Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

- Universidad Nacional de Córdoba-

GRUPOS DE BIEBERBACH Y HOLONOMÍA DE SOLVARIEDADES PLANAS

Trabajo Especial de Licenciatura en Matemática

Alejandro Tolcachier

Director:

Dr. Adrián Andrada

CÓRDOBA - ARGENTINA

17 de diciembre de 2018

Resumen

Una solvariedad es una variedad compacta de la forma Γ/G donde G es un grupo de Lie soluble simplemente conexo y Γ es un retículo de G. En este trabajo estudiamos solvariedades equipadas con una métrica riemanniana plana, a partir de la caracterización dada por Milnor de los grupos de Lie que admiten una métrica riemanniana invariante a izquierda plana. Las solvariedades planas son ejemplos de variedades compactas planas, por lo cual podemos aplicar los teoremas clásicos de Bieberbach para describir el grupo fundamental Γ de la variedad Γ/G. En particular, todo grupo de Bieberbach posee un subgrupo abeliano maximal de índice finito. Más aún, el cociente del grupo L por este subgrupo es finito y se identifica con la holonomía riemanniana de la variedad compacta plana. Probamos primero que el grupo de holonomía riemanniana de cualquier solvariedad plana es abeliano y que todo grupo abeliano finito se puede obtener así. Luego, nos restringimos al caso de grupos de Lie casi abelianos, para los cuales hay un criterio para determinar la existencia de retículos, el cual utilizamos para clasificar las solvariedades planas en dimensión 3, 4 y 5. Para dimensiones mayores, probamos que para todo $n > 2$ la dimensión mínima de una variedad compacta plana con grupo de holonomía $\mathbb{Z}_n$ coincide con la dimensión mínima de una solvariedad plana con grupo de holonomía $\mathbb{Z}_n$.

Abstract:

A solvmanifold is a compact manifold Γ/G where G is a simply connected solvable Lie group and Γ is a lattice of G. In this article we study solvmanifolds equipped with a flat Riemannian metric, according to Milnor's characterization of Lie groups that admit a flat left invariant metric. Flat solvmanifolds are examples of compact flat manifolds, so we can apply the classic theory of Bieberbach groups to describe the fundamental group Γ of the manifold Γ/G. In particular, every Bieberbach group has a maximal normal abelian subgroup which has finite index. Furthermore, the quotient of the group Γ by this subgroup is finite and can be with the riemannian holonomy group of the compact flat manifold. First, we prove that the holonomy group of every flat solvmanifold is abelian and, conversely, that every finite abelian group can be obtained as a holonomy group of a flat solvmanifold. Then, we focus on almost abelian Lie groups, for which there is a well known criterion to determine the existence of lattices that we use to classify flat solvmanifolds of dimension 3, 4 and 5. Concerning arbitrary dimensions, we prove that for every $n > 2$ the minimum dimension of a compact flat manifold with holonomy group $\mathbb{Z}_n$ is equal to the minimum dimension of a flat solvmanifold with holonomy group $\mathbb{Z}_n$.

Palabras clave: Grupo de Bieberbach - Holonomía - Grupo de Lie soluble - Solvariedad - Retículo.

Keywords: Bieberbach group - Holonomy - Solvable Lie group - Solvmanifold - Lattice.

Clasificación/Clasification: 2010 Mathematics Subject Clasification: 20H15 - 53C29 - 22E25 - 22E40.

Índice general

Introducción

Las solvariedades, es decir, variedades diferenciables compactas obtenidas como el cociente de un grupo de Lie soluble simplemente conexo por un subgrupo discreto, constituyen una clase importante de variedades. Notemos que esta clase contiene a las nilvariedades (cocientes compactos de grupos de Lie nilpotentes por subgrupos discretos), que han sido objeto de un intenso estudio en los últimos años. Podría decirse que en ciertos aspectos las solvariedades son objetos simples de tratar, ya que al considerar en ellas estructuras invariantes por el grupo de Lie soluble, podemos simplemente asumir que tal estructura está definida a nivel del álgebra de Lie, y de esa manera, una cuestión geométrica se traduce en un problema algebraico.

Estas variedades son muy importantes en la geometría diferencial, ya que han servido en numerosas ocasiones como fuente de ejemplos (o contraejemplos); así como también han servido para brindar respuestas a preguntas muy importantes de la matemática; por ejemplo, la famosa variedad de Kodaira-Thurston, que fue el primer ejemplo de una variedad compacta que admite formas simplécticas pero ninguna métrica de Kähler, es una nilvariedad de dimensión 4 [**36**].

Muchas propiedades globales de las nilvariedades no pueden ser generalizadas a solvariedades, por esta razón estas variedades se estudian ampliamente. Por ejemplo, no es fácil en general determinar cuando un subgrupo discreto de un grupo de Lie es un retículo, es decir un subgrupo discreto de cociente compacto. Para nilvariedades existe un criterio preciso debido a Malcev [**25**], sin embargo, determinar la existencia de retículos en grupos de Lie solubles no es tan sencillo. Afortunadamente si el grupo de Lie es casi abeliano existe un método para construir retículos [**8**].

En particular, es sabido que algunas solvariedades admiten una métrica riemanniana plana inducida por una métrica invariante a izquierda plana en el grupo de Lie asociado. En efecto, Milnor [**26**] dió una caracterización en 1976 de los grupos de Lie que admiten una métrica riemanniana invariante a izquierda plana y mostró que son todos solubles de una forma muy restrictiva, probando que su álgebra de Lie se descompone como una subálgebra abeliana y un ideal abeliano, donde la acción de la subálgebra en el ideal es por endomorfismos antisimétricos. En particular, un tal grupo de Lie G es soluble y unimodular, es decir que la medida de Haar invariante a izquierda en G también es invariante a derecha, o equivalentemente, $\operatorname{tr}\operatorname{ad}_x = 0$ para todo $x \in \operatorname{Lie}(G)$, donde $\operatorname{ad}_x : \operatorname{Lie}(G) \to \operatorname{Lie}(G)$, $\operatorname{ad}_x(y) = [x, y]$. Más aún, G es de tipo (I) es decir que los autovalores de ad_x son imaginarios puros para todo $x \in \operatorname{Lie}(G)$. Algunos grupos de Lie simplemente conexos de esta clase admiten retículos, por lo que las correspondientes solvariedades admiten una métrica riemanniana plana inducida por la métrica invariante a izquierda plana del grupo de Lie.

Las solvariedades con métrica plana son una clase particular de variedades compactas planas. Un teorema clásico asegura que una variedad riemanniana completa es plana si y sólo si su cubrimiento universal es isométrico al espacio euclídeo. En particular la variedad es isométrica a un cociente de la forma $\mathbb{R}^n/\Gamma$ para cierto subgrupo Γ discreto de las isometrías de $\mathbb{R}^n$, y su grupo fundamental es isomorfo a Γ. Cuando la variedad es compacta, dichos grupos fueron caracterizados por los tres teoremas clásicos de Bieberbach [**5, 6, 7**] y consecuentemente se llaman "grupos de Bieberbach". En particular, un grupo de Bieberbach Γ admite un único subgrupo normal abeliano maximal Λ de índice finito. Más aún, el grupo finito Γ/Λ se identifica con la holonomía riemanniana de la variedad compacta plana.

Nuestro objetivo es estudiar las posibles holonomías de las solvariedades con métrica plana. Primero probamos un resultado sobre la holonomía de una solvariedad plana, a saber, que el grupo de holonomía de una tal solvariedad es abeliano. A continuación, se estudian solvariedades obtenidas como cocientes de grupos de Lie casi abelianos por subgrupos discretos. En particular determinamos completamente las holonomías para dimensiones 3, 4, 5 y 6, logrando además clasificar las solvariedades planas en dimensiones 3, 4 y 5. Para dimensiones mayores damos ejemplos y probamos que todo grupo abeliano finito es el grupo de holonomía de una solvariedad plana, en analogía con el resultado conocido de Auslander y Kuranishi [**1**], que dice que todo grupo finito es el grupo de holonomía de una variedad compacta plana. Más aún, al final del trabajo probamos que para todo $n \geq 3$ la dimensión mínima de una solvariedad plana con grupo de holonomía cíclico coincide con la dimensión mínima de una variedad compacta plana con grupo de holonomía cíclico.

El trabajo se encuentra organizado de la siguiente manera: en el Capítulo 1 veremos las definiciones básicas para entender la teoría de grupos de Bieberbach. Comenzamos presentando el grupo de las isometrías de $\mathbb{R}^n$ junto con algunas nociones topológicas relacionadas con subgrupos discretos, espacios de cubrimiento y acciones de grupos, para luego poder demostrar que el espacio de órbitas de un grupo de Bieberbach es una variedad topológica, cuyo grupo fundamental es isomorfo al grupo original. Luego mencionamos los teoremas clásicos de Bieberbach junto con notas históricas. Finalmente se analizan con detalle tres ejemplos básicos.

En el Capítulo 2 se dan los preliminares de variedades diferenciables y de geometría riemanniana para poder entender el concepto de holonomía y el concepto de variedad compacta plana. A continuación probamos que el espacio de órbitas de un grupo de Bieberbach es una variedad compacta plana y mencionamos que toda variedad compacta plana se construye de esta manera. Relacionado a esto se demuestran algunos resultados sobre la holonomía que jugarán un rol destacado en el Capítulo 4. Finalizamos el capítulo reinterpretando los teoremas de Bieberbach para variedades compactas planas.

En el Capítulo 3 se desarrollan los conceptos necesarios de grupos de Lie teniendo como objetivo poder entender la demostración de Milnor de la caracterización de las métricas riemannianas invariantes a izquierda planas. Además en la Sección 3 se estudian nociones básicas de medida de Haar para poder dar una prueba del criterio de unimodularidad que da Milnor, es decir que si un grupo de Lie admite un retículo entonces es unimodular. Finalmente se estudia la teoría de métricas bi-invariantes que luego permite demostrar la caracterización de métricas invariantes a izquierda planas de Milnor.

Por último, en el Capítulo 4, se introducen las nilvariedades y las solvariedades, intentando motivar el estudio de esta clase particular de variedades diferenciables. Luego nos enfocamos en las solvariedades, en particular se prueba que si un grupo de Lie con métrica invariante a izquierda plana admite un retículo entonces la solvariedad obtenida también posee una métrica plana, así como también se deduce que el grupo de holonomía de cualquier solvariedad plana es abeliano finito. Luego nos restringimos a estudiar solvariedades obtenidas a partir de grupos de Lie casi abelianos, para los cuales enunciamos y utilizamos un criterio debido a Bock [**8**] para determinar retículos de grupos de Lie casi abelianos en dimensiones 3, 4 y 5. En particular, logramos una clasificación explícita de las solvariedades planas en esas dimensiones, usando la clasificación por conjugación de los subgrupos finitos de $\mathsf{GL}(n, \mathbb{Z})$ para $n = 2, 3, 4$. Para dimensiones mayores se prueba que todo grupo abeliano finito se obtiene como holonomía de una solvariedad plana y se finaliza demostrando el teorema sobre la dimensión mínima de una solvariedad con grupo de holonomía $\mathbb{Z}_n$ antes mencionado.

El primer capítulo ha sido desarrollado siguiendo principalmente a [**12, 34**]. Respecto al segundo capítulo, los preliminares de variedades diferenciables están basados en [**38, 24**] mientras que los de geometría riemanniana han sido extraídos de [**15**]. Las últimas dos secciones del Capítulo 2 siguen el hilo de [**12**]. Para el Capítulo 3 hemos incluido preliminares de grupos de Lie de [**38**] y nociones básicas de medida de Haar de [**23**], para luego basarnos en las últimas dos secciones del trabajo de Milnor [**26**].

Se ha intentado que la exposición sea lo más autocontenida posible, comenzando desde lo más básico, para luego de a poco introducir los conceptos. Para los primeros tres capítulos se ha tenido como meta complementar los temas que se han visto en las especialidades de la Licenciatura en Matemática “Introducción a la geometría riemanniana” y “Grupos de Lie y álgebras de Lie”, incluyendo sólo aquellas demostraciones no vistas en tales materias.

CAPÍTULO 1

Grupos de Bieberbach

1. Transformaciones rígidas de $\mathbb{R}^n$

Sea $\mathbb{R}^n$ el espacio euclídeo de dimensión n con el producto interno estándar

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

donde $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Esto permite definir una norma

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

y una distancia

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}.$$

Definición 1.1. Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una *isometría* si dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ arbitrarios se cumple

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)).$$

Notemos que si f es una isometría, en particular f es inyectiva, por lo que existe su inversa f^{-1}, la cual también resulta ser isometría. A su vez la función identidad es claramente una isometría. Por lo tanto el conjunto de todas las isometrías de $\mathbb{R}^n$ es un grupo con la composición.

A continuación describiremos explícitamente este conjunto.

Definición 1.2. Una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se dice *ortogonal* si dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ arbitrarios se cumple

$$\langle x, y\rangle = \langle T(x), T(y)\rangle.$$

Es fácil verificar que una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es ortogonal si y sólo si para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se cumple

$$\|x\| = \|T(x)\|.$$

De aquí se deduce que una transformación ortogonal es una isometría de $\mathbb{R}^n$.

Además se verifica que T es ortogonal si y sólo si la matriz A que resulta de escribir T en cualquier base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ cumple que $A^t = A^{-1}$.

Denotaremos por $\mathsf{O}(n)$ al conjunto de tales matrices, llamado el *grupo ortogonal*, el cual resulta un subgrupo compacto del grupo topológico de Hausdorff $\mathsf{GL}(n, \mathbb{R})$, que es el conjunto de todas las matrices inversibles.

Definición 1.3. Dado $v \in \mathbb{R}^n$, se define t_v, la *traslación por* v, mediante

$$t_v(x) = x + v.$$

Notemos que

$$d(t_v(x), t_v(y)) = \|t_v(x) - t_v(y)\| = \|x + v - (y + v)\| = \|x - y\| = d(x, y).$$

Luego las traslaciones son isometrías de $\mathbb{R}^n$.

Ahora podemos probar la siguiente caracterización de las isometrías de $\mathbb{R}^n$.

TEOREMA 1.4. *Una isometría de $\mathbb{R}^n$ es una composición de una transformación lineal ortogonal y una traslación. Más específicamente una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es isometría si y sólo si existe una traslación t_v y una transformación ortogonal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tales que $f = t_v \circ T$.*

DEMOSTRACIÓN:
$\Leftarrow$) Es claro pues f es una composición de isometrías.
$\Rightarrow$) Probaremos esta implicación mediante varias afirmaciones.

Afirmación 1: Una isometría $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $f(0) = 0$ preserva el producto interno.
En efecto, dados v y w en $\mathbb{R}^n$ arbitrarios se cumple

$$\|f(v) - f(w)\| = \|v - w\|, \tag{1}$$

eligiendo $w = 0$ resulta

$$\|f(v)\| = \|v\|. \tag{2}$$

La afirmación se sigue entonces de elevar al cuadrado ambos miembros en (1) y usar (2).

Afirmación 2: Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una isometría tal que $f(0) = 0$ y f fija la base canónica entonces f es la transformación identidad.
Esto se sigue de la Afirmación 1, puesto que dado $v \in \mathbb{R}^n$ vale

$$\langle f(v), f(e_i)\rangle = \langle v, e_i\rangle.$$

Al ser $f(e_i) = e_i$ para todo $1 \le i \le n$ resulta

$$\langle f(v), e_i\rangle = \langle v, e_i\rangle.$$

Por lo tanto $f(v) = v$. Como v era arbitrario, se sigue la afirmación.

Afirmación 3: Una isometría $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $f(0) = 0$ es de la forma $f(v) = Av$, para $v \in \mathbb{R}^n$, donde $A \in \mathsf{O}(n)$. En particular f es lineal e inversible.

Esto se deduce usando las dos afirmaciones anteriores, pues por la Afirmación 1 el conjunto $\{f(e_i)\}_{i=1}^n$ resulta un conjunto ortonormal de vectores. Definiendo la matriz A como la matriz cuya columna i-ésima es el vector $f(e_i)$ resulta que A es ortogonal y $Ae_i = f(e_i)$, de donde $A^{-1}(f(e_i)) = e_i$. Por la Afirmación 2 tenemos que $A^{-1} \circ f = \mathrm{Id}$ y así $f(v) = Av$.

Ahora probamos el teorema. Sea $v = f(0)$ y $T = t_{-v} \circ f$, entonces T es una isometría y $T(0) = 0$. En consecuencia, por la afirmación 3, $T(v) = Av$ para alguna matriz $A \in \mathsf{O}(n)$ y así $t_{-v} \circ f = A$, lo cual es equivalente a $f = t_v \circ A$, como queríamos. $\square$

Otra descripción para el conjunto de isometrías de $\mathbb{R}^n$, que será la que utilizaremos, es la siguiente

DEFINICIÓN 1.5. Una *transformación rígida* es un par ordenado (A, v) con $A \in \mathsf{O}(n)$ y $v \in \mathbb{R}^n$.

La acción[1] de una transformación rígida en $\mathbb{R}^n$ está dada por

$$(A, v) \cdot x = Ax + v, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Las transformaciones rígidas forman un grupo con la composición:

$$(A, v)(B, w) = (AB, Aw + v). \tag{3}$$

[1] De aquí en adelante escribiremos $(A, v)x$ para abreviar $(A, v) \cdot x$, y en general para cualquier acción abreviaremos $g \cdot a$ por ga.

El elemento neutro[2] es $\mathrm{Id} = (\mathrm{I}, 0)$ y el inverso de (A, v) es $(A, v)^{-1} = (A^{-1}, -A^{-1}v)$.

Denotamos al grupo de transformaciones rígidas de $\mathbb{R}^n$ por $\mathcal{M}_n$. Otra manera de ver a $\mathcal{M}_n$ es como el producto semidirecto

$$\mathcal{M}_n = \mathsf{O}(n) \ltimes_\varphi \mathbb{R}^n$$

donde $\varphi(A)(x) = Ax$.

Podemos escribir una transformación rígida (A, v) como una matriz $(n+1) \times (n+1)$

$$\begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De esta manera, la composición (3) es sólo la multiplicación usual de matrices.

Como espacio topológico, pensaremos a $\mathcal{M}_n$ con la topología de $\mathsf{O}(n) \times \mathbb{R}^n$.

Definición 1.6. Un *grupo topológico* G es un espacio topológico que posee estructura de grupo[3] tal que las operaciones de grupo $m : G \times G \to G$ e $i : G \to G$ dadas por $m(g, h) = gh$ e $i(g) = g^{-1}$ son continuas para todo $g, h \in G$.

Notemos que $\mathcal{M}_n$ con la topología de $\mathsf{O}(n) \times \mathbb{R}^n$ resulta un grupo topológico de Hausdorff localmente compacto. Además, al ser $\mathcal{M}_n$ el grupo de isometrías de $\mathbb{R}^n$ como espacio métrico, se sigue que los elementos de $\mathcal{M}_n$ son homeomorfismos de $\mathbb{R}^n$. Más aún, si pensamos a $\mathcal{M}_n$ como subconjunto de $M_{n+1}(\mathbb{R})$, el conjunto de todas las matrices reales $(n+1) \times (n+1)$, resulta que $\mathcal{M}_n$ hereda la distancia de $M_{n+1}(\mathbb{R})$ y por lo tanto es un espacio métrico.

Aunque nuestro interés son las transformaciones rígidas, existe una generalización de ellas, las transformaciones afines, que dan lugar a ciertos ejemplos y conjeturas[4] interesantes que pueden verse en [**12**].

Definición 1.7. Una *transformación afín* es un par ordenado (A, v) con $A \in \mathsf{GL}(n, \mathbb{R})$ y $v \in \mathbb{R}^n$.

Las transformaciones afines actúan en $\mathbb{R}^n$ de la misma manera que las transformaciones rígidas, y forman un grupo, $\mathcal{A}_n$, con la composición. Como $\mathsf{O}(n)$ es subgrupo de $\mathsf{GL}(n, \mathbb{R})$, resulta que $\mathcal{M}_n$ es subgrupo de $\mathcal{A}_n$. Cabe aclarar que sólo nos enfocaremos en las transformaciones rígidas, dejando de lado el estudio de las transformaciones afines.

Dado un subgrupo Γ de $\mathcal{M}_n$, un subgrupo de Γ que juega un rol destacado, como se verá más adelante, es el siguiente: una *traslación pura* de Γ es un elemento $(A, v) \in \Gamma$ tal que $A = \mathrm{I}$. Denotaremos por $\Gamma \cap \mathbb{R}^n$ al subgrupo de Γ formado por todas las traslaciones puras de Γ. Notar que la acción de una traslación pura (I, v) en $\mathbb{R}^n$ está dada por la traslación t_v.

