

**DESARROLLO DE UN ELEMENTO DE LÁMINA CUADRILÁTERO  
SIN GRADOS ROTACIONALES PARA EL TRATAMIENTO DE  
GEOMETRÍAS ARBITRARIAS CON GRANDES DEFORMACIONES**

**Carlos Federico Estrada**

Tesis Doctoral



Universidad Nacional de Córdoba  
Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales

**DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURAS**

---

**DESARROLLO DE UN ELEMENTO DE LÁMINA  
CUADRILÁTERO SIN GRADOS ROTACIONALES PARA EL  
TRATAMIENTO DE GEOMETRÍAS ARBITRARIAS CON  
GRANDES DEFORMACIONES**

**Carlos Federico Estrada**

Universidad Nacional de Córdoba  
Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales  
**DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURAS**



DESARROLLO DE UN ELEMENTO DE LÁMINA CUADRILÁTERO SIN GRADOS  
ROTACIONALES PARA EL TRATAMIENTO DE GEOMETRÍAS ARBITRARIAS CON  
GRANDES DEFORMACIONES

por  
Carlos Federico Estrada

## RESUMEN

En esta tesis se presenta el desarrollo de un elemento cuadrilátero de cuatro nudos para el análisis de láminas delgadas con geometrías arbitrarias. La principal característica del elemento es que los únicos grados de libertad son los desplazamientos traslacionales de la superficie media y para el cálculo del campo de curvaturas se recurre a una parcela de cinco elementos (el elemento y los cuatro adyacentes). El campo de curvatura se asume constante en cada elemento, y resulta dependiente de la posición de todos los doce nudos de la parcela. Dichas curvaturas se expresan en función de la interpolación isoparamétrica de los gradientes sobre el contorno del elemento y del salto del gradiente normal. A su vez, el término correspondiente al gradiente normal se expresa en función del ángulo entre los vectores normales al lado en cada elemento. Así, el campo de curvaturas permite tratar geometrías con quiebres y ramificadas. En algunas problemas puede producirse una configuración deformada de flexión sin energía asociada, lo que se controla a través de un esquema de estabilización artificial. El comportamiento membranar resulta de una interpolación bilineal estándar de la geometría dentro del elemento. A los fines de obtener un elemento eficiente para el análisis con integración explícita de las ecuaciones de movimiento se utiliza un único punto de integración en el centro del elemento. Para evitar la aparición de modos espurios de deformación (hourglass) se incluyen fuerzas membranarales provenientes de un esquema de estabilización física. Con motivos de extender las capacidades del elemento formulado se incluyen relaciones de restricción que permiten unir dichos elementos de lámina con elementos de sólido. El elemento se denomina *BBSQ* (de su acrónimo en inglés *Branching Basic Shell Quadrilateral*), está basado en una formulación Lagrangiana total, es no conforme y fue implementado en códigos con integración explícita e implícita de las ecuaciones de movimiento. Se presentan varios ejemplos numéricos en régimen lineal, no lineal geométrico y no lineal material, a los fines de evaluar las características de convergencia. Los resultados obtenidos muestran que el elemento converge en todos los casos a la solución correcta.



DEVELOPMENT OF A ROTATION-FREE THIN SHELL QUADRILATERAL ELEMENT  
FOR THE TREATMENT OF ARBITRARY GEOMETRIES WITH LARGE STRAINS

by  
Carlos Federico Estrada

**SUMMARY**

In this thesis a four-node quadrilateral finite element for the analysis of thin shells with arbitrary geometries is presented. The main feature of the element is that the translational displacements of the middle surface are the only degrees of freedom and for the computation of the curvature tensor a patch of five elements (the element and the four adjacent elements) is defined. The curvature field, assumed constant within the element, is expressed in terms of the deformation gradient at the element boundary and is dependent on the position of the twelve nodes included in the patch. Such curvatures are expressed as a function of the isoparametric interpolations of the gradients at the side and the jump of the normal gradient. As well, the normal gradient is expressed as a function of the angle between the normals at each mid-side points. This allows to treat kinked and branching surfaces. In some problems a bending deformed configuration may occur without associated energy and a cost-effective perturbation stabilization scheme is used to control it. The membrane behavior results from a standard bilinear interpolation of the geometry within the element. With the aim of an efficient element in codes with explicit integration of the momentum equations, one point quadrature is used in the element area. To avoid the appearance of spurious deformation modes (hourglass modes) membrane forces resulting from a physical stabilization technique are included. With the aim to extend the capacities of the proposed element a special purpose multipoint constraint is included to allow the combination with solid elements. The element denoted *BBSQ* (for *Branching Basic Shell Quadrilateral*) is based on a Total Lagrangian Formulation, is non-conforming and has been implemented in codes with implicit and explicit integration of the momentum equations. To assess the element performance and convergence properties a set of numerical examples are presented, including geometrically linear and non linear problems with large strain plasticity. The results obtained show good convergence properties to the correct values.



DÉVELOPPEMENT D'UN ÉLÉMENT DE COQUE QUADRILATÈRE SANS DEGRÉ  
ROTATIONNEL POUR LE TRAITEMENT DES GÉOMÉTRIES ARBITRAIRES AVEC DE  
GRANDES DÉFORMATIONS

par  
Carlos Federico Estrada

**RESUME**

Dans cette thèse se présente le développement d'un élément quadrilatère de quatre noeuds pour l'analyse de coques minces avec les géométries arbitraires. La principale caractéristique de l'élément est que les seuls degrés de liberté sont les déplacements traslacionales de la surface moyenne et pour le calcul du domaine de courbures on recourt à une parcelle de cinq éléments (l'élément et les quatre adjacentes). Le domaine de courbure est assumé constante dans chaque élément, et s'avère dépendant de la position de tous les douze noeuds de la parcelle. Ces courbures sont exprimées en fonction de l'interpolation isoparamétrique des gradients sur la découpe de l'élément et du saut du gradient normal. À son tour, le terme correspondant au gradient normal est exprimé en fonction de l'angle entre les vecteurs normaux au côté dans chaque element. Ainsi, le domaine de courbures permet de traiter les géométries avec fais faillite et ramificadas. Dans certaines des problèmes peut se produire une configuration déformée de flexion sans énergie associée, ce qui est contrôlé à travers un schéma de stabilisation artificielle. Le comportement membranal résulte d'une interpolation bilineal standard de la géométrie dans l'élément. Aux fins d'obtenir un élément efficace pour l'analyse avec intégration explicite des équations de mouvement on utilise un seul point d'intégration dans le centre de l'élément. Pour éviter l'apparition de manières espurios de déformation (hourglass) on inclut des forces membranales provenant d'un schéma de stabilisation physique. Avec des motifs d'étendre les capacités de l'élément formulé on inclut des relations de restriction qui permettent d'unir ces éléments de lame avec des éléments de solide. L'élément est appelé *BBSQ* (de son acronyme en anglais *Branching Basic Shell Quadrilateral*), est basé une Formulation Lagrangienne Totale, est non conforme et a été mis en oeuvre dans des codes avec intégration explicite et implicite des équations de mouvement. Plusieurs exemples numériques en régime linéaire, non linéaire se présentent matériel géométrique et non linéaire, aux fins d'évaluer les caractéristiques de convergence. Les résultats obtenus montrent que l'élément converge dans tous les cas à la solution correcte.



## Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer al Prof. Dr. Ing. Fernando Flores por haberme dado la oportunidad de desarrollar la presente tesis, su constante enseñanza, el impulso que ha dado al presente trabajo y por el apoyo que ha demostrado durante estos años.

Quiero expresar mi agradecimiento a la Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales de la Universidad Nacional de Córdoba y en especial al Departamento de Estructuras por haberme cedido un lugar de trabajo y por financiar parte de los congresos asistidos.

También al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) por el financiamiento económico otorgado a través de la Beca de Doctorado.

También agradezco la enseñanza recibida de los docentes que dictaron los cursos de posgrado durante la Maestría y parte de la Carrera del Doctorado, en especial al Prof. Dr. Ing. Luis Godoy.

Quisiera agradecer a mi compañero de oficina Walter Castelló por su ayuda en temas de programación y compilación de programas.

Y finalmente doy gracias a Dios por sobre todas las cosas y dedico esta tesis a mi hermosa familia.



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>I</b>
<b>Summary</b>	<b>III</b>
<b>Resume</b>	<b>V</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>VII</b>
<b>Índice general</b>	<b>IX</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Generalidades . . . . .	1
1.2. Antecedentes . . . . .	2
1.3. Motivación y Objetivos . . . . .	7
1.4. Contenido de la Tesis . . . . .	8
<b>2. Modelo de Lámina de Kirchhoff-Love</b>	<b>11</b>
2.1. Introducción . . . . .	11
2.2. Fundamentos matemáticos y mecánicos . . . . .	12
2.2.1. Aspectos básicos de la geometría diferencial de láminas . . . . .	12
2.2.1.1. Concepto de lámina y superficie media . . . . .	12
2.2.1.2. Vectores bases covariantes y directores . . . . .	13
2.2.1.3. Primera forma fundamental . . . . .	14
2.2.1.4. Segunda forma fundamental . . . . .	14
2.2.2. Aspectos básicos de la mecánica del continuo . . . . .	15
2.2.2.1. Proceso de deformación . . . . .	15
2.2.2.2. Gradiente de deformación . . . . .	16
2.2.2.3. Medida de deformación y de tensión . . . . .	18
2.3. Descripción Geométrica . . . . .	19
2.3.1. Descripción cinemática . . . . .	19
2.3.2. Deformaciones de la superficie media . . . . .	21
2.4. Esfuerzos Resultantes . . . . .	24
2.5. Ecuaciones de equilibrio . . . . .	25
2.6. Ecuaciones Constitutivas . . . . .	29
2.7. Modelo de Lámina de Reissner-Mindlin . . . . .	31

<b>3. Antecedentes de Elementos de Lámina</b>	<b>33</b>
3.1. Introducción . . . . .	33
3.2. Parte I: Elementos de lámina clásicos . . . . .	34
3.2.1. Elementos de Lámina de Kirchhoff-Love . . . . .	35
3.2.2. Elementos de Lámina de Reissner-Mindlin . . . . .	38
3.2.3. Elementos de Lámina-Sólido . . . . .	43
3.3. Parte II: Elementos de lámina alternativos . . . . .	48
3.3.1. Subdivisión de Superficies . . . . .	48
3.3.2. Isogeometría . . . . .	51
3.3.3. Galerkin Discontinuo . . . . .	55
3.3.4. Elementos de lámina sin GdL rotacionales . . . . .	57
3.4. Resumen . . . . .	68
<b>4. Un Elemento Cuadrilátero Básico</b>	<b>71</b>
4.1. Introducción . . . . .	71
4.2. Definición de la geometría del elemento . . . . .	72
4.3. Evaluación de las curvaturas . . . . .	75
4.3.1. Variación de la curvatura . . . . .	77
4.4. Estabilización flexional . . . . .	78
4.4.1. Variación de las curvaturas de estabilización . . . . .	79
4.5. Condiciones de contorno . . . . .	80
4.6. Evaluación de los esfuerzos membranales . . . . .	82
4.6.1. Variación de los esfuerzos membranales . . . . .	83
4.7. Estabilización membranal . . . . .	83
4.7.1. Variación de la estabilización membranal . . . . .	84
4.8. Evaluación de las fuerzas residuales . . . . .	84
4.8.1. Fuerzas de estabilización membranal . . . . .	85
4.8.2. Fuerzas de estabilización flexional . . . . .	86
4.9. Matriz de rigidez tangente . . . . .	86
4.9.1. Rigidez material . . . . .	87
4.9.2. Rigidez geométrica . . . . .	87
4.10. Esquema de solución implícita . . . . .	88
4.11. Esquema de solución explícita . . . . .	90
<b>5. Un Elemento para el Tratamiento de Geometrías Arbitrarias</b>	<b>93</b>
5.1. Introducción . . . . .	93
5.2. Evaluación de las curvaturas . . . . .	94
5.2.1. Variación de la curvatura . . . . .	96
5.3. Estabilización flexional . . . . .	96
5.3.1. Variación de las curvaturas de estabilización . . . . .	97
5.4. Condiciones de contorno . . . . .	98
5.5. Tratamientos de quiebres . . . . .	98
5.5.1. Variación de la curvatura . . . . .	104
5.6. Tratamiento de ramificaciones de lámina . . . . .	108
5.6.1. Variación de la curvatura . . . . .	110

5.7.	Evaluación de los esfuerzos membranales . . . . .	111
5.8.	Evaluación de las fuerzas residuales . . . . .	113
5.9.	Matriz de rigidez tangente . . . . .	114
<b>6.</b>	<b>Acoplamiento Lámina-Sólido</b>	<b>115</b>
6.1.	Introducción . . . . .	115
6.2.	Aspectos básicos de la unión lámina-sólido . . . . .	116
6.3.	Definición de la geometría en la unión lámina-sólido . . . . .	117
6.4.	Evaluación de la curvatura . . . . .	119
6.5.	Transferencia de fuerzas equivalentes a los momentos . . . . .	121
6.6.	Implementación en un código implícito y explícito . . . . .	123
<b>7.</b>	<b>Problemas Lineales</b>	<b>125</b>
7.1.	Introducción . . . . .	125
7.2.	Prueba de la parcela . . . . .	126
7.3.	Placas cuadradas . . . . .	127
7.4.	Placa rómbica . . . . .	128
7.5.	Barra de Cook . . . . .	129
7.6.	Viga torsionada a 90° . . . . .	129
7.7.	Techo cilíndrico . . . . .	132
7.8.	Viga empotrada de sección Z . . . . .	133
7.9.	Lámina de revolución ramificada . . . . .	134
7.10.	Puente en cajón recto . . . . .	136
7.11.	Puente curvo de sección celular . . . . .	136
7.12.	Discusión de Resultados . . . . .	138
<b>8.</b>	<b>Problemas No Lineales</b>	<b>141</b>
8.1.	Introducción . . . . .	141
8.2.	Viga empotrada con forma de Z . . . . .	141
8.3.	Casquete esférico con cargas puntuales . . . . .	143
8.4.	Inflado de una esfera . . . . .	145
8.5.	Cilindro en forma de pera . . . . .	147
8.6.	Cinta en forma de L . . . . .	147
8.7.	Domo esférico . . . . .	150
8.8.	Panel cilíndrico . . . . .	152
8.9.	Pandeo de una columna con auto contacto . . . . .	154
8.10.	Discusión de Resultados . . . . .	155
<b>9.</b>	<b>Problemas de Acoplamiento Lámina-Sólido</b>	<b>157</b>
9.1.	Introducción . . . . .	157
9.2.	Placa empotrada bajo carga uniforme . . . . .	158
9.3.	Unión de un tubo y una placa . . . . .	158
9.4.	Ovalamiento de un codo . . . . .	161
9.5.	Estampado de una lámina con costura . . . . .	162
9.6.	Discusión de Resultados . . . . .	163

<b>10. Problemas de Estampado de Láminas</b>	<b>165</b>
10.1. Introducción . . . . .	165
10.2. Estampado con un punzón esférico . . . . .	166
10.3. Embutición profunda de una lámina cuadrada . . . . .	168
10.4. Estampado de una cinta con recuperación elástica . . . . .	170
10.5. Embutición de un riel en forma de S . . . . .	173
10.6. Embutición profunda de una lámina circular . . . . .	177
10.7. Discusión de Resultados . . . . .	181
<b>11. Conclusiones y Recomendaciones para Trabajos Futuros</b>	<b>183</b>
11.1. Síntesis de los desarrollos presentados en esta tesis . . . . .	183
11.2. Conclusiones . . . . .	188
11.3. Aspectos originales . . . . .	189
11.4. Recomendaciones para trabajos futuros . . . . .	191
<b>A. Modelos de placa lineal</b>	<b>193</b>
A.1. Modelo de Placa de Kirchhoff-Love . . . . .	193
A.2. Modelo de Placa de Reissner-Mindlin . . . . .	194
<b>B. Funciones de interpolación y evaluación del gradiente</b>	<b>195</b>
<b>C. Proyección del gradiente normal en función de un ángulo</b>	<b>197</b>
<b>D. Matriz de rigidez geométrica flexional</b>	<b>199</b>
<b>E. Cálculo del incremento de la variación del vector director</b>	<b>205</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>207</b>

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Generalidades

El empleo de estructuras laminares se extiende a un gran número de problemas en ingeniería civil, aeronáutica, mecánica, naval, entre otras. Sumado a ello los diversos problemas relacionados con la producción industrial. Así, por ejemplo, desde un automóvil típico que consta de aproximadamente 3.000 partes, pasando por un Boeing 777 con 100.000 partes, hasta un submarino nuclear moderno con aproximadamente 1.000.000 de partes (ver Cottrell et al. (2009)), las estructuras laminares constituyen un importante porcentaje de dichos diseños. Debido a que estas estructuras delgadas resisten fundamentalmente por su forma, en su diseño o verificación es esencial considerar modelos que representen adecuadamente las características no lineales del comportamiento cinemático y mecánico. En la actualidad, el análisis no lineal de elementos finitos es un componente esencial del diseño. En muchos casos, se realizan ensayos destructivos para analizar cada una de las partes y el conjunto estructural, con altos costos que podrían disminuirse al simplificar el número de ensayos gracias a la experiencia obtenida mediante simulaciones numéricas. Así, los diseños de sistemas de ingeniería sofisticados están basados sobre análisis computacionales y simulaciones numéricas. Por ejemplo, una aplicación sumamente extendida en la industria (especialmente la industria automotriz), son los procesos de conformado de láminas metálicas (embutición, estampado). Resulta imprescindible en estos casos considerar, además de la no linealidad geométrica, plasticidad con deformaciones importantes (de moderadas a grandes) y la

interacción con los útiles (matrices, prensas, pisadores). Otra aplicación es la búsqueda de una forma estructural adecuada y optimizada, lo que a su vez conduce a la necesidad de evaluar la sensibilidad a imperfecciones geométricas de dichas formas óptimas. Cuando el estado tensional es de compresión en zonas de la lámina, es necesario además investigar la posibilidad de una falla por inestabilidad. Para los rangos de geometría y de tipos de materiales empleados en la industria, esa inestabilidad muchas veces ocurre en el campo plástico de comportamiento del material, de modo que resulta muy interesante el estudio de problemas de inestabilidad a partir de estados elasto-plásticos. Un tercer aspecto de mucho interés corresponde al comportamiento de estructuras laminares construidas con materiales compuestos sometidas a acciones dinámicas, principalmente de impacto. En estos casos suele ser necesario considerar fenómenos de delaminación, o separación entre las capas del compuesto. Se han realizado extensos desarrollos en estas áreas, lo que se ve correspondido con abundante literatura sobre el tema y congresos destinados exclusivamente a estos temas, donde tienen amplia participación grupos de investigación de las marcas líderes en las diferentes industrias.

A la luz de los numerosos problemas de diseño y análisis la tecnología de elementos finitos de lámina no ha dejado de producir nuevas formulaciones que intentan dar soluciones a dichos problemas. Así, hoy en día, el objetivo de la tecnología de elementos es la de desarrollar precisamente elementos con mejor prestaciones particularmente para el rango no lineal. Esta tesis se encuadra perfectamente dentro de la tecnología de elementos de lámina con especial énfasis en el comportamiento no lineal geométrico y del material.

## 1.2. Antecedentes

Las primeros desarrollos de elementos de lámina se basaron en la teoría de Kirchhoff-Love, sin embargo, pocos elementos fueron aceptados en la práctica ingenieril debido principalmente a las dificultades que acarrea la condición de continuidad  $C^1$ . Esto motivó a numerosos autores a explorar nuevas formulaciones basadas en la teoría de Reissner-Mindlin. La principal diferencia entre ambas formulaciones es la condición de la normal después de la deformación. Así, en la teoría de Kirchhoff-Love las normales a la superficie media permanecen normales después de la deformación, condición que puede en muchas estruc-

turas de placas y láminas delgadas reproducir las características esenciales de deformación. Por otro lado, la teoría de Reissner-Mindlin relaja la condición de ortogonalidad de la normal a expensas de introducir el efecto de la deformación por corte el cual tiene vital importancia en placas y láminas gruesas. Desafortunadamente los elementos de placa y lámina de Reissner-Mindlin sufren de bloqueo por corte para problemas con pequeño espesor.

La idea de desarrollar elementos de lámina delgada basados en la teoría de Kirchhoff-Love, evitando los problemas de continuidad  $C^1$ , dio origen a técnicas numéricas para el análisis de láminas que incluyen únicamente los grados de libertad (GdL) traslacional (denominado rotation-free). El desarrollo de dichas técnicas numéricas está íntimamente ligado con el método de diferencias finitas (DF), ver por ejemplo Ugural (1981), Bushnell y Almroth (1971), Bushnell (1984). Las dificultades obvias del método de DF son el tratamiento de las condiciones de borde y los problemas derivados del uso de mallas no estructuradas. Sin embargo, la idea de desarrollar elementos de láminas sin GdL rotacionales no es nueva y varios intentos se han reportado (mayormente sobre elementos triangulares). Así, el primer intento fue probablemente debido a Nay y Utku (1972) quienes derivaron un elemento de placa triangular usando una aproximación cuadrática para describir el campo de deflexiones de cada nodo en función de los nodos de la parcela que rodea al nodo en cuestión. Unos pocos años después Barnes (1977) propuso un método para derivar un elemento de placa triangular con las deflexiones nodales como los únicos GdL basando el cálculo de las curvaturas en términos de las rotaciones normales a los puntos medio de cada lado determinada en función de las deflexiones nodales de los elementos adyacentes. Este método fue explorado por Hampshire y Chan (1992) asumiendo que los lados están articulados, y que la rigidez flexional está representada por resortes torsionales que resisten el giro a lo largo de dicho lado. Phaal y Calladine (1992a,b) propusieron una clase similar de elementos triangulares de placa y lámina sin GdL rotacionales. Yang et al. (1993) derivó una familia de elementos triangulares de este tipo para el análisis de estampado de láminas basado en una formulación similar a la propuesta por Hampshire y Chan (1992). Brunet y Sabourin (1994) formularon una aproximación diferente para computar el campo de curvatura constante en cada triángulo en términos de los seis desplazamientos nodales. El triángulo fue exitosamente implementado en un código con integración explícita de las ecuaciones de movimiento para el análisis no lineal. Rio et al. (1994) utilizó un concepto de rigidez flexional de

lado articulado para derivar un elemento triangular para problemas explícito de estampado de láminas.

Oñate y Cervera (1993) propusieron un procedimiento general combinando conceptos de elementos finitos y volúmenes finitos para derivar elementos triangulares y cuadriláteros de placa delgada con la deflexión como única variable nodal. En ese trabajo se desarrolló un elemento triangular simple y competitivo denominado *BPT* (de su acrónimo en inglés *Basic Plate Triangle*). Estas ideas fueron extendidas y formalizadas por Oñate y Zárate (2000) al derivar un elemento triangular de placa *BPT* y lámina *BST* (de su acrónimo en inglés *Basic Shell Triangle*) sin GdL rotacionales. Los ingredientes básicos del método son una formulación mixta del tipo Hu-Washizu, una discretización estándar con triángulos de tres nodos, una interpolación lineal del campo de desplazamiento para cada triángulo y una aproximación del tipo volúmenes finitos para computar el campo de curvaturas. Una extensión del elemento *BST* para el análisis no lineal de láminas fue implementado en un código explícito por Oñate et al. (2002) usando una formulación Lagrangeana Actualizada y un modelo constitutivo hipoeelástico. Una formulación para grandes deformaciones del elemento *BST* usando una descripción Lagrangeana Total fue presentada por Flores y Oñate (2001) dando origen a un elemento con excelentes prestaciones denominado *LBST*. Una extensión de esta formulación con una mejora sustancial en el comportamiento membranar de estos elementos se logró utilizando una aproximación cuadrática sobre la parcela de cuatro elementos (Flores y Oñate (2005)), dando lugar a un elemento con comportamiento similar al triángulo de deformación lineal pero sin los problemas de bloqueo membranar que presenta este último. En la Referencia Oñate y Flores (2005) se presenta un amplio rango de aplicaciones que muestra el excelente comportamiento membranar y flexional de este último elemento. Dichos elementos suponen que la superficie de la lámina es suave y que no hay cambios bruscos en la rigidez flexional, lo cual surge de la forma en que se interpola la geometría. Posteriormente Flores y Oñate (2006) presentaron un elemento para láminas bidimensionales (básicamente de revolución) en el cual esta última restricción fue levantada, de tal forma que es posible considerar láminas con quiebres e incluso ramificadas. Una extensión a problemas tridimensionales, usando nuevamente triángulos, ha sido presentada por Flores y Oñate (2007) lo cual implica un aumento importante en el campo de aplicación, incluyendo la industria aeronáutica entre otras. En todos los casos se ha usado un único punto de integración en la superficie y un número

variable de puntos de integración en el espesor de acuerdo a la aplicación. Estos elementos se han implementado en códigos comerciales (STAMPACK (2006)) y se han utilizado extensivamente para simulaciones de embutición de láminas delgadas con excelentes resultados.

Cabe destacar que la idea de prescindir de las rotaciones como GdL se ha extendido, en los últimos años, a otras aproximaciones. Así, las aproximaciones son muy diversas, una muy promisorias y que ha adquirido importancia últimamente es la basada en el concepto de "Isogeometría" (Cottrell et al. (2006); Hughes et al. (2005); Benson et al. (2010); Kiendl et al. (2010)) asociada a funciones usadas en los sistemas de CAD. Uno de los objetivos aquí es utilizar una única definición geométrica (NURBS) a los fines de simplificar los procedimientos de refinamiento. Una segunda aproximación, que comparte algunas ideas con la anterior en lo referido a la interacción con los sistemas de CAD, que no está limitada a problemas lineales y facilita el tratamiento del contacto, es el concepto de "Superficies de Subdivisión" (Cirak y Ortiz (2000, 2001)). Los esquemas de subdivisión construyen superficies suaves a partir de una malla de control inicial usando un proceso de refinamiento repetitivo. Una vez generada la malla, para evaluar las curvaturas en cada elemento (triángulo), se utiliza una parcela regular de doce elementos sobre la que se define una función de interpolación especial. La tercera aproximación, ya no asociada con los sistemas CAD (Wells y Dung (2007)), es a través del uso de técnicas de "Galerkin Discontinuo". Las formulaciones de láminas sin rotaciones con esta técnica es un tema actual de investigación.

En esta tesis seguiremos una aproximación con mayores antecedentes dentro del Método de Elementos Finitos (MEF) (Oñate y Cervera (1993); Sabourin y Brunet (1993)) que consiste en evaluar la curvatura usando una parcela de elementos formada por el elemento sobre el cual se desea evaluar las deformaciones y los inmediatamente adyacentes (parcela de 4 elementos triangulares o 5 elementos cuadriláteros). En problemas tridimensionales los principales desarrollos ha sido con elementos triangulares, y no existe un desarrollo exhaustivo de elementos cuadriláteros. El trabajo de Oñate y Cervera (1993) sugiere la posibilidad de considerar elementos de placa delgada cuadriláteros pero no indica los detalles y menos aún provee de resultados. La primera aproximación mencionada (Cottrell et al. (2006)) incluye la utilización de superficies de control de cuatro lados nuevamente para placas. El primer elemento cuadrilátero para

láminas delgadas sin GdL rotacionales fue presentado por Brunet y Sabourin (2006) como una extensión de un elemento triangular. La formulación utiliza una parcela de cinco cuadriláteros y calcula deformaciones de flexión normales a los lados comunes a partir de sus giros relativos, las cuales son luego interpoladas usando coordenadas de área. Adicionalmente a las cuatro ángulos de giros evaluados a cada lado del elemento principal de la parcela se adicionan dos ángulos internos para evitar posibles modos de alabeos. La formulación implica una integración paso a paso de las deformaciones dentro de un sistema corotacional, una formulación Lagrangiana Actualizada y una relación constitutiva hipoeelástica. Un segundo elemento cuadrilátero para láminas delgadas sin GdL rotacionales fue presentado por Flores y Estrada (2007). La formulación es una extensión de los elementos triangulares desarrollados previamente (Flores y Oñate (2001, 2005)). La diferencia principal con la aproximación presentada por Brunet y Sabourin (2006) es que se trabaja directamente con la obtención de la primera y segunda forma fundamental de la superficie en base a una formulación Lagrangeana Total que permite utilizar un modelo constitutivo hiperelástico. Otro aspecto importante en los desarrollos presentados en esta tesis está íntimamente ligado al uso de un solo punto de integración para evaluar el campo flexional. La definición de la curvatura utilizando el promedio de los gradientes en los lados permite observar que pueden existir configuraciones geométricas con una variación alternada de la curvatura que conducen a un valor nulo de la curvatura promedio (ver Flores y Estrada (2007)). Lo cual implica que pueden aparecer configuraciones deformadas sin energía asociada (modo flexional de deformación espurio). Para mantener un sólo punto de integración en el elemento (curvatura constante) es necesario entonces realizar alguna estabilización de este modo flexional. Uno de los primeros antecedentes sobre elementos sin GdL rotacionales puede verse en el trabajo Flores y Oñate (2006) donde se desarrolla un elemento de viga/lámina bidimensional sin rotaciones que utiliza una aproximación lineal de la curvatura entre los dos nudos del elemento. Allí aparece el mismo problema si se utiliza un único punto de integración, lo cual ha sido resuelto reescribiendo la curvatura como el valor obtenido en el punto de integración más una componente de estabilización. Un segundo aspecto que se desprende del uso de un solo punto de integración para el campo membranal son los ya conocidos modos de *hourglass*. Los principales desarrollos de técnicas para estabilizar dichos modos en láminas se deben a Belytschko y colaboradores (Belytschko et al. (1992); Belytschko y Leviathan

(1994a,b)). La estabilización consiste en el adiciónado de fuerzas elementales que pueden obtenerse en base a diferentes técnicas, como métodos de perturbación, principios variacionales mixtos, etc.

### 1.3. Motivación y Objetivos

A la luz de los antecedentes, en los últimos 10 años (principalmente) se han desarrollado elementos de láminas sin GdL rotacionales para problemas tridimensionales que incluyen fuertes no linealidades, geométricas y del material. La ventaja de estos elementos es la simplicidad de su definición geométrica y eficiencia computacional. Curiosamente la mayoría los elementos desarrollados hasta ahora son, principalmente, triángulos de tres nudos con GdL exclusivamente traslacionales. Si bien los elementos triangulares son más versátiles para el tratamiento de geometrías complejas, en geometrías más sencillas los elementos cuadriláteros son más eficientes. Resulta interesante y es motivo de investigación desarrollar un elemento de lámina cuadrilátero sin grados rotacionales. Así, en la presente tesis, se formula un elemento competitivo y para ello es necesario salvar algunos aspectos que permitan obtener un elemento de lámina versátil frente a diferentes problemas ingenieriles de interés. Por supuesto, siempre pensando en aplicaciones que incluyan no linealidades geométricas y del material.

Todas las formulaciones, para el cálculo de las curvaturas, recurren a definir una parcela de elementos a partir del propio elemento y los adyacentes, con lo cual es factible definir una medida de la curvatura en el elemento en base a diferentes interpolaciones. Debido a su simplicidad, estos elementos presentan algunas limitaciones asociadas a las hipótesis de comportamiento de estos elementos:

- a) rigidez uniforme o de variación suave
- b) superficie única y suave sin cambios abruptos de la normal
- c) unión con otro tipo de elementos (vigas, sólidos).

A partir de lo expuesto arriba podemos, así pues, enunciar los objetivos de esta tesis.

## Objetivos Generales

El objetivo general comprende dos partes:

- a) el desarrollo de herramientas computacionales para el análisis de láminas delgadas
- b) la simulación de ejemplos numéricos para validar la herramienta computacional y mostrar su efectividad.

Adquirir los objetivos generales propuestos permitiría disponer de una herramienta computacional adecuada para el tratamiento en régimen elasto-plástico con grandes deformaciones de láminas delgadas.

## Objetivo Específico

El objetivo específico de esta tesis es desarrollar un elemento de lámina cuadrilátero sin GdL rotacionales para el tratamiento de geometrías arbitrarias. El elemento deberá ser capaz de tratar cambios pronunciados de rigidez entre elementos, geometrías no necesariamente suaves (quebradas) e incluso láminas ramificadas. Como objetivo específico secundario se tratará a través de relaciones de restricción adecuadas la unión de elementos de lámina con sólido. Los desarrollos precedentes se realizarán dentro de un marco que incluya comportamiento geométrico no lineal y material anisótropo elasto-plástico.

## 1.4. Contenido de la Tesis

La tesis consta de 11 capítulos. En el primer capítulo se presentan las generalidades del tema. Se realiza una introducción de antecedentes de elementos de lámina y se presentan la motivación y los objetivos de la presente tesis.

En el *Capítulo 2* se explica el modelo de lámina de Kirchhoff-Love. El capítulo incluye los fundamentos matemáticos y mecánicos necesarios para abordar la teoría no lineal de láminas delgadas. Por cuestiones de completitud al final de dicho capítulo se presenta la teoría de lámina de Reissner-Mindlin como una generalización de la de Kirchhoff-Love.

En el *Capítulo 3* se da inicio al análisis de los antecedentes de lámina. El capítulo se divide en dos partes. Parte I: Elementos de lámina clásicos, donde se incluyen los elementos típicos de Kirhhoff-Love, Reissner-Mindlin y elementos de Lámina-Sólido. En la Parte II: Elementos de lámina alternativos: Superficie de Subdivisión, Isogeometría, Galerkin Discontinuo y Elementos de lámina sin grados de libertad rotacionales.

Los *Capítulo 4 y 5* constituyen la parte central de la presente tesis. En el primero de dichos capítulos se presenta la formulación de un elemento cuadrilátero básico para el tratamiento de láminas suaves. En el Capítulo 5 se formula un elemento para el tratamiento de geometrías arbitrarias. Partiendo de la formulación previa se redefine el campo de curvatura y las fuerzas de estabilización obteniéndose un elemento competitivo.

En el *Capítulo 6* se presenta una formulación de restricción multipunto con el objetivo de acoplar elementos de sólido con elementos de lámina. Este tipo de formulación es muy utilizada en modelos que responden globalmente al comportamiento de láminas cuando se pretende realizar un análisis local detallado con elementos de sólidos a los fines de captar comportamientos tridimensionales.

En el *Capítulo 7* damos inicio al primero de cuatro capítulos dedicados a los ejemplos numéricos. En este capítulo se muestra el comportamiento del elemento de lámina propuesto para el rango lineal elástico. Se analiza la sensibilidad de los esquemas estabilización y se resuelven casos ingenieriles de interés. Se abordan ejemplos con geometrías suaves, quebradas y ramificadas.

En el *Capítulo 8* se analizan varios ejemplos no lineales mostrando las capacidades de la formulación propuesta. Se abordan problemas que incluyen no linealidad geométrica, pandeo, plasticidad con grandes deformaciones, impactos, cargas dinámicas, autocontacto, entre otros. Los resultados se comparan con otras formulaciones y/o datos experimentales a los fines de contrastar el acuerdo obtenido con el elemento de lámina propuesto.

El *Capítulo 9* se dedica a ejemplos numéricos usando la restricción multipunto descrita en el Capítulo 6. Se muestra a través de algunos ejemplos la utilidad de poder acoplar elementos tridimensionales de sólido con el elemento de lámina propuesto en el Capítulo 5. La unión lámina-sólido permite tratar estructuras de interés para la práctica ingenieril.

Por último con el *Capítulo 10* damos fin a una serie de capítulos abocados

a ejemplos numéricos. Este capítulo incluye la simulación numérica de una de las aplicaciones más importante de la industria. Dichas aplicaciones son el estampado de láminas muy utilizado, por ejemplo, en la industria automotriz. Así se analizan varios casos de embutición que incluyen la definición del material, la definición de las herramientas, el tratamiento del contacto entre las partes, la recuperación elástica, entre otras.

Finalmente, en el último capítulo, se señalan las conclusiones y recomendaciones para trabajos futuros.

# Capítulo 2

## Modelo de Lámina de Kirchhoff-Love

### 2.1. Introducción

Damos aquí inicio a los aspectos básicos de la teoría de lámina delgada, empezando por los fundamentos matemáticos de la geometría diferencial de láminas y de la mecánica del sólido. Nos introducimos en la descripción cinemática, pasando por la descripción de los esfuerzos hasta llegar a las ecuaciones constitutivas. Este capítulo no pretende ser exhaustivo, por el contrario, presentaremos un resumen de la teoría clásica de lámina. Una descripción detallada puede encontrarse en Mollmann (1981); Calladine (1983); Ciarlet (2000), entre otros. Aquí, pues, seguiremos la elegante formulación de la teoría de Reissner-Mindlin presentada por Simo y Fox (1989); Simo et al. (1989) pero aplicada a Kirchhoff-Love. También pueden encontrarse el modelo de Kirchhoff-Love y algunos aspectos computacionales en los trabajos de Cirak y Ortiz (2001); Bischoff et al. (2004); Oñate y Flores (2005), entre otros.

Por motivos de completitud en el último apartado presentaremos las características principales del modelo de lámina de Reissner-Mindlin. Veremos en dicho apartado que la teoría de lámina de Kirchhoff-Love es un caso particular de la teoría de Reissner-Mindlin al relajar las condiciones de las normales a la superficie media.

## 2.2. Fundamentos matemáticos y mecánicos

### 2.2.1. Aspectos básicos de la geometría diferencial de láminas

Damos aquí comienzo a una breve introducción de la teoría de la geometría diferencial aplicada a láminas. En este apartado definiremos la notación utilizada en las subsecuentes secciones y provereemos algunas fórmulas básicas necesarias para derivar las diferentes expresiones matemáticas.

#### 2.2.1.1. Concepto de lámina y superficie media

Una *lámina* delgada es un cuerpo limitado por dos superficies que se encuentran separadas por una distancia pequeña. Una superficie en el espacio tridimensional queda representada por la parametrización

$$\varphi^o = \varphi^o(\xi^1, \xi^2) \quad (2.1)$$

donde  $\varphi^o(\xi^1, \xi^2)$  es el vector posición de un punto dado sobre dicha superficie. Las coordenadas convectivas,  $\xi^1, \xi^2$  representan una parametrización única de una posición específica y cada posición sobre la superficie está asociada con un único par de coordenadas  $\{\xi^1, \xi^2\}$  (ver Figura 2.1).

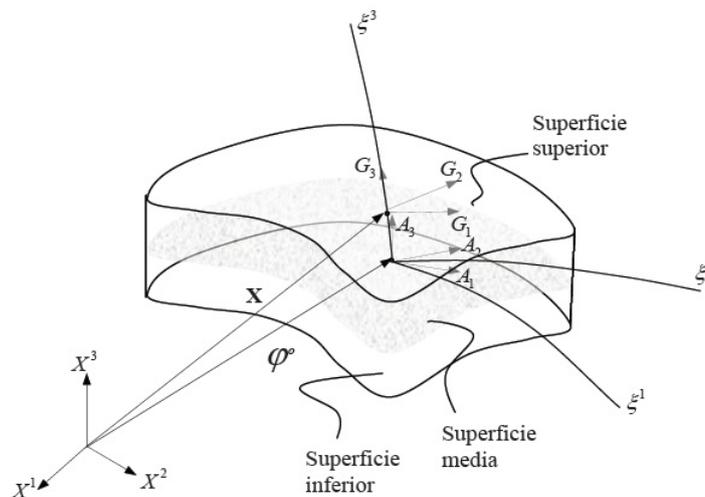


Figura 2.1: Geometría de una lámina.

Denotando por  $\mathbf{t}_3^o(\xi^1, \xi^2)$  el vector unitario normal a la superficie, el vector posición de un punto dado en un cuerpo tridimensional se denota por

$$\mathbf{X}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \boldsymbol{\varphi}^o(\xi^1, \xi^2) + \xi^3 \mathbf{t}_3^o(\xi^1, \xi^2) \quad (2.2)$$

Se presume de aquí en más que el cuerpo bajo consideración contiene una *superficie media* como un subconjunto de modo que

$$\mathbf{X}(\xi^1, \xi^2, 0) = \mathbf{X}|_{\xi^3=0} = \boldsymbol{\varphi}^o(\xi^1, \xi^2) \quad (2.3)$$

$$\xi^3 \in \left[ -\frac{h(\xi^1, \xi^2)}{2}, \frac{h(\xi^1, \xi^2)}{2} \right] \quad (2.4)$$

con  $h(\xi^1, \xi^2)$  el *espesor* de la lámina.

### 2.2.1.2. Vectores bases covariantes y directores

Los *vectores bases covariantes* se obtienen a partir de la derivada parcial del correspondiente vector posición con respecto a las coordenadas convectivas en cada caso

$$\mathbf{G}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^\alpha} = \mathbf{X}_{,\alpha} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{A}_\alpha = \mathbf{G}_\alpha|_{\xi^3=0} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^o}{\partial \xi^\alpha} = \boldsymbol{\varphi}_{,\alpha}^o \quad (2.6)$$

donde se introduce la convención de subíndices griegos para representar los números 1 y 2 y la notación con coma para denotar las derivadas parciales con respecto a  $\xi^\alpha$ . A partir de (2.5) y (2.6) se tiene

$$\mathbf{G}_{\alpha,\beta} = \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial \xi^\alpha \partial \xi^\beta} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{A}_{\alpha,\beta} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varphi}^o}{\partial \xi^\alpha \partial \xi^\beta} \quad (2.8)$$

Se mencionó previamente que la normal unitaria a la superficie en un punto dado de coordenadas  $(\xi^1, \xi^2)$  era  $\mathbf{t}_3(\xi^1, \xi^2)$ . Como  $\boldsymbol{\varphi}^o$  es función de  $\xi^1$  y  $\xi^2$ , solamente se puede computar directamente dos vectores bases covariantes sobre la superficie media  $\boldsymbol{\varphi}_{,\alpha}^o$ . Por lo tanto, si se necesita un espacio tridimensional tangente para una superficie bidimensional,  $\mathbf{t}_3^o$  tiene que ser construida de alguna

manera. Una forma posible es definir

$$\mathbf{t}_3^o = \frac{\boldsymbol{\varphi}_{i_1}^o \times \boldsymbol{\varphi}_{i_2}^o}{\|\boldsymbol{\varphi}_{i_1}^o \times \boldsymbol{\varphi}_{i_2}^o\|} \quad (2.9)$$

En el contexto de la teoría de láminas, el vector  $\mathbf{t}_3^o$  normalizado, definido en la ecuación (2.9) se denomina *director*.

### 2.2.1.3. Primera forma fundamental

El tensor métrico de la superficie media, se define por

$$A_{\alpha\beta} = \boldsymbol{\varphi}_{i_\alpha}^o \cdot \boldsymbol{\varphi}_{i_\beta}^o = A_{\beta\alpha} \quad (2.10)$$

Los cuales cumplen la siguiente condición

$$A_{\alpha\lambda} A^{\lambda\beta} = \delta_\beta^\alpha \quad (2.11)$$

donde  $A_{\alpha\beta}$  y  $A^{\alpha\beta}$  son tensores simétricos covariantes y contravariantes de orden dos, respectivamente.

La longitud de una línea infinitesimal sobre la superficie media que conecta dos puntos con coordenadas curvilíneas  $\xi^\alpha$  y  $\xi^\alpha + d\xi^\alpha$  se determina como

$$(ds)^2 = A_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \quad (2.12)$$

donde el segundo miembro del lado derecho  $A_{\alpha\beta}$  es la *primera forma fundamental* de la superficie media.

### 2.2.1.4. Segunda forma fundamental

Como se mencionó previamente el vector director,  $\mathbf{t}_3^o$ , y los vectores paralelos  $\boldsymbol{\varphi}_{i_\alpha}^o$  al plano tangente en un cierto punto de la superficie media cumplen con la siguiente relación

$$\boldsymbol{\varphi}_{i_\alpha}^o \cdot \mathbf{t}_3^o = 0 \quad (2.13)$$

diferenciando esta ecuación con respecto a  $\xi^\alpha$  se tiene

$$\boldsymbol{\varphi}_{i_\alpha}^o \cdot \mathbf{t}_{3'\beta}^o + \boldsymbol{\varphi}_{i_{\beta\alpha}}^o \cdot \mathbf{t}_3^o = 0 \quad (2.14)$$

Definiendo la *curvatura Gaussiana* como

$$\frac{1}{R} = \frac{B_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta}{A_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta} \quad (2.15)$$

Se desprende de (2.14) y (2.15) la *segunda forma fundamental* de una superficie como

$$B_{\alpha\beta} = \boldsymbol{\varphi}'_{i\alpha} \cdot \mathbf{t}_{3'\beta}^o = -\boldsymbol{\varphi}'_{i\beta\alpha} \cdot \mathbf{t}_3^o = B_{\beta\alpha} \quad (2.16)$$

$B_{\alpha\beta}$  es un tensor covariante simétrico de orden dos.

## 2.2.2. Aspectos básicos de la mecánica del continuo

Damos aquí comienzo a una breve introducción de la teoría matemática de la mecánica del continuo no lineal aplicada a la teoría de lámina. En este apartado definiremos la notación utilizada en las subsecuentes secciones y proveeremos algunas fórmulas básicas necesarias para derivar las diferentes expresiones matemáticas.

### 2.2.2.1. Proceso de deformación

El punto de partida es la introducción de un conjunto  $\mathfrak{B}$  de puntos conectados  $\mathfrak{M}_i$ , los cuales se identifican con un *cuerpo*. La superficie, o el *borde* de un cuerpo es denotado como  $\partial\mathfrak{B}$ . Las posiciones de  $\mathfrak{B}$ , esto es, de sus puntos materiales individuales en el espacio, se denomina *configuración* y puede ser definida formalmente como

$$\chi : (\mathfrak{B}, t) \rightarrow \mathfrak{E} \quad (2.17)$$

donde  $t$  es el pseudo tiempo que parametriza las sucesivas configuraciones. El mapeo  $\chi$  asocia un único *vector posición*  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  en el espacio tridimensional con cada punto material  $\mathfrak{M}_i \in \mathfrak{B}$  y un tiempo  $t \in [t_o, \infty]$ .

Vamos a definir dos configuraciones. Primero la configuración para el tiempo  $t = t_o$ , denominada *configuración de referencia*, la cual es habitualmente entendida como el estado indeformado de la estructura. Siguiendo la convención habitual de la mecánica del continuo, se marcará las cantidades referidas a la configuración de referencia con letras mayúsculas, tales que, por ejemplo,  $\mathbf{X}$  denota el vector posición de un punto material en su desplazamiento para

el tiempo  $t = t_o$ . Las componentes  $X^i$  de  $\mathbf{X} = X^i e_i$  son por lo tanto también denominadas *coordenadas materiales* del cuerpo.

La segunda configuración es la *configuración actual* del cuerpo para un tiempo dado  $t > t_o$  puede ahora ser formulada como un mapeo desde la configuración de referencia hasta el espacio  $\mathbb{R}^3$ ,

$$\Phi : (\mathbf{X}, t) \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (2.18)$$

En este sentido, un *proceso de deformación* puede ser entendido como una secuencia continua de configuraciones  $\Phi(\mathbf{X}, t)$ . Las cantidades referidas a la configuración actual (o deformada) son escrita en letras minúsculas. Para el vector posición de un punto material  $\mathfrak{M}_i$  identificado por su vector posición  $\mathbf{X}$  al tiempo  $t = t_o$  escribimos

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{X}, t) \quad (2.19)$$

Por otro lado, usaremos  $\Omega$  y  $\Gamma$ , respectivamente, para la denominación del dominio del problema, esto es, el cuerpo  $\mathfrak{B}$  y su borde  $\partial\mathfrak{B}$ , respectivamente, porque esta notación se conforma con aquella comúnmente encontrada en la literatura relacionada con el MEF.

### 2.2.2.2. Gradiente de deformación

Como se ilustra en la Figura 2.2, los *desplazamientos* son definidos como la diferencia entre los vectores posición en la configuración actual y de referencia, respectivamente,

$$\mathbf{u}(X, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad (2.20)$$

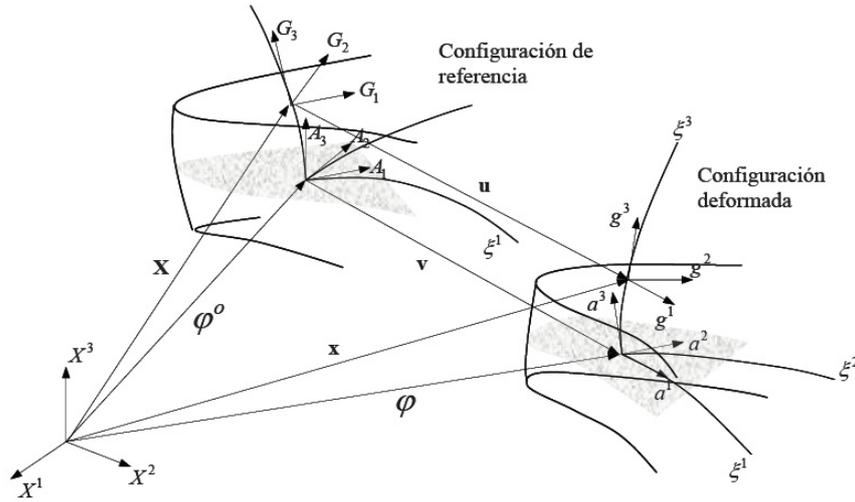
Para la descripción de la deformación actual del cuerpo, se necesita información acerca de la forma del elemento de volumen diferencial. Matemáticamente, esta información está representada por el espacio tangente tridimensional del correspondiente punto material. Los vectores base covariantes, asociados con aquellos espacios, son definidos como  $\mathbf{g}_i = \partial\mathbf{x}/\partial\xi^i$ , donde las derivadas parciales son tomadas con respecto a las coordenadas curvilíneas convectivas  $\xi^i$ . De igual forma se definen los vectores base contravariante  $\mathbf{G}^i = (\partial\xi^i/\partial\mathbf{X})$ . La relación entre los vectores de la base covariante de ambas configuraciones se obtiene por aplicación de la regla de la cadena

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^i} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{G}_i \quad (2.21)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_i} \otimes \mathbf{e}^i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^k} \frac{\partial \xi^k}{\partial X^i} \otimes \mathbf{e}^i \\ &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^k} \otimes \frac{\partial \xi^k}{\partial X^i} \mathbf{e}^i = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i \end{aligned} \quad (2.22)$$

se denomina el *gradiente de deformación material*. Dicho tensor transforma un vector material  $d\mathbf{X}$  en un vector espacial  $d\mathbf{x}$  y es un tensor no simétrico.



**Figura 2.2:** Configuración de referencia y actual.

Los vectores de base covariante y contravariante en ambas configuraciones pueden ser transferidos con la ayuda de las siguientes fórmulas

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_i &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{G}_i, & \mathbf{g}^i &= \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{G}^i \\ \mathbf{G}^i &= \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{g}^i & \mathbf{G}_i &= \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{g}_i \end{aligned} \quad (2.23)$$

Los dos primeros procedimientos, mapean las cantidades de la configuración de referencia a la actual, y se denominan operaciones de *push forward*, las otras son denotadas como *pull back*.

Resolviendo las ecuaciones (2.23) para  $\mathbf{F}$  proveen un par de fórmulas muy

utilizadas para computar el gradiente de deformación y su inversa

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i, & \mathbf{F}^{-T} &= \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{G}_i, & \mathbf{F}^{-1} &= \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{g}^i, \\ \mathbf{F}^T &= \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{g}_i \end{aligned} \quad (2.24)$$

Para que sean efectivas las transformaciones en las ecuaciones (2.24) el gradiente de deformación debe ser invertible para lo cual se requiere su determinante sea no nulo,  $J = \text{Det}(\mathbf{F})$ . Por otra parte, el mapeo asociado con  $\mathbf{F}$  debe ser continuo y positivo semidefinido

$$J = \text{Det}(\mathbf{F}) \geq 0 \quad (2.25)$$

Mecánicamente, esta condición imposibilita la auto penetración del material.

### 2.2.2.3. Medida de deformación y de tensión

De las numerosas *medidas de deformación*, convenientes para la descripción de problemas que envuelven grandes deformaciones, utilizaremos el *tensor de deformaciones de Green-Lagrange*

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (2.26)$$

o en forma alternativa

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (2.27)$$

$$= \frac{1}{2} (\mathbf{U}^2 - \mathbf{I}) \quad (2.28)$$

donde  $\mathbf{C}$  es el *tensor derecho de deformaciones de Cauchy-Green* y  $\mathbf{U}$  es el *tensor de estiramiento derecho*.

Haciendo uso de la descomposición espectral, los tensores  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{U}$ , se pueden expresar en forma alternativa como

$$\mathbf{C} = \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_{\alpha}^2 \mathbf{r}_{\alpha} \otimes \mathbf{r}_{\alpha} \quad (2.29)$$

$$\mathbf{U} = \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \otimes \mathbf{r}_{\alpha} \quad (2.30)$$

donde los  $\lambda_\alpha$  y  $\mathbf{r}_\alpha$  son los autovalores y autovectores del tensor  $\mathbf{U}$ . Luego el tensor de deformaciones  $\mathbf{E}$  puede expresarse como

$$\mathbf{E} = \sum_{\alpha=1}^3 (\lambda_\alpha^2 - 1) \mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{r}_\alpha \quad (2.31)$$

La medida de tensión energéticamente conjugada (a través del Principio de Trabajos Virtuales) de  $\mathbf{E}$  es el *segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff*  $\mathbf{S}$ . Asumiendo la existencia de un potencial elástico, el tensor elástico de cuarto orden se obtiene como

$$\mathbf{D} = \frac{\partial^2 W^{int}(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}} \quad (2.32)$$

donde  $W^{int}(\mathbf{E})$  es la energía interna de deformación. Para un material del tipo St. Venant-Kirchhoff,  $\mathbf{D}$  establece una única relación entre  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{S}$  como

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{D} : \dot{\mathbf{E}} \quad (2.33)$$

## 2.3. Descripción Geométrica

### 2.3.1. Descripción cinemática

Antes de comenzar con la descripción geométrica y finalizar con las ecuaciones constitutivas es importante definir las hipótesis sobre la que se basa el modelo de lámina de Kirchhoff-Love.

Las hipótesis son:

1. Las fibras a la superficie media antes de la deformación permanecen normales a dicho superficie después de la deformación.
2. Las componentes de tensión en la dirección normal a la superficie media son despreciables frente a las componentes de tensión en el plano de la lámina.
3. El espesor de la lámina no permanece constante durante la deformación.

Veremos a medida que se desarrolla la descripción geométrica que las hipótesis 1 y 3 definen el campo de desplazamiento a través del espesor de la placa y

la segunda hipótesis define la relación tensión-deformación (estado plano de tensiones) de la lámina.

Consideremos una lámina delgada cuya superficie media indeformada ocupa un dominio  $\Omega^o$  en el espacio Euclidiano  $\mathbf{R}^3$  con un borde  $\Gamma^o$ . A cada punto de la superficie media se le asigna un espesor  $h^o$  como la distancia (medida a lo largo de la dirección  $\mathbf{t}_3^o$ ) entre la superficie superior e inferior de la lámina. Las posiciones  $\mathbf{X}$  y  $\mathbf{x}$  de un punto de la lámina en las configuraciones indeformada y deformada pueden ser escrita respectivamente a través de los vectores posición (ver (2.2))

$$\mathbf{X}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \boldsymbol{\varphi}^o(\xi^1, \xi^2) + \xi^3 \mathbf{t}_3^o(\xi^1, \xi^2) \quad (2.34)$$

$$\mathbf{x}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \boldsymbol{\varphi}(\xi^1, \xi^2) + \xi^3 \lambda \mathbf{t}_3(\xi^1, \xi^2) \quad (2.35)$$

El producto  $\xi^3 \lambda$  es la distancia entre un punto del cuerpo y la superficie media en la configuración deformada. Esto implica una deformación constante en la dirección normal asociada al parámetro  $\lambda$  que relaciona el espesor entre la configuración actual y de referencia, esto es

$$\lambda = \frac{h}{h^o} \quad (2.36)$$

Como se anunció en la tercer hipótesis, el espesor no permanece constante, sino que por el contrario, puede tener una variación suave. El parámetro  $\lambda$  no se lo considera como una variable independiente y se lo computa a través de consideraciones puramente geométricas (comportamiento isócoro).

Un sistema convectivo es definido en cada punto sobre  $\Omega^o$  y  $\Omega$  como

$$\mathbf{G}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^o}{\partial \xi^\alpha} + \xi^3 \frac{\partial \mathbf{t}_3^o}{\partial \xi^\alpha} \quad \mathbf{G}_3 = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^3} = \mathbf{t}_3^o \quad (2.37)$$

$$\mathbf{g}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \xi^\alpha} + \xi^3 \frac{\partial (\lambda \mathbf{t}_3)}{\partial \xi^\alpha} \quad \mathbf{g}_3 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^3} = \lambda \mathbf{t}_3 \quad (2.38)$$

Esto puede ser particularizado para los puntos sobre la superficie media como

$$\mathbf{G}_\alpha(\xi^3 = 0) = \boldsymbol{\varphi}_\alpha^o \quad (2.39)$$

$$\mathbf{g}_\alpha(\xi^3 = 0) = \boldsymbol{\varphi}_\alpha \quad (2.40)$$

A continuación definiremos el campo de desplazamientos con cierta generalidad para después particularizarlo a través de la primer hipótesis fundamental enunciada más arriba. Teniendo en cuenta las expresiones (2.34), (2.35) y que el vector director  $\mathbf{t}_3$  giró de la configuración de referencia a la actual mediante un tensor de rotación  $\mathbf{\Lambda}$ , obtenemos

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}^o + \mathbf{v} \quad (2.41)$$

$$\mathbf{t}_3 = \mathbf{\Lambda} \mathbf{t}_3^o \quad (2.42)$$

Luego el campo de desplazamientos es

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{x} - \mathbf{X} = \boldsymbol{\varphi}^o + \mathbf{v} + \xi^3 \lambda \mathbf{\Lambda} \mathbf{t}_3^o - \boldsymbol{\varphi}^o - \xi^3 \mathbf{t}_3^o \\ &= \mathbf{v} + \xi^3 (\lambda \mathbf{\Lambda} - \mathbf{I}) \mathbf{t}_3^o \end{aligned} \quad (2.43)$$

Ubicando nuevamente nuestra mirada en la primer hipótesis, y para que dicha hipótesis realmente se cumpla, se requiere que el director sea ortogonal a la superficie media en la configuración deformada, en términos matemáticos esto se logra si

$$\mathbf{t}_3 \cdot \boldsymbol{\varphi}'_{,\alpha} = (\mathbf{\Lambda} \mathbf{t}_3^o) \cdot (\boldsymbol{\varphi}'_{,\alpha}^o + \mathbf{v}'_{,\alpha}) = 0 \quad (2.44)$$

Como consecuencia de la hipótesis sobre las normales, la condición (2.44) puede cumplirse si el director en la configuración de referencia y actual es construido a partir de los vectores base de la superficie media como

$$\mathbf{t}_3^o = \frac{\boldsymbol{\varphi}'_1 \times \boldsymbol{\varphi}'_2}{\|\boldsymbol{\varphi}'_1 \times \boldsymbol{\varphi}'_2\|}, \quad \mathbf{t}_3 = \frac{\boldsymbol{\varphi}_1 \times \boldsymbol{\varphi}_2}{\|\boldsymbol{\varphi}_1 \times \boldsymbol{\varphi}_2\|} \quad (2.45)$$

respectivamente. Luego, la parametrización del vector rotación no es necesaria, ya que el director actualizado se obtiene vía ecuación (2.45). Esta es la diferencia sustancial entre un modelo de lámina de Kirchhoff-Love y un modelo del tipo Reissner-Mindlin.

### 2.3.2. Deformaciones de la superficie media

Hasta ahora, se consideró la condición de que las secciones planas permanecen rectas así como las normales permanecen rectas y deformables en la dirección del espesor. Nuestro próximo paso será definir las deformaciones que

experimenta la superficie media de una lámina delgada.

En particular para las expresiones cinemáticas de las ecuaciones (2.34) y (2.35) el gradiente de deformación (2.22) se expresa como

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= (\boldsymbol{\varphi}'_{i\alpha} + \xi^3 (\lambda \mathbf{t}_3)_{i\alpha} \otimes \mathbf{G}^\alpha) + \lambda \mathbf{t}_3 \otimes \mathbf{G}^3 \\ &= \boldsymbol{\varphi}'_{i\alpha} \otimes \mathbf{G}^\alpha + \xi^3 (\lambda \mathbf{t}_3)_{i\alpha} \otimes \mathbf{G}^\alpha + \lambda \mathbf{t}_3 \otimes \mathbf{G}^3\end{aligned}\quad (2.46)$$

y la derivada del vector director de la lámina  $\mathbf{t}_3$  se obtiene de (2.45) como

$$\begin{aligned}\mathbf{t}_{3i\alpha} &= \frac{1}{j} (\mathbf{a}_{1i\alpha} \times \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_{2i\alpha}) \\ &\quad - \frac{\mathbf{a}_3}{j} [(\mathbf{a}_{1i\alpha} \times \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_{2i\alpha}) \cdot \mathbf{a}_3]\end{aligned}\quad (2.47)$$

El producto  $\mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{C}$  se escribe de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\mathbf{U}^2 &= [\mathbf{G}^\alpha \otimes \boldsymbol{\varphi}'_{i\alpha} + \xi^3 \mathbf{G}^\alpha \otimes (\lambda \mathbf{t}_3)_{i\alpha} + \lambda \mathbf{G}^3 \otimes \mathbf{t}_3] \\ &\quad \cdot [\boldsymbol{\varphi}'_{j\beta} \otimes \mathbf{G}^\beta + \xi^3 (\lambda \mathbf{t}_3)_{j\beta} \otimes \mathbf{G}^\beta + \lambda \mathbf{t}_3 \otimes \mathbf{G}^3] \\ &= (\boldsymbol{\varphi}'_{i\alpha} \cdot \boldsymbol{\varphi}'_{j\beta}) (\mathbf{G}^\alpha \otimes \mathbf{G}^\beta) + \xi^3 [\boldsymbol{\varphi}'_{i\alpha} \cdot (\lambda \mathbf{t}_3)_{j\beta} + \boldsymbol{\varphi}'_{j\beta} \cdot (\lambda \mathbf{t}_3)_{i\alpha}] (\mathbf{G}^\alpha \otimes \mathbf{G}^\beta) \\ &\quad + (\xi^3)^2 [(\lambda \mathbf{t}_3)_{i\alpha} \cdot (\lambda \mathbf{t}_3)_{j\beta}] (\mathbf{G}^\alpha \otimes \mathbf{G}^\beta) + \lambda^2 (\mathbf{G}^3 \otimes \mathbf{G}^3)\end{aligned}\quad (2.48)$$

que puede ser expresado en forma matricial (relativo a la base dual  $\{\mathbf{G}^1, \mathbf{G}^2, \mathbf{G}^3\}$ ) como

$$\begin{aligned}\mathbf{U}^2 &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}'_{i1} \cdot \boldsymbol{\varphi}'_{j1} & \boldsymbol{\varphi}'_{i1} \cdot \boldsymbol{\varphi}'_{j2} & 0 \\ \boldsymbol{\varphi}'_{i1} \cdot \boldsymbol{\varphi}'_{j2} & \boldsymbol{\varphi}'_{i2} \cdot \boldsymbol{\varphi}'_{j2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix} \\ &\quad + \xi^3 \begin{bmatrix} 2\boldsymbol{\varphi}'_{i1} \cdot (\lambda \mathbf{t}_3)_{j1} & \boldsymbol{\varphi}'_{i1} \cdot (\lambda \mathbf{t}_3)_{j2} + \boldsymbol{\varphi}'_{j2} \cdot (\lambda \mathbf{t}_3)_{i1} & 0 \\ \boldsymbol{\varphi}'_{i2} \cdot (\lambda \mathbf{t}_3)_{j2} + \boldsymbol{\varphi}'_{j2} \cdot (\lambda \mathbf{t}_3)_{i1} & 2\boldsymbol{\varphi}'_{i2} \cdot (\lambda \mathbf{t}_3)_{j2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad + (\xi^3)^2 \begin{bmatrix} (\lambda \mathbf{t}_3)_{i1} \cdot (\lambda \mathbf{t}_3)_{j1} & (\lambda \mathbf{t}_3)_{i1} \cdot (\lambda \mathbf{t}_3)_{j2} & 0 \\ (\lambda \mathbf{t}_3)_{i1} \cdot (\lambda \mathbf{t}_3)_{j2} & (\lambda \mathbf{t}_3)_{i2} \cdot (\lambda \mathbf{t}_3)_{j2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2.49)$$

La primera forma fundamental de la superficie se escribe como

$$a_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta = \boldsymbol{\varphi}'_{i\alpha} \cdot \boldsymbol{\varphi}'_{j\beta}\quad (2.50)$$

y las curvaturas (segunda forma fundamental) de la superficie media como

$$\begin{aligned} b_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varphi}'_{,\alpha} \cdot \mathbf{t}_{3'\beta} + \boldsymbol{\varphi}'_{,\beta} \cdot \mathbf{t}_{3'\alpha}) = \boldsymbol{\varphi}'_{,\alpha} \cdot \mathbf{t}_{3'\beta} \\ &= \boldsymbol{\varphi}'_{,\alpha} \cdot \mathbf{t}_{3'\beta} = \boldsymbol{\varphi}'_{,\alpha} \cdot \left( \frac{\boldsymbol{\varphi}'_1 \times \boldsymbol{\varphi}'_2}{\|\boldsymbol{\varphi}'_1 \times \boldsymbol{\varphi}'_2\|} \right)_{,\beta} \end{aligned} \quad (2.51)$$

Notar que la identidad

$$\frac{1}{2} (\boldsymbol{\varphi}'_{,\alpha} \cdot \mathbf{t}_{3'\beta} + \boldsymbol{\varphi}'_{,\beta} \cdot \mathbf{t}_{3'\alpha}) = \boldsymbol{\varphi}'_{,\alpha} \cdot \mathbf{t}_{3'\beta} \quad (2.52)$$

se mantiene porque las condiciones de normalidad  $\boldsymbol{\varphi}'_{,\alpha} \cdot \mathbf{t}_3 = 0$  se satisfacen en forma exacta por construcción (ver ecuación (2.45)). Luego, despreciando los términos asociados con la derivada  $\lambda_{,\alpha}$  y  $(\xi^3)^2$ , el tensor derecho de estiramiento puede ser escrito como

$$\mathbf{U}^2 = \begin{bmatrix} (a_{11} + 2b_{11}\xi^3\lambda) & (a_{12} + 2b_{12}\xi^3\lambda) & 0 \\ (a_{12} + 2b_{12}\xi^3\lambda) & (a_{22} + 2b_{22}\xi^3\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

La expresión de arriba de  $\mathbf{U}^2$  es útil para computar diferentes medidas de deformación Lagrangeanas.

