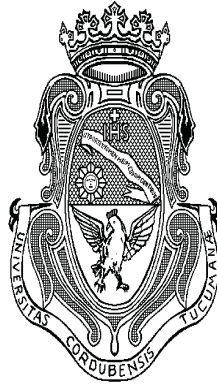


TESIS



ANÁLISIS NO LINEAL GEOMÉTRICO Y ESTABILIDAD ELÁSTICA DE
LÁMINAS DE REVOLUCIÓN MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS
CON APLICACIONES A RECIPIENTES DE PRESIÓN

Fernando Gabriel FLORES

**ANÁLISIS NO LINEAL GEOMÉTRICO Y ESTABILIDAD ELÁSTICA DE
LAMINAS DE REVOLUCIÓN MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS
CON APLICACIONES A RECIPIENTES DE PRESIÓN**

Fernando Gabriel FLORES

Ingeniero Civil - Universidad Nacional de Córdoba (1984)

Tesis presentada a la:

Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales

de la

Universidad Nacional de Córdoba

como requisito parcial para la obtención del grado de

Doctor en Ciencias de la Ingeniería

Supervisada por: Dr. Luis Augusto GODOY

Marzo de 1990

Córdoba, Argentina

a mi padre

aunque ambos hubiésemos preferido algo mas humano

a mi madre

que siempre me apoyo para que siguiera estudiando

a Pablo, Rodrigo, Iván y Ana Gabriela

Agradecimientos

En primer lugar quisiera expresar mi más sincero agradecimiento al Dr. Luis Godoy por todos estos años de trabajo juntos y por haberme guiado en la confección de esta tesis. Además mi reconocimiento a él y al Dr. Carlos A. Prato por llevar adelante el Grupo de Métodos Numéricos en Mecánica Estructural (del que formo parte), y por ser los principales responsable de la implementación del Doctorado en Ingeniería en la Universidad Nacional de Córdoba, en el cual se enmarca esta tesis.

Mi reconocimiento al Dr. Sergio R. Idelsohn por los consejos aportados en su carácter de miembro de la comisión asesora de tesis.

La investigación que da sustento a este trabajo ha sido posible gracias a una beca solventada por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, y a subsidios otorgados por el mismo CONICET y el Consejo de Investigaciones Científicas y Tecnológicas de la Provincia de Córdoba.

Agradezco a la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, y a su Departamento de Estructuras por haberme brindado un lugar de trabajo y el apoyo material recibido. Agradezco también al Centro de Cálculo de la Universidad Nacional de Córdoba, donde desarrollé buena parte de los programas computacionales presentados, y a su personal técnico por el asesoramiento prestado.

Mi agradecimiento a los becarios del Departamento de Estructuras por muchos buenos momentos y por hacer mas llevaderas las largas horas de trabajo; en particular a Tulio por toda su amistad y su alegría.

Finalmente quiero agradecer a todos aquellos que, en cualquier lugar del mundo, luchan por la justicia sin olvidos ni renunciamentos y me permiten seguir creyendo en la posibilidad de algo mejor.

Análisis No Lineal Geométrico y Estabilidad Elástica de Láminas de Revolución Mediante Elementos Finitos con Aplicaciones a Recipientes de Presión

Por Fernando Gabriel Flores

Resumen

Se presenta una extensión de la teoría de estabilidad elástica de sistema discretos desarrollada por Thompson y Hunt, orientada a utilizar el método de elementos finitos, combinando métodos de continuación hasta el punto crítico y perturbaciones para la determinación asintótica de la trayectoria poscrítica. Se aplica a una formulación general del método de elementos finitos, y se particulariza para láminas de revolución usando una aproximación semianalítica. Se obtienen explícitamente las expresiones para las derivadas de la trayectoria poscrítica para el caso de carga axilsimétrica.

Se desarrolla un elemento finito curvo semianalítico adecuado para tratar meridianos de geometría arbitraria. Se evalúa su eficiencia y comportamiento lineal frente a cargas asimétricas; y no lineal geométrico bajo cargas axilsimétricas, para lo cual se estudian y comparan diversas técnicas de análisis no lineal.

Se implementa un análisis de bifurcación lineal bajo cargas axilsimétricas y no axilsimétricas en forma consistente, y se comparan con métodos simplificados para este último caso. Se presentan algunos casos de bifurcación a partir de trayectorias precriticas no lineales axilsimétricas, y se discuten criterios de selección de las armónicas críticas.

Con el objeto de fijar un límite de validez de la aproximación asintótica se comparan trayectorias poscríticas y diagramas de sensibilidad a imperfecciones obtenidos mediante perturbaciones y mediante análisis no lineal.

Se estudia el comportamiento tensional no lineal de esferas bajo presión interna con imperfecciones geométricas, cambios localizados en el espesor e intersecciones con tubos.

Finalmente se estudia el comportamiento crítico y poscrítico bajo presión externa de cilindros, domos y conos y sus combinaciones.

Elastic Stability and Geometric Non-linear Analysis
Shells of Revolution by the Finite Element Method
with Applications to Pressure Vessels

by Fernando Gabriel Flores

Summary

An extension of the elastic stability theory for discrete systems developed by Thompson y Hunt is presented. It is aimed at using the Finite Element Method combining continuation methods up to the critical point and a perturbation approach for the post-critical branch. It is applied straightforward to a general formulation of the Finite Element Method which is then particularized for a semianalytical shell of revolution element. Expressions for the derivatives of the postcritical path for axisymmetric loads are explicitly obtained.

A curved semianalytical finite element capable of handling meridians of arbitrary geometry is developed. Its efficiency and behaviour are assessed in linear analysis under non-axisymmetric loads and geometric non linear analysis for axisymmetric loads. For the latter different non linear techniques are studied and compared.

A linear bifurcation analysis for axisymmetric and non axisymmetric loads is implemented in a consistent form and available simplified methods for the latter case are discussed. Examples of bifurcation from a nonlinear axisymmetric fundamental path are presented. Criteria for choosing the critical harmonics are also discussed.

In order to assess the validity of the asymptotic approach, post-critical and imperfection sensitivity paths, obtained alternatively via perturbations and nonlinear analysis are compared.

The nonlinear behaviour of spherical shells under internal pressure with geometrical imperfections, localized thickness variations, and intersections with tubes is studied.

Finally, the critical and postcritical behaviour of externally pressurized cylinders, spherical and conical caps and their combinations is analysed.

Análise Não-linear Geométrico e Estabilidade Elástica de Laminas de Revolução Mediante Elementos Finitos com Aplicações a Vasos de Pressão

Por Fernando Gabriel Flores

Resumo

Apresenta-se uma extensão da teoria da estabilidade elástica de sistemas discretos, desenvolvida por Thompson e Hunt, orientada a utilizar o método dos Elementos Finitos, combinando métodos de seguimento até o ponto crítico e perturbações para procurar a determinação assintótica da trajetória pós-crítica. Faz-se uma aplicação a uma formulação geral do método dos Elementos Finitos, e particulariza-se a lâminas de revolução usando uma aproximação semanalítica. Obtém-se explicitamente as expressões das derivadas da trajetória pós-crítica no caso da carga com simetria axial.

A seguir, é desenvolvido um elemento finito curvo semanalítico adequado no tratamento de meridianos com geometria arbitrária. Faz-se uma avaliação da eficiência e comportamento linear diante das cargas assimétricas, e não-linear geométrico sob cargas com simetria axial, estudando-se e comparando-se diversas técnicas de análise não-linear.

A seguir é implementada uma análise de bifurcação linear sob cargas com e sem simetria axial em forma consistente, e comparam-se com métodos simplificados apenas para o último caso. Apresentam-se alguns casos de bifurcação a partir das trajetórias pre-críticas não-lineares e com simetria axial e faz-se a discussão dos critérios de seleção das armónicas críticas.

Com o objetivo de fixar um limite de validade da aproximação assintótica, faz-se uma comparação das trajetórias pos-críticas e os diagramas de sensibilidade as imperfeições obtidas a traves de perturbações e análise não-linear.

Estuda-se o comportamento das tensões não-lineares em esferas submetidas a pressão interna com imperfeições geométricas, mudanças localizadas na espessura e interseções com tubos.

Finalmente estuda-se o comportamento crítico e pós-crítico sob pressão externa de cilindros, domos e conos e as suas combinações.

Indice

Dedicatoria	I
Agradecimientos	II
Resumen	III
Abstract	IV
Resumo	V
Indice	VII
1. Introducción	1
1.1. Generalidades	1
1.2. Antecedentes	2
1.3. Enfoques y Objetivos de Esta Investigación	3
1.4. Contenidos	4
I FUNDAMENTOS TEORICOS	7
2. Ecuaciones Fundamentales de Láminas de Revolución	9
2.1. Introducción	9
2.2. Descripción de la geometría	9
2.3. Hipótesis sobre el comportamiento mecánico de la lámina	11
2.4. Relaciones cinemáticas	12
2.5. Esfuerzos resultantes y ecuaciones constitutivas	14
2.6. Energía potencial total	15
2.7. Condiciones de Contorno	16
3. Análisis Asintótico de Estructuras Elásticas	19
3.1. Introducción	19
3.2. Clasificación de Comportamientos en Estabilidad	20
3.3. Hipótesis Básicas	20
3.4. Análisis General de Sistemas Perfectos	22
3.4.1. Condiciones de Equilibrio y Equilibrio Crítico	22
3.4.2. Ecuaciones de Perturbación a Partir de un Punto Crítico	23

3.4.3.	Punto Límite	25
3.4.4.	Bifurcación Simétrica	26
3.4.5.	Bifurcación Asimétrica	28
3.5.	Análisis con Imperfecciones	29
3.5.1.	Punto Límite	29
3.5.2.	Bifurcación	30
3.5.3.	Bifurcación Simétrica	32
3.5.4.	Bifurcación Asimétrica	35
3.6.	Particularización para el Potencial de Interés	36
3.6.1.	Hipótesis sobre V	36
3.6.2.	Bifurcación Asimétrica	37
3.6.3.	Bifurcación Simétrica	37
 II ANÁLISIS DE ESTABILIDAD VIA M.E.F.		39
 4. Discretización mediante elementos finitos		41
4.1.	Formulación General	41
4.2.	Aproximación por Elementos Finitos Semianalíticos	46
4.2.1.	Descripción e Identificación de Operadores	46
4.2.2.	Determinación de puntos críticos bajo carga axilsimétrica	50
4.2.3.	Análisis Asintótico bajo Carga Axilsimétrica	53
4.2.3.1.	Bifurcación en el modo $J = 0$	53
4.2.3.2.	Bifurcación en $J \neq 0$	56
 5. Un Elemento Finito para Cáscaras de Revolución		61
5.1.	Introducción	61
5.2.	Geometría	62
5.3.	Desplazamientos	65
5.3.1.	Funciones de Interpolación y Grados de Libertad	67
5.3.2.	Modos de Cuerpo Rígido	69
5.3.3.	Análisis Lineal Elástico	72
 6. Trayectoria Fundamental No Lineal		81
6.1.	Introducción	81
6.2.	Superposición Modal Usando Modos de Bifurcación	82
6.2.1.	Consideraciones Generales	82
6.2.2.	Superposición Modal en Láminas de Revolución	84
6.2.3.	Resultados Numéricos	84
6.2.4.	Discusión y Conclusiones	87

6.3. Métodos de Continuación	88
6.3.1. Introducción	88
6.3.2. Iteración a Carga Fija	90
6.3.3. Iteración a Desplazamiento Prescripto	91
6.3.4. Longitud de Arco Esférico Fijo	92
6.3.5. Método del Plano Normal Tangente	94
6.3.6. Iteración por Incremento Constante del Trabajo Externo	95
6.3.7. Análisis de Resultados para Métodos de Continuación	97
6.4. Conclusiones	100
7. Determinación de Puntos Críticos Distintos	103
7.1. Introducción	103
7.2. Solución del Problema de Autovalores	103
7.2.1. Método de Iteración Inversa	104
7.2.2. Método de Iteración de Subespacios	106
7.2.3. Modificación del Problema de Autovalores Original	107
7.3. Bifurcación con Trayectoria Precrítica Lineal	108
7.3.1. Cargas axilsimétricas	108
7.3.2. Cargas No Axilsimétricas	109
7.4. Bifurcación con Trayectoria Precrítica no Lineal	111
7.5. Resultados Numéricos con Trayectoria Precrítica Lineal	112
7.6. Resultados Numéricos con Trayectoria Precrítica No Lineal	116
7.7. Conclusiones	118
8. Análisis Asintótico de Trayectorias Poscríticas	121
8.1. Introducción	121
8.2. Validez de la Trayectoria Asintótica	121
8.3. Cambio de Trayectoria	125
8.4. Bifurcación en Modos no Axilsimétricos	126
8.5. Técnica de Carga Equivalente	130
8.6. Sensibilidad a Imperfecciones	133
8.7. Algunas Características Numéricas	136
 III APLICACION A PROBLEMAS DE CASCARAS COM- PUESTAS	 139
9. Láminas Esféricas bajo Presión Interior	141
9.1. Introducción	141
9.2. Tensiones Locales Debidas a Desviaciones en la Geometría Perfecta	142

9.2.1. Introducción	142
9.2.2. Modelo de Elementos Finitos de la Cáscara Imperfecta	143
9.2.3. Tensiones en una Cáscara Imperfecta	145
9.2.4. Presión de Bifurcación para una Cáscara Imperfecta	150
9.2.5. Discusión	150
9.3. Tensiones Locales Debidas a Cambios de Espesor	152
9.3.1. Introducción	152
9.3.2. Caso Estudiado	152
9.3.3. Discusión	153
9.4. Tensiones Locales en la Intersección entre una Cáscara Esférica y un Cilindro	156
9.5. Inestabilidad por Bifurcación de un Cierre Elipsoidal con Presión Interna .	160
9.5.1. Introducción	160
9.5.2. Ejemplo Analizado	161
9.6. Conclusiones	164
10. Cáscaras Compuestas bajo Presión Exterior	167
10.1. Introducción	167
10.2. Comportamiento de Cáscaras Simples	168
10.2.1. Cilindro Simplemente Apoyado bajo Presión Exterior	168
10.2.2. Domo Esférico Rebajado bajo Presión Externa	171
10.2.3. Cono Rebajado bajo Presión Externa	173
10.3. Intersección Cilindro Domo Esférico	175
10.4. Intersección Cilindro-Cono	179
10.5. Conclusiones	181
11. Conclusiones y recomendaciones para trabajo futuro	185
11.1. Síntesis de los Desarrollos Presentados en Esta Tesis	185
11.2. Conclusiones	187
11.3. Aspectos Originales	190
11.4. Recomendaciones para Trabajo Futuro	190
Referencias	193

Capítulo 1

Introducción

1.1. Generalidades

Las cáscaras de revolución son elementos principales de innumerables obras de ingeniería civil y mecánica. El uso extensivo de las mismas se debe a su facilidad para resistir grandes cargas mediante esfuerzos puramente membranales, lo que las hace livianas y económicas. Ejemplos importantes del uso de cáscaras de revolución como principal elemento estructural y de contención son las torres de enfriamiento, silos, tanques de agua, esferas de gas y de contención en centrales nucleares, patas de plataformas costa afuera, submarinos, vehículos espaciales, recipientes de presión en general, etc.

Debido a su comportamiento principalmente membranar, dimensionadas desde el punto de vista de la resistencia material, las cáscaras pueden resultar delgadas o muy delgadas, lo que las hace proclives a fallar por inestabilidad cuando existen zonas comprimidas.

En las últimas cuatro décadas se han desarrollado numerosas teorías de estabilidad estructural y de cáscaras. Sin embargo Finzi (1985) enumerando los temas más importantes de investigación en mecánica estructural para el futuro, afirma la necesidad de “la reformulación de teorías sobre la estabilidad de cáscaras, comenzando por resultados numéricos que tengan en cuenta imperfecciones geométricas y mecánicas, para llegar a soluciones más generales y menos empíricas que las disponibles a la fecha”. Existe además un contraste muy grande entre las escasas recomendaciones sobre inestabilidad de cáscaras que el ingeniero encuentra en códigos de práctica, y las necesidades tan complejas que se le presentan en la práctica profesional. Por ejemplo, las recomendaciones de la ECCS para pandeo de cáscaras presentan un espectro bastante limitado hasta ahora, se refieren exclusivamente a: 1) cilindros con rigidizadores de anillo bajo presión externa uniforme; 2) cáscaras esféricas simples bajo presión radial uniforme; 3) cilindros simples bajo compresión axial uniforme; 4) cilindros bajo carga axial y presión externa combinadas [Vandepitte (1982)]. Por otra parte el excelente libro de Bushnell (1985) es un compendio de la enorme cantidad de problemas que surgen del diseño de cáscaras y del grado de

complejidad que pueden presentarse.

Estas apreciaciones indican la necesidad no sólo de desarrollar nuevas aproximaciones al problema de la estabilidad de cáscaras (esto es, el desarrollo de teorías y métodos que conduzcan a herramientas numéricas adecuadas y eficientes), sino también su aplicación en forma sistemática a los problemas de interés práctico, con el objeto de lograr un conocimiento más elaborado del comportamiento de las cáscaras, de tal forma de poder fijar recomendaciones de diseño más amplias, que permitan calcular con seguridad estructuras más esbeltas.

1.2. Antecedentes

En esta introducción se presenta una breve reseña de los trabajos que enmarcan la parte principal de esta tesis. Una revisión más detallada de los principales aportes en cada tema tratado, se encuentra al comienzo de cada capítulo o en la introducción de cada tema.

El estudio de la estabilidad de cáscaras de revolución comienza con el análisis de cilindros cargados axialmente o sometidos a flexión. La substancial diferencia entre los resultados teóricos y experimentales y la singular dispersión de estos últimos, estimuló a los investigadores que propusieron nuevos modelos teóricos, y distintas explicaciones de las diferencias entre el comportamiento real y el esperado de ciertas cáscaras. Fue indudablemente Koiter en 1945 (aunque su trabajo recibió difusión recién en la década del 60) quien realizó el principal aporte con su teoría de estabilidad donde, mediante una aproximación asintótica de las trayectorias poscríticas, daba una explicación de las diferencias mencionadas, proveyendo de una metodología que permitía tratar puntos críticos distintos y múltiples (aquellos donde existe más de un modo crítico asociado al mismo nivel de carga), y trazar diagramas de sensibilidad de las cargas críticas frente a imperfecciones.

La teoría propuesta por Koiter, fue luego extendida por el mismo Koiter y por Budiansky y Hutchinson y sus colaboradores en la Universidad de Harvard, quienes hicieron amplio uso de estos desarrollos en los años 60 y comienzos de la década del 70, principalmente en láminas de revolución donde el análisis resulta particularmente conveniente. Estas aplicaciones consideraban trayectorias precríticas que podían ser del tipo lineal membranal (por ej. Budiansky y Amazigo (1968)), o no lineales obtenidas a partir de la solución numérica de las ecuaciones no lineales de equilibrio (por ej. Fitch y Budiansky (1970)). Sin embargo su aplicación tenía límites prácticos que provenían del hecho de ser una teoría para sistemas continuos, en tanto que tomaban cada vez más auge los métodos numéricos basados en sistemas discretos tales como el Método de Elementos Finitos. Los primeros intentos de una combinación directa de la teoría de Koiter y el método de Elementos Finitos [Prato (1970), Eccer (1973), Tong y Pian (1974)] fueron promisorios pero no lograron un nivel de generalidad en cuanto a la metodología a utilizar para la

obtención de las derivadas superiores de la trayectoria poscrítica, debido principalmente a la falta de una teoría de estabilidad para sistemas discretos consistente con el método de Elementos Finitos.

A comienzos de los años 70 aparecen algunos trabajos que intentan adecuar la teoría de Koiter a sistemas discretos. En la Universidad de Londres se llevaron a cabo extensos desarrollos teóricos y experimentales con el propósito de obtener una teoría general no lineal de estabilidad elástica. La monografía más abarcadora al respecto parece ser la debida a Thompson y Hunt (1973), quienes lograron sistematizar una teoría de estabilidad elástica para sistemas discretos usando el método de perturbaciones. Allí aparece también una completa revisión de los desarrollos analíticos y experimentales sobre estabilidad elástica hasta esa fecha.

Sin embargo las aplicaciones a métodos numéricos generales han sido limitadas. Merece citarse el trabajo de Antonini y Batista (1986) quienes proponen utilizar el método de perturbaciones para la evaluación de la trayectoria primaria, y reemplazar esta aproximación en series de potencias en las ecuaciones de equilibrio crítico, para la obtención de los puntos de bifurcación a través de un problema no lineal de autovalores. Obtenido el punto crítico en forma aproximada (el grado de aproximación depende del orden del polinomio que describe la trayectoria fundamental y de la no linealidad de la misma), la trayectoria secundaria se obtiene apelando nuevamente al método de perturbaciones. En este caso, al igual que la metodología propuesta por Thompson y Hunt, es necesario reemplazar la expresión de la trayectoria precrítica en la energía potencial. Esta metodología fue utilizada en estructuras de arcos con éxito. Sin embargo para el caso de láminas de revolución donde la trayectoria primaria es muchas veces fuertemente no lineal, esta técnica puede no ser adecuada. Por otra parte el reemplazo de la trayectoria primaria en la energía potencial no resulta eficiente y no es imprescindible.

El crecimiento vertiginoso de la capacidad de almacenamiento y rapidez de las computadoras digitales allanó el camino para el uso de técnicas de resolución de ecuaciones no lineales en forma incremental, las que relegaron un tanto a las técnicas de perturbación. Sin embargo existen algunos casos en que estas últimas pueden resultar mucho más eficientes. Tal es el caso de las láminas de revolución bajo carga axilsimétrica, donde con una corrida de computadora puede trazarse el diagrama de sensibilidad a imperfecciones; en tanto que se requieren varias corridas con substancialmente más grados de libertad para obtener el mismo resultado cuando se usa un programa no lineal de cáscaras de doble curvatura.

1.3. Enfoques y Objetivos de Esta Investigación

El enfoque de esta tesis es esencialmente teórico y numérico, pero se realizan comparaciones con resultados experimentales (obtenidos por otros investigadores) con el objeto

de evaluar la formulación y la herramienta numérica desarrollada.

Los objetivos de esta tesis son:

- Desarrollar la teoría de estabilidad elástica, en el marco de la presentación de Thompson y Hunt, de modo que resulte de una aplicación más directa mediante las técnicas usuales del Método de Elementos Finitos.
- Presentar la aplicación de los desarrollos anteriores a una formulación general de Elementos Finitos.
- Determinar en forma explícita las expresiones y operadores necesarios para evaluar las trayectorias poscríticas asintóticas de láminas de revolución bajo carga axilsimétrica.
- Formular en forma consistente el problema de bifurcación lineal de láminas de revolución bajo carga arbitraria y comparar con métodos simplificados de uso común.
- Desarrollar un elemento finito para cáscara de revolución capaz de considerar quiebres en el meridiano, ramificaciones, espesores variables y cargas arbitrarias, y computacionalmente eficiente para el análisis no lineal cinemático.
- Evaluar la calidad y el límite de validez de una aproximación asintótica a la trayectoria poscrítica de una lámina delgada de revolución.
- Estudiar la respuesta no lineal cinemática de recipientes esféricos bajo presión interna frente a distintos aspectos de diseño.
- Estudiar el comportamiento poscrítico de láminas de revolución compuestas bajo presión externa.

Dos técnicas alternativas para resolver un conjunto de ecuaciones algebraicas no lineales son: mediante procedimientos incrementales tipo Newton-Raphson y mediante el método de las perturbaciones. En esta tesis se propone una combinación de técnicas de continuación, para la trayectoria precrítica resolviendo las ecuaciones no lineales en forma incremental, y una aproximación asintótica, vía el método de perturbaciones, a la trayectoria poscrítica. Esta propuesta sigue entonces la línea de Fitch y Budiansky (1970) y Tong y Pian (1974), y se distingue de las tendencias de la última década de utilizar exclusivamente técnicas de continuación tanto para la trayectoria primaria como la secundaria.

1.4. Contenidos

Esta tesis está dividida en tres partes. En la primera parte, que incluye los capítulos 2 y 3 se presentan los fundamentos teóricos que enmarcan las posteriores aplicaciones numéricas. En el Cap.2 se exponen las definiciones geométricas de una lámina de revolución,

y se introducen las hipótesis físicas básicas que conducen a las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de estas cáscaras. El Cap.3 trata de la teoría de estabilidad para sistemas discretos desarrollada por Thompson y Hunt, presentada de tal forma que pueda ser fácilmente adaptada a la notación y procedimientos usuales del método de Elementos Finitos. Las ecuaciones resultantes se particularizan entonces para un potencial energético de interés.

En la segunda parte, que incluye los capítulos 4 al 8, se presenta la formulación y aplicación vía Elementos Finitos. En el Cap.4 se introducen las expresiones básicas a evaluar cuando se usa el método de Elementos Finitos en conjunción con las técnicas de continuación para análisis no lineal, y de perturbación para análisis asintótico. A continuación se particularizan las ecuaciones para láminas de revolución para el caso de considerar formulaciones del tipo semianalíticas. En el Cap.5 se presenta el elemento finito propuesto, se evalúan sus características de geometría, de desplazamientos, modos de cuerpo rígido y comportamiento lineal elástico. En el Cap.6 se discuten las técnicas para la determinación de la trayectoria fundamental no lineal, principalmente los métodos de continuación, y se evalúa el comportamiento del elemento al considerar cinemática no lineal. En el Cap.7 se presentan las técnicas para la determinación de puntos críticos a partir de trayectorias precríticas lineales y no lineales. Se discuten casos de cargas axilsimétricas y no axilsimétricas, validez de métodos simplificativos propuestos, y criterios para la selección de las armónicas críticas. Por último en el Cap.8 se comparan las trayectorias poscríticas obtenidas en forma asintótica y resolviendo las ecuaciones no lineales completas. Se comparan además diagramas de sensibilidad a imperfecciones calculados en forma exacta y en forma asintótica. Se discute la técnica de carga equivalente y algunos problemas numéricos.

En la tercera parte se presentan aplicaciones de las herramientas numéricas desarrolladas. En el Cap.9 se estudia el comportamiento de láminas esféricas bajo presión interna. Interesa fundamentalmente la respuesta no lineal cinemática y su influencia en el estado tensional, cuando existen imperfecciones en la geometría de la superficie media, cambios de espesor localizados e intersecciones con tubos. Además se estudia la inestabilidad de un cierre elipsoidal bajo presión interna. El objeto del Cap.10 es el análisis de la estabilidad de cáscaras compuestas, formadas por combinaciones de cilindros con conos y domos esféricos, bajo presión externa. Se presentan estudios paramétricos de las cáscaras individuales y de sus combinaciones, y se obtienen conclusiones respecto al comportamiento.

Finalmente en el Cap.11 se agrupan las conclusiones más importantes de la tesis y se hacen recomendaciones sobre futuras líneas de investigación y aplicaciones de las técnicas desarrolladas que pueden resultar de interés.

Parte I

FUNDAMENTOS TEORICOS

Capítulo 2

Ecuaciones Fundamentales de Láminas de Revolución

2.1. Introducción

En este capítulo se presentan las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de una lámina de revolución. Comienza con la descripción de la geometría y de los sistemas de coordenadas a utilizar; luego se introducen las hipótesis mecánicas sobre el comportamiento de las cáscaras de tal forma de encuadrar los alcances de la formulación; posteriormente se presentan las ecuaciones cinemáticas no lineales que describen las medidas de deformaciones junto con las ecuaciones constitutivas que las relacionan con los esfuerzos. Finalmente se define la energía potencial total, las condiciones de borde y la condición de equilibrio del sistema. Este conjunto de ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento del continuo serán discretizadas en el Cap.4 mediante elementos finitos y usadas intensamente en la Parte III de esta tesis.

2.2. Descripción de la geometría

Como se ilustra en la Fig.2.1.a la geometría de una lámina queda definida por la posición \mathbf{r} que ocupan en el espacio los puntos que componen la superficie media, y por el espesor en cada punto. Para el caso particular de láminas de revolución basta definir la curva meridiana y el espesor en cada punto de la misma. La formulación de desplazamientos, deformaciones y tensiones en términos de componentes exige adoptar sistemas de referencia, que pueden ser locales o globales.

En primer lugar, resulta conveniente introducir un sistema de coordenadas cilíndricas (z, θ, r) en el cual la curva meridiana queda definida en el plano $z - r$ (ver Fig.2.1.b), donde “ z ” es la altura desde un plano base de referencia, “ r ” es la distancia al eje de revolución, y “ θ ” es la coordenada angular medida a partir de un plano meridional de referencia. Si bien

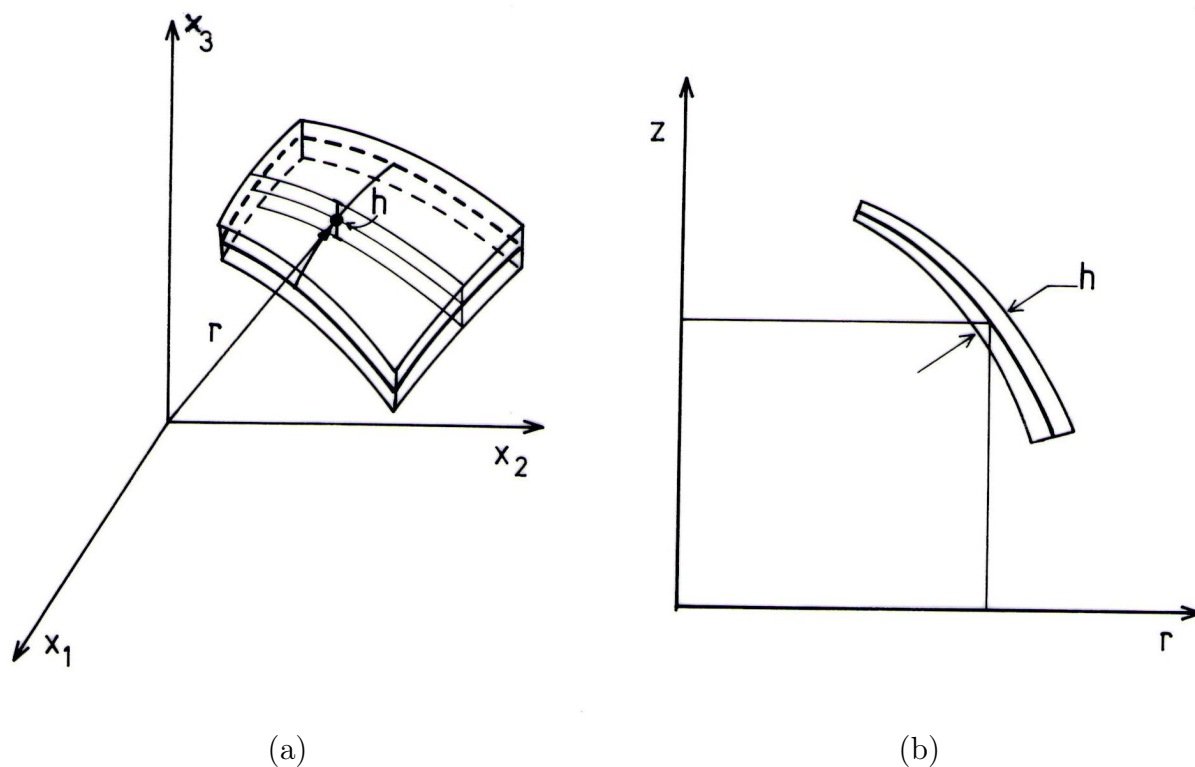


Figura 2.1: Definición de la geometría de una lámina

cualquier punto de la lámina puede ser unívocamente descrito en el sistema global de coordenadas cilíndricas, resulta conveniente que cada punto quede ligado directamente al correspondiente sobre la superficie media. Por esta razón se introduce además un sistema coordenado curvilíneo (x_1, x_2, x_3) definido localmente para cada punto de la superficie media por la normal y el plano tangente. El sistema así definido se ilustra en la Fig.2.2, donde x_1 es el desarrollo de la curva meridiana medido a partir de un punto arbitrario de referencia, x_3 es la distancia del punto a la superficie media medida sobre la normal “ n ” ($-h/2 < x_3 < h/2$), en tanto que x_2 coincide con la coordenada θ definida anteriormente ($0 < x_2 < 2\pi$).

Denominaremos con ϕ al ángulo que forma la tangente a la curva meridiana con la parte positiva del eje z , en tanto que R_1 y R_2 serán los radios principales de curvatura de la superficie media. La convención de signos para estos radios se obtiene a partir de su definición (Fig.2.3):

$$R_1 = \frac{dx_1}{d\phi} \tag{2.1}$$

$$R_2 = \frac{r}{\cos \phi}$$

las curvaturas principales de la superficie se definen como las inversas de los radios:

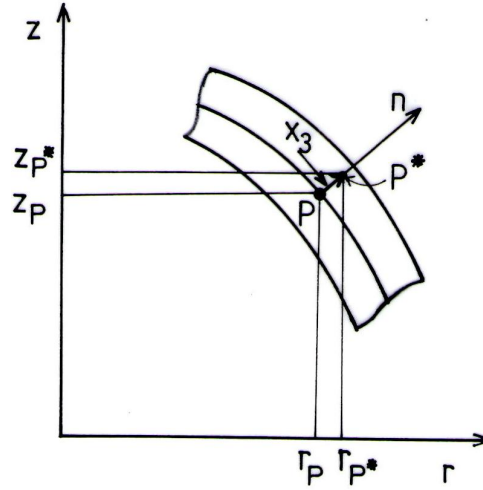


Figura 2.2: Coordenadas curvilíneas

$$k_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{d\phi}{dx_1} \quad (2.2)$$

$$k_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{\cos \phi}{r}$$

en base a estas definiciones surgen las siguientes relaciones que serán luego de utilidad al considerar las relaciones cinemáticas:

$$\begin{aligned} \sin \phi &= -\frac{dr}{dx_1} \\ \cos \phi &= \frac{dz}{dx_1} \\ \frac{d^2 \phi}{dx_1^2} &= -\left[\frac{d^3 z}{dx_1^3} \sin \phi + \frac{d^3 r}{dx_1^3} \cos \phi \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

Las superficies a considerar en esta tesis son completamente de revolución, esto es, limitadas por planos paralelos (planos normales al eje de revolución); en tanto que los bordes de la cáscara, considerada como un sólido, deberán ser normales a la superficie media.

2.3. Hipótesis sobre el comportamiento mecánico de la lámina

Siendo de interés principalmente el estudio de láminas delgadas, se realizan las siguientes hipótesis:

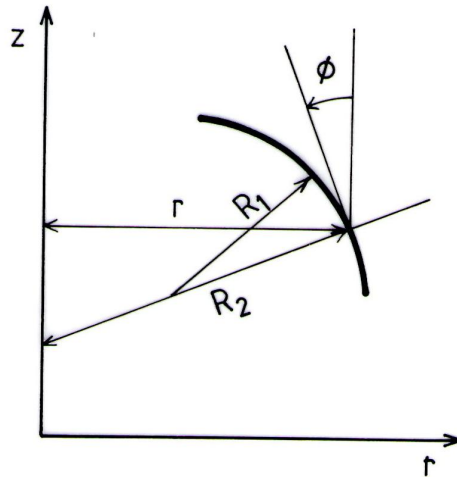


Figura 2.3: Características geométricas

- (a) se desprecian las deformaciones de corte transversales a la lámina ($\varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}$). Para ello se adopta la hipótesis de Love-Kirchhoff que dice: “Las secciones planas normales a la superficie media de la lámina indeformada se mantienen planas y normales a la superficie media deformada”;
- (b) la tensión normal a la superficie media de la lámina (σ_{33}) es despreciable frente a las otras componentes de tensión;
- (c) el cambio de espesor de la lámina al deformarse es despreciable.
- (d) el material es elástico, lineal, homogéneo y a lo sumo ortótropo con direcciones principales de ortotropía coincidentes con las direcciones del sistema local de referencia.

La adopción de las hipótesis (a)-(c) corresponde a la teoría técnica de láminas y las inexactitudes que se introducen son pequeñas aún para cáscaras de poca esbeltez. Por ejemplo, para $(h/R)_{max} < 1/40$ el error relativo de la teoría es del orden del 2,5% (ver por ej. Novozhilov (1964))

2.4. Relaciones cinemáticas

Las hipótesis anteriores permiten describir completamente la configuración deformada en función de los desplazamientos de la superficie media (con un * indicamos que se refieren a un punto a una distancia x_3 de la superficie media)

$$\begin{aligned}
 u^* &= u + \beta_1 x_3 \\
 v^* &= v + \beta_2 x_3 \\
 w^* &= w
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

Denominaremos indistintamente con u , v y w , o u_1 , u_2 y u_3 según convenga, a los desplazamientos de la superficie media en las direcciones x_1 , x_2 y x_3 respectivamente del sistema coordenado curvilíneo local, en tanto que en el sistema de coordenadas cilíndricas global, llamaremos \bar{u} , \bar{v} y \bar{w} a los desplazamientos según las direcciones z, θ y r respectivamente. A su vez las deformaciones ε_{ij}^* de cualquier punto de la lámina en función de las deformaciones de la superficie media pueden escribirse:

$$\varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{ij} + \chi_{ij}x_3 \quad (2.5)$$

donde los ε_{ij} y χ_{ij} son respectivamente las deformaciones membranales y cambios de curvatura de la superficie media, expresadas en el sistema de coordenadas locales; en tanto que los β_i son los giros de la normal a la superficie media.

Interesa considerar relaciones cinemáticas no lineales correspondientes a grandes desplazamientos y giros, pero pequeñas deformaciones (lo cual es de alguna manera consistente con la hipótesis que se trabajará con materiales elásticos lineales). Dentro de la literatura existente las más usadas y aceptadas parecen ser las debidas a Sanders (1963), correspondientes al tensor de deformaciones de Green-Lagrange en coordenada curvilíneas ortogonales, que se reproducen a continuación :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{w}{R_1} + \frac{1}{2} (\beta_1^2 + \beta^2) \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial v}{\partial x_2} - u \sin \phi + w \cos \phi \right] + \frac{1}{2} (\beta_2^2 + \beta^2) \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + v \sin \phi \right) + \beta_1 \beta_2 \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \chi_{11} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{1}{r_1} + u \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} \\ \chi_{22} &= \frac{1}{r} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \frac{\partial v}{\partial x_2} \cos \phi \right) + \sin \phi \left(-\frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{u}{R_1} \right) \right] \\ \chi_{12} &= \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{2r} \frac{\partial u}{\partial x_2} \left(\frac{\cos \phi}{r} - \frac{3}{R_1} \right) + \left(\frac{3 \cos \phi}{r} - \frac{1}{R_1} \right) \frac{1}{2r} \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} + v \sin \phi \right) + \frac{\partial w}{\partial x_2} \frac{2 \sin \phi}{r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= -\frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{u}{R_1} \\
\beta_2 &= -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - v \cos \phi \right) \\
\beta &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} - v \frac{\sin \phi}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Como es común en láminas delgadas sólo se consideran contribuciones no lineales a las deformaciones membranales, no así a los cambios de curvatura; una justificación de esta simplificación puede encontrarse en un trabajo de Bushnell (1984).

2.5. Esfuerzos resultantes y ecuaciones constitutivas

Consideraremos exclusivamente materiales con comportamiento elástico lineal isótropo u ortótropo si las direcciones de ortotropía coinciden con el sistema de coordenadas locales.

Para trabajar con esfuerzos integrados en el espesor se definen las siguientes relaciones:

$$N_{ij} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{ij} dx_3 \tag{2.9}$$

$$M_{ij} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{ij} x_3 dx_3 \tag{2.10}$$

donde los esfuerzos resultantes N_{ij} y momentos resultantes M_{ij} se ilustran con sus valores positivos en la Fig.2.4; y σ_{ij} son las tensiones correspondientes al 2do tensor de Piola-Kirchhoff en elasticidad tridimensional. Las relaciones constitutivas más generales que pueden tratarse son:

$$\begin{aligned}
N_{11} &= C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22} \\
N_{22} &= C_{12}\varepsilon_{11} + C_{22}\varepsilon_{22} \\
N_{12} &= 2C_G\varepsilon_{12}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}
M_{11} &= D_{11}\chi_{11} + D_{12}\chi_{22} \\
M_{22} &= D_{12}\chi_{11} + D_{22}\chi_{22} \\
M_{12} &= 2D_G\chi_{12}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Para el caso de pared sólida con material isótropo los coeficientes C_{ij} y D_{ij} resultan:

$$C_{11} = C_{22} = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \quad C_{12} = \nu C_{11} \quad C_G = \frac{(1-\nu)}{2} C_{11} \quad (2.13)$$

$$D_{11} = D_{22} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad D_{12} = \nu D_{11} \quad D_G = \frac{(1-\nu)}{2} D_{11} \quad (2.14)$$

donde E y ν son el módulo de elasticidad y de Poisson del material, y h es el espesor de la lámina.

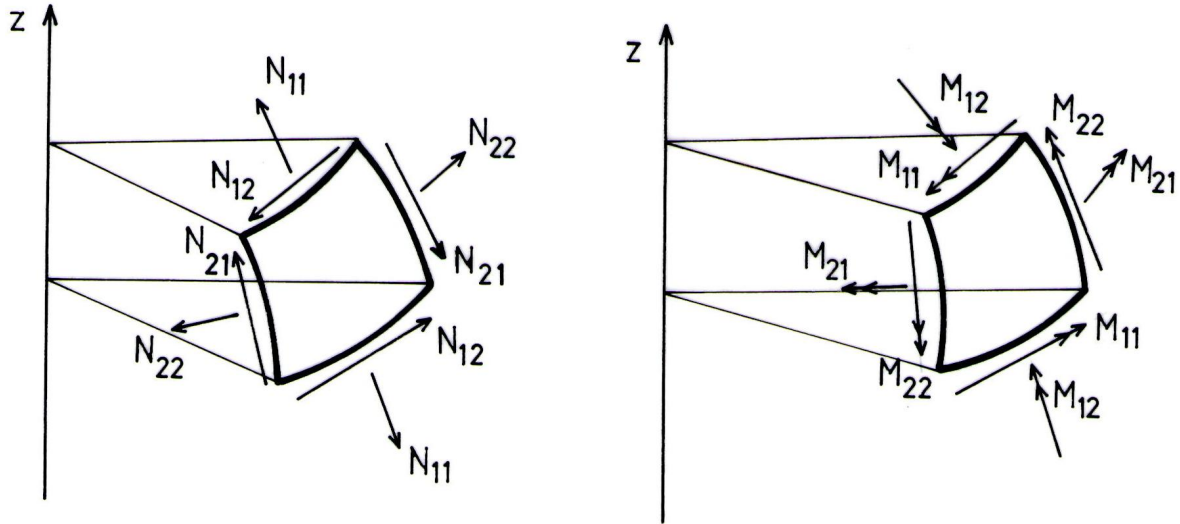


Figura 2.4: Esfuerzos resultantes en láminas de revolución

2.6. Energía potencial total

Todos los desarrollos a realizarse en los capítulos siguientes están basados en consideraciones energéticas; por ello resulta indispensable definir una energía potencial total \mathbf{V} . Habiendo integrado los esfuerzos en el espesor, dicha energía se convierte en la siguiente integral de superficie:

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2} \int \int_A M_{ij} \chi_{ij} + N_{ij} \varepsilon_{ij} dA - \int \int_A p_i u_i dA - \int_{S_\sigma} r (P_i u_i + M_1 \beta_1) dS_\sigma \quad (2.15)$$

donde A es el área de la superficie media referida a la geometría indeformada (Nótese que esto es válido en tanto que se han tomado medidas de deformación y de tensiones referidas a la geometría inicial). El área A (en realidad la curva meridiana) deberá ser suave por partes, pero puede presentar quiebres y ramificaciones. S_σ es la parte del borde donde se conocen los esfuerzos o curvas sobre la superficie donde existen esfuerzos distribuidos en una línea.

En cuanto a las cargas que el sistema admite, pueden modelarse presiones distribuidas sobre la superficie, p_i ; cargas de línea, P_i , y momentos flectores sobre un paralelo, M_1 . La definición del potencial de carga con que se trabaja en esta tesis, que es lineal en los desplazamientos, supone que las cargas no cambian de dirección durante la deformación.

El reemplazo de las ecuaciones constitutivas (2.11)-(2.12) y cinemáticas (2.6)-(2.8) en la energía potencial permite obtener una expresión exclusivamente en términos de desplazamientos. Las distintas posiciones de equilibrio de la estructura se determinan a partir de la condición de estacionaria de la energía \mathbf{V} respecto a los campos de desplazamientos cinemáticamente admisibles, que puede expresarse en la forma:

$$\delta\mathbf{V} = 0 \quad (2.16)$$

En caso de ser un mínimo, la ecuación (2.16) corresponde al bien conocido principio de Mínima Energía Potencial Total. Un campo de desplazamiento se considera cinemáticamente admisible si los desplazamientos de la superficie media son continuos, si los giros de la normal que definen también son continuos y si en aquellos puntos donde los desplazamientos y/o los giros son conocidos el campo de desplazamientos toma esos valores.

2.7. Condiciones de Contorno

Para la solución de las ecuaciones (2.16) es necesario fijar un cierto número de relaciones entre los esfuerzos, momentos, desplazamientos o funciones de estas cantidades en el contorno o bordes de la cáscara.

En el caso de láminas de revolución una de las curvas coordenadas es cerrada (x_2), esto es que periódicamente pasa por el mismo punto de la superficie media. Dado que los desplazamientos de cada punto son cantidades completamente determinadas, debe imponerse a las soluciones del sistema que sean periódicas en x_2 . En este caso las condiciones de borde en la dirección x_2 son reemplazadas por condiciones de periodicidad.

Las consideraciones de borde se limitan entonces a curvas que coinciden con curvas coordenadas $x_1 = cte.$, siendo además los planos límites normales a la superficie media. Habiendo integrado los esfuerzos en el espesor y reemplazado por tres fuerzas por unidad de longitud N_{11} , N_{12} , N_{13} , y por dos momentos por unidad de longitud M_{11} , M_{12} , podría pensarse que el número de condiciones que determina la solución son cinco, sin embargo las condiciones de borde de desplazamientos que pueden imponerse son sólo cuatro. En realidad el momento flector M_{12} puede ser reemplazado por fuerzas transversales y tangenciales distribuidas [Novozhilov (1964)]. Debido al principio de Saint Venant, este reemplazo tendrá sólo influencia en zonas del borde de magnitud menores que el espesor. En consecuencia los esfuerzos y momentos en el borde se reducen a:

$$N_{11}, \quad N_{12} + \frac{M_{12}}{R_2}, \quad N_{13} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2}, \quad M_{11}$$

en correspondencia con los desplazamientos

$$u, \quad v, \quad w, \quad \beta_1$$

En consecuencia en cada borde deben fijarse cuatro condiciones

$$\begin{array}{ll} u & \circ \quad N_{11} \\ v & \circ \quad N_{12} + \frac{M_{12}}{R_2} \\ w & \circ \quad N_{13} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} \\ \beta_1 & \circ \quad M_{11} \end{array} \quad (2.17)$$

Esto lleva a un número de variantes posibles de condiciones de borde, en los cuales los valores conocidos pueden a su vez ser o no ser nulos. Básicamente:

a) borde libre

$$N_{11} = N_{12} + \frac{M_{12}}{R_2} = N_{13} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} = M_{11} = 0$$

b) borde articulado

$$u = v = w = M_{11} = 0$$

c) borde membranal

$$u = v = N_{13} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} = M_{11} = 0$$

d) borde empotrado

$$u = v = w = \beta_1 = 0$$

Estas alternativas son las más comunes y no acaban las posibilidades, dependiendo de la forma del apoyo donde descansa la cáscara y las cargas exteriores.

El conjunto de ecuaciones y condiciones expuestos arriba definen completamente el comportamiento de las estructuras que han de tratarse en esta tesis y claramente están limitadas a cáscaras delgadas, giros moderados, pequeñas deformaciones, comportamiento constitutivo lineal elástico. Estas ecuaciones son aproximadas en el Cap.4 usando el método de elementos finitos.

Capítulo 3

Análisis Asintótico de Estructuras Elásticas

3.1. Introducción

Posiblemente el trabajo más abarcador sobre la teoría de estabilidad elástica se debe a Thompson y Hunt (1973). El énfasis en esa obra está puesto en la comprensión del fenómeno de inestabilidad, y en la clasificación del comportamiento de sistemas de múltiples grados de libertad. A tal efecto, los autores introducen diversas transformaciones sobre la energía potencial total, de modo de simplificar el tratamiento desde el punto de vista teórico y analítico. En particular, dos transformaciones se usan allí:

- (a) la transformación $\mathbf{V} \mapsto \mathbf{D}$, que diagonaliza la forma cuadrática \mathbf{V}_{ij}
- (b) la transformación $\mathbf{V} \mapsto \mathbf{W}$, que evalúa en la trayectoria fundamental y define un sistema coordenado que desliza a lo largo de la trayectoria fundamental.

Si bien esas transformaciones son de gran interés teórico, su empleo en el contexto de métodos numéricos se hace dificultosa. En primer lugar, la transformación $\mathbf{V} \mapsto \mathbf{D}$ requiere de un gran esfuerzo computacional para lograr la diagonalización. En segundo lugar, la transformación $\mathbf{V} \mapsto \mathbf{W}$ requiere reescribir el funcional teniendo en cuenta la trayectoria fundamental.

Cuando el análisis de estabilidad se lleva a cabo empleando métodos numéricos (como es el caso de este trabajo), resulta más eficiente escribir las derivadas de energía en términos de la energía \mathbf{V} del sistema original, escrita en función de las coordenadas generalizadas empleadas por el analista en la discretización.

Si bien los fundamentos y conceptos necesarios para estudiar estabilidad en base a la energía original \mathbf{V} están en el texto de Thompson y Hunt, y en los trabajos que le dieron origen, el desarrollo completo de la teoría en tal sistema de referencia no se encuentra disponible al presente. Por ello, en este capítulo se presenta el análisis asintótico

de estructuras elásticas en detalle, obteniéndose los términos del análisis de perturbación tanto para sistemas perfectos como imperfectos.

3.2. Clasificación de Comportamientos en Estabilidad

Diremos que una estructura bajo un sistema de cargas dado presenta un comportamiento de **punto límite** si a medida que se incrementa la carga se produce una pérdida gradual de la rigidez hasta anularse y en tal circunstancia la estructura pasa dinámicamente a una posición de equilibrio cuya configuración geométrica difiere sensiblemente de la anterior. Esta es la forma normal del colapso de una estructura. Un gráfico típico de tal comportamiento se ve en la Fig.3.1

Diremos que una estructura bajo un sistema de cargas dado presenta una **bifurcación**, si avanzando sobre una trayectoria de equilibrio (primaria) encontramos un punto donde ésta se corta con otra trayectoria de equilibrio (secundaria), como se ve en la Fig.3.2. Si la intersección es tal que para alguna dirección (combinación de las coordenadas generalizadas) la tangente a la trayectoria secundaria es horizontal, la bifurcación se denomina **simétrica**, de otra forma se denominará **asimétrica** (Fig.3.3). Dentro de la bifurcación simétrica es posible distinguir además entre que las ramas de las trayectorias ocurran para

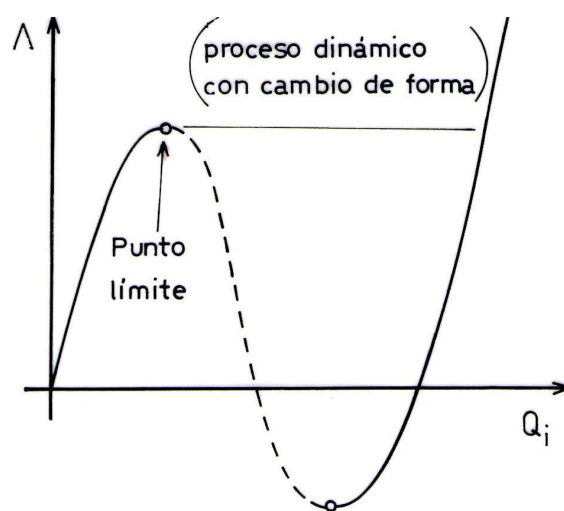


Figura 3.1:

valores crecientes de Λ (**bifurcación simétrica estable**) o para valores decrecientes del parámetro Λ (**bifurcación simétrica inestable**).

3.3. Hipótesis Básicas

Consideremos un sistema estructural conservativo, cuya configuración esté descrita por un conjunto de “ n ” coordenadas generalizadas Q_i . Asumiremos que existe una corres-

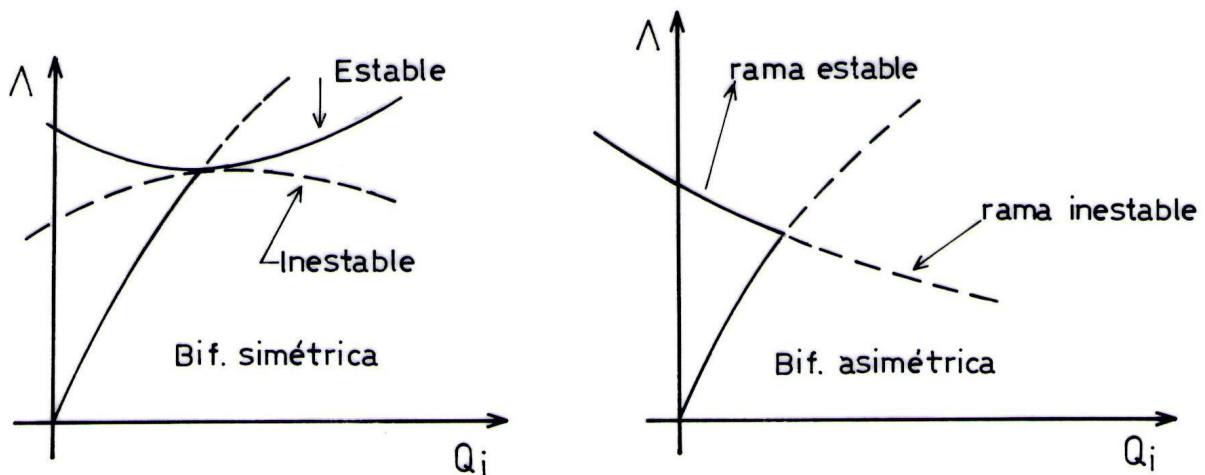


Figura 3.2:

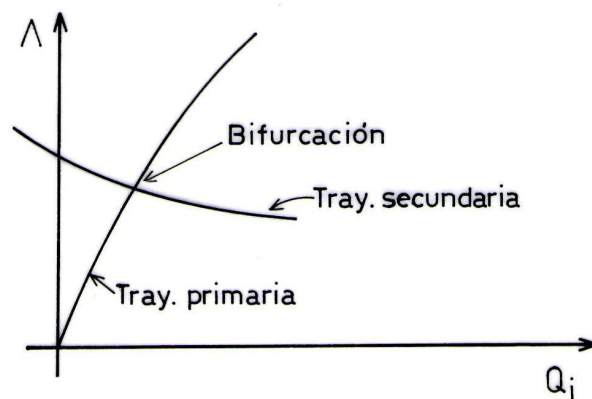


Figura 3.3:

pondencia unívoca entre los valores de las coordenadas Q_i y la configuración que definen, y que las coordenadas y su variación no están sujetas a restricción alguna.

Supondremos que el sistema estructural está sometido a un sistema de cargas, tal que las mismas no cambien de dirección durante su movimiento (no consideraremos cargas del tipo seguidoras) y cuya intensidad sea función de un único parámetro de carga Λ .

Cada conjunto de valores Q_i y Λ dará lugar a un único valor de la energía potencial del sistema $V(Q_i, \Lambda)$. Esta función de energía puede resultar directamente de un sistema mecánico estructural discreto o indirectamente de un sistema continuo discretizado mediante técnicas como diferencias finitas o elementos finitos.

Estamos interesados en el comportamiento estático de estos sistemas, las diferentes trayectorias de equilibrio en el espacio $n + 1$ dimensional generado por las Q_i y Λ , y en particular nos interesa la pérdida inicial de estabilidad del sistema a medida que es cargado con valores crecientes de Λ a partir de una posición de equilibrio estable, que sin pérdida de generalidad podemos suponer que corresponde al origen $Q_i = 0$ y $\Lambda = 0$.

Para la definición de posición de equilibrio y condición de estabilidad del sistema

introducimos los siguientes axiomas (Thompson y Hunt (1973)):

Axioma 1: Un valor estacionario de la energía potencial total con respecto a las coordenadas generalizadas es necesario y suficiente para el equilibrio del sistema.

Axioma 2: Un mínimo local de la energía potencial total con respecto a las coordenadas generalizadas es necesario y suficiente para la estabilidad de un estado de equilibrio del sistema.

El primer axioma puede ser fácilmente probado, en tanto que del segundo no existe una prueba universal; sin embargo se confía en poder hallarla. En esta tesis seguiremos a Koiter (1965) y Thompson y Hunt (1973) expresando nuestra completa confianza en el axioma.

En los desarrollos siguientes se hará uso en forma implícita de los siguientes teoremas:

Teorema 1: Una trayectoria de equilibrio (primaria) inicialmente estable que crece monótonicamente con el parámetro de carga Λ no puede volverse inestable sin intersectar otra trayectoria de equilibrio distinta (secundaria), ver Fig.3.4.a.

Teorema 2: Una trayectoria de equilibrio inicialmente estable, creciente con el parámetro de carga Λ , no puede aproximarse a un estado de equilibrio inestable, a partir del cual el sistema exhibiría un desplazamiento dinámico finito, sin la proximidad de una trayectoria de equilibrio (que puede o no ser una continuación de la trayectoria original) para valores del parámetro de carga menores que el estado inestable, como se muestra en la Fig.3.4.b.

Estos teoremas se deben a Thompson y una demostración topológica de los mismos puede hallarse en Thompson y Hunt (1973). El primero de los mismos se refiere al comportamiento en la vecindad de puntos de bifurcación en tanto que el segundo está ligado al comportamiento en las proximidades de un punto límite.

3.4. Análisis General de Sistemas Perfectos

3.4.1. Condiciones de Equilibrio y Equilibrio Crítico

Como se deriva del Axioma 1, las condiciones de equilibrio son:

$$\mathbf{V}_i = 0 \tag{3.1}$$

donde un subíndice indica derivada parcial respecto a la coordenada generalizada \mathbf{Q}_i .

Supongamos que partiendo de un punto de equilibrio estable $(\mathbf{Q}_i, \Lambda) = (0, 0)$ avanzamos sobre una trayectoria estable (caracterizada por $|\mathbf{V}_{ij}| > 0$) hasta un punto crítico $(\mathbf{Q}_i^c, \Lambda^c)$ donde se cumple que $|\mathbf{V}_{ij}|^c = 0$.

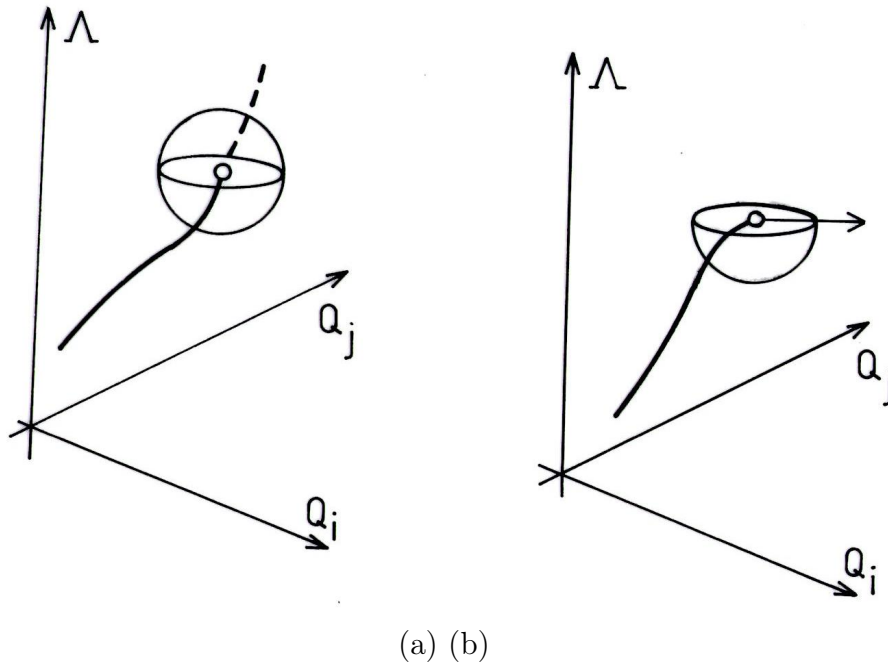


Figura 3.4:

Asumamos que existe una única dirección \mathbf{x} (lo que caracteriza al punto crítico como distinto) en que se verifica la condición $\mathbf{x}^T \mathbf{V}_{ij} \mathbf{x} = 0$; siendo hasta el punto crítico $|\mathbf{V}_{ij}| > 0$ la forma cuadrática asociada $\mathbf{y}^T \mathbf{V}_{ij} \mathbf{y} > 0 \forall \mathbf{y}$. En tanto que en el punto crítico $\exists \mathbf{x} / \mathbf{x}^T \mathbf{V}_{ij} \mathbf{x} = 0$, e $\mathbf{y}^T \mathbf{V}_{ij} \mathbf{y} > 0 \forall \mathbf{y} \not\parallel \mathbf{x}$, esto indica que \mathbf{x} minimiza la forma cuadrática y puede obtenerse de la condición

$$\partial (\mathbf{x}^T \mathbf{V}_{ij} \mathbf{x}) / \partial \mathbf{x}_i = 2 \mathbf{V}_{ij} \mathbf{x}_j = 0 \quad (3.2)$$

que claramente admite solución no trivial por ser $|\mathbf{V}_{ij}| = 0$ (\mathbf{x} genera el núcleo de la aplicación lineal \mathbf{V}_{ij}).

3.4.2. Ecuaciones de Perturbación a Partir de un Punto Crítico

Entonces posicionándonos en este punto crítico aplicamos la técnica de perturbaciones sobre las ecuaciones de equilibrio (3.1) utilizando como parámetro una coordenada cualquiera \mathbf{Q}_i con la condición que $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{0}$. Supondremos $i = 1$ esto es $\mathbf{x}_1 \neq 0$. Llamemos \mathbf{q}_i y λ a los incrementos de \mathbf{Q}_i y Λ respectivamente, o sea

$$\mathbf{Q}_i = \mathbf{Q}_i^c + \mathbf{q}_i \quad \Lambda = \Lambda^c + \lambda \quad (3.3)$$

La condición de equilibrio puede expresarse como

$$\mathbf{V}_i(\mathbf{Q}_i^c + \mathbf{q}_i, \Lambda^c + \lambda) = 0 \quad (3.4)$$

Derivando respecto a la coordenada \mathbf{q}_1 obtenemos:

$$\mathbf{V}_{ij}\mathbf{q}_j^{(1)} + \mathbf{V}'_i\lambda^{(1)} = 0 \quad \text{con } i, j = 1, n. \quad (3.5)$$

donde un supraíndice entre paréntesis $()^{(1)}$ indica derivación con respecto a \mathbf{q}_1 ; sabemos que:

- $|\mathbf{V}_{ij}| = 0$
- llamamos \mathbf{x} al único vector que satisface $\mathbf{x}_1 = 1$ y $\mathbf{V}_{ij}^c\mathbf{x}_j = 0$
- $\mathbf{q}_1^{(1)} = 1$

en la ecuación (3.5) podemos pasar la 1ra. columna al 2do. miembro ya que está multiplicada por $\mathbf{q}_1^{(1)}$

$$\mathbf{V}_{ij}\mathbf{q}_j^{(1)} + \mathbf{V}'_i\lambda^{(1)} = -\mathbf{V}_{i1} \quad i = 1, n \quad j = 2, n \quad (3.6)$$

son n ecuaciones con n incógnitas; si las $n - 1$ columnas de \mathbf{V}_{ij} y \mathbf{V}'_i son linealmente independientes, lo que se expresa como: $\mathbf{V}'_i\mathbf{x}_i \neq 0$ (debido a que \mathbf{x} es ortogonal a todas las columnas de \mathbf{V}_{ij}) entonces el sistema admite solución única $\mathbf{q}_i^{(1)} = \mathbf{x}_i$ y $\lambda^{(1)} = 0$ (**Punto Límite**).

Si $\mathbf{V}'_i\mathbf{x}_i = 0$ tenemos menos ecuaciones independientes que incógnitas; en tal caso analicemos la 2da. ecuación de perturbaciones.

$$\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{q}_j^{(1)}\mathbf{q}_k^{(1)} + 2\mathbf{V}'_{ij}\mathbf{q}_j^{(1)}\lambda^{(1)}t + \mathbf{V}_{ij}\mathbf{q}_j^{(2)} + \mathbf{V}''_i\lambda^{(1)2} + \mathbf{V}'_i\lambda^{(2)} = 0 \quad (3.7)$$

Multipliquemos cada ecuación por \mathbf{x}_i , sumemos y evaluemos en el punto crítico (proceso que denominaremos “contracción”)

$$\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{x}_i\mathbf{q}_j^{(1)}\mathbf{q}_k^{(1)} + 2\mathbf{V}'_{ij}\mathbf{x}_i\mathbf{q}_j^{(1)}\lambda^{(1)} + \underbrace{\mathbf{V}_{ij}\mathbf{x}_i\mathbf{q}_j^{(2)}}_0 + \mathbf{V}''_i\mathbf{x}_i\lambda^{(1)2} + \underbrace{\mathbf{V}'_i\mathbf{x}_i\lambda^{(2)}}_0 = 0$$

o bien

$$\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{x}_i\mathbf{q}_j^{(1)}\mathbf{q}_k^{(1)} + 2\mathbf{V}'_{ij}\mathbf{x}_i\mathbf{q}_j^{(1)}\lambda^{(1)} + \mathbf{V}''_i\mathbf{x}_i\lambda^{(1)2} = 0 \quad (3.8)$$

que es una ecuación no lineal cuadrática en $\mathbf{q}_j^{(1)}$ y $\lambda^{(1)}$.

Si, como dijimos el sistema formado por las $n-1$ columnas de \mathbf{V}_{ij} y \mathbf{V}'_i es linealmente dependiente, podemos eliminar una de las ecuaciones, quedando $n - 1$ ecuaciones lineales independientes y una ecuación no lineal. Este sistema puede resolverse de la siguiente manera:

de las $n - 1$ ecuaciones lineales (3.6) resolvemos $\mathbf{q}_j^{(1)}$ en función de $\lambda^{(1)}$

$$\mathbf{q}_j^{(1)} = \mathbf{x}_j + \mathbf{y}_j \lambda^{(1)} \quad j = 2, n \quad (3.9)$$

donde

$$\mathbf{x}_j = -\mathbf{V}_{ij}^{-1} \mathbf{V}_{i1} \quad \mathbf{y}_j = -\mathbf{V}_{ij}^{-1} \mathbf{V}'_i \quad i, j = 2, n \quad (3.10)$$

recordar que $\mathbf{x}_1 = 1$ y observar que haciendo $\mathbf{y}_1 = 0$ la (3.9) vale ahora para $j = 1, n$.

La expresión (3.9) es tanto válida para la trayectoria primaria como secundaria; sin embargo en el caso de que la coordenada generalizada usada como parámetro de perturbación no tenga componente sobre la trayectoria primaria entonces $\lambda^{(1)} = \infty$ y la expresión (3.9) deja de ser de utilidad para la trayectoria primaria. Esto se da por ejemplo en el caso de láminas de revolución cargadas axilsimétricamente, cuya trayectoria primaria es axilsimétrica en tanto que la bifurcación se produce en modos que no tienen componentes de desplazamiento asociadas a la trayectoria axilsimétrica y por lo tanto la elección de cualquier coordenada conduce a $\lambda^{(1)} = \infty$ para la trayectoria primaria. Reemplazando (3.9) en (3.8) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{ijk} \mathbf{x}_i (\mathbf{x}_j + \mathbf{y}_j \lambda^{(1)}) (\mathbf{x}_k + \mathbf{y}_k \lambda^{(1)}) + 2\mathbf{V}'_{ij} \mathbf{x}_i (\mathbf{x}_j + \mathbf{y}_j \lambda^{(1)}) \lambda^{(1)} + \mathbf{V}''_i \mathbf{x}_i \lambda^{(1)^2} &= \mathbf{0} \\ \\ \mathbf{V}_{ijk} \mathbf{x}_i \mathbf{y}_j \mathbf{y}_k \lambda^{(1)^2} + \mathbf{V}_{ijk} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j \mathbf{x}_k + 2\mathbf{V}_{ijk} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j \mathbf{y}_k \lambda^{(1)} &+ \\ + 2\mathbf{V}'_{ij} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j \lambda + 2\mathbf{V}'_{ij} \mathbf{x}_i \mathbf{y}_j \lambda^{(1)^2} + \mathbf{V}''_i \mathbf{x}_i \lambda^{(1)^2} &= \mathbf{0} \\ \lambda^{(1)^2} (\mathbf{V}_{ijk} \mathbf{x}_i \mathbf{y}_j \mathbf{y}_k + 2\mathbf{V}'_{ij} \mathbf{x}_i \mathbf{y}_j + \mathbf{V}''_i \mathbf{x}_i) + \lambda^{(1)} 2(\mathbf{V}_{ijk} \mathbf{y}_k + \mathbf{V}'_{ij} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j) &+ \\ + \mathbf{V}_{ijk} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j \mathbf{x}_k &= \mathbf{0} \quad (3.11) \end{aligned}$$

si $\mathbf{V}_{ijk} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j \mathbf{x}_k = 0$ entonces $\lambda^{(1)} = 0$ es solución (Bif. Simétrica)

si $\mathbf{V}_{ijk} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j \mathbf{x}_k \neq 0$ entonces $\lambda^{(1)} \neq 0$ (Bif. Asimétrica)

3.4.3. Punto Límite

De (3.6) y la condición $\mathbf{V}_i \mathbf{x}_i \neq 0$ (que indica que el sistema de cargas tiene componentes en el modo crítico) habíamos obtenido

$$\mathbf{q}_j^{(1)} = \mathbf{x}_j \quad \lambda^{(1)} = 0 \quad (3.12)$$

reemplazemos en la 2da. ecuación de perturbación (3.7), y apliquemos el mecanismo de contracción

$$\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k + 2\underbrace{\mathbf{V}'_{ij}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j}_0\lambda^{(1)} + \underbrace{\mathbf{V}_{ij}\mathbf{x}_i\mathbf{q}_j}_0^{(2)} + \underbrace{\mathbf{V}''_i\mathbf{x}_i}_0\lambda^{(1)^2} + \mathbf{V}_i\mathbf{x}_i\lambda^{(2)} = 0$$

$$\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k + \mathbf{V}'_i\mathbf{x}_i\lambda^{(2)} = 0 \quad (3.13)$$

y despejamos

$$\lambda^{(2)} = -\frac{\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k}{\mathbf{V}'_i\mathbf{x}_i} \quad (3.14)$$

reemplazando en la 2da. ecuación de perturbaciones tenemos

$$\mathbf{V}_{ij}\mathbf{q}_j^{(2)} = -\mathbf{V}_{ikl}\mathbf{x}_k\mathbf{x}_l - \mathbf{V}'_i\lambda^{(2)} \quad (3.15)$$

de donde obtenemos $\mathbf{q}_j^{(2)}$ y así sucesivamente.

