ser fácilmente obtenidas de (i). \square

Aplicando (8.15), para $p = 3$ y 4 , al Ejemplo 8.13 en donde $F \cong \mathbb{Z}_2^3$, tenemos

$$(8.17) \quad P_{3,F} = q_1 q_2 q_{12} + q_1 q_3 q_{13} + q_1 q_{23} q_{123} + q_2 q_3 q_{23} \\ + q_2 q_{13} q_{123} + q_3 q_{12} q_{123} + q_{12} q_{13} q_{23},$$

$$(8.18) \quad P_{4,F} = q_1 q_2 q_3 q_{123} + q_1 q_2 q_{13} q_{23} + q_1 q_3 q_{12} q_{23} + q_1 q_{12} q_{13} q_{123} \\ + q_2 q_3 q_{12} q_{13} + q_2 q_{12} q_{23} q_{123} + q_3 q_{13} q_{23} q_{123}.$$

Esta fórmula para $P_{4,F}$ será usada más adelante para probar el no isomorfismo de los anillos de cohomología de variedades compactas planas isospectrales con holonomía \mathbb{Z}_2^3 .

La siguiente noción será usada en la construcción de variedades planas isospectrales.

DEFINICIÓN 8.15. Diremos que dos representaciones diagonales ρ y ρ' son *casi-conjugadas* si los subgrupos $F = \text{Im}(\rho)$ y $F' = \text{Im}(\rho')$ son casi-conjugados, esto es, si existe una biyección $\phi : F \rightarrow F'$ que preserva la clase de conjugación en $O(n)$.

Notemos que como los únicos autovalores de los elementos de F y F' son ± 1 , la condición en la definición es equivalente a requerir que, para cada $0 \leq s \leq n$,

$$(8.19) \quad c_s(F) = c_s(F'),$$

en la notación de (8.6).

Dada $\rho = \sum_I q_I \chi_I$, nuestro próximo objetivo es realizar una pequeña perturbación a ρ para construir una representación diagonal ρ' de \mathbb{Z}_2^k teniendo el mismo conjunto de n_B 's con sus multiplicidades, más precisamente, ρ' satisfará

$$n_{B'_I} = n_{B_I} \quad \text{para todo } I \subset \{1, \dots, k\} \text{ con } I \neq \{1\}, \{2\}, \\ n_{B'_1} = n_{B_2} \quad \text{y} \quad n_{B'_2} = n_{B_1}.$$

Así ρ y ρ' serán casi-conjugadas. Asumiremos primero que $k = 3$ y ρ es una representación diagonal fija de \mathbb{Z}_2^3 . Las ecuaciones de arriba inducen un sistema lineal de ocho ecuaciones con ocho variables $q'_0, q'_1, \dots, q'_{123}$ la cual resulta no-singular. Tomando $u = q'_1 - q_1$, podemos escribir la (única) solución del sistema como

$$q'_0 = q_0, \quad q'_1 = q_1 + u, \quad q'_{13} = q_{13} + u, \quad q'_{12} = q_{12}, \\ q'_3 = q_3, \quad q'_2 = q_2 - u, \quad q'_{23} = q_{23} - u, \quad q'_{123} = q_{123},$$

bajo la condición

$$q'_1 + q'_{13} + 2u = q'_2 + q'_{23}.$$

Notemos que ρ' será una solución tal que $q'_I \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ para cada I si y sólo si $u = (q'_2 + q'_{23} - q'_1 - q'_{13})/2 \in \mathbb{Z}$ y $q_1 + u, q_2 - u, q_{13} + u, q_{23} - u \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Veremos en el Teorema 8.17 que este método se generaliza a todo $k \geq 3$ y da un procedimiento para construir pares de representaciones casi-conjugadas. Antes veamos una definición para resumir las hipótesis de este teorema.

DEFINICIÓN 8.16. Sea $\rho = \sum_I q_I \chi_I$ una representación diagonal de \mathbb{Z}_2^k tal que el número

$$(8.20) \quad u = \frac{1}{2^{k-2}} \left(\sum_{2 \in I, 1 \notin I} q_I - \sum_{1 \in I, 2 \notin I} q_I \right) \quad \text{sea un entero,}$$

que

$$q_I - u \geq 0 \quad \text{si} \quad 2 \in I, 1 \notin I$$

y que

$$q_I + u \geq 0 \quad \text{si} \quad 1 \in I, 2 \notin I.$$

Definimos el *flip* de ρ como

$$(8.21) \quad \rho' = \sum_I (q_I + u \delta_I) \chi_I, \quad \text{donde} \quad \delta_I = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \in I, 2 \notin I, \\ -1 & \text{si } 2 \in I, 1 \notin I, \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Es simple chequear que ρ' es nuevamente una representación diagonal de \mathbb{Z}_2^k en el sentido de Definición 8.11. Si decimos que ρ' es el flip de ρ , estaremos asumiendo que la representación ρ cumple con las hipótesis de la definición.

TEOREMA 8.17. Sea $\rho = \sum_I q_I \chi_I$ una representación diagonal de \mathbb{Z}_2^k . Si ρ' es el flip de ρ entonces

$$(8.22) \quad n_{B_1} = n_{B'_2}, \quad n_{B_2} = n_{B'_1}, \quad n_{B_I} = n_{B'_I} \quad \text{para todo } I \neq \{1\}, \{2\}.$$

En particular, ρ y ρ' son representaciones casi-conjugadas.

DEMOSTRACIÓN. Usaremos los siguientes hechos. Para cada subconjunto $I \subset \{1, \dots, k\}$ tenemos que

$$(8.23) \quad n_{B_I} = \sum_{J: \chi_J(f_I)=1} q_J, \quad n_{B'_I} = \sum_{J: \chi_J(f_I)=1} (q_J + u \delta_J).$$

Además, si $I = \{i_1, \dots, i_s\}$ entonces

$$(8.24) \quad \chi_J(f_I) = \chi_J(f_{i_1}) \dots \chi_J(f_{i_s}) = (-1)^{\#(J \cap I)},$$

pues $\chi_J(f_j) = -1$ si y sólo si $j \in J$.

Ahora comencemos a probar (8.22). Usando (8.21), (8.23) y (8.24) tenemos que

$$\begin{aligned} n_{B'_2} &= \sum_{2 \notin J} (q_J + u \delta_J) = \sum_{1 \notin J, 2 \notin J} (q_J + u \delta_J) + \sum_{1 \in J, 2 \notin J} (q_J + u \delta_J) \\ &= \sum_{1 \notin J, 2 \notin J} q_J + \sum_{1 \in J, 2 \notin J} q_J + 2^{k-2} u, \end{aligned}$$

pues existen exactamente 2^{k-2} subconjuntos de $\{1, \dots, k\}$ que contienen al elemento 1 y no al 2. Usando (8.20) concluimos que

$$n_{B'_2} = \sum_{1 \notin J, 2 \notin J} q_J + \sum_{1 \notin J, 2 \in J} q_J = \sum_{1 \notin J} q_J = n_{B_1}.$$

Con un argumento similar podemos chequear que $n_{B'_1} = n_{B_2}$.

Ahora, para $I \subset \{1, \dots, k\}$, por (8.23) se sigue que

$$n_{B'_I} - n_{B_I} = \sum_{\chi_J(f_I)=1} u \delta_J = u \left(\sum_{\substack{\chi_J(f_I)=1 \\ 1 \in J, 2 \notin J}} 1 - \sum_{\substack{\chi_J(f_I)=1 \\ 1 \notin J, 2 \in J}} 1 \right).$$

Ahora es simple ver que si $I \neq \{1\}, \{2\}$, las sumas en la parte derecha son ambas iguales a 2^{k-2} . Esto completa la demostración del teorema. \square

OBSERVACIONES 8.18.

1. Si $u = 0$ entonces ρ y su representación flipeada ρ' coinciden. Cuando $u \neq 0$, en algunos extraños casos las representaciones ρ y ρ' pueden resultar equivalentes. Por ejemplo, si escogemos $\rho = \chi_1 + 2\chi_2 + \chi_3 + \chi_{12} + \chi_{23}$, obtenemos $\rho' = 2\chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \chi_{12} + \chi_{13}$ la cual es equivalente a ρ .
2. Es posible usar cualquier par I_1, I_2 de subconjuntos no vacíos de $\{1, \dots, k\}$ en lugar de $I_1 = \{1\}, I_2 = \{2\}$, para producir un flip, aunque las condiciones cambiarán. De todas maneras no se encuentran pares de representaciones casi-conjugadas nuevas. Más precisamente, si obtuvimos ρ_2 como un flip arbitrario de ρ_1 , existen representaciones τ_1 y τ_2 tales que: ρ_i es equivalente a τ_i y τ_2 es el flip de τ_1 .

8.3. Resultado principal

Estamos en condiciones de probar el resultado principal de este capítulo. Usaremos resultados de las secciones previas, principalmente el Corolario 8.10 y el Teorema 8.17 para construir diversos pares de variedades planas de tipo diagonal Sunada-isospectrales con anillos de cohomología diferentes.

Antes veamos algunos hechos que podemos conocer de una variedad compacta plana M_Γ a partir de los coeficientes de su representación de holonomía.