En la configuración de referencia, se define el tensor  $\mathbf{F}^o$  como

$$\mathbf{F}^o = \boldsymbol{\varphi}'_{,\alpha} \otimes \mathbf{G}^\alpha + \xi^3 \mathbf{t}'_{3'\alpha} \otimes \mathbf{G}^\alpha + \mathbf{t}'_3 \otimes \mathbf{G}^3 \quad (2.54)$$

Los cuales permiten definir un tensor unitario,  $\mathbf{1}^o$ , y un tensor de curvatura,  $\mathbf{B}^o$  como

$$\mathbf{1}^o = A_{\alpha\beta} \mathbf{G}^\alpha \otimes \mathbf{G}^\beta + \mathbf{G}^3 \otimes \mathbf{G}^3; \quad A_{\alpha\beta} = \boldsymbol{\varphi}'_{,\alpha} \otimes \boldsymbol{\varphi}'_{,\beta} \quad (2.55)$$

$$\mathbf{B}^o = B_{\alpha\beta} \mathbf{G}^\alpha \otimes \mathbf{G}^\beta; \quad B_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varphi}'_{,\alpha} \cdot \mathbf{t}'_{3'\beta} + \boldsymbol{\varphi}'_{,\beta} \cdot \mathbf{t}'_{3'\alpha}) \quad (2.56)$$

Escribiendo la expresión (2.30) como  $\mathbf{U}^2 = \mathbf{U}_a^2 + \mathbf{U}_b^2$  donde

$$\mathbf{U}_a^2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U}_b^2 = \begin{bmatrix} 2b_{11}\xi^3\lambda & 2b_{12}\xi^3\lambda & 0 \\ 2b_{12}\xi^3\lambda & 2b_{22}\xi^3\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

Luego los *tensores de deformación Lagrangeanos*  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{K}$  relativos a la base dual  $\{\mathbf{G}^1, \mathbf{G}^2, \mathbf{G}^3\}$  son, respectivamente, dados por

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{U}_a^2 - \mathbf{1}^o) \quad \mathbf{K} = \frac{1}{2} (\mathbf{U}_b^2 - \mathbf{B}^o) \quad (2.58)$$

El primero de (2.58) se conoce como *tensor de deformación de Green Lagrange*, el segundo de (2.58) es simplemente el *tensor de cambio de curvatura*. En forma matricial se expresan como

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_{11} - A_{11} & a_{12} - A_{12} & 0 \\ a_{12} - A_{12} & a_{22} - A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 - 1 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \xi^3 (\lambda b_{11} - B_{11}) & \xi^3 (\lambda b_{12} - B_{12}) & 0 \\ \xi^3 (\lambda b_{12} - B_{12}) & \xi^3 (\lambda b_{22} - B_{22}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

## 2.4. Esfuerzos Resultantes

A los fines de computar los esfuerzos generalizados de la lámina, se parte de la descomposición espectral de  $\mathbf{U}$  (2.30). Adoptando las medidas de tensión y deformación de Hencky se definen las deformaciones logarítmicas como

$$\mathbf{E}_{ln} = \sum_{\alpha=1}^3 \ln(\lambda_\alpha) \mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{r}_\alpha \quad (2.61)$$

Las cuales permiten computar, como se mostrará en la sección de ecuaciones constitutivas, el tensor de tensiones de Hencky  $\mathbf{T}$ . Definiendo el tensor de Hencky rotado como

$$\mathbf{T}_L = \mathbf{R}_L \mathbf{T} \mathbf{R}_L^T \quad (2.62)$$

donde  $\mathbf{R}_L = [\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2 \ \mathbf{r}_3]$  es el tensor rotación, es factible calcular las componentes del segundo tensor de Piola-Kirchhoff como

$$[S_L]_{\alpha\alpha} = \frac{1}{\lambda_\alpha^2} [T_L]_{\alpha\alpha} \quad [S_L]_{\alpha\beta} = \frac{\ln(\lambda_\alpha/\lambda_\beta)}{\frac{1}{2}(\lambda_\alpha^2 - \lambda_\beta^2)} [T_L]_{\alpha\beta} \quad (2.63)$$

Finalmente, el tensor  $\mathbf{S}$  puede ser computado como

$$\mathbf{S} = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 [S_L]_{\alpha\beta} \mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{r}_\beta \quad (2.64)$$

Luego, las tensiones resultantes (fuerzas y momentos) pueden ser obtenidas por integración a través del espesor original del segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff

$$\mathbf{N} = \int_{-h^o/2}^{h^o/2} \mathbf{S} \mu d\xi^3 \quad \mathbf{M} = \int_{-h^o/2}^{h^o/2} \mathbf{S} \mu \lambda \xi^3 d\xi^3 \quad (2.65)$$

donde  $\lambda \xi^3$  es la *distancia actual* del punto de la lámina a la superficie media, y

$$\mu = \frac{|(\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2) \cdot \mathbf{G}_3|}{|(\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2) \cdot \mathbf{A}_3|} \quad (2.66)$$

$$\simeq 1 + \xi^3 (B_{11} + B_{22}) \quad (2.67)$$

tiene en cuenta la curvatura de la lámina en el calculo del volumen elemental.

## 2.5. Ecuaciones de equilibrio

Procederemos a formular las ecuaciones de movimiento del cuerpo de la lámina en forma débil. En el caso estático, la energía potencial total del cuerpo de la lámina toma la forma

$$\Pi = \int_{\Omega^o} \int_{-h^o/2}^{h^o/2} W(\mathbf{F}) \mu d\xi^3 d\Omega^o + \Pi_{ext} \equiv \Pi_{int} + \Pi_{ext} \quad (2.68)$$

donde, para un material elástico,  $W$  es la densidad de energía de deformación por unidad de volumen,  $\Pi_{ext}$  es el potencial de las fuerzas externas aplicadas. Para el equilibrio, la energía potencial del cuerpo de lámina es estacionario, esto es

$$\delta \Pi = \delta \Pi_{int} + \delta \Pi_{ext} = 0 \quad (2.69)$$

Aquí

$$\delta \Pi_{int} = \int_{\Omega^o} \int_{-h^o/2}^{h^o/2} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} : \delta \mathbf{F} \mu d\xi^3 d\Omega^o = \int_{\Omega^o} \int_{-h^o/2}^{h^o/2} \mathbf{P} : \delta \mathbf{F} \mu d\Omega^o \quad (2.70)$$

donde  $\mathbf{P}$  es el primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff.

La introducción de la cinemática de la lámina (2.46) dentro de (2.70) conlleva a la expresión del trabajo interno

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{int} &= \int_{\Omega^o} \int_{-h^o/2}^{h^o/2} \mathbf{P} : [\delta\boldsymbol{\varphi}'_{,\alpha} \otimes \mathbf{G}^\alpha + \xi^3 (\lambda\delta\mathbf{t}_3)'_{,\alpha} \otimes \mathbf{G}^\alpha + \lambda\delta\mathbf{t}_3 \otimes \mathbf{G}^3] \mu d\xi^3 d\Omega^o \\ &\quad + \int_{\Omega^o} \int_{-h^o/2}^{h^o/2} \mathbf{P} : [\xi^3 (\delta\lambda\mathbf{t}_3)'_{,\alpha} \otimes \mathbf{G}^\alpha + \delta\lambda\mathbf{t}_3 \otimes \mathbf{G}^3] \mu d\xi^3 d\Omega^o \end{aligned} \quad (2.71)$$

introduciendo el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$  dado por la relación  $\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{S}$

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{int} &= \int_{\Omega^o} \int_{-h^o/2}^{h^o/2} \mathbf{F}\mathbf{S} : \delta\mathbf{F} \mu d\xi^3 d\Omega^o \\ &= \int_{\Omega^o} \int_{-h^o/2}^{h^o/2} \mathbf{S} : \mathbf{F}^T \delta\mathbf{F} \mu d\xi^3 d\Omega^o \\ &= \int_{\Omega^o} \int_{-h^o/2}^{h^o/2} \mathbf{S} : \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \delta\mathbf{F} + \delta\mathbf{F}^T \mathbf{F}) \right] \mu d\xi^3 d\Omega^o \\ &= \int_{\Omega^o} \int_{-h^o/2}^{h^o/2} \mathbf{S} : \frac{1}{2} \delta\mathbf{U}^2 \mu d\xi^3 d\Omega^o \end{aligned} \quad (2.72)$$

diferenciando (2.48) reemplazando en (2.72) y despreciando el término asociado con  $(\xi^3)^2$  se tiene

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{int} &= \int_{\Omega^o} \int_{-h^o/2}^{h^o/2} \mathbf{S} : \frac{1}{2} \{ \boldsymbol{\varphi}'_{,\alpha} \cdot \delta\boldsymbol{\varphi}'_{,\beta} + \delta\boldsymbol{\varphi}'_{,\alpha} \cdot \boldsymbol{\varphi}'_{,\beta} \\ &\quad + \xi^3 [ \boldsymbol{\varphi}'_{,\alpha} \cdot (\lambda\delta\mathbf{t}_3)'_{,\beta} + \delta\boldsymbol{\varphi}'_{,\alpha} \cdot (\lambda\mathbf{t}_3)'_{,\beta} \\ &\quad + \boldsymbol{\varphi}'_{,\beta} \cdot (\lambda\delta\mathbf{t}_3)'_{,\alpha} + \delta\boldsymbol{\varphi}'_{,\beta} \cdot (\lambda\mathbf{t}_3)'_{,\alpha} ] \} (\mathbf{G}^\alpha \otimes \mathbf{G}^\beta) \mu d\xi^3 d\Omega^o \\ &\quad + \int_{\Omega^o} \int_{-h^o/2}^{h^o/2} \mathbf{S} : \frac{1}{2} \{ \xi^3 [ \boldsymbol{\varphi}'_{,\alpha} (\delta\lambda\mathbf{t}_3)'_{,\beta} + \boldsymbol{\varphi}'_{,\beta} (\delta\lambda\mathbf{t}_3)'_{,\alpha} ] (\mathbf{G}^\alpha \otimes \mathbf{G}^\beta) \\ &\quad + 2\lambda\delta\lambda (\mathbf{G}^3 \otimes \mathbf{G}^3) \} \mu d\xi^3 d\Omega^o \end{aligned} \quad (2.73)$$

Adicionalmente, las variaciones  $\delta\mathbf{x}$  y  $\delta\lambda$  se suponen independientes, luego (2.69) se desacopla en dos ecuaciones

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega^o} \int_{-h^o/2}^{h^o/2} \mathbf{S} : \frac{1}{2} \{ \boldsymbol{\varphi}'_{\alpha} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}'_{\beta} + \delta \boldsymbol{\varphi}'_{\alpha} \cdot \boldsymbol{\varphi}'_{\beta} \\
& \quad + \xi^3 [ \boldsymbol{\varphi}'_{\alpha} \cdot (\lambda \delta \mathbf{t}_3)_{,\beta} + \delta \boldsymbol{\varphi}'_{\alpha} \cdot (\lambda \mathbf{t}_3)_{,\beta} \\
& \quad + \boldsymbol{\varphi}'_{\beta} \cdot (\lambda \delta \mathbf{t}_3)_{,\alpha} + \delta \boldsymbol{\varphi}'_{\beta} \cdot (\lambda \mathbf{t}_3)_{,\alpha} ] \} (\mathbf{G}^{\alpha} \otimes \mathbf{G}^{\beta}) \mu d\xi^3 d\Omega^o \\
& \quad + \delta \Pi_{ext} = 0
\end{aligned} \tag{2.74}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega^o} \int_{-h^o/2}^{h^o/2} \mathbf{S} : \frac{1}{2} \{ \xi^3 [ \boldsymbol{\varphi}'_{\alpha} (\delta \lambda \mathbf{t}_3)_{,\beta} + \boldsymbol{\varphi}'_{\beta} (\delta \lambda \mathbf{t}_3)_{,\alpha} ] (\mathbf{G}^{\alpha} \otimes \mathbf{G}^{\beta}) \\
& \quad + 2\lambda \delta \lambda (\mathbf{G}^3 \otimes \mathbf{G}^3) \} \mu d\xi^3 d\Omega^o = 0
\end{aligned} \tag{2.75}$$

Introduciendo la derivada  $(\lambda \delta \mathbf{t}_3)_{,\beta} = \lambda_{,\beta} \delta \mathbf{t}_3 + \lambda \delta \mathbf{t}_{3,\beta}$  y despreciando el primer término se obtiene en (2.74)

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega^o} \int_{-h^o/2}^{h^o/2} \mathbf{S} : \frac{1}{2} \{ \boldsymbol{\varphi}'_{\alpha} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}'_{\beta} + \delta \boldsymbol{\varphi}'_{\alpha} \cdot \boldsymbol{\varphi}'_{\beta} \\
& \quad + \lambda \xi^3 [ \boldsymbol{\varphi}'_{\alpha} \cdot \delta \mathbf{t}_{3'\beta} + \delta \boldsymbol{\varphi}'_{\alpha} \cdot \mathbf{t}_{3'\beta} \\
& \quad + \boldsymbol{\varphi}'_{\beta} \cdot \delta \mathbf{t}_{3'\alpha} + \delta \boldsymbol{\varphi}'_{\beta} \cdot \mathbf{t}_{3'\alpha} ] \} (\mathbf{G}^{\alpha} \otimes \mathbf{G}^{\beta}) \mu d\xi^3 d\Omega^o \\
& \quad + \delta \Pi_{ext} = 0
\end{aligned} \tag{2.76}$$

De igual manera, para la segunda ecuación de equilibrio (2.77), introducimos  $(\delta \lambda \mathbf{t}_3)_{,\alpha} = \delta \lambda_{,\alpha} \mathbf{t}_3 + \delta \lambda \mathbf{t}_{3',\alpha}$  y despreciando el primer término se obtiene

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega^o} \int_{-h^o/2}^{h^o/2} \mathbf{S} : \frac{1}{2} \{ \xi^3 [ \boldsymbol{\varphi}'_{\alpha} \delta \lambda \mathbf{t}_{3'\beta} + \boldsymbol{\varphi}'_{\beta} \delta \lambda \mathbf{t}_{3'\alpha} ] (\mathbf{G}^{\alpha} \otimes \mathbf{G}^{\beta}) \\
& \quad + 2\lambda \delta \lambda (\mathbf{G}^3 \otimes \mathbf{G}^3) \} \mu d\xi^3 d\Omega^o = 0
\end{aligned} \tag{2.77}$$

La primera de las ecuaciones anteriores establece el equilibrio de la superficie media de la lámina y la segunda de las ecuaciones (2.77), hace cumplir el equilibrio a través del espesor de la lámina. Sin embargo, no es esta la ecuación utilizada para alcanzar equilibrio sino que el equilibrio a través del espesor es forzado al recurrir al estado plano de tensiones. La ecuación (2.76) puede ser simplificada, aún más, al introducir los esfuerzos generalizados proveniente de

(2.65) obteniéndose

$$\begin{aligned}
\delta\Pi &= \int_{\Omega^o} \left\{ \mathbf{N} : \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varphi}'_{,\alpha} \cdot \delta\boldsymbol{\varphi}'_{,\beta} + \delta\boldsymbol{\varphi}'_{,\alpha} \cdot \boldsymbol{\varphi}'_{,\beta}) \right. \\
&\quad + \mathbf{M} : \frac{1}{2} \lambda \xi^3 [\boldsymbol{\varphi}'_{,\alpha} \cdot \delta\mathbf{t}_{3'\beta} + \delta\boldsymbol{\varphi}'_{,\alpha} \cdot \mathbf{t}_{3'\beta} \\
&\quad + \boldsymbol{\varphi}'_{,\beta} \cdot \delta\mathbf{t}_{3'\alpha} + \delta\boldsymbol{\varphi}'_{,\beta} \cdot \mathbf{t}_{3'\alpha}] \left. \right\} (\mathbf{G}^\alpha \otimes \mathbf{G}^\beta) d\Omega^o \\
&\quad + \delta\Pi_{ext} = 0
\end{aligned} \tag{2.78}$$

Notando que la variación de (2.50) y (2.51) se escriben como

$$\delta a_{\alpha\beta} = \delta\boldsymbol{\varphi}'_{,\alpha} \cdot \boldsymbol{\varphi}'_{,\beta} + \boldsymbol{\varphi}'_{,\alpha} \cdot \delta\boldsymbol{\varphi}'_{,\beta} \tag{2.79}$$

$$\delta b_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\delta\boldsymbol{\varphi}'_{,\alpha} \cdot \mathbf{t}_{3'\beta} + \boldsymbol{\varphi}'_{,\alpha} \cdot \delta\mathbf{t}_{3'\beta}) \tag{2.80}$$

Luego, (2.78) se puede escribir finalmente como

$$\delta\Pi = \int_{\Omega^o} (\mathbf{N} : \delta\mathbf{E} + \mathbf{M} : \delta\mathbf{K}) d\Omega^o + \delta\Pi_{ext} = 0 \tag{2.81}$$

donde  $\delta\mathbf{K}$  es el tensor virtual de curvatura y  $\delta\mathbf{E}$  es el tensor virtual de deformación de Green-Lagrange en la superficie media.

En lo que respecta al trabajo virtual externo  $\delta\Pi_{ext}$ , consideremos la lámina sujeta a fuerzas de cuerpo  $\mathbf{b}$ , y a una presión  $\mathbf{p}$  actuando en la superficie media ( $\xi^3 = 0$  y  $\mu = 1$ ) de dicha lámina. Luego, la expresión del trabajo externo se expresa como

$$\begin{aligned}
\delta\Pi_{ext} &= - \int_{\Omega^o} \int_{-h^o/2}^{h^o/2} \mathbf{b} \cdot \delta(\boldsymbol{\varphi} + \xi^3 \lambda \mathbf{t}_3) \mu d\xi^3 d\Omega^o \\
&\quad - \int_{\Omega^o} \mathbf{p} \cdot \delta\boldsymbol{\varphi} d\Omega^o
\end{aligned} \tag{2.82}$$

De (2.82) puede definirse los siguientes esfuerzos externos generalizados

$$\overline{\mathbf{N}} = \int_{-h^o/2}^{h^o/2} \mathbf{b} \mu d\xi^3 + \mathbf{p} \quad \overline{\mathbf{M}} = \int_{-h^o/2}^{h^o/2} \mathbf{b} \mu \xi^3 d\xi^3 \tag{2.83}$$

que permiten reescribir la expresión (2.82) como

$$\delta\Pi_{ext} = - \int_{\Omega^o} (\overline{\mathbf{N}} \cdot \delta\boldsymbol{\varphi} + \overline{\mathbf{M}} \cdot \lambda \delta\mathbf{t}_3) d\Omega^o \tag{2.84}$$

Así, pues, el trabajo total realizado se obtiene sumando (2.81) y (2.84) en (2.69)

$$\delta\Pi = \int_{\Omega^o} (\mathbf{N} : \delta\mathbf{E} + \mathbf{M} : \delta\mathbf{K} - \bar{\mathbf{N}} \cdot \delta\boldsymbol{\varphi} + \bar{\mathbf{M}} \cdot \lambda\delta\mathbf{t}_3) d\Omega^o = 0 \quad (2.85)$$

## 2.6. Ecuaciones Constitutivas

En esta sección se termina de completar la cinemática del cuerpo deformable de la lámina a través de las ecuaciones constitutivas. Estas últimas relacionan las tensiones y deformaciones que caracterizan el comportamiento del material bajo la aplicación de fuerzas o cargas. Tomaremos como ejemplo dos modelos: un modelo hiperelástico que no es otra cosa que un modelo elástico de alto orden y un modelo elasto-plástico para grandes deformaciones.

Los ejemplos de materiales hiperelástico son las gomas. La principal característica de este modelo es la presencia de una función de energía de deformación  $\psi$  que describe por definición, la energía de deformación por unidad de masa de un cuerpo indeformado. Si se tiene un material perfectamente elástico que no produce entropía local y un caso específico de un proceso puramente mecánico (isotérmico), se puede obtener

$$\psi = \frac{K}{2} (\ln J)^2 + \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p}{\alpha_p} \left[ J^{-\frac{\alpha_p}{3}} \left( \sum_{i=1}^3 \lambda_i^{\alpha_p-1} \right) - 3 \right] \quad (2.86)$$

donde  $K$  es el módulo volumétrico del material,  $J$  es el determinante de  $\mathbf{U}$ ,  $N$ ,  $\mu_i$  y  $\alpha_i$  son los parámetros del material,  $\mu_i$  y  $\alpha_i$  son números reales de modo que  $\alpha_i \mu_i > 0$  ( $\forall i = 1, N$ ) y  $N$  es un entero positivo (ver Ogden (1972)).

Las medidas de tensión asociadas con las deformaciones principales logarítmicas son denotadas por  $\beta_i$ . Estas pueden ser computadas notando que

$$\beta_i = \frac{\partial\psi(\Lambda)}{\partial(\ln\lambda_i)} = K (\ln J) + \lambda_i \sum_{p=1}^N \mu_p J^{-\frac{\alpha_p}{3}} \left[ \lambda_i^{\alpha_p-1} - \frac{1}{3} \frac{1}{\lambda_i} \sum_{j=1}^3 \lambda_j^{\alpha_p} \right] \quad (2.87)$$

definiendo

$$a_p = \sum_{j=1}^3 \lambda_j^{\alpha_p} \quad (2.88)$$

lo cual da

$$\beta_i = K (\ln J) + \sum_{p=1}^N \mu_p J^{-\frac{\alpha_p}{3}} \left[ \lambda_i^{\alpha_p} - \frac{1}{3} a_p \right] \quad (2.89)$$

Los valores de  $\beta_i$ , expresados en las direcciones principales de deformación, permiten evaluar las tensiones en el sistema de coordenadas convectivas como

$$\mathbf{T} = \sum_{i=1}^3 \beta_i \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i \quad (2.90)$$

donde  $\mathbf{T}$  es el *tensor de tensiones de Hencky*, que permite calcular usando las operaciones correspondientes las tensiones generalizadas en (2.65).

Para tratar plasticidad de metales donde las deformaciones elásticas son pequeñas las deformaciones logarítmicas permiten de una manera razonable realizar una descomposición aditiva de las componentes elásticas y plásticas como

$$\mathbf{E}_{ln} = \mathbf{E}_{ln}^e + \mathbf{E}_{ln}^p \quad (2.91)$$

Adoptando una relación lineal constante entre las tensiones (planas) de Hencky y las deformaciones logarítmicas elásticas se obtiene

$$\mathbf{T} = \mathbf{D} \mathbf{E}_{ln}^e \quad (2.92)$$

que permite calcular usando las operaciones correspondientes las tensiones generalizadas (2.65).

Estas ecuaciones constitutivas son integradas usando un algoritmo de retorno mapeado estándar. Se elije la siguiente función de fluencia de Mises-Hill con endurecimiento isotrópico no lineal

$$(G + H) T_{11}^2 + (F + H) T_{22}^2 - 2HT_{11}T_{22} + 2NT_{12}^2 = \kappa (\varepsilon_o + e^p)^n \quad (2.93)$$

donde  $F$ ,  $G$ ,  $H$  y  $N$  definen la forma no isotrópica de la superficie de fluencia y los parámetros  $\kappa$ ,  $\varepsilon_o$  y  $n$  definen su tamaño como una función de la deformación plástica efectiva  $e^p$ .

La función de fluencia de Mises-Hill tiene la ventaja de ser simple y permite, como una primera aproximación, tratar láminas delgadas de acero rolando con anisotropía plana y transversal.

## 2.7. Modelo de Lámina de Reissner-Mindlin

El modelo de lámina de Reissner-Mindlin se diferencia del modelo de Kirchhoff-Love en la hipótesis que hace referencia a la dirección de las normales. De esta manera, el vector director  $\mathbf{t}_3$  no necesariamente coincide con la normal a la superficie media después de la deformación, lo que permite tener en cuenta las deformaciones por corte. Como se expresara antes, puede considerarse a la teoría de Kirchhoff-Love como un caso particular de la teoría de Reissner-Mindlin.

Así, el campo de desplazamientos es el mismo que para el modelo de Kirchhoff-Love

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{x} - \mathbf{X} = \boldsymbol{\varphi}^o + \mathbf{v} + \xi^3 \lambda \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{t}_3^o - \boldsymbol{\varphi}^o - \xi^3 \mathbf{t}_3^o \\ &= \mathbf{v} + \xi^3 (\lambda \boldsymbol{\Lambda} - \mathbf{I}) \mathbf{t}_3^o\end{aligned}\quad (2.94)$$

pero relajando la ecuación de restricción (2.44)

$$\mathbf{t}_3 \cdot \boldsymbol{\varphi}'_{i\alpha} = (\boldsymbol{\Lambda} \mathbf{t}_3^o) \cdot (\boldsymbol{\varphi}'_{i\alpha} + \mathbf{v}'_{i\alpha}) \neq 0 \quad (2.95)$$

Luego, la deformación por corte se calcula como

$$\mathbf{t}_3 \cdot \boldsymbol{\varphi}'_{i\alpha} - \mathbf{t}_3^o \cdot \boldsymbol{\varphi}'_{i\alpha} = (\boldsymbol{\Lambda} \mathbf{t}_3^o) \cdot (\boldsymbol{\varphi}'_{i\alpha} + \mathbf{v}'_{i\alpha}) - \mathbf{t}_3^o \cdot \boldsymbol{\varphi}'_{i\alpha} = \gamma_\alpha - \gamma_\alpha^o \quad (2.96)$$

Nótese que en la expresión anterior se supone un caso general donde el vector  $\mathbf{t}_3^o$  no es necesariamente normal a la superficie media inicial.

El trabajo total realizado se obtiene sumando a (2.85) la contribución debida al corte

$$\delta \Pi = \int_{\Omega^o} (\mathbf{N} : \delta \mathbf{E} + \mathbf{M} : \delta \mathbf{K} + \mathbf{Q} : \delta \mathbf{G} - \overline{\mathbf{N}} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} + \overline{\mathbf{M}} \cdot \lambda \delta \mathbf{t}_3) d\Omega^o = 0$$

donde  $\mathbf{Q}$  es el esfuerzo de corte generalizado y  $\delta \mathbf{G}$  es el tensor virtual de deformaciones por corte. El tensor de deformaciones por corte se expresa como

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \gamma_1 - \gamma_1^o \\ 0 & 0 & \gamma_2 - \gamma_2^o \\ \gamma_1 - \gamma_1^o & \gamma_2 - \gamma_2^o & 0 \end{bmatrix} \quad (2.97)$$



# Capítulo 3

## Antecedentes de Elementos de Lámina

### 3.1. Introducción

Los antecedentes de elementos de láminas son numerosos y siguen en constante crecimiento. En parte, debido a un conjunto de problemas numéricos que surgen de la discretización de las ecuaciones de gobierno. Por otro lado, debido también a las exigencias de aplicaciones numéricas cada vez más complejas que requieren elementos de lámina robustos. En la actualidad no existe un único elemento que permita tratar todos los problemas numéricos en forma satisfactoria. En otras palabras, elementos que muestran un buen comportamiento en ciertos tipos de problemas, no lo hacen en otros. Así, a la hora de optar por un tipo de elemento es necesario conocer el problema de lámina que se intenta modelar. Por ejemplo, un aspecto importante a la hora de elegir un elemento es la esbeltez de la lámina. Si la misma es gruesa deberemos elegir elementos que consideren las deformaciones por corte, en caso contrario, usaremos una formulación que desprecie la influencia de dichas deformaciones. Otro aspecto es el régimen de trabajo que puede ser lineal o presentar no linealidad, sea esta geométrica y/o del material. En el caso de una no linealidad geométrica asociada a problemas con grandes desplazamientos y giros o problemas con nivel de deformaciones elevado y no linealidad material, tendremos en cuenta que ciertos elementos pueden comportarse bien para un tipo de problema pero no para otros. Así, por ejemplo, un elemento que tiene buen comportamiento en

régimen lineal no necesariamente se comporta en forma adecuada en régimen no lineal. Otro aspecto a tener en cuenta a la hora de elegir un elemento es el tipo de geometría presente en el problema de interés. Puede darse el caso que se intenta modelar una superficie suave o una que presenta quiebres, discontinuidades y/o ramificaciones. Podríamos tener la necesidad de modelar un problema de lámina con elementos estructurales como rigidizadores modelados con elementos vigas o la necesidad de realizar una análisis de lámina unidos a elementos sólidos, y nuevamente habrá elementos buenos y malos para estos tipos de problemas. Pueden existir problemas asociado con la malla o sensibilidad a las mismas. Elementos que muestran buen comportamiento en mallas estructuradas con elementos con buena relación de aspecto, no lo hacen cuando las mallas presentan elementos distorsionados.

En definitiva, hoy por hoy, no existe un único elemento que sea capaz de modelar todos los problemas ingenieriles. Si la pregunta es ¿Cuál es el mejor elemento de lámina? La respuesta puntual no existe aún, pero la pregunta podría formularse de otra manera para encontrar una respuesta. Por ejemplo, dígame usted ¿Qué problema de lámina quiere resolver? entonces seguramente existen una o varias formulaciones para tratar de manera correcta el problema en cuestión.

A continuación se presentarán en forma breve diferentes formulaciones de láminas. El capítulo se divide en dos partes, *Parte I* donde se incluyen los elementos de láminas clásicos como ser los elementos de Kirchhoff, Reissner-Mindlin y elementos de lámina-sólido. En la *Parte II* se agrupan otras alternativas que, por un lado, corresponden a una nueva generación de elementos, y por otro, forman partes de “nuevos paradigmas” en el diseño de elementos de lámina. En la mayoría de los antecedentes analizados nos restringimos a desplazamientos infinitesimales.

## 3.2. Parte I: Elementos de lámina clásicos

Entiéndase la denominación de “clásicos” para las formulaciones de elementos de láminas que son de pleno conocimiento y han adquirido madurez en la práctica ingenieril.

### 3.2.1. Elementos de Lámina de Kirchhoff-Love

Las diferentes teorías de láminas se diferencian principalmente en la hipótesis sobre el giro de las normales a la superficie media. De esta manera, la teoría clásica de láminas delgadas de Kirchhoff-Love determina que dichas normales se mantienen rectas y ortogonales a la deformada de dicha superficie. En un contexto general del MEF, y como consecuencia de dicha hipótesis, encontraremos que los elementos de láminas requieren de continuidad  $C^1$  debido a la existencia de derivadas segunda de los desplazamientos transversales en la expresión del principio de trabajos virtuales (PTV) .

Por un lado, encontraremos que los desplazamientos en el plano medio de la lámina,  $u_1^o$  y  $u_2^o$  requieren de continuidad  $C^o$ , y por otro lado, los desplazamientos fuera de dicho plano,  $u_1$  y  $u_2$  exigen que la flecha  $u_3$  tenga continuidad  $C^1$ . De esta manera, se asegura continuidad estructural y el campo de desplazamiento de la lámina se puede expresar como (ver Apéndice A)

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1^o(X_1, X_2) - \frac{\partial u_3^o(X_1, X_2)}{\partial X_1} z \\ u_2 &= u_2^o(X_1, X_2) - \frac{\partial u_3^o(X_1, X_2)}{\partial X_2} z \\ u_3 &= u_3^o(X_1, X_2) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Vemos así, desde un punto de vista del MEF, que el número de variables nodales de un elemento de lámina de  $n$  nodos es de  $5n$ . Los GdL son: la flecha  $u_3$  y sus dos giros  $\beta_1 = \partial u_3^o / \partial X_1$  y  $\beta_2 = \partial u_3^o / \partial X_2$ , sumado a estos los del plano medio  $u_1^o$  y  $u_2^o$ . Considerando un elemento de lámina inicialmente plano podemos separar las contribuciones provenientes del “estado flexional” y del “estado membranal”. Concentrándonos en los términos de flexión vemos que el desplazamiento transversal  $u_3$  se aproxima dentro de cada elemento con el siguiente polinomio

$$u_3 = \alpha_1 + \alpha_2 X_1 + \alpha_3 X_2 + \alpha_4 X_1^2 + \alpha_5 X_1 X_2 + \dots \quad (3.2)$$

donde los  $\alpha_i$  se obtienen al invertir el sistema de  $3n$  ecuaciones a partir de haber impuesto condiciones en los nodos de desplazamiento  $u_3$  y de giros  $\beta_1$  y  $\beta_2$ .

A esta altura de las cosas, estamos en condiciones de dilucidar algunos problemas inherentes a los elementos de lámina de Kirchhoff-Love. En primer

lugar, la elección de los términos del polinomio (3.2) posee varias alternativas. Cada una de dicha alternativas da origen a un elemento de lámina diferente. Pero muchos de ellos sin éxitos en la práctica ingenieril. Si se satisfacen todas las condiciones de continuidad  $C^1$  la formulación se denomina “conforme”, pero no se garantiza con ello, necesariamente, un buen comportamiento del elemento. Además puede dar origen a una formulación demasiado costosa desde el punto de vista computacional. Existen diferentes técnicas para alcanzar la conformidad de la formulaciones, entre ellas, la de imponer las curvaturas como parámetros nodales adicionales. Otra alternativa se basa en la imposición de la continuidad de la derivada normal utilizando variables de giros adicionales definidas en los lados del elemento y técnicas similares. Sin embargo, pese al esfuerzo por alcanzar conformidad en las formulaciones, los elementos de lámina conformes no son muy populares por las dificultades que presentan para su utilización en el análisis de lámina con geometría arbitrarias. Una alternativa es la de no cumplir con todos los requisitos de continuidad, dando origen a los elementos de lámina “no conformes”. Algunas de las formulaciones utilizando esta técnica han dado buenos resultados en la práctica. Un aspecto importante en estos casos es mostrar que al refinar las mallas las soluciones obtenidas convergen a la solución correcta. Una tercera alternativa consiste en las aproximaciones “mixtas” donde las incógnitas son desplazamientos, tensiones o deformaciones y al igual que la alternativa anterior la condición de convergencia con el refinamiento de la malla es fundamental.

Otro problema que poseen los elementos de Kirchhoff-Love es de “incompatibilidad” de desplazamientos a lo largo de lados comunes de elementos no coplanares propio de una superficie quebrada o ramificada. Como ya hemos apuntado, la existencia de derivadas segunda en la expresión del PTV obliga a cumplir con los requisitos de continuidad  $C^1$  para los desplazamientos transversales a la superficie media, y por otro lado, los desplazamientos del campo membranar en dicha superficie exigen una condición de continuidad  $C^0$ . Lo que desde un punto de vista del MEF es como trabajar con dos tipos de elementos diferentes. Por ejemplo, en la unión a noventa grados de dos elementos de láminas, se observa que en el lado común a los dos elementos se produce una clara incompatibilidad en los desplazamientos verticales, que serán de continuidad  $C^0$  o  $C^1$  según consideremos al elemento vertical u horizontal, respectivamente. Esta incompatibilidad se traduce en una rigidización de la estructura y sólo puede evitarse refinando las mallas o empleando elementos que tengan una variación

polinómica del mismo grado para todos los desplazamientos nodales.

Existe otro problema en los elementos de lámina delgada que no está asociado con una característica inherente de las formulaciones, sino más bien con un problema de “nivel de acoplamiento” que se sucede entre la parte membranal y flexional. En determinadas situaciones puede producirse un fenómeno denominado “bloqueo membranal”. Básicamente el bloqueo se produce al someter un elemento aislado o una malla a un estado de flexión dominante. El efecto del acoplamiento que se da en los elementos planos cuando se ensamblan las matrices se traduce en la aparición de deformaciones membranales en una situación en la que deberían ser prácticamente nulas y tienden a sobrerigidizar la solución numérica. Sin embargo, existen diferentes técnicas para contrarrestar el problema en cuestión. Uno de las más utilizadas es la integración reducida de los términos de membrana en la matriz de rigidez que es equivalente a utilizar un campo de deformaciones de membrana impuesto determinado, algo similar a lo que sucede con la integración reducida del cortante en elementos de lámina de Reissner-Mindlin como se verá en el siguiente apartado.

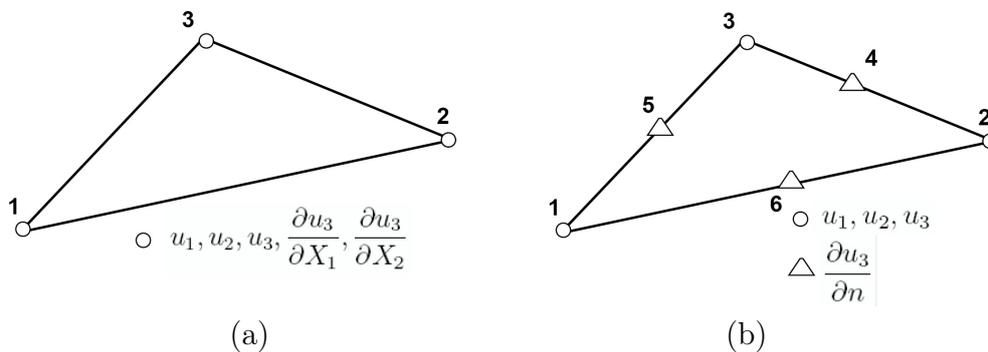
Como se comentó antes, existen diferentes formulaciones de elementos de láminas de Kirchhoff-Love pero muy pocas son aceptadas en la práctica ingenieril. A continuación se mencionan algunos ejemplos de los elementos de láminas más populares. Una mayor información de las diferentes formulaciones pueden encontrarse en los libros de Oñate (1992) y Zienkiewicz y Taylor (2000).

Un repaso rápido sobre algunos de los principales desarrollos de elementos muestra que los elementos de lámina de Kirchhoff-Love de mayor aceptación son los triangulares no conformes por ser menos engorrosos que los elementos conformes. Por ejemplo, un elemento de lámina no conforme bastante popular y que ha sido objeto de estudio es el que resulta de combinar el sencillo triángulo de deformación constante de tres nodos para el campo membranal, con el elemento de placa triangular de tres nodos y nueve GdL desarrollado por Cheung et al. (1968) (ver Figura 3.1a). Otra combinación de gran interés por su sencillez, es utilizar para la parte flexional el elemento triangular de seis nodos (seis incógnitas nodales) propuesto por Morley (1971) (ver Figura 3.1b). Esta formulación ha sido objeto de estudio en problemas con grandes deformaciones (Peric y Owen (1981)).

En lo que respecta a los elementos de placas rectangulares los hay conformes y no conformes, pero lamentablemente son muy limitados en la práctica,

ya que sus formulaciones fallan para geometrías arbitrarias o formas cuadriláteras irregulares. Sin embargo, si se mantienen en su forma rectangular son muy precisos como ser el elemento de lámina no conforme que resulta de combinar un elemento rectangular de tensión plana de cuatro nodos con el elemento de placa de cuatro nodos desarrollado por Melosh (1961, 1963) y Zienkiewicz y Cheung (1964).

Otra posibilidad de interés y que se verá con más detalles en la siguiente sección, es combinar los elementos de tensión plana cuadriláteros y triangulares con elementos de placa discreto de Kirchhoff-Love (DK) desarrollados a partir de las hipótesis discretas de Kirchhoff-Love. La formulación de elementos de lámina no es tan inmediata debido a las características de los elementos DK. Sin embargo, se ha comprobado que combinando el sencillo elemento triangular de tres nodos de tensión plana con el elemento de placa triangular DKT, se obtiene un elemento de lámina plana de Kirchhoff-Love con buenas prestaciones debido a la extremada simplicidad de su geometría.



**Figura 3.1:** Elementos de lámina triangular no conformes: (a) CKZ y (b) Morley.

### 3.2.2. Elementos de Lámina de Reissner-Mindlin

La hipótesis fundamental que distingue a la teoría de Reissner-Mindlin de la teoría de Kirchhoff-Love es sobre el giro de las normales a la superficie media. Las normales después de deformada la lámina no permanecen necesariamente normales a dicha superficie media. Por lo tanto, la teoría de Reissner-Mindlin conduce a problemas de continuidad  $C^0$  y desde la óptica del MEF es factible cumplir con facilidad las condiciones de continuidad entre elementos.

Así, pues, al igual que la teoría de Kirchhoff-Love encontraremos que los desplazamientos de la superficie media  $u_1^o$  y  $u_2^o$  exigen continuidad  $C^0$ , y

también que los desplazamientos fuera del dicho plano  $u_1$  y  $u_2$  exigen la misma continuidad a través del desplazamiento normal  $u_3$ . De esta forma se garantiza la continuidad estructural y el campo de desplazamiento de la lámina se expresa de la siguiente manera (ver Apéndice A)

$$u_1 = u_1^o(X_1, X_2) - z\beta_1(X_1, X_2) \quad (3.3)$$

$$u_2 = u_2^o(X_1, X_2) - z\beta_2(X_1, X_2) \quad (3.4)$$

$$u_3 = u_3^o(X_1, X_2) \quad (3.5)$$

donde  $\beta_1$  y  $\beta_2$  son los ángulos que definen el giro de la normal y se expresan como

$$\beta_1 = \frac{\partial u_3^o}{\partial X_1} + \gamma_1 \quad (3.6)$$

$$\beta_2 = \frac{\partial u_3^o}{\partial X_2} + \gamma_2 \quad (3.7)$$

donde  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son los giros adicionales de las normales al no permanecer necesariamente ortogonales a la superficie media. Las ecuaciones (3.6) y (3.7) muestran claramente que los giros de las normales  $\beta_1$  y  $\beta_2$  no pueden obtenerse únicamente en función de la pendiente del plano medio, como ocurría en la teoría de Kirchhoff-Love. Vemos así, desde un punto de vista del MEF, que el número de GdL nodales son  $5n$ . Donde los giros  $\beta_1$  y  $\beta_2$  son GdL independientes, siendo ésta la principal diferencia entre la teoría de Reissner-Mindlin y la de Kirchhoff-Love.

Al hacer menos restrictiva la hipótesis de ortogonalidad de la normal, y mirando las cosas desde el punto de vista de la flexión, los elementos de lámina de Reissner-Mindlin necesitan aproximar tres variables nodales independientes  $u_3$  y los  $\beta_\alpha$ . Debido a la continuidad  $C^0$ , los elementos de Reissner-Mindlin utilizan polinomios de menor orden en comparación con los elementos de Kirchhoff-Love. Por lo tanto, y en general, son más sencillos de llevar al rango no lineal geométrico. Además, es sabido que los elementos más eficientes en el análisis de problemas elasto-plásticos son aquellos de bajo orden de interpolación. Por otro lado, los desplazamientos en el plano medio  $u_\alpha^o$  requieren de continuidad  $C^0$ , por lo que naturalmente resulta fácil ensamblar la contribución membranar a la flexional. Esto último evita utilizar diferentes órdenes de interpolación para cada una de las contribuciones y facilita, por ejemplo, el tratamiento de superficies quebradas. Sin embargo, debe hacerse notar que la cantidad de parámetros

necesarios para conseguir una solución similar a la obtenida con elementos de continuidad  $C^1$  es mayor. En otras palabras, se necesitan mallas más finas para obtener el mismo resultado. Además, los elementos de continuidad  $C^1$ , utilizan polinomios de mayor orden lo que se traduce en una mejor aproximación con menor cantidad de elementos.

El verdadero problema de los elementos de láminas de Reissner-Mindlin está íntimamente ligado a la hipótesis fundamental de las normales. Así, como hemos enunciado antes, al deformarse la lámina dichas normales no son necesariamente ortogonales a la superficie media lo que introduce el efecto de la deformación por cortante transversal, permitiendo el análisis de láminas gruesas. Los problemas surgen naturalmente cuando la influencia del corte empieza a ser despreciable, tal es el caso de láminas delgadas o muy delgadas (membranas) dando origen a un *bloqueo numérico*. Este bloqueo numérico se produce como consecuencia de un aumento espurio de la energía de deformación que debería ser nula o despreciable. De las expresiones (3.6) y (3.7) surge que en una situación donde el ángulo de corte debería ser cero, las funciones de forma se ven imposibilitadas de cumplir con la condición de  $\nabla u_3 - \beta \simeq 0$ . Lo que se traduce en una sobrerigidización de la solución numérica.

Afortunadamente se propusieron distintas aproximaciones para solucionar este problema

- Técnicas de integración reducida/selectiva. La técnica de integración reducida subintegra la matriz asociada al corte y flexión y la integración selectiva subintegra la de corte únicamente. Al utilizar estas técnicas es necesario analizar la singularidad de la matriz o matrices del elemento, como consecuencia de utilizar menos cantidad de puntos que los necesarios. Si no se satisface las condiciones de singularidad aparecen mecanismos inducidos por la subintegración. Se dice que un elemento tiene un mecanismo cuando puede adoptar una posición deformada, compatible con las condiciones en los apoyos, sin consumir energía de deformación. Dichos mecanismos adicionales pueden o no propagarse por la malla, dependiendo de que sean o no compatibles entre elementos y con las condiciones de contorno. Por consiguiente, paralelamente al estudio de la singularidad de la matriz de rigidez, hay que comprobar cuidadosamente si aparecen mecanismos, y si son propagables. Esta técnica fue ampliamente utilizada (y lo sigue siendo en muchas ocasiones) pero no funciona en todos los

casos, resultando en elementos que no son robustos.

- Técnicas de deformaciones de cortante impuestas. Tienen una mejor fundamentación desde el punto de vista teórico, por lo cual permite una mayor justificación. Los resultados obtenidos son en general muy buenos y han dado lugar a un avance significativo de este tipo de elementos, que en general se presentan como los de uso estándar a pesar de las desventajas mencionadas.

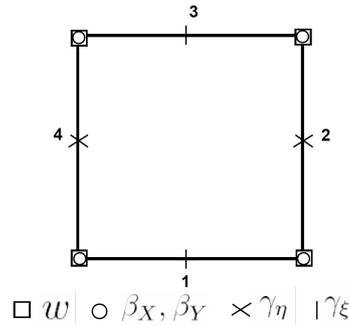
Existen otros problemas sobre los elementos de lámina de Reissner-Mindlin, pero dichos problemas no están ligados a características inherentes a la formulación, sino que dependen del grado de acoplamiento de las matrices de flexión y membrana. El grado de acoplamiento en elementos planos de láminas se produce tras el proceso de ensamblaje. Así, pues, pueden aparecer problemas de bloqueo por corte y membrana, en cuyos casos la integración reducida de las matrices evitará el bloqueo de la solución. Puede darse el caso donde el grado de acoplamiento entre la parte flexional y membranal es débil, en cuyo caso el bloqueo se daría por corte únicamente.

También es importante resaltar, que al igual de lo que sucedía con los elementos de Kirchhoff-Love, pueden aparecer problemas debidos únicamente al campo membranal. Así, en situaciones donde el comportamiento es puramente flexional deberían ser nulas o muy bajas las deformaciones membranales. Por lo tanto, un mal comportamiento de la formulación membranal que no logre representar dicho estado produciría un bloqueo numérico. En definitiva, es recomendable siempre un cierto grado de subintegración del campo membranal para evitar un posible mal comportamiento del elemento.

Seguidamente mencionaremos algunos elementos de lámina de Reissner-Mindlin. Existen varias formulaciones, pero a esta altura de las cosas, este capítulo no pretende hacer hincapié en la casuística, sino más bien darle completitud a través de algunos ejemplos. Para una mayor información de las diferentes formulaciones pueden visitarse los libros de Oñate (1992) y Zienkiewicz y Taylor (2000), entre otros.

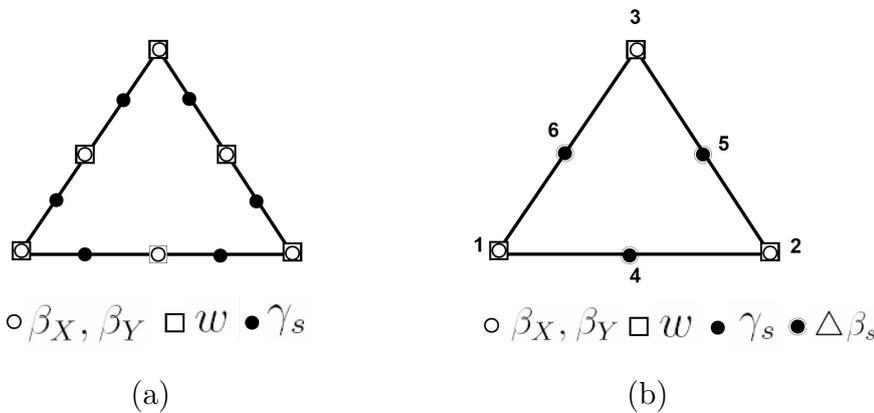
Un repaso sobre algunos de los principales elementos cuadriláteros, nos lleva a un elemento sencillo de lámina que resulta de combinar el elemento de tensión plana isoparamétrico de cuatro nodos con integración reducida del campo membranal, con el elemento de placa desarrollado por Bathe y Dvorkin

(1985). Así, el elemento de lámina interpola con funciones bilineales la geometría y el campo de movimientos y las deformaciones de cortante en forma lineal (ver Figura 3.2). Debido a su robustez y precisión su popularidad ha sido creciente.



**Figura 3.2:** Elemento de placa de Reissner-Mindlin cuadrilátero basado en campos de deformaciones de cortante impuestas.

En cuanto a los elementos triangulares desarrollados la mayoría se basan en la técnica de deformaciones de cortante impuestas. Entre los más populares está el triangular de seis nodos con un campo de deformaciones de cortante lineal con variación cuadrática para el campo membranar, la flecha y los giros desarrollado por Zienkiewicz et al. (1990) (ver Figura 3.3a). Una versión mejorada del anterior es el elemento triangular que consiste en una variación lineal del campo membranar, la flecha, y una interpolación cuadrática incompleta para los giros y el campo de deformaciones de cortante impuesto es lineal en cada elemento, pero las deformaciones de cortante tangenciales se suponen constantes a lo largo de cada lado (ver Figura 3.3b).



**Figura 3.3:** Elementos de placa de Reissner-Mindlin triangulares: (a) TCCL y (b) TLCL.

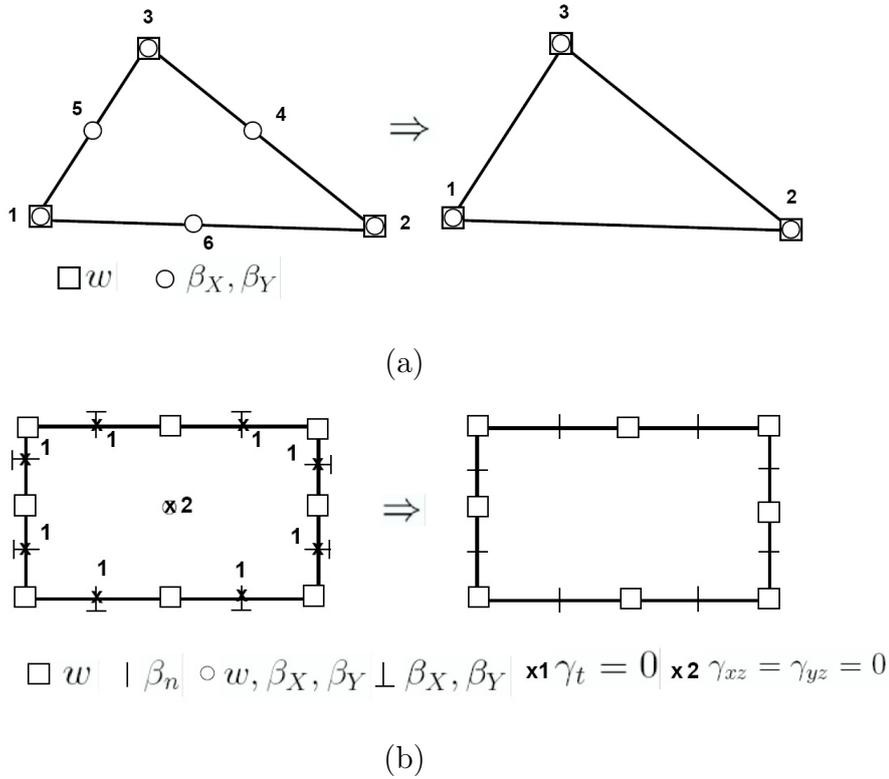
Una alternativa de interés son los elementos de lámina DK. Estos elemen-

tos fueron creados para evadir los requisitos de continuidad  $C^1$  de los elementos de lámina delgada vistos en la sección anterior. Para tal fin, se toma un elemento de lámina de continuidad  $C^0$  cualquiera al que se obliga el cumplimiento de la hipótesis de Kirchhoff-Love de deformación transversal nula en una serie de puntos, de manera que la energía de deformación por cortante efectiva sobre el elemento sea nula. Entre los elementos de lámina, un elemento triangular de gran versatilidad es el DKT desarrollado por Batoz et al. (1980); Batoz (1982); Batoz y Dhatt (1990) (ver Figura 3.4a). La principal característica del elemento es que se satisface la hipótesis de Kirchhoff-Love a lo largo de todo el contorno del elemento, lo que justifica la exclusión de la energía de deformación de cortante en el cálculo de la matriz de rigidez, con lo que el elemento se comporta efectivamente como un elemento de lámina delgada a pesar que el punto de partida de la formulación es un elemento triangular de Reissner-Mindlin de seis nodos. Entre los elementos cuadriláteros el más exitoso es el elemento de lámina de Irons (1976); Irons y Ahmad (1980) denominado “semi-loof” (ver Figura 3.4b). Este y otros elementos se basan en imponer la nulidad de la integral de las deformaciones de cortante transversal sobre el elemento como una condición discreta más para obtener que dichas deformaciones sean efectivamente nulas.

### 3.2.3. Elementos de Lámina-Sólido

Los elementos de lámina-sólido son elementos curvos obtenidos a partir de una degeneración de los correspondientes elementos de sólido. En esencia, dichos elementos consisten en tomar un elemento sólido y aplicarles las hipótesis de lámina de Reissner-Mindlin. Por lo tanto, sufrirán de los mismos inconvenientes para análisis de láminas de pequeño espesor que los de lámina plana delgada, y de nuevo hay que hacer uso de técnicas de integración selectiva de deformaciones de cortante (y membranal) impuestas para mejorar su comportamiento. Dichos elementos son, en general, la mejor alternativa para obtener elementos curvos. Si bien la primer alternativa que se utilizó para analizar láminas curvas fue el uso de elementos sólidos, la alternativa de mejor aceptación, y que fue motivo de investigación por varios autores es efectivamente la de lámina-sólido.

En la Figura 3.5 se muestra un sólido tridimensional cuadrático y su degeneración en el correspondiente elemento de lámina. Dos características geométricas definen el elemento de lámina-sólido, la definición de una *superficie*



**Figura 3.4:** Diferentes elementos de placa DKT: (a) DKT y (b) semi-loof.

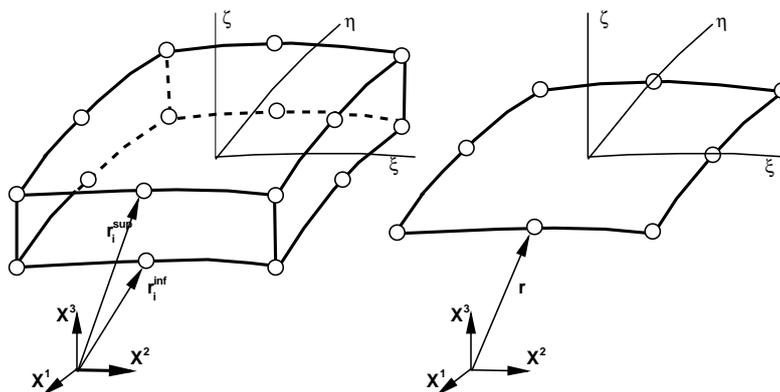
*media* y las *fibras* que limitan lateralmente las secciones transversales. En la definición de la geometría, y debido a su naturaleza curva, resulta conveniente definir un sistema de coordenadas curvilíneas o naturales  $\xi, \eta, \zeta$ . En dicho sistema  $\zeta$  es una coordenada lineal en la dirección del espesor y coincidente con la dirección de  $\mathbf{t}_3$  en cada nodo,  $\xi$  y  $\eta$  son dos coordenadas curvilíneas definidas sobre la superficie de referencia, variando todas ellas entre +1 y -1 en las caras extremas del elemento. Luego, desde el punto de vista del MEF, y utilizando una formulación isoparamétrica, las coordenadas de un punto  $\varphi$  dentro del elemento pueden definirse interpolando las coordenadas de los nodos mediante las funciones de forma por la expresión siguiente

$$\varphi = \sum_{I=1}^n N_I(\xi, \eta) \left[ \varphi_I^o + \zeta \frac{h_I}{2} \mathbf{t}_{3_I} \right]$$

donde  $\varphi_I^o$  es la superficie media,  $h_I$  es el espesor en cada nodo y  $\mathbf{t}_{3_I}$  el vector nodal.

Dentro de la definición de la geometría resulta relevante la definición del

vector nodal  $\mathbf{t}_{3_I}$ . Este vector, cuyo origen está en la superficie media, puede calcularse de dos maneras diferentes. Una alternativa es usar como dirección las coordenadas globales de los pares de puntos de las superficies superior e inferior en cada nodo. Dichas coordenadas se obtienen como intersección de la fibra del nodo  $I$  con las respectivas superficies de la lámina. Cabe resaltar que esta dirección no es necesariamente ortogonal a la superficie de referencia. Otra alternativa, utilizada en láminas de superficie lisa y espesor constante, consiste en definir  $\mathbf{t}_3$  como un vector ortogonal a la superficie media. Para ello basta con efectuar el producto vectorial de los vectores tangentes a dicha superficie en el nodo. Nótese, en la primer alternativa, que la hipótesis de las normales antes de la deformación no son necesariamente perpendiculares a la superficie media. No así, con la segunda alternativa. Así, pues, si el vector  $\mathbf{t}_{3_I}$  se calcula con el primer procedimiento el modelo que se estaría utilizando sería el correspondiente a una teoría de Reissner-Mindlin modificada (ver Belytshchko et al. (2000); Simo y Fox (1989))



**Figura 3.5:** Aproximación por sólido degenerado.

El campo de desplazamientos se obtiene al igual que en los elementos planos de láminas de Reissner-Mindlin. En cada nodo, sobre la superficie de referencia, se definen cinco GdL independientes: los tres desplazamientos  $u_1^o, u_2^o, u_3^o$  y los dos giros de la normal  $\beta_{X_1}$  y  $\beta_{X_2}$ . El cálculo de esfuerzos, es tal vez, el rasgo más distintivo entre los elementos de lámina-sólido y los elementos de lámina planos, sean estos de Kirchhoff-Love o Reissner-Mindlin. Luego, el cálculo de las tensiones y deformaciones se realizan sobre un volumen elemental y no sobre la superficie de referencia. En otras palabras, dichos elementos de lámina-sólido operan siempre con tensiones y deformaciones en vez de con sus valores generalizados. Surgen inmediatamente que es difícil identificar de antemano las distintas contribuciones de membrana y flexión en la deformación del elemento. Además

la coordenada normal  $\zeta$  tiene cierto grado de dependencia con los términos del integrando de la matriz elemental. Dichas dependencias son: dependencia del sistema de coordenadas local, dependencia de las deformaciones, dependencia del diferencial de volumen y en problemas no lineales existe un último tipo de dependencia con  $\zeta$  debida a la variación de las deformaciones en el espesor.

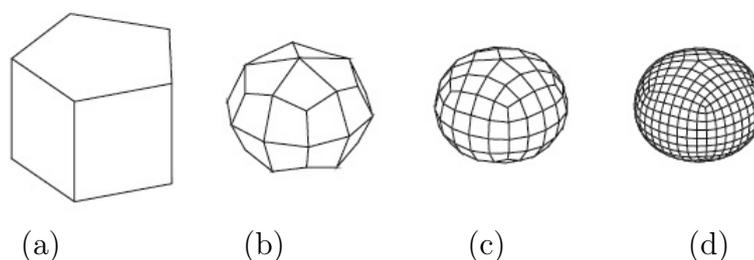
Desafortunadamente los elementos de lámina-sólido sufren de los mismos inconvenientes para análisis de láminas de pequeño espesor que los de lámina plana. Por un lado, la incapacidad de reproducir en el límite las condiciones de lámina delgada, esto es, deformación de cortante transversal nula. Por otro lado, incapacidad de reproducir estados de flexión pura, esto es, la condición de esfuerzo membranal nulo. También vimos en la sección de láminas gruesas que para sortear las incapacidades se pueden utilizar dos técnicas. La integración reducida/selectiva de los términos de cortante y membrana y la utilización de deformaciones de cortante y membrana impuestas.

Un repaso rápido sobre las principales formulaciones que utilizan integración reducida/selectiva, encontramos el cuadrilátero de cuatro nodos con integración selectiva. Es un elemento simple y ha sido motivo de investigación por su facilidad para ser llevado a régimen no lineal. Si bien con la integración selectiva se eliminan gran parte de los mecanismos espúreos, mantiene cinco de ellos que desgraciadamente son propagables. Estos mecanismos pueden eliminarse con técnicas de estabilización como las propuestas por Belytschko et al. (1992); Belytschko y Leviathan (1994a,b). Con lo cual resulta un elemento simple y de bajo costo computacional.

Entre los elementos que utilizan la técnica de deformaciones de cortante impuestas, un elemento exitoso es el elemento de lámina cuadrilátero de 4 nodos desarrollado por Dvorkin y Bathe (1984). Este elemento utiliza el mismo campo de deformaciones de cortante transversal lineal que el correspondiente elemento de placas mencionado en sección 3.3.2 (ver Figura 3.2).

En el último tiempo ha resurgido la idea de utilizar elementos de sólido (donde se incluyen únicamente GdL traslacionales) para simular láminas. Un inconveniente que presentan los elementos de sólido, además de los ya antes mencionados (bloqueo por corte y membranal), es el bloqueo volumétrico al tratar materiales elásticos quasi-incompesibles o materiales elasto-plásticos con flujo plástico isócoro (típico de los metales). En muchos casos el objetivo es lograr modelos que requieran de un sólo elemento en el espesor de la lámina.

Entre las primeras aproximaciones de este tipo podemos mencionar los trabajos de Parisch (1995); Hauptmann y Schweizerhof (1998), entre otros. Así a la luz de lo expuesto, se han desarrollado numerosos elementos de sólidos a los fines de evitar los diferentes bloqueos indicados. Un repaso rápido sobre las principales formulaciones (ver Schwarze y Reese (2009) donde se indica un detallado estado del arte de este tipo de elementos) permite dividir las formulaciones en dos grandes grupos. Por un lado, las formulaciones en deformaciones naturales impuestas *ANS* (de su acrónimo en inglés *Assumed Natural Strain*) y por otro, las formulaciones que utilizan deformaciones impuestas mejoradas *EAS* (del acrónimo en inglés *Enhanced Assumed Strain*) con la inclusión de distintos GdL internos que se condensan localmente. Para solucionar el problema de bloqueo por corte transversal, la aproximación más utilizada es la de Dvorkin y Bathe (1984) cuando se realiza integración completa (ver por ejemplo Hauptmann y Schweizerhof (1998); Vu-Quoc y Tan (2003) y una variación de la misma cuando se realiza integración reducida (ver por ejemplo Cardoso et al. (2008)). Para solucionar el bloqueo membranar se han desarrollado elementos con ambos tipos de formulación. El bloqueo volumétrico se soluciona habitualmente usando integración reducida/selectiva (ver por ejemplo Doll et al. (2000); Harnau y Schweizerhof (2002)). En el plano de la lámina se utilizan 1 ó 4 puntos de integración. En el primer caso se requiere estabilización para evitar los modos de hourglass. En tanto que en el espesor de la lámina se utilizan por lo menos 2 puntos de integración ( a veces hasta 7 en problemas elasto-plásticos) para captar los efectos de flexión.



**Figura 3.6:** Subdivisión recursiva de una topología complicada: (a) malla de control, (b) un paso de refinamiento, (c) dos pasos de refinamiento y (d) superficie límite (Jörg y Ulrich (2008)).

### 3.3. Parte II: Elementos de lámina alternativos

En esta sección damos inicio a nuevas posibilidades de análisis a través de nuevos elementos de láminas formulados en los últimos años. Respecto a los elementos anteriores, a los cuales hemos denominado clásicos, existen una brecha importante en el tiempo y veremos que los elementos que se describen a continuación caen dentro de nuevos paradigmas dentro del MEF.

#### 3.3.1. Subdivisión de Superficies

El esquema de Subdivisión de Superficies consiste en construir una superficie suave a través de un procedimiento repetitivo de refinamiento, empezando desde una “malla de control”. Existen dos tipos de esquemas de refinamiento, uno denominado “esquema de interpolación” donde los nudos de la malla original se mantienen fijo y sólo se computan las posiciones de los nuevos nudos, como consecuencia, los nodos viejos y los nuevos intervienen en la generación de la superficie límite. El otro se denomina “esquema de aproximación” donde se computa las posiciones de los nudos nuevos y también los de la malla original, por lo tanto en la interpolación de la geometría no intervienen los nudos originales. Este segundo esquema permite obtener superficies más suaves que el primero. Ejemplos de los esquemas de subdivisión por aproximación son: Catmull y Clark (1978), Doo y Sabin (1978), Loop (1987), entre otros. Todos ellos permiten generar una superficie límite con continuidad  $C^2$  excepto en los vértices extraordinarios donde la continuidad es del tipo  $C^1$ . Por ejemplo, en la Figura 3.6 se muestran diferentes pasos de refinamiento partiendo de una malla original a través de un esquema de aproximación del tipo Catmull-Clark.

Basado en los esquemas de subdivisión Cirak y Ortiz (2000) introdujeron un nuevo paradigma para el análisis elementos finitos de lámina delgada (Kirchhoff-Love) basados sobre una combinación de “Subdivisión de Superficie” y MEF, la cual se extendió a problemas con grandes deformaciones en Cirak y Ortiz (2001). La aproximación puede ubicarse dentro de la aproximaciones iso-geométricas e incluso considerarse un trabajo pionero del tema. La generación de la malla es parte de la aproximación y se realiza usando un esquema de subdivisión del tipo Loop, uno de cuyos méritos es que cada nuevo nudo generado por cuadrisección (cada triángulo es dividido en cuatro) es regular, quedando como

nudos irregulares sólo aquellos que existan en la definición geométrica inicial. Desde el punto de vista del MEF se utiliza un solo punto de Gauss para el cálculo de los esfuerzos membranales y flexionales. Otra característica de la formulación es la ausencia de GdL rotacionales, que la hace económica desde el punto de vista computacional. El esquema tipo Loop computa la posiciones nodales de los nuevos vértices, como así también las posiciones nodales de los vértices de la malla vieja. Para ello se utilizan reglas de refinamiento donde se distinguen dos casos: Los vértices nuevos asociados a los ejes de la malla original, y los vértices viejos de la malla original (ver Figura 3.7). Cada iteración del procedimiento consiste en dos etapas. La primera, la malla es refinada por una cuadrisección de todos los elementos. Segundo, se computan las nuevas posiciones de los nodos como una combinación lineal de las posiciones de los nodos viejos de la malla no refinada. Por sucesivos refinamiento, la superficie converge a una superficie continua límite. El proceso de subdivisión es estrictamente local, y después del paso de subdivisión, las nuevas coordenadas del vértice depende únicamente de las coordenadas previas de un pequeño número de nodos vecinos.

