Formulación Simétrica del Método Indirecto de Elementos de Contorno para el Análisis Dinámico Tridimensional de Estructuras de Barras Enterradas

por

Federico Pinto

Ingeniero Civil, UNC 1997
Master of Science, MIT 2000

TESIS PRESENTADA A LA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES
EN CUMPLIMIENTO PARCIAL DE LOS REQUERIMIENTOS PARA EL GRADO
DE

DOCTOR EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA

en la

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Noviembre 2002

.

RESUMEN

Esta tesis presenta una nueva formulación del Método Indirecto de Elementos de Contorno (IBEM), basada en el principio de los trabajos virtuales, para el análisis de estructuras de barras enterradas en medios elásticos semi-infinitos. A diferencia de las formulaciones convencionales del IBEM, la propuesta en este trabajo permite la evaluación de matrices de rigidez simétricas para el continuo, las cuales a su vez pueden ser definidas en términos de variables convencionales del análisis estructural (desplazamientos y fuerzas generalizadas). La formulación propuesta permite la introducción de grados de libertad rotacionales en el esquema de interpolación con un costo numérico adicional mínimo. Mediante la formulación propuesta, se desarrolla la implementación numérica mediante un elemento de dos nodos que permite analizar el comportamiento de estructuras enterradas planas, sometidas a cargas en su plano. Las predicciones del elemento desarrollado son validadas mediante resultados publicados en la literatura para pilotes aislados y grupos de pilotes sin vinculación. Finalmente, se estudia la rigidez dinámica de un pórtico enterrado, sometido a cargas verticales, laterales y momentos. Los resultados obtenidos muestran que el comportamiento de un pórtico enterrado no siempre puede ser modelado mediante resultados correspondientes a pilotes aislados, aún cuando se utilicen los factores de interacción dinámica para grupos de pilotes propuestos por Gazetas y colaboradores ([10]).

Tesis dirigida por: Dr. Carlos A. Prato
Cargo: Profesor Plenario

ABSTRACT

This thesis presents a new formulation of the Indirect Boundary Element Method (IBEM) based on the principle of virtual work for the dynamic analysis of frame structures buried in semi-infinite elastic media. Unlike conventional IBEM formulations, the present one leads to symmetric stiffness matrices for the continuum domain that may be defined in terms of conventional structural analysis variables (i.e., generalized displacements and lumped forces). It is shown that, in the context of the present formulation, rotation degrees of freedom (DOF) may readily be introduced in the interpolation scheme with very little additional computational effort. By means of the present formulation, a two-node element with three DOF per node is defined for the analysis of plane frames buried on a half-space subjected to in-plane loads and moments. In order to show the consistency of the present formulation with well established results, the static and dynamic stiffness of a single piles and pile groups, as evaluated by means of the present formulation, is compared with other results from the literature. Finally, the dynamic stiffness of a single buried frame under vertical and horizontal loading is studied. The analysis shows that the stiffness of the full frame may not always be accurately estimated by means of results for single piles, even though proper dynamic interaction factors devised by Gazetas et al. ([10]) are taken into account.

Thesis supervisor: Dr. Carlos A. Prato
Title: Plenary Professor

RÉSUMÉ

Cette thèse présente une nouvelle formulation de la Méthode Indirecte des Elements de Contour (IBEM), basée sur le principe des travaux virtuels, pour l'analyse des structures de poutre enterrées dans des milieux elástiques semi-infinis. La proposition de ce travail, à différence des formulations conventionnelles de cette méthode (IBEM), permet l'evaluation des matrices de raideur symetrique pour le continu, lesquelles peuvent être définies à la fois, comme des variables conventionnelles de l'analyse structurelle (déplacements et forces généralisées). La formulation proposée permet l'introduction des degrés de liberté de rotation dans le schéma d'interpolation, avec un coût numérique aditional minime. Au moyen de la formulation proposée, on developpe l'application numérique par moyen d'un élément de deux noeuds ce qui permet d'analyser le comportement des structures plates enterrées, soumises à des charges dans leur plan. Les prédictions de l'élément developpé sont vérifiées au moyen des resultats publiés dans la literature pour des pilotis isolés et des groupes de pilotis sans liaison. Finalement, on étudie la raideur dynamique d'un treillis enterré, soumis à des charges verticales, latérales et moments. Les résultats obtenus montrent que le comportement d'un treillis enterré ne peut pas toujours être modelé au moyen des résultats correspondants à des pilotis isolés, même quand on utilise les facteurs d'interaction dynamique pour des groupes de pilotis proposés par Gazetas et ses collaborateurs ([10]).

Directeur de thèse: Dr. Carlos A. Prato
Charge: Professeur Titulaire

AGRADECIMIENTOS

Quisiera expresar mi más sincera gratitud hacia mi director de tesis, el Dr. Carlos A. Prato, a quien debo la motivación para proseguir estudios de posgrado y quien me ha brindado constante apoyo para la finalización de mi trabajo de tesis.

Quisiera también agradecer a las personas que me han dado fuerzas para abocarme a mi trabajo de investigación durante estos últimos años. A mi novia, Agustina de León, quien me ha ayudado a sobrellevar esas largas tardes dedicadas a la finalización de mi tesis. A mi familia, cuyo aliento ha sido de gran ayuda para superar las dificultades. A mis compañeros, colegas docentes y amigos del Departamento de Estructuras de esta facultad: Marcelo Ceballos, Carina Caballero, Adriana Pernich, Franco Francisca, Gabriela Durán, Alejandro Brewer y Ricardo Ferreyra. A los miembros del comité asesor de tesis: Dr. Fernando G. Flores y Dr. José Stuardi. Al director del Departamento de Estructuras de esta facultad, Ing. Gérald Pirard.

Finalmente, quisiera remarcar que este trabajo ha sido posible gracias al apoyo económico brindado por el proyecto FOMEC N^o 258 y el programa de becas doctorales internas del CONICET. El apoyo brindado por ambas instituciones es profundamente agradecido.

Índice general

1 Introducción **27**

1.1 Generalidades 27

1.2 Metodología y enfoque 31

1.3 Organización de la Tesis 32

2 Funciones de Green **35**

2.1 Generalidades 35

2.1.1 Respuesta en frecuencia 36

2.1.2 Tensor de Green 36

2.1.3 Reciprocidad del tensor de Green para sistemas elásticos 37

2.2 Problemas estáticos 38

2.3 Problemas dinámicos 38

2.3.1 Semiespacio homogéneo con superficie libre 40

2.3.2 Semiespacio estratificado con superficie libre 42

2.3.3 Semiespacio pavimentado y confinado 43

2.3.4 Tensor de Green aproximado para un semiespacio homogéneo con superficie libre 45

2.4 Singularidad del tensor de Green 47

3 Formulación simétrica del IBEM **55**

3.1 Introducción 55

3.2 Formulación general del IBEM 56

3.3 Formulación simétrica del IBEM para estructuras enterradas en medios continuos 58

3.3.1 Dominio del problema 58

3.3.2 Interacción continuo-estructura 59

3.3.3 Interpolación de fuerzas y desplazamientos 61

3.3.4 IBEM: Obtención de la matriz de rigidez del continuo mediante el PTV 66

3.4 Propiedades de la matriz de rigidez del continuo 73

3.4.1 Matriz de pseudoflexibilidad 73

3.4.2 Forma de la matriz de rigidez 74

3.4.3 Simetría de la matriz de rigidez 74

3.5 Acoplamiento entre el continuo y la estructura 76

4 Elemento de dos nodos para el análisis de pórticos planos sujetos a cargas en el plano 79

4.1 Generalidades 79

4.1.1 Interpolación de desplazamientos 80

4.1.2 Interpolación de fuerzas 82

4.2 Evaluación de la matriz de condensación 83

4.3 Evaluación de la matriz de pseudoflexibilidad 86

4.3.1 Elementos con superficie de interacción cilíndrica 90

4.3.2 Elementos con superficie de interacción rectangular 92

5 Ejemplos de aplicación 99

5.1 Ejemplos de validación 99

5.1.1 Generalidades 99

5.1.2 Rigidez estática de pilotes aislados 101

5.1.3 Rigidez dinámica de pilotes aislados 104

5.1.4 Grupos de pilotes: Factores de interacción 105

5.1.5 Conclusiones 112

5.2 Ejemplos de aplicación 112

5.2.1 Matriz de rigidez dinámica de un pilote inclinado 112

5.2.2 Rigidez dinámica de un pórtico enterrado 115

6 Conclusiones y recomendaciones **157**

6.1 Formulación del IBEM 157

6.2 Modelación de estructuras de barras enterradas 159

6.3 Recomendaciones para futuras investigaciones 161

A Evaluación de las integrales singulares $\mathcal{I}2$, $\mathcal{I}3$ e $\mathcal{I}4$ **163**

A.1 Integral $\mathcal{I}2$ 163

A.2 Integral $\mathcal{I}3$ 164

A.3 Integral $\mathcal{I}4$ 165

Índice de figuras

2.1 Sistema de coordenadas para la definición de las funciones de Green 37

2.2 a) Semiespacio pavimentado; b) Semiespacio confinado 45

2.3 Componente Gxx del tensor de Green, Z/r=0 48

2.4 Componente Gxx del tensor de Green, Z/r=0.5 48

2.5 Componente Gxx del tensor de Green, Z/r=1 49

2.6 Componente Gxx del tensor de Green, Z/r=2 49

2.7 Componente Gxz del tensor de Green, Z/r=0 50

2.8 Componente Gxz del tensor de Green, Z/r=0.5 50

2.9 Componente Gxz del tensor de Green, Z/r=1 51

2.10 Componente Gxz del tensor de Green, Z/r=2 51

2.11 Componente Gzz del tensor de Green, Z/r=0 52

2.12 Componente Gzz del tensor de Green, Z/r=0.5 52

2.13 Componente Gzz del tensor de Green, Z/r=1 53

2.14 Componente Gzz del tensor de Green, Z/r=2 53

3.1 Subdivisión del dominio: Semiespacio extendido 59

3.2 Definición de la superficie de interacción, Ω 61

3.3 Interpolación de las fuerzas distribuidas reales y virtuales ($\mathbf{f}^c$y $\delta\mathbf{f}$) y desplazamientos analíticos, interpolados y virtuales ($\mathbf{u}^c$, $\mathbf{u}^\infty$ y $\delta\mathbf{u}$) (esquemático) . 63

3.4 Ejemplo de elemento cilíndrico con desplazamientos axiales y rotaciones torsionales 65

4.1 Intrerpolación de desplazamientos en el eje del elemento 80

4.2 Definición del ángulo de orientación, $\alpha^{(e)}$ 85

4.3 Interpretación física de los elementos de la matriz de pseudoflexibilidad, $B_{2i-1,2j-1}$ 88

4.4 Ejemplo de pérdida de simetría debido a integración reducida 89

4.5 Elemento plano con superficie de interacción cilíndrica 91

4.6 Elemento plano con superficie de interacción rectangular 92

4.7 Caso a): Integración regular; $|i-j|>1$ 94

4.8 Caso b): Integración singular; $i=j-1$ 94

4.9 Caso c): Integración singular; $i=j$ 94

4.10 Caso d): Integración singular; $i=j+1$ 95

4.11 Esquema de integración singular 96

5.1 Pilote vertical de sección circular, sometido a cargas en su extremo superior 101

5.2 Desplazamientos verticales normalizados de un pilote de sección circular con $L/D=15$; $E_p/E_s=200$; $\nu=0{,}5$ 103

5.3 Desplazamientos horizontales normalizados de un pilote de sección circular con $L/D=15$; $E_p/E_s=200$; $\nu=0{,}5$ 103

5.4 Coeficiente de rigidez dinámica vertical ($L/D=15$; $E_p/E_s=1000$; $\rho_p/\rho_s=0{,}7$; $\nu=0{,}4-0{,}5$; $\beta=0{,}05$) 106

5.5 Coeficiente de rigidez dinámica horizontal ($L/D=15$; $E_p/E_s=1000$; $\rho_p/\rho_s=0{,}7$; $\nu=0{,}4-0{,}5$; $\beta=0{,}05$) 106

5.6 Coeficiente de rigidez dinámica de acoplamiento entre la horizontal y la rotacional ($L/D=15$; $E_p/E_s=1000$; $\rho_p/\rho_s=0{,}7$; $\nu=0{,}4-0{,}5$; $\beta=0{,}05$) 107

5.7 Coeficiente de rigidez dinámica rotacional ($L/D=15$; $E_p/E_s=1000$; $\rho_p/\rho_s=0{,}7$; $\nu=0{,}4-0{,}5$; $\beta=0{,}05$) 107

5.8 Componentes reales e imaginarias de los desplazamientos axiales normalizados debidos a una carga axial armónica de frecuencia adimensional, $a_0 = 1$ ($L/D = 15$; $E_p/E_s = 1000$; $\rho_p/\rho_s = 0{,}7$; $\nu = 0{,}5$; $\beta = 0{,}05$) 108

5.9 Componentes reales e imaginarias de los desplazamientos horizontales normalizados debidos a una carga transversal armónica de frecuencia adimensional, $a_0 = 1$ sobre un pilote con giro libre en el extremo superior ($L/D = 15$; $E_p/E_s = 1000$; $\rho_p/\rho_s = 0{,}7$; $\nu = 0{,}5$; $\beta = 0{,}05$) 108

5.10 Componentes reales e imaginarias de los desplazamientos horizontales normalizados debidos a una carga transversal armónica de frecuencia adimensional, $a_0 = 1$ sobre un pilote con giro restringido en el extremo superior ($L/D = 15$; $E_p/E_s = 1000$; $\rho_p/\rho_s = 0{,}7$; $\nu = 0{,}5$; $\beta = 0{,}05$) 109

5.11 Definición del factor de interacción, α, para el caso estático 110

5.12 Factor de interacción vertical para un grupo de dos pilotes verticales en función de la frecuencia adimensional $b_0 = \omega C/V_S$ ($L/D = 15$; $E_p/E_s = 1000$; $\rho_p/\rho_s = 0{,}7$; $\nu = 0{,}5$; $\beta = 0{,}05$) 111

5.13 Factor de interacción horizontal para un grupo de dos pilotes verticales en función de la frecuencia adimensional $b_0 = \omega C/V_S$ ($L/D = 15$; $E_p/E_s = 1000$; $\rho_p/\rho_s = 0{,}7$; $\nu = 0{,}5$; $\beta = 0{,}05$) 111

5.14 Pilotes inclinados: a) situación real; b) idealización frecuentemente asumida 113

5.15 Pérdida de simetría debida a la utilización de la función de mapeo aproximada para un pilote inclinado $\delta = 15°$ con respecto a la vertical ($L/D = 15$; $E_p/E_s = 1000$; $\rho_p/\rho_s = 0{,}7$; $\nu = 0{,}5$; $\xi = 0$) 114

5.16 Componente K_{XX} de la matriz de rigidez dinámica de un pilote inclinado a $\delta = 15°$ con respecto a la vertical ($L/D = 15$; $E_p/E_s = 1000$; $\rho_p/\rho_s = 0{,}7$; $\nu = 0{,}5$; $\beta = 0$) 116

5.17 Componente K_{XZ} de la matriz de rigidez dinámica de un pilote inclinado a $\delta = 15°$ con respecto a la vertical ($L/D = 15$; $E_p/E_s = 1000$; $\rho_p/\rho_s = 0{,}7$; $\nu = 0{,}5$; $\beta = 0$) 116

5.18 Componente $K_{X\theta}$ de la matriz de rigidez dinámica de un pilote inclinado a $\delta = 15°$ con respecto a la vertical ($L/D = 15$; $E_p/E_s = 1000$; $\rho_p/\rho_s = 0{,}7$; $\nu = 0{,}5$; $\beta = 0$) 117

5.19 Componente K_{ZZ} de la matriz de rigidez dinámica de un pilote inclinado a $\delta = 15°$ con respecto a la vertical ($L/D = 15$; $E_p/E_s = 1000$; $\rho_p/\rho_s = 0{,}7$; $\nu = 0{,}5$; $\beta = 0$) 117

5.20 Componente $K_{Z\theta}$ de la matriz de rigidez dinámica de un pilote inclinado a $\delta = 15°$ con respecto a la vertical ($L/D = 15$; $E_p/E_s = 1000$; $\rho_p/\rho_s = 0{,}7$; $\nu = 0{,}5$; $\beta = 0$) 118

5.21 Componente $K_{\theta\theta}$ de la matriz de rigidez dinámica de un pilote inclinado a $\delta = 15°$ con respecto a la vertical ($L/D = 15$; $E_p/E_s = 1000$; $\rho_p/\rho_s = 0{,}7$; $\nu = 0{,}5$; $\beta = 0$) 118

5.22 Componente K_{XX} de la matriz de rigidez dinámica de un pilote inclinado a $\delta = 30°$ con respecto a la vertical ($L/D = 15$; $E_p/E_s = 1000$; $\rho_p/\rho_s = 0{,}7$; $\nu = 0{,}5$; $\beta = 0$) 119

5.23 Componente K_{XZ} de la matriz de rigidez dinámica de un pilote inclinado a $\delta = 30°$ con respecto a la vertical ($L/D = 15$; $E_p/E_s = 1000$; $\rho_p/\rho_s = 0{,}7$; $\nu = 0{,}5$; $\beta = 0$) 119

5.24 Componente $K_{X\theta}$ de la matriz de rigidez dinámica de un pilote inclinado a $\delta = 30°$ con respecto a la vertical ($L/D = 15$; $E_p/E_s = 1000$; $\rho_p/\rho_s = 0{,}7$; $\nu = 0{,}5$; $\beta = 0$) 120

5.25 Componente K_{ZZ} de la matriz de rigidez dinámica de un pilote inclinado a $\delta = 30°$ con respecto a la vertical ($L/D = 15$; $E_p/E_s = 1000$; $\rho_p/\rho_s = 0{,}7$; $\nu = 0{,}5$; $\beta = 0$) 120

5.26 Componente $K_{Z\theta}$ de la matriz de rigidez dinámica de un pilote inclinado a $\delta = 30°$ con respecto a la vertical ($L/D = 15$; $E_p/E_s = 1000$; $\rho_p/\rho_s = 0{,}7$; $\nu = 0{,}5$; $\beta = 0$) 121

5.27 Componente $K_{\theta\theta}$ de la matriz de rigidez dinámica de un pilote inclinado a $\delta = 30°$ con respecto a la vertical ($L/D = 15$; $E_p/E_s = 1000$; $\rho_p/\rho_s = 0{,}7$; $\nu = 0{,}5$; $\beta = 0$) 121

5.28 Pórtico enterrado: a) superficie de interacción; b) estructura 122

5.29 Pórtico enterrado sometido a cargas en el centro del tramo 125

5.30 Coeficiente F_{XX} de la matriz de flexibilidad del pórtico enterrado sometido a cargas en el centro de la viga 126

5.31 Coeficiente $F_{X\theta}$ de la matriz de flexibilidad del pórtico enterrado sometido a cargas en el centro de la viga 126

5.32 Coeficiente F_{ZZ} de la matriz de flexibilidad del pórtico enterrado sometido a cargas en el centro de la viga 127

5.33 Coeficiente $F_{\theta\theta}$ de la matriz de flexibilidad del pórtico enterrado sometido a cargas en el centro de la viga 127

5.34 Coeficiente K_{XX} de la matriz de rigidez del pórtico enterrado sometido a cargas en el centro de la viga 128

5.35 Coeficiente $K_{X\theta}$ de la matriz de rigidez del pórtico enterrado sometido a cargas en el centro de la viga 128

5.36 Coeficiente K_{ZZ} de la matriz de rigidez del pórtico enterrado sometido a cargas en el centro de la viga 129

5.37 Coeficiente $K_{\theta\theta}$ de la matriz de rigidez del pórtico enterrado sometido a cargas en el centro de la viga 129

5.38 Signo del término de acoplamiento, $F_{\theta X}$, para problemas de interacción suelo-estructura: a) disco rígido; b) pilote aislado; c) pórtico enterrado . . . 130

5.39 Influencia del número de elementos en el coeficiente K_{XX} de la matriz de rigidez del pórtico enterrado 131

5.40 Influencia del número de elementos en el coeficiente K_{ZZ} de la matriz de rigidez del pórtico enterrado 131

5.41 Influencia del número de elementos en el coeficiente $K_{\theta\theta}$ de la matriz de rigidez del pórtico enterrado 132

5.42 Influencia del número de puntos de Gauss en el coeficiente K_{XX} de la matriz de rigidez del pórtico enterrado 132

5.43 Influencia del número de puntos de Gauss en el coeficiente K_{ZZ} de la matriz de rigidez del pórtico enterrado 133

5.44 Influencia del número de puntos de Gauss en el coeficiente $K_{\theta\theta}$ de la matriz de rigidez del pórtico enterrado 133

5.45 Deformada del pórtico sometido a una carga lateral unitaria (magnificación de $2 \cdot 10^8$) en el centro de la viga 134

5.46 Deformada del pórtico sometido a una carga vertical unitaria (magnificación de $2 \cdot 10^8$) en el centro de la viga 134

5.47 Deformada del pórtico sometido a un momento unitario (magnificación de $3 \cdot 10^8$) en el centro de la viga 135

5.48 Pórtico enterrado sometido a cargas en la unión pilote-viga 136

5.49 Coeficiente F_{XX} de la matriz de flexibilidad del pórtico enterrado sometido a cargas en la unión pilote-viga 139

5.50 Coeficiente F_{XZ} de la matriz de flexibilidad del pórtico enterrado sometido a cargas en la unión pilote-viga 139

5.51 Coeficiente $F_{X\theta}$ de la matriz de flexibilidad del pórtico enterrado sometido a cargas en la unión pilote-viga 140

5.52 Coeficiente F_{ZZ} de la matriz de flexibilidad del pórtico enterrado sometido a cargas en la unión pilote-viga 140

5.53 Coeficiente $F_{Z\theta}$ de la matriz de flexibilidad del pórtico enterrado sometido a cargas en la unión pilote-viga 141

5.54 Coeficiente $F_{\theta\theta}$ de la matriz de flexibilidad del pórtico enterrado sometido a cargas en la unión pilote-viga 141

5.55 Coeficiente K_{XX} de la matriz de rigidez del pórtico enterrado sometido a cargas en la unión pilote-viga 142

5.56 Coeficiente K_{XZ} de la matriz de rigidez del pórtico enterrado sometido a cargas en la unión pilote-viga 142

5.57 Coeficiente $K_{X\theta}$ de la matriz de rigidez del pórtico enterrado sometido a cargas en la unión pilote-viga 143

5.58 Coeficiente K_{ZZ} de la matriz de rigidez del pórtico enterrado sometido a cargas en la unión pilote-viga 143

5.59 Coeficiente $K_{\theta\theta}$ de la matriz de rigidez del pórtico enterrado sometido a cargas en la unión pilote-viga 144

5.60 Coeficiente $K_{\theta\theta}$ de la matriz de rigidez del pórtico enterrado sometido a cargas en la unión pilote-viga 144

5.61 Deformada del pórtico sometido a una carga lateral unitaria (magnificación de $2 \cdot 10^8$) en la unión viga-pilote 145

5.62 Deformada del pórtico sometido a una carga vertical unitaria (magnificación de $2 \cdot 10^8$) en la unión viga-pilote 145

5.63 Deformada del pórtico sometido a una momento unitario (magnificación de $3 \cdot 10^8$) en la unión viga-pilote 146

5.64 Aproximación considerada para la estimación de la rigidez vertical, $K_Z = K_P + K_B$ 147

5.65 Rigidez vertical, K_Z, según el modelo aproximado y el riguroso 148

5.66 Factores de interacción dinámica entre pilotes (Gazetas y colaboradores); $E_p/E_s = 200$; $L/d = 20$; $\rho_s/\rho_p = 0{,}7$; $\nu = 0{,}4$ 150

5.67 Rigidez lateral, K_X, según el modelo aproximado y el riguroso 150

5.68 Rigidez lateral, K_X, según el modelo riguroso y el aproximado sin tener en cuenta la interacción dinámica entre pilotes 151

5.69 Problema antisimétrico: a) modelo completo; b) modelo con antisimetría estructural; c) modelo con antisimetría completa (continuo y estructura) . . 154

5.70 Coeficiente de flexibilidad F_{XX} según el modelo completo y considerando antisimetría estructural 154

5.71 Coeficiente de flexibilidad $F_{\theta\theta}$ según el modelo completo y considerando antisimetría estructural 155

5.72 Coeficiente de rigidez K_X según el modelo completo y considerando antisimetría estructural 155

5.73 Coeficiente de rigidez K_θ según el modelo completo y considerando antisimetría estructural 156

5.74 Definición del tensor de Green antisimétrico mediante imágenes espejo . . . 156

Índice de tablas

5.1 Coeficientes de rigidez estática de pilotes: (1) Mattes y Poulos; (2) Randolph; (3) formulación propuesta 102

5.2 Parámetros geomtricos y mecánicos del pórtico analizado 115

Capítulo 1

Introducción

1.1 Generalidades

El análisis dinámico de estructuras de barras enterradas ha suscitado gran interés en la ingeniería durante los últimos 30 años, lo cual se ve reflejado en la cantidad de publicaciones en el tema que han surgido durante ese lapso. Las estructuras consideradas en este trabajo consisten esencialmente en vigas, columnas y pórticos, en general, inmersos en medios elásticos continuos de extensión semi-infinita. La relevancia del estudio de la rigidez dinámica de este tipo de estructuras es probablemente más notable en los problemas de vibraciones de fundaciones profundas de máquinas, casos en los que es de vital importancia contar con un método adecuado y expeditivo para determinar las características de rigidez y disipación de la fundación. De más está decir que un incorrecto comportamiento de las fundaciones para maquinaria industrial puede traducirse en costos que largamente superan al de la estructura en sí, lo cual da la pauta de que es necesario contar con métodos que permitan realizar análisis adecuados y precisos para este tipo de estructuras.

La complejidad del problema subyace en el hecho de que las estructuras consideradas en este trabajo se encuentran inmersas en un medio semi-infinito, característica esencial de este tipo de problemas que dificulta la aplicación del Método de Elementos Finitos–comúnmente referido por su acrónimo en inglés, FEM (por ejemplo, [38], [3])–al menos en su formulación convencional. Es así que se ha recurrido a métodos de análisis alternativos a fines de analizar este tipo de estructuras; desde modelos simplificados del tipo viga sobre fundación elástica (por ejemplo; [22], [33]) hasta complejas soluciones analítico-numéricas del continuo (por ejemplo, [12], [32], [17]).

Dentro del espectro de métodos alternativos desarrollados para analizar el comportamiento dinámico de estructuras enterradas, aquellos que han demostrado ser eficientes y versátiles son los que derivan del marco general del Método de Elementos de Contorno–comúnmente referido por su acrónimo en inglés, BEM (por ejemplo, [5], [1])–, dado que éstos no requieren la discretización del continuo sino de las superficies en donde las condiciones de borde son no triviales; esto es, diferentes a las de la función fundamental utilizada. Dentro del marco general del BEM, existen dos tipos de formulaciones, a saber; las formulaciones directas del BEM (conocidas como DBEM) y las formulaciones indirectas (IBEM), donde la terminología ha sido tomada de [1]. La diferencia fundamental entre ambas formulaciones yace en las variables utilizadas; la formulación directa trata con desplazamientos y tensiones, mientras que la indirecta trata con desplazamientos y fuentes distribuidas. Una diferencia práctica de importancia entre estas formulaciones es que la integral de contorno de la formulación directa se extiende a todas las superficies donde las condiciones de borde difieren a las de la solución fundamental de una carga puntual en un espacio infinito, mientras que la correspondiente a la formulación indirecta se extiende a todas las superficies donde las condiciones de borde difieren a las de la solución fundamental utilizada, siendo esta última arbitraria. De esta manera, la formulación indirecta contempla la posibilidad de utilizar soluciones fundamentales para un semiespacio (es decir, un medio continuo semi-infinito), y así evitar la necesidad de discretizar la superficie

del mismo.

Inicialmente, el estudio de la rigidez dinámica de estructuras de barras enterradas se vio limitado a pilotes verticales y grupos de pilotes. El trabajo pionero de Mattes y Poulos ([19]) introdujo la aplicación del IBEM (aunque no formalmente) para establecer una relación numérica entre las fuerzas de interacción entre el suelo y el pilote y los desplazamientos del eje del mismo para el caso estático. Sen y colaboradores ([32]) introdujeron formalmente el uso del IBEM para establecer una relación numérica al igual que Mattes y Poulos; es decir entre fuerzas de interacción y desplazamientos en el eje, para el caso dinámico. Combinando las relaciones numéricas antes mencionadas con soluciones analíticas que gobiernan el comportamiento del pilote, estos autores lograron obtener las fuerzas de interacción entre el suelo y el pilote en correspondencia con condiciones de borde impuestas en el extremo superior del mismo. De esta manera, los autores determinan la rigidez dinámica del pilote mediante la integración de las fuerzas de interacción y de inercia en toda la longitud del pilote. Estos primeros trabajos están orientados exclusivamente a la obtención de la rigidez del pilote definida en función de los grados de libertad del extremo superior del mismo, y no pueden directamente ser aplicadas al estudio general de la rigidez de estructuras de barras enterradas. Cabe destacar, también, el trabajo de Mamoon ([17]), quien siguiendo el esquema general de cálculo propuesto por Sen y colaboradores, estudia el comportamiento de pilotes y grupos de pilotes verticales. Si bien Mamoon propone una aproximación para evaluar el efecto de la inclinación del pilote con respecto a la normal a la superficie del semiespacio, ésta consiste simplemente en realizar un cambio de coordenadas de las variables mecánicas, lo cual no tiene en cuenta la falta de perpendicularidad entre el eje del pilote y la superficie del semiespacio.

No fue sino hasta fines de la década del 90 que un método sistemático para el análisis dinámico de estructuras de barras enterradas fuera desarrollado. Coda y colaboradores ([7], [6]) introdujeron la idea de acoplar modelos obtenidos mediante el FEM para la estruc-

tura con los correspondientes modelos obtenidos mediante el DBEM para el semiespacio mediante una técnica de subregiones. Esta formulación–si bien de gran versatilidad para el estudio de los problemas aquí considerados–posee una característica inherente que dificulta su aplicación para el estudio de estructuras de barras inmersas en semiespacios. Esta característica se deriva del hecho de que la formulación propuesta por Coda y colaboradores es directa (DBEM), por lo cual existe la necesidad de modelar las condiciones borde en la superficie (por ejemplo, libre, pavimentada, etc.). Es entonces necesario realizar una discretización de la superficie del semiespacio hasta una cierta distancia, lo cual se traduce en un importante costo computacional y de modelación. Adicionalmente, se requiere un análisis de convergencia para cada caso en particular a fines de determinar la distancia hasta la cual la superficie debe ser modelada a fines de obtener resultados representativos del fenómeno, lo cual adquiere una predominante relevancia en problemas dinámicos que involucran propagación de ondas. Otros inconvenientes que plantea la formulación propuesta por Coda y colaboradores es que, dado que se basa en técnicas de colocación, resulta en matrices de rigidez no simétricas para el continuo y no puede considerar grados de libertad rotacionales, dado que estos últimos no son variables explícitas del mismo. Esta última limitación resulta en la imposibilidad de modelar el comportamiento torsional de un pilote aislado. A pesar de estas limitaciones, es la opinión del autor que el trabajo de Coda y colaboradores puede ser considerado como un punto de inflexión en la tendencia de los métodos de análisis dinámico de estructuras de barras enterradas, ya que muestra como es posible combinar un modelo convencional de estructuras de barras obtenido mediante el FEM con un modelo obtenido mediante el BEM para el continuo en una manera sistemática y computacionalmente atractiva.

1.2 Metodología y enfoque

El objetivo de este trabajo es presentar una nueva formulación alternativa del IBEM basada en el principio de trabajos virtuales (PTV) que permite la determinación de matrices de rigidez dinámica del continuo en el dominio de las frecuencias (esto es, para cargas armónicas) compatibles con las matrices de rigidez convencionales para el análisis de estructuras de barras obtenidas mediante el FEM. A diferencia de la formulación propuesta por Coda y colaboradores, la formulación presentada en este trabajo permite la evaluación de matrices de rigidez simétricas para el continuo, definidas en función de las variables mecánicas convencionales de la teoría de estructuras que intervienen en la definición de la matriz de rigidez de la estructura de barras (esto es, valores nodales de desplazamientos, rotaciones, fuerzas puntuales, y momentos). De esta manera, la matriz de rigidez correspondiente al continuo puede ser superpuesta con la correspondiente a la estructura mediante el método de rigidez. Se demuestra en este trabajo que la simetría de la matriz de rigidez está garantizada por propiedades de simetría de la formulación y por la reciprocidad de los sistemas elásticos.

Por otra parte, a diferencia de la formulación propuesta por Coda y colaboradores, la presente formulación no requiere la discretización de la superficie del semiespacio, lo que se traduce en un considerable ahorro tanto computacional como de modelación. Mediante la formulación presente, la interpolación de desplazamientos en el continuo puede o no ser realizada mediante las mismas funciones de interpolación utilizadas para los elementos estructurales. De esta manera, es posible realizar interpolaciones tanto compatibles como incompatibles.

A diferencia de los trabajos anteriormente mencionados, la formulación presentada en este trabajo tiene la generalidad suficiente como para permitir la definición de una gran variedad de elementos de contorno, con diferentes cantidades y tipos de nodos (por

ejemplo, dos nodos de desplazamientos y tres nodos de fuerzas distribuidas) a fines de permitir interpolaciones de orden superior tanto de las fuerzas de interacción como de los desplazamientos. A modo de ejemplo, se detalla la implementación de un elemento de dos nodos con tres variables de desplazamientos nodales (dos desplazamientos y una rotación) y dos variables de fuerzas distribuidas por nodo con superficies de interacción tanto circular (pilotes cilíndricos) como plana (por ejemplo, vigas de fundación). Este elemento permite modelar el comportamiento dinámico tridimensional de estructuras planas enterradas sometidas a cargas en el plano de la estructura. Los aspectos tridimensionales de la respuesta del pórtico plano sometido a cargas en su plano relativos al fenómno tridimensional de radiación, son tenidos en cuenta mediante la utilización de un tensor de Green correspondiente a un semiespacio.

A fines de validar los resultados obtenidos mediante la formulación presente, se estudia el comportamiento de pilotes verticales individuales y en grupo y se comparan los resultados con valores publicados en la literatura por distintos autores.

1.3 Organización de la Tesis

En el Capítulo 2 del presente trabajo se introduce el tensor de Green, herramienta esencial para el análisis numérico por medio del IBEM. En este capítulo, se discuten los tensores de Green disponibles en la literatura para medios continuos semi-infinitos. Este capítulo propone un tensor de Green aproximado que satisface el requisito de reciprocidad de los sistemas elásticos, para el análisis de estructuras enterradas en medios homogéneos con relación de Poisson, $\nu = 0{,}5$. Este tensor aproximado puede ser evaluado en forma cerrada con muy bajo costo numérico.

En el Capítulo 3 se presenta una formulación simétrica del IBEM basada en el prin-

cipio de trabajos virtuales. La formulación parte de la ecuación general del IBEM y de interpolaciones del tipo de elementos finitos para las variables incógnitas (desplazamientos y fuerzas de interacción). Mediante el principio de trabajos virtuales, se encuentra una relación entre cargas nodales consistentes y desplazamientos nodales generalizados a través de una matriz de rigidez para el dominio del continuo. Esta matriz puede ser definida en las mismas variables que las comúnmente utilizadas para la modelación de estructuras de barras. De esta manera, se obtiene la matriz de rigidez del sistema continuo-estructura mediante la superposición de las matrices de rigidez correspondientes a cada dominio. La matriz de rigidez resulta simétrica, propiedad que resulta de la consistencia de la formulación y de la propiedad de reciprocidad de los sistemas elásticos.

En el Capítulo 4 se desarrolla la implementación numérica de la formulación propuesta para un elemento de dos nodos, el cual permite la modelación del comportamiento de estructuras planas sometidas a cargas en el plano. Si bien el elemento es plano, la naturaleza tridimensional del continuo es tenida en cuenta por el tensor de Green utilizado, ya que éste corresponde a soluciones analíticas para los desplazamientos debidos a cargas puntuales en un semiespacio. Se encuentra que la evaluación de los elementos de la matriz de rigidez requiere una integración de cuatro dimensiones. Sin embargo, se muestra que es posible introducir una aproximación a fines de reducir la integración requerida a tres dimensiones. Esto resulta en una muy ligera pérdida de simetría, la cual a los fines prácticos no es significativa y puede ser ignorada. Se especifican las ecuaciones para superficies de interacción cilíndricas y rectangulares planas.

El Capítulo 5 discute los resultados obtenidos mediante el elemento desarrollado para distintos ejemplos de aplicación práctica. Por una parte, se realiza la validación de los resultados cotejando las predicciones de la formulación propuesta con resultados publicados en la literatura para el caso de pilotes individuales y grupos de pilotes sometidos tanto a cargas estáticas como dinámicas. Por otra parte, se estudia la rigidez dinámica de

pilotes inclinados y se pone a prueba la validez de aproximaciones frecuentemente usadas en la ingeniería geotécnica práctica para evaluar la rigidez de pilotes inclinados a partir de resultados correspondientes a pilotes verticales. Se estudia, también, la rigidez dinámica de un pórtico enterrado, sometido a cargas verticales, laterales y momentos. Este capítulo muestra cómo simplificar modelos cuya respuesta es simétrica o antisimétrica considerando estas propiedades tanto para la respuesta de la estructura como para la del continuo.

En el Capítulo 6 se resumen las conclusiones obtenidas de este trabajo con respecto a la formulación y a la modelación de problemas de estructuras de barras enterradas. Se discuten también posibles futuras líneas de investigación que pueden desprenderse de este trabajo.

Capítulo 2

Funciones de Green

2.1 Generalidades

Las funciones de Green pueden ser definidas como la respuesta de un sistema en un punto dado a un estímulo unitario aplicado en el mismo u otro punto, el cual es generalmente representado mediante una función δ de Dirac. En el contexto de este trabajo, el sistema en cuestión es el semiespacio elástico, la respuesta es un desplazamiento y el estímulo es una carga armónica unitaria. De esta manera, las funciones de Green consideradas en este trabajo son desplazamientos debidos a cargas unitarias y las variables que intervienen en su definición son, el vector posición de la carga, $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X & Y & Z \end{bmatrix}^T$, el vector posición del punto de campo (donde los desplazamientos son evaluados), $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T$, y la frecuencia circular de la carga, ω.

2.1.1 Respuesta en frecuencia

Dado que el objetivo de este trabajo es el estudio de la rigidez dinámica de estructuras enterradas, es conveniente trabajar en el dominio de las frecuencias. Para ello, se asume que todas las variables mecánicas involucradas que evolucionan en el tiempo (léase, desplazamientos, velocidades, aceleraciones, fuerzas, etc.) se encuentran en régimen. Por lo tanto, la variación temporal de una variable genérica, $\mathcal{F}(t)$, está dada por:

$$\mathcal{F}(t) = F(\omega_0) \cdot e^{i \cdot \omega_0 \cdot t} \tag{2.1}$$

donde $i = \sqrt[2]{-1}$ es la constante imaginaria, ω_0 la frecuencia circular de la evolución armónica, y $F(\omega_0)$ la amplitud espectral de la variable en el dominio de las frecuencias. En este trabajo las variables utilizadas son las amplitudes espectrales, $F(\omega)$, en las cuales por razones de simplicidad, se omitirá el símbolo de la frecuencia circular, ω.

2.1.2 Tensor de Green

En un espacio tridimensional, los vectores de desplazamientos y de cargas pueden descomponerse en tres direcciones ortogonales, de manera tal que existen nueve funciones de Green, ya que hay tres componentes de desplazamientos para cada una de las componentes de la carga unitaria. Las funciones de Green generalmente se definen en forma de un tensor de campo, comúnmente llamado tensor de Green, $\mathbf{G}$, de la siguiente manera:

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{X}) = \begin{bmatrix} G_{xx}(\mathbf{x}, \mathbf{X}) & G_{xy}(\mathbf{x}, \mathbf{X}) & G_{xz}(\mathbf{x}, \mathbf{X}) \\ G_{yx}(\mathbf{x}, \mathbf{X}) & G_{yy}(\mathbf{x}, \mathbf{X}) & G_{yz}(\mathbf{x}, \mathbf{X}) \\ G_{zx}(\mathbf{x}, \mathbf{X}) & G_{zy}(\mathbf{x}, \mathbf{X}) & G_{zz}(\mathbf{x}, \mathbf{X}) \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

donde las componentes $\mathbf{G}_{mn}(\mathbf{x}, \mathbf{X})$ del tensor son las funciones de Green correspondientes al desplazamiento en el punto de campo determinado por el vector posición $\mathbf{x}$ y según la dirección m debido a una carga unitaria en el punto determinado por el vector posición

$\mathbf{X}$ y actuando según la dirección n. La Figura 2.1 muestra esquemáticamente el sistema de coordenadas empleado para la descripción del continuo y ejemplifica la definición de la componente $G_{yx}(\mathbf{x}, \mathbf{X})$. Las importancia de las funciones de Green es que mediante ellas

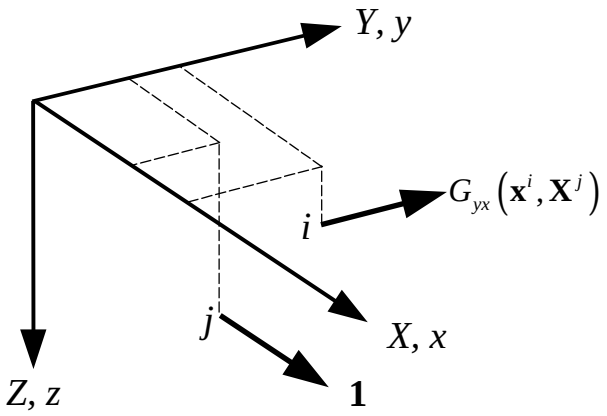

Figura 2.1: Sistema de coordenadas para la definición de las funciones de Green

es posible construir la solución a problemas de valores de contorno en sistemas lineales, y es a partir de ellas que se formula el método general de elementos de contorno.

2.1.3 Reciprocidad del tensor de Green para sistemas elásticos

Una propiedad fundamental del tensor de Green para sistemas elásticos es la reciprocidad. Esta propiedad establece que el desplazamiento en el punto $\mathbf{x}$ según la dirección m debido a una carga unitaria aplicada en el punto $\mathbf{X}$ según la dirección n es igual al desplazamiento en el punto $\mathbf{X}$ según la dirección n debido a una carga unitaria aplicada en el punto $\mathbf{x}$ según la dirección m. Esto es una consecuencia del teorema de Betti-Rayleigh (por ejemplo, [13]) para el comportamiento dinámico de sistemas linealmente elásticos. De esta manera, la reciprocidad puede expresarse matemáticamente de la siguiente forma:

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{X}) = \mathbf{G}^T(\mathbf{X}, \mathbf{x}) \tag{2.3}$$

2.2 Problemas estáticos

Uno de los resultados fundamentales de la teoría de la elasticidad es la solución del problema de una carga puntual actuando en un espacio elástico de extensión infinita. Esta solución es conocida como la solución de Kelvin, y puede encontrarse en cualquier libro sobre elasticidad (por ejemplo, [26]). Sobre la base de esta solución, es posible determinar otras soluciones fundamentales de la teoría de la elasticidad, conocidas en la literatura como "núcleos de deformación" ([15]), siendo la solución de Kelvin uno de éstos. La utilidad de los núcleos de deformación es que éstos permiten construir soluciones a otros problemas usando técnicas de superposición. Mindlin ([21]) obtiene la solución al problema de una carga actuando en el interior de un semiespacio mediante una combinación lineal de potenciales en correspondencia con seis núcleos de deformación. Los coeficientes de la combinación lineal son obtenidos mediante la imposición de las condiciones de superficie libre y equilibrio global. Otros autores han extendido estas técnicas de superposición mediante el uso de potenciales para el caso de semiespacios estratificados ([8]).