LEMA 8.19. *Sea $\rho = \sum_I q_I \chi_I$ una representación diagonal de \mathbb{Z}_2^k , y sea M_Γ cualquier variedad compacta plana con representación de holonomía ρ . Entonces M_Γ es orientable si y sólo si para todo $1 \leq j \leq k$,*

$$(8.25) \quad \sum_{I: j \in I} q_I \text{ es par.}$$

Más aún, si q_I es par para todo $I \subset \{1, \dots, k\}$, entonces M_Γ tiene una estructura de Kähler invariante. Similarmente, si $q_I \in 4\mathbb{Z}$ para todo $I \subset \{1, \dots, k\}$, entonces M_Γ tiene una estructura hiperkähler.

DEMOSTRACIÓN. La primera afirmación sigue del hecho que

$$\det(B_j) = (-1)^{\sum_{I:j \in I} q_I}$$

para cada j .

En cuanto a la segunda afirmación, si todos los coeficientes q_I son pares, entonces podemos definir una estructura compleja J sobre \mathbb{R}^n ($n = 2m$) tomando $J(e_{2i-1}) = -e_{2i}$, $J(e_{2i}) = e_{2i-1}$ para cada $1 \leq i \leq m$. Por (8.11), esta estructura compleja conmuta con la acción del grupo puntual, por lo tanto ésta baja a una estructura compleja Kähler sobre M_Γ .

Además, si cada q_I es divisible por 4, entonces podemos definir una estructura compleja adicional J' sobre \mathbb{R}^n tomando

$$\begin{aligned} J'(e_{4i-3}) &= e_{4i-1}, & J'(e_{4i-2}) &= -e_{4i}, \\ J'(e_{4i-1}) &= -e_{4i-3}, & J'(e_{4i}) &= e_{4i-2}, \end{aligned}$$

para $1 \leq i \leq m/2$. Nuevamente esta estructura compleja J' conmuta con la acción de holonomía y anticonmuta con J . De esta manera el par J, J' define una estructura hiperkähler sobre M_Γ . \square

Ahora estamos en situación de probar el resultado principal de este capítulo.

TEOREMA 8.20. *Para $k \geq 3$ y $n > 3 \cdot 2^{k-2}$ existen pares de grupos de Bieberbach Γ, Γ' de tipo diagonal de dimensión n con $F \cong F' \cong \mathbb{Z}_2^k$ tales que cumplen simultáneamente con las siguientes características:*

- (1) *las variedades M_Γ y $M_{\Gamma'}$ son Sunada-isospectrales, por lo tanto fuertemente isospectrales;*
- (2) *$\beta_1(M_\Gamma) = \beta_1(M_{\Gamma'}) = 0$;*
- (3) *cuando n es par, M_Γ es Kähler y $M_{\Gamma'}$ no lo es;*
- (4) *sus anillos de cohomología $H^*(M_\Gamma)$ y $H^*(M_{\Gamma'})$ son no isomorfos como álgebras graduadas sobre \mathbb{Q} ;*
- (5) *cuando $3 \leq k \leq 5$ se tiene que $P_{4,F} < P_{4,F'}$, $P_{5,F} < P_{5,F'}$ y $P_{k+1,F} = 0 < P_{k+1,F'}$, lo cual implica que sus anillos de cohomología no son isomorfos como \mathbb{Q} -álgebras.*

DEMOSTRACIÓN. El primer paso es construir los grupos de Bieberbach. Comenzaremos por sus grupos puntuales F y F' , los cuales los obtendremos por representaciones flipeadas.

Fijamos $k \geq 3$ y $n > 3 \cdot 2^{k-2}$. Sea

$$(8.26) \quad \rho = 2^{k-2} \chi_1 + \sum_{2 \in I, 1 \notin I} 2\chi_I + q\chi_3,$$

donde $q = n - 3 \cdot 2^{k-2}$. Se puede chequear que ρ es fiel por contener a los caracteres $\chi_1, \chi_2, \chi_{23}, \dots, \chi_{2k}$. Para esta ρ , la ecuación (8.20) da

$$u = \frac{1}{2^{k-2}} (2 \cdot 2^{k-2} - 2^{k-2}) = 1,$$

pues hay 2^{k-2} subconjuntos $I \subset \{1, \dots, k\}$ tales que $2 \in I$ y $1 \notin I$. Ahora el Teorema 8.17 implica que ρ y su representación fiitada

$$(8.27) \quad \begin{aligned} \rho' &= 2^{k-2} \chi_1 + \sum_{1 \in I, 2 \notin I} \chi_I + \sum_{2 \in I, 1 \notin I} \chi_I + q\chi_3 \\ &= \left(2^{k-2} + 1\right) \chi_1 + \sum_{\substack{1 \in I, 2 \notin I, \\ I \neq \{1\}}} \chi_I + \sum_{2 \in I, 1 \notin I} \chi_I + q\chi_3 \end{aligned}$$

son casi-conjugadas.

Debemos construir los grupos de Bieberbach Γ y Γ' con grupos puntuales $F = \text{Im}(\rho)$ y $F' = \text{Im}(\rho')$ de tal manera que M_Γ y $M_{\Gamma'}$ son variedades Sunada-isospectrales. Para $I \subset \{1, \dots, k\}$ denotaremos por q_I y q'_I los coeficientes de ρ y ρ' respectivamente. Tomamos

$$(8.28) \quad b_1 = \frac{1}{2}e_{l_1}, \quad \text{donde} \quad l_1 = \sum_{I \prec \{2\}} q_I + 1,$$

$$(8.29) \quad b_2 = \frac{1}{2}(e_{l_2} + e_{\tilde{l}_2}), \quad \text{donde} \quad l_2 = \sum_{I \prec \{2,3\}} q_I + 1, \quad \tilde{l}_2 = \sum_{I \prec \{3\}} q_I + 1,$$

$$(8.30) \quad b_m = \frac{1}{2}e_{l_m}, \quad \text{donde} \quad l_m = \sum_{I \prec \{1\}} q_I + m - 2 \quad \text{y} \quad 3 \leq m \leq k.$$

Al igual que para la Proposición 8.2, para cada $I \subset \{1, \dots, k\}$, tomemos b_I como los únicos vectores en $\{0, \frac{1}{2}\}^n$ tales que $(b_I)_j \equiv \sum_{i \in I} (b_i)_j \pmod{\mathbb{Z}}$ para cada j . Definimos b'_1, \dots, b'_k y b'_I para cada I de la misma manera que b_I , reemplazando q_I por q'_I . Denotaremos $\gamma_I = B_I L_{b_I}$ y $\gamma'_I = B'_I L_{b'_I}$ para cada $I \subset \{1, \dots, k\}$.

Finalmente consideramos

$$\begin{aligned} \Gamma &= \langle \gamma_I : I \subset \{1, \dots, k\}, L_{\mathbb{Z}^n} \rangle, \\ \Gamma' &= \langle \gamma'_I : I \subset \{1, \dots, k\}, L_{\mathbb{Z}^n} \rangle. \end{aligned}$$

Para probar que Γ es un grupo de Bieberbach, por la Proposición 8.2, es suficiente chequear la condición (8.4).

En la Tabla 8.1 mostramos (en notación columna) parte de las matrices B_1, \dots, B_k junto con los vectores b_1, \dots, b_k . Incluimos sólo las filas $l_1, l_2, \tilde{l}_2, l_3, \dots, l_k$, como fueron definidas en (8.28), (8.29) y (8.30), pues éstas son las únicas filas que tienen una componente no nula para al menos un b_i , $1 \leq i \leq k$.

Así, la Tabla 8.1 muestra que la condición (8.4) se cumple para cualquier I que tiene un solo elemento. Ahora asumamos que $I \subset \{1, \dots, k\}$ y $|I| > 1$. Si $1 \notin I$, entonces es claro que al menos una de las coordenadas l_3, \dots, l_k de b_I (las cuales están en el espacio fijo por B_I) es igual a $\frac{1}{2}$. Similarmente, si $1 \in I$ y $2 \notin I$, entonces $(b_I)_{l_1} = \frac{1}{2}$ y $B_I(e_{l_1}) = e_{l_1}$; si $1 \in I$, $2 \in I$ y $3 \in I$ entonces $(b_I)_{l_2} = \frac{1}{2}$ y $B_I(e_{l_2}) = e_{l_2}$; si $1 \in I$, $2 \in I$ y $3 \notin I$ entonces $(b_I)_{\tilde{l}_2} = \frac{1}{2}$ y $B_I(e_{\tilde{l}_2}) = e_{\tilde{l}_2}$.

Así, queda probado que Γ es un grupo de Bieberbach Γ . La prueba para Γ' es análoga usando la misma tabla. Ahora pasemos a probar los diferentes ítems.

Para chequear la Sunada-isospectralidad de M_Γ y $M_{\Gamma'}$, usaremos (8.5), (8.7), (8.8) y el Teorema 8.6. Como ρ y ρ' vienen de un flip, las ecuaciones

TABLA 8.1. Notación columna para Γ .

