

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y computación

- Universidad Nacional de Córdoba -

Sobre grupos de Lie solubles de curvatura de Ricci negativa

- Trabajo Especial de Licenciatura en Matemática -

Autor: María Valeria Gutiérrez

Director: Dr. Jorge Lauret

Córdoba - Argentina

27 de marzo de 2020



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución – No Comercial – Sin
Obra Derivada 4.0 Internacional

Resumen

En el caso homogéneo, el único comportamiento de curvatura que aún no se entiende es Ricci negativa y existe evidencia que una caracterización algebraica de grupos de Lie que admiten métricas invariantes a izquierda de curvatura de Ricci negativa está muy lejos de nuestro alcance por el momento. En este trabajo se analiza el espacio de las derivaciones de una álgebra de Lie nilpotente \mathfrak{n} fija, tales que la extensión soluble correspondiente tiene una métrica de curvatura de Ricci negativa; trabajamos con el cono abierto y convexo $\mathcal{C}(\mathfrak{n})$ introducido por Lauret - Will (2019) con el objetivo de responder la pregunta: ¿Cuáles son las álgebras de Lie solubles con nilradical \mathfrak{n} fijo, que admiten una métrica de curvatura de $\text{Ric} < 0$?, analizamos conjeturas acerca de este conjunto en ejemplos de dimensiones bajas. Por otro lado se muestran resultados respecto al cálculo del cono $\mathcal{C}(\mathfrak{n})$ en álgebras de Lie especiales, como ser Heisenberg, filiforme y libre dos pasos nilpotente.

Abstract

In the homogeneous case, Ricci negative is the only curvature behavior which is still not understood and there is evidence that an algebraic characterization of Lie groups having a Ricci negative left invariant metric is out of reach at the moment. We analyze the space of all the derivations of a given nilpotent Lie algebra \mathfrak{n} , such that the corresponding solvable extension has a metric with negative Ricci curvature; we work with the open and convex cone $\mathcal{C}(\mathfrak{n})$ introduced by Lauret - Will (2019) in order to answer the question: Which are the solvable Lie algebras with a fixed nilradical \mathfrak{n} admitting a $\text{Ric} < 0$ metric?, we study conjectures about this subset in examples of low dimensions. On the other hand, we prove some results on the cone $\mathcal{C}(\mathfrak{n})$ for special Lie algebras, like Heisenberg, filiform and free 2-step nilpotent Lie algebra.

Palabras clave: Grupo de Lie - Soluble - curvatura - Ricci - negativa.

Clasificación: 2010 Mathematics Subject Classification: 53C20 - 53C30 - 22E25.

SOBRE GRUPOS DE LIE SOLUBLES DE CURVATURA DE RICCI NEGATIVA

MARÍA VALERIA GUTIÉRREZ

ÍNDICE

1. Introducción	3
2. Preliminares	4
2.1. Derivaciones Ricci negativas	5
2.2. Representación $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^n$ y la aplicación momento	5
2.3. Derivaciones fuertemente Ricci negativas	7
2.4. Un cono abierto y convexo de derivaciones Ricci negativas	8
2.5. Bases nice	9
3. Cálculo del cono en álgebras de Lie de $\dim \leq 5$	9
3.1. Caso \mathfrak{n}_1	10
3.2. Caso \mathfrak{n}_2	12
3.3. Caso \mathfrak{n}_3	13
3.4. Caso \mathfrak{n}_4	14
3.5. Caso \mathfrak{n}_5	15
3.6. Caso \mathfrak{n}_6	17
3.7. Caso \mathfrak{n}_7	20
3.8. Caso \mathfrak{n}_8	21
4. Prueba del Teorema 1.2	22
5. Álgebra de Lie de Heisenberg	49
5.1. $\mathcal{C}_3(\mathfrak{h}_5)$	52
5.2. $\mathcal{C}_4(\mathfrak{h}_7)$	52
5.3. Generalización a $\mathcal{C}_{n+1}(\mathfrak{h}_{2n+1})$	53
6. Álgebra de Lie filiforme L_n	54
7. Álgebra de Lie libre 2-pasos nilpotente	58
7.1. $\mathcal{C}_2(\ell_2)$	60
7.2. $\mathcal{C}_3(\ell_3)$	61
7.3. $\mathcal{C}_4(\ell_4)$	62
8. Conos varios: álgebras de Lie asociadas a grafos	63
8.1. Ejemplo 1	63
8.2. Ejemplo 2	66
8.3. Ejemplo 3	69
8.4. Ejemplo 4	71
8.5. Ejemplo 5	73
Referencias	76

1. INTRODUCCIÓN

Dado un grupo de Lie G , por sus propiedades geométricas y algebraicas siempre se espera una estrecha relación entre condiciones de curvatura de métricas Riemannianas invariantes a izquierda en G , la topología del grupo y también la estructura de su álgebra de Lie \mathfrak{g} . Se sabe que en el caso general no hay obstrucciones topológicas en una variedad diferenciable M para la existencia de una métrica Riemanniana completa de curvatura de Ricci negativa, y en el caso homogéneo, este comportamiento de curvatura es el único que aún no se entiende (ver [NN15, Introduction]).

Para álgebras de Lie de curvatura $\text{Sec} < 0$ su estructura está dada por un álgebra de Lie nilpotente junto con una derivación positiva, más aún cualquier variedad homogénea Riemanniana con $\text{Sec} \leq 0$ es isométrica a una métrica invariante a izquierda en un grupo de Lie soluble simplemente conexo (ver [AW76, W64, H74]). En el caso $\text{Ric} < 0$, grupos de Lie no solubles entran en juego.

En la década de los 80, Dotti-Leite-Miatello [D82, DL82, DLM84] probaron que los únicos grupos de Lie unimodulares que pueden admitir métricas de curvatura $\text{Ric} < 0$ son los semisimples no compactos y que la mayoría de los grupos de Lie simples no compactos admiten métrica de $\text{Ric} < 0$, con excepciones en dimensiones bajas cuya existencia o no de tal métrica permanece abierta. Además, Jablonski-Petersen [JP17] determinaron que un grupo de Lie semisimple que admita métrica $\text{Ric} < 0$ no puede tener factores compactos.

En 2016, Will construyó ejemplos de grupos de Lie que admiten métrica de $\text{Ric} < 0$, estos no son ni semisimples ni solubles [W17, W18]. Por otro lado, en [W18] se demuestra que cualquier grupo de Lie semisimple, no-compacto que admite métrica $\text{Ric} < 0$ puede ser el factor de Levi de un grupo de Lie no-semisimple con métrica $\text{Ric} < 0$ y en [LW19] se prueba que cualquier grupo de Lie compacto y semisimple puede ser el factor de Levi de un grupo de Lie que admite métrica $\text{Ric} < 0$. Todo esto muestra que una caracterización algebraica de grupos de Lie que admiten métrica de $\text{Ric} < 0$ está bastante lejos de nuestro alcance por el momento.

El estudio del caso soluble fue iniciado por Nikolayevsky-Nikonorov [NN15] en 2015. Ellos obtuvieron la siguiente condición suficiente para que un grupo de Lie soluble S con álgebra de Lie \mathfrak{s} , admita métrica de $\text{Ric} < 0$:

Existe $Y \in \mathfrak{s}$ tal que $\text{ad } Y|_{\mathfrak{n}}^{\mathbb{R}} > 0$, es decir que $\text{Re Spec}(\text{ad } Y|_{\mathfrak{n}}) > 0$, donde \mathfrak{n} es el nilradical de \mathfrak{s} .

También probaron una condición necesaria en [NN15]:

Existe $Y \in \mathfrak{s}$ tal que $\text{tr ad } Y > 0$ y $\text{ad } Y|_{\mathfrak{z}(\mathfrak{n})}^{\mathbb{R}} > 0$, donde $\mathfrak{z}(\mathfrak{n})$ es el centro de \mathfrak{n} .

Todo esto motiva la siguiente pregunta.

Pregunta 1: ¿Qué álgebras de Lie nilpotentes pueden ser el nilradical de un álgebra de Lie soluble que admite métrica $\text{Ric} < 0$?

Tal álgebra de Lie se llamará *nilradical Ricci negativo* la cual se abreviará como RN-nilradical. Como la existencia de una derivación positiva es suficiente, cualquier álgebra de Lie 2-pasos nilpotente o de dimensión ≤ 6 es RN-nilradical. Además fue probado en [DL19] que cualquier álgebra de Lie nilpotente de dimensión $= 7$ que admite una derivación no nilpotente es RN-nilradical.

Ejemplos en [DL19] sugieren que una caracterización estructural de nilradicales Ricci negativos puede ser inviable por lo que la Pregunta 1 parece ser muy ambiciosa. Consideramos entonces la siguiente:

Pregunta 2: Dada un álgebra de Lie \mathfrak{n} , ¿Cuáles son las álgebras de Lie solubles con nilradical \mathfrak{n} que admiten una métrica $\text{Ric} < 0$?

En el contexto de grupos de Lie solubles, se define en [LW2] las derivaciones fuertemente Ricci negativas de un álgebra de Lie nilpotente \mathfrak{n} .

Definición 1.1. Una derivación D de un álgebra de Lie nilpotente \mathfrak{n} tal que $\text{tr } D > 0$ se dice *fuertemente Ricci negativa* si la extensión soluble unidimensional $\mathfrak{s}_D = \mathbb{R}f \oplus \mathfrak{n}$ ($\text{ad } f|_{\mathfrak{n}} = D$) admite un producto interno de curvatura de Ricci negativa tal que $D^t = D$ y $f \perp \mathfrak{n}$.

Sea $\mathfrak{t}(\mathfrak{n})$ el toro maximal de derivaciones diagonalizables de \mathfrak{n} , definimos como $\mathfrak{t}(\mathfrak{n})_{frn} \subset \mathfrak{t}(\mathfrak{n})$ a todas aquellas que sean fuertemente Ricci negativas. En [LW2] se define también un cono abierto y convexo de derivaciones que cumplen la definición anterior de la siguiente manera:

$$\mathcal{C}(\mathfrak{n}) := \left(\mathbb{R}_{>0} m \left(\overline{G_{\mathfrak{t}(\mathfrak{n})} \cdot [\cdot, \cdot]} \right) \cap \text{Dg}(\mathfrak{n}) + \text{Dg}(\mathfrak{n})_{>0} \right) \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n})_{\text{tr}>0},$$

y se prueba que valen las siguientes inclusiones,

$$\mathfrak{t}(\mathfrak{n})_{frn} \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n})_{gen} \subset \mathcal{C}(\mathfrak{n}) \subset \mathfrak{t}(\mathfrak{n})_{frn},$$

donde $\mathfrak{t}(\mathfrak{n})_{gen}$ son aquellas derivaciones del toro maximal genéricas (ver Sección 2 para más información). Por lo anterior se espera que valga lo siguiente:

Conjetura 1: $\mathcal{C}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{t}(\mathfrak{n})_{frn}$.

El siguiente teorema es el resultado principal de este trabajo que asegura la validez de la Conjetura 1 para álgebras de Lie nilpotentes de dimensión ≤ 5 .

Teorema 1.2. *Para toda álgebra de Lie nilpotente \mathfrak{n} de dimensión ≤ 5 ,*

$$\mathcal{C}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{t}(\mathfrak{n})_{frn}.$$

Esto aporta nuevas evidencias para conjeturas propuestas en [NN15, DL19, LW2]. Una de tales conjeturas dice que una caracterización completa de álgebras de Lie solubles que admiten métrica de Ric < 0 debería tener la siguiente forma:

Conjetura 2: [NN15] Para cada álgebra de Lie nilpotente \mathfrak{n} , existe un cono abierto y convexo $\mathcal{C} \subset \mathfrak{t}(\mathfrak{n})$ tal que un álgebra de Lie soluble \mathfrak{s} con nilradical \mathfrak{n} admite métrica de Ric < 0 si y sólo si existe $Y \in \mathfrak{s}$ tal que $\text{ad } Y|_{\mathfrak{n}}^{\mathbb{R}} \in \mathcal{C}$.

En la Sección 2 se presenta la definición de derivaciones Ricci negativas y fuertemente Ricci negativas (ver [DL19, LW2]) y también la construcción del cono abierto y convexo $\mathcal{C}(\mathfrak{n})$, para cada álgebra de Lie nilpotente \mathfrak{n} , que parametriza un subconjunto de extensiones solubles unidimensionales de \mathfrak{n} que admiten métricas de Ric < 0 . Desarrollamos también conjeturas acerca de dicho subconjunto ([LW2]).

En la Sección 3 calculamos dicho cono para todas las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión $= 5$ y en la Sección 4 se prueba el Teorema 1.2.

En las secciones subsiguientes calculamos explícitamente el cono para álgebras de Lie especiales, como ser Heisenberg, filiforme, libre y algunos ejemplos particulares en dimensiones bajas asociados a grafos.

2. PRELIMINARES

En esta sección definimos las derivaciones Ricci negativas y fuertemente Ricci negativas y enunciamos conjeturas acerca de estos conjuntos de derivaciones siguiendo lo estudiado en [LW2]. También estudiamos la aplicación momento de una representación dada que parametriza a las álgebras antisimétricas y enunciamos un teorema visto en [DL19] que nos permite caracterizar las derivaciones fuertemente Ricci negativas en función de esta aplicación. Presentamos también la construcción de un cono abierto y convexo que será el elemento más estudiado en el trabajo.

2.1. Derivaciones Ricci negativas. Sea \mathfrak{n} un álgebra de Lie nilpotente. Para cada $D \in \text{Der}(\mathfrak{n})$ consideramos la descomposición aditiva de Jordan tal que:

$$D = D^{\mathbb{R}} + D^{i\mathbb{R}} + D^n, \quad [D^{\mathbb{R}}, D^{i\mathbb{R}}] = 0, \quad [D^{\mathbb{R}}, D^n] = 0, \quad [D^{i\mathbb{R}}, D^n] = 0,$$

donde $D^{\mathbb{R}}$ es diagonalizable (sobre \mathbb{R}), $D^{i\mathbb{R}}$ es diagonalizable sobre \mathbb{C} con autovalores imaginarios y D^n es nilpotente. Sabemos que $D^n, D^{\mathbb{R}}, D^{i\mathbb{R}} \in \text{Der}(\mathfrak{n})$. Un subespacio abeliano maximal de derivaciones diagonalizables (sobre \mathbb{R}) se llama *toro maximal de \mathfrak{n}* y se denota $\mathfrak{t}(\mathfrak{n})$, este es único salvo conjugación por automorfismos de \mathfrak{n} .

Para responder la Pregunta 2, nos enfocamos primero en las extensiones solubles unidimensionales.

Dada \mathfrak{n} un álgebra de Lie nilpotente, se tiene que cada $D \in \text{Der}(\mathfrak{n})$ define un álgebra de Lie soluble

$$\mathfrak{s}_D = \mathbb{R}f \oplus \mathfrak{n}$$

con corchete de Lie dado por el producto semi-directo tal que $\text{ad } f|_{\mathfrak{n}} = D$.

Definición 2.1. Una derivación D de un álgebra de Lie nilpotente \mathfrak{n} con $\text{tr } D > 0$ se dice *Ricci negativa* si el álgebra de Lie soluble \mathfrak{s}_D admite un producto interno de curvatura de Ricci negativa. Denotamos por $\text{Der}(\mathfrak{n})_{rn}$ el conjunto de todas las derivaciones Ricci negativas de \mathfrak{n} .

Notemos que cualquier \mathfrak{n} que admita una derivación Ricci negativa es RN-nilradical, la validez de la recíproca no se conoce.

Como $\text{Der}(\mathfrak{n})_{rn}$ parametriza el conjunto de todas las extensiones unidimensionales solubles de \mathfrak{n} que admiten métrica $\text{Ric} < 0$ nos interesa saber qué clase de conjunto es.

A partir de la Definición 2.1 se tiene la siguiente lista de consecuencias:

- $\text{Der}(\mathfrak{n})_{rn}$ es abierto en $\text{Der}(\mathfrak{n})$ y es un *cono* (es decir $\mathbb{R}_{>0}$ -invariante).
- $\text{Der}(\mathfrak{n})_{rn}$ es $\text{Aut}(\mathfrak{n})$ -invariante.
- $\text{Der}(\mathfrak{n})_{rn}^{\mathbb{R}} := \{D^{\mathbb{R}} : D \in \text{Der}(\mathfrak{n})_{rn}\}$ es un cono abierto en el subespacio invariante por automorfismos de \mathfrak{n} $\text{Der}(\mathfrak{n})^{\mathbb{R}} := \{D^{\mathbb{R}} : D \in \text{Der}(\mathfrak{n})\}$. No sabemos si $D^{\mathbb{R}}$ es también Ricci negativa para toda $D \in \text{Der}(\mathfrak{n})_{rn}$.
- $\text{Der}(\mathfrak{n})_{rn}^{\mathbb{R}} = \text{Aut}(\mathfrak{n}) \cdot \mathfrak{t}(\mathfrak{n})_{rn}$, donde

$$\mathfrak{t}(\mathfrak{n})_{rn} := \text{Der}(\mathfrak{n})_{rn}^{\mathbb{R}} \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n})$$

Notemos que $\text{Der}(\mathfrak{n})^{\mathbb{R}} = \text{Aut}(\mathfrak{n}) \cdot \mathfrak{t}(\mathfrak{n})$ pues cualquier derivación diagonalizable pertenece a algún toro maximal.

- $\mathfrak{t}(\mathfrak{n})_{rn}$ es un cono abierto en $\mathfrak{t}(\mathfrak{n})$.
- El grupo de Weyl

$$(1) \quad W(\mathfrak{n}) := N_{\text{Aut}(\mathfrak{n})}(\mathfrak{t}(\mathfrak{n})) / C_{\text{Aut}(\mathfrak{n})}(\mathfrak{t}(\mathfrak{n}))$$

actúa en $\mathfrak{t}(\mathfrak{n})_{rn}$ por conjugación, donde N y C denotan el normalizador y centralizador respectivamente.

En caso de ser válida la Conjetura 2, debe cumplirse que $D \in \text{Der}(\mathfrak{n})_{rn}$ si y sólo si $D^{\mathbb{R}} \in \text{Der}(\mathfrak{n})_{rn}$. Esto implicaría que $\mathfrak{t}(\mathfrak{n})_{rn} = \text{Der}(\mathfrak{n})_{rn} \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n})$ y por lo tanto debemos entender el conjunto $\mathfrak{t}(\mathfrak{n})_{rn}$ para dar una respuesta a la Pregunta 2.

2.2. Representación $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^n$ y la aplicación momento. Para entender el resultado de la sección siguiente y del que hacemos fuerte uso en el trabajo debemos estudiar la aplicación momento, que proviene de la teoría geométrica de invariantes, y la representación $V := \Lambda^2(\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^n$, que parametriza el espacio de todas las álgebras antisimétricas de dimensión n .

Existe una acción natural de $GL_n(\mathbb{R})$ en V dada por $g \cdot \mu := g\mu(g^{-1} \cdot, g^{-1} \cdot)$, cuya derivada define una representación de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ en V , $\theta : \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \text{End}(V)$ definida por:

$$\theta(E)\mu = E \cdot \mu = E\mu(\cdot, \cdot) - \mu(E \cdot, \cdot) - \mu(\cdot, E \cdot), \quad E \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}), \quad \mu \in V.$$

Notemos que $E \cdot \mu = 0$ si y sólo si $E \in \text{Der}(\mathfrak{n})$.

Lema 2.2. Si $\{e^1, \dots, e^n\}$ es una base de $(\mathbb{R}^n)^*$ dual a la base canónica $\{e_1, \dots, e_n\}$ entonces $\{\mu_{ijk} := (e^i \wedge e^j) \otimes e_k : 1 \leq i < j \leq n, 1 \leq k \leq n\}$ es base de V formada por vectores pesos de la representación θ .

Demostración. μ_{ijk} es la forma bilineal de \mathbb{R}^n definida por $\mu_{ijk}(e_i, e_j) = -\mu_{ijk}(e_j, e_i) = e_k$ y cero en los otros casos. Los pesos correspondientes están dados por

$$F_{ij}^k := E_{kk} - E_{ii} - E_{jj} \in \mathfrak{t}^n, \quad i < j,$$

donde E_{rs} denota la matriz cuyo único coeficiente distinto de cero es 1 en el lugar rs y \mathfrak{t}^n es el conjunto de todas las matrices $n \times n$ diagonales. Como $[\theta(E), \theta(F)] = \theta([E, F]) = 0$ para toda $E \in \mathfrak{t}^n$ tenemos que diagonalizan simultáneamente, es decir que existe $\{v_1, \dots, v_r\}$ base de V de vectores pesos tal que:

$$\theta(E)v_i = \alpha_i(E)v_i \quad \forall E \in \mathfrak{t}^n$$

donde $\alpha_1 \dots \alpha_r : \mathfrak{t}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Sea $\lambda := \theta(E)\mu_{ijk} = E\mu_{ijk}(\cdot, \cdot) - \mu_{ijk}(E \cdot, \cdot) - \mu_{ijk}(\cdot, E \cdot)$.

Si

$$E = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix},$$

consideramos $r < s$ tal que

$$\lambda(e_r, e_s) = 0 \quad \forall (r, s) \neq (i, j) \quad \text{y} \quad \lambda(e_i, e_j) = (a_k - a_i - a_j)e_k.$$

Por lo tanto

$$\theta(E)\mu_{ijk} = \alpha_{ijk}(E)\mu_{ijk}$$

donde $\alpha_{ijk}(E) = \langle E_{kk} - E_{ii} - E_{jj}, E \rangle$. □

Observemos que el producto interno canónico de \mathbb{R}^n determina productos internos canónicos en V y en $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ tal que $\{\mu_{ijk}\}$ y $\{E_{ij}\}$ son bases ortonormales.

La aplicación momento de la representación dada es la aplicación $O(n)$ -invariante

$$m : V \setminus \{0\} \longrightarrow \text{sym}(n),$$

definida por

$$(2) \quad \langle m(\mu), E \rangle = \frac{1}{|\mu|^2} \langle E \cdot \mu, \mu \rangle, \quad \mu \in V \setminus \{0\}, \quad E \in \text{sym}(n),$$

o equivalentemente, para cualquier $X, Y \in \mathbb{R}^n$,

$$(3) \quad \langle m(\mu)X, Y \rangle = -\frac{1}{2} \sum \langle \mu(X, e_i), e_j \rangle \langle \mu(Y, e_i), e_j \rangle + \frac{1}{4} \sum \langle \mu(e_i, e_j), X \rangle \langle \mu(e_i, e_j), Y \rangle.$$

Estamos usando $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) = \mathfrak{so}(n) \oplus \text{sym}(n)$ como descomposición de Cartan, donde $\mathfrak{so}(n)$ y $\text{sym}(n)$ denota el subespacio de las matrices antisimétricas y simétricas respectivamente.

Observación 2.3. m está bien definido en el espacio proyectivo $\mathbb{P}(V)$ y $\text{tr } m(\mu) = -1$ para todo $\mu \in V$.

Demostración. $\mathbb{P}(V) = V/\sim$ donde para todo $v, w \in V$ $v \sim w \Leftrightarrow w = cv, \quad c \neq 0$.

Dada

$$h = \begin{pmatrix} h_1 & & \\ & \ddots & \\ & & h_n \end{pmatrix}$$

tenemos que $h \cdot \mu_{ijk} = \frac{h_k}{h_i h_j} \mu_{ijk}$.

Por lo tanto $h \cdot [\mu_{ijk}] = [h \cdot \mu_{ijk}] = [\mu_{ijk}]$

Además, como se tiene que $I \cdot \mu = -\mu$ para todo $\mu \in V$ donde I es la identidad,

$$\text{tr } m(\mu) = \langle m(\mu), I \rangle = \frac{1}{|\mu|^2} \langle I \cdot \mu, \mu \rangle = -1$$

□

2.3. Derivaciones fuertemente Ricci negativas. La siguiente condición sobre una derivación fue estudiada en [DL19].

Definición 2.4. Una derivación D de un álgebra de Lie nilpotente \mathfrak{n} tal que $\text{tr } D > 0$ se dice *fuertemente Ricci negativa* si el álgebra de Lie soluble \mathfrak{s}_D admite un producto interno de curvatura de Ricci negativa tal que $D^t = D$ y $f \perp \mathfrak{n}$. Denotamos por $\text{Der}(\mathfrak{n})_{frn}$ al cono de todas las derivaciones fuertemente Ricci negativas de \mathfrak{n} .

De esta definición surge la pregunta de qué clase de conjunto es este cono $\text{Der}(\mathfrak{n})_{frn}$ y si será abierto en $\text{Der}(\mathfrak{n})^{\mathbb{R}}$.

El siguiente resultado caracteriza a las derivaciones fuertemente Ricci negativas en término de la aplicación momento vista en la sección anterior.

Fijamos una base $\{e_i\}$ de \mathfrak{n} tal que $\mathfrak{t}(\mathfrak{n}) \subset \text{Dg}(\mathfrak{n})$ donde $\text{Dg}(\mathfrak{n})$ denota el espacio vectorial de todos los operadores de \mathfrak{n} cuya matriz en términos de $\{e_i\}$ es diagonal. Notemos que el espacio vectorial \mathfrak{n} se identifica con \mathbb{R}^n usando la base $\{e_i\}$ y entonces podemos utilizar las definiciones de la sección anterior. En particular, los productos internos de la definición de la aplicación momento son los canónicos, es decir los que hacen ortonormales a las bases $e_i \otimes e^j$ y $(e^i \wedge e^j) \otimes e_k$.

Para cada $\mu \in \Lambda^2 \mathfrak{n}^* \otimes \mathfrak{n}$ definimos el siguiente politopo convexo en $\text{Dg}(\mathfrak{n})$

$$\text{CH}_\mu := \text{CH}(F_{ij}^k : c(\mu)_{ij}^k \neq 0),$$

donde F_{ij}^k es la matriz diagonal con entradas -1 en i, j , 1 en k y cero en todas las demás entradas, $c(\mu)_{ij}^k$ son las constantes de estructuras de μ y CH denota la cápsula convexa generada por estas matrices.

Notemos que $F_{ij}^k = m(\mu_{ijk})$. Se prueba en [DL19, Section 3.2] que

$$(4) \quad \text{Diag} \left(m \left(\overline{\text{Dg}(\mathfrak{n})_{>0} \cdot \mu} \right) \right) = \text{CH}_\mu, \quad \text{Diag} (m(\text{Dg}(\mathfrak{n})_{>0} \cdot \mu)) = \text{CH}_\mu^\circ,$$

donde $\text{Diag}(A)$ denota la parte diagonal de la matriz A .

Sea G_D la componente conexa del subgrupo centralizador de D en $\text{GL}(\mathfrak{n})$ y sea \mathfrak{g}_D su álgebra de Lie.

Teorema 2.5. [DL19, Corollary 3.4] *Sea \mathfrak{n} un álgebra de Lie nilpotente con corchete de Lie $[\cdot, \cdot]$ y consideremos $D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n})$ tal que $\text{tr } D > 0$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (i) D es fuertemente Ricci negativa.
- (ii) $D \in \mathbb{R}_{>0} m(G_D \cdot [\cdot, \cdot]) \cap \text{Dg}(\mathfrak{n}) + \text{Dg}(\mathfrak{n})_{>0}$.

(iii) $D \in \mathbb{R}_{>0} m \left(\overline{G_D \cdot [\cdot, \cdot]} \right) \cap \text{Dg}(\mathfrak{n}) + \text{Dg}(\mathfrak{n})_{>0}$.

(iv) $D \in \mathbb{R}_{>0} m \left(\overline{G_D \cdot [\cdot, \cdot]} \right) \cap \mathfrak{a}_+^D + \text{Dg}(\mathfrak{n})_{>0}$, donde $\mathfrak{a}_+^D \subset \text{Dg}(\mathfrak{n})$ es cualquier cámara de Weyl de G_D .

Notemos que todos los conos del teorema dependen de D y son abiertos en $\text{Dg}(\mathfrak{n})$ pues el espacio de matrices diagonales positivas $\text{Dg}(\mathfrak{n})_{>0}$ lo es. Por otra parte el cono en (iv) es convexo por propiedades de convexidad de la aplicación momento (ver [HS10]).

Como no sabemos si $\text{Der}(\mathfrak{n})_{frn}$ es abierto en $\text{Der}(\mathfrak{n})^{\mathbb{R}}$ tampoco sabemos si el cono

$$\mathfrak{t}(\mathfrak{n})_{frn} := \text{Der}(\mathfrak{n})_{frn} \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n})$$

es abierto en $\mathfrak{t}(\mathfrak{n})$. Notemos que el grupo de Weyl, $W(\mathfrak{n})$ (ver (1)), actúa también en $\mathfrak{t}(\mathfrak{n})_{frn}$ pues $\text{Der}(\mathfrak{n})_{frn}$ es $\text{Aut}(\mathfrak{n})$ -invariante.