Las coordenadas de los nodos nuevos generados sobre los ejes de la malla vieja se calculan como

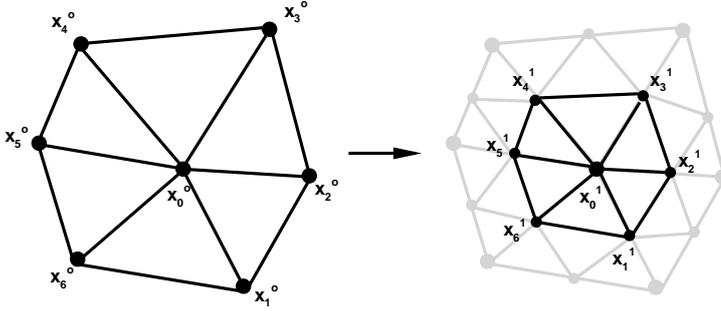
$$\mathbf{X}_I^{k+1} = \frac{3\mathbf{X}_o^k + \mathbf{X}_{I-1}^k + 3\mathbf{X}_I^k + \mathbf{X}_{I+1}^k}{8}, \quad I = 1, \dots, N \quad (3.8)$$

Los vértices viejos adquieren una nueva posición

$$\mathbf{X}_o^{k+1} = (1 - Nw) \mathbf{X}_o^k + w\mathbf{X}_1^k + \dots + w\mathbf{X}_N^k \quad (3.9)$$

donde  $\mathbf{X}^k$  son las posiciones nodales de la malla para el nivel  $k$  y  $\mathbf{X}^{k+1}$  son las respectivas posiciones para la malla  $k + 1$ . La valencia del vértice, es decir el número de ejes que concurren a el, se denota por  $N$ . Para elegir el valor del parámetro  $w$  se utilizan distintos esquemas que pueden encontrarse en el mencionado trabajo de Cirak y Ortiz.

Para la evaluación de las curvaturas en el centro de cada elemento se utiliza una parcela regular de 12 elementos y una aproximación no estándar desde el punto de vista del MEF. Esta aproximación se realiza en el plano paramétrico usando polinomios “spline” de cuarto orden. Los polinomios utilizados aseguran una superficie suave sobre todos los nudos regulares pero no sobre los irregulares. Cuando uno de los nudos de elemento es irregular se realiza una subdivisión local



**Figura 3.7:** Refinamiento de una malla triangular por cuadrisección.

ficticia a fines de que el punto de evaluación de la curvatura esté centrado en una parcela regular. Para una parcela regular, la parametrización local de la superficie se expresa como

$$\mathbf{X}(\xi^1, \xi^2) = \sum_{I=1}^{12} N^I(\xi^1, \xi^2) \mathbf{X}_I \quad (3.10)$$

donde  $I$  se refiere a la numeración local de los nodos. La parametrización en la ecuación (3.10) también se utiliza para el campo de desplazamiento, por lo tanto el análisis es isogeométrico. Localmente se tiene

$$\mathbf{u}_h(\xi^1, \xi^2) = \sum_{I=1}^{12} N^I(\xi^1, \xi^2) \mathbf{u}_I \quad (3.11)$$

Luego el campo de curvaturas puede calcularse como

$$\boldsymbol{\kappa} = \sum_{I=1}^{12} \mathbf{B}^I(\xi^1, \xi^2) \mathbf{u}_I \quad (3.12)$$

donde  $\mathbf{B}^I$  es la matriz de deformación flexional.

Para el tratamiento de las condiciones de borde es necesario definir una capa de nodos ficticia. Debido a la definición local del esquema de subdivisión, los desplazamientos en el borde son influenciados únicamente por las posiciones nodales de los nodos que rodean al nudo maestro, esto es, la primera capa de nodos ubicados en el interior del dominio y la colección de los nodos artificiales justo afuera del dominio.

Los trabajos de Cirak y Ortiz no puede encuadrarse dentro de las formulaciones estándar del MEF. Si puede considerarse sus trabajos como pioneros en el uso de herramientas disponibles en el CAD (de su acrónimo en inglés *Computer Aided Design*) para realizar un análisis numérico basado en un enriquecimiento de la geometría. Una curiosidad, es que no se han realizados mayores desarrollos con esta técnica, por lo menos no se han publicado artículos que usen los esquemas de subdivisión para realizar un análisis numérico. No ha sucedido lo mismo con lo que actualmente se denomina “Análisis Isogeométrico” que utiliza como funciones base splines del tipo NURBS. Básicamente dentro de las herramientas de diseño los NURBS han tenido mayor auge en los códigos de CAD y esa es una de las explicaciones de porqué no se ha difundido el uso de subdivisión de superficies asociado al análisis numérico.

### 3.3.2. Isogeometría

Basados en el uso de NURBS ( de su acrónimo en inglés *Non-Uniform Rational B-Splines*), Hughes et al. (2005) introdujo las funciones provenientes de la descripción de la geometría, como funciones base para el análisis y lo bautizó como “Análisis Isogeométrico”. En el Análisis Isogeométrico, por lo tanto, se trabaja sobre un modelo geoméricamente exacto al igual que en las formulación presentada por Cirak y Ortiz (2001), lo que ofrece otra posibilidad de cerrar la brecha existente entre el diseño y el análisis al trabajar con el mismo modelo geométrico.

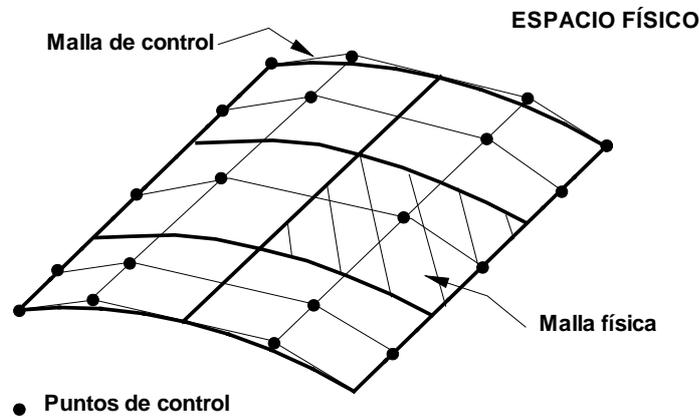
En el Análisis Isogeométrico existen dos nociones de malla, la “malla de control” y la “malla física”. La malla de control está definida por los “puntos de control” donde se definen los GdL. De esta manera, la malla de control queda formada por elementos multilineales. En dos dimensiones estos son elementos cuadriláteros bilineales, y en tres dimensiones son elementos hexaedros trilineales. La malla de control no conforma la geometría real y puede verse como un andamio que controla la geometría (ver Figura 3.8). Por otro lado, la malla física es una descomposición de la geometría real. Hay dos nociones de elementos en la malla física, la “parcela” y el “vector nodal”. La parcela puede ser vista como un macro-elemento o subdominio (formada por muchos elementos). Cada parcela tiene dos representaciones, una en el dominio natural y otra en el espacio físico. En dos dimensiones la topología de la parcela es un rectángulo y en

tres dimensiones un cuboide. A su vez, una parcela puede ser descompuesta en vectores nodales. Los vectores nodales son puntos, líneas o superficies en una topología de uno, dos o tres dimensiones, respectivamente. Cada vector nodal está limitado por nodos. Esto define el dominio elemental donde las funciones bases son suaves  $C^{p-m}$  donde  $p$  es el grado del polinomio y  $m$  es la multiplicidad del nodo en cuestión. Los vectores nodales pueden ser pensados como microelementos por ser la entidad más pequeña. Tienen también una representación en el dominio natural y en el espacio físico. Es importante resaltar las propiedades de las funciones bases

- Constituyen una partición de la unidad, esto es,  $\forall \xi, \eta$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}(\xi, \eta) = 1 \quad (3.13)$$

- El soporte de cada  $R_{i,j}$  es compacto y contenido en el intervalo  $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$
- Cada función base es no negativa, esto es,  $R_{i,j}(\xi, \eta) \geq 0, \forall \xi, \eta$ .



**Figura 3.8:** Ilustración esquemática de una malla isométrica.

Contrariamente a lo ocurrido con los esquemas de subdivisión el análisis isométrico se propagó en mayor medida a distintos campos del MEF. Uno de los primeros análisis de lámina con elementos de tipo Kirchhoff-Love fue presentado por Kiendl et al. (2009). La formulación se plantea para el análisis de problemas geométricos no lineales y los únicos GdL son los desplazamientos. Como es sabido, para obtener una discretización conforme de la teoría de lámina

variacional de Kirchhoff-Love las funciones bases deben tener continuidad  $C^1$ . Esto se logra fácilmente definiendo la superficie media de la lámina como

$$\mathbf{S}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}(\xi, \eta) \mathbf{P}_{i,j} \quad (3.14)$$

con

$$R_{i,j}(\xi, \eta) = \frac{N_i(\xi) M_j(\eta) w_{i,j}}{\sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^m N_k(\xi) M_p(\eta) w_{k,p}} \quad (3.15)$$

donde  $\xi$  y  $\eta$  son las coordenadas paramétricas que coinciden con las coordenadas convectivas de la superficie media de la lámina.  $N$  y  $M$  son las funciones bases del tipo B-spline, la cuales deben ser cuadráticas o de mayor orden,  $w$  son las funciones de peso y  $\mathbf{P}$  son los puntos de control.

Usando el método de Galerkin, los desplazamientos de la parcela  $i$  son expandidos en términos de las mismas funciones bases NURBS (de aquí proviene el nombre de “Análisis Isogeométrico”) usadas para definir la geometría de la superficie media de la lámina, denominando

$$\mathbf{u}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}(\xi, \eta) \mathbf{u}_{i,j} \quad (3.16)$$

donde  $\mathbf{u}_{i,j}$  son las variables de control de desplazamiento. De esta manera el campo de curvaturas puede calcularse en cualquier punto de la estructura como

$$\boldsymbol{\kappa} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mathbf{B}_{i,j}(\xi, \eta) \mathbf{u}_{i,j} \quad (3.17)$$

En un segundo trabajo Kiendl et al. (2010) proponen un método alternativo para tratar la unión de varias parcelas, relajando la condición de continuidad entre ellas. La formulación hace principal hincapié en el tratamiento de superficies quebradas. Si se unen dos superficies en un quiebre pronunciado (esto es, una conexión del tipo  $C^0$  con un plano tangente no común) el ángulo entre las parcelas debe ser mantenido en la configuración deformada, y en estos casos se necesita de un tratamiento adicional. Para ello, Kiendl *et al.* utilizan una aproximación del tipo  $C^0$  en la dirección transversal donde se unen dos parcelas. Para mantener los ángulos originales durante la deformación se utiliza una rigidez ficticia que solamente penaliza el cambio de ángulo durante la deformación entre los puntos de control que definen la conexión entre dos parcelas

adyacentes. Los valores de la rigidez flexional deben ser elegido adecuadamente, en caso contrario un valor demasiado alto la matriz global de rigidez puede resultar mal condicionada. Los resultados muestran ser competitivos tanto en el rango lineal y no lineal geométrico. Una crítica que puede hacerse al método es el uso de una rigidez artificial que debe ser definida por el usuario.

Benson et al. (2010) presentaron una formulación de lámina de Reissner-Mindlin basada en un análisis isogeométrico. La cinemática de la lámina está basada sobre el elemento de lámina degenerado desarrollado por Hughes y Liu (1981a,b). Si bien la formulación ha sido implementada a través de una subrutina de usuario en el programa LS-DYNA, la actual implementación no está del todo optimizada, pero un examen sobre la formulación indica que el análisis isogeométrico no debería ser más caro que los elementos Lagrangeanos que utilizan polinomios con el mismo orden de interpolación. Los resultados muestran convergencia en el rango lineal y no lineal y un mejor comportamiento a medida que se incrementa el orden de las funciones bases. En todos los casos, se utiliza una integración completa, sin necesidad de realizar ninguna consideración para reducir el bloqueo por corte, sin embargo, por lo general, el orden debe ser mayor a dos ya que se puede observar una pequeña cantidad de bloqueo por corte cuando se utiliza elementos cuadráticos. Se debe notar que la robustez del análisis isogeométrico se incrementa con el orden. Ésta robustez los hace potencialmente atractivos para problemas con grandes deformaciones de interés industrial incluyendo estampado de láminas, etc.

El uso de NURBS y Subdivisión de Superficies fueron descriptos a finales de la década de los setenta, y actualmente son técnicas maduras que se usan intensivamente en aplicaciones reales. Sin embargo, cada una de ellas fueron pensadas para darle a los diseñadores diferentes libertades. En pocas palabras, NURBS ofrece control sobre la parametrización y suavidad de la superficie, pero si existe una discontinuidad en la misma no puede ser localmente introducida o controlada. En tanto que, el esquema de subdivisión de superficie ofrece libertad sobre topologías complejas. Esto ha llevado a diferentes industrias a establecer una preferencia por una de las dos alternativas; los NURBS son dominantes para el CAD y las aplicaciones ingenieriles, mientras que la subdivisión de superficies son muy populares para el uso de animaciones y juegos de computadoras. El método de subdivisión de superficies no fue ampliamente utilizado hasta la década de los noventa, para cuyo tiempo los NURBS ya habían sido imple-

mentados en la mayoría de los programas de CAD. Muchas de las falencias de los NURBS pueden ser tratadas a través del uso de superficies de subdivisión, por lo que algunos entendidos del tema consideran que un futuro, el método de subdivisión reemplazará a los NURBS en las aplicaciones de CAD.

### 3.3.3. Galerkin Discontinuo

El origen del método de Galerkin Discontinuo (GD) es a principio de la década del setenta. Reed y Hill (1973) desarrollaron este método para problemas de transporte de neutrones. Este método se ha usado bastante en soluciones numéricas de ecuaciones hiperbólicas, mayormente en problemas de dinámica de fluidos. Durante la década del noventa el método de GD se extendió a otras áreas diferentes a la dinámica de fluidos, por ejemplo, a problemas de elasticidad. En los últimos años ha habido un interés por llevar el método de GD aplicado a la teoría de láminas.

El método de GD permite expresar en forma débil la continuidad del campo de derivadas entre subdominios. Aplicando una integración por partes de las ecuaciones que gobiernan el problema se da origen a integrales de borde donde se incluyen los saltos de discontinuidades entre dos subdominios adyacentes. El rol de estos términos es forzar débilmente la consistencia y continuidad de las incógnitas del problema. En un contexto general del MEF, el salto de discontinuidades se lleva a cabo entre los bordes de los elementos que conforman la malla. Cuando se tratan problemas que involucran altos órdenes de derivación, el método de GD puede, también, ser visto como una herramienta útil que permite forzar requerimientos de continuidad de orden elevado en forma débil.

Entre las aplicaciones de la formulación de GD en elementos de placa del tipo Reissner-Mindlin, uno de los primeros trabajos fue propuesto por Brezzi y Marini (2003) quienes desarrollaron un elemento de placa triangular no conforme. La formulación propuesta trata los campos de desplazamiento y rotaciones como discontinuos. Al usar una aproximación por GD se genera un elemento finito de placa no conforme y libre de bloqueo por corte. Una desventaja de la formulación propuesta es el número de ecuaciones finales, las cuales resultan mucho mayor que en el caso de usar el método de Galerkin continuo, lo que reduce desde un punto de vista computacional su eficiencia.

Otra formulación fue propuesta por Güzey et al. (2005) quienes desa-

rollaron un elemento de lámina degenerado de 4 nodos para el análisis lineal elástico. La formulación propuesta utiliza una aproximación discontinua para los campos de desplazamiento y tensión, los cuales son tratados como incógnitas independientes. A través de las propiedades asociadas con la discontinuidades entre elementos el método propuesto provee de un mecanismo adicional para evitar el bloqueo por corte. Estas propiedades son introducidas por medio de una definición conveniente de flujos numéricos a través de las interfaces elementales. En los ejemplos presentados se utilizan elementos cuadriláteros bilineales, sin embargo, la formulación presentada es un tanto general y fácilmente extendible a otros tipos de elementos y orden.

Entre los elementos de Kirchhoff-Love se encuentra el trabajo de Wells y Dung (2007) quienes desarrollaron una formulación para elementos de lámina triangulares sin GdL rotacionales y en un trabajo posterior Dung y Wells (2008) extendieron sus ideas al rango no lineal geométrico. A través de un operador denominado “operador de elevamiento” convierten el salto o discontinuidad de la incógnita, a través de los bordes de los elementos, en campos definidos en el interior de los mismos. Para lograr estabilización numérica se penalizan las discontinuidades, para lo cual, se introduce un parámetro de estabilización adimensional. El salto de la derivada normal en el borde de dos elementos adyacentes se convierte en un campo de curvaturas adicional expresadas en el interior del elementos a través de funciones de curvaturas definidas a partir del operador de elevamiento y afectado por el parámetro de penalización adimensional. La operación de elevamiento debe contener al menos todas las derivadas segunda de las funciones sobre el interior del elemento. Para elementos triangulares esto implica que el orden de las funciones de formas debe ser como mínimo cuadrática. La aproximación presentada por Wells y Dung (2007) muestra tener buen comportamiento para los elementos cúbicos con un operador lineal. No sucede lo mismo para los elementos de lámina cuadráticos. El método de GD muestra en principio ser robusto a medida que el orden del elemento es mayor, al igual de lo que sucedía en el Análisis Isogeométrico.

Noels y Radovitzky (2008) proponen una formulación para elementos cuadriláteros de lámina sin GdL rotacionales y analizan la convergencia del método con elementos cuadriláteros cuadráticos y cúbicos. Cuando se utilizan funciones de forma cuadráticas es necesario utilizar subintegración para evitar el bloqueo membranal o técnica de deformaciones impuestas. Esto no es necesario

si el orden del polinomio es mayor que dos. Así, para el elemento cuadrático utilizan una integración reducida del campo membranal y flexional, mientras que, para el elemento cúbico utilizan una integración completa con una cuadratura de Gauss de  $4 \times 4$  sin observarse bloqueo numérico. Esta formulación si es llevada a placa coincide con la propuesta por Wells y Dung. Se demuestra que la tasa de convergencia del método, considerando la norma energética, es igual a un orden menor que el grado del polinomio utilizado en las funciones de forma, lo cual indica que el método de GD es un buen candidato para problemas de láminas que incluyan al menos funciones de forma cuadráticas, sin embargo, al igual de lo que sucede con la formulación de Wells y Dung, se observan convergencia óptima para funciones de forma cúbicas o mayores. Todos los ejemplos mostrados corresponden al rango elástico.

Las distintas formulaciones demuestran que el método de GD provee una forma efectiva de generar elementos de láminas no conformes de alto orden. El método es un buen candidato para problemas de láminas que incluyan al menos funciones de forma cúbicas. Una crítica que puede hacerse al método es la necesidad de utilizar un coeficiente adimensional de penalización para alcanzar estabilidad y consistencia. Tampoco se han realizados estudios sobre problemas que incluyan una fuerte no linealidad geométrica y sobre todo material con grandes deformaciones que permita observar si la formulación de GD genera elementos de láminas robustos.

### 3.3.4. Elementos de lámina sin GdL rotacionales

El desarrollo y la utilización de elementos finitos de láminas delgadas sin rotaciones ha crecido notablemente en los últimos años. Estos elementos se basan en la teoría de Kirchhoff-Love y los mismos pueden ser vistos como un regreso a los elementos de placa y lámina delgada originales. Así, desde un punto de vista del MEF, los elementos sin rotaciones han vuelto a enarbolar la idea de usar los modelos de lámina de Kirchhoff-Love después de haber perdido popularidad con los elementos basados en modelos de Reissner-Mindlin. Algunos elementos de este tipo han sido implementados con éxito en programas comerciales (RADIOSS; STAMPACK (2006)), sin embargo, su uso no está del todo difundido. La ausencia de rotaciones como GdL los hace particularmente eficientes y robustos para la simulación de problemas de lámina delgadas donde

se incluyan fuertes no linealidades geométricas y de material. El interés por formular láminas sin rotaciones sigue siendo un tema de investigación constante, así lo demuestran las nuevas corrientes de investigación provenientes del Análisis Isogeométrico y del método de GD.

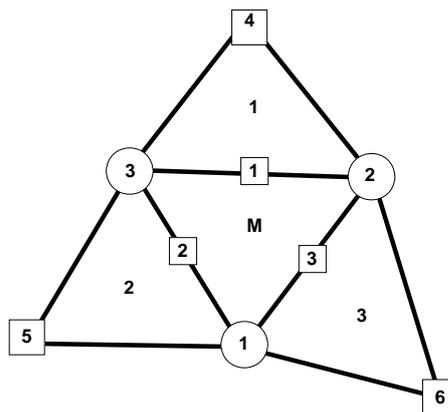
En esencia, el método consiste en definir una vecindad o parcela de elementos para interpolar la geometría y computar las curvaturas. Dependiendo de cómo se interpola la geometría y cómo se calculan los campos de deformaciones membranales y de curvatura, se obtienen distintas formulaciones. Una de las características fundamentales de los elementos sin GdL rotacionales es que son “no conformes”. Desde un punto de vista del MEF, dichas formulaciones presentan varias ventajas y algunas limitaciones dependiendo del tipo de aplicación. Por ejemplo, algunas de sus ventajas son:

- Tienen menor costo computacional debido que para una precisión requerida, el número total de GdL en el modelo, es un poco menos que la mitad comparado con otros elementos que incluyen las rotaciones como GdL. Esto implica un importante ahorro económico de almacenamiento y tiempo de CPU.
- Son particularmente eficientes para la simulación de problemas de formado de láminas (embutición, estampación, formado por estiramiento, etc y la correspondiente recuperación elástica) y para el análisis de cuasimembranas, entre otros
- Para láminas muy delgadas no se necesitan estrategias especiales para lidiar con las deformaciones transversales. Esto es particularmente importante para estructuras inflables, velas solares y para estructuras cuasimembranales.
- Los vectores de rotación o las ternas locales, que son por lo general costosos de parametrizar y adaptar, no son necesarios. No aparecen matrices no simétricas.
- Las rotaciones y los GdL de alto ordenes son difíciles de aplicar cuando se usan condiciones de simetría, y cuando los elementos se juntan en esquinas e intersecciones. Además las condiciones de contacto se simplifican cuando se remueven los GdL rotacionales.

Las limitaciones provienen básicamente por la teoría de lámina delgada utilizada (Kirchhoff-Love) y por la ausencia de GdL rotacionales, podemos mencionar:

- Muestran cierta sensibilidad a la regularidad y orientación de la malla.
- En elementos cuadriláteros aparecen modos de deformación sin energía asociada que obligan al uso de técnicas de estabilización.
- La combinación directa de dichos elementos de lámina con otros elementos finitos no es siempre directa, y requiere restricciones multipunto especiales.
- La programación puede ser más implicada.
- Se desprecian las deformaciones de corte. Esto es una limitación para analizar láminas de materiales compuestos.

Entre los elementos triangulares sin rotaciones, las aproximaciones más difundidas tienen en común la utilización de una parcela de cuatro elementos que incluye al elemento donde se ha de evaluar el tensor de curvaturas y los tres elementos adyacentes (ver Figura 3.9). La principal diferencia entre las distintas aproximaciones es cómo se interpola la geometría y las bases teóricas empleadas para computar las deformaciones membranales y flexionales.



**Figura 3.9:** Parcela de elementos triangulares.

Un elemento conocido es el desarrollado por Phaal y Calladine (1992a,b). Dicho elemento resulta de combinar el sencillo triángulo de deformación constante de tres nodo para el campo membranal, con un elemento de placa cuyo campo de curvaturas se obtiene por medio de una parcela de cuatro elementos.

En dicha aproximación, se hace pasar una superficie de curvatura constante sobre los cuatro elementos que forman la parcela, de modo tal, de asegurar un valor uniforme del tensor de curvatura en todos los puntos de la vecindad. Así, el desplazamiento transversal sobre la parcela se escribe en función de un polinomio cuadrático completo en dos dimensiones como

$$u_3 = a_o + a_1 X_1 + a_2 X_2 - \frac{\kappa_{11}}{2} (X_1)^2 - \frac{\kappa_{22}}{2} (X_2)^2 - \kappa_{12} X_1 X_2 \quad (3.18)$$

donde  $X_i$  ( $i = 1, 2$ ) son las coordenadas cartesianas ortogonales en el plano de la placa referidas al centro del triángulo central,  $\kappa_{ij} = -\frac{\partial^2 u_3}{\partial X_i \partial X_j}$  son las curvaturas y  $a_\alpha$  son los coeficientes que definen el movimiento de cuerpo rígido. Valuando (3.18) en cada nudo de la parcela se obtienen seis ecuaciones lineales, que invirtiendo el sistema permiten expresar los coeficientes  $a_\alpha$  y las curvaturas  $\kappa_{ij}$  en función del desplazamiento normal al plano de referencia en cada nudo  $u_3^f$ . Desde el punto de vista operativo se trabaja únicamente con las curvaturas como incógnita. Luego, la expresión (3.18) puede ser escrita en forma matricial  $[\mathbf{w}^P] = \mathbf{C}\boldsymbol{\kappa}$ , donde  $\mathbf{w}^P$  agrupa a los desplazamientos normales al plano de referencia de los seis nudos que forman la parcela.  $\mathbf{C}$  es una matriz cuyos elementos quedarían en función de las coordenadas cartesianas y  $\boldsymbol{\kappa}$  es el vector de curvaturas. Relacionando los ángulos de rotación de dos elementos adyacentes,  $\alpha_i$  y  $\alpha_{i+3}$  (ver Figura 3.10) con los desplazamientos y relacionando dichos ángulos con las curvaturas se obtiene un sistema de  $3 \times 3$  que puede ser invertido lo cual permite expresar las medidas de deformación como

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ 2\kappa_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_{3 \times 6} [\mathbf{w}^P] \quad (3.19)$$

Esta aproximación tiene un costo un poco superior a otras formulaciones sin GdL rotacionales y tiene además como desventaja que su implementación en láminas generales (no suaves) y en particular su traslado a problemas no lineales es más complejo y oneroso. También Oñate y Cervera (1993) y Brunet y Sabourin (2006) argumentan que esta formulación es inconveniente debido a la forma en que se tratan las condiciones de borde, básicamente por los nodos ficticios que deben ser introducidos fuera del dominio.

Otra aproximación conocida es la propuesta por Sabourin y Brunet (1995)

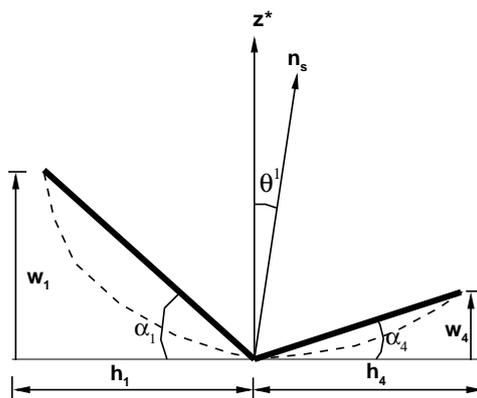


Figura 3.10: ángulos entre dos elementos adyacentes.

quienes desarrollaron el elemento triangular  $S3$ . En dicho elemento utilizan para el campo membranar el triángulo de deformación constante y aproximan las curvaturas generalizadas como una superposición de curvaturas normales utilizando los tres pares de triángulos formados por el elemento maestro y los respectivos vecinos (ver Figura 3.11). Al igual que Phaal y Calladine usan la relación entre los ángulos de rotación y los desplazamientos (ver Figura 3.10) de modo tal que las curvaturas normales se definen como

$$\kappa_n^k = \frac{l^k}{A^M + A^k} \theta^k \tag{3.20}$$

luego, la curvatura generalizada se expresa como

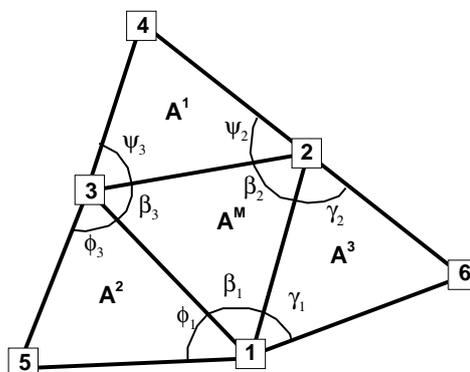


Figura 3.11: Geometría de la parcela para calcular las curvaturas.

$$\begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ 2\kappa_{12} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^3 -\frac{l^k}{A^M + A^k} \begin{bmatrix} n_1^2 \\ n_2^2 \\ 2n_1n_2 \end{bmatrix} \theta^k = \mathbf{B}_{3 \times 6} [\mathbf{w}^P] \quad (3.21)$$

donde los giros  $\theta^k$  se pueden escribir en función de los ángulos  $\alpha_i$  y  $\alpha_{i+3}$  girados por cada elemento que comparten un lado de la parcela. Numerosos ejemplos que incluyen no linealidades y geometrías arbitrarias pueden verse en Sabourin y Brunet (2006). El elemento *S3* ha sido implementado en el código RADIOSS y la principal aplicación se centra en la simulación de problemas de estampados de láminas.

Otros elementos alternativos que han sido motivos de investigación, son las aproximaciones que basan el cálculo del campo flexional en una integral sobre el contorno. Dentro de esta propuesta se pueden incluir varias aproximaciones en función de como se defina el gradiente sobre el contorno. Así, encontramos el elemento *BST* estándar desarrollado por Oñate y Zárata (2000), donde para el campo membranal utilizan el triángulo de deformación constante y para el campo de curvaturas, las mismas se definen como el promedio sobre el elemento (basado en el elemento de placa plana de Oñate y Cervera (1993))

$$\bar{\kappa}_{ij} = -\frac{1}{A^M} \int_{A^M} \frac{\partial^2 u_3}{\partial X_i \partial X_j} dA \quad (3.22)$$

expresión que integrada por partes resulta

$$\bar{\kappa}_{ij} = -\frac{1}{A^M} \int_{\Gamma^{(o)}} n_j \frac{\partial u_3}{\partial X_i} d\Gamma \quad (3.23)$$

donde  $\Gamma$  es el contorno del elemento con normal saliente  $\mathbf{n}$ . La expresión desarrollada para las tres componentes del tensor de curvatura en función de las derivadas expresadas en un sistema local al contorno  $(\mathbf{n}, \mathbf{s})$  es

$$\begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ 2\kappa_{12} \end{bmatrix} = -\frac{1}{A^M} \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} n_1^2 & -n_1n_2 \\ n_2^2 & n_1n_2 \\ 2n_1n_2 & n_1^2 - n_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial n} \\ \frac{\partial u_3}{\partial s} \end{bmatrix} d\Gamma \quad (3.24)$$

La integral sobre el contorno se evalúa numéricamente con un punto de

integración a la mitad de cada lado

$$\begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ 2\kappa_{12} \end{bmatrix} = -\frac{1}{A^M} \sum_{k=1}^3 l^k \begin{bmatrix} n_1^2 & -n_1 n_2 \\ n_2^2 & n_1 n_2 \\ 2n_1 n_2 & n_1^2 - n_2^2 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial n} \\ \frac{\partial u_3}{\partial s} \end{bmatrix}^k \quad (3.25)$$

donde el supraíndice  $k$  indica evaluada en el lado  $k$  y  $l^k$  es la longitud del lado. Las interpolaciones utilizadas (lineal en cada elemento ó cuadrática sobre toda la parcela) conducen a que la contribución de  $\frac{\partial u_3}{\partial s}$  se anule, resultando

$$\begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ 2\kappa_{12} \end{bmatrix} = -\frac{1}{A^M} \sum_{k=1}^3 l^k \begin{bmatrix} n_1^2 \\ n_2^2 \\ 2n_1 n_2 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial n} \end{bmatrix}^k \quad (3.26)$$

Para evaluar el gradiente, en cada elemento se interpola en forma lineal los desplazamientos usando las habituales coordenadas de área  $L^I$ . De esta manera los desplazamientos transversales a la superficie media se interpolan como  $u_3(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^3 L^I(\xi, \eta) u_3^I$ . Luego, el gradiente normal al lado (ver Flores (2008)) se obtiene como el promedio de los gradientes de los elementos adyacentes (el supraíndice en mayúscula ( $M$  o  $K$ ) indica evaluado en el elemento correspondiente)

$$\left[ \frac{\partial u_3}{\partial n} \right]^k = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_3}{\partial n} \right)^M + \left( \frac{\partial u_3}{\partial n} \right)^K \right] \quad (3.27)$$

Este elemento ha sido extendido al tratamiento de grandes deformaciones plásticas por Rojek y Oñate (1998) en una formulación Lagrangeana Actualizada adecuada para códigos explícitos y por Flores y Oñate (2001) dentro de una formulación Lagrangeana Total, con excelentes resultados. A partir de este último trabajo surgieron otros que veremos a continuación y que han ido enriqueciendo las capacidades del elemento original *BST*. Cabe destacar que dichos trabajos son fuentes de inspiración para los desarrollos que se muestran en la presente tesis.

De esta manera, surge el elemento *EBST* (de su acrónimo en inglés *Enhanced Basic Shell Triangle*) desarrollado por Flores y Oñate (2005). La principal característica es que la geometría de la parcela formada por el elemen-

to central y los tres elementos adyacentes se interpolan cuadráticamente. Se asume un campo lineal de deformaciones membranales y un campo constante sobre las componentes del tensor de curvaturas. De esta manera los desplazamientos transversales a la superficie media se interpolan como  $u_3(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^6 L^I(\xi, \eta) u_3^I$  y el gradiente en el contorno se obtiene derivando la aproximación indicada y resulta independiente de los nudos que no pertenecen a los elementos adyacente al lado  $k$

$$\left[ \frac{\partial u_3}{\partial n} \right]^k = N_n^{k+3} u_3^{k+3} + \sum_{I=1}^3 N_n^I u_3^I \quad (3.28)$$

Entre otras aplicaciones, elemento así formulado ha dado excelentes resultados para el tratamiento de estructuras membranales.

Otro elemento basado en las formulaciones anteriores, pero extendido al tratamiento de geometrías arbitrarias es el *BBST* (de su acrónimo en inglés *Branching Basic Shell Triangle*) desarrollado por Flores y Oñate (2007). En dicho trabajo se extienden las capacidades de los elementos *BST* y *EBST* al análisis de superficies quebradas y ramificadas. El gradiente normal en el contorno del elemento es el promedio ponderado de los gradientes de los elementos adyacentes y el peso de cada contribución es inversamente proporcional al área de cada elemento. Esta aproximación es idéntica a otras propuestas anteriores (Sabourin y Brunet (1993); Guo et al. (2002); Sabourin y Brunet (2006))

$$\left[ \frac{\partial u_3}{\partial n} \right]^k = \frac{1}{(A^M + A^K)} \left[ A^K \left( \frac{\partial u_3}{\partial n} \right)^M + A^M \left( \frac{\partial u_3}{\partial n} \right)^K \right] \quad (3.29)$$

Los resultados numéricos muestran, además de poder tratar en forma adecuada geometrías arbitrarias, mejor comportamiento del elemento frente a mallas no estructuradas mejorando una de las principales debilidades de los elementos de lámina sin rotaciones.

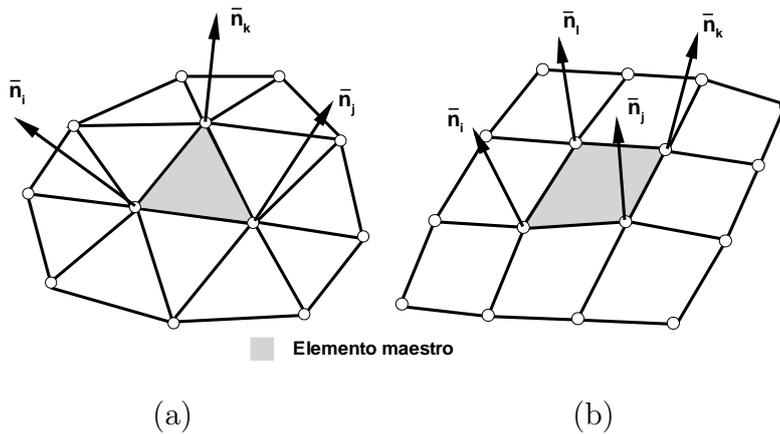
Como se comentó antes, una de las principales críticas a estos elementos es cierta sensibilidad a la regularidad y orientación de la malla. Así, Gardsback y Tibert (2007) han analizado distintas formulaciones de elementos triangulares sin rotaciones presentando en forma unificada las distintas alternativas propuestas para el cálculo de las curvaturas y el tratamiento de las condiciones de contorno. Entre los elementos analizados se encuentran el *BST*, *EBST* ,

*BBST* y la aproximación de Phaal y Calladine (1992b). En el mencionado trabajo se hace un análisis de la sensibilidad de la curvatura calculada con las dimensiones relativas de los elementos que conforman la parcela para las distintas aproximaciones. De esta manera se demuestra que el elemento *EBST* es el más sensible a la posición relativa de los nudos, en tanto que el *BBST* es el menos sensible, pero, solamente la aproximación de Phaal y Calladine (1992b) asegura la determinación exacta de la curvatura para un elipsoide que pasa por los seis nudos de la parcela. La conclusión principal de este trabajo es que la mejor aproximación es utilizar la propuesta de Phaal y Calladine (1992b) para elementos interiores de la malla modificando el tratamiento de las condiciones de contorno a los fines de aliviar la fuerte sensibilidad a la orientación de la malla que muestra dicha propuesta así como evitar la utilización de nudos ficticios.

Si bien los resultados de Gardsback y Tibert (2007) muestran la sensibilidad de los elementos sin GdL rotacionales cuando el tamaño de los elementos no es uniforme, siempre se refieren a mallas estructuradas. Así, Flores (2008) demuestra que el verdadero problema de este tipo de elementos sale a la luz cuando se analizan los esfuerzos provenientes del campo flexional y sobre mallas irregulares. La evaluación de los esfuerzos flexionales en los nudos irregulares se deteriora significativamente. La evaluación del corte transversal puede dar lugar a picos muy marcados y su deterioro es aún mayor. Bajos estas condiciones la aproximación de Phaal y Calladine (1992a) no muestra mejoras significativas respecto al elemento *BBST*.

Una aproximación diferente, también presentada en Oñate y Zárate (2000), consiste en evaluar la curvatura en los nudos, en lo que se llama “aproximación centrada en el nudo” en contraposición con las anteriores que se denominan “aproximación centrada en la parcela”. Esta aproximación desarrollada para placas planas ha mostrado una mayor velocidad de convergencia. Basado en esta idea una aproximación reciente se debe a Ubach y Oñate (2010) quienes presentaron un nuevo elemento triangular donde el campo de curvaturas se obtiene a partir de la información obtenida de una geometría enriquecida por todos los elementos que forman la parcela y no sólo de aquellos que comparten un lado (Figura 3.12a). En lugar de calcular una curvatura promedio, el enriquecimiento de la geometría permite obtener un valor preciso de la curvatura en cualquier punto del triángulo. En cuanto a los aspectos numéricos, al elemento lo caracterizan dos aspectos básicamente. Primero, la forma de calcular las

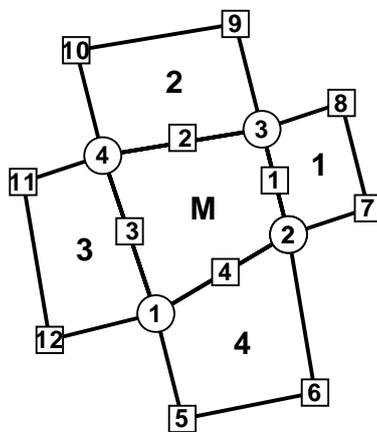
normales en cada nodo del triángulo central de la parcela. Para ello se obtiene un “vector normal promedio” de todos los elementos que concurren al nodo (ver Figura 3.12). El promedio ponderado se obtiene a través de factores de peso definidos inversamente proporcional al tamaño del elemento. Segundo, se utiliza una interpolación cúbica con cuatro puntos de integración para la superficie del triángulo y dos puntos de integración en el espesor, lo que hace una cantidad de ocho puntos de Gauss. Los ejemplos numéricos muestran que la formulación está sujeta a posibles mejoras, entre ellas, la manera de calcular las normales en los nodos, mejorar la capacidad del elemento para representar un campo de curvatura constante en un caso general, la posibilidad de utilizar integración reducida y la posibilidad de extender la formulación para el tratamiento de superficies quebradas y/o ramificadas, entre otras.



**Figura 3.12:** Parcela de elementos para la parte flexional: (a) elemento triangular lineal y (b) elemento cuadrilátero lineal.

En lo que respecta a elementos cuadriláteros sin rotaciones, curiosamente a diferencia de lo elementos triangulares, existen pocos desarrollos. Si bien en el trabajo de Oñate y Cervera (1993) se menciona y se presenta una parcela de cinco elementos cuadriláteros no se obtienen resultados numéricos y los desarrollos hacen fundamentalmente hincapié en la formulación de un elemento de placa triangular. El primer elemento cuadrilátero sin rotaciones del que se hayan presentado resultados fue desarrollado por Brunet y Sabourin (2006) quienes presentaron un elemento de lámina para pequeñas y grandes deformaciones denominado *S4*. Dicho elemento está basado sobre una extensión de las formulaciones presentadas por los mismo autores (Sabourin y Brunet (1993, 1995, 2006)) para elementos triangulares. Como en el caso del elemento triangular las curvaturas generalizadas se obtienen como una superposición de curvaturas

normales para los cinco elementos que definen la parcela (ver Figura 3.13). Sin embargo, la extensión a un elemento cuadrilátero requiere de curvaturas internas adicionales con motivos de evitar modos de alabeo. Así, se define un campo de curvatura constante sobre el elemento, equivalente a utilizar un solo punto de Gauss para evaluar dicho campo. De igual manera, y con la idea de desarrollar un elemento de bajo costo, se utiliza también un solo punto de Gauss para calcular el campo membranar, el cual se superpone con las deformaciones flexionales usando un sistema corotacional. Bajo estas condiciones, el elemento  $S4$  presenta mecanismos espurios que son propagables. Así, para el control de los modos membranales (hourglass) se implementaron dos técnicas, estabilización por perturbación y estabilización física en base a los trabajos de Belytschko et al. (1984); Belytschko et al. (1992); Belytschko y Leviathan (1994a,b). Para el primer método de estabilización, los resultados muestran ser levemente sensibles al valor del coeficiente de estabilización membranar, mientras que la estabilización física le confiere al elemento una rigidez adicional mayor que el método de control por perturbación.



**Figura 3.13:** Parcela de elementos cuadriláteros.

Otra formulación basada en conceptos similares a los de Ubach y Oñate (2010) sobre elementos de láminas cuadriláteros se debe a Linhard et al. (2007) quienes proponen una formulación general para obtener elementos de lámina sin rotaciones. Si bien sus desarrollos se llevan a cabo para un elemento cuadrilátero y triangular de cuatro y tres nodos, respectivamente, la formulación puede ser extendida a elementos de mayor orden. En esencia, la formulación consiste en calcular para cada nodo de un elemento un “vector normal promedio” de todos los elementos que concurren al nodo (ver Figura 3.12). El promedio ponderado

se obtiene a través de factores de peso definidos inversamente proporcional al tamaño del elemento, así los elementos mas pequeños representan mejor la geometría y, por ende, la curvatura de la superficie. Luego, el vector normal dentro del elemento se genera por interpolación de los vectores nodales calculados previamente. El campo vectorial normal resultante obtenido por la interpolación, el cual incluye la información geométrica de los elementos vecinos, generalmente difiere del vector normal real. Aceptando esa aproximación entre los vectores normales se calcula la segunda forma fundamental de la superficie. Esta aproximación no permite describir cambios de curvaturas en el interior de un elemento y como consecuencia aparecen en determinados problemas modos flexionales como los descritos por Flores y Estrada (2007). Para evitar dichos mecanismos espurios se evalúan sobre el elemento isoparamétrico rotaciones adicionales las cuales se obtienen a través de los ángulos de inclinación que forman los directores nodales respecto al plano tangente. Esto da origen al elemento mejorado *CEG* (de su acrónimo en inglés *Curvature Calculation through Enhanced Geometry*) cuyo campo de curvaturas está formado por el campo de curvaturas de la superficie isoparamétrica y las curvaturas adicionales. Al igual que la formulación presentada por Ubach y Oñate (2010), el elemento desarrollado por Linhard et al. (2007) permite tratar únicamente superficies suaves y los ejemplos numéricos están dentro del rango elástico.

### 3.4. Resumen

Con este capítulo dimos un pantallazo sobre las principales formulaciones de elementos de lámina. Hicimos un repaso rápido de los elementos que hemos denominado clásicos hasta llegar a los elementos alternativos. Como se comentó antes, existen diferentes formulaciones, algunas han sido exitosas y motivo de constante investigación y mejora. Otras son recientes, por lo tanto, aún no han sido del todo difundidas.

Queda claro que la idea de usar formulaciones sin GdL rotacionales ha dado un vuelco a favor de las formulaciones de Kirchhoff-Love. Así lo demuestran el método de Superficies de Subdivisión, el Análisis Isogeométrico y el método de Galerkin Discontinuo. Todos ellos cuando formulan elementos de Kirchhoff-Love lo hacen pensando en láminas sin GdL rotacionales. Idea que nace con las formulaciones, principalmente de: Phaal y Calladine (1992a) y Oñate y Cervera

(1993).

Los desarrollos de elementos cuadriláteros, como se muestran en la sección correspondiente a los elementos de lámina sin rotaciones, son escasos y en esta tesis se hace una contribución en ese campo obteniéndose un elemento competitivo.



# Capítulo 4

## Un Elemento Cuadrilátero Básico

### 4.1. Introducción

Como se indicara en la revisión de antecedentes (Capítulo 3) en problemas tridimensionales los principales desarrollos han sido con elementos triangulares utilizando interpolaciones lineales sobre cada elemento. En todos los casos se ha usado un único punto de integración en la superficie y un número variable de puntos de integración en el espesor de acuerdo a la aplicación. Estos elementos se han implementado en códigos comerciales (RADIOSS; STAMPACK (2006)) y se han utilizado extensivamente para simulaciones de embutición de láminas delgadas con excelentes resultados. Así, a diferencia de otras formulaciones, la mayoría de los desarrollos han sido realizados sobre elementos triangulares, y no existe un desarrollo exhaustivo de elementos cuadriláteros. En este capítulo se desarrolla un elemento cuadrilátero de cuatro nudos para el análisis de láminas delgadas suaves. Las principales características del elemento son:

- Los únicos GdL son los desplazamientos traslacionales de la superficie media y resulta de una extensión del elemento triangular desarrollado con anterioridad por Flores y Oñate (2001).
- El comportamiento membranar resulta de una interpolación bilineal estándar de la geometría dentro del elemento. A los fines de obtener un elemento eficiente para el análisis con integración explícita de las ecuaciones de movimiento se utiliza un único punto de integración en el centro del elemento.

- Para evitar la aparición de modos espurios de deformación en el plano de la lámina (*modos de hourglass*) se incluyen fuerzas membranales provenientes de un esquema de estabilización física.
- Para el cálculo del campo de curvaturas se recurre a una parcela de cinco elementos (el elemento y los cuatro adyacentes). El campo de curvatura se asume constante en cada elemento, se expresa en función de los gradientes sobre el contorno del elemento y resulta dependiente de la posición de los doce nudos de la parcela.
- En algunos problemas puede producirse una configuración deformada de flexión sin energía asociada, lo que se controla a través de un esquema de estabilización artificial.
- El elemento denominado *BSQ* (de su acrónimo en inglés *Basic Shell Quadrilateral*) está basado en una formulación Lagrangiana Total y ha sido implementado en códigos con integración explícita e implícita de las ecuaciones de movimiento.

El contenido de este capítulo es el siguiente. En la Sección 4.2 se presentan los aspectos de la geometría donde se define la parcela de elementos y el sistema de coordenadas a utilizar. El cálculo de las curvaturas en función de las coordenadas de los nudos de la parcela se presentan en la Sección 4.3. En la Sección 4.4 se describe un procedimiento de estabilización flexional. En la Sección 4.5 se tratan las condiciones de borde de flexión. El cálculo de las deformaciones membranales y el esquema particular de estabilización física se muestran en la Sección 4.6 y 4.7, respectivamente. En las Secciones 4.8 y 4.9 se dan algunos detalles respecto al cálculo de fuerzas nodales equivalentes y de la matriz de rigidez tangente, respectivamente. Finalmente en la Sección 4.10 y 4.11 se presentan los esquemas de solución implícita y explícita, respectivamente.

## 4.2. Definición de la geometría del elemento

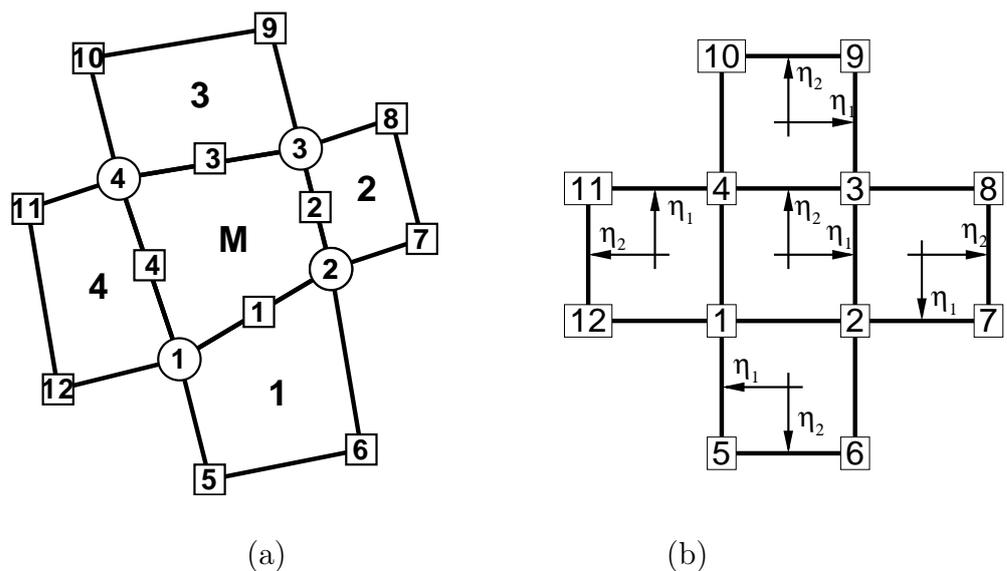
La geometría del elemento cuadrilátero queda definida por la posición (superficie media  $\varphi$ ) de sus cuatro nudos por lo que los únicos GdL a utilizar son las tres componentes de desplazamiento en cada nudo. Dentro de cada elemento la posición de la superficie media resulta de la habitual interpolación

bilineal

$$\varphi(\eta_1, \eta_2) = \sum_{I=1}^4 N^I(\eta_1, \eta_2) \varphi^I \quad (4.1)$$

donde  $\varphi^I$  es la posición de la superficie media en cada nudo y las  $N^I(\eta_1, \eta_2)$  son las funciones de interpolación bilineal (ver Apéndice B) definidas sobre el elemento maestro en el sistema local (ver por ejemplo Zienkiewicz y Taylor (2000)).

Para el cálculo del tensor de curvaturas sobre un elemento  $M$  se utiliza una parcela de cinco elementos formada por el elemento  $M$  y los cuatro elementos adyacentes a sus lados. En la Figura 4.1a se muestra el orden de los nudos y la definición de las conectividades de la parcela de elementos.



**Figura 4.1:** (a) Definición de la parcela de elementos, (b) sistemas de coordenadas naturales.

- Los nudos y los lados en el elemento principal  $M$  están numerados localmente de 1 a 4 en sentido antihorario.
- La numeración de los lados se asocia posteriormente a puntos de evaluación de una integral sobre el contorno.
- Los elementos adyacentes al elemento principal  $M$  están numerados empezando con el número asociado al contorno del lado común.
- Los nudos de los elementos adyacentes que no pertenecen al elemento

principal se han numerado consecutivamente en sentido antihorario empezando por el elemento 1 (ver Figura 4.1b).

- Las conectividades de los elementos adyacentes son definidas comenzando por los dos nudos comunes al elemento central.

Se utilizará la teoría clásica de láminas delgadas (ver el Capítulo 2) basada en las hipótesis de Kirchhoff-Love. La posición original  $\mathbf{X}$  de un punto arbitrario fuera de la superficie media  $\varphi^o$  se refiere a ésta a través de la normal a la misma  $\mathbf{t}_3^o$  y la distancia  $\xi^3$  medida sobre la normal

$$\mathbf{X}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = {}^o\varphi(\xi^1, \xi^2) + \xi^3 {}^o\mathbf{t}_3(\xi^1, \xi^2) \quad (4.2)$$

donde  $(\xi^1, \xi^2)$  definen un sistema de coordenadas curvilíneas locales sobre la superficie media original (indeformada) completado por la coordenada  $\xi^3$  normal al plano tangente. Supondremos que las coordenadas  $(\xi^1, \xi^2)$  definen líneas ortogonales sobre la superficie media (no necesariamente líneas de curvatura) y que los parámetros de Lamé asociados son la unidad. La motivación para definir este sistema coordenado especial está directamente ligado con la implementación numérica donde en cada punto de integración se utiliza un sistema cartesiano con las mismas propiedades. La posición del punto en una configuración deformada arbitraria se escribe como

$$\mathbf{x}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \boldsymbol{\varphi}(\xi^1, \xi^2) + \xi^3 \lambda \mathbf{t}_3(\xi^1, \xi^2) \quad (4.3)$$

donde  $\lambda$  define el estiramiento de la fibra normal a la superficie media, el que se supone constante en el espesor original  ${}^o h$  de la lámina.

La evaluación de la primera y segunda forma fundamental de la superficie media en el elemento central de la parcela, requiere de la definición del sistema cartesiano mencionado en forma consistente sobre cada punto de la parcela donde se evalúe el gradiente  $\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \xi^\alpha} = \boldsymbol{\varphi}_{,\alpha}$ . Para ello se propone lo siguiente:

1. En el centro del elemento principal se define el sistema cartesiano de referencia  $({}^o\mathbf{t}_1^0, {}^o\mathbf{t}_2^0, {}^o\mathbf{t}_3^0)$  a partir de la normal

$${}^o\mathbf{t}_3^0 = \frac{1}{J_0} ({}^o\boldsymbol{\varphi}_{,\eta_1}^0 \times {}^o\boldsymbol{\varphi}_{,\eta_2}^0) \quad J_0 = \| {}^o\boldsymbol{\varphi}_{,\eta_1}^0 \times {}^o\boldsymbol{\varphi}_{,\eta_2}^0 \| = \frac{{}^o A}{4} \quad (4.4)$$

donde  $({}^o\varphi'_{\eta_1}, {}^o\varphi'_{\eta_2})$  son las derivadas respecto a las coordenadas naturales evaluadas en el centro del elemento (supraíndice derecho 0) en la configuración de referencia (supraíndice izquierdo  $o$ ) y  ${}^oA$  es el área del elemento. Las dos direcciones cartesianas de referencia  $({}^o\mathbf{t}_1, {}^o\mathbf{t}_2)$  sobre el plano normal a  ${}^o\mathbf{t}_3$  se eligen arbitrariamente (por ejemplo en las direcciones principales de ortotropía del material).

2. Similarmente, en cada punto medio de cada lado  $k$  del elemento principal se tendrá el plano tangente  $({}^o\varphi'_{\eta_1}, {}^o\varphi'_{\eta_2})$  y su normal  ${}^o\mathbf{t}_3^k$

$${}^o\mathbf{t}_3^k = \frac{1}{J_k} ({}^o\varphi'_{\eta_1} \times {}^o\varphi'_{\eta_2}) \quad (4.5)$$

donde  $J_k$  es el determinante jacobiano de la transformación isoparamétrica en la geometría original. La continuidad del sistema cartesiano definido en el punto anterior, se logra a partir de la intersección entre ambos planos  $\mathbf{q}^k = \frac{{}^o\mathbf{t}_3^0 \times {}^o\mathbf{t}_3^k}{\|{}^o\mathbf{t}_3^0 \times {}^o\mathbf{t}_3^k\|}$  y el ángulo  $\alpha$  que forma con el sistema cartesiano de referencia  $\cos \alpha = \mathbf{q}^k \cdot {}^o\mathbf{t}_1^0$  y  $\sin \alpha = \mathbf{q}^k \cdot {}^o\mathbf{t}_2^0$ . Luego se elige el sistema  $({}^o\mathbf{t}_1^k, {}^o\mathbf{t}_2^k)$  sobre el plano  $({}^o\varphi'_{\eta_1}, {}^o\varphi'_{\eta_2})$  tal que forme el mismo ángulo  $\alpha$  con la dirección  $\mathbf{q}^k$  ( $\mathbf{q}^k \cdot {}^o\mathbf{t}_1^k = \cos \alpha$  y  $\mathbf{q}^k \cdot {}^o\mathbf{t}_2^k = \sin \alpha$ ).

3. En los elementos adyacentes el gradiente se requiere sólo en el centro de cada lado común con el elemento principal. Utilizando el mismo procedimiento anterior, pero ahora la referencia es el sistema local  $({}^o\mathbf{t}_1^k, {}^o\mathbf{t}_2^k)$  en dicho lado dentro del elemento y la intersección  $\mathbf{q}^k$  entre ambos planos es naturalmente el lado común a ambos elementos.

### 4.3. Evaluación de las curvaturas

La segunda forma fundamental (tensor de curvaturas) de la superficie media puede escribirse como (con  $\alpha, \beta = 1..2$ )

$$\kappa_{\alpha\beta} = -\varphi'_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{t}_3 \quad (4.6)$$

De la misma forma que en los elementos triangulares (Oñate y Flores (2005)) las componentes del tensor de curvaturas se definen constantes en cada

elemento y sus valores se calculan como la integral promedio sobre cada elemento

$$\bar{\kappa}_{\alpha\beta} = \frac{-1}{\circ A} \int_{\circ A} \varphi'_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{t}_3 d\circ A \quad (4.7)$$

expresión que, integrada por partes, resulta ( $\mathbf{t}_3$  es constante a los fines de la integral y se evalúa en el centro del elemento)

$$\bar{\kappa}_{\alpha\beta} = \frac{-1}{\circ A} \int_{\circ\Gamma} n_\beta \varphi'_{\alpha} d\circ\Gamma \mathbf{t}_3^0 \quad (4.8)$$

donde  $\circ\Gamma$  es el contorno del elemento con normal saliente  $\mathbf{n}$  sobre el plano tangente, definida en la configuración original con componentes  $n_\beta$  sobre el sistema cartesiano local. La expresión (4.8) desarrollada para las tres componentes del tensor de curvatura es

$$\begin{bmatrix} \bar{\kappa}_{11} \\ \bar{\kappa}_{22} \\ 2\bar{\kappa}_{12} \end{bmatrix} = \frac{-1}{\circ A} \int_{\circ\Gamma} \begin{bmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \\ n_2 & n_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi'_{\alpha} \cdot \mathbf{t}_3^0 \\ \varphi'_{\beta} \cdot \mathbf{t}_3^0 \end{bmatrix} d\circ\Gamma \quad (4.9)$$

La integral sobre el contorno se evalúa numéricamente con un punto de integración a la mitad de cada lado

$$\begin{bmatrix} \bar{\kappa}_{11} \\ \bar{\kappa}_{22} \\ 2\bar{\kappa}_{12} \end{bmatrix} = \frac{-1}{\circ A} \sum_{k=1}^4 l^k \begin{bmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \\ n_2 & n_1 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \varphi'_{\alpha} \cdot \mathbf{t}_3^0 \\ \varphi'_{\beta} \cdot \mathbf{t}_3^0 \end{bmatrix}^k \quad (4.10)$$

donde el índice en minúscula  $k = 1..4$  (ver Figura 4.1a) corresponde a cada uno de los puntos de integración utilizados a la mitad de cada lado y  $l^k$  es la longitud (original) del lado. La continuidad  $C^1$  de la formulación débil, requiere de la continuidad del gradiente  $\varphi'_{\alpha}$  entre elementos. En esta formulación la continuidad se establece en forma discreta a la mitad de cada lado, para lo cual en tales puntos el gradiente se define como el promedio entre el gradiente evaluado con la geometría del elemento principal  $M$  y el evaluado con la geometría del elemento  $K$  adyacente al lado  $k$  (cuando es necesario precisar el elemento correspondiente se indica entre paréntesis en la notación)

$$[\varphi'_{\alpha}]^k = \frac{1}{2} [\varphi'_{\alpha}^{(M)} + \varphi'_{\alpha}^{(K)}]^k = \frac{1}{2} [\varphi'_{\alpha}^{k(M)} + \varphi'_{\alpha}^{k(M)}] \quad (4.11)$$

Notar que la continuidad del gradiente tangente al lado  $\varphi'_{\alpha}$  está asegurada por

la interpolación isoparamétrica y que sólo el gradiente normal al lado  $\varphi_{,n}$  es el que se promedia.

La expresión de las componentes del tensor de curvatura resulta entonces

$$\begin{bmatrix} \bar{\kappa}_{11} \\ \bar{\kappa}_{22} \\ 2\bar{\kappa}_{12} \end{bmatrix} = \frac{-1}{2^{\circ}A} \sum_{k=1}^4 l^k \begin{bmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \\ n_2 & n_1 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \left( \varphi_{,1}^{(M)} + \varphi_{,1}^{(K)} \right) \cdot \mathbf{t}_3^0 \\ \left( \varphi_{,2}^{(M)} + \varphi_{,2}^{(K)} \right) \cdot \mathbf{t}_3^0 \end{bmatrix}^k \quad (4.12)$$

Cada componente del tensor de curvatura puede escribirse también como

$$\bar{\kappa}_{\alpha\beta} = \mathbf{h}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{t}_3^0 \quad (4.13)$$

donde

$$2\mathbf{h}_{\alpha\beta} = \frac{-1}{2^{\circ}A} \sum_{k=1}^4 l^k \left[ n_{\alpha} \left( \varphi_{,\beta}^{(M)} + \varphi_{,\beta}^{(K)} \right) + n_{\beta} \left( \varphi_{,\alpha}^{(M)} + \varphi_{,\alpha}^{(K)} \right) \right]^k \quad (4.14)$$

### 4.3.1. Variación de la curvatura

Para el planteo de la forma débil de las ecuaciones de equilibrio se requiere evaluar la variación de las componentes del tensor de curvaturas, ésta resulta

$$\delta\bar{\kappa}_{\alpha\beta} = \delta\mathbf{h}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{t}_3^0 + \mathbf{h}_{\alpha\beta} \cdot \delta\mathbf{t}_3^0 \quad (4.15)$$

La segunda contribución a la variación de la curvatura, en esta formulación, se desprecia al igual que en los trabajos presentados por Flores y Oñate (2005) y Oñate y Flores (2005) . En el siguiente capítulo, sin embargo, se lo incluye debido a que en algunos problemas dicho término no es despreciable. Siguiendo con la expresión (4.15), el primer término requiere calcular

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{h}_{\alpha\beta} &= \frac{-1}{2^{\circ}A} \sum_{k=1}^4 l^k \left[ n_{\alpha} \left( \delta\varphi_{,\beta}^{(M)} + \delta\varphi_{,\beta}^{(K)} \right) + n_{\beta} \left( \delta\varphi_{,\alpha}^{(M)} + \delta\varphi_{,\alpha}^{(K)} \right) \right]^k \\ &= \frac{-1}{2^{\circ}A} \sum_{k=1}^4 l^k \left\{ \sum_{I=1}^4 [n_{\alpha} N_{,\beta}^I + n_{\beta} N_{,\alpha}^I] \delta\mathbf{u}^I \right. \\ &\quad \left. + \sum_{J=1}^4 [n_{\alpha} N_{,\beta}^{J(K)} + n_{\beta} N_{,\alpha}^{J(K)}] \delta\mathbf{u}^{J(K)} \right\}^k \end{aligned} \quad (4.16)$$

donde  $N^{J(K)}$  es la función de forma del nudo local  $J$  en el elemento adyacente  $K$  (análogamente para  $\delta \mathbf{u}^{J(K)}$ ). De aquí la variación de las curvaturas puede finalmente escribirse como

$$\begin{aligned} \delta \bar{\kappa}_{\alpha\beta} &= \frac{-1}{2^o A} \sum_{k=1}^4 l^k \left\{ \sum_{I=1}^4 [n_\alpha N_{I\beta}^I + n_\beta N_{I\alpha}^I] \delta \mathbf{u}^I \cdot \mathbf{t}_3^0 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{J=1}^4 [n_\alpha N_{I\beta}^{J(K)} + n_\beta N_{I\alpha}^{J(K)}] \delta \mathbf{u}^{J(K)} \cdot \mathbf{t}_3^0 \right\}^k \\ &= \mathbf{B}_b \delta \mathbf{u}^p \end{aligned} \quad (4.17)$$

donde  $\delta \mathbf{u}^p$  agrupa a las variaciones de los desplazamientos de los nudos de toda la parcela (12 nudos y 36 GdL).

## 4.4. Estabilización flexional

La definición de la curvatura utilizando el promedio de los gradientes en los lados permite observar que pueden existir configuraciones geométricas con una variación alternada de la curvatura (una senoide de semionda igual a la longitud del elemento) que conducen a un valor nulo de la curvatura promedio. Lo cual implica que pueden aparecer configuraciones deformadas sin energía asociada (modo flexional de deformación espurio). Estrictamente este modo sólo puede aparecer en superficies planas, aunque puede ocurrir con baja energía en superficies curvas. Para mantener un sólo punto de integración en el elemento (curvatura constante) es necesario entonces realizar alguna estabilización de este modo flexional. Flores y Oñate (2006) han desarrollado un elemento de viga/lámina bidimensional sin rotaciones que utiliza una aproximación lineal de la curvatura  $\kappa_s$  entre los dos nudos del elemento. Allí aparece el mismo problema si se utiliza un único punto de integración, lo cual ha sido resuelto reescribiendo la curvatura como el valor obtenido en el punto de integración más una componente de estabilización. Esta última componente no es otra cosa que la diferencia entre las curvaturas evaluadas en los nudos.