Conjunto del carácter	Coordenada	B_1	B_2	B_3	B_4	\dots	B_k
χ_1	l_3	-1	1	$1_{\frac{1}{2}}$	1	\dots	1
χ_1	l_4	-1	1	1	$1_{\frac{1}{2}}$	\dots	1
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
χ_1	l_k	-1	1	1	1	\dots	$1_{\frac{1}{2}}$
χ_2	l_1	$1_{\frac{1}{2}}$	-1	1	1	\dots	1
χ_{23}	l_2	1	$-1_{\frac{1}{2}}$	-1	1	\dots	1
χ_3	\tilde{l}_2	1	$1_{\frac{1}{2}}$	-1	1	\dots	1

en (8.22) se cumplen. Esto claramente implica que

$$n_{B_I, \frac{1}{2}} = n_{B'_I, \frac{1}{2}} \quad \text{para todo } I \neq \{1\}, \{2\}.$$

Finalmente, no es difícil comprobar que

$$n_{B_1, \frac{1}{2}} = n_{B_2, \frac{1}{2}} = n_{B'_1, \frac{1}{2}} = n_{B'_2, \frac{1}{2}} = 1,$$

por lo tanto los números de Sunada $c_{s,t}(\Gamma)$ y $c_{s,t}(\Gamma')$ coinciden para todo $0 \leq t \leq s \leq n$. Esto prueba 8.20.

Es inmediata la prueba de 8.20 usando la Proposición 8.14, pues $q_0 = 0$.

Por Lema 8.19, se ve inmediatamente que M_Γ tiene una estructura Kähler pues q_I es par para todo I . Por otro lado, en el caso de Γ' tenemos que

$$\mathcal{P}_{F'}^2 = \left\{ e_i \wedge e_j : l_3 \leq i < j < l_3 + 2^{k-2} \right\} \cup \left\{ e_i \wedge e_j : \tilde{l}_2 \leq i < j < \tilde{l}_2 + q \right\}.$$

Notemos que $\mathcal{P}_{F'}^2$ involucra solo los elementos e_i tales que $i \in \llbracket l_3, l_3 + 2^{k-2} - 1 \rrbracket \cup \llbracket \tilde{l}_2, \tilde{l}_2 + q - 1 \rrbracket$ y estos conjuntos no llenan todo el intervalo $\llbracket 1, n \rrbracket$. Por ejemplo, ellos no incluyen al índice l_2 . Esto rápidamente implica que el producto exterior de $\frac{n}{2}$ veces el subespacio $\Lambda_{F'}^2$ no puede contener a e_{l_2} por lo tanto $\bigwedge_1^{n/2} \Lambda_{F'}^2 = 0$ pues $\Lambda_{F'}^n$ es de dimensión 1. Esto implica que $M_{\Gamma'}$ no puede admitir una estructura Kähler. Esto prueba 8.20.

Resta probar 8.20 y 8.20. Para abreviar, escribiremos simplemente P_p y P'_p en lugar de $P_{p,F}$ y $P_{p,F'}$. Comencemos por probar que $P'_4 > P_4$. Por (8.15) tenemos $P_4 = \sum q_{I_1} \dots q_{I_4}$ donde la sumatoria es sobre todo $\{I_1, \dots, I_4\} \in \mathcal{A}_4$ (ver (8.13)). No es difícil ver que si $\{I_1, \dots, I_4\} \in \mathcal{A}_4$ con $q_{I_1} \dots q_{I_4} > 0$, entonces los índices I_j deben estar en (8.26) y no deben ser igual a $\{1\}$ ni a $\{3\}$. Entonces $I_j = \{2\} \cup \tilde{I}_j$ con $\tilde{I}_j \subset \{3, \dots, k\}$ para todo $j = 1, 2, 3, 4$, así $q_{I_j} = 2$. Por lo tanto P_4 es 2^4 veces el número de elecciones de cuatro subconjuntos diferentes $\tilde{I}_1, \dots, \tilde{I}_4 \subset \{3, \dots, k\}$ tales que $\chi_{\tilde{I}_1} \dots \chi_{\tilde{I}_4} = 1$. Se ve que existen 2^{k-2} elecciones para \tilde{I}_1 , $2^{k-2} - 1$ elecciones para \tilde{I}_2 , $2^{k-2} - 2$ para \tilde{I}_3 e \tilde{I}_4 está determinado por lo anteriores. Un simple argumento combinatorio nos muestra que

$$(8.31) \quad P_4 = 2^4 \frac{2^{k-2}(2^{k-2} - 1)(2^{k-2} - 2)}{4!}.$$

Análogamente, $P'_4 = \sum q'_{I_1} \dots q'_{I_4}$ donde la sumatoria es sobre todos los elementos en \mathcal{A}_4 . Para probar que $P'_4 \geq P_4$, sólo será necesario contar y sumar algunos de los términos de esta sumatoria. Para cualquier $\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{I}_3 \subset \{3, \dots, k\}$ con $\tilde{I}_1 \neq \tilde{I}_2$, tomamos

$$I_1 = \{2\} \cup \tilde{I}_1, \quad I_2 = \{2\} \cup \tilde{I}_2, \quad I_3 = \{1\} \cup \tilde{I}_3, \quad I_4 = I_1 \triangle I_2 \triangle I_3,$$

donde $I \triangle J = (I \cup J) \setminus (I \cap J)$. Se puede chequear que $\{I_1, \dots, I_4\} \in \mathcal{A}_4$. Hay $\binom{2^{k-2}}{2}$ elecciones para el par \tilde{I}_1, \tilde{I}_2 . Para \tilde{I}_3 hay 2^{k-2} elecciones, pero cuando consideramos \tilde{I}_4 tenemos que dividir por dos. Ahora, tenemos que tomar en cuenta los coeficientes q'_{I_i} , los cuales son todos uno excepto $q'_1 = 2^{k-2} + 1$. Por lo tanto

$$(8.32) \quad P'_4 \geq \binom{2^{k-2}}{2} \left(q'_1 + \frac{2^{k-2} - 2}{2!} \right) = \frac{2^{k-2}(2^{k-2} - 1)}{2} 2^{k-3} 3.$$

Combinando (8.31) y (8.32) concluimos que

$$P'_4 - P_4 \geq 2^{k-2}(2^{k-2} - 1) \left(\frac{2^{k-3} 3}{2} - \frac{2^4(2^{k-2} - 2)}{4!} \right) > 0.$$

Esta desigualdad $P_4 < P'_4$ es suficiente para probar 8.20.

Ahora probaremos que $P'_5 > P_5$. Consideremos $\{I_1, \dots, I_5\} \in \mathcal{A}_5$ tal que $q_{I_1} \dots q_{I_5} > 0$. Notemos que $I_j \neq \{1\}$ para todo $j = 1, \dots, 5$, pues el número 1 tiene que ocurrir un número par de veces. Más aún, el índice $\{3\}$ ocurre una vez. Entonces, cambiando el orden si es necesario, podemos escribir $I_5 = \{3\}$ y $I_j = \{2\} \cup \tilde{I}_j$ con $\tilde{I}_j \subset \{3, \dots, k\}$ para $1 \leq j \leq 4$. Así $q_{I_5} = q$ (recordar que q es un coeficiente de ρ , ver (8.26)) y $q_{I_j} = 2$ para $j = 1, \dots, 4$.

Por lo tanto P_5 es igual a $2^4 q$ veces el número de posibilidades de tener cuatro subconjuntos distintos $\tilde{I}_1, \dots, \tilde{I}_4 \subset \{3, \dots, k\}$ tales que $\chi_{\tilde{I}_1} \dots \chi_{\tilde{I}_4} = \chi_3$ y donde ningún subproducto de dos de ellos sea igual a χ_0 ni a χ_3 . Nuevamente, por un argumento combinatorio similar, tenemos

$$P_5 = 2^4 q \frac{2^{k-2}(2^{k-2} - 2)(2^{k-2} - 4)}{4!}.$$

Ahora podemos proceder de manera similar como en la demostración de (8.32) fijando $I_5 = \{3\}$ y definiendo $I_4 = I_1 \triangle I_2 \triangle I_3 \triangle I_5$, obteniendo

$$P'_5 \geq q \frac{2^{k-2}(2^{k-2} - 2)}{2} \left(q'_1 + \frac{2^{k-2} - 2}{2!} \right).$$

Consecuentemente obtenemos que $P'_5 > P_5$, como lo habíamos asegurado.

Ahora probemos que $P_{k+1} = 0$. Supongamos que existe un conjunto $A = \{I_1, \dots, I_{k+1}\} \in \mathcal{A}_{k+1}$ tal que $q_{I_1} \dots q_{I_{k+1}} > 0$. Notemos que cualquier subconjunto de $\{\chi_{I_1}, \dots, \chi_{I_{k+1}}\}$ teniendo k elementos es linealmente independiente en $\widehat{\mathbb{Z}}_2^k$. Por la construcción de ρ , $\{1\} \notin A$. Cuando $k+1$ es par, es claro también que $\{3\} \notin A$, así todo $I_j \in A$ está en la unión de $\{2\}$ y un subconjunto de $\{3, \dots, k\}$. Esto contradice la independencia lineal mencionada arriba. De manera similar, cuando $k+1$ es impar, sigue que $\{3\} \in A$. Los restantes k elementos $I_j \in A$ son tales que $2 \in I_j$ y $1 \notin I_j$, de esta forma no pueden ser linealmente independientes, lo cual da una contradicción.

