Control de líneas con movimiento infinitesimalmente helicoidal de paso fijo

por Mateo Anarella

Presentado ante la
Facultad de Matemática, Astronomía y Física
como parte de los requerimientos para la obtención
del grado de Licenciado en Matemática de la

Universidad Nacional de Córdoba

Marzo 2020

Director: Marcos Salvai

Resumen

Sea $\mathcal{L}$ el espacio de líneas orientadas de $\mathbb{R}^3$ o del espacio hiperbólico H^3. Se estudia la controlabilidad del sistema de control en $\mathcal{L}$ dado por la condición de que una curva de líneas orientadas describa en cada instante, a nivel infinitesimal, un helicoide de paso prefijado. El sistema se describe con precisión como cierto subfibrado de $T\mathcal{L}$ sobre $\mathcal{L}$ (que no es topológicamente trivial) y resulta controlable salvo en el caso euclídeo con helicoide plano (paso infinito).

Abstract

Let $\mathcal{L}$ be the space of oriented lines of $\mathbb{R}^3$ or hyperbolic space H^3. We study the controllability of the control system in $\mathcal{L}$ given by the condition that a curve of oriented lines describes at each instant, at the infinitesimal level, a helicoid with prescribed pitch. The system is defined precisely as a certain subbundle of $T\mathcal{L}$ over $\mathcal{L}$ (which is not topologically trivial) and turns out to be controllable except in the Euclidean case with flat helicoid (infinite pitch).

Mathematics Subject Classification (2010): 34H05, 53A17, 53A35, 53C30, 57R27, 70Q05.

Palabras claves: Sistema de control - Espacio fibrado - Forma espacial - Espacio de geodésicas orientadas - Helicoide - Subvariedad sustancial.

Keywords: Control system - Bundle space - Space Form - Space of oriented geodesics - Helicoid - Substantial submanifold.

A Bigote Cangorlo.

Agradecimientos

Antes de pasar a los resultados, quería recordar y hacer mención de todas las personas que me ayudaron a lo largo de mi carrera y colaboraron en este trabajo.

Primero que nada, quería agradecer a la Universidad Nacional de Córdoba, por darme el lugar para realizar mis estudios.

A Marcos Salvai, mi director, que siempre estuvo presente y con su infinita generosidad me explicó todas las dudas que me surgieron.

A Eduardo Hulett y Yamile Godoy, el jurado, por su paciencia al leer y corregir este trabajo.

Y por último, a mi familia y amigos, por darme el sustento emocional durante toda la carrera.

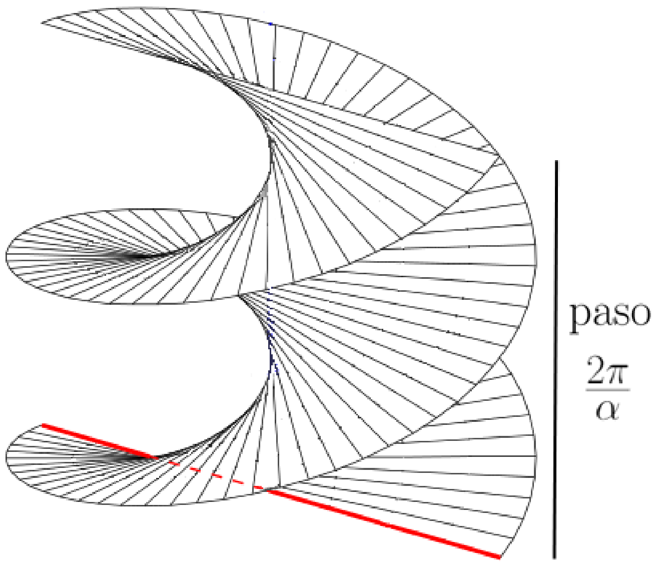
Índice general

Capítulo 1

Introducción y presentación de los resultados

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. El helicoide en $\mathbb{R}^3$ de velocidad angular α en posición estándar es la superficie parametrizada

$$\phi_o : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad \phi_o(s,t) = s\cos(\alpha t)\, e_1 + s\,\mathrm{sen}(\alpha t)\, e_2 + te_3.$$



Un helicoide en $\mathbb{R}^3$ de velocidad angular α es una superficie parametrizada congruente a ϕ_o por una transformación rígida de $\mathbb{R}^3$, es decir una transformación que preserva la distancia y la orientación.

Un concepto relacionado con la velocidad angular de un helicoide es el de **paso**. Recordemos que el paso de un helicoide en $\mathbb{R}^3$ es la altura de una vuelta completa, medida de manera paralela al eje. Así, el paso de un helicoide de velocidad angular $\alpha \neq 0$ es igual a $2\pi/\alpha$. Por supuesto, el paso y la velocidad angular se determinan mutuamente. Si $\alpha = 0$, o sea si la superficie es un plano, decimos que tiene paso infinito.

El problema que nos interesa, enunciado de manera vaga, es el siguiente: Fijamos $\alpha \in \mathbb{R}$. Dadas dos rectas orientadas ℓ_1 y ℓ_2 en $\mathbb{R}^3$, ¿se puede mover ℓ_1 hasta llegar a ℓ_2 de tal manera que la superficie barrida, en cada instante, a nivel infinitesimal, se parezca a un helicoide de velocidad angular α?

El ámbito natural para plantear el problema de manera precisa es el de la teoría de control.

Sea N una variedad diferenciable. Asignar un subconjunto $\mathcal{A}_q$ de T_qN a cada $q \in N$, con ciertas propiedades, determina un problema de control: Dados $p, q \in N$, ¿existe una curva γ en N que los une y tal que $\gamma'(t) \in \mathcal{A}_{\gamma(t)}$ para todo t? Un caso muy estudiado es cuando $\mathcal{A}_q$ es un subespacio vectorial o un subespacio afín de T_qN.

Sea $\mathcal{L}$ el espacio de las rectas orientadas de $\mathbb{R}^3$, que es una variedad diferenciable de dimensión cuatro donde el grupo de transformaciones rígidas de $\mathbb{R}^3$ actúa transitivamente. El problema planteado al comienzo se traduce en definir cierto subfibrado $\mathcal{A}$ del fibrado tangente $T\mathcal{L}$. Para mayor generalidad, lo estudiamos para una forma espacial de dimensión tres, o sea, además de $\mathbb{R}^3$, consideramos el espacio hiperbólico H^3 y la esfera S^3, tomando líneas orientadas y círculos máximos orientados, respectivamente. Tratamos, en lo posible, los tres casos en simultáneo, pero la respuesta para el caso esférico no la encontramos aún y trabajaremos en ello en un futuro próximo.

Para $\kappa = 1, 0, -1$, sea M_κ la forma espacial de dimensión tres de curvatura gaussiana constante κ, es decir,

$$M_1 = S^3, \quad M_0 = \mathbb{R}^3 \quad \text{y} \quad M_{-1} \text{ el espacio hiperbólico } H^3.$$

Denotaremos por γ_v a la geodésica en M_κ con velocidad inicial v.

Sea $\mathcal{G}_\kappa$ el espacio de geodésicas orientadas de M_κ salvo parametrizaciones, o sea,

$$\mathcal{G}_\kappa = \{[\sigma] \mid \sigma : \mathbb{R} \to M_\kappa \text{ es una geodésica de rapidez unitaria en } M_\kappa\},$$

donde $\sigma_1 \sim \sigma_2$ si $\sigma_1(t) = \sigma_2(t + t_0)$ para todo t y para algún $t_0 \in \mathbb{R}$.

El grupo de isometrías de M_κ actúa transitivamente en $\mathcal{G}_\kappa$ y esto induce una estructura diferenciable en $\mathcal{G}_\kappa$ de dimensión cuatro, que lo hace difeomorfo a TS^2 para $\kappa = 0, -1$, y a $S^2 \times S^2$ para $\kappa = 1$.

Presentamos ahora la definición de sistema de control, que tomamos de la subsección 2.6 en [9], inspirada en [1] y [2] (subsección 2.1).

Esta definición, que se adecua mejor a nuestro problema, es más general que la más usual (que requiere que $\mathcal{A}$ sea un subfibrado vectorial o vectorial afín, y muchas veces está planteado localmente en $\mathbb{R}^n$, sin involucrar cuestiones globales).

Definición 1. *Un **sistema de control** en una variedad diferenciable N es un subfibrado $(\mathcal{A}, \iota)$ del fibrado tangente TN,*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr] & TN \arrow[d, "\pi"] \\ & N. \end{tikzcd}$$

*Una curva suave $\gamma : (a,b) \to N$ se dice **admisible** si para todo $t \in (a,b)$ se cumple que $\gamma'(t) \in \iota(\mathcal{A})$. Un sistema de control en N se dice **controlable** si para cada par de puntos en N existe una curva admisible a trozos que los une.*

Antes de presentar el sistema de control que nos interesa, necesitamos las siguientes definiciones.

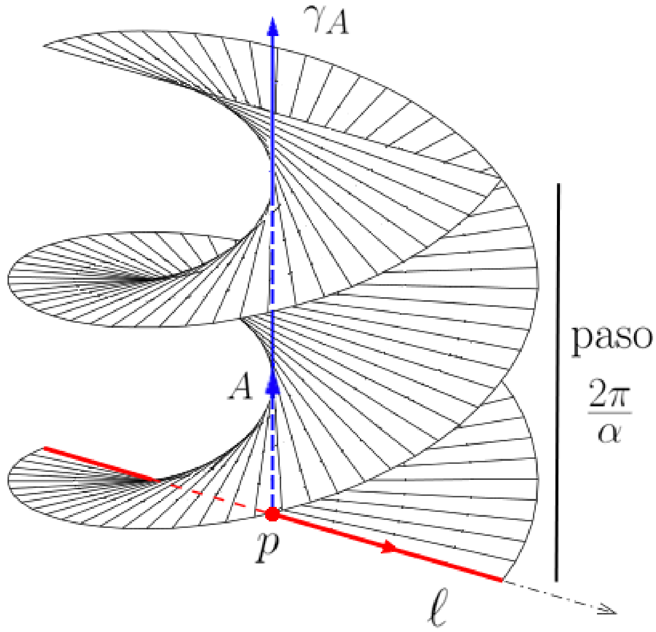
Definición 2. *Fijamos $\alpha \in \mathbb{R}$. Dados $\ell \in \mathcal{G}_\kappa$, $p \in \ell$ y $A \in T_pM_\kappa$ unitario ortogonal a ℓ, la **superficie parametrizada α-helicoidal con rayo inicial ℓ y eje** γ_A,*

$$\phi^\alpha_{\ell,p,A} : \mathbb{R}^2 \to M_\kappa,$$

se define como sigue: Supongamos que $\ell = [\sigma]$ con $\sigma(0) = p$ y sea $B = A \times \sigma'(0)$. Entonces

$$\phi^\alpha_{\ell,p,A}(s,t) = \gamma_{\cos(\alpha t)V_t + \operatorname{sen}(\alpha t)B_t}(s)$$

donde $t \mapsto V_t$ y $t \mapsto B_t$ son los traslados paralelos a lo largo de γ_A de $\sigma'(0)$ y B, respectivamente.



En otras palabras, el eje sale perpendicularmente a ℓ desde $p \in \ell$ con velocidad inicial A, y los rayos rotan con velocidad angular constante α a medida que avanzan sobre el eje con rapidez unitaria.

DEFINICIÓN 3. *Fijamos $\alpha \in \mathbb{R}$. Dados ℓ, p, A como arriba, definimos la **curva α-helicoidal con rayo inicial ℓ y eje γ_A** mediante*

$$\Gamma^{\alpha}_{\ell,p,A} : \mathbb{R} \to \mathcal{G}_\kappa, \qquad \Gamma^{\alpha}_{\ell,p,A}(t) = \left[s \mapsto \phi^{\alpha}_{\ell,p,A}(s,t) \right].$$

DEFINICIÓN 4. *Para $\kappa = 0, 1, -1$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ sea $\mathcal{A}^\alpha_\kappa$ el subconjunto de $T\mathcal{G}_\kappa$ dado por*

$$\mathcal{A}^\alpha_\kappa = \{\textit{velocidades iniciales de curvas } \alpha\textit{-helicoidales en } \mathcal{G}_\kappa\}.$$

Ahora podemos definir el sistema de control α-helicoidal en $\mathcal{G}_\kappa$.

PROPOSICIÓN 5. *La proyección canónica $\mathcal{A}^\alpha_\kappa \to \mathcal{G}_\kappa$ es un fibrado. Más aún, la inclusión $\iota^\alpha_\kappa : \mathcal{A}^\alpha_\kappa \to T\mathcal{G}_\kappa$ es un subfibrado y esto da el sistema de control*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^\alpha_\kappa \arrow[r, "\iota^\alpha_\kappa"] \arrow[dr] & T\mathcal{G}_\kappa \arrow[d, "\pi"] \\ & \mathcal{G}_\kappa. \end{tikzcd}$$

A continuación describimos las fibras típicas del fibrado $\mathcal{A}_\kappa^\alpha \to \mathcal{G}_\kappa$ para los distintos valores de $\kappa = 0, -1$ y de α genérico.

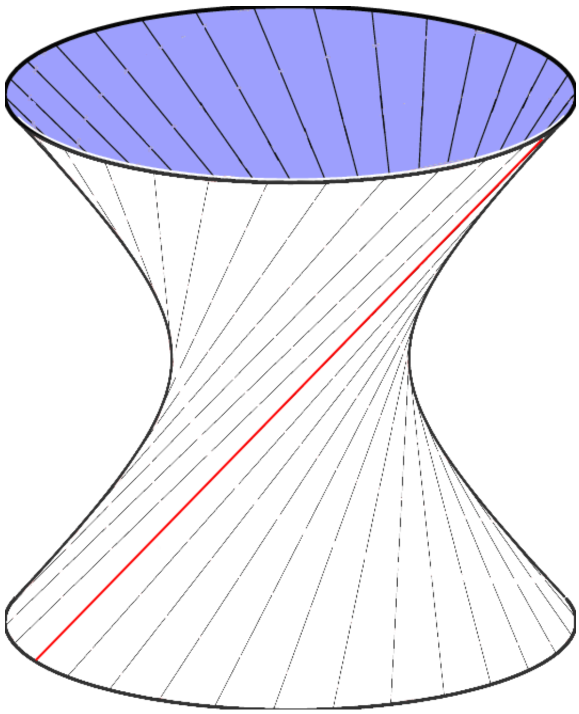
PROPOSICIÓN 6. *Sea $\kappa = -1, 0$ y supongamos que $\alpha^2 \neq \kappa$. La fibra típica del fibrado $\mathcal{A}_\kappa^\alpha$ es homeomorfa al cilindro $\mathbb{R} \times S^1$.*

La siguiente proposición refuerza la idea de que el problema que estudiamos es de índole global y da cuenta de la necesidad de trabajar en un contexto invariante.

