

---

# Teoría y simulaciones en Hidrodinámica ultrarrelativista y Electrodinámica no lineal

Marcelo Enrique Rubio

---

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía, Física  
y Computación como parte de los requerimientos para acceder  
al grado de

Doctor en Física

de la

Universidad Nacional de Córdoba



**Director:** Dr. Oscar A. Reula

Marzo de 2019

©FaMAF – UNC



Teoría y simulaciones en Hidrodinámica ultrarrelativista y Electrodinámica no lineal, por Marcelo Enrique Rubio. Se distribuye bajo una licencia Creative Commons Atribución-NoComercialCompartirIgual 4.0 Internacional.







# Resumen

Esta tesis se dedica al estudio de ciertos sistemas hiperbólicos en el marco de la Relatividad General. La herramienta fundamental que empleamos a tal fin es la teoría de ecuaciones en derivadas parciales, con particular énfasis en aquellas condiciones algebraicas que permiten estudiar el problema de valores iniciales correspondiente a cada sistema.

En primer lugar, estudiamos en detalle el problema de valores iniciales de una extensión no lineal del Electromagnetismo clásico, conocida como *Electrodinámica Force-Free* (EFF). Las ecuaciones que gobiernan la EFF describen la dinámica de un plasma de muy baja densidad, en escenarios astrofísicos como las cercanías del horizonte de eventos de un agujero negro rotante. En dichas regiones, la baja densidad del plasma hace que los campos magnéticos dominen su dinámica, siendo posible una descripción puramente electromagnética del sistema. En este proyecto, formulamos la teoría en términos de dos potenciales escalares, conocidos como *potenciales de Euler*. La facilidad de esta formulación radica en que, al ser éstas las únicas variables dinámicas del sistema, se provee un escenario óptimo para su implementación numérica. Sin embargo, demostramos aquí que dicha formulación no resulta fuertemente hiperbólica; i.e., el sistema descrito por estas ecuaciones no posee un problema de valores iniciales bien formulado, no pudiendo garantizarse unicidad ni continuidad durante la evolución [1]. De este modo, contribuimos a conocer que esta formulación de la EFF no resulta conveniente para simulaciones numéricas.

En segundo lugar, desarrollamos una teoría simétrico-hiperbólica que permite describir la dinámica de fluidos relativistas ultraveloces considerando efectos disipativos hasta segundo orden [2]. Este trabajo, junto a su correspondiente implementación numérica, constituye el proyecto central de la tesis, dado que hasta el momento no se cuenta con una teoría hiperbólica que permita una descripción precisa de fluidos disipativos relativistas, prescindiendo de aproximaciones como aquellas propuestas por Israel-Stewart. Basados en el enfoque de Geroch, Lindblom y Pennisi para teorías de tipo *divergencia*, restringimos nuestro estudio al caso de fluidos *ultrarrelativistas*, con el fin de contribuir a la descripción de sistemas como gases de fotones, o procesos de

---

colisión de elementos pesados (como quarks y gluones). Matemáticamente, estos sistemas obedecen ecuaciones de primer orden altamente no lineales, a las cuales les imponemos simetría de invariancia ante transformaciones conformes de la métrica de fondo. El desarrollo de la teoría se basa en la obtención de una única familia de funciones generatrices que contienen toda la información de la dinámica del fluido, las cuales sólo dependen de un campo vectorial y un campo tensorial simétrico y sin traza. Esta familia está parametrizada por tres constantes libres, cada una asociada a un orden de disipación. Es a partir de dicha función que resulta posible describir efectos disipativos hasta segundo orden, como flujos de calor, contribuciones por shear y vorticidad al tensor de energía-momento y corrientes de entropía. Como es bien conocido en la literatura, las teorías disipativas a primer orden presentan inestabilidades genéricas, por lo que la inclusión de términos de segundo orden resulta esencial para obtener una teoría simétrico-hiperbólica (al menos cerca del equilibrio). En este trabajo proveemos una condición suficiente a tal fin.

En tercer lugar, abordamos el problema de la implementación numérica de la teoría de fluidos desarrollada en esta tesis, lo que resulta en sí un problema no trivial [3]. Para ello, estudiamos el sistema de ecuaciones dinámicas visto como un sistema de leyes de conservación con una fuente externa. Encontramos necesario realizar un cambio de variables que permita llevar aquellas variables abstractas (las cuales fueron útiles para construir la teoría) a las variables físicas conservativas (variables de evolución en la formulación conservativa), mostrando que esto puede realizarse en forma analítica sólo parcialmente. Una vez obtenidas las ecuaciones y los flujos, implementamos el método de Kurganov–Tadmor para el tratamiento y propagación de choques. En primer lugar, a modo de testeo general, estudiamos el caso del fluido ideal, que resulta de relevancia para entender el caso disipativo, dado que sus soluciones constituyen los estados de equilibrio de la teoría completa. Finalmente, desarrollamos simulaciones para el caso disipativo, pudiendo así evaluar la validez del código en regímenes disipativos más intensos.

**Palabras clave:** *Sistemas hiperbólicos sobre espacios curvos, Hidrodinámica Relativista, leyes de conservación, Electrodinámica Force-Free.*

**PACS:** 02.30.Jr, 02.70.-c, 47.75.+f, 94.05.-a

# Abstract

This thesis deals with the study of certain hyperbolic systems within the framework of General Relativity. The fundamental tool used for this purpose is the theory of partial differential equations, with particular emphasis on those algebraic conditions that allow the study of the initial value problem of the corresponding systems.

In a first project, we study in detail the initial value problem of a non-linear extension of classical Electromagnetism, known as *Force-Free Electrodynamics* (FFE). The FFE equations describe the dynamics of a very low-density plasma in astrophysical scenarios such as the vicinity of the event horizon of a rotating black hole. In these regions, the low density of the plasma implies the dominance of magnetic fields into their dynamics, making possible a purely-electromagnetic description of the system. In this project, we formulate the theory in terms of two scalar potentials, known as *Euler's potentials*. The ease of formulating this theory by this way lies in the fact that, since these are the only dynamical variables of the system, an optimal scenario for its numerical implementation could be provided. However, we show here that this formulation does not turn out to be strongly hyperbolic, i.e., the system described by these equations does not have a well-posed initial value problem, not being able to guarantee uniqueness or continuity during the subsequent evolution. In this way, we contribute to know that this formulation of the FFE is not convenient for numerical simulations.

Secondly, we develop a symmetric-hyperbolic theory with the aim to describe the dynamics of ultra-relativistic fluids considering dissipative effects up to second order in dissipative variables. This project, together with its corresponding numerical implementation, constitutes the central part of the thesis given that, to our knowledge, there is no a hyperbolic theory that allows an accurate description of dissipative fluids, without taking into account the approach proposed by Israel-Stewart. Based on Geroch, Lindblom and Pennisi's work on *divergence-type theories*, we restrict our study to the case of *ultrarelativistic fluids*, in order to contribute to the description of systems such as photon gas, or heavy-ion collisions (like quarks and gluons). Mathematically, these

---

systems obey highly non-linear first-order equations, to which we impose invariance symmetry under conformal transformations of the background metric. The development of the theory is based on obtaining a single family of generating scalar functions that contain all the information of the fluid dynamics, which only depends on a vector field and a symmetric traceless tensor field. This family is parameterized by three free parameters, each one associated with a different dissipation order. From this function it is possible to describe dissipative effects up to second order, like heat fluxes, contribution by shear and vorticity in the energy-moment tensor and entropy currents. The inclusion of second-order terms is essential for the theory to be symmetric-hyperbolic (at least near equilibrium), since it is well known from the literature that first-order theories provide generic instabilities. The theory proposed in this thesis provides, thus, a sufficient condition in order to guarantee well-posedness to that end.

Finally, we address the problem of the numerical implementation of the theory developed in this thesis, which results in itself in a highly-non-trivial problem. For this, we study the system of dynamic equations seen as a system of conservation laws with an external source. We found it necessary to make a change of variables that allows to take those abstract variables (which were useful to construct the theory) to the conservative physical variables (evolution variables in the conservative formulation), showing that this cannot be done in a purely analytic way. Once we obtain these flows and set it in the dynamical equations, we implement the centered Kurganov–Tadmor method, suitable for studying shock propagation. As a general test, we first focus our study in the case of the ideal fluid, simulations that are relevant in order to understand the dissipative case, since the solutions that describe the perfect fluid constitute the equilibrium states of the complete theory. Finally, we develop simulations for the dissipative case, thus being able to evaluate the validity of the numerical code within more intense dissipative regimes.

**Keywords:** *Hyperbolic Systems on curved spacetimes, Relativistic Hydrodynamics, systems of conservation laws, Force-free Electrodynamics.*

---

*A quienes fueron y son mis grandes maestros.  
En memoria de Sergio Dain.*



---

## *Agradecimientos*

Esta tesis representa la culminación de una etapa muy importante de mi carrera científica, la cual no podría haber sido posible sin la presencia y el apoyo de muchas personas e instituciones.

En primer lugar quiero agradecer a mi director, Oscar Reula, por abrir siempre sus puertas para entablar eternas discusiones, por la paciencia infinita y por brindarme con tanta generosidad todo su conocimiento. ¡Gracias Leco!

A los miembros del tribunal: Esteban Calzetta, Omar Ortiz y Omar Osenda, por su lectura detallada, su evaluación constructiva y por corregir el manuscrito. A mi comisión asesora: Eugenia Gabach, Orlando Billoni y Oscar Reula; por acompañarme durante el período del Doctorado, seguir mis avances y darme sugerencias siempre constructivas.

A todo el Grupo de Relatividad de FaMAF, que me deja los mejores profes que tuve en la carrera, excelentes compañeros y grandes amigos. Quisiera agradecer especialmente a Gustavo Dotti y Sergio Dain, por su valioso legado y por ser ejemplos a seguir, no solo en docencia e investigación, sino también en calidad humana.

Al Perimeter Institute, por recibirme tan generosamente durante mis estancias de investigación; al Strong Gravity Group, y en especial a Luis Lehner y Will East, con quienes compartí gratas experiencias y muchas horas de trabajo en conjunto. A todos ellos, ¡gracias!

A toda la gran comunidad de FaMAF: autoridades, docentes, no docentes, colegas y estudiantes. Por hacer de la facu un espacio único y tan especial.

A mis amigos y hermanos de la vida, por estar siempre, a pesar de mis ausencias. Por apoyar mi camino en la ciencia y por haber contribuído durante este tiempo con momentos únicos. A los grandes amigos que me dio el doctorado; en especial a Ana, Bernardo y José; y a Rocío e Iván, los mejores compañeros de oficina!

A mis padres y mi hermano, por darme siempre todo y sin pedir nada a cambio; por ser pilares en mi vida y por leer cada hoja de este manuscrito, a pesar de no entender muchas ecuaciones! Su presencia y consejos hicieron de este período algo más ameno y llevadero.

A las instituciones que apoyaron económicamente mi Doctorado: a la Universidad Pública, al CONICET y al CIN. Finalmente, a aquellas que financiaron mis estadías en el exterior: Max Planck Institute for Gravitational Physics, Potsdam University, German Physical Society, Trinity College (Dublin), Perimeter Institute, y Humboldt Foundation.







# Índice general

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. Introducción</b>  | <b>21</b> |
| 1.1. Motivaciones . . . . .                                       | 21        |
| 1.2. Resultados principales . . . . .                             | 25        |
| 1.3. Estructura de la tesis . . . . .                             | 28        |
| 1.4. Notación y convenciones . . . . .                            | 29        |
| <b>2. Sistemas hiperbólicos cuasilineales</b>                     | <b>31</b> |
| 2.1. Sistemas lineales de primer orden . . . . .                  | 32        |
| 2.2. Sistemas cuasilineales . . . . .                             | 36        |
| 2.2.1. Formulación covariante de Geroch . . . . .                 | 37        |
| 2.3. Leyes de conservación . . . . .                              | 38        |
| 2.3.1. Condiciones de Rankine-Hugoniot . . . . .                  | 40        |
| 2.3.2. Condiciones de entropía y ondas de choque . . . . .        | 41        |
| <b>3. Electrodinámica Force-Free en potenciales de Euler</b>      | <b>43</b> |
| 3.1. Introducción . . . . .                                       | 43        |
| 3.2. Electrodinámica Force-Free . . . . .                         | 45        |
| 3.2.1. Hoja magnética . . . . .                                   | 46        |
| 3.3. Potenciales de Euler y grados de libertad internos . . . . . | 48        |
| 3.4. Ecuaciones de evolución . . . . .                            | 50        |
| 3.5. Hiperbolicidad y estructura característica . . . . .         | 51        |
| 3.5.1. Ecuaciones características . . . . .                       | 52        |
| 3.6. Sistema equivalente a primer orden . . . . .                 | 54        |
| 3.7. Falla del criterio algebraico de Kreiss . . . . .            | 57        |
| 3.8. Pérdida de continuidad en la evolución . . . . .             | 58        |
| <b>4. Teoría de fluidos conformes relativistas</b>                | <b>63</b> |
| 4.1. Introducción . . . . .                                       | 63        |
| 4.1.1. Fluidos conformes . . . . .                                | 65        |
| 4.2. Teorías conformes de tipo divergencia . . . . .              | 66        |
| 4.3. Invariancia conforme . . . . .                               | 69        |

|           |  |            |
|-----------|--|------------|
| 4.3.1.    | Transformaciones conformes . . . . .                             | 69         |
| 4.3.2.    | Transformación de las variables dinámicas . . . . .              | 70         |
| 4.3.3.    | Peso conforme . . . . .  | 72         |
| 4.4.      | Fluido ideal y estados de equilibrio . . . . .                   | 72         |
| 4.4.1.    | Estados de equilibrio . . . . .                                  | 75         |
| <b>5.</b> | <b>Hiperbolicidad de la teoría disipativa a segundo orden</b>    | <b>77</b>  |
| 5.1.      | Contribución a primer orden . . . . .                            | 77         |
| 5.1.1.    | Flujo de calor y una ley de tipo Fourier . . . . .               | 81         |
| 5.1.2.    | Densidad de corriente de entropía . . . . .                      | 83         |
| 5.1.3.    | Viscosidad de <i>shear</i> . . . . .                             | 84         |
| 5.2.      | Contribución a segundo orden . . . . .                           | 85         |
| 5.2.1.    | Tensor de energía–momento . . . . .                              | 88         |
| 5.2.2.    | Relaciones constitutivas a segundo orden . . . . .               | 90         |
| 5.2.3.    | Contribución a la densidad de entropía . . . . .                 | 92         |
| 5.3.      | Hiperbolicidad de la teoría completa . . . . .                   | 93         |
| 5.3.1.    | Teorema principal . . . . .                                      | 94         |
| <b>6.</b> | <b>Implementación numérica del fluido disipativo</b>             | <b>97</b>  |
| 6.1.      | Variables “conservativas” vs. “abstractas” . . . . .             | 97         |
| 6.2.      | El fluido disipativo ultrarrelativista . . . . .                 | 101        |
| 6.2.1.    | Descomposición 3 + 1 y ecuaciones de evolución . . . . .         | 101        |
| 6.2.2.    | Variables dinámicas . . . . .                                    | 102        |
| 6.2.2.1.  | Tensor energía–momento . . . . .                                 | 103        |
| 6.2.2.2.  | Tensor constitutivo . . . . .                                    | 104        |
| 6.2.3.    | El problema de la inversión . . . . .                            | 105        |
| 6.3.      | Soluciones para un fluido unidireccional . . . . .               | 107        |
| 6.3.1.    | Inversión de $\{c_i\}$ . . . . .                                 | 109        |
| 6.3.2.    | Expresiones para invertir $e$ y $S$ . . . . .                    | 111        |
| 6.4.      | Resultados . . . . .   | 112        |
| 6.4.1.    | Desarrollo del código numérico . . . . .                         | 112        |
| 6.4.2.    | Testeando la convergencia . . . . .                              | 114        |
| 6.4.3.    | Testeando efectos disipativos . . . . .                          | 116        |
| <b>7.</b> | <b>Discusión y perspectivas futuras</b>                          | <b>119</b> |
| <b>A.</b> | <b>Datos iniciales anómalos</b>                                  | <b>123</b> |
| <b>B.</b> | <b>Descomposiciones tensoriales y algunas identidades útiles</b> | <b>125</b> |
| B.1.      | Descomposición de tensores de segundo y tercer rango . . . . .   | 125        |
| B.2.      | Relaciones en el equilibrio . . . . .                            | 127        |

|  |            |
|--|------------|
| <b>C. Detour por el fluido ideal: el rol de la ecuación de estado</b>                  | <b>129</b> |
| C.1. Radiación pura . . . . .  | 130        |
| C.2. Fluido politrópico . . . . .  | 133        |
| C.2.1. Incluyendo una corriente conservada . . . . .                                   | 133        |
| C.2.2. Implementación numérica en 1-D . . . . .  | 134        |
| <b>D. Método de Kurganov–Tadmor</b>  | <b>137</b> |
| <b>E. Estimación de los coeficientes de transporte para la fuente<br/>  disipativa</b> | <b>139</b> |







# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Motivaciones

Típicamente, el entendimiento clásico de la mayoría de los fenómenos físicos universales suele organizarse en “grandes sistemas” tales como el electromagnetismo, fluidos, gravitación, campos de Klein-Gordon, entre otros. La manera moderna de entenderlos pone de manifiesto varias características que estos “grandes sistemas” comparten, y la avidez de englobar a todos ellos en una misma entidad fundamental concibe a su vez un tratamiento sistemático de los campos y de las ecuaciones que surgen en su descripción. Estas características comunes están íntimamente vinculadas a la estructura matemática sobre la cual se definen. Algunos sistemas físicos están determinados de manera precisa por cierto conjunto de campos (que denotaremos en general como  $\varphi^\alpha$ ), los cuales están definidos sobre cierto espaciotiempo  $(\mathcal{M}, g_{ab})$  (el cual puede ir cambiando a medida que el sistema evoluciona) y poseen una interpretación geométrica precisa dada por su naturaleza<sup>1</sup> (como campos escalares, tensoriales o espinoriales sobre  $\mathcal{M}$ ). La dinámica de estos campos está determinada por cierto sistema de ecuaciones, (en general,  $\mathcal{G}[\varphi^\alpha] = 0$ , para cierto operador diferencial de primer orden en derivadas,  $\mathcal{G}[\cdot]$ ), el cual viene acompañado de una formulación de valores iniciales. Los valores iniciales no pueden darse arbitrariamente en general, ya que deben satisfacer ciertas ecuaciones de *vínculo*; i.e., ecuaciones diferenciales en las que sólo aparecen derivadas espaciales, las cuales deben verificarse a cada tiempo. El problema de valores iniciales se define a partir de la prescripción del valor de los campos sobre alguna hipersuperficie espacial  $\Sigma \subset \mathcal{M}$ .

---

<sup>1</sup>Otros sistemas, como la geometría del espaciotiempo en Relatividad General, no están definidos sobre ninguna otra entidad más fundamental, y el entendimiento de su evolución dinámica resulta naturalmente menos intuitivo y más complejo.

En electromagnetismo, por ejemplo, la información de la dinámica de los campos está codificada en las componentes de un tensor antisimétrico de segundo rango,  $F^{ab}$ , que satisfacen (en espaciotiempos de cuatro dimensiones) un sistema de ocho ecuaciones lineales de primer orden (seis de evolución y dos de vínculo a cada tiempo):

$$\varphi^\alpha \leftrightarrow F^{ab}; \quad \mathcal{G}[\varphi^\alpha] = 0 \leftrightarrow \begin{cases} \nabla_a F^{ab} = 0 \\ \nabla_{[a} F_{bc]} = 0 \end{cases};$$

donde  $\nabla$  denota la derivada covariante  $g$ -compatible.

La manera formal y precisa de formular estas cuestiones se conoce como *Problema de Cauchy* o *formulación de valores iniciales*. Este problema fue abordado por primera vez por J. Hadamard en 1908, haciendo uso de una formulación más débil que la que suele emplearse en la actualidad [4]. Años más tarde, Friedrichs, Kreiss, Lorenz y Geroch (entre otros) ampliaron la discusión y formalizaron algunos aspectos vinculados a estimaciones de las soluciones en términos de los datos iniciales, proveyendo además condiciones algebraicas necesarias (y muchas veces suficientes) para una *buena formulación* del problema [5, 6, 7, 8, 9].

Sin embargo, determinar con exactitud cuáles son las condiciones para que el problema de Cauchy de cualquier teoría física tenga sentido, constituye hoy en día un área de investigación sumamente activa en física teórica. Una condición fundamental es, sin dudas, la *existencia* de solución. También lo es la *unicidad*, que aunque a menudo esencial para establecer resultados matemáticos, está vinculada a dos aspectos físicos sustanciales. El primero de ellos es el poder de *predictibilidad* que debe tener toda teoría que pretenda describir una situación física realista; el segundo, es el llamado *principio de causalidad*, el cual establece que toda teoría física que describa procesos de evolución debe respetar la *estructura causal* del espaciotiempo sobre el cual se define. En particular, es esta nueva manera de entender la física la que sugiere que cualquier sistema de evolución descrito por campos físicos en Relatividad General debe satisfacer ecuaciones de evolución de tipo *hiperbólicas*.

Dentro de la amplia y basta teoría de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, la clase de ecuaciones *hiperbólicas* resulta en particular una de las más diversamente aplicables, además de resultar matemáticamente interesante y a su vez técnicamente sutil. Los sistemas hiperbólicos surgen como modelos básicos en muchas aplicaciones, y especialmente se invocan para describir fenómenos físicos en los que hay involucradas leyes de conservación y propagación *finita* de la información. Aunque la lista de sistemas que están descritos por ecuaciones hiperbólicas es extensa y de lo más variada, la mayoría de ellos resultan en cierta medida aproximados: un modelo realista debiera incluir también procesos disipativos (por ejemplo, en mecánica de fluidos) o fenómenos de

orden superior, y por lo tanto ser (al menos parcialmente) parabólicos o “dispersivos”. Sin embargo, los fenómenos a gran escala generalmente se rigen por la parte hiperbólica (ó más específicamente, la *parte principal*), la cual contiene información a cerca de las velocidades de propagación de los diferentes modos físicos.

Si bien a menudo surge el problema de determinar cuáles son las propiedades matemáticas que garantizan existencia, unicidad, causalidad y muchas veces *suavidad* de la solución, existen varios problemas realistas que no necesariamente admiten soluciones suaves, o no es posible describirlos naturalmente por soluciones suaves. Algunos ejemplos están vinculados con fenómenos tales como la generación y propagación de ondas de choque, ondas de rarefacción o inestabilidades genéricas, los cuales deben ser estudiados desde un marco genuinamente no lineal. La aparición de ondas de choque está estrechamente relacionada a la *pérdida de regularidad* de la solución a tiempo finito, siendo la no-linealidad del sistema lo que provoca que las velocidades características de onda dependan del estado en cada instante de tiempo. Toda solución no constante experimenta, entonces, algo así como un “adelantamiento” de la onda, lo que resulta en la aparición de discontinuidades en las derivadas. Luego de la formación de estas ondas, las soluciones no recuperan dicha suavidad, lo que motiva nuevas preguntas: ¿existe una teoría de ecuaciones para soluciones que no son suaves?; ¿resulta posible entender este tipo de discontinuidades en términos de soluciones lo suficientemente *débiles*? Y si esto fuera así, ¿sería posible lograrlo de una manera única y físicamente realista? Algunas de las respuestas a estos interrogantes vienen proporcionadas por la *teoría de distribuciones* o *soluciones generalizadas*, que de alguna manera constituyen la contraparte matemática de los principios de *conservación* en física. La conservación de la masa, el momento y la energía en Mecánica, o las leyes de Ampère y Faraday en Electromagnetismo cobran sentido siempre y cuando los campos permanezcan *acotados* localmente. Sin embargo, dichas soluciones débiles no son únicas, lo que parece ir en contra del determinismo que caracteriza a los sistemas hiperbólicos en física. Esta aparente contradicción puede resolverse mediante el uso de lo que se conoce como *condiciones de entropía*, con una prominente reminiscencia del Segundo principio de la Termodinámica.

Esta tesis se encarga de explorar de qué manera es posible extender algunos sistemas clásicos conocidos para lograr una descripción un tanto más realista y compleja de ciertos fenómenos, en el marco de la Relatividad General. En particular, estudiamos la dinámica de ecuaciones no-lineales, empleando cuando sea posible resultados de la teoría lineal. Más específicamente, abordaremos el análisis de dos sistemas hiperbólicos particulares.

En primer lugar, estudiaremos una extensión de la Electrodinámica de Max-

well que surge en la descripción de fenómenos astrofísicos a gran escala, con la presencia de plasmas magnéticamente dominados. Es conocido que los campos magnéticos predominan en gran parte de nuestro universo visible, haciéndose presentes en sistemas desde estrellas, galaxias y medios interestelares hasta incluso cúmulos de galaxias. Dichos campos son detectados mediante emisión sincrotrón, polarización o rotación de Faraday en radiofrecuencia (entre 0,2 y 10 GHz) [10]. Sin embargo, en la actualidad no existe una comprensión completa y absoluta acerca de su origen o evolución. Se sospecha que pueden originarse en la transición de fase durante el universo temprano [11, 12], en la formación de las primeras estrellas, agujeros negros o supernovas, ó incluso como resultado de fluctuaciones en el campo gravitacional [13, 14]. La contribución que presentamos aquí forma parte de un proyecto de investigación más amplio, cuyo objetivo es encontrar formulaciones plausibles para implementar numéricamente esta clase de sistemas.

En segundo lugar, desarrollamos una teoría simétrico-hiperbólica de fluidos relativistas disipativos. Por fluidos relativistas nos referimos a aquellos sistemas en los que el factor de Lorentz excede apreciablemente a la unidad, ó también a sistemas en los que tanto el campo gravitatorio generado por el fluido como aquel de fondo son muy intensos.

La Hidrodinámica relativista predomina en diferentes campos de la física teórica. En física de Plasmas, por ejemplo, la materia que constituye discos de acreción en las cercanías de objetos compactos emite ondas magnetoacústicas cuyas velocidades son del orden de  $10^3 \text{ Km/seg}$  [15]. En Cosmología y Astrofísica, se emplean sistemas de fluidos relativistas para describir fenómenos vinculados a la evolución de perturbaciones en la densidad del medio cósmico, en modelos de formación de galaxias, en el colapso estelar de estrellas masivas o en la dinámica de coalescencia de binarias de objetos compactos y hasta en la descripción de la dinámica de núcleos activos de galaxias y jets astrofísicos. Estos últimos sistemas constituyen, sin duda, la evidencia observacional más espectacular de flujos relativistas, siendo la energía gravitacional la principal fuente de energía liberada por la masa acremada [16, 17]. Las observaciones parecen indicar que aquellas fuentes más luminosas desarrollan jets de baja disipación y velocidades cercanas a la de la luz, mientras que para aquellas menos luminosas el flujo es más lento y disipativo, por lo que una teoría disipativa de fluidos resulta relevante para la descripción en este régimen. Por último, en el campo de la Física Nuclear, la hidrodinámica relativista es empleada para la descripción de colisión de materia hadrónica. Las ecuaciones resultan útiles para la descripción de la materia, mientras que los detalles de las interacciones nucleares están incorporados en la ecuación de estado considerada [18].

La hidrodinámica relativista se fundamenta esencialmente en las leyes bási-

cas de conservación de la masa, el momento y la energía. Sin embargo, existen grados de libertad en ciertos procesos en los que el análisis desde esta perspectiva resulta más complejo (en una colisión de iones pesados, por ejemplo, el número de partículas puede variar en varios órdenes de magnitud). La termodinámica también juega un rol crucial en la descripción. Es por ello que los tiempos de duración de los procesos de colisión deben suponerse lo suficientemente largos como para que el equilibrio termodinámico local pueda establecerse (propiedad que no siempre se verifica en procesos realistas).

Las simulaciones numéricas de fluidos relativistas en cualquiera de los escenarios anteriormente descritos, involucra la integración no sólo de las ecuaciones dinámicas provistas por la Hidrodinámica Relativista. Por ejemplo, al simular jets astrofísicos deben considerarse las ecuaciones de la Magnetohidrodinámica en algún régimen particular y asumiendo ciertas simetrías, mientras que para el colapso gravitacional, dichas ecuaciones hidrodinámicas deben acoplarse a las ecuaciones de campo de Einstein. En esta tesis proponemos una implementación numérica de la teoría de fluidos desarrollada, y empleamos el esquema de Kurganov–Tadmor para un flujo que se mueve en una dirección espacial.

A continuación exponemos más específicamente los resultados y contribuciones principales que contiene esta tesis.

## 1.2. Resultados principales

Los resultados de esta tesis pueden agruparse en tres grandes partes.

En primer lugar, estudiamos la dinámica y geometría de la electrodinámica Force-Free en potenciales de Euler. Mas específicamente, probamos que dicho sistema de ecuaciones no resulta fuertemente hiperbólico, lo que significa que el sistema no posee un problema de valores iniciales bien puesto. Para ello, estudiamos la validez de una condición necesaria y suficiente provista por Kreiss para que un sistema de primer orden resulte fuertemente hiperbólico [19]. Dado que el sistema en cuestión es de segundo orden, una reducción equivalente a primer orden resulta necesaria en este caso<sup>2</sup>. Luego, damos una demostración formal de la pérdida de continuidad en la evolución con respecto una sucesión de datos iniciales convenientemente elegida, la cual es convergente y acotada, y además mostramos cómo se desestabiliza el sistema al excitar los modos “malos” de la teoría, para un dato inicial particular.

---

<sup>2</sup>Alternativamente, es posible emplear resultados de la teoría de ecuaciones de segundo orden. En este trabajo optamos por usar la teoría de primer orden, ya que cualquier sistema de orden superior puede ser reducido a uno de primer orden.

En segundo lugar, abordamos el desarrollo de una teoría simétrico-hiperbólica que permite la descripción y evolución de fluidos disipativos conformes en el marco de la Relatividad General. Este constituye el proyecto central de la tesis. Típicamente, las ecuaciones de conservación para teorías de fluidos relativistas admiten como variables dinámicas ciertas componentes del tensor energía-momento  $T^{ab}$  del fluido, y su cuadrivelocidad (que pesada con la densidad de partículas, constituye la *corriente de partículas*,  $N^a$ ). A lo largo de la tesis, haremos referencia a estas variables como las *variables físicas* de la teoría, ya que es a partir de ellas que naturalmente se computan cantidades físicas como densidades, presiones, tensiones, etc. Sin embargo, los resultados aquí expuestos tienen origen en la obtención de una familia 3-paramétrica de funciones generatrices

$$\chi(\mu, \nu, \psi) = \chi^0(\mu) + \chi^1(\mu)\nu + \sum_{i=0}^3 \chi_i^2(\mu)\psi^i, \quad (1.1)$$

que contienen toda la información del fluido, considerando efectos disipativos hasta segundo orden. Esta familia depende de manera suave de un nuevo conjunto de variables dinámicas, que son un campo co-vectorial  $\xi_a$  y un campo tensorial simétrico y sin traza  $\xi_{ab}$ , ambos definidos sobre un espaciotiempo de fondo que suponemos está fijo (aproximación *sin backreaction*). Estas variables resultan útiles para una descripción formal y precisa de la teoría mediante la cual se tienen resultados de hiperbolicidad y *well-posedness* en las cercanías del equilibrio. Es por ello que nos referimos a este segundo conjunto de variables como las *variables abstractas* que describen al fluido. No obstante, es a partir de dicha familia de funciones generatrices que es posible caracterizar completamente cualquier teoría de fluidos de tipo divergencia, obteniendo resultados compatibles con los de la literatura y extendiendo a fluidos disipativos. Esta familia de funciones admite tres parámetros constantes libres,  $\{\chi^0_0, \chi^1_0, \chi^2_0\}$ , cada uno de ellos asociado a un orden de disipación. Además, abordamos el problema de valores iniciales de la teoría a segundo orden, y demostramos que dicha teoría resulta simétrico-hiperbólica cerca del equilibrio, si uno de los parámetros de la familia ( $\chi^2_0$ ) se elige lo suficientemente grande.

Por último, nos dedicamos al problema de la implementación numérica de las ecuaciones de la teoría desarrollada para fluidos conformes. Esta implementación es por medio del método de Kurganov–Tadmor (ver Apéndice D) para la evolución y tratamiento de soluciones generalizadas (ondas de choque) para ecuaciones cuasi-lineales en forma de conservación, y con la presencia de una fuente. La estructura del sistema de ecuaciones es la siguiente:

$$\partial_t u^\alpha + \partial_i f^{i\alpha}(u^\beta) = q^\alpha(u^\beta), \quad (1.2)$$

donde  $u^\alpha$  es el conjunto de variables dinámicas conservativas de la teoría, y  $f^{i\alpha}$  y  $q^\alpha$  son funciones que dependen de dichas variables, conocidas como *funciones de flujo* y *fuentes* respectivamente. Si bien la fuente es en general conocida, no resulta para nada directo obtener expresiones explícitas de los flujos en términos de las variables dinámicas escogidas para evolucionar. De hecho, y como veremos en esta tesis, no siempre es posible hacerlo analíticamente, y en dichos casos es necesario recurrir a métodos iterativos de alta precisión. Si bien esta dificultad es bien conocida en la literatura sobre el tratamiento numérico de las ecuaciones conservativas en hidrodinámica, nos encargamos de explorar en qué medida la teoría aquí desarrollada puede arrojar información útil para encontrar estos flujos, aunque más no sea en el caso ultrarrelativista (conforme). El primer paso para la implementación numérica consiste en tomar las ecuaciones covariantes de conservación de los tensores de energía-momento y constitutivo, y llevarlas a la forma dada en (1.2). Luego, ver si es posible una inversión analítica de al menos parte de las variables en términos de las demás, para obtener así nuevas expresiones para las variables abstractas en términos de las variables físicas. De este modo, es posible llegar a ecuaciones trascendentes para los flujos, las cuales son resueltas en forma numérica, recurriendo a métodos iterativos como el de Newton–Raphson. El código que desarrollamos es testado por medio de la adición de una fuente numérica externa a las ecuaciones dinámicas, resolviendo efectivamente el sistema aumentado

$$\partial_t u^\alpha + \partial_i f^{i\alpha}(u^\beta) = q^\alpha(u^\beta) + r^\alpha, \quad (1.3)$$

donde  $r^\alpha$  es una fuente numérica externa que le agregamos al sistema original. La idea es proponer una solución (plausible)  $u_{exact}^\alpha$  de (1.3), calcular las correspondientes fuentes  $r^\alpha$  y comparar la evolución numérica con dicha solución exacta. Finalmente, estudiamos cómo se modifica la evolución de un dato suave al incorporar efectos disipativos, comparando con el caso del fluido ideal (ecuaciones conservativas con  $q^\alpha = 0$ ). Parte de los resultados se encuentran publicados (o están pronto a ser enviados a publicar) en los siguientes trabajos:

1. *Ill posedness of Force-Free Electrodynamics in Euler Potentials*. O. A. Reula, M. E. Rubio. Phys. Rev. D **95**, 064005. 2017.
2. *Hyperbolic theory of relativistic conformal dissipative fluids*. L. Lehner, O. A. Reula y M. E. Rubio. Phys. Rev. D **97**, 024013. 2018.
3. *Numerical implementation of the conformal dissipative relativistic fluid equations: the one-dimensional tube*. M. E. Rubio y O. A. Reula. En redacción.

### 1.3. Estructura de la tesis

Esta tesis está compuesta por siete capítulos y cinco apéndices.

- En el *capítulo 2* presentamos un breve resumen de algunos resultados básicos de la teoría de sistemas cuasilineales que emplearemos a lo largo de toda la tesis, haciendo particular énfasis en sistemas de primer orden. Particularizamos en el enunciado de resultados sobre hiperbolicidad de sistemas cuasilineales a coeficientes constantes, los cuales constituyen el punto de partida para entender el problema de valores iniciales de sistemas más generales. Revisamos las nociones de hiperbolicidad (débil, fuerte y simétrica) y de well-posedness, y finalmente revisamos las nociones básicas de sistemas de leyes de conservación, soluciones débiles, ondas de choque, y condiciones de entropía.
- El *capítulo 3* está dedicado al estudio del problema de valores iniciales de la Electrodinámica Force-Free en Potenciales de Euler. Luego de presentar el sistema de estudio y sus propiedades algebraicas y geométricas, introducimos los potenciales de Euler como variables dinámicas y analizamos la estructura característica del sistema. Finalmente, centramos el estudio en el problema de valores iniciales, argumentando que el sistema resulta débilmente hiperbólico en el sentido fuerte, lo que se obtiene considerando una reducción pseudodiferencial a primer orden de las ecuaciones dinámicas.
- Los capítulos 4 y 5 están dedicados a una propuesta teórica para la descripción de fluidos disipativos, y al estudio de su correspondiente problema de valores iniciales, respectivamente. Desarrollamos una teoría simétrico-hiperbólica que describe de manera completa la clase conforme de fluidos disipativos relativistas. Presentamos una caracterización exhaustiva de la familia de fluidos conformes en términos de una única función escalar maestra, la cual codifica efectos disipativos hasta segundo orden en magnitud. Esta formulación permite identificar los estados de equilibrio, como así también derivar relaciones constitutivas y una ley covariante de tipo Fourier para el flujo de calor correspondiente a la teoría de primer orden. Luego, presentamos el teorema principal de hiperbolicidad simétrica de la teoría en la vecindad de los estados de equilibrio.
- En el *capítulo 6* abordamos el problema de una implementación numérica concreta de la teoría presentada en los dos capítulos anteriores. Como expusimos en la sección anterior, este procedimiento resulta muy complejo en general, no pudiendo realizarse en forma puramente analítica y

requiriendo además mucho costo computacional. En este trabajo, consideramos un “tubo unidimensional” por el que se propaga el fluido, imponiendo a tal fin invariancia de rotaciones en el plano perpendicular a la dirección del flujo. Esto hace que el número de variables dinámicas se reduzca considerablemente, y los procesos de inversión de variables puedan ser efectuados. Una vez realizada la inversión (una parte analítica, y otra parte numérica), empleamos el método de Kurganov–Tadmor para la integración de las ecuaciones. Luego de testear el método para el caso del fluido ideal (sin disipación) empleando dos ecuaciones de estado distintas (politrópica y de radiación), analizamos las soluciones incorporando términos disipativos hasta segundo orden, estudiamos la convergencia del método y comparamos con el caso ideal.

- Por último, en el *capítulo 7* reportamos las conclusiones obtenidas a lo largo de la tesis, y mencionamos las líneas de trabajo futuras así como los problemas abiertos que resultan de esta memoria.

## 1.4. Notación y convenciones

A lo largo de toda la tesis emplearemos la signatura  $(-, +, +, +)$  para el tensor métrico  $g_{ab}$  del espaciotiempo en el que se desarrollan las teorías correspondientes. En los capítulos 4 y 5, denotaremos con  $d$  a la dimensión del espaciotiempo.

Además, utilizaremos un sistema de unidades tal que  $c = G = \hbar = k_B = 1$ , donde  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío,  $G$  la constante Universal de Gravitación de Newton,  $\hbar$  es la constante de Planck y  $k_B$  la constante de Boltzmann. En el capítulo 3 adoptaremos unidades gaussianas para las ecuaciones de Maxwell.

En general denotaremos con  $\partial_t$  a la derivada parcial respecto a la variable temporal  $t$ , y con  $\partial_i$  a la derivada parcial con respecto a la coordenada espacial  $x^i$ . Otras veces, optaremos por la notación  $f_{x_i}$  para la derivada parcial de  $f$  respecto a  $x_i$ .

Por último, emplearemos la notación de suma de Einstein, mediante la cual índices repetidos (uno en posición contravariante y el otro en posición covariante) se suman. Por ejemplo, si  $j = 1, 2$  ó  $3$ ,  $A^j B_j \equiv A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3$ .



## Capítulo 2

# Sistemas hiperbólicos cuasilineales

Uno de los conceptos fundamentales que surgen al estudiar la evolución de sistemas dinámicos a partir de teorías físicas es el de *hiperbolicidad*. El mismo engloba aspectos de la teoría que deben cumplirse incluso en los escenarios más fundamentales, y su comprensión lleva a responder preguntas sobre: existencia y unicidad de la solución, singularidad de la solución en función del dato inicial; preservación del decaimiento asintótico de la solución con respecto al del dato inicial, y estimaciones sobre el tiempo de existencia de la solución, entre otros. Muchos de estos aspectos están vinculados a la *continuidad* del mapa que va del conjunto de datos iniciales al conjunto de soluciones (con respecto a la topología considerada).

En Relatividad General, por ejemplo, la formulación ADM de las ecuaciones de campo no es única, dado que posible agregar una cantidad arbitraria de términos proporcionales a las ecuaciones de vínculo (las cuales deben satisfacerse a cada tiempo). Si bien todas ellas describen la misma solución física, sus propiedades matemáticas difieren considerablemente. Existen por supuesto infinitas formas de elegir qué formulación emplear a tal fin. Pero, ¿cuál de todas ellas se comportará mejor matemática y numéricamente? Históricamente, las elecciones del sistema más conveniente se basaron en propiedades acerca de la *hiperbolicidad* y [20], con el fin de obtener simulaciones numéricas estables y robustas.

En este capítulo se discuten algunos conceptos e ideas fundamentales sobre sistemas bien puestos en Física y Matemática. En particular, presentamos las nociones de hiperbolicidad débil, fuerte y simétrica para sistemas cuasilineales de primer orden. El material para el armado de este capítulo fue extraído fundamentalmente de los libros [19, 21, 22, 23, 9, 8, 24].

Comenzamos la discusión dando algunas motivaciones esenciales que pro-

vienen de estudiar sistemas más simples; aquellos a coeficientes constantes. Luego generalizamos para sistemas lineales cuyos coeficientes pueden depender de la solución punto a punto, extendiendo correspondientemente las definiciones. Finalmente, analizamos cómo se aplican estos conceptos en un caso particular de sistemas cuasilineales de primer orden: aquellos sistemas que describen leyes de conservación en Física. Damos además nociones de soluciones débiles (no diferenciables), y bajo qué condiciones dichas soluciones resultan útiles para describir fenómenos físicos asociados a la generación y propagación de ondas de choque en diversos escenarios de interés.