Ahora mostremos que $P'_{k+1} > 0$. Cuando $k+1$ es par, es claro que el producto entre $\chi_1, \chi_{13}, \chi_{14}, \dots, \chi_{1k}, \chi_2, \chi_{23} \dots \chi_k$ es igual a χ_0 mientras que

ningún subproducto de ellos es igual a χ_0 , por lo que el conjunto de índices correspondiente pertenecen a \mathcal{A}_{k+1} . Cuando $k+1$ es impar, lo mismo es cierto, con χ_3 en lugar de χ_{13} . Como todos los coeficientes correspondientes q'_I en ρ' son positivos, la afirmación sigue.

Para probar que los anillos de cohomología son no isomorfos como \mathbb{Q} -álgebras abstractas, es suficiente, por el Corolario 8.10, mostrar que

$$\sum_{p=1}^n P_p < \sum_{p=1}^n P'_p.$$

Sabemos por la Proposición 8.14 que $P_0 = P'_0 = 1$, $P_1 = P'_1 = 0$ y $P_p = P'_p = 0$ para $p > k+1$. De esta forma, para $p = 2, 3$, $P_p = \dim(\Lambda_F^p) = \beta_p(M_\Gamma)$ y $P'_p = \dim(\Lambda_{F'}^p) = \beta_p(M_{\Gamma'})$ pues $q_0 = 0$. Además $\beta_p(M_\Gamma) = \beta_p(M_{\Gamma'})$ para todo p pues Γ y Γ' son Sunada-isospectrales, por lo tanto $P_2 = P'_2$ y $P_3 = P'_3$. Finalmente, como hemos probado que $P_4 + P_5 + P_6 < P'_4 + P'_5 + P'_6$ para $3 \leq k \leq 5$, se sigue que Λ_F^* y $\Lambda_{F'}^*$ no son isomorfos como \mathbb{Q} -álgebras. Esto completa la demostración del teorema. \square

Terminamos este capítulo con dos preguntas abiertas que no pudimos responder.

PREGUNTAS ABIERTAS 8.21.

1. Nosotros esperamos que los anillos de cohomología de las variedades construidas en el teorema sean no isomorfos para todo valor de k , y no sólo para $3 \leq k \leq 5$. Por argumentos similares, podemos todavía probar el no isomorfismo para algunos valores más de $k > 5$ pero el argumento se vuelve mucho más complicado. Nos parece de interés encontrar una prueba elegante válida para todos los valores de k .
2. Podría ser posible construir por métodos similares, familias arbitrariamente grandes de variedades fuertemente isospectrales teniendo anillos de cohomología no isomorfos (siempre que a k , y por lo tanto a n , les sea permitido crecer arbitrariamente).

Ejemplos de variedades isospectrales

Terminamos esta parte con este capítulo de ejemplos de pares y familias de variedades compactas planas isospectrales con anillos de cohomología no isomorfos.

En la primera sección explicaremos un algoritmo que desarrollamos para clasificar las representaciones diagonales agrupadas según si son o no casi-conjugadas. Éste es el primer paso para construir las variedades con cohomologías diferentes. Las Tablas 9.1, 9.2, 9.3 muestran algunos resultados obtenidos por el algoritmo para representaciones de \mathbb{Z}_2^3 y \mathbb{Z}_2^4 y dimensión $n \leq 15$.

En la segunda sección estudiaremos detalladamente algunos ejemplos interesantes. El Ejemplo 9.4 usa las representaciones diagonales de \mathbb{Z}_2^4 casi-conjugadas (no equivalentes) de dimensión mínima, la cual es $n = 7$. Las variedades tienen anillos de cohomología pequeños, los cuales se muestran en la Tabla 9.4. El Ejemplo 9.5 estudiará el mismo par de grupos de Bieberbach que construimos en la prueba del Teorema 8.20, para el caso $k = 3$ y $n = 8$. Para finalizar, el Ejemplo 9.6 muestra una familia de ocho variedades isospectrales con holonomía \mathbb{Z}_2^3 de dimensión 24. Probaremos que sus anillos de cohomología no son isomorfos de a pares, calculando el número $P_{4,F_j}(\Gamma_j)$, usando (8.18).

9.1. Algoritmo

En esta sección introduciremos un algoritmo que nos permite encontrar todas las familias de representaciones casi-conjugadas de dimensión n de \mathbb{Z}_2^k , para k y n fijos.

Recordemos que por (8.19), dos representaciones diagonales ρ y ρ' son casi-conjugadas si y sólo si $c_s(\rho) = c_s(\rho')$ para todo $0 \leq s \leq n$, y que llamamos a la $(n + 1)$ -tupla $(c_0(\rho), \dots, c_n(\rho))$ el *patrón* de ρ . El algoritmo puede ser descrito como sigue.

ALGORITMO 9.1. Sea $k \geq 3$ y $n \in \mathbb{N}$. Este algoritmo devuelve todas las representaciones diagonales n -dimensionales no equivalentes de \mathbb{Z}_2^k agrupadas en conjuntos, donde dos representaciones están en el mismo conjunto si son casi-conjugadas.

1. Inicialmente **patterns** y **reps** son listas vacías. **reps** será una lista de listas de representaciones.
2. Corremos sobre todas las representaciones diagonales n -dimensionales ρ de \mathbb{Z}_2^k y obtenemos su patrón.
3. Verificamos si el patrón de ρ está en **patterns** o no.

TABLA 9.1. Todas las familias $\mathcal{F}_j^{k,n}$ de representaciones casi-conjugadas para $k = 3$ y $n \leq 11$.

n		Reps.	$P_{4,F}$		Reps.	$P_{4,F}$		Reps.	$P_{4,F}$
7	$\mathcal{F}_1^{3,7}$	$[3,1,1,1,0,1,0]$	3						
		$[2,2,2,1,0,0,0]$	0						
8	$\mathcal{F}_1^{3,8}$	$[3,2,1,1,0,1,0]$	3	$\mathcal{F}_2^{3,8}$	$[3,1,1,1,1,1,0]$	7			
		$[2,2,2,2,0,0,0]$	0		$[2,2,2,1,1,0,0]$	4			
9	$\mathcal{F}_1^{3,9}$	$[4,2,1,1,0,0,1]$	8	$\mathcal{F}_3^{3,9}$	$[3,3,1,1,1,0,0]$	3	$\mathcal{F}_5^{3,9}$	$[3,1,1,1,1,1,1]$	15
		$[3,3,2,1,0,0,0]$	0		$[3,2,2,2,0,0,0]$	0		$[2,2,2,1,1,1,0]$	12
	$\mathcal{F}_2^{3,9}$	$[4,2,1,0,1,1,0]$	8	$\mathcal{F}_4^{3,9}$	$[3,2,1,1,1,1,0]$	11			
		$[3,3,2,0,1,0,0]$	0		$[2,2,2,2,1,0,0]$	8			
10	$\mathcal{F}_1^{3,10}$	$[4,3,1,1,1,0,0]$	3	$\mathcal{F}_4^{3,10}$	$[4,2,1,1,1,1,0]$	14	$\mathcal{F}_7^{3,10}$	$[3,2,2,1,1,0,1]$	19
		$[4,2,2,2,0,0,0]$	0		$[3,3,2,1,1,0,0]$	6		$[2,2,2,2,2,0,0]$	16
	$\mathcal{F}_2^{3,10}$	$[4,2,2,1,0,1,0]$	8	$\mathcal{F}_5^{3,10}$	$[4,2,1,0,1,1,1]$	17	$\mathcal{F}_8^{3,10}$	$[3,2,1,1,1,1,1]$	23
		$[3,3,2,0,2,0,0]$	0		$[3,3,2,0,1,1,0]$	9		$[2,2,2,2,1,1,0]$	20
	$\mathcal{F}_3^{3,10}$	$[4,2,1,2,0,1,0]$	8	$\mathcal{F}_6^{3,10}$	$[3,3,1,1,1,1,0]$	15			
		$[3,3,2,2,0,0,0]$	0		$[3,2,2,2,0,1,0]$	12			
11	$\mathcal{F}_1^{3,11}$	$[5,3,1,1,1,0,0]$	3	$\mathcal{F}_7^{3,11}$	$[4,3,1,2,0,1,0]$	8	$\mathcal{F}_{12}^{3,11}$	$[4,2,2,1,0,1,1]$	26
		$[5,2,2,2,0,0,0]$	0		$[3,3,2,3,0,0,0]$	0		$[3,3,2,0,2,1,0]$	18
	$\mathcal{F}_2^{3,11}$	$[5,3,1,1,0,0,1]$	15	$\mathcal{F}_8^{3,11}$	$[4,3,1,1,1,1,0]$	19	$\mathcal{F}_{13}^{3,11}$	$[4,2,1,1,1,1,1]$	29
		$[4,4,2,1,0,0,0]$	0		$[4,2,2,2,0,1,0]$	16		$[3,3,2,1,1,1,0]$	21
	$\mathcal{F}_3^{3,11}$	$[5,3,1,0,1,1,0]$	15	$\mathcal{F}_9^{3,11}$	$[4,2,2,1,0,0,2]$	32	$\mathcal{F}_{14}^{3,11}$	$[3,3,2,1,1,0,1]$	27
		$[4,4,2,0,1,0,0]$	0		$[3,3,3,1,0,0,1]$	27		$[3,2,2,2,0,2,0]$	24
	$\mathcal{F}_4^{3,11}$	$[5,2,2,1,0,0,1]$	20	$\mathcal{F}_{10}^{3,11}$	$[4,2,1,2,1,1,0]$	20	$\mathcal{F}_{15}^{3,11}$	$[3,3,1,1,1,1,1]$	31
		$[4,3,3,1,0,0,0]$	0		$[3,3,2,2,1,0,0]$	12		$[3,2,2,2,0,1,1]$	28
	$\mathcal{F}_5^{3,11}$	$[5,2,2,0,0,1,1]$	20	$\mathcal{F}_{11}^{3,11}$	$[4,2,2,1,1,1,0]$	20	$\mathcal{F}_{16}^{3,11}$	$[3,2,2,1,1,1,1]$	35
		$[4,3,3,0,0,1,0]$	0		$[3,3,2,1,2,0,0]$	12		$[2,2,2,2,2,1,0]$	32
	$\mathcal{F}_6^{3,11}$	$[4,3,2,1,0,1,0]$	8						
		$[3,3,3,2,0,0,0]$	0						

