Análisis esférico matricial asociado a grupos nilpotentes

Rocío P. Díaz Martín

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación como parte de los requerimientos para la obtención del grado de Doctora en Matemática de la

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Diciembre de 2018

©FaMAF - UNC

Directora: Linda V. Saal

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución 4.0 Internacional.

Análisis esférico matricial asociado a grupos nilpotentes

Resumen

Sea G un grupo de Lie y K un subgrupo compacto de G. Todos los fibrados vectoriales homogéneos sobre G/K pueden ser descriptos a partir de las representaciones (τ, V_τ) de dimensión finita de K. Sea $G \times_\tau V_\tau$ un fibrado vectorial homogéneo sobre G/K y sea $\Gamma(G \times_\tau V_\tau)$ el espacio de secciones infinitamente diferenciables y de soporte compacto de dicho fibrado. Esta tesis está motivada por el problema de expresar, simultáneamente, en forma diagonal a todos los operadores lineales y acotados aplicados sobre $\Gamma(G \times_\tau V_\tau)$ que conmutan con la acción de G. Como consecuencia del teorema del núcleo de Schwartz todos estos operadores G-invariantes son de convolución. Prestaremos atención solamente a aquellos operadores integrales cuyos núcleos de convolución son funciones integrables. Dichas funciones son a valores matriciales en $\mathrm{End}(V_\tau)$ y bi-τ-equivariantes. Para lograr una diagonalización simultánea necesitamos que los operadores conmuten. Como la composición de tales operadores se identifica con el producto de convolución de sus núcleos, nos interesará particularmente el álgebra de convolución $L^1_{\tau,\tau}(G, \mathrm{End}(V_\tau))$ de funciones de G en $\mathrm{End}(V_\tau)$, integrables y bi-τ-equivariantes, es decir, la estructura matemática que conforman los núcleos. Decimos que una terna (G, K, τ) es conmutativa si el álgebra $L^1_{\tau,\tau}(G, \mathrm{End}(V_\tau))$ es conmutativa. Los caracteres de dicha álgebra son las llamadas funciones esféricas y se pueden interpretar como las coordenadas que permitirán expresar en forma diagonal a todos los operadores de nuestro interés. La presente tesis está focalizada en determinar ejemplos particulares de grupos G, K y representaciones irreducibles τ tales que (G, K, τ) resulte una terna conmutativa, para luego poder desarrollar el análisis esférico, esto es, dar una descripción explícita de las funciones esféricas y de la transformada de Fourier esférica. Con respecto al primer objetivo, a partir de la lista de pares de Gelfand (G, K) dada por J. Lauret en [La2], hemos determinado todos los casos en los que una representación τ de K da lugar a una terna conmutativa (G, K, τ). En tales ejemplos los grupos de Lie G son un producto semidirecto $K \ltimes N$, donde N es una nilvariedad homogénea y K es el grupo de automorfismos ortogonales de N. En relación al segundo punto, hemos obtenido descripciones explícitas de todas las funciones esféricas en el caso en que G es la componente conexa de la identidad del grupo de movimientos rígidos del espacio euclídeo tridimensional y K es el grupo de rotaciones. Finalmente, conectamos, a partir de una fórmula asintótica, la teoría de funciones esféricas asociadas a ciertos grupos $G = K \ltimes N$, con N nilpotente, y la teoría de funciones esféricas asociadas a ciertos grupos de Lie semisimples.

Pablabras claves: Función esférica, par de Gelfand fuerte, representación unitaria irreducible, transformada de Fourier esférica.

MSC 2010: 43A85, 43A90 ,47A67.

Matrix spherical analysis on nilpotent groups

Abstract

Let G be a Lie group and K a compact subgroup of G. All the homogeneous vector bundles over the homogeneous space G/K are described by taking finite dimensional representations (τ, V_τ) of K. Let $G \times_\tau V_\tau$ be an homogeneous vector bundle over G/K and let $\Gamma(G \times_\tau V_\tau)$ be the space of section of this vector bundle that are infinitely differentiable with compact support. This thesis is motivated by the problem of simultaneous diagonalization of all the linear and continuous operators over $\Gamma(G \times_\tau V_\tau)$ that commute with the action of G. As a consequence of the núcleo de Schwartz's kernel theorem every such operator can be represented in a unique way as a convolution operator. We will work only with the integral operators that have an integrable functions as kernel. Such function are $\mathrm{End}(V_\tau)$-valued and bi-τ-equivariant. In order to get a simultaneous diagonalization we require that the operators must commute. Since the convolution of such operators can be identified with the convolution of their kernels, we are interested in the convolution algebra $L^1_{\tau,\tau}(G, \mathrm{End}(V_\tau))$ of $\mathrm{End}(V_\tau)$-valued functions on G tahta are integrable and bi-τ-equivariant, that is, the mathematical structure that conform those kernels. A triple (G, K, τ) is said to be commutative if álgebra $L^1_{\tau,\tau}(G, \mathrm{End}(V_\tau))$ is conmutative. The characters of this algebra are called spherical functions and can be thought as the coordinates that may write the operators in a diagonal form. This thesis focuses on giving particular examples of groups G, K and representations τ for which (G, K, τ) is commutative and then develop the spherical analysis, that is, give an explicit description of the spherical Fourier transform. Regarding the first objective, from the list of Gelfand pairs given by J. Lauret in [La2], we determine for which representations τ of K the triple (G, K, τ) is commutative. In these cases the group G is of the form $K \ltimes N$, where N is a two step nilmanifold and K is a maximal connected group of the orthogonal automorphisms of N. Relative to the second point, we obtained an explicit description of all the spherical functions when G is connected component of the identity of the three dimensional euclidean motion group and K is the rotation group. Finally, we connect, via an asymptotic formula, the theory of spherical functions associated to certain groups $G = K \ltimes N$ for N nilpotent and the theory of spherical functions associated with a semisimple Lie group.

Keywords: Spherical function, strong Gelfand pair, irreducible unitary representation, spherical Fourier transform.

MSC 2010: 43A85, 43A90, 47A67.

Agradecimientos

Todas las tardes, después de unos mates con miel, Juan, Quizás sacaría Juan "el ruso" como le dicen por ahí, sale a recorrer las calles donde se encuentran las librerías de usados. Revuelve libros y libros. Lo he visto llevarse obras de teatro, libros de ciencia ficción, novelas históricas, románticas, literatura fástica, libros en inglés, en francés, poesía, antologías de cuentos de las más variariadas. Tardé mucho tiempo en comprender qué lo atraía. Cada vez que creía haber encontrado el patrón en sus gustos, lo veía salir con un libro del Antiguo Egipto o con uno para colorear, y todas mis deducciones resultaban ridículas. Al observarlo de cerca noté que nunca lee las contratapas. Se enloquece por abrir rápidamente la primera página. A veces saca libros de las estanterías sin leer nada. ¿Qué busca? Un día inesperado todo me quedó claro. No lee las páginas impresas. Busca aquellos libros con dedicatoria.

Esta tesis está dedicada a mi directora, ***a Linda***, en primer lugar.

A Fulvio Ricci. La estadía con él significó un antes y un después en la comprensión de mi tema de tesis, en sus motivaciones.

A mi familia, a mi mamá, mi papá, mi hermana Macarena y mi hermano Manuel.

Al tribunal, Gabriela Ovando, Jorge Lauret y Leandro Cagliero, por haber leído en detalle la tesis y por todos los aportes y preguntas que mejoraron tanto el manuscrito como mi entendimiento.

También a Roberto Miatello y Adrián Andrada que leyeron y comentaron uno de nuestros artículos previo a la tesis, por la paciencia y apoyo constantes.

A la comisión asesora. A Inés Pacharoni, con quien pude trabajar, consultar ideas, recibir consejos. A Uriel, a quien siempre acudo cuando quiero festejar algo o cuando tengo algún problema que me desborda. Y a toda la oficina 318.

A Fernando Levstein por su sabiduría y tranquilidad infinitas. También a Cristina Turner que siempre nos inunda de amor.

A Emilio Lauret que siguió toda mi carrera, me ayudó a comprender muchos temas, fue a todos mis seminarios y se interesó muchísimo por lo que estudiaba. A Silvina Riveros que está premanetemente atenta.

Y a todas y todos las y los profes que he tenido a lo largo de la carrera de grado y del doctorado.

A mis grandes amigas, Ara y Caro.

A mis compañeras y compañeros de docencia, en especial a tres mujeres que me inspiran, Eloisa, Karina y Yamile. También a quienes, estando como profe, han sido estudiantes.

A todas y todos mis amigas y amigos.

A Ignacio. A Martín. Al Leo, a Flor. A Elena, a Romina. A todas y todos mis compañeras y compañeros. A Andrea, Gonzalo, Guille y Raúl con quienes he estudiado este tiempo. A mis compañeros de oficina, al Marce Rubio y a Iván Nievas.

A Nancy Moyano y Claudia Aguirre, a todo el Despacho de Alumnos, a todo Personal y Sueldos y a todo Codepo y a la biblioteca.

Agradezco especialmente al CONICET. A la SeCyT. A la bellísima UNC y en particular a la FaMAF.

Espero que Juan, "el ruso" como le dicen por ahí, encuentre esta tesis porque final y especialmente está dedicada a él, a una de las personas que más ha influído en mi forma de pensar y encarar la tesis, ***a Ivan****, como le decimos por aquí.*

Índice general

Introducción **7**

1. Estructuras algebraicas y geométricas **17**
1.1. Luz, cámara, acción: Grupos y espacios homogéneos . . . 17
1.2. Representaciones y fibrados vectoriales homogéneos . . . 27
1.2.1. Fibrados vectoriales homogéneos . . . 30
1.2.2. Álgebras de Lie . . . 33
1.2.3. Teoría de representaciones del grupo de rotaciones . . . 42
1.2.3.1. Fórmulas de restricción . . . 44
1.2.3.2. Teorema Borel-Weil-Bott . . . 44
1.2.3.3. Representaciones de SO(3) . . . 44
1.2.4. Descomposición de productos tensoriales de representaciones del grupo simpléctico 45
1.2.5. Teoría de Mackey . . . 46
1.2.6. Teoría de Kirillov . . . 48

2. Pares de Gelfand **51**
2.1. Funciones de tipo positivo . . . 57
2.2. Análisis clásico de Fourier y transformada de Gelfand . . . 66
2.3. El teorema del núcleo de Schwartz y la convolución . . . 72
2.4. Pares de Gelfand, funciones esféricas y transformada de Fourier esférica . . . 78
2.5. Ejemplos . . . 86

3. Ternas de Gelfand (G, K, τ) y pares de Gelfand fuertes **91**
3.1. Funciones esféricas matriciales . . . 99
3.2. El caso del producto semidirecto $G = K \ltimes N$ . . . 105

4. Ejemplos y clasificación de ternas de Gelfand $(K \ltimes N, K, \tau)$ **113**
4.1. Localización . . . 114
4.2. Estudio de una familia de pares de Gelfand $(K \ltimes N, K)$ . . . 117
4.2.1. Criterio de conmutatividad . . . 118
4.2.2. Caso (I) . . . 121
4.2.3. Caso (II) . . . 122
4.2.4. Caso (III) . . . 123
4.2.5. Caso (IV) . . . 125
4.2.6. Casos (V) y (VI) . . . 126
4.2.7. Caso (VII) . . . 127
4.2.8. Caso (VIII) . . . 129
4.2.9. Conclusiones . . . 132
4.3. Estudio de los restantes pares de Gelfand $(K \ltimes N, K)$ . . . 135
4.3.1. Caso A . . . 135
4.3.2. Caso B . . . 136
4.3.3. Caso C . . . 137
4.3.4. Conclusiones . . . 139

5. Funciones esféricas en $\mathbb{R}^3$ **141**
5.1. Operadores diferenciales invariantes . . . 142
5.2. Funciones esféricas de tipo τ . . . 145
5.2.1. Combinación lineal de polinomios matriciales y funciones esféricas clásicas . . . 146
5.2.2. Fórmula integral . . . 152
5.2.3. Derivadas matriciales de funciones esféricas clásicas . . . 155
5.2.4. Relaciones entre los métodos . . . 156
5.3. Transformada esférica, medida de Plancherel y fórmula de inversión . . . 159
5.3.1. Observación final . . . 161

6. Funciones esféricas en $\mathbb{R}^n$ como límite de funciones esféricas en $\mathbb{S}^n$ **165**
6.1. Contracción de grupos . . . 166
6.2. Caso compacto . . . 167
6.2.1. Un carácter, una función y una sucesión especiales . . . 167
6.2.2. El teorema de aproximación . . . 168
6.3. Caso no compacto . . . 172

Bibliografía **177**

Índice alfabético **181**

Introducción

El problema central que motiva esta tesis deriva de querer expresar simultáneamente en forma diagonal a operadores lineales y continuos que presentan simetrías. Es claro que si un operador T está presentado en forma diagonal, o de multiplicador, el sistema de ecuaciones del tipo $Tx = y$ será sencillo de resolver dado cualquier dato inicial y.

El área de investigación en la que se enmarca esta tesis es la del *análisis armónico*. El análisis de las *series de Fourier* ha sido el tema clásico en este campo. Como es bien sabido, estas permiten obtener información de señales a partir de su descomposición en funciones bien conocidas. Su nombre se debe al matemático y físico francés J. Fourier, quien las estudió de manera sistemática a raíz de su interés por la ecuación del calor.

Una función periódica puede pensarse como una función definida en la circunferencia unitaria $\mathbb{S}^1$. Toda función $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$ de cuadrado integrable se puede expresar como una serie trigonométrica (*serie de Fourier*)

$$f(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(f)(n)e^{in\theta}, \tag{1}$$

donde la igualdad es en norma $\|\cdot\|_2$ o puntual si f es suficientemente suave, $i := \sqrt{-1}$, $e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)$ y $\mathcal{F}(f)$ indica la *transformada de Fourier* de f (es decir, $\mathcal{F}(f)(n)$ es la componente o la proyección de f en la dirección del vector $e^{in\cdot}$). El dominio $\mathbb{S}^1$ es una *variedad homogénea* en el sentido que $\mathbb{S}^1$ actúa como grupo en sí misma por rotaciones (o por la multiplicación compleja) de manera transitiva, esto es, dados dos ángulos $0 \leq \alpha, \beta < 2\pi$ siempre existe otro ángulo θ tal que $\alpha = \beta + \theta$ (con la notación de grupo abeliano es una traslación). Sea $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ el espacio de funciones infinitamente diferenciables sobre la circunferencia unitaria. La acción de $\mathbb{S}^1$ en funciones $u \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ está dada por

$$(\theta \cdot u)(\alpha) := u(\alpha - \theta).$$

Consideremos un operador T lineal y continuo sobre $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ que sea invariante por la acción de $\mathbb{S}^1$, es decir, tal que

$$\theta \cdot (Tu) = T(\theta \cdot u).$$

Dicho operador T resulta de convolución, es decir,

$$Tu = u * f,$$

donde $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$ denota su núcleo y donde el producto de convolución está dado por

$$u * f(\theta) := \int_0^{2\pi} u(\alpha)f(\theta - \alpha)\, d\alpha \qquad \text{para todo ángulo } \theta.$$

El teorema de Plancherel establece que la transformada de Fourier es un isomorfismo isométrico entre el espacio de funciones de cuadrado integrable sobre la circunferencia unitaria $L^2(\mathbb{S}^1)$ y el espacio de sucesiones de cuadrado integrable ℓ^2. Además, una propiedad fundamental establece que la transformada de Fourier es un homomorfismo entre el álgebra de convolución de funciones integrables en $\mathbb{S}^1$ y el espacio de sucesiones con el producto puntual. Entonces, las coordenadas de Tu en términos de la base ortonormal $\{e^{in\theta}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ del espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{S}^1)$ están dadas por

$$\Big(\mathcal{F}(Tu)\Big)(n) = \mathcal{F}(f)(n)\ \mathcal{F}(u)(n) \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

Esto permite ver que el operador T resulta conjugado del *operador de multiplicación*

$$v \longmapsto \mathcal{F}(f)\ v$$

sobre el espacio de sucesiones de cuadrado integrable, es decir, del operador

$$\begin{aligned} \ell^2 &\longrightarrow \ell^2 \\ (v_n)_{n\in\mathbb{Z}} &\longmapsto (\mathcal{F}(f)(n)\ v_n)_{n\in\mathbb{Z}}\,. \end{aligned}$$

Precisamente, dada $u \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$, resulta que $u = \mathcal{F}^{-1}(v)$ para $v = (\mathcal{F}(u)(n))_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$ y entonces computar Tu es equivalente a hacer

$$\Big(\mathcal{F}\circ T\circ \mathcal{F}^{-1}(v)\Big)(n) = \mathcal{F}(f)(n)\ v_n \qquad \text{para todo } n\in\mathbb{Z}. \tag{2}$$

En síntesis, el operador T está unívocamente determinado por su núcleo f (que a su vez, si es de cuadrado integrable, sólo depende de los valores discretos $\{\mathcal{F}(f)(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ por (1)) y la transformada de Fourier es el operador de cambio de base, de la base

$$\{e^{in\theta}\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

de $L^2(\mathbb{S}^1)$ en la base canónica de ℓ^2

$$\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}},$$

donde e_n es la sucesión dada por $e_n(m) := \delta_{n,m}$ (siendo $\delta_{n,m}$ la delta de Kronecker), que permite escribir a T de manera *diagonal* según (2). Esto es, si f es de cuadrado integrable, utilizando la *fórmula de inversión* podemos expresar a T como

$$\begin{aligned} T(u)(x) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(f)(n)\ \left(u * e^{in\cdot}\right)(x) && (3)\\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(f)(n)\ \mathcal{F}(u)(n)\ e^{inx}. && (4) \end{aligned}$$

Pasemos a otro ejemplo cambiando $\mathbb{S}^1$ por el plano. Sobre $\mathbb{R}^2$ consideremos las acciones de traslación y rotación. Sea $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, o simplemente $\mathcal{D}$, el espacio de funciones infinitamente diferenciables de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{C}$ con soporte compacto. Tomemos un nuevo operador T ahora aplicado sobre $\mathcal{D}$ y que conmuta con traslaciones. A partir del teorema del núcleo de Schwartz se puede ver que T es un operador de convolución cuyo núcleo es una distribución, es decir, un elemento del espacio dual de $\mathcal{D}$, digamos $f \in \mathcal{D}'$. Si nos restringimos al caso en que f es una función integrable de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{C}$, entonces T resulta un *operador integral* de la forma

$$Tu(x) = u * f(x) := \int_{\mathbb{R}^2} u(y)f(x-y)\ dy \qquad \forall u\in\mathcal{D}.$$

Si ahora $\mathcal{F}(f)$ denota la transformada de Fourier en $\mathbb{R}^2$, es decir,

$$\mathcal{F}(f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^2} f(x)e^{-i\xi\cdot x} \qquad (\xi\in\mathbb{R}^2),$$

donde $\xi\cdot x := \xi_1x_1 + \xi_2x_2$, entonces vale la siguiente expresión que es similar a (2)

$$\Big(\mathcal{F}\circ T\circ \mathcal{F}^{-1}(v)\Big)(x) = \mathcal{F}(f)(x)\ v(x) \qquad \forall v\in\mathcal{D}.$$

Por lo tanto, T es semejante al operador de multiplicación $\mathcal{F}\circ T\circ\mathcal{F}^{-1}$. Recordemos que en este contexto la transformada de Fourier es un isomorfismo isométrico de $L^2(\mathbb{R}^2)$ en sí mismo. Notemos también que si bien en este ejemplo las funciones $\{e^{i\xi\cdot x}\}_{\xi\in\mathbb{R}^2}$ no forman una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R}^2)$ (ya que ni siquiera pertenecen a este espacio), se identifican con los *homomorfismos continuos* del álgebra de convolución $L^1(\mathbb{R}^2)$. Por su parte, observemos que son las autofunciones acotadas de todos los operadores diferenciales en $\mathbb{R}^2$ con coeficientes constantes, que justamente son los operadores diferenciales que conmutan con traslaciones.

Ahora bien, si además T es simétrico ante rotaciones, también lo será su núcleo. Esto es, f resulta radial (invariante por rotaciones) y por lo tanto sólo depende de los valores que toma sobre la semirrecta positiva $[0,\infty)$. Denotamos por $L^1(\mathbb{R}^2)^\sharp$ la subálgebra de convolución de $L^1(\mathbb{R}^2)$ conformada por las funciones radiales. Cada función $e^{i\xi\cdot x}$ deviene en una función radial cuando se la integra sobre $\mathbb{S}^1$, o sea, al tomar

$$\varphi(\xi) := \int_{\mathbb{S}^1} e^{i\xi\cdot\theta}\ d\theta,$$

donde $d\theta$ denota la medida en $\mathbb{S}^1$ que es invariante por rotaciones y normalizada, estamos logrando $\varphi(\xi) = \varphi(|\xi|e_1)$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^2$, donde $e_1 := (1,0)$ y $|\xi|$ es el módulo de ξ. Consideremos las siguientes funciones radiales parametrizadas en $r \in [0,\infty)$

$$\varphi_r(x) := \int_{\mathbb{S}^1} e^{ir(x\cdot\theta)}\ d\theta. \tag{5}$$

Estas son todas las autofunciones radiales acotadas del operador Laplaciano, cada una asociada al autovalor $-r^2$, normalizadas por $\varphi_r(0) = 1$. Es de destacar que el Laplaciano es un operador diferencial que conmuta con traslaciones y rotaciones. A su vez, estas funciones se identifican con funcionales lineales continuos de $L^1(\mathbb{R}^2)^\sharp$ y permiten obtener una fórmula de inversión o de reconstrucción como pasaremos a describir. Sabemos que si f y $\mathcal{F}(f)$ están en $L^1(\mathbb{R}^2)$, entonces

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{F}(f)(\xi)\ e^{ix\cdot\xi}\ d\xi \qquad p.p.$$

($p.p.$ es la abreviación de la frase en francés "presque partout", en inglés se suele poner $a.e.$ que abrevia a "almost every way" y en catellano también es usual encontrar $c.t.p.$ que indica "casi en todas partes", a los largo de esta tesis usaremos $p.p.$ para indicar que dos funciones coinciden salvo un conjunto de medida cero.) Si además f es radial, su transformada de Fourier también resulta radial y se tiene, haciendo cambios de coordenadas, que

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{F}(f)(\xi)\ e^{ix\cdot\xi}\ d\xi \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^1} \mathcal{F}(f)(r)\ e^{ir(x\cdot\theta)}\ r\ d\theta\ dr \\ &= \int_0^\infty \mathcal{F}(f)(r) \left(\int_{\mathbb{S}^1} e^{ir(x\cdot\theta)} d\theta \right) r\ dr \\ &= \int_0^\infty \mathcal{F}(f)(r)\ \varphi_r(x)\ r\ dr, \end{aligned}$$

donde por simplicidad hemos denotado por $\mathcal{F}(f)(r)$ a $\mathcal{F}(f)(re_1)$. Haciendo abuso de notación definimos la *transformada de Fourier esférica* de una función $f \in L^1(\mathbb{R}^2)^\sharp$ en un valor $r \in [0,\infty)$ por

$$\mathcal{F}(f)(\varphi_r) := \int_{\mathbb{R}^2} f(\xi)\overline{\varphi_r(\xi)}\ d\xi.$$

Notemos que para $f \in L^1(\mathbb{R}^2)^\sharp$ esta aplicación coincide con la transformada de Fourier "clásica" de f:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} f(\xi)\overline{\varphi_r(\xi)}\ d\xi &= \int_{\mathbb{R}^2} f(\xi) \int_{\mathbb{S}^1} e^{-ir(\xi\cdot\theta)}\ d\theta\ d\xi \\ &= \int_{\mathbb{S}^1} \mathcal{F}(f)(r\theta)\ d\theta \\ &= \mathcal{F}(f)(r), \end{aligned}$$

donde hemos usado que $\mathcal{F}(f)$ es radial. La fórmula de inversión para funciones radiales integrables y con transformada de Fourier integrable queda

$$f(x) = \int_0^\infty \mathcal{F}(f)(\varphi_r)\ r\ dr.$$

Retornando a nuestro operador T definido sobre $\mathcal{D}$ y que es invariante por traslaciones y rotaciones, podemos ahora escribirlo formalmente como

$$T(u)(x) = \int_0^\infty \mathcal{F}(f)(\varphi_r)\ \ (u * \varphi_r)(x)\ r\ dr.$$

Esta expresión es similar a (3) pero aquí no podemos obtener un análogo a (4) ya que las funciones $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ no necesariamente son radiales. Lo que sí podemos seguir afirmando es que el operador T sólo depende de los valores $\mathcal{F}(f)(\varphi_r)$ (con $r \in [0,\infty)$), es decir, sólo depende de la transformada de Fourier esférica de su núcleo.

Estos ejemplos son clásicos y pueden ser ampliamente generalizados ya sea modificando el dominio así como también considerando funciones a valores vectoriales. En nuestro caso consideraremos operadores lineales y acotados T aplicados sobre secciones de distintos fibrados homogéneos y por lo tanto estaremos considerando distintos dominios y funciones a valores vectoriales. Pero antes de pasar a estos resumiremos un poco los ejemplos vistos e introduciremos algunos conceptos.

§ Hemos trabajado con funciones definidas en dos dominios:

- la circunferencia unitaria $\mathbb{S}^1$ y
- el plano $\mathbb{R}^2$.

§ Ambos dominios son espacios homogéneos en los siguientes sentidos:

- el grupo de rotaciones actúa transitivamente en $\mathbb{S}^1$;
- las traslaciones por vectores en $\mathbb{R}^2$ actúan transitivamente en el plano $\mathbb{R}^2$;
- los movimientos rígidos dados por trasladar y rotar en $\mathbb{R}^2$ actúan transitivamente en el plano $\mathbb{R}^2$.

§ Hemos analizado operadores T aplicados sobre funciones de clase C_c^∞ en cada dominio. Los operadores que nos han interesado presentaban ciertas simetrías:

- en el primer ejemplo, aplicados sobre funciones definidas en $\mathbb{S}^1$ e invariantes por rotaciones;
- en el segundo, aplicados sobre funciones definidas en $\mathbb{R}^2$ e invariantes por traslaciones;
- en el último, aplicados sobre funciones definidas en $\mathbb{R}^2$ e invariantes por traslaciones y rotaciones.

§ En los tres casos resultan operadores de convolución. En el último, sus núcleos son funciones (o, más generalmente, distribuciones) invariantes por rotaciones, es decir, radiales. Consideramos entonces los espacios conformados por los núcleos integrables de operadores invariantes, es decir, las álgebras de convolución

- $L^1(\mathbb{S}^1)$;
- $L^1(\mathbb{R}^2)$;
- $L^1(\mathbb{R}^2)^\sharp$.

§ En general, dado un espacio de medida (X, μ) σ-finito, el espacio de clases de funciones integrables $L^1(X)$ es un *espacio de Banach* con la norma $\|\cdot\|_1$ dada por

$$\|f\|_1 := \int_X |f(x)| \, d\mu(x).$$

Los funcionales lineales y continuos de $L^1(X)$ forman el *espacio dual* de $L^1(X)$, denotado por $\big(L^1(X)\big)'$. A veces este es llamado el *espacio dual topológico* haciendo énfasis en la continuidad de los funcionales lineales. Por el teorema de Hahn-Banach sabemos que "los funcionales lineales separan puntos", es decir, dadas f y g funciones en $L^1(X)$, si $\Lambda(f) = \Lambda(g)$ para todo $\Lambda \in \big(L^1(X)\big)'$, entonces $f = g$. Por lo tanto, toda función en $L^1(X)$ queda completamente determinada a partir de sus evaluaciones en todos los funcionales lineales acotados. Pretendemos a lo largo de esta tesis achicar el espacio dual sin perder su propiedad de caracterizar a los elementos del espacio $L^1(X)$ o de un subespacio. Más aún, buscaremos obtener fórmulas de reconstrucción de una función a partir de saber ciertas de sus evaluaciones (o "coordenadas") dadas por adecuados funcionales lineales acotados. Por el teorema de representación de Riesz los elementos de $\big(L^1(X)\big)'$ se identifican con funciones en $L^\infty(X)$, en el sentido que si $\Lambda \in \big(L^1(X)\big)'$, entonces existe una única $h_\Lambda \in L^\infty(X)$ tal que

$$\Lambda(f) = \int_X f(x) h_\Lambda(x) \, d\mu(x) \qquad \forall f \in L^1(X). \tag{6}$$

En el caso del espacio de Banach $L^1(\mathbb{R}^2)^\sharp$, su dual se identifica con $L^\infty(\mathbb{R}^2)^\sharp$. En nuestros ejemplos hemos considerado, respectivamente, los conjuntos de funciones acotadas

- $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$;

- $\{e^{i\xi\cdot x}\}_{\xi\in\mathbb{R}^2}$;
- $\{\varphi_r\}_{r\in[0,\infty)}$ (dadas por (5)).

§ Con el producto de convolución las tres álgebras arriba mencionadas son ejemplos de *álgebras de Banach conmutativas*. Identificando cada una de las funciones de las familias recién listadas con su respectivo funcional lineal como en (6), se puede ver que satisfacen una propiedad fundamental. Esta propiedad es la de llevar la convolución de dos funciones a su producto puntual, es decir, vistas como funcionales lineales Λ, de las respectivas álgebras, cumplen

$$\Lambda(f * g) = \Lambda(f)\Lambda(g). \tag{7}$$

Los funcionales lineales y multiplicativos, es decir, que satisfacen (7) y que son no-triviales se llaman *caracteres* del álgebra. Se puede ver que todo carácter de un álgebra de Banach es continuo. El espacio de caracteres de un álgebra de Banach dotado de la topología de la convergencia puntual se llama el *espectro* del álgebra y es denotado usualmente por Σ. Identificaremos el espectro Σ, en cada caso, con

- $\mathbb{Z}$;
- $\mathbb{R}^2$;
- $[0,\infty)$.

En general el espectro Σ se identifica mediante un homeomorfismo con un subconjunto cerrado de algún $\mathbb{R}^m$ (cf. [Fe]).
§ Se trabajó con la *transformada de Fourier* o *transformada de Fourier esférica* definidas en cada álgebra de convolución por

- $\mathcal{F}(f)(n) := \int_{\mathbb{S}^1} f(\theta)\overline{e^{in\theta}}\, d\theta$;
- $\mathcal{F}(f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\overline{e^{i\xi\cdot x}}\, dx$;
- $\mathcal{F}(f)(r) := \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\overline{\varphi_r(x)}\, dx$.

§ Se puede ver que la imagen de estas transformaciones cae, respectivamente, en los espacios

- $C_0(\mathbb{Z}) := \{\text{sucesiones } x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mid \lim_{|n|\to\infty} x_n = 0\}$
- $C_0(\mathbb{R}^2) := \{\text{funciones continuas } f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} \mid \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0\}$
- $C_0([0,\infty)) := \{\text{funciones continuas y radiales } f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} \mid \lim_{r\to\infty} f(re_1) = 0\}$

En general, dada un álgebra de Banach $\mathcal{A}$ conmutativa, la *transformada de Gelfand* de un elemento $a \in \mathcal{A}$ es una función en el espectro Σ de $\mathcal{A}$ definida por

$$\mathcal{F}_{\mathcal{G}}(a)(\varphi) := \varphi(a) \qquad \forall \varphi \in \Sigma$$

y esta aplicación $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ es un homomorfismo continuo de $\mathcal{A}$ en $C_0(\Sigma)$ con la topología de la convergencia uniforme (entendiendo $C_0(\Sigma)$ como las funciones continuas definidas en Σ que se hacen cero en el punto dado por la compactificación de Alexandroff). La transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{S}^1)$ y en $L^1(\mathbb{R}^2)$, así como la transformada de Fourier esférica en $L^1(\mathbb{R}^2)^\sharp$, son ejemplos de transformada de Gelfand.
§ Introduciendo hipótesis adecuadas, se tienen las *fórmulas de inversión*

- $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(f)(n)\, e^{inx}$,
  donde la igualdad es en norma $\|\cdot\|_2$ para toda $f \in L^2(\mathbb{S}^1)$;
- $f(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{F}(f)(\xi)\, e^{ix\cdot\xi}\, d\xi$,
  donde la igualdad es en norma $\|\cdot\|_2$ para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ o *p.p.* para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ con $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R}^2)$;
- $f(x) = \int_o^\infty \mathcal{F}(f)(r)\, \varphi_r(x)\, r\, dr$,
  donde la igualdad es en norma $\|\cdot\|_2$ para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^2)^\sharp$ o *p.p.* para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^2)^\sharp$ con $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R}^2)^\sharp$.

§ La medida en Σ que permite recuperar las funciones en el álgebra a partir de conocer su transformada de Fourier (esférica) se llama la *medida de Plancherel*. En nuestros ejemplos

- la medida de Plancherel asociada a $\Sigma = \mathbb{Z}$ es la medida que cuenta puntos o cardinal;
- la medida de Plancherel asociada a $\Sigma = \mathbb{R}^2$ es la medida de Lebesgue;
- la medida de Plancherel asociada a $\Sigma = [0, \infty)$ es $r\ dr$.

§ Finalmente, los operadores T considerados se pueden reescribir formalmente como

- $T(u)(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(f)(n)\ \left(u * e^{in\cdot}\right)(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(f)(n)\ \mathcal{F}(u)(n)\ e^{inx}$;
- $T(u)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{F}(f)(\xi)\ \left(u * e^{i\xi\cdot(\cdot)}\right)(x)\ d\xi = \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{F}(f)(\xi)\ \mathcal{F}(u)(\xi)\ e^{i\xi\cdot x}\ d\xi$;
- $T(u)(x) = \int_0^\infty \mathcal{F}(f)(r)\ \ (u * \varphi_r)(x)\ r\ dr$.

En todos los casos T está completamente determinado por la transformada de Fourier (esférica) de su núcleo $\mathcal{F}(f)$. Con esta oración cerramos la primera parte de la introducción ya que es la que motivará los problemas que forman parte de esta tesis de doctorado.

A lo largo de esta tesis trabajaremos justamente con subálgebras de funciones integrables que son conmutativas con respecto al producto de convolución. Las funciones que forman parte de estas álgebras se pueden ver como los núcleos de convolución de ciertos operadores integrales que presentan una determinada simetría. Pero empecemos ahora por el lado de la geometría. Sea M un *variedad Riemanniana* y sea $Isom(M)$ el grupo de *isometrías* de M. Denotamos por $G := Isom(M)_0$ al *grupo de Lie* dado por la componente conexa del elemento identidad del grupo $Isom(M)$. Cuando $Isom(M)_0$ actúa transitivamente en M decimos que M es una variedad Riemanniana *homogénea*. Sea $K := G_{x_0}$ el estabilizador de un punto arbitrario $x_0 \in M$ por el grupo G. Se puede ver que K siempre es compacto y que M se identifica con el espacio cociente G/K (son espacios difeomorfos). Un *espacio conmutativo* es una variedad Riemanniana homogénea conexa M cuya álgebra de operadores diferenciales $Isom(M)_0$-invariantes es conmutativa. Equivalentemente, en este caso, se dice que el par (G, K) es *de Gelfand*. Esta última noción se define de forma más general olvidando que los grupos G y K provienen de haber considerado una variedad M. Sean G un grupo de Lie conexo y K un subgrupo compacto de G, decimos que (G, K) es un *par de Gelfand* si el álgebra $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^K$ de los operadores diferenciales invariantes a izquierda por G e invariantes a derecha por K es conmutativa. Se puede ver que esto es equivalente a que el álgebra

$$L^1(G)^\sharp := \{f \in L^1(G) \mid\ \ f(k_1 x k_2) = f(x)\ \ \forall k_1, k_2 \in K\}$$

sea conmutativa con el producto de convolución. Observemos varias cuestiones. Por un lado, si no partimos de una variedad M es necesario requerir que K sea compacto. Por otro lado, entendemos $L^1(G)$ como el espacio de funciones de G en $\mathbb{C}$ integrables con respecto a la medida de Haar de G. Todo grupo topológico localmente compacto y Hausdorff posee una medida de Haar. Por lo tanto también podemos definir, en general, que dados G un grupo topológico localmente compacto y Hausdorff (no necesariamente conexo) y K un subgrupo compacto de G, el par (G, K) es de Gelfand si el espacio $L^1(G)^\sharp$ es conmutativo con respecto al producto de convolución. A partir del teorema del núcleo de Schwartz los elementos de $L^1(G)^\sharp$ se identifican con los núcleos de operadores integrales, aplicados sobre funciones escalares con dominio G/K, que conmutan con la acción de traslación de G.

En el primer y tercer ejemplo mencionados anteriormente las variedades M involucradas fueron $\mathbb{S}^1$ y $\mathbb{R}^2$. La componente conexa de la identidad del grupo de isometrías de $\mathbb{S}^1$ es el grupo de rotaciones $\mathrm{SO}(2) \simeq \mathbb{S}^1$. El del espacio euclidiano bidimensional está formado por transformaciones ortogonales y por traslaciones. La composición de transformaciones rígidas se puede identificar con un producto semidirecto y tomando la componente conexa de la identidad nos queda que $Isom(\mathbb{R}^2)_0 = \mathrm{SO}(2) \ltimes \mathbb{R}^2$. En el caso de la circunferencia, ninguna rotación (o traslación por un ángulo $0 \leq \theta < 2\pi$) deja fijo a algún punto. En el caso de $\mathbb{R}^2$, el origen de coordenadas, por ejemplo, es dejado fijo por todo el grupo de rotaciones. Por lo tanto el subgrupo K mencionado anteriormente se identifica con $\mathrm{SO}(2)$. Las funciones sobre $\mathrm{SO}(2) \ltimes \mathbb{R}^n$ que son invariantes por $\mathrm{SO}(2)$ a derecha e izquierda están naturalmente en correspondencia con funciones sobre el espacio homogéneo, que en este caso es $\mathbb{R}^2$, que son invariantes por rotaciones. Por su parte, el segundo ejemplo analizado corresponde directamente a tomar $G = \mathbb{R}^2$ y $K = \{0\}$ el subgrupo trivial.

Hasta aquí hemos visto álgebras de convolución conmutativas en correspondencia con álgebras de operadores lineales y acotados con alguna simetría que se pueden "diagonalizar" simultáneamente. Dichos operadores han estado, hasta el momento, aplicados a funciones a valores escalares. Por lo tanto, los espacios dados por sus núcleos han resultado de funciones a valores en $\mathbb{C}$. La particularidad central de esta tesis reside en que estaremos interesadas en estudiar ya no álgebras de convolución de funciones a valores escalares sino de funciones a *valores matriciales*.

Sean G un grupo de Lie y K un subgrupo compacto de G. Todos los *fibrados vectoriales homogéneos* (complejos) sobre la variedad G/K se pueden describir usando las representaciones del grupo K. En efecto, dada (τ, V_τ) una representación (compleja) de dimensión finita de K, si consideramos la relación de equivalencia en $G \times V_\tau$ dada por $(gk, v) \sim (g, \tau(k)v)$, entonces el espacio de clases de equivalencia, que denotamos $G \times_\tau V_\tau$, tiene estructura de fibrado vectorial homogéneo sobre G/K. Más aún, todo fibrado vectorial homogéneo sobre G/K es isomorfo a uno de la forma $G \times_\tau V_\tau$ para alguna representación (τ, V_τ) de dimensión finita de K. Fijemos entonces una representación de dimensión finita (τ, V_τ) de K. Las *secciones* C^∞ de $G \times_\tau V_\tau$ con soporte compacto se identifican naturalmente con el subespacio de funciones $\mathbf{u} : G \to V_\tau$ de clase C_c^∞ que satisfacen $\mathbf{u}(gk) = \tau(k)^{-1}\mathbf{u}(g)$ para todo $k \in K$ y todo $g \in G$. Denotaremos dicho espacio por $\Gamma(G \times_\tau V_\tau)$ o simplemente por $\mathcal{D}$ cuando quede claro el contexto. En el caso en que τ es la representación trivial de K, las secciones del fibrado trivial se corresponden con funciones de G/K en $\mathbb{C}$, que son con las que habíamos estado trabajado al principio.

Consideremos el álgebra de los operadores integrables (por lo tanto lineales y continuos) aplicados sobre $\Gamma(G \times_\tau V_\tau)$ que conmutan con la acción de G. Por acotados nos referimos a que son operadores de $\mathcal{D}$ en $\mathcal{D}'$ continuos con respecto a la topologías estándares. Esta tesis está motivada por el problema de determinar cuándo esta álgebra es conmutativa y, en caso afirmativo, poder expresar tales operadores en forma diagonal, simultáneamente. A partir de un corolario del teorema del núcleo de Schwartz cada uno de estos operadores está caracterizado por ser un operador de convolución cuyo núcleo es una función a valores en los endomorfismos del espacio vectorial V_τ, $\mathrm{End}(V_\tau)$, que a su vez es *bi-τ-equivariante*. Precisamente, un operador integral T que conmuta con la acción de G es de la forma

$$\Big(T(\mathbf{u})\Big)(x) = \mathbf{u} * F(x) := \int_G F(y^{-1}x)\mathbf{u}(y)\ dy,$$

donde dy denota la medida de Haar a izquierda de G y F es una función a valores matriciales,

$$F : G \to \mathrm{End}(V_\tau),$$

que satisface

$$F(k_1 x k_2) = \tau(k_2)^{-1} F(x) \tau(k_1)^{-1} \qquad \forall k_1, k_2 \in K \text{ y } x \in G.$$

Consideraremos operadores cuyos núcleos sean funciones integrables e identificaremos cada operador T con su núcleo F llamándolo expresamente T_F. La composición de operadores se identifica con la convolución de sus núcleos

$$T_{F_2} \circ T_{F_1} = T_{F_1 * F_2}.$$

Llamamos $L^1_{\tau,\tau}(G, \mathrm{End}(V_\tau))$ al álgebra de convolución que forman dichos núcleos.

Estaremos interesadas en calcular explícitamente la familia de caracteres continuos de $L^1_{\tau,\tau}(G, \mathrm{End}(V_\tau))$. Estos permitirán diagonalizar simultáneamente a todos estos operadores de convolución. Pero previamente dichos operadores deberán conmutar entre sí. Esta condición motiva la noción de pares y ternas conmutativas o *de Gelfand*. Fijada τ una representación irreducible de K, una terna (G, K, τ) se dice *conmutativa* si el álgebra de funciones matriciales $L^1_{\tau,\tau}(G, \mathrm{End}(V_\tau))$ es conmutativa con el producto de convolución. Recuperamos la noción de *par de Gelfand* (G, K) cuando la terna (G, K, τ), con τ la representación trivial de K, es conmutativa. Los *caracteres continuos* de estas álgebras son las llamadas *funciones esféricas*. Estas conforman el espectro Σ de dicha álgebra de funciones matriciales. La transformación que escribirá los operadores en las coordenadas dadas por las funciones esféricas es la denominada *trasformada de Fourier esférica*. Si $\mathcal{F}$ denota la transformada de Fourier esférica, entonces existe una medida μ en Σ, llamada *medida de Plancherel*, tal que

$$\Big(T_F(\mathbf{u})\Big)(x) = \int_\Sigma \mathcal{F}(F)(\Phi)\ \ (\mathbf{u} * \Phi)(x)\ d\mu(\Phi)$$

Por lo tanto, cada T_F queda completamente determinado al conocer los valores $\{\mathcal{F}(F)(\Phi)\}_{\Phi \in \Sigma}$.

Partiendo de motivaciones que provienen de la teoría de representaciones destacamos el trabajo de R. Godement [God]. Entre los artículos recientes en este campo que involucran pares simétricos (G, K) (de tipo compacto o no compacto) con G un grupo de Lie semisimple Lie podemos mencionar [Ca, GPT, PTZ, RT].

En esta tesis nos interesarán particularmente los casos en que M sea un grupo de Lie nilpotente conexo, simplemente conexo dotado de una métrica Riemanniana invariante a izquierda. Pondremos $M = N$ y esta recibe el nombre de *nilvariedad homogénea*. El grupo de isometrías de N está dado por el producto semidirecto $Isom(N) = K \ltimes N$, donde K es el grupo de automorfismos ortogonales de N. Uno podría más generalmente obviar la variedad M y su grupo de isometrías y considerar directamente N un grupo de Lie nilpotente, K un subgrupo compacto de automorfismos de N y $G = K \ltimes N$. En estos casos el espacio $L^1(G)^\sharp$ se identifica con el subespacio de $L^1(N)$ de las funciones que son invariantes por la acción de K y $L^1_{\tau,\tau}(G, \mathrm{End}(V_\tau))$ con el subespacio $L^1_\tau(N) \subset L^1(N, \mathrm{End}(V_\tau))$ de funciones matriciales tales que

$$F(k \cdot x) = \tau(k)F(x)\tau(k)^{-1}. \tag{8}$$

Las ternas de tipo $(K \ltimes N, K, \tau)$ han sido estudiadas en el reciente trabajo [RS] de F. Ricci y A. Samanta.

En esta tesis se abordarán concretamente los siguientes dos problemas:

- determinar ejemplos particulares de grupos $K \ltimes N$ y de representaciones irreducibles τ de K tales que $(K \ltimes N, K, \tau)$ sea una terna conmutativa;
- desarrollar el análisis esférico en álgebras conmutativas de tipo $L^1_{\tau,\tau}(K \ltimes N, \mathrm{End}(V_\tau))$, esto es, dar una descripción explícita de la transformada de Fourier esférica en estas álgebras de funciones.

En cuanto al primero de los problemas, hemos determinado *todas* las ternas conmutativas de la forma $(K \ltimes N, K, \tau)$ donde N es un grupo de Lie dos pasos nilpotente, conexo, simplemente conexo, que admite una representación de cuadrado integrable y K es el subgrupo compacto y conexo maximal del grupo de automorfismos de N. En general, una condición necesaria para que $(K \ltimes N, K, \tau)$ sea una terna conmutativa (si N es conexo) es que $(K \ltimes N, K)$ debe ser un par de Gelfand [RS]. Por su parte, si $(K \ltimes N, K)$ es de Gelfand, entonces N es abeliano o dos pasos nilpotente [BJR1]. Por este motivo hemos considerado grupos de Lie N dos pasos nilpotentes conexos. Para abordar la clasificación completa de estas ternas, en una primera instancia hemos tomando como guía la lista de pares de Gelfand dada por J. Lauret en [La2]. La clasificación de pares de Gelfand $(K \ltimes N, K)$ fue completada por E. Vinberg. Por ello, posteriormente analizamos nuevamente para qué pares de Gelfand del artículo [V], que no están en [La2], existen representaciones irreducibles τ de K tales que la terna $(K \ltimes N, K, \tau)$ resulta conmutativa.

En cuanto al segundo problema, nos hemos concentrado en el caso en que N es un grupo abeliano y en particular $\mathbb{R}^n$. Presentamos una descripción explícita de *todas* las funciones esféricas del par de Gelfand fuerte $(\mathrm{SO}(3) \ltimes \mathbb{R}^3, \mathrm{SO}(3))$. De hecho daremos diferentes alternativas para calcularlas. Al tener el conjunto de todas las funciones esféricas de tipo positivo podremos, mediante la transformada de Fourier esférica, obtener una fórmula de inversión y la medida de Plancherel de cada una de las álgebras $L^1_\tau(N)$ para cada representación irreducible τ de $\mathrm{SO}(3)$. Identificando el dual de $L^1_\tau(N)$ con funciones acotadas satisfaciendo (8), las funciones esféricas se caracterizan

(i) por ser homomorfismos del álgebra de convolución $L^1_\tau(N)$ en $\mathbb{C}$ (sus caracteres);

(ii) por satisfacer una ecuación integral que generaliza la propiedad de las funciones exponenciales $e^{\lambda(x+y)} = e^{\lambda x}e^{\lambda y}$;

(iii) por ser autofunciones simultáneas de todos los operadores diferenciales matriciales invariantes por traslaciones y rotaciones;

(iv) por ser las proyecciones a la componente V_τ de cada una de las representaciones unitarias irreducibles de $G = \mathrm{SO}(3) \ltimes \mathbb{R}^3$ que contienen a la representación τ de K cuando se las restringe a K.

Obtendremos un conjunto de generadores del álgebra de operadores diferenciales matriciales invariantes por traslaciones y rotaciones. A partir de la caracterización (iii) podremos escribir todas las funciones esféricas como una combinación lineal de productos de funciones radiales a valores escalares por polinomios matriciales invariantes por traslaciones y rotaciones. Daremos también una fórmula integral para las funciones esféricas que será muy útil a la hora de presentar la fórmula de inversión y la medida

de Plancherel. Utilizando esta descripción de las funciones esféricas como una integral sobre una de las SO(3)-órbitas de funciones matriciales y, a su vez, observando similitudes con la transformada de Fourier clásica, las funciones esféricas también podrán ser expresadas como la transformada de Fourier de medidas en las órbitas de la acción de SO(3) en $\mathbb{R}^3$ (esferas de distintos radios) por matrices de proyección. También hemos podido poner las funciones esféricas como derivadas matriciales de la matriz identidad multiplicada por las funciones escalares φ_r definidas al comienzo de esta Introducción. Tanto en esta presentación como en la descripción de las funciones esféricas de forma integral, ha sido fundamental el artículo [RS] y comunicaciones personales con el Prof. Fulvio Ricci. Por último y para cualquier $n \in \mathbb{N}$, explicamos un método que permite obtener las funciones esféricas asociadas al par de Gelfand fuerte $(\mathrm{SO}(n) \ltimes \mathbb{R}^n, \mathrm{SO}(n))$ como límite de funciones esféricas del par $(\mathrm{SO}(n+1), \mathrm{SO}(n))$. Esto generaliza la fórmula clásica de Mehler-Heine y conecta la teoría de Gelfand en pares simétricos (G, K) con G semisimple con la de pares $(K \ltimes N, K)$ donde N un grupo nilpotente o, más aún, abeliano. En esta última parte utilizaremos la noción de contracción de grupos de Lie y la caracterización (iv) de las funciones esféricas que requiere fuertemente de la teoría de representaciones de los grupos involucrados.

Esta tesis doctoral está organizada de manera tal que en los primeros tres capítulos se encuentren la mayor parte de las motivaciones, definiciones y herramientas básicas que se necesitan para pasar a los últimos tres capítulos donde se presentan los resultados originales.

En el Capítulo 1 comenzamos recuperando las nociones básicas de grupo, acción y representación. Estos conceptos algebraicos nos permitirán describir objetos geométricos como variedades homogéneas y fibrados vectoriales homogéneos. A su vez, estos espacios serán luego los dominios de las funciones a considerar en este trabajo. Este capítulo se divide en sólo dos secciones, 1.1 y 1.2. Pasaremos de acciones de grupos al mundo lineal, con representaciones de grupos. Las acciones nos permitirán definir espacios homogéneos y las representaciones, fibrados vectoriales homogéneos. Muchas de las nociones están presentadas de una manera ligeramente distinta a la que se encuentra en la literatura usada actualmente en los cursos de grado y posgrado. Los libros clásicos utilizados como referencia han sido por ejemplo [Fa, FH, He2, Hu, Kn, Le, Wal, War]. Asimismo, para resultados más modernos se incluyen como referencia los artículos recientes [HLLS, O]. Los únicos resultados originales que se pueden encontrar en este apartado son los Corolarios 1.73 y 1.74 que se desprenden de una afirmación general dada en [O].

En el Capítulo 2 dasarrollaremos el análisis esférico escalar. Dedicaremos la primera sección (2.1) al estudio de *funciones de tipo positivo*. Aquí se pueden encontrar reformulaciones respecto de los textos clásicos. La segunda sección (2.2) comienza con la conocida transformada de Fourier en $\mathbb{R}$ para pasar luego a su generalización con la definición de la *transformada de Gelfand*. Luego, en la Sección 2.3, explicamos el teorema del núcleo de Schwartz de la manera más intuitiva posible. Estas dos secciones motivarán la Sección 2.4 donde se definen las nociones de pares de Gelfand, funciones esféricas y transformada de Fourier esférica. Por último, en la Sección 2.5 desarrollamos la teoría presentada a lo largo de todo este capítulo para dos ejemplos particulares que serán retomados en capítulos posteriores. Todos los conceptos y resultados en este apartado son clásicos (si bien hemos incluido adaptaciones personales) y hemos tomado como referencias principales los libros [Die, Fo, Dij, Ru1] y el curso CIMPA [CEFRT] dictado por J. Faraut y el artículo [BJR1].

Es recién en el Capítulo 3 donde se introducen los objetos de estudio propios de la tesis. Para su redacción han sido fundamentales los artículos [Ca, God, RS]. Primero se tratarán ternas (G, K, τ) en general, luego las correspondientes funciones esféricas y en una última sección especificaremos al caso en que el grupo de Lie G está dado por el producto semidirecto $G = K \ltimes N$, donde N es un grupo de Lie nilpotente.

En el Capítulo 4 consideramos grupos de Lie de la forma $G = K \ltimes N$, donde N es un grupo de Lie dos pasos nilpotente, conexo, simplemente conexo y K es el grupo maximal conexo y compacto de automorfismos de N. Este capítulo está dividido en tres secciones, 4.1, 4.2 y 4.3. En la primera, estudiaremos condiciones sobre τ para garantizar que $(K \ltimes N, K, \tau)$ sea una terna conmutativa. Restringiremos nuestra atención solamente a aquellos grupos N que admiten representaciones de cuadrado integrable. En estos casos veremos que es posible reducir el problema a estudiar la conmutatividad de ternas que involucran un grupo de Heisenberg en lugar del grupo nilpotente general N. El Teorema 4.4 dará cuenta de esto. En la segunda sección estudiamos grupos de Lie dos pasos nilpotentes dados según la construcción realizada por J. Lauret en los artículos [La1, La2]. Estos grupos N se describen de manera similar a los *grupos de tipo Heisenberg*. A su vez, N presenta estructura de variedad Riemanniana y $K \ltimes N$ conforma su grupo de isometrías. Para esta clase particular de grupos hemos clasificado todas las ternas conmutativas $(K \ltimes N, K, \tau)$. El teorema de clasificación es el Teorema 4.20. Este requiere de un criterio dado previamente en el Teorema 4.8 y en el Corolario 4.9 que simplifica la condición dada en el Teorema 4.4. Los pares

de Gelfand fuertes en este contexto son muy pocos, de hecho el único es el par $(\mathrm{U}(n) \ltimes \mathrm{H}_n, \mathrm{U}(n))$, donde H_n denota el grupo de Heisenberg $(2n+1)$-dimensional y $\mathrm{U}(n)$ es grupo unitario que actúa de la manera natural sobre $\mathbb{C}^n$ (esto es debido a O. Yakimova, [Ya]). Los resultados de estas dos primeras secciones se pueden encontrar en nuestro artículo [DS] (aceptado para su publicación en la revista Transformation Groups). Por último, como la clasificación de pares de Gelfand de la forma $(K \ltimes N, K)$, con N un grupo de Lie dos pasos nilpotente, fue completada por E. Vinberg, con el espíritu de completar la clasificación de ternas conmutativas de esta forma, estudiaremos si hay ternas de Gelfand no-triviales en el artículo [V] que expandan nuestra clasificación dada a partir de los pares se encuentran en [La2]. En su totalidad este es un extenso capítulo donde se analizan caso por caso cada uno de los pares de Gelfand de la forma $(K \ltimes N, K)$ (con mínimas restricciones) dando lugar a 12 proposiciones, de la 4.11 a la 4.19 y de la 4.26 a la 4.28, que completan la clasificación de ternas conmutativas de la forma mencionada y donde se utiliza fuertemente la teoría de representaciones.

En el Capítulo 5 nos dedicaremos a describir las funciones esféricas de todas las ternas conmutativas $(\mathrm{SO}(3) \ltimes \mathbb{R}^3, \mathrm{SO}(3), \tau)$ haciendo variar τ sobre todas las representaciones irreducibles de $\mathrm{SO}(3)$. Estas serán presentadas desde tres enfoques distintos. Una manera permitirá escribirlas como una combinación lineal de ciertas funciones radiales por polinomios sobre $\mathbb{R}^3$ a valores matriciales bi-τ-equivariantes. Otra, a partir de dar una expresión integral, involucrará a la transformada de Fourier clásica y a medidas definidas sobre esferas de distinto radio (es decir, sobre las órbitas de la acción natural de $\mathrm{SO}(3)$ sobre $\mathbb{R}^3$). Por último, se podrán derivar a partir de aplicar operadores diferenciales matriciales bi-τ-equivariantes a ciertas funciones esféricas asociadas al par de Gelfand $(\mathrm{SO}(3) \ltimes \mathbb{R}^3, \mathrm{SO}(3))$ (es decir, asociadas a la terna donde τ es la representación trivial). Los resultados principales de este capítulo son el Teorema 5.3, que permite caracterizar los operadores diferenciales a valores en $\mathrm{End}(V_\tau)$ que son bi-τ-equivariantes, los Teoremas 5.6, 5.8 y 5.10, que muestran tales tres presentaciones de las funciones esféricas, y finalmente la *fórmula de inversión* dada en el Teorema 5.13. Los argumentos empleados en las pruebas utilizan fuertemente que la dimensión considerada haya sido tres. Hemos publicado los resultados de este capítulo en el artículo [DL] que es un trabajo en colaboración con el Dr. Fernando Levstein.

Por último, en el Capítulo 6 consideraremos nuevamente el par de Gelfand fuerte $(\mathrm{SO}(n) \ltimes \mathbb{R}^n, \mathrm{SO}(n))$, pero esta vez la dimensión n será arbitraria. Fijada una representación irreducible τ de $\mathrm{SO}(n)$ nos centraremos en generalizar la fórmula clásica de Mehler-Heine para lograr una expresión asintótica de cada una de las funciones esféricas de cada terna conmutativa $(\mathrm{SO}(n) \ltimes \mathbb{R}^n, \mathrm{SO}(n), \tau)$ a partir de tomar una sucesión de funciones esféricas asociadas a la terna conmutativa $(\mathrm{SO}(n+1), \mathrm{SO}(n), \tau)$. Por su parte, haremos el mismo trabajo reemplazando al grupo compacto $\mathrm{SO}(n+1)$ por la componente conexa de la identidad del grupo de Lorentz $\mathrm{SO}_0(1,n)$, que es no compacta. Más aún, en un sentido que será especificado en el capítulo, ampliaremos esto último cambiando el grupo $\mathrm{SO}_0(1,n)$ por familias más generales de grupos no compactos vinculadas a *grupos de movimientos rígidos de Cartan*. Separamos el caso compacto del no compacto en dos secciones, 6.2 y 6.3. Para la comprensión de este problema han sido fundamentales los artículos [DR1, DR2] de A. Dooley y J. Rice. Los resultados principales de este apartado son los Teoremas 6.12 y 6.16 que se pueden encontrar en [DP], artículo (enviado para ser considerado para su publicación) en colaboración con la Dra. Inés Pacharoni quien ha sido parte de la comisión asesora de mi doctorado.

Capítulo 1

Estructuras algebraicas y geométricas

En este capítulo se definen las nociones más básicas que necesitaremos en esta tesis y se introduce notación. Muchas de las definiciones serán presentadas desde una mirada personal, considerando que esta es la forma más natural para su comprensión.

1.1. Luz, cámara, acción: Grupos y espacios homogéneos

Nos levantamos encendemos la luz, nuestros ojos ya están abiertos y comienza la lectura. Para arrancar necesitamos acción y justamente así es como comienza esta tesis, con *acción*. Imaginemos que tenemos el mundo en nuestras manos. Imaginemos que podemos transformarlo. Pregunta: ¿Cuál es la naturaleza de nuestras acciones? Pensar su respuesta puede quizás hacernos disparar para muchos lados pero no es la intención en este momento. Modelizaremos las acciones o transformaciones acordando tres propiedades:

- En primer lugar, se puede pensar que dos transformaciones consecutivas dan origen a una nueva transformación: aquella formada por la composición, en orden, de las dos primeras acciones. En principio nos importará el orden en que efectuemos nuestras acciones (no hubiera sido lo mismo si antes de encender la computadora hubiera escrito esta tesis y luego la hubiera prendido).

  Siguiendo con combinaciones de transformaciones, podemos pensar ahora que tres acciones consecutivas, a, b y c, son en síntesis una nueva transformación. Esta nueva transformación es, a su vez, la combinación de la acción a con la acción conjunta de b con c o, equivalentemente, la combinación de la acción conjunta de a y b con la acción c.

- En segundo lugar, siempre podemos quedarnos de brazos cruzados y no hacer nada (a veces es la opción más prudente, a veces la más cobarde). Es decir, siempre está a nuestra disposición la transformación que es neutra.

- En tercer lugar vamos a suponer que nuestras acciones son reversibles, que siempre podemos volver para atrás.

Todo nuestro arsenal de verbos, todas nuestras posibles transformaciones, conforman una estructura que en matemática llamamos *grupo*. Para pasar a formalizar lo dicho en palabras y a introducir notación, denotemos dicho conjunto por G y representemos nuestro mundo a transformar con un conjunto de elementos X. Decimos que G *actúa* en X si se puede definir una aplicación

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (a, x) &\longmapsto a \cdot x \end{aligned}$$

que cumple:

- Dados $a, b \in G$ su composición define un nuevo elemento $ab \in G$ que satisface

  $$b \cdot (a \cdot x) = ba \cdot x \qquad \text{para todo } x \in X.$$

  A su vez, si c es otro elemento de G, $(cb) \cdot (a \cdot x) = c \cdot ((ba) \cdot x)$ para todo $x \in X$.

- Existe $e \in G$ tal que $e \cdot x = x$ para todo $x \in X$. Esta transformación neutra es el *elemento identidad* del grupo.
- Para todo elemento $a \in G$ existe otro elemento en G, que denotamos por a^{-1}, que satisface $a^{-1} \cdot (a \cdot x) = x$ y también $a \cdot (a^{-1} \cdot x) = x$ para todo $x \in X$.

La estructura de grupo, conformada por cada una de nuestras potenciales transformaciones, es una de las estructuras algebraicas más simples. Podemos abstraer las propiedades que cumplen los elementos del grupo, sin accionarlos sobre algún espacio, y definir por grupo a un conjunto G con una operación binaria y cerrada

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (b, a) &\mapsto ba \end{aligned}$$

que satisface

- $(cb)a = c(ba)$ para todo $a, bc, \in G$,
- existe $e \in G$ tal que dado cualquier elemento $a \in G$ se tiene que $ae = a$ y también $ea = a$,
- para todo elemento $a \in G$ existe otro elemento en G, denotado a^{-1}, tal que $aa^{-1} = e = a^{-1}a$.

En el caso en que el orden en que realicemos nuestras transformaciones no importe, es decir, cuando $ba = ab$ para todo par de elementos $a, b \in G$, el grupo se llamará *abeliano*.

Un subconjunto no vacío H de G se dice *subgrupo* de G y se denota $H < G$, si forma en sí mismo un grupo bajo la operación de composición heredada de G. Un subgrupo H de G se dice *normal* si el cociente

$$G/H := \{aH \mid \ a \in G\}$$

(donde se entiende que $aH = bH$ si y sólo si existe un elemento $h \in H$ tal que $a = bh$, es decir, cocientamos por la relación de equivalencia dada por la pertenencia al subgrupo H),

es un grupo con la operación $(aH)(bH) := abH$. (Usualmente se los define, equivalentemente, como aquellos subgrupos H que satisfacen $aHa^{-1} \subset H$ para todo $a \in G$.) En este caso la notación será $H \triangleleft G$.

Decimos que dos grupos, G_1 y G_2, son *isomorfos* si existe una correspondencia entre sus elementos y además esta correspondencia permite identificar las todas sus acciones. Si esto ocurre existe una aplicación biyectiva, $\phi : G_1 \to G_2$, que respeta las operaciones de ambos, es decir, tal que $\phi(ba) = \phi(b)\phi(a)$ para todo $a, b \in G_1$. Se puede ver que la inversa ϕ^{-1} también respeta las operaciones de grupo. Si debilitamos un poco esta noción, decimos que una aplicación $\phi : G_1 \to G_2$ tal que $\phi(ba) = \phi(b)\phi(a)$ para todo $a, b \in G_1$ es un *homomorfismo*. El conjunto imagen de ϕ, $\mathrm{Im}\,(\phi)$, es un subgrupo de G_2 y su núcleo es el subgrupo normal de G_1

$$\text{Nú}(\phi) := \{a_1 \in G_1 \mid \ \phi(a_1) = e_2\},$$

donde e_2 es el elemento identidad del grupo G_2. Un teorema de isomorfismo, fácil de probar, establece que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\theta"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Im}\,(\phi)\ , \\ G_1/\text{Nú}(\phi) \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

(donde θ denota la proyección cociente canónica), es decir, existe un isomorfismo de grupos $\overline{\phi}$ entre $G_1/\text{Nú}(\phi)$ y $\mathrm{Im}\,(\phi)$ tal que $\overline{\phi} \circ \theta = \phi$.

Dado un grupo G, un homomorfismo de G en G se dice *endomorfismo* y en caso que sea isomorfismo se llamará *automorfismo*. Tanto el conjunto de endomorfismos, $\mathrm{End}(G)$, de un grupo G como el conjunto de automorfismos, $\mathrm{Aut}(G)$, forman dos nuevos grupos, este último con la operación de composición de funciones y el primero con la operación de producto puntual de funciones

- dados $\phi, \tilde{\phi} \in \mathrm{End}(G)$, se define $(\phi\tilde{\phi})(g) := \phi(g)\tilde{\phi}(g)$ para todo $g \in G$, donde en el lado derecho se utiliza la operación del grupo G y

- dado $\phi \in \mathrm{End}(G)$, se define $\phi^{-1}(g) := (\phi(g))^{-1}$ para todo $g \in G$, donde en el lado derecho se utiliza el inverso en G.

Dados dos grupos G_1 y G_2 es posible construir un nuevo grupo de diferentes maneras. Por ejemplo, considerando el conjunto dado por el producto cartesiano $G_1 \times G_2$ entre ellos y definiendo la operación

$$(a, b)(\tilde{a}, \tilde{b}) := (a\tilde{a}, b\tilde{b}).$$

Esta construcción recibe el nombre de *producto directo de grupos*. Por otro lado, si G_1 actúa en G_2 por automorfismos podemos dar otra construcción llamada *producto semidirecto*: El conjunto que da origen al nuevo grupo será el conjunto de pares $G_1 \times G_2$ pero la operación de composición ahora estará dada por

$$(a, b)(\tilde{a}, \tilde{b}) = (a\tilde{a}, b(a \cdot \tilde{b})).$$

Notar que con esta operación

$$(a, b)^{-1} = (a^{-1}, a^{-1} \cdot b^{-1}).$$

Este grupo se denota $G_1 \ltimes G_2$. Ambas construcciones son ejemplos de una noción más general, la de *extensión de grupos*. Dados dos grupos Q y N, decimos que un grupo G es una extensión de Q por N si es posible hallar un diagrama

$$N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\theta} Q$$

donde tanto ι como θ son homomorfismos, el primero inyectivo y el segundo sobreyectivo. Esto se conoce con el nombre de *sucesión exacta corta*. Si G es una extensión de Q por N, entonces N se identifica con un subgrupo normal de G y Q es isomorfo al grupo cociente G/N. Los grupos "indivisibles" o "atómicos" serán aquellos que no sean extensiones no-triviales de otros grupos. Estos grupos se llaman *simples*. (Usualmente se los define de modo equivalente como aquellos grupos G que no tienen subgrupos normales propios, es decir, tales que sus únicos subgrupos normales son $\{e\}$ y G.) La palabra "simple" alude entonces a que G no se puede partir en dos grupos más "chicos" (un subgrupo normal N y un grupo cociente G/N). Si un grupo G que es producto directo de grupos simples se dice *semisimple*. (Esto es equivalente a que G no tenga subgrupos normales abelianos no-triviales.)

El *centro* de un grupo G se define como

$$Z(G) := \{a \in G \mid \ ab = ba \quad \forall b \in G\}$$

y resulta subgrupo normal abeliano de G. Dados dos elementos $a, b \in G$, se define su *conmutador* por el elemento $[a, b] := a^{-1}b^{-1}ab$. Si G no es abeliano, dados $a, b \in G$, las acciones producidas por ab no son las mismas que las de ba. El elemento de G que mide esta diferencia es el conmutador entre a y b: $ab = [a, b]ba$. Es fácil verificar que $[a, b]^{-1} = [b, a]$ y que dado un homomofismo ϕ entre grupos, $\phi([a, b]) = [\phi(a), \phi(b)]$. El *conmutatdor* $[G, G]$ de G es el subgrupo generado por todos los conmutadores $[a, b]$. Suele ser llamado el subgrupo *derivado* de G y se lo suele denotar también por G'. El por qué de este nombre tendrá un motivo cuando veamos grupos de Lie. Con estas definiciones los grupos semisimples G son aquellos que cumplen que $G = G'$ y que $G/Z(G)$ es un producto directo de grupos simples no abelianos. En la otra orilla tenemos a los grupos *solubles* y *nilpotentes*. Los grupos solubles son aquellos que se pueden construir a partir de grupos abelianos usando extensiones. Esto es, un grupo G es soluble si tiene subgrupos $\{e\} = G_0 < G_1 < \cdots < G_n = G$ tales que $G_{j-1} \triangleleft G_j$ y G_j/G_{j-1} es abeliano para todo $1 \leq j \leq n$. Por su parte, los grupos nilpotentes son aquellos contruidos a partir de extensiones centrales, es decir, un grupo G es nilpotente si posee una serie de longitud finita $\{e\} = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \cdots \triangleleft G_n = G$ donde $G_{j+1}/G_j < Z\left(G/G_j\right)$ para todo $0 \leq j \leq n-1$.

Los operadores de traslación a izquierda y a derecha en el grupo G por un elemento $g \in G$ están definidos por

$$\begin{aligned} L_g : G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto gx \end{aligned} \qquad \begin{aligned} R_g : G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto xg^{-1} \end{aligned} \tag{1.1}$$

y serán sumamente importantes. Ambos provienen de acciones sobre el mismo grupo G. Es decir, G actúa en sí mismo por traslaciones a izquierda y también por traslaciones a derecha. A su vez, G actúa en sí mismo por la acción conjunta de trasladar a izquierda y a derecha

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (g, x) &\longmapsto gxg^{-1}. \end{aligned}$$

Para cada $g \in G$, el operador asociado a esta acción será denotado por $I_g(x) := gxg^{-1}$ y se conoce como la *conjugación* por $g \in G$. Variando $g \in G$ forman el subgrupo de automorfismos *interiores* de G, $\mathrm{Int}(G)$.

Una acción de un grupo G en un conjunto X induce naturalmente una acción del grupo G en el conjunto de funciones con dominio X: Dada una función f definida sobre X y dado un elemento $g \in G$, definimos la acción de g en la función f por

$$(g \cdot f)(x) := f(g^{-1} \cdot x) \qquad \forall x \in G. \tag{1.2}$$

Por ejemplo, las figuras 1.1 y 1.2 muestran cómo la acción de traslación en $G = \mathbb{R}$ por el vector $v \in \mathbb{R}$ (que lleva cada elemento $x \in \mathbb{R}$ al punto $x + v \in \mathbb{R}$) se traduce en la acción de traslación de una función f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ por el mismo vector v. Las figuras permiten visualizar que la definición (1.2) no es caprichosa: en primer lugar define de hecho una acción y, por otra parte, esta acción produce el efecto que esperaríamos (en el ejemplo, ir hacia la derecha v unidades).

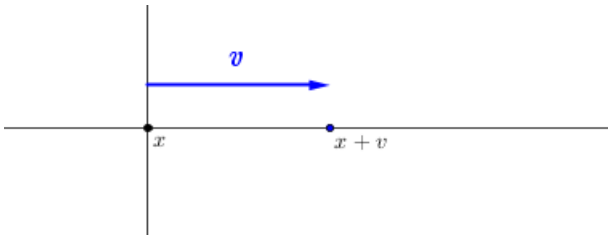


Figura 1.1: Acción por traslación en $\mathbb{R}$.

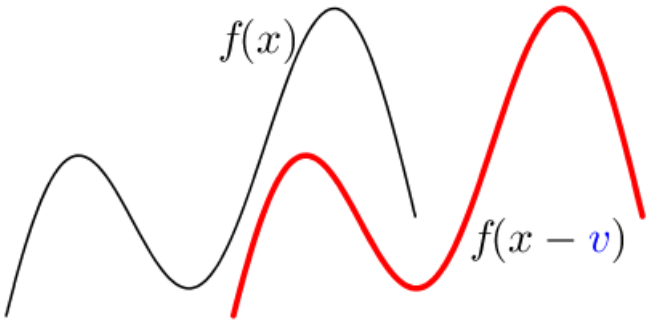


Figura 1.2: Acción por traslación sobre una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Análogamente, teniendo una acción de un grupo G en el conjunto de funciones con dominio X, podemos ver que G actúa naturalmente en el espacio de funciones (u operadores) sobre estas funciones por

$$(g \cdot T)(f) := T(g^{-1} \cdot f) \qquad \text{(para todo operador } T) \tag{1.3}$$

Así podríamos seguir definiendo indefinidamente acciones naturales de G en espacios de funciones sobre funciones.

Definición 1.1. Un *grupo topológico* es un espacio topológico G que además tiene estructura de grupo y ambas estructuras son compatibles en el sentido que tanto la operación de grupo

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (b, a) &\longmapsto ba \end{aligned} \tag{1.4}$$

como la aplicación de tomar inversos

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow G \\ a &\longmapsto a^{-1} \end{aligned} \tag{1.5}$$

son continuas. De manera similar, un *grupo de Lie* es una variedad diferenciable G que además admite una estructura de grupo donde las operaciones (1.4) y (1.5) son funciones diferenciables.

Sólo consideraremos grupos topológicos N_2 (es decir, cuya topología tenga una base numerable de abiertos), localmente compactos (es decir, tales que cada punto tenga un entorno compacto) y T_2 (Hausdorff).

Una acción de un grupo topológico G en un espacio topológico X localmente compacto y Hausdorff es una acción del grupo en el espacio dada por la aplicación

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (a, x) &\longmapsto a \cdot x \end{aligned}$$

satisfaciendo que tal función es continua. Análogamente, se dice que un grupo de Lie G actúa en una variedad diferenciable X si G actúa en X como grupo y dicha aplicación es diferenciable.

Observación 1.2. Si G es un grupo topológico, los operadores de traslación L_g y R_g definidos en (1.1) son homeomorfismos de G. En el caso en que además G sea grupo de Lie, tales operadores son difeomorfismos de G.

Notación. *Si A y B son subconjuntos de G, denotamos*

$$A^{-1} := \{a^{-1} \mid \ a \in A\} \qquad y \qquad AB := \{ab \mid \ a \in A, \ b \in B\}. \tag{1.6}$$

Propiedades 1.3. *[Fo, Proposición 2.1, Proposición 2.2 y Corolario 2.3] Sea G un grupo topológico.*

- *Si $\{U_\alpha\}_\alpha$ es una base de entornos de e y g es un punto cualquiera de G, entonces $\{L_g(U_\alpha)\}_\alpha$ es una base de entornos de g.*
- *Dado U entorno de e, existe un entorno simétrico V de e ($V^{-1} = V$) tal que $VV \subset U$. Esto permite ver que los entornos cerrados son base de entornos.*
- *Si A es un subconjunto abierto de G, entonces AB y BA son subconjuntos abiertos para todo $B \subset G$. (Esto se debe a que $BA = \bigcup_{b \in B} L_b(A)$.)*
- *Dados A y B subconjuntos compactos de G, entonces AB es compacto.*
- *Si H es un subgrupo de G, entonces su clausura $\overline{H}$ también es un subgrupo de G.*
- *Si H es un subgrupo abierto de G, entonces H es cerrado. (Esto debe a que el complemento de H es abierto. En efecto, como H es abierto y contiene al elemento identidad e, $G = \bigcup_{g \in G} L_g(H)$, como H es subgrupo, $H = \bigcup_{g \in H} L_g(H)$, luego el complemento de H resulta $H^c = \bigcup_{g \notin H} L_g(H)$ y por lo tanto es abierto.)*
- *Sea H un subgrupo de G y consideremos en el espacio de coclases G/H a izquierda de H la topología cociente, esto es, si $\theta : G \to G/H$ denota la proyección cociente canónica, $U \subset G/H$ será abierto si y sólo si la preimagen $\theta^{-1}(U)$ es abierta en G. Resulta que la proyección cociente θ es abierta, esto es, manda abiertos de G en abiertos de G/H.*
- *Si H es un subgrupo cerrado de G, entonces G/H es un espacio topológico Hausdorff (T_2). Como consecuencia de esto, G es T_2 si y sólo si G es T_1 (ya que el subgrupo trivial $\{e\}$ es cerrado si y sólo si $G = G/\{e\}$ es Hausdorff).*
- *Si H es un subgrupo de G, entonces G/H es un espacio topológico localmente compacto. (Aquí se requiere que G sea localmente compacto.)*
- *Si H es un subgrupo normal de G, entonces G/H es un grupo topológico.*

A continuación definiremos el "elemento de volumen invariante ante traslaciones" en un grupo topológico G. Previamente recordemos algunas definiciones de teoría de la medida.

Definición 1.4. Sea X un espacio topológico.

- Un subconjunto de X es *de Borel* si puede ser formado a partir de subconjuntos abiertos de X (o, equivalentemente, a partir de subconjuntos cerrados) a través de las operaciones de unión numerable, intersección numerable y diferencia (tomar complementos relativos) de conjuntos.
- Dado un conjunto X, una colección de subconjuntos de X se dice *σ-álgebra* de X si contiene al conjunto total X y es cerrada por las operaciones de conjuntos de tomar complemento y de unión numerable. La colección de todos los conjuntos de Borel de X forma la llamada *σ-álgebra de Borel* sobre X. Esta es la menor σ-álgebra que contiene a todos los conjuntos abiertos de X (o, equivalentemente, a todos los cerrados).

- Una *medida* μ es una función definida sobre una σ-álgebra con la propiedad de ser *σ-aditiva*, es decir, dada una colección numerable $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos disjuntos de la σ-álgebra, $\mu(\cup_n E_n) = \sum_n \mu(E_n)$. La medida se dice *positiva* si toma valores en $[0,\infty]$ y *compleja* si toma valores en $\mathbb{C}$.
- Una medida de Borel μ, es decir, una medida definida sobre una σ-álgebra de Borel, se dice *regular* si
  - es finita sobre conjuntos compactos (es decir, $\mu(K) < \infty$ para todo $K \subset X$ compacto);
  - todo boreliano se puede aproximar, en medida, por abiertos por afuera, es decir, si E es de Borel entonces
  $$\mu(E) = \inf\{\mu(U) : \ E \subseteq U, \ U \text{ abierto } \} \qquad (E \text{ se dice } \textit{regular exterior}),$$
  - todo boreliano se puede aproximar, en medida, por compactos por adentro, es decir, si E es de Borel entonces
  $$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : \ K \subseteq E, \ K \text{ compacto } \} \qquad (E \text{ se dice } \textit{regular interior}).$$

Sea G un grupo topológico (localmente compacto). Una medida de Borel μ sobre G se dice *invariante a izquierda* si
$$\mu(L_g(E)) = \mu(E) \qquad \text{para todo } g \in G \text{ y para todo } E \subset G \text{ de Borel.}$$
Respectivamente, una medida de Borel μ sobre G se dirá *invariante a derecha* si
$$\mu(R_g(E)) = \mu(E) \qquad \text{para todo } g \in G \text{ y para todo } E \subset G \text{ de Borel.}$$

Definición 1.5. Sea G un grupo topológico. Una medida μ sobre G se llama *medida de Haar a izquierda* (respectivamente *a derecha*) si es boreliana, regular e invariante a izquierda (respectivamente, invariante a derecha).

Proposición 1.6. *[Fo, Proposición 2.9] Sea μ una medida de Borel regular sobre G. Se tiene que μ es una medida de Haar a izquierda si y sólo si $\tilde{\mu}$, definida por*
$$\tilde{\mu}(E) := \mu(E^{-1}) \qquad \forall E \subset G \textit{ de Borel,}$$
es una medida de Haar a derecha.

Teorema 1.7 (Existencia y unicidad de medida de Haar)**.** *Todo grupo topológico G posee una única (salvo múltiplo escalar positivo) medida de Haar a izquierda.*

Una prueba general para grupos topológicos, que usa teoría de la medida, se puede hallar en [Fo, Teorema 2.10]. En el caso en que G sea un grupo de Lie basta definir una n-forma diferencial no nula en la idendidad y trasladarla. Supongamos que la dimensión de G como variedad en n. Sea $\{X_1, ..., X_n\}$ una base de vectores en el espacio tangente T_eG en el punto identidad $e \in G$. Sea $\{\omega^1, ..., \omega^n\}$ su base dual en el espacio cotangente en la identidad $T_e^*(G)$. Dada $\omega \in T_e^*(G)$ se puede definir una 1-forma invariante a izquierda por G
$$\omega_g := L_{g^{-1}}^* \omega_e \qquad \forall g \in G, \tag{1.7}$$
donde $L_{g^{-1}}^*$ denota el *pull-back* determinado por L_g. Esta resulta invariante a izquierda pues
$$(L_g^*\omega)_h = L_g^*\omega_{gh} = L_g^* L_{h^{-1}g^{-1}}^* \omega_e = \left(L_{h^{-1}g^{-1}} L_g\right)^* \omega_e = L_{h^{-1}}^* \omega_e = \omega_h.$$
A partir de $\omega^1, ..., \omega^n$ tomamos las respectivas 1-formas invariantes dadas según (1.7), que seguiremos denotando por $\omega^1, ..., \omega^n$. Luego se define a partir del producto exterior
$$\Omega := \omega^1 \wedge ... \wedge \omega^n$$
que resulta una n-forma de volumen G (que no se anula en ningún punto) invariante a izquierda por G.

Observación 1.8. La traslación a derecha de una medida de Haar a izquierda es una nueva medida de Haar a izquierda. Más precisamente, si μ es una medida de Haar en G invariante a izquierda, entonces dado $g \in G$
$$E \longmapsto \mu(g^{-1}E) \qquad \forall E \text{ conjunto medible Borel de } G$$
es también una medida de Haar en G invariante a izquierda. Debido a la unicidad de la medida de Haar, es posible definir una función $\Delta : G \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, llamada *función modular*, que satisface
$$\mu(g^{-1}E) = \Delta(g)\mu(E) \qquad \forall E \text{ conjunto de Borel de } G.$$

Dejemos un poco de lado las medidas y volvamos a las acciones. Consideremos que G es grupo topológico actuando continuamente en un espacio topológico X localmente compacto y Hausdorff. Dado $x \in X$, el subgrupo

$$G_x := \{g \in G \mid \ g \cdot x = x\}$$

de las transformaciones que dejan invariante al punto x se denomina *estabilizador* de x y se llama la *órbita* de x al conjunto

$$\mathcal{O}_x := \{g \cdot x \mid \ g \in G\}.$$

De hecho, la relación en X dada por $x \sim y$ si existe $g \in G$ tal que $y = g \cdot x$, es de equivalencia y sus clases de equivalencia son las órbitas de la acción. La acción se llama *efectiva* cuando el único elemento de G que deja invariante a todos los elementos de X es su elemento identidad e. Una acción siempre se vuelve efectiva cuando se sustituye el grupo G por su cociente módulo el subgrupo $H = \{g \in G \mid \ g \cdot x = x \ \forall x \in X\}$ (el subgrupo H es normal y cerrado). Una acción se dice *transitiva* si dados $x, y \in X$ siempre es posible hallar una transformación $a \in G$ que los conecte, es decir, tal que $g \cdot x = y$. En esta situación la órbita de cualquier punto $x \in X$ es todo el conjunto X. Una acción se dice *simplemente transitiva* si dados $x, y \in X$ existe un único $g \in G$ tal que $g \cdot x = y$.

Observación 1.9.

(i) Para cada $g \in G$, la aplicación

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

es un homeomorfismo.

(ii) El estabilizador G_x de un punto $x \in X$ es un subgrupo cerrado de G.

(iii) Si $x, y \in X$ pertenecen a la misma órbita, sus estabilizadores son subgrupos conjugados uno del otro, precisamente si $y = g \cdot x$, para algún $g \in G$, entonces $G_y = gG_xg^{-1}$.

Definición 1.10. Sea V un espacio vectorial real o complejo. Un *producto interno* en V es una función que asigna a cada par ordenado de vectores (u, v) en $V \times V$ un escalar $\langle u, v\rangle$ de manera tal que

- $\langle cu + w, v\rangle = c\langle u, v\rangle + \langle w, v\rangle$ para todo escalar c y vectores $u, v, w \in V$,
- $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$,
- $\langle v, v\rangle > 0$ si $v \neq 0$.

Agregamos que si la forma $\langle \cdot, \cdot\rangle$ sólo cumple que para todo escalar c y vectores $u, v, w \in V$

$$\langle cu + w, v\rangle = c\langle u, v\rangle + \langle w, v\rangle \qquad \text{y} \qquad \langle u, cv + w\rangle = \overline{c}\langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$$

entonces se dice *sesquilineal*. Si una forma sesquilineal $\langle \cdot, \cdot\rangle$ sobre V además satisface

$$\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle} \qquad \forall u, v \in V$$

entonces se dice que *hermitiana* o *hermítica*. Por su parte, una forma sesquilineal o bilineal $\langle \cdot, \cdot\rangle$ se dice *no-degenerada* si cada vez que $\langle u, v\rangle = 0$ para todo $v \in V$ se tiene que $u = 0$.

Notación. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n con producto interno $\langle \cdot, \cdot\rangle$ sobre el cuerpo de los números reales o complejos ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Denotamos por*

- $\mathrm{End}(V)$ *al conjunto de operadores lineales de V en V. Notar se puede pensar como el grupo de matrices $n \times n$ sobre $\mathbb{F}$,* $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{F})$ *(con la operación de suma de matrices).*
- $\mathrm{Aut}(V)$ *al conjunto de operadores lineales de V en V inversibles. Notar que coincide (en el sentido que es isomorfo) con el grupo lineal general* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ *(la operación aquí está dada por el producto de matrices).*

- $\mathrm{O}(V)$ *al conjunto de transformaciones lineales que preservan* $\langle\cdot,\cdot\rangle$. *Notar que coincide con el grupo ortogonal* $\mathrm{O}(n)$ *si* $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, *con el grupo unitario* $\mathrm{U}(n)$ *si* $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ *y con el grupo simpléctico* $\mathrm{Sp}(n)$ *en el caso en que* V *sea un módulo sobre el anillo de cuaterniones* $\mathbb{H}$. *En los tres casos son subgrupos de matrices inversibles sobre* $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ *y* $\mathbb{H}$, *respectivamente, que preservan la forma hermitiana canónica*

$$\langle x,y\rangle := x_1\bar{y}_1+\cdots+x_n\bar{y}_n,$$

donde la conjugación debe entenderse compleja o cuaterniónica según el caso. El grupo simpléctico $\mathrm{Sp}(n)$ *visto como subgrupo de* $\mathrm{GL}(2n,\mathbb{C})$ *está formado por todas aquellas matrices que conmutan con*

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_n \\ -\mathrm{I}_n & 0 \end{pmatrix}$$

(donde I_n *denota la matriz identidad* $n\times n$*) que es la matriz de una forma simpléctica (forma bilineal, antisimétrica y no-degenerada). También trabajaremos con el grupo* $\mathrm{Spin}(n)$ *que es el cubrimiento universal de* $\mathrm{SO}(n)$. *De ahora en adelante el símbolo* I *denotará la transformación identidad definida en un espacio vectorial de dimensión finita (con las dimensiones apropiadas en cada caso).*

Definición 1.11. Decimos que un grupo de Lie es un *grupo de matrices* si es un subgrupo cerrado del grupo lineal general $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Un grupo abstracto se dirá *lineal* si es isomorfo a un grupo de matrices.

Definición 1.12. Dado un grupo topológico G, un espacio topológico X localmente compacto y T_2 se llama *espacio homogéneo* de G si el grupo G actúa transitivamente en X.

Dos espacios homogéneos X y X' se dicen *G-equivariantes* si existe una aplicación continua $\phi : X \to X'$ tal que

$$g\cdot\phi(x)=\phi(g\cdot x) \qquad \forall g\in G,\ \forall x\in X,$$

donde en el lado izquierdo de la ecuación tenemos a la acción de G en X' y en el lado derecho, la acción de G en X. Estos dos espacios homogéneos se dirán *equivalentes* si ϕ es además un homeomorfismo.

Se prueba que si H es un subgrupo cerrado (no necesariamente normal) de un grupo topológico G, entonces el espacio cociente G/H es de Hausdorff y localmente compacto. Más aún, la acción de G sobre G/H, dada por $g\cdot(g'H)=gg'H$, convierte a G/H en un espacio homogéneo. Recíprocamente, si X un espacio homogéneo de G, fijado $x_0\in X$, la aplicación

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow X \\ g &\longmapsto g\cdot x_0 \end{aligned}$$

pasa al cociente módulo el estabilizador G_{x_0} de x_0 e induce una aplicación continua G-equivariante, ϕ_{x_0}, de G/G_{x_0} en X. La aplicación ϕ_{x_0} es además un homeomorfismo de G/G_{x_0} en X (es importante suponer que la topología de G es N_2). En particular, si la acción de G sobre X es simplemente transitiva, entonces ϕ_{x_0} es un homeomorfismo de G en X.

Observación 1.13. La noción de *espacio homogéneo* se puede dar de manera más general. Sea X un conjunto no vacío y G un grupo, decimos que X es un *G-espacio* si G actúa en X y decimos que es *homogéneo* si a su vez esta acción es transitiva. En este caso, los elementos de G suelen llamarse *simetrías* de X y uno puede pensar que si nos vemos de punto a punto en X localmente el "paisaje" que vemos no varía.

Si la acción de G en X es continua, entonces cualquier estabilizador $H=G_{x_0}$ es un subgrupo cerrado de G. En particular, si G es un grupo de Lie, entonces H es un subgrupo de Lie de G y por lo tanto el espacio cociente G/H es una variedad diferenciable y de esta forma X posee una única estructura diferenciable compatible con la acción del grupo G.

En geometría diferencial, una variedad Riemanniana M se dice *homogénea* si para cada par de puntos $x,y\in M$ existe una isometría de M en sí misma que aplica x en y (como referencia mencionamos el libro [He2]). Las isometrías de una variedad homogénea M forman un grupo con la composición. Denotamos dicho grupo por $Isom(M)$. Este posee una estructura de grupo localmente compacto, más aún, resulta un grupo de Lie con la topología compacto-abierta (ver el artículo [MS] o el libro [Kob, Teorema 1.2, Capítulo II]). El grupo $G := Isom(M)$ actúa en M por la acción definida como

$$g\cdot x := g(x) \qquad (\text{para todo } g\in Isom(M) \text{ y todo } x\in M).$$

Entonces M resulta un espacio homogéneo de $Isom(M)$ en el sentido de la definición 1.12. En este contexto, el estabilizador G_{x_0} un punto cualquiera x_0 de M es siempre compacto. Esto se debe a los siguientes hechos que pasamos a mencionar brevemente:

- Cada isometría $g : M \to M$ es una aplicación C^∞ de la variedad. Por lo tanto, está bien definida la diferencial dg_x entre los espacios tangentes a M, T_xM y $T_{g(x)}M$, en los puntos x y $g(x)$ respectivamente. Por la regla de cadena

$$(dgh)_x = dg_{h(x)}dh_x \qquad \forall x \in M,\ \forall g, h \in Isom(M).$$

- Si una isometría g deja fijo el punto $x_0 \in M$, su diferencial dg_{x_0} aplica $T_{x_0}M$ en sí mismo. Por la regla de cadena, el conjunto $\{dg_{x_0} \mid\ g \in Isom(M)\}$ es un subgrupo de $\mathrm{Aut}(T_{x_0}M)$. Además, la aplicación $g \mapsto dg_{x_0}$ es inyectiva.

- La estructura de variedad Riemanniana de M presupone que cada espacio tangente T_xM está dotado con un producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_x$, que permite definir la "longitud", $\|v\|_x$, de los vectores tangentes en x. Las diferenciales de las isometrías de M tienen la propiedad de conservar la norma de los vectores tangentes: $\|dg_xv\|_{g(x)} = \|v\|_x$ para todo $v \in T_xM$, $x \in M$, $g \in Isom(M)$. Equivalentemente, por las identidades de polarización, respetan los productos internos entre los espacios tangentes: $\langle dg_xv, dg_xw\rangle_{g(x)} = \langle v, w\rangle_x$ para todo $v, w \in T_xM$, $x \in M$, $g \in Isom(M)$. En particular, si $g \in G_{x_0}$, la transformación dg_{x_0} resulta un operador ortogonal del espacio vectorial T_{x_0}.

Luego, dado $x_0 \in G$, el grupo G_{x_0} es isomorfo a un subgrupo del grupo ortogonal $\mathrm{O}(T_{x_0}M)$. En general, el subgrupo de isotropía G_{x_0} siempre resulta cerrado si la accion considerada es continua. En este caso, resulta compacto por ser un subgrupo cerrado en un compacto.

Los siguientes ejemplos clásicos serán tratados en esta tesis.

Ejemplo 1.14. Grupo de movimientos rígidos en el espacio euclídeo n-dimensional.
Cada isometría de $\mathbb{R}^n$ es de la forma

$$I_{(k,y)}(x) := k \cdot x + y \tag{1.8}$$

para algún vector de traslación $y \in \mathbb{R}^n$ y alguna rotación o reflexión $k \in \mathrm{O}(n)$. Por lo tanto,

$$Isom(\mathbb{R}^n) = \mathrm{O}(n) \ltimes \mathbb{R}^n,$$

donde el producto semidirecto se condice con la composición de aplicaciones de la forma (1.8) (ver Figura 1.3).

composición	*producto semidirecto*
$x \mapsto k' + y' \cdot x \mapsto kk' + (y + k \cdot y') \cdot x$	$(k, y)(k', y') = (kk', y + k \cdot y')$

Figura 1.3: La composición $I_{(k,y)} \circ I_{(k',y')}$ de isometrías de $\mathbb{R}^n$ coincide con el producto semidirecto de los elementos $(k, y), (k', y') \in \mathrm{O}(n) \ltimes \mathbb{R}^n$.

El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ es homogéneo para $\mathrm{O}(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ y también para el grupo conexo

$$\mathrm{M}(n) := \mathrm{SO}(n) \ltimes \mathbb{R}^n.$$

En la figura 1.4 se puede ver cómo conectar los distintos puntos del plano $\mathbb{R}^n$ a partir de las acciones de rotación y traslación.

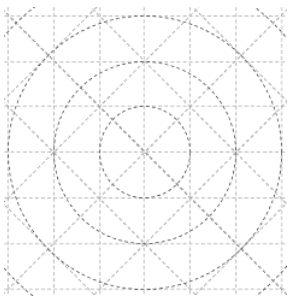


Figura 1.4: El plano $\mathbb{R}^2$ y algunas de las líneas de flujo de las acciones de rotación y traslación.

La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ es invariante por traslaciones y por la acción del grupo $\mathrm{O}(n)$.

Ejemplo 1.15. Esfera en $\mathbb{R}^{n+1}$. La esfera $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es isomorfa al cociente $\mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n)$, donde $\mathrm{SO}(n)$ puede pensarse, por ejemplo, como el estabilizador del polo norte.

Por último, mencionamos que también trabajaremos con el *grupo de Lorentz* $\mathrm{O}(1,3)$ dado por todas aquellas transformaciones lineales de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^4$ que preservan la forma bilineal

$$B((t,x,y,z),(t',x',y',z')) = tt' - xx' - yy' - zz'$$

que es el grupo de isometrías del *espacio tiempo de Minkowski*. Denotamos por $\mathrm{SO}(1,3)$ al subgrupo del grupo de Lorentz donde todas las transformaciones lineales tienen determinante igual a 1. Como $\mathrm{O}(1,3)$ tiene cuatro componentes conexas, denotamos por $\mathrm{SO}_0(1,3)$ la componente conexa de la identidad. Todos ellos tienen su análogo cambiando 3 por $n \in \mathbb{N}$ arbitrario.