Se probó en [NN15, N16] que el cono $\mathfrak{t}(\mathfrak{n})_{frn}$ es abierto en $\mathfrak{t}(\mathfrak{n})$ y convexo para las álgebras de Lie Heisenberg y filiformes, por lo que surge la siguiente conjetura:

Conjetura 3: El cono $\mathfrak{t}(\mathfrak{n})_{frn}$ es abierto en $\mathfrak{t}(\mathfrak{n})$ y convexo.

2.4. Un cono abierto y convexo de derivaciones Ricci negativas. Mantenemos la base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de \mathfrak{n} fija tal que $\mathfrak{t}(\mathfrak{n}) \subset \text{Dg}(\mathfrak{n})$. Notemos que $\mathfrak{t}(\mathfrak{n})$ es el complemento ortogonal en $\text{Dg}(\mathfrak{n})$ del conjunto $\{F_{ij}^k : c_{ij}^k \neq 0\}$ donde c_{ij}^k son las constantes de estructuras del corchete $[\cdot, \cdot]$ de \mathfrak{n} .

Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n})^*$ los pesos de $\mathfrak{t}(\mathfrak{n})$ y sea $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{n}_r$ la descomposición de \mathfrak{n} en subespacios pesos, esto es:

$$DX = \alpha_i(D)X, \quad \forall X \in \mathfrak{n}_i, \quad D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}).$$

Definición 2.6. $D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n})$ es una derivación genérica si $\alpha_i(D) \neq \alpha_j(D)$ para todo $i \neq j$. Sea $\mathfrak{t}(\mathfrak{n})_{gen}$ el subconjunto de todas las derivaciones genéricas, el cual es abierto y denso en $\mathfrak{t}(\mathfrak{n})$.

Si $G_{\mathfrak{t}(\mathfrak{n})}$ denota la componente conexa del centralizador de $\mathfrak{t}(\mathfrak{n})$ en $\text{GL}(\mathfrak{n})$, entonces $G_{\mathfrak{t}(\mathfrak{n})} \subset G_D$ para toda $D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n})$ y vale la igualdad de conjuntos si y sólo si $D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n})_{gen}$.

En el caso *libre de multiplicidad*, es decir si $\dim \mathfrak{n}_i = 1$ para todo i , $G_{\mathfrak{t}(\mathfrak{n})}$ está dado por el toro conexo $T := \text{Dg}(\mathfrak{n})_{>0}$ con álgebra de Lie $\text{Dg}(\mathfrak{n})$. Notemos que el espacio $\mathfrak{t}(\mathfrak{n})$ es libre de multiplicidad si y sólo si existe al menos una derivación $D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n})$ con autovalores todos diferentes.

Definimos

$$(5) \quad \mathcal{C}(\mathfrak{n}) := \left(\mathbb{R}_{>0} m \left(\overline{G_{\mathfrak{t}(\mathfrak{n})} \cdot [\cdot, \cdot]} \right) \cap \text{Dg}(\mathfrak{n}) + \text{Dg}(\mathfrak{n})_{>0} \right) \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n})_{tr>0},$$

donde $\mathfrak{t}(\mathfrak{n})_{tr>0} := \{D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}) : \text{tr} D > 0\}$. Por Teorema 2.5, (iv) podemos usar cualquier cámara de Weyl $\mathfrak{a}_+ \subset \text{Dg}(\mathfrak{n})$ de $G_{\mathfrak{t}(\mathfrak{n})}$ en vez de $\text{Dg}(\mathfrak{n})$ para definir $\mathcal{C}(\mathfrak{n})$.

Sea $O(\mathfrak{n})$ el grupo ortogonal relativo al producto interno que hace a $\{e_i\}$ ortonormal. Definimos el subgrupo de $W(\mathfrak{n})$ dado por

$$(6) \quad W_{ort}(\mathfrak{n}) := N_{\text{Aut}(\mathfrak{n}) \cap O(\mathfrak{n})}(\mathfrak{t}(\mathfrak{n})) / C_{\text{Aut}(\mathfrak{n}) \cap O(\mathfrak{n})}(\mathfrak{t}(\mathfrak{n}))$$

y lo llamamos *grupo ortogonal de Weyl*.

Se prueba en [LW2] que $W_{ort}(\mathfrak{n})$ actúa en $\mathcal{C}(\mathfrak{n})$ por conjugación, y que $\mathcal{C}_t(\mathfrak{n}) := \{D \in \mathcal{C}(\mathfrak{n}) : \text{tr}(D) = t\}$ es un politopo convexo W_{ort} -invariante para todo $t > 0$. Además se prueban las siguientes inclusiones,

Proposición 2.7. $\mathcal{C}(\mathfrak{n})$ es un cono abierto y convexo en $\mathfrak{t}(\mathfrak{n})$ tal que

$$(7) \quad \mathfrak{t}(\mathfrak{n})_{frn} \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n})_{gen} \subset \mathcal{C}(\mathfrak{n}) \subset \text{tg}(\mathfrak{n})_{frn}.$$

Esta proposición motiva la siguiente conjetura vista en la Introducción:

Conjetura 1: $\mathcal{C}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{t}(\mathfrak{n})_{frn}$.

Veremos en la Sección 4 que esto vale para álgebras de Lie nilpotentes de dimensión ≤ 5 .

Por resultados vistos en [LW2] sólo necesitamos que $\mathfrak{t}(\mathfrak{n})_{frn}$ sea abierto en $\mathfrak{t}(\mathfrak{n})$ para probar las Conjeturas 2 y 3.

Resumimos ahora los conos en el toro maximal $\mathfrak{t}(\mathfrak{n}) \subset \text{Der}(\mathfrak{n})$ que consideramos hasta el momento

$$(8) \quad \mathfrak{t}(\mathfrak{n}) \supseteq \mathfrak{t}(\mathfrak{n})_{rn} \supseteq \text{Der}(\mathfrak{n})_{rn} \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n}) \supseteq \mathfrak{t}(\mathfrak{n})_{frn} \supseteq \mathcal{C}(\mathfrak{n}).$$

Se sabe que todos ellos son abiertos excepto $\mathfrak{t}(\mathfrak{n})_{frn}$ y $\mathcal{C}(\mathfrak{n})$ es el único que se sabe convexo.

2.5. Bases nice. El siguiente tipo de base facilita las cuentas a realizar para obtener la curvatura de Ricci de un álgebra de Lie.

Definición 2.8. Una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de un álgebra de Lie se dice *nice* si todo corchete $[e_i, e_j]$ es un múltiplo escalar de algún elemento e_k en la base, y dos corchetes diferentes $[e_i, e_j]$, $[e_r, e_s]$ pueden ser múltiplos no nulos del mismo e_k solamente si $\{i, j\}$ and $\{r, s\}$ son iguales o disjuntos.

Se prueba en [LW13] (ver también [DL19, Lemma 3.12]) que una base $\{e_i\}$ es nice si y sólo si

$$(9) \quad m \left(\overline{\text{Dg}(\mathfrak{n})_{>0} \cdot [\cdot, \cdot]} \right) = \text{CH}_{[\cdot, \cdot]}$$

Luego, si $\{e_i\}$ es una base nice, tenemos que

$$\text{CH}_{[\cdot, \cdot]} \subset m \left(\overline{G_{\mathfrak{t}(\mathfrak{n})} \cdot [\cdot, \cdot]} \right) \cap \text{Dg}(\mathfrak{n}),$$

y la igualdad vale si $\mathfrak{t}(\mathfrak{n})$ es libre de multiplicidad, pues en este caso $G_{\mathfrak{t}(\mathfrak{n})} = \text{Dg}(\mathfrak{n})_{>0}$ y $\text{Dg}(\mathfrak{n})$ es la única cámara de Weyl.

3. CÁLCULO DEL CONO EN ÁLGEBRAS DE LIE DE DIM ≤ 5

A continuación calculamos y graficamos los conos para álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 5 que presentamos en el cuadro siguiente:

\mathfrak{n}	Corchetes de Lie
\mathfrak{n}_1	$\mu(e_1, e_2) = e_3, \quad \mu(e_1, e_3) = e_4, \quad \mu(e_1, e_4) = e_5$
\mathfrak{n}_2	$\mu(e_1, e_2) = e_3, \quad \mu(e_1, e_3) = e_4, \quad \mu(e_1, e_4) = e_5, \quad \mu(e_2, e_3) = e_5$
\mathfrak{n}_3	$\mu(e_1, e_2) = e_4, \quad \mu(e_2, e_3) = e_5, \quad \mu(e_1, e_4) = e_5$
\mathfrak{n}_4	$\mu(e_1, e_2) = e_5, \quad \mu(e_3, e_4) = e_5$
\mathfrak{n}_5	$\mu(e_1, e_2) = e_3, \quad \mu(e_1, e_3) = e_4, \quad \mu(e_2, e_3) = e_5$
\mathfrak{n}_6	$\mu(e_1, e_2) = e_4, \quad \mu(e_1, e_3) = e_5$
\mathfrak{n}_7	$\mu(e_1, e_2) = e_3$
\mathfrak{n}_8	$\mu(e_1, e_2) = e_3, \quad \mu(e_1, e_3) = e_4$

CUADRO 1. Álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 5

3.1. **Caso \mathfrak{n}_1 .** Sea el álgebra de Lie \mathfrak{n}_1 de dimensión 5 definida por la base $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ y los corchetes

$$\mu(e_1, e_2) = e_3, \quad \mu(e_1, e_3) = e_4, \quad \mu(e_1, e_4) = e_5.$$

Sea

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & d_3 & & \\ & & & d_4 & \\ & & & & d_5 \end{pmatrix} \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_1).$$

Como D es derivación de \mathfrak{n}_1 debe verificarse

$$d_3 = d_1 + d_2, \quad 2d_1 + d_2 = d_4, \quad 3d_1 + d_2 = d_5$$

Es decir,

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & d_1 + d_2 & & \\ & & & 2d_1 + d_2 & \\ & & & & 3d_1 + d_2 \end{pmatrix}$$

Notemos que $\text{tr}(D) = 7d_1 + 4d_2$ y que $D|_{\mathfrak{g}(\mathfrak{n}_1)} = 3d_1 + d_2$. Por Definición 2.6, D es genérica si y sólo si

$$d_1 \neq d_2, \quad d_1 \neq -d_2, \quad d_2 \neq -2d_1, \quad d_1, d_2 \neq 0.$$

Vemos que el caso genérico es libre de multiplicidad por lo que $G_D = T = \text{Dg}(\mathfrak{n})_{>0}$ y $\overline{T \cdot \mu}$ está dado por

$$\lambda(e_1, e_2) = \alpha e_3, \quad \lambda(e_1, e_3) = \beta e_4, \quad \lambda(e_1, e_4) = \gamma e_5$$

donde $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$. De la definición de la aplicación momento (ver (3)) se tiene que

$$\begin{aligned} m(\lambda) &= \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \begin{pmatrix} -\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 & & & & \\ & -\alpha^2 & & & \\ & & -\beta^2 + \alpha^2 & & \\ & & & -\gamma^2 + \beta^2 & \\ & & & & \gamma^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} (\alpha^2 F_{12}^3 + \beta^2 F_{13}^4 + \gamma^2 F_{14}^5) \end{aligned}$$

Luego $m(\lambda) = m(\overline{T \cdot \mu}) = \text{CH}(F_{12}^3, F_{13}^4, F_{14}^5)$, esto también lo sabíamos de (9) pues la base es nice.

Tenemos entonces de la definición (5) que $D \in \mathcal{C}(\mathfrak{n}_1) \subset \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_1)$ si y sólo si $D = aF_{12}^3 + bF_{13}^4 + cF_{14}^5 + E$ y $\text{tr}(D) > 0$, donde $a, b, c > 0$ y E es una matriz diagonal definida positiva. Esto implica

$$\begin{cases} d_1 + a + b + c > 0 & (1.1) \\ d_2 + a > 0 & (1.2) \\ d_1 + d_2 - a + b > 0 & (1.3) \\ 2d_1 + d_2 - b + c > 0 & (1.4) \\ 3d_1 + d_2 - c > 0 & (1.5) \end{cases}$$

De la última desigualdad obtenemos $3d_1 + d_2 > 0$ y sumando las últimas tres ecuaciones $2d_1 + d_2 > 0$.

Notemos que de (1.5), (1.4), (1.1), existe $c > 0$ tal que

$$3d_1 + d_2 > c > -2d_1 - d_2 + b ; -d_1 - a - b$$

y esto pasa por (1.3) si y sólo si existe $b > 0$ tal que

$$5d_1 + 2d_2 > b > -d_1 - d_2 + a ; -4d_1 - d_2 - a$$

Finalmente si y sólo si por (1.2), existe $a > 0$ tal que

$$6d_1 + 3d_2 > a > -9d_1 - 3d_2 ; d_2$$

y si y sólo si $15d_1 + 6d_2 > 0$ y $6d_1 + 4d_2 > 0$.

Luego el sistema anterior es equivalente a

$$\begin{cases} 3d_1 + d_2 > 0 \\ 2d_1 + d_2 > 0 \\ 5d_1 + 2d_2 > 0 \\ 3d_1 + 2d_2 > 0 \end{cases}$$

Tengamos en cuenta que este sistema implica $\text{tr}(D) = 7d_1 + 4d_2 > 0$ pues $5(3d_1 + 2d_2) + 2(3d_1 + d_2) > 0$. De todo lo anterior, las ecuaciones que definen a $\mathcal{C}(\mathbf{n}_1)$ son las siguientes (ver Figura 1):

$$3d_1 + d_2 > 0 \quad 3d_1 + 2d_2 > 0$$

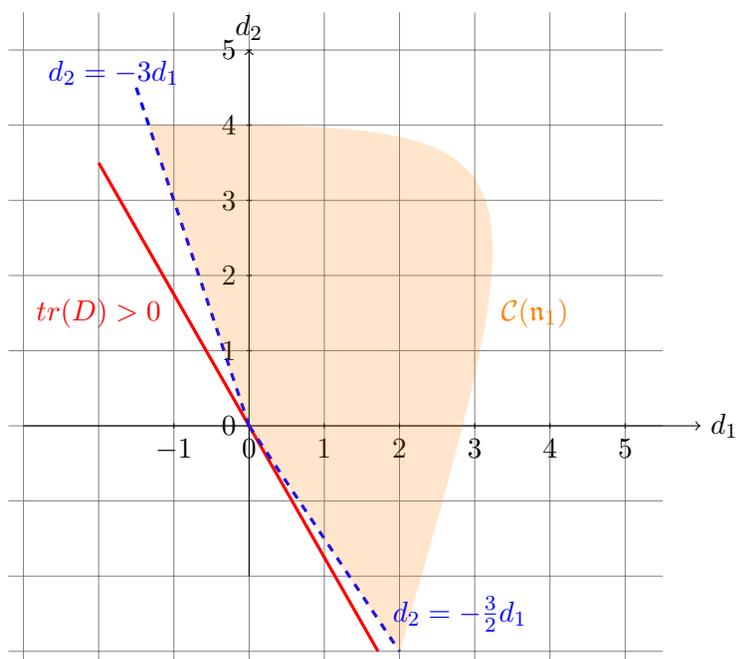


FIGURA 1. $\mathcal{C}(\mathbf{n}_1)$

3.2. **Caso \mathfrak{n}_2 .** Sea el álgebra de Lie \mathfrak{n}_2 de dimensión 5 definida por la base $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ y los corchetes

$$\mu(e_1, e_2) = e_3, \quad \mu(e_1, e_3) = e_4, \quad \mu(e_1, e_4) = e_5, \quad \mu(e_2, e_3) = e_5.$$

Sea

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & d_3 & & \\ & & & d_4 & \\ & & & & d_5 \end{pmatrix} \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_2).$$

Como es derivación de \mathfrak{n}_2 debe verificarse

$$d_1 + d_2 = d_3, \quad 2d_1 + d_2 = d_4, \quad 3d_1 + d_2 = d_5, \quad d_2 + d_3 = d_5.$$

Es decir que

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & 2d_1 & & & \\ & & 3d_1 & & \\ & & & 4d_1 & \\ & & & & 5d_1 \end{pmatrix}$$

además $D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_2)_{gen}$ si y sólo si $d_1 \neq 0$. En este caso $G_D = T$ y $\overline{T \cdot \mu}$ está dado por

$$\lambda(e_1, e_2) = \alpha e_3, \quad \lambda(e_1, e_3) = \beta e_4, \quad \lambda(e_1, e_4) = \gamma e_5, \quad \lambda(e_2, e_3) = \eta e_5,$$

donde $\alpha, \beta, \gamma, \eta \geq 0$.

Se tiene que

$$\begin{aligned} m(\lambda) &= \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \eta^2} \begin{pmatrix} -\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 & & & & \\ & -\alpha^2 - \eta^2 & & & \\ & & -\beta^2 - \eta^2 + \alpha^2 & & \\ & & & -\gamma^2 + \beta^2 & \\ & & & & \gamma^2 + \eta^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} (\alpha^2 F_{12}^3 + \beta^2 F_{13}^4 + \gamma^2 F_{14}^5 + \eta^2 F_{23}^5). \end{aligned}$$

Así, $m(\lambda) = m(\overline{T \cdot \mu}) = CH(F_{12}^3, F_{13}^4, F_{14}^5, F_{23}^5)$.

Luego, $D \in \mathcal{C}(\mathfrak{n}_2) \subset \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_2)$ si y sólo si $D = aF_{12}^3 + bF_{13}^4 + cF_{14}^5 + dF_{23}^5 + E$ con $a, b, c, d > 0$ y $E \in \text{Dg}(\mathfrak{n}_2)_{>0}$.

Esto implica que $D \in \mathcal{C}(\mathfrak{n}_2)$ si y sólo si $d_1 > 0$, ver Figura 2.

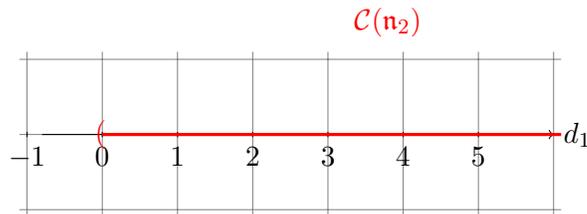


FIGURA 2. $\mathcal{C}(\mathfrak{n}_2)$

3.3. **Caso \mathfrak{n}_3 .** Sea el álgebra de Lie \mathfrak{n}_3 de dimensión 5 definida por la base $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ y los corchetes

$$\mu(e_1, e_2) = e_4, \quad \mu(e_2, e_3) = e_5, \quad \mu(e_1, e_4) = e_5.$$

Sea

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & d_3 & & \\ & & & d_4 & \\ & & & & d_5 \end{pmatrix} \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_3).$$

Como es derivación de \mathfrak{n}_3 debe verificarse

$$d_1 + d_2 = d_4, \quad d_2 + d_3 = d_5, \quad d_1 + d_4 = d_5.$$

Lo que implica

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & 2d_1 & & \\ & & & d_1 + d_2 & \\ & & & & 2d_1 + d_2 \end{pmatrix}$$

Notemos que $\text{tr}(D) = 6d_1 + 3d_2$ y que $D|_{\mathfrak{3}(\mathfrak{n}_3)} = 2d_1 + d_2$. D es genérica si y sólo si

$$d_1 \neq d_2, \quad d_1 \neq -d_2, \quad d_2 \neq 2d_1, \quad d_1, d_2 \neq 0.$$

Y en este caso D tiene autovalores diferentes por lo que $\mathfrak{t}(\mathfrak{n}_3)$ es libre de multiplicidad y $G_D = T, \overline{T \cdot \mu}$ está dado por:

$$\lambda(e_1, e_2) = \alpha e_4, \quad \lambda(e_2, e_3) = \beta e_5, \quad \lambda(e_1, e_4) = \gamma e_5,$$

donde $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$.

$$\begin{aligned} m(\lambda) &= \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \begin{pmatrix} -\alpha^2 - \gamma^2 & & & & \\ & -\alpha^2 - \beta^2 & & & \\ & & -\beta^2 & & \\ & & & -\gamma^2 + \alpha^2 & \\ & & & & \beta^2 + \gamma^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} (\alpha^2 F_{12}^4 + \beta^2 F_{23}^5 + \gamma^2 F_{14}^5). \end{aligned}$$

Luego $m(\lambda) = m(\overline{T \cdot \mu}) = \text{CH}(F_{12}^4, F_{23}^5, F_{14}^5)$.

Tenemos entonces que $D \in \mathcal{C}(\mathfrak{n}_3) \subset \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_3)$ si y sólo si $D = aF_{12}^4 + bF_{23}^5 + cF_{14}^5 + E$ con $a, b, c > 0$ y $E \in \text{Dg}(\mathfrak{n}_3)_{>0}$. Y esto implica

$$\begin{cases} d_1 + a + c > 0 & (3.1) \\ d_2 + a + b > 0 & (3.2) \\ 2d_1 + b > 0 & (3.3) \\ d_1 + d_2 - a + c > 0 & (3.4) \\ 2d_1 + d_2 - b - c > 0 & (3.5) \end{cases}$$

La última desigualdad implica $2d_1 + d_2 > 0$ y sumando las últimas tres obtenemos $5d_1 + 2d_2 > 0$.

Notemos que de (3.5), (3.2), (3.3), existe $b > 0$ tal que

$$2d_1 + d_2 - c > b > -2d_1; \quad -d_2 + a$$

y esto pasa si y sólo si $4d_1 + d_2 > 0$ y por (3.4) si existe $a > 0$ tal que

$$d_1 + d_2 + c > a > -2d_1 - 2d_2 + c ; -d_1 - c$$

Finalmente si y sólo si $3d_1 + 3d_2 > 0$.

Luego el sistema anterior es equivalente a

$$\begin{cases} 2d_1 + d_2 > 0 \\ 5d_1 + 2d_2 > 0 \\ d_1 + d_2 > 0 \\ 4d_1 + d_2 > 0 \end{cases}$$

El cono $\mathcal{C}(\mathfrak{n}_3)$ queda entonces definido por (Figura 3):

$$4d_1 + d_2 > 0 \quad d_1 + d_2 > 0.$$

Además estas ecuaciones implican $\text{tr}(D) > 0$ pues $(4d_1 + d_2) + 2(d_1 + d_2) > 0$.

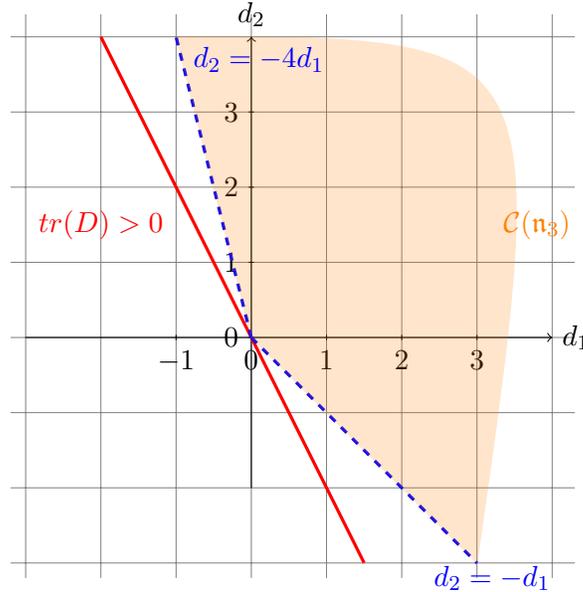


FIGURA 3. $\mathcal{C}(\mathfrak{n}_3)$

3.4. **Caso \mathfrak{n}_4 .** Sea el álgebra de Lie \mathfrak{n}_4 de dimensión 5 definida por la base $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ y los corchetes

$$\mu(e_1, e_2) = e_5, \quad \mu(e_3, e_4) = e_5.$$

Sea

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & d_3 & & \\ & & & d_4 & \\ & & & & d_5 \end{pmatrix} \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_4).$$

Como es derivación de \mathfrak{n}_4 debe verificarse

$$d_5 = d_1 + d_2, \quad d_5 = d_3 + d_4.$$

Lo que implica

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & d_5 - d_1 & & & \\ & & d_3 & & \\ & & & d_5 - d_3 & \\ & & & & d_5 \end{pmatrix}$$

Notemos que $\text{tr}(D) = 3d_5$ y que $D|_{\mathfrak{t}(\mathfrak{n}_4)} = d_5 = d_1 + d_2 = d_3 + d_4$. D es genérica si y sólo si

$$d_1 \neq d_3, \quad d_1 \neq d_5, \quad d_3 \neq d_5, \quad d_1, d_3 \neq 0, \quad d_5 \neq d_1 + d_3, \quad d_5 \neq 2d_1, \quad d_5 \neq 2d_3.$$

En el caso genérico $G_D = T$ pues $\mathfrak{t}(\mathfrak{n}_4)$ es libre de multiplicidad y $\overline{T \cdot \mu}$ está dado por:

$$\lambda(e_1, e_2) = \alpha e_5, \quad \lambda(e_3, e_4) = \beta e_5$$

donde $\alpha, \beta \geq 0$.

Como la base es nice, $m(\lambda) = m(\overline{T \cdot \mu}) = \text{CH}(F_{12}^5, F_{34}^5)$. Tenemos entonces que $D \in \mathcal{C}(\mathfrak{n}_4) \subset \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_4)$ si y sólo si $D = aF_{12}^5 + bF_{34}^5 + E$ con $a, b > 0$ y E una matriz diagonal definida positiva. La condición de $\text{tr}(D) > 0$ ya se cumple por la condición necesaria de [NN15] pues $\mathcal{C}(\mathfrak{n}_4) \subset \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_4)_{\text{frn}}$.

La definición de $\mathcal{C}(\mathfrak{n}_4)$ implica:

$$\begin{cases} d_1 + a > 0 & (4.1) \\ d_5 - d_1 + a > 0 & (4.2) \\ d_3 + b > 0 & (4.3) \\ d_5 - d_3 + b > 0 & (4.4) \\ d_5 - a - b > 0 & (4.5) \end{cases}$$

Notemos que de (4.5), (4.1), (4.2), existe $a > 0$ tal que

$$d_5 - b > a > -d_1; \quad -d_5 + d_1$$

y esto pasa si y sólo si por (4.3), (4.4) existe $b > 0$ tal que

$$d_1 + d_5 > b > -d_3, -d_5 + d_3; \quad 2d_5 - d_1 > b > -d_3, -d_5 + d_3$$

Luego el sistema anterior es equivalente al que sigue y son estas las ecuaciones que definen a $\mathcal{C}(\mathfrak{n}_4)$

$$\begin{cases} d_1 + d_3 + d_5 > 0 \\ 2d_5 + d_1 - d_3 > 0 \\ 2d_5 - d_1 + d_3 > 0 \\ 3d_5 - d_1 - d_3 > 0 \end{cases}$$

Para un desarrollo más detallado y gráficos ver Sección 5.

3.5. Caso \mathfrak{n}_5 . Sea el álgebra de Lie \mathfrak{n}_5 de dimensión 5 definida por la base $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ y los corchetes

$$\mu(e_1, e_2) = e_3, \quad \mu(e_1, e_3) = e_4, \quad \mu(e_2, e_3) = e_5.$$

Sea

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & d_3 & & \\ & & & d_4 & \\ & & & & d_5 \end{pmatrix} \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_5).$$

Como es derivación de \mathfrak{n}_5 debe verificarse

$$d_1 + d_2 = d_3, \quad 2d_1 + d_2 = d_4, \quad d_1 + 2d_2 = d_5.$$

Lo que implica

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & d_1 + d_2 & & \\ & & & 2d_1 + d_2 & \\ & & & & d_1 + 2d_2 \end{pmatrix}$$

Notemos que $\text{tr}(D) = 5d_1 + 5d_2$ y que $D|_{\mathfrak{t}(\mathfrak{n}_5)} > 0$ implica $2d_1 + d_2 > 0$ y $d_1 + 2d_2 > 0$. D es genérica si y sólo si

$$d_1 \neq -d_2, \quad d_1, d_2 \neq 0, \quad d_1 \neq d_2.$$

En el caso genérico $G_D = G_{\mathfrak{t}(\mathfrak{n}_5)}$ y D tiene cinco autovalores diferentes por lo que $\mathfrak{t}(\mathfrak{n}_5)$ es libre de multiplicidad y $G_{\mathfrak{t}(\mathfrak{n}_5)} = T$. Luego, $\overline{T \cdot \mu}$ está dado por:

$$\lambda(e_1, e_2) = \alpha e_3, \quad \lambda(e_1, e_3) = \beta e_4, \quad \lambda(e_2, e_3) = \gamma e_5$$

donde $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$.

$$\begin{aligned} m(\lambda) &= \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \begin{pmatrix} -\alpha^2 - \beta^2 & & & & \\ & -\alpha^2 - \gamma^2 & & & \\ & & -\beta^2 - \gamma^2 + \alpha^2 & & \\ & & & \beta^2 & \\ & & & & \gamma^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} (\alpha^2 F_{12}^3 + \beta^2 F_{13}^4 + \gamma^2 F_{23}^5). \end{aligned}$$

Así, $m(\lambda) = m(\overline{T \cdot \mu}) = \text{CH}(F_{12}^3, F_{13}^4, F_{23}^5)$. Tenemos entonces de la definición (5) que $D \in \mathcal{C}(\mathfrak{n}_5) \subset \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_5)$ si y sólo si $D = aF_{12}^3 + bF_{13}^4 + cF_{23}^5 + E$ y $\text{tr}(D) > 0$, donde $a, b, c > 0$ y E es una matriz diagonal definida positiva, esto implica:

$$\begin{cases} d_1 + a + b > 0 & (5.1) \\ d_2 + a + c > 0 & (5.2) \\ d_1 + d_2 - a + b + c > 0 & (5.3) \\ 2d_1 + d_2 - b > 0 & (5.4) \\ d_1 + 2d_2 - c > 0 & (5.5) \end{cases}$$

De las últimas dos desigualdades $d_1 + 2d_2 > 0$ y $2d_1 + d_2 > 0$, sumando las últimas tres obtenemos $d_1 + d_2 > 0$.

