UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

Trabajo Especial de la Licenciatura en Matemática

Propiedades analíticas y estructurales de polinomios ortogonales matriciales.

Lucía Morey

Director: Pablo Román

Córdoba, Argentina. Marzo 2019

Clasificación

42C05: Orthogonal functions and polynomials, general theory.
33C45: Orthogonal polynomials and functions of hypergeometric type.
33C47: Other special orthogonal polynomials and functions.
33E30: Other functions coming from differential, difference and integral equations.

Pablabras claves

Polinomios ortogonales matriciales, Ecuación de Pearson, Fórmula de Rodrigues, medidas discretas, fórmula de estructura.

Keywords

Matrix valued orthogonal polynomials, Pearson equation, Rodrigues formula, discrete measures, structure formula.

Resumen

La teoría de polinomios ortogonales matriciales fue introducida por Krein en la década de 1940 y, desde entonces, ha sido estudiada en distintos contextos. Desde un punto de vista analítico, en los últimos años se ha hecho un gran esfuerzo en encontrar clases de polinomios ortogonales matriciales con propiedades similares a las de Familias Clásicas. En este trabajo, a partir de una ecuación matricial de Pearson discreta, encontramos condiciones generales para la existencia de lowering y raising operators para polinomios matriciales ortogonales con respecto a una medida discreta. En particular, estos operadores permiten obtener de forma natural una fórmula de Rodrigues matricial y un operador en diferencias de segundo orden que tiene a los polinomios ortogonales como autofunciones. Además, damos una familia matricial de tipo Charlier de dimensión arbitraria que satisface la ecuación de Pearson discreta.

Abstract

The theory of matrix-valued orthogonal polynomials was introduced by Krein in the 1940's and, since then, has been studied in different contexts. From an analytical point of view, in the last few years there was an effort to find families of matrix-valued orthogonal polynomials that satisfy similar properties as the Classical Families. In this work, starting from a discrete Pearson equation, we find general conditions for the existence of lowering and raising operators for matrix-valued orthogonal polynomials with respect to a discrete measure. In particular we use these operators to obtain, in a natural way, a Rodrigues formula and a second order difference operator having the orthogonal polynomials as eigenfunctions. Moreover, we find a family of matrix-valued Charlier-type polynomials which satisfies the discrete Pearson equation.

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a la Universidad Nacional de Córdoba por darme la posibilidad de formarme en un ámbito gratuito, público y laico. A los docentes de la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación, en quienes reconozco excelencia académica y humana.

En especial agradecer a mi director, Profesor Pablo Román, por sus enseñanzas, por acercarme con entusiasmo y de manera placentera al mundo de la investigación científica, por su compromiso, contención y dedicación.

También al Profesor Erik Koelink quien, durante su visita académica a nuestra Facultad durante el mes de Octubre del 2018, hizo importantes aportes a este trabajo y junto con el Profesor Pablo Román generosamente me abren un camino de formación profesional.

Finalmente, agradecer a mis familiares Hugo, Isabel, Clara y Julia por brindarme su apoyo y acompañamiento a lo largo de estos años.

Índice general

CAPÍTULO 1

Introducción

La teoría de polinomios ortogonales tiene sus orígenes en los trabajos de A. M. Legendre a principios del siglo XIX, quien estudió la familia de polinomios p_n que surge de la función generatriz

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x)t^n.$$

A finales del siglo XIX, a partir de los trabajos de P.L. Chebyshev, A.A. Markov y T.J Stieltjes se formalizó la noción general de polinomios ortogonales. Esta teoría tuvo un gran desarrollo en la primera mitad del siglo XX impulsado por una gran catidad de aplicaciones a distintas áreas de la física y de la matemática.

Debido a su frecuente aparición en problemas de física y matemática aplicada, las familias de polinomios ortogonales asociados a los nombres Hermite, Laguerre y Jacobi son sin lugar a duda las más estudiadas y las de mayor importancia. A estas familias se las conoce como Familias de polinomios ortogonales Clásicos. A lo largo de los años, se han podido probar muchas propiedades y caracterizaciones de estas familias. En 1929 [4], S. Bochner probó que estas familias son las únicas familias de polinomios ortogonales con respecto a una medida de Borel positiva que son soluciones de una ecuación diferencial de la forma

$$f_2(x)y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_0(x)y(x) = \lambda\, y(x), \tag{1.0.1}$$

donde f_2, f_1, f_0 son funciones y λ es un número complejo.

A partir de las expresiones explícitas de los polinomios pertenecientes a las Familias Clásicas, es sencillo verificar que las derivadas de estos polinomios forman una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a un peso positivo. Asi, por ejemplo, la derivada de un polinomio de Hermite es un múltiplo de un polinomio de Hermite, y las derivadas de los polinomios de Laguerre y Jacobi son un múltiplo de polinomios de Laguerre y Jacobi con un parámetro distinto. En 1935, W. Hahn [18] probó que toda sucesión de polinomios ortogonales cuya sucesión de derivadas es ortogonal con respecto a un peso positivo satisface una ecuación de la forma (1.0.1) y, por lo tanto, debe ser una de las Familias Clásicas.

Otra caracterización importante para nuestro trabajo fue dada por W. A. Al-Salam y T. S. Chihara en 1972. En [1] se demuestra que las Familias Clásicas son las únicas que satisfacen una fórmula de estructura de la forma

$$\pi(x)p_n'(x) = (\alpha_n x + \beta_n)p_n(x) + \gamma_n p_{n-1}(x), \tag{1.0.2}$$

donde $\pi(x)$ es un polinomio fijo.

Otras caracterizaciones importantes de las Familias Clásicas son que satisfacen una fórmula de Rodrigues y que los pesos asociados satisfacen una ecuación de Pearson, ver la Sección 2.3.3. En resumen, las Familias Clásicas están caracterizadas por las siguientes propiedades:

1. Teorema de Bochner: Son soluciones de una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes polinomiales.

2. Teorema de Hanh: Sus derivadas forman una sucesión de polinomios ortogonales.

3. Pueden ser expresados mediante una fórmula de Rodrigues.

4. Los pesos asociados a ellas satisfacen una ecuación de Pearson.

5. Verifican una fórmula de estructura.

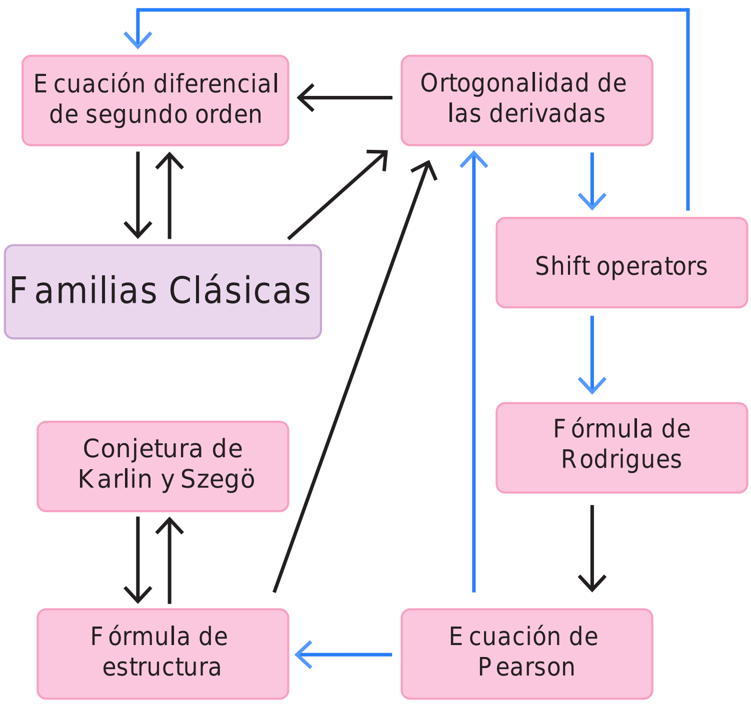

Figura 1.1: Caracterizaciones de las Familias Clásicas.

En el Capítulo 2 estudiamos estas caracterizaciones y vemos que son todas equivalentes entre sí. En la Figura 1.1 mostramos las implicaciones entre las diversas propiedades que son desarrolladas en ese capítulo. Es importante resaltar que este es simplemente un camino para probar la equivalencia entre las distintas clasificaciones de la Familias Clásicas y que pueden existir otros. Las flechas que se indican en color celeste muestran el camino que generalizamos en los otros casos estudiados.

Es natural complementar esta clasificación con familias de polinomios ortogonales que satisfacen una ecuación en diferencias de segundo orden. Así, en [17] se prueba que las familias de Hahn, Krawtouck, Meixner, Charlier están caracterizadas por las siguientes propiedades:

1. Son soluciones de una ecuación en diferencias de segundo orden.
2. Sus diferencias $\Delta p_n(x) = p_n(x+1) - p_n(x)$ forman una sucesión de polinomios ortogonales.
3. Pueden ser expresados mediante una fórmula de Rodrigues discreta.
4. Los pesos asociados a ellos satisfacen una ecuación del tipo Pearson discreta.
5. Verifican una fórmula de estructura.

En este trabajo estudiamos con especial atención las familias de Meixner y Charlier.

Las funciones a valores vectoriales y matriciales se han estudiado en distintos contextos. En particular, los polinomios ortogonales matriciales fueron introducidos por Krein en la década de 1940 en el marco de la teoría espectral de operadores diferenciales, ver por ejemplo la extensa lista de referencias en [8]. Existen diversas formas de abordar la teoría de polinomios ortogonales matriciales. En particular, uno puede preguntarse si es posible encontrar una definición adecuada para las Familias Clásicas de polinomios ortogonales matriciales. En esta dirección A. Durán planteó en [10] el problema de encontrar pesos matriciales tales que las sucesiones de polinomios ortogonales asociadas sean soluciones de una ecuación de la forma (1.0.1) donde los coeficientes f_2, f_1 y f_0 son ahora polinomios matriciales. El problema de caracterizar todas las familias de polinomios ortogonales matriciales que satisfacen una ecuación diferencial de segundo orden parece no tener una respuesta sencilla como en el Teorema de Bochner. Durante los últimos años se han hecho esfuerzos para determinar familias de polinomios ortogonales que, además de satisfacer una ecuación diferencial, verifiquen algunas de las propiedades que caracterizan a las Familias Clásicas. En esta línea, Cantero, Moral y Velazquez estudiaron cuándo las derivadas de una familia de polinomios ortogonales son también ortogonales [6], [5] y Durán encontró fórmulas de Rodrigues para distintas familias de polinomios ortogonales matriciales [12], [13], [14], [16]. Recientemente, el estudio de *shift operators* para los polinomios ortogonales ha dado una nueva herramienta para obtener resultados analíticos de las familias involucradas [25], [27], [21]. En el caso de ortogonalidad matricial discreta, A. Durán y colaboradores estudiaron familias de polinomios ortogonales matriciales que satisfacen ecuaciones en diferencias de segundo orden [15], [16].

El objetivo de este trabajo es dar un análogo de los resultados obtenidos en [6], [5], [25], [27], [21], [26] para el caso de polinomios ortogonales con respecto a una medida de ortogonalidad matricial discreta. En particular introducimos una nueva familia de polinomios ortogonales matriciales de tipo Charlier que extiende la familia estudiada por Durán y colaboradores en [15].

Este trabajo está organizado de la siguiente forma:

En el Capítulo 2, desarrollamos la teoría general de polinomios ortogonales: su definición, condiciones para la existencia de sucesiones de polinomios ortogonales $\{p_n\}$, relación de recurrencia de tres términos y la identidad de Christoffel-Darboux. Sumado a esto, estudiamos las caracterizaciones de las Familias Clásicas, viendo con especial antención cuales de estas propiedades pueden ser derivadas de una ecuación de Pearson. Por otro lado, estudiamos polinomios asociados a pesos con soporte discreto infinito y siguiendo el mismo camino que para las Familias Clásicas, logramos deducir las propiedades que satisfacen las familias de polinomios ortogonales asociadas a pesos discretos que pueden ser deducidas de una Ecuación de tipo Pearson. Consideramos que este es un buen momento para advertir al lector que muchas demostraciones desarrolladas en este capítulo se generalizarán luego a lo largo de los capítulos 3, 4 y 5, siendo las realizadas en este capítulo el caso $N = 1$. Los resultados para polinomios ortogonales discretos obtenidos en este capítulo son conocidos, ver por ejemplo [17]. Sin embargo, la línea de la demostración, equivalente a las líneas celestes de la Figura 1.1, no es la que aparece en la literatura clásica y ha sido desarrollada en este trabajo para facilitar su generalización al contexto matricial.

Este trabajo se centra en el estudio de polinomios ortogonales matriciales. En el Capítulo 3 introducimos la noción de polinomios ortogonales matriciales y damos condiciones para la existencia de una sucesión de polinomios ortogonales $\{P_n\}$, así como también demostramos la relación de recurrencia de tres términos matricial y la identidad de Christoffel-Darboux matricial.

En el Capítulo 4 damos condiciones para la existencia de una ecuación de Pearson matricial para pesos matriciales soportados en un intervalo (a, b) y así poder demostrar la ortogonalidad de la sucesión de derivadas $\frac{d}{dx}P_n$. De la ecuación de Pearson se obtiene un *lowering operator* que lleva polinomios de grado n en polinomios de grado $n-1$, mientras que su adjunto con respecto al producto interno matricial induce un *rasing operator* que incrementa en uno el grado. Llamaremos a estos operadores *shift operators*. El *lowering operator* obtenido permite deducir una de Rodrigues. Por otro lado, tomando la composición de estos dos operadores, podemos obtener un operador diferencial de segundo orden que tiene a los polinomios ortogonales como autofunciones. Sumado a esto, deducimos a partir de la ecuación de Pearson matricial una fórmula de estructura matricial. Gran parte de los resultados de este capítulo están basados en los trabajos [6], [5], [25], [27], [21]. La fórmula de estructura, hasta donde sabemos, no aparece en la literatura.

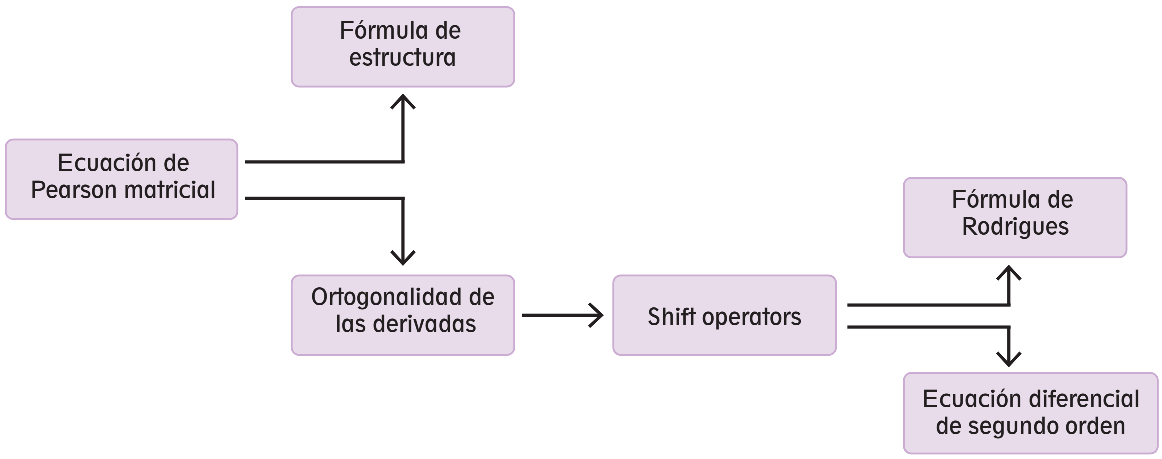

Figura 1.2: Esta figura ilustra el camino desarrollado a lo largo del Capítulo 4. Las flechas se corresponden con las flechas celestes de la Figura 1.1.

En el Capítulo 5 nos centramos en el estudio de polinomios ortogonales matriciales asociados a pesos con soporte en $\mathbb{N}_0$. Como antes, damos condiciones para la existencia de una Ecuación del tipo Pearson matricial y así poder demostrar la ortogonalidad de la sucesión de diferencias ΔP_n donde $\Delta P_n(x) = P_n(x+1) - P_n(x)$, y obtener, al igual que en el Capítulo 4, *shift operators*: un *lowering operator* que reduce en uno el grado de los polinomios, y un *rasing operator* que lo incrementa en uno. Este último permite deducir una fórmula de Rodrigues. Por otro lado, tomando la composición de los *shift operators*, podemos obtener un operador en diferencias de segundo orden que tiene a los polinomios ortogonales como autofunciones. Sumado a esto, deducimos a partir de la ecuación de Pearson matricial una fórmula de estructura matricial. Los resultados de este capítulo son nuevos y conforman una versión discreta de la teoría desarrollada en el Capítulo 4, ver también [6], [5], [25], [27], [21].

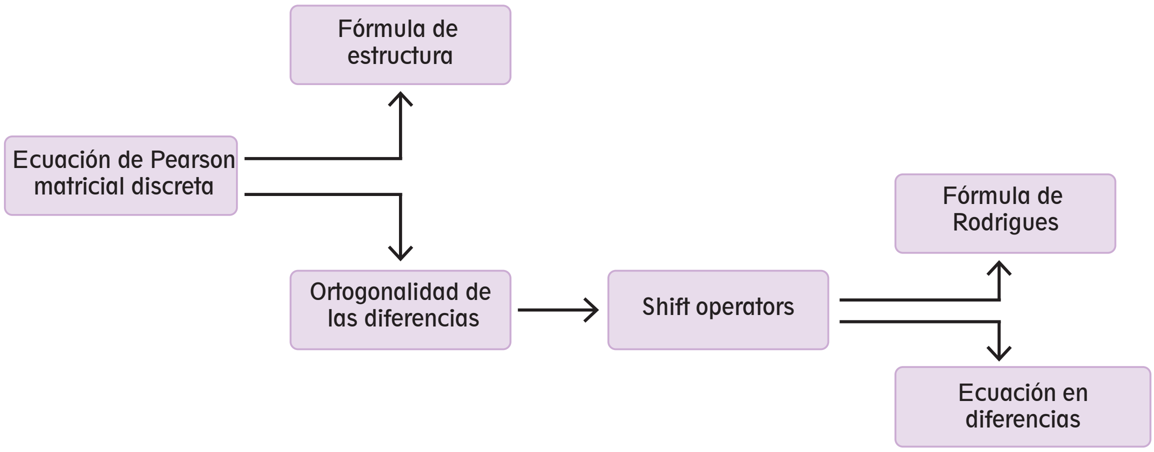

Figura 1.3: Esta figura ilustra el camino desarrollado a lo largo del Capítulo 5. Las flechas se corresponden con las flechas celestes de la Figura 1.1

En el Capítulo 6 construimos una familia del tipo Charlier cuyo peso satisface una ecuación del tipo Pearson matricial. A partir de ella, utilizando la teoría desarrollada en el Capítulo 5, demostramos la ortogonalidad de la sucesión de diferencias ΔP_n, construimos *shift operators* que permitan dar una fórmula de Rodrigues y un operador en diferencias de segundo orden que tenga a los polinomios construidos como autofunciones y obtenemos una fórmula de estructura.

CAPÍTULO 2

Polinomios Ortogonales

En este capítulo desarrollaremos la teoría clásica de polinomios ortogonales y describiremos sus propiedades principales, como por ejemplo, relaciones de recurrencia, Teorema de Favard y la Ecuación de Christoffel-Darboux. Daremos las distintas caracterizaciones de las Familias Clásicas de polinomios ortogonales y sus análogos discretos.

2.1. Definiciones formales y teoría general

En esta sección daremos la definición y propiedades generales de polinomios ortogonales respecto a medidas positivas. Comenzaremos con una medida de Borel positiva μ en $\mathbb{R}$, con soporte infinito. De acuerdo al Teorema de descomposición de Lebesgue [23, Corolario 7.10], toda medida de Borel positiva μ se descompone de forma única de la forma

$$\mu = w(x)\, dx + \mu_d + \mu_s,$$

donde $w(x) \geq 0$ es una función integrable en todo intervalo acotado, μ_d es una unión numerable de puntos de masa tal que la suma de los pesos en cualquier intervalo acotado es finita y μ_s es una medida singular continua. En este trabajo sólo consideramos medidas absolutamente continuas con respecto a la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$ o medidas puramente discretas. Estas medidas abarcan las medidas de ortogonalidad de las familias de polinomios ortogonales en el Askey-Scheme. Las familias de polinomios clásicos de Hermite, Laguerre y Jacobi, por ejemplo, son ortogonales con respecto a una medida absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue. Los polinomios de Charlier, Meixner, Krawtchouk, Hahn y Racah, por otro lado, son ortogonales con respecto a una medida púramente discreta. Más generalmente, y fuera de los casos considerados en este trabajo, los polinomios de Askey-Wilson son ortogonales con respecto a una medida de ortogonalidad que está dada por la suma de una absolutamente continua y discreta [24].

Dado $j \in \mathbb{N}_0$, el j-ésimo momento de μ se define por:

$$\mu_j = \int_{\mathbb{R}} x^j d\mu(x). \tag{2.1.1}$$

Decimos que μ tiene momentos finitos si μ_j existe y es finito para todo $j \in \mathbb{N}_0$.

Sea $p \in \mathbb{C}[x]$, un polinomio en una variable compleja x, digamos $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Recordemos que el grado de p es n y el coeficiente director de p es a_n. Denotaremos al grado de p por $\deg p$ y al coeficiente director de p por $cd(p)$. Denotaremos por $\overline{p}$ al polinomio

$$\overline{p}(x) = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} x^k.$$

Notemos que $\overline{p(x)} = \overline{p}(\overline{x})$ y que en el caso que x sea una variable real, $\overline{p(x)} = \overline{p}(x)$.

Proposición 2.1. *Sea $\{p_k\}_{k\geq 0}$ una sucesión de polinomios con $\deg p_k = k$ para todo k. Luego, todo polinomio p de grado n se escribe de manera única como*

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k p_k(x) \quad \textit{con } a_k \in \mathbb{C} \textit{ para todo } 0 \leq k \leq n.$$

Dicho de otra forma, la sucesión $\{p_k\}$ es una base del espacio de polinomios $\mathbb{C}[x]$.

Demostración. Claramente p puede escribirse como combinación lineal de los polinomios $p_0, \ldots, p_n$. Denotamos por l_k al coeficiente director de p_k. Notemos que como $\deg p_k = k$, l_k es un número complejo no nulo. Asumiendo ahora que

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k p_k(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k p_k(x),$$

son dos maneras distintas de escribir a p. El coeficiente director de p, $cd(p) = a_n cd(p_n) = a_n l_n$ y del mismo modo es igual a $b_n cd(p_n) = b_n l_n$. Por ser l_n un número complejo no nulo, tenemos que $a_n = b_n$. Siguiendo así, es claro que $a_{n-1} = b_{n-1}, \ldots, a_0 = b_0$. Con esto, concluimos que el polinomio p se escribe de manera única como combinación lineal de los polinomios p_n. □

Antes de dar la definición de polinomios ortogonales, recordemos la definición de producto interno en $\mathbb{C}[x]$.

Definición 1. *Un producto interno en $\mathbb{C}[x]$ es un mapa*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}[x] \times \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}$$

que satisface:

1. $\langle p, q \rangle = \overline{\langle q, p \rangle}$ *para todo par de polinomios p, q.*
2. $\langle a_1 p_1 + a_2 p_2, q \rangle = a_1 \langle p_1, q \rangle + a_2 \langle p_2, q \rangle$ *para todos $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ y $p_1, p_2, q \in \mathbb{C}[x]$.*
3. $\langle p, p \rangle > 0$ *para todo polinomio p no nulo.*

Dada una medida de Borel positiva sobre $\mathbb{R}$ con momentos finitos de todo orden, definimos

$$\langle p, q \rangle_\mu = \int_{\mathbb{R}} p(x) \overline{q(x)} d\mu(x)$$

Cuando sea claro con respecto a que medida μ nos estamos refiriendo denotaremos simplemente $\langle p, q \rangle$.

Observación 2.2. *Notemos que* $\langle p,q\rangle_\mu < \infty$ *para todo par de polinomios* $p,q \in \mathbb{C}[x]$. *Esto es consecuencia directa del hecho que* μ *tenga momentos finitos de todo orden, ya que si* $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, *y* $q(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ *entonces*

$$\langle p,q\rangle_\mu = \langle \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \rangle_\mu = \sum_{k,j=0}^{n,m} a_k \overline{b_j} \int_{\mathbb{R}} x^{k+j} d\mu(x) < \infty.$$

Lema 2.3. *Dada una medida de Borel positiva* μ, $\langle\cdot,\cdot\rangle_\mu$ *define un producto interno sobre* $\mathbb{C}[x]$.

Demostración. Las propiedades 1 y 2 de la Definición 1 se verifican de manera inmediata. Para ver que $\langle\cdot,\cdot\rangle_\mu$ es positivo, notemos que dado $p \in \mathbb{C}[x]$ no nulo, tenemos que

$$\langle p,p\rangle_\mu = \int_{\mathbb{R}} p(x)\overline{p(x)} d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} |p(x)|^2 d\mu(x) > 0.$$

Esto completa la demostración. □

Definición 2. *Decimos que una sucesión de polinomios* $\{p_n\}_{n\geq 0}$, *con* $\deg p_n = n$ *para todo* n, *es una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *si*

$$\langle p_n, p_m\rangle = \delta_{n,m}\xi_n \qquad \text{para todo } n,m \geq 0,$$

donde ξ_n *es un número positivo para todo* n. *Si* $\xi_n = 1$ *para todo* n, *diremos que* $\{p_n\}$ *es una sucesión de polinomios ortonormales. Si el producto interno está dado por* $\langle p,q\rangle_\mu$, *diremos que los polinomios son ortogonales (o respectivamente ortonormales) con respecto a* μ.

De ahora en adelante denotaremos por $\{r_n\}$ a sucesiones de polinomios ortogonales en general, por $\{p_n\}$ a sucesiones de polinomios ortogonales mónicos y por $\{q_n\}$ a sucesiones de polinomios ortonormales. Denotamos por D_N al siguiente determinante

$$D_N = \det \begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_N \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_N & \mu_{N+1} & \cdots & \mu_{2N} \end{bmatrix} \tag{2.1.2}$$

Teorema 2.4 (Criterio de Sylvester)**.** *Sea* A *una matriz Hermitiana y* $q_A(x) = x^*Ax = \sum_{j,k=1}^{n} a_{j,k}\overline{x_j}x_k$ *la forma cuadrática generada por* A. *Esta forma cuadrática es definida positiva si y sólo si los menores principales de* A *son positivos.*

Demostración. Para la demostración de este teorema referimos a [19, §9.2]. □

Dada una medida de Borel positiva μ en $\mathbb{R}$, vimos en el Lema 2.3 que $\langle\cdot,\cdot\rangle_\mu$ define un producto interno sobre $\mathbb{C}[x]$. Por lo tanto, la forma cuadrática

$$\langle p,p\rangle_\mu = \sum_{j,k=0}^{n} \mu_{j+k} a_j \overline{a_k},$$

definida por los momentos de μ, es definida positiva ya que dado un polinomio $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$, tenemos que $\langle p,p\rangle_\mu > 0$. Luego, por el Criterio de Sylvester 2.4, los menores D_N son todos positivos.

Teorema 2.5. *Dada una medida de Borel positiva μ en $\mathbb{R}$ con momentos finitos de todo orden, existe una única sucesión de polinomios mónicos $\{p_n\}_{n\geq 0}$,*

$$p_n(x) = x^n + \textit{términos de grado menor},$$

con $n \in \mathbb{N}_0$ y una sucesión de números positivos $\{\xi_n\}_{n\geq 0}$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}} p_n(x)p_m(x)\,d\mu(x) = \xi_n\,\delta_{n,m}.$$

Observación 2.6. *En la demostración del Teorema 2.5 se prueba que $p_n \in \mathbb{R}[x]$ para todo $n \geq 0$, es decir, la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a μ, $\{p_n\} \subset \mathbb{R}[x]$.*

Demostración. Vamos a probarlo para $m, n = 0, 1, ..., N$ y $N \in \mathbb{N}$ por inducción en N. Definimos $p_0(x) = 1$. Supongamos entonces que $p_0(x)$, $p_1(x)$,...,$p_N(x)$ fueron definidos y que $\int_{\mathbb{R}} p_n(x)\overline{p_m(x)}d\mu(x) = \xi_n\delta_{n,m}$ para $m, n = 0, 1, .., N$. Sea

$$p_{N+1}(x) = x^{N+1} + \sum_{j=0}^{N} c_j x^j.$$

Tenemos que $\int_{\mathbb{R}} p_{N+1}(x)x^m d\mu(x) = \mu_{N+m+1} + \sum_{j=0}^{N} c_j\mu_{j+m}$ y queremos que esto último sea igual a cero si $m < N + 1$. Es decir, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\sum_{j=0}^{N} c_j\mu_{j+m} = -\mu_{N+m+1} \qquad \text{para} \qquad m = 0, 1, .., N,$$

que puede ser pensado de forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_N \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_N & \mu_{N+1} & \cdots & \mu_{2N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mu_{N+1} \\ \mu_{N+2} \\ \vdots \\ \mu_{2N+1} \end{bmatrix} \tag{2.1.3}$$

El determinante de la matriz anterior es igual a D_N definido en (2.1.2). El criterio de Sylvester 2.4 implica que $D_N > 0$ de modo que la matriz de momentos en (2.1.3) es inversible y hallamos los coeficientes $c_1, \ldots, c_N$. Notemos que $c_i \in \mathbb{R}$ para todo $i = 1, \ldots, N$ ya que $\mu_j \in \mathbb{R}$ para todo j. Por otro lado, $\xi_{N+1} = \int_{\mathbb{R}} |p_{N+1}(x)|^2 d\mu(x) > 0$. □

Proposición 2.7. *Toda sucesión de polinomios ortogonales con respecto a μ es de la forma $r_n = a_n p_n$ para ciertos números complejos a_n, donde p_n son los polinomios ortogonales mónicos respecto a μ.*

Demostración. Sea $\{r_n\}$ una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a μ. Denotamos por a_n al coeficiente director de r_n. Como $\deg r_n = n$, a_n es un número complejo no nulo. Entonces, $\widetilde{p_n} = a_n^{-1} r_n$ es una sucesión de polinomios mónicos que satisface

$$\langle \widetilde{p_n}, \widetilde{p_m} \rangle_\mu = a_n^{-1}\overline{a_m^{-1}}\langle r_n, r_m \rangle_\mu = 0 \qquad n \neq m.$$

Por el Teorema 2.5, $\widetilde{p_n} = p_n$ y esto completa la demostración de la proposición. □

Observación 2.8. *No existe una única sucesión de polinomios ortonormales con respecto a μ. De hecho, dada una sucesión de polinomios ortonormales $\{q_n\}$ con respecto a μ, podemos construir otra sucesión de polinomios ortonormales (también con respecto a μ) definiendo $\hat{q_n} = u_n q_n$, donde u_n es un número complejo de norma uno para todo $n \geq 0$. Claramente, $\hat{q_n}$ tiene grado n y $cd(\hat{q_n}) = u_n cd(\hat{q_n})$. Más aún,*

$$\begin{aligned}\langle \hat{q_n}, \hat{q_m} \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \hat{q_n}(x) \overline{\hat{q_m}(x)} d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} u_n q_n(x) \overline{u_m q_m(x)} d\mu(x) \\ &= u_n \overline{u_m} \left(\int_{\mathbb{R}} q_n(x) \overline{q_m(x)} d\mu(x) \right) = u_n \overline{u_m} \delta_{n,m} = \delta_{n,m}. \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

Esto mismo sucede en el caso que $\{q_n\}$ sea una sucesión de polinomios ortonormales con respecto a otro producto interno.

2.1.1. Propiedades de polinomios ortogonales

En esta subsección, daremos algunas propiedades de polinomios ortogonales con respecto a medida de Borel positiva μ. Es consecuencia inmediata de la definición del producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_\mu$ que

$$\langle xp(x), q(x) \rangle_\mu = \int_{\mathbb{R}} (xp(x)) \overline{q(x)} d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} p(x) \overline{xq(x)} d\mu(x) = \langle p(x), xq(x) \rangle_\mu \tag{2.1.5}$$

para todo $p, q \in \mathbb{C}[x]$. En otras palabras, el operador multiplicación por x es simétrico con respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle_\mu$. El siguiente teorema muestra una consecuencia directa de este hecho.

Teorema 2.9 (Relación de recurrencia de tres términos)**.** *Sea $\{r_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a una medida de Borel positiva μ. Entonces existen tres sucesiones de números $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}, \{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, con a_n distinto de cero para todo $n \geq 0$, tales que*

$$xr_n(x) = a_n r_{n+1}(x) + b_n r_n(x) + c_n r_{n-1}(x). \tag{2.1.6}$$

En la ecuación anterior, para $n = 0$ consideraremos $r_{-1} = c_0 = 0$.

Demostración. El polinomio $xr_n(x)$ es un polinomio de grado $n+1$, luego por ser $\{r_n\}$ una sucesión de polinomios ortogonales, puede ser escrito como

$$xr_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} s_k r_k(x) \tag{2.1.7}$$

donde $s_k \in \mathbb{C}$ para todo $k = 0, \ldots, n+1$. Calculando $\langle xr_n(x), r_j(x) \rangle$ para $j \in \{0, \ldots, n+1\}$, tenemos que

$$\langle xr_n(x), r_j(x) \rangle = \langle \sum_{k=0}^{n+1} s_k r_k(x), r_j(x) \rangle = \sum_{k=0}^{n+1} s_k \langle r_k(x), r_j(x) \rangle = s_j \xi_j.$$

Como r_n es ortogonal a todos los polinomios de grado menor que n, tenemos que

$$s_j = \langle xr_n(x), r_j(x) \rangle \xi_j^{-1} = \langle r_n(x), xr_j(x) \rangle \xi_j^{-1} = 0$$

si $j < n-1$, donde hemos usado (2.1.5) y que ξ_j es un número positivo y por lo tanto inversible. Así, (2.1.7) se escribe simplemente como

$$xr_n(x) = s_{n+1}r_{n+1}(x) + s_n r_n(x) + s_{n-1}r_{n-1}(x)$$

Si definimos $a_n = s_{n+1}$, $b_n = s_n$, $c_n = s_{n-1}$, obtenemos la expresión (2.1.6), es decir

$$xr_n(x) = a_n r_{n+1}(x) + b_n r_n(x) + c_n r_{n-1}(x).$$

Ahora supongamos que el coeficiente director de r_n es l_n, el cual es no nulo por tener p_n grado n. Comparando el término de orden $n+1$ en (2.1.6), vemos que $l_n = a_n l_{n+1}$. Entonces, $a_n = l_n l_{n+1}^{-1}$ que es claramente no nulo. Y así, a_n es no nulo para todo $n \geq 0$. □

Corolario 2.10. *Si $\{q_n\}_{n\geq 0}$ es una sucesión de polinomios ortonormales con respecto a μ, entonces satisface una relación de recurrencia de la forma*

$$xq_n(x) = a_n q_{n+1}(x) + b_n q_n(x) + \overline{a_{n-1}} q_{n-1}(x).$$

Además, $b_n = \overline{b_n}$ para todo n.

Demostración. Utilizando la notación de la demostración anterior y que $\xi_j = 1$ para todo j, tenemos que

$$a_n = \langle xq_n(x), q_{n+1}(x)\rangle = s_{n+1}, \qquad b_n = \langle xq_n(x), q_n(x)\rangle = s_n.$$

Entonces, ocurre que

$$\overline{a_{n-1}} = \overline{\langle xq_{n-1}(x), q_n(x)\rangle} = \langle q_n(x), xq_{n-1}(x)\rangle = \langle xq_n(x), q_{n-1}(x)\rangle = s_{n-1},$$

donde usamos (2.1.5). Notemos que $b_n = \overline{b_n}$ ya que

$$\overline{b_n} = \overline{\langle xq_n(x), q_n(x)\rangle} = \langle q_n(x), xq_n(x)\rangle = \langle xq_n(x), q_n(x)\rangle = s_n.$$

Esto completa la demostración. □

Observación 2.11. *Si definimos los polinomios $\{\hat{q}_n\}_{n\geq 0}$ como en la Observación 2.8, es decir*

$$\hat{q}_n = u_n q_n \quad \text{con } u_n \in \mathbb{C} \text{ de norma uno para todo } n \geq 0,$$

estos polinomios satisfacen también una relación de recurrencia de tres términos, con a_n y b_n remplazados respectivamente por $\hat{a}_n = u_n a_n \overline{u}_{n+1}$ y $\hat{b}_n = b_n$, ya que, como $q_n = \overline{u_n}\hat{q}_n$, sigue de (2.1.6) que

$$x\overline{u_n}\hat{q}_n(x) = a_n \overline{u_{n+1}}\hat{q}_{n+1}(x) + b_n \overline{u_n}\hat{q}_n(x) + \overline{a_{n-1}u_{n-1}}\hat{q}_{n-1}(x).$$

Multiplicando a derecha la fórmula anterior por u_n, obtenemos el resultado.

Corolario 2.12. *Si $\{p_n\}_{n\geq 0}$ es la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a μ, entonces satisfacen una relación de recurrencia de la forma*

$$xp_n(x) = p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + c_n p_{n-1}(x).$$

Demostración. Por el Teorema 2.9, la sucesión $\{p_n\}$ satisface una relación de la forma

$$xp_n(x) = a_n p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + c_n p_{n-1}(x).$$

Ahora, como el coeficiente director de p_n es uno para todo n, comparando el término de orden $n+1$ en la ecuación anterior, tenemos que $a_n = 1$ como se quería. $\square$

Daremos ahora una consecuencia inmediata de este resultado, la identidad de Christoffel-Darboux.

Teorema 2.13 (Identidad de Christoffel-Darboux). *Si $\{q_n\}_{n\geq 0}$ es una sucesión de polinomios ortonormales con respecto a μ entonces*

$$\sum_{j=0}^{n} q_j(x)q_j(y) = \frac{\overline{q_n(x)}a_n q_{n+1}(y) - \overline{q_{n+1}(x)a_n}q_n(y)}{y-x} \tag{2.1.8}$$

Demostración. Usando el Corolario 2.10, tenemos

$$\begin{aligned} y\overline{q_j(x)}q_j(y) &= \overline{q_j(x)}(a_j q_{j+1}(y) + b_j q_n(y) + \overline{a_{j-1}}q_{j-1}(y)) \\ &= \overline{q_j(x)}a_j q_{j+1}(y) + \overline{q_j(x)}b_j q_j(y) + \overline{q_j(x)a_{j-1}}q_{j-1}(y). \end{aligned} \tag{2.1.9}$$

y también, tenemos

$$\begin{aligned} x\overline{q_j(x)}q_j(y) &= \overline{(a_j q_{j+1}(x) + b_j q_j(x) + \overline{a_{j-1}}q_{j-1}(x))}q_j(y) \\ &= \overline{q_{j+1}(x)a_j}q_j(y) + \overline{q_j(x)b_j}q_j(y) + \overline{q_{j-1}(x)}a_{j-1}q_j(y) \end{aligned}$$

Usando esto, y que $b_j = \overline{b_j}$ tenemos

$$(y-x)\overline{q_j(x)}q_j(y) = \overline{q_j(x)}a_j q_{j+1}(y) + \overline{q_j(x)a_{j-1}}q_{j-1}(y) - \overline{q_{j+1}(x)a_j}q_j(y) - \overline{q_{j-1}(x)}a_{j-1}q_j(y)$$

Llamando $\alpha_j = \overline{q_j(x)}a_j q_{j+1}(y) - \overline{q_{j+1}(x)a_j}q_j(y)$ lo anterior se escribe como

$$(y-x)\overline{q_j(x)}q_j(y) = \alpha_j - \alpha_{j-1}.$$

Sumando desde $j=0$ hasta n, tenemos

$$\sum_{j=0}^{n}(y-x)\overline{q_j(x)}q_j(y) = \sum_{j=0}^{n}\alpha_n - \sum_{j=0}^{n}\alpha_{n-1} = \alpha_n - \alpha_{-1}$$

y como $\alpha_{-1} = \overline{q_{-1}(x)}a_{-1}q_0(y) - \overline{q_0(x)a_{-1}}q_{-1}(y) = 0$ ya que $q_{-1} = 0$, esto último es igual a

$$\overline{q_n(x)}a_n q_{n+1}(y) - \overline{q_{n+1}(x)a_n}q_n(y)$$

y por lo tanto obtenemos

$$\sum_{j=0}^{n}\overline{q_j(x)}q_j(y) = \frac{\overline{q_n(x)}a_n q_{n+1}(y) - \overline{q_{n+1}(x)a_n}q_n(y)}{(y-x)}$$

como se quería. $\square$

El recíproco del Teorema 2.9 es un importante resultado que se conoce con el nombre de Teorema de Favard. Este Teorema, que demuestra que toda sucesión de polinomios que satisface una relación de recurrencia de la forma (2.1.6) es una sucesión de polinomios ortogonales, fue dado por J. Favard en 1935 [7, Página 209], aunque aparentemente, fue descubierto al mismo momento e independientemente por J. Shohat y I. Natanson. A continuación damos el enunciado del Teorema de Favard. La demostración puede encontrarse en [7, Teorema 6.4] o [20, Teorema 2.5.2].