PROPOSICIÓN 7. *Sea $\kappa = -1, 0$ y supongamos que $\alpha^2 \neq \kappa$, entonces el fibrado $\mathcal{A}_\kappa^\alpha$ sobre $\mathcal{G}_\kappa$ no es topológicamente trivial, es decir, la variedad $\mathcal{A}_\kappa^\alpha$ no es homeomorfa a $\mathcal{G}_\kappa \times \mathcal{F}_\kappa^\alpha$, donde $\mathcal{F}_\kappa^\alpha$ es la fibra típica de $\mathcal{A}_\kappa^\alpha \to \mathcal{G}_\kappa$.*

EJEMPLO 8. a) *Las curvas $\Gamma_{\ell,p,A}^\alpha$, es decir las curvas puramente α-helicoidales, son claramente admisibles.*

b) *En $\mathbb{R}^3$, la curva de rectas que barre un hiperboloide de una sola hoja es admisible para el sistema ι_0^α (con parámetros apropiados). Esto también vale para superficies análogas en H^3 y S^3.*



Ahora estamos en condiciones de enunciar nuestro resultado principal.

TEOREMA 9. *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Para $\kappa = -1, 0$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) *El sistema de control $(\mathcal{A}_\kappa^\alpha, \iota_\kappa^\alpha)$ es controlable.*

b) *Se cumple que $\alpha^2 \neq \kappa$.*

c) *Para cada $\ell \in \mathcal{G}_\kappa$, la fibra típica de $\mathcal{A}_\kappa^\alpha$ sobre ℓ es una subvariedad sustancial de $T_\ell \mathcal{G}_\kappa$.*

d) *La fibra típica de $\mathcal{A}_\kappa^\alpha$ tiene dimensión dos.*

Más precisamente: Si $\kappa = -1$, el sistema es controlable para todo α. Para el caso $\kappa = 0$, el sistema es controlable si $\alpha \neq 0$, y si $\alpha = 0$, una curva admisible de rectas orientadas consiste de rectas paralelas.

(Una subvariedad de un espacio vectorial se dice sustancial si no está contenida en ningún subespacio afín.)

OBSERVACIÓN 10. *El teorema posiblemente sea válido para $\kappa = 1$ (por ello elegimos esa presentación del apartado (b)). En este caso, si $\alpha = \pm 1$, una curva admisible en $\mathcal{G}_1$ probablemente consista de círculos máximos en una fibración de Hopf. Esperamos trabajar en esto en el futuro cercano.*

En esta primera etapa exploratoria, probaremos la controlabilidad del sistema exhibiendo curvas admisibles explícitas que unen dos líneas dadas. Más adelante intentaremos recurrir a herramientas más fuertes, como el Teorema de la Órbita de Sussmann (ver [16]).

En el último capítulo se demuestran las proposiciones y los teoremas de la introducción. Adelantamos algunos ingredientes.

- En general usamos el modelo del hiperboloide de H^3, y a veces los modelos de la bola de Poincaré y del semiespacio superior.

- Aprovechamos la invariancia del problema, recurriendo extensivamente a variedades presentadas como cocientes de grupos de Lie.

- El caso de mayor dificultad es el de hallar una curva admisible a trozos que una dos rectas orientadas que se intersecan.

- Las variaciones infinitesimales de geodésicas parametrizadas partiendo de una geodésica σ se describen mediante campos de Jacobi a lo largo de σ; estos representan vectores en $T_{[\sigma]}\mathcal{G}_\kappa$. Nuestra ecuación relevante es

$$\frac{DJ}{ds}(0) = \alpha J(0) \times \sigma'(0), \qquad \|J(0)\| = 1.$$

Para finalizar la introducción comentamos un problema relacionado. Sea N una variedad diferenciable. Dada una familia $\mathcal{F}$ de curvas distinguidas, se puede plantear una variación del así llamado *problema de Oxford* (también llamado *problema de Kendall*): Encontrar la cantidad mínima de trozos en $\mathcal{F}$ de curvas continuas que llevan un punto inicial a un punto final de M, ambos arbitrarios. El problema original fue propuesto en [10] para el caso de una esfera rodando sobre el plano sin deslizamiento ni giro sobre el punto de contacto y la familia $\mathcal{F}$ consiste en rodar a lo largo de rectas (ver también [12]). El análogo en nuestro contexto es tomar $N = \mathcal{G}_\kappa$ y $\mathcal{F}$ el conjunto de curvas α-helicoidales puras.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Variedades homogéneas

La referencia general para esta sección es el libro [17].

Un **grupo de Lie** G es una variedad diferenciable que posee una estructura de grupo tal que las funciones $(g,h) \mapsto gh$ y $g \mapsto g^{-1}$ son ambas diferenciables. Para $g \in G$, denotamos por L_g, $R_g : G \to G$ las multiplicaciones por g a izquierda y a derecha, respectivamente, es decir, $L_g(k) = gk$ y $R_g(k) = kg$. Ambas resultan aplicaciones suaves.

El **álgebra de Lie** $\mathfrak{g}$ de G se define como el espacio tangente de G en la identidad e, es decir, $\mathfrak{g} = T_eG$.

La aplicación **exponencial** $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$ se define mediante $\exp(X) = \gamma(1)$, donde $\gamma : \mathbb{R} \to G$ es el único morfismo de grupos tal que $\gamma'(0) = X$. Se cumple que la curva $t \mapsto \exp(tX)$ es el único morfismo suave de $\mathbb{R}$ en G con velocidad inicial X, luego $\gamma(t) = \exp(tX)$.

Sea N un conjunto y sea G un grupo. Una **acción** de G en N es una aplicación $G \times N \longrightarrow N$, denotada por $(g,p) \longmapsto g \cdot p$, tal que

$$e \cdot p = p \qquad \text{y} \qquad (gh) \cdot p = g \cdot (h \cdot p)$$

para todo $p \in N$ y todo $g, h \in G$. El subgrupo de **isotropía** de G en un elemento $p \in N$ es el subgrupo $G_p = \{g \in G : gp = p\}$.

Si $\cdot$ es una acción del grupo G en N, cada elemento $g \in G$ induce una biyección $q \mapsto g \cdot q$ de N. En adelante, por abuso de notación, a veces identificaremos esta biyección con el elemento g.

Si K es un subgrupo de G, se define el **cociente** G/K como el conjunto de coclases, es decir, $G/K = \{gK : g \in G\}$. La **traslación a izquierda** en G/K está bien definida por $\tilde{L}_g : G/K \to G/K$, $\tilde{L}_g(hK) = ghK$.

Una acción se dice **transitiva** si para todo par de puntos $p_1, p_2 \in N$ existe $g \in G$ tal que $g \cdot p_1 = p_2$. Si este es el caso, la aplicación

$$F_p : G/G_p \longrightarrow N, \qquad F_p(gG_p) = g \cdot p, \tag{2.1.1}$$

resulta biyectiva.

TEOREMA 11. *Sea K un subgrupo cerrado de un grupo de Lie G. Entonces G/K admite una única estructura diferenciable tal que la proyección canónica $G \longrightarrow G/K$ es una submersión suave. Además,* $\dim(G/K) = \dim G - \dim K$ *y para todo $g \in G$, la traslación a izquierda $\tilde{L}_g$ es suave.*

Supongamos que G actúa transitivamente en N. Si $p, q \in N$, los grupos de isotropía resultan conjugados, es decir, existe $k \in G$ tal que $G_p = kG_qk^{-1}$. Si además G_p es cerrado, por el teorema anterior, G/G_p resulta una variedad. Entonces la biyección (2.1.1) nos permite copiar la estructura diferenciable a N, de manera independiente de p. Cuando esto sucede, N se dice una **variedad homogénea**.

PROPOSICIÓN 12. *Sea $* : G \times N \to N$ una acción suave y transitiva de un grupo de Lie G en una variedad diferenciable N y sea $p \in N$. Entonces el subgrupo de isotropía G_p es cerrado en G y la aplicación (2.1.1) es un difeomorfismo.*

PROPOSICIÓN 13. *Sea K un subgrupo cerrado de un grupo de Lie G y sea $\varpi : G \longrightarrow G/K$ la proyección canónica. Si $\mathfrak{k}$ y $\mathfrak{g}$ son las álgebras de Lie de K y G, respectivamente, y $\mathfrak{p}$ es un subespacio de $\mathfrak{g}$ complementario a $\mathfrak{k}$, o sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, entonces $d\varpi_e|_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{p} \longrightarrow T_K G/K$ es un isomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que si una transformación lineal $T : U \to W$ es suryectiva y V es un complemento de $\ker(T)$, entonces $T|_V : V \to W$ es un isomorfismo.

Veamos que $\mathfrak{k} = \ker(d\varpi_e)$, probando la doble contención. Sea $X \in \mathfrak{k}$, luego $X = \frac{d}{dt}\big|_0 \exp(tX)$. Se sigue que

$$d\varpi_e(X) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \varpi(\exp(tX)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \exp(tX)K = 0,$$

pues $\exp(tX) \in K$ para todo t. Así, $\mathfrak{k} \subset \ker(d\varpi_e)$.

Por otro lado, sabemos que

$$\dim T_K\,(G/K) = \dim G/K = \dim G - \dim K = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{k} = \dim \mathfrak{p}.$$

Supongamos que $\mathfrak{k}$ está estrictamente contenido en el núcleo de $d\varpi_e$, o sea, $\ker\,(d\varpi_e) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}_1$, donde $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{p}_2$. Luego, como ya mencionamos

$$d\varpi_e|_{\mathfrak{p}_2} : \mathfrak{p}_2 \to T_K\,(G/K)$$

es un isomorfismo, pero $\dim \mathfrak{p}_2 < \dim \mathfrak{p} = \dim T_K\,(G/K)$, lo cual es absurdo. □

Este resultado es de suma utilidad ya que nos permite analizar elementos del espacio tangente a una variedad homogénea a través de sus respectivas identificaciones en el espacio vectorial $\mathfrak{p}$. Asimismo, podemos realizar ciertos endomorfismos de T_pN como endomorfismos de $\mathfrak{p}$, lo que posibilita un enfoque más algebraico.

Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y sea $g \in G$. Se define el operador $\mathrm{Ad}\,(g) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ por

$$\mathrm{Ad}\,(g) = d\,(L_g R_{g^{-1}})_e = d\,(R_{g^{-1}} L_g)_e\,.$$

Proposición 14. *Sean G, K, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ como en la Proposición 13, sea $\mathfrak{p}$ un complemento $\mathrm{Ad}(k)$-invariante de $\mathfrak{k}$ para todo $k \in K$. Entonces, bajo las hipótesis y la notación de la Proposición 12, con $G_p = K$ y $F_p = F$, el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{p} \arrow[r, "\mathrm{Ad}(k)"] \arrow[d, "d\varpi_e|_{\mathfrak{p}}"] & \mathfrak{p} \arrow[d, "d\varpi_e|_{\mathfrak{p}}"] \\
T_K(G/K) \arrow[d, "(dF)_K"] & T_K(G/K) \arrow[d, "(dF)_K"] \\
T_pN \arrow[r, "dk_p"] & T_pN,
\end{tikzcd} \tag{2.1.2}$$

es decir, para todo $X \in \mathfrak{p}$ se cumple que $dk_p dF_K d\varpi_e\,(X) = dF_K d\varpi_e\,(\mathrm{Ad}\,(k)\,(X))$.

Demostración. Sea $X \in \mathfrak{p}$. Podemos escribir $X = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \exp(tX)$. Por la regla de la cadena tenemos que

$$dk_p dF_K d\varpi_e(X) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 (k \circ F \circ \varpi)(\exp(tX)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 k \exp(tX)(p). \tag{2.1.3}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} dF_K d\varpi_e(\mathrm{Ad}(k)(X)) &= dF_K d\varpi_e (dR_{k^{-1}})_k (dL_k)_e (X) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_0 (F \circ \varpi \circ R_{k^{-1}} \circ L_k)(\exp tX) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_0 F\left(k \exp(tX) k^{-1} K\right), \end{aligned}$$

que resulta igual a (2.1.3), como se deseaba. $\square$

En lo que sigue definiremos los conceptos de fibrado y subfibrado, y daremos algunos ejemplos que serán utilizados más adelante.

Definición 15. *Dadas tres variedades diferenciables E, M y N, una submersión $\pi : E \longrightarrow M$ se dice un **fibrado de E sobre M con fibra típica** N si para cada $p \in M$ existen un entorno abierto U de p en M y un difeomorfismo $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times N$ (llamado trivialización local) tal que $\phi(x) \in \{q\} \times N$ para todo $q \in U$ y $x \in \pi^{-1}\{q\}$, o equivalentemente, tal que el siguiente diagrama sea conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr] & U \times N \arrow[d] \\ & U. \end{tikzcd}$$

Por ejemplo, si M es una variedad diferenciable de dimensión m y TM es su espacio tangente, entonces la proyección canónica es un fibrado sobre M con fibra típica $\mathbb{R}^m$.