Algunas propiedades de $\Gamma \cap \mathbb{R}^n$ son las siguientes:

Observación. El subgrupo $\Gamma \cap \mathbb{R}^n$ resulta
- Abeliano: sean $(\mathrm{I}, v_1), (\mathrm{I}, v_2) \in \Gamma \cap \mathbb{R}^n$,

$$(\mathrm{I}, v_1)(\mathrm{I}, v_2) = t_{v_1} \circ t_{v_2} = t_{v_2} \circ t_{v_1} = (\mathrm{I}, v_2)(\mathrm{I}, v_1).$$

[2]En esta sección denotaremos a la transformación identidad por Id y a la matriz identidad por I. Luego usaremos Id indistintamente para las dos.

[3]Denotaremos por e al elemento neutro de un grupo G.

[4]Por ejemplo, veremos que el espacio de órbitas de ciertos subgrupos de las transformaciones rígidas admite estructura de variedad topológica; mientras que es un problema abierto decidir esto para subgrupos en general de las transformaciones afines. La dificultad radica en que el grupo $\mathsf{O}(n)$ es compacto mientras que $\mathsf{GL}(n)$ no lo es.

• Normal en Γ: sean $(A, v_1) \in \Gamma, (\mathrm{I}, v_2) \in \Gamma \cap \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}(A, v_1)(\mathrm{I}, v_2)(A^{-1}, -A^{-1}v_1)(x) &= (A, v_1)(\mathrm{I}, v_2)(A^{-1}x - A^{-1}v_1)\\ &= (A, v_1)(A^{-1}x - A^{-1}v_1 + v_2)\\ &= x - v_1 + Av_2 + v_1\\ &= x + Av_2\\ &= (I, Av_2)(x).\end{aligned}$$

Por lo tanto $(A, v_1)(\mathrm{I}, v_2)(A, v_1)^{-1} \in \Gamma \cap \mathbb{R}^n$.

• Libre de torsión[5]: para $k \in \mathbb{N}$ y $(\mathrm{I}, v_1) \in \Gamma \cap \mathbb{R}^n$ con $v_1 \neq 0$ resulta

$$(\mathrm{I}, v_1)^k = \underbrace{(\mathrm{I}, v_1)(\mathrm{I}, v_1)\dots(\mathrm{I}, v_1)}_{k \text{ veces}} = (\mathrm{I}, kv_1)$$

De modo que si $(\mathrm{I}, v_1)^k = (\mathrm{I}, 0)$ entonces k debe ser 0. Por lo tanto ningún elemento excepto $(\mathrm{I}, 0)$ tiene orden finito. △

2. Espacios de órbitas y acciones propiamente discontinuas

En esta sección estudiaremos la acción de un subgrupo discreto[6] Γ de $\mathcal{M}_n$ sobre $\mathbb{R}^n$ y algunas propiedades de las órbitas de la acción. Luego estudiaremos acciones libres y propiamente discontinuas para concluir demostrando que el espacio de órbitas de un subgrupo discreto de $\mathcal{M}_n$ que actúa de manera libre es una variedad topológica.

Una propiedad importante de los subgrupos discretos de $\mathcal{M}_n$ es que son cerrados. Este hecho podemos probarlo más en general para cualquier grupo topológico. Primero probamos el siguiente lema:

Lema 1.8. *Sea G un grupo topológico de Hausdorff. Entonces dado un entorno abierto U de e existe un entorno abierto V de e tal que $VV^{-1} \subset U$.*

Demostración: Sea $\varphi : U \times U \to G$ la aplicación definida por $\varphi(x, y) = xy^{-1}$. Por continuidad existe un entorno abierto $N \subset U \times U$ de (e, e) tal que $\varphi(N) \subset U$. Además por ser N abierto, N debe contener un entorno abierto de (e, e) de la forma $V_1 \times V_2$ donde $V_1, V_2 \subset U$ son abiertos y $e \in V_1 \cap V_2$.

Sea $V = V_1 \cap V_2$. Entonces V es un entorno abierto de e y

$$V \times V \subset V_1 \times V_2 \subset N,$$

y así $VV^{-1} = \varphi(V \times V) \subset \varphi(N) \subset U$. □

Usando este lema, podemos probar la siguiente proposición:

Proposición 1.9. *Todo subgrupo discreto de un grupo topológico G es cerrado.*

Demostración: Sea H un subgrupo discreto de G, veamos que $G - H$ es abierto, encontrando para cada $g \in G - H$ un entorno abierto W de g en G tal que $W \cap H = \emptyset$.

Sea $g \in G - H$. Como H es discreto existe un abierto U_0 de la identidad e tal que $U_0 \cap H = \{e\}$. Por el lema anterior existe un abierto V de e tal que $VV^{-1} \subset U_0$.

Observemos que Vg es un entorno abierto de g tal que $Vg \cap H$ tiene a lo sumo un elemento, pues si $w_1, w_2 \in Vg \cap H$ entonces $w_1 = v_1 g$ y $w_2 = v_2 g$ para algunos $v_1, v_2 \in V$. Luego

$$v_1^{-1} w_1 = g = v_2^{-1} w_2,$$

por lo que

$$v_1^{-1} w_1 = v_2^{-1} w_2,$$

[5]Un grupo G se dice *libre de torsión* si el único elemento de orden finito es la identidad.

[6]Recordemos que si X es un espacio topológico entonces un subespacio Y es *discreto* si para cada $y \in Y$ existe un entorno abierto U en X que lo contiene tal que $U \cap Y = \{y\}$.

de donde

$$w_1 w_2^{-1} = v_1 v_2^{-1} \in VV^{-1} \subset U_0.$$

En consecuencia, $w_1 w_2^{-1} \in U_0 \cap H = \{e\}$ y así $w_1 = w_2$.

Si la intersección $Vg \cap H$ es vacía, entonces Vg es el entorno abierto deseado. En caso contrario, si $Vg \cap H = \{h\}$, al ser G de Hausdorff, podemos elegir un entorno abierto W de g que no contenga a h, entonces $Vg \cap W$ es el entorno abierto deseado. □

En el caso en que X es un espacio métrico se tiene el siguiente criterio útil para decidir si es un espacio discreto o no.

LEMA 1.10. *Un espacio métrico X es discreto si y sólo si toda sucesión convergente $\{x_n\}$ en X es eventualmente constante*[7].

DEMOSTRACIÓN:

($\Rightarrow$) Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ una sucesión tal que $x_n \to x$. Como X es discreto, el conjunto $\{x\}$ es un abierto que contiene a x, por lo que debe existir $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in \{x\}$ para todo $n > N$, es decir $x_n = x$ para todo $n > N$ y así la sucesión x_n es eventualmente constante.

($\Leftarrow$) Supongamos que X no es discreto, es decir que existe $x \in X$ tal que $\{x\}$ no es abierto. Luego para cada $n \in N$, resulta $B(x, \frac{1}{n}) \neq \{x\}$. Eligiendo x_n en $B(x, \frac{1}{n})$ distinto de x se tiene una sucesión que converge a x pero no es eventualmente constante, lo cual es una contradicción. Por lo tanto X es discreto. □

Un concepto clave para estudiar acciones de grupos es el de la órbita de una acción. Puede definirse para una acción en general, pero aquí lo definiremos sólo para el caso que nos interesa.

DEFINICIÓN 1.11. Sean X un espacio topológico y G un subgrupo de homeomorfismos de X. Para cada $x \in X$ se define la *órbita de x* como el conjunto $Gx = \{gx \mid g \in G\}$. El conjunto formado por todas las órbitas dotado con la topología cociente se llama *espacio de órbitas* y se denota X/G.

Al ser G un subgrupo de homeomorfismos de X, tenemos propiedades adicionales sobre la acción, la primera de ellas es sobre la proyección canónica.

OBSERVACIÓN. La proyección $\pi : X \to X/G$ es abierta puesto que si U es abierto en X, entonces

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g \in G} gU.$$

Como cada gU es abierto, pues g es un homeomorfismo de X, resulta $\pi^{-1}(\pi(U))$ abierto en X, por lo que $\pi(U)$ es abierto en X/G por definición. △

Estamos interesados en los subgrupos de $\mathcal{M}_n$ cuyas órbitas son conjuntos discretos de $\mathbb{R}^n$. Como veremos, estos subgrupos poseerán una estructura rica en cuanto a su espacio de órbitas. Además queremos estudiar cómo actuan estos subgrupos en $\mathbb{R}^n$. Nos gustaría que la acción sea lo suficientemente buena, por ejemplo para que el espacio X/G sea de Hausdorff.

Probamos la siguiente caracterización de subgrupos discretos de $\mathcal{M}_n$, que en la próxima sección será útil para probar que la acción de estos subgrupos es lo suficientemente buena.

PROPOSICIÓN 1.12. *Sea Γ un subgrupo de $\mathcal{M}_n$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ la órbita Γx es un conjunto discreto de $\mathbb{R}^n$.*

(2) *El subgrupo Γ es un conjunto discreto de $\mathcal{M}_n$.*

DEMOSTRACIÓN: (1) $\Rightarrow$ (2) Probaremos que toda sucesión convergente en Γ es eventualmente constante, hecho que, en conjunto con el Lema 1.10 probarán la afirmación.

---

[7]La sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es *eventualmente constante* si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ resulta $x_n = x_{n+1}$.

Sea $\{\gamma_i\}_{i=1}^{\infty}$, con $\gamma_i = (A_i, a_i)$, una sucesión convergente en Γ, digamos a $\gamma = (A, v)$. Luego para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|\gamma_i x - \gamma x\| = \|A_i x + v_i - Ax + v\| \leq \|A_i - A\| \, \|x\| + \|v_i - v\| \, .$$

Usando que $A_i \to A$ y $v_i \to v$ se tiene que la sucesión $\{\gamma_i x\}$ es convergente en Γx a γx. En consecuencia, es eventualmente constante, es decir que existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i \geq i_0$ vale que $\gamma_i x = \gamma x$ o equivalentemente

$$A_i x + v_i = Ax + v.$$

En particular, eligiendo $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ resulta ,

$$v_i = v \quad \text{para todo } i \geq i_1, \, i_1 \in \mathbb{N}.$$

Por otro lado, eligiendo como x los vectores de la base canónica y eligiendo un índice $k_0 \geq i_1$ resulta

$$A_k e_j = A e_j \quad \text{para todo } k \geq k_0, 1 \leq j \leq n.$$

Esto dice que $A_k = A$ para $k \geq k_0$ y así, la sucesión $\{\gamma_i\}$ resulta eventualmente constante.

(2) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que Γ es discreto, veamos que la órbita de x es discreta, para $x \in \mathbb{R}^n$ arbitrario. Sea $\{\gamma_j x\}_{j=1}^{\infty}$, con $\gamma_j = (A_j, a_j)$, una sucesión convergente en Γx a un elemento $y \in \mathbb{R}^n$. Como $\mathsf{O}(n)$ es compacto, pasando por subsucesiones si es necesario, podemos suponer que A_j converge a una matriz A, por lo tanto a_j converge a $y - Ax$. En efecto,

$$\|a_j - (y - Ax)\| = \|a_j - y + Ax + A_j x - A_j x\| \leq \|A_j x + a_j - y\| + \|A_j x - Ax\| \, .$$

Como Γ es discreto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma_j = (A, y - Ax)$ para todo $j \geq N$. Luego $\gamma_j x = y$ para todo $j \geq N$, por lo que $\{\gamma_j x\}_{j=1}^{\infty}$ es eventualmente constante. En consecuencia, Γx es discreto. □

Además de querer que Γ sea un subgrupo discreto de $\mathcal{M}_n$, pediremos una propiedad más para la acción.

Definición 1.13. Sean X un espacio de Hausdorff y G un grupo topológico de Hausdorff. Se dice que la acción de G en X es *libre* si para todo $x \in X$ se cumple que

$$\{g \in G \mid gx = x\} = \{e\}.$$

Recordamos a continuación la definición de variedad topológica.

Definición 1.14. Una *variedad topológica de dimensión* n es un espacio de Hausdorff M con una base numerable que es localmente euclídeo de dimensión n, esto es que cada punto $q \in M$ posee un entorno abierto homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$.

El objetivo en lo que resta de la sección es probar que el espacio de órbitas de un subgrupo discreto que actúa de manera libre en $\mathbb{R}^n$ es una variedad topológica. Además, veremos que la proyección al cociente es un cubrimiento. Para este fin, será útil introducir el concepto de acción propiamente discontinua.

Definición 1.15. Sea G un subgrupo del grupo de homeomorfismos de un espacio topológico X. Se dice que una acción de G en X es *propiamente discontinua* si para todo $x \in X$ existe un entorno abierto U de x tal que $gU \cap U = \emptyset$ para todo $g \neq e$.

Observación. Notemos que si la acción de G es propiamente discontinua y U es un abierto de x tal que $gU \cap U = \emptyset$ para todo $g \neq e$ entonces dados $g_0, g_1 \in G$ se tiene que $g_0 U$ y $g_1 U$ son disjuntos si $g_0 \neq g_1$, pues en caso contrario U y $g_0^{-1} g_1 U$ no serían disjuntos. △

Definición 1.16. Se dice que una función continua p entre espacios topológicos X e Y es un *cubrimiento* si cada punto $y \in Y$ posee un entorno abierto arcoconexo U tal que $p^{-1}(U)$ es una unión disjunta no vacía de abiertos U_α tales que para cada α, la restricción $p|_{U_\alpha} : U_\alpha \to U$ es un homeomorfismo. Tal conjunto U se dice *parejamente cubierto* y los abiertos U_α se dicen las *hojas* del cubrimiento.

Si X es un espacio de Hausdorff y G un subgrupo de homeomorfismos de X, veremos que si la acción de G en X es propiamente discontinua, la proyección canónica resulta un cubrimiento. Más aún podremos determinar el grupo fundamental del espacio X/G, para lo cual introducimos el concepto de transformación de cubrimiento de un cubrimiento dado.

Definición 1.17. Sea $p : X \to Y$ un cubrimiento. Un homeomorfismo $D : X \to X$ se dice una *transformación de cubrimiento* del cubrimiento si $p \circ D = p$.

Las transformaciones de cubrimiento forman un grupo $\Delta := \Delta(p)$ con la composición.

Un hecho que utilizaremos es que si D_1 y D_2 son dos transformaciones de cubrimiento tales que $D_1(x) = D_2(x)$ para algún $x \in X$ entonces $D_1 = D_2$. Una prueba de esto puede verse por ejemplo en [**9**, Lema 4.4].

Con estos ingredientes, probamos el siguiente resultado sobre acciones propiamente discontinuas.

Teorema 1.18. *Sean X un espacio topológico arcoconexo y localmente arcoconexo y G un subgrupo de homeomorfismos de X. Si la acción de G es propiamente discontinua entonces la proyección canónica $\pi : X \to X/G$ es un cubrimiento regular*[8] *y G es el grupo de transformaciones de cubrimiento de la acción.*

Demostración: Veamos que π es un cubrimiento. Dado $x \in X$, sea U un entorno abierto de x tal que g_0U y g_1U son disjuntos si $g_0 \neq g_1$. Afirmamos que $\pi(U)$ está parejamente cubierto por π.

En efecto, $\pi^{-1}(\pi(U))$ es la unión de los conjuntos abiertos disjuntos gU, para $g \in G$, cada uno de los cuales contiene a lo sumo un punto de cada órbita.

Por lo tanto, la aplicación $\pi\big|_{gU} : gU \to \pi(U)$ obtenida al restringir π es biyectiva, y como la proyección es abierta (y sigue siendo abierta al restringirla a un abierto), resulta un homeomorfismo.

Veamos que G es el grupo de aplicaciones de cubrimiento de π y que π es regular. Todo $g \in G$ es una transformación de cubrimiento pues $\{hgx \mid h \in G\} = \{h'x \mid h' \in G\}$. Por lo tanto la órbita de gx es igual a la órbita de x, por lo que $\pi \circ g = \pi$. Por otro lado, sea h una transformación de cubrimiento con $hx_1 = x_2$ para algunos $x_1, x_2 \in X$. Como $\pi \circ h = \pi$, las órbitas de x_1 y x_2 coinciden, por lo que existe un elemento $g \in G$ tal que $gx_1 = x_2$. Al coincidir en x_1 y ser ambas transformaciones de cubrimiento se tiene que $h = g$. En conclusión, $\Delta(\pi) = G$. Además π es regular puesto que para cualesquiera x_1 y x_2 que estén en la fibra $\pi^{-1}(x)$ se cumple $\pi(x_1) = \pi(x_2)$ por lo que existe un elemento $g \in G = \Delta(\pi)$ tal que $gx_1 = x_2$. $\square$

Nota. En el caso en que X sea $\mathbb{R}^n$, la condición de que la proyección sea un cubrimiento asegura que $\mathbb{R}^n/G$ es localmente euclídeo, pues cada $q \in \mathbb{R}^n/G$ posee un entorno parejamente cubierto, el cual es homeomorfo a cada una de las hojas U_α, las cuales son abiertos de $\mathbb{R}^n$.

En el caso en que X es un espacio topológico simplemente conexo y $\pi : X \to Y$ es un cubrimiento, es sabido [**9**, Corolario 6.10] que

$$\Delta \cong \pi_1(Y).$$

En consecuencia,

$$\pi_1(X/G) \cong \Delta(\pi) = G.$$

Para el caso particular de un subgrupo $\Gamma \subset \mathcal{M}_n$ que actúa de manera propiamente discontinua en $\mathbb{R}^n$, se tiene que

$$\pi_1\left(\mathbb{R}^n/\Gamma\right) \cong \Gamma.$$

Podemos probar ahora que un subgrupo discreto de $\mathcal{M}_n$ que actúa de manera libre también actúa de manera propiamente discontinua.

[8] Un cubrimiento $p : X \to Y$ se dice *regular* si Δ actúa de manera transitiva en la fibra $p^{-1}(y)$ para todo $y \in Y$, esto es, dados $x_1, x_2 \in p^{-1}(y)$ arbitrarios, existe $D \in \Delta$ tal que $D(x_1) = x_2$.

Proposición 1.19. *Sea Γ un subgrupo discreto de $\mathcal{M}_n$ que actúa de manera libre en $\mathbb{R}^n$, entonces $\mathbb{R}^n/\Gamma$ es un espacio de Hausdorff con base numerable y la acción de Γ en $\mathbb{R}^n$ es propiamente discontinua.*

Demostración: Como $\mathbb{R}^n$ posee una base numerable y Γ es un subgrupo de homeomorfismos de $\mathbb{R}^n$, la proyección al cociente es abierta y suryectiva por lo que preserva la propiedad de poseer una base numerable.

A continuación veremos que el espacio de órbitas es Hausdorff. Asumamos que $\Gamma x \neq \Gamma y$, deseamos hallar entornos U_x y U_y de x e y en $\mathbb{R}^n$ respectivamente tales que $\pi(U_x) \cap \pi(U_y) = \emptyset$. Ahora, resulta $\pi(U_x) \cap \pi(U_y) = \emptyset$ si y sólo si $\pi(U_x) \cap U_y = \emptyset$ pues: la condición necesaria es inmediata, y si $\alpha u_x = \beta u_y$ entonces $\beta^{-1}\alpha u_x = u_y$, por lo tanto $\pi(U_x) \cap U_y = \emptyset$ implica que $\pi(U_x) \cap \pi(U_y) = \emptyset$.

Como Γ es discreto, lo cual es equivalente a que Γx sea discreto, resulta que la órbita Γx es cerrada, por lo que $d(\{y\}, \Gamma x) = \varepsilon$ para algún $\varepsilon > 0$. Sean $U_x = B(x, \varepsilon/2)$ y $U_y = B(y, \varepsilon/2)$. Estos entornos verifican que $\pi(U_x) \cap U_y = \emptyset$.