Teorema 2.14 (Teorema de Favard)**.** *Sea $\{b_n\}_{n\geq 1}$ y $\{c_n\}_{n\geq 1}$ dos sucesiones de números complejos con $c_n > 0$ para todo n. Sea $\{p_n\}_{n\geq 0}$ definida por la siguiente relación de recurrencia*

$$p_n(x) = (x - b_n)p_{n-1}(x) - c_n p_{n-2}(x), \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.1.10}$$

con $p_{-1}(x) = 0, \quad p_0(x) = 1$. Entonces, existe una única medida de Borel positiva μ en $\mathbb{R}$ tal que

$$\langle p_0, p_0\rangle_\mu = c_1, \quad \langle p_m(x), p_n(x)\rangle_\mu = 0 \quad m \neq n, \quad m, n = 0, 1, 2, \ldots$$

2.2. Polinomios ortogonales hipergeométricos

Las familias de polinomios ortogonales escalares consideradas en este trabajo pertenecen a la clase de polinomios ortogonales hipergeométricos. A continuación, describimos brevemente las funciones hipergeométricas.

2.2.1. Funciones hipergeométricas

Una serie $\sum_{n\geq 0} c_n$ se dice hipergeométrica si el cociente $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ es una función racional de n. En tal caso, factorizando el cociente $\frac{c_{n+1}}{c_n}$, obtenemos

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(a_1 + n)\ldots(a_p + n)}{(b_1 + n)\ldots(b_q + n)}\alpha_n,$$

para algunos $a_1, \ldots, a_p$, $b_1, \ldots, b_q$, $\alpha_n \in \mathbb{C}$. De esta fórmula, remplazando $\alpha_n = \frac{z}{1+n}$, obtenemos que

$$c_n = \frac{(a_1)_n \ldots (a_p)_n}{(b_1)_n \ldots (b_q)_n}\frac{z^n}{n!},$$

donde $(a)_k$ es el símbolo de Pochhamer que está dado por

$$(a)_k = a(a + 1)\ldots(a + k - 1). \tag{2.2.11}$$

La función hipergeométrica es la serie de potencias

$${}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix}; z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1, \ldots, a_p)_k}{(b_1, \ldots, b_q)_k}\frac{z^k}{k!}, \tag{2.2.12}$$

donde $(a_1, \ldots, a_p)_k = (a_1)_k \cdots (a_p)_k$.

Asumimos que los parámetros son tales que los denominadores en los términos de la serie nunca son cero. Si algún parámetro del numerador a_i es igual a $-n$ con n un entero no negativo, la serie hipergeométrica es un polinomio en z. Aplicando el test del cociente, se verifica que el radio de convergencia de la serie hipergeométrica está dado por

$$\rho = \begin{cases} \infty & si \quad p \leq q+1 \\ 1 & si \quad p = q+1 \\ 0 & si \quad p \geq q+1 \end{cases}$$

La función hipergeométrica (2.2.12) satisface la siguiente ecuación diferencial, ver por ejemplo [28, §2.1.2],

$$\left[z\frac{d}{dz}\left(z\frac{d}{dz}+b_1-1\right)\left(z\frac{d}{dz}+b_2-1\right)\cdots\left(z\frac{d}{dz}+b_q-1\right) \right.$$
$$\left. +z\left(z\frac{d}{dz}+a_1\right)\cdots\left(z\frac{d}{dz}+a_p\right)\right] {}_pF_q\left(\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\b_1,\ldots,b_q\end{matrix};z\right) = 0. \quad (2.2.13)$$

En caso en que $p = 2$ y $q = 1$, la función hipergeométrica

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};z\right),$$

se llama función hipergeométrica de Gauss. Para la función hipergeométrica de Gauss, la ecuación diferencial (2.2.13) se escribe de la forma

$$z(1-z)\frac{d^2}{dz^2} + (c-(1+a+b)z)\frac{d}{dz} - ab = 0.$$

Estas funciones han sido estudiadas extensivamente por L. Euler, F. Pfaff, C. F. Gauss, E. Kummer y B. Riemann.

2.2.2. El Askey-Scheme

En 1929, S. Bochner [4] clasificó todas las familias de polinomios ortogonales que satisfacen una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes polinomiales. El resultado es que, notablemente, sólo las familias clásicas de Hermite, Jacobi, Laguerre y Bessel tienen esta propiedad. En la Sección 2.3.1 damos una idea de la demostración del resultado de Bochner.

Es natural complementar esta clasificación con las familias de polinomios ortogonales que satisfagan ecuaciones en diferencias de segundo orden. Estas familias, más las familias clásicas conforman una clase muy importante de polinomios ortogonales. Estas familias están clasificadas y se agrupan en el llamado *Askey Scheme* de polinomios ortogonales hipergeométricos, que fue introducido en 1985 por R. Askey y J.A. Wilson. Las familias de polinomios ortogonales en el *Askey Scheme* se escriben en términos de funciones hipergeométricas y se ubican en la Tabla 2.1 de forma tal que las filas corresponden al número de parámetros libres en la familia. De esta forma, los polinomios de Hermite, que no tienen ningún parámetro libre se encuentran en el escalón mas bajo, y los polinomios de Wilson y de Racah, con cuatro parámetros libres, se encuentran en la cima.

Las familias de una fila de la tabla pueden estar unidas a los de su fila inmediata inferior por una flecha que indica que es posible tomar una relación límite que lleve los polinomios de la fila superior a la inferior.

Las familias en el Askey Scheme tienen propiedades muy similares a las de las Familias Clásicas. Como mencionamos anteriormente, cada una de estas familias es autofunción de un operador diferencial o en diferencias de segundo orden. Además, tienen *lowering* y *raising*

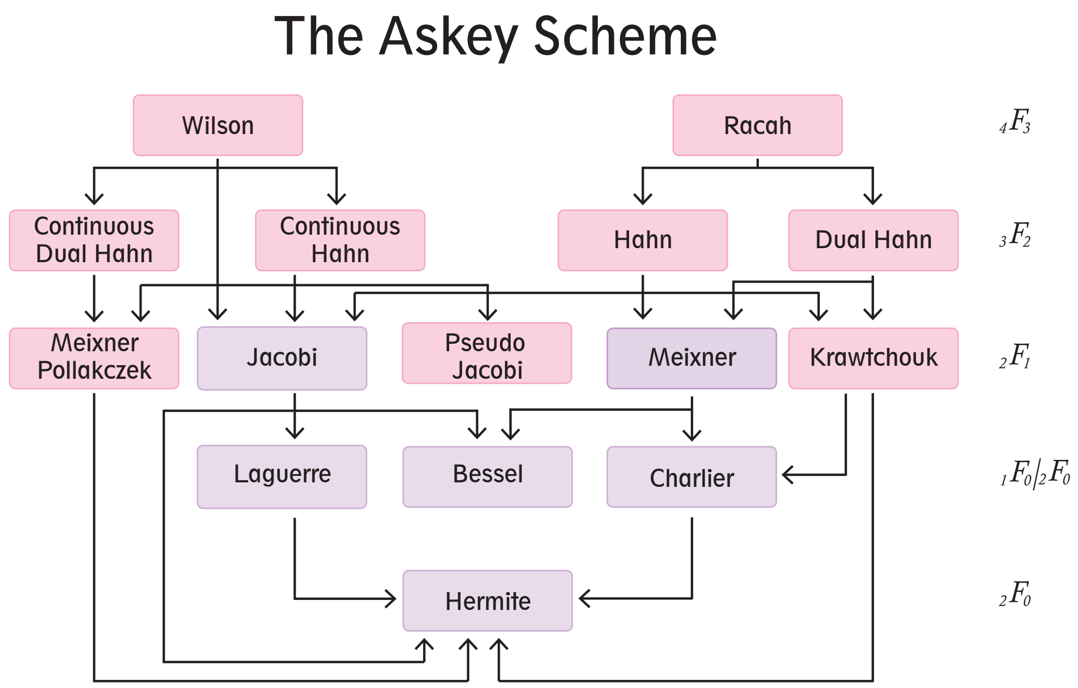

Figura 2.1: *Askey Scheme* de polinomios ortogonales hipergeométricos. En color violeta están resaltadas las familias de polinomios ortogonales estudiadas en este trabajo. Las familias clásicas de Jacobi, Laguerre, Bessel y Hermite se desciben en la Subsección 2.2.3. Las familias de Meixner y Charlier se describen en la Subsección 2.2.4

operators explícitos. Como consecuencia de la existencia de estos operadores, los polinomios se pueden describir en términos de una fórmula de Rodrigues. Estas propiedades están recopiladas en [24] donde se listan todas las familias del *Askey Scheme* y sus propiedades en orden.

Dentro del *Askey Scheme* se encuentran dos clases destacadas de polinomios ortogonales:

- Las Familias Clásicas de polinomios ortogonales de Hermite, Laguerre y Jacobi.
- La Clase de Hahn, que consiste de las familias de polinomios de Hahn, Krawtchouk, Meixner, Charlier, Continuous Hahn y Meixner–Pollaczek.

Las secciones siguientes de este trabajo se centran en el estudio de propiedades de polinomios ortogonales matriciales. En el caso matricial, no se ha conseguido aún un resultado de clasificación de tipo Bochner ni una tabla equivalente al *Askey Scheme* y se está trabajando en entender en qué extensión las propiedades de las familias escalares se cumplen en el caso matricial. Así, en el Capítulo 5 desarrollamos una teoría para la existencia de *lowering* y *raising operators* para familias de polinomios ortogonales matriciales que podrían conformar una futura Clase de Hahn matricial.

2.2.3. Las tres Familias Clásicas

Las familias de polinomios ortogonales asociadas a los nombres Hermite, Laguerre y Jacobi, son sin lugar a duda, las más estudiadas y las de mayor importancia. A estas familias se las conoce como Familias de polinomios ortogonales Clásicos. Tienen muchas aplicaciones importantes en áreas de la física, y de la matemática, por ejemplo, la teoría de matrices aleatorias, la teoría de aproximación y muchas otras. En lo que resta del capítulo, trabajaremos con familias de polinomios ortogonales mónicos o con múltiplos reales de las mismas, por lo que omitiremos el conjugado en el producto interno. Supondremos además que la medida de Borel positiva μ es de la forma $d\mu(x) = w(x)\,dx$ donde $w(x) \geq 0$ es una función integrable en todo intervalo acotado o que la medida $d\mu(x)$ es puramente discreta y está determinada por una sucesión de números positivos w_k, $k \in \mathbb{N}_0$.

Polinomios de Jacobi

Para $\alpha, \beta > -1$ los polinomios de Jacobi están dados por la fórmula

$$p_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1+x)^{-\beta}(1+x)^{-\alpha}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}], \qquad \alpha, \beta > -1.$$

Se escriben explícitamente en términos de una función hipergeométrica ${}_2F_1$ como

$$p_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}-n, 1+\alpha+\beta+n \\ \alpha+1\end{matrix}; \frac{1-x}{2}\right).$$

Son ortogonales respecto al peso con soporte $[-1, 1]$ dado por

$$w^{(\alpha,\beta)}(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta\chi_{[-1,1]}.$$

Satisfacen la condición de ortogonalidad

$$\int_{-1}^{1} p_m^{(\alpha,\beta)}(x)p_n^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)n!}\delta_{n,m},$$

y son soluciones de la ecuación diferecial

$$(1-x^2)y'' + (\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x)y' + n(n+\alpha+\beta+1)y = 0. \qquad (2.2.14)$$

Casos importantes de estos polinomios son los polinomios de Gegenbauer ($\alpha = \beta$), los polinomios de Legendre ($\alpha = \beta = 0$) y los polinomios de Chebyshev ($\alpha = \beta = \pm\frac{1}{2}$, de primer y segundo tipo respectivamente).

Polinomios de Laguerre

Los polinomios de Laguerre están definidos por

$$\ell_n^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha}e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}[e^{-x}x^{n+\alpha}], \qquad \alpha > -1.$$

Se escriben explícitamente en términos de una función hipergeométrica ${}_1F_1$ como

$$\ell_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\,{}_1F_1\left(\begin{matrix}-n \\ \alpha+1\end{matrix}; x\right).$$

Son ortogonales respecto al peso con soporte $(0, \infty)$ dado por

$$w^{(\alpha)}(x) = x^\alpha e^{-x}\chi_{(0,\infty)}.$$

Satisfacen la condición de ortogonalidad

$$\int_0^\infty \ell_m^{(\alpha)}(x)\ell_n^{(\alpha)}(x)x^\alpha e^{-x}dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\delta_{n,m},$$

y son soluciones de la ecuación diferecial

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0.$$

Polinomios de Hermite

Los polinomios de Hermite están definidos por

$$h_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

Se escriben explícitamente en términos de una función hipergeométrica ${}_2F_0$ como

$$h_n(x) = (2x)^n \, {}_2F_0 \left(\begin{matrix} \frac{-n}{2}, \frac{-(n-1)}{2} \\ - \end{matrix} ; -\frac{1}{x^2} \right).$$

Son ortogonales respecto al peso

$$w(x) = e^{-x^2}.$$

Satisfacen la condición de ortogonalidad

$$\int_{-\infty}^\infty h_m(x)h_n(x)e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}2^n n!\delta_{n,m},$$

y son soluciones de la ecuación diferecial

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0.$$

Polinomios de Bessel

En esta lista incluimos también a los polinomios de Bessel, aunque no satisfacen relaciones de ortogonalidad con respecto a un peso positivo. Algunos autores no los incluyen en las Familias Clásicas de polinomios ortogonales. Los polinomios de Bessel están definidos por

$$y_n^{(a)}(x) = {}_2F_0 \left(\begin{matrix} -n, n+a-1 \\ - \end{matrix} ; -\frac{x}{2} \right) \qquad a \in \mathbb{N}.$$

Satisfacen la condición de ortogonalidad

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|x|=1} x^a y_n^{(a)}(x) y_m^{(a)}(x) e^{\frac{-2}{x}} dx = \frac{(-1)^{n+a-1} n! 2^{a-1}}{(n+a-2)!(2n+a-1)} \delta_{n,m}.$$

Además, son soluciones de la ecuación diferencial

$$x^2y'' + (ax+2)y' - n(n+a-1)y = 0.$$

2.2.4. Familias de Meixner y Charlier

De las familias que conforman la clase de Hahn, en este trabajo estudiamos las familias de Meixner y Charlier, que tienen soporte infinito. A continuación damos la definición y relaciones de ortogonalidad, mientras que en las próximas secciones estudiaremos con mas detalle las propiedades de estas familias.

Polinomios de Charlier

Los polinomios de Charlier están definidos en términos de una función hipergeométrica ${}_2F_0$ como

$$c_n(x) = {}_2F_0 \left(\begin{matrix} -n, -x \\ - \end{matrix} ; -\frac{1}{a} \right), \qquad a > 0.$$

Son ortogonales respecto al peso con soporte $\mathbb{N}_0$ dado por

$$w^{(a)}(x) = \frac{a^x}{x!} \qquad \text{si } x \in \mathbb{N}_0.$$

Satisfacen la condición de ortogonalidad

$$\sum_{x=0}^{\infty} c_j(x) c_k(x) \frac{a^x}{x!} = a^{-n} e^a n! \delta_{j,k},$$

y son soluciones de la ecuación en diferencias

$$-ny(x) = ay(x+1) - (x+a)y(x) + xy(x-1).$$

Polinomios de Meixner

Los polinomios de Meixner están definidos en términos de una función hipergeométrica ${}_2F_1$ como

$$m_n(x) = {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n, -x \\ \beta \end{matrix} ; 1 - \frac{1}{c} \right), \qquad \beta > 0, 0 < c < 1.$$

Son ortogonales respecto al peso con soporte $\mathbb{N}_0$ dado por

$$w^{(c,\beta)}(x) = (\beta)_x \frac{c^x}{x!} \qquad \text{si } x \in \mathbb{N}_0.$$

Satisfacen la condición de ortogonalidad

$$\sum_{x=0}^{\infty} m_j(x) m_k(x) (\beta)_x \frac{c^x}{x!} = \frac{c^{-n} n!}{(\beta)_n (1-c)^{\beta}} \delta_{j,k},$$

y son soluciones de la ecuación en diferencias

$$n(c-1)y(x) = c(x+\beta)y(x+1) - [x + (x+\beta)c]y(x) + xy(x-1).$$

2.3. Caracterización de las Familias Clásicas

Como mencionamos anteriormente, las Familias Clásicas pueden ser caracterizadas de diversas formas, en esta sección daremos una breve descripción de ellas.

2.3.1. Teorema de Bochner: Autofunciones de operadores diferenciales de segundo orden

En esta subsección vamos a estudiar soluciones polinomiales de ecuaciones del tipo

$$f_2(x)Ty(x) + f_1(x)Sy(x) + f_0(x)y(x) = \lambda_n y(x), \tag{2.3.15}$$

donde S y T son operadores lineales que llevan polinomios de grado n en polinomios de grado $n-1$ y $n-2$ respectivamente.

Proposición 2.15. *Supongamos que existen polinomios no nulos y_i de grado i tales que Sy_1 y Ty_2 son no nulos, y constantes λ_i para $i = 0, 1, 2$ que son soluciones de la ecuación* (2.3.15)*. Entonces f_i es un polinomio de grado, a lo sumo, i para $i = 0, 1, 2$.*

Demostración. Como y_0 es un polinomio de grado cero, $Ty_0 = Sy_0 = 0$. Como y_0 satisface (2.3.15), obtenemos $f_0(x)y_0 = \lambda_0 y_0$ lo que implica que f_0 es una constante pues y_0 es no nulo por hipótesis.

Como y_1 es un polinomio de grado uno, $Ty_1 = 0$ y Sy_1 es constante. Como y_1 satisface (2.3.15), obtenemos $f_1(x)Sy_1(x) + f_0 y_1(x) = \lambda_1 y_1(x)$ lo que implica que f_1 es un polinomio de grado uno por ser f_0 constante, $y_1(x)$ un polinomio de grado uno, y $Sy_1(x)$ una constante no nula.

Como y_2 es un polinomio de grado dos, Ty_2 es constante y Sy_2 es un polinomio de grado uno. Como y_2 satisface (2.3.15), obtenemos $f_2(x)Ty_2(x) + f_1(x)Sy_2(x) + f_0 y_2(x) = \lambda_2 y_2(x)$ lo que implica que f_2 es un polinomio de grado dos por ser f_0 constante, $y_2(x)$ un polinomio de grado dos, $f_1(x)$ un polinomio de grado uno, $Sy_2(x)$ un polinomio de grado uno y $Ty_2(x)$ una constante no nula. $\square$

Bajo las hipótesis de la Proposición 2.15, denotando $f_0(x) = \lambda_0$, podemos sumar y restar $-\lambda_0 y(x)$ en ambos miembros de (2.3.15) y obtener la ecuación equivalente

$$f_2(x)Ty(x) + f_1(x)Sy(x) = \widetilde{\lambda}_n y(x), \tag{2.3.16}$$

donde las constantes $\widetilde{\lambda}_n$ están dadas por $\widetilde{\lambda}_n = \lambda_n - f_0$.

En vista de la Proposición 2.15, como estamos interesados en ecuaciones de la forma (2.3.15) con una cantidad significativa de soluciones polinomiales, en el resto de la sección asumimos que f_2,f_1 y f_0 son polinomios de grados dos, uno y cero respectivamente, y λ_n es una sucesión de números reales. Además, pedimos que f_2, f_1 y f_0 sean independientes de n y que para cada n, la ecuación (2.3.15) tenga una solución polinomial de grado n.

S. Bochner [4] consideró soluciones polinomiales de (2.3.16) cuando $S = \frac{d}{dx}$ y $T = S^2$. En tal caso, (2.3.16) se escribe

$$f_2(x)y''(x) + f_1(x)y'(x) = \lambda_n y(x), \tag{2.3.17}$$

W. Brenke [3] consideró el mismo problema asumiendo que $y_n(x)$ son ortogonales. Daremos la prueba del Teorema de Bochner.

Teorema 2.16 (Bochner, 1929)**.** *Supongamos que y_n es un polinomio de grado n que es una solución de la ecuación* (2.3.17)*. Entonces f_2, f_1, y_n y λ_n son uno de los de la siguiente lista.*

1. $f_2(x) = 1 - x^2$, $f_1(x) = \beta - \alpha - x(\alpha + \beta + 2)$, $\lambda_n = -n(n + \alpha + \beta + 1)$, $y_n = p_n^{(\alpha,\beta)}$.

2. $f_2(x) = x^2$, $f_1(x) = ax + 1$, $\lambda_n = n(n + a - 1)$, $y_n = y_n^{(a)}$.

3. $f_2(x) = x^2$, $f_1(x) = ax$, $\lambda_n = n(n + a - 1)$, $y_n(x) = x^n$.

4. $f_2(x) = x$, $f_1(x) = 1 + \alpha - x$, $\lambda_n = -n$, $y_n = \ell_n^{(\alpha)}$.

5. $f_2(x) = 1$, $f_1(x) = -2x$, $\lambda_n = -2n$, $y_n(x) = h_n$.

Demostración. Como cualquier múltiplo de y_n es también una solución de (2.3.17) podemos asumir sin pérdida de generalidad que y_n es mónico.

Por la Proposición 2.15 tenemos que f_2 es un polinomio de grado menor o igual a dos. Probamos el caso en que f_2 tiene grado dos y dos raíces distintas, los casos restantes se demuestran de manera similar. Entonces existen constantes a, b tales que $f_2(az + b) = 1 - z^2$. Haciendo el cambio de variables $x = az + b$, la ecuación (2.3.17) se escribe

$$(1 - z^2)y''(z) + af_1(az + b)y'(z) = a^2\lambda_n y(z). \tag{2.3.18}$$

Observemos que esta ecuación tiene la misma estructura que (2.3.17) y que el coeficiente de la derivada de orden uno es un polinomio de grado uno. Además podemos elegir constantes α, β tales que $af_1(az + b) = \beta - \alpha - z(\alpha + \beta + 2)$. Como y_n es mónico, comparando el coeficiente director de la ecuación anterior, obtenemos que $\lambda_n = -n(n+\alpha+\beta+1)$. Con estas identificaciones, (2.3.18) está dada por

$$(1 - z^2)y''(z) + (\beta - \alpha - z(\alpha + \beta + 2))y'(z) = -n(n + \alpha + \beta + 1)y(z). \tag{2.3.19}$$

Por (2.2.14), existe una única solución polinomial a (2.3.19) y viene dada por un múltiplo del polinomio de Jacobi $p_n^{(\alpha,\beta)}$. $\square$

2.3.2. Teorema de Hanh: Ortogonalidad de las derivadas

Dada una familia de polinomios ortogonales $\{p_n(x)\}_{n\geq 0}$ en (a, b) con respecto al peso w, podemos considerar la sucesión de polinomios

$$\left\{\frac{dp_n}{dx}\right\}_{n\geq 1}. \tag{2.3.20}$$

A partir de las expresiones explícitas de las tres Familias Clásicas, se puede verificar que sus derivadas son nuevamente polinomios clásicos y por lo tanto ortogonales. Otra caracterización de las familias de polinomios ortogonales clásicos es que la sucesión de sus derivadas, es una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a un peso positivo. W. Hahn [18] fue el primero en probar que esta propiedad caracteriza también a las Familias Clásicas por lo que nos referimos a este resultado como el Teorema de Hahn. Más precisamente, Hahn demostró que si $\{p_n\}$ es una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a un peso positivo tal que la sucesión de derivadas, $\{p_n'\}$, es también una sucesión de polinomios ortogonales respecto a un peso positivo, entonces, $\{p_n\}$ puede ser llevado, mediante un cambio en la variable x, a uno de los tres sistemas de polinomios ortogonales clásicos.

El método de Hanh comienza considerando las siguientes relaciones de recurrencia,

$$p_n(x) = (x - c_n)p_{n-1}(x) - \lambda_n p_{n-2}(x),$$

$$\frac{p_n'(x)}{n} = (x - d_n)\frac{p_{n-1}^{'}(x)}{n-1} - \nu_n \frac{p_{n-2}^{''}(x)}{n-2}$$

Derivando la primer ecuación, $p_n'(x)$ puede ser eliminado de la segunda. Luego, repitiendo este proceso algunas veces, Hahn pudo obtener algunas relaciones de recurrencia de las cuales se puede deducir que $p_n(x)$ satisface una ecuación diferecial de la forma

$$a_2(x)y^{''} + a_1(x)y^{'} + a_0(x)y + \lambda y = 0,$$

donde $a_0(x), a_1(x), a_2(x)$ son polinomios de grados menor o igual a 0, 1 y 2 respectivamente y λ es distinto a 0. Finalmente, Hanh, escencialmente, duplicó el proceso realizado por Bochner y concluyó que $\{p_n\}$ debe ser una de las tres familias de polinomios ortogonales clásicos.

2.3.3. Fórmula de Rodrigues

Una tercera caracterización de las familias de polinomios ortogonales clásicos es que satisfacen una fórmula de Rodrigues de la forma

$$p_n(x) = k_n^{-1} w(x)^{-1} \frac{d^n}{dx^n} \left(\phi(x)^n w(x)\right),$$

donde k_n es una constante positiva y ϕ es un polinomio de grado, a lo sumo, dos. Si evaluamos la fórmula de Rodrigues en $n = 1$, tenemos que

$$p_1(x) = k_1^{-1} w(x)^{-1} \frac{d}{dx} \left(\phi(x) w(x)\right) = k_1^{-1} w(x)^{-1} \phi'(x) w(x) + k_1^{-1} w(x)^{-1} \phi(x) w'(x)$$

lo cual es igual a

$$p_1(x) = k_1^{-1} \phi'(x) + k_1^{-1} w(x)^{-1} \phi(x) w'(x).$$

operando, obtenemos

$$\frac{w'(x)}{w(x)} = \frac{p_1(x) - k_1^{-1}\phi'(x)}{k_1^{-1}\phi(x)}.$$

Notemos que $\phi'(x)$ es un polinomio de grado a lo sumo uno y p_1 es un polinomio de grado uno. Por lo tanto, el peso w satisface una ecuación de la forma

$$\frac{w'(x)}{w(x)} = \frac{ax + b}{\phi(x)}, \tag{2.3.21}$$

donde a, b son constantes, ver también [7, (2.25)]. Esta ecuación se conoce como ecuación de Pearson. Considerando los distintos casos en que ϕ es un polinomio constante, de grado uno, de grado dos con raíces reales distintas, podemos resolver explícitamente la ecuación de Pearson (2.3.21) y probar que los polinomios p_n son los polinomios de Jacobi, Hermite o Laguerre. En la Sección 2.4 demostraremos que las Familias Clásicas satisfacen una fórmula de Rodrigues. Entre los pasos que seguiremos para demostrar esto, reescribiremos (2.3.21) de la forma

$$\widetilde{w}'(x) = w(x)(\phi'(x) + ax + b), \qquad \widetilde{w}(x) = w(x)\phi(x). \tag{2.3.22}$$

Entonces en la Sección 2.4, entre otras cosas, vemos que la ecuación de Pearson (2.3.22) implica que la sucesión de derivadas es ortogonal con respecto a un peso de la forma $\widetilde{w}(x) = w(x)\phi(x)$. En el caso de las Familias Clásicas, el nuevo peso $\widetilde{w}$ es positivo.

2.3.4. Fórmula de estructura

Otra propiedad que comparten las Familias Clásicas de polinomios ortogonales es que satisfacen una fórmula de estructura de la forma

$$\pi(x)p_n^{'}(x) = (\alpha_n x + \beta_n)p_n(x) + \gamma_n p_{n-1}(x), \tag{2.3.23}$$

donde $\pi(x)$ es un polinomio fijo. Notemos que el grado de $(\alpha_n x + \beta_n)p_n(x) + \gamma_n p_{n-1}(x)$ es a lo sumo $n+1$ y el de $p_n^{'}(x)$ es $n-1$, con lo cual $\pi(x)$ es de a lo sumo grado dos.

Para demostrar la fórmula (2.3.23), partimos de una ecuación de Pearson (2.3.22). Como ϕ es un polinomio de grado a lo sumo dos,

$$\phi(x)p_n'(x) = \sum_{j=0}^{n+1} a_j p_j(x),$$

donde $a_j = \langle \phi(x)p_n', p_j(x)\rangle \|p_j\|^{-2} = \|p_j\|^{-2}\int_{\mathbb{R}} \phi(x)p_n'(x)p_j(x)w(x)dx$. Como mencionamos al final de la Sección 2.3.3, $\widetilde{w}(x) = \phi(x)w(x)$, y por lo tanto la ecuación anterior se escribe como

$$a_j = \|p_j\|^{-2}\int_{\mathbb{R}} p_n'(x)p_j(x)\widetilde{w}(x)dx = 0, \qquad j < n-1.$$

Entonces

$$\phi(x)p_n'(x) = a_{n+1}p_{n+1}(x) + a_n p_n(x) + a_{n-1}p_{n-1}(x). \tag{2.3.24}$$

Y por el Corolario 2.12, el lado derecho de (2.3.24) se escribe como

$$a_{n+1}(xp_n(x) - b_n p_n(x) - c_n p_{n-1}(x)) + a_n p_n(x) + a_{n-1}p_{n-1}(x),$$

lo cual es igual a

$$(xa_{n+1} - a_{n+1}b_n + a_n)p_n(x) + (-a_{n+1}c_n + a_{n-1})p_{n-1}(x).$$

En conclusión,

$$\phi(x)p_n'(x) = (xa_{n+1} - a_{n+1}b_n + a_n)p_n(x) + (-a_{n+1}c_n + a_{n-1})p_{n-1}(x).$$

La recíproca de este resultado fue probada por Al-Salam y Chihara en [1], donde se demuestra que los polinomios ortogonales clásicos están también caracterizados por ser los únicos polinomios ortogonales que satisfacen una fórmula de estructura de la forma (2.3.23). Esta caracterización les permitió también probar una conjetura de Karlin y Szegö que desarrollamos en la siguiente subsección.

La caracterización de Al-Salam y Chihara podría probarse de la siguiente forma: Si $\{p_n\}$ es una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a $d\mu$ que satisface (2.3.23), entonces

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \int_{-\infty}^{\infty} \pi(x)p_n^{'}(x)p_m^{'}(x)d\mu(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p_n(x)p_m^{'}(x)(\alpha_n x + \beta_n)d\mu(x) + \gamma_n \int_{-\infty}^{\infty} p_{n-1}(x)p_m^{'}(x)d\mu(x) \\ &= 0 \quad si \quad m < n. \end{aligned}$$

Entonces, si puede ser probado que $I_{n,n}$ es distinto de cero si $n > 0$, se obtiene que $\{p_n'\}$ es una sucesión de polinomios ortogonales respecto a $\pi(x)d\mu(x)$. Sigue por del Teorema de Hahn, ver la Sección 2.3.2, que p_n es uno de los polinomios ortogonales clásicos. Esto puede ser probado fácilmente en el caso $\pi(x)$ constante o lineal, pero el caso $\pi(x)$ de grado dos presenta dificultades. En [1], Al-Salam y Chihara, dan una prueba directa y elemental, aunque algo tediosa, que no requiere utilizar el Teorema de Hahn.

Conjetura de Karlin y Szegö

En [22], Karlin y Szegö sugirieron tres conjeturas sobre caracterizaciones adicionales de los polinomios ortogonales clásicos. La primera de ellas es la existencia de una fórmula de la forma

$$r(x)p_n'(x) = \mu_n[p_{n-1}(x) + C(x)p_n(x)]\rho(x) \quad n \geq 0 \tag{2.3.25}$$

donde $C(x)$ es un polinomio, r y ρ son funciones arbitrarias. Observemos que para las familias clásicas, la fórmula de estructura da una fórmula del tipo (2.3.25), por lo que la dificutad radica en demostrar que (2.3.25) implica (2.3.23). Lo probamos a continuación.

Asumiendo que p_0 y p_1 son polinomios mónicos y tomando $n = 1$ en (2.3.25) se obtiene

$$r(x) = \mu_1[p_0(x) + C(x)p_1(x)]\rho(x).$$

Así, (2.3.25) se convierte en

$$\mu_1[1 + C(x)p_1(x)]p_n'(x) = \mu_n[p_{n-1}(x) + C(x)p_n(x)] \quad n \geq 0. \tag{2.3.26}$$

Comparando los coeficientes directores, sigue que $\mu_n = n\mu_1$. Ahora consideremos (2.3.26) para $n = 2$ y obtenemos

$$\mu_1[1 + C(x)p_1(x)]p_2'(x) = \mu_n[p_1(x) + C(x)p_2(x)],$$

lo cual puede ser reescrito del siguiente modo

$$p_2'(x) - 2p_1(x) = [2p_2(x) - p_1p_2'(x)]C(x).$$

El lado izquierdo de la ecuación anterior tiene grado menor o igual a uno. Por otro lado, $2p_2(x) - p_1p_2'(x)$ no es idénticamente cero, salvo que $p_2(x) = kp_1^2(x)$, lo cual es imposible ya que p_n satisface una relación de recurrencia de tres términos

$$xp_n(x) = p_{n+1}(x) + b_np_n(x) + c_np_{n-1}(x), \quad n \geq 0$$

$$p_{-1}(x) = 0, \quad p_0(x) = 1, \quad c_0 = 0 \quad n \geq 0$$

Y además, como p_n son mónicos, $2p_2(x) - p_1p_2'(x)$ es un polinomio de grado a lo sumo uno. Así, $C(x)$ es de grado menor o igual a uno y (2.3.26) es de la forma de (2.3.23) y $p_n(x)$ es una sucesión de polinomios ortogonales clásicos.

2.4. Deducción de la fórmula de Rodrigues para las Familias Clásicas

El objetivo de esta sección es demostrar que una familia de polinomios ortogonales que satisfaga una Ecuación de Pearson como en (2.3.21) tiene la propiedad de que sus derivadas son ortogonales. A partir de este hecho, podemos introducir *lowering* y *raising operators* que nos permiten deducir una fórmula de Rodrigues.

Este enfoque nos permitirá en la siguiente sección dar un resultado análogo para polinomios con ortogonalidad discreta y en los próximos capítulos análogos matriciales tanto discretos como continuos.

Teorema 2.17. *Sea w un peso positivo con soporte (a,b) y momentos finitos de todo orden y $\{p_n(x)\}_{n\geq 0}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos asociada a w. Supongamos que existen polinomios ψ, ϕ de grado, a lo sumo, uno y dos respectivamente tales que:*

1. $\left(p_n(x)\frac{d}{dx}p_m w(x)\phi(x)\right)|_a^b = 0,$
2. $\frac{d}{dx}(w\phi)(x) = w(x)\psi(x).$

Entonces, la sucesión de polinomios $\{\frac{d}{dx}p_n(x)\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de polinomios ortogonales con respecto $\widetilde{w}(x) = w(x)\phi(x)$.

Observación 2.18. *Observemos que la primer condición se satisface automáticamente si w decae exponencialmente en los extremos del soporte (a,b) o si el polinomio ϕ se anula en los extremos del soporte.*

Observación 2.19. *En el Teorema 2.17 se demuestra que la sucesión de polinomios $\{\frac{dp_n}{dx}\}$ es una sucesión de polinomios tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un polinomio de grado n en la sucesión: $\frac{dp_{n+1}}{dx}$. Por lo tanto, todo polinomio se puede escribir como combinación lineal de elementos de la sucesión $\{\frac{dp_n}{dx}\}_{n\geq 1}$. Además, estos polinomios satisfacen las relaciones de ortogonalidad*

$$\int_a^b \frac{dp_n}{dx}(x)\frac{dp_m}{dx}(x)\widetilde{w}(x)dx = 0, \qquad m < n.$$

Por esto, decimos que $\{\frac{d}{dx}p_n(x)\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a $\widetilde{w}$. Notemos que el Teorema 2.17 no garantiza, en principio, que el peso $\widetilde{w}$ sea positivo.

Demostración. Es claro que $\frac{dp_n}{dx}$ es un polinomio de grado $n-1$. Por lo tanto, para verificar que $\{\frac{dp_n}{dx}(x)\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a $\widetilde{w}(x)$, basta probar que

$$\int_a^b \frac{dp_n}{dx}(x)\frac{dp_m}{dx}(x)\widetilde{w}(x)dx = 0, \qquad m < n. \tag{2.4.27}$$

Integrando por partes, obtenemos que el lado izquierdo de (2.4.27) se escribe como

$$\left(p_n(x)\frac{dp_m}{dx}(x)\widetilde{w}(x)\right)\Bigg|_a^b - \int_a^b p_n(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{dp_m}{dx}(x)\widetilde{w}(x)\right)dx. \tag{2.4.28}$$

Luego, aplicando la regla de derivación del producto de funciones, obtenemos que la integral de (2.4.28) se escribe como

$$-\int_a^b p_n(x)\frac{d^2p_m}{dx^2}(x)\widetilde{w}(x)dx - \int_a^b p_n(x)\frac{dp_m}{dx}(x)\frac{d\widetilde{w}}{dx}(x)dx.$$

Por lo tanto, (2.4.28) se escribe como

$$p_n(x)\frac{dp_m}{dx}(x)\widetilde{w}(x)\Bigg|_a^b - \int_a^b p_n(x)\frac{d^2p_m}{dx^2}(x)\widetilde{w}(x)dx - \int_a^b p_n(x)\frac{dp_m}{dx}(x)\frac{d\widetilde{w}}{dx}(x)dx. \tag{2.4.29}$$

Utilizando la primer hipótesis en (2.4.29), tenemos que el primer sumando es igual a cero, y utilizando que $\frac{d}{dx}\widetilde{w}(x) = w(x)\psi(x)$ y $\widetilde{w}(x) = w(x)\phi(x)$ con ϕ, ψ polinomios de grados dos y uno respectivamente, (2.4.29), se escribe como

$$-\int_a^b p_n(x)\frac{d^2p_m}{dx^2}(x)w(x)\phi(x)dx - \int_a^b p_n(x)\frac{dp_m}{dx}(x)w(x)\psi(x)dx. \tag{2.4.30}$$

Como el grado de ϕ es menor o igual a 2 y el de $\frac{d^2p_m}{dx^2}$ es igual a $m-2$, el grado de $\frac{d^2p_m}{dx^2}\phi$ es menor o igual que m. Por lo tanto, el primer sumando de (2.4.30) es igual a cero si $m<n$.

Por otro lado, como el grado de ψ es menor o igual a 1 y el de $\frac{dp_m}{dx}$ es igual a $m-1$, el grado de $\frac{dp_m}{dx}\psi$ es menor o igual que m. Por lo tanto, el segundo sumando de (2.4.30) es igual a cero si $m<n$. □

Observación 2.20. *Bajo las hipótesis del Teorema 2.17, por la Proposición 2.7, si $\{r_n\}$ es una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a w, y si denotamos por a_n al coeficiente director de r_n, entonces, $\frac{dr_n}{dx}=a_n\frac{dp_n}{dx}$ es una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a $\widetilde{w}$.*

Dado w un peso positivo con momentos finitos, definimos

$$L^2(w)=\left\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}:\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2w(x)dx<\infty\right\}.$$

Asumimos que w satisface las hipótesis del Teorema 2.17 y que el peso $\widetilde{w}$ introducido en el mismo teorema es positivo. Así, podemos ver al operador

$$\frac{d}{dx}:L^2(w)\to L^2(\widetilde{w}),$$

como un operador que manda la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a w, $\{p_n\}_{n\geq 0}$, a la sucesión $\{\frac{d}{dx}p_n\}_{n\geq 1}$ que resulta ser una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a $\widetilde{w}$.

Inspirados en este hecho, supongamos que tenemos una familia de pesos positivos con momentos finitos de todo orden $w^{(\nu)}$ donde ν pertenece a un subconjunto $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}^n$ con la propiedad $v+\sigma\in\mathcal{V}$ para todo $v\in\mathcal{V}$ con σ un elemento fijo de $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo, en el caso de los polinomios de Jacobi, $\nu=(\alpha,\beta)$ y en el caso de los polinomios de Laguerre $\nu=\alpha$. Denotamos por $\langle\cdot,\cdot\rangle_{(\nu)}$ el producto interno inducido por $w^{(\nu)}$, es decir

$$\langle p,q\rangle_{(\nu)}=\int_{\mathbb{R}}p(x)\overline{q(x)}w^{(\nu)}dx.$$

Supongamos que $w^{(\nu)}$ satisface las hipótesis del Teorema 2.17. En particular, suponemos que existen polinomios $\phi^{(\nu)}$ y $\psi^{(\nu)}$ de grados 2 y 1 respectivamente tales que

$$\frac{d}{dx}\left(w^{(\nu)}(x)\phi^{(\nu)}(x)\right)=w^{(\nu)}(x)\psi^{(\nu)}(x).$$

Además, asumimos que $w^{(\nu)}(x)\phi^{(\nu)}(x)=w^{(\nu+\sigma)}(x)$. Como consecuencia del Teorema 2.17, podemos ver que la derivada con respecto a x como un operador

$$\frac{d}{dx}:L^2\left(w^{(\nu)}\right)\to L^2\left(w^{(\nu+\sigma)}\right).$$

En nuestro caso, $\frac{d}{dx}$ tiene un adjunto que se puede calcular de manera explícita.

Teorema 2.21. *Sea $\{w^{(\nu)}\}$ una familia de pesos positivos con soporte (a,b) y momentos finitos de todo orden que satisface las hipótesis del Teorema 2.17 para todo $\nu\in\mathcal{V}$. Dado $q\in\mathbb{C}[x]$, sea*

$$s^{(\nu)}q(x)=-\left[q(x)\psi^{(\nu)}(x)+\frac{dq}{dx}(x)\phi^{(\nu)}(x)\right]$$

entonces

$$\langle \frac{dp}{dx}, q\rangle_{(\nu+\sigma)} = \langle p, s^{(\nu)}q\rangle_{(\nu)}$$

para todos polinomios $p, q \in \mathbb{C}[x]$.