En este elemento cuadrilátero, la evaluación de las curvaturas a partir de las expresiones (4.13-4.14) permite descomponer al vector  $\mathbf{h}_{\alpha\beta}$  en dos partes

$$2\mathbf{h}_{\alpha\beta}^{(1)} = \frac{-1}{2^{\circ}A} \left[ \sum_{k=1}^2 l^k \left( n_{\alpha} \boldsymbol{\varphi}_{\beta}^{(M)} \right)^k + \sum_{k=3}^4 l^k \left( n_{\beta} \boldsymbol{\varphi}_{\alpha}^{(K)} \right)^k \right] \quad (4.18)$$

$$2\mathbf{h}_{\alpha\beta}^{(2)} = \frac{-1}{2^{\circ}A} \left[ \sum_{k=1}^2 l^k \left( n_{\beta} \boldsymbol{\varphi}_{\alpha}^{(K)} \right)^k + \sum_{k=3}^4 l^k \left( n_{\alpha} \boldsymbol{\varphi}_{\beta}^{(M)} \right)^k \right] \quad (4.19)$$

Notar que en  $2\mathbf{h}_{\alpha\beta}^{(1)}$  involucra a una integral sobre todo el contorno, donde en los dos primeros lados se utilizan los gradientes evaluados en el elemento central y en los otros dos lados el gradiente evaluado en los elementos adyacentes, e inversamente para el vector  $2\mathbf{h}_{\alpha\beta}^{(2)}$ . Si el gradiente entre elementos fuera efectivamente continuo ambas componentes coincidirían. En base a ello se ha propuesto como técnica de estabilización penalizar la diferencia entre estas componentes

$$\mathbf{h}_{\alpha\beta}^S = \mathbf{h}_{\alpha\beta}^{(2)} - \mathbf{h}_{\alpha\beta}^{(1)} \quad (4.20)$$

a través de un tensor de curvaturas de estabilización

$$\kappa_{\alpha\beta}^S = \mathbf{h}_{\alpha\beta}^S \cdot \mathbf{t}_3^0 \quad (4.21)$$

#### 4.4.1. Variación de las curvaturas de estabilización

Para el planteo de la forma débil de la estabilización flexional se requiere evaluar la variación de las componentes del tensor de curvaturas de estabilización, ésta resulta

$$\begin{aligned} \delta\kappa_{\alpha\beta}^S &= \delta\mathbf{h}_{\alpha\beta}^S \cdot \mathbf{t}_3^0 + \mathbf{h}_{\alpha\beta}^S \cdot \delta\mathbf{t}_3^0 \\ &= \delta \left( \mathbf{h}_{\alpha\beta}^{(2)} - \mathbf{h}_{\alpha\beta}^{(1)} \right) \cdot \mathbf{t}_3^0 + \left( \mathbf{h}_{\alpha\beta}^{(2)} - \mathbf{h}_{\alpha\beta}^{(1)} \right) \cdot \delta\mathbf{t}_3^0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

La segunda contribución a la variación de la curvatura de estabilización puede en general despreciarse. De aquí la variación de las curvaturas puede finalmente escribirse como

$$\begin{aligned} \delta\kappa_{\alpha\beta}^S &= \mathbf{B}_b^S \delta\mathbf{u}^p \\ &= \left( \mathbf{B}_b^{(2)} - \mathbf{B}_b^{(1)} \right) \delta\mathbf{u}^p \end{aligned}$$

donde  $\delta\mathbf{u}^p$  agrupa a las variaciones de los desplazamientos de los nudos de toda la parcela (12 nudos y 36 GdL). Por lo tanto, de la misma forma en que se dividen

los vectores  $\mathbf{h}_{\alpha\beta}$ , puede dividirse la matriz  $\mathbf{B}_b$  en (4.17), lo cual permite definir la correspondiente matriz para estabilización  $\mathbf{B}_b^S = \mathbf{B}_b^{(2)} - \mathbf{B}_b^{(1)}$  lo que muestra que el esfuerzo numérico para la estabilización flexional no será significativo.

## 4.5. Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno pueden clasificarse en:

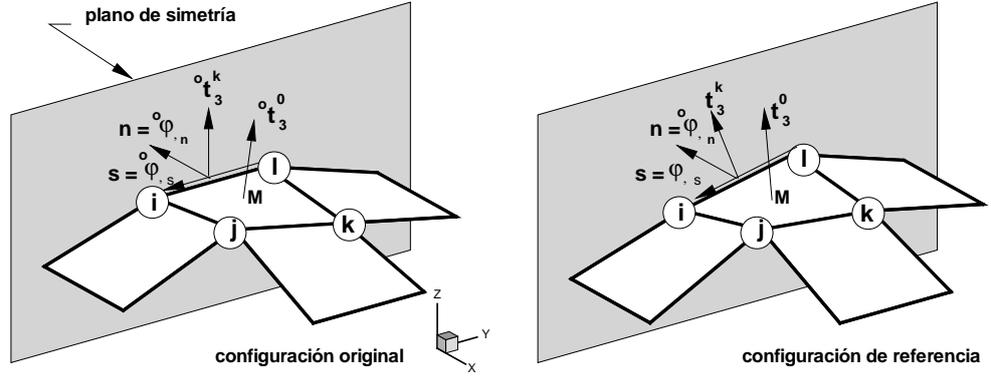
1. relativas al desplazamiento de la superficie media  $\varphi$ , que son los GdL del elemento por lo cual no ofrecen dificultades.
2. relativas a la rotación de la normal  $\mathbf{t}_3$  al elemento alrededor del lado (dependiente del gradiente en la dirección normal al lado  $\varphi_{,n}$ ), que a su vez pueden clasificarse en dos tipos:
  - naturales: simplemente apoyado o libre
  - esenciales: empotramiento o plano de simetría.

Sobre un elemento pueden aplicarse condiciones de contorno relativas al desplazamiento de la superficie media en cualquier punto de la malla, sean naturales (fuerzas) o esenciales (desplazamientos prescritos). Condiciones de contorno referidas a la normal sólo son admisibles en elementos sobre el contorno del dominio, es decir en aquellos elementos en que sobre uno de sus lados no existe el elemento adyacente. El tratamiento de tales bordes puede hacerse en base a lo siguiente:

1. borde simplemente apoyado o libre: suponer que  $\varphi_{,n} = \varphi_{,n}^{(M)}$ , con lo que

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \varphi_{,1}^{(M)} + \varphi_{,1}^{(K)} \\ \varphi_{,2}^{(M)} + \varphi_{,2}^{(K)} \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \varphi_{,1}^{(M)} \\ \varphi_{,2}^{(M)} \end{bmatrix}^k \quad (4.23)$$

2. borde empotrado o condición de simetría: suponer que  $\varphi_{,n} = \lambda_n \circ\varphi_{,n}^{(M)}$ , donde  $\circ\varphi_{,n}^{(M)}$  es invariante durante el proceso de deformación y  $\lambda_n$  es el estiramiento de la superficie media de la lámina en la dirección normal al lado. Este último factor se introduce a los fines de considerar el estiramiento de la superficie media y no tiene influencia en problemas lineales o con pequeñas deformaciones.



**Figura 4.2:** Sistema Cartesiano local para el tratamiento de condiciones de simetrías.

En el segundo caso (ver Figura 4.2) la contribución del gradiente en el lado  $k$  a los vectores  $\mathbf{h}_{ij}$  puede expresarse como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{h}_{11} \\ \mathbf{h}_{22} \\ 2\mathbf{h}_{12} \end{bmatrix}^k = \frac{-1}{{}^oA} l^k \begin{bmatrix} n_1^2 & -n_1n_2 \\ n_2^2 & n_1n_2 \\ 2n_1n_2 & n_1^2 - n_2^2 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \lambda_n {}^o\varphi_{i_n}^{(M)} \\ \varphi_{i_s}^{(M)} \end{bmatrix}^k \quad (4.24)$$

la variación de esta componente necesaria para el planteo de la forma débil resulta

$$\delta \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{11} \\ \mathbf{h}_{22} \\ 2\mathbf{h}_{12} \end{bmatrix}^k = \frac{-1}{{}^oA} l^k \begin{bmatrix} n_1^2 & -n_1n_2 \\ n_2^2 & n_1n_2 \\ 2n_1n_2 & n_1^2 - n_2^2 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \delta\lambda_n {}^o\varphi_{i_n}^{(M)} \\ \delta\varphi_{i_s}^{(M)} \end{bmatrix}^k \quad (4.25)$$

donde por un lado

$$\delta\varphi_{i_s}^{k(M)} = \frac{1}{l^k} (\delta\mathbf{u}^{K+1} - \delta\mathbf{u}^K) \quad (4.26)$$

y por otro, siendo

$$\lambda_n = \left( \varphi_{i_n}^{(M)} \cdot \varphi_{i_n}^{(M)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \delta\lambda_n {}^o\varphi_{i_n}^{(M)} &= \frac{1}{\lambda_n} \left( \varphi_{i_n}^{(M)} \cdot \delta\varphi_{i_n}^{(M)} \right) {}^o\varphi_{i_n}^{(M)} \\ &= \left( {}^o\varphi_{i_n}^{(M)} \otimes \frac{\varphi_{i_n}^{(M)}}{\lambda_n} \right) \delta\varphi_{i_n}^{(M)} \\ &= \left( {}^o\varphi_{i_n}^{(M)} \otimes \frac{\varphi_{i_n}^{(M)}}{\lambda_n} \right) \sum N_{i_n}^I \delta\mathbf{u}^I \end{aligned} \quad (4.28)$$

Recordar que estas contribuciones son luego proyectadas sobre la dirección  $\mathbf{t}_3^0$  para calcular las variaciones de las curvaturas, y notar que  ${}^o\boldsymbol{\varphi}'_n^{(M)} \cdot \mathbf{t}_3^0$  es el seno del ángulo rotado por la normal al elemento alrededor del lado empotrado.

## 4.6. Evaluación de los esfuerzos membranales

Las características especiales del elemento de lámina desarrollado requieren la evaluación del gradiente a la mitad de cada lado a los fines de calcular la curvatura. Resulta ventajoso entonces usar esta información para calcular la primera forma fundamental en el centro del elemento y desarrollar el esquema de estabilización membranar. A partir del gradiente de la deformación evaluado a la mitad de cada lado  $k$  en la superficie media se tienen las componentes en el plano del tensor derecho de Cauchy-Green  $\mathbf{C}$

$$a_{\alpha\beta}^k = \boldsymbol{\varphi}'_{\alpha}^k \cdot \boldsymbol{\varphi}'_{\beta}^k \quad (4.29)$$

Se propone definir el tensor métrico, a utilizar en el punto de integración en el centro del elemento, como un promedio ponderado de los tensores métricos evaluados sobre cada lado

$$\bar{a}_{\alpha\beta} = \frac{1}{{}^oA} \sum_{k=1}^4 J_k a_{\alpha\beta}^k \quad \sum_{k=1}^4 J_k = 4J_0 = {}^oA \quad (4.30)$$

Esta aproximación promedio de la primera forma fundamental sobre el elemento puede interpretarse como una aproximación en deformaciones impuestas. Las componentes del tensor de deformaciones de Green-Lagrange sobre la superficie media en el centro del elemento pueden escribirse

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \frac{1}{{}^oA} \sum_{k=1}^4 J_k [a_{\alpha\beta}^k - {}^o a_{\alpha\beta}^k] \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{{}^oA} \sum_{k=1}^4 J_k [a_{\alpha\beta}^k - \delta_{\alpha\beta}] \\ &= \frac{1}{2} (\bar{a}_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}) \end{aligned} \quad (4.31)$$

con  $\delta_{\alpha\beta}$  la delta de Kronecker.

### 4.6.1. Variación de los esfuerzos membranales

En tanto que la variación de estas deformaciones, necesarias para el planteo de la forma débil de las condiciones de equilibrio, resulta

$$\delta \bar{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{{}^oA} \sum_{k=1}^4 J_k (N_{i\alpha}^I \varphi_{i\beta} + N_{i\beta}^I \varphi_{i\alpha})^k \cdot \delta \mathbf{u}^I \quad (4.32)$$

En forma explícita

$$\begin{aligned} \delta \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} \\ \bar{\varepsilon}_{22} \\ 2\bar{\varepsilon}_{12} \end{bmatrix} &= \frac{1}{{}^oA} \sum_{k=1}^4 \sum_{I=1}^4 \begin{bmatrix} N_{r_1}^I & 0 \\ 0 & N_{r_2}^I \\ N_{r_2}^I & N_{r_1}^I \end{bmatrix}^k J_k \begin{bmatrix} \varphi_{r_1}^k \cdot \delta \mathbf{u}^I & \varphi_{r_2}^k \cdot \delta \mathbf{u}^I \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{{}^oA} \sum_{k=1}^4 J_k \mathbf{B}_m^k \delta \mathbf{u}^e = \bar{\mathbf{B}}_m \delta \mathbf{u}^e \end{aligned} \quad (4.33)$$

donde  $\mathbf{B}_m^k$  es la habitual matriz que relaciona para cada punto  $k$  la variación de las deformaciones de Green-Lagrange con la variación de los desplazamientos de la superficie media

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}^k = \mathbf{B}_m^k \delta \mathbf{u}^e \quad (4.34)$$

y permite calcular la matriz  $\bar{\mathbf{B}}_m$  correspondiente a la aproximación en deformaciones impuestas que relaciona deformaciones virtuales con desplazamientos virtuales. El vector  $\delta \mathbf{u}^e$  agrupa ahora sólo a los cuatro nudos del elemento.

## 4.7. Estabilización membranal

A los efectos de controlar la aparición de los modos espurios de deformación (*hourglass*), se definen deformaciones de Green-Lagrange de estabilización como la diferencia entre el tensor métrico calculado a la mitad de cada lado y el promedio ponderado

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{kS} = \frac{1}{2} (a_{\alpha\beta}^k - \bar{a}_{\alpha\beta}) \quad (4.35)$$

Nótese además que:

$$\sum_{K=1}^4 J_K \varepsilon_{\alpha\beta}^{kS} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 J_k a_{\alpha\beta}^k - \frac{1}{2} {}^oA \bar{a}_{\alpha\beta} = 0 \quad (4.36)$$

### 4.7.1. Variación de la estabilización membranal

La variación de estas deformaciones resulta

$$\begin{aligned}
\delta\varepsilon_{\alpha\beta}^{kS} &= (N_{i\alpha}^I \varphi'_{i\beta} + N_{i\beta}^I \varphi'_{i\alpha})^k \cdot \delta\mathbf{u}^I \\
&\quad - \frac{1}{oA} \sum_{i=1}^4 J_i (N_{i\alpha}^I \varphi'_{i\beta} + N_{i\beta}^I \varphi'_{i\alpha})^i \cdot \delta\mathbf{u}^I \\
&= \mathbf{B}_m^{kS} \delta\mathbf{u}^e = [\mathbf{B}_m^k - \bar{\mathbf{B}}_m] \delta\mathbf{u}^e
\end{aligned} \tag{4.37}$$

donde puede observarse que  $\mathbf{B}_m^{kS}$  es la diferencia  $\mathbf{B}_m^k - \bar{\mathbf{B}}_m$  por lo cual el esfuerzo adicional para la estabilización membranal también es mínimo. A los fines de controlar los modos membranales espurios se pueden utilizar únicamente las componentes cruzadas del tensor métrico como se verá en el siguiente capítulo.

## 4.8. Evaluación de las fuerzas residuales

Las fuerzas nodales equivalentes  $\mathbf{r}(\mathbf{u})$  se obtienen de la expresión del trabajo virtual interno sobre el volumen inicial  ${}^oV$

$$\delta\mathbf{u}^T \mathbf{r}(\mathbf{u}) = \int_{{}^oV} \frac{1}{2} \delta\mathbf{C} : \mathbf{S} d{}^oV \tag{4.38}$$

donde  $\mathbf{S}$  es el segundo tensor de Piola-Kirchhoff y el tensor derecho de Cauchy-Green  $\mathbf{C}$  puede aproximarse para puntos fuera de la superficie media como

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}(\xi_3) &= \bar{\mathbf{a}} + 2\xi_3 \bar{\boldsymbol{\kappa}} \\
C_{\alpha\beta}(\xi_3) &= \bar{a}_{\alpha\beta} + 2\xi_3 \bar{\kappa}_{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Definiendo los esfuerzos integrados en el espesor (con  ${}^oh$  el espesor original)

$$\mathbf{N} = \int_{{}^oh} \mathbf{S} d\xi_3 \tag{4.40}$$

$$\mathbf{M} = \int_{{}^oh} \mathbf{S} \lambda \xi^3 d\xi_3 \tag{4.41}$$

la expresión (4.38), considerando un punto de integración, se simplifica a

$$\delta\mathbf{u}^{pT} \mathbf{r}(\mathbf{u}) = {}^oA (\delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{N} + \delta\bar{\boldsymbol{\kappa}}^T \mathbf{M}) \tag{4.42}$$

### 4.8.1. Fuerzas de estabilización membranal

Las fuerzas de estabilización membranal pueden obtenerse de definir una energía interna de deformación  $W_m$  en función del tensor de Green-Lagrange. Si se utiliza un material de Kirchhoff con un tensor constitutivo elástico de componentes  $D_{\alpha\beta\gamma\delta}$  integrado en el espesor (incluye el espesor  $^o h$ ) se tiene

$$\begin{aligned}
W_m &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 J_k [\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\alpha\beta}^{kS}] D_{\alpha\beta\delta\gamma} [\bar{\varepsilon}_{\gamma\delta} + \varepsilon_{\delta\gamma}^{kS}] \\
&= \frac{1}{2} \bar{\varepsilon}_{\alpha\beta} D_{\alpha\beta\delta\gamma} \bar{\varepsilon}_{\gamma\delta} A + \bar{\varepsilon}_{\alpha\beta} D_{\alpha\beta\delta\gamma} \sum_{k=1}^4 J_k \varepsilon_{\delta\gamma}^{kS} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 J_k \varepsilon_{\alpha\beta}^{kS} D_{\alpha\beta\delta\gamma} \varepsilon_{\delta\gamma}^{kS}
\end{aligned} \tag{4.43}$$

donde el primer término es la energía asociada al único punto de integración, el segundo término se anula debido a (4.36) y el último término corresponde a la energía de deformación de estabilización membranal  $W_m^S$ . Planteada en función del tensor de elasticidad de cuarto orden, el esquema corresponde a una estabilización física. Las “fuerzas de estabilización” resultan

$$N_{\alpha\beta}^{kS} = s_m \frac{\partial W^S}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}^{kS}} = J_k s_m D_{\alpha\beta\delta\gamma} \varepsilon_{\delta\gamma}^{kS} \tag{4.44}$$

notar que al haber impuesto  $\sum J_k \varepsilon_{\alpha\beta}^{kS} = 0$ , entonces en todos los casos  $\sum N_{\alpha\beta}^{kS} = 0$ . Notar también que se ha introducido un factor de reducción de estabilización membranal  $s_m$ . Un factor  $s_m = 1$  equivale a usar una integración completa con cuatro puntos de integración no estándar ubicados en los puntos medio de cada lado y conlleva a un comportamiento algo rígido especialmente para geometrías inicialmente curvas. El valor del coeficiente de estabilización es bajo por lo que el esquema de estabilización también puede clasificarse como un esquema de perturbación.

En tanto que las fuerzas nodales equivalentes resultan de la suma

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{u}^{eT} \mathbf{r}_m^S &= \sum_{k=1}^4 \delta \varepsilon_{\alpha\beta}^{kS} N_{\alpha\beta}^{kS} \\
&= \delta \mathbf{u}^{eT} \sum_{k=1}^4 (\mathbf{B}_m^k - \bar{\mathbf{B}}_m)^T N_{\alpha\beta}^{kS}
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Recordando que  $\sum N_{\alpha\beta}^{kS} = 0$ , las fuerzas nodales debidas a la estabilización membranal resultan finalmente

$$\delta \mathbf{u}^{eT} \mathbf{r}_m^S = \delta \mathbf{u}^{eT} \sum_{k=1}^4 (\mathbf{B}_m^k)^T \mathbf{N}^{kS} \quad (4.46)$$

### 4.8.2. Fuerzas de estabilización flexional

Para el control del modo flexional espurio, a partir de (4.21), se pueden definir momentos estabilizantes como:

$$M_{\alpha\beta}^S = s_b \frac{E^o h^3}{12} (\kappa_{\alpha\beta}^S - \kappa_{\alpha\beta}^{oS}) \quad (4.47)$$

con  $E$  es el módulo de Young del material y  $s_b$  un coeficiente mucho menor que 1. Las fuerzas equivalentes asociadas resultan

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}^{pT} \mathbf{r}_b^S &= {}^o A \delta \kappa_{\alpha\beta}^S M_{\alpha\beta}^S \\ &= {}^o A \delta \mathbf{h}_{\alpha\beta}^S \cdot \mathbf{t}_3^0 M_{\alpha\beta}^S \\ &= {}^o A \delta \left( \mathbf{h}_{\alpha\beta}^{(2)} - \mathbf{h}_{\alpha\beta}^{(1)} \right) \cdot \mathbf{t}_3^0 M_{\alpha\beta}^S \end{aligned} \quad (4.48)$$

Para problemas elasto-plástico el módulo elástico  $E$  (y  $D_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ) usado para la estabilización debe ser modificado como una función del flujo plástico para evitar una posible excesiva energía elástica de estabilización. En estos casos un modelo hipoelástico para las fuerzas de estabilización es computacionalmente más conveniente, donde las fuerzas y momentos integrados de estabilización son evaluados incrementalmente usando un módulo modificado computado como una función del flujo plástico integrado en el espesor de la lámina. Para técnicas implícitas el modulo tangente es un subproducto del proceso de integración por lo tanto es posible disponer del mismo pero para un integrador explícito se debe adoptar una simple proposición.

## 4.9. Matriz de rigidez tangente

La matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}$  se obtiene derivando (4.42), (4.46) y (4.48) respecto a los desplazamientos. Como es habitual expresaremos a la ma-

triz  $\mathbf{K}$  como la suma de dos partes, material y geométrica.

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{u}^T \mathbf{K} \Delta \mathbf{u} &= \delta \mathbf{u}^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\mathbf{r}^0 + \mathbf{r}_m^S + \mathbf{r}_b^S) \Delta \mathbf{u} \\ &= \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{K}_M + \mathbf{K}_G) \Delta \mathbf{u}\end{aligned}\quad (4.49)$$

#### 4.9.1. Rigidez material

La parte material debida a los esfuerzos en el centro del elemento depende de la relación constitutiva, en particular del módulo tangente algorítmico  $\mathbf{D}_{EP}$  y en forma estándar se escribe por la integral

$$\mathbf{K}_M^0 = \int \int_{\circ A} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_{EP} \mathbf{B} dA$$

donde  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_m + \mathbf{B}_b$ , luego

$$\mathbf{K}_M^0 = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_m^T & \mathbf{B}_b^T \end{bmatrix} \mathbf{D}_{EP} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_m \\ \mathbf{B}_b \end{bmatrix} A^o \quad (4.50)$$

La componente de la matriz de rigidez material debida a estabilización membranar es

$$\mathbf{K}_{Mm}^S = s_m \sum_{k=1}^4 J_k (\mathbf{B}_m^{kS})^T \mathbf{D}^S \mathbf{B}_m^{kS} \quad (4.51)$$

donde la matriz  $\mathbf{D}^S$  es la habitual de elasticidad (estabilización física) escalada por el coeficiente  $s_m$ .

En tanto que la matriz de rigidez material asociada a la estabilización flexional resulta sencillamente:

$$\mathbf{K}_{Mb}^S = s_b \circ A \frac{E^o h^3}{12} (\mathbf{B}_b^S)^T \mathbf{B}_b^S \quad (4.52)$$

#### 4.9.2. Rigidez geométrica

De la contribución membranar hay que considerar dos partes, la contribución proveniente de la integración en el centro del elemento y la debida a la estabilización membranar. La contribución en el centro del elemento se expresa

como

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_{Gm}^0 \Delta \mathbf{u} &= A \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\delta \bar{\varepsilon})^T \mathbf{N} \Delta \mathbf{u} \\
&= \sum_{I=1}^4 \sum_{J=1}^4 \sum_{k=1}^4 J_k \left[ (N_{i_1}^I N_{i_1}^J)^k N_{11} + (N_{i_2}^I N_{i_2}^J)^k N_{22} \right. \\
&\quad \left. + (N_{i_1}^I N_{i_2}^J + N_{i_2}^I N_{i_1}^J)^k N_{12} \right] \delta \mathbf{u}^J \Delta \mathbf{u}^I \\
&= \sum_{I=1}^4 \delta \mathbf{u}^I \sum_{J=1}^4 \sum_{k=1}^4 J_k [N_{i_1}^J, N_{i_2}^J]^k \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{12} & N_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{i_1}^J \\ N_{i_2}^J \end{bmatrix}^k \Delta \mathbf{u}^J
\end{aligned} \tag{4.53}$$

donde las  $N_{IJ}$  son los esfuerzos integrados en el espesor en el centro del elemento.

En forma similar la contribución a la parte geométrica de la estabilización membranal se expresa como

$$\delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_{Gm}^S \Delta \mathbf{u} = \sum_{I=1}^4 \delta \mathbf{u}^I \sum_{J=1}^4 \sum_{k=1}^4 [N_{i_1}^J, N_{i_2}^J]^k \begin{bmatrix} N_{11}^{kS} & N_{12}^{kS} \\ N_{21}^{kS} & N_{22}^{kS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{i_1}^J \\ N_{i_2}^J \end{bmatrix}^k \Delta \mathbf{u}^J \tag{4.54}$$

La contribución a la rigidez geométrica de la parte flexional puede obtenerse en forma similar a las expresiones formuladas sobre un elemento triangular (Flores y Oñate (2001)), sin embargo, experimentos numéricos muestran que la contribución de la parte geométrica flexional no tiene importancia y por ende no se la considera en la formulación propuesta.

## 4.10. Esquema de solución implícita

Para el paso  $n$  la configuración  $\varphi^n$  y la deformaciones plásticas  $\varepsilon_p^n$  son conocidas. La configuración  $\varphi^n$  es obtenida adicionando a la configuración original  $\varphi^n = {}^o\varphi + \mathbf{u}^n$ . Las tensiones son computadas para cada cuadrilátero usando un solo punto de integración en el centro y  $N_L$  puntos de integración (capas) a través del espesor. Se asume el clásico estado plano de tensión plana de la teoría de lámina delgadas, por lo tanto para cada capa se calculan tres componentes de tensión,  $(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \text{ y } \sigma_{12})$  referidas al sistema local Cartesiano.

El cómputo del incremento de las tensiones es como sigue:

1. Se evalúan los desplazamientos incrementales  $\Delta \mathbf{u}^n = \mathbf{K}_T^n \mathbf{r}^n$  donde  $\mathbf{K}_T$  es la inversa de la matriz de rigidez tangente y  $\mathbf{r}$  es el vector de fuerzas residuales definido para cada elemento
2. Se actualiza la configuración  $\boldsymbol{\varphi}^{n+1} = \boldsymbol{\varphi}^n + \Delta \mathbf{u}^{n+1}$
3. Se computa el tensor métrico  $\mathbf{a}_{\alpha\beta}^{n+1}$  y las curvaturas  $\kappa_{\alpha\beta}^{n+1}$  para la configuración  $n + 1$ . Luego para cada capa  $k$  se computa el tensor derecho de Cauchy-Green (ver las expresiones (2.61) y (2.62)).

$$\mathbf{C}_k^{n+1} = \mathbf{a}^{n+1} + z_k \boldsymbol{\chi}^{n+1}$$

4. Se computa las deformaciones totales (2.64) y elásticas (2.92) en cada capa  $k$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_k^{n+1} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{C}_k^{n+1}$$

$$[\boldsymbol{\varepsilon}_e]_k^{n+1} = [\boldsymbol{\varepsilon}]_k^{n+1} - [\boldsymbol{\varepsilon}_p]_k^n$$

5. Calcular las tensiones elásticas de prueba (2.93) en cada capa  $k$

$$\mathbf{T}_k^{n+1} = \mathbf{D} [\boldsymbol{\varepsilon}_e]_k^{n+1}$$

6. Chequear la condición de plasticidad y el retorno a la superficie de fluencia si es necesario, corregir las deformaciones plásticas  $[\boldsymbol{\varepsilon}_p]_k^{n+1}$  en cada capa (pequeñas deformaciones plásticas)
7. Computar el vector del segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff  $\boldsymbol{\sigma}_k^{n+1}$  y las tensiones generalizadas. Definiendo los esfuerzos integrados en el espesor (con  ${}^o h$  el espesor original)

$$\mathbf{N}^{n+1} = \frac{{}^o h}{N_L} \sum_{k=1}^{N_L} \boldsymbol{\sigma}_k^{n+1} W_k$$

$$\mathbf{M}^{n+1} = \frac{{}^o h}{N_L} \sum_{k=1}^{N_L} \boldsymbol{\sigma}_k^{n+1} z_k W_k$$

donde  $W_k$  es el peso a través del espesor en el punto de integración. Notar que  $z_k$  es la distancia actual de la capa a la superficie media y no la distancia original. Sin embargo, para pequeñas deformaciones plásticas

esta distinción no es importante. Este cómputo de tensiones es adecuado para un esquema implícito independiente del tamaño del paso y es exacto para un problema elástico.

8. Computar el vector de fuerza residual. Las fuerzas nodales equivalentes  $\mathbf{r}(\mathbf{u})$  se obtienen de la expresión del trabajo virtual interno sobre el volumen inicial  ${}^oV$ . La contribución del elemento es

$$\mathbf{r}^{n+1} = -{}^oA_M \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m^T & \mathbf{B}_b^T \end{bmatrix}^{n+1} \begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix}^{n+1}$$

y, los residuos de estabilización flexional y membranar son

$$\mathbf{r}_b^{S(n+1)} = {}^oA \sum_{k=1}^4 \left[ \mathbf{B}_n^{k(S)T} \right]^{n+1} M^{kS(n+1)} \quad (4.55)$$

$$\mathbf{r}_m^{S(n+1)} = \sum_{k=1}^4 \left[ \mathbf{B}_{12}^{kT} \right]^{n+1} N^{kS(n+1)} \quad (4.56)$$

## 4.11. Esquema de solución explícita

Para simulaciones que incluyen grandes no linealidades, como ser las condiciones de contacto sobre geometrías complejas o grandes inestabilidades en problemas membranarales, la convergencia es difícil de alcanzar con esquemas implícitos. En aquellos casos un algoritmo de solución explícita es típicamente más ventajoso. Estos esquemas proveen la solución para problemas dinámicos y también para problemas estáticos si se elige un amortiguamiento adecuado.

Las ecuaciones dinámicas de movimiento a resolver son de la forma

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (4.57)$$

donde  $\mathbf{M}$  es la matriz de masa,  $\mathbf{C}$  es la matriz de amortiguamiento y  $\dot{\mathbf{u}}$  significa la derivada respecto del tiempo (velocidad) y  $\ddot{\mathbf{u}}$  la aceleración. La solución se obtiene a través del *método de diferencia central*. Para hacer al método competitivo se utiliza una matriz de masa  $\mathbf{M}$  diagonal y  $\mathbf{C}$  se toma proporcional a  $\mathbf{M}$ . Como es usual, la matriz de masa se arma asignando un cuarto de la masa del elemento cuadrilátero a cada nodo en el elemento central.

El esquema de solución explícita se puede resumir como sigue. Para cada

paso del tiempo  $n$  los desplazamientos son computados como

1. Computar las fuerzas internas  $\mathbf{r}^n$ . Esta sigue los pasos (2-8) descriptos para el esquema implícito en la sección previa.
2. Computar las aceleraciones al tiempo  $t_n$

$$\ddot{\mathbf{u}}^n = \mathbf{M}_d^{-1} [\mathbf{r}^n - \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}^{n-1/2}]$$

donde  $\mathbf{M}_d$  es la matriz de masa diagonal.

3. Computar las velocidades al tiempo  $t_{n+1/2}$

$$\dot{\mathbf{u}}^{n+1/2} = \dot{\mathbf{u}}^{n-1/2} + \ddot{\mathbf{u}}^n \delta t$$

4. Computar los desplazamientos al tiempo  $t_{n+1}$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \dot{\mathbf{u}}^{n+1/2} \delta t$$

5. Actualizar la geometría de la malla.
6. Chequear las condiciones de contacto.



# Capítulo 5

## Un Elemento para el Tratamiento de Geometrías Arbitrarias

### 5.1. Introducción

En este capítulo se presenta una nueva formulación basada en el elemento *BSQ* presentada en el Capítulo 4 (Flores y Estrada (2007)). El nuevo elemento se denomina *BBSQ* (de su acrónimo en inglés *Branching Basic Shell Quadrilateral*). El principal objetivo de esta nueva formulación es la de poder tratar geometrías quebradas y ramificadas. Por lo tanto resulta indispensable modificar adecuadamente la forma en que se evalúa el campo de curvaturas teniendo en cuenta el cambio de material y espesor en la lámina, entre otros aspectos. Colateralmente esto permite una mejora en el tratamiento de las fuerzas de estabilización flexional.

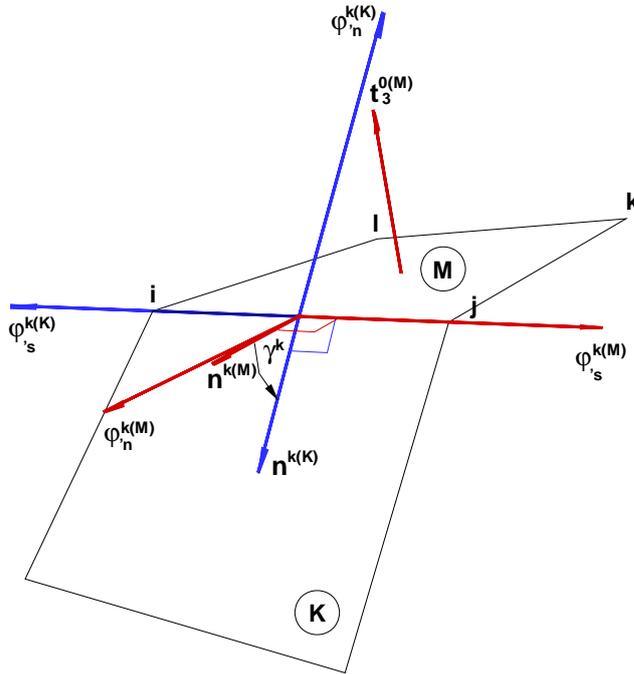
El contenido de este capítulo es el siguiente. En la Sección 5.2 se describe una nueva forma de tratar el campo de curvatura para el tratamiento de superficies quebradas y ramificadas. En la sección 5.3 se desarrolla un esquema de estabilización flexional. En la Sección 5.4 se tratan las condiciones de borde de flexión. El tratamiento de geometrías arbitrarias se muestran en las Secciones 5.5 y 5.6, respectivamente. El cálculo de las deformaciones membranales y el esquema de estabilización se muestran en la Sección 5.7 y 5.8, respectivamente. Finalmente, en las sección 5.9 y 5.10 se dan detalles respecto al cálculo de de fuerzas nodales equivalentes y de la matriz de rigidez tangente.

## 5.2. Evaluación de las curvaturas

Partiendo de la misma definición de la geometría realizada para el elemento  $BSQ$  resulta conveniente, a los fines de modificar el cálculo del campo de curvaturas, escribir la ecuación (4.12) en términos del sistema local al contorno  $(\mathbf{n}, \mathbf{s})$ , luego

$$\begin{bmatrix} \bar{\kappa}_{11} \\ \bar{\kappa}_{22} \\ 2\bar{\kappa}_{12} \end{bmatrix} = \frac{-1}{2^o A} \sum_{k=1}^4 l^k \begin{bmatrix} n_1^2 & -n_1 n_2 \\ n_2^2 & n_1 n_2 \\ 2n_1 n_2 & n_1^2 - n_2^2 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} (\varphi_{i_n}^{(M)} + \varphi_{i_n}^{(K)})^k \cdot \mathbf{t}_3^{0(M)} \\ 2\varphi_{i_s}^{k(M)} \cdot \mathbf{t}_3^{0(M)} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Notar que en general  $\varphi_{i_n}^{k(M)} \cdot \mathbf{t}_3^{0(M)} \ll 1$  para cuadriláteros no muy distorsionados, en tanto que  $\varphi_{i_s}^{k(M)} = -\varphi_{i_s}^{k(K)}$  debido a la continuidad de la superficie media.



**Figura 5.1:** Definición de los gradientes normales en un punto medio de un lado del elemento principal.

La proyección del gradiente normal al contorno en el elemento adyacente sobre la normal al elemento  $\varphi_{i_n}^{k(K)} \cdot \mathbf{t}_3^{0(M)}$  puede interpretarse como el ángulo entre las direcciones tangente al elemento  $\varphi_{n_k}^{0(M)}$  en el centro y la dirección tangente

al elemento vecino sobre el lado  $\boldsymbol{\varphi}_n^{k(K)}$  (ver Apéndice C). Esta interpretación es válida para ángulos pequeños. De hecho, la expresión (5.1) expresa la curvatura para el caso de superficies suaves. Sin embargo, estamos interesados en expresar el campo de curvatura para el caso donde exista un quiebre o ramificación, donde el ángulo indicado puede ser muy distinto del seno. Luego, resulta necesario modificar la definición de la expresión (5.1), utilizando efectivamente el ángulo indicado y no su seno (ver Figura 5.1).

Esta modificación afecta únicamente al término asociado con el gradiente normal  $\boldsymbol{\varphi}'_n^{k(K)} \cdot \mathbf{t}_3^{0(M)}$ , para ello proponemos reemplazar esta proyección por la suma

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}'_n^{k(K)} \cdot \mathbf{t}_3^{0(M)} &= \boldsymbol{\varphi}'_n^{k(M)} \cdot \mathbf{t}_3^{0(M)} + \lambda_n^{k(K)} \sin(2\gamma^k) \\ &\cong \boldsymbol{\varphi}'_n^{k(M)} \cdot \mathbf{t}_3^{0(M)} + 2\lambda_n^{k(K)} \gamma^k \end{aligned} \quad (5.2)$$

donde  $2\gamma^k$  es el ángulo formado por la normal saliente del elemento principal  $\mathbf{n}^{k(M)}$  y la normal entrante del adyacente  $\mathbf{n}^{k(K)}$

$$\gamma^k = \frac{1}{2} \text{ang}(\mathbf{n}^{k(M)}, \mathbf{n}^{k(K)}) \quad (5.3)$$

Reemplazando en (5.1), se tiene una nueva aproximación numérica de la curvatura

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{\kappa}_{11} \\ \bar{\kappa}_{22} \\ 2\bar{\kappa}_{12} \end{bmatrix} &= \frac{-1}{oA} \sum_{k=1}^4 l^k \left\{ \begin{bmatrix} n_1^2 & -n_1 n_2 \\ n_2^2 & n_1 n_2 \\ 2n_1 n_2 & n_1^2 - n_2^2 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}'_n^{k(M)} \cdot \mathbf{t}_3^{0(M)} \\ \boldsymbol{\varphi}'_s^{k(M)} \cdot \mathbf{t}_3^{0(M)} \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} n_1^2 \\ n_2^2 \\ 2n_1 n_2 \end{bmatrix}^k \lambda_n^{k(M)} \gamma^k \right\} \\ &= \boldsymbol{\kappa}^0 + \boldsymbol{\kappa}^1 \end{aligned} \quad (5.4)$$

donde

$$\begin{bmatrix} \bar{\kappa}_{11} \\ \bar{\kappa}_{22} \\ 2\bar{\kappa}_{12} \end{bmatrix}^0 = \frac{-1}{oA} \sum_{k=1}^4 l^k \begin{bmatrix} n_1^2 & -n_1 n_2 \\ n_2^2 & n_1 n_2 \\ 2n_1 n_2 & n_1^2 - n_2^2 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}'_n^{k(M)} \cdot \mathbf{t}_3^{0(M)} \\ \boldsymbol{\varphi}'_s^{k(M)} \cdot \mathbf{t}_3^{0(M)} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

son las curvaturas en el elemento a partir de la interpolación isoparamétrica y

$$\begin{bmatrix} \bar{\kappa}_{11} \\ \bar{\kappa}_{22} \\ 2\bar{\kappa}_{12} \end{bmatrix}^1 = \frac{-1}{\circ A} \sum_{k=1}^4 l^k \begin{bmatrix} n_1^2 \\ n_2^2 \\ 2n_1n_2 \end{bmatrix}^k \lambda_n^{k(M)} \gamma^k \quad (5.6)$$

son las curvaturas que provienen del “salto” del gradiente normal.

Esto ocurre tanto en la configuración original como en la deformada. Por ello se tienen los cambios de curvatura

$$\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\chi}^0 + \boldsymbol{\chi}^1 = (\boldsymbol{\kappa}^0 - \circ \boldsymbol{\kappa}^0) + (\boldsymbol{\kappa}^1 - \circ \boldsymbol{\kappa}^1) \quad (5.7)$$

### 5.2.1. Variación de la curvatura

De la misma forma que se divide el vector  $\boldsymbol{\chi}$  se divide la matriz  $\mathbf{B}$ , que relaciona incremento de desplazamientos con incrementos de curvaturas, que resulta de la variación de (5.7)

$$\delta \boldsymbol{\chi} = \delta \boldsymbol{\chi}^0 + \delta \boldsymbol{\chi}^1 \quad (5.8)$$

Luego

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^0 + \mathbf{B}^1 \quad (5.9)$$

donde  $\mathbf{B}^1$  es la matriz que tiene en cuenta la variación del salto del gradiente normal entre el elemento principal y los vecinos.

## 5.3. Estabilización flexional

Al igual de lo que sucede con el elemento  $BSQ$ , aquí para mantener un sólo punto de integración es necesario realizar una estabilización del modo flexional, para ello si en cada lado  $k$  definimos el cambio de curvatura normal asociada con la segunda componente de 5.7 como

$$\boldsymbol{\chi}_n^k = \mathbf{n}^k \cdot \boldsymbol{\chi}^1 \cdot \mathbf{n}^k \quad (5.10)$$

en forma explícita

$$\boldsymbol{\chi}_n^k = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \boldsymbol{\chi}_{11} & \boldsymbol{\chi}_{12} \\ \boldsymbol{\chi}_{12} & \boldsymbol{\chi}_{22} \end{bmatrix}^1 \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}^k \quad (5.11)$$

desarrollando

$$\boldsymbol{\chi}_n^k = \boldsymbol{\chi}_{11}^1 (n_1)^2 + 2\boldsymbol{\chi}_{12}^1 n_1 n_2 + \boldsymbol{\chi}_{22}^1 (n_2)^2 \quad (5.12)$$

Y por otro lado definimos una aproximación a la curvatura normal al lado como

$$\bar{\boldsymbol{\chi}}_n^k = \frac{1}{d^k} (\gamma^k - {}^o\gamma^k) \quad (5.13)$$

donde  $d^k$  es la distancia del centro del elemento a la mitad del lado y  ${}^o\gamma^k$  es el ángulo en la configuración original.

Podemos con estos dos valores definir una curvatura de estabilización en cada lado

$$\boldsymbol{\chi}^{k(S)} = \bar{\boldsymbol{\chi}}_n^k - \boldsymbol{\chi}_n^k \quad (5.14)$$

lo cual implica que el esfuerzo numérico para la estabilización no es significativo.

La redefinición de la curvatura (5.4) y la correspondiente a la curvatura de estabilización (5.14) serán utilizadas para el tratamiento de superficies no suaves.

### 5.3.1. Variación de las curvaturas de estabilización

La variación de (5.14)

$$\delta \boldsymbol{\chi}^{k(S)} = \delta \bar{\boldsymbol{\chi}}_n^k - \delta \boldsymbol{\chi}_n^k \quad (5.15)$$

permite definir la matriz

$$\mathbf{B}_n^{k(S)} = \bar{\mathbf{B}}_n^k - \mathbf{B}_n^1 \quad (5.16)$$

Si bien el esfuerzo para el cálculo de la curvatura de estabilización no es costoso desde el punto de vista computacional, si resulta más costosa la variación (5.15), es decir los cálculos necesarios para calcular la  $\mathbf{B}_n^{k(S)}$  de estabilización, ya que hay que proyectar  $\mathbf{B}^1$  en las direcciones de los lados.

## 5.4. Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno relativas a la rotación de la normal  $\mathbf{t}_3^k$  al elemento alrededor del lado (dependiente del gradiente en la dirección normal al lado  $\varphi_{',n}$ ) sólo son admisibles en elementos sobre el contorno del dominio, es decir en aquellos elementos en que sobre uno de sus lados no existe el elemento adyacente. Así para bordes empotrados o condiciones de simetría, el vector normal  $\mathbf{t}_3^k$  debe mantenerse fijo o restringido a moverse en el plano de simetría, respectivamente. La normal  $\mathbf{n}^{(M)} = {}^o\varphi_{',n}^{(M)}$  es invariante durante el proceso de deformación. Luego,

$$\begin{aligned} \varphi_{',n}^{k(K)} \cdot \mathbf{t}_3^{0(M)} &= 2\lambda_n {}^o\varphi_{',n}^{k(M)} \cdot \mathbf{t}_3^{0(M)} - \varphi_{',n}^{k(M)} \cdot \mathbf{t}_3^{0(M)} \\ &\cong \varphi_{',n}^{k(M)} \cdot \mathbf{t}_3^{0(M)} + 2\lambda_n^{k(K)} \gamma^k \end{aligned} \quad (5.17)$$

de donde puede obtenerse la expresión de  $\gamma^k$

$$\lambda_n^{k(K)} \gamma^k \cong \lambda_n {}^o\varphi_{',n}^{k(M)} \cdot \mathbf{t}_3^{0(M)} - \varphi_{',n}^{k(M)} \cdot \mathbf{t}_3^{0(M)} \quad (5.18)$$

Luego, la contribución del lado  $k$  al vector de curvaturas resulta

$$\begin{bmatrix} \bar{\kappa}_{11} \\ \bar{\kappa}_{22} \\ 2\bar{\kappa}_{12} \end{bmatrix}^k = \frac{-1}{{}^oA} l^k \begin{bmatrix} n_1^2 & -n_1 n_2 \\ n_2^2 & n_1 n_2 \\ 2n_1 n_2 & n_1^2 - n_2^2 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \lambda_n {}^o\varphi_{',n}^{k(M)} \cdot \mathbf{t}_3^{0(M)} \\ \varphi_{',s}^{k(M)} \cdot \mathbf{t}_3^{0(M)} \end{bmatrix}^k \quad (5.19)$$

El tratamiento de bordes simplemente apoyados (s.a.) es idéntico al explicado en la Sección 4.5.

## 5.5. Tratamientos de quiebres

En este caso se busca establecer cómo formular los casos donde hay una discontinuidad marcada en la normal (quiebre o pliegue) en la superficie original. El tratamiento del quiebre debe tratarse en forma localizada en los puntos medio de cada lado del elemento principal a los efectos de definir los sistemas de referencia. Las dirección normal al lado del elemento adyacente se define a partir del lado  $\mathbf{s}^k$  y de la normal  ${}^o\mathbf{t}_3^{k(K)}$  correspondiente. Supongamos entonces que en la configuración original exista un ángulo no nulo  ${}^o\phi^k$  entre la normal

del elemento principal  ${}^o\mathbf{n}^{k(M)}$  y la normal entrante al lado del elemento vecino  ${}^o\mathbf{n}^{k(K)}$ . En el punto medio del lado correspondiente al elemento adyacente se calcula el plano tangente  $({}^o\boldsymbol{\varphi}_{\eta_1}^{k(K)}, {}^o\boldsymbol{\varphi}_{\eta_2}^{k(K)})$  y su normal  ${}^o\mathbf{t}_3^{k(K)}$ . Allí, es posible definir un triedro local con: la normal  ${}^o\mathbf{t}_3^{k(K)}$ , el lado común  $\mathbf{s}^{k(M)}$  y la normal entrante al lado del elemento  ${}^o\mathbf{n}^{k(K)} = \mathbf{s}^{k(M)} \times {}^o\mathbf{t}_3^{k(K)}$ . Notar que  $\mathbf{s}^{k(M)}$  y  $\mathbf{s}^{k(K)}$  están a lo largo de la misma línea pero en sentido contrario. Luego es posible definir el ángulo que forman la normal al elemento principal  ${}^o\mathbf{n}^{k(M)}$  y la normal entrante del elemento adyacente  ${}^o\mathbf{n}^{k(K)}$  obtenida previamente en el triedro local al lado, como

$$\cos {}^o\phi^k = {}^o\mathbf{n}^{k(M)} \cdot {}^o\mathbf{n}^{k(K)} \quad (5.20)$$

$$\sin {}^o\phi^k = -{}^o\mathbf{n}^{k(M)} \cdot {}^o\mathbf{t}_3^{k(K)} \quad (5.21)$$

donde el ángulo  ${}^o\phi^k$  es medido alrededor del lado común  ${}^o\mathbf{s}$  y es positivo en sentido antihorario para su utilización en (5.4). En la Figura 5.2a se representa el ángulo medido entre las normales y es negativo según la convención adoptada.

En la configuración deformada (ver Figura 5.2b), a partir de la interpolación bilineal de la geometría puede evaluarse el gradiente, es decir el plano tangente en el lado compartido por el elemento adyacente  $(\boldsymbol{\varphi}'_{\eta_1}{}^{k(K)}, \boldsymbol{\varphi}'_{\eta_2}{}^{k(K)})$  que se completa con la normal en el lado

$$\mathbf{t}_3^{k(K)} = \frac{1}{\bar{J}_k} \left( \boldsymbol{\varphi}'_{\eta_1}{}^{k(K)} \times \boldsymbol{\varphi}'_{\eta_2}{}^{k(K)} \right) \quad \bar{J}_k = \| \boldsymbol{\varphi}'_{\eta_1}{}^{k(K)} \times \boldsymbol{\varphi}'_{\eta_2}{}^{k(K)} \| \quad (5.22)$$

Existiendo un lado común

$$\boldsymbol{\varphi}'_s{}^{k(M)} = \lambda_s \mathbf{s}^{k(M)} = -\boldsymbol{\varphi}'_s{}^{k(K)} \quad (5.23)$$

lo cual permite definir el vector normal entrante al lado del elemento adyacente

$$\mathbf{n}^{k(K)} = \frac{-1}{\lambda_s} \boldsymbol{\varphi}'_s{}^{k(K)} \times \mathbf{t}_3^{k(K)} = \mathbf{s}^{k(M)} \times \mathbf{t}_3^{k(K)} \quad (5.24)$$

En la configuración deformada los vectores  $\mathbf{n}^{k(M)}$  y  $\mathbf{n}^{k(K)}$  ya no formarán un ángulo  ${}^o\phi^k$ , sino  $\phi^k$  en la posición que corresponda

$$\cos \phi^k = \mathbf{n}^{k(M)} \cdot \mathbf{n}^{k(K)} \quad (5.25)$$

$$\sin \phi^k = -\mathbf{n}^{k(M)} \cdot \mathbf{t}_3^{k(K)} \quad (5.26)$$

que representa un cambio respecto a la configuración original

$$\Delta \phi^k = \phi^k - {}^o\phi^k \quad (5.27)$$

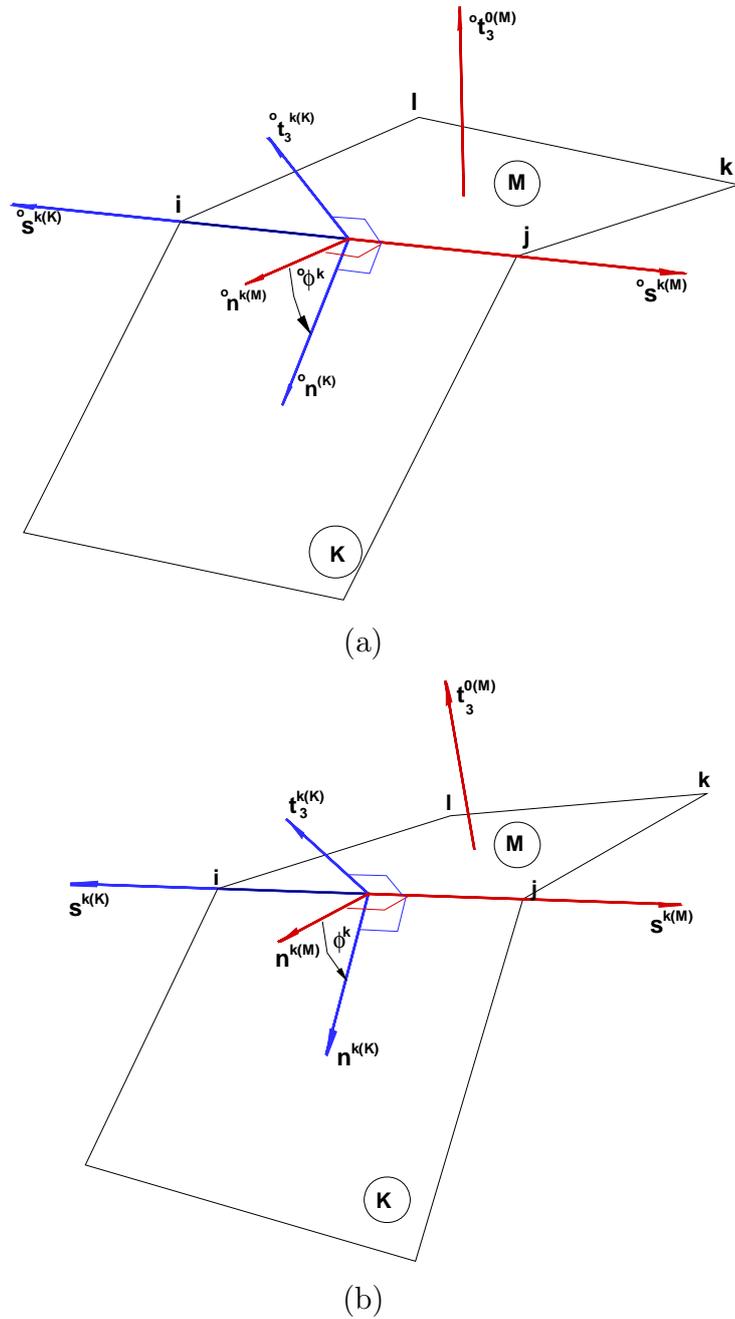
En la Figura 5.3a se ha utilizado para mayor claridad como punto de vista la dirección  $\mathbf{s}^{k(M)}$  tanto en la configuración original como en la deformada. Notar que las normales están asociadas al punto medio del lado considerado. Por otro lado, el cambio de ángulo (5.27) que experimentan las normales en cada borde deben garantizar que la sección normal de cada cuadrilátero en los lados rote con el lado en cuestión, asegurando de esa manera la continuidad de la lámina. Al respecto, en la Figura 5.3b se ha introducido, además de las configuraciones original y deformada, una configuración de referencia indeformada, rotada respecto a la original un ángulo  $\bar{\beta}^k$  definido como la rotación de la arista  $\mathbf{s}^{k(M)}$ . El ángulo entre las normales de la configuración de referencia, denotadas por  $\bar{\mathbf{n}}^{k(M)}$  y  $\bar{\mathbf{n}}^{k(K)}$  deben mantenerse a lo largo de todo el proceso, puesto que se suponen que los elementos están empotrados entre sí a lo largo del lado, es decir, que las secciones normales giran solidariamente en el lado común.

Para que las normales  $\bar{\mathbf{n}}^{k(M)}$  y  $\bar{\mathbf{n}}^{k(K)}$  mantengan el ángulo original  ${}^o\phi^k$  puede asociarse a cada elemento una rotación  $\gamma$  relativa a la rotación de la arista  $\mathbf{s}$ , con la condición

$$\Delta \phi^k = \gamma^{k(M)} + \gamma^{k(K)} \quad (5.28)$$

donde  $\gamma^{k(\cdot)}$  son las rotaciones relativas de las normales  $\mathbf{n}^{k(\cdot)}$  y cuyo valores interesan para la obtención de (5.4).

Las rotaciones  $\gamma^{k(\cdot)}$  se relacionan a partir de la condición de equilibrio a flexión en cada lado del elemento. En efecto, en el trabajo presentado por Flores y Oñate (2006) para el caso de vigas 2-D se obtienen las curvaturas normales de cada lado del quiebre a través de una aproximación basada en el equilibrio a flexión en el nudo. Siguiendo con esta idea, se plantea el equilibrio de momentos alrededor del lado (aproximado, ya que no incluye la curvatura



**Figura 5.2:** Ángulos entre dos elementos: (a) configuración original y (b) configuración deformada.

en dicha dirección)

$$M_n^{k(M)} = M_n^{k(K)} \tag{5.29}$$

$$D^{(M)} \chi_n^{k(M)} = D^{(K)} \chi_n^{k(K)} \tag{5.30}$$

donde  $D^0 = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ , siendo  $E$  el módulo elástico,  $h$  el espesor de la

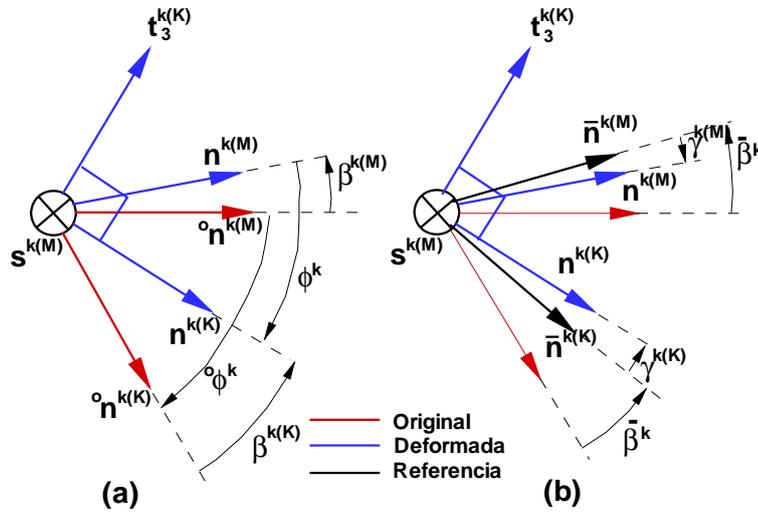


Figura 5.3: Cambios de ángulos respecto de la configuración original.

lámina,  $\nu$  el coeficiente de Poisson. Luego,

$$\left( \frac{Eh^3}{(1-\nu^2)} \right)^{(M)} \frac{\gamma^{k(M)}}{d^{k(M)}} = \left( \frac{Eh^3}{(1-\nu^2)} \right)^{(K)} \frac{\gamma^{k(K)}}{d^{k(K)}} \quad (5.31)$$

donde  $d^k$  es la distancia del centro del lado al centro de elemento (ver eq.5.13).

En la referencia Flores y Oñate (2007) las rotaciones relativas se relacionan a través de la altura medida perpendicularmente al lado hasta el nudo opuesto de cada elemento. De la expresión (5.31)  $d^k$  se puede aproximar a través de la relación área-longitud de cada elemento

$$\frac{2A^{(M)}}{l^{k(M)}} = h^{k(M)} = 2d^{k(M)} \quad \frac{2A^{(K)}}{l^{k(K)}} = h^{k(K)} = 2d^{k(K)} \quad (5.32)$$

y entonces

$$\left( \frac{Et^3}{(1-\nu^2)} \frac{l^k}{A} \right)^{(M)} \gamma^{k(M)} = \left( \frac{Et^3}{(1-\nu^2)} \frac{l^k}{A} \right)^{(K)} \gamma^{k(K)} \quad (5.33)$$

o alternativamente

$$\left( \frac{Et^3}{(1-\nu^2)} \frac{1}{h^k} \right)^{(M)} \gamma^{k(M)} = \left( \frac{Et^3}{(1-\nu^2)} \frac{1}{h^k} \right)^{(K)} \gamma^{k(K)} \quad (5.34)$$

La expresión (5.33) o alternativamente (5.34) tiene en cuenta posibles

cambios en el material y en el espesor de lámina entre dos elementos adyacentes. El cociente entre el área del elemento y la longitud del lado permite definir la rigidez de rotación

$$R_k^{k(M)} \gamma^{k(M)} = R^{k(K)} \gamma^{k(K)} \quad (5.35)$$

Luego, con la expresión (5.28) obtenida por continuidad y la expresión (5.35) obtenida por equilibrio permite calcular la rotación relativa del elemento adyacente como

$$\gamma^{k(K)} = \frac{R^{k(M)}}{R_k^{k(M)} + R^{k(K)}} \Delta \phi^k = r^{k(K)} \Delta \phi^k \quad (5.36)$$

Nótese que si el material y el espesor son homogéneos se obtiene

$$\gamma^{k(K)} = \frac{1}{\frac{1}{h^{k(M)}} + \frac{1}{h^{k(K)}}} \Delta \phi^k = \frac{1}{1 + \frac{h^{k(M)}}{h^{k(K)}}} \Delta \phi^k \quad (5.37)$$

Que no es otra cosa que la distribución del cambio de ángulo en función de las alturas equivalentes, con lo cual se obtiene una aproximación menos sensible a mallas irregulares.

Por otro lado, suponiendo por un instante fija la dirección del lado  $\mathbf{s}^{k(M)}$ , si denominamos:

- $\beta^{k(M)}$  el ángulo girado por la normal saliente ( $M$ ), ángulo entre  ${}^o\mathbf{n}^{k(M)}$  y  $\mathbf{n}^{k(M)}$  (medido en sentido antihorario alrededor de  $\mathbf{s}^{k(M)}$ )
- $\beta^{k(K)}$  el ángulo girado por la normal adyacente entrante al lado  $k$ , ángulo entre  ${}^o\mathbf{n}^{k(K)}$  y  $\mathbf{n}^{k(K)}$  (medido en sentido horario alrededor de  $\mathbf{s}^{k(K)}$ , equivalente a medirlo antihorario alrededor de  $\mathbf{s}^{k(M)}$ ).

El ángulo  $\Delta \phi^k$  puede verse también como la diferencia entre los ángulos rotados por las normales alrededor del lado (usando como referencia la dirección  $\mathbf{s}^{k(M)}$ )

$$\Delta \phi^k = \beta^{k(K)} - \beta^{k(M)} \quad (5.38)$$

en tanto que es posible definir el ángulo girado por el lado intersección como el promedio ponderado de los giros

$$\bar{\beta}^k = r^{k(M)} \beta^{k(M)} + r^{k(K)} \beta^{k(K)} \quad (5.39)$$

Con esta definición el lado (arista) rota  $\bar{\beta}^k$  en tanto que la normal de referencia  $\mathbf{n}^{k(M)}$  rota  $-\gamma^{k(M)}$  respecto al lado ( $\gamma^{k(M)} = \bar{\beta}^k - \beta^{k(M)}$ ) y la normal adyacente  $\mathbf{n}^{k(K)}$  rota  $+\gamma^{k(K)}$  respecto del lado. La definición de los ángulos  $\beta^{k(M)}$  y  $\beta^{k(K)}$  es conceptual, pues la dirección  $\mathbf{s}^{k(M)}$  no se mantiene fija en el espacio, por lo cual no es posible medir  $\beta^{k(M)}$  y  $\beta^{k(K)}$  en forma separada, de hecho lo que se evalúa es (5.25) y con esto se calculan  $\gamma^{k(M)}$  y  $\gamma^{k(K)}$ . Sin embargo, las variaciones de  $\beta^{k(M)}$  y  $\beta^{k(K)}$  si pueden calcularse sin problemas.

Introduciendo la definición del ángulo de rotación  $\gamma^{k(K)}$  en la expresión de la curvatura redefinida en (5.4) se tiene

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{\kappa}_{11} \\ \bar{\kappa}_{22} \\ 2\bar{\kappa}_{12} \end{bmatrix} &= \frac{-1}{oA} \sum_{k=1}^4 l^k \left\{ \begin{bmatrix} n_1^2 & -n_1 n_2 \\ n_2^2 & n_1 n_2 \\ 2n_1 n_2 & n_1^2 - n_2^2 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \varphi'_{n}{}^{k(M)} \cdot \mathbf{t}_3^{0(M)} \\ \varphi'_{s}{}^{k(M)} \cdot \mathbf{t}_3^{0(M)} \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} n_1^2 \\ n_2^2 \\ 2n_1 n_2 \end{bmatrix}^k \gamma^{k(K)} \right\} \end{aligned} \quad (5.40)$$

### 5.5.1. Variación de la curvatura

Para evaluar las variaciones de las componentes del tensor de curvaturas debe calcularse la variación de los dos términos de la expresión (5.4). Para el primer término obtenemos

$$\delta \left( \varphi'_{n}{}^{k(M)} \cdot \mathbf{t}_3^{0(M)} \right) = \delta \varphi'_{n}{}^{k(M)} \cdot \mathbf{t}_3^{0(M)} + \varphi'_{n}{}^{k(M)} \cdot \delta \mathbf{t}_3^{0(M)} \quad (5.41)$$

más

$$\delta \left( \varphi'_{s}{}^{k(M)} \cdot \mathbf{t}_3^{0(M)} \right) = \delta \varphi'_{s}{}^{k(M)} \cdot \mathbf{t}_3^{0(M)} + \varphi'_{s}{}^{k(M)} \cdot \delta \mathbf{t}_3^{0(M)} \quad (5.42)$$

Para el segundo término

$$\delta \left( \lambda_n^{k(M)} \gamma^{k(K)} \right) = \lambda_n^{k(M)} \delta \gamma^{k(K)} + \gamma^{k(K)} \delta \lambda_n^{k(M)} \quad (5.43)$$

Donde los primeros términos de (5.41), (5.42) y (5.43) asociados a la variación del gradiente y del ángulo relativo se obtienen de la siguiente manera. Retomando la expresión que define el ángulo relativo de giro  $\gamma^{k(K)}$  en (5.36)

resulta

$$\delta\gamma^{k(K)} = r^{k(K)} \delta(\Delta\phi^k) = r^{k(K)} (\delta\beta^{k(K)} - \delta\beta^{k(M)}) \quad (5.44)$$

donde

$$\delta\beta^{k(M)} = \frac{1}{\lambda_n^{k(M)}} \delta\varphi_{\eta_n}^{k(M)} \cdot \mathbf{t}_3^{k(M)} \quad \delta\beta^{k(K)} = \frac{1}{\lambda_n^{k(K)}} \delta\varphi_{\eta_n}^{k(K)} \cdot \mathbf{t}_3^{k(K)} \quad (5.45)$$

luego (5.43) queda

$$\delta\gamma^{k(K)} = r^{k(K)} \left( \frac{1}{\lambda_n^{k(K)}} \delta\varphi_{\eta_n}^{k(K)} \cdot \mathbf{t}_3^{k(K)} - \frac{1}{\lambda_n^{k(M)}} \delta\varphi_{\eta_n}^{k(M)} \cdot \mathbf{t}_3^{k(M)} \right) \quad (5.46)$$

que para problemas lineales la expresión anterior es exactamente

$$\delta\gamma^{k(K)} = r^{k(K)} \left( \delta\varphi_{\eta_n}^{k(K)} \cdot \mathbf{t}_3^{k(K)} - \delta\varphi_{\eta_n}^{k(M)} \cdot \mathbf{t}_3^{k(M)} \right) \quad (5.47)$$

donde la variación de los gradiente normales al lado son

$$\delta\varphi_{\eta_n}^{k(M)} = \left[ \sum_{J=1}^4 N_{\eta_n}^{J(M)} \delta\mathbf{u}^{J(M)} \right]^k \quad \delta\varphi_{\eta_n}^{k(K)} = \left[ \sum_{J=1}^4 N_{\eta_n}^{J(K)} \delta\mathbf{u}^{J(K)} \right]^k \quad (5.48)$$

De igual manera la contribución de (5.42) se obtiene a partir de la variación del gradiente a lo largo del lado

$$\delta\varphi_{\eta_s}^{k(M)} = \left[ \sum_{J=1}^2 N_{\eta_s}^{J(M)} \delta\mathbf{u}^{J(M)} \right]^k = \frac{1}{l^k} (\delta\mathbf{u}^{k+1} - \delta\mathbf{u}^k) \quad (5.49)$$

De los segundos términos de (5.41), (5.42) y (5.43) los más importantes son los dos primeros asociado a la variación de la normal al plano  $\delta\mathbf{t}_3^{0(M)}$ . El segundo término de (5.43) asociado al estiramiento en el plano  $\delta\lambda_n^{(M)}$  en general pueden despreciarse.