Sea M un espacio homogéneo de G. De ahora en más supondremos que el estabilizador G_{x_0} de un punto arbitrario $x_0 \in X$ es compacto, pondremos $K = G_{x_0}$ y supondremos también que M es homeomorfo a G/K. (Una variedad homogénea cumple estas condiciones sin necesidad de suponerlas.) Hemos cambiado la notación X por M. Esto es debido a que pretendemos tener en mente los ejemplos de la geometría.

Se puede ver que si K un subgrupo compacto de G y sea θ la proyección canónica de G en G/K, la aplicación

$$\begin{aligned} \theta^* : C_c(G/K) &\longrightarrow C_c(G) \\ \theta^*(f) &:= f \circ \theta \end{aligned} \tag{1.9}$$

tiene por imagen al espacio $C_c(G;K)$ conformado por las funciones continuas y de soporte compacto sobre G que son invariantes por traslaciones a derecha por K (i.e., $R_k(f) = f$ para todo $k \in K$). Más aún, θ^* es un isomorfismo entre $C_c(G/K)$ y $C_c(G;K)$. Además, la aplicación que a una función $f \in C_c(G)$ le asocia

$$f^\sharp(g) := \int_K f(gk)\ dk \qquad (\forall g \in G) \tag{1.10}$$

(donde dk denota la medida de Haar de K) tiene por imagen $C_c(G;K)$ y $(f^\sharp)^\sharp = f^\sharp$, es decir, (1.10) define una proyección de $C_c(G)$ en $C_c(G;K)$.

Una medida de Borel regular μ sobre un espacio homogéneo M se dice *G-invariante* si

$$\mu(g \cdot E) = \mu(E) \qquad \text{para todo boreliano } E \text{ de } M \text{ y } \forall g \in G.$$

Esta condición es equivalente a que

$$\int_M f(g \cdot x)\ d\mu(x) = \int_M f(x)\ d\mu(x) \qquad \forall f \in C_c(M) \text{ y } \forall g \in G.$$

Proposición 1.16. *Sea $M = G/K$ con K un subgrupo compacto de G. Existe sobre M una medida de Borel, regular y G-invariante, única salvo multiplicación por constantes positivas.*

Demostración. Sea dg una medida de Haar invariante a izquierda de G. Consideramos el funcional lineal Λ sobre $C_c(G/K)$ dado por

$$\Lambda(f) := \int_G \theta^*(f)(g)\ dg,$$

donde θ^* es como en (1.9). Por el teorema de representación de Riesz existe una única medida de Borel regular positiva μ sobre G/K tal que

$$\int_{G/K} f\ d\mu = \int_G \theta^*(f)(g)\ dg.$$

El grupo G actúa en $C_c(G/K)$ por

$$G \times C_c(G/K) \longrightarrow C_c(G/K)$$

$$(h,f) \longmapsto (h \cdot (f))(x) := f(h^{-1} \cdot x) \quad \forall x \in M.$$

Como $\theta^* \circ h \cdot (\cdot) = L_h \circ \theta^*$ para todo $h \in G$ se tiene

$$\begin{aligned}\int_{G/K} f(h^{-1} \cdot x)\ d\mu(x) &= \int_G \theta^*(h \cdot (f))(g)\ dg \\ &= \int_G L_h(\theta^*(f))(g)\ dg \\ &= \int_G \theta^*(f)(g)\ dg \\ &= \int_{G/K} f(x)\ d\mu(x).\end{aligned}$$

Por lo que μ es G-invariante. Sea ahora ν una medida de Borel, regular y G-invariante en G/K. Dada $f \in C_c(G)$, sea $f^\sharp \in C_c(G;K)$ como en (1.10). Al ser θ^* un isomorfismo entre $C_c(G/K)$ y $C_c(G;K)$, $f^\sharp = \psi \circ \theta$ para alguna $\psi \in C_c(G/K)$ (unívocamente determinada). Definimos

$$\Lambda(f) := \int_{G/K} \psi(x)\ d\nu(x) = \int_{G/K} \left(\int_K f(gk)\ dk \right)\ d\nu(gK).$$

Para cada $h \in G$,

$$\begin{aligned}\Lambda(L_h(f)) &= \int_{G/K} \left(\int_K f(h^{-1}gk)\ dk \right)\ d\nu(gK) \\ &= \int_{G/K} \psi(x)\ d\mu(h^{-1} \cdot x)\ d\nu(x) \\ &= \int_{G/K} \psi(x)\ d\mu(\cdot x)\ d\nu(x) \\ &= \Lambda(f).\end{aligned}$$

Por lo tanto, como f era arbitraria, Λ define un funcional lineal invariante a izquierda en $C_c(G)$ y por el teorema de representación de Riesz está asociado a una medida de Haar a izquierda en G. Por unicidad, existe una constante positiva $c > 0$ tal que

$$\Lambda(f) = c \int_G f(g)\ dg.$$

Entonces, dada $F \in C_c(G/K)$, sea $f = F \circ \theta$. Como f es K-invariante a derecha, $f = f^\sharp$ y

$$\int_{G/K} F(x)\ d\nu(x) = \Lambda(f) = c \int_G f(g)\ dg = c \int_{G/K} F(x)\ d\mu(x).$$

De aquí se tiene $\nu = c\mu$. □

1.2. Representaciones y fibrados vectoriales homogéneos

La teoría de representaciones, como su nombre en parte lo indica, se basa en *representar* los elementos de estructuras algebraicas abstractas (en nuestro caso, grupos y más adelante álgebras de Lie) como transformaciones lineales de espacios vectoriales (de dimensión finita o infinita). Esto permite reducir problemas complejos a problemas del álgebra lineal.

Sea X un espacio de Banach, denotamos por $\mathcal{B}(X)$ el álgebra de los operadores lineales y continuos sobre X.

Definición 1.17. Una *representación* de un grupo topológico G sobre X es un par (π, X), donde $\pi : G \to \mathcal{B}(X)$ es un homomorfismo de grupos tal que para cada $x \in X$ la aplicación de G en X, $g \mapsto \pi(g)x$, es continua.

De aquí en adelante trabajaremos con grupos topológicos. De hecho más adelante agregaremos la estructura adicional de grupo de Lie.

Observación 1.18. Como consecuencia esencialmente del principio de acotación uniforme, dada una representación (π, X) de G, resulta continua la aplicación de $G \times X$ en X, $(g, x) \mapsto \pi(g)x$. En general asumerimos que el cuerpo de escalares es $\mathbb{C}$.

En síntesis una representación es una *acción lineal*, es decir, cada $\pi(g)$ es una transformación lineal. Si estamos en espacios topológicos, pedimos a su vez continuidad.

Observación 1.19. Si V es un espacio vectorial de dimensión finita y (π, V) es una representación de un grupo de Lie G, entonces $\pi : G \to \mathrm{Aut}\,(V)$ es un homomorfismo de grupos que es continuo y por lo tanto resulta infinitamente diferenciable ([War, Teorema 3.39]).

Definición 1.20. Sea X un espacio de Banach. Dada una representación (π, X) de G, un subespacio cerrado Y de X se dice *invariante* por la representación si $\pi(g)Y \subseteq Y$, $\forall g \in G$.

La representación se dice *irreducible* si no tiene subespacios invariantes (es decir, salvo el trivial y el total).

Definición 1.21. Una representación (π, X) de un grupo G se dice *fiel* si elementos distintos g de G son representados por distintas transformaciones lineales $\pi(g)$. En otras palabras, si la aplicación $g \mapsto \pi(g)$ es inyectiva.

Definición 1.22. Dada (π, X) una representación de G, sea X' el espacio dual topológico de X, es decir, el espacio de funcionales lineales y continuos de X en $\mathbb{C}$. Se define la representación *contragrediente* de π como la representación (π', X') de G dada por

$$\langle \pi'(g)(f), v\rangle := \langle f, \pi(g^{-1})v\rangle \qquad (g \in G,\ f \in X',\ v \in X),$$

donde para un funcional lineal y continuo arbitrario $f \in X'$ definimos su evaluación en un vector $v \in X$ por $f(v) := \langle f, v\rangle$. Sintéticamente podemos poner $\pi'(g) = \pi(g^{-1})^t$, donde en el lado derecho estamos denotando la transformación adjunta (o "la matriz transpuesta") de $\pi(g^{-1})$.

Definición 1.23. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Decimos que una representación $(\pi, \mathcal{H})$ de G es *unitaria* si $\pi(g)$ es un operador unitario en $\mathcal{H}$ y esto se cumple para todo $g \in G$.

Definición 1.24. Dadas representaciones unitarias $(\pi_1, \mathcal{H}_1)$ y $(\pi_2, \mathcal{H}_2)$ de G, un *operador de entrelazamiento* entre ambas representaciones es un operador A de $\mathcal{H}_1$ en $\mathcal{H}_2$ lineal y continuo que cumple $A \circ \pi_1(g) = \pi_2(g) \circ A$, $\forall g \in G$, es decir, para cada $g \in G$ hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}_1 \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\pi_1(g)"'] & \mathcal{H}_2 \arrow[d, "\pi_2(g)"] \\ \mathcal{H}_1 \arrow[r, "A"] & \mathcal{H}_2 \end{tikzcd}$$

Dos representaciones unitarias $(\pi_1, \mathcal{H}_1)$ y $(\pi_2, \mathcal{H}_2)$ de G se dicen *equivalentes* si existe un operador de entrelazamiento unitario entre ellas y denotamos $\pi_1 \sim \pi_2$.

Podemos pensar que $\pi_1 \sim \pi_2$ si existe un operador de cambio de base A entre una base ortonormal de $\mathcal{H}_1$ a otra en $\mathcal{H}_2$ que vuelve semejantes a todas las transformaciones $\pi_1(g)$ y $\pi_2(g)$ (variando $g \in G$) a la vez.

Notación. *Sean $(\pi_1, \mathcal{H}_1)$ y $(\pi_2, \mathcal{H}_2)$ representaciones unitarias de G, denotamos por $\mathrm{Hom}_G(\pi_1, \pi_2)$ al conjunto de operadores de entrelazamiento entre dichas representaciones.*

Lema 1.25 (Lema de Schur)**.** *[Fo, Teorema 3.5]*

(*i*) *Una representación unitaria $(\pi, \mathcal{H})$ de G es irreducible si y sólo si $\mathrm{Hom}_G(\pi, \pi) = \mathbb{C}\mathrm{I}$, donde I denota la transformación identidad.*

(*ii*) *Dadas π_1 y π_2, representaciones unitarias irreducibles de G, se tiene:*

- (*a*) *si son equivalentes y U es un operador de entrelazamiento unitario entre ellas, entonces $\mathrm{Hom}_G(\pi_1, \pi_2) = \mathbb{C}U$;*
- (*b*) *si no son equivalentes, entonces $\mathrm{Hom}_G(\pi_1, \pi_2) = \{0\}$.*

Corolario 1.26. *[Fa, Corolario 3.6] Si G es abeliano, todas sus representaciones unitarias irreducibles son unidimensionales.*

Notación. *Denotamos por $\widehat{G}$ al conjunto de clases de equivalencia de representaciones unitarias irreducibles de G.*

Dadas (π_1, X_1) y (π_2, X_2) dos representaciones de G, construimos una nueva representación de G, $\pi_1 \otimes \pi_2$, sobre $X_1 \otimes X_2$ dada por el producto tensorial

$$((\pi_1 \otimes \pi_2)(g))(v, w) := (\pi_1(g)v, \pi_2(g)w) \qquad (g \in G, v \in X_1, w \in X_2).$$

Observación 1.27. Si $(\pi_1, \mathcal{H}_1)$ y $(\pi_2, \mathcal{H}_2)$ son representaciones unitarias de G, entonces también lo es $(\pi_1 \otimes \pi_2, \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ respecto del producto escalar en $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ dado por $\langle (v, w), (v', w') \rangle := \langle v, v' \rangle_{\mathcal{H}_1} + \langle w, w' \rangle_{\mathcal{H}_2}$, $\forall v, v' \in \mathcal{H}_1, w, w' \in \mathcal{H}_2$.

Observación 1.28. Sea K un grupo topológico compacto. Las siguientes afirmaciones son válidas:

(*i*) Para toda representación de K sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ existe un producto interno en $\mathcal{H}$ que la hace unitaria ([Fa, Proposición 6.1.1]).

(*ii*) Toda representación unitaria irreducible de K es de dimensión finita ([Fa, Teorema 6.3.2]).

(*iii*) Toda representación unitaria de K se descompone como suma de representaciones irreducibles de K (como consecuencia del Teorema Espectral [Fa, Teorema 6.2.5]).

Definición 1.29. Sea (τ, V_τ) una representación de dimensión finita de K. El *carácter* de τ es la aplicación de K en $\mathbb{C}$ dada por la traza $\chi_\tau(k) := \operatorname{tr}(\tau(k))$, $\forall k \in K$.

Dada una representación (τ, V_τ) de K que se descompone como suma de representaciones irreducibles de K, $\tau = \oplus_{i=0}^{n} \tau_i$, se tiene que su carácter está dado por la suma de los caracteres asociados a las representaciones de la descomposición, es decir, $\chi_\tau = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \chi_{\tau_i}$.

Cada representación unitaria irreducible de dimensión finita de un grupo topológico compacto K está caracterizada por su carácter en el siguiente sentido:

(*i*) Si $\tau_1 \sim \tau_2$, entonces sus caracteres coinciden. (En efecto, si U es un operador unitario de entrelazamiento entre ambas representaciones, entonces $\chi_{\tau_1}(k) = \operatorname{tr}(\tau_1(k)) = \operatorname{tr}(U\tau_2(k)U^{-1}) = \operatorname{tr}(\tau_2(k)) = \chi_{\tau_2}(k)$, $\forall k \in K$.)

(*ii*) Por otro lado, dadas representaciones unitarias irreducibles no equivalentes, sus caracteres resultan ortogonales.

Proposición 1.30. *Sean (τ_1, V_1) y (τ_2, V_2) representaciones de dimensión finita de K. Sean χ_{τ_1} y χ_{τ_2} sus respectivos caracteres. Se tiene que $\chi_{\tau_1 \otimes \tau_2} = \chi_{\tau_1}\chi_{\tau_2}$.*

Demostración. Dadas $\{v_i\}$ y $\{w_j\}$ bases de V_1 y V_2 respectivamente, tenemos para cada $k \in K$,

$$\begin{aligned}
\chi_{\tau_1 \otimes \tau_2}(k) &= \operatorname{tr}(\tau_1(k) \otimes \tau_2(k)) \\
&= \sum_{i,j} \langle \tau_1(k)\tau_2(k)v_i \otimes w_j, v_i \otimes w_j \rangle \\
&= \sum_{i,j} \langle \tau_1(k)v_i \otimes \tau_2(k)w_j, v_i \otimes w_j \rangle \\
&= \sum_{i,j} \langle \tau_1(k)v_i, v_i \rangle \langle \tau_2(k)w_j, w_j \rangle \\
&= \chi_{\tau_1}(k)\ \chi_{\tau_2}(k)
\end{aligned}$$

□

Teorema 1.31 (Relaciones de ortogonalidad de Schur)**.** *[Fa, Teoremas 6.3.3 y 6.3.4] Sea $(\tau, V_\tau) \in \widehat{K}$ donde V_τ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial con un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y de dimensión d_τ. Entonces, para $u, v \in V_\tau$,*

$$\int_K |\langle \tau(k)u, v \rangle|^2 \, dk \ = \ \frac{1}{d_\tau} \|u\|^2 \|v\|^2$$

y, por las identidades de polarización, para $u, u', v, v' \in V_\tau$,

$$\int_K \langle \tau(k)u, v\rangle \overline{\langle \tau(k)u', v'\rangle}\, dk \;=\; \frac{1}{d_\tau}\langle u, u'\rangle\overline{\langle v, v'\rangle}.$$

Si además $(\tau', V'_\tau) \in \widehat{K}$ *no es unitariamente equivalente a* (τ, V_τ), *se tiene*

$$\int_K \langle \tau(k)u, v\rangle \overline{\langle \tau'(k)u', v'\rangle}\, dk \;=\; 0 \qquad (u, v \in V_\tau,\; u', v' \in V'_\tau).$$

1.2.1. Fibrados vectoriales homogéneos

Los siguientes conceptos serán presentados utilizando como cuerpo de escalares al conjunto de números complejos $\mathbb{C}$. En las definiciones usuales de geometría se cambia $\mathbb{C}$ por $\mathbb{R}$.

Definición 1.32. Sea M una variedad diferenciable. Un *fibrado vectorial* sobre M (ver Figura 1.5) es una nueva variedad E junto con un mapa $\theta : E \to M$ tal que

- cada *fibra* $E_x := \theta^{-1}(\{x\})$ es un espacio vectorial;
- localmente se comporta como un producto cartesiano en el sentido que para cada $x \in M$ hay un entorno U y un difeomorfismo $\varphi : \theta^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{C}^n$, llamada *trivialización local*, tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} \theta^{-1}(U) \arrow[r, "\varphi", "\simeq"'] \arrow[d, "\theta"] & U \times \mathbb{C}^n \arrow[dl, "\theta_1"] \\ U & \end{tikzcd}$$

  (donde θ_1 denota la proyección canónica) y para cada $y \in U$, $\varphi_{|_{E_y}} : E_y \longrightarrow \{y\} \times \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{C}^n$ es lineal.

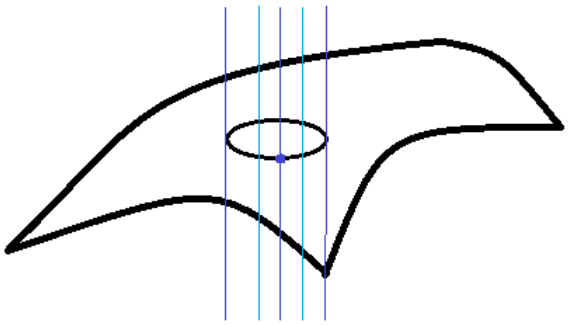


Figura 1.5: Esquema de las fibras a nivel local de un fibrado sobre una variedad.

Ejemplo 1.33. El *fibrado tangente* de una variedad es un ejemplo de fibrado vectorial cambiando el cuerpo $\mathbb{C}$ por $\mathbb{R}$.

Definición 1.34. Sea G/K un espacio homogéneo. Un fibrado vectorial (E, θ) sobre G/K se dice *homogéneo* si admite una *G-linearización*, esto es, si el grupo G actúa en E y la acción cumple lo siguiente:

- hace conmutar al diagrama para cada $g \in G$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "g\cdot"] & M \arrow[d, "g\cdot"] \\ E \arrow[r, "\theta"] & M \end{tikzcd}$$

  (se dice que θ es *G-equivariante*), en particular, $g \cdot E_x = E_{g\cdot x}$ para todo $x \in G/K$ y $g \in G$.
- para cada $x \in G/K$ y cada $g \in G$ la aplicación $E_x \longrightarrow E_{g\cdot x}$ es lineal.

Definición 1.35. Sean G un grupo de Lie, K un subgrupo compacto de G y (τ, V_τ) una representación de dimensión finita de K. Definimos el *producto contractivo* $G \times_\tau V_\tau$ como el espacio cociente sobre $G \times V_\tau$ donde, si $g \in G$ y $v \in V_\tau$, la clase $[(g, v)]$ se define a partir de la relación de equivalencia

$$(g, v) \sim (gk, \tau(k)^{-1}v) \qquad \forall k \in K.$$

Ejemplo 1.36. Por ejemplo, dada $M = G/K$, el *fibrado vectorial trivial* $M \times \mathbb{C}$ corresponde a tomar la representación trivial $(\tau, \mathbb{C})$ de K, ya que si definimos para $g \in G$ y $c \in \mathbb{C}$ la relación de equivalencia $(g, c) \sim (gk, c)$ $\forall k \in K$, entonces $M \times \mathbb{C}$ coincide con $G \times_\tau \mathbb{C}$.

Observación 1.37. Sea G/K un espacio homogéneo, sea (τ, V_τ) una representación de dimension finita de K y sea $G \times_\tau V_\tau$ un fibrado vectorial de G/K. El grupo G actúa en el producto contractivo $G \times_\tau V_\tau$ por

$$\tilde{g} \cdot [(g, v)] := [(\tilde{g}g, v)] \qquad (\tilde{g}, g \in G,\ v \in V_\tau). \tag{1.11}$$

Esta acción convierte a $G \times_\tau V_\tau$ en un fibrado vectorial homogéneo.

Teorema 1.38. *[Wal, p. 115, 5.2.2 y Lema 5.2.3] Todo fibrado vectorial homogéneo sobre G/K es, salvo isomorfismo, de la forma $E_\tau := G \times_\tau V_\tau$ para alguna representación (τ, V_τ) de dimensión finita de K.*

Definición 1.39. Una *sección* de un fibrado vectorial (E, θ) sobre una variedad M es una función $\mathrm{u} : M \to E$ tal que $\theta \circ \mathrm{u} = \mathrm{I}_M$ (donde I_M denota la aplicación identidad de M en M).

Notación. *Denotaremos por $\Gamma(G \times_\tau V_\tau)$ al conjunto de secciones infinitamente diferenciables y de soporte compacto de un fibrado vectorial $G \times_\tau V_\tau$.*

Ejemplo 1.40. Los campos vectoriales de una variedad M son las secciones de clase C^∞ del fibrado tangente real TM.

En particular, si $M = \mathbb{R}^n$, dada una función suave $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, el campo *gradiente* de f, denotado por $\nabla_x f \in T_x\mathbb{R}^n$, es una sección sobre el fibrado tangente de $\mathbb{R}^n$. Observemos que en este caso ∇f se identifica con una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$.

Observación 1.41. Las secciones de un fibrado vectorial homogéneo $E_\tau \simeq G \times_\tau V_\tau$ sobre $M \simeq G/K$ se pueden identificar con funciones

$$\mathbf{u} : G \longrightarrow V_\tau$$

tales que

$$\mathbf{u}(gk) = \tau(k)^{-1}\mathbf{u}(g) \qquad \forall k \in K.$$

Dicha identificación está dada por

$$\mathrm{u}(gK) := [(g, \mathbf{u}(g))]$$

Ejemplo 1.42. Las secciones del fibrado trivial sobre la variedad $M = G/K$ son funciones $\mathrm{u} : M \to M \times \mathbb{C}$ tales que $\theta(\mathrm{u}(x)) = x$, es decir, $\mathrm{u}(x) = (x, u(x))$ para alguna función $u : M \to \mathbb{C}$. Equivalentemente, toda función $\mathbf{u} : G \to \mathbb{C}$ satisface que, dado $g \in G$, $\mathbf{u}(gk) = \mathbf{u}(g)$ para todo $k \in K$, está en correspondencia con una sección u.

En general una sección de un fibrado vectorial homogéneo sobre G/K **no** se puede representar como una función de M en V_τ como esquematizamos en la siguiente figura.

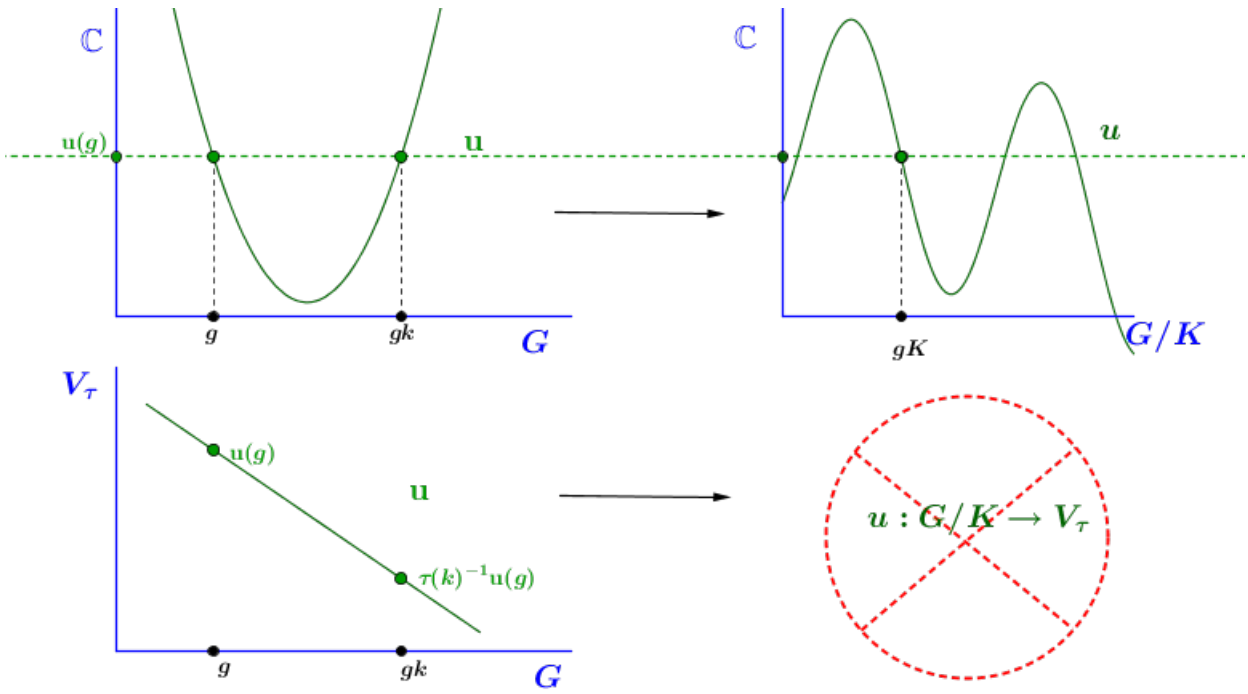


Figura 1.6: Las secciones del fibrado trivial se identifican con funciones definidas en la variedad pero las secciones de un fibrado más general no.

Dados G un grupo topológico, H un subgrupo cerrado de G y $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ una representación unitaria de H explicitaremos un proceso que permite pasar de π a una representación de todo el grupo G, dando lugar a lo que se conoce como *representación inducida* de G a partir de una representación de H. Este pasaje está dado por considerar el espacio

$$\mathrm{Ind}_H^G(\pi) := \left\{\phi\colon G \to \mathcal{H}_\pi \mid \ \phi(gh) = \pi(h)^{-1}\phi(g)\ \forall\, h \in H,\ g \in G \text{ y } \phi \text{ de cuadrado integrable sobre } G/H\right\}.$$

y sobre él la acción de G por traslación, es decir,

$$(g \cdot \phi)(x) = \phi(g^{-1}x) \qquad \text{para } g, x \in G \text{ y } \phi \in \mathrm{Ind}_H^G(\pi).$$

La representación $(L_g, \mathrm{Ind}_H^G(\pi))$, donde $\mathrm{Ind}_H^G(\pi)$ es el espacio dado anteriormente es la representación inducida de H a G a partir de π. El espacio $\mathrm{Ind}_H^G(\pi)$ es el espacio de secciones de cuadrado integrable del espacio homogéneo G/H (revisar Observación 1.41). Así como dada una representación de un subgrupo H en un grupo G podemos inducir una representación del grupo G, dada una representación ρ del grupo G fácilmente podemos pasar a una representación del subgrupo H restringiendo el dominio de ρ a H. Denotamos la restricción de la representación ρ al subgrupo H por $\mathrm{Res}_H^G(\rho)$ o simplemente por $\rho_{|_H}$. El siguiente resultado vincula las operaciones de inducir y restringir representaciones.

Teorema 1.43 (Reciprocidad de Frobenius)**.** *[FH, Proposición 3.17] Sea G un grupo topológico y sea H un subgrupo cerrado de G. Sean ρ y π representaciones unitarias de H y G respectivamente. Se tiene que*

$$\mathrm{Hom}_G(\rho, \mathrm{Ind}_H^G(\pi)) \simeq \mathrm{Hom}_H(\mathrm{Res}_H^G(\rho), \pi).$$

Definición 1.44. Sean $(\pi_1, \mathcal{H}_{\pi_1})$ y $(\pi_2, \mathcal{H}_{\pi_2})$ representaciones unitarias de un grupo G. La *multiplicidad* de π_1 en π_2, denotada por $m(\pi_1, \pi_2)$, es la cantidad de veces que aparece π_1 como factor invariante en π_2.

Como consecuencia del Teorema 1.43 se tiene que dado G un grupo topológico y H un subgrupo cerrado de G, si ρ y π representaciones unitarias de H y G respectivamente, entonces

$$m(\rho, \mathrm{Ind}_H^G(\pi)) = m(\mathrm{Res}_H^G(\rho), \pi),$$

ya que $m(\rho, \mathrm{Ind}_H^G(\pi)) = \dim(\mathrm{Hom_G}(\rho, \mathrm{Ind_H^G}(\pi)))$ y $m(\mathrm{Res}_H^G(\rho), \pi) = \dim(\mathrm{Hom}_H(\mathrm{Res}_H^G(\rho), \pi))$.

1.2.2. Álgebras de Lie

Definición 1.45. Un *álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{R}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con una forma bilineal

$$[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

tal que

- es antisimétrica: $[X,Y] = -[Y,X] \quad \forall X,Y \in \mathfrak{g}$ y
- satisface la *identidad de Jacobi*: $[X,\,[Y,Z]\,] + [Y,\,[Z,X]\,] + [Z,\,[X,Y]\,] = 0 \quad \forall X,Y,Z \in \mathfrak{g}$.

Definición 1.46. Sea G un grupo de Lie. Un campo vectorial en G se dice *G-invariante a izquierda* si $(L_g)_* X = X$ para todo $g \in G$, donde $(L_g)_*$ denota el *push-forward* del difeomorfismo L_g. Es decir, $dL_g \circ X = X \circ L_g$ para todo $g \in G$, donde dL_g es la diferencial de L_g.

Observación 1.47. Dado un vector en el espacio tangente a la identidad de un grupo de Lie $v \in T_eG$, podemos definir un campo vectorial invariante a izquierda por

$$X_g := dL_g(v)$$

y resulta de clase C^∞.

Definición 1.48. Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Se define la aplicación exponencial por

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\longrightarrow G \\ X &\longmapsto \gamma_e^X(1) \end{aligned}$$

donde $\gamma_e^X : \mathbb{R} \to G$ es la *curva integral* del campo X dada por la ecuación

$$\gamma'(t) = X(\gamma(t)) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad \gamma(0) = X_e.$$

Equivalentemente, $\exp(X)$ está dada por flujo del campo X en el punto $e \in G$ el tiempo $t = 1$.

Definición 1.49. Sea M una variedad diferenciable y sean X e Y campos vectoriales C^∞ de la variedad. Se define el *corchete de Lie* como

$$[X,Y]_p := \frac{d}{dt}_{|t=0} d(\theta_{-t}^X)_{\theta_t^X(p)} \left(Y_{\theta_t^X(p)}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{d(\theta_{-t}^X)_{\theta_t^X(p)} \left(Y_{\theta_t^X(p)}\right) - Y_p}{t}, \tag{1.12}$$

donde θ_t^X denota el *flujo del campo* X (sintéticamente, para cada tiempo t, $\theta_t^X : M \to M$ es una función C^∞ que manda cada $p \in M$ hasta el punto obtenido siguiendo, para el tiempo t, la curva integral de X que comienza en p).

La definición usual del corchete de Lie es

$$[X,Y]_p(f) = X_p\left(Y(f)\right) - X_p\left(Y(f)\right) \qquad \forall p \in M,\ f \in C^\infty(M).$$

Hemos optado por escribirla según una equivalencia dada a partir de la *derivada de Lie* de un campo Y con respecto al campo X ([Le, Teorema 9.38]). La expresión (1.12) refleja la noción de "derivada Y con respecto a la dirección marcada por X" (sugerimos ver la figura [Le, Figura 9.13]).

Proposición 1.50. *[War, Proposición 3.7 Capítulo 3] Sea G un grupo de Lie y sea $\mathfrak{g}$ el conjunto de campos invariantes a izquierda. Entonces*

- *$\mathfrak{g}$ es un espacio vectorial real;*
- *la evaluación en el elemento identidad $e \in G$*

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\longrightarrow T_eG \\ X &\longmapsto X_e \end{aligned}$$

  es un isomorfismo lineal;
- *los campos vectoriales G-invariantes son C^∞;*

- *para todo* $X, Y \in \mathfrak{g}$, $[X, Y] \in \mathfrak{g}$, *donde* $[\cdot, \cdot]$ *denota el corchete de Lie de campos vectoriales.*
- $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ *es un álgebra de Lie.*

Definición 1.51. Un *morfismo entre álgebras* Lie (de dimensión finita), $\phi : \mathfrak{g} \to \tilde{\mathfrak{g}}$, es una transformación lineal que manda el corchete en el corchete, es decir,

$$\phi([X, Y]_{\mathfrak{g}}) = [\phi(X), \phi(Y)]_{\tilde{\mathfrak{g}}} \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

La aplicación ϕ será un *isomorfismo* cuando sea biyectiva.

Teorema 1.52. *[War, Corolario del Teorema 3.27] Sean G y H grupos de Lie simplemente conexos. Sus álgebras de Lie son isomorfas si y sólo si G y H son isomorfos.*

A partir del teorema anterior extendemos las nociones de simple, semisimple, abeliana, soluble y nilpotente a álgebras de Lie de dimensión finita.

Definición 1.53. Representación de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ en un espacio vectorial de dimensión finita V es una aplicación $\phi : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ tal que

$$\phi([X, Y]) = \phi(X)\phi(Y) - \phi(Y)\phi(X)) \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{g}. \tag{1.13}$$

(Notar que el lado derecho de (1.13) es el corchete entre $\phi(X)$ y $\phi(Y)$ en el espacio de matrices o endomorfismos $\mathrm{End}\, V$.)

Observación 1.54. Todo homomorfismo $\phi : G \to \tilde{G}$ entre dos grupos de Lie G y $\tilde{G}$ induce una transformación lineal $(d\phi)_e$ del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G en el álgebra de Lie $\tilde{\mathfrak{g}}$ de $\tilde{G}$ dada por su diferencial en el punto $e \in G$, que manda corchete de Lie en corchete de Lie y tenemos que el siguiente diagrama es conmutativo (cf. [War, Teorema 3.32])

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\phi"] & \tilde{G} \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "(d\phi)_e"] & \tilde{\mathfrak{g}} \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

En particular, toda representación de un grupo de Lie G en un espacio vectorial de dimensión finita V, digamos $\pi : G \to \mathrm{Aut}(V)$, induce una representación del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G, dada por su diferencial en el punto $e \in G$, $(d\pi)_e : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$, que denotaremos directamente por $d\pi$ y llamaremos *representación derivada.*

Ejemplo 1.55. Sea G un grupo de Lie. La acción por conjugación

$$\begin{aligned} I_g : G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto gxg^{-1} \end{aligned}$$

para $g \in G$ induce un automorfismo en $\mathfrak{g}$ dado por $\mathrm{Ad}(g) := (dI_g)_e$. De esta manera obtenemos una representación de G en $\mathfrak{g}$ llamada la *representación adjunta* de G

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad} : G &\longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \\ g &\longmapsto \mathrm{Ad}(g). \end{aligned}$$

Para cada $g \in G$ se obtiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "I_g"] & G \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "\mathrm{Ad}(g)"] & \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

Por su parte, la representación Ad de G induce una representación (también llamada *adjunta*) de su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ al tomar su diferencial en el elemento identidad

$$\mathrm{ad}(X) := (d\,\mathrm{Ad})_e(X) = [X, \cdot\,].$$

Se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\mathrm{Ad}"] & \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "\mathrm{ad}"] & \mathrm{End}(\mathfrak{g}) \arrow[u, "\mathrm{Exp}"'] \end{tikzcd}$$

donde en este caso Exp denota simplemente la *exponencial matricial*. Si G es un grupo de matrices directamente escribimos $\mathrm{Ad}_{e^X} = e^{\mathrm{ad}\,X}$, para todo $X \in \mathfrak{g}$.

Proposición 1.56. *[Fa, Proposición 2.30] Si G es un grupo de Lie, entonces su función modular Δ está dada por el determinate de la representación adjunta:*

$$\Delta(x) = \det(\mathrm{Ad}(x^{-1})) \qquad \forall x \in G.$$

Observación 1.57. En general, (ver [Fa, p. 53] como una referencia) dada π una representación de un grupo Lie G en un espacio vectorial de dimensión finita V se tiene que para todo $g \in G$ y todo elemento X del álgebra de Lie de G,

$$\pi(g)d\pi(X)\pi(g^{-1}) = d\pi(\mathrm{Ad}(g)X). \tag{1.14}$$

Dado G un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff (ver [Fa, Sección 3.4]) establece en resumidas cuentas que para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$

$$\exp(X)\exp(Y) = \exp\left(X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}[X,[X,Y]] + \frac{1}{12}[Y,[Y,X]] + \text{ términos de “orden” } \geq 4\right).$$

Se puede ver que si G es un grupo de matrices se tiene que para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$

$$\mathrm{Ad}(e^X)(Y) = e^X Y e^{-X} = e^{\mathrm{ad}(X)}Y = Y + [X,Y] + \frac{1}{2!}[X,[X,Y]] + \frac{1}{3!}[X,[X,[X,Y]]] + \cdots.$$

Definición 1.58. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión finita. Se define la *forma de Killing* como la forma bilineal simétrica dada por

$$B(X,Y) := \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(Y)) \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Seguidamente presentamos los enunciados de dos teoremas fundamentales para álgebras de Lie que caracterizan las álgebras de Lie nilpotentes (a partir de su representación adjunta) y semisimples.

Teorema 1.59 (Teorema de Engel)**.** *[Hu, p. 12] Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es nilpotente si y sólo si, para cada $X \in \mathfrak{g}$, $\mathrm{ad}(X)$ es una transformación nilpotente en $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$.*

Definición 1.60. Un álgebra de Lie nilpotente será *de 2-pasos* si para todo $X \in \mathfrak{n}$, el grado de nilpotencia del operador $\mathrm{ad}(X)$ es menor o igual que 2.

Teorema 1.61. *[Hu, p. 22] Un álgebra de Lie semisimple $\mathfrak{g}$ es semisimple si y sólo si su forma de Killing es no-degenerada.*

Las acciones lineales, así como las matrices, se descomponen en semisimples y nilpotentes como evidencia el siguiente teorema.

Teorema 1.62 (Descomposición de Chevalley-Jordan)**.** *[Hu, Sección 4.2 y Sección 6.4]*

- *Para espacios vectoriales: Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado $\mathbb{K}$ y sea $X \in \mathrm{End}(V)$. Entonces existen únicos $S, N \in \mathrm{End}(V)$ satisfaciendo $X = X_S + X_N$, con S semisimple, N nilpotente y tales que S y N conmutan. Más aún, $S = p(X)$ y $N = q(X)$ donde p y q son polinomios sin término constante. En particular S y N conmutan con cualquier endomorfismo que conmuta con X.*

- *Para álgebras de Lie: Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie semisimple y $\pi : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ una representación de dimensión finita. Sea $X \in \mathfrak{g}$. Si $\pi(X) = S + N$ es la descomposición de Chevalley-Jordan de $\pi(X)$ en $\mathrm{End}(V)$, entonces $S, N \in \pi(\mathfrak{g})$. Más aún, sean X_S, $X_N \in \mathfrak{g}$ tales que $\mathrm{ad}(X) = \mathrm{ad}(X_S) + \mathrm{ad}(X_N)$ es la descomposición de Chevalley-Jordan de $\mathrm{ad}(X)$ en $\mathrm{End}(V)$ (son únicos pues ad es inyectiva), entonces $\pi(X) = \pi(X_S) + \pi(X_N)$ es la descomposición de Chevalley-Jordan de $\pi(X)$.*

Una forma bilineal simétrica β sobre un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice *invariante* si

$$\beta\left([X,Y],Z\right) = -\beta\left(Y,[X,Z]\right) \qquad \forall\ X,Y,Z \in \mathfrak{g},$$

es decir,

$$\beta\left(\mathrm{ad}(X)Y,Z\right) + \beta\left(Y,\mathrm{ad}(X)Z\right) = 0 \qquad \forall\ X,Y,Z \in \mathfrak{g}.$$

En particular, si $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie de un grupo de Lie conexo y simplemente conexo G, esto es equivalente a decir que β es invariante bajo la representación adjunta

$$\beta\left(\mathrm{Ad}(g)X,\mathrm{Ad}(g)Y\right) = \beta\left(X,Y\right) \qquad \forall\ g \in G,\ \forall\ X,Y \in \mathfrak{g}.$$

Por ejemplo, la forma de Killing de un álgebra de Lie de dimensión finita es una forma bilineal $\mathfrak{g}$-invariante.

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie (de dimensión finita) y asumamos que admite una forma bilineal simétrica no-degenerada β. Por ejemplo, si $\mathfrak{g}$ es semisimple, podemos considerar $\beta = B$, la forma de Killing de $\mathfrak{g}$ (cf. Teorema 1.61). Si $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie de un grupo de Lie lineal compacto, entonces existe en $\mathfrak{g}$ un producto interno invariante bajo la representación adjunta (cf. Observación 1.28) y consideramos como β dicho producto interno. Si $\mathfrak{g}$ es una subálgebra de $\mathrm{Mat}(m \times m, \mathbb{R})$, consideramos

$$\beta(X,Y) = \mathrm{tr}(X^t\ Y), \tag{1.15}$$

donde X^t denota la matriz transpuesta de X. Cabe destacar que (1.15) es una forma elegante de condensar el hecho de ver a X e Y como vectores "largos"

$$\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,m} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m,1} & x_{m,2} & \cdots & x_{m,m} \end{pmatrix} \longleftrightarrow (x_{1,1}, x_{1,2}, ..., x_{1,m}, x_{2,1}, x_{2,2}, ..., x_{2,m}, ... \ ... \ ..., x_{m,1}, x_{m,2}, ..., x_{n,n})$$

y luego tomar el producto interno euclidiano de vectores en $\mathbb{R}^{m^2}$.

Dada $\{X_1, ..., X_n\}$ una base de $\mathfrak{g}$, pongamos

$$g_{i,j} := \beta(X_i, X_j) \qquad \text{y}$$
$$g^{i,j} := (g_{i,j})^{-1}.$$

Sea π una representación de $\mathfrak{g}$ en el espacio vectorial de dimensión finita V_π. Se define el *operador Casimir* Ω_π la de la representación π por

$$\Omega_\pi = \sum_{i,j=1}^{n} g^{i,j}\pi(X_i)\pi(X_j).$$

En particular, si β es definida positiva y $\{X_1, ..., X_n\}$ es una base ortornormal respecto del producto interno definido por β (es decir, $\beta(X_i, X_j) = \delta_{i,j}$), entonces

$$\Omega_\pi = \sum_{i=1}^{n} \left(\pi(X_i)\right)^2. \tag{1.16}$$

Se puede ver que la definición del elemento Casimir es independiente de la elección de la base de $\mathfrak{g}$ (cf. [Fa, Proposición 6.7.1]). Además, Ω_π conmuta con la representación π (cf. [Fa, Proposición 6.7.1]).

Teorema 1.63. *[Fa, Corolario 6.7.2] Si (π, V_π) es una representación irreducible de $\mathfrak{g}$, $\mathbb{C}$-lineal y donde V_π es un espacio vectorial complejo de dimensión finita, entonces existe $c_\pi \in \mathbb{C}$ tal que*

$$\Omega_\pi = c_\pi \mathrm{I}.$$

Si $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie de un grupo de Lie lineal compacto G, τ es una representación compleja de dimensión finita de G y $d\tau$ es la representación derivada asociada, ponemos

$$\Omega_\tau := \sum_{i=1}^{n} \left(d\tau(X_i)\right)^2,$$

donde $\{X_i\}_{i=1}^n$ es una base ortonormal de $\mathfrak{g}$ con respecto al producto interno invariante por la representación adjunta. Se puede ver que este operador conmuta con la representación τ. Además, si τ es irreducible, entonces existe un escalar c_τ tal que

$$\Omega_\tau = c_\tau \mathrm{I}.$$

Si la representación τ es no-trivial, entonces $c_\tau < 0$ (cf. [Fa, Proposición 6.7.3]).

Álgebra universal o envolvente

Sea $\mathbb{K}$ un anillo conmutativo con unidad. Por ejemplo, podemos pensar que $\mathbb{K}$ es un cuerpo como $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$.

Definición 1.64. Un álgebra *envolvente (o universal)* de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es una $\mathbb{K}$-álgebra asociativa $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ munida de un morfismo de álgebras de Lie $\iota : \mathfrak{g} \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ (es decir, una aplicación lineal tal que $\iota([X,Y]) = \iota(X)\iota(Y) - \iota(Y)\iota(X)$) que satisface la siguiente propiedad universal: Si $\mathcal{A}$ es otra $\mathbb{K}$-álgebra asociativa con un morfismo de álgebras de Lie $\eta : \mathfrak{g} \to \mathcal{A}$, entonces existe un único morfismo de $\mathbb{K}$-álgebras asociativas $F : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{A}$ tal que $F \circ \iota = \eta$, es decir, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{g} \arrow[dl, "\iota"'] \arrow[dr, "\eta"] & \\ \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \arrow[rr, dashed, "F"] & & \mathcal{A}. \end{tikzcd}$$

Dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ siempre existe una álgebra envolvente asociada y esta es única (ver [Hu, Sección 17.2]).

Teorema 1.65 (Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt)**.** *[Hu, p. 92] Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie. Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una base ordenada de $\mathfrak{g}$. Entonces,*

$$\{\iota(X_{i_1})^{k_1}...\iota(X_{i_m})^{k_m} \mid m \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ i_1 < ... < i_m,\ k_1, ..., k_m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \tag{1.17}$$

es una base de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. En particular, la aplicación $\iota : \mathfrak{g} \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ es inyectiva (es decir, se puede pensar como "inclusión").

Esto permite identificar el álgebra universal con el álgebra de operadores diferenciales sobre G, invariantes a izquierda. (recordemos que si $\phi : G \to G$ es un difeomorfismo decimos que $D \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ es *ϕ-invariante* si $D \circ \phi = \phi \circ D$). Podemos poner

$$\iota(X)(f)(g) := X(f \circ L_g) = \frac{d}{dt}_{|t=0} f(g\ \exp(tX)) \qquad (X \in \mathfrak{g}).$$

Definición 1.66. Si K es un subgrupo de G y R_k denota la multiplicación a derecha en G por elementos k de K, definimos

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g})^K := \{D \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}) : D \circ R_k = R_k \circ D, \forall k \in K\},$$

la subálgebra de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ de los operadores invariantes a izquierda por G que son invariantes a derecha por K.

Dado V un espacio vectorial de dimensión finita y $\{X_1, ..., X_n\}$ una base de V, el álgebra simétrica $\mathcal{S}(V)$ sobre V se puede definir como el álgebra (conmutativa) de los polinomios $\sum_k a_{k_1,...,k_n} X_1^{k_1} ... X_n^{k_n}$.

Teorema 1.67. *[He1, Teorema 4.3] Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Denotamos por $S(\mathfrak{g})$ el álgebra simétrica asociada a $\mathfrak{g}$. Entonces existe una única biyección lineal*

$$\lambda : S(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \tag{1.18}$$

tal que $\lambda(X^m) = \iota(X)^m$ ($X \in \mathfrak{g}$ y $m \in \mathbb{N}$). Si $X_1, ..., X_n$ es una base de $\mathfrak{g}$ y $P \in S(\mathfrak{g})$, entonces

$$(\lambda(P)f)(g) = \{P(\partial_1, ..., \partial_n) f(g\ \exp(t_1 X_1 + ... + t_n X_n))\}_{|t=0}.$$

Llamaremos a λ aplicación de "simetrización".

Teoría de pesos

Una *partición* es una sucesión monótona decreciente con una cantidad finita de términos no nulos $\sigma := (\sigma_1, \sigma_2, ...)$ donde $\sigma_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Al conjunto de todas las particiones lo denotaremos por $\mathbb{P}$. La *longitud* de σ, denotada por $l(\sigma)$, es el número de componentes no nulas y el *tamaño* de σ, denotado por $|\sigma|$, es la suma de los valores de sus componentes. Usualmente una partición σ se identifica con un *diagrama de Young* que contiene una cantidad $|\sigma|$ de celdas con una cantidad σ_i de celdas en la i-ésima fila. La partición conjugada o transpuesta σ^t de σ es la partición cuyo diagrama de obtiene de transponer (reflejar con

respecto a la diagonal principal) el diagrama de σ. Para dos particiones σ y ς escribimos $\varsigma \subset \sigma$ si $\varsigma_i \leq \sigma_i$ para todo i y en este caso el diagrama de Young "sesgado" (*skew*) σ/ς se define como el conjunto de celdas que quedan cuando se hace la diferencia de los dos diagramas. El tamaño de este diagrama se define como $|\sigma/\varsigma| := |\sigma| - |\varsigma|$. Decimos que el diagrama σ/ς es una *k-tira horizontal* si contiene a lo más una célda en cada columna y $|\sigma/\varsigma| = k$. Notar que σ/ς es una tira horizontal si y sólo si $\sigma_1 \geq \varsigma_1 \geq \sigma_2 \geq \varsigma_2 \geq \dots$.

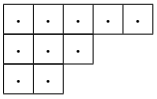


Figura 1.7: Diagrama de Young. Este ejemplo está asociado a la partición $\sigma = (6, 3, 2)$ de longitud $l(\sigma) = 3$ y tamaño $|\sigma| = 11$.

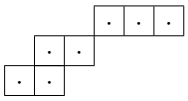


Figura 1.8: Diagrama de Young "sesgado" o *"skew diagram"*. Este ejemplo σ/ς se obtiene entre la partición σ de la Figura (1.7) y $\varsigma = (3, 1)$. Su tamaño es $|\sigma/\varsigma| = 7$. Este ejemplo **no** es una tira horizontal ya que en la segunda columna hay dos celdas.

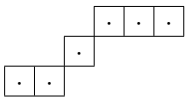


Figura 1.9: Diagrama de Young "sesgado" que es una tira horizontal. Este ejemplo σ/ς se obtiene entre la partición σ de la Figura (1.7) y $\varsigma = (3, 2)$. Su tamaño es $|\sigma/\varsigma| = 6$ y aquí se cumple que $\sigma_1 = 6 \geq \varsigma_1 = 3 \geq \sigma_2 = 3 \geq \varsigma_2 = 2 \geq \sigma_3 = 2$.

A partir de [Kn, Proposición 2.7], dada un álgebra de Lie compleja de dimensión finita $\mathfrak{g}$ podemos definir que una subálgebra de Lie $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ se dirá *de Cartan* si es nilpotente y coincide con su normalizador $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) := \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}\}$ (es decir, si $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ para todo $Y \in \mathfrak{h}$, entonces $X \in \mathfrak{h}$). Se afirma en [Kn, Teorema 2.9] que toda álgebra de Lie compleja de dimensión finita $\mathfrak{g}$ posee una subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$. Por [Kn, Proposición 2.10] en el caso de ser $\mathfrak{g}$ semisimple, $\mathfrak{h}$ es abeliana. Más aún, de [Kn, Corolario 2.11] se desprende que en un álgebra de Lie compleja semisimple $\mathfrak{g}$, una subálgebra Lie $\mathfrak{h}$ es de Cartan si es una subálgebra abeliana maximal y a la vez los operadores $\{\mathrm{ad}(H)\}_{H \in \mathfrak{h}}$ diagonalizan simultáneamente (donde ad es la representación adjunta de $\mathfrak{g}$). Por su parte, se establece en [Kn, Teorema 2.15] que toda subálgebra de Cartan de un álgebra de Lie compleja $\mathfrak{g}$ es única salvo conjugación por elementos de $\mathfrak{g}$.

Ejemplo 1.68. Sea $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ el conjunto de matrices complejas $n \times n$ de traza cero. Es un subespacio de $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ con la operación de suma de matrices y, más aún, es una subálgebra con el corchete dado por $[A, B] := AB - BA$. Una subálgebra de Cartan está dada por todos las matrices diagonales de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$. Observar que si $\mathfrak{h}_0$ denota el espacio conformado por las matrices reales diagonales de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, entonces podemos escribir $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \oplus i\mathfrak{h}_0$. Para cada par de índices $1 \leq i, j \leq n$ definimos la matriz $E_{i,j}$ como aquella de entradas cero salvo la componente en el lugar (i, j) donde tiene un 1. Sea puede ver que el conjunto de matrices $\{E_{i,j}\}_{1 \leq i,j \leq n}$ diagonaliza simultáneamente a los operadores $\mathrm{ad}(H)$ para $H \in \mathfrak{h}$. Escribimos para cada $H \in \mathfrak{h}$

$$\mathrm{ad}(H)E_{i,j} = [H, E_{i,j}] = HE_{i,j} - E_{i,j}H = (e_i(H) - e_j(H))E_{i,j},$$

donde $e_i(H) - e_j(H)$ es el autovalor de $\mathrm{ad}(H)$ asociado al autovector $E_{i,j}$. En este caso, para cada $1 \leq i \leq n$, $e_i(H)$ es exactamente la componente i-ésima de la diagonal de H. Cada $e_i - e_j$ es un funcional

lineal de $\mathfrak{h}$, es decir un elemento en el dual $\mathfrak{h}^*$, y se llaman *raíces*. Sea R el conjunto de todas las raíces. Se puede ver que R genera $\mathfrak{h}^*$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial. A partir de dicha la diagonalización simultánea podemos descomponer a $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ como

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) = \mathfrak{h} \bigoplus [\oplus_{i,j}\mathbb{C}E_{i,j}] = \mathfrak{h} \bigoplus \left[\oplus_{i,j}\mathfrak{g}_{e_i-e_j}\right] \tag{1.19}$$

donde

$$\mathfrak{g}_{e_i-e_j} := \{X \in \mathfrak{g} \mid \ \mathrm{ad}(H)X = (e_i - e_j)(H)X \ \ \forall H \in \mathfrak{h}\}$$

se llama espacio de raíces de la descomposición. Todas las raíces son reales restringidas a $\mathfrak{h}_0$ y por lo tanto pueden ser consideradas (aplicadas sobre $\mathfrak{h}_0$) como elementos de $\mathfrak{h}_0$. Los funcionales lineales $e_1, ..., e_n$ generan $\mathfrak{h}_0^*$ y además su suma es 0. Luego, todo elemento $\lambda \in \mathfrak{h}_0^*$ puede ser escrito de manera no única como una combinación lineal $\lambda = \sum_j c_j e_j$ y se tiene que $(\sum_i c_i)(e_1 + ... + e_n) = 0$. Por lo que $\lambda = \sum_j \left(c_j - \frac{1}{n}\sum_i c_i\right) e_j$. Es decir, $\lambda = \sum_j a_j e_j$, donde $\sum_j a_j = 0$ y esta realización de λ sí es única. Si $\phi = \sum_j a_j e_j$ es un elemento de $\mathfrak{h}_0^*$ con $\sum_j a_j = 0$, decimos que es positivo si el primer coeficiente a_j no nulo es positivo. Esta noción de "positividad" cumple dos propiedades fundamentales:

- Para todo $\phi \in \mathfrak{h}_0^*$ no nulo se cumple que o bien ϕ es positivo o bien $-\phi$ es positivo (y son posibilidades excluyentes una de la otra).
- Las sumas finitas y los múltiplos positivos de $\mathfrak{h}_0^*$ vuelven a ser elementos positivos de $\mathfrak{h}_0^*$.

A partir de esto podemos definir un orden en $\mathfrak{h}_0^*$: Dados dos elementos $\phi, \psi \in \mathfrak{h}_0^*$, $\phi > \psi$ si $\phi - \psi$ es positivo. Las raíces positivas son aquellas de la forma $e_i - e_j$ para $i < j$ y están ordenadas en la forma $e_1 - e_n > e_1 - e_{n-1} > ... > e_1 - e_2 > e_2 - e_n > e_2 - e_{n-1} > ... > e_2 - e_3 > e_3 - e_4 > ... ... > e_{n-2} - e_n > e_{n-2} - e_{n-1} > e_{n-1} - e_n$.

Teorema 1.69 (Teorema de Lie). *[Kn, Teorema 1.25] Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie soluble. Si V es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial no trivial y π es una representación de $\mathfrak{g}$ sobre V, entonces existe un autovector simultáneo $v \neq 0$ en V para todos los operadores $\pi(X)$ variando $X \in \mathfrak{g}$.*

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie compleja semisimple (aunque suene paradójico) y sea $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$. Sea (π, V) una representación (de dimensión finita) de $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{C}$. Para un funcional lineal λ de $\mathfrak{h}$, el *espacio peso* de V con peso λ es el subespacio V_λ de V dado por

$$V_\lambda := \{v \in V \mid \ \pi(H)v = \lambda(H)v \ \ \forall H \in \mathfrak{h}\}.$$

Un *peso de la representación* (π, V) es un funcional lineal λ al cual le corresponde un espacio peso no trivial. Los vectores no nulos de los espacios peso se llaman *vectores peso* y son autovectores simultáneos de los operadores $\{\pi(H)_{H\in\mathfrak{h}}\}$ correspondientes al autovalor dado por λ. El espacio vectorial V se descompone como suma directa de los espacios peso

$$V = \bigoplus_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} V_\lambda.$$

Observemos que como $\mathfrak{h}$ es abeliana,se puede aplicar el teorema de Lie y entonces, para una adecuada base de V, $\{\pi(H)\}_{H\in\mathfrak{h}}$ diagonalizan simultáneamente. Los pesos serán dados por los funcionales lineales que devuelven las distintas entradas sobre la diagonal de una matriz escrita en tal base. En el caso de tener la representación $(\mathrm{ad}, \mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ llamamos *raíces* a los pesos. El conjunto de raíces será denotado por R (o $\mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ si se quiere hacer referencia a la subálgebra de Cartan elegida).

En abstracto, un *sistema de raíces* es un subconjunto $R \subset \mathbb{R}^n$, donde tenemos por ejemplo el producto interno euclidiano $\langle\cdot,\cdot\rangle$, tal que satisface:

(R1) $2\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} \in \mathbb{Z}$ para todo $\alpha, \beta \in R$: Esto significa que los únicos posibles ángulos entre dos raíces son 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{6}$ y π, y para dos raíces no perpendiculares la proporción de la raíz cuadrada de sus longitudes es 1, 2 o 3 dependiendo del ángulo entre ellas (ver Figura 1.10).

Figura 1.10: Propiedad (R1).

(R2) $\beta - 2\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\alpha \in R$ para todo $\alpha, \beta \in R$: Esto significa que R es invariante bajo todas las reflexiones $s_\alpha(\beta) := \beta - 2\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\alpha$ con respecto al hiperplano ortogonal a α (también llamado *espejo* de α), para todo $\alpha \in R$. Por su parte, el grupo generado por las reflexiones s_α, para $\alpha \in R$, se llama *grupo de Weyl* asociado a R y es un sugbrupo finito de $\mathrm{O}(n)$. El complemento de la unión de todos los espejos en $\mathbb{R}^n$ se divide en varias componentes conexas llamadas *cámaras de Weyl* (abiertas).

Notar que las propiedades (R1) y (R2) son invariantes ante rotaciones y dilataciones. Por su parte, los sistemas de raíces con los que trabajaremos además cumplen que:

(R3) R genera $\mathbb{R}^n$ (el sistema de raíces se dice *no-degenerado*).

(R4) R no se puede expresar como unión disjunta de dos sistemas de raíces ortogonales entre sí (el sistema de raíces se dice *indescomponible*).

(R5) Si $\alpha \in R$, entonces $2\alpha \notin R$ (el sistema de raíces se dice *reducido*): Esto implica que cada vez que tengamos $\alpha \in R$ y $k\alpha \in R$ para algún $k \in \mathbb{R}$, necesariamente k será ± 1 o ± 2 o $\pm\frac{1}{2}$.

Dando un orden total, por ejemplo el orden lexicográfico, podemos separar en raíces positivas R^+ y negativas R^-. Para una formulación precisa, en general, dado un cono $V \subset \mathbb{R}^n$ definimos el *cono dual* V' como el conjunto de vectores v' tales que $\langle v, v'\rangle \geq 0$ $\forall v \in V$. Para cualquier orden total en $\mathbb{R}^n$, el cono convexo generado por R^+ es el cono dual de alguna cámara de Weyl. Decimos que $\alpha \in R^+$ es *descomponible* si $\alpha = \beta + \gamma$ con $\beta, \gamma \in R^+$, de lo contrario α se dice *simple*. Toda raíz $\alpha \in R$ posee una única escritura

$$\alpha = \sum_{k=1}^{n} c_k \alpha_n,$$

para algún natural n y donde $\alpha_k \in R^+$ $\forall 1 \leq k \leq n$ y todos los escalares c_k son o bien enteros positivos o bien enteros negativos.

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie compleja semisimple. Fijemos una subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ y sea $\mathrm{R} = \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ el conjunto de raíces asociado. Usando [Kn, Corolario 2.38] sea $\mathfrak{h}_0$ una forma real de $\mathfrak{h}$ donde todas las raíces son a valores reales. Sea B una forma simétrica, no-degenerada, invariante en $\mathfrak{g}$ tal que es definida positiva en $\mathfrak{h}_0$. Para cada $\alpha \in \mathrm{R}$ sea $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ su "representante" dado a partir de la forma B, es decir,

$$\alpha(X) = B(X, H_\alpha) \qquad \forall X \in \mathfrak{h}.$$

Se tiene que $\mathfrak{h}_0 = \sum_{\alpha\in\mathrm{R}} \mathbb{R}H_\alpha$. Se induce la forma bilineal, simétrica, no-degenerada

$$\langle\lambda, \mu\rangle = \lambda(H_\mu) = \mu(H_\lambda) = B(H_\lambda, H_\mu).$$

Un elemento $\lambda \in \mathfrak{h}_0^*$ se dice *algebraicamente integral* si

$$2\frac{\langle\lambda, \alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle} \in \mathbb{Z} \qquad \text{para toda } \alpha \in \mathrm{R}.$$

Un elemento $\lambda \in \mathfrak{h}_0^*$ se dice *dominante* si

$$\langle\lambda, \alpha\rangle \geq 0 \qquad \text{para toda } \alpha \in \mathrm{R}^+.$$

Los *pesos fundamentales* $\omega_1, ..., \omega_n$ se definen por ser una base de $\mathfrak{h}_0$ tal que

$$2\frac{\langle w_i, \alpha_j\rangle}{\langle\alpha_j, \alpha_j\rangle} = \delta_{i,j} \qquad \text{para todas las raíces simples } \alpha_1, ..., \alpha_n.$$

Un peso λ_π de una representación de dimensión finita y compleja (π, V) de $\mathfrak{g}$ es llamado el *peso máximo* de la representación si todo otro peso de (π, V) es menor que λ.

Teorema 1.70 (Teorema del peso máximo)**.** *[Kn, Teorema 5.5] Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie compleja semisimple y sea $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$. Existe una correspondencia biunívoca entre las clases de equivalencias de representaciones irreducibles de dimensión finita de $\mathfrak{g}$ y los funcionales lineales de $\mathfrak{h}$ que son dominantes y algebraicamente integrales. Esta correspondencia está dada por asociar a cada representación su peso máximo.*

Por su parte, el peso máximo λ_π de una representación (π_λ, V) presenta las siguientes propiedades adicionales:

- *λ_π depende solamente del sistema de raíces simples y no depende del orden elegido en dicho conjunto;*
- *el espacio peso V_{λ_π} asociado a λ_π es de dimensión uno;*
- *todo peso de π_λ es de la forma*
$$\lambda_\pi - \sum_i n_i \alpha_i,$$
donde la suma es finita, los n_i son enteros no negativos y los α_i son raíces simples.

Un *toro* de un grupo de Lie compacto G es un subgrupo de Lie conexo, compacto y abeliano G. Todo toro es isomorfo a un toro estándar $\mathbb{T}^n := \mathbb{S}^1 \times ... \times \mathbb{S}^1$. Un *toro maximal* de G es un toro de G de dimensión maximal entre los toros de G. Todo elemento de G el conjugado (en G) de un elemento de un toro maximal de G. Fijado un grupo de Lie G conexo y compacto, sea $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie (que por lo tanto es real) y sea $\mathfrak{g}_\mathbb{C} := \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$ la *complexificación* de $\mathfrak{g}$. Por [Kn, Corolario 4.26] la forma de Killing de $\mathfrak{g}$ es semidefinida negativa. Si T es un toro maximal de G, entonces la complexificación del álgebra de Lie $\mathfrak{t}$ de T es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ (cf. [Kn, Capítulo IV]).

La descomposición de un álgebra de Lie compleja semisimple $\mathfrak{g}$ en suma directa de una subálgebra de Cartan y suma de espacios de raíces $\mathfrak{g}_\alpha$ de forma análoga a (1.19) es única salvo conjugación [FH, Apéndice D]. Los elementos H de una subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ tales que $C_\mathfrak{g}(H) = \mathfrak{h}$, donde $C_\mathfrak{g}(H)$ denota el centralizador de H en $\mathfrak{g}$

$$C_\mathfrak{g}(H) := \{X \in \mathfrak{g} \mid \ [H, X] = 0\}$$

se llaman elementos *regulares*. La existencia de estos elementos determina completamente una subálgebra de Cartan (ver [FH, Capítulo 14]). Los elementos regulares de $\mathfrak{h}$ forman un conjunto abierto y denso en $\mathfrak{h}$. Si $H \in \mathfrak{h}$ no es regular, entonces $C_\mathfrak{g}(H)$ es más grande que $\mathfrak{h}$ puesto que contiene otros espacios de raíces. En general, los elementos regulares de un álgebra de Lie (o de un grupo de Lie) son aquellos cuyos centralizadores tienen la dimensión más chica que sea posible. Para grupos de Lie G conexos compactos (y sus álgebras de Lie), los elementos regulares forman un conjunto abierto y denso en G (y respectivamente en su álgebra de Lie) y si T es un toro maximal de G, los elementos $t \in T$ que son regulares en G determinan los elementos regulares de G. Todos los elementos regulares de G están dados por conjugaciones en G de elementos de T regulares en G.

El grupo de Heisenberg

El grupo de Heisenberg puede ser descripto como $\mathrm{H}_n = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ con el producto

$$(z, t)(w, s) = (z + w, t + s - \frac{1}{2}\mathrm{Im}\,(z.w))$$

donde $z.w = z_1\overline{w_1} + ... + z_n\overline{w_n}$ denota la forma hermitiana usual en $\mathbb{C}^n$ y $\mathrm{Im}\,(c)$ denota la parte imaginaria de un número complejo $c \in \mathbb{C}$. Fácilmente se verifica que es un grupo. El neutro de la operación es el $(0, 0)$ y el inverso de un elemento arbitrario (z, t) es $(-z, -t)$. El grupo H_n es no conmutativo y su centro es el subgrupo

$$Z(\mathrm{H}_n) = \{(0, t) \mid \ t \in \mathbb{R}\}.$$

Si bien el grupo de Heisenberg no es abeliano, tiene muchas similitudes con el espacio euclídeo $\mathbb{R}^{2n+1}$. Principalmente destacamos que la medida de Haar de H_n coincide con la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^{2n+1}$ y desde el punto de vista diferenciable, son variedades difeomorfas.

Denotaremos por $\mathfrak{h}_n$ al álgebra de Lie de H_n.

Teorema 1.71.

(*i*) *Dado un vector v en $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$, existe un y sólo un campo vectorial Z sobre H_n invariante a izquierda tal que $Z(0) = \partial v$, donde ∂v denota la derivada direccional respecto de v en $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$.*

(*ii*) *Una base de campos invariantes a izquierda de H_n está dada, en la base canónica de $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$, por*

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{y_j}{2}\frac{\partial}{\partial t}, \qquad Y_j = \frac{\partial}{\partial y_j} + \frac{x_j}{2} \quad \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{para } 1 \leq j \leq n \quad \text{y} \qquad T = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Demostración. (i) Sea Z un campo invariante a izquierda de H_n tal que $Z(f)(0) = \partial v f$ para toda $f \in C^\infty(\mathrm{H}_n)$, entonces para cada $h \in \mathrm{H}_n$

$$\begin{aligned} Z(f)(h) &= dL_h(Z(f))(0) = Z(f \circ L_h)(0) = \partial v(f \circ L_h)(0) \\ &= \frac{\partial}{\partial s}|_{s=0}(f \circ L_h)(sv) = \frac{\partial}{\partial s}|_{s=0} f(h(sv)) \end{aligned} \tag{1.20}$$

Esta expresión determina unívocamente al campo Z, por lo tanto se demuestra la unicidad.

A su vez, si definimos $Wf(h) := \frac{\partial}{\partial s}\,|_{s=0}\, f(h(sv))$, analizando (1.20) se tiene que W es un campo vectorial de H_n invariante a izquierda tal que $W(0) = \partial v$ y así garantizamos existencia.

(ii) Para determinar los campos invariantes a izquierda de H_n por la parte (i) basta con hallar aquellos que se corresponden con la base canónica de $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$ y el resto serán una combinación lineal de estos.

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, $n = 3$. Sean $\{X, Y, T\}$ los campos invariantes a izquierda de H_1 que en el origen coinciden con las derivadas parciales $\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial t}\}$.

Sea $f \in C^\infty(\mathrm{H}_1)$ y sea $h = (x, y, t) \in \mathrm{H}_1$. Se tiene,

$$\begin{aligned} Xf(x,y,t) &= \frac{\partial}{\partial s}\,|_{s=0}\, f((x,y,t)(s,0,0)) = \frac{\partial}{\partial s}\,|_{s=0}\, f(x+s, y, t - \frac{1}{2}sy) \\ &= (\frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial t})f(x,y,t) \end{aligned}$$

Análogamente resultan $Y = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial t}$ y $T = \frac{\partial}{\partial t}$. □

Si η es una representación unitaria, irreducible de H_n, el lema de Schur nos asegura que $\eta(0,t) = e^{i\lambda t}\mathrm{I}$, para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. Por otro lado, el teorema de Stone von Neumann establece que las representaciones unitarias, irreducibles del grupo de Heisenberg están determinadas por la acción en el centro, es decir, por un homomorfismo $\chi_\lambda(t) = e^{i\lambda t}$. Un conjunto de representantes de $\widehat{\mathrm{H}_n}$ está dado por:

- Representaciones de dimensión infinita $(\pi_\lambda, \mathcal{F}_\lambda)$, para $\lambda \neq 0$, realizadas sobre el espacio de Fock $\mathcal{F}_\lambda = \left\{F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C} \text{ holomorfa} \mid \int |F(z)|^2 e^{-\frac{\lambda}{2}|z|^2} dz < \infty\right\}$ (para $\lambda > 0$), donde la acción está dada por $\pi_\lambda\,(z,t)\,F(u) := e^{\lambda(it - \frac{1}{2}u.z - \frac{1}{4}|z|^2)}F(u + \bar{z})$ (y de una forma análoga para $\lambda < 0$) .

  Aquí la acción del centro viene dada por $\chi_\lambda(0,t) = e^{i\lambda t}$, con $\lambda \neq 0$.

- Caracteres unitarios $\chi_{(\xi,\mu)}(x,y,t) := e^{i\langle(\xi,\mu),(x,y)\rangle}$, donde $\xi, \mu \in \mathbb{R}^n$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota el producto interno canónico de $\mathbb{R}^{2n}$. La correspondiente acción del centro es trivial $(\lambda = 0)$.

1.2.3. Teoría de representaciones del grupo de rotaciones

El álgebra de Lie $\mathfrak{so}(n)$ de $\mathrm{SO}(n)$ se puede pensar como el espacio de matrices $n \times n$ antisimétricas. Su complexificación $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ es el espacio de tales matrices pero complejas. Sea m la parte entera de $n/2$. Consideramos un toro maximal $\mathbb{T}$ de $\mathrm{SO}(2m)$ dado por

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) & & & \\ -\sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \cos(\theta_m) & \sin(\theta_m) \\ & & & -\sin(\theta_m) & \cos(\theta_m) \end{pmatrix} \mid \theta_1, ..., \theta_m \in \mathbb{R} \right\}$$

y para $\mathrm{SO}(2m+1)$ consideramos el mismo pero con un 1 en la esquina inferior derecha.

Pasaremos a describir las nociones básicas del sistema de raíces de $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ siguiendo los libros [Kn, FH]. Esto ayudará sobre todo para fijar notación.

Denotamos por $\mathfrak{t}$ el álgebra de Lie de $\mathbb{T}$. Una subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ del álgebra de Lie compleja $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ está dada por la complexificación de $\mathfrak{t}$. Consideremos $\{H_1, ..., H_m\}$ la siguiente base de $\mathfrak{h}$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial:

$$\left\{ H_1 := \begin{pmatrix} 0 & i & & & \\ -i & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \dots, H_m := \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & i \\ & & & -i & 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ o}$$

$$\left\{ H_1 := \begin{pmatrix} 0 & i & & & & \\ -i & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & 0 & \\ & & & 0 & 0 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, \ \dots \ , H_m := \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & i & \\ & & & -i & 0 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

dependiendo de la paridad de n (donde $i := \sqrt{-1}$). Esta base resulta "ortogonal" con respecto a la forma de Killing B ya que

$$B(H_i, H_j) = 0 \quad \forall i \neq j \quad \text{y}$$
$$B(H_i, H_i) = \begin{cases} 4(m-1) & (\text{si } n = 2m) \\ 4(m-1) + 2 & (\text{si } n = 2m+1). \end{cases}$$

Sea $\mathfrak{h}^*$ el espacio dual de $\mathfrak{h}$ y sea $\{L_1, ..., L_m\}$ la base dual de $\{H_1, ..., H_m\}$ (esto es, $L_i(H_j) = \delta_{i,j}$, donde $\delta_{i,j}$ denota la delta de Kronecker).

Los pesos correspondientes a la representación adjunta (raíces) son $\{\pm L_i \pm L_j\}_{i \neq j}$, en el caso en que n es par y son $\{\pm L_i \pm L_j\}_{i \neq j} \cup \{\pm L_i\}$, en el caso en que n es impar. El sistema de raíces positivas R^+ está dado por

$$\mathrm{R}^+ = \{L_i + L_j\}_{i<j} \cup \{L_i - L_j\}_{i<j} \qquad (\text{para el caso par}),$$
$$\mathrm{R}^+ = \{L_i + L_j\}_{i<j} \cup \{L_i - L_j\}_{i<j} \cup \{L_i\} \qquad (\text{para el caso impar}).$$

Para $\alpha \in \mathrm{R}^+$, denotamos por $\mathfrak{g}_\alpha$ su correspondiente espacio de raíces y por η^+ la suma de los espacios de raíces positivas.

Las raíces positivas simples están dadas por

$$L_1 - L_2, L_2 - L_3, ..., L_{m-1} - L_m, L_{m-1} + L_m \qquad (\text{en el caso par}),$$
$$L_1 - L_2, L_2 - L_3, ..., L_{m-1} - L_m, L_m \qquad (\text{en el caso impar}).$$

La cámara de Weyl $\mathcal{W}$ es exactamente

$$\mathcal{W} = \{\sum_{i=1}^{m} a_i L_i |\ a_1 \geq a_2 \geq ... \geq |a_m|\} \qquad (\text{si } n = 2m),$$
$$\mathcal{W} = \{\sum_{i=1}^{m} a_i L_i |\ a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_m \geq 0\} \qquad (\text{si } n = 2m+1).$$

La *lattice* de pesos, tanto para el caso n par o n impar, es el retículo generado por los L_i (para $i = 1, ..., m$) junto con el elemento $\frac{1}{2}(L_1 + \cdots L_m)$.

Los pesos fundamentales para el caso en que n es par son

$$\Lambda_1 := L_1,\ \Lambda_2 := L_1 + L_2, ...,\ \Lambda_{m-2} := L_1 + ... + L_{m-2},$$
$$\Lambda_{m-1} := \frac{1}{2}(L_1 + ... + L_{m-1} + L_m) \ \text{ y } \ \Lambda_m := \frac{1}{2}(L_1 + ... + L_{m-1} - L_m),$$

mientras que para el caso impar son

$$\Lambda_1 := L_1,\ \Lambda_2 := L_1 + L_2, ...,\ \Lambda_{m-1} := L_1 + ... + L_{m-1} \text{ y } \ \Lambda_m := \frac{1}{2}(L_1 + ... + L_{m-1} + L_m).$$

A cada representación irreducible de $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ le corresponde un peso máximo $\lambda = \sum_{i=1}^{m} b_i \Lambda_i$, donde $b_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ para todo $1 \leq i \leq m$. Equivalentemente, podemos escribir cada peso máximo λ como $\lambda = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i L_i$, donde λ_i son todos enteros o medios enteros que a la vez satisfacen:

(i) $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ ... \ \geq \lambda_{m-1} \geq |\lambda_m|$ si n es par o

(ii) $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_m \geq 0$ si n es impar.

Luego, podemos asociar unívocamente una representación irreducible con una m-tupla o partición de longitud m, $(\lambda_1, ..., \lambda_m)$, que cumpla con las condiciones anteriormente mencionadas.

Por último, mencionamos que cada representación irreducible del grupo $\mathrm{SO}(n)$ corresponde a una partición $(\lambda_1, ..., \lambda_m)$ (cumpliendo la propiedad (i) o (ii) dependiendo de la paridad de la dimensión n) donde los elementos λ_i son todos enteros (cf. [FH, Proposición 23.13]).

1.2.3.1. Fórmulas de restricción

En este apartado recordamos las fórmulas que describen la descomposición de una representación de $\mathfrak{so}(n)$ cuando es restringida a $\mathfrak{so}(n-1)$. En inglés son las llamadas *"branching formulas"* (ver por ejemplo las fórmulas (25.34) y (25.35) de la p. 426 de [FH]).

- Sea ρ_λ una representación irreducible de $\mathfrak{so}(2m+1,\mathbb{C})$ que está en correspondencia con la partición $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m)$ donde $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_m \geq 0$. Entonces,

$$(\rho_\lambda)_{|_{\mathfrak{so}(2m)}} = \bigoplus_{\overline{\lambda}} \rho_{\overline{\lambda}} \tag{1.21}$$

  donde la suma corre sobre todas las particiones $\overline{\lambda} = (\overline{\lambda_1}, ..., \overline{\lambda_m})$ que satisfacen

$$\lambda_1 \geq \overline{\lambda_1} \geq \lambda_2 \geq \overline{\lambda_2} \geq ... \geq \overline{\lambda_{m-1}} \geq \lambda_m \geq |\overline{\lambda_m}|,$$

  donde los elementos λ_i y $\overline{\lambda_i}$ son simultáneamente todos enteros o todos medios enteros.

- Sea ρ_λ una representación irreducible de $\mathfrak{so}(2m)$ en correspondencia con la partición $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m)$ donde $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ ... \ \geq \lambda_{m-1} \geq |\lambda_m|$). Entonces,

$$(\rho_\lambda)_{|_{\mathfrak{so}(2m-1)}} = \bigoplus_{\overline{\lambda}} \rho_{\overline{\lambda}} \tag{1.22}$$

  donde la suma corre sobre todas las particiones $\overline{\lambda} = (\overline{\lambda_1}, ..., \overline{\lambda_{m-1}})$ que cumplen

$$\lambda_1 \geq \overline{\lambda_1} \geq \lambda_2 \geq \overline{\lambda_2} \geq \ ... \ \geq \overline{\lambda_{m-1}} \geq |\lambda_m|,$$

  donde los λ_i y los $\overline{\lambda_i}$ son simultáneamente todos enteros o todos medios enteros.

1.2.3.2. Teorema Borel-Weil-Bott

El Teorema de Borel-Weil-Bott provee un modelo concreto para realizar las representaciones irreducibles del grupo de rotaciones (ya que es compacto).

Dado un carácter χ de $\mathbb{T}$, $\mathrm{SO}(n)$ actúa por la acción regular a izquierda en el espacio de funciones $C^\infty(\mathrm{SO}(n))$ que satisfacen

$$f(gt) = \overline{\chi(t)} f(g) \quad \forall t \in \mathbb{T},\ g \in \mathrm{SO}(n) \ \text{ y} \tag{1.23}$$

$$\text{para cada } X \in \eta^+, \quad Xf(g) := \frac{d}{ds}_{|_{s=0}} f(g\ \exp(sX)) = 0 \quad \forall g \in \mathrm{SO}(n). \tag{1.24}$$

(estas son las *secciones holomorfas* del *fibrado lineal -line bundle-* $G \times_\chi \mathbb{C}$). Recordamos que la acción regular a izquierda es

$$(g, f) \mapsto L_g(f) \qquad \text{para todo } g \in \mathrm{SO}(n) \text{ y } f \in C^\infty(\mathrm{SO}(n)) \text{ que satisface (1.23) y (1.24)}, \tag{1.25}$$

donde $L_g(f)(x) := f(g^{-1}x) \ \ \forall x \in \mathrm{SO}(n)$. Esta representación es o bien trivial o bien irreducible, más aún, es irreducible cuando χ es dominante integral. El teorema afirma que cada representación irreducible del grupo $\mathrm{SO}(n)$ es isomorfa a una representación como (1.25) para un único carácter χ del toro maximal $\mathbb{T}$. (Como referencia citamos [Wal, Sección 6.3] y [DR1, Sección 1].)

1.2.3.3. Representaciones de $\mathrm{SO}(3)$

Las representaciones unitarias irreducibles de $\mathrm{SO}(3)$ se conocen muy bien. Están parametrizadas por los enteros no negativos $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Para cada $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, la representación $(\tau_m, V_{\tau_m}) \in \widehat{\mathrm{SO}(3)}$ asociada es de dimensión $(2m+1)$. Un modelo usual para τ_m está dado por los polinomios armónicos y homogéneos, esto es, se toma como V_{τ_m} el espacio de polinomios en $\mathbb{R}^3$ a valores en $\mathbb{C}$ que son armónicos y homogéneos de grado m. Denotaremos este espacio de polinomios por H_m. La acción de $\mathrm{SO}(3)$ en $V_{\tau_m} = H_m$ está dada por

$$(\tau_m(k)p)(x) := p(k^{-1} \cdot x) \qquad \forall k \in \mathrm{SO}(3),\ p \in H_m,\ x \in \mathbb{R}^3.$$

Toda representación unitaria irreducible de $\mathrm{SO}(3)$ es equivalente a una de las dadas por el modelo mencionado en las líneas previas.

El producto tensorial entre dos representaciones τ_p y τ_q en $\widehat{\mathrm{SO}(3)}$ se descompone en irreducibles de acuerdo a la siguiente expresión que se puede encontrar por ejemplo en [Fa, p. 151]

$$\tau_p \otimes \tau_q = \bigoplus_{k=|p-q|}^{p+q} \tau_k. \tag{1.26}$$

1.2.4. Descomposición de productos tensoriales de representaciones del grupo simpléctico

Sea $\mathfrak{h}$ la subálgebra de Cartan de $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$ que consiste de las matrices diagonales (sobre $\mathbb{C}$) de la forma

$$\mathfrak{h} = \left\{ H = \begin{pmatrix} h_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & h_n & & & \\ & & & -h_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -h_n \end{pmatrix} \mid h_1, ..., h_n \in \mathbb{C} \right\}.$$

Denotamos por δ_{ij} la delta de Kronecker. Escribiendo $H_i := \delta_{i,i} - \delta_{n+i,n+i}$, tenemos que $\mathfrak{h}$ es un espacio vectorial complejo generado por $\{H_1, ..., H_n\}$. Sea $\{L_1, ..., L_n\}$ la base dual correspondiente en $\mathfrak{h}^*$, esto es, $\langle L_i, H\rangle = h_i$ para todo $H \in \mathfrak{h}$. Los pesos fundamentales de $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$ están dados por $L_1, L_1 + L_2, ..., L_1 + ... + L_n$ y las raíces simples son $L_1 - L_2, , ..., L_{n-1} - L_n, 2L_n$. Por el teorema del peso máximo sabemos que toda representación irreducible de $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$ está en correspondencia con una combinación lineal entera (no negativa) de los pesos fundamentales. Por ende $\eta \in \widehat{\mathrm{Sp}(n)}$ se puede parametrizar en términos de $\{L_i\}$ como $(\eta_1, ..., \eta_n)$ donde $\eta_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $\forall i$ y $\eta_1 \geq \eta_2 \geq ... \geq \eta_n$ (como referencia ver por ejemplo [Kn] o [FH].) Por abuso de notación, para cada $\eta \in \widehat{\mathrm{Sp}(n)}$ denotaremos su partición con la misma letra η. Además, denotaremos la representación $\eta \in \widehat{\mathrm{Sp}(n)}$ por $\eta_{(\eta_1,...,\eta_n)}$ cuando queramos enfatizar que a η le corresponde la partición $(\eta_1, ..., \eta_n)$.

La descomposición de productos tensoriales de representaciones irreducibles de $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$ está desarrollada en [KT] y en los recientes artículos [HLLS, O] y a continuación resumimos los resultados que necesitaremos.

Las representaciones unitarias irreducibles de $\mathrm{Sp}(n)$ en el espacio de polinomios homogéneos sobre $\mathbb{C}^{2n}$ de grado r y s están respectivamente asociadas a las particiones de longitud uno (r) y (s). Serán denotadas por $\eta_{(r)}$ y $\eta_{(s)}$. Si $r \geq s$, su producto tensorial se descompone de acuerdo a la fórmula que se encuentra en [KT, p. 510]:

$$\eta_{(r)} \otimes \eta_{(s)} = \bigoplus_{j=0}^{s} \bigoplus_{i=0}^{j} \eta_{(r+s-j-i,j-i)}. \tag{1.27}$$

Notemos que (1.27) generaliza la conocida fórmula de Clebsch-Gordan para $\mathfrak{sp}(1)$ (que es isomorfo a $\mathfrak{sl}(2)$):

$$\eta_{(r)} \otimes \eta_{(s)} = \bigoplus_{j=0}^{s} \eta_{(r+s-2j)}. \tag{1.28}$$

El producto tensorial de una representación $\eta_{(1,...,1)}$ (que suele ser llamada fundamental) de longitud $r > 1$ (que a veces denotaremos por simplicidad $\eta_{(1^r)}$) por una representación $\eta_{(s)}$ (con $s > 1$) es dado en [KT, p. 510]:

$$\eta_{(1^r)} \otimes \eta_{(s)} = \eta_{(s+1,1^{r-1})} \oplus \eta_{(s,1^r)} \oplus \eta_{(s-1,1^{r-1})} \oplus \eta_{(s,1^{r-2})}. \tag{1.29}$$

El análisis del producto tensorial de dos representaciones fundamentales también se presenta en [KT, p. 510].

Por último, enunciamos una regla "universal" de Pieri debida a S. Okada.

Teorema 1.72. *[O, Proposición 3.1] Para una representación irreducible (o partición) arbitraria η de $\mathrm{Sp}(n)$ y un entero no negativo s tenemos,*

$$\eta \otimes \eta_{(s)} \;=\; \sum_{\sigma \in \mathbb{P} \;\; con \;\; l(\sigma) \leq n} M^{\sigma}_{\eta,s} \; \eta_{(\sigma)}, \tag{1.30}$$

donde $M^{\sigma}_{\eta,s}$ denota el número de particiones ς tales que η/ς y σ/ς son tiras horizontales y $|\eta/\varsigma| + |\sigma/\varsigma| = s$.

Corolario 1.73. *Sea η una representación irreducible arbitraria de* $\mathrm{Sp}(n)$*, entonces η aparece en la descomposición en factores irreducibles de $\eta \otimes \eta_{(2)}$.*

Demostración. Usaremos la regla "universal" de Pieri con $s = 2$. El cardinal $M^{\eta}_{\eta,2}$ es no nulo ya que si consideramos $\varsigma = (\eta_1, ..., \eta_m - 1)$ tenemos que η/ς es una tira horizontal (hay una sóla celda en el diagrama de Young) y $2|\eta/\varsigma| = 2$. □

Corolario 1.74. *Sea $\eta \in \widehat{\mathrm{Sp}(n)}$ correspondiente a la partición $(\eta_1, ..., \eta_m)$, con $\eta_m \neq 0$, $0 \leq m \leq n$. Las representaciones $\eta \otimes \eta_{(s)}$ son libres de multiplicidad para todo $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ si y sólo si $\eta_i = \eta_j$ para todo $1 \leq i, j \leq m$.*

Notar que de (1.27) y (1.29), este corolario es inmediato en los casos en que $\eta = \eta_{(r)}$ o $\eta = \eta_{(1^r)}$ (para algún $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$).

Demostración. Primero fijamos $s = 2$ y asumimos $\eta_i > \eta_{i+1}$, es decir, $\eta_i - 1 \geq \eta_{i+1}$ para algún $1 \leq i \leq m$. De (1.30), η aparece en la descomposición de $\eta \otimes \eta_{(2)}$ al menos dos veces: Considerando $\varsigma_1 = (\eta_1, ..., \eta_m - 1)$ y $\varsigma_2 = (\eta_1, ..., \eta_{i-1}, \eta_i - 1, \eta_{i+1}, ..., \eta_k)$ tenemos que η/ς_1 y η/ς_2 son 1-tiras horizontales. De esta manera hemos probado que η necesariamente satisfacer la condición $\eta_i = \eta_j$ para todo $1 \leq i, j \leq m$. Probaremos ahora que esta condición es suficiente.

Sea $(a, a, ..., a)$ la partición de longitud $0 \leq m \leq n$ asociada a η para cierto $a \in \mathbb{N}$. Sea ς una partición tal que η/ς es una tira horizontal. Como ς debe cumplir que $\eta_1 \geq \varsigma_1 \geq ... \geq \varsigma_{m-1} \geq \eta_m \geq \varsigma_m$, obtenemos que ς es exactamente de la forma $\varsigma_j := (a, ..., a, a - j)$ para algún $0 \leq j \leq a$. Ahora fijemos un entero no negativo arbitrario s y sea σ una representación irreducible que aparece en la descomposición de $\eta \otimes \eta_{(s)}$. Entonces existe $0 \leq j \leq a$ tal que σ/ς_j es una $(s - j)$-tira horizontal. Notemos que la partición $(\sigma_1, ..., \sigma_l)$ asociada a σ debe satisfacer: $l \leq m + 1$, $\sigma_2 = ... = \sigma_{m-1} = a$, $\sigma_1 \geq a$, $(a - j) \leq \sigma_m \leq a$ y $0 \leq \sigma_{m+1} \leq (a-j)$. Por lo tanto $|\sigma/\varsigma_j| = \sigma_1 - a + \sigma_m - (a-j) + \sigma_{m+1}$ y entonces $\sigma_1 + \sigma_m + \sigma_{m+1} = s + 2a - 2j$. De la última igualdad σ aparece solamente una vez en la descomposición de $\eta \otimes \eta_{(s)}$. En efecto, si suponemos que aparece al menos dos veces, entonces existen ς_j y ς_k como arriba, con $j \neq k$, tales que σ/ς_j y σ/ς_k son tiras horizontales de longitud $(s - j)$ y $(s - k)$, luego $s + 2a - 2j = s + 2a - 2k$, o sea, $j = k$ y llegamos a una contradicción. □

1.2.5. Teoría de Mackey

Condensaremos aquí el análisis de órbitas de Mackey que permite describir las representaciones unitarias irreducibles de grupos dados por un producto semidirecto.

Comencemos por el caso $\mathrm{M}(n) = \mathrm{SO}(n) \ltimes \mathbb{R}^n$. (Como referencia ver [Mac, Sección 14] y [DR1, Sección 2]). Las órbitas de la acción estándar de $\mathrm{SO}(n)$ en $\mathbb{R}^n$ son esferas de radio $R > 0$ y el conjunto cuyo único elemento es el origen $\{0\}$ (que es un punto fijo de la acción de $\mathrm{SO}(n)$). Las representaciones irreducibles correspondientes a la órbita trivial $\{0\}$ son unidimensionales, están parametrizadas por $\lambda \in \mathbb{R}^n$ y son explícitamente de la forma

$$(k, x) \longmapsto e^{i\langle \lambda, x\rangle} \qquad \forall (k, x) \in \mathrm{M}(n), \tag{1.31}$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interno canónico en $\mathbb{R}^n$. El conjunto formado por estas representaciones tiene medida de Plancherel nula y por esta razón no estaremos interesadas en él en esta tesis.

Las representaciones irreducibles que provienen de órbitas no-triviales serán de nuestro interés. Fijado el punto Re_1 en la esfera de radio $R > 0$ (donde $e_1 := (1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$), su estabilizador es

$$K_{Re_1} := \{k \in \mathrm{SO}(n) |\ k \cdot Re_1 = Re_1\}.$$

Notemos que este coincide con el estabilizador del punto e_1 (K_{e_1}) y a la vez es isomorfo al grupo $\mathrm{SO}(n-1)$.

Consideremos ahora un carácter

$$\chi_R(x) := e^{iR\langle x, e_1\rangle} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Para cada $\sigma \in \widehat{\mathrm{SO}(n-1)}$ podemos construir una representación irreducible $\omega_{\sigma,R}$ de $\mathrm{M}(n)$ inducendo la representación $\sigma \otimes \chi_R$ de $K_{Re_1} \ltimes \mathbb{R}^n$ a $\mathrm{M}(n)$.

Se puede ver (usando el modelo de Borel-Weil-Bott para $\sigma \in \widehat{\mathrm{SO}(n-1)}$) que la representación $\omega_{\sigma,R}$ puede ser realizada en un subespacio de funciones sobre $\mathrm{SO}(n)$ a valores escalares, de cuadrado integrable. Este espacio consiste de funciones $f \in L^2(\mathrm{SO}(n))$ que satisfacen las siguientes dos condiciones:

(i) si $\mathbb{T}^{m-1}$ denota el toro maximal de $K_{Re_1} \simeq \mathrm{SO}(n-1)$, entonces

$$f(kt) = \chi_\sigma(t^{-1})f(k) \qquad \forall k \in \mathrm{SO}(n) \text{ y } \forall t \in \mathbb{T}^{m-1},$$

donde χ_σ es el carácter de σ;

(ii) para cada $k \in \mathrm{SO}(n)$, la función

$$\begin{aligned} \mathrm{SO}(n-1) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \tilde{k} &\mapsto f(k\tilde{k}) \end{aligned}$$

satisface la condición (1.24) (para $n-1$).

Denotamos a este espacio por $\mathcal{H}_{\sigma,R}$. La representación irreducible $\omega_{\sigma,R}$ actúa en $\mathcal{H}_{\sigma,R}$ de la siguiente manera: Dadas $f \in \mathcal{H}_{\sigma,R}$ y $(k,x) \in \mathrm{SO}(n) \times \mathbb{R}^n$,

$$(\omega_{\sigma,R}(k,x)(f))(h) = e^{iR\langle h^{-1}\cdot x, e_1\rangle} f(k^{-1}h) \qquad (h \in \mathrm{SO}(n)). \tag{1.32}$$

Por su parte, toda representación irreducible de $\mathrm{M}(n)$ es equivalente a una del tipo (1.31) o a una de la forma (1.32).

Pasemos ahora a describir un caso más general. Sea G un grupo de Lie conexo, con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y sea K un subgrupo compacto de G, con álgebra de Lie $\mathfrak{k}$. Por ser K compacto, su álgebra de Lie $\mathfrak{k}$ admite un complemento $\mathrm{Ad}_G(K)$-invariante in $\mathfrak{g}$, que denotamos por $\mathfrak{p}$ (esto es, un subespacio $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ y $\mathrm{Ad}_G(K)(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{p}$). Mirando al espacio vectorial $\mathfrak{p}$ como grupo abeliano, podemos formar el producto semidirecto $K \ltimes \mathfrak{p}$ con respecto a la acción adjunta de K en $\mathfrak{p}$.