Notemos que de (5.4), (5.1), (5.3), existe $b > 0$ tal que

$$2d_1 + d_2 > b > -d_1 - d_2 + a - c; \quad -d_1 - a$$

y esto pasa por (5.2) si y sólo si existe $a > 0$ tal que

$$3d_1 + 2d_2 + c > a > -3d_1 - d_2; \quad -d_2 - c$$

Finalmente si y sólo si por (5.5), existe $c > 0$ tal que

$$d_1 + 2d_2 > c > -6d_1 - 3d_2; \quad -3d_1 - 3d_2$$

si y sólo si $7d_1 + 5d_2 > 0$ y $4d_1 + 5d_2 > 0$.

Luego el sistema anterior es equivalente a

$$\begin{cases} d_1 + 2d_2 > 0 \\ 2d_1 + d_2 > 0 \\ d_1 + d_2 > 0 \\ 7d_1 + 5d_2 > 0 \\ 4d_1 + 5d_2 > 0 \end{cases}$$

Tenemos entonces las ecuaciones que definen a $\mathcal{C}(\mathfrak{n}_5)$ (ver Figura 4):

$$d_1 + 2d_2 > 0 \quad 2d_1 + d_2 > 0,$$

estas implican $\text{tr}(D) > 0$.

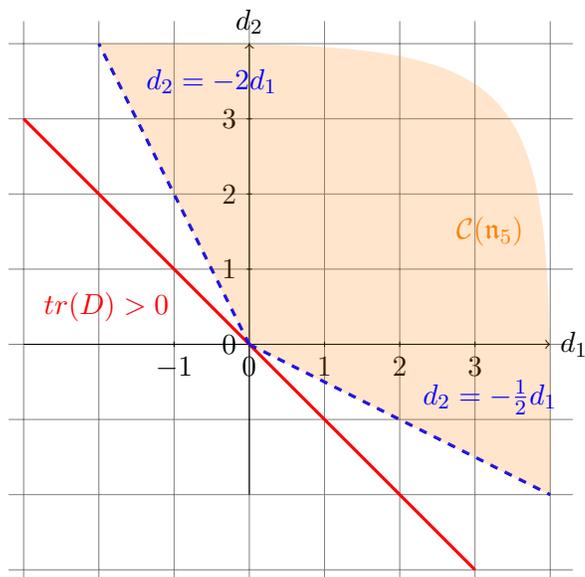


FIGURA 4. $\mathcal{C}(\mathfrak{n}_5)$

3.6. **Caso \mathfrak{n}_6 .** Sea el álgebra de Lie \mathfrak{n}_6 de dimensión 5 definida por la base $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ y los corchetes

$$\mu(e_1, e_2) = e_4, \quad \mu(e_1, e_3) = e_5.$$

Notemos que \mathfrak{n}_6 puede ser la representación en álgebras de Lie del siguiente grafo:

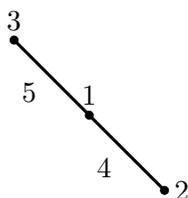


FIGURA 5. Grafo de \mathfrak{n}_6

Sea

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & d_3 & & \\ & & & d_4 & \\ & & & & d_5 \end{pmatrix} \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_6).$$

Como es derivación de \mathfrak{n}_6 debe verificarse

$$d_4 = d_1 + d_2, \quad d_5 = d_1 + d_3.$$

Lo que implica

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & d_3 & & \\ & & & d_1 + d_2 & \\ & & & & d_1 + d_3 \end{pmatrix}$$

Notemos que $\text{tr}(D) = 3d_1 + 2d_2 + 2d_3$ y que $D|_{\mathfrak{3}(\mathfrak{n}_6)} > 0$ implica $d_1 + d_2 > 0$ y $d_1 + d_3 > 0$. D es genérica si y sólo si

$$d_1 \neq d_2, \quad d_1 \neq d_3, \quad d_2 \neq d_3, \quad d_1, d_2, d_3 \neq 0.$$

En el caso genérico se ve que $\mathfrak{t}(\mathfrak{n}_6)$ es libre de multiplicidad y $G_{\mathfrak{t}(\mathfrak{n}_6)} = T, \overline{T \cdot \mu}$ está dado por:

$$\lambda(e_1, e_2) = \alpha e_4, \quad \lambda(e_1, e_3) = \beta e_5.$$

donde $\alpha, \beta \geq 0$. De la definición de la aplicación momento (ver (3)) se tiene que

$$\begin{aligned} m(\lambda) &= \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} -\alpha^2 - \beta^2 & & & & \\ & -\alpha^2 & & & \\ & & -\beta^2 & & \\ & & & \alpha^2 & \\ & & & & \beta^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} (\alpha^2 F_{12}^4 + \beta^2 F_{13}^5). \end{aligned}$$

Luego $m(\lambda) = m(\overline{T \cdot \mu}) = \text{CH}(F_{12}^4, F_{13}^5)$. Tenemos entonces que $D \in \mathcal{C}(\mathfrak{n}_6) \subset \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_6)$ si y sólo si $D = aF_{12}^4 + bF_{13}^5 + E$ y $\text{tr}(D) > 0$, donde $a, b > 0$ y E matriz diagonal definida positiva, esto implica:

$$\begin{cases} d_1 + a + b > 0 & (6.1) \\ d_2 + a > 0 & (6.2) \\ d_3 + b > 0 & (6.3) \\ d_1 + d_2 - a > 0 & (6.4) \\ d_1 + d_3 - b > 0 & (6.5) \end{cases}$$

De las últimas dos desigualdades, $d_1 + d_2 > 0$ y $d_1 + d_3 > 0$.

Notemos que de (6.5), (6.3), (6.1), existe $b > 0$ tal que

$$d_1 + d_3 > b > -d_3; \quad -d_1 - a$$

y esto pasa si y sólo si $d_1 + 2d_3 > 0$ y de (6.4) existe $a > 0$ tal que

$$d_1 + d_2 > a > -2d_1 - d_3; \quad -d_2$$

si y sólo si $3d_1 + d_2 + d_3 > 0$ y $d_1 + 2d_2 > 0$.

Luego el sistema anterior es equivalente a

$$\begin{cases} d_1 + d_2 > 0 \\ d_1 + d_3 > 0 \\ d_1 + 2d_3 > 0 \\ d_1 + 2d_2 > 0 \\ 3d_1 + d_2 + d_3 > 0 \end{cases}$$

Este sistema implica $\text{tr}(D) > 0$ pues $(d_1 + d_2) + (d_1 + d_3) + 2(d_1 + 2d_3) + 2(d_1 + 2d_2) + (3d_1 + d_2 + d_3) > 0$. Como el cono $\mathcal{C}(\mathfrak{n}_6)$ es invariante por múltiplo escalar positivo, podemos considerar $\text{tr}(D) = 1$ tal que las ecuaciones de $\mathcal{C}_1(\mathfrak{n}_6)$ son:

$$\begin{cases} 1 - 2d_1 - d_2 - 2d_3 > 0 \\ 1 - 2d_1 - 2d_2 - d_3 > 0 \\ 1 - 2d_1 - 2d_2 > 0 \\ 1 - 2d_1 - 2d_3 > 0 \\ 1 - d_2 - d_3 > 0 \end{cases}$$

Es decir que $\mathcal{C}_1(\mathfrak{n}_6)$ es un polígono de cinco lados cuyos vértices son:

$$(0, \frac{1}{2}, 0) \quad (0, 0, \frac{1}{2}) \quad (1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \quad (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}) \quad (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$$

Para poder graficarlo en el plano trasladamos todos los vectores al subespacio tal que $3d_1 + 2d_2 + 2d_3 = 0$ y consideramos la base ortonormal $\left\{ \sqrt{\frac{8}{17}} (1, -\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}), \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, -1) \right\}$.

Si (a, b, c) es tal que $3a + 2b + 2c = 1$ las coordenadas de este vector trasladado al subespacio respecto la base ortonormal dada serán:

$$\alpha = (a - \frac{1}{7}) \sqrt{\frac{17}{8}} \quad y \quad \beta = \sqrt{2} (\frac{3}{4}a + b - \frac{1}{4})$$

En esta base las coordenadas de los vértices son (ver Figura 6):

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{1}{7} \sqrt{\frac{17}{8}}, \frac{\sqrt{2}}{4} \right) \quad \left(-\frac{1}{7} \sqrt{\frac{17}{8}}, -\frac{\sqrt{2}}{4} \right) \quad \left(\frac{6}{7} \sqrt{\frac{17}{8}}, 0 \right) \\ & \left(-\frac{10}{21} \sqrt{\frac{17}{8}}, \frac{\sqrt{2}}{6} \right) \quad \left(-\frac{10}{21} \sqrt{\frac{17}{8}}, -\frac{\sqrt{2}}{6} \right) \end{aligned}$$

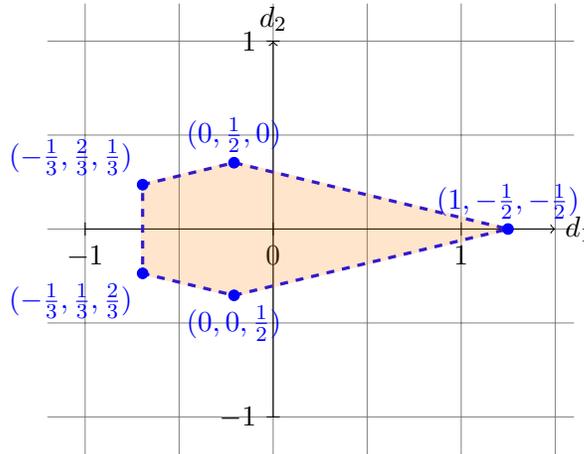


FIGURA 6. $\mathcal{C}_1(\mathfrak{n}_6)$

3.7. **Caso \mathfrak{n}_7 .** Sea el álgebra de Lie \mathfrak{n}_7 de dimensión 5 definida por la base $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ y el corchete

$$\mu(e_1, e_2) = e_3.$$

Sea

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & d_3 & & \\ & & & d_4 & \\ & & & & d_5 \end{pmatrix} \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_7).$$

Como es derivación de \mathfrak{n}_7 debe verificarse $d_3 = d_1 + d_2$. Luego

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & d_1 + d_2 & & \\ & & & d_4 & \\ & & & & d_5 \end{pmatrix}$$

Notemos que D es genérica si y sólo si

$$\begin{aligned} d_1, d_2 \neq 0, \quad d_1 \neq d_2, \quad d_1 \neq d_4, \quad d_1 \neq d_5, \quad d_2 \neq d_4, \quad d_2 \neq d_5, \\ d_4 \neq d_5, \quad d_1 + d_2 \neq d_4, \quad d_1 + d_2 \neq d_5. \end{aligned}$$

En este caso D tiene todos autovalores diferentes por lo que $\mathfrak{t}(\mathfrak{n}_7)$ es libre de multiplicidad y $G_{\mathfrak{t}(\mathfrak{n}_7)} = T, \overline{T \cdot \mu}$ está dado por

$$\lambda(e_1, e_2) = \alpha e_3$$

donde $\alpha \geq 0$.

$$\begin{aligned} m(\lambda) &= \frac{1}{\alpha^2} \begin{pmatrix} -\alpha^2 & & & & \\ & -\alpha^2 & & & \\ & & \alpha^2 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \\ &= F_{12}^3. \end{aligned}$$

Tenemos entonces de la definición (5) que $D \in \mathcal{C}(\mathfrak{n}_7) \subset \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_7)$ si y sólo si $D = aF_{12}^3 + E$ con $a > 0$ y E matriz definida positiva. Esto implica

$$\begin{cases} d_1 + a > 0 & (7.1) \\ d_2 + a > 0 & (7.2) \\ d_1 + d_2 - a > 0 & (7.3) \\ d_4 > 0 & (7.4) \\ d_5 > 0 & (7.5) \end{cases}$$

Notemos que de (7.1), (7.2), (7.3), existe $a > 0$ tal que

$$d_1 + d_2 > a > -d_1 ; -d_2$$

y esto pasa si y sólo si $2d_1 + d_2 > 0$ y $d_1 + 2d_2 > 0$

Por lo que las ecuaciones que definen al cono $\mathcal{C}(\mathfrak{n}_7)$ serán:

$$2d_1 + d_2 > 0, \quad d_1 + 2d_2 > 0, \quad d_4 > 0 \quad y \quad d_5 > 0.$$

Como $d_1 + d_2 > 0$, la condición de $\text{tr}(D) > 0$ se cumple.

Comparar con el álgebra de Lie nilpotente de dimensión 4 estudiada en [DL19, Example 3.6].

3.8. **Caso \mathfrak{n}_8 .** Sea el álgebra de Lie \mathfrak{n}_8 de dimensión 5 definida por la base $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ y los corchetes

$$\mu(e_1, e_2) = e_3, \quad \mu(e_1, e_3) = e_4.$$

Sea

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & d_3 & & \\ & & & d_4 & \\ & & & & d_5 \end{pmatrix} \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_8).$$

Como es derivación de \mathfrak{n}_8 debe verificarse

$$d_3 = d_1 + d_2, \quad d_4 = d_1 + d_3.$$

Luego

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & d_1 + d_2 & & \\ & & & 2d_1 + d_2 & \\ & & & & d_5 \end{pmatrix}$$

y D es genérica si y sólo si

$$d_1 \neq d_2, \quad d_1 \neq d_5, \quad d_2 \neq d_5, \quad d_1 \neq -d_2, \quad d_1, d_2 \neq 0.$$

En el caso genérico $G_D = G_{\mathfrak{t}(\mathfrak{n}_8)}$ y como es libre de multiplicidad $G_{\mathfrak{t}(\mathfrak{n}_8)} = T$. Del hecho que $\overline{T \cdot \mu}$ está dado por:

$$\lambda(e_1, e_2) = \alpha e_3, \quad \lambda(e_1, e_3) = \beta e_4$$

donde $\alpha, \beta \geq 0$ y la base es nice se tiene:

$$m(\lambda) = m(\overline{T \cdot \mu}) = \text{CH}(F_{12}^3, F_{13}^4).$$

Entonces $D \in \mathcal{C}(\mathfrak{n}_8) \subset \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_8)$ si y sólo si $D = aF_{12}^3 + bF_{13}^4 + E$ y $\text{tr}(D) > 0$ donde $a, b > 0$ y E matriz diagonal definida positiva.

Esto implica

$$\begin{cases} d_1 + a + b > 0 & (8.1) \\ d_2 + a > 0 & (8.2) \\ d_1 + d_2 - a + b > 0 & (8.3) \\ 2d_1 + d_2 - b > 0 & (8.4) \\ d_5 > 0 & (8.5) \end{cases}$$

Notemos que de (8.4), (8.1), (8.3), existe $b > 0$ tal que

$$2d_1 + d_2 > b > -d_1 - a; \quad -d_1 - d_2 + a$$

y esto pasa por (8.2) si y sólo si existe $a > 0$ tal que

$$3d_1 + 2d_2 > a > -3d_1 - d_2; \quad -d_2$$

Finalmente si y sólo si $6d_1 + 3d_2 > 0$ y $3d_1 + 3d_2 > 0$.

Luego el sistema anterior es equivalente a

$$\begin{cases} 2d_1 + d_2 > 0 \\ 3d_1 + 2d_2 > 0 \\ d_1 + d_2 > 0 \\ d_5 > 0 \end{cases}$$

Es decir que las ecuaciones que definen al cono $\mathcal{C}(\mathfrak{n}_8)$ son las siguientes (notar que implican $\text{tr}(D) > 0$):

$$2d_1 + d_2 > 0 \quad d_1 + d_2 > 0 \quad d_5 > 0$$

Comparar este ejemplo con [DL19, Example 3.7].

4. PRUEBA DEL TEOREMA 1.2

En esta sección demostramos el Teorema 1.2 enunciado en la Introducción, el cual es el resultado principal del trabajo. Para ello enunciamos y probamos algunos lemas técnicos que nos permitieron reducir las cuentas a realizar en la demostración del teorema.

Lema 4.1. *Sean $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ subespacios de $\mathfrak{t}(\mathfrak{n})$. Si existe $f \in W_{\text{ort}}(\mathfrak{n})$ tal que $f\mathfrak{a}f^{-1} = \mathfrak{b}$; entonces,*

$$\mathfrak{a} \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n})_{\text{frn}} \subset \mathcal{C}(\mathfrak{n}) \text{ si y sólo si } \mathfrak{b} \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n})_{\text{frn}} \subset \mathcal{C}(\mathfrak{n}).$$

Demostración. Sea $D \in \mathfrak{b} \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n})_{\text{frn}}$, entonces $f^{-1}Df \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n}) \subset \mathcal{C}(\mathfrak{n})$, por hipótesis. Luego se tiene que $D \in f\mathcal{C}(\mathfrak{n})f^{-1} = \mathcal{C}(\mathfrak{n})$ pues $\mathcal{C}(\mathfrak{n})$ es W_{ort} -invariante. \square

Lema 4.2. *Sea \mathfrak{n} un álgebra de Lie nilpotente con corchete μ . Si $\mathcal{C}(\mathfrak{n})$ es el cono definido en (5), entonces*

$$\mathcal{C}(\mathfrak{n} \oplus \mathbb{R}) = \mathcal{C}(\mathfrak{n}) \times \mathbb{R}_{>0}.$$

Demostración. Sea $D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n} \oplus \mathbb{R})_{\text{gen}}$, entonces

$$D = \left(\begin{array}{c|c} D_1 & \\ \hline & d \end{array} \right),$$

donde $D_1 \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n})_{\text{gen}}$ y $d \in \mathbb{R}$ tal que $d \notin \text{Spec}(D_1)$, notemos que $G_{\mathfrak{t}(\mathfrak{n})} = G_{D_1}$. En este caso $G_D = G_{\mathfrak{t}(\mathfrak{n} \oplus \mathbb{R})}$ y está dado por:

$$h = \left(\begin{array}{c|c} G_{D_1} & \\ \hline & a \end{array} \right), \text{ con } a > 0.$$

Como $G_D \cdot \mu$ está dado por los corchetes que define $G_{D_1} \cdot \mu$ se tiene que

$$m(\overline{G_D \cdot \mu}) = \left(\begin{array}{c|c} m(\overline{G_{D_1} \cdot \mu}) & \\ \hline & 0 \end{array} \right).$$

Luego por Teorema 2.5, $D \in \mathcal{C}(\mathfrak{n} \oplus \mathbb{R})$ si y sólo si $D \in \mathbb{R}_{>0} m(\overline{G_D \cdot \mu}) \cap \text{Dg}(\mathfrak{n} \oplus \mathbb{R}) + \text{Dg}(\mathfrak{n} \oplus \mathbb{R})_{>0}$, es decir si y sólo si existen $r, t > 0$, $h \in G_D$ y $E_1 \in \text{Dg}(\mathfrak{n})_{>0}$ tal que

$$\begin{aligned} D_1 &= rm(h \cdot \mu) + E_1 \\ d &= t \end{aligned}$$

Es decir que $\mathcal{C}(\mathfrak{n} \oplus \mathbb{R}) = \mathcal{C}(\mathfrak{n}) \times \mathbb{R}_{>0}$. \square

Lema 4.3. *Sea \mathfrak{n} un álgebra de Lie nilpotente con corchete μ , y supongamos que $\mathfrak{t}(\mathfrak{n})_{\text{frn}} = \mathcal{C}(\mathfrak{n})$. Si*

$$D = \left(\begin{array}{c|c} D_1 & \\ \hline & d \end{array} \right) \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n} \oplus \mathbb{R})_{\text{frn}},$$

y se cumple que $d \notin \text{Spec}(D_1)$, entonces $D \in \mathcal{C}(\mathfrak{n} \oplus \mathbb{R})$.

Demostración. Por Lema 4.2 se tiene que

$$\mathcal{C}(\mathfrak{n} \oplus \mathbb{R}) = \mathcal{C}(\mathfrak{n}) \times \mathbb{R}_{>0} = \mathfrak{t}(\mathfrak{n})_{frn} \times \mathbb{R}_{>0}$$

Dada $D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n} \oplus \mathbb{R})_{frn}$ como en la hipótesis; se ve con cuentas similares a la prueba del lema anterior, que $D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n})_{frn} \times \mathbb{R}_{>0}$. \square

A continuación presentamos la demostración del teorema, en la cual se utilizan también cuentas realizadas en la Sección 3.

Teorema 4.4. *Para toda álgebra de Lie nilpotente \mathfrak{n} de dimensión ≤ 5 ,*

$$\mathfrak{t}(\mathfrak{n})_{frn} = \mathcal{C}(\mathfrak{n}).$$

Este es el Teorema 1.2 enunciado en la Introducción.

Demostración. Estudiamos las derivaciones de \mathfrak{n} no genéricas, si estas son fuertemente Ricci negativas tenemos que probar que pertenecen al cono. Es decir que si una derivación de \mathfrak{n} es no genérica y no pertenece al cono, entonces no puede ser fuertemente Ricci negativa.

Además como $\mathcal{C}(\mathfrak{n})$ es convexo, si las derivaciones no genéricas están dentro de él, ya se sabe que son fuertemente Ricci negativas y no hay que realizar un análisis más detallado.

Analizamos una a una las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 5 presentadas en el Cuadro 1.

(1) **Caso \mathfrak{n}_1**

Según lo realizado en la Sección 3.1 se tiene que la única derivación no genérica de traza positiva que no pertenece a $\mathcal{C}(\mathfrak{n}_1)$ (salvo múltiplo) es

$$D_0 = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}$$

pero de la condición necesaria demostrada en [NN15] sabemos que no es fuertemente Ricci negativa pues, $D_0|_{\mathfrak{g}(\mathfrak{n}_1)} = -1 < 0$.

(2) **Caso \mathfrak{n}_2**

En este caso la única derivación no genérica es la nula y esta no es fuertemente Ricci negativa (no tiene traza positiva).

(3) **Caso \mathfrak{n}_3**

Por lo visto en la Sección 3.3 se tiene que, salvo múltiplo

$$D_0 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 2 & \\ & & & 0 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

es la única derivación no genérica de traza positiva que no pertenece a $\mathcal{C}(\mathfrak{n}_3)$. En este caso G_D , la componente conexa del centralizador de D en $GL(\mathfrak{n}_3)$ está dado por:

$$H = \begin{pmatrix} a & & & b \\ & p & & \\ & & q & \\ c & & & r & \\ & & & & d \end{pmatrix}, \quad \text{con } \det := ad - bc \neq 0.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}
H \cdot \mu(e_1, e_2) &= H\mu\left(\frac{d}{det}e_1 - \frac{c}{det}e_5, \frac{1}{p}e_2\right) = \frac{dr}{p det}e_4 \\
H \cdot \mu(e_5, e_2) &= H\mu\left(-\frac{b}{det}e_1 + \frac{a}{det}e_5, \frac{1}{p}e_2\right) = -\frac{br}{p det}e_4 \\
H \cdot \mu(e_2, e_3) &= H\mu\left(\frac{1}{p}e_2, \frac{1}{q}e_3\right) = \frac{1}{pq}(be_1 + de_5) \\
H \cdot \mu(e_1, e_4) &= H\mu\left(\frac{d}{det}e_1 - \frac{c}{det}e_5, \frac{1}{r}e_4\right) = \frac{d}{r det}(be_1 + de_5) \\
H \cdot \mu(e_5, e_4) &= H\mu\left(-\frac{b}{det}e_1 + \frac{a}{det}e_5, \frac{1}{r}e_4\right) = -\frac{b}{r det}(be_1 + de_5)
\end{aligned}$$

y por esto, $\overline{G_D \cdot \mu}$ queda definido por :

$$\begin{aligned}
\lambda(e_1, e_2) &= \alpha e_4, & \lambda(e_5, e_2) &= \beta e_4, & \lambda(e_2, e_3) &= \gamma e_1 + \xi e_5 \\
\lambda(e_1, e_4) &= \tau e_1 + \eta e_5, & \lambda(e_5, e_4) &= \iota e_1 - \tau e_5.
\end{aligned}$$

De la definición de la aplicación momento (ver (3)) tenemos:

$$m(\lambda) = \frac{2}{|\lambda|^2} \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \gamma^2 - \eta^2 + \iota^2 & & & & M_{15} \\ & -\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 - \xi^2 & & & \\ & & -\gamma^2 - \xi^2 & & \\ & & & \alpha^2 + \beta^2 - 2\tau^2 - \eta^2 - \iota^2 & \\ M_{15} & & & & -\beta^2 + \xi^2 + \eta^2 - \iota^2 \end{pmatrix}$$

donde,

$$\begin{aligned}
M_{15} &= \alpha\beta + \tau\iota - \eta\tau - \gamma\xi - \tau\eta + \iota\tau = -\frac{r^2}{p^2 det^2}bd - \frac{2b^2}{r^2 det^2}bd - \frac{2d^2}{r^2 det^2}bd - \frac{1}{p^2 q^2}bd \\
&= -bd\left(\frac{r^2}{p^2 det^2} + \frac{2b^2}{r^2 det^2} + \frac{2d^2}{r^2 det^2} + \frac{1}{p^2 q^2}\right).
\end{aligned}$$

Luego, $m(\overline{G_D \cdot \mu}) \cap \text{Dg}(\mathfrak{n}_3) \neq \emptyset$ si y sólo si $bd = 0$ es decir, si $b = 0$ ó $d = 0$, esto implica

$$\tau = 0 \wedge (\beta, \gamma, \iota = 0 \text{ ó } \alpha, \xi, \eta = 0).$$

Se tiene que $m(\overline{G_D \cdot \mu}) \cap \text{Dg}(\mathfrak{n}_3) = \text{CH}(F_{12}^4, F_{23}^5, F_{14}^5) \cup \text{CH}(F_{52}^4, F_{23}^1, F_{54}^1)$.

Así, por Teorema 2.5 (iv), $D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_3)_{frn}$ si y sólo si $D = aF_{52}^4 + bF_{23}^1 + cF_{54}^1 + E$ con $a, b, c > 0$ y $E \in \text{Dg}(\mathfrak{n})_{>0}$. Esto implica

$$\begin{cases} 1 - b - c > 0 \\ -1 + a + b > 0 \\ 2 + b > 0 \\ 0 - a + c > 0 \\ 1 + a + c > 0 \end{cases}$$

De la primera y segunda ecuación obtenemos $a > c$ y de la cuarta $a < c$ lo que es absurdo. Con esto concluimos que $D \notin \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_3)_{frn}$ y por lo tanto se cumple que $\mathfrak{t}(\mathfrak{n}_3)_{frn} = \mathcal{C}(\mathfrak{n}_3)$.