Veremos ahora que la acción de Γ en $\mathbb{R}^n$ es propiamente discontinua. Consideremos el conjunto $\Gamma x - \{x\} = \{\alpha x \mid \alpha \in \Gamma \text{ y } \alpha \neq \mathrm{Id}\}$. Como la órbita Γx no posee puntos de acumulación al ser discreta, resulta $d(\{x\}, \Gamma x - \{x\}) = \epsilon$ para algún $\epsilon > 0$. Si definimos $U_x = B(x, \epsilon/2)$, entonces $\alpha U_x \cap U_x = \emptyset$ para todo $\alpha \neq \mathrm{Id}$, como queríamos. $\square$

Observación. Es claro que vale la recíproca, es decir que si Γ actúa de manera propiamente discontinua en $\mathbb{R}^n$, entonces Γ es un subgrupo discreto de $\mathcal{M}_n$ y actúa de manera libre en $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, los subgrupos de $\mathcal{M}_n$ que actúan de manera propiamente discontinua en $\mathbb{R}^n$ son aquellos subgrupos discretos que actúan de manera libre. $\triangle$

A manera de resumen de los resultados probados en esta sección concluimos con el siguiente teorema:

Teorema 1.20. *Sea Γ un subgrupo discreto de $\mathcal{M}_n$ que actúa de manera libre en $\mathbb{R}^n$, entonces el espacio de órbitas $\mathbb{R}^n/\Gamma$ es una variedad topológica de dimensión n. Más aún, la proyección canónica $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\Gamma$ es un cubrimiento regular con $\Delta(\pi) = \Gamma$ y $\pi_1(\mathbb{R}^n/\Gamma) = \Gamma$.*

3. Grupos cristalográficos y teoremas de Bieberbach

En esta sección introduciremos los grupos cristalográficos y grupos de Bieberbach, y mencionaremos los teoremas de Bieberbach, herramientas fundamentales para estudiar variedades compactas planas en el próximo capítulo.

Estamos interesados en estudiar, además de subgrupos discretos de $\mathcal{M}_n$, subgrupos cuyas órbitas generen $\mathbb{R}^n$. Veremos que una condición suficiente para esto es que el espacio de órbitas sea compacto.

Definición 1.21. Se dice que un subgrupo Γ de $\mathcal{M}_n$ es *cocompacto* (o *uniforme*) si el espacio de órbitas $\mathbb{R}^n/\Gamma$ es compacto.

Observación. Una condición equivalente a que Γ sea cocompacto es la existencia de un conjunto compacto $D \subset \mathbb{R}^n$ tal que

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma D.$$

En efecto, si existe tal conjunto D, por construcción $\mathbb{R}^n/\Gamma = \pi(D)$ es compacto. Recíprocamente, supongamos que el espacio $\mathbb{R}^n/\Gamma$ es compacto. Dado $z \in \mathbb{R}^n/\Gamma$ sea x tal que $\pi(x) = z$ y U_x un entorno abierto de x. Como π es abierta, $\pi(U_x)$ es un entorno abierto de z. Haciendo esto para todos los $z \in \mathbb{R}^n/\Gamma$ obtenemos un cubrimiento de $\mathbb{R}^n/\Gamma$ por abiertos del cual podemos obtener un subcubrimiento finito. Se sigue que existe un $r > 0$ tal que $\pi(\overline{B_r(0)}) = \mathbb{R}^n/\Gamma$, donde $B_r(0)$ es la bola abierta de radio r centrada en 0. Luego $\mathbb{R}^n = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma \overline{B_r(0)}$. $\triangle$

Un concepto que provee más información acerca del aspecto geométrico de $\mathbb{R}^n/\Gamma$ es el de dominio fundamental. Debemos aclarar que no existe un consenso total acerca de la definición de dominio fundamental; la idea de fondo es que sea un conjunto que contenga exactamente un punto de cada órbita. Se suele pedir que sea un conjunto razonable en cuanto a propiedades topológicas (por ejemplo, conexo con frontera suave o poliedral). Una definición bastante común que puede verse por ejemplo en [**33, 34**] es la siguiente:

DEFINICIÓN 1.22. Sea X un espacio métrico y G un subgrupo del grupo de isometrías de X. Un *dominio fundamental* para la acción de G es un conjunto abierto y conexo $D \subset X$ tal que

$$X = \bigcup_{g \in G} g\overline{D} \quad \text{y} \quad g_1 D \cap g_2 D = \emptyset \text{ si } g_1 \neq g_2.$$

Una condición equivalente es que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ exista $g \in G$ tal que $gx \in \overline{D}$ y que si $x \neq y \in D$ entonces no exista $g \in G$ tal que $gx = y$, es decir x e y están en diferentes órbitas.

NOTA. El espacio $\mathbb{R}^n/\Gamma$ es compacto si y sólo si la acción de Γ admite un dominio fundamental de clausura compacta. Es inmediato que si existe un dominio fundamental compacto D, el espacio de órbitas es compacto, pues $\mathbb{R}^n/\Gamma = \pi(D)$ por construcción. Recíprocamente, un ejemplo de dominio fundamental que se puede construir es el llamado Dominio de Dirichlet, el cual se puede probar que resulta de clausura compacta si $\mathbb{R}^n/\Gamma$ es compacto, ver [**33**, Teoremas 6.6.9 y 6.6.13.].

Una propiedad importante de los conjuntos cocompactos es la siguiente:

PROPOSICIÓN 1.23. *Sean Γ un subgrupo cocompacto de $\mathcal{M}_n$ y $x \in \mathbb{R}^n$, entonces la órbita Γx de x contiene un conjunto de generadores de $\mathbb{R}^n$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos, buscando una contradicción, que existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que el conjunto generado por Γx_0 es un subespacio propio de $\mathbb{R}^n$, digamos W. Afirmamos que, posiblemente cambiando el origen de coordenadas, podemos asumir que $x_0 = 0$. En efecto,

$$\Gamma x_0 = \Gamma(\mathrm{I}, x_0)(\mathrm{I}, -x_0)(x_0) = \Gamma(\mathrm{I}, x_0)(0).$$

Por lo tanto los conjuntos $(\mathrm{I}, -x_0)\Gamma(\mathrm{I}, x_0)(0)$ y $\Gamma(x_0)$ difieren en la traslación $(\mathrm{I}, -x_0)$ y así, definen un subespacio de la misma dimensión. Cambiando x_0 por 0, el conjunto Γ por $(\mathrm{I}, -x_0)\Gamma(\mathrm{I}, x_0)$ (el cual también es cocompacto) y el subespacio W por $(\mathrm{I}, -x_0)W$ queda probada la afirmación. Se sigue que para $\gamma = (A, v) \in \Gamma$ debe ser $v \in W$, pues $v = (A, v)0 \in W$. En particular, notemos que el elemento inverso $(A^{-1}, -A^{-1}v) \in W$ por lo que $Av \in W$ para todo elemento $(A, v) \in \Gamma$.

Además, $A(W) \subset W$, pues si $w \in W$ entonces

$$w = \sum_{i=1}^{n} a_i (A_i, v_i)0 = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i,$$

por lo que

$$Aw = \sum_{i=1}^{n} a_i A_i v_i \in W.$$

Como $w = A^{-1}(Aw)$, se tiene que $A(W) = W$, es decir W es un subespacio A-invariante para todo A tal que $(A, v) \in \Gamma$. Sea $W^{\perp}$ el complemento ortogonal de W, el cual resulta un subespacio A-invariante para todo A tal que $(A, v) \in \Gamma$. Sea $x \in W^{\perp}$ un elemento a distancia d del origen. Entonces para cada $\gamma = (A, v) \in \Gamma$ se tiene que

$$\langle \gamma(x), \gamma(x) \rangle = \langle Ax + v, Ax + v \rangle = \langle Ax, Ax \rangle + 2\langle Ax, v \rangle + \langle v, v \rangle = \langle x, x \rangle + \langle v, v \rangle.$$

Así, $\|\gamma(x)\| \geq \|x\|$. En conclusión, al hacer actuar el grupo Γ, sucede que los puntos en $W^{\perp}$ a distancia d del origen (los cuales existen pues $W^{\perp}$ es un subespacio) continuarán estando como mínimo a distancia d del 0, luego Γ no admite un dominio fundamental de clausura compacta, por lo que no es cocompacto, lo cual es un absurdo. $\square$

Los teoremas de Bieberbach tratan sobre subgrupos discretos y cocompactos de $\mathcal{M}_n$, pero para poder aplicarlos al estudio de las variedades compactas planas en el próximo capítulo, pediremos además que la acción sobre $\mathbb{R}^n$ sea libre. Si Γ es un subgrupo discreto de $\mathcal{M}_n$, existe una manera equivalente para verificar que la acción sea libre.

PROPOSICIÓN 1.24. *Un subgrupo discreto de $\mathcal{M}_n$ actúa de manera libre en $\mathbb{R}^n$ si y sólo si es libre de torsión.*

DEMOSTRACIÓN: Sea Γ un subgrupo discreto de $\mathcal{M}_n$.

$\Rightarrow$) De existir un elemento $\gamma \in \Gamma$ distinto de la identidad tal que $\gamma^k = (\mathrm{I}, 0)$ para algún $k \in \mathbb{N}$ la acción no sería libre. En efecto, dado $x \in \mathbb{R}^n$ arbitrario, si tal γ existe, entonces el elemento

$$y = x + \gamma x + \ldots + \gamma^{k-1} x$$

cumple que $\gamma y = y$. Notar que en esta implicación no hemos utilizado el hecho de que Γ sea discreto.

$\Leftarrow$) Primero veamos que

$$\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma x = x\} \subset \Gamma \cap t_x(\mathsf{O}(n) \times \{0\})t_{-x}. \tag{4}$$

Si $\gamma = (A, v)$ fija x, entonces $Ax + v = x$ y así

$$t_{-x} \circ \gamma \circ t_x = (\mathrm{I}, -x)(A, v)(\mathrm{I}, x) = (\mathrm{I}, -x)(A, x) = (A, 0) \in \mathsf{O}(n) \times \{0\}.$$

La implicación se sigue de (4) ya que al ser $\mathsf{O}(n)$ compacto y Γ discreto, el conjunto de la derecha en (4) es finito, por lo tanto el conjunto de la izquierda también es finito, digamos $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$. Como γ_1^k es un elemento que fija x para todo $k \in \mathbb{Z}$, deben existir enteros r y s tales que $r \neq s$ y $\gamma_1^r = \gamma_1^s$, es decir que $\gamma_1^{r-s} = (\mathrm{I}, 0)$. Como Γ es libre de torsión resulta $\gamma_1 = (\mathrm{I}, 0)$. Haciendo el mismo análisis con γ_2 y con todos los demás llegamos a que

$$\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\} = \{(\mathrm{I}, 0)\}.$$

En consecuencia, la acción de Γ es libre. $\square$

Llegamos así a la definición principal del capítulo.

DEFINICIÓN 1.25. Un subgrupo $\Gamma \subset \mathcal{M}_n$ se dice *cristalográfico* si es discreto y cocompacto. Si además es libre de torsión, Γ se llama un *subgrupo de Bieberbach de $\mathcal{M}_n$*.

NOTA. El estudio de las estructuras cristalinas se llama *cristalografía*. Para más información sobre el significado del término "cristalográfico", ver [**10**]. Para fines del siglo XIX ya se habían clasificado los grupos cristalográficos de dimensión n, con $n \leq 3$. Para cada una de estas dimensiones, se determinó que existía una cantidad finita de tipos distintos de grupos cristalográficos. Esto llevó a Hilbert a preguntarse, en la primera parte del Problema 18 de su lista famosa de problemas de 1900, si existe sólo una cantidad finita de tipos distintos de grupos cristalográficos en cualquier dimensión. Este problema fue resuelto por el matemático alemán Ludwig Bieberbach en 19121 cuando probó que existe una cantidad finita de clases de isomorfismo de grupos cristalográficos de dimensión n, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Antes de enunciar los teoremas de Bieberbach, dejamos enunciado un resultado sobre el espacio de órbitas $\mathbb{R}^n/\Gamma$ si Γ es de Bieberbach, que utilizaremos en el próximo capítulo.

TEOREMA 1.26. *Sea Γ un subgrupo de Bieberbach de $\mathcal{M}_n$ y $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\Gamma$ la proyección canónica. Entonces π es un cubrimiento, $\Delta(\pi) = \Gamma$ y $\pi_1(\mathbb{R}^n/\Gamma) \cong \Gamma$. Más aún $\mathbb{R}^n/\Gamma$ es una variedad topológica de dimensión n.*

Este teorema es un corolario del Teorema 1.20 al final de la sección anterior, pues al ser Γ un subgrupo de Bieberbach de $\mathcal{M}_n$ es libre de torsión, lo cual es equivalente por la Proposición 1.24, a que la acción sea libre.

A continuación enunciamos los tres teoremas clásicos de Bieberbach. La prueba original del primero fue en 1910, dada por Bieberbach [**4, 5**]. Luego en 1911 Frobenius probó que salvo equivalencia afín existe sólo una cantidad finita de grupos cristalográficos de dimensión n. Finalmente en 1912, Bieberbach probó el segundo y el tercero [**6, 7**]. Una demostración de los teoremas puede encontrarse en [**12, 34, 39**].

Teorema 1.27 (Primer Teorema de Bieberbach). *Sean Γ un subgrupo cristalográfico de $\mathcal{M}_n$ y $\Gamma \cap \mathbb{R}^n$ el subgrupo de traslaciones puras de Γ. Entonces $\Gamma \cap \mathbb{R}^n$ es un subgrupo normal abeliano libre de rango n de índice finito.*

Se llama a $\Lambda = \Gamma \cap \mathbb{R}^n$ el *retículo de traslaciones*, mientras que Γ/Λ es conocido como el *grupo puntual* de Γ o el *grupo de holonomía* de Γ, en el caso en que Γ es un subgrupo de Bieberbach de $\mathcal{M}_n$.

En otras palabras, el primer teorema de Bieberbach dice que si Γ es un grupo cristalográfico entonces el grupo Γ satisface la siguiente sucesión exacta[9]:

$$0 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \Gamma/\Lambda \longrightarrow 1.$$

El grupo puntual de Γ se identifica con $r(\Gamma) \subset \mathsf{O}(n)$, el cual es finito, donde r es la proyección definida por $r((A, v)) = A$. En efecto, el núcleo de $r : \Gamma \to \mathsf{O}(n)$ es Λ y entonces

$$\Gamma/\Lambda \cong r(\Gamma).$$

Se tiene la siguiente caracterización algebraica del retículo de traslaciones, que permite probar el segundo teorema de Bieberbach, el cual afirma que todo isomorfismo entre grupos cristalográficos se realiza mediante un cambio afín de coordenadas.

Proposición 1.28. *Sea Γ un subgrupo cristalográfico de $\mathcal{M}_n$. Entonces Λ es el único subgrupo normal abeliano maximal de Γ, en el sentido que contiene a todo otro subgrupo normal abeliano de Γ.*

Teorema 1.29 (Segundo Teorema de Bieberbach). *Sean Γ_1 y Γ_2 subgrupos cristalográficos de $\mathcal{M}_n$ tales que $\Gamma_1 \cong \Gamma_2$, entonces existe $\alpha \in \mathcal{A}_n$ tal que $\alpha\Gamma_1\alpha^{-1} = \Gamma_2$.*

Por último, usando los dos primeros teoremas de Bieberbach y resultados profundos sobre teoría de grupos (extensiones de grupos, representaciones enteras de grupos finitos[10]) se prueba el tercer teorema.

Teorema 1.30 (Tercer Teorema de Bieberbach). *Para cada n fijo existe una cantidad finita de clases de isomorfismo de subgrupos cristalográficos de $\mathcal{M}_n$.*

Una caracterización abstracta de los grupos cristalográficos, de la cual puede encontrarse una prueba en [**39**], está dada por el siguiente teorema:

Teorema 1.31 (Zassenhaus). *Si Γ es un grupo abstracto que posee un subgrupo abeliano maximal Λ de índice finito, entonces existe un homomorfismo $\phi : \Gamma \to \mathcal{M}_n$ de modo que $\phi(\Gamma)$ es cristalográfico y $\phi(\Lambda)$ es el retículo de traslaciones de $\phi(\Gamma)$.*

Nota (Un poco de historia). Sabiendo, por el Tercer Teorema de Bieberbach, que existe una cantidad finita de grupos cristalográficos (salvo isomorfismo) en cada dimensión, una cuestión inmediata que se puede plantear es determinar la cantidad exacta de clases de isomorfismo para cada dimensión.

El problema de clasificar las clases de isomorfismo de grupos cristalográficos de dimensión n es estudiado desde hace más de 100 años. La solución para el problema de clasificación para dimensiones 1, 2 y 3 fue descubierta al final del siglo XIX, usando principalmente técnicas geométricas. En [**10**] puede encontrarse la clasificación de los grupos cristalográficos hasta dimensión 4, lograda en 1978.

[9]Recordemos que una sucesión de homomorfismos de grupos es *exacta* si la imagen de cualquiera de los homomorfismos es igual al núcleo del siguiente. El grupo trivial se denota por 0 en notación aditiva (usualmente cuando los grupos son abelianos), o por 1 en notación multiplicativa.

[10]Ver [**12**] Capítulo 1, secciones 5 y 6.

Es notable que ya en dimensión 4 se requirió la ayuda de computadoras, y parece ser que es la última dimensión donde puede darse una lista completa de clases de isomorfismo de manera legible. Respecto a los grupos de Bieberbach, en [**13**] se obtiene la clasificación en dimensión 5 y 6, usando el programa de computadora CARAT, en 2001. En la siguiente tabla damos el número de grupos cristalográficos y de Bieberbach en dimensiones bajas:

Dimensión	1	2	3	4	5	6
Nro. grupos cristalográficos	1	17	219	4.783	222.018	28.927.922
Nro. grupos de Bieberbach	1	2	10	74	1.060	38.746

En cuanto a dimensiones arbitrarias no se conoce una fórmula explícita. Un método de clasificación fue presentado en 1948, cuando Zassenhaus presentó un algoritmo [**41**], basado en conceptos de teoría de grupos, que permite calcular el conjunto de representantes de clases de isomorfismo para todo $n \in \mathbb{N}$.

En 1956, Calabi [**11**] dio otro método[11] para obtener la clasificación de los grupos de Bieberbach de dimensión n de manera recursiva, para el cual juegan un rol relevante los grupos de Bieberbach de dimensión n con centro trivial, los cuales se llaman grupos primitivos. Siguiendo la terminología de [**22**], se dice que un grupo finito P es *primitivo* si puede ser realizado como el grupo de holonomía de un grupo de Bieberbach G cuya abelianización $G/[G,G]$ es finita, condición que es equivalente a que G tenga centro trivial. No todo grupo finito es primitivo, por ejemplo los grupos cíclicos no son primitivos [**34**, Ejemplo 4.1]. En [**22**], Hiller y Sah prueban que un grupo finito P es primitivo si y sólo si ningún p-subgrupo de Sylow cíclico de P posee un complemento normal.

En la década del '60, Charlap enfocó el problema de la clasificación desde el punto de vista del grupo de holonomía en lugar de la dimensión, y dió un método que reduce la clasificación a un problema cohomológico. Siguiendo este método algebraico logró clasificar todos los grupos de Bieberbach con holonomía $\mathbb{Z}_p$, con p primo.

Por último, mencionamos un resultado sorprendente probado en 1957 por Auslander y Kuranishi [**1**], el cual afirma que para todo grupo finito G existe un grupo de Bieberbach con grupo de holonomía isomorfo a G.

4. Ejemplos

Para concluir el capítulo desarrollaremos tres ejemplos básicos, los cuales probaremos con detalle que son grupos de Bieberbach y calcularemos sus grupos de holonomía.

Recordemos que si Γ es un subgrupo de $\mathcal{M}_n$, otro modo de considerar al elemento $\gamma = (A, v) \in \Gamma$, con $A \in \mathsf{O}(n)$ y $v \in \mathbb{R}^n$ es como la matriz $\begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Utilizaremos esto para probar que ciertos subgrupos son discretos, pues probaremos que cada elemento coincide con una bola métrica, la cual es abierta. La topología de $\mathcal{M}_n$ es la de $\mathsf{O}(n) \times \mathbb{R}^n$ y esta coincide con la topología métrica inducida por las normas sobre matrices $(n+1) \times (n+1)$, en particular por la norma $\|.\|_2$ definida por

$$\|B\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j} b_{ij}^2}.$$

Utilizaremos esta norma para los cálculos.

4.1. El toro $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Sean $e_1, \dots, e_n$ los vectores canónicos de $\mathbb{R}^n$. Sea $\Gamma_n \subset \mathcal{M}_n$ el subgrupo generado por el conjunto

$$\{(\mathrm{I}, e_1), \dots, (\mathrm{I}, e_n)\}.$$

Denotemos por t_i a la traslación por e_i, es decir $t_i(x) = (\mathrm{I}, e_i)(x) = x + e_i$.

