Trabajo Especial

SOBRE LAS CATEGORÍAS MODULARES DE DIMENSIÓN IMPAR

Universidad Nacional de Córdoba
Facultad de Matemática, Física, Astronomía y Computación

Agustina Mercedes Czenky
Directora: Julia Plavnik
Profesor representante: Martin Mombelli

Resumen

El objetivo de este trabajo es presentar de la manera más autocontenida posible a las categorías modulares de dimensión impar, sus propiedades e invariantes.

En la primera parte se exponen las nociones de categorías tensoriales y categorías de fusión. Se presentan construcciones útiles, como la graduación y la equivariantización por grupos finitos, y clases distinguidas de categorías: punteadas, de tipo grupo, nilpotentes, solubles, entre otras. En una segunda parte se aborda el estudio de las categorías modulares y se tratan algunos de sus invariantes: S-matriz, T-matriz, Sumas de Gauss e Indicadores de Frobenius-Schur.

Finalmente se discuten algunos problemas actuales y nuevas herramientas, como el Teorema de Cauchy para categorías de fusión esféricas, la clasificación de categorías modulares de dimensión impar de rango pequeño y la clasificación de categorías modulares casi libres de cuadrados de dimensión impar. Se presentan además algunos resultados propios vinculados a dichos problemas y técnicas.

Palabras clave: categorías modulares, categorías de fusión nilpotentes, Teorema de Cauchy, categorías de tipo grupo, dimensión de Frobenius-Perron.

2010 Mathematics subject Classification: 18D10.

Abstract

The main goal of this work is to present, in the most comprehensive way we can achieve, odd dimensional modular categories, their properties and invariants.

The first part sets out the notions of tensor and fusion categories. Useful constructions are included, such as grading and equivariantization by finite groups, and distinguished classes of categories are introduced: pointed, group-theoretical, nilpotent and solvable, among others. A second part approaches the study of modular categories and some of their invariants: S-matrix, T-matrix, Gauss Sums and Frobenius-Schur Indicators.

Finally, some current problems and new techniques are discussed, such as the Cauchy Theorem for spherical fusion categories, the classification of odd dimensional modular categories of small rank and the classification of odd dimensional almost square-free modular categories. Some original results related to the mentioned problems and techniques are exhibited.

Keywords: modular categories, nilpotent fusion categories, Cauchy's Theorem, group-theoretical categories, Frobenius-Perron dimension.

2010 Mathematics subject Classification: 18D10.

Agradecimientos

A Julia Plavnik, mi directora, por acompañarme durante mis primeros pasos en el mundo de la investigación científica. Por sus consejos, tanto académicos como personales, y su contención. Espero tener su pasión, entusiasmo, energía y calidez durante mi vida profesional.

Al jurado, Martín Mombelli, Carina Boyallian, Agustín García Iglesias e Ivan Angiono, por ayudar a mejorar la calidad de este trabajo con sus comentarios y correcciones.

A Guillermo, por apoyarme y quererme incondicionalmente. Por su paciencia. Por tener fe en mi y mis capacidades, aun cuando yo no la tenía. Los cinco años de esta carrera fueron desafiantes, y te agradezco haberme hecho sentir siempre acompañada y comprendida.

A Lucas, por haber transitado este camino conmigo desde el inicio. Por estar siempre que lo necesité, y por todos los momentos compartidos. No muchas personas pueden decir que rindieron juntas 22 de las 25 materias de una carrera.

A mi familia, por apoyarme en mis elecciones, por enseñarme el valor de la educación, el esfuerzo y la perseverancia, y por brindarme todo lo necesario para mi desarrollo personal y académico.

Al personal docente y no docente de la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación, por siempre ir más allá de sus obligaciones para ayudar a los demás y por crear un ambiente de trabajo amigable y generoso.

A la Universidad Nacional de Córdoba, por formarme de manera gratuita, pública y laica.

Introducción

Las categorías modulares son categorías de fusión trenzadas "no degeneradas". La condición de ser no degenerada está relacionada con la trenza y el centro simétrico (versión categórica del centralizador en teoría de grupos), y tiene como consecuencia que la categoría cuente con muchas propiedades aritméticas sorprendentes. De hecho, su nombre fue otorgado porque toda categoría "modular" tiene asociada una representación (proyectiva) del "grupo modular".

Las categorías modulares aparecieron por primera vez explícitamente en [T1], donde fueron definidas por Turaev. No obstante, algunos aspectos de ese trabajo fueron anticipados dos años antes en [R] por Rehren. En particular, [R] contiene la primera demostración de la equivalencia entre la condición de invertibilidad de la S-matriz de una categoría (esta fue la condición requerida en la definición original de categoría modular en [T2, ?T]) y que su centro simétrico sea trivial. Otra fuente de inspiración de Turaev provino del trabajo desarrollado por Moore y Seiberg en teorías de campos conformes racionales [MS] y resultados fundacionales relacionados provistos por Joyal y Street [JS]. Entre los primeros ejemplos de categorías modulares se encuentran los desarrollados por Reshetikhin y Turaev en su trabajo sobre grupos cuánticos y sus aplicaciones a topología en baja dimensión [RT].

Las categorías modulares son estructuras algebraicas que tienen conexiones con diversas áreas de la matemática. Por ejemplo, aparecen en teoría de representaciones de grupos cuánticos [BK], álgebras de Von Neumann [EK], teoría topológica cuántica de campo (TQFT) [T2], teoría de campos conforme (CFT) [MS] y álgebras de operadores de vértice (VOA) [H], entre otras. Dentro de las categorías de fusión trenzadas, las categorías modulares se encuentran en el extremo opuesto a las categorías de fusión simétricas, las cuales están fuertemente relacionadas con los grupos finitos [D]. El estudio de estos casos extremos permite una mejor comprensión de aquellas categorías de fusión trenzadas que no son simétricas ni modulares. Por otro lado, las categorías modulares tienen una relación muy cercana con la física. Por ejemplo, con fases topológicas de la materia (premio Nobel de física 2016) [BCFV, WW] y computación cuántica [W1, W2]. Por todo esto, el estudio y clasificación de este tipo de categorías se ha vuelto de gran interés en los últimos años.

El objetivo general de este trabajo consiste en el estudio de la teoría de categorías modulares de dimensión impar. Asociados a las categorías modulares hay ciertos invariantes como la S-matriz, T-matriz, Sumas de Gauss, e Indicadores de Frobenius-Schur. También serán de gran importancia en este trabajo las dos nociones de dimensión que podemos considerar en una categoría modular: las dimensiones de Frobenius-Perron y las dimensiones cuánticas. La condición de una categoría modular de ser no degenerada proviene de requerir que su S-matriz sea invertible. Dicha matriz está relacionada con las reglas de fusión, la dimensión cuántica y el twist de la categoría mediante la fórmula de Verlinde (ver Corolario 3.3.3) y la ecuación de balance (ver Proposición 3.2.5). Por otro lado, la T-matriz es una matriz diagonal que codifica el twist de la categoría, y cuyo orden (finito) coincide con el Exponente de Frobenius-Schur [NS1, Theorem 7.5]. Todos estos invariantes están estrechamente relacionados y aportan información valiosa sobre la categoría.

Una clase importante de categorías modulares es la de las punteadas, las cuales están definidas por la propiedad de que los morfismos de evaluación y coevaluación de todos sus objetos simples son isomorfismos. Esta propiedad es equivalente a que todos los objetos simples tengan dimensión 1. Las categorías punteadas están clasificadas en términos de grupos finitos y 3-cociclos. Otra clase distinguida de categorías de fusión que está altamente relacionada con las categorías punteadas es la de las categorías de tipo grupo [ENO2]. Las categorías de tipo grupo forman una clase de categorías con propiedades bien comprendidas, ya que pueden ser construidas a partir de data de grupos finitos. Para aplicaciones a la física, es útil conocer cuándo las categorías son de tipo grupo, puesto que en tal caso no podrían utilizarse en la construcción de una computadora cuántica. En particular, las categorías de tipo grupo son íntegras [EGNO, Remark 9.7.7], es decir, las dimensiones de todos los objetos simples son números enteros. Una observación importante es que las categorías modulares de dimensión impar son siempre íntegras (condición necesaria para que una categoría sea de tipo grupo). Una pregunta abierta interesante es si existen categorías modulares de dimensión impar que no sean de tipo grupo.

De la categorificación de las nociones de nilpotencia y solubilidad para grupos finitos surgen las nociones de categorías nilpotentes y solubles [GN,ENO]. A diferencia de lo que sucede en grupos finitos, no toda categoría nilpotente es soluble. En el caso de que la categoría sea trenzada, la propiedad de nilpotencia si implica solubilidad [ENO, Proposition 4.5]. Estas nociones determinan un contexto adecuado para generalizar resultados clásicos en teoría de grupos: toda categoría de fusión de dimensión potencia de un primo es nilpotente [ENO, Theorem 8.28], y toda categoría de fusión cuya dimensión es divisible por a lo sumo dos primos resulta soluble (Teorema de Burnside) [ENO, Theorem 1.6]. Cabe destacar también que toda categoría de fusión íntegra nilpotente es de tipo grupo [DGNO2, Theorem 1.5].

Otro invariante a considerar en el estudio y clasificación de categorías modulares es el rango, esto es, la cantidad de clases de isomorfismo de objetos simples que posee la categoría. El problema de clasificar categorías modulares de rango pequeño tiene sus raíces en el problema de clasificación de teorías de campos conformes racionales por el año 1980. En particular, expondremos la clasificación de categorías modulares maximalmente no auto-duales (MNSD) de rango pequeño realizada por Bruillard y Rowell en [BR]. En dicho trabajo se muestra que toda categoría modular MNSD de rango a lo sumo 11 es punteada. Se conoce una categoría modular MNSD no punteada de rango 25, por lo que una pregunta abierta interesante es si las categorías MNSD de rango a lo sumo 23 lo son.

El Teorema de Cauchy para categorías de fusión esféricas [BNRW, Theorem 3.9] es una generalización de [NS1,Thm 8.4] para categorías de fusión íntegras. Esta pregunta surgió originalmente en un trabajo de Etingof y Gelaki en el contexto de álgebras de Hopf [1, Question 5.1], y fue verificada para álgebras de Hopf en [KSZ]. El Teorema de Cauchy es una herramienta de gran utilidad ya que permite relacionar el exponente de Frobenius Schur de la categoría (equivalente en categorías modulares al orden de su T-matriz) con su dimensión cuántica. Juega un papel fundamental en la demostración del resultado principal de [BNRW], que establece que para cada entero positivo r hay una cantidad finita de categorías modulares de rango r, salvo equivalencia. Dicho resultado se mantuvo como una conjetura por alrededor de diez años.

Resultados

En la primera sección del capítulo 4 expondremos una de las versiones del Teorema de Cauchy, desarrollada por Ng y Schauenburg en [NS1]. Utilizando este Teorema como herramienta presentaremos dos resultados propios que implican nilpotencia y solubilidad, respectivamente, en categorías modulares íntegras. Los resumimos en el siguiente teorema.

Teorema. Sea $\mathcal{C}$ una categoría modular íntegra, y sea N el orden de su T-matriz.

- Si $N = p^a$ con p primo, entonces $\mathcal{C}$ es nilpotente y por lo tanto de tipo grupo.
- Si $N = p^a q^b$ con p y q primos, entonces $\mathcal{C}$ es soluble.

En la segunda sección del capítulo 4 introducimos el Teorema de Cauchy para categorías modulares esféricas [BNRW, Theorem 3.9]. Usándolo como fuente de inspiración, en la última sección del capítulo 4 presentamos una versión propia del Teorema de Cauchy para categorías de fusión esféricas débilmente íntegras. Lo enunciamos a continuación.

Teorema. Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión esférica débilmente íntegra. Entonces los factores primos de $N = \mathrm{FSexp}(\mathcal{C})$ coinciden con los de $\dim(\mathcal{C})$.

La importancia de este resultado radica en que, a diferencia del Teorema de Cauchy para categorías de fusión esféricas, podemos relacionar los divisores primos de $N = \mathrm{FSexp}(\mathcal{C})$ y $\dim(\mathcal{C})$ en $\mathbb{Z}$, obviando la complejidad de factorizarlos en $\mathcal{O}_N = \mathbb{Z}[e^{\frac{2\pi i}{N}}]$. Gracias a este resultado pudimos probar la siguiente condición que garantiza integrabilidad para categorías modulares débilmente íntegras, en términos del orden de la T-matriz.

Corolario. Sea $\mathcal{C}$ una categoría modular débilmente íntegra con T-matriz de orden impar. Entonces $\mathcal{C}$ es íntegra.

Además pudimos generalizar a categorías modulares débilmente íntegras las condiciones de nilpotencia y solubilidad obtenidas anteriormente.

En la segunda sección del capítulo 6 damos una respuesta parcial a la siguiente pregunta: ¿Todas las categoría modulares con dimensión de Frobenius-Perron p^5 son punteadas? Esta pregunta surge naturalmente al leer los resultados obtenidos en [DLD, DN]. Resumimos nuestra respuesta parcial en los siguientes resultados.

Lema. Sea p un primo impar. Si $\mathcal{C}$ es una categoría modular no punteada tal que $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = p^5$, entonces $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{pt}) = p^2$.

Proposición. Sea p un primo impar. Si $\mathcal{C}$ es una categoría modular tal que $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = p^5$, entonces ocurre una de los siguientes:

1. La categoría $\mathcal{C}$ es punteada.
2. La categoría $\mathcal{C}$ tiene grupo de invertibles isomorfo a $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ y rango $p^3 + p^2 - 1$. Además $\mathrm{c.d.}(\mathcal{C}) = \{1, p\}$.

Concluimos con un resultado que está próximo a ser la versión para p^5 del Corolario [DLD, Lemma 4.11].

Corolario. Sea $\mathcal{C}$ una categoría modular tal que $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = dp^5$ donde p es un primo impar y d un entero libre de cuadrados con $(d, p) = 1$. Si el rango de $\mathcal{C}$ es distinto de $d(p^3 + p^2 - 1)$ entonces $\mathcal{C}$ es punteada.

Contenidos

En el primer capítulo se introducen los conceptos básicos para el estudio de categorías tensoriales, con el objetivo de que este trabajo resulte lo más autocontenido posible. En particular, se da una introducción al grupo de Grothendieck de una categoría tensorial.

El segundo capítulo trata de las categorías de fusión. Se definen las dimensiones de Frobenius-Perron de sus objetos y se introducen tres clases de categoría de fusión distinguidas: las tipo grupo, las solubles y las nilpotentes.

En el tercer capítulo se exponen los contenidos necesarios para entender categorías modulares y sus invariantes.

En el cuarto capítulo se introducen dos versiones del Teorema de Cauchy para categorías de fusión íntegras y esféricas, respectivamente. Se prueban algunos resultados propios utilizándolos como herramientas.

El quinto capítulo trata de las categorías modulares MNSD de rango pequeño y avances en su clasificación.

En el último capítulo se definen las categorías modulares casi libres de cuadrados. Se da una introducción al problema de su clasificación y se presentan resultados propios.

Índice general

1 | Categorías tensoriales

El primer capítulo de este trabajo tiene como objetivo introducir definiciones y conceptos necesarios para el estudio de las categorías tensoriales. En primer lugar, desarrollaremos el vocabulario básico de la teoría de categorías; luego introduciremos las nociones de categorías abelianas y monoidales. Finalmente nos adentraremos en el estudio de las categorías tensoriales

Una de las motivaciones originales para el estudio de teoría de categorías fue entender cómo ciertas estructuras y resultados de diferentes áreas de la matemática pueden ser vistos como distintas manifestaciones de un fenómeno general. En la actualidad, al estudiar categorías tensoriales se da especial atención a la clasificación y caracterización de categorías con ciertas propiedades o estructuras y al desarrollo de nuevas construcciones.

Para un desarrollo más profundo de los temas de este capítulo recomendamos la lectura de [B, EGNO, M].

1.1 | Nociones básicas

Definición 1.1.1. Una *categoría* $\mathcal{C}$ consiste en:

- Una clase de objetos;
- Una clase de flechas $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ para cada par de objetos A, B en $\mathcal{C}$;
- Para objetos A, B, C en $\mathcal{C}$, una asignación

$$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C), \qquad (g, f) \mapsto g \circ f,$$

  tal que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, cuando tenga sentido la composición;
- Para cada objeto A, una flecha id_A en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$, llamada identidad de A, tal que $\mathrm{id}_A \circ f = f$ y $g \circ \mathrm{id}_A = g$, cuando la composición tenga sentido.

A lo largo de este trabajo asumiremos que todas las categorías involucradas son *pequeñas*. Esto significa que tanto la clase de objetos como la clase de flechas de la categoría son conjuntos.

A continuación mencionaremos los ejemplos mas clásicos de categorías.

Ejemplos 1.1.2.

- La categoría Set es la categoría cuyos objetos son todos los conjuntos y sus flechas son las funciones entre ellos.
- La categoría Grp es la categoría cuyos objetos son todos los grupos y sus flechas son los morfismos de grupos. Además, la categoría Ab, cuyos objetos son los grupos abelianos y sus flechas son los morfismos de grupos entre ellos.
- La categoría CRing es la categoría cuyos objetos son todos los anillos conmutativos y sus flechas son los morfismos de anillos.

- Dado R un anillo, la categoría R-Mod es la categoría cuyos objetos son los R-módulos a izquierda y sus flechas son los morfismos de R-módulos a izquierda. Similarmente, las categorías Mod-R de R-módulos a derecha y R-Mod-R de bimódulos sobre R.
- Dado **k** un cuerpo, la categoría **Vec** es la categoría cuyos objetos son todos los espacios vectoriales sobre **k** y sus flechas son las transformaciones lineales, y la categoría Vec es la categoría cuyos objetos son los espacios vectoriales de dimensión finita sobre **k** y sus flechas las transformaciones lineales entre ellos.
- Dado **k** un cuerpo, la categoría Matr es la categoría cuyos objetos son los números naturales y sus flechas son las matrices.
- Dado **k** un cuerpo y G un grupo finito, la categoría **Rep G** es la categoría cuyos objetos son las representaciones de G sobre **k** y sus flechas son los morfismos de representaciones. También, la categoría Rep G es la categoría cuyos objetos son las representaciones de dimensión finita de G sobre **k** y sus flechas son los morfismos de representaciones entre ellas.
- A cada categoría $\mathcal{C}$ podemos asociarle la *categoría opuesta* $\mathcal{C}^{op}$. Los objetos de esta nueva categoría son los objetos de $\mathcal{C}$, y las flechas son $f^{op} : B \to A$, donde $f : A \to B$ es una flecha en $\mathcal{C}$, con la composición dada por $f^{op} \circ g^{op} = (g \circ f)^{op}$.

Definición 1.1.3. Dadas $\mathcal{C}$ y $\mathcal{B}$ categorías, un *funtor* $T : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ consiste en:

- Una función objeto, que manda cada objeto $C \in \mathcal{C}$ a un objeto $TC \in \mathcal{B}$.
- Una función flecha, que asigna a cada flecha $f : C \to C'$ en $\mathcal{C}$ una flecha $Tf : TC \to TC'$ en $\mathcal{B}$, tal que
  1. $T(\mathrm{id}_C) = \mathrm{id}_{TC} \ \ \forall C \in \mathcal{C}$,
  2. $T(g \circ f) = Tg \circ Tf$ siempre que la composición $g \circ f$ tenga sentido en $\mathcal{C}$.

Observación 1.1.4. Dados dos funtores $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $S : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, la composición punto a punto produce un nuevo funtor $T \circ S : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$.

Observación 1.1.5. En toda categoría $\mathcal{C}$ tenemos el funtor identidad $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, definido como la identidad tanto en objetos como en flechas.

Observación 1.1.6. Dado $T : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ un funtor, podemos definir el funtor $T^{op} : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{B}^{op}$, que manda a cada objeto C en $\mathcal{C}^{op}$ a TC en $\mathcal{B}^{op}$, y a cada flecha f^{op} en $\mathcal{C}^{op}$ a la flecha $(Tf)^{op}$ en $\mathcal{B}^{op}$.

Algunos ejemplos de funtores entre categorías son los siguientes.

Ejemplo 1.1.7. En la categoría Set, tenemos el funtor $P\colon$ Set $\to$ Set, cuya función objeto asigna a cada $X \in$ Set el conjunto $PX = \{S/S \subseteq X\}$ de subconjuntos de X, y cuya función flecha manda una función $f : X \to Y$ en la función

$$\begin{aligned} Pf : PX &\to PY, \\ S &\mapsto fS. \end{aligned}$$

Como $P(\mathrm{id}_X) : PX \to PX$ asigna a cada subconjunto S de X el subconjunto $\mathrm{id}_X(S) = S$, tenemos que $P(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{PX}$. Por otro lado, dadas las funciones $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ resulta que $P(g \circ f) : PX \to PZ$ asigna a cada subconjunto S de X el subconjunto $g \circ f(S) = g(f(S))$. Luego, $P(g \circ f) = Pf \circ Pg$ y por lo tanto P es un funtor.

Ejemplo 1.1.8. Definamos $S : \mathrm{CRing} \to \mathrm{Grp}$, con función objecto que asigna a $K \in \mathrm{CRing}$ el grupo GL_nK, y función flecha que manda a un morfismo de anillos $f : K \to K'$ al morfismo de grupos

$$\begin{aligned} Sf : GL_nK &\to GL_nK', \\ (a_{i,j}) &\mapsto (f(a_{i,j})). \end{aligned}$$

Claramente, $S(1_K) = 1_{SK}$, y $S(g \circ f) = Sg \circ Sf$. Por lo tanto S es un funtor de CRing en Grp.

Ejemplo 1.1.9. En la categoría Grp, tenemos el funtor $F : \mathrm{Grp} \to \mathrm{Grp}$ que a cada grupo G le asigna su conmutador $[G, G]$, y a cada morfismo de grupos $f : G \to H$ lo manda al morfismo de grupos Ff definido por

$$\begin{aligned} Ff : [G, G] &\to [H, H] \\ g &\mapsto f(g). \end{aligned}$$

Ejemplo 1.1.10. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Para cada $A \in \mathcal{C}$, tenemos el funtor distinguido $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -) : \mathcal{C} \to \mathrm{Set}$, que asigna el conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ a cada B en $\mathcal{C}$, y a una flecha $k : B \to B'$ le asigna la función

$$\begin{aligned} k_* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) &\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B'), \\ f &\mapsto k \circ f. \end{aligned}$$

Decimos que un funtor $T : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ es un *isomorfismo* si es biyectivo tanto en objetos como en flechas. En este caso, decimos que las categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{B}$ son *isomorfas*.

La condición de isomorfismo es muy fuerte, por lo que las nociones de funtor *fiel* y *pleno* que daremos a continuación resultan muy útiles.

Definición 1.1.11.

- Se dice que T es un funtor *pleno* si para todo par de objetos C, C' en $\mathcal{C}$ y para cada flecha $g : TC \to TC'$ de $\mathcal{B}$, hay una flecha $f : C \to C'$ en $\mathcal{C}$ tal que $g = Tf$. Es decir, T es sobreyectivo en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C')$ para todo par de objetos C, C' en $\mathcal{C}$.
- Se dice que T es un funtor *fiel* si para cada par de objetos C, C' en $\mathcal{C}$ y flechas $f_1, f_2 : C \to C'$ en $\mathcal{C}$, la igualdad $Tf_1 = Tf_2 : TC \to TC'$ implica $f_1 = f_2$. Es decir, T es inyectivo en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C')$ para todo par de objetos C, C' en $\mathcal{C}$.

Ejemplo 1.1.12. Una clase de funtores muy importante es la de *funtores de olvido*. Este tipo de funtores "olvida " toda o parte de la estructura de un objeto algebraico. Los funtores de este estilo son fieles, pero no plenos.

Por ejemplo, el funtor $F : \mathrm{Grp} \to \mathrm{Set}$, que a un grupo lo envía al conjunto subyacente olvidando su estructura de grupo y asigna a cada morfismo de grupos $f : G \to G'$ la misma función f, contemplada solo como una función entre conjuntos.

De la misma manera podemos considerar los funtores de olvido $F : \mathrm{Ab} \to \mathrm{Grp}$ y $F : \text{R-Mod} \to \mathrm{Vec}$.

Definición 1.1.13. Una flecha $f : A \to B$ en $\mathcal{C}$ se dice un *isomorfismo* si existe una flecha $f' : B \to A$ en $\mathcal{C}$ tal que $f' \circ f = \mathrm{id}_A$ y $f \circ f' = \mathrm{id}_B$.
Dos objetos A, B se dicen *isomorfos* en $\mathcal{C}$ si existe un isomorfismo $f : A \to B$ en $\mathcal{C}$.

En teoría de categorías, una *transformación natural* nos brinda una manera de transformar un funtor en otro respetando la composición de morfismos de las categorías involucradas. Es por esto que una transformación natural puede ser considerada como un "morfismo entre funtores". Daremos a continuación la definición formal.

Definición 1.1.14. Dados dos funtores $S, T : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$, una *transformación natural* $\tau : S \to T$ es una función que asigna a cada objeto $C \in \mathcal{C}$ una flecha $\tau_C : SC \to TC$ en $\mathcal{B}$, tal que si $f : C \to C'$ es una flecha en $\mathcal{C}$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} C & \qquad & \begin{tikzcd} SC \arrow[r, "\tau_C"] \arrow[d, "Sf"'] & TC \arrow[d, "Tf"] \\ SC' \arrow[r, "\tau_{C'}"] & TC'. \end{tikzcd} \\ \downarrow f & & \\ C' & & \end{array} \tag{1.1}$$

Si τ_C es un isomorfismo en $\mathcal{B}$ para todo $C \in \mathcal{C}$, τ se dice un *isomorfismo natural.*

Dados dos funtores $S, T : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$, denotaremos por $\mathrm{Nat}(S, T)$ a la familia de transformaciones naturales de S en T.

Ejemplo 1.1.15. Sean $T : \mathrm{CRing} \to \mathrm{Grp}$ el funtor de olvido y $S : \mathrm{CRing} \to \mathrm{Grp}$ el funtor del ejemplo 1.1.8. Definimos $\det : S \to T$ como

$$\begin{aligned} \det{}_K : GL_nK &\to K, \\ A &\mapsto \det(A), \end{aligned}$$

para cada $K \in \mathrm{CRing}$. Veamos que det así definido es una transformación natural de S en T. Dada $f : K \to K'$, el diagrama (1.1) queda

$$\begin{array}{ccc} K & \qquad & \begin{tikzcd} GL_nK \arrow[r, "\det_K"] \arrow[d, "Sf"] & K \arrow[d, "Tf=f"] \\ GL_nK' \arrow[r, "\det_{K'}"] & K'. \end{tikzcd} \\ \downarrow f & & \\ K' & & \end{array}$$

Dada $A = (a_{i,j}) \in GL_nK$, tenemos que

$$\begin{aligned} (f \circ \det{}_K)(a_{i,j}) = f\left(\sum_{\sigma \in Sn} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_i a_{\sigma(1),i}\right) &= \left(\sum_{\sigma \in Sn} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_i f(a_{\sigma(1),i})\right) \\ &= \det{}_{K'}(f(a_{i,j})) = (\det{}_{K'} \circ Sf)(a_{i,j}). \end{aligned}$$

Por lo tanto el diagrama conmuta, y resulta que $\det : S \to T$ es una transformación natural.

Ejemplo 1.1.16. A cada grupo H fijo, podemos asociarle un funtor $T_H : \mathrm{Grp} \to \mathrm{Grp}$ que asigna a cada grupo G el grupo $H \times G$ dado por el producto directo entre H y G, y a un morfismo $f : G_1 \to G_2$ le asigna

$$\begin{aligned} T_Hf : H \times G_1 &\to H \times G_2, \\ (a, b) &\mapsto (a, f(b)). \end{aligned}$$

Dados $H, K \in \mathrm{Grp}$ y $f : H \to K$ un morfismo no nulo, podemos definir $\tau : T_H \to T_K$ como

$$\begin{aligned} \tau_G : H \times G &\to K \times G, \\ (a, b) &\mapsto (f(a), b), \end{aligned}$$

para cada $G \in$ Grp. Probaremos que τ es una transformación natural.

Dado un morfismo de grupos $g : G_1 \to G_2$ el diagrama (1.1) queda

$$\begin{array}{ccc} G_1 & & H \times G_1 \xrightarrow{\tau_{G_1}} K \times G_1 \\ \Big\downarrow g & & \Big\downarrow T_H g \qquad\qquad \Big\downarrow T_K g \\ G_2 & & H \times G_2 \xrightarrow{\tau_{G_2}} K \times G_2. \end{array}$$

Como

$$T_K g \circ \tau_{G_1}(a,b) = T_K g(f(a),b) = (f(a),g(b)), \quad \text{y}$$
$$\tau_{G_2} \circ T_H g(a,b) = \tau_{G_2}(a,g(b)) = (f(a),g(b)),$$

efectivamente el diagrama anterior conmuta. Por lo tanto τ es una transformación natural.

Como dijimos anteriormente, la noción de isomorfismo entre categorías es muy fuerte. En la práctica es muy díficil encontrar categorías isomorfas. Por esta razón introduciremos a continuación una noción más adecuada para comparar categorías, y será la que utilizaremos a lo largo de este trabajo.

Definición 1.1.17. Una *equivalencia* entre categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ es un par de funtores $S : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $T : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ para los cuales existen isomorfismos naturales $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \simeq T \circ S$ y $\mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \simeq S \circ T$.

Ejemplo 1.1.18. Dado $\mathbf{k}$ un cuerpo, la categoría $\mathcal{C} =$ Vec de espacios vectoriales de dimensión finita sobre $\mathbf{k}$ es equivalente a la categoría $\mathcal{B}$ de las matrices sobre $\mathbf{k}$.
En efecto, fijando para cada espacio vectorial V una base β_V, tenemos el funtor $S : \mathrm{Vec}_{\mathbf{k}} \to \mathrm{Mtr}_{\mathbf{k}}$ que a cada espacio vectorial V le asigna el número natural $\dim(V)$, y a cada transformación lineal $f : V \to V'$ le asigna la matriz de f (de tamaño $\dim(V) \times \dim(V')$) en las bases fijadas. Es decir, $Sf : \dim(V) \to \dim(V')$, donde Sf es la matriz de f en las bases β_V y $\beta_{V'}$.
Por otro lado, podemos definir el funtor $T : \mathrm{Mtr} \to \mathrm{Vec}$, que a cada $n \in \mathbb{N}$ le asigna el espacio vectorial $\mathbf{k}^n$ y a una matriz A de tamaño $n \times m$ le asigna la función $f : \mathbf{k}^n \to \mathbf{k}^m$, con $f(v) = Av$ para todo $v \in \mathbf{k}^n$.
Veamos que se cumple que $Id_{\mathcal{C}} \simeq T \circ S$ y $Id_{\mathcal{B}} \simeq S \circ T$, y por lo tanto las categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{B}$ son equivalentes.
Definimos $\tau : I_{\mathcal{B}} \to S \circ T$, con τ_m la identidad para todo $m \in \mathbb{N}$. En este caso, dada $A : m \to n$ matriz, el diagrama 1.1 queda

$$\begin{array}{ccc} m & & m \xrightarrow{\tau_m = id_m} m \\ \Big\downarrow A & & \Big\downarrow A \qquad\quad \Big\downarrow S\circ T(A)=A \\ n & & n \xrightarrow{\tau_n = id_n} n, \end{array}$$

que conmuta trivialmente. Como además τ_m es invertible para todo $m \in \mathbb{N}$, resulta $I_{\mathcal{B}} \simeq S \circ T$.

Recíprocamente, definimos $\mu : I_{\mathcal{C}} \to T \circ S$ como

$$\begin{aligned} \mu_V : V &\to \mathbf{k}^n \\ v_i &\mapsto e_i \text{ para todo } i = 1, \cdots, n, \end{aligned}$$

para todo V espacio vectorial, donde $n = \dim(V)$ y $\beta_V = \{v_1, .., v_n\}$.

En este caso, dada $f : V \to V'$ una transformación lineal, $n = \dim(V), n' = \dim(V')$, el diagrama 1.1 queda

$$
\begin{array}{ccc}
V & & V \xrightarrow{\mu_V} \mathbf{k}^n \\
\Big\downarrow f & & \Big\downarrow f \qquad \Big\downarrow T\circ S(f) \\
V' & & V' \xrightarrow{\mu_{V'}} \mathbf{k}^{n'}.
\end{array}
$$

Usando álgebra lineal es fácil ver que el diagrama conmuta. Nuevamente, como μ_V es invertible para todo V espacio vectorial, resulta $I_{\mathcal{C}} \simeq T \circ S$.
Vimos que $I_{\mathcal{C}} \simeq T \circ S$ y que $I_{\mathcal{B}} \simeq S \circ T$. Luego, las categorías $\mathcal{C} = \text{Vec}$ de espacios vectoriales de dimensión finita sobre $\mathbf{k}$ y $\mathcal{B} = \text{Mtr}$ de matrices sobre $\mathbf{k}$ son equivalentes.

Siempre que consideramos una estructura algebraica es de suma utilidad estudiar sus subobjetos. También tenemos una versión categórica de esta idea.

Definición 1.1.19. Una *subcategoría* $\mathcal{D}$ de una categoría $\mathcal{C}$ consiste en:

1. Un subconjunto de objetos de $\mathcal{C}$;
2. Para cada par de objetos A, A' en $\mathcal{D}$, un conjunto $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(A, A') \subseteq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A')$ de morfismos de A en A' de manera que
   a) Si $f \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(A, A')$ y $g \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(A', A'')$ entonces $g \circ f \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(A, A'')$;
   b) Para todo $A \in \mathcal{D}, \text{id}_A \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(A, A)$.

Estas condiciones aseguran que dicha colección de objetos y flechas forman una categoría $\mathcal{D}$. Más aún, el mapa $\mathcal{D} \to \mathcal{C}$ que manda cada objeto y cada flecha de $\mathcal{D}$ en sí mismo es un funtor, al que llamaremos *funtor de inclusión*. En particular, el funtor de inclusión es siempre fiel.

Definición 1.1.20. Una subcategoría $\mathcal{D}$ de una categoría $\mathcal{C}$ se dice *plena* si para cada par de objetos A, A' en $\mathcal{D}$ se cumple que $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(A, A') = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A')$. Es decir, la subcategoría $\mathcal{D}$ contiene todos los morfismos de A en A' en $\mathcal{C}$ para todo par de objetos $A, A' \in \mathcal{D}$.

En el caso de una subcategoría plena el funtor de inclusión $\mathcal{D} \to \mathcal{C}$ es también pleno.

Dentro del conjunto de morfismos de una categoría, podemos distinguir a aquellos que reúnan ciertas características.

Definición 1.1.21. Sea $f : A \to B$ una flecha en $\mathcal{C}$.

- Se dice que f es un *monomorfismo* si para cada par de flechas $f_1, f_2 : d \to a$ tales que $f \circ f_1 = f \circ f_2$, se tiene $f_1 = f_2$.
- Se dice que f es un *epimorfismo* si para cada par de flechas $g_1, g_2 : b \to c$ tales que $g_1 \circ f = g_2 \circ f$, se tiene $g_1 = g_2$.

A continuación daremos algunas propiedades básicas de monomorfismos y epimorfismos.

Proposición 1.1.22. *En toda categoría $\mathcal{C}$ se cumple lo siguiente.*

1. *Toda flecha identidad es un monomorfismo.*
2. *Toda flecha identidad es un epimorfismo.*

3. *Composición de monomorfismos es un monomorfismo.*

4. *Composición de epimorfismos es un epimorfismo.*

5. *Si la composición $k \circ f$ de dos morfismos es un monomorfismo, entonces f es un monomorfismo.*

6. *Si la composición $f \circ k$ de dos morfismos es un epimorfismo, entonces f es un epimorfismo.*

Demostración. Los incisos (1) y (2) son claros.

(3) Sean f y k monomorfismos en $\mathcal{C}$. Dados h y g morfismos tal que $k \circ f \circ h = k \circ f \circ g$, como k es un monomorfismo tenemos que $f \circ h = f \circ g$. Análogamente, como f es un monomorfismo resulta $h = g$. Luego, $k \circ f$ es un monomorfismo.

(4) La prueba es análoga a la del punto (3).

(5) Supongamos que $k \circ f$ es un monomorfismo. Sean h y g morfismos tal que $f \circ g = f \circ h$. Componiendo con k obtenemos $k \circ f \circ g = k \circ f \circ h$, y luego como $k \circ f$ es un monomorfismo resulta $g = h$. Por lo tanto f es un monomorfismo.

(6) La prueba es análoga a la del punto (5). □

Observación 1.1.23. Dada una categoría $\mathcal{C}$, consideremos su categoría opuesta $\mathcal{C}^{op}$. Se cumple que f^{op} es un monomorfismo (epimorfismo) en $\mathcal{C}^{op}$ si y sólo si f es un epimorfismo (monomorfismo) en $\mathcal{C}$.

Un funtor importante que surge de la consideración de la categoría opuesta es el siguiente.

Ejemplo 1.1.24. Para cada objeto B en una categoría $\mathcal{C}$ tenemos el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, B) : \mathcal{C}^{op} \to Set$, que a cada A en $\mathcal{C}$ le asigna el conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, y a cada flecha $k : A \to A'$ le asigna

$$\begin{aligned} k^* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) &\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A', B), \\ f &\mapsto f \circ k. \end{aligned}$$

Otra manera de construir categorías es a partir del producto entre dos de ellas.

Definición 1.1.25. Dadas $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ categorías, tenemos la *categoría producto* $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$, definida de la siguiente manera:

- Los objetos de $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$ son pares (B, C), donde B es un objeto en $\mathcal{B}$ y C un objeto en $\mathcal{C}$;
- Los morfismos $(B, C) \to (B', C')$ de $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$ son pares (f, g), donde $f : B \to B'$ es un morfismo en $\mathcal{B}$, y $g : C \to C'$ es un morfismo en $\mathcal{C}$;
- La composición de morfismos está dada por $(f, g) \circ (f', g') = (f \circ f', g \circ g')$.

Con el producto $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$ vienen asociados dos funtores $P : \mathcal{B} \times \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ y $Q : \mathcal{B} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ que llamaremos *proyecciones*, definidos por las siguientes fórmulas,

$$\begin{aligned} P(B, C) &= B, & Q(B, C) &= C, \\ P(f, g) &= f, & Q(f, g) &= g. \end{aligned}$$

Proposición 1.1.26 (Propiedad universal de P y Q)**.** *Para cada par de funtores $R : \mathcal{D} \to \mathcal{B}$ y $T : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ existe un único funtor $F : \mathcal{D} \to \mathcal{B} \times \mathcal{C}$ que cumple $PF = R$ y $QF = T$.*

Es decir, existe un único funtor $F : \mathcal{D} \to \mathcal{B} \times \mathcal{C}$ tal que el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{D} \arrow[dl, "R"'] \arrow[d, dotted, "F"] \arrow[dr, "T"] & \\ \mathcal{B} & \mathcal{B} \times \mathcal{C} \arrow[l, "P"] \arrow[r, "Q"'] & \mathcal{C}. \end{tikzcd}$$

□

Definición 1.1.27. Dados funtores $T : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ y $S : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, definimos el funtor $T \times S : \mathcal{B} \times \mathcal{C} \to \mathcal{B}' \times \mathcal{C}'$ que asigna a cada objeto (B, C) en $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$ el objeto (TB, SC) en $\mathcal{B}' \times \mathcal{C}'$, y a cada morfismo (f, g) en $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$ el morfismo (Tf, Sg) en $\mathcal{B}' \times \mathcal{C}'$.