## 2.1. Sistemas lineales de primer orden

En esta sección consideramos sistemas de primer orden de la forma

$$\begin{cases} \partial_t u = A^i \partial_i u; \\ u(0, x) = f(x), \end{cases} \quad (2.1)$$

donde  $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^s$  es un campo al menos  $\mathcal{C}^1$ ,  $(t, x) \mapsto u(t, x)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$  coordenadas espaciales,  $\{A^i\}_{i=1}^n$  un conjunto de matrices complejas de entradas constantes y tamaño  $s \times s$  (siendo  $s$  la cantidad de variables dinámicas almacenadas en el campo  $u$ ), y  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^s$  un campo acotado. El *problema de Cauchy* o *problema de valores iniciales* para este sistema de ecuaciones consiste en encontrar una solución  $u(t, x)$  partiendo de cierto dato inicial  $u(0, x) = f(x)$ .

Nos interesa estudiar condiciones necesarias y suficientes para que el problema de Cauchy asociado a (2.1) sea *bien puesto*; esto es, bajo qué condiciones hay una solución única de (2.1) que dependa continuamente del dato inicial. Además, nos preguntamos si dichas condiciones también son válidas para sistemas más generales, como por ejemplo aquellos en los que las matrices  $A^i$  dependen uniformemente de  $u$ , o si el hecho de que algunas de dichas condiciones no se cumpla en el caso general implica necesariamente que tampoco se cumplirán en el caso a coeficientes constantes.

Restringiremos nuestro análisis a datos iniciales  $f$  para (2.1) que sean de la forma

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ik \cdot x} \widehat{f}(k) d^n k, \quad (2.2)$$

donde  $\widehat{f}(\cdot)$  es de soporte compacto. En este caso, existirá una única solución suave de (2.1), la cual está dada por

$$u(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ik \cdot x} e^{P(ik)t} \widehat{f}(k) d^n k, \quad (2.3)$$

donde  $P(ik) := iA^j k_j$  se conoce como el *símbolo principal* del sistema<sup>1</sup>.

**Definición 2.1.1** *El sistema (2.1) se dice bien puesto si admite una única solución suave en un entorno de  $t = 0$ , y dicha solución depende continuamente del dato inicial; esto es, existe una norma  $\|\cdot\|$  y dos constantes reales  $C, \alpha$  tales que, para todo dato inicial  $f$  del tipo (2.2) y  $t > 0$ , vale la siguiente desigualdad:*

$$\|u(t, x)\| \leq Ce^{\alpha t} \|f(x)\|. \quad (2.4)$$

La mayoría de las veces no resulta directo verificar que la desigualdad (2.4) se cumple para garantizar que el sistema en cuestión se comporta adecuadamente. Sin embargo, es posible caracterizar a estos sistemas dando condiciones puramente *algebraicas* para su *parte principal* (o símbolo), y chequear de esta manera que el problema de Cauchy correspondiente resulta o no bien puesto. Estudiar la *hiperbolicidad* de una teoría física significa analizar si estas condiciones algebraicas se verifican, y bajo qué suposiciones. Existen varias maneras de introducir el concepto de hiperbolicidad de estos sistemas. Intuitivamente, este concepto está asociado a sistemas de evolución que se comportan de manera “similar” a la ecuación de onda, la cual tiene velocidad de propagación finita de la información, o bien, dominio de dependencia acotado (finito).

Si bien existen varias nociones de hiperbolicidad (algunas más fuertes que otras), a continuación revisaremos sólo aquellas que serán esenciales a lo largo del desarrollo de esta tesis.

**Definición 2.1.2** *El sistema (2.1) se dice fuertemente hiperbólico si para cualquier covector  $k_c$ , la matriz  $\mathbb{A} := A^i k_i$  admite sólo autovalores reales y es diagonalizable.*

Del álgebra lineal, es sabido que toda matriz compleja  $A$  es diagonalizable con autovalores reales sí y sólo sí existe un *simetrizador*  $H$ , es decir, una forma bilineal definida positiva, tal que la composición  $HA$  resulta simétrica. Luego, a partir de la definición anterior se deduce que (2.1) resulta fuertemente hiperbólico *sí y sólo sí* para cada  $k_a$  hay una matriz  $H(k)$  tal que la composición  $H(k)\mathbb{A}$  resulta simétrica.

Si bien no siempre es fácil hallar (cuando existe) el simetrizador  $H(k)$ , esta técnica resulta útil para chequear que un sistema es fuertemente hiperbólico, pues a partir del simetrizador es posible construir un producto interno y por lo tanto una norma que proviene de dicho producto. En efecto, si definimos  $\langle v, w \rangle := v^\dagger H(k)w$ , resulta  $\|u\|^2 := \langle u, u \rangle$ . Luego, considerando el modo

<sup>1</sup>Referimos al lector al libro de Taylor [25] en el que la teoría pseudo-diferencial para sistemas de ecuaciones en derivadas parciales es tratada en detalle y con alto grado de rigurosidad.

$u(t, x) = u_o(t)e^{ikx}$ , se tiene  $\partial_t \|u\|^2 = 0$  como consecuencia de la simetría de  $H(k)\mathbb{A}$ .

Una posibilidad aún más interesante es que dicho simetrizador no dependa de  $k$ . Tenemos entonces la siguiente

**Definición 2.1.3** *El sistema (2.1) se dice simétrico hiperbólico si es posible encontrar un simetrizador común  $H$ ; esto es, independiente de  $k$ .*

La noción de hiperbolicidad simétrica es una condición suficiente, pero no necesaria para garantizar que el correspondiente problema de Cauchy resulte bien puesto. Sin embargo, la hiperbolicidad fuerte en el sentido de la definición 2.1.2 sí resulta necesaria, al menos para garantizar que la desigualdad (2.4) se satisfaga para alguna norma  $\|\cdot\|$ . En [19], por ejemplo, Kreiss proporciona un conjunto de resultados importantes que relacionan las nociones de hiperbolicidad fuerte y simétrica con la noción de well-posedness, reduciendo considerablemente el estudio del problema de Cauchy.

Revisamos a continuación algunos de dichos resultados, los cuales hemos condensado en los teoremas 2.1.1 y 2.1.2. Las demostraciones pueden verse en [19].

**Teorema 2.1.1** *El sistema (2.1) es bien puesto si y sólo si existen constantes  $C$  y  $\alpha$  tales que, para todo  $t > 0$  y para todo  $k \in \mathbb{R}^n$ ,*

$$|e^{P(ik)t}| \leq Ce^{\alpha t}, \quad (2.5)$$

donde  $|\cdot|$  es la norma matricial usual.

**Teorema 2.1.2** *Sea  $\mathbf{F}$  un conjunto de matrices  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  e  $I$  la matriz identidad  $n \times n$ . Entonces, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

- Existe una constante  $C_1$  tal que  $|e^{At}| \leq C_1$  para toda  $A \in \mathbf{F}$  y todo  $t \geq 0$ .
- Para toda  $A \in \mathbf{F}$  y todo  $s \in \mathbb{C}$  tal que  $\text{Re}(s) > 0$ , la matriz  $A - sI$  resulta no singular. Más aún, existe una constante  $C_2$  tal que

$$|(A - sI)^{-1}| \leq \frac{C_2}{\text{Re}(s)}, \quad A \in \mathbf{F}, \quad \text{Re}(s) > 0.$$

(Esta condición es conocida como **condición resolvente**).

- Existe una constante  $C_3 > 0$  con la siguiente propiedad: para cada  $A \in \mathbf{F}$ , existe una matriz hermitiana  $H = H(A) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  con

$$\frac{I}{C_3} \leq H \leq C_3 I \quad \text{y} \quad HA + AH^* \leq 0.$$

De acuerdo con estos resultados, las ecuaciones de la dinámica de fluidos tanto newtonianos como relativistas constituye un sistema *estrictamente hiperbólico* (fuertemente hiperbólico con todos sus autovalores distintos), donde sus autovalores corresponden a las velocidades de propagación de las perturbaciones en el fluido (ver por ejemplo [24], sección 7.6).

Si el sistema es tal que  $\mathbb{A} = A^i k_i$  tiene autovalores reales, pero sus autovectores **no** forman una base de  $\mathbb{R}^n$  (es decir, si  $\mathbb{A}$  *no* es diagonalizable), el sistema se dice *débilmente hiperbólico*. En algunos casos particulares, uno puede mostrar que el sistema es *débilmente hiperbólico* en el sentido de Kreiss [19] si se cumple la siguiente desigualdad:

$$|e^{P(ik)t}| \leq \beta \left[ 1 + \left( |\vec{k}|t \right)^\gamma \right] e^{\alpha t}, \quad (2.6)$$

para ciertas constantes reales  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  y todo  $t \geq 0$ . A modo de ejemplo, consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \partial_t v &= \partial_x v + \partial_x w \\ \partial_t w &= \partial_x w \end{aligned}$$

que puede ser llevado a la forma (2.1) tomando  $u = (v, w)$  y

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considerando nuevamente la evolución del modo  $u(0, x) = (v_o, w_o)e^{ikx}$ , obtenemos

$$\begin{aligned} v(t, x) &= (ikw_o t + v_o) e^{ik(x+t)} \\ w(t, x) &= w_o e^{ik(x+t)}. \end{aligned}$$

Si bien es claro que  $|w| = |w_o| < \infty$ , la norma de  $v$  satisface una desigualdad como la de la ecuación (2.6).

Este tipo de sistemas se caracterizan por soluciones que crecen polinomialmente en  $|\vec{k}|t$  por lo que no pueden ser acotados independientemente de  $|\vec{k}|$ . La desigualdad (2.6) significa que la solución es una función continua de los datos iniciales pero en diferentes topologías (ó en espacios de Sobolev de diferentes órdenes). Esta no resulta en general la situación deseada si se pretende una implementación numérica concreta, pues implicaría que para cada iteración se “pierden” órdenes de diferenciabilidad, obteniendo cada vez una solución “menos suave”. Esto aparece, por ejemplo, en ciertas formulaciones de las ecuaciones ADM en Relatividad General, y el problema puede rastrearse a partir de propiedades algebraicas del símbolo principal, el cual en este caso

es un bloque de Jordan de orden 2, con dos autovalores iguales pero que no resulta diagonalizable. También es común que la adición de pequeñas perturbaciones a sistemas fuertemente hiperbólicos a coeficientes constantes destruyan la suavidad de las soluciones originales. Un ejemplo simple pero contundente de este caso puede verse en [21], donde la inclusión de términos perturbativos de orden inferior provocan un crecimiento exponencial (en frecuencia) de la solución a tiempos cortos.

## 2.2. Sistemas cuasilineales

Todos los resultados anteriores se generalizan a *sistemas cuasilineales* de primer orden generales; i.e., sistemas del tipo

$$\begin{cases} \partial_t u^\alpha &= A^{\alpha\beta}(t, x, u) \partial_c u^\beta + B^\alpha(t, x, u); \\ u^\alpha|_o &= f^\alpha, \end{cases} \quad (2.7)$$

donde  $u^\alpha = u^\alpha(t, x)$  son tensores arbitrarios conocidos, y  $A^{\alpha\beta}$  y  $B^\alpha$  son funciones suaves de sus argumentos. La manera intuitiva de generalizar estas ideas es definir hiperbolicidad a partir del sistema linealizado alrededor de alguna solución de fondo, considerando la forma local del símbolo principal (es decir, evaluándolo en dicha solución). Es posible ver que las nociones de hiperbolicidad fuerte y simétrica definidas en este sentido también implican que el sistema resulta localmente bien puesto. Si bien el comportamiento de las soluciones de este tipo de problemas aún no se comprende por completo, es posible utilizar los teoremas presentados en la sección anterior para el estudio de su hiperbolicidad, al menos para pequeños intervalos de tiempo. Proporcionamos para ello la siguiente

**Definición 2.2.1** *Para  $0 < T_o < \infty$ , sea  $u_o(t, x)$ ,  $t \in [0, T_o)$  una solución suave del sistema (2.7) con dato inicial  $f_o(x) := u_o(0, x)$ . Decimos que dicho sistema es bien puesto en  $u_o$  con respecto a la norma  $\|\cdot\|$  si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que para cualquier dato inicial suave  $f(x)$  con  $\|f - f_o\| < \delta$ , existe una solución suave  $u(t, x)$  definida en  $0 \leq t < T$ , que satisface  $|u(t, \cdot) - u_o(t, \cdot)| < \varepsilon$  cuando  $|T - T_o| < \delta$ .*

Las condiciones de hiperbolicidad para sistemas cuasilineales resultan del espíritu de aquellas que funcionan para sistemas a coeficientes constantes, pero con algunas sutilezas.

**Definición 2.2.2** *El sistema (2.7) se dice fuertemente hiperbólico si existe un simetrizador, esto es, una forma definida positiva  $H_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta}(t, x, u, k)$  que depende suavemente de todos sus argumentos tal que  $h_{\alpha\beta} := H_{\alpha\gamma} A^{\gamma c} k_c$  resulta también simétrica para todo covector  $k_c$ .*

Nuevamente, a través de la suavidad requerida tanto en los coeficientes en (2.7) como en  $H_{\alpha\beta}$ , la hiperbolicidad fuerte se mantiene sí y sólo sí la *parte principal*  $A^{\alpha\epsilon}_{\beta}(t, x, u)k_c$  admite un conjunto completo de autovectores con autovalores reales. La mayor diferencia con el caso a coeficientes constantes reside en que sólo es posible probar que la solución existe *localmente* en el tiempo, dado que luego de cierto tiempo pueden desarrollarse singularidades o discontinuidades en la evolución, como veremos en la próxima sección.

### 2.2.1. Formulación covariante de Geroch

Denotando con  $\Phi^\alpha$  al conjunto de campos dinámicos, resulta posible escribir al sistema (2.7) como

$$K_{A\alpha}^a \nabla_a \Phi^\alpha = I_A. \quad (2.8)$$

Aquí,  $K_{A\alpha}^a$  representa el *símbolo principal* del sistema y denotamos con  $I_A$  a la fuente. Ambas cantidades pueden depender de las coordenadas y de los campos dinámicos. El índice en mayúscula representa cantidades tensoriales arbitrarias, mientras que el índice griego es el conjunto de campos dinámicos. Empleando esta formulación, Geroch [26] demostró el siguiente criterio de hiperbolicidad simétrica para el sistema (2.8):

**Teorema 2.2.1** *El sistema (2.8) es simétrico-hiperbólico sí y sólo sí existe un simetrizador  $H^A_\alpha$  suave tal que:*

- $H^A_\alpha K^a_{A\beta}$  resulta simétrico en los índices  $\alpha$  y  $\beta$
- existe un campo covectorial  $t_a$  tal que  $t_a H^A_\alpha K^a_{A\beta}$  es definido positivo.

Por otra parte, para ver que un sistema cuasilineal resulta “mal puesto” (es decir, no resulta fuertemente hiperbólico), puede emplearse un resultado simple y útil proporcionado por Strang [27]. En uno de sus trabajos, el autor estudia sistemas de orden superior que respetan la forma

$$\partial_t u = \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(x) D^\alpha u, \quad (2.9)$$

donde  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u = u(t, x) \in \mathbb{C}^s$ ,  $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_o^n$  y

$$D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

Strang afirma que si un sistema como (2.9) es bien puesto respecto de la norma  $L^2$ , entonces su parte principal, con los coeficientes evaluados en cualquier punto y cualquier solución cercana a los datos iniciales, también resulta bien puesto

en el sentido de la definición 2.1.1 (ver [27] para más detalles). La relevancia de este teorema reside en el hecho de que muestra que el problema de *well-posedness* resulta entonces un problema *microlocal* (o *de alta frecuencia*, como veremos). Dado que la parte principal de un sistema cuasilineal homogéneo de primer orden coincide con la linealización en un punto arbitrario, si tomamos la linealización del sistema alrededor de una solución constante y probamos que el sistema resultante no es bien puesto, entonces el sistema completo tampoco lo será. En el capítulo 3 emplearemos esta técnica para evaluar la hiperbolicidad de la teoría Force-Free en potenciales de Euler.

## 2.3. Leyes de conservación

Finalizamos este capítulo revisando algunas ideas clave referidas a la clase de sistemas cuasilineales que aparecen al estudiar fluidos en Hidrodinámica Relativista.

Es sabido que el problema de valores iniciales para sistemas no lineales puede no admitir solución global en el tiempo, pudiendo la solución desarrollar singularidades luego de un cierto tiempo finito. Esto sucede cuando las primeras derivadas de la solución divergen. En procesos de colisión de núcleos pesados, por ejemplo, la velocidad relativa de los núcleos es supersónica, por lo que se espera que se produzcan ondas de choque (ver, por ejemplo, [28]). Por otro lado, las ondas de choque relativistas podrían estar relacionadas con la transición de fase de la materia nuclear [18].

Con el término “leyes de conservación” nos referimos generalmente a relaciones integrales, las cuales podrían en principio ser satisfechas por campos que no resultan diferenciables, incluso siquiera continuos. Basta que dichos campos sean medibles y acotados. Suele referirse a dichas soluciones como *soluciones generalizadas*, en contraposición a las soluciones *clásicas* (o regulares) que se manifiestan en otro tipo de leyes físicas. La pérdida de regularidad en la solución puede significar que, si bien la solución existe, ésta deja de ser diferenciable a partir un determinado tiempo. Este tipo de situaciones aparece en una gran variedad de fenómenos físicos. Sin embargo, desde el punto de vista matemático, podría encontrarse más de una solución generalizada partiendo del mismo dato inicial. Una pregunta natural es si existen criterios que permitan seleccionar aquella solución que tenga sentido físico y que permita predecir cómo se comportará el sistema real, descartando el resto de soluciones (espurias) que sólo tienen sentido matemático.

Una ley de conservación predice que la tasa de cambio de una cierta cantidad contenida en un dominio fijo  $\mathcal{D}$  es igual al flujo de dicha sustancia a través del borde de su dominio,  $\partial\mathcal{D}$ . Si denotamos por  $u$  a la correspondiente

densidad y por  $f$  a su flujo, esta ley se expresa como

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} u \, dx = - \int_{\partial \mathcal{D}} f \cdot n \, dS, \quad (2.10)$$

donde  $n$  es la normal hacia afuera de  $\mathcal{D}$  y  $dS$  el elemento de superficie de  $\partial \mathcal{D}$ . De este modo, la integral de la derecha en la fórmula (2.10) contabiliza el flujo que sale (por esa razón lleva un signo menos). Aplicando ahora el teorema de la divergencia e introduciendo la derivada temporal dentro de la integral en la expresión de la derecha, obtenemos

$$\int_{\mathcal{D}} (\partial_t u + \partial_i f^i) \, dx = 0. \quad (2.11)$$

Hasta aquí, este razonamiento resulta válido para un dominio no vacío arbitrario  $\mathcal{D}$ . Luego, es posible tomar el límite formal para el volumen de  $\mathcal{D}$  que va a cero, restringiéndolo a un sólo punto del dominio en el que todas las derivadas parciales de  $u$  y de  $f$  sean continuas (asumiendo que existen), obteniéndose la *ley de conservación*

$$\partial_t u + \partial_i f^i = 0, \quad (2.12)$$

la cual se generaliza de manera directa para un sistema de leyes de conservación

$$\partial_t u^\alpha + \partial_i f^{i\alpha} = 0. \quad (2.13)$$

Aquí, el símbolo  $f^{i\alpha}$  denota la  $i$ -ésima componente del flujo de la cantidad  $u^\alpha$ , que puede ser función de todas las  $u^\alpha$ . Notamos que el sistema (2.13) es un sistema cuasilineal del tipo de aquellos que presentamos en la sección anterior. En efecto, (2.13) es equivalente a

$$\partial_t u^\alpha + A^{i\alpha}{}_\beta(u) \partial_i u^\beta = 0, \quad (2.14)$$

donde

$$A^{i\alpha}{}_\beta(u) := \frac{\partial f^{i\alpha}}{\partial u^\beta} \quad (2.15)$$

es el jacobiano de las  $f^{i\alpha}$ . En lo que sigue, asumiremos que el sistema (2.14) es *estrictamente hiperbólico* i.e., fuertemente hiperbólico con todos sus autovalores distintos. P. Lax demostró que este problema admite, a lo mucho, una única solución clásica [29]. Sin embargo, como introducimos anteriormente, no siempre existe solución clásica de (2.14), aún partiendo de un dato inicial suave. Es posible visualizar este hecho considerando el caso de una sola ley de conservación, digamos

$$\partial_t u + \partial_x F(u) = 0, \quad (2.16)$$

la cual puede escribirse como

$$\partial_t u + a(u)\partial_x u = 0, \quad (2.17)$$

con  $a(u) := F'(u)$ . Luego, la solución  $u(t, x)$  es *constante* a lo largo de las curvas  $c(t)$  tales que  $c'(t) = a(u(t, c(t)))$ , las cuales se conocen como *características* de (2.17). La constancia de la solución a lo largo de las características muestran que éstas se propagan a velocidad *constante*, siendo por lo tanto líneas rectas cuya pendiente en cada punto depende del dato inicial  $u(0, x)$ . Luego, puede suceder que las características se crucen en algún punto  $(t, x)$ . Es a partir de dicho evento que la solución deja de ser suave, volviéndose discontinua. Esto motiva la siguiente

**Definición 2.3.1** *Decimos que  $u$  es solución generalizada del sistema (2.14) si satisface la forma integral de dicho sistema; es decir, si*

$$\int_{\mathcal{D}} u^\alpha(t_2, x) dx - \int_{\mathcal{D}} u^\alpha(t_1, x) dx + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\mathcal{D}} f^\alpha \cdot n dS dt = 0 \quad (2.18)$$

vale para todo dominio acotado suave y para cualquier intervalo de tiempo  $(t_1, t_2)$ .

La definición anterior es equivalente a pedir que (2.14) se cumpla en sentido distribucional o débil.

### 2.3.1. Condiciones de Rankine-Hugoniot

Supongamos ahora que  $\mathcal{S}_t$  es una superficie suave no cerrada que se mueve con el tiempo (puede pensarse también como una familia monoparamétrica de superficies suaves), y  $u \in \mathcal{C}^1$  una solución de (2.14) continuamente diferenciable fuera de  $\mathcal{S}_t$  para cada  $t$ , y discontinua a través de  $\mathcal{S}_t$ . Luego, puede verse que la condición que debe satisfacer  $u$  en cada punto de  $\mathcal{S}_t$  para ser solución generalizada es

$$s [u^\alpha] = [f^\alpha] \cdot n, \quad (2.19)$$

donde  $[u^\alpha]$  y  $[f^\alpha]$  denota la diferencia de los valores de  $u^\alpha$  y  $f^\alpha$  en ambos lados de  $\mathcal{S}_t$ ,  $n$  es la normal a la superficie y  $s$  denota la velocidad con la que  $\mathcal{S}_t$  se propaga en la dirección de la normal en cada punto. Las relaciones (2.19) se conocen como *condiciones de Rankine-Hugoniot*.

El resultado formal puede condensarse en el siguiente

**Teorema 2.3.1** *Si  $u^\alpha$  es suave a trozos, entonces  $u^\alpha$  es solución generalizada del sistema (2.14) si y sólo si se verifican las siguientes condiciones:*

- $u^\alpha$  es solución clásica de (2.14) en las regiones en que es suave;
- $u^\alpha$  satisface las condiciones (2.19) en cada punto de discontinuidad, siendo  $s$  la velocidad de propagación de la discontinuidad.

Para una demostración detallada de dichas relaciones en algunos casos particulares puede verse [29].

### 2.3.2. Condiciones de entropía y ondas de choque

Al considerar soluciones generalizadas de las ecuaciones que describen leyes de conservación, surge el problema de la falta de unicidad de la solución, por lo que resulta necesario imponer una condición extra a tal fin. Buscamos que dicha condición garantice seleccionar, de entre todas las posibles soluciones, aquella que sea físicamente relevante, en el sentido que describa la situación física deseada. Una manera de imponer dicha condición extra es pedir que la solución buscada sea el límite de la sucesión de funciones  $\{u_\varepsilon^\alpha\}$  que son soluciones del problema difusivo

$$\partial_t u_\varepsilon^\alpha + \partial_i f^{i\alpha}(u_\varepsilon^\alpha) = \varepsilon \partial^i \partial_i u_\varepsilon^\alpha, \quad (2.20)$$

cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Fue también Lax quien logró caracterizar a esta solución única, para sistemas de leyes de conservación, del siguiente modo: además de satisfacer las condiciones de Rankine-Hugoniot, los autovalores  $\lambda_j$  de la parte principal deben satisfacer que exista al menos un  $k$  con  $1 \leq k \leq |\alpha|$  tal que

$$\lambda_k(u_{\text{izq}}^\alpha) \geq s \geq \lambda_k(u_{\text{der}}^\alpha) \quad (2.21)$$

$$\lambda_{k-1}(u_{\text{izq}}^\alpha) < s < \lambda_{k+1}(u_{\text{der}}^\alpha);$$

donde  $u_{\text{izq}}^\alpha$  y  $u_{\text{der}}^\alpha$  son los valores a izquierda y derecha de la discontinuidad a cada  $t$ , y denotamos por  $|\alpha|$  a la cantidad total de ecuaciones que conforman el sistema. Las desigualdades (2.21) garantiza que todas las características convergen a la discontinuidad ( $k$  lo hacen por la izquierda y  $|\alpha| + 1 - k$  por la derecha). Esta información, más las condiciones (2.19) determinan unívocamente los valores que toma  $u^\alpha$  a la izquierda y derecha de la discontinuidad.

Definimos una *onda de choque* como una solución generalizada de (2.14), que satisface las propiedades (2.19) y (2.21). Asimismo, una onda que no satisface las condiciones de Rankine-Hugoniot se conoce como *onda de rarefacción*, y describe una solución continua y suave a trozos que es *autosimilar*<sup>2</sup>, i.e., su solución depende de las coordenadas y el tiempo a través de la combinación  $x/t$ .

<sup>2</sup>Esta propiedad se basa en la invariancia de la solución bajo la transformación  $(t, x) \mapsto (at, ax)$ , de modo que debe ser constante a lo largo de las curvas  $x = st$ , con  $s \in \mathbb{R}$ .



# Capítulo 3

## Electrodinámica Force-Free en potenciales de Euler

### 3.1. Introducción

Es bien conocido que en las cercanías de objetos compactos como estrellas de neutrones, púlsares e incluso agujeros negros, la presencia de campos magnéticos intensos provoca la generación de un plasma ténue de muy baja densidad (en comparación con la intensidad de los campos magnéticos, en unidades de energía). En dichas regiones, la energía del campo electromagnético domina respecto de la materia que constituye el plasma, y esto hace posible que la descripción de estos fenómenos pueda realizarse sólo teniendo en cuenta efectos puramente eléctricos y magnéticos, dando origen a la *Electrodinámica Force-Free* (FFE).

Una teoría completa para la FFE ha sido desarrollada en varios trabajos, mientras que una revisión bibliográfica puede encontrarse en [30]. Allí, muchos aspectos de la dinámica del campo electromagnético son vistos desde una perspectiva relativista, haciendo hincapié en propiedades geométricas, además de proveer nuevos resultados. En una serie de trabajos anteriores [31, 32], se desarrolló una formulación *covariante* general de la FFE; i.e., sin asumir simetrías espaciotemporales. En ella se hace uso de dos variables dinámicas escalares, conocidas como *Potenciales de Euler*. Una idea similar fue introducida previamente por Stern [33] a principios de los '70, aunque desde una perspectiva no relativista. La formulación de la FFE en potenciales de Euler resulta a veces empleada en simulaciones numéricas, como por ejemplo en [34, 35], y más recientemente en [36].

En [37], Komissarov centra su interés en el estudio de la hiperbolicidad y el problema de valores iniciales de teorías degeneradas de la FFE, pero también

desde una perspectiva no covariante, en la que se emplea un sistema de coordenadas específicas para escribir y resolver las ecuaciones de evolución correspondientes, las cuales son presentadas en forma de leyes de conservación. Subsecuentemente, Pfeiffer [38] modificó las ecuaciones de Komissarov, y así obtuvo un sistema *simétrico-hiperbólico* de evolución. Muy recientemente, Carrasco y Reula [39] emplearon el formalismo geométrico desarrollado por Robert Geroch con el fin de desarrollar una formulación *covariante y simétrico-hiperbólica* de la FFE, empleando como variables dinámicas los campos eléctrico y magnético (compactados en el tensor de campo electromagnético de Maxwell). Además, se realizó un análisis detallado de la estructura característica del sistema correspondiente, así como de la estructura causal por la cual se propagan los diferentes modos. Esto pudo ser posible empleando una técnica similar a aquella desarrollada por Ábalos et. al. en [40] para estudiar generalizaciones no lineales del Electromagnetismo, que surgen a partir de densidades lagrangianas que dependen sólo de los invariantes electromagnéticos. La formulación *simétrico-hiperbólica* desarrollada en [39] permite implementar numéricamente las ecuaciones de la EFF, simulando diferentes escenarios físicos en los que estos fenómenos predominan [41, 42].

En este capítulo desarrollamos un estudio detallado del problema de valores iniciales de la versión de FFE empleando Potenciales de Euler como variables dinámicas (FFEEP). Esta contribución se enmarca en el mismo proyecto de investigación de los trabajos [39, 41]. Más específicamente, demostramos que la teoría de FFEEP resulta *débilmente hiperbólica*, y como consecuencia no posee un problema de valores iniciales bien formulado (referimos al lector al Capítulo 2 de esta tesis, donde se revisan los conceptos de hiperbolicidad débil, fuerte y simétrica). En particular, se ve que no es posible construir un simetrizador (i.e., una forma bilineal, simétrica, no degenerada y definida positiva) para las ecuaciones dinámicas, a diferencia de lo hallado en [39] para la misma teoría, pero empleando campos electromagnéticos como variables dinámicas.

Esta patología se pone de manifiesto desde tres perspectivas distintas (dos de ellas algebraicas, y la tercera a partir de herramientas del análisis funcional). La primera de ellas se basa en el uso de un criterio algebraico para sistemas cuadrados introducido por Kreiss [19], el cual provee condiciones necesarias y suficientes para que el sistema sea hiperbólico (ver Capítulo 2 para detalles). En segundo lugar, realizamos un estudio detallado de la estructura característica de las ecuaciones de evolución, verificando que el correspondiente problema algebraico no posee una base completa de autovectores. Por último, desde la perspectiva del análisis funcional, se prueba que la correspondiente evolución no es continua en general con respecto al dato inicial para ninguna norma de Sobolev. Este hecho es ilustrado además por medio de la construcción explícita

de una sucesión *acotada* de datos iniciales tal que, para cualquier tiempo tan cercano al inicial como se desee, la correspondiente sucesión de evoluciones resulta no acotada, violando así la continuidad de la solución respecto al dato inicial (ver ec. (2.4)).

Este capítulo se organiza de la siguiente manera. Comenzamos por una revisión breve de la Electrodinámica Force-Free como teoría degenerada de campo, discutiendo algunos aspectos algebraicos y geométricos relevantes que surgen en el camino, introducimos los potenciales de Euler y la noción de superficies de flujo asociadas a éstos. En segundo lugar, presentamos las ecuaciones de evolución que serán el objeto central de estudio a lo largo de este capítulo. En particular, discutimos la libertad de gauge, hiperbolicidad y estructura característica. Finalmente, nos dedicamos al estudio detallado del problema de valores iniciales del sistema, desde las tres perspectivas comentadas anteriormente.

## 3.2. Electrodinámica Force-Free

Como anticipamos en la introducción, la *Electrodinámica Force-free* es una versión no lineal de las ecuaciones de Maxwell, que surge imponiendo una condición algebraica conocida como *aproximación force-free*. Comenzamos escribiendo las Ecuaciones de Maxwell en forma covariante, dadas por

$$\begin{cases} \nabla_a F^{ab} &= -4\pi J^b ; \\ \nabla_{[a} F_{bc]} &= 0 , \end{cases} \quad (3.1)$$

donde  $F_{ab}$  es un campo tensorial suave, antisimétrico y de tipo  $(2,0)$ , definido sobre un espaciotiempo de fondo (ó *background*)  $(\mathcal{M}, g_{ab})$ , y  $J^a$  el cuadvectores densidad de corriente electromagnética. Notamos que, en virtud de la antisimetría de  $F_{ab}$ ,  $J^a$  resulta conservada. Asociado a esta teoría lineal se tiene el tensor de energía–momento del campo electromagnético, dado por

$$T_{ab} = \frac{1}{4\pi} \left( F_{ac} F_b{}^c - \frac{1}{4} g_{ab} F^{cd} F_{cd} \right). \quad (3.2)$$

Como consecuencia de las ecuaciones (3.1), este tensor no resulta en general conservado, verificándose la conocida identidad

$$\nabla_b T^{ab} = -F^a{}_b J^b. \quad (3.3)$$

Esto implica que, al menos localmente, la pérdida de energía y momento de cualquier sistema electromagnético es exactamente el producto entre el trabajo

ejercido por la fuerza eléctrica  $\rho E$  y la velocidad de las partículas que componen al sistema.

En el contexto de la *magnetohidrodinámica relativista* (ver, por ejemplo, [43]), el tensor de energía–momento asociado al plasma contiene contribuciones tanto de materia como de energía del campo electromagnético. La *aproximación force-free* consiste en despreciar la contribución debida a la densidad de materia del plasma, en situaciones astrofísicas en la que ésta es varios órdenes de magnitud menor que la contribución debida al campo electromagnético<sup>1</sup>. Así, de la conservación general del tensor de energía–momento

$$\nabla_a (T_{EM}^{ab} + T_{plasma}^{ab}) = 0 \quad (3.4)$$

(válida para cualquier teoría factible de fluidos, como es el caso del plasma que conforman estos sistemas), se obtiene

$$F_{ab}J^b = 0, \quad (3.5)$$

de donde se sigue inmediatamente que  $F_{ab}$  resulta una 2–forma *degenerada*. Esta sutil e importante propiedad implica, en particular, la existencia de un sistema de referencia (o *frame*) definido por  $J^a$ , para el cual el campo eléctrico medido respecto del mismo se anula. Llamaremos sistemas *magnéticamente dominados* a aquellos sistemas físicos que cumplan esta condición<sup>2</sup>. Así, estamos en presencia de un plasma cuyo único efecto es (debido a su alta conductividad) hacer el campo eléctrico más pequeño que el campo magnético.

En consecuencia, la evolución del tensor de campo electromagnético está dada independientemente de los grados de libertad de la materia que constituye el plasma, dando origen a un sistema completo de ecuaciones de evolución. Este sistema de ecuaciones se obtiene simplemente agregando a las ecuaciones de Maxwell (3.1) la condición (3.5) de manera conveniente. En efecto, contrayendo la primer identidad tensorial en (3.1) con  $F_{bc}$  se obtiene

$$\begin{cases} F_{bc}\nabla_a F^{ab} &= 0 ; \\ \nabla_{[a}F_{bc]} &= 0 . \end{cases} \quad (3.6)$$

### 3.2.1. Hoja magnética

Desde una perspectiva puramente algebraica, la condición (3.5) implica que  $\det(\mathbf{F}) = 0$ , o lo que es lo mismo,

$${}^*F^{ab}F_{ab} = 0, \quad (3.7)$$

<sup>1</sup>En [37], Komissarov define la teoría Force-free electromagnética como la contribución de orden cero en magnetohidrodinámica relativista, bajo perturbaciones de materia.

<sup>2</sup>En general, no se espera que la condición de dominancia magnética sea preservada durante la evolución en el contexto de simulaciones numéricas. Esta condición debe imponerse en cada paso temporal (ver [41]).

donde denotamos por  $*F^{ab}$  a la acción sobre  $F^{ab}$  del operador de Hodge  $*$ , la cual viene dada por

$$*F^{ab} = \frac{1}{2}\varepsilon^{abcd}F_{cd}, \quad (3.8)$$

siendo  $\varepsilon_{abcd}$  el elemento de volumen compatible con la métrica de fondo  $g_{ab}$ . Esta condición mune a cualquier sistema *force-free* de propiedades geométricas interesantes, las cuales serán desarrolladas en la siguiente sección. La antisimetría y degeneración del tensor de Maxwell implica directamente que el núcleo de  $F^a{}_b$  es un espacio vectorial bidimensional, y por lo tanto para cada  $p \in \mathcal{M}$  existe un par de vectores linealmente independientes  $\{u^a, v^a\}$  tales que

$$F^a{}_b u^b = F^a{}_b v^b = 0. \quad (3.9)$$

Asumiendo cierta regularidad para  $F_{ab}$ , no es difícil ver que el conjunto de pares de vectores que satisface la propiedad (3.9) en cada punto de  $\mathcal{M}$  es de hecho *localmente integrable*<sup>3</sup>; es decir, genera una superficie suave bidimensional, conocida como *superficie de flujo* o *hoja magnética*. Esta condición de integrabilidad se sigue del hecho de que  $\nabla_{[a}F_{bc]} = 0$ . Así, las líneas de campo magnético medidas por cualquier observador corresponde a la intersección entre la hoja magnética y las superficies de simultaneidad de dicho observador. Dado que  $F_{ab}F^{ab} > 0$ , se tiene que dicha superficie es de carácter temporal y por lo tanto es posible interpretarla como la superficie mundo de alguna línea de campo magnético inicial durante la evolución<sup>4</sup>. En particular, la ecuación (3.5) implica que  $J^a$  es *tangente* a ella.

Otro aspecto relevante de los sistemas *force-free* es consecuencia trivial de las ecuaciones (3.5). De hecho, se cumple la igualdad  $F_{[ab}F_{cd]}J^d = 0$ , y dado que  $F_{[ab}F_{cd]}$  es una 4-forma sobre una variedad diferencial de dimensión 4, ésta debe ser proporcional a la forma de volumen asociada, la cual es manifiestamente no degenerada. Luego, debe ser  $F_{[ab}F_{cd]} = 0$ , lo que implica que  $F_{ab}$  es *simple*<sup>5</sup>, i.e., existe un par de campos covectoriales  $\ell_a^1, \ell_a^2$  tales que, al menos localmente,

$$F_{ab} = 2\ell_{[a}^1\ell_{b]}^2. \quad (3.10)$$

Es claro que  $\ell^1$  y  $\ell^2$  son linealmente independientes, y para sistemas magnéticamente dominados, ambos son de carácter espacial. Recalcando una vez más

<sup>3</sup>Más específicamente, el núcleo de  $F_{ab}$  es *integrable* si es tangente a subvariedades de bidimensionales de  $(\mathcal{M}, g_{ab})$ .

<sup>4</sup>Esto se deduce simplemente del hecho de que, al existir un *frame* en el que el campo eléctrico se anula, en dicho frame vale  $F_{ab}F^{ab} = B^2 - E^2 = B^2 > 0$ . Dado que el escalar  $F_{ab}F^{ab} > 0$  es un invariante, se sigue que  $F_{ab}F^{ab} > 0$  para cualquier sistema de referencia.

<sup>5</sup>Una discusión detallada de estas propiedades puede encontrarse en el libro [44], prop. 3.5.35.

la propiedad (3.9), se ve que  $\ell^1$  y  $\ell^2$  son, además, *ortogonales* a la hoja magnética.

### 3.3. Potenciales de Euler y grados de libertad internos

La condición de integrabilidad del núcleo de  $F^a{}_b$  implica también la existencia local de dos campos escalares  $\{\phi_1, \phi_2\}$  tales que la hoja magnética introducida anteriormente coincide<sup>6</sup> con la intersección de las hipersuperficies de nivel de ambos campos,  $\phi_1 = \text{const.}$  y  $\phi_2 = \text{const.}$  Estas funciones se conocen comúnmente como *Potenciales de Euler* y comparten algunas propiedades interesantes. En virtud de la expresión local (3.10), debe ser

$$F_{ab} = \nabla_a \phi_1 \nabla_b \phi_2 - \nabla_b \phi_1 \nabla_a \phi_2, \quad (3.11)$$

mientras que el potencial vector se escribe

$$A_a = \frac{1}{2} (\phi_1 \nabla_a \phi_2 - \phi_2 \nabla_a \phi_1). \quad (3.12)$$

Resulta conveniente en este punto relucir la estructura interna presente en la teoría al introducir los potenciales de Euler. En primer lugar, para el par de *índices internos*  $i = 1, 2$ , se definen los vectores  $\ell^a{}_i$  normales a las hojas magnéticas como

$$\ell^a{}_i := g^{ab} \nabla_b \phi_i. \quad (3.13)$$

En segundo lugar, y también para  $i = 1, 2$ , denotamos como  $\varepsilon^{ij}$  al símbolo antisimétrico tal que  $\varepsilon^{12} = 1$ , y asumimos la existencia de otro símbolo (al que llamamos *inverso*),  $\varepsilon_{ij}$ , con la propiedad siguiente:

$$\varepsilon^{ij} \varepsilon_{jk} = -\delta^i{}_k. \quad (3.14)$$

Aquí,  $\delta^i{}_j$  es el mapa identidad, cuya acción sobre una cantidad  $A^i$  es  $\delta^i{}_j A^j = A^i$ . Estos símbolos serán útiles para “subir” y “bajar” índices internos del siguiente modo: para una dada  $f_i$ , denotamos  $f^i := \varepsilon^{ij} f_j$ . Recíprocamente, y en consistencia con (3.14), debe ser  $f_i = -\varepsilon_{ij} f^j$ . Toda esta estructura interna permite expresar los campos (3.11) y (3.12) de una manera más conveniente. En efecto, se tiene que

$$F_{ab} = \varepsilon^{ij} \nabla_a \phi_i \nabla_b \phi_j, \quad (3.15)$$

y

$$A_a = \frac{1}{2} \varepsilon^{ij} \phi_i \nabla_a \phi_j. \quad (3.16)$$

---

<sup>6</sup>Para una deducción cuidadosa de este aspecto, véase [45].

Es posible advertir sobre cierta libertad en la elección de estos potenciales, de manera que  $F_{ab}$  resulte *invariante* ante dicha elección. Más específicamente, al considerar la transformación más general

$$\phi_i \mapsto \tilde{\phi}_j = \tilde{\phi}_j(\phi_i), \quad (3.17)$$

sus gradientes cambian del siguiente modo:

$$\nabla_a \tilde{\phi}_j = \frac{\partial \tilde{\phi}_j}{\partial \phi_i} \nabla_a \phi_i := \chi^i_j \nabla_a \phi_i, \quad (3.18)$$

donde

$$\chi^i_j := \frac{\partial \tilde{\phi}_j}{\partial \phi_i}. \quad (3.19)$$

De esta manera, el tensor de Maxwell transforma como

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{ab} &= \varepsilon^{ij} \nabla_a \tilde{\phi}_i \nabla_b \tilde{\phi}_j \\ &= \varepsilon^{ij} \chi^k_i \chi^\ell_j \nabla_a \phi_k \nabla_b \phi_\ell \\ &= \det(\chi) F_{ab}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde en el último paso usamos el hecho de que cualquier símbolo antisimétrico de tipo  $(2, 0)$  en el espacio interno es proporcional a  $\varepsilon^{ij}$ . El factor de proporcionalidad es exactamente el determinante de  $\chi$ . Luego, sólo aquellas transformaciones como las dadas en (3.17) *que además cumplan la condición*  $\det(\chi) = 1$  dejan  $F_{ab}$  *invariante*. Estas transformaciones pertenecen al grupo de simetrías  $SL(2, \mathbb{R})$ .