Para el término asociado a la variación de la normal al plano  $\delta\mathbf{t}_3^{0(M)}$  se tiene

$$\mathbf{t}_3^{0(M)} = \lambda (\varphi_{\eta_1}^0 \times \varphi_{\eta_2}^0) \quad (5.50)$$

El parámetro  $\lambda$  define el estiramiento de la superficie media de la lámina en la dirección normal como

$$\lambda = \frac{h}{o_h} \quad (5.51)$$

donde  ${}^o h$  y  $h$  denota el espesor original y actual.

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{t}_3^{0(M)} &= \lambda (\delta \boldsymbol{\varphi}_{\eta_1}^0 \times \boldsymbol{\varphi}_{\eta_2}^0 + \boldsymbol{\varphi}_{\eta_1}^0 \times \delta \boldsymbol{\varphi}_{\eta_2}^0) + \delta \lambda (\boldsymbol{\varphi}_{\eta_1}^0 \times \boldsymbol{\varphi}_{\eta_2}^0) \\
&= \lambda (\delta \boldsymbol{\varphi}_{\eta_1}^0 \times \boldsymbol{\varphi}_{\eta_2}^0 + \boldsymbol{\varphi}_{\eta_1}^0 \times \delta \boldsymbol{\varphi}_{\eta_2}^0) + \frac{\delta \lambda}{\lambda} \mathbf{t}_3^{0(M)} \\
&= \lambda (-\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_{\eta_2}^0 \delta \boldsymbol{\varphi}_{\eta_1}^0 + \widehat{\boldsymbol{\varphi}}_{\eta_1}^0 \delta \boldsymbol{\varphi}_{\eta_2}^0) + \frac{\delta \lambda}{\lambda} \mathbf{t}_3^{0(M)} \quad (5.52)
\end{aligned}$$

donde  $\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha}^0$  es la correspondiente matriz antisimétrica asociada al vector  $\boldsymbol{\varphi}_{\alpha}^0$ . Como  $\mathbf{t}_3^{0(M)} \cdot \delta \mathbf{t}_3^{0(M)} = 0$  y resolviendo  $\delta \mathbf{t}_3^{0(M)}$  en componentes  $(\delta t_{\alpha}^{0(M)})$  sobre la base convectiva

$$\begin{aligned}
\delta t_1^{0(M)} &= \boldsymbol{\varphi}_{\eta_1}^0 \cdot \delta \mathbf{t}_3^{0(M)} = \lambda (-\boldsymbol{\varphi}_{\eta_1}^0 \cdot \widehat{\boldsymbol{\varphi}}_{\eta_2}^0 \delta \boldsymbol{\varphi}_{\eta_1}^0 + \boldsymbol{\varphi}_{\eta_1}^0 \cdot \widehat{\boldsymbol{\varphi}}_{\eta_1}^0 \delta \boldsymbol{\varphi}_{\eta_2}^0) \\
&= \lambda (-\boldsymbol{\varphi}_{\eta_1}^0 \times \boldsymbol{\varphi}_{\eta_2}^0 \delta \boldsymbol{\varphi}_{\eta_1}^0) = -\mathbf{t}_3^{0(M)} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}_{\eta_1}^0 \quad (5.53)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta t_2^{0(M)} &= \boldsymbol{\varphi}_{\eta_2}^0 \cdot \delta \mathbf{t}_3^{0(M)} = \lambda (-\boldsymbol{\varphi}_{\eta_2}^0 \cdot \widehat{\boldsymbol{\varphi}}_{\eta_2}^0 \delta \boldsymbol{\varphi}_{\eta_1}^0 + \boldsymbol{\varphi}_{\eta_2}^0 \cdot \widehat{\boldsymbol{\varphi}}_{\eta_1}^0 \delta \boldsymbol{\varphi}_{\eta_2}^0) \\
&= \lambda (-\boldsymbol{\varphi}_{\eta_2}^0 \times \boldsymbol{\varphi}_{\eta_1}^0 \delta \boldsymbol{\varphi}_{\eta_2}^0) = -\mathbf{t}_3^{0(M)} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}_{\eta_2}^0 \quad (5.54)
\end{aligned}$$

se obtiene

$$\delta \mathbf{t}_3^{0(M)} = \delta t_1^{0(M)} \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_{\eta_1}^0 + \delta t_2^{0(M)} \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_{\eta_2}^0 \quad (5.55)$$

donde  $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha}^0$  son los vectores de la base contravariante definida en este caso como

$$\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_{\eta_1}^0 = \lambda \boldsymbol{\varphi}_{\eta_2}^0 \times \mathbf{t}_3^{0(M)} \quad (5.56)$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_{\eta_2}^0 = -\lambda \boldsymbol{\varphi}_{\eta_1}^0 \times \mathbf{t}_3^{0(M)} \quad (5.57)$$

Luego se obtiene

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{t}_3^{0(M)} &= \left( -\mathbf{t}_3^{0(M)} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}_{\eta_1}^0 \right) \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_{\eta_1}^0 + \left( -\mathbf{t}_3^{0(M)} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}_{\eta_2}^0 \right) \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_{\eta_2}^0 \\
&= -\sum_{J=1}^4 \left[ N_{,\eta_1}^{J(0)(M)} \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_{\eta_1}^0 + N_{,\eta_2}^{J(0)(M)} \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_{\eta_2}^0 \right] \left( \mathbf{t}_3^{0(M)} \cdot \delta \mathbf{u}^{J(0)(M)} \right) \quad (5.58)
\end{aligned}$$

Sustituyendo esta última expresión en  $\boldsymbol{\varphi}_{\eta_n}^{k(M)} \cdot \delta \mathbf{t}_3^{0(M)}$  y  $\boldsymbol{\varphi}_{\eta_s}^{k(M)} \cdot \delta \mathbf{t}_3^{0(M)}$  se

obtiene

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}'_n{}^{k(M)} \cdot \delta \mathbf{t}_3^{0(M)} &= - \sum_{J=1}^4 \left[ N_{',\eta_1}^{J(0)(M)} \boldsymbol{\varphi}'_n{}^{k(M)} \cdot \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{',\eta_1}^0 \right. \\ &\quad \left. + N_{',\eta_2}^{J(0)(M)} \boldsymbol{\varphi}'_n{}^{k(M)} \cdot \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{',\eta_2}^0 \right] \left( \mathbf{t}_3^{0(M)} \cdot \delta \mathbf{u}^{J(0)(M)} \right) \end{aligned} \quad (5.59)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}'_s{}^{k(M)} \cdot \delta \mathbf{t}_3^{0(M)} &= - \sum_{J=1}^4 \left[ N_{',\eta_1}^{J(0)(M)} \boldsymbol{\varphi}'_s{}^{k(M)} \cdot \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{',\eta_1}^0 \right. \\ &\quad \left. + N_{',\eta_2}^{J(0)(M)} \boldsymbol{\varphi}'_s{}^{k(M)} \cdot \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{',\eta_2}^0 \right] \left( \mathbf{t}_3^{0(M)} \cdot \delta \mathbf{u}^{J(0)(M)} \right) \end{aligned} \quad (5.60)$$

Finalmente sustituyendo estas expresiones en (5.41) y (5.42) se obtiene

$$\begin{aligned} \delta \left( \boldsymbol{\varphi}'_n{}^{k(M)} \cdot \delta \mathbf{t}_3^{0(M)} \right) &= \sum_{J=1}^4 N_{',n}^{J(k)(M)} \left( \mathbf{t}_3^{0(M)} \cdot \delta \mathbf{u}^{J(k)(M)} \right) \\ &\quad - \sum_{J=1}^4 \left[ N_{',\eta_1}^{J(0)(M)} \boldsymbol{\varphi}'_n{}^{k(M)} \cdot \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{',\eta_1}^0 \right. \\ &\quad \left. + N_{',\eta_2}^{J(0)(M)} \boldsymbol{\varphi}'_n{}^{k(M)} \cdot \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{',\eta_2}^0 \right] \left( \mathbf{t}_3^{0(M)} \cdot \delta \mathbf{u}^{J(0)(M)} \right) \end{aligned} \quad (5.61)$$

$$\begin{aligned} \delta \left( \boldsymbol{\varphi}'_s{}^{k(M)} \cdot \delta \mathbf{t}_3^{0(M)} \right) &= \sum_{J=1}^4 N_{',s}^{J(k)(M)} \left( \mathbf{t}_3^{0(M)} \cdot \delta \mathbf{u}^{J(k)(M)} \right) \\ &\quad - \sum_{J=1}^4 \left[ N_{',\eta_1}^{J(0)(M)} \boldsymbol{\varphi}'_s{}^{k(M)} \cdot \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{',\eta_1}^0 \right. \\ &\quad \left. + N_{',\eta_2}^{J(0)(M)} \boldsymbol{\varphi}'_s{}^{k(M)} \cdot \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{',\eta_2}^0 \right] \left( \mathbf{t}_3^{0(M)} \cdot \delta \mathbf{u}^{J(0)(M)} \right) \end{aligned} \quad (5.62)$$

Para el tratamiento de la variación del estiramiento de la superficie media (5.43)

$$\begin{aligned} \delta \lambda_n^{k(M)} &= \delta \left( \boldsymbol{\varphi}'_n{}^{k(M)} \cdot \boldsymbol{\varphi}'_n{}^{k(M)} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\lambda_n^{k(M)}} \left( \boldsymbol{\varphi}'_n{}^{k(M)} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}'_n{}^{k(M)} \right) \\ &= \frac{1}{\lambda_n^{k(M)}} \sum_{J=1}^4 N_{',n}^{J(k)(M)} \boldsymbol{\varphi}'_n{}^{k(M)} \cdot \delta \mathbf{u}^{J(k)(M)} \end{aligned}$$

Finalmente sustituyendo esta expresión en (5.43) se obtiene

$$\begin{aligned} \delta (\lambda_n^{k(M)} \gamma^{k(K)}) &= r^{k(K)} \left[ \frac{\lambda_n^{k(M)}}{\lambda_n^{k(K)}} \sum_{J=1}^4 N_n^{J(k)(K)} \left( \mathbf{t}_3^{k(K)} \cdot \delta \mathbf{u}^{J(k)(K)} \right) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{J=1}^4 N_n^{J(k)(M)} \left( \mathbf{t}_3^{k(M)} \cdot \delta \mathbf{u}^{J(k)(M)} \right) \right] \\ &\quad + \frac{\gamma^{k(K)}}{\lambda_n^{k(M)}} \sum_{J=1}^4 N_n^{J(k)(M)} \left( \boldsymbol{\varphi}_{i_n}^{k(M)} \cdot \delta \mathbf{u}^{J(k)(M)} \right) \end{aligned} \quad (5.63)$$

## 5.6. Tratamiento de ramificaciones de lámina

El caso anterior, cuando dos elementos forman una superficie quebrada es un caso particular de ramificación. En otras palabras, en el caso general tendremos  $n$  elementos concurriendo a una misma arista  $\mathbf{s}$ . Con motivos de explicar el tratamiento de cáscaras ramificadas supongamos que el lado intersección sea el primer lado de cada uno de los elementos que se intersectan y que la orientación del lado sea la misma para todos, como muestra la Figura 5.4. Denominemos por  $I$  y  $J$  a los nudos que definen el lado y que los restantes nudos de los ( $K = 1, \dots, n$ ) cuadriláteros sean los nudos  $k$  y  $l$ . En la configuración original, en el punto medio del lado común  ${}^o\mathbf{s}$  se calcula el plano tangente ( ${}^o\boldsymbol{\varphi}_{\eta_1}^{(K)}, {}^o\boldsymbol{\varphi}_{\eta_2}^{(K)}$ ) de cada elemento y su normal  ${}^o\mathbf{t}_3^{(K)}$ . Luego, se define para cada elemento un triedro local con: la normal  ${}^o\mathbf{t}_3^{(K)}$ , el lado común  ${}^o\mathbf{s}$  y la normal al lado en el plano del elemento  ${}^o\mathbf{n}^{(K)} = \mathbf{s} \times {}^o\mathbf{t}_3^{(K)}$ . Finalmente, entre la normal saliente del elemento  $K$  y la normal entrante del elemento  $K+1$  permite definir ( $k = 1, \dots, n-1$ ) ángulos independientes entre  ${}^o\mathbf{n}^{(K)}$  y  ${}^o\mathbf{n}^{(K+1)}$ , los cuales se definen en la configuración original como

$$\cos {}^o\phi^k = {}^o\mathbf{n}^{(K)} \cdot {}^o\mathbf{n}^{(K+1)} \quad (5.64)$$

$$\sin {}^o\phi^k = -{}^o\mathbf{n}^{(K+1)} \cdot {}^o\mathbf{t}_3^{(K)} \quad (5.65)$$

En la configuración deformada, a partir de la interpolación bilineal de la geometría pueden evaluarse los gradientes ( $\boldsymbol{\varphi}_{\eta_1}^{(K)}, \boldsymbol{\varphi}_{\eta_2}^{(K)}$ ), es decir los planos tangentes sobre el lado común  $\mathbf{s}$  que se completa con la normal a cada lado

$$\mathbf{t}_3^{(K)} = \frac{1}{J_k} \left( \boldsymbol{\varphi}_{\eta_1}^{(K)}, \boldsymbol{\varphi}_{\eta_2}^{(K)} \right) \quad J_k = \left\| \boldsymbol{\varphi}_{\eta_1}^{(K)}, \boldsymbol{\varphi}_{\eta_2}^{(K)} \right\| \quad (5.66)$$

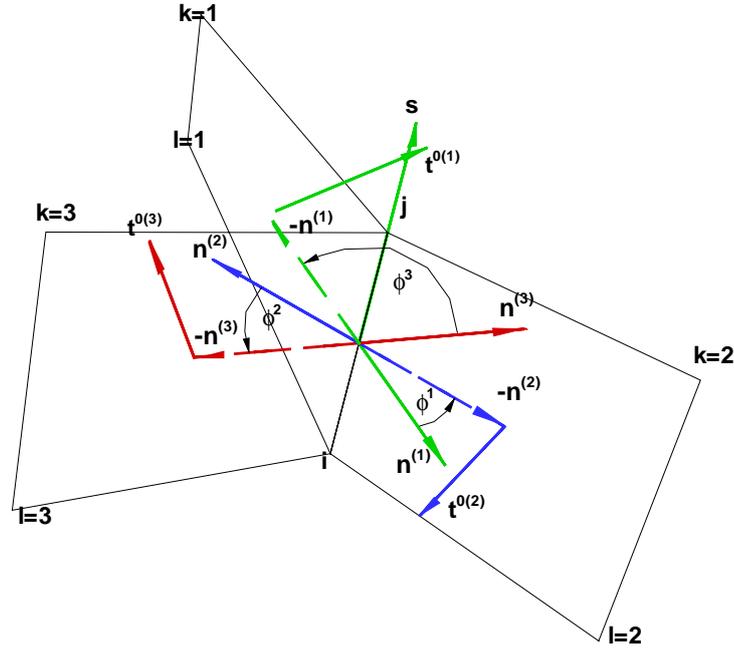


Figura 5.4: Ramificación de elementos.

que en conjunto con el lado común  $\mathbf{s}$

$$\mathbf{s} = \frac{\varphi^J - \varphi^I}{\|\varphi^J - \varphi^I\|} = \frac{\varphi^J - \varphi^I}{l^s} \quad (5.67)$$

permite definir los vectores normales salientes al lado

$$\mathbf{n}^{(K)} = \frac{1}{\lambda_s} \varphi_{l_s}^{(K)} \times \mathbf{t}_3^{(K)} = \mathbf{s} \times \mathbf{t}_3^{(K)} \quad (5.68)$$

y con ellos los nuevos ángulos

$$\cos \phi^k = \mathbf{n}^{(K)} \cdot \mathbf{n}^{(K+1)} \quad (5.69)$$

$$\sin \phi^k = -\mathbf{n}^{(K+1)} \cdot \mathbf{t}_3^{(K)} \quad (5.70)$$

que representa un cambio respecto a la configuración original

$$\Delta \phi^k = \phi^k - {}^o \phi^k \quad k = 1, \dots, n-1 \quad (5.71)$$

Como la dirección  $\mathbf{s}$  rota en el espacio, no hay una referencia fija para medir el ángulo  $\beta^{(K)}$  rotado por cada elemento. Luego se puede asumir que el primer elemento no rota ( $\beta^{(1)} = 0$ ) y computar el resto de las rotaciones usando

el primer elemento como referencia. Esto conduce a

$$\beta^{(K)} = \sum_{m=1}^{k-1} \Delta\phi^m \quad (5.72)$$

La rotación del lado  $\mathbf{s}$  en si mismo se define como el promedio ponderado

$$\bar{\beta} = \frac{1}{\sum_{L=1}^n R^{(L)}} \sum_{K=1}^n R^{(K)} \beta^{(K)} = \sum_{K=1}^n r^{(K)} \beta^{(K)} \quad (5.73)$$

donde

$$r^{(K)} = \frac{R^{(K)}}{\sum_{L=1}^n R^{(L)}} \quad (5.74)$$

Con lo cual la rotación relativa  $\gamma^{(K)}$  del elemento  $K$  respecto del lado  $\mathbf{s}$  se define como la diferencia entre el ángulo rotado por la arista  $\bar{\beta}$  y el ángulo rotado por el elemento  $\beta^{(K)}$

$$\gamma^{(K)} = \bar{\beta} - \beta^{(K)} \quad (5.75)$$

Luego, la definición de  $\gamma^{(K)}$  permite completar la evaluación de la curvatura en (5.4) para cada lado del elemento en cuestión.

### 5.6.1. Variación de la curvatura

Para evaluar las variaciones de la curvatura debe calcularse la variación de la componente del gradiente normal al lado sobre la normal al elemento (de manera similar a (5.43)), que está compuesto de dos partes

$$\delta(\lambda_n^{(K)} \gamma^{(K)}) = \lambda_n^{(K)} \delta\gamma^{(K)} + \gamma^{(K)} \delta\lambda_n^{(K)} \quad (5.76)$$

donde el término de importancia es el primero.

Retomando la expresión (5.75), se obtiene

$$\begin{aligned} \delta\gamma^{(K)} &= \delta\bar{\beta} - \delta\beta^{(K)} \\ &= \left[ \frac{1}{\lambda_n^{(K)}} \delta\varphi_{r_n}^{(K)} \cdot \mathbf{t}_3^{(K)} - \sum_{M=1}^n r^{(M)} \frac{1}{\lambda_n^{(M)}} \delta\varphi_{r_n}^{(M)} \cdot \mathbf{t}_3^{(M)} \right] \end{aligned} \quad (5.77)$$

con este resultado (5.43) queda

$$\delta(\lambda_{,n}^{(K)}\gamma^{(K)}) = \left[ \begin{aligned} &\delta\boldsymbol{\varphi}_{,n}^{(K)} \cdot \mathbf{t}_3^{(K)} - \lambda_{,n}^{(K)} \sum_{M=1}^n r^{(M)} \frac{1}{\lambda_n^{(M)}} \delta\boldsymbol{\varphi}_{,n}^{(M)} \cdot \mathbf{t}_3^{(M)} \\ &+ \gamma^{(K)} \delta\lambda_n^{(K)} \end{aligned} \right] \quad (5.78)$$

donde  $\delta\boldsymbol{\varphi}_{,n}^{(0)}$  son las variaciones de los gradientes normales calculados sobre el plano tangente a cada cuadrilátero; en forma estándar

$$\delta\boldsymbol{\varphi}_{,n}^{(K)} = \sum_{I=1}^4 N_{,n}^{I(K)} \delta\mathbf{u}^{I(K)} \quad \delta\boldsymbol{\varphi}_{,n}^{(M)} = \sum_{J=1}^4 N_{,n}^{J(M)} \delta\mathbf{u}^{J(M)} \quad (5.79)$$

De esta forma, la variación del ángulo  $\gamma^{(0)}$  resulta

$$\delta(\lambda_{,n}^{(K)}\gamma^{(K)}) = \left[ \begin{aligned} &\sum_{I=1}^4 N_{,n}^{I(K)} \delta\mathbf{u}^{I(K)} \cdot \mathbf{t}_3^{(K)} \\ &- \lambda_{,n}^{(K)} \sum_{M=1}^n \sum_{J=1}^4 r^{(M)} \frac{1}{\lambda_n^{(M)}} N_{,n}^{J(M)} \delta\mathbf{u}^{J(M)} \cdot \mathbf{t}_3^{(M)} \\ &+ \gamma^{(K)} \delta\lambda_n^{(K)} \end{aligned} \right] \quad (5.80)$$

esto permite evaluar las variaciones de las curvaturas en los distintos elementos utilizando, donde la forma de  $\delta(\lambda_{,n}^{(K)}\gamma^{(K)})$  sobre cada uno de los lados dependerá de si el lado es parte de una única superficie (suave o no) (5.47) o corresponde a una línea de ramificación (5.78).

## 5.7. Evaluación de los esfuerzos membranales

La evaluación de los esfuerzos membranales y su respectiva variación siguen los mismos pasos descritos para la formulación del elemento *BSQ* (ver Sección 4.6). Sin embargo, un análisis detallado de la propuesta original muestra que a los efectos de controlar la aparición de los modos espurios de deformación (*hourglass*), alcanza con definir las deformaciones de Green-Lagrange de estabilización como la diferencia entre las componentes cruzadas del tensor métrico calculado a la mitad de cada lado y el promedio ponderado.

$$\varepsilon_{12}^{kS} = \frac{1}{2} (a_{12}^k - \bar{a}_{12}) \quad (5.81)$$

Nótese además que:

$$\sum_{K=1}^4 J_k \varepsilon_{12}^{kS} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 J_k a_{12}^k - \frac{1}{2} A \bar{a}_{12} = 0 \quad (5.82)$$

En la Figura 5.5 se da una interpretación de la manera en que las componentes cruzadas alcanzan para estabilizar la distorsión producida por el modo membranal espurio. Si bien el modo espurio implica la aparición de deformaciones longitudinales, estas no pueden aparecer en forma independiente de las deformaciones de corte, por lo cual el control de dichas deformaciones de corte es suficiente para evitar el crecimiento de los modos espurios.

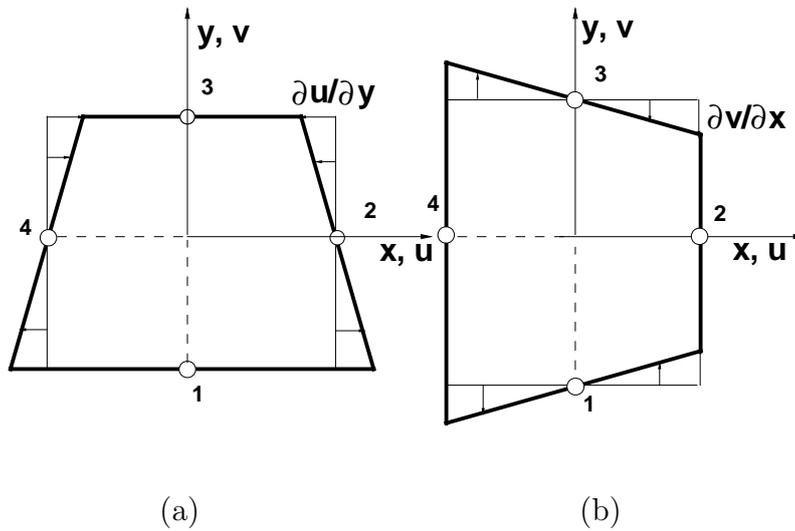


Figura 5.5: Modos de hourglass.

La variación de estas deformaciones resulta

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_{12}^{kS} &= (N_{r1}^I \varphi_{r2} + N_{r2}^I \varphi_{r1})^k \cdot \delta \mathbf{u}^I - \frac{1}{oA} \sum_{i=1}^4 J_i (N_{r1}^I \varphi_{r2} + N_{r2}^I \varphi_{r1})^i \cdot \delta \mathbf{u}^I \\ &= \mathbf{B}_{12}^{kS} \delta \mathbf{u}^e = [\mathbf{B}_{12}^k - \bar{\mathbf{B}}_{12}] \delta \mathbf{u}^e \end{aligned} \quad (5.83)$$

donde puede observarse que  $\mathbf{B}_{12}^{kS}$  es la diferencia  $\mathbf{B}_{12}^k - \bar{\mathbf{B}}_{12}$  siendo  $\mathbf{B}_{12}^k$  y  $\bar{\mathbf{B}}_{12}$  las matrices que relacionan únicamente la variación de las componentes cruzadas de cada lado con el vector de desplazamiento  $\delta \mathbf{u}^e$ . Nótese que el esfuerzo adicional para la estabilización membranal es mínimo.

## 5.8. Evaluación de las fuerzas residuales

La evaluación de las fuerzas nodales equivalentes  $\mathbf{r}(\mathbf{u})$  se obtienen de forma idéntica a la presentada en la Sección 4.8. Resulta interesante destacar algunos cambios que se manifiestan en la evaluación de las fuerzas de estabilización membranal. Así, las fuerzas de estabilización membranal se obtienen de la energía interna de deformación  $W_m$  (ver Sección 4.8.1) en función del tensor de Green-Lagrange. Luego, considerando únicamente las componentes cruzadas se obtiene

$$N_{12}^{kS} = s_m \frac{\partial W^S}{\partial \varepsilon_{12}^{kS}} = J_k s_m G \varepsilon_{12}^{kS} \quad (5.84)$$

donde  $G$  es el módulo de corte y  $s_m$  el coeficiente de estabilización membranal. Por lo tanto, las fuerzas nodales equivalentes resultan de la suma

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}^{eT} \mathbf{r}_m^S &= \sum_{k=1}^4 \delta \varepsilon_{12}^{kS} N_{12}^{kS} \\ &= \delta \mathbf{u}^{eT} \sum_{k=1}^4 (\mathbf{B}_{12}^k - \bar{\mathbf{B}}_{12})^T N_{12}^{kS} \end{aligned} \quad (5.85)$$

Recordando que  $\sum N_{12}^{kS} = 0$ , las fuerzas nodales debidas a la estabilización membranal resultan finalmente

$$\delta \mathbf{u}^{eT} \mathbf{r}_m^S = \delta \mathbf{u}^{eT} \sum_{k=1}^4 (\mathbf{B}_{12}^k)^T N^{kS} \quad (5.86)$$

Para el control del modo flexional espurio, a partir de (5.14), se puede definir el momento estabilizante como:

$$M^{kS} = s_b \frac{E \circ h^3}{12} [(\boldsymbol{\chi}^{k(S)} - \circ \boldsymbol{\chi}^{k(S)})] \quad (5.87)$$

con  $E$  es el módulo de Young del material y  $s_b$  un coeficiente menor que 1. Las fuerzas equivalentes asociadas resultan

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}^{pT} \mathbf{r}_b^S &= \delta \mathbf{u}^{pT} \circ A \sum_{k=1}^4 \delta \boldsymbol{\chi}^{k(S)} M^{kS} \\ &= \delta \mathbf{u}^{pT} \circ A \sum_{k=1}^4 \mathbf{B}_n^{k(S)T} M^{kS} \end{aligned} \quad (5.88)$$

Nótese que en un proceso elasto-plástico las fuerzas de estabilización flexional si bien son bajas siguen siendo elásticas. Un esquema que incluya las deformaciones plásticas en dichas fuerzas flexionales de estabilización, así como están formuladas, sería costoso y se perdería parte de la economía computacional.

## 5.9. Matriz de rigidez tangente

Para el esquema implícito la matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}$  se obtiene siguiendo los mismos pasos presentados en la Sección 4.9. Resultando levemente cambiadas las matrices de rigidez material y geométrica debida a la parte de estabilización. Así la parte material debida a la estabilización membranal es

$$\mathbf{K}_{Mm}^S = s_m G \sum_{k=1}^4 J_k \left( \mathbf{B}_{12}^{k(S)} \right)^T \mathbf{B}_{12}^{k(S)} \quad (5.89)$$

En tanto que la matriz de rigidez material asociada a la estabilización flexional resulta sencillamente

$$\mathbf{K}_{Mb}^S = s_b \textit{o} A \frac{E \textit{o} h^3}{12} \left( \mathbf{B}_n^{k(S)} \right)^T \mathbf{B}_n^{k(S)} \quad (5.90)$$

En lo que respecta a la rigidez geométrica proveniente de la estabilización membranal se expresa como

$$\delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_{Gm}^S \Delta \mathbf{u} = \sum_{I=1}^4 \delta \mathbf{u}^I \sum_{J=1}^4 \sum_{k=1}^4 [N_{i_1}^J, N_{i_2}^J]^k N_{12}^{kS} \begin{bmatrix} N_{i_1}^J \\ N_{i_2}^J \end{bmatrix}^k \Delta \mathbf{u}^J \quad (5.91)$$

La contribución a la rigidez geométrica de la parte flexional se muestra en el Apéndice *D* por completitud, sin embargo, dicha contribución no se la incluyó en el código implícito por los mismos motivos indicados en la Sección 4.9.2.

# Capítulo 6

## Acoplamiento Lámina-Sólido

### 6.1. Introducción

En este capítulo se presentan algunos desarrollos cuyo objetivo es poder unir elementos de láminas con elementos de sólidos. Este tipo de restricción es muy utilizada en modelos que responden globalmente al comportamiento de láminas cuando se pretende realizar un análisis local detallado con elementos de sólidos a los fines de captar comportamientos tridimensionales. En la modelización de sólidos en general y de estructuras en particular es mucha veces necesario incluir relaciones de restricción entre distintos GdL. Estas surgen habitualmente en simulaciones diversas cuando se combinan elementos estructurales (viga o lámina) con elementos de sólidos. En general estas restricciones conducen a describir la evolución de algunos GdL del modelo, a los que se denominan *esclavos* en función de otros GdL del modelo a los que se denominan *maestros*. Si los problemas a abordar son geoméricamente no lineales las restricciones también lo serán, lo cual requiere una actualización acorde de la geometría y de la relación tangente (incremental) entre GdL esclavos y maestros. En los elementos estructurales estándar (vigas, láminas, conectores diversos, etc), que incluyan sistemas nodales locales asociados en su evolución a GdL rotacionales, estas restricciones se introducen directamente entre nudos y en general en forma independiente de los elementos. En el caso de utilizar elementos que no incluyan sistemas nodales locales (rotation-free) no es posible introducir este tipo de restricción directamente entre nudos y resulta necesario incluir información sobre la geometría de los elementos involucrados (ver Flores (2007)).

Los desarrollos que se presentan abajo están orientados a su implementación en un código con integración explícita e implícita de las ecuaciones de movimiento con capacidad para el tratamiento de no linealidades muy fuertes ya sea geométricas, de material y contacto. El contenido de este capítulo es el siguiente. En la Sección 6.2 y 6.3 se definen los aspectos básicos y la geometría en la unión lámina-sólido, respectivamente. En la Sección 6.4 se presenta la evaluación de la curvatura. La transferencia de fuerzas equivalentes a los momentos y la implementación en un código implícito y explícito se muestran en las Secciones 6.5 y 6.6 respectivamente.

## 6.2. Aspectos básicos de la unión lámina-sólido

Hay tres aspectos que es necesario considerar en el elemento de lámina sobre el lado que se une al elemento sólido. Es necesario que los dos nudos que definen el lado de un elemento de lámina ( $K$  y  $L$  en la Figura 6.1) se hayan definidos como nudos esclavos de los nudos que definen la cara (1 – 4 de la figura) del sólido. Es decir que el nudo  $K$  se mantendrá a distancia relativas invariantes de los nudos 1 y 2, en tanto que el nudo  $L$  se mantendrá a distancias relativas invariantes del los nudos 3 y 4.

1. La evaluación de las deformaciones membranales (primera forma fundamental). Las fuerzas nodales equivalentes resultantes asociadas a los nudos  $K$  y  $L$  pasan en forma estándar a los nudos 1–4 a través de las restricciones impuestas por la condición nudo sobre una arista (ver Flores (2007)).
2. La evaluación de la curvatura se realiza como si el lado estuviera empotrado, donde la normal  $\mathbf{n}_s$  al plano de empotramiento se actualiza paso a paso en función de las coordenadas de los nudos 1 – 4.
3. La evaluación de fuerzas residuales debidas a flexión.

Podría mencionarse un cuarto aspecto que cobra relevancia cuando se requiere implementar la formulación propuesta en un código implícito: esto es, la variación del ángulo entre  $\mathbf{t}_3^{k(M)}$  (normal al elemento) y  $\mathbf{t}^s$  (normal a la cara del sólido), alrededor del lado  $\mathbf{s}$  que da lugar a una redefinición de la matriz  $\mathbf{B}_b$ .

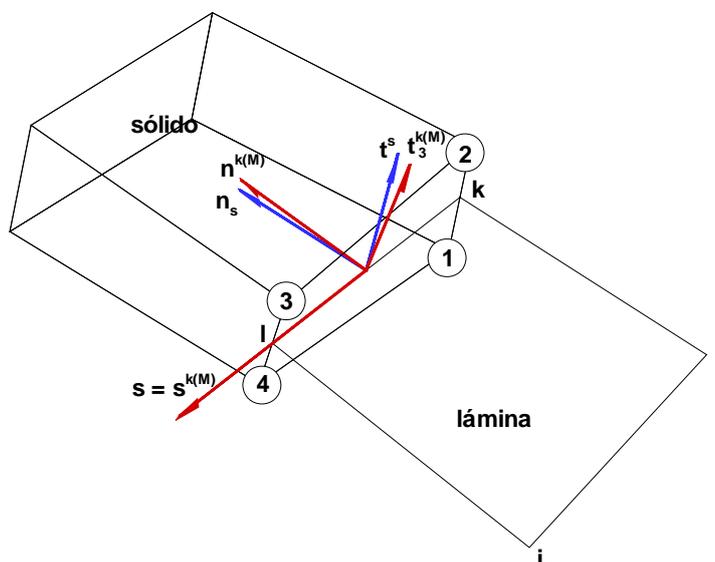


Figura 6.1: Definición de la geometría en la unión lámina-sólido.

### 6.3. Definición de la geometría en la unión lámina-sólido

En la definición de la geometría de la unión lámina-sólido, lo natural es que los nudos del sólido estén ubicados en la dirección normal al elemento de lámina  $\mathbf{t}_3^{k(M)}$  a una distancia igual a la mitad del espesor. La formulación no impone esta condición pero es deseable. Por otro lado, en general es necesario utilizar 2 ó más elementos de sólido en el espesor de la lámina a los fines de captar correctamente la flexión. El desarrollo que sigue supone que la relación se establece con los nudos extremos del sólido es decir aquellos que están ubicados en la superficie inferior y superior de la lámina y que los nudos intermedios del sólido se relacionan a través de restricciones tipo *nudo sobre una arista* (ver Flores (2007).)

Las coordenadas de los nudos  $K$  y  $L$  sobre la superficie media de la lámina ( $\varphi$ ) definen en el plano paramétrico asociado al cuadrilátero (cara del sólido) de coordenadas  $\xi_K$  y  $\xi_L$  que son constantes durante el proceso de deformación e implican una restricción del tipo *master-slave*. De tal forma que en todo

momento se satisfaga

$$\varphi^K = \left( \frac{1 - \xi_K}{2} \right) \mathbf{x}^1 + \left( \frac{1 + \xi_K}{2} \right) \mathbf{x}^2 = a_{K1} \mathbf{x}^1 + a_{K2} \mathbf{x}^2 \quad (6.1)$$

$$\varphi^L = \left( \frac{1 - \xi_L}{2} \right) \mathbf{x}^3 + \left( \frac{1 + \xi_L}{2} \right) \mathbf{x}^4 = a_{L3} \mathbf{x}^3 + a_{L4} \mathbf{x}^4 \quad (6.2)$$

donde  $\mathbf{x}$  es la posición actual, con  $\mathbf{x}^i$  la correspondiente a cada nudo del cuadrilátero.

A los fines de no introducir singularidades en el modelo parece altamente recomendable que la posición de los nudos 1 (4) y 2 (3) correspondan a posiciones coincidentes con la superficie inferior y superior de la lámina (es decir separados por una distancia igual al espesor  ${}^o h$ ), de tal forma que resulten las coordenadas  $\xi_K = \xi_L = 0$  y los coeficientes  $a_{ij} = \frac{1}{2}$ . Más aún, para mantenerse dentro de las hipótesis de la teoría de láminas la configuración original del cuadrilátero debiera ser plana y ortogonal al plano de la superficie media de la lámina. En condiciones ideales ( $\mathbf{X}^I$  indica coordenadas originales)

<i>Punto</i>	<i>Posición</i>	
1	$\mathbf{X}^1 = \mathbf{X}^K - \frac{{}^o h}{2} {}^o \mathbf{t}_3^{k(M)}$	
2	$\mathbf{X}^2 = \mathbf{X}^K + \frac{{}^o h}{2} {}^o \mathbf{t}_3^{k(M)}$	(6.3)
3	$\mathbf{X}^3 = \mathbf{X}^L + \frac{{}^o h}{2} {}^o \mathbf{t}_3^{k(M)}$	
4	$\mathbf{X}^4 = \mathbf{X}^L - \frac{{}^o h}{2} {}^o \mathbf{t}_3^{k(M)}$	

donde debido a una posible curvatura inicial la normal a la lámina en el contorno  ${}^o \mathbf{t}^s$  (medido en el sólido) no coincide con la normal al elemento de lámina  ${}^o \mathbf{t}_3^{k(M)}$ .

Naturalmente los desplazamientos incrementales y/o virtuales responden a las expresiones similares

$$\delta \mathbf{u}^K = a_{K1} \delta \mathbf{u}^1 + a_{K2} \delta \mathbf{u}^2 \quad (6.4)$$

$$\delta \mathbf{u}^L = a_{L3} \delta \mathbf{u}^3 + a_{L4} \delta \mathbf{u}^4 \quad (6.5)$$

De esta forma las fuerzas nodales equivalentes de los nudos esclavos  $K$  y  $L$  se reparten en función de los coeficientes  $a_{ij}$  sobre los correspondientes nudos maestros.

Lo anterior alcanza para *articular* el elemento de lámina sobre el elemento de sólido. Para *empotrar* uno sobre el otro, esto es, para que haya transmisión de momentos flectores, es necesario evaluar el cambio de ángulo entre la normal  $\mathbf{t}_3^{k(M)}$  al elemento de lámina y la normal  $\mathbf{n}_s$  al cuadrilátero (cara del sólido).

## 6.4. Evaluación de la curvatura

Recordando la expresión que define las curvaturas en el elemento de lámina cuadrilátero

$$\begin{bmatrix} \bar{\kappa}_{11} \\ \bar{\kappa}_{22} \\ 2\bar{\kappa}_{12} \end{bmatrix}^1 = \frac{-1}{{}^oA} \sum_{k=1}^4 l^k \begin{bmatrix} n_1^2 \\ n_2^2 \\ 2n_1n_2 \end{bmatrix}^k \lambda_n^{k(M)} \gamma^k \quad (6.6)$$

Donde al ángulo  $\gamma_i$  resulta de comparar la configuración original con la deformada. Usando la normal al contorno  $\mathbf{n}^{k(M)} = \mathbf{s} \times \mathbf{t}_3^{k(M)}$  y considerando la normal del sólido  $\mathbf{n}_s$  entrante a la cara del mismo, en la configuración original se tendrá un ángulo inicial

$$\cos {}^o\phi_i = {}^o\mathbf{n}^{k(M)} \cdot {}^o\mathbf{n}_s \quad (6.7)$$

$$\sin {}^o\phi_i = -{}^o\mathbf{n}^{k(M)} \cdot {}^o\mathbf{t}^s \quad (6.8)$$

con la notación previa el ángulo  ${}^o\phi_i$  se mide alrededor del lado  $\mathbf{s}$  en dirección antihoraria desde  ${}^o\mathbf{t}_3^{k(M)}$  a  ${}^o\mathbf{t}_3^s$ . Con la misma definición de ángulo sobre la geometría deformada se tiene

$$\cos \phi_i = \mathbf{n}^{k(M)} \cdot \mathbf{n}_s \quad (6.9)$$

$$\sin \phi_i = -\mathbf{n}^{k(M)} \cdot \mathbf{t}^s \quad (6.10)$$

lo cual permite definir a  $\gamma_i$  como el cambio de ángulo

$$\gamma_i = \phi_i - {}^o\phi_i \quad (6.11)$$

La normal entrante al cuadrilátero se requiere en el centro del lado  $C$  (ver Figura 6.2), de coordenadas paramétricas:

$$\xi_c = \frac{1}{2}(\xi_K + \xi_L) \quad \eta_c = 0 \quad (6.12)$$

Usando la habitual interpolación bilineal

$$\mathbf{x}(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^4 N^I(\xi, \eta) \mathbf{x}^I \quad (6.13)$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi}(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^4 N_{\xi}^I(\xi, \eta) \mathbf{x}^I \quad (6.14)$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta}(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^4 N_{\eta}^I(\xi, \eta) \mathbf{x}^I \quad (6.15)$$

las  $N^I(\xi, \eta)$  son las funciones de interpolación bilineal definidas sobre el elemento maestro, cuadrado de lado 2 en  $(\xi, \eta) = [-1..1]$

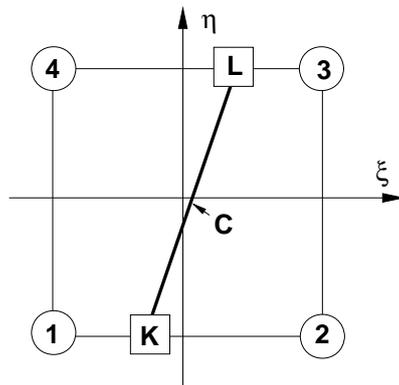
$$N^I(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi^I \xi)(1 + \eta^I \eta) \quad (6.16)$$

$$N_{\xi}^I(\xi, \eta) = \frac{\xi^I}{4}(1 + \eta^I \eta) \quad (6.17)$$

$$N_{\eta}^I(\xi, \eta) = \frac{\eta^I}{4}(1 + \xi^I \xi) \quad (6.18)$$

Luego, la normal  $\mathbf{n}_s$  (saliente a la cara del sólido) resulta de

$$\mathbf{n}_s = \frac{\mathbf{x}'_{\xi} \times \mathbf{x}'_{\eta}}{\|\mathbf{x}'_{\xi} \times \mathbf{x}'_{\eta}\|} \quad (6.19)$$



**Figura 6.2:** Definición de coordenadas paramétricas.

En el caso particular (conveniente y consistente) de que el cuadrilátero

original esté definido por (6.3) en la configuración original se tiene

$$\mathbf{X}'_{\xi} = \frac{1}{4}(-\mathbf{X}^1 + \mathbf{X}^2 + \mathbf{X}^3 - \mathbf{X}^4) = +\frac{{}^o h}{2}\mathbf{t}_3^{k(M)} \quad (6.20)$$

$$\mathbf{X}'_{\eta} = \frac{1}{4}(-\mathbf{X}^1 + \mathbf{X}^2 + \mathbf{X}^3 - \mathbf{X}^4) = +\frac{{}^o l_i}{2}\mathbf{t}_3^{k(M)} \quad (6.21)$$

y ambas normales son exactamente opuestas

$$-{}^o \mathbf{n}_s = {}^o \mathbf{s} \times {}^o \mathbf{t}_3^{k(M)} = {}^o \mathbf{n}^{k(M)} \quad (6.22)$$

En forma más general se puede utilizar el lado  $\mathbf{s}$  y la dirección  $\mathbf{x}'_{\xi}$  en el centro del lado ( $\eta = 0$ ) lo cual da lugar a expresiones sencillas tanto para la configuración original como la deformada

$$\mathbf{s} = \mathbf{x}^K - \mathbf{x}^L \quad (6.23)$$

$$\mathbf{x}'_{\xi} = \frac{1}{4}(-\mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2 + \mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^4) \quad (6.24)$$

## 6.5. Transferencia de fuerzas equivalentes a los momentos

A partir de los esfuerzos flexionales ( $m_{ij}$ ) se calculan las fuerzas nodales equivalentes ( $\mathbf{r}^I$ ) usando las expresiones habituales de la formulación del elemento de lámina, como si el lado estuviese empotrado, y luego se procede de la siguiente manera:

1. A partir del tensor de momentos en el elemento, se calculan las componentes de momento flector y torsor en las direcciones locales al borde

$$m_n = m_{11}n_1^2 + m_{22}n_2^2 + 2m_{12}n_1n_2 \quad (6.25)$$

$$m_s = (m_{22} - m_{11})n_1n_2 + m_{12}(n_1^2 - n_2^2) \quad (6.26)$$

$$\begin{bmatrix} m_n \\ m_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1^2 & n_2^2 & 2n_1n_2 \\ -n_1n_2 & n_1n_2 & n_1^2 - n_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{22} \\ m_{12} \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

donde  $(n_1, n_2)$  son las componentes cartesianas locales de la normal al lado

2. De las fuerzas nodales equivalentes previamente calculadas  $\mathbf{r}$ , se eliminan las asociadas al momento torsor. Estas fuerzas son un par aplicado en los nudos  $K$  y  $L$  en la dirección normal al elemento  $\mathbf{t}_3^{k(M)}$  de valor igual al momento  $m_s$

$$\bar{\mathbf{r}}^K = \mathbf{r}^K - m_s \mathbf{t}_3^{k(M)} \quad (6.28)$$

$$\bar{\mathbf{r}}^L = \mathbf{r}^L - m_s \mathbf{t}_3^{k(M)} \quad (6.29)$$

El objetivo es reemplazar las fuerzas normales al plano de la lámina que aparecen en la teoría de Kirchhoff (asociadas a una parte del corte efectivo) por fuerzas paralelas al plano de la lámina que coincidan con la dirección de las tensiones que producen el momento torsor

3. Se definen cuatro puntos ficticios ubicados a una distancia  $\pm \frac{h}{2} \mathbf{t}_3^{k(M)}$  sobre y bajo los puntos  $K$  y  $L$  del lado en los cuales se ubican las siguientes fuerzas (estáticamente equivalentes al momento flector y torsor)

<i>Punto</i>	<i>Posición</i>	<i>Fuerza <math>\mathbf{f}</math></i>
1'	$\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^K - \frac{h}{2} \mathbf{t}_3^{k(M)}$	$-\frac{ol_s}{2h} (m_n \mathbf{n}_s + m_s \mathbf{s})$

(6.30)

2'	$\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^K + \frac{h}{2} \mathbf{t}_3^{k(M)}$	$+\frac{ol_s}{2h} (m_n \mathbf{n}_s + m_s \mathbf{s})$
----	---	--

(6.31)

3'	$\mathbf{x}^3 = \mathbf{x}^L + \frac{h}{2} \mathbf{t}_3^{k(M)}$	$+\frac{ol_s}{2h} (m_n \mathbf{n}_s + m_s \mathbf{s})$
----	---	--

(6.32)

4'	$\mathbf{x}^4 = \mathbf{x}^L - \frac{h}{2} \mathbf{t}_3^{k(M)}$	$-\frac{ol_s}{2h} (m_n \mathbf{n}_s + m_s \mathbf{s})$
----	---	--

(6.33)

4. Estos cuatro puntos ficticios en principio debieran corresponderse con los puntos 1 – 4. Sin embargo a los fines de una mayor generalidad, no se supone esto último y se proyecta cada punto  $I'$  sobre el cuadrilátero definido por 1 – 4, dando lugar a posiciones  $(\xi_I, n_I)$  con lo cual se transfieren las fuerzas asociada mediante

$$\mathbf{r}_I^N = N^N(\xi_I, n_I) \mathbf{f}^I \quad (6.34)$$

donde las  $N^N(\xi_I, n_I)$  son las habituales funciones de interpolación bilineal y  $\mathbf{r}_I^N$  indica la contribución del nodo ficticio  $I'$  al nudo del sólido  $N$

## 6.6. Implementación en un código implícito y explícito

La opción implementada en el modelo explícito sigue los pasos descritos en la sección anterior, donde la normal  $\mathbf{n}_s$  al plano de empotramiento se actualiza paso a paso en función de las coordenadas de los nudos 1 – 4. Para la implementación en el modelo implícito es necesario además de lo anterior evaluar las fuerzas nodales equivalentes en función de la variación de dicha normal.

La contribución del lado coincidente con el sólido a la variación de las curvaturas se obtiene de la siguiente manera

$$\delta \begin{bmatrix} \bar{k}_{11} \\ \bar{k}_{22} \\ 2\bar{k}_{12} \end{bmatrix}^1 = \frac{-1}{oA} \sum_{k=1}^4 l^k \begin{bmatrix} n_1^2 \\ n_2^2 \\ 2n_1n_2 \end{bmatrix}^k \delta (\lambda_n^{k(M)} \gamma^k) \quad (6.35)$$

lo cual requiere determinar

$$\delta (\lambda_n^{k(M)} \gamma^k) = \delta \lambda_n^{k(M)} \gamma^k + \lambda_n^{k(M)} \delta \gamma^k \quad (6.36)$$

El primer término tiene una influencia menor en las ecuaciones de equilibrio y puede en general despreciarse. El segundo término es la variación del ángulo entre  $\mathbf{t}_3^{k(M)}$  (normal al elemento) y  $\mathbf{t}^s$  (normal a la cara del sólido), alrededor del lado  $s$

$$\lambda_n^{k(M)} \delta \gamma^k = \lambda_n \mathbf{n}_s \cdot \delta \mathbf{t}^s - \frac{1}{\lambda_n^{k(M)}} \delta \varphi_{\prime n}^{k(M)} \cdot \mathbf{t}_3^{k(M)} \quad (6.37)$$

Recordar que  $\mathbf{x}_{\prime t} \simeq \mathbf{t}^s$  es la "normal" a la lámina medida sobre la cara del sólido. Donde  $\delta \mathbf{x}_{\prime t}$  es la variación de las coordenadas en la dirección  $\mathbf{t}^s$ . Para el caso ideal, la dirección  $\mathbf{t}^s$  en el plano paramétrico coincide con la dirección  $+\xi$

$$\mathbf{t}^s = \frac{1}{\lambda_t} \mathbf{x}_{\prime t} = \frac{-\mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2 + \mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^4}{\|-\mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2 + \mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^4\|} = \frac{4\mathbf{x}_{\prime \xi}}{2h} \quad (6.38)$$

y

$$\frac{1}{\lambda_t} \delta \mathbf{x}_{\prime t} = \frac{1}{2h} (4\delta \mathbf{x}_{\prime \xi}) = \frac{-\delta \mathbf{x}^1 + \delta \mathbf{x}^2 + \delta \mathbf{x}^3 - \delta \mathbf{x}^4}{2h} \quad (6.39)$$

Finalmente (6.37) queda

$$\lambda_n^{k(M)} \delta \gamma^k = \frac{\lambda_n}{\lambda_t} \mathbf{n}_s \cdot \delta \mathbf{x}'_t - \frac{1}{\lambda_n^{k(M)}} \delta \varphi_n^{k(M)} \cdot \mathbf{t}_3^{k(M)} \quad (6.40)$$

La implementación requiere también poder evaluar la matriz  $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_m, \mathbf{B}_b]$  en forma completa para el cálculo de la matriz de rigidez material. En el caso más general hay que considerar la posibilidad que dos lados del elemento estén asociados a elementos de sólidos (equina), sin embargo un mismo elemento no tendrá simultáneamente un lado sobre arista y un lado ramificado.

Los pasos a seguir son los siguientes:

1. determinar el tamaño de  $\mathbf{B}$  y ordenar las conectividades
2. calcular  $\mathbf{B}_m$  y con los factores correspondientes transferir los nudos en aristas a los nudos maestros
3. calcular  $\mathbf{B}$  con los lados sobre aristas como si estuvieran empotrados y con los factores correspondientes transferir los nudos en aristas a los nudos maestros.
4. Calcular las componentes asociados al segundo término de la expresión (6.40).

# Capítulo 7

## Problemas Lineales

### 7.1. Introducción

En este capítulo se da inicio a una serie de ejemplos numéricos con motivos de mostrar las capacidades del elemento de lámina propuesto en el rango lineal elástico. Para los esquemas de estabilización membranal y flexional se han utilizado (salvo indicado expresamente) los coeficientes  $s_m = 0,015$  y  $s_b = 0,05$  respectivamente. Dichos valores serán adoptados por defecto para todos los ejemplos numéricos incluidos en este capítulo y en los subsiguientes. El elemento *BBSQ* ha sido implementado en el código implícito ALPHA (2010) y en el código STAMPACK (2006) con integración explícita de las ecuaciones de movimiento. En los ejemplos numéricos desarrollados en este capítulo y en los subsiguientes se utilizan con fines comparativo los siguientes elementos

- Elemento cuadrilátero de 4 nudos *S4R* presente en el programa ABAQUS (2006). El elemento es deformable por corte con 5 GdL por nudo. Este elemento se incluye a los fines de realizar comparaciones con un elemento finito estándar (esto es, que incluya rotaciones) de amplia utilización.
- Elemento *S4* (Brunet y Sabourin (2006)). La formulación utiliza una parcela de cinco cuadriláteros. La formulación presentada implica una integración paso a paso de las deformaciones dentro de un sistema corrotacional, una formulación Lagrangeana Actualizada y una relación constitutiva hipoelástica.
- Elemento *LBST* estándar (Flores y Oñate (2001)). El gradiente en el

contorno del elemento es el promedio de los gradientes de los elementos adyacentes.

- Elemento *BBST* (Flores y Oñate (2007)). El gradiente normal al contorno del elemento es el promedio ponderado de los gradientes de los elementos adyacentes. El peso de cada contribución es inversamente proporcional al área de cada elemento.
- Elemento *QUAD* (Simo et al. (1990)). Elemento cuadrilátero bilineal con deformaciones transversal por corte con 5 GdL por nudo. Los resultados numéricos obtenidos con este elemento se utiliza en varios ejemplos como referencia numérica.

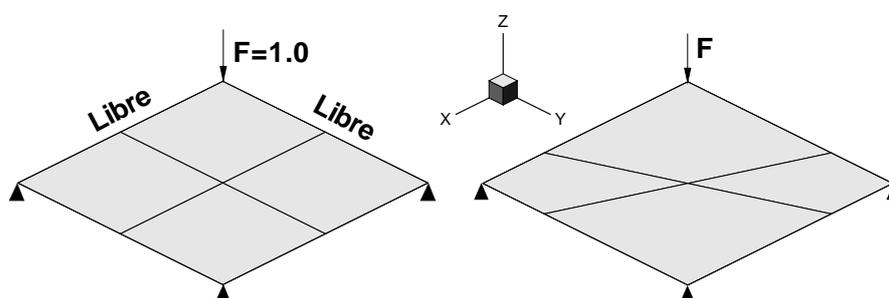
En varias ocasiones también se mostrarán los resultados obtenidos con el elemento *BSQ* (Flores y Estrada (2007)), de características similares al *BBSQ*, para el tratamiento de superficies suaves.

## 7.2. Prueba de la parcela

El comportamiento membranar naturalmente pasa la prueba de la parcela pues se utiliza una interpolación isoparamétrica. Para el comportamiento a flexión, la formulación no permite momentos como cargas nodales debido que el elemento no tiene GdL rotacional, por lo tanto no es posible fijar un estado de carga que conduzca a un estado de momentos flectores constantes sobre toda la parcela. Sí es posible establecer un estado de carga asociado a un momento torsor constante. Dicho estado se impone a través de una carga puntual aplicada en la esquina de un rectángulo con el resto de las esquinas simplemente apoyadas. La Figura 7.1 muestra dos tipos de mallas estructuradas posibles, una regular y otra irregular. Con mallas regulares el elemento pasa exactamente la prueba de la parcela, pero no la pasa estrictamente para los casos de mallas irregulares, aunque los resultados numéricos convergen rápidamente a la solución correcta. Esto puede apreciarse en la Tabla 7.1 donde se muestran los desplazamientos verticales del punto de aplicación de la carga, normalizados respecto al valor correcto. Se comparan los resultados con los obtenidos con el elemento *BSQ* y *S4* para ambos tipos de mallas e igual cantidad de grados de libertad. Este ejemplo no muestra diferencias significativa entre una formulación y otra.

No. de elementos	Malla regular			Malla irregular		
	<i>BBSQ</i>	<i>BSQ</i>	<i>S4</i>	<i>BBSQ</i>	<i>BSQ</i>	<i>S4</i>
4	1,0000	1,0000	1,0000	0,9990	0,9827	1,0650
16	1,0000	1,0000	1,0000	0,9870	0,9879	0,9945
64	1,0000	1,0000	1,0000	0,9949	0,9954	0,9969
256	1,0000	1,0000	1,0000	0,9985	0,9985	0,9990

**Tabla 7.1:** Prueba de la parcela flexional ( $M_{12}$  constante). Desplazamientos normalizados del punto bajo la carga.



**Figura 7.1:** Mallas de elementos finitos para la prueba de la parcela a torsión uniforme.

### 7.3. Placas cuadradas

En este caso se considera el análisis de placas cuadradas bajo carga uniforme y bajo una carga puntual en el centro con condiciones de borde empotrado y simplemente apoyado. El objetivo es estudiar la convergencia de la parte flexional. En todos los casos se discretiza sólo un cuarto de placa debido a la simetría y se usan mallas estructuradas regulares. En las Tablas 7.2 y 7.3 se muestran los valores normalizados de los desplazamientos verticales del punto central de la placa para las distintas condiciones de bordes y de carga.

Los resultados muestran una convergencia satisfactoria. Por ejemplo, para el caso de placa simplemente apoyada (s.a.) bajo carga uniforme, para un número de GdL de 64 el error es del orden del 1,10% lo cual es aceptable si se tiene en cuenta que los elementos poseen únicamente GdL traslacional (la tercera parte de los GdL de un elemento estándar de placa plana) y que se está usando un solo punto de integración. En el caso de bordes empotrados se ha observado que se activa el modo espurio de flexión, lo que hace imprescindible usar un coeficiente de estabilización flexional. Para el caso de la carga puntual

No. de GdL	Carga uniforme	
	s.a.	empotrado
	$s_b = 0,05$	$s_b = 0,05$
4	1,1392	2,6252
16	1,0416	1,5044
64	1,0104	1,1388
256	1,0025	1,0325
1024	1,0007	1,0095

**Tabla 7.2:** Desplazamientos normalizados del punto central de la placa cuadrada bajo carga uniforme.

No. de GdL	Carga puntual			
	s.a.	empotrado		
	$s_b = 0,05$	$s_b = 0,25$	$s_b = 0,05$	$s_b = 0,01$
4	1,8741	2,9429	2,9700	2,9767
16	1,3285	1,7519	1,7678	1,7804
64	1,0974	1,2102	1,2339	1,2514
256	1,0268	1,0520	1,0645	1,0724
1024	1,0070	1,0113	1,0181	1,0209

**Tabla 7.3:** Desplazamientos normalizados del punto central de la placa cuadrada bajo carga puntual.

con bordes empotrados se incluyen resultados obtenidos con diferentes valores de  $s_b$  con una relación de 5 entre ellos. Allí puede observarse la baja sensibilidad de los desplazamientos medidos con respecto al coeficiente  $s_b$ .

## 7.4. Placa rómbica

Este ejemplo se utiliza habitualmente para observar el comportamiento del elemento al distorsionar su forma. Una placa rómbica con dos de sus extremos s.a. y los restantes libres es sometida a una carga transversal uniforme  $q$ . La placa tiene todos sus lados de igual longitud 1 y una inclinación de  $60^\circ$  medido desde el eje horizontal. La Tabla 7.4 muestra el desplazamiento vertical del punto central de la placa. Los resultados se comparan con los obtenidos con el elemento  $BSQ$  y  $S4$  y se han normalizado respecto a la solución teórica obtenida por Razzaque (1973) con  $w = 0,007945q/D$  donde  $D$  es la rigidez flexional de

No. de GdL	<i>BBSQ</i>	<i>BSQ</i>	<i>S4</i>
4	2,0877	2,0559	2,1498
16	1,1662	1,1851	1,2029
64	1,0154	1,0248	1,0306
256	0,9908	0,9987	1,0008
1024	0,9940	0,9946	0,9960

**Tabla 7.4:** Desplazamiento vertical del punto central.

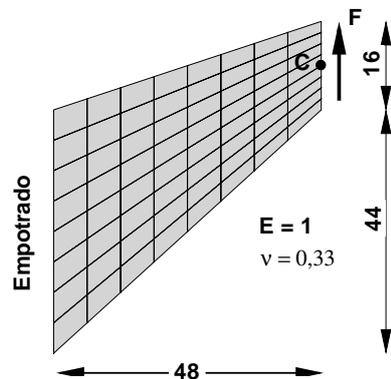
la placa. El elemento *BBSQ* presenta buena convergencia y tampoco en este caso hay diferencias significativas con el elemento *S4*.

## 7.5. Barra de Cook

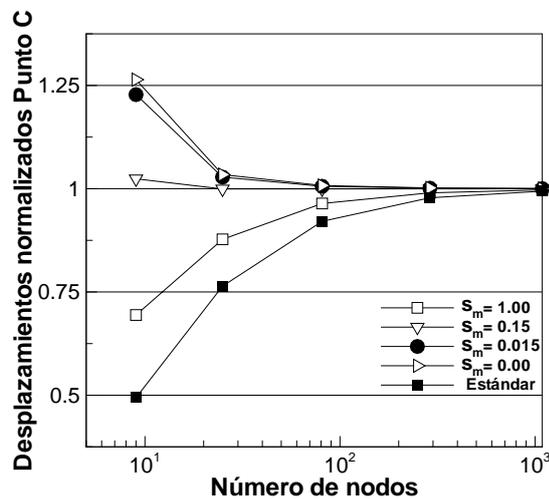
Este problema puramente membranar se incluye para estudiar el esquema de estabilización membranar propuesto. Este ejemplo contiene una cantidad importante de energía de corte y también distorsión en el elemento. La Figura 7.2a muestra la geometría de la barra empotrada en uno de sus extremos y un esfuerzo de corte distribuido en el extremo libre. En la Figura 7.2b se muestra el desplazamiento vertical normalizado del punto *C* (punto medio del extremo libre) en función del número de nodos para diferentes valores del coeficiente de estabilización membranar  $s_m$ . Los resultados obtenidos con el elemento bilineal estándar con cuatro puntos de integración se incluyen como referencia. Se puede ver que para mallas más finas los resultados convergen al valor esperado para cualquier valor de  $s_m$ . Para el ejemplo un valor de  $s_m = 0,15$  es óptimo, sin embargo, se adopta como valor de coeficiente membranar  $s_m = 0,015$  y es el adoptado por defecto para los ejemplos numéricos.

## 7.6. Viga torsionada a 90°

En este caso se analiza una viga empotrada torsionada a 90° bajo una carga puntual aplicada en el extremo libre. Este ejemplo se utiliza frecuentemente para evaluar la correcta integración en el espesor de elementos basados en la aproximación de *sólido degenerado*. Se consideran dos casos, uno con la carga normal a la lámina y otro con la carga aplicada en el plano de la misma. Se han



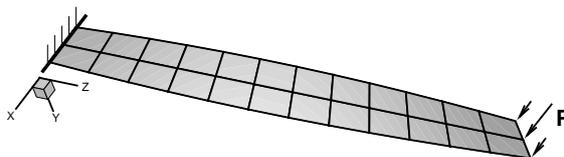
(a)



(b)

Figura 7.2: Barra de Cook. Prueba membranal.

analizado dos mallas una gruesa de  $12 \times 2$  y una fina de  $48 \times 8$  elementos. La longitud de la viga es de 12, el ancho 1,1, en tanto que el módulo elástico es  $E = 2,9 \times 10$  y relación de Poisson es  $\nu = 0,22$ . El espesor es  $h = 0,32$ . En la Figura 7.3 se muestra la geometría de la viga y la malla más gruesa con  $12 \times 2$  elementos. Así, en la Tabla 7.5 y 7.6 se muestran los valores normalizados de los desplazamientos del punto de aplicación de la carga según la dirección de la fuerza sea saliente o colineal al plano de la viga, respectivamente. Se comparan con los resultados obtenidos con los elementos *BSQ*, *BBST*, *S4* y *S4R*. Los valores están normalizados respecto a la solución analítica de  $1,754 \times 10^{-3}$  para el desplazamiento fuera del plano y  $5,424 \times 10^{-3}$  para el desplazamiento en el plano.



**Figura 7.3:** Viga Torsionada a 90°. Malla de 12 × 2 elementos.

Nótese que el error para la malla de 48 × 8 elementos es del orden del 0,17% para la dirección de la carga normal al plano y del 0,55% en la dirección del plano. Además si se compara con un elemento como el *S4R* donde se tiene el doble de GdL por nudo que el elemento propuesto, los resultados son satisfactorios. Si se compara los resultados obtenidos con el *BBSQ* y los obtenidos con el *S4* las diferencias son ahora significativas. Por ejemplo, para la malla de 48 × 8 el error de la solución obtenida con el elemento *S4* es del 4,5% que es mayor al error obtenido con el elemento *BBSQ*. Otro aspecto que debe notarse es que al pasar de la malla gruesa a la fina todos los elementos se acercan notoriamente a la solución de referencia salvo el *S4* que mantiene errores del orden del 5%.

Malla	Lámina gruesa				
	Normal al plano				
	<i>BBSQ</i>	<i>BSQ</i>	<i>BBST</i>	<i>S4</i>	<i>S4R</i>
12 × 2	1,0982	1,0661	1,0787	0,9742	0,9918
48 × 8	1,0017	0,9889	0,9960	1,0551	0,9991

**Tabla 7.5:** Desplazamientos normalizados fuera del plano.

Malla	Lámina gruesa				
	En el plano				
	<i>BBSQ</i>	<i>BSQ</i>	<i>BBST</i>	<i>S4</i>	<i>S4R</i>
12 × 2	1,0064	1,0088	1,0046	1,1661	1,0029
48 × 8	0,9945	0,9947	0,9906	0,9453	0,9986

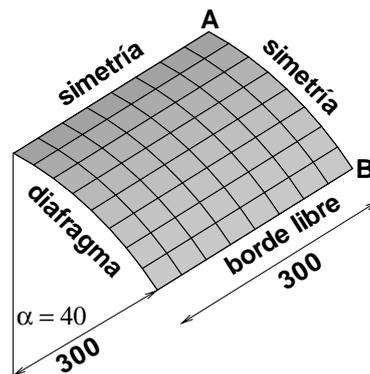
**Tabla 7.6:** Desplazamientos normalizados en el plano.