En efecto, es fácil ver que $T \times S : \mathcal{B} \times \mathcal{C} \to \mathcal{B}' \times \mathcal{C}'$ así definido resulta un funtor.

Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{B}$ dos categorías. Veamos que los funtores de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{B}$ forman una categoría, cuyas flechas son las transformaciones naturales entre funtores.

Si R, S y T son funtores de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{B}$ y $\sigma : R \to S$ y $\tau : S \to T$ son transformaciones naturales, sus componentes para cada $C \in \mathcal{C}$ definen una composición $(\tau \circ \sigma)_C = \tau_C \circ \sigma_C$. Veamos que $\tau \circ \sigma : R \to T$ así definida es también una transformación natural.

Dada una flecha $f : C \to C'$ en $\mathcal{C}$, tenemos el siguiente diagrama,

$$\begin{tikzcd} RC \arrow[r, "Rf"] \arrow[d, "\sigma_c"] \arrow[dd, bend right, "\tau\circ\sigma"'] & RC' \arrow[d, "\sigma_{C'}"'] \arrow[dd, bend left, "\tau\circ\sigma"] \\ SC \arrow[r, "Sf"] \arrow[d, "\tau_C"] & SC' \arrow[d, "\tau_{C'}"'] \\ TC \arrow[r, "Tf"] & TC'. \end{tikzcd}$$

El cuadrado superior conmuta pues σ es una transformación natural, y el cuadrado inferior conmuta pues τ es una transformación natural. Por lo tanto tenemos que todo el diagrama conmuta, y resulta que $\tau \circ \sigma$ es una transformación natural.
Mas aún, para cada funtor $T : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ tenemos la transformación identidad $\mathrm{Id}_T : T \to T$, con componentes $(\mathrm{Id}_T)_C = \mathrm{id}_{TC}$ para todo objeto C en $\mathcal{C}$.
Todo esto da lugar a la siguiente definición.

Definición 1.1.28. Dadas $\mathcal{C}$ y $\mathcal{B}$ dos categorías, tenemos la *categoría de funtores* $\mathcal{B}^{\mathcal{C}}$, con objetos los funtores $\mathcal{C} \to \mathcal{B}$ y flechas las transformaciones naturales entre funtores. Esta categoría también suele denotarse por $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{B})$.

Una herramienta importante en el estudio de categorías es el lema de Yoneda, que enunciaremos a continuación.

Lema 1.1.29. ***Lema de Yoneda***. *Dados un funtor $K : \mathcal{C} \to Set$ y un objeto R en $\mathcal{C}$, existe una biyección*

$$y : Nat(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(R, -), K) \xrightarrow{\sim} KR,$$
$$(\alpha : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(R, -) \to K) \mapsto \alpha_R(\mathrm{id}_R).$$

Demostración. Sea $U \in KR$. Definimos $\alpha^U : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(R, -) \to K$ como

$$\begin{aligned} \alpha^U_D : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(R, D) &\to KD, \\ (f : R \to D) &\mapsto Kf(U), \end{aligned}$$

para todo $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(R, D)$. Luego, $U = \alpha^U_R(\mathrm{id}_R)$.
Ahora veamos que α^U es una transformación natural. En efecto, si $g : D \to D'$, tenemos

$$\begin{array}{ccc} D & \qquad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(R, D) & \xrightarrow{\alpha^U_D} Kd \\ \big\downarrow g & \qquad \big\downarrow g_* & \qquad \big\downarrow Kg \\ D' & \qquad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(R, D') & \xrightarrow{\alpha^U_{D'}} KD', \end{array}$$

donde g_* es la función definida en Ejemplo 1.1.10. Este diagrama conmuta, pues si $h : R \to D$, por un lado tenemos que

$$(Kg \circ \alpha^U_D)h = Kg(Kh(U)) = K(g \circ h)(U),$$

y además

$$(\alpha^U_{D'} \circ g_*)(h) = \alpha^U_{D'}(g \circ h) = K(g \circ h)(U).$$

Luego $\alpha^U \in \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(R, -), K)$, y como $\alpha^U_R(1_R) = U$, resulta que el mapa y es sobreyectivo.

Por último, probemos que y es inyectiva. Sea β otra transformación natural de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(R, -)$ en K tal que $\beta_R(\mathrm{id}_R) = U$. El siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} R & \qquad \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(R, R) & \xrightarrow{\beta_R} KR \\ \big\downarrow f & \qquad \big\downarrow f_* & \qquad \big\downarrow Kf \\ D & \qquad \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(R, D) & \xrightarrow{\beta_D} KD, \end{array}$$

conmuta para toda $f : R \to D$, pues $\beta_D(f) = Kf(U)$ por la naturalidad de β. Luego $\beta = \alpha^U$. □

Corolario 1.1.30. *Sean R y S dos objetos en $\mathcal{C}$. Sea $\tau : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(R, -) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S, -)$ una transformación natural. Existe un único morfismo $h : S \to R$ tal que τ es de la forma* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(h, -)$*, donde*

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(h, D) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(R, D) &\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S, D), \\ f &\mapsto f \circ h, \end{aligned}$$

para todo $D \in \mathcal{C}$.

Demostración. Por el lema de Yoneda, sabemos que existe una biyección

$$y : \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(R, -), \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S, -)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S, R).$$

Como $\tau \in \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(R, -), \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S, -))$, esto nos dice que existe un único $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S, R)$ tal que

$$\begin{aligned} \tau_D : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(R, D) &\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S, D), \\ (f : R \to D) &\mapsto f \circ h, \end{aligned}$$

para todo $D \in \mathcal{C}$. Es decir, $\tau = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(h, -)$. □

Definición 1.1.31. Sea $\mathcal{C}$ una categoría, y sean A y B objetos en $\mathcal{C}$. Un *producto* de A y B es una terna $(A \times B, p_A, p_B)$, donde

- $A \times B$ es un objeto en $\mathcal{C}$,
- $p_A : A \times B \to A$ y $p_B : A \times B \to B$ son morfismos en $\mathcal{C}$,

con la siguiente propiedad universal. Dado un objeto C en $\mathcal{C}$ y morfismos $q_A : C \to A$, $q_B : C \to B$ en $\mathcal{C}$, existe un único morfismo $r : C \to A \times B$ tal que $q_A = p_A \circ r$ y $q_B = p_B \circ r$.

Es decir, existe un único morfismo $r : C \to A \times B$ tal que el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "q_A"'] \arrow[d, dotted, "r"] \arrow[dr, "q_B"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "p_A"] \arrow[r, "p_B"'] & B.
\end{tikzcd}$$

Proposición 1.1.32. *El producto de dos objetos (si existe) es único salvo isomorfismo.*

Demostración. Consideremos dos productos (C, p_A, p_B) y (D, q_A, q_B) de los objetos A y B en una categoría $\mathcal{C}$.
Como (C, p_A, p_B) es un producto de A y B, existe un morfismo $r : D \to C$ tal que $q_A = p_A \circ r$ y $q_B = p_B \circ r$. Como (D, q_A, q_B) también es un producto de A y B, por la propiedad universal existe un morfismo $s : C \to D$ tal que $p_A = q_A \circ s$ y $p_B = q_B \circ s$.
Viendo a (C, p_A, p_B) tanto como a un producto como a otra terna, existe un único morfismo $t : C \to C$ tal que $p_A = p_A \circ t$ y $p_B = p_B \circ t$. Claramente, $t = \mathrm{id}_C$. Pero las relaciones

$$p_A = q_A \circ s = p_A \circ r \circ s,$$

$$p_B = q_B \circ s = p_B \circ r \circ s,$$

indican que $t = r \circ s$ es otro morfismo de este tipo. La unicidad de t implica que $r \circ s = \mathrm{id}_C$. Análogamente, se puede ver que $s \circ r = \mathrm{id}_D$. Luego los morfismos r y s son isomorfismos, y los objetos C y D resultan isomorfos. □

Ejemplo 1.1.33. En la categoría Set, el producto de los conjuntos X, Y es simplemente el producto cartesiano $X \times Y$ con las proyecciones usuales.

Ejemplo 1.1.34. En las categorías Grp, Ab, Ring y R-Mod, el producto de objetos A, B es el producto directo $A \times B$ con las operaciones punto a punto y proyecciones usuales.

Definición 1.1.35. Sean $\mathcal{C}$ una categoría y A, B objetos en $\mathcal{C}$. Un *coproducto* de A y B es una terna $(A \amalg B, p_A, p_B)$, donde

- $A \amalg B$ es un objeto en $\mathcal{C}$,
- $p_A : A \to A \amalg B$ y $p_B : B \to A \amalg B$ son morfismos en $\mathcal{C}$,

con la siguiente propiedad universal. Dado un objeto C en $\mathcal{C}$ y morfismos $q_A : A \to C$, $q_B : B \to C$ en $\mathcal{C}$, existe un único morfismo $r : A \amalg B \to C$ en $\mathcal{C}$ tal que $q_A = r \circ p_A$ y $q_B = r \circ p_B$. Es decir, existe un único morfismo $r : A \amalg B \to C$ tal que el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{tikzcd}
 & C & \\
A \arrow[ur, "q_A"] \arrow[r, "p_A"'] & A \amalg B \arrow[u, dotted, "r"] & B. \arrow[ul, "q_B"'] \arrow[l, "p_B"]
\end{tikzcd}$$

Proposición 1.1.36. *En una categoría, el coproducto de dos objetos (si existe) es único salvo isomorfismo.*

Demostración. La prueba es análoga a la de la Proposición 1.1.32 para el producto de dos objetos. □

Ejemplo 1.1.37. En la categoría Set, el coproducto de dos objetos X, Y disjuntos es su unión, munida de los morfismos $p_X : X \to X \cup Y$ y $p_Y : Y \to X \cup Y$ dados por las inclusiones.

Ejemplo 1.1.38. En las categorías Ab y R-Mod, el coproducto de dos objetos A, B es la suma directa $A \oplus B$.

Definición 1.1.39. Sea $\mathcal{C}$ una categoría.

- Un objeto T en $\mathcal{C}$ se dice *terminal* si para todo objeto A en $\mathcal{C}$ existe una única flecha $f : A \to T$ en $\mathcal{C}$.
- Un objeto S en $\mathcal{C}$ se dice *inicial* si para todo objeto A en $\mathcal{C}$ existe una única flecha $f : S \to A$ en $\mathcal{C}$.
- Un objeto Z en $\mathcal{C}$ se dice *nulo* o *cero* si es inicial y terminal.

Ejemplo 1.1.40. En la categoría Grp, el grupo con un solo elemento $\{e\}$ es un objeto nulo. En efecto, dado un grupo G, el único morfismo de grupos de G en $\{e\}$ es el que a todo elemento de G le asigna el elemento e, y el único morfismo de grupos de $\{e\}$ en G es el que asigna e en la identidad de G.

Observación 1.1.41.

- Dos objetos terminales (iniciales) en una categoría son isomorfos.
- Si $\mathcal{C}$ tiene un objeto nulo Z, dado un par A, B de objetos existe una única flecha $A \to Z \to B$. A esta única flecha la llamaremos *flecha cero*, y la denotaremos por 0.
- Composición de un morfismo arbitrario con una flecha cero es nuevamente una flecha cero.

Terminaremos esta sección con un repaso de los conceptos de kernel y cokernel de un morfismo en una categoría, y algunas propiedades y ejemplos básicos al respecto.

Definición 1.1.42. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con un objeto nulo Z. Dada una flecha $f : A \to B$, un *kernel* de f (si existe) es un par (S, k) donde S es un objeto en $\mathcal{C}$ y $k : S \to A$ es un morfismo en $\mathcal{C}$ tal que

- $fk = 0$, y
- para toda flecha $h : C \to A$ en $\mathcal{C}$ con $fh = 0$, existe una única flecha $h' : C \to S$ tal que $kh' = h$.

Podemos representar este concepto en el siguiente diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, "f"] & B, & fk = 0, \\ C \arrow[u, dotted, "\exists!\ h'"] \arrow[ur, "h"'] & & & fh = 0. \end{tikzcd}$$

Definición 1.1.43. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con un objeto nulo Z. Dada una flecha $f : A \to B$, un *cokernel* de f (si existe) es un par (E, c) donde E es un objeto en $\mathcal{C}$ y $c : B \to E$ es un morfismo en $\mathcal{C}$ tal que:

- $cf = 0$, y
- para toda flecha $h : B \to C$ con $hf = 0$, existe una única flecha $h' : E \to C$ tal que $h'c = h$.

Podemos resumir esto en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "h"'] & E, \arrow[d, dotted, "h'"] & cf = 0, \\ & & C, & hf = 0. \end{tikzcd}$$

El kernel y el cokernel de un morfismo son únicos salvo isomorfismo. Además, todo kernel es un monomorfismo y todo cokernel es un epimorfismo. Pero en una categoría con objeto nulo, no todo monomorfismo es necesariamente un kernel (Ver Ejemplo 1.1.44). De la misma forma, no todo epimorfismo es un cokernel.

Ejemplo 1.1.44. En la categoría Grp, el kernel de un morfismo $f : G \to H$ es $i : N \to G$, con $N = \{g \in G / f(g) = e_G\}$. Claramente, $f \circ i = 0$ y dada $h : K \to G$ tal que $fh = 0$, tenemos que $h(K) \subseteq N$. Luego, el diagrama

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "i"] & G \arrow[r, "f"] & H \\ K \arrow[u, dotted, "h"] \arrow[ur, "h"'] & & \end{tikzcd}$$

conmuta. Por lo tanto $i : N \to G$ es el kernel de f.

Por otro lado, sabemos que N así definido es un subgrupo normal de G. Luego, dado $K \subset G$ no normal, tenemos que $i : K \to G$ es un monomorfismo, pero no es un kernel.

Ejemplo 1.1.45. En la categoría Ab de grupos abelianos, dado un morfismo $f : A \to B$, si definimos $\pi : B \to B/f(A)$, resulta que π es el cokernel de f. En efecto, $\pi f = 0$ y si $g : B \to C$ con $gf = 0$, entonces por el Teorema de Isomorfismo para grupos existe un único morfismo g' tal que el siguiente diagrama resulta conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "g"'] & B/f(A) \arrow[d, dotted, "g'"] \\ & & C. \end{tikzcd}$$

Por lo tanto $\pi : B \to B/f(A)$ es el cokernel de f.

Proposición 1.1.46. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto nulo.*

1. *Si f es un monomorfismo y $f \circ g = 0$ para algún morfismo g, entonces $g = 0$.*
2. *Si f es un epimorfismo y $g \circ f = 0$ para algún morfismo g, entonces $g = 0$.*

Demostración. (1) Como $f \circ g = 0 = f \circ 0$ y f es un monomorfismo, resulta $g = 0$.
La demostración de (2) es análoga. □

Proposición 1.1.47. *En una categoría con objeto nulo Z, el kernel de un monomorfismo $f : A \to B$ es la flecha cero $0 : Z \to A$.*
Análogamente, el cokernel de un epimorfismo $f : A \to B$ es la flecha cero $0 : B \to Z$.

Demostración. Sea $f : A \to B$ un monomorfismo en $\mathcal{C}$. Veamos que la flecha cero $0 : Z \to A$ cumple la propiedad universal del kernel. Tenemos $f \circ 0 = 0$, y dada $h : C \to A$ tal que $f \circ h = 0$, como f es un monomorfismo, por la Proposición anterior resulta $h = 0$. Luego h se factoriza unívocamente por Z.

La demostración para el cokernel es análoga. □

Proposición 1.1.48. *En una categoría con objeto nulo, el kernel del morfismo cero $0 : A \to B$ es la identidad de A.*
Análogamente, el cokernel del morfismo cero $0 : A \to B$ es la identidad de B.

Demostración. En primer lugar, se cumple que $0 \circ \mathrm{id}_A = 0$. Además dada $g : C \to A$ tal que $0 = g \circ 0$, existe una única factorización de g por id_A dada por la misma g. Luego el kernel de 0 es id_A.

La idea de la prueba puede ser visualizada en el siguiente diagrama,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mathrm{id}_A"] & A \arrow[r, "0"] & b, \\ C \arrow[u, dotted, "g"] \arrow[ur, "g"'] & & \end{tikzcd} \qquad \begin{matrix} 0 \circ \mathrm{id}_A = 0, \\ \\ 0 \circ g = 0. \end{matrix}$$

□

1.2 Categorías abelianas

En esta sección introduciremos una clase especial de categorías, las categorías abelianas, cuya noción es una abstracción de propiedades básicas de la categoría Ab de grupos abelianos. Recordemos para comenzar la siguiente definición.

Definición 1.2.1. Una *categoría preaditiva* es una categoría $\mathcal{C}$ en la cual el conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ es un grupo abeliano, para todo par de objetos A, B en $\mathcal{C}$, y la composición de morfismos es biaditiva con respecto a esta estructura.

Claramente, la categoría de grupos abelianos, o más generalmente, la categoría de módulos sobre un anillo, son preaditivas.

Proposición 1.2.2. *En una categoría preaditiva $\mathcal{C}$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$\mathcal{C}$ tiene objeto inicial.*
2. *$\mathcal{C}$ tiene objeto terminal.*
3. *$\mathcal{C}$ tiene objeto cero.*

En tal caso, los morfismos que se factorizan por el elemento cero son exactamente las identidades para la estructura de grupo.

Demostración. Notemos que (3) implica (1) y (2). Por dualidad, basta probar que (1) implica (3). Sea 0 el objeto inicial. Entonces hay un único elemento en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(0,0)$. Esto nos dice que id_0 es el elemento neutro del grupo $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(0,0)$. Dado un objeto C, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,0)$ tiene al menos un elemento: el elemento cero de ese grupo. Pero si $f: C \to 0$ es un morfismo, $f = 1_0 \circ f$ tiene que ser el elemento cero de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,0)$ por bilinealidad de la composición. Luego el cero es el único elemento de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,0)$, por lo que 0 es también terminal.
Dados objetos C, D en $\mathcal{C}$, los grupos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,0)$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(0,D)$ contienen solo su elemento cero, y luego la composición $C \to 0 \to D$ es el elemento cero de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,D)$. □

Definición 1.2.3. Dados dos objetos A, B en una categoría preaditiva, llamamos *biproducto* de A y B (si existe) a una colección (C, p_A, p_B, i_A, i_B), donde

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift right, "i_A"'] & C \arrow[l, shift right, "p_A"'] \arrow[r, shift left, "p_B"] & B, \arrow[l, shift left, "i_B"] \end{tikzcd} \qquad p_A i_A = 1_A,\ p_B i_B = 1_B,\ i_A p_A + i_B p_B = 1_C. \tag{1.2}$$

En principio, está noción puede parece mas fuerte que las nociones de producto y coproducto. El siguiente resultado muestra que no es así.

Proposición 1.2.4. *Sean A, B objetos en una categoría preaditiva $\mathcal{C}$. Entonces A y B tienen biproducto en $\mathcal{C}$ si y sólo si tienen producto en $\mathcal{C}$. Dualmente, tienen biproducto en $\mathcal{C}$ si y sólo si tienen coproducto en $\mathcal{C}$.*
Específicamente, dado un diagrama como 1.2, (C, p_A, p_B) resulta un producto de A y B, y (C, i_A, i_B) un coproducto.

Demostración. Supongamos que tenemos un biproducto de A y B, es decir, una colección (C, p_A, p_B, i_A, i_B), donde

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift right, "i_A"'] & C \arrow[l, shift right, "p_A"'] \arrow[r, shift left, "p_B"] & B, \arrow[l, shift left, "i_B"] \end{tikzcd} \qquad p_A i_A = \mathrm{id}_A,\ p_B i_B = \mathrm{id}_B,\ \mathrm{id}_A p_A + \mathrm{id}_B p_B = \mathrm{id}_C .$$

Entonces,

$$p_A i_B = p_A(i_A p_A + i_B p_B) i_B = p_A i_A p_A i_B + p_A i_B p_B i_B = \mathrm{id}_A p_A i_B + p_A i_B \mathrm{id}_B = p_A i_B + p_A i_B,$$

por lo que $p_A i_B = 0$. Simétricamente, $p_B i_A = 0$.
Dado un diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, "i_A"'] & D \arrow[l, "f_A"'] \arrow[r, "f_B"] & B \arrow[dl, "i_B"] \\ & C, & \end{tikzcd}$$

si definimos $h: D \to C$ como $h = i_A f_A + i_B f_B$, tenemos que

$$p_A h = p_A i_A f_A + p_A i_B f_B = f_A, \text{ y}$$

$$p_B h = p_B i_A f_A + p_B i_B f_B = f_B.$$

Recíprocamente, si $h': D \to C$ es tal que $p_A h' = f_A$ y $p_B h' = f_B$, entonces

$$h' = (i_A p_A + i_B p_B) h' = i_A p_A h' + i_B p_B h' = i_A f_A + i_B f_B.$$

Por lo tanto $h = h'$. Esto nos dice que hay un único morfismo $h : D \to C$ tal que $p_A h = f_A$ y $p_B h = f_B$, por lo que (C, p_A, p_B) es un producto de A y B.
Recíprocamente, si $A \times B$ es un producto de A y B, consideramos el diagrama dado por

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\mathrm{id}_A"'] \arrow[d, dotted, "i_A"] \arrow[dr, "0"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "p_A"] \arrow[r, "p_B"'] & B, \end{tikzcd}$$

donde i_A es la única función tal que $p_A i_A = 1_A$ y $p_B i_A = 0$.
Por otro lado, tenemos el diagrama análogo para B, con i_B la única función tal que $p_B i_B = 1_B$ y $p_A i_B = 0$. Luego,

$$p_A(i_A p_A + i_B p_B) = p_A + 0 p_B = p_A, \text{ y}$$

$$p_B(i_A p_A + i_B p_B) = 0 p_A + p_B = p_B.$$

Resulta que $i_A p_A + i_B p_B : A \times B \to A \times B$ es el único morfismo con componentes p_A, p_B. Por lo tanto $i_A p_A + i_B p_B = \mathrm{id}_{A \times B}$, y (C, p_A, p_B, i_A, i_B) es un biproducto de A y B. □

Proposición 1.2.5. *Dados A, B en una categoría preaditiva, si A y B tienen un biproducto (C, p_A, p_B, i_A, i_B), este está unívocamente determinado salvo isomorfismo del objeto C.*

Demostración. Consideremos dos biproductos (C, p_A, p_B, i_A, i_B), (D, q_A, q_B, l_A, l_B) de A y B. Tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "i_A"'] \arrow[d, leftrightarrow, "\mathrm{id}_A"] & C \arrow[l, shift left, "p_A"'] \arrow[r, shift left, "p_B"] & B \arrow[l, shift left, "i_B"] \arrow[d, leftrightarrow, "\mathrm{id}_B"] \\ A \arrow[r, shift left, "l_A"'] & D \arrow[l, shift left, "q_A"'] \arrow[r, shift left, "q_B"] & B, \arrow[l, shift left, "l_B"] \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{l} p_A i_A = \mathrm{id}_A,\ p_B i_B = \mathrm{id}_B,\ i_A p_A + i_B p_B = 1_C, \\ \\ q_A l_A = \mathrm{id}_A,\ q_B l_B = \mathrm{id}_B,\ l_A q_A + l_B q_B = \mathrm{id}_D\,. \end{array}$$

Luego, tenemos los morfismos inversos $i_B q_B + i_A q_A : D \to C$ y $l_B p_B + l_A p_A : C \to D$. En efecto,

$$(i_B q_B + i_A q_A) \circ (l_B p_B + l_A p_A) = i_B q_B l_B p_B + i_B q_B l_A p_A + i_A q_A l_B p_B + i_A q_A l_A p_A = i_B p_B + i_A p_A = \mathrm{id}_C,$$

$$(l_B p_B + l_A p_A) \circ (i_B q_B + i_A q_A) = l_B q_B + l_A q_A = \mathrm{id}_D\,.$$

Es decir, C y D son isomorfos. □

Así es que tiene sentido hablar de *el* biproducto de A y B, al que denotaremos por $A \bigoplus B$.
De la proposición anterior se desprende que, si en una categoría preaditiva los objetos A y B tienen producto (C, p_A, p_B) y coproducto (D, i_A, i_B), necesariamente $C \simeq D$. En efecto, (C, p_A, p_B) puede extenderse a un biproducto (C, p_A, p_B, l_A, l_B), luego (C, l_A, l_B) es un coproducto, y de la unicidad de este ultimo se sigue $C \simeq D$.

Definición 1.2.6. Una *categoría aditiva* es una categoría preaditiva con objeto cero y un producto para cada par de objetos.

Ejemplo 1.2.7.

- La categoría de módulos sobre un anillo es aditiva. También la categoría Ab de grupos abelianos es aditiva.
- La categoría Grp de grupos no es aditiva (productos y coproductos no coinciden.)

Definición 1.2.8. Sea $\mathbf{k}$ un cuerpo. Una categoría aditiva $\mathcal{C}$ se dice $\mathbf{k}$-*lineal* si para todo par de objetos A, B en $\mathcal{C}$, el grupo abeliano $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ tiene una estructura de espacio vectorial sobre $\mathbf{k}$ tal que la composición de morfismos es $\mathbf{k}$-lineal.

Definición 1.2.9. Dadas $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ dos categorías aditivas, un funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ se dice *aditivo* si para todo par de objetos A, A' en $\mathcal{A}$,

$$F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A') \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(FA, FA'),\ f \mapsto F(f), \tag{1.3}$$

es un morfismo de grupos. Es decir, $F(f + f') = Ff + Ff'$ para todo par de morfismos $f, f' : A \to A'$ en $\mathcal{C}$.
Si $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ son categorías $\mathbf{k}$-lineales, F se dice $\mathbf{k}$-*lineal* si los morfismos de la ecuación (1.3) son $\mathbf{k}$-lineales.

Definición 1.2.10. Una *categoría abeliana (*$\mathbf{k}$*-lineal)* es una categoría aditiva ($\mathbf{k}$-lineal) tal que todo morfismo tiene kernel y cokernel, todo monomorfismo es un kernel, y todo epimorfismo es un cokernel.

Así como la noción de categoría puede verse como una categorificación de la noción de un conjunto, el concepto de categoría abeliana puede verse como la categorificación de grupos abelianos. A continuación daremos algunos ejemplos de esta clase de categorías.

Ejemplo 1.2.11. Las categorías de grupos abelianos y módulos sobre un anillo son categorías abelianas (ver Ejemplos 1.1.44 y 1.1.45). En particular, dados $\mathbf{k}$ un cuerpo y G un grupo finito, las categorías Vec de espacios vectoriales de dimensión finita sobre $\mathbf{k}$ y $\mathrm{Rep}\, G$ de representaciones de dimensión finita de G sobre $\mathbf{k}$ son categorías abelianas $\mathbf{k}$-lineales.

Ejemplo 1.2.12. La categoría de grupos abelianos libres no es una categoría abeliana. En efecto, consideremos el monomorfismo

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}, \\ k &\mapsto 2k. \end{aligned}$$

Supongamos que μ es el kernel de algún morfismo $f : \mathbb{Z} \to A$. Luego $f \equiv 0$, pues sino tenemos $0 = f(\mu(1)) = f(2) = 2f(1)$. Si consideramos el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "\mu"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "f=0"] & A, \\ \mathbb{Z} \arrow[u, dotted, "\phi"] \arrow[ur, "id"'] & & \end{tikzcd}$$

resulta que existe ϕ tal que $id = \mu\phi = 0$. Pero entonces $1 = id(1) = \mu(\phi(1)) = 2\phi(1) = 2$. Por lo tanto no existe tal f.

El *Teorema de Freyd-Mitchell* establece que dada $\mathcal{A}$ una categoría abeliana pequeña existen un anillo R y un funtor exacto, pleno y fiel $F : \mathcal{A} \to$ R-Mod. Es decir, toda categoría abeliana pequeña se puede identificar con una subcategoría plena de la categoría de módulos a izquierda sobre un anillo, la cual es cerrada bajo suma directas, núcleos, conúcleos e imágenes de morfismos. Por lo tanto, podemos valernos de la teoría de módulos sobre anillos para visualizar muchos de los conceptos de la teoría de categorías abelianas.

Observación 1.2.13. En una categoría abeliana, dado un morfismo u, se cumple que

$$\ker(\operatorname{coker}(\ker(u))) = \ker(u), \text{ y}$$
$$\operatorname{coker}(\ker(\operatorname{coker}(u))) = \operatorname{coker}(u).$$

Proposición 1.2.14. *En una categoría abeliana $\mathcal{A}$, todo morfismo f se factoriza como $f = me$, donde m es un monomorfismo y e un epimorfismo. Más aún, $m = \ker(\operatorname{coker}(f))$ y $e = \operatorname{coker}(\ker(f))$.*

□

Observación 1.2.15. En una categoría abeliana, dado un morfismo f, tenemos que f es un monomorfismo si y sólo si $\ker(f) = 0$. Análogamente, f es un epimorfismo si y sólo si $\operatorname{coker}(f) = 0$. Además, es fácil ver que si un morfismo es monomorfismo y epimorfismo, entonces es un isomorfismo.

Definición 1.2.16. Dado un morfismo $f : A \to B$ en una categoría abeliana $\mathcal{A}$, un monomorfismo $\iota : C \to B$ se dice *imagen* de f si $f = \iota\epsilon$, donde ϵ es un epimorfismo.

En el estudio de módulos sobre anillos, las sucesiones exactas juegan un papel fundamental. Los conceptos que repasamos hasta ahora nos permiten generalizar esta noción a cualquier categoría abeliana.

Definición 1.2.17. En una categoría abeliana $\mathcal{A}$ una sucesión de morfismos de la forma

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

se dice *exacta en B* si $\mathrm{Imf} = \ker g$.

Notar que en este caso se tiene que $fg = 0$.

Siguiendo nuestra experiencia con sucesiones exactas de módulos, nos será de utilidad considerar una clase especial de sucesiones exactas en categorías abelianas.

Definición 1.2.18. Una *sucesión exacta corta* es una sucesión exacta de la forma

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \longrightarrow 0.$$

Esto es equivalente a que $f = \ker g$ y $g = \operatorname{coker} f$. En particular, en este caso f es un monomorfismo y g un epimorfismo.

Los funtores aditivos que preservan sucesiones exactas reciben el nombre de *funtores exactos*. Más precisamente, si $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ son categorías abelianas y $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtor aditivo, se dice que F es *exacto* si para toda sucesión exacta en $\mathcal{A}$

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \longrightarrow 0,$$

se tiene que la sucesión

$$0 \longrightarrow FA' \xrightarrow{Ff} FA \xrightarrow{Fg} FA'' \longrightarrow 0$$

es exacta en $\mathcal{B}$.

1.2.1 | Serie de Jordan-Hölder y grupo de Grothendieck

En esta sección hablaremos de dos resultados importantes para la teoría de categorías: el Lema de Schur y el Teorema de Jordan-Hölder. Nos valdremos de estos resultados para introducir el Grupo de Grothendieck de una categoría, que será de suma importancia para este trabajo.
De ahora en más asumimos que $\mathcal{C}$ es una categoría abeliana $\mathbf{k}$-lineal.

Definición 1.2.19. Sea Y un objeto en $\mathcal{C}$.

- Un *subobjeto* de Y es un objeto X junto con un monomorfismo $i : X \to Y$.
- Un *objeto cociente* de Y es un objeto Z junto con un epimorfismo $p : Y \to Z$.
- Para un subobjeto X de Y, definimos el objeto cociente $\mathbf{Z} = X/Y$ como el cokernel del monomorfismo $i : X \to Y$.

A continuación introduciremos una distinción importante entre los objetos de $\mathcal{C}$.

Definición 1.2.20. Un objeto no nulo X en $\mathcal{C}$ se dice *simple* si 0 y X son sus únicos subobjetos. Un objeto X en $\mathcal{C}$ se dice *semisimple* si es suma directa de objetos simples, y la categoría $\mathcal{C}$ se dice *semisimple* si todos sus objetos son semisimples.

Estamos ahora en condiciones de enunciar y demostrar el Lema de Schur.

Lema 1.2.21. ***Lema de Schur***. *Sean X, Y dos objetos simples en $\mathcal{C}$. Entonces todo morfismo no nulo $f : X \to Y$ es un isomorfismo. En particular, si X no es isomorfo a Y, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) = 0$, y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ es un anillo de división si X es isomorfo a Y.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ un morfismo no nulo. Veamos que $\ker(f) = \mathrm{coker}(f) = 0$, y por lo tanto f es un isomorfismo.
En primer lugar, $\ker(f)$ es un subobjeto de X. Como X es simple resulta que $\ker(f) = 0$ ó $\ker(f) = X$. Como f es no nulo, debe valer que $\ker(f) = 0$.
Ahora, por Proposición 1.2.14, f se descomopone como $f = me$ donde $m : I \to Y$ es un monomorfismo y $e : X \to I$ un epimorfismo. Como Y es simple, $I = 0$ ó $I = Y$. Pero si $I = 0$, entonces $e = 0$ y por lo tanto $f = 0$. Luego $I = Y$, por lo que m es un isomorfismo. Pero $m = \ker(\mathrm{coker}(f))$, entonces $\mathrm{coker}(f) = \mathrm{coker}(m) = 0$.

□

Definición 1.2.22. Decimos que un objeto X tiene *longitud finita* si existe una cadena de la forma

$$0 = X_0 \subset X_1 \subset ... \subset X_{n-1} \subset X_n = X,$$

tal que X_i es subobjeto de X_{i+1} y X_i/X_{i-1} es simple para todo i. Una cadena de este tipo recibe el nombre de *Serie de Jordan-Hölder* de X.
Diremos que esta serie de Jordan-Hölder *contiene* un objeto simple Y con *multiplicidad* m si la cantidad de valores de i para los cuales X_i/X_{i+1} es isomorfo a Y es m.

La definición anterior da lugar al siguiente resultado importante.

Teorema 1.2.23 (Jordan-Hölder)**.** *Sea X un objeto de longitud finita. Entonces toda filtración de X puede extenderse a una serie de Jordan-Hölder. Más aún, dos series de Jordan-Hölder de X contienen cada objeto simple con la misma multiplicidad, por lo que, en particular, tienen la misma longitud.* □

Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana $\mathbf{k}$-lineal en la cual todo objeto X tiene longitud finita. Dado un objeto simple Y, denotamos por $[X : Y]$ a la multiplicidad de Y en la serie de Jordan-Hölder de X. Por el teorema anterior, el número $[X : Y]$ está bien definido, i.e., no depende de la serie de Jordan-Hölder elegida.

Definición 1.2.24. El *grupo de Grothendieck* $\mathrm{Gr}(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ es el grupo abeliano libre generado por las clases de isomorfismo de objetos simples en $\mathcal{C}$.

A todo objeto X en $\mathcal{C}$ podemos asociarle su clase $[X] \in \mathrm{Gr}(\mathcal{C})$ dada por la fórmula

$$[X] = \sum_i [X : X_i] X_i. \tag{1.4}$$

Dado $X \in \mathcal{C}$, a veces denotaremos a la clase de isomorfismo $[X] \in \mathrm{Gr}(\mathcal{C})$ simplemente por X, abusando la notación.

Definición 1.2.25. Una categoría abeliana $\mathbf{k}$-lineal $\mathcal{C}$ se dice *localmente finita* si satisface:

1. Dados objetos X, Y en $\mathcal{C}$, el $\mathbf{k}$-espacio vectorial $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ tiene dimensión finita;

2. Todo objeto en $\mathcal{C}$ tiene longitud finita.

En particular, el teorema de Jordan-Hölder (Teorema 1.2.23) vale en toda categoría abeliana localmente finita. En general, a lo largo de este trabajo las categorías abelianas serán localmente finitas.

El siguiente resultado es una consecuencia del Lema de Schur para categorías localmente finitas sobre $\mathbf{k}$ un cuerpo algebraicamente cerrado.

Proposición 1.2.26. *Sea $\boldsymbol{k}$ un cuerpo algebraicamente cerrado. En toda categoría localmente finita sobre $\boldsymbol{k}$ se tiene que $\mathrm{Hom}_C(X, Y) = 0$ si X, Y son simples y no isomorfos, y $\mathrm{Hom}_C(X, X) = \boldsymbol{k}$ para todo objeto simple X.*

Demostración. Por Lema de Schur (Lema 1.2.21) sabemos que $\mathrm{Hom}_C(X, Y) = 0$ si X, Y son simples y no isomorfos y que $\mathrm{Hom}_C(X, X)$ es un álgebra de división.

Así $\mathrm{Hom}_C(X, X)$ es una $\mathbf{k}$-álgebra de dimensión finita, con $\mathbf{k}$ algebraicamente cerrado. Del teorema de Artin-Wedderburn se sigue que $\mathrm{Hom}_C(X, X)$ es (isomorfo a) un álgebra de matrices sobre $\mathbf{k}$. Como todo elemento no nulo de esa álgebra es invertible, neceseriamente $\mathrm{Hom}_C(X, X) = \mathbf{k}$. □

1.3 | Categorías monoidales

La noción de categoría monoidal es la categorificación de la noción de monoide, y de allí proviene su nombre. Una categoría monoidal es esencialmente una categoría equipada de una operación asociativa, a la que llamaremos "producto tensorial", y de un elemento neutro. Formalizaremos esto en la siguiente definición.

Definición 1.3.1. Una *categoría monoidal* es una colección $(\mathcal{C}, \otimes, a, \mathbf{1}, l, r)$, donde $\mathcal{C}$ es una categoría, $\otimes : \mathcal{C}\times\mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es un bifuntor, llamado *producto tensorial*, $\mathbf{1}$ es un objeto en $\mathcal{C}$ llamado *objeto unidad*, $a_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z)$, $r_X : X \otimes \mathbf{1} \to X$, y $l_X : \mathbf{1} \otimes X \to X$ son isomorfismos naturales, para $X, Y, Z \in \mathcal{C}$, tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W \arrow[r, "a_{X\otimes Y,Z,W}"] \arrow[d, "a_{X,Y,Z}\otimes id_W"'] & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes W) \arrow[r, "a_{X,Y,Z\otimes W}"] & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes W)) \arrow[d, "id_X\otimes a_{Y,Z,W}"] \\
(X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes W \arrow[rr, "a_{X,Y\otimes Z,W}"'] & & X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes W),
\end{tikzcd} \tag{1.5}$$

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes \mathbf{1}) \otimes Y \arrow[rr, "a_{X,\mathbf{1},Y}"] \arrow[dr, "r_X\otimes id_Y"'] & & X \otimes (\mathbf{1} \otimes Y) \arrow[dl, "id_X\otimes l_Y"] \\
& X \otimes Y. &
\end{tikzcd} \tag{1.6}$$

Estos diagramas son llamados *identidad del pentágono* e *identidad del triángulo*, respectivamente. El isomorfismo natural $a : (- \otimes -) \otimes - \xrightarrow{\sim} - \otimes (- \otimes -)$ es llamado *isomorfismo de asociatividad*, y los isomorfismos naturales $r : - \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{\sim} -$ y $l : \mathbf{1} \otimes - \xrightarrow{\sim} -$ son llamados *isomorfismos de unidad*. Los isomorfismos de unidad nos dan una contraparte categórica del axioma de unidad $1X = X1 = X$ de un monoide, en el mismo sentido en el que el isomorfismo de asociatividad provee la contraparte categórica de la ecuación de asociatividad.