(4) **Caso \mathfrak{n}_4**

Tenemos que D es derivación de \mathfrak{n}_4 si y sólo si

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & d_5 - d_1 & & & \\ & & d_3 & & \\ & & & d_5 - d_3 & \\ & & & & d_5 \end{pmatrix}$$

Y los casos no genéricos son cuando

$$d_1 = d_3; \quad d_1 = d_5; \quad d_3 = d_5; \quad d_1 = 0; \quad d_3 = 0;$$

$$d_5 = d_1 + d_3; \quad d_1 = d_5 - d_1; \quad d_3 = d_5 - d_3.$$

Definimos los subespacios de $\mathfrak{t}(\mathfrak{n}_4)$, $\mathfrak{a}_4 = \{D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_4) : d_1 = 0\}$, $\mathfrak{b}_4 = \{D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_4) : d_3 = 0\}$, $\mathfrak{c}_4 = \{D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_4) : d_1 = d_5\}$, $\mathfrak{d}_4 = \{D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_4) : d_3 = d_5\}$, notemos que existen $f, g, h \in W_{ort}(\mathfrak{n}_4)$ tal que $\mathfrak{a}_4 = f^{-1}\mathfrak{b}_4f = g^{-1}\mathfrak{c}_4g = h^{-1}\mathfrak{d}_4h$, donde

$$f = \left(\begin{array}{c|c|c} & 1 & \\ \hline 1 & & 1 \\ \hline & 1 & \\ \hline & & 1 \end{array} \right), \quad g = \left(\begin{array}{c|c|c} & 1 & \\ \hline -1 & & \\ \hline & 1 & \\ \hline & & 1 \end{array} \right),$$

$$h = \left(\begin{array}{c|c|c} & 1 & \\ \hline 1 & & \\ \hline & & \\ \hline & & -1 \end{array} \right).$$

Por Lema 4.1 basta probar que $\mathfrak{a}_4 \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_4)_{frn} \subset \mathcal{C}(\mathfrak{n}_4)$ para probar los casos $d_1 = d_5$, $d_3 = d_5$ y $d_3 = 0$.

Sea

$$D = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & d_5 & & & \\ & & d_3 & & \\ & & & d_5 - d_3 & \\ & & & & d_5 \end{pmatrix} \in \mathfrak{a}_4 \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_4)$$

En este caso G_D , la componente conexa del centralizador de D en $GL(\mathfrak{n}_4)$ está dado por:

$$H = \begin{pmatrix} p & & & & \\ & a & & b & \\ & & q & & \\ & & & r & \\ & c & & & d \end{pmatrix}, \quad \text{con } \det := ad - bc \neq 0.$$

Así $\overline{G_D \cdot \mu}$ queda definido por :

$$\lambda(e_1, e_2) = \alpha e_2 + \beta e_5, \quad \lambda(e_3, e_4) = \gamma e_2 + \xi e_5, \quad \lambda(e_1, e_5) = \tau e_2 - \alpha e_5$$

pues,

$$H \cdot \mu(e_1, e_2) = H\mu\left(\frac{1}{p}e_1, \frac{d}{\det}e_2 - \frac{c}{\det}e_5\right) = \frac{d}{p\det}(be_2 + de_5)$$

$$H \cdot \mu(e_3, e_4) = H\mu\left(\frac{1}{q}e_3, \frac{1}{r}e_4\right) = \frac{1}{qr}(be_2 + de_5)$$

$$H \cdot \mu(e_1, e_5) = H\mu\left(\frac{1}{p}e_1, -\frac{b}{\det}e_2 + \frac{a}{\det}e_5\right) = -\frac{b}{p\det}(be_2 + de_5)$$

De la definición de la aplicación momento (ver (3)) tenemos:

$$m(\lambda) = \frac{2}{|\lambda|^2} \begin{pmatrix} -2\alpha^2 - \beta^2 - \tau^2 & & & & \\ & \tau^2 - \beta^2 + \gamma^2 & & & \\ & & -\gamma^2 - \xi^2 & & \\ & & & -\gamma^2 - \xi^2 & \\ & & & & -\tau^2 + \beta^2 + \xi^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} M_{25} \\ M_{25} \\ 25 \end{matrix}$$

donde,

$$\begin{aligned} M_{25} &= \alpha\beta - \alpha\tau + \gamma\xi - \alpha\tau + \alpha\beta = \frac{2d^2}{p^2 \det^2} bd + \frac{2b^2}{p^2 \det^2} bd + \frac{1}{q^2 r^2} bd \\ &= bd \left(\frac{2d^2}{p^2 \det^2} + \frac{2b^2}{p^2 \det^2} + \frac{1}{q^2 r^2} \right). \end{aligned}$$

Luego, $m(\overline{G_D \cdot \mu}) \cap \text{Dg}(\mathfrak{n}_4) \neq \emptyset$ si y sólo si $bd = 0$ es decir, si $b = 0$ ó $d = 0$, esto implica

$$\alpha = 0 \wedge (\gamma, \tau = 0 \text{ ó } \beta, \xi = 0).$$

Se tiene que $m(\overline{G_D \cdot \mu}) \cap \text{Dg}(\mathfrak{n}_4) = \text{CH}(F_{34}^2, F_{15}^2) \cup \text{CH}(F_{12}^5, F_{34}^5)$.

Así, por Teorema 2.5 (iv), $D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_4)_{frn}$ si y sólo si $D = aF_{34}^2 + bF_{15}^2 + E$ con $a, b > 0$ y $E \in \text{Dg}(\mathfrak{n})_{>0}$. Esto implica

$$\begin{cases} 0 + b > 0 \\ d_5 - a - b > 0 \\ d_3 + a > 0 \\ d_5 - d_3 + a > 0 \\ d_5 + b > 0 \end{cases}$$

y esto vale si y sólo si $2d_5 + d_3 > 0$, $3d_5 - d_3 > 0$ y $d_5 + d_3 > 0$.

Estas son ecuaciones de $\mathcal{C}(\mathfrak{n}_4) \cap \mathfrak{a}_4$ por lo que concluimos que $\mathfrak{a}_4 \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_4)_{frn} \subset \mathcal{C}(\mathfrak{n}_4)$.

Para analizar los casos no genéricos $d_1 = d_3$ y $d_5 = d_1 + d_3$, definimos $\mathfrak{j}_4 = \{D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_4) : d_1 = d_3\}$ y $\mathfrak{k}_4 = \{D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_4) : d_5 = d_1 + d_3\}$. Es claro que existe $t \in W_{ort}(\mathfrak{n}_4)$ tal que $\mathfrak{j}_4 = t^{-1}\mathfrak{k}_4 t$, donde

$$t = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ \hline & & & & -1 & \\ & & & 1 & & \\ \hline & & & & & 1 \end{array} \right).$$

Estudiamos el caso $d_1 = d_3$ para luego usar el Lema 4.1 y concluir acerca del caso no genérico $d_5 = d_1 + d_3$. Sea

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & & \\ & d_5 - d_1 & & & & \\ & & d_1 & & & \\ & & & d_5 - d_1 & & \\ & & & & & d_5 \end{pmatrix} \in \mathfrak{j}_4 \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_4)$$

donde G_D está dado por:

$$H = \begin{pmatrix} a & b & & & & \\ & p & q & & & \\ c & & d & & & \\ & r & & s & & \\ & & & & & t \end{pmatrix}, \quad \text{con } \det_1 := ad - bc \neq 0 \text{ y } \det_2 := ps - rq \neq 0.$$

Se tiene que $\overline{G_D \cdot \mu}$ queda definido por :

$$\lambda(e_1, e_2) = \alpha e_5, \quad \lambda(e_1, e_4) = \beta e_5, \quad \lambda(e_3, e_4) = \gamma e_5, \quad \lambda(e_3, e_2) = \xi e_5.$$

pues,

$$\begin{aligned}
H \cdot \mu(e_1, e_2) &= H\mu\left(\frac{d}{\det_1}e_1 - \frac{c}{\det_1}e_3, \frac{s}{\det_2}e_2 - \frac{r}{\det_2}e_4\right) = t\left(\frac{ds+cr}{\det_1\det_2}\right)e_5 \\
H \cdot \mu(e_1, e_4) &= H\mu\left(\frac{d}{\det_1}e_1 - \frac{c}{\det_1}e_3, -\frac{q}{\det_2}e_2 + \frac{p}{\det_2}e_4\right) = t\left(\frac{-dq-cp}{\det_1\det_2}\right)e_5 \\
H \cdot \mu(e_3, e_4) &= H\mu\left(-\frac{b}{\det_1}e_1 + \frac{a}{\det_1}e_3, -\frac{q}{\det_2}e_2 + \frac{p}{\det_2}e_4\right) = t\left(\frac{-bq+ap}{\det_1\det_2}\right)e_5 \\
H \cdot \mu(e_3, e_2) &= H\mu\left(-\frac{b}{\det_1}e_1 + \frac{a}{\det_1}e_3, \frac{s}{\det_2}e_2 - \frac{r}{\det_2}e_4\right) = t\left(\frac{-bs-ar}{\det_1\det_2}\right)e_5
\end{aligned}$$

De (3) tenemos:

$$m(\lambda) = \frac{2}{|\lambda|^2} \begin{pmatrix} -\alpha^2 - \beta^2 & & M_{13} & & \\ & -\alpha^2 - \xi^2 & & M_{24} & \\ M_{13} & & -\xi^2 - \gamma^2 & & \\ & M_{24} & & -\beta^2 - \gamma^2 & \\ & & & & \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \xi^2 \end{pmatrix}$$

donde $M_{13} = -\alpha\xi - \beta\gamma$ y $M_{24} = -\alpha\beta - \gamma\xi$.

Luego, $m(\overline{G_D \cdot \mu}) \cap \text{Dg}(\mathfrak{n}_4) \neq \emptyset$ si y sólo si $(\alpha, \gamma) \perp (\xi, \beta)$ y $(\alpha, \gamma) \perp (\beta, \xi)$ esto pasa si y sólo si $\alpha = 0 \wedge \gamma = 0$ ó $\xi = \pm\beta$

Se tiene que $m(\overline{G_D \cdot \mu}) \cap \text{Dg}(\mathfrak{n}_4) = \text{CH}(F_{14}^5, F_{23}^5) \cup \text{CH}(F_{12}^5, F_{34}^5, F_{14}^5, F_{23}^5)$.

Así, por Teorema 2.5 (iv), $D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_4)_{frn}$ si y sólo si $D = aF_{14}^5 + bF_{23}^5 + E$ con $a, b > 0$ y $E \in \text{Dg}(\mathfrak{n}_4)_{>0}$. Esto implica

$$\begin{cases} d_1 + a > 0 \\ d_5 - d_1 + b > 0 \\ d_1 + b > 0 \\ d_5 - d_1 + a > 0 \\ d_5 - a - b > 0 \end{cases}$$

y esto vale si y sólo si $2d_5 > 0$, $3d_5 - 2d_1 > 0$ y $d_5 + 2d_1 > 0$.

Son ecuaciones de $\mathcal{C}(\mathfrak{n}_4) \cap \mathfrak{j}_4$ por lo que concluimos que $\mathfrak{j}_4 \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_4)_{frn} \subset \mathcal{C}(\mathfrak{n}_4)$.

Queda por estudiar los casos $\mathfrak{p}_4 = \{D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_4) : d_1 = d_5 - d_1\}$ y $\mathfrak{m}_4 = \{D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_4) : d_3 = d_5 - d_3\}$, estos son análogos pues existe $q \in W_{ort}(\mathfrak{n}_4)$ tal que $\mathfrak{p}_4 = q^{-1}\mathfrak{m}_4q$, donde

$$q = \left(\begin{array}{c|c|c} & 1 & \\ \hline & & 1 \\ \hline 1 & & \\ \hline & 1 & \\ \hline & & 1 \end{array} \right).$$

Por Lema 4.1 basta estudiar el caso $d_1 = d_5 - d_1$. Sea

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & d_1 & & & \\ & & d_3 & & \\ & & & d_5 - d_3 & \\ & & & & 2d_1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{p}_4 \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_4)_{frn}$$

donde G_D está dado por:

$$H = \begin{pmatrix} a & b & & & \\ c & d & & & \\ & & p & & \\ & & & q & \\ & & & & r \end{pmatrix}, \quad \text{con } \det := ad - bc \neq 0.$$

Es decir que en este caso $\overline{G_D \cdot \mu}$ está dado por $\lambda(e_1, e_2) = \alpha e_5$ y $\lambda(e_3, e_4) = \beta e_5$ con $\alpha, \beta \geq 0$ y valen las cuentas hechas en la Sección 3.4 para el caso genérico.

Analizamos a continuación lo que ocurre con la intersección de los subespacios vistos en este caso, ver Cuadro 2.

Subespacios	Derivación	Conclusión
$\mathfrak{a}_4 \cap \mathfrak{b}_4$	$D = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & d_5 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & d_5 & \\ & & & & d_5 \end{pmatrix}$	$d_5 > 0$ por cond nec, cumple las ecuaciones de $\mathcal{C}(\mathfrak{n}_4)$
$\mathfrak{a}_4 \cap \mathfrak{c}_4$	$D = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & d_3 & & \\ & & & -d_3 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$	0 en el centro, no puede ser frn.
$\mathfrak{a}_4 \cap \mathfrak{d}_4$	$D = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & d_5 & & & \\ & & d_5 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & d_5 \end{pmatrix}$	$d_5 > 0$ por cond nec, cumple las ecuaciones de $\mathcal{C}(\mathfrak{n}_4)$
$\mathfrak{b}_4 \cap \mathfrak{c}_4$	$D = \begin{pmatrix} & d_5 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & d_5 & \\ & & & & 0 \\ & & & & d_5 \end{pmatrix}$	$d_5 > 0$ por cond nec, cumple las ecuaciones de $\mathcal{C}(\mathfrak{n}_4)$
$\mathfrak{b}_4 \cap \mathfrak{d}_4$	$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & -d_1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$	0 en el centro, no puede ser frn.
$\mathfrak{c}_4 \cap \mathfrak{d}_4$	$D = \begin{pmatrix} & d_5 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & d_5 & \\ & & & & 0 \\ & & & & d_5 \end{pmatrix}$	$d_5 > 0$ por cond nec, cumple las ecuaciones de $\mathcal{C}(\mathfrak{n}_4)$
$\mathfrak{j}_4 \cap \mathfrak{a}_4$	$D = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & d_5 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & d_5 & \\ & & & & d_5 \end{pmatrix}$	igual a $\mathfrak{a}_4 \cap \mathfrak{b}_4$
$\mathfrak{j}_4 \cap \mathfrak{b}_4$	$D = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & d_5 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & d_5 & \\ & & & & d_5 \end{pmatrix}$	igual a $\mathfrak{a}_4 \cap \mathfrak{b}_4$
$\mathfrak{j}_4 \cap \mathfrak{c}_4$	$D = \begin{pmatrix} & d_5 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & d_5 & \\ & & & & 0 \\ & & & & d_5 \end{pmatrix}$	igual a $\mathfrak{c}_4 \cap \mathfrak{d}_4$
$\mathfrak{j}_4 \cap \mathfrak{d}_4$	$D = \begin{pmatrix} & d_5 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & d_5 & \\ & & & & 0 \\ & & & & d_5 \end{pmatrix}$	igual a $\mathfrak{c}_4 \cap \mathfrak{d}_4$
$\mathfrak{k}_4 \cap \mathfrak{a}_4$	$D = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & d_5 & & & \\ & & d_5 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & d_5 \end{pmatrix}$	igual a $\mathfrak{a}_4 \cap \mathfrak{d}_4$
$\mathfrak{k}_4 \cap \mathfrak{b}_4$	$D = \begin{pmatrix} & d_5 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & d_5 \\ & & & & d_5 \end{pmatrix}$	igual a $\mathfrak{c}_4 \cap \mathfrak{b}_4$
$\mathfrak{k}_4 \cap \mathfrak{c}_4$	$D = \begin{pmatrix} & d_5 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & d_5 \\ & & & & d_5 \end{pmatrix}$	igual a $\mathfrak{b}_4 \cap \mathfrak{c}_4$
$\mathfrak{k}_4 \cap \mathfrak{d}_4$	$D = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & d_5 & & & \\ & & d_5 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & d_5 \end{pmatrix}$	igual a $\mathfrak{a}_4 \cap \mathfrak{d}_4$

(5) **Caso \mathfrak{n}_5**

Por Sección 3.5 no hay que realizar un mayor análisis pues todas las derivaciones no genéricas de traza positiva pertenecen a $\mathcal{C}(\mathfrak{n}_3)$ y podemos concluir que son también fuertemente Ricci negativas.

(6) **Caso \mathfrak{n}_6**

Por cuentas realizadas en la Sección 3.6, tenemos que D es derivación de \mathfrak{n}_6 si y sólo si

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & d_3 & & \\ & & & d_1 + d_2 & \\ & & & & d_1 + d_3 \end{pmatrix}$$

Y los casos no genéricos son cuando se da alguna de las siguientes igualdades:

$$d_1 = 0; d_2 = 0; d_3 = 0; d_1 = d_2; d_1 = d_3; d_2 = d_3; d_1 + d_2 = d_3; d_1 + d_3 = d_2.$$

Sea $\mathfrak{a}_6 = \{D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_6) : d_1 = 0\}$. Cualquier derivación de $\mathfrak{a}_6 \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_6)$ está dada por

$$D = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & d_3 & & \\ & & & d_2 & \\ & & & & d_3 \end{pmatrix}$$

En este caso G_D , la componente conexa del centralizador de D en $GL(\mathfrak{n}_6)$ está dado por:

$$H = \begin{pmatrix} t & & & & \\ & a & b & & \\ & & p & q & \\ & & c & d & \\ & & & r & s \end{pmatrix}, \quad \text{con } \det_1 := ad - bc \neq 0 \text{ y } \det_2 := ps - qr \neq 0.$$

Así $\overline{G_D \cdot \mu}$ queda definido por :

$$\lambda(e_1, e_2) = \alpha e_2 + \beta e_4, \quad \lambda(e_1, e_3) = \gamma e_3 + \xi e_5$$

$$\lambda(e_1, e_4) = \tau e_2 - \alpha e_4, \quad \lambda(e_1, e_5) = \iota e_3 - \gamma e_5$$

pues,

$$H \cdot \mu(e_1, e_2) = H\mu\left(\frac{1}{t}e_1, \frac{d}{\det_1}e_2 - \frac{c}{\det_1}e_4\right) = \frac{bd}{t\det_1}e_2 + \frac{d^2}{t\det_1}e_4$$

$$H \cdot \mu(e_1, e_3) = H\mu\left(\frac{1}{t}e_1, \frac{s}{\det_2}e_3 - \frac{r}{\det_2}e_5\right) = \frac{qs}{t\det_2}e_3 + \frac{s^2}{t\det_2}e_5$$

$$H \cdot \mu(e_1, e_4) = H\mu\left(\frac{1}{t}e_1, -\frac{b}{\det_1}e_2 + \frac{a}{\det_1}e_4\right) = -\frac{b^2}{t\det_1}e_2 - \frac{bd}{t\det_1}e_4$$

$$H \cdot \mu(e_1, e_5) = H\mu\left(\frac{1}{t}e_1, -\frac{q}{\det_2}e_3 + \frac{p}{\det_2}e_5\right) = -\frac{q^2}{t\det_2}e_3 - \frac{qs}{t\det_2}e_5$$

De la definición de la aplicación momento (ver (3)) tenemos:

$$m(\lambda) = \frac{2}{|\lambda|^2} \begin{pmatrix} -2\alpha^2 - \beta^2 - 2\gamma^2 - \xi^2 - \tau^2 - \iota^2 & & & & \\ & -\beta^2 + \tau^2 & & M_{24} & \\ & & -\xi^2 + \iota^2 & & M_{35} \\ & M_{24} & & +\beta^2 - \tau^2 & \\ & & M_{35} & & \xi^2 - \iota^2 \end{pmatrix}$$

donde $M_{24} = 2\alpha(\beta - \tau)$ y $M_{35} = 2\gamma(\xi - \iota)$

Luego, $m(\overline{G_D \cdot \mu}) \cap \text{Dg}(\mathfrak{n}_6) \neq \emptyset$ si y sólo si $bd = 0$ y $qs = 0$ es decir, si y sólo si $[\alpha = 0 \wedge (\tau = 0 \text{ ó } \beta = 0)]$ y $[\gamma = 0 \wedge (\iota = 0 \text{ ó } \xi = 0)]$.

Se tiene que $m(\overline{G_D \cdot \mu}) \cap \text{Dg}(\mathfrak{n}_6) = \text{CH}(F_{12}^4, F_{13}^5) \cup \text{CH}(F_{12}^4, F_{15}^3) \cup \text{CH}(F_{14}^2, F_{13}^5) \cup \text{CH}(F_{14}^2, F_{15}^3)$.

Así, por Teorema 2.5 (iv), $D \in \mathfrak{a}_6 \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_6)_{frn}$ si y sólo si $D = aF_{14}^2 + bF_{15}^3 + E$ con $a, b > 0$ y $E \in \text{Dg}(\mathfrak{n}_6)_{>0}$. Esto implica

$$\begin{cases} 0 + a + b > 0 \\ d_2 - a > 0 \\ d_3 - b > 0 \\ d_2 + a > 0 \\ d_3 + b > 0 \end{cases}$$

y esto vale si y sólo si $d_2 > 0$ y $d_3 > 0$. Estas son ecuaciones de $\mathcal{C}(\mathfrak{n}_6) \cap \mathfrak{a}_6$ por lo que concluimos que $\mathfrak{a}_6 \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_6)_{frn} \subset \mathcal{C}(\mathfrak{n}_6)$.

Para analizar los casos no genéricos $d_2 = 0$ y $d_3 = 0$, definimos $\mathfrak{b}_6 = \{D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_6) : d_2 = 0\}$ y $\mathfrak{c}_6 = \{D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_6) : d_3 = 0\}$. Es claro que existe $f \in W_{ort}(\mathfrak{n}_6)$ tal que $\mathfrak{b}_6 = f^{-1}\mathfrak{c}_6f$, donde

$$f = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & & -1 & & & \\ & 1 & & & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Por Lema 4.1, basta ver el caso $d_2 = 0$ para resolver también el caso $d_3 = 0$. Sea

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & d_3 & & & \\ & & & d_1 & & \\ & & & & d_1 + d_3 & \end{pmatrix} \in \mathfrak{b}_6 \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_6)_{frn}$$

G_D está dado por:

$$H = \begin{pmatrix} a & & b & & & \\ & p & & & & \\ & & q & & & \\ c & & & d & & \\ & & & & & r \end{pmatrix}, \quad \text{con } \det := ad - bc \neq 0.$$

Como

$$\begin{aligned} H \cdot \mu(e_1, e_2) &= H\mu\left(\frac{d}{\det}e_1 - \frac{c}{\det}e_4, \frac{1}{p}e_2\right) = \frac{db}{p\det}e_1 + \frac{d^2}{p\det}e_4 \\ H \cdot \mu(e_1, e_3) &= H\mu\left(\frac{d}{\det}e_1 - \frac{c}{\det}e_4, \frac{1}{q}e_3\right) = \frac{dr}{q\det}e_5 \\ H \cdot \mu(e_2, e_4) &= H\mu\left(\frac{1}{p}e_2, -\frac{b}{\det}e_1 + \frac{a}{\det}e_4\right) = \frac{b^2}{p\det}e_1 + \frac{bd}{p\det}e_4 \\ H \cdot \mu(e_3, e_4) &= H\mu\left(\frac{1}{q}e_1, -\frac{b}{\det}e_1 + \frac{a}{\det}e_4\right) = \frac{br}{q\det}e_5 \end{aligned}$$

Se tiene que $\overline{G_D \cdot \mu}$ queda definido por :

$$\lambda(e_1, e_2) = \alpha e_1 + \beta e_4, \quad \lambda(e_1, e_3) = \gamma e_5,$$

$$\lambda(e_2, e_4) = \xi e_1 + \alpha e_4, \quad \lambda(e_3, e_4) = \tau e_5.$$

De (3) tenemos:

$$m(\lambda) = \frac{2}{|\lambda|^2} \begin{pmatrix} -\beta^2 + \xi^2 - \gamma^2 & & & M_{14} \\ & -2\alpha^2 - \beta^2 - \xi^2 & & \\ & & -\gamma^2 - \tau^2 & \\ M_{14} & & & \beta^2 - \tau^2 - \xi^2 \\ & & & & \gamma^2 + \tau^2 \end{pmatrix}$$

donde $M_{14} = 2\alpha\xi + 2\beta\alpha + \gamma\tau$

Luego, $m(\overline{G_D \cdot \mu}) \cap \text{Dg}(\mathfrak{n}_6) \neq \emptyset$ si y sólo si

$$\begin{aligned} M_{14} &= \frac{2b^2}{p^2 \det^2} bd + \frac{2d^2}{p^2 \det^2} bd + \frac{r^2}{q^2 \det^2} bd \\ &= bd \left(\frac{2b^2}{p^2 \det^2} + \frac{2d^2}{p^2 \det^2} + \frac{r^2}{q^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Esto implica $b = 0$ ó $d = 0$. Es decir que $m(\overline{G_D \cdot \mu}) \cap \text{Dg}(\mathfrak{n}_6) \neq \emptyset$ si y sólo si $\alpha = 0 \wedge [(\beta = 0 \text{ y } \gamma = 0) \text{ ó } (\xi = 0 \text{ y } \tau = 0)]$

Así, $m(\overline{G_D \cdot \mu}) \cap \text{Dg}(\mathfrak{n}_6) = \text{CH}(F_{24}^1, F_{34}^5) \cup \text{CH}(F_{12}^4, F_{13}^5)$.

Por Teorema 2.5 (iv), $D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_6)_{frn}$ si y sólo si $D = aF_{24}^1 + bF_{23}^5 + E$ con $a, b > 0$ y $E \in \text{Dg}(\mathfrak{n}_6)_{>0}$. Esto implica

$$\begin{cases} d_1 - a > 0 \\ 0 + a > 0 \\ d_3 + b > 0 \\ d_1 + a + b > 0 \\ d_1 + d_3 - b > 0 \end{cases}$$

y esto vale si y sólo si $d_1 + 2d_3 > 0$, $3d_1 + d_3 > 0$ y $d_1 > 0$.

Son ecuaciones de $\mathcal{C}(\mathfrak{n}_6) \cap \mathfrak{b}_6$ por lo que concluimos que $\mathfrak{b}_6 \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_6)_{frn} \subset \mathcal{C}(\mathfrak{n}_6)$.

Quedan aún estudiar los casos no genéricos cuando: $d_1 = d_2$, $d_1 = d_3$, $d_1 + d_3 = d_2$, $d_1 + d_2 = d_3$ y $d_2 = d_3$ y las intersecciones entre los anteriores.

Utilizando la misma $f \in W_{ort}(\mathfrak{n}_6)$ definida en este caso podemos ver que si $\mathfrak{d}_6 = \{D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_6) : d_1 = d_2\}$, $\mathfrak{j}_6 = \{D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_6) : d_1 = d_3\}$, $\mathfrak{k}_6 = \{D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_6) : d_1 + d_3 = d_2\}$, $\mathfrak{l}_6 = \{D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_6) : d_1 + d_2 = d_3\}$, entonces

$$\mathfrak{d}_6 = f^{-1}\mathfrak{j}_6 f \text{ y } \mathfrak{k}_6 = f^{-1}\mathfrak{l}_6 f.$$

El caso cuando $d_2 = d_3$ lo estudiamos aparte.

Veamos primero que $\mathfrak{d}_6 \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_6)_{frn} \subset \mathcal{C}(\mathfrak{n}_6)$. Sea

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & d_1 & & & \\ & & d_3 & & \\ & & & 2d_1 & \\ & & & & d_1 + d_3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{d}_6 \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_6)$$

En este caso G_D , la componente conexa del centralizador de D en $GL(\mathfrak{n}_6)$ está dado por:

$$H = \begin{pmatrix} a & b & & & \\ c & d & & & \\ & & p & & \\ & & & q & \\ & & & & r \end{pmatrix}, \text{ con } \det := ad - bc \neq 0.$$

Como,

$$\begin{aligned} H \cdot \mu(e_1, e_2) &= H\mu\left(\frac{d}{\det}e_1 - \frac{c}{\det}e_2, -\frac{b}{\det}e_1 + \frac{a}{\det}e_2\right) = \frac{da-bc}{\det^2}qe_4 \\ H \cdot \mu(e_2, e_3) &= H\mu\left(\frac{-b}{\det}e_1 + \frac{a}{\det}e_2, \frac{1}{p}e_3\right) = -\frac{br}{p\det}e_5 \\ H \cdot \mu(e_2, e_3) &= H\mu\left(\frac{d}{\det}e_1 - \frac{c}{\det}e_2, \frac{1}{p}e_3\right) = \frac{dr}{p\det}e_5 \end{aligned}$$

Se tiene que $\overline{G_D \cdot \mu}$ queda definido por :

$$\lambda(e_1, e_2) = \alpha e_4, \quad \lambda(e_2, e_3) = \beta e_5, \quad \lambda(e_1, e_3) = \gamma e_5.$$

De (3) tenemos:

$$m(\lambda) = \frac{2}{|\lambda|^2} \begin{pmatrix} -\alpha^2 - \gamma^2 & M_{12} & & & \\ M_{12} & -\alpha^2 - \beta^2 & & & \\ & & -\beta^2 - \gamma^2 & & \\ & & & \alpha^2 & \\ & & & & +\beta^2 + \gamma^2 \end{pmatrix}$$

donde $M_{12} = -\gamma\beta$.

