

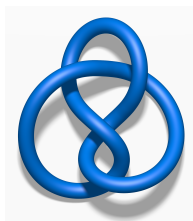
FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA,
FÍSICA Y COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA



TRABAJO ESPECIAL DE LICENCIATURA EN
MATEMÁTICA

Aspectos de la Teoría de Nudos

Robert Gerson Gutierrez Quispe



Director: Dr. Juan Pablo Rossetti

Septiembre 2019



Licencia Creative Commons Aspectos de la Teoría de Nudos por Gutierrez Quispe, Robert Gerson se distribuye bajo una Licencia Creative Commons Atribución-CompartirIgual 4.0 Internacional.

*Dedicado a
mi familia*

Agradecimientos

En primer lugar estoy muy agradecido con mis padres. Ellos siempre están apoyándome e impulsándome a seguir adelante. Este trabajo no habría sido posible sin la inmensa ayuda de ellos. ¡Muchas gracias a los dos!

Agradezco mucho a mi director de este trabajo especial, el Dr. Juan Pablo Rossetti. Pues siempre estuvo ahí presente para ayudarme con muchas cosas. En la matemática me ayudó muchísimo, y aquí quiero destacar la buena voluntad que tuvo Juan Pablo al estudiar un tema no afín a él, como es la teoría de nudos. La escritura de este trabajo quedó mucho más lindo de lo que esperaba gracias a él. Y en fin, también me ayudó con muchas otras cosas más, tanto con cosas relacionadas a este trabajo como externas al mismo.

Quiero agradecer al Dr. Peter Doyle, pues él nos recomendó varios libros y artículos para estudiar, además también estuvo presente respondiendo varias dudas que yo le preguntaba. En particular yo me introduje al mundo de los nudos virtuales gracias a la sugerencia de Peter de leer un artículo en el que él trabaja.

Agradezco al Dr. Gabriel Minian por los libros y artículos que nos sugirió, siendo uno de estos el artículo de Rosebrock, el cual dio pie a desarrollar un tema principal de este trabajo. Y agradecerle también por toda la ayuda que nos brindó al respecto.

Por supuesto no podía faltar mi inmenso agradecimiento a la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación (FAMAF) y a la Universidad Nacional de Córdoba (UNC).

Por último agradezco a todas las personas que de alguna forma me ayudaron, apoyaron en diversos momentos de la carrera. ¡Gracias!

Resumen

Los nudos, tal cual aparecen en nuestra vida cotidiana, son un objeto de estudio en la Matemática. La Teoría de Nudos es la rama de la Matemática que se encarga de su estudio. Un problema central es el de poder decir si dos nudos dados son equivalentes o no. Los matemáticos, en la búsqueda de responder esta pregunta, entre otras, han desarrollado diversas técnicas y herramientas en esta área de estudio. En este trabajo se hace un recorrido en el estudio de la Teoría de Nudos, comenzando con las definiciones más elementales, hasta llegar a estudiar herramientas sofisticadas como el polinomio de Alexander, el grupo de un nudo y las matrices de Seifert, entre otros. En los dos últimos capítulos se investigan los dos temas siguientes: nudos virtuales y presentaciones de Wirtinger. En este último se hace un aporte, dando una nueva familia infinita de presentaciones de Wirtinger no geométricas.

Abstract

The knots we usually see in our lives are studied in mathematics in the branch called Knot Theory. A main problem is to decide whether two knots are equivalent or not. Many tools and techniques have been developed by mathematicians in order to answer this and other related questions.

In this work, we study Knot Theory from the beginning, with definitions and elementary notions, until some sophisticated concepts and tools like the Alexander polynomial, the knot group and Seifert matrices, among others. In the last two chapters, we work on the following two particular subjects: virtual knots and Wirtinger presentations. In this last one, we made a small contribution by presenting a new infinite family of Wirtinger presentations which are not geometric.

Índice general

1. Introducción	13
2. Preliminares	19
2.1. Generalidades	19
2.2. Movimientos de Reidemeister	22
2.3. Orientación de un nudo	24
2.4. El “mirror image” de un nudo	25
3. Técnicas combinatorias	27
3.1. Coloreo	27
3.2. El polinomio de Alexander	35
4. Técnicas geométricas	41
4.1. Superficies	41
4.2. La clasificación de superficies	44
4.3. Superficies de Seifert y el género de un nudo	54
4.4. Suma conexa y descomposición prima	61
5. Técnicas algebraicas	67
5.1. Etiquetando con un grupo	67
5.2. Ecuaciones en grupos y el grupo de un nudo	72
5.2.1. Presentación de Wirtinger del grupo nudo	75
6. Matrices de Seifert y aplicaciones	77
6.1. Matriz de Seifert y las S -equivalencias	77
6.1.1. El polinomio de Alexander obtenido a través de la matriz de Seifert	83
6.2. Signatura de un nudo	87
6.3. Invariantes de nudo y la suma conexa	92
6.4. El grupo nudo y el polinomio de Alexander	95

6.4.1. Derivadas de Fox	96
6.4.2. Usando las derivadas de Fox para el cálculo del polinomio de Alexander	97
6.4.3. ¿Por qué funciona?	98
7. Nudos Virtuales	101
7.1. Diagramas Virtuales	102
7.2. Nudos Virtuales	105
7.2.1. Diagrama de un nudo virtual	106
7.3. El Teorema de Kuperberg	108
7.4. Nudos clásicos y nudos semiclásicos	109
8. Presentaciones de Wirtinger	113
8.1. Planteando el problema	113
8.2. Presentaciones no geométricas	114
8.3. Presentaciones con polinomio no simétrico	117
9. Bibliografía	123

Capítulo 1

Introducción

La *Teoría de Nudos* es el estudio de nudos matemáticos. Intuitivamente, un nudo matemático es una cuerda cerrada, es decir, sin cabos sueltos, siendo el más simple de todos el anillo. Los nudos de la vida real inspiraron esta teoría, comenzándose su estudio con los trabajos pioneros de Vandermonde, Gauss y Tait.

Una pregunta natural que uno puede hacerse es, si dados dos nudos, estos son el mismo nudo o no. Es decir, si tomamos uno de los nudos y deformándolo con las manos (sin romperlo) podemos llegar a obtener el otro nudo.

En términos más matemáticos, decimos que dos nudos en el espacio euclídeo se consideran equivalentes, si se puede ir deformando uno en el otro en forma continua, mediante homeomorfismos. Por ejemplo en la Figura 1.1 los tres nudos que aparecen son todos distintos. El estudio de los nudos tomó impulso hacia finales del siglo XIX, cuando P. G. Tait se propuso enumerarlos, y desde entonces ha habido numerosas contribuciones fundamentales, donde aparecen nombres reconocidos como los de Dehn, Alexander, Reidemeister, Seifert, Jones, Conway, Thurston, Yau, entre otros.



Figura 1.1: Tres nudos distintos.

En el proceso de dar una clasificación, lo más difícil es distinguir los nudos entre sí. Con este objetivo, se desarrollan invariantes asociados a los nudos, es decir funciones que tienen por dominio a los nudos, llegando a cierto conjunto, y que son constantes en las clases de equivalencia de nudos. En este punto, la teoría se relaciona con otras áreas de la matemática, como el álgebra, la combinatoria y la geometría. Invariantes muy efectivos resultaron ser los polinomios de Alexander - Conway - Jones.

En este trabajo proponemos estudiar los nudos desde el comienzo, de modo que haremos un largo recorrido por la teoría, hasta llegar a los dos capítulos finales, que es donde estudiamos en profundidad los artículos de investigación [DS] y [Ro], y mediante algunos ejemplos, logramos hacer un pequeño aporte al último, que se presenta en el Capítulo 8.

En la primera parte, se desarrollan los ingredientes básicos de la teoría, siendo el Capítulo 2, los Preliminares, y dedicando los Capítulos 3, 4 y 5, respectivamente, a cada una de las tres técnicas esenciales en este estudio: la combinatoria, la geométrica y la algebraica. En el Capítulo 6, es donde logramos conectar estas técnicas estudiadas.

Si tomamos la proyección de un nudo sobre un plano, donde a lo sumo dos puntos van a parar al mismo punto de la proyección, obtenemos una *sombra* del nudo. Y si ahora en cada punto de la sombra con dos preimágenes decimos qué arco pasa por arriba y qué arco por debajo, obtenemos lo que se llama un *diagrama* del nudo (ver Figura 1.1 para ejemplos de diagramas de nudos). Tenemos acá una identificación del nudo con el diagrama obtenido de este. Reidemeister se dio cuenta que la equivalencia de nudos se corresponde con una equivalencia entre los diagramas de nudos (la cual viene dada por los *movimientos de Reidemeister*). Esto último es muy importante ya que entonces podemos trabajar con los diagramas de nudos y la equivalencia entre estos. Efectivamente así lo haremos en los Capítulos 3, 4 y 5. Veremos más en detalle en los Preliminares la asociación de los nudos con los diagramas.

Usando los diagramas de nudos, presentaremos el primer invariante de nudo de este trabajo. Este es el *ser coloreable*. Se trata de pintar cada arco del diagrama del nudo con un color, donde los colores disponibles son *rojo*, *amarillo* y *verde*; por supuesto cumpliéndose ciertas reglas de coloreo, a saber, usar al menos dos colores y que en cada cruce se pinten los tres arcos de un solo color o cada arco se pinte con un color distinto. Si el diagrama del nudo se puede colorear, decimos que el nudo es coloreable. La prueba de que *ser coloreable* es un invariante de nudo, la hacemos mediante la equivalencia de los diagramas de nudos. Por ejemplo, con este invariante, podemos distinguir los dos nudos de la izquierda en la Figura 1.1, aunque

no podemos distinguir el tercer nudo del primero en la misma figura.

Aunque los nudos son objetos unidimensionales, los podemos ver dentro de objetos bidimensionales. Herbert Seifert demostró que todo nudo es el borde de una superficie con borde, conexa, compacta y orientable; la cual llamaremos *superficie de Seifert* del nudo. Este gran hallazgo impulsó a estudiar los nudos desde un punto de vista más geométrico. Por ejemplo, dado que tales superficies tienen definido el género, podemos definir el *género* de un nudo como el mínimo de los géneros de todas las superficies de Seifert del nudo. Con las superficies de Seifert también podemos definir la *Matriz de Seifert*, la cual es muy útil para probar varios resultados respecto a nudos y también nos da pie a definir otros invariantes de nudo, entre ellos el *polinomio de Alexander*, muy importante en la teoría de nudos. La primera definición que daremos de dicho polinomio, en el Capítulo 3, es más combinatoria. A lo largo de este trabajo estudiaremos el polinomio de Alexander y sus relaciones con otros invariantes.

Dado que el nudo está en el espacio euclídeo, uno puede considerar el complemento del nudo en dicho espacio. Es razonable preguntarse si el complemento de un nudo lo caracteriza. El Teorema de Gordon-Luecke lo afirma con la siguiente sentencia: Si el complemento de dos nudos son homeomorfos mediante un homeomorfismo que preserva orientación, entonces los dos nudos son equivalentes. Aunque nosotros no estudiaremos el Teorema de Gordon-Luecke, sí estudiaremos el grupo fundamental del espacio complemento del nudo, que se llama el *grupo nudo*. En el Capítulo 5, daremos una introducción de este grupo de manera algebraica, definida por generadores y relaciones. Luego veremos la interpretación geométrica de este grupo; en particular destacaremos sus *Presentaciones de Wirtinger*, las cuales pueden ser obtenidas a partir de diagramas del nudo. Con estas presentaciones particulares trabajaremos mucho en el Capítulo 8.

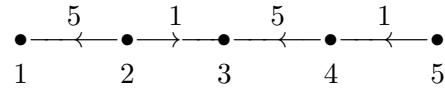
En el Capítulo 7, estudiamos los *nudos virtuales*, primero en forma general, siguiendo los trabajos de Kaufmann [Ka] y Manturov [MI], luego en forma particular, analizando detalles de un trabajo de Peter Doyle junto a Shikhin Sethi (ver [DS]). Así como consideramos los nudos en el espacio euclídeo, podemos también considerar los nudos en otros tipos de variedades tridimensionales. Los nudos virtuales son las clases de equivalencia de nudos viviendo en las variedades tridimensionales $M_g \times I$, donde M_g es la esfera con g manijas y I el intervalo unitario. Para un nudo virtual también tenemos un diagrama asociado, llamado *diagrama virtual*. Un diagrama virtual es parecido a un diagrama clásico, solo que en algunos cruces no tiene necesariamente el cruce clásico, sino que puede tener otro tipo de cruce, llamado *cruce virtual*. Por ejemplo los diagramas clásicos son ejemplos de

diagramas virtuales. La relación de equivalencia entre diagramas virtuales viene dada por los *movimientos de Reidemeister generalizados*. En este punto uno puede pensar que al tener más movimientos disponibles para usar, dos diagramas clásicos que antes no eran equivalentes (con los movimientos de Reidemeister clásicos) ahora sí lo sean, Kuperberg viene a responder esta pregunta crucial, afirmando que la equivalencia de los diagramas clásicos sigue siendo la misma considerando a estos diagramas como diagramas virtuales. En el artículo [DS], se trata de dar una prueba alternativa del Teorema de Kuperberg. También se encaran varios problemas interesantes sobre nudos virtuales, entre los cuales, destacamos el *juego entre Clásico y Virtual*, que trataremos en detalle al final del Capítulo 7.

Por último, en el Capítulo 8, estudiamos grupos particulares, que vienen dados por una presentación de Wirtinger, llamando *presentación de Wirtinger abstracta*, al grupo junto con la presentación. En el artículo [Ro] se asocia a cada presentación de Wirtinger abstracta un grafo dirigido llamado *presentación de intervalo*. Ahora bien, recordemos que todo grupo de un nudo admite presentación de Wirtinger, luego el grupo de un nudo, junto con una presentación de Wirtinger, es un ejemplo de presentación de Wirtinger abstracta. En el artículo [Ro] se estudian dos preguntas naturales: La primera, dada una presentación de Wirtinger abstracta ¿es este grupo, el grupo de un nudo? y la segunda, dada una presentación de Wirtinger abstracta ¿es esta la presentación de Wirtinger obtenida de algún diagrama de nudo? Respecto a la última pregunta, si una presentación de Wirtinger abstracta se puede obtener como la presentación de Wirtinger de algún diagrama de nudo, decimos que esta presentación es geométrica. Nosotros nos enfocaremos más en la segunda pregunta. En [Ro], se obtiene un resultado que dice que si una presentación de Wirtinger abstracta cumple ciertas condiciones entonces no puede ser una presentación geométrica. También se muestra una familia infinita de ejemplos de este tipo. Nosotros aquí contribuimos mostrando otra familia de presentaciones no geométricas. A diferencia de la familia de ejemplos que aparece en [Ro], las presentaciones que damos tienen polinomio de Alexander no simétrico. Un ejemplo de esta familia es el siguiente:

$$P = \langle y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \mid \begin{aligned} y_2 &= y_5 y_1 y_5^{-1} \\ y_3 &= y_1^{-1} y_2 y_1 \\ y_4 &= y_5 y_3 y_5^{-1} \\ y_5 &= y_1 y_4 y_1^{-1} \end{aligned} \rangle.$$

Asociada a tal presentación tenemos la presentación de intervalo:



y a partir de este ejemplo, en el Capítulo 8 se construye la familia mencionada pegando el intervalo de presentación del $2n$ -torus knot.

Notas: a lo largo de este trabajo, el lector encontrará varios *problemas*, la mayoría de ellos propuestos en el libro de Livingston, [Li] y resueltos aquí. Están enunciados en forma de proposiciones, lemas, ejemplos, etc., y entre paréntesis se indica el número del problema en [Li].

Para hacer este trabajo, se estudiaron en forma completa el libro *Knot Theory*, de Charles Livingston, [Li], y en forma parcial los libros de Bonahon [Bo], Weeks [We] y Manturov et al. [MI]. También se leyó bibliografía complementaria, como [Az], [Ve], [Ka2], [Ku], y en forma profunda y completa los artículos [DS] y [Ro].

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Generalidades

Supóngase que usted tiene una cuerda y hace un amarre con ella, por ejemplo los amarres que hacemos con las cuerdas de nuestros zapatos, ahora una los dos extremos de la cuerda, usted tendrá entonces un nudo de los que se estudian en la *Teoría de Nudos*. Si usted hubiera hecho el procedimiento anterior pero con otro tipo de amarre, cabe preguntarse si los dos nudos obtenidos son “iguales” o no; que sean iguales significa que uno puede obtener uno a partir del otro, haciendo algunos movimientos con las manos, pero, y esto es muy importante, sin cortar la cuerda. La teoría de nudos trata de responder esta pregunta entre otras.

Una definición formal de nudo es la de un *embedding* (o *incrustación*, en castellano) suave de la circunferencia S^1 en el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 . En la Figura 2.1 se pueden ver algunos ejemplos de nudos, llamados: *unknot*, *trefoil knot* y *figure-eight knot* (o *nudo desanudado*, *nudo trébol* y *nudo de la figura ocho*, en castellano). Definimos también un *link* (o *enlace*, en castellano) de n componentes, como un embedding suave de la unión disjunta de n circunferencias S^1 en el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 .

Nosotros trabajaremos con otra definición más sencilla; que es la de considerar un nudo como una curva poligonal simple cerrada en el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 , así entonces a un nudo K lo podemos identificar con una sucesión finita de puntos (p_0, p_1, \dots, p_n) , con p_i un punto en el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 para todo i , dándose a entender que $K = \overline{p_0p_1} \cup \overline{p_1p_2} \cup \dots \cup \overline{p_n p_0}$. Y si el punto p_i es tal que $\overline{p_{i-1}p_i}$ no está en la misma línea que $\overline{p_i p_{i+1}}$ entonces decimos que p_i es un *vértice*. Puede ser que dos nudos sean el mismo conjunto pero que estén representados de manera distinta, los pensaremos como



Figura 2.1: Los nudos *unknot*, *trefoil* y *eight figure*.

iguales sin hacernos mucho problema. Curvas poligonales correspondientes a nudos, podrían ser las de la Figura 2.2.

De todas formas siempre dibujaremos al nudo suave y no la curva poligonal, simplemente por cuestiones de estética.

Ahora bien, uno podría tener dos nudos que en apariencia parezcan distintos pero que en realidad sean el mismo nudo. Es necesaria entonces la noción de *equivalencia de nudos*, donde uno entiende que un nudo es equivalente a otro si se puede deformar el primero en el segundo físicamente. La definición en un contexto más general usa el concepto de *Isotopía Ambiental*, que la damos enseguida:

Definición 2.1.1. (Homotopía) Sean X e Y dos espacios topológicos. A una función continua $h : X \times I \rightarrow Y$ le llamamos una *homotopía*. Y denotamos $h_t(x) := h(x, t)$, para todo $x \in X$ y para todo $t \in I$

Definición 2.1.2. (Isotopía ambiental) Sea X un espacio topológico. Una homotopía h_t del espacio X , se dice una *isotopía ambiental*, si: $h_0 \equiv Id_X$, y h_t es un homeomorfismo para todo t .

Así entonces un nudo K se dice *equivalente* a otro nudo J —considerando un nudo como un subconjunto homeomorfo a S^1 , ambos viviendo en $X = \mathbb{R}^3$ —, si existe una isotopía ambiental h_t , tal que $h_1(K) = J$. Existen otras definiciones que permiten dar una noción de equivalencia entre nudos, que

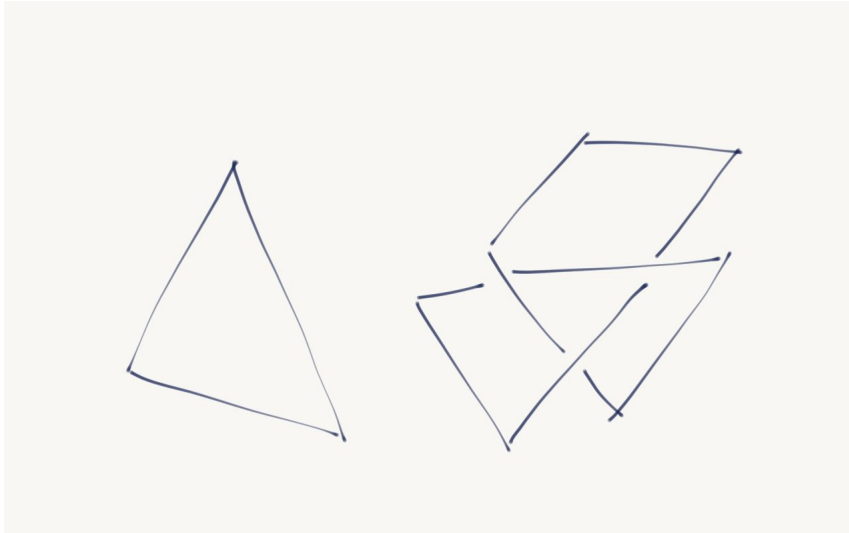


Figura 2.2: Nudos vistos como curvas poligonales simples cerradas.

son equivalentes a esta definición cuando $X = \mathbb{R}^3$. Nosotros también daremos una definición de equivalencia de nudos más básica.

La *cápsula convexa* de tres puntos no alineados es el triángulo (lleno) que forman estos tres puntos. Supongamos un nudo K dado por (p_0, p_1, \dots, p_n) , lo cambiamos por otro nudo $(p_0, p_1, \dots, p_n, p_{n+1})$ donde a la arista $[p_n, p_0]$ la cambiamos por las dos nuevas aristas $[p_n, p_{n+1}]$ y $[p_{n+1}, p_0]$ donde el nudo K no interseca a la cápsula convexa de los tres puntos p_0, p_n, p_{n+1} . A tal movimiento y su operación inversa las llamaremos *deformaciones elementales*. Así entonces dos nudos se dicen *equivalentes*, si se puede obtener uno del otro mediante una secuencia finita de deformaciones elementales (ver un ejemplo en la Figura 2.3).

Definición 2.1.3. (Invariante de nudo) Un *invariante de nudo* es una propiedad que se preserva por equivalencia de nudos.

Veremos ahora una herramienta muy importante en la teoría de nudos, que es el *diagrama de nudo*.

Supóngase que se tiene un nudo K en el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 , podemos entonces tomar la proyección de éste sobre el plano xy . Diremos que la proyección es una *proyección regular*, si en cada punto de la proyección a los más dos puntos del nudo son proyectados sobre este. Puede ser que el nudo no admita proyección regular sobre el plano xy , pero seguro que si lo deformamos un poco, obtenemos un nudo (equivalente al primero) que si

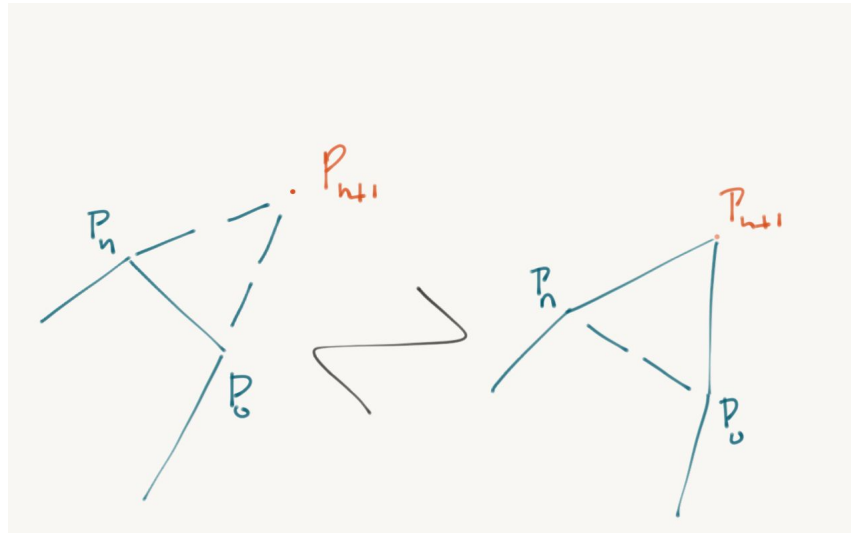


Figura 2.3: Ejemplo de deformación elemental. Notar que el nudo no atraviesa la cápsula convexa del triángulo de vértices p_0 , p_n y p_{n+1} .

admite proyección regular sobre el plano xy . A un punto de la proyección tal que la preimagen consista de dos puntos lo llamamos *punto doble*. Si además sobre cada punto doble indicamos qué arco pasa por arriba y qué arco por debajo (donde arriba es que la coordenada z sea mayor), tenemos lo que se llama un *diagrama regular de nudo*, y en adelante simplemente diremos *diagrama de nudo*. Ver por ejemplo la Figura 2.1 para ejemplos de diagramas de nudos.

2.2. Movimientos de Reidemeister

Supóngase que tenemos un diagrama de nudo para cierto nudo K ; teniendo en mente que el diagrama de nudo está en el plano xy y el nudo K está en el espacio \mathbb{R}^3 . Entonces uno puede deformar un poco el nudo K , por ejemplo moviendo un poco el nudo, y pudiendo obtener así, otro diagrama del nudo K . No queda claro que relación pueda tener el diagrama después del movimiento, con el diagrama antes del movimiento.

En particular uno puede aplicar los movimientos de la Figura 2.4 al diagrama del nudo K , y obtener así un nudo equivalente, el lector debe convencerse de esto —por ejemplo, en el segundo movimiento, de izquierda a derecha, uno pasa un arco por encima del otro, y este nuevo nudo es

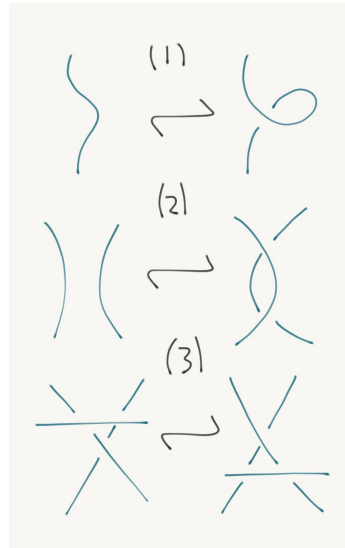


Figura 2.4: Los tres movimientos de Reidemeister se pueden aplicar en ambas direcciones.

equivalente al anterior—. Los movimientos que se muestran en la Figura 2.4 son seis, tres de izquierda a derecha, y tres de derecha a izquierda; cada uno de los cuales modifica el diagrama pero el nudo obtenido es equivalente.

La pregunta es si dados dos nudos equivalentes, uno puede hacer modificaciones a un diagrama de uno de los nudos—donde cada modificación aplicado a un diagrama es tal que el nudo obtenido del diagrama modificado, sea equivalente al nudo antes de la modificación— tal que después de unas cuantas modificaciones, podamos obtener el diagrama del otro nudo. Reidemeister respondió afirmativamente, y además demostró que sólo hacen falta los seis movimientos mostrados en la Figura 2.4, llamados *los movimientos de Reidemeister*. El siguiente teorema así lo anuncia.

Teorema 2.2.1. (*Reidemeister, 1927*) *Dos nudos son equivalentes si y sólo si sus diagramas regulares pueden obtenerse uno del otro por medio de una sucesión finita de movimientos de Reidemeister.*

La prueba completa de este teorema incluye varios casos, pero las ideas principales son bastantes simples y la damos a continuación. La vuelta fue observada y discutida antes de este teorema; para la ida, consideremos dos nudos K y J , (ambos con proyecciones regulares; y esto lo suponemos siempre, ya que sino lo tiene, basta con mover un poco el nudo para que tenga una

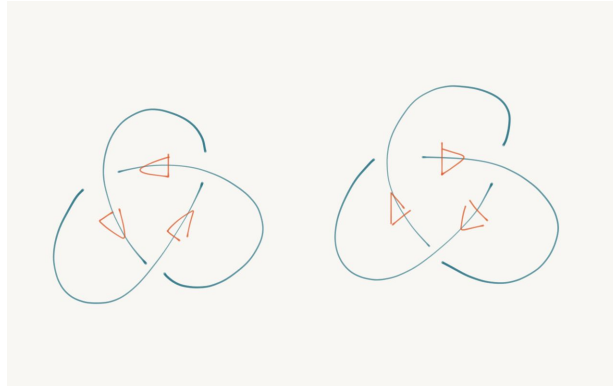


Figura 2.5: El trefoil orientado de las dos formas posibles

proyección regular), tales que podemos obtener uno del otro por una secuencia de deformaciones elementales (i.e. son nudos equivalentes); queremos ver que podemos obtener el diagrama de J a partir de aplicar movimientos de Reidemeister al diagrama de K . Notemos que basta ver esto último para el caso cuando aplicamos un sola deformación elemental. Supongamos entonces que J se obtiene de K , por aplicar una sola deformación elemental; y podemos suponer que ésta operación elemental consiste de cambiar una arista en K por dos nuevas aristas, formando estas tres aristas un triángulo. La proyección de éste triángulo forma nuevos cruces en el diagrama de K ; y uno puede dividir el triángulo en triángulos pequeños de manera que cada uno de estos triángulos contenga a lo sumo un cruce. Entonces uno puede obtener la deformación elemental como una secuencia de deformaciones elementales pequeñas. La prueba culmina con notar que solo movimientos de Reidemeister han sido aplicados.

Así entonces, si queremos ver si una propiedad de nudo es un invariante de nudo, una forma posible es ver que es invariante por aplicar un solo movimiento de Reidemeister, para cada uno de los seis posibles movimientos de Reidemeister. Y efectivamente así lo haremos en diversas pruebas que vienen más adelante.

2.3. Orientación de un nudo

Dado un nudo K en el espacio \mathbb{R}^3 , uno puede darle dos orientaciones a K . Si K esta dada por la curva poligonal simple cerrada (p_0, p_1, \dots, p_n) (donde cada p_i es un vértice del nudo, es decir, p_i no pertenece al interior de

ningún segmento de la curva), las dos posibles orientaciones de K pueden representarse por (p_0, p_1, \dots, p_n) y $(p_n, p_{n-1}, \dots, p_0)$.

Definición 2.3.1. En el contexto anterior, un *nudo orientado* consiste del nudo K junto con alguna de las dos posibles orientaciones (p_0, p_1, \dots, p_n) o $(p_n, p_{n-1}, \dots, p_0)$.

Definición 2.3.2. Dos nudos orientados son llamados *equivalentemente orientados* si existen una cantidad finita de deformaciones elementales que llevan un nudo orientado al otro.

Si dos nudos orientados son equivalentemente orientados, entonces son también nudos equivalentes —es decir, prescindiendo de la orientación—. Pero puede pasar que dos nudos sean equivalentes, y no sean nudos equivalentemente orientados; en el Capítulo 5 veremos un ejemplo particular de esto, junto con un invariante para los nudos orientados.

Dado un nudo orientado K , podemos considerar el mismo nudo pero con la otra orientación (la *orientación opuesta*); a este nudo orientado se le suele llamar el nudo *reverse* (o *reverso*, en castellano) del nudo K , y se lo denota K^r . Además un nudo K se dice *reversible*, si los dos nudos orientados obtenidos de darle a K las dos posibles orientaciones, son equivalentemente orientados.

2.4. El “mirror image” de un nudo

Sea K un nudo en el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 , y consideremos (sin pérdida de generalidad) que el nudo vive en el semiespacio abierto $\{(x, y, z) | z > 0\}$. Entonces uno puede considerar el nuevo nudo que se obtiene de multiplicar la coordenada z de cada punto del nudo K por -1 (o lo que es lo mismo, aplicar la función ϕ_{xy} a K ; donde ϕ_{xy} es la reflexión por el plano xy , es decir, multiplicar por -1 la coordenada z de cada punto en \mathbb{R}^3). El nudo así obtenido se llama el *mirror image* de K (o *imagen espejo*, en castellano), y lo denotamos K^m . Además si dos nudos K y J son equivalentes, entonces K^m y J^m son también equivalentes; pues si J se obtiene de K por aplicar una sola deformación elemental (basta con ver solo este caso), entonces J^m también se obtiene de K^m por aplicar una sola deformación elemental; esta deformación elemental se obtiene de aplicar ϕ_{xy} a la deformación elemental que lleva K a J . Luego podemos hablar del mirror image de un nudo, salvo equivalencia.