Observación 1.3.2. La identidad del Pentágono muestra que dados 4 objetos en una categoría monoidal $\mathcal{C}$, todas las posibles formas de asociar el producto tensorial entre ellos dan el mismo resultado. Inductivamente, esto implica que todas las posibles maneras de asociar el producto tensorial de un número (finito) de objetos de $\mathcal{C}$ dan el mismo resultado.

Diremos que la categoría monoidal $(\mathcal{C}, \otimes, a, \mathbf{1}, l, r)$ es *estricta* si los isomorfismos naturales de asociatividad y unidad a, l y r son identidades.

El *Teorema de Coherencia de Maclane* establece que toda categoría monoidal $\mathcal{C}$ es equivalente a una subcategoría monoidal plena de una categoría monoidal estricta. Este resultado permite restringirse al caso estricto para dar demostraciones de propiedades generales, lo cual ayuda a simplificarlas.

Definición 1.3.3. Una *subcategoría monoidal* de una categoría monoidal $(\mathcal{C}, \otimes, a, \mathbf{1}, l, r)$ es una colección $(\mathcal{D}, \otimes, a, \mathbf{1}, l, r)$, donde $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ es una subcategoría que contiene a $\mathbf{1}$, a, l y r, y es cerrada por el producto tensorial de objetos y morfismos. Es decir, dados objetos X, Y y morfismos f, g en $\mathcal{D}$, $X \otimes Y$ es un objeto en $\mathcal{D}$ y $f \otimes g$ es un morfismo en $\mathcal{D}$.

A continuación daremos algunas propiedades básicas para el estudio de categorías monoidales.

Proposición 1.3.4 ([EGNO, Proposición 2.2.4]). *Los siguientes diagramas conmutan para todo $X, Y \in \mathcal{C}$,*

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{1} \otimes X) \otimes Y \arrow[rr, "a_{\mathbf{1},X,Y}"] \arrow[dr, "l_X \otimes id_Y"'] & & X \otimes (\mathbf{1} \otimes Y) \arrow[dl, "l_{X \otimes Y}"] \\
& X \otimes Y, &
\end{tikzcd} \tag{1.7}$$

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes Y) \otimes \mathbf{1} \arrow[rr, "a_{X,Y,\mathbf{1}}"] \arrow[dr, "r_{X \otimes Y}"'] & & X \otimes (\mathbf{1} \otimes Y) \arrow[dl, "id_X \otimes r_Y"] \\
& X \otimes Y. &
\end{tikzcd} \tag{1.8}$$

□

Proposición 1.3.5 ([EGNO, Proposición 2.2.6]). *El objeto unidad en una categoría monoidal es único salvo un único isomorfismo.* □

Presentaremos a continuación algunos ejemplos importates de categorías monoidales.

Ejemplo 1.3.6. La categoría Set es una categoría monoidal, donde el producto tensorial es el producto cartesiano y el objeto unidad es un conjunto con un solo elemento.

Ejemplo 1.3.7. Toda categoría aditiva es monoidal, con producto tensorial dado por la suma directa y objeto unidad el objeto cero.

Ejemplo 1.3.8. La categoría **Vec** de espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbf{k}$ es una categoría monoidal, con producto tensorial $\otimes = \otimes_{\mathbf{k}}$ y unidad $\mathbf{1} = \mathbf{k}$. Más generalmente, dado R un anillo conmutativo con unidad, la categoría **R-Mod** de R-módulos a izquierda es una categoría monoidal, con producto tensorial $\otimes = \otimes_R$ y unidad $\mathbf{1} = R$.

Ejemplo 1.3.9. Sea G un grupo. La categoría **Rep G** de representaciones de G sobre $\mathbf{k}$ es una categoría monoidal, con $\otimes$ el producto tensorial entre representaciones, y objeto unidad la representación trivial. De la misma manera, la subcategoría $\operatorname{Rep} G$ de representaciones de dimensión finita del grupo G sobre $\mathbf{k}$ es una categoría monoidal.

Ejemplo 1.3.10. Sean $\mathbf{k}$ un cuerpo y G un grupo. Denotemos por $\mathbf{Vec}_{\mathrm{G}}$ a la categoría de espacios vectoriales G-graduados, es decir, espacios vectoriales V con una descomposición $V = \bigoplus_{g \in G} V_g$. Los morfismos en esta categoría son transformaciones lineales que preservan la graduación.
Definamos el producto tensorial en esta categoría como

$$(V \otimes W)_g = \bigoplus_{x,y \in G \,:\, xy = g} V_x \otimes W_y, \tag{1.9}$$

y el objeto unidad $\mathbf{1}$ como $\mathbf{1}_1 = \mathbf{k}$ y $\mathbf{1}_g = 0$ para $g \neq 1$. De esta manera resulta que $\mathbf{Vec}_{\mathrm{G}}$ es una categoría monoidal, con la asociatividad dada por la identidad.

En esta categoría tenemos objetos distinguidos δ_g, para cada $g \in G$, definidos de la siguiente manera,

$$(\delta_g)_h = \begin{cases} \mathbf{k} & \text{si } h = g, \\ 0 & \text{si } h \neq g. \end{cases}$$

Es decir, cada δ_g es un espacio vectorial concentrado en grado g. Notemos que estos objetos son no isomorfos dos a dos, pues $\delta_g \simeq \delta_h \iff g = h$. Además tenemos que $\delta_g \otimes \delta_h \simeq \delta_{gh}$. Su importancia radica en que cualquier objeto de $\mathbf{Vec}_{\mathrm{G}}$ puede escribirse como suma directa de $(\delta_g)_{g\in G}$ con multiplicidades enteras no negativas. Es decir, la categoría $\mathbf{Vec}_{\mathrm{G}}$ es semisimple.

El siguiente ejemplo es una generalización del ejemplo anterior, en el cual el isomorfismo de asociatividad no es el trivial.

Ejemplo 1.3.11. Sean G un grupo, $\mathbf{k}$ un cuerpo y ω un 3-cociclo de G con valores en $\mathbf{k}^\times$. Esto es, $\omega : G \times G \times G \to \mathbf{k}^\times$ es una función que satisface la ecuación

$$\omega(g_1g_2, g_3, g_4)\omega(g_1, g_2, g_3g_4) = \omega(g_1, g_2, g_3)\omega(g_1, g_2g_3, g_4)\omega(g_2, g_3, g_4), \tag{1.10}$$

para todos g_1, g_2, g_3, g_4 en G.
Definimos la categoría monoidal $\mathbf{Vec}_{\mathrm{G}}^{\omega}$ como sigue. Como categoría, es la misma que la categoría $\mathbf{Vec}_{\mathrm{G}}$ del ejemplo anterior. El bifuntor $\otimes$ y el objeto unidad también son los mismos. La única diferencia está en el isomorfismo de asociatividad a^ω, que ya no es la identidad, sino que está dado por la fórmula

$$a^{\omega}_{\delta_g,\delta_h,\delta_m} := \omega(g, h, m)\,\mathrm{Id}_{\delta_{ghm}} : (\delta_g \otimes \delta_h) \otimes \delta_m \to \delta_g \otimes (\delta_h \otimes \delta_m),\ \ g, h, m \in G. \tag{1.11}$$

Para $U, V, W \in \mathbf{Vec}_{\mathrm{G}}$ se define $a^{\omega}_{U,V,W} : (U \otimes V) \otimes W \to U \otimes (V \otimes W)$ como la extensión lineal de

$$a^{\omega}_{U_g,V_h,W_m} := \omega(g, h, m)\,\mathrm{Id}_{U_g\otimes V_h\otimes W_m} : (U_g \otimes V_h) \otimes W_m \to U_g \otimes (V_h \otimes W_m),\ \ g, h, m \in G.$$

Esta categoría contiene la subcategoría monoidal $\mathrm{Vec}_{\mathrm{G}}^{\omega}$ de espacios vectoriales G-graduados de dimensión finita, con asociatividad dada por el 3-coclico ω.

Ejemplo 1.3.12. Dada $\mathcal{C}$, la categoría $\mathrm{End}(\mathcal{C})$ de endofuntores de $\mathcal{C}$ es monoidal, donde $\otimes$ está dado por la composición de funtores, la asociatividad es la identidad y el objeto unidad es el funtor identidad.

Consideremos dos categorías monoidales $(\mathcal{C}, \otimes, a, \mathbf{1}, l, r)$ y $(\mathcal{C}', \otimes', a', \mathbf{1}', l\,', r')$. Un *funtor monoidal* entre ambas es una terna (F, J, u) donde $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ es un funtor, $u : \mathbf{1}' \to F(\mathbf{1})$ es un isomorfismo, y $J : \otimes' \circ (F \times F) \to F \circ \otimes$ es un isomorfismo natural, tales que los siguientes diagramas conmutan,

$$\begin{tikzcd}
(F(X) \otimes' F(Y)) \otimes' F(Z) \arrow[r, "a'_{F(X),F(Y),F(Z)}"] \arrow[d, "J_{X,Y}\otimes' id_{F(Z)}"'] & F(X) \otimes' (F(Y) \otimes' F(Z)) \arrow[d, "id_{F(X)}\otimes' J_{Y,Z}"] \\
F(X \otimes Y) \otimes' F(Z) \arrow[d, "J_{X\otimes Y,Z}"'] & F(X) \otimes' F(Y \otimes Z) \arrow[d, "J_{X,Y\otimes Z}"] \\
F((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[r, "F(a_{X,Y,Z})"'] & F(X \otimes (Y \otimes Z)),
\end{tikzcd} \tag{1.12}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1}' \otimes' F(X) \arrow[r, "l'_{F(X)}"] \arrow[d, "u\otimes \mathrm{id}_{F(X)}"'] & F(X) \arrow[d, "F(l_X)^{-1}"] \\
F(\mathbf{1}) \otimes' F(X) \arrow[r, "J_{\mathbf{1},X}"'] & F(\mathbf{1}\otimes X),
\end{tikzcd} \tag{1.13}$$

$$\begin{tikzcd}
F(X) \otimes' \mathbf{1}' \arrow[r, "r'_{F(X)}"] \arrow[d, "id_{F(X)}\otimes u"'] & F(X) \arrow[d, "F(r_X)^{-1}"] \\
F(X) \otimes' F(\mathbf{1}) \arrow[r, "J_{X,\mathbf{1}}"'] & F(X\otimes \mathbf{1}),
\end{tikzcd} \tag{1.14}$$

para todo X, Y, Z en $\mathcal{C}$.

El funtor monoidal (F, J, u) se dice una *equivalencia de categorías monoidales* si F es una equivalencia de categorías. En este caso, decimos que las categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son *equivalentes como categorías monoidales*. Esta noción es de gran utilidad para comparar categorías monoidales.

1.3.1 | Rigidez en categorías monoidales

Sean $(\mathcal{C}, \otimes, a, \mathbf{1}, l, r)$ una categoría monoidal y X un objeto en $\mathcal{C}$. En lo que sigue, obviamos los isomorfismos de unidad.

Definición 1.3.13. Una terna $(X^*, \mathrm{ev}_X, \mathrm{coev}_X)$ se dice que es un *dual a izquierda* de X si X^* es un objeto en $\mathcal{C}$, y $\mathrm{ev}_X : X^* \otimes X \to \mathbf{1}$ y $\mathrm{coev}_X : \mathbf{1} \to X \otimes X^*$ son morfismos en $\mathcal{C}$, llamados *evaluación* y *coevaluación*, tales que las siguientes composiciones son la identidad de X y X^* respectivamente,

$$X \simeq \mathbf{1}\otimes X \xrightarrow{\mathrm{coev}_X \otimes \mathrm{id}_X} (X\otimes X^*)\otimes X \xrightarrow{a_{X,X^*,X}} X\otimes (X^*\otimes X) \xrightarrow{\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{ev}_X} X\otimes \mathbf{1} \simeq X,$$

$$X^* \simeq X^*\otimes \mathbf{1} \xrightarrow{\mathrm{id}_{X^*} \otimes \mathrm{coev}_X} X^*\otimes (X\otimes X^*) \xrightarrow{a^{-1}_{X^*,X,X^*}} (X^*\otimes X)\otimes X^* \xrightarrow{\mathrm{ev}_{X^*} \otimes \mathrm{id}_{X^*}} \mathbf{1}\otimes X^* \simeq X^*. \tag{1.15}$$

Estas ecuaciones son llamadas *ecuaciones de Zig-Zag.*

Definición 1.3.14. Una terna $({}^*X, \mathrm{ev}'_X, \mathrm{coev}'_X)$ se dice que es un *dual a derecha* de X si ${}^*X$ es un objeto en $\mathcal{C}$, y $\mathrm{ev}'_X : X \otimes {}^*X \to \mathbf{1}$ y $\mathrm{coev}'_X : \mathbf{1} \to {}^*X \otimes X$ son morfismos en $\mathcal{C}$ tales que las siguientes composiciones son la identidad de X y ${}^*X$ respectivamente:

$$X \simeq X\otimes \mathbf{1} \xrightarrow{\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{coev}'_X} X\otimes ({}^*X\otimes X) \xrightarrow{a^{-1}_{X,{}^*X,X}} (X\otimes {}^*X)\otimes X \xrightarrow{\mathrm{ev}'_X \otimes \mathrm{id}_X} \mathbf{1}\otimes X \simeq X,$$

$${}^*X \simeq \mathbf{1}\otimes {}^*X \xrightarrow{\mathrm{coev}'_X \otimes \mathrm{id}_{{}^*X}} ({}^*X\otimes X)\otimes {}^*X \xrightarrow{a_{{}^*X,X,{}^*X}} {}^*X\otimes (X\otimes {}^*X) \xrightarrow{\mathrm{id}_{{}^*X} \otimes \mathrm{ev}'_X} {}^*X\otimes \mathbf{1} \simeq {}^*X. \tag{1.16}$$

Si $X \in \mathcal{C}$ tiene dual a izquierda (respectivamente a derecha), entonces es único salvo un único isomorfismo (ver [EGNO, Proposition 2.10.5]).

Observación 1.3.15. Si X^* es dual a izquierda de un objeto X, entonces X es dual a derecha de X^*, con $\mathrm{ev}'_{X^*} = \mathrm{ev}_X$ y $\mathrm{coev}'_{X^*} = \mathrm{coev}_X$, y viceversa. Luego, ${}^*(X^*) \simeq X \simeq ({}^*X)^*$ para todo objeto X con duales a izquierda y derecha.

Sean X, Y objetos en $\mathcal{C}$ con duales a izquierda X^*, Y^* respectivamente, y sea $f : X \to Y$ un morfismo. Definimos el *dual a izquierda* de f, que denotaremos por $f^* : Y^* \to X^*$, dado por la siguiente composición.

$$Y^* \xrightarrow{\mathrm{id}_{Y^*} \otimes \mathrm{coev}_X} Y^* \otimes (X \otimes X^*) \xrightarrow{a^{-1}_{Y^*,X,X^*}} (Y^* \otimes X) \otimes X^* \xrightarrow{(\mathrm{id}_{Y^*} \otimes f) \otimes \mathrm{id}_{X^*}}$$

$$\longrightarrow (Y^* \otimes Y) \otimes X^* \xrightarrow{\mathrm{ev}_Y \otimes \mathrm{id}_{X^*}} X^*.$$

Análogamente, si X, Y son objetos en $\mathcal{C}$ con duales a derecha ${}^*X, {}^*Y$ respectivamente, y $f : X \to Y$ es un morfismo en $\mathcal{C}$, definimos el *dual a derecha* ${}^*f : {}^*Y \to {}^*X$ de f, dado por la siguiente composición.

$${}^*Y \xrightarrow{\mathrm{coev}'_X \otimes \mathrm{id}_{{}^*Y}} ({}^*X \otimes X) \otimes {}^*Y \xrightarrow{a_{{}^*X,X,{}^*Y}} {}^*X \otimes (X \otimes {}^*Y) \xrightarrow{\mathrm{id}_{{}^*X}(\otimes f \otimes \mathrm{id}_{{}^*Y})}$$

$$\longrightarrow {}^*X \otimes (Y \otimes {}^*Y) \xrightarrow{\mathrm{id}_{{}^*X} \otimes \mathrm{ev}'_Y} {}^*X.$$

Observación 1.3.16. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ dos categorías monoidales y $F = (F, J, u)$ un funtor monoidal entre $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$. Si X es un objeto en $\mathcal{C}$ con dual a izquierda X^*, entonces $F(X^*)$ es dual a izquierda de $F(X)$, con los morfismos evaluación y coevaluación dados por

$$\mathrm{ev}_{F(X)} : F(X^*) \otimes F(X) \xrightarrow{J_{X^*,X}} F(X^* \otimes X) \xrightarrow{F(\mathrm{ev}_X)} F(\mathbf{1}) \xrightarrow{u^{-1}} \mathbf{1},$$

$$\mathrm{coev}_{F(X)} : \mathbf{1} \xrightarrow{u} F(\mathbf{1}) \xrightarrow{F(\mathrm{coev}_X)} F(X \otimes X^*) \xrightarrow{J^{-1}_{X,X^*}} F(X) \otimes F(X^*).$$

Se tiene un resultado análogo para duales a derecha.

Definición 1.3.17. Un objeto en una categoría monoidal se dice *rígido* si tiene duales a izquierda y derecha. Se dice que una categoría monoidal es *rígida* si todos sus objetos lo son.

En toda categoría rígida $\mathcal{C}$ tenemos el *funtor de dualización a izquierda* (respectivamente a derecha) que manda cada objeto X en $\mathcal{C}$ a su dual X^* (respectivamente ${}^*X$), y cada morfismo $f : X \to Y$ en $\mathcal{C}$ a su dual $f^* : Y^* \to X^*$ (respectivamente ${}^*f : {}^*Y \to {}^*X$).

Observación 1.3.18. Dada $\mathcal{C}$ una categoría monoidal rígida, para todo par de objetos X, Y en $\mathcal{C}$ se cumple $(X \otimes Y)^* = Y^* \otimes X^*$.

A continuación daremos algunos ejemplos de categorías monoidales rígidas.

Ejemplo 1.3.19. Sea $\mathbf{k}$ un cuerpo. La categoría Vec de $\mathbf{k}$-espacios vectoriales de dimensión finita es rígida, donde el dual a izquierda y derecha de un espacio vectorial V es su espacio vectorial dual V^*.

En efecto, dada una base finita $\{v_i\}_{i\in I}$ de V sobre $\mathbf{k}$, y $\{v_i^*\}_{i\in I}$ su base dual, tenemos las transformaciones lineales

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_V : V^*\otimes V &\to \mathbf{k}, & \mathrm{coev}_V : \mathbf{k} &\to V\otimes V^*, \\ f\otimes v &\mapsto f(v), & \lambda &\mapsto \sum_{i\in I} \lambda v_i\otimes v_i^*. \end{aligned}$$

Veamos que se cumplen las ecuaciones (1.15).

$$\begin{array}{ccccccc} V\simeq \mathbf{k}\otimes V & \xrightarrow{\mathrm{coev}_V\otimes id_V} & (V\otimes V^*)\otimes V & \xrightarrow{a_{V,V^*,V}} & V\otimes(V^*\otimes V) & \xrightarrow{id_V\otimes \mathrm{ev}_V} & V\otimes\mathbf{k}\simeq V, \\ v\simeq 1\otimes v & \longmapsto & \sum_{i\in I}(v_i\otimes v_i^*)\otimes v & \longmapsto & \sum_{i\in I} v_i\otimes(v_i^*\otimes v) & \longmapsto & \sum_{i\in I} v_i\otimes(v_i^*(v))\simeq v, \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} V^*\simeq V^*\otimes \mathbf{k} & \xrightarrow{id_{V^*}\otimes\mathrm{coev}_V} & V^*\otimes(V\otimes V^*) & \xrightarrow{a^{-1}_{V^*,V,V^*}} & (V^*\otimes V)\otimes V^* & \xrightarrow{\mathrm{ev}_{V^*}\otimes id_{V^*}} & \mathbf{k}\otimes V^*\simeq V^*, \\ f\simeq f\otimes 1 & \longmapsto & \sum_{i\in I} f\otimes(v_i\otimes v_i^*) & \longmapsto & \sum_{i\in I}(f\otimes v_i)\otimes v_i^* & \longmapsto & \sum_{i\in I} f(v_i)\otimes v_i^*\simeq f. \end{array}$$

Luego la categoría Vec de $\mathbf{k}$-espacios vectoriales de dimensión finita es rígida.

En el siguiente ejemplo veremos que la condición de que los espacios vectoriales sean de dimensión finita es necesaria.

Ejemplo 1.3.20. La categoría **Vec** de todos los espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbf{k}$ no es rígida. En efecto, tomemos V un espacio vectorial de dimensión infinita, y supongamos que existe un mapa coevaluación, es decir una transformación lineal $c:\mathbf{k}\to V\otimes Y$ que cumple (1.15).
Consideramos V' el subespacio generado por la primera componente de $c(1)=\sum_{i,j} c_{ij}v_i\otimes y_j$, con $v_i\in V$ para todo $i=1,...,k$, $y_j\in Y$ para todo $j=1,..,l$. Como c cumple la ecuación (1.15) tenemos que la composición

$$\begin{array}{ccccc} V\simeq\mathbf{k}\otimes V & \xrightarrow{c\otimes id_V} & V\otimes Y\otimes V & \xrightarrow{id_V\otimes\mathrm{ev}_V} & V\otimes\mathbf{k}\simeq V \\ 1\otimes v & \longmapsto & c(1)\otimes v=\sum_{i,j} c_{ij}v_i\otimes y_j\otimes v & \longmapsto & \sum_{i,j} c_{ij}v_i\otimes \mathrm{ev}(y_j\otimes v)\simeq \\ & & & & \simeq\sum_{i,j} c_{ij}ev(y_j\otimes v)v_i\in V', \end{array}$$

es la identidad. Pero entonces $V=V'$, lo cual es una contradicción pues la dimensión de V' es finita. Por lo tanto no tenemos un mapa coevaluación para V, por lo que la categoría monoidal **Vec** no es rígida.

Ejemplo 1.3.21. Sea $\mathbf{k}$ un cuerpo. La categoría $\operatorname{Rep} G$ de representaciones de dimensión finita de un grupo G sobre $\mathbf{k}$ es rígida. En efecto, dada una representación (μ,V) su dual es la representación (μ^*,V^*), donde V^* es el espacio dual de V, μ^* es la representación definida por $\mu^*(g)=(\mu(g)^{-1})^*$, para todo $g\in G$, y los morfismos de representaciones $\mathrm{coev}_{(\mu,V)},\mathrm{ev}_{(\mu,V)}$ los dados en el Ejemplo 1.3.19.

Ejemplo 1.3.22. La categoría $\mathrm{Vec}_{\mathrm{G}}$ es rígida. En efecto, dado $g \in G$ tenemos $\delta_g^* = {}_{\delta_g}^{*}{=}\delta_{g^{-1}}$, con los morfismos $\mathrm{coev}_{\delta_g} : \mathbf{1} \to \delta_g \otimes \delta_{g^{-1}} = \mathbf{1}$ y $\mathrm{ev}_{\delta_g} : \delta_g \otimes \delta_{g^{-1}} = \mathbf{1} \to \mathbf{1}$ las identidades.
Más generalmente, dado ω un 3-cociclo de G con valores en $\mathbf{k}^*$ (podemos asumir normalizado, es decir, $\omega(g_1, g_2, g_3) = 1$ si $g_i = e$ para algún i), la categoría $\mathrm{Vec}_{\mathrm{G}}^{\omega}$ es rígida. En efecto, definimos la dualidad como antes, y los morfismos evaluación y coevaluación como

$$\mathrm{ev}_g : \delta_{g^{-1}} \otimes \delta_g = \mathbf{1} \to \mathbf{1}, \text{ donde } \mathrm{ev}_g := \omega(g, g^{-1}, g)^{-1} \,\mathrm{Id}_{\mathbf{1}};$$

$$\mathrm{coev}_g : \mathbf{1} \to \delta_g \otimes \delta_{g-1} = \mathbf{1}, \text{ donde } \mathrm{coev}_g := \mathrm{Id}_{\mathbf{1}}\,.$$

Comprobemos que se cumplen las ecuaciones (1.15).

$$\delta_g \simeq \mathbf{1} \otimes \delta_g \xrightarrow{\mathrm{coev}_g \otimes \mathrm{Id}} (\delta_g \otimes \delta_{g^{-1}}) \otimes \delta_g \xrightarrow{a_{g,g^{-1},g}} \delta_g \otimes (\delta_{g^{-1}} \otimes \delta_g) \xrightarrow{\mathrm{Id} \otimes \mathrm{ev}_g} \delta_g \otimes \mathbf{1} \simeq \delta_g,$$

$$v \longmapsto v \longmapsto \omega(g, g^{-1}, g)v \longmapsto \omega(g, g^{-1}, g)\omega(g, g^{-1}, g)^{-1}v = v,$$

$$\delta_g^{-1} \simeq \delta_g^{-1} \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{\mathrm{Id} \otimes \mathrm{coev}_{g^{-1}}} \delta_g^{-1} \otimes (\delta_g \otimes \delta_{g^{-1}}) \xrightarrow{a^{-1}_{g^{-1},g,g^{-1}}} (\delta_{g^{-1}} \otimes \delta_g) \otimes \delta_{g^{-1}} \xrightarrow{\mathrm{ev}_g \otimes \mathrm{Id}} \mathbf{1} \simeq \delta_{g^{-1}},$$

$$v \longmapsto v \longmapsto \omega(g^{-1}, g, g^{-1})^{-1}v \longmapsto v.$$

Luego la categoría $\mathbf{Vec}_{\mathrm{G}}^{\omega}$ es rígida.

Tenemos el siguiente resultado importante que muestra cómo la rigidiez determina una relación entre el bifuntor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-)$ y el bifuntor producto tensorial $- \otimes -$.

Proposición 1.3.23 ([EGNO, Proposition 2.10.8])**.** *Sea $\mathcal{C}$ una categoría monoidal y sea $V \in \mathcal{C}$.*

1. *Si V tiene dual a izquierda V^* se tienen isomorfismos naturales*

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U \otimes V, W) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, W \otimes V^*), \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V^* \otimes U, W) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, V \otimes W). \end{aligned} \tag{1.17}$$

2. *Si V tiene dual a derecha ${}^*V$ se tienen isomorfismos naturales*

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U \otimes {}^*V, W) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, W \otimes V), \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V \otimes U, W) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, {}^*V \otimes W). \end{aligned} \tag{1.18}$$

□

1.4 | Categorías trenzadas

Intuitivamente, una categoría monoidal trenzada es una categoría con un producto tensorial y un isomorfismo llamado *trenza* que nos permite permutar dos objetos en un producto tensorial. Luego el producto tensorial "conmuta" en cierto sentido. Es así que la noción de categoría monoidal trenzada es una categorificación de la noción de monoide conmutativo. Así como el isomorfismo de asociatividad debe cumplir ciertas propiedades, lo mismo ocurre con la conmutatividad dada por la trenza.
Formalizaremos este concepto en la siguiente definición.

Definición 1.4.1. Una *trenza* en una categoría monoidal $\mathcal{C}$ es una familia de isomorfismos naturales $\sigma_{X,Y} : X \otimes Y \to Y \otimes X$, tal que los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "a_{X,Y,Z}"] \arrow[d, "\sigma_{X,Y} \otimes id_Z"'] & X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[r, "\sigma_{X,Y \otimes Z}"] & (Y \otimes Z) \otimes X \arrow[d, "a_{X,Y,Z}"] \\
(Y \otimes X) \otimes Z \arrow[r, "a_{Y,X,Z}"'] & Y \otimes (X \otimes Z) \arrow[r, "id_Y \otimes \sigma_{X,Z}"'] & Y \otimes (Z \otimes X),
\end{tikzcd} \tag{1.19}$$

$$\begin{tikzcd}
X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[r, "a^{-1}_{X,Y,Z}"] \arrow[d, "id_X \otimes \sigma_{Y,Z}"'] & (X \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "\sigma_{X \otimes Y,Z}"] & Z \otimes (X \otimes Y) \arrow[d, "a^{-1}_{Z,X,Y}"] \\
X \otimes (Z \otimes Y) \arrow[r, "a^{-1}_{X,Z,Y}"'] & (X \otimes Z) \otimes Y \arrow[r, "\sigma_{X,Z} \otimes id_Y"'] & (Z \otimes X) \otimes Y,
\end{tikzcd} \tag{1.20}$$

son conmutativos para todo $X, Y, Z \in \mathcal{C}$.
Una categoría monoidal $\mathcal{C}$ se dice *trenzada* si está munida de una trenza.

Definición 1.4.2. Una categoría monoidal trenzada $\mathcal{C}$ con trenza σ se dice *simétrica* si

$$\sigma_{Y,X}\sigma_{X,Y} = id_{X \otimes Y},$$

para todo $X, Y \in \mathcal{C}$.

Abusando la notación, suele escribirse σ^2 en lugar de $\sigma_{Y,X}\sigma_{X,Y}$. Notemos que dada una categoría monoidal, el hecho de ser trenzada es una estructura extra, no una propiedad. Por ejemplo, la categoría $\mathrm{Vec}\mathbb{Z}_2$ puede ser munida de dos trenzas diferentes.

Ejemplo 1.4.3. Dado G un grupo, las categorías Set, Vec y Rep G son trenzadas con trenza dada por la trasposición de factores. Si G es un grupo abeliano, la categoría $\mathbf{Vec}_\mathrm{G}$ de espacios vectoriales G-graduados también es trenzada. En particular, todas estas categorías son simétricas.

A toda categoría monoidal $\mathcal{C}$ es posible asociarle una categoría monoidal trenzada $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$. Esta construcción es debida a Vladimir Drinfeld, y por eso llamamos a $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ el *centro de Drinfeld* de $\mathcal{C}$. Ver [K, Sección XIII.4].

Definición 1.4.4. Dada $\mathcal{C}$ una categoría monoidal, definimos el *centro de Drinfeld* de $\mathcal{C}$ como la categoría $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ cuyos objetos son pares $(Z, \gamma_{-,Z})$, con $Z \in \mathcal{C}$ y

$$\gamma_{X,Z} : X \otimes Z \xrightarrow{\sim} Z \otimes X, \quad X \in \mathcal{C}, \tag{1.21}$$

es un isomorfismo natural llamado *media-trenza* tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[r, "id_X \otimes \gamma_{Y,Z}"] \arrow[d, "a^{-1}_{X,Y,Z}"'] & X \otimes (Z \otimes Y) \arrow[r, "a^{-1}_{X,Z,Y}"] & (X \otimes Z) \otimes Y \arrow[d, "\gamma_{X,Z} \otimes id_Y"] \\
(X \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "\gamma_{X \otimes Y,Z}"'] & Z \otimes (X \otimes Y) \arrow[r, "a^{-1}_{Z,X,Y}"'] & (Z \otimes X) \otimes Y,
\end{tikzcd} \tag{1.22}$$

es conmutativo para todo $X, Y \in \mathcal{C}$.
Un morfismo $f : (Z, \gamma_{-,Z}) \to (Z', \gamma_{-,Z'})$ en $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ es un morfismo $f : Z \to Z'$ en $\mathcal{C}$ que satisface

$$\begin{tikzcd} X \otimes Z \arrow[r, "\gamma_{X,Z}"] \arrow[d, "id_X \otimes f"'] & Z \otimes X \arrow[d, "f \otimes id_X"] \\ X \otimes Z' \arrow[r, "\gamma_{X,Z'}"'] & Z' \otimes X, \end{tikzcd} \tag{1.23}$$

para todo $X \in \mathcal{C}$.

Proposición 1.4.5. *El centro de Drinfeld $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ de la categoría monoidal $(\mathcal{C}, \otimes, a, \mathbf{1}, l, r)$ es una categoría monoidal trenzada con la siguiente estructura.*

1. *El producto tensorial está definido por $(Z, \gamma_{-,Z}) \otimes (Z, \gamma_{-,Z'}) := (Z \otimes Z', \gamma_{-,Z\otimes Z'})$, donde el isomorfismo natural $\gamma_{-,Z\otimes Z'}$ está dado por:*

$$\gamma_{X,Z\otimes Z'} := a^{-1}_{Z,Z',X}(id_Z \otimes \gamma_{X,Z'})a_{Z,X,Z'}(\gamma_{X,Z} \otimes id_{Z'})a^{-1}_{X,Z,Z'},$$

   para cada $X \in \mathcal{C}$;

2. *El objeto unidad es $(\mathbf{1}, l^{-1}r)$;*

3. *La asociatividad está dada por a;*

4. *La trenza está definida por $\sigma_{(Z,\gamma_{-,Z}),(Z',\gamma_{-,Z'})} := \gamma_{Z,Z'}$.*

□

Ejemplo 1.4.6. Sea G un grupo. Veamos que los objetos del centro de la categoría $\mathcal{C} = \operatorname{Rep} G$ de espacios vectoriales G-graduados se identifican con los espacios vectoriales G-graduados G-equivariantes con respecto a la acción por conjugación.
Un objeto de $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ es un espacio vectorial G-graduado $V = \oplus_{g\in G} V_g$ provisto de isomorfismos $\gamma_x : \delta_x \otimes V \xrightarrow{\sim} V \otimes \delta_x$ que satisfacen la ecuación (1.22). Dado que $\mathcal{C}$ es rígida, las compatibilidades (1.22) se traducen en el siguiente diagrama,

$$\begin{tikzcd} \delta_a \otimes \delta_b \otimes V \arrow[r, "\mathrm{Id}_{\delta_a} \otimes \gamma_b"] \arrow[dr, "\gamma_{ab}"'] & \delta_a \otimes V \otimes \delta_b \arrow[d, "\gamma_a \otimes \mathrm{Id}_{\delta_b}"] \\ & V \otimes \delta_a \otimes \delta_b, \end{tikzcd} \qquad \forall\ a, b \in G.$$

Esto es,

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{x\in G} V_{b^{-1}a^{-1}x} \arrow[r, "\gamma_b"] \arrow[dr, "\gamma_{ab}"'] & \bigoplus_{x\in G} V_{a^{-1}xb^{-1}} \arrow[d, "\gamma_a \otimes \mathrm{Id}"] \\ & \bigoplus_{x\in G} V_{xb^{-1}a^{-1}}, \end{tikzcd} \qquad \forall\ a, b \in G.$$

Los isomorfismos γ_x dan lugar a isomorfismos lineales

$$u_{g,x} : V_{gxg^{-1}} \xrightarrow{\sim} V_x, \qquad g, x \in G.$$

Así obtenemos un isomorfismo $u_g := \bigoplus_{x\in G} u_{g,x} : \bigoplus_{x\in G} V_{gxg^{-1}} \xrightarrow{\sim} V$ en $\mathbf{Vec}_{\mathrm{G}}$. Si $T : G \to \mathrm{Aut}(\mathcal{C})$ es el funtor monoidal dado por la acción por conjugación de G (ver Ejemplo 2.4.2), tenemos que $u_g : T_g V \xrightarrow{\sim} V$. Luego V munido de la colección $u := \{u_g\}_{g\in G}$ es un objeto G-equivariante, pues el diagrama 2.7

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{x\in G} V_{ghxh^{-1}g^{-1}} \arrow[r, "T_g(u_h)=\bigoplus_{x\in G} u_{h,h^{-1}gxg^{-1}h}"] \arrow[dr, "u_{gh}"'] & \bigoplus_{x\in G} V_{gxg^{-1}} \arrow[d, "u_g"] \\
 & \bigoplus_{x\in G} V_x
\end{tikzcd}$$

conmuta dado que el diagrama anterior conmuta.

1.5 $\mathbb{Z}_+$-anillos

Denotamos por $\mathbb{Z}_+$ al semianillo de enteros no negativos.

Definición 1.5.1. 1. Sea A un anillo libre como $\mathbb{Z}$-módulo. Una $\mathbb{Z}_+$-*base* de A es una base $\beta = \{b_i\}_{i\in I}$ tal que $b_i b_j = \sum_{k\in I} c_{ij}^k b_k$, donde $c_{ij}^k \in \mathbb{Z}$ para todo $i, j, k \in I$.

2. Un $\mathbb{Z}_+$-*anillo* es un anillo con una $\mathbb{Z}_+$-base fija, donde la unidad 1 es combinación lineal de elementos de la base con coeficientes no negativos.

3. Un $\mathbb{Z}_+$-*anillo unitario* es un $\mathbb{Z}_+$-anillo en el que la unidad 1 es un elemento de la base.

Notemos que todo $\mathbb{Z}_+$-anillo tiene una identidad, pero no es necesariamente unitario.

Sea A un $\mathbb{Z}_+$-anillo, y sea $I_0 \subset I$ el subconjunto formado por los $i \in I$ tales que b_i aparece en la descomposición de 1. Consideramos el morfismo de grupos $\tau : A \to \mathbb{Z}$ determinado por

$$\tau(b_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in I_0, \\ 0 & \text{si } i \notin I_0. \end{cases} \tag{1.24}$$

Se sigue la siguiente definición.

Definición 1.5.2. Un $\mathbb{Z}_+$-anillo A con base $\beta = \{b_i\}_{i\in I}$ se dice un *anillo con base* si existe una involución $i \mapsto i^*$ de I tal que

- El mapa inducido $a = \sum_{i\in I} a_i b_i \mapsto a^* = \sum_{i\in I} a_i b_{i^*}$, donde $a_i \in \mathbb{Z}_+$ para todo $i \in I$, es una anti-involución del anillo A, y
- El morfismo τ cumple $\tau(b_i b_j) = \delta_{i,j^*}$, para todo $i, j \in I$.

Tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.5.3. *En todo anillo con base, el número* $c_{ij}^{k^*}$ *es invariante por permutaciones cíclicas de* i, j, k.

Demostración. Como $\tau(b_i b_j) = \delta_{i,j^*}$, tenemos

$$\tau(b_i b_j b_k) = \tau\left(\sum_{r\in I} c_{ij}^r b_r b_k\right) = \sum_{r\in I} c_{ij}^r \tau(b_r b_k) = c_{ij}^{k^*}.$$

Por otro lado, claramente $\tau(xy) = \tau(yx)$ para todo par x, y en A. Luego, $c_{ij}^{k^*}$ es cíclicamente invariante. □

Definición 1.5.4. Un *anillo de fusión* es un anillo con base unitario de rango finito.