La condición anterior tiene también un significado geométrico importante, notando directamente que

$$\det(\chi) = \left| \frac{\partial(\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2)}{\partial(\phi_1, \phi_2)} \right|, \quad (3.21)$$

que es equivalente a pedir que el jacobiano de la transformación (3.17) tenga determinante igual a la unidad. Geométricamente, esta condición pide que el elemento de superficie permanezca invariante ante (3.17).

Por último, encontramos útil introducir la forma bilineal dada por

$$G_{ij} := \ell_i \cdot \ell_j = g^{ab} \nabla_a \phi_i \nabla_b \phi_j. \quad (3.22)$$

Por construcción,  $G_{ij}$  es simétrica y satisface

$$\begin{aligned}
 \det(G) &= \frac{1}{2} \varepsilon^{ij} \varepsilon^{km} G_{ik} G_{jm} \\
 &= \frac{1}{2} (\varepsilon^{ij} \ell_i^a \ell_j^b) (\varepsilon^{km} g_{ac} \ell_k^c g_{bd} \ell_m^d) \\
 &= \frac{F}{2},
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

donde el invariante  $F := F^{ab} F_{ab}$  es positivo para sistemas magnéticamente dominados. Luego, se tendrá en general que  $\det(G) \neq 0$ , por lo que se sigue que  $G_{ij}$  es invertible; i.e., existe un símbolo  $\tilde{G}^{ij}$ , también simétrico, tal que  $\tilde{G}^{ij} G_{jk} = \delta^i_k$ . Si bien existe una manera alternativa de construir un símbolo simétrico de rango (2,0) a partir de  $G_{ij}$  dado por la contracción  $G^{ij} := \varepsilon^{ik} \varepsilon^{jl} G_{kl}$ , un cálculo sencillo permite ver que

$$\tilde{G}^{ij} = \frac{2}{F} G^{ij}, \tag{3.24}$$

es decir, ambos símbolos contienen la misma información, módulo un factor de proporcionalidad.

Todas las propiedades geométricas vistas hasta aquí serán fundamentales para el análisis subsiguiente, en el que abordamos el problema de valores iniciales de la teoría.

### 3.4. Ecuaciones de evolución

Escribiendo el tensor de Maxwell en término de los potenciales de Euler, resulta posible reexpresar el sistema de ecuaciones (3.6) de siguiente modo:

$$\varepsilon^{ij} \nabla_a \phi_k \nabla_c (\nabla^a \phi_i \nabla^c \phi_j) = 0, \quad k = 1, 2, \tag{3.25}$$

donde  $\varepsilon^{ij}$  y toda la estructura interna empleada aquí es aquella introducida en la sección anterior de este capítulo (ver sección 3.3).

Es directo ver que (3.25) es invariante ante las transformaciones unitarias (3.17). Más aún, una vez que la elección de gauge ha sido realizada en alguna superficie espacial, *ésta permanecerá fija durante la evolución*. Esta sutil propiedad es consecuencia directa del hecho de que los potenciales de Euler son *constantes* sobre cada hoja magnética. En particular, éstos son constantes en la intersección de la hoja magnética y cualquier superficie de Cauchy  $\Sigma$ . Luego, una vez que se ha dado dato inicial para el sistema (3.25) y por lo tanto una elección de gauge ha sido prescrita en cada punto de  $\Sigma$ , dicha transformación de gauge no varía en la dirección de la evolución.

En efecto, si  $\phi_i \mapsto \tilde{\phi}_i$  es cualquier transformación del tipo (3.17)-(3.18), tomando derivadas se obtiene localmente

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_{[a} \nabla_{b]} \tilde{\phi}_k \\ &= (\nabla_{[a} \chi_{|k|}^j) \ell_{|j|b]} + \chi_k^j \nabla_{[a} \ell_{|j|b]} \\ &= (\nabla_{[a} \chi_{|k|}^j) \ell_{|j|b]}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Considerando ahora un campo vectorial  $t^a$  en el complemento ortogonal def  $\{\ell^a_1, \ell^a_2\}$  en cada punto de  $\mathcal{M}$  (i.e., tangente a las hojas magnéticas) y tomando la contracción de (3.26) con  $t^a \ell^b_i$ , se obtiene

$$(t^a \nabla_a \chi_k^j) G_{ij} = 0, \quad (3.27)$$

ó, equivalentemente,

$$t^a \nabla_a \chi_k^j = 0. \quad (3.28)$$

donde hemos empleado que  $G_{ij}$  es invertible (recordar ecuación (3.24)). Luego, las transformaciones  $\chi_i^j$  resultan ser *constantes* a lo largo de cualquier dirección en las hojas  $\phi_i = \text{const.}$ , como se quería probar.

### 3.5. Hiperbolicidad y estructura característica

Esta sección se dedica al estudio detallado de la hiperbolicidad del sistema (3.25). Para ello, analizaremos el estudio de perturbaciones de alta frecuencia sobre un fondo arbitrario<sup>7</sup>. Debido a la velocidad finita de prepagación de tales perturbaciones, resulta necesario sólo focalizar en una vecindad de cualquier punto del espaciotiempo.

Para  $p \in (\mathcal{M}, g_{ab})$  y  $\mathcal{O}_p \subset \mathcal{M}$  entorno de  $p$ , sea  $\phi_i : \mathcal{O}_p \rightarrow \mathbb{R}$  una solución suave de (3.25). Para  $\varepsilon > 0$ , consideramos la siguiente familia monoparamétrica de perturbaciones alrededor de  $\phi_i$ :

$$\psi_i(\varepsilon) = \phi_i + \varepsilon \varphi_i e^{f/\sqrt{\varepsilon}}, \quad (3.29)$$

donde  $f : \mathcal{O}_p \rightarrow \mathbb{C}$  es un campo escalar complejo suave definido en  $\mathcal{O}_p$ . A medida que  $\varepsilon$  se aproxima a cero, se producirán más oscilaciones alrededor de la solución de fondo, siendo en amplitud cada vez más cercanas a ésta. Nos referimos a dicho límite como el *límite de alta frecuencia* de la perturbación.

<sup>7</sup>Se remite al lector al trabajo seminal de [5] para una discusión mucho más detallada de este punto.

Reemplazando (3.29) en (3.25) y pasando cuidadosamente<sup>8</sup> al límite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , se obtiene la siguiente condición algebraica para la perturbación  $\varphi_i$ :

$$\varepsilon^{ij} (\ell_{ak} \ell^b{}_j - G_{kj} \delta^b{}_a) k^a k_b \varphi_i = 0, \quad (3.30)$$

donde  $\ell^a{}_i$  y  $G_{kj}$  están evaluados en la solución de fondo, y hemos definido  $k_a := \nabla_a f$ .

El operador  $\varepsilon^{ij} (\ell_{ak} \ell^b{}_j - G_{kj} \delta^b{}_a) k^a k_b$  que actúa sobre  $\phi_i$  en (3.30) resulta el *símbolo principal* del sistema (3.25), y contiene información sólo de los términos de la ecuación linealizada que tienen orden más alto en frecuencia. De la teoría pseudodiferencial [25, 5, 9], sabemos que basta considerar sólo dichas contribuciones para describir completamente la estructura característica (o *wave-set structure*, en inglés) del sistema.

### 3.5.1. Ecuaciones características

Veamos ahora cuáles son las ecuaciones características que aparecen al estudiar el sistema (3.25). Estas ecuaciones resultan de suma importancia (tanto analítica como numérica) dado que las raíces *reales* de dichas ecuaciones determinan la estructura causal de la teoría; i.e., el conjunto de todas las posibles superficies en el espaciotiempo de fondo a lo largo de las cuales se propaga la información y las respectivas velocidades de propagación.

Para ello, encontramos conveniente definir los escalares  $\kappa_i := \ell_i \cdot k$ , con  $i = 1, 2$ , de manera que la ecuación (3.30) es equivalente a

$$\mathcal{A}^i{}_j \varphi_i = 0, \quad (3.31)$$

donde el operador  $\mathcal{A}$  está dado por

$$\mathcal{A}^i{}_j := \varepsilon^{il} (\kappa_j \kappa_l - k^2 G_{jl}), \quad (3.32)$$

y  $k^2 = k^a k_a$ . Dado que se buscan soluciones no triviales de (3.31), debe pedirse que el determinante de dicho operador se anule. Esta condición se conoce comúnmente como la *relación de dispersión* del sistema:

$$\det(\mathcal{A}) = k^2 \left[ \frac{F k^2}{2} - G^{ij} \kappa_i \kappa_j \right] = 0. \quad (3.33)$$

<sup>8</sup>Si  $g : \mathcal{O}_p \rightarrow \mathbb{C}$  es un campo escalar continuo sobre valores complejos, se tiene que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(x) e^{\frac{g(x)}{\varepsilon}}$$

existe en  $\mathcal{O}_p$  *sí y sólo sí*  $g \equiv 0$ .

Esta condición arroja inmediatamente las posibles superficies de propagación, las cuales quedan determinadas por alguna de las siguientes ecuaciones: (i)  $k^2 = 0$ , ó bien (ii)  $\frac{F}{2}k^2 - G^{ij}\kappa_i\kappa_j = 0$ . Notamos que si  $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$  (ésto es, el caso en el que  $k^a$  es *tangente* a la hoja magnética) ambas condiciones coinciden y el operador  $\mathcal{A}$  es trivial. En ese caso,  $\varphi_i$  puede tomarse arbitrario y por lo tanto existen dos soluciones linealmente independientes para cada dirección nula.

Si la condición  $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$  **no** se cumple, es necesario analizar los dos casos restantes por separado, que llamamos *cono* y *cuña*, en alusión a la forma geométrica que adoptan los gráficos de las condiciones (i) y (ii), respectivamente.

■ **Caso I (Cono):**  $k^2 = 0$ .

Si  $\kappa_1$  ó  $\kappa_2$  no son ambos nulos, luego  $\varphi_i = \kappa_i$  es una solución de (3.31), y se obtiene entonces un espacio unidimensional de soluciones para cada dirección nula, dado por  $\{t\kappa_i : t \in \mathbb{R}\}$ .

■ **Caso II (Cuña):**  $\frac{F}{2}k^2 - G^{ij}\kappa_i\kappa_j = 0$ .

Recordando las identidades (3.23) y  $G^{ij} = \varepsilon^{ik}\varepsilon^{jl}G_{kl}$ , y reescribiendo  $\ell_i := |\ell_i| n_i$ , con  $n_1 \cdot n_1 = n_2 \cdot n_2 = 1$ , se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= \det(G)k^2 - G^{ij}\kappa_i\kappa_j \\ &= |\ell_1|^2|\ell_2|^2 [(1 - (n_1 \cdot n_2)^2)k^2 - ((k \cdot n_1)^2 \\ &\quad + (k \cdot n_2)^2 - 2(n_1 \cdot n_2)(k \cdot n_1)(k \cdot n_2))] \\ &= |\ell_1|^2|\ell_2|^2 [1 - (n_1 \cdot n_2)^2] (k^2 - k_\perp^2) \\ &= |\ell_1|^2|\ell_2|^2 [1 - (n_1 \cdot n_2)^2] k_\parallel^2, \end{aligned} \tag{3.34}$$

donde  $k_\perp$  es la norma de la componente de  $k^a$  en el espacio generado por  $\ell^{a_1}$  y  $\ell^{a_2}$  (es decir, *perpendicular* a la hoja magnética). Luego, de la independencia lineal de  $\ell^{a_1}$  y  $\ell^{a_2}$  debe ser  $(n_1 \cdot n_2)^2 < 1$ , de donde deducimos que la igualdad es válida *sí y sólo sí*  $k = k_\perp$ . Elijiendo una base ortonormal  $\{e_i^a\}$  en la que  $\{e_0^a, e_3^a\}$  son tangentes a la hoja magnética, es posible expresar a  $k^2$  como

$$k^2 = -k_0^2 + k_3^2 + k_\perp^2, \tag{3.35}$$

y por lo tanto la condición para que haya raíces reales es que la componente perpendicular a  $\ell^a_i$  de  $k^a$  sea cero. En efecto, si  $k_3 \neq 0$ , sólo existen dos posibilidades para ello:  $k_0 = k_3$  ó  $k_0 = -k_3$ .

Por otra parte, y en virtud de la invertibilidad de  $G^{ij}$ , el problema (3.31) es además equivalente a

$$\mathcal{B}^i_j \varphi^j = 0, \tag{3.36}$$

donde el operador  $\mathcal{B}$  está dado por

$$\mathcal{B}^i_j := \tilde{G}^{il} (\kappa_j \kappa_l - k^2 G_{jl}), \quad (3.37)$$

y  $\tilde{G}^{ij}$  dado por (3.24). Más aún, un cálculo sencillo permite notar que

$$\mathcal{B}^i_j = -k^2 h^i_j, \quad (3.38)$$

donde

$$h^i_j := \delta^i_j - \frac{\tilde{G}^{il} \kappa_l \kappa_j}{k^2} \quad (3.39)$$

actúa como *proyector* en el espacio *perpendicular* a  $\kappa_i$  con respecto a  $G_{ij}$ <sup>9</sup>. De hecho,  $h^i_j h^j_k = h^i_k$ , y entonces definiendo  $\bar{\kappa}^i := \tilde{G}^{ij} \kappa_j$ , obtenemos

$$h^i_j \bar{\kappa}^j = \frac{2\bar{\kappa}^i}{Fk^2} \left( \frac{F}{2} k^2 - G^{\ell m} \kappa_\ell \kappa_m \right) = 0. \quad (3.40)$$

Finalmente,  $\varphi^i = \bar{\kappa}^i$  es solución de (3.36), lo que implica que  $\phi_i = \varepsilon_{ij} \bar{\kappa}^j$  es solución de (3.31). Nuevamente encontramos un espacio unidimensional de soluciones para cada una de las direcciones permitidas obtenidas anteriormente, las cuales están dadas explícitamente por  $\{s\varepsilon_{ij} \bar{\kappa}^j : s \in \mathbb{R}\}$ .

### 3.6. Sistema equivalente a primer orden

Dado que las ecuaciones dinámicas (3.25) resultan de segundo orden en derivadas, para poder aplicar la teoría desarrollada en el capítulo 2 es necesario contar con una reducción a primer orden del sistema, y de esa manera inferir la hiperbolicidad del sistema original en función de los resultados obtenidos al analizar el sistema reducido. Sin embargo, para que la equivalencia entre ambos sistemas sea cierta, resulta crucial asegurarse de que toda solución del sistema original es equivalente a una y sólo una solución del sistema reducido<sup>10</sup>.

En esta sección realizamos una “descomposición 3 + 1” del símbolo principal de la ecuación característica (3.30), siguiendo la guía del trabajo [47].

<sup>9</sup>Conviene aquí pensar a  $G_{ij}$  como una especie de “métrica” en el espacio de grados de libertad internos, cuya inversa  $\tilde{G}^{ij}$  está dada por (3.24).

<sup>10</sup>Mencionamos que este aspecto no siempre es válido en general, y hay muchos ejemplos que lo verifican. En efecto, la ecuación de onda  $\square\phi = 0$  admite reducciones a primer orden cuyo espacio de soluciones es más grande que el espacio de soluciones del sistema original. Por supuesto, dichas reducciones no resultan hiperbólicas, mientras que otras reducciones (que sí son equivalentes en este sentido) resultan simétrico-hiperbólicas. Ver, por ejemplo, [46]

Luego, obtenemos una reducción equivalente a primer orden de una manera muy particular, que previene el origen de soluciones espurias. Empleando la información obtenida en la sección anterior sobre la estructura característica, estudiamos el kernel del sistema reducido, concluyendo finalmente que no posee una base completa de autovectores para ninguna de las direcciones de propagación permitidas ((i) ó (ii)).

Tomemos una superficie espacial  $\Sigma_o$ , y un punto arbitrario  $p \in \Sigma_o$  tal que los vectores  $\ell^a_i$  sean *perpendiculares* en  $p$ . Sea  $\mathcal{O}_p$  un entorno de  $p$  contenido en un abierto  $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$ , el cual suponemos está foliado por superficies espaciales que resultan ser los conjuntos de nivel de una función suave (que llamaremos *tiempo*),  $t : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ . Sea además  $t^a := (\partial/\partial t)^a$  el campo vectorial normal a cada superficie de simultaneidad y elegimos la coordenada temporal  $t$  tal que  $t^a \nabla_a t = 1$ . Sobre cada una de dichas superficies, definimos un *frame* ortonormal  $\{e^a_i\}_{i=0}^3$ , con  $e^a_0 = (\partial/\partial t)^a$  y para  $i = 1, 2$ ,  $e^a_i$  estén en las direcciones de  $\ell^a_i$ .

Empleando la notación usual, en la que

$$\ell^a_i = (0, \vec{\ell}_i), \quad k^a = (k_0, \vec{k}), \quad \ell^a_j k_a = \vec{\ell}_j \cdot \vec{k},$$

la ecuación (3.30) se lee ahora del siguiente modo:

$$-\varepsilon^{ij} G_{kj} k_0^2 \varphi_i + \varepsilon^{ij} \left[ |\vec{k}|^2 G_{kj} - (\vec{\ell}_k \cdot \vec{k})(\vec{\ell}_j \cdot \vec{k}) \right] \varphi_i = 0. \quad (3.41)$$

Definiendo las variables

$$u_i = k_0 \varphi_i; \quad v_i = |\vec{k}| \varphi_i, \quad (3.42)$$

se obtiene el siguiente sistema lineal (o *reducción pseudodiferencial*):

$$\begin{pmatrix} k_0 & 0 & -\frac{k_1^2+k_3^2}{|\vec{k}|} & -\frac{(\vec{\ell}_1 \cdot \vec{k})(\vec{\ell}_2 \cdot \vec{k})}{|\vec{k}| G_{22}} \\ 0 & k_0 & -\frac{(\vec{\ell}_1 \cdot \vec{k})(\vec{\ell}_2 \cdot \vec{k})}{|\vec{k}| G_{11}} & -\frac{k_2^2+k_3^2}{|\vec{k}|} \\ |\vec{k}| & 0 & -k_0 & 0 \\ 0 & |\vec{k}| & 0 & -k_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0. \quad (3.43)$$

Dicho sistema es *completamente equivalente* a (3.41) en el siguiente sentido: para cada  $\vec{k} \neq 0$ , existe una relación biunívoca entre soluciones de los sistemas (3.43) y (3.41); i.e., cada solución del sistema original (de segundo orden) es también solución del sistema (3.43), y viceversa. En este caso particular, este método de obtener un sistema de primer orden en el espacio de Fourier no incluye ningún vínculo extra, ni tampoco soluciones espurias. Luego, basta probar que la reducción (3.43) es mal puesta para deducir que el sistema original también lo será.

Es sencillo checar que la matriz dada en (3.43) no resulta diagonalizable cuando  $k_0 = k_3 = 0$ . Este hecho se exhibirá más adelante mediante la elección de particulares configuraciones para  $k^a$  y  $\ell^a_i$ , para las cuales se encontrarán soluciones que crecen linealmente en frecuencia.

Las soluciones del sistema anterior, tanto para el caso del *Cono* como el de la *Cuña* mostrados en la sección anterior están dadas por

$$\text{Cono: } u_i = k_0 \kappa_i \quad , \quad v_i = |\vec{k}| \kappa_i \quad ;$$

$$\text{Cuña: } u_i = -k_0 \varepsilon_{ij} \tilde{G}^{j\ell} \kappa_\ell \quad , \quad v_i = -|\vec{k}| \varepsilon_{ij} \tilde{G}^{j\ell} \kappa_\ell \quad . \quad (3.44)$$

Con el fin de contar las soluciones linealmente independientes del sistema anterior, resulta conveniente separar el conteo en dos casos: (a) Caso  $k_0 \neq 0$ ; (b) Caso  $k_0 = 0$ .

- (a) Si  $k_0 \neq 0$ , se tienen en total *cuatro* soluciones linealmente independientes de (3.43); es decir, considerando aquellas del *cono* (i) ( $k_0 = \pm|\vec{k}|$ ) más las de la *cuña* (ii) ( $k_0 = \pm k_3$ ).
- (b) Si  $k_0 = 0$  sólo puede ser  $k_0 = k_3 = 0$  (esto es, en la recta intersección de los planos que forman la *cuña*), sólo se obtiene una solución del sistema, que sumada a las dos linealmente independientes del caso *cono*, se tiene un total de *tres* soluciones linealmente independientes. Esto es, hay un conjunto completo de soluciones de (3.43) en todos lados *excepto* en aquellos que satisfacen  $k_0 = k_3 = 0$ . Este es precisamente el caso en el que el vector de onda es perpendicular al plano  $\{e_0, e_3\}$ , por lo que  $k^a = \text{span}\{\ell_1, \ell_2\}$ ; y entonces en dicho caso se tiene

$$k^a = \bar{\kappa}^i \ell_i^a. \quad (3.45)$$

Una pregunta natural que surge en este punto es: ¿por qué esta degeneración no se pone de manifiesto al considerar la estructura característica de la misma teoría usando el tensor de Maxwell como variable dinámica? La respuesta es que no es posible construir perturbaciones no triviales de  $F^{ab}$  a partir de las perturbaciones halladas en el caso degenerado (b): las mismas resultan trivialmente cero en ese caso. Esto puede verse haciendo uso de la identidad (3.45) escribiendo primero una perturbación genérica del tensor de Maxwell como

$$\delta F^{ab} = 2\varepsilon^{ij} \ell_i^{[a} X^b]_j, \quad (3.46)$$

donde  $X^a_i = \delta \ell^a_i$ . Luego, en el límite de alta frecuencia, se obtiene  $X^a_i = \varphi_i k^a$ , donde  $\varphi_i = \delta \phi_i$ . Reemplazando esto en la expresión para  $\delta F^{ab}$ , se obtiene

$$\delta F^{ab} = 2\varepsilon^{ij} \varphi_j \ell_i^{[a} k^b]. \quad (3.47)$$

Poniendo ahora  $\varphi^i = \bar{\kappa}^i$  y  $k^a$  dadas en (3.45), se ve que  $\delta F^{ab} = 0$ . Esto es, cada vez que  $k_0 = k_3 = 0$ , las perturbaciones de  $F^{ab}$  construídas a partir de perturbaciones no nulas de  $\ell^a_i$  desaparecen. Estos modos se conocen como modos *no-físicos*, pues no aparecen cuando se consideran sólo perturbaciones de Maxwell, y proveen soluciones que pueden llevar el sistema a tener un problema de valores iniciales mal puesto, como veremos en la siguiente sección.

### 3.7. Falla del criterio algebraico de Kreiss

El teorema de Strang [27] asegura que si un sistema cuasilineal como el dado en (2.9) es bien puesto, luego el nuevo sistema que resulta de evaluar los coeficientes del correspondiente operador diferencial en cualquier punto (lo que se conoce como sistema *congelado*, ó *frozen-coefficients system*, en inglés) resultará también bien puesto. Esto implica, de manera contrarrecíproca, que para probar que un sistema suficientemente general no posee un problema de valores iniciales bien puesto, es suficiente con encontrar un sistema congelado que no lo sea. Dado que por construcción este último sistema es a coeficientes constantes, la tarea es más sencilla, y donde el criterio de Kreiss [19] que se introdujo en la sección 2.1 puede ser aplicado. Procedemos entonces a construir sistemas “congelados” provenientes de la reducción a primer orden hallada en la sección anterior, y que **no** satisfagan el criterio de Kreiss.

Por simplicidad, elegimos aquí una configuración particular para el sistema (3.43), tal que  $k_1 = k_2 = \sqrt{2}\kappa$ ,  $0 < \kappa \in \mathbb{R}$ , y  $k_0 = k_3 = 0$ . Ahora bien, siguiendo el criterio de Kreiss 2.1.2 y tomando  $s \in \mathbb{R}$ , calculamos la matriz  $\mathcal{D} := \mathbb{A} - sI$ , obteniendo

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} -s & 0 & -\kappa & -\alpha\kappa \\ 0 & -s & -\kappa/\alpha & -\kappa \\ 2\kappa & 0 & -s & 0 \\ 0 & 2\kappa & 0 & -s \end{pmatrix}, \quad \alpha := \frac{|\ell_1|}{|\ell_2|} > 0, \quad (3.48)$$

donde  $\mathbb{A}$  es la matriz que resulta de evaluar (3.43) en esta particular configuración. La inversa de  $\mathcal{D}$  puede calcularse explícitamente, obteniéndose

$$\mathcal{D}^{-1} = d^{-1} \begin{pmatrix} -s(s^2 + 2\kappa^2) & -2\alpha\kappa^2s & \kappa s^2 & -\alpha\kappa s^2 \\ \frac{2\kappa^2s}{\alpha} & s(s^2 + 2\kappa^2) & \frac{\kappa s^2}{\alpha} & -\kappa s^2 \\ -2\kappa(s^2 + 2\kappa^2) & -4\alpha\kappa^3 & -s(s^2 + 2\kappa^2) & -2\alpha\kappa^2 \\ \frac{4\kappa^3}{\alpha} & 2\kappa(2\kappa^2 - s^2) & \frac{2\kappa^2s}{\alpha} & s(s^2 + 2\kappa^2) \end{pmatrix}, \quad (3.49)$$

con  $d := \det(\mathcal{D})$ .

Notar que hay elementos de la matriz inversa que no pueden ser acotados según la fórmula Resolvente del Teorema 2.1. De hecho, es evidente<sup>11</sup> que existe un intervalo abierto  $I \subset \mathbb{R}$  de reales positivos  $s$  tales que, para todo  $\beta > 0$ ,

$$|(\mathbb{A} - sI)_{32}^{-1}| > \frac{\beta}{s}. \quad (3.50)$$

Luego, la condición resolvente no se cumple en este caso para todo  $s \in \mathbb{C}$ , y por lo tanto el sistema (3.43) **no** resulta bien puesto.

Reiteramos que, si bien este criterio es sólo aplicable para sistemas cuadrados de coeficientes constantes, la versión contrarecíproca del teorema de Strang garantiza que el sistema cuasilineal original tampoco es bien puesto. En el apéndice A mostramos explícitamente datos iniciales cuya evolución no puede ser acotada por el dato inicial independientemente de la frecuencia del modo inicial. Eso muestra explícitamente cómo crecen los modos malos, evidenciando la característica de hiperbolicidad *débil* del sistema al escribirlo en estas variables.

### 3.8. Pérdida de continuidad en la evolución

En esta sección argumentamos formalmente que la evolución de datos iniciales anómalos no resulta continua, violándose entonces una de las tres condiciones que cualquier sistema bien puesto debe satisfacer según Hadamard. Para ver esto, es suficiente analizar la evolución hasta un instante de tiempo fijo,  $t = T > 0$ , (el cual puede estar arbitrariamente cerca del tiempo inicial) y verificar que no existe ninguna constante  $C > 0$  tal que

$$\|u(T, x)\| \leq C \|f(x)\|, \quad (3.51)$$

para cierto dato inicial  $f(x)$ , donde  $u(T, x)$  es la correspondiente evolución hasta  $t = T$ .

Identificando  $k_0 \leftrightarrow i\partial_t$  en el sistema (3.43), obtenemos el sistema

$$\partial_t U = \mathbb{A} U, \quad (3.52)$$

<sup>11</sup>Se tiene que  $\det(\mathcal{D}) = s^2(s^2 + 4\kappa^2)$  y luego

$$|(\mathbb{A} - sI)_{32}^{-1}| = \frac{4\alpha\kappa^3}{s^2(s^2 + 4\kappa^2)} > \frac{\beta}{s}$$

sí y sólo sí

$$p(s) := -\beta s^3 - 4\beta\kappa^2 s + 4\alpha\kappa^3 > 0.$$

Dado que  $p(0) = 4\alpha\kappa^3 > 0$ , la continuidad de  $p$  garantiza un intervalo abierto  $I \subset \mathbb{R}$  de reales positivos para  $s$  para los cuales  $p(s) > 0$ .

donde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{-k_1^2 - k_3^2}{|\vec{k}|} & -\frac{(\vec{\ell}_1 \cdot \vec{k})(\vec{\ell}_2 \cdot \vec{k})}{|\vec{k}|} \\ 0 & 0 & -\frac{(\vec{\ell}_1 \cdot \vec{k})(\vec{\ell}_2 \cdot \vec{k})}{|\vec{k}|G_{11}} & \frac{|\vec{k}|G_{22}}{|\vec{k}|} \\ |\vec{k}| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |\vec{k}| & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.53)$$

y hemos redefinido las variables de modo que

$$U = \begin{pmatrix} \partial_t \hat{\varphi}_i \\ |\vec{k}| \hat{\varphi}_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2; \quad (3.54)$$

además de identificar  $\varphi_i \leftrightarrow \hat{\varphi}_i$ . Estudiaremos aquí la continuidad de las soluciones de (3.52)<sup>12</sup>

Para ver que la constante  $C$  en (3.51) no existe, procederemos a contruir explícitamente una sucesión de datos iniciales con la condición de que la correspondiente sucesión formada por la evolución de cada dato hasta tiempo  $T$  resulte no acotada en norma. Dicha sucesión de datos será fabricada empleando la misma configuración usada en (3.48), para la cual habíamos elegido  $k_1 = k_2$ ,  $k_3 = 0$ , y  $\alpha := |\ell_1|/|\ell_2|$ , y en particular para la cual se vio que el criterio de Kreiss tampoco se satisface. En la construcción de la sucesión, será crucial el hecho de que las perturbaciones se propagan a velocidad *finita* (la cual coincide con la velocidad de la luz en el vacío), por lo que es posible considerar soluciones que localmente son ondas planas.

Sobre un espaciotiempo plano foliado por hipersuperficies caracterizadas por  $t = \text{const.}$ , sea  $\Sigma_o$  la tajada  $\{t = 0\}$ , y para  $R, T > 0$ , sea  $\mathcal{B}(R, T) \subset \Sigma_o$  la bola de radio<sup>13</sup>  $r = R + T$ . Sea  $\phi_i$  una solución suave de fondo tal que, sobre el dominio de dependencia de  $\mathcal{B}(R, T)$ , los gradientes  $\ell^a_i$  son constantes y perpendiculares entre sí. Supongamos además que fuera de dicha bola, las soluciones decaen suavemente a cero de modo tal que las correspondientes normas están uniformemente acotadas.

Buscamos datos iniciales para (3.52) que sean

$$\Phi_o = (\varphi_1^o, \varphi_2^o), \quad \partial_t \Phi|_o = ((\partial_t \varphi_1)^o, (\partial_t \varphi_2)^o) \quad (3.55)$$

tales que  $\Phi_o \in H^1(\Sigma_o, \mathbb{R}^2)$  y  $\partial_t \Phi|_o \in L^2(\Sigma_o, \mathbb{R}^2)$ . Como es usual, definimos la norma de la solución  $\Phi(t) = (\varphi_1, \varphi_2)$  al tiempo  $t$  como

$$\|\Phi(t)\| := \left( \|\partial_t \Phi\|_{L^2(\Sigma_t, \mathbb{R}^2)}^2 + \|\Phi\|_{H^1(\Sigma_t, \mathbb{R}^2)}^2 \right)^{1/2}, \quad (3.56)$$

<sup>12</sup>Una forma “diferencial” de obtener (3.52) es linealizando el sistema completo (3.25) alrededor de una solución  $\phi^o_i$  manteniendo  $\ell^a_i$  constantes, y luego tomar transformada de Fourier en el espacio.

<sup>13</sup>Recordamos aquí que se han empleado unidades tales que  $c = G = 1$ , por lo cual las unidades de longitud y de tiempo son *equivalentes*.

donde  $\|\Phi\|_{L^2(\Sigma, \mathbb{R}^2)} := \|\Phi\|_{L^2(\Sigma)}$  y

$$\|\Phi\|_{H^1(\Sigma, \mathbb{R}^2)}^2 := \int_{\Sigma} |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 + |\nabla\varphi_1|^2 + |\nabla\varphi_2|^2. \quad (3.57)$$

Consideremos ahora la siguiente sucesión de datos iniciales para las perturbaciones en  $\Sigma_o$ :

$$\varphi_1^n|_o = \varphi_2^n|_o = 0; \quad (3.58)$$

$$(\partial_t \varphi_1^n)|_o(x) = \begin{cases} e^{ik_n \cdot x} / \sqrt{n}, & \text{if } x \in \mathcal{B}(R, T) \\ g_n(x), & \text{if } x \in \Sigma_o \setminus \mathcal{B}(R, T) \end{cases} \quad (3.59)$$

$$(\partial_t \varphi_2^n)|_o = -\frac{(\partial_t \varphi_1^n)|_o}{\alpha}; \quad (3.60)$$

donde  $k_n = n(1, 1, 0)$  y  $g_n$  es alguna sucesión acotada en  $L^2(\Sigma_o \setminus \mathcal{B}(R, T))$  tal que  $\partial_t \varphi_1^n|_o$  es suave sobre  $\Sigma_o$ , y la norma de cada elemento de la sucesión de datos es finita.

Denotando ahora  $\Phi^n := (\varphi_1^n, \varphi_2^n)$ , se tiene que la norma del dato anterior es

$$\begin{aligned} \|\Phi_o^n\|^2 &= \|\partial_t \Phi_o^n\|_{L^2(\Sigma_o)}^2 \\ &= \|\partial_t \Phi_o^n\|_{L^2(\mathcal{B}(R, T))}^2 + \|\partial_t \Phi_o^n\|_{L^2(\Sigma_o \setminus \mathcal{B}(R, T))}^2 \\ &= \left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right) \left[ \frac{|\mathcal{B}(R, T)|}{n} + \|g_n\|_{L^2(\Sigma_o \setminus \mathcal{B}(R, T))}^2 \right] \end{aligned} \quad (3.61)$$

donde  $|\mathcal{B}(R, T)|$  es el volumen de dicha bola en  $\Sigma_o$ . Luego, dado que  $g_n$  se eligió uniformemente acotada, lo mismo se tiene para  $\Phi^n$ . Veamos ahora que la restricción de la correspondiente sucesión de evoluciones en  $\mathcal{B}(R) \subset \Sigma_T$  de radio  $R$  definida en  $\Sigma_T = \{t = T\}$  crece sin cota. Con esto basta para ver que la norma de la solución sobre toda la superficie  $\Sigma_T$  también crece sin cota.

El argumento es el siguiente. La velocidad finita de propagación de la perturbación asegura que la solución sobre  $\mathcal{B}(R)$  sólo tiene contribuciones de las soluciones tipo ondas planas definidas en  $\mathcal{B}(R, T)$ . De hecho, dicha solución será única sobre todo el dominio de dependencia de  $\mathcal{B}(R, T)$ , como consecuencia del teorema de Unicidad de Holmgren (ver Teorema 5.1 en [48] ó Prop. 5 en [23] para más detalles), pues el correspondiente dato inicial es suave y está definido sobre  $\mathcal{B}(R, T) \subset \Sigma_o$ , que **no** es característica. Luego, para analizar el comportamiento de la evolución en  $\mathcal{B}(R)$ , basta con evolucionar la restricción del dato inicial sobre  $\mathcal{B}(R, T)$ ; i.e., analizar la evolución del sistema (3.52) tomando como dato inicial a

$$\hat{\varphi}_i^n|_o = 0, \quad \partial_t \hat{\varphi}_1^n|_o = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \partial_t \hat{\varphi}_2^n|_o = -\frac{\partial_t \hat{\varphi}_1^n|_o}{\alpha}. \quad (3.62)$$

sobre *toda*  $\Sigma_o$ . La solución a tiempo  $t = T$  viene dada por la simple expresión

$$\hat{\varphi}_1^n(T, \vec{k}) = \frac{T}{\sqrt{n}}, \quad \hat{\varphi}_2^n(T, \vec{k}) = -\frac{T}{\alpha\sqrt{n}}, \quad (3.63)$$

que además corresponde (antitransformando Fourier) a la *única* solución

$$\varphi_1^n(T, x) = \frac{T}{\sqrt{n}}e^{ik_n \cdot x}; \quad \varphi_2^n(T, x) = -\frac{T}{\alpha\sqrt{n}}e^{ik_n \cdot x}, \quad (3.64)$$

dentro de  $\mathcal{B}(R) \subset \Sigma_T$ .

Luego, la norma de la solución completa a tiempo  $t = T$  satisface

$$\begin{aligned} \|\Phi^n(T)\|^2 &\geq \|\Phi^n(T)|_{\mathcal{B}(R)}\|^2 \\ &= \|\Phi^n(T)\|_{H^1(\mathcal{B}(R))}^2 + \|\partial_t \Phi^n(T)\|_{L^2(\mathcal{B}(R))}^2 \\ &= \|\Phi^n(T)\|_{L^2(\mathcal{B}(R))}^2 + \|\nabla \Phi^n(T)\|_{\mathcal{B}(R)}^2 \\ &\quad + \|\partial_t \Phi^n(T)\|_{L^2(\mathcal{B}(R))}^2 \\ &= 2T^2 \left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right) |\mathcal{B}(R)|n + \mathcal{O}(1/n), \end{aligned} \quad (3.65)$$

donde hemos denotado

$$\|\nabla \Phi\|_{\mathcal{B}(R)}^2 := \sum_{j=1}^2 \|\nabla \varphi_j\|_{L^2(\mathcal{B}(R))}^2.$$

Esto nos dice que no es posible acotar a la solución en términos de una cota sobre el dato inicial, para ningún tiempo, de donde se concluye que el sistema es en general no-continuo respecto a cualquier dato inicial.

Cabe aclarar aquí que si bien en este argumento se ha empleado una norma particular para los cálculos (aquellas naturales en los espacios funcionales a los que pertenecen las soluciones de interés), un argumento completamente análogo es válido para *cualquier* norma de Sobolev; i.e., controlando un número arbitrario (pero finito) de derivadas de la solución. Más aún, como fue asertado por Strang, este argumento puede ser extendido a perturbaciones alrededor de soluciones arbitrariamente suaves (generalizando el presente caso en el cual las perturbaciones eran tales que sus gradientes eran constantes). Esencialmente, esto explica que al considerar perturbaciones de alta frecuencia, siempre es posible concentrar el análisis sólo en vecindades pequeñas de la solución de fondo.



# Capítulo 4

## Teoría de fluidos conformes relativistas

Durante este capítulo y el siguiente desarrollamos una teoría simétrico-hiperbólica que describe de manera completa la *clase conforme* de fluidos disipativos relativistas. Para ello, nos basamos en la formulación de teorías *tipo divergencia*, propuestas por Geroch y Lindblom [49] a partir de un trabajo seminal de Pennisi [50]. Este tipo de teorías está completamente caracterizada por variables de evolución cuya dinámica está gobernada por leyes de conservación de tipo divergencia.

Específicamente, presentamos una caracterización completa de la familia de fluidos conformes en términos de una única función escalar, la cual codifica efectos disipativos hasta segundo orden en magnitud. Esta función permite identificar los estados de equilibrio de la teoría, como así también derivar relaciones constitutivas y una ley covariante de tipo Fourier para el flujo de calor correspondiente a la teoría a primer orden. Finalmente, demostramos que la teoría propuesta resulta efectivamente simétrico-hiperbólica cerca del equilibrio.

### 4.1. Introducción

Dentro de un amplio espectro en Física, el entendimiento de la dinámica y la caracterización de fluidos ultraveloces es esencial en la descripción del comportamiento de la materia y la energía de la mayoría de los sistemas masivos continuos. En astrofísica, sistemas compactos y discos de acreción son modelados por fluidos de tipo relativistas, sujetos a ciertas condiciones físicas determinadas por los procesos que estos sistemas describen [51, 52, 53, 43]. Por su parte, en física de partículas se apela a sistemas tipo fluidos para obte-

ner una descripción detallada de la dinámica de quarks y gluones, partículas elementales producidas en procesos de colisión altamente energéticos ([54, 18] y [55] para un interesante Review). Por último mencionamos su uso en cosmología, debido a que cierta clase de fluidos relativistas modelan la dinámica del Universo temprano en la época de radiación dominante (para detalles, véase el libro [56] y referencias allí).

El comienzo del estudio de la estructura matemática de la dinámica de fluidos relativistas data de algunos trabajos debidos a A. Lichnerowicz [57, 58], quien fue el primero en proponer una teoría a fines de los 60 que, aunque acotados y bajo muchas hipótesis, proveyó algunos resultados de existencia y unicidad de ciertas soluciones relevantes.

Físicamente, toda teoría de fluidos puede derivarse de una descripción efectiva de campos cuánticos interactuantes si se consideran fluctuaciones de longitud de onda lo suficientemente grande. Este esquema requiere de un enfoque desde la teoría cinética y la termodinámica de sistemas microscópicos [59, 60, 61, 62, 63]. Así, las ecuaciones resultantes gobiernan el comportamiento microscópico de fluidos en términos de variables continuas como la velocidad, la densidad de energía, la presión (entre otras) y relaciones termodinámicas entre ellas.

Desde un punto de vista más riguroso, la dinámica de fluidos está descrita por diferentes familias de ecuaciones de evolución, dependiendo de qué tipo de fenómeno interesa entender <sup>1</sup>. En el régimen no relativista, por ejemplo, la clase de fluidos ideales (viscosos, respectivamente) está descrita por las conocidas ecuaciones de Euler (Navier–Stokes, respectivamente). Si bien una versión relativista de las ecuaciones de Euler para fluidos perfectos puede obtenerse de manera directa, la inclusión de efectos disipativos en una teoría compatible<sup>2</sup> con los principios de la Relatividad General resulta no trivial y actualmente constituye todo un área de investigación, dado que introduce ciertas sutilezas ya a nivel formal. Más específicamente, una descripción galileana de fluidos (la cual está formalmente descrita por las ecuaciones de Navier–Stokes) resulta en ecuaciones parabólicas, como la ecuación de difusión. La naturaleza de este tipo de ecuaciones admite perturbaciones que se propagan instantáneamente (con velocidad de propagación infinita), y por ello es que en principio no pueden ser compatibles con la estructura causal impuesta por la Relatividad General [65, 66, 67]. Por ejemplo, este hecho es evidente en los primeros inten-

---

<sup>1</sup>Cabe mencionar aquí que dichos sistemas de evolución podrían o no ser de tipo *conservativas*. Mientras que éste tipo de sistemas resulta muy útil para la descripción de fenómenos que involucran ondas de choque o rarefacción, podrían en principio existir teorías causales más generales de fluidos relativistas disipativos (véase [64] para detalles sobre esto).