Demostración. Utilizando la definición del producto interno, tenemos

$$\left\langle \frac{dp}{dx}, q\right\rangle_{(\nu+\sigma)} = \int_a^b \frac{dp}{dx}(x)\overline{q(x)}w^{(\nu+\sigma)}(x)dx.$$

Integrando por partes, el lado derecho se escribe como

$$p(x)\overline{q(x)}w^{(\nu+\sigma)}(x)\big|_a^b - \int_a^b p(x)\frac{d}{dx}\left(\overline{q(x)}w^{(\nu+\sigma)}(x)\right)dx. \tag{2.4.31}$$

Por el Teorema 2.17, $\{p_n\}$ y $\{\frac{dp_n}{dx}\}$ son dos bases del espacio de polinomios $\mathbb{C}[x]$ y $w^{(\nu+\sigma)}(x) = w^{(\nu)}\phi^{(\nu)}$. Entonces, por la primer hipótesis del Teorema 2.17, tenemos que $p(x)\overline{q(x)}w^{(\nu+\sigma)}(x)\big|_a^b = 0$. Utilizando esto y la regla de derivación del producto de funciones, (2.4.31) se escribe como

$$-\int_a^b p(x)\left(\frac{d\overline{q}}{dx}(x)w^{(\nu+\sigma)}(x) + \overline{q(x)}\frac{dw^{(\nu+\sigma)}}{dx}(x)\right)dx.$$

Como $w^{(\nu+\sigma)}(x) = w^{(\nu)}(x)\phi^{(\nu)}(x)$ y $\frac{d}{dx}w^{(\nu+\sigma)}(x) = w^{(\nu)}(x)\psi^{(\nu)}(x)$, tenemos

$$-\int_a^b p(x)\left(\frac{d\overline{q}}{dx}(x)w^{(\nu)}(x)\phi^{(\nu)}(x) + \overline{q(x)}w^{(\nu)}(x)\psi^{(\nu)}(x)\right)dx,$$

lo cual es igual a

$$-\int_a^b p(x)\left(\phi^{(\nu)}(x)\frac{d\overline{q}}{dx}(x) + \psi^{(\nu)}(x)\overline{q(x)}\right)w^{(\nu)}(x)dx. \tag{2.4.32}$$

Y como los pesos son positivos, $\phi^{(\nu)}$ y $\psi^{(\nu)}$ son a valores reales, entonces

$$\left(\psi^{(\nu)}\overline{q} + \phi^{(\nu)}\frac{d\overline{q}}{dx}\right)(x) = \overline{\left(\psi^{(\nu)}q + \phi^{(\nu)}\frac{dq}{dx}\right)}(x).$$

Por lo tanto, la ecuación (2.4.32) es igual a

$$-\int_a^b p(x)\overline{\left(\psi^{(\nu)}q + \phi^{(\nu)}\frac{dq}{dx}\right)}(x)w^{(\nu)}(x)dx = \langle p, s^{(\nu)}q\rangle_{(\nu)}.$$

En conclusión, $\langle \frac{dp}{dx}, q\rangle_{(\nu+\sigma)} = \langle p, s^{(\nu)}q\rangle_{(\nu)}$ como se quería probar. □

Como consecuencia del Teorema 2.17, $\{\frac{d}{dx}p_n^{(\nu)}\}$ es una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a $w^{(\nu+\sigma)}(x)$. Así $\frac{d}{dx}p_n^{(\nu)} = k_n p_{n-1}^{(\nu+\sigma)}$ donde k_n es un número complejo. Como los polinomios $p_n^{(\nu)}$ y $p_{n-1}^{(\nu+\sigma)}$ son mónicos y el coeficiente director de $\frac{d}{dx}p_n^{(\nu)}$ es n, tenemos que $k_n = n$.

Observación 2.22. *Sea* $\{p_n^{(\nu)}\}$ *la sucesión de polinomios ortogonales mónicos asociada a* $w^{(\nu)}$*. Notemos que*

$$s^{(\nu)}p_{n-1}^{(\nu+\sigma)}(x) = -\frac{dp_{n-1}^{(\nu+\sigma)}}{dx}(x)\phi^{(\nu)}(x) - p_{n-1}^{(\nu+\sigma)}(x)\psi^{(\nu)}(x),$$

es un polinomio de grado n*, digamos entonces*

$$s^{(\nu)}p_{n-1}^{(\nu+\sigma)}(x) = k_n p_n^{(\nu)}(x) + k_{n-1}p_{n-1}^{(\nu)}(x) + \ldots + k_0 p_0^{(\nu)}(x).$$

Como ocurre que

$$\langle p_m^{(\nu)}, s^{(\nu)}p_{n-1}^{(\nu+\sigma)}\rangle_{(\nu)} = \langle \frac{dp_m^{(\nu)}}{dx}, p_{n-1}^{(\nu+\sigma)}\rangle_{(\nu+\sigma)} = \langle mp_{m-1}^{(\nu+\sigma)}, p_{n-1}^{(\nu+\sigma)}\rangle_{(\nu+\sigma)} = 0,$$

si $m-1 < n-1$*, es decir si* $m < n$*, y como también ocurre que para* $m < n$

$$\langle p_m^{(\nu)}, s^{(\nu)}p_{n-1}^{(\nu+\sigma)}\rangle_{(\nu)} = \sum_{j=0}^{n} \overline{k_j}\langle p_m^{(\nu)}, p_j^{(\nu)}\rangle_{(\nu)} = \overline{k_m}\|p_m\|^2,$$

tenemos que $k_m = 0$ *si* $m < n$ *y en conclusión*

$$s^{(\nu)}p_{n-1}^{(\nu+\sigma)}(x) = k_n p_n^{(\nu)}(x).$$

Como $p_n^{(\nu)}$ *es mónico, el coeficiente director de* $s^{(\nu)}p_{n-1}^{(\nu+\sigma)}$ *es* k_n*. A su vez, sea* $\alpha^{(\nu)}$ *el coeficiente de* x^2 *en* $\phi^{(\nu)}(x)$ *y sea* $\beta^{(\nu)}$ *el coeficiente de* x *en* $\psi^{(\nu)}(x)$*. entonces*

$$k_n = cd\, s^{(\nu)}p_{n-1}^{(\nu+\sigma)} = -((n-1)\alpha^{(\nu)} + \beta^{(\nu)}). \tag{2.4.33}$$

De ahora en adelante, supondremos $k_n \neq 0$*.*

Como consecuencia del Teorema 2.17, podemos ver que a la derivada con respecto a x como un *lowering operator*

$$\frac{d}{dx} : L^2\left(w^{(\nu)}\right) \to L^2\left(w^{(\nu+\sigma)}\right),$$

y a su adjunto $s^{(\nu)}$ como un *raising operator*

$$s^{(\nu)} : L^2\left(w^{(\nu+\sigma)}\right) \to L^2\left(w^{(\nu)}\right).$$

Teorema 2.23 (Fórmula de Rodrigues)**.** *Sea* $\{w^{(\nu)}\}$ *una familia de pesos positivos con soporte* (a,b) *y momentos finitos de todo orden que satisface las hipótesis del Teorema 2.17. Entonces la sucesión de polinomios mónicos respecto a* $w^{(\nu)}$ *está dada por*

$$p_n^{(\nu)}(x) = (k_1 \ldots k_n)^{-1}(-1)^n \frac{d^n w^{(\nu+n\sigma)}(x)}{dx^n}(w^{(\nu)}(x))^{-1},$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$ *y* $\nu \in \mathcal{V}$*, donde* k_n *está dado en* (2.4.33)*.*

Demostración. Veamos por inducción que dado un polinomio q,

$$s^{(\nu)}\dots s^{(\nu+(n-1)\sigma)}q = (-1)^n\left(\frac{d^n}{dx^n}w^{(\nu+n\sigma)}q\right)(w^{(\nu)})^{-1} \tag{2.4.34}$$

para todo n en $\mathbb{N}$.

Procedemos para el caso $n = 1$, usando la definición de $s^{(\nu)}$, tenemos

$$s^{(\nu)}q(x) = -\left[\frac{dq}{dx}(x)\phi^{(\nu)}(x) + q(x)\psi^{(\nu)}(x)\right]. \tag{2.4.35}$$

Como la familia de pesos $\{w^{(\nu)}\}$ satisface las hipótesis del Teorema 2.17 sucede que

$$\phi^{(\nu)}(x) = w^{(\nu+\sigma)}(x)(w^{(\nu)}(x))^{-1} \quad \text{y que} \quad \psi^{(\nu)}(x) = \left(\frac{d}{dx}w^{(\nu+\sigma)}(x)\right)(w^{(\nu)}(x))^{-1}.$$

Tenemos que el lado derecho de (2.4.35) se escribe como

$$-\left[\frac{dq}{dx}(x)w^{(\nu+\sigma)}(x)(w^{(\nu)}(x))^{-1} + q(x)\left(\frac{d}{dx}w^{(\nu+\sigma)}(x)\right)(w^{(\nu)}(x))^{-1}\right]. \tag{2.4.36}$$

Lo cual es igual a

$$-\left(\frac{d}{dx}q(x)w^{(\nu+\sigma)}(x)\right)(w^{(\nu)}(x))^{-1}.$$

Así, queda probado para $n = 1$. Paso inductivo: supongamos que vale para $1, \dots, n-1$, es decir vale que

$$s^{(\nu)}\dots s^{(\nu+(n-1)\sigma)}q(x) = (-1)^n\left(\frac{d^n}{dx^n}w^{(\nu+n\sigma)}(x)q(x)\right)(w^{(\nu)}(x))^{-1} \tag{2.4.37}$$

Veamos que vale para n.

$$s^{(\nu)}\dots s^{(\nu+n\sigma)}q(x) = s^{(\nu)}\dots s^{(\nu+(n-1)\sigma)}\left(-\frac{d}{dx}w^{(\nu+(n+1)\sigma)}(x)q(x)\right)(w^{(\nu+n\sigma)}(x))^{-1}. \tag{2.4.38}$$

Usando la hipótesis inductiva en el lado derecho de (2.4.38), tenemos

$$(-1)^{n+1}\frac{d^n}{dx^n}\left(-\frac{d(w^{(\nu+(n+1)\sigma)}q)}{dx}(x)(w^{(\nu+n\sigma)}(x))^{-1}w^{(\nu+n\sigma)}(x)\right)(w^{(\nu)}(x))^{-1},$$

lo cual es igual a

$$(-1)^{n+1}\frac{d^{n+1}(w^{(\nu+(n+1)\sigma)}q)}{dx^{n+1}}(x)(w^{(\nu)}(x))^{-1}.$$

Así, la afirmación (2.4.34) es válida para todo $n \in \mathbb{N}$. Notemos que $s^{(\nu)}1 = k_1p_1^{(\nu)}$, $s^{(\nu)}s^{(\nu+\sigma)}1 = k_1s^{(\nu)}p_1^{(\nu+\sigma)} = k_1k_2p_2^{(\nu)}$. En general, se tiene

$$s^{(\nu)}\dots s^{(\nu+(n-1)\sigma)}1 = k_1\dots k_np_n^{(\nu)},$$

con k_i inversibles para todo i por lo supuesto en la observación 2.22. Luego,

$$\begin{aligned} p_n^{(\nu)} &= (k_1\dots k_n)^{-1}s^{(\nu)}\dots s^{(\nu+(n-1)\sigma)}1 \\ &= (k_1\dots k_n)^{-1}(-1)^n\frac{d^nw^{(\nu+n\sigma)}}{dx^n}(w^{(\nu)})^{-1}. \end{aligned}$$

Esto concluye la prueba del teorema. □

A continuación vemos que las tres familias clásicas de polinomios ortogonales satisfacen las hipótesis del Teorema 2.17, describimos la sucesión de derivadas, el operador $s^{(\nu)}$ y la fórmula de Rodrigues.

2.4.1. Ejemplo: Polinomios de Hermite

En este caso, tenemos

$$w^{(\nu)}(x) = w(x) = e^{-x^2}, \qquad \frac{d}{dx}w^{(\nu+1)}(x) = -2xw(x),$$

con lo cual, tomando $\phi^{(\nu)}(x) = 1, \psi^{(\nu)}(x) = -2x$, se verifica el punto 2 del Teorema 2.17. Por otro lado, el punto 1 se verifica trivialmente ya que w decae exponencialmente en los extremos del soporte. Por el Teorema 2.17 la sucesión de derivadas de los polinomios ortogonales mónicos asociada a w, $\{\frac{d}{dx}p_n\}$ es ortogonal en $(-\infty, \infty)$ respecto a $w(x)$.
En este caso, el operador $s^{(\nu)}$ se escribe explícitamente como

$$s^{(\nu)}q(x) = -\left[q(x)(-2x) + \frac{dq}{dx}(x)\right].$$

En vistas de la Observación 2.22, tenemos

$$s^{(\nu)}p_{n-1} = 2p_n.$$

Sumado a esto, la fórmula de Rodrigues en este caso tiene la siguiente expresión

$$e^{-x^2}p_n(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}.$$

2.4.2. Ejemplo: Polinomios de Laguerre

En este caso, tenemos

$$w^{(\alpha+j)}(x) = x^{\alpha+j}e^{-x}, \quad \frac{d}{dx}w^{(\alpha+j+1)}(x) = [(\alpha+j+1)-x]w^{(\alpha+j)}(x),$$

con lo cual, tomando $\phi^{(\alpha+j)}(x) = x, \psi^{(\alpha+j)}(x) = [(\alpha+j+1)-x]$, se verifica el punto 2 del Teorema 2.17. Por otro lado, el punto 1 se verifica ya que $w^{(\alpha)}\phi^{(\alpha)}$ decae exponencialmente cuando $x \to \infty$ y se anula en $x = 0$ ya que $\alpha > -1$. Por el Teorema 2.17 la sucesión de derivadas de los polinomios ortogonales mónicos asociada a $w^{(\alpha+j)}$, $\{\frac{d}{dx}p_n^{(\alpha+j)}\}$, es ortogonal en $(0, \infty)$ respecto a $w^{(\alpha+j+1)}(x)$.
En este caso, el operador $s^{(\nu)}$ se escribe explícitamente como

$$s^{(\alpha+j)}q = -\left[q(x)((\alpha+j+1)-x) + \frac{dq}{dx}(x)x\right].$$

En vistas de la oservación 2.22, tenemos

$$s^{(\alpha+j)}p_{n-1}^{(\alpha+j+1)} = p_n^{(\alpha+j)}.$$

Sumado a esto, la fórmula de Rodrigues en este caso tiene la siguiente expresión

$$w^{(\alpha+j)}p_n^{(\alpha+j)} = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}x^{\alpha+j+n}e^{-x}.$$

2.4.3. Ejemplo: Polinomios de Jacobi

En este caso, tenemos

$$w^{(\alpha+j,\beta+j)}(x) = (1-x)^{\alpha+j}(1+x)^{\beta+j},$$

$$\frac{d}{dx}w^{(\alpha+j+1,\beta+j+1)}(x) = [-(\alpha+j+1)(1+x)+(\beta+j+1)(1-x)]w^{(\alpha,\beta)}(x),$$

con lo cual, tomando $\phi^{(\alpha+j,\beta+j)}(x) = (1-x)(1+x), \psi^{(\alpha+j,\beta+j)}(x) = [-(\alpha+j+1)(1+x)+(\beta+j+1)(1-x)]$ se verifica el punto 2 del Teorema 2.17. Por otro lado, el punto 1 se verifica ya que $w^{(\alpha,\beta)}\phi^{(\alpha,\beta)}$ se anula en $x=1$ ya que $\alpha > -1$ y en $x=-1$ ya que $\beta > -1$. Por el Teorema 2.17 la sucesión de derivadas de los polinomios ortogonales mónicos asociada a $w^{(\alpha+j,\beta+j)}$, $\{\frac{d}{dx}p_n^{(\alpha+j,\beta+j)}\}$, es ortogonal en $(-1,1)$ respecto a $w^{(\alpha+j+1,\beta+j+1)}(x)$.
En este caso, el operador $s^{(\nu)}$ se escribe explícitamente como

$$s^{(\alpha+j,\beta+j)}q(x) = -\left[(-(\alpha+j+1)(1+x)+(\beta+j+1)(1-x))q(x)+(1-x)(1+x)\frac{dq}{dx}(x)\right].$$

En vistas de la oservación 2.22, tenemos

$$s^{(\alpha+j,\beta+j)}p_{n-1}^{(\alpha+j+1,\beta+j+1)} = (n-1+(\alpha+j+1)+(\beta+j+1))p_n.$$

Sumado a esto, la fórmula de Rodrigues en este caso tiene la siguiente expresión

$$(1-x)^{\alpha+j}(1+x)^{\beta+j}p_n^{(\alpha+j,\beta+j)} = (-1)^n\left(\prod_{k=1}^{n}(k-1+(\alpha+j+1)+(\beta+j+1))\right)$$
$$\frac{d^n}{dx^n}(1-x)^{\alpha+j+n}(1+x)^{\beta+j+n}.$$

2.5. Operador diferecial de segundo orden

Suponiendo que estamos en un contexto similar al de la sección anterior, es decir, consideraremos una familia de pesos $w^{(\nu)}$ positivos con soporte (a,b) y con momentos finitos de todo orden, donde ν pertenece a un subconjunto $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}^n$ con la propiedad $v+\sigma \in \mathcal{V}$ para todo $v \in \mathcal{V}$ con σ un elemento fijo de $\mathbb{R}^n$. Supondremos $w^{(\nu)}$ satisface las hipótesis del Teorema 2.17 para todo $\nu \in \mathcal{V}$. En particular, existen polinomios $\phi^{(\nu)}$ y $\psi^{(\nu)}$ de grados 2 y 1 respectivamente tales que

$$\frac{d}{dx}\left(w^{(\nu)}(x)\phi^{(\nu)}(x)\right) = w^{(\nu)}(x)\psi^{(\nu)}(x). \tag{2.5.39}$$

Además, asumimos que $w^{(\nu)}(x)\phi^{(\nu)}(x) = w^{(\nu+\sigma)}(x)$. Como consecuencia del Teorema 2.17, podemos ver que a la derivada con respecto a x como un *lowering operator*

$$\frac{d}{dx} : L^2\left(w^{(\nu)}\right) \to L^2\left(w^{(\nu+\sigma)}\right).$$

y a $s^{(\nu)}$ como un *raising operator*

$$s^{(\nu)} : L^2\left(w^{(\nu+\sigma)}\right) \to L^2\left(w^{(\nu)}\right).$$

Con lo cual tiene sentido considerar los operadores D_1 y D_2 definidos por

$$D_1 = \frac{d}{dx} \circ s^{(\nu-\sigma)} : L^2\left(w^{(\nu)}\right) \to L^2\left(w^{(\nu)}\right),$$

$$D_2 = s^{(\nu)} \circ \frac{d}{dx} : L^2\left(w^{(\nu)}\right) \to L^2\left(w^{(\nu)}\right).$$

Usando la Proposición 2.21 vemos que los operadores D_1 y D_2 son de orden dos y pueden ser escritos de forma explícita

$$\begin{aligned} p^{(\nu)}(x)D_1 &= \left(\frac{d}{dx} \circ s^{(\nu-\sigma)}\right) p^{(\nu)} = -\frac{d}{dx}\left[\frac{dp^{(\nu)}}{dx}\phi^{(\nu-\sigma)} + p^{(\nu)}\psi^{(\nu-\sigma)}\right] \\ &= -\frac{d^2p^{(\nu)}}{dx^2}\phi^{(\nu-\sigma)} - \frac{dp^{(\nu)}}{dx}\left[\frac{d\phi^{(\nu-\sigma)}}{dx} + \psi^{(\nu-\sigma)}\right] - p^{(\nu)}\frac{d\psi^{(\nu-\sigma)}}{dx}. \end{aligned}$$

$$p^{(\nu)}(x)D_2 = \left(s^{(\nu)} \circ \frac{d}{dx}\right) p^{(\nu)} = -\left[\frac{d^2p^{(\nu)}}{dx^2}\phi^{(\nu)} + \frac{dp^{(\nu)}}{dx}\psi^{(\nu)}\right].$$

Notemos que estas dos últimas expresiones pueden en principio ser distintas. Además, estos operadores son simétricos respecto a $w^{(\nu)}$ ya que por ser $s^{(\nu)}$ adjunto de $\frac{d}{dx}$, ocurre que dado dos polinomios p, q

$$\begin{aligned} \langle pD_1, q\rangle_{(\nu)} = \left\langle \left(\frac{d}{dx} \circ s^{(\nu-\sigma)}\right) p, q\right\rangle_{(\nu)} = \left\langle s^{(\nu-\sigma)}p, s^{(\nu-\sigma)}q\right\rangle_{(\nu)} = \left\langle p, \left(\frac{d}{dx} \circ s^{(\nu-\sigma)}\right) q\right\rangle_{(\nu)} \\ = \langle p, qD_1\rangle_{(\nu)}, \end{aligned}$$

y de la misma forma, tenemos

$$\begin{aligned} \langle pD_2, q\rangle_{(\nu)} = \left\langle \left(s^{(\nu)} \circ \frac{d}{dx}\right) p, q\right\rangle_{(\nu)} = \left\langle \frac{d}{dx}p, \frac{d}{dx}q\right\rangle_{(\nu)} = \left\langle p, \left(s^{(\nu)} \circ \frac{d}{dx}\right) q\right\rangle_{(\nu)} \\ = \langle p, qD_2\rangle_{(\nu)}. \end{aligned}$$

Además, vimos en la Observación 2.22, que $s^{(\nu)}p_{n-1}^{(\nu+\sigma)}$ es un múltiplo de $p_n^{(\nu)}$ digamos

$$s^{(\nu)}p_{n-1}^{(\nu+\sigma)} = k_n^{(\nu)}p_n^{(\nu)}.$$

Usando esto, se puede ver que los polinomios ortogonales mónicos asociados a $w^{(\nu)}$ son autofunciones de los operadores D_1 y D_2

$$p_{n-1}^{(\nu)}(x)D_1 = \left(\frac{d}{dx} \circ s^{(\nu-\sigma)}\right) p_{n-1}^{(\nu)}(x) = \frac{d}{dx}k_n^{(\nu-\sigma)}p_n^{(\nu-\sigma)} = nk_n^{(\nu-\sigma)}p_{n-1}^{(\nu)},$$

$$p_n^{(\nu)}(x)D_2 = \left(s^{(\nu)} \circ \frac{d}{dx}\right) p_n^{(\nu)}(x) = s^{(\nu)}np_{n-1}^{(\nu+\sigma)} = nk_n^{(\nu)}p_n^{(\nu)}(x).$$

2.6. Familias discretas con soporte infinito

En esta sección estudiamos un análogo discreto de la ecuación de Pearson (2.3.21) que permite derivar propiedades de las familias de polinomios ortogonales discretos: Fórmula de Rodrigues, fórmula de estructura, ecuación en diferencias de segundo orden, y ortogonalidad de la sucesión $\{\Delta p_n\}$. Nos enfocaremos en el caso de que la medida de ortogonalidad tenga soporte infinito, aunque el caso finito puede tratarse de manera similar.

Consideramos una medida de ortogonalidad positiva discreta con momentos finitos de todo orden de la forma

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_0} w_k\delta_k,$$

con $w_k \in \mathbb{R}_{>0}$ para casi para todo k. Es decir, la medida $d\mu(x)$ es puramente discreta y está determinada por una sucesión de números positivos w_k, $k \in \mathbb{N}_0$. Por simplicidad, identificaremos a la medida con un peso $w(x)$ tal que $w(k) = w_k$ si $k \in \mathbb{N}_0$ y $w(x) = 0$ para todo $x \notin \mathbb{N}_0$. El requerimiento de que w tenga momentos finitos de todo orden se traduce en que la suma

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^j w(k) < \infty \tag{2.6.40}$$

para todo $j \in \mathbb{N}_0$. Como en las secciones anteriores, el peso w induce un producto interno de la forma

$$\langle p, q\rangle_w = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} p(k)\overline{q(k)}w(k), \tag{2.6.41}$$

donde p y q son polinomios. En este contexto de ortogonalidad discreta, tenemos que existe una única sucesión $\{p_n\}$ de polinomios ortogonales mónicos con respecto a w

$$\langle p_n, p_m\rangle_w = \sum_{k=0}^{\infty} p_n(k)p_m(k)w(k).$$

Observación 2.24. *El hecho que w tenga momentos finitos de cualquier orden tiene dos consecuencias importantes. En primer lugar, dados dos polinomios $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ y $q(x) = x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0$, tenemos que*

$$\sum_{k=0}^{N} p(k)q(k)w(k) = \sum_{k=0}^{N}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} k^{i+j}a_ib_jw(k) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_ib_j\left(\sum_{k=0}^{N} k^{i+j}w(k)\right).$$

Por lo tanto, (2.6.40) *implica que el límite*

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N} p(k)q(k)w(k), \tag{2.6.42}$$

existe y es finito. Por otro lado, la convergencia del límite anterior implica que

$$\lim_{k\to\infty} p(k)q(k)w(k) = 0, \tag{2.6.43}$$

para todo par de polinomios p y q.

2.6.1. Ecuaciones de Pearson Discretas

En esta subsección estudiamos un análogo discreto de la ecuación de Pearson (2.3.21) y algunas propiedades que son consecuencia de la misma. Dada una función $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, consideramos los operadores en diferencias Δ y ∇ definidos por

$$\Delta g(x) = g(x+1) - g(x), \qquad \nabla g(x) = g(x) - g(x-1) = \Delta g(x-1).$$

Dado un polinomio p de grado n, digamos $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, el polinomio

$$\begin{aligned}\Delta p(x) =& (a_n(x+1)^n + a_{n-1}(x+1)^{n-1} + \cdots + a_0) - (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0) \\ =& \, n a_n x^{n-1} + \text{términos de grado menor}, \end{aligned} \tag{2.6.44}$$

es un polinomio de grado $n-1$. Además, aplicando Δ a (2.6.44), vemos que $\Delta^2 p$ es un polinomio de grado $n-2$. Y en general, para $k \leq n$, $\Delta^k p$ es un polinomio de grado $n-k$ y si $k > n$, $\Delta^k p$ es identicamente cero. Además, tenemos que

$$\nabla p(x) = \Delta p(x-1),$$

es un polinomio de grado $n-1$ y análogamente, tenemos que $\nabla^k p$ es un polinomio de grado $n-k$ si $k \leq n$ y es idénticamente cero si $k > n$.

Observación 2.25. *Los operadores Δ y ∇ conmutan. Esto puede ser probado, usando la defnción de los mismos ya que*

$$\Delta\nabla g(x) = \Delta(g(x) - g(x-1)) = \Delta g(x) - \Delta g(x-1) = g(x+1) - 2g(x) + g(x-1),$$

$$\nabla\Delta g(x) = \nabla(g(x+1) - g(x)) = \nabla g(x+1) - \nabla g(x) = g(x+1) - 2g(x) + g(x-1).$$

Por lo cual $\Delta\nabla = \nabla\Delta$.

Lema 2.26. *Dadas funciones f, $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, se cumple que:*

$$\sum_{x=0}^{N} \Delta g(x) f(x) = g(N+1)f(N+1) - g(0)f(0) - \sum_{x=0}^{N} g(x+1)\Delta f(x). \tag{2.6.45}$$

Demostración. Usando la definición del operador Δ, tenemos que

$$\sum_{x=0}^{N} \Delta g(x) f(x) = \sum_{x=0}^{N} g(x+1)f(x) - \sum_{x=0}^{N} g(x)f(x). \tag{2.6.46}$$

Ahora reescribimos la segunda suma del lado derecho de (2.6.46) en términos de $f(x+1)$ y $g(x+1)$:

$$\begin{aligned}&\sum_{x=0}^{N} g(x+1)f(x) - \left(g(0)f(0) + \sum_{x=0}^{N} g(x+1)f(x+1) - g(N+1)f(N+1)\right) \\ &\qquad = g(N+1)f(N+1) - g(0)f(0) - \sum_{x=0}^{N} g(x+1)\Delta f(x).\end{aligned}$$

Esto completa la demostración del lema. $\square$

Lema 2.27 (Regla de Leibniz)**.** *Dadas $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, se cumple que:*

$$(\Delta fg)(x) = f(x+1)\Delta g(x) + \Delta f(x)g(x) = \Delta f(x)g(x+1) + f(x)\Delta g(x) \tag{2.6.47}$$

Demostración. Usando la definición del operador Δ, tenemos que

$$(\Delta fg)(x) = f(x+1)g(x+1) - f(x)g(x). \tag{2.6.48}$$

Sumando y restando $f(x+1)g(x)$ en el miembro derecho de (2.6.48), tenemos

$$f(x+1)g(x+1) - f(x+1)g(x) + f(x+1)g(x) - f(x)g(x). \tag{2.6.49}$$

Usando nuevamente la definición del operador Δ, (2.6.49) es igual a

$$f(x+1)\Delta g(x) + \Delta f(x)g(x).$$

Así, hemos probado la primer igualdad de (2.6.47), es decir

$$(\Delta fg)(x) = f(x+1)\Delta g(x) + \Delta f(x)g(x).$$

Para probar la segunda igualdad de (2.6.47), sumamos y restamos $f(x)g(x+1)$ en el miembro derecho de (2.6.48) y obtenemos

$$f(x+1)g(x+1) - f(x)g(x+1) + f(x)g(x+1) - f(x)g(x). \tag{2.6.50}$$

Usando nuevamente la definición del operador Δ, (2.6.50) es igual a

$$\Delta f(x)g(x+1) + f(x)\Delta g(x).$$

Así, hemos probado la segunda igualdad de (2.6.47), es decir

$$(\Delta fg)(x) = \Delta f(x)g(x+1) + f(x)\Delta g(x).$$

Esto concluye la prueba del lema. □

Teorema 2.28. *Sea w un peso positivo con momentos finitos de todo orden y soporte en $\mathbb{N}_0$ y $\{p_n\}_{n\geq 0}$ la sucesión de polinomios mónicos tales que*

$$\sum_{x\geq 0} p_n(x)p_m(x)w(x) = 0 \, si \quad m < n.$$

Supongamos que existen polinomios ψ, ϕ de grado, a lo sumo, uno y dos respectivamente tales que:

$$\nabla\widetilde{w}(x) = (\Delta\widetilde{w})(x-1) = w(x)\psi(x),$$

donde $\widetilde{w}(x) = w(x)\phi(x)$. Entonces, la sucesión de polinomios $\{\Delta p_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a $\widetilde{w}(x)$.

Observación 2.29. *En el Teorema 2.28 se demuestra que la sucesión de polinomios $\{\Delta p_n\}_{n\geq 1}$ es tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un polinomio de grado n en la sucesión: Δp_{n+1}. Por lo tanto todo polinomio se puede escribir como combinación lineal de elementos de la sucesión $\{\Delta p_n\}_{n\geq 1}$. Además estos polinomios satisfacen las relaciones de ortogonalidad*

$$\sum_{x=0}^{\infty} \Delta p_n(x)\Delta p_m(x)\widetilde{w}(x) = 0, \quad m < n.$$

Por esto decimos que $\{\Delta p_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a $\widetilde{w}$. Notemos que el Teorema 5.6 no garantiza, en principio, que el peso $\widetilde{w}$ sea positivo.

Demostración. Por (2.6.44) tenemos que Δp_n es un polinomio de grado $n-1$. Por lo tanto, para verificar que $\{\Delta p_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a $\widetilde{w}$, basta probar que

$$\sum_{x=0}^{\infty} \Delta p_n(x)\Delta p_m(x)\widetilde{w}(x) = \lim_{N\to\infty} \left[\sum_{x=0}^{N} \Delta p_n(x)\Delta p_m(x)\widetilde{w}(x)\right] = 0, \quad m < n. \tag{2.6.51}$$

Aplicando el Lema 2.26 a la suma finita de la segunda igualdad de (2.6.51) obtenemos

$$\sum_{x=0}^{N}(\Delta p_n \Delta p_m \widetilde{w})(x) = (p_n \Delta p_m \widetilde{w})(N+1) - (p_n \Delta p_m \widetilde{w})(0) - \sum_{x=0}^{N} p_n(x+1)\Delta(\Delta p_m \widetilde{w})(x). \tag{2.6.52}$$

Si denotamos a $(p_n \widetilde{w} \Delta p_m)(N+1) - (p_n \widetilde{w} \Delta p_m)(0)$ por A_N y aplicamos la regla de Leibniz 2.27, obtenemos que (2.6.52) es igual a

$$A_N - \sum_{x=0}^{N} p_n(x+1)\left(\Delta^2 p_m(x)\widetilde{w}(x+1) + \Delta p_m(x)\Delta\widetilde{w}(x)\right).$$

Cambiando el índice de la suma, tenemos

$$A_N - \sum_{y=1}^{N+1} p_n(y)\Delta^2 p_m(y-1)\widetilde{w}(y) - \sum_{y=1}^{N+1} p_n(y)\Delta p_m(y-1)\Delta\widetilde{w}(y-1).$$

Sumando y restando el término $p_n(0)\Delta^2 p_m(-1)\widetilde{w}(0) + p_n(0)\Delta p_m(-1)\Delta\widetilde{w}(-1)$, que es corresponde a la suma de los términos $y = 0$ de las sumas anteriores, tenemos

$$\begin{aligned} A_N - \sum_{y=0}^{N+1} p_n(y)\Delta^2 p_m(y-1)\widetilde{w}(y) - \sum_{y=0}^{N+1} p_n(y)\Delta p_m(y-1)\Delta\widetilde{w}(y-1) \\ + p_n(0)\Delta^2 p_m(-1)\widetilde{w}(0) + p_n(0)\Delta p_m(-1)\Delta\widetilde{w}(-1). \end{aligned} \tag{2.6.53}$$

Ahora veamos que

$$A_N + p_n(0)\Delta^2 p_m(-1)\widetilde{w}(0) + p_n(0)\Delta p_m(-1)\Delta\widetilde{w}(-1) = (p_n \Delta p_m \widetilde{w})(N+1). \tag{2.6.54}$$

En primer lugar, observemos que

$$\Delta p_m(-1) = p_m(0) - p_m(-1), \qquad \Delta^2 p_m(-1) = p_m(1) - 2p_m(0) + p_m(-1),$$

por lo cual

$$\Delta^2 p_m(-1) + \Delta p_m(-1) = \Delta p_m(0).$$

Además, como $\widetilde{w}(-1) = 0$, ocurre que

$$\Delta\widetilde{w}(-1) = \widetilde{w}(0) - \widetilde{w}(-1) = \widetilde{w}(0).$$

Por lo tanto,

$$p_n(0)\Delta^2 p_m(-1)\widetilde{w}(0) + p_n(0)\Delta p_m(-1)\Delta\widetilde{w}(-1) = p_n(0)\Delta p_m(0)\widetilde{w}(0).$$

Ahora, el miembro izquierdo de (2.6.54) se escribe como

$$(p_n \Delta p_m \widetilde{w})(N+1) - p_n(0)\Delta p_m(0)\widetilde{w}(0) + p_n(0)\Delta p_m(0)\widetilde{w}(0) = (p_n \Delta p_m \widetilde{w})(N+1). \quad (2.6.55)$$

Así, (2.6.53) se escribe como

$$p_n(N+1)\Delta p_m(N+1)\widetilde{w}(N+1) - \sum_{y=0}^{N+1} p_n(y)\Delta^2 p_m(y-1)\widetilde{w}(y) - \sum_{y=0}^{N+1} p_n(y)\Delta p_m(y-1)\Delta\widetilde{w}(y-1). \quad (2.6.56)$$

Ahora, tomando límite en ambos miembros de la ecuación (2.6.56)

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{y=0}^{N} (\Delta p_n \Delta p_m \widetilde{w})(y) = \lim_{N\to\infty} \Bigg[p_n(N+1)\Delta p_m(N+1)\widetilde{w}(N+1) - \sum_{y=0}^{N+1} p_n(y)\Delta^2 p_m(y-1)\widetilde{w}(y) - \sum_{y=0}^{N+1} p_n(y)\Delta p_m(y-1)\Delta\widetilde{w}(y-1)\Bigg]. \quad (2.6.57)$$

Ahora, usando que $\widetilde{w} = w\phi$, donde ϕ es un polinomio de grado dos, y que Δp_m, $\Delta^2 p_m$ son polinomios, la Observación 2.24, implica que los límites en el miembro derecho de 2.6.57 existen y son finitos. Mas aún, $\lim_{N\to\infty} p_n(N+1)\Delta p_m(N+1)\widetilde{w}(N+1) = 0$. Por lo tanto 2.6.57 es igual a

$$\sum_{y=0}^{\infty} (\Delta p_n \Delta p_m \widetilde{w})(y) = \sum_{y=0}^{\infty} p_n(y)\Delta^2 p_m(y-1)\widetilde{w}(y) - \sum_{y=0}^{\infty} p_n(y)\Delta p_m(y-1)\Delta\widetilde{w}(y-1). \quad (2.6.58)$$

Usando la hipótesis $\widetilde{w} = w\phi$ obtenemos que

$$\sum_{y=0}^{\infty} p_n(y)\Delta^2 p_m(y-1)\widetilde{w}(y) = \sum_{y=0}^{\infty} p_n(y)\Delta^2 p_m(y-1)w(y)\phi(y) = 0, \quad m < n,$$

pues como el grado de ϕ es menor o igual a 2 y el de $\Delta^2 p_m(y-1)$ es menor o igual a $m-2$, el grado de $\phi(y)\Delta^2 p_m(y-1)$ es menor o igual que m. Por otro lado, usando la hipótesis $(\Delta\widetilde{w})(y-1) = w(y)\psi(y)$ obtenemos que

$$\sum_{y=0}^{\infty} p_n(y)\Delta p_m(y-1)\Delta\widetilde{w}(y-1) = \sum_{y=0}^{\infty} p_n(y)\Delta p_m(y-1)w(y)\psi(y) = 0, \quad m < n,$$

pues el grado de ψ es menor o igual a 1 y el de $\Delta p_m(y-1)$ es igual a $m-1$, el grado de $\psi(y)\Delta p_m(y-1)$ es menor o igual que m. Por lo tanto (2.6.58) es igual a cero para todo $m < n$, lo cual demuestra (2.6.51) y completa la demostración del teorema. □

2.6.2. Shift operators

Dado un peso w que satisface las hipótesis del teorema 2.28 y asumiendo que el peso $\widetilde{w}$ introducido en el mismo teorema es positivo, podemos ver al operador

$$\Delta : L^2(w) \to L^2(\widetilde{w}),$$

como un operador que manda la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a w, $\{p_n\}_{n\geq 0}$ a la sucesión $\{\Delta p_n\}_{n\geq 1}$ que resulta ser una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a $\widetilde{w}$.

Inspirados en esto, supongamos que tenemos una familia de pesos escalares $w^{(j)}$ positivos con momentos finitos de todo orden con soporte $\mathbb{N}_0$ y con j en $\mathbb{N}_0$. Denotamos por $\langle\cdot,\cdot\rangle_{(j)}$ el producto interno inducido por $w^{(j)}$. Es decir

$$\langle p; q\rangle_{(j)} = \sum_{x=0}^{\infty} p(x)\overline{q(x)}w^{(j)}(x).$$

Supongamos que $w^{(j)}$ satisface las hipótesis del Teorema 2.28. En particular, suponemos que existen polinomios $\phi^{(j)}$ y $\psi^{(j)}$ de grados 2 y 1 respectivamente tales que

$$\nabla w^{(j+1)}(x) = w^{(j)}(x)\psi^{(j)}(x).$$

Además, asumimos que $w^{(j+1)}(x) = w^{(j)}(x)\phi(x)$. Como consecuencia del Teorema 2.28, podemos ver a Δ como un operador

$$\Delta : L^2(w^{(j)}) \to L^2(w^{(j+1)})$$

En nuestro caso, Δ tiene un adjunto que se puede calcular de manera explícita.

Teorema 2.30. *Sea $\{w^{(j)}\}$ una familia de pesos positivos con momentos finitios de todo orden y soporte $\mathbb{N}_0$ que satisface las hipótesis del Teorema 2.28. Dado $q\in\mathbb{C}[x]$, sea*

$$s^{(j)}q(y) = -[\Delta q(y-1)\phi^{(j)}(y) + q(y-1)\psi^{(j)}(y)]$$

entonces,

$$\langle \Delta p; q\rangle_{(j+1)} = \langle p; s^{(j)}q\rangle_{(j)}$$

para todo par de polinomios p, q.