Luego, $m(\overline{G_D \cdot \mu}) \cap \text{Dg}(\mathfrak{n}_6) \neq \emptyset$ si y sólo si $\gamma = 0$ ó $\beta = 0$. Se tiene que $m(\overline{G_D \cdot \mu}) \cap \text{Dg}(\mathfrak{n}_6) = \text{CH}(F_{12}^4, F_{23}^5) \cup \text{CH}(F_{12}^4, F_{13}^5)$.

Así, por Teorema 2.5 (iv), $D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_6)_{frn}$ si y sólo si existe $a, b > 0$, $E \in \text{Dg}(\mathfrak{n}_6)_{>0}$ tal que $D = aF_{12}^4 + bF_{23}^5 + E$. Esto implica

$$\begin{cases} d_1 + a > 0 \\ d_1 + a + b > 0 \\ d_3 + b > 0 \\ 2d_1 - a > 0 \\ d_1 + d_3 - b > 0 \end{cases}$$

y esto vale si y sólo si $3d_1 > 0$, $d_1 + d_3 > 0$, $d_1 + 2d_3 > 0$ y $4d_1 + d_3 > 0$.

Son ecuaciones de $\mathcal{C}(\mathfrak{n}_6) \cap \mathfrak{d}_6$ por lo que concluimos que $\mathfrak{d}_6 \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_6)_{frn} \subset \mathcal{C}(\mathfrak{n}_6)$ y por Lema 4.1 también podemos concluir que $\mathfrak{j}_6 \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_6)_{frn} \subset \mathcal{C}(\mathfrak{n}_6)$.

Continuando con el otro caso no genérico, sea

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & d_3 & & \\ & & & d_1 + d_2 & \\ & & & & d_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{k}_6 \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_6)$$

En este caso G_D está dado por:

$$H = \begin{pmatrix} p & & & & \\ & a & & & b \\ & & q & & \\ & & & r & \\ c & & & & d \end{pmatrix}, \quad \text{con } \det := ad - bc \neq 0.$$

Así $\overline{G_D \cdot \mu}$ queda definido por :

$$\lambda(e_1, e_2) = \alpha e_4, \quad \lambda(e_1, e_3) = \beta e_2 + \gamma e_5, \quad \lambda(e_1, e_5) = \xi e_4,$$

pues,

$$\begin{aligned} H \cdot \mu(e_1, e_2) &= H\mu\left(\frac{1}{p}e_1, \frac{d}{\det}e_2 - \frac{c}{\det}e_5\right) = \frac{d}{p\det}re_4 \\ H \cdot \mu(e_1, e_3) &= H\mu\left(\frac{1}{p}e_1, \frac{1}{q}e_3\right) = \frac{1}{pq}(be_2 + de_5) \\ H \cdot \mu(e_1, e_5) &= H\mu\left(\frac{1}{p}e_1, -\frac{b}{\det}e_2 + \frac{a}{\det}e_5\right) = -\frac{b}{p\det}re_4 \end{aligned}$$

De la definición de la aplicación momento (ver (3)) tenemos:

$$m(\lambda) = \frac{2}{|\lambda|^2} \begin{pmatrix} -\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 - \xi^2 & & & & \\ & -\alpha^2 + \beta^2 & & & \\ & & -\beta^2 - \gamma^2 & & \\ & & & +\alpha^2 + \xi^2 & \\ & & & & +\gamma^2 - \xi^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} M_{25} \\ \\ \\ \\ M_{25} \end{matrix}$$

donde,

$$\begin{aligned} M_{25} &= -\alpha\xi + \beta\gamma = \frac{r^2}{p^2\det^2}bd + \frac{1}{p^2q^2}bd \\ &= bd\left(\frac{r^2}{p^2\det^2} + \frac{1}{p^2q^2}\right). \end{aligned}$$

Luego, $m(\overline{G_D \cdot \mu}) \cap \text{Dg}(\mathfrak{n}_6) \neq \emptyset$ si y sólo si $bd = 0$ es decir, si $b = 0$ ó $d = 0$, esto implica

$$\beta = 0 \wedge \xi = 0 \text{ ó } \alpha = 0 \wedge \gamma = 0.$$

Se tiene que $m(\overline{G_D \cdot \mu}) \cap \text{Dg}(\mathfrak{n}_6) = \text{CH}(F_{12}^4, F_{13}^5) \cup \text{CH}(F_{13}^2, F_{15}^4)$.

Así, por Teorema 2.5 (iv), $D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_6)_{frn}$ si y sólo si $D = aF_{13}^2 + bF_{15}^4 + E$ con $a, b > 0$ y $E \in \text{Dg}(\mathfrak{n}_6)_{>0}$. Esto implica

$$\begin{cases} d_1 + a + b > 0 \\ d_2 - a > 0 \\ d_3 + a > 0 \\ d_1 + d_2 - b > 0 \\ d_2 + b > 0 \end{cases}$$

y esto vale si y sólo si $d_1 + d_2 > 0$, $d_1 + 2d_2 > 0$, $d_2 + d_3 > 0$ y $2d_1 + 2d_2 > 0$.

Estas son ecuaciones de $\mathcal{C}(\mathfrak{n}_6) \cap \mathfrak{k}_6$ por lo que concluimos que $\mathfrak{k}_6 \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_6)_{frn} \subset \mathcal{C}(\mathfrak{n}_6)$ y $\mathfrak{l}_6 \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_6)_{frn} \subset \mathcal{C}(\mathfrak{n}_6)$.

Para el último caso, sea $\mathfrak{p}_6 = \{D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_6) : d_2 = d_3\}$, y sea

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & d_2 & & \\ & & & d_1 + d_2 & \\ & & & & d_1 + d_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{p}_6 \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_6)$$

G_D está dado por:

$$H = \begin{pmatrix} t & & & & \\ & a & b & & \\ & c & d & & \\ & & & p & q \\ & & & r & s \end{pmatrix}, \quad \text{con } \det_1 := ad - bc \neq 0 \text{ y } \det_2 := ps - qr \neq 0.$$

Como,

$$\begin{aligned} H \cdot \mu(e_1, e_2) &= H\mu\left(\frac{1}{t}e_1, \frac{d}{\det_1}e_2 - \frac{c}{\det_1}e_3\right) = \frac{d}{t\det_1}(pe_4 + re_5) - \frac{c}{t\det_1}(qe_4 + se_5) \\ H \cdot \mu(e_1, e_3) &= H\mu\left(\frac{1}{t}e_1, -\frac{b}{\det_1}e_2 + \frac{a}{\det_1}e_3\right) = -\frac{b}{t\det_1}(pe_4 + re_5) + \frac{a}{t\det_1}(qe_4 + se_5) \end{aligned}$$

que $\mathfrak{a}_7 = f^{-1}\mathfrak{b}_7f = g^{-1}\mathfrak{c}_7g = h^{-1}\mathfrak{d}_7h$, donde

$$f = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & -1 & & & \\ & 1 & & & & \\ \hline & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{array} \right), \quad g = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & 1 & & \\ & & & & & \\ \hline & & & & & \\ & & & & 1 & \\ \hline & & & & & 1 \end{array} \right),$$

$$h = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & -1 & & & \\ & 1 & & & & \\ \hline & & & 1 & & \\ & & & & & \\ & & & & & 1 \end{array} \right).$$

Por Lema 4.1 basta probar que $\mathfrak{a}_7 \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_7) \subset \mathcal{C}(\mathfrak{n}_7)$ para probar los casos $d_1 = d_5$, $d_2 = d_5$ y $d_2 = d_4$.

Sea

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & & \\ & d_2 & & & & \\ & & d_1 + d_2 & & & \\ & & & d_1 & & \\ & & & & & d_5 \end{pmatrix} \in \mathfrak{a}_7 \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_7)$$

En este caso G_D , la componente conexa del centralizador de D en $GL(\mathfrak{n}_7)$ está dado por:

$$H = \begin{pmatrix} a & & & b & & \\ & p & & & & \\ & & q & & & \\ c & & & d & & \\ & & & & & r \end{pmatrix}, \quad \text{con } \det := ad - bc \neq 0.$$

Como,

$$\begin{aligned} H \cdot \mu(e_1, e_2) &= H \mu\left(\frac{d}{\det}e_1 - \frac{c}{\det}e_4, \frac{1}{p}e_2\right) = \frac{dq}{p\det}e_3 \\ H \cdot \mu(e_2, e_4) &= H \mu\left(\frac{1}{p}e_2, -\frac{b}{\det}e_1 + \frac{a}{\det}e_4\right) = \frac{bq}{p\det}e_3 \end{aligned}$$

Se tiene que $\overline{G_D \cdot \mu}$ queda definido por :

$$\lambda(e_1, e_2) = \alpha e_3, \quad \lambda(e_2, e_4) = \beta e_3.$$

De (3) tenemos:

$$m(\lambda) = \frac{2}{|\lambda|^2} \begin{pmatrix} -\alpha^2 & & & & M_{14} \\ & -\alpha^2 - \beta^2 & & & \\ & & +\alpha^2 + \beta^2 & & \\ M_{14} & & & & -\beta^2 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

donde $M_{14} = \alpha\beta$.

Luego, $m(\overline{G_D \cdot \mu}) \cap \text{Dg}(\mathfrak{n}_7) \neq \emptyset$ si y sólo si $\alpha = 0$ ó $\beta = 0$. Se tiene que $m(\overline{G_D \cdot \mu}) \cap \text{Dg}(\mathfrak{n}_7) = \{F_{12}^3\} \cup \{F_{24}^3\}$.

Así, por Teorema 2.5 (iv), $D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_7)_{frn}$ si y sólo si existe $a > 0$, $E \in \text{Dg}(\mathfrak{n}_7)_{>0}$ tal que $D = aF_{24}^3 + E$. Esto implica

$$\begin{cases} d_1 > 0 \\ d_2 + a > 0 \\ d_1 + d_2 - a > 0 \\ d_1 + a > 0 \\ d_5 > 0 \end{cases}$$

y esto vale si y sólo si $2d_1 + d_2 > 0$ y $d_1 + 2d_2 > 0$ con $d_1 > 0$.

Son ecuaciones de $\mathcal{C}(\mathfrak{n}_7) \cap \mathfrak{a}_7$ por lo que concluimos que $\mathfrak{a}_7 \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_7)_{frn} \subset \mathcal{C}(\mathfrak{n}_7)$.

Notemos que en los casos $\mathfrak{j}_7 = \{D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_7) : d_4 = d_5\}$ y $\mathfrak{h}_7 = \{D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_7) : d_1 = d_2\}$, $\overline{G_D \cdot \mu}$ está dado por $\lambda(e_1, e_2) = \alpha e_3$ con $\alpha \geq 0$ y valen las cuentas hechas en la Sección 3.7 para el caso genérico.

Los casos $\mathfrak{k}_7 = \{D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_7) : d_1 = 0\}$ y $\mathfrak{p}_7 = \{D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_7) : d_2 = 0\}$ son análogos en el sentido que existe $f \in W_{ort}(\mathfrak{n}_7)$ definida en este caso tal que $f^{-1}\mathfrak{p}_7 f = \mathfrak{k}_7$. Veamos que $\mathfrak{k}_7 \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_7)_{frn} \subset \mathcal{C}(\mathfrak{n}_7)$. Sea

$$D = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & d_2 & & \\ & & & d_4 & \\ & & & & d_5 \end{pmatrix} \in \mathfrak{k}_7 \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_7)$$

En este caso G_D está dado por:

$$H = \begin{pmatrix} p & & & & \\ & a & b & & \\ & c & d & & \\ & & & q & \\ & & & & r \end{pmatrix}, \quad \text{con } \det := ad - bc \neq 0.$$

Como,

$$\begin{aligned} H \cdot \mu(e_1, e_2) &= H\mu\left(\frac{1}{p}e_1, \frac{d}{\det}e_2 - \frac{c}{\det}e_3\right) = \frac{d}{p\det}(be_2 + de_3) \\ H \cdot \mu(e_1, e_3) &= H\mu\left(\frac{1}{p}e_1, -\frac{b}{\det}e_2 + \frac{a}{\det}e_3\right) = -\frac{b}{p\det}(be_2 + de_3) \end{aligned}$$

Se tiene que $\overline{G_D \cdot \mu}$ queda definido por :

$$\lambda(e_1, e_2) = \alpha e_2 + \beta e_3, \quad \lambda(e_1, e_3) = \gamma e_2 - \alpha e_3.$$

De (3) tenemos:

$$m(\lambda) = \frac{2}{|\lambda|^2} \begin{pmatrix} -2\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 & & & & \\ & -\beta^2 + \gamma^2 & M_{23} & & \\ & M_{23} & \beta^2 - \gamma^2 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

donde $M_{23} = 2\alpha(\beta - \gamma)$.

Luego, $m(\overline{G_D \cdot \mu}) \cap \text{Dg}(\mathfrak{n}_7) \neq \emptyset$ si y sólo si $\alpha = 0$ ó $\beta = \gamma$. Se tiene que $m(\overline{G_D \cdot \mu}) \cap \text{Dg}(\mathfrak{n}_7) = \text{CH}(F_{12}^3, F_{13}^2) \cup \text{CH}(F_{12}^3, F_{13}^2, F_{12}^2, F_{13}^3)$.

Así, por Teorema 2.5 (iv), $D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_7)_{frn}$ si y sólo si existe $a, b > 0$, $E \in \text{Dg}(\mathfrak{n}_7)_{>0}$ tal que $D = aF_{12}^3 + bF_{13}^2 + E$. Esto implica

$$\begin{cases} a + b > 0 \\ d_2 + a - b > 0 \\ d_2 - a + b > 0 \\ d_4 > 0 \\ d_5 > 0 \end{cases}$$

y esto vale si y sólo si $d_2 > 0$ y $d_4, d_5 > 0$.

Son ecuaciones de $\mathcal{C}(\mathfrak{n}_7) \cap \mathfrak{k}_7$ por lo que concluimos que $\mathfrak{k}_7 \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_7)_{frn} \subset \mathcal{C}(\mathfrak{n}_7)$.

Queda por analizar el caso $\mathfrak{l}_7 = \{D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_7) : d_1 + d_2 = d_4\}$ y las intersecciones entre los casos vistos. Es fácil ver que este caso es análogo a $\mathfrak{m}_7 = \{D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_7) : d_1 + d_2 = d_5\}$. En este caso $D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_7)$ está dada por:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & d_1 + d_2 & & \\ & & & d_1 + d_2 & \\ & & & & d_5 \end{pmatrix} \in \mathfrak{l}_7 \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_7)$$

y G_D , la componente conexa del centralizador de D en $GL(\mathfrak{n}_7)$ queda definida por:

$$H = \begin{pmatrix} p & & & & \\ & q & & & \\ & & a & b & \\ & & d & c & \\ & & & & r \end{pmatrix}, \quad \text{con } \det := ad - bc \neq 0.$$

Como,

$$H \cdot \mu(e_1, e_2) = H\mu\left(\frac{1}{p}e_1, \frac{1}{q}e_2\right) = \frac{1}{pq}(ae_3 + ce_4)$$

Se tiene que $\overline{G_D \cdot \mu}$ queda definido por :

$$\lambda(e_1, e_2) = \alpha e_3 + \beta e_4.$$

De (3) tenemos:

$$m(\lambda) = \frac{2}{|\lambda|^2} \begin{pmatrix} -\alpha^2 - \beta^2 & & & & \\ & -\alpha^2 - \beta^2 & & & \\ & & \alpha^2 & M_{34} & \\ & & M_{34} & \beta^2 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

donde $M_{34} = \alpha\beta$.

Luego, $m(\overline{G_D \cdot \mu}) \cap \text{Dg}(\mathfrak{n}_7) \neq \emptyset$ si y sólo si $\alpha = 0$ ó $\beta = 0$. Se tiene que $m(\overline{G_D \cdot \mu}) \cap \text{Dg}(\mathfrak{n}_7) = \{F_{12}^3\} \cup \{F_{12}^4\}$.

Así, por Teorema 2.5 (iv), $D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_7)_{frn}$ si y sólo si existe $a > 0$, $E \in \text{Dg}(\mathfrak{n}_7)_{>0}$ tal que $D = aF_{12}^4 + E$. Esto implica

$$\begin{cases} d_1 - a > 0 \\ d_2 - a > 0 \\ d_1 + d_2 > 0 \\ d_1 + d_2 + a > 0 \\ d_5 > 0 \end{cases}$$

y esto vale si y sólo si $2d_1 + d_2 > 0$, $d_1 + 2d_2 > 0$, $d_1 + d_2 > 0$ y $d_5 > 0$ y estas son ecuaciones de $\mathcal{C}(\mathfrak{n}_7) \cap \mathfrak{l}_7$.

En el análisis de la intersección de casos, surgieron algunos que requieren un mayor estudio. Vemos estos a continuación y dejamos el resto de las intersecciones sin escribir dado que resultan análogos a los ya realizados para el caso \mathfrak{n}_4 .

Para analizar los casos no genéricos $\mathfrak{a}_7 \cap \mathfrak{c}_7$ y $\mathfrak{b}_7 \cap \mathfrak{d}_7$ notemos que existe $f \in W_{ort}(\mathfrak{n}_7)$ tal que $\mathfrak{a}_7 \cap \mathfrak{c}_7 = f^{-1}(\mathfrak{b}_7 \cap \mathfrak{d}_7)f$, donde

$$f = \left(\begin{array}{c|ccc} & 1 & & \\ \hline -1 & & & \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \\ & & & & 1 \end{array} \right).$$

Por Lema 4.1, basta ver el caso $\mathfrak{a}_7 \cap \mathfrak{c}_7$. Sea

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & d_1 + d_2 & & \\ & & & d_1 & \\ & & & & d_1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{a}_7 \cap \mathfrak{c}_7 \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_7)$$

G_D está dado por:

$$H = \begin{pmatrix} a & & b & c \\ & p & & \\ & & q & \\ d & & e & f \\ g & & h & j \end{pmatrix}$$

Se tiene que $\overline{G_D \cdot \mu}$ queda definido por :

$$\lambda(e_1, e_2) = \alpha e_3$$

De (3) tenemos:

$$m(\lambda) = \frac{1}{\alpha^2} \begin{pmatrix} -\alpha^2 & & & \\ & -\alpha^2 & & \\ & & +\alpha^2 & \\ & & & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Así, $m(\overline{G_D \cdot \mu}) \cap \text{Dg}(\mathfrak{n}_6) = F_{12}^3$.

Por Teorema 2.5 (iv), $D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_7)_{frn}$ si y sólo si $D = aF_{12}^3 + E$ con $a > 0$ y $E \in \text{Dg}(\mathfrak{n}_7)_{>0}$. Esto implica

$$\begin{cases} d_1 + a > 0 \\ d_2 + a > 0 \\ d_1 + d_2 - a > 0 \\ d_1 > 0 \\ d_1 > 0 \end{cases}$$

y esto vale si y sólo si $d_1 + 2d_2 > 0$, $2d_1 + d_2 > 0$ y $d_1 > 0$.

Son ecuaciones de $\mathcal{C}(\mathfrak{n}_7) \cap \mathfrak{a}_7 \cap \mathfrak{c}_7$ por lo que concluimos que $\mathfrak{a}_7 \cap \mathfrak{c}_7 \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_7)_{frn} \subset \mathcal{C}(\mathfrak{n}_7)$.

Analicemos ahora el caso $\mathfrak{a}_7 \cap \mathfrak{m}_7$ que es análogo a los casos $\mathfrak{b}_7 \cap \mathfrak{m}_7$, $\mathfrak{c}_7 \cap \mathfrak{l}_7$, $\mathfrak{d}_7 \cap \mathfrak{l}_7$ en el sentido que existen $f, g, h \in W_{ort}(\mathfrak{n}_7)$ tal que $\mathfrak{a}_7 \cap \mathfrak{m}_7 = f^{-1}(\mathfrak{b}_7 \cap \mathfrak{m}_7)f =$

$g^{-1}(\mathfrak{c}_7 \cap \mathfrak{l}_7)g = h^{-1}(\mathfrak{d}_7 \cap \mathfrak{l}_7)h$, donde

$$f = \left(\begin{array}{c|cc} & 1 & \\ \hline -1 & & \\ \hline & 1 & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{array} \right), \quad g = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & & \\ \hline & 1 & \\ \hline & & -1 \\ & & & 1 \end{array} \right), \quad h = \left(\begin{array}{c|cc} & 1 & \\ \hline -1 & & \\ \hline & 1 & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{array} \right).$$

Por Lema 4.1 basta probar que $\mathfrak{a}_7 \cap \mathfrak{m}_7 \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_4)_{frn} \subset \mathcal{C}(\mathfrak{n}_4)$ para probar los otros casos. Sea

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & d_5 & & \\ & & & d_1 & \\ & & & & d_5 \end{pmatrix} \in \mathfrak{a}_7 \cap \mathfrak{m}_7 \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_7)_{frn}$$

G_D está dado por:

$$H = \begin{pmatrix} a & & b & & \\ & t & & & \\ & & p & & q \\ c & & & d & \\ & & r & & s \end{pmatrix}, \quad \text{con } \det1 := ad - bc \neq 0 \quad \text{y} \quad \det2 := ps - rq \neq 0.$$

Como

$$\begin{aligned} H \cdot \mu(e_1, e_2) &= H\mu\left(\frac{d}{\det1}e_1 - \frac{c}{\det1}e_4, \frac{1}{t}e_2\right) = \frac{d}{t\det1}(pe_3 + re_5) \\ H \cdot \mu(e_4, e_2) &= H\mu\left(-\frac{b}{\det1}e_1 + \frac{a}{\det1}e_4, \frac{1}{t}e_2\right) = -\frac{b}{t\det1}(pe_3 + re_5) \end{aligned}$$

Se tiene que $\overline{G_D \cdot \mu}$ queda definido por :

$$\lambda(e_1, e_2) = \alpha e_3 + \beta e_5, \quad \lambda(e_4, e_2) = \gamma e_3 + \xi e_5.$$

De (3) tenemos:

$$m(\lambda) = \frac{2}{|\lambda|^2} \begin{pmatrix} -\alpha^2 - \beta^2 & & & M_{14} & \\ & -\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 - \xi^2 & & & \\ & & \alpha^2 + \gamma^2 & & M_{35} \\ M_{14} & & & -\gamma^2 - \xi^2 & \\ & & M_{35} & & \beta^2 + \xi^2 \end{pmatrix}$$

donde $M_{14} = -\alpha\gamma - \beta\xi$ y $M_{35} = \alpha\beta + \gamma\xi$

Luego, $m(\overline{G_D \cdot \mu}) \cap \text{Dg}(\mathfrak{n}_7) \neq \emptyset$ si y sólo si $(\alpha, \xi) \perp (\gamma, \beta)$ y $(\alpha, \xi) \perp (\beta, \gamma)$ esto pasa si y sólo si $\alpha = 0 \wedge \xi = 0$ ó $\gamma = \pm\beta$.

Notemos que $\alpha = 0 \wedge \xi = 0$ implica $(d = 0 \text{ y } r = 0)$ ó $(b = 0 \text{ y } p = 0)$, es decir que si $\alpha = 0 \wedge \xi = 0$, entonces también $\beta = 0$ ó $\gamma = 0$.

Así, $m(\overline{G_D \cdot \mu}) \cap \text{Dg}(\mathfrak{n}_7) = \{F_{12}^5\} \cup \{F_{42}^3\} \cup \text{CH}(F_{12}^3, F_{12}^5, F_{42}^3, F_{42}^5)$.

Por Teorema 2.5 (iv), $D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_7)_{frn}$ si y sólo si $D = aF_{12}^5 + E$ con $a > 0$ y $E \in \text{Dg}(\mathfrak{n}_7)_{>0}$. Esto implica

$$\begin{cases} d_1 - a > 0 \\ d_2 - a > 0 \\ d_5 > 0 \\ d_1 > 0 \\ d_5 + a > 0 \end{cases}$$

y esto vale si y sólo si $d_1 + d_5 > 0$, $d_2 + d_5 > 0$ y $d_5 > 0$, recordemos que en este caso $d_5 = d_1 + d_2$. Es decir que son ecuaciones de $\mathcal{C}(\mathfrak{n}_7) \cap \mathfrak{a}_7 \cap \mathfrak{m}_7$ por lo que concluimos que $\mathfrak{a}_7 \cap \mathfrak{m}_7 \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_7)_{frn} \subset \mathcal{C}(\mathfrak{n}_7)$.

Queda por estudiar el caso $\mathfrak{j}_7 \cap \mathfrak{l}_7$ y para ello definimos

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & d_4 & & \\ & & & d_4 & \\ & & & & d_4 \end{pmatrix} \in \mathfrak{j}_7 \cap \mathfrak{l}_7 \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_7)$$

G_D está dado por:

$$H = \begin{pmatrix} p & & & & \\ & q & & & \\ & & a & b & c \\ & & d & e & f \\ & & g & h & j \end{pmatrix}$$

Se tiene que $\overline{G_D \cdot \mu}$ queda definido por :

$$\lambda(e_1, e_2) = \alpha e_3 + \beta e_4 + \gamma e_5.$$

De (3) tenemos:

$$m(\lambda) = \frac{1}{\alpha^2} \begin{pmatrix} -\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 & & & & \\ & -\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 & & & \\ & & +\alpha^2 & M_{34} & M_{35} \\ & & M_{34} & \beta^2 & M_{45} \\ & & M_{35} & M_{45} & \gamma^2 \end{pmatrix},$$

donde $M_{34} = \alpha\beta$, $M_{35} = \alpha\gamma$ y $M_{45} = \beta\gamma$.

Por esto $m(\overline{G_D \cdot \mu}) \cap \text{Dg}(\mathfrak{n}_7) \neq \emptyset$ si y sólo si $(\alpha = 0 \wedge \beta = 0)$ ó $(\alpha = 0 \wedge \gamma = 0)$ ó $(\beta = 0 \wedge \gamma = 0)$.

Así, $m(\overline{G_D \cdot \mu}) \cap \text{Dg}(\mathfrak{n}_6) = \{F_{12}^4\} \cup \{F_{12}^3\} \cup \{F_{12}^5\}$.

Por Teorema 2.5 (iv), $D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_7)_{frn}$ si y sólo si $D = aF_{12}^4 + E$ con $a > 0$ y $E \in \text{Dg}(\mathfrak{n}_7)_{>0}$.

Esto implica

$$\begin{cases} d_1 + a > 0 \\ d_2 + a > 0 \\ d_4 - a > 0 \\ d_4 > 0 \\ d_4 > 0 \end{cases}$$

y esto vale si y sólo si $d_1 + d_4 > 0$, $d_2 + d_4 > 0$ y $d_4 > 0$. Recordemos que en este caso $d_4 = d_1 + d_2$.

Son ecuaciones de $\mathcal{C}(\mathfrak{n}_7) \cap \mathfrak{j}_7 \cap \mathfrak{l}_7$, por lo que concluimos que $\mathfrak{j}_7 \cap \mathfrak{l}_7 \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_7)_{frn} \subset \mathcal{C}(\mathfrak{n}_7)$.

De todo lo anterior decimos que $\mathcal{C}(\mathfrak{n}_7) = \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_7)_{frn}$.

(8) Caso \mathfrak{n}_8

Tenemos que D es derivación de \mathfrak{n}_8 si y sólo si

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & d_1 + d_2 & & \\ & & & 2d_1 + d_2 & \\ & & & & d_5 \end{pmatrix}$$

Por Lema 4.3 y lo hecho en [DL19, Ejemplo 3.7], vamos a estudiar los casos no genéricos cuando

$$d_1 = d_5; \quad d_2 = d_5; \quad d_1 + d_2 = d_5; \quad 2d_1 + d_2 = d_5.$$

No existe $f \in W_{ort}(\mathfrak{n}_8)$ tal que conjugue algunos de estos subespacios en otro, por lo que habrá que analizar cada caso en particular.

Sean $\mathfrak{a}_8 = \{D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_8) : d_1 = d_5\}$, $\mathfrak{b}_8 = \{D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_8) : d_2 = d_5\}$, $\mathfrak{c}_8 = \{D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_8) : d_1 + d_2 = d_5\}$, $\mathfrak{d}_8 = \{D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_8) : 2d_1 + d_2 = d_5\}$.

Queremos probar ahora que $\mathfrak{a}_8 \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_8)_{frn} \subset \mathcal{C}(\mathfrak{n}_8)$.