[11] Para más información sobre los métodos de clasificación de grupos cristalográficos y grupos de Bieberbach, ver [**34**, Capítulo 3].

Notemos que el grupo Γ_n es abeliano, por lo cual todo elemento $\gamma \in \Gamma_n$ puede escribirse de una única manera como

$$\gamma = t_1^{k_1} \dots t_n^{k_n} = t_{\sum k_j e_j} = \left(\mathrm{I}, \sum k_j e_j\right), \quad \text{para ciertos enteros } k_1, \dots, k_n.$$

A continuación probamos que Γ_n es de Bieberbach.

• Libre de torsión: Sea $\gamma \in \Gamma_n - \{\mathrm{Id}\}$ tal que $\gamma^k = \mathrm{Id}$. Si $\gamma = t_m$, con $m = \sum_{i=1}^n m_i e_i$, entonces $\gamma^k = t_{km}$, por lo que $\sum_{i=1}^n k m_i e_i = 0$, lo que implica $k m_i = 0$ para todo i, y al ser $\gamma \neq \mathrm{Id}$ resulta $k = 0$. Esto dice que el único elemento de orden finito es la transformación identidad.

• Discreto: Sean $\gamma_1 \neq \gamma_2 \in \Gamma_n$, $\gamma_1 = t_{\sum k_i e_i}$ y $\gamma_2 = t_{\sum m_j e_j}$. Sean $k = \sum k_i e_i$ y $m = \sum m_j e_j$. Como γ_1 es distinto de γ_2, existe algun i tal que $k_i \neq m_i$, y al ser enteros resulta que $|k_i - m_i| \geq 1$. Ahora Calculamos

$$\|\gamma_1 - \gamma_2\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} \mathrm{I} & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathrm{I} & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{(k_1 - m_1)^2 + \ldots + (k_n - m_n)^2} \geq |k_i - m_i| \geq 1.$$

Por lo tanto, $\{\gamma_1\} = \{\gamma \in \Gamma_n \mid d(\gamma, \gamma_1) < 1\}$, el cual es un conjunto abierto.

• Cocompacto:

Lema 1.32. *Un dominio fundamental para la acción de* Γ_n *es* $D = (0,1)^n$.

Demostración: Veamos primero que $\mathbb{R}^n = \cup_{\gamma \in \Gamma_n} \gamma \overline{D}$. Sea $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, se tiene que $m_i \leq x_i \leq m_i + 1$, donde $m_i = \lfloor x_i \rfloor$, la parte entera de x_i. Entonces $t_i^{-m_i}(x_i) \in [0,1) \subset [0,1]$. Notemos que la traslación en la i-ésima coordenada no altera las demás coordenadas, por lo que aplicando estas traslaciones para cada coordenada tenemos que $t_1^{-m_1} \dots t_n^{-m_n} x \in [0,1]^n$, y así $x = t_1^{m_1} \dots t_n^{m_n} s$ con $s \in [0,1]^n$.

Ahora veamos que dos elementos distintos en $(0,1)^n$ pertenecen a distintas órbitas. Si $x \neq y$ debe ser $x_i \neq y_i$ para algún i. Luego $|x_i - y_i| < 1$, por lo que no existe ningún entero k_i tal que $t_i^{k_i}(x_i) = y_i$, y al ser t_i la única traslación que afecta a la coordenada i, tenemos que no existe ningún elemento $\gamma \in \Gamma_n$ tal que $\gamma x = y$. Por lo tanto las órbitas de x e y son disjuntas. ☐

Como $\overline{D} = [0,1]^n$ es compacto, resulta Γ_n cocompacto. En consecuencia, al ser discreto, libre de torsión y cocompacto, Γ_n es un subgrupo de Bieberbach de $\mathcal{M}_n$. Más aún, $\mathbb{R}^n/\Gamma$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, el toro n-dimensional. Para ver esto definimos $f : \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}^n/\Gamma$ por

$$f([x]) = \pi(x),$$

donde $[x]$ es la clase de equivalencia de $x \in \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ y π es la proyección al cociente $\mathbb{R}^n/\Gamma$. Notemos que f está bien definida, pues si $y \in [x]$ entonces $y - x \in \mathbb{Z}^n$. Entonces $y = x + \sum m_i e_i$ para ciertos $m_i \in \mathbb{Z}$, es decir que $(\mathrm{I}, m_i e_i)x = y$, lo cual implica que $\pi(y) = \pi(x)$. Claramente este camino es reversible, luego f es inyectiva. La suryectividad es clara. Por otro lado, f es continua y al ser $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ compacto y $\mathbb{R}^n/\Gamma_n$ de Hausdorff, f resulta un homeomorfismo.

♣ Grupo de holonomía de Γ_n: Todo $\gamma \in \Gamma_n$ se escribe como $\gamma = (\mathrm{I}, \sum k_j e_j)$ para ciertos enteros k_j. Luego $r(\gamma) = \mathrm{I}$, por lo que $r(\Gamma_n) = \{\mathrm{I}\}$ y $\Lambda_n = \Gamma_n$. Por lo tanto el grupo de holonomía de Γ_n es trivial.

4.2. La botella de Klein.

Sea $\Gamma_K \subset \mathcal{M}_2$ generado por

$$\alpha = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & 1/2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right) \quad \text{y} \quad \beta = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\mathrm{I}, \left(0, \frac{1}{2}\right)\right).$$

Queremos encontrar una expresión para un elemento genérico de Γ_K. Notemos que $\beta^k = \left(\mathrm{I}, \left(0, \frac{k}{2}\right)\right)$,

$$\alpha^\ell = \begin{cases} \left(\mathrm{I}, \left(\frac{\ell}{2}, 0\right)\right) & \text{si } \ell \text{ es par;} \\ \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \left(\frac{\ell}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) & \text{si } \ell \text{ es impar.} \end{cases} \qquad \beta^k\alpha^\ell = \begin{cases} \left(\mathrm{I}, \left(\frac{\ell}{2}, \frac{k}{2}\right)\right) & \text{si } \ell \text{ es par;} \\ \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \left(\frac{\ell}{2}, \frac{k+1}{2}\right)\right) & \text{si } \ell \text{ es impar.} \end{cases}$$

Dado que $\alpha\beta = \beta^{-1}\alpha$ resulta que todo elemento $\gamma \in \Gamma_K$ puede ser escrito de manera única como $\gamma = \beta^k\alpha^\ell$ para ciertos enteros k y ℓ. Además se tiene que

$$(\beta^k\alpha^\ell)(\beta^r\alpha^s) = \beta^{k+(-1)^\ell r}\alpha^{\ell+s}.$$

Con esto podemos verificar que Γ_K es un subgrupo de Bieberbach de $\mathcal{M}_2$.

• Libre de torsión: Si $\gamma = \beta^k\alpha^\ell$ entonces

$$\gamma^p = \begin{cases} \beta^{\frac{p}{2}k+(-1)^\ell\frac{p}{2}k}\alpha^{p\ell} & \text{si } p \text{ es par;} \\ \beta^{\frac{p+1}{2}k+(-1)^\ell\frac{p-1}{2}k}\alpha^{p\ell} & \text{si } p \text{ es impar.} \end{cases}$$

Por lo tanto, como $\beta^k\alpha^\ell \neq \mathrm{Id}$ para k y ℓ distintos de 0, resulta que $\gamma^p \neq \mathrm{Id}$ para todo $p \neq 0$.

• Discreto: Sean $\gamma_1 \neq \gamma_2 \in \Gamma_K$, con $\gamma_1 = \beta^k\alpha^\ell$ y $\gamma_2 = \beta^s\alpha^r$. Al ser distintos, entonces $k \neq s$ o $\ell \neq r$. Si ℓ y r son ambos pares o ambos impares, calculamos

$$\left\|\beta^k\alpha^\ell - \beta^s\alpha^r\right\|_2 = \left\|\begin{pmatrix} 0 & 0 & (\ell-r)/2 \\ 0 & 0 & (k-s)/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\|_2 = \frac{1}{2}\sqrt{(\ell-r)^2 + (k-s)^2} \geq \frac{1}{2}.$$

Si ℓ es par y r es impar se tiene que

$$\left\|\beta^k\alpha^\ell - \beta^s\alpha^r\right\|_2 = \left\|\begin{pmatrix} 0 & 0 & (\ell-r)/2 \\ 0 & 2 & (k-s-1)/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\|_2 \geq 2.$$

Si ℓ impar y r par se tiene, de igual manera, que $\left\|\beta^k\alpha^\ell - \beta^s\alpha^r\right\|_2 \geq 2$.

En definitiva, $\{\gamma_1\} = \{\gamma \in \Gamma_K \mid d(\gamma, \gamma_1) < \frac{1}{2}\}$, el cual es un conjunto abierto.

• Cocompacto:

LEMA 1.33. *Un dominio fundamental para la acción de* Γ_K *es* $D = \left(0, \frac{1}{2}\right) \times \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

DEMOSTRACIÓN: Veamos que dado $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ existe $\gamma \in \Gamma_K$ tal que $\gamma v \in \overline{D} = \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$. En primer lugar, analizamos como trasladar la coordenada x al intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Como existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $m \leq x < m+1$, aplicando $\alpha^{-2m} = (\mathrm{I}, (-m, 0))$ trasladamos x al intervalo $[0, 1]$. Si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ pasamos a analizar la coordenada y. En caso contrario, si $\frac{1}{2} < x \leq 1$, aplicando α^{-1} tenemos que $x - \frac{1}{2} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, luego podemos suponer que $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Sea ahora $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leq y < n+1$, aplicando β^{-2n}, lo cual no afecta a la coordenada x, trasladamos y al intervalo $[0, 1]$. Ahora, si $y \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ hemos terminado, y si no, aplicamos β^{-1}.

Ahora veamos que si $v \in D$ entonces no existe $\gamma \in \Gamma_K$ no trivial tal que $\gamma v \in D$. Esto implicará que si $v, w \in D$ y $v \neq w$ entonces v y w están en distintas órbitas. Sea $\gamma \in \Gamma_K$ no trivial, entonces $\gamma = \beta^k\alpha^\ell$ para ciertos enteros k y ℓ, alguno no nulo. Si $v = (x, y) \in D$ tenemos que $0 < x < \frac{1}{2}$ y $0 < y < \frac{1}{2}$, por lo que

$$\beta^k\alpha^\ell v = \begin{cases} \begin{pmatrix} x + \frac{\ell}{2} \\ y + \frac{k}{2} \end{pmatrix} & \text{si } \ell \text{ es par.} \\ \begin{pmatrix} x + \frac{\ell}{2} \\ -y + \frac{k+1}{2} \end{pmatrix} & \text{si } \ell \text{ es impar.} \end{cases}$$

Si $\ell = 0$, al ser γ no trivial entonces $k \neq 0$, luego $y + \frac{k}{2} \notin \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Si $\ell \neq 0$, en cualquier caso resulta que $x + \frac{\ell}{2} \notin \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Por lo tanto $\gamma v \notin D$. $\square$

En consecuencia, Γ_K es un subgrupo de Bieberbach de $\mathcal{M}_2$. Más aún, la variedad topológica $\mathbb{R}^2/\Gamma_K$ es homeomorfa a la botella de Klein dada por $K = [0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}]/\sim$, donde $\sim$ está definida por $(x, 0) \sim (x, \frac{1}{2})$ y $(0, y) \sim (\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - y)$ para $x, y \in [0, \frac{1}{2}]$. En efecto, sea $f : K \to \mathbb{R}^2/\Gamma_K$ dada por $f([(x, y)]) = \pi((x, y))$, donde $[(x, y)]$ es la clase de equivalencia de (x, y) en K y π es la proyección al cociente $\mathbb{R}^2/\Gamma_K$. Notemos que f está bien definida pues si $[(x_1, y_1)] = [(x_2, y_2)]$ entonces hay dos posibilidades. Si $x_2 = x_1$, $y_1 = 0$ y $y_2 = \frac{1}{2}$ entonces $\beta(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$. Si $y_2 = \frac{1}{2} - y_1$, $x_1 = 0$ y $x_2 = \frac{1}{2}$ entonces $\alpha(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ por lo que en cualquier caso $\pi((x_1, y_1)) = \pi((x_2, y_2))$. Recíprocamente puede verse que si las órbitas de (x_1, y_1) y (x_2, y_2) coinciden entonces están relacionados en K, por tanto f es inyectiva. La suryectividad es clara, y como K es compacto y $\mathbb{R}^2/\Gamma_K$ es de Hausdorff, f resulta un homeomorfismo.

♣ Grupo de holonomía de Γ_K: Si $\gamma \in \Gamma_K$ entonces $\gamma = \beta^k \alpha^\ell$. Se tiene que

$$r(\gamma) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si } \ell \text{ es par;} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \text{si } \ell \text{ es impar.} \end{cases}$$

Por lo tanto $r(\Gamma_K) \cong \mathbb{Z}_2$ y $\Lambda_K = \{\beta^k \alpha^\ell \in \Gamma_K \mid \ell \text{ es par}\}$. Notemos que este grupo Γ_K y el grupo Γ_2 de todas las traslaciones puras de $\mathcal{M}_2$ son dos subgrupos de Bieberbach de dimensión 2 no isomorfos. Más aún, como en dimensión 2 sólo hay 2 grupos de Bieberbach salvo isomorfismo, son los únicos.

4.3. La variedad de Hantzsche-Wendt. En dimensión 3 existen 10 grupos de Bieberbach, hecho que fue probado originalmente en [**17**] por Hantzsche y Wendt en 1935. El más interesante[12] de estos grupos es el subgrupo Γ_{HW} de $\mathcal{M}_3$ generado por

$$\alpha = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad y \quad \beta = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

La variedad $\mathbb{R}^3/\Gamma_{HW}$ es conocida como la variedad de Hantzsche-Wendt.

Lema 1.34. *Sean $k, m, n \in \mathbb{Z}$. Definimos*

$$\gamma_1(k,m,n) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 & m \\ 0 & 0 & 1 & n \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \qquad \gamma_2(k,m,n) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2+k \\ 0 & -1 & 0 & 1/2+m \\ 0 & 0 & -1 & n \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

$$\gamma_3(k,m,n) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 & 1/2+m \\ 0 & 0 & -1 & 1/2+n \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \qquad \gamma_4(k,m,n) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 1/2+k \\ 0 & -1 & 0 & m \\ 0 & 0 & 1 & 1/2+n \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Entonces $\Gamma_{HW} = \{\gamma_i(k, m, n) \mid k, m, n \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq 4\}$.

Demostración: Llamemos H al conjunto del miembro de la derecha, veamos que es un subgrupo de $\mathcal{M}_3$. Las siguientes son las tablas de multiplicación de los elementos γ_i.

[12] El grupo de Hantzsche-Wendt es el único grupo de Bieberbach de dimensión 3 cuyo grupo de holonomía no es cíclico, la abelianización de Γ_{HW} es finita y el espacio $\mathbb{R}^3/\Gamma_{HW}$ posee la misma homología real que S^3, entre otras propiedades.

	$\gamma_1(\ell,r,s)$	$\gamma_2(\ell,r,s)$
$\gamma_1(k,m,n)$	$\gamma_1(k+\ell,m+r,n+s)$	$\gamma_2(k+\ell,m+r,n+s)$
$\gamma_2(k,m,n)$	$\gamma_2(k+\ell,m-r,n-s)$	$\gamma_1(k+\ell+1,m-r,n-s)$
$\gamma_3(k,m,n)$	$\gamma_3(k-\ell,m+r,n-s)$	$\gamma_4(k-\ell-1,m+r+1,n-s)$
$\gamma_4(k,m,n)$	$\gamma_4(k-\ell,m-r,n+s)$	$\gamma_3(k-\ell,m-r,n+s)$

	$\gamma_3(\ell,r,s)$	$\gamma_4(\ell,r,s)$
$\gamma_1(k,m,n)$	$\gamma_3(k+\ell,m+r,n+s)$	$\gamma_4(k+\ell,m+r,n+s)$
$\gamma_2(k,m,n)$	$\gamma_4(k+\ell,m-r,n-s-1)$	$\gamma_3(k+\ell+1,m-r,n-s-1)$
$\gamma_3(k,m,n)$	$\gamma_1(k-\ell,m+r+1,n-s)$	$\gamma_2(k-\ell-1,m+r,n-s)$
$\gamma_4(k,m,n)$	$\gamma_2(k-\ell,m-r-1,n+s)$	$\gamma_1(k-\ell,m-r,n+s+1)$

Respecto a los inversos se tiene

$$(\gamma_1(k,m,n))^{-1}=\gamma_1(-k,-m,-n),\quad (\gamma_2(k,m,n))^{-1}=\gamma_2(-k-1,m,n),$$

$$(\gamma_3(k,m,n))^{-1}=\gamma_3(k,-m-1,n),\quad (\gamma_4(k,m,n))^{-1}=\gamma_4(k,m,-n-1).$$

Observando la tabla de multiplicar y los inversos, obtenemos que H es un subgrupo. Además H contiene a los generadores α y β puesto que $\alpha=\gamma_4(0,0,0)$ y $\beta=\gamma_2(0,0,0)$ y cualquier otro subgrupo de $\mathcal{M}_3$ que contenga a α y β contendrá a los elementos de H. Para ver esto, calculamos primero las potencias de los elementos α, β, $\alpha\beta$ y $\beta\alpha$.

$$\alpha^k=\begin{cases}\left(\begin{pmatrix}-\operatorname{Id}_2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\left(\frac{1}{2},0,\frac{k}{2}\right)\right)=\gamma_4(0,0,\frac{k-1}{2}) & \text{si } k \text{ es impar;}\\ \left(\operatorname{Id},\left(0,0,\frac{k}{2}\right)\right)=\gamma_1(0,0,\frac{k}{2}) & \text{si } k \text{ es par,}\end{cases}$$

$$\beta^k=\begin{cases}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -\operatorname{Id}_2\end{pmatrix},\left(\frac{k}{2},\frac{1}{2},0\right)\right)=\gamma_2(\frac{k-1}{2},0,0) & \text{si } k \text{ es impar;}\\ \left(\operatorname{Id},\left(\frac{k}{2},0,0\right)\right)=\gamma_1(\frac{k}{2},0,0) & \text{si } k \text{ es par,}\end{cases}$$

$$(\alpha\beta)^k=\begin{cases}\left(\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix},\left(0,-\frac{k}{2},\frac{1}{2}\right)\right)=\gamma_3(0,\frac{-k-1}{2},0) & \text{si } k \text{ es impar;}\\ \left(\operatorname{Id},\left(0,-\frac{k}{2},0\right)\right)=\gamma_1(0,-\frac{k}{2},0) & \text{si } k \text{ es par,}\end{cases}$$

$$(\beta\alpha)^k=\begin{cases}\left(\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix},\left(1,\frac{k}{2},-\frac{1}{2}\right)\right)=\gamma_3(1,\frac{k-1}{2},-1) & \text{si } k \text{ es impar;}\\ \left(\operatorname{Id},\left(0,\frac{k}{2},0\right)\right)=\gamma_1(0,\frac{k}{2},0) & \text{si } k \text{ es par.}\end{cases}$$

Por lo tanto podemos obtener los elementos $\gamma_i(k,m,n)$ de la siguiente manera:

$$\beta^{2k}(\beta\alpha)^{2m}\alpha^{2n}=\gamma_1(k,0,0)\gamma_1(0,m,0)\gamma_1(0,0,n)=\gamma_1(k,m,n),$$

$$\alpha^{2n}(\beta\alpha)^{2m}\beta^{2k+1}=\gamma_1(0,0,n)\gamma_1(0,m,0)\gamma_2(k,0,0)=\gamma_2(k,m,n),$$

$$\alpha^{2n}\beta^{2k}(\alpha\beta)^{-(2m+1)}=\gamma_1(0,0,n)\gamma_1(k,0,0)\gamma_3(0,m,0)=\gamma_3(k,m,n),$$

$$\beta^{2k}(\beta\alpha)^{2m}\alpha^{2n+1}=\gamma_1(k,0,0)\gamma_1(0,m,0)\gamma_4(0,0,n)=\gamma_4(k,m,n).$$

□

Ahora que hemos descrito Γ_{HW} y sabemos qué forma tienen sus elementos, probamos que Γ_{HW} es un subgrupo de Bieberbach de $\mathcal{M}_3$:

- Libre de torsión: Primero debemos calcular las potencias de los elementos γ_i.

$$(\gamma_1(k,m,n))^\ell = (\mathrm{Id}, (k\ell, m\ell, n\ell)),$$

$$(\gamma_2(k,m,n))^\ell = \begin{cases} \left(\mathrm{Id}, \left(\ell(k+\frac{1}{2}, 0, 0)\right)\right) & \text{si } \ell \text{ es par,} \\ \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mathrm{Id}_2 \end{pmatrix}, \left(\ell(k+\frac{1}{2}), m+\frac{1}{2}, n\right)\right) & \text{si } \ell \text{ es impar,} \end{cases}$$

$$(\gamma_3(k,m,n))^\ell = \begin{cases} \left(\mathrm{Id}, \left(0, \ell(m+\frac{1}{2}), 0\right)\right) & \text{si } \ell \text{ es par,} \\ \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \left(k, \ell(m+\frac{1}{2}), n+\frac{1}{2}\right)\right) & \text{si } \ell \text{ es impar,} \end{cases}$$

$$(\gamma_4(k,m,n))^\ell = \begin{cases} \left(\mathrm{Id}, \left(0, 0, \ell(n+\frac{1}{2})\right)\right) & \text{si } \ell \text{ es par,} \\ \left(-\mathrm{Id}, \left(k+\frac{1}{2}, m, \ell\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)\right) & \text{si } \ell \text{ es impar.} \end{cases}$$

De aquí vemos que si $\gamma_i(k,m,n) \neq \mathrm{Id}$ y $\ell \neq 0$ entonces $(\gamma_i(k,m,n))^\ell \neq \mathrm{Id}$.