3.4.4. Bifurcación Simétrica

La solución de la ecuación cuadrática (3.11) para el caso de $\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k = 0$ tenía como raíz a:

$$\lambda^{(1)} = 0 \quad (3.16)$$

en tal caso la solución del sistema (3.6) es:

$$\mathbf{q}_j^{(1)} = \mathbf{x}_j + \mathbf{y}_j\lambda^{(1)} = \mathbf{x}_j \quad (3.17)$$

Las derivadas superiores de la trayectoria secundaria puede tratarse de la siguiente manera: analicemos la 3ra. ecuación de perturbación:

$$\begin{aligned} & [\mathbf{V}_{ijkl}\mathbf{q}_j^{(1)}\mathbf{q}_k^{(1)}\mathbf{q}_l^{(1)} + \mathbf{V}'_{ijk}\mathbf{q}_j^{(1)}\mathbf{q}_k^{(1)}\lambda^{(1)} + 2\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{q}_j^{(1)}\mathbf{q}_k^{(2)}] + \\ & + 2[\mathbf{V}'_{ijk}\mathbf{q}_j^{(1)}\mathbf{q}_k^{(1)}\lambda^{(1)} + \mathbf{V}''_{ij}\mathbf{q}_j^{(1)}\lambda^{(1)^2} + \mathbf{V}'_{ij}(\mathbf{q}_j^{(2)}\lambda^{(1)} + \mathbf{q}_j^{(1)}\lambda^{(2)})] + \\ & + [\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{q}_j^{(1)}\mathbf{q}_k^{(2)} + \mathbf{V}'_{ij}\mathbf{q}_j^{(2)}\lambda^{(1)} + \mathbf{V}_{ij}\mathbf{q}_j^{(3)}] + [\mathbf{V}'_{ij}\mathbf{q}_j^{(1)}\lambda^{(2)} + \\ & + \mathbf{V}''_i\lambda^{(1)}\lambda^{(2)} + \mathbf{V}'_i\lambda^{(3)}] + \mathbf{V}''_{ij}\mathbf{q}_j^{(1)}\lambda^{(1)^2} + \mathbf{V}'''_i\lambda^{(1)^3} + 2\mathbf{V}''_i\lambda^{(1)}\lambda^{(2)} = 0 \\ & \mathbf{V}_{ijkl}\mathbf{q}_j^{(1)}\mathbf{q}_k^{(1)}\mathbf{q}_l^{(1)} + 3[\mathbf{V}'_{ijk}\mathbf{q}_j^{(1)}\mathbf{q}_k^{(1)}\lambda^{(1)} + \mathbf{V}_{ijk}\mathbf{q}_j^{(1)}\mathbf{q}_k^{(2)}] + \\ & + \mathbf{V}''_{ij}\mathbf{q}_j^{(1)}\lambda^{(1)^2} + \mathbf{V}'_{ij}(\mathbf{q}_j^{(2)}\lambda^{(1)} + \mathbf{q}_j^{(1)}\lambda^{(2)}) + \mathbf{V}''_i\lambda^{(1)}\lambda^{(2)}] + \mathbf{V}'''_i\lambda^{(1)^3} + \\ & + \mathbf{V}_{ij}\mathbf{q}_j^{(3)} + \mathbf{V}'_i\lambda^{(3)} = 0 \quad (3.18) \end{aligned}$$

aplicando contracción y reemplazando las (3.16) y (3.17) resulta:

$$\mathbf{V}_{ijkl}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k\mathbf{x}_l + 3\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\mathbf{q}_k^{(2)} + 3\mathbf{V}'_{ij}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\lambda^{(2)} = 0 \quad (3.19)$$

observemos además la 2da ec. de perturbación; resolviendo $\mathbf{q}_j^{(2)}$ en función de $\lambda^{(2)}$:

$$\mathbf{V}_{ij}\mathbf{q}_j^{(2)} = -\mathbf{V}_{ikl}\mathbf{x}_k\mathbf{x}_l - \mathbf{V}'_i\lambda^{(2)} \quad (3.20)$$

sabemos que $\mathbf{q}_1^{(2)} = 0$ por lo que podemos eliminar la 1ra columna; sabemos también que $\mathbf{V}_{ij}\mathbf{y}_j = -\mathbf{V}'_i$ tiene solución única, además por la condición $\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k = 0$ podemos asegurar que $\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k \perp \mathbf{x}$ de donde el sistema $\mathbf{V}_{ij}\mathbf{z}_j = -\mathbf{V}_{ikl}\mathbf{x}_k\mathbf{x}_l$ tiene solución única. Entonces escribiendo

$$\mathbf{q}_j^{(2)} = \mathbf{z}_j + \mathbf{y}_j\lambda^{(2)} \quad (3.21)$$

ecuación válida para $j = 1, n$ si hacemos $\mathbf{z}_1 = 0$. Reemplazando en la ecuación (3.19) (3ra. ecuación contraída) nos queda

$$\mathbf{V}_{ijkl}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k\mathbf{x}_l + 3\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\mathbf{z}_k + 3(\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{y}_k + \mathbf{V}'_{ij})\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\lambda^{(2)} = 0 \quad (3.22)$$

de donde despejamos $\lambda^{(2)}$

$$\lambda^{(2)} = -\frac{\mathbf{V}_{ijkl}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k\mathbf{x}_l + 3\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\mathbf{z}_k}{3(\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{y}_k + \mathbf{V}'_{ij})\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j} \quad (3.23)$$

El reemplazo anterior no es estrictamente necesario, se hace para obtener una expresión explícita de $\lambda^{(2)}$. Notar que la condición de punto crítico distinto (existencia de $\lambda^{(2)}$) es :

$$(\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{y}_k + \mathbf{V}'_{ij})\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j \neq 0 \quad (3.24)$$

A continuación la 3ra. ecuación (3.7) nos provee $n - 1$ ecuaciones independientes en $\mathbf{q}_j^{(3)}$ y $\lambda^{(3)}$

$$\mathbf{V}_{ij}\mathbf{q}_j^{(3)} = -(\mathbf{V}_{iklm}\mathbf{x}_k\mathbf{x}_m + 3\mathbf{V}_{ikl}\mathbf{z}_k)\mathbf{x}_l + 3(\mathbf{V}_{ikl}\mathbf{y}_l + \mathbf{V}'_{ik})\mathbf{x}_k\lambda^{(2)} - \mathbf{V}'_i\lambda^{(3)} \quad (3.25)$$

de donde

$$\mathbf{q}_j^{(3)} = \tilde{\mathbf{z}}_j + \mathbf{y}_j\lambda^{(3)} \quad (3.26)$$

el sistema de ecuaciones indicado tiene solución pues el segundo miembro es ortogonal a \mathbf{x} . Para probar esto contraigamos el segundo miembro y recordando que $\mathbf{V}'_i\mathbf{x}_i = 0$ obtenemos:

$$\mathbf{V}_{iklm}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_k\mathbf{x}_m\mathbf{x}_l + 3\mathbf{V}_{ikl}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_l\mathbf{z}_k + 3(\mathbf{V}_{ikl}\mathbf{y}_l + \mathbf{V}'_{ik})\mathbf{x}_i\mathbf{x}_k\lambda^{(2)}$$

que no es otra cosa que la 3ra. ecuación contraída (3.19) por lo que el 2do. término es ortogonal a \mathbf{x} .

La ecuación restante se obtiene contrayendo la 4ta. ecuación. La 4ta. ecuación es:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{V}_{ijklm} \mathbf{q}_j^{(1)} \mathbf{q}_k^{(1)} \mathbf{q}_l^{(1)} \mathbf{q}_m^{(1)} + 4\mathbf{V}'_{ijkl} \mathbf{q}_j^{(1)} \mathbf{q}_k^{(1)} \mathbf{q}_l^{(1)} \lambda^{(1)} + \\
& + 6\mathbf{V}_{ijkl} \mathbf{q}_j^{(1)} \mathbf{q}_k^{(1)} \mathbf{q}_l^{(2)} + 3[2\mathbf{V}''_{ijk} \mathbf{q}_j^{(1)} \mathbf{q}_k^{(1)} \lambda^{(1)^2} + 4\mathbf{V}'_{ijk} \mathbf{q}_j^{(1)} \mathbf{q}_k^{(2)} \lambda^{(1)} + \\
& + 2\mathbf{V}'_{ijk} \mathbf{q}_j^{(1)} \mathbf{q}_k^{(1)} \lambda^{(2)} + \mathbf{V}_{ijk} \mathbf{q}_j^{(2)} \mathbf{q}_k^{(2)} + 2\mathbf{V}''_{ij} \mathbf{q}_j^{(2)} \lambda^{(1)^2} + \\
& + 4\mathbf{V}''_{ij} \mathbf{q}_j^{(1)} \lambda^{(1)} \lambda^{(2)} + 2\mathbf{V}'_{ij} \mathbf{q}_j^{(2)} \lambda^{(2)} + 2\mathbf{V}'''_i \lambda^{(1)^2} \lambda^{(2)} + \mathbf{V}''_i \lambda^{(2)^2}] + \\
& + 4\mathbf{V}''_i \lambda^{(1)} \lambda^{(3)} + 4\mathbf{V}'''_{ij} \mathbf{q}_j^{(1)} \lambda^{(1)^3} + \mathbf{V}''''_i \lambda^{(1)^4} + 4\mathbf{V}_{ijk} \mathbf{q}_j^{(1)} \mathbf{q}_k^{(3)} + \\
& + 4\mathbf{V}'_{ij} \mathbf{q}_j^{(3)} \lambda^{(1)} + \mathbf{V}_{ij} \mathbf{q}_j^{(4)} + 4\mathbf{V}'_{ij} \mathbf{q}_j^{(1)} \lambda^{(3)} + \mathbf{V}'_i \lambda^{(4)} = 0 \quad (3.27)
\end{aligned}$$

y contraída para al caso de bifurcación simétrica es:

$$\begin{aligned}
4\mathbf{V}_{ijk} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j \mathbf{q}_k^{(3)} + 4\mathbf{V}'_{ij} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j \lambda^{(3)} &= -[\mathbf{V}_{ijlmn} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j \mathbf{x}_l \mathbf{x}_m \mathbf{x}_n + \\
& + 6\mathbf{V}_{ijlm} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j \mathbf{x}_l \mathbf{q}_m^{(2)} + 3(2\mathbf{V}'_{ijl} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j \mathbf{x}_l \lambda^{(2)} + \mathbf{V}_{ijl} \mathbf{x}_i \mathbf{q}_j^{(2)} \mathbf{q}_l^{(2)} \\
& + 2\mathbf{V}'_{ij} \mathbf{x}_i \mathbf{q}_j^{(2)} \lambda^{(2)} + \mathbf{V}''_i \mathbf{x}_i \lambda^{(2)^2})] \quad (3.28)
\end{aligned}$$

$$\lambda^{(3)} = - \frac{\mathbf{x}_i \left\{ \left(\mathbf{V}_{ijklm} \mathbf{x}_l \mathbf{x}_m + 6\mathbf{V}_{ijkl} \mathbf{q}_l^{(2)} + 6\mathbf{V}'_{ijk} \lambda^{(2)} \right) \mathbf{x}_j \mathbf{x}_k + 3(\mathbf{V}_{ijk} \mathbf{q}_{ij}^{(2)} \mathbf{q}_k^{(2)} + 2\mathbf{V}'_{ij} \mathbf{q}_j^{(2)} \lambda^{(2)} + \mathbf{V}''_i \lambda^{(2)}) + 4\mathbf{V}_{ijk} \mathbf{x}_j \tilde{\mathbf{z}}_k \right\}}{4(\mathbf{V}_{ijk} \mathbf{y}_k + \mathbf{V}'_{ij}) \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j} \quad (3.29)$$

3.4.5. Bifurcación Asimétrica

La ecuación (3.11) (que corresponde ahora al caso $\mathbf{V}_{ijk} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j \mathbf{x}_k \neq 0$), la podemos escribir de la forma $A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$; supondremos que la raíz correspondiente a la trayectoria secundaria es ($B < 0$, $A > 0$):

$$\lambda^{(1)} = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (3.30)$$

$$\mathbf{q}_j^{(1)} = \mathbf{x}_j + \mathbf{y}_j \lambda^{(1)}$$

Siendo la bifurcación asimétrica siempre inestable podría detenerse el análisis aquí, sin embargo tratemos de avanzar un paso más en la trayectoria poscrítica. La segunda ecuación de perturbaciones (3.7) nos da $n - 1$ ecuaciones linealmente independientes en $\mathbf{q}_j^{(2)}$ ($j = 2, n$) y en $\lambda^{(2)}$

$$\mathbf{V}_{ij} \mathbf{q}_j^{(2)} = -(\mathbf{V}_{ikl} \mathbf{q}_k^{(1)} \mathbf{q}_l^{(1)} + 2\mathbf{V}'_{ik} \mathbf{q}_k^{(1)} \lambda^{(1)} + \mathbf{V}''_i \lambda^{(1)^2}) - \mathbf{V}'_i \lambda^{(2)} \quad (3.31)$$

analicemos la 3ra. ecuación de perturbación (3.18); aplicando el mecanismo de contracción se tiene:

$$\begin{aligned}
& 3(\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{x}_i\mathbf{q}_k^{(1)} + \mathbf{V}'_{ij}\mathbf{x}_i\lambda^{(1)})\mathbf{q}_j^{(2)} + 3(\mathbf{V}'_{ij}\mathbf{x}_i\mathbf{q}_j^{(1)} + \mathbf{V}''_i\mathbf{x}_i\lambda^{(1)})\lambda^{(2)} = \\
& -\mathbf{V}_{ijkl}\mathbf{x}_i\mathbf{q}_j^{(1)}\mathbf{q}_k^{(1)}\mathbf{q}_l^{(1)} - 3(\mathbf{V}'_{ijk}\mathbf{x}_i\mathbf{q}_j^{(1)}\mathbf{q}_k^{(1)}\lambda^{(1)} + \mathbf{V}''_{ij}\mathbf{x}_i\mathbf{q}_j^{(1)}\lambda^{(1)^2}) - \mathbf{V}_i\mathbf{x}_i\lambda^{(1)^2}
\end{aligned} \quad (3.32)$$

que es otra ecuación lineal con lo que tenemos n ecuaciones que ahora podemos resolver. Podría obtenerse una expresión explícita para $\lambda^{(2)}$ si en (3.31) resolvemos $\mathbf{q}_j^{(2)}$ en función de λ^2 y reemplazando en (3.32).

3.5. Análisis con Imperfecciones

En esta sección nos interesa estudiar el comportamiento de estructuras similares a las que hemos analizado hasta ahora, pero suponemos que existe en ellas una característica o imperfección que depende de un parámetro ϵ , que podemos hacer tan pequeño como queramos y en caso de anularse tendremos la estructura original. Esta característica o imperfección (que puede ser geométrica, material, del sistema de cargas, etc.) producirá un modificación del comportamiento de la estructura y aquí nos interesa en particular los cambios en las cercanías del punto crítico para valores pequeños de la imperfección.

Analizando una estructura desde su posición descargada ($\mathbf{Q}_i = \mathbf{0}$, $\lambda = 0$) estable, avanzamos sobre una trayectoria estable hasta un punto crítico definido por $\mathbf{V}_{ij}\mathbf{x}_j = 0$; a partir del cual nos interesa determinar la posición de dicho punto crítico en el caso de presencia de imperfecciones (ϵ).

Ecuaciones a perturbar:

- $\mathbf{V}_i = 0$ equilibrio (3.1)

- $\mathbf{V}_{ij}\mathbf{x}_j = 0$ condición de punto crítico (3.2)

3.5.1. Punto Límite

En este caso se adopta como parámetro de perturbación $s = \epsilon$

Las primeras ecuaciones de perturbación resultan:

$$\mathbf{V}_{ij}\dot{\mathbf{q}}_j^M + \dot{\mathbf{V}}_i + \mathbf{V}'_i\dot{\lambda}^M = \mathbf{0} \quad (3.33)$$

$$(\mathbf{V}_{ijk}\dot{\mathbf{q}}_k^M + \dot{\mathbf{V}}_{ij} + \mathbf{V}'_{ij}\dot{\lambda}^M)\mathbf{x}_j + \mathbf{V}_{ij}\dot{\mathbf{x}}_j = \mathbf{0} \quad (3.34)$$

donde $(\dot{\quad})$ indica derivada respecto a ϵ que para la energía \mathbf{V} es parcial pero para \mathbf{q}_i y λ es una derivada total; en tanto que $(\quad)^M$ se emplea para diferenciar del análisis anterior e indica que corresponde al lugar geométrico de los puntos máximos (límites) de la trayectoria en función de ϵ .

Imponiendo $\mathbf{x}_1 = 1$ lo que implica $\dot{\mathbf{x}}_1 = 0$, y utilizando el mecanismo de contracción sobre (3.33) (o sea multiplicando por las componentes del autovector en el punto crítico \mathbf{x}_i sumando y valuando en el punto crítico) se llega a

$$\underbrace{\mathbf{V}_{ij}\mathbf{x}_i\dot{\mathbf{q}}_j^M}_0 + \dot{\mathbf{V}}_i\mathbf{x}_i + \mathbf{V}'_i\mathbf{x}_i\dot{\lambda}^M = \mathbf{0} \quad (3.35)$$

De la (3.35) siendo $\mathbf{V}'_i\mathbf{x}_i \neq 0$ (**Punto Límite**), resulta:

$$\dot{\lambda}^M = -\frac{\dot{\mathbf{V}}_i\mathbf{x}_i}{\mathbf{V}'_i\mathbf{x}_i} \quad (3.36)$$

Contrayendo la (3.34) tenemos

$$\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\dot{\mathbf{q}}_k^M = -(\dot{\mathbf{V}}_{ij} + \mathbf{V}'_{ij}\dot{\lambda}^M)\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j \quad (3.37)$$

con esta ecuación, más

$$\mathbf{V}_{ij}\dot{\mathbf{q}}_j^M = -\dot{\mathbf{V}}_i - \mathbf{V}'_i\dot{\lambda}^M \quad (3.38)$$

($i = 2, n$ pues en \mathbf{V}_{ij} hay solo $n - 1$ ec. independientes) podemos calcular ahora $\dot{\mathbf{q}}_j^M$. Una forma de resolver estas ecuaciones es la siguiente:

De (3.38) pasando la $\mathbf{V}_{i1}\dot{\mathbf{q}}_1^M$ al segundo miembro

$$\mathbf{V}_{ij}\dot{\mathbf{q}}_j^M = \mathbf{V}_{i1}\dot{\mathbf{q}}_1^M - \dot{\mathbf{V}}_i - \mathbf{V}'_i\dot{\lambda}^M \quad (3.39)$$

de donde siendo $\mathbf{V}_{ij}\mathbf{x}_j = -\mathbf{V}_{i1}$ y llamando $\mathbf{V}_{ij}\mathbf{w}_j = -\dot{\mathbf{V}}_i - \mathbf{V}'_i\dot{\lambda}^M$ obtenemos

$$\dot{\mathbf{q}}_j^M = \dot{\mathbf{q}}_1^M\mathbf{x}_j + \mathbf{w}_j \quad (3.40)$$

llevando a la otra ecuación (3.37) nos queda :

$$\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k\dot{\mathbf{q}}_1^M = -(\dot{\mathbf{V}}_{ij} + \mathbf{V}'_{ij}\dot{\lambda}^M)\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j - \mathbf{V}_{ijk}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\mathbf{w}_k \quad (3.41)$$

A continuación calculamos mediante la (3.34) los $\dot{\mathbf{x}}_j$ con $j = 2, n$ (recordando que $\dot{\mathbf{x}}_1 = 0$)

$$\mathbf{V}_{ij}\dot{\mathbf{x}}_j = -(\mathbf{V}_{ikl}\dot{\mathbf{q}}_l^M + \dot{\mathbf{V}}_{ik} + \mathbf{V}'_{ik}\dot{\lambda}^M)\mathbf{x}_k \quad (3.42)$$

Tomamos ahora las 2das ecuaciones de perturbación y procedemos en forma similar para obtener las derivadas segundas.

3.5.2. Bifurcación

En este caso resulta conveniente adoptar como parámetro de perturbación $s = \mathbf{q}_1$

Las primeras ecuaciones de perturbación pueden escribirse como:

$$\mathbf{V}_{ij}\mathbf{q}_j^{M(1)} + \dot{\mathbf{V}}_i\epsilon^{(1)} + \mathbf{V}_i\lambda^{M(1)} = \mathbf{0} \quad (3.43)$$

$$(\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{q}_k^{M(1)} + \dot{\mathbf{V}}_{ij}\epsilon^{(1)} + \mathbf{V}'_{ij}\lambda^{M(1)})\mathbf{x}_j + \mathbf{V}_{ij}\mathbf{x}_j^{M(1)} = \mathbf{0} \quad (3.44)$$

Imponiendo $\mathbf{x}_1^M = 1$ lo que implica $\mathbf{x}_1^{M(1)} = 0$, y, utilizando el mecanismo de contracción sobre (3.43) se llega a

$$\underbrace{\mathbf{V}_{ij}\mathbf{x}_i\mathbf{q}_j^{M(1)}}_0 + \dot{\mathbf{V}}_{i\mathbf{x}_i}\epsilon^{(1)} + \mathbf{V}'_{i\mathbf{x}_i}\lambda^{M(1)} = \mathbf{0} \quad (3.45)$$

de la (3.45) siendo $\mathbf{V}'_{i\mathbf{x}_i} = 0$ (**Bifurcación**) entonces:

$$\boxed{\epsilon^{(1)} = 0} \quad (3.46)$$

Para lo que hemos asumido que $\dot{\mathbf{V}}_{i\mathbf{x}_i} \neq 0$ (lo que implica que la imperfección tiene influencia sobre el comportamiento crítico); reemplazando en (3.43); resolviendo $\mathbf{q}_j^{M(1)}$ en función de $\lambda^{(1)}$; y recordando que $\mathbf{q}_1^{M(1)} = 1$, nos queda:

$$\mathbf{V}_{ij}\mathbf{q}_j^{M(1)} = -\mathbf{V}_{i1} - \mathbf{V}'_i\lambda^{M(1)} \quad (3.47)$$

de donde puede obtenerse

$$\boxed{\mathbf{q}_j^{M(1)} = \mathbf{x}_j + \mathbf{y}_j\lambda^{M(1)}} \quad (3.48)$$

donde (3.10)

$$\mathbf{y} = -\mathbf{V}_{ij}^{-1}\mathbf{V}'_i$$

Contrayendo las (3.44) obtenemos

$$(\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{x}_i\mathbf{q}_k^{M(1)} + \mathbf{V}'_{ij}\mathbf{x}_i\lambda^{M(1)})\mathbf{x}_j + \underbrace{\mathbf{V}_{ij}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j}_0 = \mathbf{0} \quad (3.49)$$

Reemplazando la (3.48) en la (3.49) resulta

$$\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k + (\mathbf{V}'_{ij}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j + \mathbf{V}_{ijk}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\mathbf{y}_k)\lambda^{M(1)} = \mathbf{0} \quad (3.50)$$

de donde

$$\boxed{\lambda^{M(1)} = \frac{-\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k}{(\mathbf{V}'_{ij} + \mathbf{V}_{ijk}\mathbf{y}_k)\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j}} \quad (3.51)$$

3.5.3. Bifurcación Simétrica

De (3.51), siendo $\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k = 0$, entonces:

$$\boxed{\lambda^{M(1)} = 0} \quad (3.52)$$

$$\boxed{\mathbf{q}_j^{M(1)} = 0} \quad (3.53)$$

A continuación calculamos, mediante la (3.44), los $\mathbf{x}_j^{M(1)}$ (recordando que $\mathbf{x}_1^{M(1)} = 0$) con $j = 2, n$

$$\mathbf{V}_{ij}\mathbf{x}_j^{M(1)} = -\mathbf{V}_{ikl}\mathbf{x}_k\mathbf{x}_l \quad (3.54)$$

notar que

$$\boxed{\mathbf{x}_j^{M(1)} = \mathbf{z}_j} \quad (3.55)$$

del análisis sin imperfecciones

Tomamos ahora las 2das ecuaciones de perturbación

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{ijk}\mathbf{q}_j^{M(1)}\mathbf{q}_k^{M(1)} + 2\dot{\mathbf{V}}_{ij}\mathbf{q}_j^{M(1)}\epsilon^{(1)} + 2\mathbf{V}'_{ij}\mathbf{q}_j^{M(1)}\lambda^{M(1)} + \mathbf{V}_{ij}\mathbf{q}_j^{M(2)} \\ + \ddot{\mathbf{V}}_i\epsilon^{(1)^2} + 2\dot{\mathbf{V}}'_i\epsilon^{(1)}\lambda^{M(1)} + \dot{\mathbf{V}}_i\epsilon^{(2)} + \mathbf{V}''_i\lambda^{M(1)^2} + \mathbf{V}'_i\lambda^{M(2)} = 0 \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{V}_{ijkl}\mathbf{q}_k^{M(1)}\mathbf{q}_l^{M(1)} + 2\dot{\mathbf{V}}_{ijk}\mathbf{q}_k^{M(1)}\epsilon^{(1)} + 2\mathbf{V}'_{ijk}\mathbf{q}_k^{M(1)}\lambda^{M(1)}t + \mathbf{V}_{ijk}\mathbf{q}_k^{M(2)} + \\ + \ddot{\mathbf{V}}_{ij}\epsilon^{(1)^2} + 2\dot{\mathbf{V}}'_{ij}\epsilon^{(1)}\lambda^{M(1)} + \dot{\mathbf{V}}_{ij}\epsilon^{(2)} + \mathbf{V}''_{ij}\lambda^{M(1)^2} + \mathbf{V}'_{ij}\lambda^{M(2)})\mathbf{x}_j + \\ + 2(\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{q}_k^{M(1)} + \dot{\mathbf{V}}_{ij}\epsilon^{(1)} + \mathbf{V}'_{ij}\lambda^{M(1)})\mathbf{x}_j^{M(1)} + \mathbf{V}_{ij}\mathbf{x}_j^{M(2)} = 0 \end{aligned} \quad (3.57)$$

realizando contracción sobre la ec.(3.56) nos queda:

$$\underbrace{\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k}_0 + \dot{\mathbf{V}}_i\mathbf{x}_i\epsilon^{(2)} = 0 \quad (3.58)$$

de donde

$$\boxed{\epsilon^{(2)} = 0} \quad (3.59)$$

Llevando este resultado a la (3.56)

$$\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k + \mathbf{V}_{ij}\mathbf{q}_j^{M(2)} + \mathbf{V}'_i\lambda^{M(2)} = 0 \quad (3.60)$$

en donde puede expresarse $\mathbf{q}_j^{M(2)}$ en función de $\lambda^{M(2)}$

$$\mathbf{V}_{ij}\mathbf{q}_j^{M(2)} = -\mathbf{V}_{ikl}\mathbf{x}_k\mathbf{x}_l - \mathbf{V}_i\lambda^{M(2)} \quad (3.61)$$

$$\mathbf{q}_j^{M(2)} = \mathbf{z}_j + \mathbf{y}_j\lambda^{M(2)} \quad (3.62)$$

Realizando contracción sobre la ec. (3.57) nos queda:

$$\mathbf{V}_{ijkl}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k\mathbf{x}_l + (\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{y}_k + \mathbf{V}'_{ij})\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\lambda^{M(2)} + 3\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\mathbf{z}_k = \mathbf{0} \quad (3.63)$$

de donde:

$$\lambda^{M(2)} = -\frac{\mathbf{V}_{ijkl}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k\mathbf{x}_l + 3\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\mathbf{z}_k}{(\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{y}_k + \mathbf{V}'_{ij})\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j} \quad (3.64)$$

Notar que

$$\boxed{\lambda^{M(2)} = 3\lambda^{(2)}} \quad (3.65)$$

reemplazando $\mathbf{q}_j^{M(2)}$ y $\lambda^{M(2)}$ en (3.57) obtenemos $\mathbf{x}_j^{M(2)}$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{ij}\mathbf{x}_j^{M(2)} &= -(\mathbf{V}_{iklm}\mathbf{x}_l\mathbf{x}_m + \mathbf{V}_{ikl}\mathbf{q}_l^{M(2)} + \mathbf{V}'_{ikl}\lambda^{M(2)})\mathbf{x}_k - 2\mathbf{V}_{ikl}\mathbf{x}_l\mathbf{z}_k \\ &= -(\mathbf{V}_{iklm}\mathbf{x}_l\mathbf{x}_m + 3\mathbf{V}_{ikl}\mathbf{z}_l)\mathbf{x}_k - (\mathbf{V}_{ikl}\mathbf{y}_l + \mathbf{V}'_{ik})\mathbf{x}_k\lambda^{M(2)} \\ &= -[\mathbf{V}_{iklm}\mathbf{x}_l\mathbf{x}_m + 3(\mathbf{V}_{ikl}\mathbf{z}_l + (\mathbf{V}_{ikl}\mathbf{y}_l + \mathbf{V}'_{ik})\lambda^{(2)})]\mathbf{x}_k \end{aligned} \quad (3.66)$$

de donde

$$\boxed{\mathbf{x}_j^{M(2)} = \tilde{\mathbf{z}}_j} \quad (3.67)$$

del análisis sin imperfecciones; tomamos ahora el 1er. grupo de las 3ras. ecuaciones de perturbación

$$\begin{aligned}
& \mathbf{V}_{ijkl}\mathbf{q}_j^{M(1)}\mathbf{q}_k^{M(1)}\mathbf{q}_l^{M(1)} + \dot{\mathbf{V}}_{ijk}\mathbf{q}_j^{M(1)}\mathbf{q}_k^{M(1)}\epsilon^{(1)} + \mathbf{V}'_{ijk}\mathbf{q}_j^{M(1)}\mathbf{q}_k^{M(1)}\lambda^{M(1)} + \\
& \quad + 2\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{q}_j^{M(1)}\mathbf{q}_k^{M(2)} + 2\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{q}_j^{M(1)}\mathbf{q}_k^{M(1)}\epsilon^{(1)} + 2\ddot{\mathbf{V}}_{ij}\mathbf{q}_j^{M(1)}\epsilon^{(1)} + \\
& \quad + 4\dot{\mathbf{V}}'_{ij}\mathbf{q}_j^{M(1)}\epsilon^{(1)}\lambda^{M(1)} + 2\dot{\mathbf{V}}_{ij}\mathbf{q}_j^{M(2)}\epsilon^{(1)} + 2\dot{\mathbf{V}}_{ij}\mathbf{q}_j^{M(1)}\epsilon^{(2)} + \\
& \quad + 2\mathbf{V}'_{ijk}\mathbf{q}_j^{M(1)}\mathbf{q}_k^{M(1)}\lambda^{M(1)} + 2\mathbf{V}''_{ij}\mathbf{q}_j^{M(1)}\lambda^{M(1)^2} + 2\mathbf{V}'_{ij}\mathbf{q}_j^{M(2)}\lambda^{M(1)} + \\
& + 2\mathbf{V}'_{ij}\mathbf{q}_j^{M(1)}\lambda^{M(2)} + \mathbf{V}_{ijk}\mathbf{q}_j^{M(1)}\mathbf{q}_k^{M(2)} + \dot{\mathbf{V}}_{ij}\mathbf{q}_j^{M(2)}\epsilon^{(1)} + \mathbf{V}'_{ij}\mathbf{q}_j^{M(2)}\lambda^{M(1)} + \\
& \quad + \mathbf{V}_{ij}\mathbf{q}_j^{M(3)} + \ddot{\mathbf{V}}_{ij}\mathbf{q}_j^{M(1)}\epsilon^{(1)^2} + \ddot{\mathbf{V}}_i\epsilon^{(1)^3} + \ddot{\mathbf{V}}'_i\epsilon^{(1)^2}\lambda^{M(1)} + 2\ddot{\mathbf{V}}_i\epsilon^{(1)}\epsilon^{(2)} + \\
& \quad + 2\dot{\mathbf{V}}'_{ij}\mathbf{q}_j^{M(1)}\epsilon^{(1)}\lambda^{M(1)} + 2\ddot{\mathbf{V}}'_i\epsilon^{(1)^2}\lambda^{M(1)} + 2\dot{\mathbf{V}}'_i\epsilon^{(1)}\lambda^{M(1)^2} + \\
& \quad + 2\dot{\mathbf{V}}_i\epsilon^{(2)}\lambda^{M(1)} + 2\dot{\mathbf{V}}_i\epsilon^{(1)}\lambda^{M(2)} + \dot{\mathbf{V}}_{ij}\mathbf{q}_j^{M(1)}\epsilon^{(2)} + \ddot{\mathbf{V}}_i\epsilon^{(1)}\epsilon^{(2)} + \\
& \quad + \dot{\mathbf{V}}_i\epsilon^{(2)}\lambda^{M(1)} + \dot{\mathbf{V}}_i\epsilon^{(3)} + \mathbf{V}''_{ij}\mathbf{q}_j^{M(1)}\lambda^{M(1)^2} + \dot{\mathbf{V}}''_i\epsilon^{(1)}\lambda^{M(1)^2} + \mathbf{V}'''_i\lambda^{M(1)^3} + \\
& \quad + 2\mathbf{V}''_i\lambda^{M(1)}\lambda^{M(2)} + \mathbf{V}'_{ij}\mathbf{q}_j^{M(1)}\lambda^{M(2)} + \dot{\mathbf{V}}_i\epsilon^{(1)}\lambda^{M(2)} + \mathbf{V}''_i\lambda^{M(1)}\lambda^{M(2)} + \\
& \qquad \qquad \qquad \mathbf{V}'_i\lambda^{M(3)} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{V}_{ijkl}\mathbf{q}_j^{M(1)}\mathbf{q}_k^{M(1)}\mathbf{q}_l^{M(1)} + 3\dot{\mathbf{V}}_{ijk}\mathbf{q}_j^{M(1)}\mathbf{q}_k^{M(1)}\epsilon^{M(1)} + \\
& \quad + 3\mathbf{V}'_{ijk}\mathbf{q}_j^{M(1)}\mathbf{q}_k^{M(1)}\lambda^{M(1)} + 3\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{q}_j^{M(1)}\mathbf{q}_k^{M(2)} + 3\ddot{\mathbf{V}}_{ij}\mathbf{q}_j^{M(1)}\epsilon^{(1)^2} + \\
& \quad + 6\dot{\mathbf{V}}'_{ij}\mathbf{q}_j^{M(1)}\epsilon^{(1)}\lambda^{M(1)} + 3\dot{\mathbf{V}}_{ij}\mathbf{q}_j^{M(2)}\epsilon^{(1)} + 3\dot{\mathbf{V}}_{ij}\mathbf{q}_j^{M(1)}\epsilon^{(2)} + \\
& \quad + 3\mathbf{V}''_{ij}\mathbf{q}_j^{M(1)}\lambda^{M(1)^2} + 3\mathbf{V}'_{ij}\mathbf{q}_j^{M(2)}\lambda^{M(1)} + 3\mathbf{V}'_{ij}\mathbf{q}_j^{M(1)}\lambda^{M(2)} + \mathbf{V}_{ij}\mathbf{q}_j^{M(3)} + \\
& \quad + \ddot{\mathbf{V}}_i\epsilon^{(1)^3} + 3\ddot{\mathbf{V}}_i\epsilon^{(1)}\epsilon^{(2)} + 3\ddot{\mathbf{V}}'_i\epsilon^{(1)^2}\lambda^{M(1)} + 3\dot{\mathbf{V}}_i\epsilon^{(1)}\lambda^{M(1)^2} + \\
& \quad + 3\dot{\mathbf{V}}'_i\epsilon^{(2)}\lambda^{M(1)} + 3\dot{\mathbf{V}}_i\epsilon^{(1)}\lambda^{M(2)} + \dot{\mathbf{V}}_i\epsilon^{(3)} + \mathbf{V}'''_i\lambda^{M(1)^3} + 3\mathbf{V}''_i\lambda^{M(1)}\lambda^{M(2)} + \\
& \qquad \qquad \qquad + \mathbf{V}'_i\lambda^{M(3)} = 0 \quad (3.68)
\end{aligned}$$

Contrayendo la (3.68) tenemos:

$$\mathbf{V}_{ijkl}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k\mathbf{x}_l + 3\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\mathbf{q}_k^{M(2)} + 3\mathbf{V}'_{ij}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\lambda^{M(2)} + \dot{\mathbf{V}}_i\mathbf{x}_i\epsilon^{(3)} = 0 \quad (3.69)$$

Despejando $\epsilon^{(3)}$ resulta

$$\epsilon^{(3)} = -\frac{\mathbf{V}_{ijkl}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k\mathbf{x}_l + 3\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\mathbf{q}_k^{M(2)} + 3\mathbf{V}'_{ij}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\lambda^{M(2)}}{\dot{\mathbf{V}}_i\mathbf{x}_i} \quad (3.70)$$

reemplazando $\lambda^{M(2)}$ se llega a

$$\boxed{\epsilon^{(3)} = 2\frac{\mathbf{V}_{ijkl}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k\mathbf{x}_l + 3\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\mathbf{z}_k^{M(2)}}{\dot{\mathbf{V}}_i\mathbf{x}_i}} \quad (3.71)$$

3.5.4. Bifurcación Asimétrica

A continuación calculamos mediante la (3.44) los $\mathbf{x}_j^{M(1)}$ (recordando que $\mathbf{x}_1^{M(1)} = \mathbf{0}$) con $j = 2, n$

$$\mathbf{V}_{ij}\mathbf{x}_j^{M(1)} = -[\mathbf{V}_{ikl}\mathbf{x}_l + (\mathbf{V}_{ikl}\mathbf{y}_l + \mathbf{V}'_{ik})\lambda^{M(1)}]\mathbf{x}_k \quad (3.72)$$

Realizando contracción sobre la ec. (3.56)

$$\begin{aligned} & \mathbf{V}_{ijk}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k + 2(\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\mathbf{y}_k + \mathbf{V}'_{ij}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j)\lambda^{M(1)} + \\ & + (\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{x}_i\mathbf{y}_j\mathbf{y}_k + 2\mathbf{V}'_{ij}\mathbf{x}_i\mathbf{y}_j + \mathbf{V}''_i\mathbf{x}_i)\lambda^{M(1)^2} + \dot{\mathbf{V}}_i\mathbf{x}_i\epsilon^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad (3.73)$$

de la (3.73) podemos despejar $\epsilon^{(2)}$

$$\epsilon^{(2)} = \frac{\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k + -(\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{x}_i\mathbf{y}_j\mathbf{y}_k + 2\mathbf{V}'_{ij}\mathbf{x}_i\mathbf{y}_j + \mathbf{V}''_i\mathbf{x}_i)\lambda^{M(1)^2}}{\dot{\mathbf{V}}_i\mathbf{x}_i} \quad (3.74)$$

llevando este resultado a la ec. (3.56)

$$\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{q}_j^{M(1)}\mathbf{q}_k^{M(1)} + 2\mathbf{V}'_{ij}\mathbf{q}_j^{M(1)}\lambda^{M(1)} + \mathbf{V}_{ij}\mathbf{q}_j^{M(2)} + \dot{\mathbf{V}}_i\epsilon^{(2)} + \mathbf{V}''_i\lambda^{M(1)^2} + \mathbf{V}'_i\lambda^{M(2)} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{V}_{ij}\mathbf{q}_j^{M(2)} = -\mathbf{V}_{ikl}\mathbf{q}_k^{M(1)}\mathbf{q}_l^{M(1)} - 2\mathbf{V}'_{ik}\mathbf{q}_k^{M(1)}\lambda^{M(1)} - \dot{\mathbf{V}}_i\epsilon^{(2)} - \mathbf{V}''_i\lambda^{M(1)^2} + \mathbf{V}'_i\lambda^{M(2)} \quad (3.75)$$

$$\mathbf{q}_j^{M(2)} = \mathbf{s}_j + \mathbf{y}_j\lambda^{M(2)} \quad (3.76)$$

realizando contracción sobre la (3.57) nos queda

$$\begin{aligned} (\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\mathbf{y}_k + \mathbf{V}'_{ij}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j)\lambda^{M(2)} &= -(\mathbf{V}_{ijkl}\mathbf{x}_i\mathbf{q}_k^{M(1)}\mathbf{q}_l^{M(1)} \\ &+ 2\mathbf{V}'_{ijk}\mathbf{x}_i\mathbf{q}_k^{M(1)}\lambda^{M(1)} + \mathbf{V}_{ijk}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_k + \dot{\mathbf{V}}_{ij}\mathbf{x}_i\epsilon^{(2)} \\ &+ \mathbf{V}''_{ij}\mathbf{x}_i\lambda^{M(1)^2})\mathbf{x}_j + -2(\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{x}_i\mathbf{q}_k^{M(1)} + \mathbf{V}'_{ij}\mathbf{x}_i\lambda^{M(1)})\mathbf{x}_j^{M(1)} \end{aligned} \quad (3.77)$$

Obtenido $\lambda^{M(2)}$ y con ello $\mathbf{q}_j^{M(2)}$, reemplazamos en la (3.57), que queda:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{ij}\mathbf{x}_j^{M(2)} &= -(\mathbf{V}_{ijkl}\mathbf{q}_k^{M(1)}\mathbf{q}_l^{M(1)} + 2\mathbf{V}'_{ijk}\mathbf{q}_k^{M(1)}\lambda^{M(1)}t + \mathbf{V}_{ijk}\mathbf{q}_k^{M(2)} + \dot{\mathbf{V}}_{ij}\epsilon^{(2)}) \\ &+ \mathbf{V}''_{ij}\lambda^{M(1)^2} + \mathbf{V}'_{ij}\lambda^{M(2)})\mathbf{x}_j + 2(\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{q}_k^{M(1)} + \mathbf{V}'_{ij}\lambda^{M(1)})\mathbf{x}_j^{(1)} \end{aligned} \quad (3.78)$$

3.6. Particularización para el Potencial de Interés

3.6.1. Hipótesis sobre \mathbf{V}

En este trabajo resulta de fundamental interés un potencial de la forma:

$$\mathbf{V}(\mathbf{Q}_i, \Lambda, \epsilon) = \mathbf{U}(\mathbf{Q}_i) + \Lambda\mathbf{f}_i\mathbf{Q}_i + \epsilon\mathbf{g}_i\mathbf{Q}_i \quad (3.79)$$

donde $\mathbf{U}(\mathbf{Q}_i)$ es a lo más de orden cuarto en las coordenadas generalizadas y las \mathbf{f}_i y \mathbf{g}_i son fuerzas generalizadas del sistema de carga de referencia. De esta forma se está suponiendo que las imperfecciones son cargas o pueden modelarse como un sistema de cargas equivalente \mathbf{g}_i [Calladine (1972)].

Dentro de los distintos tipos de comportamiento, nos interesa exclusivamente el de bifurcación y en especial el de bifurcación simétrica.

Notemos que en base a las restricciones indicadas se cumple que:

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{U}_i + \mathbf{f}_i\Lambda + \mathbf{g}_i\epsilon \quad (3.80)$$

$$\mathbf{V}'_i = \mathbf{f}_i\Lambda \quad (3.81)$$

$$\dot{\mathbf{V}}_i = \mathbf{g}_i\epsilon \quad (3.82)$$

$$\mathbf{V}_{ij} = \mathbf{U}_{ij}, \quad \mathbf{V}_{ijk} = \mathbf{U}_{ijk}, \quad \mathbf{V}_{ijkl} = \mathbf{U}_{ijkl} \quad (3.83)$$

$$\mathbf{V}''_i = \mathbf{V}'''_i = \mathbf{V}'_{ij} = \mathbf{V}'_{ijk} = \dots = \mathbf{0} \quad (3.84)$$

$$\mathbf{y}_j = -(\mathbf{V}_{ij})^{-1}\mathbf{f}_i \quad (3.85)$$

En la ecuación (3.6)

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}_{ijk}\mathbf{x}_i\mathbf{y}_j\mathbf{y}_k \quad (3.86)$$

$$\mathbf{B} = 2\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\mathbf{y}_k \quad (3.87)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{V}_{ijk}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k \quad (3.88)$$

En los próximos puntos se particularizan las expresiones obtenidas en las secciones 3.4 y 3.5 para el funcional restringido.

3.6.2. Bifurcación Asimétrica

$$\lambda^{(1)} = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

$$\mathbf{q}_j^{(1)} = \mathbf{x}_j + \mathbf{y}_j\lambda^{(1)}$$

$$\mathbf{V}_{ij}\mathbf{q}_j^{(2)} = -\mathbf{V}_{ikl}\mathbf{q}_k^{(1)}\mathbf{q}_l^{(1)} - \mathbf{f}_i\lambda^{(2)} \quad (3.89)$$

$$\mathbf{q}_j^{(2)} = \mathbf{z}_j + \mathbf{y}_j\lambda^{(2)} \quad (3.90)$$

$$\mathbf{z}_j = -(\mathbf{V}_{ij})^{-1}(\mathbf{V}_{ikl}\mathbf{q}_k^{(1)}\mathbf{q}_l^{(1)}) \quad (3.91)$$

$$\mathbf{V}_{ijkl}\mathbf{x}_i\mathbf{q}_j^{(1)}\mathbf{q}_k^{(1)}\mathbf{q}_l^{(1)} + 3\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{x}_i\mathbf{q}_j^{(1)}(\mathbf{z}_j + \mathbf{y}_j\lambda^{(2)}) = 0 \quad (3.92)$$

de donde:

$$\lambda^{(2)} = -\frac{\mathbf{V}_{ijkl}\mathbf{x}_i\mathbf{q}_j^{(1)}\mathbf{q}_k^{(1)}\mathbf{q}_l^{(1)} + 3\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{x}_i\mathbf{q}_j^{(1)}\mathbf{z}_k}{3\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{x}_i\mathbf{y}_j\mathbf{q}_k^{(1)}} \quad (3.93)$$

$$\lambda^{M(1)} = -\frac{2C}{B} \quad (3.94)$$

$$\epsilon^{(2)} = \frac{C - A\lambda^{M(1)^2}}{\mathbf{g}_i\mathbf{x}_i} \quad (3.95)$$

3.6.3. Bifurcación Simétrica

$$\mathbf{q}_j^{(1)} = \mathbf{x}_j$$

$$\mathbf{z}_j = -(\mathbf{V}_{ij})^{-1}(\mathbf{V}_{ikl}\mathbf{x}_k\mathbf{x}_l)$$

$$\lambda^{(2)} = -\frac{\mathbf{V}_{ijkl}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k\mathbf{x}_l + 3\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\mathbf{z}_k}{3\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{y}_k\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j} \quad (3.96)$$

$$\mathbf{q}_j^{(2)} = \mathbf{z}_j + \mathbf{y}_j\lambda^{(2)}$$

$$\tilde{\mathbf{z}}_j = -(\mathbf{V}_{ij})^{-1}(\mathbf{V}_{iklm}\mathbf{x}_k\mathbf{x}_l\mathbf{x}_m + 3\mathbf{V}_{ikl}\mathbf{q}_k^{(2)}\mathbf{x}_l) \quad (3.97)$$

$$\lambda^{(3)} = -\frac{\mathbf{x}_i[6\mathbf{V}_{ijkl}\mathbf{q}_l^{(2)}\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k + 3\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{q}_j^{(2)}\mathbf{q}_k^{(2)} + 4\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{x}_j\tilde{\mathbf{z}}_k]}{4\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\mathbf{y}_k} \quad (3.98)$$

$$\mathbf{q}_j^{(3)} = \tilde{\mathbf{z}}_j + \mathbf{y}_j\lambda^{(3)}$$

La 4ta. ecuación de perturbaciones valuada en el punto crítico resulta:

$$\mathbf{V}_{ij}\mathbf{q}_j^{(4)} = -6\mathbf{V}_{ijkl}\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k\mathbf{q}_l^{(2)} - 3\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{q}_j^{(2)}\mathbf{q}_k^{(2)} - 4\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{x}_j\mathbf{q}_k^{(3)} - \mathbf{f}_i\lambda^{(4)} \quad (3.99)$$

resolviendo $\mathbf{q}_j^{(4)}$ en función de $\lambda^{(4)}$ y llamando:

$$\hat{\mathbf{z}}_j = -(\mathbf{V}_{ij})^{-1}(6\mathbf{V}_{iklm}\mathbf{x}_k\mathbf{x}_l\mathbf{q}_m^{(2)} + 3\mathbf{V}_{ikl}\mathbf{q}_k^{(2)}\mathbf{q}_l^{(2)} + 4\mathbf{V}_{ikl}\mathbf{x}_k\mathbf{q}_l^{(3)}) \quad (3.100)$$

tenemos:

$$\mathbf{q}_j^{(4)} = \hat{\mathbf{z}}_j + \mathbf{y}_j\lambda^{(4)} \quad (3.101)$$

Trabajando con el potencial indicado la 5ta. ecuación de perturbaciones resulta:

$$\begin{aligned} 5\mathbf{V}_{ijkl}(2\mathbf{q}_j^{(1)}\mathbf{q}_k^{(1)}\mathbf{q}_l^{(3)} + 3\mathbf{q}_j^{(1)}\mathbf{q}_k^{(2)}\mathbf{q}_l^{(2)}) + 5\mathbf{V}_{ijk}(2\mathbf{q}_j^{(2)}\mathbf{q}_k^{(3)} + \\ \mathbf{q}_j^{(1)}\mathbf{q}_k^{(4)} + \mathbf{V}_{ij}\mathbf{q}_j^{(5)} + \mathbf{f}_i\lambda^{(5)} = 0 \end{aligned} \quad (3.102)$$

contrayendo esta ecuación, reemplazando (3.101) y despejando $\lambda^{(4)}$

$$\lambda^{(4)} = -\frac{\mathbf{V}_{ijkl}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j(2\mathbf{x}_k\mathbf{q}_j^{(3)} + 3\mathbf{q}_k^{(2)}\mathbf{q}_l^{(2)}) + \mathbf{V}_{ijk}\mathbf{x}_i(2\mathbf{q}_j^{(2)}\mathbf{q}_k^{(3)} + \mathbf{x}_j\hat{\mathbf{z}}_k)}{\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\mathbf{y}_k} \quad (3.103)$$

Parte II

ANALISIS DE ESTABILIDAD VIA M.E.F.

Capítulo 4

Discretización mediante elementos finitos

4.1. Formulación General

El método de Elementos Finitos permite expresar (en forma aproximada) el comportamiento de un sólido en función de un número finito de grados de libertad; en consecuencia resultan de aplicación los desarrollos expuestos en el capítulo 3.

Haciendo uso de una Formulación Lagrangeana Total la energía potencial total \mathbf{V} puede expresarse como la siguiente integral de volumen:

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2} \iiint_{V_0} \sigma^T \varepsilon dV - \mathbf{a}^T \left[\iiint_{V_0} \Phi \mathbf{b} dV + \int \int_{\Gamma_0} \mathbf{p} d\Gamma \right] \quad (4.1)$$

donde

$$\sigma = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}] \quad (4.2)$$

σ_{ij} son las componentes del 2do. tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff

$$\varepsilon = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{23}] \quad (4.3)$$

ε_{ij} son las componentes del tensor de deformaciones de Green-Lagrange

V_0 es el volumen de la estructura en la geometría indeformada

Γ_0 es la parte de la superficie de la estructura indeformada donde se conocen los esfuerzos

\mathbf{a} son las coordenadas generalizadas que definen la configuración del sistema (desplazamientos nodales).

Φ es una matriz que contiene las funciones de interpolación que ligan las coordenadas generalizadas con los desplazamientos en un punto cualquiera de la estructura (\mathbf{u}), de tal forma que:

$$\mathbf{u} = \Phi \mathbf{a} \quad (4.4)$$

\mathbf{b} son las fuerzas másicas actuantes en V_0

\mathbf{p} son las fuerzas conocidas sobre el contorno Γ_0

Las acciones \mathbf{b} y \mathbf{p} son proporcionales a un factor o nivel de carga λ y a sus respectivas configuraciones de carga de referencia ($\mathbf{b}_0, \mathbf{p}_0$)

$$\mathbf{b} = \lambda \mathbf{b}_0, \quad \mathbf{p} = \lambda \mathbf{p}_0 \quad (4.5)$$

Las deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$ se escriben en función de los desplazamientos nodales \mathbf{a} como

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}(\mathbf{a})\mathbf{a} \quad (4.6)$$

en tanto que las tensiones se relacionan con estas últimas a través de la matriz de elasticidad \mathbf{D}

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.7)$$

El operador \mathbf{B} puede descomponerse en una parte (\mathbf{B}_0) independiente de \mathbf{a} y otra (\mathbf{B}_1) dependiente de \mathbf{a} (la cual puede demostrarse que depende linealmente de \mathbf{a}):

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1(\mathbf{a}) \quad (4.8)$$

El Principio de Mínima Energía Potencial Total puede escribirse como N ecuaciones algebraicas:

$$\mathbf{V}_i = \frac{1}{2} \iiint_{V_0} (\boldsymbol{\sigma}_i \boldsymbol{\varepsilon}^T + \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}_i^T) dV - \lambda \mathbf{f}^i = \mathbf{0} \quad (4.9)$$

donde N es también el número de grados de libertad. Las derivadas de las deformaciones definidas en (4.9) resultan

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = [\mathbf{B}_0^i + \mathbf{B}_1^i(\mathbf{a})] + \mathbf{B}_1(\delta_i^j)\mathbf{a} = \mathbf{B}_0^i + 2\mathbf{B}_1^i(\mathbf{a}) \quad (4.10)$$

donde un subíndice indica derivación respecto a la componente i de \mathbf{a} , un supraíndice indica la columna de la matriz correspondiente y δ_i^j es la delta de Kroenecker que aquí representa un vector cuyas componentes son nulas excepto la i que vale 1. Notar que la definición del potencial de las cargas a través de (4.1) implica que éstas no cambian de dirección durante la deformación. Las fuerzas nodales consistentes pueden escribirse como

$$\mathbf{f}^T = \left[\iiint_{V_0} \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{b}_0 dV + \iint_{\Gamma_0} \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{p}_0 d\Gamma \right] \quad (4.11)$$

Usando la ecuación (4.7) se puede escribir:

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_i = \mathbf{D}[\mathbf{B}_0^i + 2\mathbf{B}_1^i(\mathbf{a})] \quad (4.12)$$

reemplazando (4.10)-(4.12) en la ecuación (4.9), las ecuaciones de equilibrio resultan

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_i &= \frac{1}{2} \iiint_{V_0} \{[\mathbf{B}_0^i + 2\mathbf{B}_1^i(\mathbf{a})]^T \mathbf{D}[\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_1^i(\mathbf{a})] \mathbf{a} \\ &+ \mathbf{a}^T [\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1(\mathbf{a})]^T \mathbf{D}[\mathbf{B}_1^i + 2\mathbf{B}_1^i(\mathbf{a})]\} dV - \lambda \mathbf{f}^i = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Para resolver el presente problema (4.13) por medio de un algoritmo numérico es necesario derivar este conjunto de ecuaciones no lineales respecto a los desplazamientos nodales, lo que permite, partiendo de un punto de equilibrio conocido, resolver esta ecuación en forma incremental;

$$\mathbf{V}_{ij} = \frac{1}{2} \iiint_{V_0} (\boldsymbol{\sigma}_{ij}^T \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\sigma}_i^T \boldsymbol{\varepsilon}_j + \boldsymbol{\sigma}_j^T \boldsymbol{\varepsilon}_i + \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}) dV \quad (4.14)$$

con

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = 2\mathbf{B}_1(\delta_i^k) \delta_j^l = 2\mathbf{B}_1^j(\delta_i^k) \quad (4.15)$$

similarmente

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} = \mathbf{D}2\mathbf{B}_1^j(\delta_i^k) \quad (4.16)$$

reemplazando estas dos últimas en la (4.14)

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{ij} &= \frac{1}{2} \iiint_{V_0} \{[2\mathbf{B}_1^j(\delta_i^k)]^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} + [\mathbf{B}_0^i + 2\mathbf{B}_1^i(\mathbf{a})] \mathbf{D}[\mathbf{B}_0^j + 2\mathbf{B}_1^j(\mathbf{a})] \\ &+ [\mathbf{B}_0^j + 2\mathbf{B}_1^j(\mathbf{a})]^T \mathbf{D}[\mathbf{B}_0^i + 2\mathbf{B}_1^i(\mathbf{a})] + \boldsymbol{\sigma}^T [2\mathbf{B}_1^j(\delta_i^k)]\} dV \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{ij} &= \frac{1}{2} \iiint_{V_0} \{[\mathbf{B}_0^i]^T \mathbf{D}\mathbf{B}_0^j + [\mathbf{B}_0^j]^T \mathbf{D}\mathbf{B}_0^i + 2[\mathbf{B}_1^j(\delta_i^k)]^T \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^T 2\mathbf{B}_1^j(\delta_i^k) \\ &+ [\mathbf{B}_0^i]^T \mathbf{D}[2\mathbf{B}_1^j(\mathbf{a})] + [2\mathbf{B}_1^j(\mathbf{a})]^T \mathbf{D}\mathbf{B}_0^i + [\mathbf{B}_0^j]^T \mathbf{D}[2\mathbf{B}_1^i(\mathbf{a})] + [2\mathbf{B}_1^i(\mathbf{a})]^T \mathbf{D}\mathbf{B}_0^j \\ &+ [2\mathbf{B}_1^i(\mathbf{a})]^T \mathbf{D}[2\mathbf{B}_1^j(\mathbf{a})] + [2\mathbf{B}_1^j(\mathbf{a})]^T \mathbf{D}[2\mathbf{B}_1^i(\mathbf{a})]\} dV \end{aligned} \quad (4.17)$$

Las componentes de \mathbf{V}_{ij} forman una matriz que denominaremos \mathbf{K}_T (matriz de rigidez tangente)

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_\sigma + \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 \quad (4.18)$$

donde \mathbf{K}_0 es la bien conocida matriz de rigidez de pequeños desplazamientos usada en el análisis lineal

$$\mathbf{K}_0^{ij} = \frac{1}{2} \iiint_{V_0} \{[\mathbf{B}_0^i]^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0^j + [\mathbf{B}_0^j]^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0^i\} dV \quad (4.19)$$

\mathbf{K}_σ es la matriz de tensiones iniciales o de carga geometría

$$\mathbf{K}_\sigma^{ij} = \frac{1}{2} \iiint_{V_0} \{[2\mathbf{B}_1^j(\delta_i^k)]^T \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^T [2\mathbf{B}_1^j(\delta_i^k)]^T\} dV \quad (4.20)$$

y \mathbf{K}_1 y \mathbf{K}_2 son las componentes de la matriz de grandes desplazamientos

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1^{ij} &= \frac{1}{2} \iiint_{V_0} \{[\mathbf{B}_0^i]^T \mathbf{D} 2\mathbf{B}_1^j(\mathbf{a}) + [2\mathbf{B}_1^j(\mathbf{a})]^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0^i + [\mathbf{B}_0^j]^T \mathbf{D} [2\mathbf{B}_1^i(\mathbf{a})] \\ &+ [2\mathbf{B}_1^i(\mathbf{a})]^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0^j\} dV \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\mathbf{K}_2^{ij} = \frac{1}{2} \iiint_{V_0} \{[2\mathbf{B}_1^i(\mathbf{a})]^T \mathbf{D} [2\mathbf{B}_1^j(\mathbf{a})] + [2\mathbf{B}_1^j(\mathbf{a})]^T \mathbf{D} [2\mathbf{B}_1^i(\mathbf{a})]\} dA \quad (4.22)$$

Finalmente la ecuación incremental queda en la forma

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{a} - \Delta \lambda \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (4.23)$$

Si se considera que los desplazamientos son pequeños (se desprecia la influencia de \mathbf{B}_1) la (4.22) resulta simplemente:

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{a} = \lambda \mathbf{f} \quad (4.24)$$

Para realizar un análisis de estabilidad con trayectorias precríticas lineales (en la cual $\boldsymbol{\sigma}$ es proporcional a λ) hay que resolver el siguiente problema de autovalores:

$$\mathbf{K}_0 + \lambda \mathbf{K}_\sigma(\boldsymbol{\sigma}_0) \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \quad (4.25)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}_0$ es el estado tensional para el valor de carga de referencia ($\lambda = 1$) obtenido con la ecuación (4.24) y $\boldsymbol{\phi}$ es el modo crítico.

Análisis de estabilidad con trayectorias poscríticas no lineales pueden resolverse llevando a cabo un análisis no lineal hasta que ocurra una bifurcación. Dicha bifurcación se detecta resolviendo un problema de autovalores de la forma:

$$[\mathbf{K}_T + \Delta \lambda \mathbf{K}'_T] \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \quad (4.26)$$

donde \mathbf{K}'_T es la derivada de la matriz tangente respecto al parámetro de carga λ ; para obtener dicha matriz recordando que $\mathbf{K}_T^{ij} = \mathbf{V}_{ij}$, observemos que:

$$\frac{d\mathbf{V}_{ij}}{d\lambda} = \mathbf{V}_{ijk} \frac{d\mathbf{a}_k}{d\lambda} \quad (4.27)$$

de (4.23) obtenemos que:

$$\frac{d\mathbf{a}}{d\lambda} = \mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{f} = \mathbf{a}' \quad (4.28)$$

que es equivalente a usar perturbaciones sobre la trayectoria primaria con λ como parámetro. Notar que ()' es una derivada total en este caso. En tanto que \mathbf{V}_{ijk} se obtiene a partir de las (4.14)-(4.22)

$$\mathbf{V}_{ijk} = \frac{1}{2} \iiint_{V_0} \sigma_{ij}^T \boldsymbol{\varepsilon}_k + \sigma_{ik}^T \boldsymbol{\varepsilon}_j + \sigma_i^T \boldsymbol{\varepsilon}_{jk} + \sigma_{jk}^T \boldsymbol{\varepsilon}_i + \sigma_j^T \boldsymbol{\varepsilon}_{ik} + \sigma_k^T \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} dV \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{ijk} = & \frac{1}{2} \iiint_{V_0} \{ [2\mathbf{B}_1^j(\delta_i^l)]^T \mathbf{D} [\mathbf{B}_0^k + 2\mathbf{B}_1^k(\mathbf{a})] + [\mathbf{B}_0^k + 2\mathbf{B}_1^k(\mathbf{a})]^T \mathbf{D} [2\mathbf{B}_1^j(\delta_i^l)] \\ & + [\mathbf{B}_0^i]^T \mathbf{D} [2\mathbf{B}_1^j(\delta_k^l)] + [2\mathbf{B}_1^j(\delta_k^l)]^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0^i + [\mathbf{B}_0^j]^T \mathbf{D} [2\mathbf{B}_1^i(\delta_k^l)] + [2\mathbf{B}_1^i(\delta_k^l)]^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0^j \\ & + [2\mathbf{B}_1^i(\mathbf{a})]^T \mathbf{D} [2\mathbf{B}_1^j(\delta_k^l)] + [2\mathbf{B}_1^j(\delta_k^l)]^T \mathbf{D} [2\mathbf{B}_1^i(\mathbf{a})] + [2\mathbf{B}_1^i(\delta_k^l)]^T \mathbf{D} [2\mathbf{B}_1^j(\mathbf{a})] \\ & + [\mathbf{B}_1^j(\mathbf{a})]^T \mathbf{D} [2\mathbf{B}_1^i(\delta_k^l)] \} dV \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}'_{ij} = & \mathbf{V}_{ijk} \mathbf{a}'_k = \mathbf{K}'_T = \frac{1}{2} \int \int \int_{V_0} \{ [2\mathbf{B}_1^j(\delta_i^l)]^T \mathbf{D} [\mathbf{B}_0 + 2\mathbf{B}_1(\mathbf{a})] \mathbf{a}' \\ & + \mathbf{a}'^T [\mathbf{B}_0 + 2\mathbf{B}_1(\mathbf{a})]^T \mathbf{D} [2\mathbf{B}_1^j(\delta_i^l)] + [\mathbf{B}_0]^T \mathbf{D} [2\mathbf{B}_1^j(\mathbf{a}')] + [2\mathbf{B}_1^j(\mathbf{a}')]^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0^i \\ & + [\mathbf{B}_0^j]^T \mathbf{D} [2\mathbf{B}_1^i(\mathbf{a}')] + [2\mathbf{B}_1^i(\mathbf{a}')]^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0^j + [2\mathbf{B}_1^i(\mathbf{a})]^T \mathbf{D} [2\mathbf{B}_1^j(\mathbf{a}')] \\ & + [2\mathbf{B}_1^j(\mathbf{a}')]^T \mathbf{D} [2\mathbf{B}_1^i(\mathbf{a})] + [2\mathbf{B}_1^i(\mathbf{a}')]^T \mathbf{D} [2\mathbf{B}_1^j(\mathbf{a})] \\ & + [2\mathbf{B}_1^j(\mathbf{a})]^T \mathbf{D} [2\mathbf{B}_1^i(\mathbf{a}')] \} dV \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\mathbf{K}'_T = \mathbf{K}'_\sigma + \mathbf{K}'_1 + \mathbf{K}'_2 \quad (4.32)$$

Notar que, si bien \mathbf{V}_{ijk} es un arreglo tridimensional, éste no es calculado en ningún momento sino que se calcula directamente el producto $\mathbf{V}_{ijk} \mathbf{a}'_k$ que es una matriz. Similarmente todas las integrales necesarias para implementar los desarrollos del Cap.3 corresponden normalmente a vectores o escalares que resultan de la contracción de índices (producto interno) de arreglos de hasta dimensión cuatro con vectores.

Finalmente la derivada cuarta del potencial se expresa:

$$\mathbf{V}_{ijkl} = \frac{1}{2} \iiint_{V_0} \sigma_{ij}^T \boldsymbol{\varepsilon}_{kl} + \sigma_{ik}^T \boldsymbol{\varepsilon}_{jl} + \sigma_{il}^T \boldsymbol{\varepsilon}_{jk} + \sigma_{jk}^T \boldsymbol{\varepsilon}_{il} + \sigma_{jl}^T \boldsymbol{\varepsilon}_{ik} + \sigma_{kl}^T \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} dV \quad (4.33)$$

reemplazando (4.15) y (4.16) en (4.33) tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_{ijkl} &= \frac{1}{2} \iiint_{V_0} ([2\mathbf{B}_1^j(\delta_i^m)]^T \mathbf{D}[2\mathbf{B}_1^k(\delta_l^m)] + [2\mathbf{B}_1^k(\delta_l^m)]^T \mathbf{D}[2\mathbf{B}_1^j(\delta_i^m)]) \\
&+ [2\mathbf{B}_1^i(\delta_l^m)]^T \mathbf{D}[2\mathbf{B}_1^j(\delta_k^m)] + [2\mathbf{B}_1^j(\delta_k^m)]^T \mathbf{D}[2\mathbf{B}_1^i(\delta_l^m)] \\
&+ [2\mathbf{B}_1^i(\delta_k^m)]^T \mathbf{D}[2\mathbf{B}_1^j(\delta_l^m)] + [2\mathbf{B}_1^j(\delta_l^m)]^T \mathbf{D}[2\mathbf{B}_1^i(\delta_k^m)]) dV
\end{aligned} \tag{4.34}$$

4.2. Aproximación por Elementos Finitos Semianalíticos

4.2.1. Descripción e Identificación de Operadores

Debido a las características de simetría de las láminas de revolución resulta muy conveniente el uso de elementos finitos semianalíticos, en los cuales se discretiza el meridiano con interpolación de elementos finitos convencionales, en tanto que el comportamiento en la dirección del paralelo se modela mediante series de Fourier. La conveniencia y popularidad de esta formulación radica en que para ciertos tipos de análisis (lineal, bifurcación bajo cargas axilsimétricas) las ecuaciones algebraicas a resolver resultan desacopladas para cada armónica de Fourier considerada. Además, siendo que es necesario utilizar elementos con continuidad \mathbf{C}^1 , resulta mucho más fácil asegurar la necesaria continuidad inter elementos que para el caso de considerar elementos de doble curvatura bidimensionales.