Definición 16. *Sean $\pi_1 : E_1 \longrightarrow M$ y $\pi_2 : E_2 \longrightarrow M$ dos fibrados sobre la variedad diferenciable M con fibras típicas N_1 y N_2, respectivamente. Una subvariedad $\iota : E_1 \to E_2$ se dice un **subfibrado de π_2 sobre** M si existe una subvariedad $f : N_1 \to N_2$ que satisface la siguiente propiedad: Para todo $p \in M$ existen un* *abierto U de M que contiene a p y trivializaciones locales $\phi_1 : \pi_1^{-1}(U) \to U \times N_1$ y $\phi_2 : \pi_2^{-1}(U) \to U \times N_2$, de E_1 y E_2 respectivamente, tales que*

$$\phi_2 \circ \iota \circ \phi_1^{-1} = (\mathrm{Id}, f)\,. \tag{2.1.4}$$

En particular, se cumple que $\pi_2 \circ \iota = \pi_1$. En efecto, basta verificar la igualdad en el dominio de una trivialización cualquiera, digamos, $\pi_1^{-1}(U)$. Aplicamos miembro a miembro en (2.1.4) la proyección p_1 sobre el primer factor de $U \times N_2$ y obtenemos

$$p_1 \circ \phi_2 \circ \iota \circ \phi_1^{-1} = p_1.$$

La expresión deseada resulta de componer a derecha con ϕ_1 y de la identidad $\pi_2 = p_1 \circ \phi_2$.

En la siguientes proposiciones mencionamos ejemplos conocidos de subfibrados, que serán de utilidad.

Proposición 17. *Si H es un subgrupo cerrado del grupo de Lie K y K, a su vez, es un subgrupo cerrado del grupo de Lie G, entonces la proyección canónica $G/H \to G/K$ es un fibrado con fibra típica K/H.*

Proposición 18. *Sea N una variedad diferenciable y sea G un grupo de Lie que actúa transitivamente en N. Dados $p \in N$ y $u \in T_pN$, sea K el subgrupo de isotropía de G en p y sea $H = \{h \in G : dh_p(u) = u\}$. Suponemos que H y K son cerrados en G. Entonces la proyección canónica*

$$\{dg_p(u) : g \in G\} \to N$$

es un fibrado con fibra típica K/H. Además, la inclusión

$$\{dg_p(u) : g \in G\} \to TN$$

es un subfibrado sobre N.

2.2. Las formas espaciales de dimensión tres

De ahora en adelante denotaremos la base canónica de $\mathbb{R}^4$ por $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$. De igual manera, si $x \in \mathbb{R}^4$, escribiremos $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ o $x = x_0e_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$.

Definición 19. *Para $\kappa = 0, 1, -1$, sea M_κ la* ***forma espacial*** *de dimensión tres de curvatura gaussiana κ, o sea, $M_0 = \mathbb{R}^3$,*

$$M_1 = \left\{p \in \mathbb{R}^4 : \langle p, p\rangle_1 = 1\right\} \qquad y \qquad M_{-1} = \left\{p \in \mathbb{R}^4 : \langle p, p\rangle_{-1} = -1, p_0 > 0\right\} ,$$

donde

$$\langle x, y\rangle_\kappa = \kappa x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, \tag{2.2.1}$$

la cual induce una métrica riemanniana en M_κ para $\kappa = \pm 1$. Esto es, M_1 es la esfera S^3 y M_{-1} el espacio hiperbólico H^3.

Para tratar los tres casos simultáneamente, a veces convendrá identificar

$$\mathbb{R}^3 \equiv e_0 + \mathbb{R}^3 = \left\{p \in \mathbb{R}^4 : p_0 = 1\right\}.$$

Para $\kappa = \pm 1$, dado $p \in M_\kappa$, el espacio tangente T_pM_κ se identifica con $p^\perp = \{q \in \mathbb{R}^4 : \langle q, p\rangle_\kappa = 0\} \subset \mathbb{R}^4$.

Definición 20. *Dada una curva suave σ en M_κ y un campo X a lo largo de σ, se define la* ***derivada covariante*** *de X a lo largo de σ por*

$$\frac{DX}{d\tau}(t) = P_{\sigma(t)}\left(\left.\frac{d}{d\tau}\right|_t X(\tau)\right),$$

donde $P_p(v) = v - \kappa\langle v, p\rangle_\kappa p$.

Si la derivada covariante de X es cero para todo t, el campo X se dice ***paralelo a lo largo de*** *σ.*

Notar que P_p es la identidad para $\kappa = 0$ y la proyección ortogonal sobre $p^\perp \equiv T_pM_\kappa$ para $\kappa = \pm 1$ (pues $\langle p, p\rangle_\kappa = \kappa$).

LEMA 21. *Dada una superficie parametrizada $\psi(s,t)$ en M_κ, se cumple*

$$\frac{D}{dt}\frac{d}{ds}\psi(s,t)=\frac{D}{ds}\frac{d}{dt}\psi(s,t).$$

Para una curva suave σ en M_κ y $v\in T_{\sigma(t_o)}M_\kappa$, el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias asegura la existencia de un único campo paralelo V a lo largo de σ con $V(t_o)=v$, que se denomina el **transporte paralelo** de v a lo largo de σ, y resulta de norma constante.

DEFINICIÓN 22. *Una curva γ en M_κ es una* ***geodésica*** *si su velocidad γ' es paralela a lo largo de γ, es decir,*

$$\frac{D\gamma'}{dt}\equiv 0.$$

PROPOSICIÓN 23. *Dado $v\in T_pM_\kappa$, existe una única geodésica con valor inicial p y velocidad inicial v. A esta geodésica la denotaremos por γ_v. En particular,*

$$\gamma_v(0)=p \qquad \text{y} \qquad \gamma_v'(0)=v.$$

DEFINICIÓN 24. *Una* ***isometría*** *ϕ de M_κ es un difeomorfismo $\phi: M_\kappa\longrightarrow M_\kappa$ que preserva la métrica, es decir,*

$$\langle d\phi_p(u),d\phi_p(v)\rangle_\kappa=\langle u,v\rangle_\kappa$$

para todo $p\in M_\kappa$ y todo $u,v\in T_pM_\kappa$.

Denotamos $G_\kappa=\mathrm{Iso}_0(M_\kappa)$, la componente conexa de la identidad del grupo de isometrías de M_κ.

Sea $O(4)$ el grupo de automorfismos del producto interno $\langle,\rangle_1$ y $O(1,3)$ el análogo para $\langle,\rangle_{-1}$.

PROPOSICIÓN 25. *Con la identificación $\mathbb{R}^3\equiv e_0+\mathbb{R}^3$, se cumple que*

$$G_0=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ a & A\end{pmatrix}: a\in\mathbb{R}^3,\ A\in SO(3)\right\},$$

$$G_1=SO(4)=\{A\in O(4):\det A=1\},$$

$$G_{-1}=O_o(1,3)=\{A\in O(1,3):\det A=1,\ (Ae_0)_0>0\}.$$

En particular, todos los G_κ mencionados son subgrupos de $Gl_4(\mathbb{R})$.

Definición 26. *Una base orientada $\{u, v, w\}$ de T_pM_κ es* ***positiva*** *si, respecto a la orientación canónica de $\mathbb{R}^4$, $\{p, u, v, w\}$ es una base positiva.*

Dado un subconjunto ortonormal $\{u, v\}$ de T_pM_κ, se define el ***producto cruz*** *$u \times v$ entre u y v como el único vector w que cumple que $\{u, v, w\}$ es una base ortonormal positiva de T_pM_κ.*

Por ejemplo, la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $T_{e_0}M_\kappa$ es positiva y $e_1 \times e_2 = e_3$.

Proposición 27. *a) Las isometrías llevan geodésicas en geodésicas y campos paralelos a lo largo de curvas en campos paralelos a lo largo de curvas.*

b) Dados $p, q \in M_\kappa$ y bases ortonormales positivamente orientadas $\{u_1, u_2, u_3\}$ y $\{v_1, v_2, v_3\}$ de T_pM_κ y T_qM_κ, respectivamente, entonces existe $g \in G_\kappa$ tal que $g(p) = q$ y $dg_p(u_i) = v_i$ para todo $i = 1, 2, 3$.

Definición 28. *Un* ***campo de Jacobi*** *a lo largo de una geodésica $\sigma : \mathbb{R} \to M_\kappa$ es un campo a lo largo de σ de la forma*

$$J(s) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \phi(s, t),$$

donde $\phi : \mathbb{R} \times (-\delta, \delta) \to M_\kappa$ es una ***variación por geodésicas*** *de σ, es decir, una aplicación suave tal que $\phi(s, 0) = \sigma(s)$ y $s \mapsto \phi(s, t)$ es una geodésica de M_κ para todo $t \in (-\delta, \delta)$.*

Antes de presentar la expresión general de un campo de Jacobi a lo largo de una geodésica en M_κ nos conviene introducir una notación común para las funciones trigonométricas e hiperbólicas.

Definición 29. *Se definen las funciones $\cos_\kappa$ y $\operatorname{sen}_\kappa$ de la siguiente manera:*

$$\cos_\kappa t = \begin{cases} \cos t & \kappa = 1 \\ 1 & \kappa = 0 \\ \cosh t & \kappa = -1 \end{cases} \qquad y \qquad \operatorname{sen}_\kappa t = \begin{cases} \operatorname{sen} t & \kappa = 1 \\ t & \kappa = 0 \\ \operatorname{senh} t & \kappa = -1. \end{cases}$$

Se cumple que $\cos_\kappa 0 = 1$ y $\operatorname{sen}_\kappa 0 = 0$. También, para todo s, t,

a) $\cos_\kappa^2 s + \kappa \operatorname{sen}_\kappa^2 s = 1$,

b) $\cos_\kappa' t = -\kappa \operatorname{sen}_\kappa t$ y $\operatorname{sen}_\kappa' t = \cos_\kappa t$,

c) $\cos_\kappa (t+s) = \cos_\kappa t \cos_\kappa s - \kappa \operatorname{sen}_\kappa t \operatorname{sen}_\kappa s$,

d) $\operatorname{sen}_\kappa (t+s) = \operatorname{sen}_\kappa t \cos_\kappa s + \operatorname{sen}_\kappa s \cos_\kappa t$,

e) $\cos_\kappa$ y $\operatorname{sen}_\kappa$ son funciones linealmente independientes.

Un campo de Jacobi J a lo largo de una geodésica σ y ortogonal a σ' de M_κ satisface

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + \kappa J = 0. \tag{2.2.2}$$

En particular, J queda determinado por los valores de $J(0)$ y $\frac{DJ}{dt}(0)$. Más aún, tenemos una expresión explícita: Si $J(0) = u + a\sigma'(0)$ y $\frac{DJ}{dt}(0) = v + b\sigma'(0)$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $u, v \in \sigma'(0)^\perp$, entonces

$$J(s) = \cos_\kappa(s)\, U(s) + \operatorname{sen}_\kappa(s)\, V(s) + (a + sb)\, \sigma'(s), \tag{2.2.3}$$

donde U, V son campos paralelos a lo largo de σ con $U(0) = u$ y $V(0) = v$.

2.3. Espacio de geodésicas orientadas de $\mathbf{M}_\kappa$

En esta sección se define el espacio $\mathcal{G}_\kappa$ de geodésicas orientadas en M_κ, se le da una estructura diferenciable y se presentan algunas propiedades.

Sea $\mathcal{G}_\kappa$ el espacio de las geodésicas orientadas de M_κ salvo parametrizaciones, o sea

$$\mathcal{G}_\kappa = \{[\sigma] \mid \sigma : \mathbb{R} \to M_\kappa \text{ es una geodésica de } M_\kappa \text{ de rapidez unitaria}\},$$

donde dos geodésicas $\sigma, \tilde{\sigma}$ están relacionadas si para todo t se cumple $\sigma(t) = \tilde{\sigma}(t + t_0)$ para algún $t_0 \in \mathbb{R}$.

Por abuso de notación diremos que un punto p está en $\ell \in \mathcal{G}_\kappa$ si para alguna parametrización σ de ℓ existe un t_0 tal que $p = \sigma(t_0)$.

Proposición 30. *El grupo de isometrías G_κ actúa transitivamente en $\mathcal{G}_\kappa$ mediante $g \cdot [\sigma] = [g \circ \sigma]$.*

Demostración. Veamos primero que $\cdot$ es, en efecto, una acción. Sean $g, h \in G_\kappa$ y sea $[\sigma] \in \mathcal{G}_\kappa$,

$$g \cdot (h \cdot [\sigma]) = g \cdot [h \circ \sigma] = [g \circ (h \circ \sigma)] = [(g \circ h) \circ \sigma] = gh \cdot [\sigma]$$

y si I es la identidad en G_κ, entonces

$$I \cdot [\sigma] = [I \circ \sigma] = [\sigma] .$$

Sean ahora $[\sigma_1], [\sigma_2] \in \mathcal{G}_\kappa$. Por la Proposición 27 existe $g \in G_\kappa$ tal que

$$g(\sigma_1(0)) = \sigma_2(0) \qquad \text{y} \qquad dg_{\sigma_1(0)}\sigma_1'(0) = \sigma_2'(0) .$$

Luego, por la Proposición 23 tenemos que $[g \circ \sigma_1] = [\sigma_2]$, y por lo tanto G_κ actúa transitivamente en $\mathcal{G}_\kappa$. $\square$

A continuación definimos una geodésica de M_κ en buena posición, que será de utilidad más adelante.

Sea σ_0 la geodésica en M_κ definida por

$$\sigma_0(s) = \cos_\kappa s \ e_0 + \sin_\kappa s \ e_1. \tag{2.3.1}$$

Veamos que σ_0 es efectivamente una curva en M_κ y que es una geodésica.

Claramente es una curva en M_κ, pues para $\kappa = 0$ tenemos $\sigma_0(s) = e_0 + se_1$ (recurrimos a la identificación $\mathbb{R}^3 \equiv e_0 + \mathbb{R}^3$) y para $\kappa = \pm 1$,

$$\langle \cos_\kappa s \ e_0 + \sin_\kappa s \ e_1, \cos_\kappa s \ e_0 + \sin_\kappa s \ e_1 \rangle_\kappa = \kappa \cos^2_\kappa s + \operatorname{sen}^2_\kappa s = \kappa$$

(con $\cos_\kappa s > 0$ para todo s si $\kappa = -1$). Para ver que σ_0 es una geodésica calculamos

$$\begin{aligned}
\left.\frac{D}{dr}\right|_s \sigma_0'(r) &= \left.\frac{D}{dr}\right|_s (-\kappa \operatorname{sen}_\kappa r \ e_0 + \cos_\kappa r \ e_1) \\
&= P_{\sigma_0(s)} \left(\left.\frac{d}{dr}\right|_s (-\kappa \operatorname{sen}_\kappa r \ e_0 + \cos_\kappa r \ e_1) \right) \\
&= -\kappa (\cos_\kappa s \ e_0 + \operatorname{sen}_\kappa s \ e_1) + \kappa^2 \left(\kappa \cos^2_\kappa s + \operatorname{sen}^2_\kappa s \right) (\cos_\kappa s \ e_0 + \sin_\kappa s \ e_1) \\
&= -\kappa (\cos_\kappa s \ e_0 + \operatorname{sen}_\kappa s \ e_1) + \kappa (\cos_\kappa s \ e_0 + \sin_\kappa s \ e_1) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

como debía ser.