- Discreto: Calculamos

$$\|\gamma_1(k,m,n) - \gamma_2(\ell,r,s)\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & k-\ell-1/2 \\ 0 & 2 & 0 & m-r-1/2 \\ 0 & 0 & 2 & n-s \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\|_2 \geq 2.$$

De manera similar, se tiene que $\quad \|\gamma_1(k,m,n) - \gamma_3(\ell,r,s)\|_2 \geq 2 \quad$ y $\quad \|\gamma_1(k,m,n) - \gamma_4(\ell,r,s)\|_2 \geq 2$. Por otro lado,

$$\|\gamma_2(k,m,n) - \gamma_3(\ell,r,s)\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & k-\ell+1/2 \\ 0 & -2 & 0 & m-r \\ 0 & 0 & 0 & n-s-1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\|_2 \geq 2.$$

Análogamente $\|\gamma_2(k,m,n) - \gamma_4(\ell,r,s)\|_2 \geq 2$ y $\|\gamma_3(k,m,n) - \gamma_4(\ell,r,s)\|_2 \geq 2$. Por último calculamos $\|\gamma_i(k,m,n) - \gamma_i(\ell,r,s)\|_2$ con $\gamma_i(k,m,n) \neq \gamma_i(\ell,r,s)$, es decir que $\{k,m,n\} \neq \{\ell,r,s\}$. Tenemos que

$$\|\gamma_i(k,m,n) - \gamma_i(\ell,r,s)\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & k-\ell \\ 0 & 0 & 0 & m-r \\ 0 & 0 & 0 & n-s \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{(k-\ell)^2 + (m-r)^2 + (n-s)^2}.$$

Como $\{k,m,n\} \neq \{\ell,r,s\}$ y son enteros, resulta $\sqrt{(k-\ell)^2 + (m-r)^2 + (n-s)^2} \geq 1$. En conclusión, dado un elemento $\gamma_i(k,m,n)$ hemos demostrado que $\{\gamma_i(k,m,n)\} = \{\gamma \in \Gamma_{HW} \mid d(\gamma, \gamma_i(k,m,n)) < 1\}$, el cual es un conjunto abierto.

- Cocompacto:

Lema 1.35. *Un dominio fundamental para la acción de* Γ_{HW} *es* $D = (0, \frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (0, \frac{1}{2})$.

Demostración: Veamos que para todo elemento $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ existe un elemento $\gamma \in \Gamma_{HW}$ tal que $\gamma v \in \overline{D}$. Si x y z se hallan en el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$, pasamos a analizar la coordenada y. En caso contrario, existen enteros m y n tales que $m \leq x < m+1$ y $n \leq z < n+1$, por lo que aplicando $\gamma_1(-m, 0, -n)$ a v obtenemos que $0 \leq x < 1$ y $0 \leq z < 1$. Ahora tenemos varias posibilidades:

Si $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2} < z < 1$ aplicamos $\gamma_4(0,0,-1) = \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)\right)$.

Si $\frac{1}{2} < x < 1$ y $0 \leq z \leq \frac{1}{2}$ aplicamos $\gamma_3(1,0,0) = \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right)$.

Si $\frac{1}{2} < x < 1$ y $\frac{1}{2} < z < 1$ aplicamos $\gamma_2(-1,0,1) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) \right)$.

En cualquier caso siempre podemos trasladar las coordenadas x y z al intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Una vez hecho esto, no importan los cambios que hayamos hecho en la coordenada y, dado que siempre existe un entero k tal que $k - \frac{1}{2} \leq y < k + \frac{1}{2}$, por lo que aplicando $\gamma_1(0,-k,0)$ trasladamos y al intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ sin afectar las otras coordenadas. En conclusión, siempre existe $\gamma \in \Gamma_{HW}$ tal que $\gamma v \in \overline{D}$.

Ahora veamos que si $v, w \in D$ con $v \neq w$ entonces v y w están en distintas órbitas. Basta ver que si $v \in D$ entonces no existe $\gamma \in \Gamma_{HW}$ no trivial tal que $\gamma v \in D$. Sea $v = (x,y,z) \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \left(0, \frac{1}{2}\right)$, veamos que $\gamma_i(k,m,n)v \notin D$ para todo $1 \leq i \leq 4$ (excepto $\gamma_1(0,0,0) = \mathrm{Id}$).

Tenemos que

$$\gamma_1(k,m,n)v = (x+k, y+m, z+n) \notin D \quad \text{si } \gamma_1(k,m,n) \neq \mathrm{Id}\,.$$

Por otro lado,

$$\gamma_2(k,m,n)v = \Big(k + \frac{1}{2} + x, m + \frac{1}{2} - y, n - z\Big).$$

Como $0 < z < \frac{1}{2}$ entonces $n - z \in \left(n - \frac{1}{2}, n\right)$ el cual es disjunto con $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. De manera similar,

$$\gamma_3(k,m,n)v = \Big(k - x, m + \frac{1}{2} + y, n + \frac{1}{2} - z\Big).$$

Luego, como $0 < x < \frac{1}{2}$ debe ser $k - x \in \left(k - \frac{1}{2}, k\right)$ el cual es disjunto con $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Por último,

$$\gamma_4(k,m,n)v = \Big(k + \frac{1}{2} - x, m - y, n + \frac{1}{2} + z\Big),$$

y al ser $0 < z < \frac{1}{2}$ se tiene que $n + \frac{1}{2} + z \in \left(n + \frac{1}{2}, n+1\right)$ el cual es disjunto con $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. En conclusión, si $v, w \in D$ entonces no existe $\gamma \in \Gamma_{HW}$ tal que $\gamma v = w$. $\square$

En consecuencia Γ_{HW} es un subgrupo de Bieberbach de $\mathcal{M}_3$.

♣ Grupo de holonomía de Γ_{HW}:

$$r(\gamma_1(k,m,n)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad r(\gamma_2(k,m,n)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$r(\gamma_3(k,m,n)) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad r(\gamma_4(k,m,n)) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como todo elemento $\gamma \in \Gamma_{HW}$ es de esta forma y todas estas matrices tienen orden 2, resulta que

$$r(\Gamma_{HW}) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \quad \text{y} \quad \Lambda_{HW} = \{\gamma_1(k,m,n) \in \Gamma_{HW} \mid k,m,n \in \mathbb{Z}\}.$$

Como un último comentario, notemos que el grupo de Hantzsche-Wendt es primitivo, según la definición de Hiller y Sah [**22**], ya que su centro es trivial. Esto puede deducirse fácilmente de la tabla de multiplicación descrita al principio del ejemplo. Por otro lado, ni el grupo Γ_n de traslaciones puras de $\mathcal{M}_n$ ni el grupo fundamental de la botella de Klein poseen centro trivial, pues el primero es abeliano por lo que su centro coincide con Γ_n y para el segundo, es fácil ver que el elemento α^2 pertenece al centro. Ser primitivo es sólo una de las propiedades por las cuales el grupo de Hantzsche-Wendt es tan importante. Por ejemplo, existen los llamados grupos generalizados de Hantzsche-Wendt, que son una generalización de este subgrupo de Bieberbach de $\mathcal{M}_3$ con holonomía $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, los cuales son bastante estudiados [**34**, Capítulo 9].

CAPÍTULO 2

Variedades compactas planas

A partir de las propiedades de los grupos de Bieberbach que hemos estudiado en la sección anterior obtendremos resultados sobre geometría riemanniana, en particular sobre variedades compactas planas. Para entender estos resultados, necesitamos introducir un poco de teoría sobre variedades diferenciables y también de geometría riemanniana.

1. Preliminares de variedades diferenciables

En esta sección, a modo de introducción, damos algunas definiciones y herramientas básicas de geometría diferencial que serán la base para entender los conceptos y resultados posteriores.

Definición 2.1. Una *variedad diferenciable* M de dimensión n es un espacio de Hausdorff con una base numerable que posee una estructura diferenciable, es decir una familia de abiertos $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ tales que:

(1) $M = \cup_{\alpha\in A} U_\alpha$.
(2) Para cada $\alpha \in A$ existe un homeomorfismo $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ con $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ abierto en $\mathbb{R}^n$.
(3) Si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ entonces $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$ es C^∞.
(4) La familia $\{U_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ es maximal con respecto a las propiedades anteriores.

Al par $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ se le llama un *entorno coordenado* o un *sistema de coordenadas*.

A las variedades diferenciables también las llamaremos variedades C^∞. De igual manera pueden definirse las variedades de clase C^k para todo $k \in \mathbb{N}$. Sólo consideraremos variedades C^∞.

Definición 2.2. Una función $F : M \to N$ es C^∞ (o *diferenciable*) si para todo $p \in M$ existe un entorno coordenado (U, φ) de p y un entorno coordenado (V, ψ) de $F(p)$ tales que $F(U) \subset V$ y la función $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ es C^∞.

Denotaremos por $C^\infty(M)$ al conjunto de funciones $f : M \to \mathbb{R}$ que son C^∞. Se cumple que $C^\infty(M)$ posee una estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial y además posee una estructura de anillo, ambas con las operaciones naturales.

Es importante definir cuándo consideraremos que dos variedades son "la misma".

Definición 2.3. Se dice que $F : M \to N$ es un *difeomorfismo* si F es C^∞, biyectiva y $F^{-1} : N \to M$ es C^∞. Se dice que las variedades M y N son *difeomorfas* si existe un difeomorfismo $F : M \to N$.

Una noción más débil, pero que será bastante útil, es la de un difeomorfismo local.

Definición 2.4. Se dice que $F : M \to N$ es un *difeomorfismo local* si para todo $p \in M$ existe un entorno abierto U de p tal que $F(U)$ es abierto en N y $F\big|_U : U \to F(U)$ es un difeomorfismo.

Ahora, queremos generalizar el concepto de vector tangente en $\mathbb{R}^n$ a una variedad M. Podemos visualizar a un vector en $\mathbb{R}^n$ como una flecha. Sin embargo, la propiedad importante de los vectores que se quiere generalizar es su acción sobre funciones diferenciables como una derivada direccional. La observación clave es que el proceso de tomar derivadas direccionales da una correspondencia biyectiva entre vectores tangentes en $\mathbb{R}^n$ y transformaciones lineales entre $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $\mathbb{R}$ que satisfacen la regla del producto de Leibniz (tales aplicaciones se llaman *derivaciones*). Con esto en mente, se define un vector tangente de la siguiente manera:

Definición 2.5. Sean M una variedad diferenciable y $p \in M$. Un *vector tangente* a M en p es una aplicación lineal $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ que satisface

$$v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$$

para $f, g \in C^\infty(M)$ arbitrarias.

Notemos que, mientras que un vector tangente está definido en términos de funciones diferenciables definidas en toda la variedad, los entornos coordenados se definen en general en conjuntos abiertos. Sin embargo, la acción de los vectores tangentes es local en el siguiente sentido:

Lema 2.6. *Si v es un vector tangente a M en p y $f, g \in C^\infty(M)$ coinciden en un entorno de p, entonces $v(f) = v(g)$.*

La prueba del lema requiere la existencia de "funciones campana", ver [**24**, Proposición 3.8]. Esto permite definir vectores tangentes para funciones que están definidas sólo en abiertos de la variedad, extendiendo a funciones definidas en toda la variedad. Un ejemplo importante es el siguiente: sea $(U, \varphi = (x_1, ..., x_n))$ es un entorno coordenado de $p \in M$, se define el vector tangente

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (f) := \left.\frac{\partial}{\partial r_i}\right|_{\varphi(p)} (f \circ \varphi^{-1}), \quad f \in C^\infty(M),$$

donde $\frac{\partial}{\partial r_i}$ es la i-ésima derivada parcial canónica de $\mathbb{R}^n$. El conjunto de todos los vectores tangentes a M en p se denomina *espacio tangente a M en p* y se denota T_pM. Más aún, T_pM admite estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial y se puede demostrar que el conjunto $\{\frac{\partial}{\partial x_1}\big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\big|_p\}$ es una base del mismo.

Un concepto de gran importancia en el análisis matemático es el de la derivada de una función. En el caso de una función diferenciable entre espacios euclídeos, la derivada de la función en un punto (representada por su matriz jacobiana) es una aplicación lineal que representa la "mejor aproximación lineal" a la función en un entorno cercano al punto. En el caso general de una variedad existe una aplicación lineal similar, pero entre espacios tangentes.

Definición 2.7. Sea $F : M \to N$ diferenciable. Para $p \in M$, la *diferencial de F en p* es la aplicación lineal $(dF)_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ definida por

$$((dF)_p v)(g) = v(g \circ F), \qquad v \in T_pM \, , g \in C^\infty(N).$$

Resumimos las propiedades importantes de la diferencial que usaremos más adelante en la siguiente proposición, la cual es básica y no es difícil de probar. El último punto de la proposición se prueba usando el teorema de la función inversa en $\mathbb{R}^n$.

Proposición 2.8. *Sean $F : M \to N$ y $G : N \to P$ funciones C^∞ y sea $p \in M$. Se cumplen las siguientes propiedades:*

(1) Regla de la cadena: $d(G \circ F)_p = (dG)_{F(p)} \circ (dF)_p$.
(2) *Si F es constante entonces $(dF)_p$ es la transformación nula y si $\mathrm{Id} : M \to M$ es la función identidad, entonces $(d\,\mathrm{Id})_p$ es la transformación identidad de T_pM.*
(3) *Si F es un difeomorfismo local, entonces $(dF)_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ es un isomorfismo y se cumple que $(dF)_p^{-1} = d(F^{-1})_{F(p)}$.*
(4) Teorema de la función inversa para variedades: *Si $q \in M$ es tal que $(dF)_q$ es inversible entonces existen entornos abiertos U_0 de q y V_0 de $F(q)$ tales que la restricción $F\big|_{U_0} : U_0 \to V_0$ es un difeomorfismo.*

Otro concepto familiar del análisis en varias variables es la de un campo vectorial. En ese caso, un campo vectorial en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ es simplemente una función de U a $\mathbb{R}^n$, y puede ser visualizado como asignarle una flecha a cada punto de U. Se dice que un campo vectorial es continuo como función de U a $\mathbb{R}^n$ y se dice que es C^∞ si lo es como función de U a $\mathbb{R}^n$. En el caso general de una variedad esta idea se extiende de la siguiente manera:

Definición 2.9. Sea U un abierto de una variedad diferenciable M. Un *campo vectorial* C^∞ en U es una aplicación que asigna a cada $p \in U$ un vector tangente

$$X_p := X(p) \in T_pM,$$

tal que si $f \in C^\infty(U)$ entonces la función $Xf : U \to \mathbb{R}$ dada por $Xf(p) := X_p(f)$ es C^∞.

De aquí en adelante sólo consideraremos campos C^∞. Al conjunto de todos los campos vectoriales C^∞ en U se lo denota por $\mathfrak{X}(U)$, el cual admite estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial (de dimensión infinita) y además resulta un $C^\infty(U)$-módulo con la acción dada por $f \cdot X := fX$ donde

$$(fX)_p = f(p)X_p, \quad \text{para todo } p \in U.$$

De manera análoga podemos definir campos vectoriales a lo largo de curvas.

Definición 2.10. Una *curva* en una variedad M es una función $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ que es C^∞. Se define un *campo vectorial* C^∞ *a lo largo de una curva* $\gamma : I \to M$ como una aplicación V que a cada $t \in I$ le asocia un vector tangente $V_t := V(t) \in T_{\gamma(t)}M$ tal que si $f \in C^\infty(M)$, la función $t \to V_t(f)$ es C^∞ en I. El campo vectorial $(d\gamma)_t \frac{d}{dr}\big|_t \in T_{\gamma(t)}M$, indicado $\gamma'(t)$, se llama el *campo velocidad*[1] o *campo tangente* de γ en t.

Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $F : M \to N$ diferenciable, nos preguntamos si existe alguna manera de definir un campo $Y \in \mathfrak{X}(N)$ que esté relacionado de alguna manera con X.

Definición 2.11. Sea $F : M \to N$ una función diferenciable y sean $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$. Se dice que X e Y están *F-relacionados* si

$$(dF)_pX_p = Y_{F(p)}, \quad \text{para todo } p \in M.$$

Se suele denotar $X \sim_F Y$ para indicar que X e Y están F-relacionados.

En general, dados X y F podría no existir ningún campo vectorial $Y \in \mathfrak{X}(N)$ que esté F-relacionado con X. Sin embargo, existe un caso especial en el cual siempre existe el campo Y buscado.

Definición 2.12. Sean $F : M \to N$ un difeomorfismo y $X \in \mathfrak{X}(M)$. Se define el *pushforward* de X por F como el campo vectorial F_*X en N dado por

$$(F_*X)_{F(p)} := (dF)_pX_p, \quad p \in M.$$

Observación. Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ entonces $F_*X \in \mathfrak{X}(N)$. En efecto, si $g \in C^\infty(N)$, por la definición de F_* resulta $(F_*X)g = X(g \circ F) \circ F^{-1}$, la cual es una composición de funciones C^∞. Notemos que al ser F un difeomorfismo, $(dF)_p$ es un isomorfismo para todo $p \in M$, y por lo tanto F_*X es el único campo vectorial C^∞ en N que está F-relacionado con X. $\triangle$

Una propiedad importante que usaremos más adelante y se verifica fácilmente es

$$F_*(gX + hY) = (g \circ F^{-1})F_*X + (h \circ F^{-1})F_*Y, \quad \text{donde } X, Y \in \mathfrak{X}(M) \text{ y } g, h \in C^\infty(M).$$

Una manera importante de combinar dos campos vectoriales C^∞ y obtener otro campo vectorial C^∞ es usando el denominado corchete de Lie.

[1] De aquí en adelante sólo consideraremos curvas *regulares*, es decir que $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

Definición 2.13. Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ se define su *corchete de Lie* $[X, Y]$ por

$$[X, Y]_p(f) := X_p(Yf) - Y_p(Xf), \qquad p \in M\,, f \in C^\infty(M).$$

Es fácil verificar que $[X, Y]_p \in T_pM$ para todo $p \in M$ y que $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$, es decir que $[X, Y]$ resulta efectivamente un campo vectorial C^∞.

La siguiente proposición, la cual se prueba usando sólo la definición del corchete de Lie, resume las propiedades importantes que nos serán de gran utilidad en secciones posteriores.

Proposición 2.14. *Sean $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, sean $a, b \in \mathbb{R}$, $p \in M$ y sean $f, g \in C^\infty(M)$. Entonces valen las siguientes propiedades:*

(1) Bilinealidad:

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z],$$
$$[Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y].$$

(2) Antisimetría:

$$[Y, X] = -[X, Y].$$

(3) Identidad de Jacobi:

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0.$$

(4) *Si $(U, \varphi = (x_1, ..., x_n))$ es un entorno coordenado en M entonces*

$$\Big[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\Big] = 0 \quad \textit{para todo } i, j.$$

Una propiedad importante que involucra campos F-relacionados y el corchete de Lie es la siguiente proposición, la cual nuevamente no es difícil de verificar.