- Si no está, lo agregamos a **patterns** al final y también agregamos en **reps** una nueva entrada la cual es una lista teniendo a ρ como su único elemento.
- Si el patrón de ρ coincide con alguna entrada en **patterns**, digamos la j -ésima, entonces miramos las representaciones que están en la j -ésima entrada de **reps** y chequeamos si alguna de ellas es equivalente a ρ . Si alguna lo es no hacemos nada. Si no, agregamos ρ a esta j -ésima lista.

Las Tablas 9.1, 9.2, 9.3 muestran algunos de los resultados obtenidos con la ayuda de una computadora. Ellos contienen sólo representaciones ρ tales que $-\text{Id}_n \notin \text{Im}(\rho)$ y tales que ρ no tienen vectores fijos (i.e. $q_0 = 0$), pues estamos más interesados en variedades (que en *orbifolds*) teniendo primer número de Betti igual a cero. Por simplicidad, hemos abreviado, para $k =$

TABLA 9.2. Todas las familias $\tilde{\mathcal{F}}_j^{k,n}$ de representaciones casi-conjugadas para $k = 3$ y $n \leq 15$.

n	Reps.	P_4	Reps.	P_4	Reps.	P_4												
12	$\tilde{\mathcal{F}}_1^{3,12}$ [5,3,1,1,1,0]	23	$\tilde{\mathcal{F}}_2^{3,12}$ [4,3,2,1,0,1,1] [4,2,2,2,0,2,0] [3,3,3,2,0,0,1]	35 32 27	$\tilde{\mathcal{F}}_3^{3,12}$ [4,2,2,1,1,0,2] [3,3,3,1,1,0,1] [3,3,2,0,2,2,0]	44 39 36												
	[5,2,2,2,0,1,0]	20																
	[4,4,2,1,1,0,0]	8																
	[4,3,3,2,0,0,0]	0																
13	$\tilde{\mathcal{F}}_1^{3,13}$ [5,3,1,1,1,1,1]	47	$\tilde{\mathcal{F}}_2^{3,13}$ [4,3,2,1,1,1,1] [4,2,2,2,1,2,0] [3,3,3,2,1,0,1]	59 56 51	$\tilde{\mathcal{F}}_3^{3,13}$ [4,2,2,1,1,1,2] [3,3,3,1,1,1,1] [3,3,2,1,2,2,0]	68 63 60												
	[5,2,2,2,0,1,1]	44																
	[4,4,2,1,1,1,0]	32																
	[4,3,3,2,0,1,0]	24																
14	$\tilde{\mathcal{F}}_1^{3,14}$ [6,3,2,1,0,1,1] [6,2,2,2,0,2,0] [5,4,3,1,0,1,0] [4,4,4,2,0,0,0]	51 48 15 0	$\tilde{\mathcal{F}}_3^{3,14}$ [5,3,2,2,1,1,0] [4,4,2,2,2,0,0] [4,3,3,3,1,0,0]	47 32 27	$\tilde{\mathcal{F}}_5^{3,14}$ [5,3,2,1,1,1,1] [5,2,2,2,1,2,0] [4,4,2,1,2,1,0] [4,3,3,2,0,2,0]	71 68 56 48												
							$\tilde{\mathcal{F}}_2^{3,14}$ [5,3,3,1,0,1,1] [5,3,2,0,2,2,0] [4,4,3,0,2,0,1]	63 60 48	$\tilde{\mathcal{F}}_4^{3,14}$ [5,3,2,0,1,1,2] [4,4,3,0,1,1,1] [4,4,2,0,2,2,0]	79 67 64	$\tilde{\mathcal{F}}_6^{3,14}$ [4,3,2,1,2,1,1] [4,2,2,2,2,2,0] [3,3,3,2,2,0,1] [4,2,2,2,1,2,1] [3,3,3,2,1,1,1] [3,3,2,2,2,2,0]	83 80 75 92 87 84						
													$\tilde{\mathcal{F}}_1^{3,15}$ [6,4,1,2,1,1,0] [6,3,2,3,0,1,0] [5,5,2,2,1,0,0] [5,4,3,3,0,0,0]	44 36 20 0	$\tilde{\mathcal{F}}_5^{3,15}$ [5,4,2,2,0,1,1] [5,3,2,3,0,2,0] [4,4,3,3,0,0,1]	68 60 48	$\tilde{\mathcal{F}}_9^{3,15}$ [5,3,2,1,1,1,2] [4,4,3,1,1,1,1] [4,4,2,1,2,2,0]	111 99 96
	$\tilde{\mathcal{F}}_3^{3,15}$ [6,3,2,1,1,1,1] [6,2,2,2,1,2,0] [5,4,3,1,1,1,0] [4,4,4,2,1,0,0]	83 80 47 32	$\tilde{\mathcal{F}}_7^{3,15}$ [5,3,2,2,1,0,2] [4,4,3,2,1,0,1] [4,3,3,3,0,2,0]	92 80 72	$\tilde{\mathcal{F}}_{11}^{3,15}$ [4,3,2,2,1,2,1] [3,3,3,3,1,1,1] [3,3,2,3,2,2,0]	116 111 108												
							$\tilde{\mathcal{F}}_4^{3,15}$ [5,4,2,1,1,2,0] [5,3,3,2,0,2,0] [4,4,3,0,3,1,0]	68 60 48	$\tilde{\mathcal{F}}_8^{3,15}$ [5,3,2,2,1,1,1] [4,4,2,2,2,1,0] [4,3,3,3,1,1,0]	95 80 75								

3, 4 respectivamente,

$$[q_1, q_2, q_3, q_{12}, q_{13}, q_{23}, q_{123}] = \sum_I q_I \chi_I,$$

$$[q_1, q_2, q_3, q_4, q_{12}, q_{13}, q_{14}, q_{23}, q_{24}, q_{34}, q_{123}, q_{124}, q_{134}, q_{234}, q_{1234}] = \sum_I q_I \chi_I.$$

En las tablas, para cada representación incluimos el valor de $P_{4,F}$ de formas primitivas de grado 4, cuando $k = 3$, y el valor de $P_{4,F}$ y $P_{5,F}$, cuando $k = 4$.

TABLA 9.3. Todas las familias $\mathcal{F}_j^{k,n}$ de representaciones casi-conjugadas para $k = 4$ y $n \leq 9$.

n	Reps.	P_4	P_5	Reps.	P_4	P_5
7	$\mathcal{F}_1^{4,7}$ [2,1,1,1,0,0,0,1,1,0,0,0,0,0,0]	1	0			
	[2,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0]	1	2			
8	$\mathcal{F}_1^{4,8}$ [3,1,1,1,1,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0]	3	0	$\mathcal{F}_3^{4,8}$ [2,1,1,1,1,0,0,1,0,1,0,0,0,0,0]	3	2
	[2,2,2,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]	0	0	[2,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,1,0]	3	4
				[2,1,1,1,0,0,0,1,1,1,0,0,0,0,0]	3	0
	$\mathcal{F}_2^{4,8}$ [2,2,1,1,0,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0]	1	0			
	[2,2,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1]	1	4			
9	$\mathcal{F}_1^{4,9}$ [3,2,1,1,1,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0]	3	0	$\mathcal{F}_8^{4,9}$ [3,1,1,1,1,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0]	7	4
	[2,2,2,1,2,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]	0	0	[2,2,2,1,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0]	4	4
				[2,2,2,1,0,0,1,0,1,0,0,0,0,0,0]	4	0
	$\mathcal{F}_2^{4,9}$ [3,2,1,1,0,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0]	1	0	$\mathcal{F}_9^{4,9}$ [3,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,1,0]	3	6
	[3,2,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1]	1	6	[2,2,2,1,0,0,1,1,0,0,0,0,0,0,0]	0	0
	$\mathcal{F}_3^{4,9}$ [3,2,1,1,0,1,0,0,0,1,0,0,0,0,0]	3	0	$\mathcal{F}_{10}^{4,9}$ [3,1,1,1,0,0,0,1,1,0,0,0,1,0,0]	7	6
	[2,2,2,2,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]	0	0	[2,2,2,1,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,1]	4	8
				[2,2,1,1,1,0,0,0,0,0,1,1,0,0,0,0]	5	4
	$\mathcal{F}_4^{4,9}$ [3,2,1,1,0,0,0,1,0,1,0,0,0,0,0]	2	0	$\mathcal{F}_{11}^{4,9}$ [2,2,1,1,1,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0]	5	6
	[3,2,1,1,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,1]	2	6	[2,2,1,1,0,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0]	5	2
				[2,2,1,1,0,1,1,0,0,1,0,0,0,0,0]	5	0
	$\mathcal{F}_5^{4,9}$ [3,1,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0]	3	0	$\mathcal{F}_{12}^{4,9}$ [2,2,1,1,1,0,0,0,0,0,1,0,1,0,0]	8	4
	[2,2,1,1,2,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0]	0	0	[2,2,1,1,0,1,0,1,0,1,0,0,0,0,0]	8	0
	$\mathcal{F}_6^{4,9}$ [3,1,1,1,1,1,0,1,0,0,0,0,0,0,0]	7	0	$\mathcal{F}_{13}^{4,9}$ [2,1,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,1,0]	7	8
[2,2,2,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0]	4	0	[2,1,1,1,1,0,1,1,0,1,0,0,0,0,0]	7	6	
			[2,1,1,1,1,0,0,1,1,1,0,0,0,0,0]	7	4	
$\mathcal{F}_7^{4,9}$ [3,1,1,1,1,0,0,1,1,0,0,0,0,0,0]	7	4	$\mathcal{F}_{14}^{4,9}$ [2,1,1,1,1,1,0,1,0,0,0,0,0,1,0]	7	4	
[2,2,2,1,1,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0]	4	4	[2,1,1,1,0,0,0,1,1,1,0,0,0,1,0]	7	0	