Notemos en particular que el diagrama del nudo K^m , es el mismo diagrama de K , solo que debemos hacer un cambio en cada cruce; esto es, a la curva que pasa por arriba, hacerla pasar debajo de la otra curva.

Supóngase ahora que se tiene un diagrama del nudo K en \mathbb{R}^2 (para esta parte conviene pensar que el nudo vive en $\{(x, y, z) | x > 0, y > 0, z > 0\}$ y por tanto su diagrama en $\{(x, y) | x > 0, y > 0\}$), y que lo reflejamos por una recta en el plano, por ejemplo reflejando sobre el eje x , $(x, y) \rightarrow (x, -y)$. Entonces obtenemos el diagrama de nudo correspondiente al nudo obtenido de reflejar por el plano xz al nudo K , es decir, $\phi_{xz}(K)$. El siguiente problema nos dice que el nudo $\phi_{xz}(K)$ es equivalente al nudo mirror image K^m . Este resultado nos será de utilidad más adelante.

Problema 2.4.1. (Prob. 5.6. Cap 2. [Li]) El nudo $\phi_{xz}(K)$ es equivalente al nudo K^m .

Solución. Debemos ver que $\phi_{xz}(K)$ y K^m son equivalentes. Sea R_π la rotación de 180° alrededor del eje x . Recordemos que $K^m = \phi_{xy}(K)$; notemos que vale la siguiente igualdad:

$$\phi_{xz}(K) = R_\pi \circ \phi_{xy}(K),$$

y dado que la rotación es una isotopía, obtenemos lo deseado. La igualdad de funciones se puede corroborar sin dificultades. \square

Mencionamos por último una definición más. Si a un nudo orientado K , le calculamos el mirror image y luego le cambiamos la orientación, obtenemos un nuevo nudo orientado; el cual es llamado, el *nudo inverso* de K .

Capítulo 3

Técnicas combinatorias

En este capítulo vamos a presentar invariantes de nudos, como el coloreo, la cantidad de colores con las que se puede colorear un nudo, el determinante del nudo, los invariantes de torsión del nudo, y por último el polinomio de Alexander de un nudo, obtenido de manera combinatoria.

3.1. Coloreo

Supóngase que tenemos el diagrama de un nudo K , y que queremos pintar cada arco con uno de los tres colores R, A, V , correspondientes a Rojo, Amarillo y Verde respectivamente, cumpliéndose los dos requisitos siguientes:

- (a) se deben usar al menos dos colores,
- (b) en cada cruce, cada vez que se usen más de dos colores, entonces deben usarse los tres colores.

Si un diagrama de nudo se puede colorear cumpliéndose las dos condiciones anteriores, se dice que el diagrama de nudo es coloreable.

Dado que en cada cruce del diagrama tenemos un *overcrossing* (también llamado *arco superior*, en castellano), correspondiente al arco que no termina en ese cruce, y dos *undercrossing* (también llamado *arco inferior*, en castellano), correspondiente a un arco que termina en ese cruce —donde quizá, dos o más de ellos sean el mismo arco—, la condición (b) nos dice que debemos pintar el *overcrossing* y los dos *undercrossing* con un solo color, o bien, usar los tres colores para pintar el *overcrossing* y los dos *undercrossing*, de alguna manera. Tenemos como consecuencia, junto con (a), que si un diagrama se puede colorear, entonces se deben haber usado los tres colores.

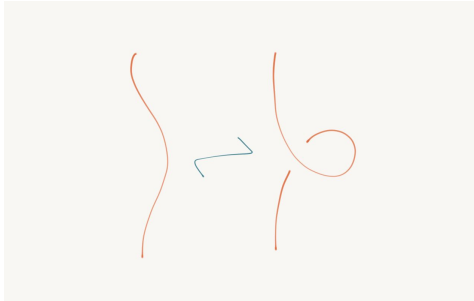


Figura 3.1: Un posible coloreo al aplicar el primer movimiento de Reidemeister.



Figura 3.2: Un posible coloreo al aplicar el segundo movimiento de Reidemeister.

Teorema 3.1.1. *Si un diagrama de nudo es coloreable, entonces todo otro diagrama del nudo es coloreable.*

Demostración. Dado que dos diagramas del mismo nudo difieren por una cantidad finita de movimientos de Reidemeister, basta ver lo enunciado cuando aplicamos un solo movimiento de Reidemeister, es decir, debemos ver que si un diagrama del nudo es coloreable, entonces el diagrama obtenido por aplicar un movimiento de Reidemeister a este diagrama, es también coloreable.

Tenemos entonces dos diagramas en cuestión; el primero que por hipótesis es coloreable, y el segundo que debemos ver que es coloreable. Debemos ver entonces que el segundo diagrama cumple las dos condiciones de coloreo.

Veamos el caso en que aplicamos el segundo movimiento de Reidemeister (el movimiento de ida) a un diagrama, donde el arco izquierdo está pintado con color rojo, y el arco derecho está pintado con color amarillo, como se muestra en la Figura 3.2. Al aplicar este movimiento el arco izquierdo del

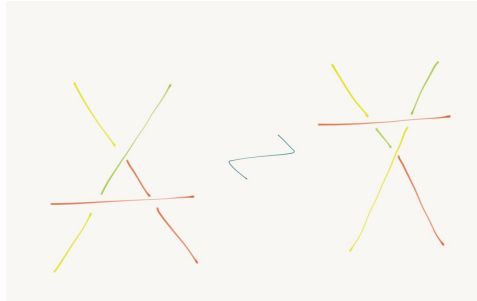


Figura 3.3: Un posible coloreo al aplicar el tercer movimiento de Reidemeister.

diagrama permanece (aunque interactúa con dos nuevos cruces), pero el arco derecho desaparece y en su lugar aparecen tres nuevos arcos. Debemos pintar los arcos del nuevo diagrama; a todos los arcos que sean distintos de los cuatro arcos antes mencionados, los pintaremos como estaban pintados en el primer diagrama. A los cuatro arcos los pintaremos como se muestran en la Figura 3.2. Notemos que estos cuatro arcos necesariamente deben estar pintados de esta forma, en efecto, el arco izquierdo debe estar pintado con rojo para que no haya problemas en otros cruces en el que este participa; análogamente el arco derecho superior y el arco derecho inferior, deben estar pintados con color amarillo; el problema está en que el arco del medio debe estar pintado con un color tal que se cumpla la segunda condición en los dos cruces en los que participa, pero esto se da si pintamos este arco con color verde. Luego la segunda condición se cumple en el nuevo diagrama. La primera condición también se cumple, pues los colores que se usaron en el primer diagrama también fueron usados en el segundo diagrama, y por tanto, también se usaron al menos dos colores en colorear los arcos del segundo diagrama. Luego el segundo diagrama es coloreable.

Los otros movimientos de Reidemeister, junto con los respectivos casos de coloreo, se tratan de manera análoga a lo hecho recién. En las Figuras 3.1, 3.2, y 3.3 se ven algunos escenarios posibles. \square

De este teorema se desprende, que *el ser coloreable* es un invariante de nudo. Así por ejemplo dado que el unknot no es coloreable y el trefoil sí lo es (ver Figura 3.4), se deduce que el trefoil y el unknot no son nudos equivalentes. Pero dado que al nudo de *la figura ocho*, no lo podemos colorear, no podemos distinguirlo del unknot, volveremos con este ejemplo después.

Esta noción de coloreo se puede generalizar. Supongamos que tenemos

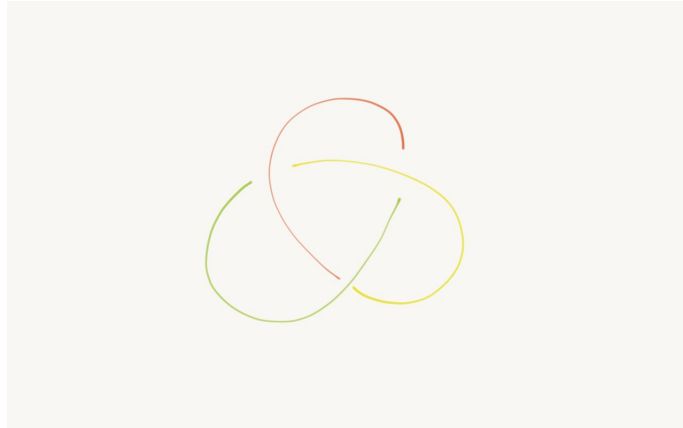


Figura 3.4: Un posible coloreo para el trefoil.

$\{0, 1, \dots, p-1\}$ colores (donde p número primo) para colorear cada arco, y también pedimos las siguientes dos condiciones:

(a) se debe usar al menos dos colores.

(b) en cada cruce, si x es el overcrossing e y, z los undercrossings, vale la siguiente igualdad: $2x - y - z = 0 \pmod{p}$.

Si tal coloreo es posible para un nudo, decimos que el nudo es *coloreable módulo p* .

Como una generalización del Teorema 3.1.1, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.1.2. *Si el diagrama de un nudo es coloreable módulo p , entonces todo otro diagrama del mismo nudo es también coloreable módulo p .*

Demostración. La demostración es análoga a la del Teorema 3.1.1. □

Tenemos entonces que el *ser coloreable módulo p* , es un invariante de nudo.

Problema 3.1.3. (Prob. 3.2. Cap 3. [Li]) El nudo trefoil es coloreable módulo p solamente cuando $p = 3$.

Solución. Consideremos el diagrama del trefoil de la Figura 2.1, etiquetemos los arcos con las variables x_1, x_2, x_3 , entonces tenemos las siguientes

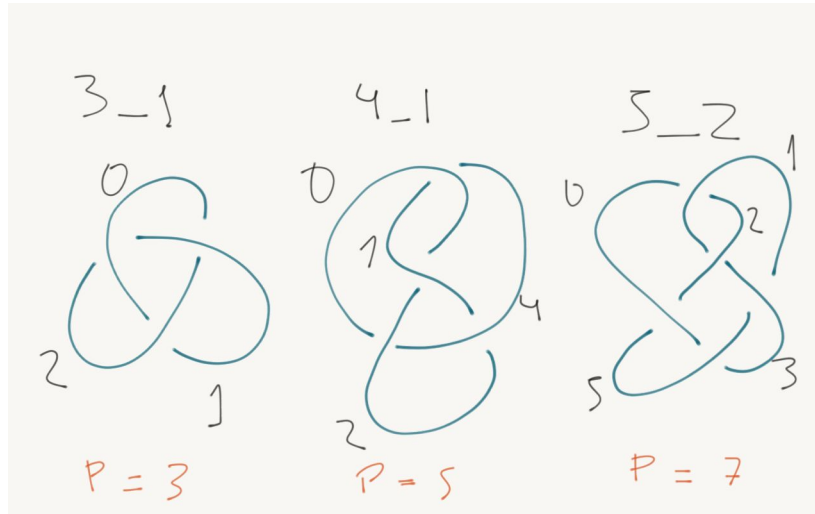


Figura 3.5: Los nudos 3_1 , 4_1 , 5_2 coloreados módulo (p) , con $p = 3, 5, 7$, respectivamente.

ecuaciones módulo (p) :

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 &= 0, \\ 2x_2 - x_3 - x_1 &= 0, \\ 2x_3 - x_1 - x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Las cuentas a continuación son hechas módulo (p) . Si $p \neq 3$, de las dos primeras ecuaciones, se deduce que $x_1 = x_2$ y reemplazando en la primera ecuación se tiene que $x_3 = x_2 = x_1$; pero tal coloreo no cumple con la condición (a) del coloreo. Además dado que el trefoil es coloreable módulo (3) , se sigue que la única forma de que el trefoil sea coloreable módulo (p) , es cuando $p = 3$. \square

En la Figura 3.5 se pueden ver a los nudos 3_1 , 4_1 y 5_2 coloreados módulo p , con $p = 3, 5$ y 7 respectivamente.

Notemos que para resolver el problema anterior etiquetamos los arcos con x_1, x_2, x_3 para luego ver qué valores pueden tomar estas variables. Tomemos ahora un diagrama cualquiera (salvo el diagrama estándar del unknot) y etiquetemos los arcos con variables x_1, \dots, x_n . Por cada cruce tenemos una ecuación, obtenemos entonces un sistema de ecuaciones homogéneo con n ecuaciones y con n incógnitas.

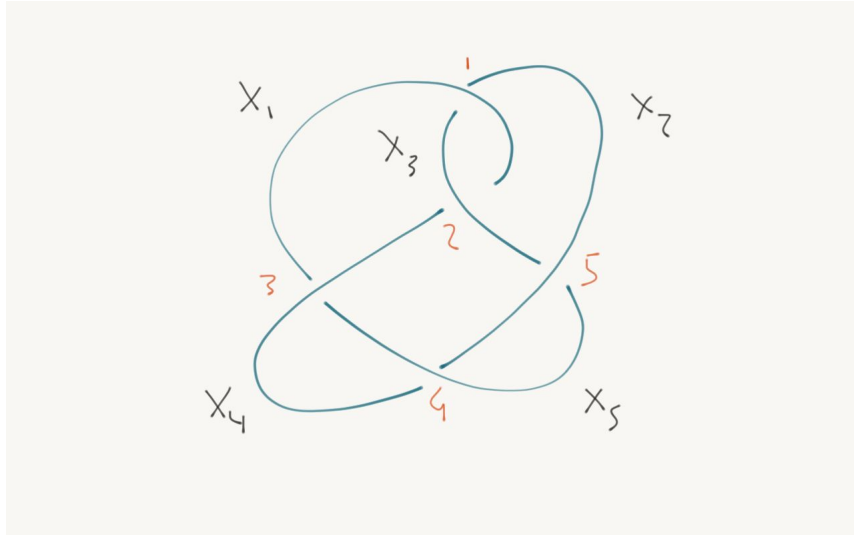


Figura 3.6: Etiquetamos los arcos con variables x_i , y enumeramos los cruces. Obteniendo una ecuación por cada cruce.

Hagamos esto para el nudo de la Figura 3.6. La matriz asociada al sistema homogéneo obtenida de tal diagrama esta dada por:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Entonces buscamos las soluciones a tal sistema en el cuerpo F_p , para cada natural primo p con $p > 2$. Pero las soluciones deben ser con no todas las entradas iguales, ya que todas las n -uplas con todas las entradas iguales son soluciones de tales sistemas de ecuaciones, pero justamente queremos que haya al menos dos colores distintos. Notemos que dada una solución (x_1, x_2, \dots, x_n) con no todas las entradas iguales, la podemos llevar a una solución con la n -ésima entrada igual a cero, pues le sumo el vector columna $(-x_n, -x_n, \dots, -x_n)$. Así entonces podemos pensar en buscar soluciones no triviales con la última entrada igual a cero. Pero esto es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones correspondiente a la matriz con la última columna eliminada:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces buscamos ahora las soluciones no nulas del anterior sistema de ecuaciones. Se puede ver que las filas de esta matriz suman cero, multiplicando por (-1) a algunas filas según convenga, entonces resolver el sistema es equivalente a resolver el sistema eliminando una fila, por ejemplo la última fila. Entonces el problema de ver si un nudo es coloreable, se reduce a ver si el sistema homogéneo asociado a la siguiente matriz, admite solución no nula.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Y dado que un sistema homogéneo admite solución no trivial si y sólo si su determinante es nulo, entonces el nudo es coloreable módulo (p) si y sólo si el determinante de la última matriz es divisible por p . El valor absoluto de tal determinante resulta ser un invariante de nudo, como se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 3.1.4. *Sea A la matriz obtenida del diagrama de un nudo K , enumerando los cruces y etiquetando los arcos con variables x_i de alguna forma. Sea A' la matriz obtenida a partir de eliminar una fila y una columna cualesquiera de A . Entonces, independientemente de como se realice el proceso anterior, el número $|\det(A')|$ es un invariante de nudo.*

Demostración. Para la prueba de este teorema se deben ver varias cosas. Primero notar que al cambiar las etiquetas x_i de los arcos y la enumeración de los cruces, el determinante del nudo no cambia (pues estos se corresponden a permutaciones de filas y columnas), y un argumento de álgebra lineal muestra que tampoco importa la fila o columna que se elimine. Por otro lado, se debe ver también que el determinante del nudo no cambia cuando se considera otro diagrama posible de este. Este último punto basta verlo para cada uno de los movimientos de Reidemeister; por ejemplo, si uno aplica el primer movimiento de Reidemeister —yendo de izquierda a derecha— al diagrama, se obtiene una matriz de tamaño $(n+1) \times (n+1)$ —pues hay una

incógnita más, y una ecuación más— y eliminando una fila y una columna correspondientemente —a saber, la columna correspondiente a la variable x_i , siendo este arco el modificado al aplicar el movimiento, y cualquier fila j , con j entre 1 y n . Todo esto se ve mejor cuando armamos la matriz después del primer movimiento de Reidemeister— se ve que el determinante a lo sumo cambia de signo. Los casos correspondientes a los otros movimientos de Reidemeister son dejados para el lector. \square

Notemos que en particular todo nudo admite una cantidad finita de posibles coloreos, ya que hay finitos primos que dividen a $\det(A')$. Dado que esta matriz tiene coeficientes enteros, podemos llevarla a su *forma normal de Smith*, aplicando operaciones elementales por filas y columnas, obteniendo así una matriz diagonal con entradas d_1, d_2, \dots, d_n con $d_1 | d_2 | \dots | d_{n-1} | d_n$ y el determinante a lo sumo es afectado por un cambio de signo, entonces $\det(A') = d_1 d_2 \dots d_n$. Lo bueno de la forma normal de Smith es que las entradas de la matriz dicen la dimensión del núcleo módulo p , por ejemplo, si uno quiere saber cuál es la dimensión del núcleo de la matriz módulo (3), uno solo debe ver cuántas entradas en la matriz son divisibles por 3, puesto que estos dos números son iguales. Si uno tiene otro diagrama de nudo y hace otros cálculos para, al final, obtener la matriz $(n-1) \times (n-1)$ y después hacer el cálculo de la forma normal de Smith, resulta ser que uno obtiene la misma matriz en forma normal de Smith, lo cual se resume en el siguiente teorema.

Teorema 3.1.5. *Aplicando el procedimiento anterior de otra forma obtenemos una matriz diagonal cuyas entradas consisten de los d_1, d_2, \dots, d_n , y de quizá algunos ± 1 .*

Demostración. La prueba tiene el mismo argumento que la prueba del Teorema 3.1.4, se da aquí un posible escenario. Por ejemplo, al aplicar el primer movimiento de Reidemeister —de izquierda a derecha— el tamaño de la matriz se incrementa en 1, y se puede aplicar operaciones elementales por filas y columnas de manera que se obtengan las mismas entradas en las diagonales y una entrada consistiendo de un ± 1 . \square

A las entradas de la matriz diagonal se las llama *invariantes de torsión* del nudo (considerándolos por supuesto en valor absoluto).

Una información importante respecto a la dimensión del núcleo módulo p , es la relación que tiene este número con el número de coloreos módulo p (la cantidad de formas posibles para colorear el nudo módulo p). Esto lo vemos en el siguiente problema:

Proposición 3.1.6. (Prob. 4.6. Cap 3. [Li]) El número de coloreos $C_p(K)$ de un nudo K cumple: $C_p(K) = p(p^m - 1)$ donde $m = \dim(\ker_p(K))$.

Demostración. Sea A' la matriz $(n - 1) \times (n - 1)$ obtenida a partir de A como se explicó antes. Notemos que el número de coloreos módulo (p) para el nudo K , es igual al número de soluciones —con no todas las entradas iguales— del sistema $Ax = 0$. Además si (x_1, x_2, \dots, x_n) es una de estas soluciones, entonces $(x_1 - x_n, \dots, x_{n-1} - x_n, 0)$ es también una de las soluciones que queremos (pues (x_n, x_n, \dots, x_n) es solución del sistema $Ax = 0$, y algún x_i es distinto de x_n); luego cada una de las soluciones que queremos tiene un representante de la forma $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0)$ y este representante es único para cada una de dichas soluciones; además cada representante representa a p soluciones como las que queremos (incluyendo al representante). El conjunto de representantes está en biyección con el conjunto de las soluciones no nulas del sistema $A'x = 0$. Sabemos que $m = \dim(\ker(A'))$ (viendo a A' como una transformación lineal de F_p^{n-1} en sí mismo), entonces si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ es una base del $\ker(A')$, el número de soluciones no nulas del sistema $A'x = 0$ es igual a $p^m - 1$ (pues hay p escalares posibles por cada α_i , y no debemos contar la combinación lineal trivial). Dado que por cada representante hay p soluciones como las que queremos, entonces el número de coloreo módulo (p) del nudo K es igual a $p(p^m - 1)$. \square

3.2. El polinomio de Alexander

El polinomio de Alexander asociado a un nudo es un muy buen invariante de nudo, el cual resulta tener conexiones profundas con otros aspectos topológicos además de los nudos. Acá nosotros introduciremos una definición combinatoria siguiendo y utilizando lo hecho hasta ahora. Más adelante en el Capítulo 6 veremos otra posible definición del polinomio de Alexander junto con algunas de sus propiedades. En el Capítulo 5 veremos una forma más de obtener el polinomio de Alexander.

Consideremos un diagrama orientado de un nudo K , de nuevo armemos nuestro sistema de ecuaciones como lo hacíamos antes, sólo que ahora en cada cruce, etiquetamos al overcrossing con $1 - t$ y a los arcos de la derecha y la izquierda del overcrossing los etiquetamos con -1 y t respectivamente. Obtenemos así una matriz dependiente de t . También eliminemos una fila y una columna (cualesquiera) como hacíamos antes. A esta matriz se la suele llamar *la matriz de Alexander*, la denotaremos por $A(t)$. El polinomio de Alexander es definido como $\Delta(t) := \det(A(t))$ (frecuentemente usaremos la notación $\Delta_K(t)$ para referirnos al polinomio de Alexander correspondiente

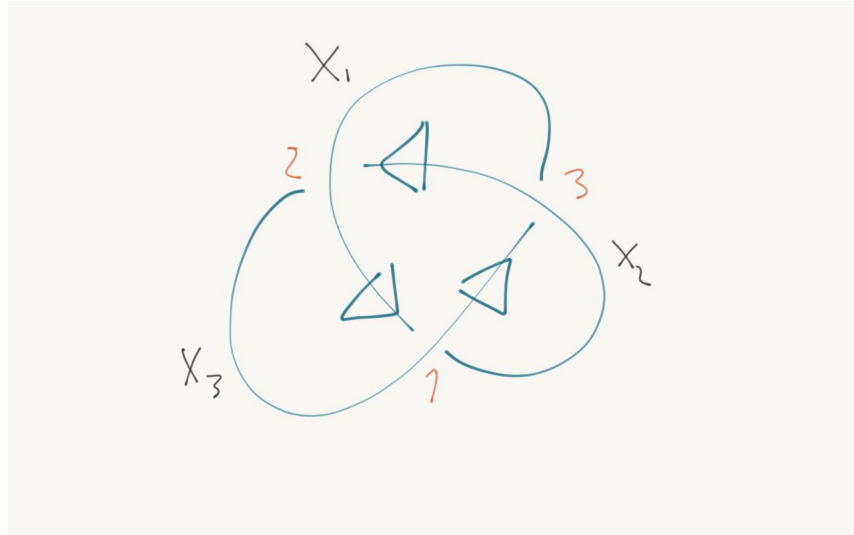


Figura 3.7: Para el cálculo del polinomio de Alexander del trefoil.

al nudo K). El polinomio así solo no es invariante de nudo, pero lo es salvo múltiplos de $\pm t^l$, con l entero.

Calculemos a modo de ejemplo, el polinomio de Alexander para el trefoil; con el diagrama estándar, ver Figura 3.7.

La matriz obtenida de tal diagrama es

$$\begin{pmatrix} t & -1 & 1-t \\ 1-t & t & -1 \\ -1 & 1-t & t \end{pmatrix},$$

eliminando (por ejemplo) la última fila y la última columna, obtenemos el polinomio de Alexander para el trefoil:

$$\Delta_{3,1}(t) = t^2 - t + 1.$$

El polinomio así solo no es invariante de nudo, pero lo es salvo múltiplos de $\pm t^l$, con l entero. Antes de enunciar el teorema, veamos una parte esencial de la prueba de este teorema, que es el cambio de orientación en el diagrama.

Proposición 3.2.1. (Prob. 5.7. Cap 3. [Li]) Dado un diagrama de nudo, con los arcos y los cruces ya etiquetados, sean $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ los dos polinomios de Alexander obtenidos con las dos posibles orientaciones. Entonces $\beta(t) = \pm t^l \alpha(1/t)$ para cierto entero l .

Demostración. Sean $A(t)$ y $B(t)$ las matrices asociadas a $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ respectivamente. Supongamos que la primera fila de $A(t)$ está dada de la siguiente forma: $1 - t \quad -1 \quad t \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0$, es decir, x_1 es el overcrossing, x_2 está a la derecha según la orientación para $A(t)$ y x_3 está a la izquierda del overcrossing x_1 . Entonces notemos que la primera fila de $B(t)$ está dado por $1 - t \quad t \quad -1 \quad 0 \quad \dots \quad 0$, ya que el cálculo de ésta difiere de la otra solo en la orientación. Factoricemos ahora $-t$ de la primera fila de $A(t)$, nos queda entonces una matriz $A_1(t)$ que es igual a $A(t)$ sólo que en la primera fila tenemos $1 - 1/t \quad 1/t \quad -1 \quad 0 \quad \dots \quad 0$, que notemos es igual a la primera fila de $B(t)$ sólo que evaluado en $1/t$. Esto lo podemos hacer en cada fila de $A(t)$ (son solamente operaciones elementales por filas, a saber, multiplicar por un escalar) obteniendo matrices $A_1(t), A_2(t), \dots, A_m(t)$ para cierto natural m (el número de cruces del diagrama menos uno) y vale que el $\det(A(t)) = (-t)^m \det(A_m(t))$ donde además $\det(A_m(t)) = \det(B(1/t))$, es decir, $\alpha(t) = (-t)^m \beta(1/t)$, lo que prueba el enunciado. \square

Enunciamos ahora el Teorema de invariancia del polinomio de Alexander.

Teorema 3.2.2. *Sean $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ dos polinomios de Alexander obtenidos como más arriba, es decir, numerando los cruces, etiquetando los arcos, eligiendo una orientación, etc. Entonces vale que $\beta(t) = \pm t^l \alpha(t)$ para cierto l entero.*

Demostración. Los argumentos son parecidos a la prueba de invariancia del determinante (usando los movimientos de Reidemeister y demás) pero hay un punto delicado, y es la parte de la orientación. En el problema anterior vimos que si cambiamos la orientación del nudo obtenemos que $\alpha(t) = (-t)^m \beta(1/t)$, lo cual es casi parecido a lo que se desea, sólo que estamos evaluando en $1/t$ y no en t . Se puede ver que el polinomio de Alexander es simétrico —esta propiedad de simetría será discutida en el Capítulo 6; el lector puede encontrar más detalles al respecto en [Li], Capítulo 6—, y entonces $\beta(t) = t^p \beta(1/t)$, con p el grado de $\beta(t)$ (pensamos que $\beta(0)$ no es nulo). Se sigue entonces lo enunciado en el Teorema. \square

Calculemos el polinomio de Alexander para algunos nudos más. Por ejemplo el del $(2, n)$ -torus knot (o nudo toro, en castellano), con el diagrama y etiquetas que se muestran en la Figura 3.8. El lector puede corroborar que la matriz obtenida es:

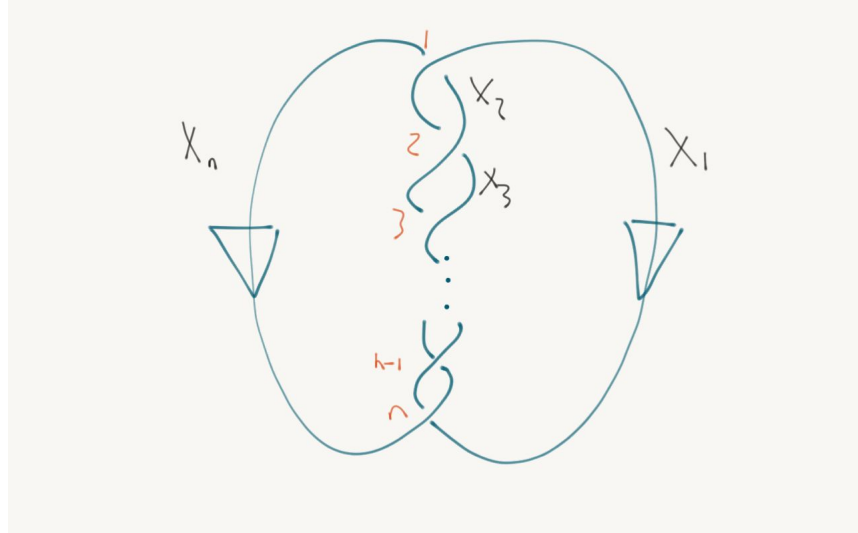


Figura 3.8: Para el cálculo del polinomio de Alexander del $(2, n)$ -torus knot.

$$\begin{pmatrix} 1-t & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ t & 1-t & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t & 1-t & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & t & 1-t & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & t & 1-t \end{pmatrix}.$$

Eliminando la última fila y la última columna, se puede ver que el polinomio de Alexander obtenido es: $\Delta(t) = t^{n-1} - t^{n-2} + \dots - t + 1$.

Aquí cabe notar que en particular esto da una prueba del hecho esperable que es

existen infinitos nudos no equivalentes,

ya que todos estos polinomios no son equivalentes, es decir, para dos valores de n distintos, no se puede obtener un polinomio del otro multiplicando por $\pm t^l$ para ningún entero l .

Calculemos ahora el polinomio de Alexander del mirror image del trefoil, etiquetando como en la Figura 3.9, la matriz obtenida es:

$$\begin{pmatrix} t & -1 & 1-t \\ 1-t & t & -1 \\ -1 & 1-t & t \end{pmatrix}.$$

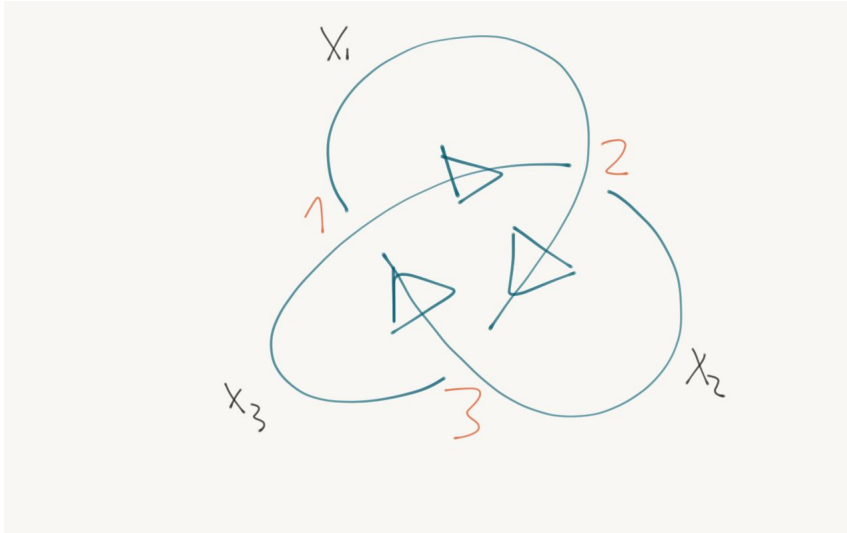


Figura 3.9: Calculando el polinomio de Alexander del mirror image del trefoil.

Entonces, si por ejemplo eliminamos la segunda fila y la segunda columna, obtenemos el polinomio de Alexander, $A_{3_1^m}(t) = t^2 - t + 1$.

Notemos en el último ejemplo que el polinomio de Alexander del mirror image del trefoil es el mismo que el del trefoil común (el mismo, en el sentido que son polinomios equivalentes, como en la definición). Esto no es casual, como se demuestra en el siguiente problema.