<sup>2</sup>y más generalmente, el problema de encontrar soluciones globalmente regulares de las correspondientes ecuaciones de evolución.

tos de teorías relativistas de fluidos debidas a Eckart [68] y Landau-Lifshitz [69], en las cuales se consideran como variables dinámicas la cuatriveLOCIDAD del fluido y ciertas cantidades termodinámicas. Así, resultó clara la necesidad substancial de mejorar la descripción teórica de este tipo de sistemas, requiriendo causalidad pero manteniendo una descripción fenomenológica similar a la propuesta de Navier–Stokes.

Durante los últimos 50 años, varias propuestas han sido sugeridas a tal fin, y todas ellas requieren considerar nuevos parámetros o variables más allá de aquellos presentes en la teoría de Navier–Stokes (ver, por ejemplo, [70, 71]). Sin embargo, la mayoría de dichos parámetros resultan difíciles de estimar a partir de experimentos disponibles, además de no significar variables relevantes en la descripción fenomenológica del sistema. Algunos intentos extienden directamente el conjunto de variables dinámicas al tensor de energía–momento y a la cuadri-corriente de partículas de la teoría en cuestión. Uno de tales intentos, propuesto por Liu, Müller y Ruggeri [72], sugiere plantear ecuaciones de evolución de *tipo divergencia*, las cuales hacen que los problemas de hiperbolicidad y causalidad puedan abordarse con claridad. Esta propuesta fue posteriormente extendida en el trabajo [73]. Unos años más tarde, Geroch y Lindblom [49] modificaron esta propuesta, relajando ciertas simetrías que se asumían sin motivaciones físicas claras [64, 74]). Esta nueva versión ha demostrado ser exitosa incluso para una mejor comprensión de la teoría cinética relativista, en la que todos los campos dinámicos que aparecen pueden expresarse como primeros momentos de una cierta función de distribución de probabilidad (ver, por ejemplo, [75] y [76]), y para las cuales puede identificarse un subconjunto de teorías causales fuera del equilibrio.

En este capítulo presentamos una generalización de este enfoque para dar una caracterización de la clase de fluidos relativistas de tipo *conformes*, y analizar detalladamente su problema de valores iniciales. Esta descripción se centrará fundamentalmente en la determinación de una función generatriz; esto es, un campo escalar definido en el espaciotiempo de fondo. Esta función contiene toda la información del fluido, y tiene en cuenta efectos disipativos hasta un segundo orden. La forma explícita de esta función se obtendrá bajo la imposición de *invariancia conforme* en las ecuaciones que rigen la evolución del fluido. El análisis detallado de los efectos disipativos de primer y segundo orden, así como el rol de la contribución a segundo orden en la hiperbolicidad simétrica de la teoría se tratará en el capítulo siguiente.

#### 4.1.1. Fluidos conformes

Una de las propiedades fundamentales de las teorías de fluidos relativistas es que representan el límite de baja energía de casi cualquier teoría cuántica

de campos. En particular, las teorías *conformes* de campo conducen a teorías *conformes* de fluidos en dicho límite [77]. Este tipo de teorías tiene la característica particular de ser *conformemente invariante*; esto es, las ecuaciones dinámicas transforman covariantemente ante transformaciones conformes de la métrica del espaciotiempo de fondo (muchas veces conocidas como *transformaciones de Weyl*). Aunque ciertamente la imposición de simetría conforme restringe substancialmente la clase de fluidos a estudiar, se sugiere que dicha simetría podría aparecer aún en fluidos no conformes bajo ciertos regímenes [78].

Por otra parte, la importancia de entender el comportamiento de fluidos conformes (y su implicancia a aquellos no conformes) radica en la relación entre estas teorías particulares y ciertos aspectos en geometría diferencial. La correspondencia *fluidos/gravedad* [79, 80, 81, 82, 83] ha dilucidado una relación directa entre una cierta clase de (perturbaciones de) agujeros negros en espaciotiempos asintóticamente Anti-de-Sitter en  $d + 1$  dimensiones, e hidrodinámica conforme relativista en  $d$  dimensiones. Es decir que a partir de cualquier solución de las ecuaciones para fluidos conformes es posible construir una solución de tipo agujero negro en un espaciotiempo una dimensión mayor. Esto permite explorar una amplia gama de aspectos vinculados a la estructura de los agujeros negros y a su estabilidad, en términos de la teoría hidrodinámica dual correspondiente, y viceversa.

## 4.2. Teorías conformes de tipo divergencia

Esta sección está basada en los trabajos [49, 64, 74, 84, 85, 86, 87, 88]. Discutiremos los aspectos esenciales de las teorías tipo divergencia en Relatividad General. Luego de una introducción general, haremos hincapié en el caso de teorías conformes, las cuales han sido motivadas anteriormente.

Una de las teorías más simples pero físicamente consistentes que describen la dinámica de fluidos en el marco de la Relatividad General, y cuya formulación de valores iniciales es relativamente simple de estudiar son aquellas de tipo *divergencia*; es decir, que la forma covariante de las ecuaciones de evolución pueden expresarse como la divergencia total de sus variables dinámicas. La simplicidad de estas teorías radica en el hecho de que todas ellas pueden construirse a partir de una única función escalar más una fuente disipativa, siendo ambas cantidades funciones *algebraicas* (es decir, sin dependencia en derivadas) de las variables dinámicas.

Consideremos un espaciotiempo de fondo  $d$ -dimensional y orientado temporalmente,  $(\mathcal{M}, g_{ab})$ . El punto de partida es la suposición de que cualquier teoría de fluidos se construye a partir de los siguientes requerimientos:

- (i) Las variables dinámicas de la teoría corresponden al tensor de energía-momento  $T^{ab}$  –un tensor simétrico de tipo (2,0)–, y un campo cuadvectorial  $N^a$  que representa la densidad de corriente de partículas del fluido;
- (ii) La evolución de estas variables está dada por el sistema de primer orden definido por las ecuaciones

$$\nabla_a N^a = 0 \quad (4.1)$$

$$\nabla_a T^{ab} = 0 \quad (4.2)$$

$$\nabla_a A^{abc} = I^{bc} \quad (4.3)$$

donde el campo tensorial  $A^{abc}$  definido sobre  $\mathcal{M}$  es simétrico y de traza nula tomada sobre los últimos dos índices, y resulta una función algebraica de las variables dinámicas. El tensor  $I^{ab}$  también es simétrico y libre de traza, y depende *algebraicamente* de las variables de fluido.

- (iii) Existe un campo vectorial  $S^a$  definido *localmente* –el cual también es función algebraica de las variables de fluido–, y *como consecuencia* de las ecuaciones (4.1), (4.2) y (4.3), satisface la siguiente desigualdad:

$$\nabla_a S^a \geq 0. \quad (4.4)$$

Las primeras dos ecuaciones (4.1) y (4.2) son las conocidas leyes de conservación de la energía, momento y densidad de número de partículas para fluidos relativistas. La tercera ecuación proporciona una descripción de las propiedades disipativas del fluido, además de proveer “relaciones constitutivas”, las cuales cierran la teoría. Notemos que las simetrías del tensor constitutivo  $A^{abc}$  implican que el número de ecuaciones es *igual* al número de variables dinámicas, por lo que esta teoría no presenta vínculos diferenciales. Por último, la desigualdad (4.4) sugiere que  $S^a$  tiene el significado de *densidad de entropía* del fluido. En efecto, al integrar ambos lados de la desigualdad (4.4) sobre el volumen  $V(\Sigma, \Sigma')$  limitado por las hipersuperficies espaciales  $\Sigma, \Sigma' \subset \mathcal{M}$  con  $\Sigma'$  en el futuro de  $\Sigma$  y aplicando el Teorema de Stokes se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_V (\nabla_a S^a) \sqrt{-g} d^4x \\ &= \int_{\Sigma'} S^a d\Sigma'_a - \int_{\Sigma} S^a d\Sigma_a, \end{aligned}$$

de donde la cantidad

$$\mathcal{S}(\Sigma) := \int_{\Sigma} S^a d\Sigma_a \quad (4.5)$$

resulta no decreciente.

A lo largo de este capítulo estudiaremos aquellos fluidos que resultan *conformemente invariantes*, para los cuales *no necesariamente* hay conservación del número de partículas. Desde un punto de vista termodinámico, es posible pensar que, como en el caso de un gas de fotones, el potencial químico es nulo, ya que el proceso de creación de fotones no cuesta energía. De hecho, un gas de partículas tiende al de fotones en el límite en que el potencial químico del sistema tiende a cero (ver [89] para un discusión detallada de este aspecto). Además, en el límite ultra-relativista la densidad de energía en reposo es irrelevante, y las partículas se mueven a una escala energética mucho mayor que la que poseen en reposo (acercándose así a la dinámica de un gas de fotones). Esto justifica el hecho de que la ecuación de conservación (4.1) se descarte, debiendo considerarse únicamente las ecuaciones (4.2) y (4.3) para la descripción de la dinámica del fluido.

Una observación clave dentro de este formalismo es la siguiente: la condición (iii) no es necesariamente cierta para todo  $N^a$  y todo  $T^{ab}$ , sino sólo para aquellos que representan un proceso termodinámico, es decir, para aquellos que satisfacen las ecuaciones de conservación. Por lo tanto, dicha ley de entropía, junto con la simetría de  $T^{ab}$  implican la existencia de *nuevas variables*  $\{\xi_a, \xi_{ab}\}$  y una *función generatriz*,  $\chi(\xi_a, \xi_{ab})$  tal que

$$T^{ab} \equiv \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi_a \partial \xi_b}, \quad (4.6)$$

$$A^{abc} \equiv \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi_a \partial \xi_{bc}}. \quad (4.7)$$

Estas nuevas variables<sup>3</sup> surgen como multiplicadores de Lagrange de las ecuaciones de movimiento [49, 50]. Por lo tanto, una sola función escalar,  $\chi(\xi_a, \xi_{ab})$ , es suficiente para describir formalmente el comportamiento del fluido. Por su parte, la variable  $\xi_{ab}$  permite predecir con precisión desviaciones de la teoría de fluidos ideales. Esto se debe a que en la teoría fluidos ideales la ecuación disipativa (4.3) es inocua, por lo que no hay un multiplicador de Lagrange asociado a  $A^{abc}$ . Es natural entonces expresar a la función generatriz  $\chi$  como una expansión en términos de variables escalares disipativas definidas a partir de  $\xi_{ab}$ .

---

<sup>3</sup>Al incluir la conservación de partículas en la teoría, es normal asumir que  $\xi_{ab}$  es de traza nula, dado que con dicho requerimiento se tiene igual número de ecuaciones que de variables dinámicas. Alternativamente, dicha libertad puede ser considerada incorporando una nueva variable escalar que surge a partir de la conservación del número de partículas (más específicamente, esta variable corresponde al multiplicador de Lagrange asociado a  $N^a$ , que no siempre aparece en el caso conforme). Si bien la condición de traza nula de  $\xi_{ab}$  no será requerida a priori, veremos más adelante que surgirá como un requisito.

La función más general hasta segundo orden en variables disipativas que podemos construir bajo este esquema se puede expresar como

$$\chi(\mu, \nu, \psi) = \chi^0(\mu) + \chi^1(\mu)\nu + \sum_{i=0}^3 \chi_i^2(\mu)\psi^i, \quad (4.8)$$

donde  $\mu := \xi^c \xi_c$  es el cuadrado de la norma de  $\xi^c$ ,  $\nu := \xi^{ab} \xi_a \xi_b$ , y los escalares a segundo orden  $\{\psi_i\}_{i=1}^3$  definidos por

$$\psi_1 := \xi^{ab} \xi_{ab}, \quad \psi_2 := \xi^{ab} \xi_b \xi_{ac} \xi^c, \quad \psi_3 := \nu^2. \quad (4.9)$$

La corriente de entropía en este formalismo está dada por

$$S^a = \frac{\partial \chi}{\partial \xi_a} - \xi_b T^{ab} - \xi_{bc} A^{abc}, \quad (4.10)$$

y satisface

$$\nabla_a S^a = -\xi_{ab} I^{ab}. \quad (4.11)$$

En consecuencia, la producción de entropía en este contexto está regida por la divergencia de  $A^{abc}$  y  $\xi_{ab}$ . Esto también justifica el hecho de asociar a  $\xi_{ab}$  con contribuciones intrínsecamente “disipativas” a la teoría. En lo que sigue, se trabajará orden por orden con el fin de dar explícitamente la función generatriz como una combinación lineal de potencias de  $\xi_{ab}$ . Veremos que el requisito de la invariancia conforme tendrá un efecto significativo en la determinación de las posibles contribuciones. Antes de esto, discutiremos brevemente la simetría conforme y la estructura de las correspondientes transformaciones de los campos dinámicos.

### 4.3. Invariancia conforme

En esta sección revisamos el concepto de transformación conforme y deducimos las propiedades algebraicas que garantizan la invariancia conforme de las ecuaciones de evolución y relaciones constitutivas. Después de una discusión sobre la estructura general de los campos invariantes conformes que se utilizarán, introducimos la noción de *peso conforme* para el estudio de las transformaciones de escala de las variables de interés con respecto al factor conforme de la transformación.

#### 4.3.1. Transformaciones conformes

Para un espaciotiempo  $(\mathcal{M}, g_{ab})$ , una *transformación conforme* es un mapa suave que, punto a punto, lleva la métrica  $g_{ab}$  a  $\hat{g}_{ab}$  del siguiente modo:

$$g_{ab} \mapsto \hat{g}_{ab} := \Omega^2 g_{ab}. \quad (4.12)$$

La función  $\Omega : \mathcal{M} \rightarrow (0, \infty)$  es un campo escalar regular y positivo en  $\mathcal{M}$ . Esta clase de transformaciones, también conocidas como *transformaciones de Weyl*, afecta directamente en el tamaño de los intervalos de longitud y tiempo en  $\mathcal{M}$  dado que afecta al tensor métrico. En particular, produce un rescaleo de la norma de vectores espaciales y temporales, pero no nulos.

Es importante notar que estas transformaciones no equivalen a un cambio de coordenadas, pues por definición provocan cambios de escala diferentes en cada punto del espaciotiempo, alterando considerablemente sus propiedades geométricas (por ejemplo, hacer finita la distancia al infinito, o infinita la distancia a cierto punto). Sin embargo, resultan de gran relevancia geométrica pues dejan inalterada la *estructura causal* del espaciotiempo. Un importante resultado sobre estas transformaciones es que son las *únicas* que dejan invariante la estructura causal (véase libro de Wald, [90]).

Bajo la transformación (4.12), la conexión métrica  $\nabla_c$  transforma como

$$\hat{\nabla}_a X^b = \nabla_a X^b + C^b_{ac} X^c, \quad (4.13)$$

al actuar sobre un campo vectorial arbitrario,  $X^c$ . Aquí, se ha denotado

$$C^a_{bc} = g^{ad} (2\hat{n}_{(b} g_{c)d} - \hat{n}_d g_{bc}), \quad (4.14)$$

donde

$$\hat{n}_c := \frac{1}{\Omega} \nabla_c \Omega. \quad (4.15)$$

Notar además la identidad  $C^a_{ac} = d \hat{n}_c$ , donde  $d$  es la dimensión de  $(\mathcal{M}, g_{ab})$ .

### 4.3.2. Transformación de las variables dinámicas

La invariancia conforme de las ecuaciones de evolución de la teoría de fluidos antes discutida implica la existencia de dos constantes  $\alpha$  y  $\beta$  tales que, al transformar los campos del siguiente modo:

$$\hat{T}^{ab} = \Omega^\alpha T^{ab}; \quad \hat{A}^{abc} = \Omega^\beta A^{abc}, \quad (4.16)$$

las ecuaciones dinámicas resultan inalteradas, es decir

$$\hat{\nabla}_a \hat{T}^{ab} = 0; \quad \hat{\nabla}_a \hat{A}^{abc} = \hat{I}^{bc}. \quad (4.17)$$

Analicemos cómo transforma el tensor de energía-momento bajo una transformación conforme. Recurriendo a la relación (4.13), se tiene que

$$\begin{aligned} \hat{\nabla}_a \hat{T}^{ab} &= \nabla_a \hat{T}^{ab} + C^a_{ac} \hat{T}^{cb} + C^b_{ad} \hat{T}^{ad} \\ &= \Omega^\alpha [\nabla_a T^{ab} + (\alpha + d + 2) \hat{n}_a T^{ab} - \hat{n}^b T^{ac} g_{ac}] \end{aligned}$$

para todo  $\hat{n}_a$ . Luego, la invariancia conforme implica que los últimos dos términos del lado derecho de la última igualdad deben anularse; ésto es,

$$(\alpha + d + 2) \hat{n}_a T^{ab} - \hat{n}^b T^{ac} g_{ac} = 0. \quad (4.18)$$

Al contraer la expresión anterior con  $\hat{n}_b$  y requiriendo que la expresión obtenida sea válida *para cualquier*  $\hat{n}_a$  se tiene que ambos términos deben anularse por separado, obteniendo así el valor adecuado de  $\alpha$  y una importante propiedad para  $T^{ab}$ :

$$\alpha = -(d + 2), \quad g_{ab} T^{ab} = 0. \quad (4.19)$$

Luego, cualquier tensor de energía–momento de traza nula que transforme como

$$\hat{T}^{ab} = \Omega^{-(d+2)} T^{ab} \quad (4.20)$$

bajo una transformación conforme, satisfará una ley de conservación invariante conforme.

Realizando un razonamiento análogo para el tensor constitutivo  $A^{abc}$  se tiene, luego de manipular las expresiones correspondientes<sup>4</sup>,

$$\begin{aligned} \hat{\nabla}_a \hat{A}^{abc} &= \nabla_a \hat{A}^{abc} + C^a_{ad} \hat{A}^{dbc} + 2C^{(b}_{ad} \hat{A}^{|a|c)d} \\ &= \Omega^\beta [\nabla_a A^{abc} + (\beta + d + 2) \hat{n}_a A^{abc} + 2\hat{n}_d A^{(bc)d} - 2\hat{n}^{(b} g_{ad} A^{|a|c)d}] \end{aligned}$$

Al igual que en el caso anterior, los términos segundo, tercero y cuarto del lado derecho deben anularse; es decir, para cualquier  $\hat{n}_a$  debe ser

$$(\beta + d + 2) \hat{n}_a A^{abc} + 2\hat{n}_d A^{(bc)d} - 2\hat{n}^{(b} g_{ad} A^{|a|c)d} = 0. \quad (4.21)$$

Contrayendo (4.21) con  $\hat{n}_b \hat{n}_c$  se obtiene

$$\frac{1}{2}(\beta + d + 4) A^{abc} \hat{n}_a \hat{n}_b \hat{n}_c - A^{bca} g_{bc} \hat{n}_a = 0 \quad (4.22)$$

para cualquier  $\hat{n}_a$ . Dado que  $A^{abc}$  es libre de traza en los últimos dos índices, cada término debe anularse por separado, y por lo tanto se obtiene que  $\beta = -(d + 4)$ , y  $A^{bca} g_{bc} = 0$ . Por lo tanto, la ecuación (4.21) se reduce a

$$\hat{n}_a A^{abc} - \hat{n}_a A^{(bc)a} = 0. \quad (4.23)$$

Finalmente, el tensor constitutivo transforma como

$$\hat{A}^{abc} = \Omega^{-(d+4)} A^{abc}. \quad (4.24)$$

---

<sup>4</sup>El cálculo completo puede verse en detalle en el trabajo [2].

### 4.3.3. Peso conforme

Diremos que una cantidad arbitraria  $X$  tiene *peso conforme*  $n$ , y lo denotamos como  $\mathfrak{p}(X) = n$  si

$$\hat{X} = \Omega^{-n} X, \quad (4.25)$$

donde  $\hat{X}$  es la cantidad conforme relacionada a  $X$  via la transformación (4.12).

Algunos ejemplos que se siguen de la discusión anterior son los siguientes:  $\mathfrak{p}(T^{ab}) = d + 2$ , y  $\mathfrak{p}(A^{abc}) = d + 4$ . Por otra parte, de la ecuación de producción de entropía (4.11) se ve que, para que resulte *conformemente invariante*, debe ser  $\mathfrak{p}(S^a) = d$ . En efecto, sean  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  constantes tales que  $\hat{S}^a = \Omega^{\gamma_1} S^a$  y  $\hat{\sigma} = \Omega^{\gamma_2} \sigma$ , donde  $\sigma = -\xi_{ab} I^{ab}$  (ver ecuación (4.11)). Por un argumento similar a los dados anteriormente, se obtiene

$$\hat{\nabla}_a \hat{S}^a = \Omega^\gamma (\nabla_a S^a + (\gamma + d) \hat{n}_a S^a). \quad (4.26)$$

para cualquier  $\hat{n}_a$ . Imponiendo que el lado izquierdo de (4.26) sea igual a  $\hat{\sigma}$ , resulta que  $\gamma_1 = \gamma_2 = -d$ , de donde se concluye que  $\mathfrak{p}(S^a) = d$ . Utilizando este resultado, la definición de entropía dada en la ecuación (4.10) y los pesos conformes de  $T^{ab}$  y  $A^{abc}$  mencionados anteriormente, se tiene que  $\mathfrak{p}(\xi_a) = -2$  y  $\mathfrak{p}(\xi_{ab}) = -4$ . Esto a su vez implica que  $\mathfrak{p}(\xi^a) = \mathfrak{p}(\xi^{ab}) = 0$ .

Por último, notemos que a partir de los pesos conformes de  $\xi^a$  y  $\xi_a$  se obtiene que  $\mathfrak{p}(\mu) = -2$ . Asimismo, como consecuencia de (4.10),

$$d = \mathfrak{p} \left( \frac{\partial \chi}{\partial \xi_a} \right) = \mathfrak{p}(\chi) - \mathfrak{p}(\xi_a),$$

de donde se deduce que  $\mathfrak{p}(\chi) = d - 2$ .

Conocer el peso conforme de las cantidades empleadas en la teoría así como las relaciones entre éstos, será de gran ayuda para determinar de manera única las potencias de  $\mu$  en los diferentes factores que aparecen orden por orden en la función generatriz de la teoría completa.

## 4.4. Fluido ideal y estados de equilibrio

En esta sección presentamos una descripción detallada de la teoría de fluidos conformes sin disipación a partir de este formalismo. Veremos que a partir de las ecuaciones anteriores emerge naturalmente la estructura de fluido perfecto bien conocida, en particular la forma del tensor de energía-momento y la ecuación de estado de radiación pura. Luego, siguiendo los lineamientos de [49], daremos una primera caracterización de los estados de equilibrio, además de obtener una expresión para la entropía como función de las variables fundamentales, verificando que resulta una cantidad conservada en equilibrio. Para

ello, sólo consideraremos como función generatriz al primer término en la expansión (4.8), y a partir de la ecuación (4.6) obtenemos

$$T_o^{ab} = 4\chi_{\mu\mu}^o \xi^a \xi^b + 2\chi_\mu^o g^{ab}, \quad (4.27)$$

donde anotamos  $f_\mu$  para la derivada de  $f$  respecto a  $\mu$ . Además, dado que  $\chi$  no depende de  $\xi_{ab}$  a este orden se tiene, por definición,

$$A_o^{abc} = 0. \quad (4.28)$$

El requerimiento de invariancia conforme se reduce simplemente a imponer que la traza de  $T_o^{ab}$  sea nula. Así, se llega a la siguiente ecuación diferencial para  $\chi^o$ :

$$2d\chi_\mu^o + 4\mu\chi_{\mu\mu}^o = 0. \quad (4.29)$$

La solución a dicha ecuación que tiene sentido físico es

$$\chi^o(\mu) = \frac{\chi_o^o}{\mu^{\frac{d}{2}-1}}, \quad (4.30)$$

donde  $\chi_o^o$  es una constante cuyo valor absoluto no contribuye significativamente en el análisis posterior (sí su signo).

La solución aquí obtenida corresponde a un fluido perfecto. Esto puede verse de manera sencilla, asumiendo que el campo  $\xi^a$  es temporal y definiendo

$$u^a := \frac{\xi^a}{\sqrt{-\mu}}. \quad (4.31)$$

Introduciendo las funciones *densidad de energía* y *presión*  $\{\rho, p\}$  usuales

$$\rho := T^{ab} u_a u_b, \quad p := \frac{T^{ab} (g_{ab} + u_a u_b)}{d-1}, \quad (4.32)$$

resulta evidente que la expresión (4.27) es equivalente a

$$T_{PF}^{ab} = (\rho + p)u^a u^b + p g^{ab}, \quad (4.33)$$

via la identificación

$$p := 2\chi_\mu^o, \quad \rho := -4\mu\chi_{\mu\mu}^o - 2\chi_\mu^o. \quad (4.34)$$

Señalamos algunas observaciones al respecto.

- Para hacer una identificación como la anterior, no es estrictamente necesario suponer que  $\xi^a$  es temporal. Sin embargo, si el objetivo es describir un fluido perfecto con cuadrivelocidad  $u^a \sim \xi^a$ , un requisito natural es que  $\xi^a$  lo sea.

- Como es de esperar, el tensor de energía–momento obtenido corresponde a un fluido perfecto con ecuación de estado de *radiación*, por lo que la invariancia conforme genera a este orden una *única* clase de soluciones. De hecho, una consecuencia directa de la ecuación (4.29) es, precisamente, dicha ecuación de estado:

$$p = \frac{\rho}{d-1}, \quad (4.35)$$

la cual puede verificarse directamente usando (4.32).

- La positividad de la densidad de energía  $\rho$  es una consecuencia de la condición de energía dominante para  $T_o^{ab}$ . En efecto, es sencillo comprobar que si  $T_o^{ab}$  satisface la condición de energía dominante, y  $\xi^a$  es temporal, entonces  $\rho \geq 0$ , lo que implica necesariamente que  $\chi^o_o < 0$ .
- Es directo verificar que para cada  $x \in \mathcal{M}$ , el vector  $\xi^a$  es un autovector de  $T_o^{ab}$ . Por lo tanto, si se supone que  $\xi^a$  es temporal y unitario, y se lo conoce en la literatura como “frame de Landau” (ver, por ejemplo, [86]).
- Por último, introduciendo la cantidad

$$T := \frac{1}{\sqrt{-\mu}} \quad (4.36)$$

de tal modo que  $u^a = T\xi^a$ , y usando la solución (4.30) obtenida para la función generatriz, vemos que tanto la densidad de energía como la presión escalan como  $T^d$ . Además, es sencillo verificar que  $\mathfrak{p}(T) = 1$  (ver sección 4.3.3). Identificaremos esta cantidad como la *temperatura* del fluido (en equilibrio, o estados cercanos al equilibrio). En este contexto, la noción de temperatura capturada en (4.36) ha sido estudiada anteriormente, con el fin de caracterizar los estados de equilibrio termodinámico de sistemas gravitacionales. En particular, destacamos el trabajo de Tolman [91], en el que se deriva una expresión similar a (4.36) para espaciotiempos estáticos.

Por último, siguiendo la definición dada en la ecuación (4.10), se obtiene

$$\begin{aligned} S_o^a &= \frac{\partial \chi^o}{\partial \xi_a} - \xi_b T_o^{ab} \\ &= \frac{d}{d-1} \frac{\rho}{T} u^a. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Un calculo directo permite ver que

$$\nabla_a S_o^a = 2d\chi^o_\mu \left( D - \frac{d\dot{\mu}}{2\mu} \right) = 0, \quad (4.38)$$

en virtud de la relación (B.20) derivada en el Apéndice B. Por lo tanto, la entropía es conservada a este orden, como se espera.

#### 4.4.1. Estados de equilibrio

En esta sección discutimos los estados de equilibrio de la teoría. Aunque estos estados son bien conocidos y están presentes de manera exhaustiva en la literatura, el objetivo de esta sección es presentar una derivación simple alternativa, utilizando sólo los elementos proporcionados hasta aquí. Para mayores detalles sobre los cálculos realizados a tal fin, redirigimos nuevamente al lector al Apéndice B. La discusión de campos vectoriales de Killing conformes está basada en el texto de R. Wald, [90].

De acuerdo con los argumentos de Geroch y Lindblom [49, 64], los estados de equilibrio de cualquier teoría de fluidos deben satisfacer las mismas propiedades que aquellos ya presentes en la teoría de Eckart; esto es, fluidos laminares de temperatura constante y estable. Sin embargo, proporcionan una definición formal y de primeros principios, la cual adoptaremos en nuestra discusión.

Llamaremos *estados de equilibrio* de la teoría a aquellas soluciones tales que su dinámica es *temporalmente reversible*. Si bien esta definición puede resultar un tanto general, es posible ver con argumentos algebraicos simples que, particularizando a teorías de tipo divergencia, los estados de equilibrio tienen las siguientes propiedades:

- la fuente de disipación  $I^{ab}$  es igual a cero al evaluarla en dichos estados;
- no hay producción de entropía a partir de los mismos;
- el campo  $\xi^a$  es un campo vectorial de Killing.

Damos ahora un primer argumento para afirmar que los estados de equilibrio para teorías de fluidos *conformes* disipativos relativistas son aquellos en los que  $\xi^a$  es un campo vectorial de Killing conforme. En general, decimos que  $X^a$  es un *campo vectorial de Killing conforme* si existe un campo escalar  $\alpha$  tal que

$$\nabla_{(a}X_{b)} = \alpha g_{ab}.$$

Si la relación anterior se satisface para algún  $\alpha$ , al contraer ambos miembros de dicha relación con  $g^{ab}$  obtenemos

$$\alpha = \frac{\nabla_a X^a}{d},$$

donde  $d$  es la dimensión del espaciotiempo.

Para entender la naturaleza de  $\xi^a$ , calcularemos su correspondiente derivada covariante simetrizada  $\mathfrak{d}_{ab} := \nabla_{(a}\xi_{b)}$  de una forma particular. Por construcción,  $\mathfrak{d}_{ab}$  debe ser un tensor *simétrico* de tipo (2, 2). Los únicos tensores simétricos que pueden ser construídos en términos de  $\xi^a$  y la métrica de fondo son la métrica misma y  $\xi_a\xi_b$ . Luego, proponemos una combinación lineal para  $\mathfrak{d}_{ab}$ ; esto es

$$\mathfrak{d}_{ab} = t g_{ab} + s \xi^a \xi^b, \quad (4.39)$$

donde  $t, s$  son funciones de  $\mu$  y  $d$  a determinar. En efecto, al contraer (4.39) con  $g^{ab}$  se obtiene

$$D = td + s\mu,$$

mientras que la contracción con  $\xi^a\xi^b$  arroja la relación

$$\frac{\dot{\mu}}{2} = t\mu + s\mu^2.$$

Teniendo en cuenta ahora las identidades (B.19) y (B.20) del Apéndice B, las relaciones obtenidas para  $t$  y  $s$  implican directamente que  $t = D/d$  y  $s = 0$ , de donde se deduce que  $\xi^a$  es un campo vectorial de Killing conforme. Luego, los estados de equilibrio en estas teorías se corresponden con soluciones tales que  $\xi_{ab} = 0$  (lo que se satisface por construcción a este orden) y tal que  $\xi^a$  es un campo de Killing conforme de la métrica de fondo<sup>5</sup>.

---

<sup>5</sup>Interesantemente, la condición obtenida para  $\xi^a$  para ser un estado de equilibrio es muy sutil, ya que depende exclusivamente de la geometría de fondo. Sólo una determinada clase de espaciotiempos admite vectores de Killing conformes, por lo que podría haber casos en los que este tipo de teorías no admitan estados de equilibrio (en caso que se trabaje sobre espaciotiempos que no admitan vectores de Killing conformes).

# Capítulo 5

## Hiperbolicidad de la teoría disipativa a segundo orden

En este capítulo proponemos contribuciones a primer y segundo orden en efectos disipativos para la teoría de fluidos que desarrollamos, siguiendo los lineamientos de teorías tipo divergencia e imponiendo las condiciones de invariancia ante transformaciones conformes derivadas en el capítulo anterior. En particular, damos expresiones para las contribuciones de la densidad de energía, momento y entropía del sistema, y derivamos relaciones constitutivas a partir de la propuesta más general posible para la fuente disipativa. A primer orden, se recupera la teoría de Fourier/Landau conocida en la literatura (ver [69]), como la Ley de Fourier, las contribuciones disipativas por *shear* del tensor energía – momento y la entropía del sistema completo obtenida por Hiscock y Lindblom [65]. Finalmente, luego del planteo de las relaciones constitutivas más generales, damos condiciones suficientes sobre los parámetros libres para que la teoría propuesta resulte simétrico-hiperbólica si se consideran estados suficientemente cercanos al equilibrio termodinámico. Bajo estas condiciones, el sistema puede ser implementado numéricamente.

### 5.1. Contribución a primer orden

En esta sección estudiamos la contribución disipativa a primer orden de la teoría, la cual se obtiene al considerar una función generatriz lineal en términos disipativos. Esta aproximación representa una mejora significativa en la descripción de fluidos relativistas cuando la escala temporal microscópica resulta comparable con la escala macroscópica, debido a que el equilibrio termodinámico local se rompe (ver, por ejemplo, [86]). A este orden encontraremos nuevas cantidades relevantes en la dinámica del fluido: por un lado, el flujo de calor

ortogonal a la cuadrivelocidad, el cual satisface una ley de tipo Fourier; y por otro lado, la viscosidad de corte (o *shear*), ambas cantidades presentes en el tensor de energía–momento a este orden. Obtendremos además una expresión para la corriente de densidad entrópica, observando que no resulta conservada (como es de esperar). Veremos además que la disipación de energía, y por lo tanto la producción de entropía, desempeñan un papel central a este orden.

A tal fin, resulta útil considerar la siguiente descomposición ortonormal para la variable disipativa  $\xi_{ab}$ :

$$\xi_{ab} = \frac{\nu}{\mu^2} \xi_a \xi_b + \frac{2}{\mu} \xi_{(a} r_{b)} + \tau_{ab} , \quad (5.1)$$

donde hemos introducido las cantidades

$$r_a \equiv \xi_{ab} \xi^b - \frac{\nu}{\mu} \xi_a , \quad (5.2)$$

$$\tau_{ab} \equiv \tilde{\tau}_{ab} - \frac{h_{ab}}{d-1} \frac{\nu}{\mu} . \quad (5.3)$$

las cuales satisfacen las relaciones

$$\tau_{ab} \xi^b = 0 , \quad r_a \xi^a = g^{ab} \tilde{\tau}_{ab} = 0 , \quad (5.4)$$

las cuales se deducen de manera directa de las definiciones anteriores. Esta descomposición siempre puede realizarse; su derivación es sencilla, y está presentada en parte del Apéndice B.

Observemos que los únicos campos vectoriales que se pueden construir como funciones algebraicas de las variables  $(\xi_a, \xi_{ab})$  y la métrica  $g_{ab}$ , que son a lo más lineales en  $\xi_{ab}$  resultan ser:  $\xi^a := g^{ab} \xi_b$  y  $\ell^a := \xi^{ab} \xi_b$ . En particular, si  $\xi^a$  es temporal, se tiene que  $r^a$  resulta siempre ortogonal a  $\xi^a$  y por lo tanto es espacial. A continuación haremos uso de esta descomposición para derivar las relaciones constitutivas de la teoría.

La contribución a primer orden en las variables disipativas de la función generatriz resulta

$$\chi^{(1)}(\mu, \nu) = \chi^1(\mu) \nu ,$$

donde  $\chi^1$  es una función de  $\mu$  a determinar, y  $\nu := \xi^{ab} \xi_a \xi_b$  es el único escalar (no trivial) lineal en  $\xi_{ab}$  y es función algebraica de las variables  $(\xi_a, \xi_{ab})$  y la métrica. Las correspondientes contribuciones del tensor de energía–momento y el tensor constitutivo que surgen de  $\chi^{(1)}(\mu, \nu)$  pueden expresarse, respectivamente, del siguiente modo:

$$T_{ab}^1 = 4\chi_{\mu\mu}^1 \nu \xi_a \xi_b + 8\chi_{\mu}^1 \xi_{(a} \xi_{b)c} \xi^c + 2\chi_{\mu}^1 \nu g_{ab} + 2\chi^1 \xi_{ab} , \quad (5.5)$$

$$A_1^{abc} = \chi^1 \left( 2g^{a(b}\xi^{c)} - \frac{2}{d}\xi^a g^{bc} \right) + 2\chi_\mu^1 \xi^a \left( \xi^b \xi^c - \frac{\mu}{d} g^{bc} \right). \quad (5.6)$$

Imponemos ahora los requisitos de invariancia conforme. La condición de traza nula para (5.5) arroja las siguientes dos condiciones:

$$2\mu\chi_{\mu\mu}^1 + (d+4)\chi_\mu^1 = 0, \quad (5.7)$$

$$g^{ab}\xi_{ab} = 0. \quad (5.8)$$

Si bien la segunda condición es esperable pues  $\xi_{ab}$  fue construido de traza nula, la primer condición resulta una ecuación diferencial ordinaria para  $\chi^1$ , cuya solución general es

$$\chi^1 = \chi_1^1 + \frac{\chi_o^1}{\mu^{\frac{d+2}{2}}}, \quad (5.9)$$

con  $\chi_1^1$  y  $\chi_o^1$  constantes reales.

La condición de invariancia conforme para (5.6), es decir aquella dada por la ecuación (4.23), implica directamente que

$$2\mu\chi_\mu^1 + (d+2)\chi^1 = 0, \quad (5.10)$$

la cual elimina la constante  $\chi_1^1$  de la solución general (5.9). Resulta crucial notar aquí que las relaciones (5.10) y (5.7) son *compatibles* entre sí, en el sentido de que una es integral primera de la otra. Por lo tanto, la ecuación (5.10) nos permite expresar todos los coeficientes de  $T_{ab}^1$  y  $A_1^{abc}$  en términos de una *única* función:  $\chi^1$ . De hecho, se tiene

$$T_1^{ab} = \chi^1 \left[ \frac{(d+2)(d+4)}{\mu^2} \nu \xi^a \xi^b - \frac{4(d+2)}{\mu} \xi^{(a} \xi^{b)c} \xi_c - \frac{d+2}{\mu} \nu g^{ab} + 2\xi^{ab} \right], \quad (5.11)$$

y

$$\begin{aligned} A_1^{abc} &= \chi^1 \left[ 2g^{a(b}\xi^{c)} + \xi^a g^{bc} - \frac{d+2}{\mu} \xi^a \xi^b \xi^c \right] \\ &= \chi^1 \left[ 2h^{a(b}\xi^{c)} + \xi^a \left( g^{bc} - \frac{d}{\mu} \xi^b \xi^c \right) \right] \\ &= \chi^1 \sqrt{-\mu} \left[ 2h^{a(b}u^{c)} + u^a h^{bc} + (d-1)u^a u^b u^c \right], \end{aligned} \quad (5.12)$$

donde hemos introducido una vez más la cuadrivelocidad del fluido

$$u^c = \frac{\xi^c}{\sqrt{-\mu}}. \quad (5.13)$$

Notemos también que  $A_1^{abc}$  resulta libre de traza en cualquier par de índices (como fue obtenido en (4.23)), y puede ser expresado de la forma sugerida en la fórmula (B.7) del Apéndice B eligiendo  $V^a = \xi^a$  y

$$S^{ab} = g^{ab} - \frac{d+2}{3\mu} \xi^a \xi^b. \quad (5.14)$$

Además, imponiendo la condición (4.23) en la ecuación (5.6) obtenemos nuevamente la primer integral (5.10).

Por otro lado, es posible calcular explícitamente la divergencia de  $A_1^{abc}$ , la cual utilizaremos más adelante para derivar relaciones constitutivas. En efecto, se obtiene que

$$\begin{aligned} \nabla_a A_1^{abc} = & - \frac{\chi^1(d+1)}{2\mu} [2\sqrt{-\mu} u^{(b} D^{c)} \mu + \mu h^{bc} + (d-1)\mu u^b u^c] \\ & + \chi^1 \sqrt{-\mu} [2D^{(b} u^{c)} + (\nabla_a u^a) h^{bc} \\ & + (d+1) ((\nabla_a u^a) u^b u^c + 2u^a u^{(b} \nabla_a u^{c)})] . \end{aligned} \quad (5.15)$$

Las expresiones obtenidas hasta ahora nos permiten encontrar expresiones para cantidades físicas relevantes en la descripción del fluido a este orden. Para ello, es necesario volver a re-expresar a  $T_{ab}^1$  y  $A_1^{abc}$ , utilizando la descomposición (5.1). Comenzamos con  $T_{ab}^1$ , obteniendo

$$T_{ab}^1 = \chi^1 \frac{\nu}{\mu^2} \frac{d^2(d+1)}{d-1} \left[ \xi_a \xi_b - \frac{\mu}{d} g_{ab} \right] - \frac{4(d+1)\chi^1}{\mu} \xi_{(a} r_{b)} + 2\chi^1 \tilde{\tau}_{ab}. \quad (5.16)$$

Teniendo en cuenta la relación (5.13), es posible deducir fácilmente las “correcciones” a primer orden para densidad y presión del fluido:

$$\rho_1 = -d(d+1)\chi^1 \frac{\nu}{\mu}, \quad p_1 = -\chi^1 \frac{d(d+1)}{d-1} \frac{\nu}{\mu}, \quad (5.17)$$

donde hemos empleado las definiciones (4.32), y como era de esperarse se preserva la ecuación de estado de radiación también a este orden; i.e.,

$$p = \frac{\rho}{d-1}, \quad (5.18)$$

con

$$\rho = \rho_0 + \rho_1, \quad p = p_0 + p_1,$$

donde  $\rho_0$  y  $p_0$  son las contribuciones de orden cero derivadas en el capítulo anterior. Por otra parte, de la condición de energía dominante para  $T^{ab}$ , se tiene además que  $\rho \geq 0$ , y por lo tanto debe ser  $\chi^1_0 < 0$ .