Sea

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & d_1 + d_2 & & \\ & & & 2d_1 + d_2 & \\ & & & & d_1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{a}_8 \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_8)$$

En este caso G_D , la componente conexa del centralizador de D en $GL(\mathfrak{n}_8)$ está dado por:

$$H = \begin{pmatrix} a & & & b \\ & p & & \\ & & q & \\ c & & & r \\ & & & & d \end{pmatrix}, \quad \text{con } \det := ad - bc \neq 0.$$

Así $\overline{G_D \cdot \mu}$ queda definido por :

$$\lambda(e_1, e_2) = \alpha e_3, \quad \lambda(e_1, e_3) = \beta e_4, \quad \lambda(e_5, e_2) = \gamma e_3, \quad \lambda(e_5, e_3) = \xi e_4,$$

pues,

$$\begin{aligned} H \cdot \mu(e_1, e_2) &= H\mu\left(\frac{d}{\det}e_1 - \frac{c}{\det}e_5, \frac{1}{p}e_2\right) = \frac{qd}{p\det}e_3 \\ H \cdot \mu(e_1, e_3) &= H\mu\left(\frac{d}{\det}e_1 - \frac{c}{\det}e_5, \frac{1}{q}e_3\right) = \frac{rd}{q\det}e_4 \\ H \cdot \mu(e_5, e_2) &= H\mu\left(-\frac{b}{\det}e_1 + \frac{a}{\det}e_5, \frac{1}{p}e_2\right) = -\frac{bq}{p\det}e_3 \\ H \cdot \mu(e_5, e_3) &= H\mu\left(-\frac{b}{\det}e_1 + \frac{a}{\det}e_5, \frac{1}{q}e_3\right) = -\frac{br}{q\det}e_4 \end{aligned}$$

De la definición de la aplicación momento (ver (3)) tenemos:

$$m(\lambda) = \frac{2}{|\lambda|^2} \begin{pmatrix} -\alpha^2 - \beta^2 & & & & M_{15} \\ & -\alpha^2 - \gamma^2 & & & \\ & & +\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - \xi^2 & & \\ & & & +\beta^2 + \gamma^2 & \\ M_{15} & & & & -\gamma^2 - \xi^2 \end{pmatrix}$$

donde,

$$M_{15} = \alpha\gamma + \beta\xi = -bd\left(\frac{q^2}{p^2\det^2} + \frac{r^2}{q^2\det^2}\right).$$

Luego, $m(\overline{G_D \cdot \mu}) \cap \text{Dg}(\mathfrak{n}_8) \neq \emptyset$ si y sólo si $bd = 0$ es decir, si $b = 0$ ó $d = 0$, esto implica

$$(\alpha = 0 \wedge \beta = 0) \text{ ó } (\gamma = 0 \wedge \xi = 0)$$

Se tiene que $m(\overline{G_D \cdot \mu}) \cap \text{Dg}(\mathfrak{n}_8) = \text{CH}(F_{25}^3, F_{35}^4) \cup \text{CH}(F_{12}^3, F_{13}^4)$.

Así, por Teorema 2.5 (iv), $D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_8)_{frn}$ si y sólo si $D = aF_{25}^3 + bF_{35}^4 + E$ con $a, b > 0$ y $E \in \text{Dg}(\mathfrak{n}_8)_{>0}$. Esto implica

$$\begin{cases} d_1 > 0 \\ d_2 + a > 0 \\ d_1 + d_2 + b - a > 0 \\ 2d_1 + d_2 - b > 0 \\ d_1 + a + b > 0 \end{cases}$$

y esto vale si y sólo si $2d_1 + d_2 > 0$, $d_1 + d_2 > 0$ y $d_1 > 0$.

Estas son ecuaciones de $\mathcal{C}(\mathfrak{n}_8) \cap \mathfrak{a}_8$ por lo que concluimos que $\mathfrak{a}_8 \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_8)_{frn} \subset \mathcal{C}(\mathfrak{n}_8)$.
Veamos ahora el caso $d_2 = d_5$ es decir, probemos que $\mathfrak{b}_8 \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_8)_{frn} \subset \mathcal{C}(\mathfrak{n}_8)$.

Sea

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & d_1 + d_2 & & \\ & & & 2d_1 + d_2 & \\ & & & & d_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{b}_4 \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_8)$$

En este caso G_D está dado por:

$$H = \begin{pmatrix} p & & & & \\ & a & & b & \\ & & q & & \\ & & & r & \\ & c & & & d \end{pmatrix}, \quad \text{con } \det := ad - bc \neq 0.$$

Así $\overline{G_D \cdot \mu}$ queda definido por :

$$\lambda(e_1, e_2) = \alpha e_3, \quad \lambda(e_1, e_3) = \beta e_4, \quad \lambda(e_1, e_5) = \gamma e_3,$$

pues,

$$\begin{aligned} H \cdot \mu(e_1, e_2) &= H \mu\left(\frac{1}{p}e_1, \frac{d}{\det}e_2 - \frac{c}{\det}e_5\right) = \frac{d}{p\det}qe_3 \\ H \cdot \mu(e_1, e_3) &= H \mu\left(\frac{1}{p}e_1, \frac{1}{q}e_3\right) = \frac{1}{pq}re_4 \\ H \cdot \mu(e_1, e_5) &= H \mu\left(\frac{1}{p}e_1, -\frac{b}{\det}e_2 + \frac{a}{\det}e_5\right) = -\frac{b}{p\det}qe_3 \end{aligned}$$

Por (3) tenemos:

$$m(\lambda) = \frac{2}{|\lambda|^2} \begin{pmatrix} -\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 & & & & \\ & -\alpha^2 & & & \\ & & +\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 & & \\ & & & +\beta & \\ & & & & -\gamma^2 \end{pmatrix}$$

donde $M_{25} = \alpha\gamma$. Luego, $m(\overline{G_D \cdot \mu}) \cap \text{Dg}(\mathfrak{n}_8) \neq \emptyset$ si y sólo si $\alpha = 0$ ó $\gamma = 0$.

Se tiene que $m(\overline{G_D \cdot \mu}) \cap \text{Dg}(\mathfrak{n}_8) = \text{CH}(F_{13}^4, F_{15}^3) \cup \text{CH}(F_{12}^3, F_{13}^4)$.

Así, por Teorema 2.5 (iv), $D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_8)_{frn}$ si y sólo si $D = aF_{13}^4 + bF_{15}^3 + E$ con $a, b > 0$ y $E \in \text{Dg}(\mathfrak{n}_8)_{>0}$. Esto implica

$$\begin{cases} d_1 + a + b > 0 \\ d_2 > 0 \\ d_1 + d_2 + a - b > 0 \\ 2d_1 + d_2 - a > 0 \\ d_2 + b > 0 \end{cases}$$

y esto vale si y sólo si $d_1 + d_2 > 0$, $2d_1 + d_2 > 0$ y $d_2 > 0$.

Estas son ecuaciones de $\mathcal{C}(\mathfrak{n}_8) \cap \mathfrak{b}_8$ y entonces, $\mathfrak{b}_8 \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_8)_{frn} \subset \mathcal{C}(\mathfrak{n}_8)$.

Para el próximo caso, cuando $d_1 + d_2 = d_5$, notemos que $D \in \mathfrak{c}_8 \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_8)_{frn}$ está dado por:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & d_1 + d_2 & & \\ & & & 2d_1 + d_2 & \\ & & & & d_1 + d_2 \end{pmatrix}$$

Si $D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_8)_{frn}$ entonces debe cumplir la condición necesaria de ser positiva en el centro, por lo que tendríamos que $d_1 + d_2 > 0$ y $2d_1 + d_2 > 0$, y estas son ecuaciones del cono $\mathcal{C}(\mathfrak{n}_8)$ por lo realizado en la Sección 3.8. Luego podemos concluir que $\mathfrak{c}_8 \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_8)_{frn} \subset \mathcal{C}(\mathfrak{n}_8)$.

Para estudiar ahora el siguiente caso, trabajamos en el subespacio $\mathfrak{d}_8 = \{D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_8) : 2d_1 + d_2 = d_5\}$. Sea

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & d_1 + d_2 & & \\ & & & 2d_1 + d_2 & \\ & & & & 2d_1 + d_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{d}_8 \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_8)$$

G_D está dado por:

$$H = \begin{pmatrix} p & & & & \\ & q & & & \\ & & r & & \\ & & & a & b \\ & & & c & d \end{pmatrix}, \quad \text{con } \det := ad - bc \neq 0.$$

Como,

$$\begin{aligned} H \cdot \mu(e_1, e_2) &= H\mu\left(\frac{1}{p}e_1, \frac{1}{q}e_2\right) = \frac{r}{pq}e_3 \\ H \cdot \mu(e_1, e_3) &= H\mu\left(\frac{1}{p}e_1, \frac{1}{r}e_3\right) = \frac{1}{pr}(ae_4 + ce_5) \end{aligned}$$

Se tiene que $\overline{G_D \cdot \mu}$ queda definido por :

$$\lambda(e_1, e_2) = \alpha e_3, \quad \lambda(e_1, e_3) = \beta e_4 + \gamma e_5.$$

De (3) tenemos:

$$m(\lambda) = \frac{2}{|\lambda|^2} \begin{pmatrix} -\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 & & & & \\ & -\alpha^2 & & & \\ & & +\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 & & \\ & & & +\beta^2 & M_{45} \\ & & & M_{45} & \gamma^2 \end{pmatrix}$$

donde $M_{45} = \beta\gamma$. Luego, $m(\overline{G_D \cdot \mu}) \cap \text{Dg}(\mathfrak{n}_8) \neq \emptyset$ si y sólo si $\beta = 0$ ó $\gamma = 0$.

Se tiene que $m(\overline{G_D \cdot \mu}) \cap \text{Dg}(\mathfrak{n}_8) = \text{CH}(F_{12}^3, F_{13}^4) \cup \text{CH}(F_{12}^3, F_{13}^5)$.

Así, por Teorema 2.5 (iv), $D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_8)_{frn}$ si y sólo si existe $a, b > 0$, $E \in \text{Dg}(\mathfrak{n}_8)_{>0}$ tal que $D = aF_{12}^3 + bF_{13}^5 + E$. Esto implica

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1 + a + b > 0 \\ d_2 + a > 0 \\ d_1 + d_2 - a + b > 0 \\ 2d_1 + d_2 > 0 \\ 2d_1 + d_2 - b > 0 \end{array} \right.$$

y esto vale si y sólo si $d_1 + d_2 > 0$ y $2d_1 + d_2 > 0$, las cuales son ecuaciones de $\mathcal{C}(\mathfrak{n}_8)$.

Queda ver ahora qué ocurre en la intersección de los subespacios genéricos, para ello definimos: $\mathfrak{j}_8 = \{D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_8) : d_1 = d_2\}$, $\mathfrak{k}_8 = \{D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_8) : d_1 = -d_2\}$, $\mathfrak{p}_8 = \{D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_8) : d_1 = 0\}$, $\mathfrak{m}_8 = \{D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_8) : d_2 = 0\}$ y presentamos el Cuadro 3 a continuación.

Subespacios	Derivación	Conclusión
$\mathfrak{a}_8 \cap \mathfrak{b}_8$	$D = \begin{pmatrix} d_5 & & & & \\ & d_5 & & & \\ & & 2d_5 & & \\ & & & 3d_5 & \\ & & & & d_5 \end{pmatrix}$	$d_5 > 0$ por cond nec, cumple las ecuaciones de $\mathcal{C}(\mathfrak{n}_8)$
$\mathfrak{a}_8 \cap \mathfrak{c}_8$	$D = \begin{pmatrix} d_5 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & d_5 & & \\ & & & 2d_5 & \\ & & & & d_5 \end{pmatrix}$	$d_5 > 0$ por cond nec, cumple las ecuaciones de $\mathcal{C}(\mathfrak{n}_8)$
$\mathfrak{a}_8 \cap \mathfrak{d}_8$	$D = \begin{pmatrix} d_5 & & & & \\ & -d_5 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & d_5 & \\ & & & & d_5 \end{pmatrix}$	Lo estudiamos a continuación.
$\mathfrak{a}_8 \cap \mathfrak{j}_8$	$D = \begin{pmatrix} d_5 & & & & \\ & d_5 & & & \\ & & 2d_5 & & \\ & & & 3d_5 & \\ & & & & d_5 \end{pmatrix}$	igual al caso $\mathfrak{a}_8 \cap \mathfrak{b}_8$
$\mathfrak{a}_8 \cap \mathfrak{k}_8$	$D = \begin{pmatrix} d_5 & & & & \\ & -d_5 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & d_5 & \\ & & & & d_5 \end{pmatrix}$	igual al caso $\mathfrak{a}_8 \cap \mathfrak{d}_8$
$\mathfrak{a}_8 \cap \mathfrak{p}_8$	$D = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & d_2 & & \\ & & & d_2 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$	0 en el centro, no puede ser frn.
$\mathfrak{a}_8 \cap \mathfrak{m}_8$	$D = \begin{pmatrix} d_5 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & d_5 & & \\ & & & 2d_5 & \\ & & & & d_5 \end{pmatrix}$	$d_5 > 0$ por cond nec, cumple las ecuaciones de $\mathcal{C}(\mathfrak{n}_8)$
$\mathfrak{b}_8 \cap \mathfrak{c}_8$	$D = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & d_5 & & & \\ & & d_5 & & \\ & & & d_5 & \\ & & & & d_5 \end{pmatrix}$	$d_5 > 0$ por cond nec, cumple las ecuaciones de $\mathcal{C}(\mathfrak{n}_8)$
$\mathfrak{b}_8 \cap \mathfrak{d}_8$	$D = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & d_5 & & & \\ & & d_5 & & \\ & & & d_5 & \\ & & & & d_5 \end{pmatrix}$	igual al caso $\mathfrak{b}_8 \cap \mathfrak{c}_8$
$\mathfrak{b}_8 \cap \mathfrak{j}_8$	$D = \begin{pmatrix} d_5 & & & & \\ & d_5 & & & \\ & & 2d_5 & & \\ & & & 3d_5 & \\ & & & & d_5 \end{pmatrix}$	igual al caso $\mathfrak{a}_8 \cap \mathfrak{b}_8$
$\mathfrak{b}_8 \cap \mathfrak{k}_8$	$D = \begin{pmatrix} -d_5 & & & & \\ & d_5 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & -d_5 & \\ & & & & d_5 \end{pmatrix}$	$\text{tr}(D) = 0$, no puede ser frn.
$\mathfrak{b}_8 \cap \mathfrak{p}_8$	$D = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & d_5 & & & \\ & & d_5 & & \\ & & & d_5 & \\ & & & & d_5 \end{pmatrix}$	igual al caso $\mathfrak{b}_8 \cap \mathfrak{c}_8$
$\mathfrak{b}_8 \cap \mathfrak{m}_8$	$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & d_1 & & \\ & & & 2d_1 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$	0 en el centro, no puede ser frn.
$\mathfrak{c}_8 \cap \mathfrak{d}_8$	$D = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & d_5 & & & \\ & & d_5 & & \\ & & & d_5 & \\ & & & & d_5 \end{pmatrix}$	igual al caso $\mathfrak{b}_8 \cap \mathfrak{c}_8$
$\mathfrak{c}_8 \cap \mathfrak{j}_8$	$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & d_1 & & & \\ & & 2d_1 & & \\ & & & 3d_1 & \\ & & & & 2d_1 \end{pmatrix}$	$d_1 > 0$ por cond nec, cumple las ecuaciones de $\mathcal{C}(\mathfrak{n}_8)$.

Subespacios	Derivación	Conclusión
$\mathfrak{c}_8 \cap \mathfrak{k}_8$	$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & -d_1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & d_1 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$	0 en el centro, no puede ser frn.
$\mathfrak{c}_8 \cap \mathfrak{p}_8$	$D = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & d_5 & & & \\ & & d_5 & & \\ & & & d_5 & \\ & & & & d_5 \end{pmatrix}$	igual al caso $\mathfrak{b}_8 \cap \mathfrak{c}_8$
$\mathfrak{c}_8 \cap \mathfrak{m}_8$	$D = \begin{pmatrix} d_5 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & d_5 & & \\ & & & 2d_5 & \\ & & & & d_5 \end{pmatrix}$	igual al caso $\mathfrak{a}_8 \cap \mathfrak{c}_8$
$\mathfrak{d}_8 \cap \mathfrak{j}_8$	$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & d_1 & & & \\ & & 2d_1 & & \\ & & & 3d_1 & \\ & & & & 3d_1 \end{pmatrix}$	$d_1 > 0$ por cond nec, cumple las ecuaciones de $\mathcal{C}(\mathfrak{n}_8)$
$\mathfrak{d}_8 \cap \mathfrak{k}_8$	$D = \begin{pmatrix} d_5 & & & & \\ & -d_5 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & d_5 & \\ & & & & d_5 \end{pmatrix}$	igual al caso $\mathfrak{a}_8 \cap \mathfrak{d}_8$
$\mathfrak{d}_8 \cap \mathfrak{p}_8$	$D = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & d_5 & & & \\ & & d_5 & & \\ & & & d_5 & \\ & & & & d_5 \end{pmatrix}$	igual al caso $\mathfrak{b}_8 \cap \mathfrak{c}_8$
$\mathfrak{d}_8 \cap \mathfrak{m}_8$	$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & d_1 & & \\ & & & 2d_1 & \\ & & & & 2d_1 \end{pmatrix}$	$d_1 > 0$ por cond nec, cumple las ecuaciones de $\mathcal{C}(\mathfrak{n}_8)$
$\mathfrak{j}_8 \cap \mathfrak{k}_8$	$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & d_1 & & \\ & & & 2d_1 & \\ & & & & d_5 \end{pmatrix}$	$d_1 > 0$ y $d_5 > 0$ por cond nec, cumple las ecuaciones de $\mathcal{C}(\mathfrak{n}_8)$
$\mathfrak{j}_8 \cap \mathfrak{p}_8$	$D = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & d_5 \end{pmatrix}$	0 en el centro, no puede ser frn.
$\mathfrak{j}_8 \cap \mathfrak{m}_8$	$D = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & d_5 \end{pmatrix}$	igual al caso $\mathfrak{j}_8 \cap \mathfrak{p}_8$
$\mathfrak{k}_8 \cap \mathfrak{p}_8$	$D = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & d_5 \end{pmatrix}$	igual al caso $\mathfrak{j}_8 \cap \mathfrak{p}_8$
$\mathfrak{k}_8 \cap \mathfrak{m}_8$	$D = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & d_5 \end{pmatrix}$	igual al caso $\mathfrak{j}_8 \cap \mathfrak{p}_8$
$\mathfrak{p}_8 \cap \mathfrak{m}_8$	$D = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & d_5 \end{pmatrix}$	igual al caso $\mathfrak{j}_8 \cap \mathfrak{p}_8$

CUADRO 3. Caso \mathfrak{n}_8

Nos queda por ver entonces el caso $\mathfrak{a}_8 \cap \mathfrak{d}_8$. Sea

$$D = \begin{pmatrix} d_5 & & & & \\ & -d_5 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & d_5 & \\ & & & & d_5 \end{pmatrix} \in \mathfrak{a}_8 \cap \mathfrak{d}_8 \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_8)$$

Notemos que no pertenece a $\mathcal{C}(\mathfrak{n}_8)$ pues $d_1 + d_2 = 0$.

En este caso G_D está dado por:

$$H = \begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix}, \quad \text{con } \det := jae - jdb - gce - haf + hdc + gbf \neq 0.$$

donde,

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{je-hf}{jae-jdb-gce-haf+hdc+gbf} & \frac{jb-hc}{jae-jdb-gce-haf+hdc+gbf} & \frac{bf-ce}{jae-jdb-gce-haf+hdc+gbf} \\ & \frac{1}{p} & \\ \frac{jd-gf}{jae-jdb-gce-haf+hdc+gbf} & \frac{ja-gc}{jae-jdb-gce-haf+hdc+gbf} & \frac{fa-dc}{jae-jdb-gce-haf+hdc+gbf} \\ \frac{hd-ge}{jae-jdb-gce-haf+hdc+gbf} & \frac{ha-gb}{jae-jdb-gce-haf+hdc+gbf} & \frac{ea-db}{jae-jdb-gce-haf+hdc+gbf} \end{pmatrix}$$

Así $\overline{G_D} \cdot \mu$ queda definido por :

$$\begin{aligned} \lambda(e_1, e_2) &= \alpha_1 e_3, & \lambda(e_1, e_3) &= \beta_1 e_1 + \gamma_1 e_4 + \xi_1 e_5 \\ \lambda(e_4, e_2) &= \alpha_2 e_3, & \lambda(e_4, e_3) &= \beta_2 e_1 + \gamma_2 e_4 + \xi_2 e_5 \\ \lambda(e_5, e_2) &= \alpha_3 e_3, & \lambda(e_5, e_3) &= \beta_3 e_1 + \gamma_3 e_4 + \xi_3 e_5 \end{aligned}$$

pues,

$$\begin{aligned} H \cdot \mu(e_1, e_2) &= H\mu\left(\frac{je-hf}{\det}e_1 + \frac{jd-gf}{\det}e_4 + \frac{hd-ge}{\det}e_5, \frac{1}{p}e_2\right) = \frac{je-hf}{p\det}qe_3 \\ H \cdot \mu(e_1, e_3) &= H\mu\left(\frac{je-hf}{\det}e_1 + \frac{jd-gf}{\det}e_4 + \frac{hd-ge}{\det}e_5, \frac{1}{q}e_3\right) = \frac{je-hf}{q\det}(be_1 + ee_4 + he_5) \\ H \cdot \mu(e_4, e_2) &= H\mu\left(\frac{jb-hc}{\det}e_1 + \frac{ja-gc}{\det}e_4 + \frac{ha-gb}{\det}e_5, \frac{1}{p}e_2\right) = \frac{jb-hc}{p\det}qe_3 \\ H \cdot \mu(e_4, e_3) &= H\mu\left(\frac{jb-hc}{\det}e_1 + \frac{ja-gc}{\det}e_4 + \frac{ha-gb}{\det}e_5, \frac{1}{q}e_3\right) = \frac{jb-hc}{q\det}(be_1 + ee_4 + he_5) \\ H \cdot \mu(e_5, e_2) &= H\mu\left(\frac{bf-ce}{\det}e_1 + \frac{fa-dc}{\det}e_4 + \frac{ea-db}{\det}e_5, \frac{1}{p}e_2\right) = \frac{bf-ce}{p\det}qe_3 \\ H \cdot \mu(e_5, e_3) &= H\mu\left(\frac{bf-ce}{\det}e_1 + \frac{fa-dc}{\det}e_4 + \frac{ea-db}{\det}e_5, \frac{1}{q}e_3\right) = \frac{bf-ce}{q\det}(be_1 + ee_4 + he_5) \end{aligned}$$

Por (3) tenemos:

$$m(\lambda) = \frac{2}{|\lambda|^2} \begin{pmatrix} -\alpha_1^2 - \gamma_1^2 - \xi_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 & & M_{14} & & M_{15} \\ & -\alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 & & & \\ & & \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 - \beta_3^2 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2 - \gamma_3^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 & & \\ M_{14} & & & \gamma_1^2 + \gamma_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_2^2 - \xi_2^2 & M_{45} \\ M_{15} & & & M_{45} & \xi_1^2 + \xi_2^2 - \alpha_3^2 - \beta_3^2 - \gamma_3^2 \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} M_{14} &= \beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2 + \beta_3 \gamma_3 - \alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2 - \gamma_1 \gamma_2 - \xi_1 \xi_2, \\ M_{15} &= \beta_1 \xi_1 + \beta_2 \xi_2 + \beta_3 \xi_3 - \alpha_1 \alpha_3 - \beta_1 \beta_3 - \gamma_1 \gamma_3 - \xi_1 \xi_3, \\ M_{45} &= \gamma_1 \xi_1 + \gamma_2 \xi_2 + \gamma_3 \xi_3 - \alpha_2 \alpha_3 - \beta_2 \beta_3 - \gamma_2 \gamma_3 - \xi_2 \xi_3. \end{aligned}$$

Reemplazando, tenemos que

$$\begin{aligned} M_{14} &= be \left[\frac{(je-hf)^2 + (jb-hc)^2 + (bf-ce)^2}{q^2 \det^2} \right] - (je-hf)(jb-hc) \left[\frac{q^2}{\det^2 p^2} + \frac{b^2 + h^2 + e^2}{\det^2 q^2} \right] \\ M_{15} &= bh \left[\frac{(je-hf)^2 + (jb-hc)^2 + (bf-ce)^2}{q^2 \det^2} \right] - (je-hf)(bf-ce) \left[\frac{q^2}{\det^2 p^2} + \frac{b^2 + h^2 + e^2}{\det^2 q^2} \right] \\ M_{14} &= eh \left[\frac{(je-hf)^2 + (jb-hc)^2 + (bf-ce)^2}{q^2 \det^2} \right] - (jb-hc)(bf-ce) \left[\frac{q^2}{\det^2 p^2} + \frac{b^2 + h^2 + e^2}{\det^2 q^2} \right] \end{aligned}$$

Luego, $m(\overline{G_D \cdot \mu}) \cap \text{Dg}(\mathfrak{n}_8) \neq \emptyset$ si y sólo si

$$\begin{cases} b, e, f = 0 \\ b, e, c = 0 \\ b, h, j = 0 \\ b, h, c = 0 \\ h, e, j = 0 \\ h, e, f = 0 \end{cases}$$

Se tiene que $m(\overline{G_D \cdot \mu}) \cap \text{Dg}(\mathfrak{n}_8) = \text{CH}(F_{42}^3, F_{43}^5) \cup \text{CH}(F_{12}^3, F_{13}^5) \cup \text{CH}(F_{52}^3, F_{53}^4) \cup \text{CH}(F_{12}^3, F_{13}^4) \cup \text{CH}(F_{52}^3, F_{53}^1) \cup \text{CH}(F_{42}^3, F_{43}^1)$.

Así, por Teorema 2.5 (iv), $D \in \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_8)_{frn}$ si y sólo si $D = aF_{42}^3 + bF_{43}^1 + E$ con $a, b > 0$ y $E \in \text{Dg}(\mathfrak{n}_8)_{>0}$. Esto implica

$$\begin{cases} d_5 - b > 0 \\ -d_5 + a > 0 \\ -a + b > 0 \\ d_5 + a + b > 0 \\ d_5 > 0 \end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones obtenemos $a > b$ y de la tercera $b > a$ lo que es absurdo, por lo tanto $D \notin \mathfrak{t}(\mathfrak{n}_8)_{frn}$.

Finalmente podemos concluir que $\mathfrak{t}(\mathfrak{n}_8)_{frn} = \mathcal{C}(\mathfrak{n}_8)$ y finalizamos la demostración del teorema. □

5. ÁLGEBRA DE LIE DE HEISENBERG

En esta sección realizamos el estudio detallado del cono $\mathcal{C}(\mathfrak{n})$ definido en (5) para el álgebra de Lie de Heisenberg de dimensión $2n + 1$, estudiamos casos especiales con $n = 2$ y $n = 3$ y generalizamos resultados obtenidos.

Sea \mathfrak{h}_{2n+1} el álgebra de Lie de Heisenberg, definida por la base $\{e_1, e_2, \dots, e_{2n+1}\}$ y los corchetes:

$$\mu(e_1, e_2) = e_{2n+1}, \quad \mu(e_3, e_4) = e_{2n+1}, \quad \dots, \quad \mu(e_{2n-1}, e_{2n}) = e_{2n+1}.$$

Sea

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & d_{2n+1} \end{pmatrix} \in \mathfrak{t}(\mathfrak{h}_{2n+1}).$$

Como D es derivación de \mathfrak{h}_{2n+1} debe verificarse

$$d_1 + d_2 = d_{2n+1}, \quad d_3 + d_4 = d_{2n+1}, \quad \dots, \quad d_{2n-1} + d_{2n} = d_{2n+1}.$$

5.1. $\mathcal{C}_3(\mathfrak{h}_5)$. En \mathfrak{h}_5 tenemos que $\mathfrak{t}(\mathfrak{h}_5)$ está definido por

$$D = \text{Dg}(d_1, d_3 - d_1, d_2, d_3 - d_2, d_3)$$

donde $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}$. Como $\text{tr}(D) = 3d_3$ si consideramos $\mathcal{C}_3(\mathfrak{h}_5)$ tenemos que $d_3 = 1$. Reemplazando en las ecuaciones del cono tenemos que $\mathcal{C}_3(\mathfrak{h}_5)$ está definido por:

$$\begin{cases} 1 + d_1 + d_2 > 0 \\ 2 + d_1 - d_2 > 0 \\ 2 - d_1 + d_2 > 0 \\ 3 - d_1 - d_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d_2 > -d_1 - 1 \\ d_2 < 2 + d_1 \\ d_2 > d_1 - 2 \\ d_2 < 3 - d_1 \end{cases}$$

Es decir que $\mathcal{C}_3(\mathfrak{h}_5)$ es un cuadrado regular de lado $\sqrt{8}$ y centro situado en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Ver imagen a continuación.

