Universidad Nacional de Córdoba

TRABAJO FINAL DE PRÁCTICAS DE ENSEÑANZA

Profesorado en Matemática

Autores: *Cintia Estefanía Ambasch / Tamara Giselle Olmos*

Pitágoras
569 a.c - 475 a.c
Filósofo y matemático griego considerado el primer matemático puro.

UNC Universidad Nacional de Córdoba

FAMAF
FAMAF Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

Universidad Nacional de Córdoba

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

TRABAJO FINAL DE PRÁCTICAS

Metodología y Práctica de la Enseñanza

Título: ABORDAJE DE LOS NÚMEROS RACIONALES POSITIVOS A TRAVÉS DE LA MEDIDA

Autoras: Ambasch, Cintia Estefanía y Olmos, Tamara Giselle

Equipo responsable de MyPE: Dra. Esteley, Cristina, Prof. Asinari, Marianela, Prof. Coirini, Araceli, Prof. Dipierri, Iris, Prof. Mina, María Del Valle y Lic. Smith, Silvina

Profesora Supervisora de Práctica: Prof. Mina, María Del Valle

Carrera: Profesorado en Matemática
Fecha: 22-11-2018

CLASIFICACIÓN

97 Mathematical Education

97D Education and instruction in mathematics

PALABRAS CLAVES

Práctica de enseñanza – Números Racionales positivos – Expresión fraccionaria – Expresión decimal – Sobregeneralización – Antecedentes históricos

RESUMEN

En el presente Informe Final se describen y desarrollan las prácticas de enseñanza de clases de Matemática realizadas por un par pedagógico del Profesorado en Matemática de la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación de la Universidad Nacional de Córdoba. Las mismas se llevaron a cabo en una institución secundaria religiosa de la Ciudad de Córdoba. A lo largo de este informe se presenta una caracterización institucional y áulica, así como también del alumnado con el que se trabajó, siendo esta condicionante para la propuesta didáctica y la ejecución de la misma. Además, se desarrolla el abordaje de los Números Racionales Positivos, principalmente a través de la medida, y una problemática que se presentó en esta instancia. Finalmente, se expone el análisis y reflexión de lo acontecido.

ABSTRACT

In the present final report, the teaching practices of mathematics lessons given by a pair of students of Mathematics at the Faculty of Mathematics, Astronomy, Physics and Computing of the National University of Córdoba are described and explained. These practices were carried out in a religious high school institution in the City of Córdoba. Throughout this report an institutional and academic characterization is presented, including a description of the students with whom we worked, being this characterization a conditioning factor for the didactic proposal and its execution. In addition, the approach to Positive Rational Numbers, mainly through measurement, and a problem that was presented in this instance, are described. Finally, an analysis and reflection of the whole experience is exposed.

Las Matemáticas están detrás de todo lo que hacemos en este mundo científico y tecnológico. "¿Y qué? ¿Eso en mi vida cotidiana me sirve de algo?" ... "No me sirve de nada". "¿Cuál es la trampa?". Creo que la trampa es que sólo estudiamos las cosas que aplicaremos luego en la profesión. ***¡¿Por qué?! Nos perderíamos casi todo****.*
Lo siento, lo que enseñan en la escuela no servirá de nada en el día a día, no lo usarás materialmente para nada. Pero el proceso de aprender todo eso nos ha moldeado, nos ha hecho conocer el mundo y nos sirve, NOS HACE MÁS ÚTILES. Esa trampa de sólo estudiar las cosas que sirven me parece que es convertir la educación solamente en formación para una profesión específica, y la educación es una construcción de la persona y las Matemáticas sirven para eso. Y también sirven para ser más felices, más plenos, para saber, por un lado, comprender el mundo en el que estamos y, por el otro, comprendernos a nosotros mismos.
Hay pocas cosas que sean más humanas que las Matemáticas, somos seres matemáticos, medimos el mundo, lo contamos, tratamos de comprenderlo y sistematizarlo.
En algún momento todos nos planteamos "tú estudia esto porque en el futuro te va a servir"... ***¿y el presente qué?***[1]

[1] Estas ideas fueron tomadas de las palabras de Eduardo Sáenz de Cabezón, Profesor, Matemático y Divulgador Científico, las cuales se encuentran en: https://www.youtube.com/watch?v=BbA5dpS4CcI&t=2s

ÍNDICE

Capítulo I: El proyecto de práctica

1.1. Acerca de la institución donde se realizaron las prácticas

La escuela en la cual se realizaron las prácticas de enseñanza aquí presentadas se encuentra ubicada en la zona céntrica de la Ciudad de Córdoba. Es una institución pública de gestión privada, fundada en 1856. Por entonces, se encontraba dirigida por una sociedad de beneficencia. En 1932 se entregó la misma en manos de una institución religiosa con carisma docente. La institución ofrece una propuesta católica, sólo para mujeres, respetando la relación de cada alumna con la fe. Apunta a la formación de la mujer en torno a su identidad y su rol como madre, educadora y esposa, además de enfatizar en una educación de calidad en cuanto a valores y capacitación laboral y profesional[2].

La institución cuenta con Nivel Inicial, Nivel Primario y Nivel Secundario. Este último, según lo estipulado en la Ley Provincial de Educación y en los Diseños Curriculares vigentes, se estructura en un Ciclo Básico[3] de tres años y en un Ciclo Orientado con la misma duración, cuyas orientaciones son Ciencias Naturales[4] y Ciencias Sociales y Humanidades[5]. Los niveles mencionados cuentan con 153, 393 y 408 alumnas, respectivamente. El Nivel Secundario posee dos divisiones por curso, de primer a tercer año "A" y "B" y, de cuarto a sexto año, "Sociales" y "Naturales".

[2] La información de este párrafo fue extraída del Proyecto Educativo del colegio.

[3] *"[…] la propuesta formativa del Ciclo Básico prevé una organización en espacios curriculares, cuya enseñanza está a cargo de un docente con formación específica. Se presentan con una carga horaria semanal regular, tienen una extensión anual y pueden adoptar diferentes formatos curriculares pedagógicos […]."* (Gobierno de la Provincia de Córdoba. Ministerio de Educación. Secretaría de Educación. Subsecretaría de Promoción de Igualdad y Calidad Educativa. Dirección General de Planeamiento e Información Educativa. *Diseño Curricular: Ciclo Básico de la Educación Secundaria, versión 2011 – 2015*, p. 4).

[4] *"[…] la orientación CIENCIAS NATURALES […], además de focalizar, integrar y desarrollar los contenidos de los espacios propios del campo de la Formación General, garantizará […] la apropiación de saberes agrupados en el Campo de la Formación Específica, propios del Bachillerato en Ciencias Naturales […], donde se abordarán los procesos de la naturaleza […], con énfasis en la producción de conocimiento científico y la importancia de las Ciencias Naturales en la sociedad."* (Gobierno de la Provincia de Córdoba. Ministerio de Educación. Secretaría de Educación. Subsecretaría de Promoción de Igualdad y Calidad Educativa. Dirección General de Planeamiento e Información Educativa. *Diseño Curricular de Educación Secundaria: Orientación Ciencias Naturales, versión 2012 – 2015*, p. 2).

[5] *"[…] la orientación CIENCIAS SOCIALES Y HUMANIDADES […], además de focalizar, integrar y desarrollar los contenidos de los espacios propios del campo de la Formación General, garantizará a los estudiantes la apropiación de saberes agrupados en el Campo de la Formación Específica […]. El propósito es promover […] una formación que incluya […] discusiones teóricas y metodológicas que provienen de los diferentes campos de reflexión y acción de estas Ciencias […]."* (Gobierno de la Provincia de Córdoba. Ministerio de Educación. Secretaría de Educación. Subsecretaría de Promoción de Igualdad y Calidad Educativa. Dirección General de Planeamiento e Información Educativa. *Diseño Curricular de Educación Secundaria: Orientación Ciencias Sociales y Humanidades, versión 2012 – 2015*, p. 1).

El colegio funciona de 7:00 a 18:00 hs. y cuenta con 9800 m^2 cubiertos, aproximadamente. La estructura edilicia se reparte en cinco pisos (ver Figura 1) (subsuelo, planta baja, primer, segundo y tercer piso) con escaleras, dos ascensores y un gran patio (ver Figura 2) compartido por todos los niveles, excepto el Nivel Inicial que cuenta con su propio espacio.

Figura 1. *Estructura edilicia general*

Figura 2. *Patio compartido por todos los niveles, excepto por el Nivel Inicial*

Las alumnas asisten a la institución con el uniforme que representa a la misma, el cual se compone de camisa blanca, corbata marrón, vestido marrón y blanco a cuadros, medias $^3/_4$ marrones y zapatos del mismo color. Los días que tienen actividad física, asisten con el equipo de gimnasia, también de la institución, color azul el pantalón, blanco o azul el buzo, remera blanca y zapatillas.

Hay tres recreos distribuidos en la jornada escolar: el primero de 20 minutos, el segundo de 10 minutos y el tercero de 15 minutos.

En el subsuelo se encuentran, entre otros espacios, dos depósitos y un auditorio en donde se realizan diversos actos y eventos, con una capacidad aproximada de 250 personas. Además, una sala de usos múltiples (SUM), la cual cuenta con una pequeña habitación en donde se maneja la computadora que está conectada a un cañón de proyecciones, lo que facilita la realización de diferentes actividades, tales como proyecciones didácticas, seminarios, reuniones, etc.

La planta baja cuenta con cinco puertas de ingreso y egreso al exterior, una de ellas con rampa para discapacitados. La entrada principal desemboca en un hall de entrada (ver Figura 3), conectándose con la portería y algunas oficinas. Siguiendo por un pequeño pasillo, se ubica el patio de la escuela (remitirse a la Figura 2). Alrededor del mismo se encuentran galerías y un patio cubierto, lugar donde las alumnas pasaban un tiempo importante realizando distintas actividades (almorzar, manualidades, tejer, etc.). Al final del patio, está la capilla de la institución.

Figura 3. *Hall de entrada*

Este espacio de la planta baja dispone de tres sanitarios, uno de ellos para discapacitados, y dos depósitos. Aquí también se encuentran la cantina y el kiosco (ver Figura 4), un espacio amplio con mesas y sillas en donde las alumnas pueden almorzar y/o comer en los recreos, además de poder comprar diversos tipos de alimentos. Es importante destacar que el kiosco cuenta con alimentos libres de gluten para celíacos, así como también productos saludables (ensaladas de frutas, descremados, cereales, ensaladas, tartas de verduras, jugos, etc.).

Figura 4. *Cantina* - *Kiosco*

En el primer piso se desarrollan las actividades del Nivel Primario, el cual se divide en dos grupos: uno asiste a la mañana y el otro a la tarde. Para este nivel hay seis aulas, separadas por un pasillo que conduce, por un lado, a las escaleras y los sanitarios de las alumnas y, por el otro, a la sala de profesores. Ésta es compartida por los docentes de todos los niveles, los preceptores, y otras personas de la institución. La sala cuenta con una heladera en funcionamiento, dos "dispensers" de agua caliente y fría, microondas y un lavabo, además de utensilios de cocina y distintos tipos de infusiones y alimentos disponible para todo el personal.

Un gimnasio cubierto, la biblioteca (ver Figura 5), un depósito y algunas oficinas completan los recursos del primer piso.

Figura 5. *Biblioteca*

En el segundo piso (ver Figura 6) se encuentra el Ciclo Básico del Nivel Secundario, para el cual hay seis aulas, distribuidas de la misma manera que las aulas del Nivel Primario, un depósito, dos sanitarios y una sala de computación (ver Figura 7) con computadoras con conexión a Internet. Además, hay una sala de computación "libre" a disposición de las alumnas y de los profesores en cualquier momento de la jornada sin tener que estar en clase necesariamente.

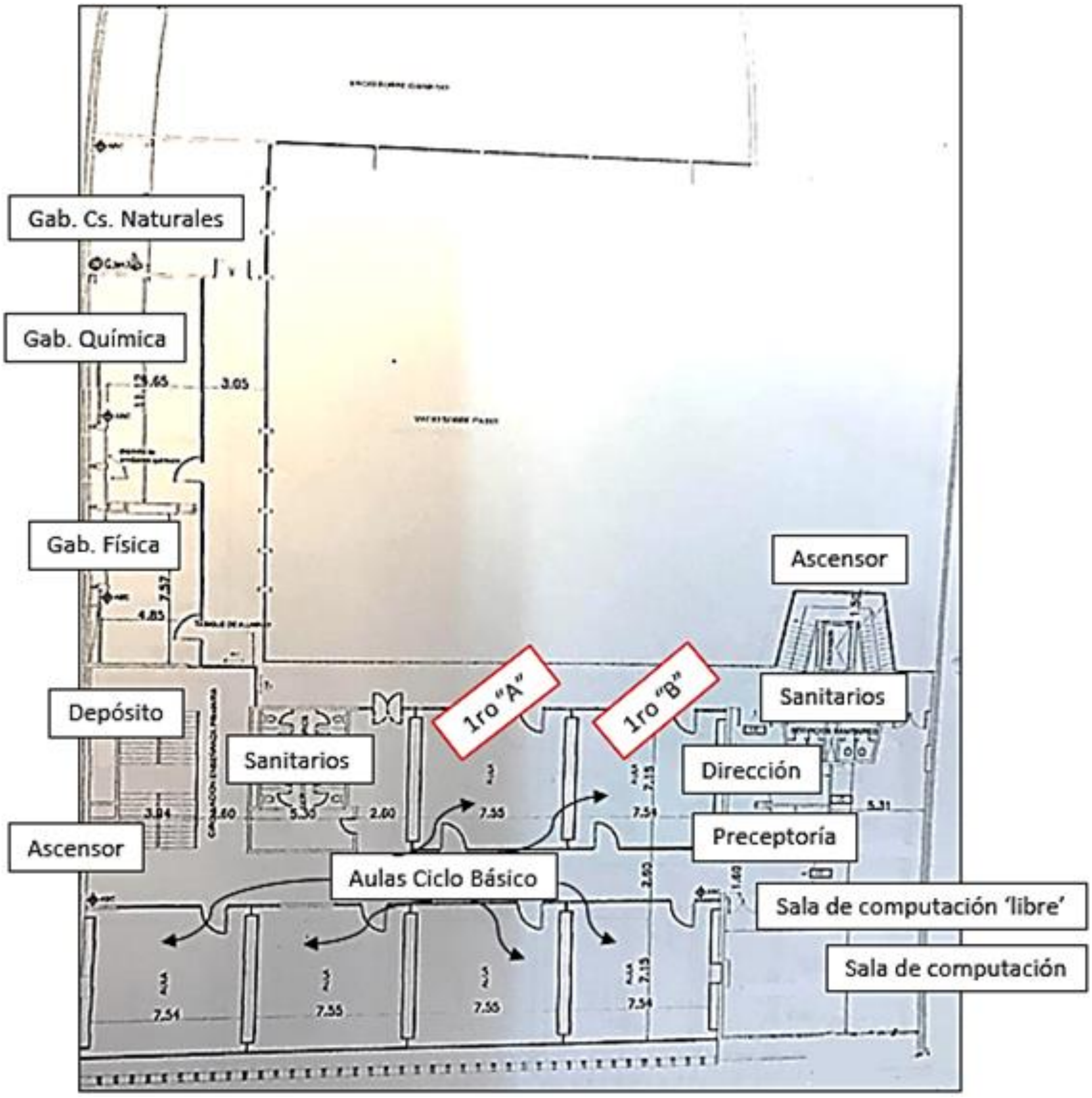


Figura 6. *Croquis segundo piso*

En este piso coexisten tres gabinetes destinados a las Ciencias Naturales, a la Química y a la Física, respectivamente. Por otro lado, se encuentra un gabinete para la dirección y un gabinete para la preceptoría, en la cual se solicitan los instrumentos de Geometría, fibrones para las pizarras blancas de cada aula y tinta para recargarlos cuando sea necesario.

Figura 7. *Sala de computación*

En el tercer piso se encuentra el Ciclo Orientado del Nivel Secundario, contando el mismo con seis aulas distribuidas de la forma antes mencionada para los otros niveles, un depósito, dos sanitarios, una sala de Música, destinada al dictado de esa materia, dos patios cubiertos y otra sala de usos múltiples (SUM).

Con respecto a las aulas (ver Figura 8), podemos decir que el tamaño de las mismas es adecuado para la cantidad de alumnas que tiene cada una, pero queda poco espacio para la movilidad de los docentes entre los bancos.

Figura 8. *Aulas de primer año*

En cuanto a la ventilación, las aulas poseen ventanas grandes en las paredes laterales y también dos puertas, una para salir al pasillo y la otra hacia la galería. El uso de las dos puertas permite que la entrada y salida de las alumnas sea más fácil y rápida. Las aulas poseen ventiladores de techo, protegidos con una red de alambre para evitar posibles accidentes y golpes. Además, al fondo de las aulas, se encuentran armarios en donde las alumnas guardan distintos materiales, tales como libros, elementos para manualidades, etc. y, también, un perchero donde pueden dejar sus abrigos.

Por otro lado, la movilidad de bancos y sillas permite agrupar a las estudiantes de diversas formas para trabajar. Por el contrario, el escritorio del docente permanece fijo sobre la tarima. Con respecto a esta última, su altura resulta adecuada para observar, coordinar y dirigir actividades, logrando desde allí una visión global del curso.

Todas las aulas poseen pizarras blancas para fibrón, un televisor colgando del techo, donde se pueden mostrar distintos materiales audiovisuales (el tamaño del mismo es muy pequeño, por lo que el aprovechamiento de este recurso es limitado), y cestos de basura. Además, se observan algunos símbolos religiosos ubicados en la pared de la pizarra.

1.1.1. Otros recursos disponibles en la institución para todos los niveles, excepto el Nivel Inicial

Con respecto a recursos digitales tales como Internet, se encuentra disponible tanto en la sala de computación como en la biblioteca, en las áreas de gestión y administración, y en todos los gabinetes. No hay restricciones en el tiempo de uso del mismo.

Se disponen de siete computadoras para fines administrativos y 37 para fines pedagógicos exclusivamente; para ambos usos hay nueve dispositivos. Además, la institución cuenta con cañón de proyección y, para algunas materias tales como Lengua Extranjera (Inglés), con radiograbadores, donde se reproducen CDs para esta asignatura.

Para las clases de Geografía, por ejemplo, se disponen de distintos mapas que se pueden colgar sobre las pizarras blancas.

Particularmente, en la clase de Matemática, la profesora llevaba, a modo de material complementario, sus propias fotocopias con actividades, las cuales eran provistas por fondos obtenidos de la cuota abonada a la institución. Los trabajos prácticos y las evaluaciones eran entregados de la misma manera. Eventualmente, se usaba la calculadora como recurso para el control de algunos ejercicios.

Se pudo observar que la disponibilidad y el uso de los recursos y materiales arriba mencionados se sostenían para los diferentes espacios curriculares.

Finalmente, podemos agregar que el principal medio de comunicación entre la familia y la institución era el cuaderno de comunicados, un recurso indispensable para el vínculo familia-escuela que siempre deben tener las alumnas entre sus materiales escolares.

1.1.2. Normas de convivencia

A lo largo de nuestras prácticas de enseñanza se presenciaron distintos comportamientos y formas de actuar relacionados e influenciados por los Acuerdos Escolares de Convivencia[6], ya sea de las alumnas o de todo el equipo de la escuela. Creemos pertinente transcribir algunas normas que nos llamaron la atención y/o consideramos importantes:

- *Relativas a la presentación personal: las alumnas concurrirán al colegio con el uniforme de la institución, respetándolo con su comportamiento. De parte de los docentes, la presentación deberá ser sencilla y digna, acorde a su misión ejemplificadora.* (p. 10)

Durante las prácticas no se presenciaron ni realizaron llamados de atención por el incumplimiento o mal uso del uniforme. Los docentes son conscientes del mensaje que transmiten con su imagen personal a las alumnas, por lo que todos, adultos y estudiantes, cumplen con esta norma.

- *Relativas a la participación en celebraciones religiosas, patrias e institucionales*
    - *Estar presente y tener un comportamiento respetuoso en momentos valiosos de la escuela, de la Iglesia y de la Nación.*
    - *Respetar con la presentación personal, los gestos propios y actitudes.* (p. 11)

En particular, hemos observado que todas las alumnas, luego del izamiento de la bandera y, antes de comenzar la jornada escolar, oran y piden por alguna situación de conocimiento institucional o personal con respeto.

- *Relativas al uso de las instalaciones del colegio*
    - *La escuela en su totalidad: se comprometen a utilizar los bienes materiales del colegio y personales según su naturaleza y función, cuidarlos y usarlos responsablemente; reconocer, facilitar y agradecer el trabajo de las personas que*

[6] Acuerdos Escolares de Convivencia –Nivel Secundario–, aprobados por resolución 0711/14 2015-2017.

mantienen limpia la escuela. Todo el daño causado a la institución será considerado falta leve, moderada o grave según el daño causado, y deberán hacerse cargo del costo económico de su reparación o reposición.

  - *El aula: se la debe mantener en condiciones de higiene y orden.*
  - *El uso del ascensor de habilitará exclusivamente a quienes presenten problemas físicos y motores de desplazamiento. Su uso no autorizado constituye una falta.* (p. 12)

Es notoria la preocupación, tanto de parte de las alumnas como de los docentes, por la limpieza y orden de la escuela y, en particular, de las aulas. La profesora tutora, al finalizar la jornada escolar, no permitía que las alumnas se retiraran sin antes dejar en condiciones su espacio de trabajo. Además, varias veces, observamos que los docentes, al pasar entre los bancos, pedían a las alumnas que mantengan la limpieza, levanten los papeles, no coman dentro del aula, etc.

- <u>*Relativas al respeto por la identidad y la singularidad de los actores educativos*</u>
  - *Exigencia propia y a los demás de acuerdo a lo que cada uno pueda dar.*
  - *Aprender a dialogar, argumentar y fundamentar las propias posiciones.*
  - *Aceptar la ayuda, el consejo y la orientación de los demás, reconociendo el valor de la experiencia ajena y la necesidad de ella para la propia mejora.* (p. 13)

El primero de estos ítems se hizo evidente, según nuestra apreciación, en las instancias evaluativas donde la mayoría de las alumnas manifestaron gran interés y preocupación en la obtención de altas calificaciones; para ellas, no bastaba con sólo aprobar, la calificación también resultaba de importancia.

En relación a los últimos dos ítems, se puede decir que las puestas en común y debates desarrollados en las clases se notaron animados, participativos y ricos en contenido, dando así evidencia de la norma anteriormente mencionada.

1.2. Acerca de los cursos donde se realizaron las prácticas

Las prácticas de enseñanza se llevaron a cabo en las dos divisiones de primer año de la institución. La división “A” tenía 37 alumnas y la división “B”, 38. La edad de las estudiantes se correspondía a los 12-13 años; la mayoría de ellas completó el Nivel Primario en la escuela, mientras que muy pocas provenían de otros colegios.

Los dos cursos de primer año contaban con 5 horas cátedras[7] semanales, según lo estipulado en el Diseño Curricular de la Provincia de Córdoba. La distribución de las mismas de los distintos espacios curriculares a lo largo de la jornada y semana se detalla en las siguientes tablas (ver Tabla 1 y 2):

HORAS		LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES
1°	7:30 8:10	Biología	Tecnología	Biología	Catequesis	Geografía
2°	8:10 8:50	Biología	Tecnología	Lengua	Catequesis	Geografía
3°	8:50 9:30	Tecnología	Lengua	Geografía	Tutoría	Matemática
		RECREO				
4°	9:50 10:30	Tecnología	Lengua	Geografía	Física	Ciudadanía y Participación
5°	10:30 11:10	Física	Catequesis	Educación Física	Lengua	Ciudadanía y Participación
6°	11:10 11:50	Física	Catequesis	Educación Física	Lengua	Plástica
		RECREO				
7°	12:00 12:40	Inglés	Geografía	Matemática	Plástica	Educación Física
8°	12:40 13:20	Inglés	Matemática	Matemática	Plástica	Inglés
		RECREO				
9°	13:35 14:15		Matemática		Ciudadanía y Participación	

Tabla 1. *Distribución horaria de 1ro "A"*

HORAS		LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES
1°	7:30 8:10	Tecnología	Física	Geografía	Educación Física	Matemática
2°	8:10 8:50	Tecnología	Física	Geografía	Plástica	Matemática
3°	8:50 9:30	Biología	Tecnología	Matemática	Plástica	Catequesis
		RECREO				
4°	9:50 10:30	Biología	Tecnología	Matemática	Catequesis	Catequesis
5°	10:30 11:10	Lengua	Geografía	Física	Catequesis	Lengua
6°	11:10 11:50	Lengua	Geografía	Lengua	Tutoría	Lengua
		RECREO				
7°	12:00 12:40	Inglés	Matemática	Educación Física	Ciudadanía y Participación	Biología
8°	12:40 13:20	Inglés	Ciudadanía y Participación	Educación Física	Geografía	Inglés
		RECREO				
9°	13:35 14:15		Ciudadanía y Participación	Plástica		

Tabla 2. *Distribución horaria de 1ro "B"*

[7] Una hora cátedra tiene una duración de cuarenta minutos.

Las estudiantes se sentaban en sillas y bancos individuales, agrupados de a dos en cuatro filas con frente hacia las pizarras. La distribución de las alumnas era designada por la tutora de cada curso, modificando la misma una vez al mes con el objetivo de que *"crezca una sociabilización fluida y se eviten conflictos"*[8]. A lo largo de las prácticas se presenciaron dos de estos cambios, mostrando las alumnas una adaptación rápida y positiva a los mismos.

Los recursos y materiales que se utilizaron de forma permanente en el curso y, en particular en la clase de Matemática, fueron la pizarra, los fibrones, fotocopias, elementos de Geometría y el libro de texto[9], el cual las alumnas guardaban en los armarios; en algunas ocasiones, se los debían llevar a sus hogares para realizar tareas. Dos estudiantes eran las encargadas de entregar fotocopias u otros tipos de recursos; en la clase de Matemática, otras dos alumnas repartían los libros de texto a sus compañeras. Para estas actividades se destinaban varios minutos de la clase.

1.2.1. Descripción del trabajo de los cursos de práctica en las clases de Matemática

Las alumnas, en general, no presentaban problemas importantes de disciplina durante las clases de Matemática; aceptaban las consignas de trabajo propuestas y, al momento de la puesta en común, manifestaban interés en participar, ya sea en la lectura de consignas o en exponer sus resoluciones. Sin embargo, estas instancias de trabajo en el pizarrón debieron ser coordinadas y dirigidas por la docente la mayoría de las veces pidiendo, por un lado, silencio y orden y, por el otro, respeto por la persona que en el momento estaba hablando.

La relación de las alumnas con la profesora de Matemática era cálida y respetuosa. La docente mantenía un tono de voz estable a lo largo de toda la clase y, a pesar de ciertos momentos de bullicio, las estudiantes llegaban (después de varios pedidos de parte de la profesora) a suspender sus diálogos para escucharla. Si se daban situaciones de conflicto o desobediencia, con el mismo tono moderado de voz, la docente asumía el control de la situación, siempre manteniendo una postura respetuosa y exigiendo, a su vez, respeto mutuo (profesora-alumna, alumna-alumna).

Las actividades de enseñanza se estructuraban en torno al contenido presentado por el libro de texto. Esto lo pudimos evidenciar en las carpetas de trabajo del alumnado, en las

[8] Esta información fue proporcionada por la coordinadora del área de Matemática del colegio y por la tutora de 1ro "A".
[9] Escayola, R., Grimaldi, V., López, E., Nicodemo, M. (2014) *Explorar en Matemática 7°/1° ES*. Editorial Santillana.

observaciones de clases y en nuestras propias prácticas ya que, al comenzar cada jornada, las alumnas automáticamente se disponían a repartir los libros. A modo de material complementario al libro de texto, la profesora preparaba fotocopias con actividades extra para completar el contenido del mismo ya que, a veces, resultaba insuficiente pues, por un lado, las estudiantes realizan las actividades con rapidez y, por el otro, las consignas propuestas por el libro de texto resultaban insuficientes para el aprendizaje de ciertos conocimientos. Por otra parte, los contenidos teóricos, tales como definiciones, ejemplos, etc., se registraban por escrito en la pizarra para que las alumnas los copien en sus carpetas.