2.3 Problemas dinámicos

Es habitual atribuir a Stokes la extensión de la solución de Kelvin para el caso dinámico, considerando la acción transitoria de una carga concentrada en el espacio y que comienza a actuar en $t = 0$. Esta solución es frecuentemente citada en la literatura como "solución dinámica de Kelvin". La solución de Stokes puede ser especificada para una carga armónica, haciendo uso de la transformada de Fourier. Es decir, se especifica la solución de Stokes para una carga impulsiva, $\delta(t)$, la cual tiene componentes unitarias en todas las frecuencias y se evalúa la transformada de Fourier de los desplazamientos resultantes. La

solución puede escribirse entonces como ([16]):

$$G_{mn} = \frac{1}{4\pi\mu}\left\{\delta_{mn}A_1 - B_1\frac{\partial r}{\partial x_m}\frac{\partial r}{\partial x_n}\right\} \tag{2.4a}$$

$$A_1 = \left(1 - \frac{i}{k_s\, r} - \frac{1}{k_s^2\, r^2}\right)\frac{e^{-i\,k_s\, r}}{r} + \frac{k_p^2}{k_s^2}\left(\frac{i}{k_p\, r} + \frac{1}{k_p^2\, r^2}\right)\frac{e^{-i\,k_p\, r}}{r} \tag{2.4b}$$

$$B_1 = \left(1 - \frac{3i}{k_s\, r} - \frac{3}{k_s^2\, r^2}\right)\frac{e^{-i\,k_s\, r}}{r} + \frac{k_p^2}{k_s^2}\left(\frac{3i}{k_p\, r} + \frac{3}{k_p^2\, r^2} - 1\right)\frac{e^{-i\,k_p\, r}}{r} \tag{2.4c}$$

donde μ es el módulo de corte, δ_{mn} es el operador delta de Krönecker, $r = |\mathbf{x} - \mathbf{X}|$ es la distancia radial entre el punto de aplicación de la carga y el punto donde se evalúan los desplazamientos, mientas que k_s y k_p son los números de ondas de corte (S) y volumétricas (P), respectivamente, definidos como:

$$k_s = \frac{\omega}{V_s} \tag{2.5a}$$

$$k_p = \frac{\omega}{V_p} \tag{2.5b}$$

donde V_s y V_p son las velocidades de propagación de las ondas S y P, respectivamente. Es importante remarcar que los términos de propagación, e^{-ikr}, cumplen las condiciones de radiación siempre y cuando la convención del signo del exponente $i\,\omega_0\, t$ establecida en (2.1) sea respetada. A fines de modelar la disipación material del medio continuo, se puede hacer uso del principio de correspondencia ([4]). Este principio establece que es posible modelar el comportamiento viscoelástico de materiales en el dominio de las frecuencias introduciendo valores complejos dependientes de la frecuencia para las constantes elásticas del continuo, esto es, módulo de corte, $\mu^*(\omega)$, y módulo volumétrico, $K^*(\omega)$, en las ecuaciones resultantes para materiales elásticos. Las constantes complejas se relacionan con las reales de la siguiente manera:

$$\mu^*(\omega) = \mu\ [1 + 2i\beta_s(\omega)\ sgn(\omega)] \tag{2.6a}$$

$$K^*(\omega) = K\ [1 + 2i\beta_p(\omega)\ sgn(\omega)] \tag{2.6b}$$

donde μ y K son las constantes elásticas reales, $\beta_s(\omega)$ y $\beta_p(\omega)$ (≥ 0) son las relaciones de amortiguamiento para las ondas de corte y volumétricas, respectivamente, las cuales

a su vez pueden ser funciones de la frecuencia. Para los problemas considerados en este trabajo, es práctica habitual considerar que la disipación en el medio continuo se produce mediante un mecanismo de amortiguamiento que puede ser modelado como histerético, por lo que las relaciones de amortiguamiento usadas en este trabajo no son funciones de la frecuencia. Es importante remarcar que la convención de signos establecida en (2.6a) y (2.6b) está íntimamente relacionada a la establecida para el exponente $i\,\omega\,t$ en (2.1), ya que solamente de esta manera la solución (2.4a) decae para $r \to \infty$.

2.3.1 Semiespacio homogéneo con superficie libre

Este problema fue estudiado por primera vez por Lamb en 1904 ([14]), quien obtuvo la solución al problema de una carga armónica aplicada en la superficie de un semiespacio elástico–frecuentemente llamado "problema dinámico de Bousinessq". Basado en la reciprocidad dinámica de los sistemas elásticos, Lamb determinó los desplazamientos superficiales producidos por una carga aplicada en el interior del semiespacio (por ejemplo, [30]). La solución de Lamb, sin embargo, no permite evaluar los desplazamientos en el interior del semiespacio debidos a cargas interiores.

Desde el trabajo pionero de Lamb, un gran número de investigadores han encontrado soluciones analítico-numéricas al problema de una carga armónica en el interior de un semiespacio. Cabe destacar, entre otros, el trabajo de Kobayashi y Nishimura (por ejemplo, [32]), quienes obtienen la solución en forma de un tensor de Green del espacio completo (esto es, la solución de Stokes) más un término que requiere evaluar numéricamente una integral impropia. Estos autores proponen expresiones asintóticas a fines de evaluar las integrales impropias como la diferencia entre la correspondiente a la expresión asintótica (la cual puede ser evaluada analíticamente) y una función residual que tiene un fuerte decaimiento, ya que la expresión asintótica tiende a la expresión exacta rápidamente.

Más recientemente, Mamoon ([16], [2]), basándose en los conceptos de Mindlin, propone una extensión del método de superposición antes mencionado para el caso dinámico. De esa manera, obtiene las contrapartes dinámicas de los núcleos de deformación utilizados por Mindlin para el caso estático, mediante diferenciación de la solución fundamental de Stokes. A fines de obtener una solución para el semiespacio, Mamoon utiliza los mismos coeficientes utilizados por Mindlin para realizar la superposición de los núcleos de deformación. La solución así obtenida tiene la característica de que tiende a la solución de Mindlin para frecuencias bajas. Sin embargo, el autor ha verificado que esta solución no es rigurosa, dado que los coeficientes de superposición propuestos por Mindlin son estrictamente válidos para el caso estático, y no garantizan el cumplimiento de las condiciones de borde en la superficie del semiespacio para frecuencias distintas de cero. A modo de ilustración, para el caso de un semiespacio con módulo de Poisson, $\nu = 0{,}50$, la expansión en series en términos de la frecuencia adimensional, $a_0 = \omega r/V_s$, de las tensiones de corte en el plano de la superficie del semiespacio de la componente G_{zz} propuesta por Mamoon resulta:

$$\tau_{rz}|_{z=0} = \frac{1}{\pi r}\left[-\frac{1}{8}\frac{r^2+2Z^2}{(r^2+Z^2)^{\frac{3}{2}}}\ a_0^2 + \frac{i}{10r}\ a_0^3 + O(a_0^4)\right] \tag{2.7}$$

donde $r = \sqrt[2]{(x-X)^2+(y-Y)^2}$ es la distancia radial sobre un plano horizontal entre el punto de aplicación la carga y el punto en donde se evalúan los desplazamientos y Z es la coordenada vertical del punto de aplicación de la carga. La ecuación 2.7 muestra que la condición de borde $\tau_{rz}|_{z=0} = 0$ no se cumple para frecuencias $a_0 \neq 0$. Es decir que, aunque no explícitamente indicado en el trabajo de Mamoon, esta solución es estrictamente una aproximación para bajas frecuencias.

Cabe notar que el tensor de Green propuesto por Mamoon está dado por expresiones analíticas cerradas y términos que requieren integración numérica de funciones altamente oscilatorias. Sin embargo, para el caso en que el continuo tiene una relación de Poisson, $\nu = 0{,}5$, la solución está dada enteramente por expresiones analíticas; es decir, los términos

que requieren integración numérica se anulan para $\nu = 0{,}5$.

2.3.2 Semiespacio estratificado con superficie libre

Kausel ([11]) propone una solución analítico-numérica en forma explícita para el tensor de Green en medios elásticos estratificados de profundidad finita. Aún cuando esta solución es estrictamente aplicable a semiespacios de profundidad finita, puede ser extendida para analizar semiespacios de profundidad infinita mediante la técnica de "profundidad variable" ([34]). La solución de Kausel es analítica en planos paralelos a la superficie del semiespacio (dirección horizontal) y numérica en la dirección perpendicular a la misma (dirección vertical). Del hecho que la solución sea una aproximación numérica en la dirección vertical, surge que esta solución no corresponde estrictamente a la de una carga puntual, sino más bien a la de una carga consistente que representa los efectos de una carga distribuida en la dirección que se aproxima en forma numérica. Esta diferencia no tiene importancia si los desplazamientos son evaluados en puntos cuya distancia al de aplicación de la carga es mucho mayor a la distancia sobre la cual se encuentra distribuida (esto es, la discretización vertical), lo cual puede entenderse como una consecuencia del principio de Saint Venant. Sin embargo, en aplicaciones del BEM, es necesario contar con una función de Green que represente la singularidad existente cuando el punto de evaluación de los desplazamientos tiende al punto de aplicación de la carga. La función de Green propuesta por Kausel para una carga vertical actuando en la posición vertical del nodo n y el desplazamiento vertical en la posición vertical del nodo m, G_{zz}^{mn}, puede escribirse como:

$$G_{zz}^{mn} = \frac{1}{4i}\sum_{l=1}^{2N} \phi_z^{ml}\phi_z^{nl} H_0^{(2)}\left(k_l^R \rho\right) \tag{2.8}$$

donde ϕ_z^{ml} es la componente vertical del nodo m del modo l, $H_0^{(2)}$ es la función de Hankel de segunda clase y de orden cero, k_l^R es el número de onda de Rayleigh del modo l, y ρ es la distancia radial horizontal entre el punto de aplicación de la carga y el de

evaluación del desplazamiento. Dado que la variación en la dirección horizontal de la solución de Kausel está dada por una función de Hankel de segunda clase y de orden cero, la singularidad para $\rho \to 0$ es del tipo logarítmica (por ejemplo, [20]), la cual es consistente con el tipo de singularidad existente en las proximidades de una carga distribuida sobre una línea. Por otra parte, es importante destacar que la singularidad se produce para $\rho \to 0$, indistintamente de la posición vertical relativa entre los puntos de aplicación de la carga y del desplazamiento, lo que implica que estas funciones de Green poseen singularidades no existentes en el problema real. De esta manera, la solución de Kausel encuentra una aplicación limitada en el BEM.

Más recientemente, Pak y Guzina ([23]) proponen una solución para el tensor de Green en medios elásticos estratificados mediante el uso de funciones potenciales de desplazamientos. El método de solución seguido por estos autores es similar al de Kausel, con la diferencia de que Pak y Guzina resuelven el problema sin recurrir a interpolaciones numéricas en la dirección vertical. La solución se obtiene por integración analítica de expresiones asintóticas e integración numérica mediante cuadratura de Gauss de funciones residuales cuyo decaimiento es fuerte. Esta solución es estrictamente válida para cargas puntuales, y es capaz de captar la singularidad existente en la cercanía de la aplicación de la carga.

2.3.3 Semiespacio pavimentado y confinado

A partir del tensor de Green para un espacio infinito (esto es, la solución de Stokes, (2.4a)) es posible construir el correspondiente a problemas cuyas condiciones de borde en la superficie son tales que la solución tiene características de simetría o antisimetría con respecto a este plano. El problema conocido como del semiespacio pavimentado es uno de estos casos, ya que el mismo se define como un semiespacio cuyas condiciones de borde en

la superficie son las siguientes ([31]):

$$u_x|_{z=0} = u_y|_{z=0} = 0 \tag{2.9a}$$

$$\sigma_z|_{z=0} = 0 \tag{2.9b}$$

Para los desplazamientos debidos a una carga vertical aplicada en el punto $\mathbf{X}$, estas condiciones de borde pueden ser automáticamente satisfechas si se consideran los efectos de una carga en un espacio infinito aplicada en $\mathbf{X}$ y una carga del mismo signo aplicada en $\mathbf{X}+\mathbf{W}$, donde $\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2Z \end{bmatrix}^T$. Esta carga aplicada en $\mathbf{X}+\mathbf{W}$ es comúnmente llamada "imagen especular". Para los desplazamientos debido a una carga horizontal aplicada en $\mathbf{X}$, estas condiciones de borde son automáticamente satisfechas si se consideran los efectos de una carga en un espacio infinito aplicada en $\mathbf{X}$ y una imagen especular de signo contrario (Figura 2.2a). De esta manera, el tensor de Green para un semiespacio pavimentado, $\mathbf{G}^P$, puede determinarse en función del tensor de Green del espacio infinito de la siguiente manera:

$$G^P_{mz}(\mathbf{x}, \mathbf{X}) = G_{mz}(\mathbf{x}, \mathbf{X}) + G_{mz}(\mathbf{x}, \mathbf{X} + \mathbf{W}) \tag{2.10a}$$

$$G^P_{mx}(\mathbf{x}, \mathbf{X}) = G_{mx}(\mathbf{x}, \mathbf{X}) - G_{mx}(\mathbf{x}, \mathbf{X} + \mathbf{W}) \tag{2.10b}$$

$$G^P_{my}(\mathbf{x}, \mathbf{X}) = G_{my}(\mathbf{x}, \mathbf{X}) - G_{my}(\mathbf{x}, \mathbf{X} + \mathbf{W}) \tag{2.10c}$$

Otro problema cuyas condiciones de borde son tales que permiten la obtención de la solución por medio de la superposición directa de soluciones de Stokes es el indicado en la Figura 2.2b. Este problema será definido en este trabajo como "semiespacio confinado". Las condiciones de borde para el semiespacio confinado son:

$$u_z|_{z=0} = 0 \tag{2.11a}$$

$$\tau_{xz}|_{z=0} = \tau_{yz}|_{z=0} = 0 \tag{2.11b}$$

Similarmente al caso del semiespacio pavimentado, estas condiciones de borde son satisfechas automáticamente si a la carga vertical se le superpone una imagen especular positiva

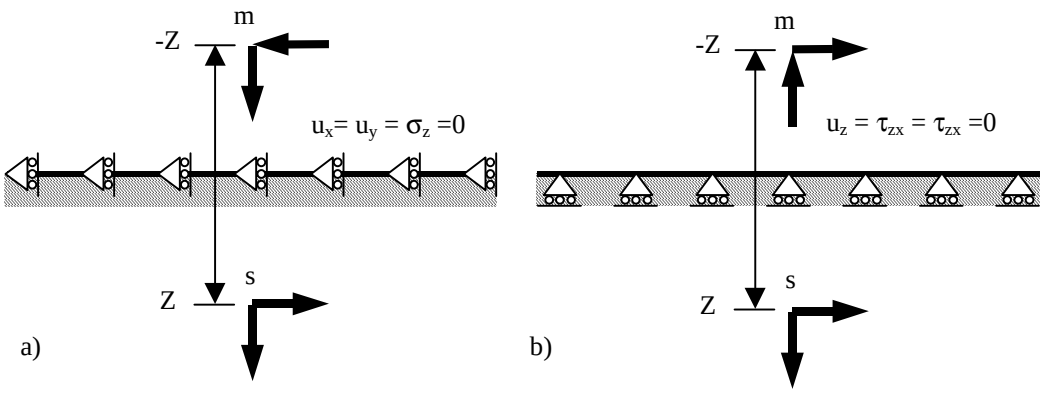

Figura 2.2: a) Semiespacio pavimentado; b) Semiespacio confinado

y a la carga horizontal una imagen especular negativa (Figura 2.2b). El tensor de Green para un semiespacio confinado, $\mathbf{G}^C$, puede escribirse como:

$$G^C_{mz}(\mathbf{x}, \mathbf{X}) = G_{mz}(\mathbf{x}, \mathbf{X}) - G_{mz}(\mathbf{x}, \mathbf{X} + \mathbf{W}) \tag{2.12a}$$

$$G^C_{mx}(\mathbf{x}, \mathbf{X}) = G_{mx}(\mathbf{x}, \mathbf{X}) + G_{mx}(\mathbf{x}, \mathbf{X} + \mathbf{W}) \tag{2.12b}$$

$$G^C_{my}(\mathbf{x}, \mathbf{X}) = G_{my}(\mathbf{x}, \mathbf{X}) + G_{my}(\mathbf{x}, \mathbf{X} + \mathbf{W}) \tag{2.12c}$$

2.3.4 Tensor de Green aproximado para un semiespacio homogéneo con superficie libre

La implementación numérica del IBEM requiere de la evaluación del tensor de Green en un gran número de puntos en la superficie de interacción entre el continuo y la estructura. Esto se traduce en la necesidad de contar con expresiones para el tensor de Green cuya evaluación tenga un costo numérico mínimo compatible con la aproximación necesaria del análisis a realizar. Para los problemas dinámicos en semiespacios homogéneos con superficie libre, no hay disponible un tensor de Green exacto cuya evaluación pueda realizarse en

forma cerrada. Sin embargo, es posible obtener un tensor de Green aproximado, $\mathbf{G}^A$, combinando adecuadamente ciertas componentes de los tensores del semiespacio pavimentado, $\mathbf{G}^P$, y confinado, $\mathbf{G}^C$, de la siguiente manera:

$$\mathbf{G}^A = \begin{bmatrix} G^C_{xx}(\mathbf{x},\mathbf{X}) & G^P_{xy}(\mathbf{x},\mathbf{X}) & G^P_{xz}(\mathbf{x},\mathbf{X}) \\ G^P_{yx}(\mathbf{x},\mathbf{X}) & G^C_{yy}(\mathbf{x},\mathbf{X}) & G^P_{yz}(\mathbf{x},\mathbf{X}) \\ G^P_{xz}(\mathbf{x},\mathbf{X}) & G^P_{zy}(\mathbf{x},\mathbf{X}) & G^P_{zz}(\mathbf{x},\mathbf{X}) \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

Esta definición para el tensor de Green aproximado es tal que verifica la propiedad de reciprocidad de los sistemas elásticos, (2.3). Los valores del tensor de Green aproximado son muy cercanos a los correspondientes a su contraparte exacta para el caso en que el continuo tiene una relación de Poisson, $\nu = 0{,}5$. Las Figuras 2.3 a 2.14 muestran las componentes del tensor de Green de Kausel, Mamoon, y el aproximado para una relación de Poisson, $\nu = 0{,}5$[1]. Puede verse que el tensor propuesto por Mamoon coincide con el de Kausel (exacto) para frecuencias bajas ($a_0 < 0{,}2$), mientras que la versión aproximada, G^A, arroja valores ligeramente inferiores. Sin embargo, cabe notar que en el rango de frecuencias considerado, G^A resulta ser una mejor aproximación al tensor exacto que el propuesto por Mamoon. Puede concluirse entonces que, a fines de evaluar el tensor de Green de un semiespacio homogéneo con $\nu = 0{,}5$, puede utilizarse el tensor de Green aproximado, con una pequeña pérdida de exactitud, la cual es altamente compensada por el ahorro computacional resultante. Esto es así ya que las funciones de Green involucradas en el tensor de Green aproximado son expresiones analíticas cuya evaluación puede realizarse en forma cerrada.

Desde un punto de vista práctico esta solución es de interés, ya que en muchas aplicaciones de la ingeniería el medio continuo es un suelo saturado. El comportamiento

[1]La solución de Kausel no permite la evaluación del tensor de Green para el caso en que $\nu = 0{,}5$, ya que para ese valor algunos coeficientes de las matrices utilizadas para la solución del problema de autovalores resultan infinitos. De esta manera, para la evaluación de los ejemplos considerados mediante la solución de Kausel, se utiliza una relación de Poisson, $\nu = 0{,}45$.

dinámico de los suelos saturados es no-drenado, ya que la variación temporal de la carga tiene usualmente una escala temporal varios órdenes inferior a la escala temporal del problema de difusión de presiones de poros (o consolidación) en el suelo. Dado que el fluido saturante posee un módulo elástico volumétrico, K_w, mucho mayor al correspondiente al esqueleto material del suelo, mientras que el módulo de corte del fluido, $\mu_w = 0$, el comportamiento del suelo a bajas deformaciones puede modelarse con un material elástico cuyo módulo de corte es igual al del suelo y una relación de Poisson, $\nu = 0{,}5$. Por otra parte, es frecuente encontrar perfiles de suelos en donde los estratos superficiales tienen una relación de sobreconsolidación, OCR, muy grande, mientras que este valor se va reduciendo con la profundidad. Estos casos se dan en suelos cuyo mecanismo de preconsolidación es predominantemente mecánico o por disecación. Para estos casos, el módulo de corte generalmente se mantiene relativamente constante en zonas cercanas a la superficie.

2.4 Singularidad del tensor de Green

Como se menciona en párrafos anteriores, el problema de una carga puntual actuando en un medio elástico es un problema singular en el sentido de que las tensiones y los desplazamientos son indefinidos (o infinitos) en el punto de aplicación de la carga. Esto es de particular importancia, ya que los métodos de elementos de contorno generalmente requieren evaluar numéricamente integrales en la zona de aplicación de una carga. Para el caso estático, en la cercanía de la aplicación de la carga, la solución de Mindlin (carga en un semiespacio) tiende a la solución de Kelvin para el espacio infinito. Cabe destacar que dado que el problema de Kelvin carece de escalas, el término proximidad no tiene sentido en el mismo.

Para el caso dinámico es interesante destacar que las soluciones pueden ser expresadas en función de la frecuencia adimensional, $a_0 = \omega r / V_s$, por lo que el comportamiento de las

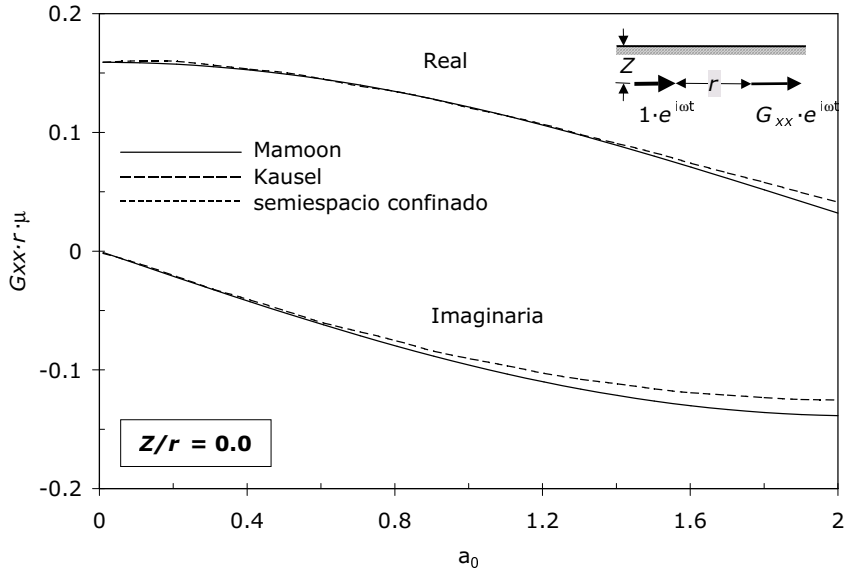

Figura 2.3: Componente Gxx del tensor de Green, Z/r=0

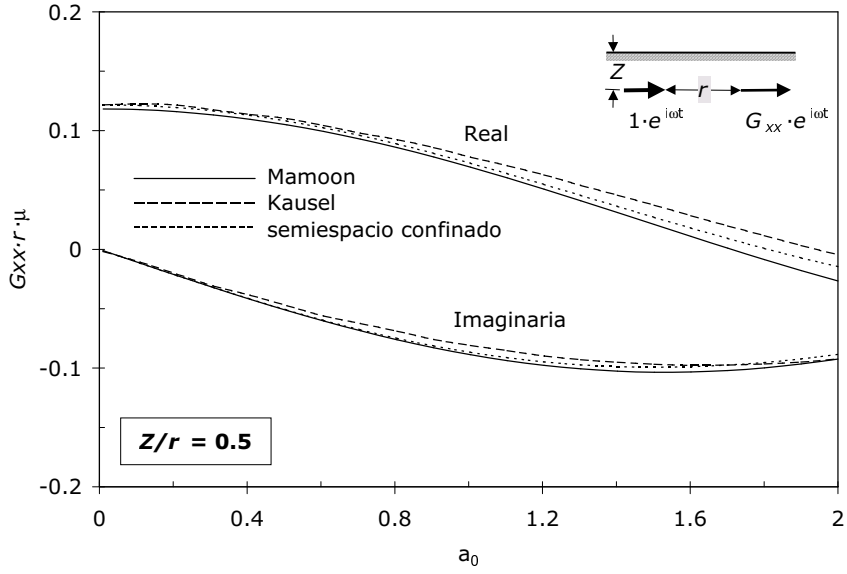

Figura 2.4: Componente Gxx del tensor de Green, Z/r=0.5

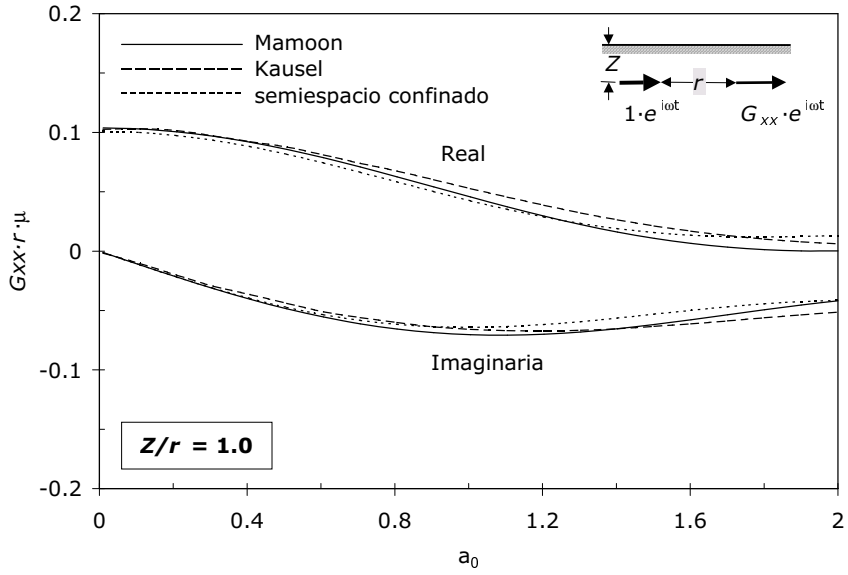

Figura 2.5: Componente Gxx del tensor de Green, Z/r=1

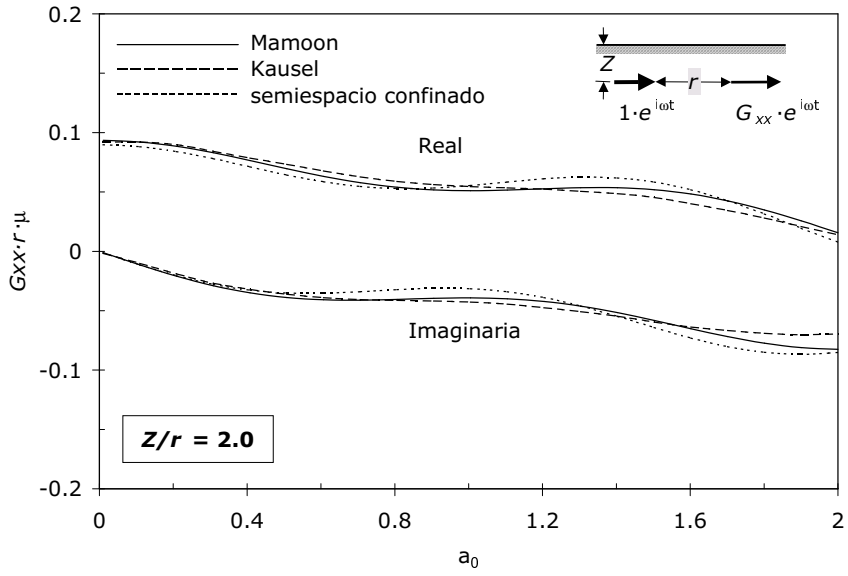

Figura 2.6: Componente Gxx del tensor de Green, Z/r=2

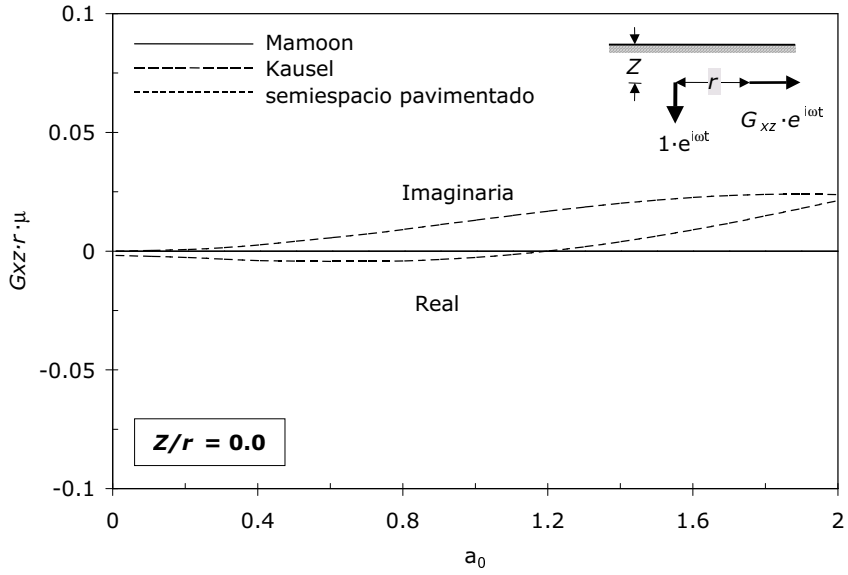

Figura 2.7: Componente Gxz del tensor de Green, Z/r=0

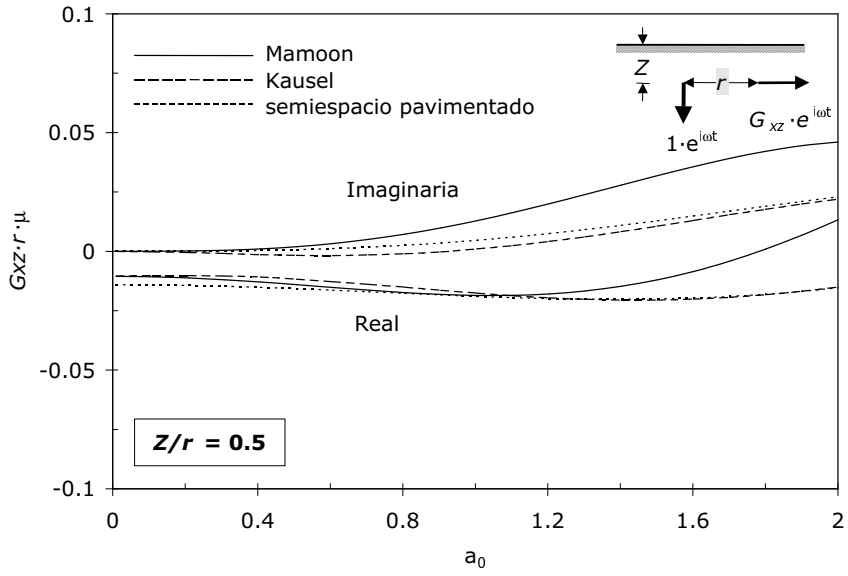

Figura 2.8: Componente Gxz del tensor de Green, Z/r=0.5

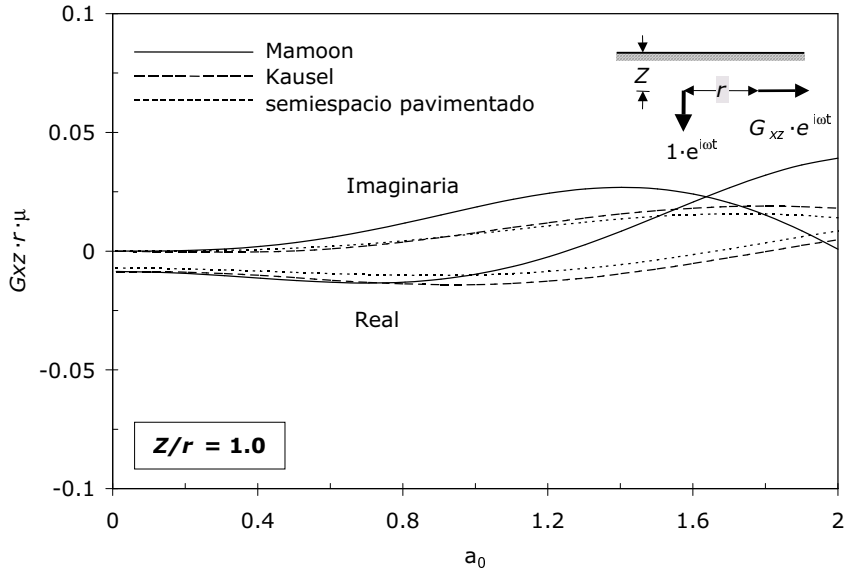

Figura 2.9: Componente Gxz del tensor de Green, Z/r=1

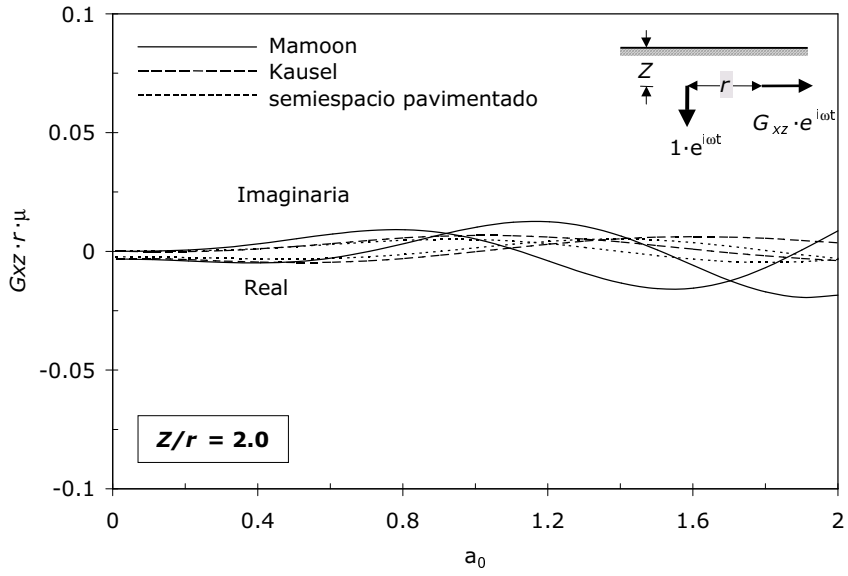

Figura 2.10: Componente Gxz del tensor de Green, Z/r=2

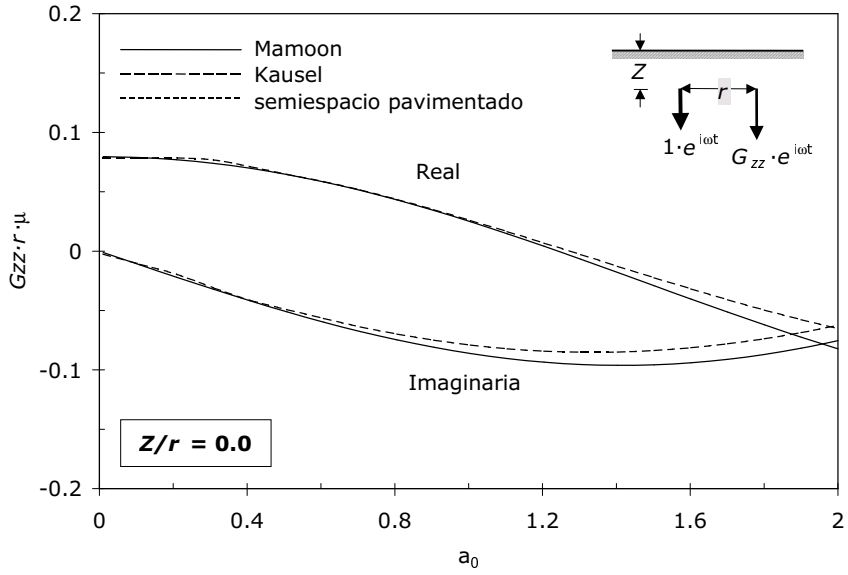

Figura 2.11: Componente Gzz del tensor de Green, Z/r=0

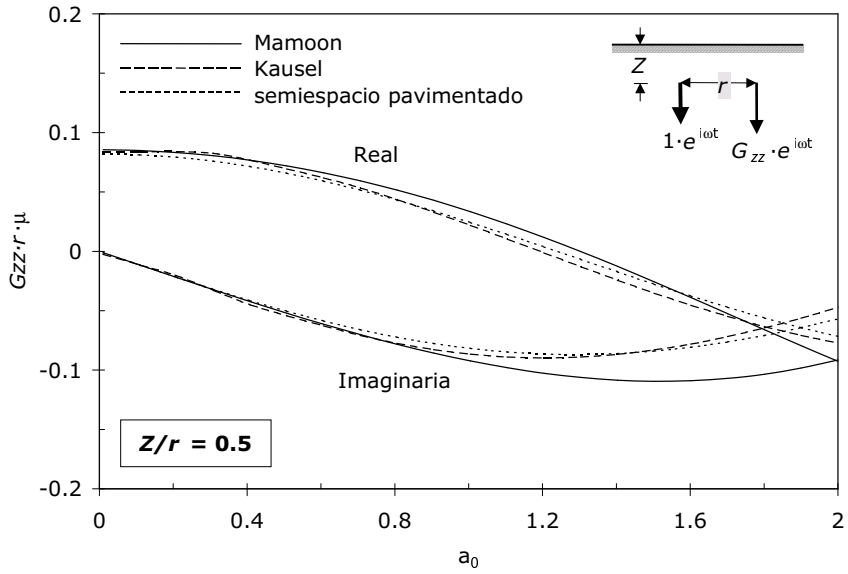

Figura 2.12: Componente Gzz del tensor de Green, Z/r=0.5

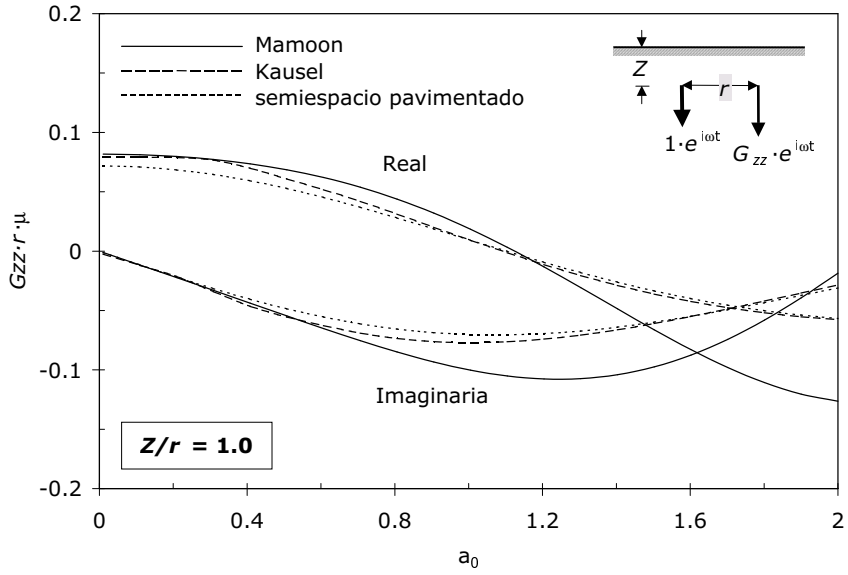

Figura 2.13: Componente Gzz del tensor de Green, Z/r=1

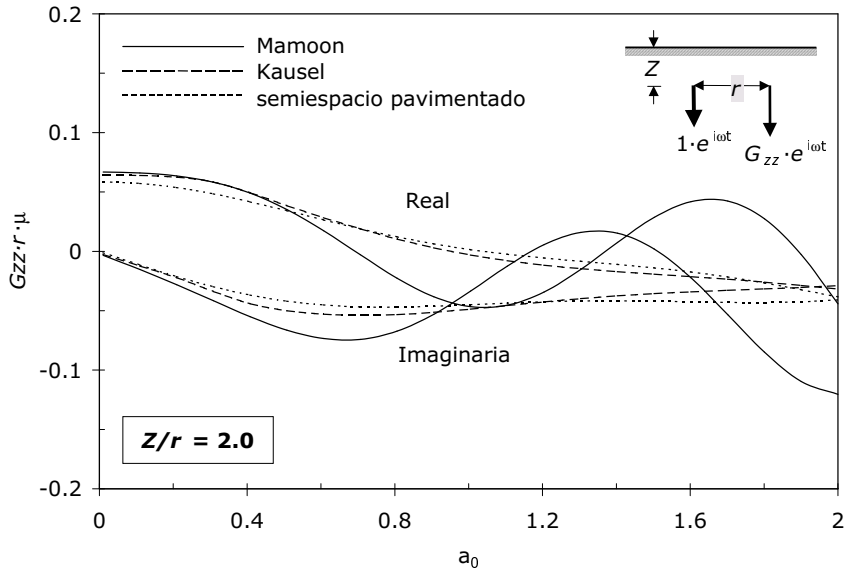

Figura 2.14: Componente Gzz del tensor de Green, Z/r=2

soluciones dinámicas en la proximidad de la aplicación de la carga tiende al de la solución estática. Esto es así ya que cualquiera de las dos situaciones–léase $a_0 \to 0$ ó $r \to 0$–causa el mismo efecto en la expresión de la solución dinámica. Es decir que todo lo dicho en cuanto a las singularidades para el caso estático es también válido para el caso dinámico.

Capítulo 3

Formulación simétrica del IBEM

3.1 Introducción

El problema de la interacción dinámica de estructuras de barras y medios continuos se enmarca dentro de la teoría general de la propagación de ondas elásticas. Este tipo de problemas es frecuentemente estudiado mediante métodos numéricos de dominio–elementos finitos o diferencias finitas–, los cuales se basan en la discretización del dominio estudiado en un número finito de elementos o celdas ([5]). Una de las dificultades más reconocidas de estos métodos es que son solamente aplicables a problemas cuyos dominios son finitos. De esta manera, los problemas de interacción con medios continuos con alguna dimensión infinita sólo pueden analizarse si se introducen bordes ficticios a una cierta distancia de la zona de interés del problema. La posición y naturaleza precisas de estos bordes ficticios tiene muy poca influencia en los resultados para problemas estáticos, mientras que en el caso de problemas de propagación de ondas (esto es, problemas dinámicos) los bordes ficticios pueden alterar notablemente la naturaleza del problema, ya que las ondas emitidas se reflejan en los mismos y vuelven hacia la fuente, lo que puede dar origen a procesos

aparentes de resonancia que no son reales. Otra dificultad de este tipo de métodos es que requieren un gran esfuerzo de modelación, ya que requieren la discretización del volumen de continuo que rodea a la estructura hasta el borde ficticio. A pesar de las mencionadas dificultades, los métodos numéricos de dominio permiten la solución de una gran variedad de problemas con geometrías arbitrarias.

Otra forma de solucionar problemas de interacción dinámica continuo-estructura es mediante métodos analíticos (por ejemplo [37]). Sin embargo, éstos son solamente viables para problemas de valores en el contorno de geometría sencilla. Los métodos de elementos de contorno combinan las ventajas de los métodos analíticos con las de los métodos numéricos de volumen, es decir que son métodos numéricos aplicables a geometrías arbitrarias y que no requieren de la modelación del continuo, sino de las superficies en donde existen fuerzas de interacción.

3.2 Formulación general del IBEM

El comportamiento elastodinámico en régimen estacionario de un medio elástico continuo (sin considerar fuerzas de volumen) puede ser descripto mediante la ecuación de Helmholtz:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \omega^2 \rho \, \mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{3.1}$$

donde λ y μ son las constantes elásticas de Lamé y $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \end{bmatrix}^T$ es el vector desplazamiento. El planteo del problema se completa con la introducción de las condiciones de borde naturales y esenciales. La solución a la ecuación 3.1 puede encontrarse en términos de fuentes distribuidas, $\phi(\mathbf{X})$, de la siguiente manera (por ejemplo, [1], [5], [32]):

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},\omega) = \int \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{X}, \omega) \cdot \phi(\mathbf{X},\omega) \; d\Omega(\mathbf{X}) \tag{3.2}$$

donde $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{X}, \omega)$ es el tensor de Green cuyas componentes están definidas como los desplazamientos resultantes a la acción de una fuente cuya resultante total es unitaria (esto

es, $\phi\, d\Omega = 1$) y Ω es la superficie en donde actúan las fuentes. Cabe destacar que en (3.2) el diferencial de superficie, $d\Omega$, aparece como función de $\mathbf{X}$ indicando que la integración es realizada con respecto a esta variable.

Es fácil ver que (3.2) es solución de (3.1), para una distribución de fuentes, $\phi(\mathbf{X})$, arbitraria ya que las componentes del tensor de Green son soluciones fundamentales de (3.1). De esta manera, conociendo el tensor de Green para la fuente utilizada, el problema se reduce a determinar la distribución de fuentes, $\phi(\mathbf{X})$, que verifica las condiciones de contorno del problema. Es decir que la solución del problema se obtiene planteando las condiciones en el contorno. En los problemas de interacción suelo-estructura es generalmente conveniente utilizar fuerzas distribuidas como fuentes. De esta manera, las componentes del tensor de Green son desplazamientos debidos a fuerzas unitarias.

La ecuación (3.2) es la base del método indirecto de elementos de contorno, IBEM, y puede ser también entendida como una simple superposición de fuentes. La designación de "indirecto" reside en el hecho de que las fuentes distribuidas no necesariamente representan variables de interés del problema sino funciones auxiliares a partir de las cuales es posible expresar la solución, $\mathbf{u}(\mathbf{x},\omega)$, y sus derivadas (tensiones) por diferenciación:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{u}(\mathbf{x},\omega) = \int \frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{X},\omega)\cdot\phi(\mathbf{X},\omega)\; d\Omega(\mathbf{X}) \tag{3.3}$$

De esta manera, el problema de valores en el contorno queda definido por las ecuaciones (3.2) y (3.3). Mediante las mismas es posible determinar la distribución de fuentes que satisfaga las condiciones de borde esenciales y naturales. La solución numérica mediante el IBEM se realiza discretizando las fuentes distribuidas mediante aproximaciones de elementos finitos. Luego, se establece una relación numérica entre desplazamientos y tensiones a través de los valores nodales de las fuentes distribuidas evaluando las expresiones (3.2) y (3.3) en puntos de colocación (por ejemplo, [5], [1]). Cabe notar, sin embargo, que la singularidad de la derivada del tensor de Green en la ecuación (3.3) es de un orden mayor a la del mismo, lo cual se traduce en que la integral (3.3) no puede ser evaluada

directamente en puntos de colocación cercanos a las cargas (por ejemplo, [1], [5]). Como se detallará en la siguiente sección, la formulación propuesta en este trabajo no utiliza la ecuación (3.3), ya que utiliza como fuentes las fuerzas distribuidas en la superficie de interacción continuo-estructura, sobre las cuales se plantea las condiciones de borde naturales.

El método directo, por el contrario, opera con las variables y sus derivadas sin la necesidad de introducir fuentes auxiliares (por ejemplo, [1]).