### 5.1.1. Flujo de calor y una ley de tipo Fourier

En contextos no-relativistas, suele introducirse la noción de flujo de calor como un vector espacial  $\vec{q}$  que mide la tasa de flujo de energía por unidad de área en cada punto del espacio, desde el referencial del fluido. La ecuación que satisface dicha cantidad es consecuencia directa de la primera y segunda ley de la Termodinámica, además de la conocida *ley de Fourier* [69]

$$\vec{q} = -k \vec{\nabla} T, \quad (5.19)$$

donde  $k$  es la *difusividad térmica* del fluido y  $T$  su temperatura. Como se discutió al principio del capítulo anterior, una generalización de esta construcción que sea compatible con la Relatividad General no resulta directa por varias razones, [92]. En particular, la ecuación (5.19) conduce a la siguiente ecuación parabólica para la temperatura:

$$\partial_t T = a \nabla^2 T, \quad (5.20)$$

donde  $a$  es una constante positiva y  $\nabla^2$  es el laplaciano plano. Si bien esta ecuación posee un problema de valores iniciales bien puesto (esto puede verse en el libro [93]), su naturaleza provee velocidad de propagación infinita para las perturbaciones térmicas<sup>1</sup>, lo que dificulta su análogo causal.

No obstante, dada una teoría de fluidos relativistas con tensor de energía-momento  $T^{ab}$ , es posible introducir la noción de *flujo de calor* en el referencial del fluido, digamos  $u^a$ , como la proyección del flujo de energía en el espacio ortogonal a  $u^a$ , es decir

$$q^a := -h^{ab} T_{bc} u^c.$$

Esta cantidad satisface una relación constitutiva de la forma [69]

$$q^a \sim -h^{ab} (\nabla_b T + T a_b), \quad (5.21)$$

donde  $a^c = u^b \nabla_b u^c$  es la cuadri-aceleración del fluido, y  $h^{ab}$  la métrica inducida en el espacio ortogonal a  $u^c$ , dada en términos de la métrica de fondo por

$$h^{ab} = g^{ab} + u^a u^b.$$

En efecto, de acuerdo a la expresión (5.16) obtenida para la contribución a primer orden de  $T^{ab}$ , identificamos el *flujo de calor* como

$$q^a := \frac{2(d+1)\chi^1}{\sqrt{-\mu}} r^a. \quad (5.22)$$

---

<sup>1</sup>Esto puede verificarse directamente mediante un ejemplo sencillo, resolviendo la ecuación (5.20) sobre un dominio espacial unidimensional finito, dando como perfil inicial un pulso localizado de temperatura.

Derivamos ahora una relación constitutiva para (5.22) análoga a (5.21), como consecuencia directa de la ecuación (4.3) obtenida previamente. Recurriendo una vez más a la descomposición ortonormal dada en el Apéndice B, introducimos la forma más general para la fuente disipativa  $I_{ab}$  (imponiéndole, por supuesto, todas las simetrías que la definen: traza nula y definida positiva al contraer con un  $\xi^{ab}$  no nulo):

$$I_{ab} = \frac{\tau}{\lambda\mu}\xi_a\xi_b - \frac{2}{\kappa}\xi_{(a}r_{b)} - \frac{1}{\lambda}\tau_{ab}, \quad (5.23)$$

con  $\{\kappa, \lambda\}$  funciones positivas de  $\mu$  a determinar, y requiriendo que  $I_{ab}$  tenga peso conforme  $\mathfrak{p}(I_{ab}) = d$ . Obtenemos

$$-\xi^{ab}I_{ab} = \frac{\tau^2}{\lambda} + \frac{2}{\kappa}r^a r_a + \frac{\tau^{ab}\tau_{ab}}{\lambda}, \quad (5.24)$$

la cual es positiva si  $\kappa$  y  $\lambda$  lo son, pues  $r^a$  es espacial y  $\tau^{ab}\tau_{ab} \geq 0$  (ya que  $\tau_{ab}$  es un tensor puramente espacial, definido en el espacio ortogonal a  $u^c$  en cada punto). Además, hemos usado que la traza de  $\tau_{ab}$  puede obtenerse directamente usando (5.1), y obteniendo  $\tau = -\nu/\mu$ . Considerando ahora la descomposición realizada en (5.23), la ecuación (4.3) implica directamente que

$$\begin{aligned} r^d &= -\frac{\kappa(\mu)}{\mu}\xi_c h^d{}_b \nabla_a A_1^{abc} \\ &= \frac{\chi^1(d+1)}{2} \frac{\kappa(\mu)}{\mu} \left( D^d \mu + 2h^{db} \dot{\xi}_b \right), \end{aligned} \quad (5.25)$$

Ahora, nótese que (5.25) puede llevarse a una forma más conveniente. De hecho, la identidad (B.17) implica que

$$\begin{aligned} h^{cb} \left( \frac{1}{2} \nabla_b \mu + \dot{\xi}_b \right) &= -\frac{\mu}{2d\chi_\mu^o} h^c{}_b \nabla_a T_o^{ab} \\ &= -\frac{1}{\chi_o^o} \frac{\mu^{(d+2)/2}}{d(d-2)} h^c{}_b \nabla_a T_o^{ab}, \end{aligned} \quad (5.26)$$

donde hemos usado la solución general para  $\chi^o(\mu)$  obtenida en el capítulo anterior (ecuación (4.30)). Observemos además que la relación (5.26) es *off-shell*, es decir, es una identidad geométrica que siempre se satisface, sin asumir ecuaciones de movimiento. Con esta información, la ecuación (5.25) se lee

$$r^a = -\frac{\chi_o^1}{\chi_o^o} \frac{d+1}{d(d-2)} \frac{\kappa(\mu)}{\mu} h^a{}_b \nabla_c T_o^{bc}. \quad (5.27)$$

Esta identidad tiene una interpretación física clara: el apartamiento del estado de equilibrio del sistema hace que la energía se disipe en forma de calor. En particular, los estados de equilibrio satisfacen  $r^a = 0$ , pero este no es el caso general.

Teniendo en cuenta una vez más la expresión (5.25), es posible derivar un análogo de la ley de Fourier para fluidos disipativos a primer orden. En efecto, de la identificación notada en el capítulo anterior, ecuación (4.36), se tiene que

$$r^a = -(d+1)\chi^1\kappa\sqrt{-\mu} \left( D^a T + \frac{\sqrt{-\mu}}{\mu^2} h^{ab} \dot{\xi}_b \right).$$

Luego, via la identidad (5.22), se llega a la siguiente ecuación para el flujo de calor:

$$q^a = -K \left( D^a T + \frac{\sqrt{-\mu}}{\mu^2} h^{ab} \dot{\xi}_b \right), \quad (5.28)$$

en donde

$$K := 2(d+1)^2(\chi^1)^2\kappa. \quad (5.29)$$

Esta ecuación sugiere interpretar efectivamente a  $q^a$  como un flujo de densidad de energía, el cual satisface una ecuación de transporte similar a la ecuación de Fourier newtoniana. En particular, el coeficiente de transporte variable  $K$  siempre es positivo, debido a la condición de positividad de la función  $\kappa$  discutida en (5.24).

### 5.1.2. Densidad de corriente de entropía

De acuerdo con este formalismo, la contribución de primer orden de la densidad de corriente de entropía  $S^a$  resulta

$$\begin{aligned} S_1^a &= \frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial \xi_a} - \xi_b T_1^{ab} - \xi_{bc} A_1^{abc} \\ &= -(d(d+1)+1)\chi^1 \frac{\nu}{\mu} \xi^a + 2(d+1)\chi^1 r^a \\ &= s_1 u^a + \frac{q^a}{T}, \end{aligned} \quad (5.30)$$

donde la *densidad de entropía*  $s_1$  a este orden está dada por

$$s_1 = \frac{d(d+1)+1}{d(d+1)} \frac{\rho_1}{T}. \quad (5.31)$$

Esta expresión está en completo acuerdo con resultados estándares presentes en la literatura, por ejemplo en el famoso trabajo de Hiscock y Lindblom,

[94]. Por último, notemos que  $s_1 \sim T^{d-1}$ , como es de esperar. Además, a partir de la ecuación (4.11) y la expresión (5.24) para la producción de entropía, se obtiene

$$\nabla_a S^a = \frac{\tau^2}{\lambda} + \frac{2r^a r_a}{\kappa} + \frac{\tau^{ab} \tau_{ab}}{\lambda}, \quad (5.32)$$

lo que implica que el sistema *crea* entropía a través de shear y flujo de calor. Este resultado es concordancia con resultados previos, (ver, por ejemplo, [86]).

### 5.1.3. Viscosidad de *shear*

A continuación derivamos una propiedad fundamental que satisface la contribución a primer orden del tensor de energía–momento de la teoría.

Volviendo a la expresión (5.15) para la divergencia del tensor constitutivo a primer orden y usando la ecuación de movimiento (4.3) se ve que

$$\tau_{ab} = -\lambda \chi^1 \sqrt{-\mu} [2D_{(a} u_{b)} - (\nabla_c u^c) h_{ab}] + (d+1) \lambda \chi^1 \frac{\dot{\mu}}{2\mu} h_{ab}, \quad (5.33)$$

donde hemos usado también la descomposición (5.23). La traza del tensor anterior es

$$\begin{aligned} \tau &= h^{ab} \tau_{ab} \\ &= -(d+1) \lambda \chi^1 \left[ \sqrt{-\mu} \nabla_c u^c - (d-1) \frac{\dot{\mu}}{2\mu} \right], \end{aligned} \quad (5.34)$$

donde usamos el hecho de que  $\nabla_a u^a = D_a u^a$ , dado que  $u^b \nabla_a u^b = 0$ . La parte sin traza de  $\tau_{ab}$  es, entonces,

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_{ab} &= \tau_{ab} - \frac{\tau}{d-1} h_{ab} \\ &= -2\lambda \chi^1 \sqrt{-\mu} \left[ D_{(a} u_{b)} - \frac{1}{d-1} \nabla_c u^c h_{ab} \right]. \end{aligned} \quad (5.35)$$

De aquí puede verse que  $\tilde{\tau}_{ab}$  es proporcional al *shear*

$$\begin{aligned} \sigma_{ab} &:= D_{(a} u_{b)} \\ &= D_{(a} u_{b)} - \frac{1}{d-1} \nabla_c u^c h_{ab} \end{aligned} \quad (5.36)$$

de un fluido disipativo con cuadrivelocidad  $u^c$ ; esto es,

$$\tilde{\tau}^{ab} = -2\lambda \chi^1 \sqrt{-\mu} \sigma^{ab}.$$

Obsérvese que el lado derecho de la ecuación (5.33) implica que  $-\tau_{ab}/\lambda$  tiene peso conforme  $\mathbf{p}(-\tau_{ab}/\lambda) = (2+d) - 1 - 1 = d$  como se espera. También

observamos que, en un sentido de expansión en gradientes, la contribución a primer orden del tensor energía–momento de la teoría está dada por

$$T_{ab}^{(1)} = 2\chi^1 \tilde{\tau}_{ab} = -4\lambda(\chi^1)^2 \sqrt{-\mu} \sigma_{ab}, \quad (5.37)$$

mientras que en el tratamiento estándar en la literatura (ver, por ejemplo, [95, 96]) se define como

$$T_{ab}^{(1)} = -2\eta \sigma_{ab}.$$

Luego, definiendo

$$\lambda := \frac{\eta}{2(\chi^1)^2 \sqrt{-\mu}}, \quad (5.38)$$

llegamos al mismo resultado.

## 5.2. Contribución a segundo orden

En esta sección abordamos el estudio de la teoría considerando contribuciones a segundo orden en variables disipativas, caracterizando así de manera completa la clase de teorías conformes de fluidos disipativos de segundo orden. Una pregunta que surge casi naturalmente a este punto es por qué no considerar teorías disipativas aún de mayor orden. Una respuesta razonable es que la teoría a segundo orden resulta exitosa al contrastarla con los resultados experimentales. Considerar órdenes superiores en disipación induciría un mayor número de parámetros para los cuales no se cuenta con evidencias experimentales. Este análisis incluso nos permite ver que la teoría se aplicaría solo cuando los términos de orden superior son relativamente pequeños, esto es, cuando el sistema se halla cerca del equilibrio.

Sin embargo, la consideración de estas nuevas contribuciones resulta crucial para establecer criterios de hiperbolicidad del sistema, lo que a su vez es esencial para garantizar que la teoría tenga un problema de valores iniciales bien puesto. Presentamos aquí las consideraciones necesarias para establecer la teoría a segundo orden, dejando el análisis de hiperbolicidad para la última sección de este capítulo.

La contribución a la función generatriz con términos cuadráticos en disipación puede parametrizarse como

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^3 \chi^2_i \psi_i. \quad (5.39)$$

La parte cuadrática del tensor energía–momento que se deriva a partir de (5.39) es, entonces,

$$T_2^{ab} = \sum_{i=1}^3 T_{2i}^{ab}, \quad (5.40)$$

donde para  $i = 1, 2, 3$ , definimos

$$T_{2i}^{ab} = 2\psi_i (2\chi_{i\mu\mu}^2 \xi^a \xi^b + \chi_{i\mu}^2 g^{ab}) + 2\chi_{i\mu}^2 \left( \xi^a \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi_b} + \xi^b \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi_a} \right) + \chi_i^2 \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \xi_a \partial \xi_b}, \quad (5.41)$$

con

$$\chi_{i\mu}^2 := \frac{d\chi_i^2}{d\mu}.$$

Por linealidad, la traza de  $T_2^{ab}$  tiene tres términos, una por cada contribución  $T_{2i}^{ab}$ :

$$g_{ab} T_2^{ab} = \sum_{i=1}^3 g_{ab} T_{2i}^{ab}, \quad (5.42)$$

donde

$$g_{ab} T_{2i}^{ab} = 4\psi_i \left( \mu \chi_{i\mu\mu}^2 + \frac{d}{2} \chi_{i\mu}^2 \right) + 4\chi_{i\mu}^2 \xi^a \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi^a} + \chi_i^2 g^{ab} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \xi^a \partial \xi^b}. \quad (5.43)$$

Dado que las funciones  $\psi_i$  son independientes entre sí, la condición de traza nula para  $T_2^{ab}$  arroja tres ecuaciones diferenciales ordinarias levemente acopladas, las cuales están dadas por

$$\mu \chi_{3\mu\mu}^2 + D_4 \chi_{3\mu}^2 = 0 \quad (5.44)$$

$$\mu \chi_{2\mu\mu}^2 + D_2 \chi_{2\mu}^2 + 2\chi_2^2 = 0 \quad (5.45)$$

$$\mu \chi_{1\mu\mu}^2 + D_0 \chi_{1\mu}^2 + \frac{1}{2} \chi_1^2 = 0. \quad (5.46)$$

Con el fin de acortar notación, hemos definido

$$D_j := \frac{d}{2} + j, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

La contribución a segundo orden del tensor constitutivo  $A_2^{abc}$  puede expresarse en términos de  $\psi_i$  como

$$\begin{aligned} A_2^{abc} &= \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial \xi_a \partial \xi_{bc}} \\ &= 2\chi_{i\mu}^2 \xi^a \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi_{bc}} + \chi_i^2 \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \xi_a \partial \xi_{bc}}. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Así, obtenemos

$$\begin{aligned} A_2^{abc} &= 4\xi^a \left[ \chi_{1\mu}^2 \xi^{bc} + \chi_{2\mu}^2 \left( \xi^{(b} \ell^{c)} - \frac{\nu}{d} g^{bc} \right) + \chi_{3\mu}^2 \nu \left( \xi^b \xi^c - \frac{\mu}{d} g^{bc} \right) \right] \\ &+ 2\chi_2^2 \left( g^{a(b} \ell^{c)} + \xi^{(b} \xi^{c)a} - \frac{2}{d} g^{bc} \ell^a \right) \\ &+ 4\chi_3^2 \left[ \ell^a \left( \xi^b \xi^c - \frac{\mu}{d} g^{bc} \right) + \nu \left( g^{a(b} \xi^{c)} - \frac{1}{d} \xi^a g^{bc} \right) \right]. \end{aligned}$$

Ahora, evaluemos las condiciones impuestas por invariancia conforme. Para ello usaremos las relaciones (B.10), (B.11), (B.12), las cuales nos permiten escribir el campo tensorial de tipo (3,0) más general, con las simetrías impuestas por la teoría; esto es: que sea simétrico en los dos últimos índices, que dependa algebraicamente de la métrica y las nuevas variables ( $\xi_a, \xi_{ab}$ ) con hasta términos cuadráticos en  $\xi_{ab}$  y que sea de traza nula en los últimos dos índices.

Comenzamos con la estructura general, dada por

$$\begin{aligned}
 A_2^{abc} &= \mathcal{A} \frac{\nu}{\mu} \left( \xi^a g^{bc} + 2g^{a(b\xi^c)} - \frac{(d+2)}{\mu} \xi^a \xi^b \xi^c \right) \\
 &+ \mathcal{B} \left[ \xi^a \xi^{bc} + 2\xi^{a(b\xi^c)} - \frac{2}{\mu} (2\xi^a \ell^{(b\xi^c)} + \ell^a \xi^b \xi^c) + \frac{4\nu}{\mu^2} \xi^a \xi^b \xi^c \right] \\
 &+ \mathcal{C} \left[ \ell^a g^{bc} + 2g^{a(b\ell^c)} - \frac{\nu}{\mu} (\xi^a g^{bc} + 2g^{a(b\xi^c)}) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{(d+1)}{\mu} (\ell^a \xi^b \xi^c + 2\xi^a \ell^{(b\xi^c)}) + 3(d+1) \frac{\nu}{\mu^2} \xi^a \xi^b \xi^c \right] \\
 &= (\mathcal{A} - \mathcal{C}) \frac{\nu}{\mu} (\xi^a g^{bc} + 2g^{a(b\xi^c)}) + \mathcal{B} (\xi^a \xi^{bc} + 2\xi^{a(b\xi^c)}) \\
 &+ \mathcal{C} (\ell^a g^{bc} + 2g^{a(b\ell^c)}) - \frac{2\mathcal{B} + (d+1)\mathcal{C}}{\mu} (\ell^a \xi^b \xi^c + 2\xi^a \ell^{(b\xi^c)}) \\
 &+ [-(d+2)\mathcal{A} + 4\mathcal{B} + 3(d+1)\mathcal{C}] \frac{\nu}{\mu^2} \xi^a \xi^b \xi^c \tag{5.48}
 \end{aligned}$$

Inspeccionando la ecuación (5.48) se siguen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B} &= 4\chi_{1\mu}^2 = \chi_2^2 \\
 \mathcal{C} &= \mathcal{B} = -\frac{4}{d} (\chi_2^2 + \mu\chi_3^2) \\
 \mathcal{A} - \mathcal{C} &= -\frac{4\mu}{d} (\chi_{2\mu}^2 + \mu\chi_{3\mu}^2 + \chi_3^2) = 2\mu\chi_3^2 \\
 2\mathcal{B} + (1+d)\mathcal{B} &= 4\mu\chi_3^2 = 2\mu\chi_{2\mu}^2 \\
 -(d+2)\mathcal{A} + 4\mathcal{B} + 3(d+1)\mathcal{C} &= 4\chi_{3\mu}^2 \mu^2
 \end{aligned}$$

y, a la vez,

$$\chi_2^2 = 4\chi_{1\mu}^2 \tag{5.49}$$

$$\chi_3^2 = \frac{1}{2}\chi_{2\mu}^2 \tag{5.50}$$

$$\mu\chi_{3\mu}^2 + D_3\chi_3^2 = 0. \tag{5.51}$$

Estas condiciones resultan totalmente compatibles con las ecuaciones (5.44), (5.45) y (5.46) obtenidas anteriormente. Además, es a partir de ellas que es posible obtener un sistema *desacoplado* para las funciones  $\chi_i^2$ :

$$\mu\chi_{3\mu\mu}^2 + D_4\chi_{3\mu}^2 = 0 \quad (5.52)$$

$$\mu\chi_{2\mu\mu}^2 + D_3\chi_{2\mu}^2 = 0 \quad (5.53)$$

$$\mu\chi_{1\mu\mu}^2 + D_2\chi_{1\mu}^2 = 0, \quad (5.54)$$

La estructura peculiar de las mismas permite rápidamente deducir que cada función es proporcional a la derivada de la anterior, i.e.,  $\chi_{i+1}^2 \propto \chi_{i\mu}^2$ ,  $i = 1, 2$ , en acuerdo con lo obtenido anteriormente en (5.44), (5.45) y (5.46). Además, resulta que  $A_2^{abc}$  es de traza nula en todas sus entradas. Esta condición sobre la traza también apareció en el análisis a primer orden. En efecto, resulta ser una propiedad que satisface cualquier tensor  $(3, 0)$  con las simetrías de  $A^{abc}$  al imponer invariancia conforme.

Por otro lado, a partir de (5.54, 5.53, 5.52) deducimos que

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \chi_2^2, \quad \mathcal{A} = -D_1\mathcal{B}.$$

Con la información recolectada hasta aquí, procedemos ahora a escribir las fórmulas explícitas a segundo orden para  $T_2^{ab}$  y  $A_2^{abc}$ , y discutimos algunas consecuencias.

### 5.2.1. Tensor de energía–momento

Comenzamos el análisis notando que las únicas soluciones de las ecuaciones (5.52), (5.53) y (5.54), sujetas a los requerimientos de invariancia conforme (5.49) y (5.50) vienen dadas por

$$\begin{aligned} \chi_1^2 &= \chi_{1o}^2 + \frac{\chi_o^2}{\mu^{D_1}}, \\ \chi_2^2 &= -\frac{4D_1}{\mu} (\chi_1^2 - \chi_{1o}^2), \\ \chi_3^2 &= \frac{2D_1D_2}{\mu^2} (\chi_1^2 - \chi_{1o}^2); \end{aligned} \quad (5.55)$$

con  $\chi_{1o}^2$  y  $\chi_o^2$  constantes reales a determinar. Más aún, sin pérdida de generalidad es posible considerar  $\chi_{1o}^2 = 0$  pues, de hecho, introduciendo el funcional  $X[\psi_1, \psi_2, \psi_3]$  dado por

$$\begin{aligned} X[\psi_1, \psi_2, \psi_3] &:= \psi_1 - \frac{4D_1}{\mu}\psi_2 + \frac{2D_1D_2}{\mu^2}\psi_3 \\ &= \xi_{ab}\xi^{ab} - 4\frac{D_1}{\mu}\ell_a\ell^a + \frac{2D_1D_2}{\mu^2}\nu^2 \end{aligned} \quad (5.56)$$

y usando las soluciones (5.55), un cálculo directo permite verificar que la función generatriz (5.39) puede llevarse a la forma

$$\chi^2 = \chi_1^2 X + \chi_{1o}^2 \left[ \frac{4D_1}{\mu} \psi_2 - \frac{2D_1 D_2}{\mu^2} \psi_3 \right].$$

Por lo tanto, la contribución a segundo orden para el tensor de energía-momento del fluido resulta

$$T_2^{ab} = \frac{2D_1 X \chi_o^2}{\mu^{D_3}} (2D_2 \xi^a \xi^b - \mu g^{ab}) - \frac{4D_1 \chi_o^2}{\mu^{D_2}} X^{(a} \xi^{b)} + \frac{\chi_o^2}{\mu^{D_1}} X^{ab}, \quad (5.57)$$

donde hemos definido

$$X^a \equiv \frac{\partial X}{\partial \xi_a} = \frac{8D_1}{\mu^2} (\ell^2 \xi^a + D_2 \nu r^a - \mu \xi^{ac} \ell_c); \quad (5.58)$$

$$X^{ab} \equiv \frac{\partial^2 X}{\partial \xi_a \partial \xi_b} = \frac{8D_1}{\mu^3} \left[ -\mu^2 \xi^{ac} \xi^b{}_c + 4\mu \xi^{(a} \xi^{b)c} \ell_c + \ell^2 \mu g^{ab} - 4\ell^2 \xi^a \xi^b \right. \\ \left. + D_2 \left( -8\nu \xi^{(a} \ell^{b)} - \nu^2 g^{ab} + 6\frac{\nu^2}{\mu} \xi^a \xi^b + 2\mu \ell^a \ell^b + \nu \mu \xi^{ab} \right) \right] \quad (5.59)$$

y  $\ell^2 := g_{ab} \ell^a \ell^b$ . Notamos entonces que nada depende de la constante  $\chi_{1o}^2$ , por lo que puede considerarse

El campo  $X^a$  satisface las siguientes propiedades:

$$X^a \xi_a = 0, \quad X^{ab} \xi_a = -X^b, \quad g_{ab} X^{ab} = -\frac{8D_1}{\mu} X,$$

las cuales implican, como se espera, la condición de invariancia conforme a este orden:

$$g_{ab} T_2^{ab} = 0.$$

Inspeccionaremos ahora qué información puede aportarnos esta nueva contribución a la dinámica del fluido. Para ello, es necesario encontrar una descomposición de  $T_2^{ab}$  más adecuada, análoga a las halladas en equilibrio y primer orden.

A tal fin, consideramos primero la descomposición de  $X^{ab}$  en la forma

$$X^{ab} = -\frac{2}{\mu} X^{(a} \xi^{b)} + Y^{ab}, \quad (5.60)$$

con  $Y^{ab} = Y^{(ab)}$  y  $Y^{ab} \xi_a = 0$ . De hecho, tal tensor viene dado explícitamente por

$$Y^{ab} = \frac{8D_1}{\mu^3} \left[ 2\mu \ell_c \xi^{c(a} \xi^{b)} + \left( \frac{4\nu^2}{\mu} D_2 - 2\ell^2 \right) \xi^a \xi^b - 6D_2 \nu \ell^{(a} \xi^{b)} \right. \\ \left. - \mu^2 \xi^{ac} \xi^b{}_c + (\mu \ell^2 - D_2 \nu^2) g^{ab} + 2D_2 \mu \ell^a \ell^b + D_2 \mu \nu \xi^{ab} \right]. \quad (5.61)$$

Luego, a partir de (5.60), obtenemos

$$T_2^{ab} = \frac{\chi_1^2 X}{\mu^2} \frac{d(d+2)(d+3)}{d-1} \left[ \xi^a \xi^b - \frac{\mu}{d} g^{ab} \right] - \frac{2(d+3)\chi_1^2}{\mu} X^{(a} \xi^{b)} + \chi_1^2 \tilde{Y}^{ab}, \quad (5.62)$$

donde hemos anotado con  $\tilde{Y}^{ab}$  a la parte sin traza de  $Y^{ab}$ . De un modo similar como procedimos para el análisis de los órdenes anteriores, obtenemos expresiones explícitas para la densidad y presión del fluido, las cuales vienen dadas por

$$\rho_2 := -(d+2)(d+3) \frac{\chi_1^2 X}{\mu}, \quad p_2 := -\frac{(d+2)(d+3)}{d-1} \frac{\chi_1^2 X}{\mu}. \quad (5.63)$$

Claramente satisfacen la ecuación de estado conforme  $\rho_2 = (d-1)p_2$ .

### 5.2.2. Relaciones constitutivas a segundo orden

Estudiamos ahora la información que nos provee la contribución a segundo orden del tensor constitutivo, y presentamos la versión más general de las ecuaciones constitutivas que aparecen como consecuencia de las ecuaciones (4.3) que satisface  $A^{abc}$  hasta segundo orden. Estas ecuaciones pueden ser usadas para derivar relaciones constitutivas como la que encontramos a primer orden, ecuación (5.28).

Empleando las soluciones conformemente invariantes presentadas en la sección anterior (5.55), es posible expresar la contribución a segundo orden del tensor constitutivo (5.48) sólo en término de *una* de las funciones maestras, digamos  $\chi_1^2$ :

$$\begin{aligned} A_2^{abc} &= \frac{4D_1\chi_1^2}{\mu^3} \xi^a \left[ -\mu^2 \xi^{bc} + 4D_2\mu \left( \xi^{(b} \ell^{c)} - \frac{\nu}{d} g^{bc} \right) - 2D_2D_3\nu \left( \xi^b \xi^c - \frac{\mu}{d} g^{bc} \right) \right] \\ &- \frac{8D_1\chi_1^2}{\mu} \left[ g^{a(b} \ell^{c)} + \xi^{(b} \xi^{c)a} - \frac{2}{d} g^{bc} \ell^a \right] \\ &+ \frac{8D_1D_2\chi_1^2}{\mu^2} \left[ \ell^a \left( \xi^b \xi^c - \frac{\mu}{d} g^{bc} \right) + \nu \left( g^{a(b} \xi^{c)} - \frac{1}{d} \xi^a g^{bc} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Luego de un cálculo tedioso pero bastante directo, la divergencia de  $A_2^{abc}$

resulta

$$\begin{aligned}
\nabla_a A_2^{abc} &= \frac{8D_1 D_2 D_3 \chi_1^2 \mathcal{G}}{\mu^4} \left( \xi^b \xi^c - \frac{\mu}{d} g^{bc} \right) + \frac{4D_1 \chi_1^2}{\mu^2} (D_2 \dot{\mu} - \mu D) \xi^{bc} \\
&+ \frac{16D_1 D_2 \chi_1^2}{\mu^3} (\mu D - \dot{\mu} D_3) \left( \xi^{(b} \ell^{c)} - \frac{\nu}{d} g^{bc} \right) - \frac{4D_1 \chi_1^2}{\mu} \dot{\xi}^{bc} \\
&+ \frac{16D_1 D_2 \chi_1^2}{\mu^2} \left( \dot{\xi}^{(b} \ell^{c)} + \xi^{(b} \dot{\ell}^{c)} - \frac{\dot{\nu}}{d} g^{bc} \right) - \frac{8D_1 D_2 D_3 \chi_1^2}{\mu^3} \nu \left( 2\dot{\xi}^{(b} \xi^{c)} - \frac{\dot{\mu}}{d} g^{bc} \right) \\
&+ \frac{8D_1 D_2 \chi_1^2}{\mu^2} \left( \ell^{(b} \nabla^{c)} \mu + \xi^{(b} \xi^{c)a} \nabla_a \mu - \frac{2\ell^a \nabla_a \mu}{d} g^{bc} \right) \\
&- \frac{8D_1 \chi_1^2}{\mu} \left[ \nabla^{(b} \ell^{c)} + \xi^{a(b} \nabla_a \xi^{c)} + \xi^{(b} \nabla_a \xi^{c)a} - \frac{2\nabla_a \ell^a}{d} g^{bc} \right] \\
&- \frac{8D_1 D_2 D_3 \chi_1^2}{\mu^3} \nu \left[ \xi^{(b} \nabla^{c)} \mu - \frac{\dot{\mu}}{d} g^{bc} \right] + \frac{8D_1 D_2 \chi_1^2}{\mu^2} \mathcal{G}^{bc}, \tag{5.65}
\end{aligned}$$

donde  $\dot{\xi}^{ab} := \xi^c \nabla_c \xi^{ab}$ ,  $\dot{\xi}^c := \xi^a \nabla_a \xi^c$ , y  $\mathcal{G}$  y  $\mathcal{G}^{bc}$  dados por

$$\mathcal{G} := \nu (D_4 \dot{\mu} - D\mu) - \mu \left( \dot{\nu} - \frac{\mu}{D_3} \nabla_a \ell^a + \ell^a \nabla_a \mu \right);$$

$$\mathcal{G}^{bc} := 2\ell^a \xi^{(b} \nabla_a \xi^{c)} + \xi^{(b} \nabla^{c)} \nu + \nu \nabla^{(b} \xi^{c)} - \frac{1}{d} (\ell^a \nabla_a \mu + \dot{\nu} + D\nu) g^{bc}.$$

Con el fin de obtener relaciones constitutivas a este orden, resulta necesario ahora dar una expresión para la fuente de la ecuación disipativa (4.3) hasta segundo orden en variables disipativas, construídas como funciones algebraicas de los campos  $\xi^a$ ,  $r^a$ ,  $\tau_{ab}$  y  $g_{ab}$ . De hecho, es fácil ver que la versión más general para  $I^{ab}$  puede escribirse combinando estos campos de la forma

$$I^{bc} = I_0 \xi^b \xi^c + I_1 \xi^{(b} r^{c)} + I_2 \xi^{(b} \tau^{c)a} r_a + I_3 h^{bc} + I_4 r^b r^c + I_5 \tau^{bc} + I_6 \tau^{bd} \tau^c_d. \tag{5.66}$$

Es importante remarcar aquí que (5.66) es además la fuente más general que puede llevar la ecuación disipativa (4.3) completa, es decir,

$$\nabla_a (A_1^{abc} + A_2^{abc}) = I^{bc}, \tag{5.67}$$

sin más restricciones. Las funciones  $I_j$  ( $j = 0, 1, \dots, 6$ ) se deben ajustar de modo que  $I^{bc}$  sea de traza nula y que la producción de entropía  $\sigma = -\xi^{ab} I_{ab}$  satisfaga la desigualdad  $\sigma \geq 0$ . En completa analogía con la teoría a primer orden, existe un requisito adicional para los coeficientes, que está relacionado con el *peso conforme* global de la ecuación constitutiva completa (5.67). Dado que cada uno de los términos que aparecen en (5.66) debe tener el *mismo* peso

conforme (el cual es igual al peso conforme de los términos del lado izquierdo de (5.67)), la ecuación constitutiva completa es sensible en tanto que las funciones  $I_j$  tengan los pesos conformes adecuados. Por lo tanto, la plausibilidad de las relaciones constitutivas depende de la correcta asignación de pesos conformes a las funciones  $I_j$  de tal forma que, al multiplicarse por el factor correspondiente en (5.66), generen términos de igual peso conforme.

Por otro lado, una pregunta que surge naturalmente en este punto es si resulta posible derivar expresiones para los coeficientes de transporte a este orden. El problema de encontrar qué coeficientes de transporte surgen de esta teoría no es directo a priori, ya que requiere un análisis detallado de cada uno de los términos que contribuye a la divergencia de  $A^{abc}$ . A diferencia de la teoría a primer orden, en la que fue posible obtener el coeficiente de transporte de *shear* simplemente comparando el tensor de shear con la parte transversal sin traza del tensor de energía-momento, a segundo orden la estrategia necesaria resulta menos directa. Los coeficientes obtenidos se pueden comparar, por ejemplo, con los ya estimados, via la correspondencia fluidos/gravedad, a partir de la contraparte gravitatoria (para referencias sobre estas estimaciones, ver [79, 95]).

### 5.2.3. Contribución a la densidad de entropía

En analogía con las contribuciones anteriores, es posible calcular la corrección de segundo orden de la densidad de entropía total. De la definición de densidad de entropía en este formalismo, se tiene que

$$S_2^a = -\frac{(d+2)^2 \chi_1^2}{\mu} \left[ G \xi^a - \frac{2(d+4)\nu}{\mu} \ell^a + 4\xi^{ab} \ell_b \right], \quad (5.68)$$

donde  $G$  es el funcional

$$G[\psi_1, \psi_2, \psi_3] := \psi_1 - \frac{4D_2}{\mu} \psi_2 + \frac{2D_2 D_3}{\mu^2} \psi_3. \quad (5.69)$$

Esta expresión coincide con resultados anteriores debidos a Hiscock y Lindblom [94]. Para ver ello, recurrimos a la descomposición ortonormal de  $\xi^{ab}$  (ecuación (B.6)), y a las relaciones (5.55). Así, se obtiene que

$$\begin{aligned} S_2^a &= -\frac{(d+2)^2 \chi_o^2}{\mu^{D_2}} \left( \frac{d^2(d+1)}{2(d-1)} \frac{\nu^2}{\mu^2} - 2(d+1)r^c r_c + \tilde{\tau}^{bc} \tilde{\tau}_{bc} \right) \xi^a \\ &+ \frac{4(d+2)^2 \chi_o^2}{\mu^{D_3}} \frac{d(d+1)}{2(d-1)} \nu r^a - \frac{4(d+2)^2 \chi_o^2}{\mu^{D_2}} \tilde{\tau}^{ab} r_b, \end{aligned} \quad (5.70)$$

lo que puede ser reescrito usando las variables definidas por Hiscock y Lindblom en [94], es decir,

$$S_2^a = -(\beta_o \Pi^2 + \beta_1 q^c q_c + \beta_2 \pi^{bc} \pi_{bc}) \frac{u^a}{2T} + \alpha_o \frac{\Pi q^a}{T} + \alpha_1 \frac{\pi^{ab} q_b}{T}. \quad (5.71)$$

La relación entre las variables de los autores y aquellas empleadas aquí son

$$u^a = \frac{\xi^a}{\sqrt{-\mu}}, \quad T = \frac{1}{\sqrt{-\mu}}, \quad \Pi \equiv p_1, \quad \pi^{ab} \equiv 2\chi^1 \tilde{\tau}^{ab}.$$

Para obtener estas relaciones se emplearon además las identidades (5.17), (5.9) y (5.22) para  $p_1$ ,  $\chi^1$  y  $q^a$  respectivamente. Más aún, los coeficientes  $\beta_o$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  y  $\alpha_o$ ,  $\alpha_1$  emergen de la comparación de (5.70) con (5.71), obteniéndose

$$\beta_o = \frac{(-1)^{d/2} (d+2)^2 (d-1) \chi_o^2}{(\chi_o^1)^2} \frac{1}{T^d}, \quad (5.72)$$

y

$$\beta_1 = \frac{\mu}{d^2 - 1} \beta_o, \quad \beta_2 = \frac{\beta_o}{2(d-1)}, \quad \alpha_o = \alpha_1 = \frac{\beta_o}{1 - d^2}. \quad (5.73)$$

Estos coeficientes esencialmente modelan todas las contribuciones disipativas a la entropía en este orden (escalar, vectorial y tensorial), así como los acoplamientos entre los efectos de viscosidad y flujos de calor (para mayores detalles, referimos al lector a la discusión proporcionada en [86]). La novedad aquí es que, como consecuencia de la invariancia conforme, estos coeficientes *no* resultan independientes entre sí.

### 5.3. Hiperbolicidad de la teoría completa

El problema de la estabilidad y la causalidad en teorías disipativas de fluidos relativistas es un aspecto crucial que ha sido objeto de un intenso escrutinio en el pasado [49, 64, 97, 98, 61, 99], resultando aún hoy en día un tema activo en investigación. Es bien sabido que las teorías de Landau y Eckart tienen una formulación de valores iniciales mal puesta, dado que predicen fluctuaciones térmicas que pueden propagarse de manera no causal (más específicamente, los modos crecen linealmente con la frecuencia), perdiendo la validez como teoría causal en el marco de la Relatividad General.

En general los conceptos de estabilidad, causalidad e hiperbolicidad son independientes (por ejemplo, las ecuaciones de Navier-Stokes son estables, pero no causales en sentido relativista), y puede haber sistemas débilmente hiperbólicos que son causales, pero no estables. En esta sección estudiamos la

hiperbolicidad de la teoría introducida en el capítulo anterior y desarrollada en este capítulo; es decir, teniendo en cuenta las contribuciones hasta segundo orden en los efectos disipativos. Mostramos que es posible elegir la constante arbitraria  $\chi_{10}^2$  para la función generatriz a segundo orden,  $\chi^2$ , para asegurar que el sistema resulte hiperbólico, y finalmente probamos que la teoría completa a segundo orden resulta *simétrico-hiperbólica* cerca de los estados de equilibrio. Específicamente, mostramos que existe un simetrizador para la teoría completa, y resulta que es positivo definido en un subconjunto abierto de estados alrededor de cualquier estado de equilibrio. Siguiendo el argumento de Friedrichs y Lax respecto a la hiperbolicidad de los sistemas de primer orden [6, 7], concluimos que el problema local de valores iniciales correspondiente está bien puesto cerca del equilibrio.

### 5.3.1. Teorema principal

El resultado principal puede condensarse en el siguiente

**Teorema 5.3.1** *Sea  $(\mathcal{M}, g_{ab})$  un espaciotiempo orientado de dimensión arbitraria  $d$  y sea  $\xi_a$  cualquier estado de equilibrio de la teoría. Entonces, siempre es posible hallar una teoría que resulte simétrico-hiperbólica en algún entorno abierto  $\mathcal{O}$  de  $\xi^a$ .*

*Demostración.* Para probar esto, emplearemos la formulación covariante de Geroch discutida en el Capítulo 2, via el teorema 2.2.1. Para ello, escribimos al sistema de ecuaciones como

$$K^a{}_{AB}(\xi)\nabla_a\xi^B = J_A(\xi), \quad (5.74)$$

donde  $\xi^B = (\xi_a, \xi_{ab})$ , y

$$K^a{}_{AB}(\xi) := \frac{\partial^3\chi}{\partial\xi_a\partial\xi^A\partial\xi^B}, \quad (5.75)$$

mientras que la fuente viene dada por

$$J_A := (0, 0, I_{ab}). \quad (5.76)$$

Vemos que es suficiente considerar  $t_a$  en la dirección de  $\xi_a$  y analizar la forma cuadrática

$$h_{AB}(\xi) := \xi_a K^a{}_{AB}$$

evaluada en cualquier *estado de equilibrio*; es decir, en soluciones para el fluido perfecto.

La idea clave es la siguiente: si se logra probar que  $h_{AB}(\xi)$  es definida positiva, luego existirá siempre un entorno abierto de estados del fluido  $\mathcal{O}$  alrededor de  $\xi^c$  tal que  $h_{AB}(t) > 0$  para cualquier  $t_a \in \mathcal{O}$ . Luego, basta con estudiar las condiciones para las cuales  $h_{AB}(\xi)$  es definida positiva.

Al evaluar el símbolo  $K_{AB}^a$  en cualquier estado de equilibrio, obtenemos:

$$\overset{o}{K}{}^a{}_{AB} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^3 \chi^o}{\partial \xi_a \partial \xi^b \partial \xi^c} & \frac{\partial^3 \chi^1}{\partial \xi_a \partial \xi^b \partial \xi^{cd}} \\ \frac{\partial^3 \chi^1}{\partial \xi_a \partial \xi^b \partial \xi^{cd}} & \frac{\partial^3 \chi^2}{\partial \xi_a \partial \xi^{bc} \partial \xi^{de}} \end{pmatrix}, \quad (5.77)$$

donde hemos denotado con  $^o$  sobre  $K^a{}_{AB}$  a la operación de *evaluar* en estados de equilibrio, luego de haber tomado las derivadas correspondientes. Ahora, consideremos la forma dada por  $\overset{o}{h}_{AB}(\xi) := \xi_a \overset{o}{K}{}^a{}_{AB}$ . En primer lugar, notamos que el bloque diagonal superior de  $\overset{o}{h}_{AB}$  es positivo definido, ya que corresponde exactamente al hiperbolizador de la teoría del fluido perfecto, la cual resulta simétrico-hiperbólica, estable y causal. Esto se debe a que la ecuación de estado empleada es la de un fluido de radiación pura, y por lo tanto cumple los requisitos para que el sistema sea simétrico-hiperbólico (ver, por ejemplo, [26]). Por lo tanto, basta ver que el bloque diagonal inferior también es positivo, y así lograr que toda la matriz sea positiva definida, simplemente eligiendo  $\chi_{1o}^2$  lo suficientemente grande y con el signo apropiado. Recordemos que  $\chi_{1o}^2$  es el parámetro libre que aparece en las soluciones (5.55) de la contribución a segundo orden de estas teorías. Llamaremos a éste, *parámetro de hiperbolicidad* para destacar que la inclusión de efectos disipativos a segundo orden resulta esencial para garantizar que estas teorías tengan un problema de valores iniciales bien formulado. Además, es claro que si esta contribución no estuviera, el bloque diagonal inferior de  $\overset{o}{h}_{AB}$  sería cero, resultado imposible lograr la condición de positividad buscada<sup>2</sup>. Nos concentramos, entonces, en este bloque diagonal inferior.