Demostración. Usando la definición del producto interno (2.6.41), tenemos que

$$\langle \Delta p; q\rangle_{(j+1)} = \sum_{x=0}^{\infty} \Delta p(x)\overline{q(x)}w^{(j+1)}(x) = \lim_{N\to\infty}\sum_{x=0}^{N} \Delta p(x)\overline{q(x)}w^{(j+1)}(x).$$

Aplicando la definición del operador Δ,

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{x=0}^{N} \Delta p(x)\overline{q(x)}w^{(j+1)}(x) = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{x=0}^{N} p(x+1)\overline{q(x)}w^{(j+1)}(x) - \sum_{x=0}^{N} p(x)\overline{q(x)}w^{(j+1)}(x)\right)$$

lo cual, cambiando el índice de la segunda suma, es igual a

$$\lim_{N\to\infty}\Bigg[\sum_{x=0}^{N} p(x+1)\overline{q(x)}w^{(j+1)}(x) - \Bigg(p(0)\overline{q(0)}w^{(j+1)}(0) + \sum_{x=0}^{N} p(x+1)\overline{q(x+1)}w^{(j+1)}(x+1)$$
$$-p(N+1)\overline{q(N+1)}w^{(j+1)}(N+1)\Bigg)\Bigg]$$

y esto último se escribe como

$$\lim_{N\to\infty}\Big[p(N+1)\overline{q(N+1)}w^{(j+1)}(N+1)-p(0)\overline{q(0)}w^{(j+1)}(0) \\ +\sum_{x=0}^{N}p(x+1)\left(\overline{q(x+1)}w^{(j+1)}(x+1)+\overline{q(x)}w^{(j+1)}(x)\right)\Big]. \quad (2.6.59)$$

Ahora, observemos que los límites de los tres sumandos en (2.6.59), existen y son finitos por (2.6.42) y (2.6.43), además por (2.6.43),

$$\lim_{N\to\infty}p(N+1)\overline{q(N+1)}w^{(j+1)}(N+1)=0.$$

Por lo que (2.6.59) es igual a

$$\lim_{N\to\infty}\left[-p(0)\overline{q(0)}w^{(j+1)}(0)+\sum_{x=0}^{N}p(x+1)\left(\overline{q(x+1)}w^{(j+1)}(x+1)+\overline{q(x)}w^{(j+1)}(x)\right)\right] \quad (2.6.60)$$

Notemos que $\left(\overline{q(x+1)}w^{(j+1)}(x+1)+\overline{q(x)}w^{(j+1)}(x)\right)=\Delta(\overline{q}w^{(j+1)})(x)$ y así, (2.6.60) es igual a

$$\lim_{N\to\infty}\left[-p(0)\overline{q(0)}w^{(j+1)}(0)-\sum_{x=0}^{N}p(x+1)\Delta(\overline{q}w^{(j+1)})(x)\right]$$

Usando el Lema 2.26, esto es igual a

$$\lim_{N\to\infty}\left[-p(0)\overline{q(0)}w^{(j+1)}(0)-\sum_{x=0}^{N}p(x+1)\left((\Delta\overline{q(x)}w^{(j+1)}(x+1)+\Delta\overline{q(x)}w^{(j+1)}(x)\right)\right].$$

Haciendo el cambio de variables $y=x+1$, tenemos

$$\lim_{N\to\infty}\left[-p(0)\overline{q(0)}w^{(j+1)}(0)-\sum_{y=1}^{N+1}p(y)\left(\Delta\overline{q(y-1)}w^{(j+1)}(y)+\Delta\overline{q(y-1)}w^{(j+1)}(y-1)\right)\right].$$

Sumando y restando en la ecuación anterior, $p(0)\Delta\overline{q}(-1)w^{(j+1)}(0)+p(0)\overline{q(-1)}\Delta w^{(j+1)}(-1)$

$$\lim_{N\to\infty}\Big[-p(0)\overline{q(0)}w^{(j+1)}(0)+p(0)\Delta\overline{q(-1)}w^{(j+1)}(0)+p(0)\overline{q(-1)}\Delta w^{(j+1)}(-1) \\ -\sum_{y=0}^{N+1}p(y)\left((\Delta\overline{q(y-1)}w^{(j+1)}(y)+\overline{q(y-1)}\Delta w^{(j+1)}(y-1)\right)\Big]. \quad (2.6.61)$$

Notemos que $\Delta w^{(j+1)}(-1)=w^{(j+1)}(0)-w^{(j+1)}(-1)=w^{(j+1)}(0)$ y que

$$\begin{aligned}-p(0)\overline{q(0)}w^{(j+1)}(0)+&p(0)\Delta\overline{q(-1)}w^{(j+1)}(0)+p(0)\overline{q(-1)}\Delta w^{(j+1)}(-1)=\\ &=p(0)[\Delta\overline{q(-1)}-\overline{q(0)}+\overline{q(-1)}]w^{(j+1)}(0)\\ &=p(0)[\overline{q(0)-q(-1)-q(0)+q(-1)}]w^{(j+1)}(0)=0.\end{aligned}$$

Y además, utilizando la ecuación de Pearson de $w^{(j)}$ dada por el Teorema 2.28, tenemos que

$$\begin{aligned}\Delta\overline{q(y-1)}w^{(j+1)}(y)+&\overline{q(y-1)}\Delta w^{(j+1)}(y-1)\\&=\Delta\overline{q(y-1)}w^{(j)}(y)\phi^{(j)}(y)+\overline{q(y-1)}w^{(j)}(y)\psi^{(j)}(y)\\&=(\Delta\overline{q(y-1)}\phi^{(j)}(y)+\overline{q(y-1)}\psi^{(j)}(y))w^{(j)}(y)\\&=\overline{(\Delta q(y-1)\phi^{(j)}(y)+q(y-1)\psi^{(j)}(y))}w^{(j)}(y).\end{aligned}$$

Entonces (2.6.61) se escribe como

$$\lim_{N\to\infty}-\sum_{y=0}^{N+1}p(y)\overline{(\Delta q(y-1)\phi^{(j)}(y)+q(y-1)\psi^{(j)}(y))}w^{(j)}(y)=\langle p;s^{(j)}q\rangle_{(j)}. \tag{2.6.62}$$

Esto concluye la prueba del teorema. □

2.6.3. Fórmula de Rodrigues

Como consecuencia del Teorema 2.28, $\{\Delta p_n^{(j)}\}$ es una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a $w^{(j+1)}(x)$. Así $\Delta p_n^{(j)}=k_n p_{n-1}^{(j+1)}$ donde k_n es un número complejo. Como los polinomios $p_n^{(j)}$ y $p_{n-1}^{(j+1)}$ son mónicos y el coeficiente director de $\Delta p_n^{(j)}$ es n, tenemos que $k_n=n$.

Observación 2.31. *Sea $\{p_n^{(j)}\}$ la sucesión de polinomios mónicos asociada a $w^{(j)}$. Notemos que*

$$s^{(j)}p_{n-1}^{(j+1)}(y)=-[\Delta p_{n-1}^{(j+1)}(y-1)\phi^{(j)}(y)+p_{n-1}^{(j+1)}(y-1)\psi^{(j)}(y)],$$

es un polinomio de grado n, puesto que $\Delta p_{n-1}^{(j+1)}(y-1)$ es un polinomio de grado $n-2$, $\phi^{(j)}(y)$ es un polinomio de grado 2 y $\psi^{(j)}(y)$ es un polinomio de grado 1, digamos entonces,

$$s^{(j)}p_{n-1}^{(j+1)}=g_n p_n^{(j)}+\ldots+g_0p_0^{(j)}.$$

Como ocurre que

$$\langle s^{(j)}p_{n-1}^{(j+1)};p_m^{(j)}\rangle_{(j)}=\langle p_{n-1}^{(j+1)};\Delta p_m^{(j)}\rangle_{(j+1)}=\langle p_{n-1}^{(j+1)};mp_{m-1}^{(j+1)}\rangle_{(j+1)}=0,$$

si $m-1<n-1$, es decir si $m<n$ y como también ocurre que para $m<n$

$$\langle s^{(j)}p_{n-1}^{(j+1)};p_m^{(j)}\rangle_{(j)}=\sum_{k=0}^{n}g_k\langle p_k^{(j)},p_m^{(j)}\rangle_{(j)}=g_m\|p_m\|^2,$$

tenemos que, $g_m=0$ si $m<n$ y en conclusión

$$s^{(j)}p_{n-1}^{(j+1)}=g_np_n^{(j)}.$$

Como $p_n^{(j)}$ es mónico, el coeficiente director de $s^{(j)}p_{n-1}^{(j+1)}$ es g_n. A su vez, sea $\alpha^{(j)}$ el coeficiente de y^2 en $\phi^{(j)}(y)$ y sea $\beta^{(j)}$ el coeficiente de y en $\psi^{(j)}(y)$. entonces

$$g_n=cd\,s^{(j)}p_{n-1}^{(j+1)}=-((n-1)\alpha^{(j)}+\beta^{(j)}). \tag{2.6.63}$$

De ahora en adelante, supondremos $g_n\neq 0$.

Como consecuencia del Teorema 2.28, podemos ver al operador Δ como un *lowering operator*

$$\Delta : L^2\left(w^{(j)}\right) \to L^2\left(w^{(j+1)}\right).$$

y a su adjunto $s^{(j)}$ como un *raising operator*

$$s^{(j)} : L^2\left(w^{(j+1)}\right) \to L^2\left(w^{(j)}\right).$$

Teorema 2.32 (Fórmula de Rodrigues.)**.** *Sea $\{w^{(j)}\}_{j\geq 0}$ una familia de pesos positivos con soporte $\mathbb{N}_0$ y momentos finitos que satisface las hipótesis del Teorema 2.28. Entonces la sucesión de polinomios mónicos asociada a $w^{(j)}$ está dada por*

$$p_n^{(j)}(y) = (-1)^n (g_1 \dots g_n)^{-1} \nabla^n (w^{(j+n)})(y)(w^{(j)}(y))^{-1},$$

para todo n y j en $\mathbb{N}_0$ donde g_n está dado en (2.6.63).

Demostración. Veamos por inducción que

$$s^{(j)} \dots s^{(j+n-1)} q = (-1)^n (\nabla^n q w^{(j+n)})(w^{(j)})^{-1} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{2.6.64}$$

Procedemos para el caso $n = 1$, usando la definición del operador $s^{(j)}$ tenemos

$$s^{(j)} q(x) = -\left[\Delta q(x-1)\phi^{(j)}(y) + q(x-1)\psi^{(j)}(y)\right]. \tag{2.6.65}$$

Como la familia de pesos $\{w^{(j)}\}$ satiface las hipótesis del Teorema 2.28,

$$\phi^{(j)}(x) = w^{(j+1)}(x)(w^{(j)}(x))^{-1} \quad \text{y que} \quad \psi^{(j)}(x) = \Delta w^{(j+1)}(x-1)(w^{(j)}(x))^{-1}.$$

Así, el lado derecho de (2.6.65) se escribe como

$$-\left[\Delta q(x-1) w^{(j+1)}(x)(w^{(j)}(x))^{-1} + q(x-1)\Delta w^{(j+1)}(x-1) w^{(j)}(x))^{-1}\right].$$

Lo cual es igual a

$$-\Delta(q w^{(j+1)})(x-1)(w^{(j)}(x))^{-1}.$$

Usando la definición del operador ∇, esto último se escribe como

$$-\nabla(q w^{(j+1)})(x)(w^{(j)}(x))^{-1}.$$

Paso inductivo: Supongamos que la afirmación vale para $n-1$, es decir, vale que

$$s^{(j)} \dots s^{(j+n-1)} q = (-1)^n \nabla^n (q w^{(j+n)})(w^{(j)})^{-1}.$$

Veamos que vale para n.

$$s^{(j)} \dots s^{(j+n)} q(x) = s^{(j)} \dots s^{(j+n-1)} \left(-\nabla(q w^{(j+n+1)})(x)(w^{(j+n)}(x))^{-1}\right). \tag{2.6.66}$$

Utilizando la hipótesis inductiva, el lado derecho de (2.6.66) se escribe como

$$(-1)^{n+1} \nabla^n \left(-\nabla(q^{(j+n+1)} w^{(j+n+1)})(x)(w^{(j+n)}(x))^{-1} w^{(j+n)}(x)\right)(w^{(j)}(x))^{-1}.$$

Lo cual es igual a

$$(-1)^{n+1}\nabla^{n+1}(qw^{(j+n+1)})(x)(w^{(j)}(x))^{-1}.$$

Así, la afirmación (2.6.64) es válida para todo $n \in \mathbb{N}$. Notemos que $s^{(j)}1 = g_1 p_1^{(j)}$, $s^{(j)}s^{(j+1)}1 = g_1 s^{(j)} p_1^{(j+1)} = g_1 g_2 p_2^{(j)}$. En general se tiene que

$$s^{(j)} \dots s^{(j+n-1)}1 = g_1 \dots g_n p_n^{(j)},$$

con g_i inversible para todo i por lo supuesto en la observación 2.31. Luego,

$$\begin{aligned} p_n^{(j)} &= (g_1 \dots g_n)^{-1} s^{(j)} \dots s^{(j+n-1)}1 \\ &= (g_1 \dots g_n)^{-1}(-1)^n(\nabla^n w^{(j+n)})(w^{(j)})^{-1} \end{aligned}$$

Esto concluye la demostración del teorema. □

2.6.4. Fórmula de estructura

La ecuación de Pearson discreta, dada en el Teorema 2.28, tiene como consecuencia una fórmula de estructura. Como ϕ es un polinomio de grado a lo sumo dos

$$\phi(x)\Delta p_n(x) = \sum_{j=0}^{n+1} a_j p_j(x),$$

donde $a_j = \langle \phi(x)\Delta p_n, p_j(x)\rangle \|p_j\|^{-2} = \|p_j\|^{-2} \sum_{x\geq 0} \phi(x)\Delta p_n(x) p_j(x) w(x) dx$. Como $\phi(x)w(x) = \widetilde{w}(x)$,

$$a_j = \|p_j\|^{-2} \sum_{x\geq 0} \Delta p_n(x) p_j(x) \widetilde{w}(x) dx = 0, \qquad j < n-1.$$

Entonces

$$\phi(x)\Delta p_n(x) = a_{n+1}p_{n+1}(x) + a_n p_n(x) + a_{n-1}p_{n-1}(x). \tag{2.6.67}$$

Por el Corolario 2.12, el lado derecho de (2.6.67) se escribe como

$$a_{n+1}(xp_n(x) - b_n p_n(x) - c_n p_{n-1}(x)) + a_n p_n(x) + a_{n-1}p_{n-1}(x),$$

lo cual es igual a

$$(xa_{n+1} - a_{n+1}b_n + a_n)p_n(x) + (-a_{n+1}c_n + a_{n-1})p_{n-1}(x).$$

Por lo tanto, tenemos

$$\phi(x)\Delta p_n(x) = (xa_{n+1} - a_{n+1}b_n + a_n)p_n(x) + (-a_{n+1}c_n + a_{n-1})p_{n-1}(x).$$

2.6.5. Operador en diferencias de segundo orden

Suponiendo que estamos en un contexto similar al de secciones anteriores, es decir, consideraremos una familia de pesos $w^{(j)}$ positivos con momentos finitos de todo orden, con soporte $\mathbb{N}_0$ y con j en $\mathbb{N}_0$. Como antes, denotamos por $\langle\cdot,\cdot\rangle_{(j)}$ el producto interno inducido por $w^{(j)}$. Supongamos que $w^{(j)}$ satisface las hipótesis del Teorema 2.28. En particular, suponemos que existen polinomios $\phi^{(j)}$ y $\psi^{(j)}$ de grados 2 y 1 respectivamente tales que

$$\nabla w(x) = w^{(j)}(x)\psi^{(j)}(x)$$

Además, asumimos que $w^{(j+1)}(x) = w^{(j)}(x)\phi(x)$. Como consecuencia del Teorema 2.28, podemos ver a Δ como un *lowering operator*

$$\Delta : L^2\left(w^{(j)}\right) \to L^2\left(w^{(j+1)}\right)$$

y a su adjunto $s^{(j)}$ como un *raising operator*

$$s^{(j)} : L^2\left(w^{(j+1)}\right) \to L^2\left(w^{(j)}\right).$$

Con lo cual tiene sentido considerar los operadores D_1 y D_2 definidos por

$$D_1 = \Delta \circ s^{(j-1)} : L^2\left(w^{(j)}\right) \to L^2\left(w^{(j)}\right),$$

$$D_2 = s^{(j)} \circ \Delta : L^2\left(w^{(j)}\right) \to L^2\left(w^{(j)}\right).$$

Usando la Proposición 2.30 vemos que los operadores D_1 y D_2 son de orden dos y pueden ser escritos de forma explícita

$$p^{(j)}(x)D_1 = \left(\Delta \circ s^{(j-1)}\right) p^{(j)}(x) = -\Delta\left[\Delta p^{(j)}(x-1)\phi^{(j-1)}(x) + p^{(j)}(x-1)\psi^{(j-1)}(x)\right],$$

$$p^{(j)}(x)D_2 = \left(s^{(j)} \circ \Delta\right) p^{(j)}(x) = -\left[\Delta^2 p^{(j)}(x-2)\phi^{(j)}(x) + \Delta p^{(j)}(x-1)\psi^{(j)}(x)\right].$$

Notemos que estas dos últimas expresiones pueden en principio ser distintas. Además estos operadores son simétricos respecto a $w^{(j)}$ ya que por ser $s^{(j)}$ adjunto de Δ, ocurre que dado dos polinomios p, q

$$\begin{aligned}\langle pD_1, q\rangle_{(j)} = \left\langle \left(\Delta \circ s^{(j-1)}\right) p, q\right\rangle_{(j)} = \left\langle s^{(j-1)}p, s^{(j-1)}q\right\rangle_{(j)} = \left\langle p, \left(\Delta \circ s^{(j-1)}\right) q\right\rangle_{(j)} \\ = \langle p, qD_1\rangle_{(j)},\end{aligned}$$

y de la misma forma, tenemos

$$\langle pD_2, q\rangle_{(j)} = \left\langle \left(s^{(j)} \circ \Delta\right) p, q\right\rangle_{(j)} = \langle \Delta p, \Delta q\rangle_{(j)} = \left\langle p, \left(s^{(j)} \circ \Delta\right) q\right\rangle_{(j)} = \langle p, qD_2\rangle_{(j)}.$$

Además, vimos en la Observación 2.31, que $s^{(j)}p_{n-1}^{(j+1)}$ es un múltiplo de $p_n^{(j)}$ digamos

$$s^{(j)}p_{n-1}^{(j+1)} = g_n^{(j)}p_n^{(j)},$$

Usando esto, se puede ver que los polinomios ortogonales mónicos asociados a $w^{(j)}$ son autofunciones de los operadores D_1 y D_2

$$p_{n-1}^{(j)}(x)D_1 = \Delta \circ s^{(j-1)}p_{n-1}^{(j)}(x) = \Delta g_n^{(j-1)}p_n^{(j-1)}(x) = ng_n^{(j-1)}p_{n-1}^{(j)}(x),$$

$$p_n^{(j)}(x)D_2 = s^{(j)} \circ \Delta p_n^{(j)}(x) = s^{(j)}np_{n-1}^{(j+1)}(x) = ng_n^{(j)}p_n^{(j)}(x).$$

2.6.6. Ejemplo: Polinomios de Charlier

En este caso tenemos que

$$w^{(j)}(x) = w(x) = \frac{a^x}{x!}, a > 0, \quad \nabla w^{(j+1)}(x) = \frac{a^x}{x!} - \frac{a^{x-1}}{(x-1)!} = \frac{a^x}{x!}\left(1 - \frac{x}{a}\right).$$

Con lo cual, tomando $\phi^{(j)}(x) = 1$ y $\psi^{(j)}(x) = \left(1 - \frac{x}{a}\right)$, se verifican las hipótesis del Teorema 2.28. El operador $s^{(j)}$ se escribe explícitamente como

$$s^{(j)}q^{(j+1)}(x) = -[\nabla q(x) + q(x-1)\left(1 - \frac{x}{a}\right)],$$

y en vistas de la Observación 2.31 tenemos

$$s^{(j)}p_{n-1}^{(j+1)} = \frac{1}{a}p_n^{(j)},$$

Sumado a esto la fórmula de Rodrigues en este caso tiene la siguiente expresión

$$\left(\frac{a^x}{x!}\right)p_n^{(j)} = (-a)^n \nabla^n \left(\frac{a^x}{x!}\right).$$

2.6.7. Ejemplo: Polinomios de Meixner

Antes de desarrollar este ejemplo, recordemos que el símbolo de Pochhamer (2.2.11) está dado por

$$(\beta)_x = \beta(\beta+1)\dots(\beta+x-1).$$

Notemos que $(\beta+1)_x = \frac{(\beta+x)}{\beta}(\beta)_x$, y que $(\beta+1)_{x-1} = \frac{(\beta)_x}{\beta}$. En este caso,tenemos

$$w^{(j)}(x) = (\beta+j)_x\frac{c^x}{x!},$$

$$\begin{aligned}\nabla w^{(j+1)}(x) = (\beta+j+1)_x\frac{c^x}{x!} - (\beta+j+1)_{x-1}\frac{c^{x-1}}{(x-1)!} &= \frac{\beta+j+x}{\beta+j}(\beta+j)_x\frac{c^x}{x!} - \frac{(\beta+j)_x}{\beta+j}\frac{x}{c}\frac{c^x}{x!} \\ &= w^{(j)}\left[1 + \left(\frac{c-1}{c(\beta+j)}\right)x\right].\end{aligned}$$

Con lo cual, tomando $\phi^{(j)}(x) = 1 + \frac{x}{\beta+j}$ y $\psi^{(\beta)}(x) = 1 + \left(\frac{c-1}{c(\beta+j)}\right)x$, se verifican las hipótesis del Teorema 2.28. El operador $s^{(j)}$ se escribe explícitamente como

$$s^{(j)}q^{(j+1)}(x) = -\left[\nabla q(x)\left(1 + \frac{x}{\beta+j}\right) + q(x-1)\left(1 + \left(\frac{c-1}{c(\beta+j)}\right)x\right)\right],$$

y en vistas de la Observación 2.31 tenemos

$$s^{(j)}p_{n-1}^{(j+1)} = -\left(\frac{c-1}{c(\beta+j)}\right)p_n^{(j)}.$$

Sumado a esto la fórmula de Rodrigues en este caso tiene la siguiente expresión

$$\left((\beta+j)_x\frac{c^x}{x!}\right)p_n^{(j)} = \left(\frac{c-1}{c(\beta+j)}\right)^{-n}\nabla^n\left((\beta+j+n)_x\frac{c^x}{x!}\right).$$

CAPÍTULO 3

Polinomios ortogonales matriciales

3.1. Definciones formales y teoría general

Los polinomios ortogonales matriciales fueron introducidos por M. Krein y se han estudiado, en relación al análisis espectral, recurrencias de orden superior, sistemas estocásticos, etc. En este capítulo daremos las definiciones formales y demostraremos la existencia y propiedades básicas de los polinomios ortogonales matriciales.

Definición 3. *Una medida matricial* Θ *sobre* $\mathbb{R}$ *es una función* $\Theta : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}^{N\times N}$ *tal que*

$$\Theta\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \Theta(E_n),$$

para toda sucesión $\{E_n\}$ *de conjuntos de Borel disjuntos de* $\mathbb{R}$*.*

De acuerdo a [2, Teorema 1.12] y [8], cualquier medida matricial sobre $\mathbb{R}$ tiene la forma

$$\Theta(X) = \int_X W(x)d\mu(x) \qquad \text{para todo X} \subset \mathbb{R} \text{ medible Borel,} \tag{3.1.1}$$

donde μ es una medida positiva σ-finita sobre la recta real y $W : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{N\times N}$ es una matriz definida postiva (es decir, simétrica y con autovalores positivos) casi para todo punto con respecto a μ. En este trabajo sólo consideraremos los casos en que μ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ o el caso en que μ es una medida discreta. Dado $k \in \mathbb{N}_0$, el k-ésimo momento de Θ está dado por

$$\Theta_k = \int_{\mathbb{R}} x^k W(x)d\mu(x).$$

Diremos que Θ tiene momentos finitos de todo orden si la matriz Θ_k existe y tiene entradas finitas para todo $k \in \mathbb{N}_0$. En lo que sigue, denotaremos $\Theta_k < \infty$.

Definición 4. *Un polinomio matricial* P *es un polinomio en una variable compleja* x *cuyos coeficientes son matrices* $N \times N$*, es decir*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k A_k \qquad \textit{con} \quad A_k \in \mathbb{C}^{N\times N} \textit{para todo} \quad 0 \le k \le n.$$

El grado del polinomio P es la mayor potencia k de x para la cual $A_k \neq 0$ y el coeficiente director de P el coeficiente que acompaña a tal potencia, o sea A_n, denotaremos $cd(P) = A_n$ y $\deg p = n$. Denotaremos al conjunto de polinomios con coeficientes en $\mathbb{C}^{N\times N}$ por $\mathbb{C}^{N\times N}[x]$.

Observación 3.1. *El conjunto $\mathbb{C}^{N\times N}[x]$ de polinomios matriciales es un módulo a derecha y a izquierda sobre el anillo $\mathbb{C}^{N\times N}$.*

Dado un polinomio matricial $P(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k x^k$, denotaremos por P^* al polinomio

$$P^*(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k^* x^k,$$

donde A^* es la transpuesta conjugada de la matriz A. Notemos que $P(x)^* = P^*(\bar{x})$ para todo x en $\mathbb{C}$. En el caso que x sea una variable real ocurre que $P(x)^* = P^*(x)$.

Definición 5. *Una sucesión de polinomios matriciales $\{P_n\}_{n\geq 0}$ se dice simple si*

1. *P_n tiene grado n.*
2. *El coeficiente director de P_n es inversible.*

Proposición 3.2. *Sea $\{P_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión simple de polinomios matriciales. Luego, todo polinomio matricial P de grado n se escribe de manera única como*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k P_k(x) \qquad \textit{con} \quad A_k \in \mathbb{C}^{N\times N} \textit{ para todo } 0 \leq k \leq n. \tag{3.1.2}$$

Dicho de otra forma, toda una sucesión simple de polinomios matriciales forma una base de $\mathbb{C}^{N\times N}[x]$, como módulo a izquierda sobre $\mathbb{C}^{N\times N}$. Para simplificar, diremos que P en (3.1.2) es una combinación lineal de $P_0, \dots, P_n$.

Demostración. Como $\{P_n\}$ es una sucesión simple, es claro que P puede escribirse como combinación lineal de los polinomios $P_0, \dots, P_n$. Denotamos al coeficiente director de P_j por L_j para $j \in \mathbb{N}_0$. Por ser $\{P_n\}$ una sucesión simple de polinomios matriciales, L_j es una matriz inversible para todo j. Asumiendo ahora que

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k P_k(x) = \sum_{k=0}^{n} B_k P_k(x),$$

son dos maneras distintas de escribir a P, $cd(P) = A_n cd(P_n) = A_n L_n$ y del mismo modo es igual a $B_n cd(P_n) = B_n L_n$. Por ser L_n una matriz inversible, tenemos que $A_n = B_n$. Siguiendo así, es claro que $A_{n-1} = B_{n-1}, \dots, A_0 = B_0$. Por lo tanto, concluimos que el polinomio P se escribe de manera única como combinación lineal de los polinomios P_n. □

Definición 6. *Un producto interno matricial en $\mathbb{C}^{N\times N}[x]$ es un mapa*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^{N\times N}[x] \times \mathbb{C}^{N\times N}[x] \to \mathbb{C}^{N\times N}$$

que satisface

1. *$\langle P, Q \rangle = \langle Q, P \rangle^*$ para todos $P, Q \in \mathbb{C}^{N\times N}[x]$.*

2. $\langle A_1P_1 + A_2P_2, Q\rangle = A_1\langle P_1, Q\rangle + A_2\langle P_2, Q\rangle$ *donde* $P_1, P_2, Q \in \mathbb{C}^{N\times N}[x]$ *y* $A_i \in \mathbb{C}^{N\times N}$.

3. $\langle P, P\rangle$ *es una matriz definida no negativa, es decir que es autoadjunta y tiene autovalores no negativos para todo polinomio matricial* P *no nulo. Además,* $\langle P, P\rangle = 0$ *si sólo si* $P = 0$.

Definición 7. *Dada una medida matricial* $\Theta(X) = \int_X W(x)d\mu(x)$ *con momentos finitos de todo orden, definimos*

$$\langle P, Q\rangle_W = \int_{\mathbb{R}} P(x)W(x)Q^*(x)d\mu(x).$$

Cuando sea claro con respecto a que función W nos estamos refiriendo, denotaremos simplemente $\langle P, Q\rangle$.

Observación 3.3. *Notemos que* $\langle P, Q\rangle_W < \infty$ *para todo par de polinomios* $P, Q \in \mathbb{C}^{N\times N}[x]$. *Esto es consecuencia directa del hecho que* W *tenga momentos finitos de todo orden, ya que si* $P(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k x^k$, *y* $Q(x) = \sum_{j=0}^{m} B_j x^j$ *entonces*

$$\langle P, Q\rangle_W = \langle \sum_{k=0}^{n} A_k x^k, \sum_{j=0}^{m} B_j x^j\rangle_w = \sum_{k,j=0}^{n,m} A_k \left(\int_{\mathbb{R}} x^{k+j}W(x)dx\right) B_j^* < \infty.$$

Lema 3.4. *Sea* $P = \sum_{j=0}^{n} A_j x^j$. *Entonces,* $\langle P, P\rangle_W$ *es inversible si* A_j *es inversible para algún* j. *Además, si* $\langle P, P\rangle_W = 0$ *entonces* $P = 0$.

Demostración. Existen N funciones vectoriales $e_i : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^N$, $\quad i = 0, \cdots, N$ y N funciones escalares $\alpha_i : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tales que para cada $x \in \mathbb{R}$, $\{e_i(x)\}_{i=1}^{N}$ es una base ortonormal de $\mathbb{C}^N$ y $W(x)e_i(x) = \alpha_i(x)e_i(x)$. Dado cualquier vector $e \in \mathbb{C}^N$, tenemos

$$P^*(x)e = \sum_{i=1}^{N} a_i(x)e_i(x),$$

para ciertos escalares $a_i(x)$. Si suponemos que existe un vector no nulo $e \in \mathbb{C}^N$ tal que $\langle P, P\rangle e = 0$, entonces, tenemos que

$$0 = \langle\langle P, P\rangle_W e, e\rangle = \int_{\mathbb{R}} \langle P(x)W(x)P^*(x)e, e\rangle dx, \tag{3.1.3}$$

donde el producto interno en el miembro de la derecha de (3.1.3) es el producto interno estándar de $\mathbb{C}^N$. Observemos además que

$$W(x)P^*(x)e = \sum_{i=1}^{N} a_i(x)W(x)e_i(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i(x)\alpha_i(x)e_i(x),$$

y por lo tanto, por ser $\{e_i(x)\}$ una base ortonormal, tenemos que

$$\langle WP^*e, P^*e\rangle = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_i(x)\alpha_i(x)\overline{a_j(x)}\langle e_i(x), e_j(x)\rangle = \sum_{i=1}^{N} a_i(x)\alpha_i(x)\overline{a_i(x)},$$

notemos que P pasa al lado derecho como P^* en el producto estándar de $\mathbb{C}^{N\times N}$, $\langle \cdot,\cdot\rangle$. Así, la ecuación, (3.1.3) es igual a

$$\int_{\mathbb{R}} \langle WP^*e, P^*e\rangle dx = \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{N} a_i(x)\alpha_i(x)\overline{a_i}(x)dx.$$

Como $\langle P,P\rangle e = 0$, las funciones $a_i(x)\alpha_i(x)\overline{a_i}(x)$ deben ser iguales a cero. Por lo tanto, como $\alpha_i(x) > 0$, tenemos que $a_i(x) = 0$. Esto implica que $P(x)^*e = 0$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{N} x^j A_j^* e = 0,$$

para todo x y por lo tanto $A_j^*e = 0$ para todo j lo cual implica que A_j es singular para todo j, y completa la prueba de la primer afirmación del lema.

Suponiendo ahora que $\langle P,P\rangle = 0$ tenemos que $\langle P,P\rangle e = 0$ para todo vector $e \in \mathbb{C}^N$. Entonces $P^*(x)e = 0$ para todo e y por lo tanto $A_j^*e = 0$ para todo j y para todo $e \in \mathbb{C}^N$. Esto implica que $A_j = 0$ para todo j. □

Corolario 3.5. *Para todo peso definido postivo W con momentos finitos de todo orden, tenemos que $\langle \cdot,\cdot\rangle_W$ es un producto interno matricial.*

Demostración. Como W tiene momentos finitos de todo orden, $\langle \cdot,\cdot\rangle_W$ está bien definido. Las Condiciones 1 y 2 de la Definición 6 son una consecuencia inmediata de su definición. La Condición 3 es una consecuencia del Lema 3.4. □

Definición 8. *Decimos que una sucesión de polinomios matriciales $\{P_n\}_{n\geq 0}$ es una sucesión de polinomios ortogonales matriciales con respecto a $\langle \cdot,\cdot\rangle$ si es una sucesión simple y además*

$$\langle P_n, P_m\rangle = \delta_{n,m}\mathcal{H}_n \qquad \textit{para todo } n,m \geq 0,$$

donde $\mathcal{H}_n$ es una matriz definida positiva $N\times N$ para todo n. Si la matriz $\mathcal{H}_n$ es la matriz identidad $N\times N$, diremos que $\{P_n\}_{n\geq 0}$ es una sucesión de polinomios ortonormales. Si el producto interno está dado por $\langle P,Q\rangle_W$, diremos que los polinomios son ortogonales (o respectivamente ortonormales) respecto a W.

De ahora en adelante, denotaremos $\{R_n\}_{n\geq 0}$ a sucesiones de polinomios ortogonales en general, $\{P_n\}_{n\geq 0}$ a sucesiones de polinomios ortogonales mónicos y $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ a sucesiones de polinomios ortonormales.

Sea V_n el espacio vectorial de todos los polinomios en $\mathbb{C}^{N\times N}[x]$ de grado menor o igual a n, es decir

$$V_n = \{H \in \mathbb{C}^{N\times N}[x] : \deg(H) \leq n\}. \tag{3.1.4}$$

Proposición 3.6. *Para el espacio vectorial V_n definido previamente se cumple que*

1. $V_n = V_{n-1} \bigoplus V_{n-1}^{\perp}$, *donde,* $V_{n-1}^{\perp} = \{H \in V_n : \langle H,P\rangle = 0 \quad \textit{para todo} \quad P \in V_{n-1}\}$.
2. $\dim V_{n-1}^{\perp} = N^2$.
3. $V_{n-1}^{\perp}$ *contiene un único polinomio mónico P_n de grado n.*

Demostración. Procedemos por inducción en n. Por definición, $V_{-1} = 0$. Si $n = 0$, entonces, $V_0 = 0^{\perp}$, $\dim V_0 = N^2$ y $I \in V_0$. Dado $n > 0$, asumimos que las condiciones 1,2,3 son verdaderas para todo $0 \leq j \leq n-1$. Sea P_n un polinomio mónico de grado n en V_{n-1}. Entonces, podemos escribir

$$P_n(x) = x^n I + A_{n-1}P_{n-1} + \cdots + A_0 P_0,$$

tal que $\langle P_n, H\rangle = 0$ para todo $H \in V_{n-1}$. Observemos que

$$0 = \langle P_n, P_j\rangle = \langle x^n I, P_j\rangle + \langle A_j P_j, P_j\rangle = \langle x^n I, P_j\rangle + A_j\langle P_j, P_j\rangle.$$

Como $\langle P_j, P_j\rangle$ es no singular, la matriz A_j está completamente determinada y por lo tanto queda comprobado (3).

Sea $H \in V_n$, si $H \notin V_{n-1}$, entonces, el grado de H es n y $H = x^n A_n + Q$ con $Q \in V_{n-1}$ para alguna matriz A_n. Observemos que $H - A_n P_n \in V_{n-1}$ y por lo tanto, $H \in V_{n-1} \bigoplus V_{n-1}^{\perp}$, es decir, $V_n = V_{n-1} + V_{n-1}^{\perp}$. Para probar que la suma es directa, tomamos $P \in V_{n-1} \cap V_{n-1}^{\perp}$. Entonces, $\langle P, P\rangle = 0$, lo cual implica que $P = 0$ por el Lema 3.4. Esto completa la prueba de la demostración de (1).

Para probar (2) notemos que

$$V_n = V_{n-1} \bigoplus V_{n-1}^{\perp} = V_{n-2} \bigoplus V_{n-2}^{\perp} \bigoplus V_{n-1}^{\perp} = V_0 \bigoplus V_0^{\perp} \bigoplus \cdots \bigoplus V_{n-1}^{\perp}.$$

Es claro ahora que como la dimensión de V_n es $(n+1)N^2$, $\dim V_{n-1}^{\perp} = (n+1)N^2 - nN^2 = N^2$. Esto concluye la prueba de la proposición. $\square$

Corolario 3.7. *Dado un peso W, existe una única sucesión $\{P_n\}_{n\geq 0}$ de polinomios ortogonales mónicos.*

Proposición 3.8. *Toda sucesión de polinomios ortogonales con respecto a W es de la forma $R_n = A_n P_n$ para ciertas matrices A_n, donde P_n son los polinomios ortogonales mónicos con respecto a W.*

Demostración. Sea $\{R_n\}$ una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a W. Denotamos por A_n al coeficiente director de R_n. Como $\{R_n\}$ es una sucesión simple, A_n es inversible. Entonces $\widetilde{P}_n = A_n^{-1} R_n$ es una sucesión de polinomios mónicos que satisface

$$\langle \widetilde{P}_n, \widetilde{P}_m\rangle_W = A_n^{-1}\langle R_n, R_m\rangle_W (A_m^{-1})^* = 0, \qquad n \neq m.$$

Por el Corolario 3.7, $\widetilde{P}_n = P_n$ y esto completa la demostración. $\square$

Observación 3.9. *No existe una única sucesión de polinomios ortonormales con respecto a W. De hecho, dada una sucesión de polinomios ortonormales $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ con respecto a W, podemos construir otra sucesión de polinomios ortonormales (también con respecto a W) definiendo $\widetilde{Q}_n = U_n Q_n$, donde U_n es una matriz unitaria para todo $n \geq 0$. Claramente, $\widetilde{Q}_n$ tiene grado n y $cd(\widetilde{Q}_n) = U_n cd(Q_n)$. Más aún,*

$$\begin{aligned}\langle \widetilde{Q}_n, \widetilde{Q}_m\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \widetilde{Q}_n(x) W(x) \widetilde{Q}_m^*(x) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} U_n Q_n(x) W(x) Q_m^*(x) U_m^* d\mu(x) \\ &= U_n \left(\int_{\mathbb{R}} Q_n(x) W(x) Q_m^*(x) d\mu(x) \right) U_m^* = U_n \delta_{n,m} I U_m^* = \delta_{n,m} U_n U_m^* = \delta_{n,m} I.\end{aligned}$$

Esto mismo sucede en el caso que $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ sea una sucesión de polinomios ortonormales con respecto a un producto interno matricial arbitrario $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

3.2. Propiedades de polinomios ortogonales

En esta sección, daremos algunas propiedades de polinomios ortogonales con respecto a una función peso W. Por la definición del producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$, tenemos que

$$\begin{aligned}\langle xP(x), Q(x)\rangle_W &= \int_{\mathbb{R}} (xP(x))W(x)Q(x)^* d\mu(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} P(x)W(x)(xQ(x))^* d\mu(x) = \langle P(x), xQ(x)\rangle_W, \quad (3.2.5)\end{aligned}$$

para todo $P, Q \in C^{N\times N}[x]$. En otras palabras, el operador multiplicación por x es simétrico con respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$. El siguiente teorema es una consecuencia directa de este hecho.

Teorema 3.10 (Relación de recurrencia de tres términos). *Sea $\{R_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión de polinomios matriciales ortogonales con respecto a una función peso W. Entonces existen tres sucesiones de matrices $\{A_n\}_{n\geq 0}, \{B_n\}_{n\geq 0}, \{C_n\}_{n\geq 0}$, con A_n inversible para todo $n \geq 0$, tales que*

$$xR_n(x) = A_nR_{n+1}(x) + B_nR_n(x) + C_nR_{n-1}(x). \quad (3.2.6)$$

En la ecuación, para $n = 0$ consideraremos $R_{-1} = C_0 = 0$

Demostración. El polinomio $xR_n(x)$, es un polinomio matricial de grado $n+1$, luego por ser $\{R_n\}$ una sucesión de polinomios ortogonales, y por lo tanto simple, puede ser escrito como

$$xR_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} S_kR_k(x) \quad (3.2.7)$$

donde $S_k \in \mathbb{C}^{N\times N}$ para todo $k = 0, \ldots, n+1$. Calculando $\langle xR_n(x), R_j(x)\rangle$ tenemos que

$$\langle xR_n(x), R_j(x)\rangle = \langle \sum_{k=0}^{n+1} S_kR_k(x), R_j(x)\rangle = \sum_{k=0}^{n+1} S_k\langle R_k(x), R_j(x)\rangle = S_j\mathcal{H}_j.$$

Como R_n es ortogonal a todos los polinomios matriciales de grado menor que n, tenemos que

$$S_j = \langle xR_n(x), R_j(x)\rangle\mathcal{H}_j^{-1} = \langle R_n(x), xR_j(x)\rangle\mathcal{H}_j^{-1} = 0,$$

para todo $j < n-1$, donde hemos usado (3.2.5) y que $\mathcal{H}_j$ es una matriz definida positiva y por lo tanto inversible. Así, (3.2.7) se escribe simplemente como

$$xR_n(x) = S_{n-1}R_{n-1}(x) + S_nR_n(x) + S_{n+1}R_{n+1}(x).$$

Si definimos $A_n = S_{n+1}$, $B_n = S_n$, $C_n = S_{n-1}$, obtenemos la expresión (3.2.6). Ahora supongamos que el coeficiente director de R_n es L_n , el cual es inversible por ser $\{P_n\}$ una sucesión simple. Comparando el término de orden $n+1$ en (3.2.6), vemos que $L_n = A_nL_{n+1}$. Entonces, $A_n = L_nL_{n+1}^{-1}$ que es claramente inversible. Y así, A_n es inversible para todo $n \geq 0$. □

Corolario 3.11. *Si $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ es una sucesión de polinomios matriciales ortonormales con respecto a W, entonces satisface una relación de recurrencia de la forma*

$$xQ_n(x) = A_nQ_{n+1}(x) + B_nQ_n(x) + A_{n-1}^*Q_{n-1}(x).$$

Además, B_n es Hermitiana para todo n.