3.3 Formulación simétrica del IBEM para estructuras enterradas en medios continuos

3.3.1 Dominio del problema

En los problemas de estructuras enterradas en medios continuos, el dominio puede descomponerse en dos subdominios, cada uno de ellos con características individuales que facilitan su análisis mediante métodos particulares. Para el subdominio representado por el continuo, es conveniente realizar el análisis mediante el IBEM, dadas las ventajas discutidas anteriormente de este particular método para este tipo de problemas. Por otra parte, para el subdominio constituido por la estructura, el método de análisis más conveniente es el FEM. Es decir que el análisis del problema completo requiere de una formulación del IBEM que permita realizar un análisis acoplado con el modelo FEM correspondiente a la estructura. Convenientemente, el dominio del problema puede ser descompuesto de la siguiente forma (ver Figura 3.1): el medio continuo, (a), menos el material "excavado", (b), mas el material de la estructura, (c). Dada la geometría de la estructura, la cual coincide con la del material excavado, cabe notar que es posible modelar el problema como un semiespacio sin zonas excavadas–es decir, un semiespacio que se denomina extendido,

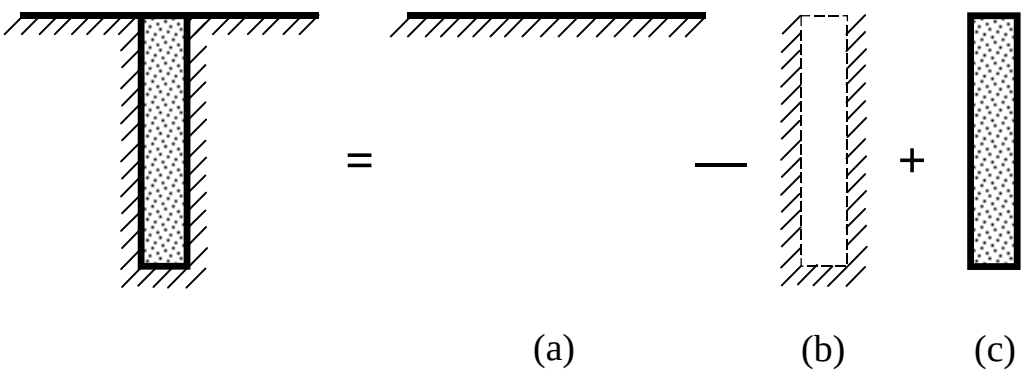

Figura 3.1: Subdivisión del dominio: Semiespacio extendido

[16]–y una estructura constituida mediante un material ficticio cuyas propiedades elásticas y densidad de masa son iguales a la diferencia entre el material de la estructura (c) menos el material excavado del continuo, (b). De esta manera, es posible considerar el problema como la superposición de un semiespacio extendido más la estructura constituida por el material ficticio.

Desde un punto de vista práctico en las aplicaciones de dinámica de fundaciones, el continuo (suelo) tiene valores de módulos elásticos mucho menores a los correspondientes a la estructura, mientras que las densidades de masa de ambos materiales son del mismo orden de magnitud. Vale decir que, en este tipo de aplicaciones, puede suponerse a la estructura constituida por un material cuyas propiedades elásticas sean iguales a las del material real, mientras que la densidad de masa es igual a la diferencia entre ambos materiales.

3.3.2 Interacción continuo-estructura

Debido a la acción de las cargas exteriores en el sistema, tanto el continuo como la estructura se deforman, generando fuerzas de interacción entre ambos dominios. Estas fuerzas

de interacción se encuentran distribuidas sobre las superficies que dividen ambos dominios. La superficie de interacción será designada en este trabajo mediante la letra Ω y comprende a todas las caras de los elementos de barra que se encuentran en contacto con el continuo. Las fuerzas de interacción serán designadas mediante un vector, $\mathbf{f}^c$, donde el supraíndice "c" significa que las fuerzas son acciones sobre el continuo. Cabe destacar que tanto el vector de fuerzas de interacción, $\mathbf{f}^c$, como el vector desplazamientos, $\mathbf{u}$, son incógnitas del problema.

La geometría de la superficie de interacción, Ω, está definida por una función que mapea las coordenadas locales, s y r, en las coordenadas geométricas, $\mathbf{x}$ (Figura 3.2). La coordenada local s define el eje del pórtico, mientras que r define la posición en la dirección transversal al eje. Las variables que definen las coordenadas serán representadas por un grupo identificado por letras minúsculas (por ejemplo, s, r, $\mathbf{x}$) y otro por letras mayúsculas (S, R, $\mathbf{X}$). El grupo identificado por letras minúsculas se refiere a puntos en donde se evalúan desplazamientos y el correspondiente a las mayúsculas se refiere a puntos en donde se aplican fuerzas. De esta manera, se asume que existen funciones de mapeo tales que:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}\,(r, s) \tag{3.4a}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}\,(R, S) \tag{3.4b}$$

donde $\mathbf{x}$ y $\mathbf{X}$ son vectores de coordenadas que definen la posición en la superficie de interacción en el sistema cartesiano global. Las funciones de mapeo tienen idéntica forma analítica, propiedad que será designada en este trabajo como "simetría de mapeo":

$$\mathbf{x}\,(a, b) = \mathbf{X}\,(a, b) \tag{3.5}$$

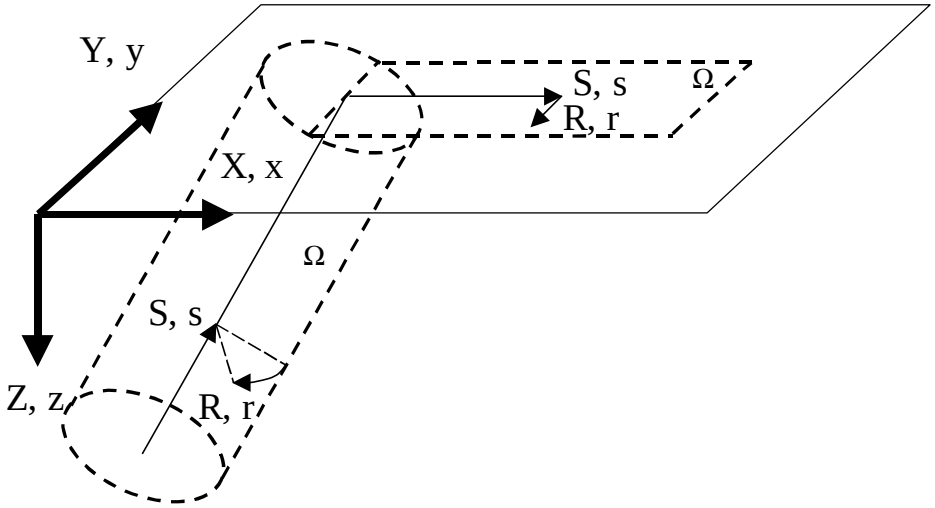

Figura 3.2: Definición de la superficie de interacción, Ω

3.3.3 Interpolación de fuerzas y desplazamientos

La solución del problema es buscada en términos de interpolaciones del tipo de elementos finitos de las variable incógnitas (esto es, desplazamientos y fuerzas de interacción). A diferencia de la formulación convencional del FEM, en la formulación del IBEM las tensiones no se evalúan mediante diferenciación del campo de desplazamientos. En ese aspecto, el IBEM es análogo a las técnicas híbridas del FEM, las cuales buscan la solución del problema interpolando tanto los desplazamientos como las tensiones. Sin embargo, en la presente formulación no intervienen las tensiones en forma explícita, sino a través del tensor de Green, cuyas componentes son desplazamientos debidos a fuerzas puntuales. De esta manera, las tensiones intervienen a través de su resultante, la cual es representada mediante una fuerza distribuida.

Las funciones de interpolación usadas son definidas por vectores de coordenadas generalizadas que representan valores nodales, estando los nodos ubicados sobre el eje de la estructura (definido por las coordenadas s y S). En general, el esquema de interpolación de

desplazamientos y fuerzas de interacción sobre la superficie de interacción puede escribirse como (por ejemplo, [3]):

$$\mathbf{f}^c(R,S) = \mathbf{H}_f^c(R,S) \cdot \hat{\mathbf{f}}^c \tag{3.6a}$$

$$\mathbf{u}^c(r,s) = \mathbf{H}_u^c(r,s) \cdot \hat{\mathbf{u}}^c \tag{3.6b}$$

donde $\mathbf{f}^c = \begin{bmatrix} f_x & f_y & f_z \end{bmatrix}^T$ es el vector de fuerzas distribuidas, $\mathbf{u}^c = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \end{bmatrix}^T$ es el vector de desplazamientos, $\mathbf{H}_f^c$ es la matriz de interpolación de fuerzas, y $\mathbf{H}_u^c$ es la matriz de interpolación de desplazamientos en la superficie de interacción del continuo. Los vectores $\hat{\mathbf{f}}^c$ y $\hat{\mathbf{u}}^c$ son las coordenadas nodales generalizadas de fuerzas de interacción y desplazamientos, respectivamente. Cabe destacar que la interpolación de desplazamientos y fuerzas pueden realizarse sobre distintos conjuntos de nodos. La Figura 3.3 muestra esquemáticamente las variables del problema y su interpolación para un elemento con superficie de interacción cilíndrica.

Interpolación de desplazamientos

Se asume que las secciones transversales de los elementos de viga no sufren deformaciones en el plano de la sección, lo cual se traduce en que el patrón de desplazamientos en la superficie de interacción queda completamente definido por el desplazamiento (tres componentes) y por la rotación del centro de gravedad de la sección (dos componentes asociadas a la flexión y una a la torsión). De esta manera, las coordenadas nodales generalizadas están dadas por los desplazamientos del centro de gravedad, las rotaciones flexionales del mismo, y la torsionales del centro de torsión. A fines de obtener una formulación compatible, es necesario utilizar las mismas matrices de interpolación tanto para el análisis de la estructura mediante el FEM como para el análisis del continuo mediante el IBEM. En este punto es importante diferenciar el problema de elementos de vigas solicitados en la dirección axial y transversal y el de solicitaciones torsionales. La diferencia funda-

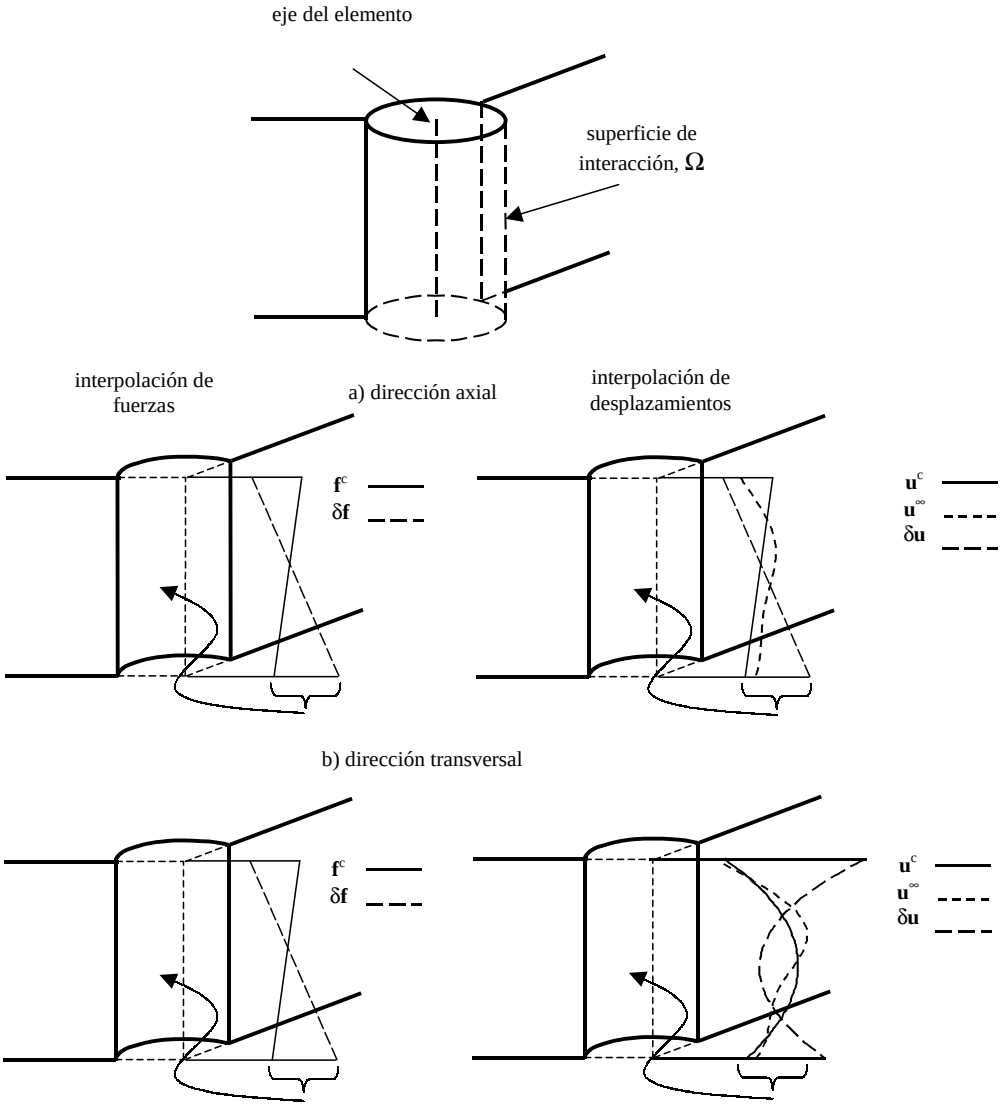

Figura 3.3: Interpolación de las fuerzas distribuidas reales y virtuales ($\mathbf{f}^c$y $\delta\mathbf{f}$) y desplazamientos analíticos, interpolados y virtuales ($\mathbf{u}^c$, $\mathbf{u}^\infty$ y $\delta\mathbf{u}$) (esquemático)

mental es que en el primer caso las variables involucradas son desplazamientos y fuerzas distribuidas, variables explícitas del dominio continuo, mientras que en el segundo caso las variables involucradas son rotaciones y momentos torsores, variables no explícitamente definidas en el continuo. Consecuentemente, cabe destacar que en general no es posible definir las matrices de interpolación para el continuo y la estructura mediante una única expresión analítica. Sin embargo, es posible definir matrices para cada uno de los dominios que impliquen campos de desplazamientos compatibles entre el continuo y la estructura.

A fines de ilustrar la interpolación de desplazamientos para un caso concreto, se considera un elemento cuya superficie de interacción es cilíndrica (Figura 3.4) y está sometido a solicitaciones torsionales y axiales (por ejemplo, un pilote de sección circular o anular). Para el dominio del continuo, la interpolación de los desplazamientos en la superficie de interacción está dada por:

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\left(1-\frac{s}{H}\right) R_p \sin\left(\frac{r}{R_p}\right) & 0 & -\frac{s}{H} R_p \sin\left(\frac{r}{R_p}\right) \\ 0 & \left(1-\frac{s}{H}\right) R_p \cos\left(\frac{r}{R_p}\right) & 0 & \frac{s}{H} R_p \cos\left(\frac{r}{R_p}\right) \\ 1-\frac{s}{H} & 0 & \frac{s}{H} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_z^1 \\ \theta^1 \\ u_z^2 \\ \theta^2 \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

donde la matriz de interpolación puede escribirse como:

$$\mathbf{H}_u^c(r,s) = \begin{bmatrix} 0 & -\left(1-\frac{s}{H}\right) R_p \sin\left(\frac{r}{R_p}\right) & 0 & -\frac{s}{H} R_p \sin\left(\frac{r}{R_p}\right) \\ 0 & \left(1-\frac{s}{H}\right) R_p \cos\left(\frac{r}{R_p}\right) & 0 & \frac{s}{H} R_p \cos\left(\frac{r}{R_p}\right) \\ 1-\frac{s}{H} & 0 & \frac{s}{H} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

Para el dominio de la estructura, las variables involucradas son los desplazamientos axiales y las rotaciones torsionales. De esta manera, la interpolación puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \theta \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1-\frac{s}{H} & 0 & \frac{s}{H} \\ 1-\frac{s}{H} & 0 & \frac{s}{H} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_z^1 \\ \theta^1 \\ u_z^2 \\ \theta^2 \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

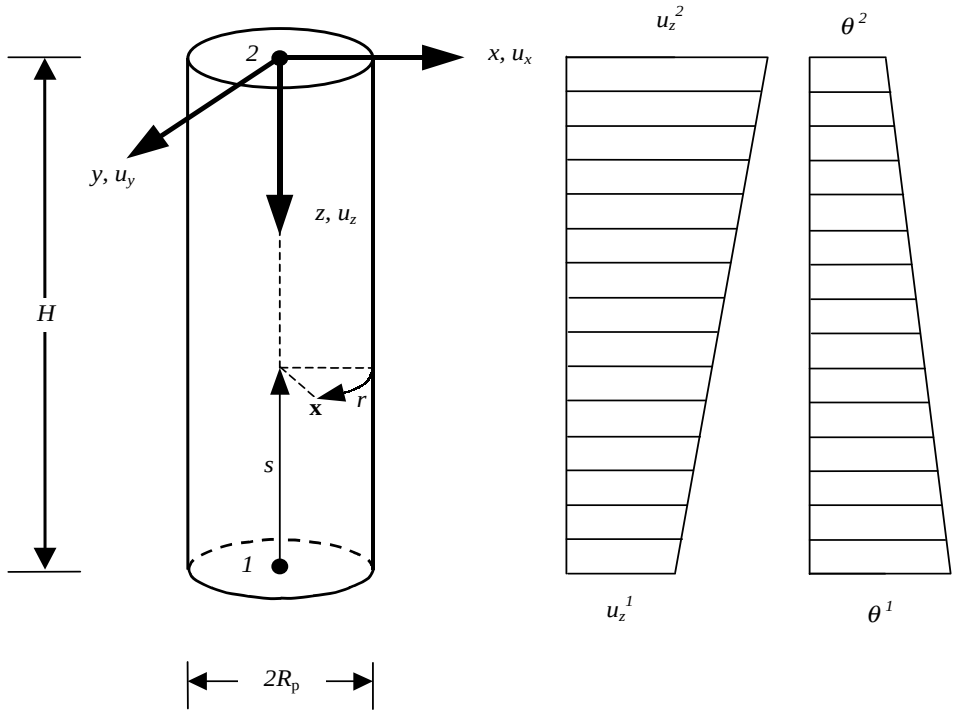

Figura 3.4: Ejemplo de elemento cilíndrico con desplazamientos axiales y rotaciones torsionales

donde la matriz de interpolación de desplazamientos para el dominio de la estructura, $\mathbf{H}_u^e$, está dada por:

$$\mathbf{H}_u^e(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1-\frac{s}{H} & 0 & \frac{s}{H} \\ 1-\frac{s}{H} & 0 & \frac{s}{H} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

Si bien las matrices de interpolación dadas por (3.8) y (3.10) no tienen igual expresión analítica, ambas conducen a campos de desplazamientos compatibles en la superficie de interacción.

Interpolación de fuerzas

En el caso de la interpolación de fuerzas distribuidas existe la dificultad de que para el análisis de los elementos de viga la teoría convencional no considera la distribución de las cargas en la superficie de la misma, sino el efecto neto de la misma sobre cada sección. De esta manera, la distribución de fuerzas puede suponerse, en una primera aproximación, como constante sobre el perímetro de la sección transversal. Sin embargo, la formulación es general y permite la definición de esquemas de interpolación de fuerzas arbitrarias. Este punto es tratado en más detalle en capítulos subsiguientes.

3.3.4 IBEM: Obtención de la matriz de rigidez del continuo mediante el PTV

Una vez definida la interpolación de las variables de interés, se busca una relación numérica entre el vector de desplazamientos y el de fuerzas de interacción distribuidas. Para el dominio de la estructura esta relación es encontrada mediante el FEM (por ejemplo, [38], [3]). Esta relación está dada por la siguiente expresión:

$$\mathbf{K}^e \cdot \mathbf{u}^e = \mathbf{P}^e \tag{3.11}$$

en la cual $\mathbf{K}^e$ es la matriz de rigidez dinámica de la estructura, $\mathbf{u}^e$ es el vector de desplazamientos generalizados que definen la interpolación de desplazamientos de la estructura, y $\mathbf{P}^e$ es el vector de cargas consistentes. Este último está relacionado con el vector de fuerzas distribuidas ya que el trabajo virtual de ambos sistemas de fuerzas en correspondencia con un campo de desplazamientos virtuales dado por una interpolación igual a la usada para los desplazamientos reales es idéntico (por ejemplo, [3]). Cabe destacar que las componentes del vector de cargas consistentes son fuerzas generalizadas (es decir, fuerzas y momentos) puntuales.

Para el dominio del continuo, la relación numérica es determinada mediante el IBEM. Los desplazamientos en el continuo causados por la acción de las fuerzas de interacción, $\mathbf{f}^c$, pueden ser evaluados mediante la ecuación (3.2), considerando a las fuerzas de interacción como fuentes distribuidas. Esto es posible dado que las fuerzas de interacción distribuidas en un elemento diferencial de superficie, $d\Omega$, pueden ser consideradas como una carga puntual aplicada en el semiespacio extendido. De esta manera, los desplazamientos en el continuo están dados por:

$$\mathbf{u}^{\infty}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{X}(R,S)) \cdot \mathbf{f}^{c}(R,S)\; d\Omega(R,S) \tag{3.12}$$

donde la variable frecuencia ha sido omitida a fines de simplificar la notación, $\mathbf{u}^{\infty}$ es el campo de desplazamientos definido analíticamente, el diferencial de superficie, $d\Omega$, aparece como función de las coordenadas R y S indicando que la integración es realizada con respecto a estas variables, y el dominio de integración es la superficie de interacción, Ω. Para una cierta interpolación de fuerzas y vector de coordenadas generalizadas de fuerzas de interacción, es posible evaluar los desplazamientos en cualquier punto del dominio mediante la ecuación (3.12). De esta ecuación se desprende que la variación de los desplazamientos en el dominio está dada por la convolución del tensor de Green y el campo de fuerzas de interacción interpolado. Es decir que la variación de la versión analítica del campo de desplazamientos está dada por la forma analítica del tensor de Green, mientras

que la variación de los mismos en la versión numérica (3.6b) está dada por las funciones de interpolación. En este sentido, se entiende que el campo de desplazamientos numérico es discreto, ya que es función de un número finito de coordenadas nodales generalizadas. De esta manera, es necesario introducir un procedimiento de discretización a fines de aproximar el campo de desplazamientos analítico (3.12) mediante su contraparte numérica (3.6b).

Discretización del campo de desplazamientos

En la gran mayoría de las formulaciones del BEM para problemas elastodinámicos–sino en todas–, es práctica común realizar la discretización de desplazamientos mediante la evaluación directa de la ecuación (3.12) en las coordenadas nodales (por ejemplo, [17], [6]). Este procedimiento es conocido en la literatura como "método de colocación" (por ejemplo, [5], [1]), y puede ser considerado como el procedimiento de discretización más simple. Este método, a pesar de su atractiva simplicidad, es en muchos casos inadecuado, ya que ignora la variación de la variable y sólo considera su valor puntual. Por otra parte, este método generalmente conduce a matrices no simétricas, y no permite la definición de grados de libertad rotacionales.

Existen otras formulaciones del BEM para problemas de potencial (principalmente en el campo de ingeniería electrónica) que no utilizan el método de colocación y se basan en principios energéticos (por ejemplo, [1]). Algunas de estas formulaciones conducen a matrices de contorno simétricas. Sin embargo, el hecho de que las matrices de contorno sean simétricas no implica automáticamente que la matriz de rigidez lo sea. Como será detallado en subsiguientes capítulos, la simetría de la matriz de rigidez resulta de una serie de condiciones que cumple la formulación.

La formulación propuesta en este trabajo discretiza los desplazamientos mediante el principio de trabajos virtuales (PTV). El sistema de fuerzas virtuales consiste en un campo de fuerzas de interacción virtuales definidas sobre la superficie de interacción de la siguiente manera:

$$\delta \mathbf{f}^c (r,s) = \mathbf{H}_f^c (r,s) \cdot \delta \hat{\mathbf{f}}^c \tag{3.13}$$

Es importante resaltar que, a fines de realizar la interpolación de fuerzas virtuales, $\delta \mathbf{f}^c$, se utiliza la misma matriz de interpolación que para el caso de las fuerzas de interacción, $\mathbf{f}^c$. La formulación propuesta establece que el trabajo virtual del sistema de fuerzas virtuales (3.13) en correspondencia con los campos de desplazamientos (3.6b) y (3.12) es idéntico. El trabajo virtual en correspondencia con el campo de desplazamientos analíticos, (3.6b), resulta:

$$\delta W = \int_\Omega \left[\delta \mathbf{f}^c (r,s)\right]^T \cdot \mathbf{u}^\infty \left(\mathbf{x}(r,s)\right) \, d\Omega (r,s) \tag{3.14}$$

Reemplazando (3.6a), (3.12) y (3.13) en (3.14), el trabajo virtual en correspondencia con el campo de desplazamientos analíticos resulta:

$$\delta W = \left[\delta \hat{\mathbf{f}}^c\right]^T \cdot \int_\Omega \int_\Omega \left[\mathbf{H}_f^c (r,s)\right]^T \cdot \mathbf{G}\left(\mathbf{x}(r,s), \mathbf{X}(R,S)\right) \cdot \mathbf{H}_f^c (R,S) \, d\Omega (R,S) \, d\Omega (r,s) \cdot \hat{\mathbf{f}}^c \tag{3.15}$$

Definiendo la matriz de contorno, $\mathbf{B}$, como:

$$\mathbf{B} \equiv \int_\Omega \int_\Omega \left[\mathbf{H}_f^c (r,s)\right]^T \cdot \mathbf{G}\left(\mathbf{x}(r,s), \mathbf{X}(R,S)\right) \cdot \mathbf{H}_f^c (R,S) \, d\Omega (R,S) \, d\Omega (r,s) \tag{3.16}$$

el trabajo virtual, δW, puede escribirse como:

$$\delta W = \left[\delta \hat{\mathbf{f}}^c\right]^T \cdot \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{f}}^c \tag{3.17}$$

Con respecto a la ecuación (3.17) cabe destacar que, para un sistema de fuerzas virtuales dado, el trabajo virtual es función de las fuerzas de interacción y de la matriz de contorno, $\mathbf{B}$. Cabe notar también que la matriz $\mathbf{B}$ es cuadrada y está íntegramente determinada por el dominio de integración la interpolación de fuerzas y el tensor de Green, esto es; la interpolación de los desplazamientos no interviene en su definición. La matriz $\mathbf{B}$ será designada

en este trabajo como "matriz de pseudoflexibilidad", por razones que serán explicitadas en la sección siguiente.

Por otra parte, el trabajo virtual en correspondencia con el campo de desplazamientos discreto está dado por:

$$\delta W = \int_{\Omega} \left[\delta \mathbf{f}^c \left(r,s\right)\right]^T \cdot \mathbf{u}^c \left(\mathbf{x}\left(r,s\right)\right) \, d\Omega \left(r,s\right) \tag{3.18}$$

Reemplazando (3.6b) y (3.13) en (3.18), el trabajo virtual en correspondencia con el campo de desplazamientos discretos resulta:

$$\delta W = \left[\delta \hat{\mathbf{f}}^c\right]^T \cdot \int_{\Omega} \left[\mathbf{H}_f^c \left(r,s\right)\right]^T \cdot \mathbf{H}_u^c \left(r,s\right) \, d\Omega \left(r,s\right) \cdot \hat{\mathbf{u}}^c \tag{3.19}$$

Definiendo la matriz de contorno, $\mathbf{A}$, como:

$$\mathbf{A} \equiv \int_{\Omega} \left[\mathbf{H}_f^c \left(r,s\right)\right]^T \cdot \mathbf{H}_u^c \left(r,s\right) \, d\Omega \left(r,s\right) \tag{3.20}$$

el trabajo virtual, δW, puede escribirse como:

$$\delta W = \left[\delta \hat{\mathbf{f}}^c\right]^T \cdot \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{u}}^c \tag{3.21}$$

Del análisis de la ecuación (3.21) se desprende que, para un sistema de fuerzas virtuales dado, el trabajo virtual es función del vector de desplazamientos y la matriz de contorno, $\mathbf{A}$. Por otra parte, la matriz $\mathbf{A}$ resulta generalmente rectangular y está determinada por el dominio de integración, la interpolación de fuerzas y la correspondiente a los desplazamientos, esto es; el tensor de Green no interviene en su definición. La matriz $\mathbf{A}$ –más precisamente su transpuesta–es frecuentemente designada en la literatura como "matriz de condensación" (en inglés: *lumping matrix*), por razones que serán detalladas en los párrafos subsiguientes.

Igualando el trabajo virtual en correspondencia con el campo de desplazamientos analítico (3.17) y el correspondiente al campo de desplazamientos discreto (3.21):

$$\left[\delta \hat{\mathbf{f}}^c\right]^T \cdot \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{f}}^c = \left[\delta \hat{\mathbf{f}}^c\right]^T \cdot \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{u}}^c \tag{3.22}$$

Considerando que las fuerzas virtuales son arbitrarias, (3.22) puede escribirse como:

$$\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{f}}^c = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{u}}^c \tag{3.23}$$

Las formulaciones convencionales del BEM para problemas elastodinámicos conducen a expresiones matriciales similares a (3.23). Sin embargo, la naturaleza de las matrices de contorno de la formulación propuesta en este trabajo es sustancialmente diferente a la de las correspondientes a las formulaciones convencionales. Una de las diferencias prácticas es que en la formulación propuesta, la matriz de condensación es en general rectangular y, por lo tanto, no inversible. Es decir que mediante (3.23) no es posible, en general, determinar el vector de desplazamientos generalizados debido a la acción de un sistema de fuerzas distribuidas especificado. Mediante (3.23), sin embargo, es posible obtener el vector de fuerzas de interacción correspondiente a un vector de desplazamientos dado, ya que la matriz de pseudoflexibilidad es inversible:

$$\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{u}}^c = \hat{\mathbf{f}}^c \tag{3.24}$$

A fines de obtener una relación numérica entre el vector de desplazamientos y un vector de cargas consistentes, equivalente a la obtenida para la estructura (3.11), es necesario determinar un vector de cargas consistentes en correspondencia con las fuerzas de interacción sobre el continuo, $\mathbf{P}^c$. Esto se logra, al igual que para el caso de la estructura, igualando el trabajo virtual de ambos sistemas de fuerzas–distribuidas y puntuales–en correspondencia con un campo de desplazamientos virtuales definido mediante la misma matriz de interpolación que los desplazamientos reales (3.6b):

$$\delta\mathbf{u}\,(r,s) = \mathbf{H}_u^c\,(r,s) \cdot \delta\hat{\mathbf{u}} \tag{3.25}$$

El trabajo virtual del sistema de fuerzas distribuidas (3.6a) está dado por:

$$\delta W = \int_\Omega \left[\delta\mathbf{u}\,(r,s)\right]^T \cdot \mathbf{f}^c\,(R,S)\;\; d\Omega\,(r,s) \tag{3.26}$$

Introduciendo (3.6a) y (3.25) en (3.26), el trabajo virtual en correspondencia con el sistema

de fuerzas distribuidas resulta:

$$\delta W = [\delta \hat{\mathbf{u}}]^T \cdot \int_{\Omega} [\mathbf{H}_u^c (r,s)]^T \cdot \mathbf{H}_f^c (R,S) \; d\Omega (r,s) \cdot \hat{\mathbf{f}}^c \tag{3.27}$$

Teniendo en cuenta la definición de la matriz de condensación (3.20), la ecuación (3.27) puede escribirse como:

$$\delta W = [\delta \hat{\mathbf{u}}]^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \hat{\mathbf{f}}^c \tag{3.28}$$

Por otra parte, el trabajo virtual en correspondencia con el sistema de cargas consistentes resulta:

$$\delta W = [\delta \hat{\mathbf{u}}]^T \cdot \mathbf{P}^c \tag{3.29}$$

Igualando el trabajo virtual (3.28) con (3.29), y para desplazamientos virtuales arbitrarios, la relación entre el vector de fuerzas distribuidas y el vector de cargas consistentes resulta:

$$\mathbf{A}^T \cdot \hat{\mathbf{f}}^c = \mathbf{P}^c \tag{3.30}$$

Del análisis de la ecuación (3.30) se desprende que en general no es posible determinar las fuerzas distribuidas en correspondencia a un vector de cargas consistentes dado, ya que la matriz de condensación es en general rectangular. La designación de "matriz de condensación" se vuelve evidente en la ecuación (3.30), ya que la mediante la misma, se puede obtener las cargas puntuales equivalentes a un campo de fuerzas distribuidas.

Premultiplicando (3.24) por $\mathbf{A}^T$ e introduciendo (3.30), se obtiene una relación entre el vector de desplazamientos y el de cargas consistentes:

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{u}}^c = \mathbf{P}^c \tag{3.31}$$

Dada la similitud de las ecuaciones (3.11) y (3.31), la matriz de rigidez del continuo puede escribirse como:

$$\mathbf{K}^c = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A} \tag{3.32}$$

De esta manera, (3.31) resulta:

$$\mathbf{K}^c \cdot \hat{\mathbf{u}}^c = \mathbf{P}^c \tag{3.33}$$

3.4 Propiedades de la matriz de rigidez del continuo

3.4.1 Matriz de pseudoflexibilidad

La designación de **B** como "matriz de pseudoflexibilidad" adquiere sentido en la expresión para la matriz de rigidez (3.32). Del análisis de la misma se desprende que la matriz de rigidez del continuo es igual a la inversa de la matriz de pseudoflexibilidad expresada en un sistema de coordenadas cuya matriz de transformación es la matriz de condensación. Es en este sentido en que la matriz **B** puede entenderse como una matriz de flexibilidad expresada en coordenadas "distribuidas", cuya transformación mediante las matrices de condensación se traduce en una matriz de rigidez en coordenadas "puntuales". Como se menciona en párrafos anteriores, cabe destacar que en la definición de esta matriz sólo interviene la interpolación de fuerzas distribuidas; es decir que una vez determinada la matriz de pseudoflexibilidad para un esquema de interpolación de fuerzas distribuidas dado, puede evaluarse la matriz de rigidez del continuo en correspondencia con distintos esquemas de interpolación de desplazamientos simplemente realizando el cambio de coordenadas mediante las matrices de condensación correspondientes.

Como se verá en capítulos subsiguientes, la mayor parte del esfuerzo numérico requerido corresponde a la evaluación de la matriz de pseudoflexibilidad. Es decir que para un esquema de interpolación de fuerzas distribuidas dado, la utilización de esquemas de interpolación de desplazamientos de orden superior (por ejemplo, mediante desplazamientos nodales y giros) no se traduce en un sustancial incremento del costo computacional en comparación con esquemas de primer orden (interpolaciones lineales).

3.4.2 Forma de la matriz de rigidez

Cabe destacar que la matriz de rigidez resulta cuadrada, ya que tanto las variables de desplazamiento como las de cargas puntuales se encuentran definidas sobre un único conjunto de nodos, aún cuando la interpolación de fuerzas distribuidas sea realizada sobre un conjunto de nodos distinto al correspondiente a los desplazamientos. La vinculación entre ambos conjuntos de nodos viene dada por la matriz de condensación, ya que es esta última quien vincula las fuerzas distribuidas con las cargas puntuales. El tamaño de la matriz de rigidez viene dado por la cantidad de coordenadas utilizadas para realizar la interpolación de los desplazamientos.

3.4.3 Simetría de la matriz de rigidez

Una propiedad muy importante de la matriz de rigidez obtenida mediante la formulación propuesta es que ésta resulta simétrica. La simetría de la matriz de rigidez del continuo está garantizada por la simetría de la matriz de pseudoflexibilidad, ya que tomando la transpuesta de (3.32):

$$\left[\mathbf{K}^c\right]^T = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}^{-T} \cdot \mathbf{A} \tag{3.34}$$

Si la matriz de pseudoflexibilidad es simétrica, también lo será su inversa, lo que nos permite escribir (3.34) como:

$$\left[\mathbf{K}^c\right]^T = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A} \tag{3.35}$$

Es decir que para probar que la matriz de rigidez es simétrica es suficiente con probar que la matriz de pseudoflexibilidad posee dicha propiedad, lo cual puede verificarse evaluando la transpuesta de su definición (3.16):

$$\mathbf{B}^T = \int_\Omega \int_\Omega \left[\mathbf{H}_f^c\left(r,s\right)\right]^T \cdot \mathbf{G}^T\left(\mathbf{x}\left(r,s\right), \mathbf{X}\left(R,S\right)\right) \cdot \mathbf{H}_f^c\left(R,S\right)\, d\Omega\left(R,S\right)\, d\Omega\left(r,s\right) \tag{3.36}$$

Introduciendo la propiedad de simetría del mapeo (3.5), (3.36) resulta:

$$\mathbf{B}^T = \int_\Omega \int_\Omega \left[\mathbf{H}_f^c\left(R,S\right)\right]^T \cdot \mathbf{G}^T\left(\mathbf{X}\left(r,s\right),\mathbf{x}\left(R,S\right)\right) \cdot \mathbf{H}_f^c\left(r,s\right)\, d\Omega\left(R,S\right)\, d\Omega\left(r,s\right) \quad (3.37)$$

Haciendo un cambio de las variables de integración $(R,S) \rightleftarrows (r,s)$, (3.37) puede escribirse como:

$$\mathbf{B}^T = \int_\Omega \int_\Omega \left[\mathbf{H}_f^c\left(r,s\right)\right]^T \cdot \mathbf{G}^T\left(\mathbf{X}\left(R,S\right),\mathbf{x}\left(r,s\right)\right) \cdot \mathbf{H}_f^c\left(R,S\right)\, d\Omega\left(R,S\right)\, d\Omega\left(r,s\right) \quad (3.38)$$

Por último, introduciendo la propiedad de reciprocidad del tensor de Green, (2.3), (3.38) resulta:

$$\mathbf{B}^T = \int_\Omega \int_\Omega \left[\mathbf{H}_f^c\left(r,s\right)\right]^T \cdot \mathbf{G}\left(\mathbf{x}\left(r,s\right),\mathbf{X}\left(R,S\right)\right) \cdot \mathbf{H}_f^c\left(R,S\right)\, d\Omega\left(R,S\right)\, d\Omega\left(r,s\right) \quad (3.39)$$

De la comparación entre (3.16) y (3.39), se desprende que la matriz $\mathbf{B}$ es simétrica, esto es:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^T \quad (3.40)$$

Dado que, como se verá en capítulos subsiguientes, la mayor parte del esfuerzo numérico está asociado a la evaluación de la matriz de pseudoflexibilidad, la propiedad de simetría se traduce en un significativo ahorro numérico, ya que mediante ella es posible evaluar los términos ubicados por debajo de la diagonal principal como transpuestos de los términos ubicados por encima de dicha diagonal.

Si bien la formulación propuesta considera exclusivamente elementos de barra, el procedimiento puede ser generalizado para desarrollar elementos en correspondencia con placas y elementos de volumen enterrados, a fines de obtener matrices de rigidez simétricas para los mismos. La extensión surge naturalmente considerando la superficie de interacción y esquemas de interpolación de elementos finitos usados para estos elementos.

3.5 Acoplamiento entre el continuo y la estructura

Compatibilidad

Como se mencionó anteriormente, la compatibilidad entre los desplazamientos del continuo y de la estructura no puede ser establecida en forma directa. Esto es así ya que los desplazamientos del continuo están definidos en la superficie de interacción, mientras que los correspondientes a la estructura están definidos sobre el eje de la misma. Sin embargo, la generalidad de la formulación propuesta permite la definición de esquemas de interpolación consistentes para ambos dominios–es decir, esquemas de interpolación definidos por un único conjunto de desplazamientos nodales. De esta manera, la compatibilidad de desplazamientos es establecida de la siguiente manera:

$$\hat{\mathbf{u}}^c = \mathbf{u}^e = \hat{\mathbf{u}} \tag{3.41}$$

donde $\hat{\mathbf{u}}$ es el vector de desplazamientos nodales del sistema continuo-estructura, el cual coincide con los vectores de desplazamientos nodales de ambos dominios.

Equilibrio

El planteo del equilibrio entre las fuerzas distribuidas adolece de la misma dificultad que el correspondiente a la compatibilidad de desplazamientos; esto es, las fuerzas distribuidas en el continuo están definidas sobre la superficie de interacción, mientras que para el caso de la viga sólo se considera su acción neta concentrada en el eje de la misma. Sin embargo, dado que los vectores de cargas consistentes son estáticamente equivalentes a los sistemas de fuerzas distribuidas, el equilibrio puede ser impuesto directamente de la siguiente manera:

$$\mathbf{P}^c + \mathbf{P}^e = \mathbf{P} \tag{3.42}$$

donde $\mathbf{P}^c$ y $\mathbf{P}^e$ son los vectores de cargas aplicadas al continuo y a la estructura, respectivamente, y $\mathbf{P}$ es el vector de cargas externas al sistema continuo-estructura.

Matriz de rigidez del sistema continuo-estructura

Combinando las ecuaciones (3.11), (3.33), (3.41), y (3.42), la formulación numérica del problema completo (esto es, estructura y continuo acoplados) puede escribirse como:

$$\mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{P} \tag{3.43}$$

donde $\mathbf{K}$ es la matriz de rigidez del sistema:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^c + \mathbf{K}^e \tag{3.44}$$

En la ecuación (3.41) se ha asumido que los desplazamientos en el continuo son interpolados por los mismos vectores de desplazamiento; es decir que se utilizan tanto grados de libertad translacionales como rotacionales. Si éste no es el caso, y para realizar la interpolación de desplazamientos en el continuo no se utilizan grados de libertad rotacionales, la ecuación (3.44) es todavía válida, siempre y cuando se realice una condensación estática de los grados de libertad rotacionales de la matriz de rigidez de la estructura.

Capítulo 4

Elemento de dos nodos para el análisis de pórticos planos sujetos a cargas en el plano

4.1 Generalidades

En este capítulo se presenta un elemento de dos nodos para analizar pórticos enterrados contenidos en un plano, sometidos a solicitaciones contenidas en dicho plano. Cabe destacar que, aún cuando el problema considerado es plano, la naturaleza tridimensional del continuo es tenida en cuenta por el tensor de Green utilizado, ya que este último contiene soluciones fundamentales del semiespacio.

En el caso de problemas planos es, por definición, solamente necesario considerar desplazamientos verticales, $u_{z'}$, y horizontales, $u_{x'}$, donde z' y x' representan un sistema coordenado local tal que el eje del elemento es paralelo a la dirección x' (Figura 4.1). Dado

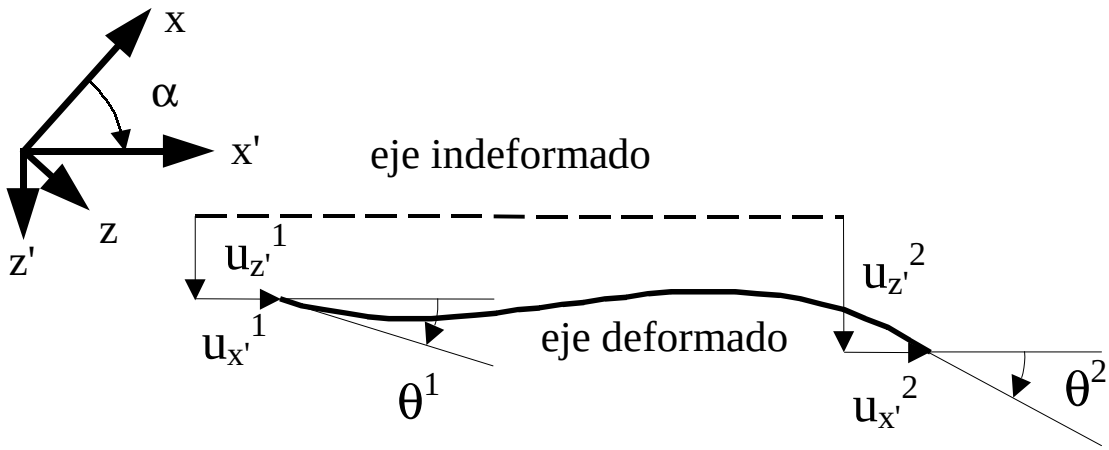

Figura 4.1: Intrerpolación de desplazamientos en el eje del elemento

que el campo de desplazamientos virtuales en la formulación presente es interpolado por la misma matriz que la correspondiente a los desplazamientos reales, las fuerzas distribuidas relevantes al problema están también contenidas en dicho plano. Esto es así ya que no hay trabajo virtual asociado a las componentes de fuerzas normales al plano de la estructura. De esta manera, las componentes de las fuerzas distribuidas de interés en este tipo de problemas son las que existen en la dirección vertical ($f_{z'}$) y horizontal ($f_{x'}$). Los elementos que definen la identidad del elemento son las funciones de interpolación usadas tanto para los desplazamientos como para las fuerzas distribuidas. La superficie de interacción puede tomar diversas formas geométricas, sin embargo ésta será considerada como una característica secundaria del elemento; la identidad de este último está dada por las funciones de interpolación utilizadas. En las implementaciones numéricas presentadas en este trabajo, sin embargo, sólo se consideran superficies rectangulares planas y cilíndricas.

4.1.1 Interpolación de desplazamientos

Dado que es de interés realizar una interpolación de desplazamientos para el continuo que sea compatible con la correspondiente a los elementos de viga de la estructura. Es decir que

el patrón de desplazamientos en el continuo se encuentra restringido por las interpolaciones generalmente utilizadas para elementos de barra. La formulación convencional del elemento de barra utiliza polinomios de Hermite de tercer orden para aproximar la distribución de desplazamientos transversales al eje de la viga, y funciones lineales para aproximar la distribución de desplazamientos axiales (Figura 4.1). Estas funciones de interpolación representan la solución homogénea exacta de las ecuaciones diferenciales de la elástica para solicitaciones transversales y axiales estáticas. Con respecto a la interpolación de los desplazamientos en la superficie de interacción existen dos alternativas:

1. Considerar que los desplazamientos sobre la curva definida por la intersección de la superficie de interacción con la sección transversal de la viga en consideración son constantes e iguales al desplazamiento del eje de la viga.

2. Considerar que los desplazamientos sobre dicha curva consisten en una componente constante, dada por el desplazamiento en el eje de la viga, mas una componente variable resultante del giro de la sección, el cual es a su vez calculado mediante la derivada de la función de interpolación de desplazamientos del eje de la viga.

