

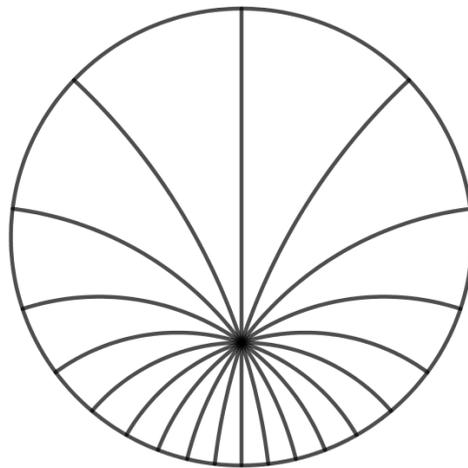


FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA,  
FÍSICA Y COMPUTACIÓN (FAMAF)

TRABAJO ESPECIAL DE LICENCIATURA EN  
MATEMÁTICA

# Geometría del Plano Hiperbólico

*Azul Lihuen Fatalini*



Directores: Dr. Juan Pablo ROSSETTI (Universidad Nacional de Córdoba)  
Dr. Peter DOYLE (Darmouth College)



Geometría del Plano Hiperbólico por Fatalini, Azul Lihuen se distribuye bajo una [Licencia Creative Commons Atribución 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

---



---

## Resumen

En este trabajo estudiamos la geometría del plano hiperbólico siguiendo un esquema axiomático similar al de la geometría euclídea. Ambas geometrías coinciden en sus bases, salvo por reemplazar el Axioma de las paralelas o Postulado V de Euclides. Este cambio genera una geometría muy rica, que abre un nuevo mundo en donde los triángulos tienen suma de ángulos interiores menor que  $180^\circ$ , existen rectas paralelas asintóticas y hay pentágonos con todos sus ángulos rectos. Usamos el modelo del semiplano superior para desarrollar los elementos básicos: distancia, trigonometría, área y circunferencias. A lo largo del trabajo, estuvimos guiados por las siguientes preguntas: ¿Cuáles teoremas conocidos se siguen cumpliendo? ¿Hay resultados completamente diferentes a los de la geometría euclídea? Para concluir, haremos una breve mención a los hexaframes, que son una generalización de los hexágonos rectangulares en el espacio hiperbólico.

## Abstract

In the present work we study the hyperbolic plane geometry. We follow an axiomatic approach, similar to the one used in euclidean geometry. Both geometries share their bases with the exception of the parallel postulate, also called Euclid's fifth postulate. This change generates a really rich geometry. It opens up a world of possibilities, where the sum of the angles of a triangle is always strictly less than  $180^\circ$ , there exist asymptotic parallel lines, and there are right-angled pentagons. We use the Poincaré half-plane model to develop the basic elements in geometry: distance, trigonometry, area and circles. Throughout this work, the following questions have been guiding us: Which well known theorems are still true? Is there any result completely different from the ones in euclidean geometry? To conclude, we will briefly mention the hexaframes, a generalization of the right-angled hexagons in the hyperbolic space.



## Agradecimientos

Gracias al tribunal, por tomarse el tiempo de leer mi trabajo con atención.

Gracias a mis directores: a Juan Pablo, por acompañarme en el desarrollo de este trabajo final pero también en la mayoría de mi carrera, y a Peter Doyle, por su comprensión y por compartir todas sus ideas.

Gracias a todos los que me ayudaron en particular con este trabajo: Nico, Luis, Juan y Emi.

También quiero agradecer a las personas que tuvieron relevancia en esta carrera que ahora termino. Empiezo por el principio.

Primero, gracias a Luis, por soñar conmigo en Tucumán aquel sueño que nos trajo a Córdoba y que hoy se termina de cumplir. Gracias:

A Diego Sulca, por acompañarme en el primer día que pisé FAMAFA.

A mi grupo de primer año: Ale, Cin, Luis, Mauri, Mariano y Pablo.

A mi familia, por apoyarme siempre.

A los voluntarios y trabajadores del Refugio Nocturno de Cáritas, que fueron mi familia en Córdoba todos estos años.

A la Fundación Retama, por apoyarme económicamente para que yo estudie en Córdoba.

A mis compañeres a lo largo de la carrera, en particular a Ale, Laua y Luis, por las carpetas, consejos, dudas y certezas.

A mis compañeres de casa, Lior, Flor y Ale, por ofrecerme un ambiente de paz que fue esencial para terminar mi carrera.

A los que me acompañaron durante mi carrera, sacándome sonrisas y conversaciones distendidas durante los recreos y tiempos libres, en particular gracias a Gastón, Sofi, Agna, Pablo, Juan, Emi y Feli.

A Clara, por el apoyo y porque ella es en gran parte responsable por mi elección de tema para este trabajo.

A las personas que estuvieron para mí en el último tiempo, soportando mi estrés y mi perfeccionismo, dándome altos abrazos y salvándome cuando hizo falta: Nico, Jero, Luis, Mauri, Fran y Guille.

Al profesorado, a la CAM, a la CIMA, a la OMA y a todos los ámbitos en los que di clases, porque desde esos lugares realicé actividades que me permitieron tener otro punto de vista sobre la facultad y sobre la matemática.

A los profesores que tuve en ambas carreras. Especialmente gracias a las personas que me devolvieron la motivación por la matemática cuando más lo necesitaba: Diego Vaggione, Pedro Sanchez Terraf y Étienne Ghys.

Gracias a María José e Ignacio, por todo lo que hacen por esta facultad y los estudiantes.

Y por último y no menos importante, gracias a la universidad pública y gratuita. Sin ella, yo no hubiera podido estudiar lo que me gusta, *¿y vos?*



PARA LUIS  
cuando era niño.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>13</b>
1.1. Geometría euclídea . . . . .	13
1.2. Quinto postulado de Euclides . . . . .	14
1.3. Modelos de la geometría hiperbólica . . . . .	14
1.4. Geometría neutra . . . . .	16
<b>2. Fundamentos de la geometría hiperbólica</b>	<b>19</b>
2.1. Axiomas de incidencia y orden . . . . .	19
2.2. Axiomas de rigidez: Las transformaciones rígidas . . . . .	22
2.3. La distancia hiperbólica . . . . .	32
2.4. Axiomas de paralelismo, arquimedianidad y completitud . . . . .	44
<b>3. Algunos resultados notables</b>	<b>49</b>
3.1. Suma de ángulos interiores de un triángulo . . . . .	49
3.2. Trigonometría . . . . .	53
3.3. Área . . . . .	59
3.4. Circunferencias hiperbólicas . . . . .	64
<b>4. Polígonos rectangulares</b>	<b>71</b>
<b>5. Más sobre hexágonos rectangulares</b>	<b>81</b>
5.1. Algunos resultados del artículo de Richard Kenyon . . . . .	81
5.2. Hexaframes . . . . .	85



# Prólogo

En este trabajo, examinaremos el plano hiperbólico desde sus fundamentos axiomáticos, utilizando el modelo del semiplano superior o plano de Poincaré. Estudiaremos analogías en el plano hiperbólico con algunos teoremas importantes de la geometría euclídea, por ejemplo, los teoremas del seno y del coseno. Luego, avanzaremos hacia el estudio de objetos propios de la geometría hiperbólica, los pentágonos y hexágonos rectangulares, acercándonos, finalmente, a temas actuales de investigación en el Capítulo 5.

Al comienzo, en el Capítulo 1, daremos un pequeño marco histórico y conceptual del tema del trabajo.

En el Capítulo 2, exhibiremos el modelo del plano hiperbólico que utilizaremos, el llamado *modelo del semiplano superior*, y corroboraremos que efectivamente es un modelo de geometría hiperbólica, es decir, que satisface todos los axiomas de la geometría neutra más el axioma de las paralelas (versión hiperbólica).

En el Capítulo 3, desarrollaremos algunos teoremas esenciales para entender la geometría hiperbólica. Está estructurado en tres ejes centrales: trigonometría, área y circunferencias.

En el Capítulo 4, estudiaremos la trigonometría de algunas figuras singulares: los *polígonos rectangulares*. Al no existir cuadriláteros con todos sus ángulos rectos en la geometría hiperbólica, analizaremos el caso de polígonos rectangulares con al menos cinco lados, estudiando algunas fórmulas trigonométricas y el área de los mismos.

Finalmente, en el Capítulo 5, nos introduciremos a temas de investigación actuales. Siguiendo con el análisis de los pentágonos y hexágonos rectangulares, estudiaremos el siguiente artículo [Ke] de Rick Kenyon. Concluiremos el trabajo describiendo brevemente los *hexaframes*, que serán una generalización de los hexágonos rectangulares.



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Geometría euclídea

En el siglo III a.C., Euclides desarrolló la geometría conocida hasta ese momento en su libro “Los elementos” de una forma particular: propuso aceptar algunas nociones por ser intuitivamente ciertas y, a partir de ellas, demostrar los demás resultados.

Los postulados de Los Elementos son:

- I. Una línea recta puede ser dibujada uniendo dos puntos cualesquiera.
- II. Un segmento de línea recta se puede extender indefinidamente en una línea recta.
- III. Dado un segmento de línea recta, puede dibujarse una circunferencia de ese radio con cualquier centro.
- IV. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
- V. Si una recta, al incidir sobre dos rectas, hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, entonces las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los menores que dos rectos.

Si la obra de Euclides es analizada rigurosamente, se pueden encontrar ejemplos de razonamientos en los cuales se asumen afirmaciones que no son probadas. Estas afirmaciones, si bien pueden parecer obvias, no se deducen de los postulados propuestos por Euclides (ver por ejemplo [Pe]). La tarea de desarrollar la geometría desde un conjunto de axiomas y con los estándares modernos de rigor prosperó durante el final del siglo XIX, lo que culminó con la obra de Hilbert. Con su libro “Fundamentos de la Geometría” (1899) [Hi], Hilbert completó el sistema axiomático para la geometría euclídea. Este consistía en veintiun axiomas (que luego serían veinte, por ser uno de ellos redundante) organizados en seis grupos: axiomas de combinación, orden, paralelas, congruencia, continuidad y completitud.

En este trabajo, usaremos los grupos de axiomas que se pueden ver en [Da], por ser los que se consideran en las materias Geometría I y II de esta institución. Estos se dividen en cinco grupos, de forma similar a la organización de Hilbert: axiomas de incidencia o enlace, de orden, de congruencia, de paralelismo y de continuidad.

## 1.2. Quinto postulado de Euclides

Muchos tuvieron la intuición de que el quinto postulado de Euclides podía ser probado a partir de los anteriores.

Saccheri (1667-1773) trató de probar el quinto postulado, construyendo un cuadrilátero  $abcd$  (luego llamado *cuadrilátero de Saccheri*) con ángulos rectos  $\angle a$  y  $\angle b$  y segmentos congruentes  $\overline{ad}$  y  $\overline{bc}$ . Fácilmente pudo probar que  $\angle c \equiv \angle d$ . Hay, entonces, tres casos:

**Hipótesis de Saccheri del ángulo agudo:** Los ángulos  $\angle c$  y  $\angle d$  de un cuadrilátero de Saccheri son agudos.

**Hipótesis de Saccheri del ángulo recto:** Los ángulos  $\angle c$  y  $\angle d$  de un cuadrilátero de Saccheri son rectos.

**Hipótesis de Saccheri del ángulo obtuso:** Los ángulos  $\angle c$  y  $\angle d$  de un cuadrilátero de Saccheri son obtusos.

Con estas hipótesis, se puede llegar a que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es menor, igual o mayor a dos rectos, respectivamente. Saccheri se convenció de que la primera y la tercera hipótesis conducían a un absurdo y murió sin darse cuenta de que había demostrado teoremas de dos geometrías nuevas, como se puede leer en [Be].

El último postulado tiene entonces varias equivalencias, de las cuales una de las más conocidas es la siguiente (propuesta por Proclus y luego utilizada por Hilbert):

**Axioma de las paralelas:** Por un punto exterior a una recta, se puede trazar una única paralela.

Finalmente, la investigación acerca del rol del postulado de las paralelas en cualquiera de sus equivalencias llevó a muchos resultados. Se probó que la negación del mismo conducía a resultados que se consideraban absurdos en esa época aunque no eran contradictorios. No fue sino hasta la mitad del siglo XIX cuando se admitió que estas proposiciones, obtenidas al negar el axioma de las paralelas, eran los primeros teoremas de una nueva y consistente geometría (ver por ejemplo [Ha]).

Con los demás postulados, se puede probar que, por un punto exterior a una recta, siempre *existe* se puede trazar una recta paralela a la primera. El Axioma de las paralelas agrega entonces la información de que esta paralela debe ser única. Si se niega el quinto postulado de Euclides (pero se siguen asumiendo los demás axiomas) y se decreta que, por un punto exterior a una recta dada pasan al menos dos rectas paralelas, entonces emerge la geometría hiperbólica, la cual constituye el tema principal de este trabajo.

## 1.3. Modelos de la geometría hiperbólica

Llamaremos axiomas de la geometría hiperbólica a los axiomas de la geometría euclídea que describimos en la Sección 1.1 salvo el axioma de las paralelas, que intercambiaremos por el siguiente:

**Axioma de las paralelas** Dados una recta  $A$  y un punto  $p$  externo a  $A$ , existen al menos dos rectas paralelas a  $A$  por  $p$ .

Para estudiar la geometría hiperbólica, es útil usar modelos de la misma. Un modelo de la geometría hiperbólica es un conjunto concreto al que llamaremos plano, con ciertos subconjuntos destacados que llamaremos rectas munidas cada una de una relación que denotaremos por  $<$ , y unas biyecciones distinguidas del plano en sí mismo que llamaremos transformaciones rígidas, en donde estos elementos satisfacen los axiomas correspondientes.

**Definición 1.1** Un *modelo de la geometría hiperbólica* es una upla  $(\pi, \mathcal{R}, \{<_R\}_{R \in \mathcal{R}}, \mathcal{T})$ , donde:  $\pi$  es un conjunto (el plano);  $\mathcal{R}$  es un conjunto de subconjuntos de  $\pi$  (las rectas); para cada recta  $R$ ,  $<_R$  es una relación binaria en  $R$ ; y  $\mathcal{T}$  es un conjunto de funciones  $T : \pi \rightarrow \pi$  (las transformaciones rígidas), donde estos conjuntos cumplen todas las propiedades dadas por los axiomas de la geometría hiperbólica que detallaremos en la Sección 1.4.

Existen varios modelos de la geometría hiperbólica. Estos nos permiten mirar la geometría hiperbólica desde diferentes enfoques y tener, entonces, distintas intuiciones. A continuación, nombraremos algunos modelos conocidos:

**El modelo del semiplano superior o semiplano de Poincaré:** El plano es el semiplano abierto superior de  $\mathbb{R}^2$  y las rectas son las semicircunferencias o semirrectas que son perpendiculares al eje  $x$ , y cuyo centro u origen, respectivamente, está en este eje;

**El modelo del disco de Poincaré:** El plano es un disco (abierto) y las rectas son los arcos de circunferencia o cuerdas que son perpendiculares al borde del disco ;

**El modelo de Klein** El plano es un disco (abierto) y las rectas son las cuerdas;

**El modelo de la semiesfera** El plano es una semiesfera en  $\mathbb{R}^3$  y las rectas son semicircunferencias contenidas en algún plano euclídeo perpendicular a la base de la semiesfera y contenidas en ella;

**El modelo del hiperboloide<sup>1</sup>** El plano es una de las hojas de un hiperboloide de dos hojas en  $\mathbb{R}^3$  y las rectas son las geodésicas.

Hay biyecciones de un modelo a otro que llevan rectas en rectas. Esto permite moverse entre modelos y combinar las intuiciones dadas por ellos. La relación entre los modelos mencionados está muy bien descrita en [CFKP, p.69].

En este trabajo, se estudiará el modelo del semiplano superior. Veremos que, efectivamente, es un modelo de la geometría hiperbólica; deduciremos una función distancia y, luego, probaremos algunos teoremas que tienen un análogo en la geometría euclídea.

## 1.4. Geometría neutra

La geometría neutra o geometría absoluta es la geometría que cumple con todos los axiomas de la geometría euclídea salvo el axioma de las paralelas, el cual no se afirma ni se niega. Es decir, la geometría euclídea y la geometría hiperbólica son casos particulares de la geometría neutra.

En [Da], se desarrollan definiciones, teoremas y propiedades mientras los grupos de axiomas son presentados. Luego, las propiedades o teoremas demostrados allí antes de mencionar el axioma de paralelismo pertenecen a la geometría neutra y, por lo tanto, valen para la geometría hiperbólica. En este trabajo, se usarán definiciones y algunos de estos teoremas tanto en el contexto hiperbólico como en el euclídeo.

A lo largo de este trabajo, asumiremos conocidas estas nociones. Sin embargo, presentaremos a continuación algunos teoremas, definiciones y notaciones de uso recurrente para que el lector los tenga más presente, a la vez que presentaremos los axiomas sobre los que trabajaremos luego.

### Axiomas de tipo I: incidencia

AI-1 El plano  $\pi$  es un conjunto infinito.

AI-2 Las rectas son subconjuntos propios de  $\pi$ .

AI-3 Dados  $a, b \in \pi$ ,  $a \neq b$ , existe una única recta  $A$  tal que  $a, b \in A$ .

**Definición 1.2** Llamaremos *puntos* a los elementos del conjunto  $\pi$ .

NOTACIÓN: Dados dos puntos distintos  $a$  y  $b$ , denotaremos por  $\overleftrightarrow{ab}$  a la única recta que contiene a estos puntos, que existe por el Axioma AI-3.

### Axiomas de tipo II: orden

AII-1 Las rectas tienen un orden estricto y total que denotamos  $<$ .

AII-2 Dada una recta  $A$ , se cumplen:

- a) Si  $p \in A$ ,  $\exists r, s \in A$  tales que  $r < p < s$ .
- b) Si  $p, q \in A$ ,  $p \neq q$  y  $p < q$ ,  $\exists r \in A$  tal que  $p < r < q$ .

### Definición 1.3

- Dados  $p, q \in \pi$ , el *segmento* de extremos  $p$  y  $q$  es el conjunto

$$\overline{pq} = \{r \in \pi \mid r \text{ está entre } p \text{ y } q\},$$

donde “estar entre” hace referencia al orden de la recta  $\overleftrightarrow{pq}$ , que existe por el Axioma AII-1.

- Dada una recta  $A$  y  $<$  un orden en  $A$ , los subconjuntos  $\{p \in A | p < o\} \cup \{o\}$  y  $\{p \in A | p > o\} \cup \{o\}$  se denominan *semirrectas* de origen  $o$ ; y diremos que una es la opuesta a la otra.
- Diremos que  $P \subseteq \pi$  es *convexo* si  $\forall a, b \in P$  con  $a \neq b$  se cumple que  $\overline{ab} \subseteq P$ .

AII-3 Para toda recta  $A$ , se tiene que  $A^c = \alpha \cup \beta$ , donde:

- $\alpha$  y  $\beta$  son subconjuntos convexos de  $\pi$  que llamaremos *semiplanos* (abiertos).
- Si  $p \in \alpha$  y  $q \in \beta$ , entonces  $\overline{pq}$  interseca a  $A$ .

NOTACIÓN:

- Los semiplanos  $\alpha$  y  $\beta$  del Axioma AII-3 se dicen uno opuesto del otro y lo denotaremos  $\beta = \check{\alpha}$  y  $\alpha = \check{\beta}$ .
- Análogamente, denotaremos por  $\check{\overrightarrow{op}}$  a la semirrecta opuesta a  $\overrightarrow{op}$ .
- Si  $A$  es una recta y  $p \notin A$ , entonces denotaremos por  $A_p$  al semiplano determinado por  $A$  que contiene a  $p$ . También usaremos  $(\overline{ab})_p$  y  $(\overrightarrow{ab})_p$  para denotar a los semiplanos determinados por  $\overline{ab}$ , y  $\overrightarrow{ab}$ , respectivamente, que contienen al punto  $p$ .

#### Definición 1.4

- Un *ángulo* es la unión de dos semirrectas de igual origen, distintas y no opuestas. El sector angular determinado por  $\angle AB$  es  $\text{sec}\angle AB = A_B \cap B_A$ .
- Un *par semirrecta-semiplano* es un par ordenado  $(A, \alpha)$  donde  $A$  es una semirrecta y  $\alpha$  es uno de los semiplanos determinados por  $A$ .

#### Axiomas de tipo III: rigidez

AIII-1 Toda transformación rígida es una biyección de  $\pi$  en  $\pi$  que lleva semirrectas en semirrectas.

AIII-2 a) Si  $T$  y  $S$  son transformaciones rígidas,  $T \circ S$  también lo es.

b) Si  $T$  es una transformación rígida, su inversa también lo es.

**Definición 1.5** Diremos que dos subconjuntos  $A$  y  $B$  de  $\pi$  son *congruentes* si existe una transformación rígida  $T$  tal que  $T(A) = B$ . Lo denotaremos por  $A \equiv B$ .

AIII-3 a) Si  $\overline{ab} \equiv \overline{cd}$  y  $\overline{cd} \subseteq \overline{ab}$ , entonces  $\overline{ab} = \overline{cd}$ .

b) Si  $\angle aob \equiv \angle cod$  y  $\text{sec}(\angle cod) \subseteq \text{sec}(\angle aob)$ , entonces  $\angle aob = \angle cod$ .

AIII-4 Dados dos pares semirrecta-semiplano  $(A, \alpha)$ ,  $(B, \beta)$ , existe una única transformación rígida  $T$  tal que  $T(A, \alpha) = (B, \beta)$ .

### Axiomas de tipo V

AV-1 (*Arquimedianidad*) Dados  $\overline{ab}$  y  $\overline{cd}$ ,  $\exists n \in \mathbb{N} : n \cdot \overline{ab} > \overline{cd}$

AV-2 (*de Completitud*) Dada una sucesión de segmentos  $\{\overline{a_n b_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ , si  $\overline{a_{n+1} b_{n+1}} \subseteq \overline{a_n b_n} \forall n \in \mathbb{N}$ , entonces  $\bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{a_n b_n} \neq \emptyset$

OBSERVACIÓN: Antes de este último grupo de axiomas, las rectas podían tener “huecos”, de aquí la importancia del Axioma de completitud.

Recordemos que la geometría neutra no acepta ni niega el Axioma de las paralelas, por lo que no hay aquí un grupo de axiomas de tipo IV. De todas maneras, es importante aclarar aquí cuál es la definición de rectas paralelas que se utiliza.

**Definición 1.6** Dos rectas  $A$  y  $B$  se dicen *paralelas* si  $A = B$  o  $A \cap B = \emptyset$ .

Como dijimos antes, se pueden probar muchos teoremas sin hacer uso del Axioma de las paralelas, es decir, teoremas de la geometría neutra. A continuación, nombraremos algunos teoremas que serán de utilidad luego.

**Definición 1.7** Dados  $\overline{ab}$  y  $\overline{cd}$ , decimos que  $\overline{ab}$  es menor que  $\overline{cd}$  si existe  $p \in \overline{cd}$  tal que  $\overline{ab} \equiv \overline{cp}$  y lo denotamos  $\overline{ab} < \overline{cd}$ .

Además, se puede definir una relación de orden entre ángulos, una suma de ángulos, y también una suma de segmentos. Todas estas relaciones y operaciones están bien definidas tomando las clases de congruencia (con la relación  $\equiv$ ) de ángulos y de segmentos, y se cumplen las propiedades naturales que se esperaría que una relación llamada “menor” y una operación llamada “suma” cumplan. Usaremos frecuentemente el siguiente teorema, que tiene relación con estas nociones.

**Teorema 1.8** *En un triángulo  $\triangle abc$ , se cumple que: a mayor lado, se opone mayor ángulo; y viceversa.*

**Teorema 1.9** *En un triángulo  $\triangle abc$ , se cumple que la suma de sus ángulos interiores es menor o igual a un ángulo llano.*

También se cumplen todos los criterios de congruencia de triángulos conocidos, y se agrega uno más, el criterio “ángulo-ángulo-lado” (que en geometría euclídea es equivalente al criterio ALA):

**Teorema 1.10** (Criterio AAL)

*Sean  $\triangle abc$  y  $\triangle a'b'c'$  dos triángulos tales que  $\angle a \equiv \angle a'$ ,  $\angle b \equiv \angle b'$  y  $\overline{bc} \equiv \overline{b'c'}$ . Entonces, vale que  $\triangle abc \equiv \triangle a'b'c'$ .*

# Capítulo 2

## Fundamentos de la geometría hiperbólica

En este capítulo, exhibiremos el modelo del plano hiperbólico llamado *modelo del semiplano superior* y corroboraremos que efectivamente es un modelo de geometría hiperbólica, es decir, que satisface todos los axiomas de la geometría neutra más el axioma de las paralelas (versión hiperbólica).

### 2.1. Axiomas de incidencia y orden

Presentamos a continuación el modelo del semiplano superior. El plano será el conjunto

$$\pi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}.$$

En el primer grupo de axiomas, los Axiomas de Incidencia, se mencionan a los subconjuntos llamados *rectas*. Debemos especificar entonces cuáles subconjuntos de  $\pi$  serán considerados rectas hiperbólicas. El conjunto de rectas será  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ , con

$$\mathcal{R}_1 = \{\pi \cap R \mid R \text{ es recta vertical en } \mathbb{R}^2\}, \text{ y}$$

$$\mathcal{R}_2 = \{\pi \cap \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \text{ es una circunferencia de } \mathbb{R}^2 \text{ de centro } (x_0, 0), x_0 \in \mathbb{R}\}.$$

NOTACIÓN:

- Denotaremos por  $R_x$  a la recta hiperbólica perteneciente a  $\mathcal{R}_1$  cuyo origen, vista como semirrecta de  $\mathbb{R}^2$ , es  $(x, 0)$ , para cualquier  $x \in \mathbb{R}$ . Denotaremos  $R_{x,r}$  a la recta hiperbólica perteneciente a  $\mathcal{R}_2$  que, vista como semicircunferencias en  $\mathbb{R}^2$ , tiene centro  $(x, 0)$  y radio  $r$ .
- En el contexto del modelo del semiplano superior, llamaremos  $\mathbb{R}$  a la recta euclídea  $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ . A sus puntos los denotaremos por  $x$  o  $(x, 0)$ , indistintamente. Recordemos que  $\mathbb{R} \cap \pi = \emptyset$ .

Veamos que este modelo cumple los Axiomas de Incidencia.

## Axiomas de incidencia

AI-1 El plano  $\pi$  es un conjunto infinito cuyos elementos se llaman puntos.

AI-2 Las rectas son subconjuntos propios de  $\pi$ .

AI-3 Dados  $a, b \in \pi$ ,  $a \neq b$ , existe una única recta  $A$  tal que  $a, b \in A$ . La denotamos  $\overleftrightarrow{ab}$ .

**Demostración:** Claramente el modelo del semiplano superior cumple los primeros dos axiomas. Verifiquemos el tercero.

Sean  $a = (a_1, a_2)$ ,  $b = (b_1, b_2) \in \pi$ .

- Si  $a_1 = b_1$ , la recta hiperbólica  $R_{a_1}$  contiene a los puntos  $a$  y  $b$ , y claramente es la única recta en  $\mathcal{R}_1$  que cumple esto. Además, si existiera una recta hiperbólica en  $\mathcal{R}_2$  que contuviese a los puntos  $a$  y  $b$ , su centro como semicircunferencia de  $\mathbb{R}^2$  estaría en la mediatriz de  $\overline{ab}$  intersección  $\mathbb{R}$ , pero esta mediatriz es paralela a  $\mathbb{R}$ . *Absurdo*.
- Si  $a_1 \neq b_1$ , es claro que no existe recta en  $\mathcal{R}_1$  que pase por  $a$  y  $b$ . Por otro lado, la mediatriz (euclídea) de  $\overline{ab}$  corta a  $\mathbb{R}$  en un punto  $x_0 = (x_0, 0)$ . Si llamamos  $r$  a la longitud de  $\overline{ax_0}$ , entonces  $R_{x_0, r}$  contiene a los puntos  $a$  y  $b$ . La unicidad es evidente.

Luego, dados dos puntos, existe una única recta que pasa por ellos. ■

NOTACIÓN: Para no confundirnos entre los objetos geométricos euclídeos y sus correspondientes en el modelo del semiplano superior del plano hiperbólico, destacaremos a los objetos geométricos euclídeos con un subrayado de puntos. Por ejemplo:

- denotamos por  $\overleftrightarrow{\underline{ab}}$  a la única recta euclídea que pasa por  $a$  y  $b$ ,
- denotamos por  $\overleftrightarrow{\overline{ab}}$  a la única recta hiperbólica que pasa por  $a$  y  $b$ ,
- recta será una recta euclídea, y
- recta (sin subrayar) será una recta del plano hiperbólico.

**Lema 2.1** Sean  $a, b \in \pi$  tales que  $a_1 \neq b_1$ . Entonces,  $\overleftrightarrow{\overline{ab}} = R_{o, r}$ , donde  $o = \frac{|a|^2 - |b|^2}{2(a_1 - b_1)}$ .

**Demostración:** Sea  $M$  la mediatriz de  $\overline{ab}$ ,  $M = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \overline{ax} \equiv \overline{bx}\}$ . Entonces,  $o \in \mathbb{R}$  debe satisfacer que  $(o, 0) \in M$ . Luego, tenemos que

$$\begin{aligned} (o - b_1)^2 + (0 - b_2)^2 &= (o - a_1)^2 + (0 - a_2)^2, \\ o^2 - 2ob_1 + b_1^2 + b_2^2 &= o^2 - 2oa_1 + a_1^2 + a_2^2. \end{aligned}$$

Despejando  $o$ , obtenemos  $o = \frac{|a|^2 - |b|^2}{2(a_1 - b_1)}$ , como queríamos. ■

OBSERVACIÓN: También se puede calcular el radio  $r$ . Por Teorema de Pitágoras, se obtiene que  $r^2 = (o - a_1)^2 + a_2^2$ . No colocamos esto en el teorema anterior porque no lo usaremos en el trabajo, debido a que la expresión incluye un  $r^2$  (o bien,  $r$  es igual a la raíz cuadrada de una expresión) y esto se vuelve muy engorroso en otros contextos.