Demostración. Utilizando la notación de la demostración anterior y que $\mathcal{H}_j = I$ para todo j, tenemos que

$$A_n = \langle xQ_n(x), Q_{n+1}(x)\rangle = S_{n+1}, \qquad B_n = \langle xQ_n(x), Q_n(x)\rangle = S_n.$$

Entonces, ocurre que

$$A_{n-1}^* = \langle xQ_{n-1}(x), Q_n(x)\rangle^* = \langle Q_n(x), xQ_{n-1}(x)\rangle = \langle xQ_n(x), Q_{n-1}(x)\rangle = S_{n-1},$$

donde usamos (3.2.5). Notemos que B_n es Hermitiana ya que

$$B_n^* = \langle xQ_n(x), Q_n(x)\rangle^* = \langle Q_n(x), xQ_n(x)\rangle = \langle xQ_n(x), Q_n(x)\rangle = S_n.$$

Esto completa la demostración. □

Observación 3.12. *Si definimos los polinomios $\{\widetilde{Q}_n\}_{n\geq 0}$ como en la Observación 3.9, es decir*

$$\widetilde{Q}_n = U_nQ_n \quad \text{donde } U_n \text{ es una matriz unitaria para todo } n \geq 0,$$

estos polinomios satisfacen también una relación de recurrencia de tres términos, con A_n y B_n remplazados respectivamente por $\widetilde{A}_n = U_nA_nU_{n+1}^*$ y $\widetilde{B}_n = U_nA_nU_n^*$, ya que, como $Q_n = U_n^*\widetilde{Q}_n$, sigue de (3.2.6) *que*

$$xU_n^*\widetilde{Q}_n(x) = A_nU_{n+1}^*\widetilde{Q}_{n+1}(x) + B_nU_n^*\widetilde{Q}_n(x) + A_{n-1}^*U_{n-1}^*\widetilde{Q}_{n-1}(x).$$

Multiplicando a izquierda la fórmula anterior por U_n, obtenemos el resultado.

Daremos ahora una consecuencia inmediata de la relación de recurrencia de tres términos, la identidad de Christoffel-Darboux

Teorema 3.13 (Identidad de Christoffel-Darboux)**.** *Si $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ es una sucesión de polinomios matriciales ortonormales con respecto a W entonces*

$$\sum_{j=0}^{n} Q_j^*(x)Q_j(y) = \frac{Q_n^*(x)A_nQ_{n+1}(y) - Q_{n+1}^*(x)A_n^*Q_n(y)}{y-x} \tag{3.2.8}$$

Demostración. Usando el Corolario 3.11, tenemos

$$\begin{aligned} yQ_j^*(x)Q_j(y) &= Q_j^*(x)(A_jQ_{j+1}(y) + B_jQ_n(y) + A_{j-1}^*Q_{j-1}(y)) \\ &= Q_j^*(x)A_jQ_{j+1}(y) + Q_j^*(x)B_jQ_j(y) + Q_j^*(x)A_{j-1}^*Q_{j-1}(y)), \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

y también, tenemos

$$\begin{aligned} xQ_j^*(x)Q_j(y) &= (A_jQ_{j+1}(x) + B_jQ_j(x) + A_{j-1}^*Q_{j-1}(x))^*Q_j(y) \\ &= Q_{j+1}^*(x)A_j^*Q_j(y) + Q_j^*(x)B_j^*Q_j(y) + Q_{j-1}^*(x)A_{j-1}Q_j(y). \end{aligned}$$

Usando esto, y que $B_j = B_j^*$, tenemos

$$\begin{aligned} (y-x)Q_j^*(x)Q_j(y) = Q_j^*(x)A_jQ_{j+1}(y) &+ Q_j^*(x)A_{j-1}^*Q_{j-1}(y) \\ &- Q_{j+1}^*(x)A_j^*Q_j(y) - Q_{j-1}^*(x)A_{j-1}Q_j(y). \end{aligned}$$

Llamando $\alpha_j = Q_j^*(x)A_jQ_{j+1}(y) - Q_{j+1}^*(x)A_j^*Q_j(y)$ lo anterior se escribe como

$$(y-x)Q_j^*(x)Q_j(y) = \alpha_j - \alpha_{j-1}.$$

Sumando desde $j = 0$ hasta n, tenemos

$$\sum_{j=0}^{n}(y-x)Q_j^*(x)Q_j(y) = \sum_{j=0}^{n}\alpha_j - \sum_{j=0}^{n}\alpha_{j-1} = \alpha_n - \alpha_{-1},$$

y como $\alpha_{-1} =, 0$ esto último es igual a $Q_n^*(x)A_nQ_{n+1}(y) - Q_{n+1}^*(x)A_n^*Q_n(y)$ y por lo tanto obtenemos

$$\sum_{j=0}^{n} Q_j^*(x)Q_j(y) = \frac{Q_n^*(x)A_nQ_{n+1}(y) - Q_{n+1}^*(x)A_n^*Q_n(y)}{y-x},$$

como se quería. □

En el caso matricial existe un resultado análogo al Teorema de Favard escalar 2.14 que es el recíproco del Teorema 3.10, ver por ejemplo [9].

3.3. Operadores simétricos

Sea $T : \mathbb{C}^{N\times N}[x] \to \mathbb{C}^{N\times N}[x]$ un operador lineal. Diremos que T es simétrico con respecto a W si

$$\langle TP, Q\rangle_W = \langle P, TQ\rangle_W, \quad \text{para todo } P, Q \in \mathbb{C}^{N\times N}[x].$$

Como observamos en (3.2.5) el operador multiplicación por x es simétrico con respecto a W. Una sucesión de polinomios ortogonales $\{R_n\}$ es una sucesión de autofunciones del operador T si existe una sucesión de matrices $\Lambda_n \in \mathbb{C}^{N\times N}$ tal que

$$TR_n = \Lambda_n R_n, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

En el siguiente teorema, probaremos que todo operador simétrico T que preserva los espacios vectoriales V_j, es decir que $TV_j \subset V_j$, donde V_j está dado en (3.1.4), tiene a cualquier sucesión de polinomios ortogonales como autofunciones.

Teorema 3.14. *Sea $\{R_n\}$ cualquier sucesión de polinomios ortogonales matriciales asociada a W. Si $T : \mathbb{C}^{N\times N}[x] \to \mathbb{C}^{N\times N}[x]$ es simétrico respecto W y preserva los espacios V_j, entonces, $TR_n = \Lambda_n R_n$, para alguna matriz Λ_n.*

Demostración. Para $n = 0$ tenemos que $TR_0 \in V_0$, por lo tanto $TR_0 = \Lambda_0 R_0$. Por inducción, asumimos que $TR_j = \Lambda_j R_j$, para cada $0 \le j \le n-1$. Por la Proposición 3.2 tenemos que $TR_n = \sum_{i=0}^{n} A_i R_i$. Por lo tanto, para cada $0 \le j \le n-1$ tenemos que

$$\langle TR_n, R_j\rangle = \sum_{i=0}^{n}\langle A_iR_i, R_j\rangle = \sum_{i=0}^{n} A_i\langle R_i, R_j\rangle = A_j\langle R_j, R_j\rangle.$$

Por otro lado, como T es simétrico obtenemos

$$\langle TR_n, R_j\rangle = \langle R_n, TR_j\rangle = \langle R_n, \Lambda_j R_j\rangle = \langle R_n, R_j\rangle\Lambda_j^* = 0$$

Entonces, $A_j\langle R_j, R_j\rangle = 0$ para cada $0 \le j \le n-1$, lo cual implica que $A_j = 0$ pues la matriz $\langle R_j, R_j\rangle$ es no singular. Por lo tanto, $TR_n = \Lambda_n R_n$ y esto concluye la prueba. □

Supongamos que tenemos n operadores lineales $T_j : \mathbb{C}^{N\times N}[x] \to \mathbb{C}^{N\times N}[x]$ tal que para todo polinomio P de grado m con coeficiente director inversible tenemos que T_jP es un polinomio de grado $m-j$ con coeficiente director inversible si $j \leq m$ y cero si $j > m$. Sea T un operador lineal de la siguiente forma

$$T = F_n(x)T_n + \cdots + F_0(x)T_0, \tag{3.3.10}$$

donde F_j son fuciones matriciales.

Proposición 3.15. *Supongamos que T es un operador lineal de la forma* (3.3.10) *que preserva los espacios V_j para todo $j = 0, \ldots, n$. Entonces F_i es un polinomio de grado, a lo sumo i para todo $i = 0, \ldots, n$.*

Demostración. Como T preserva los espacios V_j tenemos $Tx^jI \in V_j$ para todo j. Por hipótesis, T_0x^0I es un polinomio de grado cero inversible, y $T_jx^0I = 0$ para todo $j > 0$ entonces, $Tx^0I = F_0(x)T_0x^0I \in V_0$ entonces $F_0 \in V_0$. Supongamos por hipótesis inductiva que $F_0, \ldots, F_j$ son polinomios de grado $0, \ldots, j$. Dado que los términos $F_k(x)T_kx^{j+1}I$ se anulan para todo $k > j+1$, tenemos que

$$Tx^{j+1}I = F_{j+1}(x)T_{j+1}x^{j+1}I + F_j(x)T_jx^{j+1}I + \ldots + F_0T_0x^{j+1}I \in V_{j+1}.$$

Entonces, $F_{j+1}T_{j+1}x^{j+1}I \in V_{j+1}$, y además, por hipótesis, $T_{j+1}x^{j+1}I$ es un polinomio de grado cero inversible. Por lo tanto concluimos que $F_{j+1} \in V_{j+1}$. $\square$

CAPÍTULO 4

Polinomios ortogonales matriciales asociados a pesos con soporte (a, b)

En este capítulo, consideraremos el caso en que la medida $d\mu(x)$ es la medida de Lebesgue dx en (3.1.1). Las ecuaciones de Pearson tienen un rol fundamental en el estudio de las Familias Clásicas de polinomios ortogonales. Como discutimos en 2.3.3, las familias clásicas de Jacobi, Laguerre y Hermite, satisfacen una ecuación del tipo (2.3.21). En el caso matricial, Cantero, Moral y Velasquez [5] estudiaron un análogo matricial de las ecuaciones de Pearson que permite garantizar la ortogonalidad de la sucesión de derivadas de una sucesión de polinomios ortogonales. A diferencia del caso escalar, en el contexto matricial, no todo peso que admita un operador diferencial simétrico de segundo orden satisface una ecuación de Pearson. Para ver ejemplos de familias de polinomios ortogonales de dimensión arbitraria con una ecuación de Pearson referimos a [25], [21], [26].

Teorema 4.1. *Sea W un peso matricial definido positivo con soporte (a, b), derivable y con momentos finitos de todo orden y $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ la sucesión de polinomios matriciales ortogonales mónicos con respecto a W. Supongamos que existen polinomios Ψ, Φ de grado, a lo sumo, uno y dos respectivamente tales que:*

1. $P_n(x)W(x)\Phi(x)\frac{d}{dx}P_m(x)^*\Big|_a^b = 0,$

2. $\frac{d}{dx}(W\Phi)(x) = W(x)\Psi(x).$

Entonces, la sucesión de polinomios $\{\frac{d}{dx}P_n(x)\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de polinomios ortogonales con respecto $\widetilde{W}(x) = W(x)\Phi(x)$.

Observación 4.2. *Observemos que la primer condición se satisface automáticamente si W decae exponencialmente en los extremos del soporte (a, b) o si el polinomio Φ se anula en los extremos del soporte.*

Observación 4.3. *En el Teorema 4.1 , se demuestra que la sucesión de polinomios $\{\frac{d}{dx}P_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de polinomios con coeficientes directores no singulares tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un polinomio de grado n en la sucesión: $\frac{d}{dx}P_{n+1}$. Por lo tanto, todo polinomio matricial se puede escribir como combinación lineal de elementos de la sucesión $\{\frac{d}{dx}P_n\}_{n\geq 1}$. Además,* *estos polinomios satisfacen las relaciones de ortogonalidad*

$$\int_a^b \frac{dP_n}{dx}(x)\widetilde{W}(x)\left(\frac{dP_m}{dx}(x)\right)^* dx = 0 \qquad m < n.$$

Por esto, decimos que $\{\frac{d}{dx}P_n\}_{n\geq 1}$ *es una sucesión de polinomios ortogonales matriciales con respecto a* $\widetilde{W}$. *Notemos que el Teorema 4.1 no garantiza, en principio, que el peso* $\widetilde{W}$ *sea definido positivo o Hermitiano.*

Demostración. Es claro que $\frac{d}{dx}P_n$ es un polinomio matricial de grado $n-1$ con coeficiente director no singular ya que si $P_n(x) = x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_0$ entonces,

$$\frac{d}{dx}P_n(x) = nx^{n-1} + (n-1)A_{n-1}x^{n-2} + \cdots + A_1.$$

Por lo tanto, para verificar que $\{\frac{d}{dx}P_n\}$ es una sucesión de polinomios ortogonales con respecto $\widetilde{W}(x)$, basta probar que

$$\int_a^b \frac{dP_n}{dx}(x)\widetilde{W}(x)\left(\frac{dP_m}{dx}(x)\right)^* dx = 0 \qquad m < n. \tag{4.0.1}$$

Integrando por partes, obtenemos que el lado izquierdo de (4.0.1) se escribe como

$$P_n(x)\widetilde{W}(x)\left(\frac{dP_m}{dx}(x)\right)^*\Bigg|_a^b - \int_a^b P_n(x)\frac{d}{dx}\left(\widetilde{W}(x)\left(\frac{dP_m}{dx}(x)\right)^*\right)dx. \tag{4.0.2}$$

Luego, aplicando la regla de derivación de producto de funciones, obtenemos que la integral de (4.0.2) es igual a

$$-\int_a^b P_n(x)\frac{d\widetilde{W}}{dx}(x)\left(\frac{dP_m}{dx}(x)\right)^* dx - \int_a^b P_n(x)\widetilde{W}(x)\left(\frac{d^2P_m}{dx^2}(x)\right)^* dx.$$

Por lo tanto, (4.0.2) se escribe

$$P_n(x)\widetilde{W}(x)\left(\frac{dP_m}{dx}(x)\right)^*\Bigg|_a^b - \int_a^b P_n(x)\frac{d\widetilde{W}}{dx}(x)\left(\frac{dP_m}{dx}(x)\right)^* dx - \int_a^b P_n(x)\widetilde{W}(x)\left(\frac{d^2P_m}{dx^2}(x)\right)^* dx \tag{4.0.3}$$

Utilizando la primer hipótesis en (4.0.3), tenemos que el primer sumando es igual a cero, y utilizando que $\frac{d}{dx}\widetilde{W}(x) = W(x)\Psi(x)$ y $\widetilde{W}(x) = W(x)\Phi(x)$ con Φ y Ψ polinomios de grado dos y uno respectivamente, (4.0.3) se escribe como

$$-\int_a^b P_n(x)W(x)\Phi(x)\left(\frac{d^2P_m}{dx^2}(x)\right)^* dx - \int_a^b P_n(x)W(x)\Psi(x)\left(\frac{dP_m}{dx}(x)\right)^* dx, \tag{4.0.4}$$

Como el grado de Φ es menor o igual a 2 y el de $\left(\frac{d^2P_m}{dx^2}\right)^*$ es igual a $m-2$, el grado de $\Phi(x)\left(\frac{d^2P_m}{dx^2}\right)^*$ es menor o igual que m. Por lo tanto, el primer sumando de (4.0.4) es igual a cero si $m < n$.

Por otro lado, como el grado de Ψ es menor o igual a 1 y el de $\left(\frac{dP_m}{dx}\right)^*$ es igual a $m-1$, el grado de $\Psi(x)\left(\frac{dp_m}{dx}\right)^*$ es menor o igual que m. Por lo tanto, el segundo sumando de (4.0.4) es igual a cero si $m < n$. Esto concluye la prueba del teorema. □

4.1. Deducción de la fórmula de Rodrigues

Dado un peso matricial W que satisface las hipótesis del Teorema 4.1 y asumiendo que $\widetilde{W}$ es definido positivo, podemos ver al operador

$$\frac{d}{dx} : L^2(W) \to L^2(\widetilde{W})$$

como un operador que manda la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a W, $\{P_n\}_{n\geq 0}$, a la sucesión $\{\frac{d}{dx}P_n\}_{n\geq 1}$ que resulta ser una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a $\widetilde{W}$.

Teniendo en cuenta el caso escalar, consideraremos una familia de pesos matriciales $W^{(\nu)}$ definidos positivos con soporte (a,b) y momentos finitos de todo orden, donde ν pertenece a un subconjunto $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}$ con la propiedad $v+\sigma \in \mathcal{V}$ para todo $v \in \mathcal{V}$ con σ un elemento fijo de $\mathbb{R}$. Denotamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(\nu)}$ el producto interno inducido por $W^{(\nu)}$. Supongamos que $W^{(\nu)}$ satisface las hipótesis del Teorema 4.1. En particular, suponemos que existen polinomios $\Phi^{(\nu)}$ y $\Psi^{(\nu)}$ de grados 2 y 1 respectivamente tales que

$$\frac{d}{dx}\left(W^{(\nu)}(x)\Phi^{(\nu)}(x)\right) = W^{(\nu)}(x)\Psi^{(\nu)}(x).$$

Además, asumimos que $W^{(\nu)}(x)\Phi^{(\nu)}(x) = W^{(\nu+1)}(x)$. Como consecuencia del Teorema 2.17, podemos ver que la derivada con respecto a x como un operador

$$\frac{d}{dx} : L^2\left(W^{(\nu)}\right) \to L^2\left(W^{(\nu+1)}\right).$$

En nuestro caso, $\frac{d}{dx}$ tiene un adjunto que se puede calcular de manera explícita.

Teorema 4.4. *Sea $\{W^{(\nu)}\}$ una familia de pesos matriciales definidos positivos con soporte (a,b) y momentos finitos de todo orden que satisface las hipótesis del Teorema 4.1 para todo $\nu \in \mathcal{V}$. Sea*

$$S^{(\nu)}Q = -\left[\frac{dQ}{dx}(x)(\Phi^{(\nu)}(x))^* + Q(x)(\Psi^{(\nu)}(x))^*\right]$$

entonces

$$\langle \frac{dP}{dx}, Q\rangle_{(\nu+1)} = \langle P, S^{(\nu)}Q\rangle_{(\nu)}$$

para todos P, Q polinomios matriciales.

Demostración. Utilizando la definción del producto interno, tenemos

$$\langle \frac{dP}{dx}, Q\rangle_{(\nu+1)} = \int_a^b \frac{dP}{dx}(x)W^{(\nu+1)}(x)Q^*(x)dx.$$

Integrando por partes, el lado derecho se escribe como

$$P(x)W^{(\nu+1)}(x)Q^*(x)|_a^b - \int_a^b P(x)\frac{dW^{(\nu+1)}Q^*}{dx}(x)dx. \tag{4.1.5}$$

Por el Teorema 4.1, $\{P_n\}$ y $\{\frac{dP_n}{dx}\}$ son sucesiones simples y $W^{(\nu+1)}(x) = W^{(\nu)}(x)\Phi^{(\nu)}(x)$. Entonces por la primera hipótesis del Teorema 4.1, tenemos que $P(x)W^{(\nu+1)}(x)Q^*(x)|_a^b = 0$. Utilizando esto y la regla del derivación del producto de funciones (4.1.5) se escribe como

$$-\int_a^b P(x)\left(\frac{dW^{(\nu+1)}}{dx}(x)Q^*(x) + W^{(\nu+1)}(x)\frac{dQ^*}{dx}(x)\right)dx.$$

Como $W^{(\nu+1)}(x) = W^{(\nu)}(x)\Phi^{(\nu)}(x)$ y $\frac{d}{dx}W^{(\nu+1)}(x) = W^{(\nu)}(x)\Psi^{(\nu)}(x)$, la ecuación anterior se escribe como

$$-\int_a^b P(x)\left(W^{(\nu)}(x)\Phi^{(\nu)}(x)\frac{dQ^*}{dx}(x) + W^{(\nu)}(x)\Psi^{(\nu)}(x)Q^*(x)\right)dx,$$

lo cual es igual a

$$-\int_a^b P(x)W^{(\nu)}(x)\left(\Phi^{(\nu)}(x)\frac{dQ^*}{dx}(x) + \Psi^{(\nu)}(x)Q^*(x)\right)dx. \tag{4.1.6}$$

Y como

$$\left(\Phi^{(\nu)}\frac{dQ^*}{dx} + \Psi^{(\nu)}Q^*\right)(x) = \left(\frac{dQ}{dx}(\Phi^{(\nu)})^* + Q(\Psi^{(\nu)})^*\right)^*(x),$$

tenemos que (4.1.6) es igual a

$$-\int_a^b P(x)W^{(\nu)}(x)\left(\frac{dQ}{dx}(\Phi^{(\nu)})^* + Q(\Psi^{(\nu)})^*\right)^*(x)dx = \langle P, S^{(\nu)}Q\rangle_{(\nu)}$$

En conclusión, $\langle \frac{dP}{dx}, Q\rangle_{(\nu+1)} = \langle P, S^{(\nu)}Q\rangle_{(\nu)}$ como se quería probar. □

Como consecuencia del Teorema 4.1, $\{\frac{d}{dx}P_n^{(\nu)}\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de polniomios ortogonales matriciales con respecto a $W^{(\nu+1)}(x)$. Así, $\frac{d}{dx}P_n^{(\nu)} = K_n P_{n-1}^{(\nu+1)}$ donde K_n es una matriz constante. Como los polinomios $P_n^{(\nu)}$ y $P_{n-1}^{(\nu+1)}$ son mónicos y el coeficiente director de $\frac{d}{dx}P_n^{(\nu)}$ es nI, tenemos que $K_n = nI$.

Observación 4.5. *Notemos que el polinomio*

$$S^{(\nu)}P_{n-1}^{(\nu+1)} = -\left[\frac{d}{dx}P_{n-1}^{(\nu+1)}(x)(\Phi^{(\nu)}(x))^* + P_{n-1}^{(\nu+1)}(x)(\Psi^{(\nu)}(x))^*\right],$$

es un polinomio matricial de grado n, puesto que $\frac{d}{dx}P_{n-1}^{(\nu+1)}(x)$ es un polinomio de grado $n-2$, $(\Phi^{(\nu)}(x))^*$ es un polinomio de grado 2 y $(\Psi^{(\nu)}(x))^*$ es un polinomio de grado 1, digamos entonces,

$$S^{(\nu)}P_{n-1}^{(\nu+1)} = G_n P_n^{(\nu)} + \ldots + G_0 P_0^{(\nu)}.$$

Usando que $S^{(\nu)}$ es el adjunto de $\frac{d}{dx}$ tenemos que

$$\langle S^{(\nu)}P_{n-1}^{(\nu+1)}, P_m^{(\nu)}\rangle = \langle P_{n-1}^{(\nu+1)}, \frac{d}{dx}P_m^{(\nu)}\rangle = \langle P_{n-1}^{(\nu+1)}, mP_{m-1}^{(\nu+1)}\rangle = 0,$$

si $m-1 < n-1$ o sea si $m < n$ y como también ocurre que para $m < n$

$$\langle S^{(\nu)}P_{n-1}^{(\nu+1)}, P_m^{(\nu)}\rangle = \sum_{k=0}^{n} G_k\langle P_k^{(\nu)}, P_m^{(\nu)}\rangle = G_m\langle P_m^{(\nu)}, P_m^{(\nu)}\rangle = G_m\left\|P_m^{(\nu)}\right\|^2.$$

Entonces, $G_m = 0$ si $m < n$ y en conclusión,

$$S^{(\nu)}P_{n-1}^{(\nu+1)} = G_n P_n^{(\nu)}.$$

Como, $P_n^{(\nu)}$ es mónico, el coeficiente director de $S^{(\nu)}P_{n-1}^{(\nu+1)}$ es G_n. A su vez, sea $D^{(\nu)}$ el coeficiente de x^2 en $(\Phi^{(\nu)}(x))^*$ y sea $E^{(\nu)}$ el coeficiente de x en $(\Psi^{(\nu)}(x))^*$. entonces

$$G_n = cd(S^{(\nu)}P_{n-1}^{(\nu+1)}) = -((n-1)D^{(\nu)} + E^{(\nu)}). \tag{4.1.7}$$

Suponemos de ahora en adelante que G_n es inversible para todo n en $\mathbb{N}_0$.

Demostraremos ahora la fórmula de Rodrigues para polinomios ortogonales matriciales respecto a una familia de pesos definidos positivos con soporte en un intervalo.

Teorema 4.6 (Fórmula de Rodrigues.). *Sea $\{W^{(\nu)}\}$ una familia de pesos matriciales definidos positivos con soporte (a,b) y momentos finitos de todo orden que satisface las hipótesis del Teorema 4.1. Entonces la sucesión de polinomios matriciales ortogonales mónicos asociada a $W^{(\nu)}$ está dada por*

$$P_n^{(\nu)}(x) = (-1)^n (G_1 \dots G_n)^{-1} \frac{d^n W^{(\nu+n)}(x)}{dx^n} (W^{(j)}(x))^{-1},$$

para todo n en $\mathbb{N}_0$ y ν en $\mathcal{V}$, donde las matrices G_n están dadas en (4.1.7).

Demostración. Veamos por inducción que

$$S^{(\nu)} \dots S^{(\nu+n-1)} Q = (-1)^n \left(\frac{d^n}{dx^n} W^{(\nu+n)} Q \right) (W^{(\nu)})^{-1} \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \tag{4.1.8}$$

Procedemos para el caso $n=1$, usando la definción de $S^{(\nu)}$, tenemos

$$S^{(\nu)} Q(x) = -\left[\frac{dQ}{dx}(x) (\Phi^{(\nu)}(x))^* + Q(x) (\Psi^{(\nu)}(x))^* \right]. \tag{4.1.9}$$

Como la familia de pesos $\{W^{(\nu)}\}$ satisface las hipótesis del Teorema 4.1 sucede que

$$\Phi^{(\nu)}(x) = (W^{(\nu)}(x))^{-1} W^{(\nu+1)}(x) \quad \text{y que} \quad \Psi^{(\nu)}(x) = (W^{(\nu)}(x))^{-1} \left(\frac{d}{dx} W^{(\nu+1)}(x) \right).$$

Por lo tanto, el lado derecho de (4.1.9) se escribe como

$$-\left[\frac{dQ}{dx}(x) \left((W^{(\nu)}(x))^{-1} W^{(\nu+1)}(x) \right)^* (x) + Q(x) \left((W^{(\nu)}(x))^{-1} \left(\frac{d}{dx} W^{(\nu+1)}(x) \right) \right)^* (x) \right], \tag{4.1.10}$$

lo cual, como $W^{(\nu)}$ es definido positivo para todo ν es igual a

$$-\left(\frac{d}{dx} Q W^{(\nu+1)} \right)(x) (W^{(\nu)}(x))^{-1}.$$

Así, queda probado para $n=1$. Paso inductivo: Supongamos que vale para $1, \dots, n-1$, es decir, vale que

$$S^{(\nu)} \dots S^{(\nu+n-1)} Q = (-1)^n \left(\frac{d^n}{dx^n} W^{(\nu+n)} Q \right) (W^{(\nu)})^{-1} \tag{4.1.11}$$

Veamos que vale para n

$$S^{(\nu)} \dots S^{(\nu+n)} Q(x) = S^{(\nu)} \dots S^{(\nu+n-1)} \left(-\frac{dQ(x) W^{(\nu+n+1)}(x)}{dx} (W^{(\nu+n)}(x))^{-1} \right). \tag{4.1.12}$$

Usando la hipótesis inductiva en el lado derecho de (4.1.12) tenemos

$$(-1)^{n+1} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \left(\frac{dQ(x) W^{(\nu+n+1)}(x)}{dx} (W^{(\nu+n)}(x))^{-1} W^{(\nu+n)}(x) \right) (W^{(\nu)}(x))^{-1}.$$

lo cual es igual a

$$(-1)^{n+1}\frac{d^{n+1}Q(x)W^{(\nu+n+1)}(x)}{dx^{n+1}}(W^{(\nu)}(x))^{-1}$$

Así, la afirmación (4.1.8) es válida para todo n en $\mathbb{N}$. Notemos que $S^{(\nu)}1 = G_1P_1^{(\nu)}$, $S^{(\nu)}S^{(\nu+1)}1 = G_1S^{(\nu)}P_1^{(\nu+1)} = G_1G_2P_2^{(\nu)}$. En general, se tiene que

$$S^{(\nu)}\dots S^{(\nu+n-1)}1 = G_1\dots G_nP_n^{(\nu)},$$

con G_i inversible para todo i por lo supuesto en la Observación 4.5. Luego,

$$\begin{aligned} P_n^{(\nu)} &= (G_1\dots G_n)^{-1}S^{(\nu)}\dots S^{(\nu+n-1)}I \\ &= (G_1\dots G_n)^{-1}(-1)^n\frac{d^nW^{(\nu+n)}}{dx^n}(W^{(\nu)})^{-1}. \end{aligned}$$

Esto concluye la prueba del teorema. □

4.2. Fórmula de estructura

La ecuación de Pearson matricial dada en el Teorema 4.1, tiene como consecuencia una fórmula de estructura matricial. Como Φ es un polinomio de grado a lo sumo dos,

$$P_n'(x)\Phi^*(x) = \sum_{j=0}^{n+1} A_jP_j(x),$$

donde $A_j = \langle P_n'(x)\Phi^*(x), P_j\rangle\|P_j\|^{-2} = \left(\int_{\mathbb{R}} P_n'(x)\Phi^*(x)W(x)P_j(x)^*dx\right)\|P_j\|^{-2}$. Asumiendo ahora que $W(x)$ y $\widetilde{W}(x) = W(x)\Phi(x)$ son simétricos, es decir $W(x)^* = W(x)$ y $\widetilde{W}(x) = \widetilde{W}(x)^*$, tenemos que

$$\Phi(x)^*W(x) = \Phi(x)^*W(x)^* = (W(x)\Phi(x))^* = W(x)\Phi(x).$$

Entonces,

$$A_j = \left(\int_{\mathbb{R}} P_n'(x)W(x)\Phi(x)P_j(x)^*dx\right)\|P_j\|^{-2} = \left(\int_{\mathbb{R}} P_n'(x)\widetilde{W}(x)P_j(x)^*dx\right)\|P_j\|^{-2} = 0 \quad j < n-1$$

Luego

$$P_n'(x)\Phi(x)^* = A_{n+1}P_{n+1}(x) + A_nP_n(x) + A_{n-1}P_{n-1}(x). \tag{4.2.13}$$

Y por el Teorema 3.10, el lado derecho de (5.4.30) se escribe como

$$A_{n+1}(xP_n(x) - B_nP_n(x) - C_nP_{n-1}(x)) + A_nP_n(x) + A_{n-1}P_{n-1}(x),$$

lo cual es igual a

$$(xA_{n+1} - A_{n+1}B_n + A_n)P_n(x) + (-A_{n+1}C_n + A_{n-1})P_{n-1}(x).$$

En conclusión,

$$P_n'(x)\Phi(x)^* = (xA_{n+1} - A_{n+1}B_n + A_n)P_n(x) + (-A_{n+1}C_n + A_{n-1})P_{n-1}(x).$$

4.3. El álgebra de operadores diferenciales

Sea $W = W(x)$ una matriz peso $N \times N$ con momentos finitos y sea $\{R_n\}_{n\geq 0}$ cualquier sucesión de polinomios ortogonales matriciales asociada a W. Sea $\mathcal{D}$ el álgebra de todos los operadores diferenciales de la forma

$$D = \frac{d^s}{dx^s}F_s(x) + \frac{d^{s-1}}{dx^{s-1}}F_{s-1}(x) + \cdots + \frac{d}{dx}F_1(x) + F_0(x), \tag{4.3.14}$$

donde F_j es una función polinomial de grado menor o igual a j. Un elemento $D \in \mathcal{D}$ actúa a derecha en todo polinomio matricial P de la siguiente forma

$$PD = \frac{d^sP}{dx^s}(x)F_s(x) + \frac{d^{s-1}P}{dx^{s-1}}(x)F_{s-1}(x) + \cdots + \frac{dP}{dx}(x)F_1(x) + P(x)F_0(x).$$

Como F_j es un polinomio para todo j, tenemos que PD es un polinomio para todo polinomio P, es decir $V_jD \subset V_j$, donde V_j está dado en (3.1.4).

Observación 4.7. *La condición de que F_j es un polinomio de grado menor o igual a j asegura que D preserva el espacio V_j de polinomios de grado menor o igual a j. Por otro lado, la Proposición 3.15, implica que esto es una condición necesaria.*

De manera análoga a la Sección 3.3, una sucesión de polinomios ortogonales $\{R_n\}$ es una sucesión de autofunciones de un operador $D \in \mathcal{D}$ si existe una sucesión de matrices $\Lambda_n \in \mathbb{C}^{N\times N}$ tal que

$$R_nD = \Lambda_nR_n, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Diremos que un operador D es simétrico con respecto a W si

$$\langle PD, Q\rangle = \langle P, QD\rangle, \quad \text{para todo } P, Q \in \mathbb{C}^{N\times N}[x].$$

Como observamos en (3.2.5) el operador multiplicación por x es simétrico con respecto a W pero $x \notin \mathcal{D}$. Sin embargo, es importante observar que el operador multiplicación por x no tiene a ningún polinomio como autofunción. En el siguiente teorema demostramos que todo operador simétrico en $\mathcal{D}$ tiene a cualquier sucesión de polinomios ortogonales como autofunciones.

Teorema 4.8. *Sea $\{R_n\}$ cualquier sucesión de polinomios ortogonales matriciales asociada a W. Si $D \in \mathcal{D}$ es simétrico respecto a W entonces, $R_nD = \Lambda_nR_n$, para alguna matriz Λ_n.*

Demostración. Como $D \in \mathcal{D}$, el operador D preserva los espacios vectoriales V_n, para cada $n \geq 0$, y la demostración queda completa aplicando el Teorema 3.14. □

Dada cualquier sucesión de polinomios ortogonales matriciales $\{R_n\}$ asociada al peso W, definimos

$$\mathcal{D}(W) = \{D \in \mathcal{D} : R_nD = \Lambda_n(D)R_n, \quad \text{para todo, } n \geq 0, \text{ para alguna matriz } \Lambda_n(D)\} \tag{4.3.15}$$

Proposición 4.9. *Tenemos que*

1. *$\mathcal{D}(W)$ es una subálgebra de $\mathcal{D}$ que no depende de la sucesión $\{R_n\}$.*

2. *Para cada $n \in \mathbb{N}_0$, la función $\Lambda_n : \mathcal{D}(W) \to \mathbb{C}^{N\times N}$ dada por $D \mapsto \Lambda_n(D)$ es una representación del álgebra $\mathcal{D}(W)$.*

3. *La familia $\{\Lambda_n\}_{n\geq 0}$ separa puntos de $\mathcal{D}(W)$. Es decir, si D_1 y D_2 son puntos distintos de $\mathcal{D}(W)$ entonces, existe $n_0 \geq 0$ tal que $\Lambda_{n_0}(D_1) \neq \Lambda_{n_0}(D_2)$.*

Demostración. Es fácil verificar que $\mathcal{D}(W)$ es una subálgebra de $\mathcal{D}$. Para probar que es independiente de la sucesión $\{R_n\}$ tomamos otra sucesión de polinomios ortogonales $\{T_n\}$. Entonces, $T_n = A_n R_n$ para alguna matriz no singular A_n. Por lo tanto, tenemos que $T_n D = A_n R_n D = A_n \Lambda_n(D) R_n = \Gamma_n(D) T_n$, donde $\Gamma_n(D) = A_n \Lambda_n(D) A_n^{-1}$. Si D_1 y D_2 están en $\mathcal{D}(W)$ entonces

$$P_n D_1 D_2 = D_2(\Lambda_n(D_1)P_n) = \Lambda_n(D_1)\Lambda_n(D_2)P_n.$$

Por lo tanto $\Lambda_n(D_1D_2) = \Lambda_n(D_1)\Lambda_n(D_2)$. Asumamos que existe un operador $D \in \mathcal{D}(W)$ tal que $\Lambda_n(D) = 0$ para todo $n \geq 0$. Para probar (3), tenemos que verificar que $D = 0$. Por hipótesis, tenemos que $D = \sum_{i=0}^{s} F_i(x)\frac{d^i}{dx^i}$ satisface $R_n D = 0$ para todo $n \geq 0$. Para $n = 0$, obtenemos $P_0 F_0 = 0$ entonces $F_0 = 0$. Por inducción, podemos asumir que $F_i = 0$ para $0 \leq i \leq j-1$ con $j \leq s$. Entonces $0 = P_j D = \sum_{i=0}^{j} F_i(x)\frac{d^i(P_j)}{dx^i} = F_j(x) j! M_j$, donde M_j es el coeficiente director de P_j, que es no singular. Por lo tanto, $F_j = 0$. Esto concluye la prueba de la proposición. □

4.4. Operadores diferenciales de segundo orden

Por el Teorema 4.8, todo operador simétrico en $\mathcal{D}$ tiene a cualquier sucesión de polinomios ortogonales como autofunciones o, en otras palabras, pertenece a $\mathcal{D}(W)$. El siguiente teorema da condiciones para la simetría de un operador diferencial de orden dos.

Teorema 4.10. *Dado un peso matricial W con soporte (a,b), consideremos el operador*

$$DP(x) = \frac{d^2P}{dx^2}(x)A_2(x) + \frac{dP}{dx}(x)A_1(x) + P(X)A_0(x).$$

Entonces D es simétrico con respecto a W si y sólo si las funciones A_2, A_1, A_0 satisfacen:

$$\lim_{x\to a,b} A_2(x)W(x) = 0, \quad \lim_{x\to a,b}(A_1(x)W(x) - \frac{d(A_2W)}{dx}(x)) = 0,$$

$$A_2(x)W(x) = W(x)A_2(x)^*, \qquad 2\frac{d(A_2W)}{dx}(x) = W(x)A_1(x)^* + A_1(x)W(x),$$

$$\frac{d^2(A_2W)}{dx}(x) - \frac{d(A_1W)}{dx}(x) + A_0(x)W(x) = W(x)A_0(x)^*.$$

Demostración. El operador D es simétrico con respecto a W si y sólo si $\langle PD, Q\rangle = \langle P, QD\rangle$ para todo $P, Q \in \mathbb{C}^{N\times N}[x]$. El teorema se demuestra aplicando integración por partes en el término $\langle PD, Q\rangle$, ver por ejemplo [11]. □

Teorema 4.11. *Sea P un polinomio matricial que satisface la ecuación diferencial de segundo orden*

$$\frac{d^2P}{dx^2}(x)A(x) + \frac{dP}{dx}(x)B(x) + P(x)C = \Lambda P(x), \tag{4.4.16}$$

donde A, B, C son polinomios matriciales de grados dos, uno, y cero respectivamente, y Λ es una matriz constante. Entonces el polinomio $Q^{(k)} = \frac{d^k P}{dx^k}$ satisface la ecuación

$$\frac{d^2 Q^{(k)}}{dx^2}(x)A_k(x) + \frac{dQ^{(k)}}{dx}Q^{(k)}(x)B_k(x) + Q^{(k)}(x)C_k(x) = \Lambda Q^{(k)}(x),$$

donde $A_k(x) = A(x)$, $B_k(x) = \left(k\frac{dA}{dx}(x) + B(x)\right)$ y $C_k(x) = \left(\frac{k(k-1)}{2}\frac{d^2A}{dx^2}(x) + k\frac{dB}{dx}(x) + C\right)$.