A fines de ilustrar los conceptos arriba mencionados, la matriz de interpolación de desplazamientos resultante de la alternativa 1 para un elemento de viga de longitud L_e, resulta:

$$\mathbf{H}_u^{c(e)} = \begin{bmatrix} 1-\frac{s}{L_e} & 0 \\ 0 & \left(1+2\frac{s}{L_e}\right)\left(1-\frac{s}{L_e}\right)^2 \\ 0 & \frac{s}{L_e}\left(1-\frac{s}{L_e}\right)^2 \\ \frac{s}{L_e} & 0 \\ 0 & \left(3-2\frac{s}{L_e}\right)\left(\frac{s}{L_e}\right)^2 \\ 0 & \left(\frac{s}{L_e}\right)^2\left(\frac{s}{L_e}-1\right) \end{bmatrix}^T \tag{4.1}$$

mientras que para el caso de la alternativa 2, y para un elemento de viga con superficie de interacción cilíndrica de radio, R_e, la matriz de interpolación de desplazamientos puede

escribirse como:

$$\mathbf{H}_u^{c(e)} = \begin{bmatrix} 1-\frac{s}{L_e} & 0 \\ 6R_e \sin\left(\frac{r}{R}\right)(s-L_e)\frac{s}{L_e^3} & \left(1+2\frac{s}{L_e}\right)\left(1-\frac{s}{L_e}\right)^2 \\ R_e \sin\left(\frac{r}{R}\right)(s-L_e)\frac{3s-L_e}{L_e^2} & \frac{s}{L_e}\left(1-\frac{s}{L_e}\right)^2 \\ \frac{s}{L_e} & 0 \\ -6R_e \sin\left(\frac{r}{R}\right)(s-L_e)\frac{s}{L_e^3} & \left(3-2\frac{s}{L_e}\right)\left(\frac{s}{L_e}\right)^2 \\ R_e \sin\left(\frac{r}{R}\right)s\frac{3s-2L_e}{L_e^2} & \left(\frac{s}{L_e}\right)^2\left(\frac{s}{L_e}-1\right) \end{bmatrix}^T \tag{4.2}$$

En ambos casos el vector de coordenadas generalizadas de desplazamientos está dado por:

$$\hat{\mathbf{u}}^{c(e)\prime} = \begin{bmatrix} u_{x'}^1 & u_{z'}^1 & \theta^1 & u_{x'}^2 & u_{z'}^2 & \theta^2 \end{bmatrix}^T \tag{4.3}$$

4.1.2 Interpolación de fuerzas

Para la interpolación de fuerzas tanto transversales como axiales en la dirección longitudinal (es decir, sobre la coordenada s) del elemento se utilizan funciones lineales. En la dirección transversal (sobre la coordenada r), existen diversas alternativas para realizar la interpolación. La forma más general de realizar la interpolación en la dirección transversal es mediante expansión en series de Fourier, siendo la amplitud de cada componente armónica una coordenada generalizada del vector de fuerzas distribuidas. Los coeficientes de la expansión de Fourier no son calculados explícitamente, sino que su incidencia es tenida en cuenta por la formulación de la siguiente manera; i) al evaluar el trabajo virtual del campo de desplazamientos interpolado y las fuerzas virtuales; ii) al evaluar el trabajo virtual de los desplazamientos correspondientes al campo de fuerzas interpolado y las fuerzas virtuales; y iii) al evaluar el trabajo virtual del campo de fuerzas interpolado y los desplazamientos virtuales. La incidencia de iii) es en el vector de cargas consistentes, mientras que la incidencia de i) y ii) es en la matriz de rigidez del continuo. La habilidad de realizar la interpolación de fuerzas en la dirección transversal en forma implícita es una característica distintiva de la presente formulación, en contraste con las

formulaciones convencionales del IBEM. Otros autores (por ejemplo, [17], [35]) proponen formulaciones axilsimétricas del DBEM en las cuales el problema general puede ser desacoplado en subproblemas asociados con distintos números de Fourier y con condiciones de borde transformadas. En la presente formulación, el problema general no necesita ser desacoplado y puede ser resuelto en forma directa.

Aún cuando la formulación permite realizar interpolaciones generales en el sentido transversal, para el elemento presentado en este capítulo se asume por razones de simplicidad que las fuerzas de interacción se encuentran uniformemente distribuidas. Es decir que la matriz de interpolación de fuerzas distribuidas asumida puede escribirse como:

$$\mathbf{H}_f^{c(e)} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{s}{L_e} & 0 & \frac{s}{L_e} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{s}{L_e} & 0 & \frac{s}{L_e} \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

donde el vector de coordenadas generalizadas de fuerzas de interacción es:

$$\hat{\mathbf{f}}^{c(e)\prime} = \begin{bmatrix} f_{x'}^1 & f_{z'}^1 & f_{x'}^2 & f_{z'}^2 \end{bmatrix}^T \tag{4.5}$$

4.2 Evaluación de la matriz de condensación

De la definición de la matriz de condensación, (3.20), puede verse que la misma puede ser evaluada mediante el ensamblaje de matrices de condensación elementales, $\mathbf{A}^{(e)}$, siguiendo las reglas convencionales del FEM. La matriz $\mathbf{A}^{(e)}$ puede ser evaluada en forma cerrada introduciendo la matriz de interpolación de desplazamientos, (4.1) o (4.2), y la correspondiente a la interpolación de fuerzas de interacción, (4.4), en (3.20). Cabe destacar que la matriz de interpolación de desplazamientos (4.1) y la indicada en (4.2) para un elemento con superficie de interacción cilíndrica, conducen a idénticas matrices de condensación elementales. Esto es así ya que la única diferencia entre ambas matrices de interpolación de desplazamientos se encuentra en la introducción de la componente antisimétrica de

desplazamientos axiales debidos al giro de la sección, la cual no produce trabajo virtual neto dado que las fuerzas de interacción se encuentran uniformemente distribuidas.

La matriz de condensación elemental en coordenadas locales, $\mathbf{A}^{(e)\prime}$, resulta:

$$\mathbf{A}^{(e)\prime} = \Gamma^{(e)} \begin{bmatrix} \frac{1}{3}L_e & 0 & 0 & \frac{1}{6}L_e & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{20}L_e & \frac{1}{20}L_e^2 & 0 & \frac{3}{20}L_e & -\frac{1}{30}L_e^2 \\ \frac{1}{6}L_e & 0 & 0 & \frac{1}{3}L_e & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{20}L_e & \frac{1}{30}L_e^2 & 0 & \frac{7}{20}L_e & -\frac{1}{20}L_e^2 \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

donde $\Gamma^{(e)}$ representa la longitud de la intersección de la superficie de interacción con el plano de la sección transversal del elemento (es decir, el perímetro del contorno).

La relación entre las coordenadas generalizadas de desplazamientos en coordenadas locales y globales se puede escribir en términos de una matriz de rotación de desplazamientos, $\mathbf{R}_u^{(e)}$, de la siguiente manera:

$$\hat{\mathbf{u}}^{c(e)\prime} = \mathbf{R}_u^{(e)} \cdot \hat{\mathbf{u}}^{c(e)} \tag{4.7}$$

donde la matriz de rotación de desplazamientos está dada por:

$$\mathbf{R}_u^{(e)} = \begin{bmatrix} \cos\left(\alpha^{(e)}\right) & \sin\left(\alpha^{(e)}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\left(\alpha^{(e)}\right) & \cos\left(\alpha^{(e)}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\left(\alpha^{(e)}\right) & \sin\left(\alpha^{(e)}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\left(\alpha^{(e)}\right) & \cos\left(\alpha^{(e)}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

donde $\alpha^{(e)}$ es el ángulo que el eje del elemento, $x\prime$, subtiende al eje x global (Figura 4.2). Por otra parte, la relación entre las coordenadas generalizadas de fuerzas de interacción en coordenadas locales y globales puede escribirse en términos de una matriz de rotación de fuerzas de interacción, $\mathbf{R}_f^{(e)}$, de la siguiente manera:

$$\hat{\mathbf{f}}^{c(e)\prime} = \mathbf{R}_f^{(e)} \cdot \hat{\mathbf{f}}^{c(e)} \tag{4.9}$$

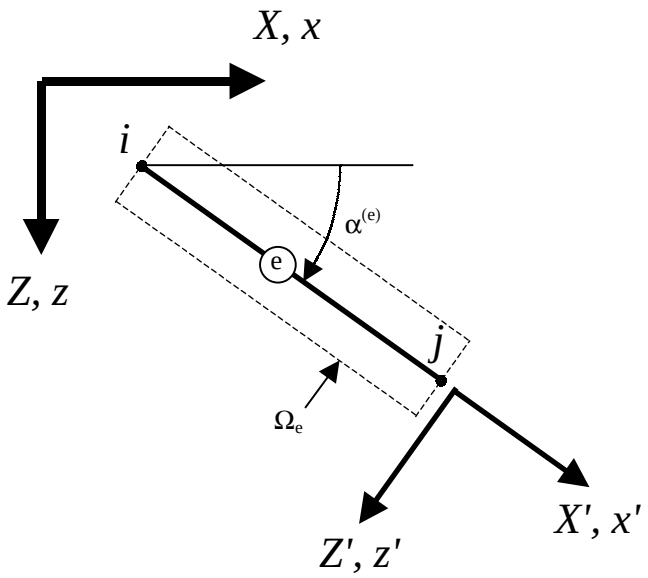

Figura 4.2: Definición del ángulo de orientación, $\alpha^{(e)}$

donde la matriz de rotación de fuerzas de interacción puede escribirse como:

$$\mathbf{R}_f^{(e)} = \begin{bmatrix} \cos\left(\alpha^{(e)}\right) & \sin\left(\alpha^{(e)}\right) & 0 & 0 \\ -\sin\left(\alpha^{(e)}\right) & \cos\left(\alpha^{(e)}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\left(\alpha^{(e)}\right) & \sin\left(\alpha^{(e)}\right) \\ 0 & 0 & -\sin\left(\alpha^{(e)}\right) & \cos\left(\alpha^{(e)}\right) \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

Cabe destacar que idénticas matrices de rotación son definidas para los sistemas de desplazamientos y fuerzas virtuales, es decir:

$$\delta\hat{\mathbf{u}}^{(e)\prime} = \mathbf{R}_u^{(e)} \cdot \delta\hat{\mathbf{u}}^{(e)} \tag{4.11a}$$

$$\delta\hat{\mathbf{f}}^{c(e)\prime} = \mathbf{R}_f^{(e)} \cdot \delta\hat{\mathbf{f}}^{c(e)} \tag{4.11b}$$

Introduciendo (4.7) y (4.11b) en la expresión para el trabajo virtual de los desplazamientos reales (3.21):

$$\delta W = \left[\delta\hat{\mathbf{f}}^{c(e)}\right]^T \cdot \left[\mathbf{R}_f^{(e)}\right]^T \cdot \mathbf{A}^{(e)\prime} \cdot \mathbf{R}_u^{(e)} \cdot \hat{\mathbf{u}}^{c(e)} = \left[\delta\hat{\mathbf{f}}^{c(e)}\right]^T \cdot \mathbf{A}^{(e)} \cdot \hat{\mathbf{u}}^{c(e)} \tag{4.12}$$

donde la matriz de condensación elemental en coordenadas globales, $\mathbf{A}^{(e)}$, resulta:

$$\mathbf{A}^{(e)} = \left[\mathbf{R}_f^{(e)}\right]^T \cdot \mathbf{A}^{(e)\prime} \cdot \mathbf{R}_u^{(e)} \tag{4.13}$$

Otra forma de obtener la matriz de condensación en coordenadas globales es introduciendo (4.9) y (4.11a) en la expresión para trabajos virtuales del sistema de fuerzas de interacción reales, (3.28):

$$\delta W = \left[\delta \hat{\mathbf{u}}^{(e)}\right]^T \cdot \left[\mathbf{R}_u^{(e)}\right]^T \cdot \left[\mathbf{A}^{(e)}\right]^T \cdot \mathbf{R}_f^{(e)} \cdot \hat{\mathbf{f}}^{c(e)} = \left[\delta \hat{\mathbf{u}}^{(e)}\right]^T \cdot \left[\mathbf{A}^{(e)}\right]^T \cdot \hat{\mathbf{f}}^{c(e)} \tag{4.14}$$

donde la matriz de condensación elemental en coordenadas globales resulta idéntica a la indicada en (4.13).

4.3 Evaluación de la matriz de pseudoflexibilidad

La definición de la matriz de pseudoflexibilidad es tal que sólo involucra a la interpolación de fuerzas distribuidas. Dado que la interpolación de las dos componentes (x y z) de estas fuerzas se realiza mediante el mismo tipo de funciones (lineales), no es necesario distinguir entre coordenadas locales y globales. A diferencia de la matriz de condensación, la matriz de pseudoflexibilidad no puede ser ensamblada a partir de matrices elementales, ya que si bien en su definición intervienen productos de funciones de interpolación definidas por tramos, éstas están evaluadas sobre distintas variables ($\mathbf{x}$ y $\mathbf{X}$), las cuales se relacionan mediante la convolución a través del tensor de Green. Por otra parte, la integración necesaria para su evaluación no puede en general realizarse en forma analítica, por lo cual hay que recurrir a integración numérica mediante cuadratura de Gauss.

Para el problema plano en consideración solamente es necesario considerar cuatro componentes del tensor de Green:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_{xx}(\mathbf{x}, \mathbf{X}) & G_{xz}(\mathbf{x}, \mathbf{X}) \\ G_{zx}(\mathbf{x}, \mathbf{X}) & G_{zz}(\mathbf{x}, \mathbf{X}) \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

donde la expresión analítica de cada una de las funciones $G_{mn}(\mathbf{x}, \mathbf{X})$ depende de las características del continuo en consideración (por ejemplo, homogéneo, estratificado, etc.).

Designando i y j a los nodos de interpolación de fuerzas de interacción, los elementos de la matriz de pseudoflexibilidad resultan:

$$B_{2i-1,2j-1} = \int_{\Omega_i}\int_{\Omega_j} N_i\left(s\right)\, G_{xx}\left(\mathbf{x}\left(r,s\right),\mathbf{X}\left(R,S\right)\right)\, N_j\left(S\right)\, d\Omega\left(R,S\right)\, d\Omega\left(r,s\right) \tag{4.16a}$$

$$B_{2i-1,2j} = \int_{\Omega_i}\int_{\Omega_j} N_i\left(s\right)\, G_{xz}\left(\mathbf{x}\left(r,s\right),\mathbf{X}\left(R,S\right)\right)\, N_j\left(S\right)\, d\Omega\left(R,S\right)\, d\Omega\left(r,s\right) \tag{4.16b}$$

$$B_{2i,2j-1} = \int_{\Omega_i}\int_{\Omega_j} N_i\left(s\right)\, G_{zx}\left(\mathbf{x}\left(r,s\right),\mathbf{X}\left(R,S\right)\right)\, N_j\left(S\right)\, d\Omega\left(R,S\right)\, d\Omega\left(r,s\right) \tag{4.16c}$$

$$B_{2i,2j} = \int_{\Omega_i}\int_{\Omega_j} N_i\left(s\right)\, G_{zz}\left(\mathbf{x}\left(r,s\right),\mathbf{X}\left(R,S\right)\right)\, N_j\left(S\right)\, d\Omega\left(R,S\right)\, d\Omega\left(r,s\right) \tag{4.16d}$$

donde N_i y N_j son funciones lineales definidas por tramos que son iguales a uno cuando son evaluadas en los nodos i y j, respectivamente, y cero en los demás nodos. Dado que las fuerzas de interacción han sido asumidas uniformes sobre el perímetro de la sección, N_i y N_j son solamente funciones de la coordenada s. Las integrales en las expresiones (4.16) están definidas sobre las superficies de interacción Ω_i y Ω_j, las cuales se definen como la superficie de interacción del elemento desde el nodo $i-1$ hasta $i+1$ y desde $j-1$ hasta $j+1$, respectivamente. El significado físico de los coeficientes de la matriz de pseudoflexibilidad puede entenderse de la siguiente manera: $B_{2i-1,2j-1}$ está dado por la integral del producto de la función de forma N_i y los desplazamientos verticales resultantes de la aplicación de un sistema de fuerzas distribuidas verticales dado por N_j (Figura 4.3). Es decir que son una medida de los desplazamientos en las proximidades del nodo i debidos a fuerzas distribuidas en las proximidades del nodo j.

Cabe destacar, por otra parte, que la evaluación de las expresiones (4.16) requiere la evaluación de integrales de cuatro dimensiones. Sin embargo, a fines de reducir la integración requerida en una dimensión, puede realizarse una aproximación ad-hoc. Esta aproximación consiste en reemplazar la función de mapeo $\mathbf{x}(r,s)$ (3.4a) por una función aproximada, $\tilde{\mathbf{x}}(s)$, que en vez de mapear la superficie de interacción, mapea el eje del elemento. Al introducir esta función de mapeo aproximada en (4.16), la integración requerida

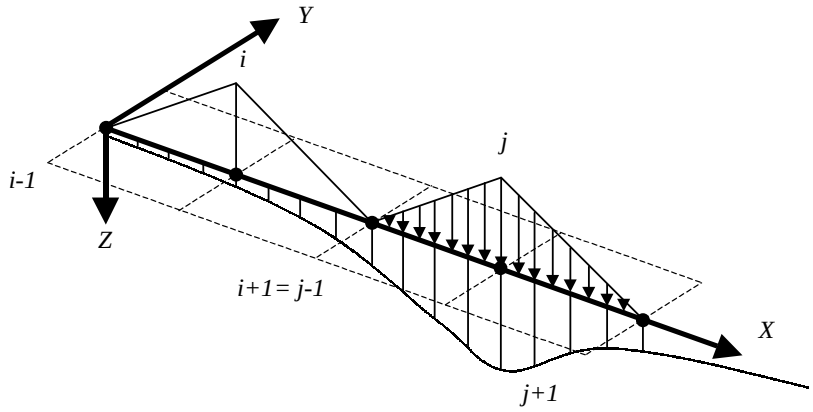

Figura 4.3: Interpretación física de los elementos de la matriz de pseudoflexibilidad, $B_{2i-1,2j-1}$

es de tres dimensiones, lo cual se traduce en un significativo ahorro computacional. Esta aproximación implica asumir que el desplazamiento en el semiespacio extendido evaluado en el eje del elemento es igual al desplazamiento promedio sobre el perímetro de la sección. Al introducir la función de mapeo aproximada, se pierde la simetría de mapeo indicada en (3.5), por lo cual la simetría de la matriz de rigidez no puede ser garantizada. Sin embargo, la pérdida de simetría es muy débil, lo cual puede es evidenciado por el ejemplo de la Figura 4.4, donde se muestra la evaluación de los elementos $B_{2i-1,2j-1}$, y $B_{2j-1,2i-1}$, mediante la función de mapeo rigurosa $\mathbf{x}(r,s)$ y su contraparte aproximada, $\tilde{\mathbf{x}}(s)$. Puede verse que la diferencia relativa entre los valores asociados a la función de mapeo rigurosa y los correspondientes a la contraparte aproximada está por debajo del 1 % para el ejemplo en cuestión, mientras que la pérdida de simetría es también insignificante (0.6 % en este ejemplo). Por otra parte, el esfuerzo computacional asociado a la utilización de la función de mapeo aproximada es considerablemente inferior al correspondiente a la utilización de la función de mapeo rigurosa. Cabe destacar que esta aproximación es introducida a priori por las formulaciones convencionales del BEM para el análisis de estructuras de barras enterradas, ya que las mismas utilizan métodos de colocación sobre el eje del elemento en el semiespacio extendido (por ejemplo, [7], [6], [17], [19], [16]). Introduciendo la función de

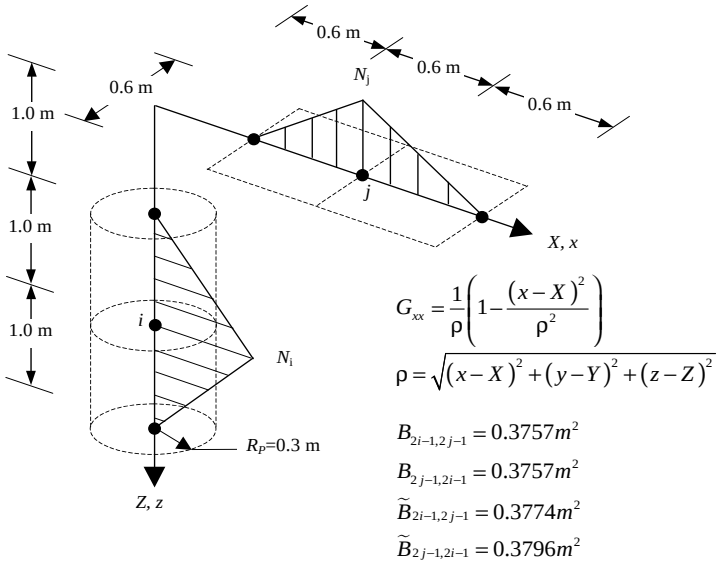

Figura 4.4: Ejemplo de pérdida de simetría debido a integración reducida

mapeo aproximada, las ecuaciones (4.16) pueden escribirse de la siguiente manera:

$$B_{2i-1,2j-1} = \Gamma_{i-1}\left(I1_{ij}^{xx} + I2_{ij}^{xx}\right) + \Gamma_i\left(I3_{ij}^{xx} + I4_{ij}^{xx}\right) \tag{4.17a}$$

$$B_{2i-1,2j} = \Gamma_{i-1}\left(I1_{ij}^{xz} + I2_{ij}^{xz}\right) + \Gamma_i\left(I3_{ij}^{xz} + I4_{ij}^{xz}\right) \tag{4.17b}$$

$$B_{2i,2j-1} = \Gamma_{i-1}\left(I1_{ij}^{zx} + I2_{ij}^{zx}\right) + \Gamma_i\left(I3_{ij}^{zx} + I4_{ij}^{zx}\right) \tag{4.17c}$$

$$B_{2i,2j} = \Gamma_{i-1}\left(I1_{ij}^{zz} + I2_{ij}^{zz}\right) + \Gamma_i\left(I3_{ij}^{zz} + I4_{ij}^{zz}\right) \tag{4.17d}$$

donde Γ_{i-1} y Γ_i son los perímetros de la sección definidos desde el nudo $i-1$ al i y desde el i al $i+1$, respectivamente. Las integrales $I1_{ij}^{mn}$, $I2_{ij}^{mn}$, $I3_{ij}^{mn}$ y $I4_{ij}^{mn}$, están dadas por:

$$I1_{ij}^{mn} = \int_{s_{i-1}}^{s_i}\int_{S_{j-1}}^{S_j}\int_{\Gamma_{j-1}} \frac{s - s_{i-1}}{s_i - s_{i-1}} G_{mn}\left(\tilde{\mathbf{x}}\left(s\right), \mathbf{X}\left(R,S\right)\right) \frac{S - S_{j-1}}{S_j - S_{j-1}} d\Gamma\left(R\right)\, dS\, ds \tag{4.18a}$$

$$I2_{ij}^{mn} = \int_{s_{i-1}}^{s_i}\int_{S_j}^{S_{j+1}}\int_{\Gamma_j} \frac{s - s_{i-1}}{s_i - s_{i-1}} G_{mn}\left(\tilde{\mathbf{x}}\left(s\right), \mathbf{X}\left(R,S\right)\right) \frac{S - S_{j+1}}{S_j - S_{j+1}} d\Gamma\left(R\right)\, dS\, ds \tag{4.18b}$$

$$I3_{ij}^{mn} = \int_{s_i}^{s_{i+1}}\int_{S_{j-1}}^{S_j}\int_{\Gamma_{j-1}} \frac{s - s_{i+1}}{s_i - s_{i+1}} G_{mn}\left(\tilde{\mathbf{x}}\left(s\right), \mathbf{X}\left(R,S\right)\right) \frac{S - S_{j-1}}{S_j - S_{j-1}} d\Gamma\left(R\right)\, dS\, ds \tag{4.18c}$$

$$I4_{ij}^{mn} = \int_{s_i}^{s_{i+1}}\int_{S_j}^{S_{j+1}}\int_{\Gamma_j} \frac{s - s_{i+1}}{s_i - s_{i+1}} G_{mn}\left(\tilde{\mathbf{x}}\left(s\right), \mathbf{X}\left(R,S\right)\right) \frac{S - S_{j+1}}{S_j - S_{j+1}} d\Gamma\left(R\right)\, dS\, ds \tag{4.18d}$$

La evaluación numérica de las integrales (4.18) depende de la geometría de la superficie de interacción del elemento, la cual está dada por la función de mapeo, $\mathbf{X}(R,S)$, y de las funciones de Green representativas del problema en estudio. Las variables de integración s y S indican la posición sobre el eje del elemento, mientras que R especifica la posición sobre el perímetro de la sección. Por lo tanto, es la integración con respecto a esta última variable ($d\Gamma(R)$) la que depende de la forma de la superficie de interacción; la integración con respecto a r ha sido realizada multiplicando los valores de $\mathbf{B}$ por los correspondientes perímetros, como se indica en (4.17). Es decir que en la evaluación de las integrales (4.18) interviene la forma de la superficie de interacción del elemento ubicado entre los nodos $j-1$ y j para las integrales (4.18a) y (4.18c) y la forma de la superficie de interacción del elemento ubicado entre los nodos j y $j+1$ para las integrales (4.18b) y (4.18d).

4.3.1 Elementos con superficie de interacción cilíndrica

Estos elementos son útiles para modelar pilotes de sección circular. Para la evaluación de las integrales (4.18) en correspondencia con elementos cilíndricos de radio, R_p, es conveniente utilizar un sistema de coordenadas locales R y S de tipo polar, donde S representa el eje del elemento y R el arco del perímetro circular. Para un elemento comprendido entre los nodos j y $j+1$, (Figura 4.5) la función de mapeo está dada por:

$$\mathbf{X}^{(e)}(R,S) = \mathbf{X}_j + \frac{\mathbf{X}_{j+1}-\mathbf{X}_j}{L^{(e)}}S + R_p \begin{bmatrix} -\sin\left(\alpha^{(e)}\right)\sin\left(\frac{R}{R_p}\right) \\ \cos\left(\frac{R}{R_p}\right) \\ \cos\left(\alpha^{(e)}\right)\sin\left(\frac{R}{R_p}\right) \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

donde $\mathbf{X}_j$ y $\mathbf{X}_{j+1}$ son los vectores posición de los nodos j y $j+1$, respectivamente y $L^{(e)}$ es la longitud del elemento. A modo de ilustración, para un pilote vertical (es decir, $\alpha^{(e)} = \pi/2$) de sección cilíndrica, cuyo eje coincide con el eje Z, (es decir, $X_j, Y_j, X_{j+1}, Y_{j+1} = 0$) la

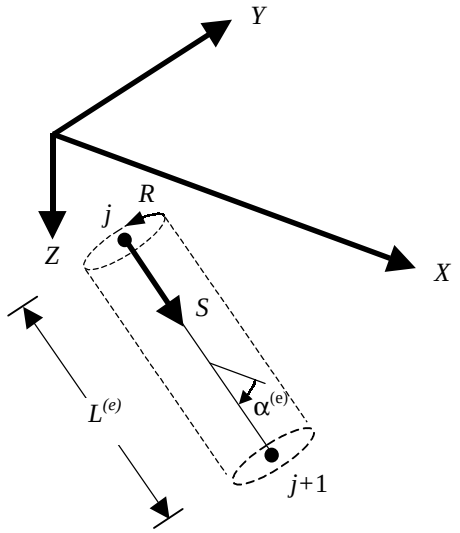

Figura 4.5: Elemento plano con superficie de interacción cilíndrica

función de mapeo resulta:

$$\mathbf{X}^{(e)}(R,S) = \begin{bmatrix} -R_p \sin\left(\frac{R}{R_p}\right) \\ R_p \cos\left(\frac{R}{R_p}\right) \\ Z_j + \frac{Z_{j+1}-Z_j}{L^{(e)}} S \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

La función de mapeo aproximada, por otra parte, no depende de la forma de la superficie de interacción y está dada por:

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(e)}(s) = \mathbf{x}_i + \frac{\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i}{L^{(e)}} s \tag{4.21}$$

Para las superficies de interacción cilíndricas, la integración indicada en (4.18) se realiza con respecto al sistema de coordenadas polares, por ejemplo (4.18a) resulta:

$$I1_{ij}^{mn} = \int_{s_{i-1}}^{s_i} \int_{S_{j-1}}^{S_j} \int_0^{2\pi R_p} \frac{s - s_{i-1}}{s_i - s_{i-1}} G_{mn}\left(\tilde{\mathbf{x}}(s), \mathbf{X}(R,S)\right) \frac{S - S_{j-1}}{S_j - S_{j-1}} \, dR \, dS \, ds \tag{4.22}$$

Es importante resaltar que las funciones de Green para desplazamientos debidos a cargas puntuales tienen una singularidad de orden $O(1/|\mathbf{r}|)$, donde $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$. Es decir que, a fines de realizar la integración numérica, es necesario identificar aquellas integrales que contengan singularidades en su dominio. En el caso de los elementos con superficie de interacción cilíndrica con función de mapeo aproximada, no existen singularidades. Esto

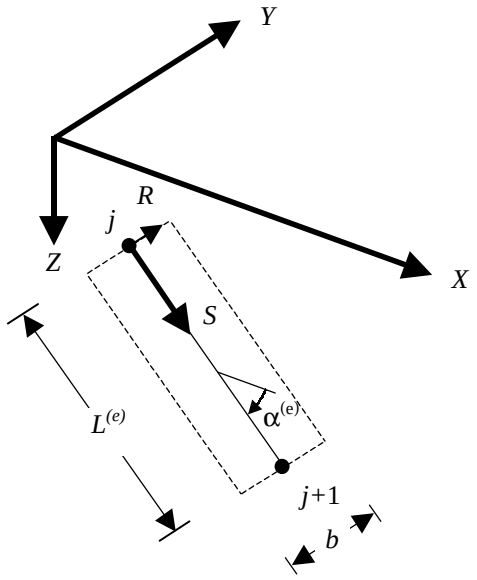

Figura 4.6: Elemento plano con superficie de interacción rectangular

es así ya que la función de mapeo aproximada $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ no intersecta a $\mathbf{X}(R,S)$, es decir: $|\tilde{\mathbf{x}}(s) - \mathbf{X}(R,S)| \neq 0 \ \forall \ s,R,S$, dado que $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ mapea el eje de la viga mientras que $\mathbf{X}(R,S)$ mapea la superficie de interacción, la cual no contiene al eje para elementos con superficie de interacción cilíndrica.

4.3.2 Elementos con superficie de interacción rectangular

Estos elementos son particularmente útiles para modelar vigas de fundación, cuya superficie de interacción es la superficie inferior de la viga. A fines de evaluar las integrales (4.18) en correspondencia con elementos rectangulares de ancho, b, se usa un sistema de coordenadas locales R y S de tipo cartesiano, donde S representa el eje del elemento y R la distancia normal desde el eje del elemento sobre la superficie de interacción (Figura 4.6). Para un elemento comprendido entre los nodos j y $j+1$, (Figura 4.5) la función de mapeo está dada por:

$$\mathbf{X}^{(e)}(R,S) = \mathbf{X}_j + \frac{\mathbf{X}_{j+1} - \mathbf{X}_j}{L^{(e)}} S + R \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

Para una viga superficial de, cuyo eje coincide con el eje X, (es decir, $Z_j, Y_j, Z_{j+1}, Y_{j+1} = 0$) la función de mapeo resulta:

$$\mathbf{X}^{(e)}(R,S) = \begin{bmatrix} X_j + \frac{X_{j+1} - X_j}{L^{(e)}} S \\ R \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

Dado que la función de mapeo aproximada no depende de la forma de la superficie de interacción, es idéntica a la indicada en (4.21). Para las superficies de interacción rectangulares, la integración indicada en (4.18) se realiza con respecto al sistema de coordenadas cartesianas locales, por ejemplo (4.18a) resulta:

$$I1_{ij}^{mn} = \int_{s_{i-1}}^{s_i} \int_{S_{j-1}}^{S_j} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{s - s_{i-1}}{s_i - s_{i-1}} G_{mn}\left(\tilde{\mathbf{x}}(s), \mathbf{X}(R,S)\right) \frac{S - S_{j-1}}{S_j - S_{j-1}} \, dR \, dS \, ds \tag{4.25}$$

En el caso de los elementos con superficie de interacción rectangular con función de mapeo aproximada, existen singularidades. Esto es así ya que la función de mapeo aproximada $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ intersecta a $\mathbf{X}(R,S)$, es decir: $|\tilde{\mathbf{x}}(s) - \mathbf{X}(R,S)| = 0 \ \forall \ s = S, R = 0$, dado que $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ mapea el eje de la viga mientras que $\mathbf{X}(R,S)$ mapea la superficie de interacción, la cual contiene al eje. Asumiendo que todos los elementos son rectangulares y que los nodos son numerados secuencialmente, existen cuatro casos de integración, lo cuales están ilustrados en las Figuras 4.7, 4.8, 4.9 y 4.10. El caso a) (Figura 4.7) corresponde a la situación en donde no se encuentran singularidades en el dominio de integración, y por lo tanto en este caso la integración puede realizarse directamente como se indica en (4.18). En el caso b) (Figura 4.8) existe una zona del dominio de integración que posee singularidades. Esta zona corresponde al dominio de integración de $I3$; es decir que, para este caso, $I1$, $I2$ e $I4$ pueden evaluarse como se indica en (4.18), mientras que para la evaluación de $I3$ es necesario recurrir a integración singular. En el caso c) (Figura 4.9),

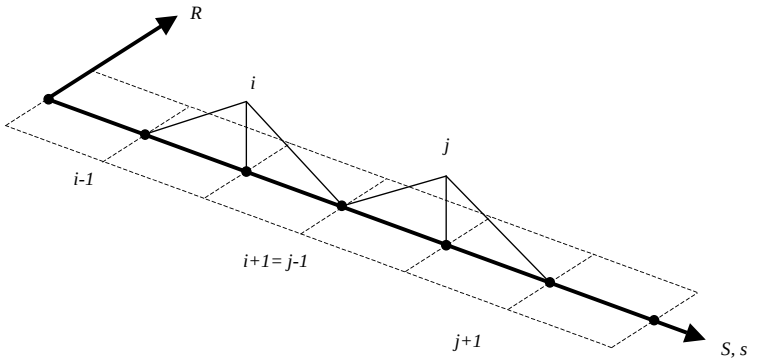

Figura 4.7: Caso a): Integración regular; $|i - j| > 1$

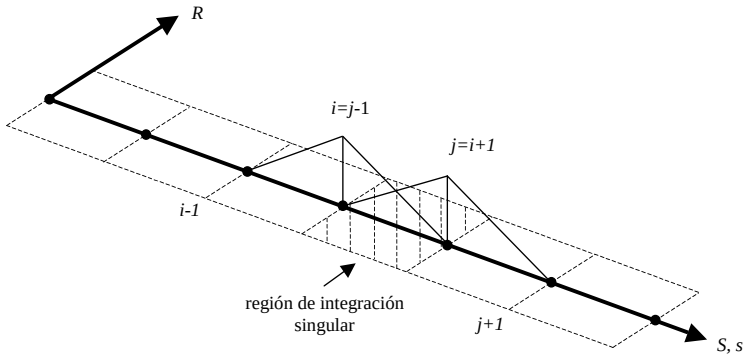

Figura 4.8: Caso b): Integración singular; $i = j - 1$

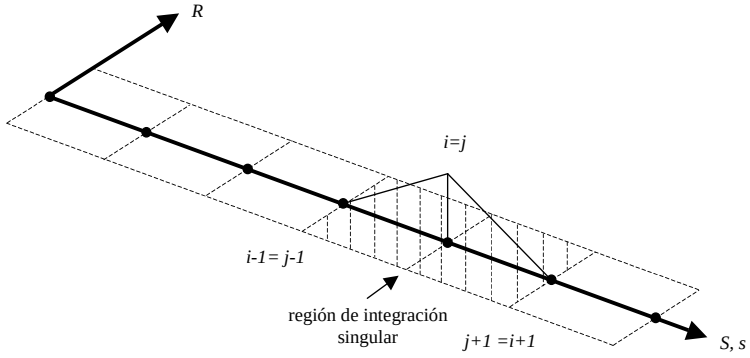

Figura 4.9: Caso c): Integración singular; $i = j$

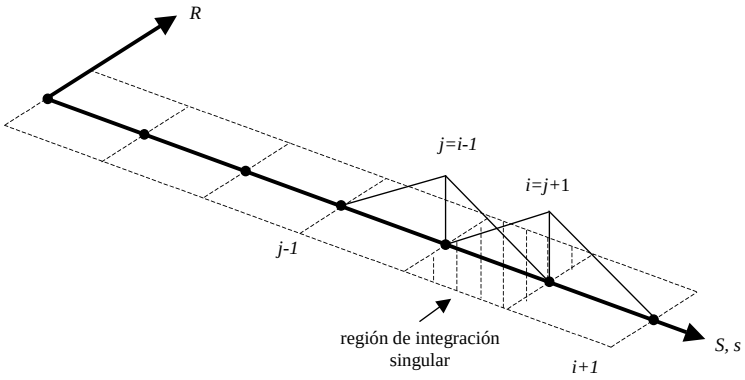

Figura 4.10: Caso d): Integración singular; $i = j + 1$

similarmente, existen dos zonas del dominio de integración que poseen singularidades; las cuales corresponden a las integrales $I1$ e $I4$. Es decir que en este caso, $I2$ e $I3$ pueden evaluarse como se indica en (4.18), mientras que para la evaluación de $I1$ e $I4$ es necesario recurrir a integración singular. Por último, en el caso d) (Figura 4.10) el dominio de integración singular corresponde a la integral $I2$, por lo cual, en este caso, $I2$ debe ser evaluada mediante el proceso de integración singular descripto a continuación.

Integración singular

A fines de realizar la integración numérica en los casos en que existen singularidades, se recurre a un esquema de integración polar (por ejemplo, [18]). A continuación se detalla la implementación de este esquema para la integración singular de $I1$, siendo la implementación para las otras integrales totalmente análoga. La integral $I1$ puede escribirse como:

$$I1_{ij}^{mn} = \int_{s_{i-1}}^{s_i} \frac{s - s_{i-1}}{s_i - s_{i-1}} \mathcal{I}(s)\, ds \tag{4.26}$$

donde:

$$\mathcal{I}(s) = \int_{\Omega_{j-1}} G_{mn}\left(\tilde{\mathbf{x}}(s), \mathbf{X}(R,S)\right) \frac{S - S_{j-1}}{S_j - S_{j-1}}\, d\Omega\ (R,S) \tag{4.27}$$

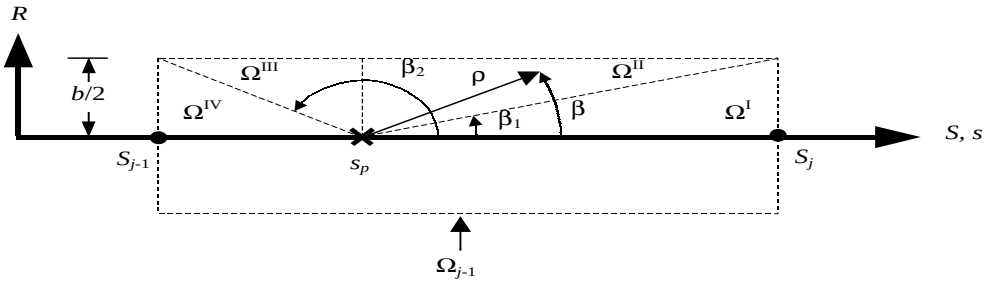

Figura 4.11: Esquema de integración singular

Cabe destacar que la función $\mathcal{I}(s)$ no posee singularidades, ya que representa los desplazamientos debidos a una carga distribuida. Por lo tanto, la integración en (4.26) no contiene singularidades en su dominio y puede evaluarse mediante cuadratura de Gauss de la siguiente manera:

$$I1_{ij}^{mn} = \frac{s_i - s_{i-1}}{2} \sum_p \frac{1+\eta_p}{2} \mathcal{I}(s_p)\, w_p \tag{4.28}$$

donde:

$$s_p = \frac{s_i + s_{i-1}}{2} + \frac{s_i - s_{i-1}}{2} \eta_p \tag{4.29}$$

donde p es el índice que identifica los puntos de Gauss, η_p son las coordenadas canónicas de los puntos de Gauss ($-1 \leq \eta \leq 1$) y w_p son los pesos de los puntos de Gauss (por ejemplo, [3]). La evaluación de $\mathcal{I}(s_p)$, por otra parte, requiere integración singular, ya que $\tilde{\mathbf{x}}(s_p)$ se encuentra sobre el dominio de integración, Ω_{j-1}. El valor de $\mathcal{I}(s_p)$ representa el desplazamiento del punto $\tilde{\mathbf{x}}(s_p)$ debido a la carga distribuida aplicada en Ω_{j-1}. A fines de eliminar la singularidad en la evaluación de $\mathcal{I}(s_p)$, se define un sistema de coordenadas polares (Figura 4.11) con origen en $\tilde{\mathbf{x}}(s_p)$ y cuyas variables radiales, ρ, y angulares, β, son definidas sobre el dominio de integración rectangular Ω_{j-1}. Dada la simetría del problema, la evaluación de $\mathcal{I}(s)$ puede plantearse de la siguiente manera:

$$\mathcal{I}(s) = \int_{\Omega_{j-1}} [..]\, d\Omega = 2 \left\{ \int_{\Omega^I} [..]\, d\Omega + \int_{\Omega^{II}} [..]\, d\Omega + \int_{\Omega^{III}} [..]\, d\Omega + \int_{\Omega^{IV}} [..]\, d\Omega \right\} \tag{4.30}$$

o bien:

$$\mathcal{I}(s) = 2\ \{\mathcal{I}1 + \mathcal{I}2 + \mathcal{I}3 + \mathcal{I}4\} \tag{4.31}$$

Utilizando el sistema de coordenadas polares ilustrado en la Figura 4.11, $\mathcal{I}1$ resulta:

$$\mathcal{I}1 = \int_0^{\beta_1} \int_0^{\frac{S_j - s_p}{\cos(\beta)}} G_{mn}\left(\tilde{\mathbf{x}}(s_p), \mathbf{X}(R(\rho,\beta), S(\rho,\beta))\right) \frac{S - S_{j-1}}{S_j - S_{j-1}}\, \rho\, d\rho\, d\beta \tag{4.32}$$

donde:

$$\beta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{b}{2(S_j - s_p)}\right) \tag{4.33a}$$

$$R(\rho,\beta) = \rho \sin(\beta) \tag{4.33b}$$

$$S(\rho,\beta) = s_p + \rho \cos(\beta) \tag{4.33c}$$

La integral (4.32) no posee singularidades en su dominio, ya que la singularidad de orden $O(1/\rho)$ de las funciones de Green es suavizada por el Jacobiano de la transformación a coordenadas polares, el cual es igual a ρ. A fines de evaluar (4.32) mediante cuadratura de Gauss, es necesario introducir una transformación que elimine la existencia del límite variable en (4.32):

$$\beta = \frac{\zeta + 1}{2}\beta_1 \tag{4.34a}$$

$$\rho = \frac{\vartheta + 1}{2\cos\left(\frac{\zeta+1}{2}\beta_1\right)}(S_j - s_p) \tag{4.34b}$$

El Jacobiano de la transformación resulta:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\zeta}{\partial\beta} & \frac{\partial\zeta}{\partial\rho} \\ \frac{\partial\vartheta}{\partial\beta} & \frac{\partial\vartheta}{\partial\rho} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\beta_1}{2} & 0 \\ \frac{\beta_1 \rho \tan(\beta)}{2} & \frac{S_j - s_p}{2\cos(\beta)} \end{bmatrix} \tag{4.35}$$

Introduciendo la transformación, la integral (4.32) resulta:

$$\mathcal{I}1 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} G_{mn}\left(\tilde{\mathbf{x}}(s_p), \mathbf{X}(R(\zeta,\vartheta), S(\vartheta))\right) \frac{s_p + \frac{\vartheta+1}{2}(S_j - s_p) - S_{j-1}}{S_j - S_{j-1}} \ldots$$
$$\ldots \frac{\beta_1 (S_j - s_p)^2 (\vartheta + 1)}{8\left[\cos\left(\frac{\zeta+1}{2}\beta_1\right)\right]^2} d\zeta\, d\vartheta \tag{4.36}$$

donde:

$$R(\zeta,\vartheta) = \tan\left(\frac{\zeta+1}{2}\beta_1\right)\frac{\vartheta+1}{2}(S_j - s_p) \tag{4.37a}$$

$$S(\vartheta) = s_p + \frac{\vartheta+1}{2}(S_j - s_p) \tag{4.37b}$$

De esta manera, $\mathcal{I}1$ puede ser directamente evaluada mediante cuadratura de Gauss. Para la evaluación de $\mathcal{I}2$, $\mathcal{I}3$ e $\mathcal{I}4$, se sigue un procedimiento análogo al correspondiente a $\mathcal{I}1$, siendo la única diferencia los límites de integración y, consecuentemente, las transformaciones para eliminar los límites variables. Los detalles de la evaluación de $\mathcal{I}2$, $\mathcal{I}3$ e $\mathcal{I}4$, están dados en el Apéndice A.

Una vez obtenidos los valores de $\mathcal{I}1$, $\mathcal{I}2$, $\mathcal{I}3$ e $\mathcal{I}4$, el valor de $I1_{ij}^{mn}$ puede ser obtenido mediante (4.28). La obtención de $I2_{ij}^{mn}$, $I3_{ij}^{mn}$ e $I4_{ij}^{mn}$ es completamente análoga a la descripta para $I1_{ij}^{mn}$.