Nos restringiremos al caso en que G es semisimple con centro finito. Más aún, sea Θ una involución analítica sobre G tal que (G,K) es un *par simétrico Riemanniano*, esto es, K está contenido en el conjunto de puntos fijos de la involución Θ, contiene la componente conexa de la identidad y $\mathrm{Ad}_G(K)$ es compacto. La subálgebra $\mathfrak{k}$ es el autoespacio asociado al autovalor $+1$ de $d\theta_e$ y naturalmente podemos elegir $\mathfrak{p}$ como el autoespacio asociado al autovalor -1. En el caso en que G es no compacto $d\Theta_e$ es una involución de Cartan y $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ es una descomposición de Cartan de $\mathfrak{g}$ [He2, p. 182]. El producto semidirecto $K \ltimes \mathfrak{p}$ es llamado *grupo de movimientos rígidos de Cartan* asociado al par simétrico (G,K).

El dual unitario $\widehat{K \ltimes \mathfrak{p}}$ se describe de manera análoga a lo realizado para $\mathrm{M}(n) = \mathrm{SO}(n) \ltimes \mathbb{R}^n$. Primero debemos fijar un carácter de $\mathfrak{p}$. Todo carácter de $\mathfrak{p}$ puede ser expresado unívocamente como $e^{i\phi(x)}$ para algún funcional lineal $\phi \in \mathfrak{p}^*$. Luego uno debe considerar

$$K_\phi := \left\{ k \in K \middle| \; e^{i\phi(\mathrm{Ad}(k^{-1})x)} = e^{i\phi(x)} \; \forall x \in \mathfrak{p} \right\} \tag{1.33}$$

y $(\sigma, H_\sigma) \in \widehat{K_\phi}$. Finalmente una representación unitaria irreducible $\omega_{\sigma,\phi}$ de $K \ltimes \mathfrak{p}$ se obtiene induciendo $\sigma \otimes e^{i\phi(\cdot)}$ de $K_\phi \ltimes \mathfrak{p}$ a $K \ltimes \mathfrak{p}$. Por definición $\omega_{\sigma,\phi}$ actúa por traslación a izquierda en el espacio de funciones $f : K \ltimes \mathfrak{p} \to H_\sigma$ que satisfacen

$$f(gxm) = e^{-i\phi(x)}\sigma(m)^{-1}f(g) \qquad \forall x \in \mathfrak{p},\; m \in K_\phi \text{ y } g \in K \ltimes \mathfrak{p}.$$

Consecuentemente,

$$f(xk) = f(k\,\mathrm{Ad}(k^{-1})x) = e^{-i\phi(\mathrm{Ad}(k^{-1})x)}f(k) \qquad \forall x \in \mathfrak{p},\; k \in K,$$

por lo tanto cada una de estas funciones f está completamente determinada por su restricción a K. Luego, la representación $\omega_{\sigma,\phi}$ puede pensarse actuando en el espacio de aquella funciones cuya restricción a K cae en $L^2(K, H_\sigma)$. Este espacio comprende el subespacio cerrado $H_{\omega_{\sigma,\phi}}$ de $L^2(K, H_\sigma)$

$$H_{\omega_{\sigma,\phi}} := \left\{ f \in L^2(K, H_\sigma) \middle| \; f(km) = \sigma(m)^{-1}f(k) \; \forall m \in K_\phi, k \in K \right\}$$

y $\omega_{\sigma,\phi}$ actúa en $H_{\omega_{\sigma,\phi}}$ por

$$(\omega_{\sigma,\phi}(k,x)f)(k_0) := e^{i\phi(\mathrm{Ad}(k_0^{-1})x)}f(k^{-1}k_0).$$

Toda representación unitaria irreducible de $K \ltimes \mathfrak{p}$ se puede realizar de esta manera y dos representaciones ω_{σ_1,ϕ_1} y ω_{σ_2,ϕ_2} son unitariamente equivalentes si y sólo si

- ϕ_1 y ϕ_2 yacen en la misma órbita coadjunta de K y
- σ_1 y σ_2 son unitariamente equivalentes.

Como K es compacto podemos dar a $\mathfrak{p}$ un producto interno $\mathrm{Ad}(K)$-invariante $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (por ejemplo, la forma de Killing restringida a $\mathfrak{p}$) y vía $\langle\cdot,\cdot\rangle$ podemos identificar $\mathfrak{p}$ con $\mathfrak{p}^*$ y la acción adjunta de K con la coadjunta. Sea $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{p}$ una subálgebra abeliana maximal de $\mathfrak{p}$. Toda órbita coadjunta de K en $\mathfrak{p}$ interseca a $\mathfrak{a}$ ([He2, p. 247]). De esta forma, toda representación unitaria irreducible de $K\ltimes\mathfrak{p}$ se puede poner en la forma $\omega_{\sigma,\phi}$ con $\phi(x)=\langle H,x\rangle$ para algún $H\in\mathfrak{a}$, es decir, se nos permite suponer $\phi\in\mathfrak{a}^*$. Luego, K_ϕ coincide con el estabilizador del elemento H bajo la acción adjunta de K. Sea M el centralizador de $\mathfrak{a}$ en K. Decimos que $\omega_{\sigma,\phi}\in\widehat{K\ltimes\mathfrak{p}}$ es *genérica* si $K_\phi=M$. El conjunto de representaciones unitarias irreducibles no genéricas de $K\ltimes\mathfrak{p}$ tiene medida de Plancherel nula y por lo tanto sólo nos interesarán las representaciones genéricas, es decir, aquellas dadas por

$$\omega_{\sigma,\phi}=\mathrm{Ind}_{M\ltimes\mathfrak{p}}^{K\ltimes\mathfrak{p}}(\sigma\otimes e^{i\phi(\cdot)})\qquad(\sigma\in\widehat{M},\phi\in\mathfrak{a}^*).\tag{1.34}$$

Para cerrar este apartado consideraremos G no compacto, cuya descomposición de Iwasawa es $G=KAN$, donde $A:=\exp_G(\mathfrak{a})$ y N tiene como álgebra de Lie al álgebra de Lie nilpotente dada por la suma de los espacios de raíces positivas. Con esto presente describiremos las representaciones irreducibles de G. Si bien aquí no se utilizará la teoría de Mackey, las entradas matriciales de representaciones de G estarán relacionadas con las entradas matriciales de representaciones del grupo de movimientos rígidos de Cartan del par (G,K) como veremos en el Capítulo 6.

Sea $(\sigma,H_\sigma)\in\widehat{M}$. Sea $\gamma\in\mathfrak{a}^*\otimes\mathbb{C}$ tal que $\gamma=\phi+i\nu$ donde $\phi\in\mathfrak{a}^*$ es una determinada aplicación lineal fija. Denotamos por 1_N la representación trivial de N. Una *"principal series representation"* $\rho_{\sigma,\phi}$ de G se puede obtener induciendo $\gamma\otimes\sigma\otimes 1_N$ de MAN a $KAN=G$, o sea,

$$\rho_{\sigma,\phi}=\mathrm{Ind}_{MAN}^{G}(\gamma\otimes\sigma\otimes 1_N)\qquad(\sigma\in\widehat{M},\phi\in\mathfrak{a}^*).\tag{1.35}$$

Esta se realiza en el espacio de funciones $F:G\to H_\sigma$ que satisfacen

$$f(gman)=e^{-i\gamma(\log(a))}\sigma(m)^{-1}f(g)\qquad\forall g\in G,\ man\in MAN.\tag{1.36}$$

Por la descomposición de Iwasawa tales funciones están claramente determinadas por su restricción a K. Una representación de la *serie principal* resulta unitaria cuando consideramos que se realiza en el espacio $H_{\rho_{\sigma,\phi}}$ que consiste de funciones que satisfacen (1.36) y cuya restricción a K vive en $L^2(K,H_\sigma)$. Tales restricciones conforman el subespacio de $L^2(K,H_\sigma)$ donde las funciones cumplen

$$f(km)=\sigma(m)^{-1}f(k)\qquad\forall k\in K,m\in M.$$

Finalmente observemos que el espacio $H_{\omega_{\sigma,\phi}}$ dado previamente coincide con este nuevo espacio $\left(H_{\rho_{\sigma,\phi}}\right)_{|_K}$.

1.2.6. Teoría de Kirillov

La teoría de Kirillov permite parametrizar las representaciones unitarias irreducibles de un grupo de Lie a partir de las órbitas de una determinada acción. En este breve apartado sólo sintetizaremos el método para grupos nilpotentes. Para una comprensión en detalle de esta materia referimos al libro [Kir1], a [Wo1, Sección 14.1], así como a los artículos [Kir2] y [BJR3].

Sea N un grupo de Lie nilpotente. N actúa naturalmente en $\mathfrak{n}$ por la acción adjunta Ad. Además, N actúa en el espacio dual $\mathfrak{n}^*$ por la representación contragrediente de la representación adjunta

$$\mathrm{Ad}^*(n)\lambda:=\lambda\circ\mathrm{Ad}(n^{-1})\qquad(n\in N\text{ y }\lambda\in\mathfrak{n}^*).$$

Fijado $\lambda\in\mathfrak{n}^*$ no-trivial, su órbita coadjunta está dada por

$$O(\lambda):=\{\mathrm{Ad}^*(n)\lambda\mid\ n\in N\}.$$

La teoría de Kirillov establece una correspondencia entre $\widehat{N}$ y el conjunto de órbitas coadjuntas. Sea B_λ la forma bilineal antisimétrica en $\mathfrak{n}$ dada por

$$B_\lambda(X,Y) := \lambda([X,Y]) \qquad (X,Y \in \mathfrak{n}).$$

Si

$$N^\lambda := \{n \in N \mid \ \lambda \circ \mathrm{Ad}(n^{-1}) = \lambda\}$$

es el subgrupo de isotropía para λ y

$$\mathfrak{n}^\lambda := \{X \in \mathfrak{n} \mid \ (\lambda \circ \mathrm{ad}(X))(Y) = \lambda([X,Y]) = 0 \ \ \forall Y \in \mathfrak{n}\},$$

se tiene que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "n \mapsto \mathrm{Ad}^*(n)\lambda"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & O(\lambda) \\ N/N^\lambda \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

es decir, la órbita $O(\lambda)$ es difeomorfa al espacio cociente N/N^λ y B_λ es no-degenrada básicamente en la órbita coadjunta $O(\lambda)$.

Sea $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{n}$ la subálgebra isotrópica maximal, en el sentido que $B_\lambda(X,Y) = 0$ para todo $X, Y \in \mathfrak{m}$ y sea $M := \exp(\mathfrak{m})$. Definiendo en M el carácter

$$\chi_\lambda(\exp(Y)) := e^{i\lambda(Y)} \qquad (Y \in \mathfrak{m}),$$

la representación $\pi_\lambda \in \widehat{N}$ asociada a $O(\lambda)$ es la representación inducida

$$\pi_\lambda := \mathrm{Ind}_M^N(\chi_\lambda).$$

En principio las órbitas coadjuntas pueden tener diferentes dimensiones. En el Capítulo 4 veremos que para toda $\pi_\lambda \in \widehat{N}$ que cumple una condición extra (ser de cuadrado integrable) se tiene que la órbita $O(\lambda)$ es maximal. Es decir, tiene la dimensión del espacio ortogonal al centro $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{n}$. En principio $\mathfrak{z} \subset \mathfrak{n}^\lambda$, pero en este caso resultará que B_λ es no-degenerada en $\mathfrak{n}/\mathfrak{z}$.

Capítulo 2

Pares de Gelfand

La teoría de Gelfand en álgebras de Banach conmutativas dio lugar al desarrollo del análisis armónico en pares de Gelfand (G, K), donde G es un grupo topológico localmente compacto y Hausdorff y K un subgrupo compacto de G. Si G es un grupo topológico localmente compacto y Hausdorff, $L^1(G)$ con el producto de convolución es un álgebra conmutativa si y sólo si G es conmutativo. Si G no es abeliano, álgebras de Banach conmutativas modeladas sobre subálgebras de $L^1(G)$ aparecen naturalmente. En efecto, dado un subgrupo compacto K de G, decimos que (G, K) es un *par de Gelfand* si resulta conmutativa el álgebra de convolución de las funciones integrables bi-K-invariantes que denotamos

$$L^1(G)^\sharp := \{f \in L^1(G) \mid \ f(k_1 x k_2) = f(x) \ \ \forall k_1, k_2 \in K, \ \forall x \in G\}.$$

Más aún, en el caso en que G sea un grupo de Lie conexo son equivalentes las siguientes afirmaciones:

(i) El álgebra $L^1(G)^\sharp$ es conmutativa.

(ii) El álgebra $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^K$ de los operadores diferenciales invariantes a izquierda sobre G e invariantes a derecha por K es conmutativa.

(iii) Para cada representación unitaria irreducible de G, el espacio de vectores fijos por K es de dimensión a lo sumo uno.

En el área del análisis armónico no conmutativo son relevantes los casos en que (G, K) es un par simétrico o aquellos en que G es el producto semidirecto $G = K \ltimes N$, donde N es un grupo de Lie nilpotente y K actúa sobre N por automorfismos. En el primer caso, el análisis esférico, es decir, el estudio de las funciones esféricas y su correspondiente transformada de Gelfand, fue desarrollado por S. Helgason (ver [He1]). La clasificación de los pares $(K \ltimes N, K)$ y el correspondiente análisis esférico fue objeto de numerosos trabajos en los últimos años como [ABR1, ABR2, BJR2, BJR3, La2, V, Ya]. Si K ya no es más compacto la noción de par de Gelfand se generaliza requiriendo un análogo de la condición (iii) arriba mencionada. Más aún, en este caso, se ha probado que vale (ii) (ver [Dij]). Estos casos fueron estudiados por ejemplo en [CS1, CS2].

En este capítulo primero estudiaremos funciones de tipo positivo que nos permitirán enunciar el teorema de Bochner. Luego revisaremos la transformada de Fourier para después traer a la mesa la transformada de Gelfand. Cuando abordemos pares de Gelfand, la transformada de Fourier esférica en álgebras de tipo $L^1(G)^\sharp$ será un ejemplo de transformada de Gelfand. Una motivación para estudiar pares de Gelfand, e incluso la misma transformada de Fourier clásica, proviene del análisis de operadores integrales invariantes por una determinada acción. Todos estos se pueden escribir mediante un producto de convolución contra un núcleo. A su vez, las funciones que son los núcleos de estos operadores son constantes en las órbitas de la acción del subgrupo K. Conforman un espacio que será enmarcado en un álgebra de Banach y en el caso de ser conmutativa se podrá aplicar la teoría de Gelfand sobre ella. Dedicaremos toda una sección a entender intuitivamente cómo es la caracterización mediante el producto de convolución de operadores lineales, continuos e iguales a su conjugado por una acción de un grupo.

Preliminares: Espacios $L^p(G)$, convolución y aproximaciones de la identidad

Consideremos los espacios $L^p(G)$, con $1 \leq p \leq \infty$, con respecto a la medida de Haar a izquierda de G. Dadas f y g funciones definidas sobre G a valores complejos definimos el *producto de convolución* entre

ellas en un punto $x \in G$ como

$$(f * g)(x) := \int_G f(y)g(y^{-1}x)\, dy \tag{2.1}$$

siempre que tenga sentido, es decir, siempre que la integral sea finita. Los siguientes resultados muestran en qué casos es posible definir $f * g$ y a qué espacio de funciones pertenece esta nueva función.

Proposición 2.1. *[Desigualdad de convolución de Young]*

(i) Si $f \in L^1(G)$ y $g \in L^p(G)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, entonces $f * g \in L^p(G)$. Más aún, la aplicación

$$\begin{aligned} L^p(G) &\longrightarrow L^p(G) \\ g &\longmapsto f * g \end{aligned}$$

es continua y $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.

(ii) Si $f \in L^p(G)$ y $g \in L^{p'}(G)$, entonces $f * g$ es continua y acotada, más aún $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$. Si además

- *$1 < p < \infty$, entonces $f * g \in C_0(G)$;*
- *si $p = 1$ y $p' = \infty$, entonces $g * f$ es uniformemente continua a izquierda (es decir, dado $\epsilon > 0$, $\|L_x(g * f) - g * f\|_\infty < \epsilon$ para todo x en un entorno de e) y $f * g$ es uniformemente continua a derecha.*

(iii) Si $f \in L^q(G)$ y $g \in L^p(G)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, entonces $f * g \in L^r(G)$ donde $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$. Más aún, la aplicación

$$\begin{aligned} L^p(G) &\longrightarrow L^r(G) \\ g &\longmapsto f * g \end{aligned}$$

es continua y $\|f * g\|_r \leq \|f\|_q \|g\|_p$.

Una posible interpretación de la convolución entre dos funciones f y g es que esta define una nueva función $f * g$ que en cada punto x vale el "promedio" de la función f ponderado por la función g centrada o trasladada a dicho punto x. Esto intenta esquematizar la Figura 2.1.

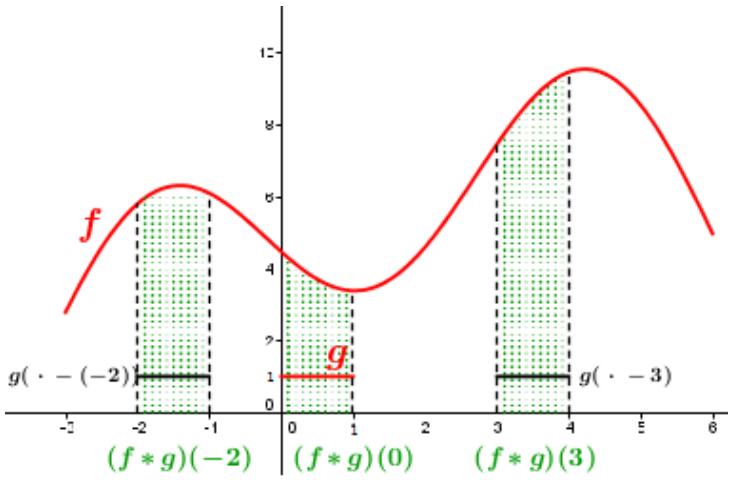


Figura 2.1: Convolución como promedios ponderados. En este esquema la función g es la función característica del intervalo $[0, 1]$. La convolución entre las funciones en color rojo f y g en los puntos -2, 0 y 3 es igual al área de la función f dada por las franjas marcadas en color verde. Se obtiene de haber trasladado la función g a dichos puntos, haberla multiplicado por f y haber integrado.

Proposición 2.2. *El producto de convolución en $L^1(G)$ es asociativo.*

Demostración. Sean $f, g, h \in L^1(G)$. Usando el teorema de Fubini y la invariancia de la medida de Haar de G tenemos,

$$\begin{aligned}
(f * g) * h(x) &= \int_G (f * g)(y) h(y^{-1}x)\ dy \\
&= \int_G \int_G f(z) g(z^{-1}y) h(y^{-1}x)\ dz\ dy \\
&= \int_G \int_G f(z) g(z^{-1}y) h(y^{-1}x)\ dy\ dz \\
&= \int_G \int_G f(z) g(u) h(u^{-1}z^{-1}x)\ du\ dz \\
&= \int_G \int_G f(z) (g * h)(z^{-1}x)\ dz \\
&= f * (g * h)(x).
\end{aligned}$$

□

Definición 2.3. Un *álgebra de Banach* es un espacio de Banach $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ dotado de un producto

$$* : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

tal que $\mathcal{A}$ resulta un álgebra y

$$\|x * y\| \leq \|x\| \|y\| \qquad \forall x, y \in \mathcal{A}. \tag{2.2}$$

La condición (2.2) implica la continuidad del producto, es decir, que las estructuras de álgebra y de espacio topológico son compatibles.

A partir de los resultados anteriores $L^1(G)$ resulta un álgebra de Banach con el producto de convolución.

Por su parte, en $L^p(G)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ tenemos los subespacios $L^p(G;K)$, $L^p(K;G)$ y $L^p(G)^\sharp$ de funciones K-invariantes a derecha, K-invariantes a izquierda y bi-K-invariantes, respectivamente. Cada uno de ellos es cerrado y los operadores

$$\begin{aligned} L^p(G) &\longrightarrow L^p(G;K) \\ f &\longmapsto \int_K f(gk)\ dk \end{aligned} \qquad \begin{aligned} L^p(G) &\longrightarrow L^p(K;G) \\ f &\longmapsto \int_K f(kg)\ dk \end{aligned} \qquad \begin{aligned} L^p(G) &\longrightarrow L^p(G)^\sharp \\ f &\longmapsto \int_{K\times K} f(k_1 g k_2)\ dk_1\ dk_2 \end{aligned}$$

son proyecciones de norma uno. Si $p = 2$, son proyecciones ortogonales. A su vez, a partir de Proposición 2.1 es posible verificar que con respecto a la convolución valen las siguientes inclusiones:

$$L^1(G) * L^1(G;K) \subset L^1(G;K) \qquad L^1(K;G) * L^1(G) \subset L^1(K;G) \qquad L^1(K;G) * L^1(G;K) \subset L^1(G)^\sharp.$$

Volvamos a la definición (2.1). Dadas $f, g \in L^1(G)$ la convolución $f * g$ puede también definirse *por dualidad* a partir de observar la identidad

$$\int_G f * g(x) h(x)\ dx = \int_G \int_G h(yz)\ f(y)\ dy\ g(z)\ dz$$

para toda función $h \in L^\infty(G)$. Esto motiva que podamos definir la convolución entre dos medidas de Borel finitas μ y ν sobre G como

$$\int_G h(x)\ d\mu * \nu(x) := \int_G \int_G h(yz)\ d\mu(y)\ d\nu(z) \qquad \forall h \in L^\infty(G),$$

o como

$$\mu * \nu(E) := \int_G \int_G \chi_E(yz)\ d\mu(y)\ d\nu(z)$$

para todo conjunto medible de Borel E (donde χ_E denota la función característica de E). Se puede verificar que $\mu * \nu$ es una nueva medida de Borel finita. Es interesante notar lo siguiente. En general, dados dos espacios de medida $(X_1, \mathcal{M}_1)$ y $(X_2, \mathcal{M}_2)$, una función medible $f\colon X_1 \to X_2$ y una medida $\mu\colon \mathcal{M}_1 \to [0, +\infty]$,

se define el *push-forward* de μ por la medida $f_*(\mu)\colon \mathcal{M}_2 \to [0,+\infty]$ dada por $(f_*(\mu))(B) = \mu\left(f^{-1}(B)\right)$ para todo $B \in \mathcal{M}_2$. Teniendo presente esta noción podemos ver que $\mu * \nu$ es el *push-forward* de la medida producto $\mu \times \nu$ con respecto a la función dada por la operación de producto $G \times G \to G$, $(x,y) \mapsto xy$. Por último, si μ y ν son medidas de probabilidad, entonces la medida de probabilidad $\mu * \nu$ tiene la siguiente interpretación probabilística: es la función de distribución de la variable aleatoria $X+Y$, siendo X e Y variables aleatorias independientes con distribuciones μ y ν respectivamente.

Denotamos el operador de *reflexión* en funciones definidas en G a valores escalares en $\mathbb{C}$ como

$$f^*(x) := \overline{f(x^{-1})}\Delta(x^{-1}), \tag{2.3}$$

donde Δ es la función modular asociada a la medida de Haar a izquierda en G. Recordemos también que usualmente se denota por $\mathcal{D}$ al espacio $C_c^\infty(G)$ y por $\mathcal{D}'$ su dual. Si T es una distribución en $\mathcal{D}'$ y ϕ una función en $\mathcal{D}$, se define la convolución entre T y ϕ como la función

$$(\phi * T)(x) := T(L_x(\phi^*)) \qquad \forall x \in G. \tag{2.4}$$

Por su parte, (2.3) es una *involución*, es decir, satisface que para toda $f, g \in L^1(G)$ y $c \in \mathbb{C}$

- $(f+g)^* = f^* + g^*$,
- $(cf)^* = \overline{c} f^*$,
- $(f * g)^* = g^* * f^*$ y
- $(f^*)^* = f$.

$L^1(G)$ con dicha involución se vuelve lo que se llama una **-álgebra*.

Aproximación de la identidad

Lema 2.4. *El álgebra $L^1(G)$ tiene unidad si y sólo si G es discreto.*

Demostración. Si G es discreto podemos asumir que todos los puntos de G tienen masa igual a 1 con respecto a la medida de Haar. Sea δ la función que vale 1 en la identidad $e \in G$ y 0 en el resto. Luego se tiene que δ es la identidad de $L^1(G)$, es decir,

$$f * \delta(x) = \sum_{y \in G} f(x)\delta(y^{-1}x) = f(x).$$

Recíprocamente, si $L^1(G)$ tiene unidad, la llamemos δ. Entonces debe existir una cota inferior para la masa de los conjuntos abiertos no vacíos. De no ser así para $0 < \varepsilon < 1$ existe U entorno simétrico de $e \in G$ de medida menor que ε y tal que también $\int_U |\delta(y)|\, dy < \varepsilon$. Sea χ_U su función característica. Luego, para los puntos $x \in U$

$$1 = \chi_U(x) = \chi_U * \delta(x) = \int_G \chi_U(y)\delta(y^{-1}x)\, dy = \int_U \delta(y)\, dy \leq \int_U |\delta(y)|\, dy < \varepsilon$$

lo cual es un absurdo. Absurdo que provino de suponer que no existía una cota inferior para la masa o medida de los abiertos no vacíos. Por lo tanto, existe $\alpha > 0$ tal que la medida de los conjuntos abiertos no vacíos es mayor o igual que α. Elegimos un abierto U con clausura compacta. Entonces, si U contiene al menos n puntos su medida es mayor o igual que $n\alpha$. Así, todo abierto con clausura compacta debe ser finito y en particular conjuntos de un sólo punto son abiertos. Luego, G es discreto. □

Como vimos si G no es discreto entonces el álgebra $L^1(G)$ no tiene unidad. Sin embargo, siempre existe una familia de funciones que forman una *aproximación de la identidad*. Explícitamente podemos dar una aproximación de la identidad como sigue. Sea $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de entornos simétricos y compactos del elemento identidad $e \in G$. Definimos

$$\varphi_n := \frac{1}{\mu(U_n)}\chi_{U_n},$$

donde μ es la medida de Haar invariante a izquierda de G y χ_{U_n} es la función característica asociada al conjunto U_n. Entonces $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ forma una aproximación de la identidad del álgebra de Banach $(L^1(G), *)$, es decir, satisface que

- existe $C > 0$ tal que $\|\varphi_n\|_1 \leq C$ (en este caso $\|\varphi_n\|_1 = 1$) para todo $n \in \mathbb{N}$ y
- para cualquier $f \in L^1(G)$, $f * \varphi_n \longrightarrow f$ en $L^1(G)$ (y también $\varphi_n * f \longrightarrow f$ en $L^1(G)$).

Recordemos que si $G = \mathbb{R}$ el ejemplo típico de una aproximación de la identidad consiste de tomar una función $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ cuya integral sea 1 y tal que su soporte esté contenido en el intervalo $[-1, 1]$ (una función "campanita") y definir $\varphi_n(x) := n\varphi(nx)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (ver Figura 2.2). Se tiene que:

- Dada $f \in C(\mathbb{R})$, $f * \varphi_n \longrightarrow f$ en $\|\cdot\|_\infty$.
- Dada $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, $f * \varphi_n \longrightarrow f$ en $\|\cdot\|_p$.
- Dada $f \in \mathcal{D}$, $f * \varphi_n \longrightarrow f$ en $\mathcal{D}$.
- Dada $T \in \mathcal{D}'$, $T * \varphi_n \longrightarrow T$ en $\mathcal{D}'$.
- $\varphi_n \longrightarrow \delta$ en $\mathcal{D}'$, donde δ denota la *delta de Dirac*.

Es preciso notar que todas las funciones φ_n poseen integral igual a uno y sus soportes se van achicando en el sentido que $sop(\varphi_n) = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A partir de esto y de la última convergencia es que se puede interpretar a la delta de Dirac como una "función generalizada" que cumple tres propiedades

- $\delta(0) = \infty$,
- $\delta(x) = 0 \quad \forall x \neq 0$ y
- $\int_{\mathbb{R}} \delta(x)\, dx = 1$.

De manera un poco más precisa, la delta de Dirac está caracterizada a partir de la fórmula integral

$$\text{“}\int_R f(x)\delta(x-a)dx = f(a)\text{”}, \tag{2.5}$$

pero queda bien definida cuando se la ve como la medida de probabilidad discreta concentrada en 0 o como la distribución

$$\delta(f) = f(0) \qquad \forall f \in \mathcal{D}$$

y de esta manera (2.5) está bien escrita como $(f * \delta)(a)$ de acuerdo a la definición (2.4).

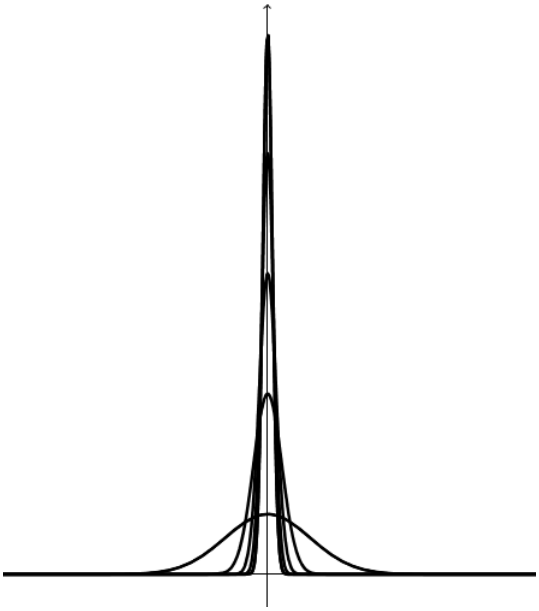


Figura 2.2: Aproximación de la identidad en $\mathbb{R}$.

Lema 2.5. *Sea $u \in L^1(G)$ tal que*

$$\int_\Omega u\phi = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{D}.$$

Entonces $u \equiv 0$ p.p. en G.

El lema anterior puede ser interpretado en el siguiente sentido. Integrar una función u contra toda *función de prueba* ($\phi \in \mathcal{D}$) puede considerarse como calcular todos los posibles promedios ponderados de u en subdominios de G. Desde esta interpretación no es difícil convencerse de la veracidad del lema. Una demostración para caso clásico $G = \mathbb{R}^n$ puede verse en [Br, Corolario 4.24].

Integral de Bochner

Definiremos a continuación una noción de integración de funciones a valores en espacios de Banach (o más generalmente, a un espacio topológico localmente convexo). Como referencia ver por ejemplo [Yo, Secciones 4 y 5 del Capítulo V] o [Fo, Apéndice 3].

En lo que sigue fijaremos $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y V un espacio de Banach.

Definición 2.6. Diremos que una función $F : X \to V$ es

- *débilmente medible* si para cada funcional lineal y continuo $\Lambda \in V'$, la función a valores escalares $x \mapsto \Lambda(f(x))$ es medible en el sentido usual;
- *fuertemente medible* si existe una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones simples a valores en V tal que, para casi todo $x \in X$, $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$, donde por "función simple a valores en V" se entiende una función de la forma
$$\sum_i \chi_{E_i}\ v_i,$$
siendo la suma sobre i finita, v_i vectores en V y E_i conjuntos medibles en $\mathcal{M}$.

Observación 2.7. Si f es fuertemente medible, entonces es débilmente medible y la función $\|f(\cdot)\|$ es medible (en el sentido usual).

Teorema 2.8 (Teorema de Pettis)**.** *[Yo, p. 131] Una función $f : X \to V$ es fuertemente medible si y sólo si es débilmente medible y existe un conjunto E de medida nula tal que $f(E^c)$ es separable. En particular, si V es separable, las dos nociones de medibilidad son equivalentes.*

Definición 2.9. Para una función simple a valores en V, $g = \sum_{i=1}^n \chi_{E_i}\ v_i$ con $\mu(E_i) < \infty$, ponemos
$$\int_X g(x)\ d\mu(x) := \sum_{i=1}^n \mu(E_i)\ v_i. \tag{2.6}$$

Una función $f : X \to V$ se dice *Bochner-integrable* si existe una sucesión de funciones simples integrables (es decir, tales que (2.6) es finita) $\{f_n\}_{n\in N}$ que converge a f para casi todo punto con respecto a la medida μ y tal que
$$\lim_{n\to\infty} \int_X \|f_n(x) - f(x)\|\ d\mu(x) = 0. \tag{2.7}$$

Si f es Bochner-integrable, entonces es fuertemente medible. Además, existe una sucesión de funciones simples integrables $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a f para casi todo punto, tal que vale (2.7) y
$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\ d\mu(x) \tag{2.8}$$

existe con respecto a la norma de V. Más aún, el valor de (2.8) es independiente de la elección de la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Luego, para una función $f : X \to V$ Bochner-integrable se define su *integral de Bochner* $\int_X f(x)\ d\mu(x)$ igual al valor dado por (2.8).

Teorema 2.10. *[Yo, Teorema de Bochner p. 133] Una función f es Bochner-integrable si y sólo si es fuertemente medible y $\|f(\cdot)\|$ es integrable.*

Corolario 2.11. *[Yo, Corolario 1, p. 133] Si f es Bochner-integrable, entonces*
$$\|\int_X f(x)\ d\mu(x)\| \leq \int_X \|f(x)\|\ d\mu(x).$$

Corolario 2.12. *[Yo, Corolario 2, p. 134] Si $f : X \to V$ es Bochner-integrable y T es un operador lineal y continuo de V en otro espacio de Banach, entonces $T \circ f$ es Bochner-integrable y*
$$T\left(\int_X f(x)\ d\mu(x)\right) = \int_X T\left(f(x)\right)\ d\mu(x).$$

(Esto vale en particular para T un funcional lineal y continuo de V.)

2.1. Funciones de tipo positivo

En esta sección consideraremos G un grupo topológico localmente compacto y Hausdorff. Su elemento identidad será denotado por e. Por simplicidad supondremos G unimodular y N_2.

Recordemos que la convolución de funciones está definida por

$$f * g(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)\ dy = \int_G f(xy^{-1})g(y)\ dy$$

donde tenga sentido.

Definición 2.13. Una función $\varphi \in L^\infty(G)$ se dice *de tipo positivo* si el operador de convolución

$$\begin{aligned} K_\varphi : L^1(G) &\longrightarrow L^1(G) \cap L^\infty(G) \\ f &\longmapsto f * \varphi \end{aligned}$$

es semidefinido positivo, esto es, para toda $f \in L^1(G)$

$$\begin{aligned} \langle K_\varphi(f), f\rangle &:= \int_G K_\varphi(f)(x)\overline{f(x)}\ dx \\ &= \int_G \int_G f(y)\varphi(y^{-1}x)\overline{f(x)}\ dy\ dx \geq 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Esta definición está presentada de manera ligeramente distinta a la usual que puede encontrarse en la literatura. Es una adaptación personal de las definiciones dadas en [Fo, Sección 3.3] y [CEFRT, Capítulo IV].

Observación 2.14. Como el espacio $C_c(G)$ es denso en $L^1(G)$, (2.9) se cumple para toda función $f \in L^1(G)$ si y sólo si se satisface para toda función $f \in C_c(G)$.

Notar que por la Proposición 2.1, $f * \varphi \in L^\infty(G) \cap L^1(G)$ para toda $f \in L^1(G)$. En particular el operador K_φ está bien definido y es continuo de $L^1(G)$ en $L^\infty(G)$.

Proposición 2.15. *Sea $\varphi \in L^\infty(G)$ una función no-trivial de tipo positivo y sea K_φ el operador de convolución con núcleo φ dado en la definición anterior.*

(i) K_φ define una forma sesquilineal, hermítica y semidefinida positiva

$$\langle f, g\rangle_\varphi := \int_G K_\varphi(f)(x)\overline{g(x)}\ dx, \tag{2.10}$$

que satisface

$$|\langle f, g\rangle_\varphi| \leq \|\varphi\|_\infty \|f\|_1 \|g\|_1 \qquad \forall f, g \in L^1(G). \tag{2.11}$$

(ii) K_φ es un operador autoadjunto y $\varphi = \varphi^*$.

Demostración.

(i) Por definición

$$\langle f, g\rangle_\varphi = \langle K_\varphi(f), g\rangle \qquad \forall f, g \in L^1(G).$$

Por la desigualdad de Hölder, $\langle K_\varphi(f), g\rangle \leq \|K_\varphi(f)\|_\infty \|g\|_1$ para toda $f, g \in L^1(G)$ y por la Proposición 2.1, $\|K_\varphi(f)\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty \|f\|_1$ para toda $f \in L^1(G)$.

Como K_φ es un operador lineal y $\langle \cdot, \cdot\rangle$ es un producto interno en $L^2(G)$ (donde $C_c(G)$ es denso), $\langle \cdot, \cdot\rangle_\varphi$ satisface trivialmente

$$\langle cf + g, h\rangle_\varphi = c\langle f, h\rangle_\varphi + \langle g, h\rangle_\varphi \ \text{ y } \ \langle f, cg + h\rangle_\varphi = \overline{c}\langle f, g\rangle_\varphi + \langle f, h\rangle_\varphi \quad \forall c \in \mathbb{C},\ \forall f, g, h \in C_c(G).$$

Para ver la hermiticidad notemos que para todo par de funciones $f, g \in C_c(G)$,

$$0 \leq \langle f + g, f + g\rangle_\varphi = \langle f, g\rangle_\varphi + \langle f, f\rangle_\varphi + \langle g, g\rangle_\varphi + \langle g, f\rangle_\varphi \tag{2.12}$$

y como $\langle f, f\rangle_\varphi \geq 0$ y $\langle g, g\rangle_\varphi \geq 0$ se tiene que

$$\operatorname{Im}\left(\langle f, g\rangle_\varphi + \langle g, f\rangle_\varphi\right) = 0, \tag{2.13}$$

donde para $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im}(z)$ denota su parte imaginaria. De manera análoga, considerando if en lugar de f en (2.12) se tiene que

$$\operatorname{Re}\left(\langle f, g\rangle_\varphi - \langle g, f\rangle_\varphi\right) = 0, \tag{2.14}$$

donde para $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(z)$ denota su parte real. Por lo tanto, de (2.13) y (2.14), se tiene que

$$\langle f, g\rangle_\varphi = \overline{\langle g, f\rangle_\varphi} \qquad \forall f, g \in C_c(G).$$

(ii) El operador adjunto K_φ^* de K_φ se define por $\langle f, K_\varphi^*(g)\rangle := \langle K_\varphi(f), g\rangle$ para todo par de funciones $f, g \in L^2(G)$ (o en $C_c(G)$). Luego, por el teorema de Fubini, K_φ^* es un operador de convolución cuyo núcleo es φ^*. Ahora, usando la hermiticidad de ambas formas sesquilineales, de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ y de $\langle\cdot,\cdot\rangle_\varphi$, tenemos que

$$\langle f, K_\varphi^*(g)\rangle = \langle K_\varphi(f), g\rangle = \langle f, g\rangle_\varphi = \overline{\langle g, f\rangle_\varphi} = \overline{\langle K_\varphi(g), f\rangle} = \langle f, K_\varphi(g)\rangle.$$

Como $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es una forma definida positiva en $L^2(G)$, es decir,

$$\langle f, g\rangle \geq 0 \quad \forall f, g \in L^2(G) \quad \text{y} \quad \langle f, f\rangle = 0 \ \text{ si y sólo si } \ f = 0,$$

se tiene que $K_\varphi = K_\varphi^*$ y que $\varphi = \varphi^*$.

□

La siguientes proposiciones aportan nociones equivalentes.

Proposición 2.16. *Una función $\varphi \in L^\infty(G)$ es de tipo positivo si y sólo si*

$$\int_G \varphi(x)\overline{f^* * f(x)}\, dx \geq 0 \qquad \forall f \in L^1(G)$$

(o, equivalentemente, si y sólo si $\int_G f^* * f(x)\varphi(x^{-1}) \geq 0$ para toda $f \in L^1(G)$).

Demostración. La prueba se sigue de la siguiente aplicación del teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}
\int_G \varphi(x)\overline{f^* * f(x)}\, dx &= \int_G\int_G \varphi(x)\overline{f^*(xy^{-1})f(y)}\, dy\, dx \\
&= \int_G\int_G f(yx^{-1})\varphi(x)\overline{f(y)}\, dx\, dy \\
&= \int_G f * \varphi(y)\overline{f(y)}\, dy.
\end{aligned}$$

A su vez,

$$\begin{aligned}
\int_G f^* * f(x)\varphi(x^{-1})\, dx &= \int_G\int_G \overline{f(y^{-1})}f(y^{-1}x)\varphi(x^{-1})\, dy\, dx \\
&= \int_G\int_G \overline{f(z)}f(zx)\varphi(x)\, dz\, dx \\
&= \int_G\int_G \overline{f(z)}f(zx)\varphi(x)\, dx\, dz \\
&= \int_G\int_G \overline{f(z)}f(u)\varphi(u^{-1}z)\, du\, dz \\
&= \int_G f * \varphi(z)\overline{f(z)}\, dz.
\end{aligned}$$

□

Observación 2.17.

- Si φ es de tipo positivo, entonces también lo es $\overline{\varphi}$.
- Por la proposición anterior y el teorema de representación de Riesz podemos decir que un funcional lineal continuo μ de $L^1(G)$ será *de tipo positivo* si $\mu(f^* * f) \geq 0$ para toda $f \in L^1(G)$.

- Dada $g \in L^2(G)$ se tiene que $g * g^*$ es de tipo positivo. Esto se debe a que, por un lado, sabemos que $g * g^*$ es continua y acotada (por la Proposición 2.1). Por otro lado, por el teorema de Fubini, para toda $f \in C_c(G)$

$$\langle g * g^*, f\rangle = \int_G \int_G g(y)g^*(y^{-1}x)\overline{f(x)}\ dy\ dx = \int_G \int_G g(y)\overline{g(x^{-1}y)f(x)}\ dx\ dy = \langle g, f * g\rangle$$
$$\langle g, f^* * f\rangle = \int_G \int_G g(x)\overline{f^*(xy^{-1})f(y)}\ dy\ dx = \int_G \int_G g(x)f(yx^{-1})\overline{f(y)}\ dx\ dy = \langle f * g, f\rangle.$$

Luego, como el producto de convolución es asociativo tenemos que

$$\langle g * g^*, f^* * f\rangle = \langle g, (f^* * f) * g\rangle = \langle g, f^* * (f * g)\rangle = \langle f * g, f * g\rangle \geq 0 \qquad \forall f \in C_c(G).$$

Proposición 2.18. *[Fo, Proposición 3.35] Una función $\varphi \in C(G)$ es de tipo positivo si y sólo si dados $x_1, ..., x_n \in G$ y escalares $c_1, ..., c_n \in \mathbb{C}$ (para $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ arbitrario) se tiene que $\sum_{i,j=1}^n \overline{c_i}c_j\varphi(x_j^{-1}x_i) \geq 0$.*

Observación 2.19.

- Una función $\varphi : G \to \mathbb{C}$ se dice *definida positiva* si

$$\sum_{i,j=1}^n \overline{c_i}c_j\varphi(x_j^{-1}x_i) \geq 0 \qquad \forall x_1, ..., x_n \in G \text{ y } \forall c_1, ..., c_n \in \mathbb{C}, \tag{2.15}$$

  donde n es un entero no negativo arbitrario. La proposición anterior establece una equivalencia entre las definiciones dadas cuando la función es continua. Veremos, usando la teoría de representaciones, que toda función de tipo positivo coincide *p.p.* con una función continua y por lo tanto se podrán asumir continuas. Sin embargo, una función definida positiva puede no ser continua. Por ejemplo si consideramos la función definida por $\varphi(e) := 1$ y $\varphi(x) = 0$. Incluso puede no ser medible. Por ejemplo, si pensamos en $G = \mathbb{R}$, la ecuación funcional de Cauchy $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ tiene no numerables soluciones no acotadas (ver [Kh, Capítulo 11]).

- Si φ es definida positiva se tiene que para cualquier conjunto finito $\{x_1, ..., x_n\} \subset G$, la matriz $(a_{ij})_{i,j=1}^n$, con $a_{ij} := \varphi(x_j^{-1}x_i)$, es hermitiana y semidefinida positiva.

- Notar que toda función φ definida positiva es acotada. Más aún, $\varphi(e) \geq 0$ y $|\varphi(x)| \leq \varphi(e)$ para todo $x \in G$. En efecto, considerando $n = 2$, $x_1 = e$ y $x_2 = x$ (un elemento arbitrario x de G), la matriz

$$A := \begin{pmatrix} \varphi(e) & \varphi(x^{-1}) \\ \varphi(x) & \varphi(e) \end{pmatrix}$$

  es hermitiana (por lo tanto $\varphi(x^{-1}) = \overline{\varphi(x)}$) y semidefinida positiva. En particular, $0 \leq \langle A(1, 0), (1, 0)\rangle = \varphi(e)$ y $0 \leq \det(A) = \varphi(e)^2 - |\varphi(x)|^2$.

Ejemplo 2.20. Si G es un grupo abeliano, entonces todo carácter $\chi : G \longrightarrow \mathbb{S}^1$ (homomorfismo continuo) es de tipo positivo. En efecto, dada $f \in L^1(G)$,

$$\begin{aligned}\langle f, f\rangle_\chi &= \int_G \int_G f(y)\chi(y^{-1}x)\overline{f(x)}\ dy\ dx \\ &= \int_G \int_G f(y)\overline{\chi(y)}\chi(x)\overline{f(x)}\ dy\ dx \\ &= \left(\int_G f(y)\overline{\chi(y)}\ dy\right)\left(\overline{\int_G f(x)\overline{\chi(x)}\ dx}\right) \\ &= |\int_G f(x)\overline{\chi(x)}\ dx|^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Ejemplo 2.21. Sea $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ una representación unitaria de G. Dado $v \in \mathcal{H}_\pi$, la función φ dada por la entrada matricial de π correspondiente a v, esto es,

$$\varphi(x) := \langle v, \pi(x)v\rangle \qquad \forall x \in G$$

es de tipo positivo. En efecto, dados $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\{x_1, ..., x_n\} \subset G$ y $\{c_1 ..., c_n\} \subset \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n} \overline{c_i} c_j \varphi(x_j^{-1} x_i) &= \sum_{i,j=1}^{n} \overline{c_i} c_j \langle \pi(x_j^{-1} x_i) v, v\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \overline{c_i} c_j \langle \pi(x_j) v, \pi(x_i) v\rangle \\ &= \langle \sum_{j=1}^{n} c_j \pi(x_j) v, \sum_{i=1}^{n} c_i \pi(x_i) v\rangle \\ &= \|\sum_{k=1}^{n} c_k \pi(x_k) v\| \geq 0.\end{aligned}$$

Además, φ es continua por ser una entrada matricial de una representación de un grupo topológico y es acotada con $|\varphi(x)| \leq \|v\|$ para todo $x \in G$.

Lema 2.22. *Sea $\varphi \in L^\infty(G)$ una función de tipo positivo. La forma $\langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi$ es invariante por traslaciones a izquierda, esto es,*

$$\langle L_x f, L_x g\rangle_\varphi = \langle f, g\rangle_\varphi \qquad \forall f, g \in L^1(G).$$

Demostración. Sean $f, g \in L^1(G)$ y $x \in G$, usando la invarianza de la medida de Haar de G a izquierda tenemos

$$\begin{aligned}\langle L_x f, L_x g\rangle_\varphi &= \int_G \int_G f(x^{-1} y) \varphi(y^{-1} z) \overline{g(x^{-1} z)}\, dy\, dz \\ &= \int_G \int_G f(y) \varphi((xy)^{-1} xz) \overline{g(z)}\, dy\, dz \\ &= \int_G \int_G f(y) \varphi(y^{-1} z) \overline{g(z)}\, dy\, dz \\ &= \langle f, g\rangle_\varphi.\end{aligned}$$

□

Dada una función $\varphi \in L^\infty(G)$ (no idénticamente nula) de tipo positivo construiremos dos espacios funcionales de Hilbert vinculados a φ, invariantes por traslaciones a izquierda en G y cuyos productos internos resultarán invariantes por traslaciones a izquierda en G. Es decir, daremos dos espacios de Hilbert donde la traslación a izquierda definirá una representación unitaria de G. Ambas representaciones de G resultarán unitariamente equivalentes, es decir, serán dos realizaciones de la misma acción.

- Modelo I: Sea $\mathcal{M}_0(G)$ el espacio de las medidas en G de soporte finito, esto es, de las medidas de la forma

$$\mu := \sum_{i=1}^{N} a_i \delta_{x_i} \tag{2.16}$$

para algún $N \in \mathbb{N}$ y algunos escalares $a_i \in \mathbb{C}$ y elementos $x_i \in G$. Notar que si μ es como en (2.16), dada una función $u : G \to \mathbb{C}$, se tiene

$$\mu(u) := \sum_{i=1}^{N} a_i u(x_i).$$

Sea

$$V_\varphi := \{u = \mu * \varphi \mid \ \mu \in \mathcal{M}_0(G)\},$$

donde, si μ es como en (2.16),

$$\mu * \varphi(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi(x_i^{-1} x) \qquad \forall x \in G.$$

Podemos observar que el espacio V_φ está compuesto por todas las funciones que son combinaciones lineales finitas de traslaciones de φ. En particular, $\varphi \in V_\varphi$.

Para todo par de funciones $u = \mu * \varphi$ y $v = \nu * \varphi$ en V_φ definimos

$$\begin{aligned}\langle u, v\rangle_{V_\varphi} &:= \overline{\nu}(\mu * \varphi)\\ &= \int_G \mu * \varphi(x)\ d\overline{\nu}(x)\\ &= (\nu^* * \mu)(\check{\varphi})\\ &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} a_i\overline{b_j}\varphi(x_i^{-1}y_j),\end{aligned}$$

si μ está dada como en (2.16), $\nu := \sum_{j=1}^M b_j\delta_{y_j}$, $\overline{\nu} = \sum_{j=1}^M \overline{b_j}\delta_{y_j}$ y $\nu^* = \sum_{j=1}^M \overline{b_j}\delta_{y_j^{-1}}$. Dada $u \in V_\varphi$ y $x \in G$, $L_x(u) \in V_\varphi$. Más aún,

$$\langle L_x(u), L_x(v)\rangle_{V_\varphi} = \langle u, v\rangle_{V_\varphi} \qquad \forall u, v \in V_\varphi.$$

En particular,

$$\varphi(x) = \langle \varphi, L_x(\varphi)\rangle_{V_\varphi} \qquad \forall x \in G. \tag{2.17}$$

Sea $\mathcal{H}_\varphi^I$ el espacio de Hilbert dado por la completación de V_φ. Luego, $(L_x, \mathcal{H}_\varphi^I)$ es una representación unitaria de G.

- Modelo II: Definimos

$$\mathcal{N}_\varphi := \{f \in L^1(G) \mid \ \langle f, f\rangle_\varphi = 0\}.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz para una forma semidefinida positiva y sesquilineal ([Fo, Teorema A.3]), $f \in \mathcal{N}_\varphi$ si y sólo si $\langle f, g\rangle_\varphi = 0$ para toda $g \in L^1(G)$. Luego, la forma $\langle\cdot,\cdot\rangle_\varphi$ induce un producto interno en el espacio cociente $L^1(G)/\mathcal{N}_\varphi$, que continuaremos denotando por $\langle\cdot,\cdot\rangle_\varphi$. Dada $f \in L^1(G)$, denotaremos por $\dot{f}$ su proyección a $L^1(G)/\mathcal{N}_\varphi$. Sea $\mathcal{H}_\varphi^{II}$ el espacio de Hilbert dado por la completación de $L^1(G)/\mathcal{N}_\varphi$ con respecto a la norma $\|\dot{f}\|_\varphi := \sqrt{\langle \dot{f}, \dot{f}\rangle_\varphi}$. Por (2.11),

$$\|\dot{f}\|_\varphi \leq \|\varphi\|_\infty \|f\|_1 \qquad \forall f \in L^1(G).$$

A partir del Lema 2.22 se ve que $\mathcal{N}_\varphi$ es invariante por L_x. Luego, L_x define una representación unitaria de G sobre $\mathcal{H}_\varphi^{II}$ determinada por

$$L_x(\dot{f}) := \dot{L_x(f)} \qquad (f \in L^1(G)).$$

La correspondiente representación de $L^1(G)$ en $\mathcal{H}_\varphi^I$ está dada por

$$L(f)(\dot{g}) := (\dot{f * g}).$$

De manera similar al modelo I, consideramos el espacio

$$W_\varphi := \{u = f * \varphi \mid \ f \in L^1(G)\}.$$

Si $f * \varphi$ y $g * \varphi$ son funciones en W_φ (con $f, g \in L^1(G)$), definimos

$$\begin{aligned}\langle f * \varphi, g * \varphi\rangle_{W_\varphi} &:= \langle f, g\rangle_\varphi\\ &= \int_G\int_G f(y)\varphi(y^{-1}x)\overline{g(x)}\ dy\ dx.\end{aligned}$$

Observar que hemos definido un producto interno entre $f*\varphi$ y $g*\varphi$ a partir de la forma sesquilineal y hermítica $\langle f, g\rangle_\varphi$ dada en (2.10). Esta es una buena definición ya que si f y h son dos funciones en $L^1(G)$ tales que $f * \varphi = h * \varphi$, entonces

$$\langle f, g\rangle_\varphi = \langle f * \varphi, g\rangle = \langle h * \varphi, g\rangle = \langle h, g\rangle_\varphi \qquad \forall g \in L^1(G)$$

y, por la hermiticidad,

$$\langle g, f\rangle_\varphi = \overline{\langle f, g\rangle_\varphi} = \overline{\langle h, g\rangle_\varphi} = \langle g, h\rangle_\varphi \qquad \forall g \in L^1(G).$$

A su vez, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{W_\varphi}$ es en efecto un producto interno en W_φ ya que $\langle f*\varphi, f*\varphi\rangle_{W_\varphi}=0$ si y sólo si $\langle f*\varphi, g*\varphi\rangle_{W_\varphi}=0$ para toda $g\in C_c(G)$ y por lo tanto si

$$\int_G f*\varphi(x)\overline{g(x)}\,dx=0 \qquad \forall g\in C_c(G),$$

entonces $f*\varphi=0$ para casi todo punto. En este punto es crucial observar que en particular la aplicación

$$\begin{aligned} L^1(G) &\longrightarrow W_\varphi \\ f &\longmapsto f*\varphi \end{aligned}$$

es la función "cociente" del modelo II

$$\begin{aligned} L^1(G) &\longrightarrow L^1(G)/\mathcal{N}_\varphi \\ f &\longmapsto \dot{f}, \end{aligned}$$

es decir, $\dot{f}=f*\varphi$. Por lo tanto, el espacio W_φ coincide con $L^1(G)/\mathcal{N}_\varphi$ y su completación con respecto a la norma dada a partir del producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_{W_\varphi}$ coincide con el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_\varphi^{II}$.

Lema 2.23. *Si Λ es un funcional lineal, continuo y de tipo positivo de $L^1(G)$, entonces existe $\varphi\in L^\infty(G)$ continua y de tipo positivo tal que*

$$\Lambda(f)=\int_G f(x)\varphi(x^{-1})\,dx.$$

Más aún, $\|\Lambda\|=\varphi(e)$.

Demostración. La idea de la prueba está tomada de [CEFRT, Teorema II.4, Capítulo IV].

Consideramos la forma sesquilineal semidefinida postiva dada por

$$B(f,g):=\Lambda(g^**f) \qquad \forall f,g\in L^1(G).$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz

$$|B(f,g)|^2\le B(f,f)B(g,g) \qquad \forall f,g\in L^1(G).$$

Más aún,

$$B(f,f)\le\|\Lambda\|\|f\|_1^2.$$

Consideramos

$$\mathcal{N}:=\{f\in L^1(G)|\ B(f,f)=0\}.$$

La forma B dota al espacio $L^1(G)/\mathcal{N}$ de una estructura de espacio pre-Hilbert y su clausura, denotada por $\mathcal{H}$, resulta un espacio de Hilbert. Se puede ver que la traslación a izquierda en G define una representación unitaria en $\mathcal{H}$.

Si V es un entorno compacto de la identidad $e\in G$ consideramos la función de tipo positivo $\chi_V*\chi_V^*$. Sea $c_v=\int_G\chi_V*\chi_V^*(x)\,dx$. Consideramos $h_V:=\frac{1}{c_V}\chi_V*\chi_V^*$ ya que será útil que tenga norma igual a 1. Luego, dada una base de entornos $\{V_n\}$ de e, la familia $\{h_{V_n}\}$ define una aproximación de la identidad de $L^1(G)$, esto es,

$$\lim_{n\to\infty} h_{V_n}*f=f \ \text{ en } \|\cdot\|_1 \qquad \forall f\in L^1(G).$$

De la desigualdad de Cauchy-Schawartz

$$|\Lambda(h_V^**f)|^2\le B(f,f)B(h_V,h_V).$$

Además,

$$B(h_{V_n},h_{V_n})\le\|\Lambda\|\|h_{V_n}\|_1^2=\|\Lambda\|$$

y también por la continuidad de Λ,

$$\Lambda(h_{V_n}^**f)\to\Lambda(f) \qquad \forall f\in L^1(G),$$

de lo que se deduce

$$\|\Lambda(f)\|^2 \leq \|\Lambda\| B(f,f).$$

Denotamos por $f \mapsto \dot{f}$ la asignación entre $L^1(G)$ y $\mathcal{H}$. El teorema de representación de Riesz en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ establece que existe un único $\dot{\varepsilon} \in \mathcal{H}$ tal que

$$\Lambda(f) = B(\dot{f}, \dot{\varepsilon}).$$

Luego,

$$B(\dot{g}, \dot{f}) = B(f,g) = \Lambda(f^* * g) = \Lambda(L(f^*)g) = B(L(f^*)\dot{g}, \dot{\varepsilon}) = B(\dot{g}, L(f)\dot{\varepsilon}) \qquad \forall f, g \in L^1(G)$$

y por lo tanto

$$L(f)\dot{\varepsilon} = \dot{f} \qquad \forall f \in L^1(G), \tag{2.18}$$

de lo que se desprende que ε es cíclico. En particular, de (2.18) sigue que $L(\varepsilon)\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}$.

Definiendo

$$\varphi(x) := B(\dot{\varepsilon}, L_x(\dot{\varepsilon})) \qquad \forall x \in G,$$

esta resulta una función continua, acotada, de tipo positivo y tal que

$$\begin{aligned} \Lambda(f) &= B(L(f)\dot{\varepsilon}, \dot{\varepsilon}) \\ &= \int_G f(x)\varphi(x^{-1})\, dx \\ &= (f * \varphi)(e) \qquad \forall f \in L^1(G). \end{aligned}$$

Como $|\varphi(x)| \leq \varphi(e)$ para todo $x \in G$, se sigue que

$$\Lambda(f) \leq \varphi(e)\|f\|_1 \qquad \forall f \in L^1(G).$$

Por otro lado, tenemos que $\Lambda(h_{V_n}) \longrightarrow \varphi(e)$ cuando $n \to \infty$ y por ende $\|\Lambda\| = \varphi(e)$.

Por último, notemos que una vez definida φ, la forma $B(\cdot,\cdot)$ es la forma $\langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi$ y el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es el espacio $\mathcal{H}_\varphi^{II}$. □

Teorema 2.24. *[Fo, Teorema 3.20] Una función $\varphi \in L^\infty(G)$ es de tipo positivo si y sólo si existe una representación unitaria $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ de G y $v \in \mathcal{H}_\pi$ tal que*

$$\varphi(x) = \langle v, \pi(x)v \rangle \qquad p.p. \in G.$$

Más aún, dicho vector $v \in \mathcal{H}_\pi$ es cíclico.

Demostración. La prueba de la vuelta del teorema es muy sencilla y ya la hemos visto en el ejemplo 2.21.

La ida del teorema se prueba usando alguna de las representaciones unitarias que ya hemos construido, la representación $(L_x, \mathcal{H}_\varphi^I)$ o la representación $(L_x, \mathcal{H}_\varphi^{II})$. Dada φ de tipo positivo podemos considerar la representación unitaria dada en el modelo I y resulta que

$$\varphi(x) = \langle \varphi, L_x(\varphi) \rangle_{V_\varphi}. \tag{2.19}$$

Más aún, φ es un vector cíclico pues $\{L_x\varphi |\ x \in G\}$ genera todo V_φ cuya clausura es $\mathcal{H}_\varphi^I$.

Otro camino consiste en considerar la representación dada en el modelo II y el funcional lineal continuo

$$\begin{aligned} \Lambda_\varphi : L^1(G) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto \int_G f(x)\varphi(x^{-1})\, dx = \int_G f(x)\overline{\varphi(x)}\, dx. \end{aligned}$$

En la prueba del Lema 2.23 vimos que este funcional lineal continuo define un nuevo funcional lineal continuo en $\mathcal{H}_\varphi^I$ y, por el teorema de representación de Riesz, existe un único vector $\dot{\varepsilon} \in \mathcal{H}_\varphi^{II}$ que es el representante del funcional lineal continuo $(\Lambda_\varphi)_{|_{\mathcal{H}_\varphi^{II}}}$, que satisface

$$\varphi(x) = \langle \dot{\varepsilon}, L_x(\dot{\varepsilon}) \rangle_\varphi$$

y que es cíclico. Sólo a modo de completitud repasemos el hecho de que $\dot{\varepsilon}$ es cíclico en $\mathcal{H}_\varphi^{II}$: Si existe $\dot{f} \in \mathcal{H}_\varphi^{II}$ tal que $\langle \dot{f}, L_x\dot{\varepsilon} \rangle_\varphi = 0$ para todo $x \in G$, entonces $0 = (L_{x^{-1}}(f) * \varphi)(e) = (L_{x^{-1}}(f * \varphi))(e) = f * \varphi(x)$ para todo $x \in G$ y por lo tanto $\dot{f} = 0$. □

Observación 2.25. A partir de la prueba resaltamos que en el modelo I se ve que función φ pertenece a $\mathcal{H}_\varphi^I$ y que es la entrada matricial diagonal del operador $L_{x^{-1}}$ con respecto a ella misma (en el sentido de (2.19)). Por otro lado, si consideramos el funcional lineal continuo Λ_φ definido en todo $L^1(G)$, vemos que por su misma definición, $\varphi \in L^\infty(G)$ es un representante de este funcional lineal continuo en $L^1(G)$ (no es el único ya que $L^1(G)$ no es un espacio de Hilbert pero sí vale una versión del teorema de representación de Riesz). Al ver este funcional lineal continuo en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_\varphi^{II}$, se tiene un único representante $\dot{\varepsilon} \in \mathcal{H}_\varphi^{II}$. Estos dos representantes (φ y $\dot{\varepsilon}$) en estos dos espacios ($L^1(G)$ y $\mathcal{H}_\varphi^{II}$) deberían estar relacionados de alguna manera. En efecto, se ve que para toda $f \in L^1(G)$

$$\begin{aligned}\int_G f(x)\overline{\varphi(x)}\,dx &= \langle \dot{f}, \dot{\varepsilon}\rangle_\varphi \\ &= \int_G f * \varphi(x)\overline{\varepsilon(x)}\,dx \\ &= \int_G f(x)\overline{\varepsilon * \varphi^*(x)}\,dx \\ &= \int_G f(x)\overline{\varepsilon * \varphi(x)}\,dx\end{aligned}$$

y por lo tanto $\varphi = \varepsilon * \varphi$, es decir, $\varphi = \dot{\varepsilon}$.

Observación 2.26. [Fo, Proposición 3.23 y Corolario 3.24] Si $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ es una representación unitaria de G con vector cíclico $v \in \mathcal{H}_\pi$, entonces $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ es unitariamente equivalente a $(L_x, \mathcal{H}_\varphi)$ donde $\varphi(x) := \langle v, \pi(x)v\rangle$. En efecto, φ es una función de tipo positivo por estar definida como dicha entrada matricial de la representación unitaria $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$. Como φ es una función de tipo positivo, la pueba del teorema anterior muestra que φ es a su vez es la entrada matricial de $(L_x, \mathcal{H}_\varphi^{II})$ dada por un cierto vector cíclico $\dot{\varepsilon} \in \mathcal{H}_\varphi^{II}$, esto es, $\varphi(x) = \langle \dot{\varepsilon}, L_x\dot{\varepsilon}\rangle_\varphi$ ($\forall x \in G$). En síntesis tenemos que

$$\langle v, \pi(x)v\rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \varphi(x) = \langle \dot{\varepsilon}, L_x\dot{\varepsilon}\rangle_\varphi \qquad \forall x \in G.$$

En particular,

$$\langle \pi(y)v, \pi(x)v\rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle v, \pi(y^{-1}x)v\rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \varphi(y^{-1}x) = \langle \dot{\varepsilon}, L_{y^{-1}x}\dot{\varepsilon}\rangle_\varphi = \langle L_y\dot{\varepsilon}, L_x\dot{\varepsilon}\rangle_\varphi \qquad \forall y, x \in G.$$

Si definimos $A(\pi(x)v) := L_x\dot{\varepsilon}$, se sigue que A se extiende por linealidad a una isometría del espacio generado por $\{\pi(x)v|\ x \in G\}$ al generado por $\{L_x\dot{\varepsilon}|\ x \in G\}$ y luego se extiende por continuidad a una transformación unitaria entre $\mathcal{H}_\pi$ y $\mathcal{H}_\varphi$. Como

$$L_y(A(\pi(x)v)) = L_{yx}\varepsilon = A(\pi(y)\pi(x)v) \qquad \forall x, y \in G$$

y tanto v como $\dot{\varepsilon}$ son vectores cíclicos en sus respectivos espacios, se tiene que

$$L_y \circ A = A \circ \pi(y) \qquad (\forall y \in G)$$

y por lo tanto es un operador de entrelazamiento unitario entre ambas representaciones.

En particular, las representaciones $(L_x, \mathcal{H}_\varphi^I)$ y $(L_x, \mathcal{H}_\varphi^{II})$, dadas en los modelos I, II, son unitariamente equivalentes. Por lo tanto, de ahora en más, nos referiremos a cualquiera de ellas por $(L_x, \mathcal{H}_\varphi)$ y se entenderá el modelo que se está usando por el contexto.

Corolario 2.27. *Toda función de tipo positivo coincide p.p. con una función continua.*

A partir de este resultado podemos asumir que las funciones de tipo positivo son continuas. Sea

$$\mathcal{C}(G) := \text{ el conjunto de todas las funciones continuas de tipo positivo de } G.$$

La elección de la letra $\mathcal{C}(G)$ para nombrar este conjunto se debe a que este forma un cono convexo (es decir, $t\varphi + s\phi \in \mathcal{C}(G)$ para toda $\varphi, \phi \in \mathcal{C}(G)$ y todo par de escalares positivos $t, s \in \mathbb{R}_{>0}$). También definimos los subconjuntos convexos y acotados de $\mathcal{C}(G)$

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_0(G) &:= \{\varphi \in \mathcal{C}(G) :\ \|\varphi\|_\infty \leq 1\} = \{\varphi \in \mathcal{C}(G) :\ 0 \leq \varphi(e) \leq 1\} \\ \mathcal{C}_1(G) &:= \{\varphi \in \mathcal{C}(G) :\ \|\varphi\|_\infty = 1\} = \{\varphi \in \mathcal{C}(G) :\ \varphi(e) = 1\}.\end{aligned}$$

Por último, damos parte a los conjuntos de *puntos extremales* $\mathcal{E}(\mathcal{C}_0(G))$ y $\mathcal{E}(\mathcal{C}_1(G))$ de $\mathcal{C}_0(G)$ y $\mathcal{C}_1(G)$ (respectivamente). Recordemos que los puntos extremales de un conjunto convexo son aquellos que no pertenecen a ningún segmento abierto que une dos puntos del conjunto (dan la idea de contener a los "vértices" del conjunto).

Lema 2.28. *[Fo, Lema 3.26] $\mathcal{E}(\mathcal{C}_0(G)) = \mathcal{E}(\mathcal{C}_1(G)) \cup \{0\}$, es decir, $\mathcal{E}(\mathcal{C}_0(G))$ está formado por las funciones $\varphi \in \mathcal{C}_0(G)$ tales que o bien $\varphi \equiv 0$ o bien $\varphi(e) = 1$ y es tal que si se puede escribir como $\varphi = t\varphi_1 + (1-t)\varphi_2$ para funciones $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}_0(G)$ y algún $0 \leq t \leq 1$, entonces tanto φ_1 como φ_2 son múltiplos de φ.*

Demostración. La función idénticamente cero es un punto extremal de $\mathcal{C}_0(G)$ ya que si $0 = t\varphi_1 + (1-t)\varphi_2$, para $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}_0(G)$ y algún $0 \leq t \leq 1$. En particular $0 = t\varphi_1(e) + (1-t)\varphi_2(e)$, lo que implica $\varphi_1(e) = 0 = \varphi_2(e)$ y por lo tanto $\varphi_1 \equiv 0 \equiv \varphi_2$ (por la Observación 2.19). Por otro lado, dada $\varphi \in \mathcal{C}_1(G)$, si $\varphi = t\varphi_1 + (1-t)\varphi_2$, para $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}_0(G)$ y algún $0 \leq t \leq 1$, entonces $1 = t\varphi_1(e) + (1-t)\varphi_2(e)$, lo que implica $\varphi_1 = 1 = \varphi_2(e)$ y por lo tanto $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}_1(G)$. Luego, si φ es un punto extremal de $\mathcal{C}_1(G)$, también lo es de $\mathcal{C}_0(G)$. Finalmente, ninguna función no-trivial $\varphi \in \mathcal{C}_0(G)$ que no pertenezca a $\mathcal{C}_1(G)$ puede ser un punto extremal ya que está en el interior del segmento que une 0 con $\frac{1}{\varphi(e)}\varphi$. □

Teorema 2.29 (Teorema de Krein–Milman)**.** *[Ru1, Teorema 3.23] Todo conjunto convexo y compacto en un espacio vectorial topológico localmente convexo (o tal que su espacio dual separa puntos) es la clausura de la cápsula convexa de sus puntos extremales.*

Teorema 2.30 (Teorema de Banach-Alaoglu)**.** *[Ru1, Teorema 3.15] Sea X un espacio normado y sea X' su espacio dual (que es también un espacio normado con la norma de operadores, esto es, dado $\Lambda \in X'$, $\|\Lambda\| = \sup\{|\Lambda(x)| : \|x\| = 1\}$). La bola unitaria cerrada de X', $B_1 := \{\Lambda \in X' : \|\Lambda\| \leq 1\}$, es compacta con respecto a la topología débil *. (Recordemos que una red -o una sucesión- $\{\Lambda_\alpha\}_\alpha \subset X'$ converge débilmente * a Λ si lo hace puntualmente, es decir, si $\{\Lambda_\alpha(x)\}_\alpha$ tiende a $\Lambda(x)$ para todo $x \in X$.)*

En nuestro caso, sabemos que el espacio $L^\infty(G)$ se identifica con el dual topológico $(L^1(G))'$ por el teorema de representación de Riesz, por lo tanto, la bola unidad

$$B_1(G) := \{f \in L^\infty(G) : \|f\|_\infty \leq 1\}$$

es débil-compacta. Como $\mathcal{C}_0(G)$ es cerrado en $B_1(G)$ con respecto a la topología débil, se tiene (por el teorema de Krein-Milman) que $\mathcal{C}_0(G)$ es la clausura, con respecto a la topología débil, de la cápsula convexa de sus puntos extremales.

Teorema 2.31. *[Fo, Teorema 3.25] Si $\varphi \in \mathcal{C}_1(G)$, entonces φ es extremal si y sólo si la representación $(L_x, \mathcal{H}_\varphi)$ es irreducible.*

Por el Teorema 2.24 sabíamos que existe una correspondencia entre funciones de tipo positivo y representaciones unitarias de G que tienen un vector cíclico. Este nuevo teorema establece una correspondencia biunívoca entre el conjunto de funciones de tipo positivo, extremales, de norma 1 (el conjunto $\mathcal{C}_1(G)$) y el conjunto de clases de equivalencia de representaciones unitarias irreducibles de G (denotado $\widehat{G}$).

Corolario 2.32. *Si G es abeliano, entonces sus caracteres son precisamente las funciones de tipo positivo en $\mathcal{E}(\mathcal{C}_1(G))$.*

Demostración. En el ejemplo 2.20 vimos que todo carácter $\chi : G \to \mathbb{S}^1$ es una función de tipo positivo de G. Consideremos ahora el funcional lineal y continuo

$$\begin{aligned} \Lambda_\chi : L^1(G) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto \int_G f(x)\overline{\chi(x)}\, dx \end{aligned}$$

En este caso, el espacio $\mathcal{N}_\chi$ coincide con el núcleo de Λ_χ ya que vimos en el ejemplo 2.20 que $\langle f, f\rangle_\chi = |\int_G f(x)\overline{\chi(x)}\, dx|^2$. Como Nú$(\Lambda_\chi)$ tiene codimensión 1, la dimensión de $\mathcal{H}_\chi$ es 1. Por lo tanto, $(L_x, \mathcal{H}_\chi)$ es irreducible.

Por otro lado, dada $\varphi \in \mathcal{E}(\mathcal{C}_1(G))$, por el Teorema 2.31 $(L_x, \mathcal{H}_\varphi)$ es una representación unitaria irreducible de G. Como G es abeliano, la dimensión de $\mathcal{H}_\varphi$ es 1 y por lo tanto $(L_x, \mathcal{H}_\varphi)$ es unitariamente equivalente a un carácter de G. Por el Teorema 2.24, sabemos que $\varphi(x)$ es la entrada matricial de L_x dada por un vector unitario (o un número complejo de módulo 1, en este caso) ya que $\varphi(e) = 1$. Por lo tanto φ coincide con el carácter conjugado asociado a L_x. □

Proposición 2.33. *[Fo, Proposición 3.33] El espacio generado por $C_c(G) \cap \mathcal{C}(G)$ incluye a todas las funciones de la forma $f * g$ con $f, g \in C_c(G)$. Además, es denso en $C_c(G)$ con la norma uniforme ($\|\cdot\|_\infty$) y denso en $L^p(G)$, para $1 \leq p < \infty$, con la la norma $\|\cdot\|_p$.*

Teorema 2.34 (Teorema de Bochner)**.** *Sea G un grupo topológico localmente compacto y abeliano. Una función $\varphi \in C(G)$ es de tipo postitivo si y sólo si existe una única medida de Borel, regular, finita y positiva μ_φ definida en $\widehat{G}$ tal que*

$$\varphi(x) = \int_{\widehat{G}} \gamma(x)\ d\mu_\varphi(\gamma).$$

Su demostración puede encontrarse por ejemplo en [Fo, Sección 4.2].

2.2. Análisis clásico de Fourier y transformada de Gelfand

Dado un conjunto I y un cuerpo $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, se define el espacio $\ell^2(I)$ como el conjunto de todas las funciones $x : I \to \mathbb{F}$ tales que $x(i) = 0$ para todo i salvo un conjunto numerable y $\sum_{i\in I} |x(i)|^2 < \infty$. Para $x, y \in \ell^2(I)$ se define el producto interno $\langle x, y\rangle := \sum_{i\in \mathrm{I}} x(i)\overline{y(i)}$ y resulta un espacio de Hilbert. Si $I = \mathbb{N}$, usualmente se denota $\ell^2(I)$ simplemente por ℓ^2. Estos espacios no son simples ejemplos de espacios de Hilbert sino que caracterizan a todos los espacios de Hilbert. Así como todo $\mathbb{F}$-espacio vectorial de dimensión finita n es isomorfo a $\mathbb{F}^n$, todo espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es isomorfo a un espacio $\ell^2(I)$. En particular, todo espacio de Hilbert separable es isomorfo a ℓ^2 (cf. [Co, Teorema 5.4, su prueba y Corolario 5.5]). La prueba de este resultado es análoga a la prueba para espacios vectoriales de dimensión finita. Consiste en tomar una base ortonormal $\{e_i\}_{i\in I}$ de $\mathcal{H}$ (donde I es un conjunto de índices) y definir el *operador de análisis*

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\longrightarrow \ell^2(I) \\ h &\longmapsto (\langle h, e_i\rangle)_{i\in \mathrm{I}}, \end{aligned}$$

el cual resultará un isomorfismo isométrico. Un *isomorfismo isométrico* T entre espacios de Hilbert es una transformación lineal continua que preserva las normas, es decir, $\|Tv\| = \|v\|$ para todo vector v, y que es sobreyectiva.

Quizás el primer ejemplo donde uno ve de manera concreta este resultado es el siguiente. Sea $\mathbb{S}^1$ la circunferencia unitaria (o el toro unidimensional)

$$\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} :\ |z| = 1\} = \{e^{i\theta} :\ \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Consideremos $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{S}^1)$, es decir,

$$L^2(\mathbb{S}^1) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ periódicas, de período } 2\pi, \text{ tales que } \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2\ d\theta < \infty\}$$

cuyo producto interno se define como

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\overline{g(\theta)}\ d\theta.$$

La típica base ortonormal de $L^2(\mathbb{S}^1)$ está dada por $\{e^{in\theta}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y el operador de análisis

$$\begin{aligned} L^2(\mathbb{S}^1) &\longrightarrow \ell^2 \\ f &\longmapsto (\langle f, e^{in\cdot}\rangle)_{n\in\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

es la *transformada de Fourier* $\mathcal{F}$, es decir,

$$\mathcal{F}(f)(n) := \langle f, e^{in\cdot}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta}\ d\theta \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

El teorema de Plancherel establece que $\mathcal{F}$ es un isomorfismo isométrico entre $L^2(\mathbb{S}^1)$ y ℓ^2. Su inversa está dada por el *operador de síntesis*

$$\begin{aligned} \ell^2 &\longrightarrow L^2(\mathbb{S}^1) \\ (c_n)_{n\in\mathbb{Z}} &\longmapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\theta}, \end{aligned} \tag{2.20}$$

donde la serie del lado derecho converge con respecto a la norma $\|\cdot\|_2$. De esta manera toda función periódica de cuadrado integrable coincide con su *serie de Fourier*

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(f)(n)e^{in\theta} \tag{2.21}$$

donde la igualdad es con respecto a la norma $\|\cdot\|_2$.

Para cada $n \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{F}(e^{in\cdot}) = e_n$, donde e_n denota la sucesión en ℓ^2 cuyos valores están dados por $e_n(m) = \delta_{n,m}$. Es claro que $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es base ortonormal de ℓ^2. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, sea V_n el subespacio unidimensional de $L^2(\mathbb{S}^1)$ generado por $e^{in\theta}$ y sea W_n el subespacio unidimensional de ℓ^2 generado por e_n. Es claro que podemos escribir al espacio de sucesiones de cuadrado integrable como

$$\ell^2 = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} W_n, \tag{2.22}$$

donde se entiende que cada elemento $x \in \ell^2$ se puede expresar de manera única en la forma

$$x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n)e_n,$$

donde $x(n)$ es la componente de x en la dirección e_n y la igualdad es en el sentido de ℓ^2, siendo la serie de la derecha de cuadrado sumable, es decir,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|x(n)e_n\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x(n)|^2 < \infty.$$

Análogamente, a partir de (2.21) podemos escribir al espacio $L^2(\mathbb{S}^1)$ como

$$L^2(\mathbb{S}^1) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_n \tag{2.23}$$

(entendiendo que cada función de $L^2(\mathbb{S}^1)$ se puede expresar como en (2.21) en el sentido de la norma $\|\cdot\|_2$).

A su vez, la transformada de Fourier $\mathcal{F}$ está bien definida para funciones en $L^1(\mathbb{S}^1)$. Su imagen en principio cae en ℓ^∞ (sucesiones acotadas) y, más aún, se puede ver que es un subconjunto propio de las sucesiones que tienen a cero. Aunque $L^1(\mathbb{S}^1)$ no sea un espacio de Hilbert, tiene estructura de espacio de Banach y, más aún, de álgebra de Banach con el producto de convolución

$$f * g(\theta) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(\theta - t)\ dt \qquad (f, g \in L^1(\mathbb{S}^1)).$$

De hecho, es un álgebra conmutativa sin unidad y la transformada de Fourier satisface

$$\mathcal{F}(f * g)(n) = \mathcal{F}(f)(n)\mathcal{F}(g)(n) \qquad \forall n \in \mathbb{Z},\ g \in L^1(\mathbb{S}^1), \tag{2.24}$$

donde en el lado derecho tenemos un producto puntual.

Es de destacar que las proyecciones a los subespacios de la descomposición (2.23) están dadas, para cada $n \in \mathbb{Z}$, por

$$\begin{aligned} L^2(\mathbb{S}^1) &\longrightarrow V_n \\ f &\longmapsto \langle f, e^{in\cdot}\rangle e^{in\cdot} = \mathcal{F}(f)(n)\ e^{in\cdot} = f * e^{in\cdot}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Por su parte, el espacio de las sucesiones absolutamente sumables ℓ^1 está contenido en ℓ^2 y es un álgebra de Banach con la norma 1 dada por $\|x\|_1 := \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x(n)|$ $(\forall x \in \ell^1)$ y el producto de convolución

$$x * y(n) := \sum_{m\in\mathbb{Z}} x(m)y(n - m).$$

El vector e_0 es la unidad para dicho producto. El operador de traslación en ℓ^2 está dado por

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times \ell^2 &\longrightarrow \ell^2 \\ (n, x) &\longmapsto L_n(x) := (x(m - n))_{m\in\mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

La base $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de ℓ^2 se obtiene a partir de trasladar e_0, ya que $e_n = L_n(e_0)$, y por lo tanto $W_n = L_n(W_0)$. La descomposición (2.22) equivale a escribir a la identidad de la convolución en la forma

$$(\cdot) * e_0 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle\, \cdot\, , e_n\rangle e_n.$$

Esto se entiende en el sentido que dada cualquier $x \in \ell^2$ se puede escribir como

$$x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n)e_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n)L_n(e_0) = x * e_0.$$

En el caso del espacio $L^1(\mathbb{S}^1)$, este no tiene identidad para la convolución. La delta de Dirac en el espacio de distribuciones es la identidad para la convolución. Podemos decir que la descomposición (2.23) permite expresar a la delta de Dirac como

$$\text{“}(\cdot) * \delta = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\cdot) * e^{in\cdot}\text{”} \tag{2.26}$$

en el sentido que toda función $f \in C^\infty(\mathbb{S}^1) \subset L^1(\mathbb{S}^1)$ se puede escribir como

$$f * \delta = f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f * e^{in\cdot} \tag{2.27}$$

utilizando (2.25) en el igual de la derecha. A pesar de esto, si denotamos a las sumas parciales por $D_N := \sum_{n=-N}^{N} e^{in\cdot}$, también llamadas núcleos de Dirichlet (ver Figura 2.3), se tiene que para toda $f \in L^2(\mathbb{S}^1)$, $f * D_N$ tiende a f en $\|\cdot\|_2$ cuando $N \to \infty$ (por (2.21) y (2.25)). La familia $\{D_N\}$ es casi una aproximación de la identidad en $L^1(\mathbb{S}^1)$. No cumplen que sus normas $\|\cdot\|_1$ estén uniformemente acotadas. Considerando los núcleos de Fejér $F_N := \frac{D_0+\ldots+D_N}{N+1}$ (ver Figura 2.4) se obtiene una aproximación de la identidad.

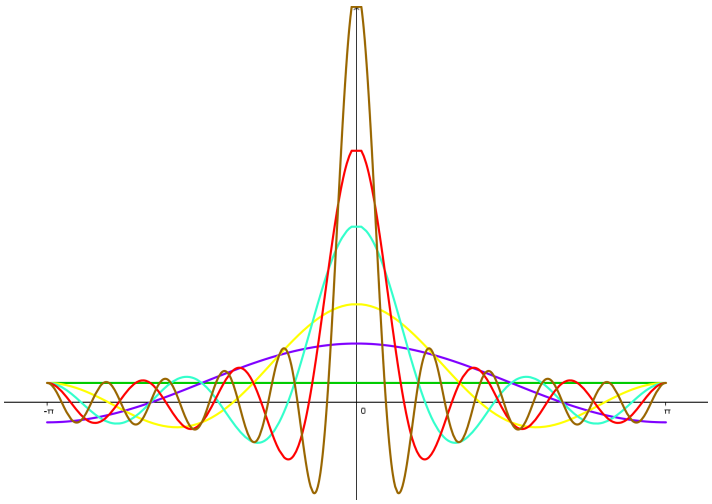


Figura 2.3: Núcleos de Dirichlet. En verde D_0, en violeta D_1, en amarillo D_2, en celeste D_4, en rojo D_6 y en marrón D_{10}.

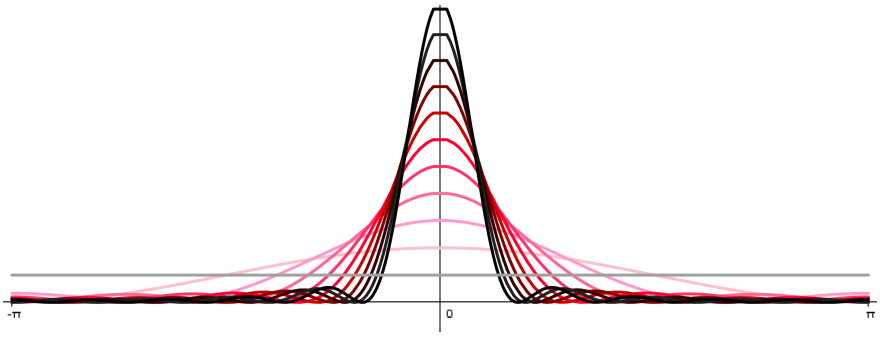


Figura 2.4: Núcleos de Fejér: F_n para $0 \le n \le 10$. Cada F_n es una función no negativa de integral igual a 2π.

El operador de traslación en $L^1(\mathbb{S}^1)$ o $L^2(\mathbb{S}^1)$ está dado de la manera natural $L_x f = f(\cdot - x)$ para cada $x \in \mathbb{S}^1$. Los espacios V_n son invariantes por traslaciones, es decir, $L_x(V_n) \subset V_n$ para todo $x \in \mathbb{S}^1$. Por lo tanto, la descomposición (2.23) también se puede leer como haber diagonalizado simultáneamente a todos los operadores de traslación L_x (para todo $x \in \mathbb{S}^1$). Dicho de otra manera, hemos descompuesto en subespacios invariantes y de dimensión uno (por lo tanto irreducibles) a la acción de traslación en $L^2(\mathbb{S}^1)$.

Si reemplazamos el dominio $\mathbb{S}^1$ por el toro m-dimensional $\mathbb{T}^m$ todo el análisis es análogo tomando ahora como base ortonormal de $L^2(\mathbb{T}^m)$ la base del producto cartesiano $\{e^{i\sum_{i=1}^m n_i\theta_i}\}_{(n_1,\ldots,n_m)\in\mathbb{Z}^m}$.

Dejemos la compacidad de $\mathbb{S}^1$ y pasemos a $\mathbb{R}$. La transformada de Fourier está definida sobre el álgebra de convolución $L^1(\mathbb{R})$ por

$$\mathcal{F}(f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i\xi x}\, dx \qquad \forall \xi \in \mathbb{R} \tag{2.28}$$

donde $\xi \in \mathbb{R}$ y la expresión anterior tiene sentido ya que así definida $\mathcal{F}(f)$ es una función continua, más aún, tiende a cero en el infinito. Si cambiamos $\mathbb{R}$ por $\mathbb{R}^n$ la expresión para la transformada de Fourier es similar

$$\mathcal{F}(f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i\langle \xi, x\rangle}\, dx \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{2.29}$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interno canónico en $\mathbb{R}^n$ y todos los resultados que repasemos para el caso de la recta $\mathbb{R}$ serán análogos para el dominio $\mathbb{R}^n$. La transformada de Fourier se puede extender a $L^2(\mathbb{R})$ usando la densidad de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ en $L^2(\mathbb{R})$, pero se pierde la fórmula (2.28) para funciones arbitrarias $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Por otro lado, $L^2(\mathbb{R})$ es un espacio de Hilbert separable. Una base ortonormal está dada a partir de las funciones de Hermite (ver Figura 2.5)

$$\frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}} w(x) H_n,$$

donde por H_n denotamos al polinomio de Hermite de orden n, $H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} e^{-x^2}$ y por w denotamos el peso $w(x) := e^{-x^2/2}$ (los polinomios de Hermite son base ortonormal del espacio $L^2(\mathbb{R}, w(x)dx)$ donde la medida de Lebesgue dx está modificada por el peso $w(x) := e^{-x^2/2}$).

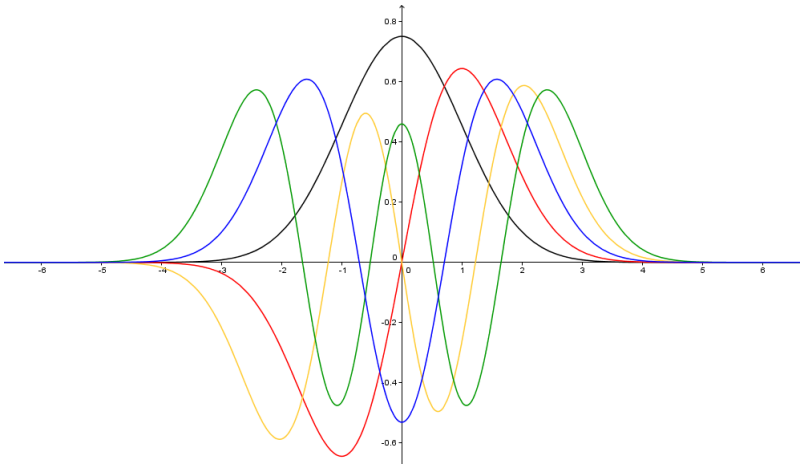


Figura 2.5: Funciones de Hermite: $n = 0$ en negro, $n = 1$ en rojo, $n = 2$ en azul, $n = 3$ en amarillo y $n = 4$ en verde.

Otra base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ está dada simplemente por considerar $\{\chi_{[n,n+1]}\, e^{i2\pi m\cdot}\}_{n,m\in\mathbb{Z}}$, es decir, tomando en cada intervalo $[n, n+1]$ la base ortonormal "de Fourier" de $L^2([n, n+1])$.

Distintas bases producen distintas descomposiciones del espacio. Se puede ver que las funciones de Hermite son autofunciones de la transformada de Fourier, por lo tanto, descomponen a $L^2(\mathbb{R})$ en autoespacios de la transformada de Fourier. La *base de Gabor* $\{\chi_{[n,n+1]}\, e^{i2\pi m\cdot}\}_{n,m\in\mathbb{Z}}$ descompone a $L^2(\mathbb{R})$ como $\oplus_{n\in\mathbb{Z}} L^2([n, n+1])$, donde a su vez cada $L^2([n, n+1])$ se descompone de manera similar a (2.23). Otro ejemplo más moderno encontramos al estudiar *wavelets* donde se busca una descomposición que tenga

en cuenta localización de las funciones en tiempo y frecuencia. Para más detalles sobre esta materia invitamos a leer por ejemplo [HW, Kai].

Estamos interesadas en una descomposición del espacio $L^2(\mathbb{R})$ similar a (2.23) en el sentido que los subespacios involucrados sean invariantes e irreducibles con respecto a la acción de traslación. De esta manera podremos no sólo "diagonalizar" simultáneamente los operadores de traslación $\{L_x\}_{x\in\mathbb{R}}$, sino también todos los operadores lineales y continuos que conmutan con estos. Es esta, como dijimos en la introducción, la motivación central de los problemas involucrados en esta tesis. Es aquí donde aparece en escena la transformada de Fourier. La transformada de Fourier, la acción de traslación y la convolución están íntimamente vinculadas. Evidencias de esto se muestran por ejemplo con Figura 2.1, con la propiedad (2.24) y con la expresión para la proyección (2.25). Por su parte, la próxima sección nos ayudará a clarificar las relaciones entre la acción de traslación y la convolución.

La fórmula de inversión para la transformada de Fourier y el teorema de Plancherel establecen respectivamente que

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\xi) e^{2\pi i \xi x}\, d\xi \quad p.p. \qquad \text{para toda } f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ tal que } \mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R}) \text{ y} \tag{2.30}$$

$$\|f\|_2 = \|\mathcal{F}(f)\|_2,$$

donde la última expresión es salvo una constante de normalización. Se concluye que $\mathcal{F}$ es un isomorfismo isométrico de $L^2(\mathbb{R})$ en sí mismo. Vemos que hemos podido descomponer funciones f ya no en forma de serie, sino en forma de integral. Esto es debido a que $\mathbb{S}^1$ es compacta y $\mathbb{R}$ no lo es. Observemos que aquí las funciones $e^{2\pi i \xi \cdot}$ que acompañan a los coeficientes de Fourier $\mathcal{F}(f)(\xi)$ no son funciones de $L^1(\mathbb{R})$ ni $L^2(\mathbb{R})$. Son funciones acotadas y por lo tanto vía el teorema de representación de Riesz las podemos asociar a funcionales lineales y continuos de $L^1(\mathbb{R})$ dados justamente por

$$f \longmapsto \int_R f(x)\overline{e^{2\pi i \xi x}}\, dx = \mathcal{F}(f)(\xi)$$

La "proyección" de $L^1(\mathbb{R})$ al subespacio de $L^\infty(\mathbb{R})$ generado por $e^{2\pi i \xi x}$ está dada por

$$f \longmapsto \mathcal{F}(f)(\xi)\ e^{2\pi i \xi \cdot} = f * e^{2\pi i \xi \cdot}$$

(ver su analogía con (2.25)). Cada uno de los espacios de dimensión uno, generados por $e^{2\pi i \xi \cdot}$, es invariante por traslaciones y, bajo hipótesis adecuadas, toda función f está completamente determinada por sus coordenadas en los espacios generados por $e^{2\pi i \xi \cdot}$, es decir, por $\{\mathcal{F}(f)(\xi)\}_{\xi\in\mathbb{R}}$ (ver (2.30)). Formalmente decimos que hemos podido descomponer la "función identidad" δ (que no es función ni es la identidad de $L^1(\mathbb{R})$ pues no tiene) como

$$\text{“}\delta = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i \xi \cdot}\text{”}$$

en el sentido que

$$\text{“}f * \delta = f = \int_{\mathbb{R}} f * e^{2\pi i \xi \cdot}\text{”}$$

donde hay que tener cuidado en qué sentido leemos las igualdades. Para dejar de lado la frase "bajo hipótesis adecuadas" es que se trabaja sobre el "espacio natural" para la transformada de Fourier, precisamente en el espacio de Schwartz $\mathcal{S}$ (y su dual).

Tanto $L^1(\mathbb{S}^1)$ como $L^1(\mathbb{R})$ son ejemplos de álgebras de Banach conmutativas.

Teorema 2.35. *[Dij, p.26 y 47] Dado G un grupo topológico, el álgebra de convolución $L^1(G)$ es conmutativa si y sólo si G es abeliano.*

Pasemos a resumir la teoría general de Gelfand para álgebras de Banach conmutativas con y sin unidad.

Definición 2.36. Dada $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach conmutativa se define su *espectro* Σ como el conjunto de homomorfismos de $\mathcal{A}$ en $\mathbb{C}$ no idénticamente nulos. Dotamos a Σ de la topología de la convergencia puntual. Si $x \in \mathcal{A}$, se define su *transformada de Gelfand* $\widehat{x}$ (o $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}(x)$) como la función

$$\widehat{x} : \Sigma \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\widehat{x}(\varphi) := \varphi(x).$$

Para cada $x \in \mathcal{A}$, $\widehat{x}$ resulta una función continua. El espacio de funciones continuas $C(\Sigma)$ es un álgebra de Banach con el producto puntual y con la norma $\|\cdot\|_\infty$.

Teorema 2.37. *[Fo, Teorema 1.12] Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach conmutativa con unidad, entonces la aplicación*

$$\varphi \longmapsto Nú(\varphi)$$

es una correspondencia biunívoca entre Σ y el conjunto de ideales maximales de $\mathcal{A}$.