Para $A,\ B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, denotamos por $\operatorname{diag}(A,B)$ a la matriz $\begin{pmatrix} A & 0_2 \\ 0_2 & B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, donde 0_2 denota la matriz 2×2 con entradas todas cero.

Extraemos la siguiente proposición de [6] y escribimos la prueba.

PROPOSICIÓN 31. *El subgrupo de isotropía de G_κ en $[\sigma_0]$ es*

$$K_\kappa = \{\operatorname{diag}\ (R_\kappa(t), B) : t \in \mathbb{R},\ B \in SO(2)\}, \tag{2.3.2}$$

donde

$$R_\kappa(t) = \begin{pmatrix} \cos_\kappa t & -\kappa \operatorname{sen}_\kappa t \\ \operatorname{sen}_\kappa t & \cos_\kappa t \end{pmatrix}. \tag{2.3.3}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $A = \operatorname{diag}(R_\kappa(t), B)$ para algún $t \in \mathbb{R}$ y $B \in SO(2)$. De la Proposición 25 es inmediato que $A \in G_\kappa$. Veamos que está en la isotropía de $[\sigma_0]$, es decir, que A fija la trayectoria de σ_0, sin cambiar su orientación. Tenemos $A \cdot [\sigma_0] = [A\sigma_0]$ donde

$$\begin{aligned} A\sigma_0(s) &= \operatorname{diag}\ (R_\kappa(t), B)(\cos_\kappa s\ e_0 + \sin_\kappa s\ e_1) \\ &= (\cos_\kappa t \cos_\kappa s - \kappa \operatorname{sen}_\kappa t \operatorname{sen}_\kappa s)\, e_0 + (\operatorname{sen}_\kappa t \cos_\kappa s + \cos_\kappa t \sin_\kappa s)\, e_1 \\ &= \cos_\kappa(s+t)\, e_0 + \operatorname{sen}_\kappa(s+t)\, e_1 \\ &= \sigma_0(s+t). \end{aligned}$$

Así, $[A\sigma_0] = [\sigma_0]$, que es lo que buscábamos.

Sea ahora A un elemento del subgrupo de isotropía de G_κ en $[\sigma_0]$, entonces

$$A\sigma_0(s) = \sigma_0(s+s_0)$$

para todo s y algún $s_0 \in \mathbb{R}$. Puesto en forma matricial, se tiene

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos_\kappa s \\ \sin_\kappa s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos_\kappa(s+s_0) \\ \sin_\kappa(s+s_0) \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} A_{31} & A_{32} \\ A_{41} & A_{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos_\kappa s \\ \sin_\kappa s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Igualando entrada a entrada, de la independencia lineal de $\cos_\kappa$ y $\sin_\kappa$ resulta

$$A = \begin{pmatrix} R_\kappa(s_0) & C \\ 0_2 & B \end{pmatrix}, \tag{2.3.4}$$

donde C y B son matrices reales 2×2. Ahora consideramos los casos $\kappa = 1, 0, -1$.

Para $\kappa = 0$, los elementos de G_0 tienen la forma $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & D \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}^3$ y $D \in SO(3)$. Luego $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & y \end{pmatrix}$ para ciertos $x, y \in \mathbb{R}$. Ahora, de $D^T D = I_3$ se deduce que $C = 0$ y $B \in SO(2)$.

Para $\kappa = \pm 1$, por la Proposición 25, G_κ está contenido en el grupo de automorfismos de $\langle , \rangle_\kappa$, es decir, en

$$\left\{ A \in \mathbb{R}^{4\times 4} : A^T P_\kappa A = P_\kappa \right\},$$

donde $P_\kappa = \operatorname{diag}(Q_\kappa, I_2)$, con $Q_\kappa = \operatorname{diag}(\kappa, 1)$. Luego

$$A^T P_\kappa A = \begin{pmatrix} R_\kappa(s_0)^T Q_\kappa R_\kappa(s_0) & R_\kappa(s_0)^T Q_\kappa C \\ C^T Q_\kappa R_\kappa(s_0) & C^T Q_\kappa C + B^T B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_\kappa & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}.$$

Como $R_\kappa(s_0)$ y Q_κ son inversibles resulta $C = 0$. Se sigue que $B^T B = I_2$, luego $B \in O(2)$. Pero como tanto la matriz A en (2.3.4) como $R_\kappa(s_0)$ tienen determinante igual a 1, $B \in SO(2)$. □

Corolario 32. *El subgrupo K_κ es cerrado en G_κ.*

Demostración. La afirmación resulta de que $SO(2)$ es compacto y que para $\kappa = 0, -1$, si $R_\kappa(t_n)$ converge, entonces la sucesión t_n también converge, pues la función $\operatorname{sen}_\kappa$ es un homeomorfismo de $\mathbb{R}$. □

Por este corolario, se satisfacen las condiciones del Teorema 11. Así, el cociente G_κ / K_κ posee una estructura diferenciable, la cual podemos copiar al espacio de geodésicas orientadas de M_κ.

Definición 33. *La estructura diferenciable en $\mathcal{G}_\kappa$ es la inducida por la biyección*

$$F : G_\kappa / K_\kappa \to \mathcal{G}_\kappa, \qquad F(gK_\kappa) = g \cdot [\sigma_0], \tag{2.3.5}$$

donde σ_0 es la geodésica de M_κ definida en (2.3.1) y el cociente G_κ/K_κ está munido de la estructura diferenciable dada por el Teorema 11.

PROPOSICIÓN 34. *La proyección $\Pi : T^1M_\kappa \to \mathcal{G}_\kappa$, $\Pi(u) = [\gamma_u]$ es suave.*

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 27, G_κ actúa transitivamente en T^1M_κ. Sea L_κ el subgrupo de isotropía en $e_1 \in T_{e_0}M_\kappa$ ($M_0 = \mathbb{R}^3 \equiv e_0 + \mathbb{R}^3$), que consiste de los elementos de K_κ como en (2.3.2) con $t = 0$. Entonces, la aplicación $\widetilde{F} : G_\kappa/L_\kappa \to T^1M_\kappa$ dada por $\widetilde{F}(gL_\kappa) = dg_{e_0}(e_1)$ es un difeomorfismo por la Proposición 12.

Por otro lado, la única aplicación $\tilde{\pi}$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} G_\kappa/L_\kappa \arrow[r, "\tilde{F}"] \arrow[d, "\tilde{\pi}"] & T^1M_\kappa \arrow[d, "\Pi"] \\ G_\kappa/K_\kappa \arrow[r, "F"] & \mathcal{G}_\kappa. \end{tikzcd}$$

está dada por $\tilde{\pi}(gL_\kappa) = gK_\kappa$. En efecto,

$$F(\tilde{\pi}(gL_\kappa)) = F(gK_\kappa) = g \circ [\sigma_0]$$

y también,

$$\Pi\left(\widetilde{F}(gL_\kappa)\right) = \Pi(dg(e_1)) = \left[\gamma_{dg(e_1)}\right].$$

Luego las dos expresiones coinciden pues $\gamma_{dg(e_1)} = g \circ \sigma_0$. En consecuencia, $\tilde{\pi}$ es suave por la Proposición 17 y de allí se deduce que Π es suave, como se deseaba. □

COROLARIO 35. *Dada una superficie parametrizada ϕ en M_κ tal que $s \mapsto \phi(s,t) = \phi_t(s)$ es una geodésica de M_κ para cada $t \in \mathbb{R}$ entonces la aplicación $t \mapsto [\phi_t]$ es suave.*

DEMOSTRACIÓN. Es inmediata de la proposición anterior pues

$$[\phi_t] = \Pi\left(\frac{\partial \phi}{\partial s}(0,t)\right).$$

□

La siguiente proposición provee otra presentación de $\mathcal{G}_\kappa$ para $\kappa = 0, -1$.

PROPOSICIÓN 36. [3] *Para $\kappa = 0, -1$, la variedad diferenciable $\mathcal{G}_\kappa$ es difeomorfa a TS^2.*

Sólo describimos el difeomorfismo (ver la Proposición 4.14 en el artículo citado). Sea

$$\varphi : T(T^1_{e_0}M_\kappa) \equiv TS^2 \to \mathcal{G}_\kappa$$

la aplicación definida como sigue: Sea $u \in T^1_{e_0}M_\kappa \cong S^2$ y $v \in T_{e_0}M_\kappa \cong \mathbb{R}^3$ con $v \in u^\perp \equiv T_uS^2$, entonces $\varphi(u, v) = \left[\gamma_{U(1)}\right]$, donde U es el transporte paralelo del vector u a largo de γ_v.

Para $\kappa = 0, 1, -1$ denotamos por $\mathfrak{g}_\kappa$ el álgebra de Lie de G_κ. De [6] tenemos que

$$\mathfrak{g}_\kappa = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -\kappa x^T \\ x & B \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}^3,\ B^T = -B \right\}.$$

El álgebra de Lie de K_κ es

$$\mathfrak{k}_\kappa = \left\{ \operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & -\kappa t \\ t & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -s \\ s & 0 \end{pmatrix} \right) : s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Para vectores columna $x, y \in \mathbb{R}^2$ llamamos

$$Z(x, y) = \begin{pmatrix} 0_2 & (-\kappa x, -y)^T \\ (x, y) & 0_2 \end{pmatrix}. \tag{2.3.6}$$

PROPOSICIÓN 37. *El subespacio*

$$\mathfrak{p}_\kappa =_{\text{def}} \left\{ Z(x, y) \in \mathfrak{g}_\kappa : x, y \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

de $\mathfrak{g}_\kappa$ es un complemento Ad (K_κ)*-invariante de $\mathfrak{k}_\kappa$.*

DEMOSTRACIÓN. De las definiciones de $\mathfrak{g}_\kappa$, $\mathfrak{k}_\kappa$ y $\mathfrak{p}_\kappa$ es inmediato que $\mathfrak{p}_\kappa$ es un complemento de $\mathfrak{k}_\kappa$.

Veamos ahora que $\mathfrak{p}_\kappa$ es invariante por Ad (K_κ). Sea diag $(R_\kappa(t), B) \in K_\kappa$. Como $R_\kappa(t)^{-1} = R_\kappa(-t)$ y $B^{-1} = B^T$, tenemos que

$$\operatorname{Ad}\begin{pmatrix} R_\kappa(t) & 0_2 \\ 0_2 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_2 & (-\kappa x, -y)^T \\ (x, y) & 0_2 \end{pmatrix}$$

es igual a

$$\begin{pmatrix} 0_2 & R_\kappa(t)(-\kappa Bx, -By)^T \\ (Bx, By)R_\kappa(-t) & 0_2 \end{pmatrix},$$

que está en $\mathfrak{p}_\kappa$ pues

$$(Bx, By)R_\kappa(-t) = (\cos_\kappa t\ Bx - \operatorname{sen}_\kappa t\ By, \kappa \operatorname{sen}_\kappa t\ Bx + \cos_\kappa t\ By)$$

y por otro lado,

$$R_\kappa(t)(-\kappa Bx, -By)^T = -(\kappa(\cos_\kappa t\ Bx - \operatorname{sen}_\kappa t\ By), \kappa \operatorname{sen}_\kappa t\ Bx + \cos_\kappa t\ By)^T.$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{Ad}\ (\operatorname{diag}\ (R_\kappa(t), B))\, Z(x, y) = Z(\cos_\kappa t\ Bx - \operatorname{sen}_\kappa t\ By, \kappa \operatorname{sen}_\kappa t\ Bx + \cos_\kappa t\ By)$$

como queríamos. □

A continuación presentamos el espacio tangente a $\mathcal{G}_\kappa$ en un punto σ en términos de campos de Jacobi a lo largo de σ.

Sea σ una geodésica completa de M_κ de rapidez unitaria y sea $\mathcal{J}_\sigma$ el **espacio de todos los campos de Jacobi a lo largo de σ que son ortogonales a** σ'. En [14] se demuestra la siguiente proposición para el caso hiperbólico. La prueba se puede adaptar a los casos euclídeo y esférico.

Proposición 38. *Existe un isomorfismo canónico, bien definido,*

$$T_\sigma : \mathcal{J}_\sigma \to T_{[\sigma]}\mathcal{G}_\kappa, \qquad T_\sigma(J) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 [\sigma_t], \tag{2.3.7}$$

donde σ_t es cualquier variación de σ por geodésicas de rapidez unitaria asociada a J.

Extraemos de [5] la siguiente proposición, que nos permitirá usar la anterior incluso si el campo de Jacobi a lo largo de σ no es ortogonal a σ'.

Proposición 39. *Sea $\varphi : \mathbb{R}^2 \to M_\kappa$ una aplicación suave tal que para cada $t \in \mathbb{R}$, $s \mapsto \varphi(s,t) =_{\mathrm{def}} \varphi_t(s)$ es una geodésica de rapidez unitaria y sea J el campo de Jacobi a lo largo de φ_0 asociado. Entonces*

$$T_{\varphi_0}(J^N) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 [\varphi_t], \tag{2.3.8}$$

donde $J^N(s) = J(s) - \langle J(s), \varphi_0'(s)\rangle_\kappa \varphi_0'(s)$, *o sea la proyección ortogonal de* $J(s)$ *sobre el complemento ortogonal de* $\varphi_0'(s)$.

Capítulo 3

El sistema de control helicoidal de paso fijo en $\mathcal{G}_\kappa$

Para comenzar este capítulo, repetimos algunas definiciones de la introducción, que son centrales en este trabajo.