Capítulo 5

Ejemplos de aplicación

En el presente Capítulo se presentan los resultados obtenidos de la implementación computacional del elemento plano de dos nodos obtenido mediante la presente formulación. Se presentan dos tipos de ejemplos; ejemplos de validación y de aplicación. Dado que en la literatura sólo existen resultados establecidos para pilotes verticales y grupos de pilotes, los ejemplos de validación están referidos a este tipo de estructuras. Los ejemplos de aplicación considerados en este capítulo corresponden al análisis de la rigidez dinámica de un pórtico enterrado y al análisis de la rigidez dinámica de un pilote inclinado.

5.1 Ejemplos de validación

5.1.1 Generalidades

A fines de validar la presente formulación y el elemento propuesto, se estudia el comportamiento tanto estático como dinámico de un pilote vertical aislado, de sección circular

de radio, R_p, y longitud, L, enterrado en un suelo homogéneo con módulo de corte, μ, y módulo de Poisson, $\nu = 0{,}5$ (Figura 5.1). Se estudia, además, el comportamiento tanto estático como dinámico de grupos de pilotes verticales en términos de los conocidos factores de interacción (por ejemplo, [26], [24], [10]).

Para el comportamiento estático de pilotes aislados, los resultados más establecidos en la literatura son los dados por Mattes y Poulos ([19]) y por Randolph y Wroth ([29]), para el caso de fuerzas axiales, y por Poulos ([25]) y Randolph ([28]) para el caso de solicitaciones laterales. Para el comportamiento dinámico de pilotes aislados, por otra parte, los resultados de Mamoon y colaboradores ([17], [16]) y Gazetas ([9]) son frecuentemente citados en la literatura especializada. A fines de realizar la comparación de los resultados, es práctica habitual comparar los valores estáticos por una parte y los valores dinámicos, normalizados con respecto a la componente estática por otra. Dado que muchos resultados de rigidez dinámica en la literatura están presentados de esta forma (adimensional), los resultados obtenidos mediante la presente formulación serán presentados de la misma manera.

A fines de estudiar el comportamiento estático de grupos de pilotes sin vinculación, los resultados obtenidos mediante la formulación propuesta son cotejados con los indicados por Poulos ([24]), en términos de los conocidos factores de interacción. Los resultados correspondientes al comportamiento dinámico de grupos de pilotes son a su vez comparados con los propuestos por Gazetas y colaboradores, quienes extienden al caso dinámico el concepto del factor de interacción inicialmente sugerido por Poulos para el comportamiento estático.

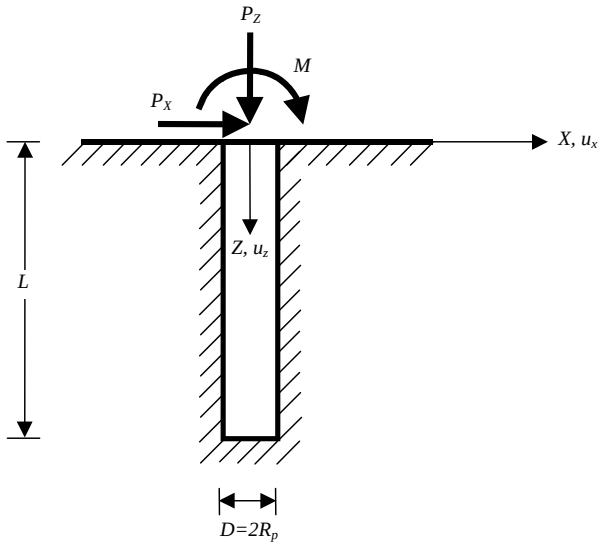

Figura 5.1: Pilote vertical de sección circular, sometido a cargas en su extremo superior

5.1.2 Rigidez estática de pilotes aislados

A fines de comparar la rigidez estática del pilote, se definen los siguientes coeficientes adimensionales de rigidez:

$$k_Z = \frac{K_Z}{\mu\, R_p} \tag{5.38a}$$

$$k_X = \frac{K_X}{\mu\, R_p} \tag{5.38b}$$

$$k_{XX} = \frac{K_{XX}}{\mu\, R_p} \tag{5.38c}$$

donde el coeficiente k_Z corresponde a la rigidez axial, k_X a la rigidez lateral sin restricciones al giro en el extremo superior y k_{XX} a la rigidez lateral con giro restringido en el extremo superior. Los coeficientes de rigidez dados por Mattes y Poulos se presentan de la forma:

$$k = \frac{2L}{R_p}\,(1+\nu)\,\frac{1}{I_\rho} \tag{5.39}$$

donde los valores de I_ρ están dados en una serie de gráficos en escalas logarítmicas. Cabe destacar, por otra parte, que la rigidez lateral dada por Poulos considera una superficie

		k_Z			k_X			k_{XX}		
E_p/E_s	L/D	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)
50	10	26.0	27.8	28.5	8.3	10.0	10.0	13.1	16.8	15.9
	15	29.1	27.7	29.3	9.0	10.0	10.0	13.6	16.8	15.9
	20	32.8	27.2	30.3	9.3	10.0	10.0	13.3	16.8	15.9
200	10	36.3	39.5	38.3	10.2	12.1	12.1	16.3	20.5	20.1
	15	43.8	44.7	44.9	11.1	12.1	12.1	17.1	20.5	20.1
	20	47.8	47.6	48.6	10.7	12.1	12.1	17.6	20.5	20.1
1000	10	41.2	45.3	43.4	13.5	15.3	15.7	22.1	25.8	26.7
	15	53.3	56.0	55.4	15.3	15.3	15.7	22.6	25.8	26.7
	20	61.4	65.0	65.2	14.6	15.3	15.7	23.3	25.8	26.7

Tabla 5.1: Coeficientes de rigidez estática de pilotes: (1) Mattes y Poulos; (2) Randolph; (3) formulación propuesta

de interacción rectangular con un ancho igual al diámetro del pilote. Randolph y Wroth, por otra parte, presentan expresiones cerradas para la evaluación de los coeficientes de rigidez en función de las características geométricas y mecánicas del pilote y el suelo. Las expresiones presentadas por estos autores son obtenidas mediante principios mecánicos y calibraciones con modelos de elementos finitos. La Tabla 5.1 muestra los resultados obtenidos por los mencionados autores y los correspondientes a la formulación propuesta en este trabajo para los coeficientes de rigidez de pilotes verticales, considerando un rango usual de esbeltez, L/D ($D = 2R_p$) , y un rango usual de relación de rigidez, E_p/E_s, donde E_p y E_s son los módulos elásticos del pilote y del suelo, respectivamente. Puede verse que los resultados obtenidos por la presente formulación son consistentes con los obtenidos por otros autores, particularmente con los obtenidos por Randoph y Wroth.

En la Figura 5.2 se dan los desplazamientos axiales del pilote, normalizados con respecto al desplazamiento en el extremo superior del mismo, para el caso de una carga

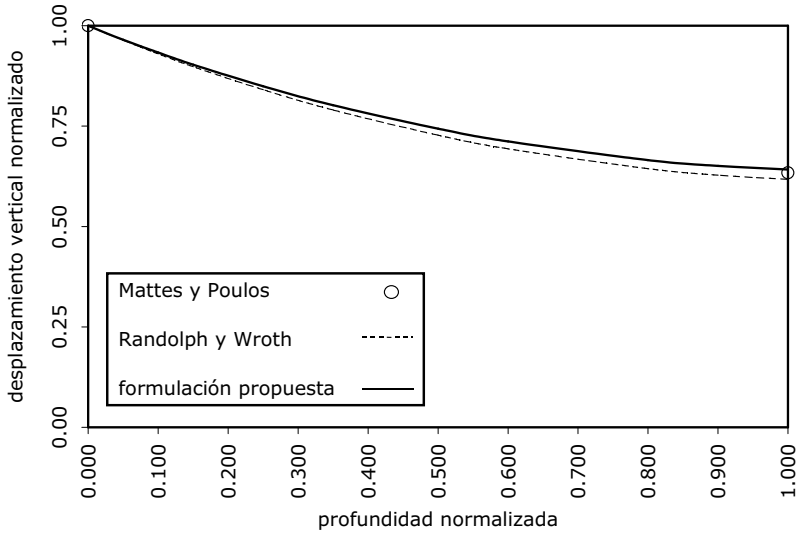

Figura 5.2: Desplazamientos verticales normalizados de un pilote de sección circular con $L/D = 15$; $E_p/E_s = 200$; $\nu = 0{,}5$

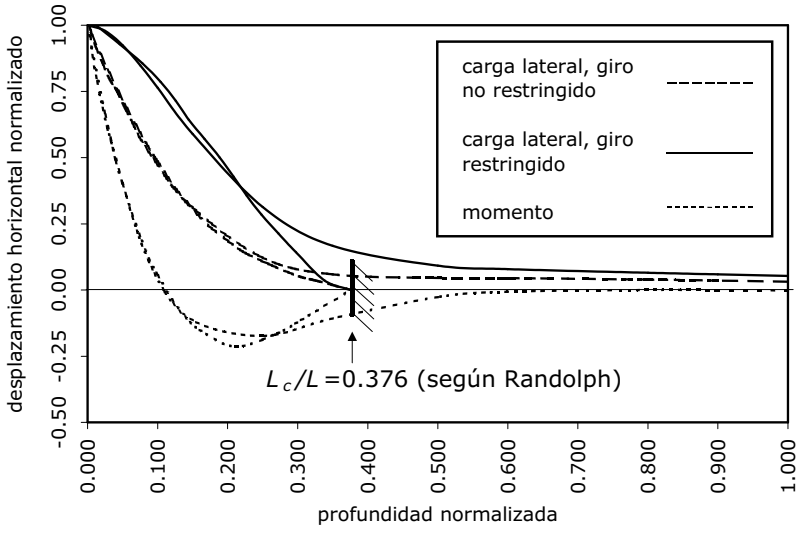

Figura 5.3: Desplazamientos horizontales normalizados de un pilote de sección circular con $L/D = 15$; $E_p/E_s = 200$; $\nu = 0{,}5$

vertical. Puede verse que los resultados obtenidos mediante la presente formulación son consistentes con los presentados por otros autores. La Figura 5.3 muestra los desplazamientos laterales del pilote, normalizados también con respecto al desplazamiento en el extremo superior, para el caso de una carga lateral sin restricción al giro en el extremo superior, una carga lateral con restricción al giro en dicho extremo, y un momento flexionante en el extremo superior. En la misma Figura, se dan los valores indicados por Randolph, los cuales esencialmente coinciden con los obtenidos mediante la formulación propuesta, excepto en las proximidades de la longitud activa, L_c, (ver detalles en [28]) donde la solución de Randolph considera un punto fijo.

5.1.3 Rigidez dinámica de pilotes aislados

A fines de establecer una comparación entre los resultados obtenidos mediante la formulación propuesta para pilotes individuales y los correspondientes a otros autores, se definen los siguientes coeficientes de rigidez dinámica normalizados con respecto a la rigidez estática:

$$k_z^r(\omega) + i\, k_z^i(\omega) = \frac{K_z(\omega)}{K_z(\omega = 0)} \tag{5.40a}$$

$$k_x^r(\omega) + i\, k_x^i(\omega) = \frac{K_x(\omega)}{K_x(\omega = 0)} \tag{5.40b}$$

$$k_{xx}^r(\omega) + i\, k_{xx}^i(\omega) = \frac{K_{xx}(\omega)}{K_{xx}(\omega = 0)} \tag{5.40c}$$

donde los supraíndices 'r' e 'i' indican que se trata de la componente real o imaginaria, respectivamente. De esta definición, se desprende que los coeficientes dinámicos para frecuencia cero son idénticamente iguales a la unidad. Consecuentemente, estos coeficientes tienen componente real unitaria e imaginaria nula, aún cuando se considere la existencia de amortiguamiento histerético. Esta forma de presentar los resultados es convencional en la literatura especializada en el tema de rigidez dinámica de pilotes (por ejemplo; [17], [32]),

ya que indica la variación de la rigidez dinámica con respecto al valor estático, discutido en la sección anterior. Las Figuras 5.4, 5.5, 5.6 y 5.7, muestran los resultados obtenidos mediante la formulación propuesta para los coeficientes adimensionales de la matriz de rigidez dinámica del pilote. Cabe destacar que la matriz de rigidez dinámica del pilote, definida por los grados de libertad indicados en la Figura 5.1, resulta simétrica, lo cual es una consecuencia de la simetría de la formulación. En estas Figuras, se dan también los valores obtenidos por Mamoon y colaboradores ([16], [17]), y los sugeridos por Gazetas ([9]). Cabe destacar que los valores sugeridos por Gazetas corresponden a expresiones simplificadas, basadas en calibraciones con modelos rigurosos, que consideran una componente de rigidez real constante e igual al valor estático. La componente imaginaria, por otra parte, es asumida linealmente creciente con la frecuencia (es decir, asume un modelo de amortiguamiento linealmente viscoso para el sistema pilote-suelo), lo cual representa una aproximación de la realidad. Del análisis de las Figuras 5.4, 5.5, 5.6 y 5.7, se desprende que los valores obtenidos mediante la formulación presente para la rigidez dinámica de un pilote aislado, son consistentes con los obtenidos por otros autores. Las Figuras 5.8, 5.9 y 5.10 muestran las componentes reales e imaginarias de los desplazamientos de un pilote aislado sometido a cargas armónicas del tipo $e^{i\omega t}$ para el caso de una carga axial, lateral y momento, respectivamente.

5.1.4 Grupos de pilotes: Factores de interacción

A fines de evaluar la consistencia de la presente formulación con resultados establecidos en la literatura para el caso de grupos de pilotes, se estudia el coeficiente de interacción, α, en la dirección vertical. Este coeficiente fue inicialmente definido por Poulos ([24]) para el comportamiento estático de pilotes verticales sin vinculación como (Figura 5.11):

$$\alpha = \frac{\text{desplazamiento en el pilote 2 debido a una carga unitaria en el pilote 1}}{\text{desplazamiento en el pilote 1 debido a una carga unitaria en el pilote 1}} \tag{5.41}$$

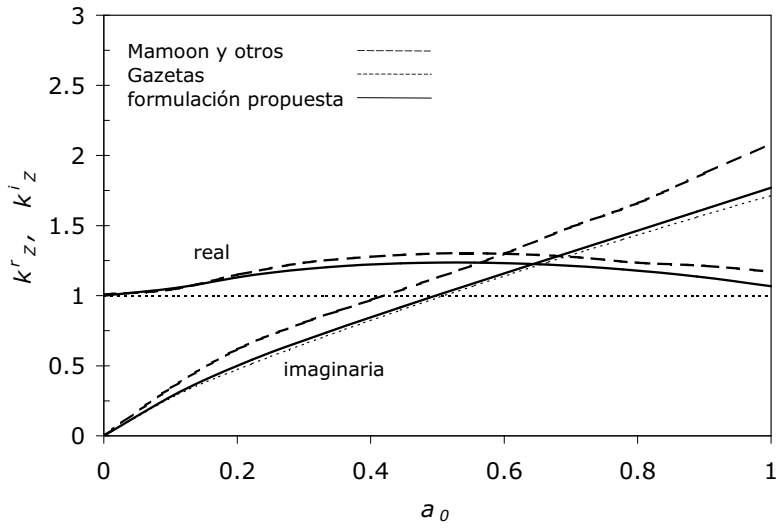

Figura 5.4: Coeficiente de rigidez dinámica vertical ($L/D = 15$; $E_p/E_s = 1000$; $\rho_p/\rho_s = 0{,}7$; $\nu = 0{,}4 - 0{,}5$; $\beta = 0{,}05$)

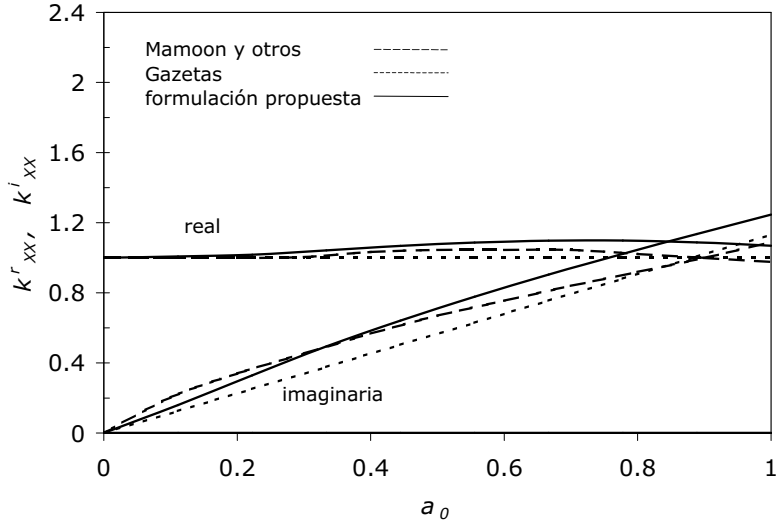

Figura 5.5: Coeficiente de rigidez dinámica horizontal ($L/D = 15$; $E_p/E_s = 1000$; $\rho_p/\rho_s = 0{,}7$; $\nu = 0{,}4 - 0{,}5$; $\beta = 0{,}05$)

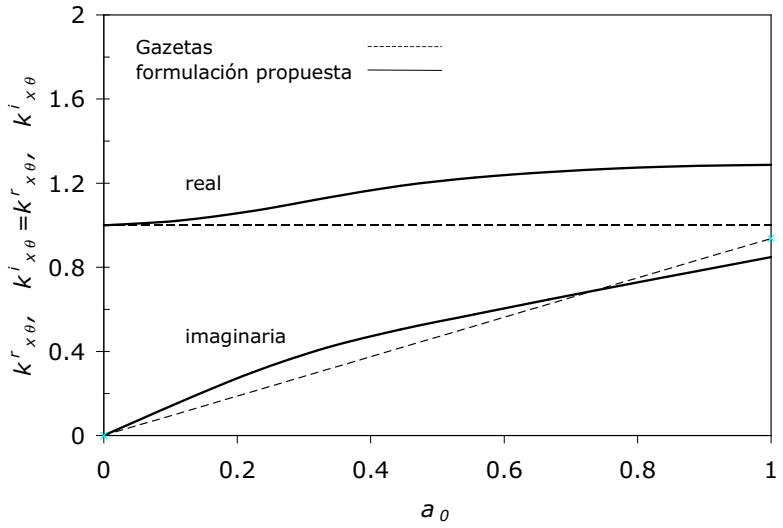

Figura 5.6: Coeficiente de rigidez dinámica de acoplamiento entre la horizontal y la rotacional ($L/D = 15$; $E_p/E_s = 1000$; $\rho_p/\rho_s = 0{,}7$; $\nu = 0{,}4 - 0{,}5$; $\beta = 0{,}05$)

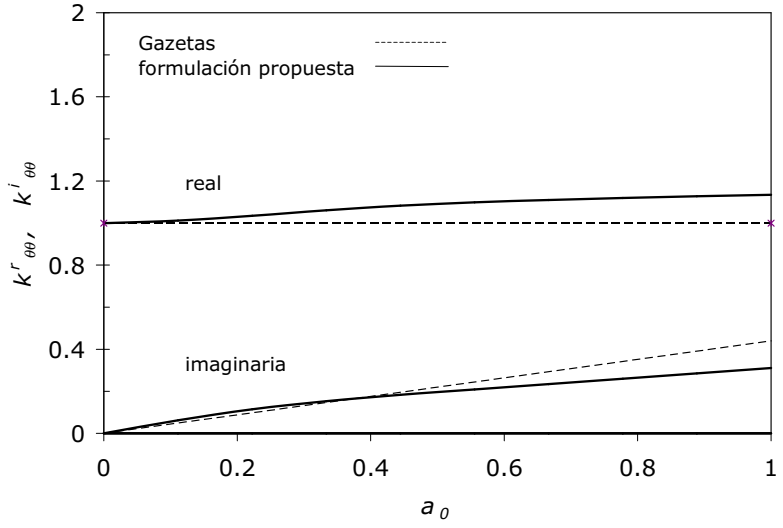

Figura 5.7: Coeficiente de rigidez dinámica rotacional ($L/D = 15$; $E_p/E_s = 1000$; $\rho_p/\rho_s = 0{,}7$; $\nu = 0{,}4 - 0{,}5$; $\beta = 0{,}05$)

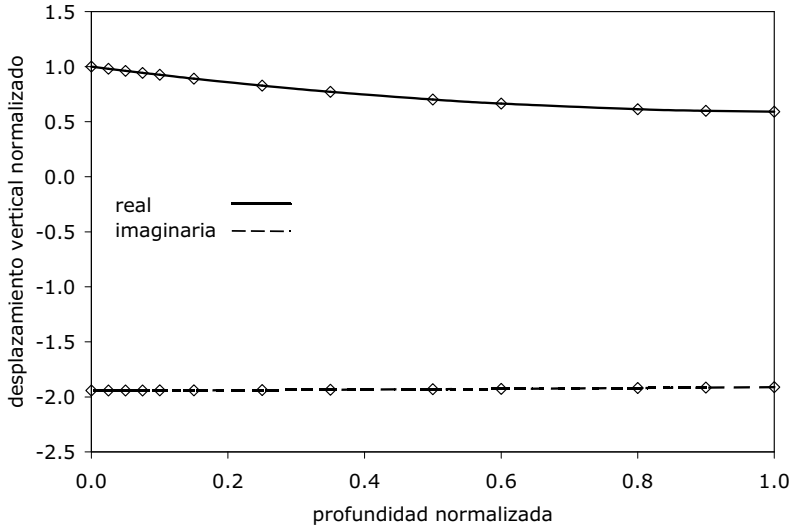

Figura 5.8: Componentes reales e imaginarias de los desplazamientos axiales normalizados debidos a una carga axial armónica de frecuencia adimensional, $a_0 = 1$ ($L/D = 15$; $E_p/E_s = 1000$; $\rho_p/\rho_s = 0{,}7$; $\nu = 0{,}5$; $\beta = 0{,}05$)

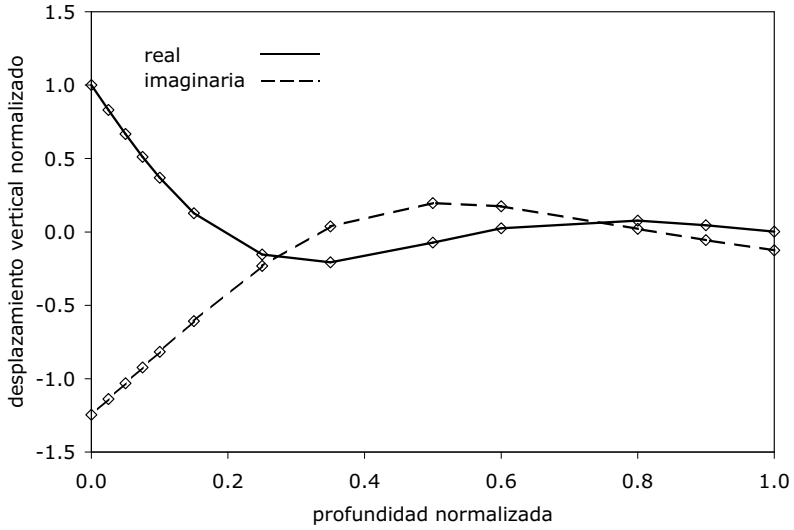

Figura 5.9: Componentes reales e imaginarias de los desplazamientos horizontales normalizados debidos a una carga transversal armónica de frecuencia adimensional, $a_0 = 1$ sobre un pilote con giro libre en el extremo superior ($L/D = 15$; $E_p/E_s = 1000$; $\rho_p/\rho_s = 0{,}7$; $\nu = 0{,}5$; $\beta = 0{,}05$)

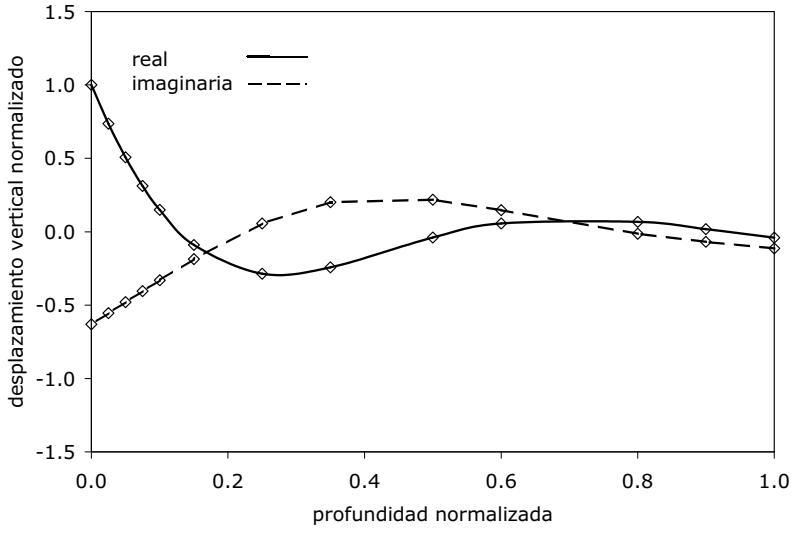

Figura 5.10: Componentes reales e imaginarias de los desplazamientos horizontales normalizados debidos a una carga transversal armónica de frecuencia adimensional, $a_0 = 1$ sobre un pilote con giro restringido en el extremo superior ($L/D = 15$; $E_p/E_s = 1000$; $\rho_p/\rho_s = 0{,}7$; $\nu = 0{,}5$; $\beta = 0{,}05$)

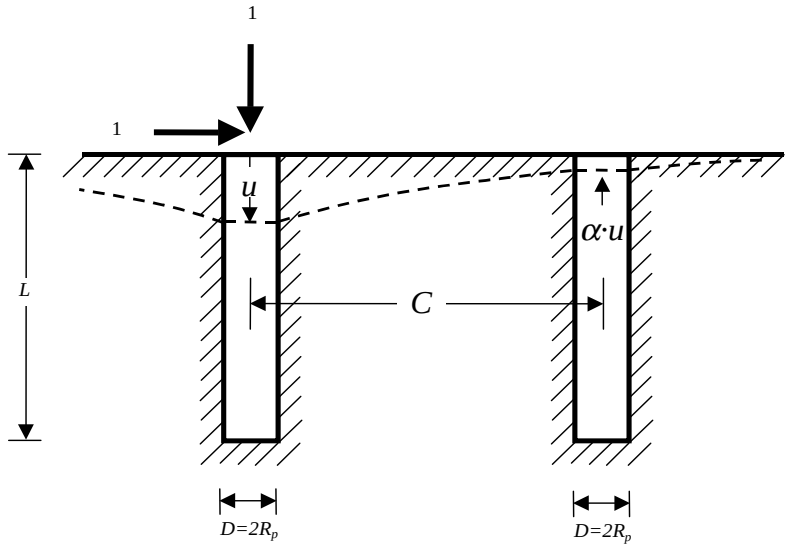

Figura 5.11: Definición del factor de interacción, α, para el caso estático

Mediante este coeficiente es posible estudiar el comportamiento de grupos de pilotes sin vinculación mediante técnicas de superposición. Gazetas y colaboradores ([10]) extienden la definición de Poulos para el caso dinámico de la siguiente manera:

$$\alpha^r + i\,\alpha^i = \frac{\text{desplazamiento en el pilote 2 debido a una carga unitaria dinámica en el pilote 1}}{\text{desplazamiento en el pilote 1 debido a una carga unitaria estática en el pilote 1}} \tag{5.42}$$

donde α^r y α^i son las componentes real e imaginaria, respectivamente, de los coeficientes de interacción en función de la frecuencia. Las Figuras 5.12 y 5.13 muestran los valores de estos coeficientes para cargas axiales y laterales, respectivamente, en función de la frecuencia adimensional, $b_0 = \omega\, C/V_S$ (ver Figura 5.11). En estas Figuras se presentan los valores evaluados mediante la formulación propuesta junto a los indicados por Gazetas para el caso dinámico y Poulos para el caso estático. Puede verse que las predicciones de la formulación propuesta son consistentes tanto con las obtenidas por Gazetas como con las indicadas por Poulos.

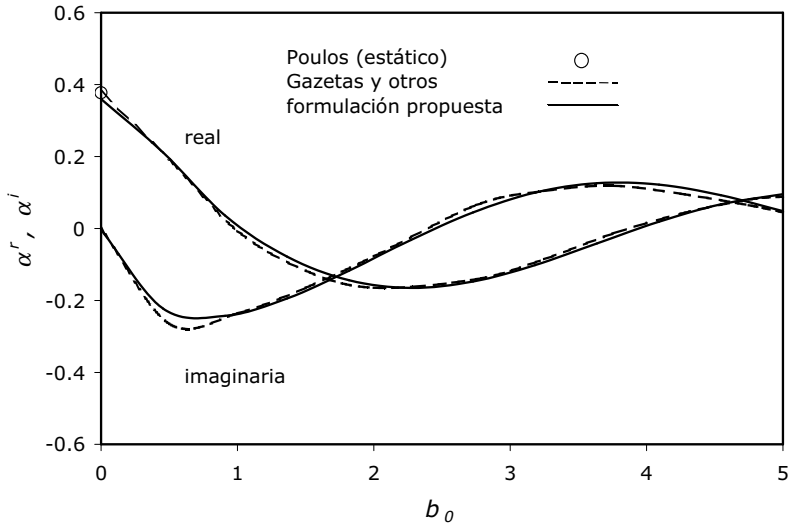

Figura 5.12: Factor de interacción vertical para un grupo de dos pilotes verticales en función de la frecuencia adimensional $b_0 = \omega C/V_S$ ($L/D = 15$; $E_p/E_s = 1000$; $\rho_p/\rho_s = 0{,}7$; $\nu = 0{,}5$; $\beta = 0{,}05$)

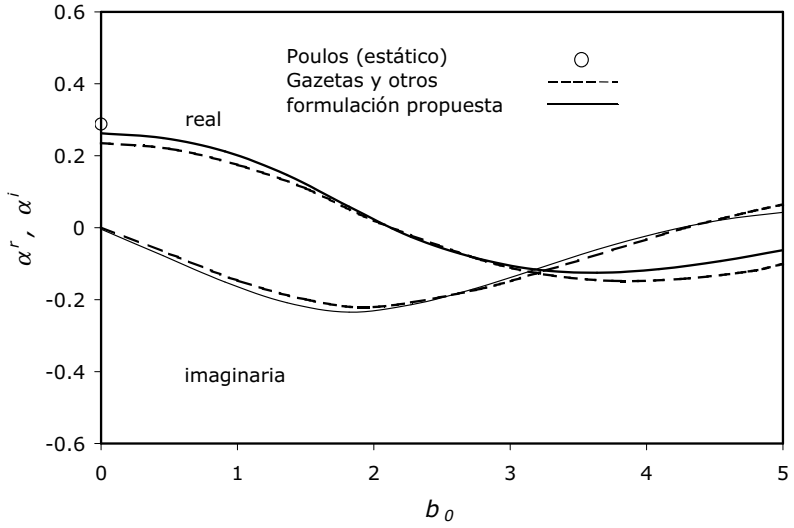

Figura 5.13: Factor de interacción horizontal para un grupo de dos pilotes verticales en función de la frecuencia adimensional $b_0 = \omega C/V_S$ ($L/D = 15$; $E_p/E_s = 1000$; $\rho_p/\rho_s = 0{,}7$; $\nu = 0{,}5$; $\beta = 0{,}05$)

5.1.5 Conclusiones

Del análisis de los ejemplos de validación detallados en los párrafos anteriores, puede concluirse que los resultados obtenidos mediante la implementación numérica de la presente formulación son completamente consistentes con resultados establecidos en la literatura. Esto es así, tanto en los casos estáticos y dinámicos de pilotes aislados como en los casos estáticos y dinámicos de grupos de pilotes verticales sin vinculación.

5.2 Ejemplos de aplicación

En esta sección se detallan algunos ejemplos de aplicación práctica de la presente formulación para el análisis de estructuras enterradas. El objetivo de estos ejemplos es mostrar la convergencia y robustez de la presente formulación, por una parte, y las características particulares de problemas cuyas soluciones rigurosas no se encuentran en la literatura. Los ejemplos presentados son: i) matriz de rigidez dinámica de un pilote inclinado y ii) rigidez dinámica de un pórtico enterrado.

5.2.1 Matriz de rigidez dinámica de un pilote inclinado

Se entiende en este trabajo por pilotes inclinados aquellos cuyo eje forma un ángulo, δ (Figura 5.14a), con respecto a la dirección normal al plano limitante del semiespacio en el cual se encuentra inmerso. La relevancia de este ejemplo es que no se encuentran en la literatura resultados para pilotes inclinados, mientras que es práctica común en la ingeniería geotécnica ([27], [36], [17]) determinar la rigidez (estática o dinámica) de pilotes inclinados mediante una transformación de coordenadas de la matriz de rigidez de un pilote vertical–más específicamente; cuyo eje es normal a la superficie del terreno. Esto

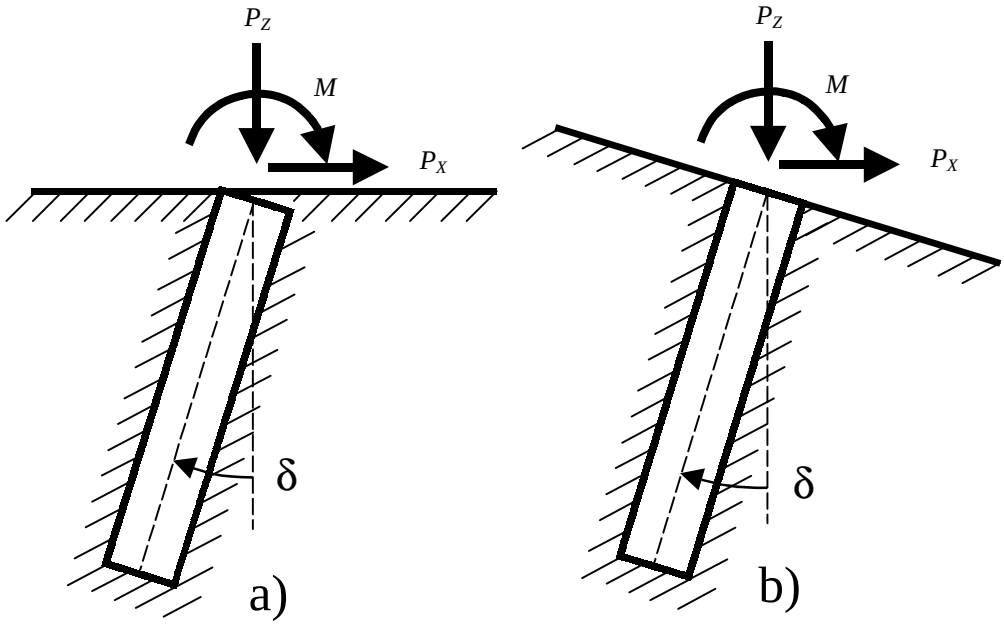

Figura 5.14: Pilotes inclinados: a) situación real; b) idealización frecuentemente asumida

implica asumir que la situación ideal en la Figura 5.14b representa a la situación real ilustrada en la Figura 5.14a.

Mediante la presente formulación, es posible obtener la matriz de rigidez rigurosa del pilote inclinado de la Figura 5.14a, definida en los grados de libertad translacionales en la dirección vertical, Z, y horizontal, X, y rotacional en el plano XY, θ:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{XX} & K_{XZ} & K_{X\theta} \\ K_{ZX} & K_{ZZ} & K_{Z\theta} \\ K_{\theta X} & K_{\theta Z} & K_{\theta\theta} \end{bmatrix} \tag{5.43}$$

Cabe destacar que la matriz de rigidez (5.43) es simétrica, existiendo una pequeña pérdida de simetría debido a la introducción de la función de mapeo aproximada. Sin embargo, al igual que para el caso ilustrado en la Figura 4.4, la pérdida de simetría es muy débil, lo cual puede ser observado en la Figura 5.15, la cual ilustra los coeficientes de rigidez de acoplamiento $K_{Z\theta}$ y $K_{\theta Z}$ en función de la frecuencia adimensional, $a_0 = \omega D/V_S$. Del análisis de esta Figura, puede concluirse que la matriz de rigidez es, a fines prácticos,

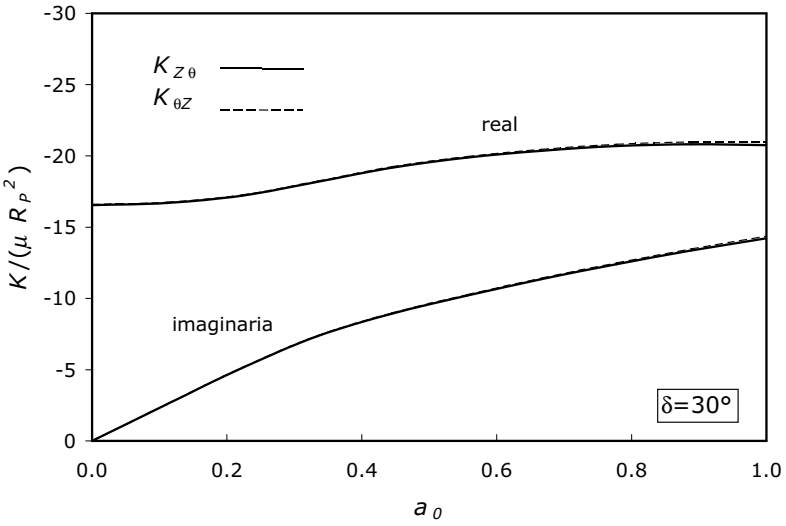

Figura 5.15: Pérdida de simetría debida a la utilización de la función de mapeo aproximada para un pilote inclinado $\delta = 15°$ con respecto a la vertical ($L/D = 15$; $E_p/E_s = 1000$; $\rho_p/\rho_s = 0{,}7$; $\nu = 0{,}5$; $\xi = 0$)

simétrica. Por otra parte, es interesante destacar que la formulación propuesta considera explícitamente los grados de libertad rotacionales, a diferencia de las consideradas por otros autores (por ejemplo, [7], [17]).

Las Figuras 5.16 a 5.21 muestran la variación de los coeficientes de la matriz de rigidez dinámica de un pilote inclinado a $\delta = 15°$ con respecto a la vertical (Figura 5.14a), evaluados mediante la presente formulación y utilizando la aproximación sugerida por Poulos y Davies y otros autores ([17]), consistente en realizar un cambio de coordenadas a la matriz de rigidez en correspondencia con un pilote vertical. Las Figuras 5.22 a 5.27 muestran la variación de estos coeficientes para un pilote inclinado a $\delta = 30°$ con respecto a la vertical, evaluados mediante la presente formulación y utilizando la aproximación antes mencionada.

Del análisis de las Figuras 5.16 a 5.27 se desprende de que la aproximación comúnmen-

te adoptada en la ingeniería geotécnica es muy buena para la evaluación de los coeficientes de rigidez tanto directa como de acoplamiento para pequeñas inclinaciones. Para grandes inclinaciones, por otra parte, esta aproximación presenta diferencias del orden del 5 % para los coeficientes de rigidez de acoplamiento, mientras que las diferencias son menores al 1.6 % para el caso de los coeficientes de rigidez directa.

5.2.2 Rigidez dinámica de un pórtico enterrado

Este ejemplo, si bien de naturaleza simple, sirve para ilustrar las características esenciales del comportamiento dinámico de las estructuras de barras enterradas. El pórtico analizado (Figura 5.28) consiste en dos pilotes de sección circular con radio, R_P, y longitud, L, y una viga de conexión superficial de sección rectangular con ancho, b, y longitud, C. Las propiedades geométricas y mecánicas consideradas para este ejemplo están dadas en la Tabla 5.2.

	Longitud [m]
L	12
C	4
R_P	0.4
b	1.6
h	0.4

	Suelo	Estructura
V_S	200 m/s	2769 m/s
ν	0.5	0.15
ρ	1800 kg/m^3	2400 kg/m^3

Tabla 5.2: Parámetros geomtricos y mecánicos del pórtico analizado

A fines de estudiar la respuesta del pórtico enterrado a cargas externas, se estudia la matriz de rigidez del mismo definida en términos de los grados de libertad del nudo central de la viga de conexión, por una parte, y en términos de los grados de libertad del nudo correspondiente a la unión pilote-viga. El análisis se realiza en un rango de frecuencias, f, entre 0 y 50 Hz.