A tal fin, introducimos los escalares pesados a segundo orden

$$\tilde{\psi}_i := \frac{\psi_i}{\mu^{i-1}}, \quad (5.78)$$

donde  $\psi_i$  son los tres escalares introducidos en la teoría a segundo orden. La ventaja de pesarlos de este modo es que ahora no dependen de la norma cuadrado de  $\xi^a$ , ó  $\mu$ , por lo que satisfacen

$$\xi_a \frac{\partial \tilde{\psi}_i}{\partial \xi_a} = 0. \quad (5.79)$$

<sup>2</sup>Curiosamente, una formulación de primer orden (e hiperbólica en un sentido más débil que el usual) ha sido recientemente sugerida en [100], aunque a expensas de definir una corriente de entropía que no es única, ya que depende de los datos iniciales requeridos para las contribuciones disipativas de orden superior.

Con esta redefinición, es posible expresar la contribución a segundo orden de la función generatriz (5.39) como

$$\chi^2 = \chi_1^2 \tilde{\psi}_1 + \mu \chi_2^2 \tilde{\psi}_2 + \mu^2 \chi_3^2 \tilde{\psi}_3. \quad (5.80)$$

Luego,

$$\xi_a \frac{\partial \chi^2}{\partial \xi_a} = 2\mu \left[ \chi_{1\mu}^2 \tilde{\psi}_1 + (\mu \chi_2^2)_\mu \tilde{\psi}_2 + (\mu^2 \chi_3^2)_\mu \tilde{\psi}_3 \right],$$

donde hemos usado la propiedad (5.79). Además, usando la relación entre las funciones  $\chi_j^2$  halladas en (5.49), (5.52), (5.54) y (5.55), las cuales resuelven las ecuaciones a segundo orden, escribimos todo en términos de  $\chi_1^2$ , obteniendo

$$\xi_a \frac{\partial \chi^2}{\partial \xi_a} = -\frac{2D_1 \chi_{1o}^2}{\mu^{D_1}} \left[ \tilde{\psi}_1 - 4 \left( \frac{d}{2} + 1 \right) \tilde{\psi}_2 + 2 \left( \frac{d}{2} + 1 \right) \left( \frac{d}{2} + 2 \right) \tilde{\psi}_3 \right]. \quad (5.81)$$

Notar que la matriz diagonal inferior que buscamos sea positiva definida es, de hecho la matriz Hessiana de la función  $\xi_a \frac{\partial \chi^2}{\partial \xi_a}$ . Luego, basta ver que dicha función resulta *convexa* para garantizar que su Hessiano

$$\mathcal{H}[\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \tilde{\psi}_3] := \tilde{\psi}_1 - 4 \left( \frac{d}{2} + 1 \right) \tilde{\psi}_2 + 2 \left( \frac{d}{2} + 1 \right) \left( \frac{d}{2} + 2 \right) \tilde{\psi}_3$$

resulte positivo. Como se mencionó anteriormente, la elección de un valor lo suficientemente grande para la constante de hiperbolicidad  $\chi_{1o}^2$  (y con el signo correspondiente) asegura que se cumpla la condición de positividad deseada. Para ver que  $\mathcal{H}[\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \tilde{\psi}_3]$  es positivo definido, consideramos la descomposición de  $\xi_{ab}$  discutida en (B.13), y expresamos cualquier combinación lineal de los escalares  $\tilde{\psi}_i$  como una combinación lineal real de cantidades cuadráticas (y por lo tanto positivas) tal que la identidad

$$\alpha \tilde{\psi}_1 + \beta \tilde{\psi}_2 + \gamma \tilde{\psi}_3 = (\alpha + \beta + \gamma) \frac{\nu^2}{\mu^2} + \frac{2\alpha + \beta}{\mu} r_a r^a + \alpha \tau_{ab} \tau^{ab}, \quad (5.82)$$

se cumpla para todo  $\alpha, \beta, \gamma$ . En efecto, eligiendo la combinación lineal que define exactamente a  $\mathcal{H}$ ; es decir,

$$\alpha = 1, \quad \beta = -2(d+2), \quad \gamma = 2 \left( \frac{d}{2} + 1 \right) \left( \frac{d}{2} + 2 \right),$$

la ecuación (5.82) arroja

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_1 - 4 \left( \frac{d}{2} + 1 \right) \tilde{\psi}_2 + 2 \left( \frac{d}{2} + 1 \right) \left( \frac{d}{2} + 2 \right) \tilde{\psi}_3 = \\ \left( 1 + d + \frac{d^2}{2} \right) \frac{\nu^2}{\mu^2} - \frac{2(d+1)}{\mu} r_a r^a + \tau_{ab} \tau^{ab}, \end{aligned} \quad (5.83)$$

lo que resulta siempre positivo, concluyendo así la prueba.  $\square$

# Capítulo 6

## Implementación numérica del fluido disipativo

En este capítulo abordamos el problema de la evolución numérica de las ecuaciones que rigen la dinámica de fluidos disipativos conformes, cuya teoría fue desarrollada en los dos capítulos anteriores. El eje central de análisis consiste en elegir variables de evolución que resulten convenientes (o al menos con las cuales poder implementar numéricamente las ecuaciones dinámicas), para luego escribir todos los campos relevantes en términos de éstas. Así, será posible llevar las ecuaciones tipo divergencia a una formulación puramente conservativa y óptima para una implementación numérica adecuada.

Dada la dificultad del problema en cuestión, y luego de la discusión general sobre los principales problemas que aparecen en el intento, en este trabajo desarrollamos la implementación numérica asumiendo un fluido que se propaga en una sola dirección, e imponiendo simetrías de modo de reducir considerablemente el número de variables dinámicas. Empleamos para ello el método de volúmenes finitos de Kurganov–Tadmor [101], el cual permite evolucionar ondas de choque con alta precisión (los lineamientos principales de este método están descritos en el Apéndice D). Finalmente, estudiamos la convergencia del método y analizamos cómo al tener en cuenta pequeños términos disipativos en las ecuaciones, es posible “suavizar” ciertas soluciones discontinuas que se obtienen al evolucionar las ecuaciones para el fluido ideal (sin disipación) partiendo de datos iniciales suaves.

### 6.1. Variables “conservativas” vs. “abstractas”

Las ecuaciones que rigen la dinámica de un fluido en Relatividad General vienen dadas por leyes de conservación de cantidades físicas como el número

de partículas, la energía y el momento lineal. En su versión covariante, las escribimos del siguiente modo:

$$\nabla_a N^a = 0 \quad (6.1)$$

$$\nabla_a T^{ab} = 0 \quad (6.2)$$

$$\nabla_a A^{abc} = I^{bc}, \quad (6.3)$$

donde  $I^{bc}$  es dada. Bajo esta formulación, la dinámica del fluido está descrita mediante la evolución temporal de ciertas componentes de  $N^a$ , la corriente de partículas;  $T^{ab}$ , el tensor de energía-momento del fluido y de  $A^{abc}$ , el tensor constitutivo de la teoría. Algunas de las componentes que suelen emplearse como variables dinámicas resultan, por ejemplo, la densidad de energía, el 3-vector densidad de momento, la densidad de partículas, etc, las cuales adoptan un significado físico preciso en la teoría. Llamaremos a éstas variables *físicas* o *conservativas*.

Una primer pregunta que surge a la hora de abordar este problema es si resulta posible describir la evolución desde un sistema de referencia solidario al fluido (comúnmente conocido como *co-moving frame* o *sistema lagrangiano*) pues, de ser así, el problema se simplificaría considerablemente: bastaría describir al fluido desde un sistema en el que el mismo se encuentra en reposo, y luego realizar una transformación de Lorentz al sistema de referencia de interés. La respuesta no resulta afirmativa, y el motivo es consecuencia directa del *Teorema de Frobenius* (ver, por ejemplo, [90]). Si esto fuera posible, significa que entonces sería posible considerar al cuadvivector  $u^a$  velocidad del fluido como la dirección temporal en la evolución, lo que implica que las direcciones espaciales se encuentran en su complemento ortogonal en cada punto del espaciotiempo. El teorema de Frobenius garantiza que una condición necesaria y suficiente para que dicho espacio ortogonal en cada punto resulte *localmente integrable* (esto es, que forme una hipersuperficie ortogonal a  $u^a$  sobre la cual poder dar dato inicial) es que se verifique localmente la identidad

$$u_{[a} \nabla_b u_{c]} = 0. \quad (6.4)$$

Esta condición no resulta válida en general para un fluido arbitrario, por ejemplo si el mismo tiene vorticidad  $\omega_{ab} = h_{ac} h_{bd} \nabla^{[c} u^{d]}$  no nula (cualquier sistema fluido con rotación espacial). En términos de las variables usadas en los capítulos anteriores, esto dice que no es posible garantizar la existencia de una foliación del espaciotiempo cuyas superficies de Cauchy sean ortogonales a  $\xi^a$  (que es proporcional a  $u^a$ ). Luego, resulta necesario referir el movimiento del fluido a un sistema de referencia cuya dirección temporal forme hipersuperficies, lo cual no puede lograrse considerando la cuadvivelocity  $u^a$  como dirección temporal de evolución.

No obstante aquello, en los dos capítulos anteriores desarrollamos una teoría que nos permitió obtener información de las variables conservativas en términos de una formulación cuasilineal más general. Hemos visto que uno de los objetivos y la motivación principal por la cual esta segunda formulación resulta relevante es la de estudiar el problema de valores iniciales de la teoría disipativa, evaluando la hiperbolicidad simétrica del sistema de ecuaciones de evolución. Para ello, introdujimos las variables dinámicas  $(\xi_a, \xi_{ab})$  (las cuales en este contexto llamaremos variables *abstractas*), obteniendo una función generatriz  $\chi(\xi_a, \xi_{ab})$  que admite sólo tres parámetros constantes libres.

Las ecuaciones en términos de estas variables abstractas respetan la forma de un sistema cuasilineal de primer orden con fuente:

$$K^a{}_{AB}(\xi) \nabla_a \xi^B = J_A(\xi), \quad (6.5)$$

donde

$$K^a{}_{AB}(\xi) := \frac{\partial^3 \chi}{\partial \xi_a \partial \xi^A \partial \xi^B} \quad (6.6)$$

es el *símbolo principal* de (6.5), mientras que la fuente viene dada por

$$J_A := (0, 0, I_{ab}). \quad (6.7)$$

Dadas estas dos versiones para las ecuaciones que rigen la dinámica del fluido, resulta natural preguntarse: ¿cuál de ellas resulta conveniente a la hora de una implementación numérica concreta? La respuesta a priori no pareciera ser directa. Una primera posibilidad es aprovechar la formulación en variables abstractas desarrollada para entender la hiperbolicidad de la teoría, y considerar la descomposición  $3 + 1$  del sistema (6.5). Por ejemplo, al considerar coordenadas inerciales  $\{x^0 = t, x^i\}$  tales que localmente la métrica de fondo sea  $g_{ab} = \eta_{ab}$ , el sistema en cuestión resulta

$$K^o{}_{AB} \partial_t \xi^B = -K^i{}_{AB} \partial_i \xi^B + J_A.$$

Luego, invirtiendo el símbolo  $K^o{}_{AB}$  se obtienen las ecuaciones de evolución para  $\{\xi_a, \xi_{ab}\}$ :

$$\partial_t \xi^A = -(K^{-1})^o{}_{AC} K^i{}_{CB} \partial_i \xi^B + (K^{-1})^o{}_{AB} J_B,$$

con  $(K^{-1})^o{}_{AB} K^o{}_{BC} = \delta^A{}_C$ . Al considerar esta alternativa, el problema de evolucionar la teoría se reduce entonces al de invertir una matriz de dimensiones altas. Este procedimiento resulta en general muy costoso (tanto analítica como numéricamente) dado el tamaño de la matriz (si la dimensión de la variedad de fondo se fija a  $d = 4$ , nos referimos a una matriz de dimensiones  $14 \times 14$ , ó en el mejor de los casos  $13 \times 13$  si no hay conservación de partículas en la

teoría). En efecto, ya resulta dificultosa la inversión al considerar soluciones en equilibrio, cuya configuración es un tanto más simple.

Una segunda alternativa para la evolución numérica es volver al sistema conservativo original. Nuevamente, considerando coordenadas tales que la métrica de fondo luce localmente como la métrica de Minkowski, las ecuaciones covariantes (6.1) - (6.3), pueden ser reescritas del siguiente modo:

$$\partial_t N^o = -\partial_i N^i, \quad (6.8)$$

$$\partial_t T^{oo} = -\partial_i T^{oi}, \quad (6.9)$$

$$\partial_t T^{oi} = -\partial_j T^{ij}, \quad (6.10)$$

$$\partial_t A^{ooo} = -\partial_i A^{ioo} + I^{oo} \quad (6.11)$$

$$\partial_t A^{ooi} = -\partial_j A^{joi} + I^{oi} \quad (6.12)$$

$$\partial_t A^{oij} = -\partial_k A^{kij} + I^{ij}. \quad (6.13)$$

La condición de traza nula del tensor  $A^{abc}$  con respecto a los últimos dos índices permite reescribir algunas de las variables respecto de otras, de modo de reducir el sistema a 14 ecuaciones para 14 variables, en consistencia con el correspondiente sistema en variables abstractas. Este sistema es un conjunto de leyes de conservación, donde los flujos no triviales están dados por las componentes espaciales  $N^i$ ,  $T^{ij}$  y  $A^{kij}$ , además de aquellas componentes espaciotemporales  $A^{ioo}$  y  $A^{joi}$ , todas las cuales resultan funciones algebraicas (no necesariamente explícitas) de las variables dinámicas elegidas para la evolución. Con el fin de emplear las herramientas numéricas desarrolladas para evolucionar sistemas de conservación, es preciso obtener expresiones explícitas de los flujos en términos de las variables dinámicas a cada paso temporal. En general, esta tarea no resulta trivial, y de hecho la mayoría de las veces sólo es posible realizarla de manera numérica, es decir, recurriendo a métodos iterativos para la solución de ecuaciones trascendentes (como el método de Newton–Raphson). Estos métodos resultan en general más eficientes y menos costosos en comparación con la inversión matricial que debe realizarse si se opta por la alternativa anterior.

En esta tesis optamos por la segunda alternativa para la implementación numérica, y donde veremos que la ecuación de estado a considerar juega un rol muy importante en la inversión. Con el fin de verificar el método numérico y el algoritmo de inversión, en primer lugar, abordamos la evolución del fluido ideal (sin considerar efectos disipativos), y con ecuación de estado tanto de radiación pura como politrópica. Veremos que en el primer caso es posible escribir los flujos de manera explícita en término de las variables conservativas, mientras que en el segundo caso no siempre es posible. Toda la discusión de la implementación numérica para el fluido ideal se encuentra en el Apéndice C.

En segundo lugar abordamos el caso disipativo, en el que hacemos uso de la teoría desarrollada para evaluar si un esquema numérico como el deseado

resulta plausible. La idea central de esta propuesta es emplear las expresiones obtenidas en el capítulo anterior, las cuales expresan las variables físicas en términos de aquellas abstractas, teniendo así ecuaciones que relacionen los flujos no triviales con aquellas variables conservativas elegidas para la evolución.

## 6.2. El fluido disipativo ultrarrelativista

Nos centramos ahora en el problema de dar explícitamente las ecuaciones de evolución para el fluido conforme relativista, considerando efectos disipativos hasta segundo orden, y asumiendo una ecuación de estado de radiación pura. Veremos que en general resulta imposible lograr una inversión puramente analítica del sistema para cambiar de variables, como es requerido para evolucionar numéricamente este tipo de ecuaciones, los cuales vienen descritos por leyes de conservación. Sin embargo, obtendremos expresiones y propiedades que serán de suma utilidad en la próxima sección, donde particularizamos a una configuración de fluido con movimiento unidimensional, y simetría de rotación en el plano perpendicular a la dirección de movimiento.

### 6.2.1. Descomposición 3 + 1 y ecuaciones de evolución

De una manera análoga a la que se procede al abordar el fluido ideal (ver Apéndice C), consideramos una foliación del espaciotiempo por hipersuperficies espaciales  $\{\Sigma_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ , parametrizadas por una función *tiempo*  $t$ . Definiendo  $t^a := (\partial/\partial t)^a$  el vector normal a cada hipersuperficie de la foliación de modo que  $t^a t_a = -1$ , asignamos la coordenada  $x^0 = t$  y coordenadas inerciales  $\{x^i\}$  sobre cada hipersuperficie de simultaneidad. Para un espaciotiempo plano de fondo, las ecuaciones resultan

$$\partial_t T^{oo} = -\partial_i T^{oi}, \quad (6.14)$$

$$\partial_t T^{oi} = -\partial_j T^{ij}, \quad (6.15)$$

$$\partial_t A^{ooo} = -\partial_i A^{ioo} + I^{oo} \quad (6.16)$$

$$\partial_t A^{ooi} = -\partial_j A^{joi} + I^{oi} \quad (6.17)$$

$$\partial_t A^{oij} = -\partial_k A^{kij} + I^{ij}. \quad (6.18)$$

Una elección posible para las variables dinámicas es considerar el conjunto

$$\{T^{oo}, T^{oi}, A^{ooi}, A^{oij}\}, \quad (6.19)$$

y hacer uso de la condición

$$g_{bc} A^{abc} = 0, \quad (6.20)$$

para expresar  $A^{ooo}$  en términos de éstas, obteniendo

$$A^{ooo} = -\frac{1}{g_{oo}} (g_{ij}A^{oij} + g_{oi}A^{ooi}). \quad (6.21)$$

Resultan entonces 13 ecuaciones para 13 variables, y el sistema así planteado no tiene vínculos.

Luego, el problema en este caso se reduce al de encontrar expresiones para los flujos  $T^{ij}$ ,  $A^{ioo}$ ,  $A^{joi}$  y  $A^{kij}$  como funciones algebraicas de las variables dinámicas  $T^{00}$ ,  $T^{0i}$ ,  $A^{00i}$  y  $A^{0ij}$ , garantizando de este modo un sistema de leyes de conservación con fuentes  $I^{0i}$  y  $I^{ij}$  (las cuales se prescriben de antemano, en función del problema a considerar). Veremos que dar expresiones explícitas de los flujos en términos del conjunto de variables dinámicas elegidas requiere de una transformación que permita escribir las variables abstractas de la teoría en términos de las dinámicas. Dicha inversión resulta en general un sistema acoplado altamente no lineal, y su inversión sólo es posible numéricamente, recurriendo a métodos iterativos.

### 6.2.2. Variables dinámicas

Como se obtuvo en el capítulo anterior, hay una única familia de funciones generatrices que describen fluidos conformes disipativos que obedecen teorías de tipo divergencia, la cual viene dada por

$$\chi(\mu, \nu, \psi) = \chi^o(\mu) + \chi^1(\mu)\nu + \sum_{i=0}^3 \chi^2_i(\mu)\psi^i, \quad (6.22)$$

donde recordamos que  $\mu := \xi^a \xi_a$ ,  $\nu := \xi^{ab} \xi_a \xi_b$  y  $\{\psi_i\}_{i=1}^3$  es el conjunto de los únicos campos escalares disipativos a segundo orden (no triviales):

$$\psi_1 := \xi^{ab} \xi_{ab}, \quad \psi_2 := \xi^{ab} \xi_b \xi_{ac} \xi^c, \quad \psi_3 := \nu^2. \quad (6.23)$$

En cuatro dimensiones, las contribuciones  $\chi^i$  a la función generatriz vienen dadas por

$$\chi^o(\mu) = \frac{\chi_o^o}{\mu}; \quad \chi^1(\mu) = \frac{\chi_o^1}{\mu^3}; \quad (6.24)$$

y, para  $i = 1, 2, 3$ ,

$$\chi^2_i(\mu) = \frac{\chi_o^2}{\mu^{2+i}} \Theta_i, \quad (6.25)$$

donde

$$\Theta_i \equiv \begin{cases} 1, & \text{if } i = 1 \\ -12, & \text{if } i = 2 \\ 24, & \text{if } i = 3 \end{cases}.$$

Aquí,  $\{\chi_o^j\}_{j=1}^3$  son los tres parámetros libres que caracterizan a la familia, los cuales tienen significado y rol preciso en la teoría. La función  $\chi^0$  caracteriza de manera unívoca la familia de fluidos *ideales*, los cuales además representan los estados de equilibrio de la teoría general. Por su parte, las funciones  $\chi^1$  y  $\{\chi^2_i\}_{i=1}^3$  son respectivamente las contribuciones disipativas a primer y segundo orden. Considerando la expansión solo hasta  $\chi^1$  se obtiene la teoría de Fourier familiar y las ecuaciones de Navier-Stokes (tomando los límites apropiados). Agregar la contribución de segundo orden hace posible una formulación de valores iniciales bien puesta, sin suposiciones como las de Israel-Stewart [102].

Usando las expresiones (4.6)–(4.7) junto con las relaciones anteriores (6.22)–(6.24)–(6.25), tanto el tensor de energía–momento  $T^{ab}$  como el tensor constitutivo  $A^{abc}$  se construyen como la suma de las contribuciones a cero, primer y segundo orden de la función generatriz. En esta sección trabajaremos con las expresiones explícitas de estos campos en términos de las variables abstractas, por lo que recordamos la descomposición ortonormal de  $\xi_{ab}$ ,

$$\xi_{ab} = \frac{\nu}{\mu^2} \xi_a \xi_b + \frac{2}{\mu} \xi_{(a} r_{b)} + \tau_{ab}, \quad (6.26)$$

donde  $r_a := \xi_{ab} \xi^b - \frac{\nu}{\mu} \xi_a$  y  $\tau_{ab}$  es la parte de  $\xi_{ab}$  completamente ortogonal a  $\xi_a$ . Además, denotaremos con  $\tilde{\tau}_{ab}$  a la parte sin traza de  $\tau_{ab}$ , esto es

$$\tilde{\tau}_{ab} = \tau_{ab} + \frac{\nu}{3\mu} \left( g_{ab} - \frac{\xi_a \xi_b}{\mu} \right). \quad (6.27)$$

En las siguientes dos subsecciones, exhibimos expresiones explícitas para  $T^{ab}$  y  $A^{abc}$  en términos de  $(\xi_a, \xi_{ab})$  escritas de un modo conveniente para la implementación numérica.

### 6.2.2.1. Tensor energía–momento

Introduciendo una vez más el vector normalizado<sup>1</sup>

$$u^a = \frac{\xi^a}{\sqrt{-\mu}},$$

la forma general para  $T^{ab}$  que se deriva de esta teoría es

$$T^{ab} = \frac{4\rho}{3} \left( u^a u^b + \frac{g^{ab}}{4} \right) + 2u^{(a} Q^{b)} + \tau_{\perp}^{ab}. \quad (6.28)$$

<sup>1</sup>Asumimos, de ahora en adelante, que el campo vectorial  $\xi^a$  es temporal (y por lo tanto  $\mu < 0$  según la convención de signatura empleada. Si bien esta elección no es necesaria en absoluto para realizar esta construcción, este es un requisito natural para que la teoría sea causalmente consistente.

Veamos el significado de cada término y su definición. En primer lugar, resulta natural identificar a  $\rho$  como la densidad de energía del fluido, la cual contiene contribuciones de cada orden de disipación:

$$\rho = -\frac{6\chi^o}{\mu} - \frac{20\chi^1\nu}{\mu} - \frac{42\chi_1^2}{\mu} \left( \psi_1 - \frac{12}{\mu}\psi_2 + \frac{24}{\mu^2}\psi_3 \right). \quad (6.29)$$

De las condiciones de energía a cada orden de disipación se deduce que  $\chi^i > 0$ ,  $\forall i = 1, 2, 3$ . A partir de las soluciones (6.24), (6.25) y de la condición (5.83) para que la teoría resulte simétrico-hiperbólica alrededor del equilibrio, se tiene que tanto la constante a orden cero como la constante a segundo orden deben ser negativas, mientras que el producto  $\chi^1_o \nu$  debe ser negativo:

$$\chi^o_o < 0; \quad \chi^1_o \nu < 0; \quad \chi^2_o < 0. \quad (6.30)$$

Por otra parte,  $Q^a$  es un campo vectorial espacial cuyo significado en este contexto es el *flujo de calor* de la teoría, el cual ahora tiene una contribución no trivial a segundo orden. Considerando estas contribuciones, se tiene que

$$Q^a = \frac{10\chi^1}{\sqrt{-\mu}}r^a + \frac{168\chi_1^2}{\mu^2\sqrt{-\mu}} \left( \frac{10}{3}\nu r^a - \mu\tilde{\tau}^{ab}r_b \right). \quad (6.31)$$

Por último, el tensor  $\tau_{\perp}^{ab}$  presente en (6.28) corresponde a la parte de  $T^{ab}$  que es *completamente ortogonal* a  $u^a$ . Siguiendo la notación del trabajo original [2],

$$\tau_{\perp}^{ab} = 2\chi^1\tilde{\tau}^{ab} + \chi_1^2\tilde{Y}^{ab}, \quad (6.32)$$

donde  $\tilde{Y}^{ab}$  es la parte sin traza de  $Y^{ab}$ , dado por la ec. (5.61). Recordamos también las identidades importantes

$$u_a Q^a = 0, \quad u_a \tau_{\perp}^{ab} = 0, \quad g_{ab} \tau_{\perp}^{ab} = 0. \quad (6.33)$$

El tensor energía-momento para la descripción del fluido ideal se obtiene poniendo  $Q^a = 0$  y  $\tau_{\perp}^{ab} = 0$ .

### 6.2.2.2. Tensor constitutivo

Por construcción, el tensor constitutivo  $A^{abc}$  es, a lo más, lineal en disipación. Para el fluido ideal, dicho tensor es estrictamente cero, mientras que en el caso disipativo hasta segundo orden tiene dos contribuciones no triviales:

$$A^{abc} = A_1^{abc} + A_2^{abc}. \quad (6.34)$$

La primer contribución se construye sólo en términos de la cuadrivelocidad  $u^a$  y de la métrica de fondo, y en cuatro dimensiones espaciotemporales viene dada por

$$A_1^{abc} = \chi^1 \sqrt{-\mu} (2h^{a(b}u^{c)} + u^a h^{bc} + 3u^a u^b u^c). \quad (6.35)$$

La segunda contribución, lineal en disipación, puede escribirse como

$$A_2^{abc} = A_{21}^{abc} + A_{22}^{abc} + A_{23}^{abc}, \quad (6.36)$$

donde

$$A_{21}^{abc} = \frac{-12\chi_1^2}{\mu} \left( \frac{76\nu}{3\sqrt{-\mu}} u^a u^b u^c + 14u^a u^{(b} r^{c)} + \sqrt{-\mu} u^a \tilde{\tau}^{bc} + \frac{19\nu}{3\sqrt{-\mu}} u^a g^{bc} \right), \quad (6.37)$$

$$A_{22}^{abc} = \frac{-12\chi_1^2}{\mu} \left( 2g^{a(b} r^{c)} - \frac{4\nu}{3\sqrt{-\mu}} g^{a(b} u^{c)} + \frac{8\nu}{3\sqrt{-\mu}} u^a u^b u^c + 2\sqrt{-\mu} \tilde{\tau}^{a(b} u^{c)} - 4r^{(a} u^{b)} u^c - r^a g^{bc} + \frac{\nu}{\sqrt{-\mu}} u^a g^{bc} \right), \quad (6.38)$$

y

$$A_{23}^{abc} = \frac{-12\chi_1^2}{\mu} \left( \frac{-8\nu}{\sqrt{-\mu}} u^a u^b u^c + 8r^a u^b u^c + 2r^a g^{bc} - \frac{4\nu}{\sqrt{-\mu}} u^a g^{bc} + \frac{8\nu}{\sqrt{-\mu}} g^{a(b} u^{c)} \right), \quad (6.39)$$

Estas expresiones muestran cómo están vinculadas las variables físicas ( $T^{ab}$ ,  $A^{abc}$ ) con aquellas abstractas ( $\xi_a$ ,  $\xi_{ab}$ ). Observamos que la relación inversa es, a priori, altamente no trivial y además puede no ser posible escribirla en términos de funciones algebraicas. Desafortunadamente, el problema de encontrar una descomposición 3+1 requiere tal inversión. En la próxima sección veremos que, en general, la invariancia conforme no ayuda a alcanzar ese objetivo, siendo necesaria una inversión numérica.

### 6.2.3. El problema de la inversión

Con el objetivo de llevar el sistema de ecuaciones a la forma conservativa explícita, necesitamos relacionar las componentes espaciales de las variables dinámicas físicas con las variables de conservación que evolucionaremos. Para ello, es necesario invertir las relaciones presentadas en la sección anterior.

Estas relaciones nos permiten escribir a  $T^{ab}$  y  $A^{abc}$  en términos de la densidad total del fluido,  $\rho(\mu, \nu)$ , su cuadrivelocidad, y de las cantidades disipativas,

que son el flujo de calor  $q^a$  y el tensor de shear  $\tilde{\tau}^{ab}$ , ambas cantidades hasta segundo orden en efectos disipativos. Elegiendo una foliación del espaciotiempo con vector normal  $t^a$  a sus hipersuperficies, escribimos la cuadvirvelocidad del fluido como

$$u^a = \gamma(1, v^i),$$

donde  $v^i$  es la 3-velocidad del fluido respecto de dicho marco de referencia, y  $\gamma = (1 - v^i v_i)^{-1/2}$  es el factor de Lorentz.

Las identidades  $u^a r_a = 0$  y  $\tilde{\tau}^{ab} u_b = 0$  permiten relacionar las componentes temporales de estos tensores con algunas de las correspondientes componentes espaciales. Para ello, descomponemos la métrica de fondo del siguiente modo

$$g_{ab} = -t_a t_b + \tilde{h}_{ab},$$

donde enfatizamos que el proyector  $\tilde{h}_{ab}$  es distinto al  $h_{ab}$  definido anteriormente. De hecho, se tiene que

$$\tilde{h}_{ab} = h_{ab} + \gamma^2 (2v_{(a} t_{b)} - v_a v_b) + (1 - \gamma^2) t_a t_b.$$

Luego, las cantidades

$$r^o := -r^a t_a, \quad \tilde{\tau}^{oo} := \tilde{\tau}^{ab} t_a t_b, \quad \tilde{\tau}^{oi} := -t_a \tilde{h}^b{}_i \tilde{\tau}^{ab}$$

pueden escribirse en términos sólo de sus partes puramente espaciales (es decir, perpendiculares a  $t^a$ ), que son

$$r^i = \tilde{h}^i{}_a r^a, \quad \tilde{\tau}^{ij} = \tilde{h}^i{}_a \tilde{h}^j{}_b \tilde{\tau}^{ab}.$$

En efecto, de la relación

$$0 = r^a u_a = -\gamma r^o + \gamma r^i v_i$$

se tiene que  $r^o = r^i v_i$ , y análogamente

$$\tilde{\tau}^{oo} = \tilde{\tau}^{ij} \delta_{ij}, \quad \tilde{\tau}^{oi} = \tilde{\tau}^{ij} v_j.$$

Luego, buscamos una expresión para el mapa

$$\begin{pmatrix} T^{00} \\ T^{0i} \\ A^{00i} \\ A^{0ij} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \rho \\ v^i \\ r^i \\ \tilde{\tau}^{ij} \end{pmatrix}. \quad (6.40)$$

Dado que  $T^{ab}$  es cuadrático en disipación mientras que  $A^{abc}$  es a lo más lineal, inspeccionamos primero las relaciones obtenidas a partir del tensor constitutivo. A segundo orden en disipación, sabemos que

$$A^{ooi} = A_1^{ooi} + A_2^{ooi},$$

donde

$$A_1^{ooi} = \chi^1 \sqrt{-\mu} \gamma \left( 5\gamma^2 - \frac{1}{2} \right) v^i,$$

mientras que, un cálculo tedioso pero directo permite obtener

$$A_2^{ooi} = -\frac{12\chi^2_1}{\mu} \left[ \left( \frac{76}{3} \frac{\nu\gamma^3}{\sqrt{-\mu}} + 12r^0\gamma^2 - \frac{10\nu\gamma}{3\sqrt{-\mu}} + \gamma\sqrt{-\mu}\tilde{\tau}^{00} \right) v^i + (6\gamma^2 - 1)r^i + 2\gamma\sqrt{-\mu}\tilde{\tau}^{0i} \right]. \quad (6.41)$$

Además, se tiene que

$$A^{0ij} = \left[ 5\chi^1 \sqrt{-\mu} \gamma^3 - \frac{12\chi^2_1}{\mu} \left( \frac{76}{3} \frac{\nu\gamma^3}{\sqrt{-\mu}} + 6r^0\gamma^2 \right) \right] v^i v^j - \frac{144\chi^2_1 \gamma^2}{\mu} v^{(i} r^{j)} + \frac{12\chi^2_1}{\sqrt{-\mu}} \gamma \tilde{\tau}^{ij} + \left[ \chi^1 \gamma \sqrt{-\mu} - \frac{12\chi^2_1}{\mu} \left( \frac{10}{3} \frac{\nu\gamma}{\sqrt{-\mu}} + r^0 \right) \right] \delta^{ij} + \frac{24\chi^2_1}{\sqrt{-\mu}} \gamma \tilde{\tau}^{0(i} v^{j)}. \quad (6.42)$$

Finalmente, la parte puramente espacial de  $A^{abc}$  puede escribirse como

$$A^{ijk} = \left( 5\chi^1 \sqrt{-\mu} \gamma^3 - \frac{304\chi^2_1 \nu}{\mu \sqrt{-\mu}} \gamma^3 \right) v^i v^j v^k + \left( \chi^1 \sqrt{-\mu} \gamma - \frac{40\chi^2_1}{\mu \sqrt{-\mu}} \gamma \nu \right) v^i \delta^{jk} + \left( \chi^1 \sqrt{-\mu} \gamma - \frac{80\chi^2_1}{\mu \sqrt{-\mu}} \gamma \nu \right) \delta^{i(j} v^{k)} - \frac{144\chi^2_1}{\mu} \gamma^2 v^i v^{(j} r^{k)} + \frac{12\chi^2_1 \gamma}{\sqrt{-\mu}} v^i \tilde{\tau}^{jk} - \frac{24\chi^2_1}{\mu} \delta^{i(j} r^{k)} + \frac{24\chi^2_1 \gamma}{\sqrt{-\mu}} - \frac{72\chi^2_1}{\mu} \gamma^2 r^i v^i v^j - \frac{12\chi^2_1}{\mu} r^i \delta^{jk}. \quad (6.43)$$

Claramente, no hay una manera natural de realizar la inversión buscada para el mapa (6.40).

Dada la dificultad de las expresiones en cuestión, en la próxima sección abordaremos un problema un tanto más simple, el cual se obtiene restringiendo el movimiento del fluido a una dimensión espacial, e imponiendo simetría de rotación en el plano perpendicular a la dirección del flujo. En este caso, las expresiones para las variables conservativas en términos de las abstractas se tornan un tanto más manejables, y es posible avanzar sobre la inversión necesaria para describir al flujo, aunque aún así no de forma puramente analítica.

### 6.3. Soluciones para un fluido unidireccional

Nos dedicamos ahora a estudiar el problema anterior, pero con algunas restricciones que permiten avanzar en la inversión de coordenadas necesaria para

escribir el flujo del sistema como función algebraica de las variables conservativas. Sin bien veremos que aún con estas restricciones el problema no puede ser resuelto de manera analítica, es posible desarrollar, a partir de este caso más simple, una implementación numérica no trivial.

Consideramos entonces un fluido disipativo conforme sobre un fondo plano con campo de velocidad  $v$  sólo en una dirección (que llamaremos  $x$ ), con simetría de rotación en el plano perpendicular a dicha dirección (plano  $(y, z)$ ). Recordemos que una rotación de ángulo  $\theta$  alrededor del eje  $x$  se representa por el elemento

$$\mathcal{R}^a_b(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

del grupo de Lorentz. Imponer simetría de rotación en la solución significa pedir que  $T^{ab}$  y  $A^{abc}$  sean invariantes antes la acción de  $\mathcal{R}$ ; esto es,

$$T^{ab} = \mathcal{R}^a_c \mathcal{R}^b_d T^{cd},$$

y

$$A^{abc} = \mathcal{R}^a_d \mathcal{R}^b_e \mathcal{R}^c_f A^{def},$$

para todo  $\theta \in \mathbb{R}$ . Al imponer estas condiciones, claramente se restringe el número de variables dinámicas, y sólo quedan las cinco variables siguientes:

$$e := T^{00}, \quad S := T^{01},$$

$$c_o := A^{000}, \quad c_1 := A^{001}, \quad c_2 := A^{011}.$$

Las ecuaciones de evolución en este caso resultan

$$\partial_t e = -\partial_x S, \tag{6.44}$$

$$\partial_t S = -\partial_x f_T, \tag{6.45}$$

$$\partial_t c_o = -\partial_x f_A^o + I^o \tag{6.46}$$

$$\partial_t c_1 = -\partial_x f_A^1 + I^1 \tag{6.47}$$

$$\partial_t c_2 = -\partial_x f_A^2 + I^2, \tag{6.48}$$

con flujos  $f_T := T^{11}$ ,  $f_A^o := A^{100}$ ,  $f_A^1 := A^{101}$ ,  $f_A^2 := A^{111}$ , y fuentes  $I^o := I^{00}$ ,  $I^1 := I^{01}$  y  $I^2 := I^{11}$ .

Ciertas componentes no nulas de  $T^{ab}$  y  $A^{abc}$  pueden escribirse en función de las variables dinámicas  $\{e, S, c_i\}$  y usando la invariancia conforme de las ecuaciones de evolución. En efecto,

$$T^{22} = T^{33} = \frac{1}{2}(e - S),$$

y

$$A^{022} = A^{033} = \frac{1}{2}(c_o - c_2),$$

aunque algunas otras sólo en término de los flujos, como por ejemplo

$$A^{122} = A^{133} = \frac{1}{2}(f_A^o - f_A^2).$$

Además, por esta misma simetría, de la ecuación (6.31) para el flujo de calor de la teoría y de la definición de  $r^a$ , se tiene que  $Q^2 = Q^3 = r^2 = r^3 = 0$ . Por último, usando perpendicularidad de  $r^a$  y  $\tilde{\tau}^{ab}$  con respecto a  $u^a$ , es posible expresar las componentes de  $\tilde{\tau}^{ab}$ , sólo en función de una componente espacial de  $\tilde{\tau}^{ab}$  (que elegimos  $\tilde{\tau}^{11}$ ) y la velocidad  $v$ :

$$\tilde{\tau}^{ab} = \tilde{\tau}^{11} \begin{pmatrix} v^2 & v & 0 & 0 \\ v & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(v^2 - 1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(v^2 - 1) \end{pmatrix}. \quad (6.49)$$

Procedemos ahora a invertir las ecuaciones para expresar los flujos  $f_T$  y  $\{f_A^i\}_{i=0}^2$  en términos de  $\{e, S, c_i\}$ , las variables conservativas. Emplearemos para ello la teoría conforme y las simetrías impuestas en este caso. Veremos en particular que dichas variables conservativas (que son 5) pueden escribirse como funciones no lineales de cinco variables abstractas, que son  $\mu$ ,  $v$ , y tres variables disipativas  $\nu$ ,  $r^1$  y  $\tilde{\tau}^{11}$ . Para ello, encontramos conveniente reescalar estas tres últimas variables, introduciendo las nuevas funciones

$$X_1 := \frac{10\gamma}{3\sqrt{-\mu}}\nu; \quad (6.50)$$

$$X_2 := r^1; \quad (6.51)$$

$$X_3 := \gamma\sqrt{-\mu}\tilde{\tau}^{11}. \quad (6.52)$$

Luego, el mapa buscado ahora es

$$\begin{pmatrix} e \\ S \\ c_o \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mu \\ v \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}. \quad (6.53)$$

### 6.3.1. Inversión de $\{c_i\}$

Comenzamos el procedimiento de inversión de los campos inspeccionando las ecuaciones para  $A^{abc}$  pues, como hemos notado anteriormente, las contribuciones disipativas en el tensor constitutivo son a lo más lineales. Esto implica

que el sistema que relaciona  $(c_o, c_1, c_2)$  con  $(X_1, X_2, X_3)$  es lineal (con coeficientes que no son constantes, de hecho pueden depender de  $\mu$  y  $v$ ).