Un ejemplo importante de anillo de fusión es el anillo $\mathbb{Z}G$, donde G es un grupo finito. La base de este anillo está dada por los elementos del grupo, y dado $g \in G$, $g^* = g^{-1}$ es la involución. También, el anillo $\operatorname{Rep} G$ de representaciones complejas de un grupo finito G es un anillo de fusión conmutativo, con base las representaciones irreducibles e involución la operación que manda cada representación en su dual.

Tenemos los siguientes resultados útiles.

Proposición 1.5.5. *Sea* A *un anillo de fusión con base* $\beta = \{b_i\}_{i=1}^k$, *donde* $b_1 = 1$. *Entonces* 1 *aparece en la descomposición de* $b_i b_j$ *si y sólo si* $i = j^*$, *y en este caso, aparece con multiplicidad uno.*

Demostración. Consideramos el morfismo $\tau : A \to \mathbb{Z}$ dado por la fórmula (1.24). En este caso $\tau(b_i) = \delta_{1,i}$. Aplicando τ a ambos lados de $b_i b_j = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k b_k$, resulta

$$\delta_{i,j^*} = \tau(b_i b_j) = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k \tau(b_k) = c_{ij}^1,$$

que es lo que queríamos. □

Lema 1.5.6. [EGNO, Lemma 8.14.1] *Sea* A *un anillo de fusión con* $\mathbb{Z}_+$*-base* β, *y sean* χ_1, χ_2 *dos caracteres distintos. Entonces*

$$\sum_{X\in\beta} \chi_1(X)\chi_2(X^*) = 0. \tag{1.25}$$

1.5.1 | Dimensión de Frobenius-Perron

En esta sección daremos una demostración del clásico teorema de Frobenius-Perron de álgebra lineal. Este teorema jugará un papel crucial en la teoría de categorías tensoriales.

Teorema 1.5.7 (Frobenius-Perron. [EGNO, Theorem 3.2.1])**.** *Sea* A *una matriz cuadrada con entradas reales no negativas. Entonces,*

1. *A tiene un autovalor real no negativo. El mayor autovalor real no negativo $\lambda(A)$ de A domina los valores absolutos de todos los demás autovalores de A. Es decir, el radio espectral de A es un autovalor.*

2. *Si A tiene entradas estrictamente positivas, entonces $\lambda(A)$ es un autovalor positivo simple, y el autovector correspondiente puede ser normalizado para tener entradas estrictamente positivas. Mas aún, $|\mu| < \lambda(A)$ para cualquier otro autovalor μ de A.*

3. *Si A tiene un autovector con entradas estrictamente positivas, su autovalor correspondiente es $\lambda(A)$.*

Demostración. Sea A una matrix cuadrada de tamaño n con entradas no negativas. Veamos primero que A tiene un autovalor real no negativo y que existe un autovector con entradas reales no negativas correspondiente a dicho autovalor.
Si A tiene un autovector v con entradas reales no negativas y autovalor 0, no hay nada que probar. En el caso contrario, tenemos que no existe un vector $v \in \mathbb{R}^n$ con entradas no negativas tal que $Av = 0$. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, definimos $s(x) := \sum_{i=1}^{n} x_i$. Consideramos

$$\Sigma := \{x \in \mathbb{R}^n / s(x) = 1 \text{ y } x_i \geq 0 \ \forall i = 1, ...n\}.$$

Luego, definimos el mapa continuo

$$f_A : \Sigma \to \Sigma, \quad x \mapsto \frac{Ax}{s(Ax)}.$$

Este mapa está bien definido pues $s(Ax) > 0$ para todo $x \in \Sigma$, ya que asumimos que A no tiene un autovector con entradas reales no negativas y autovalor 0. Por el teorema de punto fijo de Brouwer, este mapa tiene un punto fijo. Es decir, existe $e \in \Sigma$ tal que $e = \frac{Ae}{S(Ae)}$. Luego $Ae = S(Ae)e$, donde $\nu = S(Ae) > 0$. Por lo tanto tenemos un autovalor $\nu > 0$ cuyo autovector tiene entradas reales no negativas.
Sea ahora $\lambda = \lambda(A)$ el mayor autovalor no negativo de A para el cual existe un autovector con entradas no negativas. Denotemos a este autovector por $e = (e_1, ..., e_n)$.
A continuación probaremos (2). Asumamos que A tiene entradas esctrictamente positivas. Entonces $Ae = \lambda e$ tiene entradas estrictamente positivas. Luego e debe tener también entradas estrictamente positivas, y $\lambda > 0$. Si $d = (d_1, ..., d_n)$ es otro autovector real de A con autovalor λ, sea z el mínimo de los números $\frac{d_i}{e_i}$ con $i = 1, ..., n$. Entonces el vector $v = d - ze$ satisface

$$Av = Ad - zAe = \lambda(d - ze) = \lambda v,$$

tiene entradas no negativas y al menos una de sus entradas es igual a cero. Luego $v = 0$ (pues $Av = \lambda v$ es estrictamente positivo si v tiene al menos una entrada no nula) y λ resulta ser un autovalor simple.
Consideremos $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{C}^n$. Definimos la norma $|y| := \sum |y_j| e_j$. Entonces

$$|yA| = \sum_j |\sum_i y_i a_{ij}| e_j \leq \sum_{i,j} |y_i| a_{ij} e_j = \lambda |y|.$$

Más aún, vale la igualdad si y sólo si todos los números complejos y_i no nulos tienen el mismo argumento. Luego si $yA = \mu y$, entonces $|\mu| \leq \lambda$, pero si $|\mu| = \lambda$ todos los y_i no nulos tienen el mismo argumento, por lo que podemos normalizar y para que tenga entradas no negativas. Esto implica que $\mu = \lambda$. Por lo tanto (2) vale (ya que los autovalores de A coinciden con los autovalores de A^T).
Completemos ahora la prueba de (1), esto es, probemos que el radio espectral $\rho(A)$ de A

es igual a $\lambda(A)$. Para esto, definimos A_N sucesión de matrices con entradas estrictamente positivas que converge a A (por ejemplo, se puede tomar $A_N = A + \frac{1}{N}I$, con I la matriz con unos en todas sus entradas). Como el radio espectral es una función continua, se tiene que $\rho(A_N) \to \rho(A)$ cuando $N \to \infty$. Además, $\rho(A_N) = \lambda(A_N)$ para todo N por (2). Luego $\rho(A)$ es un autovalor de A, y existe un autovector de A con entradas no negativas para este autovalor. Esto implica que $\rho(A) = \lambda(A)$, por lo que vale (1).
Asumamos ahora que A tiene un autovector y con entradas estrictamente positivas y autovalor μ. Entonces

$$\mu ye = yAe = \lambda ye,$$

lo cual implica $\mu = \lambda$, pues $ye \neq 0$. Entonces (3) se cumple (para la matriz A^T), ya que por (1), $\lambda(A) = \lambda(A^T)$.

□

Utilizaremos el Teorema de Frobenius-Perron para definir la dimensión de Frobenius-Perron de los objetos en un anillo transitivo. Sea A un $\mathbb{Z}_+$-anillo con base I.

Definición 1.5.8. Decimos que A es *transitivo* si para todos $X, Z \in I$ existen $Y_1, Y_2 \in I$ tales que XY_1 y XY_2 contienen a Z con coeficiente no nulo.

Sea A un $\mathbb{Z}_+$-anillo transitivo unitario de rango finito. Definimos el morfismo de grupos $\mathrm{FPdim} : A \to \mathbb{C}$ de la siguiente manera. Para $X \in I$, $\mathrm{FPdim}(X)$ es el máximo autovalor real no negativo de la matriz de multiplicación a izquierda por X. Este morfismo está bien definido gracias al teorema de Frobenius-Perron, pues esta matriz tiene entradas no negativas. Extendemos FPdim de la base I a todo A linealmente.

La función $\mathrm{FPdim} : A \to \mathbb{C}$ recibe el nombre de *dimensión de Frobenius-Perron.*

A continuación daremos algunas propiedades útiles de esta dimensión.

Proposición 1.5.9. *Sea $X \in I$.*

1. *El número $\alpha = \mathrm{FPdim}(X)$ es un entero algebraico, y para todo conjugado α' de α se tiene $\alpha \geq |\alpha'|$.*
2. $\mathrm{FPdim}(X) \geq 1$.

Demostración. (1) Notemos que α es un autovalor de la matriz entera N_X de multiplicación por X, por lo que es un entero algebraico. El número α' es una raíz del polinomio característico de N_X, por lo que también es un autovalor de N_X. Luego, por el Teorema de Frobenius-Perron resulta $\alpha \geq |\alpha'|$.
(2) Sea r el número de conjugados de α. Entonces $\alpha^r \geq |N(\alpha)|$, donde $N(\alpha)$ es la norma de α. Esto implica el enunciado dado que $|N(\alpha)| \geq 1$. □

Se sigue que las dimensiones de Frobenius-Peron de todos los elementos de A son enteros algebraicos.

Proposición 1.5.10. *La función* $\mathrm{FPdim} : A \to \mathbb{C}$ *es un morfismo de anillos.*

Demostración. Consideremos la matriz M de multiplicación a izquierda por $\sum_{X\in I} X$ en A con base I. Por transitividad, esta matriz tiene entradas estrictamente positivas. Luego por el Teorema de Frobenius-Perron parte (2), M tiene un único autovector R con autovalor $\lambda(M)$.

Más aún, este autovector puede ser normalizado para tener entradas estrictamente positivas. Por otro lado, como XR también es un autovector de M con autovalor $\lambda(M)$, y R es único, tenemos que $XR = d(X)R$, para alguna función $d : A \to \mathbb{C}$. Claramente, dicha función d es un caracter de A.
Luego, si dado $X \in I$ consideramos L_X matriz de multiplicación a izquierda por X, tenemos que R es autovector de L_X con autovalor $d(X)$. Como la matriz L_X tiene entradas no negativas y R tiene entradas estrictamente positivas, la parte (3) del Teorema de Frobenius-Perron implica que $d(X) = \lambda(L_X) = \mathrm{FPdim}(X)$.
Se sigue que $\mathrm{FPdim} = d$, y luego FPdim es morfismo de anillos. □

Proposición 1.5.11. *El morfismo* FPdim *es el único caracter de A con valores no negativos en I, y estos valores resultan estrictamente positivos.*

Demostración. Si χ es otro caracter de A con valores no negativos en I, entonces el vector con entradas $\chi(Y), Y \in I$, es un autovector de la matriz M de multiplicación a izquierda por $\sum\limits_{X \in I} X$. Por transitividad de A, la matriz M tiene entradas positivas. Luego, el Teorema de Frobenius-Perron establece que existe un número positivo λ tal que $\chi(Y) = \lambda\,\mathrm{FPdim}(Y)$. Como χ es un caracter, resulta $\lambda = 1$. □

Otra propiedad importante de la dimensión de Frobenius-Perron es la siguiente.

Proposición 1.5.12 ([EGNO, Proposition 3.3.9])**.** *Sea $* : I \to I$ una biyección, que se extiende a un anti-automorfismo de A. Entonces* FPdim *es invariante por $*$.* □

Corolario 1.5.13. *Sea A un anillo de fusión y sea X un elemento de la base de A. Si* $\mathrm{FPdim}(X) = 1$ *entonces $XX^* = X^*X = 1$.*

Demostración. Basta probar que $XX^* = 1$, pues luego $X^*X = (XX^*)^* = 1^* = 1$. Por la Proposición 1.5.5 se sigue que el 1 aparece en la descomposición de XX^* con multiplicidad uno. Es decir, tenemos $XX^* = 1 + \sum\limits_{Y \in I, Y \neq 1} a_Y Y$, con $a_Y \geq 0$. Como FPdim es un morfismo de anillos invariante por $*$ se cumplen las igualdades

$$\mathrm{FPdim}(XX^*) = \mathrm{FPdim}(X)\,\mathrm{FPdim}(X^*) = \mathrm{FPdim}(X)^2 = 1.$$

Luego, como la Proposición 1.5.9 nos dice que $FPdim(Y) \geq 1$, para todo Y en la base, resulta $a_Y = 0$ para todo $Y \neq 1$ y $XX^* = 1$. □

Definición 1.5.14. La *dimensión de Frobenius-Perron* de A es el número

$$\mathrm{FPdim}(A) =: \sum_{X \in I} \mathrm{FPdim}(X)^2.$$

Proposición 1.5.15. *Sean A_1, A_2 $\mathbb{Z}_+$-anillos transitivos unitarios de rango finito con bases I_1, I_2. Si $f : A_1 \to A_2$ es una transformación lineal cuya matriz en las bases I_1, I_2 tiene entradas no negativas, entonces f preserva dimensiones de Frobenius-Perron.*

Demostración. La función $X \mapsto \mathrm{FPdim}(f(X))$ es un caracter de A con valores no negativos en la base. Por la Proposición 1.5.11, $\mathrm{FPdim}(f(X)) = \mathrm{FPdim}(X)$ para todo $X \in I$. □

1.6 | Categorías tensoriales

En esta sección asumiremos que $\mathbf{k}$ es un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero.

Definición 1.6.1. Una *categoría tensorial* es una categoría abeliana $\mathbf{k}$-lineal localmente finita monoidal rígida tal que el bifuntor $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es bilineal en los morfismos y el objeto unidad $\mathbf{1}$ es simple.

Notemos que en el caso de una categoría tensorial, como el objeto unidad $\mathbf{1}$ es simple, por la Proposición 1.2.26 se cumple $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}) \simeq \mathbf{k}$.

A continuación mencionaremos algunos ejemplos de categorías tensoriales.

Ejemplo 1.6.2.
1. La categoría Vec de $\mathbf{k}$-espacios vectoriales de dimensión finita es una categoría tensorial.
2. La categoría $\mathrm{Vec}_{\mathrm{G}}^{\omega}$ de $\mathbf{k}$-espacios vectoriales de dimensión finita G-graduados con asociatividad dada por un 3-cocliclo ω es una categoría tensorial.
3. La categoría $\mathrm{Rep}\, G$ de representaciones de dimensión finita de un grupo G sobre $\mathbf{k}$ es una categoría tensorial.

Definición 1.6.3. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías tensoriales y $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor fiel y exacto. Diremos que F es un *funtor cuasi-tensorial* si $F(\mathbf{1}_{\mathcal{C}}) = \mathbf{1}_{\mathcal{D}}$, y está munido de un isomorfismo natural $J : \otimes_{\mathcal{D}} \circ (F \times F) \to F \circ \otimes_{\mathcal{C}}$.
Un funtor cuasi-tensorial se dice *funtor tensorial* si (F, J) es un funtor monoidal.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial. Denotamos por X_i, $i \in I$, a los representantes de las clases de isomorfismo de objetos simples en $\mathcal{C}$. Recordemos que dado X un objeto en $\mathcal{C}$ denotamos por $[X : X_i]$ a la multiplicidad de X_i en la serie de Jordan-Hölder de X. El producto tensorial de $\mathcal{C}$ induce una multiplicación en $\mathrm{Gr}(\mathcal{C})$ definida por la fórmula

$$X_i X_j := [X_i \otimes X_j] = \sum_{k \in I} [X_i \otimes X_j : X_k] X_k. \tag{1.26}$$

La multiplicación definida de esta manera en $\mathrm{Gr}(\mathcal{C})$ es asociativa (ver [EGNO, Lemma 4.5.1]). Luego, $\mathrm{Gr}(\mathcal{C})$ es un $\mathbb{Z}_+$-anillo con base $\{[X_i]\}_{i \in I}$ y unidad $[1]$, llamado *anillo de Grothendieck* de $\mathcal{C}$. La fórmula (1.26) recibe el nombre de *reglas de fusión* de $\mathcal{C}$.

Proposición 1.6.4. *Si $\mathcal{C}$ es una categoría tensorial, el anillo de Grothendieck* $\mathrm{Gr}(\mathcal{C})$ *es un $\mathbb{Z}_+$-anillo unitario transitivo.*

Demostración. Observemos primero que como $\mathcal{C}$ es una categoría tensorial, el objeto unidad $\mathbf{1}$ es simple, por lo que $\mathrm{Gr}(\mathcal{C})$ es un anillo unitario.
Veamos que $\mathrm{Gr}(\mathcal{C})$ es transitivo, es decir, veamos que para todo par $X, Z \in I$ existen $Y_1, Y_2 \in I$ tales que $X \otimes Y_1$ y $X \otimes Y_2$ contienen a Z con coeficiente no nulo. Sean X, Z objetos simples en $\mathcal{C}$. Como la categoría es rígida, considerando el morfismo $\mathrm{coev}_X : 1 \to X \otimes X^*$, resulta que el $\mathbf{1}$ aparece en la descomposición de $X \otimes X^*$ con coeficiente no nulo. Luego Z aparece en la descomposición de $X \otimes X^* \otimes Z$ con coeficiente no nulo.

Podemos escribir a $X^* \otimes Z$ como $X^* \otimes Z = \sum_{Y \in I} a_Y Y$, donde $a_Y = [X^* \otimes Z : Y]$. Al hacer producto tensorial con X obtenemos

$$X \otimes X^* \otimes Z = X \otimes \sum_{Y \in I} a_Y Y = \sum_{Y \in I} a_Y X \otimes Y.$$

Como Z aparece en esta descomposición con coeficiente no nulo, debe existir un objeto simple Y_1 en la descomposición de $X^* \otimes Z$ tal que Z es un sumando en $X \otimes Y_1$. Análogamente, el objeto $Z \otimes X^* \otimes X$ tiene a Z como uno de sus factores, por lo que tenemos un objeto simple Y_2 que aparece en la descomposición de $Z \otimes X^*$ tal que Z es un factor en la descomposición de $Y_2 \otimes X$. Luego, $\mathrm{Gr}(\mathcal{C})$ es transitivo. □

Observación 1.6.5. Todo funtor cuasi-tensorial $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ determina un morfismo de $\mathbb{Z}_+$-anillos unitarios $\mathrm{Gr}(F) : \mathrm{Gr}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Gr}(\mathcal{D})$. Más aún, si las categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ tienen una cantidad finita de clases de objetos simples, F preserva las dimensiones de Frobenius-Perron. Es decir, $\mathrm{FPdim}_{\mathcal{D}}(F(X)) = \mathrm{FPdim}_{\mathcal{C}}(X)$ para todo X en $\mathcal{C}$. Esto se sigue de la Proposición 1.5.15.

Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías abelianas localmente finitas sobre un cuerpo $\mathbf{k}$. El *producto tensorial de Deligne* $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ es una categoría abeliana $\mathbf{k}$-lineal munida de un funtor exacto a derecha en ambas variables

$$\begin{aligned} \boxtimes : \mathcal{C} \times \mathcal{D} &\to \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}, \\ (X, Y) &\mapsto X \boxtimes Y, \end{aligned}$$

tal que dado cualquier otro funtor $F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ exacto a derecha en ambas variables, donde $\mathcal{A}$ es una categoría abeliana $\mathbf{k}$-lineal, existe un único funtor exacto a derecha $\bar{F} : \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ tal que $\bar{F} \circ \boxtimes = F$.
Por [EGNO, Proposition 1.11.2] sabemos que el producto de Deligne existe y es una categoría abeliana localmente finita. Además, el producto de Deligne entre dos categorías abelianas $\mathbf{k}$-lineales localmente finitas es único salvo una única equivalencia. Más aún, por [EGNO, Proposition 4.6.1], si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son categorías tensoriales, entonces el producto de Deligne $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ también es una categoría tensorial.

2 | Categorías de fusión

En este capítulo introduciremos una clase particular de categorías tensoriales: las categorías de fusión. Las categorías tensoriales pueden ser divididas en dos tipos: las semisimples y las no semisimples. Dentro de las categorías tensoriales semisimples se encuentran las categorías de fusión, que han cobrado gran interés en los últimos años. A lo largo de este capítulo trabajaremos sobre un cuerpo $\mathbf{k}$ algebraicamente cerrado y de característica cero.

2.1 | Categorías de fusión

Definición 2.1.1. Una *categoría de fusión* sobre $\mathbf{k}$ es una categoría tensorial semisimple con una cantidad finita de clases de isomorfismos de objetos simples.

Ejemplo 2.1.2.

1. Sea G un grupo finito. La categoría $\operatorname{Rep} G$ es una categoría de fusión. Efectivamente, los objetos simples son las representaciones irreducibles, de las cuales hay una catidad finita (tantas como clases de conjugación tenga G), y toda representación puede escribese como suma de irreducibles.
2. Dado G un grupo finito, la categoría $\mathbf{Vec}_{\mathrm{G}}^{\omega}$ de $\mathbf{k}$-espacios vectoriales G graduados de dimensión finita con asociatividad dada por el 3-cociclo ω es de fusión, con simples δ_g para todo $g \in G$.

Tenemos las siguientes propiedades útiles para los duales de objetos en una categoría de fusión.

Proposición 2.1.3. *Sea X un objeto simple en una categoría de fusión $\mathcal{C}$. Entonces su dual a izquierda X^* también es simple.*

Demostración. Sea X un objeto simple en la categoría $\mathcal{C}$. Por las Proposiciones 1.3.23 y 1.2.26 se cumple que

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X^*, X^*) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X^* \otimes X, \mathbf{1}) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X \otimes \mathbf{1}) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X) \simeq \mathbf{k}.$$

Por otro lado, como $\mathcal{C}$ es semisimple, podemos descomponer a X^* en suma de simples de la forma $X^* = \sum_{Y \in \mathcal{O}(\mathcal{C})} [X^* : Y]Y$. Reemplazando X^* por esta descomposición en $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X^*, X^*)$ resulta

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X^*, X^*) = \sum_{Y,Z \in \mathcal{O}(\mathcal{C})} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)^{[X^*:Y][X^*:Z]} = \sum_{Y \in \mathcal{O}(\mathcal{C})} \mathbf{k}^{[X^*:Y]},$$

donde la última igualdad vale por el Lema de Schur.
De estas dos ecuaciones obtenemos que

$$\mathbf{k} \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X^*, X^*) \simeq \sum_{Y \in \mathcal{O}(\mathcal{C})} \mathbf{k}^{[X^*:Y]}.$$

Por lo tanto, en la descomposición de X^* aparece un sólo simple con multiplicidad uno. Es decir, X^* es simple.

□

Proposición 2.1.4. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión sobre $\boldsymbol{k}$ y sea X un objeto en $\mathcal{C}$. Entonces su dual a izquierda y su dual a derecha son isomorfos. Es decir, ${}^*X \simeq X^*$. Se sigue que $X \simeq X^{**}$.*

Demostración. Podemos asumir que X es un objeto simple.
Sea Y un objeto simple tal que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}, X \otimes Y) \neq 0$. Sabemos por la Proposición 1.3.23 que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}, X \otimes Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}({}^*Y, X)$. Por el Lema de Schur, este último es distinto de cero si y sólo si ${}^*Y \simeq X$, i.e., $Y \simeq X^*$. Similarmente, el único objeto simple Y tal que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes Y, \mathbf{1}) \neq 0$ es ${}^*X$.
Como $\mathcal{C}$ es semisimple, $\dim_{\mathbf{k}}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}, X \otimes Y)) = \dim_{\mathbf{k}}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes Y, \mathbf{1}))$, lo cual implica ${}^*X \simeq X^*$. □

Sea $\mathcal{D}$ una subcategoría tensorial de una categoría de fusión $\mathcal{C}$. Decimos que $\mathcal{D}$ es una *subcategoría de fusión* de $\mathcal{C}$ si para todo objeto X en $\mathcal{C}$ isomorfo a un sumando directo de un objeto en $\mathcal{D}$ se tiene que $X \in \mathcal{D}$.

Toda subcategoría de fusión es necesariamente rígida, por lo cual es una categoría de fusión en sí misma.

Definición 2.1.5. La subcategoría de fusión *generada* por una colección χ de objetos de $\mathcal{C}$ es la menor subcategoría de fusión que contiene a χ, y la denotaremos $\mathcal{C}[\chi]$.

Diremos que un objeto X en la categoría es *fiel* si genera a toda la categoría de fusión $\mathcal{C}$, es decir $\mathcal{C}[X] = \mathcal{C}$.

Dada $\mathcal{C}$ una categoría de fusión, un ejemplo distinguido de subcategoría de fusión es la *subcategoría adjunta* $\mathcal{C}_{ad}$. Dicha subcategoría está generada por los objetos $X \otimes X^*$, donde X recorre los objetos simples.

Ejemplo 2.1.6. Dado G un grupo finito y $\omega : G \times G \times G \to \mathbf{k}$ un 3-cociclo de G, consideremos la categoría $\mathcal{C} = \mathbf{Vec}_{\mathrm{G}}^{\omega}$. En este caso $\mathcal{C}_{ad}$ =Vec. En efecto, los simples en $\mathbf{Vec}_{\mathrm{G}}^{\omega}$ están dados por

$$(\delta_g)_h = \begin{cases} \mathbf{k} & \text{si } h = g, \\ 0 & \text{si } h \neq g. \end{cases}$$

para cada $g \in G$, y $(\delta_g)* = \delta_{g^{-1}}$. Luego $\delta_g \otimes (\delta_g)^* = \delta_g \otimes \delta_{g^{-1}} = \delta_{gg^{-1}} = \delta_e$, con e el elemento identidad de G. Por lo tanto $\mathcal{C}_{ad}$ es la categoría generada por δ_e, que es exactamente Vec.

2.1.1 | Anillo de Grothendieck

En esta subsección discutiremos algunas propiedades especiales que reúne el anillo de Grothendieck cuando $\mathcal{C}$ es una categoría de fusión.

De ahora en más, asumiremos que $\mathcal{C}$ denota una categoría de fusión. Denotaremos por $\mathcal{O}(\mathcal{C})$ al conjunto de clases de isomorfismos de objetos simples de la categoría $\mathcal{C}$, y si X es un objeto simple diremos que $X \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$, abusando de la notación.

Proposición 2.1.7. *El anillo de Grothendieck* $\mathrm{Gr}(\mathcal{C})$ *es un anillo de fusión transitivo.*

Demostración. Como $\mathcal{C}$ es tensorial, por lo visto en la sección 1.6, su anillo de Grothendieck es un $\mathbb{Z}_+$-anillo unitario transitivo con base dada por los elementos simples (en este caso finita) y unidad el elemento $\mathbf{1}$.

La involución * es la acción de tomar dual. En primer lugar, si $X \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$, entonces $X^* \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$ por la Proposición 2.1.3. Por otro lado, por Observación 1.3.18, para todo par de objetos X, Y en $\mathcal{C}$, $(X \otimes Y)^* = Y^* \otimes X^*$. Además dados X, Y simples, $X \otimes Y$ contiene al $\mathbf{1}$ en su descomposición si y sólo si $Y \simeq X^*$. □

Como la categoría $\mathcal{C}$ es de fusión, tenemos $\mathcal{O}(\mathcal{C}) = \{X_i\}_{i \in I}$ con I finito. Digamos que $0 \in I$ y $X_0 = \mathbf{1}$. Notemos que, dados $X_i, X_j \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$, como consecuencia de la Proposición 1.2.26 tenemos que

$$\operatorname{Hom}(X_i, X_j) = \begin{cases} \mathbf{k} & \text{si } i = j. \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases} \tag{2.1}$$

Todo $X \in \operatorname{Gr}(\mathcal{C})$ se descompone como suma de objetos simples de la forma $X = \sum_{i \in I} [X : X_i] X_i$, donde $[X : X_i]$ es la multiplicidad de X_i en X. Luego, para cada $X_j \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$, usando la ecuación (2.1) resulta

$$\operatorname{Hom}(X_j, X) = \sum_{i \in I} \operatorname{Hom}(X_j, X_i)^{[X:X_i]} = \mathbf{k}^{[X:X_j]},$$

por lo que $[X : X_j] = \dim \operatorname{Hom}(X_j, X)$. Es decir, la multiplicidad de cada objeto simple X_j en la descomposición de X es igual a la dimensión de $\operatorname{Hom}(X_j, X)$.

Se sigue de la Proposición 1.3.23 que las siguientes relaciones se satisfacen para todo $X, Y, Z \in \mathcal{C}$,

$$[Y \otimes Z : X] = [Z \otimes X^*, Y^*] = [X \otimes Z^*, Y]. \tag{2.2}$$

Dados $i, j, k \in I$ denotaremos por $N_{ij}^k = \dim \operatorname{Hom}(X_k, X_i \otimes X_j)$. Notemos que los números N_{ij}^k son enteros no negativos para todo $i, j, k \in I$. Dados X_i, X_j objetos simples, la descomposición de $X_i \otimes X_j$ en suma de simples podemos escribirla como

$$X_i \otimes X_j = \sum_{k \in I} N_{ij}^k X_k.$$

Definición 2.1.8. Llamaremos a las constantes $\{N_{ij}^k\}_{i,j,k \in I}$ *reglas de fusión* del anillo de fusión $\operatorname{Gr}(\mathcal{C})$.

Considerando la involución * inducida por la rigidez de $\mathcal{C}$ (ver Proposición 2.1.7) y la ecuación (2.2) tenemos que se satisfacen las siguientes igualdades,

$$N_{ij}^k = N_{jk^*}^{i^*} = N_{kj^*}^{i} = N_{k^*i}^{j^*} = N_{j^*i^*}^{k^*}, \; N_{ij}^0 = \delta_{ij^*}. \tag{2.3}$$

Ejemplo 2.1.9. Consideremos el grupo $G = A_4 < S_4$ y calculemos las reglas de fusión de $\operatorname{Rep} G$, la categoría de representaciones de G sobre $\mathbb{C}$.
En este caso, los elementos simples de la categoría son las representaciones irreducibles. Hay tantas representaciones irreducibles como clases de conjugación tenga A_4. Luego, hay 4 representaciones irreducibles, que denotaremos por $\epsilon, \rho_1, \rho_2, \sigma$, donde ϵ es la representación trivial y σ la representación estándar de S_4 restringida a A_4. La tabla de caracteres de A_4 está dada por

	$\mathcal{O}_1$	$\mathcal{O}_{(12)(34)}$	$\mathcal{O}_{(123)}$	$\mathcal{O}_{(321)}$
ϵ	1	1	1	1
ρ_1	1	1	ω	ω^2
ρ_2	1	1	ω^2	ω
σ	3	-1	0	0

donde ω es una raíz cúbica de la unidad.

Claramente, $\epsilon\otimes\epsilon = \epsilon, \epsilon\otimes\rho_1 = \rho_1, \epsilon\otimes\rho_2 = \rho_2, \epsilon\otimes\sigma = \sigma, \rho_1\otimes\rho_2 = \epsilon, \rho_1\otimes\rho_1 = \rho_2, \rho_2\otimes\rho_2 = \rho_1, \rho_1 \otimes \sigma = \sigma, \rho_2 \otimes \sigma = \sigma$. Luego, solo queda calcular $\sigma \otimes \sigma$. Para esto, recordamos que el producto interno entre dos representaciones complejas está dado por

$$< \alpha, \beta >:= \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \alpha(g)\overline{\beta(g)}.$$

En este caso, el producto interno entre representaciones resulta

$$< \sigma \otimes \sigma, \epsilon >= 1, \quad < \sigma \otimes \sigma, \rho_1 >= 1, \quad < \sigma \otimes \sigma, \rho_2 >= 1, \quad < \sigma \otimes \sigma, \sigma >= 2.$$

Por lo tanto $\sigma \otimes \sigma = \epsilon \oplus \rho_1 \oplus \rho_2 \oplus 2\sigma$.

2.1.2 | Dimensión de Frobenius-Perron

En esta subsección usaremos los resultados obtenidos en la sección 1.5.1 para definir un invariante importante en categorías de fusión, la dimensión de Frobenius-Perron, que será muy útil a lo largo de este trabajo. En particular, la dimensión de Frobenius-Perron de una categoría permitirá reconocer ciertas propiedades, como nilpotencia (ver Teorema 2.6.7) y solubilidad (ver Teorema 2.6.14).

Sea X un objeto de una categoría de fusión $\mathcal{C}$. La *dimensión de Frobenius-Perron* de X, la cual denotaremos $\mathrm{FPdim}(X)$, es la dimensión de Frobenius-Perron de la clase de isomorfismo $[X]$ en el anillo de fusión $\mathrm{Gr}(\mathcal{C})$.
Definimos la dimensión de Frobenius-Perron de la categoría $\mathcal{C}$ como $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = \sum_{X\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} \mathrm{FPdim}(X)^2$.

Observación 2.1.10. Notemos que la Proposición 1.5.9 establece que $\mathrm{FPdim}(X)$ es un número real mayor o igual que uno para todo $X \in \mathcal{C}$. Más aún, $\mathrm{FPdim}(X)$ es un entero algebraico para todo $X \in \mathcal{C}$.

Definición 2.1.11. A los números reales positivos $\mathrm{FPdim}(X)$, con $X \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$, los llamaremos los *grados irreducibles* de $\mathcal{C}$.

Denotaremos al conjunto de grados irreducibles de $\mathcal{C}$ como $\mathrm{c.d.}(\mathcal{C}) = \{\mathrm{FPdim}\, X/X \in \mathcal{O}(\mathcal{C})\}$.

Definición 2.1.12. Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión.

- $\mathcal{C}$ se dice *íntegra* si $\mathrm{c.d.}(\mathcal{C}) \subset \mathbb{N}$. Es decir, si todos los objetos simples de la categoría tienen dimensión de Frobenius-Perron un número entero positivo. En este caso la dimensión de Frobenius-Perron de $\mathcal{C}$ es también un número entero positivo.
- $\mathcal{C}$ se dice *débilmente íntegra* si la dimensión de Frobenius-Perron de $\mathcal{C}$ es un número entero positivo.

Proposición 2.1.13. [EGNO, Proposition 9.6.9] *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión débilmente íntegra. Entonces* $\mathrm{FPdim}(X) = \sqrt{n_X}$ *para algún $n_X \in \mathbb{Z}$, para todo $X \in \mathcal{C}$.*

Ejemplo 2.1.14. Sea $\mathcal{C} = \operatorname{Rep} G$ la categoría de representaciones de dimensión finita de un grupo finito G sobre $\mathbf{k}$. Denotemos por $\mathbf{k}G$ a la representación regular de G. Por la Proposición 1.3.23, para $X, Y \in \mathcal{C}$, tenemos las igualdades

$$\dim_{\mathbf{k}} \operatorname{Hom}_{C}(X \otimes \mathbf{k}G, Y) = \dim_{\mathbf{k}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{k}G, X^* \otimes Y) = \dim_{\mathbf{k}}(X) \dim_{\mathbf{k}}(Y).$$

Luego, $X \otimes \mathbf{k}G = \sum_{Y \in \mathcal{O}(\mathcal{C})} [X \otimes \mathbf{k}G : Y]Y = \dim_{\mathbf{k}}(X) \sum_{Y \in \mathcal{O}(\mathcal{C})} \dim_{\mathbf{k}}(Y)Y = \dim_{\mathbf{k}}(X)\mathbf{k}G$, por lo que $\operatorname{FPdim}(X) = \dim_{\mathbf{k}}(X)$. Es decir, la dimensión de Frobenius-Perron de una representación coincide con su dimensión. En particular, esto nos dice que la categoría $\mathcal{C}$ es íntegra.

Ejemplo 2.1.15 (Categorías de Tambara-Yamagami)**.** Un ejemplo importante de categorías de fusión son las llamadas categorías de Tambara-Yamagami, las cuales definiremos a continuación.
Consideremos los siguientes datos:

- Un grupo abeliano finito G con identidad e.
- Un bicaracter $\chi : G \to G$ simétrico no degenerado. Es decir, tal que para todo $a, b \in G$ tenemos $\chi(a, b) = \chi(b, a)$, $\chi(ab, c) = \chi(a, c)\chi(b, c)$, y la aplicación inducida $f : G \to \operatorname{Hom}(G, \mathbf{k}^\times)$, $f(a)(b) = \chi(a, b)$, es un isomorfismo.
- Un elemento $\tau \in \mathbf{k}$ tal que $|G|\tau^2 = 1$.

Definimos la categoría de Tambara-Yamagami $\mathcal{TY} = \mathcal{TY}(G, \chi, \tau)$ como la categoría semisimple cuyas clases de isomorfismo de objetos simples están dados por $\{g\}_{g \in G} \cup X$, con $X \notin G$. Los morfismos están determinados por $\operatorname{Hom}(s, t) = \delta_{s,t}\mathbf{k}$ para $s, t \in \mathcal{O}(\mathcal{TY})$. El morfismo identidad $s \to s$ es el elemento $1 \in \mathbf{k}$. El objeto indentidad es $\mathbf{1} = e$, y las reglas de fusión están dadas por:

$$g \otimes h = gh, \quad X \otimes X = \sum_{g \in G} g, \quad g \otimes X = X = X \otimes g, \tag{2.4}$$

para todos $g, h \in G$.
Los duales de cada $g \in G$ están dados por $g^* = g^{-1}$, y $X^* = X$. De esta forma, la categoría de Tambara-Yamagami es una categoría de fusión.

Veamos que $\operatorname{FPdim} g = 1$ para todo $g \in G$. Supongamos $G = \{g_1, ..., g_n\}$, y consideremos una base ordenada $\beta = \{g_1, .., g_n, X\}$ del anillo de Grothendieck de $\mathcal{C}$. Si L_{g_i} es la matriz de multiplicación a izquierda por g_i en la base β, tenemos que $L_{g_i} g_j = g_i g_j$ y $L_{g_i} X = g_i X = X$. Luego L_{g_i} es una permutación de la matriz identidad para cada i. Por lo tanto $\operatorname{FPdim}(g_i) = 1$ para todo $i = 1, ..., n$.

Por otro lado, tomando FPdim a ambos lados en la ecuación $X \otimes X = \sum_{g \in G} g$, resulta que $\operatorname{FPdim}(X) = \sqrt{|G|} = \tau^{-1}$. Calculemos ahora la dimensión de la categoría $\mathcal{T}Y$. Tenemos la ecuación

$$\operatorname{FPdim} \mathcal{TY} = \sum_{g \in G} \operatorname{FPdim}(g)^2 + \operatorname{FPdim}(X)^2 = |G| + |G| = 2|G|.$$

Luego, la categoría de Tambara-Yamagami $\mathcal{TY}$ es débilmente íntegra, y es íntegra si y sólo si $\sqrt{|G|}$ es un número entero.

2.2 | El grupo de objetos invertibles

En esta sección definiremos una clase distinguida de objetos simples, los objetos invertibles, y trataremos algunas de sus propiedades. Conocer los objetos invertibles en una categoría puede ser de gran utilidad. En este trabajo lo usaremos fuertemente en el capítulo 6.

Un objeto X en $\mathcal{C}$ se dice *invertible* si los morfismos evaluación $\mathrm{ev}_X : X^* \otimes X \to \mathbf{1}$ y coevaluación $\mathrm{coev}_X : \mathbf{1} \to X \otimes X^*$ de X son isomorfismos. Usaremos esta noción para asociarle a cada categoría de fusión una subcategoría de fusión que tiene una estructura particularmente sencilla.