Observación 4.12. *Los polinomios A_k, B_k, C_k son polinomios matriciales de grados dos, uno y cero respectivamente para todo k por ser A, B, C de grados dos, uno y cero.*

Demostración. Realizaremos la prueba por inducción en k. Procedemos a demostrar la fórmula para el caso $k = 1$. Aplicando $\frac{d}{dx}$ en ambos miembros de (4.4.16) obtenemos:

$$\frac{d^3P}{dx^3}(x)A(x) + \frac{d^2P}{dx^2}(x)\frac{dA}{dx}(x) + \frac{d^2P}{dx^2}(x)B(x) + \frac{dP}{dx}(x)\frac{dB}{dx}(x) + \frac{dP}{dx}(x)C = \Lambda\frac{dP}{dx}(x),$$

Reordenando los términos de esta ecuación tenemos

$$\frac{d^2Q^{(1)}}{dx^2}(x)A(x) + \frac{dQ^{(1)}}{dx}(x)\left(\frac{dA}{dx}(x) + B(x)\right) + Q^{(1)}(x)\left(\frac{dB}{dx}(x) + C\right) = \Lambda Q^{(1)}(x+1)$$

lo cual es igual a

$$\frac{d^2Q^{(1)}}{dx^2}(x)A_1(x) + \frac{dQ^{(1)}}{dx}(x)B_1(x) + Q^{(1)}(x)C_1 = \Lambda Q^{(1)}(x+1).$$

Paso inductivo: Suponemos que la fórmula es válida para un número natural cualquiera k=j. Es decir, vale la siguiente hipótesis inductiva:

$$\frac{d^2Q^{(j)}}{dx^2}(x)A_j(x) + \frac{dQ^{(j)}}{dx}(x)B_j(x) + Q^{(j)}(x)C_j(x) = \Lambda Q^{(j)}(x).$$

Veamos que la fórmula es cierta para k=j+1. Aplicando $\frac{d}{dx}$ en ambos miembros de la hipótesis inductiva, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{d^3Q^{(j)}}{dx^3}(x)A_j(x) + \frac{d^2Q^{(j)}}{dx^2}(x)\frac{dA_j}{dx}(x) + \frac{d^2Q^{(j)}}{dx^2}(x)B_j(x) + \frac{dQ^{(j)}}{dx}(x)\frac{dB_j}{dx}(x)\\ + \frac{dQ^{(j)}}{dx}(x)C_j(x) + Q^{(j)}(x)\frac{dC_j}{dx} = \Lambda\frac{d}{dx}Q^{(j)}(x).\end{aligned}$$

Lo cual es igual a

$$\begin{aligned}\frac{d^2Q^{(j+1)}}{dx^2}(x)A_j(x) + \frac{dQ^{(j+1)}}{dx}(x)\left(\frac{dA_j}{dx}(x) + B_j(x)\right) + Q^{(j+1)}(x)\left(\frac{dB_j}{dx}(x) + C_j(x)\right)\\ + Q^{(j)}(x)\frac{dC_j}{dx} = \Lambda Q^{(j+1)}(x) \quad (4.4.17)\end{aligned}$$

además tenemos que

$$\frac{dA_j}{dx}(x) = \frac{dA}{dx}(x), \quad \frac{dB_j}{dx}(x) = j\frac{d^2A}{dx^2}(x) + \frac{dB}{dx}(x),$$

$$\frac{dC_j}{dx}(x) = \frac{j(j-1)}{2}\frac{d^3A}{dx^3}(x) + j\frac{d^2B}{dx^2}(x) + \frac{dC}{dx}(x).$$

Reordenando los términos de esta la ecuación (4.4.17) y usando que A, B, C tienen grados $2, 1, 0$ respectivamente obtenemos

$$\frac{d^2Q^{(j+1)}}{dx^2}(x)A(x) + \frac{dQ^{(j+1)}}{dx}(x)\left(\frac{dA}{dx}(x) + j\frac{dA}{dx}(x) + B(x)\right) + \\ Q^{(j+1)}(x)\left(j\frac{d^2A}{dx^2}(x) + \frac{dB}{dx}(x) + \frac{j(j-1)}{2}\frac{d^2A}{dx^2}(x) + j\frac{dB}{dx}(x) + C\right) = \Lambda Q^{(j+1)}(x)$$

Operando obtenemos que

$$\frac{d^2Q^{(j+1)}}{dx^2}(x)A(x) + \frac{dQ^{(j+1)}}{dx}(x)\left((j+1)\frac{dA}{dx}(x) + B(x)\right) \\ + Q^{(j+1)}(x)\left(\frac{(j+1)j}{2}\frac{d^2A}{dx^2}(x) + (j+1)\frac{dB}{dx}(x) + C\right) = \Lambda Q^{(j+1)}(x),$$

lo cual es igual a

$$\frac{d^2Q^{(j+1)}}{dx^2}(x)A_{j+1}(x) + \frac{dQ^{(j+1)}}{dx}(x)B_{j+1}(x) + Q^{(j+1)}(x)C_{j+1}(x) = \Lambda Q^{(j+1)}(x).$$

Con esto concluimos que el resultado vale para todo número natural. □

Suponiendo que estamos en un contexto similar al de la sección anterior, es decir, consideraremos una familia de pesos matriciales $W^{(\nu)}$ definidos positivos con soporte (a, b) y con momentos finitos de todo orden, donde ν pertenece a un subconjunto $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}$ con la propiedad $v + \sigma \in \mathcal{V}$ para todo $v \in \mathcal{V}$ con σ un elemento fijo de $\mathbb{R}$. y supondremos $W^{(\nu)}$ satisface las hipótesis del Teorema 4.1 para todo $\nu \in \mathcal{V}$. En particular, existen polinomios $\Phi^{(\nu)}$ y $\Psi^{(\nu)}$ de grados 2 y 1 respectivamente tales que

$$\frac{d}{dx}\left(W^{(\nu)}(x)\Phi^{(\nu)}(x)\right) = W^{(\nu)}(x)\Psi^{(\nu)}(x). \tag{4.4.18}$$

Además, asumimos que $W^{(\nu)}(x)\Phi^{(\nu)}(x) = W^{(\nu+1)}(x)$. Como consecuencia del Teorema 4.1, podemos ver que a la derivada con respecto a x como un *lowering operator*

$$\frac{d}{dx} : L^2\left(W^{(\nu)}\right) \to L^2\left(W^{(\nu+1)}\right).$$

y a su adjunto $S^{(\nu)}$ como un *raising operator*

$$S^{(\nu)} : L^2\left(W^{(\nu+1)}\right) \to L^2\left(W^{(\nu)}\right).$$

Con lo cual, tiene sentido considerar los operadores D_1 y D_2 definidos por

$$D_1 = \frac{d}{dx} \circ S^{(\nu-1)} : L^2\left(W^{(\nu)}\right) \to L^2\left(W^{(\nu)}\right),$$

$$D_2 = S^{(\nu)} \circ \frac{d}{dx} : L^2\left(W^{(\nu)}\right) \to L^2\left(W^{(\nu)}\right).$$

Usando la Proposición 4.4 vemos que los operadores D_1 y D_2 son de orden dos y pueden ser escritos de forma explícita

$$
\begin{aligned}
P^{(\nu)} D_1 &= \left(\frac{d}{dx} \circ S^{(\nu-1)}\right) P^{(\nu)} = -\frac{d}{dx}\left[\frac{dP^{(\nu)}}{dx}(\Phi^{(\nu-1)})^* + P^{(\nu)}(\Psi^{(\nu-1)})^*\right] \\
&= -\frac{d^2 P^{(\nu)}}{dx^2}(\Phi^{(\nu-1)})^* - \frac{dP^{(\nu)}}{dx}\left[\frac{d(\Phi^{(\nu-1)})^*}{dx} + (\Psi^{(\nu-1)})^*\right] - P^{(\nu)}\frac{d(\Psi^{(\nu-1)})^*}{dx}.
\end{aligned}
$$

$$
P^{(\nu)}(x) D_2 = \left(S^{(\nu)} \circ \frac{d}{dx}\right) P^{(\nu)} = -\left[\frac{d^2 P^{(\nu)}}{dx^2}(\Phi^{(\nu)})^* + \frac{dP^{(\nu)}}{dx}(\Psi^{(\nu)})^*\right].
$$

Notemos que estas dos últimas expresiones pueden en principio ser distintas. Además estos operadores son simétricos respecto a $W^{(\nu)}$ ya que por ser $S^{(\nu)}$ adjunto de $\frac{d}{dx}$, ocurre que dado dos polinomios matriciales P, Q

$$
\begin{aligned}
\langle PD_1, Q\rangle_{(\nu)} = \left\langle \left(\frac{d}{dx} \circ S^{(\nu-1)}\right) P, Q\right\rangle_{(\nu)} = \left\langle S^{(\nu-1)} P, S^{(\nu-1)} Q\right\rangle_{(\nu)} &= \left\langle P, \left(\frac{d}{dx} \circ S^{(\nu-1)}\right) Q\right\rangle_{(\nu)} \\
&= \langle P, QD_1\rangle_{(\nu)},
\end{aligned}
$$

y de la misma forma, tenemos

$$
\begin{aligned}
\langle PD_2, Q\rangle_{(\nu)} = \left\langle \left(S^{(\nu)} \circ \frac{d}{dx}\right) P, Q\right\rangle_{(\nu)} = \left\langle \frac{d}{dx} P, \frac{d}{dx} Q\right\rangle_{(\nu)} &= \left\langle P, \left(S^{(\nu)} \circ \frac{d}{dx}\right) Q\right\rangle_{(\nu)} \\
&= \langle P, QD_2\rangle_{(\nu)}.
\end{aligned}
$$

Entonces, por el Teorema 4.8, cualquier sucesión de polinomios ortogonales matriciales $\{R_n\}$ asociada a $W^{(\nu)}$ es autofunción de los operadores D_1 y D_2. Es decir, existen dos sucesiones de matrices $\left\{\Lambda_n^{(1)}\right\}$ y $\left\{\Lambda_n^{(2)}\right\}$ tales que

$$
R_n D_1 = \Lambda_n^{(1)} R_n \quad \text{y que} \quad R_n D_2 = \Lambda_n^{(2)} R_n.
$$

Y por el Teorema 4.11, la sucesión de polinomios $\left\{\frac{d^k R_n}{dx^k}\right\}$ satisface una ecuación del tipo (4.4.16).

4.5. Ejemplos

4.5.1. Polinomios ortogonales matriciales de tipo Gegenbauer

Los polinomios matriciales de tipo Gegenbauer introducidos en [25] se enmarcan en la teoría desarrollada en este capítulo. Para $\ell \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$, el peso es la matriz $(2\ell+1) \times (2\ell+1)$ dada por

$$
W^{(\nu)}(x) = L^{(\nu)}(x) T^{(\nu)}(x) L^{(\nu)}(x)^*, \qquad x \in (-1, 1), \tag{4.5.19}
$$

donde $L^{(\nu)} \colon [-1, 1] \to M_{2\ell+1}(\mathbb{C})$ es la siguiente matriz triangular inferior cuyas entradas son polinomiales

$$
\left(L^{(\nu)}(x)\right)_{m,k} = \begin{cases} 0 & \text{if } m < k \\ \dfrac{m!}{k!(2\nu+2k)_{m-k}} C_{m-k}^{(\nu+k)}(x) & \text{if } m \geq k, \end{cases}
$$

donde, $C_m^{(\lambda)}(x)$ denota los polinomios clásicos de Gegenbauer y $T^{(\nu)}\colon (-1,1) \to M_{2\ell+1}(\mathbb{C})$ es la matriz diagonal

$$\big(T^{(\nu)}(x)\big)_{k,k} = t_k^{(\nu)}\,(1-x^2)^{k+\nu-1/2}, \quad t_k^{(\nu)} = \frac{k!\,(\nu)_k}{(\nu+1/2)_k}\frac{(2\nu+2\ell)_k\,(2\ell+\nu)}{(2\ell-k+1)_k\,(2\nu+k-1)_k}.$$

En este caso, las entradas de las matrices están indexadas por $m, k \in \{0, \cdots, 2\ell\}$ y el peso $W^{(\nu)}$ depende de un parámetro ν. En [25] se demuestra que estos polinomios satisfacen una ecuación de Pearson como en (4.4.18), donde los polinomios $\Phi^{(\nu)}$ y $\Psi^{(\nu)}$ están dados en [25, (4.9), (4.10)].

CAPÍTULO 5

Polinomios ortogonales matriciales asociados a pesos con soporte $\mathbb{N}_0$

En este capítulo estudiaremos polinomios ortogonales matriciales con respecto a una medida matricial discreta de la forma

$$\Theta = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} W_k \delta_k,$$

donde W_k son matrices $N \times N$, definidas positivas. Es decir, que la medida $d\mu(x)$ en (3.1.1) es una medida puramente discreta dada por una suma de deltas. Nos enfocaremos en el caso en que el soporte del peso es infinito aunque, en principio, todos los resultados pueden extenderse al caso de soporte finito. En el caso escalar, $N = 1$, esta clase de medidas incluye a los polinomios de Charlier y Meixner.

Por simplicidad, identificaremos la medida Θ con un peso matricial $W(x)$ tal que $W(k) = W_k$ si $k \in \mathbb{N}_0$ y $W(x) = 0$ para todo $x \notin \mathbb{N}_0$. En este caso la medida de ortogonalidad matricial está determinada por una sucesión de matrices definidas positivas $W(k) = W_k$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Como en el Capítulo 3, asumimos que que W tiene momentos finitos, lo cual en este contexto se traduce en que la suma

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^j W(k) < \infty, \tag{5.0.1}$$

para todo $j \in \mathbb{N}_0$. Como en el Capítulo 3, el peso W induce un producto interno matricial dado por

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} P(k) W_k (Q(k))^*,$$

donde P y Q son polinomios matriciales $N \times N$. Entonces tenemos que existe una única sucesión $\{P_n\}$ de polinomios ortogonales mónicos con respecto a W tal que

$$\langle P_n, P_m\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} P_n(k) W(k) P_m(k)^* = 0, \qquad n \neq m.$$

En particular, en este trabajo consideraremos pesos que satisfacen una ecuación de Pearson discreta, a partir de la cual, extendemos los resultados obtenidos para el caso escalar en el

Capítulo 2. Los resultados de este capítulo están resumidos en la Figura 1.3. Una consecuencia de la ecuación de Pearson es la existencia de un operador en diferencias que actúa en la variable x y tiene a la sucesión de polinomios P_n como autofunciones. Este tipo de operadores se ha estudiado en los trabajos de A. Durán y colaboradores [15] [16] por diferentes medios. En particular, en [15] se encuentran operadores en diferencias estudiando condiciones para la existencia de operadores simétricos con respecto al peso W.

El primer resultado que estudiamos en la siguiente subsección consiste en determinar condiciones suficientes para la existencia de *shift operators* adecuados para los polinomios ortogonales a partir de una ecuación de Pearson discreta. Para eso utilizaremos la siguiente observación

Observación 5.1. *El hecho que el peso W tenga momentos finitos de cualquier orden tiene dos consecuencias importantes. En primer lugar, dados dos polinomios matriciales $P = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_0$ y $Q = B_m x^m + B_{m-1}x^{m-1} + \cdots + B_0$, tenemos que*

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N} P(k)W(k)Q(k) &= \sum_{k=0}^{N}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} k^{i+j}A_iW(k)B_j,\\ &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} A_i\left(\sum_{k=0}^{N} k^{i+j}W(k)\right)B_j.\end{aligned}$$

Por lo tanto, (5.0.1) *implica que el límite*

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N} P(k)W(k)Q(k), \tag{5.0.2}$$

existe y es finito. Por otro lado, la covergencia del límite anterior implica que

$$\lim_{k\to\infty} P(k)W(k)Q(k) = 0, \tag{5.0.3}$$

para todo par de polinomios matriciales P y Q.

5.1. Ecuaciones de Pearson Discretas

Como en el caso escalar, dada una función a valores matriciales $G : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{N\times N}$, consideramos los operadores en diferencias Δ y ∇ definidos por

$$\Delta G(x) = G(x+1) - G(x), \qquad \nabla G(x) = G(x) - G(x-1) = \Delta G(x-1).$$

Observación 5.2. *Dado un polinomio matricial P de grado n, digamos $P(x) = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_0$, el polinomio*

$$\begin{aligned}\Delta P(x) &= (A_n(x+1)^n + A_{n-1}(x+1)^{n-1} + \ldots + A_0) - (A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_0)\\ &= nA_n x^{n-1} + \textit{términos de grado menor},\end{aligned} \tag{5.1.4}$$

es un polinomio de grado $n-1$. Además, aplicando Δ a (5.1.4) *vemos que $\Delta^2 P$ es un polinomio de grado $n-2$. En general, para $k \le n$, $\Delta^k P$ es un polinomio de grado $n-k$ y si $k > n$, $\Delta^k P$ es idénticamente cero. Además, tenemos que*

$$\nabla P(x) = \Delta P(x-1) \tag{5.1.5}$$

es un polinomio matricial de grado $n-1$. Análogamente, tenemos que $\nabla^k P$ es un polinomio de grado $n-k$ si $k \leq n$ y es idénticamente cero si $k > n$.

Observación 5.3. *Los operdores Δ y ∇ conmutan. Esto puede ser probado usando la definición de los mismos ya que*

$$\Delta\nabla G(x) = \Delta(G(x) - G(x-1)) = \Delta G(x) - \Delta G(x-1)) = G(x+1) - 2G(x) + G(x-1),$$

$$\nabla\Delta G(x) = \nabla(G(x+1) - G(x)) = \nabla G(x+1) - \nabla G(x) = G(x+1) - 2G(x) + G(x-1).$$

Por lo cual $\nabla\Delta = \Delta\nabla$.

Lema 5.4 (Suma por partes)**.** *Dadas funciones $F, G : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{N\times N}$, se cumple que:*

$$\sum_{x=0}^{N} \Delta G(x)F(x) = G(N+1)F(N+1) - G(0)F(0) - \sum_{x=0}^{N} G(x+1)(\Delta F)(x). \tag{5.1.6}$$

Demostración. Usando la definición del operador Δ, tenemos que

$$\sum_{x=0}^{N} \Delta G(x)F(x) = \sum_{x=0}^{N} G(x+1)F(x) - \sum_{x=0}^{N} G(x)F(x). \tag{5.1.7}$$

Reescribiendo la segunda suma del lado derecho de (5.1.7) en términos de $F(x+1)$ y $G(x+1)$ obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{x=0}^{N} G(x+1)F(x) - \left(G(0)F(0) + \sum_{x=0}^{N} G(x+1)F(x+1) - G(N+1)F(N+1)\right)& \\ = G(N+1)F(N+1) - G(0)F(0) - \sum_{x=0}^{N} G(x+1)\Delta F(x).&\end{aligned}$$

Esto completa la demostración del lema. $\square$

Lema 5.5 (Regla de Leibniz)**.** *Dadas $F, G : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{N\times N}$, se cumple que:*

$$(\Delta FG)(x) = F(x+1)\Delta G(x) + \Delta F(x)G(x) = \Delta F(x)G(x+1) + F(x)\Delta G(x). \tag{5.1.8}$$

Demostración. Usando la definición del operador Δ, tenemos que

$$(\Delta FG)(x) = F(x+1)G(x+1) - F(x)G(x). \tag{5.1.9}$$

Sumando y restando $F(x+1)G(x)$ en el miembro derecho de (5.1.9), tenemos

$$F(x+1)G(x+1) - F(x+1)G(x) + F(x+1)G(x) - F(x)G(x). \tag{5.1.10}$$

Usando nuevamente la definición del operador Δ, (5.1.10) es igual a

$$F(x+1)\Delta G(x) + \Delta F(x)G(x).$$

Así, hemos probado la primer igualdad de (5.1.8), es decir

$$(\Delta FG)(x) = F(x+1)\Delta G(x) + \Delta F(x)G(x).$$

Para probar la segunda igualdad de (5.1.8), sumamos y restamos $F(x)G(x+1)$ en el miembro derecho de (5.1.9) y obtenemos

$$F(x+1)G(x+1) - F(x)G(x+1) + F(x)G(x+1) - F(x)G(x). \tag{5.1.11}$$

Usando nuevamente la definición de operador Δ, (5.1.11) es igual a

$$\Delta F(x)G(x+1) + F(x)\Delta G(x).$$

Así, hemos probado la segunda igualdad de (5.1.8), es decir

$$(\Delta FG)(x) = \Delta F(x)G(x+1) + F(x)\Delta G(x).$$

Esto concluye la prueba del Lema. □

En el siguiente teorema probamos la primer implicación de la Figura 1.3, a saber que la ecuación de Pearson discreta implica la ortogonalidad de la sucesión de diferencias $\{\Delta P_n\}$.

Teorema 5.6. *Sea W un peso matricial definido positivo con soporte $\mathbb{N}_0$ y con momentos finitos de todo orden y $\{P_n\}_{n\geq 0}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos tales que*

$$\sum_{x\geq 0} P_n(x)W(x)P_m^*(x) = 0, \qquad si \quad m < n.$$

Supongamos que existen polinomios Ψ, Φ de grado, a lo sumo, uno y dos respectivamente tales que:

$$\nabla\widetilde{W}(x) = (\Delta\widetilde{W})(x-1) = W(x)\Psi(x),$$

donde $\widetilde{W}(x) = W(x)\Phi(x)$. Entonces, la sucesión de polinomios $\{\Delta P_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de polinomios ortogonales con respecto $\widetilde{W}(x)$.

Observación 5.7. *Por* (5.1.4)*, la sucesión de polinomios $\{\Delta P_{n+1}\}_{n\geq 0}$ es una sucesión simple de polinomios. Por lo tanto todo polinomio matricial se puede escribir como combinación lineal de elementos de la sucesión $\{\Delta P_{n+1}\}_{n\geq 0}$. Además, por el Teorema 5.6 estos polinomios satisfacen las relaciones de ortogonalidad*

$$\sum_{x=0}^{\infty}(\Delta P_n\widetilde{W}(\Delta P_m)^*)(x) = 0, \quad m < n.$$

Por esto decimos que $\{\Delta P_{n+1}\}_{n\geq 0}$ es una sucesión de polinomios ortogonales matriciales con respecto a $\widetilde{W}$. Notemos que el Teorema 5.6 no garantiza, en principio, que el peso $\widetilde{W}$ sea definido positivo o Hermitiano.

Demostración. Por (5.1.4) tenemos que ΔP_n es un polinomio de grado $n-1$ con coeficiente director no singular. Por lo tanto, para verificar que $\{\Delta P_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a $\widetilde{W}$, basta probar que

$$\sum_{x=0}^{\infty}(\Delta P_n\widetilde{W}(\Delta P_m)^*)(x) = \lim_{N\to\infty}\left[\sum_{x=0}^{N}(\Delta P_n\widetilde{W}(\Delta P_m)^*)(x)\right] = 0, \quad m < n. \tag{5.1.12}$$

Aplicando el Lema 5.4 a la suma finita de la segunda igualdad de (5.1.12) obtenemos

$$\sum_{x=0}^{N}(\Delta P_n\widetilde{W}(\Delta P_m)^*)(x) = (P_n\widetilde{W}(\Delta P_m)^*)(N+1) - (P_n\widetilde{W}(\Delta P_m)^*)(0) \\ - \sum_{x=0}^{N} P_n(x+1)(\Delta(\widetilde{W}(\Delta P_m)^*))(x). \quad (5.1.13)$$

Si denotamos a $(P_n\widetilde{W}(\Delta P_m)^*)(N+1) - (P_n\widetilde{W}(\Delta P_m)^*)(0)$ por A_N, y aplicamos la regla de Leibniz, obtenemos que (5.1.13) es igual a

$$A_N - \sum_{x=0}^{N} P_n(x+1)(\widetilde{W}(x+1)(\Delta^2 P_m(x))^* + \Delta\widetilde{W}(x)(\Delta P_m(x))^*).$$

Cambiando el índice de la suma, tenemos

$$A_N - \sum_{y=1}^{N+1} P_n(y)\widetilde{W}(y)(\Delta^2 P_m(y-1))^* - \sum_{y=1}^{N+1} P_n(y)\Delta\widetilde{W}(y-1)(\Delta P_m(y-1))^*.$$

Sumando y restando el término $P_n(0)\widetilde{W}(0)\Delta^2 P_m(-1)^* + P_n(0)\Delta\widetilde{W}(-1)(\Delta P_m(-1))^*$, que se corresponde a la suma de los términos $y = 0$ de las sumas anteriores, tenemos

$$A_N - \sum_{y=0}^{N+1} P_n(y)\widetilde{W}(y)(\Delta^2 P_m(y-1))^* - \sum_{y=0}^{N+1} P_n(y)\Delta\widetilde{W}(y-1)(\Delta P_m(y-1))^* \\ + P_n(0)\widetilde{W}(0)(\Delta)^2 P_m(-1)^* + P_n(0)\Delta\widetilde{W}(-1)(\Delta P_m(-1))^*. \quad (5.1.14)$$

Ahora veamos que

$$A_N + P_n(0)\widetilde{W}(0)(\Delta)^2 P_m(-1)^* + P_n(0)\Delta\widetilde{W}(-1)(\Delta P_m(-1))^* = (P_n\widetilde{W}(\Delta P_m)^*)(N+1). \quad (5.1.15)$$

En primer lugar, observemos que

$$\Delta P_m(-1) = P_m(0) - P_m(-1), \qquad \Delta^2 P_m(-1) = P_m(1) - 2P_m(0) + P_m(-1),$$

por lo cual

$$\Delta^2 P_m(-1) + \Delta P_m(-1) = \Delta P_m(0).$$

Además, como $\widetilde{W}(-1) = 0$, ocurre que

$$\Delta\widetilde{W}(-1) = \widetilde{W}(0) - \widetilde{W}(-1) = \widetilde{W}(0).$$

Por lo tanto,

$$P_n(0)\widetilde{W}(0)(\Delta^2 P_m(-1))^* + P_n(0)\Delta\widetilde{W}(-1)(\Delta P_m(-1))^* = P_n(0)\widetilde{W}(0)(\Delta P_m(0))^*.$$

Ahora, el miembro izquierdo de (5.1.15) se escribe como

$$(P_n\widetilde{W}(\Delta P_m)^*)(N+1) - P_n(0)\widetilde{W}(0)(\Delta P_m(0))^* + P_n(0)\widetilde{W}(0)(\Delta P_m(0))^* \\ = (P_n\widetilde{W}(\Delta P_m)^*)(N+1). \quad (5.1.16)$$

Así, (5.1.14) se escribe como

$$P_n(N+1)\widetilde{W}(N+1)(\Delta P_m)^*(N+1) - \sum_{y=0}^{N+1} P_n(y)\widetilde{W}(y)(\Delta^2 P_m(y-1))^* \\ - \sum_{y=0}^{N+1} P_n(y)\Delta\widetilde{W}(y-1)(\Delta P_m(y-1))^* \quad (5.1.17)$$

Ahora, tomando límite en ambos miembros de la ecuación (5.1.17)

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{y=0}^{N}(\Delta P_n\widetilde{W}(\Delta P_m)^*)(y) = \lim_{N\to\infty}\Bigg[P_n(N+1)\widetilde{W}(N+1)(\Delta P_m)^*(N+1) \\ - \sum_{y=0}^{N+1} P_n(y)\widetilde{W}(y)(\Delta^2 P_m(y-1))^* - \sum_{y=0}^{N+1} P_n(y)\Delta\widetilde{W}(y-1)(\Delta P_m(y-1))^*\Bigg]. \quad (5.1.18)$$

Usando que $\widetilde{W} = W\Phi$, donde Φ es un polinomio de grado dos, y que $(\Delta P_m)^*$, $(\Delta^2 P_m)^*$ son polinomios, la Observación 5.1, implica que los límites en el miembro derecho de (5.1.18) existen y son finitos. Mas aún, $\lim_{N\to\infty} P_n(N+1)\widetilde{W}(N+1)(\Delta P_m)^*(N+1) = 0$. Por lo tanto (5.1.18) es igual a

$$\sum_{y=0}^{\infty}(\Delta P_n\widetilde{W}(\Delta P_m)^*)(y) = \sum_{y=0}^{\infty} P_n(y)\widetilde{W}(y)(\Delta^2 P_m(y-1))^* - \sum_{y=0}^{\infty} P_n(y)\Delta\widetilde{W}(y-1)(\Delta P_m(y-1))^*. \quad (5.1.19)$$

Usando la hipótesis $\widetilde{W} = W\Phi$ obtenemos que

$$\sum_{y=0}^{\infty} P_n(y)\widetilde{W}(y)(\Delta^2 P_m(y-1))^* = \sum_{y=0}^{\infty} P_n(y)W(y)\Phi(y)(\Delta^2 P_m(y-1))^* = 0, \quad m < n,$$

pues el grado de Φ es menor o igual a 2 y el de $(\Delta^2 P_m(y-1))^*$ es menor o igual a $m-2$ el grado de $\Phi(y)(\Delta^2 P_m(y-1))^*$ es menor o igual que m. Por otro lado, usando la hipótesis $(\Delta\widetilde{W})(y-1) = W(y)\Psi(y)$ obtenemos que

$$\sum_{y=0}^{\infty} P_n(y)\Delta\widetilde{W}(y-1)(\Delta P_m(y-1))^* = \sum_{y=0}^{\infty} P_n(y)W(y)\Psi(y)(\Delta P_m(y-1))^* = 0, \quad m < n,$$

pues el grado de Ψ es menor o igual a 1 y el de $(\Delta P_m(y-1))^*$ es igual a $m-1$, el grado de $\Psi(y)(\Delta P_m(y-1))^*$ es menor o igual que m. Por lo tanto (5.1.19) es igual a cero para todo $m < n$, lo cual demuestra (5.1.12) y completa la demostración del teorema. $\square$

5.2. Shift Operators

Dado un peso matricial W que satisface las hipótesis del Teorema 5.6 y asumiendo que $\widetilde{W}$ introducido en el mismo teorema es definido positivo, podemos ver al operador

$$\Delta : L^2(W) \to L^2(\widetilde{W}),$$

como un operador que lleva la sucesión $\{P_n\}_{n\geq 0}$ de polinomios ortogonales mónicos con respecto a W, a la sucesión $\{\Delta P_n\}_{n\geq 1}$ que resulta ser una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a $\widetilde{W}$.

Teniendo en cuenta el caso escalar, consideraremos una familia de pesos matriciales $W^{(j)}$ definidos positivos con momentos finitos de todo orden, con soporte $\mathbb{N}_0$ y con $j \in \mathbb{N}_0$. Denotamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(j)}$ el producto interno inducido por $W^{(j)}$. Es decir

$$\langle P; Q\rangle_{(j)} = \sum_{x=0}^{\infty} P(x)W^{(j)}(x)Q^*(x). \tag{5.2.20}$$

Supongamos que $W^{(j)}$ satisface las hipótesis del Teorema 5.6. En particular, suponemos que existen polinomios $\Phi^{(j)}$ y $\Psi^{(j)}$ de grados 2 y 1 respectivamente tales que

$$\nabla W^{(j+1)}(x) = W^{(j)}(x)\Psi^{(j)}(x). \tag{5.2.21}$$

Además, asumimos que $W^{(j+1)}(x) = W^{(j)}(x)\Phi(x)$. Como consecuencia del Teorema 5.6, podemos ver a Δ como un operador

$$\Delta : L^2(W^{(j)}) \to L^2(W^{(j+1)}).$$

En nuestro caso, Δ tiene un adjunto que se puede calcular de manera explícita.

Teorema 5.8. *Sea $\{W^{(j)}\}$ una familia de pesos matriciales definidos positivos con soporte $\mathbb{N}_0$ y con momentos finitos de todo orde que satisface las hipótesis del Teorema 5.6. Dado $Q \in \mathbb{C}^{N\times N}[x]$, sea*

$$S^{(j)}Q(y) = -[\Delta Q(y-1)(\Phi^{(j)}(y))^* + Q(y-1)(\Psi^{(j)}(y))^*].$$

Entonces,

$$\langle \Delta P, Q\rangle_{(j+1)} = \langle P, S^{(j)}Q\rangle_{(j)}$$

para todo para de polinomios matriciales P, Q.

Demostración. Usando la definición del producto interno (5.2.20), tenemos que

$$\langle \Delta P, Q\rangle_{(j+1)} = \sum_{x=0}^{\infty} \Delta P(x)W^{(j+1)}(x)Q^*(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{x=0}^{N} \Delta P(x)W^{(j+1)}(x)Q^*(x).$$

Aplicando la definición del operador Δ,

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{x=0}^{N} \Delta P(x)W^{(j+1)}(x)Q^*(x) = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{x=0}^{N} P(x+1)W^{(j+1)}(x)Q^*(x) \right. \\ \left. - \sum_{x=0}^{N} P(x)W^{(j+1)}(x)Q^*(x) \right)$$

lo cual, cambiando el índice de la segunda suma, es igual a

$$\lim_{N\to\infty} \left[\sum_{x=0}^{N} P(x+1)W^{(j+1)}(x)Q^*(x) - \Big(P(0)W^{(j+1)}(0)Q^*(0) \right. \\ \left. + \sum_{x=0}^{N} P(x+1)W^{(j+1)}(x+1)Q^*(x+1) - P(N+1)W^{(j+1)}(N+1)Q^*(N+1) \Big) \right],$$

y esto último se escribe como

$$\lim_{N\to\infty}\Big[P(N+1)W^{(j+1)}(N+1)Q^*(N+1)-P(0)W^{(j+1)}(0)Q^*(0)$$
$$+\sum_{x=0}^{N}P(x+1)\Big(W^{(j+1)}(x+1)Q^*(x+1)+W^{(j+1)}(x)Q^*(x)\Big)\Big]. \quad (5.2.22)$$

Ahora, observemos que los límites de los tres sumandos en (5.2.22), existen y son finitos por (5.0.2) y (5.0.3). Además, por (5.0.3), tenemos que

$$\lim_{N\to\infty}P(N+1)W^{(j+1)}(N+1)Q(N+1)^*=0.$$

Por esto, (5.2.22) es igual a

$$\lim_{N\to\infty}\left[-P(0)W^{(j+1)}(0)Q^*(0)+\sum_{x=0}^{N}P(x+1)\Big(W^{(j+1)}(x+1)Q^*(x+1)+W^{(j+1)}(x)Q^*(x)\Big)\right] \quad (5.2.23)$$

Notemos que $\big(W^{(j+1)}(x+1)Q^*(x+1)-W^{(j+1)}(x)Q^*(x)\big)=\Delta(W^{(j+1)}Q^*)(x)$ y así, (5.2.23) es igual a

$$\lim_{N\to\infty}\left[-P(0)W^{(j+1)}(0)Q^*(0)-\sum_{x=0}^{N}P(x+1)\Delta(W^{(j+1)}Q^*)(x)\right].$$

Usando el Lema 5.4, esto es igual a

$$\lim_{N\to\infty}\left[-P(0)W^{(j+1)}(0)Q^*(0)-\sum_{x=0}^{N}P(x+1)\Big((W^{(j+1)}(x+1)\Delta Q^*(x)+\Delta W^{(j+1)}(x)Q^*(x)\Big)\right].$$

Haciendo el cambio de variables $y=x+1$, tenemos

$$\lim_{N\to\infty}\left[-P(0)W^{(j+1)}(0)Q^*(0)-\sum_{y=1}^{N+1}P(y)\Big(W^{(j+1)}(y)\Delta Q^*(y-1)+\Delta W^{(j+1)}(y-1)Q^*(y-1)\Big)\right].$$

Sumando y restando en la ecuación anterior, $P(0)W^{(j+1)}(0)\Delta Q^*(-1)+P(0)\Delta W^{(j+1)}(-1)Q^*(-1)$

$$\lim_{N\to\infty}\Big[-P(0)W^{(j+1)}(0)Q^*(0)+P(0)W^{(j+1)}(0)\Delta Q^*(-1)+P(0)\Delta W^{(j+1)}(-1)Q^*(-1)$$
$$-\sum_{y=0}^{N+1}P(y)\Big((W^{(j+1)}(y)\Delta Q^*(y-1)+\Delta W^{(j+1)}(y-1)Q^*(y-1)\Big)\Big]. \quad (5.2.24)$$

Notemos que $\Delta W^{(j+1)}(-1)=W^{(j+1)}(0)-W^{(j+1)}(-1)=W^{(j+1)}(0)$ y que

$$\begin{aligned}-P(0)W^{(j+1)}(0)Q^*(0)+&P(0)W^{(j+1)}(0)\Delta Q^*(-1)+P(0)\Delta W^{(j+1)}(-1)Q^*(-1)=\\&=P(0)W^{(j+1)}(0)[\Delta Q^*(-1)-Q^*(0)+Q^*(-1)]\\&=P(0)W^{(j+1)}(0)[Q^*(0)-Q^*(-1)-Q^*(0)+Q^*(-1)]=0.\end{aligned}$$

Además, utilizando la ecuación de Pearson de $W^{(j)}$ dada por el Teorema 5.6, tenemos que

$$\begin{aligned}
W^{(j+1)}(y)\Delta Q^*(y-1)+&\Delta W^{(j+1)}(y-1)Q^*(y-1)\\
&= W^{(j)}(y)\Phi^{(j)}(y)\Delta Q^*(y-1) + W^{(j)}(y)\Psi^{(j)}(y)Q^*(y-1)\\
&= W^{(j)}(y)(\Phi^{(j)}(y)\Delta Q^*(y-1) + \Psi^{(j)}(y)Q^*(y-1))\\
&= W^{(j)}(y)(\Delta Q(y-1)(\Phi^{(j)}(y))^* + Q(y-1)(\Psi^{(j)}(y))^*)^*.
\end{aligned}$$

Entonces (5.2.24) se escribe como

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} -\sum_{y=0}^{N+1} P(y)W^{(j)}(y)[\Delta Q(y-1)(\phi^{(j)}(y))^* + Q(y-1)(\psi^{(j)}(y))^*]^*\\
&= \sum_{y=0}^{\infty} P(y)W^{(j)}(y)(s^{(j)}Q(y))^*\\
&= \langle P; S^{(j)}Q\rangle_{(j)}. \qquad (5.2.25)
\end{aligned}$$

Esto concluye la prueba del teorema. □

5.3. Fórmula de Rodrigues

Como consecuencia del Teorema 5.6, $\{\Delta P_n^{(j)}\}$ es una sucesión de polinomios ortogonales matriciales con respecto a $W^{(j+1)}(x)$. Por la Proposición 3.8 $\Delta P_n^{(j)} = K_n P_{n-1}^{(j+1)}$ donde K_n es una matriz constante. Como los polinomios $P_n^{(j)}$ y $P_{n-1}^{(j+1)}$ son mónicos y el coeficiente director de $\Delta P_n^{(j)}$ es n, tenemos que $K_n = nI$.