El uso de la pizarra blanca fue notorio de parte de las estudiantes. La docente no monopolizaba su uso, sino que eran las alumnas quienes, en diversas circunstancias, se apropiaban de este recurso para corregir sus tareas o explicar sus ideas a las compañeras (ver Figura 9), mientras que el resto de la clase hacía sus aportes desde el banco.

Figura 9. *Protagonismo de las alumnas en la pizarra*

Durante las observaciones, las clases se caracterizaron por seguir la siguiente estructura:

(a) Para comenzar la actividad, la docente dirigía un repaso referido a contenidos trabajados en clases anteriores, ya sea sobre aspectos teóricos o acerca de la tarea que fuera asignada. Las alumnas, voluntariamente, realizaban comentarios, planteaban sus dudas o preguntas al respecto.

(b) Durante el desarrollo del contenido de la clase, las estudiantes podían trabajar de a dos, agrupándose según su preferencia; por lo general trabajaban con su compañera de banco. Al finalizar la jornada, se realizaban puestas en común, ya sea de manera oral o en la pizarra. La profesora organizaba este momento haciendo pasar a varias alumnas al frente para que expongan sus resoluciones y las expliquen. En ese momento, ella recorría el curso para controlar que las estudiantes corrigieran las actividades y prestaran atención a las compañeras que estaban al frente. Generalmente, quedaban actividades de tarea para la próxima clase; el recordatorio de éstas es lo que marcaba en cierre de la misma.

(c) La evaluación y acreditación de los conocimientos se realizó, durante nuestras observaciones, mediante la implementación de evaluaciones y trabajos prácticos escritos, generalmente individuales. La docente permitía desarrollar las actividades en la misma fotocopia de la evaluación o anexar otra hoja si era necesario. Tal como se señaló en la Sección 1.2, se evidenció un fuerte interés y compromiso por parte de las alumnas en el desarrollo de estas instancias evaluativas y en las calificaciones, manifestando su preocupación cuando obtenían bajas notas. Esto se hizo evidente en circunstancias de devolución de evaluaciones y trabajos prácticos; las estudiantes realizaban consultas a la docente sobre la corrección, respuestas correctas, etc. En general, las calificaciones eran buenas, si se comparan con el desempeño positivo mostrado por algunas alumnas en clase.

De acuerdo con Skovsmose (2000), algunas actividades observadas se encuentran dentro del ambiente de aprendizaje "paradigma del ejercicio" con referencia a la "Matemática pura", como se puede ver la celda **(1)** de la Figura 10.

		Formas de organización de la actividad de los estudiantes	
		Paradigma del ejercicio	Escenarios de investigación
Tipo de referencia	Matemáticas puras	(1)	(2)
	Semirrealidad	(3)	(4)
	Situaciones de la vida real	(5)	(6)

Figura 10. *Ambientes de aprendizaje de Skovsmose (2000, p. 10)*

Según este autor, este tipo de ambiente de aprendizaje involucra una ejercitación práctica de los contenidos dados y no aluden explícitamente a la construcción o a la investigación acerca de los mismos por parte del estudiante. En relación a esto, hemos podido observar, dentro del tema "Operaciones combinadas" dictado por la profesora, algunas actividades que se encuadran dentro de este ambiente, las cuales evidenciamos mediante las siguientes imágenes (ver Figura 11):

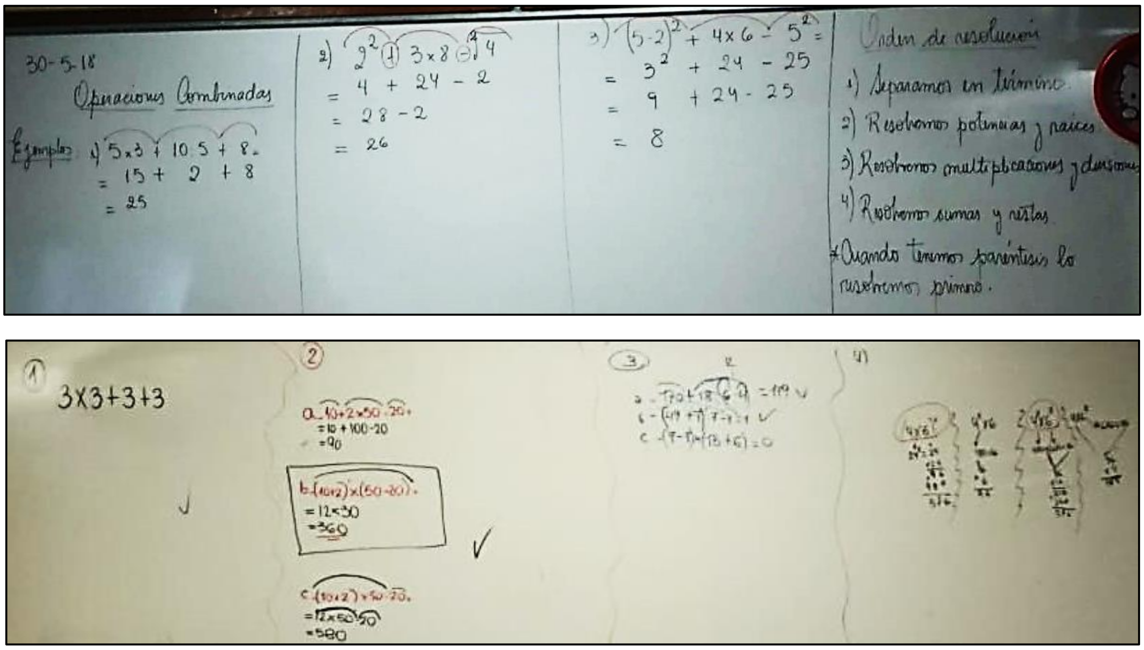


Figura 11. *Actividades observadas que pueden clasificarse dentro del ambiente (1) de Skovsmose (2000, p. 10)*

Otras actividades observadas en los cursos de práctica podrían ubicarse dentro del ambiente de aprendizaje "paradigma del ejercicio" con referencia a la "semirrealidad" (ver Figura 10, celda **(3)**), es decir, *"situaciones problemáticas artificiales imaginadas por el autor del problema y que, para su resolución, es irrelevante cualquier otra información no detallada"* (Bonzi, L. y Guidobaldi, P., 2017, p. 12) en las mismas.

1.2.2. Comentarios relacionados con las alumnas y su desempeño con otras asignaturas

Durante la observación de jornada completa, la distribución espacial de las alumnas variaba dependiendo de la asignatura. Por ejemplo, en Catequesis, en Plástica y en Tutoría las estudiantes se distribuían en tres grandes grupos, diferenciándose esta forma de trabajar, por ejemplo, con las de Matemática y Geografía, ya que en estas últimas trabajaban de a dos, con su compañera de banco.

Las actitudes de las estudiantes, al igual que su distribución, variaban en los distintos espacios curriculares. Por ejemplo, en asignaturas más "prácticas", tales como Plástica, se observó mayor libertad de expresión y desplazamiento de las alumnas por el aula. En cambio, en instancias de evaluaciones escritas y orales, las estudiantes se comportaban de manera más organizada y con mayor silencio, escuchando al profesor/a y prestando atención a la actividad a realizar, observándose esto en todas las asignaturas.

Un momento a destacar es una clase de Tutoría[10], en donde se les brindó mayor autonomía a las alumnas para realizar la actividad del día; esta consistió en elegir una temática y decorar el curso con motivo de celebrar el Día del Estudiante, lo que provocó algún disturbio y desorganización.

Dependiendo de las actitudes y la exigencia de los profesores a cargo de cada espacio curricular, las estudiantes se mostraban más o menos interesadas y/o predispuestas a participar en clases y a realizar aportes a las mismas. En el caso de Matemática, las alumnas mostraban compromiso y participación en cada jornada con respeto, escuchando a sus compañeras en las puestas en común y a la docente al realizar una exposición.

La relación de las estudiantes con la preceptora era amable; ella atendía las inquietudes de todas y actuaba ante situaciones de conflicto y/o problemas. Otra persona cercana a las alumnas era la tutora de cada curso, la cual organizaba la distribución del alumnado en el aula, como mencionamos en la Sección 2.

En síntesis, podemos afirmar que, en todas las clases que observamos y durante nuestras prácticas, las alumnas se mostraban dispuestas e interesadas en comprender, saber más allá de lo trabajado en clases, en resolver sus dudas y participar con sus opiniones e ideas. Sin embargo, se requirió de control firme y guía para mantener un orden adecuado para el trabajo en el aula.

[10] Este espacio permite que las alumnas elijan al docente encargado para trabajar, con el cual podrán manifestar distintas inquietudes, ya sean sobre los espacios curriculares, sobre los docentes o sobre problemas personales.

Capítulo II: Diseño de la práctica e implementación en el aula

2.1. Planificación anual de la materia

El programa anual de la asignatura para 1er año "A" y "B" de la institución en donde realizamos nuestras prácticas de enseñanza se divide en los siguientes cuatro ejes temáticos[11]. Con el mismo, y con el Diseño Curricular del Ciclo Básico de la Provincia de Córdoba, realizaremos un breve análisis, con el objetivo de establecer relaciones entre estos documentos. A continuación, presentamos los cuatro ejes temáticos (con sus respectivas unidades), extraídos del programa anual, y dicho análisis:

<u>EJE</u>: NÚMEROS Y OPERACIONES

<u>Unidad N° 1</u>: Una revisión sobre los Naturales como objeto útil. Una formalización de los Naturales como objeto matemático.

<u>Unidad N° 2</u>: Divisibilidad en ℕ: los Números Naturales mirados desde la composición multiplicativa.

<u>Unidad N° 3</u>[12]: Números Racionales Positivos. Representación fraccionaria y decimal.

<u>Contenidos</u>: Revisión del concepto de fracción. Partes y enteros. Relación entre el entero y las partes y entre las partes entre sí. Fracción de una colección. Fracción y división entera. Comparación de fracciones. Densidad de los Racionales positivos. Representación en la recta numérica. Fracciones, razones y proporciones. Fracciones y porcentaje. Multiplicación y división de fracciones. Resolución de problemas. Fracciones y porcentaje. Equivalencias entre fracciones y expresiones decimales. Representación en la recta numérica. Problemas con multiplicación y división por la unidad seguida de ceros. Problemas para resolver con multiplicación o división de Números Decimales. Orden en el conjunto de los Números Racionales. Densidad. Fracciones, decimales y probabilidad.

(Capítulo VI, IX y XIII del libro "Explorar en Matemática" 7°/1° E.S.)

[11] Un **eje temático** es una unidad de planificación en la que, en torno a un tópico, problema, que los contextualiza y les da sentido, el docente organiza los contenidos a abordar, los objetivos de aprendizaje, las estrategias metodológicas, las actividades previstas, los recursos a utilizar, las formas de agrupamiento y dinámicas de trabajo previstas, los presupuestos de tiempo, las decisiones en torno a la evaluación, las posibles vinculaciones con otras disciplinas. (Gobierno de la Provincia de Córdoba. Ministerio de Educación. Secretaría de Educación. Subsecretaría de Promoción de Igualdad y Calidad Educativa. Dirección General de Planeamiento e Información Educativa. *Diseño Curricular: Ciclo Básico de la Educación Secundaria, versión 2011 – 2015,* p. 6).

[12] La Unidad N° 3 aparece en negrita pues es la que abordamos en nuestras prácticas de enseñanza.

<u>EJE</u>: ÁLGEBRA Y FUNCIONES

<u>Unidad N° 4</u>: Proporcionalidad directa e inversa.

<u>EJE</u>: GEOMETRÍA Y MEDIDA

<u>Unidad N° 5</u>: El estudio de las figuras geométricas. Uso de la notación y de los procedimientos de construcción básicos.

<u>Unidad N° 6</u>: El área y el perímetro de figuras. Longitud, capacidad y peso.

<u>Unidad N° 7</u>: Cuerpos geométricos.

<u>EJE</u>: ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

<u>Unidad N° 8</u>: Construcción y análisis de tablas, gráficos circulares y diagramas de barras. Promedio y moda. Probabilidad.

Como mencionamos anteriormente, analizando y observando el Diseño Curricular del Ciclo Básico de la Provincia de Córdoba, podemos decir que los siguientes contenidos propuestos en la planificación para primer año, respectivamente, no se encuentran en el mismo:

- Análisis del resto. Situaciones de conteo. Problemas de variaciones y permutaciones. Relación entre las partes entre sí. Fracciones y porcentaje. Fracciones y razones. Problemas con multiplicación y división por la unidad seguida de ceros. Probabilidad.
- Porcentaje como relación de proporcionalidad.
- Mediatriz de un segmento. Características y construcción de polígonos. Ángulos interiores y centrales de polígonos. Análisis de desarrollos planos de cuerpos geométricos. Variación del volumen de primas en función de la alteración se sus aristas y de su área total.
- Moda.

Por otro lado, según hemos podido observar el Diseño Curricular del Ciclo Básico de la Provincia de Córdoba, se propone una serie de contenidos entre los cuales los siguientes no aparecen explícitamente declarados en la planificación para primer año:

- Comparación del sistema decimal y del sistema sexagesimal. Punto en la recta como representación de un número natural. Discretitud. Producción de argumentaciones a acerca de la validez de procedimientos o cálculos acudiendo a propiedades de suma, resta, multiplicación y división con números naturales y con números racionales positivos. Producción de argumentaciones acerca de la validez de propiedades de operaciones entre números naturales (distributiva y asociativa).

- Constante de proporcionalidad. Uso de ecuaciones y otras expresiones simbólicas. Construcción y comparación de fórmulas para expresar procedimientos de cálculos y propiedades. Obtención y uso de fórmulas para conjeturar y validar expresiones que expresen divisibilidad.

- Reconocimiento de problemas extra-matemáticos para cuya resolución sea necesario estimar la medida sin acudir al cálculo. Reconocimiento de la inexactitud de la medida.

- Gráficos estadísticos-pictogramas de línea, de punto. Comparación de probabilidades de diferentes sucesos, incluido suceso seguro e imposible para espacios muestrales infinitos. Diagrama de árbol.

Según lo descripto, podemos decir que el programa se adecúa en gran parte al Diseño Curricular del Ciclo Básico de la Provincia de Córdoba, ya que la mayoría de los contenidos propuestos en la planificación pertenecen al mismo. Además, como comentario importante, podemos observar una significativa organización curricular centrada en el libro de texto.

Por otro lado, el programa de la asignatura, junto con la planificación anual para primer año, contiene objetivos de la disciplina, acuerdos didácticos y específicos del Departamento de Matemática, material obligatorio, criterios de exigencia, requisitos para presentarse en el coloquio o examen, y un diagnóstico de los cursos.

Por otra parte, en la planificación anual, y en concordancia con el Diseño Curricular del Ciclo Básico de la Provincia de Córdoba, aparece una breve fundamentación de la actividad matemática en clase, de la cual extraemos el siguiente fragmento, ya que nos pareció importante pues lo vemos reflejado en visión de la enseñanza que estamos construyendo a lo largo de nuestra carrera:

"La Matemática es un producto cultural porque emana de la actividad humana. Hacer Matemática es una forma característica de producir; una manera especial de explicar, de argumentar y de validar las afirmaciones realizadas; un modo propio de comunicar, usando un lenguaje definido. A este proceso tratamos de desarrollarlo en el aula a partir de intercambios [...]. La construcción de conocimientos matemáticos se ve favorecida por la

resolución de variados problemas en diversos contextos, e involucrando un 'hacer' y un 'reflexionar sobre el hacer'." (Planificación anual, 2018)

En nuestras prácticas de enseñanza desarrollamos la Unidad N° 3 de la planificación de la docente tutora. Para abordar la misma, se tuvieron en cuenta los siguientes objetivos y capacidades propuestos en el programa y en la planificación:

OBJETIVOS GENERALES

- *Trabajo ordenado y en silencio;*
- *Dirigirse a la profesora y a las compañeras con respeto;*
- *No interrumpir las explicaciones o discusiones de los temas;*
- *Reconocer datos en distintas situaciones;*
- *Interpretar correctamente el enunciado de los problemas;*
- *Comunicar los conocimientos a través de producción escrita;*
- *Resolver cálculos y problemas a través de diferentes estrategias.*

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- *Utilizar Números Racionales Positivos y sus representaciones de acuerdo a la necesidad que imponen el contexto y el problema;*
- *Reflexionar sobre la necesidad de estimar y de medir efectivamente;*
- *Usar Números Naturales, expresiones fraccionarias y decimales para resolver problemas intra-matemáticos y extra-matemáticos.*

(Programa y Planificación Anual de primer año, 2018)

Decidimos adherir a los mismos ya que, por un lado, serían los que guiarían nuestras prácticas, tanto en contenidos como en la forma de trabajar en el aula y, por otro lado, eran particularidades que definían a la institución como tal, expresando las cuestiones que el colegio esperaba de las alumnas y de nuestras clases.

2.2. Nuestra planificación

El período de prácticas se realizó desde el 7 de agosto hasta el 12 de septiembre del año 2018. En el mismo, pudimos desarrollar 20 horas cátedra repartidas en 13 clases. Para el dictado de las mismas, se planificaron los contenidos para abordarse en 40 u 80 minutos, los cuales contemplaron 10 minutos de tolerancia, aproximadamente, para imprevistos que pudieran emerger.

Teniendo en cuenta que las prácticas se llevaron a cabo en el corto plazo de aproximadamente un mes, se consideraron los siguientes contenidos de la Unidad N° 3, "Números Racionales Positivos. Representación fraccionaria y decimal", para ser dictados: concepto de fracción, partes y enteros, fracción y división entera, fracción de una colección, comparación de fracciones, densidad de los Racionales positivos, representación en la recta numérica, fracciones y porcentaje, resolución de problemas (relación "parte-todo", reparto), equivalencias entre fracciones y expresiones decimales, problemas con multiplicación y división por unidad seguida de ceros y orden en el conjunto de los Números Racionales, junto a los incorporados por nosotras, los cuales, a continuación, explicitaremos en detalle, así como también el orden en el que fueron tratados[13].

Nuestra propuesta se basó en el enfoque del Número Racional como solución al problema de la medida en $\mathbb{N}$ y en la insuficiencia de los Números Naturales para la división. Para tratar estos dos aspectos tuvimos en consideración que las alumnas ya habían trabajado en unidades anteriores con números naturales, operaciones y, en particular, con el estudio de la relación para la división en $\mathbb{N}$, $a = b \times c + r$, con a dividendo, b divisor, c cociente y r resto y, en el Nivel Primario, con la relación "parte-todo" para el racional con notación fraccionaria.

Una de las condiciones que tuvimos en cuenta para la elaboración de nuestra propuesta fue el uso del libro de texto para mantener cierta continuidad con algunas de las estrategias de enseñanza de la docente a cargo del curso. Sin embargo, y para otorgarle un estilo propio a nuestras clases, completamos la propuesta con afiches, cartulinas y otros materiales, los cuales fueron pensados propositalmente para el desarrollo de los enfoques mencionados arriba, es decir, el racional y la medida, y el problema de la división en $\mathbb{N}$. Además, completamos nuestros recursos con fotocopias con actividades extra, puesto que reconocimos que el libro de texto no ponía en juego ciertos temas y habilidades, tal como se mencionó en la Sección 2.1 del capítulo anterior.

Luego de nuestra práctica de enseñanza, y a partir de todos los contenidos planificados y abordados, la docente continuaría con los temas, es decir, con la notación decimal y, luego, con las operaciones entre los números racionales positivos. Este último hecho resultó un desafío para nuestras prácticas ya que las alumnas debían manejar correctamente las nociones

[13] Los contenidos <u>no abordados</u> de la Unidad N° 3 fueron: relación entre las partes entre sí. Fracciones, razones y proporciones. Multiplicación y división de fracciones. Problemas para resolver con multiplicación o división de Números Decimales. Densidad. Fracciones, decimales y probabilidad.

de fracción y la notación decimal en los distintos contextos para así poder operar con ellos, continuando así con la propuesta de la docente.

Las clases se planificaron a través de guiones conjeturales[14], conformándose por los contenidos mencionados en la Sección 1 de este capítulo y por los propuestos por nosotras, organizados y secuenciados en los siguientes cinco ejes principales:

I. "Los Números Racionales como solución al problema de la medida", en el cual abordaremos la necesidad de los Números Racionales Positivos frente a un problema de la vida real (medir).

II. "Los Números Racionales como solución al problema de la división", en el cual observaremos la necesidad del surgimiento de este nuevo conjunto, los Racionales, frente a la insuficiencia de los Números Naturales en la división, además de abordar distintas representaciones del mismo (reparto, relación "parte-todo").

III. "Recta numérica y métodos para representar con precisión Números Racionales", en el cual construiremos la recta numérica, veremos distintos métodos para particionar una unidad y representaremos fracciones.

IV. "Comparación de fracciones y Fracciones Equivalentes", donde compararemos fracciones teniendo en cuenta distintos criterios, y comprenderemos la equivalencia entre fracciones recordando cada contexto (reparto, relación "parte-todo", recta numérica).

V. "Fracciones Decimales"[15], donde comprenderemos qué fracciones tienen una expresión decimal finita y haremos traducciones de una notación a la otra.

La organización de los contenidos se realizó teniendo en cuenta lo que Gvirtz, S. y Palamidessi, M. (2008) llaman las variables de la planificación de la enseñanza[16] las cuales son:

i. Las metas, objetivos o expectativas de logro;

---

[14] [Un **guion conjetural** es] *"una suerte de relato de anticipación, de género de 'didáctica-ficción' que permite predecir prácticas a la vez que libera al sujeto [...] en sus posibilidades de imaginarse una práctica maleable, dúctil, permeable a las condiciones de su producción, de frente a los sujetos (el docente-los alumnos) que en ella participan."* (Bombini, G., 2001, p. 5).

[15] Este último eje no pudo ser llevado a cabo por cuestiones de tiempo, por lo tanto, no será desarrollado en este capítulo, sino en el Anexo II.

[16] *"[...] cosas o aspectos de la realidad en las que debemos pensar si queremos planificar y desarrollar una actividad sistemática de enseñanza."* (Gvirtz, S. y Palamidessi, M., 2008, p. 188).

ii. La selección de los contenidos;
iii. La organización y secuenciación de los contenidos;
iv. Las tareas y actividades;
v. La selección de los materiales y recursos;
vi. La participación de los alumnos;
vii. La organización del escenario; y
viii. La evaluación de los aprendizajes.

Estas variables nos servirán de guía para realizar el siguiente relato acerca de la caracterización de cada eje organizador de nuestras prácticas, describiendo en cada uno de éstos los contenidos planificados, los objetivos planteados, las actividades, la metodología con la que se trabajó, la organización del escenario y reflexiones de cada momento. Además, al finalizar el capítulo, analizaremos los instrumentos de evaluación e ilustraremos los resultados obtenidos por las alumnas.

2.2.1. Los Números Racionales como solución al problema de la medida

Los contenidos que se abordarán en este eje son: ¿qué es medir? Magnitudes: diferenciar objeto y/o fenómeno de cualidad. Fases del proceso de medición: comparar, ordenar y cuantificar. Definición de medir y de unidad de medida. Partición de la unidad.

Con respecto a este eje, planteamos objetivos para que las alumnas logren definir qué es medir, establezcan la medida de la magnitud de un objeto a partir de la misma magnitud de otro seleccionado como unidad de medida, escriban el resultado, puedan analizar el proceso de medición y comprendan la importancia de los Números Racionales en el mismo como solución al problema de la medida.

Decidimos seleccionar este proceso porque consideramos que abordar los Números Racionales Positivos a través de un problema de la vida real y poder realizar el mismo empíricamente y manipular los materiales sería una actividad más significativa para las alumnas. Por lo tanto, las actividades estuvieron orientadas a que surgiera la necesidad de este conjunto numérico para representar procesos de medición.

Se planificó la primera clase para 40 minutos, pensando que la misma debía ser motivadora. Se comenzó con una presentación en Power Point, la cual se proyectó en el televisor de cada curso, como disparador de un debate en torno al proceso de medición y poder así construir una definición de ello junto a las alumnas.

Comenzamos distinguiendo la diferencia entre objeto, fenómeno, cualidad y magnitud (ver Figura 12), para luego construir las fases del proceso de medición.

Figura 12. *Distinción entre objeto, fenómeno, cualidad y magnitud*

A continuación, se realizó una experiencia empírica en la cual, nosotras, medimos el largo del pizarrón tomando como unidad de medida el largo del borrador disponible en el curso. El objetivo de este proceso consistió en construir la expresión que denota el resultado de un proceso de medición, en este caso, de longitud (ver Figura 13).

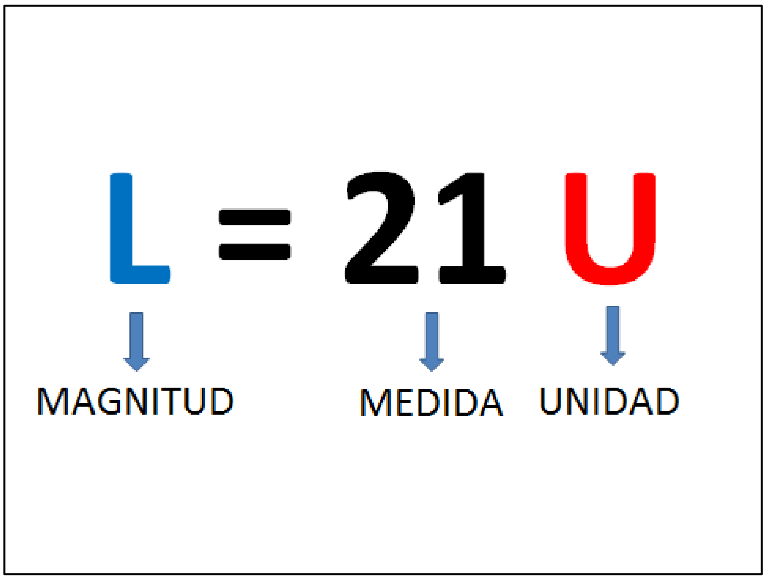


Figura 13. *Resultado de un proceso de medición*

Con los aportes de las alumnas, construimos las siguientes definiciones, quedando escritas las mismas en la pizarra del aula y en las carpetas de las estudiantes:

<u>Medir</u>: es un proceso que consiste en comparar, cuantificando, la magnitud de objeto o fenómeno a medir con otra de la misma especie elegida arbitrariamente como unidad de medida.

<u>Unidad de medida</u>: elemento de referencia, arbitraria y universal, que sirve para poder medir.

A lo largo de esta presentación, el logro de los objetivos se evidenciaron en la participación de las alumnas, ya que brindaban sus propios ejemplos, hacían preguntas pertinentes, recordaban y relacionaban contenidos trabajados en Física con nuestra propuesta. En concordancia con Gvirtz, S. y Palamidessi, M. (2008), *"los alumnos pueden analizar y enriquecer el plan de trabajo propuesto por el docente [...]"* (p. 20).

Con el fin de brindarles a las alumnas situaciones que motiven la reflexión acerca de los procesos medición, magnitudes a medir, unidades de medida e instrumentos de medición, se propuso la actividad que aparece en la Figura 14, como tarea, y fue corregida en una clase posterior.

<u>Actividad N° 1</u>: realiza las siguientes actividades, recordando que los objetos poseen cualidades (medibles y no medibles) y que el proceso de medición se basa en las actividades de comparar, ordenar y cuantificar.

1. Enuncia tres magnitudes de un objeto cualquiera.

2. Enuncia tres cualidades no medibles de un objeto.

3. Cuando vas al médico, ¿cuáles son las magnitudes que mide en vos tu doctor? ¿Cómo lo hace? ¿Usa algún instrumento de medición? ¿Qué unidad de medida emplea en cada medición?

4. En tu hogar, elije un objeto cualquiera, define una magnitud a medir de ese objeto y la misma magnitud en otro que tomarás como unidad de medida. Realiza el proceso de medición de esa magnitud y escribe el resultado en la carpeta.

Figura 14. *Actividad para reforzar lo visto en la primera clase*

La siguiente actividad[17] (ver Figura 15) se realizó en clase, en grupos de dos personas.

[17] Actividad extraída y adaptada de *El Libro de la Matemática 7*, p. 130.