Ejemplo 2.2.1.

- Los objetos δ_g en $\mathrm{Vec}_{\mathrm{G}}^{\omega}$ son invertibles.
- En la categoría $\operatorname{Rep} G$, los objetos invertibles son exactamente las representaciones unidimensionales.

A continuación daremos una manera de determinar si un objeto es invertible mediante su dimensión de Frobenius-Perron.

Proposición 2.2.2. *Un objeto $g \in \mathcal{C}$ es invertible si y sólo si* $\operatorname{FPdim} g = 1$.

Demostración. Si g es invertible entonces $1 = \operatorname{FPdim}(\mathbf{1}) = \operatorname{FPdim}(g \otimes g^*) = \operatorname{FPdim}(g)^2$, y como $\operatorname{FPdim}(g)$ es un número real positivo resulta igual a 1.
Recíprocamente, supongamos que $\operatorname{FPdim} g = 1$. Por Proposición 1.5.5 el objeto $\mathbf{1}$ tiene multiplicidad uno en $g \otimes g^*$. Luego, tenemos la ecuación

$$g \otimes g^* = \mathbf{1} + \sum_{\substack{X \in \mathcal{O}(\mathcal{C}) \\ X \neq \mathbf{1}}} [g \otimes g^* : X] X.$$

Tomando FPdim a ambos lados resulta

$$1 = \operatorname{FPdim}(g \otimes g^*) = 1 + \sum_{\substack{X \in \mathcal{O}(\mathcal{C}) \\ X \neq \mathbf{1}}} [g \otimes g^* : X] \operatorname{FPdim}(X).$$

Sabemos que $\operatorname{FPdim}(X)$ es un número real positivo, para todo $X \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$. Luego debe cumplirse que $[g \otimes g^*, X] = 0$ para todo $X \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$, $X \neq \mathbf{1}$. Por lo tanto $g \otimes g^* \simeq \mathbf{1}$. □

Corolario 2.2.3. *Dado X un objeto invertible su dual X^* es invertible.*

Demostración. Como X es invertible el morfismo evaluación $\mathrm{ev}_X : X^* \otimes X \to \mathbf{1}$ es un isomorfismo. Es decir, $X^* \otimes X \simeq \mathbf{1}$. Tomando dimensión de Frobenius-Perron a ambos lados y usando que $\operatorname{FPdim}(X) = 1$ por la Proposición 2.2.2, resulta que $\operatorname{FPdim}(X^*) = 1$. Aplicando nuevamente la Proposición 2.2.2, X^* es invertible. □

Corolario 2.2.4.

1. *Si g es invertible entonces $g \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$.*
2. *Si g y h son invertibles, entonces $g \otimes h$ también.*

Demostración. (1) Si g es invertible, por proposición anterior $\operatorname{FPdim} g = 1$. Tomando FPdim a ambos lados en $g = \sum_{X \in \mathcal{O}(\mathcal{C})} [g : X] X$, resulta $g \simeq X$ para algun $X \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$.

(2) Se sigue de que la dimensión de Frobenius-Perron es multiplicativa. □

Consideremos el conjunto $\mathcal{G}(\mathcal{C}) \subset \mathrm{Gr}(\mathcal{C})$ de clases de isomorfismo de objetos invertibles de $\mathcal{C}$. Notemos que por los resultados obtenidos en esta sección $\mathcal{G}(\mathcal{C})$ tiene estructura de grupo, con producto dado por $\otimes$ y elemento identidad $\mathbf{1}$.

Definición 2.2.5. Diremos que una categoría de fusión es *punteada* si todos sus objetos simples son invertibles.

Denotaremos por $\mathcal{C}_{\mathrm{pt}}$ a la subcategoría de fusión de $\mathcal{C}$ generada por los objetos invertibles de $\mathcal{C}$. Esta categoría es la subcategoría punteada maximal de $\mathcal{C}$ y la llamaremos la *subcategoría punteada*.

En particular, $\mathcal{C}$ es punteada si y sólo si $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathrm{pt}}$.

Ejemplo 2.2.6. Dados G un grupo finito y ω un 3-cociclo de G, la categoría $\mathbf{Vec}_{\mathrm{G}}^{\omega}$ es una categoría de fusión punteada. En efecto, sus elementos simples son δ_g, g en G, y $\delta_g \otimes \delta_{g^*} \simeq \mathbf{1}$ para todo g en G.

Puede verse que toda categoría de fusión punteada es equivalente a una categoría del tipo $\mathrm{Vec}_{\mathrm{G}}^{\omega}$ para algún grupo finito G y 3-cociclo ω.

Una clase importante de categorías de fusión fuertemente relacionada con la de categorías punteadas es la de categorías de tipo grupo, que definiremos a continuación.

Definición 2.2.7. Dos categorías de fusión $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ se dicen *Morita equivalentes* si sus centros de Drinfeld $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ y $\mathcal{Z}(\mathcal{D})$ son equivalentes como categorías tensoriales trenzadas.

Definición 2.2.8. Una categoría de fusión se dice *de tipo grupo* si es Morita equivalente a una categoría de fusión punteada.

Esto es, una categoría de fusión $\mathcal{C}$ se dice *de tipo grupo* si existen G un grupo finito y ω un 3-cociclo de G tal que su centro de Drinfeld $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ es equivalente al centro de $\mathbf{Vec}_{\mathrm{G}}^{\omega}$ como categoría de fusión trenzada.

En particular, las categorías de tipo grupo son íntegras (ver [EGNO, Remark 9.7.7]).

Definición 2.2.9. Dado $X \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$, definimos el subgrupo $G[X] = \{g \in \mathcal{G}(\mathcal{C}) / g \otimes X = X\}$. Es decir, $G[X]$ es el estabilizador de X por multiplicación a izquierda por objetos invertibles.

Proposición 2.2.10. *En el contexto anterior, se cumplen las igualdades*

$$G[X] = \{g \in \mathcal{G}(\mathcal{C}) / [X \otimes X^* : g] > 0\} = \{g \in \mathcal{G}(\mathcal{C}) / [X \otimes X^* : g] = 1\}, \tag{2.5}$$

para todo $X \in \mathcal{O}_{\mathcal{C}}$.

Demostración. Si $g \in G[X]$, entonces por la ecuación (2.2) tenemos las igualdades $[X \otimes X^* : g] = [g \otimes X : X] = [X : X] = 1$, lo cual prueba la primera inclusión.

Por otro lado, si $0 < [X \otimes X^* : g] = \dim \mathrm{Hom}(g, X \otimes X^*)$, tenemos un morfismo no nulo de $g \to X \otimes X^*$. Luego, dado un objeto simple Y que aparezca en la descomposición de $g \otimes X$, podemos construir un morfismo no nulo

$$Y \to g \otimes X \to X \otimes X^* \otimes X \to X \otimes 1 \simeq X.$$

Como X, Y son simples, esto implica que $Y = X$. Por lo tanto, $g \otimes X = [g \otimes X : X]X = [X \otimes X^* : g]X$. Tomando FPdim a ambos lados, resulta $[X \otimes X^* : g] = 1$ y $g \otimes X = X$. $\square$

Corolario 2.2.11. *Sea* $X \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$*. En el anillo de Grothendieck* $\mathrm{Gr}(\mathcal{C})$ *se cumple*

$$X \otimes X^* = \sum_{g \in G[X]} g + \sum_{\substack{\mathrm{FPdim}\, Y > 1 \\ Y \in \mathcal{O}(\mathcal{C})}} [X \otimes X^* : Y] Y.$$

Demostración. Se sigue del Corolario 2.2.4 y la Proposición 2.2.10. □

2.3 | Graduación por grupos

En esta sección introducimos la noción de graduación por un grupo finito en el contexto de categorías de fusión, que utilizaremos recurrentemente. Es una herramienta que permite dar nuevos ejemplos a partir de categorías de fusión conocidas. En particular, para nosotros será crucial en el capítulo 6 cuando nos adentremos en el estudio de propiedades de tipo grupo para ciertas categorías modulares.
Mencionaremos también algunas de las propiedades básicas de esta construcción, para lo cual seguiremos [GN].

Definición 2.3.1. Sea G un grupo finito. Una *G-graduación* de una categoría de fusión $\mathcal{C}$ es una descomposición

$$\mathcal{C} = \bigoplus_{g \in G} \mathcal{C}_g,$$

donde cada componente $\mathcal{C}_g \subset \mathcal{C}$ es una subcategoría abeliana plena de $\mathcal{C}$, con la propiedad de que el producto tensorial $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ mapea $\mathcal{C}_g \otimes \mathcal{C}_h \to \mathcal{C}_{gh}$.

Una G-graduación se dice *fiel* si $\mathcal{C}_g \neq 0$ para todo $g \in G$. En este caso, decimos que $\mathcal{C}$ es una *G-extensión* de $\mathcal{C}_e$. Una G-graduación es *trivial* si $\mathcal{C}_e = \mathcal{C}$.

Observación 2.3.2. La componente $\mathcal{C}_e$ es una subcategoría de fusión de $\mathcal{C}$. En efecto, $\mathbf{1} \in \mathcal{C}_e$ y es cerrada por productos tensoriales y duales.

Observación 2.3.3. Dada una G-graduación fiel de $\mathcal{C}$, se cumple que todas las componentes de la graduación tienen la misma dimensión de Frobenius-Perron. Es decir, $\mathrm{FPdim}\, \mathcal{C}_g = \mathrm{FPdim}\, \mathcal{C}_e$, para todo $g \in G$. Luego, la dimensión de la categoría cumple $\mathrm{FPdim}\, \mathcal{C} = |G| \,\mathrm{FPdim}\, \mathcal{C}_e$. (Ver [DGNO1, Corollary 4.28]).

Gelaky y Nikshych probaron en [GN] que para toda categoría de fusión $\mathcal{C}$ existe una graduación fiel canónica $\mathcal{C} = \bigoplus_{g \in U(\mathcal{C})} \mathcal{C}_g$. Esta graduación es llamada *graduación universal*, y el grupo $U(\mathcal{C})$ es denominado el *grupo de graduación universal* de $\mathcal{C}$. La componente trivial de la graduación universal es la subcategoría adjunta de $\mathcal{C}$, es decir, $\mathcal{C}_e = \mathcal{C}_{ad}$.

Si el anillo de Grothendieck de $\mathcal{C}$ es conmutativo (por ejemplo, esto ocurre cuando la categoría $\mathcal{C}$ es trenzada) entonces $U(\mathcal{C})$ es un grupo abeliano.

Ejemplo 2.3.4. Sea $\mathcal{C} = \mathcal{TY}(G, \chi, \tau)$ una categoría de Tambara-Yamagami. Veamos que $\mathcal{C}$ admite una $\mathbb{Z}_2$-graduación.
Por definición $\mathcal{C}_{ad}$ es la subcategoría de fusión generada por $\{g \otimes g^*\}_{g \in G} \cup \{X \otimes X^*\}$. Esto es, generada por $\{e, \bigoplus_{g \in G} g\}$. Observemos que como $\mathcal{C}_{ad}$ es una subcategoría de fusión de $\mathcal{C}$ y contiene a $\bigoplus_{g \in G} g$, entonces $g \in \mathcal{C}_{ad}$ para todo $g \in G$. Luego, podemos escribir

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_{ad} \oplus \mathcal{C}[X],$$

donde $\mathcal{C}[X]$ es la categoría abeliana generada por X. Esta es una $\mathbb{Z}_2$-graduación para $\mathcal{C}$. En efecto, si denotamos $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_{ad},\ \mathcal{C}_1 = \mathcal{C}[X]$, entonces:

1. Como $g \otimes X = X$ para todo $g \in G$, tenemos $\mathcal{C}_0 \otimes \mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_1$;

2. Como $X \otimes X = \bigoplus_{g \in G} g$, tenemos $\mathcal{C}_1 \otimes \mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_0$;

3. Como $g \otimes h = gh$ para todo $g, h \in G$, tenemos $\mathcal{C}_0 \otimes \mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0$.

2.4 Equivariantización por grupos

En esta sección trataremos la noción de equivariantización de una categoría por un grupo. Es otra herramienta que permite dar nuevos ejemplos a partir de categorías conocidas. Mencionaremos también la relación entre las dimensiones de Frobenius-Perron de la categoría y su equivariantización por un grupo.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial sobre $\mathbf{k}$. Denotemos por $\mathrm{Aut}_{\otimes}(\mathcal{C})$ a la categoría monoidal con objetos las autoequivalencias de $\mathcal{C}$, morfismos los isomorfismos naturales de funtores, producto tensorial dado por la composición de funtores, y objeto unidad el funtor identidad $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$.

Sea G un grupo, y consideremos $\underline{G}$ la categoría monoidal estricta cuyos objetos son los elementos de G, los morfismos son las identidades, y el producto tensorial está dado por la multiplicación en G.

Definición 2.4.1. Una *acción* de G en la categoría $\mathcal{C}$ es un funtor monoidal

$$T : \underline{G} \to \mathrm{Aut}_{\otimes}(\mathcal{C}).$$

Esto es equivalente a contar con los siguientes datos:

1. Para cada $g \in G$, un funtor tensorial $T_g : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$;

2. Para $g, h \in G$, un isomorfismo monoidal $J_{g,h} : T_g T_h \xrightarrow{\sim} T_{gh}$;

3. Un isomorfismo monoidal $u : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} T_e$;

tales que los siguientes diagramas son conmutativos

$$\begin{tikzcd} T_g T_h T_k \arrow[r, "J_{g,h} T_k"] \arrow[d, "T_g J_{h,k}"'] & T_{gh} T_k \arrow[d, "J_{gh,k}"] \\ T_g T_{hk} \arrow[r, "J_{g,hk}"'] & T_{ghk}, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T_g \arrow[r, "T_g u"] \arrow[d, "u T_g"'] \arrow[dr, "="] & T_g T_e \arrow[d, "J_{g,e}"] \\ T_e T_g \arrow[r, "J_{e,g}"'] & T_g, \end{tikzcd} \tag{2.6}$$

para todo $g, h, k \in G$.

Notemos además que dado $g \in G$, $T_g : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es un funtor tensorial que viene acompañado de un isomorfismo $T_g^0 : \mathbf{1} \to T_g(\mathbf{1})$ y un isomorfismo natural $T_g^2 : \otimes \circ (T_g \times T_g) \to T_g \circ \otimes$.

Ejemplo 2.4.2. En la categoría $\mathcal{C} = \mathbf{Vec}_{\mathrm{G}}$ de espacios vectoriales graduados por un grupo G tenemos la acción dada por la conjugación. De hecho, definimos un funtor monoidal $T : \underline{G} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{C})$, dado por

$$\begin{aligned} T_g : \mathcal{C} &\to \mathcal{C}, \\ \bigoplus_{x\in G} V_x &\mapsto \bigoplus_{x\in G} V_{gxg^{-1}}. \end{aligned}$$

Dado un morfismo $f : \bigoplus_{x\in G} V_x \to \bigoplus_{x\in G} W_x$, donde $f = \bigoplus_{x\in G} f_x$ con $f_x : V_x \to W_x$, definimos $T_g f : \bigoplus_{x\in G} V_{gxg^{-1}} \to \bigoplus_{x\in G} W_{gxg^{-1}}$ como $T_g f = \bigoplus_{x\in G} f_{gxg^{-1}}$.

Definición 2.4.3. Un *objeto G-equivariante* en $\mathcal{C}$ es un par (X, v), donde X es un objeto en $\mathcal{C}$ y v es una familia $v = \{v_g : T_g(X) \to X \mid g \in G\}$ de isomorfismos tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} T_g(T_h(X)) \arrow[r, "T_g(v_h)"] \arrow[d, "J_{g,h}(X)"'] & T_g(X) \arrow[d, "v_g"] \\ T_{gh}(X) \arrow[r, "v_{gh}"'] & X \end{tikzcd} \tag{2.7}$$

conmuta para todo $g, h \in G$.

Un *morfismo G-equivariante* $f : (X, v) \to (Y, w)$ entre dos objetos G-equivariantes es un morfismo $f : X \to Y$ en la categoría $\mathcal{C}$ tal que $fv_g = w_g f$ para todo $g \in G$.

Definición 2.4.4. La G-equivariantización $\mathcal{C}^G$ de la categoría $\mathcal{C}$ por un grupo G es la categoría de objetos y morfismos equivariantes de $\mathcal{C}$. El objeto unidad es $(1, \{(T_g^0)^{-1}\}_{g\in G})$ y el producto tensorial de dos objetos G-equivariantes (X, v) y (Y, w) está dado por $(X, v) \otimes (Y, w) = (X \otimes Y, z)$, con $z_g = (v_g \otimes w_g)((T_g^2)_{X,Y})^{-1}$.

Si $\mathcal{C}$ es una categoría de fusión y G un grupo finito, como $\mathbf{k}$ es algebraicamente cerrado de característica 0, la equivariantización $\mathcal{C}^G$ es una categoría de fusión. Además, su dimensión de Frobenius-Perron es $\mathrm{FPdim}\, \mathcal{C}^G = |G|\, \mathrm{FPdim}\, \mathcal{C}$.

Ejemplo 2.4.5. Sean G un grupo finito y $\mathcal{C} = \mathrm{Vec}$ la categoría de espacios vectoriales de dimensión finita sobre $\mathbf{k}$. Consideremos la acción trivial de G en Vec, es decir $T : \underline{G} \to \mathcal{C}$, donde $T_g = Id_{\mathcal{C}}$ para todo $g \in G$. Veamos que la equivariantización $\mathcal{C}^G$ es la categoría $\mathrm{Rep}\, G$ de representaciones de dimensión finita de G.
Sea (V, w) un objeto G-equivariante, con $w_g : V \to V$ que satisface

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "w_h"] \arrow[d, "Id_V"'] & V \arrow[d, "w_g"] \\ V \arrow[r, "w_{gh}"'] & V, \end{tikzcd} \tag{2.8}$$

para todo $g, h \in G$. Esto es, $w_g \circ w_h = w_{gh}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \rho : G &\to Gl(V), \\ g &\mapsto w_g, \end{aligned}$$

es una representación del grupo G. De manera análoga, dada (ρ, V) una representación de G, es un objeto G-equivariante bajo la acción trivial.

2.5 | Categorías pseudo-unitarias

En esta sección consideraremos aquellas categorías que cumplen $\frac{\dim(\mathcal{C})}{\operatorname{FPdim}(\mathcal{C})} = 1$, es decir, las categorías cuyas dimensión cuántica y dimensión de Frobenius-Perron son iguales. Este tipo de categorías reúnen ciertas cualidades que usaremos fuertemente en el capítulo 4.

Definición 2.5.1. Una categoría de fusión $\mathcal{C}$ sobre $\mathbb{C}$ se dice *pseudo-unitaria* si $\dim(\mathcal{C}) = \operatorname{FPdim}(\mathcal{C})$.

Se puede ver que $\mathcal{C}$ es pseudo unitaria si y sólo si $d_X^2 = \operatorname{FPdim}(X)^2$ para todo $X \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$.

Ejemplo 2.5.2. Dado G un grupo finito, la categoría $\operatorname{Rep} G$ es una categoría pseudo-unitaria. En efecto, vimos en Ejemplos 2.1.14 y 3.1.9 que tanto la dimensión de Frobenius-Perron como la dimensión cuántica de una representación coinciden con su dimensión.

Recordemos que una categoría de fusión se dice débilmente integra si $\operatorname{FPdim}(\mathcal{C}) \in \mathbb{Z}$, y se dice íntegra si $\operatorname{FPdim}(X) \in \mathbb{Z}$ para todo $X \in \mathcal{C}$ simple. Tenemos los siguientes resultados útiles.

Proposición 2.5.3. [EGNO, Proposition 9.6.5] *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión débilmente íntegra sobre $\mathbb{C}$. Entonces $\mathcal{C}$ es pseudo-unitaria.*

Proposición 2.5.4. [GN, Corollary 3.11] *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión tal que* $\operatorname{FPdim}(\mathcal{C})$ *es un entero impar. Entonces $\mathcal{C}$ es íntegra.*

2.6 | Categorías de fusión nilpotentes y solubles

En esta sección introduciremos los conceptos de categorías nilpotentes y solubles. Recordaremos también ciertas condiciones que aseguran la nilpotencia y solubilidad de categorías, entre ellas, ciertas relaciones con la dimensión de Frobenius-Perron. Para una lectura más detallada referimos a [GN, ENO1].

Sea G un grupo. Recordemos que G se dice *nilpotente* si existe una sucesión de subgrupos de la forma

$$\{e\} = G_n \trianglelefteq G_{n-1} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_0 = G,$$

tal que $G_{i+1} = [G_i, G]$ para todo $i = 0, \cdots, n-1$.

Equivalentemente, si consideramos los subgrupos de G definidos recursivamente como

$$Z_0 = \{e\}, \quad Z_{i+1} = \{x \in G \ / \ [x, y] \in Z_i \ \ \forall \ y \in G\},$$

G se dice nilpotente si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $Z_n = G$.

Llamamos *clase de nilpotencia* de un grupo nilpotente G al mínimo entero para el cual $Z_n = G$ (respectivamente, $G_n = \{e\}$).

A continuación daremos una categorificación del concepto de nilpotencia para grupos.

Definición 2.6.1. [GN, ENO1] Una categoría de fusión $\mathcal{C}$ se dice *nilpotente* si existe una sucesión de categorías de fusión

$$\mathcal{C}_0 = \text{Vec},\ \mathcal{C}_1, \cdots, \mathcal{C}_n = \mathcal{C},$$

y una sucesión de grupos finitos $G_1, \dots, G_n$ tales que $\mathcal{C}_i$ es una G_i-extensión de C_{i-1}.

Diremos que $\mathcal{C}$ es *cíclicamente nilpotente* si los grupos G_i pueden elegirse cíclicos.

Observación 2.6.2. Si $\mathcal{C}$ es una categoría de fusión tal que toda subcategoría de fusión no trivial admite una graduación no trivial por un grupo finito, entonces $\mathcal{C}$ es nilpotente.

Definición 2.6.3. La *serie central ascendente* de una categoría de fusión $\mathcal{C}$ se define recursivamente, en términos de la subcategoría adjunta, de la siguiente forma:

$$\mathcal{C}^{(0)} = \mathcal{C},\ \mathcal{C}^{(1)} = \mathcal{C}_{ad}, \cdots,\ \mathcal{C}^{(n)} = (\mathcal{C}^{(n-1)})_{ad},$$

para todo entero $n \geq 1$.

Una definición equivalente es la siguiente. Una categoría de fusión $\mathcal{C}$ es nilpotente si su serie central ascendente converge a la categoría Vec de espacios vectoriales de dimensión finita. Es decir, si existe un entero n para el cual $\mathcal{C}^{(n)}$ =Vec. El menor n para el cual esto se cumple se llama la *clase de nilpotencia* de $\mathcal{C}$.

A continuación daremos algunos ejemplos de categorías de fusión nilpotentes.

Ejemplo 2.6.4. Dado G un grupo finito y $\omega : G \times G \times G \to \mathbf{k}^\times$ un 3-cociclo de G, la categoría $\mathcal{C} = \text{Vec}_{\text{G}}^{\omega}$ es siempre nilpotente. En efecto, vimos en Ejemplo 2.1.6 que $\mathcal{C}_{ad}$ =Vec. Es decir, la clase de nilpotencia de $\text{Vec}_{\text{G}}^{\omega}$ es 1.

Ejemplo 2.6.5. Dado G un grupo finito, $\text{Rep}\, G$ es nilpotente si y sólo si G es nilpotente.

Ejemplo 2.6.6. Las categorías de Tambara-Yamagami (ver Ejemplo 2.1.15) son nilpotentes. Más aún, vimos que para estas categorías la subcategoría adjunta es punteada, por lo que su clase de nilpotencia es 2.

Se puede ver que, dado un número primo p, todos los p-grupos finitos (es decir, los grupos de orden una potencia de p) son nilpotentes. Tenemos el siguiente resultado análogo para categorías de fusión.

Teorema 2.6.7. [ENO1, Theorem 8.28] *Sea p un número primo. Si $\mathcal{C}$ es una categoría de fusión tal que* $\text{FPdim}(\mathcal{C}) = p^n$*, entonces $\mathcal{C}$ es nilpotente.*

Otro resultado útil es el siguiente.

Teorema 2.6.8. [GN, Theorem 6.10] *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión trenzada. Entonces C es nilpotente si y sólo su centro de Drinfeld $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ es nilpotente.*

Recordemos que una categoría de fusión se dice de tipo grupo si su centro es equivalente como categoría tensorial al centro de $\mathrm{Vec}_{\mathrm{G}}^{\omega}$, para algún grupo finito G y un 3-cocliclo ω. El Teorema que enunciaremos a continuación relaciona categorías nilpotentes y de tipo grupo.

Teorema 2.6.9. [DGNO2, Theorem 1.5] *Si $\mathcal{C}$ es una categoría de fusión íntegra y nilpotente entonces es de tipo grupo.*

Definición 2.6.10. [ENO1] Una categoría de fusión $\mathcal{C}$ se dice *débilmente de tipo grupo* si es Morita equivalente a una categoría de fusión nilpotente.

Proposición 2.6.11. [ENO1, Proposition 4.1] *La clase de categorías de fusión débilmente de tipo grupo es cerrada por extensiones y equivariantizaciones, equivalencia Morita, productos tensoriales, centros de Drinfeld, subcategorías y cocientes de categorías.*

Daremos ahora una noción categórica del concepto de solubilidad para grupos. Recordemos que un grupo G se dice *soluble* si existe una sucesión de la forma

$$G = G^{(0)} \trianglelefteq G^{(1)} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G^{(n-1)} \trianglelefteq G_n = \{e\},$$

donde $G^{(i)} = [G^{(i-1)}, G^{(i-1)}]$ para todo $i \geq 1$.

Todo grupo abeliano es soluble. Más aún, si un grupo G es nilpotente entonces también es soluble.

Definición 2.6.12. [ENO1] Una categoría de fusión $\mathcal{C}$ se dice *soluble* si es Morita equivalente a una categoría de fusión cíclicamente nilpotente.

Esto es, $\mathcal{C}$ es soluble si su centro de Drinfeld $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ es equivalente como categoría trenzada al centro de una categoría cíclicamente nilpotente.

Equivalentemeatente, por [ENO1, Proposition 4.4], la categoría de fusión $\mathcal{C}$ es soluble si existe una sucesión de categorías de fusión $\mathcal{C}_0 = \mathrm{Vec}, \mathcal{C}_1, \cdots, \mathcal{C}_n = \mathcal{C}$, donde cada $\mathcal{C}_i$ se obtiene como una G_i-equivariantización o una G_i-extensión de $\mathcal{C}_{i-1}$, con $G_1, \cdots, G_n$ grupos cíclicos de orden primo.

A continuación daremos algunas propiedades de las categorías de fusión nilpotentes y solubles.

Proposición 2.6.13. [ENO1, Proposition 4.5]

1. *La clase de categorías de fusión solubles es cerrada por extensiones y equivariantizaciones por grupos solubles, equivalencia Morita, productos tensoriales, centros de Drinfeld, subcategorías y cocientes de categorías.*

2. *Dado G un grupo finito y ω un 3-cociclo de G, las categorías $\mathrm{Rep}\, G$ y $\mathrm{Vec}_{\mathrm{G}}^{\omega}$ son solubles si y sólo si G es un grupo soluble.*

3. *Toda categoría de fusión trenzada nilpotente es soluble.*

4. *Toda categoría de fusión trenzada soluble $\mathcal{C} \neq$ Vec contiene un objeto invertible no trivial.*

A diferencia del caso de grupos finitos, que una categoría de fusión $\mathcal{C}$ sea nilpotente no implica que sea soluble. Por ejemplo, la categoría $\mathrm{Vec}_{\mathrm{G}}^{\omega}$ es nilpotente para todo grupo G y 3-cociclo $\omega : G \times G \times G \to \mathbf{k}^{\times}$, mientras que es soluble si y sólo si G es un grupo soluble.

Por otro lado, si tenemos $\mathcal{C}$ una categoría de fusión trenzada, entonces por la proposición anterior $\mathcal{C}$ nilpotente implica que $\mathcal{C}$ es soluble.

Etingof, Nikshych y Ostrik probaron una versión del clásico Teorema de Burnside en el contexto de las categorías de fusión:

Teorema 2.6.14. [ENO1, Theorem 1.6] *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión. Si la dimensión de Frobenius-Perron de $\mathcal{C}$ es* $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = p^r q^s$, *con p y q números primos, y r, s enteros no negativos, entonces $\mathcal{C}$ es soluble.*

3 | Categorías modulares

En este capítulo introduciremos una clase particular de categorías de fusión, las categorías modulares, las cuales son el principal objeto de estudio de este trabajo. Recordaremos invariantes importantes de las categorías modulares, como la S-matriz, T-matriz, Indicadores de Frobenius-Schur y Sumas de Gauss, y estudiaremos sus propiedades.

A lo largo de este capítulo asumiremos que $\mathbf{k}$ es un cuerpo algebraicamente cerrado y de característica cero.

3.1 | Dimensión Cuántica. Categorías esféricas

Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión. Vimos que en una categoría de fusión todo objeto simple X es isomorfo a su doble dual X^{**}. Tenemos entonces la siguiente definición.

Definición 3.1.1. Dado X un objeto en $\mathcal{C}$ y un isomorfismo $f : X \to X^{**}$, definimos su *traza cuántica* (a izquierda) como la composición

$$\mathrm{Tr}(f) : 1 \xrightarrow{\mathrm{coev}_X} X \otimes X^* \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}_{X^*}} X^{**} \otimes X^* \xrightarrow{\mathrm{ev}_{X^*}} \mathbf{1}. \tag{3.1}$$

Observación 3.1.2. Por definición $\mathrm{Tr}(f) \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1})$. Como $\mathcal{C}$ es una categoría de fusión, $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}) \simeq \mathbf{k}$, por lo cual podemos identificar a la traza de f con un elemento del cuerpo.

A continuación enunciaremos algunas propiedades de la traza cuántica.

Proposición 3.1.3. *Dados $f : X \to X^{**}$ y $g : Y \to Y^{**}$ ismorfismos en $\mathcal{C}$, se cumple que:*

1. $\mathrm{Tr}(f \oplus g) = \mathrm{Tr}(f) + Tr(g)$;
2. $\mathrm{Tr}(f \otimes g) = \mathrm{Tr}(f)\,\mathrm{Tr}(g)$.

Definición 3.1.4. Una *estructura pivotal* en $\mathcal{C}$ es un isomorfismo de funtores tensoriales $\psi : \mathrm{Id} \to (-)^{**}$.

Es decir, una estructura pivotal es una colección $\{\psi_X\}_{X \in \mathcal{O}(\mathcal{C})}$ de isomorfismos naturales $\psi_X : X \to X^{**}$ que satisface $\psi_{X \otimes Y} = \psi_X \otimes \psi_Y$, para todo $X, Y \in \mathcal{C}$.

Una categoría de fusión munida de una estructura pivotal se dice una *categoría de fusión pivotal.*

Definición 3.1.5. Una *categoría pivotal estricta* es una categoría pivotal en la cual los isomorfismos de asociatividad son identidades, la estructura pivotal $\psi : \mathrm{Id} \to^{**}$ es la identidad, y los isomorfismos naturales asociados $X^* \otimes Y^* \to (Y \otimes X)^*$ también son identidades.

Ejemplo 3.1.6. Dado G un grupo finito, las categorías Vec, $\mathrm{Vec}_{\mathrm{G}}$ y $\mathrm{Rep}\, G$ tienen una estructura pivotal canónica dada por los isomorfismos naturales $V \to V^{**}$, para cada espacio vectorial V.

Consideremos ahora una categoría de fusión pivotal $\mathcal{C}$, y fijamos una estructura pivotal dada por $\psi_X : X \to X^{**}$.

Definición 3.1.7. Definimos la *dimensión cuántica* de un objeto $X \in \mathcal{C}$ con respecto a ψ como

$$\mathrm{d}_X := \mathrm{Tr}(\psi_X) \in \mathrm{End}(\mathbf{1}) \simeq \mathbf{k}.$$

Luego las dimensiones cuánticas de los objetos de $\mathcal{C}$ pueden identificarse con elementos en $\mathbf{k}$.
Definimos la *dimensión cuántica* de la categoría $\mathcal{C}$ como

$$\dim \mathcal{C} = \sum_{X \in \mathcal{O}(\mathcal{C})} \mathrm{d}_X \, \mathrm{d}_{X^*} .$$

Proposición 3.1.8. [EGNO, Proposition 4.7.12] *La función* $\mathrm{Gr}(\mathcal{C}) \to \boldsymbol{k}$ *que asigna* $[X] \mapsto \dim X$ *es un caracter del grupo de Grothendick* $\mathrm{Gr}(\mathcal{C})$*.* □

Una clase especial de categoría de fusión pivotal es la de categorías *esféricas*. Una categoría de fusión pivotal $\mathcal{C}$ se dice *esférica* si $\mathrm{d}_X = \mathrm{d}_{X^*}$ para todo objeto simple $X \in \mathcal{C}$. Notemos que en este caso resulta que $\dim \mathcal{C} = \sum_{X \in \mathcal{O}(\mathcal{C})} (\mathrm{d}_X)^2$.

En toda categoría esférica tenemos la noción de traza de un endomorfismo $f \in \mathrm{End}(X)$ dada por la siguiente composición de funciones,

$$\mathrm{Tr}(f) : \mathbf{1} \xrightarrow{\mathrm{coev}_X} X \otimes X^* \xrightarrow{\psi_X \circ f \otimes \mathrm{id}_{X^*}} X^{**} \otimes X^* \xrightarrow{\mathrm{ev}_{X^*}} \mathbf{1}. \tag{3.2}$$

La dimensión de X está dada por $\mathrm{d}_X = \mathrm{Tr}(\mathrm{id}_X)$.

Ejemplo 3.1.9. Sea $\mathcal{C}$ =Vec la categoría de espacios vectoriales sobre $\mathbf{k}$ de dimensión finita. Calculemos la dimensión de $V \in \mathcal{C}$. Dada $\{v_i\}_{i=1,\dots,n}$ una base de V, tenemos

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{k} & \xrightarrow{\mathrm{coev}_V} & V \otimes V^* & \xrightarrow{\psi_V \circ \mathrm{id}_v \otimes \mathrm{id}_{V^*}} & V^{**} \otimes V^* & \xrightarrow{\mathrm{ev}_{V^*}} & \mathbf{k}, \\ 1 & \longmapsto & \sum_{i=1}^n v_i \otimes v_i^* & \longmapsto & \sum_{i=1}^n v_i^{**} \otimes v_i^* & \longmapsto & \sum_{i=1}^n v_i^{**}(v_i^*) = \dim_{\mathbf{k}} V. \end{array} \tag{3.3}$$

Es decir, la dimensión cuántica de V es exactamente $\dim_{\mathbf{k}} V$.
Esto nos dice también que, dado G un grupo finito y $\mathcal{C} = \mathrm{Rep}\, G$ la categoría de representaciones de G sobre $\mathbf{k}$, la dimensión cuántica de una representación es su dimensión.

Observación 3.1.10. En una categoría pivotal $\mathcal{C}$ las dimensiones cuánticas de los objetos simples no son necesariamente números reales, por lo que no se cumple en general que $\mathrm{d}_X = \mathrm{FPdim}\, X$ para X simple.

3.2 | La S-matriz de una categoría pre-modular

En esta sección definiremos la S-matriz de una categoría pre-modular. La S-matriz es un invariante destacado en el estudio de categorías modulares, por lo cual dedicaremos esta sección y la siguiente a enunciar y demostrar algunas de sus propiedades.

Definición 3.2.1. Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión trenzada con trenza σ. Un *twist* en $\mathcal{C}$ es un isomorfismo natural $\theta : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ tal que

$$\theta_{X\otimes Y} = (\theta_X \otimes \theta_Y) \circ \sigma_{Y,X} \circ \sigma_{X,Y}, \tag{3.4}$$

para todo $X, Y \in \mathcal{C}$. Un twist se dice una *estructura ribbon* si además $(\theta_X)^* = \theta_{X^*}$ para todo $X, Y \in \mathcal{C}$.

Definición 3.2.2. Una *categoría pre-modular* es una categoría de fusión munida de una estructura ribbon compatible.

Equivalentemente, una categoría pre-modular es una categoría de fusión trenzada equipada con una estructura esférica [Br]. Esto es, $\mathrm{d}_X = \mathrm{d}_{X^*}$, para todo X simple en $\mathcal{C}$.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría pre-modular con estructura esférica ψ. Denotemos por $\mathcal{O}(\mathcal{C})$ al conjunto de (clases de isomorfismo de) objetos simples en $\mathcal{C}$, y sea N_{XY}^Z la multiplicidad de Z en $X \otimes Y$ para todo $X, Y, Z \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$.

Sea θ el twist dado por la estructura ribbon compatible con $\mathcal{C}$. Recordemos que $\theta_X \in \mathrm{End}(X) \simeq \mathbf{k}^\times$, para todo X simple en $\mathcal{C}$. Luego, identificaremos a θ con una colección de escalares $\theta_X \in \mathbf{k}^\times$. Denotamos por Tr y dim a la traza y dimensión asociadas a ψ respectivamente, definidas por la ecuación (3.2).

Definición 3.2.3. La *S-matriz* de $\mathcal{C}$ está definida por $S \coloneqq (s_{XY})_{X,Y\in\mathcal{O}(\mathcal{C})}$, donde

$$s_{XY} = \mathrm{Tr}(\sigma_{Y,X}\sigma_{X,Y}).$$

Observación 3.2.4. La S-matriz de $\mathcal{C}$ tiene las siguientes propiedades:

1. Es una matriz simétrica de tamaño $n \times n$, donde $n = |\mathcal{O}(\mathcal{C})|$.

2. Las entradas de la matriz cumplen $s_{X^*Y^*} = s_{XY}$, para todo $X, Y \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$.

3. La fila 1 y, por lo tanto, también la columna 1 de la matriz coinciden con la dimensión cuántica: $s_{X\mathbf{1}} = s_{\mathbf{1}X} = \mathrm{d}_X$.

La siguiente ecuación relaciona las entradas de la S-matriz de $\mathcal{C}$ con el twist, las reglas de fusión y la dimensión de los objetos simples de $\mathcal{C}$. Esta ecuación recibe el nombre de *ecuación de balance*, y es de gran utilidad para verificar propiedades en categorías pre-modulares y modulares.

Proposición 3.2.5 (Ecuación de balance)**.** *Se cumple que*

$$s_{XY} = \theta_X^{-1}\theta_Y^{-1} \sum_{Z\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} N_{XY}^Z \theta_Z \,\mathrm{d}_Z, \tag{3.5}$$

para todo $X, Y \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$.