Malla	Punto A			
	<i>BBSQ</i>	<i>BSQ</i>	<i>LBST</i>	<i>S4R</i>
$4 \times 4$	1,3896	1,3307	0,7401	1,2101
$8 \times 8$	1,0823	1,0756	0,8849	1,0531
$16 \times 16$	1,0186	1,0189	0,9652	1,0154
$32 \times 32$	1,0041	1,0050	0,9910	1,0074

**Tabla 7.7:** Desplazamientos normalizados.

## 7.7. Techo cilíndrico

En la Figura 7.4 se muestra la geometría de este ejemplo ampliamente utilizado para evaluar elementos de lámina debido al complejo estado membranal resultante. El techo cilíndrico, de espesor  $h = 3,0$  cargado por su peso propio  $w = 0,625$  por unidad de área, está soportado por dos diafragmas rígidos en sus extremos. Las propiedades elásticas del material utilizado son: módulo de Young  $E = 3 \times 10$  y coeficiente de Poisson  $\nu = 0,0$ . Únicamente un cuarto del techo se modela debido a la simetría. En la Tabla 7.7 y Tabla 7.8 se muestra los desplazamientos verticales normalizados para los puntos *A* y *B* indicados en la Figura 7.4, se incluyen los valores obtenidos con los elementos *BSQ*, *LBST* y *S4R*. Los valores exactos usados para normalizar los resultados son  $u_A = 0,5407$  y  $u_B = -3,610$  los cuales fueron tomados de la Referencia (Huang (1989))



**Figura 7.4:** Techo cilíndrico bajo peso propio.

Los resultados muestran una convergencia satisfactoria y el error obtenido es ya ingenierilmente aceptable para 800 GdL. Si se compara con los resultados obtenidos con el elemento triangular sin rotaciones que membranalmente es de deformación constante (*LBST*) para la misma cantidad de GdL el error

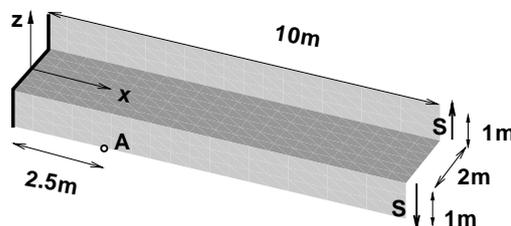
Malla	Punto <i>B</i>			
	<i>BBSQ</i>	<i>BSQ</i>	<i>LBST</i>	<i>S4R</i>
$4 \times 4$	1,2119	1,2058	0,7559	1,1905
$8 \times 8$	1,0488	1,0479	0,8827	1,0460
$16 \times 16$	1,0110	1,0112	0,9639	1,0122
$32 \times 32$	1,0019	1,0022	0,9899	1,0049

**Tabla 7.8:** Desplazamientos normalizados.

obtenido con el *BBSQ* es menor. Los resultados correspondientes al elemento triangular pueden verse en el trabajo de Flores y Oñate (2001) y corresponden a la malla A mostrada en dicho trabajo. Así con el *BBSQ* se obtienen errores del 1.9% para el punto *A* y del 1.1% para el punto *B*, en tanto que para el elemento *LBST* se obtiene un error del orden del 3.5%.

## 7.8. Viga empotrada de sección Z

Este es un benchmark recomendado por NAFEMS (1990). Corresponde a una viga en voladizo de sección abierta en forma de Z sometida a un momento torsor de 1,2 MNm aplicado en el extremo libre. El momento torsor se aplica por dos fuerzas de corte de 0,6 MN uniformemente distribuidas sobre cada ala (ver Figura 7.5). El material es elástico lineal con un módulo de elasticidad de  $E = 210$  GPa y una relación de Poisson  $\nu = 0,3$ . El espesor de la lámina es de  $t = 0,1$  m. La solución objetivo es la tensión axial  $\sigma_{xx} = -108$  MPa en la superficie media del punto *A*.



**Figura 7.5:** Viga empotrada de sección Z. Geometría.

Se han considerado dos mallas, una gruesa con 24 (8 en la dirección longitudinal y 1 por cada tramo en la dirección transversal) y una malla fina de 480 elementos (32 en la dirección longitudinal y 5 por tramo en la dirección

transversal). Los valores obtenidos se muestran en la Tabla 7.9. Los valores indicados se obtienen por extrapolación desde los cuatro puntos de Gauss más cercanos al punto  $A$ .

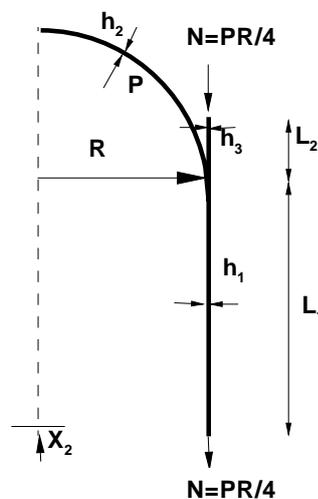
Notar que los resultados obtenidos con el elemento  $S4R$  muestran una convergencia lenta y un error para la malla fina de  $-10\%$  en comparación con el  $2,5\%$  del elemento propuesto. Nótese que en este ejemplo se ve el potencial del  $BBSQ$  que permite tratar una superficie de lámina quebrada con resultados satisfactorios.

Malla	$BBSQ$	$BBST$	$S4R$
Gruesa	$-54,735(-50,7\%)$	$-95,3(-11,8\%)$	$-50,480(-53\%)$
Fina	$-110,69(2,5\%)$	$-106,3(-1,6\%)$	$-96,732(-10\%)$

**Tabla 7.9:** Resultados para la viga de sección Z. Tensiones en la dirección x.

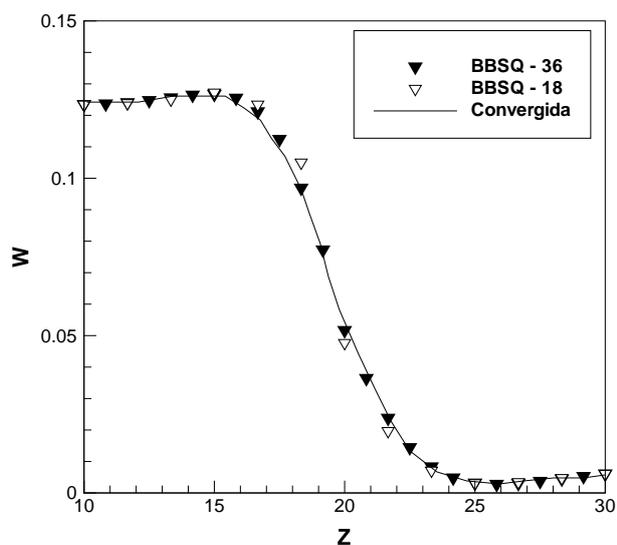
## 7.9. Lámina de revolución ramificada

Este ejemplo corresponde a una lámina de revolución ramificada y tiene por objeto mostrar el comportamiento del elemento  $BBSQ$  cuando más de dos elementos concurren a una arista. La geometría de la lámina se muestra en la Figura 7.6. Los espesores son diferentes en las tres partes que conforman la estructura. El material es isótropo con  $E = 10^7$  y  $\nu = 0,3$ . El domo esférico y el cilindro inferior están sujetos a una presión interna  $P = 1000$ , que es equilibrada por fuerzas iguales aplicadas en los extremos de los cilindros. Únicamente un cuarto de la geometría es discretizada debido a la simetría usando dos tipos de mallas. En ambos casos el domo esférico es modelado con 324 elementos (36 elementos a lo largo de la unión). La malla fina incluye 432 elementos para el cilindro superior 864 para el cilindro inferior, uniformemente espaciado a lo largo del meridiano (12 elementos en el cilindro superior y 24 en la parte superior). La malla pobre tiene exactamente la mitad de elementos y están también uniformemente espaciados a lo largo del meridiano (6 elementos en la parte superior y 12 en la parte inferior).

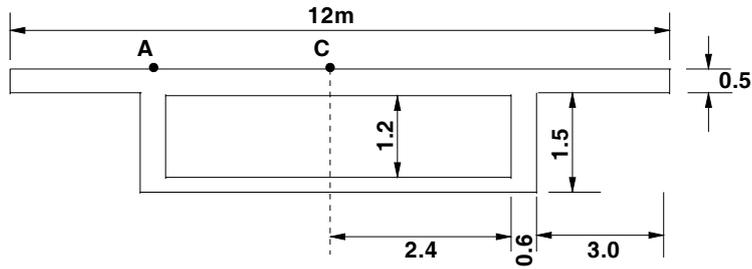


**Figura 7.6:** Lámina ramificada de Krauss. Geometría  $R = 20$ ,  $L_1 = 20$ ,  $L_2 = 10$ ,  $h_1 = 0,3$ ,  $h_2 = 0,4$ , y  $h_3 = 0,5$ .

La Figura 7.7 muestra el desplazamiento normal en la pared del cilindro. Los resultados son comparados con una solución convergida de elementos finitos (Flores y Godoy (1990)) (una solución analítica es posible también). Se puede ver que para la malla pobre la solución numérica tiene un buen acuerdo con la solución convergida.



**Figura 7.7:** Lámina ramificada de Krauss. Desplazamiento normal a lo largo del cilindro.



**Figura 7.8:** Puente recto en cajón bajo carga puntual. Geometría de la sección transversal.  $E = 25$  GPa,  $\nu = 0,15$ ,  $L = 40$  m.

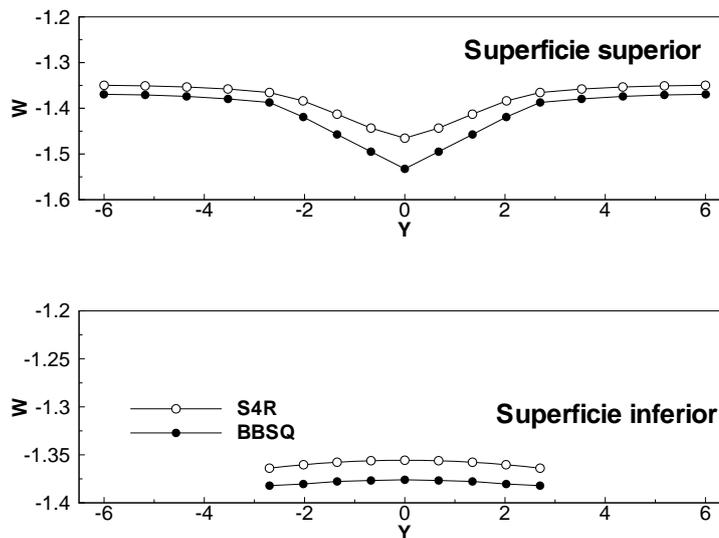
## 7.10. Puente en cajón recto

En este ejemplo se estudia el comportamiento de un puente recto en cajón. En la Figura 7.8 se muestra la sección transversal y las propiedades del material. El puente tiene una longitud total de 40 m y los extremos se suponen restringidos todos los desplazamientos en el plano de la sección y libres los desplazamientos longitudinales. El puente ha sido sometido a una carga puntual  $P = 1000$  kN alternativamente en los puntos  $A$  (borde) y  $C$  (centro). Se discretizó la mitad de la luz con 20 elementos, en tanto que en la sección transversal se han incluido 30 elementos. A los fines comparativos se muestran resultados obtenidos usando el elemento de lámina  $S4R$  sobre las mismas discretizaciones utilizadas para el presente elemento.

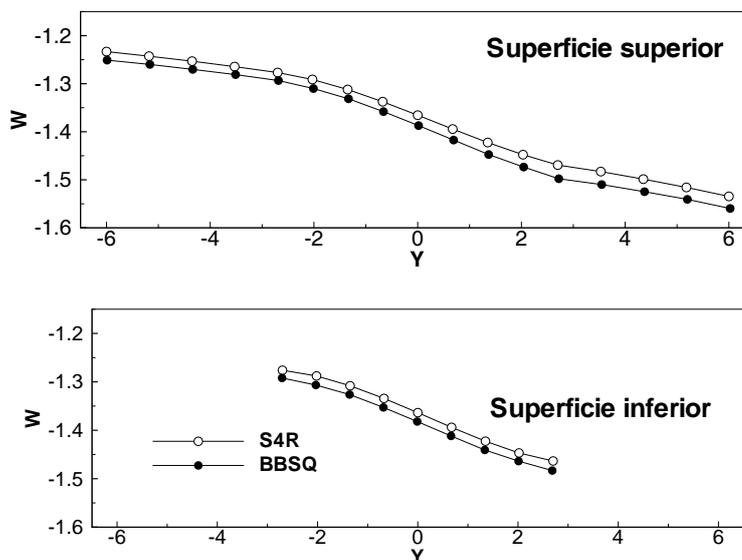
En la Figura 7.9 se presentan los desplazamientos verticales de las superficies superior e inferior de la sección central cuando la carga se aplica en el punto central  $C$ . En la Figura 7.10 los desplazamientos de las superficies superior e inferior cuando la carga se aplica en el punto  $A$ . La comparación con el elemento  $S4R$  de ABAQUS (2003) muestra idéntico patrón de desplazamiento y que el presente elemento es ligeramente más flexible.

## 7.11. Puente curvo de sección celular

En este ejemplo se estudia el comportamiento de un puente celular simplemente apoyado en los extremos (se restringen los desplazamientos en el plano de la sección). La Figura 7.11 muestra la sección transversal y las propiedades del material. El puente se extiende sobre un ángulo de un radián, el radio del puente



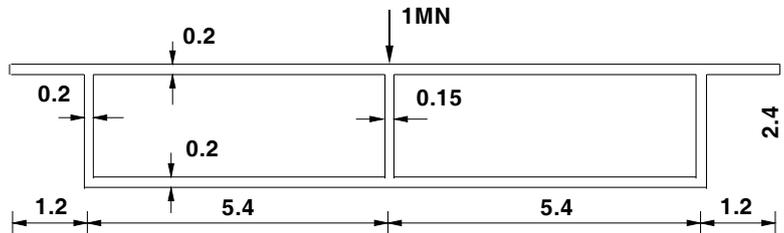
**Figura 7.9:** Puente recto en cajón bajo carga puntual (Punto C). Desplazamiento vertical de la sección central.



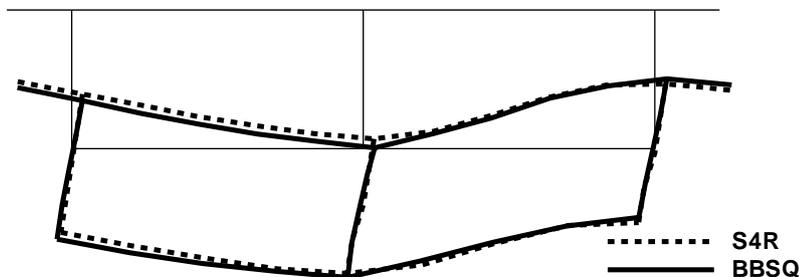
**Figura 7.10:** Puente recto en cajón bajo carga puntual (Punto A). Desplazamiento vertical de la sección central.

es de 30,1 m y en los extremos se suponen restringidos todos los desplazamientos en el plano de la sección y libres los desplazamientos longitudinales. El puente ha sido sometido a una carga puntual  $P = 1000$  kN en el centro. Se discretizó la mitad de la luz con 10 elementos, en tanto que en la sección transversal se han incluido 34 elementos. Se ha comprobado con resultados obtenidos usando elementos de láminas  $S4R$  (cuadriláteros de cuatro nudos) sobre las mismas

discretizaciones usadas para el presente elemento. En la Figura 7.12 se muestra la deformada de la sección central para las dos mallas; los resultados obtenidos son casi idénticos a los obtenidos con el elemento *S4R*.



**Figura 7.11:** Puente curvo celular bajo carga puntual: (a) geometría de la sección transversal.  $E = 25$  GPa,  $\nu = 0,15$ ,  $R = 30,1$  m,  $\beta = 1$  rad.



**Figura 7.12:** Puente curvo celular bajo carga puntual: deformada de la sección central.

## 7.12. Discusión de Resultados

En este capítulo se mostró diferentes ejemplos en el rango lineal elástico. Se empezó por la prueba de la parcela y se mostró que el elemento pasa dicha prueba para mallas regulares. Sin embargo, para mallas irregulares no supera la prueba numérica pero muestra una clara convergencia al refinar la malla. Se analizaron distintos casos de placa para diferentes casos de carga y condiciones de borde y se estudió la sensibilidad de los resultados al variar los coeficientes de estabilización flexional. Se cotejó que para mallas medias a finas los resultados son prácticamente independientes del valor adoptado para dicho coeficiente. Se analizó un ejemplo puramente membranial (barra de Cook) y los resultados mostraron convergencia al valor esperado para las mallas finas. Entre otros ejemplos, se resolvieron varios casos de láminas con superficies quebradas y ramificadas con una adecuada precisión, permitiendo resolver casos

---

interesantes de la ingeniería estructural. El *BBSQ* mejora las capacidades del *BSQ* al poder abordar casos con geometrías arbitrarias. El elemento *BBSQ* mostró ser competitivo respecto de las formulaciones difundidas y aceptadas en la práctica ingenieril, como así también, frente a formulaciones de características similares al elemento propuesto. Veremos en el siguiente capítulo, al abordar los problemas no lineales, la verdadera capacidad de la formulación propuesta.



# Capítulo 8

## Problemas No Lineales

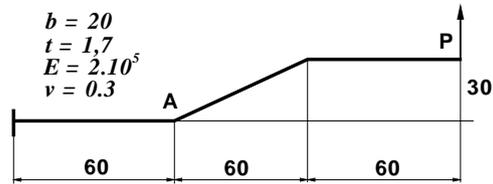
### 8.1. Introducción

Damos inicio aquí a la simulación numérica de problemas no lineales. El elemento *BBSQ* fue pensado y creado básicamente para abordar los problemas que incluyan rango no lineales, sean estos de material y/o geométricos. La idea del capítulo es mostrar que, sobre un amplio abanico de situaciones o problemas ingenieriles, el *BBSQ* tiene la capacidad de dar soluciones correctas y competitivas frente a otras formulaciones que están aceptadas en la práctica ingenieril. Así se comparan los resultados numéricos obtenidos con la formulación presentada en esta tesis con datos experimentales y/o datos numéricos. Estos últimos corresponden a algunos de los elementos de láminas enunciados en el Capítulo 7 entre ellos el *S4R*, *S4*, *LBST*, *BBST* y *QUAD*. Así mismo, se compara en algunos ejemplos los resultados numéricos obtenidos con el *BSQ* con el fin de mostrar las mejoras del *BBSQ*.

### 8.2. Viga empotrada con forma de Z

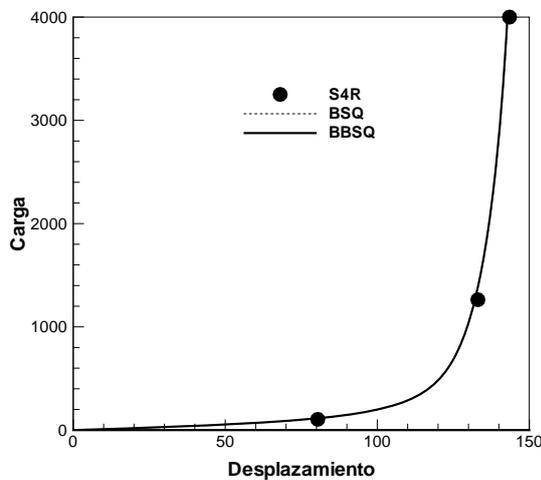
Este ejemplo es propuesto como un benchmark en NAFEMS (1993). Se trata de un voladizo en forma de Z sometido a una carga conservativa en el extremo libre. Este ejemplo se utiliza para evaluar el comportamiento con grandes desplazamientos y grandes rotaciones, acciones membranales y flexionales, rigidización por tracción y cambio de signo del momento. La Figura 8.1

muestra la geometría original y la carga.



**Figura 8.1:** Viga empotrada en forma de Z. Geometría.

Se ha utilizado una malla de  $2 \times 36$  elementos. En la Figura 8.2 se representa el desplazamiento del punto de aplicación de la carga versus la carga, y en la Figura 8.3 el momento flector en el punto *A* versus la carga. Los resultados se comparan con los obtenidos con el elemento *BSQ* y *S4R*. El momento flector corresponde al calculado en el punto de Gauss adyacente al punto *A*. Los resultados muestran una muy buena concordancia con los valores esperados para la malla utilizada. Nótese que el elemento *BSQ* logra captar los resultados numéricos con bastante precisión a pesar de la geometría quebrada. Sin embargo, para una geometría con quiebres más pronunciado dicha formulación es deficiente.



**Figura 8.2:** Viga Z empotrada: carga versus desplazamiento.

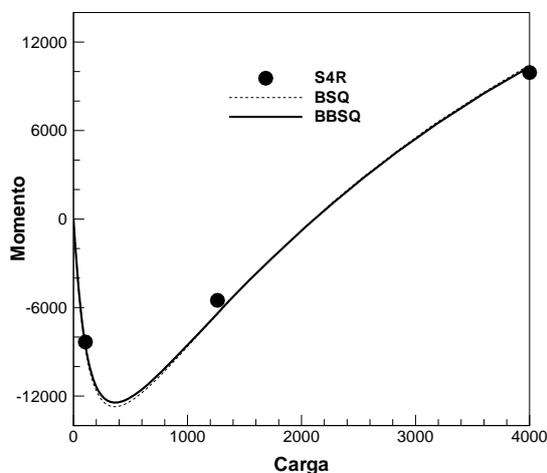
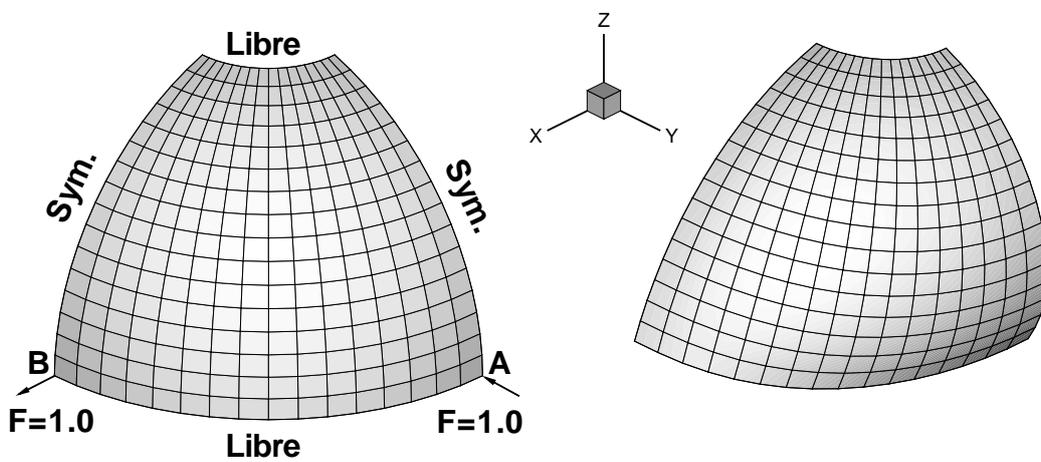


Figura 8.3: Viga Z empotrada: momento flector en A versus carga.

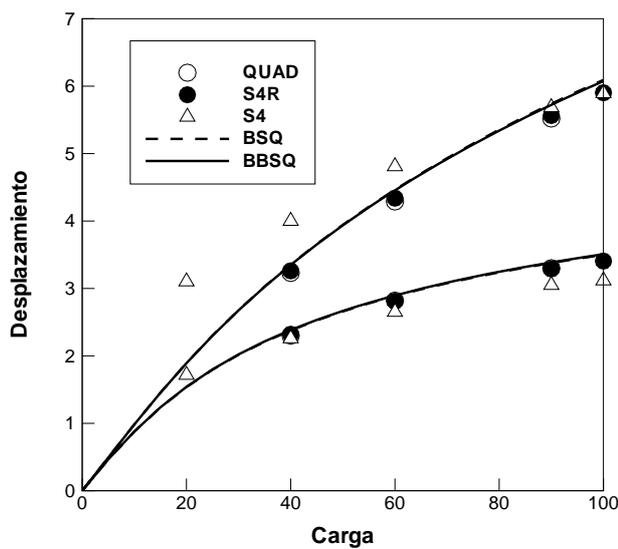
### 8.3. Casquete esférico con cargas puntuales

Este ejemplo es utilizado para evaluar el comportamiento de los elementos de láminas con curvatura inicial ante posibles problemas de bloqueo membranar. La geometría consiste en un casquete esférico de radio  $r = 10$  y un espesor  $h = 0,04$  con un agujero de  $18^\circ$  en su polo cuyo borde se encuentra libre al igual que su borde inferior. Por simetría se modela un cuarto del casquete el cual está sometido a un par de fuerzas una entrante y la otra saliente. Las propiedades elásticas del material son  $E = 6,825 \times 10^7$  y  $\nu = 0,3$ . En la Figura 8.4a se muestra la geometría deformada de la malla con 256 elementos para un factor de carga igual  $\lambda = 100$ . En la Figura 8.4b se muestra el desplazamiento del punto de aplicación de la carga en función del factor de carga y se compara con resultados obtenidos con el elemento  $S4$ , con el elemento  $S4R$  y los publicados en Simo et al. (1990) usando un cuadrilátero incluyendo deformaciones de corte transversal  $QUAD$ . Nótese el muy buen acuerdo que se logra con el elemento  $BBSQ$  comparado con los valores de referencia. En este ejemplo se ven importantes diferencias con los obtenidos con el elemento  $S4$  (Brunet y Sabourin (2006)) los cuales difieren notablemente de los valores esperados, en particular para los valores más bajos del factor de carga. En este ejemplo se han considerado además diferentes combinaciones de los coeficientes  $s_m$  y  $s_b$ , incluyendo los valores estándar, a los fines de observar la sensibilidad de los

resultados a tales coeficientes. En la Figura 8.5a se presenta el desplazamiento normalizado del punto  $A$  para un factor de carga  $\lambda = 100$  para diferentes valores de  $s_m$ , mientras que en la Figura 8.5b se muestran los valores para diferentes valores del coeficiente flexional  $s_b$ . Los ejemplos indican que la sensibilidad es importante para mallas muy gruesas, pero que esta se reduce notoriamente al refinar la malla, de tal forma que para una malla razonable ( $16 \times 16$ ) para el tipo de problema la sensibilidad es baja.

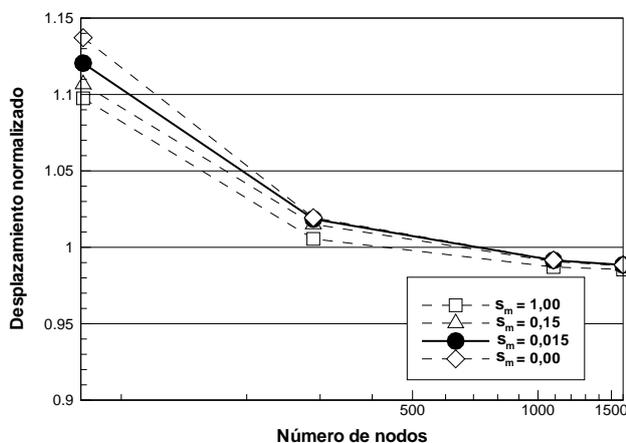


(a)

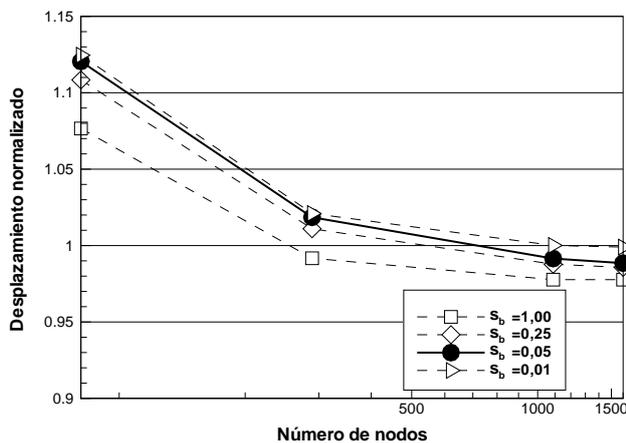


(b)

**Figura 8.4:** Casquete esférico. (a) Geometría y configuración deformada para  $\lambda = 100$ , (b) desplazamiento del punto de aplicación de la carga versus el factor de carga  $\lambda$ .



(a)



(b)

**Figura 8.5:** Casquete esférico. Desplazamientos para  $\lambda = 100$  usando diferentes coeficientes de estabilización con diferentes mallas.

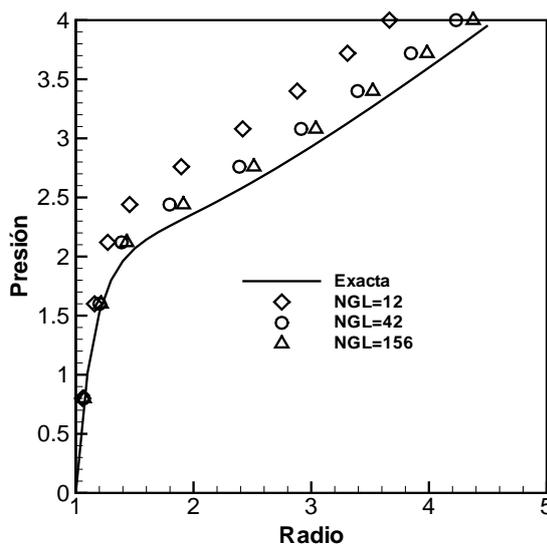
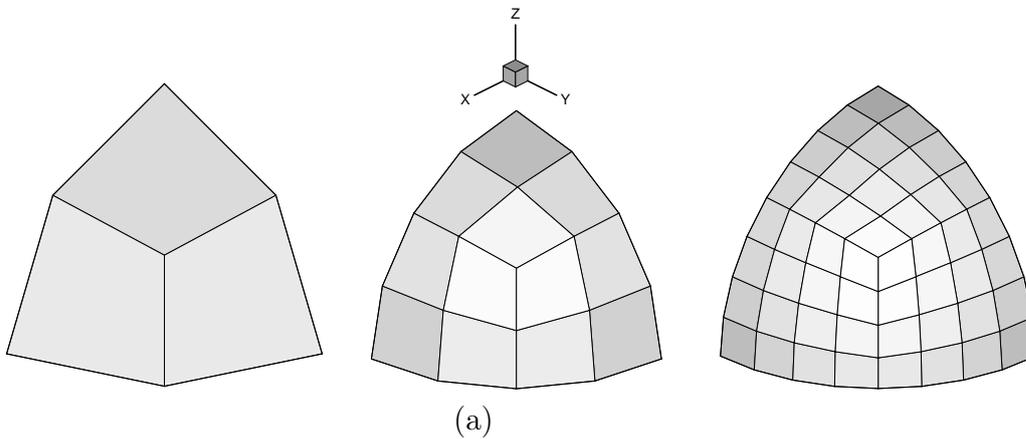
### 8.4. Inflado de una esfera

Este ejemplo ha sido tomado de la Referencia (Needleman (1977)) donde se simula el inflado de una esfera sometida a presión interna. El comportamiento es puramente membranaral pero en grandes deformaciones. Nuevamente la geometría inicial curva permite observar posibles problemas de bloqueo membranaral. En esta simulación numérica se utilizan los datos de la geometría y de los parámetros del material utilizados en la Referencia. (Cirak y Ortiz (2000)). La esfera tiene un radio  ${}^oR = 1$  y un espesor  ${}^oh = 0,02$  en la configuración

inicial. Se considera un material de Mooney-Rivlin con  $\mu_1 = 40$  y  $\mu_2 = -20$ . En la Figura 8.6a se muestran tres mallas de elementos utilizadas para evaluar la convergencia donde por simetría se considera un octavo de la esfera. En la Figura 8.6b se grafica el radio en función de la presión interna para las tres mallas y se incluye la solución analítica

$$p = \frac{{}^o h}{{}^o R \gamma^2} \frac{dW}{d\gamma} = \frac{8 {}^o h}{{}^o R \gamma^2} (\gamma^6 - 1) (\mu_1 - \mu_2 \gamma^2)$$

Se puede ver que con aún pocos grados de libertad se obtienen resultados aceptables. El valor final (presión interna  $p = 4$ ) corresponde a una relación de espesor radio de  $h/R = 0,00024$ .



**Figura 8.6:** Inflado de una esfera con un material de Mooney-Rivlin. (a) Malla de elementos usada en el análisis, (b) radio en función de la presión interna de inflado.

## 8.5. Cilindro en forma de pera

La respuesta a grandes deflexiones del cilindro en forma de pera sometido a un acortamiento uniforme en su extremo fue propuesto en NAFEMS (1993). Las principales características de este benchmark son no linealidad geométrica, comportamiento con pérdida de rigidez al inicio y endurecimiento paulatino hasta alcanzar la carga de pandeo, redistribución de tensiones e interacción entre la respuesta membranal flexional. La Figura 8.7 muestra la definición de la geometría y los datos del material. En este ejemplo se adopta como coeficiente de estabilización flexional  $s_b = 0,1$ . Debido a la simetría, se discretiza un cuarto del cilindro con 1250 elementos *BBSQ*. El acortamiento uniforme en el extremo del cilindro se lleva a cabo controlando el desplazamiento con longitud de arco en 45 pasos (máximo acortamiento es de 0,45).

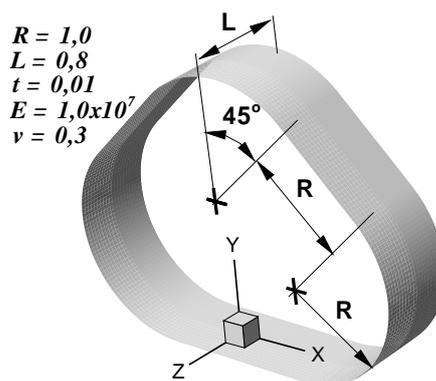
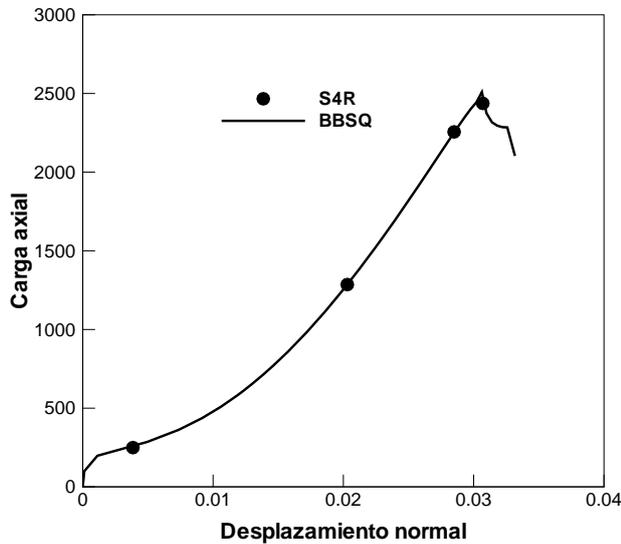


Figura 8.7: Cilindro en forma de pera. Geometría y propiedades del material.

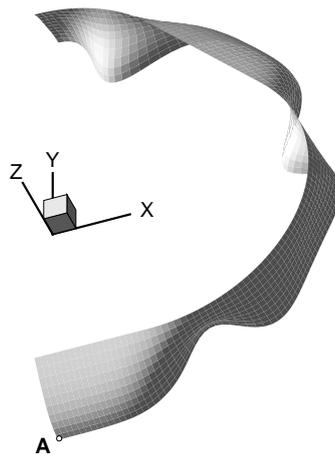
La Figura 8.8a muestra la carga total axial como función del desplazamiento normal del punto *A*, localizado a la mitad del cilindro, sobre el plano de simetría. La Figura 8.8b muestra la configuración deformada cuando se alcanza la carga límite 2433 que se encuentra dentro del rango sugerido de  $2437 \pm 3\%$ . Estos valores se comparan con los valores objetivos obtenidos con el elemento *S4R*.

## 8.6. Cinta en forma de L

La estabilidad de este ejemplo numérico ha sido investigado por numerosos autores (ver por ejemplo Argyris et al. (1979) y Simo et al. (1990) usando



(a)

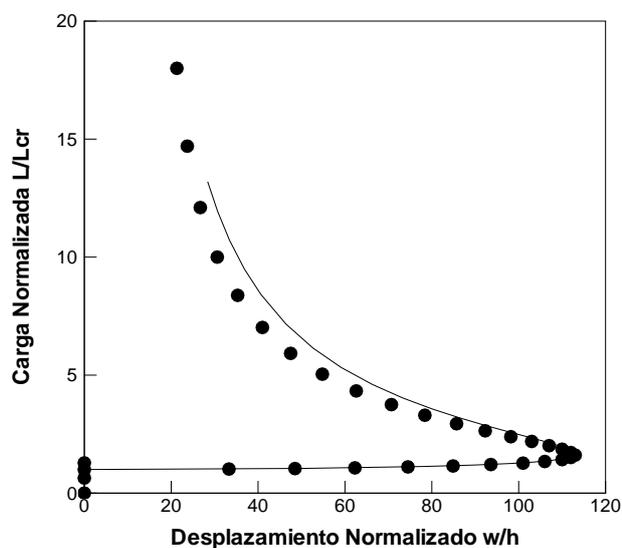


(b)

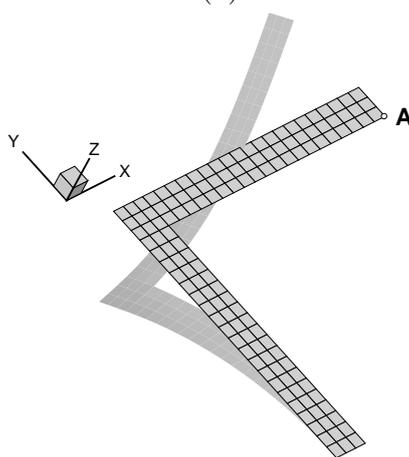
**Figura 8.8:** Cilindro en forma de pera: (a) desplazamiento del punto  $A$  versus la carga axial; (b) deformada para la carga límite 2433.

elementos vigas y de láminas. Las propiedades del material son  $E = 71240$  y  $\nu = 0,3$ ; la longitud total de la cinta es  $l = 240$ , el ancho de la cinta  $b = 30$  y el espesor  $h = 0,6$ . La cinta está sometida a una carga contenida en su plano en el extremo libre. La Figura 8.9a muestra la trayectoria normalizada postcrítica la cual es obtenida a través del método de longitud de arco. Primero se alcanza un punto de bifurcación y luego se produce un cambio de trayectoria siguiendo un camino postcrítico. El valor de la carga crítica es  $\lambda_{cr} = 1,175$ .

Se compara con los resultados obtenidos con elementos triangulares cuadráticos con deformación por corte (34 elementos 510 GdL) (Flores et al. (1995)) con un valor de  $\lambda_{cr} = 1,163$ . El comportamiento del presente elemento es un poco más rígido que el triángulo cuadrático pero tiene mejor propiedades de convergencia. La Figura 8.9b muestra la cinta deformada usando un modelo con 129 elementos.



(a)

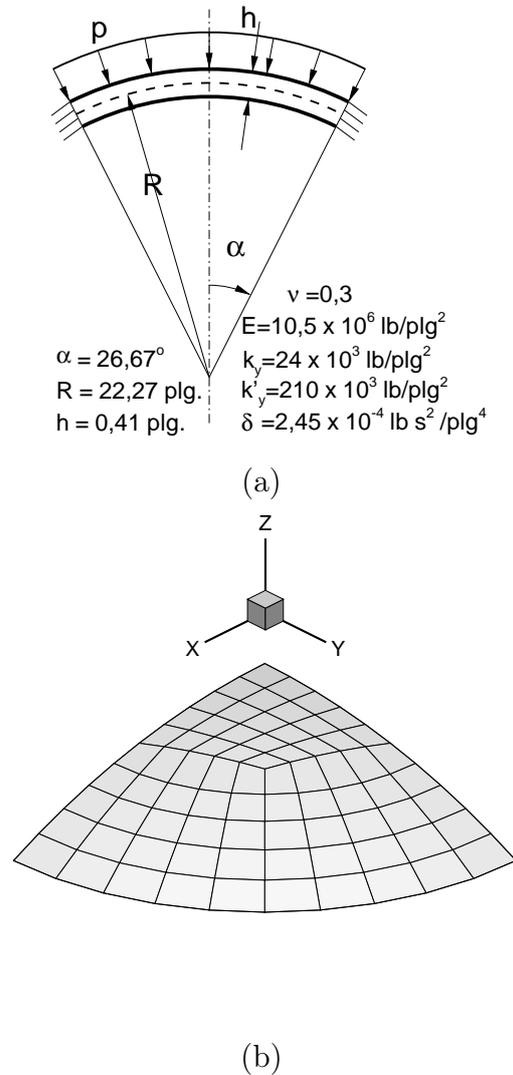


(b)

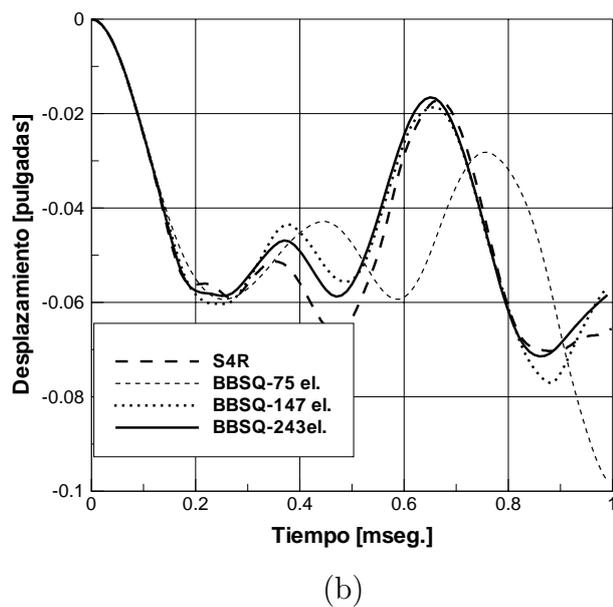
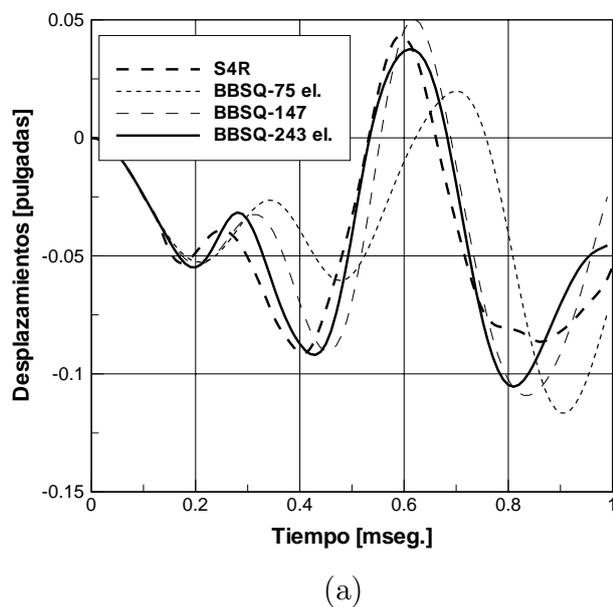
**Figura 8.9:** Cinta en forma de L: (a) desplazamientos normalizados del punto 1 vs. la carga normalizada, (—) triángulo cuadrático, (•) *BBSQ*; (b) geometría y deformada para  $\lambda/\lambda_{cr} = 1,61$

## 8.7. Domo esférico

Otro ejemplo ampliamente utilizado para evaluar la convergencia de elementos de lámina con pequeñas deformaciones elasto-plásticas es un domo esférico empotrado, sometido a una carga escalón. La carga es una presión uniforme de 600 psi y se aplica en la parte superior del domo. Para el análisis se han utilizados tres mallas de 75, 147 y 243 elementos, de las cuales se muestra la mas gruesa en la Figura 8.10 donde además se indican los parámetros geométrico y del material. Se considera un cuarto del domo por simetría y se realizan separadamente un análisis elástico y un análisis elasto-plástico.



**Figura 8.10:** Domo esférico bajo presión impulsiva: (a) parámetros geométricos y del material; (b) malla con 75 elementos.



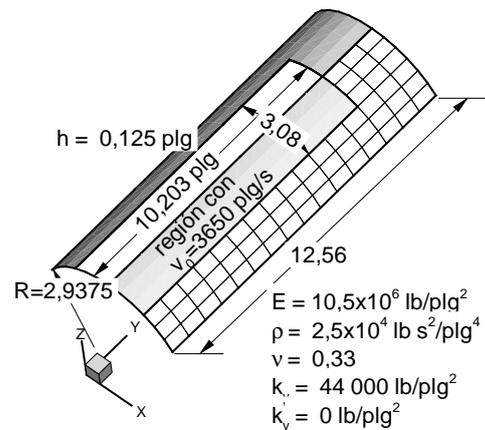
**Figura 8.11:** Domo esférico bajo presión escalón: historia del desplazamiento vertical del punto central. (a) material elástico; (b) material elasto-plástico.

En la Figura 8.11a y b se grafica el desplazamiento vertical del punto central del domo en función del tiempo para los dos casos de material elástico y elasto-plástico, respectivamente. Los resultados se comparan con los resultados numéricos obtenidos con el elemento *S4R* usando una malla de 243 elementos. Puede notarse como se logra un mejor acuerdo a medida que se refina la malla.

Recordar que el *BBSQ* solo tiene tres GdL por nudo (la malla de 243 elementos tiene 465 GdL) en contraste con el elemento de lámina *S4R* que incluye seis GdL por nudo por lo cual los resultados son satisfactorios.

## 8.8. Panel cilíndrico

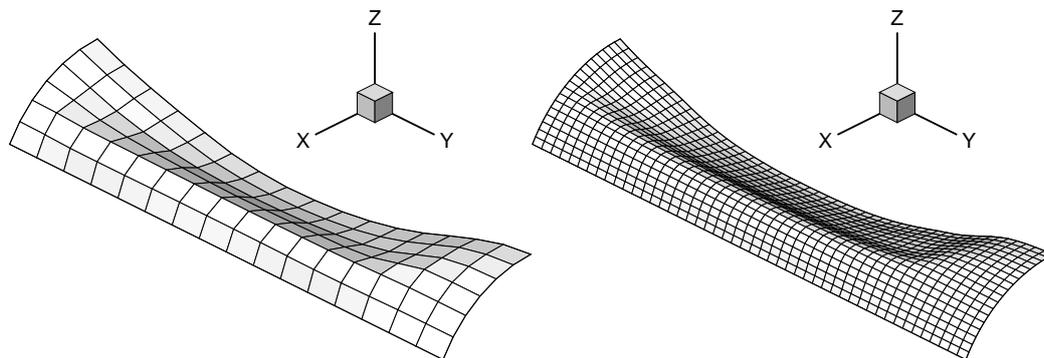
En este caso se trata de un panel cilíndrico sometido a una velocidad inicial de  $v_o = -5650$  plg/s que simula el efecto de la detonación de un explosivo. El material se considera elasto-plástico perfecto en régimen de grande deformaciones. El panel se supone empotrado a lo largo de todos los bordes y por simetría se modela la mitad del cilindro. Se utilizan dos densidades de malla de  $6 \times 16$  y  $18 \times 48$  elementos. En la Figura 8.12 puede observarse los datos geométricos. En la 8.13 la configuración deformada para cada una de las mallas correspondientes al tiempo de 1 mseg.



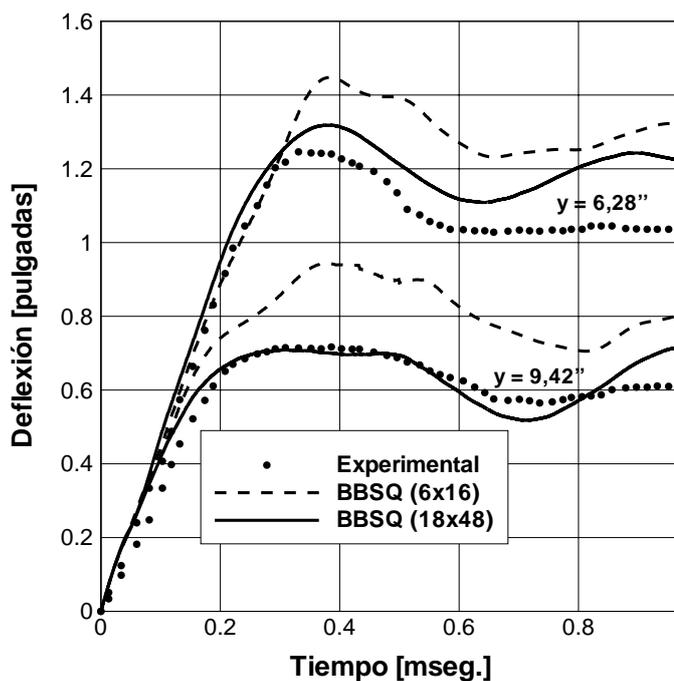
**Figura 8.12:** Panel cilíndrico bajo carga impulsiva. Geometría.

En la Figura 8.14 se grafica el desplazamiento vertical en función del tiempo para dos puntos ubicados sobre el eje de simetría a la distancia de  $y = 6,28$  e  $y = 9,42$  pulgadas respectivamente. En la figura se han incluido los resultados correspondiente a ambas mallas y se compara con los datos experimentales. Nótese que para la malla fina se tiene un muy buen acuerdo con los datos experimentales.

En la Tabla 8.1 se muestra el valor del desplazamiento vertical correspondiente al tiempo de análisis de  $t = 0,4$  ms para las dos mallas adoptadas.



**Figura 8.13:** Panel cilíndrico bajo carga impulsiva. Mallas deformadas para el tiempo  $t = 1\text{ms}$ .



**Figura 8.14:** Panel cilíndrico bajo carga impulsiva. Desplazamiento vertical versus tiempo de dos puntos a lo largo de la línea de simetría.

Se comparan con la solución numérica obtenida por Stolarski et al. (1984) a través de un elemento de lámina triangular curvo y una malla de  $16 \times 32$  y los resultados numéricos obtenidos con los elementos triangulares *LBST* y *BBST* para una malla de  $18 \times 48$  elementos respectivamente. También se compara con resultados experimentales reportados en Balmer y Witmer (1964). Existe un

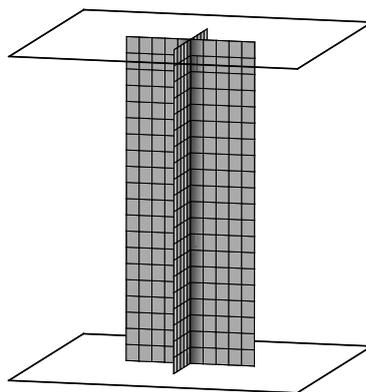
Elemento/Malla	$y = 6,28$ plg	$y = 9,42$ plg
<i>BBSQ</i> $6 \times 16$	-1,440	-0,938
<i>BBSQ</i> $18 \times 48$	-1,314	-0,697
<i>LBST</i> $18 \times 48$	-1,181	-0,587
<i>BBST</i> $18 \times 48$	-1,170	-0,586
Stolarski	-1,183	-0,530
Experimental	-1,280	-0,700

**Tabla 8.1:** Desplazamientos verticales.

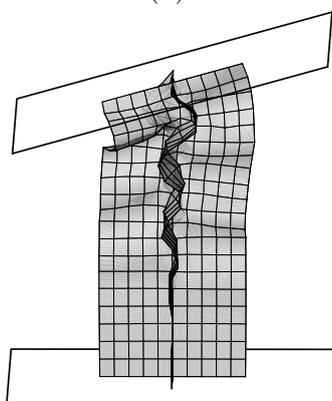
buen acuerdo entre los valores obtenidos con el elemento *BBSQ* y los datos experimentales. Los resultados numéricos obtenidos con otros elementos muestran una mayor discrepancia con los datos experimentales.

## 8.9. Pandeo de una columna con auto contacto

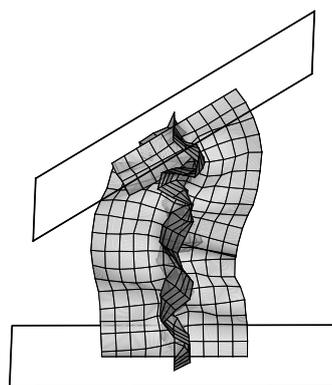
Este ejemplo ilustra el pandeo de una columna comprimida entre dos platos rígidos. La columna tiene sección en forma de cruz. Los extremos de la columna están unidos a dos platos rígidos. Uno de los platos está fijo en el espacio y el otro se traslada y rota durante 7 ms para pandear la columna. La columna está hecha de acero con un módulo de elasticidad de  $E = 200$  GPa y un coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ . La densidad es de  $7850$  kg/m<sup>3</sup>. El comportamiento elasto-plástico está gobernado por la función de fluencia de Von Mises con un valor límite inicial de  $\sigma_o = 250$  MPa y endurecimiento isótropo lineal  $\sigma_y = 450$  MPa. El plato móvil se mueve verticalmente a una velocidad uniforme de  $50$  m/s y rota alrededor del eje y a una velocidad uniforme de  $78,54$  rad/s (ángulo final  $31,5^\circ$ ). Se adoptó como coeficiente de estabilización flexional un valor de  $s_b = 0,1$ . En la Figura 8.15a se ve la geometría original y la malla utilizada de 400 elementos. En las Figuras 8.15b y c se ven las configuraciones deformadas a la mitad y al final del proceso. Este ejemplo ha sido tomado del manual de ejemplos de ABAQUS; uno de los principales aspectos a considerar es el autocontacto de la lámina y con los platos. Las configuraciones obtenidas con el presente elemento y las obtenidas con el elemento *S4R* son muy similares. Para este ejemplo se utiliza un programa con integración explícita de las ecuaciones de movimiento.



(a)



(b)



(c)

**Figura 8.15:** Pandeo de una columna con sección en forma de cruz: (a) configuración inicial; (b) deformada para 3,5 ms; (c) deformada para 7,0 ms.

## 8.10. Discusión de Resultados

En este capítulo mostramos a través de varios ejemplos la exactitud y la estabilidad de las soluciones alcanzada por el *BBSQ*. En problemas no linea-

les el *BBSQ* es un elemento atractivo por usar un solo punto de Gauss tanto para el campo membranal como para el flexional. Esto implica, desde un punto de vista computacional, un bajo costo de cálculo. Sin embargo, el precio que paga la formulación por usar integración reducida es que requiere de un esquema de estabilización para el campo membranal y flexional. Los esquemas de estabilización membranal y flexional mostraron ser eficaces frente a problemas fuertemente no lineales. La forma de tratar, en la formulación propuesta, el campo de curvaturas junto con el esquema de estabilización flexional mostraron ser robustos. Así lo demuestran los ejemplos del cilindro en forma de pera y de la cinta con forma de L donde la formulación del *BSQ* muestra problemas de convergencia. Si bien los esquemas de estabilización utilizan fuerzas elásticas, en procesos no lineales, muestran tener poca influencia en la solución numérica a medida que se refinan las mallas como lo demuestra el ejemplo del casquete esférico con cargas puntuales. Entre otros ejemplos, se incluye un problema con auto contacto (ver el último caso) donde se muestra la potencialidad de la formulación propuesta para resolver un caso donde la geometría final resulta muy deformada.

# Capítulo 9

## Problemas de Acoplamiento Lámina-Sólido

### 9.1. Introducción

Este capítulo se dedica a mostrar diversas aplicaciones usando un acoplamiento lámina-sólido. En el área de la mecánica de los sólidos, para la simulación de problemas de láminas, muchas veces sucede que la geometría se ve interrumpida por un cambio brusco en el espesor o una de las dimensiones del sólido deje de ser mucho menor que la otra. Así encontramos en la práctica ingenieril las láminas de hormigón con rigidizadores, el análisis de codos de tuberías, procesos industriales que involucran láminas con costuras, entre otros. La combinación de elementos de lámina y de sólido permite mejorar distintos aspectos de los modelos a los fines de lograr simulaciones confiables y más realistas. Por ejemplo, en las zonas donde se utilizan elementos de sólido es plausible utilizar relaciones constitutivas efectivamente tridimensionales y no restringirse a modelos de tensión plana. Este tipo de restricciones multipunto está orientado también a modelos que responden globalmente al comportamiento de láminas y se pretende realizar un análisis local detallado con elementos de sólido a los fines de captar comportamientos tridimensionales.

En este capítulo se muestran distintos ejemplos de acoplamiento de láminas delgadas utilizando el elemento cuadrilátero  $BBSQ$  y el elemento sólido basado en una formulación Lagrangeana Total con una aproximación clásica de deformaciones transversales impuestas para láminas gruesas (ver Flores y Oñate

(2010)). La gran mayoría de los ejemplos pueden compararse con los resultados presentes en los trabajos de Flores (2007); Flores y Oñate (2010).

## 9.2. Placa empotrada bajo carga uniforme

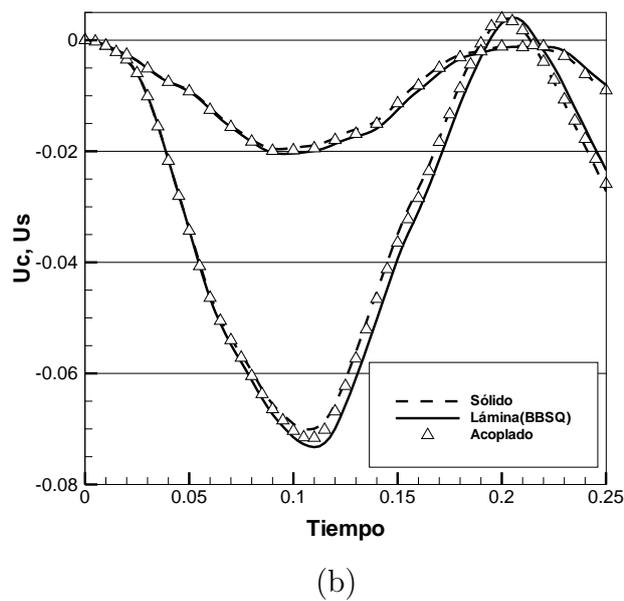
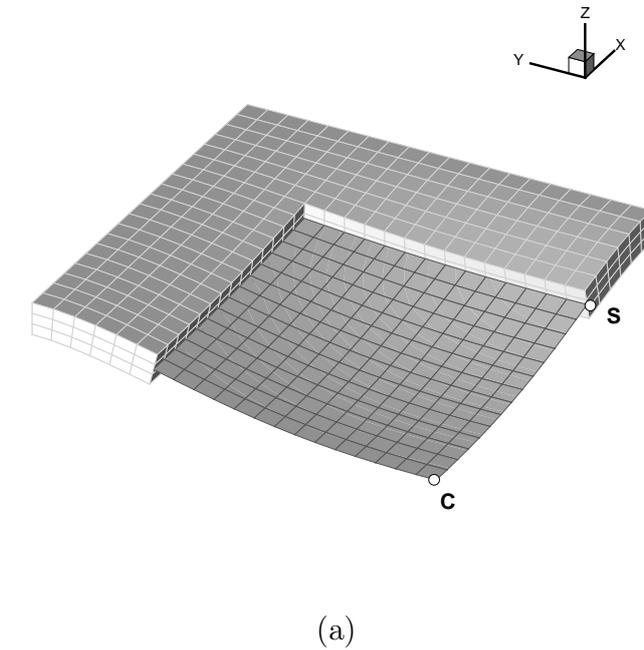
Una placa cuadrada empotrada en su contorno es sometida a una carga uniformemente distribuida en toda su superficie. La carga aplicada es de tipo escalón y se analiza el comportamiento en el primer ciclo de movimiento no-amortiguado. El lado de la placa es 10 y el espesor de 0,4. El material se considera elástico lineal con propiedades  $E = 0,5 \times 10^6$ ,  $\nu = 0,5$  y  $\delta = 1,00$ . La carga aplicada  $q = 0,8$ . Se considera cinemática no-lineal. La discretización en el plano de la placa se realiza en forma uniforme con 20 divisiones por lado sobre un cuarto de la geometría total imponiendo las condiciones de simetría.

Se hicieron tres modelos uno exclusivamente con elementos de lámina, otro sólo con elementos de sólido y un tercer modelo acoplado con aproximadamente la mitad de la superficie modelada con elementos de lámina y la otra mitad con elementos de sólido. Para los modelos de sólido se usaron elementos hexaedros de 8 nudos y se utilizaron 3 elementos en el espesor de la lámina. En los modelos con sólidos, en los bordes empotrados se permitió la contracción en la dirección normal a la lámina. En la Figura 9.1a se muestra la discretización utilizada en el caso acoplado y la deformada (5X) para el instante  $t = 0,1$ .

En la Figura 9.1b se muestra, para los tres modelos, el desplazamiento vertical del punto central de la placa y del punto correspondiente donde se acoplan los modelos. Puede verse que los tres modelos dan resultados casi coincidentes. El ejemplo muestra que el modelo acoplado captura correctamente el comportamiento flexional.

## 9.3. Unión de un tubo y una placa

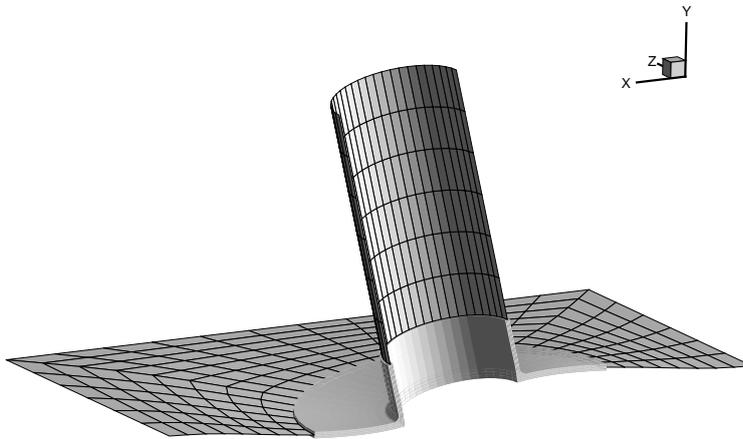
En este caso se analiza la unión entre un tubo y una placa con un código implícito. El tubo de radio 10 mm y espesor 0,75 mm está unido a una placa cuadrada de 100 mm de lado y 1 mm de espesor. El radio del filete de la intersección es de 1 mm. Debido a la simetría del problema se modela sólo la



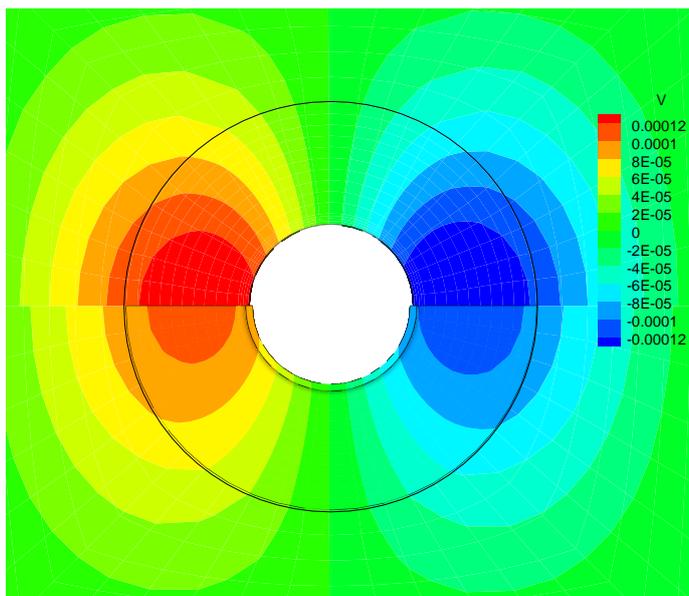
**Figura 9.1:** Modelo de la placa acoplando elementos de lámina y sólido. (a) Geometría deformada. (b) Respuesta dinámica.

mitad. Tanto el tubo como la placa están hechos de aluminio con  $E = 69 \times 10^3$  MPa,  $\nu = 0,3$ , y  $\rho = 2740$  Kg/m<sup>3</sup>.

Se consideraron dos modelos: uno con sólo elementos de lámina donde se utilizó una malla fina en la zona de intersección pero sin considerar el radio del filete; y un segundo modelo donde se acoplaron elementos de lámina y elementos



**Figura 9.2:** Unión de un tubo con una placa. Configuración deformada (20X) para el modelo acoplado.



**Figura 9.3:** Contornos de desplazamiento transversal en la superficie media de la placa para ambos modelos: sólo lámina (arriba) y modelo acoplado (abajo).

de sólido de 8 nudos. La malla de sólidos, que modela detalladamente el filete, se extiende 10 mm a lo largo del tubo y hasta un radio de 25 mm en el plano de la placa. Se usaron 4 elementos en el espesor lo que permite calcular con buena precisión la concentración de tensiones en el filete. La Figura 9.2 muestra la configuración deformada (magnificada por 20) para el modelo acoplado. La Figura 9.3 muestra los contornos de desplazamientos normales a la placa en la zona central (cuadrado de 65 mm) para ambos modelos. El círculo en la figura indica

la parte de la placa modelada con elementos de continuo. Los desplazamientos obtenidos con el modelo acoplado son levemente menores. Puede notarse que no hay diferencias significativas entre el modelo de láminas y el acoplado.

## 9.4. Ovalamiento de un codo

Un tubo de radio  $r = 19,83$  cm y espesor  $t = 1,041$  cm, empotrado en un extremo y formado por un tramo recto de  $182,9$  cm un codo a  $90^\circ$  de radio  $60,95$  cm y un segundo tramo recto de  $60,96$  cm, está sometido a un giro impuesto en su extremo libre. Este giro se impone sobre todos los nudos de la sección extrema de tal forma que se mantiene plana y circular. El tubo puede estar sometido a una presión interna y se consideran entonces dos casos a)  $p = 0$  y b)  $p = 3,45$  MPa. La flexión produce un ovalamiento principalmente en la zona del codo. Las propiedades del material constitutivo son:  $E = 194$  GPa,  $\nu = 0,264$ ,  $\rho = 7800$  kg/m<sup>3</sup> y plasticidad asociada (Von Mises) con endurecimiento isótropo gobernado por la relación  $\sigma_Y = 5,71 \times 10^8 (e^p + 0,006)^{0,1}$ . Se consideran dos tipos de modelos uno exclusivamente con elementos de lámina y otro acoplado donde la zona del codo se modeló con elementos de sólido de 8 nudos con una aproximación clásica de deformaciones transversales impuestas para láminas gruesas. Se utilizó una discretización para el modelo de lámina con 336 elementos y 5 puntos de integración en el espesor de la lámina a los fines de captar la flexión elasto-plástica. Para el modelo con sólidos se utilizaron 3 elementos en el espesor.

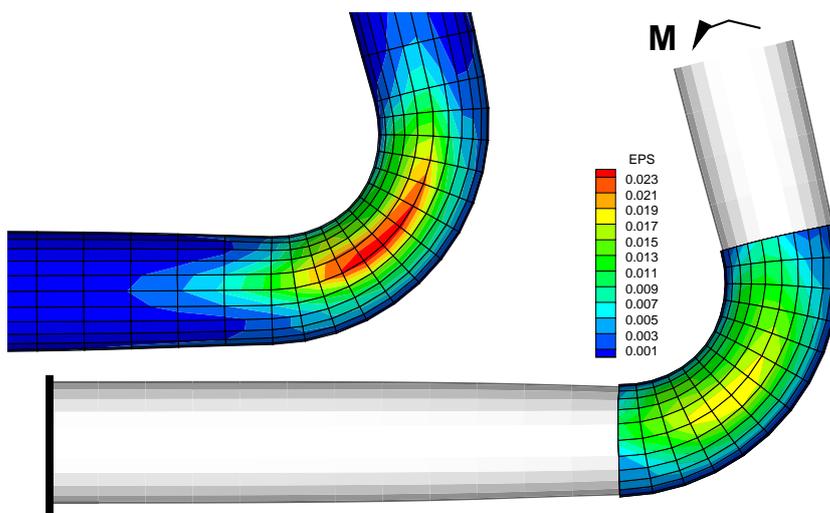
La Figura 9.4 muestra la geometría final del codo donde se grafican los contornos de deformaciones plásticas efectivas sobre el codo. Los valores máximos son del orden de  $0,024$ . Se ha incluido en el mismo contorno de deformaciones sobre la malla media con sólo elementos de lámina con fines comparativos. En los modelos sólo se ha discretizado la mitad del tubo debido a la simetría.