Exploremos qué forma tiene dicho sistema. Para ello, introducimos los campos  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$

$$\Phi_1 := \chi^1 \sqrt{-\mu} \quad , \quad \frac{1}{\Phi_2} := -\frac{12\chi^2_1}{\mu} \quad (6.54)$$

A partir de las expresiones formales (6.35), (6.37), (6.38) y (6.39) es posible escribir a  $c_o$  como

$$c_o = F_0(\gamma, \mu) + \frac{1}{\Phi_2} (\varphi_{11}X_1 + \varphi_{12}X_2 + \varphi_{13}X_3) \quad , \quad (6.55)$$

donde

$$F_0(\gamma, \mu) = 3\Phi_1\gamma (2\gamma^2 - 1) \quad (6.56)$$

y

$$\begin{cases} \varphi_{11} &= \frac{10\gamma}{\sqrt{-\mu}} (2\gamma^2 - 1) ; \\ \varphi_{12} &= 3v(6\gamma^2 - 1) ; \\ \varphi_{13} &= 3v^2\sqrt{-\mu}\gamma . \end{cases} \quad (6.57)$$

Análogamente, se tiene que

$$c_1 = F_1(\gamma, \mu) + \frac{1}{\Phi_2} (\varphi_{21}X_1 + \varphi_{22}X_2 + \varphi_{23}X_3) \quad , \quad (6.58)$$

donde

$$F_1(\gamma, \mu) = \frac{\Phi_1}{2}\gamma v (10\gamma^2 - 1) \quad (6.59)$$

y

$$\begin{cases} \varphi_{21} &= \frac{10\gamma v}{3\sqrt{-\mu}} (6\gamma^2 - 1) ; \\ \varphi_{22} &= 2\gamma^2 (2v^2 + 4v + 3) - 1 ; \\ \varphi_{23} &= \gamma\sqrt{-\mu}v (v^2 + 2) . \end{cases} \quad (6.60)$$

Finalmente,

$$c_2 = F_2(\gamma, \mu) + \frac{1}{\Phi_2} (\varphi_{31}X_1 + \varphi_{32}X_2 + \varphi_{33}X_3) \quad , \quad (6.61)$$

donde

$$F_2(\gamma, \mu) = \Phi_1\gamma v (5\gamma^2 v^2 + 1) \quad (6.62)$$

y

$$\begin{cases} \varphi_{31} &= \frac{10\gamma}{3\sqrt{-\mu}} (6\gamma^2 v^2 + 1) ; \\ \varphi_{32} &= v [1 + 6\gamma^2 (2 + v^2)] ; \\ \varphi_{33} &= \gamma\sqrt{-\mu} (2v^2 + 1) . \end{cases} \quad (6.63)$$

Luego, la inversión buscada resulta

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(2\gamma^2 - 1) & 6v(3\gamma^2 - 1) & 3v^2 \\ v(6\gamma^2 - 1) & 2\gamma^2 v (2v + \frac{3}{v}) - 1 & v(v^2 + 2) \\ 6\gamma^2 v^2 + 1 & v [1 + 6\gamma^2 (2 + v^2)] & 2v^2 + 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} ,$$

donde definimos  $Y_i = \Phi_2(c_i - F_i)$ , con  $i = 0, 1, 2$ .

De este modo, se obtienen expresiones *explícitas* para las variables disipativas, todavía en términos de  $\gamma$  y  $\mu$ , además de las variables disipativas de evolución. Lo que resta ahora es invertir  $\gamma$  y  $\mu$  usando las dos identidades para  $e$  y  $S$ .

### 6.3.2. Expresiones para invertir $e$ y $S$

Proponemos aquí una alternativa para la inversión implícita de lo que falta para escribir los flujos conservativos. Se obtendrán dos ecuaciones implícitas para  $\gamma$  y  $\mu$ , las cuales pueden resolverse con cualquier algoritmo iterativo, como el de Newton-Raphson. Para ello, listamos aquí los principales ingredientes tal cual como serán implementados en el código numérico.

Comenzamos escribiendo las expresiones para las variables  $e$  y  $S$  arrojadas por la teoría, en término de las variables abstractas. Tenemos que

$$e = \frac{4}{3}\rho \left( \gamma^2 - \frac{1}{4} \right) + 2v\gamma Q^1 + v^2 \tau_{\perp}^{11}, \quad (6.64)$$

y

$$S = \frac{4}{3}\rho\gamma^2 v + (v^2 + 1) \gamma Q^1 + v\tau_{\perp}^{11} . \quad (6.65)$$

Las funciones  $\rho$ ,  $Q^1$  y  $\tau_{\perp}^{11}$  que aparecen en las expresiones anteriores son funciones altamente no lineales de las variables abstractas  $\{\mu, v, X_i\}$ :

$$\rho = -\frac{6\chi_0^0}{\mu^2} - \frac{6\chi_0^1\sqrt{-\mu}}{\gamma\mu^4} X_1 + \frac{42\chi_0^2}{\mu^5\gamma^2} Z(\mu, \gamma, \{X_i\}), \quad (6.66)$$

donde

$$Z = \frac{6}{5} (X_1)^2 + 10\gamma^2 (X_2)^2 + \frac{3}{2} \left( \frac{X_3}{\gamma^2} \right)^2 ; \quad (6.67)$$

mientras que la componentes  $Q^1$  y  $\tau_{\perp}^{11}$  vienen dadas por

$$Q^1 = \frac{10\chi^1_0 X_2}{\mu^3 \sqrt{-\mu}} + \frac{168\chi^2_0 X_2}{\gamma\mu^5} \left[ X_1 + \frac{X_3}{\gamma} \right], \quad (6.68)$$

y

$$\tau_{\perp}^{11} = \frac{2\chi^1_0 X_3}{\gamma\mu^3 \sqrt{-\mu}} + \frac{24\chi^2_0}{\mu^5} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{X_3}{\gamma} \right)^2 + \frac{14}{3} (X_2)^2 + \frac{7}{5} \frac{X_1 X_3}{\gamma^2} \right]. \quad (6.69)$$

Con esto último, ahora sí resulta posible implementar las expresiones anteriores obtenidas para  $e$  y  $S$  y lograr invertir numéricamente  $\mu$  y  $\gamma$  por medio del método de Newton-Raphson.

## 6.4. Resultados

En esta última sección presentamos el código numérico que empleamos para simular las ecuaciones descriptas en este capítulo, con el objetivo de abordar el problema del fluido disipativo conforme con movimiento en una dimensión espacial. En particular, mostraremos algunos resultados que permiten evaluar la convergencia del método y la plausibilidad del esquema empleado a tal fin. Luego de comentar algunos aspectos esenciales sobre el funcionamiento e implementación del código, evaluamos su convergencia y estudiamos la evolución de algunas soluciones en el régimen disipativo. El propósito es capturar en las soluciones numéricas el efecto que provoca la incorporación de términos disipativos en las ecuaciones hidrodinámicas, en comparación con las soluciones que se obtienen en el caso ideal, i.e., sin disipación. Estos resultados serán contrastados con resultados teóricos previos [67], donde los autores abordan el problema de existencia local y decaimiento exponencial de soluciones a ecuaciones cuasilineales disipativas.

### 6.4.1. Desarrollo del código numérico

Para las simulaciones numéricas, desarrollamos un código unidimensional que implementa el algoritmo de Kurganov–Tadmor [101] para la evolución de soluciones generalizadas. En particular, adaptamos el algoritmo original para implementarlo en la teoría disipativa antes descripta, realizar las inversiones necesarias en cada paso temporal, y obtener las funciones de flujo. Para la evolución temporal empleamos una rutina usual de Runge–Kutta, con limitadores de pendiente que evitan que se produzcan oscilaciones no deseadas durante la evolución.

Los esquemas centrados han atraído mucho la atención en las últimas décadas debido a su simplicidad y efectividad para resolver sistemas hiperbólicos, y en particular aquellos que describen leyes de conservación. El primero de estos esquemas fue propuesto por P. Lax [103], y fue a partir de este método que comenzaron a surgir propuestas con mejor precisión, tanto para la discretización espacial como temporal. El ingrediente clave de las generalizaciones subsiguientes consiste en reemplazar la construcción de la solución por funciones constantes a trozos definidas en cada intervalo entre puntos de grilla por una representación lineal con limitadores de pendientes. Sin embargo, su implementación requiere el uso de mallas escalonadas (*staggered meshes*) y la viscosidad numérica aumenta muy rápidamente durante la evolución. Kurganov y Tadmor lograron eliminar estos requisitos, presentando un esquema centrado de segundo orden, que permite una formulación semi-discreta, y viscosidad numérica muy baja ( $\mathcal{O}(x^4)$ ), pudiendo extenderse a más dimensiones de manera directa.

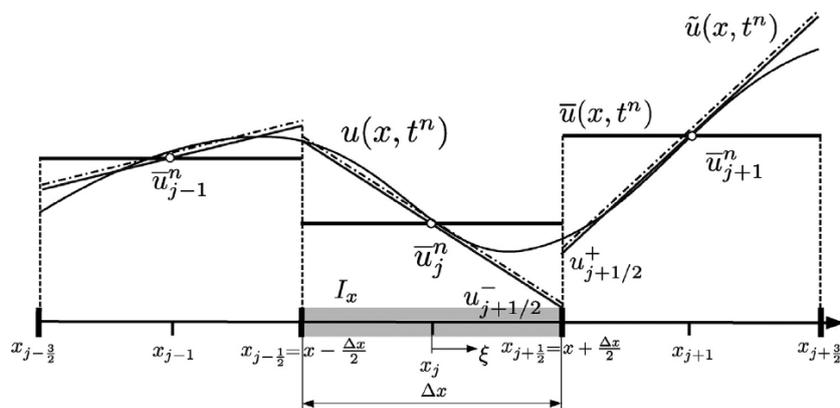


Figura 6.1: Esquema centrado de Kurganov y Tadmor. La línea curva continua representa la solución exacta ( $u$ ), las líneas horizontales representan un promedio de  $u$  en cada celda ( $\bar{u}$ ), y la línea punteada es la aproximación de la solución en cada celda ( $\tilde{u}$ ).

El algoritmo de Kurganov–Tadmor permite integrar la solución en espacio y en tiempo a partir de ciertas funciones definidas en los puntos de grilla (Ver Fig. 6.1):

$$\bar{u}(x, t^n) := \frac{1}{|I_x|} \int_{I_x} u(y, t) dy, \quad I_x = \left\{ y : |y - x| \leq \frac{\Delta x}{2} \right\}; \quad (6.70)$$

y

$$\tilde{u}(x, t^n) := \sum_{j=1}^N \bar{u}_j^n + (u_x)_j^n (x - x_j) \chi_{[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]}; \quad (6.71)$$

donde  $\chi_{[a,b]}$  es la función característica del intervalo  $[a, b]$ . Luego, el método requiere de la evaluación de las funciones de flujo en los valores a izquierda y derecha de  $\tilde{u}$  en cada punto medio  $x_{j+1/2}$  (ver Apéndice D para más detalles sobre el método). Como mencionamos anteriormente, esta es quizá la mayor dificultad para el sistema particular considerado aquí, ya que no contamos con expresiones explícitas para las funciones de flujo. Es por ello que antes de evaluarlos, introducimos un algoritmo de Newton–Raphson que permite escribir las variables abstractas  $\{\mu, v, X_i\}$  en términos de las físicas  $\{e, S, c_i\}$ , obtener los flujos implícitamente, y continuar con el algoritmo.

### 6.4.2. Testeando la convergencia

Los resultados que presentamos en este capítulo se centran, en primer lugar, en verificar la convergencia del algoritmo modificado, a partir de soluciones exactas del sistema disipativo (al cual se le agregó una fuente “numérica” externa para poder obtener soluciones exactas), y comparándolas con aquellas generadas por el código. Para el estudio de la convergencia, evaluamos directamente la norma  $L^1$  de la diferencia entre la solución exacta y la numérica a cada tiempo:

$$\| \text{Dif} \|_{L^1}(t) := \int_0^1 |u_{\text{num}}(x, t) - u_{\text{exa}}(x, t)| dx, \quad (6.72)$$

y viendo que el valor se estaciona en algún número pequeño para tiempos largos.

Si bien el nuevo sistema obtenido se aleja (levemente) de la descripción del sistema físico, este tradicional procedimiento ayuda a construir soluciones exactas, y luego compararlas rápidamente con la simulación generada por el algoritmo numérico. En este caso, consideramos el siguiente dato inicial oscilatorio periódico en  $[0, 1]$  para las variables abstractas (y con las unidades correspondientes):

$$\begin{aligned} v_o &= 0,045 \cdot (0,5 + \sin(2\pi x)) + 0,01 \\ \mu_o &= -40,0 \cdot (1,0 + 0,5 \sin(2\pi x)) \\ X_{1_o} &= 0,1 + 0,01 \sin(2\pi x) \\ X_{2_o} &= -0,01 + 0,01 \sin(2\pi x) \\ X_{3_o} &= 0,15 + 0,01 \sin(2\pi x) \end{aligned}$$

A partir del dato anterior, calculamos los correspondientes valores iniciales para  $e$ ,  $S$  y  $c_i$ , usando las expresiones (6.64), (6.65) y (6.55), (6.58), (6.61).

Se analizó la convergencia para dos regímenes disipativos: uno de baja disipación, y otro con disipación más alta. Las figuras 6.2 y 6.3 muestran

cómo varía la diferencia entre la solución exacta y la numérica, a medida que transcurre el tiempo, para cada configuración.

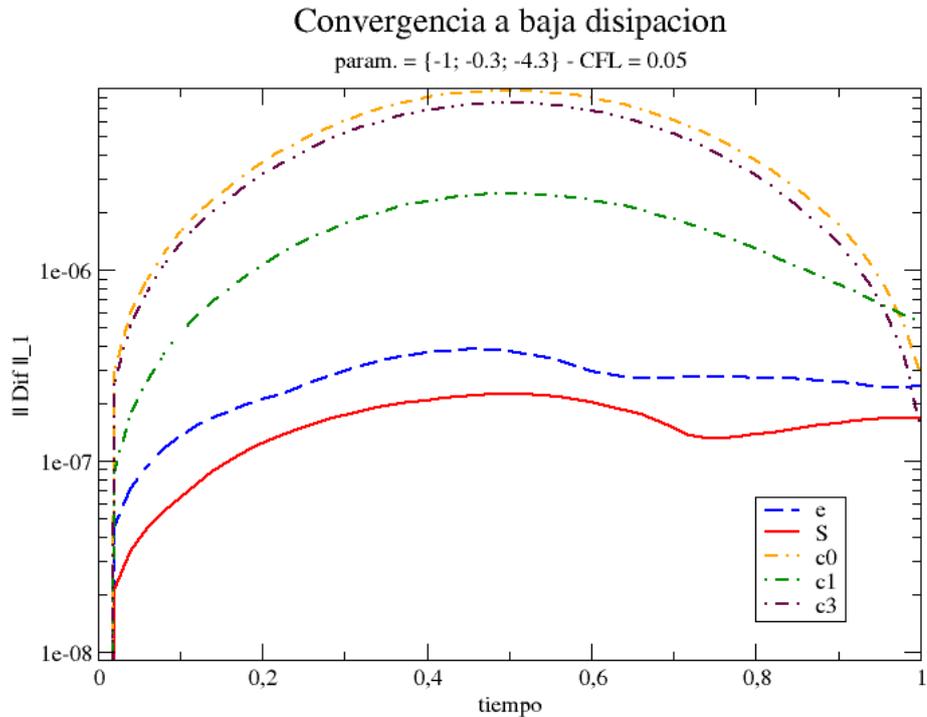


Figura 6.2: Norma  $L^1$  de la diferencia entre la solución exacta y la numérica. Se emplearon constantes disipativas  $\chi_0^0 = -1$ ,  $\chi_0^1 = -0,1$  y  $\chi_0^2 = -4,3$ .

Observamos que si bien los perfiles de la diferencia son similares en ambas figuras, al aumentar levemente la disipación, la diferencia también incrementa. Sin embargo, vemos que para tiempos largos, dicha diferencia logra estacionarse para la energía (en alrededor de  $2 \times 10^{-7}$  para el caso de baja disipacion y aproximadamente en  $9 \times 10^{-7}$  para el caso en que la disipación es mayor) y el momento ( $2 \times 10^{-7}$  para baja disipacion y  $6 \times 10^{-7}$  al aumentar la disipación), mientras que para las contribuciones disipativas dicha diferencia disminuye para tiempos cercanos a  $t_f = 1$ .

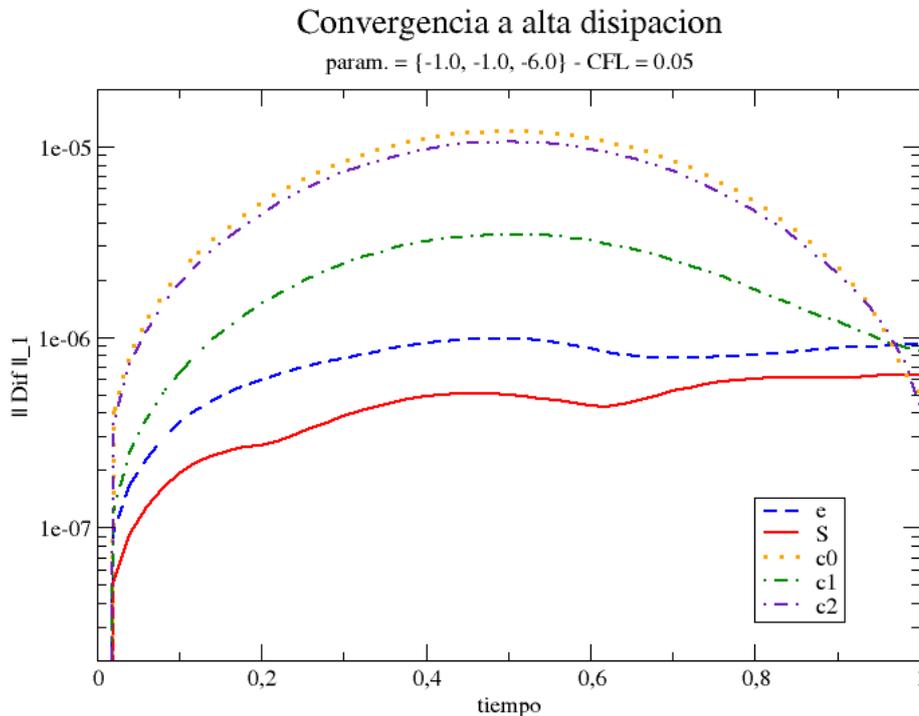


Figura 6.3: Norma  $L^1$  de la diferencia entre la solución exacta y la numérica. Se emplearon constantes disipativas  $\chi_0^0 = -1$ ,  $\chi_0^1 = -1,0$  y  $\chi_0^2 = -6,0$ .

### 6.4.3. Testeando efectos disipativos

Por último, resulta interesante analizar cuál es el efecto concreto que produce el hecho de incorporar a las ecuaciones una pequeña disipación. Para ello, quitamos la fuente numérica usada para el estudio de la convergencia y elegimos un dato inicial suave que al evolucionarlo por medio de las ecuaciones del fluido sin efectos disipativos, se generan ondas de choque a tiempo finito. Resulta interesante contrastar el comportamiento hallado con los resultados presentados en el trabajo [67], en donde se demostró analíticamente que sistemas cuasilineales disipativos admiten solución clásica, siempre y cuando se prescriban datos iniciales suficientemente suaves. En particular, encontramos aquí configuraciones tales que, dado un dato inicial suave para las ecuaciones del fluido ideal, se generan discontinuidades y ondas de choque a tiempo finito, pero al incorporar una pequeña disipación en dichas ecuaciones, la solución se suaviza, lo que impide la formación y propagación de efectos discontinuos durante la evolución.

En efecto, para verificar que este es el caso, consideramos el siguiente dato

inicial para  $e$  y  $S$ :

$$\begin{aligned} e_o &= 1 + \sin(\pi x) \\ S_o &= 0,11 \cdot (3 - 0,1 \sin(\pi x)) \end{aligned}$$

Para las variables disipativas, inicialmente prescribimos  $X_{i0} = 0$  en el caso sin disipación ( $\chi_0^0 = -1$ ;  $\chi_0^1 = \chi_0^2 = 0$ ), mientras que tomamos  $X_{10} = 0,05$ ,  $X_{20} = -0,005$  y  $X_{30} = 0,03$  para el caso con pequeña disipación ( $\chi_0^0 = -1$ ;  $\chi_0^1 = 0$ ,  $\chi_0^2 = -0,5$ ).

Los gráficos siguientes muestran los perfiles de densidad de energía del sistema en función de la posición, para dos tiempos particulares.

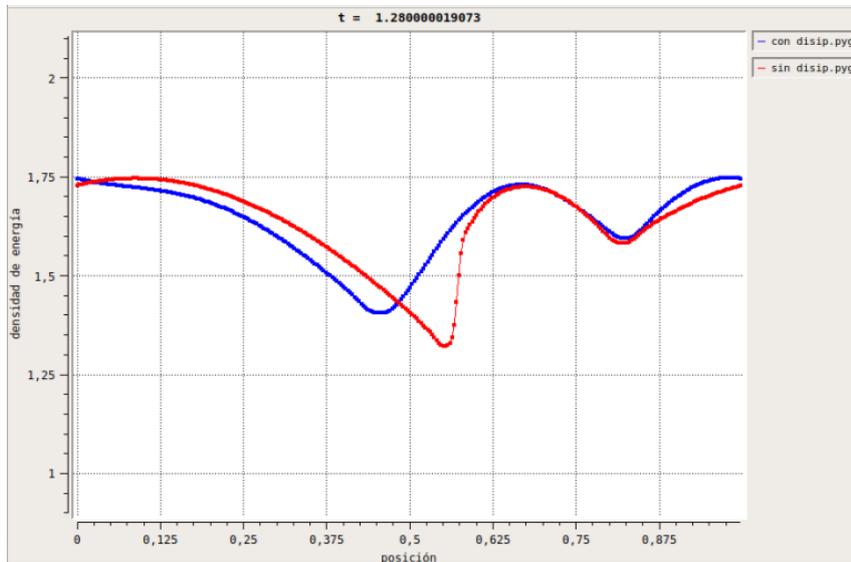


Figura 6.4: Perfil de densidad de energía del fluido disipativo conforme, al evolucionar hasta  $t \sim 1,28$ . La curva roja corresponde al caso sin disipación y la azul al caso disipativo.

Vemos entonces que resulta posible, al menos para ciertas configuraciones iniciales lo suficientemente suaves, mitigar discontinuidades en las soluciones para el fluido ideal agregando pequeños términos disipativos en las ecuaciones dinámicas. Este resultado verifica numéricamente el trabajo seminal [67], en el que se prueba que para todo dato inicial lo suficientemente pequeño y cercano al equilibrio para las ecuaciones que describen sistemas hiperbólicos disipativos, siempre existe evolución suave en el tiempo, cuya solución decae exponencialmente a alguna configuración de equilibrio. En dicho trabajo, se imponen tres condiciones esenciales sobre estas teorías, que permiten luego usar el teorema de estabilidad y decaimiento exponencial en [67] para concluir

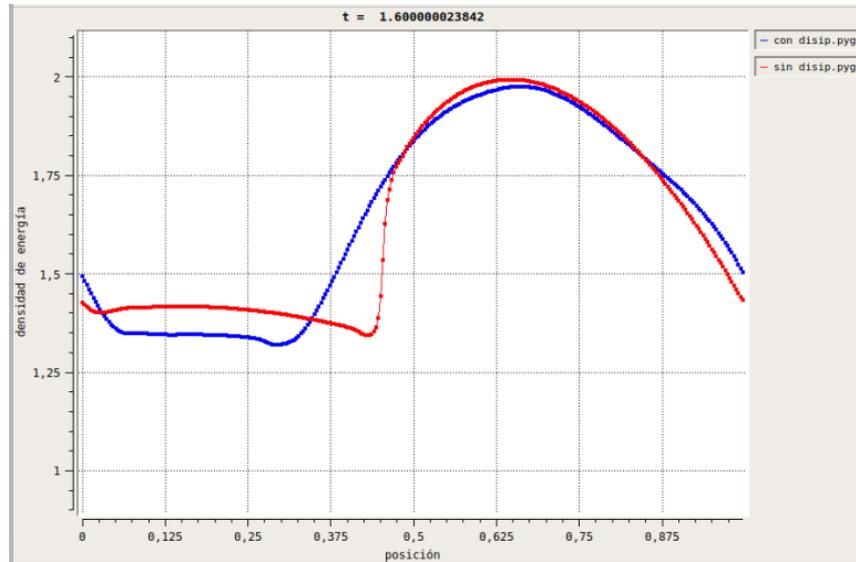


Figura 6.5: Perfil de densidad de energía del fluido disipativo conforme, al evolucionar hasta  $t \sim 1,60$ . La curva roja corresponde al caso sin disipación y la azul al caso disipativo.

el resultado final. La primera condición es la hiperbolicidad simétrica del sistema en cuestión; la segunda está vinculada a la existencia de una corriente de entropía en la teoría (la cual no sea conservada en el caso disipativo y afecta sólo a la parte no principal del sistema de evolución); y por último se pide que la disipación afecte a todos los campos dinámicos de la teoría. Estas tres condiciones son satisfechas en nuestra teoría, de manera que el resultado obtenido resulta plausible.

# Capítulo 7

## Discusión y perspectivas futuras

A lo largo de esta tesis abordamos el estudio de ciertos sistemas hiperbólicos en el marco de la teoría de la Relatividad General, empleando a la teoría de ecuaciones en derivadas parciales como la principal herramienta de análisis, y enfocado en condiciones algebraicas que permiten estudiar el problema de valores iniciales de sistemas tanto en Electrodinámica no lineal como en Hidrodinámica Relativista.

En primer lugar logramos un estudio detallado del problema de valores iniciales de la Electrodinámica Force-Free, cuyo sistema de ecuaciones pretende describir la dinámica de plasmas de baja densidad cercanos a objetos compactos, de interés en astrofísica, donde los campos magnéticos dominan la dinámica, pudiendo lograr una descripción del sistema puramente en términos de campos electromagnéticos. Esta contribución resultó parte de un proyecto más general, en el cual se buscaba una implementación plausible para la EFF. En nuestro caso, empleamos como variables dinámicas un par de potenciales escalares, de manera de simplificar la implementación numérica subsiguiente. Nuestra contribución permite, sin embargo, descartar esta formulación de la teoría Force-Free. Reduciendo el sistema no lineal de segundo a uno cuasilineal y de primer orden completamente equivalente, pudimos hacer uso de la teoría lineal y ver que dicha reducción resulta débilmente hiperbólica, lo que no garantiza un problema de valores iniciales bien puesto. En términos generales, vimos que la parte principal del sistema pseudodiferencial asociado no resulta diagonalizable, y por lo tanto no es posible que se cumpla una de las condiciones necesarias y suficientes provistas por Kreiss para que el sistema resulte fuertemente hiperbólico. Concluimos que al excitar modos divergentes en el dato inicial, la evolución crece linealmente en frecuencia y tiempo, siendo entonces imposible lograr controlarla por el dato inicial. Además, verificamos que la evolución no resulta en general continua con respecto al dato inicial, mostrando explícitamente que una sucesión acotada y convergente de

datos iniciales convenientemente escogidos induce una sucesión de evolución divergente, a tiempos arbitrariamente cercanos al inicial. Como trabajo futuro, resulta interesante estudiar la evolución numérica del sistema, partiendo de datos iniciales anómalos, y estimar cuán inestable resultan las soluciones a tiempos cortos y largos.

En segundo lugar, desarrollamos una teoría simétrico-hiperbólica que permite describir la dinámica de fluidos relativistas ultraveloces considerando efectos disipativos. Este proyecto, que constituyó el eje central de esta tesis ofrece, a nuestro entender, la primer propuesta de un sistema hiperbólico a segundo orden en disipación que permite la descripción precisa de fluidos disipativos, sin aproximaciones como las de Israel-Stewart, las cuales se basan en modificar las ecuaciones dinámicas e incluir la evolución de cantidades constitutivas. Basados en el enfoque de Geroch, Lindblom y Pennisi para teorías de tipo divergencia, estudiamos el caso de fluidos ultraveloces, pero este análisis puede realizarse para configuraciones de fluidos más generales (incluso considerando conservación de la corriente de partículas). En el caso particular de fluidos conformes, imponemos a las ecuaciones dinámicas la simetría de invariancia ante transformaciones conformes de la métrica. Con esta imposición, fue posible hallar una única familia de funciones generatrices las cuales describen por completo la teoría, lo suficientemente cerca del equilibrio. Esta familia de funciones depende de un nuevo conjunto de variables dinámicas, las cuales llamamos “variables abstractas” pues resulta complicado darles un significado físico concreto (aunque claramente es posible entender sus implicancias en la teoría y el por qué de su aparición en el camino), y está parametrizada por tres constantes libres ( $\chi_0^0$ ,  $\chi_0^1$  y  $\chi_0^2$ ), cada una asociada a un orden de disipación (cero, primer y segundo orden). A partir de dicha función, pudimos caracterizar los efectos disipativos hasta el segundo orden.

El estudio de la teoría en término de estas variables abstractas permitió atacar de manera mucho más directa el problema de valores iniciales, pudiendo demostrar que la teoría propuesta resulta simétrico-hiperbólica alrededor del equilibrio, para elecciones plausibles de las constantes libres. Dado que, como es bien conocido en la literatura, las teorías disipativas a primer orden no son bien puestas en el sentido usual, la inclusión de términos a segundo orden resulta esencial para que teoría resulte simétrico-hiperbólica.

En tercer y último lugar, propusimos una manera de implementar numéricamente las ecuaciones dinámicas de nuestra teoría, para el caso de un movimiento unidireccional con simetría de rotación en el plano perpendicular a la dirección de flujo. Para ello, empleamos del método de Kurganov-Tadmor para la evolución y tratamiento de soluciones generalizas, para ecuaciones cuasi-lineales en forma de conservación. En general, logramos ver que no resulta para

nada directo obtener expresiones explícitas de los flujos que aparecen en las correspondientes ecuaciones de evolución en forma de conservación, en términos de las variables dinámicas de la teoría. De hecho, verificamos que no siempre es posible hacerlo analíticamente, y por ello hemos tenido que recurrir a métodos iterativos de alta precisión. El primer paso para lograr la implementación numérica fue tomar las ecuaciones covariantes de conservación del tensor de energía-momento y tensor constitutivo y llevarlas a la forma de conservación, con una previa descomposición 3+1 de las mismas. Para ello, partimos de las expresiones del tensor energía-momento y tensor constitutivo (variables *físicas*) obtenidas previamente en forma analítica al desarrollar la teoría. Estas expresiones, sin embargo, estaban escritas en términos de las variables que denominamos *abstractas*. Para poder lograr nuestro cometido, invertimos dichas relaciones, y así obtuvimos nuevas expresiones para las variables abstractas en términos de aquellas físicas. Como dijimos anteriormente, este es un método que puede emplearse también para sistemas más generales, llegando a ecuaciones trascendentes para los flujos, las cuales fueron resueltas en forma numérica, recurriendo al algoritmo de Newton-Raphson. Dada la complejidad de las expresiones para la inversión, en esta tesis se abordó el problema de la evolución sólo para el caso en el que la dirección del flujo es unidimensional, reduciéndose considerablemente la cantidad de variables dinámicas. El proceso de inversión (con la precisión suficiente) resultó exitoso ya que, a pesar de las modificaciones realizadas al código incluyendo las rutinas de Newton-Raphson, se obtuvieron los resultados esperados. Mediante la incorporación de una pequeña fuente numérica extra al sistema disipativo original de ecuaciones de evolución, fue posible construir soluciones exactas con las cuales poder comparar la evolución numérica subsiguiente. Se vio que dicha evolución difiere en norma recién en el orden  $10^{-6}$  y  $10^{-7}$  para configuraciones con alta y baja disipación, respectivamente. Además, analizamos cómo diferentes configuraciones iniciales suaves que generan choques en el caso del fluido sin disipación, permiten soluciones suaves al incorporar pequeñas contribuciones disipativas en las ecuaciones, como era de esperarse.

Este trabajo es el comienzo de una línea de investigación, que tiene como objetivo desarrollar una implementación tridimensional de fluidos disipativos empleando esta formulación. Una vez conseguido el código, planeamos realizar simulaciones de situaciones astrofísicas concretas, como por ejemplo, la dinámica de discos de acreción en la cercanía de agujeros negros rotantes. En este escenario, las aproximaciones newtonianas/postnewtonianas no resultan en general del todo satisfactorias. Por ello, buscamos aportar con nuestra teoría un mejor entendimiento de esta clase de fenómenos.



# Apéndice A

## Datos iniciales anómalos

En este apéndice mostramos explícitamente mediante un ejemplo la evolución de datos iniciales que conducen a soluciones que crecen polinomialmente en frecuencia, de manera que no puedan ser acotadas por funciones independientes de la frecuencia.

Como consecuencia de lo probado en el Capítulo 3, debería ser posible encontrar soluciones no acotadas, tanto en frecuencia como en tiempo para la reducción a primer orden de las ecuaciones Force–Free en potenciales de Euler. En particular, esperamos contar con un bloque de Jordan no diagonal de la parte principal, y por ende un modo que crezca linealmente tanto en frecuencia como en tiempo. Este tipo de comportamiento podría eventualmente manifestarse en simulaciones numéricas, por lo que resulta relevante identificarlo explícitamente, cuando sea posible.

Partimos recordando que al identificar  $k_0 \leftrightarrow i\partial_t$  en el sistema (3.43), se obtiene el sistema

$$\partial_t U = \mathbb{A} U, \quad (\text{A.1})$$

donde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{-k_1^2 - k_3^2}{|\vec{k}|} & -\frac{(\vec{\ell}_1 \cdot \vec{k})(\vec{\ell}_2 \cdot \vec{k})}{|\vec{k}|G_{22}} \\ 0 & 0 & -\frac{(\vec{\ell}_1 \cdot \vec{k})(\vec{\ell}_2 \cdot \vec{k})}{|\vec{k}|G_{11}} & \frac{-k_2^2 - k_3^2}{|\vec{k}|} \\ |\vec{k}| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |\vec{k}| & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

y las variables  $U$  dadas por

$$U = \begin{pmatrix} \partial_t \hat{\varphi}_i \\ |\vec{k}| \hat{\varphi}_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2; \quad (\text{A.3})$$

Emplearemos entonces el sistema (A.1) para encontrar soluciones explícitas que divergen en frecuencia y tiempo, para las cuales no se cumple la condición de continuidad con respecto al dato inicial.

Un cálculo directo permite ver que la matriz  $\mathbb{A}$  en (A.2) tiene cuatro autovalores imaginarios, los cuales están dados por

$$\lambda_{\pm}^{(1)}(\vec{k}) = \pm \frac{|k_3|}{\sqrt{2}} i, \quad \lambda_{\pm}^{(2)}(\vec{k}) = \pm i \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \frac{k_3^2}{2}},$$

y en particular, vale que  $Re(\lambda_{\pm}^{(j)}) = 0$ . Si bien uno podría esperar a priori que el sistema sea bien puesto (siguiendo el Lemma 2.3.1 de [19]), se ve que si  $k_3 = 0$ ,  $\lambda^{(1)} = 0$  es una raíz con multiplicidad 2. Entonces, si el sistema fuera bien puesto, el bloque de Jordan de la matriz  $J = P^{-1}\mathbb{A}P$  asociado a dicha raíz debería ser diagonal (es decir, la dimensión del correspondiente autoespacio debería ser igual a 2).

Sin embargo, para  $\vec{k} \neq 0$  hay una única manera obtener un autovalor con multiplicidad algebraica mayor que la unidad; i.e., tomando  $k_3 = 0$ . En dicho caso, los autovalores son

$$\lambda_{\pm} = \pm i |\vec{k}|, \quad \lambda_0 = 0, \quad (\text{A.4})$$

y la descomposición de Jordan de  $\mathbb{A}$  es

$$J = \begin{pmatrix} i|\vec{k}| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i|\vec{k}| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |\vec{k}| \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Claramente, sus columnas no forman una base completa de autovectores. Exponenciando  $\mathbb{A}$  haciendo uso de la descomposición de Jordan anterior, obtenemos la solución general de (A.1) en este caso:

$$U(t) = \begin{pmatrix} ie^{i|\vec{k}|t} & -ie^{-i|\vec{k}|t} & 0 & -\frac{|\ell_1|k_2}{|\ell_2|k_1} \\ ie^{i|\vec{k}|t} & -ie^{-i|\vec{k}|t} & 0 & 1 \\ e^{i|\vec{k}|t} & e^{-i|\vec{k}|t} & -\frac{|\ell_1|k_2}{|\ell_2|k_1} & -\frac{|\ell_1|k_2}{|\ell_2|k_1}(1 + |\vec{k}|t) \\ e^{i|\vec{k}|t} & e^{-i|\vec{k}|t} & 1 & 1 + |\vec{k}|t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^0 \\ V_2^0 \\ V_3^0 \\ V_4^0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

Luego, eligiendo cualquier conjunto  $(V_1^0, \dots, V_4^0) \in \mathbb{R}^4$  con  $V_4^0 \neq 0$ , es posible generar datos iniciales que conduzcan a soluciones que crecen linealmente en frecuencia y en tiempo.

# Apéndice B

## Descomposiciones tensoriales y algunas identidades útiles

En este apéndice reunimos algunas identidades útiles que han sido empleadas para el desarrollo de la teoría de fluidos presentada en los Capítulos 4 y 5. En particular, discutimos la descomposición ortonormal de todo tensor de segundo y tercer rango que cumple con todas las propiedades que pedimos para los tensores de energía-momento y constitutivo que describen al fluido conforme.

### B.1. Descomposición de tensores de segundo y tercer rango

Sea  $S^{ab}$  un campo tensorial simétrico, y  $V^a$  un campo vectorial con  $V^c V_c \neq 0$ . Lego, siempre existe una función escalar  $\alpha$ , un campo vectorial  $R^a$  y un tensor simétrico y sin traza  $P^{ab}$  con

$$R^a V_a = 0, \quad P^{ab} V_b = 0, \quad P^{ab} g_{ab} = 0 \quad (\text{B.1})$$

tales que satisfacen la siguiente identidad:

$$S^{ab} = \alpha \left( V^a V^b - \frac{V^c V_c}{d} g^{ab} \right) + \frac{2}{V^c V_c} V^{(a} R^{b)} + P^{ab}. \quad (\text{B.2})$$

En efecto, contrayendo (B.2) con  $V_a V_b$  se obtiene

$$S^{ab} V_a V_b = \frac{d-1}{d} \alpha (V^c V_c)^2,$$

de donde

$$\alpha = \frac{d}{d-1} \frac{S^{ab} V_a V_b}{(V^c V_c)^2}. \quad (\text{B.3})$$

Ahora, contrayendo (B.2) con  $V_b$  obtenemos

$$S^{ab}V_b = \frac{d-1}{d} \alpha V^c V_c V^a + R^a,$$

de donde directamente se tiene

$$R^a = S^{ab}V_b - \frac{S^{cd}V_c V_d}{V^c V_c} V^a.$$

Nótese que  $R^a V_a = 0$ , como se asumió inicialmente. Finalmente, el basta tomar

$$P^{ab} = S^{ab} - \frac{d}{d-1} \frac{S^{cd}V_c V_d}{(V^c V_c)^2} \left( V^a V^b - \frac{V^c V_c}{d} g^{ab} \right) - \frac{2}{V^c V_c} V^{(a} R^{b)}.$$

De hecho, es directo que  $P^{ab}V_b = 0$  y  $P^{ab}g_{ab} = 0$ , pues  $S^{ab}$  es de traza nula por hipótesis, y eso prueba la afirmación anterior. La descomposición (B.2) es usada reiteradamente a lo largo del desarrollo de la teoría de fluidos disipativos conformes, eligiendo  $S_{ab} = \xi_{ab}$  y  $V_a = \xi_a$ ; es decir

$$\xi_{ab} = \frac{\nu}{\mu^2} \xi_a \xi_b + \frac{2}{\mu} \xi_{(a} r_{b)} + \tau_{ab}. \quad (\text{B.4})$$

Introduciendo ahora la parte sin traza de  $\tau_{ab}$

$$\tilde{\tau}_{ab} := \tau_{ab} + \frac{\nu}{\mu(d-1)} h_{ab}, \quad (\text{B.5})$$

la expresión (B.4) equivale a

$$\xi_{ab} = \frac{d}{d-1} \frac{\nu}{\mu^2} \left( \xi_a \xi_b - \frac{\mu}{d} g_{ab} \right) + \frac{2}{\mu} \xi_{(a} r_{b)} + \tilde{\tau}_{ab}. \quad (\text{B.6})$$

Analicemos ahora cómo es la descomposición para tensores de tercer rango. Si  $S^{ab}$  es un campo tensorial simétrico arbitrario, y  $V^a$  un campo vectorial cualquiera, puede verse que la forma más general del tensor  $A^{abc}$  que satisface todas las propiedades requeridas para ser un tensor constitutivo como el que aparece en las teorías tipo divergencia, (i.e., la condición (4.23)) puede, únicamente, ser de la forma

$$A^{abc} = V^a S^{bc} + 2S^{a(b} V^{c)}, \quad (\text{B.7})$$

sujeto a la condición

$$2S^{ab}V_a + S^{ac}g_{ac}V^b = 0. \quad (\text{B.8})$$

En el contexto de los capítulos 4 y 5, expresamos a  $V^a$  y  $S^{ab}$  como funciones algebraicas de las variables abstractas que definen al fluido a cada orden. Inspeccionamos aquí todas las posibilidades para éstos, a cada orden. Dado que a orden cero no hay disipación ( $\xi^{ab} = 0$ ), sólo podemos construir en términos de  $\xi^a$  y  $g^{ab}$ , es decir

$$V^a = \xi^a, \quad S^{ab} = S_o \left( g^{ab} - \frac{d+2}{3\mu} \xi^a \xi^b \right), \quad (\text{B.9})$$

donde  $S_o$  es una constante que debe ser ajustada. Para fluidos perfectos, por ejemplo, se toma  $S_o = 0$  (pues el tensor constitutivo es nulo a ese orden), mientras que a primer orden, lineal en disipación,  $S_o = 1$  como se notó en la ecuación (5.14) de la sección 5.1.

Para la contribución siguiente, hay tres posibles términos que son a lo más lineales en  $\xi^{ab}$ . En efecto, recordando la definición  $\ell^a := \xi^{ab} \xi_b$ , ellos son

$$V^a := \xi^a, \quad S^{ab} := S_o^1 \frac{\nu}{\mu} \left( g^{ab} - \frac{d+2}{3\mu} \xi^a \xi^b \right), \quad (\text{B.10})$$

$$V^a := \xi^a, \quad S^{ab} := S_o^2 \left( \xi^{ab} - \frac{2}{\mu} r^{(a} \xi^{b)} + \frac{\nu}{\mu^2} \xi^a \xi^b + \frac{\nu}{\mu(d-1)} h^{ab} \right), \quad (\text{B.11})$$

$$V^a := r^a, \quad S^{ab} := S_o^3 \left( g^{ab} - \frac{d+1}{\mu} \xi^a \xi^b \right), \quad (\text{B.12})$$

donde  $r^a = \ell_a - \frac{\nu}{\mu} \xi_a$ ,  $h^a_b = \delta^a_b - \frac{1}{\mu} \xi^a \xi_b$  es el proyector a la superficies ortogonales a  $\xi^a$ , y ( $S_o^1$ ,  $S_o^2$ ,  $S_o^3$ ) son constantes a determinar.

Por último, encontramos útil renombrar a la parte sin traza que es completamente perpendicular a  $\xi^a$  como

$$\tilde{\tau}^{ab} := \xi^{ab} - \frac{2}{\mu} r^{(a} \xi^{b)} + \frac{\nu}{\mu^2} \xi^a \xi^b + \frac{\nu}{\mu(d-1)} h^{ab}, \quad (\text{B.13})$$

que de hecho coincide con (B.5), como se espera.