Actividad N° 2 (medición de la longitud de tiras tomando la longitud de una como unidad de medida) : se trata de medir la longitud de cada uno de los segmentos (hechos de cartulina) que te proporcionamos. Podrían hacer esa medición con una regla y, en ese caso, la unidad de medida sería el centímetro; aquí les proponemos tomar como unidad de medida, por ejemplo, la tira verde U.

Como ya sabemos, el proceso de medición consiste en comparar, ordenar y cuantificar. Aquí lo que deben hacer es comparar la unidad de medida con la tira que desean medir y ver cuál de las dos es más larga.

- Si la unidad de medida es menor que la longitud de la tira que se desea medir, observen cuántas veces entra en la tira observada, y si no entra un número exacto de veces, primero deben decir entre qué números se encuentra la medida y luego medir el segmento que sobra.
- Si la unidad es mayor que la longitud de la tira que se desea medir, deben ver qué parte de la unidad se corresponde con la misma.

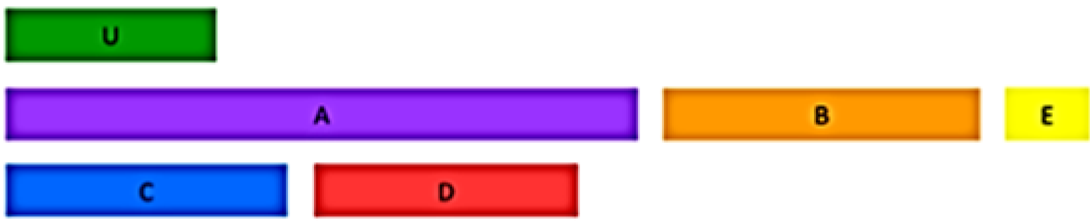


Figura 15. *Actividad de medición*

El objetivo de esta actividad consistió en brindar oportunidades a las estudiantes para que experimenten la necesidad de fraccionar una unidad para poder medir la longitud de objetos reales y, así, reflexionar acerca de cuán irreal es un resultado entero en un proceso de medición.

Para el desarrollo de esta actividad se entregaron sobres que contenían las seis tiras de cartulina (A, B, C, D, E, y U, respectivamente), uno para cada alumna (ver Figura 16). Antes de comenzar la tarea, les recomendamos que realizaran las mediciones en orden, es decir que primero midieran, con la tira U como unidad, la tira A, luego la B, y así sucesivamente. Una condición dada para el desarrollo de la tarea fue que el uso de la regla no estaba permitido. Las estudiantes empezaron a realizar las mediciones, para lo cual se destinaron 30 minutos, aproximadamente. Luego, algunas de ellas pasaron al pizarrón a explicar el proceso de medición y escribir su resultado, siguiendo la notación que aparece en la Figura 13. Para la puesta en común, decidimos usar las mismas tiras de cartulina, pero de mayor tamaño para que todas las alumnas pudieran cotejar lo que hacían en sus bancos, con los eventos en la pizarra.

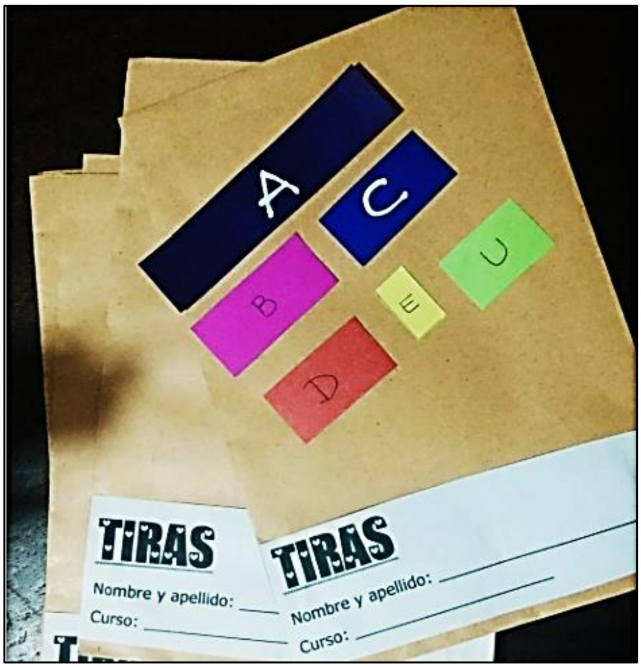


Figura 16. *Sobres y tiras de cartulina*

Aquí presentamos e ilustramos dos casos de discusiones con las estudiantes como resultados de la actividad: mediciones para el caso en que la longitud de la tira medida es mayor que la de la unidad U (ver Tabla 3) y el caso en que la longitud a medir es menor que la de la unidad (Tabla 4).

Para el primero caso, cuando la longitud de la tira a medir era mayor que la de la unidad de medida (tira verde U), se realizó el siguiente proceso y las discusiones correspondientes para la medición de la tira B (ver Tabla 3):

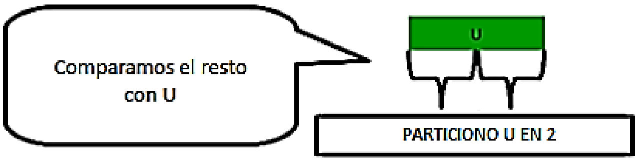
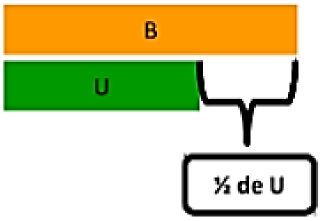
	En este caso, B medía entre U y 2U, a este resultado se lo denotó como: $$\mathbf{U < B < 2U}$$
	Si se particionaba la unidad U en dos partes iguales, se obtenía que la mitad de U medía lo mismo que el resto, es decir que el resto medía $\frac{1}{2}$ de U.
	Se consiguió concluir que la medida de B era: $$\mathbf{B = U + \frac{1}{2}U = \frac{3}{2}U}$$

Tabla 3. *Procedimiento seguido para la medición de la longitud de una tira mayor que la unidad de medida*

De manera similar, y para las tiras de longitud mayor que la unidad, las alumnas lograron dar la medida de las restantes, en este caso, A, C y D.

Para el caso de la medición de la tira E, cuya longitud es menor que la de U (unidad de medida), el procedimiento fue el siguiente (Tabla 4):

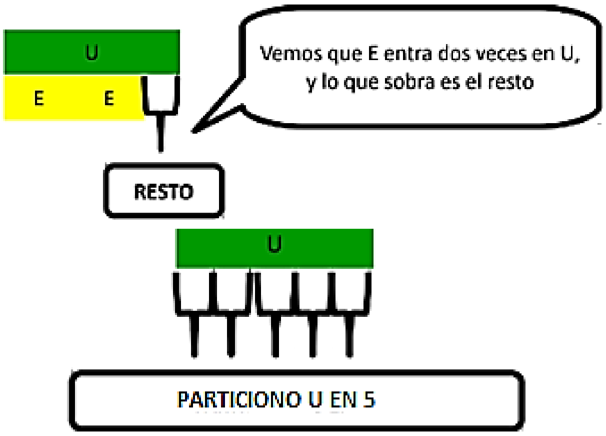
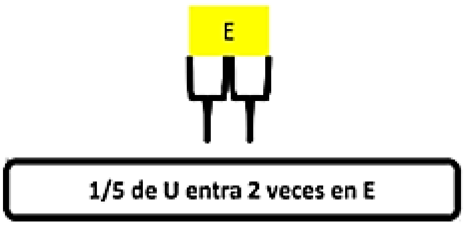
	U no entraba ni una vez en E.
	Se debió analizar cuántas veces entra la tira E en la unidad de medida U. Luego, observamos que si se particionaba la unidad en cinco partes iguales, la longitud de cada una de estas partes era igual a la medida del resto, es decir que el resto medía $\frac{1}{5}$ de U.
	Restaba ver cuántas veces entraba el resto en E. Así, se concluyó que la medida de E era: $\mathbf{E = \frac{2}{5}\,U}$

Tabla 4. *Procedimiento seguido para la medición de la longitud de una tira menor que la unidad de medida*

2.2.2. Los Números Racionales como solución al problema de la división

Los contenidos que se abordarán en este eje son: insuficiencia de los Números Naturales en la división. Reparto. Relación “parte-todo”. Definición de Número Racional.

Los objetivos para este eje N° II de la planificación se centraron en que las alumnas comprendan la necesidad de los Números Racionales en las divisiones no exactas en el conjunto de los Naturales, que expresen números racionales en notación fraccionaria mixta en distintos contextos y que identifiquen la unidad en situaciones de interpretación “parte-todo”.

Para abordar la necesidad de los Números Racionales en el problema de la división en el conjunto de los Naturales se decidió, previamente, hacer una analogía de este problema con el de la resta en $\mathbb{N}$, viendo aquí la primera insuficiencia de los mismos (para el caso en que el minuendo es menor que el sustraendo) y la necesidad de construir, en este caso, un nuevo conjunto numérico, los Números Enteros.

Luego, avanzamos recordando los elementos de la división en $\mathbb{N}$ (ver Figura 17) y la relación $a = b.c + r$ con $0 \leq r < b$.

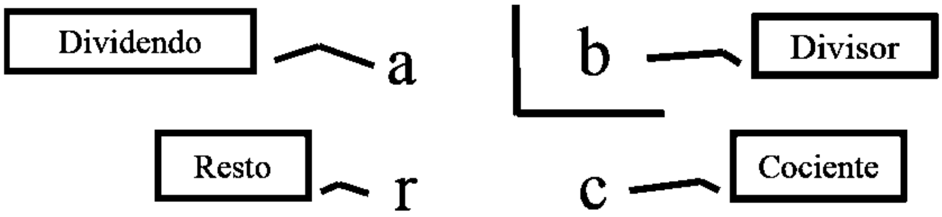


Figura 17. *Elementos de la división*

Aproximándonos al surgimiento de las fracciones en este nuevo contexto, dimos ejemplos en los que las divisiones no eran exactas en $\mathbb{N}$ (uno de ellos fue 3:4) y, nosotras, escribimos la solución en notación fraccionaria en la pizarra, en este caso $\frac{3}{4}$. Aquí, observamos que las alumnas que no estaban convencidas de ese resultado ($\frac{3}{4}$) y querían realizar la división, obteniendo así el cociente en notación decimal, lo cual no era nuestro objetivo en esa instancia[18].

Para construir la relación $a: b = \frac{a}{b}$ siendo $\frac{a}{b}$ la solución racional con notación fraccionaria a la división entre los naturales a y b, procedimos a realizar la verificación de la división mediante la idea de que si $a: b = \frac{a}{b}$, debe ocurrir que b veces $\frac{a}{b}$ es igual a a. Para ello, preparamos tiras de cartulina con el objetivo de ayudar a la comprensión de estas relaciones de manera, no solo algebraica, sino también gráfica. Las estudiantes pasaron a la pizarra y construyeron una representación gráfica (ver Figura 18) para probar que 4 veces $\frac{3}{4}$ es igual a 3 unidades representadas por los rectángulos que aparecen en la Figura 18.

[18] Este aspecto será recuperado en el siguiente capítulo.

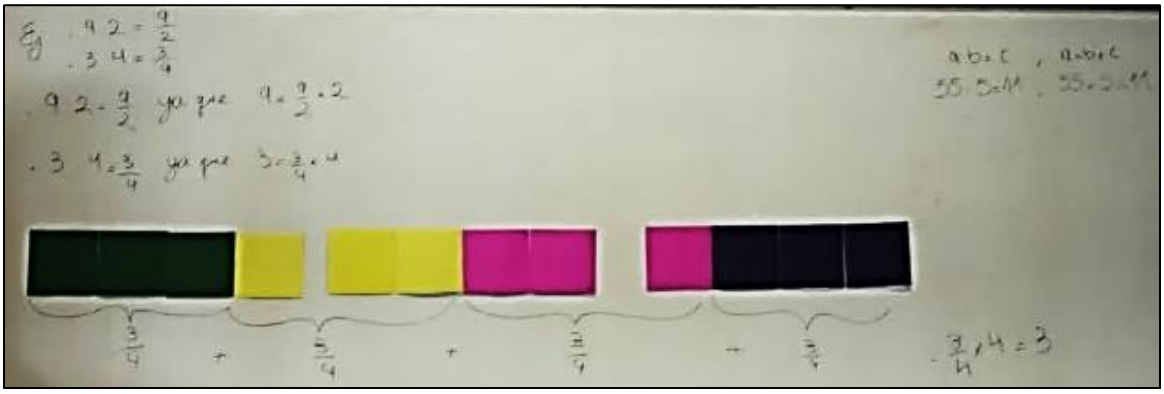


Figura 18. *Verificación gráfica de la división* $3:4 = \frac{3}{4}$

Para concluir, presentamos a las alumnas un breve resumen en un afiche sobre la división y este resultado racional para que copiaran en sus carpetas.

- ✧ *a:b = c, con 'c' un número natural, cuando 'a' es múltiplo de 'b' ya que c.b = a*

  Además a 'c' lo puedo escribir como fracción[19]*:* $c = \frac{c}{1}$
- ✧ $a:b = \frac{a}{b}$ *cuando 'a' no es múltiplo de 'b' ya que* $\frac{a}{b}.b = a$

Para introducir la notación fraccionaria mixta $\frac{a}{b} = C\,\frac{r}{b}$ se decidió dar la siguiente actividad (ver Figura 19) que, pensamos, las haría reflexionar y construir ellas mismas esta notación.

Actividad N° 3: para repartir 8 alfajores entre 3 personas sin que sobre nada se hizo la siguiente cuenta:

$$\begin{array}{r|l} 8 & \underline{\;3\;} \\ 2 & \;2 \end{array}$$

Observando la división anterior, ¿cuántos alfajores le corresponden a cada persona? ¿Puedes obtener otro resultado?

Figura 19. *Actividad de reparto*

Acompañamos la reflexión de las estudiantes para que pudieran representar la solución de esta situación conocida por ellas desde el primario mediante la expresión $2\,\frac{2}{3}$. Fue interesante notar el interés con que las alumnas se apropiaron de esta notación nueva para la solución de un problema conocido por ellas.

[19] Para llegar a esta conclusión se realizó un análisis similar al anterior.

Para aplicar este juego de notaciones entre los elementos de una división y la notación fraccionaria mixta, proporcionamos a las alumnas las siguientes actividades (ver Figura 20 y 21), las cuales fueron realizadas de tarea y corregidas en una clase posterior, basadas en repartos equitativos sin resto.

Con la actividad[20] que aparece en la Figura 20 se esperaba que las alumnas pudieran reflexionar sobre la razonabilidad de la respuesta en notación fraccionaria mixta en los distintos contextos planteados y que observaran las equivalencias entre las distintas respuestas.

<u>Actividad N° 4</u>:

Ejercicio 1: Juan tiene 37 globos para repartirlos, en partes iguales, entre 5 chicos.

a) ¿Cuántos le dará a cada uno? ¿Le quedan globos sin repartir? ¿Por qué?

b) ¿Se pueden repartir los que sobran? ¿Por qué?

Ejercicio 2: Fernando tiene 37 alfajores y los quiere repartir, en partes iguales, entre 5 chicos.

a) ¿Cuántos le dará a cada uno? ¿Sobran alfajores sin repartir? ¿Por qué?

b) ¿Se pueden repartir los que sobran? ¿Por qué?

Ejercicio 3: para repartir 9 pizzas entre 4 personas en partes iguales y sin que sobre nada los chicos hicieron lo siguiente:

- Julián: "le doy dos pizzas enteras a cada uno. Me queda una que divido en 4 porciones. Le doy una de esas 4 porciones a cada persona. Cada una recibe 2 pizzas enteras y $\frac{1}{4}$".

- Bruno: "yo divido cada pizza en cuartos. Le doy $\frac{1}{4}$ de cada pizza a cada uno. Como son 9 pizzas, cada persona recibe 9 porciones de $\frac{1}{4}$, o sea $\frac{9}{4}$".

¿Están de acuerdo con estos chicos? ¿Por qué?

Figura 20. *Actividad de reparto*

Con la Actividad N° 5[21] (ver Figura 21) pretendimos que las alumnas trabajen con, y se apropien de, la notación fraccionaria, la notación fraccionaria mixta y de los elementos de la división vinculados a las anteriores notaciones. Durante la corrección de las actividades se observó que la mayoría de las estudiantes no mostraban dificultades para realizar la actividad.

[20] Actividad extraída y adaptada de Herrero, A. y Roldán, A, 2011, p. 5 y 6.
[21] Actividades extraídas de *Explorar en Matemática 7°/1° ES*, p. 56.

Actividad N° 5:

Ejercicio 1: se desea repartir 15 turrones iguales entre 4 niños, de modo que cada uno reciba la misma cantidad sin que sobre nada.

a) ¿Cómo puede efectuarse el reparto?

b) ¿Cuánto le tocará a cada niño?

c) ¿Será cierto que si se repartieron 30 turrones iguales entre 8 niños cada uno recibiría la misma cantidad que en el reparto de 15 turrones iguales entre 4 niños?

Ejercicio 2: Susana compró 38 chocolates iguales para repartir entre sus 5 sobrinos de manera que todos reciban la misma cantidad y no sobre nada.

a) Busca dos maneras de hacer el reparto.

b) Para hacer el reparto, Susana hizo esta cuenta:

$$\begin{array}{r|l} 38 & \underline{5} \\ 3 & 7 \end{array}$$

¿Cómo se puede usar la información que brinda la cuenta para resolver el problema?

Ejercicio 3: se quiere repartir 53 chocolates iguales entre 8 amigos de manera que todos reciban la misma cantidad y no sobre nada. ¿Cómo podés usar esta cuenta para saber cuánto le toca a cada uno?

$$\begin{array}{r|l} 53 & \underline{8} \\ 5 & 6 \end{array}$$

Figura 21. *Actividad de reparto*

Como el objetivo de nuestras prácticas consistió en abordar las distintas representaciones de los Números Raciones en distintos contextos, otro aspecto del Número Racional que seleccionamos fue el de su representación “parte-todo”. Para ello, se realizaron las siguientes actividades[22] (ver Figura 22 y 23) de sombreado de figuras[23] (las cuales quedaron de tarea y no fueron corregidas en clase).

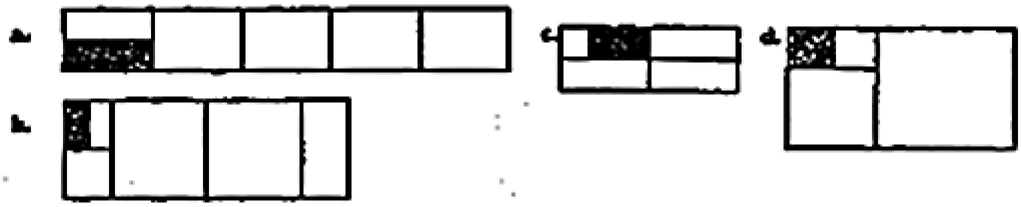
[22] Las actividades fueron extraídas y adaptadas de *El Libro de la Matemática 7*, p. 135 y 158, y de *Al Fin de Cuentas EGB 3*, p. 72, 80, 83 y 86.

[23] Decidimos mostrar las actividades más relevantes para la interpretación “parte-todo” para un Número Racional.

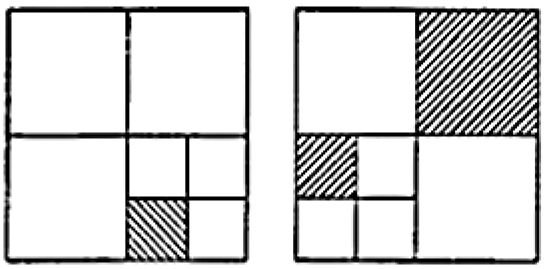
Actividad Nº6:

Ejercicio 1: esta figura representa la unidad. ¿Cómo representan $\frac{1}{2}$? ¿Y $\frac{3}{4}$? ¿Y $\frac{5}{4}$?

Ejercicio 2: determinen, en cada caso, qué parte del rectángulo está sombreado.



Ejercicio 3: el cuadrado más grande representa, en cada caso, la unidad. Escriban una fracción que represente la zona sombreada.



Ejercicio 4: la representación gráfica muestra la fracción $\frac{5}{3}$. ¿Cuál es la unidad?

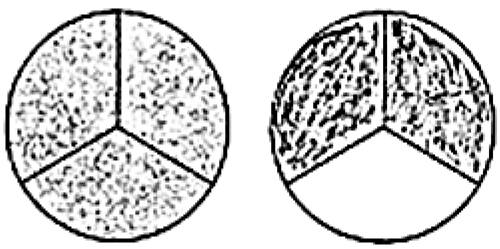


Figura 22. *Actividades de relación "parte-todo"*

Ejercicio 5: el siguiente dibujo es $\frac{4}{5}$ de un cierto dibujo. ¿Cómo será el dibujo entero? ¿Hay una única posibilidad? ¿Por qué?

Ejercicio 6: en un terreno cuadrado se quiere construir una cancha de fútbol rectangular. El largo de la cancha ocupará $\frac{3}{4}$ partes del largo del terreno, y de ancho ocupará la mitad del ancho del terreno. ¿Qué parte del terreno ocupará la cancha?

Figura 23. *Continuación Actividad N° 6 de relación "parte-todo"*

Decidimos preparar las mismas con el objetivo de, no solo abordar esta representación conocida por las estudiantes desde la escuela primaria, sino también realizar un diagnóstico de los conocimientos de las estudiantes acerca del reconocimiento de una parte dada la unidad, o viceversa. Este diagnóstico se constituyó en un instrumento de evaluación, que trataremos en la Sección 4 de este capítulo.

Para la resolución de estas actividades solicitamos a las estudiantes que llevaran hojas de calcar, con la intención de que este recurso sirviera para verificar que las partes en que una unidad determinada fuera particionada resulten "iguales" para representar esa porción en una fracción.

En estas actividades las alumnas tuvieron que mostrar habilidades tales como: identificar cuál era la unidad considerada para una fracción de ella dada, pintar una fracción de una unidad, indicar cuál era la fracción representada por una región pintada al analizar una figura u obtener la unidad a través de partes de ella.

En el desarrollo de estas actividades se recuperaron discusiones que surgieron en la actividad de las tiras (remitirse a la Figura 15) ya que, en ella, se pusieron en juego decisiones acerca de la relación "parte-todo": al decir cuánto mide la longitud de una tira respecto a una determinada unidad estamos diciendo qué parte de la unidad representa esa tira.

Una vez realizadas y corregidas estas actividades, dimos la definición de Número Racional y las distintas notaciones fraccionarias, en un afiche que ofrecimos a las estudiantes cuyo contenido registraron en sus carpetas.

Se llama ***Número Racional*** *a toda expresión del tipo* $\frac{a}{b}$*, donde 'a' pertenece al conjunto de los Números Naturales o es cero, y 'b' es Natural. 'a' se denomina* ***numerador*** *y 'b'* ***denominador****.*

Este conjunto se denota con la letra $\mathbb{Q}$*, que viene de la palabra anglosajona "Quotient", traducción literal de "cociente".*

Los Números Racionales se pueden representar en notación fraccionaria y en notación decimal[24]*.*

Dentro de la notación fraccionaria encontramos:

- *<u>Notación fraccionaria propia</u>: es aquella en la que el numerador es menor que el denominador.*
- *<u>Notación fraccionaria impropia</u>: es aquella en la que el numerador es mayor que el denominador.*
- *<u>Notación fraccionaria mixta</u>: es la representación de una fracción propia o impropia, indicando la parte entera y la fraccionaria mediante una fracción propia.*

Continuando con la planificación, luego de las actividades de enseñanza descriptas en esta sección, nuestra intención original consistía en organizar un debate en torno a la definición anterior y a las diferentes notaciones. Además, se reflexionaría acerca de si los números naturales son también números racionales y si el denominador de una fracción puede o no ser 0, entre algunas actividades. Todo esto, finalmente, no fue llevado a cabo por cuestiones de tiempo, priorizando el avance de los contenidos. El guion completo para el desarrollo de los contenidos de este eje puede verse en el Anexo I.

2.2.3. Recta numérica y métodos para representar con precisión números racionales

Los contenidos que se abordarán en este eje son: construcción de la recta numérica. División de segmentos en partes congruentes: método de la mediatriz, método de la red de paralelas y método de la regla y la escuadra.

Los objetivos planificados para este eje N° III fueron que las alumnas recuerden la definición de recta numérica, logren identificar sus características, apliquen el concepto de unidad de medida visto en el eje N° I ("Los Números Racionales como solución al problema

[24] Agregamos esta notación para recuperar conocimientos previos de las estudiantes.

de la medida”), utilicen diferentes métodos para particionar la unidad con precisión y, así, poder trabajar con fracciones y sus diferentes notaciones.

Se revisó con las estudiantes la representación en la recta numérica de los Números Naturales. Con esto, se reflexionó acerca de si cualquier recta es una recta numérica, mediante ejemplos. Luego, se resumieron las condiciones para que una recta sea una recta numérica, al mismo tiempo que, nosotras, en la pizarra, fuimos realizando un dibujo de la misma:

> *“Para ubicar los Números Naturales, primero debemos elegir un punto cualquiera de la recta, el cual será el punto de origen y al cual le asignaremos la letra $'o'$. Luego, se coloca a la derecha de $'o'$ y a cualquier distancia, un punto que representa al número 1. El segmento determinado por $'o'$ y el 1 será la unidad. Con este segmento unidad, y tomando como extremo el punto 1, trazamos su sucesor, el número 2, de modo tal que la distancia entre el punto 1 y 2 sea igual al segmento unidad, y así sucesivamente.”*

Y, por último, expresamos que:

> *“La recta numérica es un dispositivo gráfico que permite visualizar el orden de un conjunto numérico que se represente en ella, es decir si un número se encuentra a la derecha de otro, éste último es mayor que el primero.”*

Aquí las alumnas podían usar el compás para garantizar la congruencia de los segmentos determinados por un número natural y su sucesor.

Una vez finalizado este dictado discutimos con las estudiantes el uso de este dispositivo gráfico para representar números racionales. Para ello, posteriormente, se les entregó a las alumnas una hoja blanca para que construyeran una recta numérica (decidimos que usaran la hoja blanca para que se desprendieran de la utilización de los “cuadraditos” de la hoja cuadriculada para trasladar la unidad).

Luego, retomando la actividad de tiras (ver Figura 15) y usando como unidad de medida la tira verde U, se dieron dos ejemplos para que las alumnas ubicaran dos fracciones ($\frac{4}{3}$ y $\frac{5}{4}$) en la recta numérica. Para esto, las alumnas tenían permitido usar las tiras, cualquiera de ellas, según les resultara conveniente. Estos dos ejemplos no fueron casuales sino propositales ya que $\frac{4}{3}$ era la medida de la tira C respecto de la tira U y $\frac{5}{4}$ era la medida de la tira D respecto de la tira U.

El sentido de sustentarnos con la actividad de tiras para este momento fue conectar dos contextos de representación de fracciones distintos, además de que las alumnas pudieran continuar trabajando y manipulando las tiras de cartulina.

Más tarde, les dijimos a las estudiantes que, para dejar de trabajar con las tiras y avanzar, deberíamos aprender nuevas formas para particionar la unidad en la recta numérica y, así, poder ubicar fracciones en la misma.

A continuación, mostramos los métodos enseñados para particionar una unidad, comenzando por aquellos que sirven para ubicar ciertas fracciones particulares hasta llegar al método que sirve para todas las fracciones.

El método de la mediatriz

Se les dio a las alumnas dos ejemplos ($\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$) para que los ubicaran en la recta numérica. A partir de los mismos, ya no podrían usar las tiras de cartulina, por lo tanto, les presentaríamos este método (el de la mediatriz) mostrando todos los pasos en la pizarra. Ellas harían lo mismo en su hoja blanca para representar las fracciones mencionadas luego de prestar atención a la explicación. Para esto, utilizamos los elementos de Geometría brindados por la escuela (regla y compás).

Se les explicó a las estudiantes que, en primer lugar, se deben dibujar con el compás dos circunferencias, tomando como centro de las mismas cada uno de los extremos del segmento a particionar, con el objetivo de intersecarlas en dos puntos. Luego, y con la ayuda de la regla, se deben unir los mismos, quedando particionado el segmento en dos partes iguales (ver Figura 24[25]):

[25] La siguiente imagen fue extraída de una animación creada y brindada por la profesora supervisora de prácticas.