Problema 3.2.3. (Prob. 5.6. Cap 3. [Li]) Sea K un nudo y K^m su mirror image. Mostrar que sus polinomios de Alexander son equivalentes.

Solución. Recordemos que una forma de obtener el mirror image de un nudo es reflejando el diagrama del nudo por una recta en el plano, como un espejo al otro lado de la recta (ver Figura 3.10).

Como se indica en la Figura 3.10, podemos etiquetar los arcos de K^m como en el dibujo de la derecha, dado que K está etiquetado como en el dibujo de la izquierda, solo que ahora vamos a cambiar de orientación (en el dibujo sólo mostramos la orientación del overcrossing, ya que ésta es la única que hace falta para dar las ecuaciones de ese cruce). Entonces notemos que la fila correspondiente al cruce para ambas matrices de Alexander es la misma, a saber, $1 - t \quad t \quad -1 \quad 0 \dots \quad 0$. Esto lo podemos hacer para cada cruce y obtenemos entonces las mismas matrices; notar que obviamente el cambio de orientación viene bien para todos los cruces. Se obtiene por lo

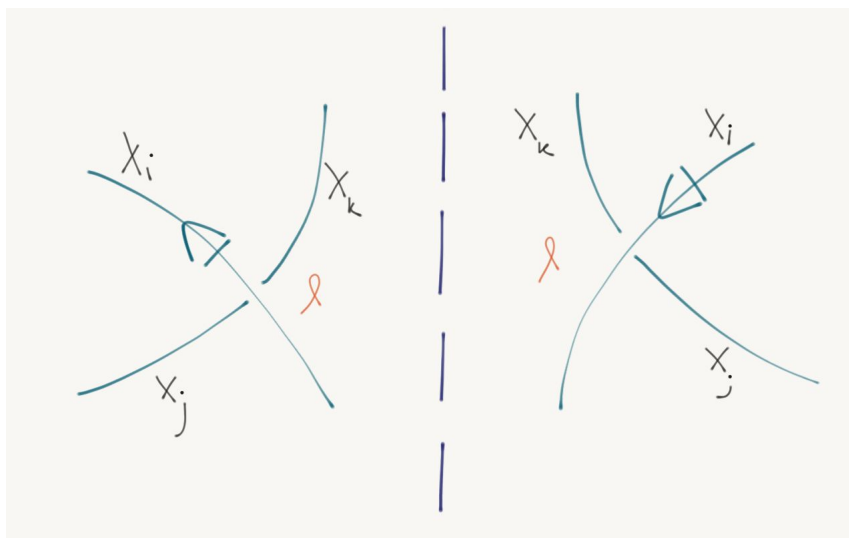


Figura 3.10: Para este cálculo reflejamos el diagrama a través de una recta en el plano, como si de un espejo se tratara.

tanto el mismo polinomio de Alexander, como se deseaba.

□

Capítulo 4

Técnicas geométricas

Este capítulo comienza con el estudio de superficies, y más concretamente superficies con borde. Luego se verán los nudos como bordes de superficies, las así llamadas *superficies de Seifert*, lo que da pie a definir el *género* de un nudo, que como veremos será un invariante de nudo. Pasaremos entonces a hablar de la suma conexa de nudos, y por último enunciaremos el Teorema de Descomposición Prima de Nudos, análogo al Teorema Fundamental de la Aritmética con enteros primos.

4.1. Superficies

Las superficies que generalmente uno tiene en mente son superficies suaves, así como la esfera, una porción del plano, paraboloides, toros con agujeros, etc. Algunos ejemplos son ilustrados en la Figura 4.1.

Un hecho destacable es que las superficies suaves (viviendo en el espacio \mathbb{R}^3) se pueden *triangularizar*, es decir, para una superficie suave se puede construir una superficie consistiendo de triángulos pegados (bajo ciertas reglas) que se aproxima a la superficie suave; la superficie consistiendo de triángulos, se la puede construir de manera que se aproxime tanto como uno quiera a la superficie en cuestión. Algunos ejemplos pueden verse en la Figura 4.2.

La superficie triangulable, por supuesto, no es suave (en el sentido de geometría diferencial), pero nos da una manera más manejable de trabajar con ellas. Acá cabe remarcar que nos importan más las propiedades topológicas de las superficies y no tanto las propiedades geométricas, como la curvatura, longitud de arco, etc, por lo que triangularizar viene bien.

Definición 4.1.1. Una *superficie poliedral* es un subconjunto de \mathbb{R}^3 que

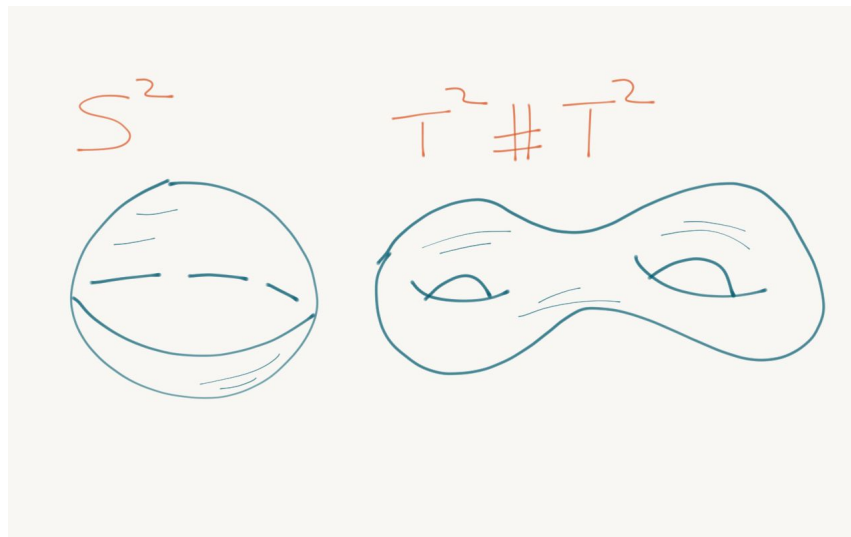


Figura 4.1: La esfera S^2 y el doble toro $T^2 \# T^2$.

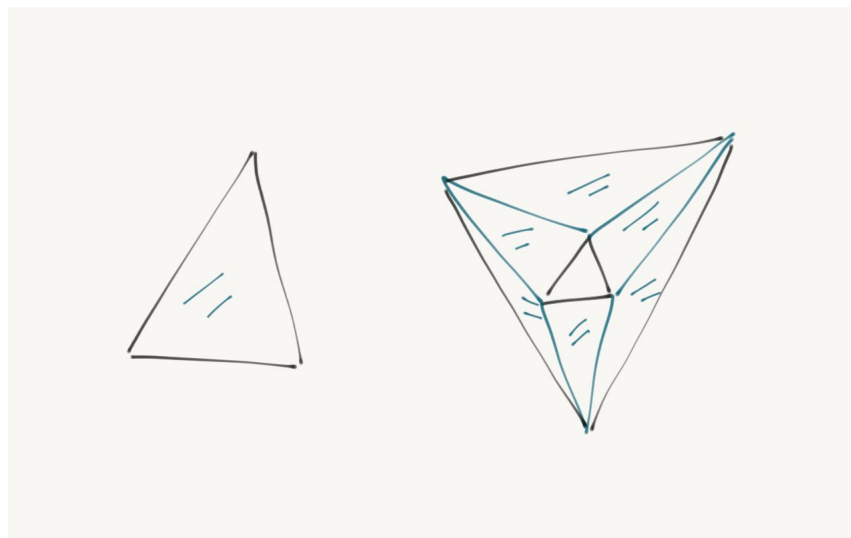


Figura 4.2: El primero es una poligonalización del disco, y el segundo lo es de un cilindro con bordes.

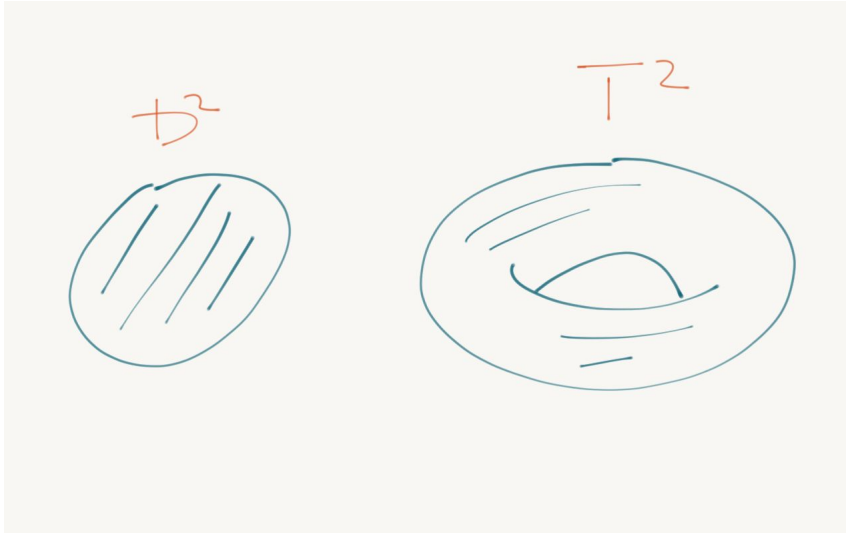


Figura 4.3: El disco y el toro.

está formado por una cantidad finita de triángulos pegados, con las siguientes reglas:

- (i) Dos triángulos cualesquiera, o son disjuntos, o tienen un lado o un vértice en común.
- (ii) En un lado no pueden intersecar más de dos triángulos.
- (iii) La unión de los lados que están exactamente en un triángulo, forman una colección disjunta de curvas poligonales simples. A tales curvas se las llama el *borde* de la superficie.

Notemos que tales curvas poligonales son necesariamente cerradas.

Con esta definición estamos considerando las superficies con y sin borde, que no se vayan hacia el infinito, como el plano \mathbb{R}^2 por ejemplo. Dicho de otro modo estamos considerando las superficies suaves compactas en \mathbb{R}^3 . Ver por ejemplo Figura 4.3.

Dos superficies poliedrales S_1 , S_2 se dicen homeomorfas, si existe una función biyectiva que lleva los vértices de una a la otra, tal que, si tres vértices acotan un triángulo en S_1 entonces los tres vértices correspondientes en S_2 también acotan un triángulo. Por supuesto, esta definición coincide con la definición usual de topología. Así por ejemplo las dos superficies de la Figura 4.4 son homeomorfas.

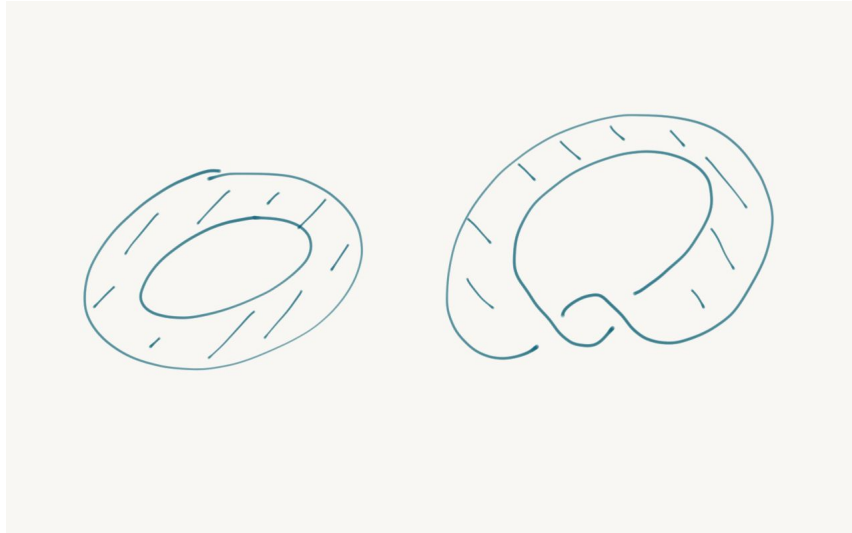


Figura 4.4: El primero la cinta, y el segundo la cinta cortada y luego dada una vuelta, pegada de nuevo.

4.2. La clasificación de superficies

Sea S una superficie, se define la *característica de Euler* de S como:

$$\chi(S) = \#\text{caras} - \#\text{lados} + \#\text{vértices},$$

se puede ver que $\chi(S)$ es invariante por homeomorfismos (i.e. es un invariante topológico).

Calculemos la característica de Euler para el disco y el cilindro, con la triangularización dada en la Figura 4.5. Para el disco tenemos $\chi(\text{disco}) = \#\text{caras} - \#\text{lados} + \#\text{vértices} = 1 - 3 + 3 = 1$. Para el cilindro tenemos $\chi(\text{cilindro}) = \#\text{caras} - \#\text{lados} + \#\text{vértices} = 6 - 12 + 6 = 0$.

Notemos también que el número de componentes borde de una superficie S (número al cual denotamos $B(S)$) es un invariante de homeomorfismo. Esto es así pues si un lado tiene solo un triángulo que lo tiene como lado en una superficie, así también pasa en la otra superficie, entonces una curva poligonal simple cerrada que es una componente del borde de la superficie, también lo será en la otra superficie, y viceversa. Por lo tanto, tenemos una biyección de los conjuntos de componentes conexas de los bordes.

Otro concepto que usaremos es el de *orientabilidad*. Una superficie poliédral se dice *orientable*, si se puede orientar el borde de cada triángulo de la

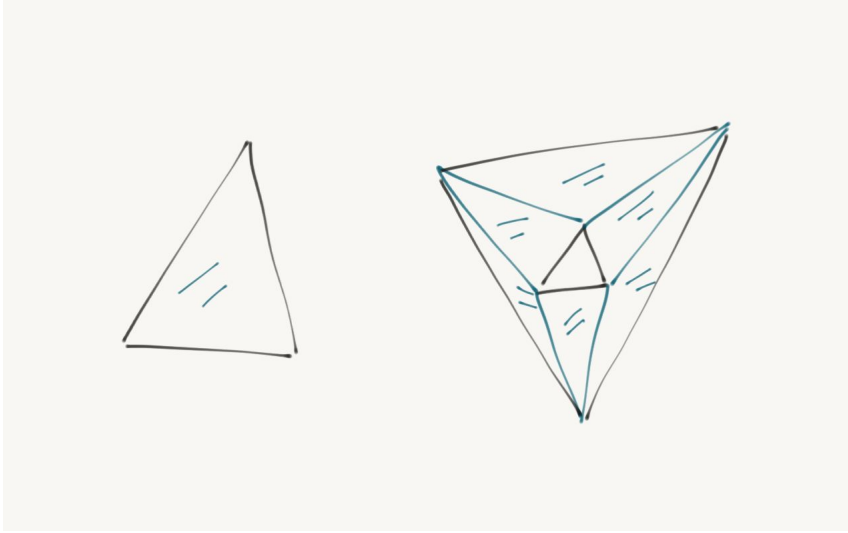


Figura 4.5: La esfera S^2 y el doble toro $T^2 \# T^2$.

superficie, de tal manera que si un lado es común a dos triángulos, las dos orientaciones en ese lado son opuestas.

Generalmente hablaremos de una superficie refiriéndonos a una superficie poliedral y salvo homeomorfismo. Las anteriores observaciones nos permiten dar la siguiente definición.

Definición 4.2.1. Sea S una superficie conexa y orientable. Se define el género de S como $g(S) = \frac{2 - \chi(S) - B(S)}{2}$.

Dado que tanto $\chi(S)$ como $B(S)$ se preservan salvo homeomorfismo, resulta también que $g(S)$ se preserva salvo homeomorfismo.

Pasamos ahora a enunciar una serie de teoremas, con sus respectivas pruebas, referentes a la característica de Euler de una superficie, el género de una superficie y más. Estos nos serán de mucha utilidad más adelante.

Teorema 4.2.2. Si dos superficies se intersecan en una colección de arcos del borde, entonces la característica de Euler de la unión de las superficies es igual a la suma de las características de Euler de cada una de ellas menos el número de arcos de la intersección.

En símbolos, $\chi(S_1 \cup S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - \#\text{arcos}$.

Demostración. Entendemos por *arco* a una curva poligonal conexa no cerrada. Pensemos primero cuando se intersecan en solamente un arco, recordemos que el borde está formado por una colección disjunta de curvas

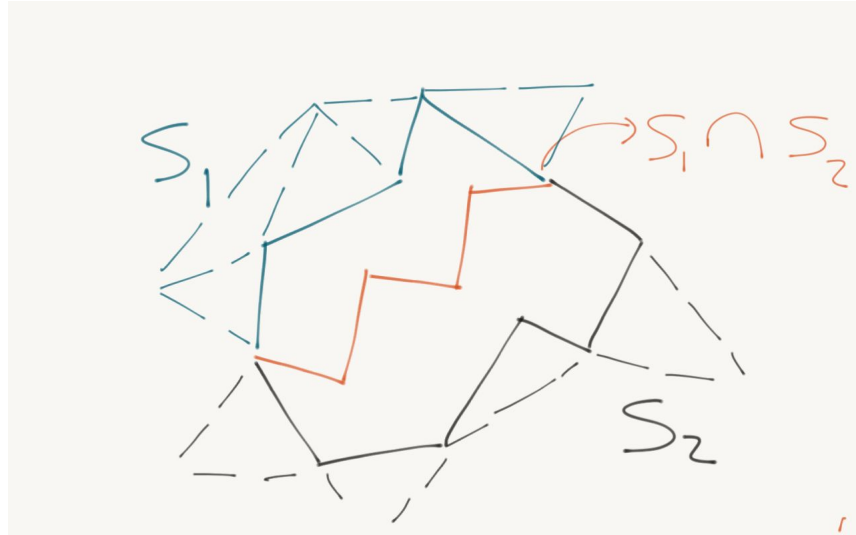


Figura 4.6: El arco pintado con rojo es el arco de intersección de dos componentes bordes, una por cada superficie

poligonales simples cerradas. Teniendo esto en cuenta, pasemos a calcular la característica de Euler de la unión.

El número de caras de la unión es igual a la suma de las caras de cada una, el número de lados es igual a la suma de todos los lados de ambas superficies menos el número de lados en común, llamémosle h ; el número de vértices es igual a la suma de todos los vértices de las superficies menos $h + 1$. Haciendo la cuenta obtenemos que $\chi(S_1 \cup S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 1$.

Un razonamiento similar se puede hacer para el caso en que las superficies lleguen a intersectarse en l arcos, y se ve que cada arco resta en uno a la suma de las características de Euler de las superficies, obteniéndose lo deseado. \square

Usando este teorema, calculemos la característica de Euler de la superficie que consiste de n discos y m bandas, donde las bandas se pegan en los bordes de los discos, pegando dos arcos de cada banda en los discos, cada arco en un cierto disco (posiblemente los dos arcos se peguen en el mismo disco), por supuesto que los dos arcos no pueden pegarse en el mismo arco de un disco. Ejemplos de estos discos con bandas pegadas se pueden ver en la Figura 4.7.

Si llamamos S_1 a los discos y S_2 a las bandas, usando el teorema anterior obtenemos que: $\chi(S_1 \cup S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - \#$ de arcos comunes, dado que por cada banda tenemos dos arcos que se pegan entre S_1 y S_2 , el número

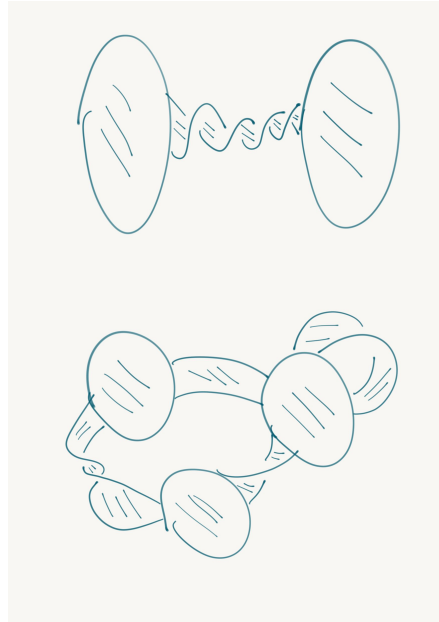


Figura 4.7: Ejemplos de discos pegados con bandas.

de arcos comunes es $2\chi(S_2)$. Entonces $\chi(S_1 \cup S_2) = \chi(S_1) - \chi(S_2) = n - m$. Este cálculo nos será de mucha utilidad a lo largo de esta sección.

Del teorema anterior se sigue el siguiente corolario.

Corolario 4.2.3. *Si dos superficies conexas, orientables, se intersecan en un solo arco de sus respectivos bordes, entonces el género de la unión de las dos superficies es igual a la suma de los géneros de cada una.*

Demostración. Por el Teorema 4.2.2 vale que: $\chi(S_1 \cup S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 1$. Además notemos que $B(S_1 \cup S_2) = B(S_1) + B(S_2) - 1$, pues al pegar los arcos, dos componentes bordes -uno por cada superficie- se unen, y en la unión cuentan ambos como una sola componente borde.

Teniendo esto en cuenta calculemos el género de la unión:

$$g(S_1 \cup S_2) = \frac{2 - \chi(S_1 \cup S_2) - B(S_1 \cup S_2)}{2}.$$

Reemplazando lo dicho anteriormente, tenemos

$$\begin{aligned}
g(S_1 \cup S_2) &= \frac{2 - (\chi(S_1) + \chi(S_2) - 1) - (B(S_1) + B(S_2) - 1)}{2} \\
&= \frac{2 - \chi(S_1) - \chi(S_2) + 1 - B(S_1) - B(S_2) + 1}{2} \\
&= \frac{(2 - \chi(S_1) - B(S_1)) + (2 - \chi(S_2) - B(S_2))}{2} \\
&= g(S_1) + g(S_2).
\end{aligned}$$

□

El siguiente resultado también se sigue de lo anterior, pero dada su importancia lo enunciamos como teorema.

Teorema 4.2.4. *Si una superficie orientable conexa está formada por atar bandas a una colección de discos, entonces el género de la superficie resultante está dado por*

$$\frac{2 - \#discos + \#bandas - \#componentes\ borde}{2}.$$

Demostración. Se sigue de los comentarios siguientes al Teorema 4.2.2, puesto que si consideramos como la superficie S_1 a los discos y como S_2 las bandas, entonces

$$\begin{aligned}
g(S_1 \cup S_2) &= \frac{2 - \chi(S_1 \cup S_2) - B(S_1 \cup S_2)}{2} \\
&= \frac{2 - (\#discos - \#bandas) - B(S_1 \cup S_2)}{2} \\
&= \frac{2 - \#discos + \#bandas - \#componentes\ borde}{2}.
\end{aligned}$$

□

El siguiente es un resultado que vamos a necesitar más adelante. Dado que tenemos las herramientas necesarias, lo enunciamos y lo probamos ahora.

Teorema 4.2.5. *Si dos superficies se intersecan en una colección de círculos en sus bordes, la característica de Euler de la unión es la suma de las características de Euler de cada una.*

Demostración. La demostración se trata de manera similar a la demostración del Teorema 4.2.2. Consideremos el caso en que la intersección es sólo

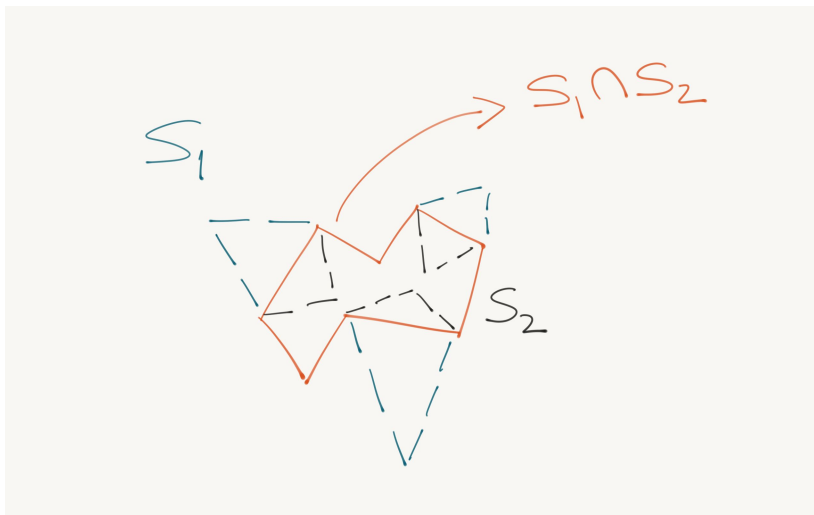


Figura 4.8: Con rojo pintado la intersección de los bordes de la superficie.

un círculo. Denotamos con h a la cantidad de lados que tienen en común las superficies (que es el número de lados que tiene el círculo), y dado que es un círculo, el número de vértices en común es también h .

Con esta observación pasamos a hacer las cuentas,

$$\begin{aligned} \chi(S_1 \cup S_2) &= \#caras(S_1 \cup S_2) - \#lados(S_1 \cup S_2) + \#vértices(S_1 \cup S_2) \\ &= \#caras(S_1) + \#caras(S_2) - (\#lados(S_1) + \#lados(S_2) - h) + \\ &\quad + (\#vértices(S_1) + \#vértices(S_2) - h) \\ &= \chi(S_1) + \chi(S_2). \end{aligned}$$

En el caso que la intersección sea más de un círculo, la cuenta es esencialmente la misma. \square

Ahora vamos a enunciar el teorema de clasificación de superficies con borde, que nos será de mucha utilidad en el resto del trabajo.

El teorema análogo para superficies sin borde es bien conocido en la comunidad matemática.

Teorema 4.2.6. *Sea S una superficie conexa, orientable, sin borde. Entonces S es homeomorfa a una suma conexa de n toros, para cierto n . Más aún tal n es único.*

El n del enunciado también puede ser 0, y en este caso tenemos la esfera S^2 . Ejemplos de estas superficies se muestran en la Figura 4.9.

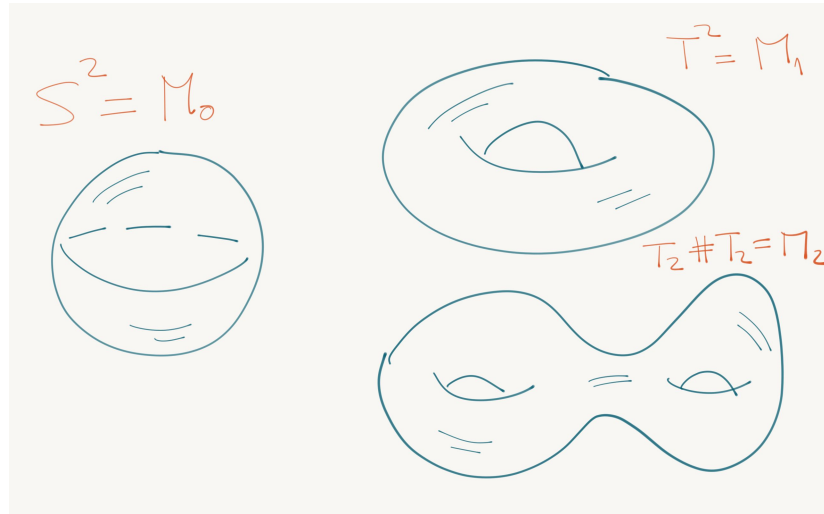


Figura 4.9: Las tres primeras superficies compactas y orientables.

El resultado que pretendemos enunciar ahora es similar a éste, solo que la superficie S sí tiene borde. Lo enunciamos en dos teoremas, aunque no haremos las pruebas diremos algunos comentarios respecto a las mismas.

Teorema 4.2.7. *Sea S una superficie conexa con borde. Entonces S es homeomorfa a un disco con bandas atadas.*

Una parte importante de la prueba consiste en deformar la superficie S —formada por triángulos— en una superficie que consiste de discos con bandas atadas, y lo más importante a remarcar es que tal deformación es una isotopía. Otra parte importante de la prueba y que además nos será muy útil más adelante, está plasmada en el siguiente problema.

Problema 4.2.8. (Prob. 2.7. Cap 4. [Li]) Si una superficie se obtiene de atar bandas a discos, entonces la superficie se puede deformar isotópicamente en una superficie que consiste de un solo disco con bandas atadas.

Solución. Se dará la idea de la prueba. Veamos primero lo siguiente. Supongamos que tenemos dos discos con una banda que los une, entonces es claro que esta superficie es isotópica a un disco, pues independientemente de las vueltas que dé la banda al unir los dos discos, uno puede girar uno de los discos hasta que queden los dos discos con la banda que los une sin vueltas, es decir, un disco. Esto se ilustra en la Figura 4.10.

Ahora supongamos, como en el enunciado, que tenemos una colección de discos con bandas atadas —posiblemente pegándose una banda dos veces en

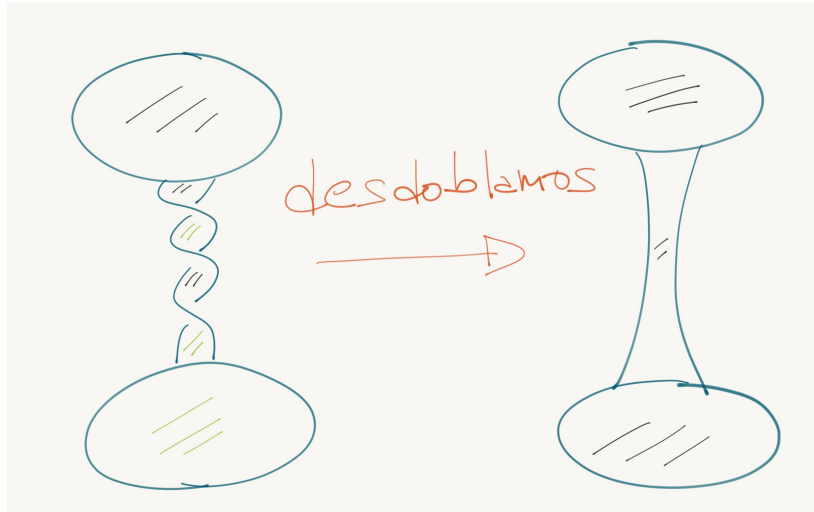


Figura 4.10: Dando vuelta uno de los discos, vemos que al final nos queda un solo disco.

el mismo disco— y ahora hagamos lo recién dicho con dos discos que están unidos por una banda, tomamos uno de ellos y le damos tantas vueltas como sean necesarias para que queden unidas por esa banda sin ninguna vuelta, es decir, los dos discos con la banda ahora forman un solo disco. En este proceso puede ser que las otras bandas que estaban pegadas al disco que giré —o quizá otras bandas uniendo a los dos discos— se hayan enredado más, pero eso no importa. Entonces al final obtenemos la misma superficie, pero con un disco menos. Haciendo este proceso tantas veces como sea necesario, obtenemos lo deseado. Notemos también que todo este proceso es una isotopía. \square

Teorema 4.2.9. Sean S_1 y S_2 superficies consistiendo cada una de un disco con bandas atadas. Entonces las dos superficies son homeomorfas si y sólo si se cumplen las siguientes tres condiciones:

- (a) La cantidad de bandas es la misma.
- (b) El número de componentes borde es el mismo.
- (c) Ambas son orientables o ambas son no orientables.

(Ver [Li, §4.2] para más información sobre este Teorema.) Un hecho importante a notar es que, si una superficie consiste de un disco con bandas atadas es orientable entonces el número de semivuelas de una banda no puede ser impar, pues si así fuera, entonces esta banda producirá una banda

de Moebius dentro de la superficie. Es un resultado bien conocido que, una superficie es orientable si y sólo si no existe un embedding de la banda de Moebius en tal superficie. Entonces todas las bandas de una tal superficie dan una cantidad par de semivuelas. He aquí una característica necesaria y suficiente de las superficies orientables.

Una consecuencia de esto es que de una tal superficie, si le quito una banda, la superficie resultante también es orientable, pues todas las bandas restantes dan una cantidad par de semivuelas. Con estas observaciones, pasamos a probar resultados esperables del género de una superficie.