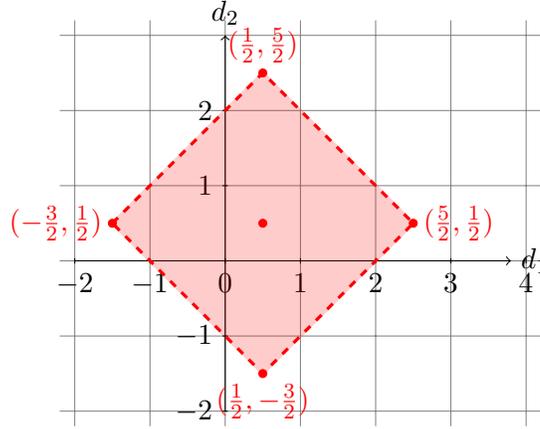


FIGURA 7. $\mathcal{C}_3(\mathfrak{h}_5)$

Sea $D_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ si repetimos lo anterior para $D - D_0$, obtenemos

$$\begin{cases} d_1 + d_2 > -2 \\ -d_1 + d_2 < 2 \\ -d_1 + d_2 > -2 \\ d_1 + d_2 < 2 \end{cases}$$

Es un cuadrilátero centrado en el origen que dista en 2 de cada uno de sus vértices, dicho en otras palabras es la bola de radio 2 de la norma de L_1 .

5.2. $\mathcal{C}_4(\mathfrak{h}_7)$. Para este caso tenemos que $\mathfrak{t}(\mathfrak{h}_7)$ está definido por

$$D = \text{Dg}(d_1, d_4 - d_1, d_2, d_4 - d_2, d_3, d_4 - d_3, d_4)$$

donde $d_1, d_2, d_3, d_4 \in \mathbb{R}$. Como $\text{tr}(D) = 4d_4$ si consideramos $\mathcal{C}_4(\mathfrak{h}_7)$ tenemos que $d_4 = 1$. Reemplazando en las ecuaciones del cono tenemos que $\mathcal{C}_4(\mathfrak{h}_7)$ está definido por:

$$\begin{cases} 1 + d_1 + d_2 + d_3 > 0 & 3 - d_1 - d_2 + d_3 > 0 \\ 2 - d_1 + d_2 + d_3 > 0 & 3 - d_1 + d_2 - d_3 > 0 \\ 2 + d_1 - d_2 + d_3 > 0 & 3 + d_1 - d_2 - d_3 > 0 \\ 2 + d_1 + d_2 - d_3 > 0 & 4 - d_1 - d_2 - d_3 > 0 \end{cases}$$

Si repetimos lo mismo para $\bar{D} = D - D_0$ con D_0 definida como antes obtenemos:

$$\begin{cases} \frac{5}{2} + d_1 + d_2 + d_3 > 0 & \frac{5}{2} - d_1 - d_2 + d_3 > 0 \\ \frac{5}{2} - d_1 + d_2 + d_3 > 0 & \frac{5}{2} - d_1 + d_2 - d_3 > 0 \\ \frac{5}{2} + d_1 - d_2 + d_3 > 0 & \frac{5}{2} + d_1 - d_2 - d_3 > 0 \\ \frac{5}{2} + d_1 + d_2 - d_3 > 0 & \frac{5}{2} - d_1 - d_2 - d_3 > 0 \end{cases}$$

Se ve que estas ecuaciones definen un octaedro regular centrado en el origen y cuya distancia a sus vértices es $\frac{5}{2}$, ver Figura 8.

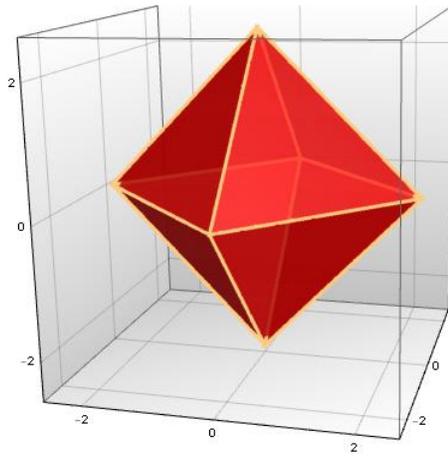


FIGURA 8. $\mathcal{C}_4(\mathfrak{h}_7)$

5.3. **Generalización a $\mathcal{C}_{n+1}(\mathfrak{h}_{2n+1})$.** En \mathfrak{h}_{2n+1} tenemos que $\mathfrak{t}(\mathfrak{h}_{2n+1})$ está definido por

$$D = \text{Dg}(d_1, d_{n+1} - d_1, d_2, d_{n+1} - d_2, \dots, d_n, d_{n+1} - d_n, d_{n+1})$$

donde $d_1, d_2, d_3, \dots, d_{n+1} \in \mathbb{R}$. Como $\text{tr}(D) = (n+1)d_{n+1}$ si consideramos $\mathcal{C}_{n+1}(\mathfrak{h}_{2n+1})$ tenemos que $d_{n+1} = 1$. Reemplazando en las ecuaciones del cono tenemos que $\mathcal{C}_{n+1}(\mathfrak{h}_{2n+1})$ está definido por:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + d_1 + d_2 + \dots + d_n > 0 \\ 2 - d_1 + d_2 + \dots + d_n > 0 \\ 2 + d_1 - d_2 + \dots + d_n > 0 \\ \vdots \\ 2 + d_1 + d_2 + \dots - d_n > 0 \\ 3 - d_1 - d_2 + \dots + d_n > 0 \\ \vdots \\ 3 - d_1 + d_2 + \dots - d_n > 0 \\ \vdots \\ 3 + d_1 + \dots - d_{n-1} - d_n > 0 \\ \vdots \\ (n+1) - d_1 - d_2 + \dots - d_n > 0 \end{array} \right.$$

si y sólo si existe $a_{n-3} > 0$ tal que

$$\begin{aligned} [(n-2) + (n-3) + (n-4)]d_1 + 3d_2 &> a_{n-3} > -(n-5)d_1 - d_2 + a_{n-4}, \\ [-1 - 2(n-2) - (n-3)]d_1 - (1+2)d_2 - a_2 - \dots - a_{n-4} \end{aligned}$$

Continuando con este proceso obtenemos que existe $a_3 = a_{n-(n-3)} > 0$ tal que

$$[(n-2) + (n-3) + (n-4) + \dots + 3 + 2]d_1 + (n-3)d_2 > a_3 > -d_1 - d_2 + a_2,$$

$$[-1 - (n-4)(n-2) - (n-5)(n-3) - (n-6)(n-4) - \dots - 3]d_1 - (1+2+3+\dots+(n-4))d_2 - a_2$$

si y sólo si existe $a_2 > 0$ tal que

$$\left[\sum_{i=2}^{n-1} (n-i) \right] d_1 + (n-2)d_2 > a_2 > -d_2, \quad \left[-1 - \sum_{i=2}^{n-2} (i-1)i \right] d_1 - \left(\sum_{i=1}^{n-3} i \right) d_2$$

Finalmente, si y sólo si

$$\left[\sum_{i=2}^{n-1} (n-i) \right] d_1 + (n-1)d_2 > 0 \quad y$$

$$\left[1 + \sum_{i=2}^{n-2} (i-1)i + \sum_{i=2}^{n-1} (n-i) \right] d_1 + \left[\frac{(n-3)(n-2)}{2} + (n-2) \right] d_2 > 0$$

Ahora, como se tiene que

$$\sum_{i=2}^{n-1} (n-i) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} \quad y \quad \sum_{i=2}^{n-2} (i-1)i = \frac{n}{6}(2n^2 - 9n + 13) - 1 - \frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

El sistema de ecuaciones anterior es equivalente a:

$$\left\{ \begin{array}{l} (n-2)d_1 + d_2 > 0 \\ [(n-2) + (n-3)]d_1 + 2d_2 > 0 \\ [(n-2) + (n-3) + (n-4)]d_1 + 3d_2 > 0 \\ \vdots \\ [(n-2) + (n-3) + (n-4) + \dots + 3 + 2]d_1 + (n-3)d_2 > 0 \\ \left[\sum_{i=2}^{n-1} (n-i) \right] d_1 + (n-2)d_2 > 0 \\ \frac{(n-1)(n-2)}{2}d_1 + (n-1)d_2 > 0 \\ \frac{n}{6}(2n^2 - 9n + 13)d_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}d_2 > 0 \end{array} \right.$$

Veamos ahora que

$$n-2 \geq \frac{\sum_{i=2}^j (n-i)}{j-1} \geq \frac{n-2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad n > j$$

$$n-2 \geq \frac{n(2n^2 - 9n + 13)}{3(n-1)(n-2)} \geq \frac{n-2}{2} \quad \forall n > 3.$$

Esto vale pues

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{i=2}^j (n-i)}{j-1} &= n - \frac{j^2 + j}{2(j-1)} + \frac{1}{j-1} \geq \frac{n-2}{2} \\
\Leftrightarrow \frac{n}{2} &\geq \frac{j^2 + j - 2 - 2(j-1)}{2(j-1)} \\
\Leftrightarrow \frac{n}{2} &\geq \frac{j^2 + j - 2j}{2(j-1)} \\
\Leftrightarrow n &\geq j
\end{aligned}$$

y también

$$n - 2 \geq n - \frac{j^2 + j - 2}{2(j-1)} \Leftrightarrow 2 \leq \frac{j+2}{2},$$

es decir que se verifica para todo $j \geq 2$.

Las otras desigualdades son equivalentes a probar:

$$n^3 - 6n^2 + 11n - 12 \geq 0 \quad y \quad \frac{1}{2}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - n - 6 \geq 0 \quad \forall n > 3$$

Si las consideramos como funciones cúbicas de números reales $f(4) \geq 0$ en ambos casos y las funciones son crecientes a partir de $x = 4$, por lo tanto se cumple y obtenemos lo siguiente (Ver Figura 9):

Proposición 6.1. *Sea L_n el álgebra de Lie filiforme, si consideramos*

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & & \\ & d_2 & & & & \\ & & d_1 + d_2 & & & \\ & & & 2d_1 + d_2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & (n-2)d_1 + d_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{t}(L_n),$$

entonces, las ecuaciones que definen al cono $\mathcal{C}(L_n)$ son:

$$(n-2)d_1 + d_2 > 0 \quad y \quad \frac{(n-1)(n-2)}{2}d_1 + (n-1)d_2 > 0.$$

Según [NN15] estas ecuaciones son las que definen a $\mathfrak{t}(L_n)_{frn}$ por lo que concluimos lo siguiente.

Corolario 6.2. $\mathcal{C}(L_n) = \mathfrak{t}(L_n)_{frn}$, para todo $n > 3$.

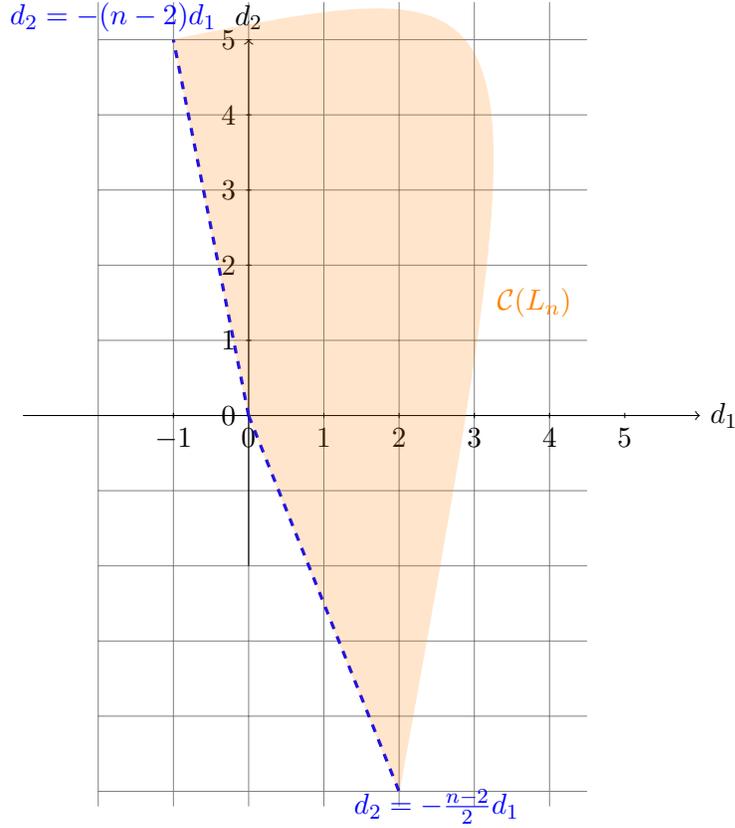


FIGURA 9. $\mathcal{C}(L_n)$

7. ÁLGEBRA DE LIE LIBRE 2-PASOS NILPOTENTE

Consideramos en esta sección el álgebra de Lie libre 2-pasos nilpotente ℓ_n . Notemos que aunque en el caso general las ecuaciones del cono $\mathcal{C}(\ell_n)$ se pueden expresar de manera más sencilla que en el álgebra de Lie de Heisenberg, no encontramos una generalización regular del politopo $\mathcal{C}_t(\ell_n)$ debido a que este álgebra tiene menos simetrías.

Sea ℓ_n el álgebra de Lie libre 2-pasos nilpotente de dimensión $\frac{n(n+1)}{2}$ definida por la base $\{e_1, e_2, \dots, e_n, z_{12}, z_{13}, \dots, z_{ij}, \dots\}$ y corchetes

$$\mu(e_1, e_2) = z_{12}, \quad \mu(e_1, e_3) = z_{13}, \quad \dots, \quad \mu(e_i, e_j) = z_{ij}, \quad \dots$$

Sea

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & d_{\frac{n(n+1)}{2}} \end{pmatrix} \in \mathfrak{t}(\ell_n)$$

Para que D sea derivación de ℓ_n debe verificarse

$$d_1 + d_2 = d_{n+1}, \quad d_1 + d_3 = d_{n+2}, \quad \dots$$

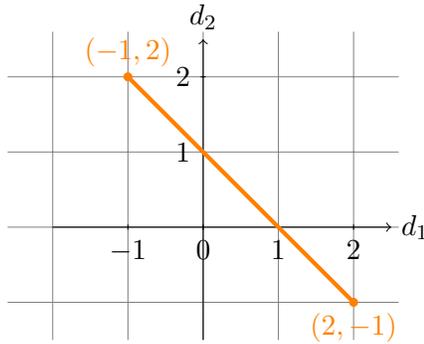


FIGURA 10. $\mathcal{C}_2(\ell_2)$

7.2. $\mathcal{C}_3(\ell_3)$. Las ecuaciones de $\mathcal{C}_3(\ell_3)$ son:

$$\begin{cases} d_1 > -\frac{1}{2} \\ d_2 > -\frac{1}{2} \\ d_3 > -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} d_1 + d_2 > 0 \\ d_1 + d_3 > 0 \\ d_2 + d_3 > 0 \\ d_1 + d_2 + d_3 = 1 \end{cases}$$

Esto implica que $\mathcal{C}_3(\ell_3)$ es un polígono de seis lados en el plano $d_1 + d_2 + d_3 = 1$ cuyos vértices son:

$$\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) \quad \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right) \quad \left(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) \quad \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

Para poder graficarlo en el plano trasladamos todos los vectores al subespacio tal que $d_1 + d_2 + d_3 = 0$ y consideramos la base ortonormal $\beta = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2) \right\}$. Si (a, b, c) es tal que $a + b + c = 1$, las coordenadas de este vector trasladado al subespacio respecto la base β son:

$$\alpha = \frac{a-b}{2}\sqrt{2} \quad \gamma = \left(\frac{a+b}{2} - \frac{1}{3}\right)\sqrt{6}$$

En esta base las coordenadas de los vértices son:

$$\left(-\frac{3\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{6}}{12}\right) \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{5\sqrt{6}}{12}\right) \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{5\sqrt{6}}{12}\right) \quad \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{6}}{12}\right) \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, 1\right)$$

y se tiene:

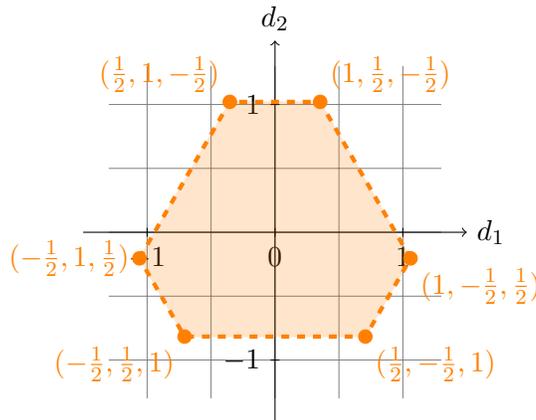


FIGURA 11. $\mathcal{C}_3(\ell_3)$

7.3. $\mathcal{C}_4(\ell_4)$. Las ecuaciones en este caso son:

$$\begin{cases} d_1, d_2, d_3, d_4 > -\frac{1}{3} \\ d_1 + d_2 > 0 & d_1 + d_3 > 0 & d_1 + d_4 > 0 \\ d_2 + d_3 > 0 & d_2 + d_4 > 0 & d_3 + d_4 > 0 \\ d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 1 \end{cases}$$

Es decir que $\mathcal{C}_4(\ell_4)$ es un poliedro de diez caras en el hiperplano $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 1$ cuyos vértices son:

$$\begin{array}{cccc} (1, 0, 0, 0) & (0, 1, 0, 0) & (0, 0, 1, 0) & (0, 0, 0, 1) \\ (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}) & (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) & (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}) & \\ (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}) & (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}) & (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) & \\ (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) & (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) & (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) & \\ (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) & (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) & (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}) & \end{array}$$

Para graficarlo en el espacio trasladamos los vectores al subespacio tal que $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 0$ y consideramos la base ortonormal

$$\beta = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, -1), \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1) \right\}$$

Si (a, b, c, d) es tal que $a + b + c + d = 1$, las coordenadas de este vector trasladado al subespacio respecto la base β son:

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}(a - b), \quad \gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}(2c + a + b - 1) \quad y \quad \delta = a + b - \frac{1}{2}$$

En esta base las coordenadas de los vértices son:

$$\begin{array}{cccc} (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{1}{2}) & (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{1}{2}) & (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}) & (0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}) \\ (-\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{1}{2}) & (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{1}{6}) & (-\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{1}{2}) & \\ (\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{1}{2}) & (\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{1}{2}) & (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{1}{6}) & \\ (0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{6}) & (-\frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{2}) & (\frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{2}) & \\ (\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{2}) & (-\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{2}) & (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{6}) & \end{array}$$

Si los enumeramos de izquierda derecha comenzando en 0 para terminar en el vértice número 15 se tiene que las caras están delimitadas por las siguientes poligonales:

$$\begin{array}{ll} d_1 + d_2 = 0 & 2, 8, 7, 3, 4, 6. & d_2 + d_4 = 0 & 0, 9, 8, 2, 15, 13. \\ d_1 + d_3 = 0 & 1, 11, 10, 3, 4, 5. & d_1 + d_4 = 0 & 1, 14, 15, 2, 6, 5. \\ d_2 + d_3 = 0 & 0, 9, 7, 3, 10, 12. & d_3 + d_4 = 0 & 0, 13, 14, 1, 11, 12. \\ & & d_2 = -\frac{1}{3} & 7, 8, 9. \\ & & d_3 = -\frac{1}{3} & 10, 11, 12. \\ & & d_4 = -\frac{1}{3} & 13, 14, 15. \end{array}$$

y obtenemos el siguiente poliedro:

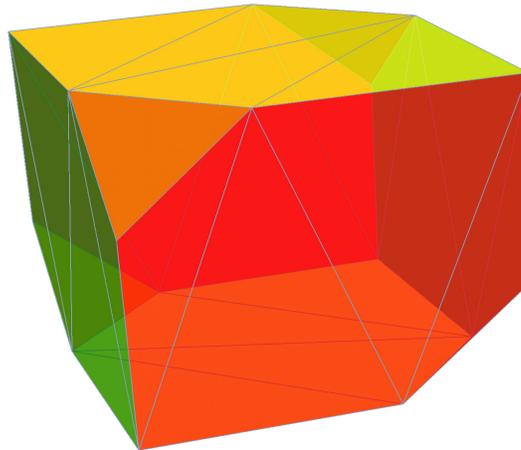


FIGURA 12. $\mathcal{C}_4(\ell_4)$

8. CONOS VARIOS: ÁLGEBRAS DE LIE ASOCIADAS A GRAFOS

A continuación estudiaremos el cono $\mathcal{C}(\mathfrak{n})$ definido en (5) para álgebras de Lie de grafos conexos de cuatro vértices. Primero notemos que el álgebra de Lie libre ℓ_4 representa al grafo siguiente, y ya fue estudiada en la Sección 7.

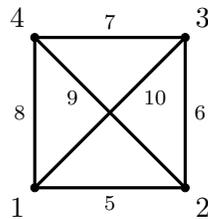


FIGURA 13. Grafo de ℓ_4

8.1. **Ejemplo 1.** Sea el álgebra de Lie \mathfrak{g}_1 de dimensión 8 definida por la base $\{e_1, e_2, \dots, e_8\}$ y los corchetes

$$[e_1, e_2] = e_5, \quad [e_2, e_3] = e_6, \quad [e_3, e_4] = e_7, \quad [e_1, e_4] = e_8.$$

Esta es la representación en álgebras de Lie del siguiente grafo:

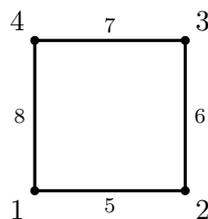


FIGURA 14. Grafo de \mathfrak{g}_1

Luego el sistema anterior es equivalente a

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1 + d_2 > 0 \\ d_2 + d_3 > 0 \\ d_3 + d_4 > 0 \\ d_1 + d_4 > 0 \\ 3d_1 + d_2 + d_4 > 0 \\ d_1 + 3d_2 + d_3 > 0 \\ d_2 + 3d_3 + d_4 > 0 \\ d_1 + d_3 + 3d_4 > 0 \end{array} \right.$$

Como sabemos que el cono $\mathcal{C}(\mathfrak{g}_1)$ es invariante por múltiplo escalar positivo, podemos considerar $tr(D) = 3$ tal que $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 1$. Las ecuaciones de $\mathcal{C}_3(\mathfrak{g}_1)$ serán:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - d_3 - d_4 > 0 \\ 1 - d_1 - d_4 > 0 \\ 1 - d_1 - d_2 > 0 \\ 1 - d_2 - d_3 > 0 \\ 1 + 2d_1 - d_3 > 0 \\ 1 + 2d_2 - d_4 > 0 \\ 1 + 2d_3 - d_1 > 0 \\ 1 + 2d_4 - d_2 > 0 \end{array} \right.$$

Es decir que $\mathcal{C}_3(\mathfrak{g}_1)$ es un poliedro de ocho caras en el hiperplano $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 1$ cuyos vértices son:

$$\begin{array}{cccc} (2, -1, 1, -1) & (1, -1, 2, -1) & (-1, 2, -1, 1) & (-1, 1, -1, 2) \\ (1, 0, 0, 0) & (0, 1, 0, 0) & (0, 0, 1, 0) & (0, 0, 0, 1) \end{array}$$

Para graficarlo en el espacio trasladamos los vectores al subespacio tal que $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 0$ y consideramos la base ortonormal

$$\beta = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, -1), \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1) \right\}$$

Si (a, b, c, d) es tal que $a + b + c + d = 1$ las coordenadas de este vector trasladado al subespacio respecto la base β serán:

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}(a - b), \quad \gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}(2c + a + b - 1) \quad y \quad \delta = a + b - \frac{1}{2}$$

En esta base las coordenadas de los vértices son:

$$\begin{array}{cccc} (\frac{3\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}, \frac{1}{2}) & (\sqrt{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}) & (-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}, \frac{1}{2}) & (-\sqrt{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}) \\ (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{1}{2}) & (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{1}{2}) & (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}) & (0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}) \end{array}$$

y obtenemos el siguiente poliedro:

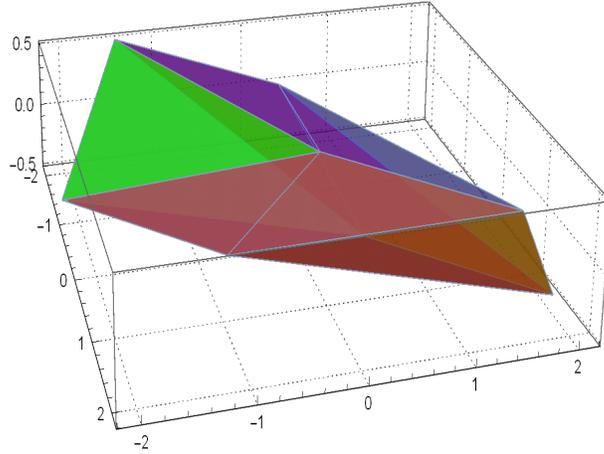


FIGURA 15. $\mathcal{C}_3(\mathfrak{g}_1)$

8.2. **Ejemplo 2.** Sea el álgebra de Lie \mathfrak{g}_2 de dimensión 9 definida por la base $\{e_1, e_2, \dots, e_9\}$ y los corchetes

$$[e_1, e_2] = e_5, \quad [e_2, e_3] = e_6, \quad [e_3, e_4] = e_7, \quad [e_1, e_4] = e_8, \quad [e_2, e_4] = e_9.$$

Esta es la representación en álgebras de Lie del siguiente grafo:

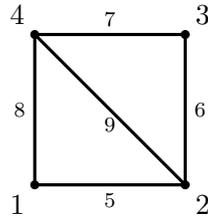


FIGURA 16. Grafo de (\mathfrak{g}_2)

Sea D derivación de \mathfrak{g}_2 ,

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & & & & & \\ & d_2 & & & & & & & \\ & & d_3 & & & & & & \\ & & & d_4 & & & & & \\ & & & & d_1 + d_2 & & & & \\ & & & & & d_2 + d_3 & & & \\ & & & & & & d_3 + d_4 & & \\ & & & & & & & d_1 + d_4 & \\ & & & & & & & & d_2 + d_4 \end{pmatrix} \in \mathfrak{t}(\mathfrak{g}_2)$$

Notemos que $\text{tr}(D) = 3d_1 + 4d_2 + 3d_3 + 4d_4$. Análogo al ejemplo anterior se ve en el caso genérico que $\mathfrak{t}(\mathfrak{g}_2)$ es libre de multiplicidad y $G_{\mathfrak{t}(\mathfrak{g}_2)} = T$, además como la base es nice, por (9) sabemos que

$$m(\overline{T \cdot \mu}) = \text{CH}(F_{12}^5, F_{23}^6, F_{34}^7, F_{14}^8, F_{24}^9).$$

Tenemos entonces que $D \in \mathcal{C}(\mathfrak{g}_2) \subset \mathfrak{t}(\mathfrak{g}_2)$ si y sólo si $D = aF_{12}^5 + bF_{23}^6 + cF_{34}^7 + dF_{14}^8 + eF_{24}^9 + E$ y $\text{tr}(D) > 0$, donde $a, b, c, d, e > 0$ y $E \in \text{Dg}(\mathfrak{g}_2)_{>0}$.

Esto implica

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1 + a + d > 0 \quad (8.2.1) \\ d_2 + a + b + e > 0 \quad (8.2.2) \\ d_3 + b + c > 0 \quad (8.2.3) \\ d_4 + c + d + e > 0 \quad (8.2.4) \\ d_1 + d_2 - a > 0 \quad (8.2.5) \\ d_2 + d_3 - b > 0 \quad (8.2.6) \\ d_3 + d_4 - c > 0 \quad (8.2.7) \\ d_1 + d_4 - d > 0 \quad (8.2.8) \\ d_2 + d_4 - e > 0 \quad (8.2.9) \end{array} \right.$$

Las últimas cinco desigualdades implican

$$d_1 + d_2 > 0, \quad d_2 + d_3 > 0, \quad d_3 + d_4 > 0, \quad d_1 + d_4 > 0 \quad \text{y} \quad d_2 + d_4 > 0.$$

Notemos que de (8.2.5), (8.2.1), (8.2.2), existe $a > 0$ tal que

$$d_1 + d_2 > a > -d_1 - d; \quad -d_2 - b - e$$

y esto pasa si y sólo si existe $b > 0$ tal que

$$d_2 + d_3 > b > -d_3 - c; \quad -d_1 - 2d_2 - e$$

si y sólo si de (8.2.7) existe $c > 0$ tal que

$$d_3 + d_4 > c > -d_4 - d - e; \quad -d_2 - 2d_3$$

si y sólo si $d_2 + 3d_3 + d_4 > 0$ y de (8.1.8) existe $d > 0$ tal que

$$d_1 + d_4 > d > -2d_1 - d_2; \quad -d_3 - 2d_4 - e$$

Lo que implica $3d_1 + d_2 + d_4 > 0$. Además de (8.2.9) existe $e > 0$ tal que

$$d_2 + d_4 > e > -d_1 - d_3 - 3d_4; \quad -d_1 - 3d_2 - d_3$$

Y así obtenemos $d_1 + d_2 + d_3 + 4d_4 > 0$ y $d_1 + 4d_2 + d_3 + d_4 > 0$.