Demostración. Como θ es un twist, se cumple $\theta_{X\otimes Y} = (\theta_X \otimes \theta_Y) \circ \sigma_{Y,X} \circ \sigma_{X,Y}$ para todo par de objetos simples X, Y en $\mathcal{C}$. Aplicando Tr a ambos lados de esta ecuación e identificando $\theta_X, \theta_Y \in \mathbf{k}^\times$, obtenemos lo siguiente.
El lado derecho resulta

$$\mathrm{Tr}\left(\theta_X \otimes \theta_Y \circ \sigma_{Y,X} \circ \sigma_{X,Y}\right) = \theta_X\theta_Y \,\mathrm{Tr}(\sigma_{Y,X} \circ \sigma_{X,Y}) = \theta_X\theta_Y s_{XY}.$$

Veamos ahora el lado izquierdo. Tenemos que $X \otimes Y = \sum_{Z \in \mathcal{O}(\mathcal{C})} N_{XY}^Z Z$. Luego,

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}(\theta_{X\otimes Y}) = \operatorname{Tr}\left(\sum_{Z\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} N_{XY}^Z \theta_Z\right) &= \sum_{Z\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} N_{XY}^Z \operatorname{Tr}(\theta_Z) = \sum_{Z\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} N_{XY}^Z \theta_Z \operatorname{Tr}(\mathrm{id}_Z)\\ &= \sum_{Z\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} N_{XY}^Z \theta_Z\, \mathrm{d}_Z,\end{aligned}$$

usando la aditividad de Tr.
Por lo tanto, $\theta_X\theta_Y s_{XY} = \sum_{Z\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} N_{XY}^Z \theta_Z\, \mathrm{d}_Z$, y luego se sigue el resultado. □

Otro resultado útil es el siguiente.

Proposición 3.2.6. [EGNO, Proposition 8.13.10] *Los elementos de la S-matriz satisfacen*

$$s_{XY}s_{XZ} = \mathrm{d}_X \sum_{W\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} N_{YZ}^W s_{XW}, \quad X, Y, Z \in \mathcal{O}(\mathcal{C}). \tag{3.6}$$

□

Proposición 3.2.7. *Dado $X \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$, el mapa dado por*

$$Y \mapsto \frac{s_{XY}}{\mathrm{d}_X},\ Y \in \mathcal{O}(\mathcal{C}), \tag{3.7}$$

define un morfismo $h_X : \mathrm{Gr}(\mathcal{C}) \to \boldsymbol{k}$. Más aún, $\frac{s_{XY}}{\mathrm{d}_X}$ son enteros algebraicos, para todo $X, Y \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$.

Demostración. Dados $Y, Z \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$, veamos que $h_X(Y \otimes Z) = h_X(Y)h_X(Z)$. De hecho, por la Proposición 3.2.6, tenemos las igualdades

$$h_X(Y)h_X(Z) = \frac{s_{XY}s_{XZ}}{\mathrm{d}_X^2} = \frac{1}{\mathrm{d}_X}\sum_{W\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} N_{YZ}^W s_{XW}, \text{ y}$$

$$h_X(Y\otimes Z) = \frac{\operatorname{Tr}(\sigma_{Y\otimes Z,X}\sigma_{X,Y\otimes Z})}{\mathrm{d}_X} = \frac{1}{\mathrm{d}_X}\sum_{W\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} N_{YZ}^W s_{XW}.$$

Por otro lado, consideremos la matriz entera $N_Y = \{N_{YZ}^X\}_{Z,X}$ y el vector $V_X = (s_{X,Z})_{Z\in\mathcal{O}(\mathcal{C})}$. Entonces

$$\frac{s_{XY}}{\mathrm{d}_X}s_{XZ} = \sum_{W\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} N_{YZ}^W s_{XW} = (N_Y S_X)_Z, \quad \text{para todo } Z \in \mathcal{O}(\mathcal{C}),$$

donde la segunda igualdad vale por la Proposicion 3.2.6. Es decir, $\frac{s_{XY}}{\mathrm{d}_X}$ es un autovalor de la matriz entera N_Y, y por lo tanto es un entero algebraico. □

La Proposición anterior nos dice que los elementos simples de $\mathcal{C}$ dan lugar a caracteres del anillo de Groethendick $\mathrm{Gr}(\mathcal{C})$. En particular, considerando el caso $X = \mathbf{1}$, tenemos que la asignación $Y \mapsto \mathrm{d}_Y$ es un caracter de $\mathrm{Gr}(\mathcal{C})$, y sus valores son enteros algebraicos.

3.3 Categorías modulares

Definición 3.3.1. Sea $\mathcal{C}$ una categoría pre-modular con S-matriz S. $\mathcal{C}$ se dice *modular* si S es no degenerada.

Recordemos que cuando $\mathcal{C}$ es pre-modular (es decir, está munida de una estructura esférica) se cumple

$$\dim(\mathcal{C}) = \sum_{X\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} \mathrm{d}_X^2,$$

donde consideramos la dimensión asociada a la estructura esférica de $\mathcal{C}$.
Definimos la matriz cuadrada $C = \{C_{XY}\}_{X,Y\in\mathcal{O}(\mathcal{C})}$, donde

$$C_{XY} = \begin{cases} 1 & \text{si } X = Y^*, \\ 0 & \text{si } X \neq Y^*. \end{cases} \tag{3.8}$$

Recordemos que en el caso de una categoría modular, la S-matriz es invertible. La siguiente Proposición nos brinda una fórmula para su inversa.

Proposición 3.3.2. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría modular y S su S-matriz. Entonces $S^2 = \dim(\mathcal{C})C$. Equivalentemente, la inversa de la S-matrix es $S^{-1} = \frac{1}{\dim(C)}\{s_{XY^*}\}_{XY}$.*

Demostración. Definimos

$$S' := \frac{1}{\dim(C)}\{s_{XY^*}\}_{XY}. \tag{3.9}$$

Veamos primero que si $SS' = \mathrm{Id}$ entonces $S^2 = \dim(\mathcal{C})C$. En efecto, en tal caso

$$\dim(\mathcal{C})(CS')_{U,V} = \sum_{Z\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} C_{UZ}(S')_{ZV} = C_{UU^*}s_{U^*V^*} = s_{U^*V^*} = s_{UV},$$

para todos U, V objetos simples en $\mathcal{C}$. Es decir, $S = \dim(\mathcal{C})CS'$, y luego $S^2 = \dim(\mathcal{C})C$. La recíproca es análoga.

Probemos entonces que S' así definida es la inversa de S. Consideremos los caracteres h_Y, h_Z dados por la Proposición 3.2.7, donde $Y, Z \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$. Notemos que si $h_Y = h_Z$,

$$\frac{s_{YW}}{\mathrm{d}_Y} = \frac{s_{ZW}}{\mathrm{d}_Z}\ \forall\, W \in \mathcal{O}(\mathcal{C}) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}_Z}{\mathrm{d}_Y}s_{YW} = s_{ZW}\ \forall\, W \in \mathcal{O}(\mathcal{C}).$$

Es decir, la fila Z de la matriz S es un múltiplo de la fila Y. Pero como S es no degenerada, esto sucede si y sólo si $Y = Z$. Esto nos dice que $h_Y = h_Z \iff Y = Z$.
Supongamos $Y \neq Z$. Por el Lema 1.5.6, tenemos la igualdad

$$0 = \sum_{X\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} h_Y(X)h_Z(X^*) = \sum_{X\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} \frac{s_{YX}s_{ZX^*}}{\mathrm{d}_Y\,\mathrm{d}_Z}\ .$$

Luego,

$$0 = \sum_{X\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} s_{YX}s_{ZX^*} = \sum_{X\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} s_{XY}s_{XZ^*}\ .$$

Por lo tanto $(SS')_{Y,Z} = 0$ si $Y \neq Z$.
Falta ver que $(SS')_{Y,Y} = 1$, o equivalentemente, $\sum_{X \in \mathcal{O}(\mathcal{C})} s_{XY} s_{XY^*} = \dim(C)$, para todo $Y \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$.
Se siguen de la Proposición 3.2.6 las siguientes igualdades,

$$\sum_{X \in \mathcal{O}(\mathcal{C})} s_{XY} s_{XY^*} = \sum_{X \in \mathcal{O}(\mathcal{C})} \mathrm{d}_X \sum_{W \in \mathcal{O}(\mathcal{C})} N_{YY^*}^W s_{XW} = \sum_{W \in \mathcal{O}(\mathcal{C})} N_{YY^*}^W \sum_{X \in \mathcal{O}(\mathcal{C})} \mathrm{d}_X \, s_{XW}.$$

Notemos que $\sum_{X \in \mathcal{O}(\mathcal{C})} \mathrm{d}_X \, s_{XW} = \sum_{X \in \mathcal{O}(\mathcal{C})} \mathrm{d}_{X^*} \, s_{XW} = \mathrm{d}_W \sum_{X \in \mathcal{O}(\mathcal{C})} h_W(X) \, \mathrm{d}_{X^*}$, donde la primera igualdad se debe a que $\mathcal{C}$ es esférica.
Por otro lado, $\dim = h_W$ si y sólo si $W = 1$. En efecto, vimos que $h_{\mathbf{1}} = h_W \iff W = \mathbf{1}$ y

$$\mathrm{d}_Y = s_{\mathbf{1}Y} = \frac{s_{\mathbf{1}Y}}{\mathrm{d}_{\mathbf{1}}} = h_{\mathbf{1}}(Y) \quad \text{para todo } Y \in \mathcal{O}(\mathcal{C}).$$

Luego, por el Lema 1.5.6 tenemos la ecuación

$$\sum_{X \in \mathcal{O}(\mathcal{C})} h_W(X) \, \mathrm{d}_{X^*} = \begin{cases} \sum_{X \in \mathcal{O}(\mathcal{C})} \mathrm{d}_X \, \mathrm{d}_{X^*} = \dim(\mathcal{C}) & \text{si } W = \mathbf{1}, \\ 0 & \text{si } W \neq \mathbf{1}. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{X \in \mathcal{O}(\mathcal{C})} s_{XY} s_{XY^*} = \sum_{W \in \mathcal{O}(\mathcal{C})} N_{YY^*}^W \, \mathrm{d}_W \sum_{X \in \mathcal{O}(\mathcal{C})} h_W(X) \, \mathrm{d}_{X^*} = N_{YY^*}^{\mathbf{1}} \dim(\mathcal{C}) = \dim(\mathcal{C}).$$

Esto nos dice que $(SS')_{Y,Y} = 1$, y resulta $S' = S^{-1}$. □

Notemos que dados Y, Z objetos simples en $\mathcal{C}$, de la Proposición anterior obtenemos la fórmula

$$\sum_{X \in \mathcal{O}(\mathcal{C})} s_{XY} s_{XZ^*} = \begin{cases} \dim(\mathcal{C}) & \text{si } Y = Z, \\ 0 & \text{si } Y \neq Z. \end{cases} \tag{3.10}$$

Gracias a este resultado obtenemos la llamada Fórmula de Verlinde, que relaciona a la S-matriz de la categoría $\mathcal{C}$ con su dimensión y reglas de fusión.

Corolario 3.3.3 (Fórmula de Verlinde)**.** *Sea $\mathcal{C}$ una categoría modular. Dados $Y, Z, W \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$, se cumple que*

$$\sum_{X \in \mathcal{O}(\mathcal{C})} \frac{s_{XY} s_{XZ} s_{XW^*}}{\mathrm{d}_X} = \dim(\mathcal{C}) N_{YZ}^W. \tag{3.11}$$

Demostración. Por la Proposición 3.2.6, $s_{XY} s_{XZ} = \mathrm{d}_X \sum_{A \in \mathcal{O}(\mathcal{C})} N_{YZ}^A s_{XA}$. Luego,

$$s_{XY} s_{XZ} s_{XW^*} = \mathrm{d}_X \sum_{A \in \mathcal{O}(\mathcal{C})} N_{YZ}^A s_{XA} s_{WX^*} = \mathrm{d}_X^2 \sum_{A \in \mathcal{O}(\mathcal{C})} N_{YZ}^A \sum_{B \in \mathcal{O}(\mathcal{C})} N_{AW^*}^B s_{XB}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\sum_{X\in\mathcal{O}(\mathcal{C})}\frac{s_{XY}s_{XZ}s_{XW^*}}{\mathrm{d}_X} &= \sum_{X\in\mathcal{O}(\mathcal{C})}\mathrm{d}_X\sum_{A\in\mathcal{O}(\mathcal{C})}N_{YZ}^{A}\sum_{B\in\mathcal{O}(\mathcal{C})}N_{AW^*}^{B}s_{XB}\\ &= \sum_{A\in\mathcal{O}(\mathcal{C})}\sum_{B\in\mathcal{O}(\mathcal{C})}N_{YZ}^{A}N_{AW^*}^{B}\sum_{X\in\mathcal{O}(\mathcal{C})}\mathrm{d}_X\, s_{XB}.\end{aligned}$$

Por otro lado, vimos en la demostración anterior que

$$\sum_{X\in\mathcal{O}(\mathcal{C})}s_{XB}\,\mathrm{d}_X=\begin{cases}\dim(\mathcal{C}) & \text{si } B=\mathbf{1},\\ 0 & \text{si } B\neq\mathbf{1}.\end{cases}$$

Combinando esto con la ecuación anterior obtenemos

$$\sum_{X\in\mathcal{O}(\mathcal{C})}\frac{s_{XY}s_{XZ}s_{XW^*}}{\mathrm{d}_X}=\dim(\mathcal{C})\sum_{A\in\mathcal{O}(\mathcal{C})}N_{YZ}^{A}N_{AW^*}^{\mathbf{1}}=\dim(\mathcal{C})N_{YZ}^{W},$$

pues $N_{AW^*}^{\mathbf{1}}=\delta_{A,W}$. □

Para cada $Z\in\mathcal{O}(\mathcal{C})$, definimos la *matriz de fusión* N_Z como $(N_Z)_{X,Y}=N_{ZY}^{X}$, donde $X,Y\in\mathcal{O}(\mathcal{C})$. Notemos que N_Z es una matriz entera con entradas no negativas. Definimos también para cada $Z\in\mathcal{O}(\mathcal{C})$, la matriz diagonal D_Z con entradas $(D_Z)_{XY}=\delta_{XY}\frac{s_{ZX}}{d_X}$, $X,Y\in\mathcal{O}(\mathcal{C})$.

Corolario 3.3.4. *Dada $\mathcal{C}$ una categoría modular con S-matriz S se cumple $S^{-1}D_ZS=N_Z$, para todo $Z\in\mathcal{O}(\mathcal{C})$.* □

El Corolario es una reescritura de la fórmula de Verlinde, y nos dice que $D_Z=SN_ZS^{-1}$ para todo Z simple, i.e, conjugar por la S matriz diagonaliza las reglas de fusión de la categoría $\mathcal{C}$.

Proposición 3.3.5. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría modular y sea $X\in\mathcal{O}(\mathcal{C})$. Entonces $\frac{\dim(C)}{\mathrm{d}_X^2}$ es un entero algebraico.*

Demostración. Por la fórmula (3.10), $\dim(\mathcal{C})=\sum_{Y\in\mathcal{O}(\mathcal{C})}s_{XY}s_{XY^*}$. Luego,

$$\frac{\dim(\mathcal{C})}{\mathrm{d}_X^2}=\sum_{Y\in\mathcal{O}(\mathcal{C})}\frac{s_{XY}}{\mathrm{d}_X}\frac{s_{XY^*}}{\mathrm{d}_X}. \tag{3.12}$$

Resulta que $\dfrac{\dim(\mathcal{C})}{\mathrm{d}_X^2}$ es un entero algebraico, pues por la Proposición 3.2.7 $\frac{s_{XY}}{\mathrm{d}_X}$ y $\frac{s_{XY^*}}{\mathrm{d}_X}$ son enteros algebraicos. □

Observación 3.3.6. Vimos que las asignaciones $Y\mapsto\frac{s_{XY}}{\mathrm{d}_X}$, $X\in\mathcal{O}(\mathcal{C})$, definidas en la Proposición 3.2.7 determinan caracteres lineales del anillo de Grothendieck $\mathrm{Gr}(\mathcal{C})$. Si $\mathcal{C}$ es modular, la matriz S es no-singular, por lo que estos caracteres son linealmente independientes. Luego, estos son exactamente todos los caracteres lineales de $\mathrm{Gr}(\mathcal{C})$.

Dada una categoría modular $\mathcal{C}$ tenemos dos nociones de dimensión; la dimensión de Frobenius-Perron y la dimensión cuántica. El siguiente resultado nos permite compararlas.

Proposición 3.3.7. *En toda categoría modular $\mathcal{C}$ sobre $\mathbb{C}$, el número $\frac{\dim(\mathcal{C})}{\mathrm{FPdim}(\mathcal{C})}$ es un entero algebraico.*

Demostración. Como la dimensión de Frobenius-Perron es un caracter de $\mathrm{Gr}(\mathcal{C})$, entonces por la Observación anterior existe un objeto simple X tal que $\mathrm{FPdim}(Y) = \frac{s_{XY}}{\mathrm{d}_X}$, para todo $Y \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$. Luego,

$$\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = \sum_{Y \in \mathcal{O}(\mathcal{C})} \mathrm{FPdim}(Y)^2 = \sum_{Y \in \mathcal{O}(\mathcal{C})} \frac{s_{XY}^2}{\mathrm{d}_X^2} = \frac{\dim(\mathcal{C})}{\mathrm{d}_X^2}. \tag{3.13}$$

Por lo tanto $\frac{\dim(\mathcal{C})}{\mathrm{FPdim}(\mathcal{C})} = \mathrm{d}_X^2$, y este último es un entero algebraico. $\square$

Teorema 3.3.8. *Existe una raíz de la unidad $\xi \in \boldsymbol{k}$ tal que la S-matriz S tiene sus entradas en $\mathbb{Q}(\xi)$.*

Demostración. Notemos primero que por la Observación anterior todo morfismo $\mathrm{Gr}(\mathcal{C}) \to \mathbf{k}$ es de la forma $Y \mapsto \frac{s_{XY}}{\mathrm{d}_X}$, para un único $X \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$. Luego, si tenemos $g : \mathbf{k} \to \mathbf{k}$ un morfismo, $g\left(\frac{s_{XY}}{\mathrm{d}_X}\right) = \frac{s_{g(X)Y}}{\mathrm{d}_{g(X)}}$ para un único $g(X) \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$.

Aplicando el automorfismo g a la ecuación (3.12) obtenemos las siguientes igualdades,

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\dim(\mathcal{C})}{\mathrm{d}_X^2}\right) &= g\left(\sum_{Y \in \mathcal{O}(\mathcal{C})} \frac{s_{XY}}{\mathrm{d}_X}\frac{s_{XY^*}}{\mathrm{d}_X}\right) = \sum_{Y \in \mathcal{O}(\mathcal{C})} \frac{s_{g(X)Y}}{\mathrm{d}_{g(X)}}\frac{s_{g(X^*)Y^*}}{\mathrm{d}_{g(X)}} = \\ &= \frac{\delta_{g(X)^*, g(X^*)} \dim(\mathcal{C})}{\mathrm{d}_{g(X)}^2}, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad usamos la ecuación (3.10). Se sigue que $g(X^*) = g(X)^*$ y que $g\left(\frac{\mathrm{d}_X^2}{\dim(\mathcal{C})}\right) = \frac{\mathrm{d}_{g(X)}^2}{\dim(\mathcal{C})}$, para todo $X \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} g\left(\frac{s_{XY}^2}{\dim(\mathcal{C})}\right) &= g\left(\left(\frac{s_{XY}}{\mathrm{d}_Y}\right)^2 \frac{\mathrm{d}_Y^2}{\dim(\mathcal{C})}\right) = g\left(\frac{s_{XY}}{\mathrm{d}_Y}\right)^2 g\left(\frac{\mathrm{d}_Y^2}{\dim(\mathcal{C})}\right) = \\ &= \left(\frac{s_{Xg(Y)}}{\mathrm{d}_{g(Y)}}\right)^2 \frac{\mathrm{d}_{g(Y)}^2}{\dim(\mathcal{C})} = \frac{s_{Xg(Y)}^2}{\dim(\mathcal{C})}. \end{aligned}$$

Sea $\bar{s}_{XY} := \frac{s_{XY}}{\sqrt{\dim(\mathcal{C})}}$ para $X, Y \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$. Como $\bar{s}_{\mathbf{11}} := \frac{1}{\sqrt{\dim(\mathcal{C})}}$, la extensión de $\mathbb{Q}$ generada por todas las entradas s_{XY} está contenida en la extensión $L/\mathbb{Q}$ generada por $\bar{s}_{XY},\ X, Y \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$. La cuenta anterior muestra que $g(\bar{s}_{XY}) = \pm \bar{s}_{Xg(Y)}$. Mas aún, el signo $\epsilon_g(X) = \pm 1$ tal que $g(\dim(X)) = \epsilon_g(X)\, \mathrm{d}_{g(X)}$ está bien definido pues $\mathrm{d}_X \neq 0$, y

$$\begin{aligned} g(\bar{s}_{XY}) &= g\left(\frac{\bar{s}_{XY}}{\mathrm{d}_Y}\right) g(\mathrm{d}_Y) = \frac{1}{\sqrt{\dim(\mathcal{C})}} g\left(\frac{s_{XY}}{\mathrm{d}_Y}\right) \epsilon_g(Y)\, \mathrm{d}_{g(Y)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\dim(\mathcal{C})}} \frac{s_{Xg(Y)}}{\mathrm{d}_{g(Y)}} = \epsilon_g(Y) \bar{s}_{Xg(Y)} = \epsilon_g(X) \bar{s}_{g(X)Y}. \end{aligned}$$

En particular, tenemos que $L/\mathbb{Q}$ es una extensión finita y normal, es decir, es una extensión Galois.
Sea ahora f otro automorfismo de $\mathbf{k}$. Entonces por la cuenta anterior,

$$gf(\bar{s}_{XY}) = g(\epsilon_f(Y)\bar{s}_{Xf(Y)}) = \epsilon_g(X)\epsilon_f(Y)\bar{s}_{g(X)f(Y)}, \text{ y}$$

$$fg(\bar{s}_{XY}) = g(\epsilon_g(X)\bar{s}_{g(X)Y}) = \epsilon_f(Y)\epsilon_g(X)\bar{s}_{g(X)f(Y)}.$$

Así, $fg = gf$, por lo que $L/\mathbb{Q}$ es una extensión abeliana. Ahora, el Teorema de Kronecker-Weber nos dice que toda extensión abeliana finita de $\mathbb{Q}$ es un subcuerpo de un cuerpo ciclotómico. Esto significa que existe una raíz de la unidad ξ tal que la extensión $L/\mathbb{Q}$ está contenida en $\mathbb{Q}(\xi)$, lo cual implica el enunciado. □

3.4 | Sumas de Gauss

Sea $\mathcal{C}$ una categoría pre-modular sobre $\mathbb{C}$. Denotemos por $\mathcal{O}(\mathcal{C}) = \{X_i\}$ al conjunto de clases de isomorfismo de objetos simples.

Definición 3.4.1. Al número $|\mathcal{O}(\mathcal{C})|$ lo llamaremos el *rango* de la categoría $\mathcal{C}$.

Definición 3.4.2. Definimos las *sumas de Gauss* de $\mathcal{C}$ como $p^{\pm} = \sum_{X\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} \theta_X^{\pm} d_X^2$.

A continuación, veremos algunas de las propiedades básicas de las sumas de Gauss.

Lema 3.4.3. *Dada $\mathcal{C}$ una categoría premodular, para todo $Y \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$ se tiene que*

$$\sum_{X\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} \theta_X d_X s_{XY} = d_Y \theta_Y^{-1} p^+. \tag{3.14}$$

Demostración. Se sigue de la ecuación de balance (ver Proposición 3.2.5) que las entradas de la S-matriz satisfacen $s_{XY} = \theta_X^{-1}\theta_Y^{-1} \sum_{Z\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} N_{XY}^Z \theta_Z d_Z$. Luego, multiplicando por $\theta_X d_X$ a ambos lados y sumando sobre $X \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$, tenemos

$$\sum_{X\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} \theta_X d_X s_{XY} = \theta_Y^{-1} \sum_{X\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} d_X \sum_{Z\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} N_{XY}^Z \theta_Z d_Z = \theta_Y^{-1} \sum_{Z\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} \left(\sum_{X\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} N_{ZY^*}^X d_X \right) \theta_Z d_Z. \tag{3.15}$$

Como $Z \otimes Y^* = \sum_{X\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} N_{ZY^*}^X X$, tomando dimensión a ambos lados resulta

$$d_Z d_Y = \sum_{X\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} N_{ZY^*}^X d_X. \tag{3.16}$$

Combinando esto con ecuación (3.15) resulta

$$\sum_{X\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} \theta_X d_X s_{XY} = \theta_Y^{-1} d_Y \sum_{Z\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} d_Z^2 \theta_Z = \theta_Y^{-1} d_Y p^+.$$

□

La siguiente Proposición relaciona las sumas de Gauss de la categoría $\mathcal{C}$ con su dimensión cuántica.

Proposición 3.4.4. *Dada $\mathcal{C}$ una categoría modular, tenemos que*

$$p^+p^- = \dim(\mathcal{C}). \tag{3.17}$$

Demostración. Multiplicando la fórmula 3.14 por d_Y y sumando sobre $Y \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$, tenemos

$$\begin{aligned}
p^+p^- &= \sum_{Y\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} d_Y^2\theta_Y^{-1}p^+ = \sum_{X\in\mathcal{O}(\mathcal{C})}\left(\sum_{Y\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} s_{XY}d_Y\right)\theta_X d_X \\
&= \sum_{X\in\mathcal{O}(\mathcal{C})}\left(\sum_{Y\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} s_{XY}s_{\mathbf{1}Y}\right)\theta_X d_X = \sum_{X\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} \delta_{X\mathbf{1}}\theta_X d_X \dim(\mathcal{C}) \\
&= \theta_{\mathbf{1}}d_{\mathbf{1}}\dim(\mathcal{C}) = \dim(\mathcal{C}).
\end{aligned}$$

□

Corolario 3.4.5. *Para toda categoría modular $\mathcal{C}$ se cumple que*

$$S^2 = p^+p^-C. \tag{3.18}$$

Demostración. Es una consecuencia inmediata de las Proposiciones 3.3.2 y 3.4.4. □

Corolario 3.4.6. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría modular. Entonces para todo $X \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$,*

$$\sum_{Y\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} d_Y\theta_Y^{-1}s_{YZ} = d_Z\theta_Z p^-. \tag{3.19}$$

Demostración. Multiplicando la fórmula (3.14) por s_{Y^*Z} y sumando sobre $Y \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$, resultan las igualdades

$$\begin{aligned}
p^+\sum_{Y\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} d_Y\theta_Y^{-1}s_{Y^*Z} &= \sum_{X\in\mathcal{O}(\mathcal{C})}\theta_X d_X \sum_{Y\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} s_{XY}s_{Y^*Z} \\
&= \theta_Z d_Z \dim(\mathcal{C}) = \theta_Z d_Z p^+p^-.
\end{aligned}$$

□

Así como la S-matriz es un invariante importante para categorías modulares, también lo es la T-matriz, que definiremos a continuación.

Definición 3.4.7. Dada $\mathcal{C}$ una categoría pre modular, definimos la *T-matriz* de $\mathcal{C}$ como la matriz diagonal con entradas $T_{XY} = \delta_{XY}\theta_Y$ para $X, Y \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$.

Tenemos las siguientes relaciones entre las matrices S y T.

Teorema 3.4.8. *Dada $\mathcal{C}$ una categoría modular, se cumple que*

1. $(ST^{-1})^3 = p^-S^2$;
2. $CT = TC$.

Demostración. Tenemos que

$$(ST^{-1}S)_{XY} = \sum_{Z,W\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} s_{XZ}\delta_{ZW}\theta_W^{-1}s_{WY} = \sum_{Z\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} s_{XZ}\theta_Z^{-1}s_{ZY}$$

Ahora, usando primero la Proposición 3.2.6 y luego la ecuación (3.19), resulta

$$\begin{aligned}(ST^{-1}S)_{XY} &= \sum_{Z\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} \theta_Z^{-1}d_Z \sum_{W\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} N_{XY}^W s_{ZW}\\ &= \sum_{W\in\mathcal{O}(\mathcal{C})}\left(\sum_{Z\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} d_Z\theta_Z^{-1}s_{ZW}\right)N_{XY}^W\\ &= p^-\sum_{W\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} d_W\theta_W N_{XY}^W = p^-\theta_X\theta_Y s_{XY}\\ &= p^-(TST)_{XY},\end{aligned}$$

para todo $X, Y \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$. Es decir, $ST^{-1}S = p^-TST$. Luego, $(ST^{-1})^3 = p^-S^2$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}(CT)_{XY} &= \sum_{Z\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} \delta_{XZ^*}\theta_Y\delta_{ZY} = \delta_{XY^*}\theta_Y, \text{ y}\\ (TC)_{XY} &= \sum_{Z\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} \delta_{XZ}\theta_Z\delta_{ZY^*} = \delta_{XY^*}\theta_Y,\end{aligned}$$

para todo $X, Y \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$. Por lo tanto $CT = TC$. □

3.5 | Indicadores de Frobenius-Schur

Los indicadores de Frobenius-Schur son invariantes de categorías esféricas, introducidos por Ng y Shauenburg en [NS3], que generalizan la noción de indicadores de Frobenius-Schur para representaciones de grupos finitos y álgebras de Hopf. Están definidos para cada objeto en una categoría pivotal. Por simplicidad, daremos la definición de estos indicadores en una categoría pivotal *estricta*.

Para un grupo finito G, el n-ésimo indicador de Frobenius Schur de una representación V sobre $\mathbb{C}$ con caracter χ_V está dado por

$$\nu_n := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_V(g^n).$$

El Teorema de Frobenius-Schur afirma que el segundo indicador ν_2 de una representación irreducible V debe ser -1,0 o 1.

Dado n un entero y V un objeto en una categoría esférica estricta $\mathcal{C}$ sobre $\mathbb{C}$, denotamos por $V^{\otimes n}$ el producto tensorial n-ésimo de V. Podemos definir el operador $\mathbb{C}$-lineal $E_X^{(n)}$: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}, X^{\otimes n}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}, X^{\otimes n})$ dado por la siguiente composición,

$$E_X^{(n)}(f) = \mathbf{1} \xrightarrow{\mathrm{coev}_X} X^*\otimes X \xrightarrow{\mathrm{Id}_{X^*}\otimes f\otimes \mathrm{Id}_X} X^*\otimes X^{\otimes n+1} \xrightarrow{\mathrm{ev}_X\otimes \mathrm{Id}_X^{\otimes n}} X^{\otimes n}.$$

Definición 3.5.1. Definimos al n-ésimo *indicador de Frobenius-Schur* de $X\in\mathcal{C}$ como

$$\nu_n(X) = \mathrm{Tr}(E_X^{(n)}). \tag{3.20}$$

Se sigue del cálculo gráfico que $(E_X^{(n)})^n = \mathrm{Id}$, por lo que $\nu_n(X)$ es un entero algebraico en el n-ésimo cuerpo ciclotómico $\mathbb{Q}_n = \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{n}})$.
El primer indicador $\nu_1(X)$ es la función delta de Kronecker $\delta_{\mathbf{1}X}$ en $\mathcal{O}(\mathcal{C})$), i.e., $\nu_1(X) = 1$ si $X \simeq \mathbf{1}$ y 0 en caso contrario. El segundo indicador es consistente con el clásico indicador de Frobenius-Schur de una representación irreducible de un grupo, dado por la fórmula

$$\nu_2(X) = \begin{cases} \pm 1 & \text{si } X \simeq X^*, \\ 0 & \text{si } X \not\simeq X^*. \end{cases} \tag{3.21}$$

La defición clásica de exponente de un grupo finito puede ser generalizada a una categoría esférica por medio del siguiente teorema.

Teorema 3.5.2. [NS1, Definition 5.1, Theorem 5.5] *Sea $\mathcal{C}$ una categoría esférica. Existe un entero positivo n tal que $\nu_n(X) = \dim(X)$, para todo $X \in \mathcal{C}$. Si N es el mínimo entre dichos n, entonces $\dim(X)$ es un entero algebraico en $\mathbb{Q}_N$ para todo $X \in \mathcal{C}$.*

El mínimo entero N se llama el *exponente de Frobenius Schur* y se denota por $\mathrm{FSexp}(\mathcal{C})$. Si $\mathcal{C}$ es la categoría de representaciones complejas de un grupo finito G, entonces $\mathrm{FSexp}(\mathcal{C}) = \exp(G)$, donde exp es el clásico exponente de grupos.
Del teorema anterior se desprende también que $\dim(\mathcal{C})$ es un entero algebraico en $\mathbb{Q}_N$.

En una categoría modular $\mathcal{C}$ es posible calcular los indicadores de Frobenius-Schur de los objetos simples en términos de las dimensiones, los twist y las reglas de fusión en $\mathcal{C}$. Específicamente, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.5.3. [NS1, Theorem 7.5] *Sea $\mathcal{C}$ una categoría modular con T matriz dada por $T_{XY} = \delta_{XY}\theta_X$ para $X, Y \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$. Entonces el orden de T es igual a $\mathrm{FSexp}(\mathcal{C})$, y*

$$\nu_n(Z) = \frac{1}{\dim(\mathcal{C})} \sum_{X,Y \in \mathcal{O}(\mathcal{C})} N_{X,Y}^Z d_X d_Y \left(\frac{\theta_X}{\theta_Y}\right)^n,$$

para todo $Z \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$ y n entero positivo.

Notemos que como Corolario del Teorema anterior el orden de la T-matriz de la categoría es finito.

3.6 | Centralizadores en categorías modulares

Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión trenzada y sea $\mathcal{K}$ una subcategoría de fusión de $\mathcal{C}$. En [Mu2], M. Müger introdujo el concepto de *centralizador* $\mathcal{K}'$ de $\mathcal{K}$, definido como la subcategoría de fusión de $\mathcal{C}$ cuyos objetos son todos los objetos Y en $\mathcal{C}$ que satisfacen

$$\sigma_{YX}\sigma_{XY} = \mathrm{id}_{X\otimes Y}, \quad \text{para todo} X \in \ \mathcal{K}. \tag{3.22}$$

Dados un par de objetos X, Y en $\mathcal{C}$, decimos que se *centralizan mutuamente* si se cumple la igualdad (3.22).
En particular, si $\mathcal{C}$ tiene una estructura ribbon compatible, la condición (3.22) equivale a que $s_{XY} = \dim(X)\dim(Y)$, ver [Mu2, Proposition 2.5].
Por [Mu2, Theorem 3.2], para toda subcategoría de fusión $\mathcal{K}$ de una categoría modular $\mathcal{C}$ se cumplen:

1. $\mathcal{K} = \mathcal{K}''$, y
2. $\dim(\mathcal{K})\dim(\mathcal{K}') = \dim(\mathcal{C})$.

Si $\mathcal{C}$ es una categoría modular, por [GN, Corollary 6.9], el centralizador de la subcategoría adjunta es la subcategoría punteada y viceversa. Es decir,

$$\mathcal{C}_{pt} = \mathcal{C}'_{ad} \text{ y } \mathcal{C}'_{pt} = \mathcal{C}_{ad}. \tag{3.23}$$

Recordemos que una categoría monoidal trenzada $\mathcal{K}$ es *simétrica* si

$$\sigma_{Y,X}\sigma_{X,Y} = \mathrm{id}_{X\otimes Y},$$

para todo $X, Y \in \mathcal{K}$. Por lo tanto, $\mathcal{K}$ es simétrica si y sólo si $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}'$. En particular, una categoría monoidal $\mathcal{C}$ es simétrica si y sólo si es igual a su centralizador, es decir, $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$.

Más aún, $\mathcal{K}$ es modular si y sólo si $\mathcal{K} \cap \mathcal{K}' =$ Vec. En particular, esto nos dice que $\mathcal{C}$ es modular si y sólo si $\mathcal{C}' =$ Vec. Además, si $\mathcal{K}$ es una subcategoría modular de $\mathcal{C}$ entonces $\mathcal{K}'$ es también modular y tenemos una equivalencia $\mathcal{C} \simeq \mathcal{K} \boxtimes \mathcal{K}'$ como categorías trenzadas.

Introducimos el siguiente resultado útil para trabajar con categorías de dimensión impar.

Lema 3.6.1. [DGNO1, Corollary 2.7] *Sea $\mathcal{K}$ una categoría simétrica con estructura esférica canónica. Si la dimensión de $\mathcal{C}$ es impar entonces*

$$\theta_X = \mathrm{id}_X \text{ para todo } X \text{ en } \mathcal{K}. \tag{3.24}$$

3.7 Representaciones modulares

Recordamos la presentación del grupo $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ por generadores y relaciones:

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \simeq < \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \mid \mathfrak{s}^4 = 1,\ (\mathfrak{s}\mathfrak{t})^3 = \mathfrak{s}^2 > .$$

En concreto, podemos considerar los generadores

$$\mathfrak{s} := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathfrak{t} := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dada una categoría modular $\mathcal{C}$, consideramos a la S-matriz y la T-matriz como elementos de $GL(\Pi_{\mathcal{C}}, \mathbb{C})$. Además denotamos por η a la proyección canónica

$$\eta\colon GL(\Pi_{\mathcal{C}}, \mathbb{C}) \to PGL(\Pi_{\mathcal{C}}, \mathbb{C}) := GL(\Pi_{\mathcal{C}}, \mathbb{C})/Z(\Pi_{\mathcal{C}}, \mathbb{C}),$$

donde $Z(\Pi_{\mathcal{C}}, \mathbb{C})$ es el subgrupo de todas las transformaciones escalares $\mathbb{C}$-lineales no nulas de $\Pi_{\mathcal{C}}$.

Las relaciones probadas en el Corolario 3.4.5 y el Teorema 3.4.8 garantizan que

$$\bar{\rho}_{\mathcal{C}} : \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \to PGL(\Pi_{\mathcal{C}}, \mathbb{C}), \qquad \mathfrak{s} \mapsto \eta(S), \quad \mathfrak{t} \mapsto \eta(T) \tag{3.25}$$

define una representación proyectiva de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$.

Definición 3.7.1. [NS2] Una *representación modular* de $\mathcal{C}$ es una representación ρ de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\bar{\rho_{\mathcal{C}}}"'] & GL(\Pi_{\mathcal{C}},\mathbb{C}) \arrow[d, "\eta"] \\ & PGL(\Pi_{\mathcal{C}},\mathbb{C}). \end{tikzcd} \tag{3.26}$$

Dada $\xi \in \mathbb{C}$ una raíz sexta de $\frac{p^+}{p^-}$ (que es una raíz de la unidad), para cualquier raíz doceava de la unidad x, se sigue del Corolario 3.4.5 y el Teorema 3.4.8 que las asignaciones

$$\rho_x^\xi : \mathfrak{s} \mapsto \frac{\xi^3}{x^3 p^+} S, \quad \mathfrak{t} \mapsto \frac{x}{\xi} T \tag{3.27}$$

definen una representación modular de $\mathcal{C}$. Más aún, $\{\rho_x^\xi / x^{12} = 1\}$ es el conjunto completo de representaciones modulares de $\mathcal{C}$ ([DLN, Section 1.3]). Ahora, $\frac{\xi^3}{p^+} = \pm \frac{1}{\sqrt{p^+ p^-}} = \pm \frac{1}{\sqrt{\dim(\mathcal{C})}}$. Por lo tanto, podemos elegir una raíz sexta de la unidad x tal que $\rho_x^\xi : \mathfrak{s} \mapsto \frac{S}{\sqrt{\dim(\mathcal{C})}}$. Entonces existe y raíz de la unidad tal que $\rho_x^\xi : \mathfrak{t} \mapsto \frac{T}{y}$.