## Axiomas de orden

AII-1 Las rectas tienen un orden estricto y total que denotamos  $<$ .

AII-2 Dada una recta  $A$ , se cumplen:

- a) Si  $p \in A$ ,  $\exists r, s \in A$  tales que  $r < p < s$ .
- b) Si  $p, q \in A$ , con  $p \neq q$  y  $p < q$ , entonces  $\exists r \in A$  tal que  $p < r < q$ .

AII-3 Para toda recta  $A$ , se tiene que  $A^c = \alpha \cup \beta$ , donde:

- a)  $\alpha$  y  $\beta$  son subconjuntos convexos de  $\pi$  que llamaremos semiplanos.
- b) Si  $p \in \alpha$  y  $q \in \beta$ , entonces  $\overline{pq}$  interseca a  $A$ .

### Demostración:

AII-1 Sea  $A$  una recta.

- Si  $A \in \mathcal{R}_1$ ,  $A = R_x$  para algún  $x$ . Definimos  $(x, a) < (x, b)$  en  $A$  si  $a < b$  con el orden usual de  $\mathbb{R}$ .
- Si  $A \in \mathcal{R}_2$ , definimos  $(a_1, a_2) < (b_1, b_2)$  en  $A$  si  $a_1 < b_1$  en  $\mathbb{R}$ .

Es fácil ver que estas relaciones son un orden estricto y total.

AII-2 El orden recién definido hereda estas propiedades del orden de  $\mathbb{R}$ .

AII-3 a) Dividimos en dos casos:

**Caso 1:** Si  $A \in \mathcal{R}_1$ , con  $A = R_x$ , veamos que los subconjuntos  $\alpha = \{p = (p_1, p_2) \in \pi : p_1 > x\}$  y  $\beta = \{p = (p_1, p_2) \in \pi : p_1 < x\}$  son convexos.

Sean  $a, b \in \alpha$ .

- Si  $\overleftrightarrow{ab} \in \mathcal{R}_1$ ,  $a_1 = b_1 = y > x$ , por lo que  $\overleftrightarrow{ab} \subseteq \alpha$ .
- Si  $\overleftrightarrow{ab} \in \mathcal{R}_2$  y  $c \in \overline{ab}$  con  $a < b$ , entonces  $a < c < b$  y  $x < a_1 < c_1 < b_1$ . Luego,  $c \in \alpha$ .

El caso del semiplano  $\beta$  es análogo.

**Caso 2:** Si  $A \in \mathcal{R}_2$ , con  $A = R_{o,r}$ , definimos los semiplanos  $\alpha = \{(p_1, p_2) : (p_1 - o)^2 + p_2^2 < r^2\}$  y  $\beta = \{(p_1, p_2) : (p_1 - o)^2 + p_2^2 > r^2\}$ .

Sean  $a, b \in \alpha$  y  $c \in \overline{ab}$ . Supongamos  $a < c < b$ .

- Si  $\overleftrightarrow{ab} \in \mathcal{R}_1$ ,  $|\overline{oc}| < |\overline{ob}|$  y, como  $|\overline{ob}| < r$ , obtenemos  $c \in \alpha$ .
- Si  $\overleftrightarrow{ab} \in \mathcal{R}_2$ , con  $\overleftrightarrow{ab} = R_{o',r'}$ , miramos en qué semiplano respecto de  $\overleftrightarrow{o'c}$  está  $o$ . Supongamos que está en el mismo semiplano que  $b$ . Entonces, como podemos observar en la Figura 2.1, tenemos que

$$\sphericalangle oac < \sphericalangle o'ac \equiv \sphericalangle o'ca < \sphericalangle oca.$$

Como se cumple que, en un triángulo, a mayor ángulo se opone mayor lado, en  $\triangle aoc$  se tiene que  $|\overline{oa}| > |\overline{oc}|$  y, como  $|\overline{oa}| < r$ , obtenemos que  $c \in \alpha$ .

El caso de  $o \in \overleftrightarrow{(\overrightarrow{o'c})}_b$  y el caso del semiplano  $\beta$  es análogo.

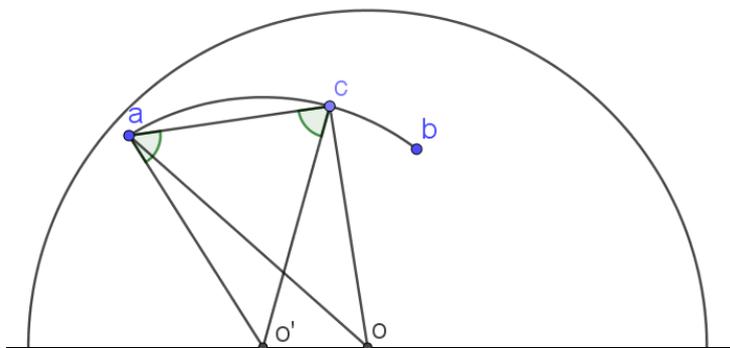


Figura 2.1:  $\angle oac < \angle oca$ .

En realidad, con la demostración del último caso probamos que:

**Lema 2.2** Sea  $c \in \overline{ab}$  y  $o \in \mathbb{R}$ . Entonces:  $\overline{oa} < \overline{oc} < \overline{ob}$  o bien  $\overline{oa} > \overline{oc} > \overline{ob}$

Completaremos ahora la demostración de AII-3 usando este lema:

AII-3 b) **Caso 1:**  $A \in \mathcal{R}_1$ . En este caso, existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $A = R_x$ . Si  $p$  y  $q$  están en distintos semiplanos respecto a  $A$ ,  $\overleftrightarrow{pq} \in \mathcal{R}_2$ . Supongamos  $p < q$ . Sean  $o, r$  tales que  $\overleftrightarrow{pq} = R_{o,r}$ . Observar que  $x$  es un punto interior a  $\mathcal{C}_{o,r}$ . Luego,  $A$  interseca a  $\mathcal{C}_{o,r}$  en  $a = (a_1, a_2)$  con  $x = a_1$ . Luego,  $p_1 < a_1 < q_1$  y, por lo tanto,  $a \in \overline{pq}$ .

**Caso 2:**  $A \in \mathcal{R}_2$ . Si  $\overleftrightarrow{pq} \in \mathcal{R}_1$ ,  $A$  interseca a  $\overline{pq}$  por la misma razón que en el caso anterior. Si  $\overleftrightarrow{pq} \in \mathcal{R}_2$ , es claro que  $\overleftrightarrow{pq}$  interseca a  $A$  en algún punto  $a$ . Puede ser que  $q \in \overline{pa}$ ,  $p \in \overline{aq}$  o  $a \in \overline{pq}$ . Por el Lema 2.2, como  $\overline{op} < \overline{oa} < \overline{oq}$ , la única posibilidad es que  $a \in \overline{pq}$ .

■

## 2.2. Axiomas de rigidez: Las transformaciones rígidas

En esta sección, cobran especial relevancia los llamados pares semirrecta-semiplano. Recordemos que  $(A, \alpha)$  es un *par semirrecta-semiplano* si  $A$  es una semirrecta y  $\alpha$  es un semiplano respecto a  $A$ . Además de los puntos, segmentos, semirrectas, rectas y semiplanos, un concepto esencial para la geometría es el de *transformación rígida*. Las transformaciones rígidas son movimientos del plano que llevan un objeto geométrico a otro del mismo tipo. Están descritas por el siguiente conjunto de axiomas, llamados Axiomas de Rigidez.

## Axiomas de rigidez

AIII-1 Toda transformación rígida es una biyección de  $\pi$  en  $\pi$  que lleva semirrectas en semirrectas.

AIII-2 a) Si  $T$  y  $S$  son transformaciones rígidas,  $T \circ S$  también lo es.

b) Si  $T$  es una transformación rígida, su inversa también lo es.

AIII-3 a) Si  $\overline{ab} \equiv \overline{cd}$  y  $\overline{cd} \subseteq \overline{ab}$ , entonces  $\overline{ab} = \overline{cd}$ .

b) Si  $\angle aob \equiv \angle cod$  y  $\text{sec}(\angle cod) \subseteq \text{sec}(\angle aob)$ , entonces  $\angle aob = \angle cod$ .

AIII-4 Dados dos pares de semirrecta-semiplano  $(A, \alpha)$ ,  $(B, \beta)$ , existe una única transformación rígida  $T$  tal que  $T(A, \alpha) = (B, \beta)$ .

Es claro que para probar que el modelo del semiplano superior cumple con estos axiomas debemos explicitar el conjunto  $\mathcal{T}$  de transformaciones rígidas. Creemos natural considerar las simetrías axiales respecto a las semirrectas verticales (rectas en  $\mathcal{R}_1$ ) restringidas al semiplano superior como transformaciones rígidas. Sin embargo, no deberían ser éstas rectas distinguidas, es decir, debería haber transformaciones similares para las rectas en  $\mathcal{R}_2$ . Así es como aparecen las inversiones o reflexiones por una circunferencia<sup>1</sup>. La inversión respecto a una circunferencia (recta en  $\mathcal{R}_2$ ) es análoga en muchos aspectos a la simetría central respecto a una recta en  $\mathcal{R}_1$ .

NOTACIÓN:

- Si  $A \in \mathcal{R}_1$ , denotaremos por  $S_A$  a la simetría axial respecto a  $A$  restringida a  $\pi$ .
- Si  $A \in \mathcal{R}_2$ , denotaremos por  $S_A$  a la inversión respecto a  $A$  restringida a  $\pi$ . Notemos que esto tiene sentido porque, en este caso,  $A$  es una semicircunferencia.

Dada  $A \in \mathcal{R}$ , diremos que  $S_A$  es la *simetría axial* respecto a  $A$ . Notemos que  $S_A(A, \alpha) = (A, \check{\alpha})$ , sin importar si  $A \in \mathcal{R}_1$  o  $A \in \mathcal{R}_2$ .

**Definición 2.3** Si  $\mathcal{T}_1 = \{S_A : A \in \mathcal{R}_1\}$  y  $\mathcal{T}_2 = \{S_A : A \in \mathcal{R}_2\}$ , denotaremos por  $\mathcal{T}$  al grupo (con la operación composición) generado por  $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ .

Proponemos  $\mathcal{T}$  como el grupo de transformaciones rígidas en  $\pi$ . Veremos, a lo largo de esta sección, que se satisfacen los axiomas de rigidez, comenzando por los primeros dos.

**Demostración:**

AIII-1 Se deduce fácilmente de las propiedades de la simetría axial y de la inversión. Como  $\mathcal{T}$  está generado por estas transformaciones, todas son biyecciones y llevan semirrectas en semirrectas.

---

<sup>1</sup>La denominación “reflexión por una circunferencia” se extrajo de [Ya], que da un curioso argumento de por qué las inversiones deberían ser llamadas así. Esta y muchas otras propiedades de las inversiones se analizan en este libro.

AIII-2 Este axioma afirma que el conjunto de las transformaciones rígidas junto con la composición es un grupo. Esto es evidente por cómo definimos  $\mathcal{T}$ .

■

Para probar que valen los demás axiomas, debemos estudiar mejor cuál es este grupo de transformaciones rígidas.

### Algunas transformaciones rígidas y su efecto en un par semirrecta-semiplano

A continuación, se mostrará en las Figuras 2.2, 2.3, 2.4, 2.5 y 2.6, el efecto sobre el par  $(A, \alpha)$  de algunas funciones que están en  $\mathcal{T}$ . Consideramos  $A$  la semirrecta de origen  $i = (0, 1)$  que pasa por  $2i = (0, 2)$  y  $\alpha = \{(p_1, p_2) \in \pi \mid p_1 < 0\}$ .

En la Figura 2.2, la transformación es la simetría axial  $S_A$ . Notemos que  $S_A(A, \alpha) = (A, \check{\alpha})$ . Si  $T$  es composición de dos de estas funciones, es decir, si  $T$  es una traslación por un vector paralelo al eje  $x$ , entonces  $T$  es transformación rígida. Esta transformación está representada en la Figura 2.3.

Por otro lado, sea  $I = S_B$ , donde  $B = R_{0,1}$ . Esta inversión cumple que  $I(A, \alpha) = (\check{A}, \alpha)$ , como se muestra en la Figura 2.4. Además, si  $B = R_{0,r}$ , entonces  $S_B(i) = r^2i$ . Luego, variando  $r$  podemos llevar  $A$  a una semirrecta de origen  $(0, y)$ , para cualquier  $y > 0$ , como ilustra la Figura 2.5.

Por último, si  $B = R_{o,r}$ , entonces  $S_B(i) = a$ , con  $|\overline{oa}| |\overline{oi}| = r^2$ . Luego, variando  $r$  y  $o$  podemos llevar la semirrecta a  $A$  a una semirrecta de origen  $a$ , como se puede ver en la Figura 2.6. Dado  $a \in \pi$ , determinamos  $o$  mirando la intersección de  $\overleftarrow{ai}$  con  $\mathbb{R}$  y fijamos  $r$  para que se cumpla  $|\overline{oa}| |\overline{oi}| = r^2$ . Notemos que, si  $o \neq 0$ ,  $S_B(A)$  es una semirrecta contenida en una recta de  $\mathcal{R}_2$ .

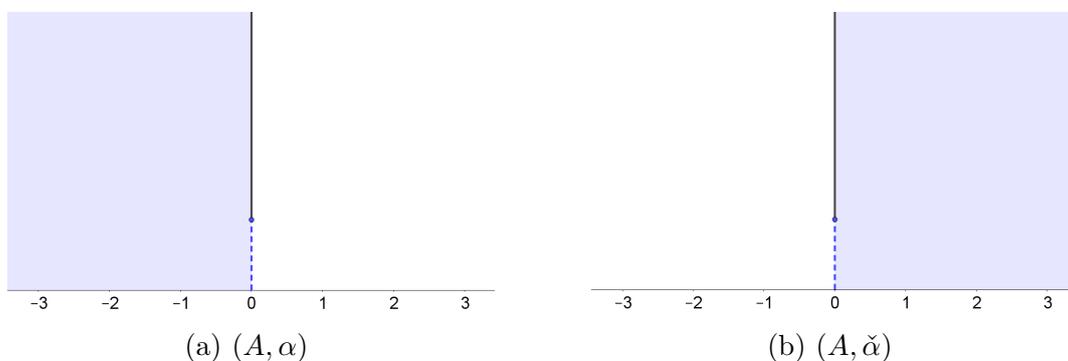


Figura 2.2:  $S_A(A, \alpha) = (A, \check{\alpha})$ .

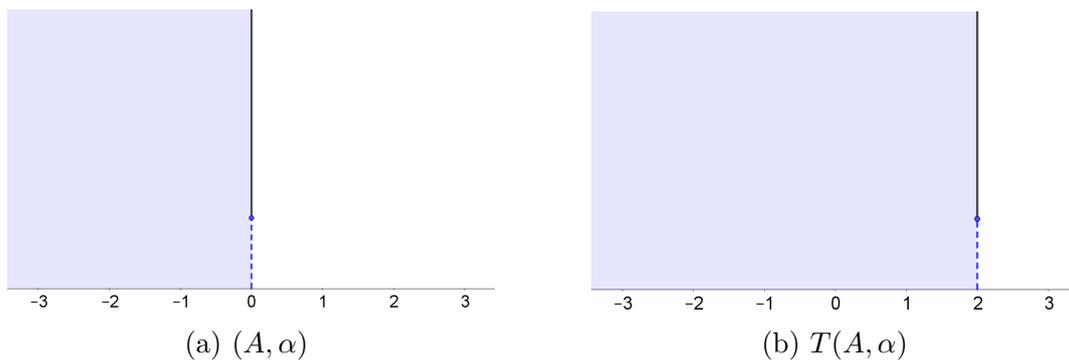


Figura 2.3:  $T$  es una traslación horizontal.

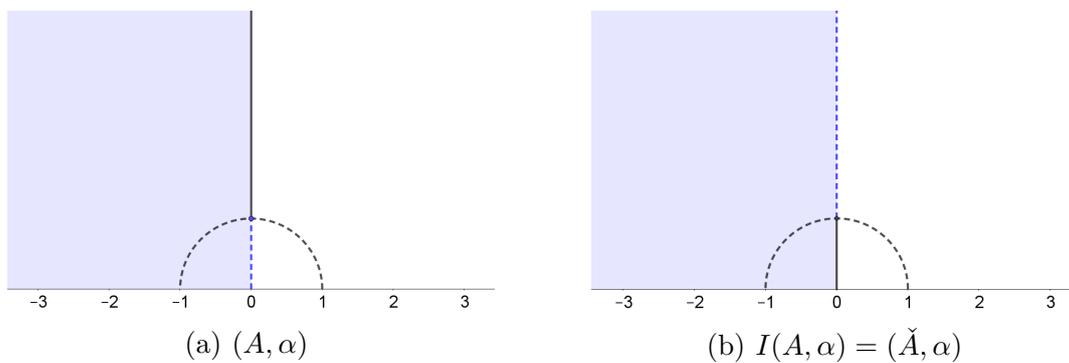


Figura 2.4:  $I$  es una inversión por la circunferencia de línea de puntos.

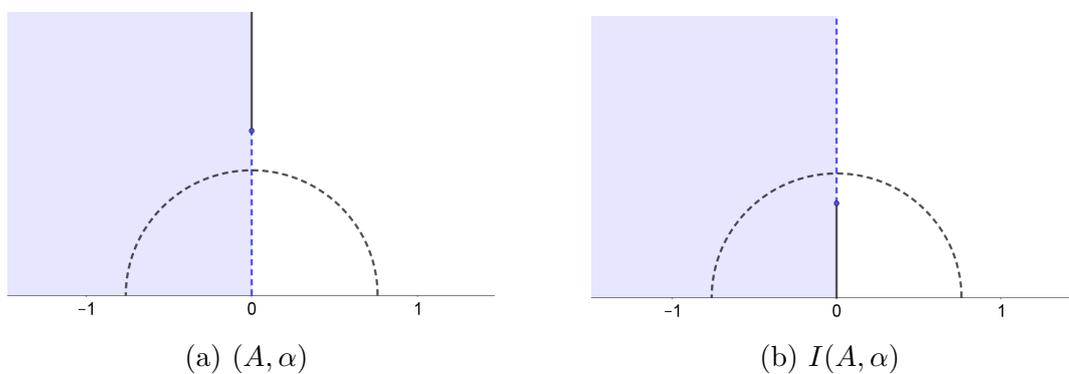


Figura 2.5:  $I$  es una inversión por la circunferencia de línea de puntos.

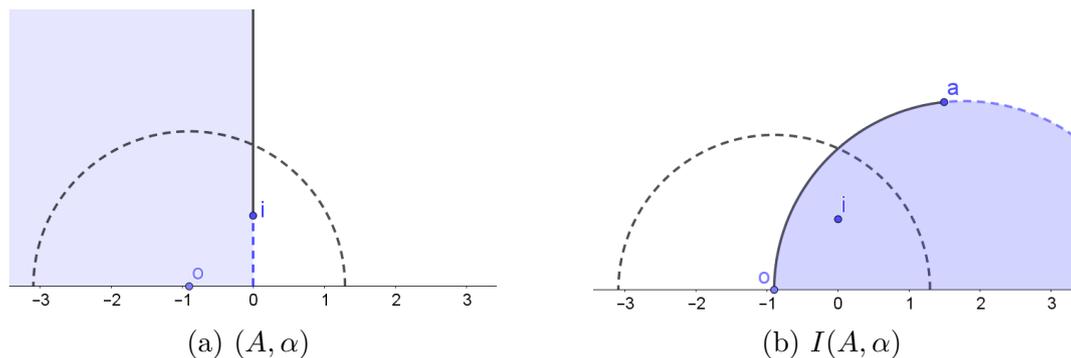


Figura 2.6:  $I$  es una inversión por la circunferencia de línea de puntos.

**OBSERVACIÓN:** Con una composición de las transformaciones que se mostraron en las figuras 2.2, 2.3, 2.4, 2.5 y 2.6 se puede llevar cualquier semirrecta contenida en una recta de  $\mathcal{R}_1$  a cualquier otra de este tipo. Además, la transformación de la Figura 2.6 y su inversa relacionan las semirrectas contenidas en rectas de  $\mathcal{R}_2$  con las contenidas en las de  $\mathcal{R}_1$ . De esto, se deduce la Proposición 2.4.

**Proposición 2.4** *Dados dos pares de semirrecta-semiplano  $(A, \alpha)$ ,  $(B, \beta)$ , existe una transformación rígida  $T$  tal que  $T(A, \alpha) = (B, \beta)$ .*

Una forma de entender mejor cuál es el grupo de transformaciones rígidas es dar una parametrización del mismo. Para esto, escribiremos las transformaciones en coordenadas.

Daremos a continuación una lista con algunas transformaciones rígidas escritas en coordenadas. En todos los casos,  $z$  es una variable compleja en  $\pi$ .

**Lema 2.5** (Transformaciones rígidas en coordenadas)

*Valen las siguientes afirmaciones:*

- a) Si  $A = R_a \in \mathcal{R}_1$ ,  $S_A(z) = 2a - \bar{z}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .
- b) Si  $A = R_{o,r} \in \mathcal{R}_2$ ,  $S_A(z) = \frac{r^2}{\bar{z}-o} + o$ , con  $o, r \in \mathbb{R}$ .
- c)  $f(z) = \frac{k}{\bar{z}}$  es transformación rígida para todo  $k \in \mathbb{R}_{>0}$ .
- d)  $g(z) = kz$  es transformación rígida para todo  $k \in \mathbb{R}^+$ .
- e)  $-\frac{1}{\bar{z}}$  es también transformación rígida.
- f)  $h(z) = z + b$  es transformación rígida para todo  $b \in \mathbb{R}$ .

**Demostración:**

- a) Es evidente de la definición de  $S_A$ .
- b) Ídem.
- c) Sale de usar el inciso anterior, con  $o = 0$  y  $r^2 = k$ .

- d) Componiendo dos funciones del inciso anterior,  $\frac{k}{z}$  y  $\frac{1}{z}$ , obtenemos que  $g(z) = kz$  es transformación rígida para todo  $k \in \mathbb{R}^+$ .
- e) Componiendo las funciones  $\frac{1}{z}$  y  $-\bar{z}$ , obtenemos que  $-\frac{1}{z}$  es también transformación rígida.
- f) Componiendo dos funciones del inciso a),  $2a - \bar{z}$  y  $2\left(a + \frac{b}{2}\right) - \bar{z}$ , obtenemos que  $h(z) = z + b$  es transformación rígida para todo  $b \in \mathbb{R}$ .

■

**Definición 2.6** Definimos los siguientes conjuntos:

- $\mathbb{T}^+ = \{f : \pi \rightarrow \pi \mid f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \text{ con } a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc > 0\}$ ,
- $\mathbb{T}^- = \{f : \pi \rightarrow \pi \mid f(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}, \text{ con } a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc < 0\}$ ,
- $\mathbb{T} = \mathbb{T}^+ \cup \mathbb{T}^-$ .

**Lema 2.7** Sean  $\mathbb{T}$  y  $\mathcal{T}$  los conjuntos de las Definiciones 2.6 y 2.3, respectivamente. Entonces,  $\mathbb{T} \subseteq \mathcal{T}$ .

**Demostración:**

Veremos que  $\mathbb{T}^+ \subseteq \mathcal{T}$  y  $\mathbb{T}^- \subseteq \mathcal{T}$ .

- Sea  $T \in \mathbb{T}^+$ . Entonces  $T(z) = \frac{Az+B}{Cz+D}$  con  $A, B, C, D \in \mathbb{R}$  y  $AD - BC > 0$ . Podemos asumir  $C \geq 0$ . Si no, cambiamos por  $T(z) = \frac{(-A)z+(-B)}{(-C)z+(-D)}$ .
- ♦ Supongamos  $C = 0$ . Escribimos  $T(z) = A'z + B'$ , con  $A' = \frac{A}{D}$ ,  $B' = \frac{B}{D}$ . Como  $AD - BC > 0$ ,  $AD > 0$  y  $A' > 0$ . Entonces, componiendo funciones que ya sabemos que están en  $\mathcal{T}$  por el Lema 2.5, obtenemos

$$z \xrightarrow{d)} A'z \xrightarrow{f)} A'z + B',$$

por lo que  $T \in \mathcal{T}$ .

- ♦ Supongamos ahora  $C > 0$ . Definimos  $a = C$ ,  $b = D$ ,  $c = \frac{A}{C}$ ,  $k = -B + \frac{AD}{C}$ . Como  $kC = AD - BC > 0$  y  $C > 0$ , tenemos que  $k, a > 0$ , lo que permite hacer la siguiente composición de funciones en  $\mathcal{T}$ :

$$z \xrightarrow{d)} az \xrightarrow{f)} az + b \xrightarrow{c)} \frac{k}{a\bar{z} + b} \xrightarrow{a)} \frac{-k}{az + b} \xrightarrow{f)} \frac{-k}{az + b} + c,$$

por lo que la función  $f(z) = \frac{-k}{az+b} + c$  está en  $\mathcal{T}$ . Ahora,

$$\frac{-k}{az + b} + c = \frac{-k + caz + bc}{az + b} = \frac{Az + B}{Cz + D} = T(z),$$

y, por lo tanto,  $T \in \mathcal{T}$ .

- Sea  $T \in \mathbb{T}^-$ . Luego,  $T(z) = \frac{A\bar{z}+B}{C\bar{z}+D}$  con  $AD - BC < 0$ . Procederemos análogamente al caso anterior.
  - ♦ Si  $C = 0$ ,  $AD < 0$  y  $T(z) = A'\bar{z} + B'$ , con  $A' = \frac{A}{D} > 0$  y  $B' = \frac{B}{D}$ . Luego,  $z \mapsto -\bar{z} \mapsto -(-A')\bar{z} \mapsto A'\bar{z} + B'$  muestra que  $T$  es composición de funciones en  $\mathcal{T}$ , por lo que  $T \in \mathcal{T}$ .
  - ♦ Si  $C > 0$ , definimos  $a = C$ ,  $b = D$ ,  $c = \frac{A}{C}$ ,  $k = B - \frac{DA}{C}$  y, como antes, tenemos que  $a > 0$  y  $k > 0$ . Componiendo funciones en  $\mathcal{T}$ , obtenemos

$$z \mapsto az \mapsto az + b \mapsto \frac{k}{a\bar{z} + b} \mapsto \frac{k}{a\bar{z} + b} + c$$

$$\text{Como } \frac{k}{a\bar{z} + b} + c = \frac{A\bar{z} + B}{C\bar{z} + D} = T(z), T \in \mathcal{T}.$$

■

**Definición 2.8** Sean  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  y  $z \in \mathbb{C}$ . Definimos la operación  $\cdot$  de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}$$

Esto define una acción  $\cdot : \text{GL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , ya que

- $I \cdot z = \frac{1z+0}{0z+1} = z$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ .
- Sean  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ .

Entonces,

$$\begin{aligned} A \cdot (B \cdot z) &= \frac{\frac{a}{rz+s}pz + \frac{b}{rz+s} + q}{\frac{c}{rz+s}pz + \frac{d}{rz+s} + s} \\ &= \frac{apz + aq + brz + bs}{rz + s} \frac{rz + s}{cpz + cq + drz + sd} \\ &= \frac{(ap + br)z + (aq + bs)}{(cp + dr)z + (cq + ds)} \\ &= \begin{pmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix} \cdot z \\ &= \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \right) \cdot z \\ &= (AB) \cdot z. \end{aligned}$$

**Lema 2.9** Sean  $\mathbb{T}$  y  $\mathcal{T}$  los conjuntos de las Definiciones 2.6 y 2.3 respectivamente. Entonces,  $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{T}$ .

**Demostración:**

Basta ver que  $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \subseteq \mathbb{T}$  y que  $\mathbb{T}$  es cerrado por composiciones.

- Sea  $T \in \mathcal{T}_2$ . Entonces  $T(z) = \frac{r^2}{\bar{z}-o} + o$ , donde  $r, o \in \mathbb{R}$ . Reacomodando, se obtiene que  $T(z) = \frac{o\bar{z}+(r^2-o^2)}{\bar{z}-o}$ . Además,  $o(-o) - (r^2 - o^2) = -r^2 < 0 \therefore T \in \mathbb{T}^-$ .
- Sea  $T \in \mathcal{T}_1$ . Entonces  $T(z) = 2a - \bar{z}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Luego,  $T(z) = \frac{-\bar{z}+2a}{0\bar{z}+1}$  y, como  $(-1) - 0(2a) = -1 < 0$ , obtenemos que  $T \in \mathbb{T}^-$ . Con esto, concluimos que  $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \subseteq \mathbb{T}$ .
- Veamos ahora que  $\mathbb{T}$  es cerrado por la composición.

Notar que, si llamamos  $\text{Conj}$  a la función tal que  $\text{Conj}(z) = \bar{z}$ , e identificamos a las matrices  $A$  en  $\text{GL}(2, \mathbb{R})$  con la función  $\cdot(A, *)$ , se cumple que  $\text{Conj} \circ A = A \circ \text{Conj}$ , para toda  $A \in \text{GL}(2, \mathbb{R})$ . De esta manera,  $\mathbb{T}^+ = \{A \in \text{GL}(2, \mathbb{R}) : \det(A) > 0 \text{ y } \mathbb{T}^- = \{A \circ \text{Conj} : A \in \text{GL}(2, \mathbb{R}), \det(A) < 0\}$ .