En la Figura 9.5 se ha graficado el momento resistente en función de la rotación impuesta para ambos casos de carga (con y sin presión). Puede notarse que no hay diferencias significativas entre el modelo de láminas y el acoplado. Esto indica el buen comportamiento del elemento de sólido al no bloquear por corte. Los resultados mostrados en la Figura 9.5 indican un buen comportamiento de la restricción multipunto propuesta.

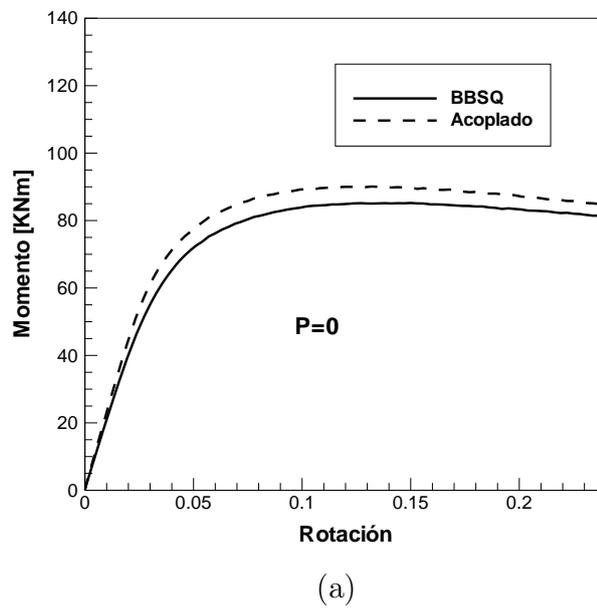
## 9.5. Estampado de una lámina con costura

Este último ejemplo corresponde al estampado de una lámina formada por dos tramos de distinto espesor unidos por una costura. La lámina inicialmente es plana con una longitud de 150 mm de largo y está constituida por un tramo de 0,60 mm y otro de 0,80 mm de espesor. Debido a la simetría se modela un cuarto de la geometría y se utiliza una malla regular de  $30 \times 16$  y  $30 \times 14$  elementos de lámina correspondiente a cada parte unida. Para la costura se emplean 60 elementos de sólido con un solo elemento en el espesor.

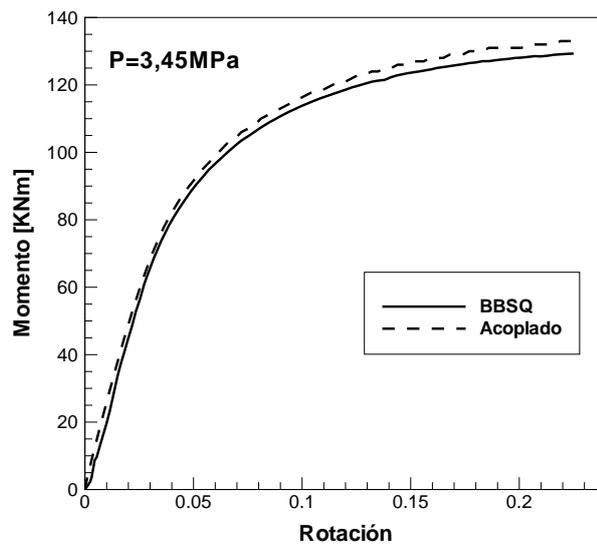
En la Figura 9.6a se muestra la geometría final correspondiente a un viaje del punzón de 20 mm y la malla de elementos utilizada. Las herramientas son tratadas como rígidas y los detalles geométricos y el material han sido tomado de la Referencia NUMISHEET'93 (1993). El material es acero dulce (IF) con módulo de Young  $E = 2,06$  GPa y una relación de Poisson  $\nu = 0,3$ . Se utiliza la función de fluencia de Von Mises con endurecimiento isotrópico no lineal definido por  $\sigma_y(e^p) = 565,32(0,007117 + e^p)^{0,2589}$  [MPa]. Se define una fricción uniforme de 0,162 para todas las herramientas. En la simulación se considera la fuerza del pisador de 19,6 kN. En la Figura 9.6b se han graficado las deformaciones plásticas efectivas sobre la lámina y sobre la costura. Los valores máximos son del orden de 0,4. Nótese como el campo de deformaciones plásticas mantiene cierta continuidad a ambos lados de las láminas a través de la costura.



**Figura 9.4:** Codo sometido a flexión. Deformada final ( $X = 1$ ). Contorno de deformaciones plásticas efectivas sobre la cara externa del codo.



(a)

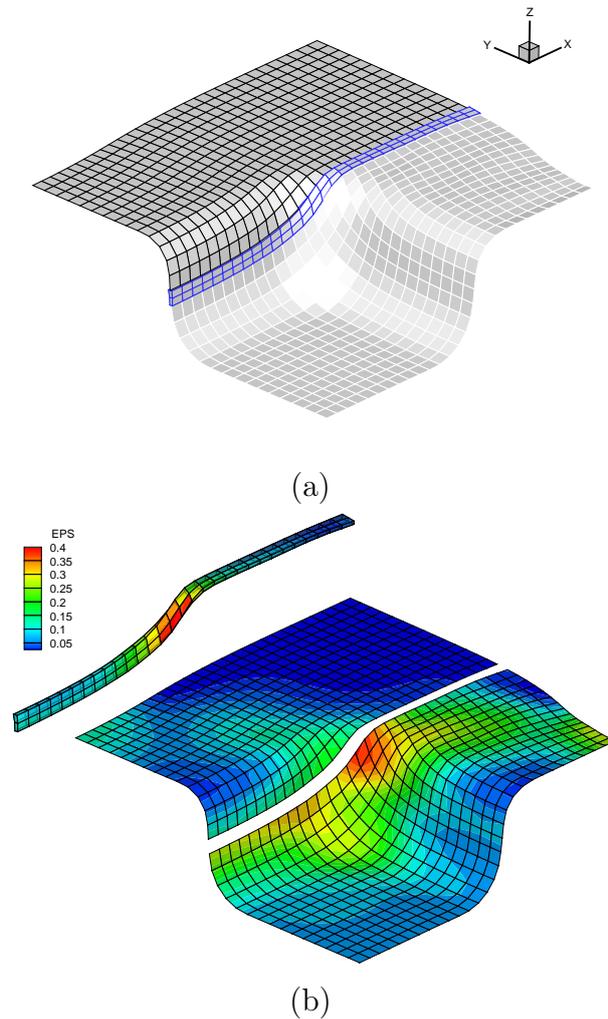


(b)

**Figura 9.5:** Codo sometido a flexión. Momento resistente en función de la rotación impuesta. (a) sin presión interna. (b) con presión interna.

## 9.6. Discusión de Resultados

Se ha presentado una formulación para el tratamiento de restricciones multipunto cuando se utilizan elementos de lámina sin GdL a rotación (*BBSQ*). Esta formulación se ha implementado en dos códigos, uno con integración ex-



**Figura 9.6:** Estampado de una lámina con costura. (a) Deformación final de la lámina obtenida en la simulación. (b) Campo de deformaciones plásticas efectivas.

plícita y otro con integración implícita de las ecuaciones de movimiento. Los ejemplos muestran la potencialidad de la restricción multipunto propuesta. El éxito de los resultados se debe al tipo de elementos acoplados: por un lado, el elemento de lámina propuesta en esta tesis, y por otro, al elemento de sólido que usa una técnica clásica de deformaciones impuestas para evitar el bloqueo por corte transversal al modelar estructuras laminares.

# Capítulo 10

## Problemas de Estampado de Láminas

### 10.1. Introducción

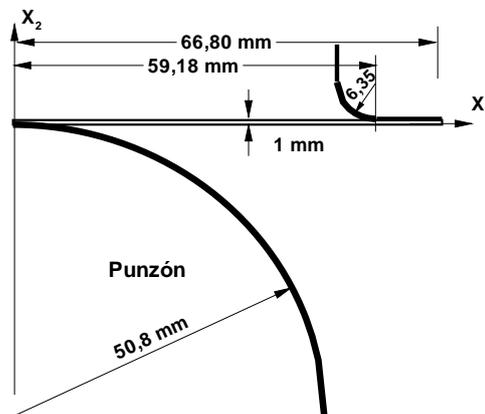
El proceso de embutición de láminas es una técnica importante de manufacturación. En dicho proceso la lámina a embutir es sujeta a través de pisadores, y luego, un punzón se mueve con el fin de embutir la misma contra la matriz. Varios aspectos interesan conocer durante el proceso de embutición, entre ellos, la carga necesaria para llevar a cabo la operación del estampado, la predicción de la distribución de las deformaciones y de las deformaciones límites (para predecir zonas de estricción), la fuerza de apriete de los pisadores, entre otras. Se puede ver que, desde un punto de vista numérico, dichos análisis son complicados en el sentido que requieren considerar grandes deformaciones plásticas, una adecuada descripción de la respuesta del material no lineal, el tratamiento de contacto (fricción) entre las herramientas y la lámina, entre otros aspectos. En algunas situaciones de embutición, cuando dicho proceso finaliza y las herramientas se remueven, se produce un cambio de la geometría importante debido a los esfuerzos residuales. Este cambio se lo denomina recuperación elástica (springback). Predecir en forma numérica la geometría final constituye también un aspecto importante en el proceso de fabricación de piezas.

En este capítulo se muestran distintos ejemplos de embutición de láminas delgadas utilizando el elemento cuadrilátero *BBSQ*. Los resultados se comparan con algunos de los elementos mencionados en el Capítulo 7 y valores

experimentales a los fines de mostrar la competitividad de la formulación propuesta en esta tesis. En los casos donde amerita se incluye también el análisis de la recuperación elástica.

## 10.2. Estampado con un punzón esférico

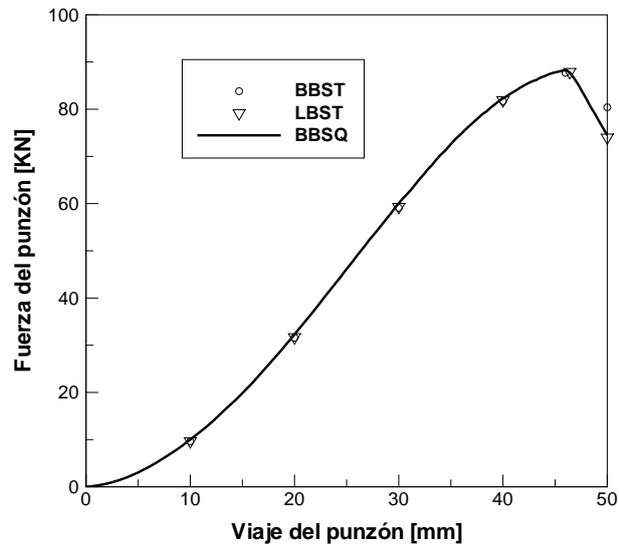
Este ejemplo fue propuesto por Lee et al. (1990), consiste en el estampado de una lámina delgada, originalmente plana y circular, con un punzón esférico. La lámina se asume fija entre el pisador y la matriz impidiendo el deslizamiento entre las herramientas. Dicha condición es propicia para que el material sufra un estiramiento severo, con la consecuente formación de una zona de estricción y rotura. La definición de la fricción entre el punzón y la lámina es determinante en la simulación numérica. La geometría y las propiedades del material se muestran en la Figura 10.1. El material de la lámina es un acero dulce con  $E = 6,9 \times 10^{10}$  Pa,  $\nu = 0,3$  y una tensión de fluencia  $\sigma_y = 5,89 \times 10^8 (0,0001 + e^p)^{0,216}$  [Pa]. Se adopta un coeficiente de fricción  $\mu = 0,15$ . Se utiliza una malla fina de 400 elementos *BBSQ* para modelar un cuarto de la geometría debido a la simetría.



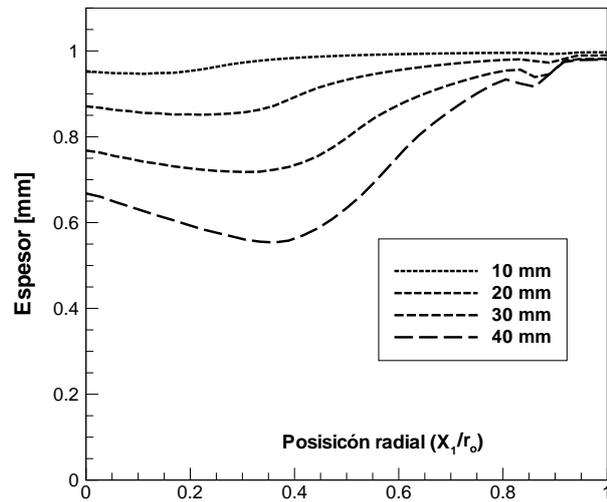
**Figura 10.1:** Geometría del punzón esférico y la lámina circular.

La Figura 10.2a muestra la fuerza del punzón en función de su viaje. En la misma figura se compara con la solución numérica obtenida con los elementos triangulares *LBST* y *BBST*. La Figura 10.2b muestra la distribución de espesores para diferentes desplazamientos del punzón. Los resultados se muestran

únicamente para el *BBSQ*. Cabe aclarar que existe un excelente acuerdo con los espesores obtenidos con los elementos *LBST* y *BBST*.



(a)

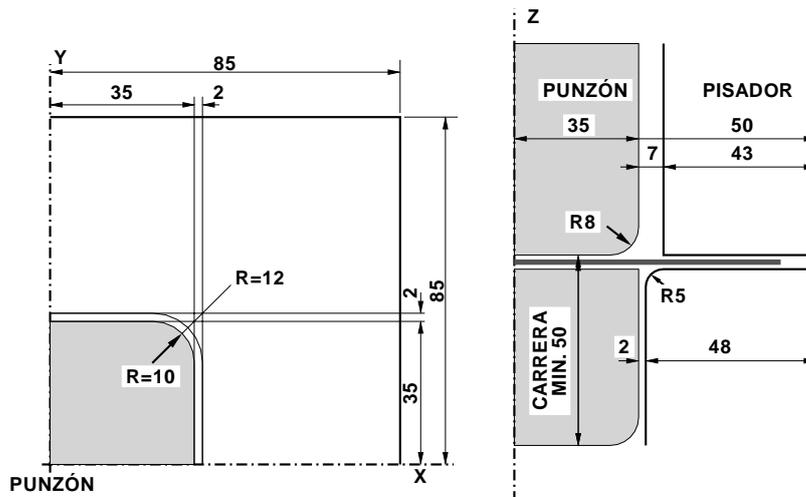


(b)

**Figura 10.2:** Punzón esférico: (a) Fuerza y viaje del punzón. (b) Estiramiento de la lámina para distintos viajes del punzón.

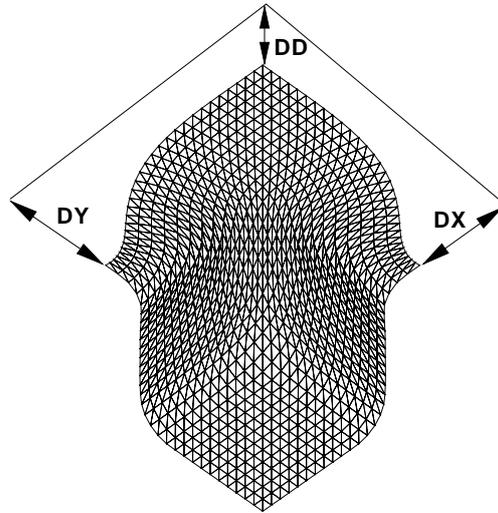
### 10.3. Embutición profunda de una lámina cuadrada

Este ejemplo puede encontrarse en NUMISHEET'93 (1993). La Figura 10.3 muestra la definición geométrica de las herramientas. La forma original de la lámina es cuadrada y plana con una longitud de 150 mm y un espesor de 0,78 mm. Las características del material corresponde a un acero dulce y las propiedades pueden encontrarse en NUMISHEET'93 (1993). La fuerza del pisador es de 19,6 kN. Debido a la simetría se modela un cuarto de la geometría y se utiliza una malla regular con 30 elementos por lado. Se analizan dos etapas, la primera correspondiente a la embutición propiamente dicha y la segunda la recuperación elástica una vez quitadas las herramientas.



**Figura 10.3:** Embutición profunda de una lámina cuadrada. Definición de la geometría.

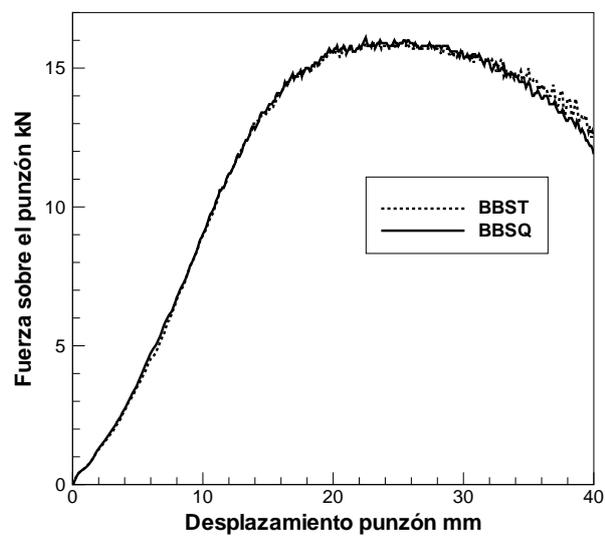
En la Tabla 10.1 se muestran los deslizamientos de la diagonal  $DD$  y de los bordes de simetría  $DX$  y  $DY$  (ver Figura 10.4) para dos viajes del punzón de 15 mm y 40 mm respectivamente. Se comparan los resultados numéricos obtenidos con los elementos  $BBST$  y  $S4$  y datos experimentales. Los resultados obtenidos con el  $BBSQ$  y el  $BBST$  muestran las mismas diferencias con los valores experimentales promedios.



**Figura 10.4:** Embutición profunda de una lámina cuadrada. Geometría deformada.

Elemento	viaje del punzón 15 mm			viaje del punzón 40 mm		
	<i>DX</i>	<i>DY</i>	<i>DD</i>	<i>DX</i>	<i>DY</i>	<i>DD</i>
<i>BBSQ</i>	6,37	6,37	3,19	29,52	29,51	16,14
<i>BBST</i>	6,14	6,14	3,11	29,58	29,58	15,50
<i>S4</i>	6,11	6,09	2,89	26,77	26,43	15,10
<i>Experimental</i>	6,17	6,12	3,24	27,96	27,95	15,36

**Tabla 10.1:** Embutición de la lámina cuadrada [mm].



**Figura 10.5:** Ejemplo de Numisheet'93, fuerza sobre el punzón.

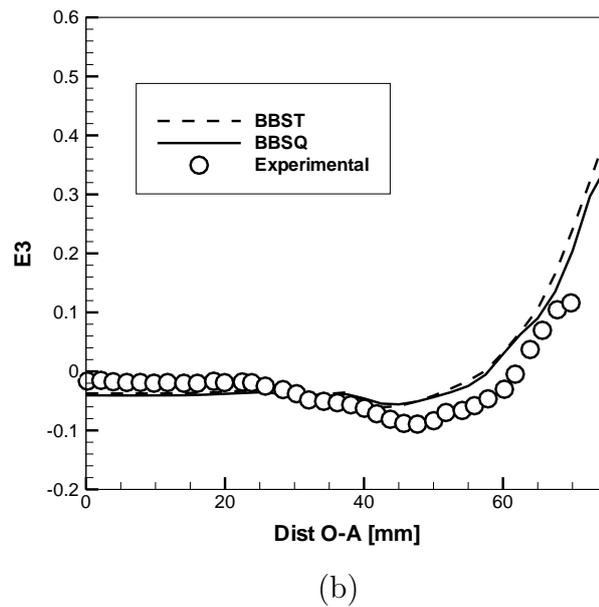
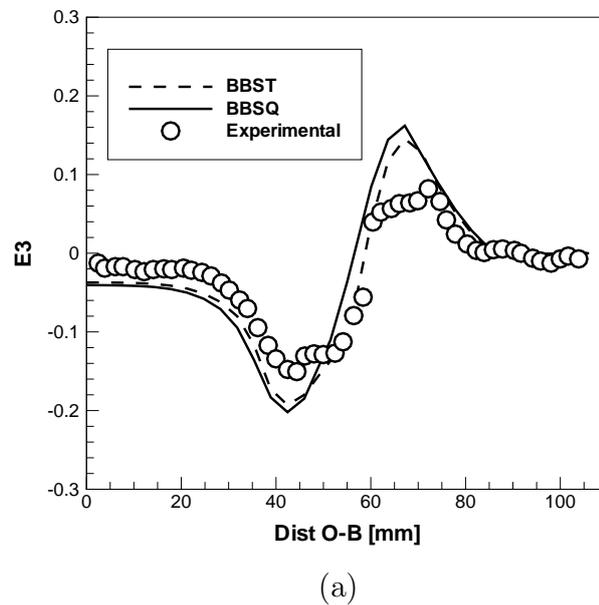
La Figura 10.5 muestra la fuerza sobre el punzón obtenida para ambas formulaciones, prácticamente los esfuerzos son similares. En tanto que la Figura 10.6a y b muestra la deformación (logarítmica o natural) en la dirección transversal (espesor) a lo largo de la diagonal  $DD$  y a lo largo de la línea de simetría  $DX$ , en ambos casos desde el centro de la lámina hasta el borde externo. Los resultados se comparan con datos experimentales y el acuerdo logrado con el *BBSQ* es aceptable.

En este ejemplo se analiza una segunda estrategia con el fin de analizar la recuperación elástica. Durante la estrategia de recuperación puede llevarse a cabo el análisis numérico de dos formas diferentes, esto es, incluyendo las deformaciones plásticas durante la estrategia o considerando la recuperación puramente elástica. Los resultados numéricos muestran diferencias entre ambas metodologías. La elección de la metodología numérica más adecuada requiere de un análisis detallado del ensayo experimental de la embutición, por ejemplo, la manera en que se quitan las herramientas.

Así, en la Figura 10.7a y b y 10.7c y d muestra los desplazamientos relativos al final de estrategia de recuperación elástica considerando o no las deformaciones plásticas, respectivamente. Puede notarse que el caso sin intervención de las deformaciones plásticas muestra una mayor recuperación elástica. Si bien no se tienen resultados experimentales los resultados numéricos de la formulación propuesta muestran un buen acuerdo con los obtenidos con el elemento triangular.

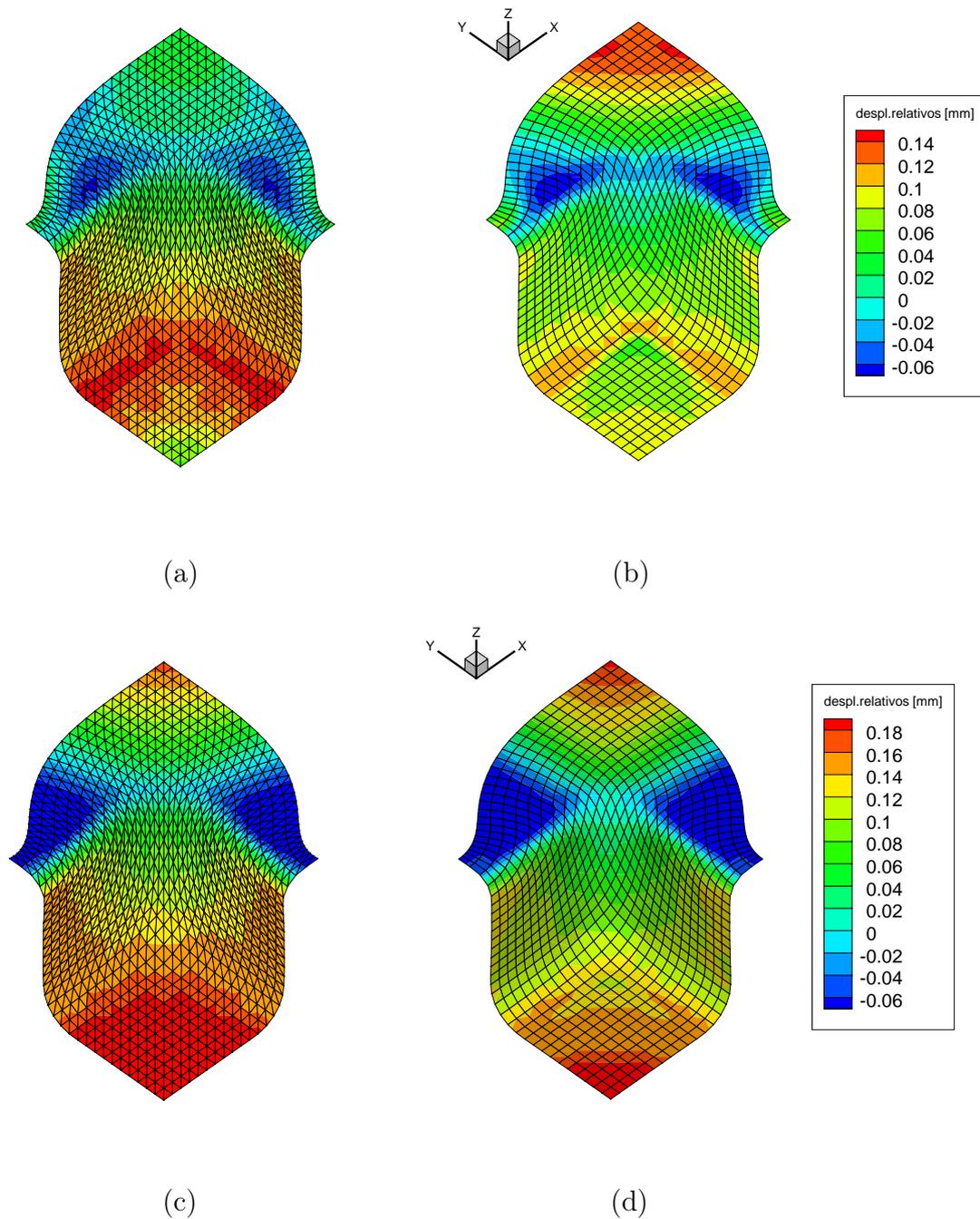
## 10.4. Estampado de una cinta con recuperación elástica

Este ejemplo puede encontrarse en la Referencia (NUMISHEET'93 (1993)). El principal objetivo de este ejemplo es analizar la recuperación elástica de la lámina después de quitar las herramientas. La Figura 10.8a muestra la geometría del problema. Debido a la simetría se modela un cuarto de la geometría y la malla de cuadriláteros empleada en la simulación corresponde a una malla regular de  $10 \times 100$  elementos. Los parámetros geométricos que deben ser medidos y comparados con los datos experimentales se muestran en la Figura 10.8b. Dos materiales diferentes se utilizan en las simulaciones: acero dulce y



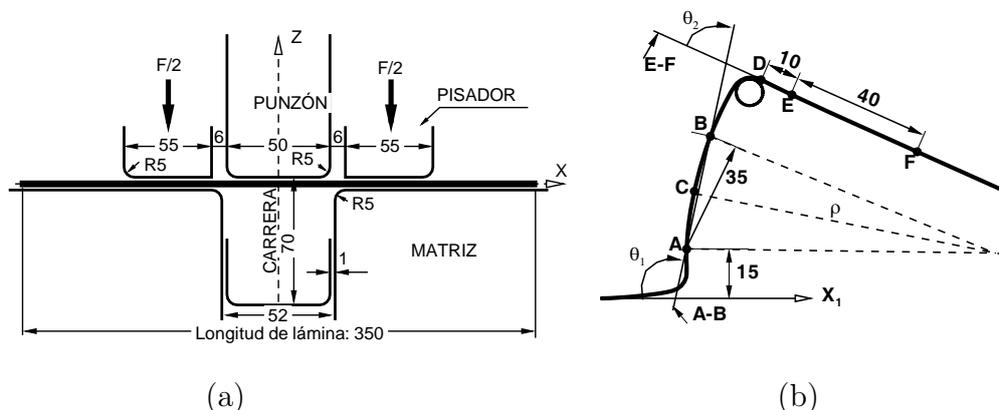
**Figura 10.6:** Ejemplo de Numisheet'93, deformación logarítmica en el espesor: (a) a lo largo de la diagonal, (b) a lo largo de la línea de simetría.

aluminio. Una definición completa de estos materiales pueden ser encontrados en NUMISHEET'93 (1993). El material se asume elasto-plástico. Para la componente elástica se asume un comportamiento isótropo y para la componente plástica una función de fluencia ortótropa con endurecimiento isótropo. Para las simulaciones se utiliza una fuerza del pisador de 2,45 kN.



**Figura 10.7:** Recuperación elástica considerando las deformaciones plásticas: (a) desplazamientos relativos *BBST*; (b) desplazamientos relativos *BBSQ*. Recuperación elástica considerando únicamente deformaciones elásticas: (c) desplazamientos relativos *BBST*; (d) desplazamientos relativos *BBSQ*.

La Figura 10.9a muestra los parámetros geométricos obtenidos por diferentes grupos para el material acero. También se muestran los valores promedios experimentales y los obtenidos con el elemento *BBSQ* y el elemento tri-



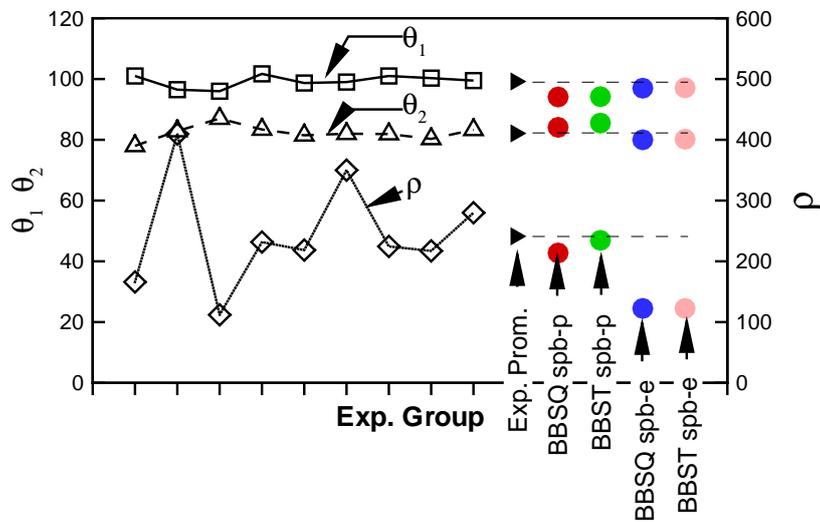
**Figura 10.8:** Estampado de una cinta: (a) geometría y malla de elementos finitos, (b) parámetros geométricos para medir el springback.

angular *BBST*. En dicha figura la nomenclatura *spb-p* y *spb-e* se refiere a la recuperación elástica considerando o no las deformaciones plásticas, respectivamente. La configuración deformada después de quitada las herramientas se muestra en la Figura 10.9b correspondiente a la simulación con y sin deformaciones plásticas durante la estrategia. En la Figura 10.10a y 10.10b se muestran los resultados experimentales y numéricos para el material aluminio.

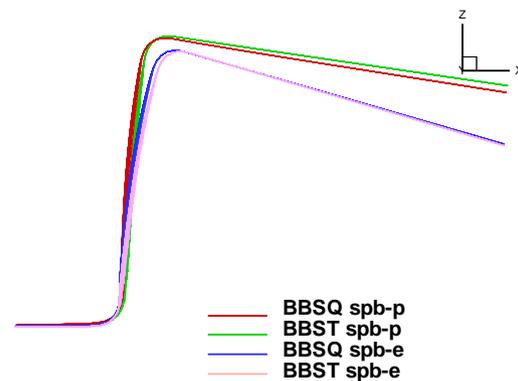
A la luz de los resultados numéricos obtenidos, la formulación propuesta muestra, para este ejemplo, un comportamiento similar al elemento triangular y similares dispersiones con los resultados experimentales. Cuando no se tiene en cuenta las deformaciones plásticas durante la segunda estrategia, la recuperación elástica es mayor y puede verse en el parámetro que mide el radio de curvatura. Las mayores diferencias entre los resultados numéricos y experimentales se observan en el valor del parámetro geométrico que mide el radio de curvatura promedio. Es importante destacar que los datos experimentales muestran también una fuerte dispersión.

## 10.5. Embutición de un riel en forma de S

Este ejemplo corresponde al estampado de una lámina cuya forma final es la de un riel en forma de S. Este ejemplo fue propuesto en la reunión NUMISHEET'96 (1996). La simulación comprende dos partes, la primera es el estampado del riel S y la segunda el quitado de las herramientas y la recuperación elástica. En este ejemplo es más marcada la influencia de la flexión, lo cual se



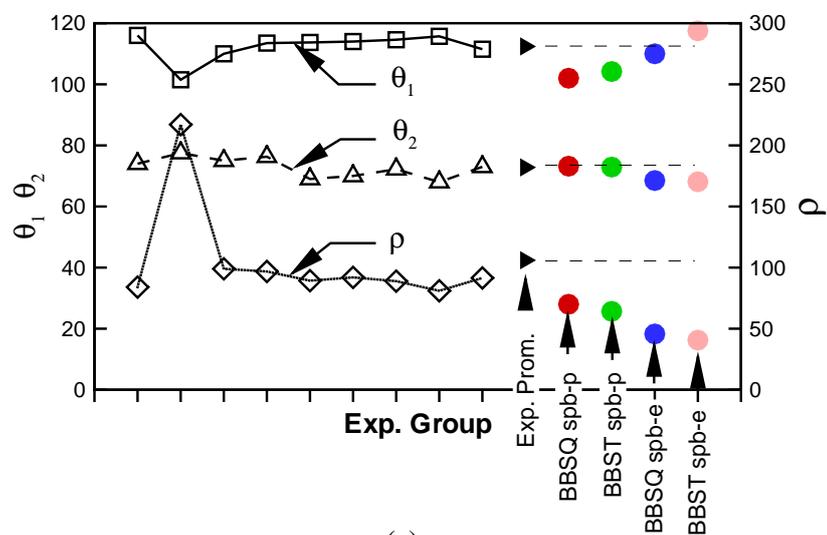
(a)



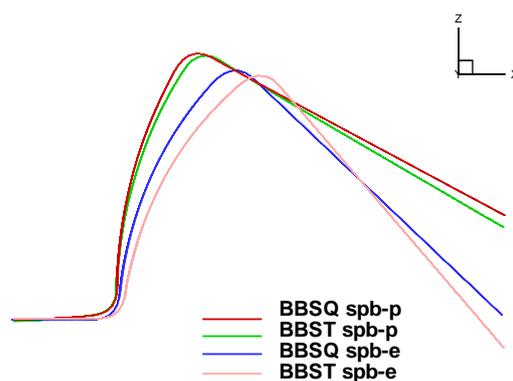
(b)

**Figura 10.9:** Estampado de una cinta: (a) comparación con resultados experimentales (acero); (b) deformada después de la recuperación elástica.

asocia con una mayor recuperación elástica al quitar las herramientas. En la Figura 10.11 se muestra la geometría final y la malla de elementos utilizada. Se utilizó una malla con 9000 elementos cuadriláteros. Se comparan los resultados numéricos con los obtenidos con el elemento triangular *BBST* (correspondiente a una malla de 6000 elementos) y con resultados experimentales. Las herramientas son tratadas como rígidas y los detalles geométricos y el material pueden ser encontrado en NUMISHEET'96 (1996). El material es acero dulce (IF) con módulo de Young  $E = 2,06$  GPa y una relación de Poisson  $\nu = 0,3$ . Se utiliza la función de fluencia de Von Mises con endurecimiento isotrópico no lineal definido por  $\sigma_y(e^p) = 545 [0,13 + e^p]^{0,267}$  [MPa]. Se define una fricción uniforme de 0,15 para todas las herramientas. En la simulación se considera una fuerza del pisado



(a)



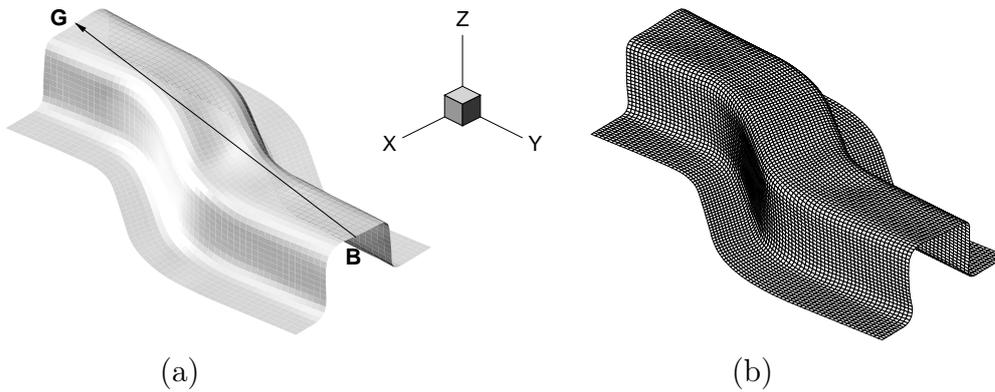
(b)

**Figura 10.10:** Estampado de una cinta: (a) comparación con resultados experimentales (aluminio); (b) deformada después de la recuperación elástica.

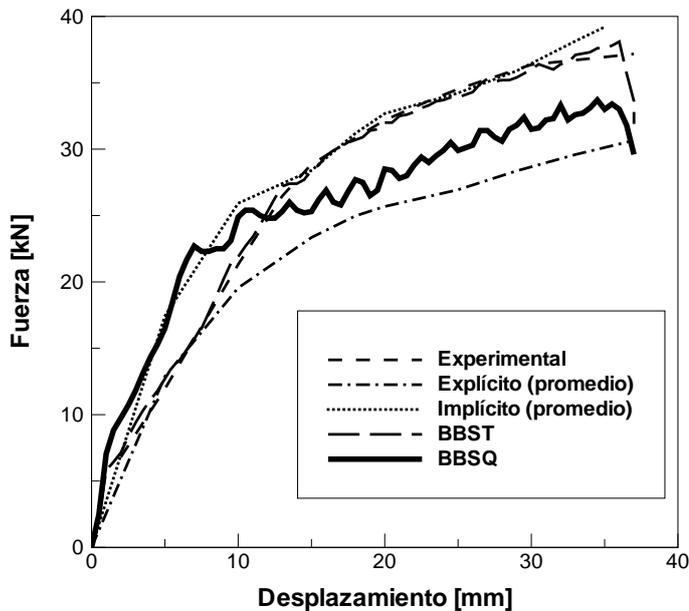
de 10 kN.

En la Figura 10.12 se compara la fuerza del punzón durante el estampado obtenida con el elemento *BBSQ* y con el elemento *BBST*. Se compara también con los valores experimentales y dos promedios de simulaciones numéricas. En este caso puede verse que el elemento *BBSQ* muestra un comportamiento más flexible.

En la Figura 10.13 se muestra la coordenada *Z* a lo largo de la línea *B – G* después de la recuperación elástica para el elemento *BBST* y el *BBSQ* respectivamente. Puede observarse que la superficie superior del riel no permanece plana sino que muestra ciertas arrugas. Así, se muestran los distintos



**Figura 10.11:** (a) Estampado de un riel en forma de *S*. (b) Deformación final de la lámina obtenida en la simulación (9000el.)



**Figura 10.12:** Estampado de un riel en forma de *S*: fuerza del punzón versus el avance del punzón.

perfiles teniendo en cuenta o no las deformaciones plásticas. Si se incluyen las deformaciones plásticas durante la recuperación elástica (curva denominada como BBSQ spb-p y BBST spb-p) la respuesta numérica muestra ser más flexible. Los resultados numéricos muestran para el elemento *BBST* un muy buen acuerdo, en tanto que para la formulación propuesta es necesario utilizar una malla muy fina para poder captar con mejor precisión la rugosidad de la superficie del riel. Sin embargo, dicho disentiendo con los resultados experimentales muestra dispersiones similares a las obtenidas con otras formulaciones no incluidas

en el presente trabajo.

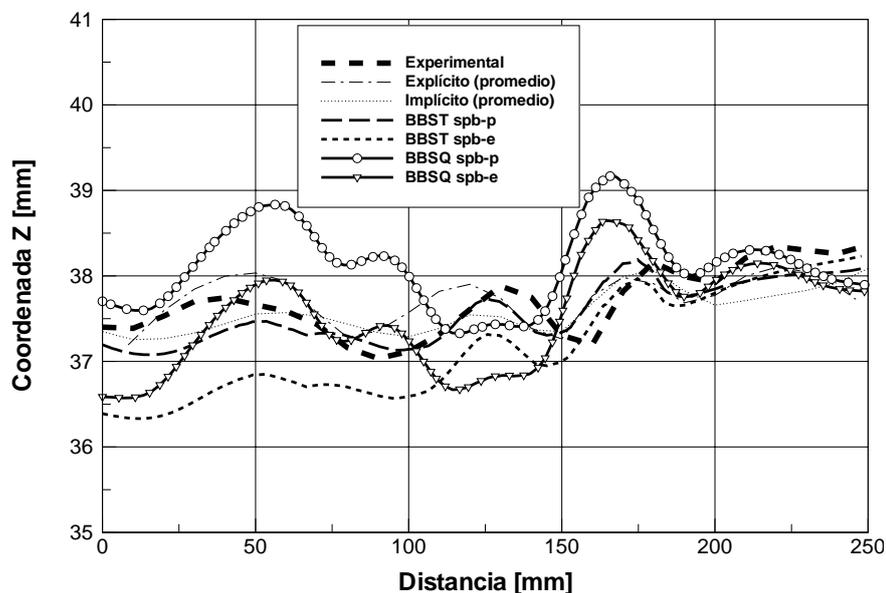
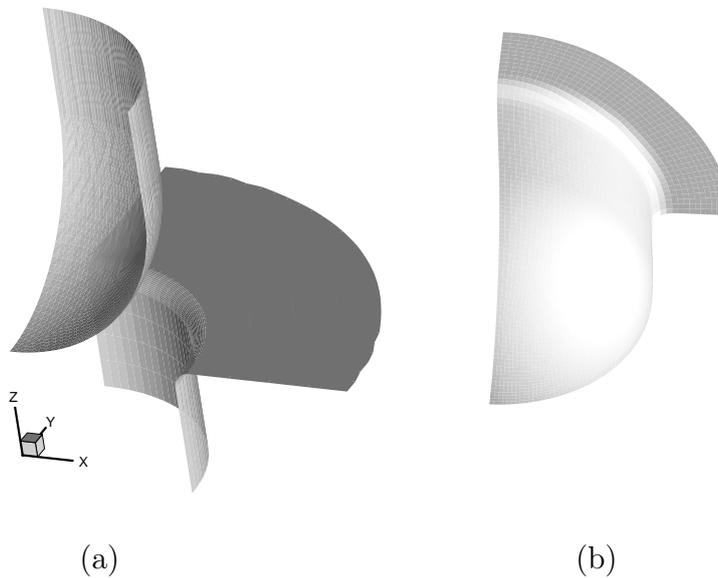


Figura 10.13: Coordenadas  $Z$  a lo largo de la línea  $B - G$  al final del estampado.

## 10.6. Embutición profunda de una lámina circular

En este ejemplo, presentado en NUMISHEET'99 (1999), se muestra el comportamiento del elemento  $BBSQ$  en grandes deformaciones y plasticidad anisotrópica. El ejemplo consiste en una embutición profunda de una lámina circular de acero dulce mediante un punzón esférico de radio 50 mm ( $R_p$ ). El radio original de la lámina es de 100 mm ( $R_s$ ). La profundidad de la embutición es de 85 mm y la fuerza sobre los pisadores es de 80 kN. Para obtener un proceso exitoso de embutición, es esencial controlar el deslizamiento entre la lámina y el pisador y la matriz. Si el deslizamiento se restringe demasiado, el material puede sufrir estricción y, por el contrario, si se permite que se deslice fácilmente, el material desarrollará tensiones de compresión circunferencial elevadas, causando un producto con arrugas. La función de fluencia adoptada corresponde a la propuesta por Hill (1948) y se considera la función potencial asociativa y no asociativa. Las propiedades pueden encontrarse en NUMISHEET'99 (1999).

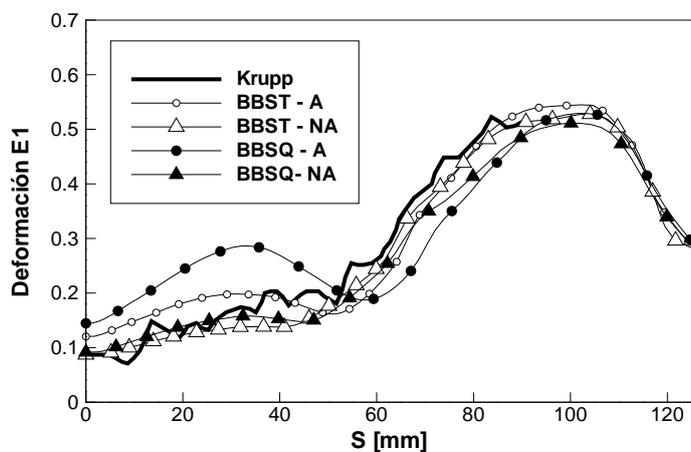
Para tratar el problema elasto-plástico se utilizan cuatro puntos de integración en el espesor. Se modela un cuarto de la geometría debido a la simetría y en el cuarto de malla de la lámina circular se utilizaron 3124 elementos *BBSQ*. Las herramientas se modelan como superficies rígidas, el punzón se modela con 2730 triángulos y 1439 puntos. Para la matriz se utilizan 490 cuadriláteros y 744 puntos. El pisador se modela con 120 cuadriláteros y 155 puntos. La Figura 10.14a muestra las perspectivas de las herramientas y la Figura 10.14b la deformada final de la malla de elementos cuadriláteros.



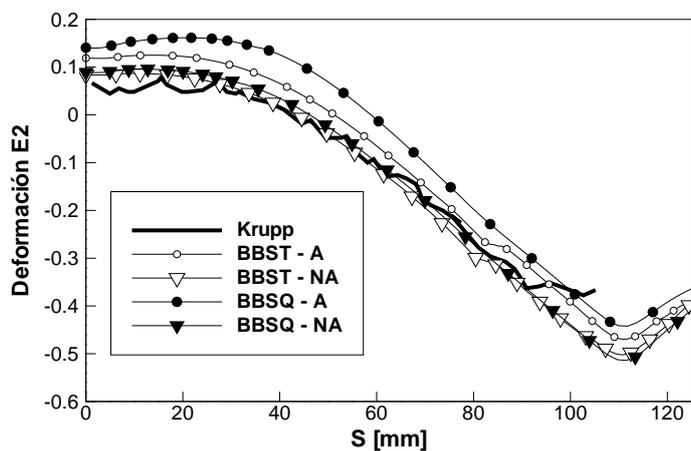
**Figura 10.14:** Embutición profunda de una lámina circular: (a) herramientas; (b) geometría deformada.

Modelo	Estampado [mm]		
	Sección A	Sección B	Sección C
<i>BBSQ – NA</i>	30,78	32,18	29,01
<i>BBSQ – A</i>	26,18	29,29	24,56
<i>BBST – NA</i>	30,25	31,77	28,45
<i>BBST – A</i>	27,92	30,54	26,15
<i>Experimental</i>	30,75	32,30	30,00

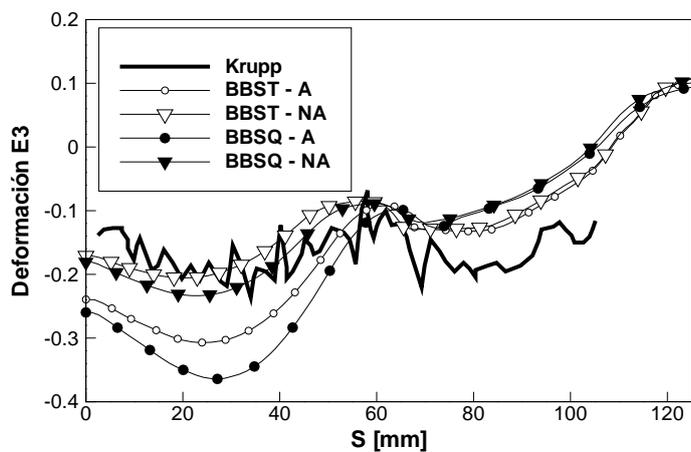
**Tabla 10.2:** Embutición profunda de la lámina circular.



(a)



(b)



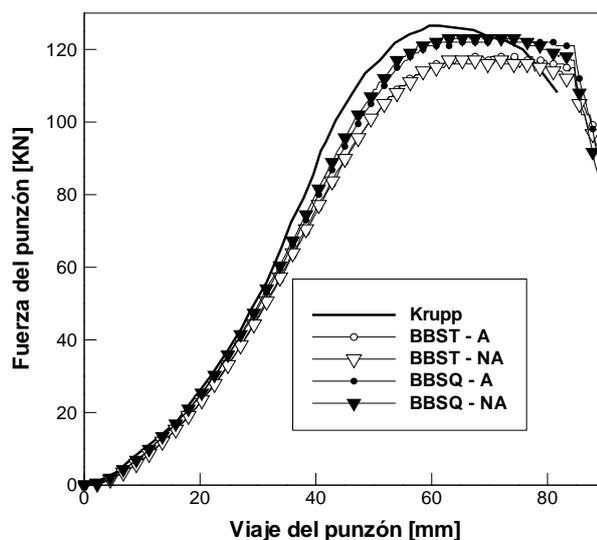
(c)

**Figura 10.15:** Resultados del ejemplo del NUMISHEET: (a) deformaciones meridionales  $E_1$  a lo largo de la dirección transversal de rolado (meridiano  $A$ ); (b) deformaciones anulares  $E_2$  a  $45^\circ$  de la dirección de rolado (meridiano  $B$ ); (c) deformaciones en el espesor  $E_3$  a lo largo de la dirección de rolado (meridiano  $C$ ).

Los resultados reportados están asociados con tres meridianos distintos:  $A$  a  $90^\circ$  de la dirección de rolado,  $B$  a  $45^\circ$  de la dirección de rolado y  $C$  en la dirección de rolado. Los resultados numéricos se comparan con un conjunto de resultados experimentales reportado por Thyssen Krupp Stahl AG (quienes propusieron el ejemplo y proveyeron las muestras de láminas). También se comparan con resultados numéricos obtenidos con el elemento triangular  $BBST$ .

En la Tabla 10.2 se comparan los resultados numéricos obtenidos con el elemento  $BBSQ$  y  $BBST$  correspondientes a diferentes desplazamientos de puntos ubicados en el borde de la lámina para los tres meridianos. Los valores obtenidos con el modelo no asociativo están muy próximos a los valores experimentales, en tanto que, los valores con un material asociativo difieren un poco respecto de los experimentales.

En las Figura 10.15a se muestra las deformaciones meridionales ( $E_1$ ) a lo largo del meridiano  $A$ . En la Figura 10.15b se muestra la deformación circunferencial ( $E_2$ ) sobre el meridiano  $B$  y en la Figura 10.15c la deformación en dirección al espesor ( $E_3$ ) a lo largo del meridiano  $C$ . Los datos experimentales muestran un comportamiento errático a lo largo de los meridianos, especialmente en lo que respecta a las deformaciones en dirección al espesor. A la luz de los resultados, los datos numéricos muestran mejor acuerdo con los datos experimentales especialmente cuando se usa plasticidad no asociativa.



**Figura 10.16:** Resultados del ejemplo del NUMISHEET. Fuerza del punzón versus el viaje del punzón.

Finalmente la Figura 10.16 muestra la resistencia del punzón versus el viaje del mismo. En relación con los datos experimentales se observa al final de la carrera una leve discrepancia. Los resultados numéricos muestran menor valor de resistencia debido quizás a una incorrecta definición de la fricción con las herramientas.

## 10.7. Discusión de Resultados

En este capítulo se mostró la simulación numérica a través del *BBSQ* de uno de los procesos de manufacturación (estampado de láminas) más importante. Los resultados muestran un elemento capaz de reproducir y captar, vía numérica, los diferentes aspectos de un proceso de embutición. Dichos aspectos incluyen el estampado en si mismo y la recuperación elástica una vez quitadas las herramientas. Los esquemas de estabilización mostraron ser robustos especialmente cuando se simula el quitado de las herramientas (recuperación elástica). El esquema de estabilización flexional se comporta adecuadamente y es estable. El ejemplo del estampado con el punzón esférico muestra que la formulación conduce a resultados correctos y similares a los obtenidos con el elemento *LBST* y *BBST*. En dicho ejemplo una definición correcta del coeficiente de fricción es fundamental. En el clásico ejemplo de la embutición de la lámina cuadrada el acuerdo logrado con los datos experimentales es satisfactorio. En dicho ejemplo se muestra una segunda estrategia con el fin de mostrar la recuperación elástica y se compara numéricamente con el elemento triangular *BBST*. El ejemplo muestra la posibilidad de involucrar o excluir las deformaciones plásticas durante la segunda estrategia. Así los resultados muestran diferencias entre las dos posibilidades. La importancia de las deformaciones plásticas durante la recuperación elástica amerita un análisis más detallado de la forma en que se remueven las herramientas al final de la estrategia del estampado. En el ejemplo del estampado de la cinta, caracterizado por tener una marcada recuperación elástica, los resultados numéricos muestran una formulación competitiva y con bajo costo computacional. En otro ejemplo, se analiza el estampado de un riel en forma de S que se caracteriza por su forma geométrica distorsionada. Forma geométrica que provoca la formación de una superficie arrugada y desde un punto de vista computacional puede provocar la aparición de pequeñas inestabilidades numéricas que se manifiestan a través de oscilaciones espaciales. Oscilaciones

que pueden destruir la solución numérica en elementos que usan esquemas de estabilización. Así, por ejemplo, el esquema de estabilización propuesto para el *BSQ* muestra en ciertas condiciones de descarga inestabilidades producidas por dichas oscilaciones. Si bien el elemento propuesto *BBSQ* presenta discrepancia con los datos experimentales respecto de la forma final de la superficie del riel, el esquema de estabilización controla efectivamente la propagación dinámica de los modos flexionales. Finalmente, en el ejemplo del estampado de una lámina circular la formulación muestra ser fiable y los resultados mejoran notablemente si se considera un material con un flujo potencial no asociativo.

Con este capítulo damos fin a una serie de problemas numéricos, pasando por casos lineales con diferentes geometrías hasta casos no lineales, con el afán de mostrar que el *BBSQ* es uno de los primeros elementos cuadriláteros sin rotaciones existente que puede brindar soluciones ingenieriles de diferentes índoles y con resultados fiables respecto de otras formulaciones.

# Capítulo 11

## Conclusiones y Recomendaciones para Trabajos Futuros

### 11.1. Síntesis de los desarrollos presentados en esta tesis

El desarrollo principal de esta tesis es la formulación de un elemento de lámina cuadrilátero sin GdL rotacionales para el tratamiento de geometrías arbitrarias con grandes deformaciones. Resulta de interés realizar una recapitulación de las diferentes etapas involucradas en el desarrollo del elemento de lámina propuesto y que se resumen en:

*Definición de la geometría del elemento:* la misma queda definida por la posición de sus cuatro nudos y los únicos GdL a utilizar son las tres componentes de desplazamiento en cada nudo. Dentro de cada elemento la posición de la superficie media resulta de la habitual interpolación bilineal. Para el cálculo del tensor de curvaturas se utiliza una parcela de cinco elementos formada por el elemento principal y los cuatro elementos adyacentes a sus lados. Para la evaluación de la primera y segunda forma fundamental de la superficie media en el elemento central de la parcela requiere de la definición del sistema cartesiano definido en forma consistente sobre cada punto de la parcela donde se evalúe el gradiente. Así, se define el sistema cartesiano en el centro del elemento, similarmente en los puntos medios de cada lado. En los elementos adyacentes el gradiente se requiere solo en el centro de cada lado con el elemento principal.

*Evaluación de las curvaturas:* una vez integrada por partes la ecuación de la curvatura obtenemos una expresión para las tres componentes del tensor de curvaturas. La integral sobre el contorno se evalúa numéricamente con un punto de integración a la mitad de cada lado. Para el caso de superficies suaves, la continuidad del gradiente entre elementos se establece en forma discreta a la mitad de cada lado, para ello, en tales puntos el gradiente se calcula como el promedio entre el gradiente evaluado con la geometría del elemento principal y el evaluado con la geometría del elemento adyacente al lado en cuestión. Vimos que la proyección del gradiente normal al contorno en el elemento adyacente sobre la normal al elemento puede interpretarse como el seno del ángulo entre las direcciones tangente al elemento en el centro y la dirección tangente al elemento vecino sobre el lado. Esta interpretación alternativa es válida para ángulos pequeños. Sin embargo, estamos interesados en expresar el campo de curvatura para el caso donde exista un quiebre o ramificación, donde el ángulo indicado puede ser muy distinto del recto. Luego, resulta necesario modificar la definición de la expresión, utilizando efectivamente el ángulo indicado y no su seno. Esta modificación afecta únicamente al término asociado con el gradiente normal. Resultando en una nueva aproximación numérica de la curvatura, la cual está formada por dos partes: las curvaturas en el elemento a partir de la interpolación isoparamétrica y las curvaturas que provienen del “salto” del gradiente normal. Luego por variación de la curvatura, de la misma manera en que se divide el vector de curvaturas se divide la matriz que relaciona incremento de desplazamientos con incrementos de curvaturas.

*Estabilización flexional:* vimos que para mantener un sólo punto de integración es necesario realizar una estabilización del modo flexional, como consecuencia de la existencia de modos flexionales espurios. Dichos modos son dañinos y destruyen fácilmente la solución numérica. Para ello, si en cada lado del elemento principal definimos el cambio de curvatura normal asociada con la segunda componente (la proveniente del salto del gradiente normal) como la proyección normal sobre cada lado. Y por otro lado, definimos una aproximación a la curvatura normal al lado a través del ángulo que forman las normales y la distancia del centro del elemento a la mitad del lado. Podemos con estos dos valores definir una curvatura de estabilización en cada lado como la diferencia entre ellas. Lo cual implica que el esfuerzo numérico para la estabilización no es significativo. Si bien el esfuerzo de estabilización no es costoso desde el punto de vista computacional, lo que seguramente es más costoso es la variación, es

decir los cálculos necesarios para calcular la matriz que asocia los incrementos de curvaturas de estabilización con los incrementos de desplazamientos, que resulta de proyectar en las direcciones de los lados.

*Condiciones de contorno:* vimos que las condiciones de contorno pueden clasificarse en relativas al desplazamiento de la superficie media, que son los GdL del elemento por lo cual no ofrecen dificultades. Y relativas a la rotación de la normal al elemento alrededor del lado, que a su vez pueden clasificarse en dos tipos: naturales como ser simplemente apoyado o libre y esenciales como ser empotramiento o plano de simetría. Así, sobre un elemento pueden aplicarse condiciones de contorno relativas al desplazamiento de la superficie media en cualquier punto de la malla, sean naturales (fuerzas) o esenciales (desplazamientos prescritos). Condiciones de contorno referidas a la normal sólo son admisibles en elementos sobre el contorno del dominio, es decir en aquellos elementos en que sobre uno de sus lados no existe el elemento adyacente.

*Tratamientos de quiebres:* los quiebren se tratan en forma localizada en los puntos medio de cada lado del elemento principal a los efectos de definir los sistemas de referencia. En primer lugar, definimos las direcciones normales salientes del elemento principal y las direcciones normales entrantes al lado del elemento adyacente. Luego, es posible definir el ángulo que forman la normal al elemento principal y la normal entrante del elemento adyacente obtenida previamente en el triedro local al lado, a través del ángulo medido alrededor del lado común (similarmente en la configuración deformada). Posteriormente, el cambio de ángulo entre ambas configuraciones puede asociarse a cada elemento a través de una rotación relativa a la rotación de la arista y cuyo valores interesan para la obtención de la curvatura. Las rotaciones relativas se relacionan a partir de la condición de equilibrio a flexión en cada lado del elemento. Se plantea el equilibrio de momentos alrededor del lado (aproximado, ya que no incluye la curvatura en dicha dirección). Las rotaciones relativas se relacionan a través de la distancia medida perpendicularmente al lado hasta el centro de cada elemento. Luego, dicha distancia se puede aproximar a través de la relación área-longitud de cada elemento. Obteniéndose así una expresión que tiene en cuenta posibles cambios en el material y en el espesor de lámina entre dos elementos adyacentes. El cociente entre el área del elemento y la longitud del lado permite definir la rigidez de rotación. Luego, con el cambio de ángulo obtenido por continuidad y la expresión obtenida por equilibrio permite calcular

la rotación relativa del elemento adyacente. Que no es otra cosa que la distribución del cambio de ángulo en función de las alturas equivalentes, con lo cual se obtiene una aproximación menos sensible a mallas irregulares. Vimos también el tratamiento de ramificaciones de lámina. El caso anterior, cuando dos elementos forman una superficie quebrada es un caso particular de ramificación. En otras palabras, un caso general tendremos varios elementos concurriendo a una misma arista.

Para evaluar las variaciones de las componentes del tensor de curvaturas debe calcularse la variación de los dos términos de la expresión de la curvatura. El proveniente del gradiente normal de la interpolación isoparamétrica y el proveniente del salto del gradiente. A su vez, la variación de este último término permite evaluar las variaciones de las curvaturas en los distintos elementos utilizando, dependiendo de si el lado es parte de una única superficie (suave o no) o corresponde a una línea de ramificación.

*Evaluación de los esfuerzos membranales:* Las características especiales del elemento de lámina desarrollado requieren la evaluación del gradiente a la mitad de cada lado a los fines de calcular la curvatura. Vimos que resulta ventajoso entonces usar esta información para calcular la primera forma fundamental en el centro del elemento y desarrollar el esquema de estabilización membranar. A partir del gradiente de la deformación evaluado a la mitad de cada lado en la superficie media se tienen las componentes en el plano del tensor derecho de Cauchy-Green. Se propone definir el tensor métrico, a utilizar en el punto de integración en el centro del elemento, como un promedio ponderado de los tensores métricos evaluados sobre cada lado. En tanto que la variación de estas deformaciones, necesarias para el planteo de la forma débil de las condiciones de equilibrio, da origen a la habitual matriz que relaciona para cada punto medio la variación de las deformaciones de Green-Lagrange con la variación de los desplazamientos de la superficie media y permite calcular la matriz correspondiente a la aproximación en deformaciones impuestas que relaciona deformaciones virtuales con desplazamientos virtuales. El vector de desplazamientos agrupa solamente a los cuatro nudos del elemento.

*Estabilización membranar:* A los efectos de controlar la aparición de los modos espurios de deformación (*hourglass*), alcanza con definir las deformaciones de Green-Lagrange de estabilización como la diferencia entre las componentes cruzadas del tensor métrico calculado a la mitad de cada lado y el

promedio ponderado. La variación de estas deformaciones es la diferencia de las matrices evaluadas en cada lado del elemento y la matriz en el centro. Dichas matrices son las que relacionan únicamente la variación de las componentes cruzadas de cada lado con el vector de desplazamiento. Vimos que el esfuerzo adicional para la estabilización membranal es mínimo.

*Evaluación de esfuerzos residuales:* Las fuerzas nodales equivalentes se obtienen de la expresión del trabajo virtual interno sobre el volumen inicial en función del segundo tensor de Piola-Kirchhoff y el tensor derecho de Cauchy-Green  $\mathbf{C}$ . Vimos que este último puede aproximarse para puntos fuera de la superficie media. Luego, definimos los esfuerzos integrados en el espesor original. Las fuerzas de estabilización membranal pueden obtenerse de definir una energía interna de deformación en función del tensor de Green-Lagrange. Así, el término correspondiente a la energía de deformación de estabilización membranal planteado en función del tensor de elasticidad de cuarto orden, permite obtener un esquema correspondiente a una estabilización física. Vimos que considerando únicamente las componentes cruzadas alcanza para definir las fuerzas de estabilización membranal. Para el control del modo flexional espurio se define un momento estabilizante en cada lado del elemento principal a partir de definir la diferencia entre el cambio de curvatura normal y la aproximación a la curvatura normal a través del ángulo que forman las normales y la distancia del centro del elemento a la mitad del lado.

*Matriz de rigidez tangente:* para el esquema implícito la matriz de rigidez tangente se obtiene derivando las expresiones de las fuerzas nodales provenientes de los esfuerzos flexionales y membranales y sus respectivas fuerzas de estabilización respecto a los desplazamientos. Obteniéndose la rigidez material cuya parte material debida a los esfuerzos en el centro del elemento depende de la relación constitutiva, en particular del módulo tangente algorítmico, la componente de la matriz de rigidez material debida a estabilización membranal y la matriz de rigidez material asociada a la estabilización flexional. La rigidez geométrica resulta de la contribución membranal y flexional. Dentro de la contribución membranal se consideran dos partes, la contribución proveniente de la integración en el centro del elemento y la debida a la estabilización membranal.

Cabe mencionar que dentro de los desarrollos presentados en esta tesis se incluyó también el tratamiento de restricciones multipunto cuyo objetivo es poder unir elementos de lámina con elementos de sólido. Para la transferencia de

los esfuerzos membranales, las fuerzas nodales equivalentes resultantes asociadas a los nudos de la lámina sobre la cara del sólido, pasan en forma estándar a los nudos que forman la cara del sólido a través de las restricciones impuestas por la condición nudo sobre una arista. Para la evaluación de la curvatura se considera como si el lado estuviera empotrado, donde la normal al plano de empotramiento se actualiza paso a paso en función de las coordenadas de los nudos de la cara del sólido. La transferencia de fuerzas equivalentes a los momentos se lleva a cabo usando las expresiones habituales de la formulación del elementos de lámina, como si el lado estuviese empotrado.

Finalmente se presentaron varios ejemplos numéricos con el fin de convalidar la formulación propuesta. El elemento formulado se implementó en un código implícito y explícito. Se analizaron: problemas lineales, problemas no lineales, problemas de lámina-sólido y problemas de embutición de láminas.

## 11.2. Conclusiones

Las principales conclusiones de esta tesis son:

- Debido a la forma de tratar el quiebre entre dos elementos, considerando en el cálculo de las rotaciones relativas espesor, material y tamaño de los elementos involucrados en la parcela, la sensibilidad a la regularidad y orientación de la malla se ve disminuida.
- Desde el punto de vista de la flexión, el elemento muestra muy buen comportamiento para pequeñas deformaciones y es un poco más flexible para grandes deformaciones.
- En la formulación propuesta la continuidad  $C^1$  se establece en forma discreta en cada punto medio del cuadrilátero, por lo tanto, como consecuencia de la no conformidad, para láminas muy delgadas, no se necesitan estrategias especiales para lidiar con las deformaciones transversales.
- Como consecuencia del uso de un solo punto de Gauss en el campo flexional, aparecen modos de energía espurios cuya forma es de una semionda y es propia de los elementos cuadriláteros sin rotaciones.