Proposición 2.15. *Sea $F : M \to N$ una función diferenciable y sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $Z, W \in \mathfrak{X}(N)$. Si $X \sim_F Z$ e $Y \sim_F W$ entonces $[X, Y] \sim_F [Z, W]$.*

Corolario 2.16. *Si $F : M \to N$ es un difeomorfismo y $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, entonces*

$$F_*[X, Y] = [F_*X, F_*Y]$$

Demostración: Por la proposición anterior, $[F_*X, F_*Y] \sim_F [X, Y]$. Por unicidad del pushforward se concluye la prueba. $\square$

Lo último que necesitaremos introducir de la teoría general de variedades diferenciables, es la noción de orientación en variedades.

Definición 2.17. Sea M una variedad diferenciable conexa de dimensión n. Se dice que M es *orientable* si existe un atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A\}$ con $\varphi_\alpha = (x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha)$ tal que para todos los índices $\alpha, \beta \in A$ con $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, se cumple

$$\det \left[\frac{\partial x_i^\alpha}{\partial x_j^\beta}\right]_{(i,j)} > 0 \quad \text{en } U_\alpha \cap U_\beta.$$

Existe una noción equivalente que usaremos en las próximas secciones para probar que una variedad es orientable, que está relacionada a la existencia de una n-forma. Recordemos que una *n-forma* en M es una aplicación

$$\omega : M \to \Lambda^n(M),$$

tal que $\omega_p \in \Lambda^n(T_p^*M)$, donde

$$\Lambda^n(T_p^*M) = \{\sigma : (T_p^*M)^n \to \mathbb{R} \mid \sigma \text{ es multilineal y alternante}\}^2.$$

[2] Se denota T_p^*M a $(T_pM)^*$, el espacio cotangente a M en p.

Una n-forma ω es C^∞ si dados $X_1, \dots, X_n$ campos C^∞ la función $\omega(X_1, \dots, X_n) : M \to \mathbb{R}$ definida por $\omega(X_1, \dots, X_n)(p) := \omega_p(X_1(p), \dots, X_n(p))$ es C^∞.

Dado un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V y dadas $\sigma \in \Lambda^k(V^*)$ y $\tau \in \Lambda^\ell(V^*)$ se define una operación $\wedge$ tal que $\sigma \wedge \tau \in \Lambda^{k+\ell}(V^*)$. No daremos la definición de $\wedge$ pero sí mencionaremos algunas propiedades que nos serán útiles después.

- Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V y sea $\{e^1, \dots, e^n\}$ su base dual. Entonces
$$(e^1 \wedge \cdots \wedge e^n)(e_1, \dots, e_n) = 1.$$

- Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V y sea $\omega \in \Lambda^n(V^*)$. Si $w_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j$ son n vectores en V, entonces
$$\omega(w_1, \dots, w_n) = \det(a_{ij})\omega(v_1, \dots, v_n).$$

Más adelante, en vez de usar la definición para probar que una variedad es orientable usaremos un criterio equivalente dado en términos de la existencia de una n-forma.

Teorema 2.18. *Sea M una variedad diferenciable conexa de dimensión n. Son equivalentes*[3]*:*
(1) *M es orientable.*
(2) *Existe una n-forma continua nunca nula en M.*
(3) *Existe una n-forma diferenciable nunca nula en M.*

Una clase especial de variedades que son orientables son las llamadas paralelizables.

Definición 2.19. Una variedad M se dice *paralelizable* si existen n campos $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{X}(M)$ tales que $\{X_1|_p, \dots, X_n|_p\}$ es base de T_pM para todo $p \in M$.

Teorema 2.20. *Toda variedad paralelizable es orientable.*

Demostración: Para cada $p \in M$, definimos $\omega_p = e^1 \wedge \cdots \wedge e^n$, donde $\{e^1, \dots, e^n\}$ es la base dual de $\{X_1|_p, \dots, X_n|_p\}$ en T_pM. Entonces ω define una n-forma nunca nula que resulta C^∞, hecho que se sigue de que la función $\omega(X_1, \dots, X_n) : M \to \mathbb{R}$ es constante para la base global de campos $\{X_1, \dots, X_n\}$ de M. Por lo tanto, M es orientable. $\square$

2. Conexiones y curvatura

En la sección anterior hemos introducido los conceptos básicos de variedades diferenciables. En esta sección profundizamos más para poder definir lo que es una variedad compacta plana, objeto que estará muy relacionado con los grupos de Bieberbach vistos en el capítulo anterior, como veremos.

Para hablar de una variedad plana, necesitamos una noción de curvatura. Para tener una noción de curvatura, necesitaremos un objeto llamado conexión.

Definición 2.21. Sea M una variedad C^∞. Una *conexión afín* en M es una aplicación
$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$
la cual es denotada por $(X, Y) \xrightarrow{\nabla} \nabla_X Y$ y que satisface las siguientes propiedades:

(1) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$.

(2) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$.

(3) $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$,

donde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ y $f, g \in C^\infty(M)$.

[3]Una prueba puede encontrarse en [**24**, Proposición 15.5].

Ejemplo 2.22 (Conexión euclídea). En $\mathbb{R}^n$ definimos una conexión de la siguiente manera: Dado $x \in \mathbb{R}^n$ una base del espacio tangente es el conjunto $\{\frac{\partial}{\partial r_1}\big|_x, \ldots, \frac{\partial}{\partial r_n}\big|_x\}$, donde $\frac{\partial}{\partial r_i}\big|_x$ es la i-ésima derivada parcial evaluada en el punto x. Se define

$$\Big(\nabla_{\frac{\partial}{\partial r_i}} \frac{\partial}{\partial r_j}\Big)_x = 0, \qquad 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n,\ x \in \mathbb{R}^n,$$

y se extiende según la definición de conexión. La conexión ∇ se llama la *conexión euclídea*.
Si $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ entonces $X = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial r_i}$, $Y = \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial}{\partial r_j}$ con $a_i, b_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Luego se tiene que

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_{\sum a_i \frac{\partial}{\partial r_i}} \sum b_j \frac{\partial}{\partial r_j} \\
&= \sum_{i,j} a_i \left(\frac{\partial b_j}{\partial r_i} \frac{\partial}{\partial r_j} + b_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial r_i}} \frac{\partial}{\partial r_j} \right) \\
&= \sum_j X(b_j) \frac{\partial}{\partial r_j}.
\end{aligned}$$

Observemos que, identificando $T_x\mathbb{R}^n$ con $\mathbb{R}^n$, podemos pensar al campo Y como la función $Y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $Y = (b_1, \ldots, b_n)$. En consecuencia $\nabla_X Y = (X(b_1), \ldots, X(b_n))$ y así $(\nabla_X Y)_x = X_x(Y)$ que es la derivada direccional de Y en la dirección del vector X_x.

Observación. Toda variedad C^∞ admite una conexión afín. Esto se puede demostrar copiando la conexión euclídea de $\mathbb{R}^n$ en cada entorno coordenado de la variedad y luego, usando una partición de la unidad, se puede definir una conexión en toda la variedad. $\triangle$

Una conexión es una noción local, como lo muestra la siguiente proposición. A partir de aquí en esta sección habrá varios resultados que no demostraremos, pues son resultados básicos de geometría riemanniana. Una referencia para consultar las demostraciones es [**15**].

Proposición 2.23. *Sea ∇ una conexión afín en una variedad diferenciable M, sea $p \in M$ y sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Entonces vale que:*

(1) *$(\nabla_X Y)_p$ depende de X e Y sólo en un entorno abierto de p, es decir que si X_1, Y_1 son campos C^∞ que satisfacen $X_1 = X$ y $Y_1 = Y$ en algún entorno de p entonces $(\nabla_{X_1} Y_1)_p = (\nabla_X Y)_p$.*
(2) *$(\nabla_X Y)_p$ depende sólo de X_p y del valor de Y a lo largo de una curva que define a X_p, es decir una curva γ tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = X_p$.*

La noción de conexión proporciona una manera de derivar vectores a lo largo de curvas.

Proposición 2.24. *Sea M una variedad diferenciable con una conexión afín ∇. Entonces existe una única correspondencia que asocia a cada campo vectorial V a lo largo de la curva $\gamma : I \to M$ otro campo vectorial $\frac{DV}{dt}$ a lo largo de γ, llamada la derivada covariante de V a lo largo de γ, tal que:*

(1) *Si W es un campo vectorial a lo largo de γ y $f \in C^\infty(I)$, entonces*
$$\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt} \quad y \quad \frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}.$$
(2) *Si V es la restricción de un campo $Y \in \mathfrak{X}(M)$, es decir $V_t = Y_{\gamma(t)}$ para todo $t \in I$, entonces*
$$\frac{DV}{dt}\Big|_t = (\nabla_{\gamma'} Y)_{\gamma(t)}.$$

Notar que la última línea tiene sentido por el punto (2) de la Proposición 2.23.

Observación. (Fórmula de la derivada covariante en coordenadas)

Sea $\gamma : I \to M$ una curva en la variedad diferenciable M. Sea $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ un entorno coordenado de M tal que $\gamma(I) \cap U \neq \emptyset$. Sea $V_t = \sum_{j=1}^n v_j(t) \frac{\partial}{\partial x_j}\big|_{\gamma(t)}$ con $v_j \in C^\infty(I)$. Usando las propiedades (1), (2) y (3), no es difícil verificar que la derivada covariante viene dada localmente en coordenadas por

$$\frac{DV}{dt}\Big|_t = \sum_j v_j'(t) \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{\gamma(t)} + \sum_{i,j} \gamma_i'(t) v_j(t) (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j})_{\gamma(t)},$$

donde $(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$ son las componentes de $\varphi(\gamma(t))$ en $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ y $\gamma_i \in C^\infty(I)$. $\triangle$

Se sigue ahora de una manera natural el concepto de paralelismo.

Definición 2.25. Sea M una variedad diferenciable con una conexión afín ∇. Se dice que un campo vectorial V a lo largo de la curva $\gamma : I \to M$ es *paralelo* si $\frac{DV}{dt} \equiv 0$.

Ejemplo 2.26. En $\mathbb{R}^n$ con la conexión euclídea, al ser $(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}) \equiv 0$, la derivada covariante de un campo vectorial $V = \sum v_j \frac{\partial}{\partial r_j}$ a lo largo de una curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ está dada por

$$\frac{DV}{dt}\Big|_t = \sum_j v_j'(t) \frac{\partial}{\partial r_j}\Big|_{\gamma(t)}.$$

De aquí se sigue que un campo vectorial V es paralelo en $\mathbb{R}^n$ si y sólo si sus componentes v_j son constantes para todo j.

Sean ahora M y N variedades diferenciables tales que ∇ es una conexión afín en N. Supongamos que $F : M \to N$ es una función diferenciable. Nos preguntamos si es posible inducir una conexión en M mediante F que esté relacionada con ∇. En el caso especial en que F es un difeomorfismo esto siempre puede hacerse.

Proposición 2.27. *Sean $F : M \to N$ un difeomorfismo y ∇ una conexión afín en N. Sea $p \in M$ y sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Si definimos $\tilde{\nabla}$ mediante la ecuación*

$$(dF)_p(\tilde{\nabla}_X Y)_p = (\nabla_{F_* X} F_* Y)_{F(p)},$$

entonces $\tilde{\nabla}$ es una conexión afín en M.

Demostración: Notemos que la asignación $(X, Y) \to \tilde{\nabla}_X Y$ está bien definida pues al ser F un difeomorfismo, se tiene que $(dF)_p$ es un isomorfismo para todo $p \in M$. Más aún, $\tilde{\nabla}_X Y$ es el pushforward del campo $\nabla_{F_* X} F_* Y$ por el difeomorfismo F^{-1}, por lo que $\tilde{\nabla}_X Y$ es C^∞. Verificamos a continuación las propiedades de conexión. Sean $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ y $g, h \in C^\infty(M)$. Entonces:

- $\tilde{\nabla}_{gX+hY} Z = g\tilde{\nabla}_X Z + h\tilde{\nabla}_Y Z$.

$$\begin{aligned}
(dF)_p(\tilde{\nabla}_{gX+hY} Z)_p &= (\nabla_{F_*(gX+hY)} F_* Z)_{F(p)} \\
&= (\nabla_{(g\circ F^{-1})(F_* X)+(h\circ F^{-1})(F_* Y)} F_* Z)_{F(p)} \\
&= g(p)(\nabla_{F_* X} F_* Z)_{F(p)} + h(p)(\nabla_{F_* X} F_* Z)_{F(p)} \\
&= g(p)(dF)_p(\tilde{\nabla}_X Z)_p + h(p)(dF)_p(\tilde{\nabla}_Y Z)_p \\
&= (dF)_p(g\tilde{\nabla}_X Z + h\tilde{\nabla}_Y Z)_p.
\end{aligned}$$

- $\tilde{\nabla}_X (Y + Z) = \tilde{\nabla}_X Y + \tilde{\nabla}_X Z$.

$$\begin{aligned}
(dF)_p(\tilde{\nabla}_X (Y + Z))_p &= (\nabla_{F_* X} F_*(Y + Z))_{F(p)} \\
&= (\nabla_{F_* X} (F_* Y + F_* Z))_{F(p)} \\
&= (\nabla_{F_* X} F_* Y)_{F(p)} + (\nabla_{F_* X} F_* Z)_{F(p)} \\
&= (dF)_p(\tilde{\nabla}_X Y + \tilde{\nabla}_X Z)_p.
\end{aligned}$$

- $\tilde{\nabla}_X(gY) = (Xg)Y + g\tilde{\nabla}_X Y$.

$$\begin{aligned}
(dF)_p(\tilde{\nabla}_X(gY))_p &= (\nabla_{F_*X}F_*(gY))_{F(p)} \\
&= (\nabla_{F_*X}(g\circ F^{-1})F_*Y)_{F(p)} \\
&= ((F_*X)(g\circ F^{-1})F_*Y + (g\circ F^{-1})\nabla_{F_*X}F_*Y)_{F(p)} \\
&= (F_*X)(g\circ F^{-1})_{F(p)}(F_*Y)_{F(p)} + g(p)(\nabla_{F_*X}F_*Y)_{F(p)} \\
&= ((dF)_pX_p)(g\circ F^{-1})(dF)_pY_p + g(p)(dF)_p(\tilde{\nabla}_X Y)_p \\
&= X_p(g)(dF)_pY_p + (dF)_p(g\tilde{\nabla}_X Y)_p \\
&= (dF)_p((Xg)Y + g\tilde{\nabla}_X Y)_p.
\end{aligned}$$

Como $(dF)_p$ es un isomorfismo para todo $p \in M$, resulta $\tilde{\nabla}$ conexión afín en M. $\square$

Definición 2.28. Si $F : M \to N$ es un difeomorfismo y ∇ es una conexión en N definimos la *conexión inducida* por ∇ como $\tilde{\nabla}$, y la denotamos $F_*\nabla := \tilde{\nabla}$. Si M tiene una conexión ∇^* tal que $\nabla^* = F_*\nabla$ y F es un difeomorfismo se dice que F es una *equivalencia afín*.

Ahora pasamos a definir otro objeto que necesitamos, la curvatura. Toda conexión afín da origen a un tensor de curvatura, que mide en algún sentido cuánto difiere la conexión de la conexión euclídea en $\mathbb{R}^n$, la cual enseguida veremos que posee tensor de curvatura nulo.

Definición 2.29. La *curvatura* R de una conexión afín ∇ en una variedad M es una correspondencia que asocia a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ una aplicación $R(X,Y)$, llamado *operador de curvatura*, donde $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ está definido por

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z, \quad Z \in \mathfrak{X}(M).$$

El siguiente lema, que es fácil de verificar usando las propiedades de ∇ y las propiedades del corchete, asegura que R es un tensor[4] de tipo $(1,3)$ en M, por lo que el valor de $R(X,Y)Z$ en p sólo depende del valor de X, Y, Z en p.

Lema 2.30. *La curvatura R de una conexión afín ∇ tiene las siguientes propiedades:*

(1) *R es $C^\infty(M)$-bilineal en $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$, esto es,*

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1),$$

$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2),$$

para $f, g \in C^\infty(M)$, $\quad X_1, Y_1, X_2, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$.

(2) *Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, el operador de curvatura $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ es $C^\infty(M)$-lineal, es decir*

$$R(X,Y)(fZ + W) = fR(X,Y)Z + R(X,Y)W,$$

para $f \in C^\infty(M)$, $Z, W \in \mathfrak{X}(M)$.

Ejemplo 2.31. En el caso de $\mathbb{R}^n$ con la conexión euclídea, si denotamos $X_j = \frac{\partial}{\partial r_j}$ resulta

$$R(X_i, X_j)X_k = \nabla_{X_i}\nabla_{X_j}X_k - \nabla_{X_j}\nabla_{X_i}X_k - \nabla_{[X_i,X_j]}X_k = 0,$$

donde hemos usado que $\nabla_{X_\ell}X_s = 0$ para todos s y ℓ , y que $[X_i, X_j] = 0$. Dado que $R(X,Y)Z$ es $C^\infty(M)$-lineal como función de las 3 variables por el Lema 2.30, concluimos que $R \equiv 0$.

Es de nuestro interés estudiar conexiones con un tensor de curvatura muy particular.

[4] No profundizaremos sobre la definición de un tensor.

DEFINICIÓN 2.32. Una conexión afín ∇ en M tal que su tensor de curvatura asociado R es nulo será denominada una conexión *plana*.

Será útil en próximas secciones saber cómo se comporta la curvatura respecto a la construcción de la conexión inducida.

LEMA 2.33. *Si $F : M \to N$ es una equivalencia afín, entonces*

$$F_*(R^M(X,Y)Z) = R^N(F_*X, F_*Y)F_*Z.$$

DEMOSTRACIÓN: Usando que F es una equivalencia afín y la definición de F_* se tiene,

$$\begin{aligned}
(F_*(R^M(X,Y)Z))_{F(p)} &= (dF)_p(R^M(X,Y)Z)_p \\
&= (dF)_p(\nabla^M_X\nabla^M_Y Z)_p - (dF)_p(\nabla^M_Y\nabla^M_X Z)_p - (dF)_p(\nabla^M_{[X,Y]}Z)_p \\
&= (\nabla^N_{F_*X}F_*\nabla^M_Y Z)_{F(p)} - (\nabla^N_{F_*Y}F_*\nabla^M_X Z)_{F(p)} - (\nabla^N_{F_*[X,Y]}F_*Z)_{F(p)} \\
&= (\nabla^N_{F_*X}\nabla^N_{F_*Y}F_*Z - \nabla^N_{F_*Y}\nabla^N_{F_*X}F_*Z - \nabla^N_{[F_*X,F_*Y]}F_*Z)_{F(p)} \\
&= (R^N(F_*X,F_*Y)F_*Z)_{F(p)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, vale la igualdad del enunciado. □

Estamos interesados en una clase especial de conexiones planas, con mayores simetrías. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^n$ con la conexión euclídea, si $X_i = \frac{\partial}{\partial r_i}$, $X = \sum a_i X_i$ e $Y = \sum b_j X_j$ entonces se satisface que

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = \sum_j (Xb_j - Ya_j)X_j = \sum_j Xb_jX_j - \sum_i Yb_iX_i = \sum_{i,j}[a_iX_i, b_jX_j] = [X,Y].$$

DEFINICIÓN 2.34. Sean X e Y campos vectoriales C^∞ en una variedad diferenciable M con una conexión afín ∇. Definimos un campo vectorial $T(X,Y)$ por

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y].$$

El campo vectorial T es llamado la *torsión* de ∇. La conexión ∇ se dice *simétrica* o *libre de torsión* si $T \equiv 0$, equivalentemente

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y], \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Es directo verificar que T es $C^\infty(M)$-bilineal, por lo tanto $T(X,Y)_p$ sólo depende del valor de X_p e Y_p.

Nos introducimos ahora en el mundo de las variedades riemannianas, para hallar una conexión con propiedades y simetrías especiales.

DEFINICIÓN 2.35. Una *métrica riemanniana* en una variedad diferenciable es una aplicación $\langle\, , \rangle$ tal que asocia a cada $p \in M$ un producto interno $\langle\, , \rangle_p$ en T_pM que es diferenciable en el siguiente sentido[5]: si $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ es un entorno coordenado de p en M, la función $p \mapsto \langle \frac{\partial}{\partial x_i}\big|_p, \frac{\partial}{\partial x_j}\big|_p \rangle_p$ es C^∞ para todo i, j. La variedad M con una métrica riemanniana $\langle\, , \rangle$ dada se llamará una *variedad riemanniana* y será denotada por $(M, \langle\, , \rangle)$.