Luego, si  $T \in \mathbb{T}$ ,  $T = A \circ \text{Conj}^k$ , donde el signo de  $\det(A)$  es  $(-1)^k$ . Ahora, consideremos otro elemento de  $\mathbb{T}$ ,  $U$ . Entonces,  $U = B \circ \text{Conj}^l$ , con  $B \in \text{GL}(2, \mathbb{R})$ . Veamos que  $T \circ U \in \mathbb{T}$ .

$$T \circ U = A \circ \text{Conj}^k \circ B \circ \text{Conj}^l = (AB) \circ \text{Conj}^{k+l} =$$

y, como el signo de  $\det(AB)$  es  $(-1)^{k+l}$ , obtenemos que  $T \circ U \in \mathbb{T}$ .

■

De los lemas 2.7 y 2.9, obtenemos que  $\mathbb{T} = \mathcal{T}$ , es decir, ahora tenemos otra manera de describir el grupo de transformaciones rígidas. Con esto, probaremos el último de los Axiomas de Rigidez.

## Axiomas de rigidez

AIII-4 Dados dos pares de semirrecta-semiplano  $(A, \alpha)$ ,  $(B, \beta)$ , existe una única transformación rígida  $T$  tal que  $T(A, \alpha) = (B, \beta)$ .

### Demostración:

Por la Proposición 2.4, ya sabemos que existe tal transformación rígida. Si hubiera dos,  $T$  y  $U$ , entonces  $T^{-1} \circ U(A, \alpha) = (A, \alpha)$ . Es así que podemos asumir que  $(A, \alpha) = (B, \beta)$ . Además, si  $V$  es una transformación rígida tal que  $V(A, \alpha) = (C, \gamma)$ ,  $V \circ T \circ V^{-1}(C, \gamma) = (C, \gamma)$ . Por lo que podemos suponer que  $(A, \alpha)$  es un par semirrecta-semiplano en particular.

De esta manera, solo basta probar que la identidad es la única transformación rígida que lleva  $(A, \alpha)$  en sí mismo, donde  $A$  es la semirrecta de origen  $i$  que pasa por  $2i$ , y donde  $\alpha$  es el semiplano  $\{(x, y) \in \pi : x > 0\}$ . Sea  $T \in \mathbb{T}$  tal que  $T(A, \alpha) = (A, \alpha)$ . Hay dos casos, dependiendo de si  $T \in \mathbb{T}^+$  o  $T \in \mathbb{T}^-$ .

**Caso 1:**  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ .

Como  $T(i) = i$ , tenemos que  $ai + b = (ci + d)i = di - c$ , por lo que  $d = a$  y  $c = -b$ . Luego,  $T(z) = \frac{az+b}{-bz+a}$ . Además,  $T$  debe llevar  $R_0$  a sí misma, es decir  $T(ti)$  debe ser

imaginario puro para todo  $t > 0$ . Calculamos  $T(ti)$ :

$$\begin{aligned} T(ti) &= \frac{ati + b}{-bti + a} \\ &= \frac{(ati + b)(a + bti)}{(a - bti)(a + bti)} \\ &= \frac{a^2ti - abt^2 + ba + b^2ti}{a^2 + b^2t^2} \\ &= \frac{(ba - abt^2) + it(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2t^2}. \end{aligned}$$

Como  $T(ti)$  debe ser imaginario puro,  $ba - abt^2 = 0 = ab(1 - t^2)$  para todo  $t > 0$ . Luego,  $a = 0$  o  $b = 0$ .

- Si  $a = 0$ ,  $T(z) = \frac{b}{-bz} = -\frac{1}{z}$ . Pero entonces  $T(2i) = \frac{1}{2}i \notin A$ . *Absurdo*.
- Si  $b = 0$ ,  $T(z) = z$  y  $T = \text{id}$ , como queríamos.

**Caso 2:**  $T(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ .

Análogamente al caso anterior,  $T(i) = i \implies -ai + b = i(-ci + d) = di + c$ , por lo que  $d = -a$ ,  $c = b$ , y  $T(z) = \frac{a\bar{z}+b}{b\bar{z}-a}$ . De la misma manera que en el caso anterior, calculamos ahora  $T(ti)$ :

$$\begin{aligned} T(ti) &= \frac{-ati + b}{-bti - a} \\ &= \frac{(ati - b)(a - bti)}{(a + bti)(a - bti)} \\ &= \frac{(abt^2 - ab) + it(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2t^2}. \end{aligned}$$

Como  $T(ti)$  debe ser imaginario puro,  $abt^2 - ab = 0$  para todo  $t > 0$ . Al igual que en el caso anterior, debe ser  $a = 0$  o  $b = 0$ .

- Si  $a = 0$ ,  $T(z) = \frac{1}{\bar{z}}$  y  $T(2i) = -\frac{1}{2}i \notin \pi$ . *Absurdo*.
- Si  $b = 0$ ,  $T(z) = -\bar{z}$  y  $T(1) = -1 \notin \alpha$ . *Absurdo*.

Entonces la única posibilidad es  $T = \text{Id}$ . ■

Nos queda un solo axioma a probar y, para su demostración, necesitaremos primero la siguiente definición.

**Definición 2.10** En  $\mathbb{R}^2$  se define el ángulo entre dos circunferencias o entre una circunferencia y una recta secantes en  $o$  como el ángulo definido por las tangentes a las circunferencias en el punto  $o$  o por la tangente a la circunferencia y la recta, respectivamente.

**OBSERVACIÓN:** Las simetrías axiales y las inversiones preservan ángulos entre dos circunferencias o rectas.

AIII-3 a) Si  $\overline{ab} \equiv \overline{cd}$  y  $\overline{cd} \subseteq \overline{ab}$ , entonces  $\overline{ab} = \overline{cd}$ .

b) Si  $\angle aob \equiv \angle cod$  y  $\sec(\angle cod) \subseteq \sec(\angle aob)$ , entonces  $\angle aob = \angle cod$ .

**Demostración:**

a) Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $a, b, c,$  y  $d$  están en la recta  $R_0$  y, aún más, que  $a = i$  y  $a < b$ . Como  $\overline{ab} \equiv \overline{cd}$ , también podemos asumir (renombrando los puntos si fuera necesario), que existe  $T \in \mathcal{T}$  tal que  $T(a) = c$  y  $T(b) = d$ . Notemos que, como  $\overline{cd} \subseteq \overline{ab}$ , tenemos que  $a < c < b$  y  $a < d < b$ .

Como  $T(\overleftrightarrow{ab}) = \overleftrightarrow{cd}$ ,  $T(R_0) = R_0$ . Veamos cuáles transformaciones preservan esta recta.

Si  $T(z) = \frac{Az+B}{Cz+D}$  con  $AD - BC > 0$ ,

$$T(xi) = \frac{Axi + B}{Cxi + D} = \frac{(Axi + B)(-Cxi + D)}{|Cxi + D|^2}.$$

Luego,  $\text{Re}(T(xi)) = 0$  para todo  $x > 0 \iff \text{Re}((Axi + B)(-Cxi + D)) = 0 \forall x > 0 \iff BD + ACx^2 = 0 \forall x > 0$ . Por lo tanto,  $BD = AC = 0$ .

Como  $A$  y  $B$  no pueden ser nulos a la vez, y lo mismo ocurre con  $C$  y  $D$ , se obtiene que: o bien  $A = 0$  y  $D = 0$ , o bien  $C = 0$  y  $B = 0$ . Lo mismo pasa si  $T(z) = \frac{A\bar{z}+B}{C\bar{z}+D}$ . Luego,  $T$  debe ser la forma: 1)  $T(z) = \frac{k}{z}$ ; 2)  $T(z) = \frac{k}{\bar{z}}$ ; 3)  $T(z) = kz$ ; 4)  $T(z) = k\bar{z}$ , con  $k \in \mathbb{R}$ .

Sean  $b', c'$  y  $d'$  tales que  $b = b'i, c = c'i, d = d'i$ . Entonces,  $1 < c' < b'$  y  $1 < d' < b'$ . Sabemos, además, que  $T(a) = c$  y  $T(b) = d$ .

1) Si  $T(z) = \frac{k}{z}$ ,  $\frac{k}{i} = c'i$  y  $\frac{k}{b'i} = d'i$ . Luego,  $k = -c' = -b'd'$  pero  $c' < b' < b'd'$ . *Absurdo.*

2) Análogo al anterior.

3) Si  $T(z) = kz$ ,  $ki = c'i$  y  $kb'i = d'i$ . Luego,  $k = c'$  y  $k'b' = d'$ . Por lo tanto,  $k = c' > 1$  pero también, como  $b' > d' = kb'$ , tenemos que  $k < 1$ . *Absurdo.*

4) Análogo al anterior.

Luego, debe ser  $\overline{ab} = \overline{cd}$ , como queríamos.

b) Como  $\angle aob \equiv \angle cod$ , existe  $T \in \mathcal{T}$  tal que  $T(\angle aob) = \angle cod$ . Sean  $a', b', c', d'$  puntos tales que  $\overleftrightarrow{oa'}$  es tangente a la recta  $\overleftrightarrow{ud}$  (si  $\overleftrightarrow{ud} \in \mathcal{R}_1$ , tomamos  $a' \in \overleftrightarrow{ud}$ ),  $\overleftrightarrow{ob'}$  es tangente a  $\overleftrightarrow{bo}$  como se puede ver en las Figuras 2.7 y 2.8, y lo correspondiente con  $c'$  y  $d'$ . Entonces, por la observación anterior, debe cumplirse que  $\angle a'ob' \equiv \angle c'od'$ . Además, podemos tomar  $a'$  en el mismo semiplano que  $a$  respecto a  $\overleftrightarrow{ob}$  y lo análogo con los demás puntos.

De esta manera, es claro que  $\sec(\angle aob) \supseteq \sec(\angle cod) \iff \sec(\angle a'ob') \supseteq \sec(\angle c'od')$ .

Por el axioma AIII-3b) correspondiente a la geometría euclídea, como  $\angle a'ob' \equiv \angle c'od'$ , se obtiene que  $c' \in \overleftrightarrow{oa'}$  y  $d' \in \overleftrightarrow{ob'}$  (o al revés).

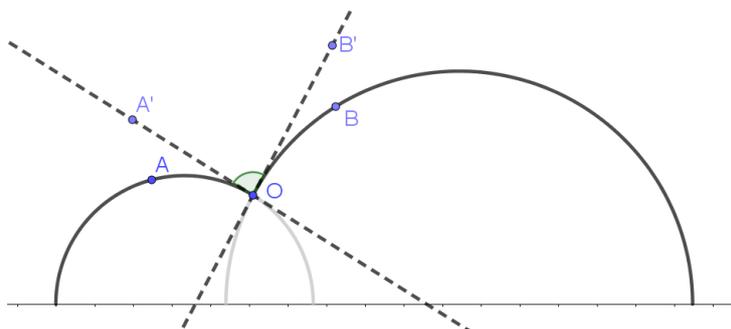


Figura 2.7: Ángulo entre dos semirectas cuyas rectas están en  $\mathcal{R}_2$ .

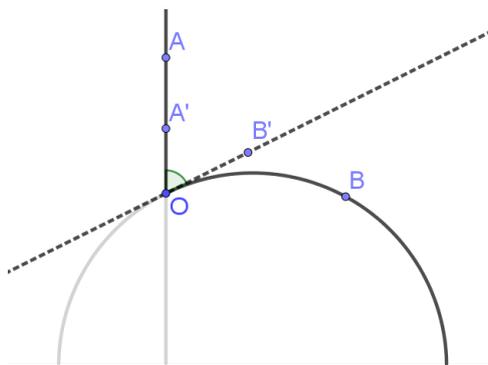


Figura 2.8: Ángulo entre dos semirectas cuyas rectas pertenecen: una a  $\mathcal{R}_1$  y otra a  $\mathcal{R}_2$ .

Usando que  $\vec{oa'} \equiv \vec{oc'}$ , veremos que  $\vec{oa} = \vec{oc}$ . Si  $\vec{oa'} \subseteq A \in \mathcal{R}_1$ ,  $A$  es la única recta en  $\mathcal{R}$  que es tangente a  $\vec{oa'}$ . Si no pasa esto, la recta perpendicular a  $\vec{oa'}$  por  $o$  interseca a  $\mathbb{R}$  en un punto  $p$ . Luego,  $A = R_{p, \vec{po}}$  es la única recta en  $\mathcal{R}$  que es tangente a  $\vec{oa'}$ . Por lo tanto,  $A = \vec{da} = \vec{dc}$  y, entonces,  $\vec{oa} = \vec{oc}$ .

■

### 2.3. La distancia hiperbólica

Notemos que dos segmentos que son congruentes, pueden no serlo respecto a las transformaciones rígidas hiperbólicas y viceversa, como se puede ver en la Figura 2.9. En esta sección, buscaremos una función distancia  $d : \pi \times \pi \rightarrow \mathbb{R}$ , que sea positiva y simétrica. Para esto, necesitamos entender cómo lucen en nuestro modelo segmentos congruentes entre sí.

#### Construcción geométrica del punto medio

Sean  $a, b \in \pi$ . Buscamos  $c \in \overline{ab}$  tal que  $\overline{ac} \equiv \overline{cb}$ .

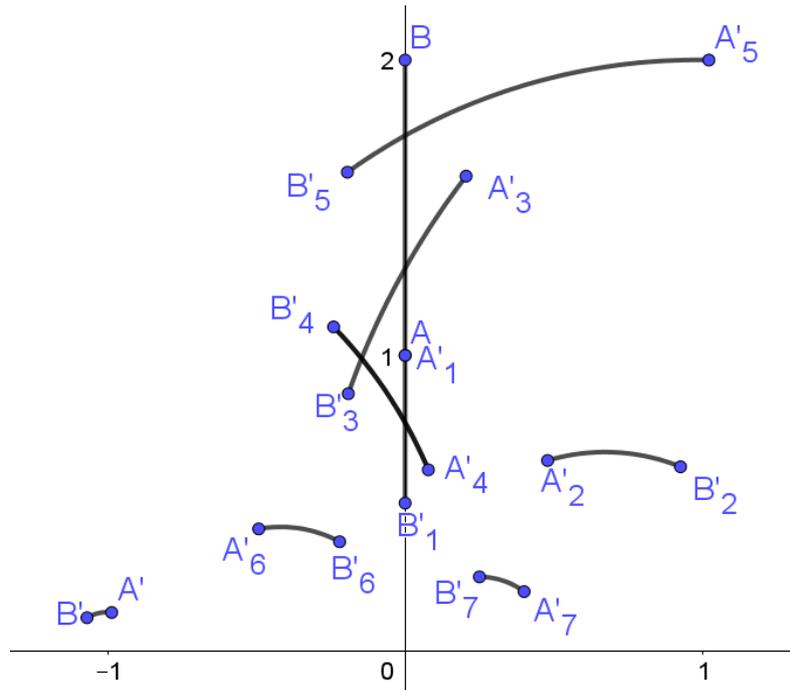


Figura 2.9: Algunos segmentos congruentes a  $\overline{AB}$ .

- Si  $\overleftrightarrow{ab} \in \mathcal{R}_1$ , entonces  $\overleftrightarrow{ab} = R_o$  para algún  $o \in \mathbb{R}$ . Construimos la circunferencia de diámetro  $\overline{ab}$ . Sea  $p$  en esta circunferencia tal que  $\overline{op}$  es tangente. Luego, construimos la circunferencia de centro  $o$  y radio  $\overline{op}$ , que corta a  $\overline{ab}$  en  $c$ , como se puede ver en la Figura 2.10. Si  $A = R_{o,\overline{op}}$ ,  $S_A(c) = c$  y  $S_A(a) = b$ , pues por potencia del punto  $o$ , se cumple  $|\overline{oa}||\overline{ob}| = |\overline{op}|^2 = |\overline{oc}|^2$ . Luego,  $\overline{ac} \equiv \overline{cb}$ .

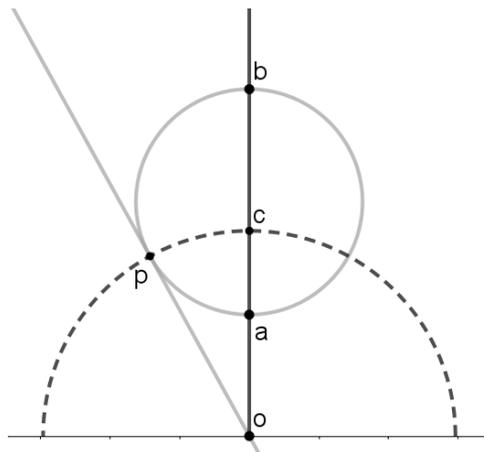


Figura 2.10:  $c$  es el punto medio de  $\overline{ab}$ .

- Si  $\overleftrightarrow{ab} \in \mathcal{R}_2$ , tenemos dos casos.

- ◆ Supongamos que  $\overleftrightarrow{ab}$  es paralela a  $\mathbb{R}$  y sea  $c$  el punto medio de  $\overline{ab}$ , es decir, la intersección de la mediatriz de  $\overline{ab}$  y  $\overleftrightarrow{ab}$ , como se puede ver en la Figura 2.11. Si  $c = (c_1, c_2)$  y  $A = R_{c_1}$ , entonces  $S_A(a) = b$  y  $S_a(c) = c$ , por lo que  $\overline{ac} \equiv \overline{cb}$ .

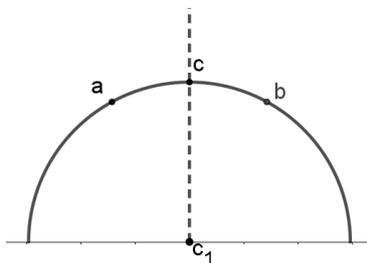


Figura 2.11:  $c$  es el punto medio de  $\overline{ab}$ .

- ◆ Supongamos que existe  $o \in \mathbb{R} \cap \overleftrightarrow{ab}$ . Sea  $c$  en  $\overleftrightarrow{ab}$  tal que  $\overline{oc}$  es tangente a  $\overleftrightarrow{ab}$ , como se puede ver en la Figura 2.12. Si  $A = R_{o, \overline{oc}}$ ,  $S_A(c) = c$  y  $S_A(a) = b$  pues, por potencia desde el punto  $o$ ,  $|\overline{oa}||\overline{ob}| = |\overline{oc}|^2$ . Luego,  $\overline{ac} \equiv \overline{cb}$ .

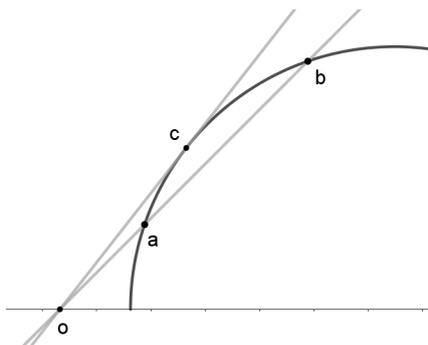


Figura 2.12:  $c$  es el punto medio de  $\overline{ab}$ .

La construcción geométrica del punto medio de un segmento nos ayudará a entender una idea más general, la de encontrar un segmento que sea  $r$  veces otro dado, con  $r$  algún número racional.

## Entendiendo $r \cdot \overline{ab}$

**Paso 1:**  $r = n \in \mathbb{N}$ .

Sean  $y_0 = (0, 1) = i$  y  $y_1 = (0, 2) = 2i$ . Para cada  $m \in \mathbb{N}$ , busquemos  $y_m \in \overleftrightarrow{y_0 y_1}$  tal que  $\overline{y_0 y_m} = m \cdot \overline{y_0 y_1}$ .

**Lema 2.11**  $y_m = 2^m i \quad \forall m \in \mathbb{N}$ .

**Demostración:**

Por inducción en  $m$ . Si  $m = 1$ ,  $y_1 = 2i = 2^1i$  y vale la afirmación. Ahora, supongamos que vale para  $m$  y  $m - 1$ . Sean  $o = (0, 0)$  y  $A = R_{o, \overline{oy_m}}$ . Entonces, tenemos que  $S_A(y_m) = y_m$  y  $S_A(y_{m-1}) = y_{m+1}$  (porque  $\overline{y_{m-1}y_m} \equiv \overline{y_m y_{m+1}}$ ). Luego,  $|\overline{oy_{m-1}}| |\overline{oy_{m+1}}| = |\overline{oy_m}|^2$  y, entonces,  $2^{m-1} |\overline{oy_{m+1}}| = 2^{2m}$ , por lo que  $y_{m+1} = 2^{m+1}i$  y la afirmación vale para  $m + 1$ . ■

OBSERVACIÓN: Si  $y_0 = i$  e  $y_1 = xi$ , con  $x \in \mathbb{R}_{>0}$ , tendríamos, análogamente,  $y_k = x^k i \quad \forall k \in \mathbb{N}$ .

**Paso 2:**  $r = \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Si  $a = i$  y  $b = 2i$ , buscamos  $z_n \in \overline{ab}$  tal que  $\overline{az_n} = \frac{1}{n}\overline{ab}$ .

Observar que  $\overline{az_n} = \frac{1}{n}\overline{ab} \iff n\overline{az_n} = \overline{ab}$ . Escribiendo  $z_n = z'_n i$ , por el paso anterior tenemos que, si  $y_n = (z'_n)^n i$ , se cumple  $\overline{y_n a} = n\overline{az_n}$ . Queremos que  $\overline{ay_n} = \overline{ab}$ , por lo que  $y_n = b$  y  $(z'_n)^n = 2$ . Luego,  $z'_n = 2^{\frac{1}{n}}$  y  $z_n = 2^{\frac{1}{n}}i$ .

OBSERVACIÓN: Si  $a = i$  y  $b = xi$ , con  $x \in \mathbb{R}_{>0}$ , obtendríamos que  $z_n = x^{\frac{1}{n}}i \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Paso 3:**  $r = \frac{m}{n}$ , con  $m, n \in \mathbb{N}$ .

Si  $a = i$  y  $b = 2i$ , queremos encontrar  $c_{m,n}$  tal que  $\overline{ac_{m,n}} = \frac{m}{n}\overline{ab}$ , donde  $\frac{m}{n}\overline{ab} = m(\frac{1}{n}\overline{ab})$ .

Usando lo realizado en el paso anterior, sabemos que  $c_{1,n} = 2^{\frac{1}{n}}i$ , ya que  $\frac{1}{n}\overline{ab} = \overline{ac_{1,n}}$ . Además, usando el paso 1, obtenemos que  $c_{m,n} = (2^{\frac{1}{n}})^m i$ , ya que  $m(\frac{1}{n}\overline{ab}) = \overline{ac_{m,n}}$ . Luego,  $c_{m,n} = 2^{\frac{m}{n}}i$ .

OBSERVACIÓN: Si  $a = i$  y  $b = xi$ , con  $x \in \mathbb{R}_{>0}$ , se tiene que  $c_{m,n} = x^{\frac{m}{n}}i \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$ .

## Deducción de la función distancia

Buscamos una función continua  $d : \pi \times \pi \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

1.  $d(a, b) \geq 0$ ,  $\forall a, b \in \pi$ ;
2.  $d(a, b) = 0 \iff a = b$ ;
3.  $d(a, b) = d(b, a)$ ,  $\forall a, b \in \pi$ ;
4.  $d(a, c) + d(c, b) = d(a, b)$ , si  $c \in \overline{ab}$ ;
5.  $d(a, b) = d(a', b') \iff \overline{ab} \equiv \overline{a'b'}$ .

Al igual que en el plano euclídeo, para hablar de distancia o longitud debemos fijar un segmento unidad, es decir, de longitud 1. Por ahora, tomaremos como segmento unidad el de extremos  $i$  y  $2i$ .

- *Distancia dentro de rectas en  $\mathcal{R}_1$ :*

Supongamos que existe tal  $d$ , y sea  $g : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(a) = d(ai, i)$ . Asumiremos  $d(i, 2i) = 1$ . Luego,  $g(2) = 1$ . Además, si  $d$  satisface las propiedades 4 y 5, debe ser  $g(2^{\frac{m}{n}}) = \frac{m}{n}$ ,  $\forall m, n \in \mathbb{N}$ . Por lo tanto, si queremos  $g$  continua, debe ser  $g(x) = \log_2 x \forall x \in \mathbb{R}_{>0}$ . Luego,  $d(ai, i) = \log_2 a$ .

Además, si  $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$  y  $a < b$ ,  $d(ai, bi) = d(i, bi) - d(i, ai) = \log_2 b - \log_2 a$ , por lo que  $d(ai, bi) = \log_2 \frac{b}{a}$ . Si  $a \geq b$ ,  $d(ai, bi) = \log_2 \left(\frac{a}{b}\right) = -\log_2 \left(\frac{b}{a}\right)$ . Luego,

$$d(ai, bi) = \left| \log_2 \frac{b}{a} \right|$$

Por otro lado, sean  $a, a', b, b' \in \pi$  tales que  $a = x + ci$ ,  $b = x + di$ ,  $a' = x' + ci$  y  $b' = x' + di$ , con  $c, d \in \mathbb{R}_{>0}$  y  $x, x' \in \mathbb{R}$ . Entonces,  $\overline{ab} \equiv \overline{a'b'}$  pues  $z \mapsto z + (x' - x)$  es transformación rígida. Luego, si existe tal función  $d$ ,

$$d(x + ai, x + bi) = d(ai, bi) = \left| \log_2 \left( \frac{b}{a} \right) \right| \quad (2.1)$$

- *Distancia dentro de rectas en  $\mathcal{R}_2$ :*

Sean  $a, b$  tal que  $\overleftrightarrow{ab} \in \mathcal{R}_2$ , con  $a = (a_1, a_2)$  y  $b = (b_1, b_2)$ . Sean  $o, r \in \mathbb{R}$  tales que  $\overleftrightarrow{ab} = R_{o,r}$ . Supongamos que  $b > a$ , es decir  $b_1 > a_1$ .

Sea  $c = o - r$ , como se puede ver en la Figura 2.13.

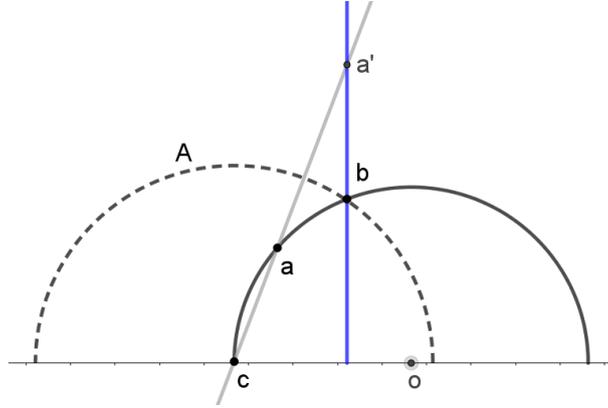


Figura 2.13:  $S_A(\overline{ab}) = \overline{a'b'}$ .

Consideramos  $A = R_{c,\overline{cb}}$  y  $T = S_A$ . Entonces  $T(\overline{ab}) = \overline{a'b'}$  con  $a'_1 = b_1$  por las propiedades de la inversión. Ahora,  $T(z) = \frac{|b-c|^2}{\overline{z}-c} + c$ . Luego,

$$\begin{aligned} a' &= T(a) = \frac{|b-c|^2}{\overline{a}-c} + c \\ &= \frac{|b-c|^2}{|a-c|^2} (a-c) + c, \text{ y} \\ a'_2 &= \frac{|b-c|^2}{|a-c|^2} a_2. \end{aligned}$$

Además,  $a'_2 > b_2$ , pues  $\overrightarrow{c\bar{b}}$  es interior a  $\sphericalangle a\bar{c}o$ .

Luego,  $d(a, b) = d(a', b) = \log_2 \left( \frac{b_2}{a'_2} \right) = \log_2 \left( \frac{b_2|a-c|^2}{a_2|b-c|^2} \right)$ . Y, en general, tenemos que

$$d(a, b) = \left| \log_2 \left( \frac{a_2|b-c|^2}{b_2|a-c|^2} \right) \right|. \quad (2.2)$$

- *Fórmula general de  $d(a, b)$ :*

Queremos una expresión general para  $d(a, b)$ , sin distinguir los casos en los que  $\overleftarrow{ab} \in \mathcal{R}_1$  o  $\overleftarrow{ab} \in \mathcal{R}_2$ . Además, la Fórmula (2.2) está en términos de  $a, b, c$ ; y  $c$  depende a su vez de  $a$  y  $b$ . Llegaremos a que la Fórmula (2.2) es equivalente a la siguiente, que está solo en términos de  $a$  y  $b$ :

$$d(a, b) = \log_2 \left( \frac{|a - \bar{b}| + |a - b|}{|a - \bar{b}| - |a - b|} \right). \quad (2.3)$$

OBSERVACIÓN: Notar que la Fórmula (2.3) generaliza a la Fórmula (2.1). Es decir, si  $\overleftarrow{ab} \in \mathcal{R}_1$ ,  $d(a, b) = \log_2 \left( \frac{|a - \bar{b}| + |a - b|}{|a - \bar{b}| - |a - b|} \right) = \left| \log_2 \left( \frac{b_2}{a_2} \right) \right|$ . En efecto:

Si  $a_1 = b_1 = x$ ,  $|a - \bar{b}| = \sqrt{(a_2 + b_2)^2} = |a_2 + b_2|$  y  $|a - b| = |a_2 - b_2|$ .

- Si  $b_2 \geq a_2$ ,  $b_2 - a_2 \geq 0$ . Luego, tenemos que

$$\frac{|a - \bar{b}| + |a - b|}{|a - \bar{b}| - |a - b|} = \frac{a_2 + b_2 + b_2 - a_2}{a_2 + b_2 - b_2 + a_2} = \frac{b_2}{a_2},$$

como queríamos.

- El caso  $b_2 < a_2$  es análogo.

**Teorema 2.12** Si  $d(i, 2i) = 1$ ,  $\forall a, b \in \pi$ , tenemos que

$$d(a, b) = \log_2 \left( \frac{|a - \bar{b}| + |a - b|}{|a - \bar{b}| - |a - b|} \right).$$

**Demostración:**

En la observación anterior, vimos que vale para el caso  $\overleftarrow{ab} \in \mathcal{R}_1$ . Veamos ahora que, si  $\overleftarrow{ab} \in \mathcal{R}_2$ , también vale la Fórmula (2.3). Supondremos que  $a < b$ , por lo que  $a_1 < b_1$ . El otro caso es análogo.