La Tabla 9.1 muestra todas las familias de representaciones casi-conjugadas de \mathbb{Z}_2^3 de dimensión $n \leq 11$. Todas ellas terminan siendo pares. Por otro lado, para $n = 12$, hay 19 familias, de las cuales 16 son pares. Por razones de espacio, en la Tabla 9.2 mostramos, para $n \leq 15$, todas las familias que tienen más de dos elementos, omitiendo los pares casi-conjugados. Cuando la holonomía crece a \mathbb{Z}_2^4 , el número de familias también crece. Por ejemplo, para $n = 9$ hay 14 familias, mostradas en la Tabla 9.3. Para $n = 10$ hay 32 familias, una de ellas conteniendo 6 representaciones.

OBSERVACIONES 9.2.

- (i) Uno puede chequear que todos los pares en la Tabla 9.1 pueden ser obtenidas en un paso por el ‘método del flip’ (Teorema 8.17). De todas maneras, esto no siempre ocurre para $k = 3$, por ejemplo para $n = 12$. De hecho, es simple chequear que la primera representación $[5, 3, 1, 1, 1, 1, 0]$ y la cuarta $[4, 3, 3, 2, 0, 0, 0, 0]$ en $\tilde{\mathcal{F}}_1^{3,12}$ no pueden ser obtenidas por un flip. Esto es el ejemplo de dimensión mínima con esta propiedad para $k = 3$.

Cuando $k = 4$ la situación es muy diferente. Es simple chequear que la mayoría de los pares en la Tabla 9.3 no pueden ser obtenidas flipeando (por ejemplo $\mathcal{F}_1^{4,7}$, el primer par en la tabla).

- (ii) Recordemos que el Corolario 8.10 y la Proposición 8.14 nos dicen que $P_{4,F}$ (respectivamente $P_{4,F} + P_{5,F}$) es un invariante del álgebra Λ_F^* bajo el isomorfismo cuando $k = 3$ (respectivamente $k = 4$) respectivamente. Notemos que en todos los ejemplos en las tablas, estos números son diferentes, lo cual muestra que tienen álgebras de formas invariantes no isomorfas.

PREGUNTA ABIERTA 9.3. Las tablas muestran diversos ejemplos de familias de representaciones casi-conjugadas tales que el correspondiente anillo de F -invariantes son no isomorfas entre ellas. Nosotros creemos que siempre, dado cualquier par de representaciones casi-conjugadas no equivalentes, el anillo de F -invariantes en el álgebra exterior son no isomorfas entre si. Esto ocurre en todos los ejemplos que hemos obtenidos computacionalmente, que son más que los mostrados en las tablas.

9.2. Ejemplos explícitos

En esta sección exhibiremos varias familias de variedades fuertemente isospectrales en dimensiones bajas, mostrando diversas características en sus anillos de cohomología, en particular el no isomorfismo entre ellos.

EJEMPLO 9.4. Aquí definiremos dos grupos de Bieberbach Γ y Γ' de dimensión $n = 7$ con grupo de holonomía \mathbb{Z}_2^4 . Sus representaciones de holonomía son de dimensión mínima para $k = 4$, con anillos de cohomología no isomorfas, obtenidos por el Algoritmo 9.1 (el par $\mathcal{F}_1^{4,7}$ en la Tabla 9.3), las cuales son

$$\begin{aligned} \rho &= 2\chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \chi_4 + \chi_{23} + \chi_{24}, \\ \rho' &= 2\chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \chi_4 + \chi_{12} + \chi_{234}. \end{aligned}$$

Los correspondientes grupos de Bieberbach tienen generadores $B_i L_{b_i}$ ($1 \leq i \leq 4$) los cuales son dados en la notación columna de la siguiente manera:

	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
	-1	1	$1\frac{1}{2}$	1		-1	1	$1\frac{1}{2}$	1
	-1	1	1	1		-1	1	1	1
$\Gamma :$	$1\frac{1}{2}$	-1	1	1	$\Gamma' :$	$1\frac{1}{2}$	-1	1	1
	1	$1\frac{1}{2}$	-1	1		1	$1\frac{1}{2}$	-1	1
	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	-1		$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	-1
	1	-1	-1	$1\frac{1}{2}$		-1	-1	1	$1\frac{1}{2}$
	1	-1	1	-1		1	-1	-1	-1

Comparando los números de Sunada vemos que las correspondientes variedades son Sunada-isospectrales. De hecho se puede chequear que, en ambos casos, los número de Sunada no nulos son $c_{5,1} = c_{3,1} = c_{1,1} = 1$, $c_{5,2} = c_{4,2} = c_{4,1} = c_{3,1} = 2$, y $c_{2,1} = 4$.

Los anillos de invariantes son mostrados en la Tabla 9.4. Ellos son no isomorfas por el Corolario 8.10, pues el total de elementos primitivos es

igual a 5 para F y a 7 para F' . Notemos que $\Lambda_F^2 \wedge \Lambda_F^3 = \Lambda_F^5$ mientras que $\Lambda_{F'}^2 \wedge \Lambda_{F'}^3 = 0$.

TABLA 9.4. Invariantes para F y F' .

p	Λ_F^p	$P_{p,F}$	$P_{p,F'}$	$\Lambda_{F'}^p$	β_p
0	$\text{span}\{\mathbf{1}\}$	1	1	$\text{span}\{\mathbf{1}\}$	1
1	0	0	0	0	0
2	$\text{span}\{\mathbf{12}\}$	1	1	$\text{span}\{\mathbf{12}\}$	1
3	$\text{span}\{\mathbf{346}, \mathbf{357}\}$	2	2	$\text{span}\{\mathbf{136}, \mathbf{236}\}$	2
4	$\text{span}\{\mathbf{4567}\}$	1	1	$\text{span}\{\mathbf{3457}\}$	1
5	$\text{span}\{12346, 12357\}$	0	2	$\text{span}\{\mathbf{14567}, \mathbf{24567}\}$	2
6	$\text{span}\{124567\}$	0	0	$\text{span}\{123457\}$	1
7	0	0	0	0	0

Aquí abreviamos 12 en lugar de $e_1 \wedge e_2$ y así sucesivamente. Los elementos primitivos están en negrita.

EJEMPLO 9.5. Ahora asumamos que Γ y Γ' son los grupos de Bieberbach definidos como en la prueba del Teorema 8.20 con $k = 3$ y $n = 8$ ($q = 2$). Las correspondientes representaciones diagonales coinciden con el par $\mathcal{F}_1^{3,8}$ en la Tabla 9.1. Ellos son

$$\begin{aligned}\rho &= 2\chi_1 + 2\chi_2 + 2\chi_{23} + 2\chi_3, \\ \rho' &= 3\chi_1 + \chi_{13} + \chi_2 + \chi_{23} + 2\chi_3.\end{aligned}$$

Los grupos de Bieberbach asociados de tipo diagonal en notación columna son:

$$\Gamma : \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \\ \hline -1 & 1 & 1_{\frac{1}{2}} \\ -1 & 1 & 1 \\ 1_{\frac{1}{2}} & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1_{\frac{1}{2}} & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1_{\frac{1}{2}} & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array} \quad \Gamma' : \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \\ \hline -1 & 1 & 1_{\frac{1}{2}} \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1_{\frac{1}{2}} & -1 & 1 \\ 1 & -1_{\frac{1}{2}} & -1 \\ 1 & 1_{\frac{1}{2}} & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}$$

El Teorema 8.20 probó que las variedades M_Γ y $M_{\Gamma'}$ son Sunada-isospectrales, que $H^*(M_\Gamma) \not\cong H^*(M_{\Gamma'})$ como anillos abstractos, y además que M_Γ es Kähler, mientras que $M_{\Gamma'}$ no lo es.