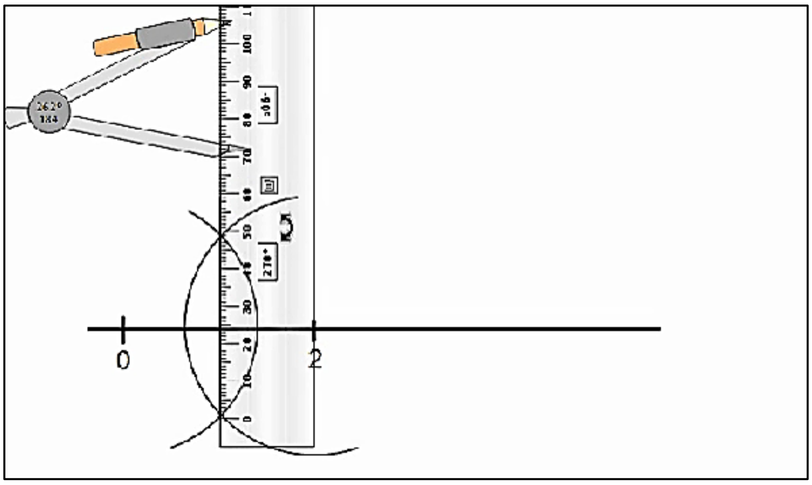


Figura 24. *Construcción de la mediatriz de un segmento con regla y compás*

En la Figura 25 se puede ver el resultado de este proceso de dividir, en la recta numérica, la unidad en dos partes iguales.

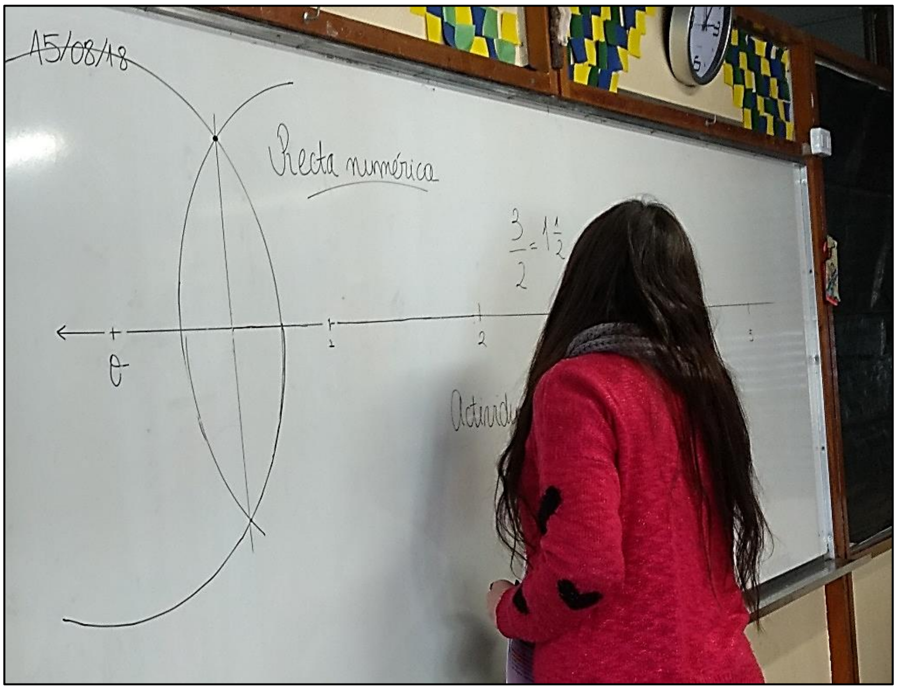


Figura 25. *Resultado de la explicación del método de la mediatriz*

Luego de la explicación, las alumnas manifestaron dudas generales de este método y comenzaron a ubicar las fracciones. Recorrimos los bancos controlando el buen uso de las herramientas geométricas, debido a que se debe recurrir a un proceso motriz particular. Para cerrar este momento, en la puesta en común y a través del aporte de las alumnas, se institucionalizaron las limitaciones de este este método ya que el mismo sólo sirve para particionar la unidad en cantidades que sean potencia de 2.

El método de la red de paralelas

Para el abordaje de este método se pensó, en primera instancia, en la representación de fracciones con denominador impar, las cuales no pueden ser ubicadas mediante la técnica anterior ya que la misma sólo funciona para particionar segmentos en cantidades que sean potencia de 2. No obstante, con el método de la red de paralelas también se puede particionar segmentos en dichas cantidades.

Se procedió a la explicación del método, para la cual utilizamos nuevamente los elementos de Geometría y, por otro lado, una hoja de calcar y una hoja rayada gigante (ver Figura 27), las cuales llevamos preparadas nosotras para una mejor visualización. Para que este momento fuera provechoso para las estudiantes y pudieran prestar atención, se pactó, antes de comenzar, que primero debían permanecer en silencio para escuchar y ver la explicación completa una vez. Luego, y ya con la posibilidad de que manifiesten dudas, se explicaría una vez más.

"Primero reproduciremos el segmento unidad en la hoja de calcar"

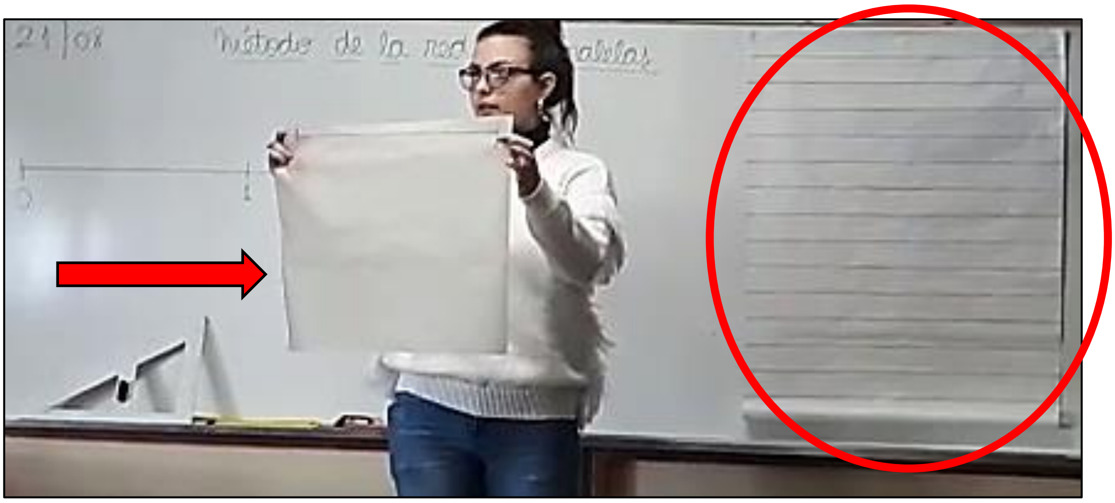


Figura 27. *Segmento reproducido en la hoja de calcar*

"Luego, se coloca la misma arriba de la hoja rayada y se hace coincidir los extremos del segmento unidad con dos de las rectas, de modo que, sobre el segmento, se puedan determinar la cantidad de partes en que se necesita dividir" (ver Figura 28 y 29).

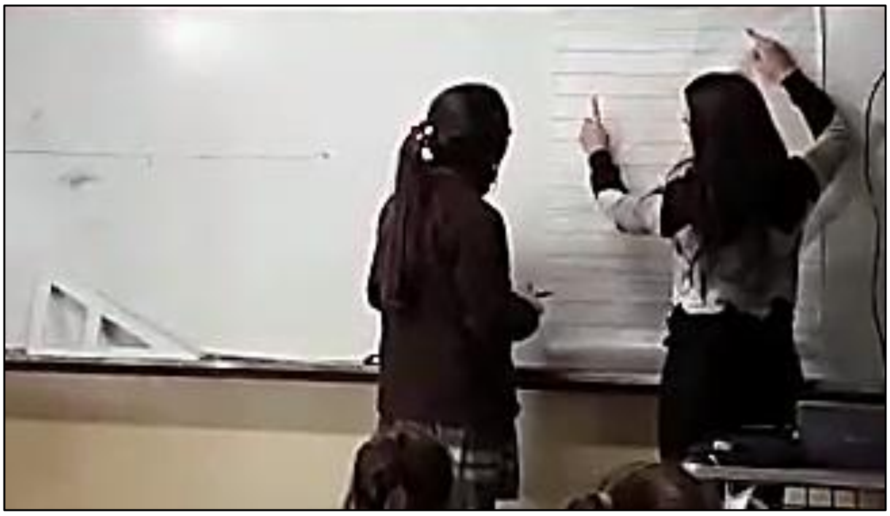


Figura 28. *Contando los renglones*

Figura 29. *Marcando las particiones*

Finalizada la explicación, se preparó la siguiente actividad (ver Figura 30) para que las alumnas ubicaran fracciones con denominador impar. Para la misma, se indicó que no se podía utilizar la regla para medir y que debían contar con hojas de calcar y hojas rayadas, las cuales pedimos con anticipación.

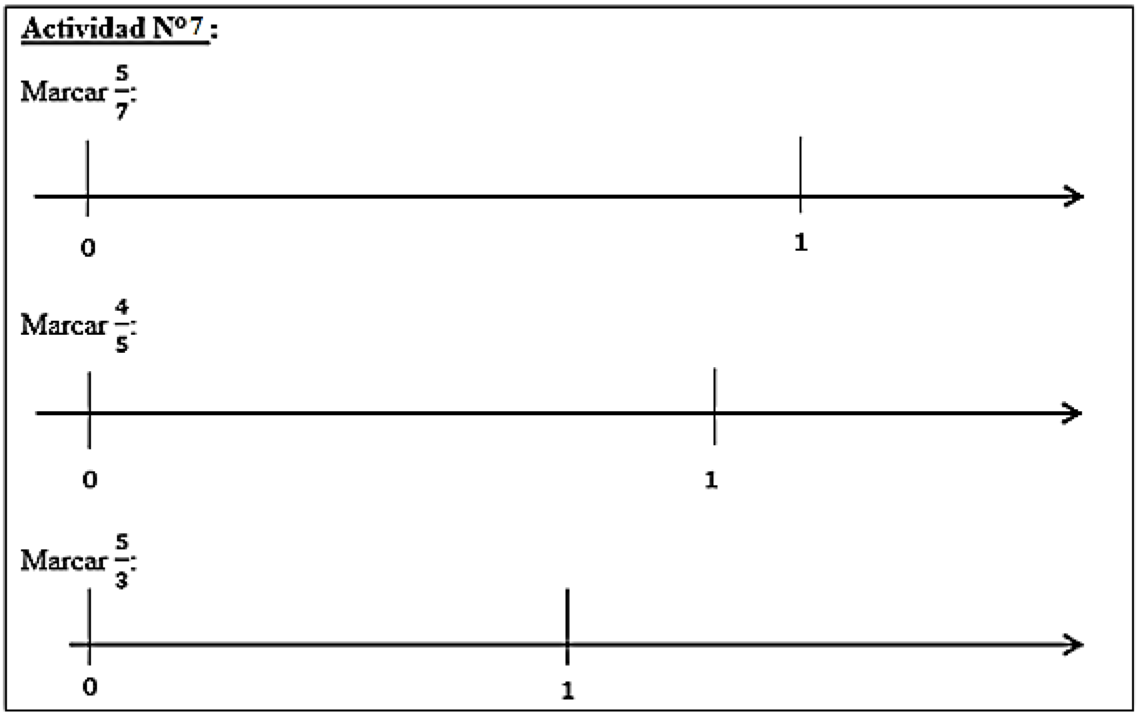


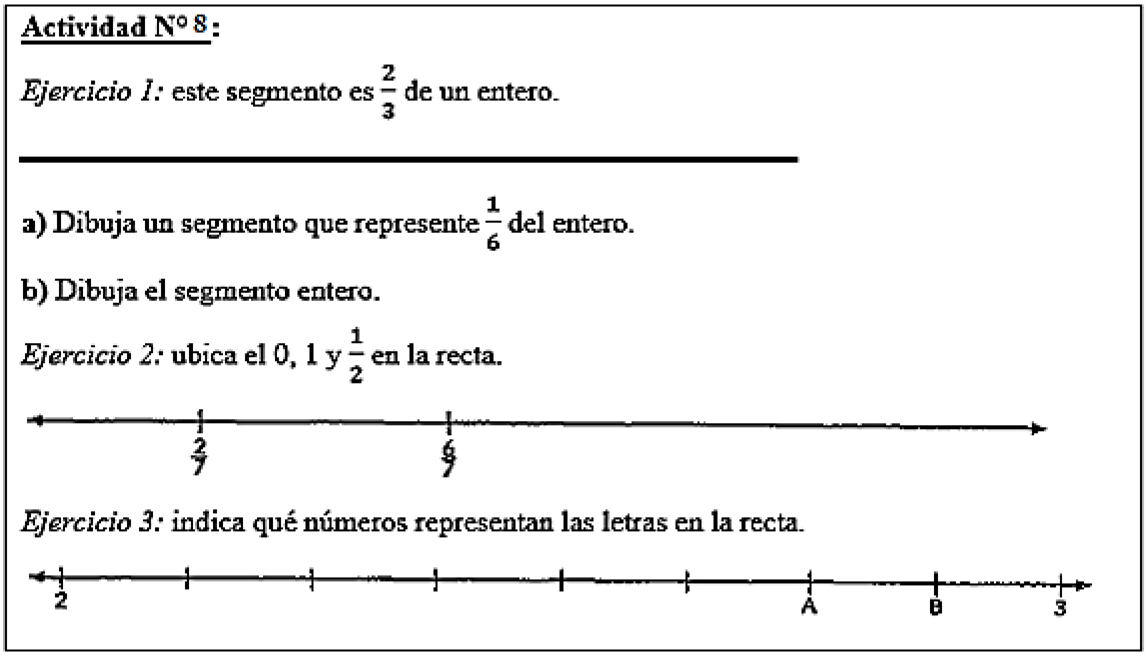
Figura 30. *Actividad para ubicar particionar la unidad y ubicar fracciones*

Las alumnas mostraron interés y asombro ante este enfoque geométrico de la representación de fracciones en la recta numérica apelando a un material manipulativo para representarlas.

Para garantizar que las partes resultantes eran congruentes, las alumnas, una vez más, podían comprobar esto con la ayuda del compás.

Luego, propusimos las siguientes actividades[26] (ver Figura 31) para continuar trabajando con los métodos aprendidos hasta el momento:

[26] Las actividades fueron extraídas de *Explorar en Matemática 7°/1° ES*, p. 55 y 60.


Actividad N° 8:

Ejercicio 1: este segmento es $\frac{2}{3}$ de un entero.

a) Dibuja un segmento que represente $\frac{1}{6}$ del entero.

b) Dibuja el segmento entero.

Ejercicio 2: ubica el 0, 1 y $\frac{1}{2}$ en la recta.

Ejercicio 3: indica qué números representan las letras en la recta.

Figura 31. *Actividades para aplicar el método de la mediatriz y el método de la red de paralelas*

Las alumnas utilizaron diferentes estrategias de resolución, como ser recordar la actividad de tiras (remitirse a la Figura 15), algunas actividades de sombreado y, por supuesto, el método de la mediatriz y el de la red de paralelas.

El método de la regla y la escuadra

Avanzando con los métodos de partición de segmentos en partes iguales, y desprendiéndonos del uso de tiras y de la hoja de calcar, les presentamos un nuevo método a las estudiantes, el método de la regla y la escuadra[27], a través del cual, y de forma similar al anterior, podrían particionar segmentos en partes iguales, ya sea una cantidad par o impar.

Para esta explicación, además de que las alumnas debían contar con hoja lisa, regla y escuadra (materiales que se pidieron con anterioridad) se mantuvo el pacto realizado anteriormente para que se desarrolle la clase en un clima de atención de esta nueva técnica.

"Para comenzar, y colocando la regla sobre uno de los extremos del segmento unidad, se traza una recta cualquiera (sin importar la amplitud del ángulo que se forme con la recta y el segmento). Sobre la misma, se transportan los segmentos de igual longitud necesarios (según indique el denominador de la fracción a ubicar) a partir del origen. Luego, se une el último punto trasladado con el otro extremo del

[27] Este método se basa en el Teorema de Thales.

segmento unidad. Por último, se trazan rectas paralelas a la recta anterior que pasen por los demás puntos trasladados" (ver Figura 32[28]).

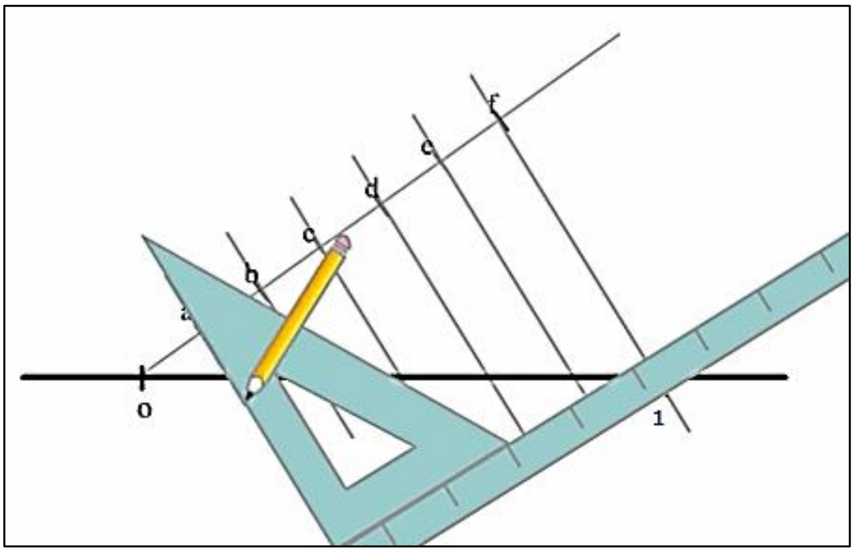


Figura 32. *Resultado del método de la regla y la escuadra*

Esta explicación se realizó en el pizarrón con los elementos de Geometría, nuevamente. En la Figura 33 se puede ver el resultado del método con la fracción brindada como ejemplo en clase.

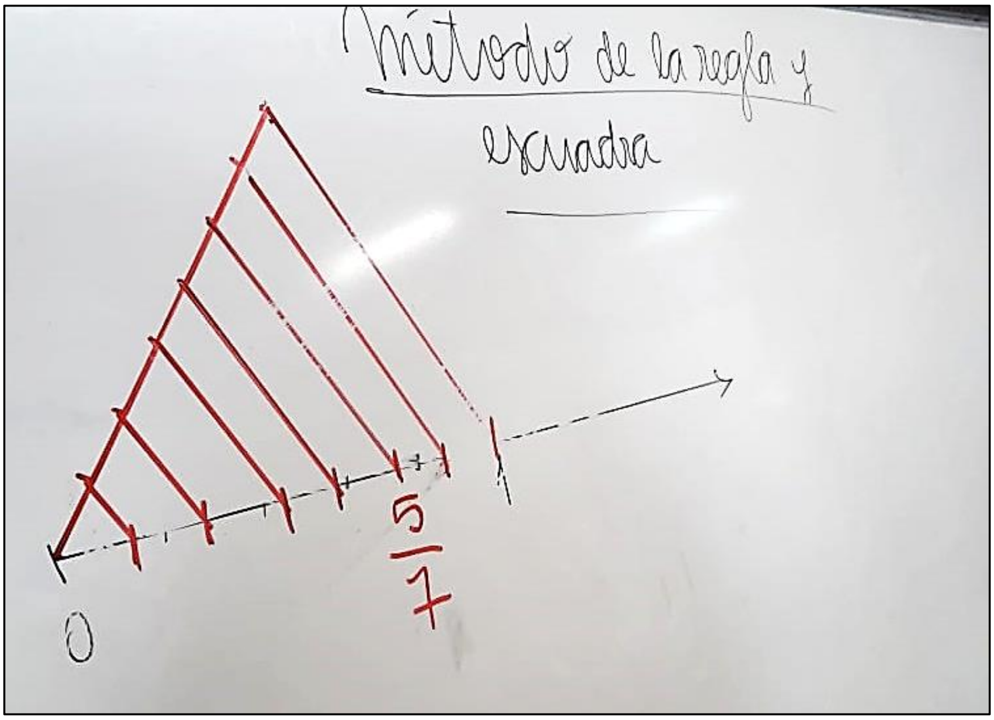


Figura 33. *Resultado de la explicación del método de la regla y la escuadra*

[28] La siguiente imagen fue extraída de una animación creada y brindada por la profesora supervisora de prácticas.

Luego, las alumnas debieron resolver la siguiente actividad (ver Figura 34) para aplicar la nueva técnica aprendida.

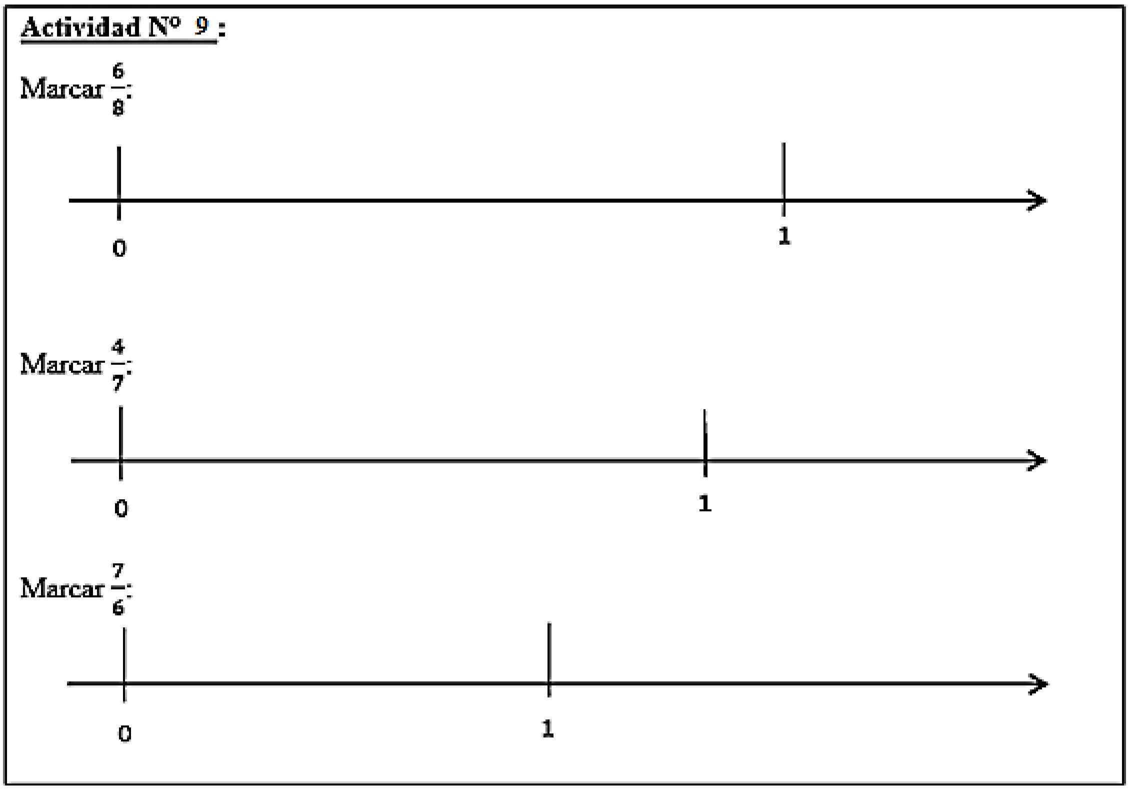
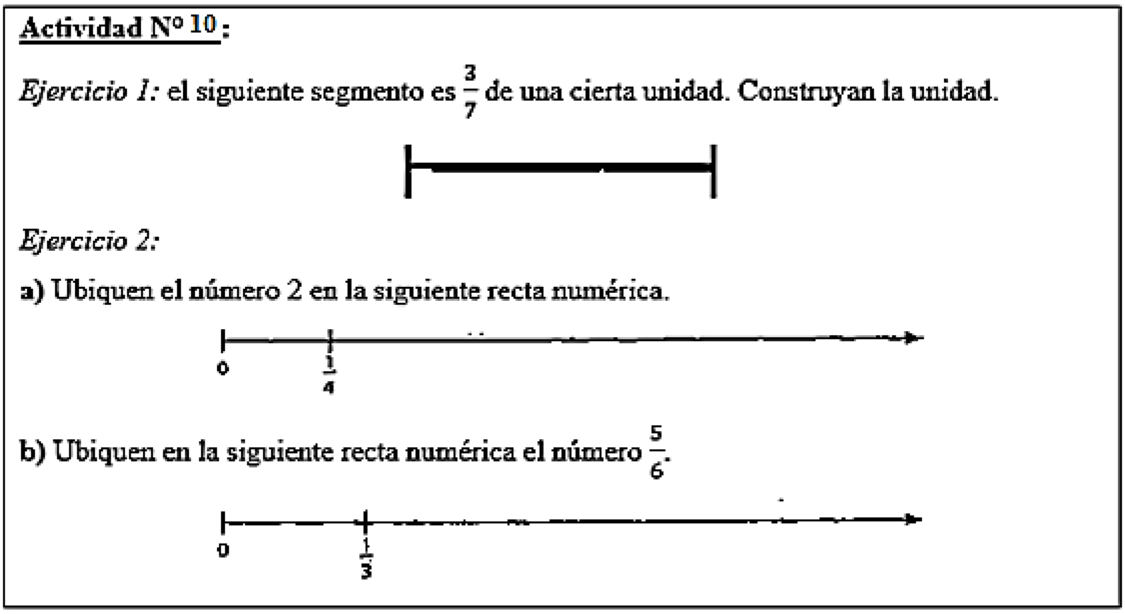


Figura 34. *Actividad para utilizar el método de la regla y la escuadra y ubicar fracciones*

Fue muy importante controlar esta actividad debido a que las alumnas tenían que manipular varios elementos al mismo tiempo por lo que, nosotras, examinábamos el buen uso de los mismos ya que esto exige una motricidad especial. Nuevamente, creemos que las alumnas se mostraron interesadas en este método y en la resolución de la actividad.

Para aplicar los métodos de partición de segmentos vistos se les brindó a las estudiantes una fotocopia con actividades[29] (ver Figura 35, 36, 37, 38 y 39) para que resolvieran utilizando el método de partición que les resultara más conveniente.

[29] Las actividades fueron extraídas y adaptadas de *Al Fin de Cuentas EGB 3*, p. 80, 81, 86 y *El Libro de la Matemática 7*, p. 136 y 139.



Actividad N° 10:

Ejercicio 1: el siguiente segmento es $\frac{3}{7}$ de una cierta unidad. Construyan la unidad.

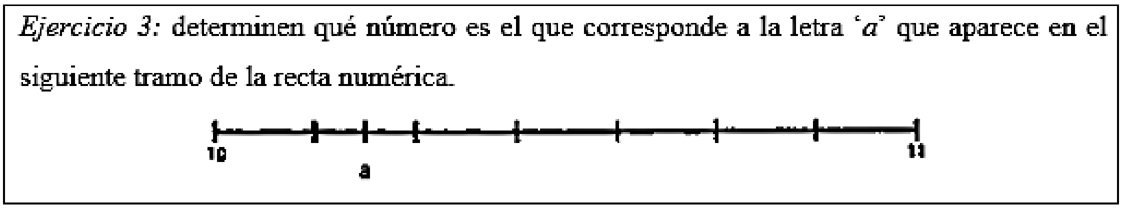
Ejercicio 2:

a) Ubiquen el número 2 en la siguiente recta numérica.

b) Ubiquen en la siguiente recta numérica el número $\frac{5}{6}$.

Figura 35. *Actividades para aplicar los métodos de partición de segmentos*

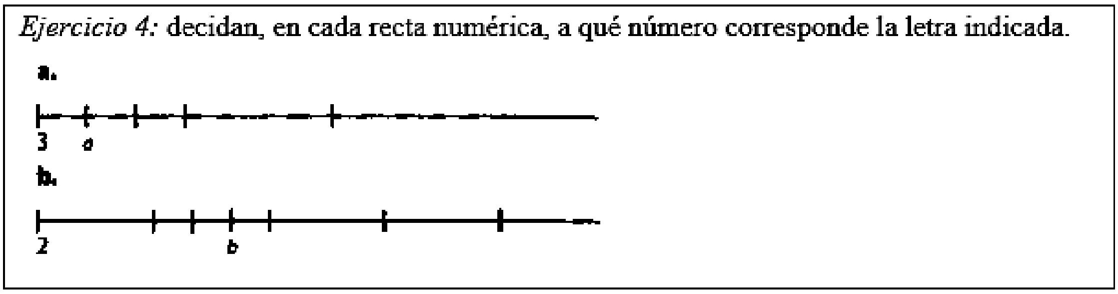
Para el primer ejercicio, el objetivo era que las alumnas dividan el segmento en tres partes congruentes para obtener $\frac{1}{7}$ y, luego, trasladen esa medida en una recta 7 veces para completar la unidad. Aquí se enfatizó en preguntar *"¿cuántos séptimos se necesitan para completar el entero?"*. Un análisis similar se pensó para el Ejercicio N° 2.