*Nota:* Todos los objetos geométricos mencionados en esta demostración son los euclídeos. No usaremos la notación del subrayado punteado para no entorpecer la lectura.

Mostraremos que, en el caso de  $a < b$ ,  $\frac{a_2|b-c|^2}{b_2|a-c|^2} = \frac{|a-\bar{b}|+|a-b|}{|a-\bar{b}|-|a-b|}$ , de lo que se sigue el resultado.

Sea  $\mathcal{C}$  la circunferencia que pasa por  $a, b$  y  $c$ . Sean  $a' = \bar{a}$ ,  $b' = \bar{b}$ ,  $\alpha = \sphericalangle aca'$  y  $\beta = \sphericalangle bcb'$ . Notemos que  $|\overline{ac}| = |\overline{a'c}|$  y  $|\overline{bc}| = |\overline{b'c}|$ . Además, por arco capaz, tenemos que  $\sphericalangle b'cb = \beta = \sphericalangle b'ab$  y  $\sphericalangle aba' = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - \sphericalangle aca'$ , como se puede ver en la Figura 2.14. Como  $abb'a'$  es un trapecio isósceles, tenemos que  $|\overline{ab}| = |\overline{a'b'}|$  y  $|\overline{ab'}| = |\overline{a'b}|$ .



- Por (2.5) y (2.7),  $\cos \beta = \frac{-4b_2^2 + |\bar{b}a|^2 + |\bar{b}'a|^2}{2|\bar{b}a||\bar{b}'a|^2}$  y  $\cos \alpha = \frac{4a_2^2 - |\bar{a}b|^2 - |\bar{a}b'|^2}{2|\bar{a}b||\bar{a}b'|}$ , respectivamente.

Recordemos que  $|\bar{b}a| = |a - b|$  y  $|\bar{b}'a| = |a - \bar{b}|$ . Luego, tenemos que

$$1 - \cos \beta = \frac{2|a - b||a - \bar{b}| - |a - b|^2 - |a - \bar{b}|^2 + 4b_2^2}{2|a - b||a - \bar{b}|} \quad (2.9)$$

$$1 - \cos \alpha = \frac{2|a - b||a - \bar{b}| + |a - b|^2 + |a - \bar{b}|^2 - 4a_2^2}{2|a - b||a - \bar{b}|} \quad (2.10)$$

Llamemos  $A = |a - \bar{b}|$  y  $B = |a - b|$ . Sustituyendo en (2.9) y (2.10), obtenemos que  $1 - \cos \beta = \frac{4b_2^2 - (A - B)^2}{2AB}$  y  $1 - \cos \alpha = \frac{(A + B)^2 - 4a_2^2}{2AB}$ , por lo que

$$\frac{b_2(1 - \cos \alpha)}{a_2(1 - \cos \beta)} = \frac{b_2}{a_2} \cdot \frac{(A + B)^2 - 4a_2^2}{4b_2^2 - (A - B)^2}.$$

Entonces, queremos ver que

$$\frac{b_2}{a_2} \cdot \frac{(A + B)^2 - 4a_2^2}{4b_2^2 - (A - B)^2} = \frac{A + B}{A - B}. \quad (2.11)$$

Notemos que

$$\begin{aligned} A^2 - B^2 &= |a - \bar{b}|^2 - |a - b|^2 \\ &= (a_1 - b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 - (a_1 - b_1)^2 - (a_2 - b_2)^2 \\ &= (a_2 + b_2)^2 - (a_2 - b_2)^2 \\ &= 4a_2b_2. \end{aligned}$$

Ahora, vale la igualdad 2.11 si y solo si vale que

$$b_2(A - B)[(A + B)^2 - 4a_2^2] = a_2(A + B)[4b_2^2 - (A - B)^2]. \quad (2.12)$$

Llamando MD y MI a los miembros derecho e izquierdo de la identidad (2.12), tenemos que

$$\begin{aligned} \text{MD} &= 4a_2b_2^2(A + B) - a_2(A^2 - B^2)(A - B) = 4a_2b_2^2(A + B) - 4a_2^2b_2(A - B), \\ \text{MI} &= b_2(A^2 - B^2)(A + B) - 4a_2^2b_2(A - B) = 4a_2b_2^2(A + B) - 4a_2^2b_2(A - B), \end{aligned}$$

$\therefore$  MD=MI, como queríamos. ■

**OBSERVACIÓN:** Recordemos que apareció la función  $\log_2$  en la fórmula de distancia a partir de que determinamos que  $d(i, 2i) = 1$ , es decir, consideramos como segmento unidad al segmento que une  $i$  con  $2i$ . En cambio, si tomamos como segmento unidad al que une  $i$  con  $xi$ , la fórmula de distancia es similar a la anterior, pero cambiando  $\log_2$  por  $\log_x$ . En particular, podemos tomar  $x = e$  y obtendríamos

$$d(a, b) = \ln \left( \frac{|a - \bar{b}| + |a - b|}{|a - \bar{b}| - |a - b|} \right)$$

Salvo que se aclare lo contrario, el segmento que se tomará como segmento unidad será el de extremos  $i$  y  $ei$ .

**Proposición 2.13** (Fórmulas relacionadas a la distancia)

Para todos los puntos  $a, b \in \pi$ , valen las siguientes identidades:

$$a) \cosh(d(a, b)) = 1 + \frac{|a - b|^2}{2a_2b_2};$$

$$b) \sinh\left(\frac{1}{2}d(a, b)\right) = \frac{|a - b|}{2\sqrt{a_2b_2}};$$

$$c) \cosh\left(\frac{1}{2}d(a, b)\right) = \frac{|a - \bar{b}|}{2\sqrt{a_2b_2}};$$

$$d) \tanh\left(\frac{1}{2}d(a, b)\right) = \frac{|a - b|}{|a - \bar{b}|}.$$

**Demostración:**

a) Recordemos que  $d(a, b) = \ln\left(\frac{A+B}{A-B}\right)$  y  $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ . Además, notemos que

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 &= |a - \bar{b}|^2 + |a - b|^2 \\ &= 2(a_1 - b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + (a_2 - b_2)^2 \\ &= 2|a - b|^2 + (a_2 + b_2)^2 - (a_2 - b_2)^2 \\ &= 2|a - b|^2 + 4a_2b_2. \end{aligned}$$

Calculamos, entonces,

$$\begin{aligned} \cosh(d(a, b)) &= \frac{1}{2} \left( \frac{A+B}{A-B} + \frac{A-B}{A+B} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{(A+B)^2 + (A-B)^2}{A^2 - B^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{2A^2 + 2B^2}{4a_2b_2} = \frac{A^2 + B^2}{4a_2b_2} \\ &= \frac{2|a - b|^2 + 4a_2b_2}{4a_2b_2} = \frac{|a - b|^2}{2a_2b_2} + 1. \end{aligned}$$

c) Notar que  $\cosh\left(\frac{1}{2}d(a, b)\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}d} + e^{-\frac{1}{2}d}}{2} = \frac{(e^d)^{\frac{1}{2}} + (e^d)^{-\frac{1}{2}}}{2}$ .

Además,  $e^{d(a,b)} = \frac{A+B}{A-B} = \frac{(A+B)^2}{A^2-B^2} = \frac{(A+B)^2}{4a_2b_2}$ , por lo que  $e^{\frac{1}{2}d} = \frac{A+B}{2\sqrt{a_2b_2}}$ . Luego,

$$\begin{aligned} \cosh\left(\frac{1}{2}d(a,b)\right) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{A+B}{2\sqrt{a_2b_2}} + \frac{2\sqrt{a_2b_2}}{A+B} \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(A+B)^2 + 4a_2b_2}{2\sqrt{a_2b_2}(A+B)} \\ &= \frac{(A+B)^2 + A^2 - B^2}{4\sqrt{a_2b_2}(A+B)} \\ &= \frac{2A^2 + 2AB}{4\sqrt{a_2b_2}(A+B)} \\ &= \frac{A}{2\sqrt{a_2b_2}} \\ &= \frac{|a - \bar{b}|}{2\sqrt{a_2b_2}}. \end{aligned}$$

b) Por el apartado c), sabemos que  $\cosh(\frac{1}{2}d(a,b)) = \frac{A}{2\sqrt{a_2b_2}}$ . Luego, tenemos que

$$\begin{aligned} \sinh^2\left(\frac{1}{2}d(a,b)\right) &= \cosh^2\left(\frac{1}{2}d(a,b)\right) - 1 \\ &= \frac{A^2}{4a_2b_2} - 1 = \frac{A^2 - 4a_2b_2}{4a_2b_2} \\ &= \frac{A^2 - (A^2 - B^2)}{4a_2b_2} = \frac{B^2}{4a_2b_2}, \end{aligned}$$

por lo que  $\sinh(\frac{1}{2}d(a,b)) = \frac{B}{2\sqrt{a_2b_2}}$ , como queríamos.

d) Recordemos que  $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ . Luego, tenemos que

$$\begin{aligned} \tanh\left(\frac{1}{2}d(a,b)\right) &= \frac{B}{2\sqrt{a_2b_2}} \cdot \frac{2\sqrt{a_2b_2}}{A} \\ &= \frac{B}{A} = \frac{|a - b|}{|a - \bar{b}|}, \end{aligned}$$

como queríamos. ■

**OBSERVACIÓN:** Si tomamos como segmento unidad al de extremos  $i$  y  $xi$ , lo análogo a la Proposición 2.13 vale, cambiando  $\cosh$  por  $\cosh_x$ ,  $\sinh$  por  $\sinh_x$ ,  $\tanh$  por  $\tanh_x$ , donde, por ejemplo,  $\cosh_x(t) = \frac{x^t + x^{-t}}{2}$ .

**Proposición 2.14** (Propiedades de la distancia)

La función  $d$  dada por  $d(a,b) = \ln\left(\frac{|a-\bar{b}|+|a-b|}{|a-\bar{b}|-|a-b|}\right)$  cumple las siguientes propiedades:

1.  $\forall a, b \in \pi, d(a,b) \geq 0$  ;

2.  $d(a, b) = 0 \iff a = b$ ;
3.  $\forall a, b \in \pi, d(a, b) = d(b, a)$ ;
4. Si  $c \in \overline{ab}$ ,  $d(a, c) + d(c, b) = d(a, b)$ .

**Demostración:**

1. Como  $B > 0$ , se cumple que  $A + B > A - B$  y, por lo tanto,  $\frac{A+B}{A-B} \geq 1$ . Luego,  $\ln \frac{A+B}{A-B} \geq 0$ .
2.  $\cosh|_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$  es inyectiva. Luego,

$$\begin{aligned}
 d(a, b) = 0 &\iff \cosh(d(a, b)) = \cosh 0 = 1 \\
 &\iff \frac{|a - b|^2}{2a_2b_2} + 1 = 1 \\
 &\iff \frac{|a - b|^2}{2a_2b_2} = 0 \\
 &\iff |a - b|^2 = 0 \\
 &\iff a = b.
 \end{aligned}$$

3. Como  $|a - \bar{b}| = |\bar{a} - b| = |b - \bar{a}|$  y  $|a - b| = |b - a|$ , obtenemos

$$\begin{aligned}
 d(a, b) &= \ln \left( \frac{|a - \bar{b}| + |a - b|}{|a - \bar{b}| - |a - b|} \right) \\
 &= \ln \left( \frac{|b - \bar{a}| + |b - a|}{|b - \bar{a}| - |b - a|} \right) \\
 &= d(b, a).
 \end{aligned}$$

4. Hay dos casos, dependiendo de si  $\overleftrightarrow{ab} \in \mathcal{R}_1$  o  $\overleftrightarrow{ab} \in \mathcal{R}_2$ .

**Caso 1:**  $\overleftrightarrow{ab} \in \mathcal{R}_1$ . Supongamos que  $a < c < b$ . En este caso, tenemos que  $d(a, c) = \ln \left( \frac{c}{a} \right)$  y  $d(c, b) = \ln \left( \frac{b}{c} \right)$ . Luego,

$$d(a, c) + d(c, b) = \ln \left( \frac{c}{a} \cdot \frac{b}{c} \right) = \ln \left( \frac{b}{a} \right) = d(a, b).$$

**Caso 2:**  $\overleftrightarrow{ab} \in \mathcal{R}_2$ . Supongamos que  $a < c < b$ . Sean  $o, r \in \mathbb{R}$  tales que  $\overleftrightarrow{ab} = R_{o,r}$ , y sea  $p = o - r$ . Por la Fórmula (2.2), tenemos que  $d(a, c) = \ln \left( \frac{c_2|a-p|^2}{a_2|c-p|^2} \right)$  y  $d(c, b) = \ln \left( \frac{b_2|c-p|^2}{c_2|b-p|^2} \right)$ . Luego,

$$\begin{aligned}
 d(a, c) + d(c, b) &= \ln \left( \frac{c_2|a-p|^2}{a_2|c-p|^2} \cdot \frac{b_2|c-p|^2}{c_2|b-p|^2} \right) \\
 &= \ln \left( \frac{b_2|a-p|^2}{a_2|b-p|^2} \right) \\
 &= d(a, b),
 \end{aligned}$$

como queríamos.

■

En lo que sigue de la sección, veremos que las transformaciones rígidas de  $\pi$  son exactamente las isometrías de  $\pi$  respecto a la distancia de la Fórmula (2.3).

**Definición 2.15** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico (es decir,  $d$  es una distancia sobre  $X$ ). Una función  $f : X \rightarrow X$  se dice isometría de  $X$  si  $d(a, b) = d(f(a), f(b))$ ,  $\forall a, b \in X$ . Denotaremos por  $\text{Iso}(\pi)$  al conjunto  $\{f : \pi \rightarrow \pi \mid f \text{ es isometría}\}$ .

**Teorema 2.16** Sea  $T \in \mathcal{T}$ . Entonces,  $T$  es una isometría. Es decir,  $\mathcal{T} \subseteq \text{Iso}(\pi)$ .

**Demostración:**

Veremos que  $\mathcal{T}_1 \subseteq \text{Iso}(\pi)$  y  $\mathcal{T}_2 \subseteq \text{Iso}(\pi)$ .

- Sea  $T \in \mathcal{T}_1$ . Entonces,  $T(z) = c - \bar{z}$  para algún  $c \in \mathbb{R}$ . Sean  $a, b \in \pi$ ,  $a' = T(a)$ ,  $b' = T(b)$ ,  $A = |a - \bar{b}|$ ,  $B = |a - b|$ ,  $A' = |a' - \bar{b}'|$  y  $B' = |a' - b'|$ . Notemos que  $a' = c - \bar{a}$  y  $b' = c - \bar{b}$ . Luego,

$$\begin{aligned} A' &= |a' - \bar{b}'| = |c - \bar{a} - c + b| = |\bar{a} - b| = |a - \bar{b}| = A, \text{ y} \\ B' &= |a' - b'| = |c - \bar{a} - c + \bar{b}| = |\bar{b} - \bar{a}| = |a - b| = B. \end{aligned}$$

$\therefore d(a, b) = d(a', b') = d(T(a), T(b))$ , como queríamos.

- Sea  $T \in \mathcal{T}_2$ . Entonces,  $T(z) = \frac{r^2}{\bar{z}-o}$  para ciertos  $o, r \in \mathbb{R}$ . Sean  $a, b, a', b', A, B, A', B'$  como antes. Entonces  $a' = \frac{r^2}{\bar{a}-o}$  y  $b' = \frac{r^2}{\bar{b}-o}$ . Luego,

$$\begin{aligned} A' &= |a' - \bar{b}'| = \left| \frac{r^2}{\bar{a}-o} - \frac{r^2}{\bar{b}-o} \right| = r^2 \left| \frac{b-o-\bar{a}+o}{(\bar{a}-o)(\bar{b}-o)} \right| = \frac{r^2|b-\bar{a}|}{|\bar{a}-o||\bar{b}-o|}, \text{ y} \\ B' &= |a' - b'| = \left| \frac{r^2}{\bar{a}-o} - \frac{r^2}{\bar{b}-o} \right| = r^2 \left| \frac{\bar{b}-o-\bar{a}+o}{(\bar{a}-o)(\bar{b}-o)} \right| = \frac{r^2|\bar{b}-\bar{a}|}{|\bar{a}-o||\bar{b}-o|}. \end{aligned}$$

Notar que  $|b-o| = |\bar{b}-o|$ ,  $|\bar{b}-\bar{a}| = |a-b|$  y  $|b-\bar{a}| = |a-\bar{b}|$ . Luego,

$$\begin{aligned} A' + B' &= \frac{r^2}{|\bar{a}-o||\bar{b}-o|} (|a-\bar{b}| + |a-b|) = \frac{r^2}{|\bar{a}-o||\bar{b}-o|} (A + B), \text{ y} \\ A' - B' &= \frac{r^2}{|\bar{a}-o||\bar{b}-o|} (|a-\bar{b}| - |a-b|) = \frac{r^2}{|\bar{a}-o||\bar{b}-o|} (A - B), \end{aligned}$$

por lo que  $d(a, b) = d(a', b') = d(T(a), T(b))$ , como queríamos.

■

**Corolario 2.17** Para todos los puntos  $a, b, a', b' \in \pi$ , se cumple que  $d(a, b) = d(a', b') \iff \overline{ab} \equiv \overline{a'b'}$ .

**Demostración:**

( $\Leftarrow$ ) Es evidente porque  $\mathcal{T} \subseteq \text{Iso}(\pi)$ .

( $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $d(a, b) = d(a', b')$ . Sea  $T \in \mathcal{T}$  una transformación que cumpla  $T(\overrightarrow{ab}) = T(\overrightarrow{a'b'})$ . Luego,  $T(a) = a'$  y  $T(b) = b' \in \overrightarrow{a'b'}$ . Además,  $T \in \text{Iso}(\pi)$ , por lo que  $d(a, b) = d(a', b')$  y, por lo tanto,  $d(a', b) = d(a', b')$ .

Ahora, hay dos casos: o  $b' \in \overrightarrow{a'b''}$ , o bien  $b'' \in \overrightarrow{a'b'}$ . En el primer caso, se tiene que  $d(a', b') + d(b', b'') = d(a', b'')$ , por lo que  $d(b', b'') = 0$ . Luego,  $b' = b''$  y  $\therefore \overline{ab} \equiv \overline{a'b'}$ . El segundo caso es análogo. ■

**Lema 2.18** *Sea  $f \in \text{Iso}(\pi)$  con tres puntos fijos no alineados. Entonces  $f = id$ .*

**Demostración:**

Sean  $a, b, c$  tres puntos fijos no alineados de  $f$ . Supongamos que  $\exists p \in \pi$  tal que  $f(p) = p' \neq p$ . Luego,  $d(a, p) = d(f(a), f(p)) = d(a, p')$  y, por el Corolario 2.17, obtenemos  $\overline{ap} \equiv \overline{ap'}$ . Entonces,  $a \in M_{pp'}$ , donde  $M_{pp'}$  es la mediatriz<sup>2</sup> del segmento  $pp'$ . De la misma manera, obtenemos  $b, c \in M_{pp'}$  por lo que  $a, b, c$  están alineados. *Absurdo.* ■

**Teorema 2.19**  $\text{Iso}(\pi) \subseteq \mathcal{T}$

**Demostración:**

Sean  $f \in \text{Iso}(\pi)$  y  $a, b, c \in \pi$  no alineados. Sean  $a' = f(a)$ ,  $b' = f(b)$ ,  $c' = f(c)$ . Sea  $T \in \mathcal{T}$  tal que  $T(\overrightarrow{ab}, (\overrightarrow{ab})_c) = (\overrightarrow{a'b'}, (\overrightarrow{a'b'})_{c'})$ . Entonces, sabemos que  $T(a) = a'$ . Además, como  $T(b) \in \overrightarrow{a'b'}$  y  $\overline{a'b'} \equiv \overline{ab} \equiv \overline{a'T(b)}$ , deducimos que  $T(b) = b'$ .

Ahora, sea  $c'' = T(c)$  y veremos que  $c'' = c'$ . Usando que  $f \in \text{Iso}(\pi)$  y el Corolario 2.17, obtenemos  $\overline{a'c'} \equiv \overline{ac}$ . Además, como  $T \in \mathcal{T}$ , resulta que  $\overline{ac} \equiv \overline{a'c''}$ . Luego,  $\overline{a'c'} \equiv \overline{a'c''}$ . Análogamente,  $\overline{b'c'} \equiv \overline{b'c''}$ . Ahora, por criterio LLL, resulta que  $\triangle a'b'c' \equiv \triangle a'b'c''$ , por lo que  $\angle b'a'c' \equiv \angle b'a'c''$ . Sabemos que  $c'' \in (\overrightarrow{a'b'})_{c'}$ . Entonces,  $\text{sec} \angle b'a'c' \subseteq \text{sec} \angle b'a'c''$  o  $\text{sec} \angle b'a'c' \supseteq \text{sec} \angle b'a'c''$ . Por Ax III-3b), obtenemos  $\angle b'a'c' = \angle b'a'c''$  y, entonces,  $c'' \in \overrightarrow{a'c'}$ . Además, teníamos que  $\overline{a'c'} \equiv \overline{a'c''}$ . Luego,  $c' = c''$ , como queríamos.

Lo que hicimos fue construir  $T \in \mathcal{T}$  que cumpla  $T(a) = a' = f(a)$ ,  $T(b) = b' = f(b)$ ,  $T(c) = c' = f(c)$ . Como  $T$  es isometría,  $T^{-1} \circ f$  es isometría con puntos fijos no alineados  $a, b, c$ . Por el Lema 2.18,  $T^{-1} \circ f = id$  y, entonces,  $T = f$ . Luego, obtenemos  $f \in \mathcal{T}$ , como queríamos. ■

## 2.4. Axiomas de paralelismo, arquimedianidad y completitud

En esta sección, terminaremos de probar que el semiplano superior con las rectas y transformaciones rígidas ya mencionadas es efectivamente un modelo de la geometría hiperbólica, demostrando que satisface los axiomas de paralelismo, arquimedianidad y completitud.

---

<sup>2</sup>La mediatriz de un segmento  $\overline{ab}$  se define como el lugar geométrico de todos los puntos  $c \in \pi$  tales que  $\overline{ca} \equiv \overline{cb}$ . Es un teorema de la geometría neutra que las mediatrices son una recta, más precisamente, la perpendicular a  $\overline{ab}$  por su punto medio.

## Axioma de paralelismo

AIV-1  $\forall$  recta  $A$  y  $p \notin A$ , existen al menos dos paralelas a  $A$  por  $p$ .

Como veremos, el modelo del semiplano superior satisface este axioma de paralelismo. En realidad, este axioma implica que existen infinitas rectas paralelas a una dada por un punto exterior y, por supuesto el modelo del semiplano superior también satisface esta afirmación.

Toda recta en nuestro modelo tiene dos “puntos en el infinito”. En el caso de rectas en  $\mathcal{R}_2$ , ambos puntos pertenecen a  $\mathbb{R}$ . Diremos que los puntos en el infinito de una recta  $A = R_{o,r}$  son  $o - r$  y  $o + r$  y, en el caso de rectas en  $\mathcal{R}_1$ , los puntos en el infinito de una recta  $B = R_x$  serán  $x$  y  $\star^3$ . Diremos que dos rectas se intersecan en el infinito si comparten uno de sus puntos en el infinito.

**Definición 2.20** Dos rectas paralelas serán llamadas *paralelas asintóticas* si se intersecan en el infinito. Caso contrario, diremos que son *paralelas divergentes* o *ultraparalelas*.

OBSERVACIÓN: Sea  $a$  un punto en el infinito, es decir  $a \in \mathbb{R} \cup \{\star\}$ , y sea  $p \in \pi$ . Entonces, existe una única recta que pasa por  $p$  y que tiene a  $a$  como un punto en el infinito. La denotaremos también por  $\overleftrightarrow{pa}$ . Análogamente, existe una única semirrecta de origen  $p$  que tiene a  $a$  como punto en el infinito. La denotaremos por  $\overrightarrow{pa}$ .

**Demostración:** (del Axioma de Paralelismo)

Sean  $a$  y  $b$  los puntos en el infinito de la recta  $A$ . Entonces  $C = \overleftrightarrow{pa}$  y  $B = \overleftrightarrow{pb}$  son rectas que pasan por  $p$  y son claramente paralelas a  $A$ , como se muestra en las Figuras 2.15 y 2.16.

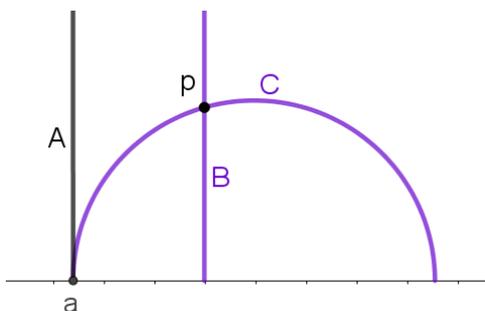


Figura 2.15: Las rectas  $B$  y  $C$  pasan por  $p$  y son paralelas (asintóticas) a  $A$ .

Más aún, si consideramos el conjunto  $\alpha = \sec(\angle apb) \cup \sec\angle(\overrightarrow{pa}, \overrightarrow{pb})$ , entonces, para todo  $q \in \pi$ , vale que

$$\overleftrightarrow{pq} \parallel A \iff q \notin \alpha.$$

■

<sup>3</sup>En este contexto, usaremos el símbolo  $\star$  en vez de  $\infty$  para no confundir entre “puntos en el infinito” y el punto “infinito”.

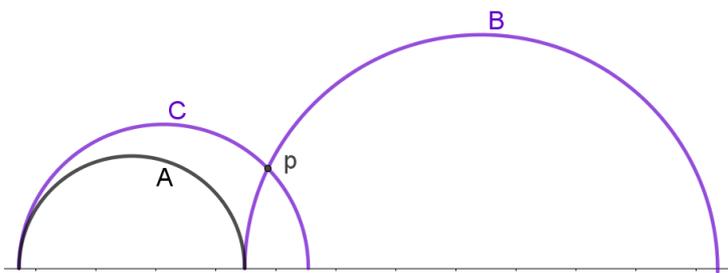


Figura 2.16: Las rectas  $B$  y  $C$  pasan por  $p$  y son paralelas (asintóticas) a  $A$ .

## Axiomas de tipo V

AV-1 (*Arquimedianidad*) Dados dos segmentos  $\overline{ab}$  y  $\overline{cd}$ ,  $\exists n \in \mathbb{N}$  tal que  $n \cdot \overline{ab} > \overline{cd}$ .

AV-2 (*de Completitud*) Dada una sucesión de segmentos  $\{\overline{a_n b_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  tales que  $\overline{a_{n+1} b_{n+1}} \subseteq \overline{a_n b_n} \forall n \in \mathbb{N}$ , entonces  $\bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{a_n b_n} \neq \emptyset$ .

### Demostración:

AV-1 Podemos asumir que  $b = i$  y  $a = ai$  con  $a > 1$ , pues, en otro caso, podríamos llevar la semirrecta  $\overrightarrow{ab}$  a la semirrecta de origen  $i$  que pasa por  $2i$  mediante una transformación rígida. Luego,  $d(a, b) = \ln \frac{a^2}{b^2} = \ln a$ .

Dado  $x = d(c, d)$ , sea  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n \ln a > x$  (existe por arquimedianidad en  $\mathbb{R}$ ). Sea  $y = e^x$ . Entonces  $\ln(a^n) > \ln y$ . Ahora, tomando  $c' = i$  y  $d' = yi$ , tenemos que  $d(c', d') = \ln(\frac{d'^2}{c'^2}) = \ln y = x$ . Luego, obtenemos  $d(c', d') = d(c, d) = x < n \ln a = n \cdot d(a, b)$ . Por lo tanto, como sabemos  $\overline{c'd'} \equiv \overline{cd}$  y  $\overline{c'd'} < n \cdot \overline{ab}$ , resulta que  $\overline{cd} < n \cdot \overline{ab}$ .

AV-2 Si  $\overleftrightarrow{a_1 b_1} \in \mathcal{R}_1$ , el axioma vale por el correspondiente en el plano euclídeo. Si  $\overleftrightarrow{a_1 b_1} \in \mathcal{R}_2$ , considero  $a'_i, b'_i \in \mathbb{R}$  las partes reales de  $a_i$  y  $b_i$  respectivamente, para cada  $i \in \mathbb{N}$ . Entonces  $\overline{a'_{n+1} b'_{n+1}} \subseteq \overline{a'_n b'_n}$  y la intersección es no vacía por Axioma V-2 del plano euclídeo. Sea  $c' \in \mathbb{R}$  tal que  $c' \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{a'_n b'_n}$ . Es claro que existe un punto  $c \in \overleftrightarrow{a_1 b_1}$  tal que  $\text{Re}(c) = c'$ . Luego,  $c \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{a_n b_n}$ . ■

Un resultado relacionado con el Axioma de Arquimedianidad que es simple y que utilizaremos en el siguiente capítulo, es el Lema 2.21, que llamaremos Arquimedianidad de ángulos.

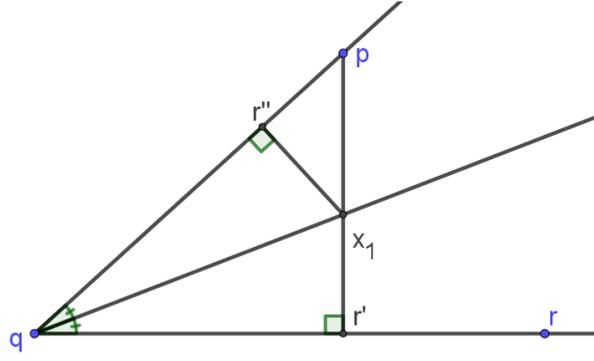
**Lema 2.21** Sean  $\angle abc$  y  $\angle pqr$  dos ángulos, con  $\angle abc$  agudo. Entonces:

$$\exists n \in \mathbb{N} : n \cdot \angle abc > \angle pqr.$$

### Demostración:

Notar que  $n \cdot \angle abc > \angle pqr \iff \angle abc > \frac{1}{n} \cdot \angle pqr$ .