Definición 2. *Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\ell \in \mathcal{G}_\kappa$. Dados $p \in \ell$ y $A \in T_pM_\kappa$ unitario ortogonal a ℓ, definimos $\phi_{\ell,p,A} : \mathbb{R}^2 \to M_\kappa$, la **superficie parametrizada α-helicoidal con rayo inicial ℓ y eje γ_A** como sigue: Suponer que $\ell = [\sigma]$ con $\sigma(0) = p$ y sea $B = A \times \sigma'(0)$. Entonces*

$$\phi^\alpha_{\ell,p,A}(s,t) = \gamma_{\cos(\alpha t)V_t + \mathrm{sen}(\alpha t)B_t}(s)$$

donde V_t y B_t son los traslados paralelos entre 0 y t de $\sigma'(0)$ y B, respectivamente, a lo largo de γ_A.

Definición 3. *Dados ℓ, p, A como arriba, definimos $\Gamma^\alpha_{\ell,p,A} : \mathbb{R} \to \mathcal{G}_\kappa$, la **curva α-helicoidal con rayo inicial ℓ y eje γ_A** mediante*

$$\Gamma^\alpha_{\ell,p,A}(t) = \left[s \mapsto \phi^\alpha_{\ell,p,A}(s,t)\right] \tag{3.0.1}$$

Esta curva resulta suave por el Corolario 35.

Definición 4. *Para $\kappa = 0, 1, -1$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ sea $\mathcal{A}^\alpha_\kappa$ el subconjunto de $T\mathcal{G}_\kappa$ dado por*

$$\mathcal{A}^\alpha_\kappa = \left\{ \left(\Gamma^\alpha_{\ell,p,A}\right)'(0) : \ell \in \mathcal{G}_\kappa, p \in \ell, A \in T_pM_\kappa \text{ unitario ortogonal a } \ell \right\},$$

es decir, el conjunto de todas las velocidades iniciales de curvas α-helicoidales en $\mathcal{G}_\kappa$.

Proposición 40. *El grupo G_κ actúa transitivamente en $\mathcal{A}^\alpha_\kappa$ mediante la diferencial.*

Antes de la prueba será conveniente que consideremos ℓ, p, A en buena posición, como sigue:

$$\ell_0 = [\sigma_0]\,, \qquad p_0 = e_0 = \sigma_0\,(0)\,, \qquad A_0 = e_3 \qquad \text{y} \qquad B_0 = A_0 \times \sigma_0'\,(0) = e_2,$$

donde $\sigma_0\,(s) = \cos_\kappa s\; e_0 + \sin_\kappa s\; e_1$, como en (2.3.1). Llamamos Γ_0 a la curva en $\mathcal{G}_\kappa$ definida por

$$\Gamma_0 = \Gamma^\alpha_{\ell_0, p_0, A_0} \tag{3.0.2}$$

y denotamos también por X_α la velocidad de Γ_0, es decir,

$$X_\alpha = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \Gamma_0\,(t) \in T_{\ell_0}\mathcal{G}_\kappa. \tag{3.0.3}$$

Demostración. Sabemos que G_κ actúa en $\mathcal{G}_\kappa$ y recordemos que podemos pensar a $g \in G_\kappa$ como una función suave. Esto induce la acción de G_κ en $T\mathcal{G}_\kappa$ mediante $g \cdot v = dg_\ell\,(v)$, donde $v \in T_\ell\mathcal{G}_\kappa$. Veamos primero que esta acción preserva $\mathcal{A}^\alpha_\kappa$. Sean $g \in G_\kappa$, $\ell = [\sigma] \in \mathcal{G}_\kappa$, $p = \sigma\,(0)$ y $A \in T_pM_\kappa$ unitario ortogonal a $\sigma'\,(0)$. Veamos que $g \cdot \Gamma'_{\ell,p,A}\,(0) \in \mathcal{A}^\alpha_\kappa$ y para ello verificamos que

$$g \cdot \Gamma'_{\ell,p,A}\,(0) = \Gamma'_{g(\ell),g(p),dg_p(A)}\,(0)\,.$$

Notemos que la curva $\Gamma_{g(\ell),g(p),dg_p(A)}$ está bien definida pues G_κ actúa en $\mathcal{G}_\kappa$, M_κ y T_pM_κ. Además, las isometrías llevan campos paralelos en campos paralelos y preservan longitudes.

Tenemos que

$$\begin{aligned} dg_\ell\left(\Gamma'_{\ell,p,A}\,(0)\right) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \left(g \circ \Gamma_{\ell,p,A}\right)(t) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \left[s \mapsto g \circ \gamma_{\cos(\alpha t)V_t + \operatorname{sen}(\alpha t)B_t}\,(s)\right] \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \left[s \mapsto \gamma_{\cos(\alpha t)dg_p(V_t) + \operatorname{sen}(\alpha t)dg_p(B_t)}\,(s)\right], \end{aligned}$$

donde V, B son como en la Definición 2, pues como las isometrías llevan geodésicas en geodésicas, dado un vector u en T_pM_κ se cumple que $g \circ \gamma_u = \gamma_{dg_p(u)}$.

Como V_t y B_t son los transportes paralelos a lo largo de σ de $\sigma'(0)$ y B respectivamente, $dg_p(V_t)$ y $dg_p(B_t)$ resultan los transportes paralelos a lo largo de $g \circ \sigma$ de $dg_p(\sigma'(0))$ y $dg_p(B) = dg_p(\sigma'(0)) \times dg_p(A)$ respectivamente. Luego

$$dg_\ell\left(\Gamma'_{\ell,p,A}(0)\right) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \Gamma_{g(\ell),g(p),dg_p(A)}(t),$$

que es lo que queríamos ver.

Finalmente, nos ocupamos ahora de la transitividad de la acción. Dado un elemento de $\mathcal{A}_\kappa^\alpha$, digamos $\Gamma'_{\ell,p,A}(0)$, la existencia de $g \in G_\kappa$ tal que $g \cdot X_\alpha = \Gamma'_{\ell,p,A}(0)$ se deduce de la Proposición 27. □

Recordamos de la introducción las definiciones de sistema de control y del sistema de control objeto de este trabajo.

DEFINICIÓN 1. *Un* ***sistema de control*** *en una variedad diferenciable N es un subfibrado $(\mathcal{A}, \iota)$ del fibrado tangente TN*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr] & TN \arrow[d, "\pi"] \\ & N. \end{tikzcd}$$

Una curva suave $\gamma : (a,b) \to N$ se dice ***admisible*** *si para todo $t \in (a,b)$ se cumple $\gamma'(t) \in \iota(\mathcal{A})$. Un sistema de control en N se dice* ***controlable*** *si para cada par de puntos en N existe una curva admisible a trozos que los une.*

Sea $H_\kappa(\alpha)$ el subgrupo de isotropía en X_α de la acción de G_κ en $\mathcal{A}_\kappa^\alpha$.

PROPOSICIÓN 41. *La proyección canónica $\mathcal{A}_\kappa^\alpha \to \mathcal{G}_\kappa$ es un fibrado con fibra típica $K_\kappa/H_\kappa(\alpha)$. Más aún, la inclusión $\iota_\kappa^\alpha : \mathcal{A}_\kappa^\alpha \to T\mathcal{G}_\kappa$ es un subfibrado y esto da el sistema de control*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}_\kappa^\alpha \arrow[r, "\iota_\kappa^\alpha"] \arrow[dr] & T\mathcal{G}_\kappa \arrow[d, "\pi"] \\ & \mathcal{G}_\kappa. \end{tikzcd}$$

Demostración. De la Proposición 40 sabemos que $\mathcal{A}_\kappa^\alpha = \{dg_{\ell_0}(X_\alpha) : g \in G_\kappa\}$. Luego la afirmación se deduce de la Proposición 18. □

Llamamos

$$\xi_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -(a_\kappa^\alpha)^T \\ a_1^\alpha & 0 \end{pmatrix} = Z\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}\right) \in \mathfrak{p}_\kappa, \tag{3.0.4}$$

donde Z se definió en (2.3.6) y

$$a_\kappa^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}.$$

Lema 42. *Para cada $t \in \mathbb{R}$, sea $S_t \in G_\kappa$ dado por*

$$S_t = \begin{pmatrix} \cos_\kappa t & 0 & 0 & -\kappa \operatorname{sen}_\kappa t \\ 0 & \cos \alpha t & -\operatorname{sen} \alpha t & 0 \\ 0 & \operatorname{sen} \alpha t & \cos \alpha t & 0 \\ \operatorname{sen}_\kappa t & 0 & 0 & \cos_\kappa t \end{pmatrix}.$$

Se tiene que $S_t = \exp(t\xi_\alpha)$ y además, para todo $s, t \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$S_t\sigma_0(s) = \phi_{\ell_0,p_0,A_0}^\alpha(s,t).$$

Demostración. Notemos primero que, en efecto, $S_t = \exp(t\xi_\alpha)$ para todo t, pues $S_{s+t} = S_s \circ S_t$ para todo s, t y $S_0' = \xi_\alpha$.

Fijamos t y verificamos que $S_t\sigma_0(s)$ y $\phi_{\ell_0,p_0,A_0}^\alpha(s,t)$ coinciden como funciones de s. Como ambas son geodésicas con el mismo valor inicial $\cos_\kappa t\, e_0 + \operatorname{sen}_\kappa t\, e_3$, basta ver que poseen la misma velocidad inicial. Calculamos

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_0 S_t\sigma_0(s) = S_t \left.\frac{d}{ds}\right|_0 \sigma_0(s) = S_t e_1 = \cos(\alpha t)\, e_1 + \operatorname{sen}(\alpha t)\, e_2,$$

que es igual a

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_0 \phi_{\ell_0,p_0,A_0}^\alpha(s,t) = \left.\frac{d}{ds}\right|_0 \gamma_{\cos(\alpha t)V_t + \operatorname{sen}(\alpha t)B_t}(s) = \cos(\alpha t)\, V_t + \operatorname{sen}(\alpha t)\, B_t,$$

y como $V_t = e_1$, $B_t = e_2$ para todo t, resulta la igualdad deseada. □

En el siguiente lema usamos notación de (2.3.5), (3.0.4) y (3.0.3).

Lema 43. *El isomorfismo $d(F \circ \varpi)_I|_{\mathfrak{p}_\kappa} : \mathfrak{p}_\kappa \to T_{\ell_0}\mathcal{G}_\kappa$ lleva el vector ξ_α en X_α.*

Demostración. Notemos primero que por las proposiciones 13 y 37, $d\left(F\circ\varpi\right)_I|_{\mathfrak{p}_\kappa}$ es efectivamente un isomorfismo.

Sea S_t como en el Lema 42. Calculamos

$$d\left(F\circ\varpi\right)_I\left(\xi_\alpha\right)=d\left(F\circ\varpi\right)_I\left(S_0'\right)=\left.\frac{d}{dt}\right|_0 F\circ\varpi\circ S_t=\left.\frac{d}{dt}\right|_0 S_t\left[\sigma_0\right],$$

que por el mismo lema resulta igual a $\left.\frac{d}{dt}\right|_0\Gamma_0\left(t\right)=X_\alpha$. □

A continuación describimos explícitamente el subgrupo $H_\kappa\left(\alpha\right)$.

Proposición 44. *a) Supongamos que $\alpha^2\neq\kappa$. Si $\kappa=-1,0$, entonces $H_\kappa\left(\alpha\right)=\{I\}$ y si $\kappa=1$ entonces $H_\kappa(\alpha)=\{\pm I\}$.*

b) Para $\alpha=\pm1$ vale

$$H_1\left(\alpha\right)=\left\{\text{diag }\left(R_1\left(-\alpha s\right),R_1\left(s\right)\right):s\in\mathbb{R}\right\},$$

$$H_0\left(0\right)=\left\{\text{diag }\left(R_0\left(s\right),I_2\right):s\in\mathbb{R}\right\},$$

donde R_κ se definió en (2.3.3).

Demostración. Como claramente $H_\kappa\left(\alpha\right)\subset K_\kappa$, por el lema anterior y por la conmutatividad del diagrama de (2.1.2) adaptado a nuestro caso,

$$(3.0.5)\qquad \begin{array}{ccc} \mathfrak{p}_\kappa & \xrightarrow{\text{Ad}\,(k)} & \mathfrak{p}_\kappa \\ \Big\downarrow{\scriptstyle d(F\circ\varpi)_I|_{\mathfrak{p}_\kappa}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle d(F\circ\varpi)_I|_{\mathfrak{p}_\kappa}} \\ T_{\ell_0}\mathcal{G}_\kappa & \xrightarrow{dk_p} & T_{\ell_0}\mathcal{G}_\kappa, \end{array}$$

encontrar los elementos $k\in G_\kappa$ tales que $dk_{\ell_0}X_\alpha=X_\alpha$ equivale a hallar los $k\in K_\kappa$ tales que $\text{Ad}(k)\left(\xi_\alpha\right)=\xi_\alpha$.

Como las multiplicaciones a izquierda y a derecha por k son lineales en $\mathbb{R}^{4\times4}$, resulta $\text{Ad}(k)\left(\xi_\alpha\right)=k\xi_\alpha k^{-1}$. Sea $k\in K_\kappa$, o sea,

$$(3.0.6)\qquad k=\begin{pmatrix} R_\kappa\left(t\right) & 0_2 \\ 0_2 & R_1\left(s\right)\end{pmatrix}$$

como en (2.3.2). Calculamos

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}\ (k)\,(\xi_\alpha) &= k\begin{pmatrix} 0 & -\left(a_\kappa^\alpha\right)^T \\ a_1^\alpha & 0\end{pmatrix}k^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0_2 & -R_\kappa\,(t)\,\left(a_\kappa^\alpha\right)^T R_1\,(-s) \\ R_1\,(s)\,a_1^\alpha R_\kappa\,(-t) & 0_2\end{pmatrix},\end{aligned} \tag{3.0.7}$$

que coincide con ξ_α si y solo si $R_1\,(s)\,a_1^\alpha = a_1^\alpha R_\kappa\,(t)$ para todo t. Como

$$\begin{pmatrix} \cos s & -\operatorname{sen} s \\ \operatorname{sen} s & \cos s\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} s & \alpha\cos s \\ \cos s & \alpha\operatorname{sen} s\end{pmatrix}$$

y además

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos_\kappa t & -\kappa\operatorname{sen}_\kappa t \\ \operatorname{sen}_\kappa t & \cos_\kappa t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\operatorname{sen}_\kappa t & \alpha\cos_\kappa t \\ \cos_\kappa t & -\kappa\operatorname{sen}_\kappa t\end{pmatrix},$$

$\mathrm{Ad}\ (k)\,(\xi_\alpha) = \xi_\alpha$ si y solo si

$$-\operatorname{sen} s = \alpha\operatorname{sen}_\kappa t, \qquad \cos s = \cos_\kappa t \qquad \text{y} \qquad \alpha\operatorname{sen} s = -\kappa\operatorname{sen}_\kappa t.$$

Ahora separamos por casos.