Luego el sistema anterior es equivalente a

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1 + d_2 > 0 \\ d_2 + d_3 > 0 \\ d_3 + d_4 > 0 \\ d_1 + d_4 > 0 \\ d_2 + d_4 > 0 \\ d_2 + 3d_3 + d_4 > 0 \\ 3d_1 + d_2 + d_4 > 0 \\ d_1 + d_2 + d_3 + 4d_4 > 0 \\ d_1 + 4d_2 + d_3 + d_4 > 0 \end{array} \right.$$

Como el cono $\mathcal{C}(\mathfrak{g}_2)$ definido en (5) es invariante por múltiplo escalar positivo, podemos considerar $tr(D) = 3d_1 + 4d_2 + 3d_3 + 4d_4 = 1$. Las ecuaciones de $\mathcal{C}_1(\mathfrak{g}_2)$ serán:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - 2d_1 - 3d_2 - 3d_3 - 4d_4 > 0 \\ 1 - 3d_1 - 3d_2 - 2d_3 - 4d_4 > 0 \\ 1 - 3d_1 - 4d_2 - 2d_3 - 3d_4 > 0 \\ 1 - 3d_1 - 4d_2 - 3d_3 - 3d_4 > 0 \\ 1 - 3d_1 - 3d_2 - 3d_3 - 3d_4 > 0 \\ 1 - 3d_1 - 3d_2 - 3d_4 > 0 \\ 1 - 3d_2 - 3d_3 - 3d_4 > 0 \\ 1 - 2d_1 - 3d_2 - 2d_3 > 0 \\ 1 - 2d_1 - 2d_3 - 3d_4 > 0 \end{array} \right.$$

Es decir que $\mathcal{C}_1(\mathfrak{g}_2)$ es un poliedro de nueve caras en el hiperplano $3d_1 + 4d_2 + 3d_3 + 4d_4 = 1$ cuyos vértices son:

$$\begin{array}{cccc} \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right) & \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) & \left(\frac{1}{10}, -\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{5}\right) & \left(\frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, -\frac{1}{10}\right) \\ & \left(0, 0, \frac{1}{3}, 0\right) & \left(\frac{1}{3}, 0, 0, 0\right) & \\ \left(\frac{1}{9}, -\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{9}\right) & \left(\frac{2}{9}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}\right) & \left(\frac{2}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{9}\right) & \left(\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, -\frac{1}{9}\right) \end{array}$$

Para graficarlo en el espacio trasladamos los vectores al subespacio tal que $3d_1 + 4d_2 + 3d_3 + 4d_4 = 0$ y consideramos la base ortonormal

$$\beta = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, -1), \frac{1}{\sqrt{82}}(8, -3, 0, -3), \frac{1}{\sqrt{2050}}(-9, -12, 41, -12) \right\}$$

Si (a, b, c, d) es tal que $3a + 4b + 3c + 4d = 1$ las coordenadas de este vector trasladado al subespacio respecto la base β serán:

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}(b - d), \quad \gamma = \sqrt{82}\left(-\frac{b+d}{6} - \frac{4}{41}c + \frac{53}{1722}\right) \quad y \quad \delta = \sqrt{2050}\left(\frac{c}{41} - \frac{1}{574}\right)$$

En esta base las coordenadas de los vértices son:

$$\begin{array}{cccc} \left(-\frac{\sqrt{2}}{12}, -\frac{125\sqrt{82}}{3444}, -\frac{25\sqrt{82}}{861}\right) & \left(\frac{\sqrt{2}}{12}, -\frac{125\sqrt{82}}{3444}, -\frac{25\sqrt{82}}{861}\right) & \left(-\frac{3\sqrt{2}}{20}, \frac{5\sqrt{82}}{1148}, \frac{\sqrt{82}}{287}\right) & \left(\frac{3\sqrt{2}}{20}, \frac{5\sqrt{82}}{1148}, \frac{\sqrt{82}}{287}\right) \\ & \left(0, -\frac{\sqrt{82}}{574}, \frac{55\sqrt{82}}{1722}\right) & \left(0, \frac{53\sqrt{82}}{1722}, -\frac{5\sqrt{82}}{574}\right) & \\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{9}, \frac{47\sqrt{82}}{5166}, \frac{95\sqrt{82}}{5166}\right) & \left(-\frac{\sqrt{2}}{9}, \frac{103\sqrt{82}}{5166}, \frac{25\sqrt{82}}{5166}\right) & \left(\frac{\sqrt{2}}{9}, \frac{103\sqrt{82}}{5166}, \frac{25\sqrt{82}}{5166}\right) & \left(\frac{\sqrt{2}}{9}, \frac{47\sqrt{82}}{5166}, \frac{95\sqrt{82}}{5166}\right) \end{array}$$

y obtenemos el siguiente poliedro:

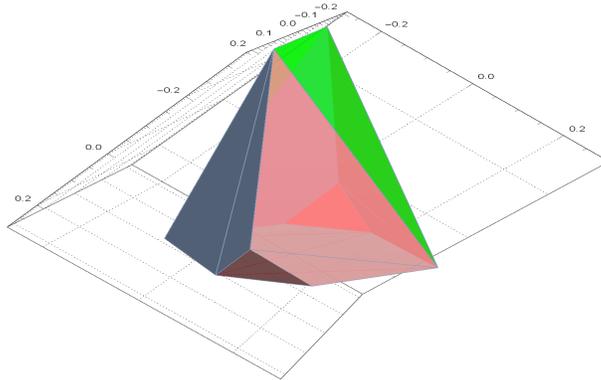


FIGURA 17. $\mathcal{C}_1(\mathfrak{g}_2)$

8.3. **Ejemplo 3.** Sea el álgebra de Lie \mathfrak{g}_3 de dimensión 7 definida por la base $\{e_1, e_2, \dots, e_7\}$ y los corchetes

$$[e_1, e_2] = e_5, \quad [e_2, e_3] = e_6, \quad [e_3, e_4] = e_7.$$

Es la representación en álgebras de Lie del siguiente grafo:

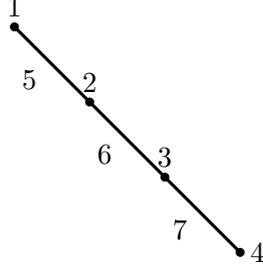


FIGURA 18. Grafo de (\mathfrak{g}_3)

Sea D derivación de \mathfrak{g}_3 ,

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & & & \\ & d_2 & & & & & \\ & & d_3 & & & & \\ & & & d_4 & & & \\ & & & & d_1 + d_2 & & \\ & & & & & d_2 + d_3 & \\ & & & & & & d_3 + d_4 \end{pmatrix} \in \mathfrak{t}(\mathfrak{g}_3)$$

Notemos que $\text{tr}(D) = 2d_1 + 3d_2 + 3d_3 + 2d_4$. Se ve en el caso genérico que $\mathfrak{t}(\mathfrak{g}_3)$ es libre de multiplicidad y $G_{\mathfrak{t}(\mathfrak{g}_3)} = T$, además como la base es nice

$$m(\overline{T \cdot \mu}) = \text{CH}(F_{12}^5, F_{23}^6, F_{34}^7).$$

Tenemos entonces que $D \in \mathcal{C}(\mathfrak{g}_3) \subset \mathfrak{t}(\mathfrak{g}_3)$ si y sólo si $D = aF_{12}^5 + bF_{23}^6 + cF_{34}^7 + E$ y $\text{tr}(D) > 0$, donde $a, b, c > 0$ y E matriz diagonal definida positiva. Y esto implica

$$\begin{cases} d_1 + a > 0 & (8.3.1) \\ d_2 + a + b > 0 & (8.3.2) \\ d_3 + b + c > 0 & (8.3.3) \\ d_4 + c > 0 & (8.3.4) \\ d_1 + d_2 - a > 0 & (8.3.5) \\ d_2 + d_3 - b > 0 & (8.3.6) \\ d_3 + d_4 - c > 0 & (8.3.7) \end{cases}$$

Las últimas tres desigualdades implican $d_1 + d_2 > 0$, $d_2 + d_3 > 0$ y $d_3 + d_4 > 0$.

Notemos que de (8.3.5), (8.3.1), (8.3.2), existe $a > 0$ tal que

$$d_1 + d_2 > a > -d_1; \quad -d_2 - b$$

y esto pasa si y sólo si $2d_1 + d_2 > 0$ y de (8.3.6) existe $b > 0$ tal que

$$d_2 + d_3 > b > -d_1 - 2d_2; \quad -c - d_3$$

si y sólo si $d_1 + 3d_2 + d_3 > 0$ y existe $c > 0$ tal que

$$d_3 + d_4 > c > -d_2 - 2d_3; \quad -d_4$$

Lo que implica $d_3 + 2d_4 > 0$ y $d_2 + 3d_3 + d_4 > 0$.

Luego el sistema anterior es equivalente a

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1 + d_2 > 0 \\ d_3 + d_4 > 0 \\ d_2 + d_3 > 0 \\ 2d_1 + d_2 > 0 \\ 2d_4 + d_3 > 0 \\ d_1 + 3d_2 + d_3 > 0 \\ d_2 + 3d_3 + d_4 > 0 \end{array} \right.$$

Como el cono $\mathcal{C}(\mathfrak{g}_3)$ es invariante por múltiplo escalar positivo, consideramos $tr(D) = 1$ tal que las ecuaciones de $\mathcal{C}_1(\mathfrak{g}_3)$ serán:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - d_1 - 2d_2 - 3d_3 - 2d_4 > 0 \\ 1 - 2d_1 - 3d_2 - 2d_3 - d_4 > 0 \\ 1 - 2d_1 - 2d_2 - 2d_3 - 2d_4 > 0 \\ 1 - 2d_2 - 3d_3 - 2d_4 > 0 \\ 1 - 2d_1 - 3d_2 - 2d_3 > 0 \\ 1 - d_1 - 2d_3 - 2d_4 > 0 \\ 1 - 2d_1 - 2d_2 - d_4 > 0 \end{array} \right.$$

Es decir que $\mathcal{C}_1(\mathfrak{g}_3)$ es un poliedro de siete caras cuyos vértices son:

$$\begin{array}{cccc} (0, 0, 0, \frac{1}{2}) & (\frac{1}{2}, 0, 0, 0) & (0, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}) & (-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0, 0) \\ (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}) & (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) & (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{6}) & (-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \end{array}$$

Para graficarlo en el espacio trasladamos los vectores al subespacio tal que $2d_1 + 3d_2 + 3d_3 + 2d_4 = 0$ y consideramos la base ortonormal

$$\beta = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, -1), \frac{1}{\sqrt{34}}(-3, 4, 0, -3), \frac{1}{\sqrt{442}}(-6, -9, 17, -6) \right\}$$

Si (a, b, c, d) es tal que $2a + 3b + 3c + 2d = 1$ las coordenadas de este vector trasladado al subespacio respecto la base β serán:

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}(a - d), \quad \gamma = \frac{\sqrt{34}}{4}(b + \frac{9}{17}c - \frac{13}{85}) \quad y \quad \delta = \sqrt{442}(\frac{c}{17} - \frac{1}{170})$$

En esta base las coordenadas de los vértices son:

$$\begin{array}{cccc} (-\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{13\sqrt{34}}{340}, -\frac{\sqrt{442}}{170}) & (\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{13\sqrt{34}}{340}, -\frac{\sqrt{442}}{170}) & (\frac{\sqrt{2}}{8}, \frac{19\sqrt{34}}{680}, \frac{2\sqrt{442}}{85}) & (-\frac{\sqrt{2}}{8}, \frac{59\sqrt{34}}{680}, -\frac{\sqrt{442}}{170}) \\ (\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{\sqrt{34}}{30}, \frac{\sqrt{442}}{30}) & (-\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{43\sqrt{34}}{510}, -\frac{13\sqrt{442}}{510}) & (\frac{5\sqrt{2}}{12}, -\frac{79\sqrt{34}}{170}, \frac{\sqrt{442}}{170}) & (-\frac{5\sqrt{2}}{12}, \frac{\sqrt{34}}{1020}, -\frac{13\sqrt{442}}{510}) \end{array}$$

y obtenemos el siguiente poliedro:

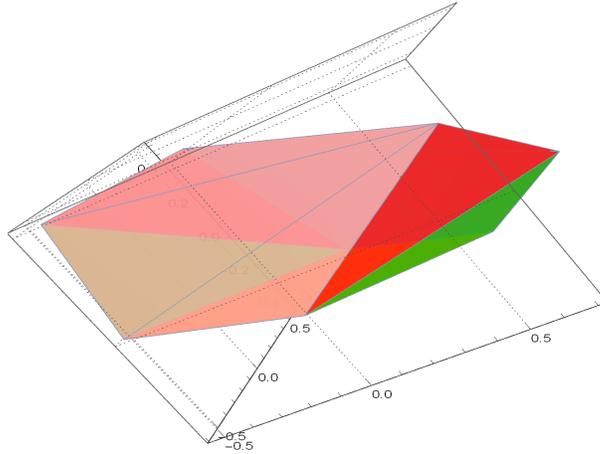


FIGURA 19. $\mathcal{C}_1(\mathfrak{g}_3)$

8.4. **Ejemplo 4.** Sea el álgebra de Lie \mathfrak{g}_4 de dimensión 7 definida por la base $\{e_1, e_2, \dots, e_7\}$ y los corchetes

$$[e_1, e_2] = e_5, \quad [e_1, e_3] = e_6, \quad [e_1, e_4] = e_7.$$

Es la representación en álgebras de Lie del siguiente grafo:

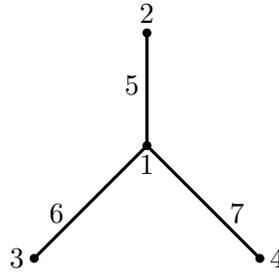


FIGURA 20. Grafo de (\mathfrak{g}_4)

Sea D derivación de \mathfrak{g}_4 ,

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & & & \\ & d_2 & & & & & \\ & & d_3 & & & & \\ & & & d_4 & & & \\ & & & & d_1 + d_2 & & \\ & & & & & d_1 + d_3 & \\ & & & & & & d_1 + d_4 \end{pmatrix} \in \mathfrak{t}(\mathfrak{g}_4)$$

Notemos que $\text{tr}(D) = 4d_1 + 2d_2 + 2d_3 + 2d_4 = 2(2d_1 + d_2 + d_3 + d_4)$. Se ve en el caso genérico que $\mathfrak{t}(\mathfrak{g}_4)$ es libre de multiplicidad y $G_{\mathfrak{t}(\mathfrak{g}_4)} = T$, además como la base es nice por (9)

$$m(\overline{T \cdot \mu}) = \text{CH}(F_{12}^5, F_{13}^6, F_{14}^7).$$

Tenemos entonces que $D \in \mathcal{C}(\mathfrak{g}_4) \subset \mathfrak{t}(\mathfrak{g}_4)$ si y sólo si $D = aF_{12}^5 + bF_{13}^6 + cF_{14}^7 + E$ y $\text{tr}(D) > 0$, donde $a, b, c > 0$ y E matriz diagonal definida positiva. Y esto implica

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1 + a + b + c > 0 \\ d_2 + a > 0 \\ d_3 + b > 0 \\ d_4 + c > 0 \\ d_1 + d_2 - a > 0 \\ d_1 + d_3 - b > 0 \\ d_1 + d_4 - c > 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (8.4.1) \\ (8.4.2) \\ (8.4.3) \\ (8.4.4) \\ (8.4.5) \\ (8.4.6) \\ (8.4.7) \end{array}$$

Las últimas tres desigualdades implican $d_1 + d_2 > 0$, $d_1 + d_3 > 0$ y $d_1 + d_4 > 0$. Notemos que de (8.4.5), (8.4.1), (8.4.2), existe $a > 0$ tal que

$$d_1 + d_2 > a > -d_1 - b - c ; -d_2$$

y esto pasa si y sólo si $d_1 + 2d_2 > 0$ y de (8.4.6) existe $b > 0$ tal que

$$d_1 + d_3 > b > -2d_1 - d_2 - c ; -d_3$$

si y sólo si $d_1 + 2d_3 > 0$ y existe $c > 0$ tal que

$$d_1 + d_4 > c > -3d_1 - d_2 - d_3 ; -d_4$$

Lo que implica $d_1 + 2d_4 > 0$ y $4d_1 + d_2 + d_3 + d_4 > 0$.

Luego el sistema anterior es equivalente a

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1 + d_2 > 0 \\ d_1 + d_3 > 0 \\ d_1 + d_4 > 0 \\ d_1 + 2d_2 > 0 \\ d_1 + 2d_3 > 0 \\ d_1 + 2d_4 > 0 \\ 4d_1 + d_2 + d_3 + d_4 > 0 \end{array} \right.$$

Consideremos $\text{tr}(D) = 2$ tal que $2d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 1$ y entonces, las ecuaciones de $\mathcal{C}_2(\mathfrak{g}_4)$ son:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - d_1 - d_3 - d_4 > 0 \\ 1 - d_1 - d_2 - d_4 > 0 \\ 1 - d_1 - d_2 - d_3 > 0 \\ 1 + d_2 - d_1 - d_3 - d_4 > 0 \\ 1 + d_3 - d_1 - d_2 - d_4 > 0 \\ 1 + d_4 - d_1 - d_2 - d_3 > 0 \\ 1 + 2d_1 > 0 \end{array} \right.$$

Es decir que $\mathcal{C}_2(\mathfrak{g}_4)$ es un poliedro de siete caras cuyos vértices son:

$$\begin{array}{cccc} (0, 1, 0, 0) & (0, 0, 1, 0) & (0, 0, 0, 1) & \\ (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1) & (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}) & (-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & (2, -1, -1, -1) \end{array}$$

Para graficarlo en el espacio trasladamos los vectores al subespacio tal que $2d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 0$ y consideramos la base ortonormal

$$\beta = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, -1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 0, -1), \sqrt{\frac{6}{7}}\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, 1, -\frac{1}{6}\right) \right\}$$

Si (a, b, c, d) es tal que $2a + b + c + d = 1$ las coordenadas de este vector trasladado al subespacio respecto la base β son:

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}(b - d), \quad \gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-b - d - \frac{c}{3} + \frac{1}{3}\right) \quad y \quad \delta = \sqrt{\frac{7}{6}}\left(c - \frac{1}{5}\right)$$

En esta base las coordenadas de los vértices son:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{5}\sqrt{\frac{7}{6}}\right) & (0, 0, \frac{4}{5}\sqrt{\frac{7}{6}}) & \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{5}\sqrt{\frac{7}{6}}\right) \\ & \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{10}\sqrt{\frac{7}{6}}\right) & \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{4}{5}\sqrt{\frac{7}{6}}\right) & \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{10}\sqrt{\frac{7}{6}}\right) & \left(0, \frac{4\sqrt{3}}{3}, -\frac{6}{5}\sqrt{\frac{7}{6}}\right) \end{aligned}$$

y obtenemos el siguiente poliedro:

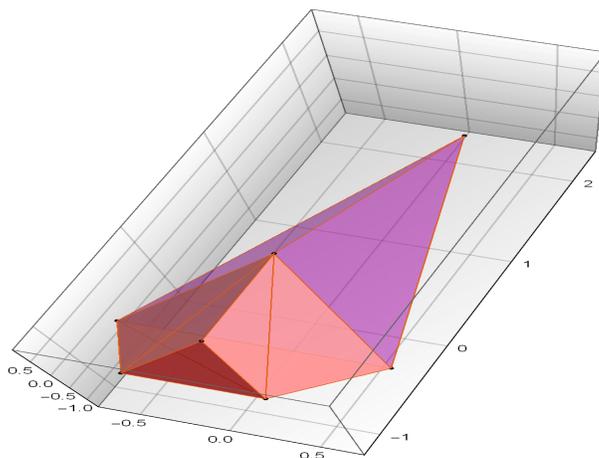


FIGURA 21. $\mathcal{C}_2(\mathfrak{g}_4)$

8.5. **Ejemplo 5.** Sea el álgebra de Lie \mathfrak{g}_5 de dimensión 8 definida por la base $\{e_1, e_2, \dots, e_8\}$ y los corchetes

$$[e_1, e_2] = e_5, \quad [e_1, e_3] = e_6, \quad [e_1, e_4] = e_7, \quad [e_3, e_4] = e_8.$$

Esta es la representación en álgebras de Lie del siguiente grafo:

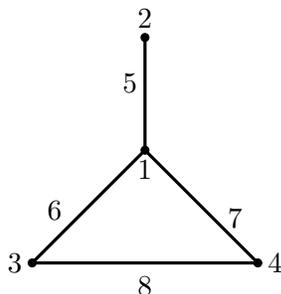


FIGURA 22. Grafo de (\mathfrak{g}_5)

Luego el sistema anterior es equivalente a

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1 + d_2 > 0 \\ d_1 + d_3 > 0 \\ d_1 + d_4 > 0 \\ d_3 + d_4 > 0 \\ d_1 + 2d_2 > 0 \\ 4d_1 + d_2 + d_3 + d_4 > 0 \\ d_1 + 3d_3 + d_4 > 0 \\ d_1 + d_3 + 3d_4 > 0 \end{array} \right.$$

Como el cono $\mathcal{C}(\mathfrak{g}_5)$ es invariante por múltiplo escalar positivo, consideramos $\text{tr}(D) = 1$. Las ecuaciones de $\mathcal{C}_1(\mathfrak{g}_5)$ serán:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - 3d_1 - d_2 - 3d_3 - 3d_4 > 0 \\ 1 - 3d_1 - 2d_2 - 2d_3 - 3d_4 > 0 \\ 1 - 3d_1 - 2d_2 - 3d_3 - 2d_4 > 0 \\ 1 - 4d_1 - 2d_2 - 2d_3 - 2d_4 > 0 \\ 1 - 3d_1 - 3d_3 - 3d_4 > 0 \\ 1 - d_2 - 2d_3 - 2d_4 > 0 \\ 1 - 3d_1 - 2d_2 - 2d_4 > 0 \\ 1 - 3d_1 - 2d_2 - 2d_3 > 0 \end{array} \right.$$

Es decir que $\mathcal{C}_3(\mathfrak{g}_5)$ es un poliedro de ocho caras en el hiperplano $4d_1 + 2d_2 + 3d_3 + 3d_4 = 1$ cuyos vértices son:

$$\begin{array}{ll} (0, 0, 0, \frac{1}{3}) & (0, 0, \frac{1}{3}, 0) \\ (-\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}) & (-\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}) \\ (\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{3}) & (\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{6}) \\ (\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{6}) & (\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}) \\ (0, \frac{1}{2}, 0, 0) & (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}) \end{array}$$

Para graficarlo en el espacio trasladamos los vectores al subespacio tal que $4d_1 + 2d_2 + 3d_3 + 3d_4 = 0$ y consideramos la base ortonormal

$$\beta = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{145}}(-6, -3, 10, 0), \frac{1}{\sqrt{1102}}(12, 6, 9, -29) \right\}$$

Si (a, b, c, d) es tal que $4a + 2b + 3c + 3d = 1$, las coordenadas de este vector trasladado al subespacio respecto la base β son:

$$\alpha = \sqrt{5}(a + \frac{3}{5}(d + c) - \frac{11}{60}), \quad \gamma = \sqrt{145}(\frac{c}{10} + \frac{9}{290}d - \frac{38}{3480}) \quad y \quad \delta = \sqrt{1102}(-\frac{d}{29} + \frac{1}{348})$$

En esta base las coordenadas de los vértices son:

$$\begin{array}{ll} (\frac{\sqrt{5}}{60}, -\frac{\sqrt{145}}{1740}, -\frac{\sqrt{1102}}{116}) & (\frac{\sqrt{5}}{60}, -\frac{13\sqrt{145}}{580}, \frac{\sqrt{1102}}{348}) \\ (-\frac{29\sqrt{5}}{420}, \frac{149\sqrt{145}}{12180}, -\frac{17\sqrt{1102}}{2436}) & (-\frac{29\sqrt{5}}{420}, \frac{269\sqrt{145}}{12180}, -\frac{5\sqrt{1102}}{2436}) \\ (\frac{\sqrt{5}}{12}, -\frac{\sqrt{145}}{58}, -\frac{\sqrt{1102}}{116}) & (\frac{\sqrt{5}}{12}, \frac{\sqrt{145}}{58}, \frac{\sqrt{1102}}{116}) \\ (\frac{3\sqrt{5}}{20}, -\frac{13\sqrt{145}}{580}, -\frac{\sqrt{1102}}{348}) & (\frac{3\sqrt{5}}{20}, \frac{\sqrt{145}}{1740}, \frac{\sqrt{1102}}{116}) \\ (-\frac{11\sqrt{5}}{60}, -\frac{19\sqrt{145}}{1740}, \frac{\sqrt{1102}}{348}) & (-\frac{3\sqrt{5}}{20}, \frac{19\sqrt{145}}{1740}, -\frac{\sqrt{1102}}{348}) \end{array}$$

y obtenemos el siguiente poliedro:

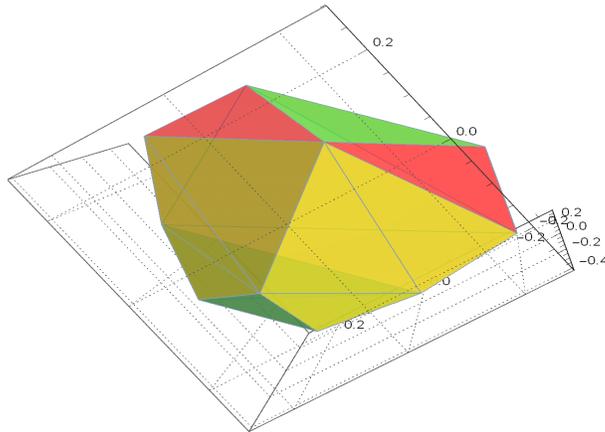


FIGURA 23. $\mathcal{C}_1(\mathfrak{g}_5)$

REFERENCIAS

- [AW76] R. AZENCOTT, E. WILSON, Homogeneous manifolds with negative curvature. I, *Trans. Amer. Math. Soc.* **215** (1976), 323–362.
- [DL19] J. DERÉ, J. LAURET, On Ricci negative solvmanifolds and their nilradicals, *Math. Nachrichten* **292** (2019), 1462-1481.
- [D82] I. DOTTI, Ricci curvature of left-invariant metrics on solvable unimodular Lie groups, *Math. Z.* **180** (1982), 257-263.
- [DL82] I. DOTTI, M. L. LEITE, Metrics of negative Ricci curvature on $SL(n, \mathbb{R})$, $n \geq 3$. *J. Diff. Geom.* **17** (1982), 635-641.
- [DLM84] I. DOTTI, M. L. LEITE, R. MIATELLO, Negative Ricci curvature on complex semisimple Lie groups, *Geom. Dedicata* **17** (1984), 207-218.
- [H74] E. HEINTZE, On homogeneous manifolds of negative curvature, *Math. Ann.* **211** (1974), 23-34.
- [HS10] P. HEINZNER, P. SCHÜTZDELLER, Convexity properties of gradient maps, *Adv. Math.* **225** (2010), 1119-1133.
- [JP17] M. JABLONSKI, P. PETERSEN, A step towards the Alekseevskii Conjecture, *Math. Ann.* **368** (2017), 197-212.
- [LW19] E.A. LAURET, C.E. WILL, Non-solvable Lie groups with negative Ricci curvature, *Transformation groups*, in press (arXiv).
- [LW13] J. LAURET, C.E. WILL, On the diagonalization of the Ricci flow on Lie groups, *Proc. Amer. Math. Soc.* **141**, Number 10, (2013), 3651-3663.
- [LW2] J. LAURET, C.E. WILL, Ricci negative derivations, in press (arXiv).
- [N16] Y. NIKOLAYEVSKY, Solvable extensions of negative Ricci curvature of filiform Lie Groups, *Math. Nach.* **289** (2016), 321-331.
- [NN15] Y. NIKOLAYEVSKY, YU.G. NIKONOROV, On solvable Lie groups of negative Ricci curvature, *Math. Z.* **280** (2015), 1-16.
- [W17] C.E. WILL, Negative Ricci Curvature on some non-solvable Lie groups, *Geom. Dedicata* **186** (2017), 181-195.
- [W18] C.E. WILL, Negative Ricci Curvature on some non-solvable Lie groups II, *Math. Z.*, in press.
- [W64] J.A. WOLF, Homogeneity and bounded isometrics in manifolds of negative curvature, *Illinois J. Math.* **8** (1964), 14-18.