Sea  $r' \in \overleftrightarrow{qr}$  tal que  $\overleftrightarrow{pr'} \perp \overleftrightarrow{qr'}$ . Sean


 Figura 2.17:  $\angle r'x_1q \equiv \angle qx_1r''$ .

$$\begin{aligned}
 x_1 \in \overline{pr'} : \overrightarrow{qx_1} \text{ es bisectriz de } \angle pqr, \\
 x_2 \in \overline{x_1r'} : \overrightarrow{qx_2} \text{ es bisectriz de } \angle x_1qr, \\
 \dots \\
 x_{i+1} \in \overline{x_i r'} : \overrightarrow{qx_{i+1}} \text{ es bisectriz de } \angle x_i qr.
 \end{aligned}$$

Afirmamos que  $\overline{px_1} > \overline{x_1r'}$  y, en general,  $\overline{x_i x_{i+1}} > \overline{x_{i+1}r'}$ . En efecto, sea  $T \in \mathcal{T}$  tal que  $T(\overrightarrow{qx_1}, \alpha) = (\overrightarrow{qx_1}, \check{\alpha})$ . Como  $\overrightarrow{qx_1}$  es bisectriz de  $\angle pqr$ ,  $T(r) = r'' \in \overrightarrow{qp}$  y  $\angle r'x_1q \equiv \angle qx_1r'' < 1$  recto, por lo que  $r'' \in \overline{pq}$ , como se puede ver en la Figura<sup>4</sup> 2.17. En  $\triangle x_1pr''$ , por ser  $\overline{x_1p}$  y  $\overline{r''x_1}$  un cateto y la hipotenusa respectivamente, tenemos que  $\overline{x_1p} > \overline{r''x_1}$ . Además, como  $\overline{r''x_1} \equiv \overline{x_1r'}$ , obtenemos  $\overline{x_1p} > \overline{x_1r'}$ , como queríamos. Análogamente, podemos probar que  $\overline{x_i x_{i+1}} > \overline{x_{i+1}r'}$ .

De la afirmación anterior, deducimos inductivamente que  $\overline{x_i r'} < \frac{1}{2^i} \overline{pr'}$ : Primero,  $\overline{x_1 r'} < \frac{1}{2} \overline{pr'}$  y, luego, asumiendo que vale para  $i-1$ , observando que

$$\overline{x_i r'} < \frac{1}{2} \overline{x_{i-1} r'} < \frac{1}{2} \frac{1}{2^{i-1}} \overline{pr'} = \frac{1}{2^i} \overline{pr'},$$

vemos que también vale para  $i$ .

Ahora, si  $\angle abc > \angle pqr$ , con  $n = 1$ , vale lo que queremos. En caso contrario, sea  $y \in \overline{pr'}$  tal que  $\angle r'qy \equiv \angle abc$ . Por Axioma AV-1,  $\exists m : \overline{r'y} > \frac{1}{m} \overline{pr'}$ . Aún más,  $\exists j : \overline{r'y} > \frac{1}{2^j} \overline{pr'} > \overline{x_j r'}$ . Luego,  $\angle abc \equiv \angle r'qy > \angle r'qx_j = \frac{1}{2^j} \angle rqp$ . Por lo tanto, tomando  $n = 2^j$ , tenemos que  $n \cdot \angle abc > \angle r'qp$ . ■

<sup>4</sup>Esta imagen es esquemática: los elementos euclídeos dibujados hacen referencia a sus correspondientes en el plano hiperbólico.



# Capítulo 3

## Algunos resultados notables

En este capítulo, desarrollaremos algunos teoremas esenciales para entender la geometría hiperbólica, que estarán estructurados en tres ejes centrales: trigonometría, área y circunferencias.

Primero, en la Sección 3.1, llegaremos a dos resultados básicos y muy curiosos: la suma de ángulos interiores de un triángulo hiperbólico es menor a un ángulo llano ( $180^\circ$ ) y el criterio de congruencia de triángulos “ángulo-ángulo-ángulo”. En la Sección 3.2, desarrollaremos fórmulas trigonométricas para los triángulos hiperbólicos, arribando a resultados semejantes a los Teoremas del Seno y del Coseno del plano euclídeo, con ciertas modificaciones adecuadas para que se puedan cumplir en el plano hiperbólico. Luego, en la Sección 3.3, deduciremos una fórmula de área del triángulo, lo que devendrá en observaciones inesperadas, por ejemplo, notaremos que el área de un triángulo no puede ser tan grande como se quiera, sino que está acotada. Finalmente, en la Sección 3.4, veremos cómo lucen las circunferencias hiperbólicas en nuestro modelo y cómo podemos calcular su perímetro.

### 3.1. Suma de ángulos interiores de un triángulo

El principal objetivo de esta sección es probar que, a diferencia de la geometría euclídea en donde los ángulos interiores de un triángulo cualquiera suman  $180^\circ$ , en la geometría hiperbólica esto no sucede. De hecho, ocurre que esta suma de ángulos es siempre estrictamente menor que la medida de un ángulo llano.

Para probar esto, comenzaremos con el Lema 3.1, en el cual se usa fuertemente el Lema 2.21 de la sección anterior.

**OBSERVACIÓN:** Notemos que los ángulos de la geometría hiperbólica se corresponden con ángulos euclídeos, como muestra la Definición 2.10. Entonces, tiene sentido que pensemos en la medida de un ángulo hiperbólico como la medida del ángulo euclídeo asociado. Es así como, a partir de este momento, diremos, por ejemplo, que un ángulo llano  $\angle abc$  mide  $\pi$  (que no debe confundirse con el plano  $\pi$ ), e, incluso, escribiremos  $\angle abc = \pi$ . Es decir, denotaremos por  $\angle abc$  al ángulo y a su medida, lo cual, esperamos, no confunda al lector, dado que esta notación se suele usar de la misma manera en geometría euclídea.

**Lema 3.1** Sean  $\overline{pq}$  un segmento y  $q' \in \pi$  tal que  $\angle pqq' = \frac{\pi}{2}$ . Entonces:

$$\forall \angle abc \exists t \in \overrightarrow{qq'} \text{ tal que } \angle ptq < \angle abc.$$

**Demostración:**

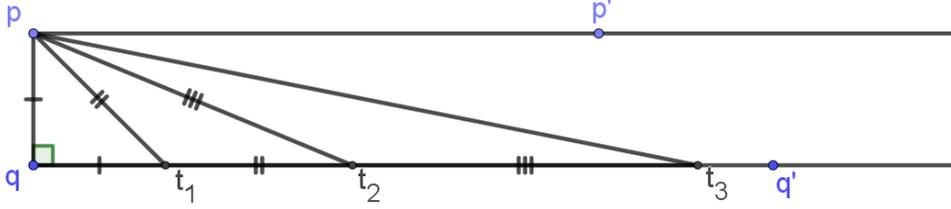


Figura 3.1:  $\overline{t_n t_{n+1}} \equiv \overline{pt_n}, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Sea  $p' \in (\overleftarrow{pq})_{q'}$  tal que  $\overleftrightarrow{pp'}$  es la perpendicular a  $\overline{pq}$  por  $p$ . Sean:

$$\begin{aligned} t_1 \in \overrightarrow{qq'} &: \overline{qt_1} \equiv \overline{pq}; \\ t_2 \in \overrightarrow{t_1 q} &: \overline{t_1 t_2} \equiv \overline{pt_1}; \text{ y, así,} \\ t_{n+1} \in \overrightarrow{t_n q} &: \overline{t_n t_{n+1}} \equiv \overline{pt_n}, \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

como se muestra en la Figura 3.1.

Luego,  $\triangle pt_n t_{n+1}$  es isósceles y  $\angle t_n p t_{n+1} \equiv \angle t_n t_{n+1} p$ . Entonces:

$$\angle qpt_1 + \angle t_1 p t_2 + \cdots + \angle t_{n-1} p t_n = \angle qpt_n < \angle qpp' = \frac{\pi}{2}. \quad (3.1)$$

Por otro lado, si no existiera  $t$  tal que  $\angle ptq < \angle abc$ , tendríamos que:

$$\angle pt_i q > \angle abc \quad \forall i \in \mathbb{N} \implies \angle pt_i t_{i-1} > \angle abc \quad \forall i \in \mathbb{N} \implies \angle t_i p t_{i-1} > \angle abc \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Por el lema 2.21,  $\exists n \in \mathbb{N} : n \cdot \angle abc > \angle q'pp' = \frac{\pi}{2}$ . Luego,

$$\angle qpt_1 + \angle t_1 p t_2 + \cdots + \angle t_{n-1} p t_n > n \cdot \angle abc > \frac{\pi}{2}.$$

■

**Teorema 3.2** Existe un triángulo cuya suma de ángulos interiores es estrictamente menor que un ángulo llano.

**Demostración:**

Sean  $p \in \pi$  y  $L$  recta, con  $p \notin L$ . Sea  $q$  el pie de la perpendicular a  $L$  por  $p$ . Sea  $M$  la perpendicular a  $\overline{pq}$  por  $p$ . Entonces, sabemos que  $M \parallel L$ . Ahora, sea  $M'$  otra paralela a  $L$ . Sea  $s \in M'$  tal que  $\angle spq < \frac{\pi}{2}$ , por lo que  $s \in (M)_q$ . Sea  $r \in M$  tal que  $r \in (\overleftarrow{pq})_s$ , como se muestra en la Figura 3.2.

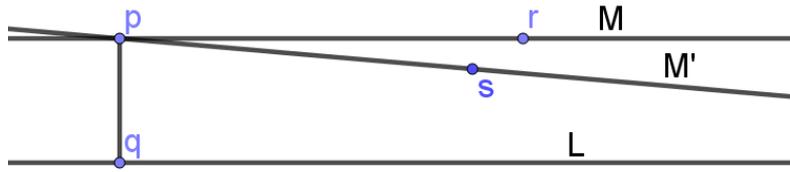


Figura 3.2:  $M$  y  $M'$  son paralelas a  $L$ .

Por el Lema 3.1, existe  $t \in L$  tal que  $t \in (\overrightarrow{pq})_s$  y  $\angle ptq < \angle spr$ . Veremos que la suma de ángulos de  $\triangle pqt$  es menor que un llano.

Si  $t \notin (\overrightarrow{ps})_q$ , por Axioma II-3 obtenemos  $M' \cap L \neq \emptyset$ . Luego,  $t \in (\overrightarrow{ps})_q$  y, entonces,  $t$  es interior a  $\angle qps$ . Por lo tanto,  $\angle qps > \angle qpt$ . Además,  $\angle qpr = \angle qps + \angle spr = \frac{\pi}{2}$ . Ahora, en  $\triangle pqt$ :

$$\angle pqt + \angle qpt + \angle ptq < \frac{\pi}{2} + \angle qps + \angle spr = \pi$$

como queríamos. ■

**Teorema 3.3** *Todos los triángulos tienen suma de ángulos interiores menor que un ángulo llano.*

**Demostración:**

Sea  $\triangle pqt$  el triángulo con suma de ángulos menor que  $\pi$ , que existe por el Teorema 3.2. Sabemos, por un resultado de la geometría neutra, que la suma de los ángulos interiores (SAI) de un triángulo es siempre menor o igual a  $\pi$ .

Probaremos el teorema por el absurdo. Si no se cumple, existiría un triángulo  $\triangle abc$  con suma de ángulos igual a  $\pi$ . Se puede suponer que  $\triangle abc$  es rectángulo. Si no fuera ese el caso, trazamos una altura interior, supongamos por  $b$ , que corta a  $\overline{ac}$  en  $d$  y, entonces, tendríamos que  $\triangle dbc$  y  $\triangle abd$  son rectángulos en  $d$  y de SAI igual a  $\pi$ . Supondremos entonces que  $\triangle abc$  es rectángulo en  $b$ .

Por Axioma AV-1,  $\exists n \in \mathbb{N} : n \cdot \overline{ab} > \overline{pq}$  y  $\exists m \in \mathbb{N} : m \cdot \overline{bc} > \overline{qt}$ . Sea  $N = \max\{n, m\}$  y  $M$  la mínima potencia de 2 mayor que  $N$ . Entonces  $M \cdot \overline{ab} > \overline{pq}$  y  $M \cdot \overline{bc} > \overline{qt}$ . Veamos que podemos construir un triángulo rectángulo de catetos  $M \cdot \overline{ab}$  y  $M \cdot \overline{bc}$ , y con SAI menor que  $\pi$ .

Sea  $m_1$  el punto medio de  $\overline{ac}$  y  $b' = S_{m_1}(b)$ . Como  $S_{m_1}(a) = c$  y  $S_{m_1}(c) = a$ , tenemos que  $\angle ab'c \equiv \angle abc \equiv 1$  recto,  $\angle b'ac \equiv \angle bca$  y  $\angle b'ca \equiv \angle bac$ .

Sean  $m_2, m_3$  los puntos medios de  $\overline{ab'}$  y  $\overline{b'c}$  respectivamente. Sean  $c' = S_{m_2}(c)$  y  $a' = S_{m_3}(a)$ , como se puede ver en la Figura 3.3. Mirando ángulos, se obtiene que  $c', b', a'$ ;  $c', a, b$ ;  $b, c, a'$  son colineales. Luego,  $\triangle c'ba'$  es un triángulo con SAI igual a  $\pi$ , por estar compuesto de cuatro triángulos congruentes a  $\triangle abc$ , que tiene SAI igual a  $\pi$ .

Notemos que  $\overline{a'b'} = 2\overline{bc}$  y  $\overline{c'b} = 2\overline{ab}$ . Así siguiendo, podemos construir un triángulo  $\triangle \tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}$  con  $\tilde{a}\tilde{b} = M \cdot \overline{ab}$ ,  $\tilde{b}\tilde{c} = M \cdot \overline{bc}$  y SAI igual a  $\pi$ .

Sea  $T \in \mathcal{T}$  tal que  $T(\overrightarrow{qp}, (\overrightarrow{qp})_t) = (\tilde{b}\tilde{a}, (\tilde{b}\tilde{a})_{\tilde{c}})$ . Luego,  $T(q) = \tilde{b}$  y sean  $p' = T(p)$ ,  $t' = T(t)$ . Entonces, como  $\tilde{a}\tilde{b} > \overline{pq}$ ,  $p' \in \tilde{a}\tilde{b}$ . Ahora, como  $\angle p'bt' \equiv \angle pqt \equiv \angle \tilde{a}\tilde{b}\tilde{c} = \frac{\pi}{2}$ ,  $t' \in \overrightarrow{b\tilde{c}}$ . Además, como  $t' \in (\tilde{b}\tilde{a})_{\tilde{c}}$ ,  $t' \in \overrightarrow{b\tilde{c}}$ , como se muestra en la Figura 3.4. Recordemos que  $\overline{b't'} \equiv \overline{qt} < \tilde{b}\tilde{c}$ . Luego,  $t' \in \tilde{b}\tilde{c}$ .

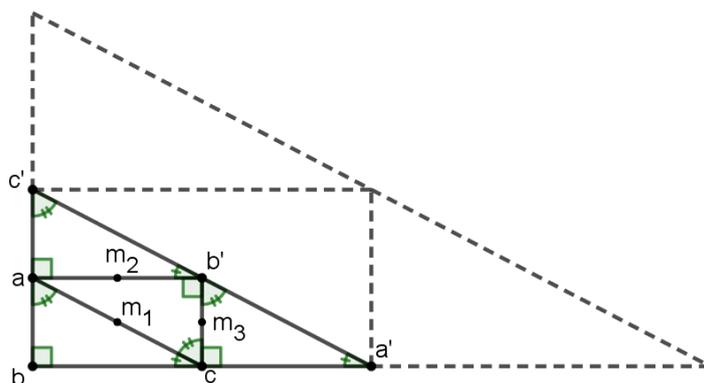


Figura 3.3:  $\triangle c'ba'$  es un triángulo con SAI igual a  $\pi$ , por estar compuesto de cuatro triángulos con SAI igual a  $\pi$ .

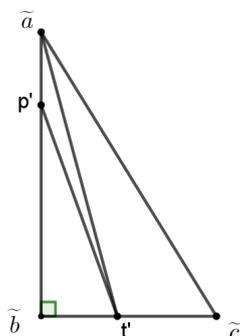


Figura 3.4:  $p' \in \overline{\tilde{a}\tilde{b}}$  y  $t' \in \overline{\tilde{b}\tilde{c}}$ .

Por otro lado, tenemos que  $\triangle p'bt'$  tiene SAI menor que  $\pi$  puesto que  $\triangle pqt \equiv \triangle p'bt'$ . Luego,  $\triangle at'b$  tiene SAI menor que  $\pi$  por que contiene a  $\triangle bt'p'$ . Por último,  $\triangle a\tilde{b}\tilde{c}$  tiene SAI menor que  $\pi$  por contener al triángulo  $\triangle at'b$ . *Absurdo*, puesto que  $\triangle a\tilde{b}\tilde{c}$  tenía SAI igual a  $\pi$ . ■

OBSERVACIÓN:

- Se deduce fácilmente del Teorema 3.3 que todo cuadrilátero tiene suma de ángulos interiores menor que  $2\pi$ . Luego, en geometría hiperbólica no existen los *rectángulos*, es decir, no hay cuadriláteros con todos sus ángulos rectos.
- Se puede ver que el Axioma IV es equivalente a la afirmación “*todo triángulo tiene suma de ángulos interiores menor que un ángulo llano*”. Vimos la implicación con el Teorema 3.3. La recíproca se prueba en [Da], por medio de probar que, si se cumple que para toda recta  $A$  y punto  $p$  existe una única recta paralela a  $A$  por  $p$ , entonces la SAI de cualquier triángulo es un ángulo llano.

**Teorema 3.4** (Criterio AAA)

Sean  $\triangle abc$  y  $\triangle a'b'c'$  tales que  $\angle abc \equiv \angle a'b'c'$ ,  $\angle bac \equiv \angle b'a'c'$ ,  $\angle acb \equiv \angle a'c'b'$ . Entonces, vale que  $\triangle abc \equiv \triangle a'b'c'$ .

**Demostración:**

La demostración será por absurdo. Supongamos, entonces, que  $\triangle abc \neq \triangle a'b'c'$ . Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que  $\overline{ab} > \overline{a'b'}$ . Sea  $T \in \mathcal{T}$  tal que  $T(\overrightarrow{a'b'}, (\overrightarrow{a'b'})_c) = (\overrightarrow{ab}, (\overrightarrow{ab})_c)$ . Entonces,  $T(a') = a$ . Sean  $b'' = T(b')$ ,  $c'' = T(c')$ . Hay tres casos, dependiendo de la posición de  $c''$ , como se puede ver en la Figura 3.5.

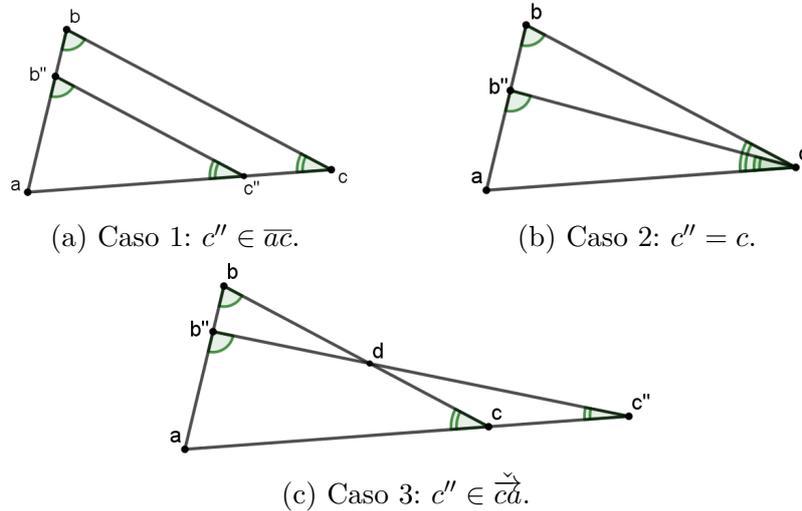


Figura 3.5: Hay tres casos, dependiendo de la posición de  $c''$ .

**Caso 1:**  $c'' \in \overline{ac}$ . En este caso, el cuadrilátero  $bb''c''c$  tiene SAI igual a  $2\pi$ , puesto que  $\angle bb''c'' + \angle b''bc = \angle b''c''c + \angle c''cb = \pi$ . *Absurdo.*

**Caso 2:**  $c'' = c$ . Tenemos que  $\angle acb'' \equiv \angle acb$  y  $\text{sec}(\angle acb'') \subsetneq \text{sec}(\angle acb)$ . *Absurdo.*

**Caso 3:**  $c'' \in \overrightarrow{ca}$ . Sea  $d \in \overline{b''c''} \cap \overline{bc}$ . Entonces  $\triangle dcc''$  tiene SAI mayor a  $\pi$ , puesto que  $\angle dcc'' + \angle cc''d = \pi$ . *Absurdo.*

■

### 3.2. Trigonometría

En esta sección desarrollaremos la trigonometría del plano hiperbólico en el modelo del semiplano superior. Enunciaremos y probaremos teoremas semejantes a los del plano euclídeo, por ejemplo, el Teorema de Pitágoras, el Teorema del Seno y el Teorema del Coseno.

En la trigonometría de la geometría euclídea, se comienza por estudiar los triángulos rectángulos y luego, la relación entre lados y ángulos de un triángulo arbitrario. Ese desarrollo será el que expondremos en esta sección.

En los triángulos rectángulos, una vez conocidas las longitudes de los catetos, la longitud de la hipotenusa está determinada, debido al criterio de congruencia LAL. En el plano hiperbólico, la fórmula que relaciona los tres lados de un triángulo rectángulo es

muy diferente a la correspondiente en geometría euclídea (Pitágoras). Aún así, llamaremos Teorema de Pitágoras en el plano hiperbólico al Teorema 3.5, por ser el resultado que explicita esta relación entre lados de un triángulo rectángulo.

NOTACIÓN: Denotaremos por  $|\overline{ab}|$  a la longitud del segmento  $\overline{ab}$ , es decir,  $|\overline{ab}| = d(a, b)$ .

**Teorema 3.5** (Teorema de Pitágoras en el plano hiperbólico)

*Si  $\triangle abc$  es un triángulo rectángulo en  $c$ , se cumple que:*

$$\cosh C = \cosh A \cdot \cosh B,$$

donde  $A = |\overline{bc}|$ ,  $B = |\overline{ac}|$ ,  $C = |\overline{ab}|$ .

**Demostración:**

Podemos asumir que  $c = i$ ,  $a = ai$ ,  $b_1 > 0$ , ya que podemos mover el triángulo  $\triangle abc$  a estas condiciones mediante una transformación rígida. Como  $\angle acb = \frac{\pi}{2}$ , obtenemos que

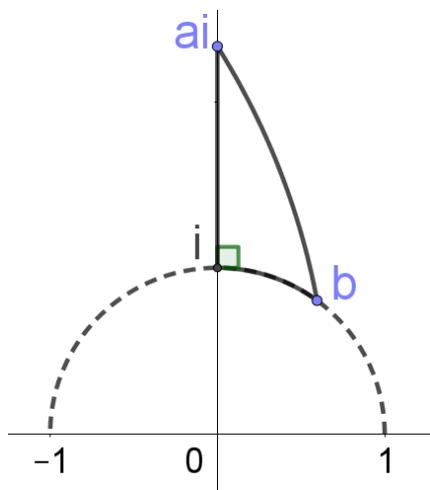


Figura 3.6: Podemos asumir  $c = i$ ,  $a = ai$ ,  $b_1 > 0$ .

$\overleftrightarrow{cb} = R_{0,1}$ , como se puede ver en la Figura 3.6. Luego,  $|b| = 1$ .

Teniendo en cuenta que  $a = (0, a)$ ,  $b = (b_1, b_2)$  con  $|b| = 1$ , y  $c = (0, 1)$ , calculamos  $\cosh A$ ,  $\cosh B$ , y  $\cosh C$ :

$$\begin{aligned} \cosh A &= \cosh(d(b, c)) = \frac{|b - c|^2}{2b_2c_2} + 1 = \frac{b_1^2 + (b_2 - 1)^2}{2b_2} + 1 \\ &= \frac{b_1^2 + b_2^2 - 2b_2 + 1 + 2b_2}{2b_2} = \frac{1 + 1}{2b_2} = \frac{1}{b_2}; \\ \cosh B &= \frac{|a - c|^2}{2a_2c_2} + 1 = \frac{(a - 1)^2}{2a} + 1 = \frac{a^2 - 2a + 1 + 2a}{2a} = \frac{a^2 + 1}{2a}; \\ \cosh C &= \frac{|a - b|^2}{2a_2b_2} + 1 = \frac{b_1^2 + (b_2 - a)^2}{2ab_2} + 1 \\ &= \frac{b_1^2 + b_2^2 - 2b_2a + a^2 + 2ab_2}{2ab_2} = \frac{a^2 + 1}{2ab_2}. \end{aligned}$$

Como  $\frac{a^2+1}{2ab_2} = \frac{a^2+1}{2a} \cdot \frac{1}{b_2}$ , se obtiene que  $\cosh C = \cosh A \cdot \cosh B$ , como queríamos. ■



podemos calcular  $\tan \alpha$  usando esto.

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \frac{a}{|o|} = \frac{a}{-o} = \frac{2ab_1}{a^2 - 1} \\ &= \frac{\tanh A}{\sinh B}.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Utilizaremos la identidad (3.2) para obtener otras que involucren  $\operatorname{sen} \alpha$  y  $\operatorname{cos} \alpha$ .

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha} - 1}} = \frac{\tanh A}{\sinh B} \\ \implies \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha} - 1 &= \left( \frac{\sinh B}{\tanh A} \right)^2 = \frac{\sinh^2 B \cosh^2 A}{\sinh^2 A} = \frac{(\cosh^2 B - 1) \cosh^2 A}{\sinh^2 A} \\ &= \frac{\cosh^2 B \cosh^2 A - \cosh^2 A}{\sinh^2 A} = \frac{\cosh^2 C - \cosh^2 A}{\sinh^2 A}.\end{aligned}$$

Luego, tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha} &= \frac{\cosh^2 C - \cosh^2 A + \sinh^2 A}{\sinh^2 A} = \frac{\cosh^2 C - 1}{\sinh^2 A} = \frac{\sinh^2 C}{\sinh^2 A} \\ \implies \operatorname{sen} \alpha &= \frac{\sinh A}{\sinh C}.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Por otro lado, obtenemos que

$$\begin{aligned}\operatorname{cos} \alpha &= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\tan \alpha} = \frac{\sinh A}{\sinh C} \cdot \frac{\sinh B}{\tanh A} \\ &= \frac{\sinh A}{\sinh C} \cdot \frac{\sinh B}{\sinh A} \cdot \cosh A = \frac{\sinh B}{\sinh C} \cdot \frac{\cosh C}{\cosh B} \\ &= \frac{\tanh B}{\tanh C}.\end{aligned}\tag{3.4}$$

A continuación, realizaremos algunos cálculos más para obtener más identidades:

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{\tanh B}{\tanh C} = \frac{\sinh B}{\sinh C} \cosh A = \operatorname{sen} \beta \cosh A;\tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \alpha &= \frac{\sinh A}{\sinh C} = \frac{\sinh A}{\tanh C} \cdot \frac{1}{\cosh C} = \frac{\sinh A}{\tanh C} \cdot \frac{1}{\cosh A \cosh B} \\ &= \frac{\tanh A}{\tanh C} \cdot \frac{1}{\cosh B} = \frac{\operatorname{cos} \beta}{\cosh B};\end{aligned}\tag{3.6}$$

$$\tan \alpha = \frac{\operatorname{cos} \beta}{\cosh B} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} \beta \cosh A} = \frac{1}{\tan \beta \cosh C}.\tag{3.7}$$

Con todos estos cálculos, obtuvimos las identidades que siguen a continuación.

### Identidades que relacionan un ángulo con dos lados

Sea  $\triangle abc$  un triángulo rectángulo en  $c$  y sean  $A = |\overline{bc}|$ ,  $B = |\overline{ac}|$ ,  $C = |\overline{ab}|$ ,  $\alpha = \angle bac$ . Entonces, valen las siguientes igualdades:

$$\boxed{\tan \alpha = \frac{\tanh A}{\sinh B} \quad \operatorname{sen} \alpha = \frac{\sinh A}{\sinh C} \quad \cos \alpha = \frac{\tanh B}{\tanh C}} \quad (3.8)$$

### Identidades que relacionan un lado con dos ángulos

Sea  $\triangle abc$  un triángulo rectángulo en  $c$  y sean  $A = |\overline{bc}|$ ,  $B = |\overline{ac}|$ ,  $C = |\overline{ab}|$ ,  $\alpha = \angle bac$ ,  $\beta = \angle abc$ . Entonces, valen las siguientes igualdades:

$$\boxed{\tan \alpha = \frac{1}{\tan \beta \cosh C} \quad \operatorname{sen} \alpha = \frac{\cos \beta}{\cosh B} \quad \cos \alpha = \operatorname{sen} \beta \cosh A} \quad (3.9)$$

Una vez estudiada la trigonometría de los triángulos rectángulos, podemos proseguir con el análisis para el caso general, es decir, para triángulos no necesariamente rectángulos. Demostraremos dos resultados, análogos a los teoremas euclídeos del coseno y del seno, en los Teoremas 3.6 y 3.7 respectivamente.

#### Teorema 3.6 (Teorema del coseno en el plano hiperbólico)

Sean  $\triangle abc$  un triángulo y  $\gamma = \angle acb$ . Entonces, se cumple que

$$\cosh C = \cosh A \cosh B - \operatorname{senh} B \operatorname{senh} A \cos \gamma,$$

donde  $A = |\overline{bc}|$ ,  $B = |\overline{ac}|$ ,  $C = |\overline{ab}|$ .