Definición 3.7.2. Sea ρ una representación modular de la categoría modular $\mathcal{C}$, y consideremos

$$s = \rho(\mathfrak{s}) \text{ y } t = \rho(\mathfrak{t}). \tag{3.28}$$

El par (s,t) recibe el nombre de *par modular normalizado* de $\mathcal{C}$.

Es claro que toda representación ρ está determinada por el par (s,t).

Observación 3.7.3. Por lo anterior, existe una raíz de la unidad y tal que $(S/D, T/y)$ es un par modular normalizado de $\mathcal{C}$.

4 | El Teorema de Cauchy

Un resultado clásico de la teoría de grupos finitos es el Teorema de Cauchy, que afirma que si G es un grupo finito y p es un número primo que divide al orden de G, entonces G contiene un elemento de orden p. Este teorema está relacionado con el teorema de Lagrange, que dice que el orden de todo subg]rupo de un grupo finito de G divide al orden de G.

Uno de los objetivos de este capítulo es introducir dos versiones del Teorema de Cauchy para categorías de fusión. El segundo objetivo es presentar resultados propios que pudimos deducir usando estos Teoremas como herramientas fundamentales.

En la primera sección expondremos una de las versiones del Teorema de Cauchy, desarrollada por Ng y Schauenburg en [NS1] para categorías de fusión íntegras. En este caso, el Teorema de Cauchy establece que los números enteros $\mathrm{FSexp}(\mathcal{C})$ y $\dim(\mathcal{C})$ de la categoría $\mathcal{C}$ tienen los mismos divisores primos. Utilizando este Teorema como herramienta presentaremos dos resultados propios que implican nilpotencia y solubilidad, respectivamente, de categorías modulares íntegras.

La siguiente sección contiene la segunda versión del Teorema de Cauchy que generaliza la anterior para categorías de fusión esféricas, demostrada por Bruillard, Ng, Rowell y Wang en [BNRW]. Dada una categoría de fusión esférica $\mathcal{C}$, esta generalización establece que los factores primos de $N = \mathrm{FSexp}(\mathcal{C})$ y $\dim(\mathcal{C})$ en el anillo de Dedekind $\mathcal{O}_N$ son los mismos. Una observación importante es que en este caso el cuerpo de números sobre el que se trabaja deja de ser $\mathbb{Q}$. Luego determinar los divisores primos de $\dim(\mathcal{C})$ se complica.

En la última sección presentaremos una versión propia del Teorema de Cauchy. Este juega un papel intermedio entre las dos versiones ya conocidas, dado que se aplica a categorías de fusión esféricas débilmente íntegras. La importancia de este resultado radica en que, a diferencia del Teorema de Cauchy para categorías de fusión esféricas, podemos relacionar los divisores primos de $N = \mathrm{FSexp}(\mathcal{C})$ y $\dim(\mathcal{C})$ en $\mathbb{Z}$, obviando la complejidad de factorizarlos en $\mathcal{O}_N$. Gracias a este resultado pudimos probar una condición que garantiza integrabilidad para categorías modulares débilmente íntegras, en términos del orden de la T-matriz. Además pudimos generalizar a categorías modulares débilmente íntegras las condiciones de nilpotencia y solubilidad obtenidas en la primer sección.

4.1 | Teorema de Cauchy para categorías de fusión íntegras

Comenzaremos esta sección introduciendo una primer versión del Teorema de Cauchy realizada por S.-H. Ng y P. Schauenburg en [NS1] para categorías esféricas íntegras.

Teorema 4.1.1 (Teorema de Cauchy, [NS1, Theorem 8.4])**.** *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión esférica sobre $\mathbb{C}$. Supongamos que $\mathcal{C}$ es íntegra. Entonces* $\mathrm{FSexp}(\mathcal{C})$ *y* $\dim(\mathcal{C})$ *tienen el mismo conjunto de factores primos.*

Observación 4.1.2. Si $\mathcal{C}$ es la categoría de representaciones de dimensión finita de un grupo finito G, entonces $\mathrm{FSexp}(\mathcal{C}) = \exp(G)$ y $\dim(\mathcal{C}) = |G|$. El teorema anterior implica que p es un factor primo de $|G|$ si y sólo si $p|\exp(G)$. Esto es equivalente al teorema de Cauchy para grupos finitos.

A partir de este resultado pudimos probar condiciones suficientes para que una categoría modular íntegra sea nilpotente (y por lo tanto de tipo grupo) y soluble, respectivamente, a raíz de conocer el orden de su T-matriz. Daremos a continuación dichos resultados propios.

Teorema 4.1.3. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría modular íntegra, y sea N el orden de su T-matriz. Si $N = p^a$ con p primo, entonces $\mathcal{C}$ es nilpotente y por lo tanto de tipo grupo.*

Demostración. Como $\mathcal{C}$ es modular, por el Teorema 3.5.3 tenemos $N = \mathrm{FSexp}(\mathcal{C})$. Luego, del Teorema de Cauchy para categorías de fusión íntegras (Teorema 4.1.1) se sigue $\dim(\mathcal{C}) = p^b$ para algún $b \in \mathbb{N}$.
Por otro lado, $\mathcal{C}$ es pseudo-unitaria por ser íntegra (ver Teorema 2.5.3), y se sigue $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = \dim(\mathcal{C}) = p^b$. Así, $\mathcal{C}$ es nilpotente por el Teorema 2.6.7. Finalmente, por el Teorema 2.6.9 sabemos que $\mathcal{C}$ es de tipo grupo. □

Teorema 4.1.4. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría modular íntegra, y sea N el orden de la T-matriz. Si $N = p^a q^b$ con p y q primos, entonces $\mathcal{C}$ es soluble.*

Demostración. Usando el mismo argumento que la prueba anterior, resulta $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = \dim(\mathcal{C}) = p^c q^d$ para ciertos $c, d \in \mathbb{N}$. Luego $\mathcal{C}$ es soluble por el Teorema 2.6.14 (Teorema de Burnside para categorías). □

4.2 | Teorema de Cauchy para categorías de fusión esféricas

El teorema de Cauchy para categorías de fusión esféricas fue demostrado por Bruillard, Ng, Rowell y Wang en [BNRW]. Así como el Teorema de Cauchy para categorías de fusión íntegras establece que los números enteros $\mathrm{FSexp}(\mathcal{C})$ y $\dim(\mathcal{C})$ tienen los mismos divisores primos, la generalización hecha en [BNRW] establece que los factores primos de $N = \mathrm{FSexp}(\mathcal{C})$ y $\dim(\mathcal{C})$ en el anillo de Dedekind $\mathcal{O}_N$ son los mismos.

Dedicaremos esta sección a enunciar y presentar la demostración de dicha versión del Teorema de Cauchy desarrollada en [BNRW]. Esta prueba es muy interesante, ya que muestra una fuerte conexión entre la teoría de categorías de fusión esféricas, teoría algebraica de números y teoría de Galois. Organizaremos la demostración de manera similar a [BNRW]; primero probaremos una serie de resultados previos y concluiremos con la demostración del Teorema.

Recordemos que dados a, b, c números enteros, a y b se dicen congruentes módulo c si c divide a $a - b$. Denotaremos esta noción por $a \equiv b \mod c$.

Lema 4.2.1. *Sea W un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita. Si E es un operador $\mathbb{C}$-lineal en W tal que $E^q = \mathrm{Id}_W$ para algún primo q, entonces*

$$\mathrm{Tr}(E)^q \equiv \dim_{\mathbb{C}} W \mod q.$$

En particular, si $\mathrm{Tr}(E) \in \mathbb{Z}$, entonces $\mathrm{Tr}(E) \equiv \dim_{\mathbb{C}} W \mod q$.

Demostración. Sea $\xi_q \in \mathbb{C}$ una raíz q-ésima primitiva de la unidad. Como $E^q = \mathrm{Id}_W$, los autovalores de E son de la forma ξ_q^i. Luego, $\mathrm{Tr}(E) = \sum_{i=0}^{q-1} m_i \xi_q^i$, donde m_i es la multiplicidad de ξ_q^i para $i = 0, \cdots, q-1$. Por lo tanto,

$$\mathrm{Tr}(E)^q \equiv \left(\sum_{i=0}^{q-1} m_i \xi_q^i\right)^q \equiv \sum_{i=0}^{q-1} m_i^q \equiv \sum_{i=0}^{q-1} m_i = \dim_{\mathbb{C}} W \mod q,$$

donde la tercer congruencia sigue del Pequeño Teorema de Fermat. Esto prueba la primer afirmación. La segunda afirmación es una consecuencia del Pequeño Teorema de Fermat. □

Lema 4.2.2. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría modular, y sea q un primo positivo que no divide a* $\mathrm{FSexp}(\mathcal{C})$. *Entonces, para todo $X \in \mathcal{C}$, se cumple $\nu_q(X) \in \mathbb{Z}$ y*

$$\nu_q(X) \equiv \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}, X^{\otimes q}) \mod q. \tag{4.1}$$

Demostración. Recordemos que el n-ésimo indicador de Frobenius-Schur para un objeto $X \in \mathcal{C}$ está dado por la traza del operador $\mathbb{C}$-lineal $E_X^{(n)} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}, X^{\otimes n}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}, X^{\otimes n})$. Este operador cumple que $(E_X^{(n)})^n = \mathrm{Id}$, por lo que $\nu_n(X)$ es un entero algebraico en el n-ésimo cuerpo ciclotómico $\mathbb{Q}_n := \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{n}})$.

Por otro lado, si denotamos por N al exponente de Frobenius-Schur de $\mathcal{C}$, tenemos por Teorema 3.5.2 que $\nu_q(X)$ es un entero algebraico en $\mathbb{Q}_N$. Pero, como q y N son coprimos, $\mathbb{Q}_q \cap \mathbb{Q}_N = \mathbb{Q}$. Luego, al ser $\nu_q(X)$ un entero algebraico en $\mathbb{Q}_q \cap \mathbb{Q}_N = \mathbb{Q}$, resulta que $\nu_q(X) \in \mathbb{Z}$. La segunda parte del enunciado se sigue del lema anterior. □

Para lo que sigue, necesitamos introducir más notación. Sea $\mathcal{O}_N$ el anillo de enteros algebraicos de $\mathbb{Q}_N$. Es bien sabido que $\mathcal{O}_N = \mathbb{Z}[\xi_N]$, donde ξ_N es una raíz N-ésima primitiva de la unidad en $\mathbb{C}$. Extendiendo escalares, consideramos la $\mathcal{O}_N$-álgebra $K_N(\mathcal{C}) = \mathrm{Gr}(\mathcal{C}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_N$. Notemos que $K_N(\mathcal{C})$ es un $\mathcal{O}_N$-módulo libre con base $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}$, el conjunto de clases de isomorfismo de objetos simples de $\mathcal{C}$.

Dados $\alpha, \beta \in K_N(\mathcal{C})$ y un elemento no nulo $a \in \mathcal{O}_N$, escribimos $\alpha \equiv \beta \mod a$ si $\alpha - \beta = a\gamma$ para algún $\gamma \in K_N(\mathcal{C})$.

Consideremos el morfismo de grupos $\nu_q : \mathrm{Gr}(\mathcal{C}) \to \mathbb{Z}$. Extendemos ν_q a un mapa $\mathcal{O}_N$-lineal de $K_N(\mathcal{C})$ a $\mathcal{O}_N$, y continuamos denotándolo por ν_q. Extendemos también el morfismo $\mathrm{d} : \mathrm{Gr}(\mathcal{C}) \to \mathcal{O}_N$, que asigna a cada $X \in \mathrm{Gr}(\mathcal{C})$ su dimensión cuántica, a un mapa $\mathcal{O}_N$-lineal de $K_N(\mathcal{C})$ a $\mathcal{O}_N$, y este último resulta un morfismo de $\mathcal{O}_N$-álgebras.

Sea $\alpha = \sum_{X \in \mathcal{O}(\mathcal{C})} \alpha_X X \in K_N(\mathcal{C})$, donde $\alpha_X \in \mathcal{O}_N$ para todo $X \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$. Definimos $\delta(\alpha) = \alpha_{\mathbf{1}}$. Denotamos por $\delta : K_N(\mathcal{C}) \to \mathcal{O}_N$ a este mapa $\mathcal{O}_N$-lineal.

Lema 4.2.3. *Todo $\alpha \in K_N(\mathcal{C})$ cumple*

$$\delta(\alpha^q) \equiv \sigma_q(\nu_q(\alpha)) \mod q,$$

donde $\sigma_q \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_N/\mathbb{Q})$ está definida por $\sigma_q(\xi_N) = \xi_N^q$.

Demostración. Escribimos $\alpha = \sum_{X\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} \alpha_X X \in K_N(\mathcal{C})$. Entonces $\alpha^q \equiv \sum_{X\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} \alpha_X^q X^q \mod q$. Como δ es $\mathcal{O}_N$-lineal, tenemos

$$\delta(\alpha^q) \equiv \delta\left(\sum_{X\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} \alpha_X^q X^q\right) \equiv \sum_{X\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} \alpha_X^q \delta(X^q) \mod q.$$

Por definición, $\delta(X^q) = \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}, X^{\otimes q})$ para todo $X \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$. Luego, del Lema 4.2.2, se sigue que $\delta(X^q) \equiv \nu_q(X) \mod q$. Reemplazando esto en la ecuación anterior obtenemos

$$\delta(\alpha^q) \equiv \sum_{X\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} \alpha_X^q \delta(X^q) \equiv \sum_{X\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} \alpha_X^q \nu_q(X) \mod q.$$

Por otro lado, todo $a \in \mathcal{O}_N$ puede expresarse como $a = \sum_j a_j \xi_N^j$, donde j varía en $\{1, \dots, N\}$ y $a_j \in \mathbb{Z}$ para todo j. Elevando esta expresión a la potencia q y aplicando el Pequeño Teorema de Fermat resulta

$$a^q \equiv \sum_j a_j^q \xi_N^{qj} \equiv \sum_j a_j \sigma_q(\xi_N^j) \equiv \sigma_q(a) \mod q.$$

Por lo tanto, usando la $\mathcal{O}_N$-linealidad de ν_q y que $\nu_q(X) \in \mathbb{Z}$, para todo $X \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$, al combinar las dos ecuaciones anteriores obtenemos

$$\delta(\alpha^q) \equiv \sum_{X\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} \alpha_X^q \nu_q(X) \equiv \sum_{X\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} \sigma_q(\alpha_X)\nu_q(X) \equiv \sigma_q\left(\sum_{X\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} \alpha_X \nu_q(X)\right) \equiv \sigma(\nu_q(\alpha)) \mod q.$$

□

Por simplicidad, denotemos $d_i = d_{X_i}$ para todo $X_i \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$. Sea $R = \sum_{X_j\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} d_j X_j$, el *elemento regular* de $\mathrm{Gr}(\mathcal{C})$. Por [NS1], sabemos que $d_j \in \mathcal{O}_N$, para todo $X_j \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$, por lo que R es un elemento de $K_N(\mathcal{C})$. Además $X_i R = d_i R$ para todo $X_i \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$. En efecto,

$$\begin{aligned} X_i R &= \sum_{X_j\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} d_j X_i X_j = \sum_{X_j\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} d_j \sum_{X_k\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} N_{ij}^k X_k = \sum_{X_k\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} \left(\sum_{X_j\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} d_j N_{ij}^k\right) X_k \\ &= \sum_{X_k\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} d_k d_i X_k = d_i R, \end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad resulta de aplicar la ecuación (3.16).

Por lo tanto R define un ideal de rango 1 en $K_N(\mathcal{C})$. Más precisamente, $\alpha R = d(\alpha) R$ para todo $\alpha \in K_N(\mathcal{C})$, donde $d : K_N(\mathcal{C}) \to \mathcal{O}_N$ es la función de dimensión extendida . En particular, como $d(R) = \dim(\mathcal{C})$, tenemos

$$R^n = R^{n-1} R = d(R^{n-1}) R = \dim(\mathcal{C})^{n-1} R, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ahora demostramos dos propiedades más del elemento regular.

Proposición 4.2.4. *Sea* $R = \sum_{X_j\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} d_i X_j \in K_N(\mathcal{C})$ *y sea* q *un primo que no divide a* N. *Entonces*

$$\sigma_q(\nu_q(R)) \equiv \dim(\mathcal{C})^{q-1} \mod q.$$

Demostración. Vimos que $R^q = \dim(\mathcal{C})^{q-1}R$. Además, $\delta(R) = d_{\mathbf{1}} = 1$, por lo que $\delta(R^q) = \delta(\dim(\mathcal{C})^{q-1}R) = \dim(\mathcal{C})^{q-1}$. Luego, aplicando el Lema 4.2.3, obtenemos

$$\sigma_q(\nu_q(R)) \equiv \delta(R^q) \equiv \dim(\mathcal{C})^{(q-1)} \mod q,$$

como queríamos. □

Sea $\mathcal{C}$ una categoría modular con S-matriz S. Denotemos por s_{ij} a la entrada de la matriz S correspondiende a la columna X_i y fila X_j, donde $X_i, X_j \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$. Para el objeto unidad, fijamos $\mathbf{1} = X_0 \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$. Sea $\mathbf{k}_{\mathcal{C}} = \mathbb{Q}[s_{ij}]$ la menor extensión de $\mathbb{Q}$ que contiene a todas las entradas de la S-matriz. En [RSW], Rowell, Stong y Wang probaron que $\mathrm{Gal}(\mathbf{k}_{\mathcal{C}}/\mathbb{Q})$ es isomorfo a un subrupo abeliano del grupo simétrico $\mathbb{S}_r$, donde r es el rango de $\mathcal{C}$.

Para fijar notación, recordemos que todos los caracteres del anillo de Grothendieck de $\mathcal{C}$ son de la forma

$$X_i \mapsto h_a(X_i) = \frac{s_{ia}}{d_a} = \frac{s_{ia}}{s_{0a}}, \quad X_i \in \mathcal{O}(\mathcal{C}),$$

para algún $X_a \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$ (ver Observación 3.3.6).

Sea $\mathbb{Q}_{ab}$ la clausura abeliana de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{C}$; esto es, la máxima extensión Galois de $\mathbb{Q}$ con grupo de Galois abeliano. Dado $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}_{ab})$, la composición $\sigma(h_a)$ es nuevamente un caracter lineal de $\mathrm{Gr}(\mathcal{C})$, y por lo tanto existe una única $\hat{\sigma} \in \mathbb{S}_r$ tal que $\sigma(h_a) = h_{\hat{\sigma}(a)}$. Es decir,

$$\sigma\left(\frac{s_{ia}}{s_{0a}}\right) = \frac{s_{i\hat{\sigma}(a)}}{s_{0\hat{\sigma}(a)}}, \quad \text{para todos } X_i, X_a \in \mathcal{O}(\mathcal{C}). \tag{4.2}$$

Proposición 4.2.5. *En el contexto anterior,* $\nu_q(R) = d^2_{\hat{\sigma}_q^{-1}}(0)$.

Demostración. En primer lugar, sigue del Teorema 3.5.3 que

$$\begin{aligned}\nu_q(R) = \sum_{X_k \in \mathcal{O}(\mathcal{C})} d_k \nu_q(X_k) &= \frac{1}{\dim(\mathcal{C})} \sum_{X_i, X_j, X_k \in \mathcal{O}(\mathcal{C})} d_k N_{ij}^k d_i d_j \frac{\theta_i^q}{\theta_j^q} \\ &= \frac{1}{\dim(\mathcal{C})} \left(\sum_{X_i \in \mathcal{O}(\mathcal{C})} d_i^2 \theta_i^q\right)\left(\sum_{X_j \in \mathcal{O}(\mathcal{C})} d_j^2 \theta_j^{-q}\right),\end{aligned}$$

donde la última igualdad viene de aplicar la ecuación (3.16).

Sean S y T la S-matriz y T-matriz de $\mathcal{C}$, respectivamente. Como $\mathcal{C}$ es modular, sabemos por la Observación 3.7.3 que podemos elegir y tal que $\mathbf{s} = S/\sqrt{\dim(\mathcal{C})}$ y $\mathbf{t} = T/y$ dan una representación modular de $\mathcal{C}$. En estos términos, la Proposición 3.4.4 resulta

$$\mathbf{s}_{00}^2 = \frac{1}{\dim(\mathcal{C})} = \left(\sum_{X_i \in \mathcal{O}(\mathcal{C})} \mathbf{s}_{0i}^2 \theta_i\right)\left(\sum_{X_j \in \mathcal{O}(\mathcal{C})} \mathbf{s}_{0j}^2 \theta_j^{-1}\right). \tag{4.3}$$

Sea $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}_{ab})$ tal que $\tau|_{\mathbb{Q}_N} = \sigma_q^{-1}$. Aplicando τ a ambos miembros de la ecuación (4.3) obtenemos

$$\tau(\mathbf{s}_{00}^2) = \left(\sum_{X_i \in \mathcal{O}(\mathcal{C})} \mathbf{s}_{0\hat{\tau}(i)}^2 \tau(\theta_i)\right)\left(\sum_{X_j \in \mathcal{O}(\mathcal{C})} \mathbf{s}_{0\hat{\tau}(j)}^2 \tau(\theta_j)^{-1}\right).$$

Por otro lado, aplicando la ecuación (4.2) a la fórmula (4.3) tenemos

$$\tau(\mathbf{s}_{00}^2) = \mathbf{s}_{\hat{\tau}(0)0}^2 = \frac{d_{\hat{\tau}(0)}}{\dim(\mathcal{C})} = d_{\hat{\tau}(0)}\mathbf{s}_{00}^2.$$

Además, como $\tau|_{\mathbb{Q}_N} = \sigma_q^{-1}$, del Teorema [BNRW, Theorem 2.9] sigue

$$\tau(\mathbf{t}_i) = \tau^{-1}\tau^2(\mathbf{t}_i) = \tau^{-1}(\mathbf{t}_{\hat{\tau}(i)}) = \frac{\tau^{-1}(\theta_{\hat{\tau}(i)})}{\tau^{-1}(y)} = \frac{\theta_{\hat{\tau}(i)}^q}{\tau^{-1}(y)}.$$

Además, como $\theta_i = y\mathbf{t}_i$ entonces $\tau(\theta_i) = \tau(y)\tau(\mathbf{t}_i) = \frac{\tau(y)}{\tau^{-1}(y)}\theta_{\hat{\tau}(i)}^q$. Es decir, $\tau(\theta_i^{\pm 1}) = K^{\pm 1}\theta_{\hat{\tau}(i)}^{\pm q}$ para K una constante que no depende de i. Luego,

$$\begin{aligned} d_{\hat{\tau}(0)}\mathbf{s}_{00}^2 &= \left(\sum_{X_i\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} \mathbf{s}_{0\hat{\tau}(i)}^2\tau(\theta_i)\right)\left(\sum_{X_j\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} \mathbf{s}_{0\hat{\tau}(j)}^2\tau(\theta_j)^{-1}\right) \\ &= KK^{-1}\left(\sum_{X_i\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} \mathbf{s}_{00}^2 d_{\hat{\tau}(i)}^2\theta_{\hat{\tau}(i)}^q\right)\left(\sum_{X_j\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} \mathbf{s}_{00}^2 d_{\hat{\tau}(j)}^2\theta_{\hat{\tau}(j)}^{-q}\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} d_{\hat{\tau}(0)} &= \mathbf{s}_{00}^2\left(\sum_{X_i\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} d_i^2\theta_i^q\right)\left(\sum_{X_j\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} d_j^2\theta_j^{-q}\right) = \\ &= \frac{1}{\dim(\mathcal{C})}\left(\sum_{X_i\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} d_i^2\theta_i^q\right)\left(\sum_{X_j\in\mathcal{O}(\mathcal{C})} d_j^2\theta_j^{-q}\right) = \nu_q(R). \end{aligned}$$

□

Recordemos que un dominio de Dedekind es un dominio íntegro en el cual todo ideal propio no nulo se factoriza como producto de ideales primos (y dicha factorización resulta única salvo orden).

Estamos en condiciones de demostrar el resultado que da nombre a esta sección.

Teorema 4.2.6 (Teorema de Cauchy para categorías de fusión esféricas. [BNRW, Theorem 3.9])**.** *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión esférica. Entonces el conjunto de ideales primos que dividen al ideal principal generado por* $\dim(\mathcal{C})$ *es idéntico al del ideal principal generado por el exponente de Frobenius-Schur* $\mathrm{FSexp}(\mathcal{C}) = N$ *en el dominio de Dedekind* $\mathcal{O}_N = \mathbb{Z}[e^{2\pi i/N}]$.

Demostración. Para probar el teorema, comencemos por el caso en el que $\mathcal{C}$ es una categoría modular. Por [E] sabemos que $N|\dim(\mathcal{C})^3$. Luego, todo ideal primo que es un factor del ideal generado por N en $\mathcal{O}_N$ lo es también del ideal generado por $\dim(\mathcal{C})$.

Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo factor de $(\dim(\mathcal{C}))$. Por Proposiciones 4.2.4 y 4.2.5 tenemos

$$\sigma_q(d_i^2) \equiv \sigma_q(\nu_q(R)) \equiv \dim(\mathcal{C})^{2(q-1)} \mod q,$$

donde q es un primo que no divide a N, y $i = \hat{\sigma}_q^{-1}(0)$. Además por [BNRW], d_i es una unidad en $\mathcal{O}_N$. Esto implica la igualdad de ideales $\mathcal{O}_N = (\dim(\mathcal{C})) + \mathfrak{p}$. Se sigue que $(q) \neq \mathfrak{p}$. Por lo tanto existe un primo p que divide a N tal que $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (p)$. Resulta entonces que $\mathfrak{p}$ es un factor primo de (N) en $\mathcal{O}_N$. Esto prueba el teorema para categorías modulares.

Supongamos ahora que $\mathcal{C}$ es una categoría de fusión esférica. Por [Mu1, Theorem 1.2], su centro de Drinfeld $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ es modular, y además $\dim \mathcal{Z}(\mathcal{C}) = \dim(C)^2$. Más aún, por [NS2], $N = \mathrm{FSexp}(\mathcal{C}) = \mathrm{FSexp}(\mathcal{Z}(\mathcal{C}))$. Aplicando el caso modular para $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$, resulta que (N) y $(\dim(\mathcal{C})^2)$ tienen el mismo conjunto de factores primos, y por lo tanto vale el teorema. □

Para ilustrar la importancia de este resultado, consideramos oportuno hacer un breve repaso histórico. En 2003 Zhengan Wang conjeturó que para cada entero positivo r hay una cantidad finita de categorías modulares de rango r, salvo equivalencia. Dos años más tarde, valiéndose de argumentos de teoría de números, Etingof, Nikshych y Ostrik probaron en [ENO2, Proposition 8.38] una versión preliminar de la conjetura de Wang, a saber: existe una cantidad finita de categorías modulares *débilmente íntegras* de rango fijo (pero arbitrario) r.

En 2013 la conjetura de Wang fue demostrada. En el mismo artículo donde probaron el Teorema de Cauchy para categorías de fusión esféricas, Bruillard, Ng, Rowell y el propio Wang demostraron la validez de la conjetura (ver [BNRW, Rank-Finiteness Theorem]). Más aún, el Teorema de Cauchy fue una herramienta fundamental en su demostración.

La conjetura de Wang es un refinamiento de una pregunta establecida un tiempo antes por Ostrik (ver [O]). En *loc. cit.*, el autor prueba que hay una cantidad finita (salvo equivalencia) de categorías de fusión de rango 2, y postula el interrogante de si lo mismo vale fijando un rango arbitrario.

Aunque un análisis detallado excede al alcance de este trabajo, no podemos dejar de mencionar que en febrero de 2019, Jones, Morrison, Nikshych y Rowell probaron que, dado un natural r, hay una cantidad finita de categorías de fusión *trenzadas* de rango r, salvo equivalencia. Referimos a [JMNR] para más detalles.

4.3 | Resultados

Comenzaremos esta sección probando un resultado propio, que juega un papel intermedio entre el Teorema de Cauchy para categorías de fusión íntegras (Teorema 4.1.1) y el Teorma de Cauchy para categorías de fusión esféricas (Teorema 4.2.6).

Teorema 4.3.1. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión esférica débilmente íntegra. Entonces los factores primos de $N = \mathrm{FSexp}(\mathcal{C})$ coinciden con los de $\dim(\mathcal{C})$.*

Demostración. Haremos primero la prueba para el caso modular. En la demostración del Teorema 4.2.6, vimos que si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo que divide a $\dim(\mathcal{C})$ en $\mathcal{O}_N = \mathbb{Z}[\xi_N]$, entonces el ideal $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}$ está generado por un número primo que divide a N.

Luego, si $(\dim(\mathcal{C})) = \mathfrak{p}_1^{a_1} \cdots \mathfrak{p}_k^{a_k}$ es la descomposición en ideales primos de $\dim(\mathcal{C})$ en $\mathcal{O}_N$, existen $q_1, \dots, q_k$ primos que dividen a N tales que

$$(\dim(\mathcal{C})) \supseteq (\dim(\mathcal{C})) \cap \mathbb{Z} \supseteq (\mathfrak{p}_1 \cap \mathbb{Z})^{a_1} \cdots (\mathfrak{p}_k \cap \mathbb{Z})^{a_k} = (q_1)^{a_1} \cdots (q_k)^{a_k}.$$

Por lo tanto, existe $z \in \mathcal{O}_N$ tal que $q_1^{a_1} \cdots q_k^{a_k} = \dim(\mathcal{C})z$. Esto es, $z = \frac{q_1^{a_1} \cdots q_k^{a_k}}{\dim(\mathcal{C})} \in \mathbb{Q} \cap \mathcal{O}_N = \mathbb{Z}$. Así, todos los factores primos de $\dim(\mathcal{C})$ son divisores de N.

Recíprocamente, sea q un factor primo de N. Por [E], N divide a $\dim(\mathcal{C})^3$ en $\mathcal{O}_N$, y entonces q divide a $\dim(\mathcal{C})$ en $\mathbb{Z}$.

Sea ahora $\mathcal{C}$ una categoría de fusión esférica. Por [Mu1, Theorem 1.2], su centro de Drinfeld $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ es modular, y además $\dim \mathcal{Z}(\mathcal{C}) = \dim(\mathcal{C})^2$. Más aún, $N = \mathrm{FSexp}(\mathcal{C}) = \mathrm{FSexp}(\mathcal{Z}(\mathcal{C}))$ por [NS2]. Aplicando el resultado en el caso modular para $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$, resulta que N y $\dim(\mathcal{C})^2$ tienen el mismo conjunto de factores primos, y por lo tanto vale el teorema. □

Como dijimos anteriormente, a diferencia del Teorema de Cauchy para categorías de fusión esféricas, este Teorema intermedio nos permitirá relacionar los divisores primos de $N = \mathrm{FSexp}(\mathcal{C})$ y $\dim(\mathcal{C})$ en $\mathbb{Z}$ para el caso en que $\mathcal{C}$ es una categoría modular débilmente íntegra, obviando la complejidad de factorizarlos en $\mathcal{O}_N$.

Gracias a este resultado pudimos probar la siguiente condición suficiente para integrabilidad de categorías modulares débilmente íntegras, en términos del orden de la T-matriz.

Corolario 4.3.2. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría modular débilmente íntegra con T-matriz de orden impar. Entonces $\mathcal{C}$ es íntegra.*

Demostración. Como $\mathcal{C}$ es modular, por el Teorema 3.5.2 sabemos que $N = \mathrm{FSexp}(\mathcal{C})$. Aplicando el Teorema 4.3.1, resulta que $\dim(\mathcal{C})$ es impar. Además, por la Proposición 2.5.3, $\mathcal{C}$ es pseudo unitaria, es decir, $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = \dim(\mathcal{C})$. Luego $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C})$ es impar, y ahora sabemos por la Proposición 2.5.4 que la $\mathcal{C}$ es íntegra. □

Gracias a los dos resultados anteriores, pudimos generalizar a categorías modulares débilmente íntegras las condiciones suficientes para nilpotencia y solubilidad obtenidas en los Teoremas 4.1.3 y 4.1.4, respectivamente.

Corolario 4.3.3. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría modular débilmente íntegra, y sea N el orden de la T-matriz. Si $N = p^a$ con p primo impar, entonces $\mathcal{C}$ es nilpotente y por lo tanto de tipo grupo.*

Demostración. Como $\mathcal{C}$ es modular, por el Teorema 3.5.2 sabemos que $N = \mathrm{FSexp}(\mathcal{C})$. Luego por el Corolario 4.3.2 $\mathcal{C}$ es íntegra. El resultado sigue del Teorema 4.1.3. □

Corolario 4.3.4. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría modular débilmente íntegra, y sea N el orden de la T-matriz. Si $N = p^a q^b$ con p y q primos impares, entonces $\mathcal{C}$ es soluble.*

Demostración. Análogamente a la demostración anterior, $\mathcal{C}$ resulta íntegra. En este caso el resultado sigue del Teorema 4.1.4. □

5 | Fracciones Egipcias

En este capítulo resumiremos algunos resultados obtenidos para categorías modulares sobre $\mathbb{C}$ por Bruillard y Rowell en [BR]. Este paper da una clasificación de las categorías modulares de dimensión impar con rango menor igual que 11. Para esto, los autores buscan condiciones generales que implican integrabilidad en categorías modulares, y se estudia el problema de clasificación bajo de estas condiciones. La primera de estas condiciones es que el orden de la T-matriz sea 2, 3, 4 o 6, y la segunda que el único objeto auto-dual sea el objeto unidad, que equivale a que la categoría tenga dimensión impar.

Denotamos a las clases de isomorfismo objetos simples de $\mathcal{C}$ por $X_1, \cdots, X_{n-1}, X_n = \mathbf{1}$. Denotaremos además por simplicidad $d_i = \mathrm{d}_{X_i}, \theta_i = \theta_{X_i}$ y $s_{ij} = s_{X_i X_j}$, para todo $i, j \in \{1, \cdots, n\}$.

Empezaremos dando la caracterización de categorías modulares con T-matriz de orden 2,3,4 ó 6. Primero, tenemos el siguiente resultado que implica integrabilidad.

Teorema 5.0.1. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría modular con T-matriz T tal que $T^N = I$, para $N \in \{2, 3, 4, 6\}$. Entonces $\mathcal{C}$ es íntegra.*

Demostración. Primero observemos que por [NS2, Proposition 5.7] las entradas de la S-matriz de $\mathcal{C}$ pertenecen a $\mathbb{Q}(\xi_N)$, donde ξ_N es una raís N-ésima primitiva de la unidad.

Ahora, notemos que para estos posibles valores de N, la función indicatriz de Euler $\phi(N) \leq 2$, y los números s_{ij} son enteros algebraicos. Si $\phi(N) = 1$, tenemos que $\mathbb{Q}(\xi_N) = \mathbb{Q}$ y por lo tanto, $s_{ij} \in \mathbb{Z}$ para todo i, j. Por otro lado, si $\phi(N) = 2$, $\mathbb{Q}(\xi_N)$ es una extensión cuadrática de $\mathbb{Q}$, y por lo tanto si $s_{ij} \in \mathbb{R}$ entonces $s_{ij} \in \mathbb{Z}$.

Como $\mathcal{C}$ es modular y la dimensión de Frobenius-Perron es un caracter de $\mathrm{Gr}(\mathcal{C})$, existe un X_i simple tal que $\mathrm{FPdim}(X_j) = \frac{s_{ij}}{d_i}$, para todo $X_j \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$. Usando el mismo razonamiento que antes, como $d_i \in \mathbb{Q}_N$ se tiene que $d_i \in \mathbb{Z}$, y luego $\mathrm{FPdim}(X_i)$ es un número entero, para todo $X_j \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$. $\square$

Para dar la siguiente clasificación de catagorías modulares con T-matriz de orden 2,3,4 ó 6 se usa fuertemente el teorema anterior.

Teorema 5.0.2. [BR, Theorem 3.2] *Sea $\mathcal{C}$ una categoría modular tal que $T^N = I$, con $N = \{2, 3, 4, 6\}$. Entonces:*

1. *Si $N = 2$ entonces $\mathcal{C}$ es equivalente como categoría tensorial trenzada a una subcategoría de Rep($D^\omega G$), donde G es un 2-grupo abeliano de exponente 2 y $\dim(\mathcal{C}) = 2^{2s}$. Más aún, $\mathcal{C}$ es punteada.*

2. *Si $N = 3$ entonces $\mathcal{C}$ es equivalente como categoría tensorial trenzada a una subcategoría de Rep($D^\omega G$), donde G es un 3-grupo de exponente 3.*

3. *Si $N = 4$ entonces $\mathcal{C}$ es equivalente como categoría tensorial trenzada a una subcategoría de Rep($D^\omega G$), donde G es un 2-grupo de exponente 2 o 4.*

4. *Si $N = 6$ entonces $\mathcal{C}$ es soluble, y por lo tanto débilmente de tipo grupo.*

Observación 5.0.3. Para el caso $N = 6$ el teorema anterior no concluye que $\mathcal{C}$ sea de tipo grupo. De hecho, existen categorías modulares con $T^6 = I$ que no son de tipo grupo (ver [GNN, Example 5.3(a)]).

Sea ahora $\mathcal{C}$ una categoría modular pseudo-unitaria. Por la Proposición 3.3.5, los números $x_i = \frac{\dim(\mathcal{C})}{d_i^2}$ son enteros algebraicos, y por ser racionales resultan enteros. Además satisfacen que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i^2}{\dim(\mathcal{C})} = \frac{\mathrm{FPdim}(\mathcal{C})}{\dim(\mathcal{C})} = 1.$$

Un resultado clásico de Landau [L] establece que la ecuación diofantina $1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}$ tiene una cantidad finita de soluciones tal que $x_i \in \mathbb{N}$, para todo $i = 1, \cdots, n$. Estas soluciones reciben el nombre de *fracciones egipcias*. Más aún, se conoce que la cantidad de soluciones de dicha ecuación es al menos exponencial en n.

En [HR, Lemma 1.2] se muestra que, reordenando en caso de ser necesario de manera que $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n = \dim(\mathcal{C})$, se tiene que

$$k \leq x_k \leq u_k(n-k+1) \text{ para todo } 1 \leq k \leq n,$$

donde $u_1 = 1, u_k = u_{k-1}(u_{k-1}+1)$. Notemos además que $x_n/x_i = d_i^2$ es un cuadrado perfecto, para todo i.
La **solución trivial** $x_1 = ... = x_n = n$ corresponde a una categoría modular punteada de rango n, pues en dicho caso $n = x_n = \dim(\mathcal{C})$ y $d_i = 1$ para todo i.