Asumiendo que las cargas y el comportamiento tienen un plano meridional de simetría los desplazamientos en coordenadas locales pueden expresarse como:

$$\begin{aligned}
u(x_1, x_2) &= \sum_{i=1}^n u_i(x_1) \cos J_i x_2 \\
v(x_1, x_2) &= \sum_{i=1}^n v_i(x_1) \sin J_i x_2 \\
w(x_1, x_2) &= \sum_{i=1}^n w_i(x_1) \cos J_i x_2
\end{aligned} \tag{4.35}$$

donde n es el número de armónicas consideradas en el análisis (notar que la elección de las n armónicas es arbitraria), J_1, J_2, \dots, J_n son las armónicas consideradas y los u_i, v_i, w_i son los coeficientes de Fourier correspondientes; escrito en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \cos J_i x_2 & & & & & \\ & \sin J_i x_2 & & & & \\ & & \cos J_i x_2 & & & \\ & & & \sin J_i x_2 & & \\ & & & & \cos J_i x_2 & \\ & & & & & \sin J_i x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi \\ & \Phi \\ & & \Psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}^u \\ \mathbf{a}^v \\ \mathbf{a}^w \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

donde las $\Phi(x_1)$ son las funciones que interpolan los desplazamientos membranales y $\Psi(x_1)$ son las funciones de interpolación de los desplazamientos normales a la superficie media; usualmente estas últimas son polinomios de orden superior a los primeros. El vector \mathbf{a} ha sido subdividido para cada armónica J_i ; indicaremos por un supraíndice izquierdo la armónica a la que corresponde un operador, vector o matriz.

$$\mathbf{a} = [{}^1\mathbf{a}, {}^2\mathbf{a}, \dots, {}^n\mathbf{a}] \quad (4.37)$$

y dentro de cada uno de ellos se los agrupado según sobre que desplazamientos locales tiene influencia;

$${}^i\mathbf{a} = {}^i[\mathbf{a}^u, \mathbf{a}^v, \mathbf{a}^w] \quad (4.38)$$

Considerando las ec. (4.8) las deformaciones pueden escribirse como la suma de una parte lineal en \mathbf{a} y una no lineal:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}' + \boldsymbol{\varepsilon}'' = \mathbf{B}_0\mathbf{a} + \mathbf{B}_1(\mathbf{a})\mathbf{a} \quad (4.39)$$

Reemplazando las (4.36) en las relaciones cinemáticas (2.6) y (2.7) la parte lineal se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ 2\varepsilon'_{12} \\ \chi'_{11} \\ \chi'_{22} \\ 2\chi'_{12} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \underbrace{\begin{bmatrix} \cos J_i x_2^i & & & & & \\ & \cos J_i x_2^i & & & & \\ & & \sin J_i x_2^i & & & \\ & & & \cos J_i x_2 & & \\ & & & & \cos J_i x_2 & \\ & & & & & \sin J_i x_2 \end{bmatrix}}_{{}^i\mathbf{C}} [{}^i\mathbf{B}_0] \begin{bmatrix} \mathbf{a}^u \\ \mathbf{a}^v \\ \mathbf{a}^w \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

en la cual ${}^i\mathbf{B}_0$ es:

$${}^i\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_k & 0 & \psi_k/r_1 \\ -\varphi_k \frac{\sin \phi}{r} & \varphi_k J_i/r & \psi_k/r_2 \\ -\varphi_k J_i/r & \dot{\varphi}_k + \varphi_k \frac{\sin \phi}{r} & 0 \\ \frac{\dot{\varphi}_k}{r_1} + \varphi_k \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} & 0 & \ddot{\psi}_k \\ -\varphi_k \frac{\sin \phi}{r r_1} & -\varphi_k \frac{J_i}{r r_2} & -\dot{\psi}_k \frac{\sin \phi}{r} + \psi_k \left(\frac{J_i}{r}\right)^2 \\ \frac{\varphi_k}{2r} J_i \left(\frac{3}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) & \frac{1}{2r} (\dot{\varphi}_k + \varphi_k \sin \phi) \left(\frac{3}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) & \psi_k \frac{2J_i \sin \phi}{r^2} + \psi_k \frac{2J_i}{r} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

donde $(\dot{})$ indica derivada respecto a x_1 y φ_k y ψ_k son las componentes de Φ y Ψ respectivamente; en tanto que la parte no lineal puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon''_{11} \\ \varepsilon''_{22} \\ 2\varepsilon''_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & \beta \\ 0 & \beta_2 & \beta \\ \beta_2 & \beta_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{A} \boldsymbol{\beta} = \mathbf{B}_1(\mathbf{a}) \mathbf{a} \quad (4.42)$$

el vector $\boldsymbol{\beta}$ puede expresarse como:

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \underbrace{\begin{bmatrix} \cos J_i x_2^i & & \\ & \sin J_i x_2^i & \\ & & \sin J_i x_2^i \end{bmatrix}}_{{}^i\bar{\mathbf{C}}} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n {}^i\bar{\mathbf{C}} [{}^i\mathbf{G}]^i \begin{bmatrix} \mathbf{a}^u \\ \mathbf{a}^v \\ \mathbf{a}^w \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

el operador ${}^i\mathbf{G}$ que relaciona los giros de la normal con las coordenadas generalizadas se obtiene de reemplazar las (4.36) en las (2.8):

$${}^i\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \varphi_k/r_1 & 0 & -\dot{\psi}_k \\ 0 & \varphi_k \frac{\cos \phi}{r} & \varphi_k J_i/r \\ \varphi_k J_i/2r & \frac{1}{2} (\dot{\varphi}_k - \varphi_k \frac{\sin \phi}{r}) & 0 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

en tanto que \mathbf{A} puede expresarse como:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} {}^i\beta_1 \cos J_i x_2 & 0 & {}^i\beta \sin J_i x_2 \\ 0 & {}^i\beta_2 \sin J_i x_2 & {}^i\beta \sin J_i x_2 \\ {}^i\beta_2 \sin J_i x_2 & {}^i\beta_1 \cos J_i x_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

finalmente:

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{a}) = \mathbf{A} [{}^1\bar{\mathbf{C}}^1\mathbf{G}, {}^2\bar{\mathbf{C}}^2\mathbf{G}, \dots, {}^n\bar{\mathbf{C}}^n\mathbf{G}] \quad (4.46)$$

Las ecuaciones presentadas hasta aquí permiten expresar las derivadas de las deformaciones con respecto a una coordenada generalizada cualquiera $\mathbf{a}_i \equiv \mathbf{a}_k$ (componente k

de las componentes en la armónica J_r) en la forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \boldsymbol{\varepsilon}'_i + \boldsymbol{\varepsilon}''_i \quad (4.47)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}'_i = {}^r \mathbf{C} {}^r \mathbf{B}_0^k \equiv \mathbf{B}_0^i \quad (4.48)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}''_i = \mathbf{A}(\mathbf{a}) {}^r \bar{\mathbf{C}} {}^r \mathbf{G}^k \equiv 2\mathbf{B}_1^i \mathbf{a} \quad (4.49)$$

en tanto que la derivada segunda respecto a $\mathbf{a}_i \equiv {}^r \mathbf{a}_k$ y $\mathbf{a}_j \equiv {}^s \mathbf{a}_l$

$$\boldsymbol{\varepsilon}''_{ij} = \begin{bmatrix} {}^s \mathbf{G}^{l1} \cos J_s x_2 & & {}^s \mathbf{G}^{l3} \sin J_s x_2 \\ & {}^s \mathbf{G}^{l2} \sin J_s x_2 & {}^s \mathbf{G}^{l3} \sin J_s x_2 \\ {}^s \mathbf{G}^{l2} \sin J_s x_2 & {}^s \mathbf{G}^{l1} \cos J_s x_2 & \end{bmatrix} {}^r \bar{\mathbf{C}} {}^r \mathbf{G} \equiv 2\mathbf{B}^i(\delta_j^h) \quad (4.50)$$

Una vez obtenidos los operadores \mathbf{B}_0 y \mathbf{B}_1 y sus derivadas, es suficiente reemplazarlos en las ecuaciones (4.19)-(4.22) para obtener las matrices \mathbf{K}_0 , \mathbf{K}_σ , \mathbf{K}_1 y \mathbf{K}_2 . La primera de ellas resulta:

$${}^{rs} \mathbf{K}_0 = \frac{1}{2} \iint_A [{}^r \mathbf{B}_0^T {}^r \mathbf{C} \mathbf{D} {}^s \mathbf{C} {}^s \mathbf{B}_0 + {}^s \mathbf{B}_0^T {}^s \mathbf{C} \mathbf{D} {}^r \mathbf{C} {}^r \mathbf{B}_0] dA \quad (4.51)$$

donde ${}^{rs} \mathbf{K}_0$ es la submatriz que relaciona las coordenadas en la armónica J_r con las coordenadas en la armónica J_s ; observando que:

$$\int_0^{2\pi} {}^r \mathbf{C} \mathbf{D} {}^s \mathbf{C} dx_2 \begin{cases} 2\pi \mathbf{D} & \text{si } J_r = J_s = 0 \\ \pi \mathbf{D} & \text{si } J_r = J_s \neq 0 \\ 0 & \text{si } J_r \neq J_s \end{cases} \quad (4.52)$$

puede notarse que debido a estas propiedades de ortogonalidad de las funciones trigonométricas la matriz \mathbf{K}_0 resulta diagonal por bloques, donde cada bloque corresponde a las coordenadas generalizadas de cada armónica J_i . Esta condición permite que en caso de resolver las (4.24), correspondientes al análisis lineal, cada armónica sea resuelta por separado. Por otro lado la matriz \mathbf{K}_σ puede escribirse:

$${}^{rs} \mathbf{K}_\sigma = \iint_A \mathbf{G}^{Tr} \bar{\mathbf{C}} \mathbf{N} {}^s \bar{\mathbf{C}} {}^s \mathbf{G} dA \quad (4.53)$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathbf{N} &= \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & & \\ N_{12} & N_{22} & & \\ & & N_{11} + N_{22} & \\ & & & \end{bmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^n \left\{ \cos J_i x_2 \begin{bmatrix} N_{11} & & & \\ & N_{22} & & \\ & & N_{11} + N_{22} & \\ & & & \end{bmatrix} + \sin J_i x_2 \begin{bmatrix} & N_{12} & & \\ N_{12} & & & \\ & & & \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned} \tag{4.54}$$

si la carga fuese axilsimétrica, en tanto nos mantengamos sobre la trayectoria primaria, los esfuerzos serán axilsimétricos y nuevamente debido a las propiedades de ortogonalidad de las funciones trigonométricas la matriz \mathbf{K}_σ resulta diagonal por bloques. En tal caso cuando se resuelve el problema de autovalores (4.25) o (4.26), las ecuaciones resultan desacopladas para cada armónica que se considere. En consecuencia la bifurcación se produce de tal forma que el modo crítico tiene componentes sobre una sola armónica.

4.2.2. Determinación de puntos críticos bajo carga axilsimétrica

El caso de carga axilsimétrica es el más común dentro de las láminas de revolución, particularmente aquellas destinadas a actuar como recipientes de presión; por ello nos concentraremos ahora en obtener las expresiones necesarias para la implementación, usando elementos finitos, de la teoría expuesta en el Cap.3, cuando las cargas no varían en el sentido del paralelo.

Como ya se indicara, al ser las cargas axilsimétricas, la trayectoria primaria resulta íntegramente axilsimétrica, por lo que un seguimiento de las ecuaciones no lineales completas no resulta computacionalmente caro. Considerando entonces que sólo hay desplazamientos axilsimétricos, lo que implica que las sumatorias indicadas en (4.43), (4.45) y (4.54) se reducen a $J = 0$, y denominando:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_{11} & & & \\ & N_{22} & & \\ & & N_{11} + N_{22} & \\ & & & \end{bmatrix} \tag{4.55}$$

$$\bar{\boldsymbol{\beta}} = \beta_1 \begin{bmatrix} C_{11} & & & \\ C_{12} & & & \\ & & C_G & \\ & & & \end{bmatrix} \quad \bar{\bar{\boldsymbol{\beta}}} = \beta_1^2 \begin{bmatrix} C_{11} & & & \\ & C_G & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \tag{4.56}$$

las matrices \mathbf{K}_0 , \mathbf{K}_σ , \mathbf{K}_1 , \mathbf{K}_2 para $J_i \neq 0$ resultan

$${}^i \mathbf{K}_0 = \pi \int_0^{S_0} r {}^i \mathbf{B}_0^T \mathbf{D} {}^i \mathbf{B}_0 dx_1 \tag{4.57}$$

$${}^0\mathbf{K}'_{T^{ij}} = 2\pi \int_0^{S_0} r^0 [\mathbf{G}^{i1} \mathbf{B}_0^{i1} \mathbf{B}_0^{i2}] \begin{bmatrix} C_{11} (\varepsilon'_{11} + 3\beta_1 \beta'_1) & C_{11} \beta'_1 & C_{12} \beta'_1 \\ + C_{12} \varepsilon'_{22} & 0 & 0 \\ \text{Simétrico} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{j1} \\ \mathbf{B}_0^{j1} \\ \mathbf{B}_0^{j2} \end{bmatrix} dx_1 \quad (4.71)$$

Las expresiones (4.51) y (4.62) permiten realizar un avance incremental sobre la trayectoria axilsimétrica, en tanto las (4.51), (4.70) y (4.71) permiten plantear los problemas de autovalores para la determinación de los puntos críticos (nivel de carga λ y modo crítico \mathbf{x}), los que pueden obtenerse con la precisión que se desee.

4.2.3. Análisis Asintótico bajo Carga Axilsimétrica

Para determinar si la bifurcación es simétrica o asimétrica, hay que evaluar $\mathbf{V}_{ijk} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j \mathbf{x}_k$. Teniendo \mathbf{x} componentes en una sola armónica J_i , la integral se reduce a ésta; Al explicitar este producto aparecen en todos los términos productos entre funciones senos y cosenos de a 3 en la misma armónica J_i que integrados entre 0 y 2π se anulan (salvo que $J = 0$), de donde puede extraerse la siguiente conclusión:

En Cáscaras de Revolución Bajo Carga Axilsimétrica sólo es posible una Bifurcación SIMÉTRICA en Modos no Axilsimétricos.

4.2.3.1. Bifurcación en el modo $J = 0$

Determinado el modo crítico \mathbf{x} , definamos:

$$\dot{\varepsilon} = {}^0\mathbf{B}_0 \mathbf{x} \quad \text{y} \quad \dot{\beta} = {}^0\mathbf{G} \mathbf{x} \quad (4.72)$$

$\mathbf{V}_{ijk} \mathbf{x}_k = \dot{\mathbf{K}}_T$ puede obtenerse con la misma expresión que $\mathbf{V}_{ijk} \mathbf{y}_k$ (4.71) reemplazando ε' y β' por $\dot{\varepsilon}$ y $\dot{\beta}$; luego:

$$\mathbf{V}_{ijk} \mathbf{x}_j \mathbf{x}_k = \dot{\mathbf{K}}_T^{il} \mathbf{x}_l = \mathbf{F}_0^i \quad (4.73)$$

$$C = \mathbf{V}_{ijk} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j \mathbf{x}_k = \mathbf{x}^T \mathbf{F}_0 \quad (4.74)$$

si $C \cong 0$ (se usa \cong porque numéricamente es imposible obtener una igualdad) la bifurcación será simétrica, en tal caso:

$$\mathbf{z} = -\mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{F}_0 \quad (4.75)$$

en tanto que:

$$\mathbf{V}_{ijkl\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k\mathbf{x}_l} = 6\pi \int_0^{S_0} C_{11} {}^0\mathbf{G}^{i1} \dot{\beta}_1^3 dx_1 = \mathbf{F}_1^i \quad (4.76)$$

$$\mathbf{V}_{ijkl\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k\mathbf{x}_l} = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{F}_1 = A_0 \quad (4.77)$$

$$\mathbf{V}_{ijk\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\mathbf{z}_k} = \mathbf{z}^T \cdot \mathbf{F}_0 = A_1 \quad (4.78)$$

$$\mathbf{V}_{ijk\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\mathbf{y}_k} = \mathbf{y}^T \cdot \mathbf{F}_0 = A_2 \quad (4.79)$$

reemplazando estas expresiones en la (3.96) obtenemos:

$$\lambda^{(2)} = -\frac{A_0 + 3A_1}{3A_2} \quad (4.80)$$

$$\mathbf{q}^{(2)} = \mathbf{z} + \mathbf{y}\lambda^{(2)}$$

Para la determinación de la derivada tercera necesitamos:

$$\mathbf{V}_{ijk\mathbf{x}_j\mathbf{q}_k^{(2)}} = \dot{\mathbf{K}}_T^{il} \mathbf{q}_l^{(2)} = \mathbf{F}_2^i \quad (4.81)$$

$$\tilde{\mathbf{z}} = -\mathbf{K}_T^{-1}(\mathbf{F}_1 + 3\mathbf{F}_2) \quad (4.82)$$

$$\mathbf{V}_{ijkl\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k\mathbf{q}_l^{(2)}} = \mathbf{q}^{(2)T} \cdot \mathbf{F}_1 = A_3 \quad (4.83)$$

$$\mathbf{V}_{ijk\mathbf{x}_i\mathbf{q}_j^{(2)}\mathbf{q}_k^{(2)}} = \mathbf{q}^{(2)T} \cdot \mathbf{F}_2 = A_4 \quad (4.84)$$

$$\mathbf{V}_{ijk\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\tilde{\mathbf{z}}_k} = \tilde{\mathbf{z}}^T \cdot \mathbf{F}_0 = A_5 \quad (4.85)$$

de donde reemplazando en la (3.98):

$$\lambda^{(3)} = -\frac{6A_3 + 3A_4 + 4A_5}{4A_2} \quad (4.86)$$

Para el análisis de sensibilidad a imperfecciones, modeladas como un sistema de cargas (\mathbf{g} se obtiene de la expresión (4.11) usando las cargas correspondientes), la primera derivada no nula del parámetro de imperfección (ϵ) resulta:

$$\epsilon^{(3)} = 2\frac{A_0 + 3A_1}{A_6} \quad (4.87)$$

con

$$A_6 = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{g} \quad (4.88)$$

Por otro lado si (4.74) no se anula la bifurcación es asimétrica, entonces llamando:

$$\mathbf{V}_{ijk} \mathbf{x}_j \mathbf{y}_k = {}^0 \dot{\mathbf{K}}_T^{il} \mathbf{y}_l = \mathbf{F}_3^i \quad (4.89)$$

tenemos:

$$A = \mathbf{V}_{ijk} \mathbf{x}_i \mathbf{y}_j \mathbf{y}_k = \mathbf{y}^T \cdot \mathbf{F}_3 \quad (4.90)$$

$$B = 2\mathbf{V}_{ijk} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j \mathbf{y}_k = 2\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{F}_3 \quad (4.91)$$

con lo que podemos aplicar (3.30) y (3.9)

$$\lambda^{(1)} = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

$$\mathbf{q}^{(1)} = \mathbf{x} + \mathbf{y} \lambda^{(1)}$$

Para obtener la derivada segunda observemos que:

$$\mathbf{V}_{ijk} \mathbf{q}_j^{(1)} \mathbf{q}_k^{(1)} = \mathbf{V}_{ijk} \mathbf{x}_j \mathbf{x}_k + 2\lambda^{(1)} \mathbf{V}_{ijk} \mathbf{x}_j \mathbf{y}_k + \lambda^{(1)2} \mathbf{V}_{ijk} \mathbf{y}_j \mathbf{y}_k \quad (4.92)$$

llamando

$$\mathbf{F}_4^i = \mathbf{V}_{ijk} \mathbf{y}_j \mathbf{y}_k = {}^0 \mathbf{K}_T'^{il} \mathbf{y}_l \quad (4.93)$$

resulta

$$\mathbf{V}_{ijk} \mathbf{q}_j^{(1)} \mathbf{q}_k^{(1)} = \mathbf{F}_0^i + 2\lambda^{(1)} \mathbf{F}_3^i + \lambda^{(1)2} \mathbf{F}_4^i = \mathbf{F}_5 \quad (4.94)$$

de donde

$$\mathbf{z} = -{}^0 \mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{F}_5 \quad (4.95)$$

en tanto que

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{ijk} \mathbf{x}_i \mathbf{q}_j^{(1)} \mathbf{z}_k &= \mathbf{V}_{ijk} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j \mathbf{z}_k + \mathbf{V}_{ijk} \mathbf{x}_i \mathbf{y}_j \mathbf{z}_k \lambda^{(1)} \\ &= \mathbf{z}^T \cdot \mathbf{F}_0 + \lambda^{(1)} \mathbf{z}^T \cdot \mathbf{F}_3 = B_1 \end{aligned} \quad (4.96)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{ijk\mathbf{x}_i\mathbf{q}_j^{(1)}}\mathbf{y}_k &= \mathbf{V}_{ijk\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j}\mathbf{y}_k + \mathbf{V}_{ijk\mathbf{x}_i\mathbf{y}_j}\mathbf{y}_k\lambda^{(1)} \\ &= \frac{B}{2} + \lambda^{(1)}A = B_2 \end{aligned} \quad (4.97)$$

$$\mathbf{V}_{ijkl\mathbf{x}_i\mathbf{q}_j^{(1)}\mathbf{q}_k^{(1)}\mathbf{q}_l^{(1)}} = 6\pi \int_0^{S_0} rC_{11}\dot{\beta}_1\beta_1^{(1)3} dx_1 = B_3 \quad (4.98)$$

donde

$$\beta_1^{(1)} = {}^0\mathbf{G}^{i1}q_i^{(1)} \quad (4.99)$$

observando la (3.93) y reemplazando las tres últimas expresiones obtenidas resulta:

$$\lambda^{(2)} = -\frac{B_3 + 3B_1}{3B_2} \quad (4.100)$$

$$\mathbf{q}^{(2)} = \mathbf{z} + \mathbf{y}\lambda^{(2)}$$

Para el análisis de sensibilidad a imperfecciones (representadas por el vector de cargas \mathbf{g}) tenemos que:

$$\lambda^{M(1)} = -2C/B$$

$$\mathbf{q}^{M(1)} = \mathbf{x} + \mathbf{y}\lambda^{M(1)}$$

$$\epsilon^{(2)} = \frac{2C - A\lambda^{M(1)2}}{A_6} \quad (4.101)$$

4.2.3.2. Bifurcación en $J \neq 0$

Debido a la complejidad creciente que presentan las expresiones a medida que se calculan las derivadas superiores del esquema de perturbaciones, y con el objeto de evitar errores, los siguientes desarrollos han sido realizados con la ayuda de un manipulador simbólico [REDUCE (1987)], razón por la cual no se presentan en forma detallada los pasos intermedios.

Se demuestra que con el esquema de perturbaciones propuesto basta retener como armónicas aquellas que son múltiplos enteros de J , por ello en lo que sigue el supraíndice izquierdo indicará el factor correspondiente. Siendo la bifurcación simétrica ($\lambda^{(1)} = 0$, $\mathbf{q}_j^{(1)} = \mathbf{x}_j$) para calcular las derivadas segundas necesitamos el vector $\mathbf{V}_{ijk\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k}$ cuyas componentes no nulas son exclusivamente en las armónicas 0 y $2J$; llamando ${}^0\mathbf{c}$ y ${}^2\mathbf{c}$ a las

componentes de $\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k$ en las armónicas 0 y 2J respectivamente éstas pueden calcularse mediante las siguientes integrales:

$${}^0\mathbf{c}^i = \pi \int_0^{S_0} r^0 [\mathbf{B}_0^{i1} \mathbf{B}_0^{i2} \mathbf{G}^{i1}] \begin{bmatrix} C_{11}\dot{\beta}_1^2 + (C_{11} + C_{12})\dot{\beta}^2 + C_{12}\dot{\beta}_2^2 \\ C_{11}\dot{\beta}_1^2 + (C_{22} + C_{12})\dot{\beta}^2 + C_{22}\dot{\beta}_2^2 \\ \beta_1(3C_{11}\dot{\beta}_1^2 + (C_{11} + C_{12})\dot{\beta}^2 + (C_{11} + 2C_G)\dot{\beta}_2^2 + \\ + 2(C_{11}\dot{\epsilon}_1 + C_{11}\dot{\epsilon}_2)\dot{\beta}_1 + C_G\dot{\epsilon}\dot{\beta}_2) \end{bmatrix} \quad (4.102)$$

$${}^2\mathbf{c}^i = \frac{\pi}{2} \int_0^{S_0} r^2 [\mathbf{B}_0^{i1} \mathbf{B}_0^{i2} \mathbf{B}_0^{i3} \mathbf{G}^{i1} \mathbf{G}^{i2} \mathbf{G}^{i3}]$$

$$\begin{bmatrix} C_{11}\dot{\beta}_1^2 - (C_{11} + C_{12})\dot{\beta}^2 - C_{12}\dot{\beta}_2^2 \\ C_{11}\dot{\beta}_1^2 - (C_{22} + C_{11})\dot{\beta}^2 - C_{22}\dot{\beta}_2^2 \\ 2C_G\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 \\ \beta_1(3C_{11}\dot{\beta}_1^2 - (C_{11} + C_{12})\dot{\beta}^2 - (C_{12} + 2C_G)\dot{\beta}_2^2 + 2(C_{11}\dot{\epsilon}_1 + C_{12}\dot{\epsilon}_2)\dot{\beta}_1 - C_G\dot{\epsilon}\dot{\beta}_2) \\ 2(\beta_1(C_{11} + 2C_G)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + (C_{11}\dot{\epsilon}_1 + C_{22}\dot{\epsilon}_2)\dot{\beta}_2 + C_G\dot{\epsilon}\dot{\beta}_1) \\ 2\dot{\beta}((C_{11} + C_{12})(\beta_1\dot{\beta}_1 + \dot{\epsilon}_1) + (C_{22} + C_{12})\dot{\epsilon}_2) \end{bmatrix} dx \quad (4.103)$$

Estas integrales permiten calcular:

$${}^0\mathbf{z} = -{}^0\mathbf{K}_T^{-1} {}^0\mathbf{c} \quad {}^2\mathbf{z} = -{}^2\mathbf{K}_T^{-1} {}^2\mathbf{c} \quad (4.104)$$

A continuación notemos que

$$\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\mathbf{z}_k = {}^0\mathbf{c} \cdot {}^0\mathbf{z} + {}^2\mathbf{c} \cdot {}^2\mathbf{z} \quad (4.105)$$

en tanto que

$$\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\mathbf{y}_k = {}^0\mathbf{c} \cdot \mathbf{y} \quad (4.106)$$

observando la (3.96) vemos que sólo resta entonces calcular $\mathbf{V}_{ijkl}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k\mathbf{x}_l$ para obtener $\lambda^{(2)}$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{ijkl}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k\mathbf{x}_l &= \frac{3}{4}\pi \int_0^{S_0} r \{3[C_{11}\dot{\beta}_1^4 + C_{22}\dot{\beta}_2^4 + (C_{11} + 2C_{12} + C_{22})\dot{\beta}^4] + \\ &+ 2[(C_{11} + C_{12})\dot{\beta}_1^2\dot{\beta}^2 + (C_{12} + 2C_G)\dot{\beta}_1^2\dot{\beta}_2^2 + 3(C_{22} + C_{12})\dot{\beta}_2^2\dot{\beta}^2]\} dx_1 \end{aligned} \quad (4.107)$$

de donde podemos finalmente obtener

$$\lambda^{(2)} = -\frac{\frac{1}{3}\mathbf{V}_{ijkl}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k\mathbf{x}_l + {}^0\mathbf{c} \cdot {}^0\mathbf{z} + {}^2\mathbf{c} \cdot {}^2\mathbf{z}}{{}^0\mathbf{c} \cdot \mathbf{y}} \quad (4.108)$$

en tanto que

$$\mathbf{q}^{(2)} = [{}^0\mathbf{z} + \mathbf{y}\lambda^{(2)}, {}^2\mathbf{z}] \quad (4.109)$$

Para calcular las derivadas terceras necesitamos el segundo miembro de la (3.97) $\mathbf{V}_{ijkl}\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k\mathbf{x}_l + 3\mathbf{V}_{ijk}\mathbf{q}_j^{(2)}\mathbf{x}_k$, ambos términos tienen componentes en las armónicas J y $3J$; llamando ${}^1\mathbf{d}$, ${}^3\mathbf{d}$ y ${}^1\mathbf{h}$ y ${}^3\mathbf{h}$ a las componentes en las armónicas J y $3J$ respectivamente del 1er y 2do término; y definiendo además:

$$\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} = {}^0\mathbf{B}_0({}^0\mathbf{z} + \mathbf{y}\lambda^{(2)}) \quad , \quad \ddot{\boldsymbol{\beta}} = {}^0\mathbf{G}({}^0\mathbf{z} + \mathbf{y}\lambda^{(2)}) \quad (4.110)$$

$$\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} = {}^2\mathbf{B}_0 {}^2\mathbf{z} \quad , \quad \ddot{\boldsymbol{\beta}} = {}^2\mathbf{G} {}^2\mathbf{z} \quad (4.111)$$

se tiene:

$${}^1\mathbf{d}^i = \frac{3}{4}\pi \int_0^{S_0} r^1 [\mathbf{G}^{i1} \mathbf{G}^{i2} \mathbf{G}^{i3}] \left[\begin{array}{l} \dot{\beta}_1(3C_{11}\dot{\beta}_1^2 + (C_{11} + C_{12})\dot{\beta}^2 + (C_{12} + 2C_G)\dot{\beta}_2^2) \\ \dot{\beta}_2((C_{12} + 2C_G)\dot{\beta}_1^2 + 3(\dot{C}_{22} + C_{12})\dot{\beta}^2 + 3C_{22}\dot{\beta}_2^2) \\ \dot{\beta}((C_{11} + C_{12})\dot{\beta}_1^2 + 3(C_{22} + C_{12})\dot{\beta}_2^2 + 3(C_{11} + 2C_{12} + C_{22})\dot{\beta}^2) \end{array} \right] dx_1 \quad (4.112)$$

$${}^3\mathbf{d}^i = \frac{3}{4}\pi \int_0^{S_0} r^3 [\mathbf{G}^{i1} \mathbf{G}^{i2} \mathbf{G}^{i3}] \left[\begin{array}{l} \dot{\beta}_1(C_{11}\dot{\beta}_1^2 + (C_{11} + C_{12})\dot{\beta}^2 + (C_{12} + 2C_G)\dot{\beta}_2^2) \\ -\dot{\beta}_2((C_{12} + 2C_G)\dot{\beta}_1^2 + (C_{22} + C_{12})\dot{\beta}^2 + C_{22}\dot{\beta}_2^2) \\ -\dot{\beta}((C_{11} + C_{12})\dot{\beta}_1^2 + (C_{22} + C_{12})\dot{\beta}_2^2 + (C_{11} + 2C_{12} + C_{22})\dot{\beta}^2) \end{array} \right] dx_1 \quad (4.113)$$

$${}^1\mathbf{h}^i = \frac{\pi}{2} \int_0^{S_0} r^1 [\mathbf{B}_0^{i1} \mathbf{B}_0^{i2} \mathbf{B}_0^{i3} \mathbf{G}^{i1} \mathbf{G}^{i2} \mathbf{G}^{i3}]$$

$$\left[\begin{array}{l} C_{11}\dot{\beta}_1(2\ddot{\beta}_1 + \ddot{\beta}_1) + C_{12}\dot{\beta}_2\ddot{\beta}_2 + (C_{11} + C_{12})\dot{\beta}\ddot{\beta} \\ C_{12}\dot{\beta}_1(2\ddot{\beta}_1 + \ddot{\beta}_1) + C_{22}\dot{\beta}_2\ddot{\beta}_2 + (C_{22} + C_{12})\dot{\beta}\ddot{\beta} \\ C_G(\dot{\beta}_1\ddot{\beta}_2 + \dot{\beta}_2(2\ddot{\beta}_1 - \ddot{\beta}_1)) \\ \beta_1(3C_{11}\dot{\beta}_1(2\ddot{\beta}_1 + \ddot{\beta}_1) + (C_{12} + 2C_G)\dot{\beta}_2\ddot{\beta}_2 + (C_{11} + C_{12})\dot{\beta}\ddot{\beta}) + C_{11}(\dot{\varepsilon}_1(2\ddot{\beta}_1 + \ddot{\beta}_1) \\ \beta_1(C_{12} + 2C_G)(\dot{\beta}_1\ddot{\beta}_2 + \dot{\beta}_2(2\ddot{\beta}_1 - \ddot{\beta}_1)) + C_{12}(\dot{\varepsilon}_1\ddot{\beta}_2 + \dot{\beta}_2(2\ddot{\varepsilon}_1 - \ddot{\varepsilon}_1)) \\ \beta_1(C_{11} + C_{12})(\dot{\beta}_1\ddot{\beta} + \dot{\beta}(2\ddot{\beta}_1 - \ddot{\beta}_1)) + (C_{11} + C_{12})(\dot{\varepsilon}_1\ddot{\beta} + \dot{\beta}(2\ddot{\varepsilon}_1 - \ddot{\varepsilon}_1)) \end{array} \right]$$

de imperfección resulta :

$$\epsilon^{(3)} = 2 \frac{\mathbf{V}_{ijkl} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j \mathbf{x}_k \mathbf{x}_l + 3(\mathbf{c}^T \cdot \mathbf{z} + \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{z})}{\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{g}} \quad (4.119)$$

notar que es necesario que el sistema de cargas que modela la imperfección tenga componente en la armónica J para que el análisis tenga sentido.

En este capítulo se ha presentado en forma general la aplicación de los desarrollos expuestos en el Cap.3 a una formulación de elementos finitos en desplazamientos, lo que permite el análisis en forma asintótica de la estabilidad elástica y de la sensibilidad a imperfecciones de múltiples tipos de estructuras. A continuación la formulación ha sido particularizada para láminas delgadas de revolución bajo carga axilsimétrica. En el Cap.8 se muestran la calidad de los resultados y las limitaciones de la formulación, en tanto que en el Cap.10 se presentan aplicaciones a algunas estructuras de interés.

Capítulo 5

Un Elemento Finito para Cáscaras de Revolución

5.1. Introducción

El elemento de cáscara de revolución más simple corresponde a un segmento de cono [Grafton y Strome (1963), Zienkiewicz et al (1977), Sarrazin y Jensen (1981)]; estos elementos han sido usados con éxito en cilindros, conos y placas, pero su utilización en láminas con meridiano curvo presenta problemas de convergencia, siendo necesario usar mallas muy finas para obtener resultados satisfactorios. Por otro lado los elementos de meridiano recto introducen imperfecciones geométricas inexistentes (cambios bruscos en la tangente al meridiano en la unión entre elementos) además de que la curvatura en la dirección x_1 es nula, características que introducen dificultades cuando se realiza análisis no lineal y de estabilidad del equilibrio; por estas razones la búsqueda se ha orientado a elementos curvos. Sin embargo, debe hacerse notar que en las discretizaciones por elementos finitos, normalmente la malla a utilizar está determinada por su capacidad para modelar el campo de desplazamientos mas que por la geometría; por esta razón el uso de funciones de interpolación de alto orden para la geometría (elementos subparamétricos) resulta innecesario y costoso desde el punto de vista computacional y de la entrada de datos.

Dentro de los elementos curvos el más simple proviene de hacer pasar una parábola cuadrática por tres puntos (los nudos extremos y uno en el interior). La desventaja de este elemento es que no asegura la continuidad de la normal entre elementos y su curvatura es prácticamente constante. Por otro lado se han propuesto elementos de orden superior que aseguran la continuidad entre elementos tanto de la tangente al meridiano como de su curvatura [Khojasteh-Bakht y Popov (1970), Brombolich y Gould (1972)]. Sin embargo estos mismos autores reconocen que los resultados obtenidos con órdenes de interpolación menores son enteramente satisfactorios.

En este capítulo se presenta un elemento finito curvo con desplazamientos generalizados como grados de libertad. La geometría es una parábola cúbica y mantiene la continuidad de la tangente entre elementos. Se discute la capacidad del elemento de modelar geometrías arbitrarias. Las funciones de interpolación propuestas son polinomios cúbicos para los desplazamientos membranales y quinticos para los normales a la superficie media. Se describen y discuten los problemas de cuerpo rígido y se presentan distintos ejemplos de análisis estático lineal existentes en la literatura, con el objeto de validar el elemento y mostrar las características de convergencia.

5.2. Geometría

Las principales características geométricas de una superficie de revolución (a los efectos de calcular deformaciones) son la orientación de la normal y el valor de la curvatura meridional en cada punto. Una buena modelización de la geometría debe entonces ser capaz de considerar adecuadamente estas características.

Quizás la elección más conveniente consista en sólo asegurar la continuidad de la tangente al meridiano entre elementos salvo en aquellos puntos donde haya efectivamente quiebres y ramificaciones), lo que asegura la continuidad de la curvatura κ_2 , en tanto que la mayor o menor continuidad de la curvatura del meridiano, κ_1 , resulte de una adecuada discretización. Bajo estas condiciones los polinomios que interpolan la geometría resultan de 3er grado (parábola cúbica).

Los parámetros que definen la geometría de cada elemento son las coordenadas r , z y la orientación de la normal en los nudos extremos. La interpolación usa como parámetro una coordenada proporcional a la longitud de arco y los polinomios son los de Hermite de primer orden. Para poder usar la longitud de arco como coordenada es necesario primero conocer la longitud del elemento, para lo cual se define un sistema cartesiano $x - y$, donde el eje x tiene origen en el primer nudo y forma un ángulo ϕ con el eje z (ver Fig.5.1).

$$\phi = (\phi_1 + \phi_2)/2 \quad \psi = (\phi_2 - \phi_1)/2 \quad (5.1)$$

$$x_1 = y_1 = 0 \quad (5.2)$$

$$x_2 = (r_1 - r_2) \sin \phi + (z_2 - z_1) \cos \phi \quad (5.3)$$

$$y_2 = (r_2 - r_1) \cos \phi + (z_2 - z_1) \sin \phi \quad (5.4)$$

$$\xi = 2x/x_2 - 1 \quad x = (\xi + 1)x_2/2 \quad (5.5)$$

$$y = \frac{1}{4}[(-\xi^3 + 3\xi + 2)y_2 + 2(\xi^2 - 1) \tan \psi \frac{x_2}{2}] \quad (5.6)$$

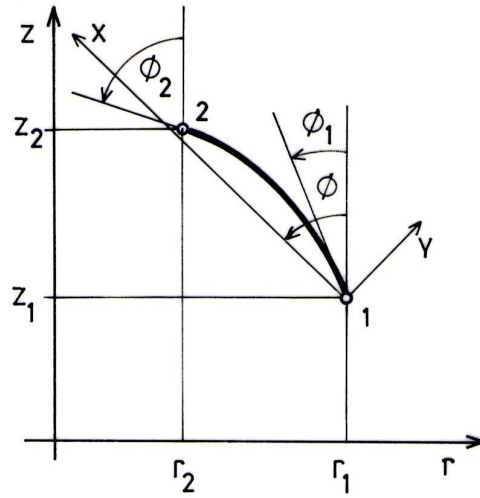


Figura 5.1: Geometría del elemento curvo

La longitud del elemento resulta:

$$S_0 = \int_{-1}^1 \sqrt{(a + b\xi + c\xi^2)^2 + d^2} d\xi \quad (5.7)$$

con

$$a = \frac{3}{4}y_2 = -c; \quad b = \tan \psi \frac{x_2}{2}; \quad d = \frac{x_2}{2} \quad (5.8)$$

La integral (5.7), evaluada en forma numérica con tres puntos de integración, arroja resultados satisfactorios. Finalmente, las funciones de interpolación propuestas para la geometría son:

$$\begin{aligned} r &= \psi_1 r_1 - \psi_2 \sin \phi_1 + \psi_3 r_2 - \psi_4 \sin \phi_2 \\ z &= \psi_1 z_1 + \psi_2 \cos \phi_1 + \psi_3 z_2 + \psi_4 \cos \phi_2 \end{aligned} \quad (5.9)$$

con

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{4}[\xi^3 - 3\xi + 2] \\ \psi_2 &= \frac{1}{4}[\xi^3 - \xi^2 - \xi + 1] \frac{S_0}{2} \\ \psi_3 &= \frac{1}{4}[-\xi^3 + 3\xi + 2] \\ \psi_4 &= \frac{1}{4}[\xi^3 + \xi^2 - \xi - 1] \frac{S_0}{2} \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$-1 \leq \xi \leq 1$$

En cuanto al espesor (que es el otro parámetro que define la geometría) a los fines prácticos es suficiente considerar una variación lineal en la longitud de arco. En consecuencia:

$$h = \varphi_1 h_1 + \varphi_2 h_2 \quad (5.11)$$

donde h_1 y h_2 son los espesores en los nudos extremos de los elementos y

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1-\xi}{2} \\ \varphi_2 &= \frac{1+\xi}{2} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Las siguientes facilidades geométricas son características de la presente formulación, como ya hiciera notar Delpak (1980)

(a) El elemento es enteramente conforme ya que la pendiente de la tangente (dr/dz) puede ser prescrita en cualquier punto (nudo) ingresando el mismo valor para el ángulo tangente al nudo 2 del elemento N y para el nudo 1 del elemento $N + 1$ (ver Fig.5.2)

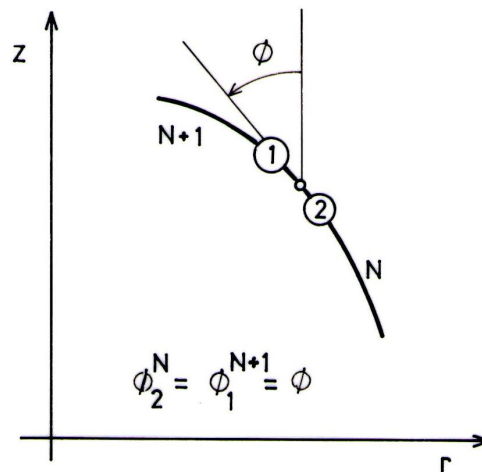


Figura 5.2: Intersección de elementos con tangente continua

(b) Un cambio abrupto en la pendiente de la cáscara puede ser modelado en la misma forma, simplemente introduciendo valores distintos para los ángulos tangentes al nudo común de elementos contiguos (ver Fig.5.3).

(c) Pueden tratarse cáscaras de revolución con ramificaciones. Las coordenadas (r, z) del nudo son únicas pero la intersección de cada elemento tiene su propio ángulo tangente (ver Fig.5.4). Posteriormente (5.3.1) se verá como manejar esto desde el punto de vista de los desplazamientos.

(d) Pueden modelarse cambios abruptos del espesor entre elementos.

Con el objeto de evaluar la exactitud con que se modela una curva arbitraria, se ha aproximado un cuarto de elipse con tres elementos. La distribución de los elementos se hizo de tal forma que la diferencia de las inclinaciones de la normal entre los nudos 1 y 2 de

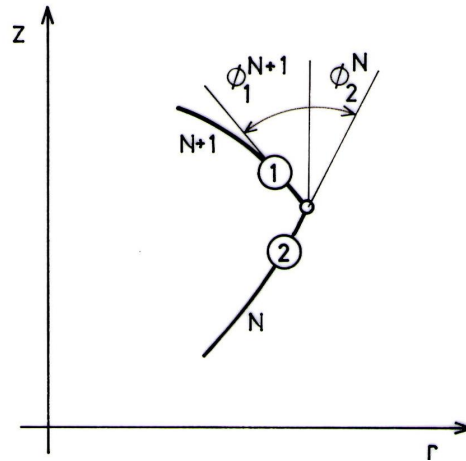


Figura 5.3: Intersección de elementos con tangente discontinua

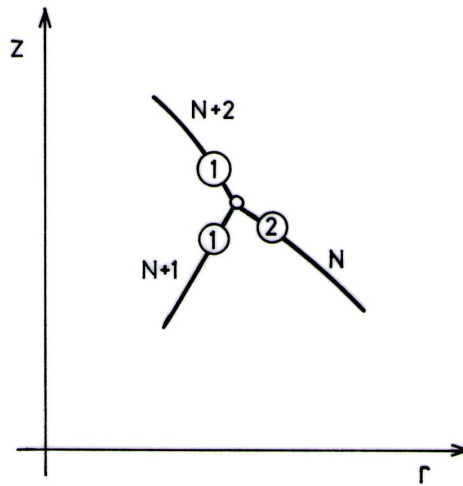


Figura 5.4: Cáscara compuesta ramificada

cada elemento fuese constante (30°) (ver Fig. 5.5). En la Tabla 5.1 se observan los errores relativos porcentuales en las coordenadas, la inclinación de la normal y la curvatura, en puntos que corresponde a los de integración por cuadratura de Gauss usando 4 puntos. Como era de esperar los mayores errores ocurren en la curvatura y se producen en el elemento de mayor longitud. Las diferencias en el ángulo de la normal son en general pequeñas; y un valor alto del error porcentual en el último punto se debe a que allí el valor del ángulo es casi cero. En tanto que el error en la longitud estimada de la elipse es del orden de 0,1 %

5.3. Desplazamientos

Las funciones de interpolación de los desplazamientos deberían tener las siguientes propiedades:

- (a) ser capaces de representar los movimientos de cuerpo rígido. Si este requisito no

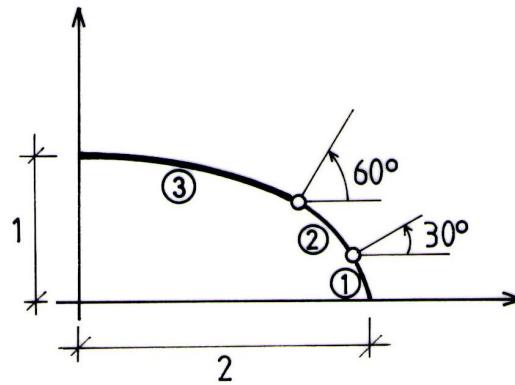


Figura 5.5: Discretización geométrica de una elipse con tres elementos

r, z	ϕ	κ_1
-0,00208	-0,11259	2,96887
-0,02166	-0,16768	-2,25395
-0,02167	0,18503	-1,55533
-0,00166	0,14547	4,21681
0,00698	0,30124	-4,58464
0,07653	0,36434	2,16733
0,06782	-0,46179	2,57888
0,00499	-0,30564	-5,31296
0,07756	1,76629	-10,12836
0,79861	2,48984	7,66908
0,66736	-5,90396	4,53739
0,04920	-15,59490	-12,46460

Cuadro 5.1: Errores porcentuales en la discretización geométrica

se cumple no se satisfacen condiciones de equilibrio del elemento.

(b) Contener todos los términos de menor orden de un conjunto completo de funciones. Esto asegura una convergencia monotónica a medida que se refina la malla.

(c) Satisfacer un grado mínimo de continuidad entre elementos. En el caso de láminas delgadas esto requiere no sólo la compatibilidad de los desplazamientos de la superficie media sino también de los giros de la normal para asegurar la continuidad de los desplazamientos en todo el espesor de la interfaz entre elementos, como queda claro de la Ec. (2.4). Este requisito asegura convergencia al resultado correcto al refinar la malla.

Si bien estas condiciones son importantes en el desarrollo de cualquier elemento finito, algunas de ellas pueden ser relajadas, ya sea local o globalmente, obteniendo resultados satisfactorios.

5.3.1. Funciones de Interpolación y Grados de Libertad

El presente elemento resulta de modificar uno relativamente simple que interpola (en coordenadas locales) en forma lineal los desplazamientos membranales (u, v) y en forma cúbica el desplazamiento normal a la superficie (w). Este elemento “padre” tiene dos nudos y cuatro grados de libertad por nudo como se indica en la Fig.5.6.

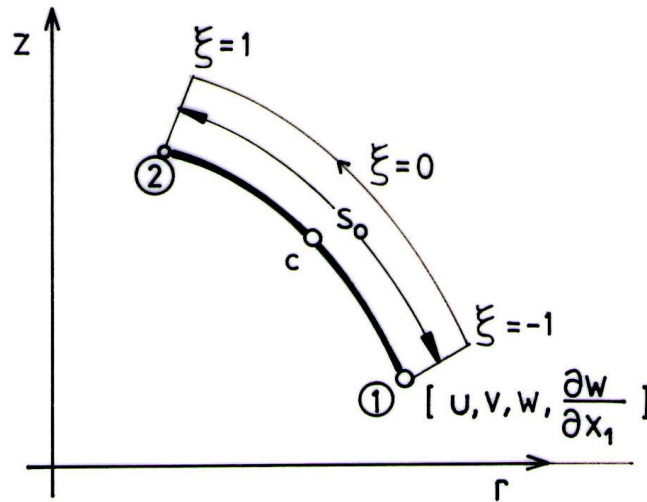


Figura 5.6: Elemento finito curvo de 8 grados de libertad

Las funciones de interpolación son:

$$\begin{aligned}
 u &= \varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 \\
 v &= \varphi_1 v_1 + \varphi_2 v_2 \\
 w &= \psi_1 w_1 + \psi_2 \frac{dw}{dx_1} + \psi_3 w_2 + \psi_4 \frac{dw}{dx_1}
 \end{aligned}
 \tag{5.13}$$

donde las φ_i y ψ_i son las mismas que las definidas en las (5.12) y (5.10). Si bien este elemento conduce a resultados satisfactorios para cáscaras con meridiano recto y, con una adecuada discretización, para cáscaras con meridiano curvo, resulta conveniente aumentar el orden de interpolación de los polinomios, lo que se traduce en una sensible disminución de los grados de libertad necesarios para resolver con la misma precisión un problema dado. Para aumentar el orden de interpolación se ha agregado un nudo central con seis grados de libertad $[\Delta u, \Delta \frac{\partial u}{\partial x_1}, \Delta v, \Delta \frac{\partial v}{\partial x_1}, \Delta w, \Delta \frac{\partial w}{\partial x_1}]$ donde Δ indica que cada grado de libertad no está directamente asociado al desplazamiento del nudo, sino a la diferencia respecto a las indicadas por las (5.13). El agregado de nudos internos a los elementos es una técnica muy común en elementos finitos, en especial cuando está asociada a técnicas de condensación estática; un elemento de cáscara de revolución donde el número de grados de libertad adicionales en el nudo central puede ser variable entre elementos ha sido desarrollado por

Delpak (1980). En definitiva, el elemento propuesto resulta de 14 grados de libertad y las funciones de interpolación son:

$$\begin{aligned}
 u &= \varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 + \varphi_3 \Delta u_c + \varphi_4 \Delta \frac{\partial u}{\partial x_1} \\
 v &= \varphi_1 v_1 + \varphi_2 v_2 + \varphi_3 \Delta v_c + \varphi_4 \Delta \frac{\partial v}{\partial x_1} \\
 w &= \psi_1 w_1 + \psi_2 \frac{\partial w}{\partial x_1} + \psi_3 w_2 + \psi_4 \frac{\partial w}{\partial x_1} + \psi_5 \Delta w_c + \psi_6 \Delta \frac{\partial w}{\partial x_1}
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

con:

$$\begin{aligned}
 \varphi_3 &= 1 - \xi^2 \\
 \varphi_4 &= \xi \varphi_3 \frac{S_0}{2} = \xi(1 - \xi^2) \frac{S_0}{2} \\
 \psi_5 &= 1 - 2\xi^2 + \xi^4 \\
 \psi_6 &= \xi \varphi_5 \frac{S_0}{2} = \xi(1 - 2\xi^2 + \xi^4) \frac{S_0}{2}
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

Para poder tratar quiebres en el meridiano y cascaras ramificadas es necesario expresar los desplazamientos de los nudos extremos de un elemento en el sistema de coordenadas globales. Notemos que:

$$\begin{aligned}
 u &= \bar{u} \cos \phi + \bar{w} \sin \phi \\
 v &= \bar{v} \\
 w &= -\bar{u} \sin \phi + \bar{w} \cos \phi
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

y de la definición de β_1 (2.7) obtenemos:

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = \frac{1}{r_1} (\bar{u} \cos \phi + \bar{w} \sin \phi) - \beta_1$$

de esta forma los grados de libertad resultantes son:

$$[\bar{u}_1, \bar{v}_1, \bar{w}_1, \beta_{1_1}, \Delta u, \Delta \frac{\partial u}{\partial x_1}, \Delta v, \Delta \frac{\partial v}{\partial x_1}, \Delta w, \Delta \frac{\partial w}{\partial x_1}, \bar{u}_2, \bar{v}_2, \bar{w}_2, \beta_{1_2}]$$

lo que permite ensamblar elementos con distinta normal y radio de curvatura, asegurando continuidad de desplazamientos de la superficie media y el giro de la normal β_1 ; no así el giro β_2 en los puntos en que hay un quiebre asimétrico en el meridiano o el desplazamiento $v \neq 0$. Debe notarse que un quiebre en el meridiano es violatorio de las condiciones de borde indicadas en el Cap.2 en tanto obliga a unir dos elementos mediante superficies

que no son normales a la superficie media. Esta violación de los requisitos de continuidad no parece introducir distorsiones apreciables en el análisis del comportamiento de las estructuras de interés.

Debe notarse que el agregado de más grados de libertad podría haberse realizado sobre los nudos extremos en vez de agregar un nudo interno. Existen en la literatura elementos en los que aparecen $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ y $\frac{\partial v}{\partial x_1}$ como grados de libertad en los nudos extremos [Zintillis y Croll (1982)], sin embargo esto supone una excesiva continuidad (ϵ_{11}) entre elementos que acarrea problemas en el caso de discontinuidades en la tangente, en la curvatura o en el espesor.

5.3.2. Modos de Cuerpo Rígido

Está bien probado en la literatura que la forma más conveniente de lograr que las funciones de interpolación sean capaces de representar los modos rígidos, consiste en definir los desplazamientos en un sistema de coordenadas globales, en particular si el elemento es del tipo isoparamétrico o superparamétrico. Por otro lado la evaluación de los operadores que relacionan deformaciones con desplazamientos y deformaciones con tensiones deben realizarse en coordenadas curvilíneas (locales), lo que exige continuos cambios de coordenadas del sistema global al local para la evaluación de las matrices de rigidez y vectores de carga. Esta última razón ha llevado a muchos investigadores a desarrollar elementos con interpolaciones en coordenadas locales a pesar que su comportamiento puede no ser confiable frente a desplazamientos moderados. Con el objeto de mejorar el comportamiento de estos últimos elementos se han propuesto técnicas de inclusión de los modos rígidos mediante modificaciones de la matriz de rigidez [Cantin y Clough (1968), Cantin (1970)]. Sin embargo estos métodos presentan problemas numéricos, introducen incompatibilidad de los desplazamientos entre elementos, y no siempre resultan eficientes [Moore et al (1984)].

En este trabajo se ha optado por mantener la interpolación de los desplazamientos en coordenadas locales dada su simplicidad, pues si bien el elemento no contiene en forma implícita los modos de cuerpo rígido, los errores introducidos son en general pequeños y para el caso de desplazamientos moderados puede recurrirse a un refinamiento de la malla para obtener resultados satisfactorios. Paralelamente, con el objeto de evitar el bloqueo membranar del elemento puede usarse un orden relativamente bajo en la integración numérica; lo cual permite obtener resultados con bajo nivel de error para mallas gruesas.

Asumiendo un comportamiento simétrico respecto a un plano meridional, los modos rígidos se reducen a cuatro, dos en el modo $J = 0$, y dos en el modo $J = 1$, los que se observan en la Fig. 5.7.

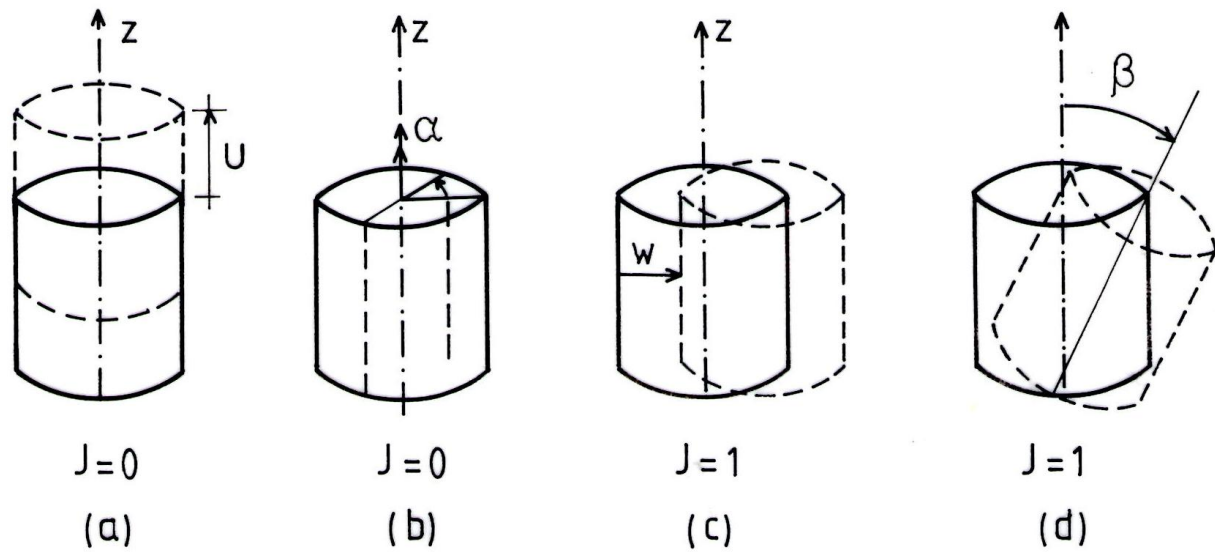


Figura 5.7: Modos rígidos en cáscaras de revolución

Como primer ejemplo para investigar numéricamente los movimientos de cuerpo rígido se presenta el análisis de la semiesfera de la Fig.5.8.a, la cual no tiene ningún tipo de restricción. Se han impuesto secuencialmente sobre la base de la esfera tres desplazamientos unitarios que debieran producir movimientos de cuerpo rígido, y por lo tanto tensiones nulas. El caso de la Fig.5.7.b es satisfecho por el elemento no importa la forma del meridiano. Debido a que el elemento no satisface los modos de cuerpo rígido en forma explícita aparecen diferencias de desplazamientos y esfuerzos que se han indicado en la Tabla 5.2. Los esfuerzos tabulados corresponden al máximo esfuerzo membranal calculado en los puntos de integración en tanto que los desplazamientos tabulados están indicados en la misma Fig.5.8. *NP* indica el número de puntos de integración usados en la evaluación de la matriz de rigidez. Notar que de usar sólo 3 puntos de integración, los esfuerzos que aparecen son despreciables, resultado que se mantiene aún para mallas más gruesas.

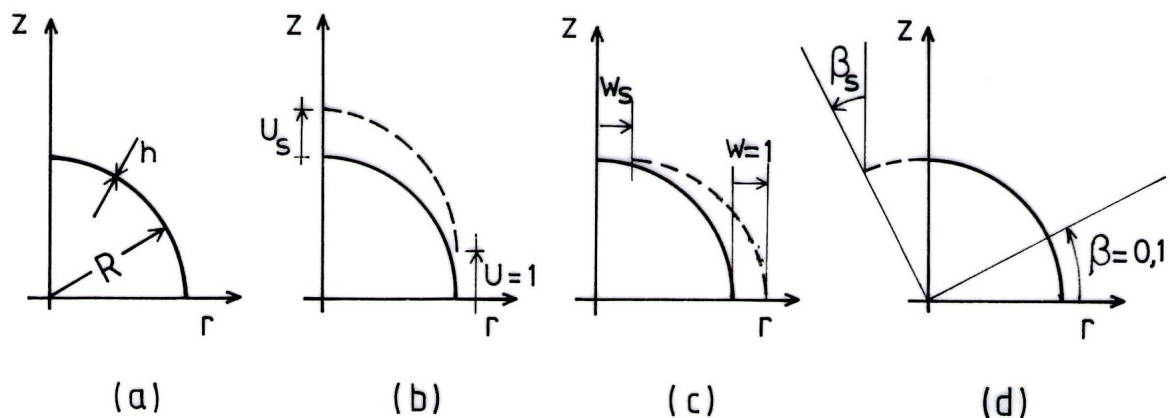


Figura 5.8: Esfera sometida a movimientos de cuerpo rígido.
 $R = 10$ $h = 0,1$ $E = 10^6$ $\nu = 0,3$

caso		NP = 3	NP = 4		NP = 3	NP = 4
a	$u_s =$	1,00112	1,00088	$N_{max} =$	0,2197	7,02
c	$w_s =$	0,99971	1,00013	$N_{max} =$	0,086	12,67
d	$\beta_s =$	0,09996	0,09971	$N_{max} =$	0,0565	1,44

Cuadro 5.2: Desplazamientos y esfuerzos en una esfera sometida a movimientos de cuerpo rígido

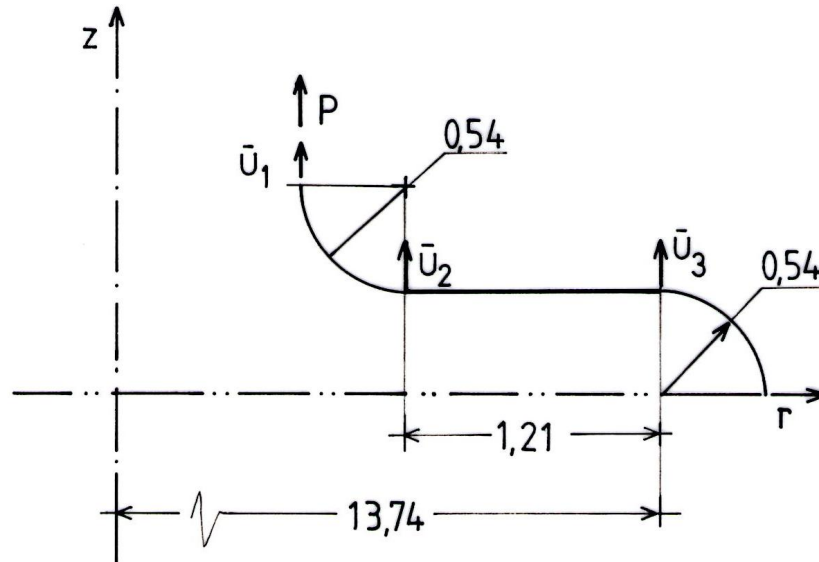


Figura 5.9: Junta de expansión sometida a tracción axial. $E = 30 \times 10^6$ $\nu = 0,3$ $h = 0,05$ $p = 1200$

Núm. elem.	\bar{u}_1	\bar{u}_2	\bar{u}_3	M_1	M_2	M_3
3	0,036132	0,030438	0,0057314	1,669	2,048	-1,268
6	0,052130	0,043368	0,0083192	9,431	8,028	-7,778
9	0,056230	0,046930	0,0090050	10,38	8,691	-8,424
12	0,056726	0,047347	0,0090879	10,54	8,888	-8,518
15	0,056814	0,047422	0,0091028	10,57	8,914	-8,542
18	0,056836	0,047441	0,0091066	10,59	8,925	-8,551

Cuadro 5.3: Junta de expansión usando 4 puntos de integración

Con el objeto de observar la convergencia a medida que se refina la malla para el caso de desplazamientos importantes, se ha analizado un segundo ejemplo muy utilizado en la literatura para este tipo de evaluaciones [Surana (1980), Moore et al (1984)]. En la Fig.5.9 se muestra la geometría de una junta de expansión que sometida a tracción axial sufre desplazamientos y giros importantes. Para la modelización se han usado igual cantidad de elementos para discretizar cada sector. En las Tablas 5.3 y 5.4 se muestran los resultados usando el presente elemento en tanto que en la Tabla 5.5 se incluyen como referencia los resultados obtenidos por Moore utilizando un elemento bidimensional de 48 grados de libertad con interpolantes en coordenadas cartesianas, usando 120 elementos de cáscara

de revolución del programa ANSYS y los obtenidos en forma analítica por Laupa y Weil (1960). Los resultados presentados muestran que el elemento desarrollado converge a la solución correcta y que con sólo 3 elementos por sector (9 en total) los resultados son aceptables desde el punto de vista ingenieril ya sea usando 3 o 4 puntos de integración.

Núm. elem.	\bar{u}_1	\bar{u}_2	\bar{u}_3	M_1	M_2	M_3
3	0,073461	0,061109	0,0110030	15,32	8,207	-10,266
6	0,058277	0,048636	0,0092542	11,49	8,743	-8,452
9	0,057477	0,047963	0,0091854	10,97	8,833	-8,491
12	0,057142	0,047688	0,0091456	10,78	8,871	-8,513
15	0,057003	0,047575	0,0091285	10,70	8,891	-8,525
18	0,056937	0,047522	0,0091202	10,65	8,904	-8,535

Cuadro 5.4: Junta de expansión usando 3 puntos de integración

Núm. elem.	\bar{u}_1	\bar{u}_2	\bar{u}_3	M_1	M_2	M_3
3	0,04839	0,04094	0,007234	8,448	6,921	-6,664
6	0,05634	0,04714	0,008946	10,465	8,695	-8,308
18	0,05684	0,04745	0,009107	10,589	8,807	-8,445
120 ANSYS	0,05683	0,04744	0,009105	10,590	8,487	-8,582
Laupa Weil	0,05754	0,04804	0,009203	10,563	8,966	-8,578

Cuadro 5.5: Junta de expansión, resultados de Moore et al (1984)

5.3.3. Análisis Lineal Elástico

En esta sección se presentan algunos ejemplos tomados de la literatura con el objeto de mostrar la capacidad de la formulación para modelar los distintos comportamientos en análisis lineal estático en láminas de revolución; esto incluye la versatilidad del elemento para representar la geometría adecuadamente (forma de la generatriz, ramificaciones, variaciones del espesor); la habilidad del elemento para responder a cargas membranales y transversales; la exactitud de los resultados obtenidos comparándolos con soluciones cerradas cuando existen o con otros códigos numéricos; y convergencia de la solución. Se ha puesto énfasis en la utilización de la menor cantidad de elementos en la modelización de las estructuras.

(1) *Placa circular empotrada bajo carga transversal.* Quizás es el ejemplo más simple de una cáscara de revolución sometida a flexión. Existe una solución analítica debida a Timoshenko (1959). Se ha usado un solo elemento para modelar la placa, lo que es suficiente para obtener la solución exacta del problema. En la Fig.5.10 se indican la geometría de la placa, los desplazamientos transversales, y los momentos flectores meridionales

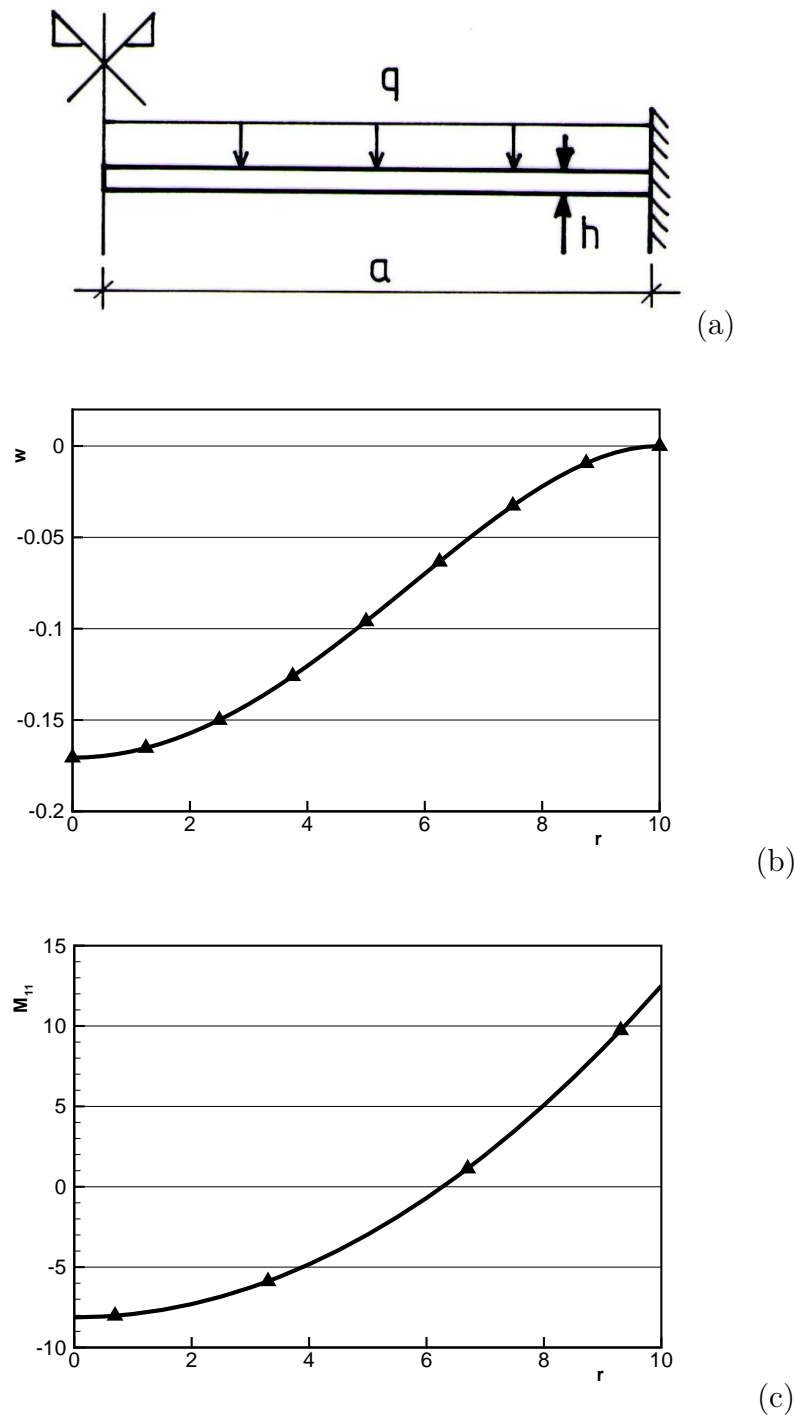


Figura 5.10: Placa circular empotrada bajo carga transversal. (a) geometría $a = 10$ $h = 0,1$ $E = 10^7$ $\nu = 0,3$ $q = 1$; (b) desplazamiento transversal w ; (c) Momento flector M_{11} ; ——— Analítica, (▲) Elementos Finitos (1 elemento).

(2) *Tanque cilíndrico de espesor variable con carga hidrostática.* Este

ejemplo, propuesto por Flugge (1967), fue analizado usando un solo elemento. En la Fig.5.11 se muestra la geometría del tanque, el momento flector M_{11} y el esfuerzo N_{22} en los puntos de integración. Puede observarse la excelente aproximación obtenida a pesar de la gruesa discretización.

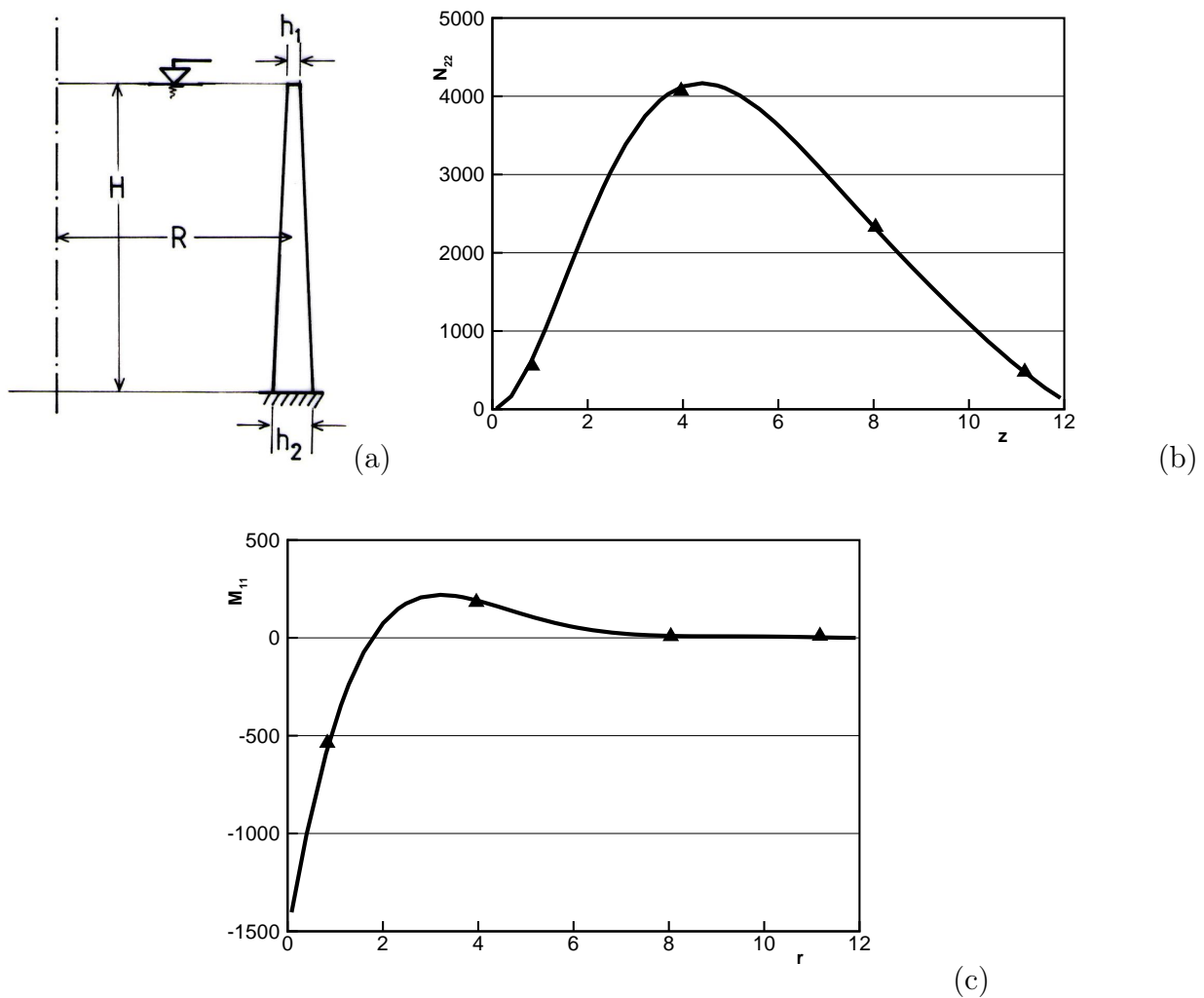


Figura 5.11: Tanque de espesor variable bajo presión hidrostática. (a) Geometría y cargas, $\gamma = 62,4$ $H = 12$ $R = 9$ $h_1 = 0,25$ $h_2 = 0,9167$ $E = 0,23810^9$ $\nu = 0$; (b) esfuerzo circunferencial N_{22} ; (c) Momento flector M_{11} ; ——— Analítica, (\blacktriangle) Elementos Finitos (1 elemento)

(3) *Cúpula esférica empotrada bajo presión externa.* De este ejemplo existe una solución teórica [Timoshenko (1959)] y ha sido utilizado por distintos investigadores para probar sus elementos. En la Fig.5.12 se muestra la geometría adoptada, y los esfuerzos calculados comparados con la solución analítica. En la discretización por elementos finitos se han usado sólo dos elementos y los resultados obtenidos muestran una excelente aproximación.