- Estrictamente, los modos flexionales, puede aparecer solamente sobre superficies planas, sin embargo se observó en algunos casos numéricos que dichos modos espurios pueden ocurrir con una baja energía de deformación en superficies curvas.
- El efecto del esquema de estabilización flexional sobre los resultados numéricos, en general, muestra baja sensibilidad a medida que se refinan las mallas. Similar conclusión se obtiene para el esquema de estabilización membranar.
- Para una precisión requerida, el número total de GdL en el modelo, es un poco menos que la mitad comparado con otro elementos que incluyen las rotaciones como GdL. Por lo tanto, como resultado de usar únicamente los desplazamientos como GdL y solamente un punto de Gauss, el tamaño de las matrices y el tiempo de cálculo de CPU se reducen considerablemente.
- A la luz de los resultados, el elemento *BBSQ* permite tratar problemas con grandes deformaciones y geometrías arbitrarias de manera satisfactoria.

### 11.3. Aspectos originales

Los principales desarrollos de elementos de lámina sin rotaciones han sido sobre elementos triangulares y muy poco sobre elementos cuadriláteros. Dentro del MEF, encontramos unos pocos elementos cuadriláteros de esta naturaleza, entre ellos, Brunet y Sabourin (2006) y Linhard et al. (2007) (ver Capítulo 3). En este sentido la tesis aporta una nueva formulación. Así, en el Capítulo 4 se presenta la formulación de un elemento cuadrilátero básico limitado al análisis de superficies suaves con grandes deformaciones (ver Flores y Estrada (2007)). Y en el Capítulo 5 se formula un nuevo elemento con mayores prestaciones que su antecesor que permite, entre otras cosas, el tratamiento de geometrías quebradas y ramificadas. A la luz de lo expuesto, resulta interesante puntualizar los aspectos originales de esta tesis, aspectos que están íntimamente relacionados con la formulación del elemento de lámina propuesto y que pasamos a describir a continuación:

- La forma de evaluar la segunda forma fundamental, la cual está formada por dos partes: las curvaturas en el elemento a partir de la interpolación

isoparamétrica y las curvaturas que provienen del “salto” del gradiente normal.

- El esquema de estabilización flexional, el cual se define como la diferencia entre dos curvaturas. Una de ellas, es la definida como la proyección normal sobre cada lado de la curvatura proveniente del salto del gradiente normal. Y la otra, la curvatura aproximada definida a través del ángulo que forman las normales y la distancia del centro del elemento a la mitad del lado.
- El esquema de deformaciones impuestas para la membrana, obtenido a partir del gradiente de la deformación evaluado a la mitad de cada lado en la superficie media. De esta forma se propone definir el tensor métrico, a utilizar en el punto de integración en el centro del elemento, como un promedio ponderado de los tensores métricos evaluados sobre cada lado.
- El esquema de estabilización membranal, que define las deformaciones de Green-Lagrange de estabilización como la diferencia entre las componentes cruzadas del tensor métrico calculado a la mitad de cada lado y el promedio ponderado.
- El tratamiento de un quiebre, el cual se define a través de las rotaciones relativas a través de la distancia medida perpendicularmente al lado hasta el centro de cada elemento. Luego, dicha distancia se puede aproximar a través de la relación área-longitud de cada elemento. Obteniéndose así, una expresión que tiene en cuenta posibles cambios en el material y en el espesor de lámina entre dos elementos adyacentes.
- El tratamiento de ramificaciones como un caso general del tratamiento de un quiebre. Dicho aspecto permite resolver diferentes problemas ingenieriles de interés.
- La unión con elementos de sólido a través del esquema de restricción multipunto descripto. Las restricciones no se incorporan directamente, por el contrario, resulta necesario incluir información sobre la geometría de los elementos involucrados.

## 11.4. Recomendaciones para trabajos futuros

- Para el tratamiento de los esquemas de estabilización una alternativa a explorar es el uso de una formulación corotacional. En problemas elasto-plástico un esquema de estabilización que contemple la no linealidad sería más correcto. En este caso un modelo hipoeelástico permitiría evaluar incrementalmente las fuerzas y momentos estabilizantes utilizando un módulo modificado en función del flujo plástico integrado en el espesor de la lámina.
- Imponer una restricción multipunto que permita adosar o solapar los elementos de láminas entre sí. Este tipo de restricción es importante en distintas tipologías estructurales, por ejemplo, en piezas aeronáuticas donde se usan materiales compuestos formadas por varias capas pegadas y/o remachadas entre sí.
- Analizar el campo de esfuerzos, sobre todo el esfuerzo de corte para mallas no uniformes y sobre todo en mallas no estructuradas, con el fin de investigar más a fondo el comportamiento del elemento propuesto frente a estos tipos de mallas.
- A partir de la segunda forma fundamental resulta interesante analizar la alternativa de plantear una formulación utilizando la proyección del gradiente sobre la derivada del director. De esta forma el campo de curvatura se obtiene integrando por parte la derivada del director y manteniendo constante el plano tangente a la superficie media en el centro del elemento.
- Para el tratamiento de geometrías suaves y en problemas dominados por esfuerzos membranales se podría formular un elemento de lámina cuadrilátero usando una interpolación cuadrática para la geometría de la parcela. De esta forma se tendría un elemento de lámina mejorado desde un punto de vista membranal y con posibles mejoras en el campo flexional.
- Por último, se considera interesante la implementación de la formulación propuesta en un código implícito que permita tratar, además de la no linealidad geométrica, la no linealidad material. Dicha implementación permitiría analizar otros casos de interés ingenieril que no se abordaron con el código explícito.



# Apéndice A

## Modelos de placa lineal

### A.1. Modelo de Placa de Kirchhoff-Love

Para el caso de una teoría lineal de placa, podemos elegir el sistema global Cartesiano  $(X^1, X^2, X^3)$  en lugar del sistema de coordenadas convectivas  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$  para parametrizar las ecuaciones de la lámina. Luego el vector de desplazamiento del plano medio se define como  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & u_3^o \end{bmatrix}^T$  donde  $u_3^o$  es el desplazamiento transversal de la lámina, y los vectores bases covariantes se expresan como  $\boldsymbol{\varphi}'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & u_{3'1}^o \end{bmatrix}^T$  y  $\boldsymbol{\varphi}'_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & u_{3'2}^o \end{bmatrix}^T$ . Despreciando los cuadrados y productos de derivadas se obtiene

$$\mathbf{t}_3 = \frac{\boldsymbol{\varphi}'_1 \times \boldsymbol{\varphi}'_2}{|\boldsymbol{\varphi}'_1 \times \boldsymbol{\varphi}'_2|} = \frac{\begin{bmatrix} -u_{3'1}^o & -u_{3'2}^o & 1 \end{bmatrix}}{(1 + u_{3'1}^2 + u_{3'2}^2)^{1/2}} \approx \begin{bmatrix} -u_{3'1}^o & -u_{3'2}^o & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Luego, el campo de desplazamientos  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}^T$  queda

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{v} + \xi^3 (\mathbf{t}_3 - \mathbf{t}_3^o) \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3^o \end{bmatrix} + \xi^3 \begin{bmatrix} -u_{3'1}^o \\ -u_{3'2}^o \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

donde  $u_{3'\alpha}^o$  son los ángulos de rotación  $\beta_\alpha$  que definen el giro de la normal  $\mathbf{t}_3$ . Esto es cierto debido a la restricción impuesta a la hipótesis de las normales de la teoría de Kirchhoff-Love. Así, la restricción según (2.44), para el caso de

placas, se expresa como

$$(\mathbf{\Lambda}_\varepsilon \mathbf{t}_3^o) (\boldsymbol{\varphi}'_\alpha + \mathbf{v}'_\alpha) = 0 \quad (\text{A.3})$$

donde  $\mathbf{\Lambda}_\varepsilon$  es el tensor de rotación linealizado, expresado como

$$\mathbf{\Lambda}_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Theta^2 \\ 0 & 1 & -\Theta^1 \\ -\Theta^2 & \Theta^1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

y  $\Theta^\alpha$  son las componentes del vector rotación infinitesimal. Luego (A.3) queda

$$\Theta^2 + u_{3'1}^o = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$-\Theta^1 + u_{3'2}^o = 0 \quad (\text{A.6})$$

## A.2. Modelo de Placa de Reissner-Mindlin

La diferencia fundamental entre los modelos de placa de Reissner-Mindlin y Kirchhoff-Love es la restricción impuesta a las normales al plano medio cuando se deforma la placa. Así, la hipótesis para el caso de Reissner-Mindlin relaja la condición (A.3) al permitir que las normales, al final de la deformación, no sean necesariamente normales al plano medio. Como consecuencia de dicha hipótesis la condición (A.3) se expresa como

$$\mathbf{t}_3 \cdot \boldsymbol{\varphi}'_\alpha = (\mathbf{\Lambda}_\varepsilon \mathbf{t}_3^o) \cdot (\boldsymbol{\varphi}'_\alpha + \mathbf{v}'_\alpha) = \gamma_\alpha \quad (\text{A.7})$$

donde  $\gamma_\alpha$  son los giros adicionales (deformaciones por corte) de las normales. Luego los ángulos de rotación pueden expresarse como

$$\beta_1 = u_{3'1}^o + \gamma_1 \quad \beta_2 = u_{3'2}^o + \gamma_2 \quad (\text{A.8})$$

Finalmente el campo de desplazamientos queda

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{v} + \xi^3 (\mathbf{t}_3 - \mathbf{t}_3^o) \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3^o \end{bmatrix} + \xi^3 \begin{bmatrix} -(u_{3'1}^o + \gamma_1) \\ -(u_{3'2}^o + \gamma_2) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

# Apéndice B

## Funciones de interpolación y evaluación del gradiente

Las funciones de interpolación bilineal  $N^I(\xi, \eta)$  definidas sobre el elemento maestro (ver por ejemplo Zienkiewicz y Taylor (2000)), cuadrado de lado 2 en  $(\xi, \eta) = [-1..1]$  son

$$\begin{aligned}N^I(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (1 + \xi^I \xi) (1 + \eta^I \eta) \\N_{\xi}^I(\xi, \eta) &= \frac{\xi^I}{4} (1 + \eta^I \eta) \\N_{\eta}^I(\xi, \eta) &= \frac{\eta^I}{4} (1 + \xi^I \xi)\end{aligned}$$

donde  $(\xi^I, \eta^I)$  son las coordenadas de cada nudo en el plano paramétrico, así resultan las  $N^I(\xi, \eta)$  y sus derivadas

nudo	$\xi^I$	$\eta^I$	$N^I$	$N_{\xi}^I$	$N_{\eta}^I$	$N_{\xi\eta}^I$
1	-1	-1	$\frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta)$	$-\frac{1}{4} (1 - \eta)$	$-\frac{1}{4} (1 - \xi)$	$\frac{1}{4}$
2	1	-1	$\frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta)$	$\frac{1}{4} (1 - \eta)$	$-\frac{1}{4} (1 + \xi)$	$-\frac{1}{4}$
3	1	1	$\frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta)$	$\frac{1}{4} (1 + \eta)$	$\frac{1}{4} (1 + \xi)$	$\frac{1}{4}$
4	-1	1	$\frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta)$	$-\frac{1}{4} (1 + \eta)$	$\frac{1}{4} (1 - \xi)$	$-\frac{1}{4}$

Notar que

$$\begin{aligned}\varphi_{,\xi} &= \varphi_{,\xi}^0 + \eta \varphi_{,\xi\eta} \\ \varphi_{,\eta} &= \varphi_{,\eta}^0 + \xi \varphi_{,\xi\eta}\end{aligned}$$

con

$$\varphi_{i\xi}^0 = \frac{1}{4} (-\varphi^1 + \varphi^2 + \varphi^3 - \varphi^4) \quad (\text{B.1})$$

$$\varphi_{i\eta}^0 = \frac{1}{4} (-\varphi^1 - \varphi^2 + \varphi^3 + \varphi^4) \quad (\text{B.2})$$

$$\varphi_{i\xi\eta} = \frac{1}{4} (\varphi^1 - \varphi^2 + \varphi^3 - \varphi^4) \quad (\text{B.3})$$

# Apéndice C

## Proyección del gradiente normal en función de un ángulo

Como se comentó en el Capítulo 5, al tratar el gradiente normal proyectado en la dirección del director  $\mathbf{t}_3^{i(K)}$ , es posible definir dicha expresión en función del ángulo que forman las normales de dos elementos adyacentes. Así,

$$\boldsymbol{\varphi}'_n{}^{i(M)} = \left( \boldsymbol{\varphi}'_n{}^{i(M)} \cdot \mathbf{n}^{i(M)} \right) \mathbf{n}^{i(M)} + \left( \boldsymbol{\varphi}'_n{}^{i(M)} \cdot \mathbf{s}^i \right) \mathbf{s}^i \quad (\text{C.1})$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}'_n{}^{i(M)} \cdot \mathbf{t}_3^{k(K)} &= \left( \boldsymbol{\varphi}'_n{}^{i(M)} \cdot \mathbf{n}^{i(M)} \right) \mathbf{n}^{i(M)} \cdot \mathbf{t}_3^{k(K)} \\ &+ \left( \boldsymbol{\varphi}'_n{}^{i(M)} \cdot \mathbf{s}^i \right) \mathbf{s}^i \cdot \mathbf{t}_3^{k(K)} \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

donde  $\mathbf{n}^{i(M)}$  es la normal saliente del elemento maestro al lado en cuestión y  $\mathbf{s}^i$  es la dirección del lado. Como  $\mathbf{s}^i$  es ortogonal a  $\mathbf{t}_3^{k(K)}$  y además son vectores unitarios  $\|\mathbf{t}_3^{k(K)}\| = \|\mathbf{n}^{i(M)}\| = 1$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}'_n{}^{i(M)} \cdot \mathbf{t}_3^{k(K)} &= \left( \boldsymbol{\varphi}'_n{}^{i(M)} \cdot \mathbf{n}^{i(M)} \right) \mathbf{n}^{i(M)} \cdot \mathbf{t}_3^{k(K)} \\ &= \left( \boldsymbol{\varphi}'_n{}^{i(M)} \cdot \mathbf{n}^{i(M)} \right) \sin(2\gamma_i) \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Por otro lado

$$\mathbf{t}_3^{i(M)} = \lambda^{i(M)} \left[ \boldsymbol{\varphi}'_n{}^{i(M)} \times \boldsymbol{\varphi}'_s{}^{i(M)} \right] = \lambda^{i(M)} \lambda_{s_i} \left[ \boldsymbol{\varphi}'_n{}^{i(M)} \times \mathbf{s}^i \right] \quad (\text{C.4})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_3^{i(M)} \cdot \mathbf{t}_3^{i(M)} &= 1 \\ &= \frac{1}{\lambda_n^{i(M)}} \left[ \boldsymbol{\varphi}'_n{}^{i(M)} \times \mathbf{s}^i \right] \cdot \mathbf{t}_3^{i(M)} \\ &= \frac{1}{\lambda_n^{i(M)}} \boldsymbol{\varphi}'_n{}^{i(M)} \cdot \left[ \mathbf{s}^i \times \mathbf{t}_3^{i(M)} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

siendo  $\mathbf{s}^i$  y  $\mathbf{t}_3^{i(M)}$  ortogonales y  $\mathbf{n}^{i(M)} = \mathbf{s}^i \times \mathbf{t}_3^{i(M)}$ , luego de (C.5) se obtiene

$$\boldsymbol{\varphi}'_n{}^{i(M)} \cdot \mathbf{n}^{i(M)} \simeq \lambda_n^{i(M)}$$

Luego (C.3) queda

$$\boldsymbol{\varphi}'_n{}^{i(M)} \cdot \mathbf{t}_3^{k(K)} \cong \lambda_n^{i(M)} \sin(2\gamma_i) \quad (\text{C.6})$$

# Apéndice D

## Matriz de rigidez geométrica flexional

La contribución a la rigidez geométrica de la parte flexional puede obtenerse en forma similar a las expresiones formuladas sobre un elemento triangular (Flores y Oñate (2001)). Los siguientes desarrollos se muestran a los fines de completar la formulación propuesta, sin embargo, experimentos numéricos muestran que la contribución de la parte geométrica flexional no tiene importancia, por ende, no se la implementó computacionalmente.

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_{Gb}^0 \Delta \mathbf{u} &= {}^o A \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\delta \kappa)^T \mathbf{M} \Delta \mathbf{u} \\ &= \begin{bmatrix} M_{11} & M_{22} & M_{12} \end{bmatrix} \sum_{k=1}^4 l^k \left\{ \begin{bmatrix} n_1^2 & -n_1 n_2 \\ n_2^2 & n_1 n_2 \\ 2n_1 n_2 & n_1^2 - n_2^2 \end{bmatrix} \right\}^k \\ &\quad \left[ \begin{array}{c} \Delta \left[ \delta \left( \boldsymbol{\varphi}'_n{}^{k(M)} \cdot \mathbf{t}_3^{0(M)} \right) \right] \\ \Delta \left[ \delta \left( \boldsymbol{\varphi}'_s{}^{k(M)} \cdot \mathbf{t}_3^{0(M)} \right) \right] \end{array} \right] + \begin{bmatrix} n_1^2 \\ n_2^2 \\ 2n_1 n_2 \end{bmatrix}^k \\ &\quad \Delta \left[ \delta \left( \lambda_n^{k(M)} \gamma^k \right) \right] \end{aligned} \quad (D.1)$$

Empezaremos por el primer término, mas precisamente por las expresiones de  $\Delta \left[ \delta \left( \boldsymbol{\varphi}'_n{}^{k(M)} \cdot \mathbf{t}_3^{0(M)} \right) \right]$  y  $\Delta \left[ \delta \left( \boldsymbol{\varphi}'_s{}^{k(M)} \cdot \mathbf{t}_3^{0(M)} \right) \right]$  que tienen formas parecidas. Desarrollando para la primera de las dos expresiones anteriores, se tiene por un

lado

$$\begin{aligned}
\Delta \left[ \delta \left( \boldsymbol{\varphi}'_n{}^{k(M)} \cdot \mathbf{t}_3^{0(M)} \right) \right] &= \Delta \left[ \delta \boldsymbol{\varphi}'_n{}^{k(M)} \cdot \mathbf{t}_3^{0(M)} + \boldsymbol{\varphi}'_n{}^{k(M)} \cdot \delta \mathbf{t}_3^{0(M)} \right] \\
&= \Delta \left( \delta \boldsymbol{\varphi}'_n{}^{k(M)} \right) \cdot \mathbf{t}_3^{0(M)} + \Delta \boldsymbol{\varphi}'_n{}^{k(M)} \cdot \delta \mathbf{t}_3^{0(M)} \\
&\quad + \delta \boldsymbol{\varphi}'_n{}^{k(M)} \cdot \Delta \mathbf{t}_3^{0(M)} + \boldsymbol{\varphi}'_n{}^{k(M)} \cdot \Delta \left( \delta \mathbf{t}_3^{0(M)} \right) \quad (\text{D.2})
\end{aligned}$$

Notar que  $\Delta \left( \delta \boldsymbol{\varphi}'_n{}^{k(M)} \right) = 0$ . El segundo y tercer término son de la forma

$$\begin{aligned}
\Delta \boldsymbol{\varphi}'_n{}^{k(M)} \cdot \delta \mathbf{t}_3^{0(M)} &= \left\{ \sum_{K=1}^4 N_{,n}^{K(k)(M)} \Delta \mathbf{u}^{K(k)(M)} \right\} \\
&\quad \cdot \left\{ - \sum_{J=1}^4 \left[ N_{,\eta_1}^{J(0)(M)} \tilde{\boldsymbol{\varphi}}'_{\eta_1}{}^0 + N_{,\eta_2}^{J(0)(M)} \tilde{\boldsymbol{\varphi}}'_{\eta_2}{}^0 \right] \right. \\
&\quad \left. \left( \mathbf{t}_3^{0(M)} \cdot \delta \mathbf{u}^{J(0)(M)} \right) \right\} \\
&= - \sum_{J=1}^4 \sum_{K=1}^4 \left( \delta \mathbf{u}^{J(0)(M)} \right)^T \left[ N_{,\eta_1}^{J(0)(M)} \left( \mathbf{t}_3^{0(M)} \otimes \tilde{\boldsymbol{\varphi}}'_{\eta_1}{}^0 \right) \right. \\
&\quad \left. + N_{,\eta_2}^{J(0)(M)} \left( \mathbf{t}_3^{0(M)} \otimes \tilde{\boldsymbol{\varphi}}'_{\eta_2}{}^0 \right) \right] N_{,n}^{K(k)(M)} \Delta \mathbf{u}^{K(k)(M)} \quad (\text{D.3})
\end{aligned}$$

Luego, la contribución del segundo y tercer término de la ecuación (D.2) a la matriz de rigidez geométrica flexional (teniendo en mente, también, los mismos términos correspondientes a  $\Delta \left[ \delta \left( \boldsymbol{\varphi}'_n{}^{k(M)} \cdot \mathbf{t}_3^{0(M)} \right) \right]$ ) tiene la siguiente forma flexional

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_{Gb1}^0 \Delta \mathbf{u} &= \left( - \sum_{J=1}^4 \left( \delta \mathbf{u}^{J(0)(M)} \right)^T \left[ N_{,\eta_1}^{J(0)(M)} \quad N_{,\eta_2}^{J(0)(M)} \right] \left[ \begin{array}{c} \mathbf{t}_3^{0(M)} \otimes \tilde{\boldsymbol{\varphi}}'_{\eta_1}{}^0 \\ \mathbf{t}_3^{0(M)} \otimes \tilde{\boldsymbol{\varphi}}'_{\eta_2}{}^0 \end{array} \right] \right) \\
&\quad \left[ \begin{array}{ccc} M_{11} & M_{22} & M_{12} \end{array} \right] \sum_{k=1}^4 \left\{ \left[ \begin{array}{cc} n_1^2 & -n_1 n_2 \\ n_2^2 & n_1 n_2 \\ 2n_1 n_2 & n_1^2 - n_2^2 \end{array} \right]^k \right. \\
&\quad \left. \sum_{K=1}^4 \left[ \begin{array}{c} N_{,n}^{K(k)(M)} \\ N_{,s}^{K(k)(M)} \end{array} \right] \Delta \mathbf{u}^{K(k)(M)} \right\} \quad (\text{D.4})
\end{aligned}$$

El último término de (D.2)  $\boldsymbol{\varphi}'_n{}^{k(M)} \cdot \Delta \left( \delta \mathbf{t}_3^{0(M)} \right)$  es más complicado. En el Apéndice E se muestra que  $\Delta \left( \delta \mathbf{t}_3^{0(M)} \right)$  puede ser resuelto en la base convectiva.

Su expresión resulta

$$\begin{aligned}
\Delta \left( \delta \mathbf{t}_3^{0(M)} \right) &= \Delta \left[ \delta \mathbf{t}_3^{0(M)} \right]_1 \tilde{\varphi}'_{\eta_1}{}^0 + \Delta \left[ \delta \mathbf{t}_3^{0(M)} \right]_2 \tilde{\varphi}'_{\eta_2}{}^0 + \Delta \left[ \delta \mathbf{t}_3^{0(M)} \right]_3 \mathbf{t}_3^{0(M)} \\
&= - \left( \tilde{\varphi}'_{\eta_\alpha}{}^0 \otimes \tilde{\varphi}'_{\eta_\beta}{}^0 \right) \left[ \delta \varphi'_{\eta_\alpha}{}^{0T} \left( \mathbf{t}_3^{0(M)} \otimes \mathbf{t}_3^{0(M)} \right) \Delta \varphi'_{\eta_\beta}{}^0 \right] \mathbf{t}_3^{0(M)} \\
&\quad + \left[ \delta \varphi'_{\eta_\alpha}{}^{0T} \left( \mathbf{t}_3^{0(M)} \otimes \tilde{\varphi}'_{\eta_\alpha}{}^0 \right) \Delta \varphi'_{\eta_\beta}{}^0 \right] \tilde{\varphi}'_{\eta_\beta}{}^0 \\
&\quad + \left[ \delta \varphi'_{\eta_\alpha}{}^{0T} \left( \tilde{\varphi}'_{\eta_\beta}{}^0 \otimes \mathbf{t}_3^{0(M)} \right) \Delta \varphi'_{\eta_\beta}{}^0 \right] \tilde{\varphi}'_{\eta_\alpha}{}^0
\end{aligned} \tag{D.5}$$

El vector  $\Delta \left( \delta \mathbf{t}_3^{0(M)} \right)$  será usado en conjunción con  $\varphi'^n{}^{k(M)}$  luego

$$\begin{aligned}
\Delta \left( \delta \mathbf{t}_3^{0(M)} \right) \cdot \varphi'^n{}^{k(M)} &= - \left( \tilde{\varphi}'_{\eta_\alpha}{}^0 \otimes \tilde{\varphi}'_{\eta_\beta}{}^0 \right) \left[ \delta \varphi'_{\eta_\alpha}{}^{0T} \left( \mathbf{t}_3^{0(M)} \otimes \mathbf{t}_3^{0(M)} \right) \Delta \varphi'_{\eta_\beta}{}^0 \right] \mathbf{t}_3^{0(M)} \cdot \varphi'^n{}^{k(M)} \\
&\quad + \left[ \delta \varphi'_{\eta_\alpha}{}^{0T} \left( \mathbf{t}_3^{0(M)} \otimes \tilde{\varphi}'_{\eta_\alpha}{}^0 \right) \Delta \varphi'_{\eta_\beta}{}^0 \right] \tilde{\varphi}'_{\eta_\beta}{}^0 \cdot \varphi'^n{}^{k(M)} \\
&\quad + \left[ \delta \varphi'_{\eta_\alpha}{}^{0T} \left( \tilde{\varphi}'_{\eta_\beta}{}^0 \otimes \mathbf{t}_3^{0(M)} \right) \Delta \varphi'_{\eta_\beta}{}^0 \right] \tilde{\varphi}'_{\eta_\alpha}{}^0 \cdot \varphi'^n{}^{k(M)} \\
&= \delta \varphi'_{\eta_\alpha}{}^{0T} \left[ \begin{array}{l} - \left( \tilde{\varphi}'_{\eta_\alpha}{}^0 \otimes \tilde{\varphi}'_{\eta_\beta}{}^0 \right) \left( \mathbf{t}_3^{0(M)} \cdot \varphi'^n{}^{k(M)} \right) \left( \mathbf{t}_3^{0(M)} \otimes \mathbf{t}_3^{0(M)} \right) \\ + \left( \tilde{\varphi}'_{\eta_\beta}{}^0 \cdot \varphi'^n{}^{k(M)} \right) \left( \mathbf{t}_3^{0(M)} \otimes \tilde{\varphi}'_{\eta_\alpha}{}^0 \right) \\ + \left( \tilde{\varphi}'_{\eta_\alpha}{}^0 \cdot \varphi'^n{}^{k(M)} \right) \left( \tilde{\varphi}'_{\eta_\beta}{}^0 \otimes \mathbf{t}_3^{0(M)} \right) \end{array} \right] \Delta \varphi'_{\eta_\beta}{}^0
\end{aligned} \tag{D.6}$$

que puede expresarse como

$$\Delta \left( \delta \mathbf{t}_3^{0(M)} \right) \cdot \varphi'^n{}^{k(M)} = \sum_{J=1}^4 \sum_{K=1}^4 \sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^4 N_{\eta_\alpha}{}^{J(0)(M)} N_{\eta_\beta}{}^{K(0)(M)} \left[ \delta \mathbf{u}^{J(0)(M)} \right]^T \mathbf{n}_{\alpha\beta}^k \Delta \mathbf{u}^{K(0)(M)} \tag{D.7}$$

con

$$\mathbf{n}_{\alpha\beta}^k = \left[ -a^{\alpha\beta} b^{k3} \left( \mathbf{t}_3^{0(M)} \otimes \mathbf{t}_3^{0(M)} \right) + b^{k\beta} \left( \mathbf{t}_3^{0(M)} \otimes \tilde{\varphi}'_{\eta_\alpha}{}^0 \right) + b^{k\alpha} \left( \tilde{\varphi}'_{\eta_\beta}{}^0 \otimes \mathbf{t}_3^{0(M)} \right) \right] \tag{D.8}$$

donde se ha utilizado la definición del tensor métrico contravariante

$$a^{\alpha\beta} = \tilde{\varphi}'_{\eta_\alpha}{}^0 \otimes \tilde{\varphi}'_{\eta_\beta}{}^0 = (a_{\alpha\beta})^{-1} \tag{D.9}$$

y

$$b^{k3} = \mathbf{t}_3^{0(M)} \cdot \varphi'^n{}^{k(M)} \quad b^{k\alpha} = \tilde{\varphi}'_{\eta_\alpha}{}^0 \cdot \varphi'^n{}^{k(M)} \quad b^{k\beta} = \tilde{\varphi}'_{\eta_\beta}{}^0 \cdot \varphi'^n{}^{k(M)} \tag{D.10}$$

Finalmente (teniendo en mente la contribución del término  $\varphi'^n{}^{k(M)} \cdot \Delta \left( \delta \mathbf{t}_3^{0(M)} \right)$ )

se obtiene

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_{Gb2}^0 \Delta \mathbf{u} &= \begin{bmatrix} M_{11} & M_{22} & M_{12} \end{bmatrix} \sum_{k=1}^4 \left\{ \begin{bmatrix} n_1^2 & -n_1 n_2 \\ n_2^2 & n_1 n_2 \\ 2n_1 n_2 & n_1^2 - n_2^2 \end{bmatrix}^k \right. \\
&\quad \left. \sum_{J=1}^4 \sum_{K=1}^4 \sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^4 N_{\eta_\alpha}^{J(0)(M)} N_{\eta_\beta}^{K(0)(M)} [\delta \mathbf{u}^{J(0)(M)}]^T \right. \\
&\quad \left. \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{\alpha\beta}^k \\ \mathbf{s}_{\alpha\beta}^k \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}^{K(0)(M)} \right\} \quad (D.11)
\end{aligned}$$

Para el término correspondiente al salto del gradiente, se obtiene

$$\begin{aligned}
\Delta [\delta (\lambda_n^{k(M)} \gamma^k)] &= \Delta [\lambda_n^{k(M)} \delta \gamma^{k(K)} + \gamma^{k(K)} \delta \lambda_n^{k(M)}] \\
&= \Delta \lambda_n^{k(M)} \delta \gamma^{k(K)} + \Delta \gamma^{k(K)} \delta \lambda_n^{k(M)} \\
&\quad + \lambda_n^{k(M)} \Delta (\delta \gamma^{k(K)}) + \gamma^{k(K)} \Delta (\delta \lambda_n^{k(M)}) \quad (D.12)
\end{aligned}$$

El primer y segundo término son de la forma

$$\begin{aligned}
\Delta \lambda_n^{k(M)} \delta \gamma^{k(K)} &= \frac{1}{\lambda_n^{k(M)}} \sum_{K=1}^4 N_{\eta_n}^{K(k)(M)} \boldsymbol{\varphi}_n^{k(M)} \cdot \Delta \mathbf{u}^{K(M)} \\
&\quad \left[ r^{k(K)} \left( \frac{1}{\lambda_n^{k(K)}} \sum_{J=1}^4 N_{\eta_n}^{JK(k)(K)} \left( \mathbf{t}_3^{k(K)} \cdot \delta \mathbf{u}^{J(k)(K)} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{\lambda_n^{k(M)}} \sum_{J=1}^4 N_{\eta_n}^{J(k)(M)} \left( \mathbf{t}_3^{k(M)} \cdot \delta \mathbf{u}^{J(k)(M)} \right) \right) \right] \\
&= \frac{r^{k(K)}}{\lambda_n^{k(M)}} \sum_{J=1}^4 \sum_{K=1}^4 (\delta \mathbf{u}^{J(k)(K)})^T \left[ \frac{1}{\lambda_n^{k(K)}} N_{\eta_n}^{JK(k)(K)} \left( \mathbf{t}_3^{k(K)} \otimes \boldsymbol{\varphi}_n^{k(M)} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\lambda_n^{k(M)}} N_{\eta_n}^{J(k)(M)} \left( \mathbf{t}_3^{k(M)} \otimes \boldsymbol{\varphi}_n^{k(M)} \right) \right] N_{\eta_n}^{K(k)(M)} \Delta \mathbf{u}^{K(M)} \quad (D.13)
\end{aligned}$$

Luego la contribución a la matriz de rigidez resulta

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_{Gb2}^K \Delta \mathbf{u} &= \begin{bmatrix} M_{11} & M_{22} & M_{12} \end{bmatrix} \sum_{k=1}^4 \left\{ \frac{r^{k(K)}}{\lambda_n^{k(M)}} \begin{bmatrix} n_1^2 \\ n_2^2 \\ 2n_1 n_2 \end{bmatrix}^k \sum_{J=1}^4 \sum_{K=1}^4 (\delta \mathbf{u}^{J(k)(K)})^T \right. \\
&\quad \left. \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_n^{k(K)}} N_{\eta_n}^{J(k)(K)} & \frac{-1}{\lambda_n^{k(M)}} N_{\eta_n}^{J(k)(M)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_3^{k(K)} \otimes \boldsymbol{\varphi}_n^{k(M)} \\ \mathbf{t}_3^{k(M)} \otimes \boldsymbol{\varphi}_n^{k(M)} \end{bmatrix} N_{\eta_n}^{J(k)(M)} \Delta \mathbf{u}^{K(k)(M)} \right\}
\end{aligned}$$

(D.14)

El tercer término

$$\begin{aligned}
\lambda_n^{k(M)} \Delta (\delta \gamma^{k(K)}) &= \lambda_n^{k(M)} r^{k(K)} \left( \frac{1}{\lambda_n^{k(K)}} \delta \varphi_{\eta_n}^{k(K)} \cdot \Delta \mathbf{t}_3^{k(K)} - \frac{1}{\lambda_n^{k(M)}} \delta \varphi_{\eta_n}^{k(M)} \cdot \Delta \mathbf{t}_3^{k(M)} \right) \\
&= \lambda_n^{k(M)} r^{k(K)} \left\{ \frac{-1}{\lambda_n^{k(K)}} \sum_{J=1}^4 \sum_{K=1}^4 (\delta \mathbf{u}^{J(k)(K)})^T \left[ N_{\eta_1}^{J(k)(K)} \left( \mathbf{t}_3^{k(K)} \otimes \tilde{\varphi}_{\eta_1}^{k(K)} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + N_{\eta_2}^{J(k)(K)} \left( \mathbf{t}_3^{k(K)} \otimes \tilde{\varphi}_{\eta_2}^{k(K)} \right) \right] N_{\eta_n}^{J(k)(K)} \Delta \mathbf{u}^{K(k)(K)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\lambda_n^{k(M)}} \sum_{J=1}^4 \sum_{K=1}^4 (\delta \mathbf{u}^{J(k)(M)})^T \left[ N_{\eta_1}^{J(k)(M)} \left( \mathbf{t}_3^{k(M)} \otimes \tilde{\varphi}_{\eta_1}^{k(M)} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + N_{\eta_2}^{J(k)(M)} \left( \mathbf{t}_3^{k(M)} \otimes \tilde{\varphi}_{\eta_2}^{k(M)} \right) \right] N_{\eta_n}^{J(k)(M)} \Delta \mathbf{u}^{K(k)(M)} \right\} \quad (D.15)
\end{aligned}$$

Luego la contribución a la matriz de rigidez resulta

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_{Gb3}^K \Delta \mathbf{u} &= \left[ M_{11} \ M_{22} \ M_{12} \right] \sum_{k=1}^4 \left\{ r^{k(K)} \begin{bmatrix} n_1^2 & & \\ & n_2^2 & \\ & & 2n_1 n_2 \end{bmatrix} \sum_{J=1}^4 \sum_{K=1}^4 (\delta \mathbf{u}^{J(k)(M)})^T \right. \\
&\quad \left[ N_{\eta_1}^{J(k)(M)} \ N_{\eta_2}^{J(k)(M)} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{t}_3^{k(M)} \otimes \tilde{\varphi}_{\eta_1}^{k(M)} \\ \mathbf{t}_3^{k(M)} \otimes \tilde{\varphi}_{\eta_2}^{k(M)} \end{bmatrix} N_{\eta_n}^{J(k)(M)} \Delta \mathbf{u}^{K(k)(M)} \\
&\quad - \frac{\lambda_n^{k(M)} r^{k(K)}}{\lambda_n^{k(K)}} \begin{bmatrix} n_1^2 & & \\ & n_2^2 & \\ & & 2n_1 n_2 \end{bmatrix} \sum_{J=1}^4 \sum_{K=1}^4 (\delta \mathbf{u}^{J(k)(K)})^T \\
&\quad \left. \left[ N_{\eta_1}^{J(k)(K)} \ N_{\eta_2}^{J(k)(K)} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{t}_3^{k(K)} \otimes \tilde{\varphi}_{\eta_1}^{k(K)} \\ \mathbf{t}_3^{k(K)} \otimes \tilde{\varphi}_{\eta_2}^{k(K)} \end{bmatrix} N_{\eta_n}^{J(k)(K)} \Delta \mathbf{u}^{K(k)(K)} \right\} \quad (D.16)
\end{aligned}$$

Finalmente el cuarto término se expresa como

$$\gamma^{k(K)} \Delta (\delta \lambda_n^{k(M)}) = \frac{\gamma^{k(K)}}{\lambda_n^{k(M)}} \sum_{J=1}^4 \sum_{K=1}^4 (\delta \mathbf{u}^{J(k)(M)})^T N_{\eta_n}^{J(k)(M)} N_{\eta_n}^{K(k)(M)} \Delta \mathbf{u}^{K(k)(M)} \quad (D.17)$$

y su respectiva contribución a la matriz geométrica flexional resulta

$$\delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_{Gb4}^K \Delta \mathbf{u} = \left[ M_{11} \ M_{22} \ M_{12} \right] \sum_{k=1}^4 \left\{ \frac{\gamma^{k(K)}}{\lambda_n^{k(M)}} \begin{bmatrix} n_1^2 \\ n_2^2 \\ 2n_1 n_2 \end{bmatrix}^k \right. \\ \left. \sum_{J=1}^4 \sum_{K=1}^4 (\delta \mathbf{u}^{J(k)(M)})^T N_{n'}^{J(k)(M)} N_{n'}^{K(k)(M)} \Delta \mathbf{u}^{K(k)(M)} \right\} \quad (\text{D.18})$$

Luego la matriz de rigidez geométrica (D.1) es la suma de las cuatro contribuciones (D.4), (D.11), (D.16) y (D.18). Expresiones similares pueden obtenerse para la matriz de rigidez geométrica de la parte correspondiente a la estabilización flexional.

# Apéndice E

## Cálculo del incremento de la variación del vector director

El cálculo de  $\Delta \left( \delta \mathbf{t}_3^{0(M)} \right)$  se deriva aquí

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{t}_3^{0(M)} &= \left( -\mathbf{t}_3^{0(M)} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}_{i\eta\alpha}^0 \right) \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{i\eta\alpha}^0 \\ &= - \left[ \left( \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{i\eta\alpha}^0 \otimes \mathbf{t}_3^{0(M)} \right) \delta \boldsymbol{\varphi}_{i\eta\alpha}^0 \right] \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

donde el índice griego repetido indica suma ( $\alpha = 1, 2$ )

$$\begin{aligned} \Delta \left( \delta \mathbf{t}_3^{0(M)} \right) &= - \left[ \left( \Delta \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{i\eta\alpha}^0 \otimes \mathbf{t}_3^{0(M)} \right) + \left( \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{i\eta\alpha}^0 \otimes \Delta \mathbf{t}_3^{0(M)} \right) \right] \delta \boldsymbol{\varphi}_{i\eta\alpha}^0 \\ &= \left[ - \left( \Delta \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{i\eta\alpha}^0 \otimes \mathbf{t}_3^{0(M)} \right) + \left( \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{i\eta\alpha}^0 \otimes \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{i\eta\beta}^0 \right) \left( \mathbf{t}_3^{0(M)} \cdot \Delta \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{i\eta\beta}^0 \right) \right] \delta \boldsymbol{\varphi}_{i\eta\alpha}^0 \end{aligned}$$

Notando luego que

$$\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{i\eta\alpha}^0 \cdot \boldsymbol{\varphi}_{i\eta\beta}^0 = \delta_{\alpha\beta} \quad (\text{E.2})$$

$$\Delta \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{i\eta\alpha}^0 \cdot \boldsymbol{\varphi}_{i\eta\beta}^0 = -\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{i\eta\alpha}^0 \cdot \Delta \boldsymbol{\varphi}_{i\eta\beta}^0 \quad (\text{E.3})$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{i\eta\alpha}^0 \cdot \mathbf{t}_3^{0(M)} = 0 \quad (\text{E.4})$$

$$\Delta \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{i\eta\alpha}^0 \cdot \mathbf{t}_3^{0(M)} = -\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{i\eta\alpha}^0 \cdot \Delta \mathbf{t}_3^{0(M)} \quad (\text{E.5})$$

y resolviendo  $\Delta \tilde{\varphi}_{i\eta_\alpha}^0$  en la base convectiva

$$\begin{aligned}\Delta \tilde{\varphi}_{i\eta_\alpha}^0 &= - \left[ \left( \tilde{\varphi}_{i\eta_\alpha}^0 \cdot \Delta \varphi_{i\eta_\beta}^0 \right) \tilde{\varphi}_{i\eta_\beta}^0 + \left( \tilde{\varphi}_{i\eta_\alpha}^0 \cdot \Delta \mathbf{t}_3^{0(M)} \right) \mathbf{t}_3^{0(M)} \right] \\ &= - \left[ \left( \tilde{\varphi}_{i\eta_\beta}^0 \otimes \tilde{\varphi}_{i\eta_\alpha}^0 \right) \Delta \varphi_{i\eta_\beta}^0 + \left( \mathbf{t}_3^{0(M)} \otimes \tilde{\varphi}_{i\eta_\alpha}^0 \right) \Delta \mathbf{t}_3^{0(M)} \right]\end{aligned}$$

se puede expresar

$$\begin{aligned}\Delta \left( \delta \mathbf{t}_3^{0(M)} \right) &= \left\{ \left[ \left( \tilde{\varphi}_{i\eta_\alpha}^0 \cdot \Delta \varphi_{i\eta_\beta}^0 \right) \tilde{\varphi}_{i\eta_\beta}^0 + \left( \tilde{\varphi}_{i\eta_\alpha}^0 \cdot \Delta \mathbf{t}_3^{0(M)} \right) \mathbf{t}_3^{0(M)} \right] \otimes \mathbf{t}_3^{0(M)} \right. \\ &\quad \left. + \left( \tilde{\varphi}_{i\eta_\alpha}^0 \otimes \tilde{\varphi}_{i\eta_\beta}^0 \right) \left( \mathbf{t}_3^{0(M)} \cdot \Delta \varphi_{i\eta_\beta}^0 \right) \right\} \delta \varphi_{i\eta_\alpha}^0 \\ &= \left\{ \left( \tilde{\varphi}_{i\eta_\alpha}^0 \cdot \Delta \varphi_{i\eta_\beta}^0 \right) \left( \tilde{\varphi}_{i\eta_\beta}^0 \otimes \mathbf{t}_3^{0(M)} \right) + \left( \tilde{\varphi}_{i\eta_\alpha}^0 \cdot \Delta \mathbf{t}_3^{0(M)} \right) \left( \mathbf{t}_3^{0(M)} \otimes \mathbf{t}_3^{0(M)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( \mathbf{t}_3^{0(M)} \cdot \Delta \varphi_{i\eta_\beta}^0 \right) \left( \tilde{\varphi}_{i\eta_\alpha}^0 \otimes \tilde{\varphi}_{i\eta_\beta}^0 \right) \right\} \delta \varphi_{i\eta_\alpha}^0\end{aligned}\quad (\text{E.6})$$

Reemplazando  $\Delta \mathbf{t}_3^{0(M)}$  se obtiene

$$\begin{aligned}\Delta \left( \delta \mathbf{t}_3^{0(M)} \right) &= \left\{ \left( \tilde{\varphi}_{i\eta_\alpha}^0 \cdot \Delta \varphi_{i\eta_\beta}^0 \right) \left( \tilde{\varphi}_{i\eta_\beta}^0 \otimes \mathbf{t}_3^{0(M)} \right) - \tilde{\varphi}_{i\eta_\alpha}^0 \cdot \left[ \left( \mathbf{t}_3^{0(M)} \cdot \Delta \varphi_{i\eta_\beta}^0 \right) \tilde{\varphi}_{i\eta_\beta}^0 \right] \right. \\ &\quad \left. \left( \mathbf{t}_3^{0(M)} \otimes \mathbf{t}_3^{0(M)} \right) + \left( \mathbf{t}_3^{0(M)} \cdot \Delta \varphi_{i\eta_\beta}^0 \right) \left( \tilde{\varphi}_{i\eta_\alpha}^0 \otimes \tilde{\varphi}_{i\eta_\beta}^0 \right) \delta \varphi_{i\eta_\alpha}^0 \right\} \\ &= \left\{ \left( \tilde{\varphi}_{i\eta_\alpha}^0 \cdot \Delta \varphi_{i\eta_\beta}^0 \right) \left( \tilde{\varphi}_{i\eta_\beta}^0 \otimes \mathbf{t}_3^{0(M)} \right) - \left( \tilde{\varphi}_{i\eta_\alpha}^0 \cdot \tilde{\varphi}_{i\eta_\alpha}^0 \right) \cdot \left( \mathbf{t}_3^{0(M)} \cdot \Delta \varphi_{i\eta_\beta}^0 \right) \right. \\ &\quad \left. \left( \mathbf{t}_3^{0(M)} \otimes \mathbf{t}_3^{0(M)} \right) + \left( \mathbf{t}_3^{0(M)} \cdot \Delta \varphi_{i\eta_\beta}^0 \right) \left( \tilde{\varphi}_{i\eta_\alpha}^0 \otimes \tilde{\varphi}_{i\eta_\beta}^0 \right) \right\} \delta \varphi_{i\eta_\alpha}^0 \\ &= \left( \tilde{\varphi}_{i\eta_\alpha}^0 \cdot \Delta \varphi_{i\eta_\beta}^0 \right) \left( \mathbf{t}_3^{0(M)} \cdot \delta \varphi_{i\eta_\beta}^0 \right) \tilde{\varphi}_{i\eta_\beta}^0 - \left( \tilde{\varphi}_{i\eta_\alpha}^0 \otimes \tilde{\varphi}_{i\eta_\beta}^0 \right) \\ &\quad \left( \mathbf{t}_3^{0(M)} \cdot \Delta \varphi_{i\eta_\beta}^0 \right) \left( \mathbf{t}_3^{0(M)} \cdot \delta \varphi_{i\eta_\alpha}^0 \right) \mathbf{t}_3^{0(M)} \\ &\quad + \left( \mathbf{t}_3^{0(M)} \cdot \Delta \varphi_{i\eta_\beta}^0 \right) \left( \tilde{\varphi}_{i\eta_\beta}^0 \cdot \delta \varphi_{i\eta_\alpha}^0 \right) \tilde{\varphi}_{i\eta_\alpha}^0 \\ &= \left( \delta \varphi_{i\eta_\alpha}^0 \cdot \mathbf{t}_3^{0(M)} \right) \left( \tilde{\varphi}_{i\eta_\alpha}^0 \cdot \Delta \varphi_{i\eta_\beta}^0 \right) \tilde{\varphi}_{i\eta_\beta}^0 + \left( \delta \varphi_{i\eta_\alpha}^0 \cdot \tilde{\varphi}_{i\eta_\beta}^0 \right) \\ &\quad \left( \mathbf{t}_3^{0(M)} \cdot \Delta \varphi_{i\eta_\beta}^0 \right) \tilde{\varphi}_{i\eta_\alpha}^0 - \left( \tilde{\varphi}_{i\eta_\alpha}^0 \otimes \tilde{\varphi}_{i\eta_\beta}^0 \right) \left( \delta \varphi_{i\eta_\alpha}^0 \cdot \mathbf{t}_3^{0(M)} \right) \\ &\quad \left( \mathbf{t}_3^{0(M)} \cdot \Delta \varphi_{i\eta_\beta}^0 \right) \mathbf{t}_3^{0(M)} \\ &= \left[ \delta \varphi_{i\eta_\alpha}^{0T} \left( \mathbf{t}_3^{0(M)} \otimes \tilde{\varphi}_{i\eta_\alpha}^0 \right) \Delta \varphi_{i\eta_\beta}^0 \right] \tilde{\varphi}_{i\eta_\beta}^0 + \left[ \delta \varphi_{i\eta_\alpha}^{0T} \left( \tilde{\varphi}_{i\eta_\beta}^0 \otimes \mathbf{t}_3^{0(M)} \right) \Delta \varphi_{i\eta_\beta}^0 \right] \tilde{\varphi}_{i\eta_\alpha}^0 \\ &\quad - \left( \tilde{\varphi}_{i\eta_\alpha}^0 \otimes \tilde{\varphi}_{i\eta_\beta}^0 \right) \left[ \delta \varphi_{i\eta_\alpha}^{0T} \left( \mathbf{t}_3^{0(M)} \otimes \mathbf{t}_3^{0(M)} \right) \Delta \varphi_{i\eta_\beta}^0 \right] \mathbf{t}_3^{0(M)}\end{aligned}\quad (\text{E.7})$$

# Bibliografía

- ABAQUS. *Student Edition, version 6.4.2*. Hibbit, Karlson and Sorensen Inc., Pawtucket, EE.UU., 2003. URL [www.abaqus.com](http://www.abaqus.com).
- ABAQUS. *User's Manual, version 6.6.2*. Dassault Systemes Simulia Corp., 2006. URL [www.simulia.com](http://www.simulia.com).
- ALPHA. *Análisis Estático/Dinámico Implícito de Sólidos con Énfasis en Estructuras Laminares*. Departamento de Estructuras, U.N.C., 2010.
- J.H. Argyris, H. Balmer, J.St. Doltsinis, P.C. Dunne, M. Hasse, G.A. Malejanakis, H.P. Mlejnek, M. Miller, y D.W. Scharpf. Finite element method-the natural approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 17:1–106, 1979.
- H.A. Balmer y E.A. Witmer. *Theoretical experimental correlation of large dynamic and permanent deformation of impulsively loaded simple structures*. Air Force flight dynamic Lab. Rep. FDQ-TDR-64-108, 1964.
- M.R. Barnes. *Form finding and analysis of tension space structures by dynamic relaxation*. Ph.D. Thesis, Department of Civil Engineering, The City University, London, 1977.
- K.J. Bathe y E.N. Dvorkin. A four node plate bending element based on mindlin/reissner plate theory and mixed interpolation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21:367–383, 1985.
- J.L. Batoz. An explicit formulation for an efficient triangular plate bending element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 18: 1077–1089, 1982.
- J.L. Batoz y G. Dhatt. *Modelisation des structures par éléments finis*. Vol. 1: Solides elastiques, Vol. 2: Poutres et plaques, Hermes, Paris, 1990.

- J.L. Batoz, K.J. Bathe, y L.W. Ho. A study of three node triangular plate bending element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 15: 1771–1812, 1980.
- T. Belytschko y I. Leviathan. Physical stabilisation of the 4-node shell element with one point quadrature. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 113:321–350, 1994a.
- T. Belytschko y I. Leviathan. Projection schemes for one-point quadrature shell elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 115:277–286, 1994b.
- T. Belytschko, B.L. Wong, y H.Y. Chiang. Advances in one-point quadrature shell elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 96:93–107, 1992.
- T. Belytschko, W.K. Liu, y B. Moran. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. John Wiley and Sons, Ltd, England, 2000.
- T. Belytschko, H. Stolarski, y N. Carpenter. A  $c^0$  triangular plate element with one point quadrature. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20:787–802, 1984.
- D.J. Benson, Y. Bazilevs, M.C. Hsu, y T.J.R. Hughes. Isogeometric shell analysis: The reissner-mindlin shell. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199:276–289, 2010.
- M. Bischoff, W.A. Wall, K.-U. Bletzinger, y E. Ramm. *Models and Finite Elements for Thin-walled Structures*. Encyclopedia of Computational Mechanics, Vol 2: Solid and Structures, Chapter 3, pp. 59-136 (Eds.) Stein, E. and Borst, R. and Hughes, T.J.R., 2004.
- F. Brezzi y L.D. Marini. A nonconforming element for the reissner-mindlin plate. *Computers and Structures*, 81:515–522, 2003.
- M. Brunet y F. Sabourin. Prediction of necking and wrinkles with a simplified shell element in sheet forming. *International Conference of Metal Forming Simulation in Industry*, pages 27–48, 1994.
- M. Brunet y F. Sabourin. Analysis of a rotation-free shell element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 66:1483–1510, 2006.

- D. Bushnell. Computerized analysis of shells-governing equation. *Journal of Computers ans Structures*, 18:471–536, 1984.
- D. Bushnell y B.O. Almroth. Finite difference energy method for non linear shell analysis. *Journal of Computers ans Structures*, 1:240–361, 1971.
- C.R. Calladine. *Thery of Shells Structures*. Cambridge University Press, 1983.
- R. Cardoso, J. Yoon, M. Mahardica, S. Choudry, R. Alves de Sousa, y R. Fontes Valente. Enhanced assumed strain (eas) and asuumed natural strain (ans) methods for one-point quadrature solid-shell elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 75:156–187, 2008.
- E. Catmull y J. Clark. Recursively generated b-spline surfaces on arbitrary topological meshes. *Computer Aided Design*, 10, 1978.
- Y.K. Cheung, I.P. King, y O.C. Zienkiewicz. *Slab bridges with arbitrary shape and support condition - A general method of analysis based on finite elements*. Proc. Inst. Civil Engng., Vol. 40, pp. 9-36, 1968.
- P.G. Ciarlet. *Mathematical Elasticity, Volume III: Theory of shells*. Elsevier, 2000.
- F. Cirak y M. Ortiz. Subdivision surfaces: A new paradigm for thin-shell finite element analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47:2039–2072, 2000.
- F. Cirak y M. Ortiz. Fully c1-conforming subdivision elements for finite deformations thin-shell analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51:816–833, 2001.
- J.A. Cottrell, A. Reali, Y. Bazilevs, y Hughes T.J.R. Isogeometric analysis of structural vibrations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 195:5257–5296, 2006.
- J.A. Cottrell, T.J.R. Hughes, y Y. Bazilevs. *Isogeometric Analysis, Toward Integration of CAD and FEA*. Wiley, 2009.
- S. Doll, K. Schweizerhof, R. Hauptmann, y C. Freishlager. On volumetric locking of low-order solid and solid-shell elements for finite elastoviscoplastic deformations and selective reduced integration. *Engineering Computations*, 17: 874–902, 2000.

- D. Doo y M. Sabin. Behaviour of recursive division surfaces near extraordinary points. *Computer Aided Design*, 10:356–360, 1978.
- N.T. Dung y G.N. Wells. Geometrically nonlinear formulation of thin shells without rotation degrees of freedom. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197:2778–2788, 2008.
- E.N. Dvorkin y K.J. Bathe. A continuum mechanics based four node shell element for general non-linear analysis. *Engineering Computations*, 1:77–88, 1984.
- F.G Flores. Imposición de restricción multipunto en la modelización con elementos sin grados de libertad rotacionales. *Mecánica Computacional*, pages 2496–2512, 2007.
- F.G Flores. Evaluación de la calidad de los esfuerzos de flexión usando elementos sin rotaciones en mallas irregulares. *Mecánica Computacional*, pages 785–800, 2008.
- F.G. Flores y C.F. Estrada. A rotation-free thin shell quadrilateral. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196:2631–2646, 2007.
- F.G. Flores y L.A. Godoy. Finite element applications to the internal pressure loadings on spherical shells and other shells of revolution. pages 259–296, 1990.
- F.G. Flores y E. Oñate. A basic thin shell triangle with only translational dofs for large strain plasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51:57–83, 2001.
- F.G. Flores y E. Oñate. Improvements in the membrane behaviour of the three node rotation-free bst shell triangle using an assumed strain approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194:907–932, 2005.
- F.G. Flores y E. Oñate. Rotation-free finite element for the non-linear analysis of beam, frames and axisymmetric shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:5297–5315, 2006.
- F.G. Flores y E. Oñate. A rotation-free shell triangle for the analysis of kinked and branching shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69:1521–1551, 2007.

- F.G. Flores y E. Oñate. Un elementos de sólido con una mejora en el comportamiento del corte transversal para el tratamiento de láminas. *Revista Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería*, 27, 2010.
- F.G. Flores, E. Oñate, y F. Zárata. New assumed strain triangles for non-linear shell analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 17: 107–114, 1995.
- M. Gardsback y G. Tibert. A comparison of rotation-free triangular shell elements for unstructures meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196:5001–5015, 2007.
- Y.Q. Guo, W. Gati, H. Naceur, y J.L. Batoz. An efficient dkt rotation free shell element for springback simulation in sheet metal forming. 80:2299–2312, 2002.
- S. Güzey, H.K. Storlaski, B. Cockburn, y K.K. Tamma. Design and development of a discontinuous galerkin method for shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:3528–3548, 2005.
- B.H.V. Hampshire, J.K. and Topping y H.C. Chan. Three node triangular elements with one degree of freedom per node. *Engineering Computations*, 9: 49–62, 1992.
- M. Harnau y K. Shweizhorf. About linear and quadratic 'solid-shell' elements at large deformations. *Computers and Structures*, 80:805–817, 2002.
- R. Hauptmann y K. Schweizerhof. A systematic development of solid-shell element formulation for linear and non-linear analysis employing only displacement degrees of freedom. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 42:49–69, 1998.
- R. Hill. *A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals*. Proc. Roy. Soc. London A 193-281, 1948.
- H.C. Huang. *Static and dynamic Analysis of Plates and Shells*. Springer-Verlag, 1989.
- T.J.R. Hughes y W.K. Liu. Nonlinear finite element analysis of shell: Part 1, two dimensional shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 26:167–181, 1981a.

- T.J.R. Hughes y W.K. Liu. Nonlinear finite element analysis of shell: Part 2, three dimensional shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 26:331–332, 1981b.
- T.J.R. Hughes, J.A. Cottrell, y Y. Bazilevs. Isogeometric analysis: Cad, finite elements, nurbs, exact geometry and mesh refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194:4135–4195, 2005.
- B.M. Irons. *The semiloof shell element*. Finite elements for thin shells and curved element members, Cap. 11, pp. 197-222 (Eds.) Ashwill, D.G. and Gallagher, R.H. and Wiley, J., 1976.
- B.M. Irons y S. Ahmad. *Techniques of finite elements*. Ellis Harwood, Chichester, 1980.
- P. Jörg y R. Ulrich. *Subdivision Surfaces*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.
- J. Kiendl, K.-U. Bletzinger, J. Linhard, y R. Wüchner. Isogeometric shell analysis with kirchhoff-love elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198:3902–3914, 2009.
- J. Kiendl, K.U. Bletzinger, J. Linhard, y R. Wüchner. Isogeometric shell analysis with kirchhoff-love elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198:3902–3914, 2010.
- J.K. Lee, R.H. Wagoner, y E. Nakamachi. *A benchmark test for sheet metal forming*. Technical Report, Ohio State University, 1990.
- J. Linhard, R. Wuchner, y K-U. Bletzinger. "ügrading"membranes to shell-the ceg rotation free shell element and its application in structural analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, 44:63–74, 2007.
- C. Loop. *Smooth subdivision surfaces based on triangles*. Masters's Thesis, University of Utah, Department of Mathematics, 1987.
- R.J. Melosh. *A stiffness matrix for the analysis of thin plates in bending*. Journal of Aerospace Science, Vol.28, 1, pp. 34-42, 1961.
- R.J. Melosh. *Basis of derivation of matrices for the direct stiffness method*. A.I.A.A.J., Vol. 1, 7, pp. 1631-1637, 1963.

- H. Mollmann. *Introduction to the Theory of Thin Shells*. John Wiley and Sons, 1981.
- L.S.D. Morley. The constant-moment plate-bending element. *J. Strain Anal.*, 6:20–24, 1971.
- NAFEMS. *The standard NAFEMS Benchmarks*. Test LE5 of the Publication TNSB, Rev. 3, UK, 1990.
- NAFEMS. *A review of benchmark problems for geometric non-linear behaviour of 3-D beams and shells*. NAFEMS R0024, 1993.
- R.A. Nay y S. Utku. An alternative to the finite element method. *Variational Methods Engineering*, 1:62–74, 1972.
- A. Needleman. Inflation of spherical rubber ballons. *International Journal of Solids and Structures*, 13:409–421, 1977.
- L. Noels y R. Radovitzky. A new discontinuous galerkin method for kirchhoff-love shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197:2091–2929, 2008.
- NUMISHEET'93. *Second International Conference on Numerical Simulation of 3D Sheet Forming Processes*. A. Makinouchi, E. Nakamachi, E. Oñate, R.H. Wagoner (Eds.), Tokyo, Japan, 1993.
- NUMISHEET'96. *Third International Conference and Workshop on Numerical Simulation of 3D Sheet Forming Processes*. E.H. Lee, G.L. Kinzel, R.H. Wagoner (Eds.), Dearborn-Michigan, USA, 1996.
- NUMISHEET'99. *Fourth International Conference and Workshop on Numerical Simulation of 3D Sheet Forming Processes*. J.C. Gelin, P. Pcard (Eds.), BURS Edition, Besancon, France, 1999.
- E. Oñate. *Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos*. Artes Gráficas Torres, Barcelona, España, 1992.
- E. Oñate y M. Cervera. Derivation of thin plate bending elements with one degree of freedom per node. *Engineering Computations*, pages 553–561, 1993.
- E. Oñate y F.G. Flores. Advances in the formulation of the rotation-free basic shell triangle. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194:2406–2443, 2005.

- E. Oñate y F. Zárata. Rotation-free plate and shell triangles. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47:557–603, 2000.
- E. Oñate, P. Cendoya, y J. Miquel. Nonlinear explicit dynamic analysis of shells using the bst rotation-free triangle. *Engineering Computations*, 19:662–706, 2002.
- R.W. Ogden. *Large deformation isotropic elasticity: on the correlation of theory and experiments for incompressible rubberlike solids*. Proc. Roy. Soc. London A 326(565-584), 1972.
- H. Parisch. A continuum-based shell theory for non-linear applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38:1855–1883, 1995.
- D. Peric y D.R.J. Owen. *The Morley thin shell finite element for large deformations problems: Simplicity versus sophistication*. In Proceedings of the International Conference on Nonlinear Engineering Computations (eds. Bicanic, N. et al., pp.121-142, Pineridge Press, Swansea, 1981.
- R. Phaal y C.R. Calladine. A simple class of finite elements for plate and shell problems. i: elements for beams and thin plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 35:955–977, 1992a.
- R. Phaal y C.R. Calladine. A simple class of finite elements for plate and shell problems. ii: an element for thin shells with only translational degrees of freedom. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 35: 979–996, 1992b.
- RADIOSS. Mecalog Group. URL [www.radiooss.com](http://www.radiooss.com).
- A. Razzaque. Program for triangular bending element with derivative smoothing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 6:5–53, 1973.
- W.H. Reed y T.R. Hill. *Triangular mesh method for the neutron transport equation*. Tech. Report LA-UR-73-479, Los Alamos Scientific Laboratory, 1973.
- G. Rio, B. Tathi, y H. Laurent. *A new efficient finite element model of shell with only three degrees of freedom per node*. Applications to industrial deep drawing test. In Recent Developments in Sheet Metal Forming Technology, Barata Marques MJM. 18th IDDRG Biennial Congress, Lisbon, 1994.

- J. Rojek y E. Oñate. Sheet springback analysis using a simple shell triangle with translational degrees of freedom only. *International Journal of Forming Processes*, 1:275–296, 1998.
- F. Sabourin y M. Brunet. Analysis of plates and shells with a simplified three-node triangular element. *Thin Walled Structures*, 21:206–223, 1993.
- F. Sabourin y M. Brunet. Analysis of plates and shells with a simplified three node triangular element. *Thin Walled Structures*, 21:209–223, 1995.
- F. Sabourin y M. Brunet. Detailed formulation of the rotation-free triangular element "s3" for general purpose shell analysis. *Engineering Computations*, 23:469–502, 2006.
- M. Schwarze y S. Reese. A reduced integration solid-shell finite element based on the eas and the ans concep. geometrically linear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 80:1322–1355, 2009.
- J.C. Simo y D.D. Fox. On a stress resultant geometrically exact shell model, part i: Formulation an optimal parametrization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 72:267–304, 1989.
- J.C. Simo, D.D. Fox, y M.S. Rifai. On a stress resultant geometrically exact shell model. part ii. the linear theory: Computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 73:53–92, 1989.
- J.C. Simo, D.D. Fox, y M.S. Rifai. On a stress resultant geometrically exact shell model. part iii: Computational aspects of non-linear theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 79:21–70, 1990.
- STAMPACK. *A General Finite Element System for Sheet Stamping and Forming Problems, v6.0.0*. Quantech ATZ, Barcelona, España, 2006. URL [www.quantech.es](http://www.quantech.es).
- H. Stolarski, T. Belytschko, y N. Carpenter. A simple triangular curved shell element. *Engineering Computations*, 1:210–218, 1984.
- P.A. Ubach y E. Oñate. New rotation-free finite element shell triangle accurately using geometrical data. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199:383–391, 2010.
- A.C Ugural. *Stresses in Plates and Shells*. McGraw Hill, 1981.

- L. Vu-Quoc y X. Tan. Optimal solid shells for non-linear analyses of multilayer composites i. statics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192:975–1016, 2003.
- G.N. Wells y N.T. Dung. A  $c^0$  discontinuous galerkin formulation for kirchhoff plates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196:3370–3380, 2007.
- D.Y. Yang, D.W. Jung, L.S. Song, D.J. Yoo, y J.H. Lee. *Comparative investigation into implicit, explicit and iterative implicit/explicit schemes for simulation of sheet metal forming processes*. In: NUMISHEET'93, Makinouchi, A., Nakamachi, E., Oñate, E., Wagoner, R.H. (eds), RIKEN: Tokyo; 35-42, 1993.
- O.C. Zienkiewicz y Y.K. Cheung. *The finite element method for analysis of elastic isotropic and isotropic slabs*. Proc. Inst. Civ. Engng., Vol. 28, pp. 471-488, 1964.
- O.C. Zienkiewicz y R.L. Taylor. *The finite element method. Vol II: Solid Mechanics*. Butterworth-heinemann, 2000.
- O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, P. Papadopoulos, y E. Oñate. Plate bending elements with discrete constraints: New triangular elements. *Computers and Structures*, 35:505–520, 1990.