Proposición 4.2.10. (*Prob. 2.8. Cap 4. [Li]*) *El género de una superficie conexa, orientable, es no negativo.*

Demostración. Dado que toda superficie es homeomorfa a una superficie consistente de un disco con bandas atadas, y que el género es un invariante topológico, basta probar esto para superficies consistentes de un disco con bandas atadas. Lo haremos por inducción en el número de bandas.

Caso base: En el caso base tenemos solamente un disco sin ninguna banda atada. Se tiene que:

$$\begin{aligned} g(S) &= g(\text{disco}) \\ &= \frac{2 - \chi(\text{disco}) - B(\text{disco})}{2} \\ &= \frac{2 - \chi(\text{triángulo}) - 1}{2} \\ &= \frac{1 - (1 - 3 + 3)}{2} \\ &= 0, \end{aligned}$$

por lo tanto vale el caso base.

Caso inductivo: Supongamos entonces que el enunciado vale para todas las superficies que consisten de un disco pegado con n bandas. Queremos ver que vale para las superficies que consisten de un disco con $n + 1$ bandas.

Sea S el disco con $n + 1$ bandas. Llamemos S_1 a una banda fija, elegida de las $n + 1$ bandas y S_0 a la superficie que se obtiene de quitarle la banda S_1 a S . Entonces $S = S_0 \cup S_1$, donde S_0 y S_1 se pegan a lo largo de dos arcos. Dado que S es orientable, también lo es S_0 y entonces vale la hipótesis inductiva para S_0 pues tiene n bandas. Pasemos al cálculo del género de S .

$$\begin{aligned} g(S) &= \frac{2 - \chi(S) - B(S)}{2} \\ &= \frac{2 - \chi(S_0 \cup S_1) - B(S_0 \cup S_1)}{2}. \end{aligned}$$

Acá notemos que tenemos dos casos distintos. Uno cuando la banda S_1 pega los dos arcos en la misma componente borde, y otro cuando pega los dos arcos en dos distintas componentes borde, una por cada borde.

(i) Caso cuando se pegan en la misma componente borde:

$$\begin{aligned} g(S) &= \frac{2 - (\chi(S_0) + \chi(S_1) - 2) - (B(S_0) + B(S_1))}{2} \\ &= \frac{2 - \chi(S_0) - B(S_0)}{2} + \frac{2 - \chi(S_1) - B(S_1)}{2} \\ &= g(S_0) + g(S_1). \end{aligned}$$

Como $g(S_0)$ es no negativo y $g(S_1)$ es cero, se tiene en este caso que el género es no negativo.

(ii) Caso cuando se pegan en distintas componentes bordes:

$$\begin{aligned} g(S) &= \frac{2 - (\chi(S_0) + \chi(S_1) - 2) - (B(S_0) + B(S_1) - 2)}{2} \\ &= \frac{2 - \chi(S_0) - B(S_0)}{2} + \frac{2 - \chi(S_1) - B(S_1)}{2} + 1 \\ &= g(S_0) + g(S_1) + 1. \end{aligned}$$

Por la misma razón que recién, en este caso tenemos que $g(S) \geq 1 \geq 0$. Con esto queda comprobada la hipótesis inductiva y obtenemos lo deseado. \square

Proposición 4.2.11. (Prob. 2.9. Cap 4. [Li]) *El género de una superficie conexa, orientable es un entero.*

Demostración. Procederemos de la misma manera en que hicimos antes, haciendo inducción en el número de bandas:

Caso base: En este caso tenemos 0 manijas, es decir, S es el disco. Que como se vio antes, este tiene género 0, cumpliéndose el caso base.

Caso inductivo: Supongamos que vale el enunciado para un disco con n manijas, y queremos ver que vale para un disco con $n + 1$ manijas. Sea entonces S un disco con $n + 1$ manijas.

Como hicimos en la solución al problema anterior, S se puede obtener como la unión de dos superficies S_0 y S_1 . Recordemos S_0 es la superficie que se obtiene de quitarle a S la manija S_1 . Realicemos el cálculo del género de S .

$$\begin{aligned} g(S) &= \frac{2 - \chi(S) - B(S)}{2} \\ &= \frac{2 - \chi(S_0 \cup S_1) - B(S_0 \cup S_1)}{2}. \end{aligned}$$

Recordemos también que el borde tiene dos posibilidades—en la prueba anterior—, cada una de las cuales analizamos a continuación.

(i) Caso cuando se pegan en la misma componente borde

$$\begin{aligned} g(S) &= \frac{2 - (\chi(S_0) + \chi(S_1) - 2) - (B(S_0) + B(S_1))}{2} \\ &= \frac{2 - \chi(S_0) - B(S_0)}{2} + \frac{(2 - \chi(S_1) - B(S_1))}{2} \\ &= g(S_0) + g(S_1). \end{aligned}$$

En este caso, dado que $g(S_0)$ es entero no negativo y $g(S_1)$ es cero, resulta que $g(S)$ es entero no negativo. Resta ver el otro caso posible.

(ii) Caso cuando se pegan en distintas componentes bordes

$$\begin{aligned} g(S) &= \frac{2 - (\chi(S_0) + \chi(S_1) - 2) - (B(S_0) + B(S_1) - 2)}{2} \\ &= \frac{2 - \chi(S_0) - B(S_0)}{2} + \frac{2 - \chi(S_1) - B(S_1)}{2} + 1 \\ &= g(S_0) + g(S_1) + 1. \end{aligned}$$

En este caso, por la misma razón anterior, y además notando que ahora se suma el género de S en 1, se sigue también que $g(S)$ es un entero no negativo.

Queda entonces demostrado lo enunciado. \square

4.3. Superficies de Seifert y el género de un nudo

Son de interés para nosotros las superficies con borde, ya que un nudo puede ser visto como borde de alguna superficie. De hecho, las superficies que estamos estudiando (las superficies poliedrales), o no tienen borde, o tienen como borde a una colección disjunta de nudos, es decir, un enlace.

Resulta inmediatamente una pregunta: ¿Es todo nudo el borde de una superficie? La respuesta es afirmativa, y además siempre es posible encontrar una tal superficie, que sea orientable. El siguiente teorema es debido a Seifert.

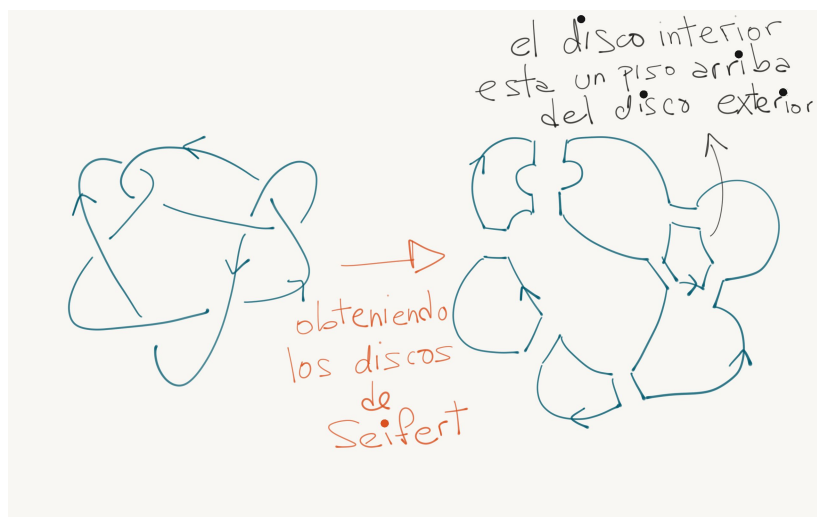


Figura 4.11: A la izquierda el diagrama del nudo, a la derecha los discos de Seifert obtenidos.

Teorema 4.3.1. *Todo nudo puede ser obtenido como el borde de una superficie conexa orientable.*

Demostración. Consideremos para ello un diagrama del nudo, y démosle una orientación. Entonces apliquemos el siguiente procedimiento. Comenzando en un arco y siguiendo la orientación elegida avancemos hasta llegar a un cruce, y solo un poco antes de llegar al cruce doblemos a la izquierda o a la derecha según nos diga la orientación del (de los) arco(s), pasando luego a estar en otro arco. Ahora seguimos haciendo lo mismo. Notar que en algún momento vuelvo al punto de partida (i.e., al arco donde comencé). Si nos quedaron arcos por recorrer, apliquemos el procedimiento anterior a otro arco no recorrido. Y así sucesivamente, hasta que no quede arco sin recorrer. Al terminar este proceso, obtenemos círculos orientados no intersecándose — los llamados círculos de Seifert— y quizá algunos círculos viviendo dentro de otros círculos. Se dejan los detalles para el lector. Todo esto queda ilustrado para el nudo de la Figura 4.11.

A los discos acotados por estos círculos los llamaremos *discos de Seifert*, cada disco además tiene paredes, las cuales se encuentran justamente en cada cruce.

La superficie se obtiene de pegar una banda a estos discos de Seifert, cada banda pegando dos paredes de dos discos distintos, doblándolo según indique el cruce. Si un disco está dentro de otro disco, pensamos al primero

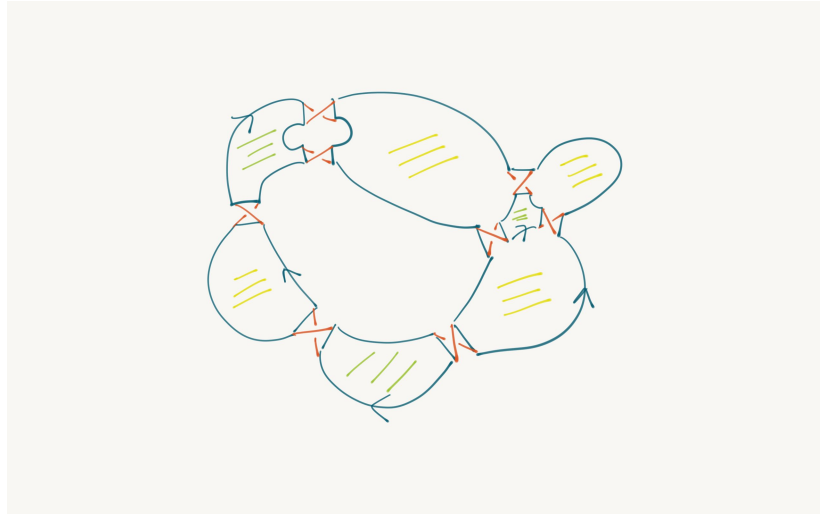


Figura 4.12: La superficie obtenida de aplicar el algoritmo de Seifert.

levantado más arriba del segundo, como si se encontrase en el primer piso, y las bandas se pegarían como se dijo recién, ver por ejemplo la Figura 4.12.

Tenemos entonces una superficie que consta de discos con bandas pegadas, que notemos, tiene como borde el nudo de partida. Además es conexa, esto se debe a que estando en un disco se puede ir a cualquier otro disco recorriendo el nudo. Quedó ver entonces que es orientable. Esto lo probamos en el problema que viene a continuación. \square

Proposición 4.3.2. (*Prob. 3.3. Cap 4. [Li]*) *La superficie obtenida por el algoritmo de Seifert es orientable.*

Demostración. Para hacer esto notemos que un disco de Seifert tiene una orientación que esta dada por la orientación del borde de dicho disco; por lo que cada disco tiene, o una orientación horaria, o una orientación antihoraria. Pintemos con blanco la cara superior de aquellos discos que tienen la orientación antihoraria y a la cara inferior la pintemos con negro; pintemos con negro la cara superior de aquellos discos que tienen la orientación horaria y a la cara inferior la pintemos con blanco.

Entonces si una hormiga vive sobre la cara blanca de un disco, al pasarse de este disco a otro disco vecino, la hormiga vivirá sobre la cara blanca del disco vecino; pues dos discos que se conectan por una banda tienen orientaciones opuestas. Por lo tanto, no importa el recorrido que la hormiga realice sobre la superficie, la hormiga siempre vivirá sobre la cara blanca

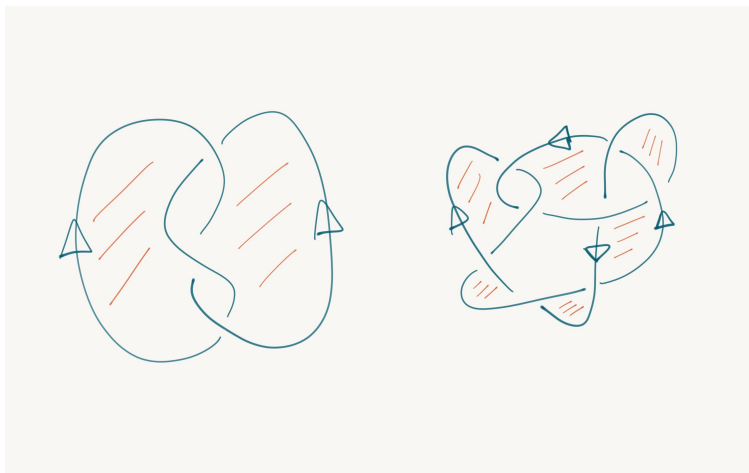


Figura 4.13: Las superficies obtenidas de aplicar el procedimiento checkerboarding.

de la superficie. En particular si se realiza un lazo comenzando en una cara blanca, al terminar el lazo la hormiga volverá sobre la cara blanca y no sobre la negra; se deduce entonces que la superficie es orientable. \square

Definición 4.3.3. Dado un nudo K , llamaremos *superficie de Seifert* de K , a toda superficie conexa, orientable, cuyo borde sea K .

Hay otra forma de obtener una superficie cuyo borde sea un nudo dado, tal procedimiento se llama *checkerboarding* (o *tablero de damas*, en castellano). Este procedimiento se explica a continuación.

Supóngase que se tiene un diagrama del nudo, y le damos también una orientación. Comenzamos desde un punto de algún arco siguiendo la orientación y pintando con *blanco* el lado izquierdo de tal arco y con *negro* el derecho, cuando nos encontremos con un cruce hacemos al revés, es decir, una vez que pasamos un cruce, pintamos con blanco el lado derecho y con negro el lado izquierdo. Así seguimos hasta volver al punto de partida. Se obtiene entonces una parte —correspondiente a un color— acotada y una parte no acotada —correspondiente a otro color—, la parte acotada forma una superficie cuyo borde es el nudo. Esto se ilustra en los ejemplos de la Figura 4.13.

Notemos que en el último caso la superficie obtenida no es orientable, mientras que en el primero sí. Nos interesa que sea orientable para hablar del género de la superficie. En este sentido nos es más útil el algoritmo de

Seifert que el proceso de checkerboarding. La siguiente definición avala lo dicho anteriormente.

Definición 4.3.4. Sea K un nudo. Se define el género de K , $g(K)$, como el mínimo de todos los géneros de todas la superficies de Seifert de K .

Probamos anteriormente que el género de una superficie orientable conexa es un entero no negativo; esto junto con la existencia de las superficies de Seifert de un nudo K , nos da la buena definición del género de un nudo.

Tenemos aquí un invariante de nudo, pues si dos nudos —no necesariamente distintos— tienen género nudo distintos, entonces tales nudos son distintos, es decir, no equivalentes.

El género resulta ser un buen invariante de nudo, pero el cálculo de tal número es frecuentemente difícil. El género de la superficie obtenida por el algoritmo de Seifert no es necesariamente el mínimo y encontrar la superficie que realice tal mínimo es usualmente una tarea difícil. Más adelante veremos algunos resultados que nos ayudarán a calcular el género.

Calculemos el género de algunos nudos. Para el unknot tenemos por ejemplo la superficie del disco; y dado que esta superficie tiene género 0, al tener toda superficie género no negativo, se deduce que el género del unknot es cero, $g(\text{unknot}) = 0$. Para el trefoil podemos tomar la superficie obtenida de aplicar el algoritmo de Seifert al diagrama estándar. Y dado que el género de tal superficie es 1 —un simple cálculo que el lector debe hacer—, se deduce que $g(3_1) \leq 1$.

Como vimos, el género del unknot es 0, pero el género del trefoil, en principio, puede ser 0. Esto queda descartado por el siguiente problema.

Proposición 4.3.5. *El único nudo de género cero es el unknot.*

Demostración. Sea K un nudo con género cero. Eso significa que existe una superficie de Seifert S para K , con $g(S) = 0$. Sabemos que tal superficie se puede llevar isotópicamente a una superficie consistente de un disco con bandas atadas —en particular, el borde de la superficie, que es el nudo K , no cambia de equivalencia—. De la fórmula del género tenemos:

$$g(S) = \frac{2 - \chi(S) - B(S)}{2},$$

como el borde es el nudo K , tenemos que $B(S) = 1$, y la característica de Euler queda en términos de la cantidad de discos y de bandas; al ser solamente un disco, tenemos

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{2 - (\# \text{ discos} - \# \text{ bandas}) - 1}{2} \\
&= \frac{1 - (1 - \# \text{ bandas})}{2} \\
&= \# \text{ bandas}.
\end{aligned}$$

Resulta entonces que no hay ninguna banda, y por lo tanto S es isotópica al disco. En particular, nuestro nudo K —es el borde de S — es isotópico al borde del disco, que es el unknot, como se deseaba. \square

Ahora estudiemos un poco qué pasa con el género cuando hacemos una *cirugía* a esta superficie. No procederemos con mucho detalle en esta parte.

Sea S una superficie y sea D un disco (ambos viviendo en \mathbb{R}^3) cuya intersección con S es sólo el borde del disco. Consideremos un entorno cerrado del borde del disco dentro de la superficie S , se suele llamar a tal entorno un *anillo*, denotemos a este anillo con A .

El proceso de cirugía consiste en eliminar el interior de este anillo en la superficie, quedándonos el borde del anillo —dos círculos— aún viviendo en la superficie. Entonces pegamos dos discos, uno por cada círculo, obteniéndose una nueva superficie con quizá dos componentes conexas; aquí termina el proceso de cirugía. El proceso queda ilustrado en la Figura 4.14.

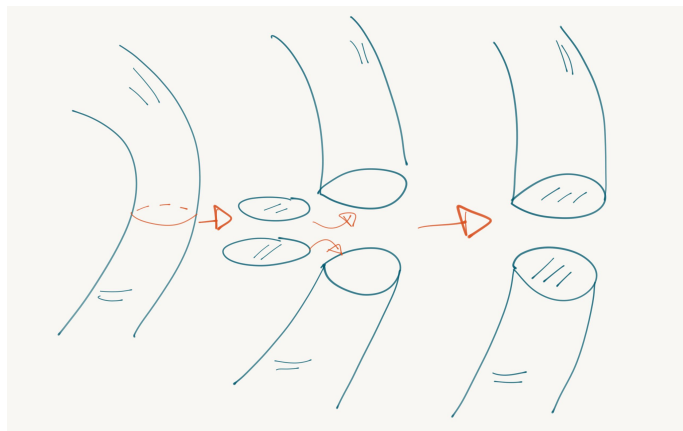


Figura 4.14: El proceso de cirugía en una superficie.

El siguiente teorema nos dice qué pasa con el género después de haber realizado cirugía.

Teorema 4.3.6. *Sea S una superficie conexa orientable, y sea F la superficie obtenida de haber aplicado cirugía. Entonces, si F tiene una sola componente conexa, $g(F) = g(S) - 1$, y si tiene dos componentes conexas, S_1, S_2 , $g(S) = g(S_1) + g(S_2)$*

Demostración. El proceso de cirugía podemos dividirlo en dos partes. El primero que consiste en eliminar el anillo, obteniéndose una superficie a la que llamaremos S' , y el segundo que consiste en pegar los dos discos a esta última superficie, a la que llamaremos S'' ; la superficie F del enunciado es la superficie S'' .

Trabajaremos con la característica de Euler, ya que en el proceso de cirugía puede haber superficies con más de una componente conexa, y el género no está definido para tales superficies, mientras que la característica de Euler sí.

Dado que: $S = S' \cup \text{anillo}$, por el Teorema 4.2.5, $\chi(S) = \chi(S') + \chi(\text{anillo})$, y el anillo es simplemente un disco con una banda atada, se sigue que $\chi(\text{anillo}) = 0$, y entonces $\chi(S) = \chi(S')$. Haciendo lo mismo para S'' se tiene que $\chi(S'') = \chi(S') + \chi(\text{disco}_1) + \chi(\text{disco}_2)$, y dado que $\chi(\text{disco}) = 1$ se tiene que $\chi(S'') = \chi(S') + 2$, reemplazando por $\chi(S)$ obtenemos, $\chi(S'') = \chi(S) + 2$.

Aquí tenemos dos casos posibles sobre S'' , pues puede tener una sola componente conexa o puede tener dos componentes conexas. Hacemos el cálculo por separado. Pero primero notemos la siguiente fórmula —para una superficie conexa— obtenida de la definición de género

$$\chi(S) = 2 - 2g(S) - B(S).$$

(i) Caso S'' con una sola componente conexa. En este caso se puede reemplazar directamente la fórmula anterior

$$\begin{aligned} \chi(S'') &= \chi(S) + 2, \\ 2 - 2g(S'') - B(S'') &= (2 - 2g(S) - B(S)) + 2, \end{aligned}$$

dado que $B(S'') = B(S)$, resulta

$$g(S'') = g(S) - 1.$$

(ii) Caso S'' con dos componentes conexas. Sean S_1, S_2 las componentes conexas de S'' , entonces vale que: $\chi(S'') = \chi(S_1) + \chi(S_2)$. Y como ambas S_1, S_2 son conexas podemos calcularle el género.

$$\chi(S'') = \chi(S) + 2$$

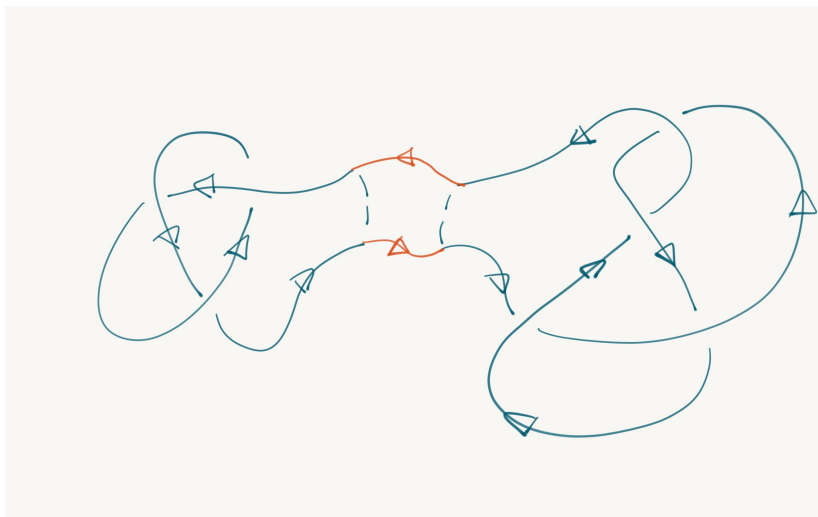


Figura 4.15: Suma conexa de dos nudos.

$$\chi(S_1) + \chi(S_2) = \chi(S) + 2$$

$$(2 - 2g(S_1) - B(S_1)) + (2 - 2g(S_2) - B(S_2)) = (2 - 2g(S) - B(S)) + 2$$

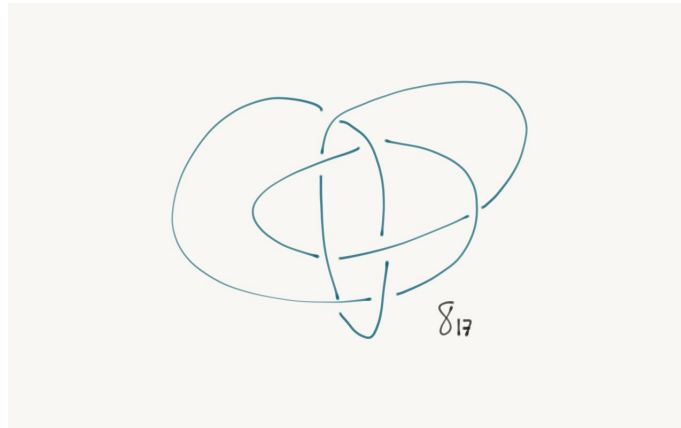
$$g(S) = g(S_1) + g(S_2).$$

Esto concluye la prueba. □

4.4. Suma conexa de nudos y la descomposición prima de nudos

Supóngase que tenemos dos nudos, K_1 y K_2 separados en el espacio. Para cada nudo tomemos un intervalo pequeño y *externo* del nudo (esto último es que el intervalo este lejos del resto del nudo). Ahora cortemos estos intervalos, quedando dos puntos extremos para cada uno. A continuación entonces pegamos un punto extremo de K_1 a un punto extremo de K_2 , y también pegamos los otros dos puntos extremos restantes. Esto se ilustra en la Figura 4.15. La independencia del intervalo escogido se justifica porque uno puede trasladar un intervalo del nudo a otro intervalo cualquiera, haciendo un movimiento continuo dentro del mismo nudo.

Hay un solo problema en la construcción anterior. Al pegar los puntos extremos tenemos dos posibilidades; pues un punto extremo del nudo K_1 tiene dos puntos extremos posibles para pegarse con K_2 , y una vez que se

Figura 4.16: El nudo 8_{17} .

pega con un punto extremo, el otro punto extremo de K_1 se pegará con el otro punto extremo de K_2 . Resulta que los dos nudos que se pueden obtener de esta forma no necesariamente son equivalentes.

Para arreglar esta situación, consideraremos nudos orientados en lugar de considerar solamente nudos. Entonces existe una sola forma de pegar los extremos de manera que el nudo resultante tenga una orientación consistente con la orientación de los dos nudos. El nudo orientado así obtenido queda entonces bien definido y lo llamamos la *suma conexa* de los nudos orientados K_1 y K_2 , lo denotamos $K_1 \# K_2$.

Se puede probar que dado un nudo orientado K , si este no es reversible, entonces el nudo $K \# K$ no es equivalente a $K \# K^r$ ni siquiera como nudos —es decir, sin considerar la orientación—. Notemos que justo estos dos nudos así obtenidos, son los dos que se obtienen por hacer el proceso de suma conexa explicado al principio de la sección. Esto nos da muchos ejemplos que muestran que la suma conexa para nudos —sin considerar la orientación— no está bien definida. Por ejemplo el nudo 8_{17} (ver Figura 4.16) no es reversible (ver el trabajo de Akio Kawauchi, [Kaw]), y entonces, por lo dicho anteriormente, $8_{17} \# 8_{17}$ no es equivalente a $8_{17} \# 8_{17}^r$.

Con la suma conexa cuidadosamente definida, podemos dar la definición de *nudo primo* junto con el Teorema de Descomposición Prima.

Definición 4.4.1. Un nudo K se dice que es un *nudo primo*, si para cualquier descomposición como suma conexa, uno de los factores es el unknot.

Notemos que en la definición anterior escribimos nudo y no nudo orientado, esto se justifica a continuación. Sea K un nudo orientado y sea K^r

el nudo reverso de K . Supongamos que K es un *nudo orientado primo*, i.e. para cualquier descomposición de K como suma conexa de dos nudos orientados, uno de los factores es el unknot; queremos ver que K^r es también un nudo orientado primo. Pues si no lo fuera, existiría una descomposición de K^r como suma conexa, digamos $K^r = J\#L$, con J y L nudos orientados, y ninguno de ellos equivalente al unknot. Notemos ahora que el cambio en la orientación de K^r , da un cambio en la orientación de J y L ; y además vale que $K = J^r\#L^r$, se deduce entonces que K no es un nudo orientado primo, contradiciendo al hecho de que K es un nudo orientado primo. Por lo tanto K^r es también un nudo orientado primo. Luego podemos hablar de un nudo primo, ya que ésta es una propiedad independiente de la orientación del nudo; queda entonces justificada la definición anterior.

Una pregunta que aparece respecto a la suma conexa de nudos, es ¿qué pasa con el género de la suma conexa? El siguiente teorema responde a esta cuestión.

Teorema 4.4.2. (*aditividad del género de nudos*) *Dados dos nudos K_1 y K_2 , vale que $g(K_1\#K_2) = g(K_1) + g(K_2)$*

Una prueba de este teorema se puede encontrar en [Li], página 79.

La pregunta que nos hicimos respecto al comportamiento del género cuando hacemos la suma conexa de nudos, la podemos hacer también respecto a otros invariantes de nudos, tales como el determinante del nudo, el número de coloreo del nudo, entre otros. Volveremos con esto más adelante.

Un corolario inmediato de lo anterior es el siguiente.

Corolario 4.4.3. *Si K es no trivial, entonces no existe nudo J , tal que, $K\#J$ sea trivial.*

Demostración. Supongamos que tal J existe. Dado que $K\#J$ es trivial, se sigue que $g(K\#J) = 0$. Por la aditividad del género de nudo, vale que $g(K\#J) = g(K) + g(J)$, al ser K no trivial, tenemos que $g(K) > 0$ —pues el único con género 0, es el unknot—.

Se tiene entonces que:

$$0 < g(K) + g(J) = g(K\#J) = 0,$$

lo que es un absurdo. Se sigue que tal J no puede existir. \square

Otro hecho a notar es que todos los nudos de género 1, son primos.

Lema 4.4.4. *Si $g(K) = 1$ entonces K es primo.*

Demostración. Si $K = K_1 \# K_2$, por la aditividad del género, se tiene que: $g(K) = g(K_1) + g(K_2)$. Notemos que no pueden ambos factores tener género positivo, pues $g(K) = 1$. Debe ser entonces que algún factor debe tener género 0, y por lo tanto este debe ser equivalente al unknot, i.e. K es primo. \square

La siguiente proposición —de la cual no daremos la prueba— nos dice las propiedades algebraicas de la operación suma conexa.

Proposición 4.4.5. *La suma conexa es asociativa y conmutativa. Escrito en fórmulas*

- (i) $(K_1 \# K_2) \# K_3 = K_1 \# (K_2 \# K_3)$
- (ii) $K_1 \# K_2 = K_2 \# K_1$.

Ahora sí enunciaremos el Teorema de Descomposición Prima para nudos, el cual notemos es análogo al Teorema Fundamental de la Aritmética, sólo que debemos reemplazar la palabra *número* por *nudo*, y en lugar de producto tenemos la suma conexa.

Teorema 4.4.6. *(Teorema de descomposición prima) Todo nudo puede ser descompuesto como suma conexa de nudos primos no triviales. Si $K = K_1 \# K_2 \# \dots \# K_n$ y $K = J_1 \# J_2 \# \dots \# J_m$, con cada nudo no trivial, entonces $n = m$ y después de un reordenamiento K_i es equivalente a J_i para cada i .*

Demostración. Solamente probaremos la existencia. La prueba de la unicidad es parecida a la prueba de la aditividad del género de nudos. Como esta no nos será de mucho aporte, no la haremos aquí.

Para probar la existencia usaremos el Teorema de la aditividad del género de nudos. Consideraremos K no trivial—si es trivial, la cantidad de nudos primos que necesito es 0—. La prueba será por inducción fuerte en el género del nudo.

Caso base: Supongamos que $g(K) = 1$, entonces por el Lema 4.4.4 K es primo, y tenemos una descomposición prima de K .

Caso inductivo: Supongamos que $g(K) = n + 1$, y que todo nudo J con $g(J) < n + 1$ admite una descomposición prima, queremos ver que K admite una descomposición prima.

Tenemos dos casos posibles, o K es un nudo primo, con lo cual ya estaría, o bien K no es primo. Si K no es primo, deben existir nudos K_1 y K_2 , ninguno de ellos trivial, tal que $K = K_1 \# K_2$. Como ambos factores no son triviales, entonces ambos tienen género positivo, y podemos aplicar

la hipótesis de inducción fuerte sobre estos dos, obteniéndose una descomposición primaria para cada uno de los factores, es decir, se obtiene una descomposición primaria para K , como se deseaba. \square

Que los factores sean nudos primos es importante, así se ilustra en el siguiente problema.

Problema 4.4.7. (Prob. 5.2. Cap 4. [Li]) Usar la suma conexa de tres nudos distintos para encontrar un ejemplo de un nudo que pueda ser descompuesto como una suma conexa en dos formas distintas.