EJEMPLO 2.36. En $\mathbb{R}^n$ definimos una métrica riemanniana $\langle\, , \rangle$ mediante

$$\Big\langle \frac{\partial}{\partial r_i}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial r_j}\Big|_p \Big\rangle_p = \delta_{ij}.$$

Esta métrica es llamada la *métrica usual de* $\mathbb{R}^n$ o *métrica euclídea.*

[5]Esta definición no depende de la elección del sistema coordenado (U, φ) y además es equivalente a pedir que $\langle X, Y \rangle$ sea diferenciable para todo par de campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Observación. Toda variedad diferenciable admite una métrica riemanniana. En efecto, localmente en entornos coordenados de la variedad podemos copiar la métrica euclídea y luego usar una partición de la unidad para extender la métrica a toda la variedad. $\triangle$

Luego de introducir cualquier tipo de estructura matemática, debemos decir cuando dos de los objetos de esta estructura son el mismo.

Definición 2.37. Sean $(M, \langle\,,\rangle^M)$ y $(N, \langle\,,\rangle^N)$ variedades riemannianas y sea $F: M \to N$ un difeomorfismo, entonces F se dice una *isometría* si

$$\langle u, v\rangle_p^M = \langle (dF)_p u, (dF)_p v\rangle_{F(p)}^N, \qquad p \in M,\ u, v \in T_pM.$$

Una función $F: M \to N$ C^∞ se dice una *isometría local* si para todo $p \in M$ existe un entorno abierto U de p tal que $F(U)$ es abierto en N y $F\big|_U : U \to F(U)$ es isometría.

En nuestro estudio de las conexiones, es deseable una conexión que respete de algún modo la estructura de variedad riemanniana. Las condiciones de compatibilidad vienen dadas por la siguiente proposición.

Proposición 2.38. *Sea $(M, \langle\,,\rangle)$ variedad riemanniana con una conexión afín ∇. Son equivalentes:*

(1) *Para todo par de campos V y W a lo largo de una curva $\gamma: I \to M$, se tiene:*

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \Big\langle \frac{DV}{dt}, W\Big\rangle + \Big\langle V, \frac{DW}{dt}\Big\rangle,$$

donde $\langle V, W\rangle(t) := \langle V_t, W_t\rangle_{\gamma(t)}$.

(2) *Para todo par de campos paralelos P y P' a lo largo de la curva $\gamma: I \to M$ se tiene que $\langle P, P'\rangle$ es una función constante.*

(3) *Dados $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, se tiene*

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle.$$

Definición 2.39. Sea $(M, \langle\,,\rangle)$ una variedad riemanniana con una conexión afín ∇. Se dice que la conexión ∇ es *compatible con la métrica* si ocurre $(1), (2)$ o (3) de la proposición anterior.

El siguiente teorema revela la existencia en una variedad riemanniana de una conexión afín simétrica y compatible con la métrica dada. Más aún, esta conexión resultará única con estas propiedades.

Teorema 2.40. *Sea $(M, \langle\,,\rangle)$ una variedad riemanniana. Entonces existe una única conexión afín ∇ en M que satisface ser compatible con la métrica y sin torsión.*

Nota. La conexión ∇ del Teorema 2.40 se suele llamar la *conexión de Levi-Civita* (también conocida como *conexión riemanniana*) asociada a $(M, \langle\,,\rangle)$. La idea de la demostración del teorema es suponer que una tal conexión existe, y deducir la fórmula para la misma, luego probar que tal fórmula determina una conexión que cumple las propiedades. Esta idea es común de varias demostraciones en geometría riemanniana. La conexión de Levi-Civita de M está definida por la llamada *fórmula de Koszul*: dados $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$,

$$2\langle \nabla_X Y, Z\rangle = X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle + \langle [X,Y], Z\rangle - \langle [Y,Z], X\rangle + \langle [Z,Y], X\rangle.$$

Ejemplo 2.41. En $\mathbb{R}^n$, usando la fórmula de Koszul, se llega a que la conexión de Levi-Civita asociada a la métrica euclídea es la conexión euclídea. En efecto, denotemos $X_j = \frac{\partial}{\partial r_j}$. Primero veamos que $\langle \nabla_{X_i} X_j, X_k\rangle = 0$ para todos i, j, k. En la fórmula de Koszul tenemos dos tipos de términos, términos como $X_i\langle X_j, X_k\rangle$ y términos como $\langle [X_i, X_j], X_k\rangle$. Los primeros términos son 0 pues $\langle X_j, X_k\rangle$ es una función constante por lo que al derivarla resulta 0; y los últimos términos son 0 porque el corchete de Lie de dos campos coordenados es nulo. Por lo tanto, al ser $\langle\, ,\rangle$ un producto interno, resulta $\nabla_{X_i} X_j = 0$ para todos i, j, por lo que la conexión de Levi-Civita es la conexión euclídea.

Ahora podemos definir el concepto que nos interesa de este capítulo.

Definición 2.42. Una variedad riemanniana $(M, \langle\, ,\rangle)$ se dice *plana* si su conexión de Levi-Civita es plana.

Veremos en la sección 4 que toda variedad compacta plana es de la forma $\mathbb{R}^n/\Gamma$ donde Γ es un subgrupo de Bieberbach de $\mathcal{M}_n$, lo cual nos permitirá aplicar la teoría de grupos de Bieberbach al estudio de estas variedades.

Para concluir esta sección, probamos que las isometrías son equivalencias afines entre las conexiones de Levi-Civita.

Proposición 2.43. *Sean M y N variedades riemannianas con conexiones de Levi-Civita asociadas ∇^M y ∇^N respectivamente. Sea $F : M \to N$ una isometría, entonces para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ se cumple*

$$(\nabla^N_{F_*X} F_*Y)_{F(p)} = (dF)_p(\nabla^M_X Y)_p, \quad p \in M,$$

es decir F es una equivalencia afín.

Demostración: Veamos que la conexión inducida en M por ∇^N, $F_*\nabla^N$, coincide con la conexión de Levi-Civita de M. Para ello, debemos ver que $\tilde{\nabla} = F_*\nabla^N$ es sin torsión y compatible con la métrica riemanniana $\langle\, ,\rangle^M$. Sean $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ y $g \in C^\infty(M)$. Entonces $\tilde{\nabla}$ es:

• Sin torsión.

$$F_*(\tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X)_{F(p)} = (\nabla^N_{F_*X} F_*Y - \nabla^N_{F_*Y} F_*X)_{F(p)} = [F_*X, F_*Y]_{F(p)} = (F_*[X, Y])_{F(p)},$$

Por definición de F_* resulta que $(dF)_p((\tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X)_p = (dF)_p([X, Y])$, y al ser $(dF)_p$ un isomorfismo para todo $p \in M$, resulta $\tilde{\nabla}$ sin torsión.

• Compatible con la métrica.
Como F es isometría, vale que $\langle Y, Z\rangle = \langle F_*Y, F_*Z\rangle \circ F$. En efecto, si $q \in M$,

$$(\langle F_*Y, F_*Z\rangle \circ F)(q) = \langle F_*Y, F_*Z\rangle_{F(q)} = \langle (dF)_q Y_q, (dF)_q Z_q\rangle_{F(q)} = \langle Y_q, Z_q\rangle_q = \langle Y, Z\rangle(q).$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
(\langle \tilde{\nabla}_X Y, Z\rangle + \langle Y, \tilde{\nabla}_X Z\rangle)(p) &= \langle F_*(\tilde{\nabla}_X Y), F_*Z\rangle_{F(p)} + \langle F_*Y, F_*(\tilde{\nabla}_X Z)\rangle_{F(p)} \\
&= \langle \nabla_{F_*X} F_*Y, F_*Z\rangle_{F(p)} + \langle F_*Y, \nabla_{F_*X} F_*Z\rangle_{F(p)} \\
&= ((F_*X)\langle F_*Y, F_*Z\rangle)(F(p)) \\
&= (dF)_p X_p \langle F_*Y, F_*Z\rangle \\
&= X_p(\langle F_*Y, F_*Z\rangle \circ F) \\
&= X\langle Y, Z\rangle(p).
\end{aligned}$$

En consecuencia, $\tilde{\nabla}$ es sin torsión y compatible con la métrica $\langle\, ,\rangle^M$. Por unicidad $\tilde{\nabla} = \nabla^M$ y por lo tanto vale la afirmación del enunciado. $\square$

3. Transporte paralelo y holonomía

En esta sección profundizaremos sobre el concepto de paralelismo, el cual permite de alguna manera transportar información geométrica a lo largo de la variedad mediante curvas. Sea M una variedad diferenciable con una conexión afín ∇ (no necesariamente la conexión de Levi-Civita de M). Recordemos que un campo vectorial V a lo largo de una curva $\gamma : \mathrm{I} \to M$ se dice paralelo si $\frac{DV}{dt} \equiv 0$.

PROPOSICIÓN 2.44. *Sea M una variedad C^∞ con una conexión afín ∇. Sea $\gamma : I \to M$ una curva C^∞ en M y $v_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$ para algún $t_0 \in I$. Entonces existe un único campo vectorial V paralelo a lo largo de γ tal que $V(t_0) = v_0$.*

Esta proposición permite relacionar de alguna manera los espacios tangentes a puntos distintos de una curva.

DEFINICIÓN 2.45. Se define el *transporte paralelo a lo largo de una curva* $\gamma : I \to M$ desde t_0 hasta t_1 por la aplicación $P_\gamma : T_{\gamma(t_0)}M \to T_{\gamma(t_1)}M$ tal que $P_\gamma(v_0) = V(t_1)$, donde V es el único campo paralelo a lo largo de γ tal que $V(t_0) = v_0$.

LEMA 2.46. *El transporte paralelo a lo largo de $\gamma : [t_0, t_1] \to M$ no depende de la parametrización de γ. Más precisamente, si $\phi : [t_0', t_1'] \to [t_0, t_1]$ es una función C^∞ con $\phi(t_0') = t_0$ y $\phi(t_1') = t_1$, entonces $P_\gamma = P_{\gamma\circ\phi}$.*

DEMOSTRACIÓN: El hecho que usaremos es que si V es un campo paralelo a lo largo de γ entonces $V \circ \phi$ es un campo paralelo a lo largo de $\gamma \circ \phi$. Esto se comprueba usando la fórmula de la derivada covariante en coordenadas.

Sea $v_0 \in T_{\gamma(t_0)}U$ arbitrario, por un lado $P_\gamma(v_0) = V(t_1)$ donde V es el único campo paralelo a lo largo de γ tal que $V(t_0) = v_0$. Por otro lado $P_{\gamma\circ\phi}(v_0) = W(t_1')$ donde W es el único campo paralelo a lo largo de $\gamma \circ \phi$ tal que $W(t_0') = v_0$. Pero $V \circ \phi$ también es un campo paralelo tal que $V \circ \phi(t_0') = V(t_0) = v_0$, luego por la unicidad de la Proposición 2.44 obtenemos que $V \circ \phi = W$ y así $P_{\gamma\circ\phi}(v_0) = W(t_1) = V \circ \phi(t_1') = V(t_1) = P_\gamma(v_0)$. □

Siempre que hablemos de transporte paralelo de aquí en adelante, podemos suponer por este lema, que el dominio de las curvas es el intervalo $[0, 1]$. Probamos a continuación otras propiedades básicas que necesitaremos posteriormente.

PROPOSICIÓN 2.47. *Sea $\gamma : [0, 1] \to M$ una curva en M y $P_\gamma : T_{\gamma(0)}M \to T_{\gamma(1)}M$ el transporte paralelo asociado. Valen las siguientes propiedades:*

(1) *Sea $\sigma : [0, 1] \to M$ otra curva en M tal que $\gamma(1) = \sigma(0)$ entonces $P_{\gamma\sigma} = P_\sigma \circ P_\gamma$ donde $\gamma\sigma$ es la concatenación de γ y σ definida por*

$$\gamma\sigma(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & si\ 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \sigma(2t - 1) & si\ \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

(2) *El transporte paralelo $P_\gamma : T_{\gamma(0)}M \to T_{\gamma(1)}M$ es un isomorfismo lineal.*

(3) *Si M está orientada, el transporte paralelo preserva orientación, es decir que si $\{e_i\}_{i=1}^n$ es una base positiva de $T_{\gamma(0)}M$ entonces $\{P_\gamma(e_i)\}_{i=1}^n$ es una base positiva de $T_{\gamma(1)}M$.*

(4) *Si $(M, \langle\, ,\rangle)$ es una variedad riemanniana y ∇ es la conexión de Levi-Civita de M, entonces el transporte paralelo es una isometría de espacios producto interno, esto es*

$$\langle v_0, v_1\rangle_{\gamma(0)} = \langle P_\gamma(v_0), P_\gamma(v_1)\rangle_{\gamma(1)}, \quad v_0, v_1 \in T_{\gamma(0)}M.$$

DEMOSTRACIÓN:

(1) Veamos que $P_{\gamma\sigma} = P_\sigma \circ P_\gamma$. Sea $v_0 \in T_{\gamma(0)}M$, por un lado $P_\gamma(v_0) = V(1)$, donde V es el único campo paralelo a lo largo de γ tal que $V(0) = v_0$ y por otro lado $P_\sigma(V(1)) = W(1)$, donde W es el único campo paralelo a lo largo de σ tal que $W(0) = V(1)$.

Definimos

$$\widetilde{V}(t) = \begin{cases} V(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ W(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Entonces $\widetilde{V}$ es un campo paralelo a lo largo de $\gamma\sigma$ y $\widetilde{V}(0) = V(0) = v_0$, por lo que se tiene $P_{\gamma\sigma}(v_0) = \widetilde{V}(1) = W(1) = P_\sigma(V(1)) = P_\sigma \circ P_\gamma(v_0)$.

(2) Veamos primero que P_γ es una transformación lineal. Sean $v, w \in T_{\gamma(0)}M$, $c \in \mathbb{R}$. Debemos ver que $P_\gamma(cv + w) = cP_\gamma(v) + P_\gamma(w)$. Por un lado $P_\gamma(cv + w) = V(1)$ donde V es el único campo vectorial paralelo tal que $V(0) = cv + w$. Por otro lado, $P_\gamma(v) = V_1(1)$ y $P_\gamma(w) = V_2(1)$ donde V_1 y V_2 son los únicos campos paralelos tales que $V_1(0) = v$ y $V_2(0) = w$, respectivamente. Como el campo $cV_1 + V_2$ es paralelo y $(cV_1 + V_2)(0) = cv + w$, se sigue por unicidad que $cV_1 + V_2 = V$, y al evaluar ambos campos en 1 se tiene $P_\gamma(cv + w) = cP_\gamma(v) + P_\gamma(w)$.

Más aún, P_γ es un isomorfismo pues la aplicación $P_{\gamma^{-1}}$ es una inversa para P_γ donde γ^{-1} es recorrer en sentido inverso γ. En efecto, $P_{\gamma^{-1}} \circ P_\gamma(v_0) = P_{\gamma^{-1}}(V(1)) = W(0)$ donde W es el único campo paralelo tal que $W(1) = V(1)$. Por unicidad $W = V$ y así $W(0) = V(0) = v_0$, por lo tanto la composición da como resultado la transformación identidad. Análogamente, la otra composición también da como resultado la transformación identidad.

(3) Asumimos que M está orientada. Fijemos una n-forma diferenciable nunca nula ω. Sea $t \in [0,1]$ y sea $P_{\gamma,0,t} : T_{\gamma(0)}M \to T_{\gamma(t)}M$ el transporte paralelo asociado a γ. Supongamos que $\{e_i\}_{i=1}^n$ es una base orientada de manera positiva de $T_{\gamma(0)}M$. Esto quiere decir que $\omega_{\gamma(0)}(e_1, \ldots, e_n) > 0$. Queremos ver que $\{P_{\gamma,0,t}(e_i)\}_{i=1}^n$ también es una base positiva. Definimos

$$f(t) = \omega_{\gamma(t)}(P_{\gamma,0,t}(e_1), \ldots, P_{\gamma,0,t}(e_n)),$$

puede probarse que f es diferenciable ya que el transporte paralelo se obtiene como solución de una ecuación diferencial. Como $f(0) = \omega_{\gamma(0)}(e_1, \ldots, e_n) > 0$, si existiera algún $t^* \in [0,1]$ tal que $f(t^*) < 0$, por el teorema de los valores intermedios tendríamos que, para algún $t_1 \in [0, t^*]$ resultaría

$$0 = f(t_1) = \omega_{\gamma(t_1)}(P_{\gamma,0,t_1}(e_1), \ldots, P_{\gamma,0,t_1}(e_n))$$

lo cual es un absurdo pues ω es nunca nula, por lo que $\omega_{\gamma(t_1)}$ no puede anularse en la base $\{P_{\gamma,0,t_1}(e_i)\}_{i=1}^n$. En consecuencia $f(t) > 0$ para todo $t \in [0,1]$. En particular $f(1) > 0$ y así $\{P_\gamma(e_i)\}_{i=1}^n$ es una base positiva de $T_{\gamma(1)}M$.

(4) Sean v_0 y v_1 vectores tangentes a M en $\gamma(0)$ y sean V y W los únicos campos paralelos tales que $V(0) = v_0$ y $W(0) = v_1$ respectivamente. Se tiene que

$$\langle P_\gamma(v_0), P_\gamma(v_1)\rangle_{\gamma(1)} = \langle V(1), W(1)\rangle_{\gamma(1)} = \langle V(0), W(0)\rangle_{\gamma(0)} = \langle v_0, v_1\rangle_{\gamma(0)}.$$

En la segunda igualdad hemos usado la condición (2) de la compatibilidad con la métrica. Por lo tanto P_γ es una isometría entre los espacios $T_{\gamma(0)}M$ y $T_{\gamma(1)}M$. $\square$

La última propiedad del transporte paralelo que queremos destacar es cómo se comportan las equivalencias afines respecto del mismo.

PROPOSICIÓN 2.48. *Sean $\gamma : [0,1] \to M$ una curva C^∞ en M y $F : M \to N$ un difeomorfismo local. Sea ∇^N una conexión afín en N y sea U un abierto de M tal que $F\big|_U : U \to F(U)$ es un difeomorfismo. Si ∇^U es la conexión en U inducida por ∇^N mediante $F\big|_U$, y consideramos el transporte paralelo asociado a ∇^U y ∇^N respectivamente, entonces se tiene la relación*

$$(dF)_{\gamma(1)} \circ P_\gamma = P_{F\circ\gamma} \circ (dF)_{\gamma(0)}.$$

Demostración: Primero supongamos que $\gamma([0,1]) \subset U$. Por definición de la conexión inducida tenemos que, dados $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ y $p \in U$, vale

$$(\nabla^N_{F_* X} F_* Y)_{F(p)} = (dF)_p (\nabla^U_X Y)_p.$$

Esta relación entre las conexiones permite también dar una relación para las derivadas covariantes asociadas a ∇^U y a ∇^N respectivamente. En efecto, si V es un campo vectorial a lo largo de γ, entonces

$$(dF)_{\gamma(t)} \Big(\frac{D^U}{dt} V\Big)_t = \Big(\frac{D^N}{dt} F_* V\Big)_t, \tag{5}$$

donde $F_* V$ es un campo vectorial a lo largo de $F \circ \gamma$ definido por $(F_* V)_t = (dF)_{\gamma(t)} V_t$. Esta relación puede probarse definiendo en U una aplicación $\frac{D}{dt}$ como en (5), y verificando que esta aplicación cumple las propiedades de la derivada covariante de la Proposición 2.24, la igualdad se seguirá entonces por unicidad. Ahora, sea $v_0 \in T_{\gamma(0)} M$ y sea V el único campo paralelo tal que $V(0) = v_0$. Por un lado tenemos que

$$(dF)_{\gamma(1)} \circ P_\gamma(v_0) = (dF)_{\gamma(1)} \circ V(1) = (F_* V)(1).$$

Por otro lado tenemos que

$$P_{F\circ\gamma} \circ (dF)_{\gamma(0)}(v_0) = W(1),$$

donde W es el único campo paralelo a lo largo de $F \circ \gamma$ tal que $W(0) = (dF)_{\gamma(0)} v_0$. Como $F_* V$ también es paralelo (por (5)), y

$$F_* V(0) = (dF)_{\gamma(0)} V(0) = W(0),$$

resulta que $F_* V = W$ y así, al evaluar ambos campos en $t = 1$ se tiene la afirmación del enunciado.