Teorema 2.38. *[Fo, Teorema 1.13 y 1.30] Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach conmutativa.*

- *Si $\mathcal{A}$ tiene unidad, entonces la transformada de Gelfand es un homomorfismo de $\mathcal{A}$ en $C(\Sigma)$.*
- *Si $\mathcal{A}$ no tiene unidad, entonces la transformada de Gelfand es un homomorfismo de $\mathcal{A}$ en $C_0(\Sigma)$, donde $C_0(\Sigma)$ es el espacio de funciones continuas que se hacen cero en el punto dado por la compactificación de Alexandroff.*

Además, para cada $x \in \mathcal{A}$,

$$\|\widehat{x}\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n},$$

donde $x^n := x * ... * x$, n veces.

Observación 2.39. El límite $\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}$ coincide con el *radio espectral* de x (cf. [Fo, Teorema 1.8]).

Observación 2.40. En el caso en que el álgebra de Banach $\mathcal{A}$ tenga aún más estructura, sea una $\mathbb{C}^*$-álgebra (ver [Fo, Capítulo 1]), el teorema de Gelfand-Naimark ([Fo, Teorema 1.20 y 1.31]) establece que la transformada de Gelfand es un isomorfismo isométrico entre $\mathcal{A}$ en $C(\Sigma)$ (o $C_0(\Sigma)$ en el caso de no tener unidad).

En general, si G es abeliano, usando el Corolario 1.26, el espectro de $L^1(G)$ se puede identificar con $\widehat{G}$, asociando a cada $\pi \in \widehat{G}$ el funcional lineal continuo

$$\pi(f) := \int_G \pi(x) f(x)\, dx \qquad \forall f \in L^1(G)$$

(cf. [Fo, Teorema 4.2]). Además coinciden la topología compacto-abierta con la topología de la convergencia puntual. Es por ello que, para los grupos topológicos abelianos, $\widehat{G}$ se llama el *grupo dual* de G.

Proposición 2.41. *[Fo, Proposición 4.3] Sea G un grupo topológico abeliano.*

- *Si G es compacto, entonces $\widehat{G}$ es discreto.*
- *Si G es discreto, entonces $\widehat{G}$ es compacto.*

Los espacios $L^1(\mathbb{S}^1)$ y $L^1(\mathbb{R})$ con sus respectivos productos de convolución y norma $\|\cdot\|_1$ son ejemplos de álgebras de Banach conmutativas sin unidad donde la transformada de Fourier coincide con la transformada de Gelfand

$$\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$$

luego de identificar sus espectros con $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{R}$, respectivamente (cf. [Fo, Teorema 4.5]). De aquí en adelante usaremos indistintamente la notación $\mathcal{F}(f)$ y $\widehat{f}$ para la transformada de Fourier clásica de una función f. Por su parte ℓ^1 también es un álgebra de Banach conmutativa y esta sí tiene unidad. Su espectro se identifica con $\mathbb{S}^1$ ([Fo, Teorema 4.5]) y la transformada de Gelfand de $x \in \ell^1$ está dada por

$$\widehat{x}(e^{i\theta}) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n) e^{in\theta}$$

que es justamente el operador (2.2) que habíamos llamado "de síntesis".

Observación 2.42. <u>Teorema de Bochner en $G = \mathbb{R}$</u>: Si $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ es tal que $g(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces su transformada de Fourier $\widehat{g}$ es una función de tipo positivo. Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$, entonces su transformada de Fourier satisface $\widehat{f} \geq 0$. Más aún, toda función de tipo positivo en $\mathbb{R}$ es la transformada de Fourier de una medida de Borel positiva finita. (Revisar Teorema 2.34.)

Teorema 2.43 (Principio de dualidad de Pontrjagin)**.** *[Fo, Teorema 4.31] Sea G un grupo topológico abeliano. Cada $x \in G$ define un carácter $\varphi(x)$ del grupo $\widehat{G}$ por*

$$(\varphi(x))(\xi) := \xi(x) \qquad \forall \xi \in \widehat{G}$$

y esta correspondencia define un homeomorfismo entre G y $\widehat{\widehat{G}}$.

Teorema 2.44 (Fórmula de inversión para grupos abelianos)**.** *[Fo, Teorema 4.32] Sea G un grupo topológico abeliano. Si $f \in L^1(G)$ y $\widehat{f} \in L^1(\widehat{G})$, entonces*

$$f(x) = \int_{\widehat{G}} \xi(x)\widehat{f}(\xi)\, d\xi \quad p.p.,$$

donde $d\xi$ es la medida de Haar de $\widehat{G}$. Si además f es continua la igualdad vale para todo $x \in G$.

Teorema 2.45. *[Fo, Corolario 4.26] Si G es un grupo topológico abeliano y compacto cuya medida de Haar es una medida de probabilidad (es decir G es de medida 1), entonces $\widehat{G}$ es una base ortonormal de $L^2(G)$.*

Dejando de lado el caso de los grupos topológicos abelianos, para los grupos topológicos G compactos, el *Teorema de Peter-Weyl* (ver [Fo, Sección 5.2]) da cuenta justamente de una descomposición en suma directa del $L^2(G)$ a partir de descomponer la acción regular a izquierda o a derecha del grupo G sobre sí mismo.

Por el lado de la teoría de representaciones, una de las motivaciones de esta tesis tiene que ver con estudiar la descomposición del espacio de funciones de cuadrado integrable sobre una variedad homogénea G/K. Esta descomposición deberá ser en espacios que sean invariantes por la acción de G. En particular, estaremos interesadas en grupos de la forma $G = K \ltimes N$ con N un grupo de Lie nilpotente (o abeliano como $\mathbb{R}^n$) y K un subgrupo compacto de automorfismos de N (por ejemplo $\mathrm{SO}(n)$ en el caso en que $N = \mathbb{R}^n$). Para estos casos la descomposición de funciones sobre $G/K \simeq N$ será en subespacios invariantes por traslaciones dadas por N e invariantes por la acción de K. La teoría clásica se aboca a espacios de funciones a valores escalares y en esta tesis abordaremos espacios de funciones a valores vectoriales (o matriciales).

2.3. El teorema del núcleo de Schwartz y la convolución

Para fijar ideas conceptuales comenzaremos con el caso clásico, es decir, trabajaremos en espacios euclídeos.

Dadas $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ y $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, el *producto tensorial*

$$(u \otimes v)(x, y) := u(x)v(y)$$

define una función en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$.

Notación. *Dadas una distribución $\Phi \in \mathcal{D}'$ y una función $u \in \mathcal{D}$ denotaremos la evaluación de Φ en u por*

$$\Phi(u) := \langle \Phi, u \rangle.$$

Esta notación cobra mucho sentido en los espacios donde vale el teorema de representación de Riesz.

Lema 2.46. *Si $\Phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ es tal que $\langle \Phi, u \otimes v \rangle = 0$ para toda $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ y toda $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, entonces $\Phi \equiv 0$.*

Demostración. Sean $\{\varphi_n\}$ y $\{\psi_n\}$ aproximaciones de la identidad en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente. Se puede ver que $\{\eta_n := \varphi_n \otimes \psi_n\}$ es una aproximación de la identidad en $\mathbb{R}^{n+m}$. Por hipótesis se tiene

$$\Phi * \eta_\epsilon(x, y) = \langle \Phi, L_{(x,y)}(\eta_n) \rangle = \langle \Phi, L_x(\varphi_n) \otimes L_y(\psi_n) \rangle = 0.$$

Luego, $\Phi \equiv 0$. $\square$

Si consideramos una distribución $\Phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ y construimos un operador "integral" T con núcleo Φ, definido sobre $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ a valores en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$

$$\langle Tu, v\rangle := \langle \Phi, u \otimes v\rangle \qquad \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \text{ y } \forall v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m), \tag{2.31}$$

resulta bien definido, lineal y continuo. Veremos a continuación el enunciado inverso.

Teorema 2.47 (Teorema del núcleo de Schwartz)**.** *Si $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ es un operador lineal y continuo, entonces existe una única distribución $\Phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ tal que*

$$\langle Tu, v\rangle = \langle \Phi, u \otimes v\rangle \qquad \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \text{ y } \forall v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m).$$

Demostración. La unicidad resulta del Lema 2.46. El esquema para construir el núcleo Φ del operador T consiste de tomar aproximaciones de la identidad $\{\varphi_n\}$ y $\{\psi_n\}$ en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, respectivamente, definir las funciones

$$\Phi_n(x, y) := \langle T(L_y(\varphi_n)), L_x(\psi_n)\rangle,$$

probar que definen distribuciones y que convergen en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$. Se define Φ como el límite, en el sentido de las distribuciones, de $\{\Phi_n\}$. Usando resultados de continuidad se puede ver que dadas $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ y $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$

$$\begin{aligned}
\langle \Phi, u \otimes v\rangle &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{n+m}} v(x)\Phi_n(x, y)u(y)\ dy\ dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{n+m}} \langle T(L_y(\varphi_n)), L_x(\psi_n)\rangle\ u(y)v(x)\ dy\ dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \langle T\left(\int_{\mathbb{R}^n} u(y)L_y(\varphi_n)\ dy\right), \int_{\mathbb{R}^n} v(x)L_x(\psi_n)\ dx\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \langle T(u * \varphi_n), v * \psi_n\rangle \\
&= \langle Tu, v\rangle.
\end{aligned}$$

□

Observación 2.48. Una versión del teorema del núcleo de Schwartz para variedades diferenciables, en lugar de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, se puede encontrar en [Die, Teorema 23.9.2].

Para visualizar mejor el teorema imaginemos que $\Phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ es función $\Phi : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{C}$, por ejemplo en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{m+n})$, o una "matriz indexada en $(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$", tal que vista como distribución queda

$$\Phi(h) = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} \Phi(x, y)h(y, x)\ dy\ dx \qquad \forall h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m}).$$

En este caso el operador T asociado a Φ, como en (2.31), está determinado por

$$\begin{aligned}
\langle Tu, v\rangle &= \int_{\mathbb{R}^{n+m}} \Phi(x, y)u(y)v(x)\ dy\ dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, y)u(y)\ dy\right) v(x)\ dx \qquad \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \text{ y } \forall v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para cada $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, Tu define una distribución función en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$, precisamente dada por la función $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\cdot, y)u(y)\ dy$. Podemos entonces escribir directamente a T como

$$(Tu)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, y)u(y)\ dy \qquad \forall x \in \mathbb{R}^m. \tag{2.32}$$

(A lo largo de esta tesis nos referiremos a los operadores de la forma (2.32) como *operadores integrales*). El operador T puede pensarse como el resultado de aplicar la "matriz" Φ al "vector" u. Para cerrar esta idea pasemos a dimensión finita. ¿Cómo se podría interpretar el teorema del núcleo de Schwartz en el caso en que T sea un operador entre espacios vectoriales de dimensión finita, cuál sería el núcleo Φ asociado a T? Reemplacemos $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ por $\mathbb{R}^n$ y $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ por el dual de $\mathbb{R}^m$. Consideremos un operador

lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Elegimos sistemas de coordenadas dados por las bases ortonormales $\{e_j\}_{j=1}^n$ en $\mathbb{R}^n$ y $\{f_i\}_{i=1}^m$ en $\mathbb{R}^m$ con su respectiva base dual $\{f_i^*\}_{i=1}^m$ para poder escribir a los vectores u de $\mathbb{R}^n$ como

$$\begin{bmatrix} u(1) \\ \vdots \\ u(n) \end{bmatrix}$$

y los funcionales lineales de $\mathbb{R}^m$ como vectores fila

$$\begin{bmatrix} v(1) & \cdots & v(m) \end{bmatrix}.$$

Sabemos que T está completamente determinada por su efecto en los vectores e_j. Cada uno de los n vectores Te_j se expresa de manera única como combinación lineal de los $\{f_i\}$

$$Te_j = \sum_{i=1}^m \Phi(i,j) f_i.$$

Los escalares $\Phi(1,j)$,..., $\Phi(m,j)$ son las coordenadas de Te_j en la base ordenada $\{f_i\}$. Por lo tanto,

$$\Phi(i,j) = f_i^*(T(e_j)).$$

Tal expresión también se puede poner en la forma

$$\Phi(i,j) = \langle Te_j, f_i \rangle$$

a partir del teorema de representación de Riesz. Por consiguiente, la transformación T está completamente determinada por los escalares $\Phi(i,j)$. La matriz $m \times n$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi(1,1) & \cdots & \Phi(1,n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Phi(m,1) & \cdots & \Phi(m,n) \end{bmatrix}$$

es la llamada matriz de T con respecto al par de bases $\{e_j\}_{j=1}^n$ y $\{f_i\}_{i=1}^m$. Recíprocamente, la matriz Φ determina completamente a T. (Confrontar cualquier libro de álgebra lineal, por ejemplo [HK, Sección 3.4]). Entonces, en este contexto (2.32) viene a ser la expresión

$$(Tu)(i) = \sum_{j=1}^n \Phi(i,j) u(j) \qquad \forall i \in \{1, ..., m\}$$

y (2.31) toma la forma

$$\langle Tu, v \rangle = \begin{bmatrix} v(1) & \cdots & v(m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi(1,1) & \cdots & \Phi(1,n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Phi(m,1) & \cdots & \Phi(m,n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ \vdots \\ u(n) \end{bmatrix}.$$

Es decir, en coordenadas, Tu es

$$\begin{bmatrix} \Phi(1,1) & \cdots & \Phi(1,n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Phi(m,1) & \cdots & \Phi(m,n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ \vdots \\ u(n) \end{bmatrix}.$$

Podemos concluir que el teorema del núcleo de Schwartz es una extensión al caso de transformaciones lineales y continuas en espacios vectoriales topológicos de dimensión infinita del resultado clásico de álgebra lineal de representación de transformaciones lineales por matrices. Denotando por

$$\delta_x := L_x(\delta) = \text{“}\delta(\cdot - x)\text{”}$$

la traslación de la delta de Dirac, es decir,

$$\delta_x(f) := f(x) \qquad \forall x \in \mathcal{D},$$
$$(\delta_0(f) := \delta(f) = f(0)),$$

en dimensión infinita los conjuntos de funcionales lineales continuos dados por las medidas puntuales $\{\delta_y\}_{y \in \mathbb{R}^n}$ y $\{\delta_x\}_{x \in \mathbb{R}^m}$ “juegan el rol” de las bases ortonormales (o sistemas de coordenadas) $\{e_j\}_{j=1}^n$ y $\{f_i\}_{i=1}^m$ o, más bien, el de sus bases duales. Esto se formaliza tomando aproximaciones de la identidad que son justamente las que intervienen en el esquema de demostración presentado anteriormente.

Observación 2.49. Por último nos gustaría hacer notar que, para $1 \leq p, q < \infty$, como $\mathcal{D}$ es un subespacio denso de todos los espacios L^p y L^q, que a su vez están incluidos en $\mathcal{D}'$ (viendo las funciones como funcionales lineales), pensar en un operador de $\mathcal{D}$ en $\mathcal{D}'$ abarca a los operadores de L^p en L^q. De hecho, es el contexto de las distribuciones el que permite pensar a las transformaciones lineales y continuas de manera "matricial".

Pasemos a estudiar el caso de operadores que presentan una cierta "simetría". En general, una *simetría* es "una propiedad de un sistema físico que se mantiene invariante bajo ciertas transformaciones". En nuestro caso lo que estudiaremos son operadores $T : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ *invariantes por traslaciones*, es decir, tales que satisfacen

$$L_x \circ T = T \circ L_x \qquad \text{o equivalentemente} \qquad T = (L_x)^{-1} \circ T \circ L_x \tag{2.33}$$

para todo x en $\mathbb{R}^n$ en primera instancia (luego generalizaremos a dominios más generales). Recordemos las definiciones (1.2) y (1.3). Si G es un grupo actuando en un conjunto X, se puede definir que G actúa en las funciones u con dominio X por

$$(g \cdot u)(x) := u(g^{-1} \cdot x) \qquad \forall x \in X, g \in G$$

y también que G actúa en los operadores T aplicados a funciones u con dominio en X por

$$(g \cdot T)(u) := T(g^{-1} \cdot u) = T(x \longmapsto u(g \cdot x)) \qquad \forall g \in G.$$

Veamos de manera intuitiva cómo está caracterizado un operador lineal, continuo e invariante por traslaciones en $\mathbb{R}$. Para ello conviene pensar que nuestro operador T es una máquina a la cual entran señales y de la cual salen señales. Esta máquina es en principio una "caja negra", no sabemos de qué manera fue construida, cómo ensamblaron cada uno de sus engranajes. Es decir, no sabemos la fórmula explícita del operador. Pero lo que sí sabemos son sus propiedades:

- lineal,
- continuo,
- invariante ante traslaciones.

Observemos la Figura 2.6. Supongamos que entra a esta máquina un impulso inicial ("la medida δ_0") y sale una determina señal. Si trasladamos un poco el impulso de entrada y lo enviamos por la máquina observaremos la señal que había salido anteriormente pero también trasladada (mirar lo punteado en la figura).

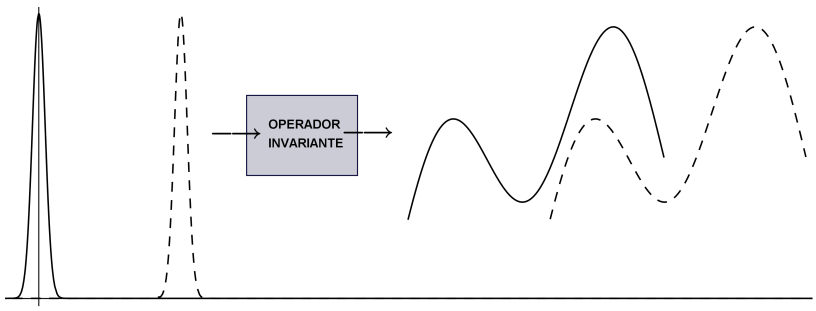


Figura 2.6: Operador invariante por traslaciones.

Enviemos de golpe, al mismo tiempo, una cantidad finita de impulsos soportados en distintos puntos, digamos δ_0, δ_{x_1}, δ_{x_2}, δ_{x_3}, como muestra la Figura 2.7. Sabiendo la imagen de cada impulso por separado y usando la linealidad del operador, conocemos el resultado de esta operación. Permitiéndonos pensar que una función u en $\mathbb{R}$ se descompone como una "suma infinita" de $u(x)\delta_x = u(x)\delta(\cdot - x)$ variando $x \in \mathbb{R}$, usando ahora también que el operador es continuo y que sabemos el resultado que daba el impulso inicial "$T(\delta_0) = F$" podemos intuir que $T(u) = u * F$. El siguiente teorema formaliza esta intuición.

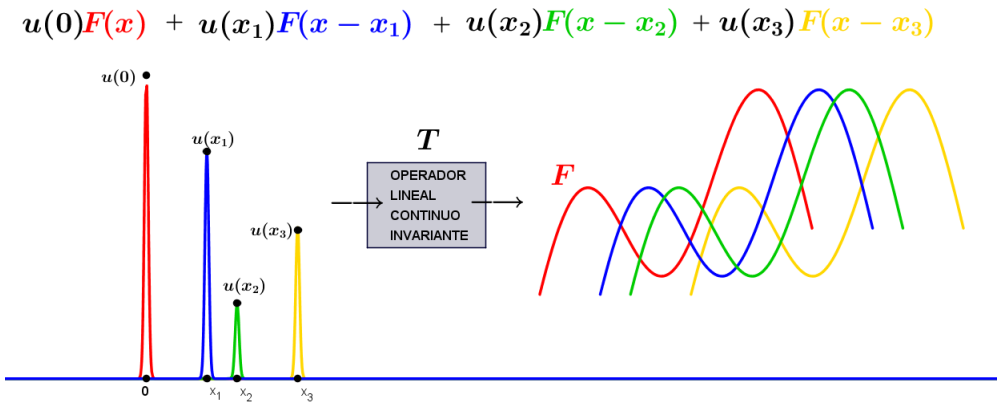


Figura 2.7: Operador invariante por traslaciones $T(u) = u * F$.

Teorema 2.50. *[Ru1, Teorema 6.33] Si $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ es un operador lineal, continuo e invariante por traslaciones, entonces existe una única distribución $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$T(u) = u * F \qquad \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

En este caso el núcleo Φ del operador T es de la forma

$$\Phi(x, y) = F(x - y).$$

Si visualizamos esto de manera discreta tenemos una matriz cuadrada, digamos $n \times n$, de la forma

$$\Phi = \begin{bmatrix} F(0) & F(1) & \cdots & F(n-1) & F(n) \\ F(1) & F(2) & \cdots & F(n) & F(0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F(n-1) & F(n) & \cdots & F(n-3) & F(n-2) \\ F(n) & F(0) & \cdots & F(n-2) & F(n-1) \end{bmatrix}$$

que por lo tanto está completamente determinada por uno de sus vectores fila o columna.

Observación 2.51. Dado $T : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$ lineal, continuo y tal que conmuta con traslaciones, se prueba que existe una única distribución temperada $\Phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $Tu = u * F$ para toda función en el espacio de Schwartz $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Esto vale para $1 \leq p, q \leq \infty$ pero donde debemos convenir que si $p = \infty$ hay que reemplazar L^∞ por C_0. (En el caso en que $q < p$, $T \equiv 0$). Recíprocamente, dada $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y T operador de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ definido por $Tu = u * F$, para el cual existe una constante $c > 0$ tal que $||\Phi * u||_q \leq c||F||_p$ $\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, se puede ver que T se extiende de modo único a un operador lineal y continuo de $L^p(\mathbb{R}^n)$ en $L^q(\mathbb{R}^n)$ que conmuta con traslaciones.

Caracterizar los operadores de convolución $T_F : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$, $T_F(u) = u * F$, es un problema relevante y muy estudiado en análisis, del cual sólo se conocen repuestas parciales. Se sabe que los operadores de convolución $T_F : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ están caracterizados por cumplir que $\widehat{F} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Por su parte, un operador T lineal y acotado de $L^1(\mathbb{R}^n)$ en $L^1(\mathbb{R}^n)$ conmuta con traslaciones si y sólo si existe una medida de Borel finita μ tal que $T(u) = u * \mu$ para toda función u de clase Schwartz.

Observación 2.52. Para esta observación usaremos el espacio de Schwartz (y su dual) por ser el espacio "natural" para la transformada de Fourier $\mathcal{F}$. Si $T : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ es de la forma $T(u) = u * F$ y $F \in \mathcal{S}$, entonces

$$M := \mathcal{F} \circ T \circ \mathcal{F}^{-1}$$

es un operador *de multiplicación* con *multiplicador* $\mathcal{F}(F)$ en el sentido que

$$M(u)(x) = \mathcal{F}(F)(x)\ u(x). \tag{2.34}$$

Esto se debe a la propiedad de la transformada de Fourier de ser un homomorfismo respecto de los productos de convolución y puntual entre funciones.

Notemos que si queremos generalizar el Teorema 2.50 a otros dominios que no sean $\mathbb{R}$, necesitamos, para que tenga sentido, una noción de "traslación". Se podrá generalizar a grupos de Lie, por ejemplo, ya que el hecho que sean variedades con una operación entre sus puntos permite tener una noción tanto de traslación como de convolución. Más generalmente, siempre que tengamos una acción de un grupo en un espacio podremos esperar poder definir una convolución. Esto es lo que abordaremos a continuación.

Para finalizar, entonces, pasemos a una versión en espacios homogéneos. Sea M un espacio homogéneo de un grupo topológico localmente compacto G. Sea $K = G_{x_0}$ el estabilizador por la acción de G de un elemento arbitrario $x_0 \in M$. Sabemos que M es homeomorfa al espacio cociente G/K. Sea μ una medida de Borel positiva, regular sobre M y G-invariante dada por la Proposición 1.16.

Sea T un operador integral sobre M dado por

$$Tu(x) := \int_M \Phi(x,y)u(y)\ dy \qquad \forall u \in C_c(M) \tag{2.35}$$

con Φ continua sobre $M \times M$. Decimos que T es *G-invariante* si $T(g \cdot u) = g \cdot (Tu)$ $\forall g \in G$ y $\forall u \in C_c(M)$.

Es fácil ver que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- T es G-invariante.
- $\Phi(g \cdot x, g \cdot y) = \Phi(x,y)$ para todo $g \in G$ y x, $y \in M$.
- Existe una función φ continua sobre M y K-invariante (es decir, $\varphi(k \cdot x) = \varphi(x)$ $\forall k \in K$ y $\forall x \in M$) tal que $\Phi(x, g \cdot x_0) = \varphi(g^{-1} \cdot x)$. De hecho Φ y φ se relacionan mediante la identidad $\Phi(x, x_0) = \varphi(x)$ $\forall x \in M$.
- Existe una función F continua sobre G y bi-K-invariante (es decir, $F(k_1 g k_2) = F(g)$ $\forall k_1$, $k_2 \in K$ y $\forall g \in G$) tal que $\Phi(g \cdot x_0, h \cdot x_0) = F(h^{-1}g)$ $\forall h$, $g \in G$. De hecho, $F(g) = \varphi(g \cdot x_0)$ $\forall g \in G$.

Luego, si llamamos $\theta(g) := g \cdot x_0$ la proyección canónica de G en G/K y θ^* a la aplicación que a cada $f \in C_c(G/K)$ asocia una función sobre G dada por $\theta^*(f) = f \circ \theta$ como en (1.9), entonces todo operador T integral como en (2.35) que sea G-invariante resulta de convolución en el sentido que

$$\theta^*(Tu) = (\theta^*(u)) * F \qquad \forall u \in C_c(M). \tag{2.36}$$

En lo anterior, mediante θ^* hemos podido "levantar" funciones definidas sobre la variedad M a funciones definidas sobre el grupo G donde tenemos un producto y por lo tanto tiene sentido la convolución. El hecho que el núcleo F del operador T (o del operador "levantado" a G) sea bi-K-invariante puede recordarse y visualizarse con el siguiente ejemplo. Hay que tener presente que el hecho de ser invariante a derecha por K permite identificarlo con una función en el cociente $G/K \simeq M$. La invarianza a izquierda por K hace que además sea una función constante en las órbitas del espacio M dadas por la acción del subgrupo K.

Ejemplo 2.53. Consideremos $M = \mathbb{R}^2$ como espacio homogéneo con respecto a $G = M(2) = \mathrm{SO}(2) \ltimes \mathbb{R}^2$ (como en el ejemplo 1.14 para $n = 2$). Sabemos que $K = \mathrm{SO}(2)$ se identifica con el estabilizador de un punto en el plano por la acción de rotación y traslación. Precisamente consideremos $K = G_0$ el estabilizador del origen de coordenadas de $\mathbb{R}^2$.

Notar que por tener un producto semidirecto

$$(k,x) = (\mathrm{I},x)(k,0) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^2,\ \forall k \in \mathrm{SO}(2). \tag{2.37}$$

Así, las funciones u sobre $\mathbb{R}^2$ pueden pensarse como funciones $\mathbf{u}$ sobre G que son invariantes a derecha por K y viceversa:

$$\mathbf{u}(k,x) = \mathbf{u}((\mathrm{I},x)(k,0)) = \mathbf{u}(\mathrm{I},x) = u(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^2,\ \forall k \in \mathrm{SO}(2).$$

En este caso $M = \mathbb{R}^2$ es un grupo además de una variedad y no precisaremos de la aplicación θ^*. Sea T un operador integral definido como en (2.35)

$$Tu(x) := \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x,y)u(y)\ dy \qquad \forall u \in C_c(\mathbb{R}^2),$$

para $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ continua. Hemos visto recientemente en el Teorema 2.50 que si T conmuta con traslaciones entonces

$$\Phi(x, y) = F(x - y)$$

para una función regular $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ (o para una función definida sobre G, invariante a derecha por K). La acción del grupo $G = \mathrm{SO}(2) \ltimes \mathbb{R}^2$ sobre $M = \mathbb{R}^2$ es tanto por traslaciones como por rotaciones. Entonces, si además de ser T invariante por traslaciones, es invariantes por rotaciones, nos preguntamos ¿Tendrá el núcleo F alguna particularidad? Por lo que vimos anteriormente, ya anticipamos que la respuesta es ¡Sí! El núcleo F siempre será una función constante en las órbitas de $\mathbb{R}^2$ por la acción del estabilizador del 0, que es isomorfo a $\mathrm{SO}(2)$. Es decir, será una función invariante por rotaciones o dicho de otro modo, radial.

Para convencernos de esto veamos primero a nivel "algebraico" qué significa que una función sobre G sea bi-K-invariante en este ejemplo. Vimos que de (2.37) las funciones sobre G, invariantes a derecha por K, pueden pensarse como funciones de (I, x). Usando la expresión del producto semidirecto tenemos

$$(k, 0)(\mathrm{I}, x) = (k, k \cdot x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^2,\ \forall k \in \mathrm{SO}(2). \tag{2.38}$$

Luego, si además una función es invariante a izquierda por K, usando nuevamente (2.37) y ahora también (2.38) tenemos que las funciones sobre G, bi-K-invariantes son funciones en (I, x) (es decir en $\mathbb{R}^2$) tales que

$$F(I, x) = F((k, 0)(\mathrm{I}, x)) = F((k, k \cdot x)) = F(I, k \cdot x) \qquad \text{para todo } k \in K.$$

Por lo tanto, se identifican con funciones sobre $\mathbb{R}^2$, invariantes por la acción de K.

Ahora nos convenzamos a nivel "intuitivo". Volvamos a la Figura 2.6. De allí podemos afirmar que el núcleo F es la salida por medio de operador T de la "función impulso" δ. Como vemos en la Figura 2.8, esta es invariante ante rotaciones. Entonces, si la rotamos de cualquier forma, su salida por T será siempre la misma debido a que T conmuta con rotaciones. Luego, F es también una función radial.

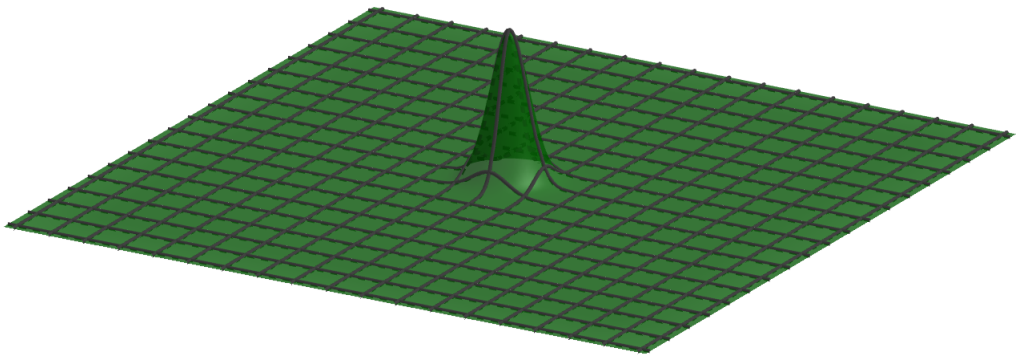


Figura 2.8: La "función impulso" en $\mathbb{R}^2$ es invariante por rotaciones.

Una de las motivaciones de esta tesis es estudiar una generalización de la transformada de Fourier para poder expresar como en (2.34) a operadores que son de convolución. Nos interesarán operadores como en (2.36), es decir, operadores invariantes por la acción de un grupo G y que estén aplicados sobre espacios de funciones de una variedad homogénea. En el próximo capítulo estudiaremos espacios que conforman los núcleos F de convolución de estos operadores (es decir, funciones F sobre G que son bi-K-invariantes). Esto corresponde a la teoría clásica del análisis esférico ya que todas las funciones involucradas son a valores escalares. Posteriormente, los problemas que estudia esta tesis tienen que ver con operadores de convolución aplicados sobre espacios de funciones a valores vectoriales sobre una variedad homogénea.

2.4. Pares de Gelfand, funciones esféricas y transformada de Fourier esférica

Pares de Gelfand

Sea G un grupo topológico localmente compacto y Hausdorff con medida de Haar a izquierda dx y sea K un subgrupo compacto de G.

Definición 2.54. Decimos que (G, K) es un *par de Gelfand* si el álgebra de convolución $L^1(G)^\sharp$ es conmutativa.

Ejemplo 2.55. G un grupo abeliano y $K = \{e\}$. (Ver Teorema 2.35.)

Proposición 2.56. *[Dij, Proposición 6.1.2] Si (G, K) es un par de Gelfand, entonces G es unimodular.*

En la Sección 2.1 hemos supuesto por simplicidad G unimodular pues teníamos en mente esta proposición,

Criterio 2.57. *[Dij, Proposición 6.1.3] Si existe un automorfismo involutivo Θ de G que satisface*

$$x^{-1} \in K\Theta(x)K \quad \forall x \in G,$$

entonces (G, K) es un par de Gelfand.

Ejemplo 2.58. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie semisimple y B su forma de Killing. Una involución Θ de $\mathfrak{g}$ es un automorfismo del álgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ tal que $\Theta \circ \Theta$ es la función identidad. Una involución se dice *de Cartan* si $B_\Theta(X, Y) := -B(X, \Theta(Y))$ es una forma bilineal definida positiva. Por ejemplo, la transformación identidad es trivialmente una involución y es la única involución de Cartan de un álgebra de Lie semisimple $\mathfrak{g}$ si y sólo si la forma de Killing de $\mathfrak{g}$ es definida negativa si y sólo si $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie de un grupo de Lie compacto semisimple. Dado G un grupo de Lie semisimple, siempre existe una involución de Cartan Θ en su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y es única salvo conjugación por automorfismos interiores (cf. [Kn, Corolarios 6.18 y 6.19]). Sean $\mathfrak{k}$ y $\mathfrak{p}$ los autoespacios asociados a los autovalores 1 y -1, respectivamente, del operador Θ. Entonces escribimos $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ y esta se llama la *descomposición de Cartan* de $\mathfrak{g}$. Sea K el grupo de Lie simplemente conexo con álgebra de Lie $\mathfrak{k}$. Supongamos que el centro de G es finito. Por [Kn, Teorema 6.31] tenemos que

- existe en G un automorfismo de grupos de Lie cuya diferencial es Θ, que por abuso de notación también llamaremos Θ y tal que $\Theta \circ \Theta$ es la aplicación identidad;
- el subgrupo de G fijado por Θ es K y este es el subgrupo compacto maximal de G;
- la aplicación

$$\begin{aligned} K \times \mathfrak{p} &\longrightarrow G \\ (k, X) &\longmapsto \exp(X)k \end{aligned}$$

  es un difeomorfismo global, por lo que podemos poner $G = PK$, donde $P = \exp(\mathfrak{p})$ ("descomposición polar").

Se obtiene la descomposición $G = KAK$, donde $A = \exp(\mathfrak{a})$ para cualquier subálgebra abeliana maximal $\mathfrak{a}$ contenida en $\mathfrak{p}$. El par (G, K) se llama *par simétrico* y a partir de lo anterior y del Criterio 2.57 se ve que es un par de Gelfand.

Teorema 2.59. *[BJR1, Teorema A] Sea N un grupo de Lie nilpotente, conexo, simplemente conexo y K un subgrupo compacto y conexo de automorfismos de N. Si $(K \ltimes N, K)$ es un par Gelfand entonces N es (a lo sumo) dos pasos nilpotente.*

Este resultado se deduce de [BJR1, Teorema 1.12] que establece que $(K \ltimes N, K)$ es de Gelfand si y sólo si el producto (como conjuntos) de K-órbitas en N es conmutativo, es decir, si y sólo si para todo $x, y \in N$

$$(K \cdot x)(K \cdot y) = (K \cdot y)(K \cdot x),$$

donde $K \cdot x := \{k \cdot x \mid \ k \in K\}$ y el producto de conjuntos es como en (1.6). Esto es reminiscente del Teorema 2.35.

La teoría de representaciones nos aportará un nuevo criterio. Antes de enunciarlo veamos algunas nociones y resultados preliminares.

Sea $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ una representación unitaria de G. Asociada a π tenemos una representación del álgebra $L^1(G)$ definida por

$$\langle \pi(f)v, w\rangle_{\mathcal{H}_\pi} := \int_G f(g)\langle \pi(g)v, w\rangle_{\mathcal{H}_\pi} dg \qquad \forall v, w \in \mathcal{H}_\pi, f \in L^1(G). \tag{2.39}$$

Es una representación ya que

$$\pi(f * g) = \pi(f)\pi(g).$$

Esta representación de $L^1(G)$ es "no-degenerada" en el sentido que si $v \in \mathcal{H}_\pi$ es tal que $\pi(f)v = 0$ para toda $f \in L^1(G)$, entonces $v = 0$. Más aún, es irreducible si y sólo si $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ lo es.

Decimos que un vector $v \in \mathcal{H}_\pi$ es fijado por K si $\pi(k)v = v$ para todo $k \in K$. Indicamos por $\mathcal{H}_\pi(K)$ al subespacio cerrado de $\mathcal{H}_\pi$ constituido por tales vectores.

Observación 2.60. El operador

$$P_\pi^K := \int_K \pi(k)\, dk \tag{2.40}$$

es el proyector ortogonal de $\mathcal{H}_\pi$ en $\mathcal{H}_\pi(K)$. Además, una función $f \in L^1(G)$ es

(i) K-invariante a derecha si y sólo si, para cada representación $\pi \in \widehat{G}$, $\pi(f) = \pi(f) \circ P_\pi^K$;

(ii) K-invariante a izquierda si y sólo si, para cada representación $\pi \in \widehat{G}$, $\pi(f) = P_\pi^K \circ \pi(f)$;

(iii) bi-K-invariante si y sólo si, para cada representación $\pi \in \widehat{G}$, $\pi(f) = P_\pi^K \circ \pi(f) \circ P_\pi^K$.

En general, dada $f \in L^1(G)$, sea

$$f^\sharp(x) := \int_{K\times K} f(k_1 x k_2)\, dk_1\, dk_2 \qquad (\forall x \in G), \tag{2.41}$$

entonces $P_\pi^K \circ \pi(f) \circ P_\pi^K = \pi(f^\sharp)$.

Lema 2.61. *[Dij, Lema 6.2.1] Sea $(\pi, \mathcal{H}_\pi) \in \widehat{G}$. Para $f \in L^1(G)^\sharp$, sea $\pi_{|_K}(f)$ la restricción de $\pi(f)$ a $\mathcal{H}_\pi(K)$. Entonces, o bien $\mathcal{H}_\pi(K) = \{0\}$ o bien $\pi_{|_K}$ define una representación irreducible de $L^1(G)^\sharp$.*

Las funciones de tipo positivo se utilizarán para probar los siguientes dos teoremas.

Teorema 2.62 (Teorema de Gelfand-Raikov)**.** *[Fo, Teorema 3.34] Si G es un grupo topológico localmente compacto, toda representación unitaria irreducible de G separa puntos en G. Esto es, dados x_0 e y_0 puntos distintos en G, existe una representación unitaria irreducible π de G tal que $\pi(x) \neq \pi(y)$.*

Demostración. Procederemos por absurdo. Sea $z_0 = x_0^{-1}y_0$. Supongamos que no podemos separar z_0 de e, es decir, $\pi(z_0) = \pi(e)$ para toda $(\pi, \mathcal{H}_\pi) \in \widehat{G}$. Por lo tanto, para cada $g \in G$ se tiene que

$$\pi(gz_0) = \pi(g) \qquad \forall \pi \in \widehat{G}. \tag{2.42}$$

Asociada a cada $(\pi, \mathcal{H}_\pi) \in \widehat{G}$ definimos una función

$$\varphi_\pi(g) := \langle \varepsilon_\pi, \pi(g)\varepsilon_\pi \rangle_{\mathcal{H}_\pi} \qquad (\forall g \in G), \tag{2.43}$$

donde ε_π es un vector arbitrario de $\mathcal{H}_\pi$ ya que como π es irreducible, todos sus vectores son cíclicos. Cada una de estas funciones de tipo positivo, satisface $\varphi_\pi = R_{z_0}\varphi_\pi$ (por (2.42)) y $\varphi_\pi \in \mathcal{E}(\mathcal{C}_0(G))$ (por el Teorema 2.31). Por el teorema de Krein–Milman (2.29) toda función $\varphi \in \mathcal{C}_0(G)$ es R_{z_0}-invariante. Consideramos V un entorno de e simétrico, es decir, $V = V^{-1}$ y tal que $z_0 \notin V^2$ (esto siempre lo podemos conseguir ya que la topología de G es Hausdorff). Sea χ_V la función característica de V y sea

$$\varphi := \chi_V * \chi_V^* = \chi_V * \chi_V.$$

Por la Observación 2.17 sabemos que dicha función φ es de tipo positivo. Además, $\varphi(e) = 1$ y $\varphi(z_0) = 0$. Pero a su vez $\varphi(e) = \varphi(z_0)$ y por lo tanto hemos llegado a una contradicción. □

Teorema 2.63. *Sea $f \in L^1(G)$. Si $\pi(f) = 0$ para toda $\pi \in \widehat{G}$, entonces $f = 0$.*

Demostración. La prueba de este resultado es similar a la prueba del teorema anterior.

Sea $f \in L^1(G)$ tal que $\pi(f) = 0$ para toda $(\pi, \mathcal{H}_\pi) \in \widehat{G}$. Entonces, para todo $x \in G$,

$$\pi(L_x f) = 0 \qquad \forall \pi \in \widehat{G} \tag{2.44}$$

pues

$$\begin{aligned}\langle \pi\left(L_x f\right) v, w\rangle_{\mathcal{H}_\pi} &= \int_G f(x^{-1}y)\langle \pi(y)v, w\rangle_{\mathcal{H}_\pi}\ dy \\ &= \langle \pi\left(f\right) v, \pi(x^{-1})w\rangle_{\mathcal{H}_\pi} \qquad \forall v, w \in \mathcal{H}_\pi.\end{aligned}$$

Para cada $\pi \in \widehat{G}$ consideramos la función como en (2.43): $\varphi_\pi(g) := \langle \varepsilon_\pi, \pi(g)\varepsilon_\pi\rangle_{\mathcal{H}_\pi}$ para algún $\varepsilon_\pi \in \mathcal{H}_\pi$. Por (2.44), para cada $x \in G$

$$\begin{aligned}f * \varphi_\pi(x^{-1}) &= \int_G L_x f(y)\varphi_\pi(y^{-1})\ dy \\ &= \pi(L_x f) = 0.\end{aligned}$$

Análogamente a lo argumentado en la prueba anterior, por el teorema de Krein-Milman, para toda $\varphi \in \mathcal{C}_0(G)$ se cumple $f * \varphi = 0$.

Sea V un entorno de e tal que $V = V^{-1}$ y sea χ_V su función característica. Sea $\{h_n\}$ una aproximación de la identidad en G, con $h_n \in L^1(G) \cap L^2(G)$ ($\forall n \in \mathbb{N}$). Luego, $\{h_n * h_n^*\}$ es también una aproximación de la identidad en G donde cada $h_n * h_n^*$ es de tipo positivo. Entonces tenemos por un lado que $f*(h_n*h_n^*) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por otro lado que $f * (h_n * h_n^*)$ tiende a f en $L^1(G)$. Por lo tanto $f = 0$ en $L^1(G)$. □

Criterio 2.64. *[Dij, Proposición 6.3.1] El par (G, K) es de Gelfand si y sólo si para toda $(\pi, \mathcal{H}_\pi) \in \widehat{G}$ se tiene que* $\dim(\mathcal{H}_\pi(K)) \leq 1$.

Funciones esféricas

Sea (G, K) un par de Gelfand. Buscaremos determinar los caracteres del álgebra conmutativa $L^1(G)^\sharp$. Comenzaremos por la caracterización de su espacio dual.

Lema 2.65. *Todos los funcionales lineales y continuos de $L^1(G)^\sharp$ son de la forma*

$$\Lambda(f) = \int_G f(x)\overline{\phi(x)}\ dx,$$

con $\phi \in L^\infty(G)^\sharp$. Además, $\|\Lambda\| = \|\phi\|_\infty$.

Demostración. Sea Λ un funcional lineal continuo de $L^1(G)^\sharp$. Por el teorema de Hahn-Banach se extiende a $L^1(G)$ y este, a partir del teorema de representación de Riesz, es de la forma

$$\Lambda(f) = \int_G f(x)\overline{\psi(x)}\ dx \qquad \forall f \in L^1(G)$$

para alguna $\psi \in L^\infty(G)$ y $\|\Lambda\| = \|\psi\|_\infty$. Consideramos

$$\phi(x) := \int_{K\times K} \psi(k_1 x k_2)\ dk_1\ dk_2 \in L^\infty(G)^\sharp.$$

Si $f \in L^1(G)^\sharp$,

$$\begin{aligned}\int_G f(x)\overline{\phi(x)}\ dg &= \int_G f(x) \int_{K\times K} \overline{\psi(k_1 x k_2)}\ dk_1\ dk_2\ dx \\ &= \int_{K\times K}\int_G f(k_1^{-1}xk_2^{-1})\overline{\psi(x)}\ dx\ dk_1\ dk_2 \\ &= \int_G f(x)\overline{\psi(x)}\ dx \\ &= \Lambda(f).\end{aligned}$$

Además, $|\Lambda(f)| \leq \|f\|_1\|\phi\|_\infty$. Por otra parte, de la definición de ϕ tenemos que $\|\phi\|_\infty \leq \|\psi\|_\infty$, por lo cual $\|\Lambda\| = \|\phi\|_\infty$. □

Definición 2.66. Una función $\phi \in L^\infty(G)^\sharp$ se dice *esférica* si el funcional lineal

$$\chi_\phi(f) := \int_G f(x)\phi(x^{-1})\ dx \qquad \forall f \in L^1(G) \tag{2.45}$$

es un carácter no-trivial del álgebra de convolución $L^1(G)^\sharp$, es decir,

$$\chi_\phi(f * g) = \chi_\phi(f)\ \chi_\phi(g) \qquad \forall f, g \in L^1(G)^\sharp.$$

En la literatura a veces no se requiere la hipótesis $\phi \in L^\infty$ sino que ϕ sea una función continua. Si bien veremos que pedir $\phi \in C(G)$ es más general que la condición $\phi \in L^\infty(G)$, optamos por requerir acotación de las funciones esféricas. Fundamentamos esto a partir de recordar una de las motivaciones originales de esta tesis: Lo que relamente estamos buscando son funcionales lineales de subálgebras de funciones integrables que permitan diagonalizar simultáneamente a ciertos operadores y por el teorema de representación de Riesz el espacio dual de $L^1(G)$ se identifica con $L^\infty(G)$.

A la siguiente caracterización de las funciones esféricas la llamamos "propiedad exponencial" por ser la relación funcional que generaliza la propiedad de las funciones exponenciales, $e^{i\langle x+y,\xi\rangle} = e^{i\langle x,\xi\rangle}e^{i\langle y,\xi\rangle}$, que son los caracteres de $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Proposición 2.67. *[Dij, Proposición 6.1.5] Una función $\phi \in L^\infty(G)^\sharp$ es esférica si y sólo si coincide p.p. con una función continua tal que*

$$\int_K \phi(xky)\ dk = \phi(x)\phi(y), \tag{2.46}$$

donde dk denota la medida de Haar de K normalizada. En particular, $\phi(e) = 1$.

Demostración. Sea ϕ una función continua, acotada, bi-K-invariante y que satisface (2.46). Sean $f, g \in L^1(G)^\sharp$,

$$\begin{aligned}
\int_G f(x)\phi(x^{-1})\ dx \int_G g(y)\phi(y^{-1})\ dy &= \int_{G\times G}\int_K f(x)g(y)\phi(x^{-1}ky^{-1})\ dk\ dx\ dy \\
&= \int_{G\times G}\int_K f(x)g(y^{-1}k)\phi(x^{-1}y)\ dk\ dx\ dy \\
&= \int_{G\times G} f(x)g(x^{-1}y)\phi(y^{-1})\ dx\ dy \\
&= \int_G f * g(y)\phi(y^{-1})\ dy.
\end{aligned}$$

Por lo tanto el funcional lineal χ_ϕ definido por (2.45) es multiplicativo.

Recíprocamente, sea $\phi \in L^\infty(G)^\sharp$ tal que el funcional lineal χ_ϕ es multiplicativo. Para cada $f \in L^1(G)$ consideramos $f^\sharp \in L^1(G)^\sharp$ como en (2.41). Sean $f, g \in L^1(G)$,

$$\begin{aligned}
\chi_\phi(f^\sharp * g^\sharp) &= \int_G f^\sharp * g^\sharp(x)\phi(x^{-1})\ dx \\
&= \int_{G\times G}\int_{K\times K}\int_{K\times K} f(k_1yk_2)g(k_1'y^{-1}xk_2')\phi(x^{-1})\ dk_1\ dk_2\ dk_1'\ dk_2'\ dy\ dx \\
&= \int_{G\times G}\int_K f(y)g(x)\phi(x^{-1}ky^{-1})\ dk\ dy\ dx.
\end{aligned}$$

Esta expresión debe ser igual a

$$\begin{aligned}
\chi_\phi(f^\sharp)\ \chi_\phi(g^\sharp) &= \int_G f^\sharp(y)\phi(y^{-1})\ dy \int_G g^\sharp(x)\phi(x^{-1})\ dx \\
&= \int_G f(y)\phi(y^{-1})\ dy \int_G g(x)\phi(x^{-1})\ dx \\
&= \int_{G\times G} f(y)g(x)\phi(y^{-1})\phi(x^{-1})\ dy\ dx.
\end{aligned}$$

Como f y g son funciones arbitrarias en $L^1(G)$, se tiene que ϕ satisface (2.46).

Por último, dadas $f \in L^1(G)$ y $g \in L^1(G)^\sharp$ tenemos por un lado

$$\begin{aligned}\chi_\phi(f^\sharp * g) &= \int_{G\times G}\int_K f(y)g(x)\phi(x^{-1}ky^{-1})\ dk\ dy\ dx\\ &= \int_{G\times G}\int_K f(y)g(kx)\phi(x^{-1}y^{-1})\ dk\ dy\ dx\\ &= \int_{G\times G} f(y)g(x)\phi(x^{-1}y^{-1})\ dy\ dx\end{aligned}$$

y por otro lado

$$\chi_\phi(f^\sharp)\ \chi_\phi(g) = \int_{G\times G} f(y)g(x)\phi(y^{-1})\phi(x^{-1})\ dy\ dx.$$

Nuevamente, como $f \in L^1(G)$ es arbitraria,

$$\chi_\phi(g)\phi(x^{-1}) = \left(\int_G g(x)\phi(x^{-1})\ dx\right)\phi(y^{-1}) = \int_G g(x)\phi(x^{-1}y^{-1})\,dx = (g*\phi)(y^{-1}) \quad \text{para casi todo } y \in G.$$

Como $g * \phi$ es una función continua, eligiendo g tal que $\chi_\phi(g) \neq 0$, se deduce que ϕ es una función continua en casi todo punto. □

Corolario 2.68. *[Dij, Proposición 6.1.6] Una función $\phi \in L^\infty(G)^\sharp$ es esférica si y sólo si*

(i) $\phi(e)$=1.

(ii) para toda $f \in L^1(G)^\sharp$ existe un número complejo $\chi(f)$ tal que $f * \phi = \chi(f)\phi$.

Demostración. De la prueba de la proposición anterior sabemos que si ϕ es esférica entonces satisface (i) y (ii) con $\chi(f) = \chi_\phi(f)$ $(\forall f \in L^1(G)^\sharp)$. Recíprocamente, si ϕ satisface (i) y (ii), la aplicación

$$f \longmapsto \int_G f(y)\phi(y^{-1})\ dy = \chi(f)$$

resulta un carácter no-trivial de $L^1(G)^\sharp$. En efecto, dadas $f, g \in L^1(G)^\sharp$,

$$\begin{aligned}\chi(f*g) = \chi(f*g)\phi(e) = (f*g)*\phi(e) &= \int_{G\times G} f(x)g(x^{-1}y)\phi(y^{-1})\ dx\ dy\\ &= \int_{G\times G} f(x)g(y)\phi(y^{-1}x^{-1})\ dx\ dy\\ &= \int_G f(x)g*\phi(x^{-1})\ dx\\ &= \left(\int_G f(x)\phi(x^{-1})\ dx\right)\chi(g) = \chi(f)\chi(g)\phi(e) = \chi(f)\chi(g).\end{aligned}$$

□

Observación 2.69. Si $\phi : G \to \mathbb{S}^1$ es un homomorfismo continuo, entonces $\phi(K)$ es un subgrupo compacto de $\mathbb{S}^1$, por lo tanto $\phi(K) = \{1\}$ y además ϕ es una función esférica.

Transformada de Fourier esférica

Teorema 2.70. *El espectro de Gelfand Σ del álgebra $L^1(G)^\sharp$ es el espacio de funciones esféricas con la topología compacto-abierta, es decir, donde una base de entornos de $\phi_0 \in \Sigma$ está dada por los conjuntos*

$$U_{\phi_0}(\epsilon, C) := \{\phi \in \Sigma :\ |\phi(x) - \phi_0(x)| < \epsilon,\ \forall x \in C\}$$

variando $\epsilon > 0$ y subconjuntos compactos C en G.

Demostración. Por definición, la topología de Gelfand es la restricción a Σ de la topología débil del dual del álgebra, que hemos identificado con $L^\infty(G)^\sharp$ por el Lema 2.65. Sea

$$V_{\phi_0}(\epsilon, f_1, ..., f_n) = \left\{\phi \in \Sigma : \left|\int_G f_j\phi - \int_G f_j\phi_0\right| < \epsilon \ \forall j = 1, ..., n\right\}, \quad \text{donde } \epsilon > 0 \text{ y } f_1, ..., f_n \in L^1(G)^\sharp$$

un entorno de ϕ_0 con la topología de Gelfand. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\|f_j\|_1 = 1$ para cada $j = 1, ..., n$. Sea $C \subset G$ compacto tal que $\int_{C^c} |f_j| < \epsilon/3$ para cada $j = 1, ..., n$. Si $\phi \in U_{\phi_0}(\epsilon/3, C)$,

$$\begin{aligned}\left|\int_G f_j\phi - \int_G f_j\phi_0\right| &\leq \int_{C^c} |f_j|\,|\phi - \phi_0| + \int_C |f_j|\,|\phi - \phi_0| \\ &< 2\int_{C^c} |f_j| + \frac{\epsilon}{3}\int_G |f_j| \\ &< \epsilon.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $U_{\phi_0}(\epsilon/3, C) \subseteq V_{\phi_0}(\epsilon, f_1, ..., f_n)$.

Veamos ahora que cada entorno de ϕ_0 de la topología compacto-abierta contiene un entorno de la topología débil.

Observemos primero que para toda $f \in L^1(G)^\sharp$ y $\phi \in \Sigma$,

$$\begin{aligned}\phi(x) \int_G f(y)\phi(y)\ dy &= \int_G\int_K f(y)\phi(xky)\ dy \\ &= \int_G\int_K f(k^{-1}y)\phi(xy)\ dy \\ &= \int_G f(y)\phi(xy)\ dy \\ &= \int_G L_x(f)(y)\phi(y)\ dy.\end{aligned}$$

A partir de esto, mostremos que la aplicación

$$\begin{aligned} G \times \Sigma &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, \phi) &\longmapsto \phi(x) \end{aligned} \tag{2.47}$$

es continua considerando en Σ la topología de Gelfand: Fijemos $f \in L^1(G)^\sharp$ tal que $\int_G f\phi_0 = 1$, entonces

$$\begin{aligned}\phi(x) - \phi_0(x_0) &= \int_G f(y)\phi_0(y)\ dy - \int_G L_{x_0}(f)(y)\phi_0(y)\ dy \\ &= \phi(x)\int_G f(y)\left(\phi_0(y) - \phi(y)\right)\ dy \\ &\quad + \int_G \left(L_x(f)(y) - L_{x_0}(f)(y)\right)\phi(y)\ dy \\ &\quad + \int_G L_{x_0}(f)(y)\left(\phi(y) - \phi_0(y)\right)\ dy\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$|\phi(x) - \phi_0(x)| \leq \left|\int_G f(y)\left(\phi_0(y) - \phi(y)\right)\ dy\right| + \|L_x(f) - L_{x_0}(f)\|_1 + \left|\int_G L_{x_0}(f)(y)\left(\phi(y) - \phi_0(y)\right)\ dy\right|,$$

desde donde se puede deducir la continuidad de (2.47).

Ahora sí tomemos un entorno $U_{\phi_0}(\epsilon, C)$ de ϕ_0 en la topología compacto-abierta. Para cada $y \in C$ existen un entorno $V(y)$ de ϕ_0 en la topología de Gelfand y un entorno $B(y)$ de y en G tales que $|\phi(x) - \phi_0(y)| < \epsilon/2$ $\forall \phi \in V(y)$ y $\forall x \in B(y)$. Elegidos $y_1, ..., y_n \in C$ tales que $\{B(y_j)\}_{1\leq j\leq n}$ sea un cubrimiento de C, ponemos $V = \cup_{j=1}^n V(y_j)$ y se obtiene, para $\phi \in V$ y $x \in B(y_j)$

$$|\phi(x) - \phi_0(x)| \leq |\phi(x) - \phi_0(y_j)| \ + \ |\phi_0(y_j) - \phi_0(x)| < \epsilon,$$

y así $V \subseteq U_{\phi_0}(\epsilon, C)$. □

Definición 2.71. Sea (G, K) un par de Gelfand. Se llama *transformada de Fourier esférica* a la transformada de Gelfand relativa al álgebra $L^1(G)^\sharp$ con el producto de convolución. Será denotada por $\mathcal{F}$ y explícitamente, si $f \in L^1(G)^\sharp$, su transformada de Fourier esférica la función definida sobre Σ en la siguiente forma:

$$\mathcal{F}(f)(\phi) := \int_G f(x)\phi(x^{-1})\ dx \qquad (\forall \phi \in \Sigma).$$

Propiedades 2.72. *La transformada de Fourier esférica satisface las siguientes propiedades:*

(i) *es lineal, es decir* $\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g) \quad \forall f, g \in L^1(G)^\sharp$ *y* $\forall a, b \in \mathbb{C}$*;*

(ii) $\mathcal{F}(f) \in C_0(\Sigma)$ *y* $\|\mathcal{F}(f)\|_\infty \leq \|f\|_1$ *para toda* $f \in L^1(G)^\sharp$*;*

(iii) $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\ \mathcal{F}(g) \quad \forall f, g \in L^1(G)^\sharp$*, es decir,* $\mathcal{F} : L^1(G) \longrightarrow C_0(\Sigma)$ *y es continua;*

(iv) $f * \phi = \mathcal{F}(f)\phi$ *para toda* $f \in L^1(G)^\sharp$ *y para toda* $\phi \in \Sigma$*;*

(v) *si* $\phi \in \Sigma$*, entonces* $\phi^* \in \Sigma$ *y vale la identidad* $\mathcal{F}(f^*)(\phi) = \overline{\mathcal{F}(f)(\phi^*)}$ *para toda* $f \in L^1(G)^\sharp$*.*

Funciones esféricas de tipo positivo

Lema 2.73. *[Dij, Lema 6.2.2] Sea* $(\pi, \mathcal{H}_\pi) \in \widehat{G}$*, sea* $\varepsilon \in \mathcal{H}_\pi$ *un vector cíclico de dicha representación y sea* $\varphi(x) := \langle \varepsilon, \pi(x)\varepsilon \rangle_{\mathcal{H}_\pi}$*. La función* φ *es bi-*K*-invariante si y sólo si* $\varepsilon \in \mathcal{H}_\pi(K)$*.*

Teorema 2.74. *[Dij, Teorema 6.2.5] Sea* φ *una función de tipo positivo y bi-*K*-invariante. La función* φ *es esférica si y sólo si* φ *es extremal (*$\varphi \in \mathcal{C}_1(G)$*).*

En consecuencia existe una correspondencia biunívoca entre las clases de equivalencia de representaciones unitarias e irreducibles de G que tienen un vector cíclico K-fijo y las funciones esféricas de tipo positivo.

Observación 2.75. Por el teorema de Stone-Weierstrass la imagen de $\mathcal{F}$ resulta densa en $C_0(\Sigma)$. Por otra parte, $\mathcal{F}$ es inyectiva. En efecto, dada $f \in L^1(G)^\sharp$ tal que $f \neq 0$, por el Teorema 2.63 existe $(\pi, \mathcal{H}_\pi) \in \widehat{G}$ tal que $\pi(f) \neq 0$ y $\mathcal{H}_\pi(K) \neq \{0\}$. Por lo tanto se puede concluir que existe una función esférica de tipo positivo ϕ, tal que $\mathcal{F}(\phi) \neq 0$.

A partir de un teorema análogo al de Bochner 2.34, usando fuertemente la conmutatividad del álgebra de convolución $L^1(G)^\sharp$, es posible probar el siguiente teorema de inversión. Sea Σ^+ el conjunto de funciones esféricas de tipo positivo del par de Gelfand (G, K) con la topología débil viéndolo como subespacio de $(L^1(G))'$. Sean $C_c(G)^\sharp$ y $L^2(G)^\sharp$ los subespacios de funciones $C_c(G)$ y $L^2(G)$, respectivamente, que son bi-K-invariantes y $\mathcal{V}(G)^\sharp$ el conjunto de todas las combinaciones lineales complejas de funciones continuas de tipo positivo sobre G que son bi-K-invariantes.

Teorema 2.76. *[Dij, Teorema 6.4.5] Sea* (G, K) *un par de Gelfand, entonces existe una única medida positiva* ν *en* Σ^+ *tal que para toda* $f \in \mathcal{V}(G)^\sharp$ *se tiene que* $\mathcal{F}(f) \in L^1(\Sigma^+, \nu)$ *y*

$$f(x) = \int_{\Sigma^+} \mathcal{F}(f)(\varphi)\ \varphi(x)\ d\nu(\varphi) \qquad \forall x \in G.$$

Teorema 2.77. *[Dij, Teorema 6.4.6][Teorema de Plancherel para pares de Gelfand] Sea* (G, K) *un par de Gelfand y sea* ν *la medida dada por el Teorema 2.76, entonces para toda* $f \in C_c(G)^\sharp$ *(bi-*K*-invariante) se tiene que* $\mathcal{F}(f) \in L^2(\Sigma^+, \nu)$ *y*

$$\int_G |f(x)|^2\ dx = \int_{\Sigma^+} |\mathcal{F}(f)(\varphi)|^2\ d\nu(\varphi).$$

Más aún, la transformada de Fourier esférica $\mathcal{F}$ *se extiende de* $C_c(G)^\sharp$ *a* $L^2(G)^\sharp$ *dando un isomorfismo isométrico entre* $L^2(G)^\sharp$ *y* $L^2(\Sigma^+, \nu)$*.*

Definición 2.78. La medida ν dada por el Teorema 2.76 es la llamada *medida de Plancherel* del par de Gelfand (G, K).

Observación 2.79. En el caso en que G sea abeliano si $f \in C_c(G)$, entonces $F := f * f^* \in C_c(G)$ y es de tipo positivo. Por el teorema de Bochner (Teorema 2.34), F está asociada a una medida μ_F soportada sobre $\widehat{G}$. La relación entre la medida de Plancherel ν, que también estará soportada en $\widehat{G}$, y el teorema de Bochner viene dada por una aplicación de teorema de representación de Riesz que resulta en la identidad

$$\int_{\widehat{G}} |\mathcal{F}(f)(\varphi)|^2 \; h(\varphi) \; d\nu(\varphi) = \int_{\widehat{G}} h(\varphi) \; d\mu_F(\varphi) \qquad \forall h \in C_c(\widehat{G})$$

y en particular se deduce la *fórmula de Plancherel*

$$\int\limits_{\widehat{G}} |\mathcal{F}(f)(\varphi)|^2 d\nu(\varphi) = \int\limits_{\widehat{G}} d\mu_F(\varphi) = F(e) = f*f^*(e) = \int\limits_{G} f(x)f^*(x^{-1})dx = \int\limits_{G} f(x)\overline{f(x)}dx = \int\limits_{G} |f(x)|^2 dx.$$

2.5. Ejemplos

El par $(\mathbb{R}^n, \{0\})$ es trivialmente un par de Gelfand y la transformada esférica es la transformada de Fourier "clásica".

Recuperemos los ejemplos 1.14 y 1.15 y desarrollemos en ellos el análisis esférico (ver, por ejemplo, referencia [Dij]).

Ejemplo 2.80. Recordemos que habíamos denotado $\mathrm{M}(n) = \mathrm{SO}(n) \ltimes \mathbb{R}^n$. El par $(\mathrm{M}(n), \mathrm{SO}(n))$ es de Gelfand ya que por ejemplo podemos aplicar el Criterio 2.57 con

$$\Theta(k, x) := (k, -x).$$

Las funciones sobre $\mathrm{M}(n)$, bi-$\mathrm{SO}(n)$-invariantes se identifican con funciones sobre $\mathbb{R}^n$ invariantes por la acción de $\mathrm{SO}(n)$, es decir, con funciones radiales. Más aún, el álgebra de Banach $L^1(\mathrm{M}(n))^\sharp$ con su producto de convolución, se identifica con la subálgebra de $L^1(\mathbb{R}^n)$ de las funciones radiales con su respectivo producto de convolución, que llamaremos $L^1(\mathbb{R}^n)^{\text{radiales}}$.

Las funciones esféricas (acotadas) del par de Gelfand $(\mathrm{M}(n), \mathrm{SO}(n))$ son funciones $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ radiales caracterizadas por dos propiedades según el Corolario 2.68. A partir de ellas y del hecho de que el operador Laplaciano en $\mathbb{R}^n$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

conmuta con rotaciones, se puede ver que las funciones esféricas son funciones $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ que satisfacen la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= -s^2\varphi \\ \varphi(0) &= 1, \end{aligned}$$

para $s \in \mathbb{R}$ (cf. [Dij, Teorema 7.1.1 y Proposición 7.1.2]). Observar rápidamente que $\varphi_s = \varphi_{-s}$. Más aún, como función de $r \in [0, \infty)$, cada φ_s de autovalor $-s^2$ (para algún $s \in [0, \infty)$) satisface la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2}(r) + \frac{n-1}{r}\frac{d\varphi}{dr}(r) = -s^2 \; \varphi(r)$$

con la misma condición inicial de antes. Entonces $\varphi_1(r)$ es un múltiplo de

$$\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(r)}{\left(\frac{r}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}}}$$

donde

$$J_\alpha(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\alpha} \tag{2.48}$$

es la función de Bessel de primera especie y orden α (ver Figura 2.9) siendo Γ la *función Gamma*. Para $s \in [0, \infty)$

$$\varphi_s(r) = \varphi_1(sr).$$

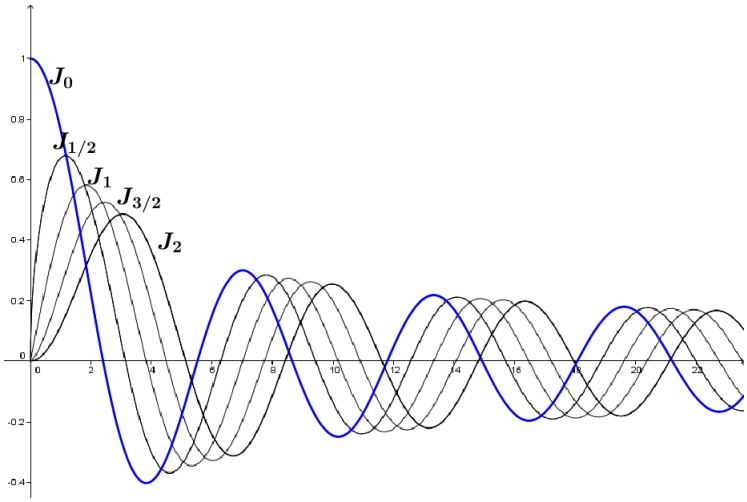


Figura 2.9: Funciones de Bessel J_α.

Por su parte una fórmula integral para dichas funciones esféricas está dada por

$$\varphi_s(x) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-is\langle x,\xi\rangle}\, d\mu(\xi) \tag{2.49}$$

donde μ es la medida normalizada de la esfera unitaria $\mathbb{S}^{n-1}$ en $\mathbb{R}^n$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es el producto interno canónico en $\mathbb{R}^n$. O equivalentemente,

$$\begin{aligned}\varphi_s(r) &= \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n-1}{2})}\int_{-1}^{1} e^{isrt}(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}\, dt\\ &= \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n-1}{2})}\frac{e^{isr}}{r^{\frac{n-1}{2}}}\int_0^{2r} e^{-isu}u^{\frac{n-3}{2}}(2-\frac{u}{r})^{\frac{n-3}{2}}\, du.\end{aligned}$$

Veamos también la caracterización de las funciones esféricas como entradas matriciales de representaciones de $\mathrm{M}(n)$. A partir de la teoría de Mackey revisada en la Sección 1.2.5, sea $\omega_{\sigma,R}$ la representación inducida por una representación $(\sigma, V_\sigma) \in \widehat{\mathrm{SO}(n-1)}$ y un carácter χ_R de $\mathbb{R}^n$ asociado al vector $Re_1 \in \mathbb{R}^n$ para $R \in (0,\infty) =: \mathbb{R}_{>0}$. La representación inducida $\omega_{\sigma,R}$ actúa por traslaciones a izquierda sobre funciones

$$f : \mathrm{M}(n) \to V_\sigma \ \text{ de cuadrado integrable sobre } \mathrm{M}(n)/(\mathrm{SO}(n-1)\ltimes\mathbb{R}^n) \simeq \mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-1) \simeq \mathbb{S}^{n-1}$$

con las propiedades

$$f((h,0)g) = \sigma(h)f(g) \quad \text{para todo } h \in \{k \in \mathrm{SO}(n) \mid \ k\cdot e_1 = e_1\} \simeq \mathrm{SO}(n-1) \text{ y todo } g \in \mathrm{M}(n) \text{ y}$$

$$f((I,x)g) = \chi_R(x)f(g) \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n \text{ y todo } g \in \mathrm{M}(n).$$

Por tener un producto semidirecto resulta que, para todo $(k,x) \in \mathrm{M}(n)$, cada una de estas funciones cumple

$$f(k,x) = f((\mathrm{I},x)(k,0)) = \chi_R(x)f(k,0) = \chi_R(x)L_{(k^{-1},0)}(f(I,0)) = \chi_R(x)\omega_{\sigma,R}(k^{-1},0)(f(I,0)).$$

Por lo tanto, si buscamos un vector K-fijo por la representación $\omega_{\sigma,R}$ podemos considerar

$$\chi_R(x).$$

Luego la función esférica asociada a $\omega_{\sigma,R}$ es su entrada matricial dada por el vector $\chi_R(x)$, es decir,

$$\varphi_R(x) = \langle \chi_R, \omega_{\sigma,R}(\mathrm{I},x)\chi_R\rangle_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})}$$

Proposición 2.81. *[Dij, Proposición 7.1.3] Todas las funciones esféricas (acotadas) del par de Gelfand* $(\mathrm{M}(n), \mathrm{SO}(n))$ *resultan de tipo positivo.*

La transformada de Fourier esférica de este par es

$$\mathcal{F}(f)(\varphi_{2\pi is}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi_{2\pi is}(-x)\ dx \qquad \forall s \in [0,\infty). \tag{2.50}$$

Denotaremos directamente $\mathcal{F}(f)(\varphi_{2\pi is}) = \mathcal{F}(f)(s)$ para todo $s \in [0,\infty)$. Calculemos, por último, la *medida de Plancherel* asociada a este par de Gelfand. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ una función radial. Su transformada de Fourier (clásica) (2.29) será denotada aquí por $\widehat{f}$ y resulta una nueva función radial. Por abuso de notación escribiremos $\widehat{f}(s)$ para $s \in [0,\infty)$. Por simplicidad en la notación de aquí en más no pondremos la constante 2π ni en (2.29) ni en (2.50). Podemos observar que las transformadas de Fourier $\widehat{f}$ y de Fourier esférica $\mathcal{F}(f)$ de f están relacionadas. En efecto, de la expresión integral (2.49) obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f)(s) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-is\langle x,\xi\rangle}\ d\mu(\xi)\\ &= \widehat{f}(s).\end{aligned}$$

Por lo tanto, si f a su vez es suficientemente regular, usando la fórmula de inversión asociada a la transformada de Fourier clásica tenemos que

$$\begin{aligned}f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)e^{i\langle \xi,x\rangle}\ d\xi\\ &= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\int_0^\infty \mathcal{F}(f)(s)s^{n-1}\ ds.\end{aligned}$$

Luego, la medida de Plancherel del par de Gelfand $(\mathrm{M}(n), \mathrm{SO}(n))$ es

$$\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\ s^{n-1}\ ds$$

sobre $[0,\infty)$, donde hemos identificado cada s con φ_s.

Por último, referimos al artículo [Wo3] si uno está interesado en las funciones esféricas de cualquier par $(K \ltimes \mathbb{R}^n, K)$ donde K es un subgrupo cerrado de $\mathrm{O}(n)$.

Ejemplo 2.82. Analicemos otro par de Gelfand clásico: $(\mathrm{SO}(n+1), \mathrm{SO}(n))$. Recordemos que una función $f : V \to W$, entre espacios vectoriales V y W sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, se dice *homogénea* si ante cualquier dilatación o contracción en su dominio dada por un parámetro no nulo $\lambda \in \mathbb{F}$

$$\begin{aligned}V &\longrightarrow V\\ x &\longmapsto \lambda x,\end{aligned}$$

la función sufre una dilatación o una contracción particular en su imagen

$$f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x) \qquad \forall x \in V,$$

para alguna constante α que no varía al cambiar de dilatación o contracción del espacio de salida V, es decir, la constante α es la misma para todo λ. Dicha constante es llamada el *grado de homogeneidad* de la función.

Sea $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ el espacio de polinomios en tres variables con coeficientes en $\mathbb{C}$ y a valores en $\mathbb{C}$ (polinomios a valores escalares). Es claro que podemos descomponer

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}^{n+1}) \simeq \bigoplus_m \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^{n+1}),$$

donde $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^{n+1})$ denota el subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ de polinomios homogéneos $\mathbb{R}^3$ de grado m. A su vez, cada uno de estos espacios se descompone naturalmente como

$$\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^{n+1}) \simeq \bigoplus_k |x|^{2k} H_{m-2k},$$

donde recordemos que H_k denota el espacio de polinomios armónicos y homogéneos de grado k. Esto se deduce a partir de que el operador Laplaciano es suryectivo de $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^{n+1})$ en $\mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^3)$ y de que el

operador $|x|^2\Delta$, de $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^{n+1})$ en su imagen, es autoadjunto con respecto al producto interno en $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^{n+1})$ definido por $\langle P, Q\rangle := P(\frac{\partial}{\partial x})_{|x=0}\overline{Q}$ para todo $P, Q \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^{n+1})$, y su núcleo es exactamente el núcleo del Laplaciano, es decir, H_m.

El espacio de las restricciones a la esfera $\mathbb{S}^n$ de los polinomios en H_m es el espacio de los *armónicos esféricos* $\mathcal{H}_m$. Como aplicación del teorema de Stone-Weierstrass ([Ru2, Teorema 7.26]) la suma ortogonal $\oplus_m \mathcal{H}_m$ es densa en $L^2(\mathbb{S}^n)$. Además, como dijimos en la Sección 1.2.3, cada $\mathcal{H}_m$ es un espacio invariante e irreducible bajo la acción de $\mathrm{SO}(n+1)$. La estrecha conexión entre la teoría clásica de armónicos esféricos y la de representaciones del grupo de rotaciones fue establecida por E. Cartan y H. Weyl. Cada $\mathcal{H}_m$ contiene una función especial llamada *función zonal* que genera el espacio de vectores $\mathrm{SO}(n)$-fijos y que es cíclica en $\mathcal{H}_m$. Estas son funciones que dependen solamente de uno de los meridianos de la esfera $\mathbb{S}^n$, por lo que se pueden pensar como funciones de una sola variable e identificar el subespacio de funciones zonales de $L^2(\mathbb{S}^n)$ con $L^2([-1,1],(1-t)^{\frac{n-2}{2}}\ dt)$. El espacio de vectores $\mathrm{SO}(n)$-fijos de la acción natural de $\mathrm{SO}(n+1)$ en cada $\mathcal{H}_m$ es de dimensión uno y se puede ver que con este modelo las funciones zonales coinciden con la entrada matricial de un vector fijo por $\mathrm{SO}(n)$ (ellas mismas) de dicha acción y por lo tanto son funciones esféricas del par $(\mathrm{SO}(n+1), \mathrm{SO}(n))$. Para $n = 2$ tenemos los *polinomios de Legendre* (ver figura 2.10) y para $n \geq 2$ a los *polinomios de Gegenbauer*. (Como referencia revisar el libro clásico [SW] o bien [Dij]).

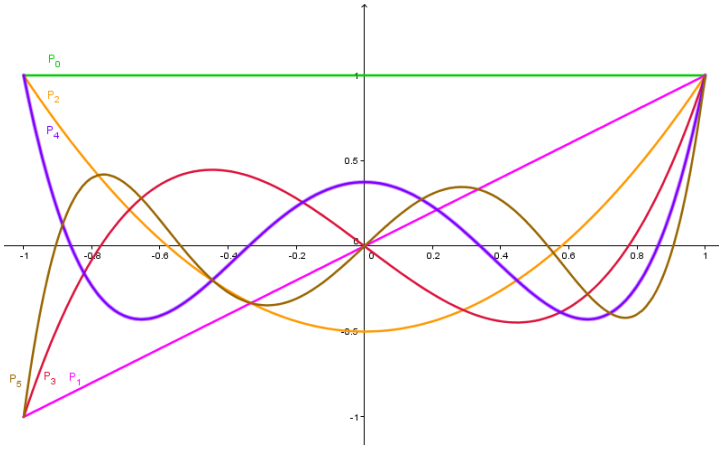


Figura 2.10: Polinomios de Legendre.

Capítulo 3

Ternas de Gelfand (G, K, τ) y pares de Gelfand fuertes

En este capítulo nos desprendemos de la teoría clásica para adentrarnos al estudio de los objetos centrales de esta tesis de doctorado. Sintéticamente extenderemos la noción de par de Gelfand. Seguiremos principalmente los artículos [Ca, God, RS].

Sea G un grupo de Lie conexo y K un subgrupo compacto de G. (En realidad se puede suponer solamente que G es grupo topológico localmente compacto y T_2, pero a los fines de esta tesis consideraremos que G es un grupo de Lie.) Sea τ una representación compleja de K actuando en el espacio vectorial V_τ de dimensión finita d_τ. Sea $\widehat{G}$ (respectivamente, $\widehat{K}$) el conjunto de todas las clases de equivalencia de representaciones unitarias irreducibles de G (respectivamente, de K). Todo fibrado vectorial homogéneo sobre G/K es, salvo isomorfismo, de la forma $E_\tau = G \times_\tau V_\tau$ (ver Teorema 1.38). El grupo G actúa en $G \times_\tau V_\tau$ según (1.11). Vimos en la Observación 1.41 que las secciones de E_τ se identifican naturalmente con funciones $\mathbf{u}$ sobre G a valores en V_τ tales que

$$\mathbf{u}(gk) = \tau(k^{-1})\mathbf{u}(g) \qquad \forall g \in G,\ k \in K. \tag{3.1}$$

Denotamos por $\Gamma(G \times_\tau V_\tau)$, o simplemente por $\mathcal{D}$ al espacio de secciones de $E_\tau = G \times_\tau V_\tau$ de clase C^∞ y de soporte compacto. El grupo G actúa en $G \times_\tau V_\tau$ por la acción que induce (1.11) de acuerdo a (1.2), es decir, por la acción regular a izquierda

$$(\tilde{g} \cdot \mathbf{u})(g) := \mathbf{u}(\tilde{g}^{-1}g) \qquad (\mathbf{u} \in \Gamma(G \times_\tau V_\tau),\ \tilde{g}, g \in G).$$

Hemos dicho en la introducción que la motivación central de esta tesis radica en dar una caracterización, a partir del análisis esférico, de todos los operadores lineales T aplicados sobre el espacio de secciones de E_τ, que conmutan con la acción de G en E_τ (ver [Kor]). Supondremos $T : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ lineal y continuo (con la propiedad de ser G-invariante) ya que así abarcamos una gran cantidad de operadores definidos sobre distintos espacios funcionales (en este sentido recordemos lo dicho en la Observación 2.49). Como aplicación del teorema de núcleo de Schwartz, todos estos operadores T están unívocamente determinados como operadores de convolución. En el caso en que los operadores T sean *integrales*, en el sentido que están dados por

$$T\mathbf{u}(g) = \int_G \Phi(g, x)\mathbf{u}(h)\ dx,$$

donde Φ es una función y no una distribución, entonces su núcleo de convolución F será una función y no una distribución. Concretamente, resultan de la forma

$$T\mathbf{u}(g) = \int_G F(x^{-1}g)\mathbf{u}(x)\ dx \tag{3.2}$$

cuyo núcleo F es una función sobre G a valores en $\mathrm{End}(V_\tau)$ que satisface

$$F(k_1 g k_2) = \tau(k_2^{-1})F(g)\tau(k_1^{-1}) \qquad \forall g \in G,\ k_1, k_2 \in K. \tag{3.3}$$

Denotaremos $T = T_F$. Sea

$$L^1_{\tau,\tau}(G, \mathrm{End}(V_\tau)) := \{F \in L^1(G, \mathrm{End}(V_\tau)) \mid\ F \text{ satisface (3.3)}\}.$$

Teorema 3.1. *Los operadores de convolución T_F con núcleo una función integrable $F \in L^1_{\tau,\tau}(G, \mathrm{End}(V_\tau))$ se pueden componer dando lugar a un nuevo operador de convolución*

$$T_{F_1} \circ T_{F_2} = T_{F_1 * F_2},$$

donde

$$F_1 * F_2(g) := \int_G F_1(x^{-1}g)F_2(x)\ dx. \tag{3.4}$$

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned} T_{F_1}(T_{F_2}(\mathbf{u}))(g) &= \int_G F_1(x^{-1}g)\ T_{F_2}(\mathbf{u})(x)\ dx \\ &= \int_G F_1(x^{-1}g) \int_G F_2(y^{-1}x)\ \mathbf{u}(y)\ dy\ dx \\ &= \int_G \int_G F_1(x^{-1}y^{-1}g)F_2(x)\ dx\ \mathbf{u}(y)\ dy \\ &= \int_G F_1 * F_2(y^{-1}g)\ \mathbf{u}(y)\ dy \\ &= T_{F_1 * F_2}(\mathbf{u})(g), \end{aligned}$$

donde en la tercera igualdad hemos intercambiado el orden de integración y usado la invarianza a izquierda de la medida de Haar en la variable x.

Como $F_1, F_2 \in L^1(G, \mathrm{End}(V_\tau))$, entonces $F_1 * F_2 \in L^1(G, \mathrm{End}(V_\tau))$. Además, como F_1 y F_2 satisfacen (3.3), también lo cumple $F_1 * F_2$ ya que dados $k_1, k_2 \in K$, $g \in G$

$$\begin{aligned} F_1 * F_2(k_1 g k_2) &= \int_G F_1(x^{-1}k_1 g k_2)\ F_2(x)\ dx \\ &= \int_G \tau(k_2^{-1})F_1((k_1^{-1}x)^{-1}g)\ F_2(x)\ dx \\ &= \int_G \tau(k_2^{-1})F_1(x^{-1}g)\ F_2(k_1 x)\ dx \\ &= \int_G \tau(k_2^{-1})F_1((k_1^{-1}x)^{-1}g)\ F_2(x)\tau(k_1^{-1})\ dx \\ &= \tau(k_2^1)\ F_1 * F_2(g)\ \tau(k_1^{-1}), \end{aligned}$$

donde en la tercera igualdad hemos usado la invarianza a izquierda de la medida de Haar de G. □

El producto de convolución (3.4) da a $L^1_{\tau,\tau}(G, \mathrm{End}(V_\tau))$ estructura de álgebra de Banach.

Observación 3.2. Un problema más general consiste en analizar operadores integrales T que aplican secciones de un fibrado vetrorial homogéneo E_{τ_1} en secciones de otro de un fibrado vetrorial homogéneo E_{τ_2} y que son G-invariantes (sugerimos como referencia [Kor]). En este caso la función F como en (3.2) es tal que para cada $g \in G$, $F(g) : V_{\tau_1} \to V_{\tau_2}$ es un operador lineal y satisface

$$F(k_1 g k_2) = \tau_2(k_2^{-1})F(g)\tau_1(k_1^{-1}) \qquad \forall g \in G,\ k_1, k_2 \in K.$$

Uno de los grandes objetivos tratado en artículos como [Ca] y [RS] ha sido (y sigue siendo) reproducir el análisis de Fourier esférico en el álgebra de convolución $L^1_{\tau,\tau}(G, \mathrm{End}(V_\tau))$ con el fin de hallar su medida de Plancherel y deducir una fórmula de inversión. Esto permitiría "diagonalizar simultáneamente" el conjunto de operadores integrales (por lo tanto lineales y continuos), G-invariantes, que se aplican a las secciones integrables de un fibrado vectorial homogéneo sobre G/K. Entonces, como hemos visto en los cursos de álgebra lineal, una condición necesaria para la diagonalización simultánea es que los operadores deben conmutar. Esto es lo que motiva la siguiente definición que es central en esta tesis.

Definición 3.3. Sea G un grupo topológico y K un subgrupo compacto de G. Sea τ una representación (compleja) unitaria irreducible de K. La terna (G, K, τ) se dice *conmutativa* (o *de Gelfand*) si el álgebra $L^1_{\tau,\tau}(G, \mathrm{End}(V_\tau))$ es conmutativa con el producto de convolución. Si además esto se cumple para toda $\tau \in \widehat{K}$, diremos que (G, K) es un *par de Gelfand fuerte*.

En particular, cuando τ es la representación trivial de K, la definición de terna conmutativa es equivalente a decir que (G, K) es un *par de Gelfand*. En el caso en que τ sea un carácter de K y la terna (G, K, τ) sea conmutativa, se llamará un *par de Gelfand "twisted" o retorcido con respecto al carácter τ*.

Observación 3.4. En la definición anterior hemos hecho una reducción del problema al considerar sólo representaciones unitarias *irreducibles* (τ, V_τ) de K. En general, si (τ, V_τ) es una representación unitaria de dimensión finita de K, entonces se descompone en suma directa

$$V_\tau = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$$

para algún $n \in \mathbb{N}$, donde, si $\tau_i(k) := \tau(k) : V_i \to V_i$ (para todo $k \in K$), se tiene que (τ_i, V_i) es una representaciones unitarias irreducibles de K para cada $1 \leq i \leq n$. La relación de equivalencia que define $G \times_\tau V_\tau$ se puede ver como

$$(g, v_1 + ... + v_n) \sim (gk, \tau_1(k)^{-1}v_1 + ... + \tau_n(k)^{-1}v_n) \qquad \text{para } g \in G,\ v_i \in V_i\ (1 \leq i \leq n) \text{ y } \forall k \in K.$$

El espacio de secciones de E_τ se descompone en

$$\Gamma(G \times_\tau V_\tau) = \Gamma(G \times_{\tau_1} V_{\tau_1}) \oplus ... \oplus \Gamma(G \times_{\tau_n} V_{\tau_n}),$$

ya que dada $\mathbf{u} : G \to V_\tau$ tal que $\mathbf{u}(gk) = \tau(k)^{-1}\mathbf{u}(g)$ para todo $g \in G$ y todo $k \in K$, si para cada $g \in G$ denotamos por $(\mathbf{u}(g))_i$ la componente en V_i de $\mathbf{u}(g)$, se tiene que para cada $1 \leq i \leq n$,

$$(\mathbf{u}(gk))_i = \tau_i(k)^{-1}(\mathbf{u}(g))_i \qquad \text{(para todo } g \in G \text{ y todo } k \in K).$$

Ahora bien, dado un operador lineal que manda secciones de $G \times_\tau V_\tau$ en secciones de $G \times_\tau V_\tau$, este podría "entrelazar" los espacios de secciones $G \times_{\tau_i} V_{\tau_i}$. Luego, con requerir que (G, K, τ_i) sea una terna conmutativa para cada $1 \leq i \leq n$ no alcanza para decir que los operadores de convolución sobre las secciones de $G \times_\tau V_\tau$ conmutan entre sí. Por eso decimos que pedir τ irreducible es una reducción del problema original.

Un poco de historia... Como referencia para los siguientes párrafos referimos al artículo [God]. El primer ejemplo fue estudiado por V. Bargman en 1947 en su artículo [Ba]. Allí se consideró el grupo $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ y como K el subgrupo compacto maximal de G (que es unidimensional). Estudió funciones F definidas sobre G tales que, para un dado carácter χ de K, satisfacen

$$F(kgk') = \chi(k)F(g)\chi(k') \tag{3.5}$$

(similares a las que cumplen (3.3)). En particular, tales funciones aparecen cuando se consideran representaciones irreducibles de G. Esto se debe a que estas representaciones tienen coeficientes (entradas matriciales) que cumplen dicha relación (3.5). Haciendo algunos cálculos se puede ver que estos pueden ser identificados con funciones hipergeométricas particulares. En el caso que χ es el carácter trivial $\chi(k) = 1$, encontramos ciertas funciones de Legendre. Estas presentan tres importantes características:

- satisfacen una determinada ecuaciones diferencial,
- pueden ser representadas mediante una fórmula integral y
- cumplen una ecuación funcional que involucra la operación de grupo.

Al mismo tiempo, I. Gelfand y M. Naimark dirigieron su atención sobre preguntas similares pero considerando representaciones unitarias irreducibles del grupo complejo $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ y K un subgrupo maximal compacto de G. Vieron que algunas representaciones tienen coeficientes matriciales dados por funciones que satisfacen

$$F(kgk') = F(g).$$

Estas funciones tienen propiedades similares a las de las funciones de Legendre pero quizás no son tan interesantes desde el lado de las funciones "especiales". En 1950 importantes resultados fueron publicados (sin pruebas) por I. Gelfand en [Ge] considerando grupos de Lie G no necesariamente compactos y un subgrupo compacto K de G donde se estudiaban funciones sobre G, bi-K-invariantes. De tales funciones aquellas que además son integrables en G forman el álgebra normada bajo el producto de convolución. Esta es justamente el álgebra $L^1(G)^\sharp$ vista en el capítulo precedente. Asumiendo que existe en G una anti-involución $g \mapsto \overline{g}$ tal que sobre K se cumpla $\overline{k} = k^{-1}$, I. Gelfand prueba que $L^1(G)^\sharp$ es conmutativa (revisar 2.57). "Sus funciones esféricas" ϕ fueron definidas bajo los siguientes requerimientos:

- continuas,
- de tipo positivo,
- invariantes por $g \mapsto kgk'$ (es decir, bi-K-invariantes),
- la transformación lineal
$$f \longmapsto \phi(f) := \int_G f(g)\phi(g)\ dg$$
debe ser un homomorfismo de $L^1(G)^\sharp$ sobre el cuerpo de números complejos.

Esta última propiedad es equivalente a la ecuación funcional

$$\int_G \phi(kgk'g')\ dg = \phi(g)\phi(g')$$

(reminiscente de (2.46)) e implica que las funciones esféricas son caracteres o ideales maximales del álgebra $L^1(G)^\sharp$. Entonces Gelfand aplica la teoría de álgebras normadas conmutativas para probar una generalización del teorema de Bochner, esto es, que toda función continua, de tipo positivo e invariante por $g \mapsto kgk'$ es una "suma continua" de funciones esféricas con respecto a una medida positiva y acotada. Este resultado puede ser interpretado como un teorema de descomposición para representaciones unitarias de G que "contengan suficientes" vectores invariantes por K. Por otro lado, Gelfand exhibe ecuaciones diferenciales para las funciones esféricas. Dichas ecuaciones diferenciales expresan las funciones esféricas, consideradas como funciones sobre G/K, como autofunciones de todos los operadores diferenciales invariantes bajo el grupo de movimientos rígidos del espacio simétrico Riemanniano G/K.

Como podemos apreciar, históricamente, funciones que satisfacen una relación del tipo (3.3) pueden encontrar un origen y una motivación por el lado de la teoría de representaciones (más allá de que nuestro interés provenga desde la "diagonalización simultánea" de operadores que presentan simetrías). En este sentido destacamos también el artículo publicado en la Revista de la Unión Matemática Argentina en 1977 por J. Tirao [T].

Como es de esperar, es posible dar una definición equivalente de ternas de Gelfand empleando la teoría de representaciones. A tal fin veamos primero una correspondencia entre el álgebra $L^1_{\tau,\tau}(G, \mathrm{End}(V_\tau))$ y una cierta álgebra de funciones a valores escalares. Fijemos τ una representación unitaria irreducible de K.

Dada una función definida sobre G, $f : G \to \mathbb{C}$, y una función definida sobre K, $h : K \to \mathbb{C}$, podemos definir una convolución sobre K entre f y h en la forma

$$f *_K h(g) = h *_K f(g) := \int_K f(gk^{-1})h(k)\ dk \qquad \forall g \in G, \tag{3.6}$$

donde dk denota la medida de Haar normalizada de K. Si χ_τ denota el carácter de τ, esto es, $\chi_\tau(k) = \mathrm{tr}(\tau(k))$ $(\forall k \in K)$, obtenemos en particular

$$f *_K d_\tau \overline{\chi_\tau}(x) := d_\tau \int_K f(xk)\chi_k(k)\ dk \qquad \forall x \in G$$

(recordamos que por d_τ hemos denotado la dimensión de la representación τ).

Definición 3.5. Una función $f : G \to \mathbb{C}$ se dice *K-central* si

$$f(kxk^{-1}) = f(x) \qquad \forall k \in K, \forall x \in G$$

(es decir, invariante por la acción I_k de conjugación por elementos del subgrupo K) y se dice *de tipo τ* si

$$f *_K d_\tau \overline{\chi_\tau} = f$$

donde dk denota la medida de Haar normalizada de K.

Usando la notación de [Ca] definimos el subespacio $I^1_\tau(G)$ (respectivamente $I^\infty_\tau(G)$) de $L^1(G)$ (respectivamente de $L^\infty(G)$) de funciones K-centrales y de tipo τ. (Sólo a modo de observación remarcamos

que es indistinto trabajar con funciones de clase L^1 o C_c^∞.) Dotamos al espacio $I_\tau^1(G)$ con una estructura de álgebra dada por el producto

$$f_1 * f_2(x) := \int_G f_2(y) f_1(y^{-1}x)\ dy \qquad \forall x \in G,\ \forall f_1, f_2 \in I_\tau^1(G).$$

Este es un producto de *convolución* que se corresponde con la composición de operadores de tipo convolución cuyos núcleos son funciones en $I_\tau^1(G)$.

A cada $F : G \to \mathrm{End}(V_\tau)$ le podemos asociar una función a valores escalares

$$f_F(x) := d_\tau \mathrm{tr}(F(x)) \qquad \forall x \in G. \tag{3.7}$$

Recíprocamente, a cada función $f : G \to \mathbb{C}$ le asignamos una función a valores en $\mathrm{End}(V_\tau)$ dada por

$$F_f(x) := \int_K \tau(k) f(kx)\ dk \qquad \forall x \in G. \tag{3.8}$$

El siguiente resultado es una síntesis de [RS, Proposición 1.2, Proposición 1.3] y [Ca, Proposición 2.1].