Si $\kappa = 0$ y $\alpha = 0$, entonces $\cos s = 1$ y luego

$$k = \begin{pmatrix} R_0\,(t) & 0_2 \\ 0_2 & I_2\end{pmatrix}.$$

Si $\kappa = 1$ y $\alpha = \pm 1$, entonces $\cos s = \cos t$ y $\alpha\operatorname{sen} s = -\operatorname{sen} t$. Así,

$$k = \begin{pmatrix} R_1\,(-\alpha s) & 0_2 \\ 0_2 & R_1\,(s)\end{pmatrix}.$$

Sea ahora $\kappa \neq \alpha^2$. Si $\kappa = -1$, tenemos $\cos s = 1 = \cosh t$; si $\kappa = 1$ y $\alpha \neq \pm 1$, $\cos s = \cos t = \pm 1$ y si $\kappa = 0$ con $\alpha \neq 0$ se cumple que $\cos s = 1$ y $\operatorname{sen} s = 0$. Así, en los casos $\kappa = -1, 0$ obtenemos $k = I$ y $k = \pm I$ en el caso $\kappa = 1$. $\square$

PROPOSICIÓN 45. *Para todo $\ell \in \mathcal{G}_\kappa$, la fibra de $\mathcal{A}_\kappa^\alpha$ sobre ℓ es una subvariedad sustancial de $T_\ell\mathcal{G}_\kappa$ si y solo si $\alpha^2 \neq \kappa$.*

Demostración. Recordemos de la introducción que una subvariedad N de un espacio vectorial W se dice sustancial si no está contenida en ningún subespacio afín propio de W. Si además W posee un producto interno $\langle , \rangle$ y p es un elemento de N, entonces la subvariedad es sustancial si $\langle q-p,u\rangle = 0$ para todo $q \in N$ solo cuando $u = 0$.

Por la homogeneidad, basta analizar la fibra de $\mathcal{A}_\kappa^\alpha$ sobre $\ell_0 \in \mathcal{G}_\kappa$.

Supongamos primero que $\alpha^2 \neq \kappa$. Por la Proposición 41 sabemos que la fibra típica es $K_\kappa/H_\kappa(\alpha)$, que es una subvariedad sustancial de $T_{\ell_0}\mathcal{G}_\kappa$ si y solo si $\{dk_{\ell_o}(X_\alpha) : k \in K_\kappa\}$ no está contenido en ningún subespacio afín de $T_{\ell_o}\mathcal{G}_\kappa$, ya que $\iota_\kappa^\alpha(kH_\kappa(\alpha)) = dk_{\ell_o}(X_\alpha)$. Ahora bien, por el diagrama (3.0.5) basta analizar cuándo $\{\mathrm{Ad}\ (k)(\xi_\alpha) : k \in K_\kappa\}$ es una subvariedad sustancial de $\mathfrak{p}_\kappa$. En este espacio vectorial consideramos el producto interno auxiliar

$$\langle Z(X,Y), Z(U,V)\rangle = \langle X,U\rangle + \langle Y,V\rangle .$$

Sea ahora $u \in \mathfrak{p}_\kappa$. Por la definición en la Proposición 37 existen x,y,z,w tales que

$$u = Z\left(\begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix}\right).$$

Basados en (2.3.2) nos convendrá denotar $k(s,t)$ la matriz de (3.0.6). Por (3.0.7) tenemos que $\mathrm{Ad}(k(s,t))(\xi_\alpha) - \xi_\alpha$ es igual a

$$\begin{pmatrix} 0_2 & (a_\kappa^\alpha)^T - R_\kappa(t)(a_\kappa^\alpha)^T R_1(-s) \\ R_1(s)\, a_1^\alpha R_\kappa(-t) - a_1^\alpha & 0_2 \end{pmatrix}.$$

Sea ahora $f_u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f_u(s,t) = \langle \mathrm{Ad}(k(s,t))(\xi_\alpha) - \xi_\alpha, u\rangle .$$

Supongamos que $f_u \equiv 0$, entonces se cumple que $\frac{\partial f_u}{\partial s} \equiv \frac{\partial f_u}{\partial t} \equiv 0$. Mediante un cálculo sencillo se tiene que

$$\frac{\partial f_u}{\partial s}(s,0) = \cos s\ (\alpha y - x) + \operatorname{sen} s\ (-\alpha z - w) = 0,$$

$$\frac{\partial f_u}{\partial t}(s,0) = \cos s\ (\kappa y - \alpha x) + \operatorname{sen} s\ (-\alpha w - \kappa z) = 0.$$

Por la independencia lineal de cos y sen nos queda el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\alpha y - x = 0, \quad \kappa y - \alpha x = 0, \quad -\alpha z - w = 0, \quad -\alpha w - \kappa z = 0,$$

que cuando $\alpha^2 \neq \kappa$ solo posee la solución trivial para (x, y, z, w), y por lo tanto $u = 0$. Así, en este caso, la subvariedad es sustancial.

Para finalizar, si $\alpha^2 = \kappa$, la subvariedad no es sustancial pues, llamando

$$u = Z\left(\begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right),$$

con un cálculo largo se verifica que $f_u \equiv 0$. $\square$

En la siguiente proposición describimos las fibras típicas del fibrado $\mathcal{A}_\kappa^\alpha \to \mathcal{G}_\kappa$ para los distintos valores de $\kappa = 0, -1$ y de α genérico.

Denotamos por $\mathcal{F}_\kappa^\alpha$ la fibra típica del fibrado $\iota_\kappa^\alpha : \mathcal{A}_\kappa^\alpha \to T\mathcal{G}_\kappa$.

Proposición 6. *Sea $\kappa = -1, 0$ y supongamos $\alpha^2 \neq \kappa$. Entonces $\mathcal{F}_\kappa^\alpha$ es homeomorfa al cilindro $\mathbb{R} \times S^1$.*

Demostración. La fibra típica está dada por $K_\kappa / H_\kappa(\alpha)$, pero por la Proposición 44 el grupo $H_\kappa(\alpha)$ es el grupo trivial, por lo que $\mathcal{F}_\kappa^\alpha$ resulta ser K_κ. Luego, por (2.3.2), la fibra típica es homeomorfa a $\mathbb{R} \times S^1$ si $\kappa = 0, -1$. $\square$

Proposición 7. *Sea $\kappa = -1, 0$ y supongamos $\alpha^2 \neq \kappa$, entonces el fibrado $\mathcal{A}_\kappa^\alpha$ sobre $\mathcal{G}_\kappa$ no es topológicamente trivial, es decir, la variedad $\mathcal{A}_\kappa^\alpha$ no es homeomorfa a $\mathcal{G}_\kappa \times \mathcal{F}_\kappa^\alpha$.*

Demostración. Para ver que $\mathcal{A}_\kappa^\alpha$ y $\mathcal{G}_\kappa \times \mathcal{F}_\kappa^\alpha$ no son homeomorfos, calculamos sus grupos fundamentales, que son un invariante topológico.

Sabemos que G_κ actúa transitivamente en $\mathcal{A}_\kappa^\alpha$ con subgrupo de isotropía $H_\kappa(\alpha)$. Pero por la Proposición 44, $H_\kappa(\alpha)$ es trivial en el caso que consideramos, $\alpha^2 \neq \kappa$. Luego podemos identificar $\mathcal{A}_\kappa^\alpha = G_\kappa$. Por la caracterización de G_κ de la Proposición

25 tenemos

$$\pi_1(\mathcal{A}_0^\alpha) = \pi_1(G_0) = \pi_1\left(SO(3)\times\mathbb{R}^3\right) = \pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}_2,$$
$$\pi_1\left(\mathcal{A}_{-1}^\alpha\right) = \pi_1(G_{-1}) = \pi_1(O_o(1,3)) = \mathbb{Z}_2.$$

Por otra parte, por la Proposición 36, $\mathcal{G}_\kappa$ es homeomorfo a TS^2 para $\kappa = -1, 0$. Notemos que $TS^2 = (T(S^2 - \{S\})) \cup (T(S^2 - \{N\}))$, donde S y N son los polos sur y norte, respectivamente. Como la esfera menos un punto es paralelizable, $T(S^2 - \{S\})$ y $T(S^2 - \{N\})$ resultan homeomorfos a $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$, que es simplemente conexo. Como la intersección de ambos conjuntos es arcoconexa, por el Teorema 14.14 de [4], TS^2 resulta simplemente conexo. Así, por la proposición anterior,

$$\pi_1(\mathcal{G}_\kappa\times\mathcal{F}_\kappa^\alpha) = \pi_1\left(TS^2\times\mathbb{R}\times S^1\right) = \pi_1\left(S^1\right) = \mathbb{Z}.$$

En consecuencia, $\mathcal{A}_\kappa^\alpha$ no es homeomorfo a $\mathcal{F}_\kappa^\alpha\times\mathcal{G}_\kappa$ si $\alpha^2\neq\kappa$. □

Ahora damos una condición suficiente, en términos de campos de Jacobi, para que un vector tangente a $\mathcal{G}_\kappa$ sea admisible (recordemos que T_σ es el isomorfismo definido en (2.3.7)).

Proposición 46. *Sea σ una geodésica en M_κ y sea $J\in\mathcal{J}_\sigma$. Si $\|J(0)\| = 1$ y*

$$\frac{DJ}{ds}(0) = \alpha J(0)\times\sigma'(0),$$

entonces $T_\sigma(J)\in T_{[\sigma]}\mathcal{G}_\kappa$ es un vector tangente admisible para el sistema de control ι_κ^α.

Demostración. Llamamos $\ell = [\sigma]$, $p = \sigma(0)$ y $A = J(0)$. Basta verificar que

$$T_\sigma(J) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \left[s\mapsto\phi_{\ell,p,A}^\alpha(s,t)\right],$$

o equivalentemente, que el campo de Jacobi L a lo largo de σ asociado a la variación $\phi_{\ell,p,A}^\alpha$ coincida con J. Notemos que por hipótesis $\|A\| = 1$, por lo que $\phi_{\ell,p,A}^\alpha$ está bien definida.

Calculamos

$$\begin{aligned} L(0) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \phi^{\alpha}_{\ell,p,A}(0,t) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \gamma_{\cos(\alpha t)V_t+\operatorname{sen}(\alpha t)B_t}(0) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \gamma_A(t) \\ &= A \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \frac{DL}{ds}(0) &= \left.\frac{D}{ds}\right|_0 \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \gamma_{\cos(\alpha t)V_t+\operatorname{sen}(\alpha t)B_t}(s) \\ &= \left.\frac{D}{dt}\right|_0 \left.\frac{d}{ds}\right|_0 \gamma_{\cos(\alpha t)V_t+\operatorname{sen}(\alpha t)B_t}(s) \\ &= \left.\frac{D}{dt}\right|_0 \cos(\alpha t)V_t + \operatorname{sen}(\alpha t)B_t \\ &= \alpha B. \end{aligned}$$

Ahora bien, $A = J(0)$ y $\alpha B = \alpha J(0) \times \sigma'(0)$, que por hipótesis resulta ser $\frac{DJ}{ds}(0)$. Así, $J(0) = L(0)$ y $\frac{DJ}{ds}(0) = \frac{DL}{ds}(0)$ y en consecuencia $L = J$ por (2.2.2). □

Si bien el resultado anterior es de suma utilidad a la hora de hallar curvas admisibles en nuestro sistema de control, no siempre se trabaja con campos de Jacobi ortogonales. El siguiente lema sumado a la Proposición 39 nos permiten adaptar la proposición anterior a cualquier campo de Jacobi, sea o no ortogonal (el campo J^N fue definido en la Proposición 39).

Lema 47. *Sea $t \mapsto \phi_t$ una variación por geodésicas de rapidez unitaria en M_κ y sea J el campo de Jacobi asociado a lo largo de ϕ_0. Entonces*

$$\frac{DJ}{ds}(0) = \frac{DJ^N}{ds}(0).$$

Demostración. Como $\|\phi_t'(0)\| \equiv 1$, derivando con respecto a t tenemos que

$$0 = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \langle \phi_t'(0), \phi_t'(0)\rangle_\kappa = 2\left\langle \left.\frac{D}{dt}\right|_0 \phi_t'(0), \phi_0'(0)\right\rangle_\kappa . \tag{3.0.8}$$

Ahora calculamos

$$\begin{aligned}\frac{DJ^N}{ds}(0) &= \left.\frac{D}{ds}\right|_0 \left(J(s) - \langle J(s), \phi_0'(s)\rangle_\kappa \phi_0'(s)\right) \\ &= \frac{DJ}{ds}(0) - \left(\left.\frac{d}{ds}\right|_0 \langle J(s), \phi_0'(s)\rangle_\kappa\right)\phi_0'(0) - \langle J(0), \phi_0'(0)\rangle_\kappa \left.\frac{D}{ds}\right|_0 \phi_0'(s).\end{aligned}$$

El último término se anula pues ϕ_0 es una geodésica. Pero, por la misma razón,

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{ds}\right|_0 \langle J(s), \phi_0'(s)\rangle_\kappa &= \left\langle \left.\frac{D}{ds}\right|_0 \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \phi_t(s), \phi_0'(0)\right\rangle_\kappa \\ &= \left\langle \left.\frac{D}{dt}\right|_0 \phi_t'(0), \phi_0'(0)\right\rangle_\kappa,\end{aligned}$$

que es cero por (3.0.8). Así, la identidad enunciada es válida. □

A continuación vemos que en el caso $\kappa = 0$, $\alpha = 0$ vale la recíproca de la Proposición 46. Será de utilidad para tratar el único caso donde el sistema no es controlable.