Ahora estudiaremos en más detalle las propiedades de estas variedades por cálculos directos, i.e. sin apelar al Teorema 8.20. Primero, no es difícil ver que las formas invariantes por F y F' son las dadas en la Tabla 9.5.

Usando la Tabla 9.5, es simple ver que

$$\Lambda_{F'}^2 \wedge \Lambda_{F'}^2 = \text{span}\{e_1 \wedge e_2 \wedge e_7 \wedge e_8, e_1 \wedge e_3 \wedge e_7 \wedge e_8, e_2 \wedge e_3 \wedge e_7 \wedge e_8\}$$

TABLA 9.5. Invariantes para F y F' .

p	Λ_F^p	$P_{p,F}$	$P_{p,F'}$	$\Lambda_{F'}^p$	β_p
0	$\text{span}\{\mathbf{1}\}$	1	1	$\text{span}\{\mathbf{1}\}$	1
1	0	0	0	0	0
2	$\text{span}\{\mathbf{12, 34, 56, 78}\}$	4	4	$\text{span}\{\mathbf{12, 13, 23, 78}\}$	4
3	$\text{span}\left\{\begin{matrix} \mathbf{357, 367, 457, 467} \\ \mathbf{358, 368, 458, 468} \end{matrix}\right\}$	8	8	$\text{span}\left\{\begin{matrix} \mathbf{147, 247, 347, 567} \\ \mathbf{148, 248, 348, 568} \end{matrix}\right\}$	8
4	$\text{span}\left\{\begin{matrix} 1234, 1256, 1278 \\ 3456, 3478, 5678 \end{matrix}\right\}$	0	3	$\text{span}\left\{\begin{matrix} \mathbf{1456, 2456, 3456} \\ 1278, 1378, 2378 \end{matrix}\right\}$	6
5	$\text{span}\left\{\begin{matrix} 12357, 12358 \\ 12367, 12368 \\ 12457, 12458 \\ 12467, 12468 \end{matrix}\right\}$	0	0	$\text{span}\left\{\begin{matrix} 12347, 12348 \\ 12567, 12568 \\ 13567, 13568 \\ 23567, 23568 \end{matrix}\right\}$	8
6	$\text{span}\left\{\begin{matrix} 123456, 123478 \\ 125678, 345678 \end{matrix}\right\}$	0	0	$\text{span}\left\{\begin{matrix} 123456, 145678 \\ 245678, 345678 \end{matrix}\right\}$	4
7	0	0	0	0	0
8	$\text{span}\{12345678\}$	0	0	$\text{span}\{12345678\}$	1

Aquí abreviamos 12 en lugar de $e_1 \wedge e_2$ y así sucesivamente. Los elementos primitivos están en negrita.

y que $\mathcal{P}_{F'}^4 = \{e_1 \wedge e_4 \wedge e_5 \wedge e_6, e_2 \wedge e_4 \wedge e_5 \wedge e_6, e_3 \wedge e_4 \wedge e_5 \wedge e_6\}$, por lo tanto $P_{4,F'} = 3$. Más aún,

$$\Lambda_{F'}^2 \wedge \Lambda_{F'}^2 \wedge \Lambda_{F'}^2 = 0.$$

Esto claramente implica que M_Γ no puede admitir una estructura de Kähler.

Ahora miremos a M_Γ . Tenemos

$$\begin{aligned} \Lambda_F^2 \wedge \Lambda_F^2 &= \Lambda_F^4, \\ \Lambda_F^2 \wedge \Lambda_F^2 \wedge \Lambda_F^2 &= \Lambda_F^6, \\ \Lambda_F^2 \wedge \Lambda_F^2 \wedge \Lambda_F^2 \wedge \Lambda_F^2 &= \Lambda_F^8 = \text{span}\{e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_8\}. \end{aligned}$$

Por estas razones es claro que los anillos de cohomología no son isomorfos como álgebras graduadas. Por otro lado, el hecho de que $\Lambda_F^2 \wedge \Lambda_F^2 = \Lambda_F^4$ nos dice que $P_{4,F} = 0$. Pero $P_{4,F'} = 3$, entonces el Corolario 8.10 implica que Λ_F^* y $\Lambda_{F'}^*$ no pueden ser isomorfos como álgebras.

La estructura compleja sobre \mathbb{R}^8 dada por

$$\begin{cases} J e_{2j-1} = -e_{2j}, \\ J e_{2j} = e_{2j-1}, \end{cases} \quad (1 \leq j \leq 4),$$

conmuta con la acción de holonomía de F , por lo tanto induce una estructura compleja Kähler sobre M_Γ con forma de Kähler

$$\Omega = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + e_5 \wedge e_6 + e_7 \wedge e_8.$$

Notemos también que

$$\frac{1}{24} \Omega \wedge \Omega \wedge \Omega \wedge \Omega = e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_8.$$

Como M_Γ es Kähler existe una acción natural del grupo $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ sobre $H^*(M_\Gamma)_\mathbb{C} \simeq \Lambda^*(\mathbb{C}^n)_F$ la cual da la descomposición de Lefschetz de $H^*(M_\Gamma)_\mathbb{C}$. Tenemos los operadores L, L^* dados por $L(X) = \Omega \wedge X$, $L^*(X) = c_p * L^*(X)$ sobre $\Lambda^p(M_\Gamma)$, con c_p una constante. Una forma η tal que $L^*\eta = 0$ genera un $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ -módulo de dimensión $n - p + 1$. La descomposición en submódulos irreducibles es

$$(9.1) \quad H^*(M_\Gamma)_\mathbb{C} \simeq \pi_5 \oplus 3\pi_3 \oplus 8\pi_2 \oplus 2\pi_1.$$

Para verificar esto notemos que 1 genera el siguiente submódulo irreducible de dimensión 5: $\mathrm{span}\{1, \Omega, \Omega \wedge \Omega, \Omega \wedge \Omega \wedge \Omega, \Omega \wedge \Omega \wedge \Omega \wedge \Omega\}$. Más aún, $e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4, e_1 \wedge e_2 - e_5 \wedge e_6$ y $e_1 \wedge e_2 - e_7 \wedge e_8$ son 2-formas anuladas por L^* y cada una genera un submódulo irreducible de dimensión 3. Por ejemplo, en el caso de $e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4$ tenemos:

$$\begin{aligned} \Omega \wedge (e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4) &= e_1 \wedge e_2 \wedge e_5 \wedge e_6 + e_1 \wedge e_2 \wedge e_7 \wedge e_8 \\ &\quad - e_3 \wedge e_4 \wedge e_5 \wedge e_6 - e_3 \wedge e_4 \wedge e_7 \wedge e_8, \\ \Omega \wedge \Omega \wedge (e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4) &= 2(e_1 \wedge e_2 \wedge e_5 \wedge e_6 \wedge e_7 \wedge e_8 \\ &\quad - e_3 \wedge e_4 \wedge e_5 \wedge e_6 \wedge e_7 \wedge e_8). \end{aligned}$$

Así $\Omega \wedge \Omega \wedge \Omega \wedge (e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4) = 0$, por lo tanto el $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ -módulo generado por $e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4$ tiene dimensión 3.

Similarmente, una base para las 4-formas anuladas por L^* es

$$\begin{aligned} e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 + e_5 \wedge e_6 \wedge e_7 \wedge e_8 - e_1 \wedge e_2 \wedge e_5 \wedge e_6 - e_3 \wedge e_4 \wedge e_7 \wedge e_8, \\ e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 + e_5 \wedge e_6 \wedge e_7 \wedge e_8 - e_3 \wedge e_4 \wedge e_5 \wedge e_6 - e_1 \wedge e_2 \wedge e_7 \wedge e_8. \end{aligned}$$

Estas 4-formas generan un módulo trivial.

Más aún, la dimensión del espacio de p -formas en $\mathrm{Ker}(L^*)$, con $p \leq n$, es $\beta_0^p = \beta_p - \beta_{p-2}$, el cual es un invariante topológico. Esto implica que

$$\beta_0^1 = 1, \quad \beta_0^2 = 4 - 1 = 3, \quad \beta_0^3 = 8 - 0 = 8, \quad \beta_0^4 = 6 - 4 = 2, \quad \beta_0^p = \beta_0^{n-p}$$

para todo p . Se ve que todos los vectores en $\mathrm{Ker}(L^*)$ del mismo grado $p \leq 4$ generan un módulo irreducible de dimensión $4 - p + 1$.

Notemos que las variedades dobladas $M_{d\Gamma}, M_{d\Gamma'}$ son ambas variedades de Kähler isospectrales de dimensión 16, pero sus anillos de cohomología son todavía no isomorfos. Más aún, por el el Lema 8.19, $M_{d\Gamma}$ es hiperkähler pero $M_{d\Gamma'}$ no lo es.