Ejercicio 3: determinen qué número es el que corresponde a la letra '*a*' que aparece en el siguiente tramo de la recta numérica.

Figura 36. *Actividad para aplicar los métodos de partición de segmentos*

Para el Ejercicio N° 3 se esperaba que las alumnas reflexionaran sobre la escritura mixta de una fracción, vean en cuántas partes estaba dividido el segmento determinado por el 10 y el 11 y pudieran dar la fracción en notación mixta.



Ejercicio 4: decidan, en cada recta numérica, a qué número corresponde la letra indicada.

a.

b.

Figura 37. *Actividad para aplicar los métodos de partición de segmentos*

Para el Ejercicio N° 4 esperábamos que las estudiantes se dieran cuenta que es imposible decir quiénes son ‘*a*’ y ‘*b*’ ya que no se puede particionar de una sola manera, sino que sólo se podían realizar suposiciones.

Ejercicio 5: los siguientes gráficos muestran la ubicación de los puntos ‘*c*’ y ‘*d*’ sobre una semirrecta. Si el punto ‘*a*’ es denotado por 0 y el punto ‘*b*’ por 1, ¿qué fracción les corresponde a los puntos ‘*c*’ y ‘*d*’?

Figura 38. *Actividad para aplicar los métodos de partición de segmentos*

Para el Ejercicio N° 5 creímos que los métodos que podrían utilizar eran trasladar el segmento $\overline{\text{cb}}$ y observar cuántas veces entra en el segmento unidad $\overline{\text{ab}}$ para ver en cuánto se particionó el entero, o el método de la red de paralelas para hacer coincidir los puntos ‘*a*’, ‘*c*’ y ‘*b*’ con tres rectas; para el punto ‘*d*’ pensamos que se fijarían si está a la misma distancia del punto ‘*b*’ que ‘*c*’.

Ejercicio 6: un robot avanza con pasos regulares de modo tal que sale de 0 y con cinco pasos llega al 1. ¿Qué número pisa con el tercer paso? ¿y con el octavo?

Figura 39. *Actividad para aplicar los métodos de partición de segmentos*

Para el Ejercicio N° 6 supusimos que las alumnas dibujarían una recta, marcarían el 0 y, con 5 arcos, llegarían al número 1 para luego darse cuenta que esa es la partición y, así, encontrar las fracciones.

2.2.4. Comparación de fracciones y Fracciones Equivalentes

Los contenidos que se abordarán en este eje son: comparar fracciones con mismo denominador. Comparar fracciones con mismo numerador. Fracciones Equivalentes: amplificación, simplificación, Fracción Irreducible.

Nuestros objetivos en este cuarto eje eran que las alumnas pudieran comparar fracciones analizando la información proporcionada por las distintas notaciones de un número racional, fraccionaria y fraccionaria mixta, que comprendan la equivalencia entre las mismas realizando procesos de traducción de una en otra, y que puedan amplificar y/o simplificar fracciones, obteniendo así fracciones equivalentes a las mismas.

Se abordó la comparación y el orden de fracciones a lo largo de todas las clases anteriores (sin ser esto el tema principal de las mismas) especialmente en aquellas referidas a la recta numérica, haciendo preguntas como *"¿cuál fracción es más grande de las que están representadas? ¿Cómo se dan cuenta de ello?"*.

Este eje comenzó con una clase en la cual realizamos, entre todas, la siguiente actividad (ver Figura 40) en el pizarrón y, luego, las alumnas lo hicieron en sus carpetas. La misma sirvió como repaso de los métodos para dividir un segmento en partes iguales y de los elementos de una fracción.

Actividad N°11 : en una recta numérica, representar las siguientes fracciones:

$$\frac{3}{5};\ \frac{4}{7};\ \frac{7}{2};\ \frac{8}{3};\ \frac{5}{4}.$$

Figura 40. *Actividad de repaso sobre representación de fracciones en la recta numérica*

A medida que ubicábamos las fracciones, preguntábamos y pedíamos que observaran, por ejemplo, cuál era menor, entre qué séptimos se ubicaba $\frac{3}{5}$, cuál es la mayor de todas, entre qué enteros se ubica $\frac{7}{2}$, etc. Para concluir este momento, se dejó expresado en el pizarrón el orden de las fracciones, el cual fue:

$$\frac{4}{7} < \frac{3}{5} < \frac{5}{4} < \frac{8}{3} < \frac{7}{2}$$

Finalizada la actividad, seguimos con la comparación de fracciones, pero ahora sin ubicarlas en la recta numérica. Para esto, les dimos cuatro ejemplos con dos fracciones cada uno, en los cuales las alumnas debían observar los elementos de cada fracción, pensar cómo podían utilizar la información que ellos brindan y ver qué tenían en común dichas fracciones.

En el primer ejemplo, comparar fracciones con **mismo denominador** $(\frac{6}{5}, \frac{3}{5})$ rápidamente las alumnas expresaron que, como las particiones eran del mismo tamaño, sería mayor aquella que tome más particiones, es decir la que tenga mayor numerador.

En el segundo ejemplo, comparar fracciones con **mismo numerador** $(\frac{3}{5}, \frac{3}{8})$, las alumnas tardaron un poco más de tiempo en decir que sería mayor la que tenga menor denominador ya que las particiones serían de mayor tamaño que las otras.

En el tercer ejemplo, las alumnas debían observar que una de las fracciones era **menor que la unidad** ($\frac{5}{4}, \frac{2}{3}$), es decir que estaba entre el 0 y el 1, y que la otra era mayor que la unidad, por lo tanto, esta última sería mayor.

En el último ejemplo, ambas fracciones eran **menores que la unidad**, y los **denominadores y numeradores** eran **distintos** ($\frac{5}{6}, \frac{7}{8}$). Luego de unos minutos de conjeturas, las alumnas pudieron darse cuenta que a ambas les faltaba una sola partición para llegar a la unidad, por lo tanto, sería mayor aquella que le falte una partición menor.

Cada uno de los ejemplos fueron resueltos entre todas en el pizarrón y dejando asentado, no sólo el resultado de la comparación sino también en qué nos fijamos para comparar. Hicimos mucho hincapié en esto ya que en la evaluación todo debía estar justificado.

Luego, comenzamos a tratar el tema de Fracciones Equivalentes que, al igual que antes, ya había surgido a lo largo de las clases sin ser el tema principal. Por esa razón, lo introdujimos recordando ciertos momentos en los que había estado presente.

Para que quede claro que las Fracciones Equivalentes se ubican en el mismo punto en la recta numérica y que toda fracción que tenga numerador y denominador igual es equivalente al número 1, en nuestra planificación planteamos la siguiente actividad (ver Figura 41). La misma no fue dada a las alumnas ya que estas cuestiones estaban bastante claras y decidimos repasar esto de manera oral y colectiva.

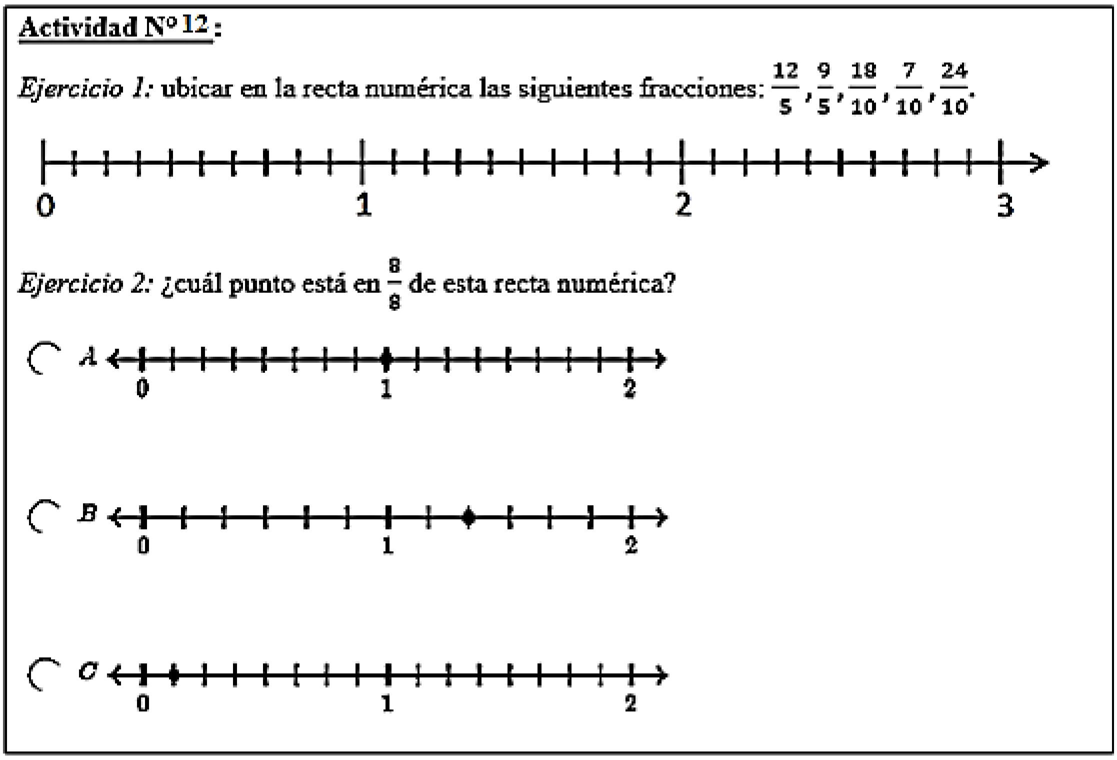


Figura 41. *Actividades sobre fracciones equivalentes*

Teniendo en cuenta todo lo visto, sintetizamos la información y dijimos que *"si dos fracciones se ubican en el mismo punto sobre la recta numérica se llaman Fracciones Equivalentes".*

Luego, continuamos con la definición y la relación de Fracciones Equivalentes, la cual fue construida junto con las alumnas, guiándolas a través de ejemplos, como se puede ver en la Figura 42.

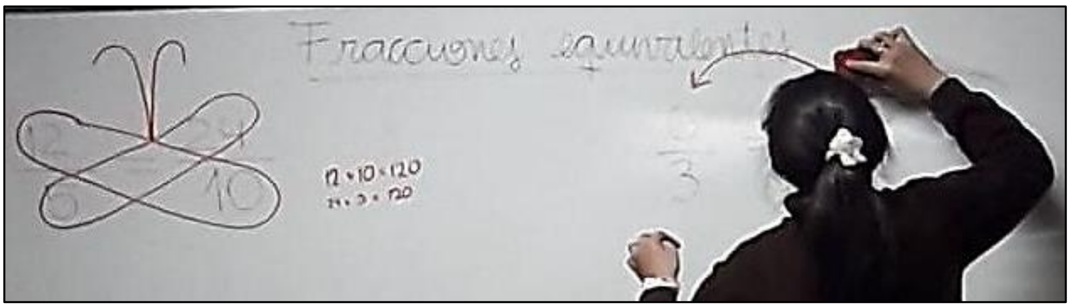


Figura 42. *Ejemplo de Fracciones Equivalentes*

"Una fracción $\frac{a}{b}$ *es* ***equivalente*** *a otra* $\frac{c}{d}$ *si se verifica que* $a.d = c.b$*, con 'a' y 'c' Números Naturales o iguales que 0, y 'b' y 'd' Números Naturales"*

Para llegar a esta relación que existe entre Fracciones Equivalentes, les sugerimos a las alumnas que pensaran y observaran qué pasaba cuando multiplicábamos el numerador de una fracción con el denominador de la otra.

Una vez que quedo clara la definición, les preguntamos a las estudiantes cómo podemos obtener Fracciones Equivalentes, a lo cual todas respondieron rápidamente que se debía multiplicar o dividir el numerador y denominador por un mismo número distinto de 0. Seguido de esto, les dimos de tarea la siguiente actividad[30] (ver Figura 43).

Actividad N° 13: reemplacen el cuadrado por un Número Natural, de modo que se obtengan Fracciones Equivalentes.

$\frac{\square}{2} = \frac{25}{10}$ $\frac{\square}{12} = \frac{48}{36}$ $\frac{25}{10} = \frac{250}{\square}$ $\frac{7}{3} = \frac{\square}{15}$ $\frac{3}{5} = \frac{\square}{50} = \frac{\square}{15} = \frac{27}{\square}$

Figura 43. *Actividad de fracciones equivalentes*

Esta actividad no fue de mucha dificultad para las alumnas y se dieron cuenta que se podía resolver de distintas formas: viendo por cuánto se multiplica el numerador de una para obtener el de la siguiente y multiplicar el denominador por ese mismo número, o utilizando la relación entre Fracciones Equivalentes vista con anterioridad y resolviendo esa ecuación.

En este guion conjetural habíamos planificado seguir con la comparación de fracciones en las que no se puedan usar ninguno de los criterios nombrados anteriormente (mismo denominador, mismo numerador, etc.) y se deba recurrir a Fracciones Equivalentes y, junto con esto, buscar un común denominador, lo cual las alumnas no habían visto. Pero, por cuestiones de tiempo, y porque la fecha de evaluación estaba muy cerca, decidimos finalizar con los contenidos y no dar este último criterio.

Las actividades[31] que continuaron fueron las siguientes[32]:

[30] Actividad extraída y adaptada de *El Libro de la Matemática 7*, p. 139.
[31] Actividades extraídas de *Explorar en Matemática 7°/1° ES*, p. 58 y 59, y *El Libro de la Matemática 7*, p. 140.
[32] Por cuestiones de tiempo, en 1ro "B" no se llevaron a cabo las actividades que desde aquí continúan.

Actividad N°14 :

Ejercicio 1: **decidí en cada caso que fracción es mayor.**

a) $\frac{1}{11}, \frac{1}{14}$

b) $\frac{5}{17}, \frac{5}{18}$

c) $\frac{11}{12}, \frac{12}{13}$

d) $\frac{6}{12}, \frac{3}{9}$

e) $\frac{4}{5}, \frac{7}{8}$

f) $\frac{2}{9}, \frac{3}{10}$

Ejercicio 2: **las fracciones $\frac{3}{7}, \frac{5}{6}, \frac{6}{5}$ y $\frac{12}{8}$ están ordenadas de menor a mayor.**

a) ¿Dónde ubicarías $\frac{1}{2}$?

b) ¿Y $1\frac{3}{8}$?

Ejercicio 3: **comparen, en cada caso, las fracciones indicadas. Justifiquen su respuesta.**

a) $\frac{5}{13}$ y $\frac{7}{4}$

b) $\frac{12}{5}$ y $\frac{18}{5}$

c) $\frac{11}{7}$ y $\frac{22}{8}$

d) $\frac{12}{5}$ y $\frac{11}{6}$

e) $\frac{17}{22}$ y 1

f) 0 y $\frac{15}{100}$

Figura 44. *Actividades de comparación de fracciones*

Las mismas fueron adaptadas a la decisión tomada, por lo tanto, el Ejercicio N° 2 no fue dado. Las restantes actividades si lo fueron ya que podían resolverse con los primeros criterios sin necesidad de encontrar Fracciones Equivalentes con denominador común.

A continuación, mostramos la resolución del Ejercicio N° 1 (ver Figura 45), la cual realizaron las alumnas en la pizarra justificando su elección de manera oral o escrita.

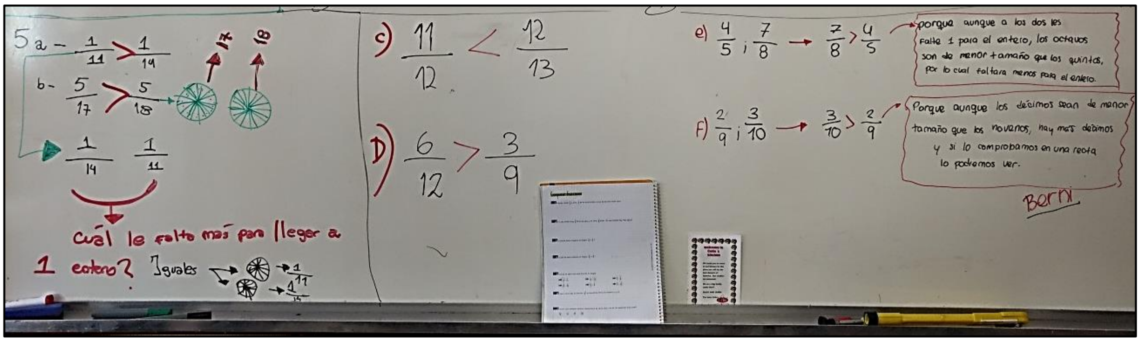


Figura 45. *Resoluciones del Ejercicio N° 1*

2.3. Cronograma

Presentamos, en las siguientes tablas, el cronograma de cada curso junto con los contenidos trabajados durante nuestras prácticas:

<table>
<tr><th colspan="3">Cronograma para 1ro “A”</th></tr>
<tr><th>Fecha</th><th>Sección</th><th>Contenidos</th></tr>
<tr><td>07/08</td><td rowspan="2">Los Números Racionales como solución al problema de la medida</td><td>Proceso de medición. Definición de medir y de unidad de medida.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">08/08</td><td>Proceso de medición. Actividad de tiras.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Los Números Racionales como solución al problema de la división en ℕ</td><td>Insuficiencia de los Números Naturales en la resta y en la división. Elementos de la división. División exacta y no exacta. Relación para verificar la división en $\mathbb{Q}+$.</td></tr>
<tr><td>10/08</td><td>Situaciones de reparto. Notación fraccionaria mixta.</td></tr>
<tr><td>14/08</td><td>Relación “parte-todo”. Definición de Número Racional.</td></tr>
<tr><td>15/08</td><td rowspan="2">Recta numérica y métodos</td><td>Características de la recta numérica. Construcción de la recta numérica con regla y compás. Método de la mediatriz para particionar la unidad.</td></tr>
<tr><td>17/08</td><td>Método de la red de paralelas para particionar la unidad.</td></tr>
</table>

21/08		Método de la regla y la escuadra para particionar la unidad.
22/08		Elección del método de partición de la unidad más adecuado según sea el caso.
24/08		
29/08	Orden en $\mathbb{Q}+$ y Fracciones Equivalentes	Comparación de fracciones representadas en la recta numérica. Comparación de fracciones de igual denominador. Comparación de fracciones de distinto numerador. Comparación de fracciones menores y mayores que la unidad.
31/08		Fracciones Equivalentes.
04/09		
	Repaso de contenidos para la evaluación	
05/09	Evaluación	
12/09	Devolución de evaluaciones	

Tabla 5. *Cronograma para 1ro "A"*

Cronograma para 1ro "B"		
Fecha	**Sección**	**Contenidos**
07/08	Los Números Racionales como solución al problema de la medida	Proceso de medición. Definición de medir y de unidad de medida.
08/08		Proceso de medición. Actividad de tiras.
10/08	Los Números Racionales como solución al problema de la división en $\mathbb{N}$	Insuficiencia de los Números Naturales en la resta y en la división. Elementos de la división. División exacta y no exacta. Relación para verificar la división en $\mathbb{Q}+$.
14/08		Reparto. Relación "parte-todo".

<table>
<tr><td>15/08</td><td colspan="2">No hubo clases.</td></tr>
<tr><td>17/08</td><td rowspan="4">Recta numérica y métodos</td><td>Características de la recta numérica. Construcción de la recta numérica. Método de la mediatriz para particionar la unidad.</td></tr>
<tr><td>21/08</td><td>Método de la red de paralelas para particionar la unidad.</td></tr>
<tr><td>22/08</td><td>Método de la red de paralelas para particionar la unidad.
Método de la regla y la escuadra para particionar la unidad.</td></tr>
<tr><td>24/08</td><td>Elección del método de partición de la unidad más adecuado según sea el caso.</td></tr>
<tr><td>29/08</td><td rowspan="3">Orden en $\mathbb{Q}+$ y Fracciones Equivalentes</td><td>Comparación de fracciones en la recta numérica.</td></tr>
<tr><td>31/08</td><td>Comparación de fracciones con mismo denominador. Comparación de fracciones con mismo numerador. Comparación de fracciones menores y mayores que la unidad. Fracciones Equivalentes.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">04/09</td><td>Fracciones Equivalentes.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Repaso de contenidos para la evaluación</td></tr>
<tr><td>05/09</td><td colspan="2">Evaluación</td></tr>
<tr><td>12/09</td><td colspan="2">Devolución de evaluaciones</td></tr>
</table>

Tabla 6. *Cronograma para 1ro "B"*

Para finalizar, podemos decir que la cantidad de clases destinadas para el desarrollo de cada contenido fue adecuada teniendo en cuenta el tiempo estimado en los guiones para el desarrollo de esos contenidos.

En la siguiente sección abordaremos las distintas actividades propuestas para evaluar los contenidos y sus objetivos, así como también el análisis de los instrumentos de evaluación utilizados.

2.4. Instrumentos de evaluación

A lo largo de las clases decidimos evaluar contenidos y aprendizajes mediante dos tareas que las alumnas debieron realizar (remitirse a la Figura 21, 22 y 23). Las mismas consistieron en realizar repartos equitativos sin resto y trabajar con la relación "parte-todo". Ubicamos esta decisión dentro del marco de la evaluación formativa[33], según lo descripto por Gvirtz, S. y Palamidessi, M. (1988).

Analizando las resoluciones de estas tareas, podemos decir que la mayoría realizó un buen trabajo, evidenciando la apropiación de las distintas notaciones y de los elementos de una fracción, así como también de la división.

Al final de nuestras prácticas se decidió implementar una evaluación de tipo sumativa[34], evaluando los contenidos abordados, es decir el proceso de medición, la relación "parte-todo", problemas de reparto equitativo sin resto, orden y comparación de fracciones, Fracciones Equivalentes, y métodos de partición de la unidad (recta numérica). Para la misma, consideramos los criterios de evaluación (ver Figura 46) que se presentan en todas las evaluaciones, independientemente del tema que se evalúa (los primeros tres) y pensamos los nuestros particulares, tratando de abarcar la mayor cantidad de contenidos y habilidades posibles, los cuales se manifestarían en aquella instancia.

[33] *"La **evaluación formativa** se orienta a recolectar datos del proceso de enseñanza y aprendizaje; se realiza con el objetivo de mejorar los procesos de enseñanza y de aprendizaje, el proyecto educativo de una escuela o la utilización de algún material didáctico."* (Gvirtz, S. y Palamidessi, M., 1988).

[34] "*La **evaluación sumativa** se propone apreciar el grado de apropiación de los contenidos por parte del alumno. Su objetivo es emitir un juicio sobre los resultados, sobre lo que el alumno ha aprendido.*" (Gvirtz, S. y Palamidessi, M., 1988).

EVALUACIÓN DE MATEMÁTICA

NOMBRE Y APELLIDO:

FECHA:

TEMA: *Números Racionales Positivos: Proceso de medición. Relación parte/todo. Recta numérica y métodos de partición de la unidad. Fracciones Equivalentes.*

Para evaluar a la alumna se tendrá en cuenta si:

- *Registra los cálculos y procedimientos en la hoja de la evaluación;*
- *Trabaja con lápiz, remarcando los resultados con tinta;*
- *Presenta la evaluación con prolijidad, claridad, ortografía y letra cursiva;*
- *Manipula correctamente los instrumentos geométricos;*
- *Utiliza el método más adecuado para particionar la unidad en la recta numérica;*
- *Reconoce equivalencias entre fracciones y entre las distintas notaciones;*
- *Compara y establece el orden entre fracciones;*
- *Construye y manipula la recta numérica.*

Figura 46. *Tema y criterios de la evaluación sumativa*

Así como con nuestras prácticas, quisimos presentar distintos tipos de actividades referidas a los variados contextos de representación de $\mathbb{Q}+$ que trabajamos en clase, logrando con esto coherencia con las mismas. Por ello, se pensaron actividades con soporte gráfico, es decir dibujos y figuras, además de otras en las cuales se debían utilizar los elementos geométricos. Otras apelaban a la capacidad de elección de respuestas correctas entre varias opciones, así como también a la habilidad de saber y poder decidir si una afirmación es verdadera o falsa, y justificarla.

La evaluación fue administrada de manera individual y debían contar con todos los elementos de Geometría para resolver las actividades, es decir regla, compás y escuadra.

A continuación, se presenta uno de los cinco temas de evaluación elaborados, analizando lo que esperábamos de cada ítem, los indicadores de corrección y el puntaje de los mismos (ver Figura 47, 48, 49, 50, 51, 52 y 53):

1. Marcar la opción correcta y justificar la elección. ¿Hay más de una?

a) Sobre reparto:

- Cuando se reparten 15 alfajores en partes iguales y sin que sobre nada entre 7 chicos, cada uno recibe $\frac{15}{7}$ de alfajor.
- Al repartir chocolates entre chicos, a cada uno le tocó $3\frac{7}{8}$ de chocolate. Entonces, podrían ser 31 chocolates y 7 chicos.
- Si se reparten 9 chocolates entre 8 chicos cada uno recibe menos de un chocolate.
- Si se reparten 9 chocolates entre 8 chicos cada uno recibe un chocolate y un octavo.
- Si se reparten 9 chocolates entre 8 chicos cada uno recibe dos pedacitos de $\frac{1}{2}$ y otro de $\frac{1}{8}$.

b) La varilla A mide $\frac{3}{5}$ de una cierta unidad y la varilla B mide $\frac{1}{10}$ de la misma unidad.

- 5 varillas A cubren exactamente tres unidades;
- 10 varillas B cubren exactamente la unidad;
- 6 varillas B equivalen a 1 varilla A;
- Si se parte la varilla A en tres partes iguales, cada parte mide lo mismo que la varilla B.

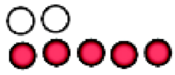
Figura 47. *Ítem 1. (a) y (b) de la evaluación sumativa*

Al **ítem 1. (a)** se le asignó el valor de 0.4 puntos, y al **(b)** 0.6 ya que este último aborda un contenido más complejo, el proceso de medición, con el cual las alumnas debían evidenciar saber los pasos del mismo. Esperábamos, además, que hayan comprendido los elementos de la división, las equivalencias entre las distintas notaciones fraccionarias y que reconozcan Fracciones Equivalentes.

Es importante destacar que, en esta actividad, se colocaron varias respuestas correctas para mostrarles a las alumnas que no siempre hay una sola, idea que, consideramos, tienen naturalizada.

2. Responder las siguientes preguntas:

a) ¿Qué fracción de las bolitas está pintada?



b) ¿Entre qué Números Naturales se encuentra cada una de las siguientes fracciones? ¿De cuál de ellos está más cerca?

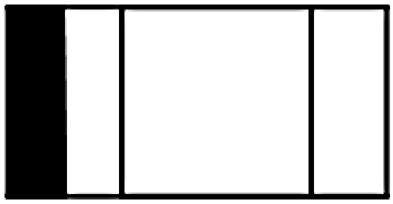
$\frac{31}{3}$ $\frac{23}{2}$

Figura 48. *Ítem 2 (a) y (b) de la evaluación sumativa*

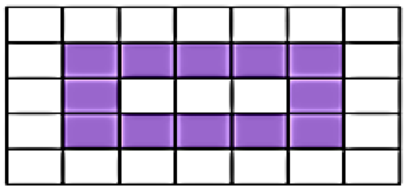
Al **ítem 2. (a)** se le asignó el valor de 0.4 puntos, y al **(b)** 0.6 ya que, de nuevo, este último abordaba el pasaje de una expresión fraccionaria a una expresión fraccionaria mixta cuando, el otro, simplemente consistía en indicar cuántas partes de un todo se habían tomado. Lo que sí destacamos del **ítem 2. (a)** es que la unidad era discontinua.

3. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa, justificando tu elección:

a) $\frac{2}{8}$ representa la zona sombreada de esta figura:



b) $\frac{12}{35}$ representa la zona sombreada de esta figura:



c) Entre dos Números Naturales no siempre se encuentran números fraccionarios.

d) Si se divide en 2 partes iguales el segmento determinado por 0 y $\frac{1}{4}$ se encuentran "octavos".

Figura 49. *Ítem 3 (a), (b), (c) y (d) de la evaluación sumativa*

Al **ítem 3** se le asignó el valor de 2 puntos, dándole a cada sub-ítem 0.5 puntos. En el **3. (a)** y **3. (b)** esperábamos que pudieran ubicar la unidad, ver en cuántas partes se encuentra dividida y cuántas de ellas han sido pintadas, en el **3. (c)** que pudieran expresar que cualquier segmento entre números naturales es una unidad que puede ser particionada y, en el **3. (d)**, que pudieran particionar el segmento dado y observar que esa partición entra 8 veces en la unidad.

4. Ubicar los números 1, $\frac{6}{8}$ y $1\frac{1}{7}$ en la siguiente recta:

Figura 50. *Ítem 4 de la evaluación sumativa*

Al **ítem 4** se le asignó el valor de 2 puntos. Con él, esperábamos que las alumnas supieran ubicar las fracciones en la recta numérica utilizando adecuadamente el método más conveniente de partición. Se les indicó que sólo podían implementar el método de la mediatriz y el de la regla y la escuadra, ya que este último funciona en todos los casos y el anterior en los casos cuando el denominador es potencia de 2.

5. ¿Cuál de estos números es mayor en cada caso? Justificar.

a) $\frac{7}{6}$ y $\frac{6}{7}$

b) $\frac{5}{9}$ y $\frac{5}{7}$

c) 4 y $\frac{17}{5}$

Figura 51. *Ítem 5 de la evaluación sumativa*

Al **ítem 5** se le asignó el valor de 1 punto. En esta actividad esperábamos que supieran comparar las fracciones teniendo en cuenta el criterio adecuado, es decir comparando numeradores, denominadores, si las fracciones eran o no mayores que la unidad, etc.

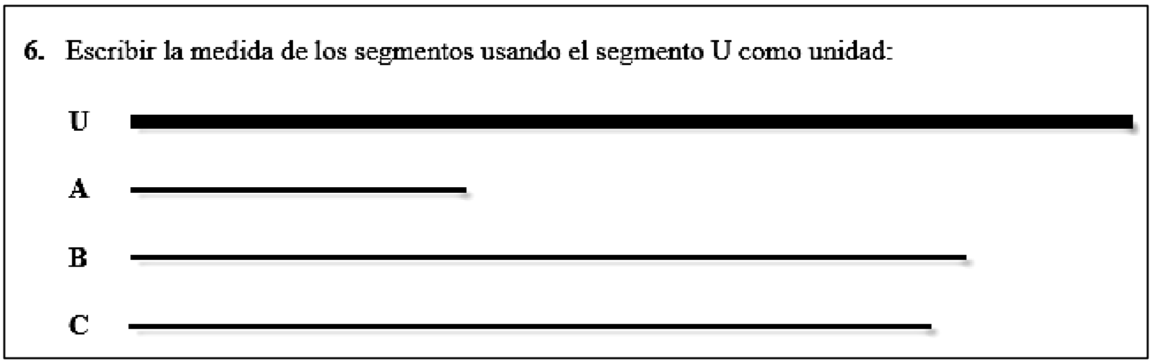
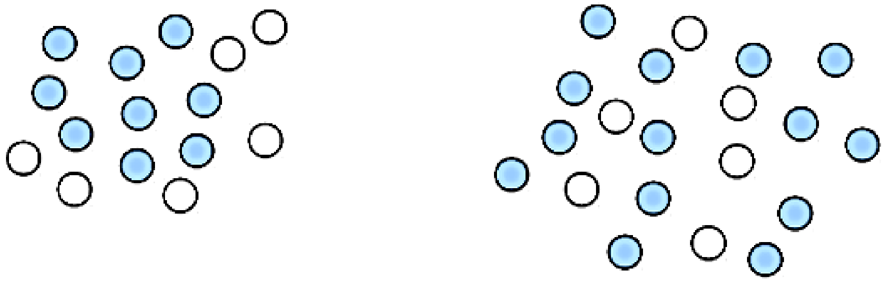


Figura 52. *Ítem 6 de la evaluación sumativa*

Al **ítem 6** se le asignó el puntaje más alto, o sea 2.5 puntos, ya que con él esperábamos que las alumnas realicen el proceso de medición utilizando los elementos de Geometría, pudiendo dar así la medida de los segmentos indicados.

Problema para resolver en el tiempo que te queda

a) ¿En qué casos se pintó $\frac{3}{5}$ de la colección de puntos? ¿Por qué?



b) Si a y b son dos Números Naturales y a es mayor que b entonces $\frac{1}{a}$ es menor que $\frac{1}{b}$. ¿Es correcta esta afirmación? Justifica tu respuesta.

Figura 53. *Ejercicio extra de la evaluación sumativa*

Este ejercicio es implementado en toda la institución. Su resolución no es obligatoria para las alumnas y su objetivo es, al tener mayor dificultad, otorgar un 10 a la estudiante que consiga tener tres de estos resueltos correctamente sin ayuda del docente, en tres instancias evaluativas distintas. Con el **ítem (a)**, esperábamos que las estudiantes pudieran ubicar la unidad, que en este caso era discontinua, ver en cuántas partes se encontraba dividida y cuántas de ellas habían sido pintadas, y que reconozcan Fracciones Equivalentes. Con el **(b)**, que pudieran utilizar el criterio de comparación con mismo numerador, pero de manera algebraica.

A continuación, se muestran las notas obtenidas en cada curso mediante un gráfico de frecuencias (ver Gráfico 1 y 2):

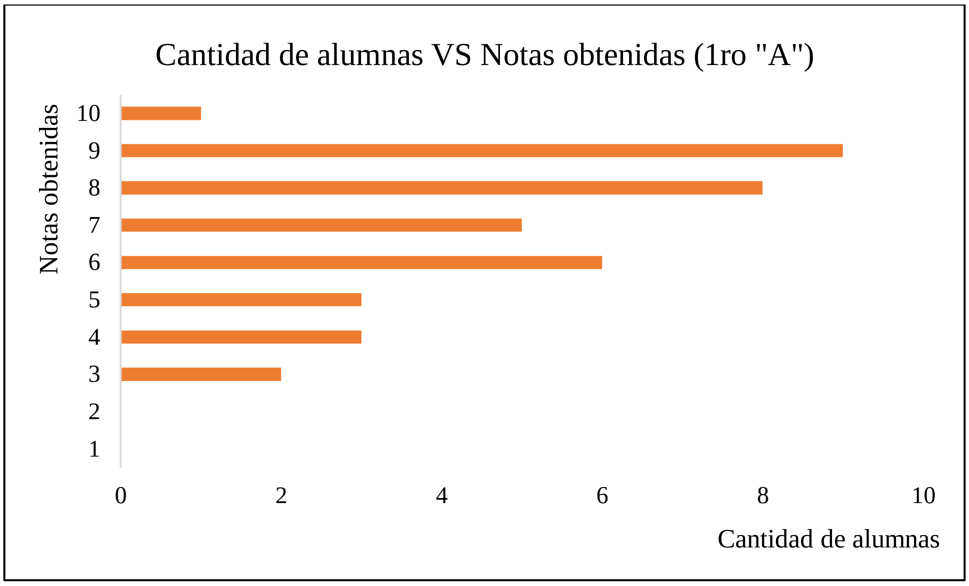


Gráfico 1. *Gráfico de frecuencias para las notas obtenidas en la evaluación sumativa 1ro "A"*

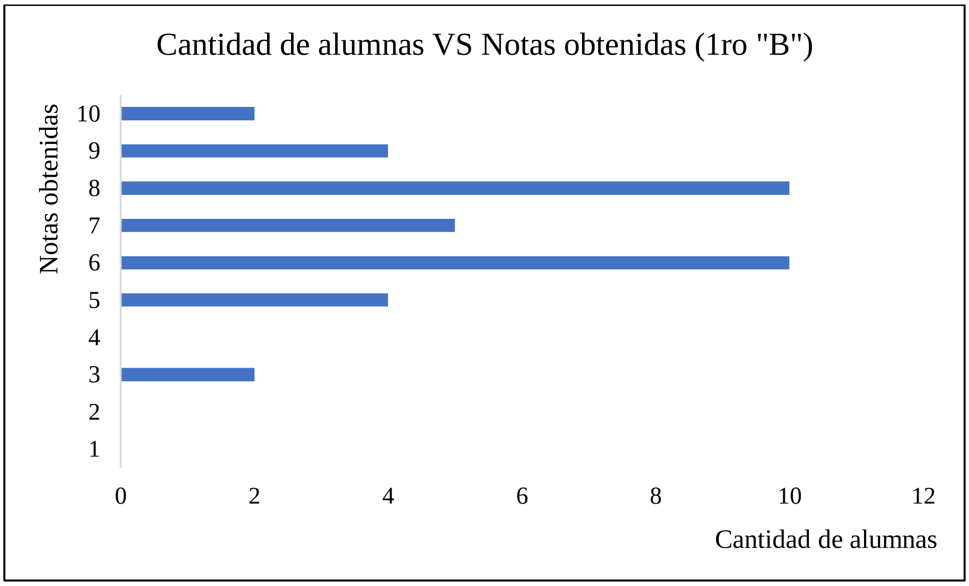


Gráfico 2. *Gráfico de frecuencias para las notas obtenidas en la evaluación sumativa de 1ro "B"*

Los porcentajes de alumnas aprobadas y desaprobadas en las evaluaciones en cada división se ven reflejados en los siguientes gráficos circulares (ver Gráficos 3 y 4):

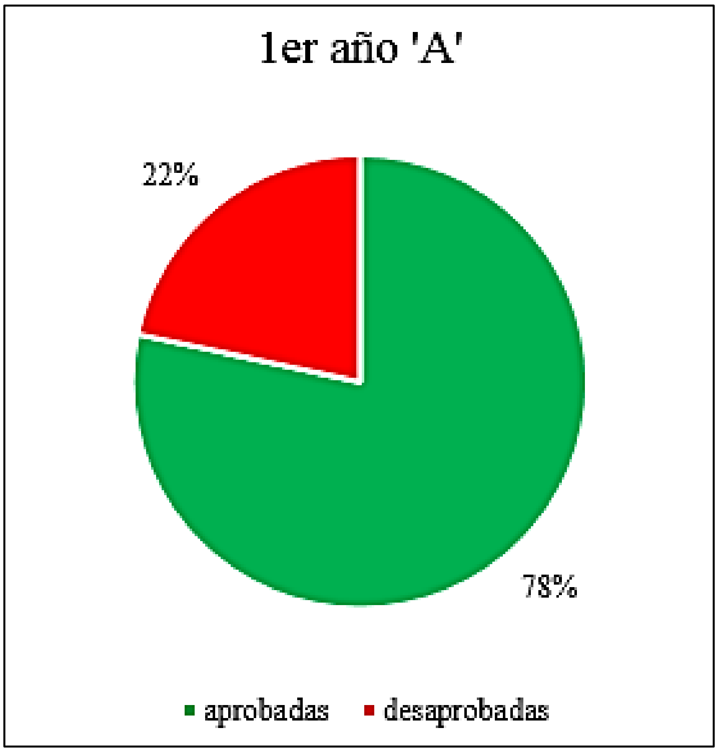


Gráfico 3. *Porcentaje de alumnas aprobadas/desaprobadas en 1ro "A"*

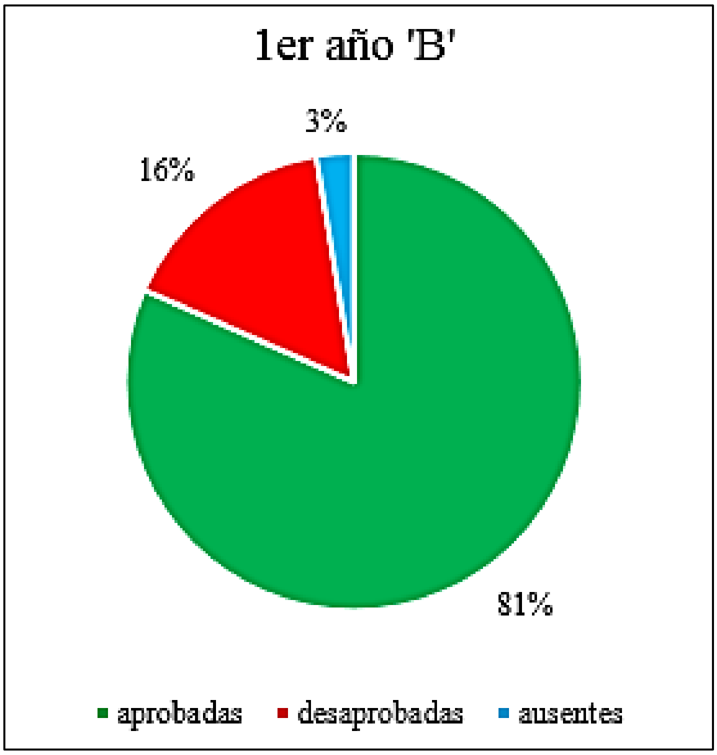


Gráfico 4. *Porcentaje de alumnas aprobadas/desaprobadas en 1ro "B"*

Como se puede ver en el Gráfico 3 y 4, alrededor del 80% de las alumnas de cada curso aprobó la evaluación sumativa. Esto evidencia que la mayoría se apropió de los contenidos dictados y que, como mencionamos en la Sección 1.2 del capítulo I, las alumnas se mostraron muy comprometidas con aprender y con sacarse buenas notas. Además, creemos que, al no haber notas con 1 ó 2, puede ser evidencia de que no hubo alumnas que sólo acompañaron con su presencia a lo largo de nuestras prácticas.

Las evaluaciones corregidas se entregaron una semana después de su realización. Para finalizar, les pedimos a las alumnas que realizaran una breve narrativa sobre su experiencia junto a nosotras a lo largo de este mes. Luego, se hicieron comentarios generales sobre el mes de clases como cierre de las prácticas y despedida.

A modo de auto-crítica y reflexión, podemos decir que coincidimos con aquellas narrativas de las estudiantes en donde manifestaron su agrado con los distintos materiales visuales y manipulables con los que propusimos trabajar, y su aporte en cuanto a la evaluación, expresando que la misma fue extensa.

Capítulo III: Elección y análisis de una problemática: “Sobregeneralización de técnicas de cálculo en $\mathbb{N}$ hacia $\mathbb{Q}+$”

3.1. Introducción a la problemática

Al finalizar nuestras prácticas, analizamos y reflexionamos sobre cada clase, observando el modo en el que fueron llevadas a cabo las actividades, las dificultades que emergieron, las potencialidades de las estudiantes y de nuestra propuesta, cuestiones que nos llamaron la atención, y posibles cambios que hubieran hecho que las mismas hayan sido mejores.

A lo largo de esta instancia nos fuimos encontrando con distintas problemáticas, entendiendo las mismas no sólo como problemas o dificultades, sino también como hechos que motivan la reflexión.

En determinadas clases pudimos observar, mediante actividades y tareas proporcionadas a las alumnas, una estrategia desarrollada por ellas, la cual se puede observar en la Figura 54 y 55. Observamos que la estrategia que las estudiantes empleaban consistía en descomponer las fracciones, en este caso $\frac{5}{4}$, en otras con numerador 1 (o su equivalentes), donde sus expresiones decimales ya eran de su conocimiento.

$$5/4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0{,}25 + 0{,}25 + 0{,}25 + 0{,}25 + 0{,}25 = 1{,}25$$

Figura 54. *Estrategia para encontrar la expresión decimal de una fracción*

$$5/4 \quad \frac{2}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = 0.5 + 0.5 + 0.25$$

Figura 55. *Estrategia para encontrar la expresión decimal de una fracción*

Para abordar y analizar este hecho, hemos realizado una recolección de datos (posterior a la finalización de nuestras prácticas). Todas las imágenes que ilustran este capítulo han sido producciones de las alumnas en esta circunstancia[35].

Consideramos que esta técnica o algoritmo es una extensión en el conjunto de los Números Racionales Positivos, en el contexto de expresiones fraccionarias, de un método que

[35] Para este momento se preparó una actividad, la cual se encuentra en el Anexo III.

actualmente se enseña en el Nivel Primario, la descomposición aditiva en el conjunto de los Números Naturales, de la cual a continuación damos el siguiente ejemplo:

$$587 + 412 = (500 + 400) + (80 + 10) + (7 + 2) = 900 + 90 + 9 = 999$$

Como se puede observar, se descomponen las centenas, decenas y unidades de cada número, agrupando las mismas, respectivamente, dentro de los paréntesis (propiedad asociativa). Luego, se resuelven las operaciones involucradas (suma), para obtener así el resultado.

La estrategia empleada por las estudiantes surgió de manera informal y autónoma en una tarea que las mismas debían realizar en el hogar, en un problema de reparto (ver Figura 56), dentro del Eje N° II "Los Números Racionales como solución al problema de la división". Esta actividad se trataba de repartir equitativamente sin resto, y el objetivo de la misma era que las estudiantes relacionen los elementos de la división con la notación fraccionaria y fraccionaria mixta.

> 1 Se desea repartir 15 turrones iguales entre 4 niños, de modo que cada uno reciba la misma cantidad sin que sobre nada.
>
> a) ¿Cómo puede efectuarse el reparto?
>
> b) ¿Cuánto le tocará a cada niño?

Figura 56. *Actividad de reparto propuesta en donde se observó la estrategia de descomposición*

Por lo tanto, nuestra intención no era que las alumnas tradujeran a la notación decimal la expresión fraccionaria, sino que dejaran expresado el resultado de esa manera, es decir en notación fraccionaria, ya que nuestro plan de trabajo en ese momento no era el abordaje de expresiones decimales.

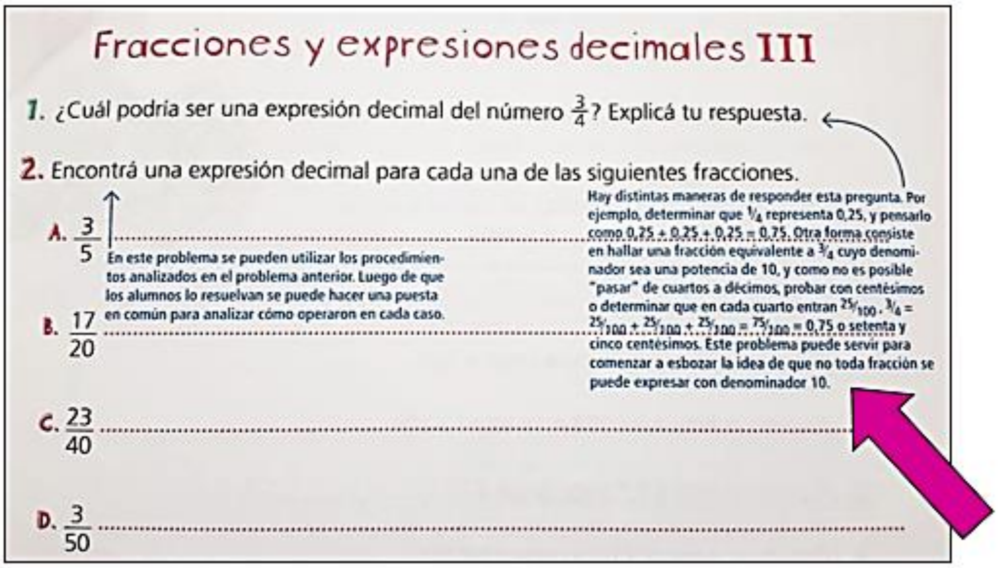
Sin embargo, tomamos esta extensión, es decir la técnica o algoritmo que evidencia la descomposición aditiva, como nuestra problemática dado que nos resultó, en primer lugar, extraño, ya que no era algo que esperábamos que apareciera en esa resolución y, en segundo lugar, ingenioso, ya que apareció de manera instantánea. Esto es lo que motiva el abordaje de esta problemática.

A lo largo de nuestras prácticas de enseñanza observamos además que, al buscar una expresión racional para $a\colon b$, las alumnas no consideraban a $\frac{a}{b}$ como cociente, sino que buscaban su expresión decimal; la fracción parece no ser un número en sí mismo, sino que era una operación que debía representarse con esa notación.

En este capítulo reflexionaremos sobre esta situación en particular, la cual será abordada y analizada desde el análisis de la experiencia de enseñanza previa de las estudiantes y desde un marco teórico particular. Tomaremos dos ejes centrales de análisis, los cuales nos servirán de guía y sustento para nuestras conjeturas: una perspectiva teórica acerca de la sobregeneralización, tomando como soporte los errores en la traducción de notación y la ausencia de sentido (es decir, la generalización de una técnica en casos donde la misma no funciona), y una mirada a través de la historia (es decir, buscaremos relaciones entre las estrategias de las alumnas y sus antecedentes históricos).

Consideramos que, probablemente, las alumnas estén recuperando una técnica aprendida en el Nivel Primario para resolver situaciones de este estilo (reparto equitativo sin resto). Como evidencia de esto, ilustramos a continuación un recorte de una página de un libro de Matemática de 5°[36], el cual utilizaron las estudiantes de los cursos de práctica hace algunos años. En el mismo, se presentan sugerencias y posibles estrategias de resolución, lo cual nos hace pensar que esta técnica podría ser promovida desde la enseñanza. Además, como se puede observar en la Figura 57, el libro propone Fracciones Decimales, no se considera la posibilidad de explorar esta técnica en fracciones no decimales, por ejemplo $\frac{7}{3}$. Esto nos resulta interesante para nuestro análisis pues no se propone un espacio para abordar las limitaciones de esta técnica.

[36] Este libro sigue la misma línea editorial que se utiliza en la escuela.



Fracciones y expresiones decimales III

1. ¿Cuál podría ser una expresión decimal del número $\frac{3}{4}$? Explicá tu respuesta.

2. Encontrá una expresión decimal para cada una de las siguientes fracciones.

A. $\frac{3}{5}$ ....

En este problema se pueden utilizar los procedimientos analizados en el problema anterior. Luego de que los alumnos lo resuelvan se puede hacer una puesta en común para analizar cómo operaron en cada caso.

B. $\frac{17}{20}$ ....

C. $\frac{23}{40}$ ....

D. $\frac{3}{50}$ ....

Hay distintas maneras de responder esta pregunta. Por ejemplo, determinar que $1/4$ representa 0,25, y pensarlo como 0,25 + 0,25 + 0,25 = 0,75. Otra forma consiste en hallar una fracción equivalente a $3/4$ cuyo denominador sea una potencia de 10, y como no es posible "pasar" de cuartos a décimos, probar con centésimos o determinar que en cada cuarto entran $25/100$. $3/4 = 25/100 + 25/100 + 25/100 = 75/100 = 0{,}75$ o setenta y cinco centésimos. Este problema puede servir para comenzar a esbozar la idea de que no toda fracción se puede expresar con denominador 10.

Figura 57. *Técnica propuesta en el libro Estudiar Matemática en 5°. Libro del docente (p. 78)*

A modo de conclusión, daremos una posible sugerencia sobre cómo abordar esta problemática para que se transforme en un contexto de aprendizaje y sirva para avanzar en el contenido, es decir en la división larga y las expresiones decimales periódicas.

3.2. Ejes centrales para analizar nuestra problemática

3.2.1. Una perspectiva teórica acerca de la sobregeneralización

Debido a la relación encontrada entre la técnica observada y el algoritmo de la descomposición aditiva en $\mathbb{N}$, decidimos darle el siguiente nombre a nuestra problemática: ***"Sobregeneralización de técnicas de cálculo en*** $\mathbb{N}$ ***hacia*** $\mathbb{Q}+$***"***. Hablamos de sobregeneralización ya que las alumnas buscan generalizar, en este nuevo conjunto numérico, un algoritmo que, en general, les servía en el conjunto de los Números Naturales. En el Nivel Primario descomponían los números en centenas, decenas y unidades para facilitar la suma, aplicando también las propiedades conmutativa y asociativa (por ejemplo: 465 + 123 = (400 + 100) + (60 + 20) + (5 + 3) = 500 + 80 + 8 = 588). Ahora, descomponen fracciones en otras más fáciles, de las cuales ya conocen su notación decimal.

Para mirar esta estrategia de la enseñanza, coincidimos con Alagia, Esteley y Villarreal (2007) en que *"los errores cometidos por las estudiantes fueron asumidos como síntomas de las concepciones que subyacen en sus actividades matemáticas"* (p. 4). Por lo tanto, el error:

> *"es no sólo consecuencia de ignorancia o de incertidumbre o de un accidente. Un error podría ser la consecuencia de un conocimiento previo que tiene su propio*

interés, su propio éxito, pero que aparece como falso bajo nuevas circunstancias, o más simplemente no adaptado. Así en el análisis didáctico los errores no son entendidos como meras fallas de los alumnos, sino más bien como síntomas de la naturaleza de las concepciones que subyacen en sus actividades matemáticas." (de Brousseau, en Alagia, Esteley y Villarreal, 2007, p. 4)

Además, las conjeturas que realizamos tienen sustento en las palabras de Centeno Pérez (1988):

"Los errores que no se deben a distracciones, sino que se reproducen sistemáticamente en situaciones similares, son muy interesantes porque nos revelan la existencia de modelos implícitos erróneos. Estos errores no aparecen aislados, sino que están relacionados con una cierta manera de conocer que permite detectar las resistencias a la evolución de un concepto, esto es, los obstáculos epistemológicos." (p. 140)

Adoptando una perspectiva del error de estos autores podemos conjeturar que las estrategias realizadas por las estudiantes, con respecto a la descomposición aditiva en $\mathbb{N}$ extendida hacia $\mathbb{Q}+$, consistieron en lo siguiente:

- Las estudiantes hacían uso de conocimientos matemáticos correspondientes al conjunto de los Números Naturales para dar solución a las actividades planteadas dentro del conjunto de los Números Racionales Positivos. En este caso, el conocimiento sería la descomposición aditiva en $\mathbb{N}$ utilizada para dar solución en $\mathbb{Q}+$.
- Las estrategias utilizadas mostraban coherencia intra-matemática, no así el resultado dentro de la situación de semi-realidad planteada (reparto de turrones). Por ejemplo: no es pertinente decir que una persona recibirá 3,75 turrones (ver Figura 56).
- Algunas alumnas utilizaban la descomposición aditiva como recurso de resolución. Esto se constituiría, a modo de conjetura, en un obstáculo para operar con fracciones donde una descomposición análoga sea en fracciones unitarias con expresión no decimal. Por ejemplo (ver Figura 58):

3/7 $\frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7}$ me parece que no se puede porque no hay una expresión decimal exacta

2/3 = $1/3 + 1/3$ = No se puede porque cada uno sería 0,33333... + 0,333333...

3/7 = $1/7 + 1/4 + 1/7$ = No se puede porque sería 0,1428571... + 0,1428571... + 0,1428571...

Figura 58. *Descomposición en fracciones unitarias con expresión no decimal*

Vemos reflejado lo mencionado en los ítems anteriores en Alagia, Esteley y Villarreal (2007) al aplicar una técnica de resolución perteneciente a un conjunto numérico ($\mathbb{N}$) extendiéndola hacia otro ($\mathbb{Q}+$) sin saber las limitaciones que podría tener éste, emergiendo así un posible obstáculo. Por ejemplo, en la Figura 59, la alumna realizó la descomposición en fracciones unitarias, luego buscó la expresión decimal de las mismas con la calculadora y, para expresar el resultado, truncó la parte decimal.

$$3/7 = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = 0{,}14 + 0{,}14 + 0{,}14 = 0{,}42$$

$$2/3 \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0.33 + 0.33 = 0.99$$

Figura 59. *Truncamiento de la expresión decimal*

De manera similar, en la Figura 60 observamos la misma estrategia:

$$2/3 \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0.3333333 + 0.3333333 = 0.6666666$$

(se puede, pero con calculadora)

Figura 60. *Truncamiento de la expresión decimal obtenida con calculadora*

Como se menciona en Centeno Pérez (1988), las alumnas diseñaron reglas de acción que les permitieron obtener resultados correctos en una situación problemática, es decir en la situación de reparto equitativo sin resto (ver Figura 56).