Proposición 3.6. *Si $F : G \to \mathrm{End}(V_\tau)$ satisface (3.3), entonces f_F es K-central y de tipo τ. Recíprocamente, si $f : G \to \mathbb{C}$ es K-central y de tipo τ, entonces F_f satisface (3.3). Más aún, la aplicación*

$$\begin{aligned} L^1_{\tau,\tau}(G, \mathrm{End}(V_\tau)) &\longrightarrow I_\tau^1(G) \\ F &\longmapsto f_F \end{aligned}$$

es un isomorfismo lineal entre $L^1_{\tau,\tau}(G, \mathrm{End}(V_\tau))$ e $I_\tau^1(G)$ cuya inversa es la aplicación

$$\begin{aligned} I_\tau^1(G) &\longrightarrow L^1_{\tau,\tau}(G, \mathrm{End}(V_\tau)) \\ f &\longmapsto F_f. \end{aligned}$$

Además, ambas aplicaciones establecen un isomorfismo de álgebras ya que

$$\begin{aligned} F_{f_1 * f_2} &= F_{f_1} * F_{f_2} \\ f_{F_1 * F_2} &= f_{F_1} * f_{F_2}. \end{aligned}$$

Demostración. Supongamos que $F : G \to \mathrm{End}(V_\tau)$ satisface (3.3). Fácilmente se ve que

$$f_F(kxk^{-1}) = d_\tau \mathrm{tr}(F(kxk^{-1})) = d_\tau \mathrm{tr}(\tau(k)F(x)\tau(k^{-1})) = d_\tau \mathrm{tr}(F(x)) = f(x) \qquad (\forall k \in K, x \in G).$$

Además,

$$\begin{aligned} (f_F *_K d_\tau \overline{\chi_\tau})(x) &= d_\tau^2 \int_K \mathrm{tr}(F(xk))\chi_k(k)\ dk \\ &= d_\tau^2\ \mathrm{tr}\left(\int_K \tau(k^{-1})\chi_k(k)\ dk\ F(x)\right) \\ &= d_\tau \mathrm{tr}(F(x)) \qquad \text{(por las relaciones de ortogonalidad de Schur)} \\ &= f_F(x) \qquad (\forall x \in G). \end{aligned}$$

Sea ahora f una función sobre G a valores escalares, K-central y de tipo K, entonces

$$\begin{aligned} F_f(k_1 x k_2) &= \int_K \tau(k) f(k k_1 x k_2)\ dk \\ &= \int_K \tau(k k_1^{-1}) f(kxk_2)\ dk \qquad \text{(por propiedad de la medida de Haar en } K \text{ compacto)} \\ &= \int_K \tau(k) f(kxk_2)\ dk\ \tau(k_1^{-1}) \\ &= \int_K \tau(k) f(k_2 kx)\ dk\ \tau(k_1^{-1}) \qquad \text{(como } f \text{ es } K\text{-central, } f(gk) = f(kg)\ \forall k \in K, g \in G) \\ &= \int_K \tau(k_2^{-1}k) f(kx)\ dk\ \tau(k_1^{-1}) \qquad \text{(por propiedad de la medida de Haar en } K \text{ compacto)} \\ &= \tau(k_2^{-1}) \int_K \tau(k) f(kx)\ dk\ \tau(k_1^{-1}) \\ &= \tau(k_2^{-1}) F_f(x) \tau(k_1^{-1}) \qquad (\forall k_1, k_2 \in K \text{ y } \forall x \in G). \end{aligned}$$

Por último veamos las correspondencias entre convoluciones. Dadas $f_1, f_2 \in I^1_\tau(G)$, para todo $x \in G$ obtenemos

$$\begin{aligned}
F_{f_1} * F_{f_2}(x) &= \int_G F_{f_1}(y^{-1}x)F_{f_2}(y)\ dy \\
&= \int_G \left[\left(\int_K \tau(k_1) f_1(k_1 y^{-1} x)\ dk_1 \right) \left(\int_K \tau(k_2) f_2(k_2 y)\ dk_2 \right) \right] dy \\
&= \int_G \int_K \int_K \tau(k_1 k_2) f_2(k_2 y) f_1(k_1 y^{-1} x)\ dk_2\ dk_1\ dy \qquad (3.9) \\
&= \int_G \int_K \int_K \tau(k_2) f_2(k_1^{-1} k_2 y) f_1(k_1 y^{-1} x)\ dk_2\ dk_1\ dy \qquad (3.10) \\
&= \int_K \int_K \int_G \tau(k_2) f_2(y) f_1(k_1 y^{-1} k_1^{-1} k_2 x)\ dy\ dk_2\ dk_1 \qquad (3.11) \\
&= \int_K \int_K \tau(k_2) \int_G f_2(y) f_1(y^{-1} k_1^{-1} k_2 x k_1)\ dy\ dk_2\ dk_1 \qquad (3.12) \\
&= \int_K \tau(k_2) \int_K (f_1 * f_2)(k_1^{-1} k_2 x k_1)\ dk_1\ dk_2 \\
&= \int_K \tau(k_2)\ (f_1 * f_2)(k_2 x)\ dk \qquad (3.13) \\
&= F_{f_1 * f_2}(x),
\end{aligned}$$

donde hemos usado (3.9) que f_1 y f_2 son funciones a valores escalares y que τ es representación de K, en (3.10) la invarianza de la medida de Haar de K, en (3.11) el teorema de Fubini y la invarianza a izquierda de la medida de Haar de G, en (3.12) que f_1 es K-central y en (3.13) que $f_1 * f_2 \in I^1_\tau(G)$ que la medida de Haar de K es finita, por ser compacto y la hemos considerado normalizada.

Por último usaremos las relaciones de ortogonalidad de Schur (cf. [Fa, p. 106]): Si $A, B \in \mathrm{End}(V_\tau)$, entonces

$$\int_K \mathrm{tr}(A\tau(k))\overline{\mathrm{tr}(B\tau(k))}\ dk = \frac{1}{d_\tau}\mathrm{tr}(AB^*).$$

Dadas $F_1, F_2 \in L^1_{\tau,\tau}(G, \mathrm{End}(V_\tau))$, vimos que $f_{F_1}, f_{F_2} \in I^1_\tau(G)$ y por lo tanto $f_{F_1} * f_{F_2} \in I^1_\tau(G)$. En particular, $f_{F_1} * f_{F_2}$ es K-central y como la medida de Haar de K es uno, obtenemos que para todo $x \in G$

$$f_{F_1} * f_{F_2}(x) = \int_K f_{F_1} * f_{F_2}(k^{-1}xk)\ dk.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
f_{F_1} * f_{F_2}(x) &= d_\tau^2 \int_K \int_G \mathrm{tr}\left(F_2(y)\right) \mathrm{tr}\left(F_1(y^{-1}k^{-1}xk)\right)\ dy\ dk \qquad \text{(por definición de la aplicación (3.7))} \\
&= d_\tau^2 \int_K \int_G \mathrm{tr}\left(F_2(k^{-1}y)\right) \mathrm{tr}\left(F_1(y^{-1}xk)\right)\ dy\ dk \qquad \text{(por la invarianza a izquierda de } dy) \\
&= d_\tau \int_G \left(d_\tau \int_K \mathrm{tr}\left(F_2(y)\tau(k)\right) \mathrm{tr}\left(\tau(k^{-1})F_1(y^{-1}x)\right)\ dk \right)\ dy \qquad \text{(pues } F_1 \text{ y } F_2 \text{ satisfacen (3.3))}.
\end{aligned}$$

Para cualquier operador $A \in \mathrm{End}(V_\tau)$ vale que $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^t)$ y $\overline{\mathrm{tr}(A)} = \mathrm{tr}(A^*)$. Como $\tau(k)^* = \tau(k^{-1})$ para todo $k \in K$ tenemos que

$$\mathrm{tr}\left(\tau(k^{-1})F_1(g)\right) = \overline{\mathrm{tr}\left([F_1(g)^*]\,\tau(k)\right)} \qquad (\forall g \in G, \forall k \in K).$$

Finalmente obtenemos

$$\begin{aligned}
f_{F_1} * f_{F_2}(x) &= d_\tau \int_G \left(d_\tau \int_K \mathrm{tr}\left(F_2(y)\tau(k)\right) \overline{\mathrm{tr}\left([F_1(y^{-1}x)^*]\,\tau(k)\right)}\ dk \right)\ dy \\
&= d_\tau \int_G \mathrm{tr}\left(F_2(y)F_1(y^{-1}x)\right)\ dy \\
&= d_\tau \int_G \mathrm{tr}\left(F_1(y^{-1}x)F_2(y)\right)\ dy \\
&= f_{F_1 * F_2}(x) \qquad (\forall x \in G).
\end{aligned}$$

□

Corolario 3.7. *El álgebra de convolución $L^1_{\tau,\tau}(G, \mathrm{End}(V_\tau))$ es conmutativa si y sólo si el álgebra de convolución $I^1_\tau(G)$ es conmutativa.*

Observación 3.8. Si τ es la representación trivial de K, entonces $L^1_{\tau,\tau}(G, \mathrm{End}(V_\tau)) = L(G)^\sharp = I^1_\tau(G)$.

Dada $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ una representación unitaria irreducible de G denotamos por $\pi_{|_K}$ la restricción de π a K. Sea $\widehat{G}(\tau)$ el conjunto de todas aquellas representaciones $\pi \in \widehat{G}$ que contienen a τ cuando se restringen a K. Dada $(\pi, \mathcal{H}_\pi) \in \widehat{G}(\tau)$ denotamos por $m(\tau, \pi)$ la multiplicidad de τ en π restringida a K y por $\mathcal{H}_\pi(\tau)$ al subespacio de $\mathcal{H}_\pi$ conformado por todos aquellos vectores donde la transformación por $\pi_{|_K}$ viene dada por τ, esto es

$$\mathcal{H}_\pi(\tau) := \{v \in \mathcal{H}_\pi \mid \ \pi(k)v = \tau(k)v \ \forall k \in K\}.$$

Es decir, esta es la *componente isotípica* de τ en $\pi_{|_K}$. Podemos interpretar que $\mathcal{H}_\pi(\tau)$ se puede identificar con la suma directa de V_τ una cantidad $m(\tau, \pi)$ de veces. En principio $m(\tau, \pi)$ podría ser infinita (numerable).

Consideremos el operador $\pi(f)$ sobre $L^1(G)$ dado por (2.39). Recordemos estaba definido por

$$\langle \pi(f)v, w\rangle_{\mathcal{H}_\pi} := \int_G f(g)\langle \pi(g)v, w\rangle_{\mathcal{H}_\pi} dg \qquad \forall v, w \in \mathcal{H}_\pi, \ \forall f \in L^1(G).$$

Consideramos la proyección ortogonal $P^\tau_\pi : \mathcal{H}_\pi \to \mathcal{H}_\pi(\tau)$ dada por

$$P^\tau_\pi := d_\tau \pi_{|_K}(\overline{\chi_\tau}) = d_\tau \int_K \chi_\tau(k^{-1})\pi(k)dk, \tag{3.14}$$

es decir, P^τ_π está definida por

$$\langle \pi(d_\tau \overline{\chi_\tau})u, v\rangle = \int_K d_\tau \overline{\chi_\tau}(k)\langle \pi(k)u, v\rangle_{\mathcal{H}_\pi} \ dk \qquad \forall u, v \in \mathcal{H}_\pi.$$

(Como referencia ver por ejemplo [Wal, Proposición 5.3.7] y [Ca, Sección 3].) Podemos pensar que esta proyección está dada por la convolución en K entre π y $d_\tau \chi_\tau$ evaluada en el elemento identidad. Notar que como

$$d_\tau \overline{\chi_\tau} *_K d_\tau \overline{\chi_\tau} = d_\tau \overline{\chi_\tau},$$

se tiene que

$$\pi(d_\tau \overline{\chi_\tau})^2 = \pi(d_\tau \overline{\chi_\tau} *_K d_\tau \overline{\chi_\tau}) = \pi(d_\tau \overline{\chi_\tau}).$$

Observación 3.9. Resaltamos que P^τ_π generaliza al operador P^K_π dado por (2.40) ya que $P^K_\pi = P^\tau_\pi$ para τ la representación trivial de K.

Dadas $\pi \in \widehat{G}(\tau)$, $f \in L^1(G)$ y el operador $\pi(f)$, valen las relaciones

$$\pi(f) \circ P^\tau_\pi = \pi(f *_K d_\tau \overline{\chi_\pi}), \qquad P^\tau_\pi \circ \pi(f) = \pi(d_\tau \overline{\chi_\pi} *_K f) \quad \text{y}$$
$$P^\tau_\pi \circ \pi(f) \circ P^\tau_\pi = \pi(d_\tau \overline{\chi_\pi} *_K f *_K d_\tau \overline{\chi_\pi}).$$

En particular, si $f \in I^1_\tau(G)$ tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.10. *Sea $\pi \in \widehat{G}(\tau)$. Si $f \in I^1_\tau(G)$, entonces $\pi(f) : \mathcal{H}_\pi(\tau) \to \mathcal{H}_\pi(\tau)$, es decir, el espacio $\mathcal{H}_\pi(\tau)$ es $\pi(f)$-invariante y $P^\tau_\pi \circ \pi(f) \circ P^\tau_\pi = \pi(f)$ (por lo que $\pi(f)$ es operador de entrelazamiento de $\tau(k)$ sobre $\mathcal{H}_\pi(\tau)$).*

Demostración. Esto se debe al simple hecho de que $\pi(d_\tau \overline{\chi_\tau})$ es la proyección ortogonal P^τ_π de $\mathcal{H}_\pi$ en $\mathcal{H}_\pi(\tau)$ (al descomponer a $\pi_{|_K}$ como suma de representaciones irreducibles de K). Luego, si $f \in I^1_\tau(G)$,

$$\pi(d_\tau \overline{\chi_\tau})\pi(f) = \pi(d_\tau \overline{\chi_\tau} *_K f) = \pi(f) = \pi(f *_K d_\tau \overline{\chi_\tau}) = \pi(f)\pi(d_\tau \overline{\chi_\tau}).$$

Otra forma para ver solamente que $\pi(f)$ y $\tau(k)$ conmutan consiste en observar primero que en general dados $v, w \in \mathcal{H}_\pi$ arbitrarios, como f es una función K-central se tiene

$$\begin{aligned}
\langle \pi(k^{-1})\pi(f)\pi(k)v, w\rangle_{\mathcal{H}_\pi} &= \langle \pi(f)\pi(k)v, \pi(k)w\rangle_{\mathcal{H}_\pi} \\
&= \int_G f(g)\langle \pi(g)\pi(k)v, \pi(k)w\rangle_{\mathcal{H}_\pi} dg \\
&= \int_G f(g)\langle \pi(k^{-1})\pi(g)\pi(k)v, w\rangle_{\mathcal{H}_\pi} dg \\
&= \int_G f(g)\langle \pi(k^{-1}gk)v, w\rangle_{\mathcal{H}_\pi} dg \\
&= \int_G f(kgk^{-1})\langle \pi(g)v, w\rangle_{\mathcal{H}_\pi} dg \\
&= \int_G f(g)\langle \pi(g)v, w\rangle_{\mathcal{H}_\pi} dg \\
&= \langle \pi(f)v, w\rangle_{\mathcal{H}_\pi}.
\end{aligned}$$

Es decir, si f es K-central entonces $\pi(f)$ y $\pi_{|_K}$ conmutan. En particular, si tomamos $v, w \in \mathcal{H}_\pi(\tau)$, se tiene $\langle \tau(k^{-1})\pi(f)\tau(k)v, w\rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \pi(f)v, w\rangle_{\mathcal{H}_\pi}$. □

Como referencia para la la proposición anterior mencionamos [WarI, p. 307 y Proposición 4.5.1.7, p. 310].

Criterio 3.11 (Criterio de Godement)**.** *[God] La terna (G, K, τ) es conmutativa si y sólo si para toda $\pi \in \widehat{G}$ la multiplicidad de τ en $\pi_{|_K}$ es a lo sumo uno. En particular, (G, K) es un par de Gelfand fuerte si y sólo si, para toda $\pi \in \widehat{G}$, $\pi_{|_K}$ es libre de multiplicidad.*

Demostración. Sea $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ una representación unitaria irreducible de G arbitraria. Dada cualquier función $f \in I^1_\tau(G)$, $\pi(f)$ es un operador de entrelazamiento de $\tau(k)$ cuando se lo ve sobre $\mathcal{H}_\pi(\tau)$.

Si $m(\tau, \pi) \leq 1$, entonces $\pi(f)$ es un carácter o es idénticamente 0. Luego, dadas f y h funciones en $I^1_\tau(G)$ arbitrarias, se tiene que $\pi(f * h - h * f) = 0$. Como esto vale para cualquier representación unitaria $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ de G, por el teorema de Gelfand-Raikov resulta $f * h = h * f$ y esto $\forall f, h \in I^1_\tau(G)$.

Recíprocamente, sea (G, K, τ) una terna conmutativa. Esto quiere decir que $I^1_\tau(G)$ es un álgebra de funciones conmutativa con el producto de convolución. Como para cada $f \in I^1_\tau(G)$, si $\pi \in \widehat{G}$ es tal que contiene a τ cuando se la restringe a K, se tiene que $\pi(f)$ es un operador de entrelazamiento de $\tau(k)$ cuando se lo ve sobre $\mathcal{H}_\pi(\tau)$, $\pi(f) \in \mathrm{GL}(m(\tau, \pi), \mathbb{C})$ y por lo tanto $I^1_\tau(G)$ actúa irreduciblemente en $\mathbb{C}^{m(\tau,\pi)}$ (donde simplemente $\mathbb{C}^{m(\tau,\pi)}$ denota el producto directo de $\mathbb{C}$ una cantidad $m(\tau, \pi)$ de veces). Argumentando de manera similar a la prueba del Lema de Schur se tiene que la dimensión de $\mathbb{C}^{m(\tau,\pi)}$ es 1 y por lo tanto $m(\tau, \pi) = 1$. (Nota: En un principio $m(\tau, \pi)$ podría haber sido infinita numerable, en dicho caso entendemos $\mathbb{C}^{m(\tau,\pi)}$ como ℓ^2 y $\mathrm{GL}(m(\tau, \pi), \mathbb{C})$ como $\mathcal{B}(\ell^2)$.) □

Observación 3.12. En la teoría de pares de Gelfand, (G, K) es un par conmutativo si y sólo si la representación trivial de K es libre de multiplicidad en toda representación unitaria irreducible de G restringida a K. Esto indica que dada $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ una representación unitaria irreducible de G arbitraria, si $\mathcal{H}_\pi(K)$ denota el subespacio

$$\mathcal{H}_\pi(K) = \{v \in \mathcal{H}_\pi \mid \ \pi(k)v = v \ \forall k \in K\},$$

entonces su dimensión debe ser a lo sumo 1 para que el par sea conmutativo. El espacio $\mathcal{H}_\pi(\tau)$ viene entonces a generalizar el rol de $\mathcal{H}_\pi(K)$.

Observación 3.13. Si (G, K, τ) una terna conmutativa, dada $(\pi, \mathcal{H}_\pi) \in \widehat{G}(\tau)$, como $m(\tau, \pi) = 1$, entonces el espacio $\mathcal{H}_\pi(\tau)$ se identifica con V_τ.

De ahora en más consideraremos G y K grupos de Lie. Sea $\mathbb{D}(E_\tau)$ el álgebra de operadores diferenciales G-invariantes en E_τ.

Teorema 3.14. *[RS, Teorema 3.1] Si G/K es conexo (por ejemplo siendo G conexo), entonces (G, K, τ) es una terna conmutativa si y sólo si $\mathbb{D}(E_\tau)$ es conmutativa (la ida vale en general y para la vuelta se precisa la hipótesis de conexidad).*

Teorema 3.15. *[RS, Corolario 3.3] Si (G, K, τ) es una terna conmutativa y G/K es conexo, entonces (G, K) es un par de Gelfand. En particular, G es unimodular.*

En adelante asumiremos que G/K es conexo.

3.1. Funciones esféricas matriciales

Para analizar a los operadores integrales G-invariantes debemos analizar a sus núcleos. Para comprender el álgebra de núcleos $L^1_{\tau,\tau}(G, \mathrm{End}(V_\tau))$ debemos comprender su espacio dual. Este espacio estará dado por las funciones que, en cierto sentido, serán "autofunciones" de todos los operadores integrales G-invariantes. Por el teorema de representación de Riesz los funcionales lineales y continuos de $L^1_{\tau,\tau}(G, \mathrm{End}(V_\tau))$ se identifican con $L^\infty_{\tau,\tau}(G, \mathrm{End}(V_\tau))$. Los caracteres de $L^1_{\tau,\tau}(G, \mathrm{End}(V_\tau))$ estarán dados por la siguiente definición.

Definición 3.16. Sea (G, K, τ) una terna conmutativa. Una función (no idénticamente nula) $\Phi \in L^\infty_{\tau,\tau}(G, \mathrm{End}(V_\tau))$ se dice una *función esférica de tipo* τ o τ*-esférica* si la aplicación

$$F \longmapsto \mathcal{F}_\tau(F)(\Phi) := \frac{1}{d_\tau} \int_G \mathrm{tr}\left(F(x)\Phi(x^{-1})\right)\, dx = \frac{1}{d_\tau} \mathrm{tr}\left((F * \Phi)(e)\right) \tag{3.15}$$

define un homomorfismo de $L^1_{\tau,\tau}(G, \mathrm{End}(V_\tau))$ en $\mathbb{C}$. Dicha aplicación es llamada la *transformada de Fourier esférica asociada a* τ o *transformada de Fourier* τ*-esférica*. Diremos que hemos obtenido un conjunto *completo* de funciones τ-esféricas cuando tengamos *todas* las funciones esféricas (acotadas) de tipo τ.

La transformada de Fourier esférica permitirá descomponer a los operadores integrales G-invariantes, T_F, en las direcciones dadas por los caracteres del álgebra $L^1_{\tau,\tau}(G, \mathrm{End}(V_\tau))$ y a partir de esta descomposición los operadores T_F quedarán completamente caracterizados.

Observación 3.17. No quisiéramos dejar de observar que dadas dos matrices $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, la traza $\mathrm{tr}(AB^*)$ se corresponde con el producto interno canónico en $\mathbb{C}^{n^2}$ viendo a dichas matrices como vectores. Esta es la llamada *norma de Frobenius* cuya generalización a espacios de dimensión infnita es la *norma Hilbert-Schmidt*. Dado $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, un operador lineal y continuo $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ se dice *de Hilbert-Schmidt* si dada una base ortonormal $\{e_i\}_{i\in I}$ de $\mathcal{H}$ se tiene que

$$\|T\|^2_{HS} := \sum_{i\in I} \|T(e_i)\|^2 < \infty$$

y $\|T\|_{HS}$ es la *norma de Hilbert-Schmidt* del operador T.

Definición 3.18. Sea (G, K, τ) una terna conmutativa. Una función (no idénticamente nula) $\phi \in I^\infty_\tau(G)$ se dice una *función esférica de traza de tipo* τ si la aplicación

$$f \longmapsto \mathfrak{F}_\tau(f)(\phi) := \frac{1}{d_\tau} \int_G f(x)\phi(x^{-1})\, dg = \frac{1}{d_\tau}(f * \phi)(e) \tag{3.16}$$

define un homomorfismo de $I^1_\tau(G)$ en $\mathbb{C}$. Dicha aplicación es llamada la *transformada de Fourier esférica escalar asociada a* τ.

Lema 3.19. *Sea* (G, K, τ) *una terna conmutativa. Sea* Φ *una función esférica de tipo* τ *y sea*

$$\phi(x) := \mathrm{tr}(\Phi(x)) \qquad (\forall x \in G).$$

Las siguientes identidades relacionan ambas funciones:

$$\int_K \Phi(kxk^{-1})\, dk = \frac{1}{d_\tau}\phi(x)\, \mathrm{I} \qquad \forall x \in G \quad y \tag{3.17}$$

$$\int_K \phi(xk)\tau(k)\, dk = \frac{1}{d_\tau}\Phi(x) \qquad \forall x \in G. \tag{3.18}$$

Demostración. La prueba es análoga a la de [Ca, Lema 3.1]. Como Φ^τ_π satisface (3.3) tenemos que

$$\int_K \Phi(kxk^{-1})\, dk \in \mathrm{End}_K(V_\tau) \qquad \forall x \in G.$$

Como τ es una representación unitaria irreducible de K, por el Lema de Schur se tiene que

$$\int_K \Phi(kxk^{-1})\, dk = c(x)\mathrm{I} \qquad (\forall x \in G),$$

para alguna función $c : G \to \mathbb{C}$. Tomando traza obtenemos

$$d_\tau c(x) = \operatorname{tr}\left(\int_K \Phi(kxk^{-1})\ dk\right) = \operatorname{tr}(\Phi(x)) = \phi(x) \qquad \forall x \in G.$$

Esto prueba (3.17). Por su parte, la identidad (3.18) se puede escribir como

$$\int_K \operatorname{tr}\left(\Phi(x)\tau(k^{-1})\right)\tau(k)\ dk = \frac{1}{d_\tau}\phi(x) \qquad (\forall x \in G)$$

y es consecuencia de las relaciones de ortogonalidad de Schur. □

Lema 3.20. *Sea (G, K, τ) una terna conmutativa. Sea Φ una función esférica de tipo τ y sea $\phi(x) := \operatorname{tr}(\Phi(x))$ $(\forall x \in G)$. Se tiene que*

$$\mathcal{F}_\tau(F)(\Phi) = \mathfrak{F}_\tau(f_F)(\phi) \qquad \forall F \in L^1_{\tau,\tau}(G, \operatorname{End}(V_\tau)) \quad y$$

$$\mathfrak{F}_\tau(f)(\phi) = \mathcal{F}_\tau(F_f)(\Phi) \qquad \forall f \in I^1_\tau(G).$$

Demostración. La prueba es análoga a la de [Ca, Lema 3.4] y es consecuencia directa del Lema 3.19. Por un lado, dada $F \in L^1_{\tau,\tau}(G, \operatorname{End}(V_\tau))$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_\tau(F)(\Phi) &= \frac{1}{d_\tau}\int_G \operatorname{tr}\left(F(x)\Phi(x^{-1})\right)\ dx \\
&= \int_G\int_K \operatorname{tr}\left(F(x)\tau(k)\right)\phi(x^{-1}k)\ dk\ dx \qquad (\text{por } (3.18)) \\
&= \int_G\int_K \operatorname{tr}\left(F(k^{-1}x)\right)\phi(x^{-1}k)\ dk\ dx \\
&= \int_G \operatorname{tr}\left(F(x)\right)\phi(x^{-1})\ dx \\
&= \frac{1}{d_\tau}\int_G f_F(x)\phi(x^{-1})\ dx \\
&= \mathfrak{F}_\tau(f_F)(\phi),
\end{aligned}$$

donde la tercera igualdad vale por el teorema de Fubini, la invarianza a izquierda de la medida de Haar de G y porque la medida de Haar de K está normalizada. Por otro lado, dada $f \in I^1_\tau(G)$, utilizando los mismos argumentos que en las identidades anteriores tenemos

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}_\tau(f)(\phi) &= \frac{1}{d_\tau}\int_G f(x)\phi(x^{-1})\ dx \\
&= \frac{1}{d_\tau}\int_G \operatorname{tr}\left(F_f(k^{-1}x)\tau(k)\right)\phi(x^{-1})\ dx \\
&= \int_G \operatorname{tr}\left(F_f(x)\int_K \phi(x^{-1}k)\tau(k)\ dk\right)\ dx \\
&= \frac{1}{d_\tau}\int_G \operatorname{tr}\left(F_f(x)\Phi(x^{-1})\right)\ dx \\
&= \mathcal{F}_\tau(F_f)(\Phi).
\end{aligned}$$

□

El siguiente resultado permite caracterizar a las funciones esféricas de tipo τ a partir de ecuaciones funcionales al estilo de la "propiedad exponencial" dada en la Proposición 2.67.

Teorema 3.21. *[Ca, Teorema 3.6] Sea (G, K, τ) una terna conmutativa. Sea $\Phi \in L^\infty_{\tau,\tau}(G, \operatorname{End}(V_\tau))$ (no idénticamente cero) y sea $\phi(x) := \operatorname{tr}(\Phi(x))$ $(\forall x \in G)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) Φ es función esférica de tipo τ.

(ii) ϕ es función esférica de traza de tipo τ.

(*iii*) *para todo* $x, y \in G$

$$d_\tau \int_K \phi(xkyk^{-1})\ dk = \phi(x)\phi(y). \tag{3.19}$$

(*iv*) *para todo* $x, y \in G$

$$d_\tau \int_K \Phi(xkyk^{-1})\ dk = \Phi(x)\phi(y). \tag{3.20}$$

(*v*) *para todo* $x, y \in G$

$$d_\tau \int_K \Phi(xky)\chi_\tau(k)\ dk = \Phi(y)\Phi(x). \tag{3.21}$$

Observación 3.22. La ecuación (3.19) es la ecuación funcional de funciones esféricas de traza *de altura uno* (ver [God]). El término altura hace referencia a la multiplicidad $m(\tau, \pi)$ para cada $\pi \in \widehat{G}$. En nuestro caso estamos interesadas en ternas conmutativas (G, K, τ) y entonces $m(\tau, \pi) \leq 1$ para toda $\pi \in \widehat{G}$.

Teorema 3.23. *[Ca, Teorema 3.7] Sea* (G, K, τ) *una terna conmutativa. Sea* Φ *una función esférica de tipo* τ *y sea* $\phi(x) := \mathrm{tr}(\Phi(x))$ *(*$\forall x \in G$*). Entonces* $\Phi(e) = \mathrm{I}$ *y para todo* $x \in G$

$$F * \Phi(x) := \int_G F(y)\Phi(y^{-1}x)\ dx = \mathcal{F}(F)(\Phi)\ \Phi(x) \qquad \forall F \in L^1_{\tau,\tau}(G, \mathrm{End}(V_\tau)) \quad y \tag{3.22}$$

$$f * \phi(x) := \int_G f(y)\phi(y^{-1}x)\ dx = \mathfrak{F}(f)(\phi)\ \phi(x) \qquad \forall f \in I^1_\tau(G). \tag{3.23}$$

Dada $\pi \in \widehat{G}(\tau)$, consideramos la función

$$\Phi^\tau_\pi(g) := P^\tau_\pi \circ \pi(g^{-1}) \circ P^\tau_\pi \qquad \forall g \in G. \tag{3.24}$$

(Recordemos que como π es unitaria, $\pi(g^{-1}) = \pi(g)^*$.) Para cada $g \in G$, $\Phi^\tau_\pi(g)$ es considerado como un elemento de $\mathrm{End}(V_\tau)$ y satisface

$$\Phi^\tau_\pi(g)^* = \Phi^\tau_\pi(g^{-1}).$$

A su vez, como

$$\pi(k) \circ P^\tau_\pi = \tau(k) \qquad \text{para todo } k \in K$$

y además, como χ_τ es una función K-central, se puede ver que

$$P^\tau_\pi \circ \pi(k) = \tau(k) \circ P^\pi_\tau \qquad \text{para todo } k \in K$$

y se tiene que $\Phi^\tau_\pi(g)$ cumple (3.3), es decir,

$$\Phi^\tau_\pi(k_1 g k_2) = \tau(k_2)^{-1}\Phi^\tau_\pi(g)\tau(k_1)^{-1} \qquad \forall g \in G,\ k_1, k_2 \in K.$$

Observación 3.24.

(*i*) Observar que la función Φ^τ_π dada por (3.24) depende sólo de la clase de equivalencia de π en $\widehat{G}$ de la representación unitaria irreducible π de G. En efecto, si π es unitariamente equivalente a otra representación $\tilde{\pi}$ de G y $A : \mathcal{H}_\pi \to \mathcal{H}_{\tilde{\pi}}$ es el operador de entrelazamiento unitario entre ambas (i.e., $A \circ \pi(g) \circ A^{-1} = \tilde{\pi}(g)$ para todo $g \in G$), entonces

$$A \circ P^\tau_\pi \circ A^{-1} = P^\tau_{\tilde{\pi}}$$

y por lo tanto

$$A \circ \Phi^\tau_\pi(g) \circ A^{-1} \ = \ \Phi^\tau_{\tilde{\pi}}(g) \qquad \forall g \in G.$$

Como conclusión, para todo $g \in G$, $\Phi^\tau_\pi(g)$ y $\Phi^\tau_{\tilde{\pi}}(g)$ son operadores isomorfos o, mejor dicho, conjugados y el isomorfismo entre ambos o, mejor dicho, su conjugación está dada por la transformación A (es decir, A es la "matriz de cambio de base") y es la misma para todo $g \in G$.

(*ii*) Además, como hemos dicho previamente, dada $\pi \in \widehat{G}$ tal que $\tau \subset \pi$ como K-módulo y $m(\tau, \pi) = 1$, se tiene que el espacio vectorial $\mathcal{H}_\pi(\tau)$ es isomorfo a V_τ. Si $T : \mathcal{H}_\pi(\tau) \to V_\tau$ es el isomorfismo entre ellos, no haremos distinción entre $\Phi^\tau_\pi(g) \in \mathrm{End}(\mathcal{H}_\pi(\tau))$ y $T \circ \Phi^\tau_\pi(g) \circ T^{-1} \in \mathrm{End}(V_\tau)$.

Observación 3.25. Observamos que en el caso de pares (G, K) de Gelfand, $\mathcal{H}_\pi(\tau)$ corresponde a $\mathcal{H}_\pi(K)$ que es de dimensión uno. Digamos que $\mathcal{H}_\pi(K)$ está generado por un vector ε. La función Φ_π^τ viene a generalizar la función $\langle \varepsilon, \pi(x)\varepsilon\rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \pi(x)^*\varepsilon, \varepsilon\rangle_{\mathcal{H}_\pi}$ $(x \in G)$, ya que la proyección P_π^τ en este caso está dada simplemente por proyectar a la componente en la dirección del vector ε

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\pi &\longrightarrow \mathcal{H}_\pi(K) \\ v &\longmapsto \langle v, \varepsilon\rangle_{\mathcal{H}_\pi}\varepsilon \end{aligned}$$

Dada $\pi \in \widehat{G}(\tau)$ consideramos la función escalar

$$\phi_\pi^\tau(g) := \operatorname{tr}(\Phi_\pi^\tau(g)) \qquad \forall g \in G. \tag{3.25}$$

Notar que, para cada $g \in G$, la función $\phi_\pi^\tau(g)$ es la traza de $\pi(g)$ sobre el espacio vectorial $\mathcal{H}_\pi(\tau)$ (que es de dimensión finita). Por lo tanto, ϕ_π^τ es una suma de entradas matriciales diagonales y por lo tanto es una función de tipo positivo (revisar el ejemplo 2.21).

El siguiente resultado es análogo al Lema 3.19 y se prueba de la misma forma.

Lema 3.26. *[Ca, Lema 3.1] Sea $\pi \in \widehat{G}(\tau)$. Las siguientes identidades relacionan a las funciones Φ_π^τ y ϕ_π^τ:*

$$\int_K \Phi_\pi^\tau(kxk^{-1})\, dk = \frac{1}{d_\tau}\phi_\pi^\tau(x)\, \mathrm{I} \qquad \forall x \in G \quad y \tag{3.26}$$

$$\int_K \phi_\pi^\tau(xk)\tau(k)\, dk = \frac{1}{d_\tau}\Phi_\pi^\tau(x) \qquad \forall x \in G. \tag{3.27}$$

Observación 3.27. Como toda función Φ_π^τ dada por (3.24) satisface (3.3), se ve claramente de (3.25) que ϕ_π^τ es una función K-central. Por otro lado, tomando traza en la ecuación (3.27) obtenemos que

$$\phi_\pi^\tau *_K d_\tau \overline{\chi_\tau}(x) = \phi_\pi^\tau \qquad \forall x \in G$$

y por lo tanto ϕ_π^τ es de tipo τ.

Sean $\pi \in \widehat{G}(\tau)$ y $f \in I_\tau^1(G)$. Denotamos por $\pi(f)^\tau$ la restricción de $\pi(f)$ a $\mathcal{H}_\pi(\tau)$. De la Proposición 3.10 y de (3.26) tenemos que

$$\begin{aligned} \pi(f)^\tau &= \int_G f(x)\Phi_\pi^\tau(x^{-1})\, dx \\ &= \int_G \int_K f(k^{-1}xk)\Phi_\pi^\tau(x^{-1})\, dk\, dx \\ &= \int_G \int_K f(x)\Phi_\pi^\tau(kx^{-1}k^{-1})\, dk\, dx \\ &= \frac{1}{d_\tau}\int_G f(x)\phi_\pi^\tau(x^{-1})\, dx\, \mathrm{I} \\ &= \frac{1}{d_\tau}\operatorname{tr}(\pi(f)^\tau)\, \mathrm{I} \\ &= \frac{1}{d_\tau}\operatorname{tr}(\pi(f))\, \mathrm{I}. \end{aligned}$$

De manera similar a lo hecho en el capítulo 2, tenemos que

$$\pi(f_1 * f_2) = \pi(f_2) \circ \pi(f_1) \qquad \forall f_1, f_2 \in I_\tau^1(G).$$

Por lo tanto, si (G, K, τ) es una terna conmutativa, la transformación

$$f \longmapsto \mathfrak{F}_\tau(f)(\pi) := \frac{1}{d_\tau}\int_G f(x)\phi_\pi^\tau(x^{-1})\, dx \tag{3.28}$$

es un homomorfismo continuo de $I_\tau^1(G)$ en $\mathbb{C}$, esto es

$$\mathfrak{F}_\tau(f_1 * f_2)(\pi) = (\mathfrak{F}_\tau(f_1)(\pi))\,(\mathfrak{F}_\tau(f_2)(\pi)) \qquad \forall f_1, f_2 \in I_\tau^1(G). \tag{3.29}$$

Para $F \in L^1_{\tau,\tau}(G, \mathrm{End}(V_\tau))$ se tiene que

$$\int_G F(x)\Phi^\tau_\pi(x^{-1})\ dx \in \mathrm{End}_K(V_\tau).$$

Como τ es irreducible este operador es un múltiplo de la identidad, esto es,

$$\int_G F(x)\Phi^\tau_\pi(x^{-1})\ dx = c\mathrm{I},$$

donde

$$c = \frac{1}{d_\tau}\int_G \mathrm{tr}\left(F(x)\Phi^\tau_\pi(x^{-1})\right)\ dx.$$

Definimos, para cada $F \in L^1_{\tau,\tau}(G, \mathrm{End}(V_\tau))$, la aplicación

$$\mathcal{F}_\tau(F) : \widehat{G}(\tau) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\mathcal{F}_\tau(F)(\pi) := \frac{1}{d_\tau}\int_G \mathrm{tr}\left(F(x)\Phi^\tau_\pi(x^{-1})\right)\ dx.$$

En breve veremos el por qué de la notación elegida, es decir, la relación entre $\mathcal{F}_\tau(F)(\pi)$ y $\mathcal{F}_\tau(F)(\Phi^\tau_\pi)$. El siguiente resultado es análogo al Lema 3.20 y se prueba de la misma forma.

Lema 3.28. *[Ca, Lema 3.4] Para toda $\pi \in \widehat{G}(\tau)$, se tiene que:*

- *para toda $F \in L^1_{\tau,\tau}(G, \mathrm{End}(V_\tau))$*
$$\mathcal{F}_\tau(F)(\pi) = \mathfrak{F}_\tau(f_F)(\pi) \qquad y$$
- *para toda $f \in I^1_\tau(G)$*
$$\mathfrak{F}_\tau(f)(\pi) = \mathcal{F}_\tau(F_f)(\pi).$$

En el caso en que (G, K, τ) es una terna conmutativa, dada $\pi \in \widehat{G}(\tau)$, juntando la Proposición 3.6, (3.29) y el Lema 3.28 se tiene que la aplicación

$$F \longmapsto \mathcal{F}_\tau(F)(\pi)$$

satisface

$$\mathcal{F}_\tau(F_1 * F_2)(\pi) = (\mathcal{F}_\tau(F_1)(\pi))\,(\mathcal{F}_\tau(F_2)(\pi)) \qquad \forall F_1, F_2 \in L^1_{\tau,\tau}(G, \mathrm{End}(V_\tau)),$$

es decir, es un homomorfismo continuo de $L^1_{\tau,\tau}(G, \mathrm{End}(V_\tau))$ en $\mathbb{C}$. Por lo tanto, la función Φ^τ_π es una función esférica de tipo τ y

$$\mathcal{F}_\tau(F)(\pi) = \mathcal{F}_\tau(F)(\Phi^\tau_\pi) \qquad \text{para toda } F \in L^1_{\tau,\tau}(G, \mathrm{End}(V_\tau)).$$

Además, por el Teorema 3.21, ϕ^τ_π es una función esférica de traza de tipo τ y

$$\mathfrak{F}_\tau(f)(\pi) = \mathfrak{F}_\tau(f)(\phi^\tau_\pi) \qquad \text{para toda } f \in I^1_\tau(G).$$

Definición 3.29. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensión finita y con producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$. Una función Ψ a valores en $\mathrm{End}(V)$ sobre un grupo G se dice *definida positiva* si para cualquier elección de elementos $x_1, ..., x_n \in G$ se tiene que para toda elección de vectores $v_1, ..., v_n \in V$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \langle \Psi(x_j^{-1}x_i)v_j, v_i\rangle_V \geq 0.$$

es de tipo positivo en G (recordar la Definición 2.13).

Notar que esta definición generaliza a (2.15) donde se estaba considerando el producto interno canónico de $\mathbb{C}$. Equivalentemente, podemos decir que $\Psi : G \to \mathrm{End}(V)$ es definida positiva si y sólo si para cualquier elección de elementos $x_1, ..., x_n \in G$ se tiene que para toda elección de operadores $B_1, ..., B_n \in \mathrm{End}(V)$

$$\sum_{i,j} B_j \Psi(x_j^{-1}x_i)B_i^*$$

es un operador en $\mathrm{End}(V)$ semidefinido positivo y también si y sólo si

$$\sum_{i,j} \mathrm{tr}\left(B_j \Psi(x_j^{-1} x_i) B_i^*\right) \geq 0.$$

Con esta equivalencia estamos generalizando a (2.15) ya que ahora estamos considerando el producto interno canónico de $\mathrm{End}(V)$ dado por $\mathrm{tr}(C^* D)$ para $C, D \in \mathrm{End}(V)$ (le decimos "canónico" ya que equivale a ver las matrices C y D como vectores "largos", poniendo una a continuación de otra sus filas, y tomar el producto interno canónico de vectores -remitimos a (1.15) con la salvedad de que aquí el cuerpo en $\mathbb{C}$ en lugar de $\mathbb{R}$-).

Análogamente a la Observación 2.19, $F : G \to \mathrm{End}(V)$ es definida positiva si para cualquier elección de elementos $x_1, ..., x_n \in G$ se tiene que para todo $v_1, ..., v_n \in V$ la matriz

$$\left(\langle \Psi(x_j^{-1} x_i) v_j, v_i \rangle_V\right)_{i,j}$$

es semidefinida positiva. En particular, toda función definida positiva pertenece a $L^\infty(G, \mathrm{End}(V))$.

Definición 3.30. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$. Una función $\Psi \in L^\infty(G, \mathrm{End}(V))$ se dice *de tipo positivo* si el operador de convolución

$$\begin{aligned} K_\Psi : L^1(G, \mathrm{End}(V)) &\longrightarrow L^1(G, \mathrm{End}(V)) \cap L^\infty(G, \mathrm{End}(V)) \\ F &\longmapsto F * \Psi \end{aligned}$$

es semidefinido positivo, esto es,

$$\begin{aligned} \langle K_\Psi(F), F \rangle &:= \int_G \mathrm{tr}\left(K_\Psi(F)(x) F(x)^*\right) \, dx \\ &= \int_G \int_G \mathrm{tr}\left(F(y) \Psi(y^{-1} x) F(x)^*\right) \, dy \, dx \geq 0 \qquad \forall F \in L^1(G, \mathrm{End}(V)). \end{aligned}$$

En analogía a la Proposición 2.18, $\Psi \in L^\infty(G, \mathrm{End}(V))$ es de tipo positivo si y sólo si para toda $F \in C_c^\infty(G, \mathrm{End}(V_\tau))$

$$\int_G \mathrm{tr}\left(F^* * F(x) \Psi(x^{-1})\right) \, dx \geq 0.$$

Se puede ver que toda función $\Psi : G \to \mathrm{End}(V)$ de tipo positivo coincide en casi todo punto con una función continua. Más aún, si $\Psi \in C(G, \mathrm{End}(V))$ se tiene que Ψ de tipo positivo si y sólo si es definida positiva.

Proposición 3.31. *[RS, Proposición 9.1] Sea V un $\mathbb{C}$- espacio vectorial de dimensión finita. Toda función $\Psi \in L^\infty(G, \mathrm{End}(V))$ de tipo positivo satisface las siguientes propiedades:*

(i) *$\Psi(e)$ es un operador en $\mathrm{End}(V)$ semidefinido positivo;*

(ii) *para todo $x \in G$, $\Psi(x^{-1}) = \Psi(x)^*$;*

(iii) *para todo $v \in V$, $\psi_v(x) := \langle \Psi(x)(v), v \rangle_V$ $(\forall x \in G)$ es una función de tipo positivo;*

(iv) *$N\acute{u}(\Psi(e)) \subseteq N\acute{u}(\Psi(x))$ y $\mathrm{Im}(\Psi(x)) \subseteq \mathrm{Im}(\Psi(e))$ para todo $x \in G$;*

(iv) *para todo $x \in G$, $\Psi(x) * \Psi(x) \leq \Psi(e)^2$.*

Observación 3.32. Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita y sea $\Psi \in L^\infty(G, \mathrm{End}(V))$.

(i) Si todas las entradas matriciales de Ψ son funciones de tipo positivo, entonces Ψ es de tipo positivo.

(ii) Si Ψ es de tipo positivo, entonces $\mathrm{tr}(\Psi)$ es de tipo positivo.

En este sentido, las funciones definidas por la fórmula (3.24) generalizan la noción de funciones esféricas escalares de tipo positivo.

3.2. El caso del producto semidirecto $G = K \ltimes N$

Esta tesis se centra en el estudio del caso en que $G = K \ltimes N$, donde N es un grupo de Lie nilpotente conexo y K es un subgrupo compacto de automorfismos de N. La teoría general relativa a este caso particular ha sido estudiada recientemente por F. Ricci y A. Samanta en [RS]. El análisis de ternas conmutativas considerando G de esta forma es particularmente interesante ya que los operadores involucrados se identifican con operadores integrales sobre las secciones de un fibrado homogéneo del grupo de Lie N que conmutan con traslaciones y con la acción de K. Dejando de lado los grupos G de esta forma, destacamos en los casos en que (G, K) es un par simétrico (de tipo compacto o no compacto), con G semisimple, trabajos pioneros son [Ca, GPT, RT].

Fijemos una variedad Riemanniana homogénea M y consideremos $G := Isom(M)$ su grupo de isometría y el estabilizador $K := G_{x_0}$ de un punto arbitrario $x_0 \in M$. Sabemos que K es siempre compacto y que M se identifica con el espacio cociente G/K (revisar la Sección 1.1). Sea $Isom(M)_0$ la componente conexa de la identidad del grupo $Isom(M)$. Un *espacio conmutativo* es una variedad Riemanniana homogénea conexa M cuya álgebra de operadores diferenciales invariantes por $Isom(M)_0$ es conmutativa. Equivalentemente, en este caso, se dice que el par (G, K) es *de Gelfand*. A partir del Teorema 3.14 tenemos una equivalencia análoga entre fibrados vectoriales homogéneos E_τ de una variedad M cuya álgebra de operadores $\mathbb{D}(E_\tau)$ es conmutativa y ternas de Gelfand (G, K, τ), para $\tau \in \widehat{K}$.

En el caso en que M sea un grupo de Lie nilpotente conexo, simplemente conexo dotado de una métrica Riemanniana invariante a izquierda, pondremos $M = N$ y esta recibe el nombre de *nilvariedad homogénea*. El grupo de isometrías de N está dado por $Isom(N) = K \ltimes N$, donde K es el grupo de automorfismos ortogonales de N (cf. [Wils] y [Wo2]). Estaremos particularmente interesadas en mirar ternas de Gelfand sobre estos grupos $G = Isom(N)$ y K es el grupo (conexo) de automorfismos ortogonales de la nilvariedad homogénea (conexa) N. Cabe mencionar que también podemos abstraernos un poco más olvidando que los grupos de Lie G y K provienen de haber considerado una variedad M. Es decir, podemos directamente considerar N un grupo de Lie nilpotente conexo y K un subgrupo de Lie compacto y conexo de automorfismos de N y preguntarnos por ternas de Gelfand de la forma $(K \ltimes N, K, \tau)$ para $\tau \in \widehat{K}$.

Fijemos entonces N un grupo de Lie nilpotente conexo y K un subgrupo compacto de automorfismos de N. Denotamos por $k \cdot x$ la acción de $k \in K$ en $x \in N$. Recordemos que la operación de grupo en $K \ltimes N$ está dada por

$$(k, x)(k', x') = (kk', x(k \cdot x')) \qquad \text{para } k, k' \in K,\ x, x' \in N.$$

El grupo N es a su vez un espacio homogéneo del grupo $G := K \ltimes N$. Dada τ una representación de dimensión finita de K, que ya asumiremos irreducible, consideramos el fibrado vectorial homogéneo E_τ de N. Las secciones de E_τ, es decir, las funciones $\mathbf{u}$ sobre G a valores en V_τ que satisfacen (3.1) (que pueden considerarse de clase L^1, L^2, C^∞, C_c^∞, C_c, etc.) se identifican con funciones u sobre N a valores en V_τ a través del mapa

$$u(x) \longmapsto \mathbf{u}(k, x) := \tau(k)^{-1} u(x). \tag{3.30}$$

como muestra la Figura 3.1. En este apartado $\mathcal{D}$ hará referencia al espacio de las secciones u de clase C_c^∞. Cabe destacar que esto contrasta con la situación general esquematizada en la Figura 1.6 de la Sección 1.2.1.

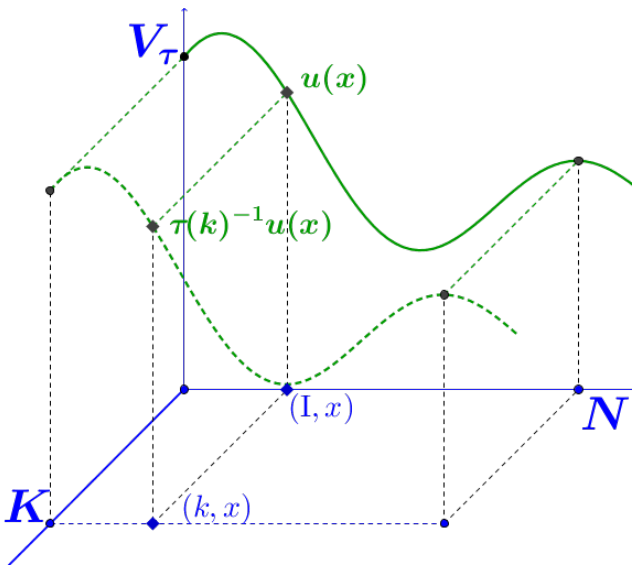


Figura 3.1: Esquema de una sección u de un fibrado vectorial homogéneo sobre $G = K \ltimes N$.

La acción de G en una sección $\mathbf{u}$ se reinterpreta como la acción conjunta de N sobre u por traslación a izquierda y de K sobre u por

$$(k, u(x)) \longmapsto \tau(k)u(k^{-1} \cdot x). \tag{3.31}$$

Ejemplo 3.33. Consideremos $N = \mathbb{R}^2$ el espacio euclídeo bidimensional y $K = \mathrm{SO}(2)$ el grupo de rotaciones. Fijemos como espacio vectorial $V_\tau = \mathbb{R}^2$. En este caso para que sea más simple la visualización de las acciones tomamos un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Las acciones de traslación y rotación se presentan en las siguientes figuras.

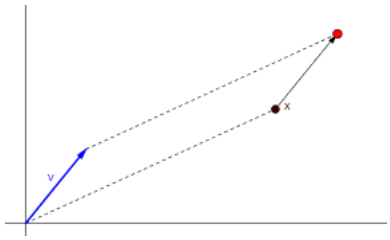


Figura 3.2: Acción por traslación en $\mathbb{R}^2$.

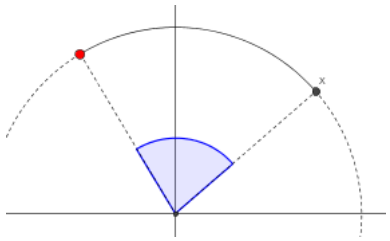
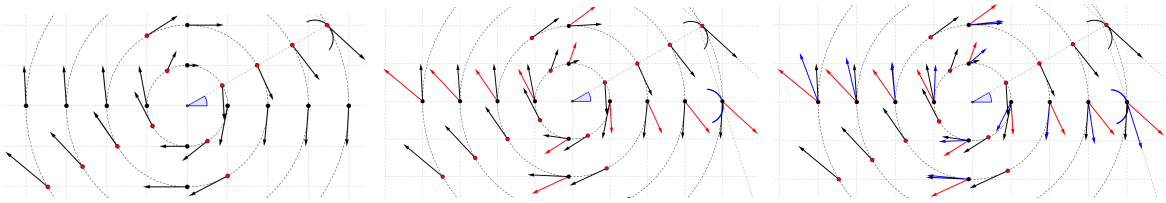


Figura 3.3: Acción de rotación en $\mathbb{R}^2$.

Un campo vectorial sobre la variedad $\mathbb{R}^2$ se identifica una función $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y se puede esquematizar ubicando para cada punto de variedad $x \in \mathbb{R}^2$ el vector $u(x)$. En la siguiente figura dibujamos un campo u y hacemos notar que la acción por rotaciones sobre u dada en (3.31) es "la natural".



(a) $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (b) $x \mapsto u(k^{-1} \cdot x)$ (c) $x \mapsto \tau(k) \cdot u(k^{-1} \cdot x)$

Figura 3.4: Acción por rotación en un campo vectorial u de $\mathbb{R}^2$ (sección del fibrado trangente). Aquí $V_\tau = \mathbb{R}^2$, es decir, τ es la representación real estándar dada por $\tau(k)x := k \cdot x$, donde $k \in \mathrm{SO}(2)$, $x \in \mathbb{R}^2$. La primera figura (a) muestra en negro algunos de los puntos de un campo vectorial u en $\mathbb{R}^2$ indicando en uno de los vectores $u(x)$ una curva tangente a dicho vector $u(x)$. La segunda figura (b) es auxiliar. Vemos que la curva tangente dibujada en (a) en negro rota a la curva azul marcada en (b) pero no es tangente al vector en rojo indicado sobre ella y que se obtiene del vector $u(x)$ en negro que sí era tangente a la curva negra. El campo vectorial en azul de la figura (c) es el dado por la acción de $k \in \mathrm{SO}(2)$ sobre u, es decir, $k \cdot u$ como en (3.31). Aquí vemos que a la curva en azul le corresponde un vector tangente en azul. Por ello decimos la acción de $K = \mathrm{SO}(2)$ es la natural.

Los operadores lineales y continuos de $\Gamma(G \times_\tau V_\tau)$ en su dual, que conmutan con la acción de G, se identifican con operadores T de $\mathcal{D}$ en $\mathcal{D}'$ que conmutan con la acción de traslación a izquierda dada por N y con la acción de K que se obtiene de (3.31) usando (1.3). De manera análoga a lo visto en la Sección 2.3 donde estudiamos el teorema del núcleo de Schwartz, la invarianza a izquierda por N hace que estos operadores T resulten de convolución (sobre N). A su vez, la invarianza por K hace que sus núcleos sean aplicaciones lineales y continuas $\Lambda : \mathcal{D} \to V_\tau$ con la propiedad de ser K-invariantes, es decir,

$$k \cdot (\Lambda(u)) = \Lambda(k \cdot u) \qquad \forall u \in \mathcal{D},\ \forall k \in K. \tag{3.32}$$

Como $\Lambda(u) \in V_\tau$ sabemos que

$$k \cdot (\Lambda(u)) = \tau(k)(\Lambda(u)) \qquad \forall k \in K.$$

Estas aplicaciones Λ extienden el concepto de funcionales lineales continuos. Una clase particular son las dadas por funciones matriciales $F : N \to \mathrm{End}(V_\tau)$ localmente integrables. Definimos $\Lambda = \Lambda_F$ por

$$\Lambda_F(u) := \int_N F(x)u(x)\ dx.$$

Si Λ_F es K-invariante, es decir, satisface (3.32), entonces

$$F(k \cdot x) \ = \ \tau(k)\ F(x)\ \tau(k)^{-1} \tag{3.33}$$

entendida esta igualdad para casi todo punto $x \in N$. En efecto, por un lado

$$\tau(k)(\Lambda_F(u)) = \tau(k)\left(\int_N F(x)u(x)\ dx\right)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\Lambda_F(k \cdot u) &= \int_N F(x)(k \cdot u)(x)\ dx \\ &= \int_N F(x)\tau(k)u(k^{-1} \cdot x)\ dx \\ &= \int_N F(k \cdot x)\tau(k)u(x)\ dx\end{aligned}$$

(aquí hemos usado que N es una variedad Riemanniana donde K es un subgrupo de automorfismos ortogonales de N). Igualando obtenemos que para cada $k \in K$

$$\tau(k)\left(\int_N F(x)u(x)\ dx\right) = \int_N F(k \cdot x)\tau(k)u(x)\ dx \qquad \forall u \in \mathcal{D}$$

o equivalentemente

$$\int_N \left(F(x) - \tau(k)^{-1}F(k\cdot x)\tau(k)\right)\ u(x)\ dx \qquad \forall u \in \mathcal{D}.$$

Por lo que para todo $k \in K$

$$F(x) = \tau(k)^{-1}F(k\cdot x)\tau(k) \qquad p.p.$$

que es equivalente a (3.33). Si una función definida sobre N satisface (3.33), para una adecuada representación τ, diremos que es K-*equivariante*. Denotamos por

$$\boxed{L^1_\tau(N)}$$

al conjunto de funciones integrables sobre N a valores en $\mathrm{End}(V_\tau)$ que satisfacen (3.33). (Notación similar, $L^\infty_\tau(N)$, $C_\tau(N)$, $C^\infty_\tau(N)$, etc., será usada para diferentes clases de espacios de funciones sobre N a valores en $\mathrm{End}(V_\tau)$ cumpliendo (3.33).) El recuadro se debe a que será nuestro principal espacio de funciones de estudio.

Para $F \in L^1_\tau(N)$ denotamos por T_F al correspondiente operador de convolución

$$(T_F(u))\,(x) = (F * u)\,(x) := \int_N F(y^{-1}x)u(y)\ dy.$$

Por ser de convolución, T_F conmuta con las traslaciones dadas por elementos de N. Verifiquemos rápidamente que efectivamente, como F satisface (3.33), T_F conmuta con la acción de K, es decir, que

$$k\cdot(T_F(u)) = T_F(k\cdot u) \qquad \forall u \in \mathcal{D},\ \forall k \in K. \tag{3.34}$$

Por la definición de la acción de K en secciones (3.31), el lado izquierdo de (3.34) está dado por

$$(k\cdot(T_F(u)))(x) = \tau(k)(T_F(u))(k^{-1}\cdot x) = \tau(k)\int_N F(y^{-1}k^{-1}\cdot x)u(y)\ dy. \tag{3.35}$$

y el lado derecho de (3.34) por

$$T_F(k\cdot u) = \int_N F(y^{-1}x)\tau(k)u(k^{-1}\cdot y)\ dy. \tag{3.36}$$

Como cada sección u es continua, así como cada sección $T_F(u)$, entonces evaluando (3.35) y (3.36) en la identidad $x = e$ de N y mediante un cambio de variable, usando que la acción de K es por automorfismos ortogonales, se tiene que para que coincidan F debe cumplir (3.33).

La correspondiente función de F sobre $G = K \ltimes N$ via la asociación de secciones (3.30), que denotaremos $\tilde{F}$, es

$$\tilde{F}(k,x) \ = \ \tau(k)^{-1}\ F(x) \in L^1_{\tau,\tau}(G, \mathrm{End}(V_\tau)).$$

Es decir, cada T_F está en correspondencia con un operadores $T_{\tilde{F}}$ de los "viejos", es decir, con un operador integral aplicado sobre secciones $\mathbf{u} \in \Gamma(G \times V_\tau)$ y G-invariante que por lo tanto es de convolución (sobre G) con un núcleo $\tilde{F} \in L^1_{\tau,\tau}(G, \mathrm{End}(V_\tau))$ (revisar la escritura (3.2) para el operador $T_{\tilde{F}}$).

Como sucedía anteriormente, la composición de operadores integrales invariantes se corresponde con la convolución de funciones en $L^1_\tau(N)$. Luego, $(K \ltimes N, K, \tau)$ es un terna conmutativa si y sólo si el álgebra de convolución $L^1_\tau(N)$ es conmutativa. En tal caso, diremos que una función no-trivial $\Phi \in L^\infty_\tau(N)$ es *esférica de tipo* τ si la aplicación

$$F \longmapsto (\mathcal{F}(F))(\Phi) := \frac{1}{d_\tau}\int_N \mathrm{tr}[F(x)\Phi(x^{-1})]\ dx \tag{3.37}$$

es un homomorfismo de álgebras entre $L^1_\tau(N)$ y $\mathbb{C}$. Se puede probar que una función Φ es una función esférica de tipo τ sobre N si y sólo si la correspondiente función vía la aplicación (3.30) es una función esférica de tipo τ en $K \ltimes N$ ([RS, Teorema 5.3]).

Pasemos ahora a una caracterización de ternas conmutativas $(K \ltimes N, K, \tau)$ y de sus funciones esféricas de tipo τ (o τ-esféricas) por medio de operadores diferenciales. Recordemos que habíamos denotado por $\mathbb{D}(E_\tau)$ el álgebra de operadores diferenciales G-invariantes del fibrado vectorial homogéneo E_τ. Cuando $G = K \ltimes N$, una vez que hemos identificado las secciones suaves de E_τ con funciones infinitamente diferenciables u sobre N a valores en V_τ, podemos también identificar $\mathbb{D}(E_\tau)$ con un álgebra de operadores

diferenciables sobre N. Sea $\mathbb{D}(N)$ el álgebra de operadores diferenciales invariantes a izquierda en N. Denotamos por

$$(\mathbb{D}(N) \otimes \mathrm{End}(V_\tau))^K \tag{3.38}$$

al álgebra de operadores diferenciales, aplicados a funciones sobre N a valores en V_τ, que son N-invariantes y que conmutan con la acción de K dada en (3.31). Entonces, existe un isomorfismo

$$\mathbb{D}(E_\tau) \simeq (\mathbb{D}(N) \otimes \mathrm{End}(V_\tau))^K.$$

Más aún, $(K \ltimes N, K, \tau)$ es una terna conmutativa si y sólo si $(\mathbb{D}(N) \otimes \mathrm{End}(V_\tau))^K$ es conmutativa. Como referencia ver [RS, Teorema 6.1].

Sea $\mathfrak{n}$ el álgebra de Lie de N. Sea $\mathcal{P}_\tau$ el espacio de polinomios sobre $\mathfrak{n}$ a valores en $\mathrm{End}(V_\tau)$ que satisfacen

$$P(k \cdot x) = \tau(k)P(x)\tau(k)^{-1} \qquad \forall k \in K, x \in \mathfrak{N}.$$

Existe un isomorfismo lineal entre entre $(\mathbb{D}(N) \otimes \mathrm{End}(V_\tau))^K$ y $\mathcal{P}_\tau$. Este isomorfismo es el llamado *operador de simetrización* (revisar la aplicación 1.18) que está descripto en [He1, Teorema 4.3], en el caso escalar, y en [RS, Sección 2], para nuestro caso.

Al abocarnos al estudio de ternas que involucran grupos de Lie nilpotentes simplemente conexos podremos muchas veces trabajar sin pérdida de generalidad o bien sobre el grupo o bien sobre su álgebra de Lie debido al siguiente teorema.

Teorema 3.34. *[Kn, Teorema 1.104] Si N es un grupo de Lie nilpotente simplemente conexo con álgebra de Lie $\mathfrak{n}$, entonces la función exponencial $\exp : \mathfrak{n} \to N$ es un difeomorfismo global.*

En [RS, Corolario 6.2] se establece que si $(K \ltimes N, K, \tau)$ es una terna conmutativa y $\Phi : N \to \mathrm{End}(V_\tau)$ perteneciente a $\Phi \in L^\infty_\tau(N)$, entonces son equivalentes:

(i) Φ es una función esférica de tipo τ,

(ii) $\Phi(0) = \mathrm{I}$ y Φ es una autofunción simultánea de todo $D \in (\mathbb{D}(N) \otimes \mathrm{End}(V_\tau))^K$.

Teorema 3.35. *[RS, Teorema 9.4] Sea $(K \ltimes N, K, \tau)$ una terna conmutativa con N nilpotente, entonces todas las funciones τ-esféricas definidas sobre N (acotadas) son de tipo positivo.*

Por su parte, el Criterio de Godement puede ser reformulado aprovechando la estructura de G como producto semidirecto de grupos. El grupo K actúa en $\widehat{N}$ por

$$(k, [\pi]) \longmapsto [\pi^k], \qquad \text{donde} \quad \pi^k(x) := \pi(k^{-1} \cdot x).$$

Denotando por K_π al estabilizador de $[\pi]$ bajo dicha acción, se tiene que para cada $k \in K_\pi$ hay un operador de entrelazamiento unitario entre $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ y $(\pi^k, \mathcal{H}_\pi)$, que llamamos $\delta(k)$. Entonces δ define una representación *proyectiva* de K_π. Se dice proyectiva ya que cada $\delta(k)$ está unívocamente determinado salvo múltiplo unitario.

Teorema 3.36. *[RS, Teorema 5.1] La terna $(K \ltimes N, K, \tau)$ es conmutativa si y sólo si, para cada representación unitaria irreducible π de N, la representación $\delta \otimes (\tau_{|_{K_\pi}})$ es libre de multiplicidad.*

A su vez, en [RS], F. Ricci y A. Samanta particularizan al caso $N = \mathbb{R}^n$ el criterio para ternas conmutativas dado en el Teorema 3.36 y la fórmula (3.24) para las funciones τ-esféricas obteniendo simplicaciones.

Sea K un sugrupo cerrado de $\mathrm{SO}(n)$ actuando naturalmente en $\mathbb{R}^n$ y sea (τ, V_τ) una representación unitaria irreducible de K. Consideremos el estabilizador de un punto $x \in \mathbb{R}^n$ bajo la acción por automorfismos de K

$$K_x := \{k \in K \mid \ k \cdot x = x\}.$$

Teorema 3.37. *[RS, Teorema 10.1] $(K \ltimes \mathbb{R}^n, K, \tau)$ es una terna conmutativa si y sólo si, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, la acción de K_x en V_τ es libre de multiplicidad.*

Sea $(K \ltimes \mathbb{R}^n, K, \tau)$ una terna conmutativa. En [RS, Sección 11] se encuentra una fórmula integral para las funciones esféricas de tipo τ. Para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$, sea

$$V_\tau = \oplus_{j=1}^{l(\xi)} V_{j,\xi}$$

la decomposición (libre de multiplicidad) de V_τ bajo la acción de K_ξ. Sea $P_j(\xi)$ la proyección de V_τ en $V_{j,\xi}$ con respecto a dicha descomposición (como (3.14)) y sea d_j la dimensión de $V_{j,\xi}$.

Teorema 3.38. *[RS, Teorema 11.1] La función definida por*

$$\Phi_{(\xi,j)}(x) := \frac{d_\tau}{d_j} \int_K e^{-i\langle \xi, k\cdot x\rangle} \tau(k^{-1}) P_j(\xi) \tau(k)\ dk \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^n), \tag{3.39}$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interno usual en $\mathbb{R}^n$, es una función esférica de tipo τ.

Más aún, $\{\Phi_{(\xi,j)} |\ \xi \in \mathbb{R}^n, j = 1, 2, ..., l(\xi)\}$ es un conjunto completo de funciones esféricas de tipo τ. En particular, dos funciones esféricas $\Phi_{(\xi_1,j_1)}$, $\Phi_{(\xi_2,j_2)}$ de tipo τ coinciden si y sólo si ξ_1 y ξ_2 están en la misma K-órbita. Además, si $\xi_2 = k \cdot \xi_1$, entonces $V_{j_2,\xi_2} = \tau(k) V_{j_1,\xi_1}$.

Teorema 3.39. *[Ya, Teorema 3] Los pares $(\mathrm{SO}(n) \ltimes \mathbb{R}^n, \mathrm{SO}(n))$ y $(\mathrm{U}(n) \ltimes \mathrm{H}^n, \mathrm{U}(n))$, donde H^n denota el grupo de Heisenberg de dimensión $2n + 1$, son pares de Gelfand fuertes.*

Observación 3.40. Relación con las álgebras de funciones escalares $I^2_\tau(G)$:

Sea G un grupo de Lie y K un subgrupo compacto de G. Recordemos que $I^2_\tau(G)$ denota el espacio de funciones de G en $\mathbb{C}$ de cuadrado integrable, K-centrales y de tipo τ. El espacio

$$\bigoplus_{\tau \in \widehat{K}} I^2_\tau(G),$$

en el caso en que $G = K \ltimes N$, coincide con el subespacio de $L^2(G)$ de las funciones K-centrales. En efecto, si $f : G \to \mathbb{C}$ es K-central, entonces

$$f(k, n) = f((\tilde{k}, 0)(k, n)(\tilde{k}^{-1}, 0)) = f(\tilde{k}k\tilde{k}^{-1}, \tilde{k} \cdot n) \qquad \text{para todo } \tilde{k} \in K,\ (k, n) \in K \ltimes N.$$

Sea T un toro maximal de K. Como

$$K = \bigcup_{k \in K} k\mathrm{T}k^{-1},$$

por la densidad de las funciones a variables separadas sobre la variedad $K \times N$, se tiene que el subespacio de $L^2(K \ltimes N)$ de funciones K-centrales se puede poner como

$$L^2(\mathrm{T}) \otimes I^2_{\tau_0}(K \ltimes N),$$

donde τ_0 denota la representación trivial de K y por lo tanto $I^2_{\tau_0}$ es el espacio de funciones de N en $\mathbb{C}$, de cuadrado integrable, que son invariantes por la acción de K. Es decir,

$$I^2_{\tau_0}(K \ltimes N) = L^2_{\tau_0}(N).$$

Por el teorema de Peter-Weyl

$$L^2(\mathrm{T}) = \bigoplus_{\tau \in \widehat{K}} \mathbb{C}\chi_\tau,$$

donde $\mathbb{C}\chi_\tau$ denota el $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión uno generado por el carácter χ_τ de la representación τ. Por otro lado,

$$\mathbb{C}\chi_\tau \otimes I^2_{\tau_0}(K \ltimes N) = I^2_\tau$$

y esto concluye la afirmación.

Observación 3.41. Si $(K \ltimes N, K)$ es un par de Gelfand entonces es un par de Gelfand "twisted" (o retorcido) con respecto a todo carácter de K. Esto se debe simplemente a la identificación del álgebra $L^1_{\tau,\tau}(K \ltimes N, \mathrm{End}(V_\tau))$ con $L^1_\tau(N)$.

Observación 3.42. Existen ejemplos de

- pares de Gelfand (G, K) que no dan lugar a ternas de Gelfand (G, K, τ) con τ no trivial.
- pares de Gelfand (G, K) que dan lugar a ternas de Gelfand (G, K, τ) con τ no trivial pero que no son pares de Gelfand fuertes.

Ejemplos de estos veremos en el próximo capítulo. Mencionamos también que para el grupo de Heisenberg H^n, la terna $(\mathrm{SU}(n) \ltimes \mathrm{H}^n, \mathrm{SU}(n), \tau)$ es conmutativa sólo para algunas representaciones irreducibles τ de $\mathrm{SU}(n)$. Esto está demostrado en [RS, Corolario 10.4] y para $n = 2$ en mi trabajo final de Licenciatura en Matemática, FaMAF-UNC, dirigido por la Dra. Linda V. Saal [D].

Capítulo 4

Ejemplos y clasificación de ternas de Gelfand $(K \ltimes N, K, \tau)$

El objetivo de este capítulo será dar ejemplos de ternas conmutativas (G, K, τ) para el caso en que $G = K \ltimes N$, donde N es un grupo de Lie nilpotente conexo, simplemente conexo y K es un subgrupo compacto de automorfismos de N. Dos familias de ejemplos de ternas conmutativas son $(\mathrm{SO}(n) \ltimes \mathbb{R}^n, \mathrm{SO}(n), \tau)$ para cualquier $\tau \in \widehat{\mathrm{SO}(n)}$ y $(\mathrm{U}(n) \ltimes \mathrm{H}^n, \mathrm{U}(n), \tau)$ para cualquier $\tau \in \widehat{\mathrm{U}(n)}$, donde H^n denota el grupo de Heisenberg de dimensión real $2n+1$. Este resultado se debe a O. Yakimova quien probó que tanto $(\mathrm{SO}(n) \ltimes \mathbb{R}^n, \mathrm{SO}(n))$ como $(\mathrm{U}(n) \ltimes \mathrm{H}^n, \mathrm{U}(n))$ son pares de Gelfand fuertes (cf. [Ya, Teorema 3]).

En una primera instancia, dado un grupo de Lie nilpotente N no abeliano, un subgrupo compacto K de automorfismos de N y una representación unitaria irreducible (τ, V_τ) de K, estudiaremos condiciones sobre τ para garantizar que $(K \ltimes N, K, \tau)$ sea una terna conmutativa. Una condición necesaria, probada por F. Ricci y A. Samanta en [RS], establece que $(K \ltimes N, K)$ debe ser un par de Gelfand. Por su parte, se muestra en el Teorema 2.59, debido a C. Benson J. Jenkins y G. Ratcliff, que si $(K \ltimes N, K)$ es un par de Gelfand, entonces N debe ser abeliano o dos pasos nilpotente. Restringiremos nuestra atención solamente a aquellos grupos N que admiten representaciones de cuadrado integrable. En estos casos veremos que es posible reducir el problema a estudiar la conmutatividad de ternas de la forma $(K' \ltimes \mathrm{H}, K', \tau_{|_{K'}})$, donde H es un grupo de Heisenberg, K' es un subgrupo ortogonal de automorfismos de H contenido en K y $\tau_{|_{K'}}$ denota la restricción de τ a K'. Esto se muestra en el Teorema 4.4.

Posteriormente determinaremos *todas* las ternas conmutativas que provienen de una clase particular de pares de Gelfand dados por J. Lauret. Concretamente, partiendo de una representación real y efectiva W de un álgebra de Lie compacta $\mathfrak{g}$, J. Lauret construye en [La2] grupos de Lie dos pasos nilpotentes $N(\mathfrak{g}, W)$ con estructura de variedad Riemanniana y da una clasificación completa de los pares de Gelfand de la forma $(K \ltimes N(\mathfrak{g}, W), K)$ donde K está conformado por todos los automorfismos ortogonales de $N(\mathfrak{g}, W)$. Nuestro objetivo será determinar todas las ternas conmutativas de la forma $(K \ltimes N(\mathfrak{g}, W), K, \tau)$, donde τ varía sobre $\widehat{K}$. Para usar la caracterización de ternas conmutativas que habremos probado en el Teorema 4.4, solamente analizaremos aquellos grupos $N(\mathfrak{g}, W)$ que tienen representaciones de cuadrado integrable. Cabe destacar que esta condición es satisfecha por todos los pares listados en [La2] con excepción de dos casos. Nuestro resultado de clasificación es el Teorema 4.20.

Finalmente dejaremos de lado los pares de Gelfand comprendidos en [La2] para pasar a analizar otras ternas $(K \ltimes N, K, \tau)$ partiendo de pares de Gelfand $(K \ltimes N, K)$. La clasificación de pares de Gelfand de dicha forma fue completada por E. Vinberg. Con el espíritu de completar la clasificación de ternas conmutativas, estudiaremos si hay ternas de Gelfand no-triviales provenientes de [V] que expandan nuestra clasificación dada a partir de los pares que se encuentran en [La2]. Concluiremos que la respuesta es prácticamente negativa y tanto esto como las pocas ternas que muestra el Teorema 4.20 nos dan pautas para decir que entonces el análisis esférico matricial sobre un grupo N abeliano cobra mayor relevancia. En los próximos capítulos dedicaremos nuestra atención justamente a este problema fijando $N = \mathbb{R}^n$.

4.1. Localización

Sea N un grupo de Lie nilpotente conexo, simplemente conexo. El teorema de Plancherel establece que para funciones sobre N a valores escalares existe una medida μ en $\widehat{N}$ tal que

$$\int_N |f(x)|^2 dx = \int_{\widehat{N}} \|\pi(f)\|_{HS}^2 \, d\mu(\pi),$$

para toda $f \in L^1(N) \cap L^2(N)$, donde dx denota la medida de Haar en N, HS refiere a la norma Hilbert-Schmidt y para $\pi \in \widehat{N}$, $\pi(f)$ es el operador definido por (2.39). Este resultado es debido a J. Dixmier y como referencias mencionamos su artículo [Dix], el libro [P] o bien su enunciado se puede encontrar de manera clara en [Goo]. Es posible extender de manera natural este resultado abarcando funciones a valores matriciales.

Lema 4.1 (Teorema de Plancherel)**.** *Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita m y sea $F \in L^1(N, \mathrm{End}(V)) \cap L^2(N, \mathrm{End}(V))$, entonces*

$$\|F\|_2^2 = \int_{\widehat{N}} \|\pi(F)\|_{HS}^2 \, d\mu(\pi), \tag{4.1}$$

donde $\pi(F)$ es el operador definido por $\pi(F) := \int_N \pi(x) \otimes F(x) dx$.

Demostración. Consideramos $\{e_i\}_{i=1}^m$ una base de V. El teorema de Plancherel clásico es válido para todas las funciones definidas como entradas $F_{ij}(x) := \langle F(x)e_j, e_i \rangle$ de F. Por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned} \|F\|_2^2 &= \sum_{i,j=1}^m \|F_{ij}\|_2^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^m \int_{\widehat{N}} \|\pi(F_{ij})\|_{HS}^2 \, d\mu(\pi). \end{aligned}$$

Para cada $(\pi, \mathcal{H}_\pi) \in \widehat{N}$, sea $\{h_\alpha\}$ una base ortonormal del espacio de Hilbert $\mathcal{H}_\pi$, luego

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^m \int_{\widehat{N}} \|\pi(F_{ij})\|_{HS}^2 \, d\mu(\pi) &= \sum_{i,j=1}^m \int_{\widehat{N}} \sum_{\alpha,\beta} \|\langle \pi(F_{ij})h_\alpha, h_\beta \rangle\|^2 \, d\mu(\pi) \\ &= \sum_{i,j=1}^m \int_{\widehat{N}} \sum_{\alpha,\beta} \| \int_N \langle \pi(x)h_\alpha, h_\beta \rangle \langle F(x)e_j, e_i \rangle dx\|^2 \, d\mu(\pi) \\ &= \int_{\widehat{N}} \sum_{i,j=1}^m \sum_{\alpha,\beta} \| \int_N \langle \pi(x) \otimes F(x)(h_\alpha \otimes e_j), h_\beta \otimes e_i \rangle dx\|^2 \, d\mu(\pi) \\ &= \int_{\widehat{N}} \sum_{i,j=1}^m \sum_{\alpha,\beta} \|\langle \pi(F)(h_\alpha \otimes e_j), h_\beta \otimes e_i \rangle\|^2 \, d\mu(\pi) \\ &= \int_{\widehat{N}} \|\pi(F)\|_{HS}^2 \, d\mu(\pi). \end{aligned}$$

□

Definición 4.2. Sea Z el centro de N. Una clase $(\pi, \mathcal{H}_\pi) \in \widehat{N}$ se dice *de cuadrado integrable* si sus coeficientes matriciales $\langle u, \pi(x)v \rangle_{\mathcal{H}_\pi}$, para $u, v \in \mathcal{H}_\pi$, son funciones de cuadrado integrable en N módulo Z (es decir, es una función en $L^2(N/Z)$). Denotaremos por $\widehat{N_{\mathrm{sq}}}$ al subconjunto de $\widehat{N}$ de representaciones de cuadrado integrable.

De [Wo1, Teorema 14.2.2] se desprende que para determinar si una representación es de cuadrado integrable, basta chequear que sólo una de sus entradas matriciales no nulas sea una función de clase $L^2(N/Z)$.

Teorema 4.3. *[Wo1, Teorema 14.2.14] Si N tiene una representación de cuadrado integrable, entonces su medida de Plancherel está concentrada en $\widehat{N_{\mathrm{sq}}}$.*

A partir del resultado anterior dirigiremos nuestra atención hacia aquellos grupos N que tengan representaciones de cuadrado integrable.

Al mismo tiempo, si $\mathfrak{n}$ denota el álgebra de Lie de N con corchete de Lie $[\cdot,\cdot]$, dotamos a N con una métrica Riemanniana invariante izquierda determinada a partir de un producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ en $\mathfrak{n}$, dando lugar a una nilvariedad homogénea $(N,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ (cf. [La1]). Su grupo de isometrías está dado por el producto semidirecto $K\ltimes N$, donde K es el grupo de automorfismos ortogonales de N (cf. [Wils] y [Wo2]).

Como nuestro interés recae sobre la determinación de ternas conmutativas $(K\ltimes N, K, \tau)$, del Teorema 3.15 el par $(K\ltimes N, K)$ debe ser necesariamente de Gelfand y por lo tanto, por un resultado de C. Benson, J. Jenkins y G. Ratcliff dado en [BJR1] (Teorema 2.59), N debe ser abeliano o dos pasos nilpotente. Consideraremos entonces únicamente grupos N dos pasos nilpotentes. En consecuencia, $\mathfrak{n}=\mathfrak{z}\oplus W$, donde $\mathfrak{z}$ es su centro y W el complemento ortogonal de $\mathfrak{z}$ tal que $[W,W]\subset\mathfrak{z}$.

Vimos que la teoría de Kirillov establece una correspondencia entre $\widehat{N}$ y el conjunto de órbitas coadjuntas (ver apartado 1.2.6). Fijada $\lambda\in\mathfrak{n}^*$ no-trivial se considera la forma bilineal antisimétrica en $\mathfrak{n}$ dada por

$$B_\lambda(X,Y):=\lambda([X,Y])\qquad (X,Y\in\mathfrak{n})$$

y la representación $\pi_\lambda\in\widehat{N}$ asociada a la órbita coadjunta $O(\lambda)$ de λ bajo la acción de N, es la representación inducida

$$\pi_\lambda:=\mathrm{Ind}_M^N(e^{i\lambda(\cdot)}),$$

donde M es el grupo de Lie simplemente conexo asociado a la subálgebra isotrópica maximal $\mathfrak{m}$ de B_λ y $e^{i\lambda(\cdot)}$ es un carácter de M.

Sea $X_\lambda\in\mathfrak{z}$ el representante de la restricción $\lambda_{|_\mathfrak{z}}$ de λ a $\mathfrak{z}$, esto es,

$$\lambda(Y)=\langle Y,X_\lambda\rangle\qquad(\forall\ Y\in\mathfrak{z}).$$

Podemos partir $\mathfrak{z}$ como

$$\mathfrak{z}=\mathbb{R}X_\lambda\oplus\mathfrak{z}_\lambda,$$

donde $\mathfrak{z}_\lambda:=\mathrm{Nú}(\lambda_{|_\mathfrak{z}})$ es el complemento ortogonal en $\mathfrak{z}$ del espacio unidimensional $\mathbb{R}X_\lambda$ generado por X_λ.

Si $\pi_\lambda\in\widehat{N_{\mathrm{sq}}}$ se puede ver que B_λ es no-degenerada en W y las órbitas son maximales, esto es, $O(\lambda)=\lambda\oplus W^*$. En efecto, sea $\mathfrak{a}_\lambda$ el subespacio de W donde B_λ es degenerada, es decir,

$$\mathfrak{a}_\lambda:=\{u\in V\mid\ B_\lambda(u,v)=0\quad\forall v\in W\}.$$

Sea $A_\lambda:=\exp(\mathfrak{a}_\lambda)$ y sea $\mathfrak{b}_\lambda$ el subespacio de W donde B_λ es no-degenerada. Consideramos

$$\mathfrak{n}_\lambda:=\mathfrak{a}_\lambda\oplus\mathfrak{b}_\lambda\oplus\mathbb{R}X_\lambda$$

y $N_\lambda:=\exp(\mathfrak{n}_\lambda)$. Si dotamos a $\mathfrak{a}_\lambda$ con el corchete de Lie trivial, podemos considerar el álgebra de Lie

$$\mathfrak{h}_\lambda:=\mathfrak{b}_\lambda\oplus\mathbb{R}X_\lambda$$

con corchete de Lie dado por

$$[X,Y]_{\mathfrak{h}_\lambda}=B_\lambda(X,Y)X_\lambda.$$

Observamos que $\mathfrak{h}_\lambda$ es un álgebra de Heisenberg y denotamos por H_λ su correspondiente grupo de Heisenberg. La representación π_λ es trivial en $Z_\lambda:=\exp(\mathfrak{z}_\lambda)$. Luego, se factoriza en N_λ y vía identificar N_λ con el grupo producto $A_\lambda\times\mathrm{H}_\lambda$ podemos escribir

$$\pi_\lambda(a,n)=\chi(a)\pi'_\lambda(n),$$

donde χ es un carácter unitario de A_λ y π'_λ representación unitaria irreducible de H_λ. Por lo tanto, π_λ no puede ser de cuadrado integrable a menos que $\mathfrak{a}_\lambda\equiv\{0\}$.

La recíproca de este hecho también es cierta. Si las órbitas son maximales (o equivalentemente, si B_λ es no-degenerada en W), entonces π_λ de cuadrado integrable. De hecho resulta

$$\mathfrak{n}_\lambda=\mathbb{R}X_\lambda\oplus W.$$

Como el carácter χ_λ es trivial en $\mathfrak{z}_\lambda$, la representación π_λ actúa trivialmente en $\mathfrak{z}_\lambda$ y define una representación unitaria irreducible en $\widehat{N_\lambda}$. En este caso N_λ es directamente isomorfo a un grupo de Heisenberg y por lo tanto π_λ es de cuadrado integrable.

Este es un hecho particular del siguiente resultado general (ver [Wo1, Theorem 14.2.6]): Si N es un grupo de Lie nilpotente conexo, simplemente conexo, entonces las siguientes son equivalentes

(i) $[\pi_\lambda] \in \widehat{N_{\mathrm{sq}}}$.

(ii) La órbita $O(\lambda)$ está completamente determinada por $\lambda_{|_{\mathfrak{z}}}$.

(iii) B_λ es no-degenerada en $\mathfrak{n}/\mathfrak{z}$.

Por último, nos gustaría remarcar que en este contexto la forma bilineal B_λ restringida a $W \times W$ define la forma simpléctica asociada al grupo de Heisenberg N_λ. Por lo tanto $\dim(W) = 2m$ para algún número natural m y el espacio vectorial $\mathfrak{m}$ introducido en el apartado 1.2.6 resulta isomorfo a $\mathfrak{z} \oplus \mathbb{R}^m$.

Nos concentraremos ahora en las acciones de un subgrupo compacto K de automorfismos ortogonales de N. No haremos distinción entre automorfismos de N y $\mathfrak{n}$. (Para resultados en contextos más generales consultar [Kik]).

Dados $k \in K$ y $(\pi_\lambda, \mathcal{H}_{\pi_\lambda}) \in \widehat{N}$,

$$\pi_\lambda^k(x) := \pi_\lambda(k \cdot x)$$

define una representación unitaria irreducible de N, que puede o no ser equivalente a π_λ. Sea

$$K_{\pi_\lambda} := \{k \in K \mid \ \pi_\lambda^k \sim \pi_\lambda\}$$

el estabilizador de π_λ. Para $k \in K_{\pi_\lambda}$, existe un (único salvo factor unitario) operador unitario $\omega_\lambda(k)$ sobre $\mathcal{H}_{\pi_\lambda}$ que entrelaza π_λ con π_λ^k, es decir, $\pi_\lambda^k(x) = \omega_\lambda(k)\pi_\lambda(x)\omega_\lambda(k)^{-1}$ para todo $x \in N$. En principio ω_λ es una representación *proyectiva* de K_{π_λ}. Sin embargo, uno siempre puede elegir escalares y asegurar que define una verdadera representación unitaria de K_{π_λ} en H_{π_λ} (cf. [BJR3, Lemma 2.3]).

Por otro lado, sea

$$K_{X_\lambda} := \{k \in K \mid \ k \cdot X_\lambda = X_\lambda\}$$

el estabilizador de X_λ con respecto a la acción de K sobre $\mathfrak{n}$. Si $\pi_\lambda \in \widehat{N_{\mathrm{sq}}}$, es fácil ver que K_{π_λ} coincide con K_{X_λ} y los denotaremos simplemente por K_λ.

Observamos que, para todo $u, v \in V$ y todo $k \in K_\lambda$,

$$\begin{aligned} B_\lambda(k \cdot u, k \cdot v) &= \langle X_\lambda, [k \cdot u, k \cdot v]\rangle = \langle X_\lambda, k \cdot [u, v]\rangle = \langle k^{-1} \cdot X_\lambda, [u, v]\rangle \\ &= \langle X_\lambda, [u, v]\rangle = B_\lambda(u, v), \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad hemos usado que K actúa en $\mathfrak{n}$ por automorfismos. Por lo tanto, K_λ resulta un subgrupo del grupo simpléctico $\mathrm{Sp}(m)$ con respecto a la forma simpléctica $(B_\lambda)_{|_{W \times W}}$ del espacio vectorial real W. Más aún, como K_λ es compacto, podemos asumir que es un subgrupo del grupo unitario $\mathrm{U}(m) \subset \mathrm{Sp}(m)$. Llegados a este punto enfatizamos que la representación ω_λ de K_λ coincide con la conocida *representación metapléctica* asociada al grupo de Heisenberg N_λ.

El siguiente teorema nos permitirá determinar si una terna es o no es de Gelfand a partir de estudiar ternas asociadas a grupos de Heisenberg.

Teorema 4.4. *(Reducción a grupos de Heisenberg) Sea N un grupo de Lie real dos pasos nilpotente conexo, simplemente conexo que tiene representaciones de cuadrado integrable. Sea K un subgrupo compacto del grupo de automorfismos de N y sea $(\tau, V_\tau) \in \widehat{K}$. Entonces,*

(i) $(K \ltimes N, K)$ es un par de Gelfand si y sólo si $(K_\lambda \ltimes N_\lambda, K_\lambda)$ es un par de Gelfand para toda $\pi_\lambda \in \widehat{N_{\mathrm{sq}}}$ (versión escalar).

(ii) $(K \ltimes N, K, \tau)$ es una terna conmutativa si y sólo si $(K_\lambda \ltimes N_\lambda, K_\lambda, \tau_{|_{K_\lambda}})$ es una terna conmutativa para toda $\pi_\lambda \in \widehat{N_{\mathrm{sq}}}$ (versión matricial).

Demostración.

(i) Recordamos que por hipótesis N tiene medida de Plancherel concentrada en $\widehat{N_{\mathrm{sq}}}$ y podemos aplicar los argumentos dados en [BJR3, p. 571-574].

(ii) Una generalización de las ideas dadas en [BJR3] nos permitirán probar la segunda afirmación. Para ello usaremos el Teorema 3.36.

Asumamos primero que $(K \ltimes N, K, \tau)$ es una terna conmutativa. En particular, $\omega_\lambda \otimes (\tau_{|_{K_\lambda}})$ es libre de multiplicidad para toda $\pi_\lambda \in \widehat{N_{\mathrm{sq}}}$. Luego, el Teorema 3.36 afirma que $(K_\lambda \ltimes N_\lambda, K_\lambda, \tau_{|_{K_\lambda}})$ es una terna conmutativa para cada $\pi_\lambda \in \widehat{N_{\mathrm{sq}}}$.

Recíprocamente, sean $F, G \in L^1_\tau(N)$. Es claro que si $\pi \in \widehat{N}$, $\pi(F * G) = \pi(F)\pi(G)$. Si vemos que $\pi_\lambda(F)$ conmuta con $\pi_\lambda(G)$ para toda $\pi_\lambda \in \widehat{N_{\mathrm{sq}}}$, aplicando el teorema de Plancherel (Teorema 4.1) y [Wo1, Teorema 14.2.14] habremos obtenido $F * G = G * F$ *p.p.* Sabemos que el operador $\pi_\lambda(F)$ entrelaza $\omega_\lambda \otimes (\tau_{|_{K_\lambda}})$ con sigo misma (cf. [RS, Lema 6.2]). Como para cada $\pi_\lambda \in \widehat{N_{\mathrm{sq}}}$ por hipótesis $(K_\lambda \ltimes N_\lambda, K_\lambda, \tau_{|_{K_\lambda}})$ es una terna conmutativa, $\omega_\lambda \otimes (\tau_{|_{K_\lambda}})$ es libre de multiplicidad. Luego, por el Lema de Schur, $\pi_\lambda(F)$ es un múltiplo del operador identidad en cada componente irreducible de $\mathcal{H}_{\pi_\lambda}$ y la conclusión se sigue inmediatamente. □

Asumiremos que π_λ actúa en el espacio de Fock $\mathcal{F}_\lambda$ que consiste, para $\lambda > 0$ (respectivamente para $\lambda < 0$), de las funciones holomorfas (respectivamente antiholomorfas) en $\mathbb{C}^m$ que son de cuadrado integrable con respecto a la medida $e^{-\frac{\lambda}{2}|z|^2}$. El espacio $\mathcal{P}(\mathbb{C}^m)$ de polinomios en $\mathbb{C}^m$ es denso en $\mathcal{F}_\lambda$. De aquí en adelante consideraremos la acción metapléctica de $\mathrm{U}(m)$ en $\mathcal{P}(\mathbb{C}^m)$ dada por

$$(\omega(k)(p))(z) := p(k^{-1}z) \tag{4.2}$$

y trabajaremos con $\omega_{|_{K_\lambda}}$ en lugar de ω_λ.

4.2. Estudio de una familia de pares de Gelfand $(K \ltimes N, K)$

En esta sección introduciremos una clase de grupos de Lie dos pasos nilpotentes cuya constucción es similar a la de grupos de tipo Heisenberg (o de tipo H) (ver [Kap]). Estos grupos fueron introducidos por J. Lauret en los artículos [La2] y [La1].

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie compacta, esto es, $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \oplus \mathfrak{c}$ donde $\mathfrak{c}$ es el centro de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}' := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ es un álgebra de Lie compacta semisimple. La notación de derivada $\mathfrak{g}'$ viene a colación de la definición del corchete de Lie (ver 1.12). Sea (ρ, W) una representación real y fiel de $\mathfrak{g}$ de dimensión finita. Definimos el álgebra de Lie dos pasos nilpotentes

$$\mathfrak{n} := \mathfrak{g} \oplus W$$

cuyo centro es $\mathfrak{g}$ y su corchete de Lie en W es

$$\langle [u, v], X \rangle_{\mathfrak{g}} := \langle \rho(X)u, v \rangle_W \qquad \forall u, v \in W \text{ y } \forall X \in \mathfrak{g}, \tag{4.3}$$

donde los productos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ son considerados $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$-invariante y $\pi(\mathfrak{g})$-invariante, respectivamente. Estos productos internos definen uno en $\mathfrak{n}$ dado por

$$\langle X, Y \rangle := \begin{cases} \langle X, Y \rangle_{\mathfrak{g}} & \text{si } X, Y \in \mathfrak{g}, \\ \langle X, Y \rangle_W & \text{si } X, Y \in W, \\ 0 & \text{si } X \in \mathfrak{g} \text{ y } Y \in W. \end{cases}$$

Tal producto interno se dice $\mathfrak{g}$-*invariante*. El grupo de Lie simplemente conexo con álgebra de Lie $\mathfrak{n}$ será denotado por $N(\mathfrak{g}, W)$. Podemos dar a dicho grupo una métrica invariante a izquierda determinada por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y de esta forma obtener una nilvariedad homogénea. Se remarca en [La2] que esta construcción no depende de la elección del producto interno $\mathfrak{g}$-invariante (salvo isomorfismo de grupos de Lie). Precisamente si (ρ, W) y (ρ', W') son dos representaciones de $\mathfrak{g}$ y existen un automorfismo φ de $\mathfrak{g}$ y un isomorfismo $T : W \to W'$ lineal tales que $T \circ \rho(x) \circ T^{-1} = \rho'(\varphi(x))$ $\forall x \in \mathfrak{g}$, entonces $N(\mathfrak{g}, W)$ y $N(\mathfrak{g}, W')$ son grupos de Lie isomorfos.