EJEMPLO 9.6. Como ejemplo final, consideraremos una familia de ocho variedades compactas planas de dimensión 24 con grupos puntuales isomorfos a \mathbb{Z}_2^3 . Esta familia fue también encontrada usando el algoritmo explicado en la sección anterior. Los coeficientes $q_I^{(j)}$ de las representaciones ρ_j para $1 \leq j \leq 8$, son dados en la Tabla 9.6. Denotaremos por F_j el grupo puntual dado por la Definición 8.12 de ρ_j .

Ahora mostraremos que, como en el Teorema 8.20, para cada representación diagonal ρ_j de \mathbb{Z}_2^3 uno puede encontrar vectores $b_i^{(j)}$ de dimensión 24, con coordenadas en $\{\frac{1}{2}, 0\}$ ($1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 8$) tales que los grupos resultantes $\Gamma_j = \langle B_i^{(j)} L_{b_i^{(j)}}, L_{\mathbb{Z}^n} \rangle$ sean grupos de Bieberbach.

TABLA 9.6. Representaciones ρ_1, \dots, ρ_8 .

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_{12}	q_{13}	q_{23}	q_{123}
ρ_1	0	10	6	3	2	1	1	1
ρ_2	0	10	6	2	2	2	2	0
ρ_3	0	10	5	4	3	0	1	1
ρ_4	0	10	4	4	4	0	2	0
ρ_5	0	9	7	4	2	1	1	0
ρ_6	0	9	6	5	3	0	1	0
ρ_7	0	8	8	4	2	2	0	0
ρ_8	0	8	6	6	4	0	0	0

TABLA 9.7. Grupos de Bieberbach $\Gamma_1, \dots, \Gamma_8$ en notación columna.

Conjunto del carácter	B_1	B_2	B_3	B_{12}	B_{13}	B_{23}	B_{123}
χ_1	-1	1	$1_{\frac{1}{2}}$	-1	$-1_{\frac{1}{2}}$	$1_{\frac{1}{2}}$	$-1_{\frac{1}{2}}$
χ_2	1	-1	$1_{\frac{1}{2}}$	-1	$1_{\frac{1}{2}}$	$-1_{\frac{1}{2}}$	$-1_{\frac{1}{2}}$
χ_3	$1_{\frac{1}{2}}$	$1_{\frac{1}{2}}$	-1	1	$-1_{\frac{1}{2}}$	$-1_{\frac{1}{2}}$	-1
χ_{12}	$-1_{\frac{1}{2}}$	-1	1	$1_{\frac{1}{2}}$	$-1_{\frac{1}{2}}$	-1	$1_{\frac{1}{2}}$
χ_{13}	-1	1	-1	-1	1	-1	1
χ_{23}	1	-1	-1	-1	-1	1	1
χ_{123}	-1	-1	-1	1	1	1	-1

Para escoger los vectores $b_i^{(j)}$, fijaremos el siguiente orden en $\widehat{\mathbb{Z}}_2^3$:

$$\chi_0 \prec \chi_1 \prec \chi_2 \prec \chi_3 \prec \chi_{12} \prec \chi_{13} \prec \chi_{23} \prec \chi_{123}.$$

Elegimos los vectores $b_I^{(j)}$ para todo $1 \leq j \leq 8$, de tal manera que la primera fila de cada carácter sea como en la Tabla 9.7 y las otras filas no contengan ningún $\frac{1}{2}$.

Para ver si $\Gamma_j = \langle B_i^{(j)} L_{b_i^{(j)}}, L_{\mathbb{Z}^n} \rangle$ ($1 \leq j \leq 8$) son grupos de Bieberbach tenemos que verificar la validez de la condición (8.4) de la Proposición 8.2. Como los coeficientes $q_1^{(j)}$, $q_2^{(j)}$, $q_3^{(j)}$ y $q_{12}^{(j)}$ son todos positivos para todo j , resulta que la condición en (8.4) se cumple.

Veamos que estas variedades M_{Γ_j} ($1 \leq j \leq 8$) son Sunada-isospectrales. Usando la Tabla 9.6 y la Tabla 9.7, no es difícil chequear que los números n_{B_I} están dados por:

	n_{B_1}	n_{B_2}	n_{B_3}	$n_{B_{12}}$	$n_{B_{13}}$	$n_{B_{23}}$	$n_{B_{123}}$
ρ_1	10	14	18	6	8	12	4
ρ_2	10	14	18	4	8	12	6
ρ_3	10	14	18	6	8	12	4
ρ_4	10	14	18	8	6	12	4
ρ_5	12	14	18	6	8	10	4
ρ_6	12	14	18	8	6	10	4
ρ_7	12	14	18	6	10	8	4
ρ_8	12	14	18	10	6	8	4

Esto nos dice que los patrones $(c_0(\rho_j), \dots, c_{24}(\rho_j))$ (ver Definición 8.3) coinciden para todo $1 \leq j \leq 8$. Los números $c_i(\rho_j)$ que no son nulos son $c_4 = c_6 = c_8 = c_{10} = c_{12} = c_{14} = c_{18} = 1$. Más aún, por nuestras elecciones de los vectores $b_I^{(j)}$, los números de Sunada no nulos para todo Γ_j son $c_{4,1} = c_{6,1} = c_{8,1} = c_{10,2} = c_{12,2} = c_{14,1} = c_{18,2} = 1$.

Para comparar sus anillos de cohomología consideremos el álgebra $\Lambda_{F_j}^*$ de F_j -invariantes para cada j . La Proposición 8.14 (i) nos dice que $P_{0,F_j} = 1$, $P_{1,F_j} = 0$ y $P_{p,F_j} = 0$ para todo $p \geq 5$ y todo j , pues $q_0^{(j)} = 0$ y $k = 3$. Más aún $P_{2,F_j} = \beta_2(M_{\Gamma_j})$, $P_{3,F_j} = \beta_3(M_{\Gamma_j})$. Como las variedades son fuertemente isospectrales (por ser Sunada-isospectrales), todas las variedades tienen los mismos números de Betti, por lo tanto todos ellos tienen los números P_2 y P_3 iguales. Calculamos los más simples:

$$P_{2,F_8} = \binom{8}{2} + \binom{6}{2} + \binom{6}{2} + \binom{4}{2} = 64, \quad P_{3,F_8} = q_1^{(8)} q_2^{(8)} q_{12}^{(8)} = 192.$$

Por el Corolario 8.10, sólo resta mostrar que los valores de P_{4,F_j} son todos diferentes, para así probar que las álgebras $\Lambda_{F_j}^*$ no son isomorfas de a pares. Ahora, calculando P_{4,F_j} por medio de (ii) en la Proposición 8.14, obtenemos

j	1	2	3	4	5	6	7	8
P_{4,F_j}	371	368	335	320	191	135	128	0

por lo tanto nuestra afirmación queda probada.

Finalmente, por el Lema 8.19, las variedades M_{Γ_2} , M_{Γ_4} , M_{Γ_7} y M_{Γ_8} tienen una estructura Kähler pues sus representaciones diagonales tienen todos sus coeficientes pares. No es difícil probar, como en la prueba de 8.20 del Teorema 8.20, que las demás variedades no pueden ser Kähler.

Bibliografía

- [DG] D. DETURCK Y C. S. GORDON. “Isospectral Deformation II. Trace formulas, metrics, and potentials”. *Comm. Pure Appl. Math.* **42**:8 (1989), 1067–1095.
- [Dj] D. Ž. DJOKOVIĆ. “Derivations and automorphisms of exterior algebras”. *Canad. J. Math.* **30**:6 (1978), 1336–1344.
- [DM] I. DOTTI Y R. J. MIATELLO. “Isospectral compact flat manifolds”. *Duke Math. J.* **68**:3 (1992), 489–498.
- [Ka] M. KAC. “Can one hear the shape of a drum”. *Amer. Math. Monthly* **73**:4 (1966), 1–23.
- [Hi] H. HILLER. “Cohomology of Bieberbach groups”. *Mathematika* **32**:1 (1985), 55–59.
- [LMR] E. LAURET, R. MIATELLO Y J. P. ROSSETTI. “Strongly isospectral manifolds with nonisomorphic cohomology rings”. Enviado.
- [MR1] R. MIATELLO Y J. P. ROSSETTI. “Flat manifolds isospectral on p -forms”. *J. Geom. Anal.* **11**:4 (2006), 649–667.
- [MR2] R. MIATELLO Y J. P. ROSSETTI. “Comparison of twisted Laplace p -spectra for flat manifolds with diagonal holonomy”. *Ann. Global Anal. Geom.* **21**:4 (2002), 341–376.
- [MR3] R. MIATELLO Y J. P. ROSSETTI. “Spectral properties of flat manifolds”. Dentro de “New developments in Lie theory and geometry”. Proceedings of the 6th workshop on Lie theory and geometry, Cruz Chica, Córdoba, Argentina, November 13–17, 2007. Gordon, C. S. (ed.) et al. *Contemporary Mathematics* **491** (2009), 83–113.
- [Mi] J. MILNOR. “Eigenvalues of the Laplace operator on certain manifolds”. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **51**:4 (1964), 542.
- [RC] J. P. ROSSETTI Y J. H. CONWAY. “Hearing the platycosms”. *Math. Res. Lett.* **13**:2–3 (2006), 475–494.
- [Su] T. SUNADA. “Riemannian coverings and isospectral manifolds”. *Ann. of Math.* **121**:1 (1985), 169–186.