Observación 5.9. *Sea $\{P_n^{(j)}\}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos asociada a $W^{(j)}$. Notemos que*

$$S^{(j)}P_{n-1}^{(j+1)}(y) = -[\Delta P_{n-1}^{(j+1)}(y-1)(\Phi^{(j)}(y))^* + P_{n-1}^{(j+1)}(y-1)(\Psi^{(j)}(y))^*],$$

es un polinomio matricial de a lo sumo grado n, puesto que $\Delta P_{n-1}^{(j+1)}(y-1)$ es un polinomio de grado a lo sumo $n-2$, $(\Phi^{(j)}(y))^*$ es un polinomio de grado a lo sumo 2 y $(\Psi^{(j)}(y))^*$ es un polinomio de grado a lo sumo 1, digamos entonces,

$$S^{(j)}P_{n-1}^{(j+1)} = G_n P_n^{(j)} + \ldots + G_0 P_0^{(j)}.$$

Como ocurre que

$$\langle S^{(j)}P_{n-1}^{(j+1)}, P_m^{(j)}\rangle_{(j)} = \langle P_{n-1}^{(j+1)}, \Delta P_m^{(j)}\rangle_{(j+1)} = \langle P_{n-1}^{(j+1)}, mP_{m-1}^{(j+1)}\rangle_{(j+1)} = 0,$$

si $m-1 < n-1$, es decir, si $m < n$ y también como ocurre que para $m < n$

$$\langle S^{(j)}P_{n-1}^{(j+1)}, P_m^{(j)}\rangle_{(j)} = \sum_{k=0}^{n} G_k \langle P_k^{(j)}, P_m^{(j)}\rangle_{(j)} = G_n\|P_m\|^2,$$

entonces, $G_m = 0$ si $m < n$ y en conclusión

$$S^{(j)}P_{n-1}^{(j+1)} = G_n P_n^{(j)}$$

Como $P_n^{(j)}$ *es mónico, el coeficiente director de* $S^{(j)}P_{n-1}^{(j+1)}$ *es* G_n*. A su vez, sea* D_n *el coeficiente de* x^2 *en* $(\Phi^{(j)}(y))^*$ *y* E_n *el coeficiente de* x *en* $(\Psi^{(j)}(y))^*$*, entonces*

$$G_n = cd\left(S^{(j)}P_{n-1}^{(j+1)}\right) = -((n-1)D_n + E_n). \tag{5.3.26}$$

De ahora en adelante supondremos que G_n *es inversible para todo* $n \in \mathbb{N}_0$*.*

Teorema 5.10 (Fórmula de Rodrigues.)**.** *Sea* $\{W^{(j)}\}_{j\geq 0}$ *una familia de pesos matriciales definidos positivos con soporte* $\mathbb{N}_0$ *y momentos finitos de todo orden que satisface las hipótesis del Teorema 5.6. Entonces la sucesión de polinomios mónicos respecto a* $W^{(j)}$ *está dada por*

$$P_n^{(j)}(y) = (-1)^n(G_1 \dots G_n)^{-1}\nabla^n(W^{(j+n)})(y)(W^{(j)}(y))^{-1}$$

para todo n *y* j *en* $\mathbb{N}_0$ *donde las matrices* G_n *están dadas en* (5.3.26)

Demostración. Veamos por inducción que

$$S^{(j)} \dots S^{(j+n-1)}Q = (-1)^n(\nabla^n QW^{(j+n)})(W^{(j)})^{-1} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{5.3.27}$$

Procedemos para el caso $n = 1$, usando la definición del operador $S^{(j)}$ tenemos que

$$S^{(j)}Q(x) = -\left[\Delta Q(x-1)(\Phi^{(j)}(y))^* + Q(x-1)(\Psi^{(j)}(y))^*\right]. \tag{5.3.28}$$

Como la familia de pesos $\{W^{(j)}\}$ satiface las hipótesis del Teorema 5.6,

$$\Phi^{(j)}(x) = (W^{(j)}(x))^{-1}W^{(j+1)}(x) \quad \text{y que} \quad \Psi^{(j)}(x) = (W^{(j)}(x))^{-1}\Delta W^{(j+1)}(x-1).$$

Así, el miembro derecho de (5.3.28) se escribe como

$$-\left[\Delta Q(x-1)((W^{(j)}(x))^{-1}W^{(j+1)}(x))^* + Q(x-1)((W^{(j)}(x))^{-1}\Delta W^{(j+1)}(x-1))^*\right],$$

lo cual, usando la segunda igualdad de (5.1.8) y que los pesos son definidos positivos es igual a

$$-\Delta(QW^{(j+1)})(x-1)(W^{(j)}(x))^{-1}.$$

Usando la definición del operador ∇, esto último se escribe como

$$-\nabla(QW^{(j+1)})(x)(W^{(j)}(x))^{-1}.$$

Paso inductivo: Supongamos que la afirmación vale para $n-1$, es decir, vale que

$$S^{(j)} \dots S^{(j+n-1)}Q = (-1)^n\nabla^n(QW^{(j+n)})(W^{(j)})^{-1}.$$

Veamos que vale para n.

$$S^{(j)} \dots S^{(j+n)}Q(x) = S^{(j)} \dots S^{(j+n-1)}\left(-\nabla(QW^{(j+n+1)})(x)(W^{(j+n)}(x))^{-1}\right). \tag{5.3.29}$$

Utilizando la hipótesis inductiva, el lado derecho de (5.3.29) se escribe como

$$(-1)^{n+1}\nabla^n\left(-\nabla(QW^{(j+n+1)})(x)(W^{(j+n)}(x))^{-1}W^{(j+n)}(x)\right)((W^{(j)}(x))^*)^{-1}.$$

Lo cual es igual a
$$(-1)^{n+1}\left(\nabla^{n+1}(QW^{(j+n+1)})\right)(x)(W^{(j)}(x))^{-1}.$$

Así, la afirmación (5.3.27) es válida para todo $n \in \mathbb{N}$. Notemos que $S^{(j)}I = G_1 P_1^{(j)}$, $S^{(j)}S^{(j+1)}I = G_1 S^{(j)} P_1^{(j+1)} = G_1 G_2 P_2^{(j)}$. En general se tiene que
$$S^{(j)} \dots S^{(j+n-1)} I = G_1 \dots G_n P_n^{(j)}.$$

Luego,
$$\begin{aligned} P_n^{(j)} &= (G_1 \dots G_n)^{-1} S^{(j)} \dots S^{(j+n-1)} I \\ &= (G_1 \dots G_n)^{-1} (-1)^n (\nabla^n W^{(j+n)})(W^{(j)})^{-1}. \end{aligned}$$

Esto concluye la prueba del teorema. □

5.4. Fórmula de estructura

La ecuación de Pearson matricial dada en el Teorema 5.6, tiene como consecuencia una fórmula de estructura matricial. Como Φ es un polinomio de grado a lo sumo dos,
$$P_n'(x)\Phi^*(x) = \sum_{j=0}^{n+1} A_j P_j(x),$$

donde $A_j = \langle P_n'(x)\Phi^*(x), P_j\rangle \|P_j\|^{-2} = \left(\sum_{x\geq 0} P_n'(x)\Phi^*(x)W(x)P_j(x)^*\right)\|P_j\|^{-2}$. Asumiendo ahora que y $\widetilde{W}(x) = W(x)\Phi(x)$ es simétrico, es decir $\widetilde{W}(x) = \widetilde{W}(x)^*$, tenemos que
$$\Phi(x)^* W(x) = \Phi(x)^* W(x)^* = (W(x)\Phi(x))^* = W(x)\Phi(x).$$

Entonces,
$$\begin{aligned} A_j = &\left(\sum_{x\geq 0} P_n'(x)W(x)\Phi(x)P_j(x)^*\right)\|P_j\|^{-2} \\ &= \left(\sum_{x\geq 0} P_n'(x)\widetilde{W}(x)P_j(x)^*\right)\|P_j\|^{-2} = 0 \quad \text{si} \quad j < n-1. \end{aligned}$$

Luego,
$$P_n'(x)\Phi(x)^* = A_{n+1}P_{n+1}(x) + A_n P_n(x) + A_{n-1}P_{n-1}(x). \tag{5.4.30}$$

Por el Teorema 3.10, el lado derecho de (5.4.30) se escribe como
$$A_{n+1}(xP_n(x) - B_n P_n(x) - C_n P_{n-1}(x)) + A_n P_n(x) + A_{n-1}P_{n-1}(x),$$

lo cual es igual a
$$(xA_{n+1} - A_{n+1}B_n + A_n)P_n(x) + (-A_{n+1}C_n + A_{n-1})P_{n-1}(x).$$

En conclusión,
$$P_n'(x)\Phi(x)^* = (xA_{n+1} - A_{n+1}B_n + A_n)P_n(x) + (-A_{n+1}C_n + A_{n-1})P_{n-1}(x).$$

5.5. El álgebra de operadores en diferencias

Sea $W = W(x)$ una matriz peso $N \times N$ con momentos finitos y sea $\{R_n\}_{n\geq 0}$ cualquier sucesión de polinomios ortogonales matriciales asociados a la función peso W. Sea $\mathcal{G}$ el álgebra de todos los operadores en diferencias de la forma

$$D = \sum_{k=0}^{s} \sum_{j=0}^{r} \Delta^k \nabla^j F_{k,j}(x) \tag{5.5.31}$$

donde $F_{k,j}$ es una función polinomial de grado menor o igual a $k + j$. Un elemento $D \in \mathcal{G}$ actúa a derecha en todo polinomio matricial P de la siguiente forma

$$PD(x) = \sum_{k=0}^{s} \sum_{j=0}^{r} \Delta^k \nabla^j P(x) F_{k,j}(x).$$

Por lo observado en la Observación 5.2, sabemos que $\Delta^k \nabla^j P$ es un polinomio para todo k, j y como $F_{k,j}$ es un polinomio para todo k, j, tenemos que PD es un polinomio para todo polinomio P.

Observación 5.11. *La condición de que $F_{k,j}$ es un polinomio de grado menor o igual a $k + j$ asegura que D preserva el espacio V_n de polinomios de grado menor o igual a n, ya que dado un polinomio $P \in V_n$, sabemos por lo observado en la Observación 5.2 que $\nabla^j P$ es un polinomio de grado a lo sumo $n - j$. Entonces, por la misma Observación, $\Delta^k \nabla^j P$ es un polinomio de grado a lo sumo $n - j - k$, por lo cual, $\Delta^k \nabla^j P F_{k,j}$ será un polinomio de grado a lo sumo n si $k + j \leq n$ y cero si $k + j > n$. Por otro lado, la Proposición 3.15, implica que esto es una condición necesaria.*

En esta observación, utilizamos la convención de que un polinomio de grado negativo es igual a cero.

De manera análoga a la Sección 3.3, una sucesión de polinomios ortogonales $\{R_n\}$ es una sucesión de autofunciones de un operador $D \in \mathcal{G}$ si existe una sucesión de matrices $\Lambda_n \in \mathbb{C}^{N\times N}$ tal que

$$R_n D = \Lambda_n R_n, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Diremos que un operador D es simétrico con respecto a W si

$$\langle PD, Q\rangle = \langle P, QD\rangle, \quad \text{para todo } P, Q \in \mathbb{C}^{N\times N}[x].$$

Como observamos en (3.2.5) el operador multiplicación por x es simétrico con respecto a W pero $x \notin \mathcal{G}$. Sin embargo, es importante observar que el operador multiplicación por x no tiene a ningún polinomio como autofunción. En el siguiente teorema demostramos que todo operador simétrico en $\mathcal{G}$ tiene a cualquier sucesión de polinomios ortogonales como autofunciones.

Teorema 5.12. *Sea $\{R_n\}$ cualquier sucesión de polinomios ortogonales matriciales asociada a W. Si $D \in \mathcal{G}$ es simétrico respecto a W entonces, $R_n D = \Lambda_n R_n$, para alguna matriz Λ_n.*

Demostración. Como $D \in \mathcal{G}$, el operador D preserva los espacios vectoriales V_n, para cada $n \geq 0$, y la demostración queda completa aplicando el Teorema 3.14. □

Teniendo en cuenta el Teorema 5.12, un operador simétrico con respecto al peso W tiene a toda sucesión de polinomios ortogonales como autofunciones. En [15, Teorema 2.1] se da un análogo discreto del Teorema 4.10 que da condiciones para la simetría de un operador en diferencias de orden arbitrario.

5.6. Operadores en diferencias de segundo orden

En esta sección estudiamos operadores en diferencias matriciales que tienen a una sucesión de polinomios ortogonales como autofunciones. Consideramos operadores en diferencias de segundo orden de la forma

$$PD = \Delta\nabla P(x)F_{1,1}(x) + \Delta P(x)F_{1,0}(x) + \nabla P(x)F_{0,1}(x) + P(x)F_{0,0}(x),$$

donde $F_{i,j}$ es una función polinomial de grado menor o igual a $i+j$ para todo $i,j=0,1$.

Teorema 5.13. *Sea P un polinomio matricial que satisface la ecuación en diferencias de segundo orden*

$$\Delta\nabla P(x)F_{1,1}(x) + \Delta P(x)F_{1,0}(x) + \nabla P(x)F_{0,1}(x) + P(x)F_{0,0}(x) = \Lambda P(x), \tag{5.6.32}$$

donde $F_{i,j}$ es una función polinomial de grado igual a $i+j$ para todo $i,j=0,1$ y Λ es una matriz constante. Entonces el polinomio $Q^{(k)}(x) = \Delta^k P(x)$ satisface la ecuación

$$\Delta\nabla Q^{(k)}(x)F_{1,1}^{(k)}(x) + \Delta Q^{(k)}(x)F_{1,0}^{(k)}(x) + \nabla Q^{(k)}(x)F_{0,1}^{(k)}(x) + Q^{(k)}(x)F_{0,0}^{(k)}(x) = \Lambda Q^{(k)}(x), m$$

donde $F_{1,1}^{(k)}(x) = F_{1,1}(x)$, $\quad F_{1,0}^{(k)}(x) = \left(\sum_{j=0}^{k-1}\Delta F_{1,1}(x+k-j-1)\right) + F_{1,0}(x+k)$, $\quad F_{0,1}^{(k)}(x) = F_{0,1}(x)$ y $F_{0,0}^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k-1} j\Delta^2 F_{1,1}(x+k-j-1) + \sum_{j=0}^{k-1}\Delta F_{1,0}(x+j) + k\Delta F_{0,1}(x) + F_{0,0}$.

Observación 5.14. *Notemos que como $F_{1,1}, F_{0,1}, F_{1,0}, F_{0,0}$ son de grados dos, uno y cero respectivamente, $F_{1,1}^{(k)}$ es de grado dos para todo k, $F_{0,1}^{(k)}$ y $F_{1,0}^{(k)}$ son de grado uno para todo k y $F_{0,0}$ es constante para todo k.*

Demostración. Realizaremos la prueba por inducción en k. Procedemos a demostrar la fórmula para el caso $k=1$. Aplicando Δ en ambos miembros de (5.6.32) y utilizando el Lema 5.5 obtenemos:

$$\begin{aligned}&\Delta\nabla P(x+1)\Delta F_{1,1}(x) + \Delta\Delta\nabla P(x)F_{1,1}(x) + \Delta\Delta P(x)F_{1,0}(x+1) + \Delta P(x)\Delta F_{1,0}(x)\\ &\quad + \nabla P(x+1)\Delta F_{0,1}(x) + \Delta\nabla P(x)F_{0,1}(x) + \Delta P(x)F_{0,0}(x) + P(x)\Delta F_{0,0}(x) = \Lambda\Delta P(x).\end{aligned}$$

Utilizando que los operadores Δy∇ conmutan, el hecho que $\nabla G(x) = \Delta G(x-1)$, y que $F_{0,0}$ es un polinomio de grado cero, la ecuación anterior puede ser reescrita del siguiente modo

$$\begin{aligned}&\Delta Q^{(1)}(x)\Delta F_{1,1}(x) + \Delta\nabla Q^{(1)}(x)F_{1,1}(x) + \Delta Q^{(1)}(x)F_{1,0}(x+1) + Q^{(1)}(x)\Delta F_{1,0}(x) +\\ &\qquad Q^{(1)}(x)\Delta F_{0,1}(x) + \nabla Q^{(1)}(x)F_{0,1}(x) + Q^{(1)}(x)F_{0,0}(x) = \Lambda Q^{(1)}(x)\end{aligned}$$

lo cual es igual a

$$\begin{aligned}&\Delta\nabla Q^{(1)}(x)F_{1,1}(x) + \Delta Q^{(1)}(x)(\Delta F_{1,1}(x) + F_{1,0}(x+1)) + \nabla Q^{(1)}(x)F_{0,1}(x)\\ &\qquad + Q^{(1)}(x)(\Delta F_{1,0}(x) + \Delta F_{0,1}(x) + F_{0,0}(x)) = \Lambda Q^{(1)}(x)\end{aligned}$$

Así, obtenemos

$$\Delta\nabla Q^{(1)}(x)F_{1,1}^{(1)}(x) + \Delta Q^{(1)}(x)F_{1,0}^{(1)}(x) + \nabla Q^{(1)}(x)F_{0,1}^{(1)}(x) + Q^{(1)}(x)F_{0,0}^{(1)} = \Lambda Q^{(1)}(x)$$

Paso inductivo: Suponemos que la fórmula es válida para un número natural cualquiera k. Es decir, vale la siguiente hipótesis inductiva

$$\Delta\nabla Q^{(k)}(x)F_{1,1}^{(k)}(x) + \Delta Q^{(k)}(x)F_{1,0}^{(k)}(x) + \nabla Q^{(k)}(x)F_{0,1}^{(k)}(x) + Q^{(k)}(x)F_{0,0}^{(k)}(x) = \Lambda Q^{(k)}(x). \tag{5.6.33}$$

Veamos que la fórmula es cierta para $k+1$. Aplicando Δ en ambos miembros de (5.6.33) obtenemos con un razonamiento análogo al realizado para el caso $k=1$

$$\begin{aligned}\Delta\nabla Q^{(k+1)}(x)F_{1,1}^{(k)}(x) + \Delta Q^{(k+1)}(x)(\Delta F_{1,1}^{(k)}(x) + F_{1,0}^{(k)}(x+1)) + \nabla Q^{(k+1)}(x)F_{0,1}^{(k)}(x)\\ + Q^{(k+1)}(x)(\Delta F_{1,0}^{(k)}(x) + \Delta F_{0,1}^{(k)}(x) + F_{0,0}^{(k)}) = \Lambda Q^{(k+1)}(x).\end{aligned} \tag{5.6.34}$$

Utilizando la definición de $F_{1,1}^{(k)}$, $F_{1,0}^{(k)}$ y $F_{0,1}^{(k)}$ y $F_{0,0}^{(k)}$, tenemos

$$F_{1,1}^{(k)} = F_{1,1}(x) = F_{1,1}^{(k+1)}(x), \qquad F_{0,1}^{(k)} = F_{0,1} = F_{0,1}^{(k+1)},$$

$$\begin{aligned}\Delta F_{1,1}^{(k)}(x) + F_{1,0}^{(k)}(x+1) &= \Delta F_{1,1}(x) + \left(\sum_{j=0}^{k-1}\Delta F_{1,1}(x+k-j-1+1)\right) + F_{1,0}(x+k+1)\\ &= \left(\sum_{j=0}^{k}\Delta F_{1,1}(x+(k+1)-j-1)\right) + F_{1,0}(x+k+1) = F_{1,0}^{(k+1)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta F_{1,0}^{(k)}(x) + \Delta F_{0,1}^{(k)}(x) + F_{0,0}^{(k)}(x) = &\left(\sum_{j=0}^{k-1}\Delta^2 F_{1,1}(x+k-j-1)\right) + \Delta F_{1,0}(x+k) + \Delta F_{0,1}(x)\\ &+ \sum_{j=0}^{k-1} j\Delta^2 F_{1,1}(x+k-j-1) + \sum_{j=0}^{k-1}\Delta F_{1,0}(x+j) + k\Delta F_{0,1}(x) + F_{0,0}\\ = &\left(\sum_{j=0}^{k-1}(j+1)\Delta^2 F_{1,1}(x+k-j-1)\right) + \sum_{j=0}^{k}\Delta F_{1,0}(x+j) + (k+1)\Delta F_{0,1}(x) + F_{0,0}\\ = &\left(\sum_{j=0}^{k} j\Delta^2 F_{1,1}(x+(k+1)-j-1)\right) + \sum_{j=0}^{k}\Delta F_{1,0}(x+j) + (k+1)\Delta F_{0,1}(x) + F_{0,0}\\ = &F_{0,0}^{(k+1)}.\end{aligned}$$

Así, tenemos que (5.6.34) es igual a

$$\begin{aligned}\Delta\nabla Q^{(k)}(x)F_{1,1}^{(k+1)}(x) + \Delta Q^{(k+1)}(x)F_{1,0}^{(k+1)}(x) + \nabla Q^{(k+1)}(x)F_{0,1}^{(k+1)}(x)\\ + Q^{(k+1)}(x)F_{0,0}^{(k+1)}(x) = \Lambda Q^{(k+1)}(x).\end{aligned}$$

Con esto concluimos que el resultado vale para todo número natural k. $\square$

Suponiendo que estamos en un contexto similar al de la sección anterior, es decir, consideraremos una familia de pesos matriciales $W^{(j)}$ definidos positivos con soporte $\mathbb{N}_0$ y con j en $\mathbb{N}_0$. Denotamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(j)}$ el producto interno inducido por $W^{(j)}$. Es decir

$$\langle P; Q \rangle_{(j)} = \sum_{x=0}^{\infty} P(x) W^{(j)}(x) Q^*(x).$$

Supongamos que $W^{(j)}$ satisface las hipótesis del Teorema 5.6. En particular, suponemos que existen polinomios $\Phi^{(j)}$ y $\Psi^{(j)}$ de grados 2 y 1 respectivamente tales que

$$\Delta W^{(j+1)}(x-1) = W^{(j)}(x) \Psi^{(j)}(x)$$

Además, asumimos que $W^{(j+1)}(x) = W^{(j)}(x)\Phi(x)$. Como consecuencia del Teorema 5.6, podemos ver a Δ como un *lowering operator*

$$\Delta : L^2\left(W^{(j)}\right) \to L^2\left(W^{(j+1)}\right)$$

y a su adjunto $S^{(j)}$ como un *raising operator*

$$S^{(j)} : L^2\left(W^{(j+1)}\right) \to L^2\left(W^{(j)}\right).$$

Con lo cual, tiene sentido considerar los operadores D_1 y D_2 definidos por

$$D_1 = \Delta \circ S^{(j-1)} : L^2\left(W^{(j)}\right) \to L^2\left(W^{(j)}\right),$$
$$D_2 = S^{(j)} \circ \Delta : L^2\left(W^{(j)}\right) \to L^2\left(W^{(j)}\right).$$

Usando la Proposición 5.8 vemos que los operadores D_1 y D_2 son de orden dos y pueden ser escritos de forma explícita

$$P^{(j)}(x)D_1 = \left(\Delta \circ S^{(j-1)}\right) P^{(j)}(x) = -\Delta\left[\Delta P^{(j)}(x-1)(\Phi^{(j-1)}(x))^* + P^{(j)}(x-1)(\Psi^{(j-1)}(x))^*\right]$$
$$P^{(j)}(x)D_2 = \left(S^{(j)} \circ \Delta\right) P^{(j)}(x) = -\left[\Delta^2 P^{(j)}(x-2)(\Phi^{(j)}(x))^* + \Delta P^{(j)}(x-1)(\Psi^{(j)}(x))^*\right].$$

Notemos que estas dos últimas expresiones pueden en principio ser distintas. Además estos operadores son simétricos respecto a $W^{(j)}$ ya que por ser $S^{(j)}$ adjunto de Δ, ocurre que dado dos polinomios matriciales P, Q

$$\langle PD_1, Q \rangle_{(j)} = \left\langle \left(\Delta \circ S^{(j-1)}\right) P, Q \right\rangle_{(j)} = \left\langle S^{(j-1)}P, S^{(j-1)}Q \right\rangle_{(j)} = \left\langle P, \left(\Delta \circ S^{(j-1)}\right) Q \right\rangle_{(j)}$$
$$= \langle P, QD_1 \rangle_{(j)}.$$

De la misma forma, tenemos

$$\langle PD_2, Q \rangle_{(j)} = \left\langle \left(S^{(j)} \circ \Delta\right) P, Q \right\rangle_{(j)} = \langle \Delta P, \Delta Q \rangle_{(j)} = \left\langle P, \left(S^{(j)} \circ \Delta\right) Q \right\rangle_{(j)} = \langle P, QD_2 \rangle_{(j)}$$

Entonces, por el Teorema 5.12, cualquier sucesión de polinomios ortogonales matriciales $\{R_n\}$ asociada a $W^{(j)}$ es autofunción de los operadores D_1 y D_2. Es decir, existen dos sucesiones de matrices $\left\{\Lambda_n^{(1)}\right\}$ y $\left\{\Lambda_n^{(2)}\right\}$ tales que

$$R_n D_1 = \Lambda_n^{(1)} R_n \quad \text{y que} \quad R_n D_2 = \Lambda_n^{(2)} R_n.$$

Y por el Teorema 5.13, la sucesión de polinomios $\{\Delta^k R_n(x)\}$ satisface una ecuación del tipo (5.6.32).

CAPÍTULO 6

Construcción de una familia tipo Charlier

El objetivo de este capítulo es construir una familia de pesos matriciales $W^{(j)}$ como en la Sección 5.2 que satisfagan las ecuaciones de Pearson dadas en el Teorema 5.6. Para poder introducir nuestro peso matricial necesitamos utilizar las funciones logaritmo y exponencial matricial, cuyas definiciones y propiedades básicas se detallan en el Apéndice A.

Definición 9. *Dado $x \in \mathbb{R}$ y una matriz nilpotente A, definimos*

$$(A+I)^x = e^{x \log(A+I)}.$$

Notemos que por el Lema A.4, la serie $\log(A+I)$ es convergente y por lo tanto $(A+I)^x$ está bien definido para todo $x \in \mathbb{R}$. Es consecuencia directa de la Definición 9, el hecho que

$$(A+I)^x(A+I)^y = (A+I)^{x+y}, \qquad ((A+I)^x)^{-1} = (A+I)^{-x}$$

ya que

$$(A+I)^x(A+I)^y = e^{x\log(A+I)}e^{y\log(A+I)} = e^{(x+y)\log(A+I)} = (A+I)^{x+y},$$

donde hemos usado el punto 1 de la Proposición A.2. Por lo tanto

$$(A+I)^x(A+I)^{-x} = e^{(x-x)\log(A+I)} = I. \tag{6.0.1}$$

Además, $(A+I)^x$ es un polinomio matricial para todo $x \in \mathbb{R}$. Para ver esto, observemos que como A es nilpotente,

$$\log(A+I) = \sum_{i=0}^{N} \frac{(-1)^{i+1}A^i}{i}.$$

Por lo tanto,

$$(A+I)^x = \exp\left(\sum_{i=0}^{N} \frac{x(-1)^{i+1}A^i}{i}\right) = \prod_{i=0}^{N} \exp\left(\frac{x(-1)^{i+1}A^i}{i}\right).$$

Como $\frac{x(-1)^{i+1}A^i}{i}$ es una matriz nilpotente para todo i, tenemos que $(A+I)^x$ es un polinomio para todo x. En particular, por (6.0.1), la inversa de $(A+I)^x$ es un polinomio en x.

Recordemos que la familia de polinomios escalares de Charlier 2.6.6 está asociada a un peso con soporte en $\mathbb{N}_0$, dado por $w(x) = \frac{a^x}{x!}$. Consideraremos la familia pesos matriciales con soporte en $\mathbb{N}_0$, definido por

$$W^{(j)}(x) = \frac{a^x}{x!}(A+I)^{x+j}T^{(j)}(A^*+I)^{x+j}, \tag{6.0.2}$$

para $x \in \mathbb{N}_0$, donde $a > 0$, A es una matriz $N \times N$ con entradas nulas salvo en la primer subdiagonal, digamos $A_{i,i-1} = \frac{\mu_i}{\mu_{i-1}}$, donde $\mu_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, y $T^{(j)}$ una matriz diagonal $N \times N$, digamos $T^{(j)}_{i,i} = \delta^{(j)}_i$ con $\delta^{(j)}_i$ mayor a cero para todo i.

Observación 6.1. *Notemos que $W^{(j)}$ definido en* (6.0.2) *es definido positivo para todo j ya que dado un vector no nulo v tenemos que*

$$v^*(A+I)^{x+j}T^{(j)}(A^*+I)^{x+j}v = v^*(A+I)^{x+j}T^{(j)}(v^*(A+I)^{x+j})^* = uT^{(j)}u* > 0 \tag{6.0.3}$$

ya que $T^{(j)}$ es definida positiva, donde hemos nombrado por u a $v^*(A+I)^{x+j} \neq 0$. Sabemos por (6.0.1)*, que $(A+I)^{x+j}$ es inversible, entonces $v^*(A+I)^{x+j}T^{(j)}(A^*+I)^{x+j}v > 0$.*

Observación 6.2. *Como cada entrada del peso $W^{(j)}$ es el producto de $\frac{a^x}{x!}$ por un polinomio en x, la suma*

$$\sum_{x=0}^{\infty} x^\ell W^{(j)}(x)_{n,m} < \infty,$$

para todo ℓ, n, m donde usamos que el peso de Charlier $\frac{a^x}{x!}$ tiene momentos finitos de todo orden. Concluimos que $W^{(j)}$ tiene momentos finitos de todo orden.

Sea $\{P^{(j)}_n\}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos asociados a $W^{(j)}$, es decir, la sucesión $\{P^{(j)}_n\}_{n\geq 0}$ satisface

$$\sum_{x=0}^{\infty} P^{(j)}_n(x)W^{(j)}(x)P^{(j)}_m(x)^* = 0, \qquad \text{si} \quad m < n.$$

Observación 6.3. *La familia de pesos* (6.0.2) *está inspirada en el peso estudiado en* [15]*. De hecho, si tomamos $j = 0$ y T igual a la matriz identidad en* (6.0.2)*, obtenemos un peso similar al estudiado en* [15]*.*

Lema 6.4. *Sea R un polinomio matricial tal que $\Delta^k R = 0$, entonces R es un polinomio de grado, a lo sumo, $k-1$. Por otro lado, si $P(x) = A_2x^2 + A_1x + A_0$ y $Q(x) = B_1x + B_2$ son dos polinomios matriciales, se cumple que*

$$2A_2 = \Delta^2 P(x), \qquad A_1 = \Delta P(0) - \frac{\Delta^2 P(x)}{2}, \qquad B_1 = \Delta Q(x).$$

Demostración. Probaremos la primer afirmación por inducción en k. Veamos que es válido para $k = 1$. Si $\Delta R(x) = 0$ entonces $R(x+1) = R(x)$ para todo x, entonces como R es un polinomio, R es constante. Supongamos que la afirmación es válida para $k-1$ es decir, suponemos que $\Delta^{k-1}R = 0$ entonces R es un polinomio de grado menor o igual a $k-1$. Veamos que vale para k. Si $\Delta^k R = 0$, entonces $\Delta^{k-1}\Delta R = 0$, luego, aplicando la hipótesis inductiva, ΔR es un polinomio de grado menor o igual a $k-1$. Suponiendo que R es un polinomio de grado $n > k$ entonces, por la observación 5.2, ΔR es un polinomio de grado $n-1 > k-1$ lo cual es absurdo. Esto completa la prueba de la primer afirmación. Veamos que es válido lo segundo. Aplicando el operador Δ a $P(x)$ obtenemos

$$\begin{aligned}\Delta P(x) &= P(x+1) - P(x) = (A_2(x+1)^2 + A_1(x+1) + A_0) - (A_2x^2 + A_1x + A_0) \\ &= A_2x^2 + 2A_2x + A_2 + A_1x + A_1 + A_0 - A_2x^2 - A_1x - A_0 = 2A_2x + A_2 + A_1.\end{aligned}$$

Aplicando nuevamente el operador Δ a $P(x)$,

$$\Delta^2 P(x) = (2A_2(x+1) + A_2 + A_1) - (2A_2x + A_2 + A_1) = 2A_2.$$

De esto sale $2A_2 = \Delta^2 P(x)$, y entonces tenemos que

$$\Delta P(0) = A_2 + A_1 = \frac{\Delta^2 P(x)}{2} + A_1,$$

con lo cual concluimos $A_1 = \Delta P(0) - \frac{\Delta^2 P(x)}{2}$. Aplicando ahora el operador Δ a $Q(x)$,

$$\Delta Q(x) = Q(x+1) - Q(x) = (B_1(x+1) + B_0) - (B_1x + B_0) = B_1.$$

Y así, $B_1 = \Delta Q(x)$. Esto concluye la prueba del lema. □

6.1. Ecuación de Pearson discreta

En el resto del capítulo utilizaremos la matriz diagonal J dada por $J_{i,j} = i\delta_{i,j}$. En los siguientes teoremas, daremos condiciones suficientes para que se satisfagan las hipótesis del Teorema 5.6, y así poder asegurar que la sucesión $\{\Delta^{(j)} P_n\}$ es una sucesión de polinomios ortogonales con respecto al peso $W^{(j+1)}$.

Lema 6.5. *Sea $M \in \mathbb{C}^{N\times N}$. entonces*

$$\Delta\left((A^* + I)^{-x} M (A^* + I)^x\right) = (A^* + I)^{-x-1}\,[M, A^*]\,(A^* + I)^x.$$

Demostración. Tenemos que

$$\Delta\left((A^* + I)^{-x} M (A^* + I)^x\right) = (A^* + I)^{-x-1} M (A^* + I)^{x+1} - (A^* + I)^{-x} M (A^* + I)^x.$$

Tomando factor común $(A^* + I)^{-x-1}$ a izquierda, el lado derecho de la expresión anterior se escribe como

$$(A^* + I)^{-x-1}\left(M(A^* + I)^{x+1} - (A^* + I) M (A^* + I)^x\right).$$

Tomando factor común $(A^* + I)^x$ a derecha, la expresión anterior se escribe como

$$(A^* + I)^{-x-1}\,(M(A^* + I) - (A^* + I)M)\,(A^* + I)^x,$$

que es lo mismo que

$$(A^* + I)^{-x-1}\,(MA^* - A^*M)\,(A^* + I)^x$$

lo cual puede ser escrito como

$$(A^* + I)^{-x-1}\,[M, A^*]\,(A^* + I)^x. \tag{6.1.4}$$

Esto completa la demostración. □

Para probar que el peso $W^{(j)}$ satisface una ecuación de Pearson, supondremos que existen números reales $d^{(j)} \neq 0$ y $c^{(j)}$ tales que:

$$\frac{\delta_i^{(j+1)}}{\delta_i^{(j)}} - \frac{\delta_{i+1}^{(j+1)}}{\delta_{i+1}^{(j)}} = -\frac{d^{(j)}a}{2}, \quad i = 1, \cdots, N-1, \tag{6.1.5}$$

$$\begin{gathered}\left(\frac{\mu_i}{\mu_{i-1}}\right)^2 \frac{\delta_{i-1}^{(j+1)}}{\delta_i^{(j)}} - \left(\frac{\mu_{i+1}}{\mu_i}\right)^2 \frac{\delta_i^{(j+1)}}{\delta_{i+1}^{(j)}} = d^{(j)}i + c^{(j)}, \quad i = 2, \cdots, N-1, \\ -\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 \frac{\delta_1^{(j+1)}}{\delta_2^{(j)}} = d^{(j)} + c^{(j)}, \qquad \left(\frac{\mu_N}{\mu_{N-1}}\right)^2 \frac{\delta_{N-1}^{(j+1)}}{\delta_N^{(j)}} = d^{(j)}N + c^{(j)}.\end{gathered} \tag{6.1.6}$$

Teorema 6.6. *Consideremos un peso matricial como en* (6.0.2)*. Supongamos que se satisfacen las ecuaciones* (6.1.5)*,* (6.1.5)*. Entonces,*

$$\Phi^{(j)}(x) = (W^{(j)})^{-1}(x)W^{(j+1)}(x)$$

es un polinomio matricial de grado menor igual a dos.

Demostración. Usando la definición de $W^{(j)}$, calculemos explícitamente $\Phi^{(j)}(x)$

$$\Phi^{(j)}(x) = (W^{(j)})^{-1}(x)W^{(j+1)}(x),$$

esta última expresión es igual a

$$\Phi^{(j)}(x) = \left(\frac{a^x}{x!}(A+I)^{x+j}T^{(j)}(A^*+I)^{x+j}\right)^{-1} \frac{a^x}{x!}(A+I)^{x+j+1}T^{(j)}(A^*+I)^{x+j+1},$$

que es igual a

$$\Phi^{(j)}(x) = \frac{x!}{a^x}(A^*+I)^{-x-j}\left(T^{(j)}\right)^{-1}(A+I)^{-x-j}\frac{a^x}{x!}(A+I)^{x+j+1}T^{(j+1)}(A^*+I)^{x+j+1}.$$

Operando, esto último se escribe como

$$\Phi^{(j)}(x) = (A^*+I)^{-x-j}\left(T^{(j)}\right)^{-1}(A+I)T^{(j+1)}(A^*+I)^{x+j+1}.$$

Por lo observado previamente $(A^*+I)^{-x-j}$ y $(A^*+I)^{x+j+1}$ son polinomios en x. Por lo tanto, $\Phi^{(j)}$ es un polinomio matricial. Llamando $M^{(j)}$ a $\left(T^{(j)}\right)^{-1}(A+I)T^{(j+1)}$, tenemos por lo anterior que

$$(A^*+I)^j\Phi^{(j)}(x)(A^*+I)^{-j-1} = (A^*+I)^{-x}M^{(j)}(A^*+I)^x. \tag{6.1.7}$$

Ahora queremos probar que las condiciones (6.1.5), (6.1.5) garantizan que $\Phi^{(j)}$ es un polinomio de grado menor o igual dos. Por el Lema 6.4, es suficiente probar que $\Delta^2\Phi^{(j)}$ es un polinomio constante. Si aplicamos el operador Δ a (6.1.7), por el Lema 6.5 obtenemos

$$\Delta\left((A^*+I)^j\Phi^{(j)}(x)(A^*+I)^{-j-1}\right) = (A^*+I)^{-x-1}\left[M^{(j)}, A^*\right](A^*+I)^x. \tag{6.1.8}$$

Aplicando nuevamente el operador Δ y y usando nuevamente el Lema 6.5, obtenemos

$$\Delta^2 \left((A^* + I)^j \Phi^{(j)}(x)(A^* + I)^{-j-1} \right) = (A^* + I)^{-x-2} \left[\left[M^{(j)}, A^* \right], A^* \right] (A^* + I)^x. \quad (6.1.9)$$

Ahora vamos ver que $\left[\left[M^{(j)}, A^* \right], A^* \right] = -d^{(j)} A^*$. Recordando la definición de $M^{(j)}$ tenemos

$$M^{(j)} = \left(T^{(j)} \right)^{-1} (A + I) T^{(j+1)} = \left(T^{(j)} \right)^{-1} A T^{(j+1)} + \left(T^{(j)} \right)^{-1} T^{(j+1)}.$$

Denotando por $M_1^{(j)}$ a $\left(T^{(j)} \right)^{-1} A T^{(j+1)}$ y por $M_2^{(j)}$ a $\left(T^{(j)} \right)^{-1} T^{(j+1)}$, $M^{(j)}$ puede ser escrita como $M_1^{(j)} + M_2^{(j)}$. Notemos que por ser A una matriz con entradas nulas salvo en la primer subdiagonal y $T^{(j)}, T^{(j+1)}$ matrices diagonales, $M_1^{(j)}$ es una matriz con entradas nulas salvo en la primer subdiagonal y $M_2^{(j)}$ es una matriz diagonal. Calcularemos explicitamente las entradas no nulas de estas dos matrices

$$\begin{aligned} \left(M_1^{(j)} \right)_{i,i-1} &= \sum_{k=1}^{N} \left(T^{(j)} \right)^{-1}_{i,k} \left(A T^{(j+1)} \right)_{k,i-1} = \left(T^{(j)} \right)^{-1}_{i,i} \left(A T^{(j+1)} \right)_{i,i-1} \\ &= \left(T^{(j)} \right)^{-1}_{i,i} \sum_{m=1}^{N} A_{i,m} \left(T^{(j+1)} \right)_{m,i-1} = \left(T^{(j)} \right)^{-1}_{i,i} A_{i,i-1} \left(T^{(j+1)} \right)_{i-1,i-1}. \end{aligned}$$

En conclusión, escrito en términos de las entradas de las matrices

$$\left(M_1^{(j)} \right)_{i,i-1} = \frac{\delta_{i-1}^{(j+1)}}{\delta_i^{(j)}} \frac{\mu_i}{\mu_{i-1}}.$$

Y para la matriz diagonal $M_2^{(j)}$, tenemos

$$\left(M_2^{(j)} \right)_{i,i} = \left(T^{(j)} \right)^{-1}_{i,i} \left(T^{(j+1)} \right)_{i,i} = \frac{\delta_i^{(j+1)}}{\delta_i^{(j)}}.$$

Procederemos ahora a calcular los corchetes $\left[M_1^{(j)}, A^* \right]$ y $\left[M_2^{(j)}, A^* \right]$. Por defnición de $\left[M_1^{(j)}, A^* \right]$, tenemos

$$\left[M_1^{(j)}, A^* \right]_{i,l} = \left(M_1^{(j)} A^* \right)_{i,l} - \left(A^* M_1^{(j)} \right)_{i,l} = \sum_{k=1}^{N} \left[\left(M_1^{(j)} \right)_{i,k} A^*_{k,l} - A^*_{i,k} \left(M_1^{(j)} \right)_{k,l} \right].$$

Al ser $M_1^{(j)}$ una matriz con entradas no nulas salvo en la primer subdiagonal, lo anterior se escribe como

$$\left(M_1^{(j)} \right)_{i,i-1} A^*_{i-1,l} - A^*_{i,i+1} \left(M_1^{(j)} \right)_{i+1,l}.$$

Ahora, como A es una matriz con entradas nulas salvo en la primer subdiagonal, A^* es una matriz con entradas nulas salvo en la primer supradiagonal, con lo cual, la expresión anterior, es igual a cero si $l \neq i$ y es igual a

$$\left(\frac{\mu_i}{\mu_{i-1}} \right)^2 \frac{\delta_{i-1}^{(j+1)}}{\delta_i^{(j)}} - \left(\frac{\mu_{i+1}}{\mu_i} \right)^2 \frac{\delta_i^{(j+1)}}{\delta_{i+1}^{(j)}} = d^{(j)} i + c^{(j)},$$

si $l = i$, donde usamos (6.1.5). Por lo tanto,

$$\left[M_1^{(j)}, A^*\right] = d^{(j)} J + c^{(j)}. \tag{6.1.10}$$

donde J es la matriz definida al principio de este capítulo. Ahora, por definición de $\left[M_2^{(j)}, A^*\right]$, tenemos

$$\left[M_2^{(j)}; A^*\right]_{i,l} = \left(M_2^{(j)} A^*\right)_{i,l} - \left(A^* M_2^{(j)}\right)_{i,l} = \sum_{k=1}^{N} \left(M_2^{(j)}\right)_{i,k} A^*_{k,l} - A^*_{i,k} \left(M_2^{(j)}\right)_{k,l}.$$

Al ser $M_2^{(j)}$ una matriz diagonal, lo anterior se escribe como

$$\left(M_2^{(j)}\right)_{i,i} A^*_{i,l} - A^*_{i,j} \left(M_2^{(j)}\right)_{l,l}.$$

Notemos que esta última expresión es igual a cero si l es distinto de $i+1$ y es igual a

$$\frac{\mu_i}{\mu_{i-1}} \left(\frac{\delta_i^{(j+1)}}{\delta_i^{(j)}} - \frac{\delta_{i+1}^{(j+1)}}{\delta_{i+1}^{(j)}} \right) = -\left(\frac{\mu_i}{\mu_{i-1}}\right) \frac{d^{(j)} a}{2},$$

si l es igual a $i+1$, donde usamos (6.1.5). Con lo cual,

$$\left[M_2^{(j)}, A^*\right] = -\frac{d^{(j)} a}{2} A^*. \tag{6.1.11}$$

En conclusión, tenemos

$$\left[M^{(j)}, A^*\right] = \left[M_1^{(j)}, A^*\right] + \left[M_2^{(j)}, A^*\right] = d^{(j)} J + c^{(j)} I - \frac{d^{(j)} a}{2} A^*. \tag{6.1.12}$$

Para poder calcular $\left[\left[M^{(j)}, A^*\right], A^*\right]$, sólo necesitamos cononcer $[J; A^*]$ ya que el corchete de A^* con los otros dos sumandos en el miembro derecho de (6.1.12) es cero. Notemos que

$$[J; A^*]_{i,l} = (JA^*)_{i,l} - (A^* J)_{i,l} = J_{i,i} A^*_{i,l} - A^*_{i,l} J_{l,l},$$

y esto último es igual a cero si $l \neq i+1$ y es igual a $i\left(\frac{\mu_i}{\mu_{i-1}}\right) - \left(\frac{\mu_i}{\mu_{i-1}}\right)(i+1) = -\frac{\mu_i}{\mu_{i-1}}$ si $l = i+1$. Tenemos que $[J, A^*] = -A^*$. Por lo tanto, $\left[\left[M^{(j)}, A^*\right], A^*\right] = d^{(j)} [J, A^*] + c^{(j)} [I, A^*] - \frac{d^{(j)} a}{2} [A^*, A^*] = -d^{(j)} A^*$ como se quería. Así, el lado derecho de (6.1.9) es

$$(A^* + I)^{-x-2} \left(-d^{(j)} A^*\right) (A^* + I)^x,$$

Como A^* conmuta con $(A^* + I)$, tenemos

$$\Delta^2 \left((A^* + I)^j \Phi^{(j)}(x) (A^* + I)^{-j-1}\right) = \left(-d^{(j)} A^*\right) (A^* + I)^{-2}. \tag{6.1.13}$$

En conclusión, tenemos que $\Phi^{(j)}$ es un polinomio de grado menor o igual a dos. □

Teorema 6.7. *Consideremos un peso matricial como en* (6.0.2)*. Supongamos que se satisfacen las ecuaciones* (6.1.5)*,* (6.1.5)*. Entonces,*

$$\Psi^{(j)}(x) = (W^{(j)})^{-1}(x) \Delta W^{(j+1)}(x-1),$$

es un polinomio matricial de grado menor o igual a uno.