Observación 4.5. En general, dados dos espacios vectoriales $\mathfrak{g}$ y W, con productos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$, podemos definir un nuevo espacio vectorial $\mathfrak{n} = \mathfrak{g} \oplus W$ con producto interno tal que la suma directa se ortogonal y que restringido a $\mathfrak{g}$ y W coincida con $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$, respectivamente. Si queremos dotar a $\mathfrak{n}$ de una estructura de álgebra de Lie, debemos definir sobre este espacio una forma bilineal antisimétrica y que cumpla la identidad de Jacobi. Si pretendemos que $\mathfrak{n}$ resulte un álgebra de Lie dos pasos nilpotentes con centro $\mathfrak{z} := \mathfrak{g}$, la identidad de Jacobi se cumplirá trivialmente y sólo debemos definir una forma bilineal antisimétrica no degenerada B de $W \times W$ en $\mathfrak{g}$ y el corchete estará dado por

$$[(X, u), (Y, v)] = (B(u, v), 0) \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{g},\ u, v \in W.$$

Para definir $B(u, v)$ para cada $u, v \in W$, por dualidad, basta determinar su valor contra cada $X \in \mathfrak{g}$. Es aquí donde la construcción dada por J. Lauret requiere que $\mathfrak{g}$ sea un álgebra de Lie compacta y (ρ, W) una representación real y fiel de $\mathfrak{g}$ para establecer $B(u, v)$ (es decir, el corchete en W) como (4.3).

Ejemplo 4.6. Quizás el primer ejemplo de álgebra de Lie dos pasos nilpotentes que uno tiene en mente es el álgebra de Heisenberg $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{2n}$. Aquí B es la forma simpléctica canónica en $\mathbb{R}^{2n}$ asociada a la matriz

$$\rho(1) := \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Adrede hemos denotado dicha matriz por $\rho(1)$, donde $1 \in \mathbb{R}$, ya que esta expresión extendida por linealidad define la representación ρ de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}^{2n}$ en correspondencia con la construcción anterior.

Definición 4.7. El grupo $N(\mathfrak{g}, W)$ se dice *descomponible* si $N(\mathfrak{g}, W)$ es producto directo de grupos de Lie de la forma

$$N(\mathfrak{g}, W) = N(\mathfrak{h}_1, V_1) \times N(\mathfrak{h}_2, V_2).$$

En caso contrario diremos que $N(\mathfrak{g}, W)$ es *indescomponible*.

Sea G' el grupo de Lie simplemente conexo con álgebra de Lie $\mathfrak{g}'$ y sea U la componente conexa que contiene a la identidad del grupo de operadores de entrelazamiento ortogonales de (ρ, W). El grupo U actúa trivialmente en el centro $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{n}$ y cada $g \in G'$ actúa en $\mathfrak{n}$ por $(\mathrm{Ad}(g), \rho(g))$ (donde también hemos denotado por ρ la correspondiente representación de G' en W). En este contexto consideramos K el grupo de automorfismos ortogonales de $N(\mathfrak{g}, W)$. Si el grupo de automorfismos de $\mathfrak{g}$ coincide con el de automorfismos internos de $\mathfrak{g}$ ($\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$) entonces $K = G' \times U$ (cf. [La1, Teorema 3.12]). Al igual que J. Lauret en [La2] consideraremos estos casos.

Hasta aquí hemos repasado la contrucción de una familia de grupos de Lie dos pasos nilpotentes realizada por J. Lauret. A su vez, el artículo [La2] concluye determinando todos los pares de Gelfand $(K \ltimes N, K)$ donde $N := N(\mathfrak{g}, W)$ es indescomponible y K es el grupo de automorfismos ortogonales conexo de la nilvariedad homogénea N que se asume dado por $K := G' \times U$. Estaremos interesadas, a partir de dicha clasificación, en tomar cada una de las representaciones unitarias irreducibles τ de K para cada ejemplo de par de Gelfand y determinar cuándo la terna $(K \ltimes N, K, \tau)$ resulta conmutativa. Con este objetivo en el horizonte procedemos a describir un criterio que luego utilizaremos para realizar el análisis caso por caso de cada uno de los pares $(K \ltimes N, K)$ dados en [La2, Remark 3] con cada una de las representaciones $\tau \in \widehat{K}$. Al final se la sección se incluye una tabla que resume la clasificación de ternas conmutativas.

4.2.1. Criterio de conmutatividad

En este apartado pretendemos desprender del Teorema 4.4 un criterio para determinar ternas de Gelfand $(K \ltimes N, K)$ donde N es de la forma $N := N(\mathfrak{g}, W)$ y $K := G' \times U$. Al final de la sección listamos todos los pares de Gelfand determinados por J. Lauret en [La2] en los que el grupo nilpotente N presenta representaciones de cuadrado integrable.

Fijemos entonces una nilvariedad homogénea $N := N(\mathfrak{g}, W)$ con subgrupo de automorfismos ortogonales $K := G' \times U$ como hemos descripto anteriormente. Para $\lambda \in \mathfrak{n}^*$, sea $X_\lambda \in \mathfrak{g}$ su representante en el centro de $\mathfrak{n}$. Luego

$$\lambda([u, v]) = \langle [u, v], X_\lambda \rangle = \langle \rho(X_\lambda)u, v \rangle \qquad (u, v \in W). \tag{4.4}$$

De la discusión hecha previamente se sigue que la representación π_λ asociada a la órbita coadjunta de λ es de cuadrado integrable si y sólo si $\mathrm{Nú}(\rho(X_\lambda)) = \{0\}$.

Asumiendo que N tiene una representación de cuadrado integrable notamos que K_λ es exactamente $C_{G'}(X_\lambda) \times U$, donde $C_{G'}(X_\lambda) := \{g \in G' \mid \mathrm{Ad}(g)X_\lambda = X_\lambda\}$ es el centralizador de X_λ en G'.

Sea $\tau \in \widehat{K}$. Por el Teorema 4.4 sabemos que $(K \ltimes N, K, \tau)$ es una terna conmutativa si y sólo si $(\omega \otimes \tau)_{|K_\lambda}$ es libre de multiplicidad para toda $\pi_\lambda \in \widehat{N_{\mathrm{sq}}}$. Para el caso en que $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie semisimple daremos un criterio con el mismo espíritu de restringir el problema de determinar ternas conmutativas a partir de estudiar grupos más sencillos.

Teorema 4.8. *Sean $N := N(\mathfrak{g}, W)$ y $K := G' \times U$ de acuerdo a las construcciones dadas previamente. Sea $\tau \in \widehat{K}$ y sea T un toro maximal de G'. Si asumimos que $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie semisimple y que N posee al menos una representación de cuadrado integrable, entonces la terna $(K \ltimes N, K, \tau)$ es conmutativa si y sólo si $(\omega \otimes \tau)_{|T \times U}$ es libre de multiplicidad, donde ω es la representación metapléctica (4.2).*

Demostración. Si $(\omega \otimes \tau)_{|_{T\times U}}$ es libre de multiplicidad entonces para cada $X_\lambda \in \mathfrak{g}$, $(\omega \otimes \tau)_{|_{K_\lambda}}$ es libre de multiplicidad ya que $C_{G'}(X_\lambda)$ contiene un toro maximal de G'.

Ahora supongamos que $(K \ltimes N, K, \tau)$ es una terna conmutativa. Recordemos que $X \in \mathfrak{g}$ es un elemento regular de $\mathfrak{g}$ si $C_{G'}(X)$ es un toro maximal y se sabe que el conjunto de elementos regulares de $\mathfrak{g}$ es abierto y denso en $\mathfrak{g}$. Luego, sólo necesitamos hallar un elemento regular en $\mathfrak{g}$ en correspondencia a una representación de cuadrado integrable de N:

Para cada $\lambda \in \mathfrak{n}^*$ hemos definido una forma bilineal antisimétrica en $W \times W$

$$(B_\lambda)_{|_{W\times W}}(u, v) := \lambda([u, v]).$$

Sea $\mathrm{Pf}((B_\lambda)_{|_{W\times W}})$ la raíz cuadrada del determinante de una matriz asociada a $(B_\lambda)_{|_{W\times W}}$. Este el llamdo el *Pfaffiano* . Sea

$$P(\lambda) := \mathrm{Pf}((B_\lambda)_{|_{W\times W}}).$$

Tal función P depende únicamente de $\lambda_{|_\mathfrak{g}}$ y se ve que es un polinomio homogéneo sobre $\mathfrak{g}^*$ (que también denotaremos por P) tal que $P(\lambda) = P(\lambda_{|_\mathfrak{g}})$ (cf. [Wo1, p. 333]). De acuerdo a [Wo1, Teorema 14.2.10] existe una correspondencia entre órbitas coadjuntas $O(\lambda)$ con $P(\lambda_{|_\mathfrak{g}}) \neq 0$ y las representaciones de cuadrado integrable. En particular, como $O(\lambda)$ está completamente determinada por $\lambda_{|_\mathfrak{g}}$, denotamos por ϕ la aplicación que asocia cada $\lambda_{|_\mathfrak{g}}$ tal que $P(\lambda_{|_\mathfrak{g}}) \neq 0$ con la representación $\pi_\lambda \in \widehat{N}_{\mathrm{sq}}$. Más aún, [Wo1, Teorema 14.2.14] afirma que la medida de Plancherel de N está concentrada en $\widehat{N}_{\mathrm{sq}}$ y que su imagen bajo la aplicación ϕ^{-1} es un múltiplo positivo de $|P(X)|dX$, donde dX es la medida de Lebesgue en $\mathfrak{g}$. En particular, el conjunto

$$\{\mathrm{Ad}^*(\lambda) \in \mathfrak{g}^* \mid \ P(\lambda) \neq 0\}$$

está en correspondencia con el conjunto

$$\{X_\lambda \in \mathfrak{g} \mid \ \rho(X_\lambda) \text{ es invertible}\}.$$

Como este es abierto, existe un elemento regular en él. □

Corolario 4.9. *Sean N, K, τ y T como en el teorema anterior. Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie compacta no abeliana (es decir, $\mathfrak{g}' \not\equiv \{0\}$) y existe $X \in \mathfrak{g}'$ tal que $\rho(X)$ es invertible, entonces la terna $(K \ltimes N, K, \tau)$ es conmutativa si y sólo si $(\omega \otimes \tau)_{|_{T\times U}}$ es libre de multiplicidad.*

Demostración. Por el teorema anterior, si $(\omega \otimes \tau)_{|_{T\times U}}$ es libre de multiplicidad entonces $(K \ltimes N, K, \tau)$ es conmutativa. Recíprocamente, por hipótesis,

$$\{X \in \mathfrak{g}' \mid \ \rho(X) \text{ es invertible}\}$$

es un conjunto abierto distinto del vacío y por lo tanto posee un elemento regular. La conclusión sigue como en el Teorema 4.8. □

Como ya hemos mencionado, la clasificación de todos los pares de Gelfand de la forma $(K \ltimes N(\mathfrak{g}, W), K)$, donde $N(\mathfrak{g}, W)$ es indescomponible y $K := G' \times U$, es debida a J. Lauret (cf. [La2, Remark 3]). A continuación listamos los grupos $N(\mathfrak{g}, W)$, que poseen una representación de cuadrado integrable, con sus respectivos grupos de automorfismos ortogonales K que dan lugar a pares de Gelfand.

(I)
- $N(\mathfrak{g}, W) = N(\mathfrak{su}(2), (\mathbb{C}^2)^n)$ para $n \geq 1$,
  donde $\mathbb{C}^2$ denota la representación estándar de $\mathfrak{su}(2)$ vista como representación real, por lo que se entiende que $\mathfrak{su}(2)$ actúa en $(\mathbb{C}^2)^n$ como $\mathrm{Im}\,(\mathbb{H})$ actúa componente a componente en $\mathbb{H}^n$ por el producto cuaterniónico a izquierda (donde $\mathbb{H}$ denota a los cuaterniones e $Im(\mathbb{H})$ su correspondiente conjunto de cuaterniones imaginarios). En este caso $N(\mathfrak{su}(2), (\mathbb{C}^2)^n)$ es un grupo de tipo H.
- $K = \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{Sp}(n)$.

(II)
- $N(\mathfrak{g}, W) = N(\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2), (\mathbb{C}^2)^{k_1} \oplus \mathbb{R}^4 \oplus (\mathbb{C}^2)^{k_2})$ para $k_1 + k_2 \geq 1$,
  donde la suma $(\mathbb{C}^2)^{k_1} \oplus \mathbb{R}^4 \oplus (\mathbb{C}^2)^{k_2})$ es una suma ortogonal, $\mathbb{R}^4$ denota la representación estándar de $\mathfrak{so}(4)$, la primera copia de $\mathfrak{su}(2)$ actúa en $(\mathbb{C}^2)^{k_1}$ de la manera natural y la segunda en $(\mathbb{C}^2)^{k_2}$.
- $K = \mathrm{Spin}(4) \times \mathrm{Sp}(k_1) \times Sp(k_2)$.

(III)
- $N(\mathfrak{g}, W) = N(\mathfrak{sp}(2), (\mathbb{C}^4)^n)$ para $n \geq 1$,
  donde $\mathfrak{sp}(2)$ actúa componente a componente en $(\mathbb{H}^2)^n$ de la manera estándar (identificando $\mathbb{H}^2$ con $\mathbb{C}^4$).
- $K = \mathrm{Sp}(2) \times \mathrm{Sp}(n)$.

(IV)
- $N(\mathfrak{g}, W) = N(\mathfrak{so}(2n), \mathbb{R}^{2n})$ para $n \geq 2$,
  donde $\mathbb{R}^{2n}$ denota la representación estándar de $\mathfrak{so}(2n)$.
- $K = \mathrm{SO}(2n)$.

(V)
- $N(\mathfrak{g}, W) = N(\mathfrak{su}(n), \mathbb{C}^n)$ para $n \geq 3$,
  donde $\mathbb{C}^n$ denota la representación real estándar de $\mathfrak{su}(n)$.
- $K = \mathrm{SU}(n) \times \mathbb{S}^1$.

(VI)
- $N(\mathfrak{g}, W) = N(\mathfrak{u}(n), \mathbb{C}^n)$ para $n \geq 3$,
  donde $\mathbb{C}^n$ denota la representación real estándar de $\mathfrak{u}(n)$.
- $K = \mathrm{SU}(n) \times \mathbb{S}^1$.

(VII)
- $N(\mathfrak{g}, W) = N(\mathfrak{u}(2), (\mathbb{C}^2)^k \oplus (\mathbb{C}^2)^n)$ para $k \geq 1$ y $n \geq 0$,
  donde la suma $(\mathbb{C}^2)^k \oplus (\mathbb{C}^2)^n)$ es ortogonal, el centro de $\mathfrak{u}(2)$ actúa no-trivialmente solamente en $(\mathbb{C}^2)^k$, $(\mathbb{C}^2)^n$ denota la representación de $\mathfrak{su}(2)$ descripta en (I) y $\mathfrak{u}(2)$ actúa componente a componente sobre $(\mathbb{C}^2)^k$ de la manera estándar como representación real.
- $K = \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(k) \times \mathrm{Sp}(n)$.

(VIII)
- $N(\mathfrak{g}, W)$ está dado por:
  - $\mathfrak{g} := \mathfrak{su}(m_1) \oplus ... \oplus \mathfrak{su}(m_\beta) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus ... \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{c}$, con α copias de $\mathfrak{su}(2)$, $m_i \geq 3$ para todo $1 \leq i \leq \beta$ y donde $\mathfrak{c}$ es una componente abeliana.
  - $W := \mathbb{C}^{m_1} \oplus ... \oplus \mathbb{C}^{m_\beta} \oplus \mathbb{C}^{2k_1+2n_1} \oplus ... \oplus \mathbb{C}^{2k_\alpha+2n_\alpha}$, con $k_j \geq 1$ y $n_j \geq 0$ para todo $1 \leq j \leq \alpha$ y donde la suma es ortogonal o equivalentemente $\mathfrak{g}$-invariante.

  $\mathfrak{g}$ actúa en W como sigue: Para cada $1 \leq i \leq \beta + \alpha$, $\mathfrak{c}$ tiene un único subespacio maximal, denotado por $\mathfrak{c}_i$, actuando no-trivialmente en la i-ésima componente de W y la dimensión de $\mathfrak{c}_i$ es 1. Para $1 \leq i \leq \beta$, $\mathfrak{su}(m_i) \oplus \mathfrak{c}_i$ (el cual es isomorfo a $\mathfrak{u}(m_i)$) actúa no-trivialmente únicamente en $\mathbb{C}^{m_i}$ (como la representación presentada en (VI)) y para $\beta + 1 < i \leq \beta + \alpha$, $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{c}_i$ actúa no-trivialmente únicamente en $\mathbb{C}^{2k_i+2n_i}$ (como la representación presentada en (VII)).
- $K = G' \times U$ donde
  - $G' = \mathrm{SU}(m_1) \times ...\mathrm{SU}(m_\beta) \times \mathrm{SU}(2) \times ... \times \mathrm{SU}(2)$, con α copias de $\mathrm{SU}(2)$ y
  - $U = \mathbb{S}^1 \times ... \times \mathbb{S}^1 \times \mathrm{U}(k_1) \times \mathrm{Sp}(n_1) \times ... \times \mathrm{U}(k_\alpha) \times \mathrm{Sp}(n_\alpha)$, con β copias de $\mathbb{S}^1$

(IX)
- $N(\mathfrak{g}, W) = N(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ para $n \geq 1$,
  donde $\mathbb{R}$ actúa en $\mathbb{C}^n$, visto como espacio vectorial real, como en el Ejemplo 4.6, es decir, es el grupo de Heisenberg.
- $K = \mathrm{U}(n)$.

Observación 4.10. Para todos los casos presentados anteriormente existe $X \in \mathfrak{g}'$ satisfaciendo $\mathrm{Nú}(\rho(X)) = \{0\}$. Hemos excluido de la lista dos de los casos dados en [La2, Remark 3] ya que corresponden a grupos nilpotentes que no poseen representaciones de cuadrado integrable. Estos son precisamente el segundo punto de la observación final del artículo [La2] y el par dado por $N(\mathfrak{g}, W) := N(\mathfrak{so}(2n+1), \mathbb{R}^{2n+1})$ y $K := \mathrm{SO}(2n+1)$ para $n \geq 2$, es decir, el análogo al punto (IV). En ambos casos el espacio vectorial W tiene dimensión impar.

Nuestra tarea ahora será considerar, para cada caso, una representación unitaria irreducible τ de $K = G' \times U$ y determinar si la terna resultante es conmutativa o no. El último ítem de la lista fue estudiado en [Ya] donde se prueba que las ternas $(\mathrm{U}(n) \ltimes N(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n), \mathrm{U}(n), \tau)$ son conmutativas para toda $\tau \in \widehat{\mathrm{U}(n)}$, esto es, cuando N es un grupo Heisenberg y K es el grupo unitario tenemos un par de Gelfand fuerte. Es así que a continuación exploraremos los casos del (I) al (VIII) con el fin de derivar ternas conmutativas.

4.2.2. Caso (I)

Denotamos por $\mathbb{H}$ a los cuaterniones y por $\mathrm{Im}\,(\mathbb{H})$ a los cuaterniones imaginarios. Para $n \geq 1$, el grupo $N(\mathfrak{su}(2), (\mathbb{C}^2)^n)$ es el grupo de tipo H con álgebra de Lie $\mathrm{Im}\,(\mathbb{H}) \oplus \mathbb{H}^n$ donde la representación real ρ de $\mathrm{Im}\,(\mathbb{H})$ sobre $\mathbb{H}^n$ está dada por el producto cuaterniónico a izquierda componente a componente

$$\rho(z)(v) := (zv_1, ..., zv_n) \qquad (v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{H},\ z \in \mathrm{Im}\,(\mathbb{H})), \tag{4.5}$$

es decir, $\mathfrak{su}(2)$ actúa sobre $(\mathbb{C}^2)^n$ como $\mathrm{Im}\,(\mathbb{H})$ actúa naturalmente en cada coordenada de $\mathbb{H}^n$ (identificando $\mathrm{Im}\,(\mathbb{H})$ con $\mathfrak{su}(2)$ y $\mathbb{H}^n$ con $(\mathbb{C}^2)^n$).

El grupo unitario de operadores de entrelazamiento de π es $\mathrm{Sp}(n)$ que actúa en $\mathbb{H}^n$ a derecha. Por lo tanto, $K = \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{Sp}(n)$.

Un toro maximal en $\mathrm{SU}(2)$ está dado por

$$\mathrm{T}^1 := \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \mid \ \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Notemos que la acción de $\mathrm{T}^1 \times \mathrm{Sp}(n)$ en $\mathcal{P}((\mathbb{C}^2)^n)$ (el espacio de polinomios en $(\mathbb{C}^2)^n$) es $\mathbb{C}$-lineal mientras que no lo es la acción de K.

La representación metapléctica ω de $\mathrm{T}^1 \times \mathrm{Sp}(n)$ en $\mathcal{P}((\mathbb{C}^2)^n)$ se descompone en

$$\omega = \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \chi_s \otimes \eta_{(s)}, \tag{4.6}$$

donde $\chi_s(\theta) := e^{-is\theta}$ y $\eta_{(s)}$ denota la representación irreducible de $\mathrm{Sp}(n)$ en el espacio $\mathcal{P}_s((\mathbb{C}^2)^n)$ de polinomios homogéneos de grado s.

Una representación $\tau \in \widehat{\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{Sp}(n)}$ está dada por el producto tensorial $\tau = \nu_k \otimes \eta$, donde $(\nu_k, \mathcal{P}_k(\mathbb{C}^2)) \in \widehat{\mathrm{SU}(2)}$ es la representación de $\mathrm{SU}(2)$ que se realiza en el espacio de polinomios homogéneos de $\mathbb{C}^2$ de grado k y $\eta \in \widehat{\mathrm{Sp}(n)}$. Cuando restringimos τ a $\mathrm{T}^1 \times \mathrm{Sp}(n)$ tenemos

$$(\nu_k \otimes \eta)_{|_{\mathrm{T}^1 \times \mathrm{Sp}(n)}} = \left(\bigoplus_{i=0}^{k} \chi_{k-2i} \right) \otimes \eta. \tag{4.7}$$

En consecuencia

$$(\omega \otimes \nu_k \otimes \eta)_{|_{\mathrm{T}^1 \times \mathrm{Sp}(n)}} = \bigoplus_{s=0}^{\infty} \left[\left(\oplus_{i=0}^{k} \chi_{s+k-2i} \right) \otimes \eta_{(s)} \right] \otimes \eta. \tag{4.8}$$

Proposición 4.11. *La terna $(K \ltimes N, K, \tau)$, para*

- $N := N(\mathfrak{su}(2), (\mathbb{C}^2)^n)$,
- $K := \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{Sp}(n)$ *y*
- $\tau \in \widehat{K}$,

es conmutativa si y sólo si:

(*i*) $\tau \in \widehat{\mathrm{SU}(2)}$ *o*

(*ii*) $\tau \in \widehat{\mathrm{Sp}(n)}$ *y corresponde a una partición de la forma $(a, a, ..., a)$, de longitud a lo sumo n, para algún entero no negativo a.*

Demostración. Sea $\tau = \nu_k \otimes \eta \in \widehat{\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{Sp}(n)}$.

Si $\tau = \nu_k$, a partir de (4.8) la afirmación se prueba fácilmente ya que

$$(\omega \otimes \nu_k)_{|_{\mathrm{T}^1 \times \mathrm{Sp}(n)}} = \bigoplus_{s=0}^{\infty} \left(\oplus_{i=0}^{k} \chi_{s+k-2i} \right) \otimes \eta_{(s)}$$

es libre de multiplicidad.

Para el caso en que $\tau = \eta$, nuevamente de (4.8) se llega a que

$$(\omega \otimes \eta)_{|_{\mathrm{T}^1 \times \mathrm{Sp}(n)}} = \bigoplus_{s=0}^{\infty} \chi_s \otimes \eta_{(s)} \otimes \eta.$$

Esta descomposición es libre de multiplicidad si y sólo si $\eta_{(s)} \otimes \eta$ es libre de multiplicidad para cada $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Por el Corolario 1.74 esto se sigue si y sólo si η corresponde a una partición de la forma $(a, a, ..., a)$ de longitud a lo sumo n.

Ahora asumamos que tanto η como ν_k son ambas no-triviales. Usando el Teorema 4.8 probaremos que $(\omega \otimes \nu_k \otimes \eta)_{|_{\mathrm{T}^1 \times \mathrm{Sp}(n)}}$ no es libre de multiplicidad. En efecto, si consideramos $s = 0$ y $s = 2$ en (4.8) tenemos los términos

$$\begin{aligned} &\text{para } s = 0: \quad (\chi_{-k} \oplus \chi_{-k+2} \oplus ... \oplus \chi_{k-2} \oplus \chi_k) \otimes \eta \quad \text{y} \\ &\text{para } s = 2: \quad (\chi_{-k+2} \oplus \chi_{-k+4} \oplus ... \oplus \chi_k \oplus \chi_{k+2}) \otimes \eta_{(2)} \otimes \eta. \end{aligned}$$

Por un lado, con $s = 0$ tomamos el término $\chi_k \otimes \eta$ y por otro lado, con $s = 2$ consideramos $\chi_k \otimes \eta_{(2)} \otimes \eta$. Por el Corolario 1.73, η aparece en la descomposición en factores irreducibles del producto tensorial $\eta_{(2)} \otimes \eta$. Luego, η aparece al menos dos veces en la descomposición de $(\omega \otimes \nu_k \otimes \eta)_{|_{\mathrm{T}^1 \times \mathrm{Sp}(n)}}$. □

4.2.3. Caso (II)

En este caso $\mathfrak{g} := \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ y actúa en $W := (\mathbb{C}^2)^{k_1} \oplus \mathbb{R}^4 \oplus (\mathbb{C}^2)^{k_2}$ (con $k_1 + k_2 \geq 1$) de la siguiente manera:

(i) la primera copia de $\mathfrak{su}(2)$ de $\mathfrak{g}$ actúa en $(\mathbb{C}^2)^{k_1}$ como $\mathfrak{sp}(1)$ actúa en $\mathbb{H}^{k_1}$ de la manera natural, componente a componente y actúa trivialmente en $(\mathbb{C}^2)^{k_1}$, mientras que la segunda copia de $\mathfrak{su}(2)$ de $\mathfrak{g}$ actúa de manera análoga intercambiando los roles de $(\mathbb{C}^2)^{k_1}$ y $(\mathbb{C}^2)^{k_2}$, además

(ii) $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(4)$ actúa de la manera natural en $\mathbb{R}^4$ (ya que $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \simeq \mathfrak{so}(4)$).

Luego, el grupo unitario de operadores de entrelazamiento de esta acción es $U = \mathrm{Sp}(k_1) \times \mathrm{Sp}(k_2)$.

Sea T^1 un toro de $\mathrm{SU}(2)$. La representación metapléctica de $\mathrm{T}^1 \times \mathrm{T}^1 \times U$ en $\mathcal{P}((\mathbb{C}^2)^{k_1} \oplus \mathbb{R}^4 \oplus (\mathbb{C}^2)^{k_2})$ se descompone de la siguiente forma:

(i) La acción de $\mathrm{T}^1 \times \mathrm{Sp}(k_1)$ en $\mathcal{P}((\mathbb{C}^2)^{k_1})$ se descompone libre de multiplicidad en representaciones irreducibles como

$$\bigoplus_{r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \chi_r \otimes \eta_{(r)}, \tag{4.9}$$

donde $\chi_r(\theta) = e^{-ri\theta}$ (para todo $\theta \in \mathrm{T}^1$) y $\eta_{(r)}$ es la clásica representación de $\mathrm{Sp}(k_1)$ en $\mathcal{P}_r((\mathbb{C}^2)^{k_1})$.

La acción de $\mathrm{T}^1 \times \mathrm{Sp}(k_2)$ en $\mathcal{P}((\mathbb{C}^2)^{k_2})$ se descompone análogamente como

$$\bigoplus_{s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \chi_s \otimes \eta_{(s)}, \tag{4.10}$$

donde aquí $\eta_{(s)}$ es la clásica representación de $\mathrm{Sp}(k_2)$ en $\mathcal{P}_s((\mathbb{C}^2)^{k_2})$.

(ii) La acción de

$$\mathrm{T}^1 \times \mathrm{T}^1 = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} \end{pmatrix} \mid \ \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

en $\mathcal{P}(\mathbb{C}^2)$ se descompone sin presentar multiplicidad como suma de los siguientes caracteres

$$\bigoplus_{l_1, l_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \chi_{(l_1, l_2)}, \tag{4.11}$$

donde $\chi_{(l_1,l_2)}(\theta_1, \theta_2) = e^{-l_1 i\theta_1} e^{-l_2 i\theta_1}$ (para todo $(\theta_1, \theta_2) \in \mathrm{T}^1 \times \mathrm{T}^1$).

Luego, de (4.9), (4.10) y (4.11),

$$\omega_{|_{\mathrm{T}^1 \times \mathrm{T}^1 \times U}} = \bigoplus_{r,s,l_1,l_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \chi_{(r+l_1,s+l_2)} \otimes \eta_{(r)} \otimes \eta_{(s)}. \tag{4.12}$$

Sea $\tau = \nu_m \otimes \nu_n \otimes \eta_1 \otimes \eta_2$ una representación unitaria irreducible de $K = \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \times U$, donde ν_m y ν_n son las representaciones unitarias irreducibles de $\mathrm{SU}(2)$ en $\mathcal{P}_m(\mathbb{C}^2)$ y $\mathcal{P}_n(\mathbb{C}^2)$ respectivamente, y η_1 y η_2 son representaciones unitarias irreducibles arbitrarias de $\mathrm{Sp}(k_1)$ y $\mathrm{Sp}(k_2)$ respectivamente. Cuando restringimos τ a $\mathrm{T}^1 \times \mathrm{T}^1 \times U$ obtenemos la descomposición

$$\left(\bigoplus_{i=0}^{m} \chi_{m-2i} \right) \otimes \left(\bigoplus_{j=0}^{n} \chi_{n-2j} \right) \otimes \eta_1 \otimes \eta_2. \tag{4.13}$$

De (4.12) y (4.13), $(\omega \otimes \tau)_{|_{\mathrm{T}^1 \times \mathrm{T}^1 \times U}}$ se descompone en irreducibles de la siguiente la forma:

$$\bigoplus_{r,s,l_1,l_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \left(\oplus_{i=0}^{m} \oplus_{j=0}^{n} \chi_{(r+l_1+m-2i,s+l_2+n-2j)} \right) \otimes \left(\eta_{(r)} \otimes \eta_1 \right) \otimes \left(\eta_{(s)} \otimes \eta_2 \right). \tag{4.14}$$

Proposición 4.12. *La terna $(K \ltimes N, K, \tau)$, para*

- $N := N(\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2), (\mathbb{C}^2)^{k_1} \oplus \mathbb{R}^4 \oplus (\mathbb{C}^2)^{k_2})$,
- $K := \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{Sp}(k_1) \times \mathrm{Sp}(k_2)$ *y*
- $\tau \in \widehat{K}$,

es conmutativa si y sólo si τ es la representación trivial.

Demostración. Sea $\tau = \nu_m \otimes \nu_n \otimes \eta_1 \otimes \eta_2$ una representación irreducible de K como arriba.

Si ν_m es no-trivial, es decir $m \geq 1$, considerando en (4.14) los pares de índices

$$l_1 = 0,\ i = 0 \qquad \text{y} \qquad l_1 = 2,\ i = 1,$$

obtenemos multiplicidad en la descomposición en representaciones irreducibles de $(\omega \otimes \tau)_{|_{\mathrm{T}^1 \times \mathrm{T}^1 \times U}}$. Análogamente, si ν_n es no-trivial, es decir $n \geq 1$, obtenemos multiplicidad en (4.14).

Si $\eta_1 \in \widehat{\mathrm{Sp}(k_1)}$ es no-trivial, argumentando de la misma manera que en la Proposición 4.11 (que usa el Corolario 1.73), considerando en (4.14) por un lado

$$r = 0, \quad l_1 = 2$$

y por otro lado

$$r = 2, \quad l_1 = 0,$$

obtenemos repetición de representaciones irreducibles como factores invariantes de $(\omega \otimes \tau)_{|_{\mathrm{T}^1 \times \mathrm{T}^1 \times U}}$. Lo mismo se sigue para $\eta_2 \in \widehat{\mathrm{Sp}(k_2)}$ no-trivial. □

4.2.4. Caso (III)

Este caso consiste de $\mathfrak{g} := \mathfrak{sp}(2)$ y $\mathfrak{n} := \mathfrak{sp}(2) \oplus (\mathbb{H}^2)^n$ (con $n \geq 1$), donde hemos identificado $\mathbb{C}^4$ con $\mathbb{H}^2$ (como espacios vectoriales reales). La representación real ρ de $\mathfrak{sp}(2)$ en $(\mathbb{H}^2)^n$ es similar a la descripta en el caso (I):

$$\rho(z)(v) := (zv_1, ..., zv_n) \qquad (v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{H}^2,\ z \in \mathfrak{sp}(2)). \tag{4.15}$$

Como el grupo unitario de operadores de entrelazamiento de $(\rho, (\mathbb{H}^2)^n)$ es $\mathrm{Sp}(n)$ (actuando a derecha de manera $\mathbb{C}$-lineal), el grupo K es $\mathrm{Sp}(2) \times \mathrm{Sp}(n)$.

Sea

$$\mathrm{T}^2 := \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} \end{pmatrix} \mid \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

un toro maximal de $\mathrm{Sp}(2)$.

Como la acción natural de $\mathfrak{sp}(2)$ en $\mathbb{H}^2$ es irreducible, el Lema de Schur implica que cada operar de entrelazamiento $A \in \mathrm{Sp}(n)$ de la acción de $\mathfrak{sp}(2)$ en $\mathcal{P}((\mathbb{H}^2)^n)$, $A : (\mathbb{H}^2)^n \to (\mathbb{H}^2)^n$, posee la siguiente escritura matricial

$$[A] = \begin{pmatrix} a_{11}\mathrm{I} & a_{12}\mathrm{I} & \dots & a_{1n}\mathrm{I} \\ a_{21}\mathrm{I} & a_{22}\mathrm{I} & \dots & a_{2n}\mathrm{I} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}\mathrm{I} & a_{n2}\mathrm{I} & \dots & a_{nn}\mathrm{I} \end{pmatrix}, \text{ donde } \mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } a_{i,j} \in \mathbb{H}.$$

Podemos deducir que la acción de $\mathrm{Sp}(n)$ en $\mathcal{P}((\mathbb{C}^4)^n)$ se parte como $\mathcal{P}((\mathbb{C}^2)^n) \otimes \mathcal{P}((\mathbb{C}^2)^n)$ y también puede ser escrita como $\bigoplus_{r,s\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathcal{P}_r((\mathbb{C}^2)^n) \otimes \mathcal{P}_s((\mathbb{C}^2)^n)$.

Luego, la representación metapléctica ω de $\mathrm{T}^2 \times \mathrm{Sp}(n)$ en $\mathcal{P}((\mathbb{C}^4)^n)$ se descompone en

$$\omega_{|_{\mathrm{T}^2 \times \mathrm{Sp}(n)}} = \bigoplus_{r,s\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \chi_{(r,s)} \otimes \eta_{(r)} \otimes \eta_{(s)},$$

donde $\chi_{(r,s)}(\theta_1, \theta_2) = e^{-ir\theta_1} e^{-is\theta_2}$ y donde $\eta_{(r)}$ y $\eta_{(s)}$ denotan las clásicas representaciones de $\mathrm{Sp}(n)$ en los espacios de polinomios homogéneos en $(\mathbb{C}^2)^n$ de grado r y s respectivamente. Más aún, de (1.27) obtenemos la siguiente descomposición libre de multiplicidad

$$\omega = \bigoplus_{r,s\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \chi_{(r,s)} \otimes \left(\bigoplus_{j=0}^{s} \bigoplus_{i=0}^{j} \eta_{(r+s-j-i,j-i)} \right). \tag{4.16}$$

Proposición 4.13. *La terna $(K \ltimes N, K, \tau)$, para*

- $N := N(\mathfrak{sp}(2), (\mathbb{H}^2)^n)$,
- $K := \mathrm{Sp}(2) \times \mathrm{Sp}(n)$ *y*
- $\tau \in \widehat{K}$,

es conmutativa si y sólo si τ es la representación trivial.

Demostración. Sea $\tau \in \widehat{\mathrm{Sp}(2) \times \mathrm{Sp}(n)}$. Entonces $\tau = \kappa \otimes \eta$, con $\kappa \in \widehat{\mathrm{Sp}(2)}$ y $\eta \in \widehat{\mathrm{Sp}(n)}$.

En primer lugar supongamos que $\eta \in \widehat{\mathrm{Sp}(n)}$ es no-trivial. Fijamos $r = 1$ y $s = 1$ en (4.16). Por un lado tomamos en (4.16)

$$i = j = 0$$

y por otro lado,

$$i = j = 1.$$

Como resultado,

$$\chi_{(1,1)} \otimes (\kappa_{|_{\mathrm{T}^2}}) \otimes \eta \qquad \text{y} \qquad \chi_{(1,1)} \otimes (\kappa_{|_{\mathrm{T}^2}}) \otimes (\eta_{(2)} \otimes \eta)$$

aparecen en $(\omega \otimes \tau)_{|_{\mathrm{T}^2 \times \mathrm{Sp}(n)}}$. Por el Corolario 1.73 sabemos que η aparece en la descomposición de $\eta_{(2)} \otimes \eta$. Como esperábamos, $(\omega \otimes \tau)_{|_{\mathrm{T}^2 \times \mathrm{Sp}(n)}}$ no es libre de multiplicidad. Esto nos permite asumir que el factor η debe ser trivial.

Sea ahora $\kappa \in \widehat{\mathrm{Sp}(2)}$ no-trivial. Si su peso máximo es $a_1 L_1 + a_2(L_1 + L_2)$, le podemos asociar la partición (κ_1, κ_2), donde $\kappa_1 = a_1 + a_2$ ay $\kappa_2 = a_2$. Por el teorema del peso máximo, todo peso de κ está dado por el peso máximo menos una suma no negativa de las raíces simples $L_1 - L_2$ y $2L_2$. Sean

$$\chi_{(\kappa_1,\kappa_2)} \qquad \text{y} \qquad \chi_{(\kappa_1 - l, \kappa_2 + l - 2m)}$$

dos caracteres diferentes tomados de la descomposición de $\kappa_{|_{\mathrm{T}^2}}$ (para ciertos enteros no negativos l y m). En la descomposición de $\omega_{|_{\mathrm{T}^2 \times \mathrm{Sp}(n)}} \otimes \kappa_{|_{\mathrm{T}^2}}$ aparecen, por ejemplo, las siguientes sumas de representaciones irreducibles

$$\left(\bigoplus_{r,s\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \chi_{(\kappa_1+r,\kappa_2+s)} \otimes \eta_{(r)} \otimes \eta_{(s)} \right) \oplus \left(\bigoplus_{r',s'\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \chi_{(\kappa_1-l+r',\kappa_2+l-2m+s')} \otimes \eta_{(r')} \otimes \eta_{(s')} \right).$$

Elegimos $r' = l$, $s' = 2m$, $r = 0$ y $s = l$. Estos satisfacen

$$\begin{cases} r = -l + r' \\ s = l - 2m + s' \end{cases} \tag{4.17}$$

La representación $\eta_{(l)}$ es un factor invariante de $\eta_{(r)} \otimes \eta_{(s)}$ y de $\eta_{(r')} \otimes \eta_{(s')}$. Esto se sigue ya que de (1.27) tenemos que

$$\begin{aligned} \eta_{(r)} \otimes \eta_{(s)} &= \eta_{(0)} \otimes \eta_{(l)} = \eta_{(l)}, \\ \eta_{(r')} \otimes \eta_{(s')} &= \eta_{(l)} \otimes \eta_{(2m)} = \oplus_{j=0}^{max\{l,2m\}} \oplus_{i=0}^{j} \eta_{(l+2m-j-i,j-i)}, \end{aligned}$$

y tomando $j = i = m$ vemos que $\eta_{(l)}$ aparece en $\eta_{(r')} \otimes \eta_{(s')}$.

En conclusión, cuando τ es no-trivial, $(\omega \otimes \tau)_{|_{\mathrm{T}^2 \times \mathrm{Sp}(n)}}$ no es libre de multiplicidad y por el Teorema 4.8, la terna no resulta conmutativa. □

4.2.5. Caso (IV)

Estudiaremos las ternas asociadas al grupo nilpotente $N := N(\mathfrak{so}(2n), \mathbb{R}^{2n})$ para $n \geq 2$. Aquí la representación ρ es la acción natural de $\mathfrak{so}(2n)$ en $\mathbb{R}^{2n}$ y por lo tanto $K = \mathrm{SO}(2n)$.

Fijamos un toro maximal de $\mathrm{SO}(2n)$,

$$\mathrm{T}^n := \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) & & 0 & 0 \\ -\sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & \cos(\theta_n) & \sin(\theta_n) \\ 0 & 0 & & -\sin(\theta_n) & \cos(\theta_n) \end{pmatrix} \mid \theta_1, ..., \theta_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

La representación metapléctica de T^n en $\mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$ es la usual y se descompone libre de multiplicidad en suma directa de caracteres

$$\omega_{|_{\mathrm{T}^n}} = \bigoplus_{(k_1,...,k_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \chi_{(k_1,...,k_n)}, \tag{4.18}$$

donde $(\chi_{(k_1,...,k_n)}(\theta_1, ..., \theta_n))(z_1^{k_1} ... z_n^{k_n}) = e^{-ik_1\theta_1} z_1^{k_1} ... e^{-ik_n\theta_n} z_n^{k_n}$.

Sea $(\tau, V_\tau) \in \widehat{\mathrm{SO}(2n)}$ una representación no-trivial. Debemos analizar la descomposición en irreducibles de τ restringida a T^n y luego verificar cuándo $\omega_{|_{\mathrm{T}^n}} \otimes \tau_{|_{\mathrm{T}^n}}$ es libre de multiplicidad.

(i) Si $\tau_{|_{\mathrm{T}^n}}$ no es libre de multiplicidad, inmediatamente $\omega_{|_{\mathrm{T}^n}} \otimes \tau_{|_{\mathrm{T}^n}}$ tampoco lo es.

(ii) Asumamos que $\tau_{|_{\mathrm{T}^n}}$ es libe de multiplicidad. Como τ es no-trivial, $\tau_{|_{\mathrm{T}^n}}$ se descompone en suma directa de caracteres (tantos como su dimensión). Sean

$$\chi_{(r_1,...,r_n)} \qquad \text{y} \qquad \chi_{(s_1,...,s_n)}$$

dos caracteres diferentes de $\tau_{|_{\mathrm{T}^n}}$ determinados por las n-uplas de enteros

$$(r_1, ..., r_n) \qquad \text{y} \qquad (s_1, ..., s_n).$$

Sea

$$a := \text{máx}\{s_i, r_i, 0 : \ 1 \leq i \leq n\}$$

y para cada $1 \leq i \leq n$, consideramos enteros no negativos

$$k_i := a - r_i \qquad \text{y} \qquad l_i := a - s_i.$$

Como

$$\chi_{(k_1,...k_n)} \qquad \text{y} \qquad \chi_{(l_1,...l_n)}$$

aparecen en $\omega_{|_{\mathrm{T}^n}}$, entonces

$$\chi_{(a,...,a)}$$

aparece en la descomposición de

$$\omega_{|_{\mathrm{T}^n}} \otimes \chi_{(r_1,\dots,r_n)}$$

y en la de

$$\omega_{|_{\mathrm{T}^n}} \otimes \chi_{(s_1,\dots,s_n)}.$$

Por lo tanto $\chi_{(a,\dots,a)}$ aparece al menos dos veces en $\omega_{|_{\mathrm{T}^n}} \otimes \tau_{|_{\mathrm{T}^n}}$.

En conclusión, aplicando el Teorema 4.8, hemos probado el siguiente resultado.

Proposición 4.14. *La terna $(K \ltimes N, K, \tau)$, para*

- $N := N(\mathfrak{so}(2n), \mathbb{R}^{2n})$,
- $K := \mathrm{SO}(2n)$ *y*
- $\tau \in \widehat{K}$,

es conmutativa si y sólo si τ es la representación trivial.

4.2.6. Casos (V) y (VI)

Sea $n \geq 3$. En el caso (V) tenemos $\mathfrak{n} := \mathfrak{su}(n) \oplus \mathbb{C}^n$, la representación ρ de $\mathfrak{su}(n)$ en $\mathbb{C}^n$ es la natural y por ende $K = \mathrm{SU}(n) \times \mathbb{S}^1$. En el caso (VI) tenemos $\mathfrak{g} := \mathfrak{u}(n)$ no es semisimple y actúa en $\mathbb{C}^n$ de la manera natural. El subgrupo de automorfismos K es el mismo que en el caso (V), es decir, $K = \mathrm{SU}(n) \times \mathbb{S}^1$.

Toda $\tau \in \widehat{K}$ está dada por $\tau = \nu \otimes \chi_r$, para algún $\nu \in \widehat{\mathrm{SU}(n)}$ y algún carácter χ_r de $\mathbb{S}^1$ con $r \in \mathbb{Z}$.

Proposición 4.15. *La terna $(K \ltimes N, K, \tau)$, para*

- $N := N(\mathfrak{su}(n), \mathbb{C}^n))$,
- $K := \mathrm{SU}(n) \times \mathbb{S}^1$ *y*
- $\tau \in \widehat{K}$,

es conmutativa si y sólo si $\tau \in \widehat{\mathbb{S}^1}$.

Demostración. Sea T^{n-1} un toro maximal de $\mathrm{SU}(n)$. A fin de aplicar el Teorema 4.8 analizaremos cómo se descompone la representación metapléctica $\mathrm{T}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ que actúa en $\mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$. Obtenemos

$$\omega_{|_{\mathrm{T}^{n-1} \times \mathbb{S}^1}} = \bigoplus_{m_1,\dots,m_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \chi_{(m_1,\dots,m_n)}, \tag{4.19}$$

donde $(\chi_{(m_1,\dots,m_n)}(\theta_1,\dots,\theta_n))(z_1^{m_1}\dots z_n^{m_n}) = e^{-im_1\theta_1} z_1^{m_1} \dots e^{-im_n\theta_n} z_n^{m_n}$.

Sea $\tau = \nu \otimes \chi_r$ como arriba. Si restringimos τ sobre $\mathrm{T}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ se descompone como suma de caracteres de la forma $\chi_{k_1,\dots,k_{n-1},r}$ para ciertos $k_1,\dots,k_{n-1} \in \mathbb{Z}$.

Es claro que si ν es la representación trivial $\mathrm{SU}(n)$, $(\omega \otimes \chi_r)_{|_{\mathrm{T}^{n-1} \times \mathbb{S}^1}}$ se descompone en una suma de caracteres libre de multiplicidad ya que

$$(\omega \otimes \chi_r)_{|_{\mathrm{T}^{n-1} \times \mathbb{S}^1}} = \bigoplus_{m_1,\dots,m_{n-1},m_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \chi_{(m_1,\dots,m_{n-1},m_n+r)}.$$

Supongamos que (ν, V_ν) es no-trivial, por lo tanto $\dim(V_\nu) > 1$. Sean $\chi_{k_1,\dots,k_{n-1}}$ y $\chi_{l_1,\dots,l_{n-1}}$ dos caracteres diferentes que aparecen en $\nu_{|_{\mathrm{T}^{n-1}}}$. Los caracteres

$$\bigoplus_{m_1,\dots,m_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \chi_{(m_1+k_1,\dots,m_{n-1}+k_{n-1},m_n+r)} \quad \text{y} \quad \bigoplus_{\tilde{m}_1,\dots,\tilde{m}_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \chi_{(\tilde{m}_1+l_1,\dots,\tilde{m}_{n-1}+l_{n-1},\tilde{m}_n+r)}.$$

aparecen en la descomposición $(\omega \otimes \tau \otimes \chi_r)_{|_{\mathrm{T}^{n-1} \times \mathbb{S}^1}}$. Vemos multiplicidad en la descomposición de $(\omega \otimes \nu \otimes \chi_r)_{|_{\mathrm{T}^{n-1} \times \mathbb{S}^1}}$ cuando elegimos, por ejemplo, $m_n = \tilde{m}_n = 0$ y para $1 \leq i \leq n-1$:

$$\begin{cases} m_i = k_i - l_i & ; \tilde{m}_i = 0 \quad \text{if } k_i - l_i \geq 0 \\ m_i = 0 & ; \tilde{m}_i = l_i - k_i \quad \text{if } k_i - l_i < 0. \end{cases} \tag{4.20}$$

□

Proposición 4.16. *La terna $(K \ltimes N, K, \tau)$, para*

- $N := N(\mathfrak{u}(n), \mathbb{C}^n))$,
- $K := \mathrm{SU}(n) \times \mathbb{S}^1$ *y*
- $\tau \in \widehat{K}$,

es conmutativa si y sólo si $\tau \in \widehat{\mathbb{S}^1}$.

Demostración. Este resultado se sigue de argumentos análogos al teorema anterior y de aplicar el Corolario 4.9. □

4.2.7. Caso (VII)

En el caso (VII) $\mathfrak{g} := \mathfrak{u}(2)$ actúa en $W := (\mathbb{C}^2)^k \oplus (\mathbb{C}^2)^n$ por ρ definida de la siguiente manera:

(i) $\mathfrak{u}(2)$ actúa en cada una de las k componentes de $(\mathbb{C}^2)^k$ de la manera natural,

(ii) en $(\mathbb{C}^2)^n$ el centro de $\mathfrak{u}(2)$ actúa trivialmente y la parte semisimple actúa como $\mathfrak{sp}(1)$ (o $\mathrm{Im}\,(\mathbb{H})$) a izquierda en cada una de las n componentes de $(\mathbb{C}^2)^n$.

El grupo unitario de operadores de entrelazamiento es $U = \mathrm{U}(k) \times \mathrm{Sp}(n)$. El grupo nilpotente $N(\mathfrak{u}(2), (\mathbb{C}^2)^k \oplus (\mathbb{C}^2)^n))$ tiene álgebra de Lie $\mathfrak{n} = \mathfrak{u}(2) \oplus (\mathbb{C}^2)^k \oplus (\mathbb{C}^2)^n$ y su grupo de automorfismos ortogonales es $K = \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(k) \times \mathrm{Sp}(n)$.

Un toro maximal de SU(2) está dado por

$$\mathrm{T}^1 = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \mid \ \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

que está en correspondencia con $\left\{ e^{i\theta} \mid \ \theta \in \mathbb{R} \right\}$ en Sp(1).

La representación metapléctica ω de $\mathrm{T}^1 \times U$ se realiza en $\mathcal{P}((\mathbb{C}^2)^k \oplus (\mathbb{C}^2)^n)$:

(i) Para entender cómo actúa $\mathrm{U}(k)$ en $\mathcal{P}((\mathbb{C}^2)^k)$ debemos pensar a cada elemento $A \in \mathrm{U}(k)$ como un operador (unitario) de entrelazamiento de la acción de $\mathfrak{u}(2)$ sobre $\mathcal{P}((\mathbb{C}^2)^k)$: Como la acción natural de $\mathfrak{u}(2)$ en $\mathbb{C}^2$ es irreducible, el lema de Schur implica que A es un operador lineal, $A : (\mathbb{C}^2)^k \to (\mathbb{C}^2)^k$, cuya representación matricial está dada por

$$[A] = \begin{pmatrix} a_{11}\mathrm{I} & a_{12}\mathrm{I} & \dots & a_{1k}\mathrm{I} \\ a_{21}\mathrm{I} & a_{22}\mathrm{I} & \dots & a_{2k}\mathrm{I} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1}\mathrm{I} & a_{k2}\mathrm{I} & \dots & a_{kk}\mathrm{I} \end{pmatrix}, \text{ donde } \mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } a_{i,j} \in \mathbb{C}.$$

De aquí la acción de $\mathrm{U}(k)$ en $\mathcal{P}((\mathbb{C}^2)^k)$ se parte como $\mathcal{P}(\mathbb{C}^k) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{C}^k)$ y también se puede escribir como $\bigoplus_{r,s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathcal{P}_r(\mathbb{C}^k) \otimes \mathcal{P}_s(\mathbb{C}^k)$. A pesar de que $\mathcal{P}_r(\mathbb{C}^k) \otimes \mathcal{P}_s(\mathbb{C}^k)$ no es irreducible como $\mathrm{U}(k)$-módulo, es libre de multiplicidad. Más aún, por [Ya], el par $(\mathrm{U}(k) \ltimes N(\mathbb{R}, \mathbb{C}^k), \mathrm{U}(k))$ es un par de Gelfand fuerte. En particular, para cada $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, la suma

$$\bigoplus_{r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathcal{P}_r(\mathbb{C}^k) \otimes \mathcal{P}_s(\mathbb{C}^k)$$

es libre de multiplicidad como $\mathrm{U}(k)$-módulo.

Además de esto, $\mathrm{T}^1 \subset \mathrm{SU}(2)$ actúa en cada polinomio $p \in \mathcal{P}((\mathbb{C}^2)^k)$ por

$$p(u_1, v_1, ..., u_k, v_k) \mapsto p(e^{i\theta}u_1, e^{-i\theta}v_1, ..., e^{i\theta}u_k, e^{-i\theta}v_k), \quad (u_i, v_i \in \mathbb{C}).$$

Luego la acción de $\mathrm{T}^1 \times \mathrm{U}(k)$ en $\mathcal{P}((\mathbb{C}^2)^k)$ se descompone sin multiplicidad como

$$\bigoplus_{r,s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \chi_{r-s} \otimes \upsilon_{(r)} \otimes \upsilon_{(s)}, \tag{4.21}$$

donde hemos denotado por $\upsilon_{(r)}$ y $\upsilon_{(s)}$ a las representaciones irreducibles de $\mathrm{U}(k)$ en $\mathcal{P}_r(\mathbb{C}^k)$ y en $\mathcal{P}_s(\mathbb{C}^k)$ respectivamente y donde $\chi_{r-s}(e^{i\theta}) = e^{-(r-s)i\theta}$.

La descomposición de la representación metapléctica de $\mathrm{U}(k)$ en $\mathcal{P}(\mathbb{C}^k)$ es

$$\bigoplus_{r\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \upsilon_{(r)}.$$

De acuerdo a [Ya], $(\mathrm{U}(k) \ltimes N(\mathbb{R}, \mathbb{C}^k), \mathrm{U}(k)$ es un par de Gelfand fuerte, esto es, para cada representación irreducible $\upsilon \in \widehat{\mathrm{U}(k)}$

$$\bigoplus_{r\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \upsilon_{(r)} \otimes \upsilon$$

es libre de multiplicidad. En particular, para cada $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,

$$\bigoplus_{r\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \upsilon_{(r)} \otimes \upsilon_{(s)}$$

es libre de multiplicidad. Más aún, tampoco la siguiente expresión presenta multiplicidades

$$\bigoplus_{r\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \chi_r \otimes \upsilon_{(r)} \otimes \upsilon_{(s)}.$$

Luego,

$$\bigoplus_{r,s\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \chi_{r-s} \otimes \upsilon_{(r)} \otimes \upsilon_{(s)} = \bigoplus_{s\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \chi_{-s} \otimes \left(\bigoplus_{r\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \chi_r \otimes \upsilon_{(r)} \otimes \upsilon_{(s)} \right)$$

es también libre de multiplicidad.

(ii) Para cada $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ la acción de $\mathrm{Sp}(n)$ sobre $\mathcal{P}_j(\mathbb{C}^{2n})$, denotada por $\eta_{(j)}$, es irreducible. El toro $\mathrm{T}^1 \subset \mathrm{Sp}(1)$ actúa en cada polinomio homogéneo por su grado, en el sentido que si $p \in \mathcal{P}_j(\mathbb{C}^{2n})$, la acción está dada por $(e^{i\theta}, p) \mapsto e^{-ji\theta}p$. Luego la acción de $\mathrm{T}^1 \times \mathrm{Sp}(n)$ en $\mathcal{P}(\mathbb{C}^{2n})$ se descompone en irreducibles como

$$\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \chi_j \otimes \eta_{(j)}. \tag{4.22}$$

En conclusión, la representación metapléctica se descompone libre de multiplicidad en

$$\omega_{|_{\mathrm{T}^1 \times U}} = \left(\bigoplus_{r,s\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \chi_{r-s} \otimes \upsilon_{(r)} \otimes \upsilon_{(s)} \right) \otimes \left(\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \chi_j \otimes \eta_{(j)} \right) \tag{4.23}$$

(debemos tener en mente que cada término $\upsilon_{(r)} \otimes \upsilon_{(s)}$ no es irreducible).

Una representación unitaria irreducible de K está dada por $\tau = \nu_d \otimes \upsilon \otimes \eta$, donde $(\nu_d, \mathcal{P}_d(\mathbb{C}^2))$ es la representación unitaria irreducible de $\mathrm{SU}(2)$ sobre los polinomios homogéneos en $\mathbb{C}^2$ de grado d, $\upsilon \in \widehat{\mathrm{U}(k)}$ y $\eta \in \widehat{\mathrm{Sp}(n)}$. Esta representación restringida a $\mathrm{T}^1 \times U$ se descompone en representaciones irreducibles como

$$\tau_{|_{\mathrm{T}^1 \times U}} = (\oplus_{i=0}^{d} \chi_{d-2i}) \otimes \upsilon \otimes \eta.$$

Luego $\omega \otimes \tau$ restringida a $\mathrm{T}^1 \times U$ se descompone en

$$(\omega \otimes \tau)_{|_{\mathrm{T}^1 \times U}} = \bigoplus_{r,s,j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \oplus_{i=0}^{d} \chi_{r-s+j+d-2i} \otimes \upsilon_{(r)} \otimes \upsilon_{(s)} \otimes \upsilon \otimes \eta_{(j)} \otimes \eta. \tag{4.24}$$

Proposición 4.17. *La terna $(K \ltimes N, K, \tau)$, para*

- $N := N(\mathfrak{u}(n), (\mathbb{C}^2)^k \oplus (\mathbb{C}^2)^n)$,
- $K := \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(k) \times \mathrm{Sp}(n)$ *y*
- $\tau \in \widehat{K}$,

es conmutativa si y sólo si $\tau \in \widehat{\mathrm{U}(k)}$.

Demostración. Sea $\tau = \nu_d \otimes \upsilon \otimes \eta \in \mathrm{SU}(2) \times \widehat{\mathrm{U}(k)} \times \mathrm{Sp}(n)$.

Si η es no-trivial, por el Corolario 1.73, η aparece en la descomposición en representaciones irreducibles de $\eta_{(2)} \otimes \eta$. Entonces, considerando por un lado

$$j = 0, \quad r = 1, \quad s = 0$$

y por otro lado

$$j = 2, \quad r = 0, \quad s = 1,$$

obtenemos repetición en (4.24).

Si ν_d es no-trivial, es decir, $d \geq 1$, hay repetición de representaciones en (4.24) considerando por ejemplo por un lado

$$i = 0 \ \text{ y } \ j = 0$$

y por otro lado

$$i = 1 \ \text{ y } \ j = 2.$$

En conclusión, si ν_d o η no son triviales, aplicando el Corolario 4.9, nos quedan ternas no conmutativas.

Asumamos entonces que tanto ν_d como η son triviales. Mostraremos que la descomposición

$$(\omega \otimes \tau)_{|_{\mathrm{T}^1 \times \mathrm{U}(k) \times \mathrm{Sp}(n)}} = \bigoplus_{r,s,j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \chi_{r-s+j} \otimes \upsilon_{(r)} \otimes \upsilon_{(s)} \otimes \upsilon \otimes \eta_{(j)}$$

es libre de multiplicidad a partir de notar que su restricción a $\mathrm{T}^1 \times Z(\mathrm{U}(k)) \times \mathrm{Sp}(n)$ es libre de multiplicidad, donde $Z(\mathrm{U}(k))$ es en centro de $\mathrm{U}(k)$. En efecto, sea χ_l el carácter asociado a $\upsilon_{|_{Z(\mathrm{U}(k))}}$. A cada representación $\upsilon_{(r)} \in \widehat{\mathrm{U}(k)}$ que actúa en el espacio de polinomios homogéneos de grado r, el carácter asociado corresponde a su grado r, en el sentido que $(\upsilon_{(r)})_{|_{Z(\mathrm{U}(k))}} = \chi_r$. Luego,

$$(\omega \otimes \upsilon)_{|_{\mathrm{T}^1 \times Z(\mathrm{U}(k)) \times \mathrm{Sp}(n)}} = \bigoplus_{r,s,j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \chi_{r-s+j} \otimes \chi_{r+s+l} \otimes \eta_{(j)}. \tag{4.25}$$

El parámetro l está fijo y uno puede asumir el parámetro j también fijo porque cuando j corre en $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ el factor $\eta_{(j)}$ cambia. Luego obtenemos multiplicidad en (4.25) si existen parámetros $r, s, r', s' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $r \neq r'$, $s \neq s'$, tales que

$$\begin{cases} r - s = r' - s' \\ r + s = r' + s' \end{cases}$$

lo cual no es posible.

Así, si ν_m o η son triviales, por el Corolario 4.9, obtenemos ternas conmutativas. □

4.2.8. Caso (VIII)

En este caso el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ no será semisimple. Sean α y β dos enteros no negativos y sean $\{m_i\}_{i=1}^{\beta}$ enteros mayores o iguales a 3. Consideramos

$$\mathfrak{g} := \mathfrak{su}(m_1) \oplus \ldots \oplus \mathfrak{su}(m_\beta) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \ldots \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{c},$$

donde $\mathfrak{c}$ es su centro y donde hay α copias de $\mathfrak{su}(2)$. La componente abeliana satisface que $1 \leq \dim(\mathfrak{c}) < \alpha + \beta$. Consideramos los espacios vectoriales

$$W_1 := \mathbb{C}^{m_1}, \cdots, \ W_\beta := \mathbb{C}^{m_\beta}, \ W_{\beta+1} := \mathbb{C}^{2k_1+2n_1}, \cdots, \ W_{\beta+\alpha} := \mathbb{C}^{2k_\alpha+2n_\alpha},$$

donde $k_j \geq 1$ y $n_j \geq 0$ para todo $1 \leq j \leq \alpha$ y sea

$$W := \bigoplus_{i=1}^{\beta+\alpha} W_i.$$

El grupo dos pasos nilpotente $N(\mathfrak{g}, W)$ está determinado por lo siguiente:

- Para cada $1 \leq i \leq \beta + \alpha$, $\mathfrak{c}$ tiene un subespacio maximal, denotado por $\mathfrak{c}_i$, de dimensión uno, que actúa no-trivialmente en W_i.

- Para $1 \leq i \leq \beta$, $\mathfrak{su}(m_i) \oplus \mathfrak{c}_i$ actúa en W_i al igual que en el caso (VI). Esto es, como $\mathfrak{su}(m_i) \oplus \mathfrak{c}_i$ es isomorfo a $\mathfrak{u}(m_i)$, actúa de la manera natural en $\mathbb{C}^{m_i}$. Aparte de esto, $\mathfrak{su}(m_i) \oplus \mathfrak{c}_i$ actúa trivialmente en W_j para todo $j \neq i$.
- Para $\beta + 1 < i \leq \beta + \alpha$, $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{c}_i$ actúa en W_i al igual que en el caso (VII). Esto es, actúa naturalmente como $\mathfrak{u}(2)$ en $(\mathbb{C}^2)^{k_i}$ y $\mathfrak{su}(2)$ actúa naturalmente como $\mathfrak{sp}(1)$ en $\mathbb{H}^{n_i}$ (que es isomorfo a $(\mathbb{C}^2)^{n_i}$ como espacio vectorial real). Además, $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{c}_i$ actúa trivialmente en W_j para todo $j \neq i$.

El grupo unitario de operadores de entrelazamiento es

$$U := \mathbb{S}^1 \times ... \times \mathbb{S}^1 \times \mathrm{U}(k_1) \times \mathrm{Sp}(n_1) \times ... \times \mathrm{U}(k_\alpha) \times \mathrm{Sp}(n_\alpha),$$

que presenta β copias de $\mathbb{S}^1$.

Consideraremos un caso más sencillo. Sea $\mathfrak{g} := \mathfrak{su}(m) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{c}$ y $W := \mathbb{C}^m \oplus (\mathbb{C}^2)^k \oplus (\mathbb{C}^2)^n$, para ciertos enteros $m \geq 3$, $k \geq 1$ y $n \geq 0$. Aquí $K = \mathrm{SU}(m) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathbb{S}^1 \times \mathrm{U}(k) \times \mathrm{Sp}(n)$.

Sea T^{m-1} un toro maximal de $\mathrm{SU}(m)$ y T^1 un toro maximal de $\mathrm{SU}(2)$.

La representación metapléctica ω de $\mathrm{T}^{m-1} \times \mathrm{T}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathrm{U}(k) \times \mathrm{Sp}(n)$ actúa en $\mathcal{P}(\mathbb{C}^m \oplus \mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2n})$ de la siguiente manera:

(i) $\mathrm{T}^1 \times \mathrm{U}(k) \times \mathrm{Sp}(n)$ actúa como en el caso (VII) sobre $\mathcal{P}(\mathbb{C}^{2k} \oplus \mathbb{C}^{2n})$ y

(ii) $\mathrm{T}^{m-1} \times \mathbb{S}^1$ es un toro de dimensión m en $\mathrm{U}(m)$ que actúa en $\mathcal{P}(\mathbb{C}^m)$ de la manera estándar.

Luego, la representación de $\mathrm{T}^{m-1} \times \mathrm{T}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathrm{U}(k) \times \mathrm{Sp}(n)$ se descompone en

$$\left(\bigoplus_{j_1,\dots j_m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \chi_{(j_1,\dots,j_m)} \right) \otimes \left(\bigoplus_{r,s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \chi_{r-s} \otimes \upsilon_{(r)} \otimes \upsilon_{(s)} \right) \otimes \left(\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \chi_j \otimes \eta_{(j)} \right) \tag{4.26}$$

donde en el primer factor del producto tensorial tenemos una suma de caracteres de la forma

$$\chi_{(j_1,\dots,j_m)}(\theta_1, ..., \theta_m) := e^{-j_1 i \theta_1} ... e^{-j_m i \theta_m},$$

mientras el segundo factor,

$$\left(\bigoplus_{r,s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \chi_{r-s} \otimes \upsilon_{(r)} \otimes \upsilon_{(s)} \right) \otimes \left(\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \chi_j \otimes \eta_{(j)} \right),$$

es el mismo que aparece en el caso (VII). Recordemos que si bien cada término $\upsilon_{(r)} \otimes \upsilon_{(s)}$ no es irreducible, $\omega|_{\mathrm{T}^{m-1} \times \mathrm{T}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathrm{U}(k) \times \mathrm{Sp}(n)}$ es libre de multiplicidad por lo probado en [Ya].

Proposición 4.18. *La terna $(K \ltimes N, K, \tau)$, para*

- $N := N(\mathfrak{su}(m) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{c}, \mathbb{C}^m \oplus (\mathbb{C}^2)^k \oplus (\mathbb{C}^2)^n, (\mathbb{C}^2)^k \oplus (\mathbb{C}^2)^n)$,
- $K := \mathrm{SU}(m) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathbb{S}^1 \times \mathrm{U}(k) \times \mathrm{Sp}(n)$ *y*
- $\tau \in \widehat{K}$,

es conmutativa si y sólo si $\tau \in \widehat{\mathbb{S}^1 \times \mathrm{U}(k)}$.

Demostración. Una representación unitaria irreducible de K está dada por el producto tensorial

$$\tau = \nu \otimes \nu_d \otimes \chi_t \otimes \upsilon \otimes \eta,$$

donde $\nu \in \widehat{\mathrm{SU}(m)}$, $(\nu_d, \mathcal{P}_d(\mathbb{C}^2))$ es la ya conocida representación irreducible de $\mathrm{SU}(2)$ en el espacio de polinomios homogéneos en $\mathbb{C}^2$ de grado d, χ_t es un carácter de $\mathbb{S}^1$ $(t \in \mathbb{Z})$, $\upsilon \in \widehat{\mathrm{U}(k)}$ y $\eta \in \widehat{\mathrm{Sp}(n)}$.

Para comenzar notemos que si ν_d o η no son triviales, por la Proposición 4.17 tenemos multiplicidad en la descomposición $\omega \otimes \tau$ cuando se la restringe a $\mathrm{T}^{m-1} \times \mathrm{T}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathrm{U}(k) \times \mathrm{Sp}(n)$. Podemos entonces suponer que tanto ν_d como η son triviales.

Ahora sea $\nu \in \widehat{\mathrm{SU}(m)}$ no-trivial. El álgebra de Lie compleja $\mathfrak{sl}(m)$ es la complexificación de $\mathfrak{su}(m)$. Sea $\mathfrak{h}$ la subálgebra de Cartan de $\mathfrak{sl}(m)$ consistente de la matrices diagonales $m \times m$ sobre $\mathbb{C}$ de traza cero. Tomando $H_i := \delta_{i,i} - \delta_{m,m}$, tenemos que $\mathfrak{h}$ es un espacio vectorial complejo generado por $\{H_1, ..., H_{m-1}\}$. Sea $\{L_1, ..., L_{m-1}\}$ la base dual asociada en el espacio dual $\mathfrak{h}^*$. Los pesos fundamentales están dados por $\sum_{i=1}^{l} L_i$ para $1 \leq l \leq m-1$ y las raíces simples son $L_1 - L_2, , ..., L_{m-2} - L_{m-1}$. Por el teorema del peso máximo, a cada representación irreducible de $\mathfrak{sl}(m)$ corresponde una combinación lineal entera no negativa de pesos fundamentales. Además, fijada una representación de $\mathfrak{sl}(m)$, todos sus pesos están dados como su peso máximo menos una combinación lineal finita sobre $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ de raíces simples. Entonces, por el teorema del peso máximo, ν se puede parametrizar en términos de una partición $(\nu_1, ..., \nu_{m-1})$. Denotando por

$$a := (a_1, -a_1 + a_2, ..., -a_{n-3} + a_{n-2}, -a_{m-1})$$

(con $a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ para todo $1 \leq i \leq m-1$), cada peso de ν es de la forma

$$\nu - a := (\nu_1 - a_1, \nu_2 + a_1 - a_2, ..., \nu_{n-2} + a_{n-3} - a_{n-2}, \nu_{m-1} + a_{m-1})$$

ya que todo peso de ν se escribe como

$$\sum_{i=1}^{m-1} \nu_i L_i - \sum_{i=1}^{m-2} a_i (L_i - L_{i+1}) =$$
$$(\nu_1 - a_1)L_1 + (\nu_2 + a_1 - a_2)L_2 + ... + (\nu_{n-2} + a_{n-3} - a_{n-2})L_{m-2} + (\nu_{m-1} + a_{m-1})L_{m-1},$$

para $a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $(1 \leq i \leq m-1)$. Sean

$$(\nu_1, ..., \nu_{m-1}) \qquad \text{y} \qquad \nu - a$$

dos pesos distintos de ν con $a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $\forall i$. En la descomposición de $\omega \otimes (\nu \otimes \chi_t \otimes \upsilon)$ restringida a $\mathrm{T}^{m-1} \times \mathrm{T}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathrm{U}(k) \times \mathrm{Sp}(n)$ encontramos por ejemplo los siguientes términos:

$$\left(\bigoplus_{j_1, ... j_m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \chi_{\nu + (j_1, ..., j_{m-1})} \otimes \chi_{j_m + t} \right) \otimes \left(\bigoplus_{r,s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \chi_{r-s} \otimes \upsilon_{(r)} \otimes \upsilon_{(s)} \otimes \upsilon \right) \otimes \left(\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \chi_j \otimes \eta_{(j)} \right)$$

y

$$\left(\bigoplus_{j'_1, ... j'_m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \chi_{\nu - a + (j'_1, ..., j'_{m-1})} \otimes \chi_{j'_m + t} \right) \otimes \left(\bigoplus_{r,s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \chi_{r-s} \otimes \upsilon_{(r)} \otimes \upsilon_{(s)} \otimes \upsilon \right) \otimes \left(\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \chi_j \otimes \eta_{(j)} \right).$$

Vemos multiplicidad considerando por ejemplo,

$$\begin{cases} j_1 = 0, & j'_1 = a_1, & \\ j_i = a_i - a_{i+1}, & j'_i = 0 & \text{si } a_i - a_{i+1} \geq 0 \ \text{ para } 1 < i < m-1, \\ j_i = 0, & j'_i = -(a_i - a_{i+1}) & \text{si } a_i - a_{i+1} < 0 \ \text{ para } 1 < i < m-1, \\ j_{m-1} = a_{m-1}, & j'_{m-1} = 0. & \end{cases}$$

Así, si ν_d, η o ν son no-triviales, de lo que afirma el Corolario 4.9, tenemos ternas no conmutativas. Esto nos permite suponer de aquí en lo que resta de la prueba que ν_d, η y ν son representaciones triviales.

Para cada $\chi_t \in \widehat{\mathbb{S}^1}$ y cada $\upsilon \in \widehat{\mathrm{U}(k)}$ debemos analizar por último

$$\left(\bigoplus_{j_1, ... j_m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \chi_{(j_1, ..., j_m + t)} \right) \otimes \left(\bigoplus_{r,s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \chi_{r-s} \otimes \upsilon_{(r)} \otimes \upsilon_{(s)} \otimes \upsilon \right) \otimes \left(\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \chi_j \otimes \eta_{(j)} \right). \tag{4.27}$$

La suma

$$\bigoplus_{j_1, ... j_m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \chi_{(j_1, ..., j_m + t)}$$

es libre de multiplicidad para todo $t \in \mathbb{Z}$ y por la Proposición 4.17, la descomposicón

$$\left(\bigoplus_{r,s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \chi_{r-s} \otimes \upsilon_{(r)} \otimes \upsilon_{(s)} \otimes \upsilon \right) \otimes \left(\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \chi_j \otimes \eta_{(j)} \right)$$

es libre de multiplicidad para todo $\upsilon \in \widehat{\mathrm{U}(k)}$. Luego, por el Corolario 4.9, obtenemos ternas conmutativas cuando $\tau = \chi_t \otimes \upsilon$. $\square$

Haciendo leves modificaciones en la prueba de la proposición anterior podemos enunciar el siguiente resultado que cierra el caso (VIII).

Proposición 4.19. *La terna $(K \ltimes N, K, \tau)$, para*

- $N := N(\mathfrak{g}, W)$, *donde*
  - $\mathfrak{g} := \oplus_{i=1}^{\beta} \mathfrak{su}(m_i) \oplus \oplus_{j=1}^{\alpha} \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{c}$,
  - $W := \oplus_{i=1}^{\beta} \mathbb{C}^{m_i} \oplus \oplus_{j=1}^{\alpha} (\mathbb{C}^2)^{k_j+n_j}$,
- $K := G' \times U$ *donde*
  - $G' = \Pi_{i=1}^{\beta} \mathrm{SU}(m_i) \times \Pi_{j=1}^{\alpha} \mathrm{SU}(2)$,
  - $U = \Pi_{i=1}^{\beta} \mathrm{U}(1) \times \Pi_{j=1}^{\alpha} \mathrm{U}(k_j) \times \mathrm{Sp}(n_j)$ *y*
- $\tau \in \widehat{K}$,

es conmutativa si y sólo si $\tau = \chi_{t_1} \otimes ... \otimes \chi_{t_\beta} \otimes \upsilon_1 \otimes ... \otimes \upsilon_\alpha$, donde $\chi_{t_i} \in \widehat{\mathbb{S}^1}$ $(t_i \in \mathbb{Z})$ para todo $1 \leq i \leq \beta$ y $\upsilon_j \in \widehat{\mathrm{U}(k_j)}$ para todo $1 \leq j \leq \alpha$.

4.2.9. Conclusiones

A partir de las Proposiciones 4.11 a 4.19 obtenemos una lista completa de ternas conmutativas no-triviales $(K \ltimes N(\mathfrak{g}, W), K, \tau)$, donde $N(\mathfrak{g}, W)$ es indescomponible y admite representaciones de cuadrado integrable, $K = G' \times U$ y $\tau \in \widehat{K}$. Condensamos esto en el siguiente teorema.

Teorema 4.20. *Sea $(K \ltimes N(\mathfrak{g}, W), K)$ un par de Gelfand tal que $N(\mathfrak{g}, W)$ es indescomponible y tiene una representación de cuadrado integrable y $K = G' \times U$. Todas las ternas conmutativas $(K \ltimes N(\mathfrak{g}, W), K, \tau)$ con $\tau \in \widehat{K}$ no-triviales son*

- $\big(K \ltimes N(\mathfrak{su}(2), (\mathbb{C}^2)^n), K, \tau\big)$, *donde $K = \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{Sp}(n)$, para toda $\tau \in \widehat{\mathrm{SU}(2)}$ y para toda $\tau \in \widehat{\mathrm{Sp}(n)}$ asociada a una partición constante de longitud a lo sumo n (donde $n \geq 1$),*
- $(K \ltimes N(\mathfrak{su}(n), \mathbb{C}^n), K, \tau)$, *donde $\mathrm{SU}(n) \times \mathbb{S}^1$, para toda $\tau \in \widehat{\mathbb{S}^1}$ (donde $n \geq 3$),*
- $(K \ltimes N(\mathfrak{u}(n), \mathbb{C}^n), K, \tau)$, *donde $K = \mathrm{SU}(n) \times \mathbb{S}^1$, para toda $\tau \in \widehat{\mathbb{S}^1}$ (donde $n \geq 3$),*
- $(K \ltimes N(\mathfrak{u}(n), (\mathbb{C}^2)^k \oplus (\mathbb{C}^2)^n), K, \tau)$, *donde $K = \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(k) \times \mathrm{Sp}(n)$, para toda $\tau \in \widehat{\mathrm{U}(k)}$ (donde $k \geq 1, n \geq 0$),*
- $((G' \times U) \ltimes N(\mathfrak{g}, W), G' \times U, \tau)$ *donde*

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(m_1) \oplus ... \oplus \mathfrak{su}(m_\beta) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus ... \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{c} \ \textit{con } \mathfrak{c} \textit{ una componente abeliana,}\\
&G' = \mathrm{SU}(m_1) \times ... \times \mathrm{SU}(m_\beta) \times \mathrm{SU}(2) \times ... \times \mathrm{SU}(2)\ ,\\
&W = \mathbb{C}^{m_1} \oplus ... \oplus \mathbb{C}^{m_\beta} \oplus \mathbb{C}^{2k_1+2n_1} \oplus ... \oplus \mathbb{C}^{2k_\alpha+2n_\alpha} \ \textit{y}\\
&U = \mathbb{S}^1 \times ... \times \mathbb{S}^1 \times \mathrm{U}(k_1) \times \mathrm{Sp}(n_1) \times ... \times \mathrm{U}(k_\alpha) \times \mathrm{Sp}(n_\alpha)
\end{aligned}$$

  para toda $\tau \in \widehat{\mathbb{S}^1} \otimes ... \otimes \widehat{\mathbb{S}^1} \otimes \widehat{\mathrm{U}(k_1)} \otimes ... \otimes \widehat{\mathrm{U}(k_\alpha)}$ (donde $m_j \geq 3$ para todo $1 \leq j \leq \beta$, $k_i \geq 1$, $n_i \geq 0$ para todo $1 \leq i \leq \alpha$) y
- $(\mathrm{U}(n) \ltimes N(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n), \mathrm{U}(n), \tau)$ *para toda $\tau \in \widehat{\mathrm{U}(n)}$ (donde $n \geq 1$): probado por O. Yakimova en [Ya].*

Observación 4.21. El par de Gelfand $(\mathrm{U}(n) \ltimes N(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n), \mathrm{U}(n))$ (donde $N(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ es el grupo de Heisenberg y $\mathrm{U}(n)$ es su grupo de automorfismos ortogonales) es el único par de Gelfand fuerte de la familia considerada.

Observación 4.22. Sea U el grupo (conexo) de operadores de entrelazamiento unitarios de (ρ, W). Asumamos que U es producto directo de grupos y que el grupo unitario $\mathrm{U}(n)$ aparece en U para algún $n \geq 1$. Si $\tau \in \widehat{\mathrm{U}(n)}$ la terna $((G' \times U) \ltimes N(\mathfrak{g}, W), G' \times U, \tau)$ es conmutativa. (Ver los casos (V) a (IX).)

Teorema 4.23. *Sea $N(\mathfrak{g}, W)$ indescomponible y con una representación de cuadrado integrable. Una terna no-trivial $((G' \times U) \ltimes N(\mathfrak{g}, W), G' \times U, \tau)$ es conmutativa si y sólo si vale alguna de las siguientes:*

(*i*) *U puede ser puesto como producto directo de grupos $U = L \times M$ con $L := \mathrm{U}(n_1) \times ... \times \mathrm{U}(n_m)$ (para algún $m \geq 1$ y algunos $n_i \geq 1$) y $\tau \in \widehat{L}$.*

(*ii*) *$N(\mathfrak{g}, W)$ es un grupo de tipo H de la forma $N(\mathfrak{su}(2), (\mathbb{C}^2)^n)$ y τ es como en la Proposición 4.11.*

Observación 4.24. Por último, con respecto a las funciones esféricas, resaltamos que cuando la representación τ es un carácter de $\mathbb{S}^1 = \mathrm{U}(1)$, el análisis armónico de la terna coincide totalmente con la teoría clásica del par de Gelfand subyacente. (Ver Observación 3.41.)

La tabla que incluimos al final de esta sección la resume y concluye.

Lista de ternas conmutativas $(N(\mathfrak{g}, W), G' \times U, \tau)$ en base a la lista de pares de Gelfand $(N(\mathfrak{g}, W), G' \times U)$ determinada por J. Lauret en [La2]:

$\mathfrak{g}$	W	G'	U	$\tau \in \widehat{K}$
$\mathfrak{su}(2)$	$\mathbb{R}^3 \oplus (\mathbb{C}^2)^n$	$\mathrm{SU}(2)$	$\mathrm{Sp}(n)$	$*\boxed{?}$ (ver [La2])
$\mathfrak{so}(n)$	$\mathbb{R}^n$	$\mathrm{SU}(n)$		$n = 2m+1$: $*\boxed{?}$ $n = 2m$: *—
$\mathfrak{sp}(2)$	$(\mathbb{C}^4)^n$	$\mathrm{Sp}(2)$	$\mathrm{Sp}(n)$	*—
$\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$	$(\mathbb{C}^2)^{k_1+k_2} \oplus \mathbb{R}^4$	$\mathrm{Spin}(4)$	$\mathrm{Sp}(k_1) \times \mathrm{Sp}(k_2)$	*—
$\mathfrak{su}(2)$	$(\mathbb{C}^2)^n$	$\mathrm{SU}(2)$	$\mathrm{Sp}(n)$	$\tau \in \widehat{\mathrm{SU}(2)}$ & $\tau = (a, ..., a) \in \widehat{\mathrm{Sp}(n)}$ *1
$\mathfrak{su}(n)$	$\mathbb{C}^n$	$\mathrm{SU}(n)$	$\mathrm{U}(1)$	$\tau \in \widehat{\mathrm{U}(1)}$ *2
$\mathfrak{u}(n)$	$\mathbb{C}^n$	$\mathrm{SU}(n)$	$\mathrm{U}(1)$	$\tau \in \widehat{\mathrm{U}(1)}$ *3
$\mathfrak{u}(2)$	$(\mathbb{C}^2)^k \oplus (\mathbb{C}^2)^n$	$\mathrm{SU}(2)$	$\mathrm{U}(k) \times \mathrm{Sp}(n)$	$\tau \in \widehat{\mathrm{U}(k)}$ *4
$\oplus_{i=1}^{\beta} \mathfrak{su}(m_i) \oplus \oplus_{j=1}^{\alpha} \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{c}$	$\oplus_{i=1}^{\beta} \mathbb{C}^{m_i} \oplus \oplus_{j=1}^{\alpha} (\mathbb{C}^2)^{k_j+n_j}$	$\Pi_{i=1}^{\beta} \mathrm{SU}(m_i)$	$\Pi_{i=1}^{\beta} \mathrm{U}(1) \times \Pi_{j=1}^{\alpha} \mathrm{U}(k_j) \times \mathrm{Sp}(n_j)$	$\tau \in \left(\otimes_{i=1}^{\beta} \widehat{\mathrm{U}(1)}\right) \otimes \left(\otimes_{j=1}^{\alpha} \widehat{\mathrm{U}(k_j)}\right)$ *5
$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}^n$	$\mathrm{U}(n)$		para toda τ: [Ya] (grupo de Heisenberg)

$*\boxed{?}$: No sabemos si es o no terna de Gelfand para alguna τ no trivial. N no presenta representaciones de cuadrado integrable. *—: sólo τ trival.

*1: $\mathbb{C}^2$ denota la representación real estándar de $\mathfrak{su}(2)$ y $\mathfrak{su}(2)$ actúa en $(\mathbb{C}^2)^n$ componente a componente. (N es un grupo de tipo H.)

*2: $\mathbb{C}^n$ denota la representación real estándar de $\mathfrak{su}(n)$.

*3: $\mathbb{C}^n$ denota la representación real estándar de $\mathfrak{u}(n)$.

*4: $(\mathbb{C}^2)^n$ denota la representación estándar de $\mathfrak{su}(2)$ como en *1 y $\mathfrak{u}(2)$ actúa componente a componente en $(\mathbb{C}^2)^k$.

*5: Para cada $1 \leq i \leq \beta + \alpha$, $\mathfrak{c}$ tiene un subespacio maximal $\mathfrak{c}_i$, con $\dim(\mathfrak{c}_i) = 1$, actuando no trivialmente en sólo una componente de W.
Para $1 \leq i \leq \beta$, $\mathfrak{su}(m_i) \oplus \mathfrak{c}_i$ actúa no trivialmente sólo en $\mathbb{C}^{m_i}$ como en *3 y
para $\beta + 1 < i \leq \beta + \alpha$, $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{c}_i$ actúa no trivialmente sólo en $\mathbb{C}^{2k_i+2n_i}$ como en *4.

4.3. Estudio de los restantes pares de Gelfand $(K \ltimes N, K)$

La clasificación de pares de pares de Gelfand $(K \ltimes N, K)$ con N nilpotente fue completada por E. Vinberg. Con ánimo de completar la clasificación de ternas conmutativas de la forma $(K \ltimes N, K, \tau)$ donde N es un grupo de Lie dos pasos nilpotente, estudiaremos qué ternas conmutativas se desprenden de los pares de Gelfand dados en [V] y que expanden la lista dada en [La2]. Es remarcable que sólo hay unos pocos pares $(K \ltimes N, K)$ en la clasificación de E. Vinberg tales que el grupo nilpotente N **no** es de la forma $N = N(\mathfrak{g}, W)$. Específicamente corresponden a los ítems 3, 5, 11, 12, 20 y 26 de la tabla 3 del artículo [V].

Recordamos que al deber ser N un grupo de Lie dos pasos nilpotente, su álgebra de Lie se parte como espacio vectorial en suma directa $\mathfrak{n} = \mathfrak{z} \oplus W$, donde $\mathfrak{z}$ es el centro de $\mathfrak{n}$ y $[W, W] \subset \mathfrak{n}$.

En los ítems 3 y 26 de la tabla 3 en [V] el grupo N no posee representaciones de cuadrado integrable. Como nuestros argumentos para determinar ternas conmutativas se basan fuertemente en aplicar el Teorema 4.4, evitaremos el análisis de estos dos casos. En los próximos párrafos abordaremos el estudio de ternas provenientes de pares de Gelfand restantes.

- Caso A: Desarrollaremos el estudio del ítem 5 de la tabla 3 presentada en [V]. Aquí encontramos que el álgebra de Lie de N está dada por $\mathfrak{n} := \left[\Lambda^2(\mathbb{C}^{2n}) \oplus i\mathbb{R}\right] \oplus \mathbb{C}^{2n}$, donde $\Lambda^2(\mathbb{C}^{2n})$ denota el espacio de formas bilineales antisimétricas sobre $\mathbb{C}^{2n}$ con respecto al cuerpo de los números complejos y $K := \mathrm{U}(2n)$.

- Caso B: Analizaremos el punto 12 de la tabla 3 dada en [V]. Para este ejemplo tenemos que $\mathfrak{n} := [H_0(\mathbb{H}^n) \oplus \mathrm{Im}\,(\mathbb{H})] \oplus \mathbb{H}^n$, donde $H_0(\mathbb{H}^n)$ denota el espacio de matrices hermitianas $n \times n$ sobre el conjunto numérico de los cuaterniones $\mathbb{H}$ y de traza cero, mientras que $K := \mathbb{S}^1 \times \mathrm{Sp}(n)$. La única diferencia que existe entre los pares dados en los ítems 12 y 11 de la tabla 3 de [V] es que para el punto 11 el grupo K es "más chico".

- Caso C: Estudiaremos el ítem 20 de la tabla 3 de [V]. Para este ejemplo $\mathfrak{n} := \mathbb{R}^7 \oplus \mathbb{R}^8$ y K es el grupo spin $K := \mathrm{Spin}(7)$.

Observación 4.25. Esta es una observación más bien técnica pero no podemos omitirla. En la clasificación de pares de Gelfand $(K \ltimes N, K)$ realizada por J. Lauret en [La2], N es una nilvariedad y K es tal que las isometrías de N forman el grupo $Isom(N) = K \ltimes N$. Se toma todo el grupo K de automorfismo ortogonales de N y no un subgrupo para armar el par $(K \ltimes N, K)$. Por su parte, E. Vinberg exhibe en [V] todos los pares $(K \ltimes N, K)$ que denomina *irreducibles maximales*. Aquí no se considera una estructura de variedad Riemanniana. La *irreducibilidad* implica que $\mathfrak{z} = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ y que K actúe de manera irreducible en W. La *maximalidad* implica que el par de $(K \ltimes N, K)$ no tiene *reducciones centrales* no triviales. Es decir, el centro $\mathfrak{z}$ no posee subespacios $\mathfrak{s}$ que son K-invariantes tales que si $\tilde{\mathfrak{s}}$ denota el complemento ortogonal de $\mathfrak{s}$ en $\mathfrak{z}$ y ponemos $\tilde{\mathfrak{n}} := \tilde{\mathfrak{s}} \oplus W \simeq \mathfrak{n}/\mathfrak{s}$ y $\tilde{N}$ su respectivo grupo de Lie simplemente conexo, entonces $(K \ltimes \tilde{N}, K)$ sea un par de Gelfand (cf. [Wo1, Sección 13.4A, p. 320] o bien [FRY]).

En síntesis, en lo que sigue veremos si hay ternas conmutativas de la forma $(K \ltimes N, K, \tau)$, donde N es un grupo de Lie dos pasos nilpotente que posee representaciones de cuadrado integrable, K es un subgrupo de atuomorfismos de N y $(K \ltimes N, K)$ es un par de Gelfand de la lista dada en [V] que no está en [La2]. En la clasificación que se encuentra en [V] muchos pares $(K \ltimes N, K)$ involucran como N a un grupo de Hesisenberg y a distintos subgrupos de automorfismos K de N. Hemos obviado el análisis de ternas conmutativas provenientes de estos pares puesto que en estos casos N sí es de la forma $N(\mathfrak{g}, W)$.

4.3.1. Caso A

El ejemplo que pasaremos a describir se encuentra en el ítem 5 de la tabla 3 presentada en [V] o bien en el ítem 5 de la tabla 13.4.1 del libro [Wo1].

Sea $\Lambda^2(\mathbb{C}^{2n})$ el espacio de formas bilineales antisimétricas sobre $\mathbb{C}^{2n}$ con respecto al cuerpo de los números complejos, donde denotamos por $u \wedge v$ el producto exterior (*wedge*) para $u, v \in \mathbb{C}^{2n}$. Consideramos el álgebra de Lie dos pasos nilpotente

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{z} \oplus W := \left[\Lambda^2(\mathbb{C}^{2n}) \oplus i\mathbb{R}\right] \oplus \mathbb{C}^{2n}$$

cuyo corchete de Lie está dado por

$$[(z, u), (w, v)] := ((u \wedge v, \mathrm{Im}\,(u^* v)), 0) \qquad \forall z, w \in \mathfrak{z} = \Lambda^2(\mathbb{C}^{2n}) \oplus i\mathbb{R} \text{ y } \forall u, v \in W = \mathbb{C}^{2n},$$

donde si u^t denota el vector fila obtenido del vector columna u, u^* denota el conjugado de dicho vector fila. Sea N el grupo de Lie dos pasos nilpotente simplemente conexo con álgebra de Lie $\mathfrak{n}$. El producto exterior $u \wedge v$ puede ser también expresado en la forma $uv^t - vu^t$. (Recordar que toda forma bilineal antisimétrica está en correspondencia con una matriz antisimétrica.) El grupo unitario $K = \mathrm{U}(2n)$ actúa en $\mathfrak{z}$ por

$$k \cdot (uv^t - vu^t, s) := (k(uv^t - vu^t)k^t, s) \qquad (\text{para } k \in K \text{ y } uv^t - vu^t \in \Lambda^2(\mathbb{C}^{2n}), s \in i\mathbb{R}).$$

Consideramos un funcional lineal particular λ en $\mathfrak{n}^*$ tal que cuando lo restringimos a $\mathfrak{z}$ tiene como representante al elemento $X_\lambda := (u \wedge v, 0) \in \mathfrak{z}$ para $u \wedge v$ no-degenerada. Sea π_λ la representación unitaria irreducible de N asociada a λ. De la fórmula del Pfaffiano dada en [Wo1, p. 339 y 340], $P(\lambda)$ es un múltiplo positivo del determinate de la matriz $uv^t - vu^t$. Gracias a nuestra elección del funcional lineal λ, $P(\lambda)$ resulta distinto de cero. Luego, por [Wo1, Teorema 14.2.10], $\pi_\lambda \in \widehat{N_{\mathrm{sq}}}$. Por lo tanto, estamos habilitadas a usar el Teorema 4.4 que hemos probado previamente. En este caso, el subgrupo K_λ de K coincide con el grupo simplético $\mathrm{Sp}(n)$.

Sea ahora $\tau \in \widehat{K}$ no-trivial. Entonces, existe $\eta \in \widehat{\mathrm{Sp}(n)}$ no-trivial que aparece en la restricción de τ a K_λ.

La representación metapléctica $(\omega, \mathcal{P}(\mathbb{C}^{2n}))$ de $\mathrm{Sp}(n)$ se descompone como

$$\omega = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \eta_{(j)},$$

donde estamos usando la notación dada en la secciones previas, es decir, cada $\eta_{(j)}$ está asociada a la partición de longitud uno (j) para algún entero no negativo j. Aplicando una de las ideas usada repetidamente en pruebas anteriores, encontramos fácilmente que la descomposición en irreducibles de $\omega \otimes \tau_{|_{K_\lambda}}$ presenta multiplicidades distintas a uno. En efecto, esto se debe a que la representación η aparece con multiplicidad mayor o igual a dos, ya que por el Corolario 1.73 esta aparece en la descomposición de los términos $\eta \otimes \eta_{(0)}$ y $\eta \otimes \eta_{(2)}$. Luego, por el Teorema 4.4, obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.26. *La terna* $(\mathrm{U}(2n) \ltimes N, \mathrm{U}(2n), \tau)$*, donde* N *es el grupo de Lie dos pasos nilpotente simplemente conexo con álgebra de Lie* $\mathfrak{n} := \left[\Lambda^2(\mathbb{C}^{2n}) \oplus i\mathbb{R}\right] \oplus \mathbb{C}^{2n}$*, es conmutativa si y sólo si* τ *es la representación trivial de* $\mathrm{U}(2n)$*.*

4.3.2. Caso B

El siguiente ejemplo que pasaremos a describir corresponde al par de Gelfand que se encuentra en el ítem 12 de la tabla 3 presentada en [V] o bien en el ítem 9 de la tabla 13.4.1 del libro [Wo1].