Como se puede observar en la Figura 59, el primer obstáculo surge al truncar la expresión decimal en dos cifras decimales, lo cual conjeturamos que esto deviene de la enseñanza de los Números Decimales con referencia al contexto del sistema monetario, en el cual lo lógico es utilizar dos cifras decimales para expresar los centavos.

En la Figura 60 observamos otra fuente de obstáculos para fracciones no decimales, también relacionado con el truncamiento de la expresión decimal, deviene del uso de la calculadora y de la interpretación de lo que allí aparece. Como se puede ver en la siguiente imagen (ver Figura 61), estos dispositivos no suelen indicar que las cifras decimales son infinitas.

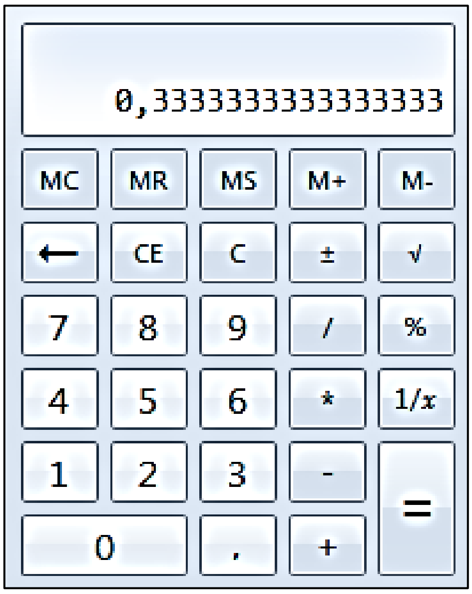


Figura 61. *Expresión decimal que devuelve la calculadora para* $\frac{1}{3}$

Finalmente, consideramos que estas reglas de acción construidas por las estudiantes devienen de un *"conocimiento suficiente de los Naturales, pero* [posiblemente] *resistente al cambio de estatus"* (Centeno Pérez, 1988) dado que, si bien extienden un algoritmo que sirve en $\mathbb{N}$, el mismo, en ciertos casos en $\mathbb{Q}+$, tiene sus limitaciones. Por ello, consideramos que si estas reglas informales no se aprovechan como instancia de aprendizaje, pueden aparecer dificultades para el abordaje de la notación con coma de fracciones decimales o para la construcción del sentido del Racional como solución a la división en $\mathbb{N}$.

3.2.2. Una mirada a través de la historia de la estrategia de las estudiantes

Si analizamos los antecedentes históricos que aparecen en Collette, J-P. (1985), podemos encontrar evidencias de que el método utilizado por las alumnas para descomponer fracciones se ve reflejado en el que empleaban los escribas egipcios en la Edad Antigua en el contexto de medida y, especialmente, en el de reparto.

La Matemática egipcia se basaba en un sistema no posicional aditivo; las operaciones básicas de suma y resta se limitaban a una combinación de símbolos. Por ejemplo, para realizar 27 + 14 = 41 (sabiendo que ∩ = 10 y | = 1), se suman los mismos símbolos, siempre y cuando, en la combinación, no queden repetidos más de 9 veces. De ser así, se eliminan 10 y se coloca el siguiente símbolo.

∩ ∩ | | | | | | | + ∩ | | | | = ∩ ∩ ∩ ∩ |

La adición era la base del conocimiento matemático puesto que las operaciones de multiplicación y división se basaban en adiciones. Así, la representación de una fracción se encontraba en la descomposición como suma de fracciones de numerador 1, todas distintas.

A modo de ejemplo, podemos mencionar como Ahmes[37], en el papiro Rhind[38], escribía $\frac{2}{5}$ como $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$. La propia expresión $\frac{2}{5}$ no tenía sentido por sí sola en el pensamiento egipcio, sino escrita en fracciones unitarias. Cualquier cantidad se expresaba como una parte entera más una suma de fracciones unitarias (y a lo sumo $\frac{2}{3}$). No se empleaba el símbolo '+'; las fracciones aparecían secuencialmente.

En la actualidad, encontramos diferentes algoritmos de cálculo (por ejemplo, buscar común denominador y sumar los denominadores) que nos permiten realizar tales adiciones, pero hace 4000 años los escribas no tenían conocimiento acerca de un método para realizar las transformaciones (o sea, descomponer fracciones en fracciones unitarias). Por este motivo es que los escribas utilizaban tablas ya escritas.

A continuación, mostramos una reproducción de una tabla (ver Figura 62) que incluye el papiro Rhind en la cual se expresan todas las fracciones con numerador 2 y denominador impar entre 5 y 101 como suma de fracciones unitarias. En la primera y tercera columna aparecen los denominadores de las fracciones de la forma $\frac{2}{n}$ siendo $n \in \mathbb{N}$ impar y con $5 \leq n \leq 101$. En la segunda y cuarta columnas, aparecen los denominadores (separados por comas) de las fracciones unitarias cuya suma da $\frac{2}{n}$.

[37] Antiguo escriba egipcio que vivió durante el Segundo Periodo Intermedio y el comienzo de la dinastía XVIII.
[38] Documento de carácter didáctico que contiene diversos problemas matemáticos. Está redactado en escritura hierática (buscar qué es eso) y mide unos seis metros de longitud por 32 cm de anchura. Contiene 87 problemas matemáticos con cuestiones aritméticas básicas, fracciones, cálculo de áreas, volúmenes, progresiones, repartos proporcionales, regla de tres, ecuaciones lineales y trigonometría básica.

Por ejemplo, en las dos primeras casillas de la segunda fila se ve expresada $\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$.

Denominadores de las fracciones de la forma $\frac{2}{n}$	Denominadores de las fracciones unitarias	Denominadores de las fracciones de la forma $\frac{2}{n}$	Denominadores de las fracciones unitarias
5	3,15	53	30,318,795
7	4,28	55	30,330
9	6,18	57	38,114
11	6,66	59	36,236,531
13	8,52,104	61	4,244,488,610
15	10,30	63	42,126
17	12,51,68	65	39,195
19	12,76,114	67	40,335,536
21	14,42	69	46,138
23	12,276	71	40,568,710
25	15,75	73	60,219,292,365
27	18,54	75	50,150
29	24,58,174,232	77	44,308
31	20,124,155	79	60,237,316,790
33	22,66	81	54,162
35	30,42	83	60,332,415,498
37	24,111,296	85	51,255
39	26,78	87	58,174
41	24,246,328	89	60,356,534,890
43	42,86,129,301	91	70,130
45	30,90	93	62,186
47	30,141,470	95	60,380,570
49	28,196	97	56,679,776
51	34,102	99	66,198
		101	101,202,303,606

Figura 62. *Reproducción de la tabla escrita por Ahmes sobre la descomposición de fracciones en fracciones unitarias*

De esta tabla podemos extraer el siguiente dato: todas las fracciones de la forma $\frac{2}{3k}$ están expresadas como suma de fracciones unitarias de la forma $\frac{1}{2k} + \frac{1}{6k}$. Por ejemplo: $\frac{2}{15} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$ (ver séptima fila, primeras dos columnas).

Consideramos que el argumento más convincente pensado por los egipcios para la descomposición en fracciones unitarias era la facilidad de dividir una unidad en n partes. Por ejemplo, para realizar un reparto de dos panes entre ocho personas bastaba dividir cada uno en cuatro partes ($\frac{1}{4}$), lo que en la práctica sería dividir cada pan en dos partes iguales y cada una de estas partes en otras dos. La acción de reparto con este procedimiento de divisiones sucesivas por la mitad es el motivo de las fracciones de Horus, o sea fracciones unitarias con denominador potencia de 2 ($\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$).

Ahora, si el número de personas entre las que hay que repartir los dos panes es distinto de una potencia de 2, por ejemplo 6, se debería partir cada pan en tres partes iguales ($\frac{1}{3}$).

Pero ¿qué sucede cuando el número de personas es impar? Por ejemplo, 5. En este caso, se puede dividir cada pan en tres partes iguales de manera que, en un primer reparto, se dé $\frac{1}{3}$ de pan a cada persona. Así, sobraría una de las tres partes de un pan, que habría que dividir en cinco partes iguales ($\frac{1}{5}$ de $\frac{1}{3}$ de pan, es decir, $\frac{1}{15}$ de pan). A cada persona le correspondería $\frac{1}{3}$ + $\frac{1}{15}$ de pan, lo que lleva a establecer para el escriba egipcio la igualdad: $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$.

Por otro lado, podemos rastrear más evidencias del método utilizado por las estudiantes en la Matemática babilónica[39] (1800 – 1600 a. C.). Los babilonios no tenían un algoritmo para la división larga[40], en su lugar basaban su método en el hecho de que:

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$$

[39] La matemática babilónica se deriva de unas 400 tablillas de arcilla que abarcan temas que incluyen fracciones, problemas de álgebra, ecuaciones cuadráticas y cúbicas y tríos de enteros en aplicación del esbozo del teorema de Pitágoras.

[40] Algoritmo para dividir dos números, obteniéndose el cociente un dígito por vez.

Es posible que las alumnas pensaran a la fracción $\frac{5}{2}$, por ejemplo, como la multiplicación $5 \times \frac{1}{2}$. Podemos observar esto en los siguientes ejemplos realizados por una estudiante (ver Figura 63 y 64)

$$5/4 \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times 5 = 1\frac{1}{4}$$

Figura 63. *Estrategia para descomponer una fracción en fracciones unitarias*

$$3/7 \quad \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{1}{7} \times 3$$

Figura 64. *Estrategia para descomponer una fracción en fracciones unitarias*

Luego de revisar estos aspectos históricos podemos relacionarlos con nuestro análisis de las estrategias empleadas por las alumnas dado que querían descomponer fracciones en otras unitarias y conocidas, o en una cantidad entera seguida de fracciones unitarias, así como también escribían una fracción como el producto de un número entero por una fracción unitaria.

En síntesis, coincidimos con las palabras de Centeno Pérez (1988) *"los obstáculos epistemológicos se encuentran, [...] en el desarrollo histórico de los conceptos y su huella existe en los modelos espontáneos de los alumnos"*. En este sentido, podemos decir que esta estrategia de resolución utilizada por las alumnas tiene su correlato a lo largo de la historia. La estrategia de las estudiantes no puede ser considerada elemental o limitada, sino que reconoce procedimientos matemáticos de la antigüedad y puede ser tomada como un puntapié para el avance de los contenidos (es decir en la división larga y las expresiones decimales infinitas periódicas), valorizando así las instancias de aprendizaje en situaciones donde surgen estrategias espontáneas.

3.3. Conclusiones

A lo largo de nuestras prácticas de enseñanza, y en particular en las instancias de corrección de tareas, no teníamos planificadas resoluciones del estilo de la técnica analizada en este capítulo, por lo que la misma nos tomó por sorpresa y nos asombró.

Analizándola en este sentido, según nuestra experiencia en el aula y valiéndonos de información y bibliografía, afirmamos que esta técnica o algoritmo basada en la descomposición aditiva era esperable por parte de las alumnas ya que, como se pudo observar en el libro Estudiar Matemática en 5° (Libro del docente, p. 78), está propuesta como una posible estrategia de resolución. Creemos que sería oportuno promover en el aula situaciones en donde surja la necesidad de valorar estrategias espontáneas de las estudiantes, continuando con situaciones en donde la misma se enfrente con sus propias limitaciones puesto que, en coherencia con lo que menciona Centeno Pérez (1988):

> *"Esto no quiere decir que debamos provocar errores, pero sí las situaciones que puedan poner de manifiesto la significación que los niños dan a lo que dicen, escriben o hacen respecto de una idea matemática."* (p. 141)

Una primera limitación podría emerger en la descomposición de una fracción (por ejemplo $\frac{3}{20}$) en fracciones unitarias de las cuales su expresión decimal no sea conocida para las estudiantes, en este caso $\frac{1}{20}$. Aquí, *"el conocimiento se revela insuficiente frente a la nueva situación y para resolverla es preciso reestructurar el conocimiento anterior [...]"* (Bachelard y Brousseau, citado en Centeno Pérez, 1988, p. 145).

Por esto, proponemos hacer avanzar el conocimiento a través del algoritmo de la división larga, ya sea en la fracción inicial o en cada uno de los sumandos, observando que el mismo sólo sirve para las Fracciones Decimales, es decir aquellas que no tienen denominadores cuyos divisores sean distintos de 2 ó 5. Una vez comprendido este término (Fracciones Decimales), para encontrar la notación decimal de una fracción sólo se debería hallar una equivalente con denominador potencia de 10 y hacer el corrimiento de la coma. Por ejemplo:

$$\frac{1}{20} = \frac{5}{100} = 0{,}05$$

Otra limitación se podría dar con las fracciones cuya expresión decimal sea periódica, es decir cuando la división larga nunca termina. Aquí muchos alumnos podrían truncar la expresión decimal; esta situación llevaría a abordar la escritura decimal periódica, concluyendo así, en palabras de Centeno Pérez (1988) que *"aunque todos los números racionales no son decimales, éstos permiten dar aproximaciones tan finas como queramos de los racionales. Y que, por lo tanto, todo número racional se puede representar por una escritura decimal (limitada o ilimitada)"* (p. 70).

Finalmente, siguiendo nuestras reflexiones sobre la problemática elegida, consideramos que, para futuros abordajes de la notación decimal, sería pertinente comenzar con la traducción de notación fraccionaria a notación decimal tomando la estrategia de la descomposición manifestada por las alumnas y, luego, brindar distintas situaciones en las que se presenten limitaciones a esa estrategia.

Capítulo IV: Conclusiones y reflexiones finales

4.1. A modo de cierre

En este capítulo reflexionaremos sobre nuestras prácticas de enseñanza, analizando la tarea previa y posterior a las mismas, es decir desde la planificación de las clases y los contenidos hasta la evaluación de los mismos, como así también realizando una auto-crítica de las clases y nuestro desempeño en ellas.

Por otro lado, haremos una breve reflexión sobre el análisis de la problemática elegida y sus derivaciones.

Finalmente, manifestaremos apreciaciones personales sobre nuestra experiencia en este primer acercamiento al aula.

4.1.1. Sobre nuestro paso por la institución y nuestra primera experiencia como docentes

Desde el primer día de clases en Metodología y Práctica de la Enseñanza supimos que este año estaría lleno de desafíos. En primer lugar, comenzar a analizar la bibliografía necesaria para dar sustento a nuestra propuesta de enseñanza, empezando así a planificar (por primera vez) un mes de clases de Matemática, actividad totalmente nueva para nosotras. Este arduo trabajo se vio reflejado en el momento de la acción y al emprender la responsabilidad de hacernos cargo de un curso, así como también nos sirvió para anticiparnos a posibles respuestas de las alumnas en cada situación.

Nos interesa destacar la importancia que implica adaptarse a una institución, la cual tiene sus propias características que la definen como tal, siendo esto determinante en muchos aspectos a considerar para que la elaboración de nuestra propuesta sea coherente con los principios institucionales.

Además, nos encontramos con varias dificultades (propias de la tarea docente), las cuales tomamos como instancias de aprendizaje, auto-crítica y crecimiento: la organización de la tecnología disponible en el aula, la organización de actividades adecuadas para el curso, el uso de distintas representaciones y materiales para realizar explicaciones orales y puestas en común, pensando en la comprensión de las estudiantes, y la gestión de la clase, en relación a la coordinación de los distintos momentos de la misma (inicio, desarrollo y cierre) para propiciar un clima de respeto y trabajo.

Aquí reconocemos y queremos destacar las clases en las que utilizamos herramientas y materiales manipulables y visuales como mediadores del aprendizaje, ya que creemos que fueron un importante aporte para el trabajo de las alumnas quienes evidenciaron una apropiación de esta forma de trabajo.

En cuanto al abordaje inicial de prácticas que pensamos, planificamos y propusimos, consideramos que fue importante comenzar con un problema que surge en la realidad (medir) para luego pensar en uno matemático (división), trabajando así con distintas representaciones en distintos contextos, como ser la relación “parte-todo” y el Racional en la recta numérica. Creemos que esta última representación fue la que más captó la atención de las alumnas por el uso de material didáctico y por la nueva forma de abordar este tema, y la que nosotras más disfrutamos.

Creemos que la decisión de llevar a cabo nuestras clases a través de una secuencia basada en la insuficiencia de conjuntos numéricos y de determinados métodos (recta numérica) logró una conexión y una lógica positiva entre los contenidos.

Con respecto a la evaluación, podemos decir que fue una instancia difícil ya que la misma debió contemplar todos los contenidos enseñados, por lo que las actividades debían ser pertinentes y acordes a nuestra práctica, sin dejar de adaptarnos a las reglas propias de la institución. Finalizado este momento, pudimos auto-criticar nuestra propuesta de evaluación: creemos que fue extensa, lo cual hizo que las alumnas no se mostraran tranquilas al resolverla.

Por otro lado, el desafío de la práctica en sí misma fue enriquecedora en muchos sentidos, siendo la primera vez que entrábamos a una escuela como docentes. No sólo lo fue este escalón inicial de nuestra labor, sino que también la elaboración de este informe nos ayudó a desarrollar un pensamiento crítico sobre la misma, analizando qué actividades o formas de trabajo fueron más productivas y enriquecedoras, cuáles de las respuestas hacia las alumnas fueron adecuadas y cuáles fueron insuficientes y qué instancias o momentos podríamos haber aprovechado para avanzar.

4.1.2. Sobre la problemática elegida

En un comienzo, contábamos con otras posibles problemáticas que, junto con la elegida, se relacionan mediante la falta de sentido de las expresiones decimales, así como también mediante los errores en su escritura. Decidimos elegir la ***“Sobregeneralización de técnicas de***

cálculo en $\mathbb{N}$ ***hacia*** $\mathbb{Q}+$***”*** dado que nos resultó la más abarcativa ya que las demás eran casos particulares de esta, presentándose con más recurrencia entre las alumnas.

En este sentido, y por todo lo reflexionado sobre esa problemática, creemos que es interesante proponer instancias de error para tomarlas como situaciones de aprendizaje y de evolución en el conocimiento, y así construir propuestas alternativas para la enseñanza de la notación decimal desde los aportes de los estudiantes.

Para cerrar con este capítulo, consideramos muy importante destacar lo productivo que fue nuestro trabajo colaborativo como par pedagógico, el cual nos permitió mantenernos fuertes, combinando esfuerzos y motivándonos día a día, aprendiendo una de la otra, observándonos, analizando nuestras fortalezas y debilidades, y sabiendo que en nuestro par encontrábamos el apoyo necesario para seguir adelante en todo este trayecto. El trabajo junto con nuestra profesora supervisora también fue de gran importancia ya que nos ayudó a avanzar y crecer en esta etapa, nutriéndonos de sus experiencias y sugerencias.

Por último, queremos destacar la importancia de que los sujetos (incluyendo a la docente tutora) de la institución en la cual realizamos las prácticas hayan puesto a nuestra disposición, tanto los elementos de Geometría y los insumos tecnológicos, como su experiencia para brindarnos sugerencias y consejos para mejorar nuestras clases.

Bibliografía y referencias bibliográficas

- Acuerdos Escolares de Convivencia –Nivel Secundario–, aprobados por resolución 0711/14 2015-2017.
- Alagia, H., Esteley, C. y Villarreal, M. (2007). Sobregeneralización de Modelos Lineales: estrategias de resolución en contextos universitarios. *Revista de Educación Matemática*. 22(3).
- Bombini, G. (2002). *Prácticas docentes y escritura: hipótesis y experiencias en torno a una relación productiva*. Ponencia expuesta en el Congreso de "prácticas docentes". Facultad de Filosofía y Humanidades. Universidad Nacional de Córdoba.
- Bonzi, L. y Guidobaldi, P. (2017). *Operando con fracciones desde el abordaje "parte-de"*. Informe Final de Prácticas. Metodología, Observación y Práctica de la Enseñanza. FAMAF. Disponible en: https://rdu.unc.edu.ar/handle/11086/5782 (último acceso 05/11/2018).
- Broitman, C., Escobar, M., Etchemendy, M., Novembre, A., Sancha, I. (2007). *Estudiar Matemática en 5°*. Libro del docente. Santillana.
- Centeno Pérez, J. (1988). *Números Decimales ¿por qué? ¿para qué?* Editorial Síntesis.
- Collette, J-P. (1985). *La historia de las matemáticas I*. Editorial Siglo XXI de España Editores S.A.
- Escayola, R., Grimaldi, V., López, E., Nicodemo, M. (2014). *Explorar en Matemática 7°/1° ES*. Santillana.
- Fregona, D. (1997). *El Libro de la Matemática 7*. Editorial Estrada.
- Gvirtz, S. y Palamidessi, M. (2008). *El ABC de la tarea docente: currículum y enseñanza*. Editorial Aique.
- Gobierno de la Provincia de Córdoba. Ministerio de Educación. Secretaría de Educación. Subsecretaría de Promoción de Igualdad y Calidad Educativa. Dirección General de Planeamiento e Información Educativa. *Diseño Curricular: Ciclo Básico de la Educación Secundaria, versión 2011 – 2015*. Disponible en: http://www.igualdadycalidadcba.gov.ar/SIPEC-CBA/publicaciones/EducacionSecundaria/LISTO%20PDF/TOMO%202%20Ciclo%20Basico%20de%20la%20Educacion%20Secundaria%20web%208-2-11.pdf (último acceso 05/11/2018).

- Gobierno de la Provincia de Córdoba. Ministerio de Educación. Secretaría de Educación. Subsecretaría de Promoción de Igualdad y Calidad Educativa. Dirección General de Planeamiento e Información Educativa. *Diseño Curricular de Educación Secundaria: Orientación Ciencias Naturales, versión 2012 – 2015.* Disponible en: http://www.igualdadycalidadcba.gov.ar/SIPEC-CBA/publicaciones/EducacionSecundaria/LISTO%20PDF/orientacion%20naturales28-03-12.pdf (último acceso 05/11/2018).
- Gobierno de la Provincia de Córdoba. Ministerio de Educación. Secretaría de Educación. Subsecretaría de Promoción de Igualdad y Calidad Educativa. Dirección General de Planeamiento e Información Educativa. *Diseño Curricular de Educación Secundaria: Orientación Ciencias Sociales y Humanidades, versión 2012 – 2015.* Disponible en: http://www.igualdadycalidadcba.gov.ar/SIPEC-CBA/publicaciones/EducacionSecundaria/LISTO%20PDF/ORIENTACIoN%20CIENCIAS%20SOCIALES%20Y%20HUMANIDADES%209%20de%20noviembre.pdf (último acceso 05/11/2018).
- Herrero, A. y Roldán, A. (2011). *Introducción a los Números Racionales Positivos.* Informe Final de Prácticas. Metodología, Observación y Práctica de la Enseñanza. FAMAF. Disponible en: http://documents.famaf.unc.edu.ar/institucional/biblioteca/trabajos/6085/16287.pdf (último acceso 05/11/2018).
- Itzcovich, H. y Novembre, A. (2006). *Al Fin de Cuentas*. Tinta Fresca.
- Skovsmose, O. (2000). Escenarios de Investigación. *Revista EMA*. 6(1).

ANEXO I

Continuación de la planificación del eje N° II "Los Números Racionales como solución al problema de la división"

Para guiar la lectura de este anexo, se indican las siguientes referencias de formato:

- Entre comillas "" y en *cursiva* se encuentran las preguntas que planificamos realizarles a las estudiantes, así como también las posibles respuestas que ellas podrían brindarnos.
- En **negrita** y en rojo se encuentran las palabras claves del tema planificado.
- En **negrita** y centrado se encuentran las expresiones que las alumnas debían copiar en sus carpetas, las cuales quedarían plasmadas en la pizarra.
- En **negrita**, verde y alineación derecha se encuentra el tiempo estimado para cada momento relatado.

Les preguntaremos a las alumnas: *"los números naturales ¿también son números racionales? ¿puedo escribir un número natural, por ejemplo, el 5, con notación fraccionaria?"*. Para ayudarlas, recordaremos las **funciones del numerador y denominador**: *"¿en cuántas partes divido la unidad? ¿cuántas partes tomo?"* y les daremos ejemplos: *"si tengo 5 alfajores y 5 personas, ¿en cuántas partes debo dividir esa cantidad para que a todos les correspondan 5 alfajores?"*.

Juntas obtendremos la siguiente expresión, la cual escribirán en sus carpetas:

Si 'c' es un natural, puedo escribir $c = \frac{c}{1}$

Luego, entre todas, llegaremos a que **el denominador nunca puede ser 0**, para lo cual haremos algunas preguntas como, por ejemplo: *"si quiero repartir 5 globos entre 0 niños, ¿cuántos globos le corresponde a cada niño? ¿puedo particionar una unidad en 0?"*.

Pediremos a las alumnas que proporcionen ejemplos de fracciones según las siguientes notaciones: **propia e impropia**. Les haremos preguntas del estilo: *"¿por qué es propia? ¿por qué es impropia?"* con el objetivo de saber (nosotras) que han entendido y reconocen cuál es el denominador y cuál es el numerador.

Para explicar la **notación mixta**, primero recordaremos algunos resultados de ejercicios de la Actividad N° 4 y 5. Para ello, realizaremos preguntas: *"¿cómo deben ser el numerador y el denominador para que una fracción represente una unidad?"*. Creemos que todas sabrán responder que deben ser iguales ya que el **denominador** nos dice en cuántas partes debemos particionar la unidad y el **numerador** nos dice cuántas de ellas debemos tomar. Entonces les preguntaremos: *"¿la fracción con notación propia representa una cantidad menor o mayor que una unidad? ¿y la fracción con notación impropia?"*. Creemos que aquí las alumnas debatirán y, luego, quedará en claro que una fracción con notación propia es menor que la unidad y que la fracción con notación impropia es mayor.

Nuevamente llevaremos las tiras grandes de cartulina y mostraremos algunos ejemplos con fracciones impropias y propias. Tomaremos la tira verde U como unidad y la tira naranja (remitirse a la Figura 15). Les preguntaremos: *"¿la tira naranja representa una fracción propia o impropia de la tira verde? ¿por qué?"*. Suponemos que todas sabrán responder que representa una fracción impropia ya que es mayor que la unidad. Continuaremos preguntando: *"¿cómo hacíamos para medir la tira naranja con respecto a la tira verde?"*. Les recomendaremos que recuerden las primeras clases sobre medida y se fijen el procedimiento que han realizado en sus carpetas. Aquí creemos que todas querrán hablar, por lo tanto, les pediremos que levanten la mano e iremos seleccionándolas para que expresen sus respuestas.

Luego, entre todas, recordaremos que para medir una tira primero la comparamos con la unidad y observamos entre cuántas unidades mide, es decir cuántas veces entra la unidad. Este número de veces que entra en la tira naranja será la parte entera del número con notación mixta. Lo siguiente será comparar el resto con la unidad, particionar la misma y dar la medida del resto, y este último número es la parte fraccionaria de la notación mixta.

Continuando, tomaremos la tira amarilla, que es menor que la verde, y preguntaremos: *"¿la tira amarilla representa una fracción propia o impropia de la tira verde?"*. Suponemos que todas responderán que es propia ya que es menor que la unidad. Repasando el procedimiento de medición nuevamente, veremos que la parte entera en las fracciones propias es 0, y que la parte fraccionaria es la misma fracción.

Agregaremos que la **parte entera de la notación mixta** nos permite ver entre qué números naturales se encuentra esa fracción, y aquí también nos remitiremos a ejercicios anteriores: *"cada niño recibirá más de 3 turrones, pero menos de 4"*, etcétera.