(4) *Cilindro en voladizo con una carga radial en el borde.* De este ejemplo también existe una solución analítica. En la Fig.5.13 se muestra la geometría del ejemplo analizado, el desplazamiento w y el momento M_{11} en la zona de aplicación de la carga, puede observarse el fuerte comportamiento flexional y la excelente aproximación que se obtiene con sólo tres elementos.

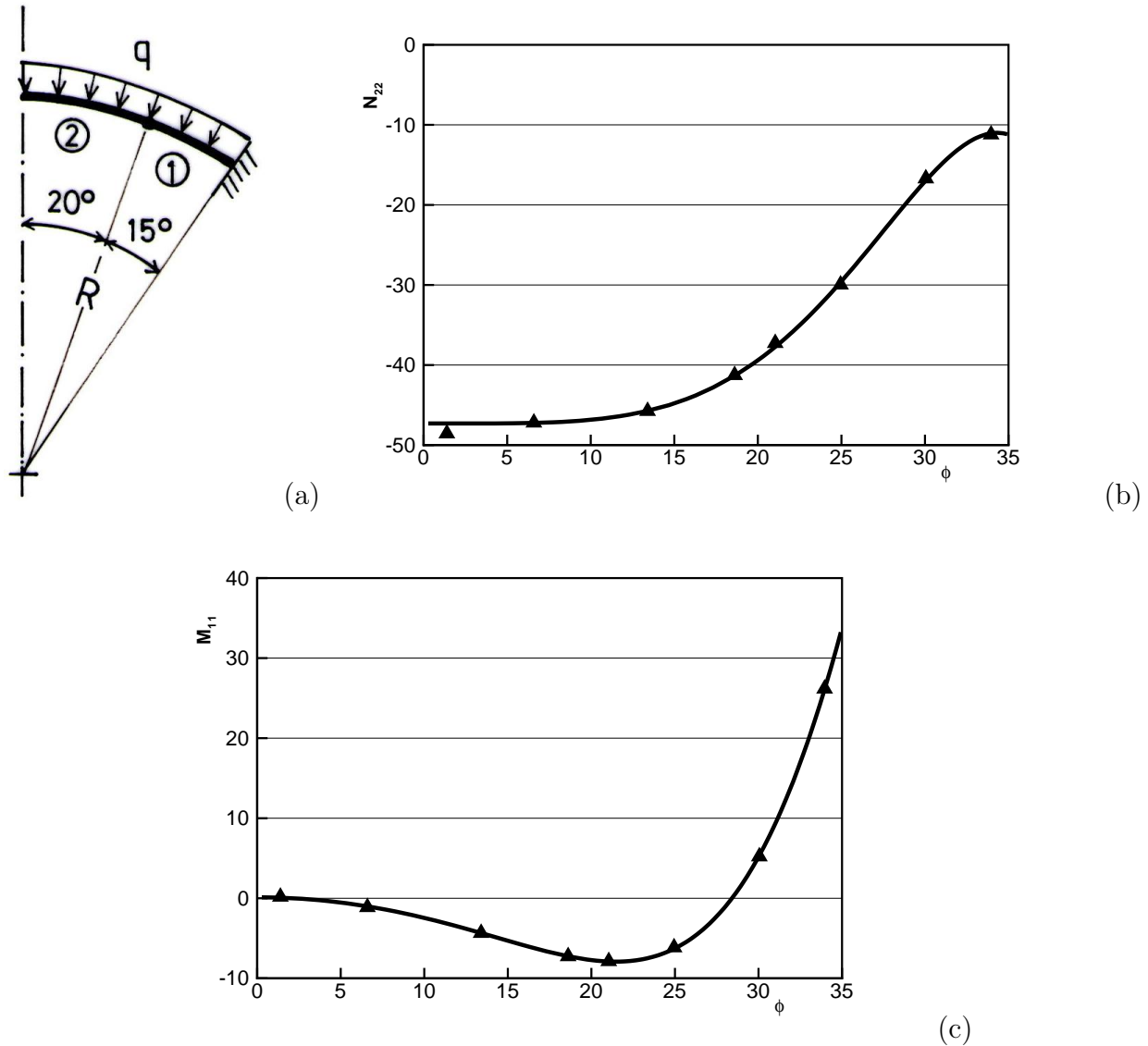


Figura 5.12: Cúpula esférica empotrada bajo presión uniforme. (a) Geometría y cargas, $h = 3 R = 90$ $\nu = 0,3$ $q = 1$; (b) Esfuerzo N_{22} ; (c) Momento Flector M_{11} ; ——— Analítica, (\blacktriangle) Elementos Finitos (2 elementos)

(5) *Cáscara cilíndrica ramificada*. Para completar el conjunto de ejemplos con cargas axilimétrica, se ha modelado una cáscara compuesta, resuelta analíticamente por Kraus (1967), que consiste en la intersección de tres cáscaras simples, dos cilíndricas y una esférica sometidas parcialmente a presión interna. Este caso ha sido utilizado por diversos autores con el propósito de probar sus elementos y aquí ha sido resuelto apelando a sólo 7 elementos. En la Fig.5.14 se indica la geometría, el sistema de cargas y la discretización utilizada. Se ha graficado el desplazamiento normal w sobre la pared del cilindro. Similarmente a los casos antes presentados los resultados son muy buenos con una discretización gruesa.

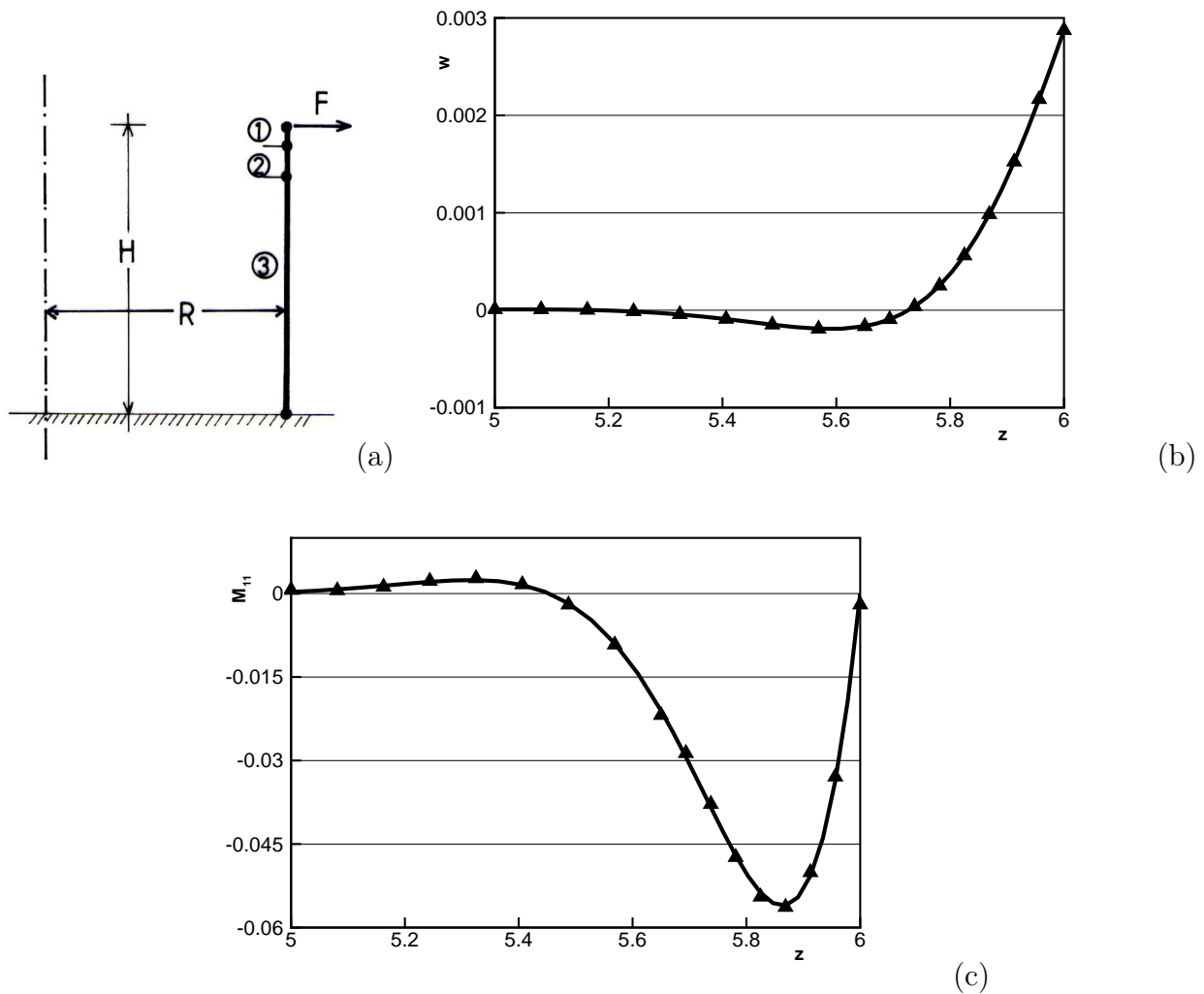


Figura 5.13: Cilindro empotrado-libre con carga en el borde. (a) Geometría y cargas; (b) desplazamiento w ; (c) momento flector M_{11} ; — Analítica, (\blacktriangle) Elementos Finitos (3 elementos)

(6) *Semiesfera con carga armónica*. Este ejemplo es presentado por Bushnell (1984) como un buen ejemplo de prueba. La estructura es una semiesfera libre con carga uniforme en el meridiano y con variación armónica en el paralelo. Debido a que bajo cargas pequeñas se producen desplazamientos importantes, el problema tiene bajo condicionamiento numérico y resulta interesante analizar la convergencia. En la Fig.5.15 se muestra la geometría de la estructura y el máximo desplazamiento en el borde en función del número de elementos usados en la discretización. Puede observarse que con tres elementos los resultados son satisfactorios ya sea usando tres o cuatro puntos de integración. Los resultados convergen a los mismos valores que en la referencia donde se lo ha analizado usando un código basado en una formulación energética usando diferencias finitas.

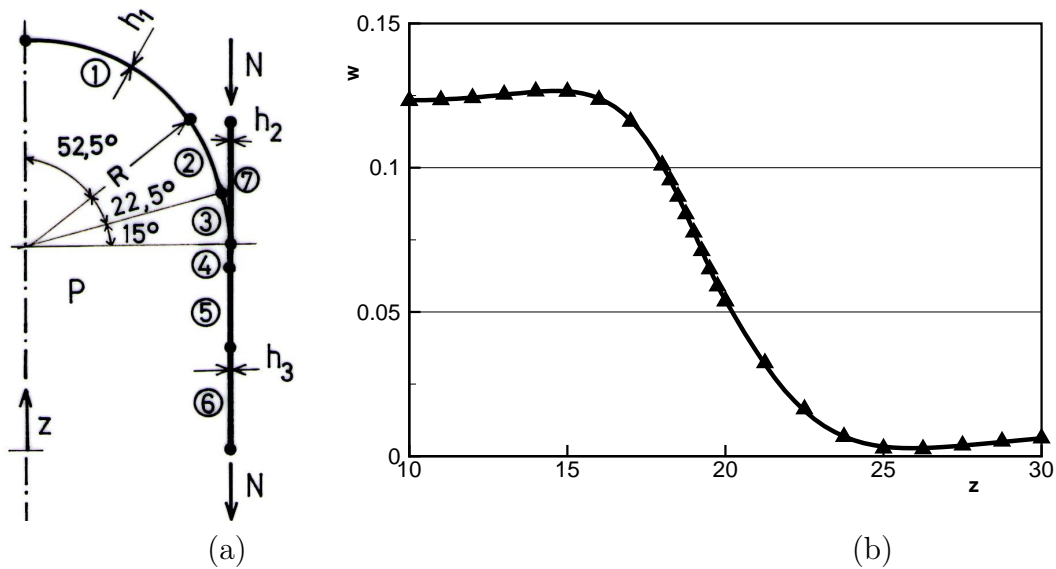


Figura 5.14: *Cáscara ramificada*. (a) Geometría, cargas y discretización. $R = 20$ $h_1 = 0,4$ $h_2 = 0,5$ $h_3 = 0,3$ $E = 10^7$ $\nu = 0,3$ $q = 1000$ $N = 5000$. (b) desplazamiento w en el cilindro. — Analítica, (\blacktriangle) Elementos Finitos (7 elementos)

(7) *Cilindro con cargas concentradas*. Este ejemplo ha sido ampliamente usado en la literatura para probar el comportamiento de elementos bidimensionales de cáscara delgada [Cantin y Clough (1968), Yang (1973), Moore et al (1984)]. Existe además una solución inextensional debida a Timoshenko (1959). Aquí ha sido analizada considerando uno y cuatro elementos igualmente espaciados y usando series de Fourier para representar la carga. En la Fig.5.16 se muestra la geometría y en la Tabla 5.6 se dan los desplazamientos del punto de aplicación de la carga en función de la discretización de la estructura y de la carga. Puede observarse que las diferencias entre usar uno y cuatro elementos es pequeña, en tanto que usando 5 armónicas para representar la carga se obtienen resultados que son más precisos que la solución inextensional de Timoshenko. Usando 10 armónicas los resultados son mejores que los de Cantin y Clough usando sustancialmente más grados de libertad.

(8) *Torre de enfriamiento con viento y peso propio*. Este ejemplo fue originalmente analizado por Ellinas et al (1980). Se modela el comportamiento de un hiperboloide de revolución en voladizo bajo la acción del viento y el peso propio. En la Fig.5.17 se presenta la geometría, se indica la variación del viento alrededor del paralelo (corresponde a la norma británica) y se muestran los esfuerzo membranales en los meridianos más solicitados. Los resultados aquí presentados usando ocho elementos igualmente espaciados concuerdan con los de la referencia.

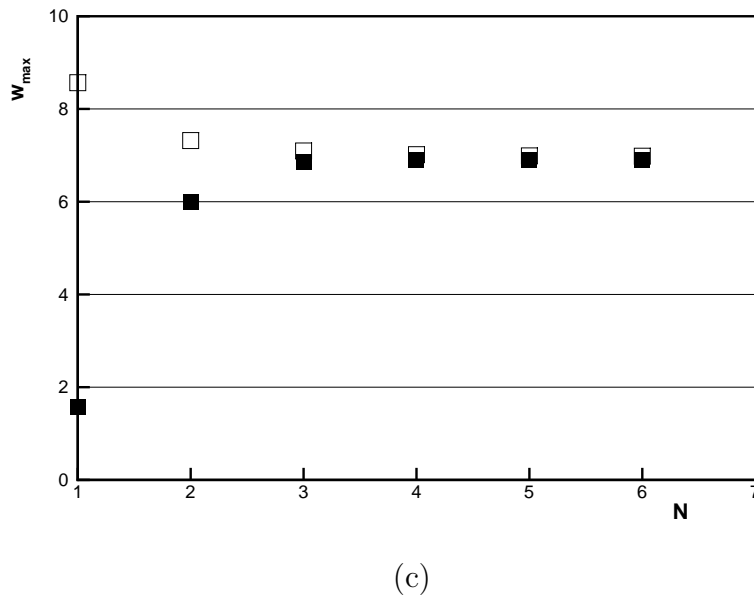
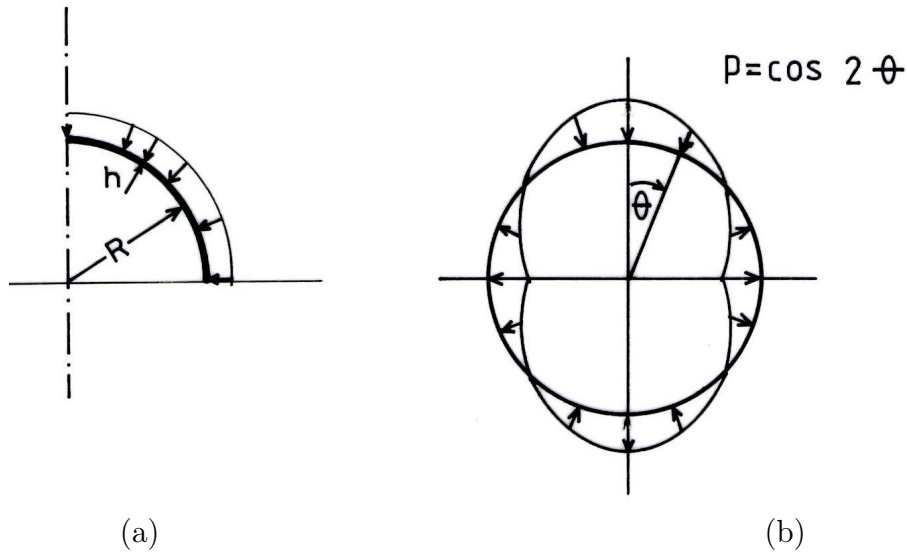


Figura 5.15: Semiesfera con carga armónica. (a) geometría; (b) variación de la carga en el paralelo; (c) máximo desplazamiento w vs. número de elementos en la discretización. (■) cuatro puntos de integración, (□) tres puntos de integración.

Num. armón.	1 Elem.	4 elem		
			Timoshenko	-0,1086
5	-0,11219	-0,11219	Cantin y Clough (1200 G. de Lib.)	-0,1128
10	-0,11310	-0,11330	Delpak (teórico)	-0,1138
15	-0,11321	-0,11349		
20	-0,11323	-0,11355		

Cuadro 5.6: Desplazamiento del punto de aplicación de la carga en función del número de armónicas usadas para representar la carga.

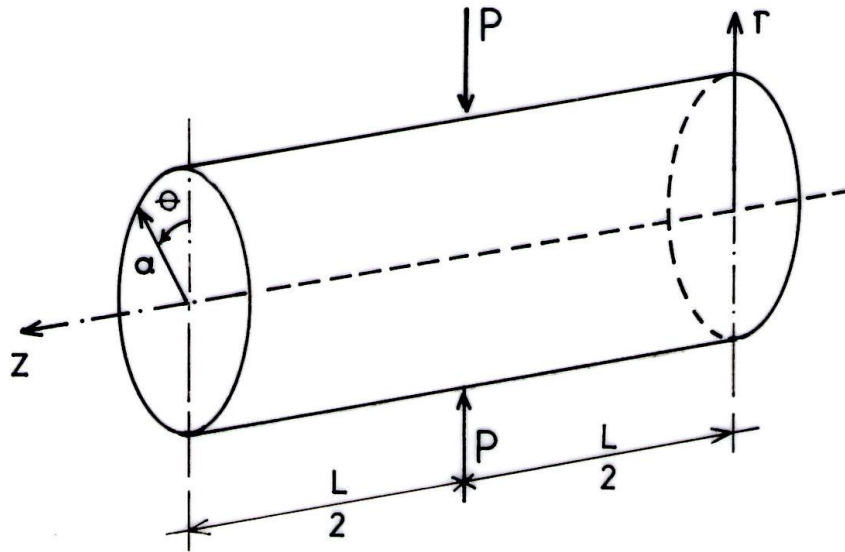


Figura 5.16: Cilindro con carga concentrada. $a = 4,953$ $L = 10,35$ $h = 0,094$ $E = 10,510^6$ $\nu = 0,3125$ $P = 100$

En este capítulo se ha presentado un elemento finito curvo unidimensional del tipo semianalítico. Se ha mostrado que, si bien el elemento no incluye los modos de cuerpo rígido en forma explícita, los resultados que se obtienen para desplazamientos importantes, convergen al resultado correcto a medida que se refina la malla; y que los errores para mallas intermedias son bajos. Por otro lado se ha comparado el elemento propuesto con otros existentes en la literatura; los resultados indican que es confiable y adecuado para aplicaciones generales.

En los capítulos que siguen este mismo elemento es utilizado para la determinación de cargas críticas y análisis no lineal cinemático.

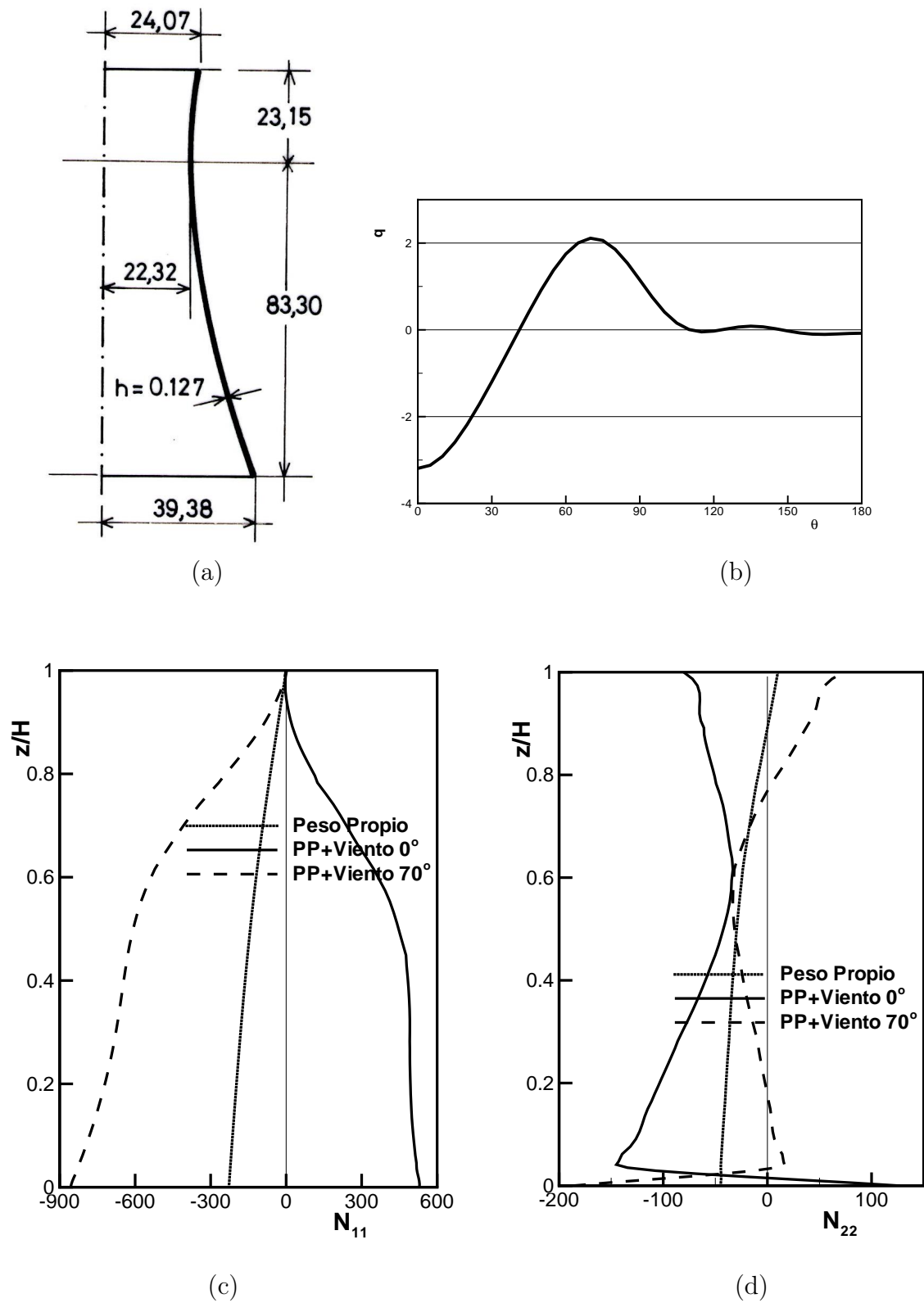


Figura 5.17: Torre de enfriamiento con viento y peso propio. (a) geometría; (b) variación de la presión del viento en el paralelo; (c)(d) esfuerzos membranales N_{11} y N_{22} para los meridianos más exigidos.

Capítulo 6

Trayectoria Fundamental No Lineal

6.1. Introducción

La solución de las ecuaciones (4.13) que gobiernan el comportamiento de una cáscara de revolución puede realizarse de distintas maneras. El método más general de análisis es utilizando técnicas de Newton-Rapshon, sin embargo, cuando se tratan cargas no axilsimétricas, las distintas armónicas resultan acopladas y se pierden las ventajas de usar una formulación semianalítica. Con el objeto de preservar la naturaleza desacoplada de los sistema de ecuaciones a resolver, se ha propuesto [Wunderlich et al (1982), (1985)] una metodología que, utilizando una formulación mixta, y tratando las no linealidades existentes como pseudo cargas, permite utilizar la matriz de rigidez inicial (desacoplada) en el análisis de cáscaras de revolución bajo cargas no axilsimétricas. El método está limitado a no linealidades moderadas y no permite seguir trayectorias poscríticas. Otra alternativa, manteniendo la matriz de rigidez inicial como sistema básico a resolver, es utilizar el método de las perturbaciones [Thompson y Walker (1968), Connor y Morin (1971), Gallagher (1975), Hangai y Kawanata (1972), Batista et al (1988)]. Por otro lado se han propuesto métodos simplificados que permiten obtener una aproximación a la trayectoria no lineal como una combinación de los modos lineales de bifurcación, técnica que resulta de muy fácil implementación a un costo computacional adicional prácticamente nulo, en sistemas que realicen análisis lineal de bifurcación [Nagy y König (1979), König (1981)]. En este capítulo se presenta una breve descripción de este último método.

En la última década se han hecho importantes progresos en la elaboración de técnicas eficientes para la obtención de trayectorias no lineales precríticas y poscríticas. Para estructuras con una trayectoria inicial moderadamente no lineal y puntos críticos agudos se han desarrollado técnicas basadas en la teoría de Koiter, que consisten en utilizar una estructura ficticia con comportamiento precrítico lineal, y suponer que las trayectorias poscríticas reales corresponden al comportamiento poscrítico imperfecto de la estructura ficticia [Haftka et al (1971), Carnoy (1979)-(1981)]. Por otro lado se han desarrollado

principios variacionales usando técnicas de autovalores no lineales para el seguimiento de trayectorias poscríticas [Welford y Dib (1980)]. El principal problema de las técnicas de Newton-Rapshon es el tiempo necesario para evaluar e invertir la matriz de rigidez tangente; por ello se han propuesto técnicas llamadas de Quasi-Newton que permiten determinar en forma directa una aproximación a la matriz tangente y a su inversa a partir de la matriz tangente calculada en puntos anteriores sobre la trayectoria. Esta técnica originaria del análisis dinámico, donde es necesario utilizar pasos de avance pequeños y por lo tanto requiere una constante reevaluación de la matriz tangente, ha sido utilizada con éxito en análisis estático, resultando en general computacionalmente más económica que las técnicas de Newton-Rapshon [Geradin et al (1981)]. Sin embargo, para el análisis de cáscara delgadas con un fuerte comportamiento no lineal, las ventajas son pequeñas, presentando además problemas en zonas de puntos límites [Ramm et al (1985)].

En este capítulo se presentan algunas técnicas para análisis no lineal que han sido implementadas en esta formulación. Una comparación de los méritos relativos de cada técnica se realiza a través de la solución de tres problemas de cáscaras bajo cargas axil-simétricas. Los estudios permiten comprobar que el elemento finito desarrollado en el Cap.5 es adecuado para análisis no lineal, y seleccionar una técnica eficiente de análisis no lineal.

6.2. Superposición Modal Usando Modos de Bifurcación

6.2.1. Consideraciones Generales

Asumamos que la trayectoria precrítica es moderadamente no lineal, de tal forma que el error en considerar sólo la parte lineal de las deformaciones para calcular el estado tensional usando las (4.7) sea pequeño; esto es supongamos que

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{DB}_0\mathbf{a} \quad (6.1)$$

representa una aproximación aceptable a las relaciones tensión-desplazamientos no lineales.

Usando (6.1) la primera variación de la energía potencial total (4.13) lleva a la siguiente condición de equilibrio

$$[\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_\sigma(\boldsymbol{\sigma})] \mathbf{a} = \lambda \mathbf{f} \quad (6.2)$$

donde \mathbf{K}_σ se obtiene con la ecuación (4.20) pero usando la simplificación introducida en (6.1).

Escribiendo a continuación las condiciones de equilibrio (6.2) en forma lo más cercana posible al problema de autovalores que define un estado crítico, ecuación (4.25).

$$[\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_\sigma(\boldsymbol{\sigma})] \mathbf{a}(\lambda) = \lambda \mathbf{f} \quad (6.3)$$

La solución de las ecuaciones no lineales (6.3) puede ser escrita en términos de los autovalores λ_i y autovectores \mathbf{x}_i , soluciones del problema de autovalores asociado

$$[\mathbf{K}_0 + \lambda_i \mathbf{K}] \mathbf{x}_i = \mathbf{0} \quad (6.4)$$

que supondremos han sido ordenados de la forma

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n| \quad (6.5)$$

donde “ n ” es el número de autovalores considerados en el análisis.

Definiendo a \mathbf{X} como la matriz que tiene a los autovalores \mathbf{x}_i como columnas y a $\boldsymbol{\Lambda}$ como la matriz diagonal que tiene a los λ_i como elementos diagonales, puede realizarse la siguiente normalización:

$$\mathbf{X}^T \mathbf{K}_0 \mathbf{X} = \mathbf{I} \quad (6.6)$$

$$\mathbf{X}^T \mathbf{K}_\sigma \mathbf{X} = -\boldsymbol{\Lambda}^{-1} \quad (6.7)$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad de orden n . Reemplazando las (6.6) y (6.7) en la ecuación (6.3) conduce a:

$$\mathbf{a}(\lambda) = \mathbf{X} \left(\frac{1}{\lambda} \mathbf{I} - \boldsymbol{\Lambda} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{f} \quad (6.8)$$

o bien

$$\mathbf{a}(\lambda) = \sum_{i=1}^n \beta_i \mathbf{x}_i \quad (6.9)$$

con:

$$\beta_i = \frac{\lambda_i \lambda}{\lambda_i - \lambda} \alpha_i \quad ; \alpha_i = \mathbf{x}_i^T \mathbf{f} \quad (6.10)$$

Por conveniencia la ecuación (6.9) se escribe como la suma de la solución lineal \mathbf{a}_L más una desviación asociada a la parte no lineal \mathbf{a}_D

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_L + \mathbf{a}_D(\lambda) \quad (6.11)$$

de la ecuación (6.9) la solución lineal se reduce a:

$$\mathbf{a}_L = \lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{x}_i \quad (6.12)$$

mientras que la parte no lineal resulta:

$$\mathbf{a}_D(\lambda) = \sum_{i=1}^n \gamma_i \mathbf{x}_i \quad (6.13)$$

En vez de usar el conjunto completo de autovalores λ_i y autovectores \mathbf{x}_i en la (6.13) se ha propuesto [Nagy y König (1979), König (1981)] incluir sólo las N cargas críticas de menor valor absoluto y los modos críticos asociados, que se supone representan las contribuciones más importantes a la respuesta no lineal, al menos para cargas por debajo de el primer autovalor lineal.

6.2.2. Superposición Modal en Láminas de Revolución

La evaluación aproximada de la ecuación no lineal (6.11) ha sido implementado en un programa de elementos finitos desarrollado en base a un elemento similar al presentado en el Cap.5 (sin los grados de libertad asociados a w en el nudo central y por lo tanto de 12 grados de libertad). Dicho programa (llamado NALREF) permite, entre otras cosas, la determinación de cargas y modos de pandeo a partir de trayectorias primarias lineales axilsimétrica y no axilsimétricas, como se explica detalladamente en el Cap.7.

Se ha usado el método de iteración de subespacios [Bathe (1982)] como algoritmo para la determinación de los primeros N autovalores y sus correspondientes autovectores. Ha sido necesario modificar el problema original de tal forma que todos los autovalores sean positivos y que los autovalores más bajos del problema modificado correspondan a los autovalores positivos más bajos del problema original. Como pueden existir autovalores negativos que tengan influencia en el comportamiento no lineal, es necesario resolver un segundo problema de autovalores cambiando el signo de la matriz de tensiones iniciales \mathbf{K}_σ (lo que desde el punto de vista de la determinación de cargas críticas significa una inversión en la dirección de las cargas).

La implementación realizada permite considerar un conjunto de cargas fijas, que no varían durante el proceso de carga; y un conjunto de cargas incrementales, que dependen linealmente del parámetro de carga λ .

6.2.3. Resultados Numéricos

Se ha realizado una evaluación de la técnica de superposición modal en el contexto del análisis no lineal de cáscaras de revolución, comparando con soluciones conocidas para algunos casos de interés. En esta sección se presentan los resultados de [Flores y Godoy (1990-2)] tres trayectorias carga-desplazamiento que corresponden a un ejemplo

de análisis no lineal estático clásico en la literatura [Zienkiewicz (1977)]. En la Fig.6.1.a se muestra un domo esférico rebajado bajo una carga anular; el comportamiento no lineal de esta cáscara depende de la relación entre el radio r de la carga anular y el máximo radio horizontal de la cáscara a . Se han considerado tres relaciones r/a . En la Fig.6.1.b se ha graficado el valor de la carga total λ en función del desplazamiento u del vértice del domo, para los distintos valores de r/a . Estas curvas han sido obtenidas usando un análisis no lineal completo con las técnicas presentadas en la sección 6.3 y concuerda con las existentes en la literatura. El comportamiento no lineal para cada caso puede resumirse como sigue:

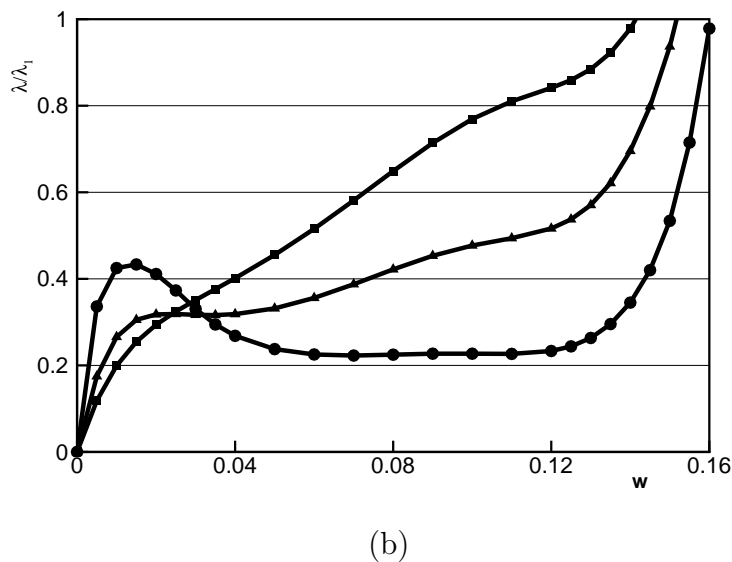
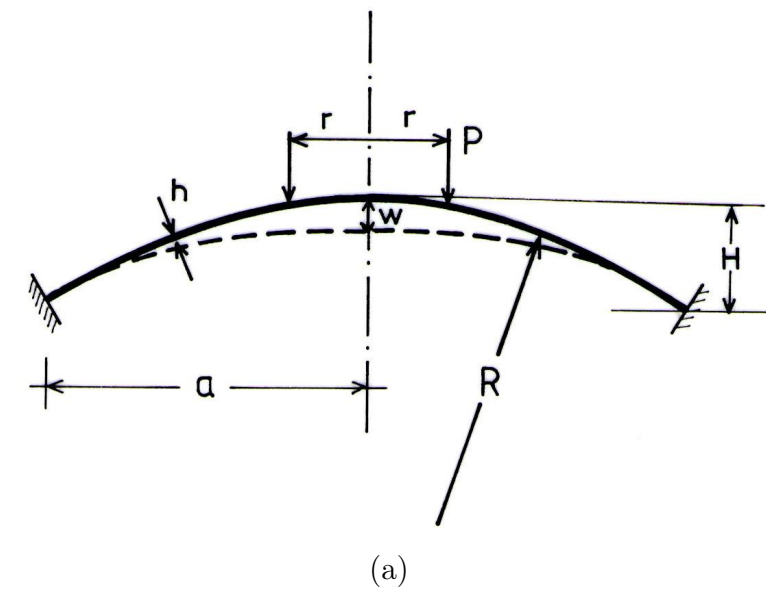


Figura 6.1: Domo esférico rebajado bajo carga anular. $E = 10^7$ $\nu = 0,3$ $R = 4,758$ $a = 0,9$ $h = 0,01576$ $H = 0,08598$; (a) Geometría y cargas (b) λ/λ_1 vs u para distintos valores de r/a (\blacksquare) $r/a = 0,00$ (\blacktriangle) $r/a = 0,25$ (\bullet) $r/a = 0,42$; (c) (d) (e) comparación entre: Análisis lineal(\bullet), Superposición modal (\blacktriangle) y Análisis no lineal completo(\blacksquare)

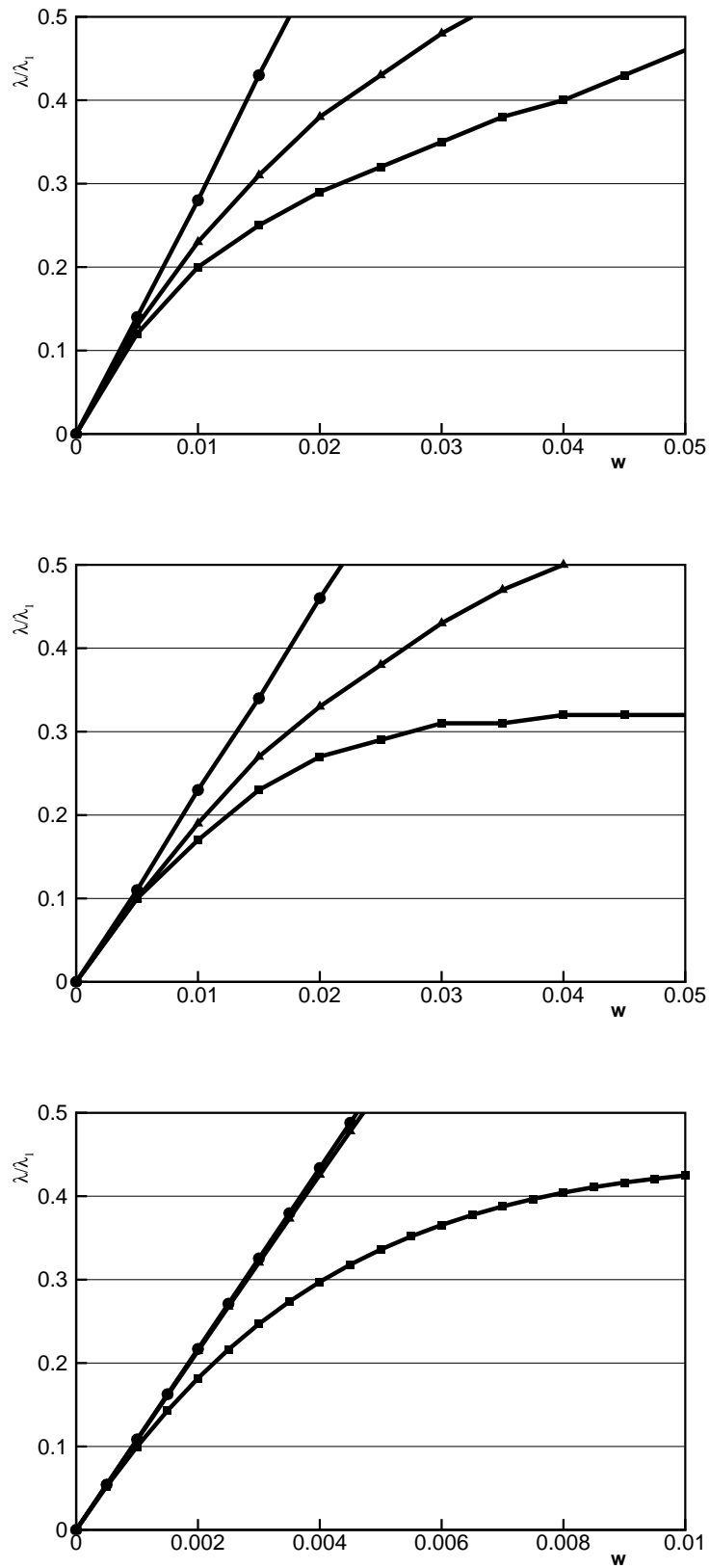


Fig.6.1 (continuación)

$r/a = 0,00$ (carga puntual en el vértice) muestra un comportamiento estable pero fuertemente no lineal.

$r/a = 0,25$ presenta una primera etapa moderadamente no lineal seguida de una zona de rigidez casi nula, y luego una etapa de fuerte rigidización para valores crecientes del parámetro de carga.

$r/a = 0,42$ muestra un comportamiento inicial moderadamente no lineal antes de alcanzar un punto límite

En el análisis no lineal usando la presente técnica de superposición modal, se han usado 6 elementos en la discretización de la cáscara (28 grados de libertad), los cuales son suficientes para obtener convergencia en el análisis no lineal completo. Dado que el número de grados de libertad es pequeño, es posible incluir todos los modos en el análisis por superposición modal; sin embargo sólo los 11 primeros han sido considerados porque los restantes 17 están asociados a deformaciones membranales de la cáscara, y en consecuencia los autovalores asociados a estos últimos son varios ordenes de magnitud mayores que λ_{11} .

En la Fig.6.1.c-e se ha graficado el desplazamiento vertical del vértice versus la carga total (normalizada con respecto al primer autovalor λ_1). Los resultados están comparados con la solución lineal y la solución no lineal completa [Zienkiewicz (1977)], y puede verse que esta técnica de superposición modal presenta un marcado alejamiento de la solución no lineal, incluso para las primeras etapas de carga. Para la carga puntual (Fig.6.1.c) la técnica de superposición modal es una aproximación entre las soluciones lineal y no lineal; para $r/a = 0,42$ (Fig.6.1.e) son muy similares a la solución lineal y se separan fuertemente de la solución lineal incluso para bajos niveles de carga. Finalmente, el gran incremento en los desplazamientos en $\lambda/\lambda_1 = 0,3$ para $r/a = 0,25$ permanece inadvertido para la técnica de superposición modal.

6.2.4. Discusión y Conclusiones

En el trabajo original de Nagy y König (1979) se establecen las siguientes limitaciones:

- (a) El rango de cargas de aplicación no debe exceder el valor de la primera carga crítica
- (b) Los valores de α_i en la ecuación (6.10) deben ser tales que

$$\left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 \right]^{\frac{1}{2}} \ll \left[\frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{a}_L \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.14)$$

en el ejemplo presentado la primera condición ha sido satisfecha como se ve en las Fig.6.1.c-e, en la cual los valores de λ no superan el 50% de λ_1 . En cuanto a la segunda condición, en la Tabla 6.1 se presentan ambos miembros de (6.14); es evidente que

$$\sum_{i=1}^{11} \alpha_i^2 \cong \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{a}_L$$

r/a	$[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{11} \alpha_i^2]^{\frac{1}{2}}$	$[\frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{a}_L]^{\frac{1}{2}}$
10,00	0,1071281	0,1071284
0,25	0,5887736	0,5887811
0,42	0,03802518	0,03802656

Cuadro 6.1:

Para una cáscara delgada la limitación representada por la ecuación (6.14) puede expresarse de la siguiente forma: si la trayectoria fundamental no lineal está básicamente asociada a un estado membranal de tensiones, el comportamiento precrítico es aproximadamente lineal, además las cargas críticas más bajas para tales problemas están asociadas a modos fundamentalmente flexionales. En consecuencia, la solución lineal escrita en términos de los modos de bifurcación tendrá sólo una pequeña contribución de los primeros modos y la condición (6.14) será satisfecha.

Por otro lado, si las cargas producen tensiones de flexión significativas en la trayectoria fundamental, la contribución de los primeros modos en la expansión de la solución lineal es importante y se viola la condición impuesta en la ecuación (6.14). Este es el caso del problema estudiado en la sección 6.2.3, para el cual las tensiones de flexión proveen de una significativa contribución al equilibrio antes del primer punto crítico; y que es ciertamente el caso de un gran número de problemas en el diseño de estructuras de cáscaras.

6.3. Métodos de Continuación

6.3.1. Introducción

Las ecuaciones de equilibrio (4.13) definen en un espacio de dimensión $n+1$, n superficies de dimensión n cuyas intersecciones son curvas, donde cada punto de éstas representa una posible posición de equilibrio (estable o no) del sistema estructural en estudio. Para la determinación de los distintos puntos de estas curvas, usando métodos numéricos, es necesario establecer algún parámetro de avance que fije en forma unívoca la posición de cada punto.

Sean entonces las ecuaciones de equilibrio

$$\mathbf{V}_i(\mathbf{Q}, \Lambda) = 0 \quad i = 1, n \quad (6.15)$$

establecemos una condición de restricción de la forma

$$\Psi(\mathbf{Q}, \Lambda) - \mu = 0 \quad (6.16)$$

de esta forma μ se convierte en el parámetro deseado que controla el avance sobre la trayectoria no lineal.

La elección de la ecuación de restricción debe ser tal que exista intersección entre la misma y la trayectoria de equilibrio que se está estudiando. Sin embargo, esta condición, si bien necesaria, no es suficiente para obtener en forma numérica los distintos puntos sobre la trayectoria. En general se utilizan métodos iterativos para obtener un punto particular $(\mathbf{Q}(\mu), \Lambda(\mu))$ para algún valor del parámetro $\mu = \mu_m$. Estos métodos normalmente usan un esquema predictor-corrector y requieren de un valor de partida $(\mathbf{Q}^0(\mu_m), \Lambda^0(\mu_m))$ en la cercanía del anterior, de tal forma que la secuencia de iteración converja a $(\mathbf{Q}(\mu), \Lambda(\mu))$ pues la mayoría de los métodos de iteración son sólo localmente convergentes.

En consecuencia el elemento básico en los métodos de continuación es la determinación de un conjunto de puntos

$$(\mathbf{Q}(\mu_k), \Lambda(\mu_k)) \quad \mu_k = \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_s$$

donde la obtención del punto $(\mathbf{Q}(\mu_k), \Lambda(\mu_k))$ se realiza de la siguiente forma:

(1) construimos la predicción

$$(\mathbf{Q}_k^0, \Lambda_k^0) = \mathbf{P}(\mu_{k-1}, \mu_{k-2}, \dots) \quad (6.17)$$

(2) a partir de este valor inicial $(\mathbf{Q}_k^0, \Lambda_k^0)$ calculamos la secuencia

$$(\mathbf{Q}_k^i, \Lambda_k^i) = \Phi(\mathbf{Q}_k^{i-1}, \Lambda_k^{i-1}) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N \quad (6.18)$$

donde Φ es una función de iteración adecuada. Si se obtiene un valor de $(\mathbf{Q}_k^i, \Lambda_k^i)$ tal que esté lo suficientemente cerca de $(\mathbf{Q}(\mu_k), \Lambda(\mu_k))$, entonces se lo acepta como solución y se procede con el siguiente punto μ_{k+1} .

Este procedimiento es esencialmente el esquema predictor-corrector y como se indicara antes, la mayoría de los métodos de iteración son sólo localmente convergente, lo que implica que debe elegirse cuidadosamente el paso de avance $\mu_{k+1} - \mu_k$ para asegurar que el valor extrapolado $(\mathbf{Q}_k^0, \Lambda_k^0)$ caiga dentro del dominio de convergencia del método elegido.

En este trabajo, para el seguimiento de una trayectoria no lineal incremental nos basaremos en la resolución en forma iterativa de un sistema de ecuaciones lineales de la forma:

$${}^{\tau}\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{u}_{i+1} = {}^{t+\Delta t} \lambda_i \mathbf{f} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{g}_i \quad (6.19)$$

donde

t indica el último punto exitoso de la trayectoria y $t + \Delta t$ representa el nuevo punto; τ es el momento en que se realizó la última actualización de la matriz de rigidez tangente. Este instante puede ser anterior o coincidir con t (Método de Newton-Rapshon modificado) o corresponder a los desplazamientos calculados en la última iteración (Método de Newton-Rapshon completo)

$$\mathbf{g} = \int_A \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dA \quad (6.20)$$

son las fuerzas nodales internas equivalentes (en el sentido de la energía)

i indica el número de iteración dentro del incremento.

En las próximas secciones se exponen las distintas técnicas de iteración implementadas en el programa ALREF para el análisis no lineal geométrico de láminas de revolución bajo carga axilsimétrica.

6.3.2. Iteración a Carga Fija

La ecuación de restricción correspondiente es:

$$\lambda - \mu = 0 \quad (6.21)$$

Este método no permite en general el seguimiento de una trayectoria más allá de un punto límite, o sea no admite la disminución del parámetro de carga λ a lo largo de la trayectoria.

El algoritmo utilizado trabaja de la siguiente manera:

- I Se fija el nuevo valor del parámetro de carga ${}^{t+\Delta t}\lambda$
- II Para el último paso exitoso t se calcula y triangulariza la matriz \mathbf{K}_T
- III Se calcula la carga desbalanceada o residuo \mathbf{R}_i

$$\mathbf{R}_i = {}^{t+\Delta t}\lambda \mathbf{f} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{g}_i \quad (6.22)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{g}_0 = {}^t\mathbf{g}_j \quad (6.23)$$

donde j corresponde a la última iteración del anterior incremento

- IV Se determina la variación de desplazamiento debida al residuo \mathbf{R}_i

$$\Delta \mathbf{u}_{i+1} = {}^t\mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{R}_i \quad (6.24)$$

- V Esta variación se suma a los desplazamientos anteriores

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}_{i+1} = {}^t\mathbf{u}_i + \Delta \mathbf{u}_{i+1} \quad (6.25)$$

VI Para determinar si se está lo suficientemente cerca del punto de equilibrio se considera la energía puesta en juego en la última iteración

$$\Delta W = \mathbf{R}_i^T \Delta \mathbf{u}_i \quad (6.26)$$

y debe cumplirse que para

$$W = \Delta \lambda \mathbf{f}^T \Delta \mathbf{u}_1 \quad (6.27)$$

entonces

$$\Delta W/W < Tol \quad (6.28)$$

donde Tol es un número mucho menor que uno y es función de la exactitud requerida.

El algoritmo puede fracasar (no alcanzar convergencia para un número límite de iteraciones) en caso de que los incrementos de carga sean muy grandes, y la matriz de rigidez del comienzo del intervalo no sea adecuada. De ocurrir esto, puede dividirse el salto de carga en incrementos menores hasta lograr convergencia.

6.3.3. Iteración a Desplazamiento Prescripto

En este caso la ecuación de restricción es

$$\mathbf{u}_k - \mu = 0 \quad (6.29)$$

donde \mathbf{u}_k es el desplazamiento de un punto convenientemente elegido.

Este método es más general que el anterior pues la elección adecuada del grado de libertad \mathbf{u}_k permite seguir toda la trayectoria de interés. Sin embargo cuando la estructura es compleja no siempre puede elegirse correctamente el grado de libertad y el algoritmo puede fallar debido a un retroceso en el desplazamiento \mathbf{u}_k o una excesiva rigidización de la estructura respecto a dicho grado de libertad.

El algoritmo funciona de la siguiente manera:

- I Se fija el incremento en \mathbf{u}_k , $\Delta \mathbf{u}_k$
- II Se calcula y triangulariza ${}^t \mathbf{K}_T$ con los desplazamientos correspondientes al último incremento exitoso
- III Se calcula el vector de desplazamientos tangente \mathbf{u}_T correspondiente a una variación unitaria del factor λ

$$\mathbf{u}_T = {}^t \mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{f} \quad (6.30)$$

IV La variación del factor de carga para $i = 0$ (predicción) es:

$$\Delta\lambda_0 = \frac{\Delta\mathbf{u}_k}{\mathbf{u}_{T_k}} \quad (6.31)$$

entonces:

$$\Delta\mathbf{u}_0 = \Delta\lambda_0\mathbf{u}_T \quad {}^{t+\Delta t}\lambda_0 = \lambda_j^t + \Delta\lambda_0 \quad (6.32)$$

V Se determina el residuo \mathbf{R}_i

VI Con este residuo se determina

$$\Delta\mathbf{u}_{i+1}^{(1)} = {}^t\mathbf{K}_T^{-1}\mathbf{R}_i \quad (6.33)$$

y de la ecuación de restricción resulta

$$\Delta\lambda_{i+1} = -\frac{\Delta\mathbf{u}_{i+1k}}{\mathbf{u}_{T_k}} \quad (6.34)$$

$$\Delta\mathbf{u}_{i+1} = \Delta\mathbf{u}_{i+1}^{(1)} + \Delta\lambda_{i+1}\mathbf{u}_T \quad (6.35)$$

$${}^{t+\Delta t}\lambda_{i+1} = {}^{t+\Delta t}\lambda_i + \Delta\lambda_{i+1} \quad (6.36)$$

VII La convergencia se mide en la misma forma que el caso de carga prescripta. En caso de no lograr convergencia puede intentarse subdividir el incremento de desplazamiento $\Delta\mathbf{u}_k$. Por otro lado el incremento de desplazamiento puede fijarse en forma automática en función de las características de convergencia del último paso; se ha propuesto [Ramm (1981)]

$${}^{t+\Delta t}\Delta\mathbf{u}_k = {}^t\Delta\mathbf{u}_k \sqrt{\frac{N_0}{N_t}} \quad (6.37)$$

donde N_0 es el número de iteraciones óptimo (fijado por el usuario) y N_t es el número de iteraciones utilizadas para lograr convergencia en el incremento t .

6.3.4. Longitud de Arco Esférico Fijo

Este método propuesto por Riks (1979) y desarrollado por Crisfield (1981) es más general que los anteriores pero requiere de una lógica y control más complejo. Propone como ecuación de restricción la longitud del incremento de la trayectoria en el espacio de dimensión $n + 1$; esto es

$$\Delta\mathbf{u}_i = {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}_i - {}^t\mathbf{u}_j \quad ; \quad \Delta\lambda_i = {}^{t+\Delta t}\lambda_i - {}^t\lambda_j \quad (6.38)$$

$$[\Delta \mathbf{u}_i^T \Delta \mathbf{u}_i + \alpha^2 \Delta \lambda^2]^{1/2} = \Delta L \quad (\text{genéricamente}) \quad (6.39)$$

donde α es una constante necesaria dada las distintas unidades de los sumandos, que muchos autores toman igual a cero [Crisfield (1981), Ramm (1985)]; criterio que también adoptaremos en esta tesis.

La forma en que trabaja el algoritmo es:

- I Se fija un valor para ΔL
- II Se calcula y triangulariza ${}^t\mathbf{K}_T$ con los desplazamientos correspondientes al último incremento exitoso
- III Se calcula el vector de desplazamientos tangente \mathbf{u}_T correspondiente a una variación unitaria del factor λ

$$\mathbf{u}_T = {}^t\mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{f}$$

- IV La variación del factor de carga para $i = 0$ (predicción) es:

$$\Delta \lambda_0 = \Delta L / \sqrt{(\mathbf{u}_{TD}^T \mathbf{u}_{TD})/L_D + (\mathbf{u}_{TR}^T \mathbf{u}_{TR})/L_R} \quad (6.40)$$

donde el signo de la raíz será positivo si \mathbf{K}_T es definida positiva o negativo si \mathbf{K}_T tiene algún autovalor negativo; L_D y L_R son factores para homogeneizar las unidades [Simo et al (1984), Dvorkin (1984)], \mathbf{u}_{TD} indica los grados de libertad asociados a traslacionales y \mathbf{u}_{TR} indica los asociados a rotaciones y derivadas de los desplazamientos.

$$\Delta \mathbf{u}_0 = \Delta \lambda_0 \mathbf{u}_T \quad {}^{t+\Delta t}\lambda = {}^t\lambda + \Delta \lambda_0 \quad (6.41)$$

- V Se determina el residuo \mathbf{R}_i y con el

$$\Delta \mathbf{u}_{i+1}^{(1)} = {}^t\mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{R}_i \quad (6.42)$$

- VI Se plantea la condición de restricción sobre

$$\Delta \mathbf{u}_{i+1} = \Delta \mathbf{u}_i + \Delta \mathbf{u}_{i+1}^{(1)} + \Delta \lambda_{i+1} \mathbf{u}_T \quad (6.43)$$

lo que conduce a una ecuación de 2 grado con dos valores posibles para $\Delta \lambda_{i+1}$. Los casos posibles y la elección de la raíz correcta pueden verse en [Crisfield (1981)].

VII De esta forma

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}_{i+1} = {}^t\mathbf{u}_0 + \Delta\mathbf{u}_{i+1} \quad (6.44)$$

$${}^{t+\Delta t}\lambda_{i+1} = {}^{t+\Delta t}\lambda_i + \Delta\lambda_{i+1} \quad (6.45)$$

VIII- La convergencia puede medirse en la misma forma que en los esquemas anteriores, en tanto que para la determinación del valor de ΔL para el nuevo incremento puede usarse

$${}^{t+\Delta t}\Delta L = {}^t\Delta L \sqrt{\frac{N_0}{N_t}} \quad (6.46)$$

similar al esquema anterior.

Para el 1er. incremento aquí se ha propuesto utilizar el método de desplazamiento prescripto, lo que permite fijar un valor de ΔL de referencia y los valores de las constantes L_R y L_D .

En caso de no lograrse convergencia puede disminuirse la longitud de avance ΔL . Se ha encontrado que en algunos casos el método conduce al punto inmediato anterior en vez de avanzar, en tal caso invertir el signo de $\Delta\lambda_0$ puede en algunos casos solucionar el problema.

6.3.5. Método del Plano Normal Tangente

En este caso la restricción consiste en que el punto de equilibrio buscado debe encontrarse sobre el hiperplano normal a la dirección tangente \mathbf{u}_T que pasa por el punto de predicción. A su vez la predicción puede hacerse de distintas maneras; la más común es escalar el vector \mathbf{u}_T en la misma forma que en la primera iteración del método de longitud de arco constante.

El algoritmo consiste en:

I Elección de ΔL

II Evaluación y factorización de \mathbf{K}_T y determinación de \mathbf{u}_T

III En la primera iteración (predicción)

$$\Delta\lambda_0 = \Delta L / \sqrt{(\mathbf{u}_{TD}^T \mathbf{u}_{TD})/L_D + (\mathbf{u}_{TR}^T \mathbf{u}_{TR})/L_R}$$

$$\Delta\mathbf{u}_0 = \Delta\lambda_0 \mathbf{u}_T \quad (6.47)$$

IV Determinación del residuo \mathbf{R}_i y con él

$$\Delta\mathbf{u}_{i+1}^{(1)} = {}^t\mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{R}_i \quad (6.48)$$

V Imponemos la restricción, para lo cual observemos que el incremento en la iteración $i + 1$ está compuesto de $\Delta \mathbf{u}_{i+1}^{(1)}$ más un vector paralelo a \mathbf{u}_T escalado por el incremento en el parámetro λ

$$\mathbf{u}_T^T (\Delta \mathbf{u}_{i+1}^{(1)} + \delta \lambda \mathbf{u}_T) = 0 \quad (6.49)$$

de donde

$$\delta \lambda = - \frac{\mathbf{u}_T^T \Delta \mathbf{u}_{i+1}^{(1)}}{\mathbf{u}_T^T \mathbf{u}_T} \quad (6.50)$$

Los incrementos totales resultan entonces

$$\Delta \mathbf{u}_{i+1} = \Delta \mathbf{u}_i + \Delta \mathbf{u}_{i+1}^{(1)} + \delta \lambda \mathbf{u}_T \quad (6.51)$$

$$\Delta \lambda_{i+1} = \Delta \lambda_i + \delta \lambda \quad (6.52)$$

VI La convergencia y la elección del nuevo paso de avance son idénticos al método de longitud de arco constante.

Se obtienen mejores resultados si la búsqueda de la solución se realiza sobre el hiperplano normal al último incremento $\Delta \mathbf{u}_i$ [Ramm (1985)], esto es si en vez de la (6.49) escribimos

$$\Delta \mathbf{u}_i^T (\Delta \mathbf{u}_{i+1}^{(1)} + \delta \lambda \mathbf{u}_T) = 0 \quad (6.53)$$

de donde

$$\delta \lambda = - \frac{\Delta \mathbf{u}_i^T \Delta \mathbf{u}_{i+1}^{(1)}}{\Delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_T} \quad (6.54)$$

Este método ha sido utilizado con excelentes resultados encontrándose que converge rápidamente. El método podría fallar en caso de no existir solución sobre el plano normal tangente, sin embargo debe notarse que la implementación hecha aquí varía dicho hiperplano entre iteraciones.

6.3.6. Iteración por Incremento Constante del Trabajo Externo

El trabajo externo puede definirse aproximadamente por

$$\Delta W = (\lambda + \Delta \lambda / 2) \mathbf{f}^T \Delta \mathbf{u} \quad (6.55)$$

donde ΔW es el trabajo externo durante el incremento y $\Delta \lambda$ y $\Delta \mathbf{u}$ son las variaciones producidas en el nivel de carga y los desplazamientos durante el incremento.

I En la primera iteración puede expresarse $\Delta \mathbf{u}_0 = \Delta \lambda_0 \Delta \mathbf{u}_T$ que reemplazada

en la expresión del trabajo (6.55) resulta

$$\Delta W = (\lambda + \Delta\lambda/2)\mathbf{f}^T(\Delta\lambda\mathbf{u}_T) = \lambda\Delta\lambda\mathbf{f}^T\mathbf{u}_T + \frac{\Delta\lambda^2}{2}\mathbf{f}^T\mathbf{u}_T \quad (6.56)$$

llamando $C_W = \mathbf{f}^T\mathbf{u}_T$ la ecuación resulta

$$\Delta\lambda^2/2 + \lambda\Delta\lambda - \Delta W/C_W = 0 \quad (6.57)$$

que tiene como solución

$$\Delta\lambda = \sqrt{\lambda^2 + 2\Delta W/C_W} - \lambda \quad (6.58)$$

donde sólo interesa la raíz positiva.

II La solución encontrada es por supuesto una aproximación y da por resultado un residuo \mathbf{R}_i

III En las iteraciones sucesivas se puede utilizar nuevamente la ecuación de trabajo pero ahora

$$\Delta\mathbf{u}_{i+1} = \delta\mathbf{u}_i + \Delta\lambda_i\mathbf{u}_T \quad (6.59)$$

donde

$$\delta\mathbf{u} = \sum_{j=0}^i \mathbf{K}_T^{-1}\mathbf{R}_j \quad (6.60)$$

reemplazando en la ecuación de trabajo (6.55)

$$\Delta W = [\lambda + \frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2}]\mathbf{f}^T(\delta\mathbf{u}_i + \Delta\lambda_{i+1}\mathbf{u}_T) \quad (6.61)$$

llamando $C = \mathbf{f}^T\delta\mathbf{u}_i$

$$\Delta W = [\lambda + \frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2}]C + [\lambda\Delta\lambda_{i+1} + \frac{\Delta\lambda_{i+1}^2}{2}]C_W \quad (6.62)$$

que puede escribirse como

$$\frac{\Delta\lambda_{i+1}^2}{2} + \underbrace{\left(\frac{C}{C_W} + \lambda\right)}_{a_2}\Delta\lambda_{i+1} - \underbrace{(\Delta W - \lambda C)/C_W}_{a_3} = 0 \quad (6.63)$$

cuya solución es

$$\Delta\lambda_{i+1} = -a_2 + \sqrt{a_2^2 + 2a_3} \quad (6.64)$$

donde se ha supuesto que la raíz correcta es la positiva

IV La convergencia puede medirse como en los casos anteriores a partir del trabajo

producido por el desequilibrio \mathbf{R}_i o en el parámetro λ

$$\left| 1 - \frac{\Delta\lambda_{i+1}}{\Delta\lambda_i} \right| < Tol \quad (6.65)$$

Una forma simplificada de abordar el tema es suponer que la expresión del trabajo puede escribirse como:

$$\Delta W = \lambda \mathbf{f}^T \Delta \mathbf{u}_1 \quad (6.66)$$

en tal caso la primera iteración resulta ($\Delta \mathbf{u}_0 = \Delta \lambda_0 \mathbf{u}_T$)

$$\Delta W = \lambda \Delta \lambda_0 C_W \rightarrow \Delta \lambda_0 = \frac{\Delta W}{\lambda} \frac{1}{C_W} \quad (6.67)$$

para las iteraciones siguientes

$$\Delta \mathbf{u}_{i+1} = \delta \mathbf{u}_i + \Delta \lambda_{i+1} \mathbf{u}_T \quad (6.68)$$

que llevado a la expresión del trabajo modificada (6.66)

$$\Delta W = \lambda \mathbf{f}^T (\delta \mathbf{u}_i + \Delta \lambda_{i+1} \Delta \mathbf{u}_T) \quad (6.69)$$

y despejando $\Delta \lambda_{i+1}$

$$\Delta \lambda_{i+1} = \left[\frac{\Delta W}{\lambda} - C \right] \frac{1}{C_W} \quad (6.70)$$

El método utilizado en forma individual no ha dado buenos resultados y se ha encontrado que falla en algunas oportunidades. La experiencia del autor indica que en casos de fuerte disminución de la rigidez en un estado poscrítico no pueden ser considerados por el método. Por ello se lo ha utilizado en puntos específicos de la trayectoria en conjunto con el método de longitud de arco fijo.

6.3.7. Análisis de Resultados para Métodos de Continuación

Consideraciones acerca de la conveniencia computacional de optar por una u otra técnica de continuación pueden ser realizadas sobre la base de estudios numéricos. En esta sección se investiga la respuesta no lineal de tres problemas: una placa circular (caracterizada por un comportamiento no lineal rígido); un elemento conocido en la literatura como Belleville Spring (punto límite); y el sector esférico rebajado bajo carga de anillo (cuya respuesta depende de la distribución de carga).

(1) *Placa circular empotrada con carga puntual.* Este estructura presenta un comportamiento no lineal con una fuerte rigidización a medida que aumentan los desplazamientos. En la Fig. 6.2 se muestra la geometría de la placa y un gráfico carga vs. desplazamiento del punto de aplicación usando las distintas técnicas implementadas. En la Tabla 6.2 se

presentan los mismos resultados y además se ha indicado el número de iteraciones para lograr convergencia con $Tol = 0,005$ (Ec.(6.28)). Los resultados indicados se ha obtenido usando dos elementos de igual longitud y concuerdan con los presentados por Surana (1982).