Solución. Consideremos los nudos $(2, 3)$ -torus knot (recuerde que este es el trefoil), $(2, 5)$ -torus knot y $(2, 7)$ -torus knot, a los cuales los denotaremos con 3_1 , 5_1 y 7_1 respectivamente (esta notación es conocida en la teoría de nudos y esta hecha en general para todos los nudos, una tabla con los primeros nudos se puede encontrar en [Li], Apéndice 1). Sea $K = 3_1 \# 5_1 \# 7_1$, donde los tres nudos tienen alguna orientación fija. Entonces K se puede escribir como una suma conexa de dos formas distintas, a saber, $K = (3_1 \# 5_1) \# 7_1$, y $K = 3_1 \# (5_1 \# 7_1)$. Son distintas pues, por ejemplo, el nudo 7_1 no es equivalente ni a 3_1 ni a $5_1 \# 7_1$. \square

Problema 4.4.8. (Prob. 5.3. Cap 4. [Li]) Probar que un nudo de género n es la suma conexa de a lo sumo n nudos no triviales.

Solución. Sea $K = K_1 \# K_2 \# \dots \# K_m$ con cada K_i nudo no trivial, queremos ver que $m \leq n$.

Notemos primero que $g(K_1 \# K_2 \# \dots \# K_m) = g(K_1) + g(K_2) + \dots + g(K_m)$ —pues aplicamos la aditividad del género de dos en dos—. Dado que cada nudo K_i es no trivial por hipótesis, tenemos que $g(K_i) \geq 1$, entonces, $g(K_1 \# K_2 \# \dots \# K_m) \geq m$ —por lo notado anteriormente— y por otro lado $g(K_1 \# K_2 \# \dots \# K_m) = g(K) = n$, de donde, $n \geq m$, como se deseaba. \square

Capítulo 5

Técnicas algebraicas

Un invariante topológico bien conocido es el llamado *grupo fundamental*, esto es, una estructura algebraica definida sobre un espacio topológico, que se preserva por homeomorfismos. La rama de la matemática que estudia estas relaciones de la topología con el álgebra se llama *topología algebraica*.

Los nudos no quedan fuera de esta relación, y a un nudo también le podemos asociar un grupo, al cual llamaremos *el grupo nudo*.

En este capítulo estudiaremos cómo los grupos nos pueden servir para distinguir nudos, en particular daremos un invariante de nudos orientados –hasta ahora no hemos dado ninguno–. Todo lo hecho entonces convergerá a la definición de grupo nudo.

5.1. Etiquetando con un grupo

Recordemos cómo etiquetamos los arcos de los diagramas de nudo con elementos de \mathbb{Z}_p . Ahora queremos hacer lo mismo, sólo que nuestras etiquetas serán elementos de un grupo arbitrario.

Sea G un grupo y sea K un nudo, y consideremos un diagrama orientado del nudo. Decimos que G *etiqueta al nudo* K , si se puede etiquetar cada arco del diagrama con un elemento de G , tal que se cumplan las siguientes dos condiciones:

Consistencia: En cada cruce vale la siguiente condición: $k = ghg^{-1}$, donde g, k, h están dadas como se indica en la Figura 5.1

Generación: El conjunto de los elementos de G que etiquetan los arcos del diagrama, deben generar el grupo G .

Como el lector debe esperar, el etiquetar con un grupo a un nudo resulta ser un invariante. Esto queda plasmado en el siguiente teorema.

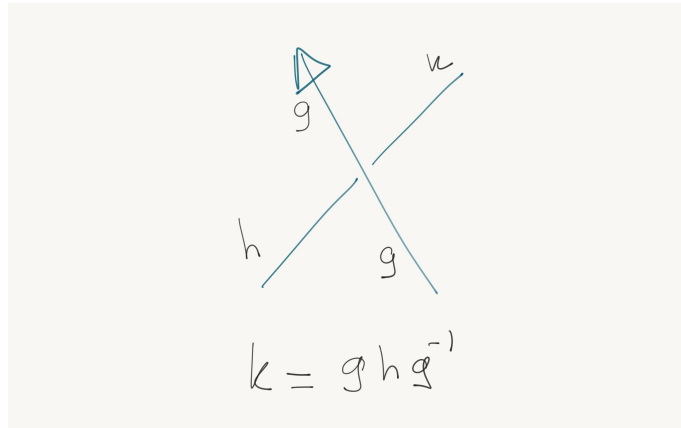


Figura 5.1: La relación de consistencia que se debe cumplir en cada cruce.

Teorema 5.1.1. *Sea K un nudo y G un grupo. Si un diagrama del nudo K puede ser etiquetado con G , entonces todo otro diagrama del nudo puede ser etiquetado con G , independientemente de la orientación.*

Demostración. Dado que dos diagramas de nudo difieren por una secuencia finita de movimientos de Reidemeister, basta ver lo enunciado cuando aplicamos un solo movimiento de Reidemeister. Debemos ver entonces cuando aplicamos cada uno de los seis posibles movimientos de Reidemeister; acá solamente lo haremos para el segundo movimiento de Reidemeister.

Como ilustra la Figura 5.2, si queremos ir de izquierda a derecha, la etiquetación es clara; y análogamente si se va de derecha a izquierda. También se debe ver el caso en que las orientaciones de los arcos sea distinta, pero como notará el lector esto no es ningún problema. De manera similar debemos analizar con los otros movimientos de Reidemeister.

Ya que en lo hecho anteriormente se dio la invariancia cuando consideramos la misma orientación, debemos ver que si cambiamos la orientación del diagrama, el nuevo diagrama orientado se puede etiquetar con el mismo grupo G .

Supóngase entonces que un diagrama de nudo (con cierta orientación) se puede etiquetar con un grupo G , digámosle el primer diagrama. Consideremos ahora el mismo diagrama solo que con la otra orientación, queremos ver que también podemos etiquetarlo con el grupo G , digámosle el segundo diagrama. Lo que haremos es etiquetar cada arco —que está etiquetado con l en el primer diagrama— con l^{-1} en el segundo diagrama. Entonces en cada cruce del primer diagrama se transforma a otro cruce del segundo diagrama,

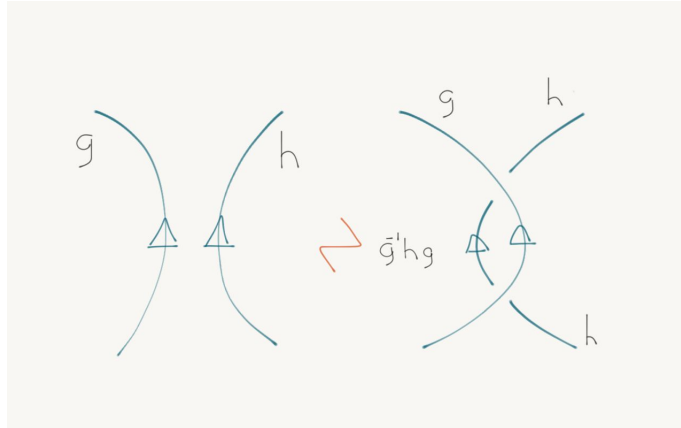


Figura 5.2: Un posible etiquetamiento para el segundo movimiento de Reidemeister.

así como se indica en la Figura 5.3.

Del primer diagrama se tiene que

$$k = ghg^{-1},$$

aplicando el inverso, obtenemos

$$k^{-1} = gh^{-1}g^{-1}$$

$$g^{-1}k^{-1}g = h^{-1}.$$

Esta última ecuación es la condición de consistencia que se pide en ese cruce; verificándose la condición de consistencia.

Resta ver que estas etiquetas generan el grupo G . Si $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ son las etiquetas del primer diagrama, sé que el generado por este conjunto es G —pues este conjunto etiqueta el primer diagrama—; entonces $\{g_1^{-1}, g_2^{-1}, \dots, g_n^{-1}\}$ son las etiquetas del segundo diagrama, y además generan el grupo, pues $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ generan el grupo G . Por lo tanto se cumple la condición de generación.

Como se cumplen las dos condiciones, se obtiene lo deseado. \square

Algunos ejemplos de nudos etiquetados —con el grupo simétrico S_3 — se ven en la Figura 5.4.

Aunque el etiquetamiento parezca simple, encontrar tales etiquetas puede ser una tarea difícil. Aquí hace falta remarcar una importante observación. En un cruce, si el overcrossing es conocido y algunos de los arcos

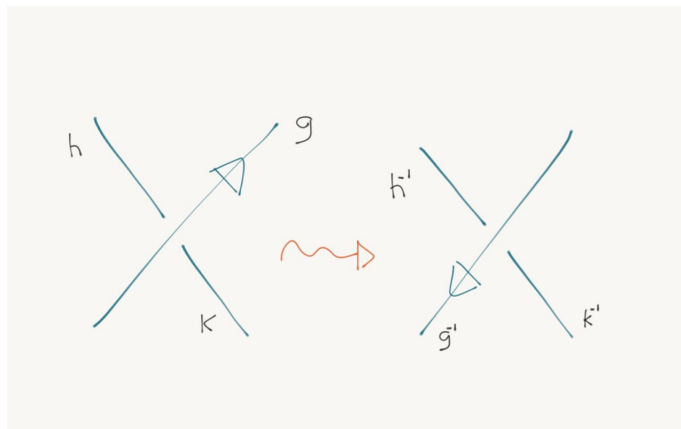


Figura 5.3: A la izquierda el nudo orientado etiquetado; a la derecha el mismo nudo con la orientación invertida y etiquetado con los correspondientes inversos.

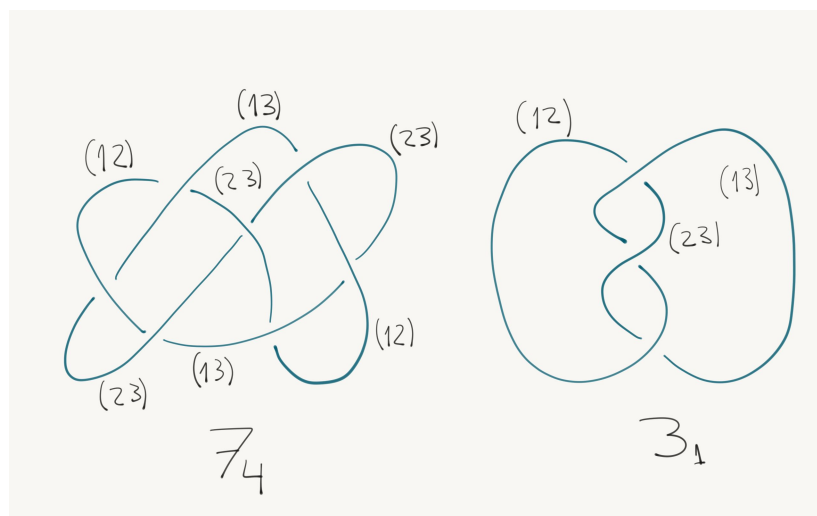


Figura 5.4: Los nudos 7_4 y 3_1 etiquetados con el grupo simétrico S_3 .

laterales también lo es, entonces el otro arco también es conocido, debido a la relación de consistencia.

El etiquetamiento de un nudo con un grupo es una herramienta muy útil. *Thistlethwaite* clasificó todos los nudos primos hasta 13 cruces, con la ayuda de etiquetamientos con grupos y *Perko* probó que si un nudo admite etiquetamiento con el grupo S_3 , entonces tal nudo admite etiquetamiento con el grupo S_4 (ver pág. 94 en [Li] y referencias ahí).

Problema 5.1.2. (Prob. 2.7. Cap 5. [Li]) Supongamos que a un nudo K lo podemos etiquetar con un grupo G , y consideremos un etiquetamiento posible. Entonces, si consideramos un elemento arbitrario g de G , y cambiamos cada etiqueta, j , por $g j g^{-1}$, obtenemos un nuevo etiquetamiento del nudo con el grupo G .

Solución. Veamos que valen las dos condiciones.

Consistencia: Consideremos un cruce arbitrario de un diagrama orientado; donde el overcrossing esta etiquetado con l , el arco a la izquierda de l esta etiquetado con h y el arco a la derecha de l esta etiquetado con k . Considerando la misma orientación y cambiando cada etiqueta por el conjugado por g , debemos ver que se cumple la condición de consistencia en este cruce con estos cambios efectuados,

$$\begin{aligned} (g l g^{-1})(g h g^{-1})(g l g^{-1})^{-1} &= g l h l^{-1} g^{-1} \\ &= g k g^{-1}, \end{aligned}$$

dado que $l h l^{-1} = k$.

Como esto vale para cada cruce arbitrario, se verifica la condición de consistencia.

Generación: Tenemos que g_1, g_2, \dots, g_n genera el grupo G . Queremos ver que $g g_1 g^{-1}, g g_2 g^{-1}, \dots, g g_n g^{-1}$ también genera al grupo G . Este es un problema elemental de Álgebra.

Sea $\phi : G \rightarrow G$, la función dada por $\phi(h) = g h g^{-1}$. Esta función es un homomorfismo de grupos y tiene inversa α , dada por $\alpha(h) = g^{-1} h g$. Entonces ϕ resulta un automorfismo de G , y la imagen de g_1, g_2, \dots, g_n por ϕ es $g g_1 g^{-1}, g g_2 g^{-1}, \dots, g g_n g^{-1}$. Entonces el conjunto $g g_1 g^{-1}, g g_2 g^{-1}, \dots, g g_n g^{-1}$ debe generar G . \square

Notemos que en la prueba del Teorema 5.1.1, cuando hacemos un movimiento de Reidemeister, el nuevo diagrama no sólo se puede etiquetar con el mismo grupo del primer diagrama, sino que también se puede etiquetar con la *misma clase de conjugación* del primer diagrama. También notemos que cuando cambiamos de orientación, las etiquetas que le damos al nuevo

diagrama —con la orientación invertida— no necesariamente está en la misma clase de conjugación de las etiquetas del primer diagrama. Esto se debe a que la clase de conjugación de los inversos g^{-1} —donde g es una etiqueta del primer diagrama— no tienen por qué ser la misma clase de conjugación de los g .

La observación anterior nos hace notar que etiquetar el nudo con una clase de conjugación es un invariante de nudo orientado. Se sigue entonces el siguiente teorema.

Teorema 5.1.3. *Si un diagrama de un nudo orientado puede ser etiquetado con una clase de conjugación de un grupo G , entonces cualquier otro diagrama de este nudo orientado también puede ser etiquetado con la misma clase de conjugación del grupo G .*

Demostración. Cuando etiquetamos los arcos de un diagrama, todas estas etiquetas son conjugadas; es decir, están en la misma clase de conjugación. Y como vimos en la prueba del Teorema 5.1.1; al aplicar un movimiento de Reidemeister a un diagrama orientado, las etiquetas del nuevo diagrama son de la misma clase de conjugación del diagrama de partida, como se deseaba. \square

5.2. Ecuaciones en grupos y el grupo de un nudo

Si tenemos un grupo G , con el que queremos etiquetar un diagrama de un nudo K , podemos etiquetar ciertos arcos del diagrama —no todos— y tratar a partir de allí, etiquetar todos los arcos restantes. Esto lo hacemos justamente gracias a la relación de consistencia.

Supóngase por ejemplo que tenemos el diagrama mostrado en la Figura 5.5 y que etiquetamos los tres arcos superiores, con tres elementos fijos de G , llamémosle x_1, x_2, x_3 , estos elementos además deben generar el grupo, pues todas las otras etiquetas quedarán en función de éstas. Entonces notemos que con la relación de consistencia voy obteniendo etiquetas para los arcos restantes. Nos aparecen de inmediato ciertas ecuaciones debido a que algunos arcos llegan a tener dos etiquetas, que para que el grupo G etiquete K , estas dos etiquetas deben ser iguales. En este caso particular, se obtienen tres ecuaciones:

$$\begin{aligned} xyx^{-1} &= yx^{-1}zxy^{-1}xyx^{-1}z^{-1}xy^{-1} \\ xy^{-1}x^{-1}yx^{-1}zxy^{-1}xyx^{-1} &= yx^{-1}y^{-1}zyxy^{-1}z^{-1}yzyx^{-1}y^{-1}z^{-1}xyy^{-1} \\ yx^{-1}y^{-1}zyxy^{-1} &= z^{-1}y^{-1}zyxy^{-1}z^{-1}yz. \end{aligned}$$

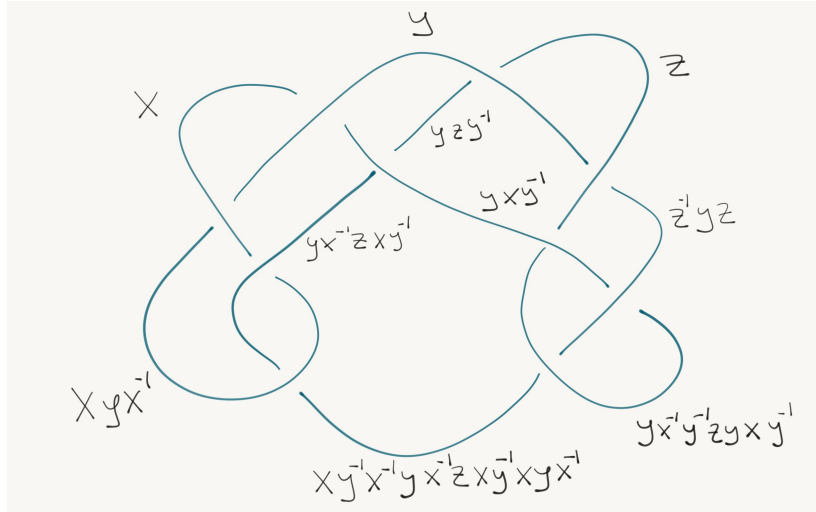


Figura 5.5: La relación de consistencia nos ayuda a descubrir los posibles valores de los otros arcos.

Siempre estuvimos pensando en un grupo G abstracto. Entonces notemos que si un grupo G etiqueta al nudo K , G debe estar generado con las tres etiquetas de los tres arcos superiores y además estos tres elementos deben cumplir las tres ecuaciones que se obtuvieron recién. La recíproca también vale, es decir, si un grupo G está generado por tres elementos tales que cumplen esas tres relaciones, entonces G etiqueta al nudo K . Esto es muy importante porque caracteriza a todos los grupos que etiquetan al nudo K .

Un resultado bien conocido en la teoría de grupos, es que todo grupo se puede escribir como el grupo dado por *generadores y relaciones*. Un grupo se dice de *presentación finita* si el conjunto de generadores es finito y el conjunto de relaciones es también finito.

Volviendo a nuestro caso, tendríamos que el grupo G etiqueta al nudo K , si y sólo si existe un epimorfismo sobre G del grupo dado por generadores y relaciones (en esta doble implicación usamos el Teorema de Van Dyck)

$$P = \langle x, y, z \mid xyx^{-1} = yx^{-1}zy^{-1}xyx^{-1}z^{-1}xy^{-1} \\ xy^{-1}x^{-1}yx^{-1}zxy^{-1}xyx^{-1} = yx^{-1}y^{-1}zyxy^{-1}z^{-1}yzyx^{-1}y^{-1}z^{-1}yxy^{-1} \\ yx^{-1}y^{-1}zyxy^{-1} = z^{-1}y^{-1}zyxy^{-1}z^{-1}yz \rangle.$$

En particular el grupo definido dado por tales generadores y relaciones etiqueta al nudo K . Supongamos que este mismo proceso lo pudiera ha-

cer de otra forma —quizá con número distinto de generadores o distintas relaciones— se sabe que el grupo obtenido así, definido por generadores y relaciones, es isomorfo al grupo anterior —el que está definido por los tres generadores y las tres relaciones—.

Todo lo dicho anteriormente se lo puede hacer a cualquier nudo K , y el proceso es independiente del diagrama orientado a considerar. Tenemos entonces un grupo asociado a un nudo K , llamado el *grupo nudo* de K .

Así por ejemplo el grupo nudo del unknot es el grupo dado por un generador y ninguna relación, luego el grupo nudo del unknot es el grupo cíclico infinito \mathbb{Z} .

En el ejemplo que viene a continuación daremos el grupo nudo del trefoil. Para ello definiremos antes una familia de grupos. Sea n número natural con $n \geq 2$, el *grupo de trenzas* \mathbb{B}_n se define como el grupo dado por los generadores $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ y las relaciones

$$\begin{aligned}\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} && \text{para todo } i \in \{1, \dots, n-2\}, \\ \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i && \text{para todo par } i, j \text{ tal que } |i-j| > 1.\end{aligned}$$

Ejemplo 5.2.1. El grupo nudo del trefoil es el grupo de trenzas \mathbb{B}_3 . Para ver esto consideremos el diagrama dado en la Figura 3.7. El grupo nudo del trefoil está dado por tres generadores y tres relaciones como sigue

$$\begin{aligned}G(3_1) = \langle x_1, x_2, x_3 \mid &x_2 = x_3 x_1 x_3^{-1} \\ &x_3 = x_1 x_2 x_1^{-1} \\ &x_1 = x_2 x_3 x_2^{-1} \rangle.\end{aligned}$$

Notemos que la tercera ecuación se puede obtener de las dos primeras, por lo que esta ecuación es redundante; además en la segunda ecuación la variable x_3 queda en función de las otras dos, las variables x_1 y x_2 , reemplazando la variable x_3 en la primera ecuación, obtenemos la siguiente ecuación

$$x_2 x_1 x_2 x_1^{-1} = x_1 x_2 x_1^{-1} x_1 = x_1 x_2,$$

de la cual obtenemos la siguiente ecuación:

$$x_2 x_1 x_2 = x_1 x_2 x_1.$$

Entonces se tiene la siguiente presentación para el grupo $G(3_1)$:

$$G(3_1) = \langle x_1, x_2 \mid x_2 x_1 x_2 = x_1 x_2 x_1 \rangle,$$

el cual es justamente el grupo de trenzas \mathbb{B}_3 .

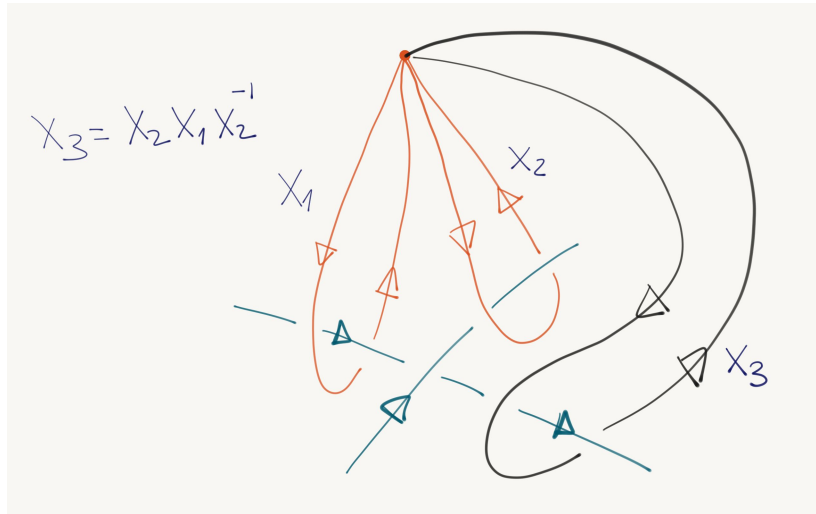


Figura 5.6: Estos tres lazos cumplen la condición de consistencia.

5.2.1. Presentación de Wirtinger del grupo nudo

Ahora daremos una interpretación más geométrica del grupo nudo. Notemos primero que para un nudo K viviendo en el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 , un grupo naturalmente aparece, a saber, el grupo fundamental del complemento del nudo, $\pi_1(\mathbb{R}^3 - K)$. Veremos que este grupo coincide con el grupo antes obtenido por etiquetas.

Consideremos un diagrama orientado de K . Pensemos al diagrama del nudo sobre el plano xy en el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 , donde en cada cruce el overcrossing esté ligeramente levantado sobre el arco inferior —obteniéndose un nudo isotópico a K —. Consideremos ahora un punto exterior a este, digamos el punto $p = (0, 0, 1)$, ahora por cada arco del diagrama consideremos un lazo orientado en p , que da una vuelta a dicho arco de manera que la orientación del lazo dé la orientación del arco. Esto se ilustra en la Figura 5.6.

Sean x_1, x_2, \dots, x_n los lazos obtenidos de esta manera. En cada cruce tres lazos entran en juego (ver Figura 5.6), llamémosles x_i, x_j, x_k donde x_i es el overcrossing. Notemos entonces que la relación de consistencia se da aquí, es decir, el lazo x_j se obtiene de conjugar a x_k por x_i .

Wirtinger mostró que el grupo fundamental del complemento del nudo en el espacio euclídeo, es el grupo definido por los generadores x_1, x_2, \dots, x_n y las relaciones obtenidas de los cruces, digamos r_1, r_2, \dots, r_m (ver [Rol]).

Así entonces,

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 - K) = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid r_1, r_2, \dots, r_m \rangle .$$

Notemos ahora que esta misma presentación la podemos obtener mediante las etiquetas, pues simplemente etiquetamos los arcos con las variables x_i según corresponda, y las relaciones r_1, r_2, \dots, r_m aparecen naturalmente. Así entonces una presentación del grupo nudo es justamente

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid r_1, r_2, \dots, r_m \rangle .$$

Es decir, el grupo fundamental del complemento del nudo de K es isomorfo al grupo nudo de K .

Proposición 5.2.2. *Todo grupo nudo tiene la siguiente presentación:*

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \mid r_1, r_2, \dots, r_n \rangle ,$$

donde cada $r_i : x_{i+1} = x_{\pi(i)}^{\epsilon(i)} x_i x_{\pi(i)}^{-\epsilon(i)}$. Aquí $\pi(i)$ es un entero entre 1 y $n+1$ y $\epsilon(i)$ es 1 ó -1 .

Demostración. Consideremos un diagrama para el nudo K , y sea $n+1$ el número de arcos de tal diagrama —en particular, el número de cruces es igual a $n+1$, a menos que sea el unknot, para el cual tal presentación ya existe—. Ahora orientemos el diagrama con alguna orientación. Llamemos x_1 a un arco cualquiera (fijo), entonces siguiendo la orientación del nudo, llamemos x_2 al arco que le sigue a x_1 , siguiendo así vamos etiquetando todos los arcos del diagrama. Además numeramos los cruces de la siguiente forma, llamamos el cruce 1, al cruce donde termina el arco x_1 , el cruce 2, al cruce donde termina el arco x_2 , y así sucesivamente. Entonces la relación r_i se obtiene del cruce i , y por lo que vimos anteriormente el grupo definido $\langle x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \mid r_1, r_2, \dots, r_n, r_{n+1} \rangle$ es el grupo nudo de K .

Queda entonces ver que nos podemos deshacer de la relación $n+1$; y para ello citamos al lector a ver [Rol]. \square

Capítulo 6

Matrices de Seifert y aplicaciones

Seifert mostró la construcción de una matriz a partir de un diagrama del nudo, mediante una superficie de Seifert para el nudo. Esta matriz resulta ser un invariante de nudos y es de mucha utilidad para probar diversos resultados sobre la suma conexa de nudos. También se puede calcular el polinomio de Alexander a través de esta matriz. Por último nos da pie a construir un invariante de nudos, que nos sirve para distinguir a un nudo de su mirror image, se probará en particular que el nudo 3_1 y su mirror image 3_1^m son nudos distintos.

En este capítulo veremos todo lo anterior y además otros invariantes como el *crossing number*.

6.1. Matriz de Seifert y las S -equivalencias

Primero nos dedicaremos a aprender a calcular una matriz de Seifert de un nudo K . Para ello consideremos una superficie de Seifert de K , llamémosle S a tal superficie, podemos pensar además que tal S consiste de un disco con bandas atadas (ver el Problema 4.2.8, y los comentarios anteriores a éste). Conviene pensar en un ejemplo particular; pensemos en que K es el nudo trefoil, calculemos entonces una matriz de Seifert para el trefoil a partir de la superficie de Seifert dada en la Figura 6.1.

Dado que $\chi(S) = \#discos - \#bandas$ y que el borde tiene una sola componente conexa, tenemos

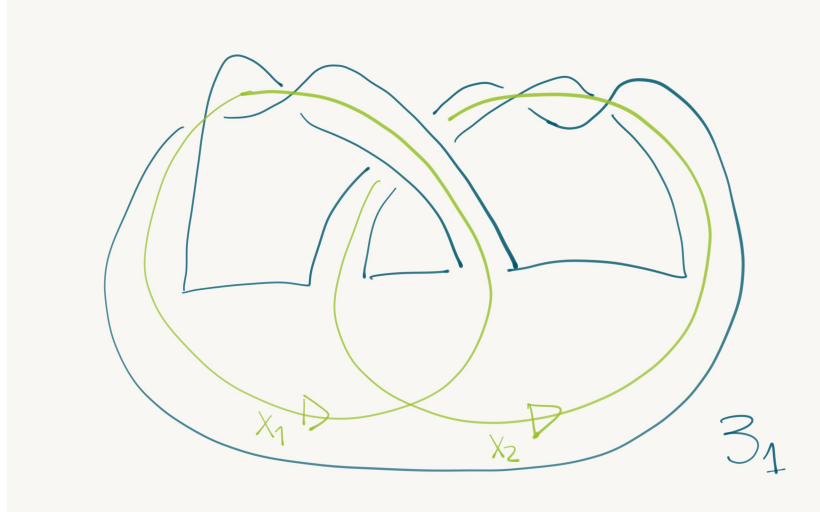


Figura 6.1: Una superficie de Seifert para el trefoil, sobre la cual calculamos la matriz de Seifert.

$$\begin{aligned}
 g(S) &= \frac{2 - \chi(S) - B(S)}{2} \\
 &= \frac{2 - (\#discos - \#bandas) - 1}{2} \\
 &= \frac{2 - (1 - \#bandas) - 1}{2} \\
 &= \frac{\#bandas}{2}.
 \end{aligned}$$

De donde $\#bandas = 2g(S)$. Por comodidad sea $g = g(S)$. Ahora bien, por cada banda consideremos una curva cerrada viviendo en S , que comience en el interior del disco y dé una vuelta a lo largo de la banda, para finalmente retornar al punto de inicio. Llamemos a tales curvas x_i con $i = 1, 2, \dots, 2g$. Ahora para cada una de estas curvas, sea x_i^* la curva cerrada que vive apenas por encima de la superficie y que va a lo largo de curva x_i , —aquí necesitamos darle una orientación a S , así tenemos una cara superior y una cara inferior— como se ilustra en la Figura 6.2. Tenemos así $2g$ curvas del tipo x_i^* . El *linking number* (o *número de enlace*, en castellano) de dos nudos K y J , $lk(K, J)$, está definido como la suma de los signos de los puntos

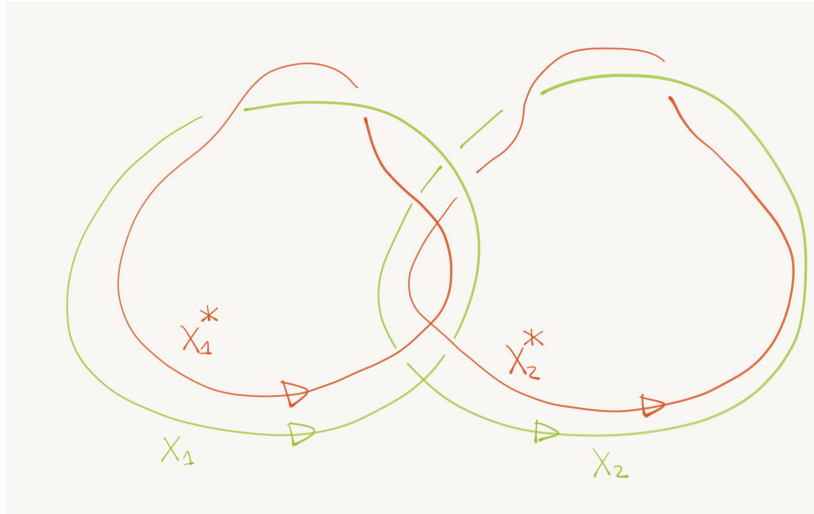


Figura 6.2: Las curvas x_i y x_i^* obtenidas de la superficie de Seifert dado para el trefoil.

cruces en el diagrama en el que K cruza sobre J . El signo del cruce es 1 si es de *mano derecha*, esto es, si J cruza debajo de K de la derecha a la izquierda. El signo es -1 si el cruce es de *mano izquierda*. Se puede probar que este número es un invariante de link (de dos componentes) orientados.