Lema 48. *Sean $\ell = [\tau] \in \mathcal{G}_0$ y $J \in \mathcal{J}_\tau$. Entonces $T_\tau J$ es admisible para el sistema de control ι_0^0 si y solo si J es unitario y paralelo.*

Demostración. Si J es unitario y paralelo, entonces $\|J(0)\| = 1$ y $\frac{DJ}{ds}(0) = 0$. Luego, como $\alpha = 0$, se cumplen las condiciones de la proposición anterior, por lo que $T_\tau(J)$ resulta admisible.

Recíprocamente, supongamos que $T_\tau(J)$ es admisible. Podemos escribir $\tau(s) = q + sw$, con w unitario.

Por hipótesis, existen $p \in \ell$, digamos $p = \tau(s_o) = q + s_o w$, y A unitario ortogonal a w, tales que

$$T_\tau(J) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \left[s \mapsto \phi^0_{\ell,p,A}(s,t)\right] = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \left[s \mapsto \phi^0_{\ell,p,A}(s - s_o, t)\right].$$

Pero $\phi^0_{\ell,p,A}(s - s_o, t) = p + tA + (s - s_o)w$, que en $t = 0$ coincide con τ. Sea ahora $\overline{J}$ el campo de Jacobi a lo largo de τ asociado a esta variación por geodésicas unitarias, es decir,

$$\overline{J}(s) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 p + tA + (s - s_o)w = A.$$

Como $\overline{J} \in \mathcal{J}_\tau$ y T_τ es un isomorfismo, resulta que $J = \overline{J} \equiv A$, y por lo tanto es unitario y paralelo. □

PROPOSICIÓN 49. *El sistema ι_0^0 no es controlable.*

DEMOSTRACIÓN. Notemos primero que una curva suave en $\mathcal{G}_0$, definida en un intervalo abierto I de $\mathbb{R}$, es de la forma $t \mapsto [\sigma_t]$ para cierta superficie parametrizada $\phi : \mathbb{R} \times I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con $\phi(s,t) = \sigma_t(s)$. Esto es parte de la Proposición 3 en [14] (enunciada para el caso hiperbólico, pero válida en general).

Como para cada t, $s \mapsto \phi(s,t)$ es una recta en $\mathbb{R}^3$, existe $v : I \longrightarrow S^2$ tal que $\phi(s,t) = \phi(0,t) + sv(t)$. Calculamos el campo de Jacobi J_t a lo largo de σ_t asociado a la variación ϕ y obtenemos

$$J_t(s) = \frac{d}{dr}\bigg|_t (\phi(0,r) + sv(r)) = \frac{d\phi}{dr}(0,t) + sv'(t).$$

Si la curva $t \mapsto [\sigma_t]$ es admisible para el sistema ι_0^0, por el Lema 47 y el lema anterior, se cumple que

$$v'(t) = \frac{DJ_t}{ds}(0) = \frac{DJ_t^N}{ds}(0) = 0$$

para todo t. Así, v resulta constante y por lo tanto toda curva admisible a trozos para el sistema ι_0^0 consta de rectas paralelas. En consecuencia, el sistema no es controlable. □

En la siguiente proposición enunciamos con precisión y damos detalles del Ejemplo 8 (b) de curvas admisibles en $\mathcal{G}_\kappa$ que no son helicoidales puras. Para el caso euclídeo se obtienen a través de la parametrización reglada del **hiperboloide de una hoja**. Será útil en la demostración del resultado principal de este trabajo.

PROPOSICIÓN 50. *Sea $r > 0$ y sea $p = \cos_\kappa r\ e_0 + \operatorname{sen}_\kappa r\ e_1$. Sea σ la geodésica en M_κ con $\sigma(0) = p$ y velocidad inicial*

$$\sigma'(0) = -\operatorname{sen}\theta\ e_2 + \cos\theta\ e_3,$$

con $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. *Para* $\lambda > 0$ *definimos* $E_t \in G_\kappa$ *dado por*

$$E_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\lambda t & -\operatorname{sen}\lambda t & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}\lambda t & \cos\lambda t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sea $\Gamma : (a,b) \longrightarrow \mathcal{G}_\kappa$ *la curva de geodésicas en* M_κ *definida por* $\Gamma(t) = [s \mapsto E_t\sigma(s)]$. *Entonces, si*

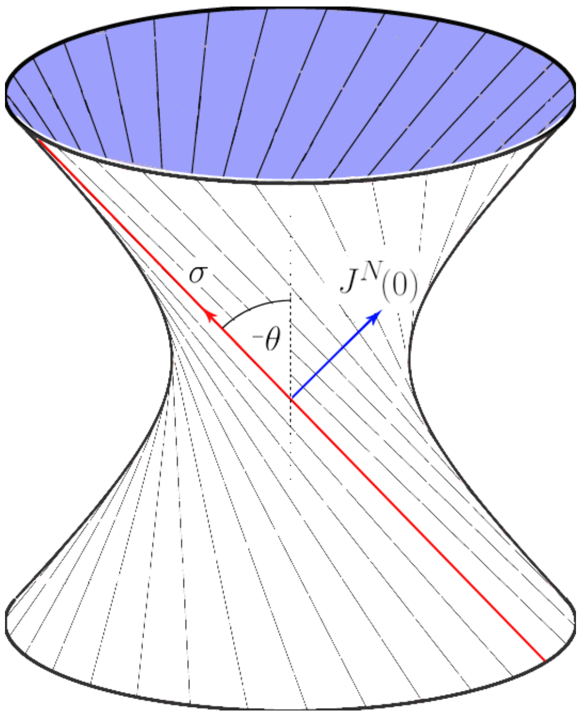
$$\lambda \operatorname{sen}\theta \cos_\kappa r = \alpha \qquad y \qquad \lambda\cos\theta \operatorname{sen}_\kappa r = 1,$$

la curva Γ *es admisible.*

Observación 51. *Si* $\kappa = 0, -1$ *o* $r < \frac{\pi}{2}$, *despejando de manera conveniente, se obtiene*

$$\theta = \arctan(\alpha \tan_\kappa r), \tag{3.0.9}$$

y así la proposición provee una familia a un parámetro r *de curvas admisibles.*



Demostración. Veamos primero que $\Gamma'(0)$ es admisible. Consideramos el campo de Jacobi J a lo largo de σ asociado a la variación de geodésicas $(s,t) \longmapsto E_t\sigma(s)$.

Por la Proposición 39, $\Gamma'(0) = T_\sigma\left(J^N\right)$. Ahora, por las proposiciones 46 y 47, si

$$\frac{DJ}{ds}(0) = \alpha J^N(0) \times \sigma'(0) \qquad \text{y} \qquad \left\|J^N(0)\right\| = 1, \tag{3.0.10}$$

entonces $\Gamma'(0)$ es admisible.

Calculemos primero $J^N(0)$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
J(0) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_0 E_t(\sigma(0)) \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \cos_\kappa r\ e_0 + \operatorname{sen}_\kappa r\ \left(\cos(\lambda t)\, e_1 + \operatorname{sen}(\lambda t)\, e_2\right) \\
&= \lambda \operatorname{sen}_\kappa r\ e_2.
\end{aligned}$$

Se sigue que

$$\begin{aligned}
J^N(0) &= \lambda \operatorname{sen}_\kappa r\ e_2 - \left\langle \lambda \operatorname{sen}_\kappa r\ e_2, -\operatorname{sen}\theta\ e_2 + \cos\theta\ e_3\right\rangle_\kappa \left(-\operatorname{sen}\theta\ e_2 + \cos\theta\ e_3\right) \\
&= \lambda \operatorname{sen}_\kappa r\ e_2 + \lambda \operatorname{sen}_\kappa r \operatorname{sen}\theta\ \left(-\operatorname{sen}\theta\ e_2 + \cos\theta\ e_3\right) \\
&= \lambda \operatorname{sen}_\kappa r \cos\theta\ \left(\cos\theta\ e_2 + \operatorname{sen}\theta\ e_3\right).
\end{aligned}$$

Así, $\left\|J^N(0)\right\| = 1$ si $\lambda \operatorname{sen}_\kappa r \cos\theta = 1$. Calculamos

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{ds}\right|_0 E_t(\sigma(s)) &= E_t \sigma'(0) \\
&= -\operatorname{sen}\theta \left(-\operatorname{sen}(\lambda t)\, e_1 + \cos(\lambda t)\, e_2\right) + \cos\theta\ e_3.
\end{aligned}$$

Sea ahora P_p la proyección dada en la Definición 20. Obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{DJ}{ds}(0) &= \left.\frac{D}{ds}\right|_0 \left.\frac{d}{dt}\right|_0 E_t(\sigma(s)) \\
&= P_p \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \left.\frac{d}{ds}\right|_0 E_t(\sigma(s)) \\
&= P_p\left(\lambda \operatorname{sen}\theta\ e_1\right) \\
&= \lambda \operatorname{sen}\theta\ e_1 - \kappa \left\langle \lambda \operatorname{sen}\theta\ e_1, p\right\rangle_\kappa p \\
&= \lambda \operatorname{sen}\theta\ e_1 - \lambda\kappa \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}_\kappa r \left(\cos_\kappa r\ e_0 + \operatorname{sen}_\kappa r\ e_1\right) \\
&= \lambda \operatorname{sen}\theta \cos_\kappa r \left(-\kappa \operatorname{sen}_\kappa r\ e_0 + \cos_\kappa r\ e_1\right).
\end{aligned}$$

Veamos que $J^N(0) \times \sigma'(0) = W$, donde

$$W = -\kappa \operatorname{sen}_\kappa r \; e_0 + \cos_\kappa r \; e_1.$$

Se verifica que $\left\{J^N(0), \sigma'(0), W\right\}$ es un subconjunto ortonormal de T_pM_κ. Debemos comprobar que es una base positiva de T_pM_κ, es decir, que $\left\{p, J^N(0), \sigma'(0), W\right\}$ sea positiva (ver la Definición 26), o equivalentemente, que la base $\left\{p, W, J^N(0), \sigma'(0)\right\}$ de $\mathbb{R}^4$ lo sea. Ahora bien, la matriz de los elementos de esta última base respecto de la base canónica es

$$\operatorname{diag}\left(R_\kappa(r), R_1(\theta)\right),$$

cuyo determinante es $\cos^2_\kappa r + \kappa \operatorname{sen}^2_\kappa r = 1$.

En consecuencia, la ecuación (3.0.10) resulta

$$\lambda \operatorname{sen}\theta \cos_\kappa r \left(-\kappa \operatorname{sen}_\kappa r \; e_0 + \cos_\kappa r \; e_1\right) = \alpha \left(-\kappa \operatorname{sen}_\kappa r \; e_0 + \cos_\kappa r \; e_1\right),$$

o de manera equivalente,

$$\lambda \operatorname{sen}\theta \cos_\kappa r = \alpha.$$

Finalmente, $\Gamma'(0)$ es admisible si

$$\lambda \operatorname{sen}\theta \cos_\kappa r = \alpha \qquad \text{y} \qquad \lambda \cos\theta \operatorname{sen}_\kappa r = 1.$$

Veamos ahora que $\Gamma'(t)$ es admisible para todo t. Calculamos

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0} E_t\sigma(s) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 E_{t_0+t}\sigma(s) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 E_{t_0}E_t\sigma(s) = E_{t_0}\left.\frac{d}{dt}\right|_0 E_t\sigma(s).$$

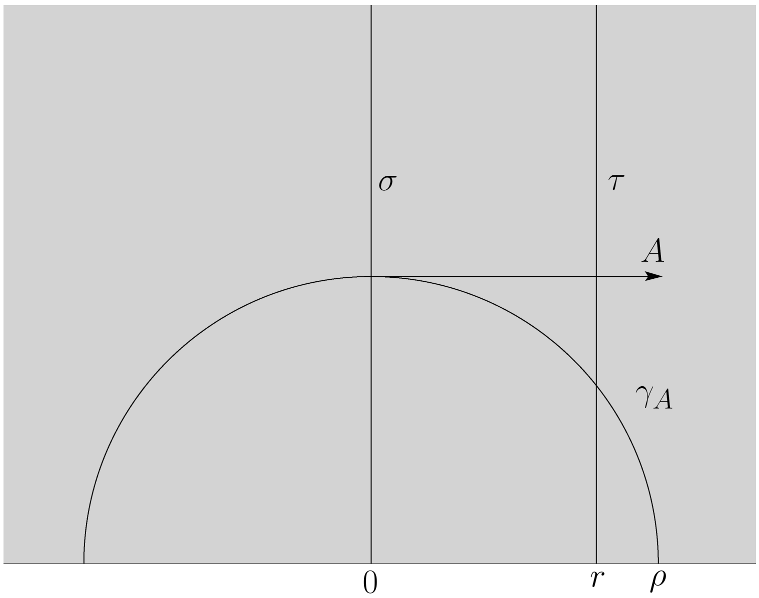
La afirmación resulta de que $\left.\frac{d}{dt}\right|_0 [s \mapsto E_t\sigma(s)]$ es admisible y de que G_κ preserva $\mathcal{A}^\kappa_\alpha$. □

Si $\kappa = 0, 1$, la distancia entre las trayectorias de dos geodésicas en M_κ se realiza por un segmento geodésico (que se reduce a un punto si se intersecan), que resulta ortogonal a ambas. En el espacio hiperbólico existen pares de geodésicas para las cuales lo anterior no vale. Se trata de geodésicas disjuntas cuyas trayectorias están a distancia cero, las llamadas geodésicas asintóticas (nos permitimos esta noción más general que la usual, sin tomar en cuenta la orientación).

Proposición 52. *Si para todo $\beta \in [0, \pi]$ existen $\ell, \ell' \in \mathcal{G}_\kappa$ que se cortan en el ángulo β y una curva admisible a trozos que las une, entonces el sistema ι_κ^α es controlable.*

Demostración. Debemos mostrar que dos geodésicas arbitrarias ℓ_1 y ℓ_2 en $\mathcal{G}_\kappa$ pueden unirse por una curva admisible a trozos. Supongamos que ℓ_1 no es asintótica a ℓ_2. Sea E un segmento geodésico que realiza la distancia entre ellas. Supongamos que $E(0) = p \in \ell_1$ y $E(t_o) \in \ell_2$. Luego $\Gamma^\alpha_{\ell_1, p, E'(0)}$ es una curva admisible cuyo valor en t_o es una geodésica orientada ℓ_3 que corta a ℓ_2 en cierto ángulo $\theta \in [0, \pi]$.