#### Demostración:

Hay tres casos, dependiendo de los ángulos de  $\triangle abc$ . Sean  $\alpha = \angle bac$  y  $\beta = \angle abc$ .

**Caso 1:**  $\alpha$  o  $\beta$  rectos. Si, por ejemplo,  $\alpha$  es recto, por (3.8), tenemos que  $\cos \gamma = \frac{\tanh B}{\tanh A}$  y, por Teorema 3.5, que  $\cosh A = \cosh B \cosh C$ . Luego,

$$\begin{aligned} \cosh A \cosh B - \operatorname{senh} B \operatorname{senh} A \cos \gamma &= \cosh A \cosh B - \operatorname{senh} B \operatorname{senh} A \frac{\operatorname{senh} B}{\cosh B} \cdot \frac{\cosh A}{\operatorname{senh} A} \\ &= \cosh C \cosh^2 B - \operatorname{senh} B \cosh B \cosh C \frac{\operatorname{senh} B}{\cosh B} \\ &= \cosh C (\cosh^2 B - \operatorname{senh}^2 B) \\ &= \cosh C. \end{aligned}$$

**Caso 2:**  $\alpha$  y  $\beta$  agudos. Sea  $h \in \overleftrightarrow{ab}$  tal que  $\overleftrightarrow{ch} \perp \overleftrightarrow{ab}$ . Sean  $H = |\overline{ch}|$ ,  $X = |\overline{ah}|$ ,  $Y = |\overline{hb}|$ ,  $x = \angle ach$ ,  $y = \angle bch$ , como se observa en la Figura 3.8. Como  $\alpha$  y  $\beta$  son agudos,  $h \in \overline{ab}$ ,  $C = X + Y$ , y  $\gamma = x + y$ . Por Teorema 3.5, tenemos que

$$\begin{aligned} \cosh A &= \cosh H \cosh Y; \\ \cosh B &= \cosh H \cosh X; \\ \implies \cosh A \cosh B &= \cosh^2 H \cosh X \cosh Y. \end{aligned}$$

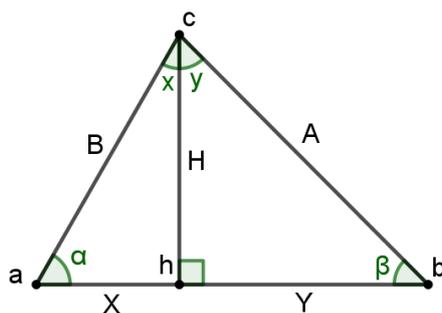


Figura 3.8: Como  $\alpha$  y  $\beta$  son agudos,  $h \in \overline{ab}$ ,  $C = X + Y$ , y  $\gamma = x + y$ .

Además, como  $\cosh C = \cosh(X + Y) = \sinh X \sinh Y + \cosh X \cosh Y$ , obtenemos que:

$$\begin{aligned} \cosh C - \cosh A \cosh B &= \sinh X \sinh Y + \cosh X \cosh Y (1 - \cosh^2 H) \\ &= \sinh X \sinh Y + \cosh X \cosh Y (\sinh^2 H). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ahora, usando las identidades (3.8) y (3.9), sabemos que:

$$\begin{aligned} \sinh X &= \operatorname{sen} x \sinh B; \\ \sinh Y &= \operatorname{sen} y \sinh A; \\ \cosh X &= \frac{\cos x}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\cos x}{\sinh H} \sinh B, y \\ \cosh Y &= \frac{\cos y}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{\cos y}{\sinh H} \sinh A. \end{aligned}$$

Ahora, reemplazando en (3.10) y factorizando, tenemos que:

$$\begin{aligned} \cosh C - \cosh A \cosh B &= \sinh A \sinh B (\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y - \cos x \cos y) \\ &= -\sinh A \sinh B \cos(x + y), \\ &= -\sinh A \sinh B \cos \gamma, \end{aligned}$$

como queríamos.

**Caso 3:**  $\alpha$  o  $\beta$  obtuso. Supongamos, por ejemplo, que  $\alpha$  es obtuso. Sean  $h, H, X, Y, x, y$  como en el caso anterior. En este caso, tenemos que  $h \in \overrightarrow{ab}$ ,  $C = Y - X$  y  $\gamma = y - x$ , como se puede ver en la Figura 3.9.

Análogamente al caso anterior, usando que  $\cosh C = \cosh(Y - X) = \cosh X \cosh Y - \sinh X \sinh Y$ , obtenemos que:

$$\begin{aligned} \cosh C - \cosh A \cosh B &= \sinh A \sinh B (-\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y - \cos x \cos y) \\ &= -\sinh A \sinh B \cos(y - x), \end{aligned}$$

como queríamos.

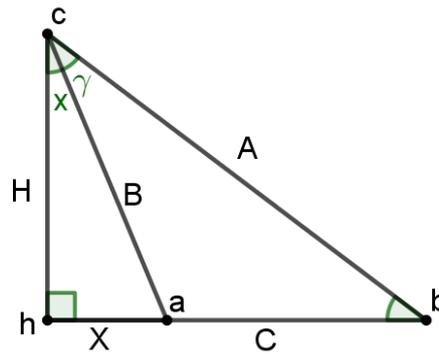


Figura 3.9:  $C = Y - X$  y  $\gamma = y - x$

■

**Teorema 3.7** (Teorema del seno) *Sea  $\triangle abc$  un triángulo. Entonces, vale que:*

$$\frac{\text{sen}\alpha}{\text{senh } A} = \frac{\text{sen}\beta}{\text{senh } B} = \frac{\text{sen}\gamma}{\text{senh } C},$$

donde  $A = |\overline{bc}|$ ,  $B = |\overline{ac}|$ ,  $C = |\overline{ab}|$ ,  $\alpha = \angle bac$ ,  $\beta = \angle abc$ ,  $\gamma = \angle acb$ .

**Demostración:**

Sea  $h \in \overleftrightarrow{bc}$  tal que  $\overleftrightarrow{ah} \perp \overleftrightarrow{bc}$  y sea  $H = |\overline{ah}|$ . Si  $h \in \overline{bc}$ , por la fórmula (3.2), tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\text{sen}\beta}{\text{senh } B} &= \frac{\text{senh } H}{\text{senh } C} \cdot \frac{1}{\text{senh } B}, \\ \frac{\text{sen}\gamma}{\text{senh } C} &= \frac{\text{senh } H}{\text{senh } B} \cdot \frac{1}{\text{senh } C}, \end{aligned}$$

por lo que  $\frac{\text{sen}\beta}{\text{senh } B} = \frac{\text{sen}\gamma}{\text{senh } C}$ . Notemos que, si  $h \notin \overline{cb}$ , también valen las identidades anteriores pues  $\text{sen}(\pi - \gamma) = \text{sen}\gamma$ .

Luego, por simetría, se cumple que  $\frac{\text{sen}\alpha}{\text{senh } A} = \frac{\text{sen}\beta}{\text{senh } B} = \frac{\text{sen}\gamma}{\text{senh } C}$ , como queríamos. ■

### 3.3. Área

Otra de las nociones fundamentales de la geometría es la de área. En esta sección, realizaremos la deducción de la fórmula de área de un triángulo de forma parecida a lo que hicimos en la Sección 2.3 con la fórmula de distancia entre dos puntos, es decir, partiendo sólo de las propiedades naturales que debería cumplir una función área.

Buscamos una función “continua”  $\alpha$  (que llamaremos área) tal que

1.  $\alpha(P) \geq 0 \quad \forall P$  región poligonal;
2. si  $\triangle abc \equiv \triangle a'b'c'$  entonces  $\alpha(\triangle abc) = \alpha(\triangle a'b'c')$  ;

3. si  $P = P_1 \cup P_2$  y  $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ , entonces  $\alpha(P) = \alpha(P_1) + \alpha(P_2)$ .

Procederemos análogamente a la geometría euclídea, estudiando regiones poligonales que sean equivalentes por disección. Además, cobrarán importancia aquí los históricamente famosos cuadriláteros de Saccheri.

### Definición 3.8

- Dos regiones  $P_1, P_2$  son *equivalentes por disección* si existen triángulos  $T_1, \dots, T_n$  y  $S_1, \dots, S_n$  tales que  $P_1 = T_1 \sqcup \dots \sqcup T_n$ ,  $P_2 = S_1 \sqcup \dots \sqcup S_n$  y  $T_k \equiv S_k \forall k = 1, \dots, n$ . En este caso, escribiremos  $P_1 \cong P_2$ . Notemos que  $\cong$  es relación de equivalencia.
- Dado un triángulo  $\triangle abc$ , su *defecto* será  $\pi - \hat{a} - \hat{b} - \hat{c}$ . Lo denotaremos por  $\delta(\triangle abc)$ . Dado un cuadrilátero  $abcd$ , su defecto será  $2\pi - \hat{a} - \hat{b} - \hat{c} - \hat{d}$ . Lo denotaremos por  $\delta(abcd)$ .
- Un cuadrilátero  $abcd$  será llamado *cuadrilátero de Saccheri* si  $\hat{c} = \hat{b} = \frac{\pi}{2}$  y  $\overline{ab} \equiv \overline{cd}$ .
- Sea  $\triangle abc$  un triángulo. Sean  $m$  y  $n$  los puntos medios de  $\overline{ab}$  y  $\overline{ac}$  respectivamente. Sea  $L = \overleftrightarrow{mn}$ . Sean  $d \in L$  tal que  $\overleftrightarrow{db} \perp L$  y  $e \in L$  tal que  $\overleftrightarrow{ec} \perp L$ , como se puede ver en la Figura 3.10. Entonces,  $bced$  será el *cuadrilátero de Saccheri asociado a  $\triangle abc$*  respecto al lado  $\overline{bc}$ .

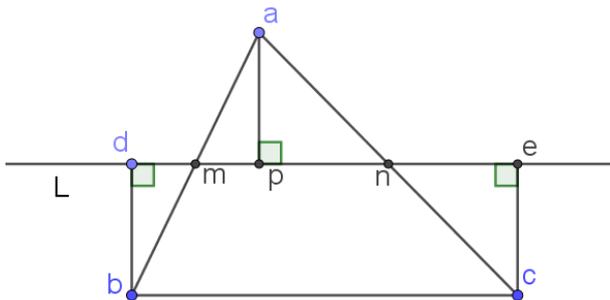


Figura 3.10:  $bced$  es el cuadrilátero de Saccheri asociado a  $\triangle abc$  respecto al lado  $\overline{bc}$ .

### OBSERVACIÓN:

1. Si  $P_1$  y  $P_2$  son dos regiones poligonales tales que  $P_1 \cong P_2$ , entonces se cumple que  $\alpha(P_1) = \alpha(P_2)$ , es decir, tienen la misma área.
2. El cuadrilátero de Saccheri  $bced$  asociado a un triángulo  $\triangle abc$  respecto al lado  $\overline{ab}$  es efectivamente un cuadrilátero de Saccheri.

### Demostración:

 (de la segunda observación)

Sea  $p \in L$  tal que  $\overleftrightarrow{ap} \perp L$ , como se puede ver en la Figura 3.10. Entonces, como  $\overline{am} \equiv \overline{bm}$ ,  $\angle apm = \frac{\pi}{2} = \angle bdm$  y  $\angle amp \equiv \angle bmd$ , por el criterio ALL, obtenemos que  $\triangle dbm \equiv \triangle pam$  y, por lo tanto,  $\angle mbd \equiv \angle map$  y  $\overline{ap} \equiv \overline{bd}$ . De la misma manera, obtenemos también que  $\angle pan \equiv \angle nce$  y  $\overline{ap} \equiv \overline{ec}$ , por lo que  $\overline{bd} \equiv \overline{ec}$ . Ahora, como también se cumple que  $\angle d = \frac{\pi}{2} = \angle e$ , el cuadrilátero  $bdec$  es de Saccheri. ■

**Lema 3.9** (Propiedades del cuadrilátero de Saccheri) *Sea  $abcd$  un cuadrilátero de Saccheri con  $\angle b = \frac{\pi}{2} = \angle c$ . Entonces, valen las siguientes afirmaciones:*

1.  $\angle a \equiv \angle d$ .
2. Criterio de congruencia: *Sea  $efgh$  otro cuadrilátero de Saccheri con  $\angle f \equiv \angle g = \frac{\pi}{2}$  tal que  $\angle a \equiv \angle e$  y  $\overline{ad} \equiv \overline{eh}$ . Entonces, vale que  $abcd \equiv efgh$ .*
3. *Sea  $\triangle abc$  un triángulo y  $dbce$  el cuadrilátero de Saccheri asociado. Entonces, se cumple que  $\delta(\triangle abc) = \delta(dbce)$ .*

**Demostración:**

1. Sabemos que  $\angle abc \equiv \angle bcd$  y  $\overline{ab} \equiv \overline{cd}$  por definición de cuadrilátero de Saccheri. Luego, por criterio LAL, tenemos que  $\triangle abc \equiv \triangle dcb$  y, por lo tanto,  $\overline{bd} \equiv \overline{ac}$ . Ahora, por criterio LLL, tenemos que  $\triangle cad \equiv \triangle bda$  y, por lo tanto,  $\angle bad \equiv \angle cda$ , como queríamos.
2. Supongamos que  $\overline{ab} < \overline{ef}$ . Sea  $f' \in \overrightarrow{ab}$  y  $g' \in \overrightarrow{dc}$  tal que  $\overline{af'} \equiv \overline{ef}$  y  $\overline{dg'} \equiv \overline{hg}$ . Por criterio LAL, tenemos que  $\triangle f'ad \equiv \triangle feh$  y, por lo tanto,  $\overline{f'd} \equiv \overline{fh}$  y  $\angle adf' \equiv \angle ehf$ . Luego, recordando que  $\angle adc \equiv \angle bad \equiv \angle feh \equiv \angle ehg$ , obtenemos  $\angle f'dg' \equiv \angle fhg$ . Ahora, por criterio LAL, tenemos que  $\triangle f'dg' \equiv \triangle fhg$ , por lo que  $\overline{f'g'} \equiv \overline{fg}$  y  $\angle dg'f' \equiv \angle hgf$ , es decir, obtenemos  $\angle dg'f' = \frac{\pi}{2}$ . Análogamente, se puede ver que  $\angle af'g' = \frac{\pi}{2}$  y, por lo tanto,  $bcg'f'$  es un cuadrilátero con todos sus ángulos rectos. *Absurdo*, por Teorema 3.3.
3. Sean  $m, n, L$  como en la Definición 3.8. Sea  $p \in L$  tal que  $\overline{ap} \perp L$ . Ya vimos que  $\angle dbm \equiv \angle map$  y  $\angle ecn \equiv \angle pan$ . Como siempre hay al menos dos ángulos agudos en un triángulo, en  $\triangle abc$  se cumple que, o  $\angle b$  es agudo, o bien  $\angle c$  lo es. Supongamos que  $\angle c$  es agudo. Notemos que  $\delta(bced) = \pi - \angle dbc - \angle ecb$ . Hay varios casos, según la ubicación del punto  $d$ .

**Caso 1:**  $d \in \overrightarrow{mn}$ . Tenemos que:

$$\begin{aligned}\angle dbc &= \angle dba + \angle abc = \angle pam + \angle abc, \\ \angle ecb &= \angle eca + \angle acb = \angle pan + \angle acb,\end{aligned}$$

como se puede ver en la Figura 3.11(a). De esto, deducimos que

$$\begin{aligned}\angle dbc + \angle ecb &= \angle abc + \angle acb + \angle pam + \angle pan \\ &= \angle abc + \angle acb + \angle bac,\end{aligned}$$

por lo que  $\delta(bced) = \delta(abc)$ , como queríamos.

**Caso 2:**  $d \in \overrightarrow{mn}$ . Tenemos que

$$\begin{aligned}\angle ecb &= \angle eca + \angle acb = \angle pan + \angle acb \\ \angle dbc &= \angle abc - \angle mbd = \angle abc - \angle pam.\end{aligned}$$

Luego, como  $\angle pan - \angle pam = \angle bac$ , obtenemos que  $\delta(bced) = \delta(abc)$ , como queríamos.

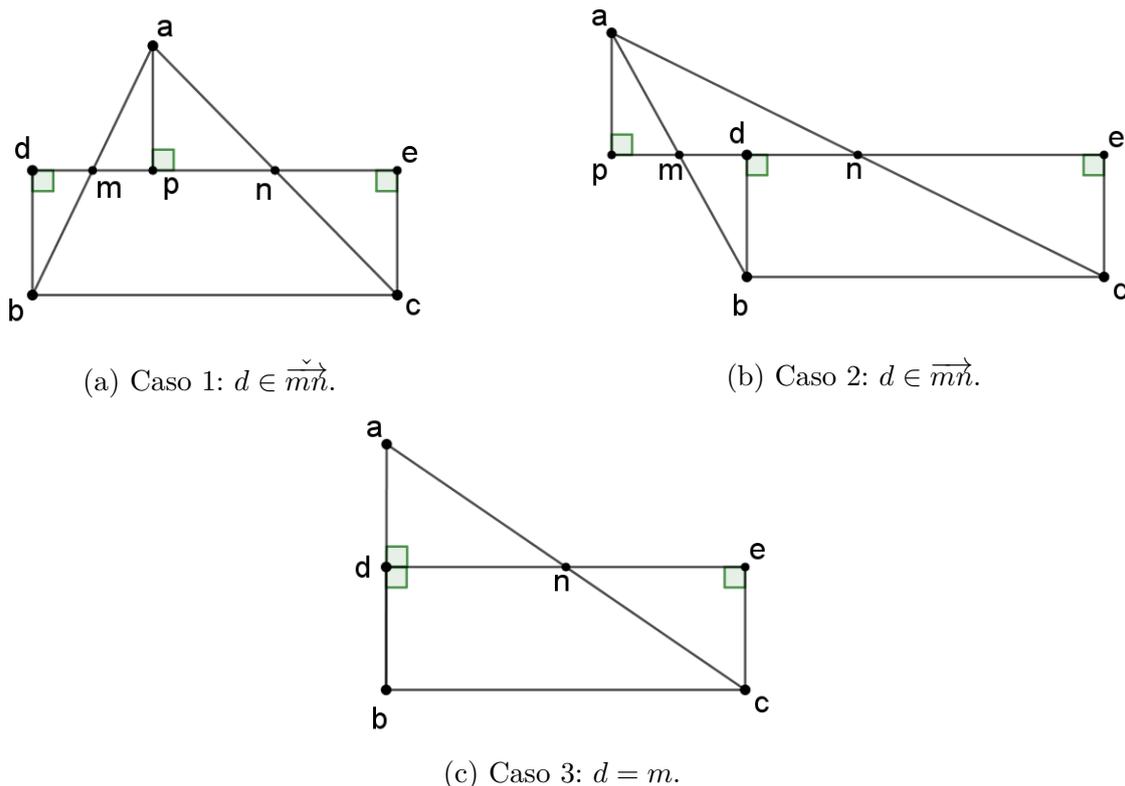


Figura 3.11: Hay varios casos, según la ubicación del punto  $d$ .

**Caso 3:**  $d = m$ . En este caso,  $p = d = m$ . Tenemos que:

$$\begin{aligned} \angle ECB &= \angle ACB + \angle ECA \\ &= \angle ACB + \angle PAN \\ &= \angle ACB + \angle BAC, \end{aligned}$$

por lo que  $\delta(BCED) = \delta(ABC)$ .

■

**Teorema 3.10** Si  $\delta(\triangle ABC) = \delta(\triangle XYZ)$ , entonces  $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$  y, por lo tanto,  $\alpha(\triangle ABC) = \alpha(\triangle XYZ)$ .

**Demostración:**

Supongamos que  $\overline{ab} < \overline{xy}$ . Sean  $m, n, L, e, d$ , como en la Definición 3.8.

Sabemos que una recta que pasa por el interior de una circunferencia la interseca en al menos un punto. Como  $\overline{bm} < \frac{1}{2}\overline{xy}$ , tenemos que  $m \in \text{int}(C_{b, \frac{1}{2}\overline{xy}})$ . Luego, existe  $q \in L$  tal que  $\overline{bq} \equiv \frac{1}{2}\overline{xy}$ . Sean  $r \in \overrightarrow{qb}$  tal que  $\overline{br} \equiv \overline{qr}$ ,  $p \in L$  tal que  $\overrightarrow{rp} \perp L$ , y  $s$  tal que  $\{s\} = \overrightarrow{rc} \cap \overrightarrow{ne}$ , como se puede ver en la Figura 3.12.

Sabemos que  $BCED$  es el cuadrilátero de Saccheri de  $\triangle ABC$ . Veamos que también es el asociado a  $\triangle BRC$ .

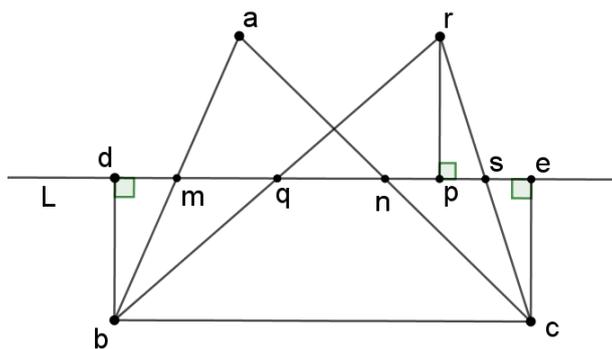


Figura 3.12:  $bced$  es el cuadrilátero de Saccheri de  $\triangle abc$  y también es el asociado a  $\triangle brc$ .

Por criterio AAL, tenemos que  $\triangle bqd \equiv \triangle rqp$  y, por lo tanto,  $\overline{db} \equiv \overline{rp}$ . Además,  $\overline{db} \equiv \overline{ce}$  por ser  $bced$  cuadrilátero de Saccheri. Por lo tanto,  $\overline{rp} \equiv \overline{ce}$ . Nuevamente, por criterio AAL, obtenemos que  $\triangle rps \equiv \triangle ces$ , por lo que  $\overline{rs} \equiv \overline{sc}$  y  $s$  es, entonces, el punto medio de  $\overline{rc}$ . Luego,  $bced$  es el cuadrilátero de Saccheri asociado a  $\triangle brc$  y, por lo tanto, obtenemos que

$$\delta(xyz) = \delta(\triangle rbc) = \delta(bced) = \delta(abc).$$

Hemos construido un triángulo  $\triangle rbc$  con  $\overline{rb} \equiv \overline{xy}$  y  $\delta(\triangle rbc) = \delta(\triangle xyz)$ . Si construimos los cuadriláteros de Saccheri asociados a  $\triangle rbc$  y  $\triangle xyz$  de base menor  $\overline{rb}$  y  $\overline{xy}$  respectivamente, los cuadriláteros resultantes tendrán ángulos agudos congruentes por tener ambos el mismo defecto. Luego, los cuadriláteros son congruentes entre sí por criterio de congruencia del Lema 3.9. Entonces, tenemos que  $\triangle abc \cong \triangle rbc \cong \triangle xyz$  y  $\alpha(\triangle abc) = \alpha(\triangle xyz)$ . ■

El Teorema 3.10, establece que el área de un triángulo depende solo de su defecto. Nos hace falta alguna propiedad más para determinar la relación entre el área y el defecto de un triángulo, y de aquí la utilidad del Lema 3.11.

**Lema 3.11** *Sea  $\triangle abc$  un triángulo y  $d \in \overline{bc}$ . Entonces,*

$$\delta(\triangle abc) = \delta(\triangle adb) + \delta(\triangle adc).$$

**Demostración:**

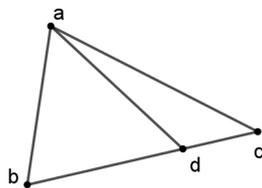


Figura 3.13:  $\delta(\triangle abc) = \delta(\triangle adb) + \delta(\triangle adc)$ .

Observamos que  $\angle adc + \angle adb = \pi$ , como se puede ver en la Figura 3.13, y de ahí deducimos fácilmente el resultado. ■

**Teorema 3.12** *Existe una constante  $k$  tal que, para todo triángulo  $\triangle abc$ , se cumple*

$$\alpha(\triangle abc) = k\delta(\triangle abc).$$

**Demostración:**

Por el Teorema 3.10, sabemos que  $\delta(\triangle abc) = \delta(\triangle a'b'c')$  implica que  $\alpha(\triangle abc) = \alpha(\triangle a'b'c')$ . Luego, existe  $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  tal que  $\alpha(\triangle abc) = f(\delta(\triangle abc))$ ,  $\forall \triangle abc$ .

Ahora, mirando la Figura 3.13, sabemos que  $\alpha(\triangle abc) = \alpha(\triangle abd) + \alpha(\triangle adc)$ , y por el Lema 3.11, tenemos que

$$f(\delta(\triangle abd) + \delta(\triangle adc)) = f(\delta(\triangle abc)) = f(\delta(\triangle abd)) + f(\delta(\triangle adc)).$$

Luego,  $f$  tiene que ser lineal en la suma y tiene que ser continua, por lo que  $f(x) = kx$ , para alguna constante  $k \in \mathbb{R}_{>0}$ . ■

OBSERVACIÓN:

- Podemos pensar que elegir la constante  $k$  del Teorema 3.12 es análogo a determinar, en geometría euclídea, que un cuadrado de lado 1 tenga área 1, y es semejante a elegir el segmento unidad para construir la función distancia, como hicimos en la Sección 2.3. No hemos encontrado razones elementales para fijar un valor determinado de  $k$ . Se suele elegir igual a 1. Esto se debe a múltiples razones que se escapan a lo tratado en este trabajo (por ejemplo, tomar  $k = 1$  hace que la curvatura de la superficie sea  $-1$ ). A partir de este momento, tomaremos  $k = 1$ , por lo que la fórmula del área de un triángulo será la siguiente:

$$\alpha(\triangle abc) = \pi - \hat{a} - \hat{b} - \hat{c} \tag{3.11}$$

- Notemos que el área de cualquier triángulo está acotada por  $\pi$ , lo cual constituye otra gran diferencia entre la geometría euclídea y la geometría hiperbólica.

## 3.4. Circunferencias hiperbólicas

Un objeto fundamental en geometría es la circunferencia. En esta sección, estudiaremos cómo lucen las circunferencias hiperbólicas en el modelo del semiplano superior y encontraremos una fórmula para su perímetro.

**Definición 3.13** Llamaremos *circunferencia de centro  $a$  y radio  $r$*  al conjunto

$$\{p \in \pi : d(a, p) = r\}.$$

Lo denotaremos por  $\mathcal{C}_{a,r}$ .

Nos gustaría saber cómo se ven las circunferencias en el modelo del semiplano superior. Para comenzar con esto, estudiaremos  $\mathcal{C}_{a,r}$  con  $a = i$  y  $r = 1$ .

Consideramos  $\mathcal{C}_{i,1} = \{p \in \pi : d(i,p) = 1\}$ . Sea  $p \in \pi$ . Luego,

$$d(p,i) = 1 \iff \frac{|i-p|^2}{2p_2} + 1 = \cosh(1).$$

Ahora, llamando  $c = \cosh(1)$ , obtenemos

$$\begin{aligned} d(p,i) = 1 &\iff p_1^2 + p_2^2 - 2p_2 + 1 + 2p_2 = 2p_2c \\ &\iff p_1^2 + p_2^2 - 2p_2c = -1 \\ &\iff |p - a'|^2 = c^2 - 1 \\ &\iff p \in \mathcal{C}_{a',r'}, \end{aligned}$$

donde  $a' = (0, c)$  y  $r' = \sqrt{c^2 - 1}$ .

Obtuvimos, entonces, que la circunferencia hiperbólica de centro  $i$  y radio 1 es una circunferencia de centro  $(0, \cosh(1))$  y radio  $\sqrt{\cosh^2(1) - 1}$ . *¿Ocurrirá algo semejante para una circunferencia hiperbólica genérica?*

Justamente, las circunferencias hiperbólicas en el modelo del semiplano superior lucen como circunferencias euclídeas aunque de un centro distinto, como veremos en el Teorema 3.14 y como se observa en la Figura 3.14.

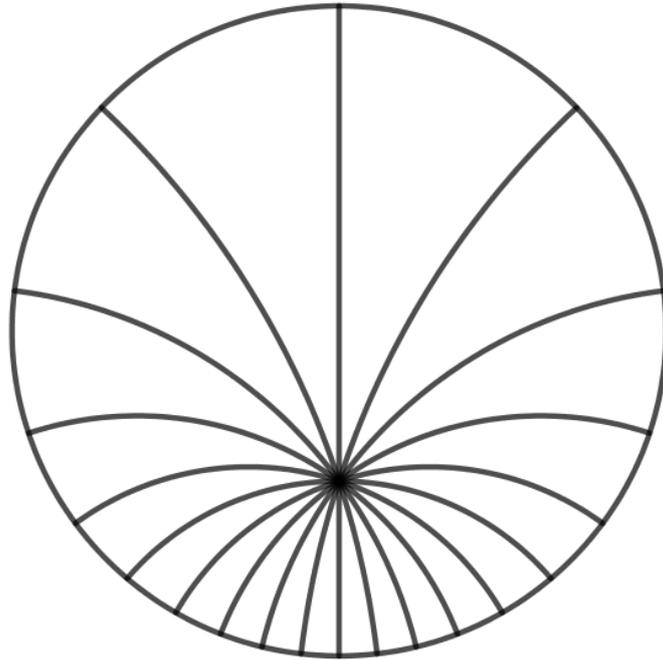


Figura 3.14: Circunferencia hiperbólica.

**Teorema 3.14** Sea  $\mathcal{C}_{a,r}$  una circunferencia de centro  $a$  y radio  $r$ , entonces  $\mathcal{C}_{a,r} = \mathcal{C}_{a',r'}$ , con  $a' = (a_1, a_2c_r)$  y  $r' = a_2 \sqrt{c_r^2 - 1}$ , donde  $c_r = \cosh r$ .