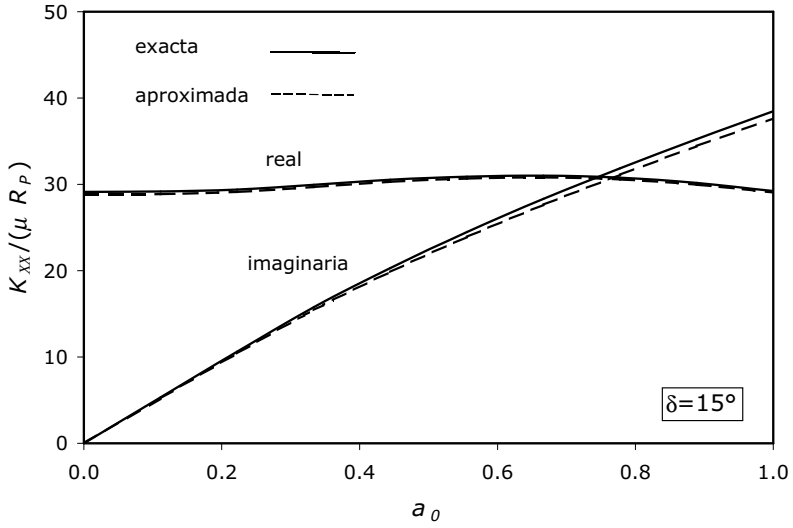

Figura 5.16: Componente K_{XX} de la matriz de rigidez dinámica de un pilote inclinado a $\delta = 15°$ con respecto a la vertical ($L/D = 15$; $E_p/E_s = 1000$; $\rho_p/\rho_s = 0{,}7$; $\nu = 0{,}5$; $\beta = 0$)

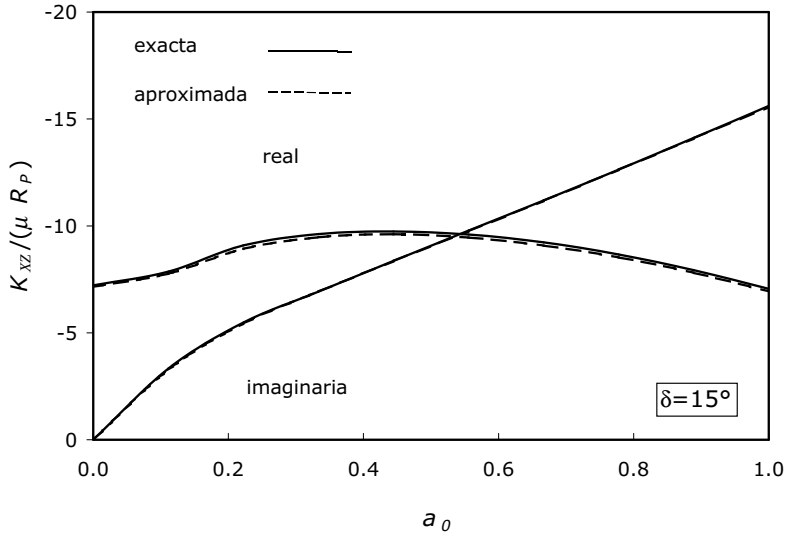

Figura 5.17: Componente K_{XZ} de la matriz de rigidez dinámica de un pilote inclinado a $\delta = 15°$ con respecto a la vertical ($L/D = 15$; $E_p/E_s = 1000$; $\rho_p/\rho_s = 0{,}7$; $\nu = 0{,}5$; $\beta = 0$)

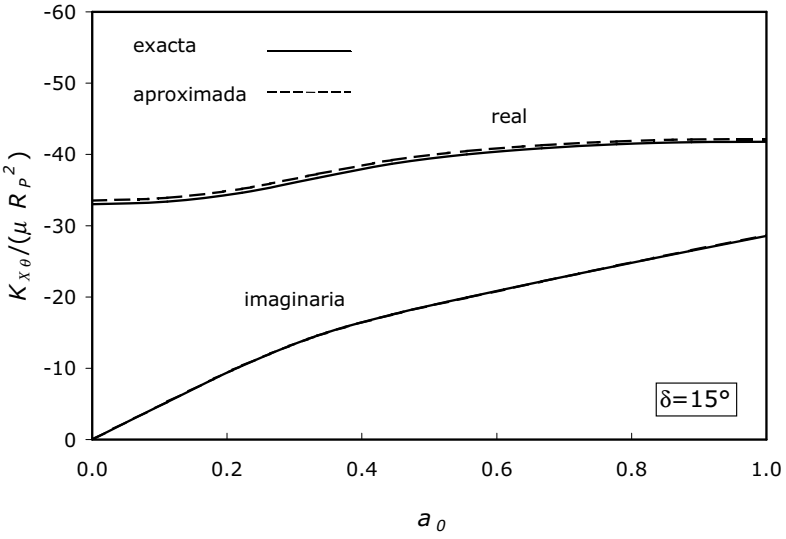

Figura 5.18: Componente $K_{X\theta}$ de la matriz de rigidez dinámica de un pilote inclinado a $\delta = 15°$ con respecto a la vertical ($L/D = 15$; $E_p/E_s = 1000$; $\rho_p/\rho_s = 0{,}7$; $\nu = 0{,}5$; $\beta = 0$)

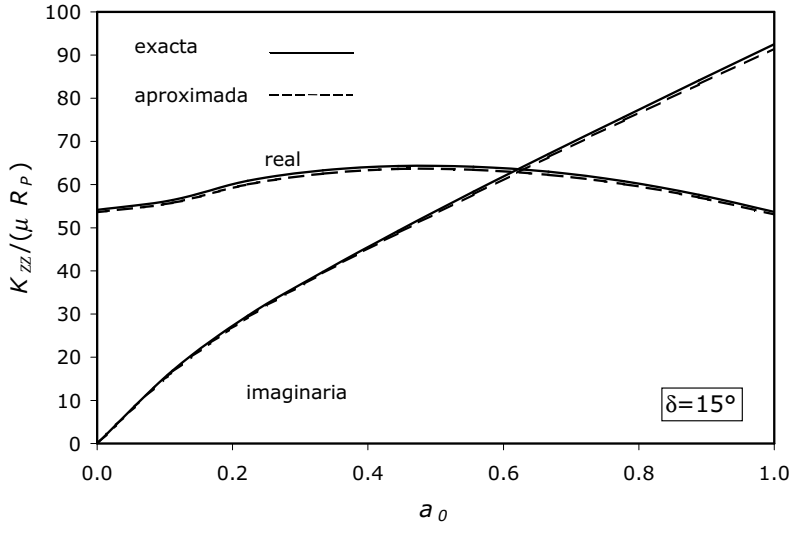

Figura 5.19: Componente K_{ZZ} de la matriz de rigidez dinámica de un pilote inclinado a $\delta = 15°$ con respecto a la vertical ($L/D = 15$; $E_p/E_s = 1000$; $\rho_p/\rho_s = 0{,}7$; $\nu = 0{,}5$; $\beta = 0$)

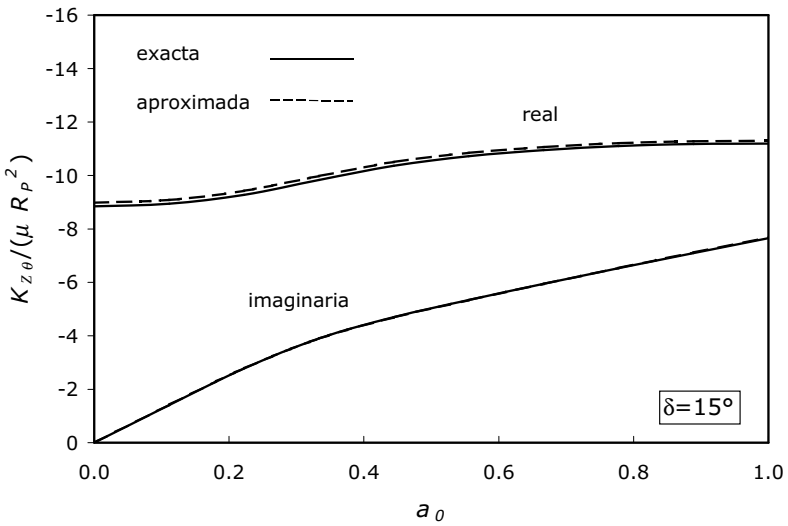

Figura 5.20: Componente $K_{Z\theta}$ de la matriz de rigidez dinámica de un pilote inclinado a $\delta = 15°$ con respecto a la vertical ($L/D = 15$; $E_p/E_s = 1000$; $\rho_p/\rho_s = 0{,}7$; $\nu = 0{,}5$; $\beta = 0$)

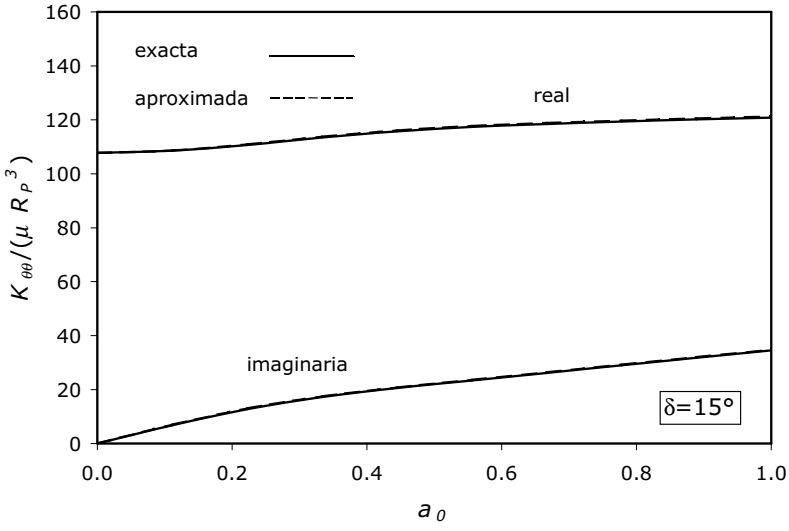

Figura 5.21: Componente $K_{\theta\theta}$ de la matriz de rigidez dinámica de un pilote inclinado a $\delta = 15°$ con respecto a la vertical ($L/D = 15$; $E_p/E_s = 1000$; $\rho_p/\rho_s = 0{,}7$; $\nu = 0{,}5$; $\beta = 0$)

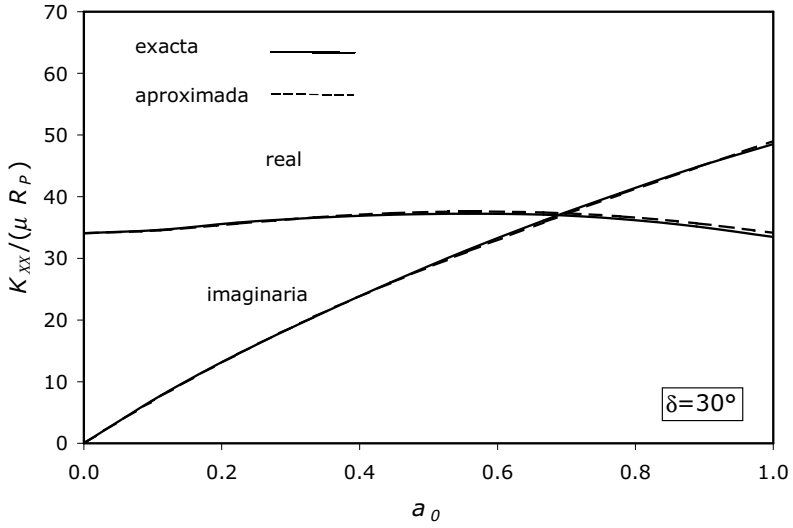

Figura 5.22: Componente K_{XX} de la matriz de rigidez dinámica de un pilote inclinado a $\delta = 30°$ con respecto a la vertical ($L/D = 15$; $E_p/E_s = 1000$; $\rho_p/\rho_s = 0{,}7$; $\nu = 0{,}5$; $\beta = 0$)

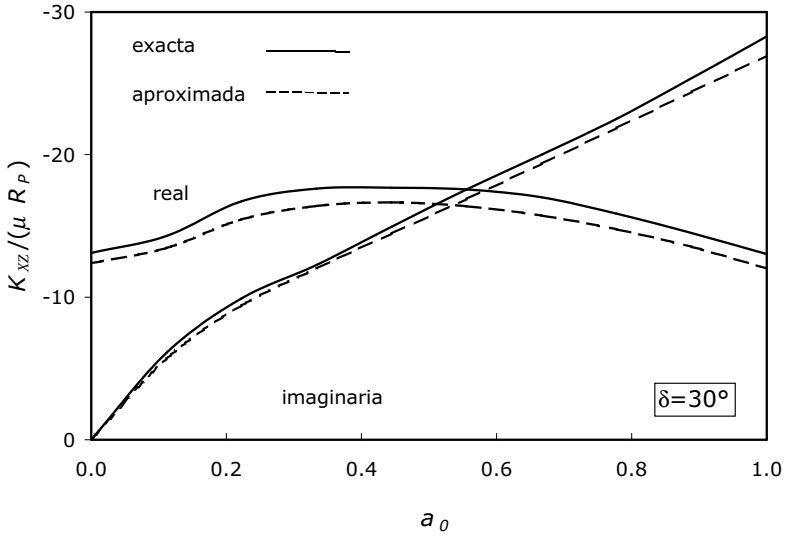

Figura 5.23: Componente K_{XZ} de la matriz de rigidez dinámica de un pilote inclinado a $\delta = 30°$ con respecto a la vertical ($L/D = 15$; $E_p/E_s = 1000$; $\rho_p/\rho_s = 0{,}7$; $\nu = 0{,}5$; $\beta = 0$)

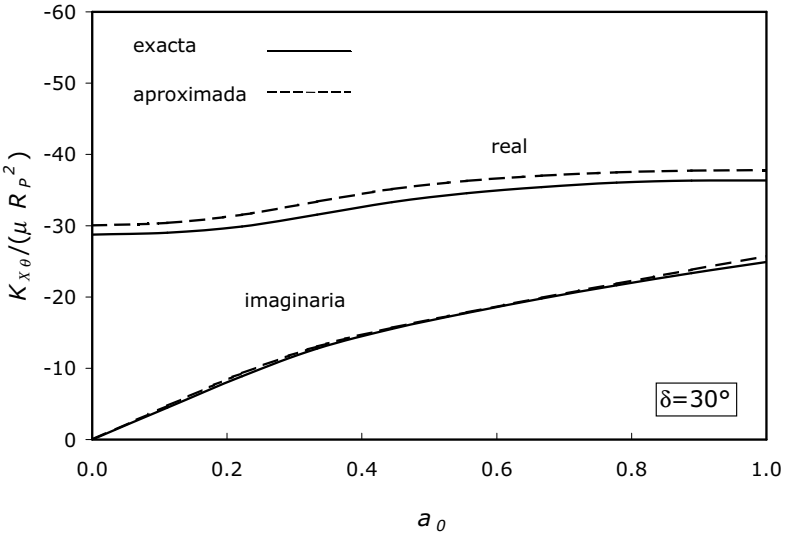

Figura 5.24: Componente $K_{X\theta}$ de la matriz de rigidez dinámica de un pilote inclinado a $\delta = 30°$ con respecto a la vertical ($L/D = 15$; $E_p/E_s = 1000$; $\rho_p/\rho_s = 0{,}7$; $\nu = 0{,}5$; $\beta = 0$)

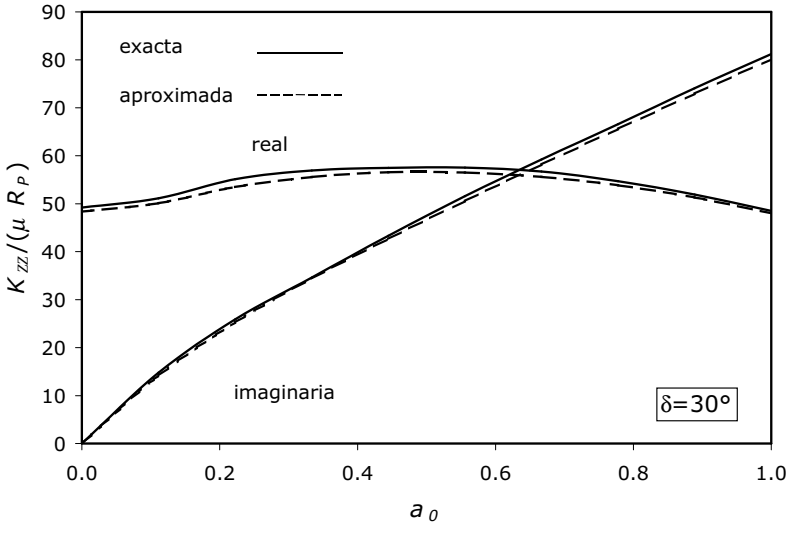

Figura 5.25: Componente K_{ZZ} de la matriz de rigidez dinámica de un pilote inclinado a $\delta = 30°$ con respecto a la vertical ($L/D = 15$; $E_p/E_s = 1000$; $\rho_p/\rho_s = 0{,}7$; $\nu = 0{,}5$; $\beta = 0$)

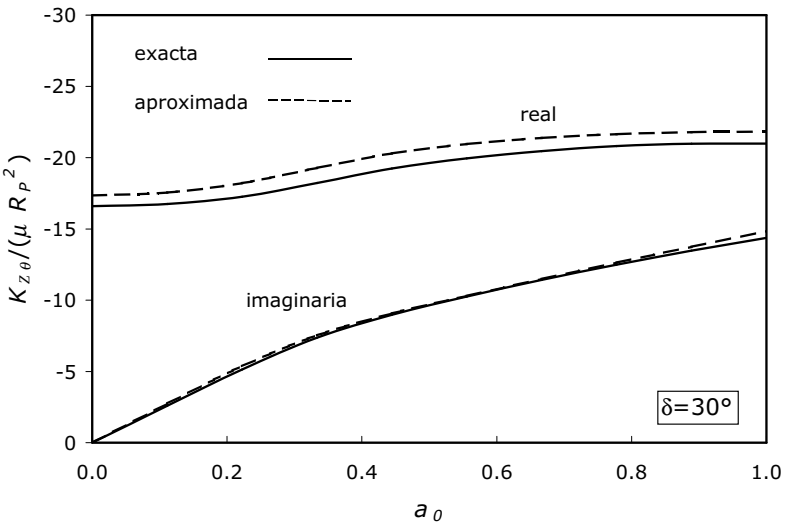

Figura 5.26: Componente $K_{Z\theta}$ de la matriz de rigidez dinámica de un pilote inclinado a $\delta = 30°$ con respecto a la vertical ($L/D = 15$; $E_p/E_s = 1000$; $\rho_p/\rho_s = 0{,}7$; $\nu = 0{,}5$; $\beta = 0$)

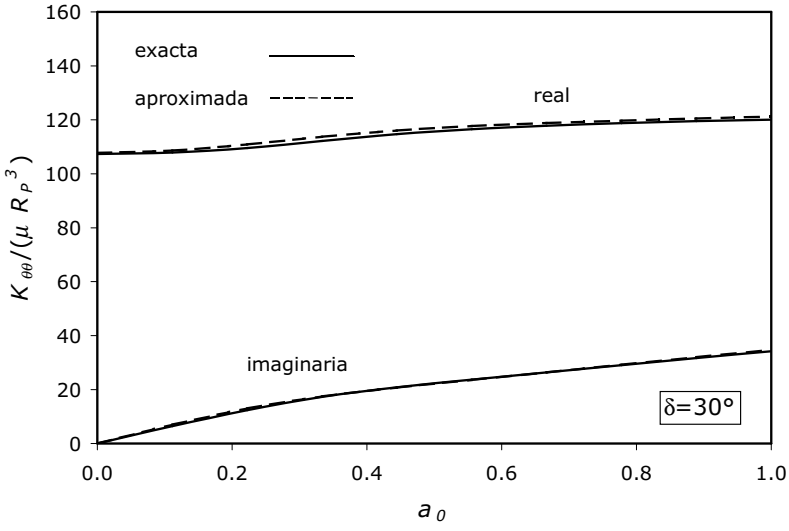

Figura 5.27: Componente $K_{\theta\theta}$ de la matriz de rigidez dinámica de un pilote inclinado a $\delta = 30°$ con respecto a la vertical ($L/D = 15$; $E_p/E_s = 1000$; $\rho_p/\rho_s = 0{,}7$; $\nu = 0{,}5$; $\beta = 0$)

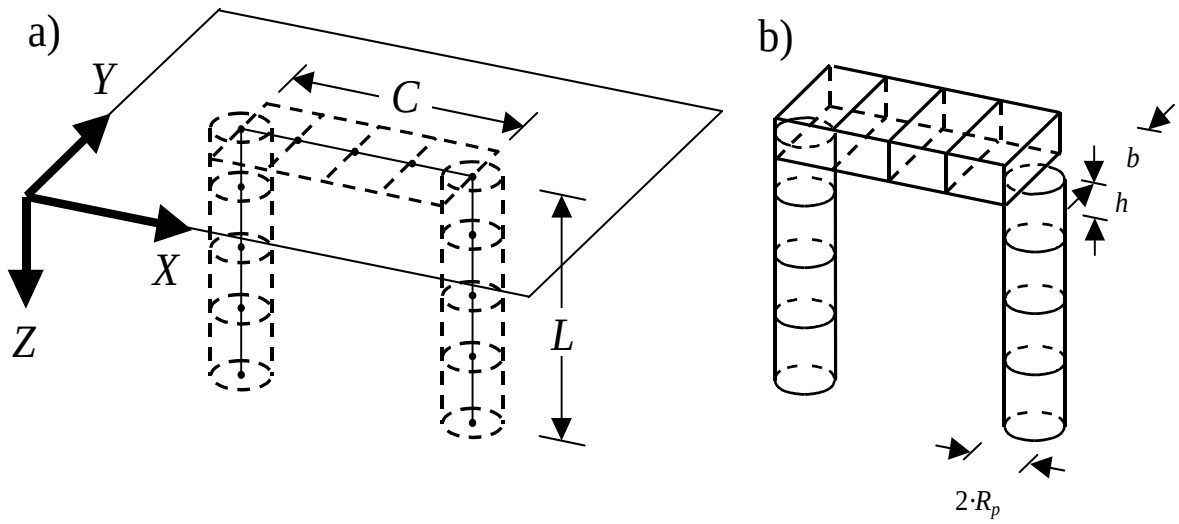

Figura 5.28: Pórtico enterrado: a) superficie de interacción; b) estructura

Cargas aplicadas en el nudo central de la viga

La situación analizada en esta sección está ilustrada en la Figura 5.29, donde los grados de libertad de desplazamientos están definidos en el mismo sentido que las cargas. A fines de obtener una solución numérica mediante la formulación propuesta, se discretiza a cada uno de los elementos estructurales (esto es, pilotes y viga) en 6 elementos de 2 nodos y se utilizan 6 puntos de integración de Gauss para cada dimensión de integración. La matriz de flexibilidad y de rigidez pueden escribirse como:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{XX} & 0 & F_{X\theta} \\ 0 & F_{ZZ} & 0 \\ F_{\theta X} & 0 & F_{\theta\theta} \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} K_{XX} & 0 & K_{X\theta} \\ 0 & K_{ZZ} & 0 \\ K_{\theta X} & 0 & K_{\theta\theta} \end{bmatrix} \tag{5.44}$$

ya que no existe acoplamiento entre las cargas verticales y los desplazamientos horizontales (por simetría) y entre las cargas horizontales y los desplazamientos verticales (por antisimetría). La matriz de flexibilidad del pórtico en función de la frecuencia, definida en las variables de la Figura 5.29, está dada en las Figuras 5.30 a 5.33. La matriz de rigidez, obtenida mediante inversión de la de flexibilidad, está dada en las Figuras 5.34 a 5.37. Del

análisis de las Figuras 5.31 y 5.35, puede verse que la pérdida de simetría debida al uso de la función de mapeo aproximada es débil, y a fines prácticos, la matriz de rigidez resulta simétrica.

Del análisis de los resultados obtenidos, cabe destacar las siguientes características de los coeficientes de la matriz de rigidez del pórtico enterrado analizado en esta sección:

1. La mayor disipación se da para la dirección lateral, ya que la intersección de las componentes real e imaginaria se da para una frecuencia de 20 Hz (Figura 5.34); la cual es menor a la correspondiente a las direcciones vertical y rotacional (Figuras 5.36 y 5.37). Esto contradice a lo encontrado para el caso de pilotes aislados (Figuras 5.5 y 5.4), para los cuales existe mayor disipación en la dirección axial. La razón de esta aparente inconsistencia es la siguiente. Dado que los pilotes son muy rígidos en su dirección axial, el pórtico, al ser sometido a cargas verticales, responde con deformaciones muy localizadas en la zona de la viga, mientras que las amplitudes (como se verá más adelante) de los desplazamientos en los pilotes son muy bajas. Por otra parte, al ser la viga muy rígida en su dirección axial, los desplazamientos laterales de los pilotes asociados a cargas laterales son importantes, generándose de esta manera una importante disipación a través de los mismos. De esta manera, la disipación es mayor en el sentido lateral.

2. La menor disipación se da para la dirección rotacional, ya que las componentes real e imaginaria de $K_{\theta\theta}$ no se intersectan en el rango de frecuencias considerado (Figura 5.37). Esto es consistente con lo indicado por Gazetas para el caso de un disco rígido sobre un semiespacio elástico ([9]). Gazetas explica que este fenómeno se debe a que, para el caso de las oscilaciones verticales o laterales, las ondas emitidas están en fase y por lo tanto alcanzan grandes distancias desde la fuente, lo cual está asociado con un valor alto de amortiguamiento por radiación. Cuando las oscilaciones son del tipo

de las producidas por un momento, las ondas emitidas están en contrafase y, por lo tanto, tienden a cancelarse a medida que se alejan de la fuente, lo cual Gazetas llama el "principio dinámico de Saint Venant". El caso estudiado en esta sección es totalmente análogo, ya que, debido a la acción del momento, los pilotes sufren desplazamientos que se encuentran en contrafase, y por lo tanto producen ondas que no logran alcanzar grandes distancias desde la fuente, lo cual está asociado a un bajo nivel de amortiguamiento por radiación. Otra forma de entender este fenómeno es considerando que la acción del momento es equivalente–lejos de la fuente–a la de un doblete; el cual produce desplazamientos que se atenúan en la dirección radial con r^{-2} (siendo r la distancia radial a la fuente), mientras que los producidos por una fuerza puntual se atenúan con r^{-1}. Esto es así ya que un doblete puede entenderse como dos fuerzas puntuales separadas una longitud infinitesimal y de intensidad infinita, de manera tal que el momento producido es finito. Por lo tanto, los desplazamientos asociados al doblete resultan ser la derivada de los asociados a la fuerza puntual.

3. El acoplamiento entre los desplazamientos laterales y los giros, en términos de flexibilidad, es negativo, mientras que para otros problemas clásicos de interacción suelo estructura estos coeficientes son positivos (Figura 5.38). El signo negativo puede ser explicado muy simplemente en términos del desplazamiento lateral debido al momento ($F_{X\theta}$), ya que la restricción al giro impuesta por los pilotes en la unión con la viga es tal que se generan momentos de empotramiento elástico negativos en los pilotes, los cuales producen desplazamientos horizontales negativos.

4. El acoplamiento discutido en el punto anterior es débil. La influencia del acoplamiento puede ser definida en términos porcentuales como:

$$\varepsilon_{\theta X}\,[\,\%] = 100\,\left|F_{\theta X}^2 / \left(F_{XX}^2\,F_{\theta\theta}^2\right)\right| \tag{5.45}$$

siendo este valor el error porcentual en que se incurre si se evalúan los términos de rigidez directa como la inversa algebraica de los de flexibilidad. Para el ejemplo

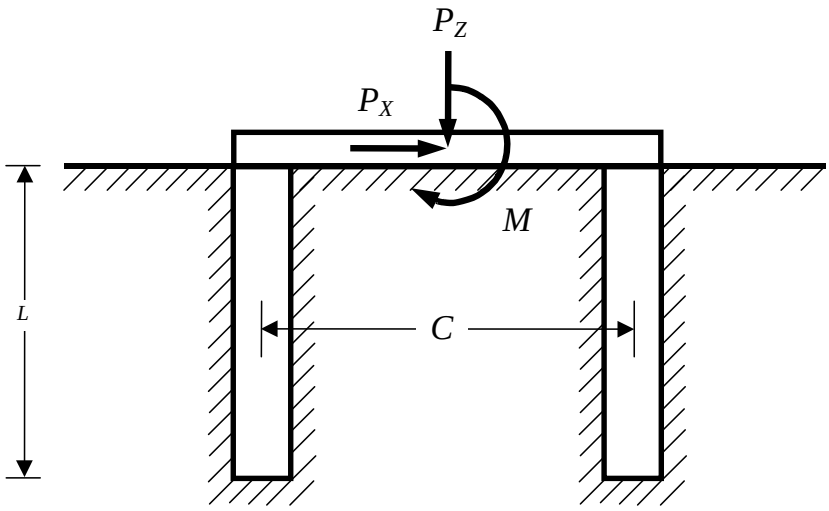

Figura 5.29: Pórtico enterrado sometido a cargas en el centro del tramo

estudiado en esta sección: $\varepsilon_{\theta X}\,[\,\%] < 3\,\%$ en el rango de frecuencias analizado, lo cual muestra la debilidad del acoplamiento.

A fines de realizar un análisis de la convergencia de los resultados para la matriz de rigidez del pórtico, se estudian los valores de los términos de rigidez directa (K_{XX}, K_{ZZ} y $K_{\theta\theta}$) resultantes de la utilización de distinta cantidad de elementos y puntos de integración de Gauss. Las Figuras 5.39 a 5.41 muestran los valores de los términos de rigidez directa para una malla con 6, 12, y 18 elementos para la estructura completa. Puede verse que para el caso de los coeficientes K_{ZZ} y $K_{\theta\theta}$, la solución en correspondencia con las tres mallas es muy cercana en el rango de frecuencias estudiado; lo cual indica la rápida convergencia y robustez de la presente formulación. Sin embargo, la solución obtenida mediante 6 y 12 elementos pierde calidad para frecuencias mayores a 20-30 Hz para el caso del coeficiente K_{XX}. Las Figuras 5.42 a 5.44 muestran los valores de los términos de rigidez directa para tres esquemas distintos de integración numérica; con 2, 4 y 6 puntos de Gauss por dimensión de integración. Del análisis de estas Figuras se desprende que las soluciones correspondientes a 2, 4 y 6 puntos de Gauss son prácticamente idénticas, a excepción del caso del coeficiente K_{XX}, para el cual la solución en correspondencia con 2 puntos de

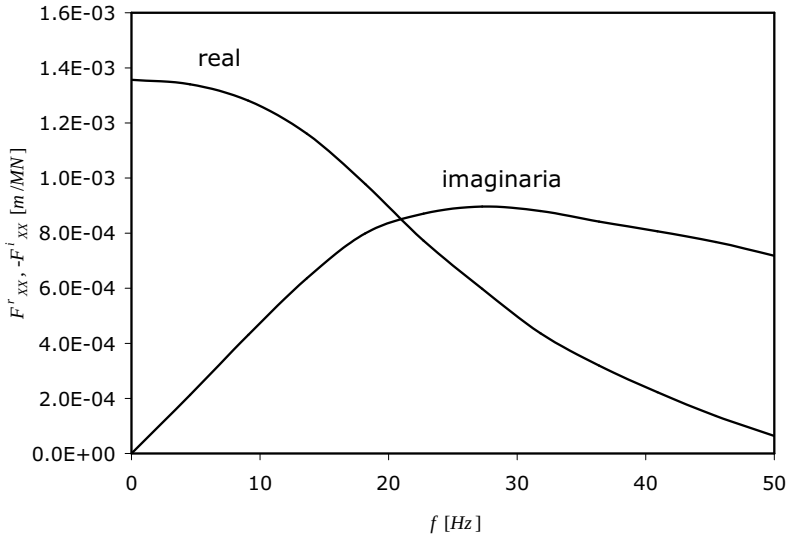

Figura 5.30: Coeficiente F_{XX} de la matriz de flexibilidad del pórtico enterrado sometido a cargas en el centro de la viga

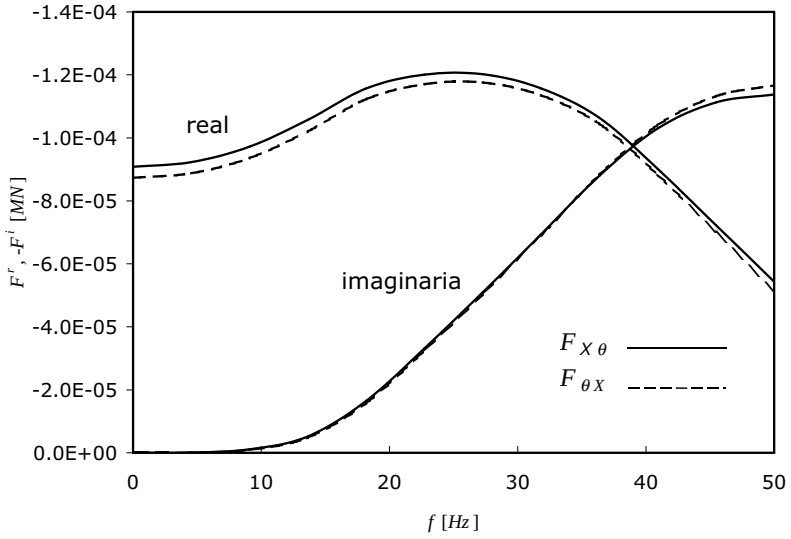

Figura 5.31: Coeficiente $F_{X\theta}$ de la matriz de flexibilidad del pórtico enterrado sometido a cargas en el centro de la viga

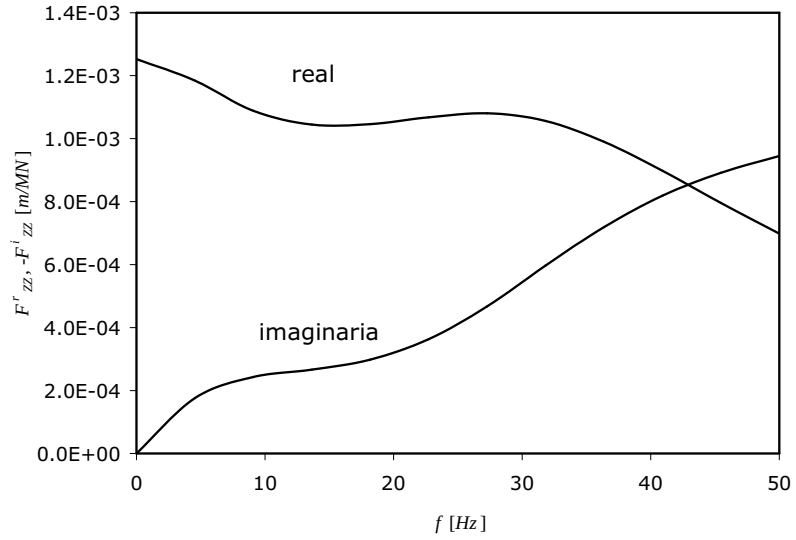

Figura 5.32: Coeficiente F_{ZZ} de la matriz de flexibilidad del pórtico enterrado sometido a cargas en el centro de la viga

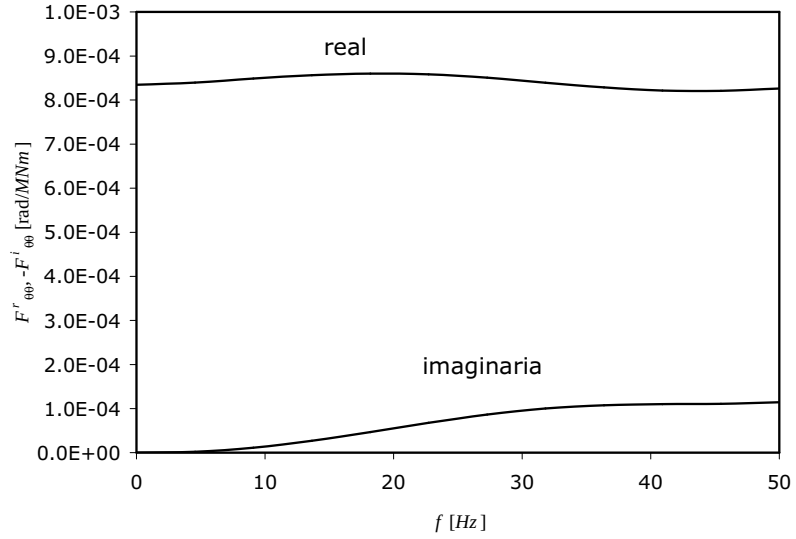

Figura 5.33: Coeficiente $F_{\theta\theta}$ de la matriz de flexibilidad del pórtico enterrado sometido a cargas en el centro de la viga

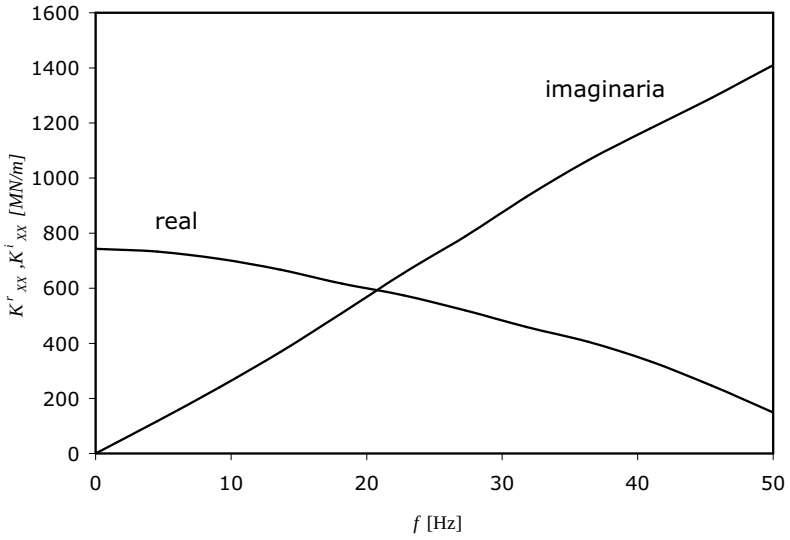

Figura 5.34: Coeficiente K_{XX} de la matriz de rigidez del pórtico enterrado sometido a cargas en el centro de la viga

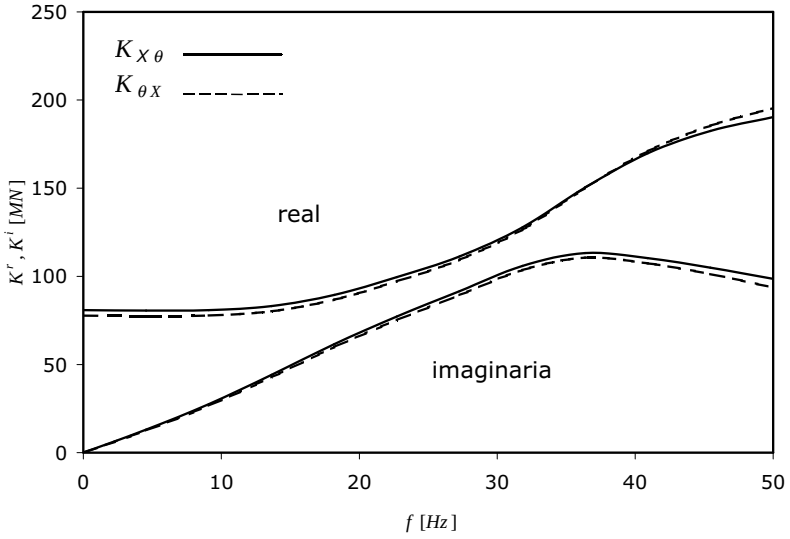

Figura 5.35: Coeficiente $K_{X\theta}$ de la matriz de rigidez del pórtico enterrado sometido a cargas en el centro de la viga

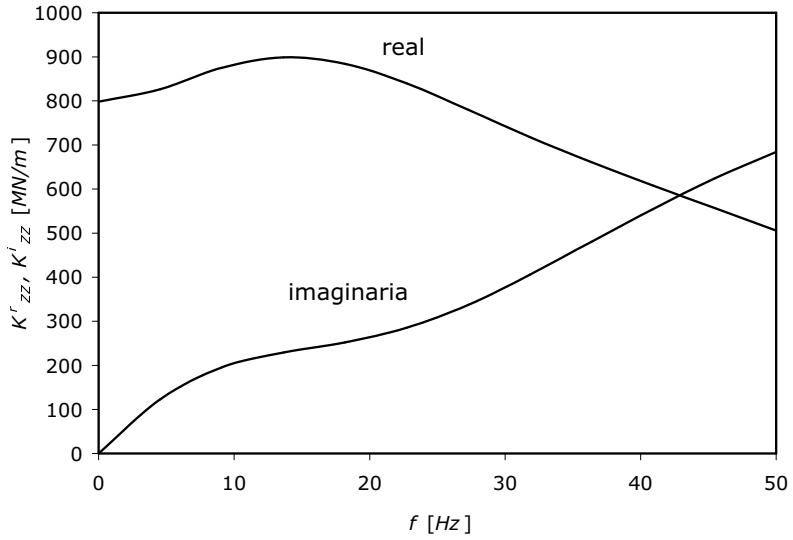

Figura 5.36: Coeficiente K_{ZZ} de la matriz de rigidez del pórtico enterrado sometido a cargas en el centro de la viga

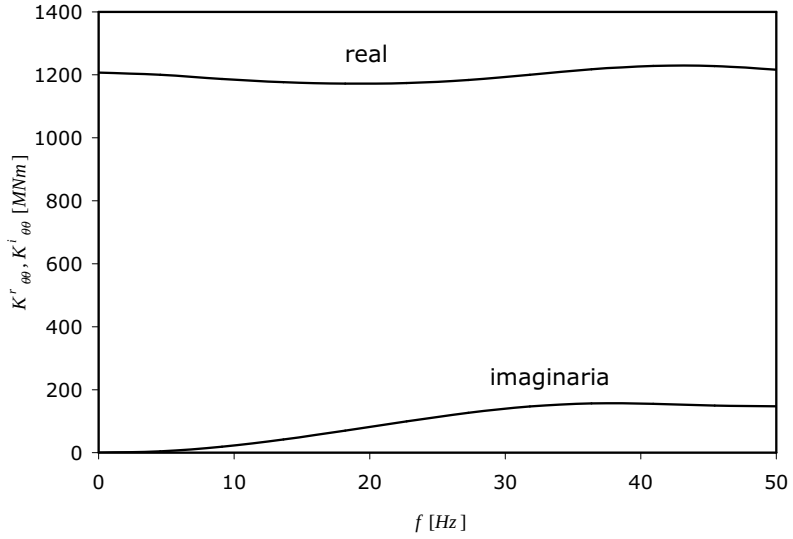

Figura 5.37: Coeficiente $K_{\theta\theta}$ de la matriz de rigidez del pórtico enterrado sometido a cargas en el centro de la viga

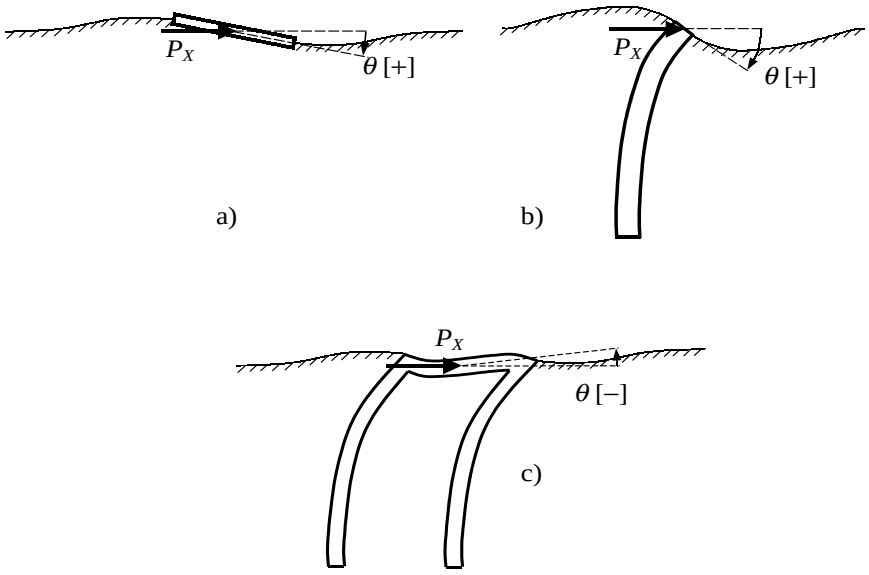

Figura 5.38: Signo del término de acoplamiento, $F_{\theta X}$, para problemas de interacción suelo-estructura: a) disco rígido; b) pilote aislado; c) pórtico enterrado

Gauss difiere en un 5 % de la obtenida con 4 y 6 puntos.

Las componentes reales e imaginarias de la deformada del pórtico en correspondencia con cargas armónicas unitarias del tipo $e^{i\omega t}$ de 0 y 50 Hz, actuando según las direcciones lateral, vertical y rotacional, están dadas en las Figuras 5.45, 5.46 y 5.47, respectivamente. Con respecto a las deformadas, cabe aclarar que los desplazamientos nodales están unidos por líneas rectas solamente a los fines de la representación gráfica, mientras que la formulación estrictamente considera interpolaciones de tercer grado para los desplazamientos transversales.