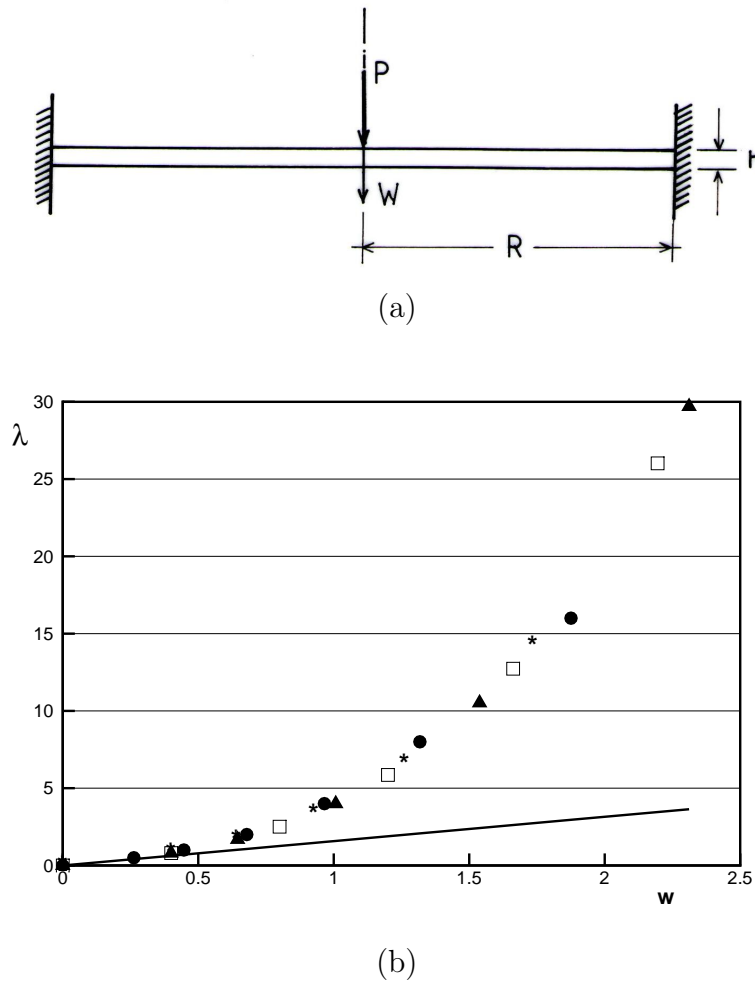
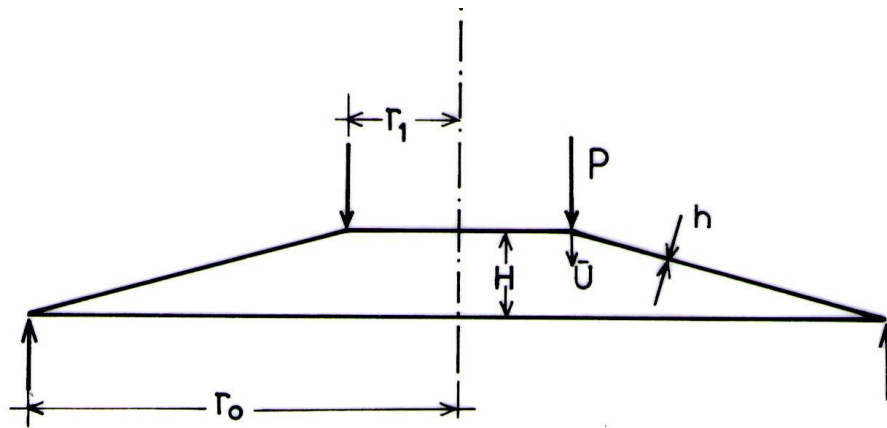


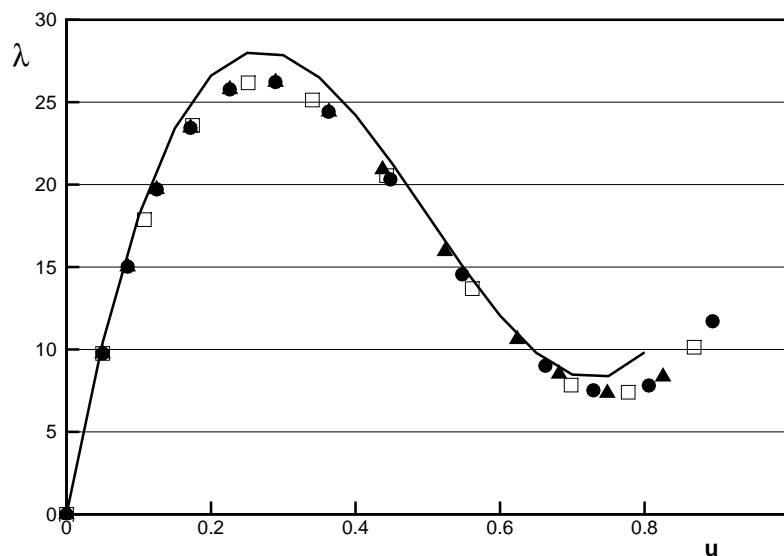
Figura 6.2: Placa empotrada con carga concentrada. (a) Geometría (b) desplazamiento w vs. λ utilizando (●)carga fija; (□)desplaz. prescrito; (▲)Long. de arco; (*)Plano Normal tangente; (—) Lineal. $R = 10$ $h = 0,5$ $E = 300$ $\nu = 0,0$

Carga Fija			Long. de Arco			Plano Normal Tg			Despl. Presc.		
λ	N_t	w	λ	N_t	w	λ	N_t	w	λ	N_t	w
0,5	5	0,262	0,800	4	0,400	0,800	4	0,400	0,800	4	0,400
1,0	5	0,447	1,686	2	0,645	1,657	3	0,641	2,509	4	0,800
2,0	9	0,679	3,997	2	1,007	3,343	3	0,926	5,858	3	1,200
4,0	11	0,965	10,519	2	1,538	6,602	2	1,261	12,729	3	1,662
8,0	9	1,318	29,696	2	2,311	14,241	2	1,735	26,018	2	2,195
16,0	8	1,876									

Cuadro 6.2: TABLA 6.2 Placa empotrada con carga concentrada



(a)



(b)

Figura 6.3: Belleville Spring. (a) Geometría y cargas. (b) desplazamiento del punto de aplicación de la carga u vs λ , (—) Surana; (\blacktriangle) Long. de arco; (\bullet) Plano normal tangente; (\square) desplaz. prescrito; $E = 3 \times 10^4$ $\nu = 0,3$ $r_o = 3$ $r_1 = 1$ $H = 0,5$ $h = 0,2$

(2) *Belleville Spring*. Este tipo de elementos, provenientes de la industria aeronáutica, presenta grandes desplazamientos y comportamiento de punto límite. En la Fig.6.3 se muestra el ejemplo estudiado, que ha sido previamente analizado por Nayak (1971) y Surana (1982). Los resultados (usando 2 elementos) indican un comportamiento más flexible usando el presente elemento respecto a los resultados de Surana quien emplea un elemento obtenido a partir de un sólido axilsimétrico; por otro lado, los resultados con el presente elemento coinciden con los obtenidos por Nayak, los que no se han graficado en la figura para no sobrecargar el dibujo. La convergencia ha sido uniforme para los tres métodos, siendo necesarias en general tres iteraciones por incremento.

(3) *Sector esférico rebajado sometido a una carga de anillo*. Corresponde al mismo

ejemplo analizado en la sección 6.2.3 cuya geometría aparece en la Fig.6.1.a. En la Fig.6.4 se muestran los resultados usando los métodos de desplazamiento prescripto, longitud de arco y plano normal tangente. Las tres implementaciones muestran para estos casos un nivel similar de convergencia (medido en función del número de incrementos necesarios para alcanzar un valor de carga o desplazamiento) con alguna ventaja para el método del plano normal tangente y para el método de desplazamiento prescripto. Por otro lado, dada la mayor generalidad del primero, pareciera el método del plano normal tangente el más adecuado para seguir una trayectoria cualquiera. Los resultados presentados en la Fig.6.4 concuerdan con los que aparecen en la referencia [Zienkiewicz (1977)] para todo nivel de carga, y han sido obtenidos usando 4 elementos (26 grados de libertad).

6.4. Conclusiones

En este capítulo se han presentado algunas técnicas para el seguimiento de la trayectoria fundamental no lineal que han sido implementadas en el código de elementos finitos desarrollado. Estas técnicas han sido utilizadas para el análisis de algunos ejemplos con fuerte comportamiento no lineal con el objeto de evaluar la capacidad de adaptación de cada método.

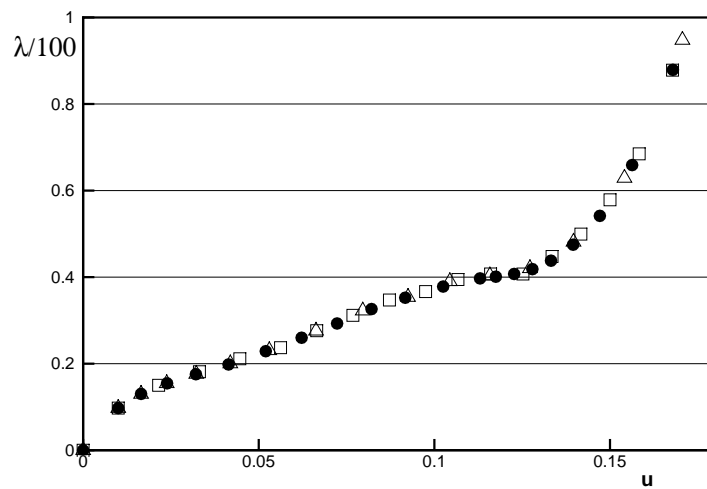
De los resultados obtenidos, surge que

(a) el método de carga fija requiere muchas iteraciones para lograr convergencia y no se adapta fácilmente; en particular no es adecuado para superar zonas de fuerte pérdida de rigidez y puntos límites.

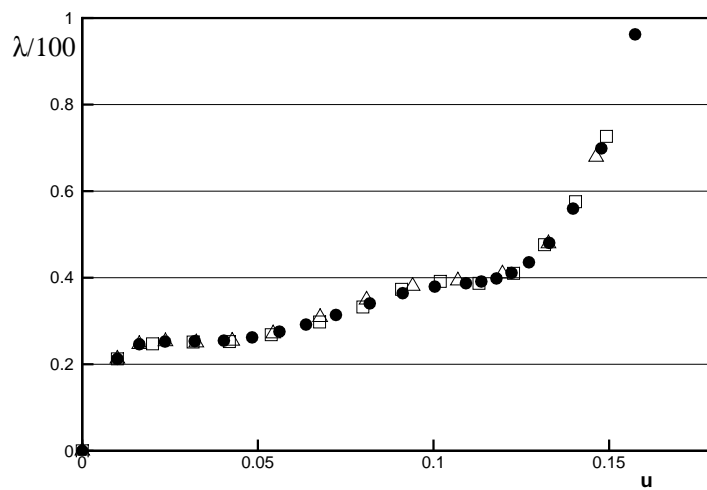
(b) los métodos de desplazamiento prescripto, longitud de arco y plano normal tangente, son en general confiables y muestran buenas características de convergencia, con alguna ventaja para el último de ellos. Por otro lado, el primero es el menos general, sin embargo una adecuada elección del grado de libertad a prescribir permite analizar estructuras complejas. Debe hacerse notar que también es posible cambiar de grado de libertad a lo largo de la trayectoria; una posibilidad es utilizar el de mayor variación en el último paso de avance.

Si bien existen técnicas de análisis no lineal que en muchos casos pueden resultar más económicas, dado que en una lámina de revolución cargada axilsimétricamente, la cantidad de grados de libertad es usualmente bajo y las matrices de rigidez resultantes son fuertemente bandeadas, se ha preferido usar la técnica de Newton-Rapshon modificada básica debido a su mayor generalidad y simplicidad.

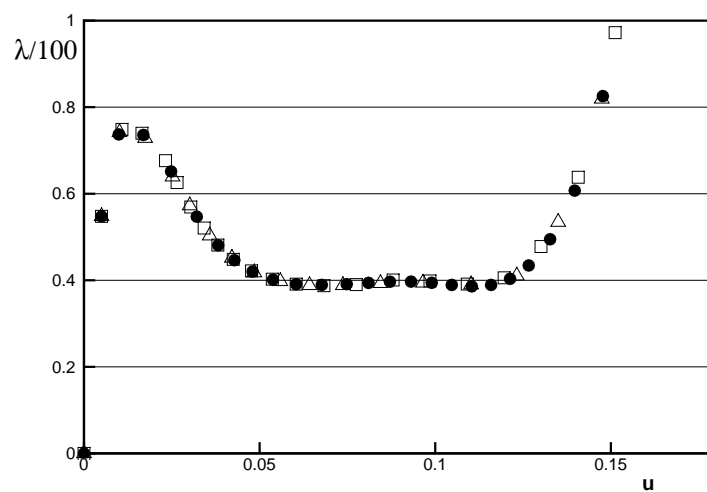
Las técnicas aquí descriptas se combinan con la solución del problema de autovalores, para la determinación de cargas de bifurcación a partir de trayectorias precríticas no lineales en los Caps. 7-10, en tanto que en el Cap.9 se estudia además la influencia de la no linealidad en el comportamiento de recipientes esféricos con imperfecciones geométricas.



(a)



(b)



(c)

Figura 6.4: Domo esférico rebajado con carga anular. Diagramas carga total vs. desplazamiento del vértice, usando distintas técnicas de avance: (▲) Longitud de arco; (●) Plano normal tangente; (□) Desplazamiento prescripto. (a) $r/a = 0,00$; (b) $r/a = 0,25$; (c) $r/a = 0,42$.

Capítulo 7

Determinación de Puntos Críticos Distintos

7.1. Introducción

En este capítulo se presentan los algoritmos utilizados para la determinación de los puntos de estabilidad crítica, esto es los puntos sobre la trayectoria fundamental que satisfacen la condición (3.2).

Para la determinación de los puntos críticos hay básicamente dos aproximaciones distintas que pueden realizarse; (a) suponer que la contribución de los términos no lineales a la trayectoria fundamental es pequeña, y por lo tanto considerar que la evaluación de los puntos críticos puede realizarse usando una trayectoria precrítica lineal; (b) suponer que la no linealidad de la trayectoria fundamental es significativa en la determinación de los puntos críticos. La primera aproximación se conoce como análisis de estabilidad clásica y corresponde a la solución del problema de autovalores (4.24). En tanto que la segunda aproximación corresponde a la solución de la ecuación (4.25), y es necesaria en aquellos casos en que no se cumple la hipótesis de linealidad de la trayectoria fundamental.

A continuación se presentan los algoritmos iterativos para la solución de autovalores, y las aproximaciones a la trayectoria precrítica, junto con algunos ejemplos ilustrativos de las diferencias entre las mismas. Por otro lado se muestran ejemplos tomados de la literatura con el objeto de validar la formulación.

7.2. Solución del Problema de Autovalores

Interesa básicamente la solución de un problema lineal de autovalores generalizado de la forma

$$[\mathbf{K} - \lambda\mathbf{G}]\phi = \mathbf{0} \tag{7.1}$$

o en forma equivalente

$$\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{G}\phi \quad (7.2)$$

donde \mathbf{K} y \mathbf{G} son matrices reales, simétricas y bandeadas, pero en general no definidas positivas. En los casos que aquí nos interesa $\mathbf{K} \equiv \mathbf{K}_T$ es la matriz de rigidez tangente de la estructura, que para el caso de estar valuada sobre la trayectoria fundamental antes del primer punto crítico será definida positiva; \mathbf{G} esta asociada a la derivada de la matriz tangente (que coincide con la llamada matriz de carga-geometría cuando se la evalúa al comienzo de la trayectoria precrítica) y es en general no definida; el autovalor λ corresponde al valor o a la variación del valor del parámetro de carga, en tanto que el autovector ϕ indica el modo de cuerpo rígido asociado al punto crítico.

En general la resolución del problema de autovalores (7.1) se realiza en forma iterativa y resulta computacionalmente costoso, por lo que es conveniente hacer uso de toda característica especial del sistema en estudio. La solución del problema de vibraciones libres (y el método de superposición modal ligado a este) en mecánica estructural ha concitado una enorme atención por parte de los investigadores, por lo que se han desarrollado métodos eficientes para el problema definido en (7.2) con ambas matrices definidas positivas.

Consideraremos aquí brevemente dos métodos: el método de iteración inversa que no requiere matrices definidas positivas, y el método de iteración de subespacios, que requiere que las matrices sean definidas positivas, pero que tiene la ventaja de poder calcular eficientemente los primeros p autovalores y autovectores en forma simultanea. Una descripción más detallada de los métodos con sus ventajas y limitaciones puede verse en el libro de Bathe (1982).

7.2.1. Método de Iteración Inversa

El esquema de iteración inversa es el siguiente: dado un vector inicial \mathbf{x}_1 y asumiendo que \mathbf{K} es no singular, evaluamos en cada paso de iteración $k = 1, 2, \dots$

$$\bar{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{x}_k \quad (7.3)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \frac{\bar{\mathbf{x}}_{k+1}}{[\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^T \mathbf{G} \bar{\mathbf{x}}_{k+1}]^{1/2}} \quad (7.4)$$

esta secuencia converge al autovector ϕ_1 asociado al autovector de menor valor absoluto λ_1 , con la condición que \mathbf{x}_1 no sea \mathbf{G} -ortogonal a ϕ_1 , esto es:

$$\mathbf{x}_1^T \mathbf{G} \phi_1 \neq 0 \quad (7.5)$$

El paso principal en la iteración es la solución de (7.3) en la que se obtiene para cada

paso una mejor aproximación a ϕ_1 . El cálculo indicado en (7.4) sólo asegura que el vector sea \mathbf{G} -ortonormal y se mantenga acotado y no crezca o decrezca a valores que puedan introducir problemas numéricos.

La implementación computacional se realiza en base a un esquema más eficiente. Asumiendo

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{G}\mathbf{x}_1 \quad (7.6)$$

para $k = 1, 2, \dots$ calculamos

$$\bar{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{y}_k \quad (7.7)$$

$$\bar{\mathbf{y}}_{k+1} = \mathbf{G}\bar{\mathbf{x}}_{k+1} \quad (7.8)$$

$$\epsilon(\bar{\mathbf{x}}_{k+1}) = \frac{\mathbf{y}_k^T \bar{\mathbf{x}}_{k+1}}{\bar{\mathbf{y}}_{k+1}^T \bar{\mathbf{x}}_{k+1}} \quad (7.9)$$

$$\mathbf{y}_{k+1} = \frac{\bar{\mathbf{y}}_{k+1}}{[\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^T \bar{\mathbf{y}}_{k+1}]^{1/2}} \quad (7.10)$$

donde si

$$\mathbf{y}_1^T \phi_1 \neq 0 \quad (7.11)$$

$$\mathbf{y}_{k+1} \longrightarrow \mathbf{G}\phi_1 \quad \text{y} \quad \epsilon(\bar{\mathbf{x}}_{k+1}) \longrightarrow \lambda_1 \quad (7.12)$$

observar que en (7.7) no se calcula \mathbf{K}^{-1} sino que se realiza la descomposición $\mathbf{K} = \mathbf{L}^T \mathbf{D} \mathbf{L}$ o la de Cholesky. La convergencia se mide a partir de dos valores consecutivos de ϵ en la expresión (7.9)

$$\left| \frac{\epsilon_{k+1} - \epsilon_k}{\epsilon_{k+1}} \right| < Tol \quad (7.13)$$

donde Tol depende de la precisión deseada. Para la elección de la tolerancia debe tenerse en cuenta que la convergencia del autovalor es más veloz que la del autovector, por lo que para tener una buena aproximación en este último Tol debe ser menor que 10^{-5} . Finalmente, una vez alcanzada la convergencia, y siendo s la última iteración

$$\lambda_1 = \epsilon(\mathbf{x}_{s+1}) \quad (7.14)$$

$$\phi_1 = \frac{\bar{\mathbf{x}}_{s+1}}{[\bar{\mathbf{x}}_{s+1}^T \bar{\mathbf{y}}_{s+1}]^{1/2}} \quad (7.15)$$

Puede demostrarse que la velocidad de convergencia al autovector ϕ_1 es proporcional a la relación entre los dos autovalores de menor valor absoluto $|\lambda_1/\lambda_2|$, por lo que resultan muy recomendables las técnicas de desplazamiento. Por otro lado, dado que normalmente interesa el menor autovalor positivo (ya que un autovalor negativo significa una inversión en el sentido de la carga lo que generalmente no tiene sentido físico), para evitar que el problema converja a un autovalor no deseado es necesario utilizar un desplazamiento μ y resolver el problema

$$[(\mathbf{K} + \mu\mathbf{G}) + (\lambda - \mu)\mathbf{G}]\phi = [\mathbf{K}^* + \lambda^*\mathbf{G}] = \mathbf{0} \quad (7.16)$$

En caso de interesar un nuevo par (λ_2, ϕ_2) puede repetirse el esquema de iteración ya sea utilizando un nuevo desplazamiento que asegure convergencia al autovalor buscado, o resolver el mismo problema anterior con la restricción

$$\mathbf{x}_k^T \mathbf{G} \phi_1 = 0 \quad (7.17)$$

7.2.2. Método de Iteración de Subespacios

El método de iteración de subespacios resulta eficiente cuando interesa calcular los p primeros autovalores y autovalores del problema (7.2). Consideremos \mathbf{K} y \mathbf{G} positivas definidas. El método consiste en tres pasos [Bathe (1982)]

(1) establecer q vectores de iteración iniciales ($q > p$) \mathbf{X}_0 . Entre las distintas posibilidades resulta conveniente usar como vectores iniciales los obtenidos usando el algoritmo de Lanczos [Bathe y Ramaswamy (1980)].

(2) realizar iteración inversa simultanea sobre los q vectores

$$\bar{\mathbf{X}}_{k+1} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{X}_k \quad (7.18)$$

y luego realizar un análisis de Ritz, que conduce a un problema de autovalores generalizado de orden q

$$\mathbf{K}_{k+1} = \bar{\mathbf{X}}_{k+1}^T \mathbf{K} \bar{\mathbf{X}}_{k+1} \quad (7.19)$$

$$\mathbf{G}_{k+1} = \bar{\mathbf{X}}_{k+1}^T \mathbf{G} \bar{\mathbf{X}}_{k+1} \quad (7.20)$$

$$\mathbf{K}_{k+1} \mathbf{Q}_{k+1} = \mathbf{G}_{k+1} \mathbf{Q}_{k+1} \mathbf{\Lambda}_{k+1} \quad (7.21)$$

calcular una aproximación mejorada de los autovectores

$$\mathbf{X}_{k+1} = \bar{\mathbf{X}}_{k+1} \mathbf{Q}_{k+1} \quad (7.22)$$

El esquema de solución del problema de autovalores reducido (7.21) es lo que condiciona a las matrices a ser definidas positivas. En la implementación original [Bathe (1982)] se usa una generalización del método de Jacobi que exige la condición indicada. En el programa desarrollado se han utilizado directamente la rutina SSPACE que aparece en [Bathe (1982)], y por lo tanto las matrices a utilizar deben ser positivas definidas. Con el objeto de poder tratar problemas con autovalores negativos se ha modificado el problema de autovalores original (7.1), lo que se explica en la próxima sección.

(3) una vez lograda la convergencia en los p primeros autovalores usando por ejemplo la condición (7.13), se usa la secuencia de Sturm para verificar que no haya autovectores faltantes.

7.2.3. Modificación del Problema de Autovalores Original

Del problema de autovalores (7.1) nos interesan los autovalores (y autovectores asociados) menores positivos. Para utilizar la técnica de iteración de subespacios resulta necesario modificar el problema original de tal manera de obtener un problema de autovalores con dos matrices definidas positivas y cuyos menores autovalores estén asociados a los menores autovalores positivos del problema original.

Entonces partiendo del problema original y suponiendo que \mathbf{K} es definida positiva (y por lo tanto no singular)

$$\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{G}\phi$$

dividamos por λ

$$\frac{1}{\lambda}\mathbf{K}\phi = \mathbf{G}\phi \quad (7.23)$$

llamando

$$\gamma = 1/\lambda \quad (7.24)$$

en el nuevo problema de autovalores

$$\mathbf{G}\phi = \gamma\mathbf{K}\phi \quad (7.25)$$

interesan ahora los mayores autovalores positivos. Como $\lambda \neq 0$, γ está acotada superiormente, esto es

$$\exists C/C > \gamma \quad \forall \gamma \quad (7.26)$$

restando $C\mathbf{K}\phi$ en ambos miembros de (7.25) tenemos

$$\mathbf{G}\phi - C\mathbf{K}\phi = \gamma\mathbf{K}\phi - C\mathbf{K}\phi \quad (7.27)$$

multiplicando por menos uno y agrupando

$$(C\mathbf{K} - \mathbf{G})\phi = (C - \gamma)\mathbf{K}\phi \quad (7.28)$$

que podemos expresar como

$$\bar{\mathbf{K}}\phi = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{G}}\phi \quad (7.29)$$

donde $\bar{\lambda} > 0$ por la condición (7.26). En consecuencia tenemos ahora un problema de autovalores en términos de dos matrices definidas positivas; además es fácil ver que los menores autovalores $\bar{\lambda}$ están asociados a los mayores autovalores positivos de (7.25) y en consecuencia a los menores positivos de (7.2), con

$$\lambda = \frac{1}{C - \bar{\lambda}} \quad (7.30)$$

Para la determinación de C se puede seguir el siguiente esquema:

(1) partimos de un valor aproximado de la menor carga crítica λ_1 , entonces elegimos C tal que

$$C_1 > 1/\lambda_1 \quad (7.31)$$

(2) calculamos y factorizamos $\bar{\mathbf{K}} = C_k\mathbf{K} - \mathbf{G} = \mathbf{L}^T\mathbf{D}\mathbf{L}$. Si existen elementos negativos en \mathbf{D} la matriz $\bar{\mathbf{K}}$ no es definida positiva y es necesario proponer un nuevo valor de $C_{k+1} > C_k$.

Es conveniente que C este cercano a la inversa del primer autovalor del problema ya que aumenta la relación λ_p/λ_{q+1} que controla la convergencia del último autovalor buscado. Por otro lado un valor de C demasiado cerca de λ_1^{-1} trae aparejado que en la iteración inversa simultánea (7.18) los vectores converjan todos al primer autovalor debido a que la matriz $\bar{\mathbf{K}}$ es casi singular, lo que hace fracasar el método; además notar que en el proceso iterativo para la determinación de C es necesaria una costosa factorización de la matriz desplazada $\bar{\mathbf{K}}$.

7.3. Bifurcación con Trayectoria Precrítica Lineal

7.3.1. Cargas axilsimétricas

Tradicionalmente el análisis de estabilidad elástica de estructuras ha estado limitado a trayectorias precríticas lineales. Por otro lado en el caso de láminas de revolución, debido a que el problema de autovalores resulta desacoplado para las distintas armónicas cuando

la carga es axilsimétrica, resulta particularmente simple y atractivo este tipo de análisis.

Un punto muy importante en el análisis de las cargas críticas de una cáscara de revolución bajo cargas axilsimétricas, es la determinación de la armónica n_{cr} que produce la menor carga crítica. El valor de n_{cr} depende fundamentalmente de la esbeltez de la cáscara, tipos de apoyos, distancia entre los mismos, y de la extensión de las zonas con esfuerzos membranales de compresión. Sin embargo no hay una forma clara de predecir con buena aproximación el valor de n_{cr} . En base a experiencia adquirida Bushnell (1984) ha propuesto algunas reglas prácticas para algunas cáscaras simples bajo distintos tipos de carga. Sin embargo, para un caso general, es necesario probar con varios valores de n hasta encontrar el correcto. Debe tenerse en cuenta que normalmente la variación de la carga crítica en función de n tiene la forma indicada en la Fig.7.1.c; no obstante la curva puede tener más de un mínimo (particularmente en estructuras optimizadas) e incluso coincidir el mínimo para varios valores de n (cilindros comprimidos axialmente, esferas bajo presión externa).

En base al comportamiento descrito en la Fig.7.1.c Bushnell (1984) propone un esquema de búsqueda simple que consiste en: elegir un valor n_0 con el cual calculamos el valor de la carga crítica λ_0 , a continuación tomamos otro valor $n_1 = n_0 + \Delta n$ ($\Delta n \in \mathbb{Z}$) y evaluamos su carga mínima asociada λ_1 . Si $\lambda_1 < \lambda_0$ continuamos en esa dirección con $n_2 = n_1 + \Delta n$; si $\lambda_1 > \lambda_0$ hacemos $n_2 = n_0 - \Delta n$ y evaluamos su carga asociada. Continuando en la forma indicada hasta detectar que se ha encontrado el mínimo. El valor natural de Δn es 1, sin embargo si la elección inicial n_0 esta muy alejada del mínimo (sobre todo en cáscaras esbeltas) la búsqueda puede demandar muchas iteraciones. El esquema no está exento de fallas debido a las razones antes expuestas.

Para una cáscara compuesta, en general la determinación de la menor carga crítica no puede hacerse en una única corrida de computadora. Resulta conveniente calcular primero las cargas críticas para un conjunto de armónicas igualmente espaciadas, de tal forma de determinar la zona del o los mínimos, y luego en una segunda corrida calcular las cargas críticas para todas las armónicas en la zona de interés. Si bien el análisis precrítico lineal no demanda mucho tiempo, en la segunda corrida puede evitarse el recálculo de la trayectoria fundamental utilizando una opción que lea de almacenamiento en disco dicha trayectoria ya calculada en la primera corrida.

7.3.2. Cargas No Axilsimétricas

Existen muchas cáscaras de revolución que se ven sometidas a cargas no axilsimétricas durante su vida útil; ejemplos importantes son las cargas debidas al viento en grandes recipientes de almacenamiento y torres de enfriamiento, cargas debidas a movimientos sísmicos, cilindros sometidos a flexión, etc.

El problema principal del análisis de bifurcación bajo cargas no axilsimétricas reside en

que ahora el modo crítico tiene componentes en todas las armónicas y por lo tanto resulta un problema acoplado, a diferencia del caso de cargas axilsimétricas. Por esta razón se han propuesto hipótesis simplificativas en el análisis que consisten básicamente en:

- (a) Suponer que las cargas son axilsimétricas de valor igual (o eventualmente menor) a la mayor presión actuante en el paralelo, criterio que se conoce como el del "meridiano más cargado"; lo que obviamente nos deja en el caso descrito en la sección anterior.
- (b) Suponer que los esfuerzos son axilsimétricos de valor igual a los existentes en el "meridiano más exigido". Este criterio requiere evaluar cargas considerando varios valores de x_2 (coordenada sobre el paralelo) hasta encontrar la posición del meridiano cuyas solicitaciones son las más desfavorables desde el punto de vista de la estabilidad. Notar que este criterio requerirá ahora una doble determinación: n_{cr} y x_{2cr} .

Ambos criterios se suponen que arrojan valores de cargas menores que la carga crítica consistente (entendiendo por tal la que resulta de considerar los esfuerzos precríticos no axilsimétricos y resolver el problema acoplado de estabilidad). Sin embargo, en muchos casos los resultados son excesivamente conservativos y en otros, alguno de los criterios da resultados por debajo de los que se obtienen resolviendo el problema acoplado.

Para el caso de cargas no axilsimétricas resulta ahora necesario fijar algún criterio respecto a cuales y cuantas armónicas usar en el problema de autovalores. En la literatura existen muy pocos trabajos en los que se haya considerado el problema acoplado de estabilidad, y han estado asociados al análisis de casos especiales con geometrías muy simples (cilindros) bajo carga de viento. Wang y Billington (1974) usaron armónicas consecutivas, encontrando que las dos primeras $j = 0$ y $j = 1$ tenían una influencia mínima en el modo de bifurcación; según estos autores para una solución suficientemente precisa alcanzaba con tomar 9 armónicas (2 – 10) y que las por encima de $J = 10$ no tenían influencia. Paralelamente Kundurpi et al (1975) analizando el mismo tipo de problema (cilindros en voladizo sometidos a carga de viento) encontraron que cinco armónicas consecutivas eran suficientes para obtener resultados aceptables desde el punto de vista ingenieril, e indicaron que era necesario variar el conjunto de armónicas hasta obtener el mínimo (manteniendo la consecutividad y la cantidad).

En esta tesis se propone utilizar como armónicas en el análisis aquellas que individualmente arrojen las menores cargas críticas usando los criterios simplicativos enunciados antes. En cuanto al número de armónicas a utilizar, puede decirse que no hay mucha experiencia al respecto, pero pareciera que de ocho a diez son adecuadas para obtener valores de cargas críticas suficientemente precisos, como se mostrará con algunos ejemplos.

7.4. Bifurcación con Trayectoria Precrítica no Lineal

El análisis de bifurcación a partir de una trayectoria lineal es válido si las rotaciones se mantienen pequeñas hasta la carga de bifurcación. En estructuras con esfuerzos flexionales importantes debidos a características geométricas, desviaciones de la geometría perfecta, condiciones de borde, solicitaciones, etc., las rotaciones precríticas tienen una marcada influencia en el valor de la carga de bifurcación, y por lo tanto es necesario considerar la no linealidad de la trayectoria fundamental en el análisis de bifurcación.

Como se mostrara en el Cap.4, cuando la carga es axilsimétrica, la bifurcación se produce para una armónica en particular debido a que la matriz de rigidez tangente de la estructura resulta diagonal por bloques, cada bloque correspondiente a la matriz de rigidez asociada a una armónica. Siendo estas submatrices dependientes en forma no lineal de los desplazamientos sobre la trayectoria precrítica, es necesario realizar en forma simultanea un avance sobre la trayectoria fundamental y un análisis de bifurcación.

Como en el caso de trayectoria precrítica lineal, es necesario determinar la armónica asociada a la menor carga crítica, problema doble en este caso, pues la armónica asociada a la menor carga crítica obtenida a partir del análisis de bifurcación al comienzo de la trayectoria puede no coincidir con la armónica correspondiente a la menor carga crítica no lineal. Esto es especialmente cierto cuando las cargas críticas lineales están muy cercanas entre si. Por otro lado, en caso de que una de las armónicas de menor carga crítica lineal sea $J = 0$, puede ocurrir que en vez de bifurcación aparezca primero un punto límite o que haya problemas numéricos debido a la pérdida de rigidez en la trayectoria fundamental.

La estrategia básica para determinar los puntos de bifurcación sobre una trayectoria axilsimétrica no lineal utilizada en esta tesis es:

(a) Determinar las cargas críticas considerando trayectorias lineales. Lo que nos provee de las armónicas con más posibilidades de estar asociadas a la menor carga crítica. Además en caso de que una de ellas sea $J = 0$ nos previene de la posibilidad de la existencia de un punto límite (la bifurcación no lineal en $J = 0$ es muy difícil que ocurra dado que de existir algún tipo de flexión seguramente convierte la bifurcación en un punto límite).

(b) Realizar previamente un análisis no lineal para observar las características de la trayectoria fundamental. Resulta interesante observar si el camino precrítico muestra una degradación de la rigidez o si por el contrario la estructura se rigidiza; por otro lado si la trayectoria precrítica es básicamente lineal existen grandes posibilidades de que las cargas críticas lineales sean una muy buena aproximación a las cargas buscadas. Finalmente es instructivo observar la variación de los esfuerzos de compresión, en valor y zona de influencia, así como la de los radios principales de curvatura de la cáscara, ya que un aumento de los mismos en la zona de compresión está ligado a una disminución de su resistencia al pandeo.

(c) A partir de los resultados anteriores realizar análisis no lineal (o usar directamente

los resultado de (b)) y cada cierto número de pasos de avance un análisis de autovalores para las armónicas de interés (las más bajas de (a)). Una vez que se está en la cercanía del punto crítico, para determinar en forma precisa el punto de bifurcación, observemos que si en el paso i , asociado a un valor de carga ${}^i\lambda$ y a un vector de desplazamientos ${}^i\mathbf{u}$, realizamos un análisis de autovalores y obtenemos un valor de carga crítica ${}^i\lambda_c$, entonces en primera aproximación el estado crítico real está dado por:

$$\lambda_c = {}^i\lambda_c \quad \mathbf{u}_c = {}^i\mathbf{u} + ({}^i\lambda_c - {}^i\lambda) {}^i\mathbf{u}_T \quad (7.32)$$

Dependiendo de la técnica no lineal adoptada el siguiente paso de avance puede realizarse haciendo

1. carga fija ${}^{i+1}\lambda = {}^i\lambda_c$ o $\Delta\lambda = {}^i\lambda_c - {}^i\lambda$
2. desplazamiento prescripto $\Delta\mathbf{u}_k = ({}^i\lambda_c - {}^i\lambda) {}^i\mathbf{u}_T$
3. longitud de arco y plano normal tangente

$$\Delta L = ({}^i\lambda_c - {}^i\lambda) \sqrt{{}^i\mathbf{u}_{TD}^i \mathbf{u}_{TD} / L_D + {}^i\mathbf{u}_{TR}^i \mathbf{u}_{TR} / L_R}$$

Estos valores del parámetro de avance permiten además determinar si se está suficientemente cerca del punto crítico, para ello basta observar si $\Delta\lambda$, $\Delta\mathbf{u}_k$ o ΔL son menores o mayores que los correspondientes al último paso de avance de la trayectoria no lineal. Por otro lado los parámetros de avance son adecuados para medir la convergencia al punto crítico.

Aparentemente, lo más conveniente es utilizar como parámetro de avance aquellos que han demostrado ser los más confiables en el análisis no lineal. En esta tesis se ha optado por el **método de desplazamiento prescripto** (debido a su simplicidad) para iterar sobre el punto crítico y se ha utilizado al factor de carga λ para medir la convergencia.

7.5. Resultados Numéricos con Trayectoria Precrítica Lineal

(a) *Cilindro en voladizo bajo la acción del viento.* De los estudios paramétricos realizados por Wang y Billington (1974) se ha tomado un ejemplo que corresponde a una relación altura/radio $L/a = 2$; una relación radio/espesor $a/h = 100$; y sin succión interna ($C = 0$ en el trabajo original). La geometría utilizada y las características del material se indican en la Fig.7.1, donde además se muestra la variación de la presión en la dirección del paralelo (constante en la altura). Wang y Billington, usando 9 armónicas (2 – 10) obtuvieron como resultado $P = 72,30D/a^2$ que para la geometría indicada en la Fig.7.1 corresponde a $P = 6,6208$.

Consideremos primero los criterios simplificados propuestos. En la Tabla 7.1 se muestran las cargas críticas asociadas a las armónicas 2–14 para los criterios de meridiano más cargado (también en la Fig.7.1.c) y meridiano más exigido. Previamente se ha realizado un análisis de convergencia, encontrándose que 5 elementos son suficientes para modelar correctamente el comportamiento crítico.

Consideremos ahora en forma consistente el acoplamiento entre las armónicas. Para la elección de las armónicas a utilizar nos basamos en los resultados de la Tabla 7.1, eligiendo aquellas asociadas a las menores cargas críticas para el caso de carga constante en el paralelo. En la Tabla 7.2 se han presentados los valores que se obtienen con el criterio indicado y desplazando el rango de armónicas un lugar hacia la izquierda o hacia la derecha.

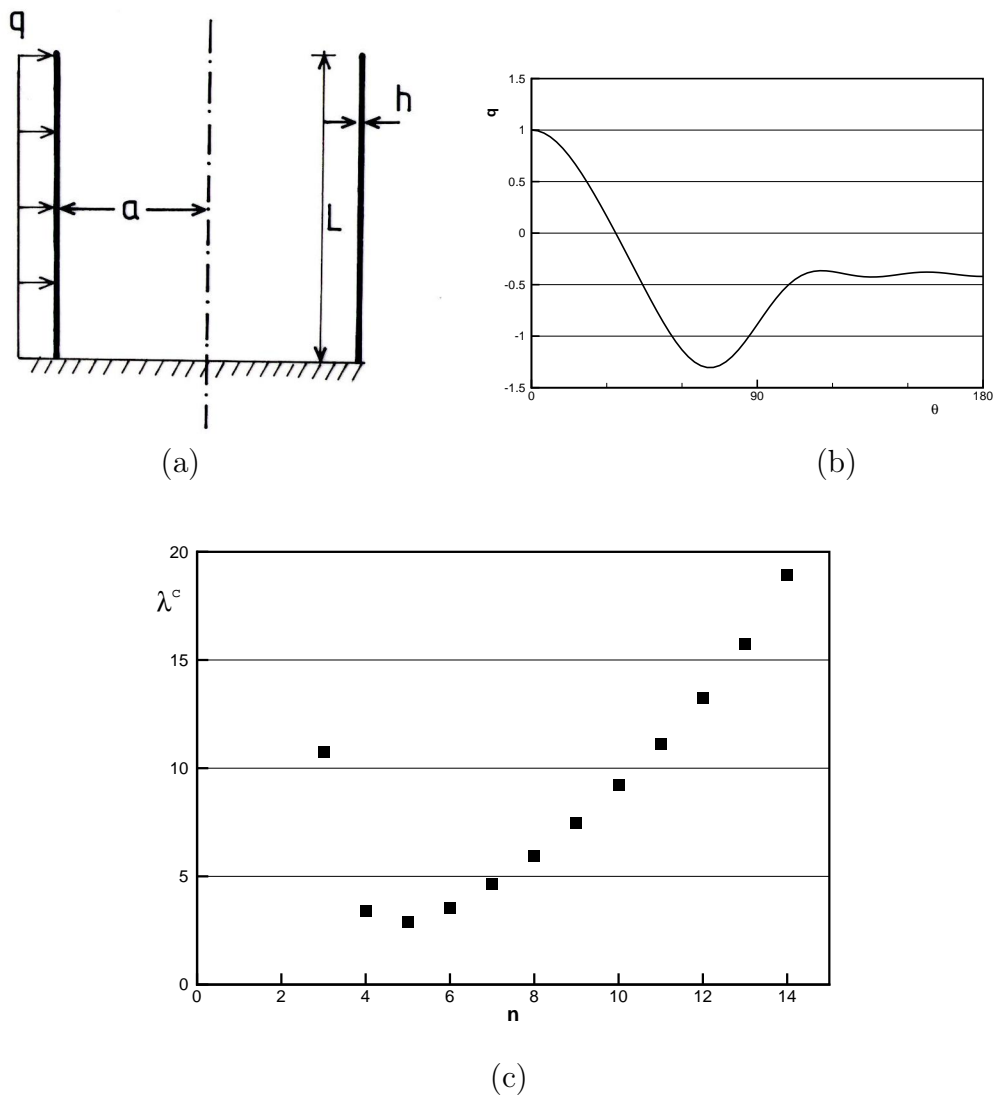


Figura 7.1: Cilindro en voladizo bajo carga de viento. (a) geometría: $L/a = 2$ $a/h = 100$ $E = 10^6$ $\nu = 0$; (b) variación del viento en la dirección θ ; (c) cargas críticas en función de la armónica para presión uniforme

De los resultados tabulados puede observarse que en general el criterio propuesto es el

Armón.	merid. más cargado		merid. más exigido	
	λ	orden	λ	orden
2	121,86		1317,40	
3	10,74	8	20,04	12
4	3,38	2	4,52	3
5	2,88	1	3,47	1
6	3,56	3	4,08	2
7	4,64	4	5,19	4
8	5,96	5	6,56	5
9	7,49	6	8,14	6
10	9,20	7	9,93	7
11	11,12	9	11,91	8
12	13,26	10	14,07	9
13	15,76	11	16,43	10
14	18,94	12	18,96	11

Cuadro 7.1: Cargas críticas usando criterios simplificados de un cilindro en voladizo bajo carga de viento

Número de Arm.	despl. a la izq.		Criterio Prop.		despl. a la der.	
	Arm.	λ	Arm.	λ	Arm.	λ
4	3- 6	14,56	4-7	11,99	5- 8	14,18
5	3- 7	8,98	4-8	8,55	5- 9	10,27
6	3- 8	7,25	4-9	7,37	5-10	8,81
8	2- 9	6,48	3-10	6,26	4-11	6,67
10	2-11	6,09	3-12	6,08	4-13	6,52
12	2-13	6,01	3-14	6,05	4-15	6,47

Cuadro 7.2: Cargas críticas de cilindro en voladizo bajo la acción del viento para distintos grupos de armónicas

que arroja las menores cargas críticas para una cantidad fija de armónicas. Por otro lado, como criterio de verificación puede considerarse el desplazamiento del rango de armónicas hacia las armónicas más bajas. En cuanto a la convergencia del análisis, puede observarse que son necesarias aproximadamente 10 armónicas para obtener resultados precisos. Los resultados obtenidos por Wang y Billington son un 10 % mayores debido principalmente a una elección incorrecta de las armónicas a considerar. Respecto a los criterios simplificados, resultan en este caso altamente conservativos; el criterio de meridiano más cargado da un valor igual a sólo el 48 % de la carga crítica consistente, en tanto que el criterio de meridiano más exigido prevé un valor de carga crítica del 58 % de la carga consistente.

Resulta importante comparar los resultados numéricos con evidencia experimental. Kundurpi et al (1975) llevaron a cabo un amplio estudio de cargas críticas de cilindros empotrado-libre en un túnel de viento. De los modelos ensayados se ha estudiado aquí el correspondiente a las relaciones $L/a = 2$ y $a/h = 376$. La distribución de la presión del viento fue cuidadosamente medida, siendo necesario además considerar la succión

interna existente. En la Fig.7.2 se muestran la geometría, características del material, y distribución de la presión del viento. El valor experimental obtenido es (Fig.7 del trabajo original) $\lambda_c = 0,98$ en tanto que los mismos autores obtuvieron un resultado numérico usando 5 armónicas de $\lambda_c = 1,15$. Con el presente código, usando 6 elementos de igual longitud y 10 armónicas (4 – 13) se obtuvo un valor de carga crítica de $\lambda_c = 1,00$ que es sólo un 2% superior que la carga experimental. Usando los criterios simplificados se obtiene $\lambda_c = 0,665$ (meridiano más cargado) y $\lambda_c = 0,657$ (meridiano más exigido), que corresponden a las dos terceras partes de la carga experimental.

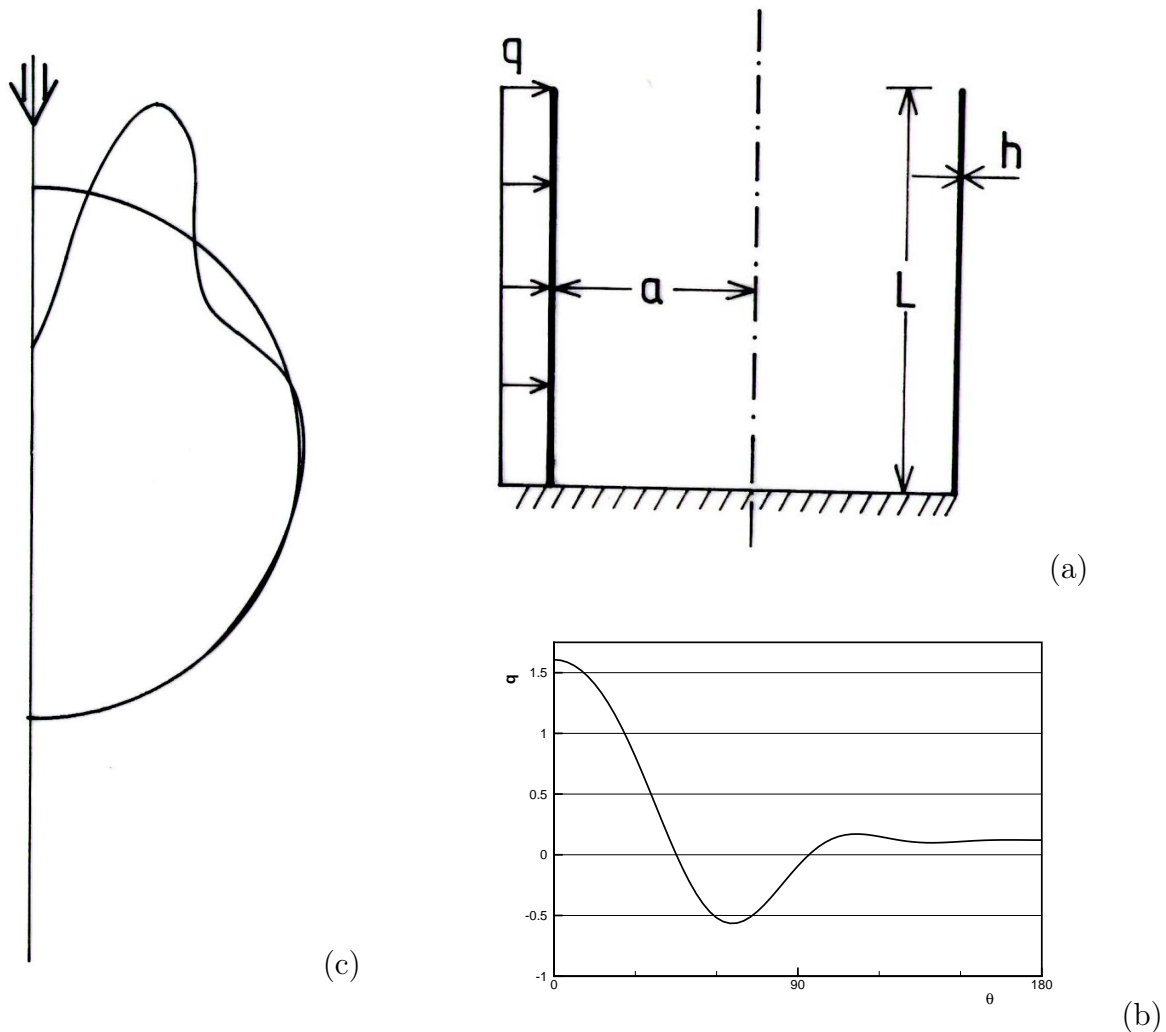


Figura 7.2: Cilindro en voladizo bajo carga de viento. (a) geometría: $L/a = 2$ $a/h = 376$ $E = 10^6$ $\nu = 0,3$; (b) variación del viento en la dirección θ ; (c) modo de bifurcación en el borde libre.

Debe notarse que dada la mayor esbeltez de esta lámina respecto al primer caso ($a/h = 379$ contra $a/h = 100$) y debido a que la succión interna produce una presión resultante de mayor uniformidad sobre una amplia zona de la cáscara, las diferencias entre el análisis consistente y el simplificados son menores; además la cantidad de armónicas a considerar en el análisis puede reducirse, por ej. usando 6 armónicas (5-10) se obtiene una carga

crítica de $\lambda_c = 1,088$ que es sólo un 10 % mayor que la carga experimental.

(b) *Torre de Enfriamiento bajo la acción del viento.* Corresponde a la misma estructura y solicitaciones de la Fig.5.17. Para analizar en forma realista este caso debe considerarse de manera distinta al peso propio y la presión del viento, ya que el primero es invariante y lo que interesa es el valor de la segunda que produce la inestabilidad. Para el caso de bifurcación lineal, el código desarrollado permite considerar dos sistemas de cargas distintos, uno que tiene un valor fijo y otro que es proporcional al parámetro λ . Haciendo uso de esta facilidad, las solicitaciones debidas al peso propio se mantienen fijas y se determina el factor λ proporcional a la presión del viento que superpuesta a la acción del peso propio produce la bifurcación.

Usando los criterios simplificados y para características del material $E = 259 \times 10^5$ $\nu = 0,2$, se obtienen los siguientes valores de λ_c meridiano más cargado $\lambda_c = 5,28$, $N_{cr} = 8$ meridiano más exigido $\lambda_c = 12,47$ $N_{cr} = 7$ $\theta = 65$. Considerando las armónicas acopladas en forma consistente se obtiene usando 10 armónicas (4-13) $\lambda_c = 8,40$

Puede observarse que el criterio de meridiano más exigido no es ni siquiera conservativo en este caso, lo que hace peligroso su uso, en tanto que el criterio de meridiano más cargado da valores del 60 % de la carga consistente.

Abel et al (1986) utilizando un elemento bidimensional de doble curvatura con facilidades no lineales han analizado varias geometrías de torres de enfriamiento, encontrando que su comportamiento es básicamente lineal hasta la bifurcación, lo que valida el análisis consistente aquí realizado, sin embargo las fuertes diferencias existentes con los ensayos experimentales aparentemente indican una importante sensibilidad a imperfecciones, lo que convierte a la carga de bifurcación consistente en un límite superior de la carga real. Estos resultados hacen que en el análisis de torres de enfriamiento se use frecuentemente el criterio de meridiano más cargado, que da cargas más bajas que el análisis consistente y por lo tanto más cercanas a las experimentales.

7.6. Resultados Numéricos con Trayectoria Precrítica No Lineal

(a) *Cilindro simplemente apoyado con carga axial.* En la Fig.7.3 se muestra la geometría del ejemplo estudiado que ha sido detalladamente analizado por Bushnell (1984). Para la discretización se ha considerado un comportamiento simétrico respecto a un plano normal al eje a la mitad de la longitud. Se han utilizado 16 elementos, con una mayor densificación en la zona del apoyo, que significan 112 grados de libertad para el análisis no lineal y 158 grados de libertad en el análisis de bifurcación. En la Tabla 7.3 se presentan las cargas críticas, considerando trayectorias lineales y no lineales, para el conjunto de armónicas más relevante; de la 2da columna puede verse que la mayor carga lineal

corresponde a $n = 12$. Además la diferencia entre la mayor y la menor carga crítica, para el rango de armónicas indicado es de sólo el 0,5% . En la tercera columna se muestran las cargas críticas considerando la no linealidad de la trayectoria, puede observarse que la menor carga crítica ocurre ahora para $n = 19$, por lo que el rango de armónicas con menor carga crítica se ha desplazado hacia valores crecientes de n . La carga crítica lineal resulta en este caso un 15% mayor que utilizando la trayectoria precrítica no lineal. En la Fig.7.3.b se muestra el tramo final de la curva carga vs desplazamiento u del punto de aplicación de la carga; puede observarse la cercanía entre los puntos de bifurcación para las distintas armónicas y el colapso axilsimétrico.

Armónica n	$\lambda_c \times 10^{-3}$ Lineal	$\lambda_c \times 10^{-3}$ no-Lin.
11	12,062	11,560
12	12,050	11,394
13	12,083	11,207
14	12,085	11,028
15	12,090	10,862
16	12,101	10,715
17	12,118	10,599
18	12,134	10,524
19	12,122	10,494
20	12,121	10,508

Cuadro 7.3: Cargas críticas de cilindro con carga axial considerando trayectoria lineal y no lineal

(b) *Tanque de agua cónico-cilíndrico*. Este ejemplo corresponde a un modelo experimental ensayado por Vanderpitte y Lagae, y analizado por Bushnell (1985). En la Fig.7.4.a se muestra la geometría de la estructura y el nivel de agua en el momento de la falla experimental. Seguir la trayectoria de carga experimental en forma numérica resulta engorroso, por lo que se supone constante el nivel de agua y se va aumentando el peso específico de la misma hasta llegar a la falla. Un modelo más refinado del tratamiento del líquido, que incluso considera el efecto desestabilizante producido por movimientos del líquido, ha sido estudiado por Mirasso (1989).

En la Tabla 7.4 se presentan las cargas de bifurcación considerando trayectorias lineales y no lineales. La menor de las cargas críticas lineales se produce para $n = 0$ y crecen ligeramente con n . Cuando se considera la no linealidad de la trayectoria se produce, igual que en el caso del cilindro, un desplazamiento hacia la derecha del rango de armónicas con menor carga crítica. Para este modelo de mylar la menor carga crítica no lineal mediante el presente código, usando 21 elementos, ocurre para $n = 14$. En la Fig.7.4.b se muestra la trayectoria no lineal axilsimétrica, y se ha indicado el punto donde se produce la bifurcación. Es de hacer notar la excelente correlación entre cargas críticas y experimentales, pues si bien la estructura presenta un comportamiento poscrítico inestable, es muy poco

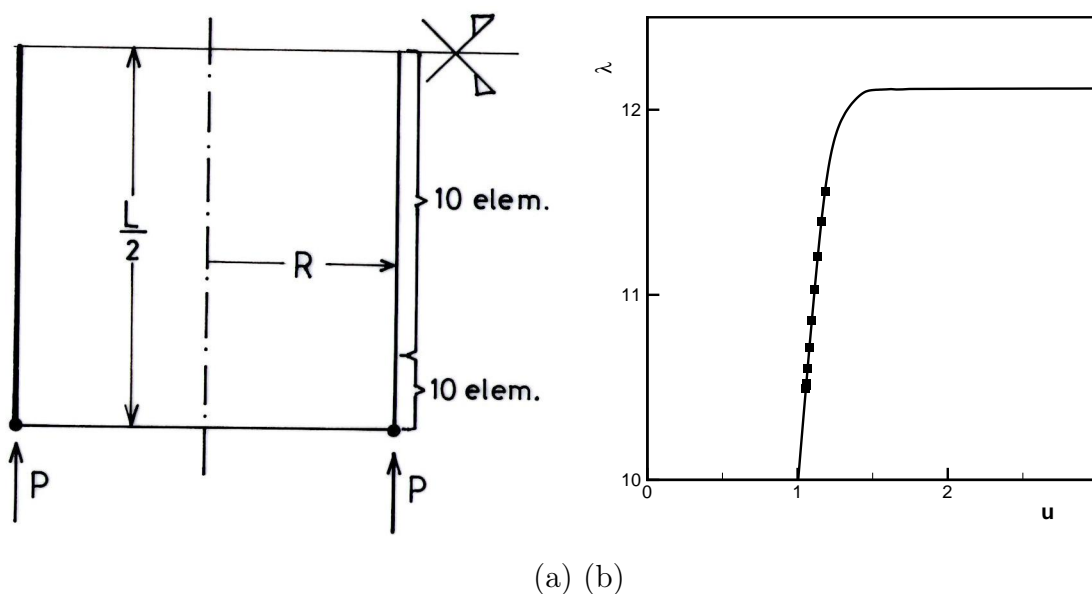


Figura 7.3: Cilindro simplemente apoyado bajo carga axial (a) geometría y discretización por elementos finitos (b) carga vs desplazamiento del punto de aplicación (punto de bifurcación) $E = 10^7$ $\nu = 0,3$ $R = 500$ $L = 2000$ $h = 1$

sensible a imperfecciones debido a la contribución estabilizante del esfuerzo N_{22} .

Armónica n	λ_c Lineal	λ_c no-Lin.
0	0,9636	
3	0,9677	
6	0,9791	
9	0,9982	0,9833
12	1,0294	0,9584
13	1,0436	0,9545
14	1,0602	0,9530
15	1,0796	0,9538

Cuadro 7.4: Cargas críticas del tanque de agua cónico cilíndrico considerando trayectoria lineal y no lineal

7.7. Conclusiones

De los ejemplos presentados sobre análisis de bifurcación bajo cargas no axilsimétricas puede concluirse:

- El criterio de “meridiano más cargado” resulta en general conservativo; las diferencias respecto a la carga consistente aumentan al disminuir la esbeltez de la cáscara y la amplitud de la zona con presión positiva.

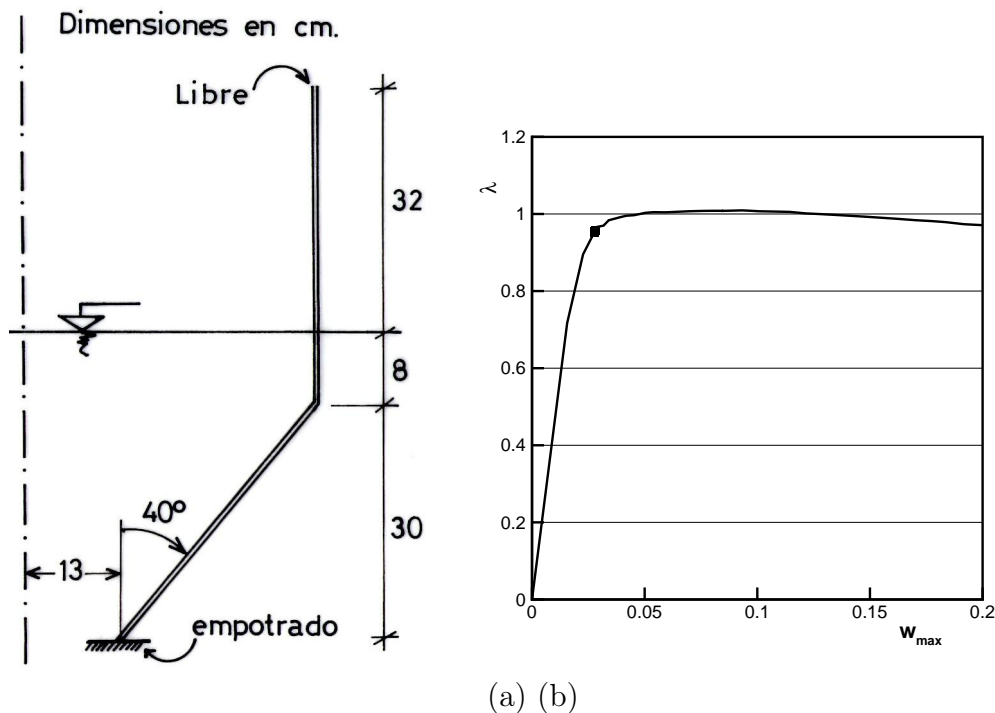


Figura 7.4: Tanque de agua de mylar $E = 502850$ $\nu = 0,33$. (a) Geometría; (b) parámetro de carga vs máximo desplazamiento w , punto de bifurcación para $n = 14$.

- El criterio de “meridiano más exigido” no siempre resulta conservativo y requiere una doble iteración, por lo que su uso no parece recomendable.
- Diez armónicas parecen ser suficientes para obtener resultados precisos cuando se considera al viento como acción principal. Este número puede reducirse si la zona de presión positiva aumenta al considerarse la succión interna.
- El criterio de elección de las armónicas a utilizar aquí propuesto (aquellas que individualmente producen las menores cargas críticas bajo presión uniforme) parece adecuado. Como verificación se sugiere realizar una segunda corrida con el conjunto de armónicas desplazado un lugar hacia la izquierda.

De los ejemplos presentados sobre análisis de bifurcación a partir de trayectorias precríticas no lineales puede concluirse:

- La armónica con menor carga crítica lineal en general no coincide con la asociada a la menor carga crítica no lineal.
- Cuando las cargas críticas lineales tienen valores semejantes sobre un amplio rango de armónicas, la armónica con menor carga crítica no lineal puede ser sustancialmente distinta de la con menor carga crítica lineal.
- Pareciera que en general las menores cargas críticas considerando análisis no lineal se producen para armónicas mayores que para cargas críticas lineales, lo que debe

tenerse en cuenta al definir las armónicas a utilizar en el análisis o al fijar un criterio automático de búsqueda.

Capítulo 8

Análisis Asintótico de Trayectorias Poscríticas

8.1. Introducción

En este capítulo se presentan resultados numéricos de trayectorias poscríticas asintóticas utilizando el código computacional desarrollado, con el fin de:

- validar la formulación comparando con otros resultados existentes en la literatura donde se hayan obtenidos trayectorias asintóticas;
- evaluar el límite de validez de la trayectoria asintótica comparando con trayectorias poscríticas que hayan sido obtenidas usando por ej. las técnicas de seguimiento presentadas en el Cap.6;
- considerar el comportamiento de estructuras frente a la existencia de imperfecciones, ya sea en la carga como en la geometría, y determinar la calidad de los resultados asintóticos;
- también interesa aquí mostrar la factibilidad de reemplazar una imperfección geométrica por una carga que produzca el mismo efecto.

8.2. Validez de la Trayectoria Asintótica

Sobre la trayectoria primaria, una trayectoria asintótica usando perturbaciones puede resultar aceptable para incrementos importantes en el valor de la carga, dado que normalmente las trayectorias primarias resultan moderadamente no lineales, pues los cambios en la geometría durante el proceso de carga son graduales. Por el contrario, debe tenerse en cuenta que en general las trayectorias poscríticas representan importantes cambios en la geometría de la estructura y en consecuencia son altamente no lineales; por lo tanto

la descripción de la rama secundaria a partir de las primeras derivadas es en general limitada. Consideremos como primer ejemplo una placa circular simplemente apoyada sometida a una fuerza de compresión en el borde como se muestra en la Fig.8.1. Este caso ha sido estudiado en forma analítica por Thompson y Hunt (1973) obteniendo una solución en términos de funciones de Bessel. Particularizando para los datos de la Fig.8.1 los resultados obtenidos por Thompson y Hunt son :

$$\lambda^c = 0,00384432$$

$$\lambda^2 = 20,778$$

en donde se ha usado como parámetro de perturbación al desplazamiento normal w en el centro de la placa. Este ejemplo presenta un comportamiento precrítico lineal (trivial si no se consideran las deformaciones membranales como lo hace Thompson) y una bifurcación simétrica estable en la armónica 0, o sea que tiene un comportamiento puramente axilsimétrico. Con el código desarrollado, usando 5 elementos igualmente espaciados se ha obtenido:

$$\lambda^c = 0,0038443$$

$$\lambda^{(2)} = 20,778$$

$$\lambda^{(3)} = 0,0$$

$$\lambda^{(4)} = -49879$$

que muestra un excelente concordancia con los resultados obtenidos por Thompson.

Por otro lado, con el objeto de mostrar la validez de la trayectoria secundaria obtenida en forma asintótica, se ha calculado la misma utilizando las técnicas no lineales descriptas en el Cap.6. En la Fig.8.1.b se muestran las trayectorias poscríticas mediante análisis no lineal y usando aproximaciones asintóticas de 2do. y 4to. orden, donde se ha normalizado el valor del factor de carga respecto al valor en el punto crítico y el desplazamiento normal del centro de la placa respecto al espesor h . Para este caso de comportamiento poscrítico relativamente simple y estable, puede observarse que con el análisis asintótico se obtienen resultados excelentes, con diferencias mínimas hasta valores del parámetro de carga igual a dos veces el valor de la carga crítica y desplazamientos de dos veces el espesor de la placa.

El segundo ejemplo considerado es un cierre elipsoidal bajo presión externa cuya geo-

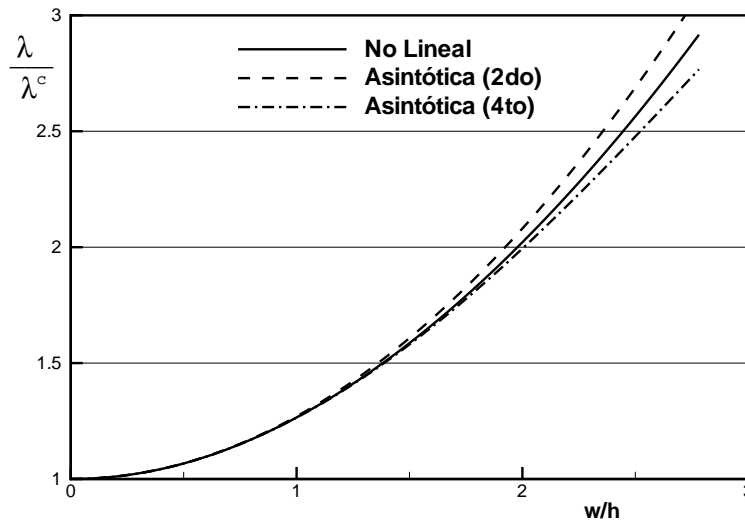
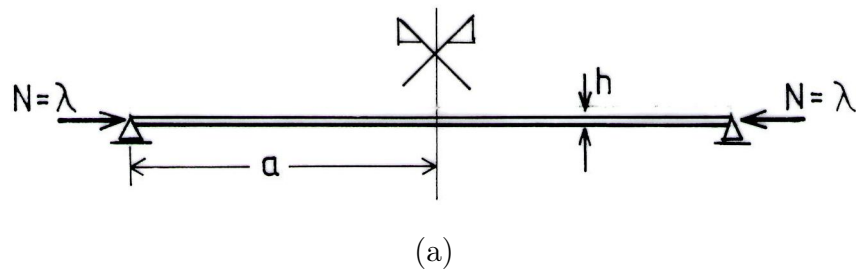


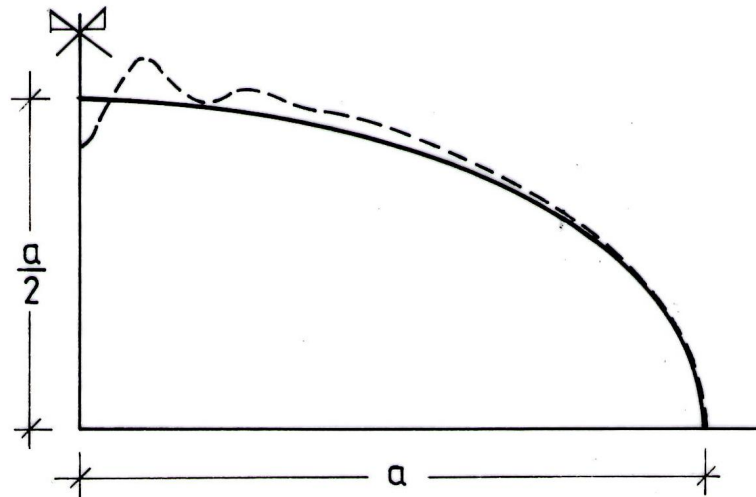
Figura 8.1: Placa circular simplemente apoyada bajo compresión en su plano. (a) geometría $a = 10$, $h = 0,01$ $E = 10^6$ $\nu = 0,3$; (b) trayectorias poscríticas.

metría se muestra en la Fig.8.2.a. Este caso ha sido anteriormente analizado por otros autores, usando aproximaciones asintóticas (Danielson (1969)) y técnicas no lineales (Wunderlich et al (1982)). El comportamiento precrítico es, con muy buena aproximación, lineal hasta el punto de bifurcación. La respuesta de la estructura es fundamentalmente membranar sobre la mayor parte de la cáscara con momentos flectores localizados en la zona de mayor curvatura. La influencia de estos últimos es mínima dado que la bifurcación se produce en el modo axilsimétrico con los mayores desplazamientos en el polo (la zona de menor curvatura) y con valores insignificantes en el ecuador. En la Fig.8.2.a se muestra también la forma del modo crítico. El comportamiento de la bifurcación es del tipo asimétrico y por lo tanto inestable (según la forma de la Fig.8.2.a).

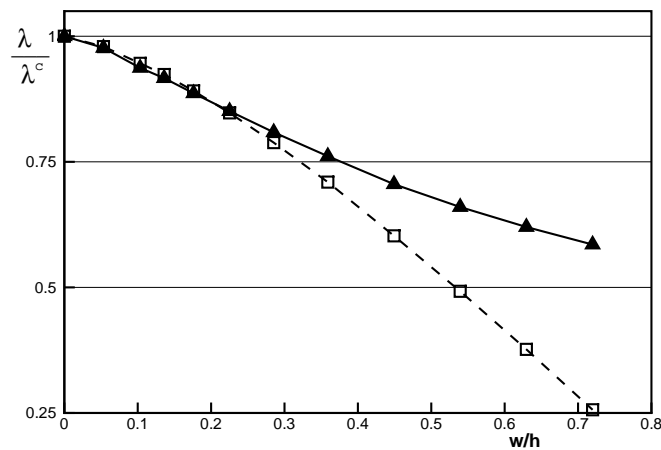
Nuevamente con el objeto de comparar la trayectoria poscrítica asintótica y la verdadera se ha recurrido a un análisis no lineal completo. En la Fig.8.2.b se ha graficado el parámetro de carga λ normalizado respecto al valor crítico versus el desplazamiento vertical del polo medido a partir del punto crítico y normalizado respecto al espesor de la lámina. Se han usado 18 elementos en la discretización y la aproximación asintótica es de segundo orden (derivadas primera y segunda). En este caso la trayectoria asintótica

puede considerarse precisa hasta $w/h = 0,3$ valor para el cual se ha producido una caída del 20 % en el valor de la carga.

La aproximación asintótica muestra las características principales de la trayectoria poscrítica, que se ve es fuertemente inestable con las dos primeras derivadas del parámetro de carga negativas.



(a)



(b)

Figura 8.2: Cierre Elipsoidal bajo Presión Externa. (a) geometría $a = 750$ $h = 1$ $E = 10^6$ $\nu = 0,3$ y forma del modo crítico; (b) Trayectoria poscrítica (\square) asintótica (\blacktriangle) no lineal

De los ejemplos presentados puede inferirse que una de las características que condiciona el rango de validez de la trayectoria poscrítica es la estabilidad de la misma. En el caso de la placa circular, que corresponde a una bifurcación estable, la aproximación es excelente, en tanto que para el elipsoide bajo presión externa, que está asociado a una bifurcación inestable, la aproximación asintótica está limitada a desplazamientos peque-

ños. Las trayectorias inestables presentan en general cambios más pronunciados que las estables, pudiendo dar lugar a bifurcaciones secundarias o acoplamiento de modos; en consecuencia puede decirse que el análisis asintótico para trayectorias inestables está restringido a desplazamientos a partir del punto crítico, menores que el espesor de la lámina. Por otro lado debe tenerse en cuenta que en el diseño de estructuras el interés principal se centra en la sollicitación máxima que puede resistir la estructura, y no en el comportamiento no lineal poscrítico. Por ello el análisis asintótico resulta importante pues nos permite determinar en que medida el valor de la carga máxima se verá modificado ante la presencia de imperfecciones en la geometría o en la carga.