Demostración. Usando la defnción de $W^{(j)}$ calculemos explícitamente $\Psi^{(j)}(x)$:

$$\Psi^{(j)}(x) = (W^{(j)}(x))^{-1}\Delta W^{(j+1)}(x-1)$$

usando la definición de Δ, lo anterior se escribe como

$$(W^{(j)}(x))^{-1}\left(W^{(j+1)}(x) - W^{(j+1)}(x-1)\right),$$

lo cual es igual a

$$\Phi^{(j)}(x) - \frac{x!}{a^x}(A^*+I)^{-x-j}\left(T^{(j)}\right)^{-1}(A+I)^{-x-j}\frac{a^{x-1}}{(x-1)!}(A+I)^{x+j}T^{(j+1)}(A^*+I)^{x+j}.$$

Operando, esto último se escribe como

$$\Phi^{(j)}(x) - \frac{x}{a}(A^*+I)^{-x-j}\left(T^{(j)}\right)^{-1}T^{(j+1)}(A^*+I)^{x+j}.$$

Por lo visto previamente $(A^*+I)^{-x-j}$ y $(A^*+I)^{x+j}$, son polinomios en x. Por lo tanto, $\Psi^{(j)}$ es un polinomio matricial. Utilizando la notación de la demostración del teorema anterior $M_2^{(j)} = \left(T^{(j)}\right)^{-1}T^{(j+1)}$, tenemos

$$\Psi^{(j)}(x) = \Phi^{(j)}(x) - \frac{x}{a}(A^*+I)^{-x-j}M_2^{(j)}(A^*+I)^{x+j} \tag{6.1.14}$$

Entonces,

$$(A^*+I)^j\Psi^{(j)}(x)(A^*+I)^{-j} = (A^*+I)^j\Phi^{(j)}(x)(A^*+I)^{-j} - \frac{x}{a}(A^*+I)^{-x}M_2^{(j)}(A^*+I)^x.$$

Ahora queremos probar que las condiciones (6.1.5), (6.1.5) garantizan que $\Psi^{(j)}$ es un polinomio de grado menor o igual a uno. Por el Lema 6.5

$$\Delta\left((A^*+I)^{-x}M_2^{(j)}(A^*+I)^x\right) = (A^*+I)^{-x-1}\left[M_2^{(j)}, A^*\right](A^*+I)^x,$$

lo cual, por lo calculado previamente en (6.1.11), es igual a

$$(A^*+I)^{-x-1}\left(-\frac{d^{(j)}a}{2}\right)A^*(A^*+I)^x = -\frac{d^{(j)}a}{2}A^*(A^*+I)^{-1}.$$

Y así, el polinomio $(A^*+I)^{-x}M_2^{(j)}(A^*+I)^x$ es igual a $-\frac{d^{(j)}a}{2}A^*(A^*+I)^{-1}x + M_2^{(j)}$. Con lo cual

$$-\frac{x}{a}(A^*+I)^{-x}M_2^{(j)}(A^*+I)^x = \frac{d^{(j)}}{2}A^*(A^*+I)^{-1}x^2 - \frac{x}{a}M_2^j. \tag{6.1.15}$$

Vimos previamente en (6.1.13) que

$$\Delta^2\left((A^*+I)^j\Phi^{(j)}(x)(A^*+I)^{-j-1}\right) = \left(-d^{(j)}A^*\right)(A^*+I)^{-2}.$$

Entonces,

$$\Delta^2\left((A^*+I)^j\Phi^{(j)}(x)(A^*+I)^{-j}\right) = \left(-d^{(j)}A^*\right)(A^*+I)^{-1}.$$

Usando el Lema 6.4, el coeficiente de orden 2 de $(A^*+I)^j\Phi^{(j)}(x)(A^*+I)^{-j}$ es

$$\left(-\frac{d^{(j)}}{2}A^*\right)(A^*+I)^{-1},$$

con lo cual, el coeficiente de orden 2 de $(A^*+I)^j\Psi^{(j)}(x)(A^*+I)^{-j}$ es

$$\left(-\frac{d^{(j)}}{2}A^*\right)(A^*+I)^{-1}+\left(\frac{d^{(j)}}{2}A^*\right)(A^*+I)^{-1}=0,$$

y concluimos que $\Psi^{(j)}$ es un polinomio de grado menor o igual a uno. □

Los Teoremas 6.6 y 6.7, dicen que $\Phi^{(j)}$ y $\Psi^{(j)}$ son polinomios matriciales de grado menores o iguales a dos y uno respectivamente. La siguiente proposición da de manera explícita los coeficientes de estos polinomios.

Teorema 6.8. *Bajo las condiciones del Teorema 6.6, tenemos que*

$$(A^*+I)^j\Phi^{(j)}(x)(A^*+I)^{-j-1}=x^2A_2+xA_1+A_0, \qquad (A^*+I)^j\Psi^{(j)}(x)(A^*+I)^{-j}=xB_1+B_0,$$

donde

$$A_2=-\frac{d^{(j)}}{2}A^*(A^*+I)^{-2}, \qquad A_1=d^{(j)}(A^*+I)^{-1}\left(J+\frac{a}{2}A^*+\frac{A^*}{2}(A^*+I)^{-1}\right)+c^{(j)}$$

$$A_0=(T^{(j)})^{-1}(A+I)T^{(j+1)}, \qquad B_1=A_1(A^*+I)-\frac{1}{a}(T^{(j)})^{-1}T^{(j+1)}, \qquad B_0=A_0(A^*+I).$$

Demostración. Vimos que $\Phi^{(j)}$ es un polinomio de grado dos, digamos

$$(A^*+I)^j\Phi^{(j)}(x)(A^*+I)^{-j-1}=A_2x^2+A_1x+A_0$$

Utilizando el Lema 6.4 y (6.1.13)

$$2A_2=\Delta^2\left((A^*+I)^j\Phi^{(j)}(x)(A^*+I)^{-j-1}\right)=-d^{(j)}A^*(A^*+I)^{-2}$$

Utilizando nuevamente el Lema 6.4 y (6.1.8)

$$A_1=\Delta\left((A^*+I)^j\Phi^{(j)}(x)(A^*+I)^{-j-1}\right)|_{x=0}-A_2=\left((A^*+I)^{-x-1}\left[M^{(j)};A^*\right](A^*+I)^x\right)|_{x=0}-A_2$$

lo cual por (6.1.12) es igual a

$$(A^*+I)^{-1}\left(d^{(j)}J+c^{(j)}-\frac{d^{(j)}a}{2}A^*\right)+\frac{d^{(j)}A^*(A^*+I)^{-2}}{2}.$$

Por último, tenemos que, por (6.1.7)

$$A_0=\left((A^*+I)^j\Phi^{(j)}(x)(A^*+I)^{-j-1}\right)|_{x=0}=(T^{(j)})^{-1}(A+I)T^{(j+1)}.$$

Ahora, vimos en (6.1.14) que

$$\Psi^{(j)}(x)=\Phi^{(j)}(x)-\frac{x}{a}(A^*+I)^{-x-j}\left(T^{(j)}\right)^{-1}T^{(j+1)}(A^*+I)^{x+j}$$

y vimos en (6.1.15) que

$$-\frac{x}{a}(A^*+I)^{-x}\left(T^{(j)}\right)^{-1}T^{(j+1)}(A^*+I)^x=\frac{d^{(j)}}{2}A^*(A^*+I)^{-1}x^2-\frac{x}{a}\left(T^{(j)}\right)^{-1}T^{(j+1)}.$$

Aplicando esto se concluye el resultado. □

6.2. Soluciones a las condiciones no lineales para μ_i y δ_i

A partir de las condiciones no lineales (6.1.5) y (6.1.6), encontramos un nuevo sistema de ecuaciones que, en algunos casos, se puede resolver explícitamente. Esto nos permite dar, al menos, un ejemplo explícito del peso $W^{(j)}$. En el siguiente lema, damos el nuevo sistema de ecuaciones.

Proposición 6.9. *Supongamos que tenemos parámetros μ_i y $\delta_i^{(j)}$ tales que se satisfacen las condiciones* (6.1.5) *y* (6.1.6)*. Asumimos, además, que la siguiente condición se cumple*

$$\frac{(i-1)a}{2} + \frac{\delta_1^{(k+1)}}{\delta_1^{(k)} d^{(k)}} = \frac{ia}{2} + \frac{\delta_1^{(k)}}{\delta_1^{(k-1)} d^{(k-1)}}$$

para $k = 1 \dots j$, entonces

$$\frac{\delta_{i+1}^{(j+1)}}{\delta_{i+1}^{(j)}} = i\frac{d^{(j)}a}{2} + \frac{\delta_1^{(j+1)}}{\delta_1^{(j)}}, \qquad i(N-i) = \left(\frac{\mu_i}{\mu_{i-1}}\right)^2 \left(a(i-1) + \frac{2\delta_1^{(1)}}{\delta_1^{(0)}}\right) \frac{\delta_i^{(0)}}{\delta_{i+1}^{(0)}}.$$

Demostración. Por hipótesis, $\frac{\delta_i^{(j+1)}}{\delta_i^{(j)}} - \frac{\delta_{i+1}^{(j+1)}}{\delta_{i+1}^{(j)}} = -\frac{d^{(j)}a}{2}$. Entonces iterando esta ecuación, tenemos

$$\frac{\delta_{i+1}^{(j+1)}}{\delta_{i+1}^{(j)}} = \frac{d^{(j)}a}{2} + \frac{\delta_i^{(j+1)}}{\delta_i^{(j)}} = 2\frac{d^{(j)}a}{2} + \frac{\delta_{i-1}^{(j+1)}}{\delta_{i-1}^{(j)}} = \dots = i\frac{d^{(j)}a}{2} + \frac{\delta_1^{(j+1)}}{\delta_1^{(j)}}.$$

Así, concluimos que es válida la primer afirmación. Para probar la segunda afirmación, si llamamos $\beta_i^{(j)} = \left(\frac{\mu_i}{\mu_{i-1}}\right)^2 \frac{\delta_{i-1}^{(j+1)}}{\delta_i^{(j)}}$, la ecuación $\left(\frac{\mu_i}{\mu_{i-1}}\right)^2 \frac{\delta_{i-1}^{(j+1)}}{\delta_i^{(j)}} - \left(\frac{\mu_{i+1}}{\mu_i}\right)^2 \frac{\delta_i^{(j+1)}}{\delta_{i+1}^{(j)}} = d^{(j)}i + c^{(j)}$, se transforma en

$$\beta_i^{(j)} - \beta_{i+1}^{(j)} = d^{(j)}i + c^{(j)}. \tag{6.2.16}$$

Como función de i, la ecuación anterior se puede ver como

$$-(\Delta\beta^{(j)})(i) = d^{(j)}i + c^{(j)}.$$

Teniendo en cuenta el Lema 6.4, proponemos una solución polinomial en i de grado 2

$$\beta_i^{(j)} = \gamma_1^{(j)} i^2 + \gamma_2^{(j)} i + \gamma_3^{(j)} \tag{6.2.17}$$

de la ecuación anterior. Notemos que

$$\beta_i^{(j)} - \beta_{i+1}^{(j)} = \gamma_1^{(j)} i^2 + \gamma_2^{(j)} i + \gamma_3^{(j)} - \gamma_1^{(j)}(i+1)^2 + \gamma_2^{(j)}(i+1) + \gamma_3^{(j)} = -2\gamma_1^{(j)} i - \gamma_1^{(j)} - \gamma_2^{(j)}$$

Entonces, $d^{(j)} = -2\gamma_1^{(j)}, c^{(j)} = -\gamma_1^{(j)} - \gamma_2^{(j)}$ y así, tenemos que

$$\gamma_1^{(j)} = -\frac{d^{(j)}}{2}, \gamma_2^{(j)} = \frac{d^{(j)}}{2} - c^{(j)}. \tag{6.2.18}$$

Para $i = 1$, la ecuación (6.2.16) se interpreta como $-\beta_2^{(j)} = d^{(j)} + c^{(j)}$ y también tenemos que $-\beta_2^{(j)} = -\left(-\frac{d^{(j)}}{2}4 + \left(\frac{d^{(j)}}{2} - c^{(j)}\right)2 + \gamma_3^{(j)}\right) = d^{(j)} + 2c^{(j)} - \gamma_3^{(j)}$. Entonces,

$$\gamma_3^{(j)} = c^{(j)}. \tag{6.2.19}$$

En $i = N$, la ecuación (6.2.16) se interpreta como $\beta_N = d^{(j)}N + c^{(j)}$ y también tenemos $\beta_N = \left(-\frac{d^{(j)}}{2}N^2 + \left(\frac{d^{(j)}}{2} - c^{(j)}\right)N + c^{(j)}\right)$. Entonces,

$$c^{(j)} = -\frac{d^{(j)}}{2}(N+1). \tag{6.2.20}$$

Así, por (6.2.17), (6.2.18), (6.2.19) y (6.2.20), tenemos

$$\begin{aligned}\beta_i^{(j)} &= \left(\frac{\mu_i}{\mu_{i-1}}\right)^2 \frac{\delta_{i-1}^{(j+1)}}{\delta_i^{(j)}} = -\frac{d^{(j)}}{2}i^2 + \left(\frac{d^{(j)}}{2} + \frac{d^{(j)}}{2}(N+1)\right)i - \frac{d^{(j)}}{2}(N+1)\\ &= -\frac{d^{(j)}}{2}(i^2 + (N+2)i + N + 1) = -\frac{d^{(j)}}{2}(i-1)(i-N-1).\end{aligned}$$

Entonces,

$$\frac{d^{(j)}}{2}i(N-i) = \left(\frac{\mu_{i+1}}{\mu_i}\right)^2 \frac{\delta_i^{(j+1)}}{\delta_{i+1}^{(j)}}. \tag{6.2.21}$$

Iterando la ecuación $\frac{\delta_{i+1}^{(j+1)}}{\delta_{i+1}^{(j)}} = i\frac{d^{(j)}a}{2} + \frac{\delta_1^{(j+1)}}{\delta_1^{(j)}}$, obtenemos

$$\delta_{i+1}^{(j+1)} = \left(i\frac{d^{(j)}a}{2} + \frac{\delta_1^{(j+1)}}{\delta_1^{(j)}}\right)\delta_{i+1}^{(j)} = \ldots = \left(i\frac{d^{(j)}a}{2} + \frac{\delta_1^{(j+1)}}{\delta_1^{(j)}}\right)\ldots\left(i\frac{d^{(0)}a}{2} + \frac{\delta_1^{(1)}}{\delta_1^{(0)}}\right)\delta_{i+1}^{(0)}.$$

Por esto (6.2.21) es igual a

$$\frac{d^{(j)}}{2}i(N-i) = \left(\frac{\mu_{i+1}}{\mu_i}\right)^2 \frac{\left((i-1)\frac{d^{(j)}a}{2} + \frac{\delta_1^{(j+1)}}{\delta_1^{(j)}}\right)\ldots\left((i-1)\frac{d^{(0)}a}{2} + \frac{\delta_1^{(1)}}{\delta_1^{(0)}}\right)\delta_i^{(0)}}{\left(i\frac{d^{(j-1)}a}{2} + \frac{\delta_1^{(j)}}{\delta_1^{(j-1)}}\right)\ldots\left(i\frac{d^{(0)}a}{2} + \frac{\delta_1^{(1)}}{\delta_1^{(0)}}\right)\delta_{i+1}^{(0)}},$$

lo que, escrito de otra forma, es igual

$$\frac{d^{(j)}}{2}i(N-i) = \left(\frac{\mu_{i+1}}{\mu_i}\right)^2 \frac{d^{(j)}d^{(j-1)}\ldots d^{(0)}}{d^{(j-1)}\ldots d^{(0)}} \frac{\left((i-1)\frac{a}{2} + \frac{\delta_1^{(j+1)}}{\delta_1^{(j)}d^{(j)}}\right)\ldots\left((i-1)\frac{a}{2} + \frac{\delta_1^{(1)}}{\delta_1^{(0)}d^{(0)}}\right)\delta_i^{(0)}}{\left(i\frac{a}{2} + \frac{\delta_1^{(j)}}{\delta_1^{(j-1)}d^{(j-1)}}\right)\ldots\left(i\frac{a}{2} + \frac{\delta_1^{(1)}}{\delta_1^{(0)}d^{(0)}}\right)\delta_{i+1}^{(0)}}.$$

Para cancelar algunos factores en el denominador y numerador de la ecuacion anterior, utilizamos la hipótesis

$$\frac{(i-1)a}{2} + \frac{\delta_1^{(k+1)}}{\delta_1^{(k)}d^{(k)}} = \frac{ia}{2} + \frac{\delta_1^{(k)}}{\delta_1^{(k-1)}d^{(k-1)}}$$

para $k = 1\ldots j$, y obtenemos $\frac{i(N-i)}{2} = \left(\frac{\mu_i}{\mu_{i-1}}\right)^2 \left(\frac{a(i-1)}{2} + \frac{\delta_1^1}{\delta_1^{(0)}}\right) \frac{\delta_i^{(0)}}{\delta_{i+1}^{(0)}}$ por lo cual vale la segunda afirmación. $\square$

6.3. Una solución no trivial a las ecuaciones no lineales

En esta sección utilizamos la Proposición 6.9 para encontrar una solución a las ecuaciones no lineales (6.1.5) y (6.1.6). Notemos que la hipótesis de la Proposición 6.9

$$\frac{(i-1)a}{2}+\frac{\delta_1^{(k+1)}}{\delta_1^{(k)}d^{(k)}}=\frac{ia}{2}+\frac{\delta_1^{(k)}}{\delta_1^{(k-1)}d^{(k-1)}},$$

para $k=1\dots j$, implica que

$$\frac{\delta_1^{(k+1)}}{\delta_1^{(k)}d^{(k)}}=\frac{a}{2}+\frac{\delta_1^{(k)}}{\delta_1^{(k-1)}d^{(k-1)}},$$

y por lo tanto

$$\frac{\delta_1^{(j+1)}}{\delta_1^{(j)}}=\frac{ad^{(j)}}{2}+\frac{d^{(j)}\delta_1^{(j)}}{\delta_1^{(j-1)}d^{(j-1)}}.$$

Para simplificar el problema, tomamos $d^{(j)}=1$ para todo $j\in\mathbb{N}_0$. Entonces

$$\frac{\delta_1^{(j+1)}}{\delta_1^{(j)}}=\frac{a}{2}+\frac{\delta_1^{(j)}}{\delta_1^{(j-1)}}=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+\frac{\delta_1^{(j-1)}}{\delta_1^{(j-2)}}=\cdots=\frac{ja}{2}+\frac{\delta_1^{(1)}}{\delta_1^{(0)}}.$$

Vimos en la misma proposición que se satisface

$$\frac{\delta_{i+1}^{(j+1)}}{\delta_{i+1}^{(j)}}=i\frac{d^{(j)}a}{2}+\frac{\delta_1^{(j+1)}}{\delta_1^{(j)}},\qquad i(N-i)=\left(\frac{\mu_i}{\mu_{i-1}}\right)^2\left(a(i-1)+\frac{2\delta_1^{(1)}}{\delta_1^{(0)}}\right)\frac{\delta_i^{(0)}}{\delta_{i+1}^{(0)}},\tag{6.3.22}$$

entonces para $d^{(j)}=1$

$$\begin{aligned}\delta_{i+1}^{(j+1)}&=\left(i\frac{a}{2}+\frac{\delta_1^{(j+1)}}{\delta_1^{(j)}}\right)\delta_{i+1}^{(j)}=\left((i+j)\frac{a}{2}+\frac{\delta_1^{(1)}}{\delta_1^{(0)}}\right)\delta_{i+1}^{(j)}\\&=\left((i+j)\frac{a}{2}+\frac{\delta_1^{(1)}}{\delta_1^{(0)}}\right)\left((i+j-1)\frac{a}{2}+\frac{\delta_1^{(1)}}{\delta_1^{(0)}}\right)\delta_{i+1}^{(j-1)}\\&=\left((i+j)\frac{a}{2}+\frac{\delta_1^{(1)}}{\delta_1^{(0)}}\right)\cdots\left(i\frac{a}{2}+\frac{\delta_1^{(1)}}{\delta_1^{(0)}}\right)\delta_{i+1}^{(0)}.\end{aligned}$$

También tenemos que la segunda ecuación de (6.3.22) se puede reescribir como

$$\left(\frac{\mu_i}{\mu_{i-1}}\right)^2=\frac{i(N-i)}{\left(a(i-1)+\frac{2\delta_1^{(1)}}{\delta_1^{(0)}}\right)\frac{\delta_i^{(0)}}{\delta_{i+1}^{(0)}}}.$$

Por lo tanto, si tomamos $\delta_i^{(0)}=1$ y $d^{(j)}=1$, obtenemos

$$\left(\frac{\mu_{i+1}}{\mu_i}\right)^2=\frac{i(N-i)}{(i-1)a+2\delta_1^{(1)}},\qquad \delta_{i+1}^{(j+1)}=\left(\frac{a}{2}(i+j)+\delta_1^{(1)}\right)\dots\left(\frac{a}{2}i+\delta_1^{(1)}\right),\tag{6.3.23}$$

donde $\delta_1^{(1)}$ es un parámetro libre. Ahora, debemos verificar que con los parámetros μ_i y $\delta_i^{(j)}$ definidos como en (6.3.23), más las condiciones $\delta_i^{(0)}=1$ y $d^{(j)}=1$, se satisfacen las hipótesis del Teorema 6.6.

Proposición 6.10. *Si tomamos* $\delta_i^{(0)} = 1$*,* $d^{(j)} = 1$ *y definimos* $\delta_{i+1}^{(j+1)}$ *y* $\left(\frac{\mu_{i+1}}{\mu_i}\right)^2$ *como en* (6.3.23)*, entonces se satisfacen las ecuaciones no lineales* (6.1.5) *y* (6.1.6)*.*

Demostración. Tenemos que probar que se satisfacen las ecuaciones (6.1.5) y (6.1.6), es decir

$$\frac{\delta_i^{(j+1)}}{\delta_i^{(j)}} - \frac{\delta_{i+1}^{(j+1)}}{\delta_{i+1}^{(j)}} = -\frac{a}{2}, \quad i = 1, \cdots, N-1,$$

$$\left(\frac{\mu_i}{\mu_{i-1}}\right)^2 \frac{\delta_{i-1}^{(j+1)}}{\delta_i^{(j)}} - \left(\frac{\mu_{i+1}}{\mu_i}\right)^2 \frac{\delta_i^{(j+1)}}{\delta_{i+1}^{(j)}} = i + c^{(j)}, \quad i = 2, \cdots, N-1,$$

$$-\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 \frac{\delta_1^{(j+1)}}{\delta_2^{(j)}} = 1 + c^{(j)}, \qquad \left(\frac{\mu_N}{\mu_{N-1}}\right)^2 \frac{\delta_{N-1}^{(j+1)}}{\delta_N^{(j)}} = N + c^{(j)}.$$

Como en (6.2.20), tomamos $c^{(j)} = -\frac{d^{(j)}}{2}(N+1)$, es decir, en este caso, $c^{(j)} = -\frac{(N+1)}{2}$. Por lo tanto

$$\frac{\delta_i^{(j+1)}}{\delta_i^{(j)}} = \frac{\left(\frac{a}{2}(i-1+j) + \delta_1^{(1)}\right) \cdots \left(\frac{a}{2}(i-1) + \delta_1^{(1)}\right)}{\left(\frac{a}{2}(i-1+j-1) + \delta_1^{(1)}\right) \cdots \left(\frac{a}{2}(i-1) + \delta_1^{(1)}\right)} \tag{6.3.24}$$

$$= \frac{a}{2}(i-1+j)\delta_1^{(1)}. \tag{6.3.25}$$

Para verificar la primera condición, tomamos la siguiente diferencia

$$\frac{\delta_i^{(j+1)}}{\delta_i^{(j)}} - \frac{\delta_{i+1}^{(j+1)}}{\delta_{i+1}^{(j)}} = \left(\frac{a}{2}(i-1+j)\delta_1^{(1)}\right) - \left(\frac{a}{2}(i+j)\delta_1^{(1)}\right) = -\frac{a}{2},$$

como se quería probar. Por otro lado tenemos

$$\left(\frac{\mu_{i+1}}{\mu_i}\right)^2 \frac{\delta_i^{(j+1)}}{\delta_{i+1}^{(j)}} = \frac{i(N-i)}{(i-1)a + 2\delta_1^{(1)}} \frac{\left(\frac{a}{2}(i-1+j) + \delta_1^{(1)}\right) \cdots \left(\frac{a}{2}(i-1) + \delta_1^{(1)}\right)}{\left(\frac{a}{2}(i+j-1) + \delta_1^{(1)}\right) \cdots \left(\frac{a}{2}i + \delta_1^{(1)}\right)}$$
$$= \frac{i(N-i)}{2},$$

y entonces

$$\left(\frac{\mu_i}{\mu_{i-1}}\right)^2 \frac{\delta_{i-1}^{(j+1)}}{\delta_i^{(j)}} - \left(\frac{\mu_{i+1}}{\mu_i}\right)^2 \frac{\delta_i^{(j+1)}}{\delta_{i+1}^{(j)}} = \frac{(i-1)(N-i+1)}{2} - \frac{i(N-i)}{2} = \frac{2i-N-1}{2} = i - \frac{N+1}{2},$$

$$-\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 \frac{\delta_1^{(j+1)}}{\delta_2^{(j)}} = -\frac{(N-1)}{2} = 1 - \frac{N+1}{2},$$

$$\left(\frac{\mu_N}{\mu_{N-1}}\right)^2 \frac{\delta_{N-1}^{(j+1)}}{\delta_N^{(j)}} = \frac{(N-1)}{2} = N - \frac{N+1}{2}.$$

Esto concluye la demostración de la proposición. □

Por los Teoremas 6.6 y 6.7, los polinomios

$$\Phi^{(j)}(x) = (W^{(j)})^{-1}(x)W^{(j+1)}(x), \qquad \Psi^{(j)}(x) = (W^{(j)})^{-1}(x)\Delta W^{(j+1)}(x-1),$$

son polinomios matriciales de grados menores o iguales a dos y uno respectivamente para todo j. Entonces la familia de pesos $\{W^{(j)}\}_{j\geq 0}$ satisface las hipótesis del Teorema 5.6 y por lo tanto la sucesión de polinomios $\{\Delta P_n^{(j)}\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de polinomios ortogonales respecto a $W^{(j+1)}(x)$. Y sabemos por el Teorema 5.8 que $S^{(j)}$ definido por

$$S^{(j)}Q(y) = -[\Delta Q(y-1)(\Phi^{(j)}(y))^* + Q(y-1)(\Psi^{(j)}(y))^*],$$

es el adjunto del operador Δ donde hemos dado la expresión explícita de $\Phi^{(j)}$ y $\Psi^{(j)}$ en el Teorema 6.8. Además, por la Observación 5.9

$$S^{(j)}P_{n-1}^{(j+1)} = G_n P_n^{(j)}$$

donde

$$G_n = cd\left(S^{(j)}P_{n-1}^{(j+1)}\right) = -((n-1)D_n + E_n),$$

con D_n el coeficiente de x^2 en $(\Phi^{(j)}(y))^*$ y E_n el coeficiente de x en $(\Psi^{(j)}(y))^*$. Para probar la fórmula de Rodrigues 5.10, tenemos que probar que las matrices G_n son inversibles para todo n. Por el Teorema 6.8, el coeficiente de grado dos de $\Phi^{(j)}$ es

$$(D_n)^* = (A^*+I)^{-j}\left(-\frac{1}{2}A^*(A^*+I)^{-2}\right)(A^*+I)^{j+1} = -\frac{1}{2}A^*(A^*+I)^{-1},$$

el cual es una matriz con entradas no nulas salvo en la primer supra-diagonal. El coeficiente de orden uno de $\Psi^{(j)}$ es

$$\begin{aligned}(E_n)^* = (A^*+I)^{-j}\left((A^*+I)^{-1}\left(J + \frac{a}{2}A^* + \frac{A^*}{2}(A^*+I)^{-1}\right) + c^{(j)}\right)(A^*+I)^{j+1}\\ - (A^*+I)^{-j}\frac{1}{a}(T^{(j)})^{-1}T^{(j+1)}(A^*+I)^j,\end{aligned}$$

que puede ser escrito como

$$\begin{aligned}(E_n)^* = (A^*+I)^{-j-1}J(A^*+I)^{j+1} + \frac{a}{2}A^* + \frac{A^*}{2}(A^*+I)^{-1} + c^{(j)}(A^*+I)\\ - (A^*+I)^{-j}\frac{1}{a}(T^{(j)})^{-1}T^{(j+1)}(A^*+I)^j.\end{aligned}$$

Por lo tanto el coeficiente de grado uno de $\Psi^{(j)}$ es una matriz triangular superior. Como $(D_n)^*$ y $(E_n)^*$ son matrices triangulares superiores, resulta que $G_n = -((n-1)D_n + E_n)$ es una matriz triangular inferior. Para ver que es inversible solo necesitamos verificar que las entradas diagonales son distintas de cero. Ahora, como D_n tiene ceros en la diagonal, basta probar que E_n tiene entradas diagonales no nulas. Las entradas diagonales de E_n están dadas por

$$k + c^{(j)} - \frac{1}{a}\frac{\delta_k^{(j+1)}}{\delta_k^{(j)}},$$

para todo $k = 1, \cdots, N$, lo que por (6.3.24) es igual a

$$k - \frac{N+1}{2} - \frac{1}{a}\left(\frac{a}{2}(k-1+j) + \delta_1^{(1)}\right) = \frac{k-N}{2} - \frac{j}{2} - \frac{\delta_1^{(1)}}{a} < 0,$$

para todo $k = 1, \cdots, N$. Por lo tanto $(G_n)_{k,k} = -\left(\frac{k-N}{2} - \frac{j}{2} - \frac{\delta_1^{(1)}}{a}\right) > 0$ para todo $k = 1, \cdots, N$. Así, G_n resulta una matriz inversible para todo n y en consecuencia vale la fórmula de Rodrigues.

APÉNDICE A

Exponencial y logaritmo matricial

En este apéndice daremos un breve repaso de las funciones exponencial matricial y logaritmo matricial. Para ello, recordemos que dado $x \in \mathbb{C}^N$, digamos $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$ la norma de x está dada por $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_N^2}$. Ahora, dada una matriz $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ definimos

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{k,l=1}^{n} |A_{k,l}|^2}.$$

Observación A.1. *Si $\{X_n\}$ es una sucesión de matrices, entonces $X_n \to X$ si sólo si $\|X_n - X\| \to 0$. Además, si $\{X_n\}$ es una sucesión de Cauchy, es decir $\|X_m - X_n\| \to 0$, existe $X \in \mathbb{C}^{N\times N}$ tal que $X_n \to X$.*

Definición 10. *Sea $\sum_{k=0}^{\infty} X_k = X_0 + X_1 + \cdots$, decimos que $\sum_{k=0}^{\infty} X_k$ converge si $\sum_{k=0}^{\infty} \|X_k\| < \infty$.*

Definición 11. *Sea $X \in \mathbb{C}^{N\times N}$ definimos la exponencial matricial de X por*

$$\exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}.$$

Denotaremos $e^X = \exp(X)$.

Proposición A.2. *e^X es una serie convergente. Además*

1. *$e^X e^Y = e^{X+Y}$ si $XY = YX$.*
2. *e^X es no singular para toda matriz $X \in \mathbb{C}^{N\times N}$.*
3. *$\frac{d}{dx} e^{tX} = X e^{tX}$.*
4. *$\det e^X = e^{tr(X)}$.*
5. *La función $X \to e^X$ es C^∞.*

Definición 12. *Dada* $X \in \mathbb{C}^{N\times N}$*, definimos*

$$\log(X) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{(X-I)^m}{m}.$$

Lema A.3. *Si* $\|X - I\| < 1$ *entoces* $\log(X)$ *es una serie convergente.*

Demostración. Claramente, ocurre que

$$\|\log(X)\| = \|\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{(X-I)^m}{m}\| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\|(X-I)\|^m}{m} < \infty$$

si $\|X - I\| < 1$. Esto comprueba la prueba del lema. □

Lema A.4. *Si* $X - I$ *es una matriz nilpotente, entonces* $\log(X)$ *es una serie convergente.*

Demostración. Por la definición del logaritmo, tenemos que

$$\log(X) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{(X-I)^m}{m} = \sum_{m=1}^{N} (-1)^{m+1} \frac{(X-I)^m}{m},$$

pues las potencias $(X - I)^m$ con $m > N$ se anulan. □

Proposición A.5. *Dada* $X \in \mathbb{C}^{N\times N}$*,* $e^{\log(X)} = X$*. Ademas si* $\|e^X - I\| < 1$ *entonces* $\log(e^X) = X$*.*

Demostración. Supongamos que X es diagonalizable, entonces existen matrices U y D tales que $X = UDU^{-1}$ entonces $X - I = UDU^{-1} - UU^{-1} = U(D - I)U^{-1}$ y por lo tanto $(X - I)^m = U(D - I)^m U^{-1}$. Llamando $z_1, \cdots, z_N$ a los autovalores de X, tenemos

$$(X-I)^m = U \begin{bmatrix} (z_1-1)^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (z_2-1)^m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (z_N-1)^m \end{bmatrix} U^{-1}, \tag{A.0.1}$$

entonces, tenemos

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{(X-I)^m}{m} = U \left(\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{(D-I)^m}{m} \right) U^{-1},$$

lo cual es igual a

$$U \begin{bmatrix} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{(z_1-1)^m}{m} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{(z_2-1)^m}{m} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{(z_N-1)^m}{m} \end{bmatrix} U^{-1} \tag{A.0.2}$$

en conclusión,

$$\log(X) = U \begin{bmatrix} \log(z_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \log(z_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \log(z_N) \end{bmatrix} U^{-1} \tag{A.0.3}$$

y así concluimos que $e^{\log(X)} = X$.

Si X no es diagonalizable, existe una sucesión de matrices diagonalizables $\{X_n\}$ tales que $X_n \to X$ y por lo visto antes $e^{\log(X_n)} = X_n$ y como las funciones exponencial y logaritmo son continuas, $e^{\log(X_n)} \to e^{\log(X)}$, así, $e^{\log(X)} = X$ para toda matriz X.

La otra afirmación se demuestra de manera análoga. $\square$

Bibliografía

[1] Al-Salam W. A. and Chihara T. S., *Another characterization of the classical orthogonal polynomials*, SIAM J. Math. Anal. **3** (1972), 65–70, DOI 10.1137/0503007.

[2] Berg C., *The matrix moment problem, in Coimbra Lecture Notes on Orthogonal Polynomials*, Nova Sci. Publ, New York, 2008.

[3] Brenke W. C., *On polynomial solutions of a class of linear differential equations of the second order*, Bull. Amer. Math. Soc. **36** (1930), no. 2, 77–84, DOI 10.1090/S0002-9904-1930-04888-0.

[4] Bochner S., *Über Sturm-Liouvillesche Polynomsysteme*, Math. Z. **29** (1929), no. 1, 730–736, DOI 10.1007/BF01180560.

[5] Cantero M. J., Moral L., and Velázquez L., *Matrix orthogonal polynomials whose derivatives are also orthogonal*, J. Approx. Theory **146** (2007), no. 2, 174–211, DOI 10.1016/j.jat.2006.10.005.

[6] Cantero M. J., Moral L., and Velázquez L., *Differential properties of matrix orthogonal polynomials*, J. Concr. Appl. Math. **3** (2005), no. 3, 313–334.

[7] Chihara T. S., *An introduction to orthogonal polynomials*, Gordon and Breach Science Publishers, New York-London-Paris, 1978. Mathematics and its Applications, Vol. 13.

[8] Damanik David, Pushnitski Alexander, and Simon Barry, *The analytic theory of matrix orthogonal polynomials*, Surv. Approx. Theory **4** (2008), 1–85.

[9] Duran Antonio J., *A generalization of Favard's theorem for polynomials satisfying a recurrence relation*, J. Approx. Theory **74** (1993), no. 1, 83–109, DOI 10.1006/jath.1993.1055.

[10] Durán Antonio J., *Matrix inner product having a matrix symmetric second order differential operator*, Rocky Mountain J. Math. **27** (1997), no. 2, 585–600, DOI 10.1216/rmjm/1181071926.

[11] Durán Antonio J. and Grünbaum F. Alberto, *Orthogonal matrix polynomials satisfying second-order differential equations*, Int. Math. Res. Not. **10** (2004), 461–484, DOI 10.1155/S1073792804132583.

[12] Durán Antonio J. and Grünbaum F. Alberto, *Orthogonal matrix polynomials, scalar-type Rodrigues' formulas and Pearson equations*, J. Approx. Theory **134** (2005), no. 2, 267–280, DOI 10.1016/j.jat.2005.02.009.

[13] Durán Antonio J., *Rodrigues' formulas for orthogonal matrix polynomials satisfying second-order differential equations*, Int. Math. Res. Not. IMRN **5** (2010), 824–855, DOI 10.1093/imrn/rnp156.

[14] Durán Antonio J, *Rodrigues's formulas for orthogonal matrix polynomials satisfying higher-order differential equations*, Exp. Math. **20** (2011), no. 1, 15–24, DOI 10.1080/10586458.2011.544561.

[15] Durán A. J., Álvarez-Nodarse R., and de los Ríos A. M., *Orthogonal matrix polynomials satisfying second order difference equations*, J. Approx. Theory **169** (2013), 40–55, DOI 10.1016/j.jat.2013.02.003.

[16] Durán Antonio J. and Sánchez-Canales Vanesa, *Rodrigues' formulas for orthogonal matrix polynomials satisfying second-order difference equations*, Integral Transforms Spec. Funct. **25** (2014), no. 11, 849–863, DOI 10.1080/10652469.2014.928819.

[17] García A. G, Marcellán F., and Salto L., *A distributional study of discrete classical orthogonal polynomials*, Proceedings of the Fourth International Symposium on Orthogonal Polynomials and their Applications (Evian-Les-Bains, 1992), 1995, pp. 147–162, DOI 10.1016/0377-0427(93)E0241-D.

[18] Hahn Wolfgang, *Über die Jacobischen Polynome und zwei verwandte Polynomklassen*, Math. Z. **39** (1935), no. 1, 634–638, DOI 10.1007/BF01201380.

[19] Hoffman Kenneth and Kunze Ray, *Linear algebra*, Second edition, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1971.

[20] Ismail Mourad E. H., *Classical and quantum orthogonal polynomials in one variable*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 98, Cambridge University Press, Cambridge, 2005. With two chapters by Walter Van Assche, With a foreword by Richard A. Askey.

[21] Ismail M., Koelink E., and Román P., *Matrix valued Hermite polynomials, Burchnall formulas and non-abelian Toda lattice*, arXiv:1811.07219 (2018).

[22] Karlin S. and Szegö G., *On certain determinants whose elements are orthogonal polynomials*, J. Analyse Math. **8** (1960/1961), 1–157, DOI 10.1007/BF02786848.

[23] Knapp Anthony W., *Basic Real Analysis*, Birkhäuser Basel, 2005.

[24] Koekoek Roelof, Lesky Peter A., and Swarttouw René F., *Hypergeometric orthogonal polynomials and their q-analogues*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2010. With a foreword by Tom H. Koornwinder.

[25] Koelink E., de los Ríos Ana M., and Román P., *Matrix-valued Gegenbauer-type polynomials*, Constr. Approx. **46** (2017), no. 3, 459–487, DOI 10.1007/s00365-017-9384-4.

[26] Koelink E. and Román P., *Matrix valued Laguerre polynomials*, to appear in Positivity and Noncommutative Analysis Festschrift in Honour of Ben de Pagter (eds. G. Buskes, M. de Jeu, P. Dodds, A. Schep, F. Sukochev, J. van Neerven and A. Wickstead) (2018).

[27] Román P. and van Pruijssen M., *Deformation of matrix-valued orthogonal polynomials related to Gelfand pairs*, preprint, arXiv:1610.01257 (2016).

[28] Slater Lucy Joan, *Generalized hypergeometric functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1966.