Tomando $\beta = \theta$, existen ℓ y ℓ' como en la hipótesis. Por la homogeneidad podemos suponer que son ℓ_2 y ℓ_3. Así, por hipótesis, existe una curva Γ admisible a trozos que une ℓ_2 con ℓ_3. Yuxtaponiendo $\Gamma^\alpha_{\ell_1, p, E'(0)}$ con Γ, obtenemos una curva admisible a trozos que une ℓ_1 con ℓ_2.



Sean ahora σ y τ dos geodésicas asintóticas en H^3, que presentamos en el modelo del semiespacio superior. Podemos suponer que están en buena posición:

$$\sigma(s) = (0, 0, e^s) \qquad \text{y} \qquad \tau(s) = \left(r, 0, e^{\pm s}\right)$$

(salvo reparametrización que preserva la orientación). Sean $\rho > r$, $p = (0, 0, \rho) = \sigma(\log \rho)$ y $A = (\rho, 0, 0)$, que es un vector unitario en $T_{\sigma(\log \rho)} H^3$ ortogonal a $\sigma'(\log \rho)$. Ahora, la trayectoria de γ_A es una semicircunferencia euclídea vertical centrada en cero, de radio ρ. Luego, como $\rho > r$, la curva α-helicoidal en $\mathcal{G}_\kappa$ con rayo inicial $[\sigma]$ y eje γ_A, interseca a la imagen de τ, es decir, existe algún t_1 tal que $l = \Gamma_{[\sigma],p,A}(t_1)$ interseca a $[\tau]$ en un ángulo θ. Nuevamente, por homogeneidad, podemos suponer que las curvas ℓ y ℓ' asociadas a θ son l y $[\tau]$, y análogamente al caso anterior, el sistema es controlable. □

En la siguiente proposición usaremos el modelo de la bola de Poincaré para el espacio hiperbólico, por lo que presentamos algunas notaciones.

El modelo consiste en presentar a H^3 como la bola $B^3 = \{p \in \mathbb{R}^3 : \|p\| < 1\}$, donde las geodésicas por cero son intersecciones de rectas en $\mathbb{R}^3$ con la bola y las restantes son arcos de circunferencia perpendiculares al borde de B^3. Además, aquí, la métrica hiperbólica es conforme a la euclídea, es decir, el ángulo entre dos geodésicas es el ángulo entre sus velocidades, vistas como vectores de $\mathbb{R}^3$. Dados $p \neq q$ en el borde de la bola, denotamos por $c(p,q)$ la geodésica orientada de p a q.

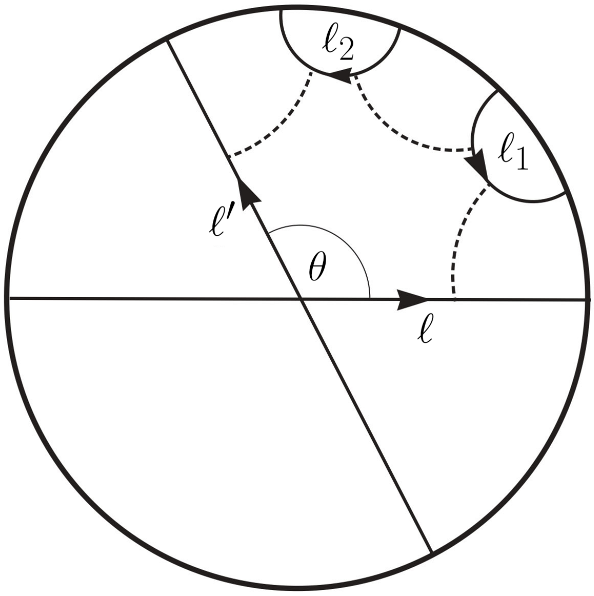
Proposición 53. *Para* $(\kappa, \alpha) = (-1, 0)$ *el sistema* ι_κ^α *es controlable.*

Demostración. Por la Proposición 52, dado $\theta \in [0, \pi]$ basta encontrar dos geodésicas orientadas ℓ' y ℓ que se intersecan con ángulo θ y una curva admisible a trozos que las una.

Consideramos el modelo de la bola de Poincaré para el espacio hiperbólico. Nos conviene escribir $\mathbb{R}^3 \equiv \mathbb{C}\times\mathbb{R}$. Sean $\ell = c((-1,0),(1,0))$ y $\ell' = c\left(-\left(e^{i\theta},0\right),\left(e^{i\theta},0\right)\right)$. Sean ahora

$$\ell_1 = c\left(\left(e^{i2\theta/5},0\right),\left(e^{i\theta/5},0\right)\right) \qquad \text{y} \qquad \ell_2 = c\left(\left(e^{i3\theta/5},0\right),\left(e^{i4\theta/5},0\right)\right).$$

Sea E el segmento geodésico que realiza la distancia entre ℓ y ℓ_1, que existe pues ℓ y ℓ_1 no son asintóticas. El traslado paralelo a lo largo de E de la velocidad de ℓ coincide con la velocidad de ℓ_1 (como $\alpha = 0$, esto da una curva α-helicoidal pura). Así, ℓ_1 se alcanza desde ℓ mediante una curva admisible en $\mathcal{G}_{-1}$. De manera similar, se alcanza ℓ_2 desde ℓ_1 y ℓ' desde ℓ_2.



□

Para finalizar, demostramos el resultado principal de este trabajo, enunciado en la introducción. Para comodidad de la lectura lo enunciamos nuevamente a continuación.

Teorema 9. *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Para $\kappa = -1, 0$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) *El sistema de control $(\mathcal{A}_\kappa^\alpha, \iota_\kappa^\alpha)$ es controlable.*

b) *Se cumple que $\alpha^2 \neq \kappa$.*

c) *Para cada $\ell \in \mathcal{G}_\kappa$, la fibra típica de $\mathcal{A}_\kappa^\alpha$ sobre ℓ es una subvariedad sustancial de $T_\ell \mathcal{G}_\kappa$.*

d) *La fibra típica de $\mathcal{A}_\kappa^\alpha$ tiene dimensión dos.*

Demostración. La equivalencia entre (b) y (c) se demostró en la Proposición 45.

Por la Proposición 41, la fibra típica de $\mathcal{A}_\kappa^\alpha$ está dada por $K_\kappa / H_\kappa(\alpha)$. Luego la equivalencia entre (b) y (d) se deduce del Teorema 11, pues $\dim K_\kappa / H_\kappa(\alpha) = \dim K_\kappa - \dim H_\kappa(\alpha)$ y $\dim H_\kappa(\alpha)$ se puede calcular con la Proposición 44.

Veamos que (a) implica (b). En la Proposición 49 probamos que el sistema no es controlable cuando $(\kappa, \alpha) = (0, 0)$, que es el único caso donde $\alpha^2 = \kappa$. Luego, si el sistema es controlable, necesariamente $\alpha^2 \neq \kappa$.

Ahora verifiquemos que (b) implica (a). Supongamos que $\alpha^2 \neq \kappa$. El caso $\kappa = -1$ y $\alpha = 0$ fue probado en la Proposición 53. Sea ahora $\alpha \neq 0$.

Sea $\beta \in [0, \pi]$. Por la Proposición 52, basta encontrar dos líneas que se cortan en el ángulo β y una curva admisible a trozos que las una. Una de las líneas será la geodésica σ de la Proposición 50 y la curva buscada será la yuxtaposición de la curva Γ de la misma proposición, seguida de cierta curva helicoidal pura, o sea, de la forma 3.0.1.

Sea Γ la curva definida en la Proposición 50. Vimos que esta curva es admisible si se cumplen

$$\lambda \operatorname{sen}\theta \cos_\kappa r = \alpha \qquad \text{y} \qquad \lambda \cos\theta \operatorname{sen}_\kappa r = 1,$$

y llamemos $\ell = \Gamma\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)$, el rayo del hiperboloide después de dar media vuelta, es decir, al cabo de recorrer $t = \frac{\pi}{\lambda}$.

Sea $\rho(t) = \cos_\kappa(t - r)\, e_0 + \operatorname{sen}_\kappa(t - r)\, e_1$. Notemos que como $\rho(0) \in \ell$, y $\rho'(0)$ es ortogonal a ℓ, podemos definir $\Psi : [0, 2r] \to \mathcal{G}_\kappa$ como la curva α-helicoidal con rayo inicial ℓ y eje $\gamma_{\rho'(0)} = \rho$, es decir

$$\Psi(t) = \Gamma^{\alpha}_{\ell, \rho(0), \rho'(0)}(t).$$

Supongamos que $\Psi(t) = [\tau_t]$, con $\tau_t(0) = \rho(t)$.

Por la definición de Ψ, es inmediato que $\Psi(0) = \ell$, por lo que es posible yuxtaponer Γ con Ψ.

Tanto $\Gamma(0)$ como $\Psi(2r)$ son clases de geodésicas orientadas en M_κ que pasan por $\rho(2r)$, por lo que nos interesa calcular el ángulo entre sus respectivas velocidades y encontrar condiciones suficientes para que ese ángulo sea β. Usando la definición de

$\Gamma^{\alpha}_{\ell,\rho(0),\rho'(0)}$, calculemos $\tau'_{2r}(0)$:

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{ds}\right|_0 \phi^{\alpha}_{\ell,\rho(0),\rho'(0)}(s,2r) &= \left.\frac{d}{ds}\right|_0 \gamma_{\cos(2\alpha r)V_{2r}+\operatorname{sen}(2\alpha r)B_{2r}}(s)\\ &= \cos(2\alpha r)\,V_{2r} + \operatorname{sen}(2\alpha r)\,B_{2r}\\ &= \operatorname{sen}(\theta-2\alpha r)\,e_2 + \cos(\theta-2\alpha r)\,e_3.\end{aligned}$$

La última igualdad vale pues $V_0 = \tau'_0(0)$ y $B_0 = \rho'(0)\times\tau'_0(0)$, y así,

$$V_0 = \operatorname{sen}\theta\ e_2 + \cos\theta\ e_3 \quad \text{y} \quad B_0 = -\cos\theta\ e_2 + \operatorname{sen}\theta\ e_3;$$

luego, como ambos son ortogonales a $\rho'(0)$, sus transportes paralelos a lo largo de ρ son constantes.

Como la velocidad $\sigma'(0)$ estaba dada por $\operatorname{sen}(-\theta)\,e_2 + \cos(-\theta)\,e_3$, el ángulo comprendido entre $\Gamma(0)$ y $\Psi(2r)$ es, salvo múltiplos de 2π,

$$\theta - 2\alpha r - (-\theta) = 2\theta - 2\alpha r.$$

Por (3.0.9), podemos tomar $\theta = \arctan(\alpha\tan_\kappa r)$. Remplazar θ en la expresión de arriba nos permite definir la función

$$\beta_{\alpha,\kappa}(r) = 2\arctan(\alpha\tan_\kappa r) - 2\alpha r,$$

que, como consideramos $\alpha \neq 0$, cumple

$$\lim_{r\to\pm\infty}\beta_{\alpha,\kappa}(r) = \mp\operatorname{signo}(\alpha)\,\infty.$$

Claramente esto implica que es suryectiva, puesto que es continua. Esto quiere decir, que dado $\beta\in[0,\pi]$, siempre existen θ, λ y r tal que Ψ yuxtapuesta con Γ es una curva admisible a trozos para el sistema ι^{α}_{κ} que une dos líneas en $\mathcal{G}_\kappa$ que se cortan en el ángulo β. $\square$

Bibliografía

[1] Agrachev, A. A. *Geometry of optimal control problems and Hamiltonian systems. Nonlinear and optimal control theory*, 1–59, Lecture Notes in Math., 1932, Springer, Berlin, 2008.

[2] Agrachev, A. A.; Gamkrelidze, R. V. *Feedback-invariant optimal control theory and differential geometry. I.* Regular extremals. J. Dynam. Control Systems 3 (1997), no. 3, 343–389.

[3] Beem, John K.; Low, Robert J.; Parker, Phillip E. *Spaces of geodesics: products, coverings, connectedness.* Geom. Dedicata 59 (1996), no. 1, 51–64.

[4] García Alicia; Sanchez Cristián, *Introducción a la Topología Algebraica.* Universidad Nacional de Córdoba, 1994.

[5] Godoy, Yamile; Harrison Michael; Salvai, Marcos, *Outer billiards on the spaces of oriented geodesics of the three dimensional space forms*, en preparación.

[6] Godoy, Yamile; Salvai, Marcos. *The magnetic flow on the manifold of oriented geodesics of a three dimensional space form.* Osaka J. Math. 50 (2013), no. 3, 749–763.

[7] Godoy, Yamile; Salvai, Marcos. *Global smooth geodesic foliations of the hyperbolic space.* Math. Z. 281 (2015), no. 1-2, 43–54.

[8] Godoy, Yamile; Salvai, Marcos. *Calibrated geodesic foliations of hyperbolic space.* Proc. Amer. Math. Soc. 144 (2016), no. 1, 359–367.

[9] Grong, Erlend. *Submersions, Hamiltonian systems, and optimal solutions to the rolling manifolds problem.* SIAM J. Control Optim. 54 (2016), no. 2, 536–566.

[10] Hammersley, J. M. *Oxford commemoration ball.* Probability, statistics and analysis, 112–142, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 79, Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York, 1983.

[11] Harvey, F. Reese. *Spinors and calibrations.* Perspectives in Mathematics, 9. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1990.

[12] Jurdjevic, Velimir. *Geometric control theory.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 52. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[13] Salvai, Marcos. *On the geometry of the space of oriented lines of Euclidean space.* Manuscripta Math. 118 (2005), no. 2, 181–189.

[14] Salvai, Marcos. *On the geometry of the space of oriented lines of the hyperbolic space.* Glasg. Math. J. 49 (2007), no. 2, 357–366.

[15] Salvai, Marcos. *Global smooth fibrations of* $\mathbb{R}^3$ *by oriented lines*. Bull. Lond. Math. Soc. 41 (2009), no. 1, 155–163.

[16] Sussmann, Héctor J. *Orbits of families of vector fields and integrability of distributions*. Trans. Amer. Math. Soc. 180 (1973), 171–188.

[17] Warner, Frank W. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*. Scott, Foresman and Co., Glenview, Ill.-London, 1971.