Sea $H_0(\mathbb{H}^n)$ el espacio de matrices hermitianas $n \times n$ y de traza cero sobre los cuaterniones $\mathbb{H}$. Consideramos el álgebra de Lie dos pasos nilpotente

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{z} \oplus W := [H_0(\mathbb{H}^n) \oplus \mathrm{Im}\,(\mathbb{H})] \oplus \mathbb{H}^n$$

con corchete de Lie dado por

$$[(z,u),(w,v)] := (((uiv^* - viu^*)_0, u^*v - v^*u)), 0) \qquad \forall z, w \in \mathfrak{z} = H_0(\mathbb{H}^n) \oplus \mathrm{Im}\,(\mathbb{H}) \text{ y } \forall u, v \in W = \mathbb{H}^n,$$

donde en general para una matriz A denotamos

$$(A)_0 := A - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A)\mathrm{I}.$$

Sea N el grupo de Lie dos pasos nilpotente simplemente conexo cuya álgebra de lie es $\mathfrak{n}$. Cada punto $(e^{i\theta}, k) \in \mathbb{S}^1 \times \mathrm{Sp}(n)$ del grupo de automorfismos de $K = \mathbb{S}^1 \times \mathrm{Sp}(n)$ de $\mathfrak{n}$ actúa precisamente en $\mathfrak{n}$ por

$$(e^{i\theta}, k) \cdot ((A,q), v) := ((kAk^*, e^{i\theta}qe^{-i\theta}), kve^{-i\theta}) \qquad (\text{para } A \in H_0(\mathbb{H}^n), q \in \mathrm{Im}\,(\mathbb{H}), v \in \mathbb{H}^n).$$

Sea $\tau = \eta \otimes \chi_r$ una representación unitaria irreducible arbitraria de K para alguna $\eta \in \widehat{\mathrm{Sp}(n)}$ y algún carácter χ_r de $\mathbb{S}^1$. Si el factor en $\widehat{\mathrm{Sp}(n)}$ es trivial, es decir, si $\tau = \chi_r$, entonces el álgebra de convolución $L^1_\tau(N)$ coincide totalmente con el álgebra de convolución de funciones a valores escalares K-invariantes

sobre N (como hemos mencionado anteriormente para las ternas *twisted*) que es conmutativa por provenir de un par de Gelfand. Por lo tanto obtenemos ternas conmutativas para este caso. Supongamos ahora que $\eta \in \widehat{\mathrm{Sp}(n)}$ es no-trivial.

Consideramos el funcional lineal λ en $\mathfrak{n}^*$ cuya restricción $\mathfrak{z}$ tiene por representante a un elemento de la forma $X_\lambda := (0, q) \in \mathfrak{z}$. Sea π_λ la representación unitaria irreducible de N asociada a λ. De la fórmula para el Pfaffiano dada en [Wo1, p. 340], $P(\lambda)$ es un múltiplo positivo de $|q|^{2n}$. Entonces, para todo cuaternión imaginario q, la representación asociada π_λ es de cuadrado integrable. Por su parte K_λ es simple de calcular: Si el cuaternión q pertenece a $i\mathbb{R}$, K_λ coincide con K ya que q conmuta con todo número complejo, mientras que para todos los otros casos K_λ es $\mathrm{Sp}(n)$. Fijemos por ejemplo $q = j \in \mathrm{Im}\,(\mathbb{H})$ para de esta forma tener $K_\lambda = \mathrm{Sp}(n)$. Observar que $\tau_{|_{K_\lambda}} = \eta$.

La representación metapléctica $(\omega, \mathcal{P}(\mathbb{C}^{2n}))$ de $K_\lambda = \mathrm{Sp}(n)$ se descompone (empleando la notación que venimos utilizando) como

$$\omega = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \eta_{(j)}.$$

Una vez más $\omega \otimes \eta$ no es libre de multiplicidad debido a que η aparece en los términos $\eta \otimes \eta_{(0)}$ y $\eta \otimes \eta_{(2)}$ por el Corolario 1.73. Luego, aplicando el Teorema 4.4, no obtenemos ternas conmutativas en este caso.

Proposición 4.27. *La terna* $\big((\mathbb{S}^1 \times \mathrm{Sp}(n)) \ltimes N, \mathbb{S}^1 \times \mathrm{Sp}(n), \tau\big)$, *donde* N *es el grupo de Lie dos pasos nilpotente simplemente conexo con álgebra de Lie* $\mathfrak{n} := [H_0(\mathbb{H}^n) \oplus \mathrm{Im}\,(\mathbb{H})] \oplus \mathbb{H}^n$, *es conmutativa si y sólo* $\tau \in \widehat{\mathbb{S}^1}$.

Para cerrar este apartado mencionamos que el analálisis del ítem 11 de la tabla 3 en [V] es completamente idéntico (o hasta incluso más simple) ya que aquí el grupo K es un subgrupo de $\mathrm{Sp}(n)$.

4.3.3. Caso C

Por último, el siguiente ejemplo parte del par de Gelfand dado en el ítem 20 de la tabla 3 de [V] o bien en el ítem 2 de la tabla 13.4.1 de [Wo1].

En este caso el grupo de Lie dos pasos nilpotente simplemente conexo N será de tipo H. Su álgebra de Lie $\mathfrak{n}$ es de la forma $\mathfrak{z} \oplus W$ donde W está dado por $\mathbb{R}^8$ o por los octoniones $\mathbb{O}$ y cuyo centro $\mathfrak{z}$ es $\mathbb{R}^7$ o los octoniones imaginarios $\mathrm{Im}\,(\mathbb{O})$. El corchete en W está dado de manera análoga a (4.4) tomando (J, W) la representación real de $\mathfrak{z}$ dada por el producto en los octoniones $J(z)v := zv$ para todo $z \in \mathrm{Im}\,(\mathbb{O})$ y $v \in \mathbb{O}$. Aquí $\mathfrak{z} = \mathbb{R}^7$ no es un álgebra de Lie compacta. Además, se tiene que $\mathbb{R}^7$ actúa en $\mathfrak{n}$ por $(-T(z), J(z))$, donde $T(z)$ es la reflexión con respecto al eje z. El cómputo del grupo conexo maximal K de automorfismos de N es similar al del caso de los grupos de la forma $N(\mathfrak{g}, W)$ dada en [La1]. En este caso su grupo de automorfismos es $K = \mathrm{Spin}(7) \times U$, donde U denota la componente conexa de la identidad del grupo de operadores de entrelazamiento ortogonales de (J, W) y más aún, en este caso U es trivial. (Mencionamos que, en general, el grupo de automorfismos de un álgebra de tipo Hesisenberg fue determinado por L. Saal en [Sa].)

Sea λ un funcional lineal de $\mathfrak{n}$ con representante $X_\lambda \in \mathfrak{z}$ al restringirse a $\mathfrak{z}$. Nuevamente, de [Wo1, p. 340], el Pfaffiano $P(\lambda)$ es no nulo *p.p.* Sabemos entonces que en estos casos $K_\lambda = K_{X_\lambda}$. Preciamente en nuestro ejemplo K_λ resulta isomorfo al grupo *spin* $\mathrm{Spin}(6)$. Por lo tanto trabajaremos con el álgebra de Lie $\mathfrak{so}(6)$.

Sea τ una representación unitaria irreducible no-trivial de $\mathrm{Spin}(7)$. Al restringir τ a $\mathrm{Spin}(6)$ se descompone en una suma directa de representaciones irreducibles y tomamos un término no-trivial que denotamos por $\tilde{\eta} \in \widehat{\mathrm{Spin}(6)}$ y que identificaremos con su representación derivada y que también veremos como representación de $\mathfrak{so}(6)$.

Por su parte, como $\mathrm{Spin}(6)$ es isomomorfo a $\mathrm{SU}(4)$, la representación metapléctica sobre $\mathcal{P}(\mathbb{C}^4)$ se descompone en la forma $\oplus_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathcal{P}_j(\mathbb{C}^4)$, que se puede identificar con

$$\omega = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \tilde{\eta}_{(j)},$$

donde $\tilde{\eta}_{(j)}$ corresponde a la partición de longitud uno (j) de $\mathfrak{so}(6)$. Hemos dedicido utilizar una notación similiar a la de las representaciones de $\mathfrak{sp}(n)$ debido a que los resultados de descompocición de productos tensoriales de representaciones son muy cercanos. En efecto, utilizaremos la segunda parte del teorema [O, Teorema 3.2] que afirma lo siguiente:

Sea $\tilde{\eta}$ una representación irreducible arbitraria de $\mathfrak{o}(6)$ (o equivalentemente una partición) y sea s un entero no-negativo. Entonces, la multiplicidad de una representación irreducible (o partición) σ en el producto tensorial $\tilde{\eta} \otimes \tilde{\eta}_{(s)}$ es igual al número de particiones ς que satisfacen las siguientes condiciones

(i) *$\tilde{\eta}/\varsigma$ y σ/ς son ambas tiras horizontales;*

(ii) *$|\tilde{\eta}/\varsigma| + |\sigma/\varsigma| = s$;*

(iii) *si $\tilde{\eta}_1^t + \tilde{\eta}_2^t = 6$, $\sigma_1^t = \tilde{\eta}_1^t$ y $\sigma_2^t = \tilde{\eta}_2^t$, entonces debe valer una de las siguientes:*

$(iii-1)$ *$l(\varsigma) = l(\tilde{\eta})$ y $\varsigma_l \in \{\tilde{\eta}_l, \sigma_l\}$, donde $l = l(\tilde{\eta}) = l(\varsigma) = l(\sigma)$,*

$(iii-2)$ *$l(\varsigma) < l(\tilde{\eta})$ y $\varsigma_2^t < \tilde{\eta}_2^t$.*

Utilizaremos este enunciado para probar que el producto tensorial $\omega \otimes \tau_{|K_\lambda}$ no es libre de multiplicidad. En efecto, sea $\tilde{\eta}$ un factor en la descomposición de $\tau_{|K_\lambda}$ como arriba. Separamos el problema en los siguientes casos:

(a) Si $\tilde{\eta}_1^t + \tilde{\eta}_2^t \neq 6$, el argumento sigue de forma similar al caso de la descomposición de productos tensoriales de representaciones de $\mathrm{Sp}(n)$. Esto es, $\tilde{\eta}$ aparece en $\tilde{\eta} \otimes \tilde{\eta}_{(0)}$ y también en $\tilde{\eta} \otimes \tilde{\eta}_{(2)}$, al igual que en el Corolario 1.73. Por lo tanto, $\tilde{\eta}$ aparece al menos dos veces en $\omega \otimes \tau_{|K_\lambda}$.

(b) Si $\tilde{\eta}_1^t + \tilde{\eta}_2^t = 6$ debemos analizar las siguientes cuatro posibilidades:

(1) $\tilde{\eta}_1^t = 6$ y $\tilde{\eta}_2^t = 0$, es decir, la partición es $\tilde{\eta} = (1,1,1,1,1,1)$. En particular $l(\tilde{\eta}) = 6$.

(2) $\tilde{\eta}_1^t = 5$ y $\tilde{\eta}_2^t = 1$, es decir, la partición es $\tilde{\eta} = (\tilde{\eta}_1, 1,1,1,1,0)$ para algún entero $\tilde{\eta}_1 \geq 2$. En particular $l(\tilde{\eta}) = 5$.

(3) $\tilde{\eta}_1^t = 4$ y $\tilde{\eta}_2^t = 2$, es decir, la partición es $\tilde{\eta} = (\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2, 1,1,0,0)$ para ciertos enteros $\tilde{\eta}_1 \geq \tilde{\eta}_2 \geq 2$. En particular $l(\tilde{\eta}) = 4$.

(4) $\tilde{\eta}_1^t = 3$ y $\tilde{\eta}_2^t = 3$, es decir, la partición es $\tilde{\eta} = (\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2, \tilde{\eta}_3, 0,0,0)$ para ciertos enteros $\tilde{\eta}_1 \geq \tilde{\eta}_2 \geq \tilde{\eta}_2 \geq 2$. En particular $l(\tilde{\eta}) = 3$.

Nuestra estrategia consistirá en elegir en cada caso una representación σ que aparezca en $\tilde{\eta} \otimes \tilde{\eta}_{(1)}$ y en $\tilde{\eta} \otimes \tilde{\eta}_{(3)}$ (y por lo tanto aparecerá al menos dos veces en $\omega \otimes \tau_{|K_\lambda}$). Elegiremos una representación especial σ (una para cada uno de las cuatro posibilidades) tal que no satisfaga la condición (iii) del teorema de [O] enunciado arriba.

(1) Para el primero de los casos consideramos por ejemplo $\sigma := (2,1,1,1,1,1)$. Se sigue que $\sigma_1^t = 6$ y $\sigma_2^t = 1 \neq 0 = \tilde{\eta}_2^t$. Para ver que no se cumple (iii), usando la notación de [O, Teorema 3.2], consideramos las particiones $\varsigma_a := \tilde{\eta}$ y $\varsigma_b := (1,1,1,1,1,0)$.

(2) Para la segunda posibilidad consideramos por ejemplo $\sigma := (\tilde{\eta}_1, 2,1,1,1,0)$. Se sigue que $\sigma_1^t = 6$ y $\sigma_2^t = 1 \neq 0 = \tilde{\eta}_2^t$. Considerando particiones $\varsigma_a := \tilde{\eta}$ y $\varsigma_b := (\tilde{\eta}_1, 1,1,1,0,0)$ vemos que no vale (iii).

(3) En el tercer caso consideramos por ejemplo $\sigma := (\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2, 2,1,0,0)$. Se sigue que $\sigma_1^t = 4$ y $\sigma_2^t = 3 \neq 2 = \tilde{\eta}_2^t$. Tomando las particiones $\varsigma_a := \tilde{\eta}$ y $\varsigma_b := (\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2, 1,0,0,0)$ no se satisface (iii).

(4) Para la última de las posibilidades consideramos por ejemplo $\sigma := (\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2, \tilde{\eta}_3, 1,0,0)$. Se sigue que $\sigma_1^t = 4 \neq 3 = \tilde{\eta}_1^t$ y $\sigma_2^t = 3$. Al considerar las particiones $\varsigma_a := \tilde{\eta}$ y $\varsigma_b = (\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2, \tilde{\eta}_3 - 1, 0,0,0)$ no vale (iii).

No se cumple (iii) en ninguno de los casos ya que en todos tenemos que

- $\tilde{\eta}/\varsigma_a$, $\tilde{\eta}/\varsigma_b$, σ/ς_a y σ/ς_b son tiras horizontales,
- $|\tilde{\eta}/\varsigma_a| + |\sigma/\varsigma_a| = 0 + 1 = 1$ y
- $|\tilde{\eta}/\varsigma_b| + |\sigma/\varsigma_b| = 1 + 2 = 3$.

Luego, la representación σ que hemos tomado en cada caso aparece al menos dos veces en $(\tilde{\eta} \otimes \tilde{\eta}_{(1)}) \oplus (\tilde{\eta} \otimes \tilde{\eta}_{(3)})$.

Proposición 4.28. *La terna $(\mathrm{Spin}(7) \ltimes N, \mathrm{Spin}(7), \tau)$, donde N es el grupo de Lie dos pasos nilpotente simplemente conexo con álgebra de Lie $\mathfrak{n} := \mathrm{Im}\,(\mathbb{O}) \oplus \mathbb{O}$, es conmutativa si y sólo si τ es la representación trivial de $\mathrm{Spin}(7)$.*

4.3.4. Conclusiones

En base a las Proposiciones 4.26, 4.27 y 4.28 vemos que ninguno de estos nuevos ejemplos aporta ternas conmutativas relevantes. Sólo en el caso C tenemos ternas conmutativas pero estas vienen dadas por caracteres del grupo K. Sabemos de antemano que todo par de Gelfand $(K \ltimes N, K)$ es también un par de Gelfand "twisted" con respecto a todo carácter de K (ver Observación 3.41). Sumando esto a las conclusiones dadas en la Sección 4.2.9 encontramos en total realmente pocas ternas conmutativas $(K \ltimes N, K, \tau)$ y solamente un par de Gelfand fuerte de esta forma. Podemos decir que hemos dado todas las ternas de Gelfand de la forma $(K \ltimes N, K, \tau)$, donde N es un grupo de Lie dos pasos nilpotente, conexo, simplemente conexo, que admite representaciones de cuadrado integrable y K es un subgrupo de automorfismos de N que es compacto y conexo, con una condición extra de "irreducibilidad o minimalidad" que requiere que N sea *indescomponible* si proviene de la construcción de J. Lauret o bien que el par $(K \ltimes N, K)$ sea *irreducible maximal* en el sentido de la condición de E. Vinberg. Podría pensarse que el hecho que sean pocas álgebras conmutativas $L^1_\tau(N)$ hace que cobre mayor relevancia al análisis esférico en los casos en que N es el grupo de Heisenberg o es abeliano.

Capítulo 5

Funciones esféricas en $\mathbb{R}^3$

En este y en el siguiente capítulo nos concentraremos en las funciones esféricas de un par de Gelfand fuerte $(K \ltimes N, K)$ en particular. El grupo nilpotente N que consideraremos será más que nilpotente, es decir, será abeliano:

$$N = \mathbb{R}^n.$$

El grupo compacto y conexo maximal de automorfismos de $\mathbb{R}^n$ es, salvo conjugación, el grupo ortogonal especial $\mathrm{SO}(n)$. Está probado en [Ya] que $(\mathrm{SO}(n) \ltimes \mathbb{R}^n, \mathrm{SO}(n))$ es efectivamente un par de Gelfand fuerte.

En este capítulo estudiaremos en detalle el análisis esférico de espacio euclídeo tridimensional $\mathbb{R}^3$ como espacio homogéneo con respecto a su grupo de movimientos rígidos (conexo) $\mathrm{M}(3) = \mathrm{SO}(3) \ltimes \mathbb{R}^3$. Con esto queremos decir que describiremos las funciones τ-esféricas y estudiaremos la transformada de Fourier τ-esférica asociadas al par $(\mathrm{M}(3), \mathrm{SO}(3))$ para una representación unitaria irreducible arbitraria τ del grupo de rotaciones $\mathrm{SO}(3)$. En el caso en que τ es la representación estándar, las funciones esféricas han sido calculadas explícitamente en [RS, Sección 12]. En esta tesis completaremos la teoría de este par de Gelfand fuerte dando fórmulas explícitas de las funciones esféricas de tipo τ, para toda $\tau \in \widehat{\mathrm{SO}(3)}$.

El problema de hallar fórmulas explícitas para las funciones esféricas matriciales en ejemplos concretos ha sido objeto de estudio de numerosos artículos tales como [Ca, GPT, PTZ, RT]. En dichos trabajos se han estudiado grupos semisimples. En cambio, en esta tesis, así como en el artículo [RS], tratamos grupos que son producto semidirecto de un grupo compacto y un grupo nilpotente. Asimismo, en el próximo capítulo presentamos una forma de vincular ambas familias de ejemplos.

Dada una representación unitaria irreducible arbitraria (τ, V_τ) de $\mathrm{SO}(3)$ nuestros principales resultados han sido la descripción explícita de un conjunto de generadores del álgebra de operadores diferenciales $(\mathbb{D}(\mathbb{R}^3) \otimes \mathrm{End}(V_\tau))^{\mathrm{SO}(3)}$, el cómputo explícito desde tres enfoques diferentes de un conjunto completo de funciones esféricas de tipo τ y la obtención de una fórmula explícita para la transformada de Fourier esférica asociada a τ. Además, hemos podido hallar la medida de Plancherel asociada a cualquier terna $(\mathrm{M}(3), \mathrm{SO}(3), \tau)$ y en conjunto hemos dado un teorema de inversión. En resumen, los resultados de este capítulo se condensan en cinco teoremas:

- El Teorema 5.3 permite caracterizar ciertos operadores diferenciales matriciales que presentan determinadas *simetrías*. Será probado en la Sección 5.1.

- Los Teoremas 5.6, 5.8 y 5.10 muestran diferentes realizaciones de las funciones esféricas matriciales. Serán probados en la Sección 5.2.

- Finalmente, el Teorema 5.13, de la Sección 5.3, es el Teorema de Inversión asociado de la transformada de Fourier τ-esférica.

El espacio euclídeo tridimensional es especial con respecto a los espacios euclídeos de dimensiones mayores en el sentido que $\mathbb{R}^3$ es isomorfo, como espacio vectorial, al álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ de $\mathrm{SO}(3)$ y la representación estándar de $\mathrm{SO}(3)$ en $\mathbb{R}^3$ es equivalente a la representación adjunta de $\mathrm{SO}(3)$ en $\mathfrak{so}(3)$.

5.1. Operadores diferenciales invariantes

Dada $(\tau, V_\tau) \in \widehat{\mathrm{SO}(3)}$ utilizaremos el modelo presentado en 1.2.3.3. La dimensión de τ será $2m+1$ para algún entero no negativo m, hecho que efatizaremos poniendo $\tau = \tau_m$. Su acción se puede evidenciar por medio de transformaciones en $V_{\tau_m} = H_m$, el espacio de polinomios en $\mathbb{R}^3$ a valores en $\mathbb{C}$ que son armónicos y homogéneos de grado m, dadas por

$$(\tau_m(k)p)(x) := p(k^{-1} \cdot x) \qquad \forall k \in \mathrm{SO}(3),\ p \in H_m,\ x \in \mathbb{R}^3.$$

Por su parte, denominaremos $d\tau$ (o $d\tau_m$) a la correspondiente representación del álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$. Como mencionamos, el espacio euclídeo tridimensional $\mathbb{R}^3$ es especial con respecto a los espacios euclídeos de dimensiones mayores en el sentido que $\mathbb{R}^3$ es isomorfo, como espacio vectorial, al álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ de $\mathrm{SO}(3)$ y la representación estándar de $\mathrm{SO}(3)$ en $\mathbb{R}^3$ es equivalente a la representación adjunta de $\mathrm{SO}(3)$ en $\mathfrak{so}(3)$. Entonces, $d\tau$ puede ser considerada como un polinomio en $\mathbb{R}^3$ a valores matriciales y denotaremos por D_τ al correspondiente operador diferencial vía el operador de simetrización que generaliza a (1.18).

El objetivo de esta sección es describir explícitamente un sistema de generadores del álgebra (3.38)

$$\mathbb{D}_{\tau_m} := (\mathbb{D}(\mathbb{R}^3) \otimes \mathrm{End}(V_{\tau_m}))^{\mathrm{SO}(3)}.$$

Para ello estudiaremos primero el espacio de polinomios $\mathcal{P}_{\tau_m}$ sobre $\mathbb{R}^3$ a valores en $\mathrm{End}(V_{\tau_m})$ que satisfacen (3.33), es decir, tales que

$$P(k \cdot x) = \tau_m(k) P(x) \tau_m(k)^{-1} \qquad \forall k \in K, x \in \mathbb{R}^3.$$

Veremos que, para cada entero no negativo m, el espacio de polinomios $\mathcal{P}_{\tau_m}$ es un $\mathbb{C}[|x|^2]$-módulo de dimensión $2m+1$. Probaremos, usando la teoría de representaciones, que para cada $0 \le j \le 2m$ existe esencialmente una matriz Q_j cuadrada, $(2m+1) \times (2m+1)$, cuyas entradas matriciales son polinomios homogéneos y armónicos en $\mathbb{R}^3$ de grado j tal que resulta $\mathrm{SO}(3)$-invariante de acuerdo a la condición (3.33). Luego, el espacio $\mathcal{P}_{\tau_m}$ resultará generado, como módulo sobre el anillo $\mathbb{C}[|x|^2]$, por un conjunto finito $\{Q_j\}_{j=0}^{2m}$. Este hecho resultará crucial para probar el Teorema 5.3.

Recordemos si $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ denota el espacio de polinomios en tres variables a valores en $\mathbb{C}$ (polinomios a valores escalares), este se descompone como

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}^3) \simeq \bigoplus_n \mathcal{P}_n(\mathbb{R}^3),$$

donde $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}^3)$ denota el subespacio de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ de polinomios homogéneos de grado n. A su vez, cada uno de estos espacios se descompone naturalmente como

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{R}^3) \simeq \bigoplus_k |x|^{2k} H_{n-2k}.$$

Mirando $\mathcal{P}_{\tau_m}$ como un módulo sobre $\mathbb{C}[|x|^2]$, el siguiente paso consiste en estudiar, para cada entero no negativo j, los elementos de $H_j \otimes \mathrm{End}(V_{\tau_m})$ que son $\mathrm{SO}(3)$-invariantes respecto de la acción descripta en (3.33). El uso de la teoría de representaciones del grupo $\mathrm{SO}(3)$ será crucial en esta parte.

El espacio de operadores $\mathrm{End}(V_{\tau_m})$ se identifica naturalmente con $V_{\tau_m} \otimes V_{\tau_m}^*$. Por su parte, τ_m es unitariamente equivalente a su representación contragrediente (cf. [Fa, p. 112 y 113]) y usando (1.26) obtenemos

$$\tau_j \otimes (\tau_m \otimes \tau_m) = \tau_j \otimes \left[\bigoplus_{k=0}^{2m} \tau_k\right] = \bigoplus_{k=0}^{2m} \left[\bigoplus_{l=|j-k|}^{j+k} \tau_l\right]. \tag{5.1}$$

Por lo tanto la representación trivial aparece en la descomposición (5.1) sólo una vez para cada $0 \le j \le 2m$ y no aparece si $j > 2m$.

Luego,

$$\mathcal{P}_{\tau_m} \simeq \mathbb{C}(|x|^2) \bigotimes \bigoplus_{j=0}^{2m} (H_j \otimes H_j)^{\mathrm{SO}(3)},$$

donde $(H_j \otimes H_j)^{\mathrm{SO}(3)}$ denota el espacio vectorial unidimensional generado por una matriz Q_j, de dimensiones $(2m+1) \times (2m+1)$, cuyas entradas son polinomios armónicos homogéneos de grado j y satisface

(3.33). Subrayamos que los polinomios matriciales Q_j dependen de τ_m. Finalmente, cada polinomio en $\mathbb{R}^3$ a valores matriciales que satisface (3.33) puede ser escrito como

$$p_0(|x|^2)\mathrm{I} + p_1(|x|^2)Q_1 + \cdots + p_{2m}(|x|^2)Q_{2m},$$

donde cada p_j es un polinomio a valores escalares.

Para familiarizarnos un poco más con estos espacios polinomiales veamos primero los casos $m = 0$ y $m = 1$ para luego pasar al caso general. A medida que los vayamos entendiendo describiremos el álgebra de operadores diferenciales asociada.

- Si $m = 0$, es decir, τ_0 es la representación trivial de SO(3), el espacio $\mathcal{P}_{\tau_0}$ es exactamente $\mathbb{C}[|x|^2]$ y el álgebra $\mathbb{D}_{\tau_0}$ (de operadores diferenciales en $\mathbb{R}^3$ invariantes por traslaciones a izquierda y que conmutan con rotaciones) es generada por el operador Laplaciano. (Comparar con la Sección 2.5.)

- Si $m = 1$, es decir, si τ_1 es la representación estándar de SO(3) en $\mathbb{C}^3$, el espacio $\mathcal{P}_{\tau_1}$ está generado, como $\mathbb{C}[|x|^2]$-módulo, por polinomios matriciales Q_0, Q_1 y Q_2. Podemos considerar Q_0 igual a la función constante I (que a cada punto de $\mathbb{R}^3$ le asigna el operador identidad). El polinomio matricial Q_1 puede ser tomado como
$$Q_1(x) := d\tau_1(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^3,$$
que debe ser interpretado vía la identificación entre $\mathbb{R}^3$ y $\mathfrak{so}(3)$. Explícitamente, sea
$$\left\{Y_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, Y_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Y_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$
la base canónica de $\mathfrak{so}(3)$, entonces $d\tau_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathfrak{so}(3)$ se define como
$$d\tau_1(x_1, x_2, x_3) := \sum_{i=1}^{3} x_i d\tau_1(Y_i) = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & -x_2 \\ -x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & -x_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \forall\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$
Recordemos que en general $d\tau$ satisface (1.14)
$$\tau(k)d\tau(Y)\tau(k^{-1}) = d\tau(\mathrm{Ad}(k)Y) \qquad \forall Y \in \mathfrak{so}(3) \text{ y } \forall k \in \mathrm{SO}(3). \tag{5.2}$$
Como la representación adjunta de SO(3) en $\mathfrak{so}(3)$ se puede identificar con la representación estándar de SO(3) en $\mathbb{R}^3$, el polinomio matricial Q_1 satisface (3.33).

  Ahora determinaremos explícitamente Q_2. Primero notemos que
$$Q_1^2(x) = xx^t - |x|^2\mathrm{I} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^3,$$
por lo tanto su imagen en cada punto devuelve una matriz simétrica, sus entradas matriciales son polinomios homogéneos de segundo grado y además satisface (3.33) (ya que Q_1 lo hace). Veremos que
$$Q_2(x) := Q_1^2(x) + \frac{2}{3}|x|^2\mathrm{I}.$$
Por el grado de las entradas matriciales de Q_1^2, este polinomio matricial no puede ser un $\mathbb{C}[|x|^2]$-múltiplo de Q_1 y entonces lo podemos escribir como
$$Q_1^2(x) = a|x|^2\mathrm{I} + bQ_2(x)$$
para ciertas constantes a y b. Como Q_1^2 no es un múltiplo de $|x|^2\mathrm{I}$, la constante b no puede ser cero. Luego, podemos considerar $b = 1$. Aplicando el operador Laplaciano en ambos lados y usando que Q_2 tiene componentes armónicas, obtenemos $a = -2/3$.

  Luego, $\mathcal{P}_{\tau_1}$ está generada como $\mathbb{C}[|x|^2]$-módulo por
$$\left\{\mathrm{I},\ Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & -x_2 \\ -x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & -x_1 & 0 \end{pmatrix},\ Q_1^2 + \frac{2}{3}|x|^2\mathrm{I}\right\},$$
y el álgebra $\mathbb{D}_{\tau_1}$ está generada por $\Delta \otimes \mathrm{I}$ y por el *rotor* $Q_1(\frac{\partial}{\partial x}) := \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} d\tau_1(Y_i)$.

De ahora en más pondremos $r := |x|$.

Pasemos al caso general en que m es un entero no negativo arbitrario. Queremos determinar un conjunto de generadores Q_0, Q_1,...,Q_{2m} de $\mathcal{P}_{\tau_m}$. Como anteriormente, podemos tomar

$$Q_0 := \mathrm{I} \qquad \text{y}$$

$$Q_1(x) := d\tau_m(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Denotamos por D_{τ_m} al operador diferencial dado por

$$D_{\tau_m} := \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} d\tau_m(Y_i). \tag{5.3}$$

Sea E el *operador de Euler*

$$\mathrm{E} := x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

yea Ω_{τ_m} el operador de Casimir de la representación $d\tau_m$ definido según (1.16) por

$$\Omega_{\tau_m} = (d\tau_m(Y_1))^2 + (d\tau_m(Y_2))^2 + (d\tau_m(Y_3))^2$$

Es bien sabido en este caso (cf. por ejemplo [Fa]) que

$$\Omega_{\tau_m} = |x|^2 \Delta \otimes \mathrm{I} - \mathrm{E}\ (\mathrm{E} \otimes \mathrm{I} + \mathrm{I})$$

y que

$$\Omega_{\tau_m} = c_{\tau_m} \mathrm{I} \quad \text{donde} \quad c_{\tau_m} := -m(m+1).$$

De ahora en más pondremos $r := |x|$.

Lema 5.1.

(*i*) *Para todo* $1 \leq j \leq 2m$, $D_{\tau_m} Q_j = a_j Q_{j-1}$ *para algún escalar* a_j.

(*ii*) $D_{\tau_m} Q_1 = \Omega_{\tau_m}$.

(*iii*) *Para todo* $0 \leq j < 2m$, $Q_1 Q_j - \frac{r^2}{2j+1} D_{\tau_m} Q_j$ *es una matriz cuadrada de tamaño* $(2m+1)$ *cuyas entradas matriciales son polinomios armónicos homogéneos y que satisface* (3.33).

(*iv*) $Q_1 Q_{2m} - \frac{r^2}{2m+1} D_{\tau_m} Q_{2m} = 0$.

Demostración.

(*i*) $D_{\tau_m} Q_j$ es una matriz cuyas entradas son polinomios armónicos homogéneos (o sea un polinomio armónico y homogéneo a valores matriciales) de grado $j-1$ que satisface (3.33). Entonces $D_{\tau_m} Q_j \in (H_{j-1} \otimes H_{j-1})^{\mathrm{SO}(3)}$ y por lo tanto es un múltiplo escalar del generador Q_{j-1}.

(*ii*) Basta chequear

$$\begin{aligned} D_{\tau_m} Q_1(x) &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} d\tau_m(Y_i) \left(\sum_{k=1}^{3} x_k d\tau_m(Y_k) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{3} (d\tau_m(Y_i))^2 \\ &= \Omega_{\tau_m}. \end{aligned}$$

Observar que de aquí se sigue que $a_1 = c_{\tau_m}$.

(iii) Se sigue esencialmente de los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned}
&\Delta[Q_1Q_j](x) = \\
&= [\Delta Q_1](x)Q_j(x) + 2\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}Q_1(x)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}Q_j(x)\right) + Q_1(x)[\Delta Q_j](x) \\
&= 2\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{k=1}^{3}x_k d\tau_m(Y_k)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}Q_j(x)\right) \\
&= 2Q_1(\frac{\partial}{\partial x})\ Q_j(x) \\
&= 2D_{\tau_m}Q_j(x)\ ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta[r^2D_{\tau_m}Q_j](x) &= 6D_{\tau_m}Q_j(x) + 4[\sum_{i=1}^{3}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}](D_{\tau_m}Q_j)(x) + r^2\Delta[D_{\tau_m}Q_j](x) \\
&= (6+4(j-1))D_{\tau_m}Q_j.
\end{aligned}$$

(iv) Finalmente, este último inciso resulta por tener que $Q_1Q_{2m} - \frac{r^2}{2j+1}D_{\tau_m}Q_{2m}$ es un polinomio matricial armónico y homogéneo de grado $2m+1$ que además satisface (3.33) y porque hemos probado que $\mathcal{P}_{\tau_m}$ está generada como $\mathbb{C}[|x|^2]$-módulo por polinomios a valores matriciales armónicos homogéneos de grado menor o igual que $2m$.

□

Proposición 5.2. *Sea m un entero no negativo arbitrario. Se tiene que $\mathcal{P}_{\tau_m}$ está generada como $\mathbb{C}[|x|^2]$-módulo por Q_1^j, con $0 \leq j \leq 2m$.*

Demostración. Por un lado, toda potencia de Q_1 satisface (3.33). Por otro lado, para cada $0 \leq j \leq 2m$ existe un único polinomio a valores matriciales armónico y homogéneo de grado j, salvo múltiplo escalar.

Procederemos inductivamente. Sea $1 < j < 2m$ y asumamos que Q_{j-1} y Q_j son polinomios mónicos en Q_1 con coeficientes en $\mathbb{C}[|x|^2]$. Por el lema previo,

$$Q_1Q_j - \frac{r^2}{2j+1}D_{\tau_m}Q_j = Q_1Q_j - \frac{r^2}{2j+1}a_jQ_{j-1} \tag{5.4}$$

es un polinomio a valores matriciales armónico y homogéneo que satisface (3.33). Por hipótesis inductiva, este resulta una combinación lineal finita de potencias de Q_1 con coeficientes en $\mathbb{C}[|x|^2]$. Sólo nos resta probar que no es el polinomio matricial nulo.

Observemos que $Q_1(e_1) = d\tau_m(Y_1)$ y es bien sabido que $d\tau_m(Y_1)$ se puede diagonalizar y que tiene $2m+1$ autovalores diferentes. Luego, el polinomio minimal de $Q_1(e_1)$ coincide con su polinomio característico (que es de grado $2m+1$). Considerando $x = e_1$, (5.4) resulta un polinomio mónico en Q_1 de grado $j+1$ con coeficientes constantes y como $j+1 \leq 2m$, no puede ser nulo.

En consecuencia, $\mathcal{P}_{\tau_m}$ está generada como $\mathbb{C}[|x|^2]$-módulo por $Q_0 := \mathrm{I}$, $Q_1(x) := d\tau_m(x)$ y

$$Q_{j+1} := Q_1Q_j - \frac{r^2}{2j+1}D_{\tau_m}Q_j = Q_1Q_j - \frac{r^2}{2j+1}a_jQ_{j-1}, \quad \text{para } 1 < j < 2m. \tag{5.5}$$

□

De este hecho se desprende inmediatamente el primero de los resultados principales de este capítulo.

Teorema 5.3. *El álgebra de operadores diferenciales $(\mathbb{D}(\mathbb{R}^3) \otimes \mathrm{End}(V_{\tau_m}))^{\mathrm{SO}(3)}$ está generada por $\Delta \otimes \mathrm{I}$ y D_{τ_m}, donde Δ denota el operador Laplaciano en $\mathbb{R}^3$ y D_{τ_m} está dado por (5.3) y generaliza al rotor.*

5.2. Funciones esféricas de tipo τ

Fijada una representación unitaria irreducible arbitraria τ de SO(3) describiremos tres métodos para calcular todas las funciones esféricas de tipo τ de la terna conmutativa $(\mathrm{SO}(3) \ltimes \mathbb{R}^3, \mathrm{SO}(3), \tau)$. Si τ es la

representación trivial, las funciones esféricas son bien conocidas y han sido presentadas en la Sección 2.5. En esta sección nos referiremos a ellas por funciones esféricas *clásicas*.

Por la teoría general (ver Teorema 3.38) sabemos que un conjunto completo de funciones esféricas de tipo τ_m debe estar parametrizado por dos parámetros, uno continuo $r \in \mathbb{R}_{>0}$ y otro finito j que se mueve en un conjunto de $2m+1$ elementos. Usando la caracterización de funciones τ-esféricas como autofunciones simultáneas de los operadores en $(\mathbb{D}(\mathbb{R}^3) \otimes \mathrm{End}(V_\tau))^{SO(3)}$, las explicitaremos de tres maneras diferentes. El primer apartado de esta sección muestra las funciones τ-esféricas como combinación lineal de funciones escalares SO(3)-invariantes por polinomios "elementales" a valores en $\mathrm{End}(V_\tau)$ satisfaciendo (3.33). Nuestro segundo resultado las representa a partir de tomar transformada de Fourier de distribuciones matriciales sobre las SO(3)-órbitas de $\mathbb{R}^3$. Esto será consecuencia de una reducción de la fórmula integral (3.39). Por último, evidenciamos cada función τ-esférica como una función a valores matriciales cuyas entradas son derivadas de funciones esféricas escalares o "clásicas".

5.2.1. Combinación lineal de polinomios matriciales y funciones esféricas clásicas

Comencemos con la siguiente pregunta: ¿Será posible escribir a cada función esférica de tipo τ_m como una combinación lineal de los polinomios $\{Q_j\}_{j=0}^{2m}$ donde los coeficientes sean funciones en $|x|$ (es decir, funciones radiales) a valores escalares en $\mathbb{C}$? Consideremos la función

$$\Phi(x) := v_0 f_0(|x|)I + v_1 f_1(|x|)Q_1(x) + ... + v_{2m} f_{2m}(|x|)Q_{2m}(x) \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^3) \tag{5.6}$$

donde los coeficientes v_j son escalares y las funciones f_j se pueden interpretar como funciones definidas en $\mathbb{R}^3$ pero que son radiales. Busquemos condiciones sobre $v_j f_j$ para hacer de esta función Φ una función esférica de tipo τ_m. Por simplicidad en la notación, como hemos hecho en la sección anterior, dado $x \in \mathbb{R}^3$ llamaremos $r := |x|$ a su norma.

Como hemos tomado a las f_j como funciones radiales y los polinomios Q_j son los descriptos en la sección previa, que por ende satisfacen (3.33), se sigue que la función Φ dada en (5.6) cumple (3.33).

Si aplicamos los operadores diferenciales $\Delta \otimes \mathrm{I}$ y D_{τ_m} a (5.6) y utilizamos la *identidad de Euler*

$$\mathrm{E}(Q) = \left(\sum_{i=1}^{3} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) Q = jQ$$

para cada polinomio homogéneo Q de grado j, obtenemos

$$\Delta\left(\sum_{j=0}^{2m} f_j Q_j\right)(x) = \sum_{j=0}^{2m}\left[f_j^{''}(r) + \frac{2+2j}{r} f_j^{'}(r)\right] Q_j(x) \qquad \text{y} \tag{5.7}$$

$$D_{\tau_m}\left(\sum_{j=0}^{2m} f_j Q_j\right)(x) = \sum_{j=0}^{2m}\left[\frac{f_j^{'}(r)}{r} Q_1(x)Q_j(x) + f_j(r) D_{\tau_m} Q_j(x)\right]. \tag{5.8}$$

Queremos que Φ sea una autofunción de $\Delta \otimes \mathrm{I}$ y de D_{τ_m}. Para achicar nuestra búsqueda comenzaremos tratando de ver si podemos tener que cada término $f_j Q_j$ sea autofunción del operador $\Delta \otimes \mathrm{I}$ y que a su vez correspondan al mismo autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces, para cada $0 \leq j \leq 2m$, la función f_j deberá cumplir la siguiente ecuación diferencial ordinaria de segundo orden:

$$f_j^{''}(r) + \frac{2+2j}{r} f_j^{'}(r) = \lambda f_j(r). \tag{5.9}$$

Conocemos que la función

$$u_{\alpha,\lambda}(r) := \Gamma(\alpha+1)\frac{J_\alpha(i\lambda^{1/2} r)}{\left(i\lambda^{1/2}\frac{r}{2}\right)^\alpha}$$

es una solución de (5.9) con condición inicial 1 en $r = 0$, donde $J_\alpha(x)$ es la función de Bessel (2.48) de primera especie y orden $\alpha := j + \frac{1}{2}$.

Como, por definición, toda función esférica debe ser acotada, sólo consideraremos $\lambda = -s^2$ con $s \in \mathbb{R}_{>0}$. Asociada al autovalor $\lambda = -1$ tenemos a la familia de funciones

$$\left\{f_j(r) := u_{j+1/2,-1}(r)\right\}_{j=0}^{2m}$$

y asociada a un autovalor arbitrario, $\lambda = -s^2$ con $s \in \mathbb{R}_{>0}$, tenemos a la familia

$$\left\{f_j^s(r) := f_j(sr)\right\}_{j=0}^{2m}.$$

(Como referencia adicional consultar [Dij]).

Observación 5.4. Observamos que, para cada entero $0 \leq j \leq 2m$, la familia

$$\left\{f_j^s\right\}_{s\in\mathbb{R}_{>0}}$$

es el conjunto de todas las funciones esféricas clásicas asociadas al par de Gelfand $(\mathrm{SO}(2j+3) \ltimes \mathbb{R}^{2j+3}, \mathrm{SO}(2j+3))$. Además, estos conjuntos de funciones aparecen cuando uno calcula la transformada de Fourier en $\mathbb{R}^3$ de funciones radiales por *armónicos esféricos sólidos* (polinomios homogéneos que solucionan la ecuación de Laplace $\Delta p = 0$ en coordenadas cartesianas) de grado j (cf. [SW, Teorema 3.10, Capítulo 4]).

Las funciones de Bessel satisfacen bien conocidas relaciones de recurrencia

$$J_\alpha(z) = \frac{z}{2\alpha}\left[J_{\alpha-1}(z) + J_{\alpha+1}(z)\right]$$

y relaciones diferenciales

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{J_\alpha(z)}{z^\alpha}\right) = -\frac{J_{\alpha+1}(z)}{z^\alpha}.$$

(Para una referencia ver [Sz]). De estas desprendemos las siguientes identidades que involucran a las funciones f_j y serán de gran utilidad

$$f_j(r) = f_{j-1}(r) + \frac{r^2}{(2j+1)(2j+3)} f_{j+1}(r) \qquad \text{y} \tag{5.10}$$

$$\frac{\frac{d}{dr} f_j(r)}{r} = -\frac{f_{j+1}(r)}{2j+3}. \tag{5.11}$$

Análogamente, para las funciones f_j^s valen las siguientes expresiones

$$f_j^s(r) = f_{j-1}^s(r) + \frac{(sr)^2}{(2j+1)(2j+3)} f_{j+1}^s(r) \qquad \text{y} \tag{5.12}$$

$$\frac{\frac{d}{dr} f_j^s(r)}{s^2 r} = -\frac{f_{j+1}^s(r)}{2j+3}. \tag{5.13}$$

Denominamos V^1 al espacio vectorial generado por

$$\mathcal{B}^1 := \left\{f_j Q_j\right\}_{j=0}^{2m}.$$

Este espacio vectorial tiene dimensión $(2m+1)$ y, de manera similar, para cada $s \in \mathbb{R}_{>0}$, consideramos los espacios vectoriales V^s de dimensión finita $(2m+1)$ generados por

$$\mathcal{B}^s := \left\{f_j^s Q_j\right\}_{j=0}^{2m}.$$

Lema 5.5. *El espacio vectorial V^1 es invariante con respecto al operador diferencial D_{τ_m}.*

Demostración.

$$D_{\tau_m}(f_j Q_j)(x) = \frac{f_j'(r)}{r} Q_1(x) Q_j(x) + f_j(r) D_{\tau_m} Q_j(x). \tag{5.14}$$

Usando (5.10) y (5.11)) obtenemos

$$\begin{aligned} D_{\tau_m}(f_j Q_j)(x) &= \\ &= -\frac{f_{j+1}(r)}{2j+3} Q_1(x) Q_j(x) + [f_{j-1}(r) - \frac{r^2}{(2j+1)(2j+3)} f_{j+1}(r)] D_{\tau_m} Q_j(x) \\ &= -\frac{f_{j+1}(r)}{2j+3}[Q_1(x) Q_j(x) - \frac{r^2}{2j+1} D_{\tau_m} Q_j(x)] + f_{j-1}(r) D_{\tau_m} Q_j(x). \end{aligned}$$

De la definición de Q_{j+1} dada en (5.5) y el Lema 5.1 se sigue que

$$D_{\tau_m}(f_jQ_j) = -\frac{f_{j+1}}{2j+3}Q_{j+1} + a_jf_{j-1}Q_{j-1} \qquad \forall\ 1 \le j \le 2m-1, \tag{5.15}$$

$$D_{\tau_m}(f_0Q_0) = -\frac{f_1}{3}Q_1 \qquad \text{y} \tag{5.16}$$

$$D_{\tau_m}(f_{2m}Q_{2m}) = a_{2m}f_{2m-1}Q_{2m-1}. \tag{5.17}$$

□

De las expresiones (5.15), (5.16) y (5.17) que surgieron en la prueba del lema podemos escribir la matriz $[D_{\tau_m}]^{\mathcal{B}^1}_{\mathcal{B}^1}$ del operador D_{τ_m} con respecto a la base $\mathcal{B}^1$ de V^1

$$[D_{\tau_m}]^{\mathcal{B}^1}_{\mathcal{B}^1} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & ... & ... & ... & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & a_2 & 0 & ... & ... & ... \\ 0 & -\frac{1}{5} & 0 & a_3 & 0 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & 0 & -\frac{1}{4m-1} & 0 & a_{2m} \\ 0 & ... & ... & ... & 0 & -\frac{1}{4m+1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Análogamente, en el espacio vectorial V^s tenemos que

$$D_{\tau_m}(f^s_jQ_j) = -\frac{s^2}{2j+3}f^s_{j+1}Q_{j+1} + a_jf^s_{j-1}Q_{j-1} \qquad \forall\ 1 \le j \le 2m-1,$$

$$D_{\tau_m}(f^s_0Q_0) = -\frac{s^2}{3}f^s_1Q_1 \qquad \text{y} \qquad D_{\tau_m}(f^s_{2m}Q_{2m}) = a_{2m}f^s_{2m-1}Q_{2m-1}.$$

Por lo tanto, V^s es invariante bajo D_{τ_m} y la matriz del operador D_{τ_m} con respecto a la base $\mathcal{B}^s$ resulta

$$[D_{\tau_m}]^{\mathcal{B}^s}_{\mathcal{B}^s} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & ... & ... & ... & 0 \\ -\frac{s^2}{3} & 0 & a_2 & 0 & ... & ... & ... \\ 0 & -\frac{s^2}{5} & 0 & a_3 & 0 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & 0 & -\frac{s^2}{4m-1} & 0 & a_{2m} \\ 0 & ... & ... & ... & 0 & -\frac{s^2}{4m+1} & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.18}$$

Si $v \in \mathbb{C}^{2m+1}$ es un autovector de $[D_{\tau_m}]^{\mathcal{B}^1}_{\mathcal{B}^1}$ con autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces $s\lambda$ es un autovalor de $[D_{\tau_m}]^{\mathcal{B}^s}_{\mathcal{B}^s}$ y un autovector que le corresponde está dado por $\tilde{v}$ cuyas coordenadas son

$$\tilde{v}_i := s^iv_i \qquad \forall 0 \le i \le 2m. \tag{5.19}$$

Computando los autovectores de la matriz $[D_{\tau_m}]^{\mathcal{B}^1}_{\mathcal{B}^1}$ obtenemos un conjunto completo de funciones esféricas de tipo τ_m. En efecto, para cada $s \in \mathbb{R}_{>0}$ sea

$$\left\{v^{(s,k)} := (1, v_1^{(s,k)}, ..., v_{2m}^{(s,k)})\right\}_{k=0}^{2m}$$

el conjunto de autovectores de $[D_{\tau_m}]^{\mathcal{B}^s}_{\mathcal{B}^s}$ (calculados a partir de los autovectores de $[D_{\tau_m}]^{\mathcal{B}^1}_{\mathcal{B}^1}$), luego el conjunto de todas las funciones esféricas de tipo τ_m está parametrizado por $s \in \mathbb{R}_{>0}$ y $k \in \mathbb{Z}$, $0 \le k \le 2m$, y está dado por

$$\left\{\Phi_{s,k}(x) = f^s_0(r)\mathrm{I} + v_1^{(s,k)}f^s_1(r)Q_1(x) + ... + v_{2m}^{(s,k)}f^s_{2m}(r)Q_{2m}(x)\right\}_{s,k}. \tag{5.20}$$

En síntesis podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 5.6. *A cada par de índices $(s,k) \in \mathbb{R}_{>0} \times \{0,1,...,2m\}$ le corresponde una función esférica $\Phi_{s,k}$ de tipo τ_m dada por*

$$\Phi_{s,k}(x) = f^s_0(|x|)\mathrm{I} + v_1^{(s,k)}f^s_1(|x|)Q_1(x) + ... + v_{2m}^{(s,k)}f^s_{2m}(|x|)Q_{2m}(x),$$

donde

- *para cada k fijo, la familia*
$$\{f_k^s\}_{s\in\mathbb{R}_{>0}}$$
es un conjunto completo de funciones esféricas clásicas acotadas del par de Gelfand $(\mathrm{M}(2k+3), \mathrm{SO}(2k+3))$*, es decir,*
$$f_k^s(r) := \Gamma(\frac{3}{2}+k)\frac{J_{k+\frac{1}{2}}(sr)}{(\frac{sr}{2})^{k+\frac{1}{2}}},$$
donde $J_{k+\frac{1}{2}}$ denota la función de Bessel de primera especie de orden $(k+\frac{1}{2})$ y

- *para cada s fijo, los vectores dados por*
$$(1, v_1^{(s,k)}, ..., v_{2m}^{(s,k)}) \in \mathbb{C}^{2m+1}, \qquad k \in \{0, 1, ..., 2m\}$$
forman una base de autovectores de D_{τ_m} en V^s (el espacio vectorial generado por $\mathcal{B}^s = \{f_j^s Q_j\}_{j=0}^{2m}$).

Más aún, toda función esférica de tipo τ_m es de esta forma o bien es el operador identidad en V_{τ_m}.

Para finalizar, si queremos hallar explícitamente los autovalores y autovectores de $[D_{\tau_m}]_{\mathcal{B}^1}^{\mathcal{B}^1}$ necesitamos una fórmula explícita para los coeficientes a_j. A partir del Lema 5.1 sabemos que $a_1 = c_{\tau_m}$. Los demás coeficientes son engorrosos de calcular y dicho cálculo se presenta en el siguiente apartado. Anticipamos que su fórmula está dada por
$$a_{j+1} = \frac{(j+1)^2}{2j+1}\left(c_{\tau_m} + \frac{j^2+2j}{4}\right) \tag{5.21}$$
y recomendamos pasar directamente al apartado 5.2.2 para una lectura fluída de la tesis.

Un cálculo auxiliar

Presentaremos el cálculo de los coeficiente a_j anteriormente mencionados.

En la Sección 5.1 dedujimos que cada polinomio matricial Q_j $(1 \leq j \leq 2m)$ se puede escribir como un polinomio mónico en Q_1 con coeficientes en $\mathbb{C}[|x|^2]$, es decir,
$$Q_j = \begin{cases} Q_1^j \ + \ b_j^1\ r^2 Q_1^{j-2} \ + ... + \ b_j^{j/2}\ r^j \mathrm{I} & \text{si } j \text{ es par} \\ Q_1^j \ + \ b_j^1\ r^2 Q_1^{j-2} \ + ... + \ b_j^{(j-1)/2}\ r^{j-1} Q_1 & \text{si } j \text{ es impar} \end{cases}$$
para ciertos escalares $\{b_j^k\}_k$. Estamos interesadas únicamente en los coeficientes b_j^1 y por eso nos permitamos escribir
$$Q_j = Q_1^j \ + \ b_j^1\ r^2 Q_1^{j-2} \ + \ \text{términos de órdenes más bajos en } Q_1. \tag{5.22}$$
Aplicando el operador D_{τ_m} a ambos lados de (5.22) obtenemos
$$a_j Q_{j-1} = D_{\tau_m} Q_j = D_{\tau_m}[Q_1^j] + 2b_j Q_1^{j-1} + b_j r^2 D_{\tau_m}[Q_1^{j-2}] + \ \text{términos de órdenes más bajos en } Q_1.$$
Ahora buscamos analizar $D_{\tau_m}[Q_1^j]$. Por un argumento inductivo se tiene que
$$D_{\tau_m}[Q_1^j] = \sum_{k=0}^{j-1}[\sum_{i=1}^{3} d\tau_m(Y_i) Q_1^k d\tau_m(Y_i) Q_1^{j-1-k}].$$
Para hacer más legibles los cálculos que vendrán a continuación ponemos
$$T(k) := \sum_{i=1}^{3} d\tau_m(Y_i) Q_1^k d\tau_m(Y_i).$$
Para $k = 0$, $T(0) = \sum_{i=1}^{3}[d\tau_m(Y_i)]^2 = c_{\tau_m}\mathrm{I}$ es el operador de Casimir asociado a $d\tau_m$.

Para $k = 1$, $T(1) = (1 + c_{\tau_m})Q_1$. En efecto, como $T(1) = \sum_{i=1}^{3} d\tau_m(Y_i)Q_1(x)d\tau_m(Y_i)$, sumando y restando $\sum_{i=1}^{3} Q_1(x)d\tau_m(Y_i)d\tau_m(Y_i)$, obtenemos

$$\begin{aligned}
T(1) &= \sum_{i=1}^{3}[d\tau_m(Y_i), Q_1(x)]d\tau_m(Y_i) + Q_1(x)\Omega_{\tau_m} \\
&= \sum_{i=1}^{3}(\sum_{j=1}^{3} x_j[d\tau_m(Y_i), d\tau_m(Y_j)])d\tau_m(Y_i) + c_{\tau_m}Q_1(x) \\
&= \sum_{i=1}^{3}(\sum_{j=1}^{3} x_j d\tau_m([Y_i, Y_j]))d\tau_m(Y_i) + c_{\tau_m}Q_1(x) \\
&= \sum_{i=1}^{3} x_i d\tau_m(Y_i) + c_{\tau_m}Q_1(x) \\
&= Q_1(x) + c_{\tau_m}Q_1(x),
\end{aligned}$$

donde $[\cdot\,,\cdot]$ denota el corchete de Lie de $\mathfrak{so}(3)$.

Lema 5.7. *Para T existe la siguiente fórmula recursiva:*

$$T(k+2) - Q_1T(k+1) = (k+2)Q_1^{k+2} - r^2\sum_{j=0}^{k} T(k-j)Q_1^j. \tag{5.23}$$

Demostración. Comencemos calculando $\sum_{i=0}^{3}[d\tau_m(Y_i), Q_1]Q_1^k[d\tau_m(Y_i), Q_1]$ de dos modos diferentes. Por un lado,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{3}[d\tau_m(Y_i),Q_1]Q_1^k[d\tau_m(Y_i), Q_1] = \\
&\qquad = \sum_{i=0}^{3}(d\tau_m(Y_i)Q_1 - Q_1d\tau_m(Y_i))Q_1^k(d\tau_m(Y_i)Q_1 - Q_1d\tau_m(Y_i)) \\
&\qquad = T(k+1)Q_1 - T(k+2) - Q_1T(k)Q_1 + Q_1T(k+1)
\end{aligned}$$

y por otro lado,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{3}[d\tau_m(Y_i),Q_1]Q_1^k[d\tau_m(Y_i), Q_1] = \\
&\qquad = (x_3d\tau_m(Y_2) - x_2d\tau_m(Y_3))Q_1^k(x_3d\tau_m(Y_2) - x_2d\tau_m(Y_3)) + \\
&\qquad + (x_1d\tau_m(Y_3) - x_3d\tau_m(Y_1))Q_1^k(x_1d\tau_m(Y_3) - x_3d\tau_m(Y_1)) + \\
&\qquad + (x_2d\tau_m(Y_1) - x_1d\tau_m(Y_2))Q_1^k(x_2d\tau_m(Y_1) - x_1d\tau_m(Y_2)) \\
&\qquad = \sum_{i=0}^{3} x_i^2 \sum_{j=0}^{3} d\tau_m(Y_j)Q_1^kd\tau_m(Y_j) - \sum_{i,j} x_ix_jd\tau_m(Y_i)Q_1^kd\tau_m(Y_j) \\
&\qquad = r^2T(k) - \sum_{i=0}^{3} x_id\tau_m(Y_i)Q_1^k\sum_{j=0}^{3} x_jd\tau_m(Y_j) \\
&\qquad = r^2T(k) - Q_1^{k+2}.
\end{aligned}$$

Luego,

$$T(k+2) - Q_1T(k+1) - T(k+1)Q_1 + Q_1T(k)Q_1 = -r^2T(k) + Q_1^{k+2}. \tag{5.24}$$

Como conocemos los primeros dos valores de T, de la última expresión recursiva (5.24) podemos deducir que $T(k)$ es un polinomio en r^2 y Q_1. Por ende, $T(k)$ conmuta con Q_1. Esto nos permite reescribir (5.24) como

$$T(k+2) - Q_1T(k+1) = Q_1(T(k+1) - Q_1T(k)) - r^2T(k) + Q_1^{k+2}$$

y de aquí se llega a

$$T(k+2) - Q_1^{k+1}T(1) = Q_1T(k+1) - Q_1^{k+2}T(0) - r^2\sum_{j=0}^{k} Q_1^jT(k-j) + (k+1)Q_1^{k+2}.$$

Finalmente, reemplazando $T(0)$ y $T(1)$ por sus conocidos valores se tiene (5.23). □

Como $T(k)$ es un polinomio en r^2 y Q_1, podemos expresar sus primeros términos como

$$T(k) = \gamma_k^0 Q_1^k + \gamma_k^1 r^2 Q_1^{k-2} + \text{ términos de órdenes más bajos en } Q_1. \tag{5.25}$$

Comparando los coeficientes principales en (5.23) y (5.25) obtenemos

$$\gamma_{k+2}^0 - \gamma_{k+1}^0 = k+2 \qquad \text{y} \qquad \gamma_1^0 - \gamma_0^0 = (1 + c_{\tau_m}) - c_{\tau_m} = 1.$$

Entonces

$$\gamma_k^0 - \gamma_0^0 = \sum_{j=1}^{k}(\gamma_j^0 - \gamma_{j-1}^0) = \sum_{j=1}^{k} j = \binom{k+1}{2} = \frac{k(k+1)}{2}$$

y por lo tanto

$$\gamma_k^0 = c_{\tau_m} + \binom{k+1}{2} \qquad \text{y si } k=0, \quad \gamma_0^0 = c_{\tau_m}.$$

En consecuencia podemos escribir

$$D_{\tau_m}Q_1^j = \gamma\, Q_1^{j-1} + \text{ términos de órdenes más bajos en } Q_1,$$

donde

$$\begin{aligned}
\gamma &= \sum_{k=0}^{j-1}\gamma_k^0 \\
&= c_{\tau_m} + \sum_{k=1}^{j-1}(c_{\tau_m} + \binom{k+1}{2}) \\
&= jc_{\tau_m} + \sum_{k=1}^{j-1}\binom{k+1}{2} \\
&= jc_{\tau_m} + \binom{j+1}{3}.
\end{aligned}$$

Por lo que

$$D_{\tau_m}Q_1^j = (jc_{\tau_m} + \binom{j+1}{3})Q_1^{j-1} + \text{ términos de órdenes más bajos en } Q_1.$$

Ahora teniendo en cuenta (5.5) y que todo Q_j puede ser escrito como en (5.22), comparando coeficientes resulta

$$\frac{a_j}{2j+1} = b_j - b_{j+1} \qquad \text{y} \qquad a_1 = c_{\tau_m}. \tag{5.26}$$

Al mismo tiempo notemos que

$$\begin{aligned}
a_{j+1}Q_j = D_{\tau_m}[Q_{j+1}] &= D_{\tau_m}\left[Q_1^{j+1} + b_{j+1}r^2Q_1^{j-1} + \text{ términos de órdenes más bajos en } Q_1\right] \\
&= D_{\tau_m}Q_1^{j+1} + 2b_{j+1}Q_1^j + b_{j+1}r^2D_{\tau_m}Q_1^{j-1} + \text{ términos de órdenes más bajos en } Q_1 \\
&= ((j+1)c_{\tau_m} + \binom{j+2}{3})Q_1^j + 2b_{j+1}Q_1^j + \text{ términos de órdenes más bajos en } Q_1.
\end{aligned}$$

Comparando coeficientes una vez más, tenemos

$$a_{j+1} = (j+1)c_{\tau_m} + \binom{j+2}{3} + 2b_{j+1}. \tag{5.27}$$

Entonces, de (5.26) y (5.27) se sigue

$$a_{j+1} - a_j = c_{\tau_m} + \binom{j+1}{2} - 2\frac{a_j}{2j+1}$$

o, equivalentemente,

$$(2j+1)a_{j+1} - (2j-1)a_j = (c_{\tau_m} + \binom{j+1}{2})(2j+1). \tag{5.28}$$

Finalmente, cuando sumamos sobre j en (5.28), los coeficientes a_j pueden ser calculados como

$$a_{k+1} = \frac{(k+1)^2}{2k+1}(c_{\tau_m} + \frac{k^2+2k}{4}) \qquad \text{y} \qquad a_1 = c_{\tau_m}.$$

5.2.2. Fórmula integral

Sea $x \in \mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ y sea K_x el subgrupo de $K := \mathrm{SO}(3)$ que estabiliza o, mejor dicho, que fija a x. Como K_x-módulo, (τ_m, V_{τ_m}) se descompone como suma directa de $2m+1$ subespacios unidimensionales. Por lo tanto la matriz $Q_1(x) = d\tau_m(x)$ se puede diagonalizar y denotamos por $\lambda_j(x)$ a sus autovalores y por $q_j(x)$ a sus respectivos autovectores ya normalizados (donde j es un entero entre $\leq j \leq 2m$). Si consideramos $\tilde{x} = \frac{x}{|x|} \in \mathbb{S}^2$, como $d\tau_m$ es lineal,

$$d\tau_m(x) = |x| d\tau_m(\tilde{x})$$

y es fácil de ver que $\lambda_j(x) = |x|\lambda_j(\tilde{x})$ y $q_j(x) = q_j(\tilde{x})$. Más aún, es suficiente conocer los autovalores y autovectores de $d\tau_m(e_1)$. En efecto, como todo $\tilde{x} \in \mathbb{S}^2$ se puede escribir como $\tilde{x} = k \cdot e_1$ para algún $k \in \mathrm{SO}(3)$ (pues $\mathrm{SO}(3)$ actúa transitivamente en $\mathbb{S}^2$), obtenemos que

$$d\tau_m(\tilde{x}) = d\tau_m(k \cdot e_1) = \tau_m(k) d\tau_m(e_1) \tau_m(k^{-1})$$

(usando (1.14) y que la acción adjunta de $\mathrm{SO}(3)$ en su álgebra de Lie coincide con la acción natural de $\mathrm{SO}(3)$ en $\mathbb{R}^3$). Luego, si q es un autovector de $d\tau_m(e_1)$ con autovalor λ, entonces $\tau_m(k)q$ es un autovector de $d\tau_m(\tilde{x})$ con el mismo autovalor λ. Más aún, de la teoría de representaciones de $\mathfrak{so}(3)$, se conoce que para todo $j \in \mathbb{Z}$, $-m \leq j \leq m$,

$$\lambda_j(e_1) = \lambda_j(\tilde{x}) = ij \qquad \forall \tilde{x} \in \mathbb{S}^2 \qquad \text{y} \qquad \lambda_j(x) = ij|x| \qquad \forall x \in \mathbb{R}^3. \tag{5.29}$$

Ahora observemos que, para cada punto $x \in \mathbb{R}^3$ y cada $-m \leq j \leq m$, la matriz $q_j(x)q_j(x)^*$ es la proyección ortogonal sobre el autoespacio asociado al autovalor $\lambda_j(x) = ij|x|$ de la matriz $d\tau_m(x)$. Denotaremos $P_j(x) := q_j(x)q_j(x)^*$ a dicha proyección y esta cumple las siguientes propiedades:

- Para cada $x \in \mathbb{R}^3\backslash\{0\}$,
$$P_j(x) = P_j(\frac{x}{|x|}). \tag{5.30}$$

- Dado $\xi \in \mathbb{S}^2$ y $k \in \mathrm{SO}(3)$ tal que $\xi = k \cdot e_1$,
$$P_j(\xi) = \tau_m(k) P_j(e_1) \tau_m(k)^*. \tag{5.31}$$
Notar que la matriz transpuesta conjugada $\tau_m(k)^*$ coincide con $\tau_m(k)^{-1}$.

- Como $d\tau_m(x)$ tiene todos sus autovalores distintos libres de multiplicidad, por el teorema de Cayley-Hamilton ([HK, Teorema 4, Sección 6.3]) y la fórmula de interpolación de Lagrange ([HK, Sección 4.3]), podemos expresar $P_j(x)$ por
$$P_j(x) = \prod_{l \neq j;\ l=-m}^{m} \frac{d\tau_m(x) - il|x|\mathrm{I}}{ij|x| - il|x|}. \tag{5.32}$$

- Para todo j,
$$P_{-j}(x) = P_j(-x). \tag{5.33}$$

Para $s \in \mathbb{R}_{>0}$ y $j \in \{-m, ..., m\}$ consideramos

$$\Phi_{s,j}(x) := d_{\tau_m} \int_{\mathrm{SO}(3)} e^{-is\langle k\cdot x, e_1\rangle} \tau_m(k^{-1}) P_j(e_1) \tau_m(k)\ dk, \tag{5.34}$$

donde $d_{\tau_m} = 2m+1$ es la dimensión de V_{τ_m}. Obtenemos que $\Phi_{s,j}$ cumple las siguientes propiedades:

- $\Phi_{s,j}$ es una autofunción de $\Delta \otimes I$ con autovalor $-s^2$, ya que $e^{-is\langle x, k^{-1}\cdot e_1\rangle}$ es una autofunción de Δ con el mismo autovalor $-s^2$.
- Para $s \neq 0$, $\Phi_{s,j}(x)$ se puede reescribir como una integral sobre la esfera $\mathbb{S}^2 \simeq K/K_{e_1}$:

$$\Phi_{s,j}(x) = d_{\tau_m} \int_{\mathbb{S}^2} e^{-is\langle x,\xi\rangle} P_j(\xi)\ d\sigma(\xi), \tag{5.35}$$

  donde σ es la medida en la esfera $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ invariante por el grupo ortogonal O(3) y normalizada.
- $\Phi_{s,j}$ es una autofunción de D_{τ_m}:

$$\begin{aligned}
D_{\tau_m}\Phi_{s,j}(x) &= d_{\tau_m} \int_{\mathbb{S}^2} \sum_{i=1}^{3} d\tau_m(Y_i) \frac{\partial}{\partial x_i}(e^{-is\langle x,\xi\rangle}) P_j(\xi)\ d\sigma(\xi) \\
&= d_{\tau_m} \int_{\mathbb{S}^2} (-is) e^{-is\langle x,\xi\rangle} \left(\sum_{i=1}^{3} \xi_i d\tau_m(Y_i) \right) P_j(\xi)\ d\sigma(\xi) \\
&= d_{\tau_m} \int_{\mathbb{S}^2} (-is) e^{-is\langle x,\xi\rangle} d\tau_m(\xi) P_j(\xi)\ d\sigma(\xi) \\
&= -is d_{\tau_m} \int_{\mathbb{S}^2} e^{-is\langle x,\xi\rangle} \lambda_j(\xi) P_j(\xi)\ d\sigma(\xi) \\
&= sj\Phi_{s,j}(x).
\end{aligned}$$

- $\Phi_{s,j}$ satisface la propiedad (3.33) para todo $k \in \mathrm{SO}(3)$:

$$\begin{aligned}
\tau_m(k)\Phi_{s,j}(k^{-1}\cdot x)\tau_m(k^{-1}) &= d_{\tau_m} \int_{\mathbb{S}^2} e^{-is\langle k^{-1}\cdot x,\xi\rangle} \tau_m(k) P_j(\xi) \tau_m(k)^* d\sigma(\xi) \\
&= d_{\tau_m} \int_{\mathbb{S}^2} e^{-is\langle x, k\cdot\xi\rangle} P_j(k\cdot\xi) d\sigma(\xi) \\
&= d_{\tau_m} \int_{\mathbb{S}^2} e^{-is\langle x,\xi\rangle} P_j(\xi) d\sigma(\xi) \\
&= \Phi_{s,j}(x)
\end{aligned}$$

  porque la medida en $\mathbb{S}^2$ es invariante por rotaciones.
- $\Phi_{s,j}(0)$ es el operador identidad de V_{τ_m}. En efecto, si consideramos la base de V_{τ_m} dada por los autovectores normalizados $\{q_j(e_1)\}$, entonces

$$\begin{aligned}
\Phi_{s,j}(0)q_i(e_1) &= d_{\tau_m} \int_{\mathrm{SO}(3)} [\tau_m(k)P_j(e_1)\tau_m(k)^*]\ q_i(e_1)\ dk \\
&= d_{\tau_m} \int_{\mathrm{SO}(3)} \tau_m(k)\langle \tau_m(k)^* q_i(e_1), q_j(e_1)\rangle q_j(e_1)\ dk \\
&= d_{\tau_m} \int_{\mathrm{SO}(3)} \langle q_i(e_1), \tau_m(k) q_j(e_1)\rangle \tau_m(k) q_j(e_1)\ dk
\end{aligned}$$

  y por lo tanto

$$\begin{aligned}
&\langle \Phi_{s,j}(0)q_i(e_1), q_k(e_1)\rangle = \\
&\quad = d_{\tau_m} \int_{\mathrm{SO}(3)} \langle q_i(e_1), \tau_m(k)q_j(e_1)\rangle \langle \tau_m(k)q_j(e_1), q_k(e_1)\rangle\ dk \\
&\quad = d_{\tau_m} \int_{\mathrm{SO}(3)} \langle q_i(e_1), \tau_m(k)q_j(e_1)\rangle \overline{\langle q_k(e_1), \tau_m(k)q_j(e_1)\rangle}\ dk \\
&\quad = \delta_{k,i}
\end{aligned}$$

donde la última igualdad resulta de las relaciones de ortogonalidad de las entradas matriciales de $\tau_m(k)$.

- Por último,
$$\Phi_{s,-j}(x) = \Phi_{s,j}(-x). \tag{5.36}$$
Esta propiedad se sigue de (5.33) y de la invariancia de la medida de la esfera $\mathbb{S}^2$ bajo el grupo ortogonal O(3):
$$\begin{aligned}\Phi_{s,-j}(x) &= d_{\tau_m}\int_{\mathbb{S}^2} e^{-is\langle x,\xi\rangle}P_{-j}(\xi)\ d\sigma(\xi)\\ &= d_{\tau_m}\int_{\mathbb{S}^2} e^{-is\langle x,\xi\rangle}P_{j}(-\xi)\ d\sigma(\xi)\\ &= d_{\tau_m}\int_{\mathbb{S}^2} e^{is\langle x,\xi\rangle}P_{j}(\xi)\ d\sigma(\xi)\\ &= \Phi_{s,j}(-x).\end{aligned}$$
Además, como $P_j(x)$ es una proyección ortogonal tenemos que
$$[\Phi_{s,j}(x)]^* = \Phi_{s,j}(-x) \tag{5.37}$$
(donde el lado izquierdo de la igualdad denota la mariz transpuesta y conjugada de la matriz $\Phi_{s,j}(x)$).

Recordemos que para una medida de Borel, finita, positiva μ en $\mathbb{R}^n$, su transformada de Fourier clásica está dada (salvo un factor de normalización) por
$$\widehat{\mu}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle\xi,x\rangle}\ d\mu(x).$$
En particular, si μ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, es decir, viene dada en términos de una función integrable f sobre $\mathbb{R}^n$ a valores escalares, tenemos
$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\langle\xi,x\rangle}\ dx.$$
Para una función integrable F sobre $\mathbb{R}^n$ a valores matriciales, $\widehat{F}$ se interpreta como la matriz que resulta de tomar transformada de Fourier clásica de cada una sus estradas. Luego, una función esférica de tipo τ_m (no-trivial) está dada por
$$\Phi_{s,j}(x) = d_{\tau_m}\int_{\mathbb{S}^2} e^{-is\langle x,\xi\rangle}P_j(\xi)\ d\sigma(\xi) = d_{\tau_m}\widehat{P_j(\tfrac{\cdot}{s})\sigma_s}(x). \tag{5.38}$$

A partir de todo lo construido hasta el momento en esta sección y a partir del Teorema 3.38 tenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.8. *Sea $\xi \in \mathbb{S}^2$. La acción de $K_\xi := \{k \in \mathrm{SO}(3) \mid\ k\cdot\xi = \xi\}$ en V_{τ_m} se descompone en $2m+1$ subespacios unidimensionales $\{V_{j,\xi}\}_{j=-m}^{m}$. Para cada j, sea $P_j(\xi)$ la proyección ortogonal de V_{τ_m} en $V_{j,\xi}$. Esta proyección está dada explícitamente por la fórmula*
$$P_j(\xi) = \prod_{l\neq j;\ l=-m}^{m} \frac{\sqrt{-1}d\tau_m(\xi) + l\ \mathrm{I}}{l-j}.$$
Las funciones esféricas de tipo τ_m están parametrizadas por $s \in \mathbb{R}_{>0}$ y $j \in \mathbb{Z}$ entre $-m \le j \le m$, y se pueden presentar de la siguiente forma
$$\Phi_{s,j} = (2m+1)\widehat{P_j(\tfrac{\cdot}{s})\sigma_s}, \tag{5.39}$$
donde $\widehat{\cdot}$ denota la transformada de Fourier clásica y σ_s la medida invariante por rotaciones y normalizada de la esfera en $\mathbb{R}^3$ radio s centrada en el origen de coordenadas. Más aún, $-s^2$ y sj son los autovalores de $\Phi_{s,j}$ con respecto a $\Delta\otimes\mathrm{I}$ y D_{τ_m}, respectivamente.

Como corolario se desprende el siguiente resultado sobre funciones esféricas de tipo positivo.

Corolario 5.9. *Toda función esférica de tipo τ es de tipo positivo.*

Demostración. Sea $\tau = \tau_m$ y sea $\Phi_{s,j}$ una función esférica de tipo τ_m. De la expresión (5.39) se sigue que todas las entradas matriciales de $\Phi_{s,j}$ son de tipo positivo ya que son transformadas de Fourier de medidas de Borel finitas y positivas (ver teorema de Bochner 2.34). □

Este último hecho es un caso particular del Teorema 3.35 debido a F. Ricci y A. Samanta cuya prueba usa otros argumentos.

5.2.3. Derivadas matriciales de funciones esféricas clásicas

En este apartado mostraremos que todas las funciones τ esféricas pueden ser obtenidas luego de aplicar adecuados operadores diferenciales en $\mathbb{D}_{\tau_m}$ a las funciones esféricas clásicas del par de Gelfand $(\mathrm{M}(3), \mathrm{SO}(3))$.

Para cada $s \in \mathbb{R}_{>0}$ y cada $j \in \mathbb{Z}$, con $-m \leq j \leq m$, sea φ_s la función esférica (clásica) asociada al par de Gelfand $(\mathrm{M}(3), \mathrm{SO}(3))$ con autovalor $-s^2$ con respecto al operador Laplaciano. Inspiradas en la expresión (5.32) definimos los siguientes operadores diferenciales en $\mathbb{D}_{\tau_m}$

$$D_{s,j} := \prod_{l \neq j,\ l=-m}^{m} \frac{D_{\tau_m} - sl\ \mathrm{I}}{sj - sl}. \tag{5.40}$$

Teorema 5.10. *Todas las funciones esféricas de tipo τ_m (no-triviales) se pueden obtener a partir de la siguiente expresión*

$$\Phi_{s,j} = (2m+1) D_{s,j} \left(\varphi_s \mathrm{I}\right), \tag{5.41}$$

para $s \in \mathbb{R}_{>0}$ y $-m \leq j \leq m$ entero.

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^3$. Los autovalores de la matriz $Q_1(x) = d\tau_m(x)$ fueron dados en (5.29) y a partir de ellos podemos escribir el polinomio característico de $Q_1(x)$ como

$$p_{Q_1}(\lambda) = \lambda \prod_{j=1}^{m} (\lambda^2 + j^2 |x|^2). \tag{5.42}$$

Por el teorema de Cayley-Hamilton, $p_{Q_1}(Q_1(x)) = 0$. La aplicación de simetrización manda $|x|^2$ en Δ y Q_1 en D_{τ_m}, de lo que se sigue que

$$p_{D_{\tau_m}}(\lambda) := \lambda \prod_{j=1}^{m} (\lambda^2 \mathrm{I} + j^2 \Delta) \tag{5.43}$$

anula a D_{τ_m}.

Para $s \in \mathbb{R}_{>0}$ y $-m \leq j \leq m$ entero, definimos

$$\Phi_{s,j} := d_{\tau_m} D_{s,j} \left(\varphi_s \mathrm{I}\right),$$

donde los operadores diferenciales $D_{s,j} \in \mathbb{D}_{\tau_m}$ están dados por (5.40). Como $\Delta \otimes \mathrm{I}$ conmuta con D_{τ_m}, $\Phi_{s,j}$ es autofunción de $\Delta \otimes \mathrm{I}$ con autovalor $-s^2$. Además, $\Phi_{s,j}$ es autofunción de D_{τ_m} con autovalor sj porque

$$(D_{\tau_m} - sj\ \mathrm{I}) \left[\prod_{l \neq j,\ l=-m}^{m} (D_{\tau_m} - sl\ \mathrm{I}) \right] (\varphi_s \mathrm{I}) = D_{\tau_m} \left[\prod_{l=0}^{m} (D_{\tau_m}^2 + l^2 \Delta \otimes \mathrm{I}) \right] (\varphi_s \mathrm{I}) = 0,$$

donde la primera igualdad vale por el hecho de que $\Delta(\varphi_s) = -s^2 \varphi_s$ y la última igualdad sigue de $p_{D_{\tau_m}}(D_{\tau_m}) = 0$.

Finalmente, como $D_{s,j} \in \mathbb{D}_{\tau_m}$ y φ_s es una función (a valores escalares) radial, la función (a valores matriciales) $\Phi_{s,j}$ satisface (3.33). □

Nos gustaría remarcar que hay otra manera de derivar la fórmula anterior (5.41) de las funciones esféricas de tipo τ_m y es consecuencia de la siguiente proposición. Sea φ_s como anteriormente y consideremos el espacio

$$\mathbb{D}_{\tau_m} \varphi_s := \{ (\varphi_s \mathrm{I}) \mid \ D \in \mathbb{D}_{\tau_m} \}. \tag{5.44}$$

Proposición 5.11. *$\mathbb{D}_{\tau_m}\varphi_s$ es un espacio vectorial de dimensión $(2m+1)$ generado por*

$$\left\{\varphi_s \mathrm{I}, D_{\tau_m}(\varphi_s \mathrm{I}), ..., D_{\tau_m}^{2m}(\varphi_s \mathrm{I})\right\}. \tag{5.45}$$

Demostración. Sigue de la Proposición 5.2. □

Consideremos ahora $\mathcal{B}_s := \left\{D_{\tau_m}^l(\varphi_s \mathrm{I})\right\}_{l=0}^{2m}$ una base ordenada de $\mathbb{D}_{\tau_m}\varphi_s$ y $[D_{\tau_m}]_{\mathcal{B}_s}^{\mathcal{B}_s}$ la matriz que representa al operador D_{τ_m} con respecto a dicha base. De (5.43) y usando el hecho que $\Delta(\varphi_s) = -s^2\varphi_s$, el polinomio característico de $[D_{\tau_m}]_{\mathcal{B}_s}^{\mathcal{B}_s}$ es

$$p_{[D_{\tau_m}]_{\mathcal{B}_s}^{\mathcal{B}_s}}(\lambda) = \lambda \prod_{j=1}^{m}(\lambda^2 - j^2 s^2) = \prod_{j=-m}^{m}(\lambda - js). \tag{5.46}$$

Además la matriz $[D_{\tau_m}]_{\mathcal{B}_s}^{\mathcal{B}_s}$ coincide con la forma racional canónica del operador $d\tau_m\left(\sqrt{-1}\ sY_1\right)$ y sus $2m+1$ autovalores son $\{sj\}_{j=-m}^{m}$.

Como cualquier combinación lineal de elementos de $\mathcal{B}_s$ es autofunción de $\Delta \otimes \mathrm{I}$ con autovalor $-s^2$ y satisface (3.33), si queremos determinar funciones esféricas de tipo τ_m, sólo debemos calcular los autovectores de la matriz $[D_{\tau_m}]_{\mathcal{B}_s}^{\mathcal{B}_s}$. Para ello hay que presentar al polinomio característico dado en (5.46) de forma extendida y el sistema lineal para calcular los autovectores de una matriz dada en forma racional es simple de resolver. Asumiendo que hemos resuelto dicho sistema lineal, sea, para cada entero $-m \leq j \leq m$, $v_j = (v_0^j, ..., v_{2m}^j)$ un autovector de $[D_{\tau_m}]_{\mathcal{B}_s}^{\mathcal{B}_s}$, entonces

$$\sum_{l=0}^{2m} v_l^j D_{\tau_m}^l(\varphi_s \mathrm{I}) \tag{5.47}$$

será una autofunción de D_{τ_m}. La condición inicial que dice que toda función esférica de tipo τ_m evaluada en 0 debe ser I, determina el múltiplo de v_j que debemos elegir para obtener efectivamente una función esférica de tipo τ_m de la expresión (5.47).

Corolario 5.12. *Para cada $s \in \mathbb{R}_{>0}$, el espacio vectorial $\mathbb{D}_{\tau_m}\varphi_s$ es de dimensión finita y coincide con el espacio generado por las funciones esféricas de tipo τ_m con autovalor $-s^2$ con respecto al operador $\Delta \otimes \mathrm{I}$, esto es,*

$$< \{\Phi_{s,j}\}_{j=-m}^{m} >= \mathbb{D}_{\tau_m}\varphi_s. \tag{5.48}$$

5.2.4. Relaciones entre los métodos

En la teoría clásica asociada al par de Gelfand $(\mathrm{SO}(n) \ltimes \mathbb{R}^n, \mathrm{SO}(n))$, las funciones esféricas están parametrizadas por un parámetro continuo $s \in \mathbb{R}_{>0}$ y precisamente están dadas a partir de

$$\varphi_s(x) = \int_{S^{n-1}} e^{-is\langle x,\xi\rangle}\ d\sigma(\xi) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{5.49}$$

(revisar 2.5). De aquí vemos que, para cada $s \in \mathbb{R}_{>0}$, φ_s es la transformada de Fourier de la medida normalizada σ_s de la esfera en $\mathbb{R}^n$ radio s centrada en el origen, invariante por $\mathrm{O}(n)$.

En analogía a la relación clásica $\widehat{xf} = i\partial_x \widehat{f}$, las expresiones (5.32) y (5.40) muestran

$$\widehat{P_j(\tfrac{\cdot}{s})\sigma_s} = D_{s,j}\left(\varphi_s \mathrm{I}\right) \qquad (s \in \mathbb{R}_{>0},\ j \in \{-m, ..., m\}). \tag{5.50}$$

Por lo tanto, la relación entre los métodos dados en las secciones 5.2.2 y 5.2.3 para obtener funciones esféricas de tipo τ está dada por la transformada de Fourier. Además podríamos decir que la transformada de Fourier es el "cambio de base" que lleva la medida $P_j(\frac{\cdot}{s})\sigma_s$ en la función esférica $\Phi_{s,j}$, así como lleva la medida de la esfera σ_s en φ_s.

Por último, nos gustaría subrayar que, para todo $s \in \mathbb{R}_{>0}$, las funciones f_0^s dadas en la Sección 5.2.1 son exactamente las funciones esféricas clásicas φ_s del par de Gelfand $(\mathrm{SO}(3) \ltimes \mathbb{R}^3, \mathrm{SO}(3))$ que tiene autovalor $-s^2$ con respecto al operador Laplaciano. A su vez, por completitud, mencionamos que la conexión de los métodos dados en 5.2.1 y 5.2.3 está dada por la familia de cambios de bases, indexada por el parámetro continuo $s \in \mathbb{R}_{>0}$, entre $\mathcal{B}^s$ y $\mathcal{B}_s$. Estos cambios de bases conectan las relaciones diferenciales (5.11) de las funciones f_j^s con el hecho de que cada polinomio Q_j es un polinomio en Q_1 con coeficientes en $\mathbb{C}[|x|^2]$ (revisar la Proposición 5.2). Por su parte, como las proyecciones matriciales P_l están dadas a

parir de polinomios interpolantes de Lagrange en los autovalores $\{\lambda_l\}_{0\leq l\leq 2m}$ de Q_1 y, como hemos dicho, tenemos $Q_j = q_j(Q_1)$ con q_j un polinomio con coeficientes en $\mathbb{C}[|x|^2]$, podemos poner $Q_j = \sum_{l=0}^{2m} q_j(\lambda_l)P_l$.

Concluimos esta sección con el siguiente cuadro que resume las tres maneras en que hemos expresado las funciones τ-esféricas.

Funciones τ-esféricas:

como combinación lineal de funciones radiales por polinomios SO(3)-equivariantes	como transformadas de Fourier de medidas en esferas por operadores de proyección	como derivadas por operadores SO(3)-equivariantes de funciones esféricas clásicas
$\Phi_{s,k}(x) = \sum_{j=0}^{2m} v_j^{(s,k)} f_j^s(\lvert x\rvert) Q_j(x)$	$\Phi_{s,j} = (2m+1)\widehat{P_j(\frac{\cdot}{s})\sigma_s}$	$\Phi_{s,j} = (2m+1) D_{s,j}(\phi_s \mathrm{I})$
f_k^s múltiplo de $J_{j+\frac{1}{2}}(sr)/(\frac{sr}{2})^{j+\frac{1}{2}}$ (J de Bessel) $Q_k : \mathbb{R}^3 \to \mathrm{End}(V_\tau)$ polinomio SO(3)-invariante $(v_j^{(s,k)})_j$ autovector de $D_\tau = d\tau(\partial_x)$ sobre el espacio generado por $\{f_l^s Q_l\}_{l=0}^{2m}$	σ_s medida O(3)-invariante de la s-esfera en $\mathbb{R}^3$ $P_j(\xi) := \prod_{l\neq j;\ l=-m}^{m} \frac{\sqrt{-1}d\tau(\xi)+l\ \mathrm{I}}{l-j} \quad (\xi \in \mathbb{S}^2)$	φ_s función esférica escalar $D_{s,j} := \prod_{l\neq j,\ l=-m}^{m} \frac{D_{\tau_m}-sl\ \mathrm{I}}{sj-sl}$

5.3. Transformada esférica, medida de Plancherel y fórmula de inversión

Sea $F \in L^1_{\tau_m}(\mathbb{R}^3)$. Fijado $x \in \mathbb{R}^3$, $F(x)$ conmuta con $\tau_{m|_{K_x}}$, por lo tanto, por el Lema de Schur, se puede descomponer como

$$F(x) = \sum_{j=-m}^{m} \beta_j(x) P_j(x), \tag{5.51}$$

donde $\beta_j(x) := \operatorname{tr}(F(x)P_j(x)) = \operatorname{tr}(F(x)[P_j(x)]^*)$ son funciones a valores escalares, radiales e integrables.

La transformada de Fourier usual (calculada componente a componente) de F preserva la relación de K-invariancia

$$\widehat{F}(k \cdot y) = \tau_m(k)\widehat{F}(y)\tau_m(k^{-1})$$

y entonces $\widehat{F}$ también se descompone como

$$\widehat{F} = \sum_{j=-m}^{m} h_j P_j, \tag{5.52}$$

donde $h_j = \operatorname{tr}\left(\widehat{F}P_j\right)$.

Fijado $x \in \mathbb{R}^3$, sea $k \in \mathrm{SO}(3)$ tal que $k \cdot e_1 = \frac{x}{|x|}$. Observamos que

$$\begin{aligned}
h_j(x) &= \operatorname{tr}\left(\widehat{F}(x)P_j(x)\right) \\
&= \operatorname{tr}\left(\widehat{F}(x)P_j(\frac{x}{|x|})\right) \\
&= \operatorname{tr}\left(\widehat{F}(|x|k \cdot e_1)P_j(k \cdot e_1)\right) \\
&= \operatorname{tr}\left(\tau_m(k)\widehat{F}(|x|e_1)\tau_m(k)^*\tau_m(k)P_j(e_1)\tau_m(k)^*\right) \\
&= \operatorname{tr}\left(\widehat{F}(|x|e_1)P_j(e_1)\right).
\end{aligned}$$

Luego, cada h_j es una función radial. Más aún, como $\widehat{F} \in C_0(\mathbb{R}^3, \mathrm{End}(V_\tau))$ (el espacio de las funciones a valores matriciales cuyas entradas tienden a cero en el infinito) y $P_j(e_1)$ es una matriz constante, se sigue que $h_j \in C_0(\mathbb{R}^3)$.

Recordemos que hemos denotado por $\mathcal{F}$ a la transformada de Fourier esférica asociada a τ_m y estaba definida según (3.15) por

$$\mathcal{F}(F)(\Phi_{s,j}) := \frac{1}{d_{\tau_m}} \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{tr}(F(x)\Phi_{s,j}(-x))\ dx = \frac{1}{d_{\tau_m}} \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{tr}(F(x)[\Phi_{s,j}(x)]^*)\ dx.$$

A partir de (5.36),

$$\mathcal{F}(F)(\Phi_{s,j}) = \frac{1}{d_{\tau_m}} \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{tr}(F(x)\Phi_{s,-j}(x))\ dx$$

y usando la fórmula integral para las funciones esféricas de tipo τ_m obtenemos

$$\mathcal{F}(F)(\Phi_{s,j}) = \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{tr}\left(F(x)\int_{\mathbb{S}^2} e^{-is\langle x,\xi\rangle} P_{-j}(\xi)\ d\sigma(\xi)\right)\ dx.$$

Para cada punto $\xi \in \mathbb{S}^2$ existe un elemento $k_\xi \in K$ tal que $\xi = k_\xi \cdot e_1$, entonces, usando (5.31) para P_{-j} y (3.33) para F,

$$\mathcal{F}(F)(\Phi_{s,j}) = \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{tr}\left(P_{-j}(e_1)\int_{\mathrm{SO}(3)} F(k^{-1} \cdot x)e^{-is\langle x, k\cdot e_1\rangle}\ dk\right)\ dx.$$

Haciendo un cambio de variables cuando integramos sobre $\mathbb{R}^3$ tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(F)(\Phi_{s,j}) &= \operatorname{tr}\left(P_{-j}(e_1)\int_{\mathbb{R}^3} F(x)e^{-is\langle x,e_1\rangle}\ dx\right) \\
&= \operatorname{tr}\left(P_{-j}(e_1)\widehat{F}(se_1)\right) \\
&= h_{-j}(s).
\end{aligned}$$

Teorema 5.13. *Si $F \in L^1_\tau(\mathbb{R}^3)$ es tal que su transformada de Fourier clásica $\widehat{F}$ es integrable, entonces*

$$F(x) = \sum_{j=-m}^{m} \int_0^\infty \mathcal{F}(F)(\Phi_{r,j})\ \Phi_{r,j}(x)\ r^2\ dr. \tag{5.53}$$

Demostración. Usando la fórmula de inversión clásica se sigue que

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_{\mathbb{R}^3} \widehat{F}(y)\ e^{i\langle x,y\rangle}\ dy \\
&= \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^2} \widehat{F}(r\xi)\ e^{i\langle x,r\xi\rangle}\ d\sigma(\xi)\ r^2\ dr \\
&= \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^2} \sum_{j=-m}^{m} \operatorname{tr}\left(P_j(\xi)\widehat{F}(r\xi)\right)\ P_j(\xi)\ e^{i\langle x,r\xi\rangle}\ d\sigma(\xi)\ r^2\ dr \\
&= \sum_{j=-m}^{m} \int_0^\infty \left(\operatorname{tr}\left(P_j(e_1)\widehat{F}(re_1)\right)\right) \left(\int_{\mathbb{S}^2} P_j(\xi)e^{i\langle x,r\xi\rangle}\ d\sigma(\xi)\right)\ r^2\ dr \\
&= \sum_{j=-m}^{m} \int_0^\infty \operatorname{tr}\left(P_j(e_1)\widehat{F}(re_1)\right)\ \Phi_{r,j}(-x)\ r^2\ dr \\
&= \sum_{j=-m}^{m} \int_0^\infty \mathcal{F}(F)(\Phi_{r,-j})\ \Phi_{r,-j}(x)\ r^2\ dr \\
&= \sum_{j=-m}^{m} \int_0^\infty \mathcal{F}(F)(\Phi_{r,j})\ \Phi_{r,j}(x)\ r^2\ dr.
\end{aligned}$$

(En la cuarta igualdad hemos omitido la constante $\frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})}$.) □

Como corolario se tiene que la medida de Plancherel de $L^1_\tau(\mathbb{R}^3)$ está dada por la medida producto entre la medida de Plancherel asociada al par de Gelfand $(\mathrm{SO}(3)\ltimes\mathbb{R}^3, \mathrm{SO}(3))$ (i.e. la medida de Plancherel del álgebra de las funciones integrables y radiales en $\mathbb{R}^3$) y una suma finita de deltas.