A la matriz V , de tamaño $2g \times 2g$, donde $V(i, j) = lk(x_i, x_j^*)$, para $1 \leq i, j \leq 2g$, la llamamos una *Matriz de Seifert* para el nudo K . Distintas elecciones en la construcción de tal matriz, como las superficies de Seifert pueden dar otra matriz de Seifert —incluso hasta el tamaño puede cambiar, ya que el género de la superficie puede cambiar— sin embargo frecuentemente hablaremos de *la matriz de Seifert* cuando quede claro en el contexto. Más adelante veremos la justificación de este convención, por una relación de equivalencia dada sobre las matrices de Seifert de un nudo.

Ejemplo 6.1.1. (Prob. 1.1. Cap 6. [Li]) En este ejemplo calcularemos matrices de Seifert para el trefoil y su mirror image usando las superficies de las Figuras 6.1,6.3; también mostraremos que estas dos matrices cumplen la relación $V_{3_1^m} = -V_{3_1^{tr}}$.

Calculemos la matriz de Seifert para el trefoil con los links de la Figura 6.2.

$$V_{3_1} = \begin{pmatrix} lk(x_1, x_1^*) & lk(x_1, x_2^*) \\ lk(x_2, x_1^*) & lk(x_2, x_2^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculemos ahora la matriz de Seifert para el mirror image del trefoil, el 3_1^m . Para ello consideremos la superficie de Seifert ilustrada en la Figura 6.3.



Figura 6.3: Una superficie de Seifert para el 3_1^m .

Considerando la cara superior de la superficie, con los x_i orientados en sentido antihorario, obtenemos la siguiente matriz de Seifert para el 3_1^m .

$$V_{3_1^m} = \begin{pmatrix} lk(x_1, x_1^*) & lk(x_1, x_2^*) \\ lk(x_2, x_1^*) & lk(x_2, x_2^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un simple cálculo muestra que se cumple la relación: $V_{3_1^m} = -V_{3_1^m}^{tr}$.

El siguiente problema nos será de mucha utilidad más adelante.

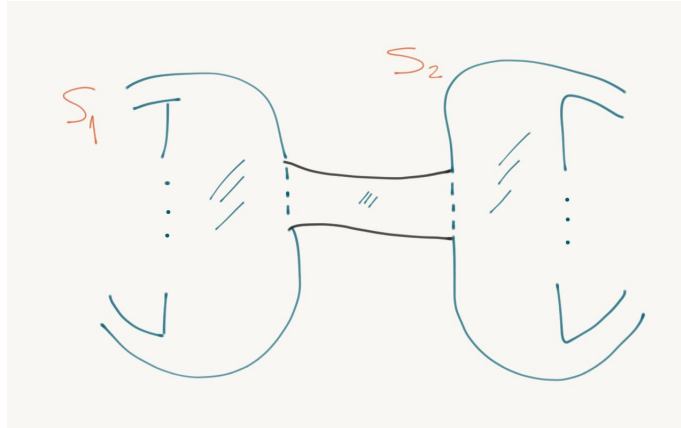
Proposición 6.1.2. (Prob. 1.7. Cap 6. [Li]) Las superficies de Seifert de dos nudos K_1 y K_2 pueden ser usadas para formar una superficie de Seifert de la suma conexas $K_1 \# K_2$. Entonces una matriz de Seifert para la suma conexas está dada por la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix},$$

donde V_1 y V_2 son matrices de Seifert de K_1 y K_2 respectivamente.

Demostración. Sean S_1 y S_2 las superficies de Seifert (cada una de las cuales consiste de un disco con bandas atadas) para dos nudos K_1 y K_2 respectivamente. Sea S la superficie obtenida de pegar —a lo largo de un intervalo— éstas dos superficies, como se muestra en la Figura 6.4. Entonces la superficie S es una superficie de Seifert para $K_1 \# K_2$.

Sean V_1 y V_2 las matrices de Seifert para K_1 y K_2 , obtenidas de S_1 y S_2 respectivamente. Entonces la matriz de Seifert para $K_1 \# K_2$ obtenida de la superficie S , está dada por:

Figura 6.4: Una superficie de Seifert para $K_1 \# K_2$.

$$\begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix},$$

esto se debe a que las bandas de la superficie S_1 y las bandas de la superficie S_2 están alejadas y no se enlazan de ninguna forma. \square

Vimos que es posible obtener distintas matrices de Seifert para un nudo —incluso el tamaño de la matriz de Seifert puede cambiar—. Así entonces la matriz de Seifert no parece ser un invariante de nudo por sí solo. Sin embargo veremos que sí es un invariante bajo cierta equivalencia, a saber, la *S-equivalencia* de matrices.

La construcción de la matriz de Seifert depende de varias elecciones, tales como la superficie de Seifert para el nudo, la orientación de cada x_i , entre otros. A continuación trataremos dos procedimientos que se le pueden hacer a una superficie de Seifert que consiste de un disco con bandas atadas, que resultan ser cruciales y dan la relación entre las matrices de Seifert.

En lo que sigue S será una superficie de Seifert para el nudo K y V será una matriz de Seifert para K obtenida a través de la superficie S .

Movimientos de bandas: Tomemos un arco de intersección de una banda con el disco, podemos entonces deslizar este arco a través de otra banda, hasta que vuelva a conectarse con el disco. La superficie obtenida es isotópica a la primera. El efecto de esta operación es hacer simultáneamente una operación por fila y columna a la matriz de Seifert V , esto es, si para algún i y j , un múltiplo de la i -ésima fila es sumada a la j -ésima fila entonces el mismo múltiplo de la i -ésima columna es sumada a la j -ésima columna.



Figura 6.5: La nueva superficie obtenida con el proceso de estabilización.

Realizando esta operación varias veces llegamos a que la matriz de Seifert de la nueva superficie es igual a MVM^t , donde M es una matriz con coeficientes enteros, inversible en \mathbb{Z} .

Estabilización: El proceso consiste en agregar dos bandas nuevas a S (es decir, pegar estas dos bandas a S) de la siguiente manera: una primera banda que no de semivuelatas, ni esté doblada ni anudada a las otras bandas de S , y una segunda banda que puede dar semivuelatas y puede estar enlazada o anudada a las otras bandas de S . Esto queda ilustrado en la Figura 6.5. Cabe notar que la segunda banda no debe dar una cantidad impar de semivuelatas, pues esto hará que haya una banda de Moebius incrustado en la nueva superficie, obteniéndose una superficie no orientable que no es lo que se desea.

Problema 6.1.3. Mostrar que el resultado de aplicar el proceso de estabilización antes descrito da una nueva superficie de Seifert para el nudo K .

Solución. Llamemos S' a la superficie obtenida de aplicar estabilización. Sabemos por construcción que S' es orientable —y por supuesto conexa, ya que S lo es—. Resta ver entonces que el borde de S' es el nudo K . Para ver esto conviene dibujar el borde de la superficie S' y prestar atención a las dos bandas añadidas. Se puede ver que el borde de estas dos bandas se transforman es solamente un arco, por lo cual el borde de la superficie S' resulta ser igual al borde de la superficie S , que es K . El lector puede visualizar esto a partir de la Figura 6.5. \square

Sea V' la matriz de Seifert obtenida de S' . Se puede ver que V' tiene la

siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} & & & * & 0 \\ & V & & * & 0 \\ & & & * & 0 \\ * & * & * & * & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definición 6.1.4. Dos matrices son llamadas *S-equivalentes* si ellas difieren por una sucesión de los dos pasos descritos anteriormente. Es decir, multiplicar a izquierda por una matriz entera inversible, y a la derecha por la traspuesta de esta, y añadir (o eliminar) dos filas y columnas como en la matriz anterior.

Un argumento geométrico difícil muestra que para dos superficies de Seifert cualesquiera de un nudo K , se les pueden aplicar estabilizaciones a cada una de manera que una se puede deformar —isotópicamente, con movimientos de bandas— en la otra. Esto da como resultado el siguiente teorema (del cual no incluimos la demostración).

Teorema 6.1.5. Sean M_1 y M_2 dos matrices de Seifert para un nudo K . Entonces M_1 es *S-equivalente* a M_2 .

Se puede ver que estas dos operaciones matriciales también incluyen los cambios que ocurren en la matriz de Seifert si las bandas son reordenadas, o reorientadas, etc.

Tenemos entonces un nuevo invariante de nudos: Dados dos nudos K_1 y K_2 con matrices de Seifert M_1 y M_2 respectivamente, entonces si K_1 es equivalente a K_2 implica que M_1 es *S-equivalente* a M_2 . Lo último es solamente una frase parafraseada del enunciado del teorema. La matriz de Seifert resulta ser muy útil para muchos cálculos —y muchas pruebas salen con esta herramienta— por ello pasamos ahora a mostrar el poder de esta herramienta.

6.1.1. El polinomio de Alexander obtenido a través de la matriz de Seifert

Comenzamos con los siguientes dos teoremas:

Teorema 6.1.6. Sea V una matriz de Seifert para K . El polinomio de Alexander está dado por el determinante $\det(V - tV^{tr})$.

La prueba de este teorema es un resultado profundo, y no la veremos aquí. El teorema siguiente nos da la posibilidad de definir el polinomio de Alexander como este determinante.

Teorema 6.1.7. *Si V_1 y V_2 son dos matrices de Seifert para un nudo K , entonces los polinomios $\det(V_1 - tV_1^{tr})$ y $\det(V_2 - tV_2^{tr})$ difieren por un múltiplo de $\pm t^l$, con l entero.*

Demostración. Dado que ambas matrices son matrices de Seifert del mismo nudo, sabemos del Teorema 6.1.5 que una se obtiene de la otra por aplicar una sucesión finita de las dos operaciones básicas de la S-equivalencia. Basta ver el enunciado cuando se aplica una de estas operaciones básicas.

Si aplicamos la primera operación básica, tenemos que $V_2 = MV_1M^{tr}$, y haciendo los cálculos:

$$\begin{aligned} \det(V_2 - tV_2^{tr}) &= \det(MV_1M^{tr} - (tMV_1M^{tr})^{tr}) \\ &= \det(MV_1M^{tr} - MtV_1^{tr}M^{tr}) \\ &= \det(M(V_1 - tV_1^{tr})M^{tr}) \\ &= \det(M) \det(V_1 - tV_1^{tr}) \det(M^{tr}) \\ &= \det(V_1 - tV_1^{tr}), \end{aligned}$$

usamos que $\det(M) = \det(M^{tr}) = \pm 1$, para concluir que el determinante no cambia.

Veamos ahora cuando aplicamos la segunda operación básica. Tenemos entonces que V_2 tiene la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & * & 0 \\ & V_1 & & * & 0 \\ & & \ddots & * & 0 \\ * & * & * & * & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y haciendo el cálculo de $V_2 - tV_2^{tr}$, y calculando el determinante adecuadamente, se ve que $\det(V_2 - tV_2^{tr}) = t \det(V_1 - tV_1^{tr})$, obteniéndose lo deseado. \square

Del siguiente corolario se deduce en particular que el polinomio de Alexander es simétrico (que recordemos es un resultado que nos hacía falta para probar que el polinomio de Alexander obtenido de manera combinatoria estaba bien definido).

Corolario 6.1.8. *El polinomio de Alexander de un nudo K satisface*

$$\Delta_K(t) = t^i \Delta_K(1/t),$$

para algún entero no negativo i .

Demostración. Recordemos de Álgebra lineal que el determinante de la traspuesta de una matriz es igual al determinante de la matriz. Luego,

$$\det(V - tV^{tr}) = \det((V - tV^{tr})^{tr}) = \det(V^{tr} - tV) = \det(tV - V^{tr}),$$

la última igualdad se debe a que toda matriz de Seifert es de tamaño par. Siguiendo obtenemos:

$$\det(tV - V^{tr}) = \det(t(V - (1/t)V^{tr})) = t^{2g} \det(V - (1/t)V^{tr}),$$

donde g es el género de la superficie de Seifert con la que se calculó la matriz de Seifert. Se obtiene entonces lo que se deseaba. \square

Proposición 6.1.9. *El polinomio de Alexander de un nudo K es simétrico.*

Demostración. Se sigue inmediatamente de la relación dada en el Corolario 6.1.8. Como $\Delta_K(t) = t^i \Delta_K(1/t)$, notemos que el polinomio de la derecha de la igualdad, tiene necesariamente los coeficientes del polinomio de la izquierda sólo que con los grados de los monomios invertidos. \square

Problema 6.1.10. (Prob. 2.5. Cap 6. [Li]) Demostrar que el polinomio de Alexander de la suma conexas de nudos es el producto de los polinomios de Alexander individuales.

Solución. Sean M_1 y M_2 dos matrices de Seifert para los nudos K_1 y K_2 respectivamente, obtenidos a través de las superficies de Seifert S_1 y S_2 . Por la Proposición 6.1.2 la matriz de Seifert M para $K_1 \# K_2$ tiene la siguiente forma:

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix},$$

entonces $M - tM^{tr}$ tiene la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} M_1 - tM_1^{tr} & 0 \\ 0 & M_2 - tM_2^{tr} \end{pmatrix},$$

de donde el polinomio de Alexander de $K_1 \# K_2$ es el determinante de esta última matriz

$$\Delta_{K_1 \# K_2}(t) = \Delta_{K_1}(t) \Delta_{K_2}(t),$$

como se deseaba. \square

Problema 6.1.11. (Prob. 2.6. Cap 6. [Li]) El polinomio de Alexander de un nudo puede ser normalizado, en el sentido que no hay potencias negativas y el término constante es no nulo. Demostrar que el grado del polinomio resultante es par.

Solución. Recordemos que el polinomio de Alexander es simétrico. Queremos ver que el grado del polinomio es par.

Si el grado del polinomio fuera impar, entonces tendríamos una cantidad par de sumandos, y entonces $\Delta_K(-1)$ sería par —esto se debe a que el polinomio de Alexander es simétrico— pero recordemos que $\Delta_K(-1)$ debe ser necesariamente impar —pues si fuera par, el nudo admitiría un coloreo módulo 2 no trivial, pero los únicos coloreos módulo 2 son los triviales—. Llegamos entonces a una contradicción, debe ser entonces que el grado del polinomio de Alexander es necesariamente par, como se deseaba. \square

Problema 6.1.12. (Prob. 2.7. Cap 6. [Li]) Mostrar que si el determinante de una matriz de Seifert M de tamaño $2g \times 2g$ es no nulo, entonces el polinomio de Alexander tiene grado $2g$ y el coeficiente constante del polinomio es no nulo.

Solución. Sea $\Delta_K(t)$ el polinomio de Alexander de un nudo K obtenido a través de M . Se asume que $g = g(S)$, donde S es la superficie de Seifert de donde obtenemos M .

Sabemos que el tamaño de la matriz M es $2g \times 2g$ —por construcción de la matriz de Seifert— como $\Delta_K(t) = \det(M - tM^{tr})$, y si $n = \text{gr}(\Delta_K(t))$, por álgebra tenemos que $2g \geq n$.

Notemos que

$$\Delta_K(0) = \det(M - 0M^{tr}) = \det(M),$$

y éste último es no nulo por hipótesis.

Ahora bien, recordemos la relación $\Delta_K(t) = t^{2g}\Delta_K(1/t)$, entonces si $\Delta_K(t)$ tiene la siguiente forma

$$\Delta_K(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0,$$

con a_0 no nulo. De la relación tenemos:

$$\begin{aligned} \Delta_K(t) &= t^{2g}\Delta_K(t^{-1}) \\ &= t^{2g}(a_n(t^{-1})^n + \cdots + a_1 t^{-1} + a_0) \\ &= a_n t^{2g-n} + \cdots + a_1 t^{2g-1} + a_0 t^{2g}. \end{aligned}$$

Este último polinomio debe ser igual al polinomio de Alexander, en particular $2g = n$; pues el polinomio de Alexander $\Delta_K(t)$ tiene parte constante no nula, luego el grado más bajo de este último polinomio debe ser cero, implicando que $2g - n = 0$, y como n es el grado del polinomio de Alexander, se obtiene $n = 2g$. \square

6.2. Signatura de un nudo

Veremos acá otra utilidad de la matriz de Seifert, y notando cómo con ella podemos construir otros invariantes, en particular este invariante es el primero —que vimos hasta ahora— que puede distinguir un nudo de su mirror image.

La signatura es bien conocida para matrices reales simétricas, dado que una matriz así se puede llevar a una matriz diagonal aplicando operaciones elementales por filas y columnas simultáneamente. Aunque no probaremos este hecho, ilustramos el procedimiento en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.2.1. Consideremos la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

El procedimiento para diagonalizar la matriz consiste en aplicar operaciones elementales por filas y columnas simultáneamente, i.e. si aplico una operación elemental por fila a la matriz, se debe luego aplicar esa misma operación pero por columnas a la matriz ya modificada. Así lo hacemos a continuación:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$F_2 \longleftrightarrow F_2 + \frac{1}{2}F_1$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix},$$

$$C_2 \longleftrightarrow C_2 + \frac{1}{2}C_1$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

La *signatura* de una matriz A simétrica real, está definida como el número de las entradas positivas menos el número de las entradas negativas de la matriz diagonal obtenida, y es denotada $\sigma(A)$.

En nuestro caso, una matriz de Seifert M de un nudo K , no necesariamente es simétrica, pero si lo es $M + M^{tr}$. Se define la signatura del nudo K como $\sigma(K) = \sigma(M + M^{tr})$. El próximo teorema avala la buena definición de la signatura de un nudo.

Teorema 6.2.2. *Para un nudo K , el valor $\sigma(K)$ no depende de la elección de la matriz de Seifert, y por lo tanto es un invariante de nudo bien definido.*

Demostración. Dado que dos matrices de Seifert difieren en una sucesión finita de pasos aplicando las dos operaciones básicas de la S-equivalencia, basta ver el enunciado para cuando aplicamos las dos operaciones básicas de la S-equivalencia.

Sean V y W dos matrices de Seifert. Primero veamos que si $W = MVM^{tr}$, con M matriz entera inversible, la signatura no cambia. El Teorema de Sylvester asegura que para dos matrices simétricas, A y B con $B = UAU^{tr}$ y U inversible, entonces la signatura de ambas coinciden. Tenemos que:

$$W + W^{tr} = MVM^{tr} + MV^{tr}M^{tr} = M(V + V^{tr})M^{tr}$$

Se tiene entonces que la signatura de $W + W^{tr}$ y $V + V^{tr}$ no cambia, gracias al Teorema de Sylvester.

Veamos ahora el caso cuando W se obtiene de V por añadir dos nuevas filas y dos nuevas columnas —como en el proceso de estabilización—, podemos pensar que W tiene la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & a_1 & 0 \\ & V & & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & a_n & 0 \\ b_1 & \dots & b_n & c & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

luego, $W + W^{tr}$ tendrá la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & a_1 + b_1 & 0 \\ & V + V^{tr} & & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & a_n + b_n & 0 \\ a_1 + b_1 & \dots & a_n + b_n & 2c & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

aplicando operaciones elementales por filas y columnas simultáneamente, usando la última fila y la última columna, se obtiene la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & 0 & 0 \\ & V + V^{tr} & & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 2c & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

a continuación damos los pasos a seguir para obtener la matriz diagonal buscada:

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & 0 & 0 \\ & V + V^{tr} & & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 2c & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F_{n+1} \longleftrightarrow F_{n+1} + (-c)F_{n+2}$$

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & 0 & 0 \\ & V + V^{tr} & & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & c & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_{n+1} \longleftrightarrow C_{n+1} + (-c)C_{n+2}$$

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & 0 & 0 \\ & V + V^{tr} & & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F_{n+1} \longleftrightarrow F_{n+1} + (1/2)F_{n+2}$$

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & 0 & 0 \\ & V + V^{tr} & & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_{n+1} \longleftrightarrow C_{n+1} + (1/2)C_{n+2}$$

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & 0 & 0 \\ & V + V^{tr} & & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F_{n+2} \longleftrightarrow F_{n+2} + (-1)F_{n+1}$$

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & 0 & 0 \\ & V + V^{tr} & & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$C_{n+2} \longleftrightarrow C_{n+2} + (-1)C_{n+1}$$

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & 0 & 0 \\ & V + V^{tr} & & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A la última matriz le podemos aplicar operaciones por filas y columnas simultáneamente, de manera que llevemos la submatriz $V + V^{tr}$ a una matriz diagonal —las dos nuevas filas y columnas no se ven afectadas, pues están llenas de ceros—. Una vez hecho esto podemos calcular la signatura de $W + W^{tr}$; notemos que tiene una entrada positiva adicional en la diagonal, pero también tiene una entrada negativa adicional en la diagonal, dando como resultado que:

$$\sigma(W + W^{tr}) = \sigma(V + V^{tr}) + 1 - 1 = \sigma(V + V^{tr}),$$

de donde:

$$\sigma(W + W^{tr}) = \sigma(V + V^{tr}).$$

Luego la signatura no cambia cuando aplicamos cualquiera de las dos operaciones básicas de la S-equivalencia, por tanto la signatura de nudo es un invariante de nudo. \square

Problema 6.2.3. Por medio del cálculo de las matrices de Seifert para el 3_1 y el 3_1^m hecho anteriormente, mostrar que las signaturas de estos son -2 y 2 respectivamente. Y por tanto el 3_1 y el 3_1^m son nudos distintos.

Solución. Se calculó con anterioridad las matrices de Seifert para los nudos 3_1 y 3_1^m . Utilizando estas matrices de Seifert calculamos las matrices:

$$V_{3_1} + V_{3_1}^{tr} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$V_{3_1^m} + V_{3_1^m}^{tr} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aplicando operaciones por filas y columnas simultáneamente, obtenemos las siguientes matrices diagonales para 3_1 y 3_1^m respectivamente:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3/2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix},$$

de donde las signaturas son: $\sigma(3_1) = -2$ y $\sigma(3_1^m) = 2$. Dado que la signatura es un invariante de nudo, se sigue que los nudos 3_1 y 3_1^m son nudos distintos. \square

Problema 6.2.4. (Prob. 3.4. Cap 6. [Li]) Mostrar que para una matriz de Seifert V , el $\det(V + V^{tr})$ es no nulo. Concluir que la signatura de un nudo es siempre par.

Solución. Notemos que $\Delta_K(-1) = \det(V + V^{tr})$, y como $|\Delta_K(-1)| = \det(K)$, resulta que $\det(V + V^{tr})$ es no nulo, pues si así fuera, $\det(K) = 0$ y entonces $\det(K)$ es divisible por 2, lo que no puede ser pues ningún nudo es coloreable módulo 2.

Sea D la matriz diagonal que se obtiene de $V + V^{tr}$ aplicando operaciones elementales por filas y columnas simultáneamente. Tenemos que $\det(D)$ es no nulo, ya que $V + V^{tr}$ tiene determinante no nulo, luego todas las entradas de la diagonal de D son distintas de cero. Como V tiene tamaño par (a saber, $2g \times 2g$) entonces D tiene tamaño par. Sea entonces p la cantidad de las entradas positivas de la diagonal de D y n la de entradas negativas de la diagonal de D , vale que $p + n = 2g$, luego p y n tienen la misma paridad, y la resta $p - n$ que es la signatura del nudo, es también par, obteniéndose lo que se deseaba. \square

6.3. Invariantes de nudo y la suma conexas

En esta sección veremos cómo se comportan los diversos invariantes de nudos con respecto a la suma conexas de nudos. Para ello notará el lector la gran utilidad que tiene la matriz de Seifert estudiada en este capítulo.

Veamos los invariantes uno por uno, en lo que sigue de la sección.

Género: Como se enunció en el Teorema 4.4.2 el género es aditivo con respecto a la suma conexas, en efecto $g(K_1 \# K_2) = g(K_1) + g(K_2)$. Recordemos también que la prueba del Teorema de Descomposición Prima usó fuertemente la aditividad del género.

Rango módulo (p): Recordemos que el rango módulo (p), es la dimensión del núcleo de la matriz obtenida por etiquetamientos de coloreos. El rango módulo (p) resulta ser aditiva bajo la suma conexas, así se demuestra en el siguiente problema.

Problema 6.3.1. (Prob. 1.1. Cap 7. [Li]) El rango módulo (p) es aditivo bajo la suma conexas, es decir, $Rank_p(K_1 \# K_2) = Rank_p(K_1) + Rank_p(K_2)$.

Solución. Sabemos que el número de coloreos —no triviales— de un nudo K es igual a $p(p^n - 1)$, donde $n = Rank_p(K)$ (ver la Proposición 3.1.6). Si $Col_p(K) = p(p^n - 1)$, sea $Colt_p(K) = p(p^n - 1) + p = p^{n+1}$, $Colt_p(K)$ cuenta los coloreos no triviales del nudo K más los coloreos triviales del nudo K —es decir que sólo cumplan la condición de consistencia—, que son exactamente p . Los llamaremos *coloreostriv*.

Tenemos entonces, para los nudos K_1 y K_2 , que se cumple $Colt_p(K_1) = p^{n_1+1}$ y $Colt_p(K_2) = p^{n_2+1}$, respectivamente. Queremos calcular entonces el $Colt_p(K_1 \# K_2)$.

Consideremos dos diagramas de los nudos K_1 y K_2 respectivamente, y pensemos en la suma conexas de estos dos, como se ilustra en la Figura 4.15. Entonces para cada coloreostriv de K_1 tenemos p^{n_2+1}/p coloreostriv de K_2 , pues el arco de K_2 sobre el que se hace la suma conexas debe tener el mismo color del arco de K_1 sobre el que se hace la suma conexas, teniéndose entonces:

$$\begin{aligned} Colt_p(K_1 \# K_2) &= Colt_p(K_1) \frac{Colt_p(K_2)}{p} \\ &= p^{n_1+1} \frac{p^{n_2+1}}{p} \\ &= p^{n_1+n_2+1}. \end{aligned}$$

Entonces $Rank_p(K_1 \# K_2) = n_1 + n_2 = Rank_p(K_1) + Rank_p(K_2)$, como se deseaba. \square

Polinomio de Alexander: Vimos en el Problema 6.1.10 que el polinomio de Alexander de la suma conexa de nudos es igual al producto de los polinomios de Alexander. Dicho en ecuaciones: $\Delta_{K_1\#K_2}(t) = \Delta_{K_1}(t)\Delta_{K_2}(t)$. Los dos invariantes que vienen a continuación se siguen de este.

Determinante: Para un nudo K , vale que $\det(K) = |\Delta_K(-1)|$. Entonces $\det(K_1\#K_2) = |\Delta_{K_1\#K_2}(-1)| = |\Delta_{K_1}(-1)||\Delta_{K_2}(-1)| = \det(K_1)\det(K_2)$. Es decir, el determinante es multiplicativo respecto a la suma conexa.

Grado del polinomio de Alexander: Si $\Delta_K(t)$ es el polinomio de Alexander de K , uno puede calcular la resta del grado más alto menos el grado más bajo del polinomio. Esta diferencia es justamente el grado del polinomio de Alexander si la parte constante del polinomio es no nula, y es además un invariante. Resulta ser que éste número es multiplicativo respecto a la suma conexa, así se demuestra en la siguiente cuenta.

$$gr(\Delta_{K_1\#K_2}(t)) = gr(\Delta_{K_1}(t)\Delta_{K_2}(t)) = gr(\Delta_{K_1}(t)) + gr(\Delta_{K_2}(t)).$$

Signatura de un nudo: Sean V_1, V_2 las matrices de Seifert de K_1 y K_2 respectivamente. Recordemos que la matriz de Seifert V para el nudo $K_1\#K_2$, es una matriz diagonal en bloques, formada por las dos matrices V_1 y V_2 ; la matriz V y $V + V^{tr}$ se muestran a continuación:

$$V = \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix}$$

$$V + V^{tr} = \begin{pmatrix} V_1 + V_1^{tr} & 0 \\ 0 & V_2 + V_2^{tr} \end{pmatrix}.$$

Al aplicar operaciones elementales por filas y columnas simultáneamente, se lo puede hacer tanto para $V_1 + V_1^{tr}$ como para $V_2 + V_2^{tr}$ de manera independiente, llegando así a una matriz diagonal D , formada por dos matrices diagonales D_1 y D_2 correspondientes a $V_1 + V_1^{tr}$ y $V_2 + V_2^{tr}$ respectivamente.

Se desprende entonces que la signatura es aditiva respecto a la suma conexa de nudos, es decir: $\sigma(K_1\#K_2) = \sigma(K_1) + \sigma(K_2)$.

Crossing number: En un diagrama de nudo, uno puede calcular el número de cruces de dicho diagrama, lo llamaremos el *crossing number del diagrama* (o *numero de cruces del diagrama*, en castellano). Puede pasar que si elegimos otro diagrama para ese nudo, y calculamos el crossing number del nuevo diagrama, el número sea distinto.

Se define el *crossing number* de un nudo K (o el *numero de cruces* de un nudo), como el mínimo de todos los crossing number de cada diagrama del nudo, y lo denotamos $cr(K)$. Se sigue inmediatamente de la definición que el crossing number de un nudo es un invariante de nudo.

Respecto a este número, uno también puede preguntarse cómo se comporta respecto a la suma conexa de nudos. De la definición de suma conexa se sigue que $cr(K_1 \# K_2) \leq cr(K_1) + cr(K_2)$, pues al hacer el diagrama de la suma conexa, uno obtiene un diagrama de $K_1 \# K_2$ con $cr(K_1) + cr(K_2)$ cruces, por tanto $cr(K_1 \# K_2)$ debe ser menor o igual al número anterior. Uno puede esperar que se dé la igualdad, pero esto es todavía una conjetura.

Se sabe que $cr(K_1 \# K_2) = cr(K_1) + cr(K_2)$ para *nudos alternantes*; un nudo se dice *alternante* si admite un diagrama tal que si uno recorre ese diagrama en alguna dirección, uno pasa por un overcrossing y un undercrossing alternadamente. Pero para mostrar el presente estado de ignorancia, uno no puede descartar la posibilidad que el crossing number de la suma conexa sea menor que el de cada uno de sus factores.

El siguiente problema muestra una linda relación entre el género de un nudo y el crossing number del nudo.

Problema 6.3.2. Mostrar que para un nudo K distinto del unknot, vale que $2g(K) \leq cr(K) - 1$.

Solución. Consideremos un diagrama para K , tal que el crossing number del diagrama sea igual a $cr(K)$. Calculemos para tal diagrama la superficie de Seifert asociada, llamémosle S .

Desarrollemos un poco la fórmula del género de S

$$g(S) = \frac{2 - \chi(S) - B(S)}{2},$$

como el borde es K , debe ser $B(S) = 1$, de donde

$$g(S) = \frac{1 - \chi(S)}{2}.$$

Dado que S consiste de discos atados con bandas, tenemos

$$\begin{aligned} g(S) &= \frac{1 - (\#discos - \#bandas)}{2} \\ &= \frac{\#bandas - \#discos + 1}{2} \\ &= \frac{cr(K) - \#discos + 1}{2}. \end{aligned}$$

La última igualdad se debe a que en nuestro caso resulta que $\#bandas = cr(K)$, pues por cada cruce del diagrama hay exactamente una banda, y estamos considerando un diagrama cuyo crossing number es $cr(K)$.

La fórmula

$$g(S) = \frac{cr(K) - \#discos + 1}{2},$$

la podríamos haber obtenido antes, en el Capítulo 4—sólo que deberíamos cambiar $cr(K)$ por el crossing number del diagrama—.