8.3. Cambio de Trayectoria

Cuando interesa conocer en detalle la trayectoria secundaria es necesario realizar un análisis no lineal completo; en tal caso hay básicamente dos maneras de seguir la trayectoria secundaria: (a) utilizar una pequeña imperfección (generalmente una componente de carga) que excite la trayectoria secundaria, de tal forma que desaparezca la bifurcación, y seguir directamente la trayectoria imperfecta; (b) analizar la estructura perfecta hasta el punto crítico y entonces realizar un cambio de trayectoria, avanzando a partir de allí sobre la secundaria.

El primer método requiere un adecuado valor de la imperfección de tal forma que la trayectoria imperfecta sea próxima a la perfecta; esto no es tan simple en el caso de trayectorias secundarias inestables si el comportamiento es muy sensible a imperfecciones. Por otro lado, si la imperfección es muy pequeña, será necesario utilizar pasos de avance muy pequeños para que el cambio de trayectoria se produzca efectivamente, y para sobrepasar puntos límites agudos en el caso de trayectorias inestables.

El segundo método ha recibido más atención por parte de los investigadores. Básicamente consiste en sumar a los desplazamientos del punto crítico un incremento en la dirección de la trayectoria secundaria de tal forma que el esquema no lineal prosiga en esa dirección. Es precisamente este incremento lo que distingue las distintas metodologías. Kiciman y Popov (1978) y Wagner y Wriggers (1988) proponen sumar directamente un vector proporcional al modo crítico a través de un factor de escalamiento. Los primeros autores reconocen que si el incremento es muy pequeño, el siguiente paso usando el método de Newton-Raphson conduce nuevamente a la trayectoria primaria, en tanto que si el incremento es muy grande no se alcanzará convergencia; por ello indican que es necesario iterar sobre el factor de escalamiento hasta lograr convergencia sobre la trayectoria secundaria. Observemos que esta metodología no distingue entre bifurcaciones simétricas, donde la primera derivada de los desplazamientos de la trayectoria secundaria es proporcional al modo crítico y puede pensarse como una primera aproximación asintótica, y bifurcaciones asimétricas, donde según se vio en el Cap.3 la derivada primera de los desplazamientos

ya no coincide con el modo de bifurcación; tampoco se incluye incremento alguno en el parámetro de carga. Mas ligada a la teoría de estabilidad resulta la metodología propuesta por Riks (1984) que propone un incremento de la forma (puesto en la notación del Cap.3 que difiere del original):

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{y} + \mu \mathbf{x}}{|\mathbf{y} + \mu \mathbf{x}|} \quad (8.1)$$

con

$$\mu = -\frac{2V_{ijk}x_ix_jy_k}{V_{ijk}x_ix_jx_k} = \frac{B}{C} \quad (8.2)$$

donde μ equivale a $(\lambda^{(1)})^{-1}$ si se considera la solución lineal de la ecuación (3.11), esto es despreciando el término cuadrático (A). Claramente si la bifurcación es simétrica $C = 0$ y $\mathbf{q} = \mathbf{x}$. Puede verse que \mathbf{q} es una aproximación a la tangente a la trayectoria y a su vez debe ser escalado para obtener convergencia. Riks tampoco menciona la necesidad de disminuir el parámetro de carga durante el cambio de trayectoria en bifurcaciones asimétricas.

De acuerdo a los resultados presentados, los autores citados no parecen haber tenido problemas insalvables en sus evaluaciones numéricas, a pesar de las aproximaciones involucradas. Una posibilidad obvia en el contexto de esta tesis, con el objeto de evitar el proceso iterativo y aumentar el incremento sobre la trayectoria secundaria, es usar consistentemente la teoría de estabilidad estructural presentada en el Cap.3. Volviendo al ejemplo de la placa circular, en la Fig.8.3 se ha reproducido la Fig.8.1.b pero la trayectoria no lineal comienza para $w/h = 2,2$ punto al que se accede usando la aproximación asintótica de cuarto orden. Similarmente en el caso de la elipse de la Fig.8.2, digamos que la trayectoria secundaria no lineal allí graficada ha sido obtenida en la forma propuesta, imponiendo un incremento inicial desde el punto crítico de $\Delta w = h/20$ (valores menores conducen a que el proceso iterativo converja a la trayectoria primaria). Por otro lado digamos que los incrementos a utilizar pueden ser del orden de $h/4$ sin que se produzca divergencia, lo que da un amplio margen de maniobra para realizar el cambio de trayectoria.

8.4. Bifurcación en Modos no Axilsimétricos

Los ejemplos hasta aquí presentados corresponden a bifurcación en el modo axilsimétrico y nos han permitido comparar la trayectoria poscrítica asintótica con la obtenida usando un análisis no lineal completo. Dicha comparación no es fácil en el caso de bifurcaciones en armónicas distintas de cero dado que en la literatura no aparecen resultados numéricos de este tipo y requieren de un código computacional con importantes facilidades no lineales. En consecuencia los resultados que se presentan en esta sección se comparan con resultados obtenidos usando la teoría de Koiter para sistemas continuos, y permiten

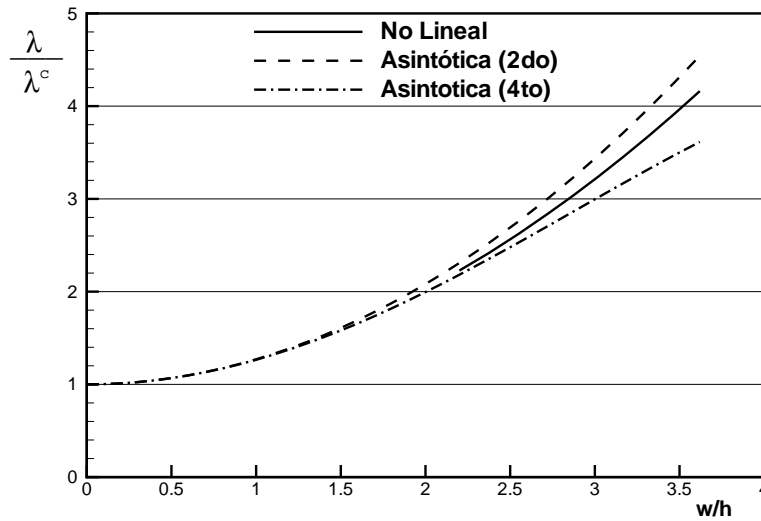


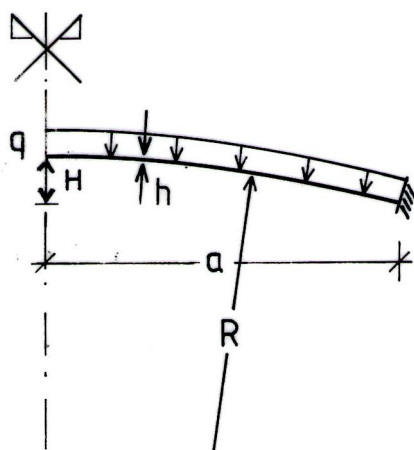
Figura 8.3: Trayectoria Poscrítica usando cambio de trayectoria

validar la formulación y el programa de computadora.

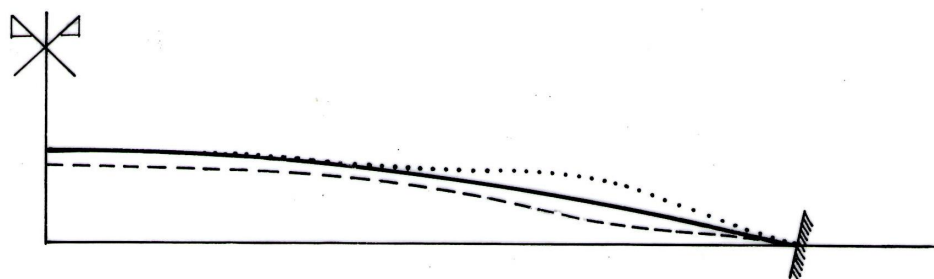
(a) *Domo Esférico Rebajado bajo Presión Exterior*. Este tipo de estructura ha sido objeto de numerosos estudios teóricos y experimentales en los últimos treinta años (por ej. Penning (1966), Fitch y Budiansky (1970), Akkas y Bauld (1971), Yamada y Yamada (1983)). En particular del trabajo de Fitch y Budiansky (donde se realizan extensos estudios paramétricos) se ha tomado un ejemplo cuya geometría y carga se muestran en la Fig. 8.4.a y que corresponde a un valor del parámetro geométrico

$$\lambda = 2[3(1 - \nu^2)](H/h)^{1/2} = 12$$

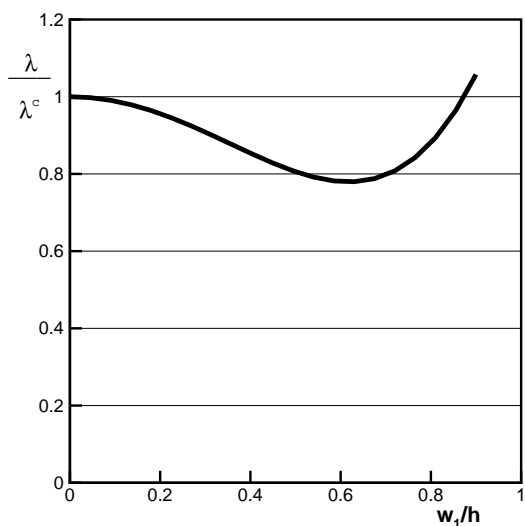
La carga crítica calculada utilizando trayectoria precrítica lineal λ_L^c (normalizada respecto a la carga crítica clásica de la esfera perfecta λ_{CL}^c) es $\lambda_L^c/\lambda_{CL}^c = 0,9281$, en tanto que considerando la no linealidad de la trayectoria fundamental se obtiene una carga crítica λ^c de valor $\lambda^c/\lambda_{CL}^c = 0,7804$ para la armónica $n = 7$. En la Fig. 8.4.b se muestra la deformada (exagerada) en el punto crítico y la forma del modo de bifurcación. Los máximos desplazamientos del modo crítico se producen en coincidencia con la zona de mayores desplazamientos normales de la trayectoria primaria y por lo tanto la zona más comprimida en la dirección del paralelo. La discretización utilizada consiste en 12 elementos igualmente espaciados. El parámetro de perturbación w_1 corresponde al grado de libertad de mayor valor en el modo crítico, que en este caso es el desplazamiento vertical del punto ubicado a una distancia del empotramiento igual a 0,25 del desarrollo del meridiano (L). Debe hacerse notar que el máximo desplazamiento normal a la cáscara w_{max} del modo crítico se produce a una distancia 0,28L del empotramiento. Expresando la trayectoria poscrítica en la forma (como es usual en la literatura)



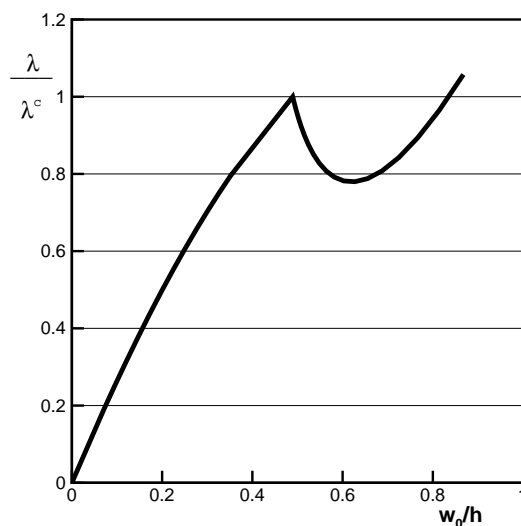
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 8.4: Domo esférico empotrado bajo presión externa. (a) geometría $a = 21$ $R = 100$ $H = 2,23$ $h = 0,1$ $E = 10^4$ $\nu = 1/3$; (b) — Configuración deformada en el punto de bifurcación (exagerada en un factor de 10); modo de bifurcación en la armónica $n = 7$; (c) trayectoria poscrítica $w_1 - \lambda$; (d) trayectoria poscrítica $w_o - \lambda$.

$$\frac{\lambda}{\lambda^c} = 1 + b\delta^2 \quad (8.3)$$

donde $\delta = w_{max}/h$, el valor de b obtenido con el presente código resulta $b = -1,063$. Tanto el valor de λ^c/λ_{CL}^c , como el de b coinciden con los obtenidos (presentados en forma gráfica) por Fitch y Budiansky, lo que valida la formulación utilizada para el caso de modos no axilsimétricos.

En la Fig.8.4.c se ha graficado la carga λ en la trayectoria secundaria versus el parámetro de perturbación w_1 (normalizados respecto a λ^c y h respectivamente). En tanto que en la Fig.8.4.d se muestra el desplazamiento normal del nudo a $0,25L$ del empotramiento en su componente axilsimétrica w_0 versus el parámetro de carga λ , tanto para la trayectoria primaria como la secundaria; puede aquí notarse una trayectoria precrítica moderadamente no lineal en tanto que la trayectoria poscrítica es fuertemente no lineal. En estos dos gráficos puede observarse la trayectoria poscrítica inicialmente inestable, y su posterior rigidización ($\lambda^{(4)} > 0$); es posible prever una moderada sensibilidad a imperfecciones y un límite inferior de aproximadamente el 75% de la carga de bifurcación. Nuevamente a pesar de las limitaciones del análisis asintótico éste indica las características principales de la trayectoria poscrítica.

(b) *Placa Anular empotrada-libre con compresión uniforme.* Existen en la literatura muchos trabajos sobre el comportamiento de placas anulares bajo compresión uniforme tanto experimentales como teóricos, en los que se han utilizado diversos modelos numéricos. Aquí nos restringiremos al caso que se muestra en la Fig.8.5.a. Al comienzo de este capítulo se ha mostrado el comportamiento de una placa circular completa simplemente apoyada; en ese caso los esfuerzos son uniformes en toda la placa, en tanto que el comportamiento poscrítico es estable. Para el caso de una placa anular en cambio los esfuerzos son variables, principalmente el esfuerzo radial que se anula en el borde interno, lo que hace que su comportamiento crítico difiera sensiblemente de la placa completa en función de la relación b/a , manteniendo, sin embargo, el comportamiento poscrítico estable. Para valores pequeños de b/a la menor carga crítica se produce para $n = 0$ pero cuando se aumenta esta relación se modifica el valor de la armónica asociada a la menor carga crítica, aumentando progresivamente con b/a . El primer cambio se produce para $b/a = 0,51$ donde coinciden las cargas críticas para $n = 0$ y $n = 1$ (Machinek y Troger (1988)).

El caso presentado, con una relación $b/a = 0,62$ (y por lo tanto con la menor carga crítica asociada a $n > 0$), ha sido extraído de un trabajo de Radwanska y Waszczyszyn (1980), donde se han analizado las cinco primeras trayectorias poscríticas utilizando el método de colocación para resolver las ecuaciones no lineales de Von Kármán; para seguir numéricamente estas trayectorias utilizaron una pequeña carga transversal armónica que excitaba cada modo crítico.

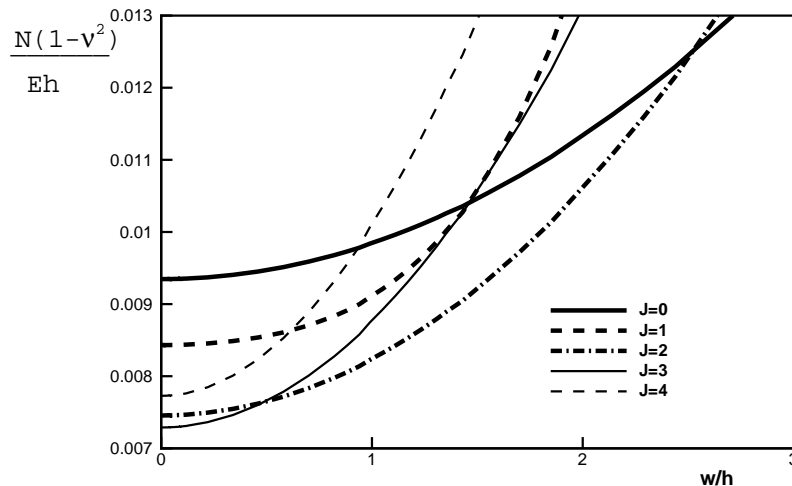
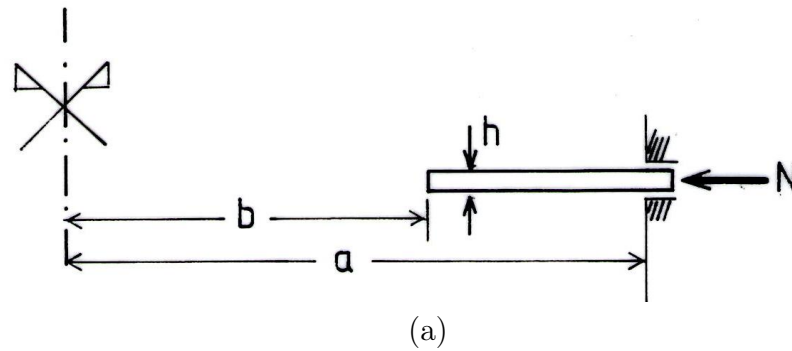


Figura 8.5: Placa Anular Empotrada-Libre bajo Compresión Uniforme. (a) Geometría $a = 20$ $b = 12,4$ $h = 1$ $E = 10^4$ $\nu = 0,3$; (b) Trayectorias poscríticas asintóticas

En la Fig.8.5.b se muestran las trayectorias poscríticas asintóticas obtenidas usando el presente código; las derivadas cuartas tienen muy poca influencia, salvo en el caso de $n = 1$ por lo que las curvas son prácticamente parábolas cuadráticas. Las cargas críticas coinciden con las de referencia pero las trayectorias poscríticas, si bien tienen una forma similar, difieren en los valores. Con el presente código se obtiene un comportamiento más rígido para las armónicas más bajas (0–1) y más flexible para las más altas (2–4) que los de la referencia. Debe mencionarse que un análisis no lineal para la armónica axilsimétrica (similar a los de la Sec. 8.2) muestra una total concordancia entre la trayectoria asintótica y la no lineal, por lo que las diferencias con los resultados de referencia pueden deberse al uso de diferentes ecuaciones que gobiernan el comportamiento de las placas.

8.5. Técnica de Carga Equivalente

En esta sección consideraremos la posibilidad de reemplazar una deformación inicial de la cáscara respecto a la geometría perfecta, sin tensiones asociadas, por un estado de

cargas que produzca el mismo efecto sobre la estructura cargada.

Usando la notación del Cap. 4, sea entonces

$$\mathbf{a}_e = \mathbf{a}_i + \mathbf{a} \quad (8.4)$$

donde:

\mathbf{a}_e : desplazamientos equivalentes a partir de la geometría perfecta

\mathbf{a}_i : desplazamientos iniciales (imperfección)

\mathbf{a} : desplazamientos reales a partir de la geometría imperfecta

Las deformaciones resultan

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = [\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1(\mathbf{a}_i + \mathbf{a})(\mathbf{a}_i + \mathbf{a})] \quad (8.5)$$

si se suponen pequeñas rotaciones a partir de la geometría imperfecta

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{a})\mathbf{a} \cong 0 \quad (8.6)$$

entonces

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = [\mathbf{B}_0 + 2\mathbf{B}_1(\mathbf{a}_i)]\mathbf{a} + [\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1(\mathbf{a}_i)]\mathbf{a}_i \quad (8.7)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 - \boldsymbol{\varepsilon}_i = [\mathbf{B}_0 + 2\mathbf{B}_1(\mathbf{a}_i)]\mathbf{a} \quad (8.8)$$

las tensiones asociadas son

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}[\mathbf{B}_0 + 2\mathbf{B}_1(\mathbf{a}_i)]\mathbf{a} \quad (8.9)$$

la energía interna de deformación resulta

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_v \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dv \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \int_v [\mathbf{B}_0 + 2\mathbf{B}_1(\mathbf{a}_i)]^T \mathbf{D} [\mathbf{B}_0 + 2\mathbf{B}_1(\mathbf{a}_i)] dv \mathbf{a} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \int_v [\mathbf{B}_0^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_0^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1(\mathbf{a}_i) + 2\mathbf{B}_1^T(\mathbf{a}_i) \mathbf{D} \mathbf{B}_0] dv \mathbf{a} \end{aligned} \quad (8.10)$$

donde se ha despreciado la contribución de

$$\mathbf{a}^T 2\mathbf{B}_1^T(\mathbf{a}_i) \mathbf{D} 2\mathbf{B}_1(\mathbf{a}_i) \mathbf{a} \cong 0 \quad (8.11)$$

pues hemos de suponer que la imperfección \mathbf{a}_i es pequeña. El potencial de cargas, usando la Ec. (4.11) se escribe

$$U = -\mathbf{a}^T \mathbf{f} \quad (8.12)$$

La condición de equilibrio es:

$$\frac{\partial(W + U)}{\partial \mathbf{a}} = 0 = \mathbf{K}_0 \mathbf{a} + \mathbf{K}_1(\mathbf{a}_i) \mathbf{a} - \mathbf{f} \quad (8.13)$$

donde \mathbf{K}_0 y $\mathbf{K}_1(\mathbf{a}_i)$ son las mismas que las definidas en las Ec.(4.19) y (4.21). Si bien la Ec.(8.13) es lineal y puede resolverse directamente, observemos que podemos resolverla en primera aproximación en la forma:

$$(1) \mathbf{K}_0 {}^0 \mathbf{a} = \mathbf{f}$$

$$(2) \mathbf{K}_0 {}^1 \mathbf{a} = -\mathbf{K}_1(\mathbf{a}_i) \mathbf{a} = \mathbf{f}^*$$

$$(3) \mathbf{a} = {}^0 \mathbf{a} + {}^1 \mathbf{a}$$

donde \mathbf{f}^* es lo que denominaremos vector de cargas equivalentes

$$\mathbf{f}^* = -\mathbf{K}_1(\mathbf{a}_i) {}^0 \mathbf{a} = \int_v [\mathbf{B}_0^T \mathbf{D} 2\mathbf{B}_1({}^0 \mathbf{a}) \mathbf{a}_i + 2\mathbf{B}_1^T(\mathbf{a}_i) \mathbf{D} \mathbf{B}_0 {}^0 \mathbf{a}] dv \quad (8.14)$$

En el primer término de la ecuación aparece $\mathbf{B}_1({}^0 \mathbf{a})$ que ya antes hemos despreciado y consistentemente despreciaremos ahora. Notando además que

$$\mathbf{D} \mathbf{B}_0 {}^0 \mathbf{a} = \boldsymbol{\sigma} \quad (8.15)$$

son las tensiones sobre la estructura perfecta, resulta

$$\mathbf{f}^* = \int 2\mathbf{B}_1^T(\mathbf{a}_i) \boldsymbol{\sigma} dv$$

que recordando la Ec.(4.20) puede escribirse

$$\mathbf{f}^* = -\mathbf{K}_\sigma({}^0 \mathbf{a}) \mathbf{a}_i \quad (8.16)$$

Finalmente consideremos el caso en que \mathbf{a}_i es proporcional al modo crítico \mathbf{x} a través del parámetro de imperfección ϵ

$$\mathbf{a}_i = \epsilon \mathbf{x} \quad (8.17)$$

que para el caso que nos interesa se produce en alguna armónica J . Notemos que si la trayectoria precrítica es lineal (hipótesis que hemos supuesto en esta sección) cuando se llega al punto crítico se cumple que

$$[{}^J \mathbf{K}_0 + {}^J \mathbf{K}_\sigma({}^0 \mathbf{a})] \mathbf{x} = 0 \quad (8.18)$$

de donde

$$\epsilon {}^J \mathbf{K}_0 \mathbf{x} = -\epsilon \mathbf{K}_\sigma({}^i \mathbf{a}) \mathbf{x} = -{}^J \mathbf{K}_0({}^0 \mathbf{a}) \mathbf{a}_i = \mathbf{f}^* \quad (8.19)$$

de tal forma que el vector de cargas equivalentes asociado al modo crítico resulta simplemente

$$\mathbf{f}^* = \epsilon {}^J \mathbf{K}_0 \mathbf{x} \quad (8.20)$$

Podemos concluir que en primera aproximación, para trayectorias precríticas moderadamente no lineales, puede reemplazarse una imperfección geométrica con la forma del modo crítico por una carga equivalente dada por la Ec. (8.20).

8.6. Sensibilidad a Imperfecciones

Consideremos ahora la sensibilidad a imperfecciones de las estructuras con comportamiento poscrítico inestable analizadas en las secciones 8.2 y 8.4.

(a) *Cáscara de Meridiano Elíptico bajo presión exterior.*

Inicialmente se ha supuesto una imperfección en la carga que consiste en una presión uniforme p_i sobre un pequeño círculo alrededor del polo de radio $a/20$. En la Fig.8.6.a se muestra el diagrama de sensibilidad a imperfecciones donde se ha normalizado la presión de imperfección p_i respecto a la presión crítica. En el gráfico se muestran las cargas máximas obtenida realizando un análisis no lineal con ALREF y las curvas asintóticas considerando dos órdenes distintos de aproximación. En este caso se ve que la curva no lineal queda acotada por las aproximaciones asintótica, y la sensible mejora que representa la aproximación asintótica de segundo orden sobre la de primer orden.

Se ha analizado también la influencia de las imperfecciones geométricas, para lo cual se ha considerado una imperfección axil-simétrica en la forma del modo crítico, la que razonablemente puede suponerse que tendrá la influencia más perniciosa en la carga máxima. En la Fig.8.6.b se muestran las trayectorias no lineales para distintos amplitudes máximas de la imperfección \bar{w} , en tanto que en la Fig.8.6.c se han resumido estos resultados para amplitudes de imperfección de hasta un espesor. En este gráfico puede verse que amplitudes de imperfección del orden de una décima del espesor implican una caída de la carga máxima a sólo el 52% de la carga crítica de la cáscara perfecta; además puede notarse que la curva presenta un mínimo para $\bar{w}/h = 0,4$ a partir del cual una imperfección mayor no disminuye más el valor de la carga máxima. Este último resultado se debe probablemente al importante cambio en la forma geométrica que significan estas imperfecciones. Los resultados aquí presentados difieren de los existentes en la referencia (Wunderlich et al (1982)) donde por un lado la sensibilidad a imperfecciones resulta menor que la aquí obtenida, y por otro lado la carga máxima es monótonamente decreciente con la imperfección, aún para amplitudes del 80% del espesor. Estas diferencias probablen-

te se deban a las distintas formulaciones utilizadas, ya que Wunderlich et al consideran toda no linealidad (incluyendo las imperfecciones geométricas) como pseudo cargas. Finalmente en la Fig.8.6.d se compara el diagrama de sensibilidad a imperfecciones obtenido mediante análisis no lineal con la aproximación asintótica. Para ello se ha hecho uso de una expresión obtenida por Budiansky (1967) que, dada una trayectoria poscrítica en la forma:

$$\frac{\lambda}{\lambda^c} = 1 + a \left(\frac{w}{h} \right) + b \left(\frac{w}{h} \right)^2 \quad (8.21)$$

la sensibilidad a una imperfección geométrica con la forma del modo crítica resulta de las siguientes ecuaciones:

(a) bifurcación asimétrica ($a \neq 0$, $aw < 0$)

$$\left(1 - \frac{\lambda^M}{\lambda^c} \right)^2 + 4a \left(\frac{\bar{w}}{h} \right) \frac{\lambda^M}{\lambda^c} = 0 \quad (8.22)$$

(b) bifurcación asimétrica ($a = 0$, $b < 0$)

$$\left(1 - \frac{\lambda^M}{\lambda^c} \right)^{3/2} - \left(\frac{3}{2} \right)^{3/2} (-b)^{1/2} \left| \frac{\bar{w}}{h} \right| \frac{\lambda^M}{\lambda^c} = 0 \quad (8.23)$$

donde los valores de a y b se relacionan con las derivadas de la trayectoria poscrítica mediante

$$a = \frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^c} h \quad (8.24)$$

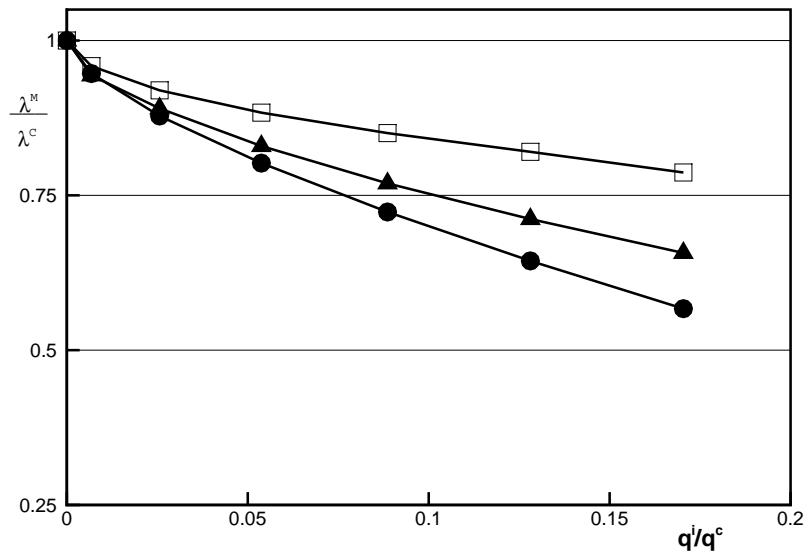
$$b = \frac{\lambda^{(2)}}{2\lambda^c} h^2 \quad (8.25)$$

El gráfico de la Fig.8.6.d muestra una buena primera aproximación al comportamiento frente a imperfecciones geométricas.

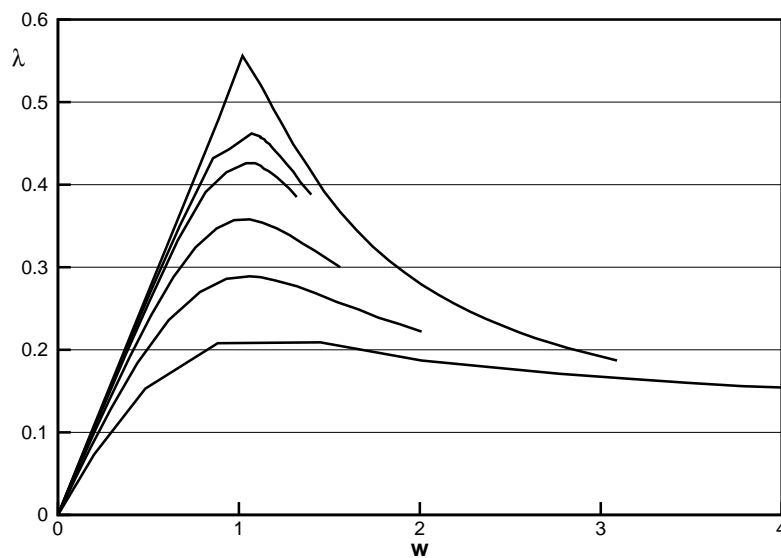
(b) *Domo esférico rebajado bajo presión externa.*

Se ha supuesto como imperfección en la carga una presión armónica sobre el paralelo ($J = 7$) y uniforme sobre un sector del meridiano de longitud $L/4$ a partir del punto ubicado a $L/6$ del empotramiento, esta zona corresponde a la de mayores desplazamientos en el modo crítico. En la Fig.8.7.a se muestra el gráfico de sensibilidad de la carga límite al valor de la presión imperfecta (normalizada respecto al valor de la presión uniforme crítica). Por otro lado en la Fig.8.7.b se muestra la sensibilidad a imperfecciones geométricas en la forma del modo crítico, donde se han graficado las curvas obtenidas a partir de la expresión de Budiansky (Ec.(8.23)) y la que corresponde a utilizar la técnica de carga equivalente tal como fue descrita en la sección anterior. En este último caso puede observarse que las curvas prácticamente coinciden. En ambos casos (imperfecciones en la carga o geométricas) se ve una moderada sensibilidad de la carga límite a imperfecciones, a diferencia del caso de la elipse que muestra una fuerte degradación de la carga máxima

frente a las imperfecciones.

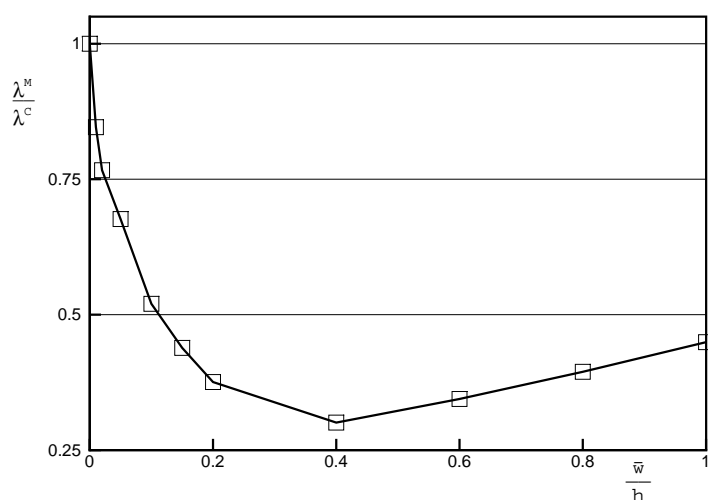


(a)

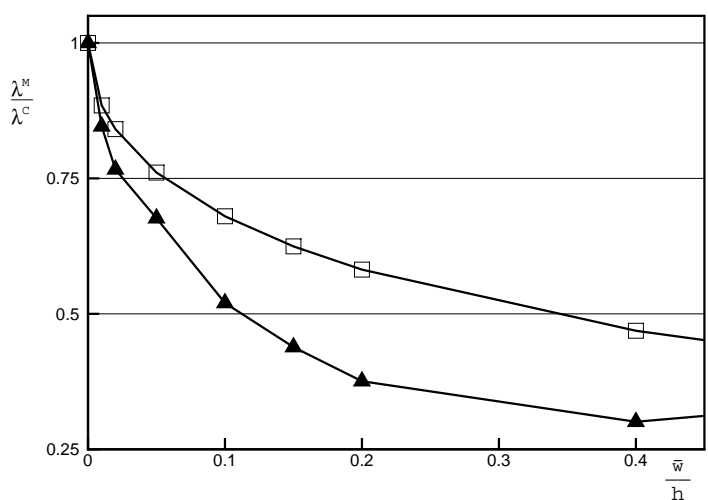


(b)

Figura 8.6: Sensibilidad a imperfecciones del elipsoide bajo presión externa (a) Imperfección en la carga, (\blacktriangle) no lineal; (\square) aproximación de primer orden; ($*$) aproximación de segundo orden; (b) trayectorias no lineales imperfectas para $\bar{w}/h = 0, 1/100, 1/50, 1/20, 1/10, \text{ y } 1/5$; (c) Cargas límites vs amplitud de la imperfección en el modo crítico (análisis no lineal); (d) comparación entre el análisis no lineal y la expresión de Budiansky, (\blacktriangle) no lineal; (\square) Budiansky (8.22)



(c)



(d)

Fig.8.6 (Continuación)

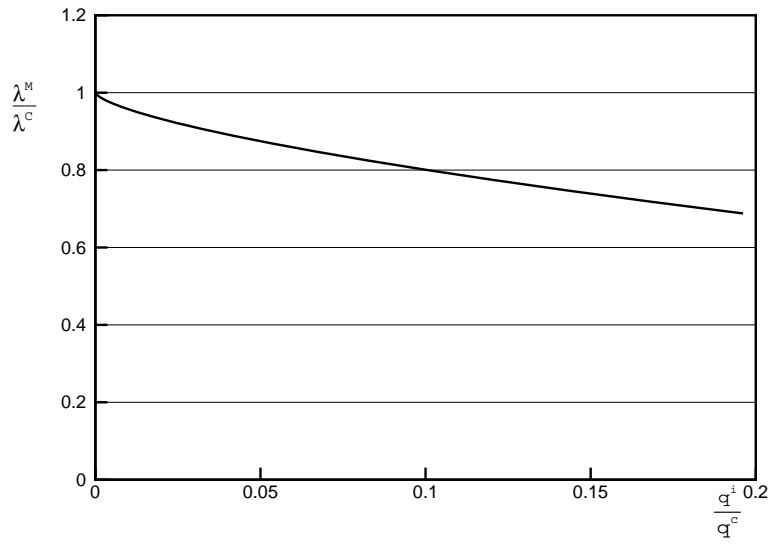
8.7. Algunas Características Numéricas

Resulta importante una determinación precisa del punto crítico ya que éste tiene una marcada influencia en el valor de las derivadas de la trayectoria poscrítica; esta exactitud es incluso más importante cuanto más no lineal resulta la trayectoria primaria.

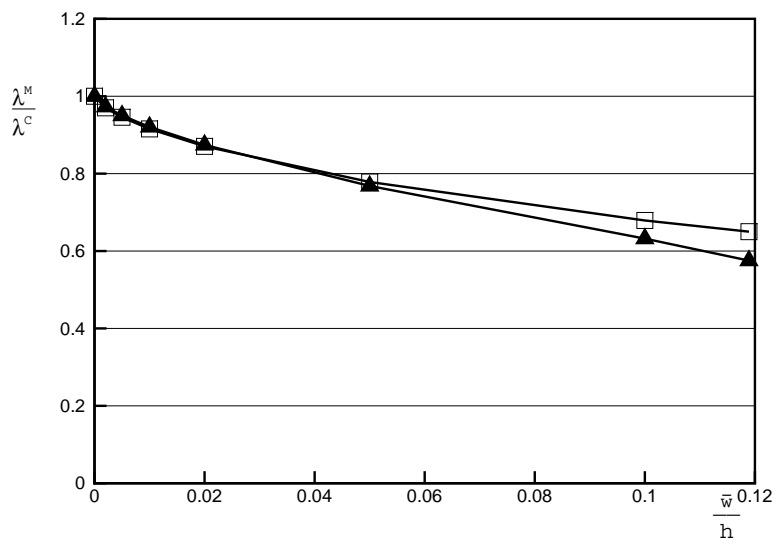
En el caso de la determinación de la carga crítica del modo axilsimétrico existen, como es fácil de prever, importantes problemas numéricos, los que resultan de que se está buscando llegar a un punto en que la matriz tangente a la trayectoria sea singular y para avanzar se está haciendo uso de ella. En las proximidades del punto crítico, al realizar la factorización de la matriz y la posterior obtención del vector de desplazamientos tangente, debido a que en la diagonal existe un término casi nulo, el vector tangente

puede resultar con una importante componente en el modo crítico y producir el colapso del esquema de Newton-Raphson. En principio parece lógico proyectar el vector tangente sobre el hiperplano normal al modo de bifurcación, sin embargo este método no soluciona el problema. Es necesario entonces eliminar un grado de libertad del sistema. Notemos que tal como se indicó en el Cap.3 al llegar al punto crítico es precisamente eso lo que hacemos, y el grado de libertad eliminado es el parámetro de perturbación a utilizar. Debe tenerse en cuenta que la eliminación del grado de libertad en este caso es anterior a la convergencia sobre el punto crítico y en consecuencia para no modificar el comportamiento es necesario elegir un grado de libertad que tenga una componente mínima sobre el vector tangente a la trayectoria ,y que a su vez tenga una componente importante en el modo crítico, de tal forma que sea adecuado como parámetro de perturbación. En base a esto, en el programa desarrollado, cuando el avance sobre la trayectoria no lineal indica que se está en la cercanía de una bifurcación axilsimétrica (1 % de λ^c), de todos los grados de libertad tal que sus componentes sobre el vector tangente (\mathbf{y}) sea menores que el 1 % de la mayor componente sobre el vector tangente, se elimina aquel que tenga la mayor componente sobre el modo crítico \mathbf{x} . Este esquema presenta resultados satisfactorios como se ve en en los ejemplos de la Sec.8.2.

En este capítulo se han presentado comparaciones de trayectorias secundarias no lineales completas con trayectorias asintóticas, encontrándose que en general el análisis asintótico permite comprender las características principales de la trayectoria poscrítica. Además se ha mostrado la calidad del análisis de sensibilidad a imperfecciones con el mismo resultado. Estas evaluaciones permiten además validar la formulación presentada y conocer sus limitaciones, lo que ayuda a formar un criterio para evaluar los resultados que se presentan en el Cap.10.



(a)



(b)

Figura 8.7: Domo rebajado bajo presión uniforme. (a) sensibilidad a imperfecciones en la carga; (b) sensibilidad a imperfecciones geométricas (\blacktriangle) Budiansky (Ec.(8.23)), (\square) carga equivalente.

Parte III

APLICACION A PROBLEMAS DE CASCARAS COMPUESTAS

Capítulo 9

Láminas Esféricas bajo Presión Interior

9.1. Introducción

Las cáscaras de revolución sometidas a presión externa muestran un comportamiento no lineal geométrico asociado a formas de inestabilidad: bifurcaciones o punto límite. Sin embargo, bajo presión interna la bifurcación sólo ocurre para formas muy particulares de las láminas, tales como los cierres elipsoidales y toroidales de recipientes de presión investigados por Galletly (1959).

En una amplia gama de aplicaciones la principal condición de carga de componentes laminares es la presión interna; y pareciera que algunas de las más costosas de tales cáscaras son aquellas usadas en recipientes de contención metálicos. Los ejemplos estudiados en este capítulo, están relacionados principalmente con recipientes de presión de centrales nucleares, aunque los estudios paramétricos permiten la comprensión del comportamiento esperado de cáscaras empleadas en otras aplicaciones, tales como contenedores de gas.

Las cáscaras esféricas delgadas son usadas como componentes estructurales principales en recipientes de presión, debido a su alta capacidad para resistir presiones internas mediante acciones membranales puras. Por ejemplo, en una central nuclear con Reactor de Agua Presurizada (PWR) o Reactor de Agua Pesada Presurizada (PHWR), el contenedor esférico de acero, puede tener un diámetro de 50 m y una relación radio/espesor $R/h = 1000$ [Sanchez Sarmiento et al (1985)]. En aplicaciones en recipientes de gas, la cáscara es usualmente más gruesa, con una relación R/h del orden de 200.

Para una cáscara de contención de una central nuclear típica, las cargas están básicamente asociadas a: 1) Presión interna; 2) Efectos térmicos; 3) Peso propio; y 4) Acciones sísmicas. El análisis se realiza primero sobre la cáscara esférica completa bajo las acciones indicadas arriba. En una segunda etapa, se consideran los efectos locales debidos a las aberturas en la cáscara, las que pueden estar aisladas o cercanas, y en este último caso los efectos de interacción son significativos. Luego se toman en cuenta los efectos locales debidos a las condiciones de borde. Finalmente se analizan los cambios tensionales debidos

a los efectos locales, tales como imperfecciones geométricas, cambios de espesor, etc.

Para cáscaras tan costosas, el diseño de acuerdo a los códigos a menudo no es suficiente, y debe realizarse un análisis por elementos finitos para evaluar tensiones y desplazamientos. En este capítulo se pone énfasis en tres aspectos de recipientes esféricos bajo presión interna, estos son las tensiones locales debidas a:

- Imperfecciones locales
- Cambios en el espesor, y
- Intersecciones con tubos cilíndricos

Los estudios comprenden parte del material presentado en la Ref. [Flores y Godoy (1990-1)], y profundizan algunos aspectos allí tratados. Los resultados son importantes en dos aspectos: primero, para ilustrar la naturaleza del comportamiento que puede esperarse en tales problemas; y segundo, para mostrar las diferencias entre modelos lineales y no lineales. Este segundo punto intenta servir de guía al analista en cuanto a que modelo de elementos finitos debe usarse en cada caso, y cuan conservativos pueden ser los resultados lineales.

En la sección 9.2 se estudian las desviaciones de la geometría perfecta, o imperfecciones geométricas, con particular referencia a una cáscara esférica con una imperfección local. Los estudios están restringidos a análisis tensional lineal y no lineal, lo que está justificado por el hecho de que no aparecen bifurcaciones si se considera la no linealidad de la trayectoria fundamental. La Sec.9.3 se refiere a redistribuciones de tensiones en zonas de cambio de espesor de la cáscara. Intersecciones entre cáscaras esféricas y tubos cilíndricos son el objeto de la Sec.9.4, donde se estudian algunos casos particulares. Finalmente en la Sec.9.5 se analiza un cierre elipsoidal para el cual se produce bifurcación elástica.

9.2. Tensiones Locales Debidas a Desviaciones en la Geometría Perfecta

9.2.1. Introducción

Las cáscaras esféricas a menudo presentan desviaciones de la geometría de diseño, con amplitudes del orden del espesor de la cáscara. Tales desviaciones pueden deberse a defectos de fabricación y montaje, cargas accidentales, daños en la cáscara, etc. En tal caso, puede ser necesario evaluar el nivel de tensiones y la naturaleza de la redistribución de tensiones que ocurren en la cáscara debido a la geometría modificada. Una pequeña desviación del orden de $1/5$ del espesor no afecta substancialmente el campo de tensiones, pero reduce notablemente la carga de pandeo de la cáscara; por otro lado imperfecciones

del orden del espesor están acompañadas por una importante redistribución de las tensiones. La concentración de tensiones asociada a una imperfección debería ser considerada en el diseño debido a la posible fluencia del material, y también en casos en que la fatiga en una restricción en el diseño.

Las imperfecciones en cáscaras de revolución suelen clasificarse como meridionales, circunferenciales y locales, dependiendo de que introduzcan errores en la curvatura del paralelo, del meridiano o en ambas [Croll et al (1979)]. Para evaluar el campo de tensiones en la vecindad de una imperfección, la aproximación usual ha sido asumir un perfil de imperfección y realizar el correspondiente análisis determinístico. Aparentemente el primer trabajo sobre esferas con meridiano imperfecto es debido a Flügge (1967). Allí la imperfección se consideraba como tres arcos circulares, con una amplitud máxima igual a la mitad del espesor, para una cáscara con $R/h = 200$ bajo carga uniforme. Usando una solución analítica membranar Flügge advirtió que los esfuerzos membranar meridionales N_{11} no cambiaban respecto a la cáscara perfecta, pero el esfuerzo membranar circunferencial N_{22} mostraba cambios significativos. La solución completa incluyendo efectos flexionales, mostraba reducciones en N_{22} respecto a la solución puramente membranar, pero tenía grandes variaciones tanto para N_{22} como para el momento M_{11} , siguiendo ambos esquemas bandeados. En su trabajo sobre domos de mampostería Heyman (1967) confirmó que pequeñas variaciones en la forma del meridiano producían grandes cambios en N_{22} sin afectar N_{11} . Calladine (1972) estudió imperfecciones en cáscaras cilíndricas y los resultados fueron extendidos a cáscaras esféricas usando la hipótesis de Geckeler. Resultados lineales usando el elemento desarrollado en el Cap.5 obtenidos por Godoy y Flores (1987-1 y 1987-2) y una solución explícita obtenida por Godoy (1987) han permitido una detallada investigación de la influencia de imperfecciones meridionales y locales para bajos niveles de presión interna. La influencia de la no linealidad geométrica, para niveles de hasta el 40 % de la presión de fluencia en la cáscara perfecta correspondiente, han sido recientemente investigados por Flores y Godoy (1988-1).

9.2.2. Modelo de Elementos Finitos de la Cáscara Imperfecta

La distancia R_i de una cáscara con una imperfección de amplitud ξ está dada por (ver Fig.9.1)

$$R_i = R + \xi \quad (9.1)$$

Aunque la formulación de elementos finitos desarrollada es capaz de considerar cualquier perfil de imperfección sin dificultad, los estudios que siguen están restringidos a una imperfección local determinística particular, dada por la función

$$\xi = \frac{\xi_i}{4} \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi\phi}{\phi_i} \right) \right] \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi\theta}{\theta_i} \right) \right] \quad (9.2)$$

en la cual ϕ_i es el ángulo central de la imperfección en la dirección meridional; θ_i es el ángulo en la dirección circunferencial; y ξ_i es la máxima amplitud de la imperfección. Esta forma particular de imperfección tiene continuidad de la tangente en todo punto, pero presenta discontinuidades en la curvatura en las intersecciones entre segmentos perfectos e imperfectos de la cáscaras.

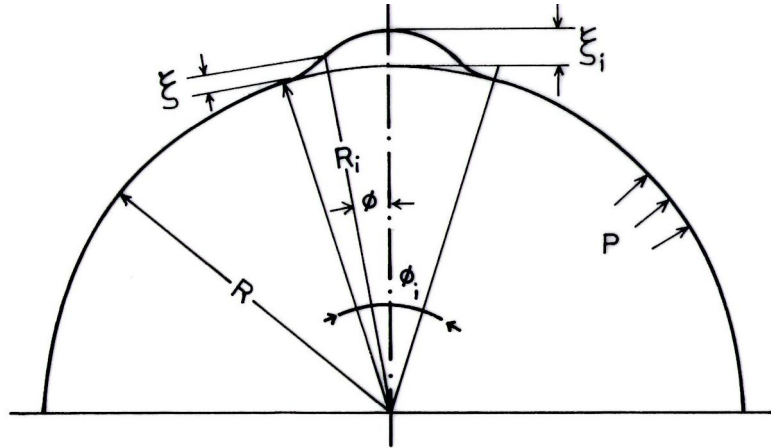


Figura 9.1: Notación y convención positiva para una cáscara esférica con una imperfección local

La Ec.9.2 representa una idealización de las imperfecciones reales que pueden ocurrir en la práctica; sin embargo, los estudios existentes en la literatura sobre los efectos de los diferentes perfiles de imperfección sobre el campo tensional, muestran que, en tanto no existan discontinuidades en la pendiente, las distribuciones de tensiones debidas a diferentes imperfecciones no difieren mucho entre si. En consecuencia, aunque el presente estudio está restringido a un perfil particular de imperfección, puede ser indicativo del comportamiento de cáscaras con otras formas de imperfección pero valores similares de ξ_i , ϕ_i y θ_i .

En este capítulo, las imperfecciones geométricas han sido modeladas por una representación exacta de la superficie media imperfecta. Se ha supuesto una imperfección hacia adentro, con un eje de simetría y alejada de los bordes; estas condiciones permiten modelar la imperfección y su zona de influencia como una cáscara de revolución bajo carga axilsimétrica. Los estudios que se reportan en esta sección han sido realizados usando imperfecciones hacia adentro y no hacia afuera, debido a que las imperfecciones hacia adentro introducen mayores cambios en tensiones y desplazamientos, y porqué su comportamiento está más influenciado por la no linealidad geométrica.

Los estudios numéricos han sido realizados considerando como estructura básica un sector esférico bajo presión interna. Se usaron 18 elementos (90 grados de libertad) para modelar la estructura, de los cuales 9 cubren la zona de imperfección definida por ϕ_i y 9 cubren la zona de influencia de la imperfección. En los bordes de la zona de influencia se ha aplicado una condición de borde membranar. Se han realizado estudios de convergencia

que indican que la discretización utilizada representa una adecuada aproximación a la solución.

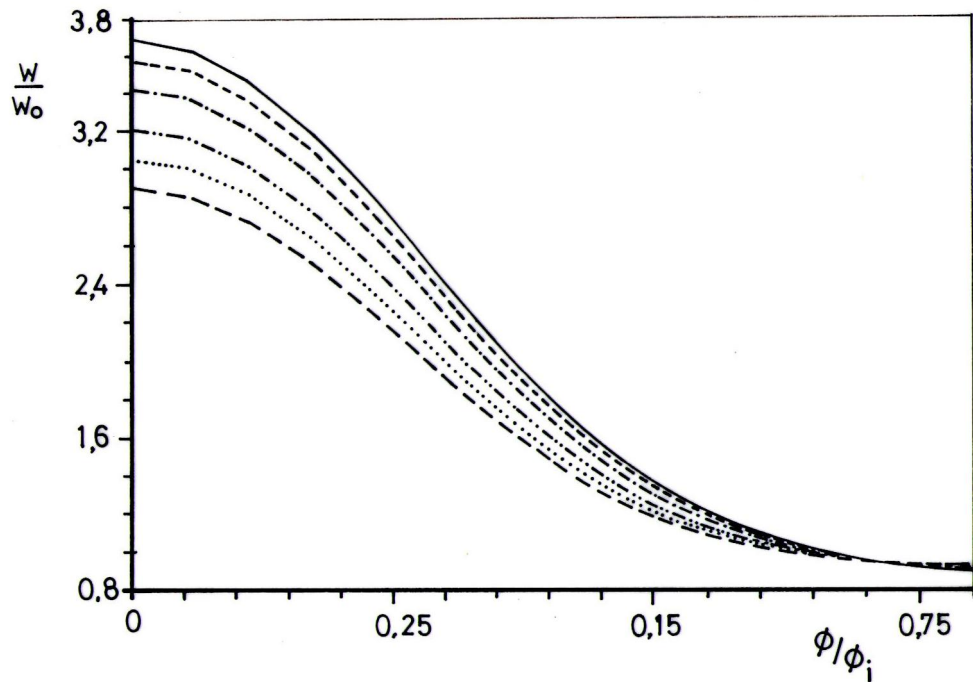
9.2.3. Tensiones en una Cáscara Imperfecta

Para ilustrar el comportamiento de una cáscara esférica delgada con una imperfección local hacia adentro, se han analizado dos geometrías particulares. El primer caso es representativo de las aplicaciones a contenedores de gas, y tiene una relación $R/h = 200$; se ha supuesto un módulo de elasticidad $E = 2,1 \times 10^5 N/mm^2$ y una relación de Poisson $\nu = 0,3$. La imperfección considerada está definida por los parámetros $R/\xi_1 = 200$ y $\phi_i = 10^\circ$, que es una imperfección de extensión media y amplitud igual al espesor de la cáscara. Se ha usado la tensión equivalente de von Mises para el cálculo de las tensiones membranales σ_m

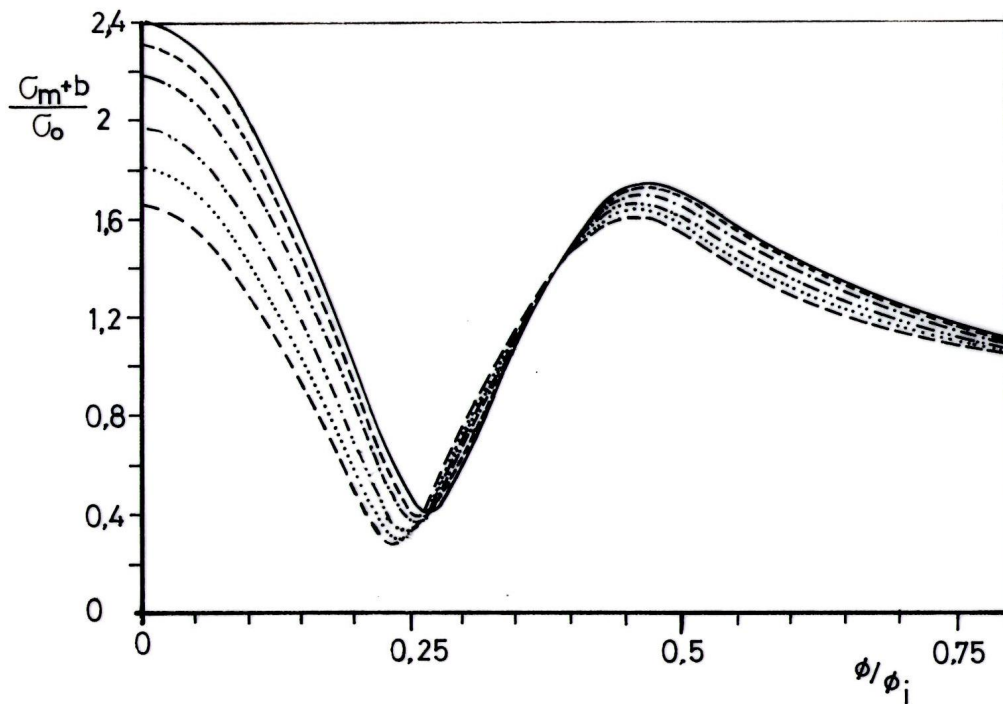
$$\sigma_m = \frac{1}{\sqrt{2}} [\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2]^{1/2} \quad (9.3)$$

en la superficie media de la cáscara donde las tensiones de flexión son nulas. Las tensiones membranales han sido normalizadas respecto a σ_0 (la tensión en la cáscara perfecta) para mostrar la variación entre las soluciones lineal y no lineal, y también entre cáscaras perfecta e imperfecta. Los resultados muestran una dependencia no lineal de tensiones y desplazamientos con la presión considerada, y entonces es necesario limitar el valor de la presión a valores prácticos. En consecuencia para obtener los resultados, se ha usado una presión máxima $p = 400h/R [N/mm^2]$ (asociada a una tensión $\sigma_0 = 200N/mm^2$ en la esfera perfecta). Tal nivel de tensiones corresponde a un 40% de la tensión de fluencia para el tipo de aceros que se utiliza usualmente en recipientes de presión en la industria nuclear.

La Fig.9.2 muestra la variación de los desplazamientos, las tensiones membranales, y las tensiones membranales más flexionales, a medida que se aumenta la presión, la que está caracterizada por σ_0 para remarcar la influencia de la no linealidad. Los desplazamientos normales w han sido normalizados con respecto a w_0 , que es el desplazamiento correspondiente en la cáscara perfecta. La no linealidad geométrica tiene el efecto de reducir w/w_0 de 3,66 en el análisis lineal a 2,89 en el análisis no lineal para $\sigma_0 = 200N/mm^2$ (Fig.9.2.a), con un error del 22% en la solución lineal. Los errores en los desplazamientos se reflejan en los errores en las tensiones graficadas en la Fig.9.2.b. La influencia de los efectos flexionales se aprecia más claramente en la Fig.9.2.c, en la cual se ha graficado la tensión equivalente de von Mises σ_{m+b} en la pared interna o externa según cual sea la más solicitada. Los resultados de la Fig.9.2 indican que un análisis lineal es adecuado para recipientes esféricos de acero en donde la relación R/h es del orden de 200-300.

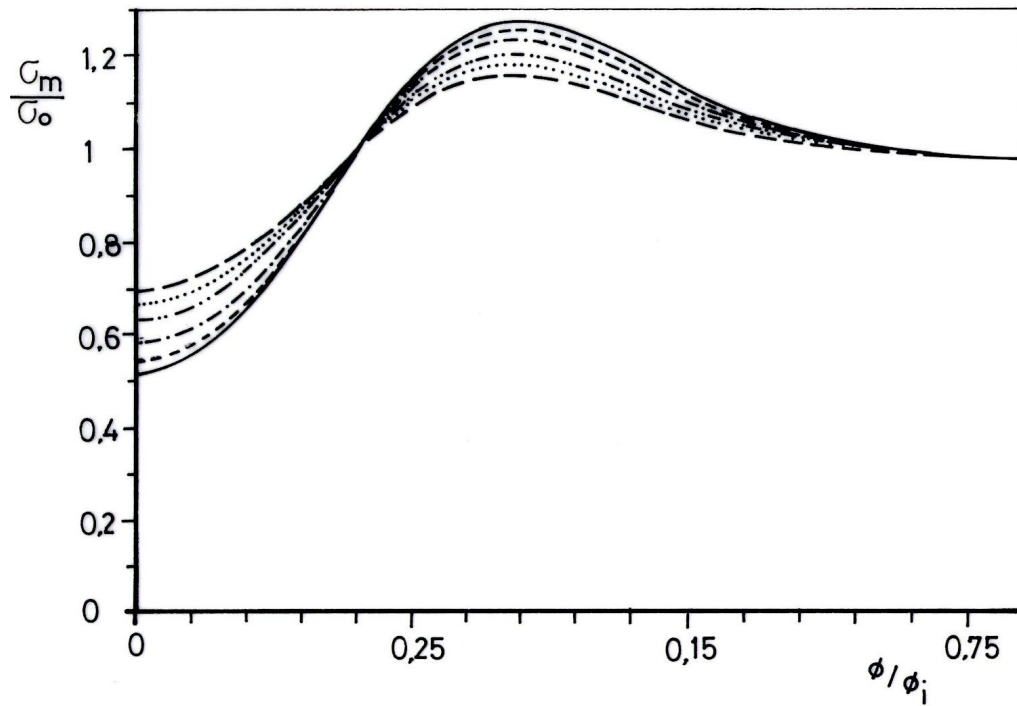


(a)

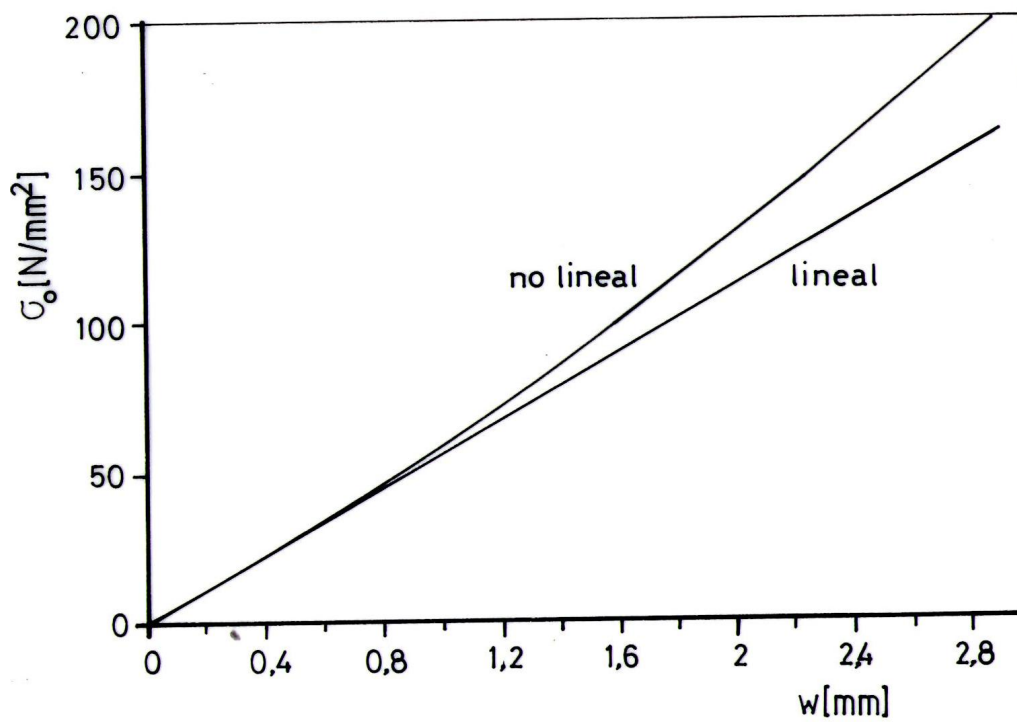


(b)

Figura 9.2: Comportamiento lineal y no lineal de una esfera elástica imperfecta bajo presión interna con $R/h = 200$, $R/\xi_i = 200$, y $\phi_i = 10^\circ$. — lineal; - - - $\sigma_o = 20$, - · - · $\sigma_o = 50$, - - - - $\sigma_o = 100$, ···· $\sigma_o = 150$, - - - $\sigma_o = 200$ [N/mm²]. (a) Relación de desplazamientos w/w_0 . (b) relación entre las tensiones membranales equivalentes de von Mises. (c) relación entre las tensiones membranales más flexionales equivalentes de von Mises. (d) Desplazamiento al centro de la imperfección.

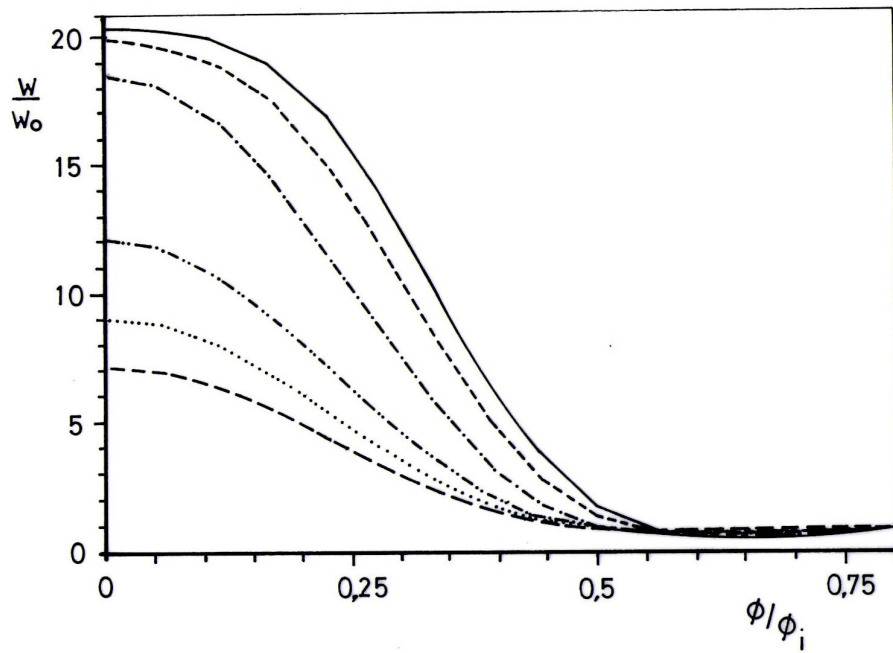


(c)

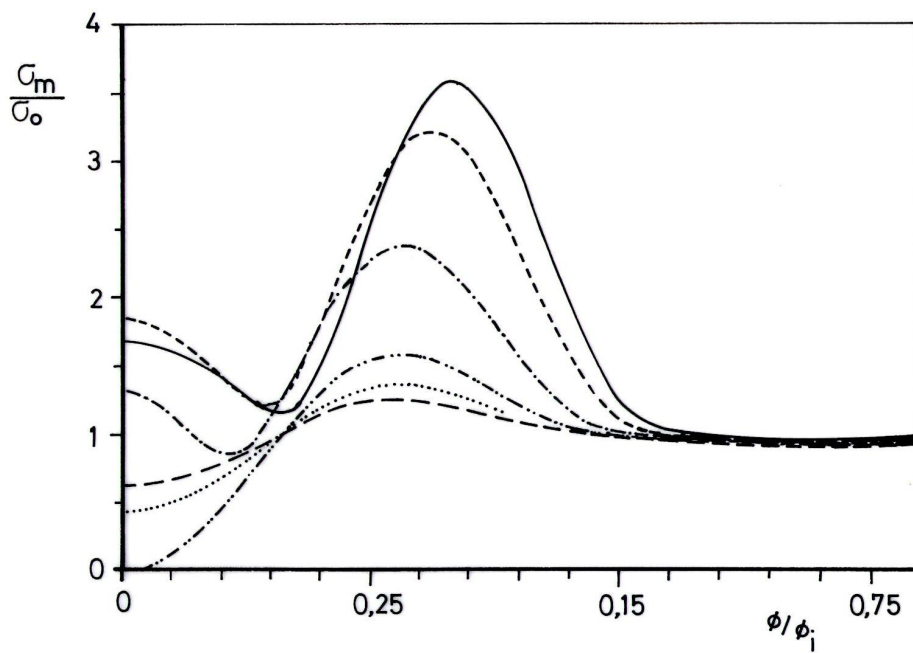


(d)

Fig.9.2 (continuación)

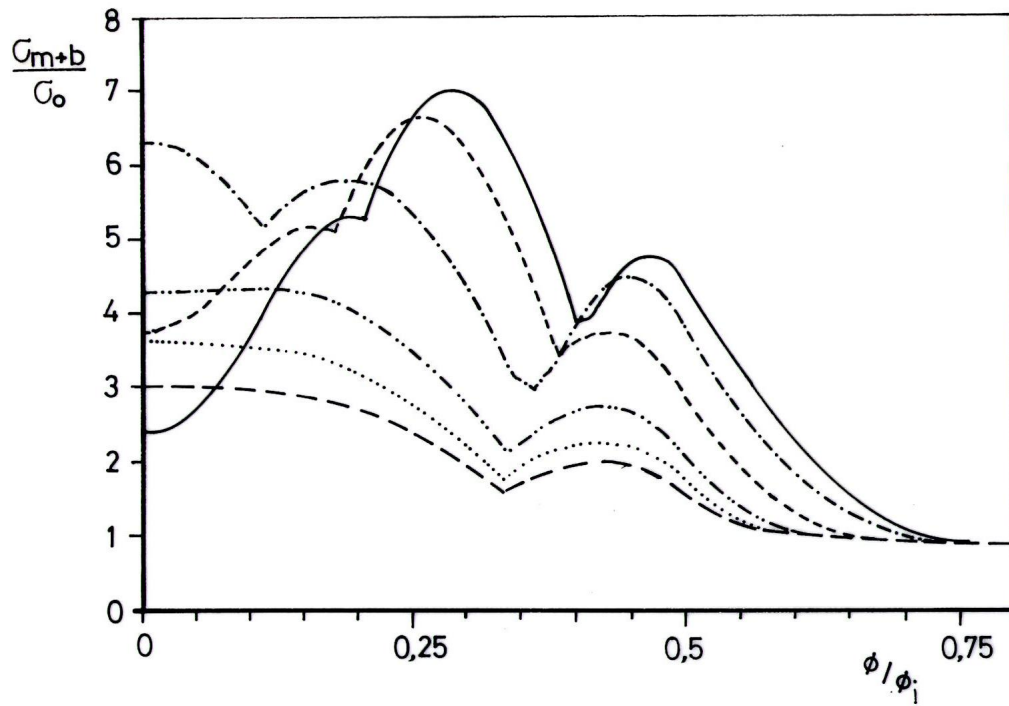


(a)

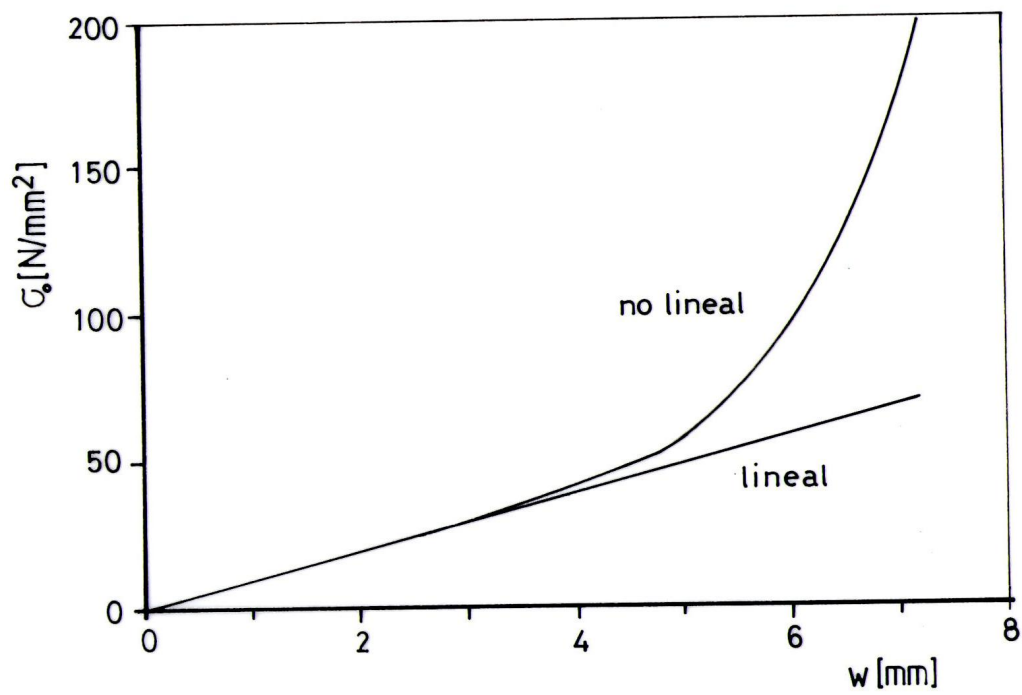


(b)

Figura 9.3: Comportamiento lineal y no lineal de una esfera elástica imperfecta bajo presión interna con $R/h = 1000$, $R/\xi_i = 200$, y $\phi_i = 10^\circ$. — lineal; - - $\sigma_o = 20$, - · - · $\sigma_o = 50$, - - - $\sigma_o = 100$, ···· $\sigma_o = 150$, - · - · $\sigma_o = 200 [N/mm^2]$. (a) Relación de desplazamientos w/w_0 . (b) relación entre las tensiones membranales equivalentes de von Mises. (c) relación entre las tensiones membranales más flexionales equivalentes de von Mises. (d) Desplazamiento al centro de la imperfección.