Cargas aplicadas en la unión pilote-viga

La situación analizada en esta sección está ilustrada en la Figura 5.48, donde los grados de libertad de desplazamientos están definidos en el mismo sentido que las cargas. La

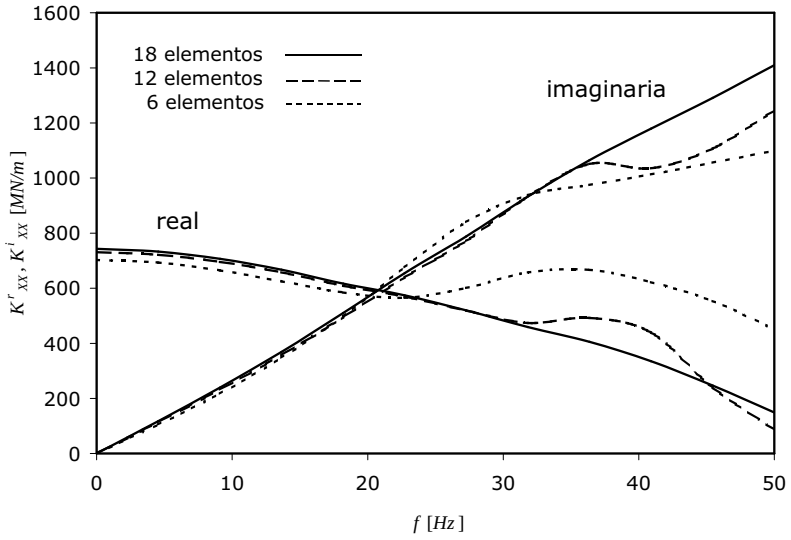

Figura 5.39: Influencia del número de elementos en el coeficiente K_{XX} de la matriz de rigidez del pórtico enterrado

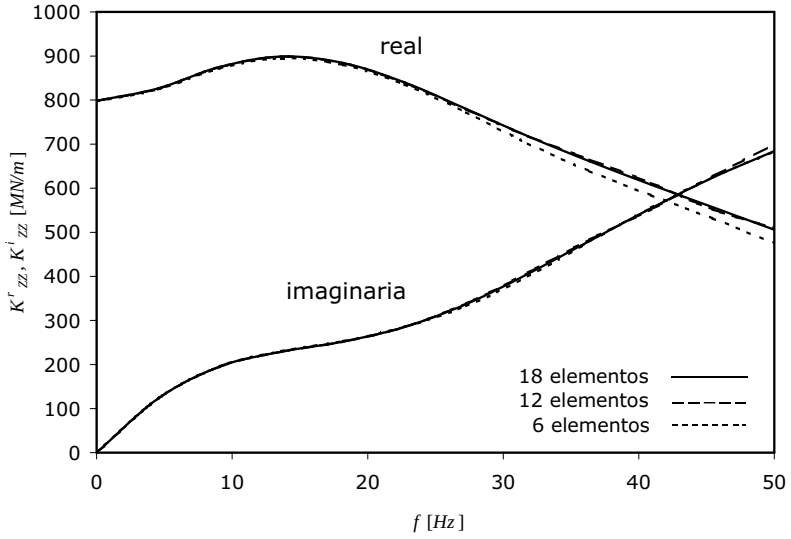

Figura 5.40: Influencia del número de elementos en el coeficiente K_{ZZ} de la matriz de rigidez del pórtico enterrado

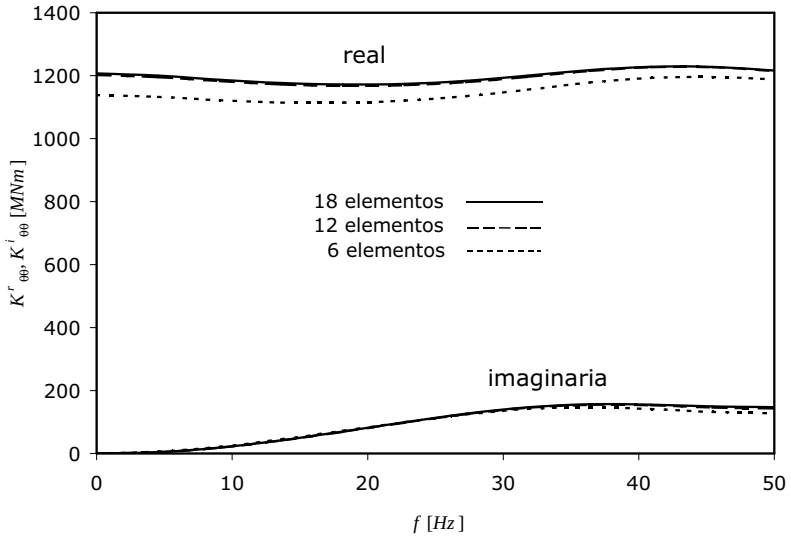

Figura 5.41: Influencia del número de elementos en el coeficiente $K_{\theta\theta}$ de la matriz de rigidez del pórtico enterrado

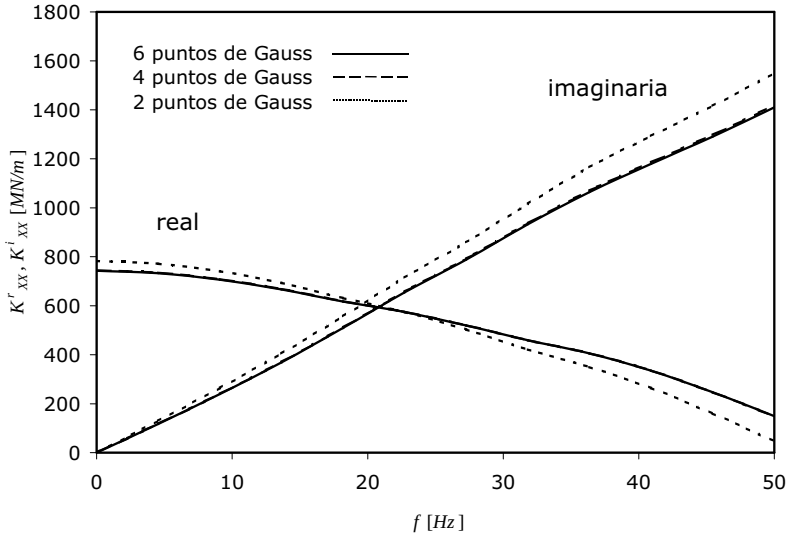

Figura 5.42: Influencia del número de puntos de Gauss en el coeficiente K_{XX} de la matriz de rigidez del pórtico enterrado

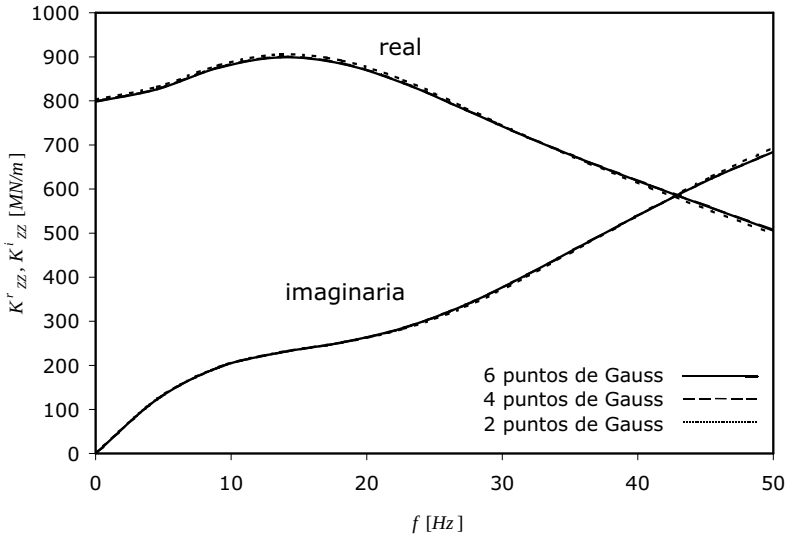

Figura 5.43: Influencia del número de puntos de Gauss en el coeficiente K_{ZZ} de la matriz de rigidez del pórtico enterrado

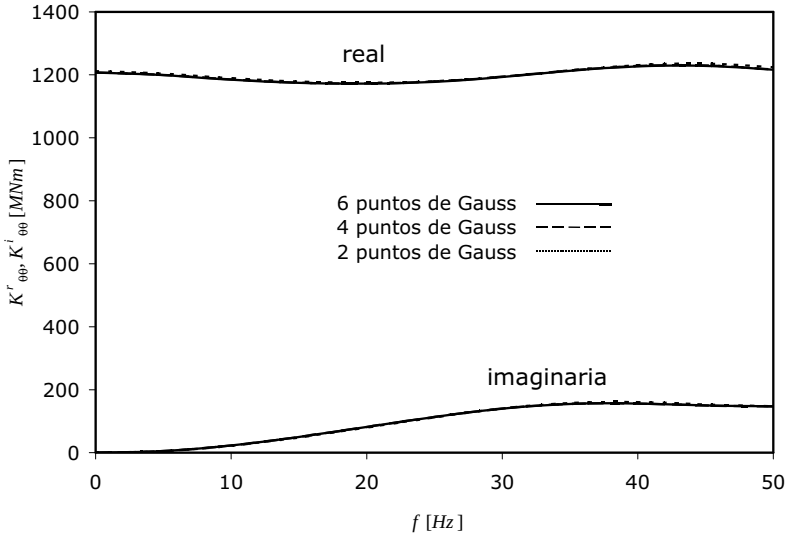

Figura 5.44: Influencia del número de puntos de Gauss en el coeficiente $K_{\theta\theta}$ de la matriz de rigidez del pórtico enterrado

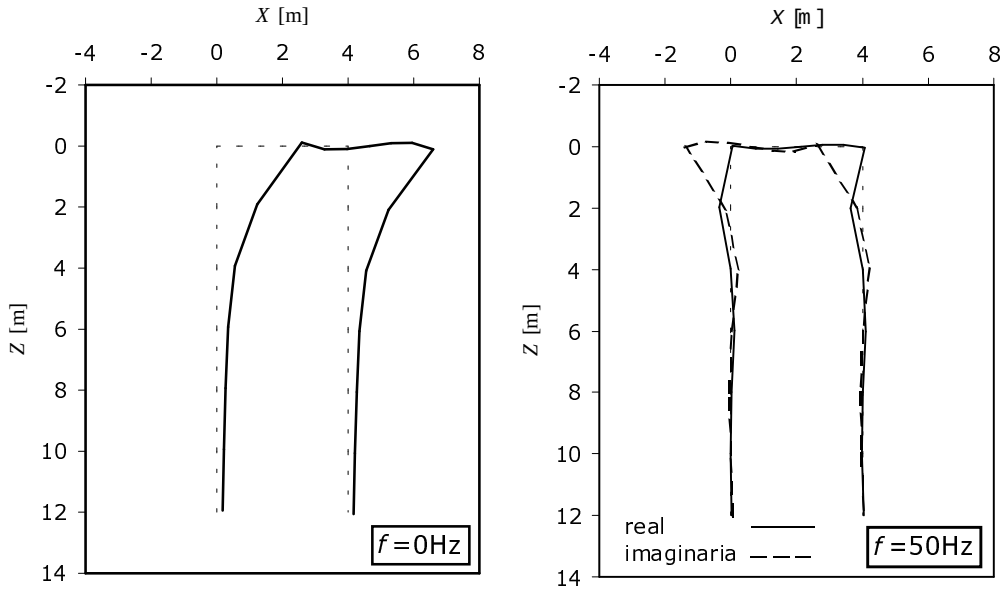

Figura 5.45: Deformada del pórtico sometido a una carga lateral unitaria (magnificación de $2 \cdot 10^8$) en el centro de la viga

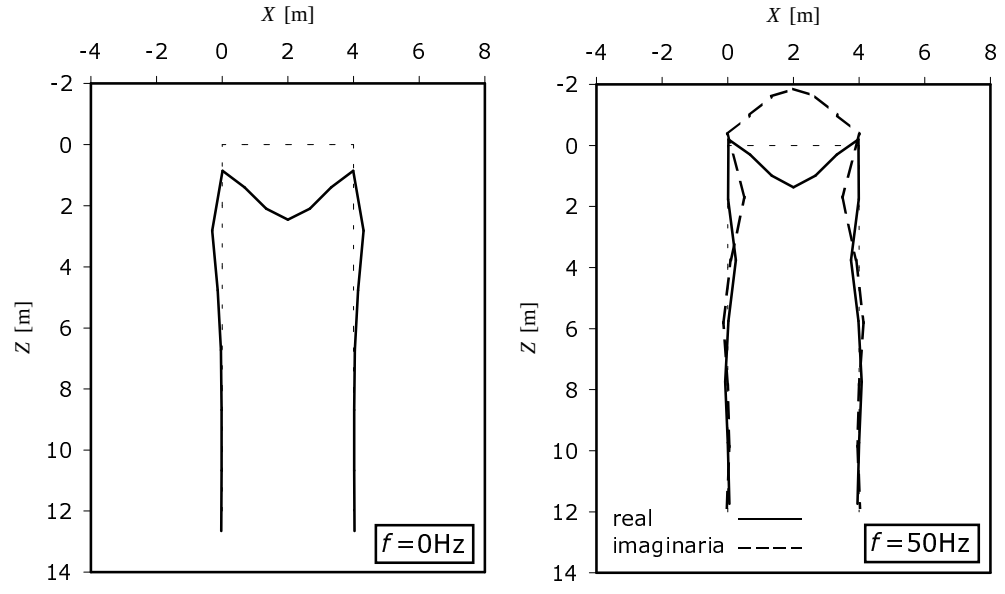

Figura 5.46: Deformada del pórtico sometido a una carga vertical unitaria (magnificación de $2 \cdot 10^8$) en el centro de la viga

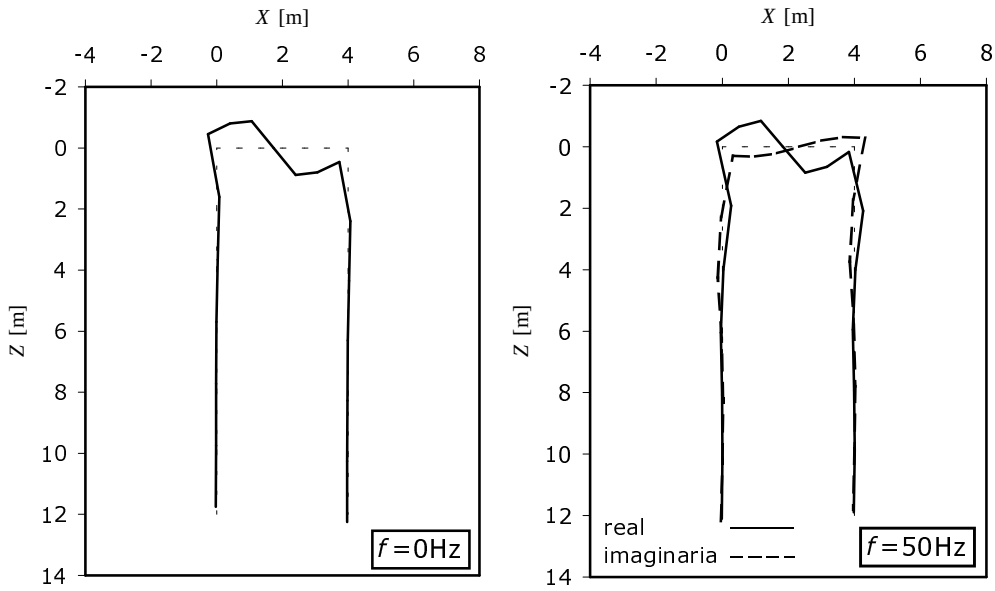

Figura 5.47: Deformada del pórtico sometido a un momento unitario (magnificación de $3 \cdot 10^8$) en el centro de la viga

solución numérica de este problema es obtenida mediante la discretización de los elementos estructurales (esto es, pilotes y viga) en 6 elementos de 2 nodos cada uno y se utilizan 6 puntos de integración de Gauss para cada dimensión de integración. La respuesta del sistema, al igual que en el ejemplo anterior, es estudiada en términos de la matriz de flexibilidad y rigidez, definidas como:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{XX} & F_{XZ} & F_{X\theta} \\ F_{ZX} & F_{ZZ} & F_{Z\theta} \\ F_{\theta X} & F_{\theta Z} & F_{\theta\theta} \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} K_{XX} & K_{XZ} & K_{X\theta} \\ K_{ZX} & K_{ZZ} & K_{Z\theta} \\ K_{\theta X} & K_{\theta Z} & K_{\theta\theta} \end{bmatrix} \tag{5.46}$$

Este problema, a diferencia del anterior no posee características de simetría o antisimetría, por lo cual la tanto la matriz de rigidez como la de flexibilidad no contienen ceros. Sin embargo, puede anticiparse lo siguiente: dado que la rigidez axial de la viga es mucho mayor que la lateral de los pilotes, la respuesta del pórtico a una carga horizontal en la

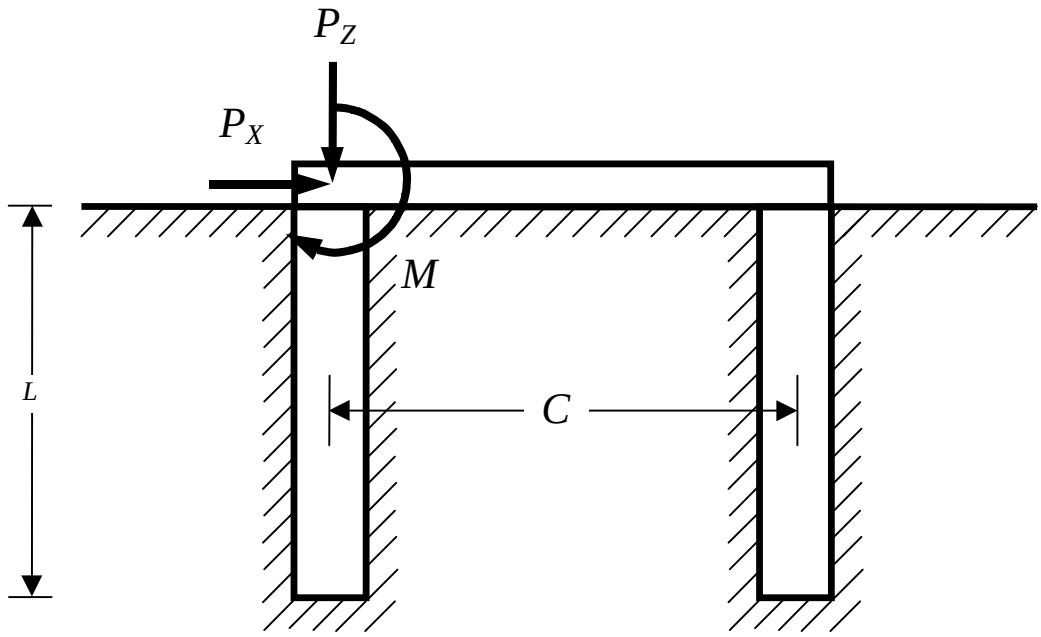

Figura 5.48: Pórtico enterrado sometido a cargas en la unión pilote-viga

unión pilote-viga (Figura 5.48) debe ser muy similar a la del mismo sometido a una carga horizontal aplicada en el centro del tramo de la viga (Figura 5.29). Ya que en este último caso el término $F_{XZ} = 0$, puede anticiparse que el término de acoplamiento F_{XZ} (y por ende su recíproco, F_{ZX}) para el ejemplo en cuestión sea muy débil.

La matriz de flexibilidad del pórtico en función de la frecuencia, definida en las variables de la Figura 5.48, está dada en las Figuras 5.49 a 5.54. La matriz de rigidez, obtenida mediante inversión de la de flexibilidad, está dada en las Figuras 5.55 a 5.60. Las Figuras 5.50, 5.51 y 5.53 muestran que la pérdida de simetría resultante del de la función de mapeo aproximada es débil, y a fines prácticos, la matriz de flexibilidad resulta simétrica. A idéntica conclusión puede arribarse con respecto a la matriz de rigidez considerando las Figuras 5.56, 5.57 y 5.59 .

Del análisis de los resultados obtenidos, se observan las siguientes características de los coeficientes de la matriz de rigidez del pórtico enterrado sometido a cargas en la unión

pilote-viga:

1. Las características disipativas son análogas a las analizadas en el ejemplo anterior (carga en el centro del tramo de la viga); la mayor disipación se da para las cargas laterales y la menor corresponde al momento. Esto responde a las mismas razones explicitadas anteriormente.

2. El acoplamiento entre los desplazamientos laterales y los verticales en términos de flexibilidad es, en general, distinto de cero y de signo negativo. El hecho de que sea distinto de cero responde al esfuerzo de corte en la viga de conexión, ya que este esfuerzo se transmite en forma de esfuerzo normal hacia los pilotes.

3. El acoplamiento entre los desplazamientos laterales y los verticales, en términos de flexibilidad, es débil. Esto puede ser cuantificado extendiendo la ecuación (5.45) para este caso, con la salvedad de que para el ejemplo actual esta ecuación no indica estrictamente el error porcentual entre los términos de rigidez con y sin acoplamiento. El valor de $\varepsilon_{ZX}\,[\,\%]$ para el rango de frecuencias considerado es $\varepsilon_{ZX}\,[\,\%] < 1\,\%$.

4. El acoplamiento entre los desplazamientos laterales y los giros en términos de flexibilidad es, a diferencia del ejemplo anterior, positivo. Esto se debe a que, si bien la deformada producida por una carga horizontal en ambos ejemplos es prácticamente idéntica, la variable θ está definida en una sección distinta para cada ejemplo.

5. El acoplamiento entre los desplazamientos laterales y los giros, en términos de flexibilidad, es importante. Esto puede ser cuantificado, al igual que en el punto anterior, extendiendo la ecuación (5.45) para este caso, haciendo la misma salvedad. El valor de $\varepsilon_{\theta X}\,[\,\%]$ para el rango de frecuencias considerado es $10\,\% < \varepsilon_{ZX}\,[\,\%] < 16\,\%$.

6. El coeficiente de flexibilidad, F_{XX}, es prácticamente idéntico al obtenido para el caso de la carga en el centro del tramo, mientras que el coeficiente de rigidez, K_{XX},

correspondiente al ejemplo considerado difiere en un 10 % del obtenido para el ejemplo anterior. Esto es así ya que los términos de acoplamiento, $K_{\theta X}$, a diferencia del ejemplo anterior, son importantes.

7. El acoplamiento entre los desplazamientos verticales y los giros es, en general, distinto de cero y de signo negativo. El hecho de que sea distinto de cero responde, nuevamente, a la existencia de la viga de conexión entre los pilotes, ya que es ésta la que distribuye el momento aplicado entre ambos pilotes en forma de momentos flectores y esfuerzos axiales. Estos últimos son los causantes de los desplazamientos axiales de los pilotes, siendo el signo negativo del desplazamiento vertical del pilote sobre el cual se definen los grados de libertad consistente con el del momento externo aplicado (Figura 5.48).

8. El acoplamiento descripto en el punto anterior es débil, siendo el valor de $\varepsilon_{Z\theta}\,[\,\%] < 3\,\%$ para el rango de frecuencias considerado.

Las deformadas del pórtico debidas a cargas armónicas unitarias de 0 y 50 Hz, actuando según las direcciones lateral, vertical y rotacional, están dadas en las Figuras 5.45, 5.46 y 5.47, respectivamente. Al igual que para el ejemplo anterior, las deformadas en las Figuras 5.45, 5.46 y 5.47 han sido graficadas uniendo los nodos desplazados mediante líneas rectas, mientras que la formulación estrictamente considera interpolaciones de tercer grado para los desplazamientos transversales.

Comparación con aproximaciones Dado que no se encuentra en la literatura una solución rigurosa del problema del pórtico enterrado sometido a cargas dinámicas, en esta sección se analiza la bondad de las aproximaciones usuales, disponibles en la literatura especializada, para modelar el comportamiento de este tipo de estructuras en función del comportamiento individual de sus componentes. Para ello, se considerará en forma separada el problema de la determinación de la rigidez lateral, K_X, vertical, K_Z, y rotacional, K_θ,

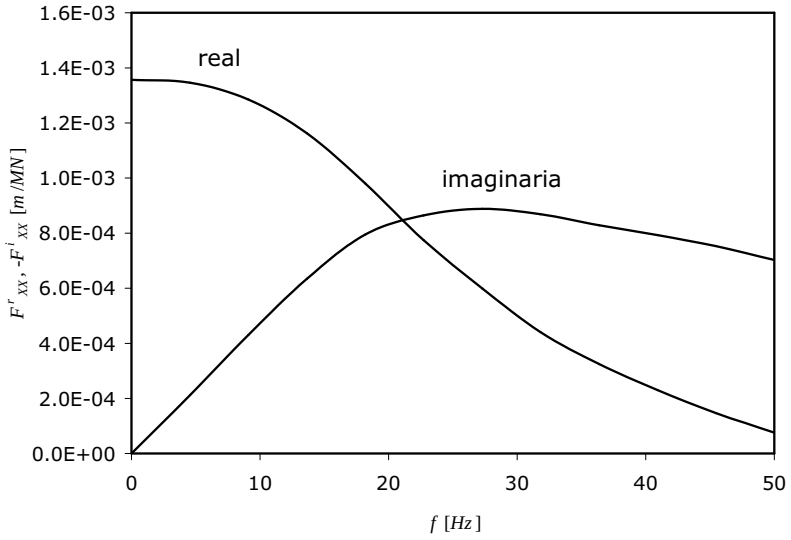

Figura 5.49: Coeficiente F_{XX} de la matriz de flexibilidad del pórtico enterrado sometido a cargas en la unión pilote-viga

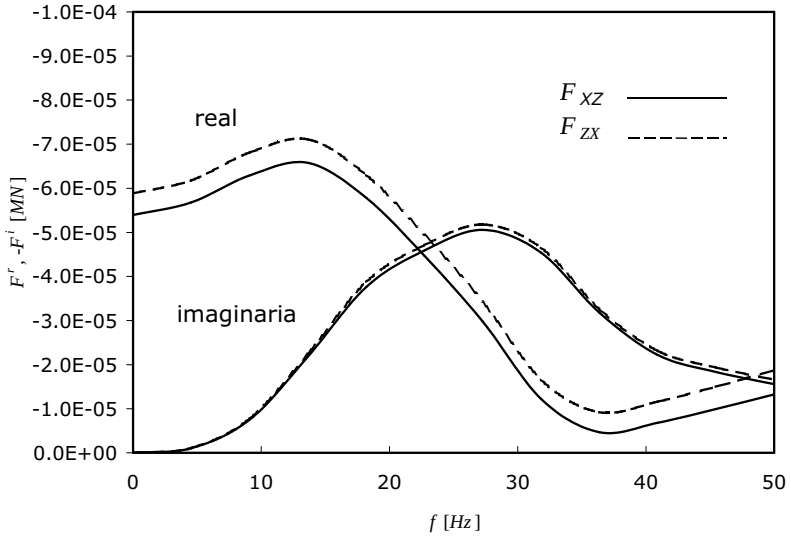

Figura 5.50: Coeficiente F_{XZ} de la matriz de flexibilidad del pórtico enterrado sometido a cargas en la unión pilote-viga

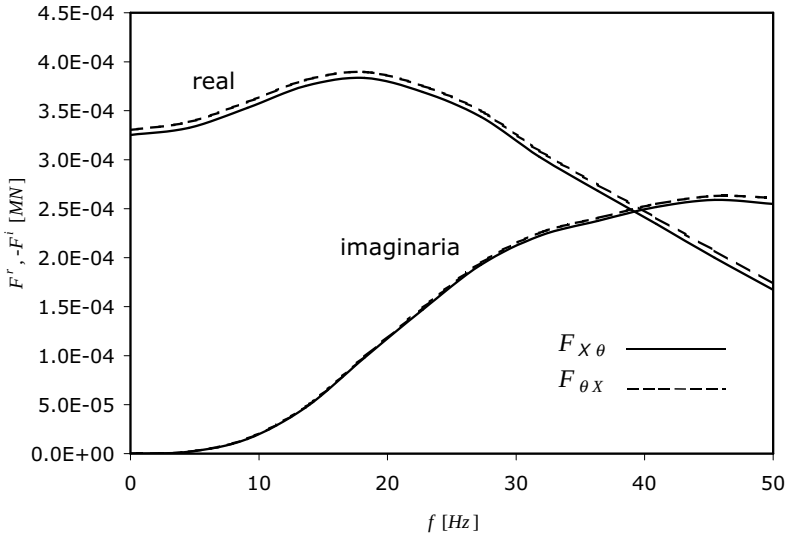

Figura 5.51: Coeficiente $F_{X\theta}$ de la matriz de flexibilidad del pórtico enterrado sometido a cargas en la unión pilote-viga

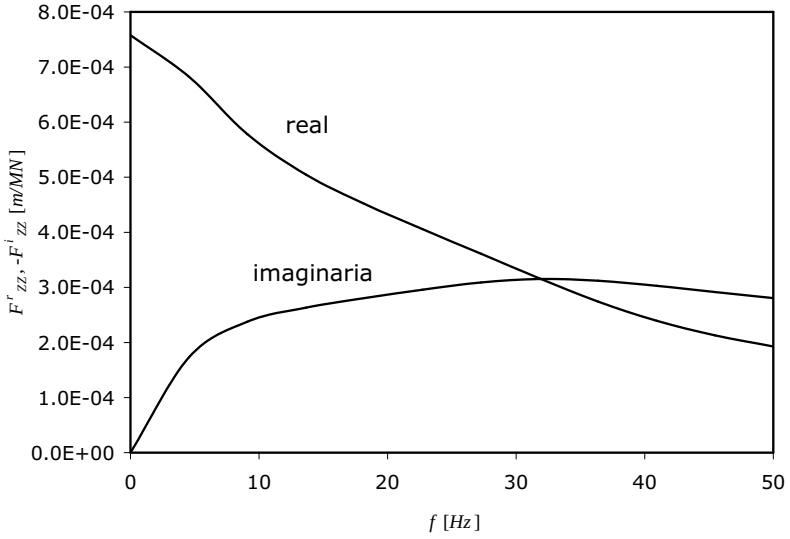

Figura 5.52: Coeficiente F_{ZZ} de la matriz de flexibilidad del pórtico enterrado sometido a cargas en la unión pilote-viga

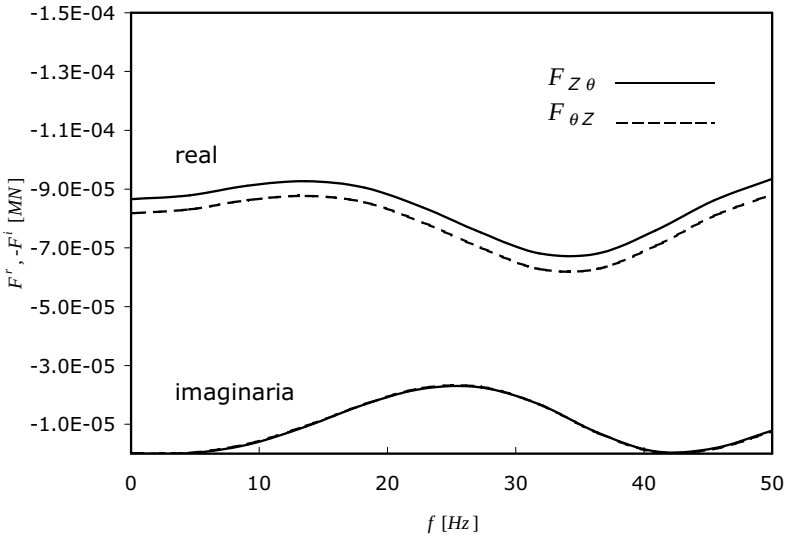

Figura 5.53: Coeficiente $F_{Z\theta}$ de la matriz de flexibilidad del pórtico enterrado sometido a cargas en la unión pilote-viga

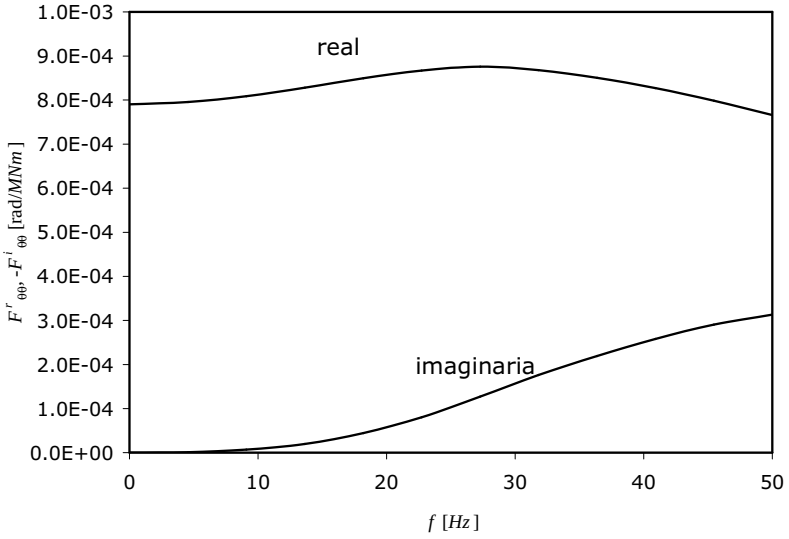

Figura 5.54: Coeficiente $F_{\theta\theta}$ de la matriz de flexibilidad del pórtico enterrado sometido a cargas en la unión pilote-viga

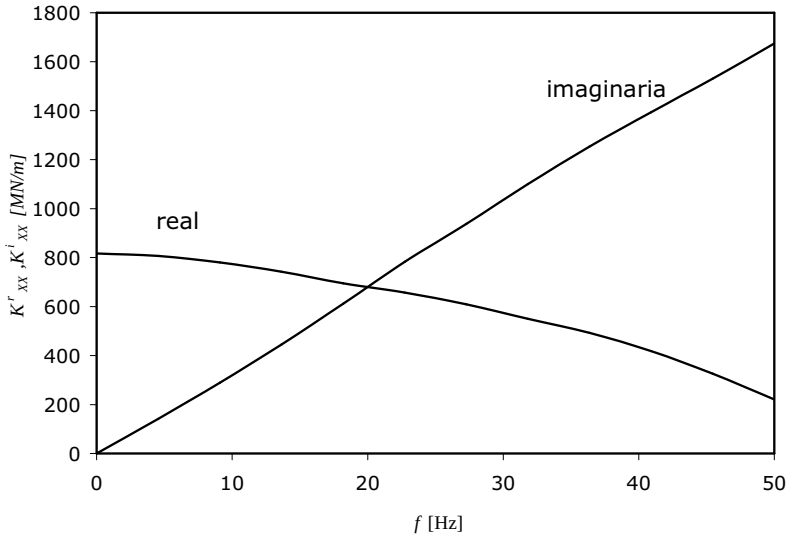

Figura 5.55: Coeficiente K_{XX} de la matriz de rigidez del pórtico enterrado sometido a cargas en la unión pilote-viga

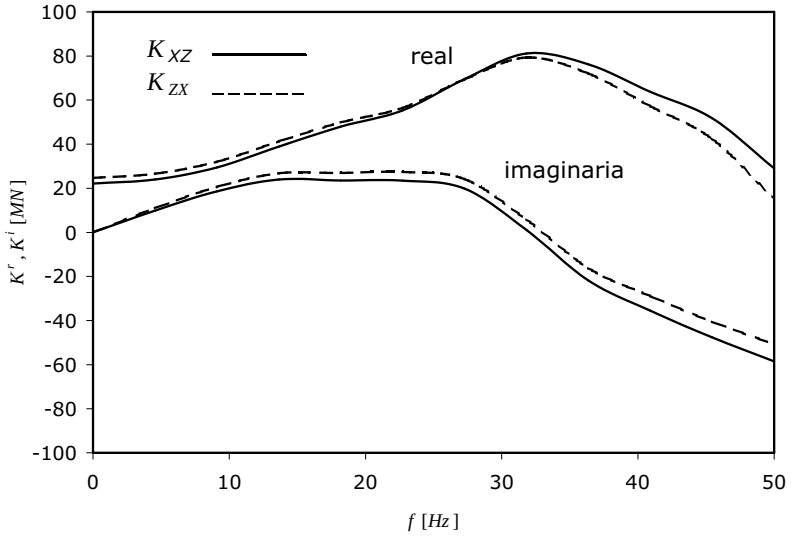

Figura 5.56: Coeficiente K_{XZ} de la matriz de rigidez del pórtico enterrado sometido a cargas en la unión pilote-viga

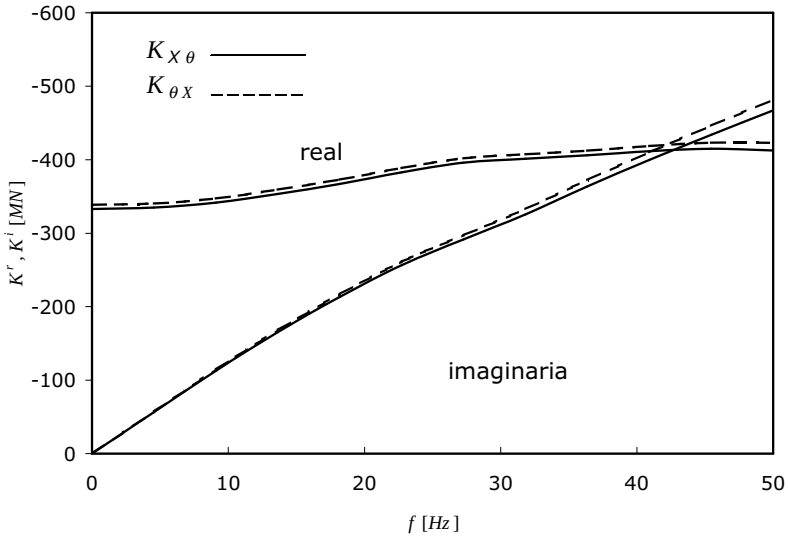

Figura 5.57: Coeficiente $K_{X\theta}$ de la matriz de rigidez del pórtico enterrado sometido a cargas en la unión pilote-viga

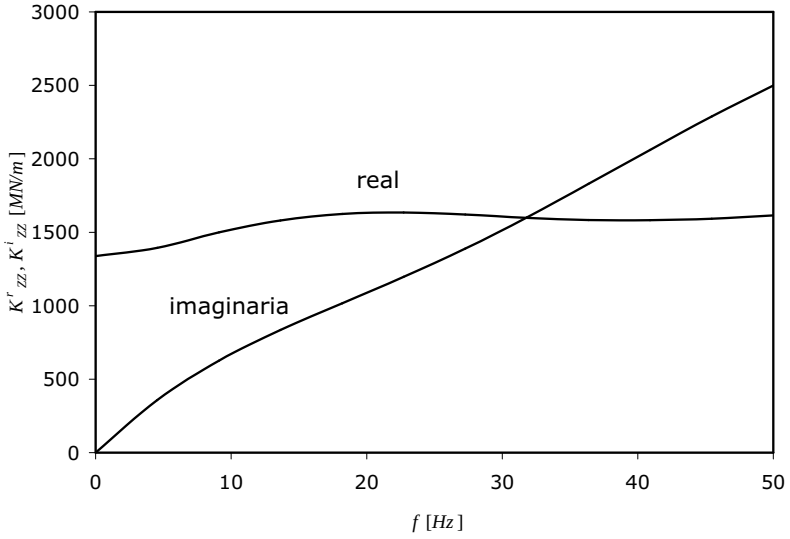

Figura 5.58: Coeficiente K_{ZZ} de la matriz de rigidez del pórtico enterrado sometido a cargas en la unión pilote-viga

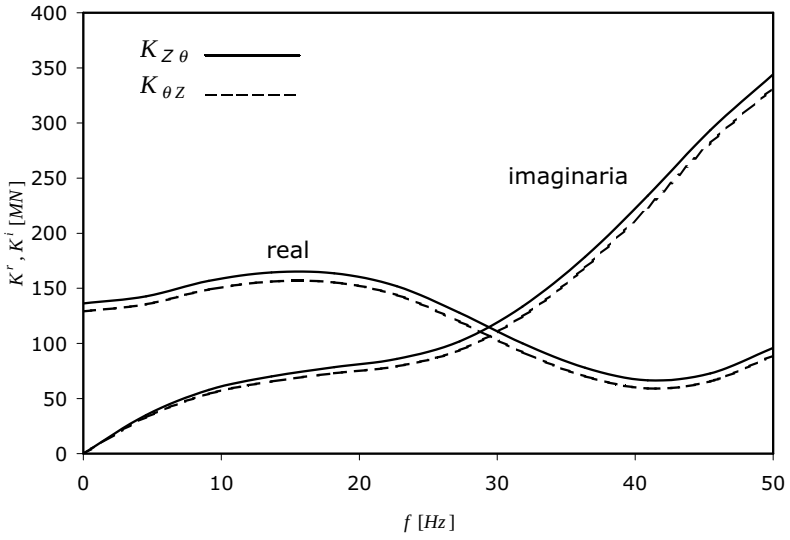

Figura 5.59: Coeficiente $K_{\theta\theta}$ de la matriz de rigidez del pórtico enterrado sometido a cargas en la unión pilote-viga

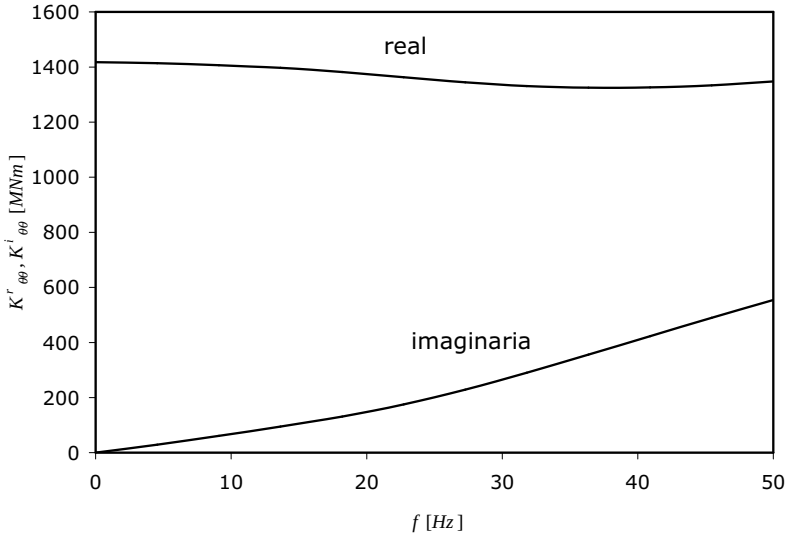

Figura 5.60: Coeficiente $K_{\theta\theta}$ de la matriz de rigidez del pórtico enterrado sometido a cargas en la unión pilote-viga

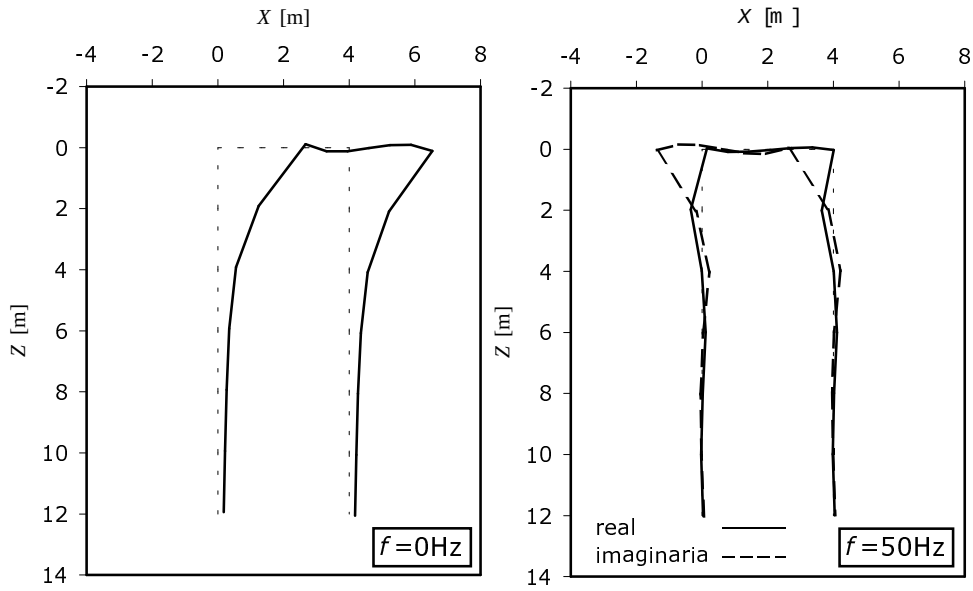

Figura 5.61: Deformada del pórtico sometido a una carga lateral unitaria (magnificación de $2 \cdot 10^8$) en la unión viga-pilote

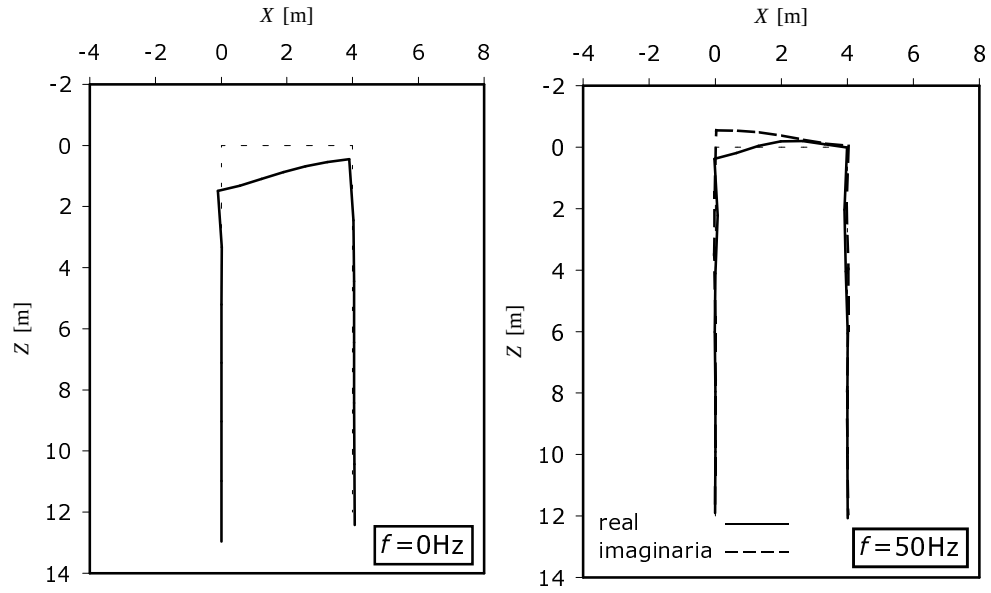

Figura 5.62: Deformada del pórtico sometido a una carga vertical unitaria (magnificación de $2 \cdot 10^8$) en la unión viga-pilote

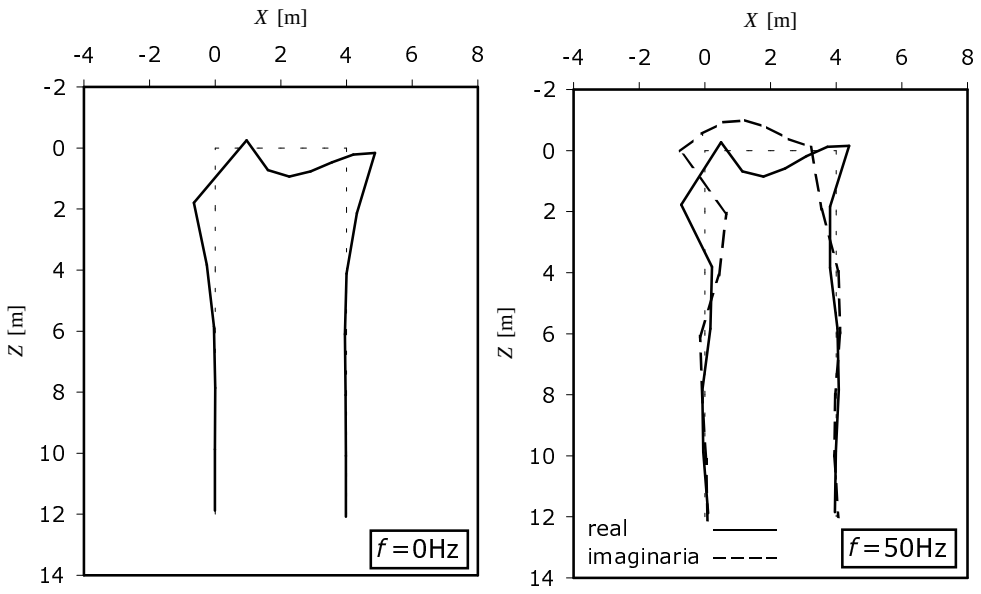

Figura 5.63: Deformada del pórtico sometido a una momento unitario (magnificación de $3 \cdot 10^8$) en la unión viga-pilote

del pórtico de la Figura 5.48, considerando que no existe acoplamiento con los restantes grados de libertad. Es decir, se busca determinar la inversa algebraica de los coeficientes de flexibilidad dados en las Figuras 5.49, 5.52 y 5.54:

$$K_X = F_{XX}^{-1} \tag{5.47a}$$

$$K_Z = F_{ZZ}^{-1} \tag{5.47b}$$

$$K_\theta = F_{\theta\theta}^{-1} \tag{5.47c}$$

Rigidez vertical, K_Z A fines de determinar la rigidez vertical del pórtico de la Figura 5.48, una aproximación ingenieril puede consistir en considerar la contribución del pilote sobre el cual se aplica la carga, K_P, considerando que éste se encuentra aislado, más la correspondiente a la viga de conexión sometida a un patrón de desplazamientos como el de la Figura 5.64, K_B. La rigidez dinámica de la viga puede estimarse mediante

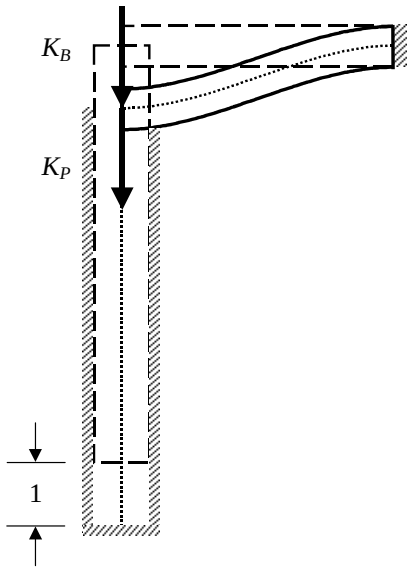

Figura 5.64: Aproximación considerada para la estimación de la rigidez vertical, $K_Z = K_P + K_B$

la siguiente expansión de primer orden en términos de ω^2:

$$K_B = \frac{12\,E_b\,I_b}{C^3} - \omega^2 \frac{13}{35}\rho_b\,A_b\,C \tag{5.48}$$

donde $E_b\,I_b$ es la rigidez flexional de la sección de la viga, C la longitud, ρ_b la densidad de masa y A_b el área de la sección transversal de la misma. Considerando la rigidez de un pilote aislado más la contribución de (5.48) resulta en una estimación de la rigidez de la estructura, la cual está dada junto a los resultados rigurosos presentados en la sección anterior en la Figura 5.65. Puede verse que los resultados en correspondencia con la solución aproximada son bastante cercanos a los obtenidos mediante el modelo riguroso, en el rango de frecuencias considerado, lo cual muestra la consistencia de los resultados. Por otra parte, la componente imaginaria del modelo aproximado es menor (16 % para $f = 50Hz$) a la indicada por el modelo riguroso, lo cual indica que la disipación introducida por la viga de conexión no es tenida en cuenta por el modelo aproximado.