Ahora bien, notemos que $\#discos > 1$ si K no es el unknot —pues las bandas en la superficie de Seifert siempre son entre dos discos distintos—, entonces

$$g(S) = \frac{cr(K) - \#discos + 1}{2} < \frac{cr(K)}{2},$$

de donde se sigue que:

$$2g(K) \leq 2g(S) \leq cr(K) - 1,$$

y entonces

$$2g(K) \leq cr(K) - 1,$$

como se deseaba. □

6.4. El grupo nudo y el polinomio de Alexander

En el Capítulo 5 vimos que podemos obtener una presentación finita del grupo nudo a través de etiquetaciones; una de ellas muy particular es la presentación de Wirtinger. En la Proposición 5.2.2 vimos que la presentación de Wirtinger está dada por n generadores y $n - 1$ relaciones; es verdad también que toda presentación del grupo nudo —obtenida de manera combinatoria como en el Capítulo 5— está dada por m generadores y $m - 1$ relaciones (para algún entero positivo m); si se tienen más relaciones, uno puede ver que en realidad basta con $m - 1$ de esas relaciones (para más referencia ver [Li]). Resulta ser que el polinomio de Alexander puede ser calculado a través de una presentación finita como se dijo recién, en forma algorítmica, lo cual haremos. Este algoritmo fue descubierto por Fox (ver [CF]). También es posible calcular el polinomio usando cualquier presentación del grupo, aunque en este caso se debe usar un algoritmo generalizado. Para una mayor referencia ver [Li] y [CF].

6.4.1. Derivadas de Fox

Para realizar el algoritmo necesitamos antes introducir las así llamadas *derivadas de Fox*. Estas son derivadas parciales formales definidas en monomios de variables no conmutativas. En nuestro caso estos monomios serán las palabras que definen el grupo nudo. La definición de la derivada comienza con dos reglas básicas, las cuales después determinan la derivada en general. Fox probó que estas reglas dan una operación bien definida en el conjunto de palabras. Para mayor detalles al respecto ver [CF].

Las dos reglas básicas están dadas sobre las variables (letras) y son las siguientes:

1. $(\partial/\partial x_i)(x_i) = 1$, $(\partial/\partial x_i)(x_j) = 0$, $(\partial/\partial x_i)(1) = 0$.
2. $(\partial/\partial x_i)(wz) = (\partial/\partial x_i)(w) + w(\partial/\partial x_i)(z)$, donde w y z son palabras en las variables $\{x_j, x_j^{-1}\}$.

Una consecuencia inmediata es que

$$(\partial/\partial x_i)(x_i^{-1}) = -x_i^{-1},$$

esto se sigue de los cálculos $(\partial/\partial x_i)(x_i x_i^{-1}) = (\partial/\partial x_i)(1) = 0$, y usando la regla 2, $(\partial/\partial x_i)(x_i x_i^{-1}) = 1 + x_i(\partial/\partial x_i)(x_i^{-1})$. Por comodidad denotaremos ∂_i a $\partial/\partial x_i$, para cada i ; esto nos será útil más adelante.

Ejemplo 6.4.1. Calculemos las derivadas parciales de Fox de la palabra

$$xyxy^{-1}x^{-1}y^{-1}.$$

Calculemos primero $\partial/\partial x$.

$$\begin{aligned} (\partial/\partial x)(xyxy^{-1}x^{-1}y^{-1}) &= 1 + x(\partial/\partial x)(yxy^{-1}x^{-1}y^{-1}) \\ &= 1 + x(0 + y(\partial/\partial x)(xy^{-1}x^{-1}y^{-1})) \\ &= 1 + xy(1 + x(\partial/\partial x)(y^{-1}x^{-1}y^{-1})) \\ &= 1 + xy(1 + x(0 + y^{-1}(\partial/\partial x)(x^{-1}y^{-1}))) \\ &= 1 + xy(1 + xy^{-1}(-x^{-1} + x^{-1}(\partial/\partial x)(y^{-1}))) \\ &= 1 + xy(1 + xy^{-1}(-x^{-1})) \\ &= 1 + xy(1 - xy^{-1}x^{-1}) \\ &= 1 + xy - xyxy^{-1}x^{-1}. \end{aligned}$$

Ahora calculemos la derivada $\partial/\partial y$.

$$\begin{aligned}
(\partial/\partial y)(xyxy^{-1}x^{-1}y^{-1}) &= 0 + x(\partial/\partial y)(xy^{-1}x^{-1}y^{-1}) \\
&= x(1 + y(\partial/\partial y)(xy^{-1}x^{-1}y^{-1})) \\
&= x(1 + y(0 + x(\partial/\partial y)(y^{-1}x^{-1}y^{-1}))) \\
&= x + xyx(-y^{-1} + y^{-1}(\partial/\partial y)(x^{-1}y^{-1})) \\
&= x + xyx(-y^{-1} + y^{-1}(0 + x^{-1}(\partial/\partial y)(y^{-1}))) \\
&= x + xyx(-y^{-1} + y^{-1}x^{-1}(-y^{-1})) \\
&= x + xyx(-y^{-1} - y^{-1}x^{-1}y^{-1}) \\
&= x - xyxy^{-1} - xyxy^{-1}x^{-1}y^{-1}.
\end{aligned}$$

6.4.2. Usando las derivadas de Fox para el cálculo del polinomio de Alexander

He aquí el algoritmo para el cálculo del polinomio de Alexander. Consideremos cualquier presentación del grupo nudo obtenida como en el Capítulo 5, entonces tal presentación consiste de n generadores $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ y $n - 1$ relaciones $\{R_1, R_2, \dots, R_{n-1}\}$, para algún n . A continuación calculamos la *matriz Jacobiana*, la cual consiste de todas las derivadas parciales de las ecuaciones (relaciones), para luego eliminar cualquier columna de la matriz Jacobiana. En la siguiente matriz eliminamos la última columna

$$\begin{pmatrix} \partial_1 R_1 & \partial_2 R_1 & \dots & \partial_{n-1} R_1 \\ \partial_1 R_2 & \partial_2 R_2 & & \partial_{n-1} R_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \partial_1 R_{n-1} & \partial_2 R_{n-1} & \dots & \partial_{n-1} R_{n-1} \end{pmatrix},$$

por último reemplazamos cada variable x_i por la variable t . Entonces el polinomio de Alexander es el determinante de la matriz así obtenida.

Por ejemplo, en el problema anterior, la presentación dada corresponde al grupo nudo del trefoil —y esta presentación se puede obtener etiquetando dos arcos—. Dado que este consiste de dos generadores y una relación, la matriz que se obtiene después de eliminar una columna es de tamaño 1×1 , y corresponde, a saber, a la derivada parcial de alguna de las dos coordenadas. Entonces el polinomio de Alexander se puede obtener reemplazando la variable t en cada una de las variables, en una (cualquiera) de las dos derivadas parciales. Reemplazando t obtenemos los dos polinomios $t^2 - t + 1$ y $-t^2 + t - 1$, correspondientes a cada derivada parcial, como sabíamos de antes.

En el Capítulo 5 analizamos un ejemplo (ver Figura 5.5) cuya presentación es:

$$P = \langle x_1, x_2, x_3 \mid xyx^{-1} = yx^{-1}zxy^{-1}xyx^{-1}z^{-1}xy^{-1}; \\ xy^{-1}x^{-1}yx^{-1}zxy^{-1}xyx^{-1} = yx^{-1}y^{-1}zyxy^{-1}z^{-1}yzyx^{-1}y^{-1}z^{-1}yxy^{-1}; \\ yx^{-1}y^{-1}zyxy^{-1} = z^{-1}y^{-1}zyxy^{-1}z^{-1}yz \rangle.$$

Se puede ver que cualquiera de las tres relaciones se puede obtener de las otras dos. Así entonces destacamos las dos relaciones correspondientes a la primera y la tercera ecuación.

$$R_1 = yx^{-1}zxy^{-1}xyx^{-1}z^{-1}xy^{-1}xy^{-1}x^{-1}, \\ R_2 = z^{-1}y^{-1}zyxy^{-1}z^{-1}yzyx^{-1}y^{-1}z^{-1}yxy^{-1}.$$

Si en la matriz Jacobiana correspondiente eliminamos la segunda columna, que es la correspondiente a la $\partial/\partial y$ la matriz resultante es de tamaño 2×2 . Sustituyendo t por cada una de las variables x_i obtenemos la siguiente matriz.

$$\begin{pmatrix} -t^2 + 4t - 2 & -t + 1 \\ -t + 2 & 1 - 3t^{-1} + t^{-2} \end{pmatrix}.$$

Tomando el determinante, el polinomio de Alexander obtenido es

$$-2t^{-2} + 10t - 15 + 10t^{-1} - 2t^{-2}.$$

6.4.3. ¿Por qué funciona?

La prueba de que este procedimiento da el polinomio de Alexander es larga y técnica. Para una mayor referencia el lector puede ver [Li], [CF]. Sin embargo aquí explicaremos las ideas básicas.

Consideremos un diagrama del nudo donde etiquetamos cada arco con una variable x_i con $i = 1, \dots, n$ y para cada cruce tenemos una relación R_i con $i = 1, \dots, n-1$ —esto es así, salvo para el diagrama trivial del unknot—. Entonces notemos que cada relación va a venir dada por la ecuación $x_k = x_i x_j x_i^{-1}$ para un cruce donde x_i sea el overcrossing, y que con la orientación dada, el x_k esté a la derecha y el x_j a la izquierda. Esta es la ecuación que se obtiene en general salvo ecuaciones triviales, como la que se obtiene de aplicar el primer movimiento de Reidemeister, pero estos casos no traerán

problemas. Entonces uno puede obtener relaciones R del tipo $x_i x_j x_i^{-1} x_k^{-1}$. Notemos ahora que las derivadas parciales de esta relación R son

$$\begin{aligned}\partial_i R &= 1 + x_i x_j (-x_i^{-1}), \\ \partial_j R &= x_i, \\ \partial_k R &= x_i x_j x_i^{-1} (-x_k^{-1}),\end{aligned}$$

y evaluando en t obtenemos

$$\begin{aligned}\partial_i R(t) &= 1 - t, \\ \partial_j R(t) &= t, \\ \partial_k R(t) &= -1.\end{aligned}$$

Armando la matriz Jacobiana (correspondiente a los n generadores y las $n - 1$ relaciones) al eliminar una columna nos queda exactamente una matriz de Alexander, definida en el Capítulo 3. Luego queda claro que el determinante de tal matriz dará el polinomio de Alexander del nudo.

Se puede ver que obtener otra presentación del grupo nudo (de manera combinatoria como en el Capítulo 5) corresponde con hacerle operaciones a la matriz antes obtenida. Un cuidadoso cálculo muestra que ninguna de estas operaciones afecta al determinante final.

Capítulo 7

Nudos Virtuales

Los *Nudos Virtuales* son una generalización natural de los nudos clásicos. Considerándolos como diagramas (los así llamados *diagramas virtuales*), estos tienen la misma estructura de un diagrama clásico con un elemento adicional, el llamado *cruce virtual*, que es un cruce en el que no se establece qué arco pasa por arriba y qué arco por debajo. Ver Figura 7.1.

Los nudos virtuales aparecen por varios motivos dentro de la matemática. Uno de ellos tiene que ver con los *Códigos de Gauss*, ya que hay una biyección natural entre estos y los diagramas virtuales. También se tiene una interpretación más geométrica del diagrama virtual, que es que a todo diagrama virtual se lo puede ver como el diagrama correspondiente a un nudo viviendo en cierta *superficie engrosada*, a saber, la variedad tridimensional $M_g \times I$, donde $I = [0, 1]$ y M_g es la superficie que consiste de la esfera S^2 con g manijas. Esto último es similar al caso clásico, donde el nudo vive en la variedad tridimensional \mathbb{R}^3 y le asociamos un diagrama en el plano, el diagrama de nudo.

En este capítulo estudiaremos la interpretación geométrica de los diagramas virtuales dando la definición de los nudos virtuales. También definiremos el género de un nudo virtual a través del Teorema de Kuperberg. En toda esta parte daremos más las ideas y los métodos en cuestión, para un estudio más detallado ver [MI]. Por otro lado estudiaremos un problema particular referente a diagramas virtuales, que tiene conexión cercana con el Teorema de Kuperberg. En esta última parte nos basaremos en el trabajo *Excursions through virtual knot space*, de Peter Doyle y Shikhin Sethi, [DS].

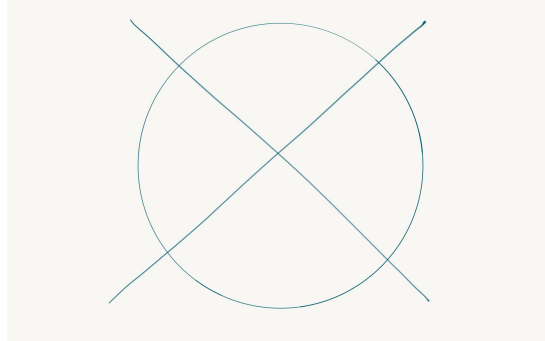


Figura 7.1: Representación gráfica de un cruce virtual.

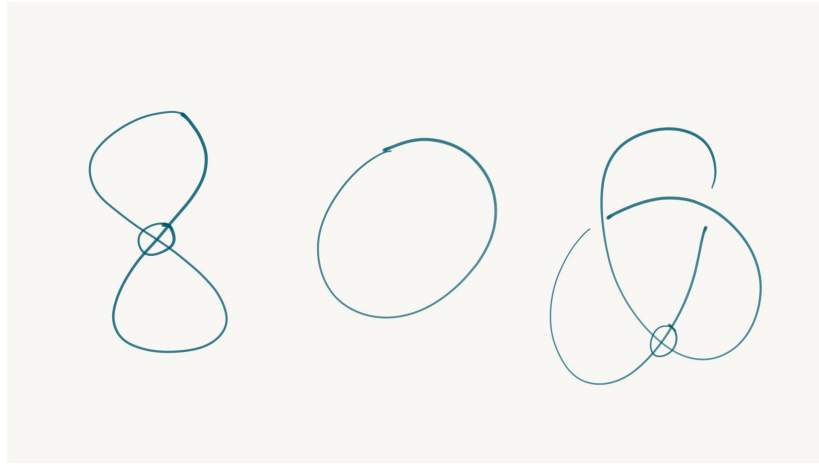


Figura 7.2: Ejemplos de diagramas virtuales.

7.1. Diagramas Virtuales

Comenzamos nuestro estudio de los nudos virtuales con los diagramas virtuales. Todos los diagramas que venimos estudiando hasta ahora son los diagramas clásicos. Estos se caracterizan porque en cada cruce se dice qué arco pasa por arriba y qué arco por debajo. Si además a estos diagramas les permitimos tener cruces, en los que no se diga qué arco pasa por arriba y qué arco por debajo —a estos cruces los llamaremos *cruces virtuales*, ver Figura 7.1— obtenemos lo que se llama un *diagrama virtual*. Para ejemplos de diagramas virtuales ver Figura 7.2.

Como veremos más adelante, en la interpretación geométrica de los dia-

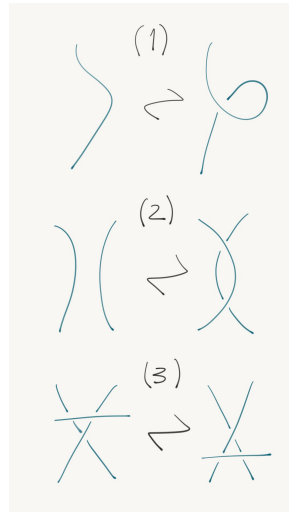


Figura 7.3: Los movimientos de Reidemeister clásicos también son movimientos válidos para los diagramas virtuales.

gramas virtuales, los cruces virtuales no guardan información de qué arco pasa por arriba y qué arco por debajo, sino más bien otro tipo de información.

Así como para los diagramas clásicos tenemos la equivalencia de estos por los movimientos de Reidemeister, para los diagramas virtuales también tenemos la *equivalencia* dada por ciertos movimientos en los diagramas, a saber, *los Movimientos de Reidemeister Generalizados*. Estos movimientos son siete, contando como uno solo los movimientos de ida y vuelta para cada uno de ellos. Los primeros tres son exactamente los movimientos de Reidemeister ya conocidos; notemos entonces que estos solamente se aplican a porciones del diagrama virtual que solamente consistan de cruces clásicos. Después tenemos tres movimientos que son análogos a los movimientos clásicos de Reidemeister, solo que en cada cruce, en lugar de tener un cruce clásico se tiene un cruce virtual. A estos tres movimientos los llamamos *movimientos virtuales*. Por último tenemos el movimiento llamado *movimiento semivirtual*, que relaciona tanto cruces clásicos como virtuales. Todos estos movimientos se pueden ver en las Figuras 7.3, 7.4 y 7.5.

Se muestra un ejemplo en la Figura 7.6, donde se puede ver cómo un diagrama con cruces virtuales está en la misma clase de equivalencia que el unknot.

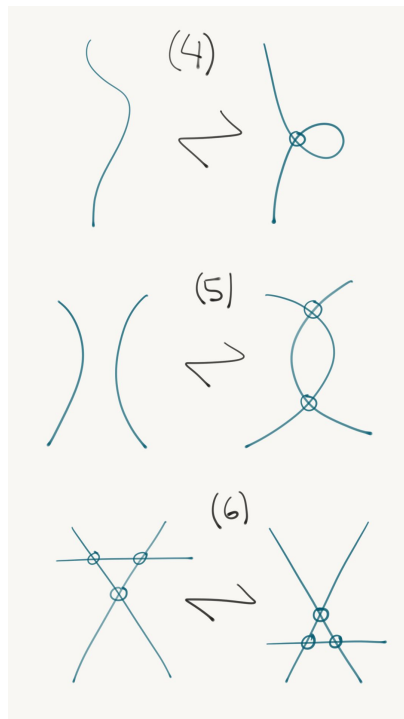


Figura 7.4: Los movimientos virtuales.

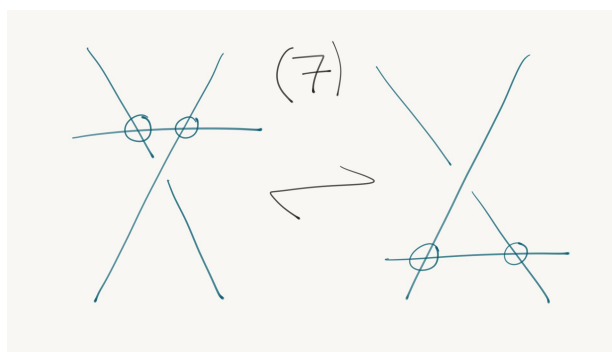


Figura 7.5: El movimiento semiclásico. Este relaciona los dos tipos de cruces.

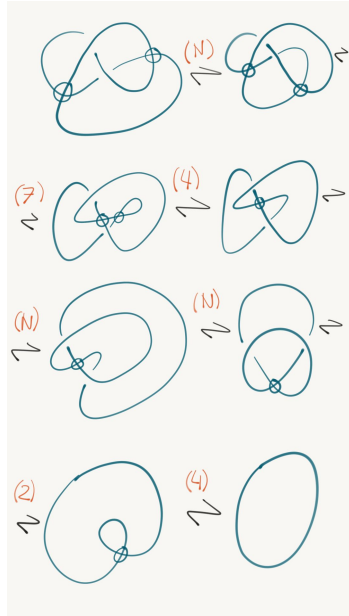


Figura 7.6: Desanudando con los movimientos de Reidemeister generalizados.

7.2. Nudos Virtuales

Así como los diagramas clásicos son diagramas obtenidos de los nudos viviendo en el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 ; los diagramas virtuales son también los diagramas correspondientes a nudos viviendo en la variedad tridimensional $M_g \times I$, donde M_g es la esfera con g manijas, e I el intervalo unitario $[0, 1]$.

Recordemos que en el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 , dos nudos son equivalentes si existe una isotopía ambiental que lleve un nudo en el otro. Esta definición es equivalente a la siguiente definición.

Definición 7.2.1. Dos nudos en el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 se dicen equivalentes, si existe un difeomorfismo, positivamente orientado, de \mathbb{R}^3 en sí mismo, de manera que lleve un nudo en el otro.

En general estas dos definiciones no tienen por qué ser equivalentes. En el caso del espacio euclídeo son equivalentes. También son equivalentes cuando el espacio a considerar son las variedades $M_g \times I$ (ver por ejemplo [MI]). En este capítulo trabajaremos con esta última definición.

Definición 7.2.2. Diremos que dos nudos viviendo ambos en una variedad $M_g \times I$ son M_g -equivalentes, si existe un difeomorfismo de la variedad en sí

misma, de manera que lleve un nudo en el otro y además $M_g \times \{1\}$ en sí mismo.

Definición 7.2.3. Un *nudo virtual* es una clase de equivalencia de los embeddings de S^1 en los espacios $M_g \times I$, salvo *estabilización/desestabilización*.

Con respecto a esta definición debemos aclarar tanto *estabilización* como *desestabilización*.

Por *desestabilización* queremos decir lo siguiente: Sea S un círculo no contráctil en la superficie M_g para el cual existe un anillo (*vertical*) C homotópico al anillo $S \times I$, y no intersecando al nudo (durante el proceso de homotopía asumimos que la intersección del anillo con el borde de $M_g \times I$ coincide con el borde del anillo). Entonces la desestabilización es cortar la variedad $M_g \times I$ a lo largo del anillo y pegar las nuevas componentes por platos (discos engrosados) $D^2 \times I$. Por *estabilización* entendemos el proceso inverso de la desestabilización. A grosso modo, la desestabilización consiste en deshacerse de una manija de la variedad tridimensional, siempre que esta manija no contenga parte del nudo. La estabilización es añadir una manija.

Supongamos entonces que se tienen dos nudos K y J viviendo en $M_K \times I$ y $M_J \times I$ respectivamente. Entonces estos son equivalentes si después de hacer unas cuantas desestabilizaciones (estabilizaciones) —llegando así a vivir ambos nudos en la misma variedad tridimensional, digamos $M_g \times I$ — son g -equivalentes.

Por ejemplo, un círculo principal en el toro M_1 (viéndolo en el engrosado $M_1 \times I$) (ver Figura 7.7), es un nudo equivalente a un círculo en la esfera (también viéndolo en su engrosado, $M_0 \times I$), ya que podemos hacer desestabilización en $M_1 \times I$, a lo largo del círculo pintado de negro mostrado en la Figura 7.7. Es un buen ejercicio de imaginación ver este proceso, y se dejan los detalles para el lector.

7.2.1. Diagrama de un nudo virtual

Como dijimos en la introducción del capítulo, el diagrama de un nudo virtual es un diagrama virtual. Recíprocamente dado un diagrama virtual podemos construir un nudo virtual. Entonces el teorema esperado dice que dos nudos en las M'_g s son equivalentes si y sólo si sus diagramas virtuales correspondientes son equivalentes como diagramas, i.e., por medio de movimientos de Reidemeister generalizados.

En esta parte trataremos de dar el método para obtener un diagrama virtual a partir de un nudo virtual, y viceversa. En una variedad $M_g \times I$ diremos que un punto (x, y) está arriba de (x, z) , si $y \geq z$; así la cara

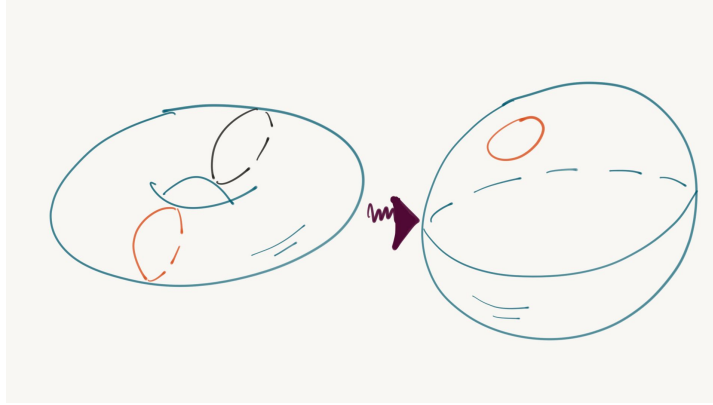


Figura 7.7: Aplicando desestabilización a través del círculo pintado de negro. El círculo rojo pasa de estar en el toro a estar en la esfera.

inferior es $M_g \times \{0\}$ y la cara superior es $M_g \times \{1\}$. Entonces dado un nudo en una variedad $M_g \times I$, podemos obtener un diagrama de este nudo en $M_g \times \{\frac{1}{2}\}$ haciendo la proyección de cada punto del nudo en esta superficie $M_g \times \{\frac{1}{2}\}$, e indicando en cada punto doble qué arco pasa por arriba y qué arco por debajo. Resulta ser que la equivalencia de estos diagramas son los movimientos de Reidemeister (los tres movimientos clásicos de siempre) pero aplicados a estos diagramas que ahora viven en una superficie M_g . Dado un diagrama en una superficie M_g , no es difícil armar el nudo correspondiente a este diagrama.

Lo que se hace para obtener un diagrama en el plano es tomar la proyección de este diagrama (que vive en un M_g) sobre el plano, donde cada vez que se tenga un cruce clásico en la superficie M_g tenemos un cruce clásico en el diagrama en el plano; otro cruce que se puede obtener al proyectar, es cuando un arco pasa por detrás de una manija y el otro arco pasa por encima de la manija, estos tipos de cruces son los cruces virtuales. En la Figura 7.8, se ve un ejemplo de cómo obtener el diagrama en el plano.

El procedimiento para obtener un nudo virtual de un diagrama virtual es como sigue. Dado un diagrama virtual, considere el diagrama viviendo en la superficie de la esfera. Para cada cruce virtual del diagrama, añadimos una manija en ese cruce de manera que, dados los dos arcos que pasan por el cruce, levantamos uno de ellos haciendo que pase por la manija y el otro queda como estaba, pasando por la esfera. Haciendo este proceso para cada cruce virtual, obtenemos un diagrama clásico viviendo en cierta superficie M_g . Y de acá, como indicamos antes, obtenemos el nudo viviendo en la

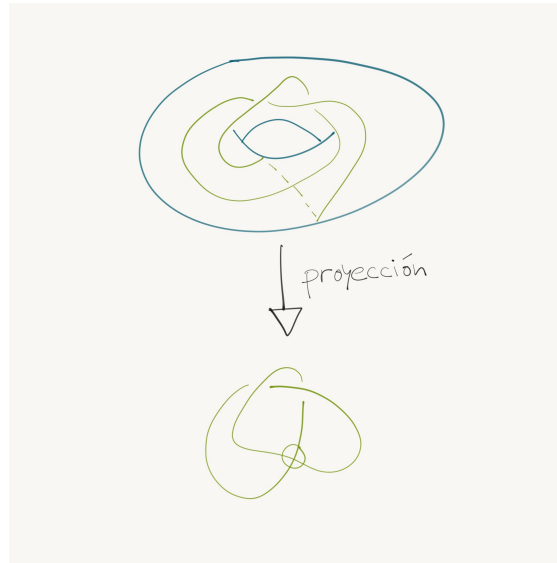


Figura 7.8: Proyectando un diagrama en el toro a un diagrama virtual.

superficie engrosada $M_g \times I$.

Como se advirtió antes, los diagramas planares obtenidos al proyectar como recién, son los diagramas virtuales. El siguiente teorema relaciona la equivalencia de los nudos virtuales con la equivalencia de los diagramas virtuales.

Teorema 7.2.4. *Dos nudos virtuales son equivalentes si y sólo si sus diagramas virtuales correspondientes son equivalentes.*

Para una prueba de esto ver [MI].

7.3. El Teorema de Kuperberg

Sean K y J dos nudos viviendo en las superficies engrosadas $M_K \times I$ y $M_J \times I$ respectivamente, y supongamos que son nudos equivalentes. Podemos hacer desestabilización (siempre que se pueda) varias veces a ambos, hasta que lleguemos a un límite donde ya no se podrá más; cada uno de estos se llamarán *representantes mínimos*. La pregunta es si estas dos superficies engrosadas, a las que llegamos haciendo desestabilización, tienen el mismo género (el género de una superficie engrosada es el género de la superficie en cuestión). La respuesta es afirmativa, y es un teorema debido a Kuperberg ([Ku]).

Teorema 7.3.1. (Kuperberg) *Para todo nudo virtual $K \subset M \times I$ su representante mínimo es único salvo difeomorfismo del par $(M \times I, K)$ en sí mismo llevando la componente borde superior $M \times \{1\}$ en sí misma.*

Para una prueba completa de este teorema ver [MI]. Una consecuencia importante es que, si dos nudos clásicos no son equivalentes por movimientos de Reidemeister, entonces no lo serán con movimientos de Reidemeister generalizados. Pues si así fuera, tendríamos un nudo virtual, para el cual haciendo desestabilización de una forma nos dé un nudo clásico, y desestabilizando de otra forma nos dé otro nudo clásico, distinto al primero. Pero el Teorema de Kuperberg dice que estos nudos clásicos ¡deben ser isotópicos! Por lo tanto el agregar movimientos virtuales y el semivirtual no cambia las relaciones de equivalencia (dada por los movimientos de Reidemeister solamente) de nudos clásicos. Por ello, a veces se suele conocer este teorema como Teorema fundamental de Kuperberg.

La definición de género de un nudo virtual es como sigue.

Definición 7.3.2. El *género de un nudo virtual* es el género de la superficie engrosada en la que vive un representante mínimo del nudo virtual.

7.4. Nudos clásicos y nudos semiclásicos

En esta sección seguiremos el artículo [DS]. También nos enfocaremos más en los diagramas de los nudos virtuales.

Sea V_∞ el grafo definido de la siguiente forma. Los nodos del grafo son diagramas virtuales y las aristas son movimientos de Reidemeister generalizados (cada arista es solo un movimiento de Reidemeister generalizado). Así entonces las componentes conexas de este grafo son los nudos virtuales. El *género de un diagrama virtual* es el género de la superficie asociada a tal diagrama. Definimos V_g como todos los diagramas del grafo cuyo género es menor o igual a g . Entonces V_0 consiste exactamente de los diagramas clásicos (i.e. sin ningún cruce virtual) pues estos diagramas pueden ser todos dibujados en la esfera y un cruce virtual necesariamente exige la existencia de al menos una manija en la esfera. Definimos \overline{V}_g como todos los diagramas del grafo V_∞ que estén a un movimiento de Reidemeister generalizado de algún diagrama que esté en V_g . Por ejemplo el diagrama de la izquierda de la Figura 7.2 está en \overline{V}_0 , y el diagrama de la derecha de la misma figura no está en \overline{V}_0 . A los diagramas del subgrafo \overline{V}_0 los llamaremos *diagramas semiclásicos*.

En el artículo [DS], se estudian en particular dos problemas. El primero trata de responder la pregunta: ¿El embedding natural del grafo clásico en el

grafo virtual es una isometría? Respecto a esta pregunta el artículo, aunque no la responde, muestra que para todo camino que conecte dos diagramas clásicos, donde cada nodo intermedio del camino es un diagrama en V_∞ , existe otro camino conectando estos dos diagramas clásicos, donde cada nodo intermedio es un diagrama clásico. Y el camino que va siempre por nodos clásicos es de longitud mayor que el camino que va por nodos viviendo en V_∞ ; si se lograra que las longitudes de ambos caminos fueran iguales, tendríamos entonces la isometría deseada. Este resultado lleva a una prueba alternativa del Teorema de Kuperberg, ver el Teorema 7.3.1 y los comentarios debajo de este.

El segundo problema que trata este artículo es el siguiente. ¿Existe una retracción con *distancia* decreciente (la distancia de dos nodos es la longitud del camino más corto) del grafo semiclásico en el grafo clásico?. En el artículo se demuestra que esto no es posible. En realidad lo que se prueba es que hay un camino (particular) para el cual no hay una *retracción online*. Esto último se entiende mejor con el siguiente juego.

El juego entre Clásico y Virtual: Ambos comienzan con el mismo diagrama clásico, elegido por Virtual. Ellos alternan movimientos yendo Virtual primero. En cada paso Virtual se mueve a algún diagrama en \bar{V}_0 vecino del diagrama en el que se encuentra; una vez que se mueve Virtual, Clásico también se mueve a un diagrama clásico vecino del diagrama en el que se encuentra. Entonces si Virtual vuelve a un diagrama clásico, Clásico debe volver a reunirse con Virtual en su siguiente movimiento. Si Clásico lo puede hacer entonces Clásico gana, sino, Virtual gana. Si Clásico puede volver a reunirse con Virtual decimos que hay una *retracción online* para el camino que eligió Virtual.