**Demostración:**

Como  $\mathcal{C}_{a,r} = \{p \in \pi : d(a,p) = r\}$ , nos interesa ver exactamente cuáles son los puntos  $p$  que satisfacen  $d(a,p) = r$ . Tenemos que

$$\begin{aligned}
 d(p,a) = r &\iff \frac{|p-a|^2}{2a_2p_2} + 1 = \cosh(r) \\
 &\iff |p-a|^2 + 2a_2p_2 = 2a_2p_2c_r \quad (\text{donde } c_r = \cosh r) \\
 &\iff (p_1 - a_1)^2 + p_2^2 - 2a_2p_2 + a_2^2 + 2a_2p_2 = 2a_2p_2c_r \\
 &\iff (p_1 - a_1)^2 + p_2^2 - 2a_2p_2c_r = -a_2^2 \\
 &\iff (p_1 - a_1)^2 + (p_2 - a_2c_r)^2 = -a_2^2 + a_2^2c_r^2 \\
 &\iff |p - a'|^2 = r'^2 \\
 &\iff p \in \mathcal{C}_{a',r'},
 \end{aligned}$$

donde  $a' = (a_1, a_2c_r)$  y  $r' = a_2\sqrt{c_r^2 - 1}$ . ■

**Perímetro de una circunferencia de radio  $r$** 

Buscamos el perímetro  $P$  de una circunferencia de radio  $r$ . Para esto, lo comparamos con los perímetros  $Q_n$  de polígonos regulares<sup>1</sup> de  $n$  lados inscriptos y los perímetros  $\tilde{Q}_n$  de polígonos regulares de  $n$  lados circunscriptos, como se puede ver de forma esquemática en la Figura 3.15. Así,  $Q_n \leq P \leq \tilde{Q}_n$ .

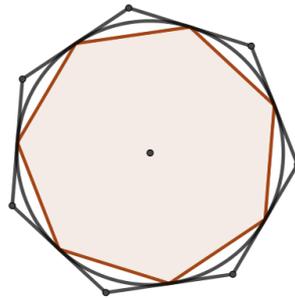


Figura 3.15: Polígonos inscriptos y circunscriptos a una circunferencia.

**OBSERVACIÓN:** Los polígonos regulares de  $n$  lados inscriptos en una circunferencia existen. Trazamos  $n$  semirrectas de origen  $o$  tales que los ángulos formados sean todos iguales a  $\alpha_n = \frac{2\pi}{n}$ . Las intersecciones de las semirrectas con la circunferencia son los vértices del polígono que, por criterio LAL, tiene todos sus lados congruentes.

**Teorema 3.15** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $Q_n$  el perímetro de un polígono regular de  $n$  lados inscripto en  $\mathcal{C}_{o,r}$ . Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = 2\pi \sinh(r).$$

<sup>1</sup>Con polígono *regular*, queremos decir, en principio, polígonos que tengan todos sus lados congruentes.

**Demostración:**

Sea  $\alpha_n = \frac{2\pi}{n}$ . Sea  $A_n$  la longitud del lado de un polígono regular de  $n$  lados inscrito en la circunferencia  $\mathcal{C}_{o,r}$ . Por Teorema 3.6, tenemos que

$$\cosh A_n = \cosh^2(r) - \sinh^2(r) \cos \alpha_n = 1 + \sinh^2(r)(1 - \cos \alpha_n).$$

Sea  $b_n = 1 - \cos \alpha_n$ . Luego, como  $Q_n = nA_n$  y  $\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \forall x \in \mathbb{R}_{>0}$ , tenemos que

$$\begin{aligned} Q_n &= nA_n = \ln \left( 1 + b_n \sinh^2(r) + \sqrt{(1 + b_n \sinh^2(r))^2 - 1} \right)^n \\ &= \ln \left( 1 + b_n \sinh^2(r) + \sqrt{b_n^2 \sinh^4(r) + 2b_n \sinh^2(r)} \right)^n \\ &= \ln(1 + x_n)^n, \end{aligned}$$

donde  $x_n = b_n \sinh^2(r) + \sqrt{b_n^2 \sinh^4(r) + 2b_n \sinh^2(r)}$ . Sea  $y_n = nx_n$ . Entonces,  $Q_n = \ln \left( 1 + \frac{y_n}{n} \right)^n$ . Luego, si  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = L$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{y_n}{n} \right)^n = e^L$  y, finalmente,  $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = L$ .

Escribimos  $y_n = c_n + \sqrt{d_n}$ , donde  $c_n = nb_n \sinh^2(r)$  y  $d_n = n^2 b_n^2 \sinh^4(r) + 2n^2 b_n \sinh^2(r)$ . Recordemos que  $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots$ , con lo que tenemos

$$b_n = 1 - \cos \left( \frac{2\pi}{n} \right) = \frac{1}{2!} \left( \frac{2\pi}{n} \right)^2 - \frac{1}{4!} \left( \frac{2\pi}{n} \right)^4 + \dots$$

Luego,  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 b_n = \frac{1}{2!} 4\pi^2 = 2\pi^2$ . De esto, deducimos que  $nb_n = \frac{n^2 b_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$  y, por lo tanto,  $n^2 b_n^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ . Por lo tanto, obtenemos que  $c_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$  y  $d_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 + 4\pi^2 \sinh^2(r) = 4\pi^2 \sinh^2(r)$ .

De esta manera,  $y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 + \sqrt{4\pi^2 \sinh^2(r)} = 2\pi \sinh(r)$ , como queríamos. ■

**OBSERVACIÓN:** Si marcamos los  $n$  vértices de un polígono inscrito en la circunferencia y trazamos las tangentes a ella por estos puntos, en principio no sabemos si se intersecarán de a dos rectas consecutivas. El Lema 3.18 asegurará que, para  $n$  suficientemente grande, esto sí ocurre y, por lo tanto, se pueden construir polígonos regulares circunscritos a una circunferencia dada.

**Teorema 3.16** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $\tilde{Q}_n$  el perímetro de un polígono regular de  $n$  lados circunscrito a  $\mathcal{C}_{o,r}$ . Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{Q}_n = 2\pi \sinh(r)$$

**Demostración:**

Sean  $\alpha_n = \frac{2\pi}{n}$  y  $B_n$  la longitud del lado de un polígono regular de  $n$  lados circunscrito a  $\mathcal{C}_{o,r}$ . Si  $p$  es un punto de tangencia y  $a$  un vértice del polígono contiguo a  $p$ , tenemos que  $\angle apo = \frac{\pi}{2}$  y, entonces, usando la Fórmula (3.2), obtenemos que

$$\tan \left( \frac{\alpha_n}{2} \right) = \frac{\tanh \left( \frac{B_n}{2} \right)}{\sinh(r)} \implies \tanh \frac{B_n}{2} = \tan \left( \frac{\alpha_n}{2} \right) \sinh(r).$$

Recordemos que  $\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$ . Luego,

$$\begin{aligned} \frac{B_n}{2} &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + \tan \left( \frac{\alpha_n}{2} \right) \sinh(r)}{1 - \tan \left( \frac{\alpha_n}{2} \right) \sinh(r)} \right) = \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \frac{2 \tan \left( \frac{\alpha_n}{2} \right) \sinh(r)}{1 - \tan \left( \frac{\alpha_n}{2} \right) \sinh(r)} \right) \\ \implies \tilde{Q}_n = nB_n &= \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{2n \tan \left( \frac{\alpha_n}{2} \right) \sinh(r)}{1 - \tan \left( \frac{\alpha_n}{2} \right) \sinh(r)} \right)^n \\ &\implies \tilde{Q}_n = \ln \left( 1 + \frac{z_n}{n} \right)^n, \end{aligned}$$

donde  $z_n = \frac{2n \tan \left( \frac{\alpha_n}{2} \right) \sinh(r)}{1 - \tan \left( \frac{\alpha_n}{2} \right) \sinh(r)}$ . Entonces, si  $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$ ,  $\tilde{Q}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$ . Como  $\tan x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^5}{15} + \dots$ , tenemos que

$$\begin{aligned} n \tan \frac{\pi}{n} &= \pi + \frac{\pi^3}{3!n^2} + \dots \\ \implies \lim_{n \rightarrow \infty} n \tan \left( \frac{\alpha_n}{2} \right) &= \pi. \end{aligned}$$

Además,  $\tan \left( \frac{\alpha_n}{2} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Luego, obtenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \frac{2\pi \sinh(r)}{1 - 0} = 2\pi \sinh(r) = L.$$

Por lo tanto,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{Q}_n = L = 2\pi \sinh(r)$ , como queríamos. ■

Usando los Teoremas 3.15 y 3.16, deducimos la fórmula para el perímetro de una circunferencia, que mostramos en el Teorema 3.17.

**Teorema 3.17** *El perímetro de una circunferencia  $\mathcal{C}_{a,r}$  de centro  $a$  y radio  $r$  es  $2\pi \sinh(r)$ .*

**Lema 3.18** *Sea  $\mathcal{C}$  una circunferencia de centro  $a$  y radio  $r$ . Sean  $p \in \mathcal{C}$  y  $T$  la recta tangente a  $\mathcal{C}$  por  $p$ . Entonces, existe un ángulo  $\alpha$  tal que, para todo  $q \in \pi$ , vale*

$$\vec{a}q \cap T \neq \emptyset \iff \angle paq < \alpha.$$

**Demostración:**

Podemos asumir que  $\vec{pa} = R_0$  y  $p_2 < a_2$ . Si no, movemos la semirrecta  $\vec{pa}$  mediante una transformación rígida para que así sea. Sea  $x = |\vec{ap}|$ . Entonces, es claro que  $T = R_{0,r'}$ , donde  $r' = a_2 - x$ , como se puede ver en la Figura 3.16.

Sea  $b = -r' \in \mathbb{R}$  y sea  $A$  la semirrecta de origen  $a$  y punto en el infinito  $b$ . Sean  $b' \in A$  y  $\alpha = \angle b'ap$ . Entonces, tenemos que  $\vec{a}q \cap T \neq \emptyset \iff \angle paq < \alpha$ , como queríamos. ■

El Lema 3.18, nos asegura entonces la construcción de polígonos circunscriptos a una circunferencia dada para  $n$  suficientemente grande y, por lo tanto,  $\alpha_n$  suficientemente chico.

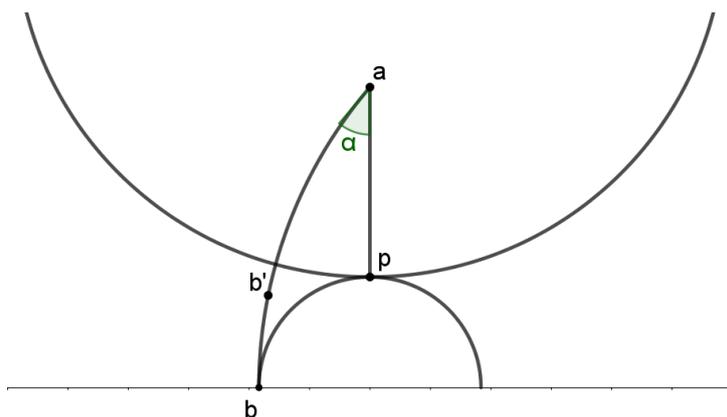


Figura 3.16:  $T = R_{0,r'}$ , donde  $r' = a_2 - x$ .

NOTA: El área de una circunferencia se puede calcular aproximándola por las áreas de polígonos regulares inscritos y circunscriptos a ella, de la misma manera en que lo hicimos con el perímetro. La fórmula de área de una circunferencia es:

$$\alpha(\mathcal{C}_{a,r}) = 4\pi \operatorname{senh}^2\left(\frac{r}{2}\right).$$



# Capítulo 4

## Polígonos rectangulares

Recordemos que no existen cuadriláteros con todos sus ángulos rectos en geometría hiperbólica. En este capítulo, estudiaremos la trigonometría de algunos *polígonos rectangulares* con al menos cinco lados y el área de los mismos.

### Distancia entre dos rectas

Sean  $A, B$  dos rectas. Buscamos  $y \in A, z \in B$ , tales que  $d(y, z) = d(A, B)$ , es decir,  $\overrightarrow{yz} \perp A$  y  $\overrightarrow{yz} \perp B$ . Se puede ver que tales puntos no siempre existen, pero si existen, son únicos. Probaremos una fórmula en relación a la distancia entre dos rectas que nos ayudará a probar resultados posteriores, en función de la *razón doble* de los puntos en el infinito de las dos rectas.

**Definición 4.1** Dados cuatro puntos  $a, b, c, d$  en una recta, la *razón doble* se define como

$$\{a, b; c, d\} := \frac{|\overline{ac}| |\overline{bd}|}{|\overline{bc}| |\overline{ad}|},$$

donde los segmentos deben ser interpretados como segmentos orientados.

OBSERVACIÓN: Cuatro puntos pueden ser ordenados de  $4! = 24$  maneras, sin embargo, cuatro puntos pueden tener solo 6 razones dobles diferentes, que se relacionan de esta forma:

$$\begin{aligned} \{a, b; c, d\} &= \{b, a; d, c\} = \{c, d; a, b\} = \{d, c; b, a\} = r, \\ \{a, b; d, c\} &= \{b, a; c, d\} = \{c, d; b, a\} = \{d, c; a, b\} = \frac{1}{r}, \\ \{a, c; b, d\} &= \{b, d; a, c\} = \{c, a; d, b\} = \{d, b; c, a\} = 1 - r, \\ \{a, c; d, b\} &= \{b, d; c, a\} = \{c, a; b, d\} = \{d, b; a, c\} = \frac{1}{1 - r}, \\ \{a, d; b, c\} &= \{b, c; a, d\} = \{c, b; d, a\} = \{d, a; c, b\} = \frac{1 - r}{r}, \\ \{a, d; c, b\} &= \{b, c; d, a\} = \{c, b; a, d\} = \{d, a; b, c\} = \frac{r}{r - 1}. \end{aligned}$$

Nos interesan las razones dobles entre puntos en el infinito de rectas de  $\pi$ , es decir, de puntos en  $\mathbb{R}$ . Además, recordemos que los puntos en el infinito de una recta  $R_x$  son  $x$  y  $\star$ (infinito). Extendemos, entonces, la definición de razón doble al caso en donde uno de los puntos es  $\star$ .

#### Definición 4.2

- Dados  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , definimos la *razón doble* entre ellos como

$$\{a, b; c, d\} = \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)}.$$

- Dados  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , definimos la razón doble entre ellos y  $\star$  como

$$\{a, b; c, \star\} = \frac{(c-a)(\star-b)}{(c-b)(\star-a)} = \frac{c-a}{c-b}.$$

**Lema 4.3** *Las transformaciones rígidas preservan la razón doble entre puntos del infinito, es decir:*

*Si  $T$  es una transformación rígida y  $a, b, c, d \in \mathbb{R} \cup \star$ , entonces  $\{a, b; c, d\} = \{T(a), T(b); T(c), T(d)\}$ .*

#### Demostración:

Recordemos que el grupo de transformaciones rígidas están generadas por las funciones  $S_A$ , con  $A$  recta. Basta ver, entonces, que estas transformaciones preservan razones dobles entre puntos del infinito.

Si  $A \in \mathcal{R}_1$ ,  $S_A$  es por definición una simetría axial y mantiene distancias euclídeas, por lo que preserva razones dobles. Si  $A \in \mathcal{R}_2$ , con  $A = R_{o,r}$ , y  $T = S_A$ , obtenemos que  $T(z) = \frac{r^2}{\bar{z}-o} + o$ . Luego,  $T(a) = \frac{r^2}{a-o} + o$ ,  $T(b) = \frac{r^2}{b-o} + o$ ,  $T(c) = \frac{r^2}{c-o} + o$  y  $T(d) = \frac{r^2}{d-o}$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \{T(a), T(b); T(c), T(d)\} &= \frac{(T(c) - T(a))(T(d) - T(b))}{(T(c) - T(b))(T(d) - T(a))} \\ &= \left[ \left( \frac{r^2}{c-o} - \frac{r^2}{a-o} \right) \left( \frac{r^2}{d-o} - \frac{r^2}{b-o} \right) \right] : \left[ \left( \frac{r^2}{c-o} - \frac{r^2}{b-o} \right) \left( \frac{r^2}{d-o} - \frac{r^2}{a-o} \right) \right] \\ &= \left( \frac{c-a}{(c-o)(a-o)} \cdot \frac{d-b}{(d-o)(b-o)} \right) : \left( \frac{c-b}{(c-o)(b-o)} \cdot \frac{d-a}{(d-o)(a-o)} \right) \\ &= \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)} \\ &= \{a, b; c, d\}. \end{aligned}$$

Notemos que siguen valiendo las igualdades anteriores aún cuando alguno de los puntos es  $\star$ . ■

**Lema 4.4** *Sean  $A$  y  $B$  rectas paralelas divergentes. Sean  $a, b$  y  $c, d$  los puntos en el infinito de  $A$  y  $B$  respectivamente, con  $a < b$  y  $c < d$  (en el caso de  $\star$ ,  $x < \star \forall x \in \mathbb{R}$ ). Si  $r$  es la razón doble  $\{a, b; c, d\}$ , entonces*

$$\cosh(d(A, B)) = \frac{1+r}{1-r}.$$

**Demostración:**

Sabemos que  $d(A, B) = d(y, z)$ , donde  $y, z$  son tales que  $y \in A, z \in B, \overleftrightarrow{yz} \perp A$ , y  $\overleftrightarrow{yz} \perp B$ . Mediante una transformación rígida, podemos llevar  $y$  a  $i, z$  a  $xi$  ( $x \in \mathbb{R}$ ); y, por lo tanto,  $A$  a la recta  $R_{0,1}$  y  $B$  a la recta  $R_{0,x}$ .

Sabemos que  $d(i, xi) = \ln x$ , por lo que  $\cosh(d(i, xi)) = \frac{x^2+1}{2x}$ . Además, notemos que si  $r'$  es la razón doble entre los puntos en el infinito de  $R_{0,1}$  y  $R_{0,x}$ ,

$$\begin{aligned} r' &= \{-1, 1; -x, x\} \\ &= \frac{(-x - (-1))(x - 1)}{(-x - 1)(x - (-1))} \\ &= \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1}. \end{aligned}$$

Luego,  $1 + r' = \frac{2x^2+2}{x^2+2x+1}$  y  $1 - r' = \frac{4x}{x^2+2x+1}$ , por lo que  $\frac{1+r'}{1-r'} = \frac{x^2+1}{2x}$ .

Además, sabemos que las transformaciones rígidas preservan las razones dobles entre puntos en el infinito, por el Lema 4.3. Luego,  $r = r'$  y

$$d(A, B) = d(R_{0,1}, R_{0,x}) = \frac{1+r'}{1-r'} = \frac{1+r}{1-r},$$

como queríamos. ■

Probaremos ahora un lema que nos ayudará a realizar cálculos para los Teoremas 4.6 y 4.8.

**Lema 4.5** *Sea  $R$  una recta en  $\mathcal{R}_2$ . Sean  $x$  e  $y$  los puntos en el infinito de  $R$ , con  $x < y$ . Sea  $a = (a_1, a_2)$  un punto en  $R$  y  $A$  la perpendicular a  $R$  por  $a$ . Entonces,*

- Si  $a_1 = \frac{x+y}{2}$ , entonces  $A$  es la recta  $R_{a_1}$ .
- Si  $a_1 \neq \frac{x+y}{2}$ , entonces  $A$  es la recta  $R_{o,r}$ , donde

$$o = \frac{a_1(x+y) - 2xy}{2a_1 - x - y} \text{ y } r^2 = (o-x)(o-y).$$

**Demostración:**

El caso  $a_1 = \frac{x+y}{2}$  es evidente. Asumamos, entonces, que  $a_1 \neq \frac{x+y}{2}$  y, por lo tanto,  $A \in \mathcal{R}_2$ . Por potencia del punto  $o$  respecto a  $A$  y teniendo en cuenta que  $\overline{oa}$  debe ser tangente a  $R$  (pues  $R \perp A$ ), se tiene que  $(o-x)(o-y) = r^2 = |\overline{oa}|^2$ .

Además, como el centro y el radio de  $R$  son  $\frac{x+y}{2}$  y  $\frac{y-x}{2}$  respectivamente, y  $a \in R$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \left(a_1 - \frac{x+y}{2}\right)^2 + a_2^2 &= \left(\frac{y-x}{2}\right)^2 \\ a_1^2 + a_2^2 - a_1(x+y) + \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 &= \left(\frac{y-x}{2}\right)^2 \\ a_1^2 + a_2^2 &= \left(\frac{y-x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + a_1(x+y) \\ a_1^2 + a_2^2 &= a_1(x+y) - xy. \end{aligned}$$

Luego, usando que  $r^2 = |\overline{oa}|^2 = |a - o|^2$  y la última igualdad, obtenemos

$$\begin{aligned}(o - x)(o - y) &= (a_1 - o)^2 + a_2^2, \\ o^2 - o(x + y) + xy &= a_1^2 + a_2^2 - 2a_1o + o^2, \\ -o(x + y) + xy &= a_1(x + y) - xy - 2a_1o, \\ o(2a_1 - x - y) &= a_1(x + y) - 2xy, \\ o &= \frac{a_1(x + y) - 2xy}{2a_1 - x - y},\end{aligned}$$

como queríamos. ■

Usaremos el Lema 4.4 y el Lema 4.5 para probar dos fórmulas importantes sobre las relaciones entre lados de un pentágono o de un hexágono rectangular.

**Teorema 4.6** *Sea  $abcde$  un pentágono rectangular. Entonces, si  $|\overline{ab}| = A$ ,  $|\overline{bc}| = B$ ,  $|\overline{de}| = D$ , se cumple*

$$\cosh D = \sinh A \sinh B.$$

### Demostración:

Podemos suponer que  $b = i$ ,  $a = ai$ , y  $c_1 > 0$ . Sean  $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3$  los puntos en el infinito de las rectas  $\overleftrightarrow{bc}$ ,  $\overleftrightarrow{cd}$  y  $\overleftrightarrow{ae}$ , respectivamente, con  $x_i < y_i$   $i = 1, 2, 3$ . Sabemos, entonces, que  $x_1 = -1$ ,  $y_1 = 1$ ,  $x_3 = -a$ ,  $y_3 = a$ , como se puede ver en la Figura 4.1. Sean  $o, r \in \mathbb{R}$  tales que  $\overleftrightarrow{cd} = R_{o,r}$ . Por el Lema 4.5, tenemos que

$$\begin{aligned}o &= \frac{c_1(x_1 + y_1) - 2x_1y_1}{2c_1 - x_1 - y_1} = \frac{1}{c_1}, \\ r^2 &= (o - x_1)(o - y_1) = \left(\frac{1}{c_1} + 1\right) \left(\frac{1}{c_1} - 1\right) \\ &= \frac{1 - c_1^2}{c_1^2} = \frac{c_2^2}{c_1^2}, \text{ por lo que} \\ r &= \frac{c_2}{c_1}.\end{aligned}$$

Luego,  $x_2 = o - r = \frac{1-c_2}{c_1}$  y  $y_2 = o + r = \frac{1+c_2}{c_1}$ . Además, por el Lema 4.4, tenemos que  $\cosh(D) = \cosh(d(\overleftrightarrow{cd}, \overleftrightarrow{ae})) = \frac{1+q}{1-q} = \frac{2}{1-q} - 1$ , donde  $q$  es la razón doble  $\{x_2, y_2; x_3, y_3\}$ . Recordemos que  $\frac{1}{1-q} = \{x_2, x_3; y_3, y_2\} = \frac{(y_3-x_2)(y_2-x_3)}{(y_3-x_3)(y_2-x_2)}$ . Calculamos, entonces, cada factor:

$$\begin{aligned}y_2 - x_3 &= \frac{1 + c_2}{c_1} - (-a) = \frac{ac_1 + 1 + c_2}{c_1}, \\ y_3 - x_2 &= a - \frac{1 - c_2}{c_1} = \frac{ac_1 - 1 + c_2}{c_1}, \\ y_3 - x_3 &= a - (-a) = 2a, \\ y_2 - x_2 &= \frac{1 + c_2}{c_1} - \frac{1 - c_2}{c_1} = \frac{2c_2}{c_1}.\end{aligned}$$

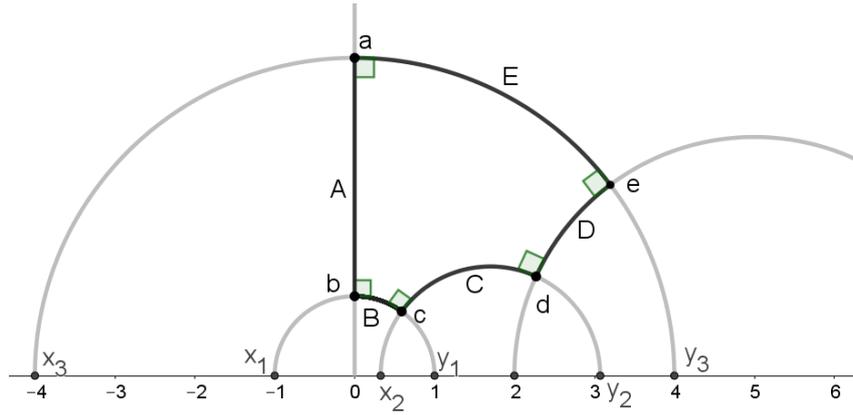


Figura 4.1: Pentágono rectangular.

Luego, usando también que  $c_1^2 + c_2^2 = 1$ , calculamos

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{1-q} &= \frac{ac_1 + 1 + c_2}{c_1} \cdot \frac{ac_1 - 1 + c_2}{c_1} \cdot \frac{c_1}{2ac_2} \\
 &= \frac{(ac_1 + c_2)^2 - 1}{2ac_1c_2} \\
 &= \frac{a^2c_1^2 + c_2^2 + 2ac_1c_2 - 1}{2ac_1c_2} \\
 &= \frac{a^2c_1^2 + 2ac_1c_2 - c_1^2}{2ac_1c_2}.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\frac{1+q}{1-q} = \frac{2}{1-q} - 1 = \frac{a^2c_1^2 - c_1^2}{2ac_1c_2} = c_1 \frac{a^2 - 1}{2ac_2}$ . Además, por la demostración del Teorema 3.5 y lo que sigue a continuación de él, tenemos que

$$\begin{aligned}
 \sinh A &= \frac{a^2 - 1}{2a}, \\
 \sinh B &= \frac{c_1}{c_2},
 \end{aligned}$$

por lo que, finalmente, obtenemos

$$\begin{aligned}
 \cosh D &= \frac{1+q}{1-q} \\
 &= c_1 \frac{a^2 - 1}{2ac_2} \\
 &= \sinh A \sinh B,
 \end{aligned}$$

como queríamos. ■

**Lema 4.7** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  tales que  $\sinh a \sinh b > 1$ . Entonces existe un único pentágono rectangular con dos lados consecutivos de longitudes  $a$  y  $b$ .

Una demostración del Lema 4.7 se puede leer en [Bu].

NOTA: Si pegamos dos pentágonos rectangulares a lo largo de un lado de longitud común  $r$ , obtenemos un hexágono rectangular. Toda superficie de Riemann de género mayor que uno puede ser obtenida pegando hexágonos rectangulares entre sí. Para leer más sobre el tema, se puede consultar [Bu].

**Teorema 4.8** *Sea  $abcdef$  un hexágono rectangular. Entonces, si  $|\overline{ab}| = \beta$ ,  $|\overline{bc}| = C$ ,  $|\overline{cd}| = \alpha$ ,  $|\overline{de}| = B$ ,  $|\overline{ef}| = \gamma$ ,  $|\overline{fa}| = A$ , se cumple*

$$\cosh C = \frac{\cosh \alpha \cosh \beta + \cosh \gamma}{\sinh \alpha \sinh \beta}.$$

### Demostración:

Podemos suponer que  $c = i$ ,  $b = bi$ , y  $d_1 > 0$ . Sean  $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4$ ; los puntos en el infinito de las rectas  $\overleftrightarrow{cd}$ ,  $\overleftrightarrow{de}$ ,  $\overleftrightarrow{ab}$ ,  $\overleftrightarrow{af}$ , respectivamente. Sabemos, entonces, que  $\overleftrightarrow{cd} = R_{0,1}$  y  $\overleftrightarrow{ab} = R_{0,b}$ , por lo que  $x_1 = -1$ ,  $y_1 = 1$ ,  $x_3 = -b$ ,  $y_3 = b$ , como se puede ver en la Figura 4.2. Sean  $o_2, o_4, r_2, r_4 \in \mathbb{R}$  tales que  $\overleftrightarrow{de} = R_{o_2, r_2}$  y  $\overleftrightarrow{af} = R_{o_4, r_4}$ . Calcularemos ahora  $o_2, o_4, r_2, r_4$  en términos de las coordenadas de  $a, b, d$ . Por el Lema 4.5 y usando que  $|d| = 1$  y  $|a| = b$ , tenemos que

$$\begin{aligned} o_2 &= \frac{d_1(x_1 + y_1) - 2x_1y_1}{2d_1 - x_1 - y_1} = \frac{1}{d_1}, \\ r_2^2 &= (o_2 - x_1)(o_2 - y_1) = \left(\frac{1}{d_1} + 1\right) \left(\frac{1}{d_1} - 1\right) \\ &= \frac{1 - d_1^2}{d_1^2} = \frac{d_2^2}{d_1^2}, \\ r_2 &= \frac{d_2}{d_1}, \\ o_4 &= \frac{a_1(x_3 + y_3) - 2x_3y_3}{2a_1 - x_3 - y_3} = \frac{b^2}{a_1}, \\ r_4^2 &= (o_4 - x_3)(o_4 - y_3) = \left(\frac{b^2}{a_1} + b\right) \left(\frac{b^2}{a_1} - b\right) \\ &= \frac{b^4 - b^2a_1^2}{a_1^2} = b^2 \frac{b^2 - a_1^2}{a_1^2} = b^2 \frac{a_2^2}{a_1^2}, \\ r_4 &= b \frac{a_2}{a_1}. \end{aligned}$$

A partir de esto, podemos calcular  $x_2, y_2, x_4, y_4$ , como sigue:

$$\begin{aligned} x_2 &= o_2 - r_2 = \frac{1 - d_2}{d_1}, \\ y_2 &= o_2 + r_2 = \frac{1 + d_2}{d_1}, \\ x_4 &= o_4 - r_4 = \frac{b^2 - ba_2}{a_1}, \text{ y} \\ y_4 &= o_4 + r_4 = \frac{b^2 + ba_2}{a_1}. \end{aligned}$$

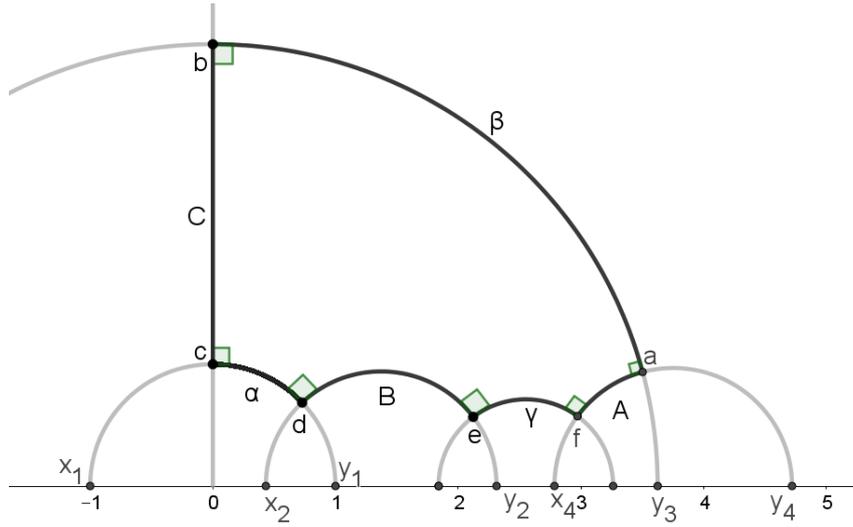


Figura 4.2: Hexágono rectangular.