(c)



(d)

Fig.9.3 (continuación)

El segundo caso estudiado es un ejemplo de la industria de centrales nucleares, con $R/h = 1000$, manteniendo el resto de los parámetros como en el caso anterior. Los resultados graficados en la Fig.9.3 indican claramente una fuerte influencia de la no linealidad con el nivel de presiones. La relación w/w_0 en el centro de la imperfección se reduce de 20,7 en el análisis lineal a 7,18 en el no lineal con $\sigma_0 = 200N/mm^2$; para este nivel de presiones los desplazamientos han sido sobrevaluados con un factor de 2,9. Una fuerte no linealidad se observa en la Fig.9.3.b, en la cual no sólo cambian los valores, sino también el perfil del campo de tensiones a medida que aumenta la presión. Estos cambios son de hecho evidencia de la redistribución de tensiones que ocurre en la cáscara a partir de la respuesta lineal inicial, y muestran que la tendencia de la cáscara imperfecta es a comportarse como una cáscara perfecta para altos valores de presión. La reducción en las tensiones de flexión (Fig.9.3.c) no es tan importante como en las tensiones puramente membranales.

9.2.4. Presión de Bifurcación para una Cáscara Imperfecta

En la Sec.9.2.3 se mostró que ocurren importantes redistribuciones de tensiones en la vecindad de una imperfección. En particular se desarrollan tensiones circunferenciales de compresión, y sus valores pueden ser de importancia con respecto a la estabilidad de la cáscara. Para investigar la estabilidad bajo presión interna, se ha realizado un análisis de bifurcación a partir de una trayectoria lineal para la cáscara con $R/t = 1000$, $R/\xi_i = 200$ y $\phi_i = 5^\circ$. Los resultados indican una presión crítica de $0,3N/mm^2$ que está por debajo del valor $p = 400h/R[N/mm^2]$ considerado en la sección anterior.

A continuación, se realizó un análisis de bifurcación a partir de una trayectoria fundamental no lineal en la forma indicada en el Cap.7. Pero dado que la no linealidad geométrica está asociada en este caso a una reducción de las tensiones membranales, los valores de compresión no se incrementan proporcionalmente a la presión interna. Esto tiene como consecuencia que la presión crítica aumenta al avanzar sobre la trayectoria fundamental de tal forma que la bifurcación nunca ocurre. Este es otro caso donde una solución linealizada conduce a resultados incorrectos. En la Fig.9.4 se ha graficado la carga λ vs el autovalor $\Delta\lambda$ (esto es la diferencia entre la presión crítica suponiendo un comportamiento lineal desde el nivel de carga actual hasta la bifurcación) para mostrar que $\Delta\lambda$ nunca llega a cero. Se ha graficado además el comportamiento de otras cáscaras analizadas en esta tesis como comparación.

9.2.5. Discusión

Los ejemplos presentados en la última sección fueron obtenidos para algunos casos particulares. Estudios paramétricos usando cinemática lineal han sido reportados para imperfecciones axil-simétricas [Godoy y Flores (1987-1)] y para imperfecciones locales [Go-

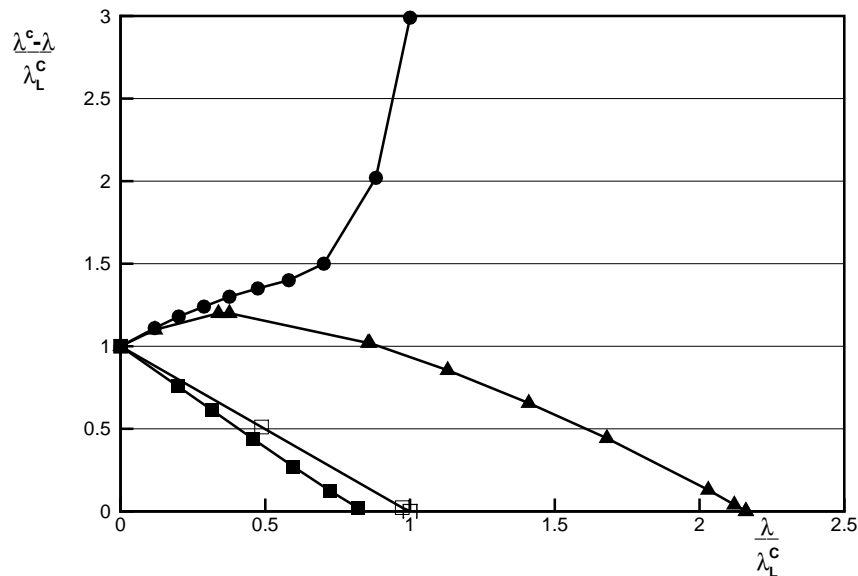


Figura 9.4: Carga λ vs Carga de bifurcación para distintas cáscaras. (■) domo rebajado bajo presión externa (Sec.8.4); (□) elipse bajo presión externa (Sec.8.2); (▲) elipse bajo presión interna (Sec.9.5); (●) esfera imperfecta bajo presión interna.

doy y Flores (1987-2)]. Ecuaciones cinemáticas no lineales han sido usadas para investigar cáscaras esféricas localmente imperfectas [Flores y Godoy (1988-1)].

Respecto al comportamiento de esferas imperfectas, existen algunas características distintivas que pueden resumirse como sigue:

(a) Los cambios en las tensiones membranales y flexionales están relacionados en forma no lineal con la amplitud de la imperfección local

(b) Dada la amplitud de una imperfección local, los mayores cambios en los esfuerzos resultantes ocurren para $\phi_1 = 5^\circ - 10^\circ$

(c) Dada la amplitud y extensión de una imperfección, una imperfección local produce valores más altos de tensiones resultantes que la imperfección bandeada para extensiones medias y grandes; en tanto que lo contrario ocurre para extensiones cortas.

(d) Las imperfecciones hacia adentro producen mayores cambios tensionales que las hacia afuera; además las primeras presentan un comportamiento no lineal mucho más fuerte que las últimas.

Respecto al tipo de análisis por elementos finitos que debiera llevarse a cabo sobre una cáscara imperfecta, las principales conclusiones son:

(a) Para cáscaras muy delgadas ($R/h > 500$), un análisis lineal conduce a valores de desplazamientos y tensiones en extremo conservativos; por ello para establecer especificaciones de tolerancias y límites de diseño que puedan usarse en la práctica, debe utilizarse un análisis no lineal geométrico junto con algún criterio de fluencia. Para cáscaras de esbeltez mediana ($R/h = 200$), un análisis lineal parece razonablemente preciso para

propósitos ingenieriles

(b) Los términos no lineales tienen influencia más marcada en el comportamiento a medida que aumenta la amplitud de la imperfección ξ_i/R

(c) Finalmente, es interesante notar que si se realiza un análisis lineal de bifurcación, se encuentra una presión crítica menor que la presión final considerada en el análisis precedente. Sin embargo, si se considera la no linealidad de la trayectoria fundamental, las zonas de compresión disminuyen a medida que aumenta la presión y la inestabilidad no tiene lugar.

9.3. Tensiones Locales Debidas a Cambios de Espesor

9.3.1. Introducción

Debido a defectos de fabricación o a exigencias del diseño pueden existir cambios de espesor en las cáscaras metálicas. Sanchez Sarmiento et al (1983) han estudiado las tensiones elásticas para una cáscara esférica con cambios locales en el espesor; el espesor de la cáscara fue analizado con una discretización refinada mediante un elemento finito bidimensional y se obtuvieron resultados en términos de tensiones. En la presente sección, los cambios de espesor se estudian usando la formulación de láminas de revolución, en la cual se calculan esfuerzos resultantes en vez de tensiones locales en el espesor. En consecuencia, al imponer a priori las hipótesis de Love-Kirchhoff, los perfiles de tensiones son necesariamente lineales a través del espesor.

Debe notarse que si se considera a la plasticidad en el análisis, el comportamiento puede resultar del tipo no lineal con ablandamiento. Tvergaard (1976) ha reportado resultados para esferas con presión interna con variaciones en el espesor, en los cuales el material es modelado como elasto-plástico con endurecimiento y una superficie de fluencia suave. Tanto los cambios de espesor, como las deformaciones se consideraron axilsimétricas. Los resultados mostraron una trayectoria carga-desplazamiento no lineal con pérdida de rigidez después del primer punto de fluencia, y un punto límite. Para una cáscara con $R/h = 500$, el punto límite ocurría para un 60% por encima de la carga de primera fluencia, porcentaje que se incrementaba con el espesor de la cáscara.

9.3.2. Caso Estudiado

Para investigar la influencia de los cambios en el espesor de una cáscara esférica elástica bajo presión interna, se ha asumido que el cambio de espesor ocurre en un área pequeña. Para simplificar más los cálculos, se ha supuesto que el cambio de espesor tiene un eje de simetría. Los datos para el caso estudiado se muestran en la Fig.9.5, con un cambio de espesor de 40mm a 30mm sobre una longitud $L_h = 30mm$ (o alternativamente $L_h = 100mm$); la extensión real de la zona de espesor reducido está definida por $\phi_i = 1^\circ$. Los

cambios en los esfuerzos resultantes N_{22} y M_{11} han sido graficados en las Fig.9.6.a y 9.6.b respectivamente, usando modelos con cinemática lineal y no lineal. Los resultados indican que los cambios en N_{22} con respecto a la cáscara de espesor constante son del orden del 10 %, y este resultado no cambia significativamente con la longitud L_h o por el uso de cinemática lineal según se desprende de la figura. El momento flector meridional, por otro lado, aumenta desde cero en la cáscara de espesor constante hasta valores de $2KN/mm^2$ debido a la variación del espesor. Debe notarse que estos valores de momentos flectores son mucho menores que los obtenidos para las cáscaras con imperfecciones geométricas. En el caso de usar cinemática no lineal se obtienen valores menores para los esfuerzos M_{11} ; por ejemplo, para el nivel de presiones considerado, los resultados lineales máximos se reducen a aproximadamente la mitad cuando se usa el modelo no lineal.

9.3.3. Discusión

Los cambios localizados en el espesor no parecen producir tensiones elásticas de importancia para el diseño. La solución lineal representa un límite superior a los momentos flectores y provee una buena estimación de los esfuerzos resultantes. Dado que los valores reales de los momentos no son significativos, un modelo lineal parece adecuado para el análisis.

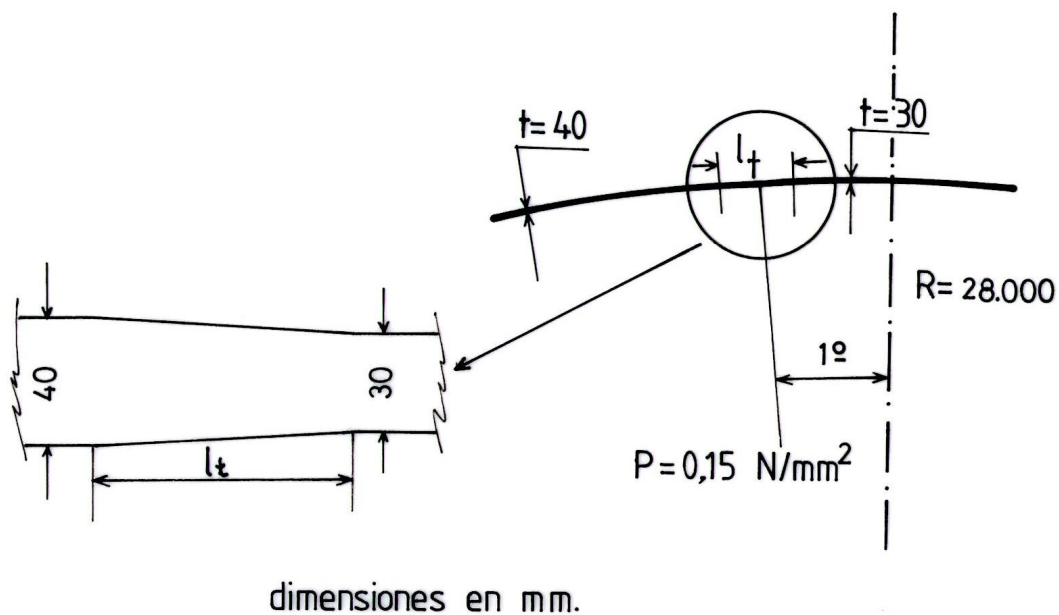


Figura 9.5: Notación para la cáscara esférica con cambio de espesor.

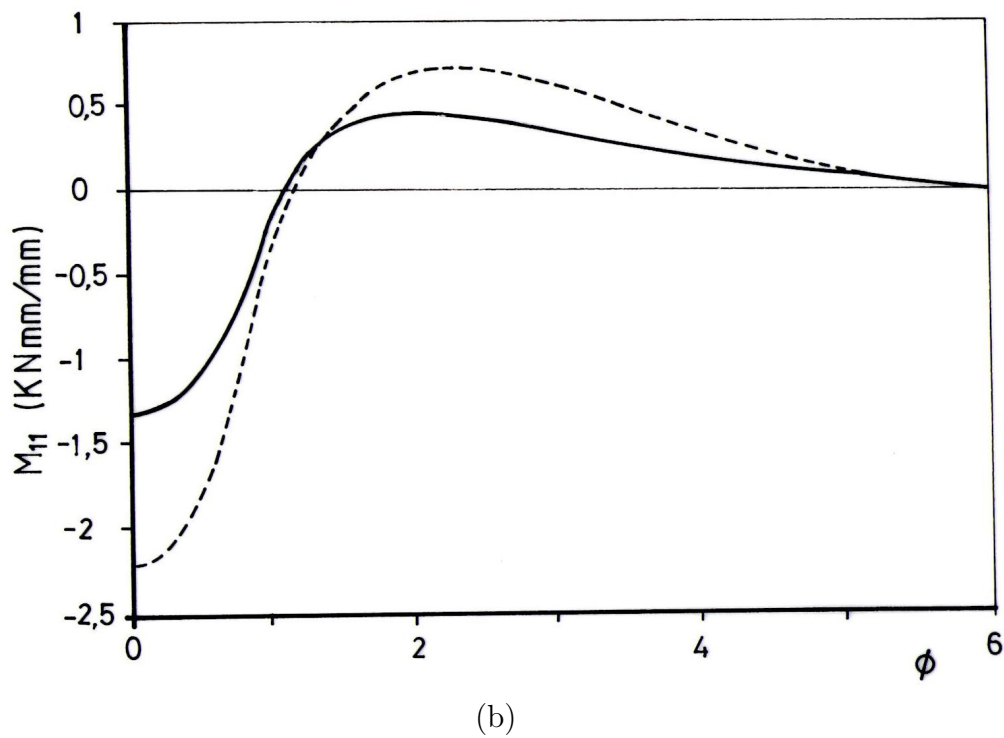
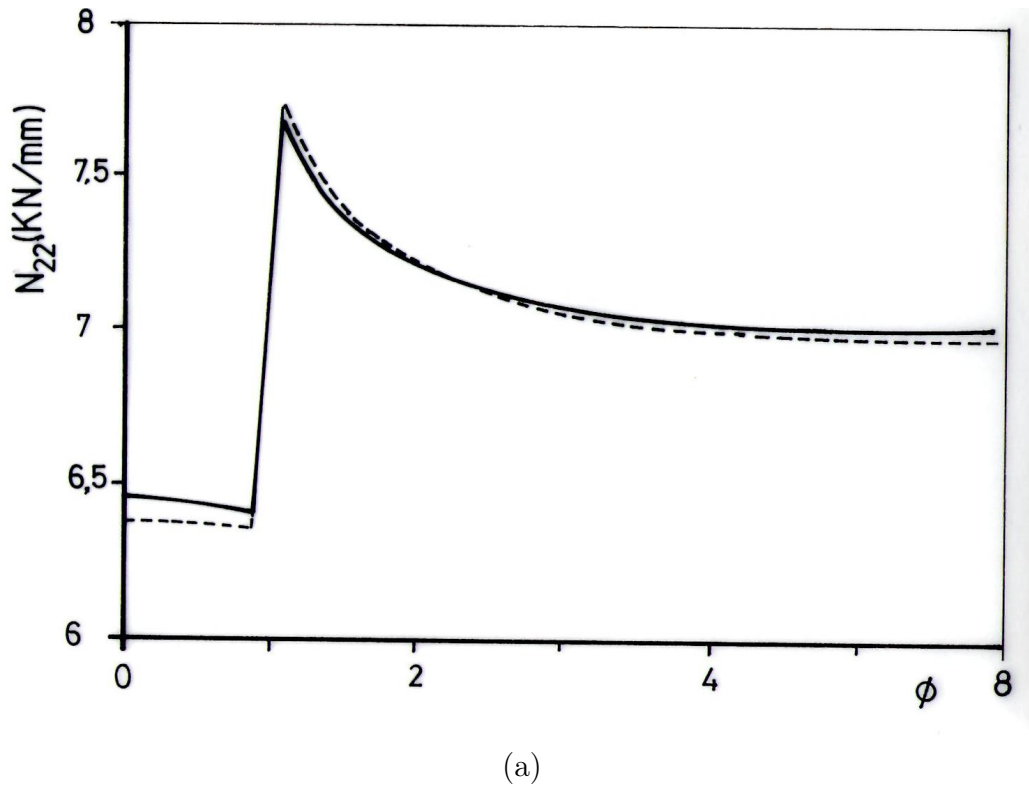
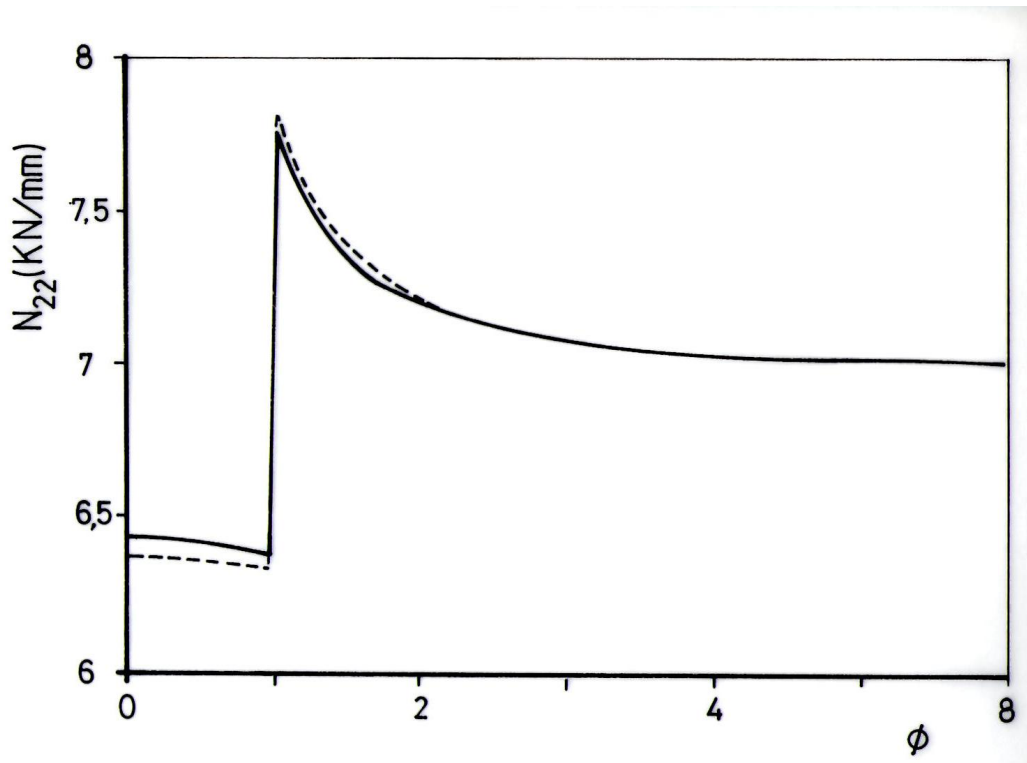
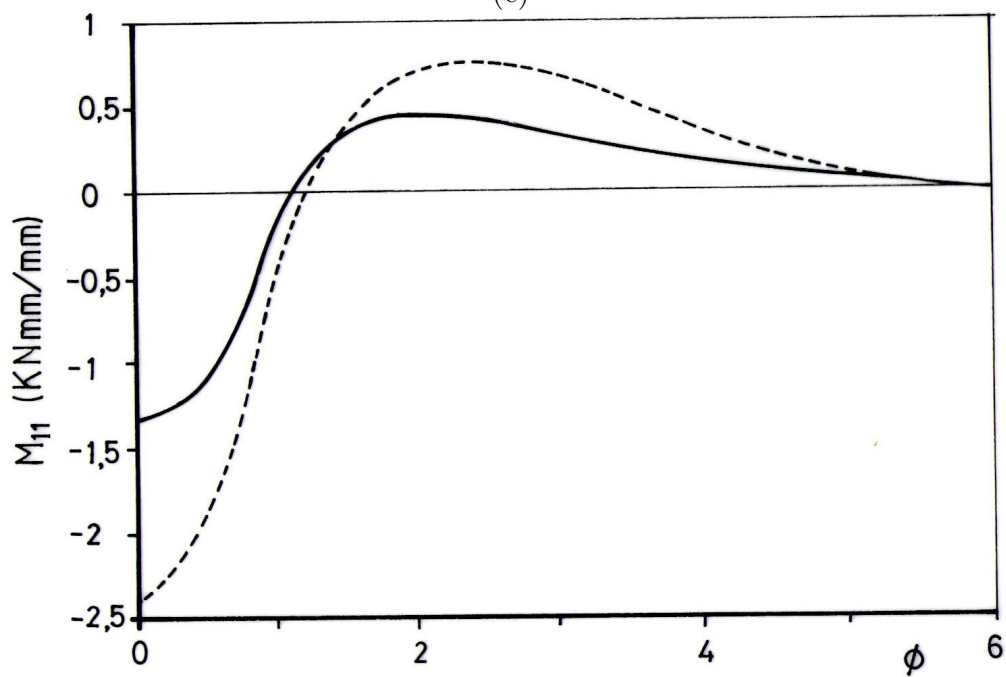


Figura 9.6: Comportamiento lineal y no lineal de una cáscara esférica con variación en el espesor. - - - lineal; — no lineal. (a) Esfuerzo circunferencial ($L_h = 30\text{mm}$); (b) Momento meridional ($L_h = 30\text{mm}$); (c) Esfuerzo circunferencial ($L_h = 100\text{mm}$); (d) Momento meridional ($L_h = 100\text{mm}$)



(c)



(d)

Fig.9.6 (continuación)

9.4. Tensiones Locales en la Intersección entre una Cáscara Esférica y un Cilindro

Las tensiones locales en aberturas sobre cáscaras delgadas esféricas son de importancia en el diseño y están bien documentadas en la literatura [Gill (1970)]. Los estudios presentados en esta sección están principalmente relacionados con la necesidad de llevar a cabo un análisis no lineal en el rango elástico de la cáscara.

En la Fig.9.7.a se presenta la geometría de la intersección de una cáscara esférica con un tubo cilíndrico. La cáscara cilíndrica es mucho menos esbelta que la esférica y debido a esta diferencia de flexibilidad, los resultados han sido graficados sólo para la parte esférica de la cáscara.

Las Figs. 9.7.b y 9.7.c muestran los esfuerzos y momentos resultantes como una función del ángulo ϕ medido a partir del eje del cilindro. El esfuerzo membranar resultante N_{22} en la intersección aumenta en sólo un 10% respecto al esfuerzo medido lejos del cilindro. Los cambios en los momentos flectores M_{11} son más significativos, pero tienen sólo un efecto marginal en las tensiones (por ejemplo, la máxima tensión de flexión es $6N/mm^2$). El modelo con cinemática no lineal produce casi los mismos resultados que el análisis lineal para N_{22} . Mayores diferencias se encuentran para M_{11} que se ven reducidos cuando se considera la no linealidad geométrica.

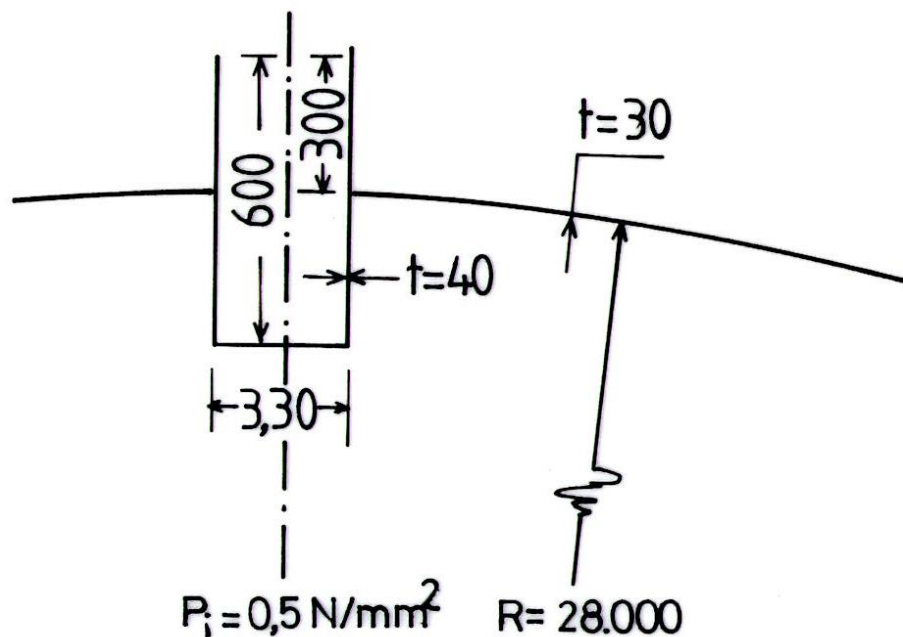
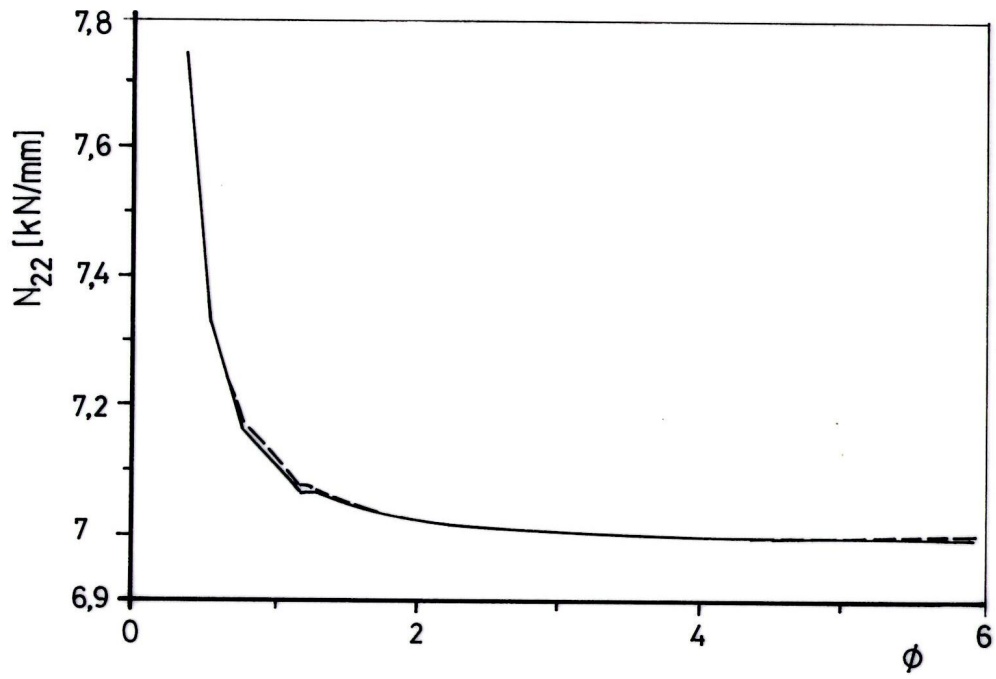
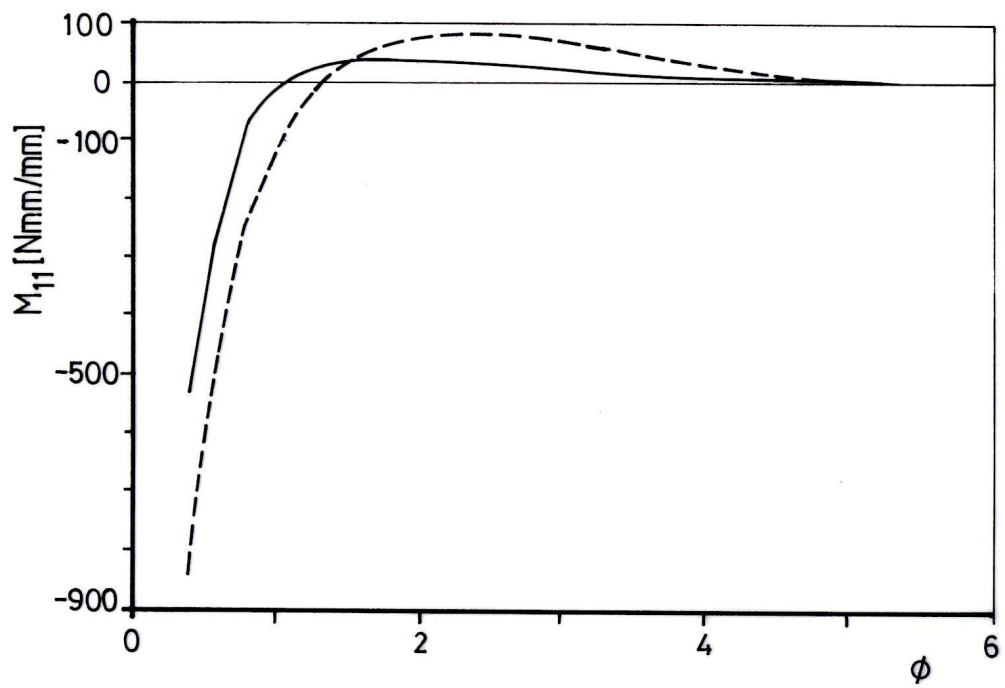


Figura 9.7: Comportamiento lineal y no lineal de la intersección entre una cáscara esférica y un tubo. - - - lineal; — no lineal; (a) geometría (dimensiones en mm). (b) Esfuerzos circunferenciales; (c) Momento meridional.



(b)



(c)

Fig.9.7 (Continuación)

Se han llevado a cabo algunos estudios paramétricos para considerar la influencia de la relación R/h de la esfera en el comportamiento de la cáscara. La geometría básica se presenta en la Fig.9.8.a y R/h toma los valores 1000, 750 y 500. De los resultados de las Figs. 9.8.b y 9.8.c se concluye que las mayores influencias disminuyen con R/h . El uso de ecuaciones deformación-desplazamiento no lineales produce diferencias despreciables para N_{22} en todos los casos estudiados. Como en el caso de cambios en el espesor de la cáscara, se observa que la no linealidad geométrica en el análisis, no es importante en la intersección entre cáscaras esféricas y cilindros.

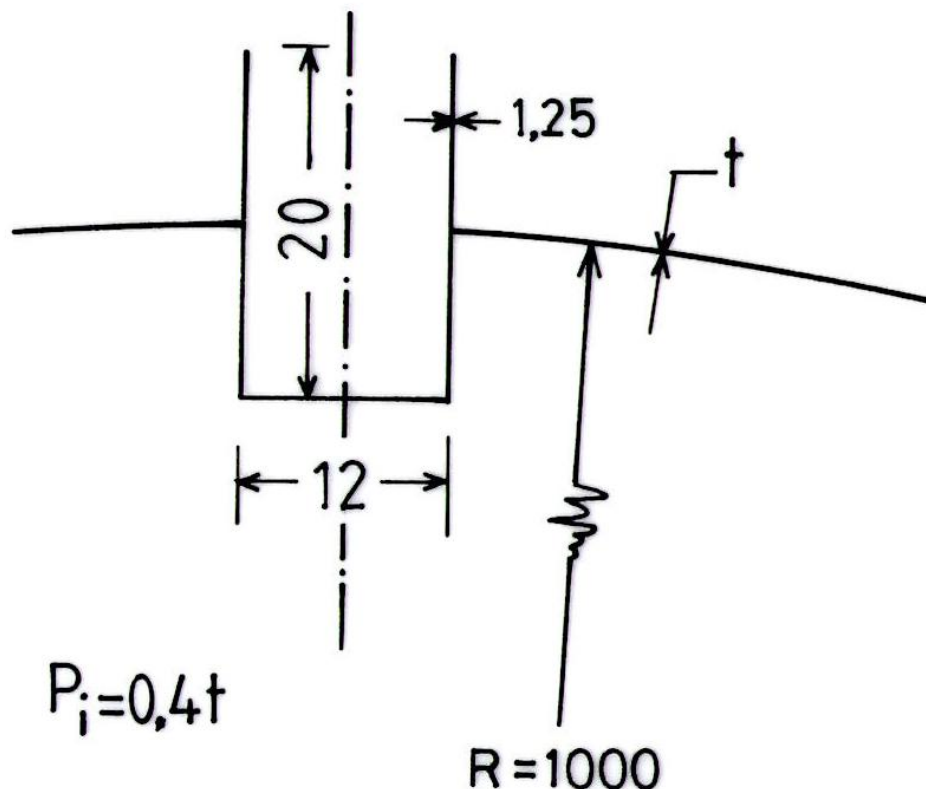
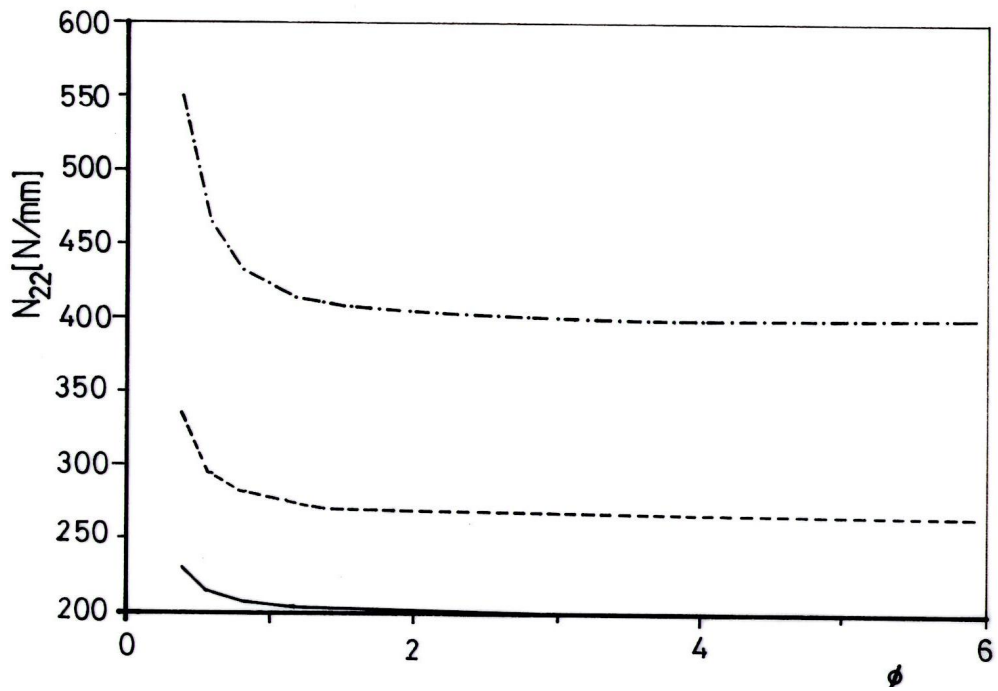
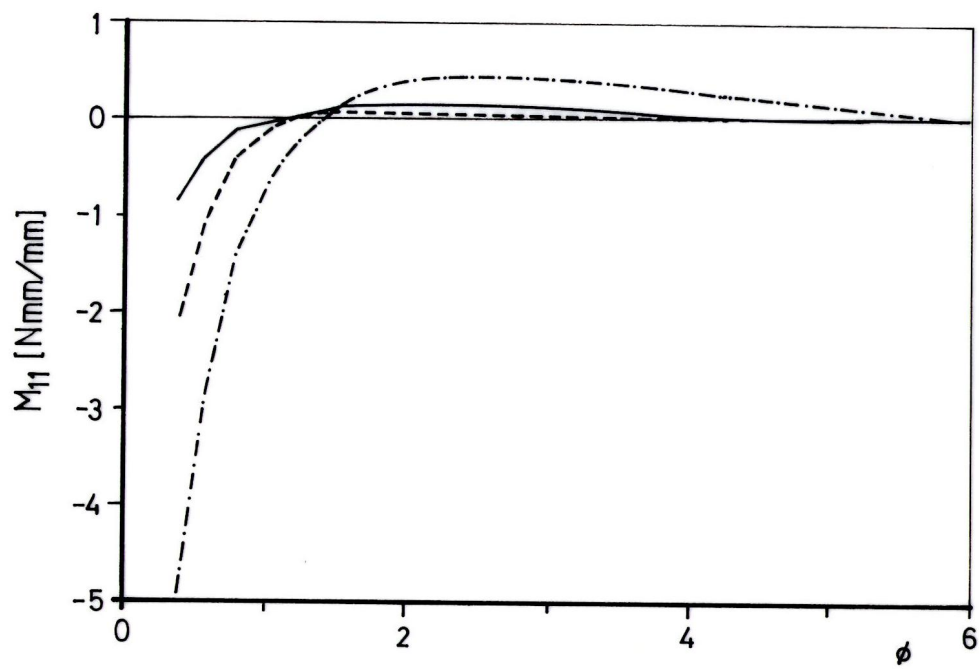


Figura 9.8: Comportamiento no lineal de la intersección de una cáscara esférica y un tubo.

— $R/h = 1000$; - - - $R/h = 750$; - · - · $R/h = 500$ (a) Geometría. (b) Esfuerzo circunferencial N_{22} . (c) momento meridional M_{11} .



(b)



(c)

Fig.9.8 (Continuación)

9.5. Inestabilidad por Bifurcación de un Cierre Elipsoidal con Presión Interna

9.5.1. Introducción

Las cáscaras elipsoidales y toroidales son a menudo una elección conveniente en el diseño de cierres de recipientes de presión. La Fig.9.9 muestra la geometría de una cabeza elipsoidal que es el cierre de un recipiente de presión cilíndrico. Un aspecto particular en el comportamiento de tales cáscaras es que bajo presión interna, un estado de esfuerzos de tracción en la dirección del meridiano está acompañado por tensiones circunferenciales de compresión. Para cáscaras esbeltas (con una relación radio/espesor mayor que 500), este esfuerzo de compresión puede causar inestabilidad elástica en modos no axilimétricos. El primero en advertir este comportamiento inestable en cáscaras toriesféricas fue Galletly (1959). Una revisión de los trabajos publicados sobre el tema puede encontrarse en el libro de Bushnell (1985).

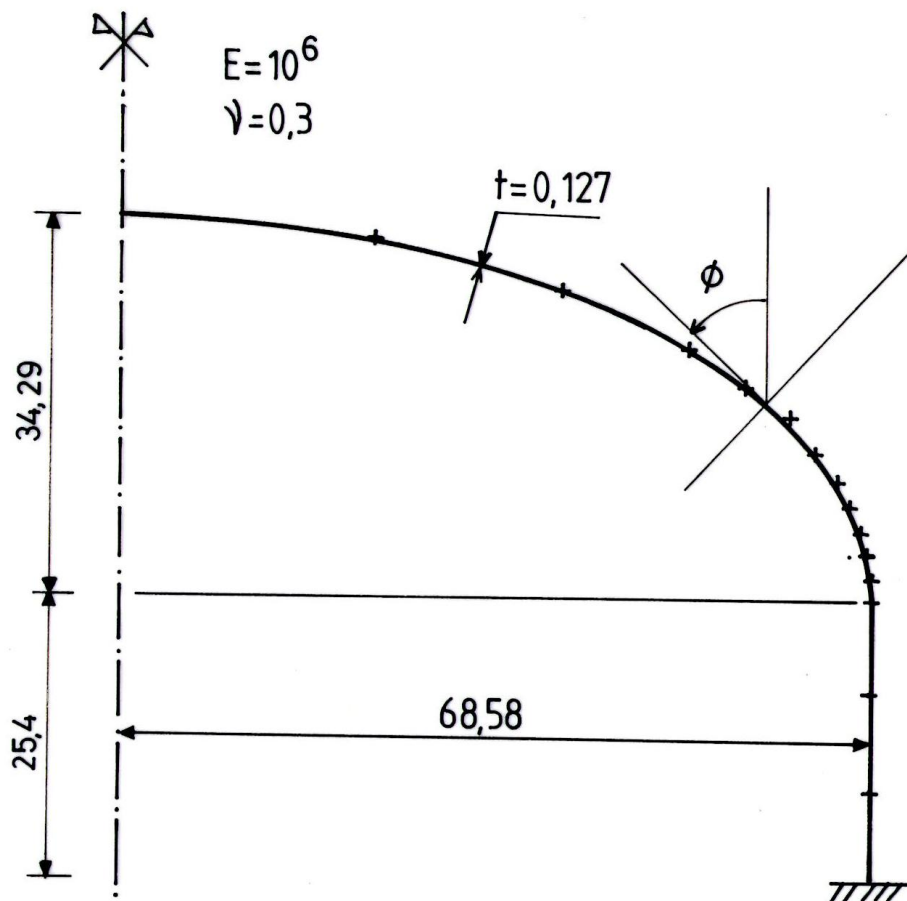


Figura 9.9: Cierre elipsoidal bajo presión interna. Geometría y discretización por elementos finitos (15 elementos).

9.5.2. Ejemplo Analizado

Para mostrar las principales características del comportamiento de cierres bajo presión interna, se ha estudiado una cáscara elipsoidal. Este ejemplo ha sido previamente analizado por Bushnell (1977) y los datos se muestran en la Fig.9.9. Se ha empleado el código de elementos finitos desarrollado para obtener las trayectorias lineales y no lineales, y las cargas de bifurcación a partir de ellas. En la Fig.9.9 también se muestra la discretización utilizada (quince elementos).

Los resultados de las trayectorias carga desplazamiento han sido graficados en la Fig.9.10.a, donde se ha considerado el desplazamiento normal a la cáscara en la intersección entre la cáscara cilíndrica y la elipsoidal. La presión de bifurcación a partir de la trayectoria lineal es $P_c = 5,15 \times 10^{-6} E$. Como en los casos estudiados previamente, la no linealidad geométrica juega un rol importante en la trayectoria fundamental. La presión de bifurcación a partir de la trayectoria no lineal resulta $P_c = 11,26 \times 10^{-6} E$, que es un 120% mayor que la solución lineal. En la Fig.9.10.b se ha graficado el perfil del modo crítico a lo largo del meridiano para las dos soluciones. Notar que se producen cambios tanto en el perfil meridional como en el circunferencial dependiendo del tipo de solución empleada.

¿Que es lo que produce las diferencias entre los valores calculados de las presiones y modos de bifurcación usando teorías de pequeñas o grandes rotaciones?. Para entender las diferencias es importante observar las redistribuciones de tensiones que ocurren en la cáscara a medida que se incrementa la presión. En la Fig.9.10.c se ha graficado N_{22} y puede observarse las bandas alternadas de tracción y compresión que se desarrollan en la vecindad de la unión entre los segmentos cilíndrico y elipsoidal, muy parecidas a las que ocurrían en la esfera imperfecta. En realidad, la transición entre la cáscara elipsoidal y la cilíndrica puede pensarse como una imperfección para alguna de ellas, en el sentido de que hay un cambio localizado en la curvatura de la superficie media. La zona de compresión circunferencial en la cáscara elipsoidal es la responsable de la inestabilidad de este tipo de estructuras, si el espesor es suficientemente delgado. Es muy importante considerar la influencia de la no linealidad geométrica en N_{22} . En la Fig.9.10.c los valores de N_{22} han sido normalizados respecto a la presión, lo que permite comparar resultados lineales y no lineales. Puede observarse que las tensiones calculadas con el modelo lineal son mayores que con el no lineal. Por ejemplo, la máxima tensión de compresión en la solución lineal es 1,65 veces mayor que la obtenida con el modelo no lineal para la presión $p = 11 \times 10^{-6} E$, correspondiente casi a la presión crítica. La disminución en N_{22}/p a medida que aumenta la presión es indicativa de la redistribución que ocurre en la cáscara. La influencia de la no linealidad es enteramente similar a lo que

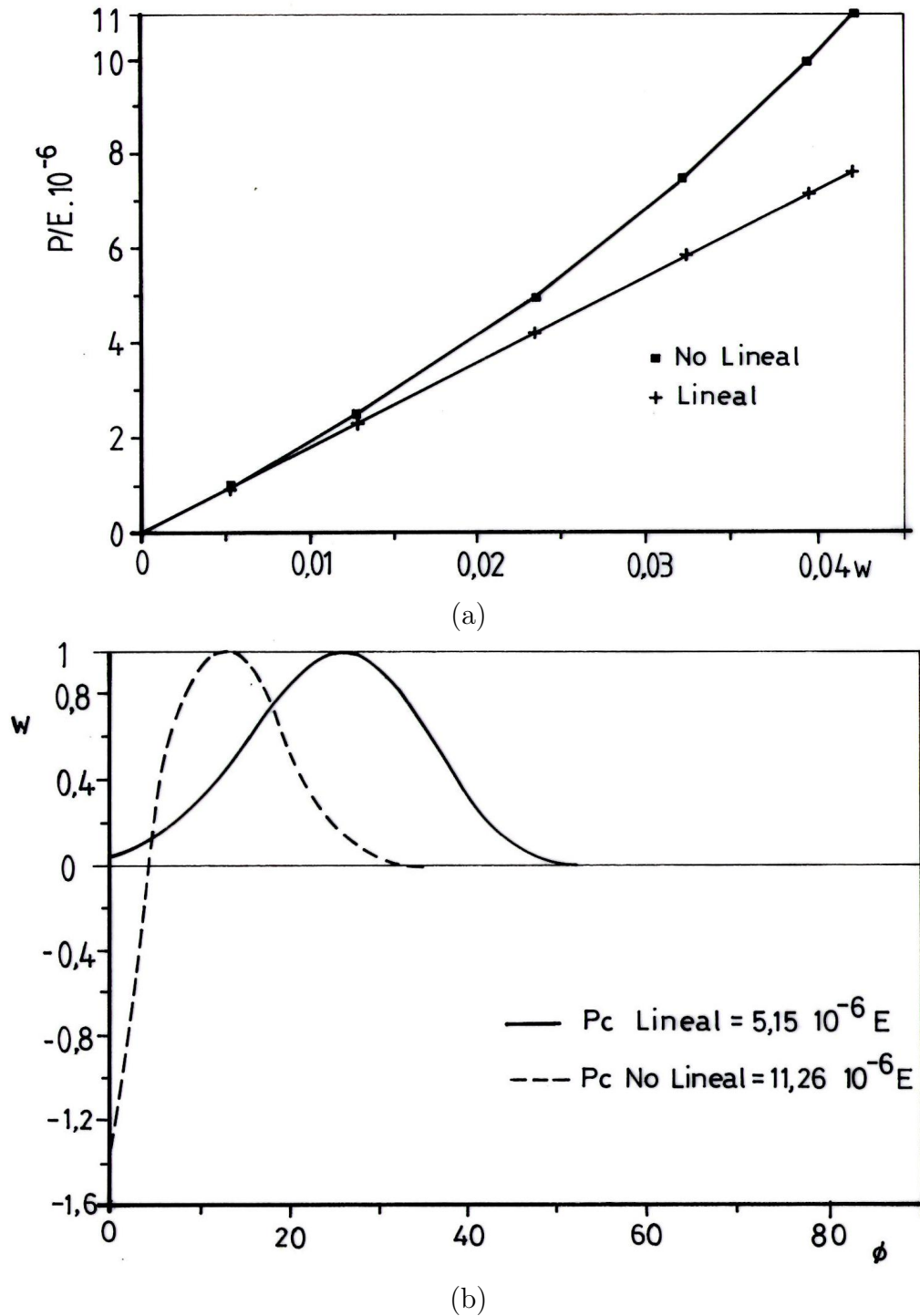
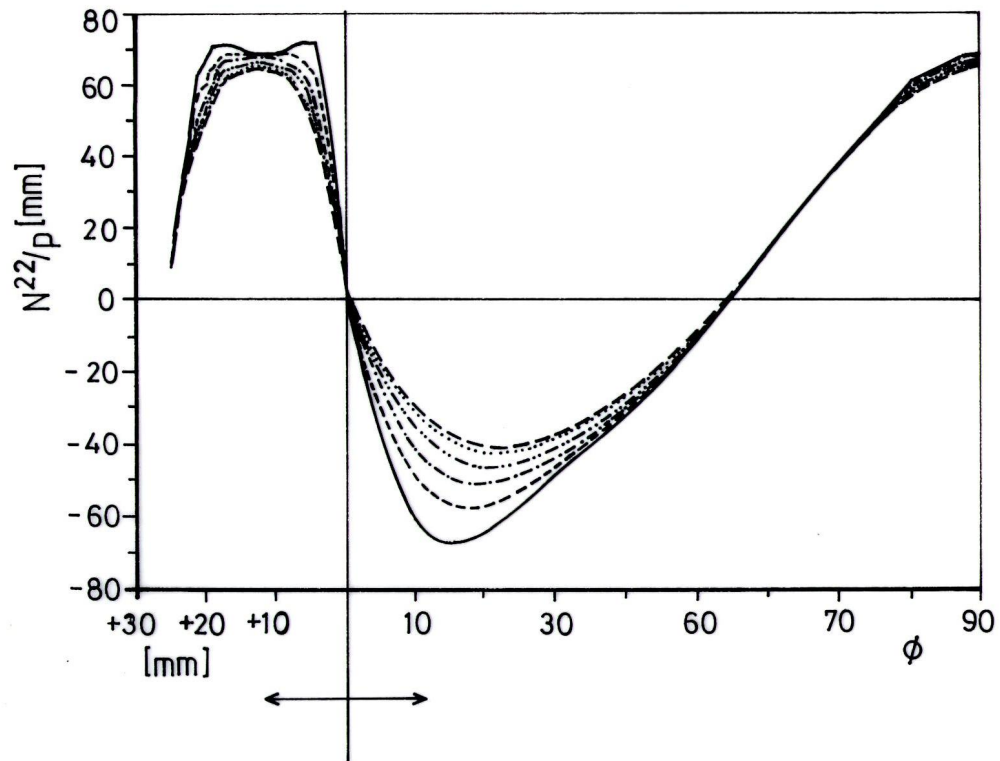
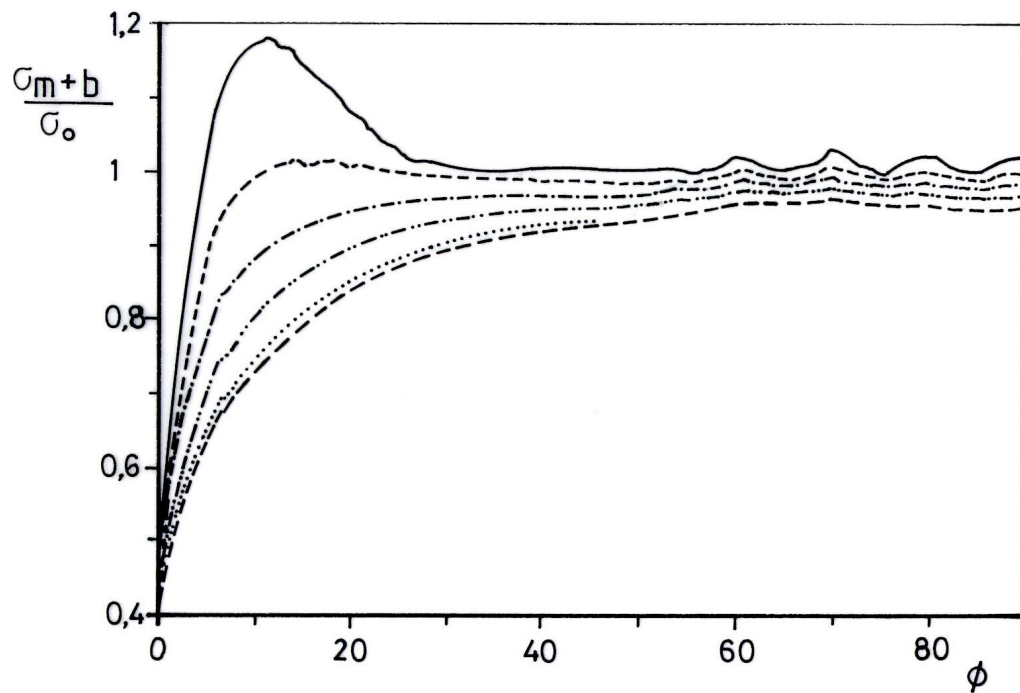


Figura 9.10: Comportamiento lineal y no lineal de un cierre elipsoidal bajo presión interna. — lineal; - - - $p = 2,5$; - · - · - $p = 5$; - · - · - · $p = 7,5$; · · · · $p = 10$; - - - $p = 11 [N/mm^2 10^{-6} E]$. (a) trayectoria carga-desplazamiento; (+) lineal; (■) no lineal. (b) modos críticos a partir de teorías de pequeños y grandes desplazamientos. - - - lineal (64); — no lineal (68). (c) Esfuerzo circunferencial. (d) Relación entre las tensiones equivalentes de von Mises (membranal más flexional)



(c)



(d)

Fig.9.10 (Continuación)

sucede en una cáscara esférica imperfecta, en el sentido de que el modelo lineal predice un límite superior para los esfuerzos. En la Fig.9.10.d se ha graficado la tensión equivalente de von Mises σ_{m+b} normalizada respecto a σ_0 en el estado membranar, a lo largo del meridiano. Lejos de la zona de la intersección la relación σ_{m+b}/σ_0 tiende a 1, y la cáscara se comporta como una membrana. Pero en la zona de la intersección la Fig.9.10.d muestra cambios importantes entre los modelos lineal y no lineal. El modelo lineal es una aproximación razonable sólo al comienzo del proceso de carga. El modelo no lineal produce cambios en los valores de las tensiones que disminuyen con el incremento de presión.

En la intersección entre la cáscara cilíndrica y la elipsoidal, la tensión equivalente de von Mises para la presión crítica $P_c = 11,26 \times 10^{-6} E$ es $\sigma = 3270$, que es aproximadamente 0,33% E . Notar que este nivel de tensiones es menor que el calculado con una solución puramente membranar, que es $\sigma = 8000$ (aproximadamente 0,8% E). Como valor de referencia, las tensiones en la esfera perfecta de la Sec.9.2 eran $\sigma = 200N/mm^2$ correspondientes a 0,1% E .

9.6. Conclusiones

En este capítulo se ha utilizado el elemento finito desarrollado en sus versiones con cinemática lineal y no lineal. Esto es de gran importancia en el presente contexto, dado que se pretende sacar algunas conclusiones sobre el tipo de análisis de elementos finito que debe utilizarse en situaciones específicas de recipientes de presión bajo presión interna. En los casos donde aparecen esfuerzo de compresión se ha considerado además la posibilidad de inestabilidad por bifurcación.

El programa ha sido utilizado para el análisis de cáscaras esféricas bajo presión interna. Se encontraron importantes esfuerzos circunferenciales, que forman bandas alternadas de tracción y compresión, en aquellos casos donde existen cambios locales de la curvatura a lo largo del meridiano, como es el caso de esferas imperfectas y cierres elipsoidales. En ambos casos se muestra que el análisis geoméricamente lineal predice límites superiores de los esfuerzos en las cáscaras, y que cuando se considera la no linealidad de las relaciones deformación-desplazamiento, se obtienen tensiones que pueden ser del orden de la mitad del caso lineal. Dado que las tensiones de compresión pueden eventualmente producir inestabilidad de la cáscara en modos no axilimétricos, se han estudiado las cargas de bifurcación. Un análisis lineal (bifurcación a partir de la trayectoria fundamental lineal) predice cargas que son irrealmente bajas. En el cierre elipsoidal la solución no lineal es aproximadamente el 50% más alta que el caso lineal, mientras que en el caso de la esfera imperfecta la bifurcación no ocurre cuando se considera la no linealidad de la trayectoria fundamental. En consecuencia, para cáscaras con cambios locales en la curvatura del meridiano, bajo presión interna, es altamente recomendable realizar un análisis por elementos finitos considerando relaciones cinemáticas no lineales.

Los esfuerzos locales resultantes asociados con cambios en el espesor de la cáscara, para la cual no se modifica la curvatura geométrica, no son lo suficientemente importantes para ser considerados por el proyectista. Dentro del rango de esta investigación, el modelo lineal parece producir una buena estimación de los resultados. Finalmente para el caso de intersección de una cáscara esférica y un tubo cilíndrico, también parece razonable una aproximación lineal.

Capítulo 10

Cáscaras Compuestas bajo Presión Exterior

10.1. Introducción

El análisis de estabilidad de cáscaras de revolución compuestas ha estado limitado a la determinación de las cargas críticas a partir de trayectorias lineales y no lineales. En aquellos casos donde interesa la trayectoria poscrítica ha sido necesario recurrir a programas de análisis de cáscaras de doble curvatura con facilidades no lineales tales como STAGS o NASTRAN entre otros. Las cáscaras geoméricamente más simples, cilindros y sectores esféricos, han sido, cuidadosamente estudiadas, existiendo soluciones asintóticas usando la teoría de Koiter considerando trayectorias precriticas lineales y no lineales. Sin embargo poco se sabe sobre la estabilidad de combinaciones de cáscaras simples y casi nada sobre el comportamiento de las trayectorias poscríticas. En este Capítulo se presentan algunos estudios sobre la estabilidad de recipientes formados por combinación de cilindros y conos, y cilindros y esferas, sometidos a presión exterior. Para ello se hace uso de las herramientas numéricas desarrolladas y evaluadas en los capítulos anteriores.

Es importante observar que los casos a estudiar responden a la hipótesis de punto crítico distinto, esto es que existe un único modo de bifurcación asociado a la carga crítica, y no existe posibilidad de acoplamiento de modos. No se realizan estudios de sensibilidad a imperfecciones, sin embargo a partir de la ec.8.23, que permite trazar el diagrama de sensibilidad para una imperfección en la forma del modo crítico en función del coeficiente b , es posible juzgar la mayor o menor sensibilidad de la carga crítica a imperfecciones geométricas. Por otro lado las imperfecciones son en general desconocidas, y puede pensarse que resulta suficientemente conservativo suponer una imperfección en la forma del modo crítico.

En todos los casos presentados en este capítulo la bifurcación se produce antes del colapso axilimétrico y en armónicas distintas de $j = 0$. En consecuencia las bifurcaciones

son siempre simétricas.

10.2. Comportamiento de Cáscaras Simples

Antes de considerar el comportamiento de cáscaras compuestas resulta necesario e ilustrativo analizar el comportamiento de las cáscaras simples, lo que permite por un lado tener una medida de comparación para evaluar la disminución de la capacidad portante que se produce en las cáscaras compuestas respecto a las cáscaras simples, y por otro lado prever para que características geométricas resulta más desfavorable el comportamiento del conjunto.

10.2.1. Cilindro Simplemente Apoyado bajo Presión Exterior

El comportamiento de estabilidad de cilindros bajo presión externa uniforme viene siendo investigado desde principios de siglo, tanto analítica como experimentalmente (ver por ej. Brush y Almroth (1975)). Budiansky y Amazigo (1968), suponiendo una trayectoria precrítica lineal puramente membranal, obtuvieron la carga crítica y utilizando la aproximación asintótica propuesta por Koiter calcularon la primera derivada no nula de la trayectoria poscrítica; graficando estos resultados en forma adimensional usando el parámetro de Batdorf. La comparación de cargas críticas experimentales y analíticas muestra una buena correlación para cilindros largos y medios, en tanto que existe una mayor dispersión para cilindros cortos debido principalmente a que en ellos la sensibilidad a imperfecciones es mayor como mostraron Budiansky y Amazigo.

En la Fig.10.1.a se indica la notación utilizada en el presente estudio paramétrico. Si bien en este caso es suficiente con un único parámetro geométrico (el parámetro de Batdorf) aquí se han considerado dos en forma independiente; estos son las relaciones L/r y r/h lo que permite una comparación más simple con el problema de cáscaras compuestas. Se han considerado cuatro valores para L/r (0,25 , 0,5 , 1,0 y 1,5) y tres para r/h (200 , 400 y 800) con lo que se ha logrado cubrir un amplio espectro del parámetro de Batdorf (entre 10 y 2000 donde se encuentran la mayoría de los estudios experimentales). En la Fig.10.1.b se muestran las cargas críticas obtenidas con el presente código considerando a) trayectoria precrítica no lineal y b) una trayectoria precrítica lineal puramente membranal (obtenida despreciando en la solución axilsimétrica la restricción a los desplazamientos normales en el apoyo). En este último caso se han obtenido resultados similares a los obtenidos analíticamente por Budiansky y Amazigo.

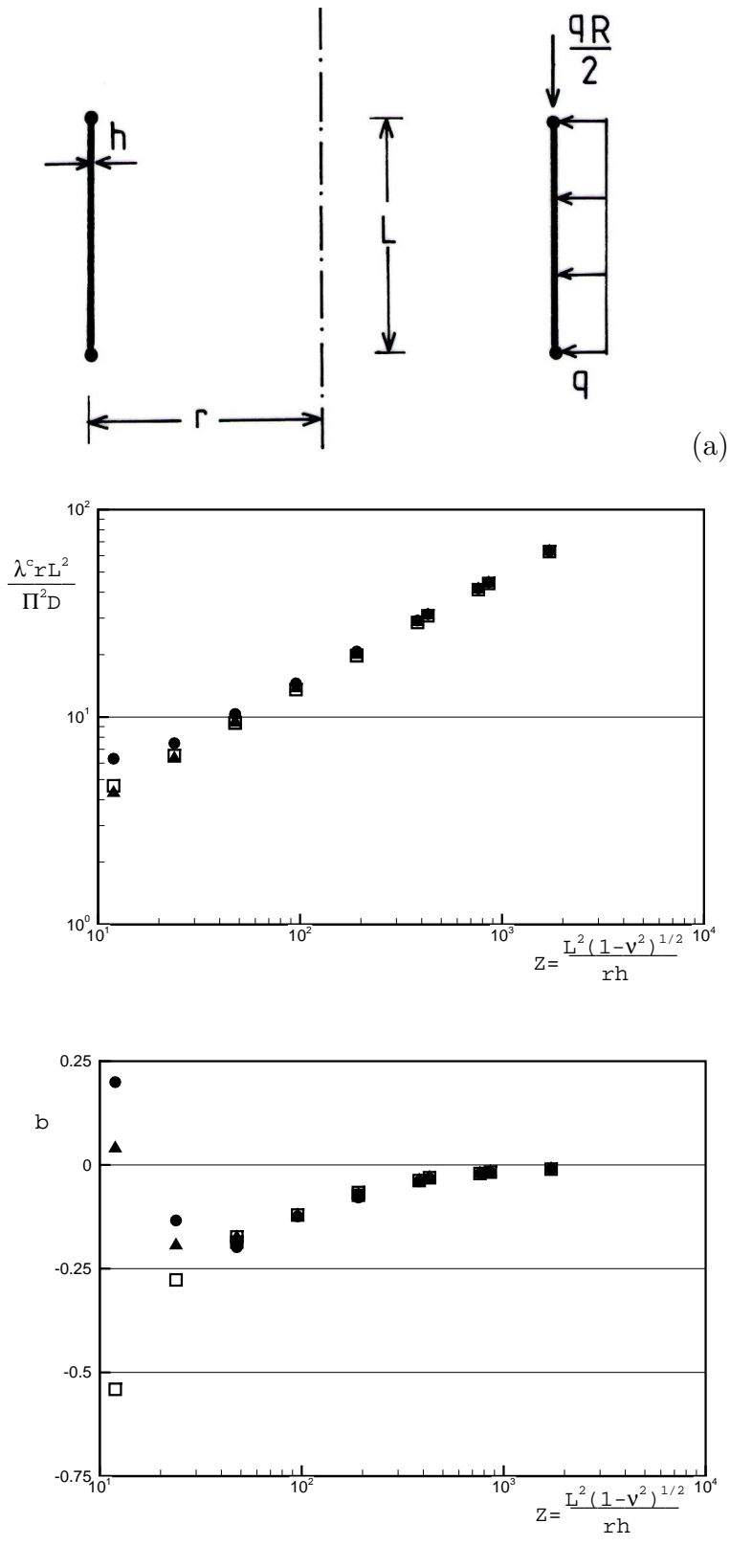


Figura 10.1: Cilindro bajo presión externa. a) geometría, $E = 10^6$ $\nu = 0,3$; b) presión crítica vs Z ; c) coeficiente b vs Z . (\blacktriangle) trayectoria precrítica no lineal, s.a., (\square) trayectoria precrítica membranal, s.a., (\bullet) empotrado.

Por otro lado en la Fig.10.1.c se presenta el valor del coeficiente “ b ” ligado a la derivada segunda de la trayectoria poscrítica (Ec.8.23). Puede observarse que para cilindros largos y medios ($Z > 30$) existe una total coincidencia entre los resultados usando las trayectorias precríticas flexional y membranal. En tanto que para cilindros cortos ($Z < 30$) si bien no existen diferencias importantes en el valor de la carga crítica, si las hay en el comportamiento poscrítico. Este ejemplo muestra claramente la sensibilidad de la aproximación asintótica a la geometría en el punto crítico, y que en el caso de cilindros cortos no puede despreciarse la influencia de los apoyos en la trayectoria precrítica, fijando además un límite de validez a los resultados obtenidos por Budiansky y Amazigo. Un comportamiento similar se observa en caso de considerar bordes empotrados, en el sentido de que para cilindros medianos y largos los resultados son similares que para simplemente apoyados, y para cilindros cortos, donde tienen mayor influencia las condiciones de borde, se observa un comportamiento más rígido en los cilindros empotrados. En la Fig.10.1 han sido también graficados los resultados del cilindro empotrado.

En la Fig.10.2 se presentan a modo de ejemplo las trayectorias poscríticas para $r/h = 400$, las que resultan con un comportamiento inestable pero con disminuciones muy leves de la capacidad portante; además en los cilindros cortos, donde el valor de b es de consideración, las derivadas cuartas son positivas de tal forma que la disminución de la resistencia poscrítica no es tan significativa.

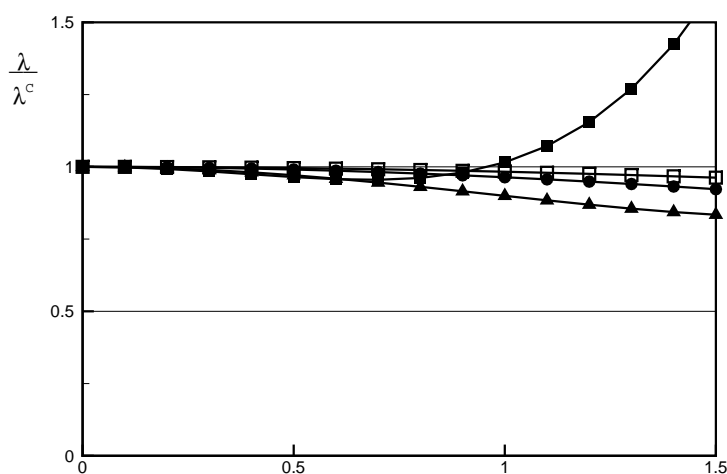


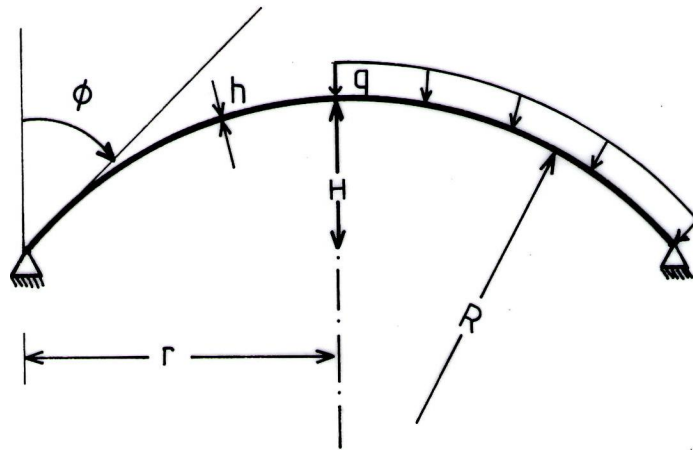
Figura 10.2: Cilindro bajo presión externa con $r/h=400$. Trayectorias poscríticas. (■) $L/r = 0,25$; (▲) $L/r = 0,5$; (●) $L/r = 1$; (□) $L/r = 1,5$.

Finalmente resulta importante notar la dependencia de la carga crítica con la longitud del cilindro y el bajo valor del coeficiente b lo que implica una escasa sensibilidad de la carga crítica a imperfecciones.