Sucede que si hubiera una retracción con distancia decreciente, del grafo semiclásico en el grafo clásico, entonces Clásico siempre ganaría. Pues para cualquier diagrama donde comiencen a jugar los dos, y para cualquier camino que escoja Virtual, el camino que debe elegir Clásico es el de tomar la proyección (dada por la retracción) de cada nodo que vaya tomando Virtual, y entonces cuando Virtual vuelva a un nodo clásico, Clásico se volverá a reunir con Virtual. Por lo tanto para ver que no hay una retracción del grafo semiclásico en el grafo clásico, basta con ver que Virtual tiene una estrategia ganadora. Es decir un camino que tome Virtual por los nodos semiclásicos, donde haga lo que haga Clásico, cuando Virtual regrese a un nodo clásico, Clásico no pueda reunirse con Virtual. En el artículo [DS] se da un tal camino para Virtual.

En la Figura 7.9 se ilustra un camino con la cual Virtual tiene una estrategia ganadora. Antes de comenzar a analizar este camino, hacemos unas

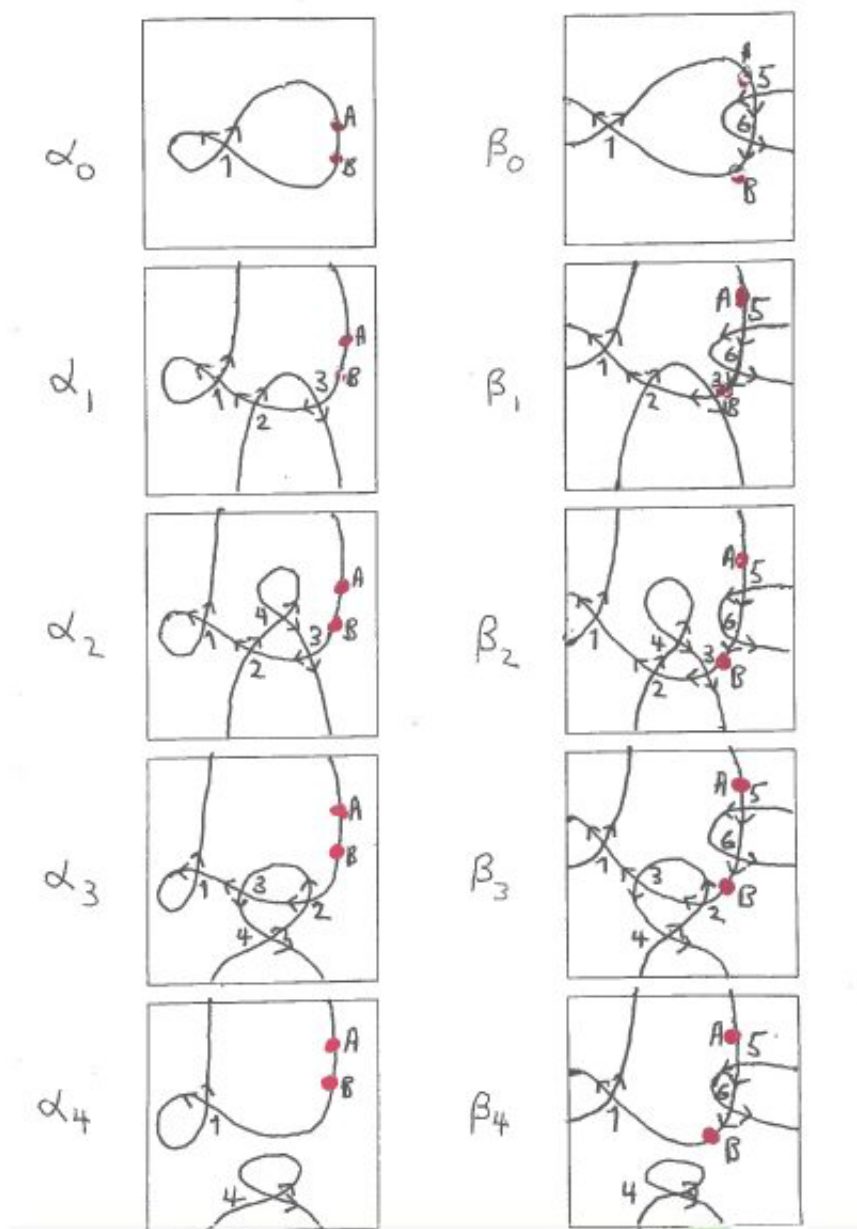


Figura 7.9: El juego de Virtual y Clásico, de [DS].

aclaraciones respecto a la Figura 7.9. A los dos puntos pintados con rojo, llamados A y B , los pensamos a cada uno como un lazo, como se lo hace en [DS]. Si por ejemplo trivializamos el lazo B , el camino no es de estrategia ganadora para Virtual. Se espera que si pensamos a A y a B más complejos que un lazo, entonces el camino sigue siendo de estrategia ganadora para Virtual. Por último, siguiendo la notación de la Figura 7.9, llamaremos a los cinco diagramas en la columna izquierda $\alpha_0, \dots, \alpha_4$, siendo α_0 el de más arriba, α_1 el segundo de más arriba y así sucesivamente hasta α_4 ; análogamente hacemos con los diagramas de la columna derecha, denotándolos β_0, \dots, β_4 .

Procedemos ahora a explicar cómo se realiza este juego, siempre mirando la Figura 7.9. Primero Virtual tiene que elegir un diagrama clásico, y elige β_0 . Ahora tanto Clásico como Virtual están en este diagrama. Virtual en su primer movimiento elige moverse a β_1 , que notemos es un diagrama semiclásico que no es clásico. Virtual amenaza en la siguiente jugada moverse a α_1 , entonces clásico seguro que en su primer movimiento debe ir a un diagrama clásico que esté a lo sumo a un movimiento de α_1 , pues en caso contrario perderá. Se puede probar que la única opción que puede elegir Clásico es α_0 , osea que Clásico está obligado a moverse a este diagrama. El juego sigue con Virtual moviéndose al diagrama β_2 como su segundo movimiento, amenazando con moverse a α_2 . De nuevo se puede probar que Clásico está obligado a moverse a α_1 . En el tercer movimiento Virtual se mueve a β_3 , amenazando a α_3 . Clásico de nuevo obligado, se mueve a α_2 . Entonces Virtual se mueve a β_4 , y este último diagrama ¡es clásico! Clásico debería estar a un movimiento de β_4 , y recordemos Clásico esta en α_2 . Se puede probar que α_2 y β_4 están a más de un movimiento de Reidemeister clásico. Luego Virtual gana.

Las pruebas de los detalles del argumento anterior, como las jugadas obligadas que tiene que hacer Clásico, están en [DS].

Dado que Virtual tiene una estrategia ganadora, eligiendo el camino por los diagramas semiclásicos de la Figura 7.9, no se cumple la retracción online para todo camino, y luego no hay retracción. Esto contesta el segundo problema antes planteado.

Capítulo 8

Presentaciones de Wirtinger

En este capítulo seguiremos la línea de estudio del artículo de Rosebrock, [Ro]. Allí se dan, entre otras cosas, ejemplos de grupos con *presentación de Wirtinger*, tal que no son grupos nudos; también se trata de hallar grupos así, que no sean geométricos (esto es, que no puedan obtenerse a partir de un diagrama de nudo). Estos últimos ejemplos son los que más nos interesan.

Veremos los resultados necesarios para encontrar tales ejemplos (daremos solamente los enunciados de los teoremas, para luego usarlos y dar con los ejemplos del artículo). Estos ejemplos tienen polinomio de Alexander simétrico. Finalmente daremos una familia de ejemplos propios (distintos a los del artículo) de grupos con presentación de Wirtinger que no son geométricos, cuyos polinomios de Alexander no son simétricos. Por consultas sobre este tema, el lector puede dirigirse a [Ro].

8.1. Planteando el problema

Sea K un nudo, y sea P el grupo nudo de K . Dado un diagrama del nudo K , uno puede obtener una presentación de Wirtinger para P , de la siguiente forma:

$$P = \langle x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \mid R_1, R_2, \dots, R_n \rangle,$$

donde $R_i : x_{i+1} = x_{\pi(i)}^{\epsilon_i} x_i x_{\pi(i)}^{-\epsilon_i}$, para $i = 1, 2, \dots, n$. Ver la Proposición 5.2.2.

Definición 8.1.1. Decimos que una presentación

$$P : \langle x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \mid R_1, R_2, \dots, R_n \rangle,$$

es una *Presentación de Wirtinger Abstracta*, si cada relación $R(i)$ es de la forma:

$$x_{i+1} = x_{\pi(i)}^{\epsilon_i} x_i x_{\pi(i)}^{-\epsilon_i}.$$

Entonces surge la pregunta: Dada una presentación de Wirtinger abstracta, ¿es este grupo isomorfo a algún grupo nudo?; similarmente podemos hacernos también otra pregunta: Dada una presentación de Wirtinger abstracta, ¿es ésta la presentación de Wirtinger obtenida de algún diagrama de un nudo? En este último caso, si la respuesta es afirmativa, diremos que la presentación es *geométrica*; entonces la última pregunta se replantea de la siguiente forma: ¿Es esta presentación de Wirtinger abstracta, geométrica?.

Claramente si P no es isomorfo a un grupo nudo, entonces no será geométrica. Sin embargo, no vale la recíproca, es decir, no toda presentación de Wirtinger abstracta que sea isomorfa a un cierto grupo nudo se puede obtener como una presentación de Wirtinger del diagrama de un nudo. De hecho hay muchos ejemplos de presentaciones no geométricas, pero sí isomorfas a un grupo nudo.

Dada una presentación de Wirtinger abstracta P , se le puede asociar un *intervalo de presentación* I_P el cual consiste de un grafo lineal con $n + 1$ vértices y n aristas, cada arista i etiquetada con $\pi(i)$, el cual va a tener una orientación apuntando a la izquierda si y sólo si $\epsilon_i = 1$. Hablaremos de la presentación P y de su intervalo de presentación I_P indistintamente, dado que teniendo una se puede conseguir la otra.

8.2. Presentaciones no geométricas y no isomorfas a grupos nudos

En [Ro] se da una familia de presentaciones de Wirtinger abstractas no geométricas. Se utilizan los siguientes resultados.

Teorema 8.2.1. *Sea P un intervalo de presentación con $n \geq 3$ relaciones. Sea g una función peso para W_P con:*

1. *Los siete pesos más pequeños $\tau_1 \leq \dots \leq \tau_7$ son todos menores o iguales a $2/3$.*
2. *La desigualdad $g(f) \geq 2$ vale para cada circuito orientado $f : I \rightarrow W_P$.*
3. *La desigualdad*

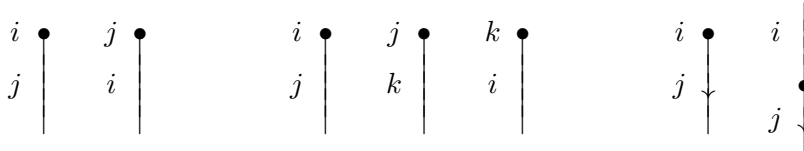
$$\sum_{\gamma \in \sigma^2} g(\gamma) < 2 + \frac{\sum_{i=1}^7 \tau_i - 2}{n},$$

vale para cada 2-célula $\sigma^2 \in K_P$ (la suma de la izquierda va sobre todos las esquinas γ en σ^2). Entonces P no es una presentación de Wirtinger geométrica.

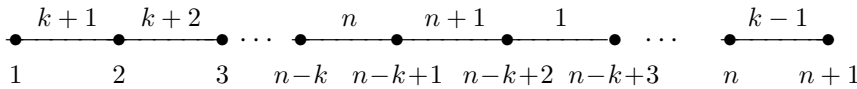
Una prueba de este teorema se puede encontrar en [Ro]. De este teorema (acompañado de otros resultados más) se desprende el siguiente corolario muy útil:

Corolario 8.2.2. *Sea P un intervalo de presentación. Si P satisface las condiciones $C(4)$ y $T(4)$ entonces P no es una presentación de Wirtinger geométrica.*

El último corolario nos da una herramienta para ver si una presentación de Wirtinger P es geométrica o no. Aunque no damos la definición de $C(4)$ y $T(4)$, damos acá una equivalencia útil para nuestro caso; se sabe que una presentación de intervalo es $C(4)$ y $T(4)$ si y sólo si esta presentación es *reducida* (esto es, que cada relación consiste de tres generadores diferentes y ninguno de las dos aristas adyacentes en I_P a un vértice, que están ambos o saliendo o entrando a dicho vértice tienen el mismo etiquetado), y su correspondiente intervalo I_P no contiene ninguna de las tres configuraciones mostradas a continuación.



Problema 8.2.3. Consideremos la presentación dada por el intervalo I_P del siguiente diagrama. Para $k \geq 2$,



$n \geq 3k$ y cualquier orientación de sus aristas. Mostrar que esta presentación es $C(4)$, $T(4)$ y es por lo tanto una familia de presentaciones de Wirtinger no geométricas.

Solución. Notemos que tal presentación es reducida, pues cada relación consiste de tres generadores distintos y dos aristas contiguas tienen diferentes etiquetas.

Debemos ver ahora que ninguna de las tres configuraciones pasan dentro del intervalo de presentación. Para este objetivo definiremos dos funciones:

$$r : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n + 1\}$$

$$r(i) = k + i,$$

$$l : \{2, \dots, n + 1\} \rightarrow \{1, \dots, n + 1\}$$

$$l(i) = k + i - 1,$$

donde consideramos los números módulo $(n + 1)$.

Entonces, por ejemplo, ver que la primera configuración no sucede en el intervalo de presentación se traduce en ver que no pueden pasar los siguientes casos:

$$\text{caso } r(i) = k + i \text{ y } r(k + i) = i:$$

Esto no puede ser pues, $2k + i = r(k + i) = i \pmod{n + 1}$; de donde $2k + i \equiv i \pmod{n + 1}$, es decir, $2k \equiv 0 \pmod{n + 1}$ luego $3k > 2k \geq n + 1 > n$, deduciendo que $3k > n$ contradiciendo la hipótesis que $n \geq 3k$.

$$\text{caso } r(i) = k + i \text{ y } l(k + i) = i:$$

Si así fuera, $2k + i - 1 = l(k + i) = i \pmod{n + 1}$. Luego $2k - 1 \equiv 0 \pmod{n + 1}$, y entonces $3k > 2k > 2k - 1 \geq n + 1$; de nuevo $3k > n$ contradiciendo las hipótesis del teorema.

Faltan ver dos casos, ambos considerando $l(i) = k + i - 1$ en lugar de $r(i) = k + i$. Pero los cálculos son igual de sencillos como recién.

Por último se deben ver también las otras dos configuraciones. Con la misma idea de recién, pasando las configuraciones a ecuaciones, se puede ver que estas dos configuraciones tampoco se pueden dar en el intervalo de presentación. \square

Ahora vamos a dar la familia de ejemplos de presentaciones de Wirtinger abstractas que no son grupos nudos. El siguiente teorema es muy útil para este propósito.

Teorema 8.2.4. *Sea P una presentación finita del grupo G . Si K_P tiene una función peso g que satisface las siguientes dos condiciones, entonces G es un grupo hiperbólico:*

1. *Para cada circuito $f : I \rightarrow W_P$:*

$$g(f) > 2.$$

2. *Para cada 2-célula D de K_P :*

$$\sum_{\gamma \in D} g(\gamma) \leq d(D) - 2.$$

Para más detalles respecto a este teorema ver [Ro].

Ahora bien, es sabido que ningún grupo hiperbólico tiene a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ como subgrupo, y sin embargo los grupos nudos (no triviales) tienen a este como subgrupo (este hecho se puede probar considerando un meridiano y una longitud en un cruce del diagrama del nudo). Tenemos acá una herramienta para probar que una presentación no es grupo nudo. Efectivamente así enuncia el siguiente teorema.

Teorema 8.2.5. *Sea P un intervalo de presentación para el grupo G . Si P es $C(4), T(4)$ y cada circuito de longitud cuatro es ordinario, entonces G no es un grupo nudo.*

Para la prueba y más detalles de este teorema ver [Ro].

Dentro de la familia de ejemplos que vimos en el Problema 8.2.3, podemos encontrar una familia de ejemplos que no son grupos nudos. Así se lo hace en el siguiente problema.

Problema 8.2.6. Consideremos la presentación de intervalo P dado en el Problema 8.2.3 con $n \geq 4k, k \geq 2$ y cualquier orientación de sus aristas. Esta nueva familia de grupos no son grupos nudos.

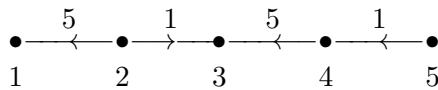
El lector podrá encontrar los detalles de la solución a este problema en [Ro].

8.3. Presentaciones de Wirtinger con polinomio de Alexander no simétrico

Consideremos la siguiente presentación de Wirtinger abstracta P dada por:

$$P = \langle y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \mid \begin{aligned} y_2 &= y_5 y_1 y_5^{-1} \\ y_3 &= y_1^{-1} y_2 y_1 \\ y_4 &= y_5 y_3 y_5^{-1} \\ y_5 &= y_1 y_4 y_1^{-1} \end{aligned} \rangle.$$

Asociada a tal presentación tenemos la presentación de intervalo I_P , que en nuestro caso es:



Ahora bien, de tal presentación, como se vio antes podemos calcular el polinomio de Alexander mediante las derivadas de Fox. Para esto consideramos las siguientes relaciones (obtenidas de las ecuaciones que definen a P)

$$\begin{aligned} R_1 &= y_5 y_1 y_5^{-1} y_2^{-1} \\ R_2 &= y_1^{-1} y_2 y_1 y_3^{-1} \\ R_3 &= y_5 y_3 y_5^{-1} y_4^{-1} \\ R_4 &= y_1 y_4 y_1^{-1} y_5^{-1}. \end{aligned}$$

De la siguiente matriz debemos eliminar una columna (cualquiera) para así obtener la matriz jacobiana

$$\begin{pmatrix} \partial_1 R_1 & \partial_2 R_1 & \partial_3 R_1 & \partial_4 R_1 & \partial_5 R_1 \\ \partial_1 R_2 & \partial_2 R_2 & \partial_3 R_2 & \partial_4 R_2 & \partial_5 R_2 \\ \partial_1 R_3 & \partial_2 R_3 & \partial_3 R_3 & \partial_4 R_3 & \partial_5 R_3 \\ \partial_1 R_4 & \partial_2 R_4 & \partial_3 R_4 & \partial_4 R_4 & \partial_5 R_4 \end{pmatrix}.$$

A nosotros nos convendrá eliminar la última fila, más adelante veremos porqué

$$\begin{pmatrix} \partial_1 R_1 & \partial_2 R_1 & \partial_3 R_1 & \partial_4 R_1 \\ \partial_1 R_2 & \partial_2 R_2 & \partial_3 R_2 & \partial_4 R_2 \\ \partial_1 R_3 & \partial_2 R_3 & \partial_3 R_3 & \partial_4 R_3 \\ \partial_1 R_4 & \partial_2 R_4 & \partial_3 R_4 & \partial_4 R_4 \end{pmatrix}.$$

Calculando las derivadas de Fox, obtenemos la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} y_5 & -y_5 y_1 y_5^{-1} y_2^{-1} & 0 & 0 \\ -y_1^{-1} + y_1^{-1} y_2 & y_1^{-1} & -y_1^{-1} y_2 y_1 y_3^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & y_5 & -y_5 y_3 y_5^{-1} y_4^{-1} \\ 1 - y_1 y_4 y_1^{-1} & 0 & 0 & y_1 \end{pmatrix}.$$

Ahora bien; como recordará el lector, debemos reemplazar cada variable x_i por t . La matriz obtenida así es:

$$\begin{pmatrix} t & -1 & 0 & 0 \\ 1 - t^{-1} & t^{-1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & t & -1 \\ 1 - t & 0 & 0 & t \end{pmatrix}.$$

Por último, calculamos el determinante, que es justamente el polinomio de Alexander asociado

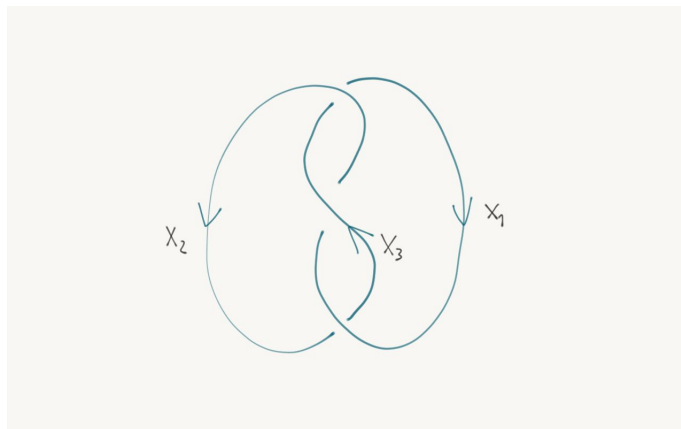


Figura 8.1: El trefoil con el diagrama estándar de los torus knots.

$$\Delta_P(t) = 2t^2 - 2t + 1.$$

Notemos que tal polinomio ¡no es simétrico! Entonces tal presentación no puede ser una presentación geométrica; pues si así fuera, tal polinomio debe ser simétrico, como se vio en la Proposición 6.1.9.

Tratemos ahora de construir una familia infinita de presentaciones de Wirtinger (distintas entre sí) que tengan polinomio de Alexander no simétrico, y por lo tanto entonces ninguno de ellos será una presentación geométrica.

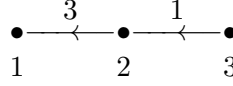
Para este objetivo, consideramos los nudos $(2, n)$ -torus knots (n coprimo con 2). Tales nudos como se vio en el Capítulo 3 tienen polinomio de Alexander

$$\Delta(t) = t^{n-1} - t^{n-2} + \dots - t + 1,$$

para cada n natural. A partir de acá trabajamos con el trefoil (que es el $(2, 3)$ -torus knot), y todos los cálculos hechos a continuación se pueden hacer de manera similar para los otros torus knots.

Considerando el diagrama mostrado en la Figura 8.1 para el trefoil — diagrama que sigue el modelo estándar de un torus knot —, la presentación de Wirtinger y el intervalo de presentación, obtenidos para el grupo nudo del trefoil, está dado por:

$$P_{3_1} = \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_2 = x_3 x_1 x_3^{-1} \\ x_3 = x_1 x_2 x_1^{-1} \rangle$$



De nuevo usando las derivadas de Fox, hacemos las cuentas para obtener el polinomio de Alexander. Las relaciones son

$$\begin{aligned} R_1 &= x_3 x_1 x_3^{-1} x_2^{-1} \\ R_2 &= x_1 x_2 x_1^{-1} x_3^{-1}, \end{aligned}$$

de donde obtenemos la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} \partial_1 R_1 & \partial_2 R_1 & \partial_3 R_1 \\ \partial_1 R_2 & \partial_2 R_2 & \partial_3 R_2 \end{pmatrix}.$$

La matriz jacobiana entonces es:

$$\begin{pmatrix} \partial_2 R_1 & \partial_3 R_1 \\ \partial_2 R_2 & \partial_3 R_2 \end{pmatrix},$$

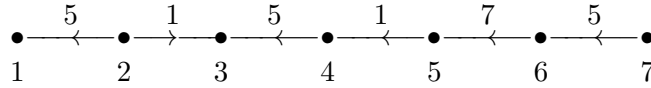
$$\begin{pmatrix} -x_3 x_1 x_3^{-1} x_2^{-1} & 1 - x_3 x_1 x_3^{-1} \\ x_1 & -x_1 x_2 x_1^{-1} x_3^{-1} \end{pmatrix},$$

reemplazamos por t cada variable x_i ,

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 - t \\ t & -1 \end{pmatrix},$$

el determinante de la última matriz es el polinomio de Alexander del trefoil; el cual nos da: $\Delta_{3_1}(t) = t^2 - t + 1$.

Ahora consideremos el siguiente intervalo de presentación, al cual llamaremos $P(3)$.



Este se obtuvo “pegando” dos intervalos de presentación —a saber, el intervalo de presentación de P y el del trefoil—, a este método lo llamaremos *el método de pegado de intervalos*. La presentación abstracta de este intervalo de presentación esta dada por

$$\begin{aligned} P(3) = \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \mid & x_2 = x_5 x_1 x_5^{-1} \\ & x_3 = x_1^{-1} x_2 x_1 \\ & x_4 = x_5 x_3 x_5^{-1} \\ & x_5 = x_1 x_4 x_1^{-1} \\ & x_6 = x_7 x_5 x_7^{-1} \\ & x_7 = x_5 x_6 x_5^{-1} \rangle, \end{aligned}$$

nuevamente haciendo las cuentas usando las derivadas de Fox, calculamos el polinomio de Alexander asociada a tal presentación

$$R_1 = x_5 x_1 x_5^{-1} x_2^{-1},$$

$$R_2 = x_1^{-1} x_2 x_1 x_3^{-1},$$

$$R_3 = x_5 x_3 x_5^{-1} x_4^{-1},$$

$$R_4 = x_1 x_4 x_1^{-1} x_5^{-1},$$

$$R_5 = x_7 x_5 x_7^{-1} x_6^{-1},$$

$$R_6 = x_5 x_6 x_5^{-1} x_7^{-1},$$

$$\begin{pmatrix} \partial_1 R_1 & \partial_2 R_1 & \partial_3 R_1 & \partial_4 R_1 & \partial_5 R_1 & \partial_6 R_1 & \partial_7 R_1 \\ \partial_1 R_2 & \partial_2 R_2 & \partial_3 R_2 & \partial_4 R_2 & \partial_5 R_2 & \partial_6 R_2 & \partial_7 R_2 \\ \partial_1 R_3 & \partial_2 R_3 & \partial_3 R_3 & \partial_4 R_3 & \partial_5 R_3 & \partial_6 R_3 & \partial_7 R_3 \\ \partial_1 R_4 & \partial_2 R_4 & \partial_3 R_4 & \partial_4 R_4 & \partial_5 R_4 & \partial_6 R_4 & \partial_7 R_4 \\ \partial_1 R_5 & \partial_2 R_5 & \partial_3 R_5 & \partial_4 R_5 & \partial_5 R_5 & \partial_6 R_5 & \partial_7 R_5 \\ \partial_1 R_6 & \partial_2 R_6 & \partial_3 R_6 & \partial_4 R_6 & \partial_5 R_6 & \partial_6 R_6 & \partial_7 R_6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_5 & -x_5 x_1 x_5^{-1} x_2^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_1^{-1} + x_1^{-1} x_2 & x_1^{-1} & -x_1^{-1} x_2 x_1 x_3^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_5 & -x_5 x_3 x_5^{-1} x_4^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 - x_1 x_4 x_1^{-1} & 0 & 0 & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x_7 x_5 x_7^{-1} x_6^{-1} & 1 - x_7 x_5 x_7^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_5 & -x_5 x_6 x_5^{-1} x_7^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Aquí hay un paso importante a notar; la columna que eliminamos es la quinta (por eso en el cálculo del polinomio de Alexander para P eliminamos la quinta columna, y para el trefoil eliminamos la primera columna), y así nos queda una matriz diagonal por bloques, donde el primer bloque corresponde a la presentación P vista al comienzo de la sección, y el segundo bloque corresponde al trefoil. Esto mismo sucede cuando consideramos un torus knot general en lugar del trefoil.

$$\begin{pmatrix} t & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 - t^{-1} & t^{-1} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & -1 & 0 & 0 \\ 1 - t & 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 - t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t & -1 \end{pmatrix}.$$

El polinomio de Alexander de la presentación $P(3)$ es el determinante de esta matriz; que como el lector puede adivinar es justamente el producto de los polinomios de Alexander de P y del trefoil antes obtenidos.

$$\Delta_{P(3)}(t) = (2t^2 - 2t + 1)(t^2 - t + 1) = \Delta_P(t)\Delta_{3_1}(t).$$

Como podemos notar el coeficiente principal es 2, y el coeficiente del sumando constante es 1, luego no es simétrico y por tanto tal presentación de Wirtinger no es geométrica.

Esto mismo lo podemos hacer para los otros torus knots, obteniendo la presentación de Wirtinger $P(n)$, para cada n natural impar; y también sigue cumpliéndose que el coeficiente del grado más alto es 2 y el coeficiente del grado más bajo es 1. Además todos estos polinomios obtenidos, para cada torus knots, no son equivalentes entre sí (pues tienen distintos grados) y por tanto los grupos correspondientes no son isomorfos (usamos el mismo resultado que se usa en [Ro]). Como resultado obtenemos una familia de grupos no isomorfos entre sí, y todos no geométricos.

En la sección anterior se obtuvo una familia de presentaciones no geométricas pero con el polinomio de Alexander simétrico. Acá obtenemos otra familia (distinta) pero con el polinomio de Alexander no simétrico.

Notar también que para la construcción de tal familia de polinomios solo necesito de un polinomio no simétrico y después se pueden obtener infinitas con la ayuda de los torus knots (usando el método de pegar intervalos). Así entonces tenemos un método para construir muchas familias (infinitas) de presentaciones de Wirtinger abstracta, que no son presentaciones geométricas.

Capítulo 9

Bibliografía

- [Az] AZCURRA, PABLO, Nudos virtuales e invariantes. *Tesis de Licenciatura, Facultad de Cs. Exactas y Naturales. U.B.A.* 57 páginas, 2008.
- [Bo] BONAHOON, F., Low Dimensional Geometry, from Euclidean Surfaces to Hyperbolic Knots. *IAS, AMS*, **49**, 2009.
- [Co] COHEN, M., A course in simple-homotopy theory. *Graduate Text in Mathematics* **10**. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1970.
- [CF] CROWELL, R.; FOX, R.. *Introduction to Knot Theory*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1963.
- [DS] DOYLE, PETER G.; SETHI, SHIKHIN, Excursions through virtual knot space. Preliminary draft, *Version 8A1 dated 4 October 2019*, 18 páginas.
- [Ka] KAUFFMAN, L.H., Virtual knot theory. *European Journal of Combinatorics*, **20** 663–691, (1999).
- [Ka2] KAUFFMAN, L.H., Knots and Physics. *World Scientific*, 1991, 552 p.
- [Kaw] KAWAUCHI, AKIO, The Invertibility Problem on Amphicheiral Excellent Knots. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math Sci.* **55**, (1979), no. 10, 399–402.
Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 55 (1979), no. 10, 399–402.
- [Ku] KUPERBERG, GREG, What is a virtual link? *Algebraic & Geometric Topology* **3** (2003) 587–591.

- [Li] LIVINGSTON, C., Knot Theory. *Carus Math. Monographs, MAA*, **24**, 1993.
- [MI] MANTUROV, V.O.; ILYUTKO, D.P., Virtual Knots: The State of the Art. *World Scientific*, 2013 - Mathematics - 553 pages.
- [Rol] ROLFSEN, DALE,, Knots and Links. *AMS Chelsea Publishing*, 2003.
- [Ro] ROSEBROCK, STEPHAN, On the realization of Wirtinger presentations as knot groups. *J. of Knot Theory and its Ramifications*, **3** no. 2 (1994), 211–222.
- [Ve] VENDRAMIN, LEANDRO, Teoría combinatoria de nudos. *Notas de Curso. Serie B, Trabajos de Matemática, FAMAF - UNC*, Nro. **64**, Congreso eENA VII, La Falda, Córdoba, 2014
- [We] WEEKS, J.R., The Shape of Space. *Second Edition, Monographs and Text-books in Pure and Applied Mathematics*. **249**, Marcel Dekker, New York (2002).

Los abajo firmantes, miembros del Tribunal de evaluación de tesis, damos fe que el presente ejemplar impreso se corresponde con el aprobado por este Tribunal.