Por Lema 4.4, tenemos que  $\cosh \gamma = \cosh(d(f, e)) = \cosh(d(\overleftrightarrow{de}, \overleftrightarrow{fa})) = \frac{1+r}{1-r} = \frac{2}{1-r} - 1$ , donde  $r$  es la razón doble  $\{x_2, y_2; x_4, y_4\}$ . Entonces, queremos encontrar el valor de  $\frac{1}{1-r}$ . Recordemos que  $\frac{1}{1-r} = \{x_2, x_4; y_4, y_2\} = \frac{(y_4 - x_2)(y_2 - x_4)}{(y_4 - x_4)(y_2 - x_2)}$ . Entonces, calculamos

$$\begin{aligned} y_2 - x_2 &= \frac{1 + d_2 - 1 + d_2}{d_1} = \frac{2d_2}{d_1}, \\ y_4 - x_4 &= \frac{b^2 + ba_2 - b^2 + ba_2}{a_1} = \frac{2a_2b}{a_1}, \\ y_2 - x_4 &= \frac{1 + d_2}{d_1} - \frac{b^2 - ba_2}{a_1} = \frac{-d_1b^2 + d_1ba_2 + a_1 + a_1d_2}{a_1d_1}, \\ y_4 - x_2 &= \frac{b^2 + ba_2}{a_1} - \frac{1 - d_2}{d_1} = \frac{d_1b^2 + d_1ba_2 - a_1 + a_1d_2}{a_1d_1}. \end{aligned}$$

Recordemos que  $d_1^2 + d_2^2 = 1$  y  $a_1^2 + a_2^2 = b^2$ . Con esto, calculamos  $(y_2 - x_4)(y_4 - x_2)$ , como sigue:

$$\begin{aligned} (y_2 - x_4)(y_4 - x_2) &= \frac{-d_1b^2 + d_1ba_2 + a_1 + a_1d_2}{a_1d_1} \cdot \frac{d_1b^2 + d_1ba_2 - a_1 + a_1d_2}{a_1d_1} \\ &= \frac{(d_1ba_2 + a_1d_2)^2 - (d_1b^2 - a_1)^2}{a_1^2d_1^2} \\ &= \frac{d_1^2b^2a_2^2 + 2a_1a_2d_1d_2b + a_1^2d_2^2 - d_1^2b^4 + 2a_1d_1b^2 - a_1^2}{a_1^2d_1^2} \\ &= \frac{-d_1^2b^2a_1^2 + 2a_1d_1b^2 + 2a_1a_2d_1d_2b - a_1^2d_1^2}{a_1^2d_1^2}. \end{aligned}$$

Luego, tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{2}{1-r} &= 2 \frac{(y_2 - x_4)(y_4 - x_2)}{(y_4 - x_4)(y_2 - x_2)} \\
&= \frac{-d_1^2 b^2 a_1^2 - a_1^2 d_1^2 + 2a_1 d_1 b^2 + 2a_1 a_2 d_1 d_2 b}{2a_1 a_2 d_1 d_2 b} \\
&= -\frac{b^2 + 1}{2b} \cdot \frac{a_1 d_1}{a_2 d_2} + \frac{b}{a_2 d_2} + 1,
\end{aligned} \tag{4.1}$$

por lo que  $\cosh \gamma = \frac{2}{1-r} - 1 = -\frac{b^2+1}{2b} \cdot \frac{a_1 d_1}{a_2 d_2} + \frac{b}{a_2 d_2}$ . Ahora, recordemos que queremos calcular  $\cosh \gamma$  en términos de  $\alpha$ ,  $\beta$ , y  $C$ . Notemos que

$$\begin{aligned}
\cosh C &= \cosh(d(b, c)) = 1 + \frac{|b - c|^2}{2b_2 c_2} \\
&= 1 + \frac{(b - 1)^2}{2b} = \frac{b^2 + 1}{2b}, \\
\cosh \alpha &= \cosh(d(c, d)) = 1 + \frac{|d - c|^2}{2d_2 c_2} \\
&= 1 + \frac{d_1^2 + (d_2 - 1)^2}{2d_2} = \frac{d_1^2 + d_2^2 - 2d_2 + 1 + 2d_2}{2d_2} \\
&= \frac{d_1^2 + d_2^2 + 1}{2d_2} = \frac{1}{d_2}, \\
\sinh \alpha &= \sqrt{\cosh^2 \alpha - 1} = \frac{d_1}{d_2}, \\
\cosh \beta &= \cosh(d(a, b)) = 1 + \frac{|b - a|^2}{2b_2 a_2} \\
&= 1 + \frac{a_1^2 + (a_2 - b)^2}{2ba_2} = \frac{a_1^2 + a_2^2 - 2ba_2 + b^2 + 2ba_2}{2ba_2} \\
&= \frac{a_1^2 + a_2^2 + b^2}{2ba_2} = \frac{b}{a_2}, \\
\sinh \beta &= \sqrt{\cosh^2 \beta - 1} = \frac{a_1}{a_2}.
\end{aligned}$$

Volviendo a la identidad (4.1) y reemplazando, obtenemos

$$\begin{aligned}
\cosh \gamma &= -\frac{b^2 + 1}{2b} \cdot \frac{a_1 d_1}{a_2 d_2} + \frac{b}{a_2 d_2} \\
&= -\cosh C \sinh \alpha \sinh \beta + \cosh \beta \cosh \alpha,
\end{aligned}$$

como queríamos. ■

**Lema 4.9** Sean  $x, y, z \in \mathbb{R}$ . Entonces existe un único hexágono rectangular de longitudes de lados  $A, \gamma, B, \alpha, C, \beta$  tal que  $A = x$ ,  $B = y$  y  $C = z$ .

El Lema 4.9 se deduce del Teorema 4.8. Una demostración completa se puede leer en [Bu].

OBSERVACIÓN: La fórmula del Teorema 4.8 es similar a la del Teorema 3.6, la “fórmula del coseno” para triángulos hiperbólicos. Esta es una de las varias analogías entre hexágonos rectangulares y triángulos, como se puede ver en [Bu], otras son las siguientes.

- En un hexágono rectangular como el del Teorema 4.8, se cumple que

$$\frac{\sinh a}{\sinh \alpha} = \frac{\sinh b}{\sinh \beta} = \frac{\sinh c}{\sinh \gamma}.$$

Esta fórmula es similar a la “fórmula del seno” para triángulos hiperbólicos que vimos en el Teorema 3.7.

- En un hexágono rectangular, se cumple que las tres alturas (perpendiculares entre lados opuestos) son concurrentes.

Además de la trigonometría de los polígonos rectangulares, queremos hacer una observación sobre el área de los mismos. Recordemos que el área de un triángulo (y por lo tanto, de un polígono) depende solamente de sus ángulos. Luego, polígonos rectangulares con igual cantidad de lados tienen una misma área, como veremos en la Proposición 4.10.

**Proposición 4.10** *Sea  $P_n$  un polígono rectangular de  $n$  lados. Entonces, vale que*

$$\alpha(P_n) = \frac{n-4}{2}\pi.$$

**Demostración:**

Sean  $a_1, \dots, a_n$  los vértices de  $P_n$ . Dividimos el polígono en los  $n-2$  triángulos  $\Delta a_1 a_2 a_3, \Delta a_1 a_3 a_4, \dots, \Delta a_1 a_{n-1} a_n$ . Sea  $s_i$  la suma de ángulos interiores del triángulo  $\Delta a_1 a_i a_{i+1}$  para cada  $i = 2, \dots, n-1$  y notemos que la suma de ángulos interiores de  $P_n$  es  $\frac{n}{2}\pi$  (pues todos sus ángulos interiores son rectos). Entonces,

$$\begin{aligned} \alpha(P_n) &= \alpha\left(\cup_{i=2}^{n-1} \Delta a_1 a_i a_{i+1}\right) \\ &= \sum_{i=2}^{n-1} \alpha(\Delta a_1 a_i a_{i+1}) \\ &= \sum_{i=2}^{n-1} (\pi - s_i) \\ &= (n-2)\pi - \sum_{i=2}^{n-1} s_i \\ &= (n-2)\pi - \frac{n}{2}\pi \\ &= \frac{n-4}{2}\pi. \end{aligned}$$

■



# Capítulo 5

## Más sobre hexágonos rectangulares

En este capítulo, nos introducimos a temas de investigación actuales. Siguiendo con el análisis de los pentágonos y hexágonos rectangulares, estudiamos un artículo de Rick Kenyon, quien fue estudiante de William Thurston, llamado “*Right-angled hexagon tilings of the hyperbolic plane*”[Ke]. En el artículo, se trabaja con pentágonos y hexágonos rectangulares (allí llamados right-angled pentagons y right-angled hexagons, respectivamente, o RAP y RAH por sus siglas en inglés) para contruir embaldosamientos (tilings) del plano hiperbólico y analizar medidas de probabilidad sobre los tilings. Más precisamente, Kenyon estudia medidas de probabilidad invariantes bajo isometrías del espacio  $\Omega$  de embaldosamientos del plano hiperbólico, contruidos a partir de hexágonos de diferentes tamaños. Prueba que, para cada medida  $\mu$  de cierta familia natural de medidas sobre los hexágonos rectangulares, hay una medida invariante por isometrías en  $\Omega$  cuya distribución marginal en las baldosas es  $\mu$ .

En la Sección 5.1, realizaremos algunas de las cuentas que menciona el artículo nombrado anteriormente. En la Sección 5.2, basándonos en ideas de Peter Doyle, haremos una breve descripción de los llamados *hexaframes*, que serán una generalización de los hexágonos rectangulares.

### 5.1. Algunos resultados del artículo de Richard Kenyon

Siguiendo con la trigonometría de hexágonos rectangulares estudiada en el Capítulo 4, reescribiremos la fórmula del Teorema 4.8, para llegar a la del Teorema 5.1. Estas identidades son usadas en [Ke] para dar una medida de probabilidad sobre los hexágonos rectangulares, tema que excede el propósito de este trabajo. Sin embargo, consideramos relevante incluir uno de los resultados principales de este artículo en el Teorema 5.2.

**Teorema 5.1** *Consideremos un hexágono rectangular de longitudes de lados  $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5$  y  $l_6$ , en ese orden. Sean  $a = e^{l_1}$ ,  $C = e^{l_2}$ ,  $b = e^{l_3}$ ,  $A = e^{l_4}$ ,  $c = e^{l_5}$ ,  $B = e^{l_6}$ . Entonces,*

se cumplen las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}\frac{A+1}{A-1} &= \sqrt{\frac{(1+abc)(a+bc)}{(b+ac)(c+ab)}}, \\ \frac{B+1}{B-1} &= \sqrt{\frac{(1+abc)(b+ac)}{(a+bc)(c+ab)}}, \\ \frac{C+1}{C-1} &= \sqrt{\frac{(1+abc)(c+ab)}{(a+bc)(b+ac)}}.\end{aligned}$$

### Demostración:

Por simetría, basta con probar una de las tres identidades. Notemos que  $\cosh l_1 = \frac{e^{l_1} + e^{-l_1}}{2} = \frac{a^2+1}{2a}$  y, análogamente,  $\sinh l_1 = \frac{a^2-1}{2a}$ . Luego, por el Teorema 4.8, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{C^2+1}{2C} &= \left( \frac{a^2+1}{2a} \cdot \frac{b^2+1}{2b} + \frac{c^2+1}{2c} \right) : \left( \frac{a^2-1}{2a} \cdot \frac{b^2-1}{2b} \right) \\ &= \frac{c(a^2+1)(b^2+1) + 2ab(c^2+1)}{4abc} : \frac{(a^2-1)(b^2-1)}{4ab} \\ &= \frac{c(a^2+1)(b^2+1) + 2ab(c^2+1)}{c(a^2-1)(b^2-1)}.\end{aligned}\tag{5.1}$$

Como queremos llegar a una identidad en donde aparece  $\frac{C+1}{C-1}$ , llevaremos el miembro izquierdo de la ecuación (5.1) a  $\frac{C+1}{C-1}$ , para obtener la igualdad a la que queremos llegar:

$$\begin{aligned}\frac{C^2+1}{2C} &= \frac{c(a^2+1)(b^2+1) + 2ab(c^2+1)}{c(a^2-1)(b^2-1)}, \\ \frac{(C-1)^2}{2C} &= \frac{c[(a^2+1)(b^2+1) - (a^2-1)(b^2-1)] + 2ab(c^2+1)}{c(a^2-1)(b^2-1)} \\ &= \frac{2c(a^2+b^2) + 2ab(c^2+1)}{c(a^2-1)(b^2-1)}, \\ \frac{4C}{(C-1)^2} &= \frac{c(a^2-1)(b^2-1)}{c(a^2+b^2) + ab(c^2+1)}, \\ \left( \frac{C+1}{C-1} \right)^2 &= \frac{c[(a^2-1)(b^2-1) + (a^2+b^2)] + ab(c^2+1)}{c(a^2+b^2) + ab(c^2+1)} \\ &= \frac{a^2b^2c + c + abc^2 + ab}{a^2c + b^2c + abc^2 + ab} \\ &= \frac{(1+abc)(c+ab)}{(a+bc)(b+ac)}, \text{ y, por lo tanto,} \\ \frac{C+1}{C-1} &= \sqrt{\frac{(1+abc)(c+ab)}{(a+bc)(b+ac)}},\end{aligned}$$

como queríamos. ■

**Teorema 5.2** Sea  $\mu_0$  la medida de soporte completo en  $\mathbb{R}_+^3$  dada por tomar  $l_1, l_3, l_5$  independientemente y cada una distribuida respecto a la medida  $\nu_0$  en  $(0, \infty)$  de densidad

$$F(l)dl = \frac{Cdl}{\sinh^{\frac{1}{3}}(l)}, \text{ donde } C = \frac{\sqrt{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{2\pi^{\frac{3}{2}}}.$$

Si  $l_1, l_3, l_5$  son elegidas independientemente e idénticamente distribuidas con distribución  $\nu_0$ , entonces  $l_2, l_4, l_6$  serán independientes e idénticamente distribuidas con la misma distribución  $\nu_0$ .

NOTA: Se podría haber “descubierto” la función  $\mu_0$  de la siguiente manera. Si asumimos que  $a, b, c$  son independientes e idénticamente distribuidos con alguna densidad  $g(x)dx$ , entonces  $A, B, C$  estarán distribuidos de acuerdo a la densidad

$$\Psi(g(a)g(b)g(c)dadbdc) = g(a)g(b)g(c) \left( \frac{\partial_{a,b,c}}{\partial_{A,B,C}} \right) dAdBdC.$$

Manipulando el miembro derecho de esta expresión y recordando la relación entre  $a, b, c$ , y  $A, B, C$  dada por el Teorema 5.1, se puede ver que hay una única elección para  $g$  (salvo escala) para la cual este lado de la igualdad puede expresarse como  $g(A)g(B)g(C)dAdBdC$ .

Se deduce que  $\mu_0$  es la única medida de probabilidad con la propiedad de “preservar independencia”. ¿Tendrá esta medida de probabilidad  $\mu_0$  un significado geométrico? es la pregunta que se deja abierta en [Ke].

En [Ke], se destaca una familia particular de hexágonos rectangulares, los *hexágonos rectangulares trigonométricos*, por lo que los estudiaremos brevemente con el Teorema 5.4.

**Definición 5.3** Diremos que un hexágono rectangular es *trigonométrico* si se cumple que  $1 - a - b - c - ab - bc - ac + abc = 0$ , con  $a, b, c$  como en el Teorema 5.1.

**Teorema 5.4** Consideremos un hexágono rectangular trigonométrico y sean  $a, b, c, A, B, C$  como en el Teorema 5.1. Entonces, se cumple que

$$A = a, B = b, C = c$$

**Demostración:**

Por simetría de las variables, basta ver que  $A = a$ . Por Teorema 5.1, tenemos que

$$\left( \frac{A+1}{A-1} \right)^2 = \frac{(1+abc)(a+bc)}{(b+ac)(c+ab)}. \tag{5.2}$$

Como el hexágono rectangular es trigonométrico, se cumple que  $1 - a - b - c - ab - bc - ac + abc = 0$ . Despejando  $c$ , obtenemos

$$c = \frac{ab + a + b - 1}{ab - a - b - 1}.$$

Ahora, reemplazamos esta expresión de  $c$  en los factores del miembro derecho de la identidad (5.2), obtenemos

$$\begin{aligned} a + bc &= a + b \cdot \frac{ab + a + b - 1}{ab - a - b - 1} \\ &= \frac{a^2b - a^2 - ab - a + ab^2 + ab + b^2 - b}{ab - a - b - 1} \\ &= \frac{a^2b + ab^2 + b^2 - a^2 - a - b}{ab - a - b - 1}, \end{aligned}$$

y, simétricamente,

$$b + ac = \frac{a^2b + ab^2 - b^2 + a^2 - a - b}{ab - a - b - 1}.$$

Además,

$$\begin{aligned} c + ab &= ab + \frac{ab + a + b - 1}{ab - a - b - 1} \\ &= \frac{a^2b^2 - a^2b - ab^2 - ab + ab + a + b - 1}{ab - a - b - 1} \\ &= \frac{a^2b^2 - a^2b - ab^2 + a + b - 1}{ab - a - b - 1}, y \\ 1 + abc &= 1 + ab \cdot \frac{ab + a + b - 1}{ab - a - b - 1} \\ &= \frac{ab - a - b - 1 + a^2b^2 + a^2b + ab^2 - ab}{ab - a - b - 1} \\ &= \frac{a^2b^2 + a^2b + ab^2 - a - b - 1}{ab - a - b - 1}. \end{aligned}$$

De todas estas identidades, obtenemos que

$$\frac{(1 + abc)(a + bc)}{(b + ac)(c + ab)} = \frac{(a^2b^2 + a^2b + ab^2 - a - b - 1)(a^2b + ab^2 + b^2 - a^2 - a - b)}{(a^2b + ab^2 - b^2 + a^2 - a - b)(a^2b^2 - a^2b - ab^2 + a + b - 1)}. \quad (5.3)$$

Para organizarnos mejor, definimos  $X = a^2b + ab^2 - a - b$ . Luego, transformando la ecuación (5.3), tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{(1 + abc)(a + bc)}{(b + ac)(c + ab)} &= \frac{(X + a^2b^2 - 1)(X + b^2 - a^2)}{(X - b^2 + a^2)(-X + a^2b^2 - 1)} \\ &= \frac{X^2 + X(a^2b^2 + b^2 - a^2 - 1) + (a^2b^2 - 1)(b^2 - a^2)}{-X^2 + X(a^2b^2 + b^2 - a^2 - 1) + (a^2b^2 - 1)(-b^2 + a^2)}. \end{aligned}$$

Entonces, recordando que  $X = a^2b + ab^2 - a - b = (ab - 1)(a + b)$ , obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{(1 + abc)(a + bc)}{(b + ac)(c + ab)} + 1 &= \frac{X^2 + X(a^2b^2 + b^2 - a^2 - 1) + (a^2b^2 - 1)(b^2 - a^2)}{-X^2 + X(a^2b^2 + b^2 - a^2 - 1) + (a^2b^2 - 1)(-b^2 + a^2)} + 1 \\
&= \frac{2X(a^2b^2 + b^2 - a^2 - 1)}{-X^2 + X(a^2b^2 + b^2 - a^2 - 1) + (a^2b^2 - 1)(-b^2 + a^2)} \\
&= \frac{2(a^2b^2 + b^2 - a^2 - 1)}{-X + a^2b^2 + b^2 - a^2 - 1 + (ab + 1)(a - b)} \\
&= \frac{2(a^2b^2 + b^2 - a^2 - 1)}{-a^2b - ab^2 + a + b + a^2b^2 + b^2 - a^2 - 1 + a^2b - ab^2 + a - b} \\
&= \frac{2(a^2b^2 + b^2 - a^2 - 1)}{a^2b^2 - 2ab^2 + b^2 - a^2 + 2a - 1} \\
&= \frac{2(a^2 + 1)(b^2 - 1)}{(a^2 - 2a + 1)(b^2 - 1)} \\
&= \frac{2(a^2 + 1)}{a^2 - 2a + 1}.
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\frac{(1 + abc)(a + bc)}{(b + ac)(c + ab)} &= \frac{2(a^2 + 1)}{a^2 - 2a + 1} - 1 \\
&= \frac{a^2 + 2a + 1}{a^2 - 2a + 1} \\
&= \frac{(a + 1)^2}{(a - 1)^2},
\end{aligned}$$

de lo que se deduce  $A = a$ , como queríamos. ■

## 5.2. Hexaframes

Los hexaframes son una generalización de los hexágonos rectangulares y están contenidos en el espacio hiperbólico (de tres dimensiones). Este concepto podría llegar a tener varias aplicaciones y por eso consideramos que vale la pena describirlos brevemente en este trabajo.

La sección está enteramente basada en ideas de Peter Doyle.

Un modelo del espacio hiperbólico es el del semiespacio superior, en donde el espacio es el conjunto

$$\mathbb{E} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\},$$

los planos son los elementos del conjunto

$$\{\mathbb{E} \cap \partial \mathcal{B}_{o,r} \mid o = (o_1, o_2, 0) \in \mathbb{R}^3 \text{ y } r \in \mathbb{R}_+\} \cup \{\mathbb{E} \cap \text{planos de } \mathbb{R}^3 \text{ perpendiculares al plano } z = 0\},$$

las rectas son los elementos de

$$\{\mathbb{E} \cap \text{circunferencia con centro } o \mid o = (o_1, o_2, 0) \in \mathbb{R}^3\} \cup \\ \{\mathbb{E} \cap \text{rectas perpendiculares al plano } z = 0\},$$

y el grupo de transformaciones rígidas es el generado por las inversiones respecto a bolas de centro  $o = (o_1, o_2, 0)$  y las simetrías especulares respecto a planos euclídeos perpendiculares al plano  $z = 0$ .

**Definición 5.5** Sean  $A_1, \dots, A_6$  seis rectas hiperbólicas distintas en  $\mathbb{E}$ . Entonces, decimos que las rectas conforman un *hexaframe* si se cumple  $A_k \perp A_{k+1}$  para  $k = 1, \dots, 6$ ; donde  $A_7 = A_1$ .

NOTA: Para algunos propósitos, conviene, a veces, pensar los hexaframes como formados por rectas con orientación.

OBSERVACIÓN: Los hexaframes no necesariamente pueden incluirse en un plano hiperbólico. Un hexágono rectangular se puede ver como un caso particular de hexaframes, en donde las rectas que lo conforman son coplanares.

Hay una manera de describir un hexaframe mediante seis números complejos que llamaremos *multiplicadores*. Sean  $v_1, \dots, v_6 \in \mathbb{E}$  los *vértices* del hexaframe, es decir,  $\{v_k\} = A_{k-1} \cap A_k$ ,  $k = 1, \dots, 6$ , donde  $A_0 = A_6$ . Para cada  $k = 1, \dots, 6$ , sean  $e_k = \overline{v_i v_{k+1}}$  (segmento hiperbólico) y  $l_k$  la longitud de  $e_k$ , donde  $v_7 = v_1$ .

Además, para cada  $k = 1, \dots, 6$ , sea  $a_k = \exp(l_k + i\theta_k)$ , donde  $\theta_k$  es el ángulo entre los lados  $A_{k-1}$  y  $A_{k+1}$ , es decir, el ángulo que forman  $A_{k-1}$  y  $A'_{k+1}$ , donde  $A'_{k+1}$  es la recta intersección entre el plano perpendicular a  $A_k$  por  $v_k$  y el plano que pasa por  $A_k$  y  $A_{k+1}$ , es decir,  $\theta_k$  es el ángulo que forman las rectas  $A_{k-1}$  y  $A_{k+1}$ , miradas “a través de la recta  $A_k$ ”. Hay algunos detalles de signo y orientación que no discutiremos aquí. Llamaremos a los números  $a_0, \dots, a_6$  multiplicadores del hexaframe conformado por  $A_1, \dots, A_6$ .

OBSERVACIÓN:

- Podemos mover la recta  $A_k$  a la recta hiperbólica contenida en el eje  $z$  mediante una transformación rígida, y podemos asumir que llevamos  $v_k$  al  $(0, 0, 1)$ . Entonces, la aplicación  $z \mapsto a_k z$  con dominio el borde de  $\mathbb{E}$  lleva los puntos en el infinito de la recta  $A_{k-1}$  en los puntos del infinito de la recta  $A_k$ , es por eso que los llamamos multiplicadores.
- Los multiplicadores determinan un hexaframe salvo congruencia. De hecho, solo tres multiplicadores determinan un hexaframe, de manera semejante al caso de los hexágonos rectangulares, donde tres longitudes de lados determinan toda la figura, salvo isometría.

Es de esperar que la fórmula del Teorema 5.1 siga valiendo para hexaframes por continuación analítica. En vez de considerar, como en el Teorema 5.1, que  $a = e^{l_1}$ ,  $C = e^{l_2}$ ,  $b = e^{l_3}$ ,  $A = e^{l_4}$ ,  $c = e^{l_5}$ ,  $B = e^{l_6}$ , se consideran los multiplicadores descriptos anteriormente, definiendo  $(a, C, b, A, c, B) = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ . La fórmula del Teorema 5.1 es, entonces, el caso particular de multiplicadores  $a_k = \exp(l_k + i\theta_k)$  con  $\theta_k = 0$  para todo  $k$ , por lo que los  $a_k$  son reales y positivos.

## OBSERVACIÓN:

- Los pentágonos rectangulares se pueden ver, también, como un caso particular de hexaframes, eligiendo uno de sus vértices y construyendo una nueva recta que pase por allí, perpendicular al plano en donde está contenido el pentágono rectangular. Si esta nueva recta es la  $A_1$ , entonces  $a_1 = i$  (pues  $l_1 = 0$  y  $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ ) y, usando la fórmula extendida del Teorema 5.1, se puede deducir la fórmula trigonométrica de los pentágonos rectangulares que aparece en el Teorema 4.6.
- También, se puede ver a los triángulos como un caso particular de hexaframes. Para cada vértice del triángulo, se construye una recta que sea perpendicular al plano que contiene el triángulo y que pase por este punto. Estas tres nuevas rectas, intercaladas con las rectas que contienen los lados del triángulo, conforman un hexaframe, cuyos multiplicadores cumplen que tres de ellos (intercaladamente) son imaginarios puros.

Vemos aquí la importancia de los hexaframes, ya que generalizan a los triángulos, y a los pentágonos y hexágonos rectangulares, junto a sus fórmulas trigonométricas.



# Bibliografía

- [Be] ERIC TEMPLE BELL, *Historia de las matemáticas*. Fondo de cultura económica, 2016.
- [Bu] PETER BUSER, *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces*. Springer Science and Business Media, 2010.
- [CFKP] J. W. CANNON, W. J. FLOYD, R. KENYON Y W. R. PARRY, *Hyperbolic geometry*. Flavors of geometry, vol. 31, p. 59-115, 1997.
- [Da] WALTER DAL LAGO, *Geometría del plano y el espacio*. Apuntes de clase. FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba.
- [Ha] ROBIN HARTSHORNE, *Geometry: Euclid and Beyond*. Springer, 2000.
- [Hi] DAVID HILBERT, *Fundamentos de la geometría*. Editorial CSIC-CSIC Press, 1996.
- [Ki] NOEMÍ PATRICIA KISBYE, *El plano de Poincaré*. III Encuentro de Álgebra. Notas de cursos para estudiantes. Series C de publicaciones de FAMAF, 2006/35.
- [Ke] RICHARD KENYON, *Right-angled hexagon tilings of the hyperbolic plane*. Preprint arXiv:1503.05510, 2015.
- [Pe] CARLOS MARTINEZ PEREZ, *Fundamentos de geometria hiperbólica*, 76 p. Dissertação-(mestrado)-Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2015. Disponible en: <http://hdl.handle.net/11449/138465>.
- [Ya] ISAAK MOISEEVICH YAGLOM, *Geometric Transformations IV: Circular Transformations*. Vol. 44. MAA, 2009.