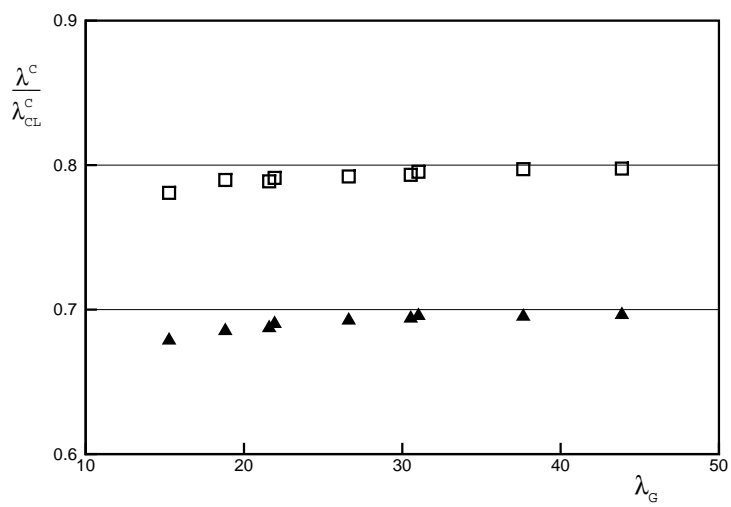
10.2.2. Domo Esférico Rebajado bajo Presión Externa

Debido a la simplicidad de la geometría y su excelente capacidad para soportar presiones, las cáscaras esféricas han sido ampliamente estudiadas. Sin embargo no ha sido fácil comprender la enorme dispersión de los resultados experimentales (ver por ej. Kollar (1982)). A partir de la teoría de Koiter, se realizaron investigaciones sobre el comportamiento poscrítico de domos esféricos rebajados, de bordes empotrados, sometidos a distintos tipos de cargas. Fitch y Budiansky (1970) estudiaron el comportamiento crítico y poscrítico, frente a presión uniforme sobre un círculo concéntrico con el borde, y en particular el caso de presión uniforme sobre toda la cáscara. Los resultados pueden expresarse en función de un único parámetro geométrico $\lambda_G = 2[3(1-\nu^2)]^{1/4}(H/h)^{1/2}$ (ver Fig.10.3.a) que es un índice de la profundidad de la cáscara; resulta conveniente normalizar la presión crítica respecto a la presión crítica de la esfera completa $\lambda_{Cl}^C = 2E(h/R)^2/[3(1-\nu^2)]^{1/2}$ en forma análoga a lo que se hiciera en el primer ejemplo de la Sec.8.4.

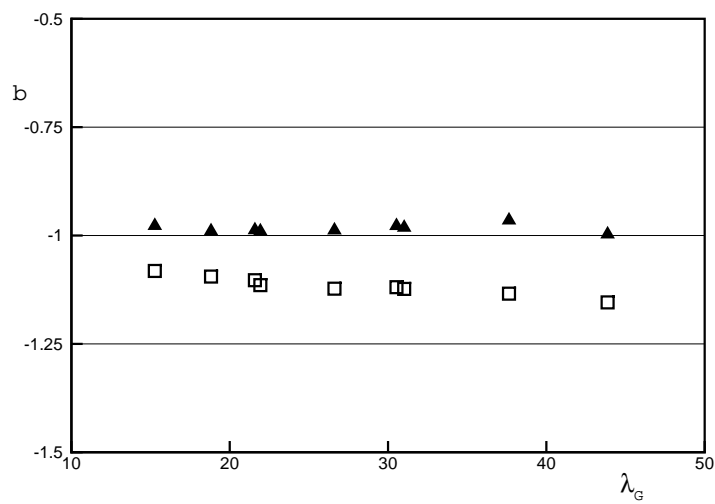
Se ha considerado aquí además la posibilidad de que el domo esté simplemente apoyado. Siendo que interesa principalmente la estabilidad del conjunto domo-cilindro las características geométricas están ligadas a los de la sección anterior. En consecuencia uno de los parámetros geométricos a fijar es la relación entre el radio horizontal máximo del domo y el espesor de la lámina r/h (200, 400 y 800 como en el cilindro), en tanto que el otro es el ángulo ϕ en el borde (50° , 60° y 70°). En la Fig.10.3.b se presentan las cargas críticas normalizadas en función del parámetro λ_G para los casos de bordes empotrado y simplemente apoyado. Dado que para los parámetros geométricos elegidos el valor de λ_G resulta relativamente alto, el modo de bifurcación está localizado en el borde de la cáscara y es prácticamente independiente de la profundidad de la cáscara (representada por λ_G). Por ello, para el caso de borde simplemente apoyado puede decirse que la carga crítica es aproximadamente el 70% de la carga de bifurcación de la esfera perfecta, en tanto que el coeficiente b resulta igual a -1. Para el caso de borde empotrado la carga crítica resulta aproximadamente un 14% superior al caso anterior e igual al 80% de la presión crítica de la esfera completa en tanto que b también es un poco mayor respecto a la cáscara simplemente apoyada (-1,14). Ambos casos presentan una moderada sensibilidad a imperfecciones pues si bien los coeficientes b son relativamente altos, como se viera en el ejemplo de la Sec.8.4, la derivada cuarta resulta positiva y rigidiza rápidamente el comportamiento poscrítico, lo que puede observarse en la Fig.10.4 donde se presentan las trayectorias poscríticas para $r/h = 400$. Notar además que la resistencia poscrítica tiene un mínimo del orden del 70% de la carga de bifurcación.



(a)



(b)



(c)

Figura 10.3: Domo esférico bajo presión externa. a) geometría, $E = 10^6$ $\nu = 0,3$; b) presión crítica vs. λ_G ; c) coeficiente b vs. λ_G . (\blacktriangle) simplemente apoyado, (\square) empotrado

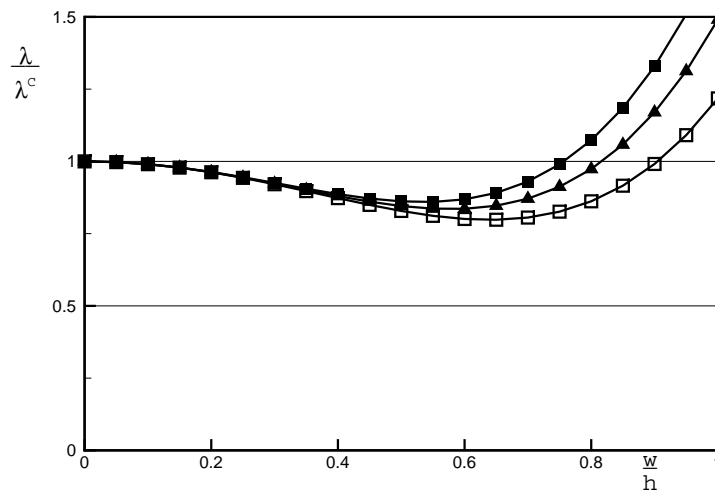


Figura 10.4: Domo esférico simplemente apoyado con $r/h = 400$. Trayectorias poscríticas. (■) $\phi = 50^\circ$; (▲) $\phi = 60^\circ$; (□) $\phi = 70^\circ$.

10.2.3. Cono Rebajado bajo Presión Externa

Comparativamente las cáscaras cónicas han sido mucho menos investigadas que los casos anteriores a pesar de ser de uso muy común en recipientes de presión. La razón tal vez se deba a que los cierres esféricos parecen ser mucho más eficientes desde el punto de vista estructural que los cónicos. La mayoría de los estudios sobre este tipo de cáscaras ha estado orientado a conos truncados y algunos pocos consideran conos completos (Akkas (1970)). En consecuencia resulta difícil comparar los siguientes resultados con valores experimentales. Los estudios paramétricos que se presentan corresponden a los mismos valores de r/h y ϕ del domo de la sección anterior, y se han considerado dos condiciones de borde: simplemente apoyado y empotrado. No resulta fácil en este caso adimensionalizar los resultados como en los casos del cilindro y el domo, por ello para su representación en un único gráfico se ha usado el mismo parámetro geométrico λ_G definido antes (ver Fig.10.5.a); en tanto que la carga crítica ha sido normalizada respecto a la de una esfera completa de radio igual al valor del radio principal R_2 del cono en el borde.

En la Fig.10.5.b se presentan las cargas críticas normalizadas en función de λ_G . Puede observarse que en comparación con el domo esférico las presiones de bifurcación son substancialmente más bajas. Por otro lado el efecto del empotramiento en la carga crítica esta limitada a las cáscaras más rebajadas. En la Fig.10.5.c se ha graficado el coeficiente b ; en tanto que en la Fig.10.6 se presentan las trayectorias poscríticas para $r/h = 400$.

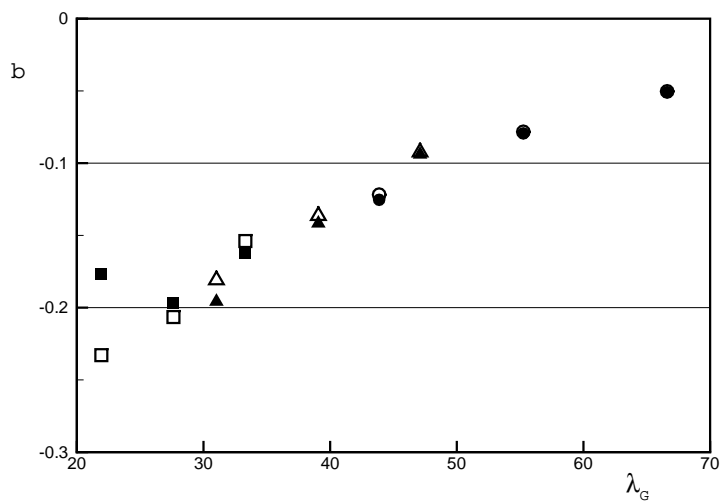
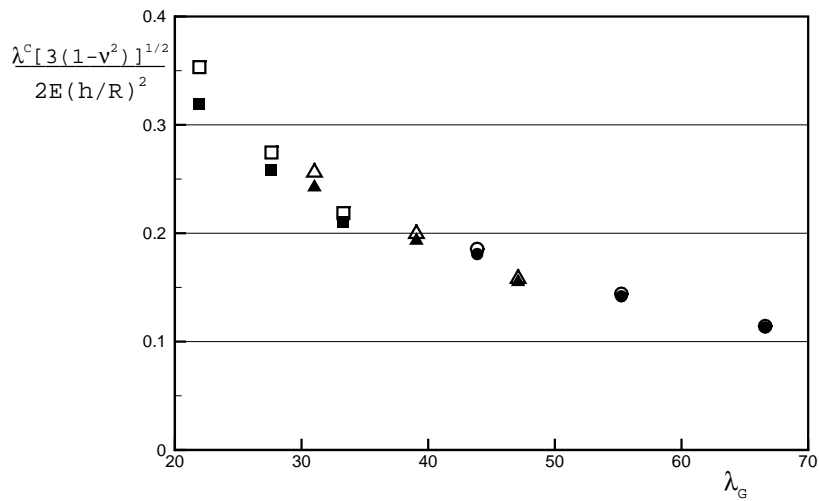
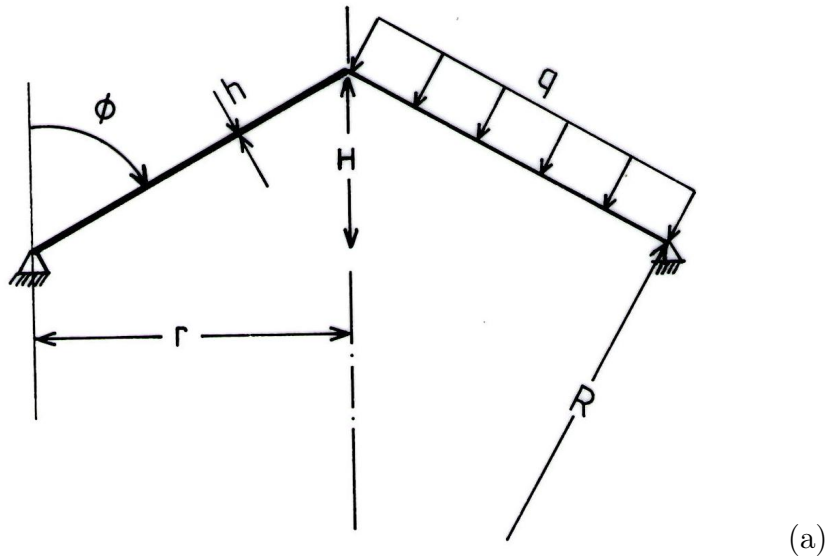


Figura 10.5: Cono rebajado bajo presión externa. a) geometría, $E = 10^6$ $\nu = 0,3$; b) presión crítica vs λ_G ; c) coeficiente b vs λ_G . (\square) $r/h=200$ simplemente apoyado (s.a.), (\blacktriangle) $r/h=400$ s.a., (\bullet) $r/h=800$ s.a., (\blacksquare) $r/h=200$ empotrado (emp.), (\triangle) $r/h=400$ emp., (\circ) $r/h=800$ emp..

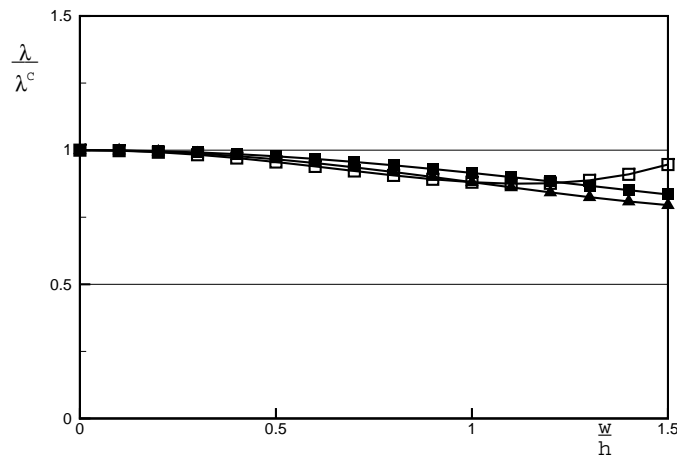


Figura 10.6: Cono rebajado bajo presión externa con $r/h = 400$. Trayectorias poscríticas. (■) $\phi = 50^\circ$; (▲) $\phi = 60^\circ$; (□) $\phi = 70^\circ$.

Puede aquí notarse que, similarmente al caso del cilindro, la disminución de la carga sobre la trayectoria poscrítica es reducida, y en general puede decirse que la carga crítica resultará poco sensible a imperfecciones.

10.3. Intersección Cilindro Domo Esférico

Conocido el comportamiento de las cáscaras simples nos interesa ahora estudiar el comportamiento de un recipiente cilíndrico con cierres esféricos en sus extremos. En la Fig.10.7 se muestra la geometría del conjunto. Se han considerado sólo cáscaras de espesor uniforme, en consecuencia aquí se presentan los resultados de las combinaciones de las cáscaras simples antes estudiadas en las que coincida la relación r/h .

Analicemos dos casos para ilustrar el comportamiento: (a) $r/h = 400$ $L/r = 0,5$ $\phi = 60^\circ$ que corresponde a un caso donde el modo de bifurcación sólo tiene componentes sobre el cilindro como se observa en la Fig.10.8.a. Podría pensarse el comportamiento de la estructura como la de un cilindro con un apoyo elástico. Si referimos la carga crítica del conjunto a la carga crítica del cilindro simplemente apoyado de la misma longitud, resulta ser el 71,3% de esta última. Por otro lado el coeficiente b es el 74% del correspondiente al cilindro simplemente apoyado. En consecuencia si bien la estructura presenta un comportamiento poscrítico que inicialmente sólo afecta al cilindro, la carga crítica es menor que la del cilindro individual, y su trayectoria poscrítica, también inestable, es más tendida.

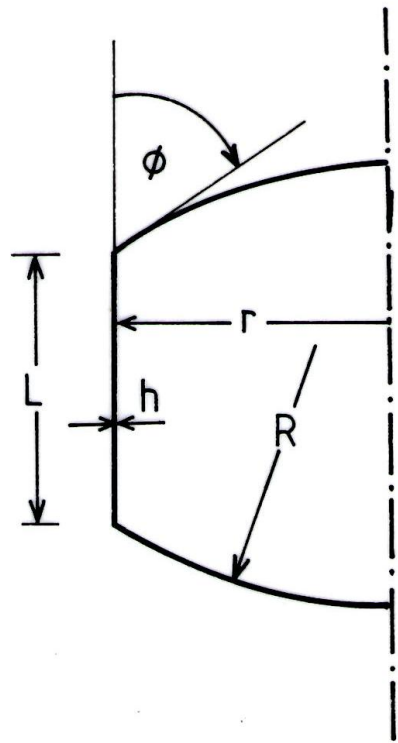


Figura 10.7: Intersección domo esférico-cilindro. Geometría.

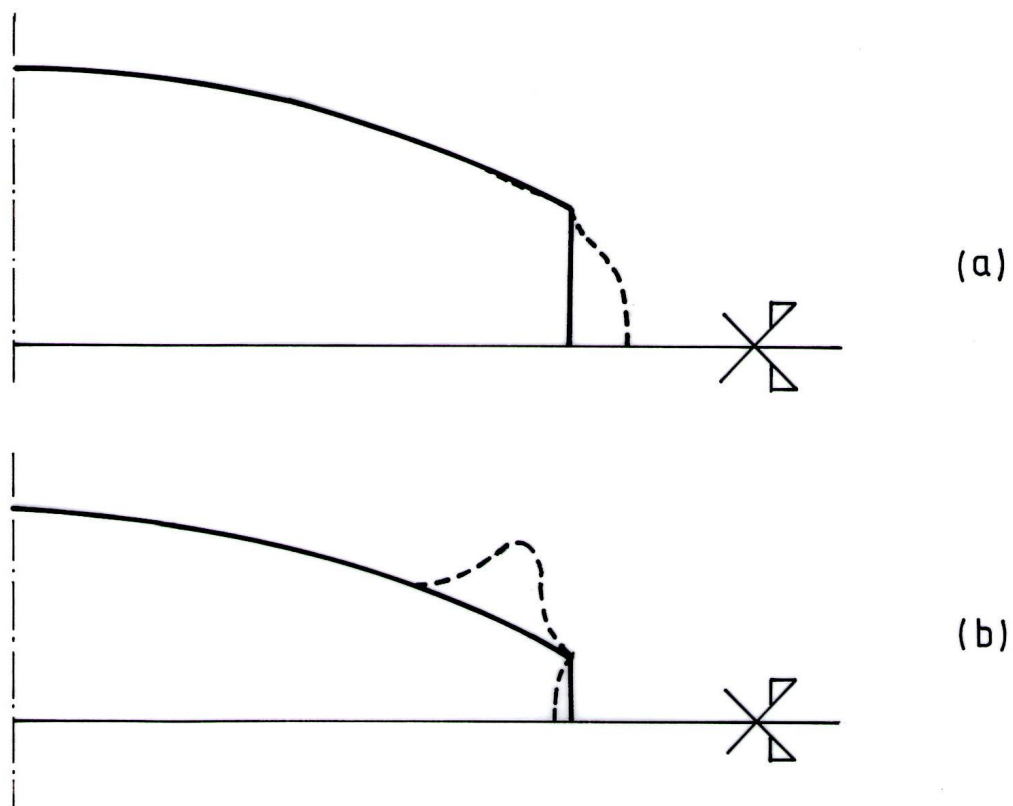


Figura 10.8: Modos de bifurcación de una intersección domo esférico-cilindro. a) $r/h = 400$, $L/r = 0,5$, $\phi = 60^\circ$; b) $r/h = 400$, $L/r = 0,25$, $\phi = 60^\circ$;

(b) $r/h = 400$ $L/r = 0,25$ $\phi = 60^\circ$; en este caso el modo de bifurcación afecta en forma importante a ambas componentes estructurales (ver Fig.10.8.b). La carga de bifurcación es sólo el 51 % de la carga crítica del domo simplemente apoyado (referimos la carga crítica al domo pues ahora es menor que la del cilindro simplemente apoyado). Por otro lado el coeficiente b es $(-0,19)$ muy cercano al correspondiente al cilindro solo y mucho menor que el del domo, resultando una estructura poco sensible a imperfecciones.

Los valores de las cargas críticas de las cáscaras compuestas se presentan en forma de tabla de doble entrada. Cada fila corresponde a un distinto valor de la longitud del cilindro, y cada columna indica el ángulo de intersección con el domo. Como referencia aparecen en la segunda columna de la tabla las cargas críticas del cilindro simplemente apoyado, y en la segunda fila las cargas críticas del domo simplemente apoyado. Además, con el objeto de poder sacar conclusiones con más facilidad, las cargas críticas de las cáscaras compuestas han sido divididas (normalizadas) por la menor de las cargas críticas de las cáscaras simples que las forman. En la Tabla 10.1 se presentan los resultados mencionados para cada valor de r/h considerado. Analicemos el caso $r/h = 400$; para cilindros largos o domos profundos la bifurcación se produce en el cilindro en tanto que para cilindros cortos y domos rebajados el modo de bifurcación tiene componentes sobre ambas estructuras o sólo en el domo. Este comportamiento se ve reflejado en la tabla donde (se ha separado con una línea los casos en que el modo tiene componente sólo en el cilindro de aquellos en que el modo abarca a ambas cáscaras), si el modo crítico sólo tiene componente sobre el cilindro, la carga crítica es del orden del 72 % de la carga del cilindro simplemente apoyado, en tanto que si el modo de bifurcación tiene componentes importantes sobre ambas cáscaras, la carga crítica del conjunto disminuye al 51 % de la carga de bifurcación del domo esférico. Un comportamiento similar puede observarse para las relaciones $r/h = 200$ y $r/h = 800$ con ligeras diferencias en los porcentajes.

Es importante notar que cuando la responsabilidad de la bifurcación recae principalmente en el domo la carga crítica puede ser menor que la mitad de la carga del domo simplemente apoyado. La bifurcación en modos con componentes importantes en ambas cáscaras ocurre en el intervalo en el que la carga individual del domo simplemente apoyado está entre 0,5 y 1,2 veces la carga crítica del cilindro simplemente apoyado.

Complementariamente y con el fin de visualizar mejor el comportamiento de estas cáscaras en la Fig.10.9 se presentan los resultados de la Tabla 10.1 para $r/h = 200$. En ordenadas está la carga crítica sin normalizar, en abscisas la relación L/r del cilindro componente, y se han trazado curvas para cada valor del ángulo ϕ . Como comparación se ha graficado la curva del cilindro simplemente apoyado y se indican además con líneas horizontales las del domo simplemente apoyado.

$R/h = 200$	ϕ	50°	60°	70°
L/R	λ	8,62955	5,18439	2,40226
0,25	7,7927	0,6527	0,5778	0,6055
0,50	4,2673	0,7342	0,6923	0,5719
1,00	2,2644	0,7458	0,7412	0,6064
1,50	1,5524	0,7234	0,7242	0,7213

$R/h = 400$	ϕ	50°	60°	70°
L/R	λ	2,17473	1,30980	0,60823
0,25	1,4265	0,6754	0,5091	0,5362
0,50	0,7780	0,7357	0,7132	0,5136
1,00	0,4059	0,7313	0,7292	0,7216
1,50	0,2772	0,7101	0,7107	0,7099

$R/h = 800$	ϕ	50°	60°	70°
L/R	λ	0,54420	0,32872	0,15353
0,25	0,26626	0,6724	0,5222	0,4618
0,50	0,14096	0,7333	0,7190	0,4869
1,00	0,07285	0,7168	0,7158	0,7124
1,50	0,04931	0,7015	0,7020	0,7016

Cuadro 10.1: Cáscara Compuesta Domo Esférico-Cilindro. Cargas críticas

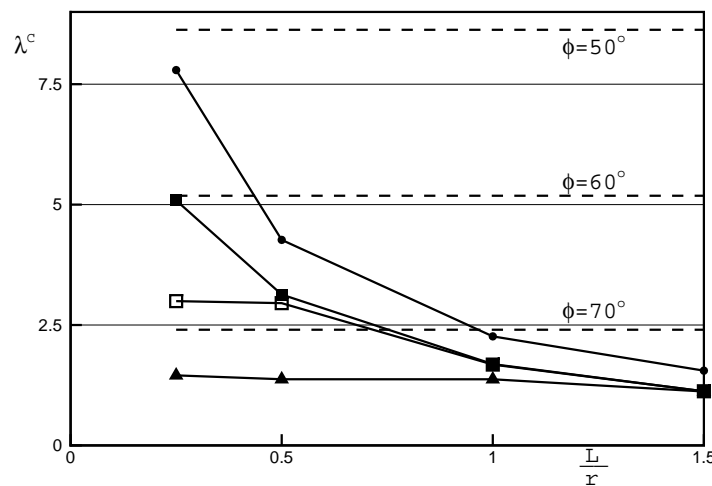


Figura 10.9: Intersección Domo-Cilindro con $r/h = 200$. Cargas críticas. (■) $\phi = 50^\circ$; (□) $\phi = 60^\circ$; (▲) $\phi = 70^\circ$; (●) Cilindro s.a.;

En cuanto a la trayectoria poscrítica, el comportamiento está estrechamente ligado a la forma del modo crítico. Así, si la bifurcación ocurre en el cilindro, el comportamiento poscrítico se asemeja al del cilindro simplemente apoyado, que según se vio es en general un comportamiento suave, poco sensible a imperfecciones. En tanto que si el modo crítico

tiene una componente importante sobre el domo, el coeficiente b aumenta, aunque se mantiene muy por debajo de los valores del domo simplemente apoyado, pero en estos casos la derivada cuarta es menos importante y la carga mínima dentro de la trayectoria poscrítica resulta del orden del 75 % de la carga crítica, para valores de desplazamiento en que todavía resulta válida la aproximación asintótica.

En la Tabla 10.2 se presentan los coeficientes b para todos los casos estudiados y en la Fig.10.10 se muestran las trayectorias poscríticas más significativas para $r/h = 400$.

$\mathbf{R/h = 200}$	ϕ	50°	60°	70°
L/R	b	-0,98997	-0,98964	-0,97744
0,25	0,03989	-0,2379	-0,2377	-0,2851
0,50	-0,17511	-0,1587	-0,1077	-0,2454
1,00	-0,07254	-0,0554	-0,0534	-0,2454
1,50	-0,03078	-0,0299	-0,0298	-0,0289

$\mathbf{R/h = 400}$	ϕ	50°	60°	70°
L/R	b	-0,98157	-0,9878	-0,98736
0,25	-0,19401	-0,1620	-0,1875	-0,2069
0,50	-0,12162	-0,0926	-0,0902	-0,1849
1,00	-0,03741	-0,0309	-0,0302	-0,0274
1,50	-0,01724	-0,0143	-0,0143	-0,0141

$\mathbf{R/h = 800}$	ϕ	50°	60°	70°
L/R	b	-0,99704	-0,96477	-0,97762
0,25	-0,17586	-0,1282	-0,1248	-0,1121
0,50	-0,07310	-0,0571	-0,0525	-0,0982
1,00	-0,02051	-0,0177	-0,0176	-0,0171
1,50	-0,01009	-0,0073	-0,0074	-0,0073

Cuadro 10.2: Cáscara Compuesta Domo Esférico-Cilindro. Coeficiente b

10.4. Intersección Cilindro-Cono

En la Fig.10.11 se muestra la geometría de la estructura a estudiar. Los valores de la relación r/h y el ángulo ϕ son los considerados en las cáscaras individuales, y son los mismos que los de la sección anterior. Bushnell y Galletly (1974) realizaron algunos estudios experimentales y numéricos sobre estructuras de este tipo, para características geométricas tales ($r/h = 50$ $L/r = 0,5$ $\phi = 45^\circ, 60^\circ$ y 70°) que el pandeo ocurría en el rango plástico del material. Los estudios numéricos estuvieron restringidos a la determinación de la carga de bifurcación a partir de trayectorias precríticas no lineales.

En la Tabla 10.3 se presentan las cargas críticas de las distintas combinaciones de cilindro y cono, divididas por la menor de las cargas críticas de las cáscaras componentes

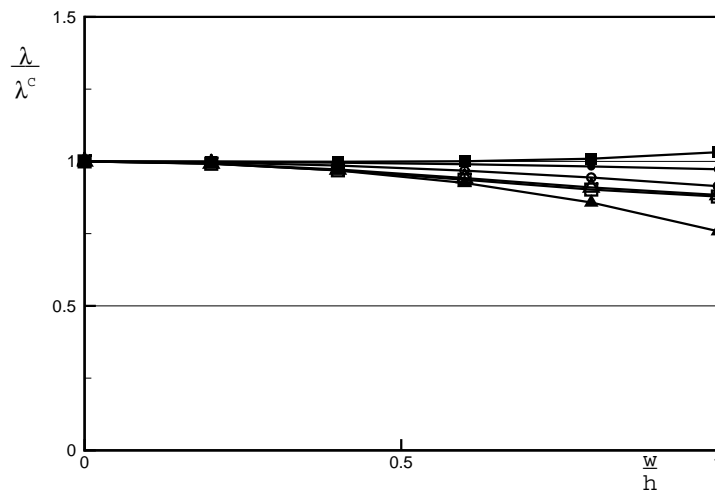


Figura 10.10: Intersección domo esférico-cilindro. Trayectorias poscríticas para $r/h = 400$. (■) $L/r = 0,25$ $\phi = 50^\circ$; (▲) $L/r = 0,25$ $\phi = 60^\circ$; (□) $L/r = 0,25$ $\phi = 70^\circ$; (○) $L/r = 0,5$ $\phi = 60^\circ$; (△) $L/r = 0,5$ $\phi = 70^\circ$; (●) $L/r = 1$ $\phi = 70^\circ$;

simplemente apoyadas. La estructura de la Tabla 10.3 es completamente similar a la de la Tabla 10.1. Puede observarse que la carga crítica toma valores entre el 70% y el 74% de la menor de las cargas críticas de las cáscaras simples.

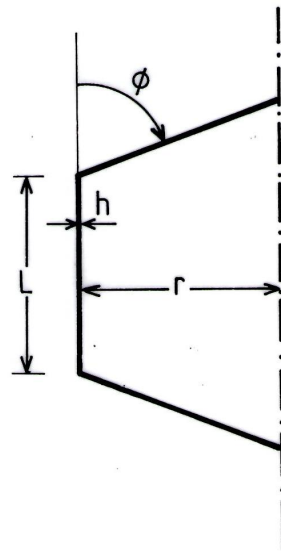


Figura 10.11: Intersección cono-cilindro. Geometría.

La forma del modo crítico depende de la relación r/h y el ángulo ϕ . Para el rango de ϕ estudiado la bifurcación se produce en el cono cuando la longitud del cilindro es menor que $r/2$, y sólo para cilindros largos y conos profundos se producen modos de bifurcación con componentes importantes sobre el cilindro. Como en la sección anterior se ha separado con una línea los casos en que el modo tiene componente sólo en el cono de aquellos en

$R/h = 200$	ϕ	50°	60°	70°
L/R	λ	2,6323	1,9522	1,1286
0,25	7,7927	0,7348	0,7212	0,7207
0,50	4,2673	0,7340	0,7203	0,7193
1,00	2,2644	0,7448	0,7200	0,7191
1,50	1,5524	0,7237	0,7234	0,7189

$R/h = 400$	ϕ	50°	60°	70°
L/R	λ	0,4849	0,3655	0,2146
0,25	1,4265	0,7350	0,7185	0,7022
0,50	0,7780	0,7350	0,7185	0,7022
1,00	0,4059	0,7303	0,7182	0,7020
1,50	0,2772	0,7101	0,7101	0,7017

$R/h = 800$	ϕ	50°	60°	70°
L/R	λ	0,08838	0,06704	0,04000
0,25	0,26626	0,7387	0,7341	0,7084
0,50	0,14096	0,7386	0,7341	0,7083
1,00	0,07285	0,7237	0,7339	0,7083
1,50	0,04931	0,7015	0,7016	0,7079

Cuadro 10.3: Cáscara Compuesta Cono-Cilindro Cargas críticas

que el modo abarca a ambas cáscaras.

El comportamiento poscrítico es en todos los casos inestable, al igual que el de las cáscaras componentes. El máximo valor del coeficiente b es -0,14 y refleja también el comportamiento de las cáscaras simples. En la Tabla 10.4 se presentan los valores de b para los casos estudiados. Puede observarse que en la cáscara compuesta el valor de b es siempre menor que en la cáscara cónica componente y disminuye con el ángulo ϕ . Finalmente en la Fig.10.12 se muestran algunas trayectorias poscríticas, en las que puede observarse una suave disminución de la capacidad portante, resultando en consecuencia una baja sensibilidad a imperfecciones de la carga crítica.

10.5. Conclusiones

A pesar de la enorme dispersión en los estudios experimentales, Yamada y Yamada (1982) comparando resultados experimentales y numéricos basados en un cuidadoso relevamiento de la geometría real de la cáscara y de las características del material, encontraron que los resultados numéricos (análisis no lineal de domos rebajados) se adecuan perfectamente a los experimentales. Por otro lado, siendo que el relevamiento de la estructura es posible sólo una vez construida la cáscara, desde el punto de vista del diseño es muy conveniente el uso de una aproximación asintótica que permita tener una idea

$R/h = 200$	ϕ	50°	60°	70°
L/R	b	-0,16236	-0,19683	-0,1765
0,25	0,03989	-0,1200	-0,1436	-0,1428
0,50	-0,17511	-0,1199	-0,1434	-0,1423
1,00	-0,07254	-0,0550	-0,1434	-0,1423
1,50	-0,03078	-0,0300	-0,0296	-0,1423

$R/h = 400$	ϕ	50°	60°	70°
L/R	b	-0,09396	-0,14167	-0,1958
0,25	-0,19401	-0,0701	-0,1041	-0,1256
0,50	-0,12162	-0,0700	-0,1041	-0,1256
1,00	-0,03741	-0,0307	-0,1041	-0,1256
1,50	-0,01724	-0,0143	-0,0143	-0,1256

$R/h = 800$	ϕ	50°	60°	70°
L/R	b	-0,05087	-0,07942	-0,12536
0,25	-0,17586	-0,0373	-0,0615	-0,0908
0,50	-0,07310	-0,0372	-0,0615	-0,0908
1,00	-0,02051	-0,0136	-0,0615	-0,0908
1,50	-0,01009	-0,0073	-0,0070	-0,0908

Cuadro 10.4: Cáscara Compuesta Cono-Cilindro Coeficiente b

concreta de la máxima capacidad portante usando una herramienta simple a partir de características geométricas perfectas y tolerancias aceptables.

Respecto al comportamiento crítico y poscrítico de cilindros puede decirse que para cilindros medios y largos ($Z > 30$), no depende de que en la trayectoria fundamental se hayan o no considerado los efectos producidos por la flexión en el apoyo. Tampoco resulta relevante si la condición de borde es simplemente apoyado o empotrado. En tanto que para cilindros cortos, dada la proximidad de los apoyos no puede despreciarse su influencia debido al papel rigidizante que juegan, especialmente en la trayectoria poscrítica.

Para las características geométricas consideradas, el comportamiento de domos esféricos está condicionado por el efecto del apoyo, de tal forma que tanto la carga crítica como la trayectoria poscrítica inicial pueden expresarse en función de la carga crítica clásica de la esfera completa perfecta. El valor de la carga crítica del domo simplemente apoyado es el 70% de la esfera completa y el coeficiente b es aproximadamente -1. En tanto que para el caso de empotrado la carga crítica resulta el 80% de la de la esfera completa, y el coeficiente b es ahora -1.14.

Para las mismas característica geométricas, un cono rebajado tiene una carga crítica de menos de la mitad del domo correspondiente, esta relación disminuye más cuanto más profunda es la cáscara. Por otro lado las cargas críticas de los conos son muy poco sensibles a imperfecciones.

Resulta importante notar que los códigos actuales (ASME, ECCS) presentan pocas

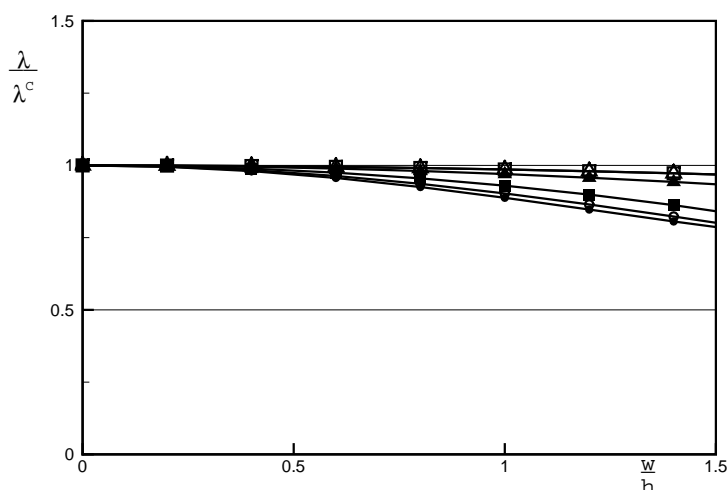


Figura 10.12: Intersección cono-cilindro. Trayectorias poscríticas para $r/h = 400$. (■) $L/r = 0,5$ $\phi = 50^\circ$; (▲) $L/r = 1$ $\phi = 50^\circ$; (□) $L/r = 1,5$ $\phi = 50^\circ$; (●) $L/r = 0,5$ $\phi = 70^\circ$; (△) $L/r = 1$ $\phi = 70^\circ$; (○) $L/r = 1,5$ $\phi = 70^\circ$;

recomendaciones sobre la verificación de cáscaras al pandeo, estando estas recomendaciones limitadas a cáscaras simples o con rigidizadores. Además, al ser la inestabilidad un problema fuertemente no lineal, no resulta posible extrapolar el comportamiento de las cáscaras simples a las cáscaras compuestas. Es importante notar que un diseño considerando la menor de las cargas críticas de las cáscaras individuales, supuestas simplemente apoyadas, es a todas luces no conservativo.

Para el rango de características geométricas consideradas, en el caso de intersección domo cilindro, parece adecuado considerar como carga crítica la menor entre el 70 % de la carga del cilindro y el 50 % de la carga del domo. En tanto que para intersección entre cono y cilindro bastaría tomar el 70 % de la menor de las cargas críticas individuales. A pesar de la fuerte reducción en el caso del domo esférico y su mayor sensibilidad a imperfecciones, este resulta más eficiente que el cono desde el punto de vista de la carga límite a resistir en combinación con un cilindro.

En el caso en que el modo de bifurcación tiene componentes sólo en el cilindro, cabe preguntarse ¿Por que la carga crítica es menor que en un cilindro simplemente apoyado de igual longitud?. Aparentemente la causa es la falta de restricción en la dirección radial en la intersección, pues la cáscara superior representa sólo un apoyo elástico, de tal forma que el cilindro se comporta como uno de longitud mayor. Similarmente en el caso de que los desplazamientos del modo de bifurcación ocurran principalmente en el cierre superior (domo o cono), pues entonces el cilindro representa un apoyo mucho más flexible que el apoyo simple y la carga crítica del conjunto se reduce significativamente.

En el cilindro simplemente apoyado cuanto más corto es mayor es el número de la armónica crítica asociada. Similarmente para el caso de domos y conos, cuanto más profunda

es la cáscara, y en consecuencia cuanto más está limitada la influencia de la perturbación debida a las condiciones de borde, mayor es la armónica crítica. Esto es producto de la corta longitud que tienen en tales casos las bandas de compresión. En el caso de las cáscaras compuestas, la armónica crítica es siempre menor que la menor de las armónicas críticas de las cáscaras individuales.

Todos los casos analizados presentan bifurcación simétrica inestable, que es el mismo tipo de comportamiento de las cáscaras individuales. Cambian las características de la trayectoria poscrítica que resultan en general más tendidas (coeficientes b más bajos) y en consecuencia las cargas críticas, si bien siguen siendo un límite superior del comportamiento real, resultan poco sensibles a imperfecciones.

Capítulo 11

Conclusiones y recomendaciones para trabajo futuro

11.1. Síntesis de los Desarrollos Presentados en Esta Tesis

En esta tesis se han desarrollado algunos aspectos de la teoría de estabilidad elástica de sistemas discretos, basándose en la formulación original de Thompson y Hunt, pero en una nueva forma que no hace necesario recurrir a esquemas de diagonalización de la segunda variación de la energía, ni realizar el reemplazo de la trayectoria fundamental en la expresión del potencial. Esta extensión de los desarrollos de Thompson y Hunt están referidos a estabilidad y determinación asintótica de trayectorias poscríticas a partir de puntos críticos distintos, y análisis de sensibilidad a imperfecciones. Se han encontrado el mismo tipo de relaciones entre las derivadas de los sistemas perfectos e imperfectos que los descriptos en la monografía de referencia.

El principal objetivo de los desarrollos mencionados ha sido permitir una aplicación directa del método de elementos finitos a una teoría de estabilidad elástica para sistemas discretos. Se han presentado las expresiones fundamentales a evaluar para el caso general del método de elementos finitos basado en interpolación de desplazamientos, y se han obtenido explícita y detalladamente las expresiones integrales para determinar en forma asintótica la trayectoria poscrítica de láminas de revolución bajo carga axilsimétrica, cuando se usa una formulación del tipo semianalítica. Se ha demostrado que, para la estructura y carga indicada, la bifurcación puede ser sólo del tipo simétrica en armónicas distintas de cero. Tanto los desarrollos teóricos como las expresiones integrales del método de elementos finitos han sido particularizadas para las características más comunes en la práctica: funcional de energía interna de cuarto orden en los desplazamientos y potencial de cargas lineal en un único parámetro de carga y en los desplazamientos.

Se ha propuesto un elemento finito semianalítico capaz de considerar en forma eficiente

quiebres y cambios finitos de la curvatura del meridiano, y variaciones arbitrarias en el espesor. El elemento interpola en forma cúbica la geometría y los desplazamientos membranales y en forma quíntica los desplazamientos normales a la superficie media. Dado que las funciones interpolantes se dan en coordenadas locales, el elemento no satisface explícitamente los requerimientos de movimientos de cuerpo rígido. Sin embargo con pocos elementos se obtienen resultados aceptables desde el punto de vista ingenieril, y refinando la malla se converge a la solución correcta. Si la integración de la matriz de rigidez se realiza con tres puntos pivote el problema converge a la solución correcta desde “arriba”, y si se usan cuatro puntos de integración lo hace desde “abajo”. En consecuencia se ha adoptado usar para el elemento cuatro puntos pivotes para todas las evaluaciones. Se han presentado ejemplos para mostrar el buen comportamiento del elemento frente a distintos tipos de cargas axilsimétricas y no axilsimétricas, comparándolos con otros resultados numéricos y analíticos existentes en la literatura.

Se han descrito las distintas técnicas de análisis no lineal geométrico implementadas en el código de computadora desarrollado, ellas son: un método de reducción que usa como base los modos lineales de bifurcación y los métodos de continuación más conocidos basados en el control del incremento de la carga, de los desplazamientos, o del trabajo externo del sistema. Se han incluido varios ejemplos tomados de la literatura, en los que se muestra la confiabilidad del elemento en el campo no lineal, y se discute el comportamiento de los métodos de continuación y de la técnica de superposición modal.

Se han presentado los algoritmos para la determinación de los puntos críticos a partir de trayectorias precriticas lineales para carga axilsimétrica y no axilsimétrica, y a partir de trayectorias fundamentales no lineales para carga axilsimétrica. Los ejemplos allí analizados han servido por un lado para validar la formulación mediante comparación con resultados numéricos y experimentales; por otro lado han permitido sacar conclusiones respecto a la validez de los criterios simplificados para la determinación de puntos críticos bajo carga no axilsimétrica, y para fijar criterios sobre la elección de la armónica o armónicas a considerar en la búsqueda del punto de bifurcación.

Se ha discutido la validez y calidad de las aproximaciones asintóticas a las trayectorias poscriticas y a las curvas de sensibilidad a imperfecciones, para lo cual se las ha comparado con curvas obtenidas resolviendo las ecuaciones no lineales completas mediante las técnicas de continuación. Se ha discutido también la técnica de carga equivalente como aproximación a una imperfección geométrica, y en particular para una imperfección con la forma del modo crítico.

Finalmente en la última parte se presentaron aplicaciones de la herramienta numérica desarrollada al análisis de algunas estructuras de interés. Se ha estudiado el comportamiento tensional de esferas bajo presión interna ante la presencia de imperfecciones geométricas en la superficie media, cambios locales en el espesor e intersección con cilindros gruesos. Se ha discutido principalmente en que casos resulta necesario considerar

cinemática no lineal, y el orden del error que se comete al suponer un comportamiento lineal. Además se ha estudiado el problema de inestabilidad bajo presión interna de esferas con imperfecciones y cierres elipsoidales. El último capítulo ha estado dedicado al estudio del comportamiento inestable de cáscaras bajo presión externa. Primero se ha investigado el valor de las cargas críticas y el comportamiento poscrítico de cilindros, domos esféricos y conos bajo distintas condiciones de apoyo, y luego el de las cáscaras compuestas resultantes de combinar las cáscaras simples. Los estudios paramétricos realizados permitieron obtener conclusiones importantes sobre la disminución en las cargas críticas que ha de producirse en las cáscaras compuestas respecto a las cargas críticas de las cáscaras componentes.

11.2. Conclusiones

Las conclusiones más importantes obtenidas en esta tesis son:

a) Sobre la formulación del problema de estabilidad y su aplicación vía elementos finitos

- las expresiones que surgen de la teoría de estabilidad elástica de Thompson y Hunt en función de la energía potencial V sin diagonalizar ni reemplazar la trayectoria fundamental, son adecuadas para la aplicación directa del método de elementos finitos.
- las relaciones que se obtienen entre los sistemas perfectos e imperfectos cuando no se reemplaza la trayectoria fundamental en V , son similares a las que se obtienen cuando se lleva a cabo dicho reemplazo.
- Usar como fundamento una teoría para sistemas discretos conduce a una formulación clara y simple vía elementos finitos y permite sistematizar la obtención de las derivadas superiores de las aproximaciones asintóticas.
- En cáscaras de revolución bajo carga axilsimétrica sólo es posible una bifurcación del tipo SIMÉTRICA en modos no axilsimétricos. En tanto que en la armónica 0 la bifurcación puede ser asimétrica. Las derivadas de la trayectoria poscrítica sólo tienen componentes en las armónicas múltiplos de la armónica crítica (incluyendo el múltiplo trivial, la armónica 0). Las derivadas pares tienen componentes en los múltiplos pares y recíprocamente en las derivadas impares hay sólo componentes de los múltiplos impares de la armónica crítica.

b) Sobre el elemento finito desarrollado

- El elemento finito semianalítico de catorce grados de libertad propuesto, resulta computacionalmente eficiente (se requieren pocos elementos para lograr convergencia) y es adecuado para el tratamiento de meridianos discontinuos, ramificados y de espesor variable, frente a estados arbitrarios de carga.

- El elemento finito no satisface en forma explícita los requisitos de modos de cuerpo rígido debido a que los desplazamientos se interpolan en coordenadas locales. Sin embargo, el comportamiento del elemento frente a desplazamientos importantes es muy bueno, aún con pocos elementos, y converge a la solución correcta cuando se refina la malla.
- El elemento desarrollado se comporta muy bien frente a grandes desplazamientos en el campo no lineal geométrico, no presentando bloqueo alguno.

c) Sobre las técnicas de análisis no lineal y algoritmos para la determinación de cargas críticas

- El método de reducción para análisis no lineal basado en la utilización de los modos lineales de bifurcación como base reducida, no es adecuado para el análisis de cáscaras de revolución delgadas, sobre todo cuando los efectos de flexión (principales responsables de la no linealidad) son importantes.
- Los métodos de continuación (desplazamiento prescripto, longitud esférica de arco, plano normal tangente) son adecuados para el seguimiento de trayectorias fuertemente no lineales en cáscaras delgadas de revolución, con alguna ventaja para el método de plano normal tangente.
- De los métodos simplificados para la determinación de la bifurcación lineal ante cargas no axilimétricas, el criterio de “meridiano más cargado” es en general muy conservativo, en tanto que el criterio de “meridiano más exigido” no parece recomendable pues no siempre resulta conservativo, y es computacionalmente menos eficiente que el primero pues requiere una iteración doble.
- En el caso de un análisis con armónicas acopladas de la bifurcación frente a cargas no axilimétricas, diez armónicas parecen ser suficientes para modelar el comportamiento crítico para acciones de viento o similares. La elección de las mismas, usando como criterio tomar las que estén asociadas a las menores cargas críticas frente a esfuerzos axilimétricos, ha dado buenos resultados.
- La armónica crítica para carga axilimétrica considerando trayectoria precrítica no lineal, no necesariamente coincide con la calculada usando una trayectoria precrítica lineal. Generalmente es mayor, y puede ser substancialmente mayor si el rango de armónicas con cargas críticas cercanas a la mínima es importante.
- El rango de validez de una aproximación asintótica a una trayectoria poscrítica depende de la estabilidad de la misma. Debe esperarse una mejor aproximación para bifurcaciones estables.

- La aplicación consistente de la teoría de estabilidad, para el cambio de trayectoria en puntos de bifurcación, cuando se usa un programa de análisis no lineal, asegura una rápida convergencia a la rama poscrítica.
- Para estructuras con comportamiento precrítico débilmente no lineal, es posible reemplazar una imperfección en la geometría por una carga que produzca el mismo efecto de reducción en la carga crítica.

d) Sobre el comportamiento mecánico de recipientes de presión

- Para analizar el comportamiento tensional de cáscaras esféricas bajo presión interior con imperfecciones geométricas, es necesario considerar la no linealidad geométrica si la relación radio/espesor es mayor que 300. La no linealidad del problema depende de la amplitud de la imperfección, de su extensión y su forma (local o axilsimétrica). Difícilmente este tipo de estructuras falle por inestabilidad, como ocurre en otros cierres bajo presión interna. En tales casos un análisis lineal de bifurcación conduce a resultados excesivamente conservativos.
- Los cambios locales de espesor de una esfera con presión interna y su intersección con tubos producen redistribuciones que no son significativas desde el punto de vista tensional, además un análisis lineal provee de una solución adecuada. En todos estos casos un análisis lineal conduce a un límite superior de las tensiones máximas esperadas.
- La influencia de la no linealidad de la trayectoria precrítica, y de las condiciones de borde en la estabilidad de cilindros bajo presión externa está restringida a cilindros cortos ($Z < 30$).
- Los domos esféricos simplemente apoyados bajo presión externa tienen un comportamiento similar a los empotrados, con cargas críticas un 15 % menores y trayectorias poscríticas un poco más suaves.
- Los conos bajo presión externa son menos resistentes que los domos pero son menos sensibles a imperfecciones.
- Las cáscaras compuestas (domo-cilindro, cono-cilindro) tienen cargas críticas inferiores a las cáscaras componentes. La carga crítica de una unión cilindro-domo es aproximadamente la menor entre el 70 % de la carga del cilindro componente y el 50 % de la carga crítica del domo simplemente apoyado. La carga crítica de una intersección cono-cilindro es aproximadamente el 70 % de la menor de las cargas críticas de las cáscaras componentes.
- Las trayectorias poscríticas de las cáscaras compuestas son más tendidas que las de las cáscaras individuales, y las cargas críticas son menos sensibles a imperfecciones.

11.3. Aspectos Originales

En conocimiento del autor las contribuciones originales más importantes de esta tesis son:

-El desarrollo del comportamiento poscrítico y sensibilidad a imperfecciones mediante la técnica de perturbaciones de puntos críticos distintos, en el marco de la teoría de estabilidad elástica de Thompson y Hunt, sin considerar esquemas de diagonalización de la segunda variación de la energía ni el reemplazo de la trayectoria fundamental en el potencial.

-La formulación mediante el método de elementos finitos de las aproximaciones asintóticas, y su particularización a láminas de revolución bajo carga axilsimétrica en el esquema semianalítico.

-La implementación del análisis de bifurcación lineal acoplado (consistente) en el caso de cargas no axilsimétricas. Las comparaciones con otros métodos numéricos, con métodos simplificados y las conclusiones obtenidas.

-Los estudios paramétricos sobre el comportamiento lineal y no lineal geométrico de láminas esféricas bajo presión interna con imperfecciones en la geometría de la superficie media.

-Los estudios de esferas con cambios locales en el espesor e intersecciones con tubos.

-Los estudios paramétricos sobre el comportamiento crítico y poscrítico de cáscaras compuestas bajo presión exterior.

Además, la tesis presenta algunos aspectos originales en los desarrollos siguientes

-El elemento finito presentado.

-La implementación del método de reducción usando modos lineales de bifurcación en el análisis no lineal de cáscaras delgadas.

-El estudio crítico y poscrítico de cilindros con presión externa considerando trayectoria precrítica no lineal y distintas condiciones de borde.

-El análisis de la estabilidad de domos esféricos simplemente apoyados bajo presión exterior.

-El estudio sobre la estabilidad de conos rebajados con presión externa bajo distintas condiciones de borde.

11.4. Recomendaciones para Trabajo Futuro

Desde el punto teórico una extensión natural de lo aquí presentado, es el desarrollo e implementación del caso de puntos críticos múltiples (coincidentes), lo que resulta de importante aplicación en el análisis de estructuras optimizadas.

La teoría de estabilidad presentada está limitada a materiales elásticos, y en las expresiones a evaluar en el método de elementos finitos se ha supuesto que las relaciones

constitutivas eran lineales. La utilización de relaciones tensión-deformación no lineales no representa, sin embargo, una dificultad importante y puede formularse un procedimiento de elementos finitos que las considere. Para el caso de bifurcaciones en el rango elasto-plástico, existen extensiones a la teoría de Koiter capaces de considerar plasticidad sobre la trayectoria poscrítica de puntos críticos distintos, las que pueden ser adaptadas a la teoría de Thompson y Hunt. En conocimiento del autor, no existe hasta el presente una teoría que pueda considerar bifurcación de puntos múltiples con material elastoplástico.

La formulación de elementos finitos descrita puede particularizarse para otros tipos de estructuras proclives a fallar por inestabilidad en el campo elástico. Resultan de interés de barras esbeltas, arcos rebajados, estructuras compuestas por láminas planas delgadas y cáscaras en general.

En el caso de cáscaras de revolución con carga no axilsimétrica, la forma de falla normalmente será del tipo punto límite; si tal caso es de interés podría implementarse el análisis no lineal cinemático como se presenta en el Cap.4. Por otro lado puede intentarse utilizar la trayectoria precrítica lineal para la determinación del punto crítico (armónicas acopladas), ya implementado, y determinar en forma asintótica la trayectoria poscrítica como una aproximación a la trayectoria no lineal verdadera.

Finalmente, la herramienta numérica desarrollada, en su estado actual o aumentando el orden de aproximación, puede utilizarse para el estudio de otras cáscaras delgadas de revolución que resulten de interés en la industria de recipientes de presión.

Referencias

- Abel, J.F., Chang, S.C., Hanna, S.L., (1986), "Comparison of Complete and Simplified Elastic Buckling Analysis for Cooling Tower Shells", *Engng. Struct.*, **8**, pp. 5-28.
- Akkas, N., (1970), *Buckling, Initial Postbuckling and Axisymmetric Dynamic Behaviour of Shallow Spherical and Conical Shells*, Tesis Doctoral, Universidad de Clemson, Clemson, S.C.
- Akkas, N., Bauld, N.R., (1971), "Buckling and Postbuckling of Spherical Caps", *ASCE J. Engng. Mech. Div.*, pp. 727-740, (junio).
- Antonini, R.C., Batista, R.C., (1986), "Análise Assintótica da Estabilidade Elástica de Sistemas Estructurales via MEF", *Anales del VII Congreso Latino-Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia*, San Pablo, Brasil.
- Bathe, K.J., Ramaswamy, S., (1980), "An Accelerated Subspace Iteration Method", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, **23**, pp 13-31
- Bathe, K.J., (1982), *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- Batista, R.C., Antonini, R.C., Alves, R.V., (1988), "An Asymptotic Model Analysis of Nonlinear Structural Systems", IX Congreso Latino Americano e Ibérico sobre Métodos Computacionales para Ingeniería, 4-7 de noviembre de 1988, Carlos Paz, Argentina. *Latin American Applied Research*, (en prensa).
- Brush, D.O., Almroth, B.O., (1975), *Buckling of Bars Plates and Shells*, Mc. Graw Hill, Tokyo.
- Brombolich, L., Gould, P.L., (1972), "A High-Precision Curved Shell Finite Element", *AIAA Journal*, **10**(6), pp. 72-728.
- Budiansky, B., (1967), "Postbuckling Behaviour of Cylinders in Torsion", *Proceedings of the Second IUTAM Symposium on the Theory of Thin Shells*, Ed. F. Niordsen, Copenhage.

- Budiansky, B., Amazigo, J.C., (1968), "Initial Postbuckling Behavior of Cylindrical Shells under External Pressure", *J. Math. Physics*, **47** pp. 223-35.
- Bushnell, D., Galletly, G.D., (1974), "Comparisons of Test and Theory for Nonsymmetric Elastic-plastic Buckling of Shells of Revolution", *Int. J. Solids & Struct*, **10**, pp. 1271-86.
- Bushnell, D., (1977), "Nonsymmetric Buckling of Internally Pressurized Ellipsoidal and Torispherical Elastic-plastic Pressure Vessel Heads", *ASME, J. of Pressure Vessel Technology*, **99**, pp 4-63.
- Bushnell, D., (1984), "Computerized Analysis of Shells - Governing Equations", *Computers & Structures*, **18**(3), pp. 47-536.
- Bushnell, D., (1985), *Computerized Buckling Analysis of Shells*, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, Holanda.
- Calladine, C., (1972), "Structural Consequences of Small Imperfections in Elastic Thin Shells of Revolution", *Int. Journal of Solids & Structures*, **8**, pp. 679-97.
- Cantin, G., Clough, R.W., (1968), "A Curved Cylindrical Shell Finite Element", *AIAA Journal*, **6**(6), pp. 107-62.
- Cantin, G., (1970), "Rigid Body Motions in Curved Finite Elements", *AIAA Journal*, **8**(7), pp.1252-5.
- Carnoy, E., (1980), "Postbuckling Analysis of Elastic Structures by the Finite Element Method", *Compt. Meths. Applied Mech. Engng.*, **23** pp. 143-74.
- Carnoy, E.G., (1981), "Asymptotic Study of the Elastic Postbuckling Behaviour of Structures by the Finite Element Method", *Compt. Meths. Applied Mech. Engng.*, **29**, pp. 147-73.
- Connor, J.J., Morin, N., (1971), "Perturbation Techniques in the Analysis of Geometrically Nonlinear Shells", en *High Speed Computing of Elastic Structures*, Ed. B.F. de Veubeke, Univ. de Lieja, pp. 683-706.
- Crisfield, M.A., (1981), "A Fast Incremental Iterative Procedure that Handles Snap-through", *Computers and Structures*, **13**, pp 5-62.
- Croll, J.G.A., Kaleli, F., Kemp, K.O., (1979), "Meridionally Imperfect Cooling Towers", *ASCE J. Engng. Mech. Div.*, **105**, pp. 7 1-77.

- Danielson, D.A., (1969), "Buckling and Initial Postbuckling Behaviour of Spheroidal Shells under Pressure", *AIAA J*, **7**, pp.96-44.
- Delpak, R., (1980), "Static Analysis of Thin Rotational Shells", *Computers & Structures*, **11**, pp. 35-25.
- Dvorkin, E.N., (1984), *On Nonlinear Finite Element Analysis of Shell Structures*, Tesis Doctoral, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge.
- Ecer, A., (1973), "Finite Element Analysis of Postbuckling Behaviour of Structures", *AIAA J*, **11**(11), pp. 132-8.
- Ellinas, Ch., Croll, J.G.A., Kemp, K.O., (1980), "Cooling Towers with Circumferential Imperfections", *ASCE J. of Struct. Div.*, **106** pp. 2405-23.
- Finzi, L., (1985), "The Development of Structural Engineering: Suggestions for Further Research in Mechanics of Structures", *Meccanica*, **20**, pp. 191-4.
- Fitch, J.R., Budiansky, B., (1970), "Buckling and Postbuckling Behaviour of Spherical Caps under Axisymmetric Load", *AIAA J*, **8**(4), pp. 66-93.
- Flores, F.G., Godoy, L.A., (1988), "Linear vs. Non linear Analysis of Imperfect Spherical Pressure Vessels", *Int. J. Pressure Vessels and Piping*, **33**, pp 95-109.
- Flores, F.G., Godoy, L.A., (1990), "Finite Element Applications to the Internal Pressure Loadings on Spherical and Other Shells of Revolution", en *Finite Element Applications to Thin Walled Structures*, John Bull (ed.), pp. 259-96, Elsevier Applied Science, Barking, Gran Bretaña.
- Flores, F.G., Godoy, L.A., (1990), "On Buckling Mode Superposition in Non-linear Analysis of Shells", aceptado para publicación en *Communications in Applied Numerical Methods*.
- Flügge, W., (1967), *Stresses in Shells*, Springer Verlag, Berlin.
- Gallagher, R.H., (1975), "Perturbation Procedures in Nonlinear Finite Element Structural Analysis", *Lectures Notes in Mathematics*, **461**: Computational Mechanics, Springer Verlag, pp. 75-90.
- Galletly, G.D., (1959), "Torispherical Shells: A caution to designers", *Trans. ASME, J. Engineering Industry*, **81**, pp 1-66.
- Geradin, M., Idelsohn, S., Hogge, M., (1981), "Computational Strategies for the Solution of Large Nonlinear Problems via Quasi-Newton Methods", *Computers & Structures*, **13**, pp.3-81.

- Gill, S.S. (Ed.), (1970), *The Stress Analysis of Pressure Vessels and Pressure Vessel Components*, Pergamon Press, Oxford.
- Godoy, L.A., Flores, F.G., (1987), "Stresses in Thin Spherical Shells with Imperfections. Part I: Influence of Axisymmetric Imperfections", *Thin Walled Structures*, **5**, pp:5-20.
- Godoy, L.A., Flores, F.G., (1987), "Stresses in Thin Spherical Shells with Imperfections. Part II: Influence of Local Imperfections", *Thin Walled Structures*, **5**, pp 145-55.
- Godoy, L.A., (1987), "A Simplified Bending Analysis of Imperfect Spherical Pressure Vessels", *Int. J. Pressure Vessels and Piping* **27**, pp 385-99.
- Grafton, P.R., Strome, D.R., (1963), "Analysis of Axisymmetric Shells by the Direct Stiffness Method", *AIAA Journal*, **4**, pp. 242-7.
- Haftka, R.T., Mallet, R.H., Nachbar, W., (1971), "Adaption of Koiter's Method to Finite Element Analysis of Snap-Through Buckling Behaviour", *Int. J. Solids & Struct.*, **7**, pp. 147-45.
- Hangai, Y., Kawamata, S., (1972), "Perturbation Method in the Analysis of Geometrically Non-linear and Stability Problems", *Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design*, Ed. J.T. Oden, The University of Alabama in Huntsville, pp.473-92.
- Heyman, J., (1967), "On Shell Solutions for Masonry Domes", *Int.J. Solids and Structures*, **3**, pp 227-41.
- Khojasteh-Bakht, M., Popov, E., (1970), "Analysis of Elastic Plastic Shells of Revolution", *ASCE J. Engng. Mech. Div.*, pp. 327-40.
- Kiciman, O.K., Popov, E.P., (1978), "Post-Buckling Analysis of Cylindrical Shells", *ASCE J. Engng. Mech. Div.*, pp.751-62, (Agosto).
- Koiter, W.T., (1945), "Over de stabiliteit van het elastisch evenwicht", Delft, H.J. Paris, Amsterdam; (traducción al inglés) NASA Rep. TTF-10, 1967.
- Koiter, W.T., (1965), "On the Stability of Equilibrium in the Absence of a Minimum of the Potencial Energy", *Proc. K. ned. Akad. Met., Series B*, **68**, pp. 107.
- Kollar, L., (1982), "Buckling of Complete Spherical Shells and Spherical Caps", *Buckling of Shells*, Ed. E. Ramm, Springer-Verlag, Berlin, pp. 401-25.

- Konig, M., (1981), "Technical Note on Mode Superposition in Buckling Analysis", *Computer Methods in Applied Mech. and Engng.*, **28**, pp. 17-25.
- Kraus, H., (1967), *Thin Elastic Shells*, J. Wiley, New York.
- Kundurpi, P.S., Gopalacharyulu, S., Johns, D., (1975), "Stability of Cantilevered Shells under Wind Loads", *ASCE J. Engng. Mech. Div.*, pp. 517-30, (octubre).
- Laupa, A., Weil, N.A., (1962) "Analysis of U-Shaped Expansion Joints", *ASME Journal of Applied Mech.*, pp 115-23, (marzo).
- Machinek, A.K., Troger, H., (1988), "Postbuckling of Elastic Annular Plates at Multiple Eigenvalues", *Dynamics and Stability of Systems*, **3**(1-2), pp. 341-53.
- Mirasso, A.E., (1989), *Inestabilidad de Estructuras bajo Cargas que Dependen de Desplazamientos*, Tesis de Mg. Ing. Struct., Universidad Nacional de Tucumán.
- Moore, C.J., Yang, T.Y., Anderson, D.C., (1984), "A new 48 D.O.F. Quadrilateral Shell Element with Variable Order Polynomial and Rational B-Spline Geometries with Rigid Body Modes", *Int. J. Num. Meths Engng.*, **20**, pp. 2121-41.
- Nagy, D.A., Konig, M., (1979), "Geometrically Nonlinear Finite Element Behaviour Using Buckling Mode Superposition ", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engng.*, **19**, pp. 447-84.
- Nayak, G.C., (1971), *Plasticity and Large Deformation Problems by Finite Element Method*, Tesis Doctoral., Universidad de Gales, Swansea.
- Novozhilov, V.V., (1964), *Thin Shell Theory*, P. Noordhoff Ltd., Groningen, Holanda.
- Prato, C.A., (1970), "Estado Crítico y Poscrítico de Estructuras Laminares por Métodos Numéricos", Inf. D.E.-70-1, Dep. de Estructuras, Univ. Nac. de Córdoba.
- Penning, F.A., (1966), "Experimental Buckling Modes of Clamped Shells under Concentrated Loads", *J. of Applied Mechanics*, **33**, pp. 29-304.
- Radwanska, W., Waszczyszyn, Z., (1980), "Numerical Analysis of Nonsymmetric Behaviour of Elastic Annular Plates", *Compt. Meths. Applied Mech. Engng.*, **23**, pp. 341-53.

- Ramm, E., (1981), "Strategies for Tracing Non-linear Responses Near Limit Points", *Non-linear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, Ed. W. Wunderlich, E. Stein, K.J. Bathe, Springer Verlag, New York, pp. 68-89.
- Ramm, E., Schweizerhof, K., Stegmüller, H., (1986), "Ultimate Load Analysis of Thin Shells Under Pressure Loads".
- REDUCE, (1987), User's Manual, versión 3.3, Anthony C. Hearn, The Rand Corporation.
- Riks, E., (1979), "An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems", *Int. J. of Solids & Structures*, **15**, pp. 59-51.
- Riks, E., (1984), "Some Computational Aspects of the Stability Analysis of Nonlinear Structures.", *Compt. Meth. Applied Mech. Engng.*, **4** pp. 219-59.
- Sanchez Sarmiento, G., Bergmann, A., Lotorto, A., Luxwurm, H., (1983), "Técnicas computacionales para el análisis tensional de recipientes esféricos", *Revista de Ingeniería Estructural*, Buenos Aires, **1**(3), pp 1-19.
- Sanchez Sarmiento, G., Idelsohn, S.R., Cardona, A., Sonzogni, V., (1985), "Failure Internal Pressure of Spherical Steel Containment", *Nuclear Engineering and Design*, **90**, pp 29-22.
- Sanders, J.L., (1963), "Non-linear Theories for Thin Shells", *Quarterly of Applied Mathematics*, **21**, pp. 21-36.
- Simo, J., Wriggers, P., Schweizerhof, K., Taylor, R.L., (1984), "Finite Deformation Postbuckling Analysis Involving Inelasticity and Constant Constraint", *Innovative Methods for Nonlinear Problems*, Ed. W.K. Liu, T. Belytschko, K.C. Park, Pineridge Press, Swansea.
- Surana, K.S., (1982), "Geometrically Nonlinear Formulation for the Axisymmetric Shell Elements", *Int. J. Num. Meths Engng.*, **18** pp. 477-502.
- Thompson, J.M.T., Walker, A.C., (1968), "The Nonlinear Perturbation Analysis of Discrete Structural Systems", *Int.J. Solids and Struct.*, **4**, pp 757-68.
- Thompson, J.M.T., Hunt, G.W., (1973), *A General Theory of Elastic Stability*, John Wiley & Sons, New York.
- Timoshenko, S., Woinowsky-Krieger, S., (1959), *Theory of Plates and Shells*, Mc.Graw Hill, New York.

- Tong, P., Pian, T.H.H., (1974), "Postbuckling Analysis of Shells of Revolution by the Finite Element Method", *Thin Shell Structures*, Ed. Y.C. Fung y E.E. Sechler, Prentice Hall, pp. 435-52
- Tvergaard, V., (1976), "Effect of Thickness Inhomogeneities in Internally Pressurized Elastic-plastic Shells", *J. Mechanics and Physics of Solids*, **24**(5), pp 291-304.
- Vandepitte, D., (1982), "The Background to the new ECCS Recommendations for Shell Buckling", *Buckling of Shells in Offshore Structures*, Ed. J.E. Harding y P.J. Dowling, Granada Publishing, pp. 473.
- Wagners, W., Wriggers, P., (1988), "A Simple Method for the Calculation of Postcritical Branches", *Eng. Compt.*, **5**, pp.103-9, (junio).
- Wang, Y., Billington, D.P., (1974), "Buckling of Cylindrical Shells by Wind Pressure", *ASCE J. Engng. Mech. Div.*, pp. 1005-1023, (octubre).
- Welford, L.C., Dib, G.M., (1980), "Postbuckling Behaviour of Structures Using a Finite Element Nonlinear Technique", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **15**, pp. 955-80.
- Wunderlich, W., Rensch, H.J., Obrecht, H., (1982), "Analysis of Elasto-Plastic Buckling of Imperfection Sensivity Shells of Revolution", *Buckling of Shells*, Ed. E. Ramm, Springer-Verlag, Berlin, pp.137-74.
- Wunderlich, W., Cramer, H., Obrecht, H., (1985), "Applications of Ring Elements in The Nonlinear Analysis of Shells of Revolution under Non axisymmetric Loading", *Compt. Meth. Applied Mech. Engng.*, **51** pp. 259-75.
- Yamada, M., Yamada, S., (1983), "Agreement Between Theory and Experiment on Large Deflection Behaviour of Clamped Shallow Spherical Shells under External Pressure", *COLLAPSE the Buckling of Structures in Theory and Practice*, Ed. J.M.T. Thompson y G.W. Hunt, Cambridge University Press, pp. 431-42.
- Yang. T.H., (1973), "High Order Rectangular Shell Finite Element", *ASCE J. of Engng. Mech. Div.*, **99**, pp. 157-81.
- Zarrazin, M., Jensen, J., (1981), "Axisymmetric Shells for Non-axisymmetric Loads: An Exact Conical Approach", *Adv. Engng. Software*, **6**(3), pp. 148-55.
- Zienkiewicz, O.C., (1977), *The Finite Element Method*, Mc. Graw Hill, Londres.

Zienkiewicz, O.C., Bauer, J., Morgan, K., Oñate, E., (1977), "A Simple and Efficient Element for Axisymmetric Shells", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **11**, pp. 1545-58.

Zintillis, G.M., Croll, J.G.A., (1982), "Pressure Buckling of End Supported Shells of Revolution", *Eng. Struct.*, **4**, pp. 22-32.