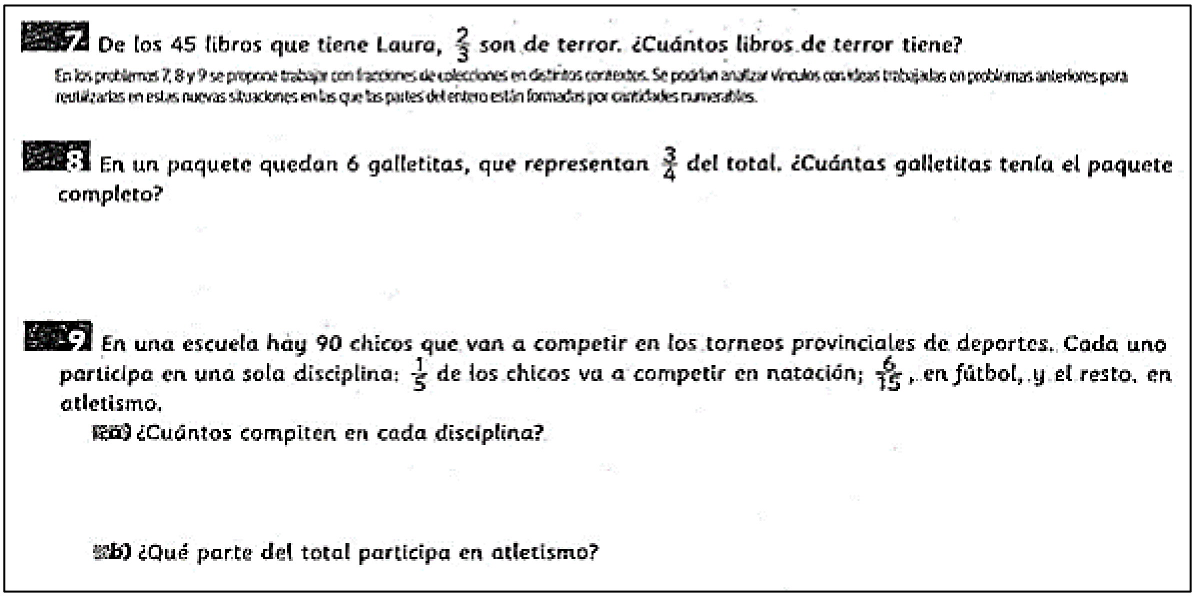
Además, recordaremos lo que vimos la clase en la que hablamos sobre las divisiones (remitirse a Figura 17).

Escribiremos en el pizarrón:

$$\textbf{Toda fracción } \frac{a}{b} \textbf{ puede escribirse como número mixto } C\frac{r}{b}\textbf{, en donde } C\frac{r}{b} = C + \frac{r}{b}$$

Luego, entre todas, podríamos dar ejemplos de cuándo usamos expresiones mixtas: en la actividad de las tiras, en recetas, etcétera. Creemos que aquí las alumnas van a dar otros ejemplos más. Además, representaremos una o dos fracciones con notación impropia, las cuales dirán las alumnas, con notación mixta. Por último, aclararemos que veremos la notación decimal más adelante.

Les daremos para que realicen las actividades[41] (ver Figura 65 y 66). Antes de que comiencen las estudiantes a trabajar les recomendaremos que, en cada actividad, primero identifiquen cuál es la unidad para luego trabajar con ella. Creemos que las alumnas podrán hacer algunos dibujos a modo de estrategia cuando los números sean pequeños. Uno de los objetivos de estas actividades es que las estudiantes utilicen las definiciones y funciones de numerador, denominador y unidad para poder resolver.



7 De los 45 libros que tiene Laura, $\frac{2}{3}$ son de terror. ¿Cuántos libros de terror tiene?

En los problemas 7, 8 y 9 se propone trabajar con fracciones de colecciones en distintos contextos. Se podrían analizar vínculos con ideas trabajadas en problemas anteriores para reutilizarlas en estas nuevas situaciones en las que las partes del entero están formadas por cantidades numerables.

8 En un paquete quedan 6 galletitas, que representan $\frac{3}{4}$ del total. ¿Cuántas galletitas tenía el paquete completo?

9 En una escuela hay 90 chicos que van a competir en los torneos provinciales de deportes. Cada uno participa en una sola disciplina: $\frac{1}{5}$ de los chicos va a competir en natación; $\frac{6}{15}$, en fútbol, y el resto, en atletismo.

a) ¿Cuántos compiten en cada disciplina?

b) ¿Qué parte del total participa en atletismo?

Figura 65. *Actividades de "fracción de una colección", extraídas de Explorar en Matemática 7°/1° ES*

[41] Actividades extraídas de *Explorar en Matemática 7°/1° ES*, p. 55 y 63.

3 De los 96 alfajores que compró Elena, $\frac{1}{8}$ son de fruta, $\frac{1}{4}$ son de chocolate blanco y los demás, de chocolate negro. ¿Cuántos alfajores de cada gusto compró?

4 Para resolver un problema de reparto de alfajores en partes iguales y sin que sobre nada, Federico hizo esta cuenta:

$$\begin{array}{r|l} 49 & 9 \\ \cline{2-2} 4 & 5 \end{array}$$

Indicá cuántos alfajores se pudieron haber repartido, entre cuántas personas y qué cantidad le tocó a cada una.

Figura 66. *Actividades de "fracción de una colección" y de "reparto", extraídas de Explorar en Matemática 7°/1° ES*

Si el tiempo alcanza, comenzaremos a corregir las actividades, designando a las alumnas a pasar al frente. Las que no se realizaron y/o no fueron corregidas, deberán traerlas realizadas para la clase que viene.

Terminaremos la clase preguntando: *"¿qué aprendimos hoy?"*. Algunas de las respuestas podrán ser: *"las funciones del denominador y del numerador", "si ambos son iguales (numerador y denominador) la fracción representa una unidad", "fracciones con notación propia, impropia y mixta", "sombreado de figuras", "parte de un todo",* etc.

Hasta aquí, creemos que pasarán 40 minutos

Comenzaremos una nueva clase con la corrección de las primeras cuatro actividades que quedaron pendientes o de tarea de la clase pasada. Para ello, preguntaremos quiénes quieren pasar al pizarrón y seleccionaremos a cuatro alumnas, primero dos y luego las otras dos. El objetivo de estas actividades es que identifiquen la unidad y expliquen qué significan el numerador y el denominador de las fracciones que, en estos casos, representan la **parte de un todo**. Para esto haremos preguntas como: *"¿cuál es la unidad en este caso? ¿qué me indica el denominador y el numerador de cada una de las fracciones?".* Creemos que varias alumnas van a realizar dibujos para explicar mejor los problemas.

Luego, haremos pasar a una alumna más para que resuelva el Ejercicio N° 4 que quedó, también de la clase pasada. La idea del mismo es que observen qué papel juega cada parte de la división y la **traducción** entre las nociones de fracción impropia y mixta.

Continuaremos la clase trabajando con las siguientes actividades[42] (ver Figura 67, 68, 69 y 70).

EN PAREJOS

1 a) ¿Se puede formar 1 usando solamente sextos?

b) ¿Cuántos cuartos se necesitan para formar 1?

c) ¿Cuántos cuartos se necesitan para formar 2? ¿Y cuántos octavos?

Figura 67. *Actividad extraída de Explorar en Matemática 7°/1° ES*

6 ¿Será cierto que la fracción $\frac{13}{5}$ se encuentra entre los números 2 y 3?

7 ¿Entre qué números enteros consecutivos se ubica cada una de las siguientes fracciones?

$\frac{23}{3}$ $\frac{12}{11}$ $\frac{69}{7}$ $\frac{56}{10}$

Figura 68. *Actividades de "orden de fracciones" extraídas de Explorar en Matemática 7°/1° ES*

7 ¿Entre qué números enteros consecutivos se ubica la fracción $\frac{23}{7}$?

Figura 69. *Actividad de "orden de fracciones" extraída de Explorar en Matemática 7°/1° ES*

2. Se presenta a continuación una cuenta de dividir:

$$\begin{array}{r|l} 267 & 5 \\ \hline 17 & 53 \\ 2 & \end{array}$$

En la cuenta se observa que:

a $\frac{267}{5} > 53$

b $\frac{267}{5} < 53$

c $\frac{267}{5} = 53\frac{2}{5}$

Figura 70. *Actividad de "notación mixta" extraída de Al Fin de Cuentas EGB 3*

Comenzaremos con la corrección de las actividades. Le pediremos a alguna alumna que elija a una compañera para que pase al frente a exponer su resolución de la primera actividad, con la intención de proponer otra forma de trabajo, en la cual las decisiones no recaigan

[42] Actividades extraídas de *Explorar en Matemática 7°/1° ES*, p. 57, 58 y 64, y de *Al Fin de Cuentas EGB 3*, p. 87.

siempre en nosotras. En la misma, la idea a la cual se apunta es que *n* veces $\frac{1}{n}$ completan una unidad y que para formar *m* unidades voy a necesitar repetir *m* **.** *n* veces la fracción $\frac{1}{n}$.

Ahora le pediremos a otra alumna que elija a cuatro compañeras para que pasen a la pizarra a exponer sus resoluciones. La idea de las últimas cuatro actividades es cerrar el tema de **expresión mixta** y entender que, si el entero del mismo es el número natural *N*, entonces la **fracción impropia** a la cual representa se encuentra entre los números naturales *N* y *N+1*. Esto nos servirá en las próximas clases cuando empecemos a trabajar con la recta numérica.

Todo lo nombrado anteriormente lo iremos construyendo entre todas y, antes de que toque el timbre, para finalizar, nosotras lo escribiremos en el pizarrón de manera general para que lo copien en sus carpetas. Dejaremos en el pizarrón una lista de materiales que deberán tener para las próximas clases: tiras, hojas blancas, hoja rayada, hoja de calcar, compás, regla y escuadra.

Hasta aquí, creemos que pasarán 40 minutos

ANEXO II

Planificación completa del eje N° V "Fracciones Decimales"

Para guiar la lectura de este anexo, se indican las siguientes referencias de formato:

- Entre comillas “” y en *cursiva* se encuentran las preguntas que planificamos realizarles a las estudiantes, así como también las posibles respuestas que ellas podrían brindarnos.
- En **negrita** y en rojo se encuentran las palabras claves del tema planificado.
- En **negrita** y centrado se encuentran las expresiones que las alumnas debían copiar en sus carpetas, las cuales quedarían plasmadas en la pizarra.
- En **negrita**, verde y alineación derecha se encuentra el tiempo estimado para cada momento relatado,

Para introducir el tema, les daremos a las alumnas la siguiente actividad[43] (ver Figura 71) mediante una fotocopia, la cual deberán pegar en la carpeta:

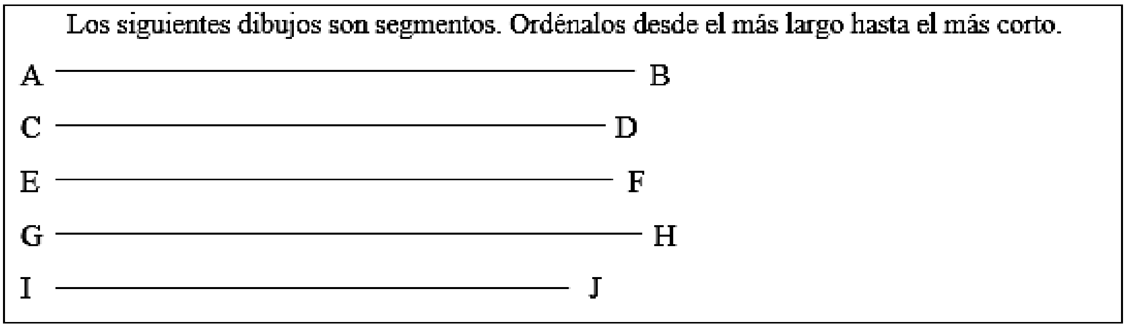


Figura 71. *Actividad de notación decimal*

Suponemos que las estudiantes recurrirán a la regla para resolver. Si realizan eso, obtendrán las siguientes medidas: $\overline{AB}$ = 7,9 cm, $\overline{CD}$ = 7,5 cm, $\overline{EF}$ = 7,6 cm, $\overline{GH}$ = 8 cm e $\overline{IJ}$ = 7 cm. Tendremos que advertirles que deberán ser cuidadosas y rigurosas con las mediciones de los segmentos ya que el resultado dependerá de cómo se coloque la regla, del ojo de quien mide, de la regla que se utiliza, etc.

Creemos que bastarán 2 minutos para su resolución, obteniendo el siguiente resultado:

$$\overline{\mathbf{IJ}} < \overline{\mathbf{CD}} < \overline{\mathbf{EF}} < \overline{\mathbf{AB}} < \overline{\mathbf{GH}}$$

[43] Actividad extraída y adaptada del libro *Al Fin de Cuentas EGB 3*, p. 89.

Pediremos que una alumna exponga su resolución oralmente, corrigiendo entre todas, mediante un breve debate oral. Aquí será importante preguntarles a las alumnas: *"¿qué números aparecieron en esta resolución? ¿cómo es su expresión?"*, esperando que nos respondan que *"han aparecido Números Decimales"*, *"números con expresión decimal"*, *"números con coma"*. Ahora les preguntaremos: *"¿mediante cuál unidad de medida expresaron el resultado?"*, esperando que nos respondan *"con centímetros (cm)"*.

Luego de esto, escribiremos en el pizarrón el orden anterior para que quede plasmado y todas las alumnas puedan copiarlo por si no lo hicieron.

Ahora les preguntaremos: *"¿para qué creen que sirven o por qué creen que surgieron los Números Racionales con notación decimal?"*. Quizás algunas alumnas nos brinden respuestas relacionadas a la medida ya que, como vimos anteriormente, es poco probable que como resultado de una medición siempre aparezcan Números Naturales. Para profundizar en este aspecto, -nosotras- comenzaremos a contarles a las alumnas el "origen" de los Números Racionales, en particular con notación decimal.

Para comenzar, les preguntaremos: *"¿en qué contextos de su vida cotidiana observan números con notación decimal?"* esperando respuestas como *"en el ticket del supermercado"*, *"en la televisión/radio al distinguir información"*, etc. Ampliaremos estas respuestas complementando con lo siguiente: *"son numerosos los contextos en los que aparecen los números con notación decimal, es decir escritos con una coma. Todas las personas los necesitamos, en mayor o menor medida, para el trabajo, el estudio, para interpretar información* (como dijeron en relación a la televisión/radio, etc.)*"*.

Continuando, les preguntaremos: *"¿desde cuándo creen que los números con notación decimal 'viven' en la sociedad?"*. No sabemos que nos responderán, pero les contaremos que *"los números con notación decimal surgen en la Edad Media (siglo V (476) – siglo XV (1492)), asociados a grandes transformaciones sociales, como por ejemplo en la religión, la filosofía y la economía, así como también al desarrollo del comercio, de la navegación (se necesitaba viajar y elegir un rumbo, por lo que esto implicaba realizar cálculos para medir distancias) de la producción, de la construcción del primer banco"*. Con esto apuntamos a que las alumnas se den cuenta de la enorme necesidad que los contextos y situaciones de la época imponían para que surgieran los números con notación decimal.

En síntesis, lo que debemos saber de ellos es que la coma separa las unidades enteras de las unidades fraccionarias. Como dijimos anteriormente, en la mayoría de las ocasiones el resultado de una medida no es un número entero. Durante siglos, el Número Decimal ha servido exclusivamente para medir y representar cantidades (*Números decimales ¿por qué? ¿para qué? / Julia Centeno Pérez*).

Fracciones decimales

Les comentaremos que hay fracciones que **no se pueden expresar con notación decimal**, por ejemplo $\frac{1}{3}$ = 0,3333…, y otras que **sí se pueden expresar con notación decimal**, como $\frac{1}{2} = 0{,}5$. En nuestras clases tomaremos como decimal aquellas expresiones que sean **finitas**, es decir que lo números decimales periódicos no serán nuestro tema.

Preguntaremos: *"¿cómo podemos saber si una fracción se puede expresar con notación decimal o no?"*. Creemos que las alumnas nos responderán: *"haciendo la división hasta que el resto sea 0"*, a lo cual responderemos que es correcto pero que puede suceder que uno "se canse de hacer la división y crea que no se va a terminar".

Seguidamente, les daremos una breve actividad (ver Figura 72), la cual deberán copiar en la carpeta, con el objetivo de que puedan darse cuenta que las fracciones que se pueden expresar con notación decimal tienen denominadores que sólo se pueden factorizar como producto de 2 ó 5.

Actividad: observa las siguientes fracciones e indica cuáles pueden expresarse con notación decimal. Luego, factoriza todos los denominadores.

- $\frac{1}{2}$
- $\frac{1}{4}$
- $\frac{1}{10}$
- $\frac{3}{20}$
- $\frac{1}{3}$
- $\frac{2}{7}$

Figura 72. *Actividad de notación decimal*

A medida que resuelven la actividad, les preguntaremos: *"¿qué relación encuentran entre los factores encontrados de cada denominador?"*, esperando que respondan que *"aquellas fracciones que se pueden expresar con notación decimal, sólo poseían como factores a 2 y a 5".*

Luego de esto, manifestaremos entonces que una forma de ver si una fracción se puede expresar con notación decimal es analizando si existe una fracción equivalente cuyo denominador sea potencia de 10. Creemos que las alumnas no tendrán problemas con el término "potencia de 10" ya que han estado trabajando este tema anteriormente.

Escribiremos en el pizarrón lo siguiente, lo cual las alumnas deberán copiar en sus carpetas bajo el título "Fracciones Decimales":

Una fracción de la forma $\frac{a}{10^n}$, donde 'a' es un número Natural cualquiera y 'n' es mayor o igual que 0, se llama Fracción Decimal.

Les daremos para realizar la siguiente actividad[44] (ver Figura 73) en una fotocopia para que la peguen en la carpeta.

1 Completen la siguiente tabla escribiendo en cada casillero la fracción de la forma $\frac{a}{b}$ que corresponda.

b \ a	1	2	3	4	5
1	1				
2					
3					
4					
5					

a) ¿Cuáles de esas fracciones representan **números enteros**?

b) Hagan una lista con las fracciones que no representan números enteros. Determinen cuáles se pueden expresar como un número decimal que termina.

Figura 73. *Actividad de "Fracciones Decimales y no Decimales" extraída de El Libro de la Matemática 7*

Para el **ítem (a)**, suponemos que las alumnas se darán cuenta rápidamente qué fracciones son las que representan un número natural o entero, por lo que vimos en la **recta numérica** y

[44] Actividad extraída de *El Libro de la Matemática 7*, p. 149.

en la **notación mixta**. Creemos que pueden surgir preguntas en cuanto a las fracciones de la forma $\frac{a}{1}$. Para que se den cuenta de la equivalencia $\frac{a}{1} = a$, reflexionaremos sobre las **funciones del denominador y numerador** y tomaremos algunos ejemplos como: *"si particiono una unidad en 1 quedará la misma unidad, y si luego tomo* a *de esas particiones (con* $'a'$ *un Número Natural) obtengo* $'a'$ *unidades", "si quiero repartir* $'a'$ *alfajores entre 1 persona, le corresponderá* $'a'$ *alfajores…".* Para el **ítem (b)** esperamos que las alumnas ya sepan encontrar **Fracciones Equivalentes**.

Además, agregaremos que las fracciones que representan números naturales también tienen Fracciones Equivalentes con denominador potencia de 10, lo que será fácil de ver ya que debo multiplicar el numerador y el denominador (en este caso es 1) por 10.

Luego de que escriban las Fracciones Decimales de la actividad, explicaremos que *"para obtener la* ***notación decimal*** *debemos tener tantos números después de la coma como ceros en el denominador".* Por ejemplo: $\frac{5}{10} = 0{,}5$; $\frac{25}{100} = 0{,}25$. Escribiremos los mismos en la pizarra.

Les daremos algunos minutos para que expresen en notación decimal aquellas fracciones en las cuales sea posible de la actividad anterior.

Una vez que terminen les preguntaremos: *"entonces ¿cómo creen que debemos hacer para escribir un número decimal en notación fraccionaria?".* Les pediremos que observen los pasos que acaban realizar en la actividad anterior. Creemos que varias podrán darse cuenta que se debe escribir el número decimal sin la coma como numerador y como denominador una potencia de 10 de tal modo que haya tantos ceros como números a la derecha de la coma. Les señalaremos que, luego de obtener la Fracción Decimal, pueden, si es posible, simplificar la misma hasta llegar a la **Fracción Irreducible**.

Luego, les daremos en fotocopia las siguientes actividades[45] (ver Figura 74), la cual deberán pegar en la carpeta.

[45] Actividades extraídas de *El Libro de la Matemática 7*, p. 150.

7 Escriban las fracciones decimales (es decir, aquellas cuyos denominadores son potencias de diez) que correspondan a cada uno de los siguientes números:

a) 0,28 b) 1,3

c) 52,03 d) 1,2068

8 Escriban como números decimales los siguientes racionales:

a) $\frac{3}{10}$ b) $\frac{105}{84}$

c) $\frac{214}{50}$ d) $\frac{102}{6}$

9 Reconozcan, en la siguiente lista de números, los que representan números enteros y aquellos cuyas expresiones decimales terminan y/o que no.

$\frac{3}{27}, \frac{84}{18}, \frac{56}{23}, \frac{72}{18}, \frac{255}{25}, \frac{732}{284}, \frac{11}{9}, \frac{1}{50}.$

Figura 74. *Actividades de "traducción entre expresión decimal y expresión fraccionaria" extraídas de El Libro de la Matemática 7*

A partir de la Actividad N° 8, nos centraremos en la fracción $\frac{105}{84}$, en la cual es más difícil encontrar una equivalencia. Para ello daremos los siguientes consejos en el pizarrón:

1. Escribir la fracción con notación mixta: $\frac{105}{84} = 1\,\frac{21}{84}$
2. Simplificar la fracción propia hasta que sea irreducible: $1\,\frac{21}{84} = 1\,\frac{1}{4}$
3. Buscar una fracción equivalente a la fracción propia cuyo denominador sea potencia de 10: $1\,\frac{1}{4} = 1\,\frac{25}{100}$
4. Encontrar la expresión decimal de la fracción: $\frac{25}{100} = 0{,}25$
5. Por lo tanto la expresión decimal será: $\frac{105}{84} = 1{,}25$

Luego, les daremos de tarea las siguientes actividades[46] (ver Figura 75 y 76) de su libro.

[46] Actividades extraídas de *Explorar en Matemática 7°/1° ES*, p. 82, 83 y 84.

1 Si se reparte $1 entre 10 chicos para que todos reciban la misma cantidad y que no sobre nada, ¿cuánto le corresponde a cada uno?

b) ¿Y si se reparten $6 entre 10?

c) ¿Y si se reparten $0,10 entre 10?

d) ¿Y $0,80 entre 10?

e) ¿Y $6,70 entre 10?

2 Si se reparte $1 entre 100 chicos, de manera que todos reciban la misma cantidad y que no sobre nada, ¿cuánto recibe cada uno?

b) ¿Y si se reparten $6 entre 100?

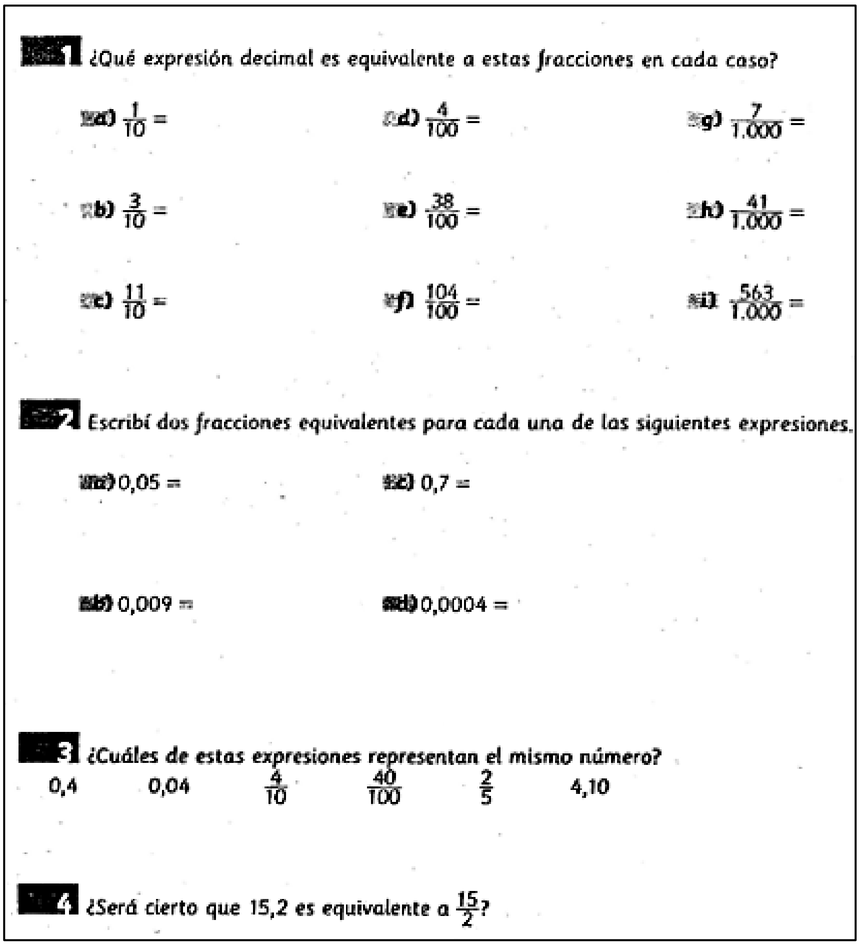
c) ¿Y si se reparten $10 entre 100?

d) ¿Y $57 entre 100?

e) ¿Y $375 entre 100?

Figura 75. *Actividades de "reparto" extraídas de Explorar en Matemática 7°/1° ES*

El objetivo de estas dos actividades es que las alumnas puedan apropiarse de lo desarrollado anteriormente para resolver, es decir en algunos casos podrán escribir, en primera instancia, una fracción (por ejemplo $\frac{6}{10}$) y luego la expresión decimal, analizando numerador y denominador (continuando con el ejemplo, 0,6). En otros casos deberán realizar el proceso inverso.



1 ¿Qué expresión decimal es equivalente a estas fracciones en cada caso?

a) $\frac{1}{10}$ = d) $\frac{4}{100}$ = g) $\frac{7}{1.000}$ =

b) $\frac{3}{10}$ = e) $\frac{38}{100}$ = h) $\frac{41}{1.000}$ =

c) $\frac{11}{10}$ = f) $\frac{104}{100}$ = i) $\frac{563}{1.000}$ =

2 Escribí dos fracciones equivalentes para cada una de las siguientes expresiones.

a) 0,05 = c) 0,7 =

b) 0,009 = d) 0,0004 =

3 ¿Cuáles de estas expresiones representan el mismo número?

0,4 0,04 $\frac{4}{10}$ $\frac{40}{100}$ $\frac{2}{5}$ 4,10

4 ¿Será cierto que 15,2 es equivalente a $\frac{15}{2}$?

Figura 76. *Actividades de "traducción entre expresión decimal y expresión fraccionaria" y "equivalencia" extraídas de Explorar en Matemática 7°/1° ES*

En relación a la Actividad N° 2, la idea es que primero traduzcan la expresión decimal a expresión fraccionaria y, luego, busquen una Fracción Equivalente con los métodos anteriormente vistos.

En cuanto a la Actividad N° 3, esperamos que las alumnas utilicen las traducciones entre expresiones decimales y fraccionarias, si es necesario, para comprobar cuáles expresiones representan el mismo número y cuáles no.

En cuanto a la Actividad N° 4, será muy interesante ya que es un error en el que se puede caer fácilmente, aquí se espera que las alumnas escriban en notación fraccionaria el número decimal y vean que no es equivalente a las fracción $\frac{15}{2}$.

ANEXO III

Actividad de recolección de datos

Este instrumento de recolección de datos nos servirá para nuestro Trabajo Final.
Tu ayuda es muy importante para nosotras ☺¡Gracias!
Profes Cintia y Tamara

ACTIVIDAD

Para encontrar la expresión decimal de la fracción $\frac{3}{2}$, Camila realizó la siguiente descomposición:

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5 = 1{,}5$$

¿Podrías hacer lo mismo con las siguientes? Si no puedes hacer lo mismo en alguno de los casos, explica por qué.

- $\frac{5}{4}$
- $\frac{2}{3}$
- $\frac{3}{7}$

Figura 77. *Actividad de recolección de datos*

Los abajo firmantes, miembros del Tribunal de Evaluación del Trabajo Final de Prácticas de *Metodología y Práctica de la Enseñanza*, damos Fe que el presente ejemplar impreso se corresponde con el aprobado por el Tribunal.

UNC

Universidad
Nacional
de Córdoba

FAMAF

FAMAF
Facultad de Matemática,
Astronomía, Física y
Computación

www.famaf.unc.edu.ar
Medina Allende s/n, Ciudad Universitaria
CP: X5000HUA, Córdoba, Argentina
Tel: +54 351 4334051 (rotativas)
Fax: +54 351 4334054