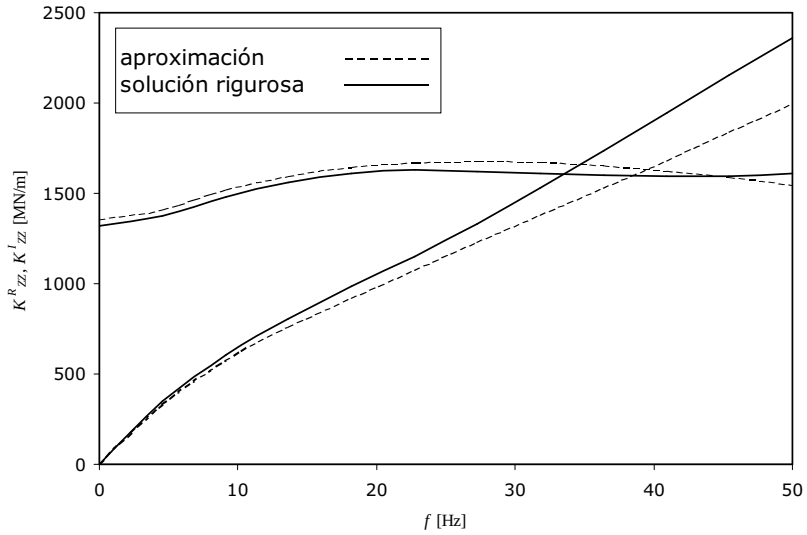

Figura 5.65: Rigidez vertical, K_Z, según el modelo aproximado y el riguroso

Rigidez lateral, K_X A fines de obtener una aproximación para la rigidez lateral del pórtico, pueden utilizarse los resultados correspondientes a pilotes aislados e introduciendo los factores de interacción dinámica de Gazetas y colaboradores ([10]). Para ello, es necesario realizar las siguientes hipótesis:

1. La carga horizontal es tomada por ambos pilotes en igual proporción.

2. La viga de fundación es o bien infinitamente rígida (giro restringido) o bien infinitamente flexible (giro no restringido).

3. El efecto de interacción pilote-suelo-pilote es tenido en cuenta mediante los factores de interacción dinámica, α, los cuales son supuestos válidos para las condiciones de giro restringido y no restringido.

4. El fenómeno de propagación de ondas en la viga es despreciable, por lo cual este elemento sólo contribuye a la rigidez dinámica mediante su inercia.

Mediante estas hipótesis, la rigidez dinámica lateral para la hipótesis de viga infinitamente rígida puede ser estimada de la siguiente manera:

$$K_X^r(\omega) = 2\,\frac{\mathcal{F}_{XX}^r(\omega) + \alpha^r\,\mathcal{F}_{XX}^r(0)}{\left[\mathcal{F}_{XX}^r(\omega) + \alpha^r\,\mathcal{F}_{XX}^r(0)\right]^2 + \left[\mathcal{F}_{XX}^i(\omega) + \alpha^i\,\mathcal{F}_{XX}^r(0)\right]^2} - \omega^2 A_b\,C\,\rho_b \quad (5.49a)$$

$$K_X^i(\omega) = -2\,\frac{\mathcal{F}_{XX}^i(\omega) + \alpha^i\,\mathcal{F}_{XX}^r(0)}{\left[\mathcal{F}_{XX}^r(\omega) + \alpha^r\,\mathcal{F}_{XX}^r(0)\right]^2 + \left[\mathcal{F}_{XX}^i(\omega) + \alpha^i\,\mathcal{F}_{XX}^r(0)\right]^2} \quad (5.49b)$$

donde los supraíndices 'r' e 'i' indican componentes real e imaginaria, respectivamente, y los coeficientes $\mathcal{F}_{XX}$ son definidos como la inversa algebraica del coeficiente de rigidez de un pilote aislado con restricción al giro; esto es: $\mathcal{F}_{XX} = K_{XX}^{-1}$. Para estimar la rigidez en correspondencia con la hipótesis de giro libre, las ecuaciones 5.49 deben contener los valores estrictos de los coeficientes de flexibilidad F_{XX}; es decir que para este caso, $\mathcal{F}_{XX} = F_{XX}$.

Los coeficientes de interacción dinámica para este caso, tomados del trabajo de Gazetas y colaboradores, están dados en la Figura 5.66. Cabe destacar que los valores dados por Gazetas no corresponden estrictamente al caso en estudio; sin embargo, Gazetas muestra que el efecto del módulo de Poisson, ν, y de la relación longitud-diámetro, L/d, son despreciables para este caso.

La Figura 5.67 muestra la rigidez dinámica lateral aproximada, obtenida mediante las ecuaciones (5.49), y la correspondiente al modelo riguroso del pórtico enterrado. Puede verse que la tendencia de las componentes real e imaginaria son similares y que las hipótesis de giro restringido y no restringido son límites superior e inferior, respectivamente, a los valores obtenidos mediante el modelo riguroso. Por otra parte, cabe notar que de no contarse con el modelo completo del pórtico enterrado, el rango de incertidumbre entre los límites superior e inferior antes mencionados ronda el 50 % con respecto al valor medio. Esta incertidumbre sólo puede ser reducida recurriendo al modelo del pórtico completo.

Es interesante también evaluar la incidencia de los factores de interacción dinámica introducidos en el análisis aproximado. La Figura 5.68 muestra la rigidez dinámica lateral

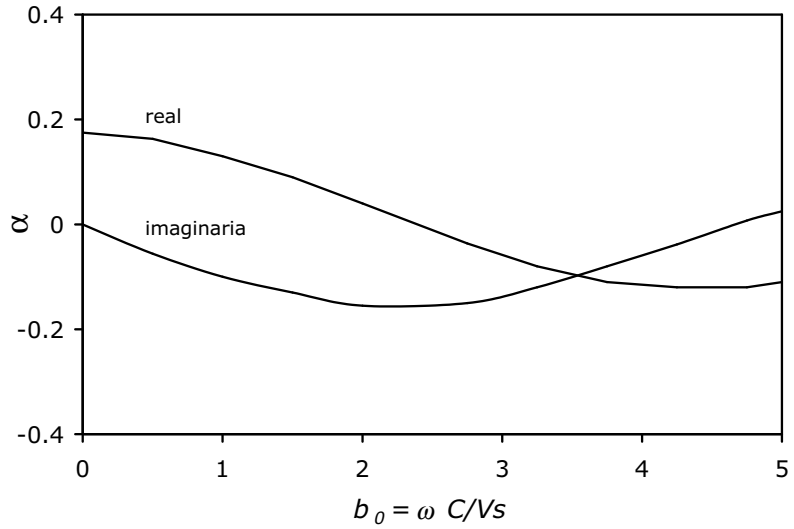

Figura 5.66: Factores de interacción dinámica entre pilotes (Gazetas y colaboradores); $E_p/E_s = 200$; $L/d = 20$; $\rho_s/\rho_p = 0{,}7$; $\nu = 0{,}4$

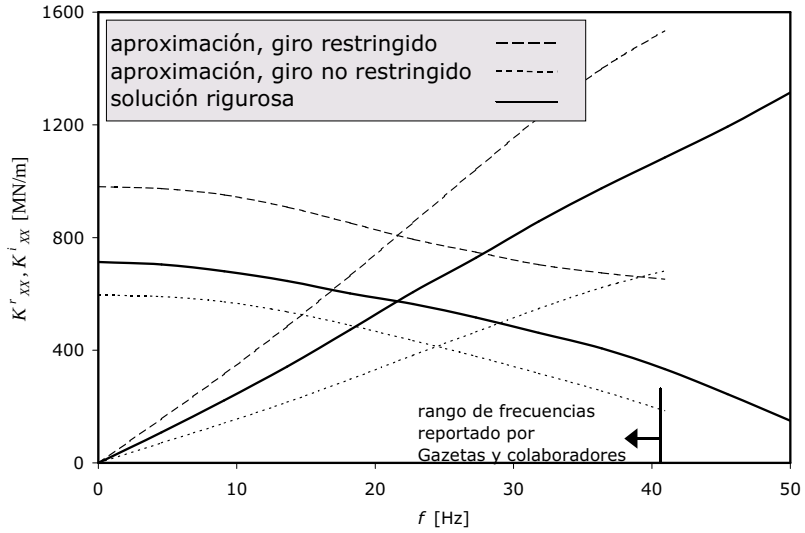

Figura 5.67: Rigidez lateral, K_X, según el modelo aproximado y el riguroso

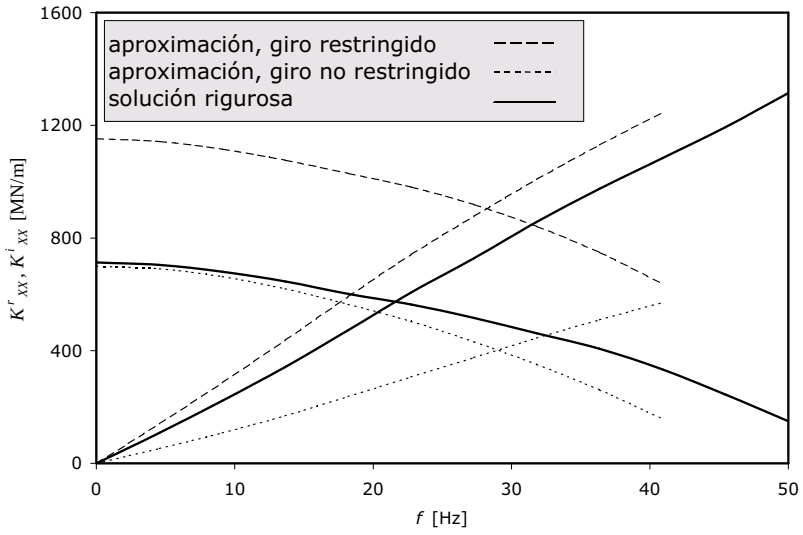

Figura 5.68: Rigidez lateral, K_X, según el modelo riguroso y el aproximado sin tener en cuenta la interacción dinámica entre pilotes

aproximada considerando $\alpha = 0$ (sin interacción) en todo el rango de frecuencias y la correspondiente al modelo riguroso del pórtico enterrado. Puede verse que la tendencia de las componentes resultantes del modelo aproximado es, en este caso, distinta de la correspondiente al modelo del pórtico completo, lo cual resalta la utilidad de los factores de interacción dinámica de Gazetas. Cabe notar que la componente real resultante del modelo aproximado para la hipótesis de giro no restringido es muy cercana a la correspondiente al modelo del pórtico completo para bajas frecuencias. Sin embargo, para este mismo rango de frecuencias la componente imaginaria evaluada por el modelo aproximado considerando giro no restringido difiere en un 100 % con la resultante del modelo del pórtico completo.

Modelación de problemas simétricos/antisimétricos

Es práctica común en la ingeniería estructural simplificar los problemas que poseen características geométricas, mecánicas y de solicitaciones tales que la respuesta de la estructura

resulta simétrica o antisimétrica. En el ejemplo del pórtico enterrado sometido a solicitaciones tales como las indicadas en la Figura 5.29, la respuesta de la estructura a la carga vertical es simétrica, mientras que la correspondiente a las cargas laterales y el momento es antisimétrica. En esta sección se analizan alternativas para modelar las respuestas antisimétricas, mientras que los conceptos generales derivados del análisis pueden ser directamente extendidos para el caso de las respuestas simétricas.

A fines de modelar la respuesta asimétrica (Figura 5.69a), un criterio simplista consideraría la respuesta de la mitad de la estructura inmersa en el continuo, introduciendo la condición de borde apropiada en la sección en la cual se corta la misma (Figura 5.69b). Este criterio simplista considera solamente la antisimetría estructural, mientras que ignora la respuesta antisimétrica del continuo. Las Figuras 5.70 y 5.71 muestran los coeficientes de flexibilidad evaluados mediante el modelo completo y considerando antisimetría estructural. Puede verse que los resultados obtenidos mediante la consideración de antisimetría estructural difieren notablemente de los correspondientes al modelo completo, lo cual resulta de no haber introducido la antisimetría de la respuesta del continuo.

Un criterio riguroso para modelar problemas antisimétricos debe considerar la antisimetría, tanto de la respuesta de la estructura como de la del continuo, con respecto al plano de simetría de la estructura (Figura 5.69c). Esto puede llevarse a cabo introduciendo la propiedad de antisimetría en el tensor de Green utilizado. Para ello puede definirse un tensor de Green antisimétrico, $\mathbf{G}^*$, con respecto al plano vertical introduciendo imágenes espejo de las componentes del tensor de Green del problema en consideración, $\mathbf{G}$. Para el caso estudiado, el tensor de Green antisimétrico se obtiene sumando a la fuente (carga aplicada) una imagen espejo (Figura 5.74) positiva, para el caso de carga horizontal, y

negativa para el caso de carga vertical, esto es:

$$G^*_{iX}(\mathbf{x}, \mathbf{X}) = G_{iX}(\mathbf{x}, \mathbf{X}) + G_{iX}(\mathbf{x}, \mathbf{X} + \mathbf{T}) \tag{5.50a}$$

$$G^*_{iZ}(\mathbf{x}, \mathbf{X}) = G_{iZ}(\mathbf{x}, \mathbf{X}) - G_{iZ}(\mathbf{x}, \mathbf{X} + \mathbf{T}) \tag{5.50b}$$

donde $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -C & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Teniendo en cuenta tanto la antisimetría de la respuesta estructural como la del continuo, la solución obtenida es idéntica a la del pórtico completo. Esto puede visualizarse teniendo en cuenta que, de la definición del tensor de Green antisimétrico (5.50), la matriz de pseudoflexibilidad es evaluada teniendo en cuenta las cargas en la otra mitad de la estructura, las cuales vienen dadas por las imágenes espejo. De esta manera, es posible reducir el problema numérico en gran medida introduciendo una simple modificación al tensor de Green sin introducir aproximaciones que reducen la calidad de la solución.

Si el problema es del tipo simétrico (por ejemplo, carga vertical en el centro del tramo), el tensor de Green simétrico a utilizar está dado por:

$$G^*_{iX}(\mathbf{x}, \mathbf{X}) = G_{iX}(\mathbf{x}, \mathbf{X}) - G_{iX}(\mathbf{x}, \mathbf{X} + \mathbf{T}) \tag{5.51a}$$

$$G^*_{iZ}(\mathbf{x}, \mathbf{X}) = G_{iZ}(\mathbf{x}, \mathbf{X}) + G_{iZ}(\mathbf{x}, \mathbf{X} + \mathbf{T}) \tag{5.51b}$$

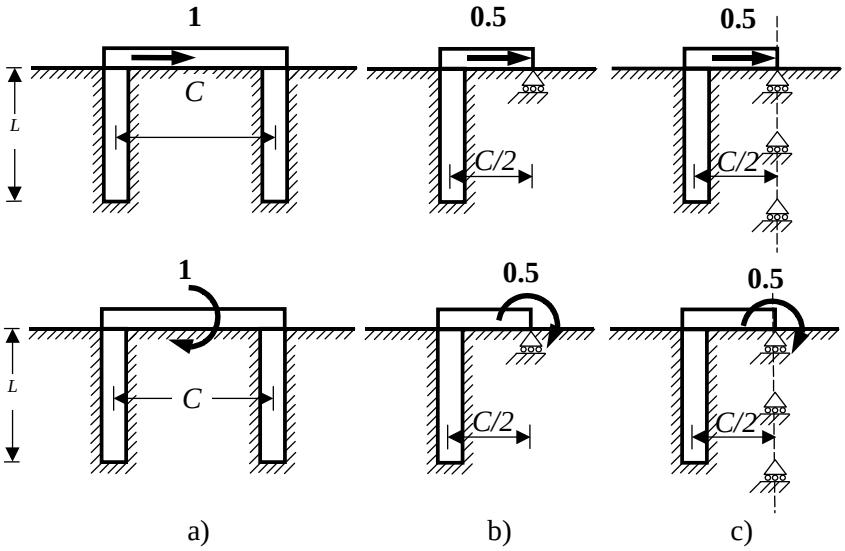

Figura 5.69: Problema antisimétrico: a) modelo completo; b) modelo con antisimetría estructural; c) modelo con antisimetría completa (continuo y estructura)

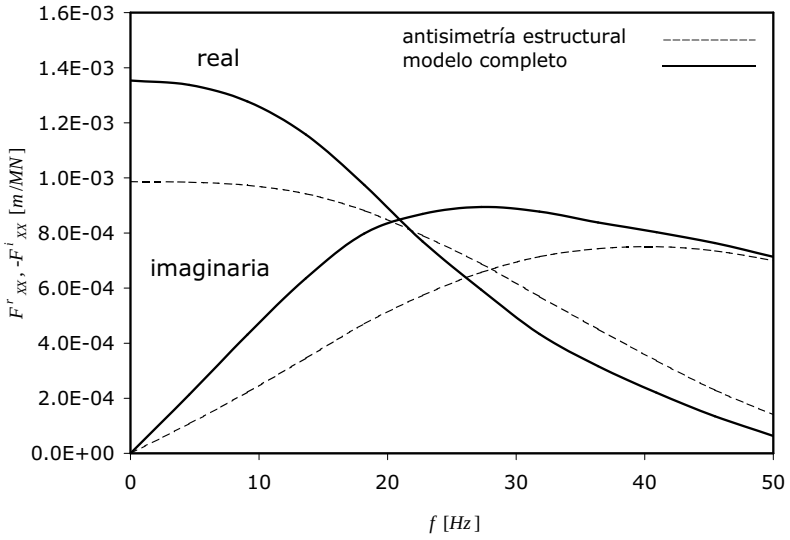

Figura 5.70: Coeficiente de flexibilidad F_{XX} según el modelo completo y considerando antisimetría estructural

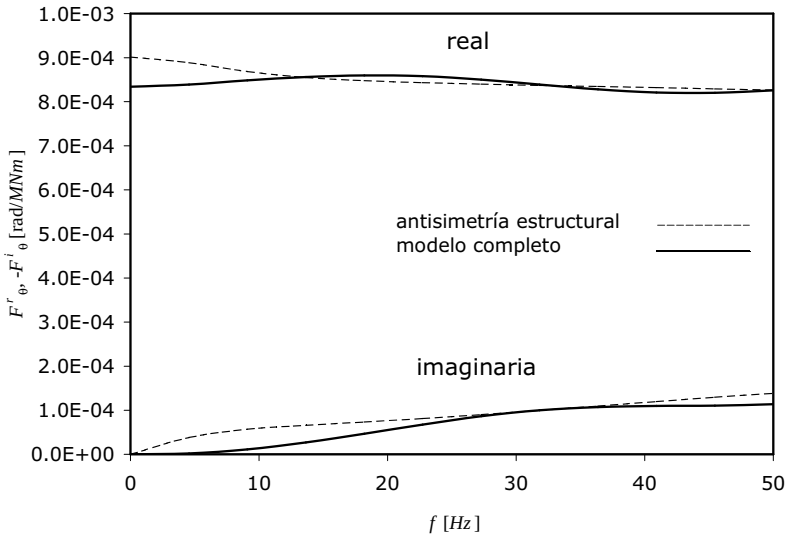

Figura 5.71: Coeficiente de flexibilidad $F_{\theta\theta}$ según el modelo completo y considerando antisimetría estructural

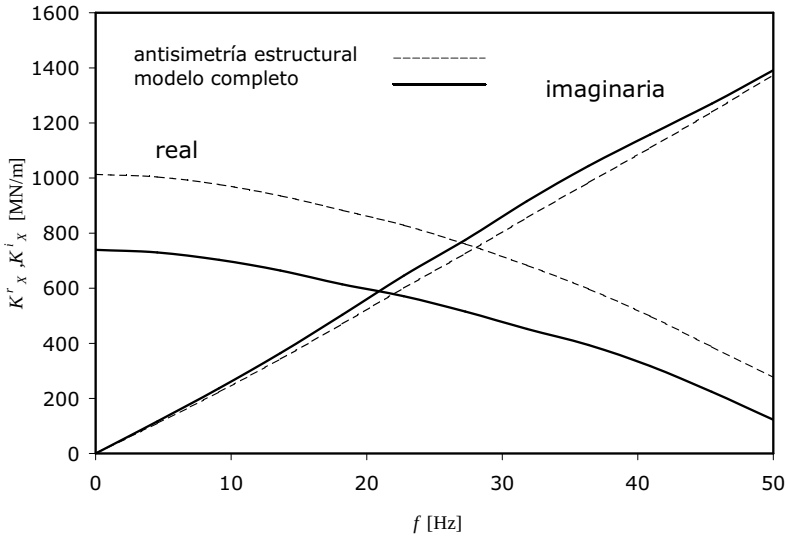

Figura 5.72: Coeficiente de rigidez K_X según el modelo completo y considerando antisimetría estructural

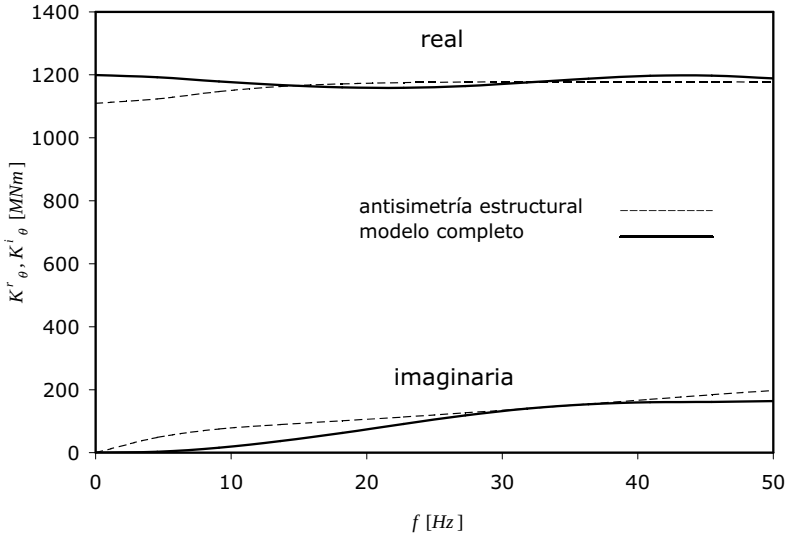

Figura 5.73: Coeficiente de rigidez K_θ según el modelo completo y considerando antisimetría estructural

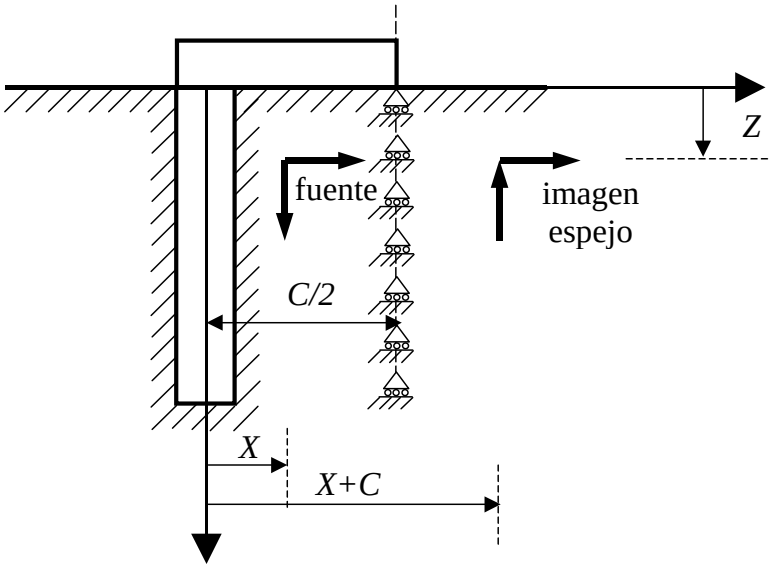

Figura 5.74: Definición del tensor de Green antisimétrico mediante imágenes espejo

Capítulo 6

Conclusiones y recomendaciones

En este capítulo se resumen las conclusiones resultantes del trabajo de investigación descripto en esta disertación. Las mismas se pueden dividir en tres grupos, a saber: i) respecto a la formulación; ii) respecto a la modelación de problemas; y iii) respecto a futuras investigaciones.

6.1 Formulación del IBEM

1. Este trabajo propone una formulación novedosa del método indirecto de elementos de contorno, basada en el principio de trabajos virtuales. El hecho de que la formulación sea planteada a partir de este principio se traduce en la posibilidad de utilizar interpolaciones compatibles para el dominio del continuo y de la estructura, característica esencial de la formulación propuesta que la diferencia de otros trabajos.

2. Mediante la formulación propuesta, es posible obtener una matriz de rigidez del continuo definida en variables convencionales del análisis estructural. Esta matriz puede ser superpuesta con la correspondiente a la estructura mediante el conocido método

de rigidez directa. La superposición de ambas matrices permite la definición de una matriz de rigidez global, mediante la cual es posible realizar el análisis acoplado del sistema suelo-estructura.

3. Mediante la matriz de rigidez global, es posible determinar la rigidez dinámica del suelo-estructura en forma sistemática y directa, a diferencia de otros trabajos que determinan la rigidez mediante integración de fuerzas de interacción y de inercia. Por su carácter sistemático, la formulación propuesta es una herramienta poderosa y de gran generalidad para la implementación computacional.

4. La matriz de rigidez obtenida mediante la formulación propuesta resulta simétrica; característica poco común en formulaciones de métodos de contorno. La simetría de la matriz de rigidez refleja la consistencia de la formulación y la reciprocidad de los sistemas elásticos. Esta propiedad se traduce en un notable ahorro numérico, ya que mediante la misma, es posible evaluar los coeficientes debajo de la diagonal principal como transpuestos de los ubicados por encima de la misma.

5. La formulación propuesta puede considerar semiespacios homogéneos o estratificados con condiciones de borde arbitrarias, siempre y cuando se disponga del tensor de Green para el problema a analizar. Esta característica es inherente a los métodos de contorno indirectos. En este trabajo, sin embargo, sólo se presentan resultados para semiespacios homogéneos.

6. Mediante la formulación propuesta, se presenta un elemento de dos nodos para el análisis tridimensional de pórticos planos sometidos a cargas en el plano. Si bien el elemento es plano, la naturaleza tridimensional del problema es tenida en cuenta por el tensor de Green utilizado.

7. A fines de obtener los coeficientes de la matriz de rigidez, es necesario realizar una integración de cuatro dimensiones. Sin embargo, estas integrales pueden ser convertidas en integrales de tres dimensiones introduciendo una aproximación en la función

de mapeo. La introducción de dicha aproximación se traduce en una muy débil pérdida de simetría en la matriz de rigidez; la cual a fines prácticos puede ser considerada simétrica.

8. El elemento propuesto es validado en este trabajo mediante la comparación de las predicciones del mismo para la rigidez, tanto estática como dinámica, de pilotes individuales y grupos de pilotes. Los resultados obtenidos mediante el elemento propuesto son totalmente consistentes con los indicados por otros autores reconocidos.

9. La robustez y convergencia de la formulación son puestas a prueba mediante el análisis de un pórtico enterrado en un semiespacio el cual es sometido a cargas laterales, verticales y momentos. Los resultados obtenidos muestran que se encuentra una solución satisfactoria con relativamente pocos elementos y con cuatro puntos de integración de Gauss.

6.2 Modelación de estructuras de barras enterradas

1. El costo numérico asociado a la evaluación de la matriz de rigidez del continuo es proporcional al asociado a la evaluación del tensor de Green. Para el problema de un semiespacio pavimentado o restringido, las funciones de Green están dadas por expresiones cerradas, cuya evaluación es directa. Para semiespacios homogéneos con superficie libre y $\nu = 0{,}5$, este trabajo propone la utilización de un tensor de Green aproximado, cuyas componentes son tomadas de los tensores de Green correspondientes al semiespacio pavimentado y restringido. Este tensor aproxima a la solución numérica rigurosa de Kausel ([11]) satisfactoriamente. La solución dada por Mamoon ([2]) para este caso, sólo es útil para muy bajas frecuencias, mientras que sus resultados difieren notablemente de los de Kausel para frecuencias mayores. Por otra parte, la formulación propuesta posee la generalidad suficiente como para

incorporar tensores de Green asociados a problemas de medios estratificados ([23]).

2. En la ingeniería geotécnica, es práctica habitual determinar la matriz de rigidez de pilotes inclinados mediante una transformación de coordenadas de la correspondiente a un pilote vertical. Esto fue inicialmente propuesto y validado por Poulos y Madhav ([27]) sobre la base de resultados numéricos para el caso estático. Mamoon y colaboradores ([17]) extienden este concepto al caso dinámico, asumiendo que el cambio de coordenadas responde a una solución exacta. Este trabajo analiza la hipótesis asumida por estos autores para el caso dinámico mediante ejemplos numéricos para pilotes inclinados. Se encuentra que la aproximación resulta razonable, particularmente para los términos de rigidez directa.

3. Los ejemplos considerados en este trabajo muestran que las estimaciones para la rigidez dinámica de un pórtico enterrado sobre la base de la rigidez de los elementos individuales pueden resultar en valores muy lejanos a los resultantes del análisis del pórtico completo, lo cual resalta la relevancia y utilidad práctica de la presente formulación.

4. Es posible realizar simplificaciones en el modelo cuando la respuesta de la estructura es simétrica o antisimétrica. La simplificación consiste en considerar la simetría o antisimetría tanto en la respuesta estructural como en la del continuo. La respuesta estructural simétrica o antisimétrica es modelada siguiendo las reglas convencionales del análisis estructural, mientras que la respuesta del continuo es modelada mediante la modificación del tensor de Green introduciendo imágenes espejo. Mediante estas consideraciones, es posible obtener resultados idénticos a los correspondientes al modelo completo, con un esfuerzo computacional y de modelación sustancialmente menor al asociado al mismo.

6.3 Recomendaciones para futuras investigaciones

1. La generalidad de la formulación propuesta se presta al desarrollo de una variedad de elementos con distintas superficies de interacción. Esta tesis muestra la formulación de un elemento plano de dos nodos con superficie de interacción cilíndrica para pilotes o vigas de sección circular o rectangular para vigas superficiales de sección rectangular. Su extensión a fines de modelar el comportamiento de vigas de sección rectangular completamente enterradas es inmediata.

2. A fines de modelar el comportamiento torsional de pilotes de gran diámetro, es posible desarrollar la implementación numérica de la formulación propuesta para un elemento de dos nodos con superficie de interacción cilíndrica sometido a torsión. Algunos aspectos para modelar la torsión de pilotes–tales como las funciones de interpolación de fuerzas y desplazamientos–son introducidas en este trabajo, mientras que los aspectos relacionados a la integración numérica necesitan ser investigados en mayor detalle. El autor considera que para este caso es posible introducir una función de mapeo aproximada a fines de eliminar la singularidad de la integración sobre la superficie cilíndrica y reducir la integral de cuatro dimensiones a una de tres dimensiones. Esto podría lograrse mapeando una superficie muy cercana pero no coincidente con la de interacción, introduciendo la simetría rotacional del problema y realizando un proceso de diferenciación numérica a fines de obtener la integral correspondiente a la superficie.

3. Es de interés investigar la posible extensión de la formulación propuesta para modelar el comportamiento de placas y elementos de volumen inmersos en medios continuos. El esquema general de la formulación propuesta se presta al análisis de elementos de diversa naturaleza. Esto puede lograrse introduciendo la superficie de interacción y esquema de interpolación particular para cada elemento en la formulación propuesta, la cual permite la evaluación de matrices de rigidez simétricas para los mismos.

Apéndice A

Evaluación de las integrales singulares $\mathcal{I}2$, $\mathcal{I}3$ e $\mathcal{I}4$

A.1 Integral $\mathcal{I}2$

Utilizando el sistema de coordenadas polares ilustrado en la Figura 4.11, $\mathcal{I}2$ resulta:

$$\mathcal{I}2 = \int_{\beta_1}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{\frac{b}{2\,\sin(\beta)}} G_{mn}\left(\tilde{\mathbf{x}}\left(s_p\right), \mathbf{X}\left(R\left(\rho,\beta\right), S\left(\rho,\beta\right)\right)\right) \frac{S - S_{j-1}}{S_j - S_{j-1}}\, \rho\, d\rho\, d\beta \tag{A.1}$$

donde β_1, $R\left(\rho,\beta\right)$ y $S\left(\rho,\beta\right)$ están dados en las ecuaciones (4.33). La integral (4.32) no posee singularidades en su dominio, ya que la singularidad de orden $O\left(1/\rho\right)$ de las funciones de Green es suavizada por el Jacobiano de la transformación a coordenadas polares, el cual es igual a ρ. Se introduce la siguiente transformación para eliminar la existencia del límite variable en (A.1) a fines de evaluar esta expresión mediante cuadratura de Gauss:

$$\beta = \frac{\frac{\pi}{2} - \beta_1}{2}\,\zeta + \frac{\frac{\pi}{2} + \beta_1}{2} \tag{A.2a}$$

$$\rho = \frac{b}{4\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\beta_1}{2}\,\zeta + \frac{\frac{\pi}{2}+\beta_1}{2}\right)}\,(1+\vartheta) \tag{A.2b}$$

El Jacobiano de la transformación resulta:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \zeta}{\partial \beta} & \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial \beta} & \frac{\partial \vartheta}{\partial \rho} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\frac{\pi}{2}-\beta_1}{2} & 0 \\ -\frac{\rho}{2}\frac{\frac{\pi}{2}-\beta_1}{\tan(\beta)} & \frac{b}{4\sin(\beta)} \end{bmatrix} \tag{A.3}$$

Introduciendo la transformación, la integral (A.1) resulta:

$$\mathcal{I}2 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} G_{mn}\left(\tilde{\mathbf{x}}\left(s_p\right), \mathbf{X}\left(R\left(\zeta,\vartheta\right), S\left(\vartheta\right)\right)\right) \frac{s_p + \frac{b}{4\tan\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\beta_1}{2}\zeta + \frac{\frac{\pi}{2}+\beta_1}{2}\right)}\left(1+\vartheta\right) - S_{j-1}}{S_j - S_{j-1}} ... \\ ... \frac{b^2}{\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\beta_1}{2}\zeta + \frac{\frac{\pi}{2}+\beta_1}{2}\right)^2} \frac{\vartheta+1}{32}\left(\frac{\pi}{2}-\beta_1\right) d\zeta\, d\vartheta \tag{A.4}$$

donde:

$$R\left(\zeta,\vartheta\right) = \frac{b}{4}\left(1+\vartheta\right) \tag{A.5a}$$

$$S\left(\vartheta\right) = s_p + \frac{b}{4\tan\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\beta_1}{2}\zeta + \frac{\frac{\pi}{2}+\beta_1}{2}\right)}\left(1+\vartheta\right) \tag{A.5b}$$

A.2 Integral $\mathcal{I}3$

Mediante la introducción del sistema de coordenadas polares de la Figura 4.11, $\mathcal{I}3$ resulta:

$$\mathcal{I}3 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\beta_2}\int_{0}^{\frac{b}{2\sin(\beta)}} G_{mn}\left(\tilde{\mathbf{x}}\left(s_p\right), \mathbf{X}\left(R\left(\rho,\beta\right), S\left(\rho,\beta\right)\right)\right) \frac{S - S_{j-1}}{S_j - S_{j-1}}\, \rho\, d\rho\, d\beta \tag{A.6}$$

donde:

$$\beta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{b}{2\left(S_{j-1} - s_p\right)}\right) + \pi \tag{A.7}$$

Se introduce la siguiente transformación para eliminar la existencia del límite variable en (A.6) a fines de evaluar esta expresión mediante cuadratura de Gauss:

$$\beta = \frac{\beta_2 - \frac{\pi}{2}}{2}\zeta + \frac{\frac{\pi}{2}+\beta_2}{2} \tag{A.8a}$$

$$\rho = \frac{b}{4\sin\left(\frac{\beta_2-\frac{\pi}{2}}{2}\zeta + \frac{\frac{\pi}{2}+\beta_2}{2}\right)}\left(1+\vartheta\right) \tag{A.8b}$$

El Jacobiano de la transformación resulta:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \zeta}{\partial \beta} & \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial \beta} & \frac{\partial \vartheta}{\partial \rho} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\beta_2 - \frac{\pi}{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\rho}{2}\frac{\beta_2 - \frac{\pi}{2}}{\tan(\beta)} & \frac{b}{4\sin(\beta)} \end{bmatrix} \tag{A.9}$$

Introduciendo la transformación, la integral (A.1) resulta:

$$\mathcal{I}3 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} G_{mn}\left(\tilde{\mathbf{x}}\left(s_p\right), \mathbf{X}\left(R\left(\zeta,\vartheta\right), S\left(\vartheta\right)\right)\right) \frac{s_p + \frac{b}{4\tan\left(\frac{\beta_2-\frac{\pi}{2}}{2}\zeta + \frac{\frac{\pi}{2}+\beta_2}{2}\right)}\left(1+\vartheta\right) - S_{j-1}}{S_j - S_{j-1}} ... \\ ... \frac{b^2}{\sin\left(\frac{\beta_2-\frac{\pi}{2}}{2}\zeta + \frac{\frac{\pi}{2}+\beta_2}{2}\right)^2} \frac{\vartheta+1}{32}\left(\beta_2 - \frac{\pi}{2}\right) d\zeta\, d\vartheta \tag{A.10}$$

donde:

$$R\left(\zeta,\vartheta\right) = \frac{b}{4}\left(1+\vartheta\right) \tag{A.11a}$$

$$S\left(\vartheta\right) = s_p + \frac{b}{4\tan\left(\frac{\beta_2-\frac{\pi}{2}}{2}\zeta + \frac{\frac{\pi}{2}+\beta_2}{2}\right)}\left(1+\vartheta\right) \tag{A.11b}$$

A.3 Integral $\mathcal{I}4$

Introduciendo las coordenadas polares, $\mathcal{I}4$ resulta:

$$\mathcal{I}4 = \int_{\beta_2}^{\pi}\int_{0}^{\frac{S_{j-1}-s_p}{\cos(\beta)}} G_{mn}\left(\tilde{\mathbf{x}}\left(s_p\right), \mathbf{X}\left(R\left(\rho,\beta\right), S\left(\rho,\beta\right)\right)\right) \frac{S - S_{j-1}}{S_j - S_{j-1}}\, \rho\, d\rho\, d\beta \tag{A.12}$$

Similarmente a los casos anteriores, se introduce la siguiente transformación para eliminar la existencia del límite variable en (A.12) a fines de evaluar esta expresión mediante cuadratura de Gauss::

$$\beta = \frac{\pi - \beta_2}{2}\zeta + \frac{\pi + \beta_2}{2} \tag{A.13a}$$

$$\rho = \frac{\vartheta + 1}{2\cos\left(\frac{\pi-\beta_2}{2}\zeta + \frac{\pi+\beta_2}{2}\right)}\left(S_{j-1} - s_p\right) \tag{A.13b}$$

El Jacobiano de la transformación resulta:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \zeta}{\partial \beta} & \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial \beta} & \frac{\partial \vartheta}{\partial \rho} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\pi-\beta_2}{2} & 0 \\ \frac{\frac{\pi-\beta_2}{2}\rho\tan(\beta)}{2} & \frac{S_{j-1}-s_p}{2\cos(\beta)} \end{bmatrix} \tag{A.14}$$

Introduciendo la transformación, la integral (A.12) resulta:

$$\mathcal{I}1 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} G_{mn}\left(\tilde{\mathbf{x}}\left(s_p\right), \mathbf{X}\left(R\left(\zeta,\vartheta\right), S\left(\vartheta\right)\right)\right) \frac{s_p + \frac{\vartheta+1}{2}\left(S_{j-1} - s_p\right) - S_{j-1}}{S_j - S_{j-1}} \ldots$$
$$\ldots \frac{\left(\pi - \beta_2\right)\left(S_{j-1} - s_p\right)^2 \left(\vartheta + 1\right)}{8\left[\cos\left(\frac{\pi-\beta_2}{2}\zeta + \frac{\pi+\beta_2}{2}\right)\right]^2} d\zeta\, d\vartheta \tag{A.15}$$

donde:

$$R\left(\zeta,\vartheta\right) = \tan\left(\frac{\zeta+1}{2}\beta_1\right)\frac{\vartheta+1}{2}\left(S_j - s_p\right) \tag{A.16a}$$

$$S\left(\vartheta\right) = s_p + \frac{\vartheta+1}{2}\left(S_j - s_p\right) \tag{A.16b}$$

De esta manera, $\mathcal{I}2$, $\mathcal{I}3$, e $\mathcal{I}4$ pueden ser directamente evaluada mediante cuadratura de Gauss.

Bibliografía

[1] P. K. Banerjee. "The Boundary Element Methods in Engineering". McGraw-Hill Book Co. Inc. (1994).

[2] P. K. Banerjee y S. M. Mamoon. A fundamental solution due to a periodic point force in the interior of an elastic half-space. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* **19**, 91–105 (1990).

[3] K. J. Bathe. "Finite Element Procedures". Prentice-Hall, Inc. (1996).

[4] M. A. Biot. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media. *J. Appl.Phys.* **33**, 1482–1498 (1962).

[5] C. A. Brebbia. "The Boundary Element Method for Engineers". Pentech Press Ltd. (1978).

[6] H. B. Coda y W. S. Venturini. On the coupling of 3d bem and fem frame model applied to elastodynamic analysis. *Int. J. Sol. Struc.* **36**, 4789–4804 (1999b).

[7] H. B. Coda, W. S. Venturini y M. H. Aliabadi. A general 3d bem/fem coupling applied to elastodynamic continua/frame structures interaction analysis. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.* **46**, 695–712 (1999a).

[8] N. Fares. "Green's functions for plane-layered elastostatic and viscoelastic regions with application to 3-D crack analysis". PhD dissertation, M.I.T., Department of Civil Engineering (1987).

[9] G. Gazetas. "Foundation Engineering Handbook", cap. Foundation Vibrations, págs. 553–593. Van Nostrand Reinholds (1991).

[10] G. Gazetas, K. Fan, A. M. Kaynia y E. Kausel. Dynamic interaction factors for floating pile groups. Technical Report NCEER-90-0021, National Center for Earthquake Engineering Research (1990).

[11] E. Kausel. An explicit solution for the Green functions for dynamic loads in layered media. Research Report R81-13, Dept. of Civil Engrg., M.I.T. (1981).

[12] A. Kaynia y E. Kausel. Dynamic stiffness and seismic response of pile groups. Research Report R82-03, Dept. of Civil Engrg., M.I.T. (1982).

[13] H. Lamb. On reciprocal theorems in dynamics. *Proc. London Math. Soc.* **XIX**, 144–151 (1888).

[14] H. Lamb. On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. *Phil. Trans. Roy. Soc., London* **A203**, 1–42 (1904).

[15] A. E. H. Love. "Mathematical Theory of Elasticity". Cambridge University Press (1927).

[16] S. M. Mamoon. "Dynamic and seismic behavior of deep foundations". PhD dissertation, S.U.N.Y. at Buffalo (1990).

[17] S. M. Mamoon, A. M. Kaynia y P. K. Banerjee. Frequency domain analysis of piles and pile groups. *J. Engrg. Mech., ASCE* **116**(10), 2237–2257 (1990).

[18] G. D. Manolis y D. E. Beskos. "Boundary Element Methods in Elastodynamics". Unwin Hyman Ltd. (1998).

[19] N. S. Mattes y H. G. Poulos. Settlement of single compressible pile. *J. Soil Mech. Found. Div., ASCE* **95**(SM1), 189–207 (1969).

[20] C. C. Mei. "Mathematical Analysis in Engineering". Cambridge University Press (1997).

[21] R. D. Mindlin. Force at a point in the interior of a semi-infinite solid. *Physics* **7**, 195–202 (1936).

[22] M.Ñovak. Dynamic stiffness and damping of piles. *Can. Geotech. J.* **11**(4), 574–598 (1974).

[23] R. Y. S. Pak y B. B. Guzina. Three-dimensional Green's functions for a multilayered half-space in displacement potentials. *J. Engrg. Mech., ASCE* **128**(4), 449–461 (2002).

[24] H. G. Poulos. Analysis of the settlement of pile groups. *Geotechnique* **18**, 351–371 (1968).

[25] H. G. Poulos. The behavior of laterally loaded piles i:single piles. *J. Soil Mech. Foundn. Div., ASCE* **97**(SM5), 711–731 (1971).

[26] H. G. Poulos y E. H. Davis. "Elastic solutions for soil and rock mechanics". John Wiley and Sons Inc. (1974).

[27] H. G. Poulos y M. R. Madhav. Analysis of the movements of battered pile. En "I. Aust. New Zealand Conf. on Geomechanics", Melbourne (jul. 1971).

[28] M. F. Randolph. The response of flexible piles to lateral loading. *Geotechnique* **31**(2), 247–259 (1981).

[29] M. F. Randolph y C. P. Wroth. Analysis of deformation of vertically loaded piles. *J. Geot. Eng. Div., ASCE* **104**(GT12), 1465–1488 (1978).

[30] F. E. Richart, J. R. Hall y R. D. Woods. "Vibrations of Soils and Foundations". Prentice-Hall, Inc. (1970).

[31] C. Sagaseta. Analysis of undrained soil deformation due to ground loss. *Geotechnique* **37**(3), 301–320 (1987).

[32] R. Sen, T. G. Davies y P. K. Banerjee. Dynamic analysis of piles and pile groups embedded in homogeneous soils. *Earthq. Engrg. Struct. Dyn.* **13**, 53–65 (1985).

[33] M. Sheta y M.Ñovak. Vertical vibration of pile groups. *J. Geotech. Engrg. Div.* **108**(4), 570–590 (1982).

[34] Stevenson y Asociados. "SUPER SASSI/PC User Manuals". Stevenson and Associates, Cleveland, Ohio (1996).

[35] H. C. Wang y P. K. Banerjee. General axisymmetric elastodynamic analysis by boundary element method. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.* **30**, 115–131 (1990).

[36] A. J. Whittle. "1.364 Advanced Geotechnical Engineering: Class notes". M. I. T., Cambridge, MA (1998).

[37] J. P. Wolf. "Foundation Vibration Analysis Using Simple Physical Models". PTR Prentice Hall (1994).

[38] O. C. Zienkiewicz. "The Finite Element Method". McGraw-Hill Book Co. (1977).