## B.2. Relaciones en el equilibrio

A continuación derivamos relaciones útiles que surgen al considerar la teoría de fluidos perfectos, es decir, sin considerar ningún efecto disipativo. Para el caso de fluidos conformes, las ecuaciones dinámicas están simplemente codificadas en la conservación del correspondiente tensor energía-momento del fluido, es decir

$$\nabla_a T^{ab} = 0. \quad (\text{B.14})$$

Al proyectar esta ecuación a lo largo de la 4-velocidad del fluido se tiene

$$\begin{aligned}\nabla_a u^a &= -\frac{d-1}{d} u^a \nabla_a \ln p \\ &= \frac{d-1}{2} u^a \nabla_a \ln(-\mu) .\end{aligned}\tag{B.15}$$

Por otra parte, si ahora proyectamos en el plano ortogonal a la 4-velocidad del fluido, se tiene

$$u^a = \frac{1}{2} D^b \ln(-\mu),\tag{B.16}$$

donde  $D_a := (\delta_a^b + u_a u^b) \nabla_b$ .

Tomando ahora la divergencia de (4.27) se obtiene

$$\begin{aligned}\nabla_a T_o^{ab} &= 2\chi_{\mu\mu}^o \left( g^{ab} - \frac{d}{\mu} \xi^a \xi^b \right) \nabla_a \mu - \frac{2d}{\mu} \chi_\mu \left( D\xi^b + \dot{\xi}^b - \frac{\dot{\mu}}{\mu} \xi^b \right) \\ &= \chi_\mu^o \frac{d}{\mu} \left[ \left( \frac{d+2}{\mu} \dot{\mu} - 2D \right) \xi^b - \nabla^b \mu - 2\dot{\xi}^b \right],\end{aligned}\tag{B.17}$$

donde se ha definido

$$D := \nabla_a \xi^a, \quad \dot{\mu} := \xi^a \nabla_a \mu, \quad \dot{\xi}^b := \xi^a \nabla_a \xi^b,\tag{B.18}$$

y de donde se sigue que

$$\xi^b \dot{\xi}_b = \frac{1}{2} \dot{\mu}.\tag{B.19}$$

Contrayendo (B.17) con  $\xi_b$ , se tiene

$$\begin{aligned}0 &= \xi_b \nabla_a T_o^{ab} \\ &= d\chi_\mu^o \left[ \frac{\dot{\mu}}{\mu} d - 2D \right],\end{aligned}$$

de donde

$$\frac{\dot{\mu}}{\mu} = \frac{2D}{d}.\tag{B.20}$$

Por último, reemplazando esta última expresión en la ecuación de conservación (B.17), se llega finalmente a

$$\begin{aligned}0 &= \nabla_a T_o^{ab} \\ &= \chi_\mu^o \frac{2d}{\mu} \left[ \frac{\dot{\mu}}{\mu} \xi^b - \frac{1}{2} \nabla^b \mu - \dot{\xi}^b \right],\end{aligned}\tag{B.21}$$

lo que implica

$$\dot{\xi}^b = \frac{\dot{\mu}}{\mu} \xi^b - \frac{1}{2} \nabla^b \mu.\tag{B.22}$$

# Apéndice C

## Detour por el fluido ideal: el rol de la ecuación de estado

En este apéndice consideramos el problema de la inversión para el caso particular de un fluido perfecto relativista en un espaciotiempo plano. La generalización de esta construcción a un espaciotiempo curvo resulta directa. Analizaremos dos casos: (i) una ecuación de estado conforme (radiación pura); y (ii) una ecuación de estado politrópica. Veremos que, incluso en este caso en el que fluido no disipa, no siempre es posible obtener una expresión algebraica explícita de las variables abstractas en términos de las conservativas. Sin embargo, al imponer una ecuación de estado de tipo conforme, tal inversión es posible, a diferencia de la teoría disipativa general, que discutimos detalladamente en el capítulo 6.

Consideramos entonces las ecuaciones que describen la evolución de un fluido perfecto relativista. Toda la dinámica está codificada en la conservación de la corriente de partículas y del tensor energía-momento:

$$\nabla_a N^a = 0 ; \tag{C.1}$$

$$\nabla_a T^{ab} = 0 ; \tag{C.2}$$

Asumiendo un fondo plano, las ecuaciones resultan

$$\partial_t N^o = -\partial_i N^i ; \tag{C.3}$$

$$\partial_t T^{oo} = -\partial_i T^{oi} ; \tag{C.4}$$

$$\partial_t T^{oi} = -\partial_j T^{ij} . \tag{C.5}$$

El sistema (C.3 - C.5) induce naturalmente las variables dinámicas a evolucionar: la densidad de energía  $T^{oo}$  y el 3-momento  $T^{oi}$ . Además, se trata de un sistema de leyes de conservación si se expresa la parte espacial de  $T^{ab}$  solo

en términos de las variables dinámicas; es decir, si una relación del tipo

$$T^{ij} = T^{ij}(T^{00}, T^{0k}) \quad (\text{C.6})$$

es posible.

En general, no es posible obtener analíticamente una expresión de este estilo, ya que para ello pueden ser necesario resolver ecuaciones trascendentes de algunas de las variables en términos de otras, lo que hace que resulte imposible escribir las soluciones algebraicamente. Este es el caso, por ejemplo, del sistema de fluido perfecto relativista con una ecuación de estado *politrópica*, como veremos más adelante. Sin embargo, si se supone una ecuación de estado de tipo conforme, esto puede hacerse para el fluido ideal.

Para ver esto, fijemos un vector temporal  $t^a$  tal que  $t^a t_a = -1$ , con superficies de simultaneidad espaciales etiquetadas por una función uniforme  $t$  como  $\{t = \text{const.}\}$  y describamos al fluido perfecto con respecto a ese sistema. Si  $u^a$  es la 4-velocidad normalizada del fluido, sabemos que podemos escribir su tensor de energía momento como

$$T^{ab} = (\rho + p)u^a u^b + p\eta^{ab}, \quad (\text{C.7})$$

con  $\eta_{ab}$  la métrica plana. Además, ambos sistemas  $t^a$  y  $u^a$  están relacionados por una transformación de Lorentz

$$u^a = \gamma(t^a + v^a),$$

donde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}$$

es el factor de Lorentz,  $t^a v_a = 0$  y  $v = \sqrt{\delta_{ij}v^i v^j}$  que satisface  $v < 1$  en todas partes debido al sistema de unidades elegido. También notamos directamente que  $u^a t_a = -\gamma$ .

## C.1. Radiación pura

En este caso, el número de partículas no es necesariamente conservado, de modo que las ecuaciones que gobiernan la dinámica son aquellas derivadas sólo de la conservación del tensor de energía – momento. La condición libre de traza  $T^a_a = 0$  proporciona la ecuación de estado

$$\rho = 3p. \quad (\text{C.8})$$

La densidad de energía medida por  $t^a$  es

$$T^{oo} = T^{ab}t_a t_b = \frac{\rho}{3} (4\gamma^2 - 1), \quad (\text{C.9})$$

donde hemos usado la ecuación de estado (C.8). El 3-momento medido por  $t^a$  es

$$\begin{aligned} T^{oi} &= (\rho + p)u^o u^i + p\eta^{oi} \\ &= -\frac{4}{3}\rho\gamma^2 v^i. \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

El cuadrado de su norma es

$$T^{oi}T^o{}_i = \frac{16}{9}\rho^2\gamma^2 (\gamma^2 - 1). \quad (\text{C.11})$$

Con las relaciones anteriores, podemos expresar la parte puramente espacial de  $T^{ij}$  como

$$T^{ij} = \frac{T^{oi}T^{oj}}{\frac{4}{3}\rho\gamma^2} - \frac{\rho}{3}\delta^{ij}$$

Además, es posible expresar  $\gamma^2$  y  $\rho$  en términos de variables dinámicas. A tal fin, resulta útil introducir la variable

$$z = \frac{T^{oi}T^o{}_i}{(T^{oo})^2}. \quad (\text{C.12})$$

Notamos que  $z > 0$ , y también  $z \leq 1$  como consecuencia directa de que  $v < 1$ :

$$\begin{aligned} (T^{oo})^2 &= \frac{\rho^2}{9} (16\gamma^4 - 8\gamma^2 + 1) \\ &> \frac{\rho^2}{9} (16\gamma^4 - 16\gamma^2 + 1) \\ &> \frac{16}{9}\rho^2\gamma^2 (\gamma^2 - 1) \\ &= T^{oi}T^o{}_i \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

Las ecuaciones (C.9) y (C.11) arrojan

$$\frac{z}{16} = \frac{\gamma^2 (\gamma^2 - 1)}{(4\gamma^2 - 1)^2}, \quad (\text{C.14})$$

de donde es posible resolver para  $\gamma$  en términos de las variables de conservación. De hecho, mediante la sustitución

$$u = \gamma^2,$$

la relación (C.14) resulta

$$(z - 1)u^2 - \frac{1}{2}(z - 2)u + \frac{z}{16} = 0,$$

obteniendo las soluciones

$$u_{\pm} = \frac{1}{4(z - 1)} \left[ z - 2 \pm \sqrt{z^2 - 7z + 8} \right].$$

Puede verse fácilmente que, para  $0 < z < 1$ , es  $u_+ < 0$  y  $0 < u_- < 1$ . Luego, la solución que tiene sentido físico es

$$u(z) = \frac{1}{4(z - 1)} \left[ z - \sqrt{z^2 - 7z + 8} - 2 \right],$$

y por lo tanto

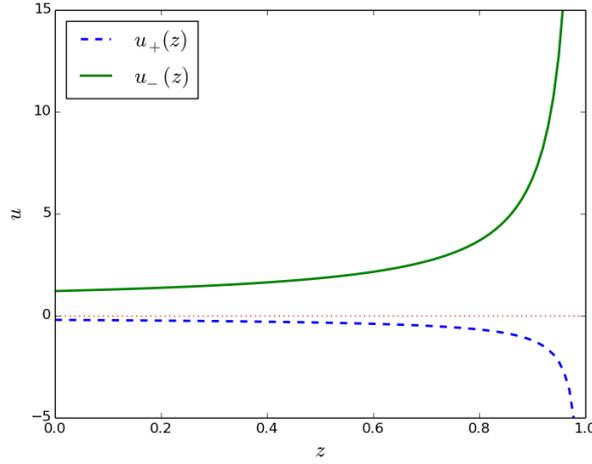


Figura C.1: Gráficos de  $u_+$  y  $u_-$  como función de  $z$ .

$$\gamma = \sqrt{u}, \quad \rho = \frac{3T^{oo}}{4u - 1}.$$

Finalmente, se tiene

$$\rho\gamma^2 = \left( 1 + \frac{1 - u}{4u - 1} \right) T^{oo}, \quad (\text{C.15})$$

mientras que la parte espacial de  $T^{ij}$  resulta

$$T^{ij} = \frac{T^{oi}T^{oj}}{\left( 1 + \frac{1 - u}{4u - 1} \right) T^{oo}} - \frac{T^{oo}}{4u - 1} \delta^{ij}.$$

Esto último permite escribir  $T^{ij}$  como un tensor que es sólo función de  $T^{oo}$  y  $T^{oi}$ , como es necesario para la implementación numérica.

## C.2. Fluido politrópico

Supongamos ahora un fluido con una ecuación de estado más general: la ecuación politrópica con índice  $\alpha$ :

$$p = K\rho^\alpha, \quad K, \alpha \in \mathbb{R}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Esta ecuación de estado resulta una aproximación útil para sistemas tipo esferas autogravitantes de plasma, tales como estrellas. A partir de ella, el tensor energía momento resulta

$$T^{ab} = \rho(1 + K\rho^{\alpha-1})u^a u^b + K\rho^\alpha \eta^{ab},$$

luego

$$T^{oo} = \gamma^2 \rho (1 + K\rho^{\alpha-1}) - K\rho^\alpha,$$

de donde se obtiene

$$\gamma^2 = \frac{T^{oo} + K\rho^\alpha}{\rho(1 + K\rho^{\alpha-1})}.$$

Por otra parte,

$$T^{oi} = -\rho(1 + K\rho^{\alpha-1})\gamma^2 v^i,$$

y su norma cuadrado es

$$T^{oi}T^o_i = \rho^2(1 + K\rho^{\alpha-1})^2\gamma^2(\gamma^2 - 1).$$

Reemplazando la relación para  $\gamma^2$  en la anterior, obtenemos una ecuación polinomial general de grado  $\alpha + 1$  para  $\rho$ , es decir

$$(T^{oo} - \rho)(T^{oo} + K\rho^\alpha) = T^{oi}T^o_i.$$

Vemos aquí que la solución sólo puede darse explícitamente para ciertos valores de  $\alpha$ . En general, es necesario un algoritmo numérico que la resuelva de manera iterativa, y con la aproximación de la solución a cada paso temporal, resolver para  $\gamma^2$ , y seguir el mismo procedimiento llevado a cabo en el caso conforme.

### C.2.1. Incluyendo una corriente conservada

Es posible implementar la conservación de una corriente  $J^a$  al sistema, por medio de la ecuación

$$\partial_a J^a = 0.$$

Una vez más, elegimos  $J^o$  como la variable dinámica, cuya evolución será gobernada por

$$\partial_t J^o = -\partial_i J^i.$$

Siguiendo una estrategia similar a la anterior, es preciso encontrar una expresión del tipo

$$J^i = J^i (J^o, T^{oo}, T^{oj}),$$

para obtener el sistema correcto. Suponiendo que la corriente está a lo largo de la 4-velocidad del fluido, obtenemos

$$J^a = j u^a = \gamma j (t^a + v^a),$$

lo que lleva a

$$J^o = -\gamma j,$$

y

$$J^i = \gamma j v^i = -J^o v^i.$$

Del análisis de  $T^{ab}$  realizado anteriormente, las ecuaciones (C.10) y (C.15) implican que

$$v^i = -\frac{3}{4} \frac{T^{0i}}{\rho \gamma^2},$$

donde el producto  $\rho \gamma^2$  estará dado explícitamente en el caso de radiación pura, o implícitamente en el caso politrópico. Por ejemplo, para el caso de radiación pura la expresión para  $J^i$  resulta

$$J^i = J^0 \frac{T^{0i}}{T^{00}} \left( 1 - \frac{1}{4u} \right),$$

usando las funciones encontradas anteriormente,  $u = u(z)$  y  $z$  dadas en (C.12).

### C.2.2. Implementación numérica en 1-D

Las ecuaciones en este caso resultan

$$\partial_t e = -\partial_x S$$

$$\partial_t S = -\partial_x f$$

donde  $e := T^{oo}$ ,  $S := T^{01}$  y  $f := T^{11}$ . Como se vio anteriormente, las variables conservativas en términos de la 3-velocidad del fluido son

$$e = \frac{\rho}{3} (4\gamma^2 - 1),$$

$$S = \frac{4}{3} \rho \gamma^2 v,$$

y

$$f = \frac{\rho}{3} (4\gamma^2 v^2 + 1).$$

Por lo tanto, es necesario expresar  $v$  en términos de  $e$  y  $S$ . La ecuación resulta

$$Sv^2 - 4ev + 3S = 0.$$

Es claro que  $v = 0$  sí y sólo sí  $S = 0$ . Si  $v \neq 0$ , la solución que cumple  $v < 1$  es

$$v = \frac{2e}{S} - \frac{e}{S} \sqrt{4 - 3\frac{S^2}{e^2}}.$$

Además, dado que

$$\begin{aligned} e^2 &= \frac{\rho^2}{9} (16\gamma^4 - 8\gamma^2 + 1) \\ &> \frac{\rho^2}{9} (16\gamma^4 - 16\gamma^2 + 1) \\ &> \frac{16}{9} \rho^2 \gamma^2 (\gamma^2 - 1) \\ &= S^2, \end{aligned} \tag{C.16}$$

la condición

$$\left| \frac{e}{S} \right| > 1$$

debe valer para todo tiempo. Por lo tanto, debemos tener cuidado al elegir los datos iniciales para evolucionar.

La densidad de energía puede expresarse como

$$\rho = \frac{3e}{4\gamma^2 - 1},$$

mientras que  $f$  resulta

$$f = e \frac{3v^2 + 1}{3 + v^2}.$$



# Apéndice D

## Método de Kurganov–Tadmor

En este apéndice damos una breve descripción del método de alta resolución de Kurganov-Tadmor empleado para la discretización espacial de las simulaciones numéricas llevadas a cabo a lo largo de la tesis. Este método permite simular ondas de choque con alta precisión.

Si bien existe una vasta cantidad de métodos que permiten captar soluciones discontinuas, muchos de ellos no resultan lo suficientemente precisos, introduciendo “difusiones” que de algún modo suavizan a la solución; en general, son los métodos de primer orden los que comparten dicha característica. Sin embargo, la solución no siempre radica en aumentar el orden de precisión del método. El método de Lax–Wendroff, por ejemplo, el cual es de orden 2 y resulta estable en cierto dominio numérico, produce oscilaciones numéricas que no son propias de la solución física.

El método de Kurganov-Tadmor [101] que implementamos en esta tesis resulta de interés pues combina la alta precisión requerida para simulaciones confiables, junto con un mecanismo que impide que las soluciones desarrollen las oscilaciones no deseadas. Este mecanismo se conoce como “limitador de pendiente” pues ayuda a limitar el gradiente alrededor de los choques, pidiendo que no se incremente la *variación total* de la solución

$$TV(u) := \sum_j |u_{j+1} - u_j| \quad (\text{D.1})$$

para tiempos subsiguientes. Otra propiedad interesante de este algoritmo es que sólo necesita máxima local de propagación, la cual está relacionada con el autovalor máximo de la parte principal del sistema:

$$a_{i+1/2}(t) := \max \left\{ \rho \left( \frac{\partial f}{\partial u} \left( u_{i+1/2}^+(t) \right) \right), \rho \left( \frac{\partial f}{\partial u} \left( u_{i+1/2}^-(t) \right) \right) \right\}, \quad (\text{D.2})$$

donde  $\rho(A) := \max_i |\lambda^i(A)|$  es el radio espectral, siendo  $\{\lambda^i(A)\}$  el conjunto de autovalores de  $A$ . Este esquema admite la forma conservativa

$$\frac{d}{dt}u_i(t) = -\frac{H_{i+1/2}(t) - H_{i-1/2}(t)}{dx}, \quad (\text{D.3})$$

donde  $H_{i+1/2}$  corresponde al flujo numérico

$$H_{i+1/2}(t) := \frac{f(u_{i+1/2}^+(t)) - f(u_{i+1/2}^-(t))}{dx} - \frac{a_{i+1/2}(t)}{2} \left[ u_{i+1/2}^+(t) - u_{i+1/2}^-(t) \right]. \quad (\text{D.4})$$

Aquí, los valores intermedios  $u_{i+1/2}^\pm(t)$  están dados por

$$u_{i+1/2}^+(t) := u_{i+1} - \frac{dx}{2}(u_x)_{i+1}(t), \quad u_{i+1/2}^-(t) := u_i + \frac{dx}{2}(u_x)_i(t). \quad (\text{D.5})$$

Es posible verificar que  $H_{i+1/2}(t) \equiv H(u_{i-1}(t), u_i(t), u_{i+1}(t), u_{i+2}(t))$ ; es decir, que la evolución de un paso temporal necesita dos puntos a ambos lados de  $u_i$ . El cálculo de las derivadas numéricas,  $(u_x)_i(t)$  se realiza componente a componente a partir de la fórmula

$$(u_x)_i^n := \text{minmod} \left( \theta \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{dx}, \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2dx}, \theta \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{dx} \right), \quad (\text{D.6})$$

con  $1 \leq \theta \leq 2$ , donde

$$\text{minmod}(x_1, x_2, \dots) = \begin{cases} \min_j \{x_j\}, & \text{si } x_j > 0, \forall j \\ \max_j \{x_j\}, & \text{si } x_j < 0, \forall j \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \quad (\text{D.7})$$

Este esquema genera menos viscosidad numérica que los esquemas usuales (Lax–Friedrichs, por ejemplo).

# Apéndice E

## Estimación de los coeficientes de transporte para la fuente disipativa

En este apéndice derivamos expresiones para las funciones libres  $\{\kappa, \lambda\}$  que aparecen en el desarrollo a primer orden de la fuente  $I^{ab}$  para la ecuación constitutiva

$$\nabla_a A^{abc} = I^{bc}. \quad (\text{E.1})$$

Las estimaciones se basan en los cálculos para la conductividad térmica  $K$  y la viscosidad de *shear*  $\eta$  empleando argumentos de teoría cinética en el límite ultra-relativista y la correspondencia *gauge*/gravedad (ver, por ejemplo, [77]).

A partir de dualidad *gauge*/gravedad, se tiene la relación universal

$$\frac{\eta}{s_o} = \frac{1}{4\pi}, \quad (\text{E.2})$$

donde  $s_o$  es la densidad de entropía del fluido en equilibrio. Esta relación se deriva a partir de la fórmula de Kubo, la cual permite expresar a la viscosidad de *shear* de la teoría dual con integrales de las funciones de correlación para el tensor energía-momento gravitacional (ver [104] ó el review reciente [105]).

Por otra parte, es posible estimar el cociente  $K/\eta$  en el límite ultra-relativista, realizando los cálculos para los coeficientes de conductividad térmica y viscosidad de *shear* de un gas de partículas con sección eficaz diferencial de esferas rígidas interactuantes. En el límite de altas temperaturas ó masa en reposo muy pequeña, se tiene la relación (ver sección 5.4 del Capítulo 5 de [106]).

$$\frac{K}{\eta} = \frac{5}{3T}, \quad (\text{E.3})$$

donde  $T$  denota la temperatura del sistema en equilibrio.

Estimaremos las funciones necesarias para la fuente de nuestra teoría a partir de las relaciones (E.2) y (E.3).

La forma más general para la fuente a primer orden (ver ec. (5.23) del capítulo 5) resulta crucial para obtener la Ley de Fourier para el flujo de calor  $q^a$ , dado en la ec. (5.27). Las funciones libres allí presentes se eligen positivas y con peso conforme tal que  $I_{ab}$  tenga peso  $\mathfrak{p}(I_{ab}) = 4$  (fijando la dimensión del espaciotiempo a  $d = 4$ ). La conductividad térmica  $K$  presente en la relación constitutiva (5.27) se relaciona con la función  $\kappa$  de la fuente por medio de la ec. (5.29). En 4 dimensiones, es

$$\kappa = \frac{K}{50 (\chi^1)^2}, \quad (\text{E.4})$$

donde  $\chi^1$  es la contribución a primer orden de la función generatriz de la teoría.

Por otra parte, la función  $\lambda$  de la fuente se relaciona con la viscosidad de shear a través de la identificación notada en la ec. (5.38):

$$\lambda = \frac{\eta}{2 (\chi^1)^2 \sqrt{-\mu}}. \quad (\text{E.5})$$

En cuatro dimensiones espaciotemporales, la densidad de entropía en equilibrio viene dada por

$$s_o = \frac{4}{3} \frac{\rho_o}{T}, \quad (\text{E.6})$$

tal como se obtuvo en (4.37). Luego, usando (E.6), (E.2), (E.5) y (E.3) se tiene

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{3T^2 K}{10 (\chi^1)^2} \\ &= \frac{T^2}{\pi} \frac{\chi^o}{(\chi^1)^2} \\ &= \frac{-\chi^o_o \mu^4}{\pi (\chi^1_o)^2}, \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

donde en la última igualdad se usaron las formas explícitas de las contribuciones a cero y primer orden de la teoría (ecs. (6.24)). Finalmente, a partir de (E.4), (E.3) y (E.5) se tiene

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\eta}{30T (\chi^1)^2} \\ &= \frac{\lambda}{15T^2} \\ &= \frac{\chi^o_o}{(\chi^1_o)^2} \frac{\mu^5}{15\pi}. \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

# Bibliografía

- [1] O. A. Reula and M. E. Rubio, “Ill posedness of force-free electrodynamics in Euler potentials,” *Phys. Rev.*, vol. D95, no. 6, p. 064005, 2017.
- [2] L. Lehner, O. A. Reula, and M. E. Rubio, “Hyperbolic theory of relativistic conformal dissipative fluids,” *Phys. Rev.*, vol. D97, no. 2, p. 024013, 2018.
- [3] M. E. Rubio and O. A. Reula, “Numerical implementation of the conformal dissipative relativistic fluid equations: the one-dimensional tube,” En redacción.
- [4] J. Hadamard, “Théorie des équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques et du problème de cauchy,” *Acta Math.*, vol. 31, pp. 333–380, 1908.
- [5] F. K. O., “Symmetric hyperbolic linear differential equations,” *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 7, no. 2, pp. 345–392.
- [6] K. O. Friedrichs and P. D. Lax, “Systems of conservation equations with a convex extension,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 68, no. 8, pp. 1686–1688, 1971.
- [7] K. O. Friedrichs, “Symmetric hyperbolic linear differential equations,” *Communications on pure and applied Mathematics*, vol. 7, no. 2, pp. 345–392, 1954.
- [8] K. Heinz-Otto, “Initial boundary value problems for hyperbolic systems,” *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 23, no. 3, pp. 277–298.
- [9] R. P. Geroch, “Partial differential equations of physics,” in *General relativity. Proceedings, 46th Scottish Universities Summer School in Physics, NATO Advanced Study Institute, Aberdeen, UK, July 16-29, 1995*, 1996.

- [10] R. Beck, A. Brandenburg, D. Moss, A. Shukurov, and D. Sokoloff, “Galactic magnetism: Recent developments and perspectives,” *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, vol. 34, no. 1, pp. 155–206, 1996.
- [11] C. Caprini, R. Durrer, and E. Fenu, “Can the observed large scale magnetic fields be seeded by helical primordial fields?,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2009, pp. 001–001, nov 2009.
- [12] L. M. Widrow, “Origin of galactic and extragalactic magnetic fields,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 74, pp. 775–823, Jul 2002.
- [13] H. Hanayama, K. Takahashi, K. Kotake, M. Oguri, K. Ichiki, and H. Ohno, “Biermann mechanism in primordial supernova remnant and seed magnetic fields,” *The Astrophysical Journal*, vol. 633, pp. 941–945, nov 2005.
- [14] B. Mongwane, P. K. S. Dunsby, and B. Osano, “Cosmic Electromagnetic Fields due to Perturbations in the Gravitational Field,” *Phys. Rev.*, vol. D86, p. 083533, 2012.
- [15] R. Taussig and M. Lighthill, “Shock wave production of relativistic plasmas,” *From international symposium on dynamics of ionized gases; Tokyo, Japan (13 Sep. 1971)*, 1 1973.
- [16] A. Tchekhovskoy, J. C. McKinney, and R. Narayan, “Simulations of ultrarelativistic magnetodynamic jets from gamma-ray burst engines,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 388, pp. 551–572, 07 2008.
- [17] R. D. Blandford, J. C. McKinney, and A. Tchekhovskoy, “General relativistic magnetohydrodynamic simulations of magnetically choked accretion flows around black holes,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 423, pp. 3083–3117, 07 2012.
- [18] R. Clare and D. Strottman, “Relativistic hydrodynamics and heavy ion reactions,” *Physics Reports*, vol. 141, no. 4, pp. 177 – 280, 1986.
- [19] H. Kreiss and J. Lorenz, *Initial-Boundary Value Problems and the Navier-Stokes Equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2004.
- [20] Y. Fournes-Bruhat, “Theoreme d’existence pour certains systemes derivees partielles non lineaires,” *Acta Mat.*, vol. 88, pp. 141–225, 1952.

- 
- [21] H.-O. Kreiss and O. E. Ortiz, *Some Mathematical and Numerical Questions Connected with First and Second Order Time-Dependent Systems of Partial Differential Equations*, pp. 359–370. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2002.
- [22] O. A. Reula, “Hyperbolic methods for einstein’s equations,” *Living Reviews in Relativity*, vol. 1, p. 3, Jan 1998.
- [23] O. A. Reula, “Strongly hyperbolic systems in general relativity,” *Journal of Hyperbolic Differential Equations*, vol. 01, no. 02, pp. 251–269, 2004.
- [24] M. Alcubierre, “Introduction to 3+1 Numerical Relativity,” *Series: International Series of Monographs on Physics*, p. ISBN: 9780199205677, April 2008.
- [25] M. E. Taylor, “Pseudodifferential operators,” in *Partial Differential Equations II*, pp. 1–73, Springer, 1996.
- [26] R. Geroch, “Partial differential equations of physics,” *General Relativity, Aberdeen, Scotland*, pp. 19–60, 1996.
- [27] G. Strang, “Necessary and insufficient conditions for well-posed cauchy problems,” *Journal of Differential Equations*, vol. 2, no. 1, pp. 107–114, 1966.
- [28] M. I. Sobel, P. J. Siemens, J. P. Bondorf, and H. Bethe, “Shock waves in colliding nuclei,” *Nuclear Physics A*, vol. 251, no. 3, pp. 502 – 529, 1975.
- [29] P. Lax, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves*. No. n.º 11-16 in CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1973.
- [30] S. E. Gralla and T. Jacobson, “Spacetime approach to force-free magnetospheres,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 445, no. 3, pp. 2500–2534, 2014.
- [31] T. Uchida, “Theory of force-free electromagnetic fields. i. general theory,” *Physical Review E*, vol. 56, no. 2, p. 2181, 1997.
- [32] T. Uchida, “Theory of force-free electromagnetic fields. ii. configuration with symmetry,” *Physical Review E*, vol. 56, no. 2, p. 2198, 1997.
- [33] D. P. Stern, “Euler potentials,” *American Journal of Physics*, vol. 38, no. 4, pp. 494–501, 1970.

- [34] A. Brandenburg, “Magnetic field evolution in simulations with euler potentials,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 401, no. 1, pp. 347–354, 2010.
- [35] Z. Sorin, “Improved euler potential method for three-dimensional magnetospheric equilibrium,” *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, vol. 113, no. A8.
- [36] B. Osano, “Dynamo theory, nonlinear magnetic fields, and the euler potentials,” *Advances in Astronomy*, vol. 2018, Jun 2018.
- [37] S. S. Komissarov, “Time-dependent, force-free, degenerate electrodynamics,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 336, no. 3, pp. 759–766, 2002.
- [38] H. P. Pfeiffer and A. I. MacFadyen, “Hyperbolicity of Force-Free Electrodynamics,” 2013.
- [39] F. L. Carrasco and O. A. Reula, “Covariant hyperbolization of force-free electrodynamics,” *Phys. Rev. D*, vol. 93, p. 085013, Apr 2016.
- [40] F. Abalos, F. Carrasco, E. Goulart, and O. Reula, “Nonlinear electrodynamics as a symmetric hyperbolic system,” *Phys. Rev. D*, vol. 92, p. 084024, Oct 2015.
- [41] F. L. Carrasco and O. A. Reula, “Novel scheme for simulating the force-free equations: Boundary conditions and the evolution of solutions towards stationarity,” *Phys. Rev. D*, vol. 96, p. 063006, Sep 2017.
- [42] F. Carrasco, C. Palenzuela, and O. Reula, “Pulsar magnetospheres in general relativity,” *Phys. Rev. D*, vol. 98, p. 023010, Jul 2018.
- [43] A. Anile, *Relativistic Fluids and Magneto-fluids: With Applications in Astrophysics and Plasma Physics*. Cambridge monographs on mathematical physics, Cambridge University Press, 1989.
- [44] R. Penrose and W. Rindler, *Spinors and Space-Time: Volume 1, Two-Spinor Calculus and Relativistic Fields*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1987.
- [45] B. Carter *General Relativity: An Einstein Centenary Survey*, vol. S. W. Hawking and W. Israel, Cambridge University Press, Cambridge, 1979.
- [46] S. Frittelli and R. Gomez, “Ill-posedness in the einstein equations,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 41, no. 8, pp. 5535–5549, 2000.

- 
- [47] K. S. Thorne and D. Macdonald, “Electrodynamics in curved spacetime: 3+ 1 formulation,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 198, no. 2, pp. 339–343, 1982.
- [48] J. Smoller, *Shock waves and reaction-diffusion equations*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, 1983.
- [49] R. Geroch and L. Lindblom, “Dissipative relativistic fluid theories of divergence type,” *Physical Review D*, vol. 41, no. 6, p. 1855, 1990.
- [50] S. Pennisi, “Some considerations on a non linear approach to extended thermodynamics,” *Symposium of Kinetic Theory and Extended Thermodynamics*, Bologna, 1987.
- [51] K. A. Van Riper, “General relativistic hydrodynamics and the adiabatic collapse of stellar cores,” *Astrophysical Journal, Part 1*, vol. 232, p. 558–571, 1979.
- [52] Y. B. Zel’dovich and I. D. Novikov, “Relativistic astrophysics,” vol. 1. *Stars and Relativity*, Chicago: The University of Chicago Press, 1971.
- [53] P. J. E. Peebles, “The large-scale structure of the universe,” *Princeton, N.J.: Princeton University Press.*, 1980.
- [54] H. W. Barz, L. P. Csernai, B. Kampfer, and B. Lukács, “Stability of detonation fronts leading to quark-gluon plasma,” *Phys. Rev. D*, vol. 32, pp. 115–122, Jul 1985.
- [55] A. Jaiswal and V. Roy, “Relativistic hydrodynamics in heavy-ion collisions: General aspects and recent developments,” *Advances in High Energy Physics*, vol. 2016, Article ID 9623034, 39 pages, doi:10.1155/2016/9623034, 2016.
- [56] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*. Cambridge University Press, 2005.
- [57] A. Lichnerowicz, “Théorèmes d’existence et d’unicité pour un fluide thermodynamique relativiste,” *C. R. Acad. Sci. Paris 260 (1965) 3291-3295*, 1965.
- [58] A. Lichnerowicz, “Etude mathématique des fluides thermodynamiques relativistes,” *Comm. Math. Phys. 1 (1966) 328-373*, 1966.
- [59] B. Betz, D. Henkel, and D. H. Rischke, “Complete second-order dissipative fluid dynamics,” *J. Phys.*, vol. G36, p. 064029, 2009.

- [60] P. Van and T. S. Biro, “First order and stable relativistic dissipative hydrodynamics,” *Phys. Lett.*, vol. B709, pp. 106–110, 2012.
- [61] E. Calzetta and J. Peralta-Ramos, “Linking the hydrodynamic and kinetic description of a dissipative relativistic conformal theory,” *Physical Review D*, vol. 82, no. 10, p. 106003, 2010.
- [62] G. S. Denicol, T. Koide, and D. H. Rischke, “Dissipative relativistic fluid dynamics: A new way to derive the equations of motion from kinetic theory,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 105, p. 162501, Oct 2010.
- [63] G. B. Nagy and O. A. Reula, “On the causality of a dilute gas as a dissipative relativistic fluid theory of divergence type,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 28, no. 23, p. 6943, 1995.
- [64] R. Geroch and L. Lindblom, “Causal theories of dissipative relativistic fluids,” *Annals of Physics*, vol. 207, no. 2, pp. 394–416, 1991.
- [65] W. A. Hiscock and L. Lindblom, “Generic instabilities in first-order dissipative relativistic fluid theories,” *Phys. Rev.*, vol. D31, pp. 725–733, 1985.
- [66] G. B. Nagy, O. E. Ortiz, and O. A. Reula, “Exponential decay rates in quasi-linear hyperbolic heat conduction,” *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, vol. 22, no. 3, pp. 248–259, 1997.
- [67] H.-O. Kreiss, G. B. Nagy, O. E. Ortiz, and O. A. Reula, “Global existence and exponential decay for hyperbolic dissipative relativistic fluid theories,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 38, no. 10, pp. 5272–5279, 1997.
- [68] C. Eckart, “The thermodynamics of irreversible processes. iii. relativistic theory of the simple fluid,” *Phys. Rev.*, vol. 58, pp. 919–924, Nov 1940.
- [69] L. Landau and E. Lifshitz, *Fluid Mechanics*. No. v. 6, Elsevier Science, 2013.
- [70] M. Martinez, M. McNelis, and U. Heinz, “Anisotropic fluid dynamics for gubser flow,” *Phys. Rev. C*, vol. 95, p. 054907, May 2017.
- [71] G. Denicol and H. Niemi, “Derivation of transient relativistic fluid dynamics from the boltzmann equation for a multi-component system,” *Nuclear Physics A*, vol. 904-905, no. Supplement C, pp. 369c – 372c, 2013. The Quark Matter 2012.

- 
- [72] I.-S. Liu, I. Müller, and T. Ruggeri, “Relativistic thermodynamics of gases,” *Annals of Physics*, vol. 169, no. 1, pp. 191–219, 1986.
- [73] I. Müller and T. Ruggeri, *Extended thermodynamics*, vol. 37. Springer Science & Business Media, 2013.
- [74] R. Geroch, “Relativistic theories of dissipative fluids,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 36, no. 8, pp. 4226–4241, 1995.
- [75] O. A. Reula and G. B. Nagy, “A causal statistical family of dissipative divergence-type fluids,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 30, no. 5, p. 1695, 1997.
- [76] M. Aguilar and E. Calzetta, “Causal relativistic hydrodynamics of conformal fermi-dirac gases,” *Phys. Rev. D*, vol. 95, p. 076022, Apr 2017.
- [77] S. Bhattacharyya, S. Minwalla, V. E. Hubeny, and M. Rangamani, “Non-linear fluid dynamics from gravity,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2008, no. 02, p. 045, 2008.
- [78] G. Boffetta and R. E. Ecke, “Two-dimensional turbulence,” *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 44, no. 1, pp. 427–451, 2012.
- [79] S. Bhattacharyya, R. Loganayagam, I. Mandal, S. Minwalla, and A. Sharma, “Conformal Nonlinear Fluid Dynamics from Gravity in Arbitrary Dimensions,” *JHEP*, vol. 12, p. 116, 2008.
- [80] M. Rangamani, “Gravity and Hydrodynamics: Lectures on the fluid-gravity correspondence,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 26, p. 224003, 2009.
- [81] N. Ambrosetti, J. Charbonneau, and S. Weinfurtner, “The Fluid/gravity correspondence: Lectures notes from the 2008 Summer School on Particles, Fields, and Strings,” in *6th Summer School on Particles, Fields and Strings Vancouver, British Columbia, Canada, July 22-August 1, 2008*, 2008.
- [82] I. Bredberg, C. Keeler, V. Lysov, and A. Strominger, “From navier-stokes to einstein,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2012, p. 146, Jul 2012.
- [83] R. Loganayagam, “Entropy current in conformal hydrodynamics,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2008, no. 05, p. 087, 2008.
- [84] R. Geroch, “On hyperbolic theories of relativistic dissipative fluids,” *arXiv preprint gr-qc/0103112*, 2001.

- [85] E. Calzetta, “Relativistic fluctuating hydrodynamics,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 15, no. 3, p. 653, 1998.
- [86] L. Rezzolla and O. Zanotti, *Relativistic Hydrodynamics*. OUP Oxford, 2013.
- [87] J. Peralta-Ramos and E. Calzetta, “Divergence-type nonlinear conformal hydrodynamics,” *Phys. Rev. D*, vol. 80, p. 126002, Dec 2009.
- [88] E. Calzetta, “Hydrodynamic approach to boost invariant free streaming,” *Phys. Rev. D*, vol. 92, p. 045035, Aug 2015.
- [89] R. Baierlein, “The elusive chemical potential,” *American Journal of Physics*, vol. 69, no. 4, pp. 423–434, 2001.
- [90] R. Wald, *General Relativity*. University of Chicago Press, 2010.
- [91] R. Tolman and P. Ehrenfest, “Temperature Equilibrium in a Static Gravitational Field,” *Phys. Rev.*, vol. 36, no. 12, pp. 1791–1798, 1930.
- [92] M. Smerlak, “On the inertia of heat,” *The European Physical Journal Plus*, vol. 127, p. 72, Jul 2012.
- [93] H. Kreiss and J. Lorenz, *Initial-Boundary Value Problems and the Navier-Stokes Equation*. Classics in Applied Mathematics, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2004.
- [94] W. A. Hiscock and L. Lindblom, “Stability and causality in dissipative relativistic fluids,” *Annals of Physics*, vol. 151, no. 2, pp. 466–496, 1983.
- [95] R. Baier, P. Romatschke, D. T. Son, A. O. Starinets, and M. A. Stephanov, “Relativistic viscous hydrodynamics, conformal invariance, and holography,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2008, no. 04, p. 100, 2008.
- [96] P. Romatschke, “Relativistic viscous fluid dynamics and non-equilibrium entropy,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 27, no. 2, p. 025006, 2010.
- [97] S. Pu, T. Koide, and D. H. Rischke, “Does stability of relativistic dissipative fluid dynamics imply causality?,” *Phys. Rev. D*, vol. 81, p. 114039, Jun 2010.
- [98] G. S. Denicol, T. Kodama, T. Koide, and P. Mota, “Stability and causality in relativistic dissipative hydrodynamics,” *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, vol. 35, no. 11, p. 115102, 2008.

- 
- [99] O. E. Ortiz, “Stability of nonconservative hyperbolic systems and relativistic dissipative fluids,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 42, no. 3, pp. 1426–1442, 2001.
- [100] F. S. Bemfica, M. M. Disconzi, and J. Noronha, “Causality and existence of solutions of relativistic viscous fluid dynamics with gravity,” *Phys. Rev. D*, vol. 98, p. 104064, Nov 2018.
- [101] A. Kurganov and E. Tadmor, “New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection–diffusion equations,” *Journal of Computational Physics*, vol. 160, no. 1, pp. 241 – 282, 2000.
- [102] W. Israel and J. M. Stewart, “Transient relativistic thermodynamics and kinetic theory,” *Annals Phys.*, vol. 118, pp. 341–372, 1979.
- [103] P. D. Lax, “Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation,” *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 7, no. 1, pp. 159–193, 1954.
- [104] G. Policastro, D. T. Son, and A. O. Starinets, “Shear viscosity of strongly coupled  $n = 4$  supersymmetric yang-mills plasma,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 87, p. 081601, Aug 2001.
- [105] P. Romatschke and U. Romatschke, “Relativistic Fluid Dynamics In and Out of Equilibrium – Ten Years of Progress in Theory and Numerical Simulations of Nuclear Collisions,” 2017.
- [106] C. Cercignani and G. M. Kremer, *The Relativistic Boltzmann Equation: Theory and Applications*. No. PMP, volume 22 in Progress in Mathematical Physics book series, Birkhäuser, Basel, 2002.