Toda esta información ha sido resumida en el algoritmo desarrollado por Bruillard y Rowell [BR] para encontrar las posibles soluciones $x_1, ..., x_n$. Ellos lo utilizan para determinar las posibles dimensiones de objetos simples para categorías de rango pequeño. Escribiremos el algoritmo a continuación.

Algoritmo 5.0.4.

1. Definimos $S_2 := \{(j, ji^2)/2 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq \sqrt{u_n/j}\}$. Estas son las posibilidades para los pares (x_1, x_n).

2. Una vez determinado S_k para algún $2 \leq k \leq n-2$, sea S_{k+1} el conjunto de las (k+1)-tuplas $(j_1, ..., j_{k-1}, J, j_k)$ tal que

   a) $(j_1, ..., j_k) \in S_k$,
   b) $\max(j_{k-1}, k) \leq J \leq \min(j_k, u_k(n-k+1))$,
   c) $\sqrt{j_k/J} \in \mathbb{Z}$, y
   d) $\frac{1}{J} + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{x_i} \leq 1$.

3. El conjunto solución S_n es el conjunto de n-tuplas $(j_1, ..., j_{n-2}, J, j_{n-1})$ donde

   a) $(j_1, ..., j_{n-1}) \in S_{n-1}$,
   b) $\max(j_{n-2}, n-1) \leq J \leq \min(j_{n-1}, 2u_{n-1})$,

c) $\sqrt{j_{n-1}/J} \in \mathbb{Z}$, y

d) $\frac{1}{J} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{x_i} = 1$.

Para $n = 5$, las soluciones obtenidas por el algoritmo son $\{(5,5,5,5,5),(2,8,8,8,8)\}$, y para $n = 6$, $\{(6,6,6,6,6,6),(3,3,12,12,12,12),(4,4,4,9,9,36)\}$, respectivamente. La primer solución de cada conjunto corresponde al caso de una categoría punteada. Esto da lugar al siguiente teorema.

Teorema 5.0.5. [BR, Theorem 4.2] *Toda categoría modular íntegra de rango a lo sumo 6 es punteada.*

Para la demostración, se usa el resultado obtenido con el algoritmo y las siguientes proposiciones.

Proposición 5.0.6. [NR, Proposition 4.11] *Sean p, q primos distintos. Si $\mathcal{C}$ es una categoría modular íntegra de dimensión pq^2, entonces $\mathcal{C}$ es punteada.*

Proposición 5.0.7. [ENO1, Proposition 8.2] *Sean p, q primos distintos. Si $\mathcal{C}$ es una categoría modular de dimensión $p^a q^b$, con $a + b > 0$, entonces $\mathcal{C}$ tiene un objeto invertible no trivial.*

Prueba del teorema. Para rango a lo sumo 5, el resultado se conoce, ver [RSW] y [HR]. Para rango 6, la solución $(6,6,6,6,6,6)$ dada por el algoritmo se corresponde con una categoría punteada, por lo que basta con descartar las soluciones $(3,3,12,12,12,12)$ y $(4,4,4,9,9,36)$. Recordemos que $x_i = \frac{\dim(\mathcal{C})}{d_i^2}$, y en particular, $x_n = \dim(\mathcal{C})$. Por lo tanto basta ver que ninguna categoría modular puede tener dimensiones de simples $(1,1,1,1,2,2)$ o $(1,2,2,3,3,3)$.

El primer caso queda eliminado por la Proposición 5.0.6, pues $\operatorname{FPdim}(\mathcal{C}) = 12 = 2^2 3$, y luego la categoría debería ser punteada, pero contiene simples de dimensión 2. En el segundo caso, $\dim(\mathcal{C}) = 36 = 2^2 3^2$, por lo que aplicando la Proposición 5.0.7 se sigue que la categoría debería tener un objeto invertible no trivial, lo cual no sucede (el resultado que produce el algoritmo tiene un solo objeto con dimensión uno: el trivial). $\square$

Implementar el algoritmo anterior para $n = 7$ se dificulta, pues $u_7 \approx 10^{13}$. Esto motiva el paso a una clase más restringida de categorías modulares íntegras, con vistas a mejorar la cota superior u_n.

Definición 5.0.8. Una categoría modular se dice *maximalmente no auto-dual (MNSD)* si el único objeto simple tal que $X \simeq X^*$ es el $\mathbf{1}$.

Si $\mathcal{C}$ es una categoría modular MNSD, claramente es de rango impar, ya que si X es un objeto simple X^* también lo es. Digamos $n = 2k + 1$ es el rango de $\mathcal{C}$. Más aún, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.0.9. [HR, Theorem 2.2] *Si $\mathcal{C}$ es una categoría modular MNSD, entonces $\mathcal{C}$ es íntegra.*

Sea $\mathcal{C}$ una categoría modular MNSD. Denotemos a las clases de isomorfismo de objetos simples de la categoría $\mathcal{C}$ por

$$X_1, X_1^*, \cdots, X_k, X_k^*, \mathbf{1}.$$

Como $d_i = \dim(X_i) = \dim(X_i^*)$, podemos denotar a las dimensiones de los objetos simples por $d_1, d_1, ..., d_k, d_k, d_{k+1} = \dim(\mathbf{1}) = 1$, de manera que $\operatorname{FPdim}(\mathcal{C}) = 1 + \sum_{i=1}^{k} d_i^2$ es impar.

Observación 5.0.10. Vimos que si $\mathcal{C}$ es una categoría modular MNSD entonces $\text{FPdim}(\mathcal{C})$ es impar. La recíproca es una consecuencia directa de [NS2, Corollary 8.2(ii)].

Tras reordenar los $k+1$ enteros $x_i := \dim(\mathcal{C})/d_i^2$ de manera que $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_k \leq x_{k+1} = \dim(\mathcal{C})$, tenemos que

$$\frac{1}{x_{k+1}} + \sum_{i=1}^{k} \frac{2}{x_i} = \frac{1}{\dim(\mathcal{C})} + 2\sum_{i=1}^{k} \frac{d_i^2}{\dim(\mathcal{C})} = \frac{1}{\dim(\mathcal{C})}\left(1 + 2\sum_{i=1}^{k} d_i^2\right) = 1.$$

La siguiente generalización de [HR, Lemma 2.3] dada en [BR] permite dar una mejora para las cotas superiores del Algoritmo anterior, cuando restringimos a la clase de categorías modulares MNSD.

Lema 5.0.11. [BR, Lemma 4.4] *Sea $\mathcal{C}$ una categoría modular de rango n. Supongamos que existen k enteros $p_1 \geq p_2 \geq ... \geq p_k$ tal que las clases de isomorfismo de objetos simples no triviales pueden ser agrupadas en k conjuntos $P_1, ..., P_k$ tal que $X \in P_i$ tiene* $\dim(X) = p_i$ *y $|P_i| = l$, para todo $1 \leq i \leq k$. Entonces:*

1. *Los números $x_i := \frac{\dim(\mathcal{C})}{p_i^2}$ forman una secuencia de enteros no decreciente tal que $\sum_{i=1}^{k} \frac{l}{x_i} + \frac{1}{x_{k+1}} = 1$.*
2. *Tenemos las desigualdades $li \leq x_i \leq (n+l-il)\frac{A_i}{l}$, para $i \leq k$, y $(k+1) \leq x_{k+1} \leq \frac{A_{k+1}}{l}$, donde $A_1 = l$ y $A_i = A_{i-1}(A_{i-1}+1)$.*

Tomando entonces el caso $l = 2$, se puede modificar el Algoritmo 5.0.4 para buscar más eficientemente las posibles dimensiones de objetos simples en una categoría modular MNSD. Gracias a esto, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 5.0.12. *Todas las categorías modulares MNSD de rango a lo sumo 11 son punteadas.*

Demostración. La única solución no trivial que produce el algoritmo modificado es para rango 11, y consiste en 9 objetos simples de dimensión 1, y dos objetos simples de dimensión 3. Para eliminar este caso, consideramos la graduación de la categoría modular $\mathcal{C}$ dada por el grupo universal $U(\mathcal{C})$, el cual por [GN, Theorem 6.3] es isomorfo al grupo de objetos invertibles en $\mathcal{C}$, dado que la categoría es modular. Dada $\mathcal{C}_g$ una componente que contenga a un objeto simple de dimensión 3, tenemos que $\text{FPdim}(\mathcal{C}_g) \geq 9$. Como cada componente de la graduación debe tener la misma dimensión de Frobenius-Perron, y $|U(\mathcal{C})| = 9$, esto es imposible. □

Una observación importante es que la categoría $\text{Rep}(D(\mathbb{Z}_3 \ltimes \mathbb{Z}_7))$ de rango 25 es el ejemplo de menor rango que se conoce de una categoría modular no-punteada MNSD. Una pregunta interesante es si todas las categorías modulares MNSD de rango a lo sumo 23 son punteadas.

6 Categorías casi libres de cuadrados

En este capítulo asumiremos que $\mathbf{k}$ es un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero. Trabajeremos en el siguiente contexto.

Definición 6.0.1. Diremos que una categoría de fusión es *libre de cuadrados* si su dimensión de Frobenius-Perron es un número entero libre de cuadrados.

Definición 6.0.2. Diremos que una categoría de fusión es *casi libre de cuadrados* (ASF) si tiene dimensión de Frobenius-Perron dp^n, donde p es un número primo, n un número natural y d un entero libre de cuadrados no divisible por p.

El problema de clasificar categorías modulares ASF ha sido abordado por varios autores. Para números primos distintos $q > 2, p$ y r, se han obtenido resultados sobre la estructura de categorías modulares con dimensiones de Frobenius-Perron pq^n y pqr, donde $1 \leq n \leq 5$; también se han estudiado los casos $4c$ y $8c$, donde c es un número entero impar. Referimos a $[\mathrm{EGO}, \mathrm{NR}, \mathrm{BGHK}, \mathrm{BPR}, \mathrm{DLD}, \mathrm{DT}]$. Se sabe también que toda categoría modular ASF es soluble [N, Corollary 7.3].

Uno de los resultados principales de [DN] provee una clasificación casi completa de las categorías modulares ASF.

Teorema 6.0.3. [DN, Theorem 4.7] *Sean $p > 2$ un número primo y d un entero libre de cuadrados coprimo con p. Toda categoría modular de dimensión de Frobenius-Perron dp^n, $n \geq 0$, es íntegra y nilpotente.* □

Por [DGNO1] se sabe que toda categoría de fusión trenzada íntegra y nilpotente es de tipo grupo. A su vez, la clase de las categorías de fusión trenzadas de tipo grupo están clasificadas gracias a [NNW]. Dicha clasificación excede el alcance de este trabajo, pero gracias a [DN, Theorem 4.7], provee también una clasificación de las categorías modulares ASF salvo en el caso $p = 2$.

En lo que resta p será un número primo y d un número entero libre de cuadrados coprimo con p.

En la primera sección de este capítulo presentaremos resultados obtenidos por Dong, Li y Dai en [DLD] para categorías modulares de dimensión p^n, donde n=1, 2, ó 3, y resultados obtenidos por Dong y Natale en [DN] para categorías modulares de dimensión p^4. En particular, como aplicación del Teorema anterior los autores de [DN] muestran que toda categoría modular ASF de dimensión de Frobenius-Perron dp^4, donde p es un número primo impar, es necesariamente punteada [DN, Corollary 4.13].

De aquí surge una pregunta natural.

Pregunta 6.0.4. ¿Todas las categoría modulares con dimensión de Frobenius-Perron p^5 son punteadas?

Si la respuesta a esta pregunta es afirmativa, entonces toda categoría modular íntegra con dimensión de Frobenius-Perron dp^5 es punteada. En efecto, podemos repetir las ideas de la prueba de [DN, Corollary 4.13] que veremos más adelante.

En la segunda sección del presente capítulo trabajaremos para dar una respuesta, al menos parcial, a nuestra pregunta. Algunas de las herramientas principales serán resultados bien conocidos sobre divisibilidad en categorías de fusión. A modo de ilustración, incluímos algunos de ellos.

Teorema 6.0.5. [ENO1, Theorem 2.11] *Sea $\mathcal{C}$ una categoría modular débilmente íntegra. Entonces* $\operatorname{FPdim}(\mathcal{C})/\operatorname{FPdim}(X)^2$ *es un número entero para todo objeto simple X de $\mathcal{C}$.* □

Este resultado tiene una interesante aplicación inmediata. Supongamos además que $\mathcal{C}$ es libre de cuadrados y que $\operatorname{FPdim} X$ es un número entero para algún objeto simple X. Luego todo primo que divida a $\operatorname{FPdim} X$ debe dividir a $\operatorname{FPdim} \mathcal{C}$ con multiplicidad mayor o igual que dos. Por lo tanto, $\operatorname{FPdim} X = 1$. De aquí se deduce el siguiente resultado.

Corolario 6.0.6. *Toda categoría modular íntegra libre de cuadrados es punteada.* □

Otro resultado clásico sobre divisibilidad que será de utilidad en lo que sigue es el siguiente.

Teorema 6.0.7. [GN, Corollary 5.3] *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión nilpotente. Si X es un objeto simple, entonces* $\operatorname{FPdim} X^2$ *divide a* $\operatorname{FPdim} \mathcal{C}_{ad}$. □

Cuando $\mathcal{C}$ es la categoría de representaciones de un grupo nilpotente finito, recuperamos un resultado bien conocido: el cuadrado de la dimensión de toda representación irreducible divide al índice del centro del grupo.

6.1 | Categorías modulares de dimensión $p^n, n \leq 4$.

Comenzaremos esta sección con una serie de resultados de [DLD]. Incluiremos también sus demostraciones, porque ilustran razonamientos en los que nos vamos a inspirar. Fijamos una categoría modular íntegra $\mathcal{C}$ con dimensión dp^n.

Lema 6.1.1. [DLD, Lemma 3.1] *Se cumple que p^2 divide a* $\operatorname{FPdim} \mathcal{C}_{pt}$.

Demostración. Sea k el mayor entero menor o igual que $n/2$. Es decir, $n = 2k+1$ si n es impar, o $n = 2k$ si n es par. Por el Teorema 6.0.5, las posibles dimensiones de Frobenius-Perron de los elementos simples son $1, p, p^2, \cdots, p^k$. Sean $a_0, a_1, \cdots, a_k$ la cantidad de clases de isomorfismo de objetos simples de $\mathcal{C}$ de dimensión $1, p, \cdots, p^k$ respectivamente. Por definición de $\operatorname{FPdim} \mathcal{C}$, tenemos las igualdades

$$dp^n = a_0 + a_1 p^2 + \cdots + a_k p^{2k}.$$

Como $n \geq 2$, deducimos que p^2 divide a $a_0 = \operatorname{FPdim}(\mathcal{C}_{pt})$. □

Observación 6.1.2. Por ser $\mathcal{C}$ modular, el grupo universal $U(\mathcal{C})$ es isomorfo al grupo de objetos invertibles en $\mathcal{C}$ ([GN, Theorem 6.3]). Luego p^2 divide a $|U(\mathcal{C})|$.

Lema 6.1.3. [DLD, Lemma 3.2] *Si $\mathcal{C}$ no es punteada, entonces* $\operatorname{FPdim}(\mathcal{C})$ *no es divisible por p^{n-1}.*

Demostración. Supongamos primero que $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{pt}) = p^n d'$ para algún $d' \in \mathbb{N}$. Como $\mathcal{C}_{ad} = \mathcal{C}'_{pt}$, tenemos

$$dp^n = \mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = \mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{ad})\,\mathrm{FPdim}(C_{pt}).$$

Esto implica que $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{ad}) = d''$, donde $d = d'd''$. Luego p no divide a d'', y por lo tanto $\mathcal{C}_{ad}$ no contiene objetos simples de dimensión una potencia de p. Pero las posibles dimensiones de Frobenius-Perron de los objetos simples son $1, p, p^2, \cdots, p^k$, y así $\mathcal{C}_{ad}$ debe ser punteada, es decir, $\mathcal{C}_{ad}$ es una subcategoría de fusión de $\mathcal{C}_{pt}$. Se sigue que $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{ad})$ divide a $\mathrm{FPdim}(C_{pt})$, lo cual es una contradicción ya que d es libre de cuadrados.

Supongamos ahora que $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{pt}) = p^{n-1}d'$ para algún $d' \in \mathbb{N}$ con $(p, d') = 1$. En este caso $|U(\mathcal{C})| = p^{n-1}d'$, y por lo tanto la dimensión de Frobenius-Perron de cada componente de la gradución universal $\mathcal{C}_g$ (con $g \in U(\mathcal{C})$) debe ser pd'', donde $d'' \in \mathbb{N}$ cumple $d'd'' = d$.

Para cada $g \in U(\mathcal{C})$, denotamos por $a_0^g, a_1^g, \ldots, a_k^g$ a la cantidad de clases de isomorfismo de objetos simples en $\mathcal{C}_g$ de dimensiones $1, p, \ldots, p^k$, respectivamente. Tenemos entonces

$$pd'' = \mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_g) = a_0^g + a_1^g p^2 + \cdots + p^{2k} a_k^g,$$

y deducimos que $a_0^g \neq 0$ (pues p no divide a d'') y que p divide a a_0^g. Por lo tanto, cada componente $\mathcal{C}_g$ tiene al menos p elementos invertibles no isomorfos. Como hay $p^{n-1}d'$ componentes en la graduación universal, resulta que existen al menos $p^n d'$ elementos invertibles no isomorfos en $\mathcal{C}$, lo cual contradice $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{pt}) = p^{n-1}d'$.

Esto concluye la prueba del Lema. □

Corolario 6.1.4. [DLD, Corollary 3.3] *Si $n \leq 3$ entonces $\mathcal{C}$ es punteada.*

Demostración. Si $n = 0$ entonces $\mathcal{C}$ es libre de cuadrados, y sabemos que $\mathcal{C}$ es punteada por el Corolario 6.0.6.

Si $n = 2$ o 3 y $\mathcal{C}$ no es punteada, del lema 6.1.1 deducimos que p^2 divide a $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{pt})$. Pero vimos en el lema 6.1.3 que esto no es posible y el enunciado queda demostrado. □

Y culminamos esta serie de herramientas con un resultado sobre la subcategoría adjunta.

Lema 6.1.5. [DLD, Lemma 3.4] *La subcategoría de fusión punteada maximal $(\mathcal{C}_{ad})_{pt}$ de $\mathcal{C}_{ad}$ es simétrica y tiene dimensión de Frobenius-Perron p^j, donde $j \in \{2, \cdots, n-2\}$.* □

En [DN], Dong y Natale realizaron destacables aportes a la clasificación de las categorías modulares casi libres de cuadrados. En particular, queremos resaltar dos de sus resultados.

Lema 6.1.6. [DN, Lemma 4.11] *Sea p un número primo. Toda categoría modular íntegra con dimensión de Frobenius-Perron p^4 es punteada.* □

Corolario 6.1.7. [DN, Corollary 4.13] *Sean p un número primo y d un entero libre de cuadrados no divisible por q. Toda categoría modular íntegra con dimensión de Frobenius-Perron dp^4 es punteada.*

Demostración. Sea $d = p_1 \cdots p_s$, donde $p_1, \ldots, p_s$ son primos distintos y $p_i \neq p$, para todo $i = 1, \cdots, s$. Por [DN, Theorem 4.7] sabemos que $\mathcal{C}$ es íntegra y nilpotente. Luego, de [DGNO2, Theorem 1.1] y [DN, Remark 2.1], se sigue que $\mathcal{C}$ se factoriza en producto de categorías modulares de dimensión potencia de primos. Es decir, $\mathcal{C} \simeq \mathcal{C}_{p^4} \boxtimes \mathcal{C}_{p_1} \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{C}_{p_s}$, donde $\mathcal{C}_t$ es una categoría modular de dimensión t. En particular, las categorías $\mathcal{C}_{p_1}, \ldots, \mathcal{C}_{p_s}$ son punteadas. Pero $\mathcal{C}_{p^4}$ también es punteada (por Lema 6.1.6), lo que implica que $\mathcal{C}$ es punteada. □

6.2 | Categorías modulares de dimensión p^5.

En esta sección mostramos nuestra respuesta parcial a la pregunta 6.0.4. Nos enfocaremos en el caso en el que p es un primo impar, ya que esto implica integrabilidad (ver Proposición 2.5.4).

Empezamos suponiendo que existen categorías modulares no punteadas con dimensión de Frobenius-Perron p^5 y obtenemos información sobre su subcategoría punteada maximal. Un primer resultado propio es el siguiente.

Lema 6.2.1. *Sea p un primo impar. Si $\mathcal{C}$ es una categoría modular no punteada tal que* $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = p^5$*, entonces* $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{pt}) = p^2$.

Demostración. Como p es impar, $\mathcal{C}$ es íntegra. Así, de los Lemas 6.1.1 y 6.1.3, deducimos que las posibles dimensiones de Frobenius-Perron de $\mathcal{C}_{pt}$ son p^2 y p^3. La prueba estará completa si logramos descartar la segunda opción. Supongamos entonces que $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{pt}) = p^3$.

En primer lugar obtenemos información sobre la subcategoría adjunta. Como $\mathcal{C}$ es modular, sabemos por (3.23) que $\mathcal{C}_{ad}$ es el centralizador de $\mathcal{C}_{pt}$ y por lo tanto

$$p^5 = \mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{pt})\,\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{ad}) = p^3\,\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{ad}).$$

Es decir, $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{ad}) = p^2$. Por otro lado, del Lema 6.1.5 se sique que la dimensión de Frobenius-Perron de $(\mathcal{C}_{ad})_{pt}$ debe ser p^2, y por lo tanto $\mathcal{C}_{ad}$ es punteada. Notemos también que $\mathcal{C}_{ad}$ es simétrica, ya que $\mathcal{C}_{ad} \subset \mathcal{C}_{pt} = \mathcal{C}'_{ad}$.

En segundo lugar, consideremos la graduación fiel $\mathcal{C} = \bigoplus_{g\in U(\mathcal{C})} \mathcal{C}_g$ dada por el grupo universal $U(\mathcal{C})$, cuya componente trivial es $\mathcal{C}_{ad}$. Como todas la componentes de la graduación tienen la misma dimensión de Frobenius-Perron, vale $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_g) = \mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{ad}) = p^2$, para todo $g \in U(\mathcal{C})$. Ahora bien, por [GN, Corollary 5.3], las posibles dimensiones de Frobenius-Perron de objetos simples de $\mathcal{C}$ son 1 ó p. Sean a_g^0 y a_g^1 la cantidad de clases de isomorfismo de objetos simples no isomorfos de dimensión 1 y p en $\mathcal{C}_g$ respectivamente. Calculando $\mathrm{FPdim}\,\mathcal{C}_g$, obtenemos $p^2 = a_g^0 + a_g^1 p^2$.

Esto nos dice que, para cada g, se cumple una de las siguientes:

- $\mathcal{C}_g$ tiene exactamente p^2 objetos simples, y todos son invertibles.
- $\mathcal{C}_g$ tiene exactamente 1 elemento simple, el cual tiene dimensión p.

En tercer lugar, con la información que tenemos podemos calcular algunas filas de la S-matríz de $\mathcal{C}$. Más precisamente, fijamos un objeto simple X en $\mathcal{C}_{ad}$ y calculamos la fila de la S-matriz correspondiente a (la clase de isomorfismo de) X.

Sea Y un objeto simple en $\mathcal{C}_{pt}$. Como $\mathcal{C}_{pt}$ es el centralizador de $\mathcal{C}_{ad}$, tenemos $\sigma_{YX}\sigma_{XY} = \mathrm{id}_{X\otimes Y}$. Luego, por [Mu2, Proposition 2.5], sabemos que

$$s_{XY} = d_X d_Y = 1, \tag{6.1}$$

y esto vale para todo Y simple de $\mathcal{C}_{pt}$.

Sea Z un objeto simple en $\mathcal{C}$ de dimensión p. Sea $g \in U(\mathcal{C})$ tal que $Z \in \mathcal{C}_g$. Como X está en la componente trivial de la graduación, $X\otimes Z$ está en $\mathcal{C}_g$. Más aún, tenemos $\mathrm{FPdim}(X\otimes Z) = p$ y el único objeto simple en $\mathcal{C}_g$ es Z. Por lo tanto, $X \otimes Z = Z$. Ahora bien, dado que $\mathcal{C}_{ad}$ es simétrica y la dimensión de $\mathcal{C}$ es impar, por el Lema 3.6.1, sabemos que el twist cumple $\theta_X = 1$. Así, usando la ecuación de balance (3.2.5), calculamos

$$s_{XZ} = \theta_X^{-1}\theta_Z^{-1}\theta_Z d_Z = p, \tag{6.2}$$

para todo Z simple de dimensión p.

Las ecuaciones (6.1) y (6.2) nos dicen que las p^2 filas de la S-matriz de $\mathcal{C}$ que corresponden a las clases de isomorfismo de objetos simples de $\mathcal{C}_{ad}$ son todas iguales. Esto es una contradicción, ya que $\mathcal{C}$ es modular y la S-matriz es invertible. □

Ahora mostramos que las posibles excepciones a la pregunta 6.0.4 deben cumplir condiciones muy particulares.

Proposición 6.2.2. *Sea p un primo impar. Si $\mathcal{C}$ es una categoría modular tal que* $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = p^5$*, entonces ocurre una de los siguientes:*

1. *La categoría $\mathcal{C}$ es punteada.*
2. *La categoría $\mathcal{C}$ tiene grupo de invertibles isomorfo a $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ y rango $p^3 + p^2 - 1$.*

Demostración. Recordamos que $\mathcal{C}$ es íntegra por el Teorema 2.5.4. Supongamos que $\mathcal{C}$ no es punteada.

En primer lugar obtenemos información sobre $\mathcal{C}_{pt}$ y $\mathcal{C}_{ad}$. Por el Lema anterior, sabemos que $\mathrm{FPdim}\,\mathcal{C}_{pt} = p^2$ y, como $\mathcal{C}$ es modular, deducimos de la ecuación (3.23) que $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{ad}) = p^3$. Además, por el Lema 6.1.5, tenemos $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{ad})_{pt} = p^2 = \mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{pt})$. Por lo tanto $\mathcal{C}_{pt} = (\mathcal{C}_{ad})_{pt} \subset \mathcal{C}_{ad} = \mathcal{C}_{pt}'$, y concluímos que $\mathcal{C}_{pt}$ es simétrica.

A continuación calculamos el grupo $\mathcal{G}(\mathcal{C})$ de elementos invertibles de $\mathcal{C}$. Por ser $\mathcal{C}$ trenzada, dicho grupo es abeliano e isomorfo al grupo de graduación universal. Además, se sigue de [GN, Theorem 6.3] que $U(\mathcal{C})$ tiene orden p^2. Luego, $U(\mathcal{C}) \simeq \mathbb{Z}_{p^2}$ ó $U(\mathcal{C}) \simeq \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. Ahora supongamos que el caso $U(\mathcal{C}) \simeq \mathbb{Z}_{p^2}$ es imposible.

Notemos primero que como $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{ad}) = p^3$, se sigue de [GN, Corollary 5.3] que las posibles dimensiones de objetos simples de $\mathcal{C}$ son 1 y p. Sea X un objeto simple de dimensión p. Por las Proposiciones 2.2.10 y 2.2.11 tenemos que

$$X \otimes X^* = \sum_{g \in G[X]} g + \sum_{\substack{\mathrm{FPdim}\, Y = p \\ Y \in \mathcal{O}(\mathcal{C})}} [X \otimes X^* : Y]Y,$$

donde $G[X] = \{g \in \mathcal{G}(\mathcal{C}) / g \otimes X = X\}$ es el estabilizador de X por multiplicación a izquierda de objetos invertibles. Tomando dimensión de Frobenius-Perron a ambos miembros, observamos

$$p^2 = |G[X]| + a_X p,$$

donde $a_X = \sum_{\substack{\mathrm{FPdim}\, Y = p \\ Y \in \mathcal{O}(\mathcal{C})}} [X \otimes X^* : Y]$. Así, p divide a $|G[X]|$, y $|G[X]| \geq 1$, (tiene al elemento unidad de $\mathcal{C}$). Luego $|G[X]| = p$ ó p^2. Esto nos dice que $|G[X]|$ contiene un subgrupo de orden p de $\mathbb{Z}_{p^2}$. Pero $\mathbb{Z}_{p^2}$ tiene un único subgrupo de orden p, al que denotaremos A. Luego, todos los objetos simples de dimensión p están fijos por A.

Veamos que las filas de la S-matriz que corresponden a las clases de isomorfismo de los p elementos de A son todas iguales. Sea g en A. Como $\mathcal{C}_{pt}$ es simétrica y la dimensión de $\mathcal{C}$ es impar, por el Lema 3.6.1, el twist en g es $\theta_g = 1$.

Si X es un elemento simple de dimensión p, como $g \otimes X = X$, por la fórmula (3.2.5) (ecuación de balance) tenemos

$$s_{gX} = \theta_X^{-1} \theta_g^{-1} \theta_X d_X = p. \tag{6.3}$$

Por otro lado, como $\mathcal{C}_{pt}$ es simétrica por [Mu2, Proposition 2.5] resulta

$$s_{gh} = d_g d_h = 1, \tag{6.4}$$

para todo h invertible.

Como las ecuaciones (6.3) y (6.4) valen para todo g en A, todas las filas de la S-matriz que corresponden a los elementos de A son iguales. Esto es una contradicción, pues $\mathcal{C}$ es modular. Por lo tanto $U(\mathcal{C}) \simeq \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.

Calculemos ahora el rango de $\mathcal{C}$. Si denotamos por a_0, a_1 a la cantidad de clases de isomorfismo de objetos simples de orden 1 y p respectivamente, tenemos

$$p^5 = \mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = a_0 + a_1 p^2 = p^2 + a_1 p^2.$$

Luego, $a_1 = (p^5 - p^2)/p^2 = p^3 - 1$. Por lo tanto el rango de $\mathcal{C}$ es $a_0 + a_1 = p^3 + p^2 - 1$.

$\square$

Deducimos un resultado que está próximo a ser la versión para p^5 del Corolario 6.1.7.

Corolario 6.2.3. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría modular tal que* $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = dp^5$ *donde p es un primo impar y d un entero libre de cuadrados con $(d, p) = 1$. Si el rango de $\mathcal{C}$ es distinto de $d(p^3 + p^2 - 1)$ entonces $\mathcal{C}$ es punteada.*

La demostración de este resultado es análoga a la del Corolario 6.1.7. En este caso, 6.2.2 cumple el rol paralelo al de 6.1.6 en la demostración de 6.1.7, y justamente de ahí proviene la restricción en el rango de $\mathcal{C}$.

Bibliografía

[BK] B. Bakalov, A. Kirillov, Jr, *Lectures on Tensor Categories and Modular Functors.* University Lecture Series Vol. 21, Amer. Math. Soc. (2001).

[B] F. Borceux, *Handbook of categorical algebra 1.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications **50**. Cambridge University Press (1994).

[BCFV] F. Burnell, X. Chen, L. Fidowski, A. Vishwanath, *Exactly Soluble Models of a 3D Symmetry Protected Topological Phase of Bosons with Surface Topological Order.* Preprint arXiv:1302.7072v1 (2013).

[Br] A. Bruguières, *Catégories prémodulaires, modularisations et invariants des variétés de dimension 3.* Math. Ann. **316**, No. 2, 215-236 (2000).

[BGHK] *P. Bruillard, C. Galindo, S.-M. Hong, Y. Kashina, Classification of integral modular categories of Frobenius-Perron dimension* pq^4 *and* p^2q^2. Canad. Math. Bull. **57** (4), 721734 (2014).

[BPR] *P. Bruillard, J. Plavnik, E. Rowell, Modular categories of dimension* p^3m*, withm square-free.* Proc. Amer. Math. Soc. **147**, 21-34 (2019).

[BR] P. Bruillard, E. Rowell, *Modular categories, integrality and Egyptian fractions.* Proc. Amer. Math. Soc. **140** (4), 1141-1150 (2012).

[BNRW] P. Bruillard, S. -H. Ng, E. Rowell, Z. Wang, *Rank-finiteness for modular categories.* J. Amer. Math. Soc. **29**, 857-881 (2016).

[D] P. Deligne, *Catégorie Tensorielle.* Moscow Math. Journal 2 no. 2, 227-248 (2002).

[DGNO1] V. Drinfeld, S. Gelaki, D. Nikshych, V. Ostrik, *On braided fusion categories I.* Selecta Math. (N. S.) **16**, no. 1, 1-119 (2010).

[DGNO2] ———, *Group-theoretical properties of nilpotent modular categories.* Preprint arXiv 0704.0195 (2007).

[DLN] C. Dong, X. Lin, S.-H Ng, *Congruence Property in Conformal Field Theory.* Alg. Numb. Theory **9** no.9, 2121-2166 (2015).

[DLD] J. Dong, L. Li, L. Dai, *Integral almost square-free modular categories.* Preprint: arXiv:1512.02012 (2015).

[DN] J. Dong, S. Natale, *On the classification of almost square-free modular categories.* Alg. and Rep. Th. **21** (6), 1353-1368 (2018).

[DT] J. Dong, H. Tucker, *Integral modular categories of Frobenius-Perron dimension* pq^n. Algebr. Represent. Theor. **19** 3346 (2016).

[E] P. Etingof, *On Vafas Theorem for Tensor Categories.* Math. Res. Letters **9**, 651657 (2002).

[EG] P. Etingof, S. Gelaki, *Some Properties of Finite-Dimensional Semisimple Hopf Algebras.* Math. Res. Lett. **5**, no. 12, 191197 (1998).

[EGNO] P. Etingof, S. Gelaki, D. Nikshych, V. Ostrik, *Tensor categories.* Math. Surv. Monog. **205**, Amer. Math. Soc.(2015).

[EGO] P. Etingof, S. Gelaki, V. Ostrik, *Classification of fusion categories of dimension pq*. Int. Math. Res. Not. **57**, 30413056 (2004).

[ENO1] P. Etingof, D. Nikshych, V. Ostrik, *Weakly group-theoretical and solvable fusion categories.* Adv. Math. **226** no. 1, 176-205 (2011).

[ENO2] ———, *On fusion categories.* Ann. of Math. (2) **162** (2005).

[EK] D. Evans, Y. Kawahigashi, *Quantum symmetries on operator algebras.* Oxf. Math, Monog. (1998).

[GNN] S. Gelaki, D. Naidu, D. Nikshych, *Centers of graded fusion categories.* Alg. Numb. Theory **3** no. 8, 959990 (2009).

[GN] S. Gelaki, D. Nikshych, *Nilpotent fusion categories.* Adv. Math. **217** no. 3, 1053-1071 (2017).

[HR] S.-M. Hong, E. Rowell, *On the classification of the Grothendieck rings of non-self-dual modular categories.* J. Alg. **324** no. 5, 10001015 (2010).

[H] Y.-Z. Huang, *Vertex operator algebras, the Verlinde conjecture, and modular tensor categories.* Proc. Natl. Acad. Sci. USA **102** no. 15, 5352-5356 (2005).

[JMNR] C. Jones, S. Morrison, D. Nikshych, E. Rowell, *Rank-finiteness for G-crossed braided fusion categories.* Preprint: `arXiv:1902.06165` (2019).

[JS] A. Joyal, R. Street, *Braided Tensor Categories.* Adv. Math. **102** no. 1, 2078 (1993).

[KSZ] Y. Kashina, Y. Sommerhäuser, Y. Zhu, *On Higher Frobenius-Schur Indicators.* Mem. Amer. Math. Soc. **181**, no. 855 (2006).

[K] C. Kassel, *Quantum Groups.* Grad. Texts Math. **155**, New York, Springer-Verlag (1995).

[L] E. Landau, *Über die Klassenzahl der binären quadratischen Formen von negativer Discriminante.* Math. Ann. **50**, 671676 (1903).

[M] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician.* Grad. Texts Math. **5**, Springer-Verlag, New York, second edition (1998).

[MS] G. Moore, N. Seiberg, *Classical and quantum conformal field theory.* Comm. Math. Phys. **123** no. 2, 177254 (1989).

[Mu1] M. Müger, *From Subfactors to Categories and Topology II: The Quantum Doubles of Tensor Categories and Subfactors.* J. Pure Appl. Algebra **180** no. 12, 159219 (2003).

[Mu2] ———, *On the Structure of Modular Categories.* Proc. London Math. Soc. **87** 2, 291-308 (2003).

[NNW] D. Naidu, D. Nikshych, S. Witherspoon, *Fusion subcategories of representation categories of twisted quantum doubles of finite groups.* Internat. Math. Res. Notices **22**, 41834219 (2009).

[NR] D. Naidu, E. Rowell, *A finiteness property for braided fusion categories.* Algebr. Represent. Theory **14** no. 5, 837855 (2011).

[N] S. Natale, *On weakly group-theoretical non-degenerate braided fusion categories.* J. Noncommut. Geom. **8** (4) 10431060 (2014).

[NS1] S.-H. Ng, P. Schauenburg, *Frobenius-Schur Indicators and Exponents of Spherical Categories.* Adv. Math. **211** no. 1, 3471 (2007).

[NS2] ———, *Congruence Subgroups and Generalized Frobenius-Schur Indicators.* Comm. Math. Phys. **300** no. 1, 146 (2010).

[NS3] ———, *Higher Frobenius-Schur indicators for pivotal categories.* Hopf algebras and gen., **441**, Contemp. Math. Amer. Math. Soc., 6390 (2007).

[O] V. Ostrik, *Fusion categories of rank 2.* Math. Res. Lett. **10** no. 2-3, 177183 (2003).

[R] K.-H. Rehren, *Braid group statistics and their superselection rules.* D. Kastler, The algebraic theory of superselection sectors, World Scientific (1990).

[RT] Reshetikhin, V. Turaev, *Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups.* Invent. Math. **103**, 547-598 (1991).

[RSW] E. Rowell, R. Stong, Z. Wang, *On Classification of Modular Tensor Categories.* Comm. Math. Phys. **292** no. 2, 343389 (2009).

[T1] V. Turaev, *Modular categories and 3-manifold invariants.* Int. J. Mod. Phys. B6, 1807-1824 (1992).

[T2] ———, *Quantum Invariants of Knots and 3-Manifolds.* De Gruyter Studies in Mathematics, Walter de Gruyter (1994).

[WW] K. Walker, Z. Wang, *(3+1)-TQFTS and Topological Insulators.* Front. Phys. **7** no. 2, 150-159 (2012).

[W1] Z. Wang, *Topological Quantum Computation.* CBMS Reg. Conf. Series Math. **112**, AMS (2010).

[W2] ———, *Quantum Computing: A Quantum Group Approach, Symmetries and groups in contemporary physics.* Proc. XXIX Inter. Coll. on Group-Theor. Methods in Physics, 41-50 (2012).