La fórmula de inversión (Teorema 5.13) nos permitirá probar una descomposición de las funciones a valores matriciales que sean suficientemente regulares. Este resultado está inspirado en el resultado principal del artículo [Sc]. Consideremos una función arbitraria en el espacio de Schwartz a valores matriciales, $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3, \mathrm{End}(V_{\tau_m}))$, es decir cuyas entradas son funciones decaen, ellas y sus derivadas, más rápido que cualquier polinomio (es decir, si f es una entrada matricial de F, entonces se tiene que el supremo $\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\{|x^\alpha(\partial_x^\beta f)(x)|\} < \infty$ para todo multíndice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ y $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, con $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) y que a su vez satisface (3.33). Ponemos, como en (5.52), $\widehat{F} = \sum_{j=-m}^{m} h_j P_j$. Observemos que, de la identidad

$$h_j(|x|) = \operatorname{tr}\left(\widehat{F}(|x|e_1)P_j(e_1)\right),$$

las funciones escalares h_j son radiales y están en el espacio de Schwartz de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, (para todo $-m \leq j \leq m$) ya que la transformada de Fourier clásica de F es una función de Schwartz y $P_j(e_1)$ es una matriz constante. Más aún, de la identidad $\mathcal{F}(F)(\Phi_{s,j}) = h_{-j}(s)$ se sigue que $\mathcal{F}(F)$ define una función Schwartz en la variable $s \in \mathbb{R}_{>0}$.

Corolario 5.14. *Si $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3, \mathrm{End}(V_{\tau_m}))$ es tal que cumple (3.33), entonces se puede escribir como*

$$F(x) = \sum_{k=0}^{2m} g_k(x)Q_k(x) \tag{5.54}$$

para ciertas funciones escalares g_k infinitamente diferenciables.

Demostración. Usando el Teorema de Inversión, la fórmula de las funciones esféricas de tipo τ dada en

la Sección 5.2.1 y (5.19) obtenemos

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{j=-m}^{m} \int_0^\infty \mathcal{F}(F)(\Phi_{r,j})\ \Phi_{r,j}(x)\ r^2\ dr \\
&= \sum_{j=-m}^{m} \int_0^\infty h_{-j}(r)\ \left[\sum_{k=0}^{2m} v_k^{(r,j)} f_k(r|x|) Q_k(x)\right]\ r^2\ dr \\
&= \sum_{k=0}^{2m} \left[\sum_{j=-m}^{m} \int_0^\infty v_k^{(r,j)} h_{-j}(r) f_k(r|x|)\ r^2\ dr\right]\ Q_k(x) \\
&= \sum_{k=0}^{2m} \left[\sum_{j=-m}^{m} \int_0^\infty v_k^{(1,j)} r^k h_{-j}(r) f_k(r|x|)\ r^2\ dr\right]\ Q_k(x) \\
&= \sum_{k=0}^{2m} \left[\sum_{j=-m}^{m} v_k^{(1,j)} \int_0^\infty h_{-j}(r) f_k^{|x|}(r)\ r^{k+2}\ dr\right]\ Q_k(x).
\end{aligned}$$

Recordemos que las funciones f_k son funciones esféricas asociadas al par de Gelfand $(\mathrm{M}(2k+3), \mathrm{SO}(2k+3))$ con autovalor -1 con respecto al operador Laplaciano (y las funciones $f_k^{|x|}(r) = f_k(r|x|)$ son funciones esféricas asociadas a estos mismos pares de Gelfand con autovalor $-|x|^2$). Por lo tanto, son funciones acotadas, de hecho están acotadas por 1 ($\|f_k\|_\infty = f_k(0) = 1$). A partir de esto y del hecho que las funciones h_j son funciones de Schwartz, las funciones

$$g_k(x) := \sum_{j=-m}^{m} v_k^{(1,j)} \int_0^\infty h_{-j}(r) f_k(r|x|) r^{k+2} dr$$

están bien definidas para todo $0 \leq k \leq 2m$. Más aún, son infinitamente diferenciables por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue ([Ru3, Teorema 1.34]). En efecto, para las primeras derivadas usando (5.13) tenemos que, para cada $-m \leq j \leq m$,

$$\frac{\partial}{\partial x_l}[f_k(r|x|) h_{-j}(r) r^{k+2}] = -\frac{f_{k+1}(r|x|)}{2k+3} h_{-j}(r) r^{k+4} x_l$$

y estas son funciones integrables en la variable r.

Finalmente y sólo a modo de observación, nos gustaría notar que, para cada $0 \leq k \leq 2m$, como $f_k^{|x|}$ es una función esférica (escalar) del par Gelfand $(\mathrm{SO}(n) \ltimes \mathbb{R}^n, \mathrm{SO}(n))$ con $n = 2k+3$, la expresión

$$\int_0^\infty h_{-j}(r) f_k^{|x|}(r) r^{k+2} dr = \int_0^\infty \frac{h_{-j}(r)}{r^k} f_k^{|x|}(r) r^{2k+2} dr \tag{5.55}$$

coincide con la transformada de Fourier esférica de dicho par de la función $\frac{h_{-j}(r)}{r^k}$, evaluada en el punto $|x|$. A raíz de esto cada función suave g_k puede ser pensada como la transformada de Fourier esférica de una función radial en $\mathbb{R}^{2k+3}$. □

5.3.1. Observación final

Si T un operador sobre funciones de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3, V_{\tau_m})$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3, V_{\tau_m})$, continuo, lineal e invariante por rotaciones y traslaciones, entonces es de convolución

$$T(u) = u * F \qquad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3, V_{\tau_m})$$

para una única $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3, \mathrm{End}(V_{\tau_m})$, SO(3)-equivariante. Si F es una función, entonces

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathrm{End}(V_{\tau_m})$$

y la condición de ser SO(3)-equivariante se refiere simplemente a que

$$F(k \cdot x) = \tau(k) F(x) \tau(k)^{-1} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^3,\ \forall k \in \mathrm{SO}(3).$$

Si F es suficientemente regular entonces podemos escribir a T como

$$T(u)(x) = \sum_{j=-m}^{m} \int_0^\infty \mathcal{F}(F)(\Phi_{r,j})\ u * \Phi_{r,j}(x)\ r^2\ ds.$$

Por lo tanto, toda la información de T está en $\{\mathcal{F}(F)(\Phi_{r,j})\}_{j,r}$ para $-m \leq j \leq m$, $r \in [0, \infty)$. En resumen, hemos hallado una forma de describir ciertos operadores integrales, invariantes por rotaciones y traslaciones, que se aplican a ciertas funciones a valores vectoriales en V_{τ_m} usando el Análisis de Fourier. Sabemos que en este caso todos estos operadores conmutan entre sí (por ser $(\mathrm{SO}(3) \ltimes \mathbb{R}^3, \mathrm{SO}(3), \tau_m)$ una terna conmutativa). La trasformada de Fourier τ_m-esférica puede ser aplicada a todos de la misma manera. Esto generaliza la noción de "diagonalización simultánea". La transformada de Fourier τ_m-esférica va calculando las "coordenadas" con respecto a cada una de las funciones τ_m-esféricas. Estas reemplazan la noción de base ortonormal de un espacio de Hilbert y la transformada de Fourier τ_m-esférica cumple el rol de un "cambio de base". De esta forma se recupera el resultado clásico de álgebra lineal en dimensión finita que establece que toda familia de operadores lineales diagonalizables (tomando como cuerpo a $\mathbb{C}$) que conmutan entre sí si y sólo si pueden diagonalizar simultáneamente (ver por ejemplo [HK, Teorema 8, Capítulo 6]).

Concluimos este capítulo con un cuadro comparativo entre los distintos objetos involucrados al realizar el análisis esférico en el caso clásico o escalar y en el caso matricial que es el tema de esta tesis.

Cuadro comparativo $\quad G = K \ltimes N, \quad N = \mathbb{R}^3, \quad K = \mathrm{SO}(3), \quad$ donde $(k,x)(h,y) = (kh, x + k\cdot y), \quad (\tau, V_\tau) \in \widehat{\mathrm{SO}(3)}$ de dimensión $2m+1$ con $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Caso escalar: τ representación trivial, $V_\tau = \mathbb{C}$	Caso matricial
Espacio homogéneo: $G/K \simeq \mathbb{R}^3,\ g \sim gk \Rightarrow (I,x) \sim (I,x)(k,0) = (k,x)$	Fibrado vectorial homogéneo: $G \times_\tau V_\tau, \quad (g,v) \sim (gk, \tau(k)^{-1}v)$
Secciones del fibrado trivial: $\mathbf{u} : \mathrm{SO}(3) \ltimes \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C} \mid \ \mathbf{u}(gk) = \tilde{u}(g)$ $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3) \quad u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$	Secciones del fibrado: $\mathbf{u} : \mathrm{SO}(3) \ltimes \mathbb{R}^3 \to V_\tau \mid \ \mathbf{u}(gk) = \tau(k)^{-1}\mathbf{u}(g)$ $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3, V_\tau) \quad u : \mathbb{R}^3 \to V_\tau \quad u(x) \longmapsto \mathbf{u}(k,x) = \tau(k)^{-1}u(x)$
$\mathbb{R}^3$ actúa sobre u por traslación SO(3) actúa en u por $(k\cdot u)(x) := u(k^{-1}\cdot x)$	$\mathbb{R}^3$ actúa sobre u por traslación SO(3) actúa en u por $(k\cdot u)(x) := \tau(k)u(k^{-1}\cdot x)$
Núcleos de operadores invariantes por G: $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ radial $f(k\cdot x) = f(x)$	Núcleos de operadores invariantes por G: $F : \mathbb{R}^3 \to End(V_\tau)$ SO(3)-equivariante $F(k\cdot x) = \tau(k)F(x)\tau(k)^{-1}$
$L^1(\mathbb{R}^3)^{\text{radiales}} = L^1_{\tau_0}(\mathbb{R}^3)$	$L^1_\tau(\mathbb{R}^3)$
$(\mathrm{SO}(3) \ltimes \mathbb{R}^3, \mathrm{SO}(3))$ par de Gelfand	$(\mathrm{SO}(3) \ltimes \mathbb{R}^3, \mathrm{SO}(3), \tau)$ terna de Gelfand
$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ radial y acotada es esférica si $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^3)^{\text{radiales}} \to \mathbb{C}$ $(\mathcal{F}(f))(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^3} f(x)\varphi(-x)\ dx$ es un homomorfismo (transformada de Fourier esférica)	$\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathrm{End}(V_\tau)$ K-equivariante y acotada es τ-esférica si $\mathcal{F}_\tau : L^1_\tau(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{C}$ $(\mathcal{F}_\tau(F))(\Phi) := \frac{1}{2m+1}\int_N \mathrm{tr}[F(x)\Phi(x^{-1})]\ dx$ es un homomorfismo (transformada de Fourier τ-esférica)
Operadores diferenciales G-invariantes: generados por Δ	Operadores diferenciales matriciales G-invariantes: generados por $\Delta\mathrm{I}$ & $D_\tau := d\tau(\partial_x)$
Autovalores de las funciones esféricas: $-r^2 \quad r \in [0,\infty)$	Autovalores de las funciones esféricas: $(-r^2, rj) \quad r \in [0,\infty)$ y $j \in \mathbb{Z}$, $-m \leq j \leq m$
Espectro: $\Sigma = [0,\infty)$	Espectro: $\Sigma = [0,\infty) \times \{-m, ..., m\}$
Fórmula de inversión: si f es radial y regular $f(x) = \int_0^\infty \mathcal{F}(f)(\varphi_r)\ \varphi_r(x)\ r^2\ dr$	Fórmula de inversión: si F es K-equivariante y regular $F(x) = \sum_{j=-m}^m \int_0^\infty \mathcal{F}(F)(\Phi_{r,j})\ \Phi_{r,j}(x)\ r^2\ dr$
Medida de Plancherel sobre Σ: $\quad r\ dr$	Medida de Plancherel sobre Σ: medida producto entre $r\ dr$ y una medida discreta

Capítulo 6

Funciones esféricas en $\mathbb{R}^n$ como límite de funciones esféricas en $\mathbb{S}^n$

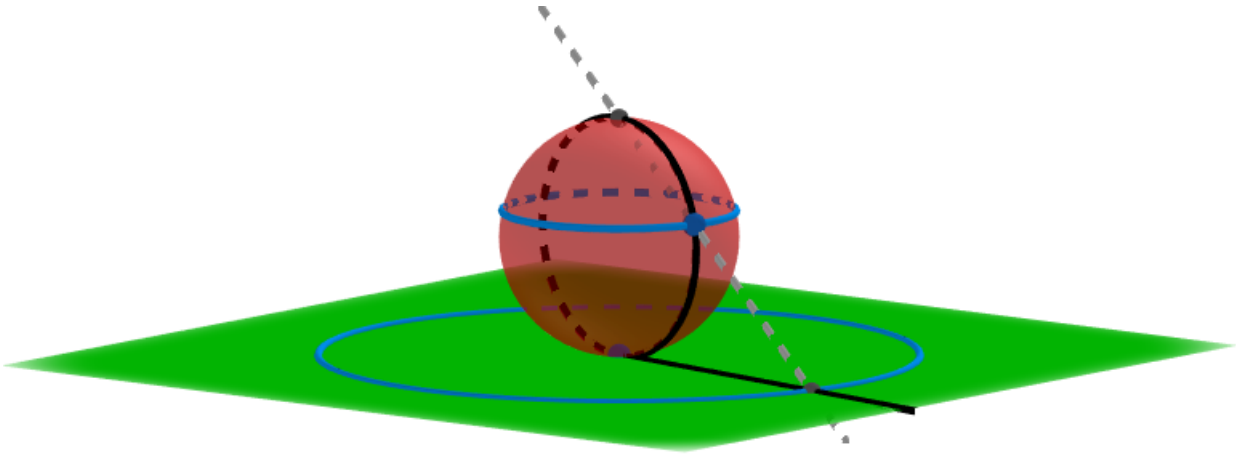


Figura 6.1: Motivación del capítulo.

La figura precedente es la que ilustrará el último apartado de esta tesis. El objetivo central será obtener todas las funciones esféricas del par de Gelfand fuerte $(\mathrm{M}(n), \mathrm{SO}(n))$ como un adecuado límite de funciones esféricas asociadas al par de Gelfand fuerte $(\mathrm{SO}(n+1), \mathrm{SO}(n))$.

Los pares $(\mathrm{M}(n), \mathrm{SO}(n))$ y $(\mathrm{SO}(n+1), \mathrm{SO}(n))$ están asociados a las variedades homogéneas $\mathbb{R}^n \simeq \mathrm{M}(n)/\mathrm{SO}(n)$ (el espacio euclídeo n-dimensional) y $\mathbb{S}^n \simeq \mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n)$ (la esfera embebida en $\mathbb{R}^{n+1}$), como se muestran en la Figura 6.1 en verde y rojo para $n = 2$. Las órbitas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{S}^n$ bajo la acción de $\mathrm{SO}(n)$ aparecen esquematizadas en color azul (para $n = 2$). Hemos mencionado estos objetos desde el primer capítulo de esta tesis en los Ejemplos 1.14 y 1.15. En la Sección 2.5 vimos las funciones esféricas escalares asociadas a los pares de Gelfand $(\mathrm{M}(n), \mathrm{SO}(n))$ y $(\mathrm{SO}(n+1), \mathrm{SO}(n))$. Las que corresponden al primer par son funciones sobre $\mathbb{R}^n$ radiales, es decir, sólo dependen de una semirrecta $[0, \infty)$ como la señalada en la Figura 6.1 para el caso del plano. Las funciones esféricas del segundo par son funciones cuyo dominio es la esfera $\mathbb{S}^n$ y son zonales, es decir, sólo dependen de los valores que toman en un meridiano como el marcado en línea no punteada en color negro en 6.1. El esquema 6.1 permite intuir que podemos vincular las funciones esféricas de uno y otro par a partir de relacionar sus dominios.

Evidencias de que esto es posible encontramos por ejemplo a raíz de la fórmula clásica de Mehler–Heine para funciones especiales. Introducida por Heine en 1861 y por Mehler en 1868, la fórmula establece que la función de Bessel J_0 es límite de polinomios de Legendre P_N de orden N

$$\lim_{N\to\infty} P_N\Big(\cos(\frac{z}{N})\Big) = J_0(z), \tag{6.1}$$

donde el límite es uniforme sobre z para cualquier dominio acotado del plano complejo. Podemos observar que las funciones del lado izquierdo de (6.1) son las funciones esféricas del par de Gelfand $(\mathrm{SO}(3), \mathrm{SO}(2))$

y la función del lado derecho es una función esférica del par de Gelfand $(\mathrm{M}(2), \mathrm{SO}(2))$ (de hecho las demás funciones esféricas de este par son $\{J_0(Rz)\}_{R\in[0,\infty)}$). (Revisar la Sección 2.5.) La siguiente es una generalización bien conocida de (6.1)

$$\lim_{N\to\infty} \frac{P_N^{\alpha,\beta}\left(\cos(\frac{z}{N})\right)}{N^\alpha} = \frac{J_\alpha(z)}{\left(\frac{z}{2}\right)^\alpha}\ , \tag{6.2}$$

donde cada $P_N^{\alpha,\beta}$ es un polinomio de Jacobi y J_α es la función de Bessel de primera especie de orden α. Su demostración se puede encontrar en el libro clásico [Sz] y utiliza la *fórmula de Strirling*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\ \left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1.$$

Para $\alpha = \beta = \frac{n-2}{2}$ la fórmula asintótica (6.2) relaciona otras funciones esféricas clásicas. En el lado izquierdo de (6.2) encontramos polinomios de Gegenbauer, que son los polinomios ortogonales que corresponden a las funciones esféricas del par $(\mathrm{SO}(n+1), \mathrm{SO}(n))$, mientras que en el lado derecho $\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(z)}{\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}}}$ es una función esférica asociada al par $(\mathrm{M}(n), \mathrm{SO}(n))$ (sin normalizar). Todas las funciones esféricas escalares de $(\mathrm{M}(n), \mathrm{SO}(n))$ son en esencia $\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(Rz)}{\left(\frac{Rz}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}}}$ para $R \in [0,\infty)$. (Ver nuevamente la Sección 2.5).

En este capítulo generalizaremos dichas fórmulas asintóticas a funciones esféricas de tipo τ. Necesitaremos la noción de contracción de grupos (*group contraction*) introducida por Inönü y Wigner en [IW]. Además, los resultados debidos a A. Dooley y J. Rice que se pueden encontrar en [DR1] serán muy importantes a la hora de probar lo que queremos: *recuperar todas las funciones esféricas (a valores escalares y a valores matriciales) del par de Gelfand fuerte* $(\mathrm{M}(n), \mathrm{SO}(n))$ *como un adecuado límite de funciones esféricas asociadas al par de Gelfand fuerte* $(\mathrm{SO}(n+1), \mathrm{SO}(n))$ *usando la noción de contracción de grupos*. Nuestro resultado más destacado se condensa en el Teorema 6.12.

Por otra parte, probaremos un resultado análogo pero cambiando el grupo $\mathrm{SO}(n+1)$ por la componente conexa de la identidad del grupo de Lorentz $\mathrm{SO}_0(1,n)$. Es decir, consideraremos ahora un grupo no compacto. Los argumentos utilizados en el caso que involucra al grupo compacto $\mathrm{SO}(n+1)$ nos han parecido mucho más complicados que los del caso con el grupo no compacto $\mathrm{SO}_0(1,n)$. De hecho, podremos probar fórmulas asintóticas trabajando con familias más generales de grupos, a saber, con grupos de movimientos rígidos de Cartan. Degenerar el espacio espacio hiperbólico $\mathrm{SO}_0(1,n)/\mathrm{SO}(n)$ en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ y aplicar esto a obtener relaciones entre objetos del análisis armónico ha sido estudiado, en el caso escalar, por ejemplo en [Will]. En cuanto a las ténicas utilizadas en esta última parte, el artículo [DR2] ha sido fundamental. Entre nuestros resultados destacamos el Teorema 6.16 y el Corolario 6.17 así como también la Proposición 6.15. En dicha proposición, utilizando uno de nuestros teoremas probado en el Capítulo 4, se establece una equivalencia entre ternas conmutativas (G, K, τ), donde (G, K) es un par simétrico Riemanniano, y ternas conmutativas $(K \ltimes \mathfrak{p}, K, \tau)$, donde $K \ltimes \mathfrak{p}$ es el grupo de movimientos rígidos de Cartan asociado a (G, K).

Este capítulo de cierre da cuenta de una forma de conectar la teoría del análisis esférico en espacios homogéneos con respecto a un grupo que es un producto semidirecto con la de espacios que son homogéneos bajo la acción de un grupo de Lie semisimple (compactos o no compactos).

6.1. Contracción de grupos

La noción de contracción de grupos que discutiremos en este apartado tiene su origen en la física teórica y fue introducida por Inönü y Wigner en [IW]. La siguiente definición formal ha sido tomada de [R, p. 211]).

Definición 6.1. Si G y H son grupos de Lie conexos con la misma dimensión, decimos que la familia $\{D_\alpha\}$ de funciones infinitamente diferenciables $D_\alpha : H \to G$, que aplican el elemento identidad e_H de H en la identidad e_G de G, define una *contracción de G a H* si dado cualquier entorno relativamente compacto (cuya clausura es compacta) V de e_H

(i) existe un índice α_V tal que para $\alpha > \alpha_V$, $(D_\alpha)_{|_V}$ resulta difeomorfismo,

(*ii*) si W es tal que $W^2 \subset V$ y $\alpha > \alpha_V$, entonces $D_\alpha(W)^2 \subset D_\alpha(V)$ y

(*iii*) para $h_1, h_2 \in W$,

$$\lim_{\alpha\to\infty} D_\alpha^{-1}\left(D_\alpha(h_1)D_\alpha(h_2)^{-1}\right) = h_1 h_2^{-1}$$

uniformemente en $V \times V$.

En particular, para $G = \mathrm{SO}(n+1)$ y $H = \mathrm{M}(n)$ consideramos la siguiente familia de contracción $\{D_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{R}_{>0}}$,

$$\begin{aligned} D_\alpha : \mathrm{M}(n) &\longrightarrow \mathrm{SO}(n+1) \\ D_\alpha(k,x) &:= \exp\left(\frac{x}{\alpha}\right)\ k, \end{aligned} \tag{6.3}$$

donde exp denota la función exponencial de $\mathfrak{so}(n+1)$ en $\mathrm{SO}(n+1)$ y donde hemos identificado (como espacios vectoriales) $\mathbb{R}^n$ con el complemento de $\mathfrak{so}(n)$ en $\mathfrak{so}(n+1)$ que es invariante bajo la acción adjunta de $\mathrm{SO}(n)$. Escribiendo

$$\begin{aligned} D_\alpha(k_1,x_1)D_\alpha(k_2,x_2) &= \exp\left(\frac{1}{\alpha}x_1\right)\ k_1\ \exp\left(\frac{1}{\alpha}x_2\right)\ k_2 \\ &= \exp\left(\frac{1}{\alpha}x_1\right)\left[k_1\ \exp\left(\frac{1}{\alpha}x_2\right)k_1^{-1}\right]k_1\ k_2 \\ &= \exp\left(\frac{1}{\alpha}x_1\right)\ \exp\left(\mathrm{Ad}(k_1)\frac{1}{\alpha}x_2\right)\ k_2 \end{aligned}$$

(donde Ad denota la representación adjunta de $\mathrm{SO}(n)$) y usando la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff podemos derivar, en el límite $\alpha \to \infty$, la propiedad (*iii*) para todo $(k_1,x_1),(k_2,x_2) \in \mathrm{M}(n)$.

A nivel de álgebras de Lie y para $n = 2$, la contracción de $\mathfrak{so}(3)$ en el álgebra de Lie de $\mathrm{SO}(2) \ltimes \mathbb{R}^2$ se puede entender del siguiente modo. Sea $\{X_1, X_2, X_3\}$ una base de $\mathfrak{so}(3)$ cuyos corchetes de Lie están dados por

$$[Y_1,Y_2] = Y_3, \qquad [Y_2,Y_3] = Y_1, \qquad [Y_3,Y_1] = Y_2.$$

Si hacemos el cambio de variable

$$Z_1 := \frac{1}{\alpha}Y_1, \qquad Z_2 := \frac{1}{\alpha}Y_2, \qquad Z_3 := Y_3,$$

los nuevos corchetes quedan

$$[Z_1,Z_2] = \frac{1}{\alpha^2}Z_3, \qquad [Z_2,Z_3] = Z_1, \qquad [Z_3,Z_1] = Z_2.$$

La contracción en el límite $\alpha \to \infty$ trivializa el primer conmutador y da lugar a elementos $\{X_1, X_2, X_3\}$ que generan el álgebra de Lie de $\mathrm{SO}(2) \ltimes \mathbb{R}^2$ ya que

$$[X_1,X_2] = 0, \qquad [X_2,X_3] = X_1, \qquad [X_3,X_1] = X_2.$$

6.2. Caso compacto

A lo largo de esta sección denotaremos por K al grupo de Lie isomorfo al grupo de rotaciones $\mathrm{SO}(n)$ que es, dependiendo del contexto, un subgrupo de $\mathrm{SO}(n+1)$ o un subgrupo de $\mathrm{M}(n)$. En el primer caso se identifica con el estabilizador $\{g \in \mathrm{SO}(n+1) \mid\ g \cdot e_1 = e_1\}$ (donde e_1 indica el vector canónico $(1,0,...,0) \in \mathbb{R}^{n+1}$) y en el segundo caso con $\mathrm{SO}(n) \times \{0\}$.

6.2.1. Un carácter, una función y una sucesión especiales

Introduciremos un carácter especial γ de $\mathrm{SO}(n+1)$ y también una función en particular ψ que jugarán papeles centrales más adelante.

Sea m la parte entera de $(n+1)/2$ y sea $\mathbb{T}^m$ un toro maximal de $\mathrm{SO}(n+1)$ como en la Sección 1.2.3. Sea $\gamma : \mathbb{T}^m \to \mathbb{C}$ la proyección sobre el primer factor, es decir,

$$\gamma(e^{i\theta_1},...,e^{i\theta_m}) := e^{i\theta_1}.$$

La representación irreducible de $\mathrm{SO}(n+1)$ asociada con γ (por el teorema de Borel-Weil-Bott) es equivalente a la representación estándar [DR1, Lemma 1]. Más aún, para cada $\ell \in \mathbb{N}$, la representación irreducible de $\mathrm{SO}(n+1)$ que tiene por carácter a la ℓ-ésima potencia de γ ($\gamma^\ell(e^{i\theta_1}, ..., e^{i\theta_m}) = e^{i\ell\theta_1}$) es la que corresponde a la partición $(\ell, 0, ..., 0)$ (y por lo tanto puede ser realizada sobre el espacio de polinomios homogéneos y armónicos de grado ℓ en $\mathbb{R}^{n+1}$ con coeficientes complejos).

La representación trivial de K aparece con multiplicidad uno en la representación estándar de $\mathrm{SO}(n+1)$ como K-módulo. En consecuencia podemos tomar un vector K-fijo para la representación estándar, es decir, una función $\psi : \mathrm{SO}(n+1) \to \mathbb{C}$ que cumple (1.23), (1.24) y tal que

$$\psi(kg) = \psi(g) \qquad \text{para todo } k \in K \text{ y } g \in \mathrm{SO}(n+1).$$

Mán aún, podemos elegirla tal que $\psi(k) = 1$ para todo $k \in K$. Observemos que ψ es el vector fijo normalizado de la representación estándar de $\mathrm{SO}(n+1)$.

A continuación sintetizamos los resultados probados por A. Dooley y J. Rice en [DR1, Secciones 3 y 4] que se utilizarán en la próxima sección.

Definición 6.2. [DR1, Definición 4] Dados $R \in \mathbb{R}_{>0}$ y $\sigma \in \widehat{\mathrm{SO}(n-1)}$ con partición $(\sigma_1, ..., \sigma_{m-1})$, consideramos

$$(\omega_{\sigma,R}, \mathcal{H}_{\sigma,R}) \in \widehat{\mathrm{M}(n)}$$

dada por (1.32). La sucesión de caracteres de $\mathbb{T}^m$

$$\{\gamma^\ell \chi_\sigma\}_{\ell=1}^\infty$$

define, para $\ell \geq \sigma_1$, una sucesión de representaciones unitarias irreducibles de $\mathrm{SO}(n+1)$

$$\{(\rho_{\sigma,\ell}, \mathcal{H}_{\sigma,\ell})\}_\ell$$

(como en la Sección 1.2.3) y es llamada *sucesión de contracción* asociada a $\omega_{\sigma,R}$. Para cada entero no negativo $\ell \geq \sigma_1$, hemos denotado por $\mathcal{H}_{\sigma,\ell}$ al espacio de funciones que satisfacen las condiciones (1.23) y (1.24) y por lo tanto es un modelo para $\rho_{\sigma,\ell}$.

Lema 6.3. *[DR1, Lema 5]*

- *Para cada $\ell \in \mathbb{N}$, la multiplicación por la función ψ define una aplicación lineal de $\mathcal{H}_{\sigma,\ell}$ en $\mathcal{H}_{\sigma,\ell+1}$. A su vez, debido a que $\psi_{|\mathrm{SO}(n)} \equiv 1$, si $\tilde{f} \in \mathcal{H}_{\sigma,\ell}$, entonces las restricciones de $\tilde{f}$ y $\psi\tilde{f} \in \mathcal{H}_{\sigma,\ell+1}$ a $\mathrm{SO}(n)$ son las mismas.*
- *Los espacios $\{\mathcal{H}_{\sigma,\ell}{}_{|\mathrm{SO}(n)}\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ de restricciones a $\mathrm{SO}(n)$ forman una sucesión creciente de subespacios de $\mathcal{H}_{\sigma,R}$.*

Teorema 6.4. *[DR1, Teorema 1 y Corolario 1]. Sea $\psi^\ell := \psi \circ ... \circ \psi$. Dado un entero no negativo ℓ_0 y una función $\tilde{f} \in \mathcal{H}_{\sigma,\ell_0}$ arbitraria, para cualquier subconjunto compacto B de $\mathbb{R}^n$ se tiene que los siguientes límites convergen uniformemente para $(k, x) \in \mathrm{SO}(n) \times B$*

$$\lim_{\ell\to\infty} \left(\rho_{\sigma,\ell_0+\ell}(D_{\ell/R}(k,x))(\psi^\ell \tilde{f})\right)(s) = \left(\omega_{\sigma,R}(k,x)(\tilde{f}_{|\mathrm{SO}(n)})\right)(s) \qquad \forall s \in \mathrm{SO}(n) \text{ y} \tag{6.4}$$

$$\lim_{\ell\to\infty} \left\|\rho_{\sigma,\ell_0+\ell}(D_{\ell/R}(k,x))(\psi^\ell \tilde{f}) - \omega_{\sigma,R}(k,x)(\tilde{f}_{|\mathrm{SO}(n)})\right\|_{L^2(\mathrm{SO}(n))} = 0. \tag{6.5}$$

Corolario 6.5. *[DR1, Corolario 2] La unión creciente $\bigcup_{\ell=1}^\infty \left(\mathcal{H}_{\sigma,\ell}{}_{|\mathrm{SO}(n)}\right)$ es densa en $\mathcal{H}_{\sigma,R}$ con respecto a la norma de $L^2(\mathrm{SO}(n))$.*

6.2.2. El teorema de aproximación

El objetivo de esta sección es probar que **toda** función esférica de tipo τ correspondiente al par de Gelfand fuerte $(\mathrm{M}(n), K)$ puede ser obtenida partir de un apropiado límite de **ciertas** funciones esféricas de tipo τ asociadas al par de Gelfand fuerte $(\mathrm{SO}(n+1), K)$.

Fijamos entonces (τ, V_τ) una representación unitaria irreducible de K arbitraria y una función esférica Φ de tipo τ de $(\mathrm{M}(n), K)$. Como hemos visto en los capítulos previos, por el Teorema 3.35 Φ es siempre

de tipo positivo y por lo tanto está asociada a una representación unitaria irreducible de $\mathrm{M}(n)$. Es decir, debemos considerar $(\omega_{\sigma,R}, \mathcal{H}_{\sigma,R}) \in \widehat{\mathrm{M}(n)}$ tal que $\tau \subset \omega_{\sigma,R}$ como K-módulo, esto es, tal que τ aparezca en la descomposición de $\omega_{\sigma,R}$ en representaciones irreducibles como K-submódulo. Denotamos por $\mathcal{H}_{\sigma,R}(\tau)$ la componente τ-isotípica de $\mathcal{H}_{\sigma,R}$ y por $\Phi := \Phi^{\tau,\mathrm{M}(n)}_{\omega_{\sigma,R}}$ a la función esférica correspondiente a la representación $\omega_{\sigma,R}$ de $\mathrm{M}(n)$ (ver (3.24)). Debemos hacer notar que $\omega_{\sigma,R}$ corresponde, a partir de la teoría de Mackey, a una órbita no-trivial de la acción de $\mathrm{SO}(n)$ en $\mathbb{R}^n$. Esto se debe a que el conjunto de representaciones provenientes de la órbita trivial $\{0\}$ tienen medida de Plancherel nula y no aportarán funciones esféricas (ni τ-esféricas) cuyas "direcciones" aparezcan en la formula de inversión para la transformada de Fourier esférica (y τ-esférica).

De acuerdo a la Sección 1.2.5

$$\omega_{\sigma,R} = \mathrm{Ind}_{\mathrm{SO}(n-1)\ltimes\mathbb{R}^n}^{\mathrm{SO}(n)\ltimes\mathbb{R}^n}(\sigma \otimes \chi_R).$$

Entonces coinciden las multiplicidades

$$m(\tau, \omega_{\sigma,R}) = m(\tau, \mathrm{Ind}_{\mathrm{SO}(n-1)}^{\mathrm{SO}(n)}(\sigma)).$$

Por el teorema de reciprocidad de Frobenius,

$$m(\tau, \mathrm{Ind}_{\mathrm{SO}(n-1)}^{\mathrm{SO}(n)}(\sigma)) = m(\sigma, \tau_{|\mathrm{SO}(n-1)}).$$

Luego, $\tau \subset \omega_{\sigma,R}$ como $\mathrm{SO}(n)$-módulo si y sólo si $\sigma \subset \tau$ como $\mathrm{SO}(n-1)$-módulo. Más aún,

$$m(\tau, \omega_{\sigma,R}) = m(\sigma, \tau). \tag{6.6}$$

Observación 6.6. Denotamos a la partición de τ por $(\tau_1, ..., \tau_m)$ si $n = 2m$ y por $(\tau_1, ..., \tau_{m-1})$ cuando $n = 2m-1$. Sea $(\sigma_1, ..., \sigma_{m-1})$ la partición correspondiente a $\sigma \in \widehat{\mathrm{SO}(n-1)}$. Estamos asumiendo que $\tau \subset \omega_{\sigma,R}$. De (6.6) y las fórmulas de restricción dadas en la Sección 1.2.3 tenemos lo siguiente:

- Si $n = 2m$, de (1.22) deducimos que

$$\tau_1 \geq \sigma_1 \geq \tau_2 \geq \sigma_2 \geq \ \dots \ \geq \tau_{m-1} \geq \sigma_{m-1} \geq |\tau_m|. \tag{6.7}$$

- Si $n = 2m-1$, se sigue de (1.21) que

$$\tau_1 \geq \sigma_1 \geq \tau_2 \geq \sigma_2 \geq \ \dots \ \geq \sigma_{m-2} \geq \tau_{m-1} \geq |\sigma_{m-1}|. \tag{6.8}$$

Seguidamente consideraremos una familia de representaciones unitarias irreducibles de $\mathrm{SO}(n+1)$ que formen una sucesión de contracción para $\omega_{\sigma,R}$.

Denotamos por χ_σ al carácter de σ. El grupo especial ortogonal $\mathrm{SO}(n-1)$ puede embeberse en $\mathrm{SO}(n+1)$ colocando un bloque 2×2 de la matriz identidad en la esquina superior izquierda. Sea $\mathbb{T}^m$ el toro maximal de $\mathrm{SO}(n+1)$ y $\mathbb{T}^{m-1}$ el de $\mathrm{SO}(n-1)$ dados como en la Sección 1.2.3. Concretamente, si $n+1$ es par

$$\mathbb{T}^m \supset \mathbb{T}^{m-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & \\ & & \cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) & & & \\ & & -\sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \cos(\theta_m) & \sin(\theta_m) \\ & & & & & -\sin(\theta_m) & \cos(\theta_m) \end{pmatrix} \mid \ \theta_2, ..., \theta_m \in \mathbb{R} \right\}.$$

Cuando $n+1$ es impar es de la misma forma pero con un 1 es la esquina inferior derecha. Consideramos una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{so}(n+1,\mathbb{C})$ generada por $\{H_1, H_2, ..., H_m\}$ como en la Sección 1.2.3. Por las relaciones de ortogonalidad con respecto a la forma de Killing, podemos pensar que $\{H_2, ..., H_m\}$ es base de la subálgebra de Cartan de $\mathfrak{so}(n-1,\mathbb{C})$ embebida en $\mathfrak{so}(n+1,\mathbb{C})$.

Para cada entero no negativo ℓ, sea $(\rho_{\sigma,\ell}, \mathcal{H}_{\sigma,\ell})$ la representación de $\mathrm{SO}(n+1)$ construida como en la Sección 1.2.3 a partir del carácter $\gamma^\ell \chi_\sigma$ de $\mathbb{T}^m$. Es fácil ver que su partición es $(\ell, \sigma_1, ..., \sigma_{m-1})$. Si $\ell \in \mathbb{N}$ es tal que $\ell < \sigma_1$, la representación $\rho_{\sigma,\ell}$ es trivial y si $\ell \geq \sigma_1$, la representación $\rho_{\sigma,\ell}$ es irreducible.

Lema 6.7. *Si τ aparece en la descomposición en irreducibles de $\omega_{\sigma,R}$ como K-módulo, entonces τ aparece en la descomposición de $\rho_{\sigma,\ell}$ como K-módulo para todo $\ell \geq \tau_1$.*

Demostración. Aplicaremos varios de los enunciados dados en la Sección 1.2.3 recordando además que vale (6.6).

- Caso $n+1 = 2m+1$:

  Como $\rho_{\sigma,\ell}$ corresponde a la partición $(\ell, \sigma_1, ..., \sigma_{m-1})$, se sigue de (6.7) y (1.21) que τ aparece en la descomposición de $\rho_{\sigma,\ell}$ como K-módulo si $\ell \geq \tau_1$.

- Caso $n+1 = 2m$:

  Si $\ell \geq \tau_1$, se deduce de (6.8) y (1.22) que τ aparece en la descomposición de $\rho_{\sigma,\ell}$ como K-módulo.

□

Observación 6.8. Notamos que, a partir de (1.32), la representación $\omega_{\sigma,R}$ restringida a K actúa en $\mathcal{H}_{\sigma,R}$ por la acción regular a izquierda, es decir, para cada $k \in K$,

$$(\omega_{\sigma,R}(k,0)f)(k_0) = (L_k(f))(k_0) = f(k^{-1}k_0) \qquad \forall k_0 \in K \quad \text{y} \quad \forall f \in \mathcal{H}_{\sigma,R}.$$

Además, para cada $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\mathcal{H}_{\sigma,\ell|_K}$ es un K-submódulo de $\mathcal{H}_{\sigma,R}$. Luego, el operador de restricción definido por

$$Res_\ell(\tilde{f}) := \tilde{f}_{|K} \qquad \forall \tilde{f} \in \mathcal{H}_{\sigma,\ell}$$

entrelaza $\mathcal{H}_{\sigma,\ell}$ y $\mathcal{H}_{\sigma,R}$ como K-módulos,

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}_{\sigma,\ell} \arrow[r, "Res_\ell"] \arrow[d, "\rho_{\sigma,\ell}(k)"] & \mathcal{H}_{\sigma,\ell|_K} \subset \mathcal{H}_{\sigma,R} \arrow[d, "(\rho_{\sigma,\ell})_{|K}(k)=L_k=\omega_{\sigma,R}(k,0)"] \\
\mathcal{H}_{\sigma,\ell} \arrow[r, "Res_\ell"] & \mathcal{H}_{\sigma,\ell|_K} \subset \mathcal{H}_{\sigma,R}
\end{tikzcd}$$

$$(\rho_{\sigma,\ell}(k)\tilde{f})_{|K} = L_k(\tilde{f}_{|K}) \quad \forall k \in K \ \text{ y } \ \forall \tilde{f} \in \mathcal{H}_{\sigma,\ell}.$$

Lema 6.9. *Si $f \in \mathcal{H}_{\sigma,R}(\tau)$, entonces existe $\ell' \in \mathbb{N}$ tal que $f \in \mathcal{H}_{\sigma,\ell|_K}$ para todo $\ell \geq \ell'$. Más aún, si $\ell_0 := \text{máx}\{\tau_1, \ell'\}$, entonces existe una única $\tilde{f} \in \mathcal{H}_{\sigma,\ell_0}(\tau)$ tal que $f = \tilde{f}_{|K}$.*

Demostración. El espacio $\mathcal{H}_{\sigma,R}(\tau) \simeq V_\tau$ es un factor invariante en la descomposición de $\mathcal{H}_{\sigma,R}$ como K-módulo. Recordemos que de la Sección 6.2.1 sabemos que cada $\mathcal{H}_{\sigma,\ell|_K}$ es un subespacio de $\mathcal{H}_{\sigma,R}$, más aún, $\bigcup_{\ell=1}^{\infty}\left(\mathcal{H}_{\sigma,\ell|_{\mathrm{SO}(n)}}\right)$ es densa en $\mathcal{H}_{\sigma,R}$. Como la dimensión de V_τ es finita, existe $\ell' \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{H}_{\sigma,R}(\tau)$ está contenido en $\mathcal{H}_{\sigma,\ell'|_K}$. Adicionalmente, como $\mathcal{H}_{\sigma,\ell|_K} \subset \mathcal{H}_{\sigma,\ell+1|_K}$ para todo $\ell \in \mathbb{N}$, se sigue que $\mathcal{H}_{\sigma,R}(\tau) \subset \mathcal{H}_{\sigma,\ell|_K}$ para todo $\ell \geq \ell'$.

Por su parte, como la descomposición de $\rho_{\sigma,\ell}$ como K-módulo es libre de multiplicidad (para cada $\ell \in \mathbb{N}$), tenemos que el operador Res_ℓ es un isomorfismo lineal que manda la componente irreducible $\mathcal{H}_{\sigma,\ell}(\tau)$ en la componente irreducible $\mathcal{H}_{\sigma,\ell|_K}(\tau)$, para todo $\ell \geq \tau_1$. Finalmente, si f es una función arbitraria en $\mathcal{H}_{\sigma,R}(\tau)$, existe una única $\tilde{f} \in \mathcal{H}_{\sigma,\ell_0}(\tau)$ tal que $\tilde{f}(k) = f(k)$ para todo $k \in K$. □

Lema 6.10. *Sea $\ell_0 \in \mathbb{N}$ como en el Lema 6.9 y sea $\tilde{f} \in \mathcal{H}_{\sigma,\ell_0}(\tau)$, entonces se sigue que $\psi^\ell \tilde{f} \in \mathcal{H}_{\sigma,\ell_0+\ell}(\tau)$ para todo $\ell \in \mathbb{N}$.*

Demostración. De la Sección 6.2.1 sabemos que si $\tilde{f} \in \mathcal{H}_{\sigma,\ell_0}$ entonces $\psi^\ell \tilde{f} \in \mathcal{H}_{\sigma,\ell_0+\ell}$ para todo $\ell \in \mathbb{N}$. Además, como ψ es una función K-invariante, la multiplicación por ψ^ℓ define un operador de entrelazamiento entre $(\rho_{\sigma,\ell_0}, \mathcal{H}_{\sigma,\ell_0})$ y $(\rho_{\sigma,\ell_0+\ell}, \mathcal{H}_{\sigma,\ell_0+\ell})$ como K-módulos.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}_{\sigma,\ell_0} \arrow[r, "\psi^\ell"] \arrow[d, "\rho_{\sigma,\ell_0}(k)"] & \mathcal{H}_{\sigma,\ell_0+\ell} \arrow[d, "\rho_{\sigma,\ell_0+\ell}(k)"] \\
\mathcal{H}_{\sigma,\ell_0} \arrow[r, "\psi^\ell"] & \mathcal{H}_{\sigma,\ell_0+\ell}
\end{tikzcd}$$

$$\psi^\ell(\rho_{\sigma,\ell_0}(k)(\tilde{f})) = \rho_{\sigma,\ell_0+\ell}(k)(\psi^\ell \tilde{f}) \quad \forall k \in K \ \text{ y } \ \forall \tilde{f} \in \mathcal{H}_{\sigma,\ell_0}.$$

Como la descomposición de $\rho_{\sigma,\ell}$ cuando se la restringe a K es libre de multiplicidad (para todo $\ell \in \mathbb{N}$), multiplicar por ψ^ℓ manda componente irreducible en componente irreducible, esto es, aplica $\tilde{f} \in \mathcal{H}_{\sigma,\ell_0}(\tau)$ en $\psi^\ell \tilde{f} \in \mathcal{H}_{\sigma,\ell_0+\ell}(\tau)$. □

Sea ℓ_0 como en el Lema 6.9. Consideramos la familia

$$\{\Phi^{\tau,\mathrm{SO}(n+1)}_{\rho_{\sigma,\ell_0+\ell}}\}_{\ell\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \tag{6.9}$$

de funciones esféricas de tipo τ del par de Gelfand fuerte $(\mathrm{SO}(n+1), K)$ correspondientes a las representaciones $\{\rho_{\sigma,\ell_0+\ell}\}_{\ell\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$.

Con toda la notación introducida previamente enunciamos el siguiente resultado.

Teorema 6.11. *Sean $\tau \in \widehat{\mathrm{SO}(n)}$ y $(\omega_{\sigma,R}, \mathcal{H}_{\sigma,R}) \in \widehat{\mathrm{M}(n)}$ tal que $\sigma \subset \tau$ como $\mathrm{SO}(n-1)$-módulo. Sea $\Phi^{\tau,\mathrm{M}(n)}_{\omega_{\sigma,R}}$ la función esférica de tipo τ de $(\mathrm{M}(n), \mathrm{SO}(n))$ correspondiente a $\omega_{\sigma,R}$ y sea $\{\Phi^{\tau,\mathrm{SO}(n+1)}_{\rho_{\sigma,\ell}}\}_{\ell\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ la familia de funciones esféricas de tipo τ de $(\mathrm{SO}(n+1), \mathrm{SO}(n))$ como en (6.9). Entonces, para cada $f \in \mathcal{H}_{\sigma,R}(\tau)$ existe una única $\tilde{f} \in \mathcal{H}_{\sigma,\ell_0}(\tau)$ tal que para todo subconjunto compacto B de $\mathbb{R}^n$ se tiene que*

$$\lim_{\ell\to\infty} \left(\Phi^{\tau,\mathrm{SO}(n+1)}_{\rho_{\sigma,\ell_0+\ell}}(D_{\ell/R}(k,x))(\psi^\ell \tilde{f})\right)(s) = \left(\Phi^{\tau,\mathrm{M}(n)}_{\omega_{\sigma,R}}(k,x)(f)\right)(s) \qquad \forall s \in \mathrm{SO}(n) \text{ y}$$

$$\lim_{\ell\to\infty} \left\| \left(\Phi^{\tau,\mathrm{SO}(n+1)}_{\rho_{\sigma,\ell_0+\ell}}(D_{\ell/R}(k,x))(\psi^\ell \tilde{f})\right)_{|\mathrm{SO}(n)} - \Phi^{\tau,\mathrm{M}(n)}_{\omega_{\sigma,R}}(k,x)(f) \right\|_{L^2(\mathrm{SO}(n))} = 0,$$

donde las convergencias son uniformes para $(k,x) \in \mathrm{SO}(n) \times B$.

Demostración. Dada $f \in \mathcal{H}_{\sigma,R}(\tau)$ consideramos $\tilde{f}$ como en el Lema 6.9. Antes que nada notamos que $\Phi^{\tau,\mathrm{SO}(n+1)}_{\rho_{\sigma,\ell_0+\ell}}(g) \in \mathrm{End}(\mathcal{H}_{\sigma,\ell_0+\ell}(\tau))$ y por el Lema 6.10, $\psi^\ell \tilde{f} \in \mathcal{H}_{\sigma,\ell_0+\ell}(\tau)$.

Como la convergencia en (6.4) y (6.5) es uniforme para $(k,x) \in \mathrm{SO}(n) \times B$, podemos convolucionar (sobre K) con $d_\tau \overline{\chi_\tau}$ y obtener para todo $s \in K$

$$\lim_{\ell\to\infty} \left(d_\tau \overline{\chi_\tau} * \left(\rho_{\sigma,\ell_0+\ell}(D_{\ell/R}(k,x))(\psi^\ell \tilde{f})_{|K}\right)\right)(s) = \left(d_\tau \overline{\chi_\tau} * \omega_{\sigma,R}(k,x)(f)\right)(s)$$

y también

$$\lim_{\ell\to\infty} \|d_\tau \overline{\chi_\tau} *_K (\rho_{\sigma,\ell_0+\ell}(D_{\ell/R}(k,x))(\psi^\ell \tilde{f})) - d_\tau \overline{\chi_\tau} * (\omega_{\sigma,R}(k,x)(f))\|_{L^2(\mathrm{SO}(n))} = 0.$$

Es inmediato que

$$d_\tau \overline{\chi_\tau} * \left(\rho_{\sigma,\ell_0+\ell}(g)(\psi^\ell \tilde{f})_{|K}\right) = \left(d_\tau \overline{\chi_\tau} *_K \rho_{\sigma,\ell_0+\ell}(g)(\psi^\ell \tilde{f})\right)_{|K} \qquad \forall g \in \mathrm{SO}(n+1).$$

Luego, para cada $g \in \mathrm{SO}(n+1)$ y para todo $s \in K$,

$$\begin{aligned}
\left(d_\tau \overline{\chi_\tau} *_K \rho_{\sigma,\ell_0+\ell}(g)(\psi^\ell \tilde{f})\right)(s) &= d_\tau \int_K \overline{\chi_\tau}(k) \left(\rho_{\sigma,\ell_0+\ell}(g)(\psi^\ell \tilde{f})\right)(k^{-1}s)\, dk \\
&= d_\tau \int_K \overline{\chi_\tau}(k) L_k \left(\rho_{\sigma,\ell_0+l}(g)(\psi^\ell \tilde{f})\right)(s)\, dk \\
&= d_\tau \int_K \overline{\chi_\tau}(k) \rho_{\sigma,\ell_0+\ell}(k) \left(\rho_{\sigma,\ell_0+\ell}(g)(\psi^\ell \tilde{f})\right)(s)\, dk \\
&= P^\tau_{\rho_{\sigma,\ell_0+\ell}} \left(\rho_{\sigma,\ell_0+\ell}(g)(\psi^\ell \tilde{f})\right)(s) \\
&= \left(\Phi^{\tau,\mathrm{SO}(n+1)}_{\rho_{\sigma,\ell_0+\ell}}(g)(\psi^\ell \tilde{f})\right)(s).
\end{aligned}$$

Similarmente, para cada $(k,x) \in \mathrm{M}(n)$ y para todo $s \in K$,

$$\begin{aligned}
\left(d_\tau \overline{\chi_\tau} * \omega_{\sigma,R}(k,x)(f)\right)(s) &= P^\tau_{\omega_{\sigma,R}} \left(\omega_{\sigma,R}(k,x)(f)\right)(s) \\
&= \left(\Phi^{\tau,\mathrm{M}(n)}_{\omega_{\sigma,R}}(k,x)(f)\right)(s).
\end{aligned}$$

(Recordar que $P^\tau_{\rho_{\sigma,\ell_0+\ell}}$ y $P^\tau_{\omega_{\sigma,R}}$ son las proyecciones definidas en (3.14).) □

Nos gustaría cerrar este apartado de manera similar a como lo hacen A. Dooley y J. Rice en la observación final del artículo [DR1], diciendo que el análisis armónico (tanto de funciones a valores escalares como a valores matriciales) en $\mathbb{R}^n$ como espacio homogéneo con respecto al grupo $\mathrm{M}(n)$ se puede obtener como límite (en un sentido apropiado) del análisis armónico en la esfera $\mathbb{S}^n$ como espacio homogéneo con respecto al grupo $\mathrm{SO}(n+1)$. En efecto, consideremos para cada $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ la aplicación

$$\begin{aligned} Res_{\ell_0+\ell} : \mathcal{H}_{\sigma,\ell_0+\ell}(\tau) &\longrightarrow \mathcal{H}_{\sigma,R}(\tau) \\ h &\longmapsto h_{|_K} \end{aligned}$$

y la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\sigma,R}(\tau) &\longrightarrow \mathcal{H}_{\sigma,\ell_0+\ell}(\tau) \\ f &\longmapsto \psi^\ell \tilde{f}, \end{aligned}$$

donde $\tilde{f}$ es como en el Lema 6.9. Estos dos operadores son inversos uno del otro: El proceso de tomar $f \in \mathcal{H}_{\sigma,R}(\tau)$, extenderla a $\mathcal{H}_{\sigma,\ell_0}(\tau)$ para un adecuado $\ell_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y multiplicarla por ψ^ℓ, es el proceso inverso de la aplicación de restricción $\mathcal{H}_{\sigma,\ell_0+\ell}(\tau) \longrightarrow L^2(\mathrm{SO}(n))$. Del teorema previo se sigue que para cada $f \in \mathcal{H}_{\sigma,R}(\tau)$

$$\lim_{\ell\to\infty} \left\| \left[Res_{\ell_0+\ell} \circ \Phi^{\tau,\mathrm{SO}(n+1)}_{\rho_{\sigma,\ell_0+\ell}}(D_{\ell/R}(\cdot)) \circ (Res_{\ell_0+\ell})^{-1} - \Phi^{\tau,\mathrm{M}(n)}_{\omega_{\sigma,R}}(\cdot) \right](f) \right\|_{L^2(\mathrm{SO}(n))} = 0, \tag{6.10}$$

donde la convergencia es uniforme sobre subconjuntos compactos de $\mathrm{M}(n)$. En conclusión, dada una función esférica (a valores escalares o matriciales) del par de Gelfand fuerte $(\mathrm{M}(n), \mathrm{SO}(n))$, esta puede ser obtenida a partir de un proceso de límite que involucra una familia de funciones esféricas del par de Gelfand fuerte $(\mathrm{SO}(n+1), \mathrm{SO}(n))$, una contracción de $\mathrm{SO}(n+1)$ en $\mathrm{M}(n)$ y una familia de operadores de entrelazamiento (las aplicaciones de restricción) asociados a las representaciones que parametrizan a las funciones esféricas. (Podríamos interpretar esto como que, en el límite, los operadores de entrelazamiento *Res* juegan el rol de un cambio de base entre una función esférica asociada al grupo $\mathrm{M}(n)$ y apropiadas funciones esféricas asociadas a $\mathrm{SO}(n+1)$.) Como se vio en la Observación 3.24, para todo $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, las funciones

$$\Phi^{\tau,\mathrm{SO}(n+1)}_{\rho_{\sigma,\ell_0+\ell}} \quad \text{y} \quad Res_{\ell_0+\ell} \circ [\Phi^{\tau,\mathrm{SO}(n+1)}_{\rho_{\sigma,\ell_0+\ell}}(\cdot)] \circ (Res_{\ell_0+\ell})^{-1}$$

representan la misma función esférica (sólo que cuando evaluamos en $g \in G$, la primera resulta un operador sobre $\mathcal{H}_{\sigma,\ell_0+\ell}(\tau)$ y la segunda un operador en $\mathcal{H}_{\sigma,\ell_0+\ell}(\tau)$). Usando el isomorfismo $\mathcal{H}_{\sigma,R}(\tau) \simeq V_\tau$ y nuevamente la Observación 3.24, el límite dado en (6.10) se puede reescribir como

$$\lim_{\ell\to\infty} \left\| \left[\Phi^{\tau,\mathrm{SO}(n+1)}_{\rho_{\sigma,\ell_0+\ell}}(D_{\ell/R}(\cdot)) - \Phi^{\tau,\mathrm{M}(n)}_{\omega_{\sigma,R}}(\cdot) \right](v) \right\|_{V_\tau} = 0 \qquad \text{para todo } v \in V_\tau, \tag{6.11}$$

donde $\|\cdot\|_{V_\tau}$ es una norma del espacio vectorial finito-dimensional V_τ y el límite es uniforme sobre conjuntos compactos de $\mathrm{M}(n)$. De esta manera hemos probado el siguiente teorema.

Teorema 6.12. *Sea $(\tau, V_\tau) \in \widehat{\mathrm{SO}(n)}$ y sea $\Phi^{\tau,\mathrm{M}(n)}$ una función esférica de tipo τ del par de Gelfand fuerte $(\mathrm{M}(n), \mathrm{SO}(n))$. Entonces, existe una sucesión $\{\Phi^{\tau,\mathrm{SO}(n+1)}_\ell\}_{\ell\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ de funciones esféricas de tipo τ del par de Gelfand fuerte $(\mathrm{SO}(n+1), \mathrm{SO}(n))$ y una contracción $\{D_\ell\}_{\ell\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ de $\mathrm{SO}(n+1)$ a $\mathrm{M}(n)$ tal que*

$$\lim_{\ell\to\infty} \Phi^{\tau,\mathrm{SO}(n+1)}_\ell(D_\ell(k,x)) = \Phi^{\tau,\mathrm{M}(n)}(k,x),$$

donde la convergencia es puntual en V_τ y uniforme sobre conjuntos compactos de $\mathrm{M}(n)$.

Observación 6.13. Enfatizamos que este resultado es independiente del modelo que se elija para las representaciones que parametrizan las funciones esféricas.

6.3. Caso no compacto

Esta sección será desarrollada desde el marco general presentado al final de la Sección 1.2.5. En este sentido, consideremos G un grupo de Lie semisimple, *no compacto*, conexo, con centro finito, con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y K un subgrupo compacto de G con álgebra de Lie $\mathfrak{k}$. Más aún, asumiremos que (G, K) es un par Riemnanniano simétrico. Sea $\mathfrak{p}$ un complemento $\mathrm{Ad}_G(K)$-invariante de $\mathfrak{k}$ en $\mathfrak{g}$. Formamos el producto

semidirecto $K \ltimes \mathfrak{p}$ con respecto a la acción adjunta de K en $\mathfrak{p}$. Este es llamado el *grupo de movimientos rígidos de Cartan* asociado al par (G, K).

Como las representaciones *genéricas* de $K \ltimes \mathfrak{p}$ tienen medida de Plancherel *full*, sólo consideremos estas, es decir, las dadas por (1.34)

$$\omega_{\sigma,\phi} = \mathrm{Ind}_{M\ltimes\mathfrak{p}}^{K\ltimes\mathfrak{p}}(\sigma \otimes e^{i\phi(\cdot)}) \qquad (\sigma \in \widehat{M}, \phi \in \mathfrak{a}^*),$$

donde $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ es una subálgebra abeliana maximal contenida $\mathfrak{p}$ y M es el centralizador de $\mathfrak{a}$ en K. En este caso M coincide con el estabilizador K_ϕ (ver (1.33)).

Por otro lado sea $G = KAN$ la descomposición de Iwasawa G, donde $A := \exp_G(\mathfrak{a})$. Sólo consideraremos las representaciones de la *serie principal* de G ya que su complemento tiene medida de Plancherel nula. Es decir, trabajaremos con las representaciones dadas por (1.35)

$$\rho_{\sigma,\phi} = \mathrm{Ind}_{MAN}^{G}(\gamma \otimes \sigma \otimes 1_N) \qquad (\sigma \in \widehat{M}, \phi \in \mathfrak{a}^*). \tag{6.12}$$

A cada representación genérica $\omega_{\sigma,\phi} \in \widehat{K \ltimes \mathfrak{p}}$ le podemos asociar la sucesión $\{\rho_{\sigma,\ell\phi}\}_{\ell=1}^{\infty}$ de representaciones de la serie principal de G. Al igual que en (6.3) consideramos la contracción $\{D_\beta\}_{\beta\in\mathbb{R}_{>0}}$

$$D_\beta : K \ltimes \mathfrak{p} \longrightarrow G$$

$$D_\beta(k, x) := \exp_G(\frac{1}{\beta}x)\ k. \tag{6.13}$$

En analogía con la Sección 6.2.1 consideremos la siguiente función particular

$$s_\phi : G \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$s_\phi(kan) := e^{-i\phi(\log(a))}, \tag{6.14}$$

la cual es K-invariante y vale 1 sobre K. Además, se tiene que, si $f \in H_{\rho_{\sigma,\ell\phi}}$, entonces $s_\phi(f) \in H_{\rho_{\sigma,(\ell+1)\phi}}$ y $s_\phi(f)$ vale lo mismo sobre K que f.

El siguiente resultado, debido a A. Dooley y J. Rice, muestra cómo la sucesión $\{\rho_{\sigma,\ell\phi}\}_{\ell=1}^{\infty}$ aproxima a $\omega_{\sigma,\phi}$.

Teorema 6.14. *[DR2, Teorema 1 y Corolario (4.4)] Para todo $(k, x) \in K \ltimes \mathfrak{p}$ y $F \in H_{\rho_{\sigma,\phi}}$*

$$\lim_{\ell\to\infty} \left\| \left(\rho_{\sigma,\ell\phi}(D_\ell(k, x))(s_\phi^\ell F)\right)_{|_K} - \omega_{\sigma,\phi}(k, x)(F_{|_K}) \right\|_{L^2(K,H_\sigma)} = 0. \tag{6.15}$$

Más aún, si F es una función suave, la convergencia es uniforme sobre conjuntos compactos de $K \ltimes \mathfrak{p}$.

Fijamos ahora $\tau \in \widehat{K}$. Por el teorema de reciprocidad de Frobenius se sigue que $\tau \subset (\omega_{\sigma,\phi})_{|_K}$ y que $\tau \subset (\rho_{\sigma,\ell\phi})_{|_K}$ si y sólo si $\sigma \subset \tau_{|_M}$. En particular,

$$m(\tau, \omega_{\sigma,\phi}) = m(\sigma, \tau) = m(\tau, \rho_{\sigma,\phi}). \tag{6.16}$$

Fijamos entonces $\omega_{\sigma,\phi} \in \widehat{K \ltimes \mathfrak{p}}$ (genérica) tal que τ sea un K-submódulo de $\omega_{\sigma,\phi}$.

Consideramos el operador de restricción

$$Res_{\ell\phi}(F) := F_{|_K} \qquad \text{para toda } F \in H_{\rho_{\sigma,\ell\phi}}.$$

Como la acción de $\rho_{\sigma,\ell\phi}$ es por traslación a izquierda, es obvio que $Res_{\ell\phi}$ entrelaza $H_{\rho_{\sigma,\ell\phi}}$ y $H_{\omega_{\sigma,\phi}}$ como K-módulos: Esto es, para todo $k \in K$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} H_{\rho_{\sigma,\ell\phi}} & \xrightarrow{Res_{\ell\phi}} & \left(H_{\rho_{\sigma,\ell\phi}}\right)_{|_K} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \rho_{\sigma,\ell\phi}(k)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle L_k} \\ H_{\rho_{\sigma,\ell\phi}} & \xrightarrow{Res_{\ell\phi}} & \left(H_{\rho_{\sigma,\ell\phi}}\right)_{|_K}. \end{array}$$

Más aún, $Res_{\ell\phi}$ envía $H_{\rho_{\sigma,\ell\phi}}(\tau)$ en $H_{\omega_{\sigma,\phi}}(\tau)$.

Por otro lado, observamos que la multiplicación por la función s_ϕ es un operador de entrelazamiento entre $H_{\rho_{\sigma,\ell\phi}}$ y $H_{\rho_{\sigma,(\ell+1)\phi}}$ como K-módulos (para cada $\ell \in \mathbb{N}$): Esto es, satisface que, para todo $k \in K$, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} H_{\rho_{\sigma,\ell\phi}} \arrow[r, "s_\phi"] \arrow[d, "(\rho_{\sigma,\ell\phi})_{|K}(k)"] & H_{\rho_{\sigma,(\ell+1)\phi}} \arrow[d, "(\rho_{\sigma,\ell\phi})_{|K}(k)"] \\ H_{\rho_{\sigma,\ell\phi}} \arrow[r, "s_\phi"] & H_{\rho_{\sigma,(\ell+1)\phi}}. \end{tikzcd}$$

En particular, el operador "multiplicar por s_ϕ" mapea $H_{\rho_{\sigma,\ell\phi}}(\tau)$ en $H_{\rho_{\sigma,(\ell+1)\phi}}(\tau)$ (para cada $\ell \in N$).

Ahora, dada $f \in H_{\omega_{\sigma,\phi}}$ la extendemos a G por

$$F(g) = F(k_g a_g n_g) := e^{-i\gamma(\log(a_g))} f(k_g), \tag{6.17}$$

donde $g = k_g a_g n_g$ con $k_g \in K$, $a_g \in A$ y $n_g \in N$ es la descomposición de Iwasawa de $g \in G$. La inversa del operador de restricción definido previamente es

$$Res_{\ell\phi}^{-1}(f) := (s_\phi)^\ell F$$

para toda $f \in H_{\omega_{\sigma,\phi}}(\tau)$, donde F es la función definida por (6.17).

Una vez más tenemos que el siguiente diagrama es conmutativo (para todo $k \in K$)

$$\begin{tikzcd} H_{\omega_{\sigma,\phi}}(\tau) \arrow[r, "Res_{\ell\phi}^{-1}"] \arrow[d, "\omega_{\sigma,\ell\phi}(k)=\tau(k)"] & \left(H_{\rho_{\sigma,\ell\phi}}\right)(\tau) \arrow[d, "(\rho_{\sigma,\ell\phi})_{|K}(k)=\tau(k)"] \\ H_{\omega_{\sigma,\phi}}(\tau) \arrow[r, "Res_{\ell\phi}^{-1}"] & \left(H_{\rho_{\sigma,\ell\phi}}\right)(\tau). \end{tikzcd}$$

Con todo esto en mente, el Teorema 6.14 puede ser reescrito de la siguiente forma: Para toda $(k,x) \in K \ltimes \mathfrak{p}$ y $f \in H_{\omega_{\sigma,\phi}}(\tau)$,

$$\lim_{\ell\to\infty} \left\| \left(Res_{\ell\phi} \circ \rho_{\sigma,\ell\phi}\left(D_\ell(k,x)\right) \circ Res_{\ell\phi}^{-1} - \omega_{\sigma,\phi}(k,x) \right)(f) \right\|_{L^2(K,H_\sigma)} = 0. \tag{6.18}$$

Por último, de (3.14), las proyecciones $P^\tau_{\omega_{\sigma,\phi}}$ y $P^\tau_{\rho_{\sigma,\ell\phi}}$ están dadas a partir de la misma expresión, es decir, por la convolución en K con $d_\tau \overline{\chi_\tau}$. Más aún, son operadores continuos. Luego, a partir de la última expresión (6.18) obtenemos la fórmula asintótica

$$\lim_{\ell\to\infty} \left\| \left(P^\tau_{\rho_{\sigma,\ell\phi}} \circ Res_{\ell\phi} \circ \rho_{\sigma,\ell\phi}\left(D_\ell(k,x)\right) \circ Res_{\ell\phi}^{-1} - P^\tau_{\omega_{\sigma,\phi}} \circ \omega_{\sigma,\phi}(k,x) \right)(f) \right\|_{L^2(K,H_\sigma)} = 0. \tag{6.19}$$

Proposición 6.15. *Sea G un grupo de Lie semisimple, conexo, no compacto y sea K un subgrupo cerrado de G tal que (G,K) es un par simétrico Riemanniano. Sea $K \ltimes \mathfrak{p}$ el grupo de movimientos rígidos de Cartan asociado a (G,K) y sea $\tau \in \widehat{K}$. La terna (G,K,τ) es conmutativa si y sólo si $(K \ltimes \mathfrak{p}, K, \tau)$ es conmutativa. En particular, (G,K) es un par de Gelfand fuerte si y sólo si $(K \ltimes \mathfrak{p}, K)$ es un par de Gelfand fuerte.*

Demostración. La medida de Plancherel de $K \ltimes \mathfrak{p}$ está concentrada en el conjunto de representaciones unitarias irreducibles *genéricas* de $K \ltimes \mathfrak{p}$. Respectivamente, la medida de Plancherel de G está concentrada en el conjunto de representaciones de la *serie principal*. Por el Teorema 4.4, $(K \ltimes \mathfrak{p}, K, \tau)$ es una terna conmutativa si y sólo si $m(\tau,\omega) \leq 1$ para toda ω en un subconjunto de $\widehat{K \ltimes \mathfrak{p}}$ con medida de Plancherel *full*. (Recordemos que para la prueba del Teorema 4.4 nos basamos en la ideas dadas en [BJR1] para pares de Gelfand.) Entonces tomamos una representación genérica arbitraria y una representación de la serie principal, $\omega_{\sigma,\phi} \in \widehat{K \ltimes \mathfrak{p}}$ y $\rho_{\sigma,\phi} \in \widehat{G}$, como en (1.34) y (1.35) respectivamente, para $\sigma \in \widehat{M}$ y $\phi \in \mathfrak{a}^*$. Por (6.16), $m(\tau,\omega_{\sigma,\phi}) = m(\tau,\rho_{\sigma,\phi})$ y la conclusión de esta proposición sigue de forma inmediata. $\square$

Teorema 6.16. *Sea G un grupo de Lie semisimple, conexo, no compacto y sea K un subgrupo conexo y compacto maximal de G tal que (G,K) es un par simétrico Riemanniano. Sea $K \ltimes \mathfrak{p}$ el grupo de movimientos rígidos de Cartan asociado a (G,K) y sea $(\tau,V_\tau) \in \widehat{K}$ tal que $(K \ltimes \mathfrak{p}, K, \tau)$ es una terna conmutativa. Sea $\Phi^\tau_{\omega_{\sigma,\phi}} : K \ltimes \mathfrak{p} \to \mathrm{End}(V_\tau)$ la función esférica de tipo τ correspondiente a la representación*

$\omega_{\sigma,\phi} \in \widehat{K \ltimes \mathfrak{p}}$. *Entonces, existe una familia* $\{\Phi^{\tau}_{\rho_{\sigma,\ell\phi}}\}_{\ell\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$, *donde* $\Phi^{\tau}_{\rho_{\sigma,\ell\phi}} : G \to \mathrm{End}(V_\tau)$ *es la función esférica de tipo* τ *correspondiente a la representación* $\rho_{\sigma,\ell\phi} \in \widehat{G}$, *tal que para cada* $(k,x) \in K \ltimes \mathfrak{p}$

$$\lim_{\ell\to\infty} \Phi^{\tau}_{\omega_{\sigma,\ell\phi}}(D_\ell(k,x)) = \Phi^{\tau}_{\rho_{\sigma,\ell\phi}}(k,x),$$

donde la convergencia es punto a punto en V_τ.

Demostración. Por la Proposición 6.15, (G,K,τ) es también una terna conmutativa y la prueba sigue de (6.19) y de la Observación 3.24. □

En particular, si consideramos $G = \mathrm{SO}_0(1,n)$ la componente conexa de la identidad del grupo de Lorentz y $K = \mathrm{SO}(n)$, entonces $K \ltimes \mathfrak{p} = \mathrm{M}(n)$. El par $(\mathrm{SO}_0(1,n), \mathrm{SO}(n))$ es un par de Gelfand fuerte y, análogamente al caso del par $(\mathrm{SO}(n+1), \mathrm{SO}(n))$, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 6.17. *Sea* $(\tau, V_\tau) \in \widehat{\mathrm{SO}(n)}$ *y sea* $\Phi^{\tau,\mathrm{M}(n)}$ *una función esférica de tipo* τ *del par de Gelfand fuerte* $(\mathrm{M}(n), \mathrm{SO}(n))$. *Entonces existe una sucesión* $\{\Phi^{\tau,\mathrm{SO}_0(1,n)}_{\ell}\}_{\ell\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ *de funciones esféricas de tipo* τ *del par de Gelfand fuerte* $(\mathrm{SO}_0(1,n), \mathrm{SO}(n))$ *y una contracción* $\{D_\ell\}_{\ell\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ *de* $\mathrm{SO}_0(1,n)$ *a* $\mathrm{M}(n)$ *tal que para todo* $(k,x) \in \mathrm{M}(n)$

$$\lim_{\ell\to\infty} \Phi^{\tau,\mathrm{SO}_0(1,n)}_{\ell}(D_\ell(k,x)) = \Phi^{\tau,\mathrm{M}(n)}(k,x),$$

donde la convergencia es puntual en V_τ.

Se iluminó el disco amarillo. De los coches que se acercaban, dos aceleraron antes de que se encendiera la señal roja. En el indicador del paso de peatones apareció la silueta del hombre verde. La gente empezó a cruzar la calle pisando las franjas blancas pintadas en la capa negra del asfalto, nada hay que se parezca menos a la cebra, pero así llaman a este paso. Los conductores, impacientes, con el pie en el pedal del embrague, mantenían los coches en tensión, avanzando, retrocediendo, como caballos nerviosos que vieran la fusta alzada en el aire. Habían terminado ya de pasar los peatones, pero la luz verde que daba paso libre a los automóviles tardó aún unos segundos en alumbrarse. [...] Al fin se encendió la señal verde y los coches arrancaron bruscamente, pero enseguida se advirtió que no todos habían arrancado.
Así comienza *Ensayo sobre la ceguera* de José Saramago. Metidos en el relato uno a uno dejamos de ver. O quizás son los colores los que dejan de vernos, la luz la que nos olvida. Imaginar un mundo sin colores, sin sonidos, sin diferentes texturas, sin sabores, sin olores es muy difícil. Con ellos describimos nuestro alrededor. Algo de esto tiene la tesis. Trata sobre espectros. De cómo a partir de distintos valores en una "paleta de colores" podemos caracterizar objetos, acciones. Y también nos sugiere pensar a la inversa, que son los espectros, los abanicos de posibilidades en potencia, quienes nos otorgan existencia.

Bibliografía

[ABR1] Francesca Astengo, Bianca Di Blasio, Fulvio Ricci. *Gelfand transforms of polyradial Schwartz functions on the Heisenberg group*. Journal of Functional Analysis, 251(2):772–791, 2007.

[ABR2] Francesca Astengo, Bianca Di Blasio, Fulvio Ricci. *Gelfand pairs on the Heisenberg group and Schwartz functions*. Journal of Functional Analysis, 256(5):1565–1587, 2009.

[Ba] Valentine Bargmann. *Irreducible unitary representations of the Lorentz group*. Annals of Mathematics, p. 568–640, 1947.

[BJR1] Chal Benson, Joe Jenkins, Gail Ratcliff. *On Gelfand pairs associated with solvable Lie groups*. Transactions of the American Mathematical Society, 321(1):85–116, 1990.

[BJR2] Chal Benson, Joe Jenkins, Gail Ratcliff. *The spherical transform of a Schwartz function on the Heisenberg group*. Journal of Functional Analysis, 154(2):379–423, 1998.

[BJR3] Chal Benson, Joe Jenkins, Gail Ratcliff. *The orbit method and Gelfand pairs, associated with nilpotent Lie groups*. The Journal of Geometric Analysis, 9(4):569–582, 1999.

[Br] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media (2010).

[Ca] Roberto Camporesi. *The spherical transform for homogeneous vector bundles over Riemannian symmetric spaces*. Journal of Lie Theory, 7:29–67, 1997.

[CS1] Silvina Campos, Linda Saal. *The spherical transform associated with the generalized Gelfand pair* $(\mathrm{U}(p,q),\mathrm{H}_n),\ p+q=n$. Journal of Lie Theory, 24(3):657–685, 2014.

[CS2] Silvina Campos, Linda Saal. *Some spherical analysis related to the pairs* $(\mathrm{U}(n),\mathrm{H}_n)$ *and* $(\mathrm{U}(p,q),\mathrm{H}_n),\ p+q=n$. Proceedings-Mathematical Sciences, 125(3):371–397, 2015.

[CEFRT] Jean-Louis Clerc, Pierre Eymard, Jacques Faraut, Mustapha Rais, Reiji Takahachi. *Analyse harmonique*. Les cours du CIMPA (1982).

[Co] John B. Conway. *A course in functional analysis*. Springer Science & Business Media (1990).

[D] Rocío Díaz Martín. *Ejemplos de pares de Gelfand fuertes*. Trabajo final de Licenciatura en Matemática. FaMAF-UNC, 2014.

[DL] Rocío Díaz Martín, Fernando Levstein. *Spherical analysis on homogeneous vector bundles of the 3-dimensional euclidean motion group*. Monatshefte für Mathematik, 185(4):621–649, 2018.

[DP] Rocío Díaz Martín, Inés Pacharoni. *Mehler-Heine formula: a generalization in the context of spherical functions*. Preprint arXiv:1807.03904, 2018.

[DS] Rocío Díaz Martín, Linda Saal. *Matrix spherical analysis on nilmanifolds*. Transformation Groups. En prensa.

[Die] Jean Alexandre Dieudonné. *Eléments d'analyse*. Vol. 7, Gauthier-Villars (1968).

[Dix] Jacques Dixmier. *Les C^*-algebres et leurs representations*. Gauthier–Villars, Fasc. 29, 1964.

[DR1] Anthony H. Dooley, J. W. Rice. *Contractions of rotation groups and their representations*. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Cambridge University Press, 94(3):509–517, 1983.

[DR2] Anthony H. Dooley, J. W. Rice. *On contractions of semisimple lie groups*. Transactions of the American Mathematical Society, 289(1):185–202, 1985.

[Dij] Gerrit van Dijk. *Introduction to Harmonic Analysis and Generalized Gelfand Pairs*. Walter de Gruyter, Berlin (2009).

[Fa] Jacques Faraut. *Analysis on Lie groups: an introduction*. Vol. 110, Cambridge University Press (2008).

[Fe] Fabio Ferrari Ruffino. *The topology of the spectrum for Gelfand pairs on Lie groups*. Bollettino della Unione Matematica Italiana, Sezione B Articoli di Ricerca Matematica, 8(10): 569–579, 2007.

[FRY] Veronique Fischer, Fulvio Ricci, Oksana Yakimova. *Nilpotent Gelfand pairs and spherical transforms of Schwartz functions III. Isomorphisms between Schwartz spaces under Vinberg's condition*. Preprint arXiv:1210.7962, 2012.

[Fo] Gerald B. Folland. *A Course in abstract harmonic analysis*. Boca Raton: CRC Press (1995).

[FH] William Fulton, Joe Harris. *Representations theory. A first course*. Springer Science & Business Media (1991).

[Ge] Israel Moiseevich Gelfand. *Spherical functions on symmetric spaces*. In Doklady Akad. Nauk SSSR, 70:5–8, 1950.

[God] Roger Godement. *A theory of spherical functions*. Transactions of the American Mathematical Society, 73(3):496–556, 1952.

[Goo] Roe Goodman. *Complex Fourier analysis on a nilpotent Lie group*. Transactions of the American Mathematical Society, 160:373–391, 1971.

[GPT] Francisco Alberto Grünbaum, Ines Pacharoni, Juan Alfredo Tirao. *Matrix valued spherical functions associated to the three dimensional hyperbolic space*. International Journal of Mathematics, 13(07): 727–784, 2002.

[He1] Sigurdur Helgason. *Groups and geometric analysis: integral geometry, invariant differential operators and spherical functions*. Academic Press, New York (1984).

[He2] Sigurdur Helgason. Helgason, Sigurdur. *Differential geometry and symmetric spaces*. American Mathematical Society (2001).

[HW] Eugenio Hernández, Guido Weiss. *A first course on wavelets*. CRC press (1996).

[HK] Kenneth Hoffman, Ray Kunze. *Linear algebra*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1971).

[HLLS] R. Howe, R. Lávička, Soo Teck Lee and V. Souček, *A reciprocity law and the skew Pieri rule for the symplectic group*. Journal of Mathematical Physics, 58(3):031702, 2017.

[Hu] James E. Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory*. Springer Science & Business Media (1972).

[IW] Erdal Inönü, Eugene P. Wigner. *On the contraction of groups and their representations*. Proceedings of the National Academy of Sciences, 39(6):510–524, 1953.

[Kai] Gerald Kaiser. *A friendly guide to wavelets*. Springer Science & Business Media (2010).

[Kap] Aroldo Kaplan. *Fundamental solutions for a class of hypoelliptic PDE generated by composition of quadratic forms*. Transactions of the American Mathematical Society, 258(1):147–153, 1980.

[Kh] Alexander Kharazishvili. *Strange functions in real analysis*. CRC Press (2017).

[Kik] Katsuhiko Kikuchi *On Gelfand pairs associated with nilpotent Lie groups*. Journal of Mathematics - Kyoto University. 34(4):741–754, 1994.

[Kir1] Aleksandr Aleksandrovich Kirillov. *Lectures on the orbit method*. Vol. 64, American Mathematical Society (2004).

[Kir2] Aleksandr Aleksandrovich Kirillov. *Unitary representations of nilpotent Lie groups*. Russian Mathematical Surveys, 17(4):53–104, 1962.

[Kn] Anthony W. Knapp. *Lie Groups Beyond an Introduction*. Progress in mathematics, Birkhäuser (2002).

[Kob] Shoshichi Kobayashi. *Transformation groups in differential geometry*. Springer Science & Business Media (2012).

[KT] Kazuhiko Koike, Itaru Terada. *Young-diagrammatic methods for the representation theory of the classical groups of type B_n, C_n, D_n*. Journal of Algebra, 107(2):466–511, 1987.

[Kor] Adam Korányi. *Some Applications of Gelfand Pairs in Classical Akalysis*. Harmonic Analysis and Group Representation. Centro Internazionale Matematico Estivo (c,I.M.E.) summer schools book series Vol. 82, Springer, p. 334–348, 2010.

[La1] Jorge Lauret. *Homogeneous nilmanifolds attached to representations of compact Lie groups*. Manuscripta mathematica, 99(3):287–309, 1999.

[La2] Jorge Lauret. *Gelfand pairs attached to representations of compact Lie groups*. Transformation Groups, 5(4):307–324, 2000.

[Le] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*. Springer, New York (2003).

[Mac] George W. Mackey. *Induced representations of locally compact groups I*. Annals of Mathematics, p. 101–139, 1952.

[MS] Sumner B. Myers, N. E. Steenrod. *The group of isometries of a Riemannian manifold*. Annals of Mathematics, 40(2): 400–416, 1939.

[O] Soichi Okada. *Pieri rules for classical groups and equinumeration between generalized oscillating tableaux and semistandard tableaux*. The Electronic Journal of Combinatorics, 23:#P4.43, 2016.

[PTZ] Inés Pacharoni, Juan Alfredo Tirao, Ignacio Nahuel Zurrián *Spherical functions associated with the three-dimensional sphere*. Annali di Matematica Pura ed Applicata, 193(6):1727–1778, 2014.

[P] Lajos Pukánszky. *Lecons sur les representations des groupes*. Dunod (1967).

[R] Fulvio Ricci. *A contraction of* SU(2) *to the Heisenberg group*. Monatshefte für Mathematik, 101(3):211–225, 1986.

[RS] Fulvio Ricci, Amit Samanta. *Spherical analysis on homogeneous vector bundles*. Advances in Mathematics, 338:953–990, 2018.

[RT] Pablo Roman, Juan Alfredo Tirao. *Spherical functions, the complex hyperbolic plane and the hypergeometric operator*. International Journal of Mathematics, 17(10):1151–1173, 2006.

[Ru1] Walter Rudin. *Functional analysis*. MacGraw-Hill, New York (1973).

[Ru2] Walter Rudin. *Principles of mathematical analysis*. McGraw-Hill, New York (1976).

[Ru3] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. MacGraw-Hill, New York (1987).

[Sa] Linda Saal. The automorphism group of a Lie algebra of Heisenberg type. Rendiconti del Seminario Matematico, Università e Politecnico Torino, 54(2): 101–113, 1996.

[Sc] Gerald W. Schwarz. *Smooth functions invariant under the action of a compact Lie group*. Topology, 14(1):63–68, 1975.

[SW] Elias M. Stein, Guido Weiss. *Introduction to Fourier analysis on euclidean spaces*. Vol. 32, Princeton university press (2016).

[Sz] Gabor Szegö. *Orthogonal polynomials*. American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. XXIII, Fourth edition, (1975).

[T] Juan A. Tirao. *Spherical functions*. Revista de la Unión Matemática Argentina, 28:75–98, 1977.

[V] Ernest B. Vinberg. *Commutative homogeneous spaces and co-isotropic symplectic actions*. Russian Mathematical Surveys, 56(1):1–60, 2001.

[Wal] Noland R. Wallach. *Harmonic analysis on homogeneous spaces*. Marcel Dekker, New York (1973).

[War] Frank W Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*. Springer Science & Business Media (1971).

[WarI] Garth Warner. *Harmonic analysis on semisimple Lie groups I*. Springer Science & Business Media (1972).

[WarII] Garth Warner. *Harmonic analysis on semisimple Lie groups II*. Springer Science & Business Media (1972).

[Will] Cynthia Will, *The resolvent on Rn, a degenerating method*. Revista de la Unión Matemática Argentina, 44(1): 89–98, 2003.

[Wils] Edward N. Wilson. *Isometry groups on homogeneous nilmanifolds*. Geometriae Dedicata, 12(3): 337–346, 1982.

[Wo1] Joseph A. Wolf. *Harmonic analysis on commutative spaces*. Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society (2007).

[Wo2] Joseph A. Wolf. *On locally symmetric spaces of non-negative curvature and certain other locally homogeneous spaces*. Commentarii Mathematici Helvetici, 37(1): 266–295, 1963.

[Wo3] Joseph A. Wolf. *Spherical functions on Euclidean space*. Journal of Functional Analysis, 239(1): 127–136, 2006.

[Ya] Oksana Yakimova. *Principal Gelfand pairs*. Transformation Groups, 11(2): 305–335, 2006.

[Yo] Kosaku Yosida. *Functional analysis*. Reprint of the sixth (1980) edition. Classics in Mathematics, Springer (1995).

Índice alfabético

AB, donde A y B son conjuntos, 21
A^{-1}, donde A es un conjunto, 21
$C_0(\mathbb{R}^3, \mathrm{End}(V_\tau))$, 159
$C_{\mathfrak{g}}$, 41
$C_c(G)^\sharp$, 85
D_τ, 142, 144
E_τ, 31
$F * u$, 108
$F_1 * F_2$, 92
G/H, espacio cociente, 18
$G \times_\tau V_\tau$, producto contractivo, 31
G_x, estabilizador, 23
$H < G$, subgrupo, 18
$H \triangleleft G$, subgrupo normal, 18
H^c, complemento de un conjunto H, 21
$H_0(\mathbb{H}^n)$, 135
$I^1_\tau(G)$, 94
I_g, 20
$Isom(M)$, 12
$Isom_0(M)$, 12
K-equivariante, 108
$L^1_\tau(N)$, 108
$L^2(G)^\sharp$, 85
$L^1_{\tau,\tau}(G, \mathrm{End}(V_\tau))$, 91
L_g, 19
$L^*_{g^{-1}}$, 22
$N(\mathfrak{g}, W)$, 117
$O(\lambda)$, órbita coadjunta, 48
P^K_π, 80
P^τ_π, 97
R_g, 19
$S(\mathfrak{g})$, algebra simétrica, 37
X^t, matriz transpuesta, 36
$Z(G)$, centro de un grupo, 19
$[\cdot,\cdot]$, 33
Ad, ad, 34
$\mathrm{Aut}(G)$, 18
$\mathrm{Aut}(V)$, 23
$\mathrm{End}(V)$, 23
$\mathrm{End}\, G$, 18
$\mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$, 23
$\mathbb{H}$, 24
$\mathrm{Int}(G)$, 20
$\Lambda^2(\mathbb{C}^{2n})$, 135
$\mathrm{M}(n)$, 25
$\mathrm{O}(1,3)$, 26
$\mathrm{O}(V)$, 24
$\mathrm{O}(n)$, 24
Ω_π, 36
$\mathbb{R}_{>0}$, 87
$\mathrm{SO}(1,3)$, 26
$\mathrm{SO}_0(1,3)$, 26
Σ^+, 85
$\mathrm{Sp}(n)$, 24
$\mathbb{S}^1$, 7
$\mathbb{S}^n$, 26
$\mathrm{Spin}(n)$, 24
$\mathrm{U}(n)$, 24
χ_τ, 29
ℓ^1, 67
ℓ^2, 66
ℓ^∞, 67
$\eta_{(\sigma)}$, 45
exp, 33
$\langle\cdot,\cdot\rangle$, 23
$\ltimes$, 19
$\mathbb{D}(E_\tau)$, 98
$\mathbb{O}$, 137
$\mathbb{P}$, 37
$\mathbb{R}X$, 115
$\mathcal{B}(X)$, 27
$\mathcal{C}(G)$, 64
$\mathcal{C}_0(G)$, 64
$\mathcal{C}_1(G)$, 64
$\mathcal{E}(\mathcal{C}_0(G))$, $\mathcal{E}(\mathcal{C}_1(G))$, 64
$\mathcal{F}_\lambda$, 42
$\mathcal{F}_\tau$, 99
$\mathcal{H}_\pi(K)$, 80
$\mathcal{H}_\pi(\tau)$, 97
$\mathcal{H}_m$, 89
$\mathcal{O}_x$, órbita, 23
$\mathcal{P}_\tau$, 109
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^3, \mathrm{End}(V_\tau))$, 160
$\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, 37
$\mathcal{U}(\mathfrak{g})^K$, 37
$\mathcal{V}(G)^\sharp$, 85
$\mathfrak{F}_\tau$, 99
$\mathfrak{g}$, 33
$\mathfrak{g}'$, 117
$\mathfrak{sl}$, 38
$\mathrm{Hom}_G(\pi_1, \pi_2)$, 28
I, 24
$\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{F})$, 23
N_2, 20

R, 39
T_2, 20
$|\sigma|$, 37
$\mathrm{Ind}_H^G(\pi)$, 32
$\overline{H}$, clausura de un conjunto, 21
$\pi(f)$, 71, 79
$\pi(f)^\tau$, 102
π^k, 109
σ/ς, 38
σ-álgebra, 21
σ-álgebra de Borel, 21
σ-aditividad, 22
Nú(ϕ), núcleo de un homomorfismo de grupos, 18
tr, traza, 29
$\widehat{G}$, 29
$\widehat{G}(\tau)$, 97
$\widehat{N_{\mathrm{sq}}}$, 114
*-álgebra, 54
$a \cdot x$, 17
a^{-1}, 18
$d\pi$, 34
d_τ, 29
$e^{i\theta}$, 7
$f * g$, 51
f^*, 54
$f^\sharp$, 80
i, 7
$l(\sigma)$, 37
$m(\pi_1, \pi_2)$, multiplicidad, 32
$u \wedge v$, 135
$x \sim y$, relación, 23
álgebra de Banach, 53
álgebra de Lie, 33
álgebra envolvente, 37
2 pasos nilpotente, 35

acción, 17
acción de conjugación, 20
acción de un grupo topológico, 21
acción efectiva, 23
acción por traslación, 19
acción simplemente transitiva, 23
acción transitiva, 23
algebraicamente integral, 40
altura uno, 101
aproximación de la identidad, 54
armónicos esféricos, 89
armónicos esféricos sólidos, 147
automorfismo de grupos, 18
automorfismo interior, 20

base de Gabor, 69

cámara de Weyl, 40
campo invariante a izquierda, 33
carácter de una representación, 29
Casimir, 36
centralizador, 41
Clebsch-Gordan, 45
complexificación, 41
conjunto de Borel, 21
conjunto medible regular exterior, 22
conjunto medible regular interior, 22
conmutador de un elemento de un grupo, 19
conmutador de un grupo, 19
contracción de grupos, 166
convolución, 51
corchete de Lie, 33

delta de Dirac, 55
Desigualdad de convolución de Young, 52
diagrama de Young, 37
diagrama de Young sesgado o skew, 38
dominante, 40

elemento regular, 41
endomorfismo de grupos, 18
equivalencia de espacios homogéneos, 24
equivalencia de representaciones, 28
equivariante, 24
espacio conmutativo, 105
espacio de Fock, 42
espacio homogéneo, 24
espectro, 70
estabilizador, 23
exponencial, 33

fórmula de Mehler-Heine, 165
fórmula de Stirling, 166
fibrado vectorial, 30
fibrado vectorial homogéneo, 30
forma de Killing, 35
forma hemitiana canónica, 24
forma hermitiana, 23
forma no-degenerada, 23
forma sesquilineal, 23
forma simpléctica, 24
función de Bessel, 86
función de tipo positivo, 57
función definida positiva, 59
función esférica de traza de tipo τ, 99
función esférica de tipo τ, 99
función esférica escalar, 82
función modular, 22

grupo, 17
grupo abeliano, 18
grupo de hesisenberg, 41
grupo de Lie, 20
grupo de Lorentz, 26
grupo de matrices, 24
grupo de movimientos rígidos de Cartan, 47
grupo de tipo Heisenberg o de tipo H, 117
grupo de Weyl, 40
grupo dual, 71
grupo lineal, 24
grupo nilpotente, 19
grupo semisimple, 19

grupo simple, 19
grupo soluble, 19
grupo topológico, 20

homomorfismo, 18

identidad de Euler, 146
identidad de Jacobi, 33
identidad de un grupo, 18
integral de Bochner, 56
interpolación de Lagrange, 152
involución, 54
involución de Cartan, 79
isomorfismo de álgebras de Lie, 34
isomorfismo de grupos, 18
isomorfismo isométrico, 66

Lema de Schur, 28
localmente compacto, 20
longitud de una partición, 37

medida, 22
medida compleja, 22
medida de Borel, 22
medida de Haar, 22
medida de Plancherel, 85
medida invariante a izquierda y/o derecha, 22
medida positiva, 22
medida regular, 22
morfismo de álgebras de Lie, 34

nilvariedad homogénea, 14
norma de Hilbert-Schmidt, 99

octoniones, 137
operador de análisis, 66
operador de entrelazamiento, 28
operador de Euler, 144
operador de Hilbert-Schmidt, 99
operador de reflexión, 54
operador de síntesis, 66
operador integral, 73

par de Gelfand, 79
par de Gelfand "twisted", 92
par de Gelfand fuerte, 92
par simétrico, 79
par simétrico Riemanniano, 47
partición, 37
peso algebraicamente integral, 40
peso de una representación, 39
peso dominante, 40
peso máximo, 40
pesos fundamentales, 40
Pfaffiano, 119
polinomios de Gegenbauer, 89
polinomios de Legendre, 89
producto directo, 19
producto exterior, 135
producto interno, 23
producto semidirecto, 19

raíz, 39
raíz simple, 40
Reciprocidad de Frobenius, 32
representación adjunta, 34
representación contragrediente, 28
representación de cuadrado integrable, 114
representación de la serie principal, 48
representación de un álgebra de Lie, 34
representación de un grupo, 27
representación derivada, 34
representación fiel, 28
representación genérica, 48
representación inducida, 32
representación irreducible, 28
representación unitaria, 28
rotor, 143

sección de un fibrado vectorial, 31
serie de Fourier, 67
simetrización, 37
sistema de raíces, 39
subálgebra de Cartan, 38
subespacio invariante, 28
sucesión de contracción, 168

tamaño de una partición, 37
Teorema de Bochner, 66
Teorema de Cayley-Hamilton, 152
Teorema de Gelfand-Raikov, 80
Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt, 37
Teorema del núcleo de Schwartz, 73
Teorema del peso máximo, 40
terna conmutativa o de Gelfand, 92
tira horizontal, 38
toro, 41
toro maximal, 41
transformada de Fourier τ-esférica, 99
transformada de Fourier esférica, 85
transformada de Gelfand, 70