Si $\gamma([0,1]) \not\subset U$, como $\gamma([0,1])$ es un conjunto compacto en M, puede ser cubierto por una cantidad finita de conjuntos abiertos U_i, digamos $U_1, \ldots, U_k$, tales que $F(U_i)$ es abierto y $F\big|_{U_i} : U_i \to F(U_i)$ es un difeomorfismo. Luego las preimágenes $\{\gamma^{-1}(U_i)\}_{i=1}^k$ forman un cubrimiento abierto del intervalo $[0,1]$, el cual es un espacio métrico compacto, por lo que existe δ, el número de Lebesgue del cubrimiento[6]. Sea $0 = s_0 < \ldots < s_n = 1$ una partición de $[0,1]$ tal que $|s_i - s_{i+1}| < \delta$ para todo $0 \le i \le n-1$. Entonces $\gamma([s_i, s_{i+1}]) \subset U_{j(i)}$ para algún i. Esto dice que vale

$$(dF)_{\gamma(s_i)} \circ P_{\gamma|_{[s_i,s_{i+1}]}} = P_{F\circ\gamma|_{[s_i,s_{i+1}]}} \circ (dF)_{\gamma(s_i)}. \tag{6}$$

Sea $v \in T_{\gamma(0)} U$, veremos que la relación (6) vale en el intervalo $[0, s_2]$. Notemos que se tiene la igualdad $\gamma\big|_{[0,s_2]} = \alpha\beta$ donde $\alpha = \gamma\big|_{[0,s_1]}$ y $\beta = \gamma\big|_{[s_1,s_2]}$, por lo que

$$P_{\gamma|_{[0,s_2]}} = P_{\alpha\beta} = P_\beta \circ P_\alpha.$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
(dF)_{\gamma(s_2)}(P_{\gamma|_{[0,s_2]}} v) &= (dF)_{\gamma(s_2)} \circ P_{\gamma|_{[s_1,s_2]}}(P_{\gamma|_{[0,s_1]}} v) \\
&= P_{F\circ\gamma|_{[s_1,s_2]}} \circ (dF)_{\gamma(s_1)}(P_{\gamma|_{[0,s_1]}} v) \\
&= P_{F\circ\gamma|_{[s_1,s_2]}} \circ P_{F\circ\gamma|_{[0,s_1]}}((dF)_{\gamma(s_0)} v) \\
&= P_{F\circ\gamma|_{[0,s_2]}}((dF)_{\gamma(s_0)} v).
\end{aligned}$$

Como v era arbitrario, vale la relación (6) en $[0, s_2]$. Prosiguiendo de esta manera vale (6) en $[0,1]$ y por lo tanto se tiene probada la proposición. □

El transporte paralelo puede extenderse a curvas (continuas) que sean diferenciables a trozos.

[6] El lema del número de Lebesgue afirma que si $\mathcal{A}$ es un cubrimiento abierto del espacio métrico compacto (X, d), existe un $\delta > 0$ tal que para cada subconjunto de X de diámetro menor que δ, existe un elemento del cubrimiento que lo contiene.

DEFINICIÓN 2.49. Sea M variedad C^∞, una *curva diferenciable a trozos* α en M es una aplicación continua $\alpha : [a,b] \to M$ para la cual existe una partición $a = t_0 < \ldots < t_n = b$ tal que $\alpha\big|_{(t_i,t_{i+1})}$ es C^∞ para todo $0 \le i \le n-1$.

Definimos el transporte paralelo (en una variedad con una conexión afín) a lo largo de una curva C^∞ a trozos simplemente por composición de los transportes paralelos a lo largo de los respectivos trozos diferenciables de la curva.

Introducimos ahora el concepto de holonomía de una conexión afín ∇ dada. Intuitivamente, este concepto medirá de algún modo la manera en que el transporte paralelo alrededor de curvas cerradas falla en preservar los datos geométricos que se transportan.

DEFINICIÓN 2.50. Dado $p \in M$, se dice que una curva C^∞ a trozos $\gamma : [0,1] \to M$ es un *lazo en p* si $\gamma(0) = \gamma(1) = p$.

Dado un lazo γ en p, por la Proposición 2.47, el transporte paralelo a lo largo de γ induce un isomorfismo lineal P_γ de T_pM en T_pM. El conjunto de todos los isomorfismos lineales de T_pM obtenidos de esta manera forma un grupo con la composición. En efecto:

- Si γ y σ son lazos en p, está bien definido el lazo $\sigma\gamma$, y resulta $P_\gamma \circ P_\sigma = P_{\sigma\gamma}$.
- Sea $\gamma : [0,1] \to M$ dada por $\gamma(t) = p$ para todo $t \in [0,1]$. Sea $v \in T_pM$, entonces, usando la fórmula de la derivada covariante en coordenadas, resulta que el campo V definido por $V_t = v$ para todo $t \in [0,1]$, es paralelo. Luego, $P_\gamma(v) = V(1) = v$ y por lo tanto $P_\gamma = \mathrm{Id}$.
- La transformación lineal $P_{\gamma^{-1}}$ es una inversa para P_γ, donde γ^{-1} es recorrer en sentido inverso a γ. Es claro que γ^{-1} es un lazo en p si γ es un lazo en p.

Definimos entonces

$$\mathrm{Hol}_p(\nabla) = \{P_\gamma : T_pM \to T_pM \mid \gamma \text{ es un lazo en } p\},$$

llamado el *grupo de holonomía de la conexión ∇ en p*. Denotamos por $\mathrm{Hol}_p^0(\nabla)$ a la componente conexa de la identidad[7] en $\mathrm{Hol}_p(\nabla)$, llamado *grupo de holonomía restringido*. En el caso en que M sea una variedad riemanniana y ∇ su conexión de Levi-Civita, hablaremos simplemente de $\mathrm{Hol}_p(M)$ y lo llamaremos *grupo de holonomía de M en p*.

EJEMPLO 2.51. En $\mathbb{R}^n$ con la conexión euclídea el transporte paralelo de vectores coincide con la idea intuitiva de trasladar paralelamente. En efecto, sea $x \in \mathbb{R}^n$ y sea $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ una curva con $\gamma(0) = x$. Sea $v \in T_x\mathbb{R}^n$, entonces $P_\gamma(v) = V(1)$ donde V es el único campo paralelo tal que $V(t_0) = v$. Hemos visto que los campos paralelos tienen sus componentes constantes, por lo que si $v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial r_i}\big|_p$ resulta $V(1) = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial r_i}\big|_{\gamma(1)}$, el cual tiene las mismas componentes que v, lo que demuestra la afirmación.

En particular, si γ es un lazo en x la cuenta anterior muestra que

$$P_\gamma(v) = V(1) = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial r_i}\Big|_{\gamma(1)} = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial r_i}\Big|_{\gamma(0)} = V(t_0) = v.$$

Por lo tanto

$$\mathrm{Hol}_x(\mathbb{R}^n) = \{\mathrm{Id}\}, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

[7] Si $n = \dim(M)$, el conjunto de todos los isomorfismos lineales de T_pM, denotado por $\mathsf{GL}(T_pM)$, es isomorfo a $\mathsf{GL}(n,\mathbb{R})$. Si le damos la topología a $\mathsf{GL}(T_pM)$ que hace que este isomorfismo sea un homeomorfismo, resulta $\mathsf{GL}(T_pM)$ un grupo topológico, y $\mathrm{Hol}_p(M)$ un subgrupo topológico de $\mathsf{GL}(T_pM)$. Entonces tiene sentido hablar de la componente conexa de la identidad.

Existe una descripción alternativa para el grupo de holonomía. Dados $p \in M$ y ∇ una conexión afín en M, se define una relación de equivalencia en la colección de todos los lazos C^∞ a trozos en p de la siguiente manera: los lazos σ y σ' están relacionados si y sólo si la traslación paralela a lo largo de σ coincide con la traslación paralela a lo largo de σ', es decir $P_\sigma = P_{\sigma'}$. En este caso se dice que σ y σ' son *holónomos*. Es trivial verificar que esta es una relación de equivalencia.

Si definimos en el conjunto de clases de equivalencia la operación $\cdot$ dada por

$$[\gamma] \cdot [\sigma] = [\gamma\sigma],$$

resulta bien definida pues si γ' y σ' son lazos holónomos a γ y σ respectivamente, entonces $P_{\gamma'} = P_\gamma$ y $P_{\sigma'} = P_\sigma$. Luego, $P_{\gamma\sigma} = P_\sigma \circ P_\gamma = P_{\sigma'} \circ P_{\gamma'} = P_{\gamma'\sigma'}$ por lo que $[\gamma'\sigma'] = [\gamma\sigma]$. La clase de equivalencia $[c]$ del lazo constante resulta un elemento neutro, y dado un lazo σ, resulta $[\sigma^{-1}] = [\sigma]^{-1}$. En consecuencia, el conjunto de clases de equivalencia de lazos holónomos, forma un grupo con la operación $\cdot$, el cual veremos a continuación que resulta isomorfo al grupo de holonomía de ∇ en p.

Lema 2.52. *El conjunto de clases de equivalencia de lazos holónomos es isomorfo a* $\mathrm{Hol}_p(\nabla)$.

Demostración: Definimos $\Phi([\sigma]) = P_{\sigma^{-1}}$. La buena definición y la inyectividad se siguen por construcción de la relación y porque $P_\sigma = P_\tau$ si y sólo si $P_{\sigma^{-1}} = P_{\tau^{-1}}$. La suryectividad se sigue por construcción de $\mathrm{Hol}_p(\nabla)$. Por último,

$$\Phi([\sigma].[\tau]) = \Phi([\sigma\tau]) = P_{(\sigma\tau)^{-1}} = P_{\tau^{-1}\sigma^{-1}} = P_{\sigma^{-1}} \circ P_{\tau^{-1}} = \Phi([\sigma]) \circ \Phi([\tau]).$$

Luego Φ es un isomorfismo de grupos. □

Se tiene el siguiente teorema que caracteriza de otra manera al grupo de holonomía restringido, cuya prueba puede encontrarse en [**30**].

Teorema 2.53. *Sea M una variedad diferenciable con una conexión afín ∇. Entonces el grupo de holonomía restringido de ∇ en p,* $\mathrm{Hol}^0_p(\nabla)$*, consiste de las clases de holonomía de lazos homotópicamente equivalentes al lazo constante* $c : [0,1] \to \{p\}$.

Corolario 2.54. *Existe un homomorfismo suryectivo*

$$\nu : \pi_1(X,p) \to \mathrm{Hol}_p(\nabla)/\,\mathrm{Hol}^0_p(\nabla).$$

Demostración: El homomorfismo consiste en mandar una clase de homotopía α a la clase de holonomía de cualquier lazo en α. Este homomorfismo está bien definido pues si $\gamma, \sigma : [0,1] \to M$ representan la misma clase en $\pi_1(X,p)$ entonces $\sigma\gamma^{-1}$ es un lazo homotópicamente nulo. Escribimos $P_\sigma = P_\gamma \circ P_{\gamma^{-1}} \circ P_\sigma = P_\gamma \circ P_{\sigma\gamma^{-1}}$. Por lo tanto P_σ representa la misma clase que P_γ en $\mathrm{Hol}_p(\nabla)/\,\mathrm{Hol}^0_p(\nabla)$. Es claro que el homomorfismo ν es suryectivo. □

Un aspecto en común entre el grupo fundamental y el grupo de holonomía es el hecho de que así como $\pi_1(M,p)$ es isomorfo a $\pi_1(M,q)$ si es que p y q pertenecen a la misma componente conexa, esto mismo sucede con el grupo de holonomía, como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 2.55. *Dados $p, q \in M$ tales que p puede unirse a q por una curva C^∞ a trozos, se tiene que* $\mathrm{Hol}_p(\nabla)$ *es isomorfo a* $\mathrm{Hol}_q(\nabla)$.

Demostración: Sea $\gamma : [0,1] \to M$ una curva C^∞ a trozos en M tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) = q$. Definimos la aplicación $\Phi : \mathrm{Hol}_p(\nabla) \to \mathrm{Hol}_q(\nabla)$ por

$$\Phi(P_\sigma) = P_\gamma \circ P_\sigma \circ P_\gamma^{-1}.$$

Tenemos que $P_\gamma \circ P_\sigma \circ P_\gamma^{-1} = P_\gamma \circ P_\sigma \circ P_{\gamma^{-1}} = P_{\gamma^{-1}\sigma\gamma}$. Además la curva $\gamma^{-1}\sigma\gamma$ es un lazo en q dado que σ es un lazo en p. Por lo tanto $\Phi(P_\sigma) \in \mathrm{Hol}_q(\nabla)$. Al ser $\mathrm{Hol}_p(\nabla)$ y $\mathrm{Hol}_q(\nabla)$ conjugados por el isomorfismo lineal P_γ, se tiene que son isomorfos. □

En una variedad M conexa, como todos los grupos de holonomía son isomorfos, a menudo omitiremos el punto base y hablaremos sólo de $\mathrm{Hol}(\nabla)$.

Antes de estudiar propiedades específicas de la holonomía asociada a la conexión de Levi-Civita de una variedad riemanniana, probamos a continuación que las equivalencias afines preservan el grupo de holonomía.

PROPOSICIÓN 2.56. *Sea $F : M \to N$ una equivalencia afín entre dos variedades diferenciables equipadas con conexiones afines ∇^M y ∇^N respectivamente. Entonces para todo $p \in M$ vale que*

$$\mathrm{Hol}_p(\nabla^M) \cong \mathrm{Hol}_{F(p)}(\nabla^N).$$

DEMOSTRACIÓN: Sean $p \in M$ y $\sigma : [0,1] \to M$ un lazo en p. Por la Proposición 2.48 se tiene la relación $(dF)_p \circ P_\gamma = P_{F\circ\gamma} \circ (dF)_p$ o equivalentemente

$$P_\gamma = (dF)^{-1}_{F(p)} \circ P_{F\circ\gamma} \circ (dF)_p,$$

por lo que $\mathrm{Hol}_p(\nabla^M)$ y $\mathrm{Hol}_{F(p)}(\nabla^N)$ son conjugados y por lo tanto isomorfos. □

Hasta ahora hemos descrito propiedades de la holonomía de una conexión afín ∇ arbitraria. Vamos a concluir esta sección probando dos propiedades acerca del grupo de holonomía para el caso particular en que ∇ es la conexión de Levi-Civita de M.

PROPOSICIÓN 2.57.

(1) *Sean $(M, \langle\,,\rangle)$ una variedad riemanniana, ∇ su conexión de Levi-Civita y $\mathrm{Hol}_p(M)$ el grupo de holonomía asociado, entonces $\mathrm{Hol}_p(M) \subset \mathsf{O}(T_pM)$. Más aún, $\mathrm{Hol}_p(M) \subset \mathsf{SO}(T_pM)$ si y sólo si M es orientable*[8].

(2) *Sean $(M_1, \langle\,,\rangle^1)$ y $(M_2, \langle\,,\rangle^2)$ variedades riemannianas con conexiones de Levi-Civita ∇^1 y ∇^2 respectivamente. Si consideramos en $M_1 \times M_2$ la métrica producto y la conexión de Levi-Civita, entonces dados $p \in M_1$ y $q \in M_2$ se cumple que*

$$\mathrm{Hol}_{(p,q)}(M_1 \times M_2) = \mathrm{Hol}_p(M_1) \times \mathrm{Hol}_q(M_2).$$

DEMOSTRACIÓN:

(1) Hemos probado en la Proposición 2.47 que el transporte paralelo asociado a la conexión de Levi-Civita es una isometría lineal, por lo tanto $\mathrm{Hol}_p(M) \subset \mathsf{O}(T_pM)$ para todo $p \in M$. A continuación demostramos la segunda afirmación.

$\Leftarrow$) Sean M orientable, $p \in M$ y σ un lazo en p. Considerando en M la conexión de Levi-Civita, tenemos que P_σ es una isometría lineal de T_pM en T_pM. Además, como el transporte paralelo preserva orientación, si $\{v_i\}_{i=1}^n$ es una base ortonormal positiva de T_pM entonces $\{P_\sigma(v_i)\}_{i=1}^n$ también lo es. Esto quiere decir $\det(P_\sigma) = 1$, pues P_σ es la matriz cambio de base entre $\{v_i\}_{i=1}^n$ y $\{P_\sigma(v_i)\}_{i=1}^n$, por lo que $P_\sigma \subset \mathsf{SO}(T_pM)$.

$\Rightarrow$) Sean $p \in M$ y $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormal positiva de T_pM. Si $q \in M$, sea γ una curva que une p con q. Consideramos P_γ el transporte paralelo a lo largo de la curva γ, y decretamos positiva en T_qM la base $\{P_\gamma(e_i)\}_{i=1}^n$. Notar que la orientación en T_qM así obtenida no depende de la curva. En efecto, si σ es otra curva que une p con q, al considerar la base $\{P_\sigma(e_i)\}_{i=1}^n$, se tiene para todo i, $P_\sigma(e_i) = (P_\sigma \circ P_{\gamma^{-1}} \circ P_\gamma)(e_i)$, por lo que

$$P_\sigma(e_1) \wedge \cdots \wedge P_\sigma(e_n) = \det(P_\sigma \circ P_{\gamma^{-1}})\, P_\gamma(e_1) \wedge \cdots \wedge P_\gamma(e_n).$$

[8]Se define $\mathsf{O}(T_pM)$ como el conjunto de transformaciones lineales de T_pM en T_pM que preservan el producto interno de T_pM y se define $\mathsf{SO}(T_pM)$ como el conjunto de transformaciones lineales de $\mathsf{O}(T_pM)$ con determinante igual a 1.

Por hipótesis $\mathrm{Hol}_q(M) \subset \mathsf{SO}(T_qM)$. Notemos que la curva $\gamma^{-1}\sigma$ es un lazo en q por lo que resulta $\det(P_\sigma P_{\gamma^{-1}}) = \det(P_{\gamma^{-1}\sigma}) = 1$ y así ambas bases determinan la misma orientación. Definimos una n-forma nunca nula ω mediante

$$\omega_p = e_1 \wedge \cdots \wedge e_n, \quad \omega_q = P_\sigma(e_1) \wedge \cdots \wedge P_\sigma(e_n),\ q \in M.$$

Dado que el transporte paralelo se obtiene como solución de una ecuación diferencial se verifica que ω es C^∞, y es claro que ω es nunca nula.

(2) Recordamos primero algunos hechos sobre variedades producto.

Fijos $p \in M_1$ y $q \in M_2$, se definen $i_q : M_1 \to M_1 \times M_2$ por $i_q(p') = (p', q)$, e i_p análogamente. Sean π_1 y π_2 las proyecciones al primer y al segundo factor, respectivamente. Entonces, se definen $F : T_pM_1 \times T_qM_2 \to T_{(p,q)}(M_1 \times M_2)$ y $G : T_{(p,q)}(M_1 \times M_2) \to T_pM_1 \times T_qM_2$ por

$$F(u, v)(f) = u(f \circ i_q) + v(f \circ i_p),$$
$$G(v) = (d\pi_1(v), d\pi_2(v)).$$

Las aplicaciones F y G resultan ser una inversa de la otra, y por lo tanto

$$T_{p,q}(M_1 \times M_2) \cong T_pM_1 \times T_qM_2.$$

La métrica riemanniana producto se define por

$$\langle u, v\rangle_{(p,q)} = \langle (d\pi_1)_{(p,q)}u, (d\pi_1)_{(p,q)}v\rangle^1_p + \langle (d\pi_2)_{(p,q)}u, (d\pi_2)_{(p,q)}v\rangle^2_q, \quad u, v \in T_{(p,q)}(M_1 \times M_2).$$

Para hablar del transporte paralelo en la variedad producto $M_1 \times M_2$, necesitamos hablar de la derivada covariante. Es sabido que la derivada covariante a lo largo de $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ asociada a la conexión de Levi-Civita es

$$\frac{DV}{dt} = \left(\frac{D^1V_1}{dt}, \frac{D^2V_2}{dt}\right).$$

La forma que tiene $\frac{D}{dt}$ implica que V_1 y V_2 son campos paralelos si y sólo si $V = (V_1, V_2)$ es paralelo. Esto permite concluir que $P_\gamma = (P_{\gamma_1}, P_{\gamma_2})$. En efecto, si $v \in T_pM_1$ y $w \in T_qM_2$, entonces $P_{\gamma_1}(v) = V_1(t_1)$ y $P_{\gamma_2}(w) = V_2(t_1)$ donde $V_1(t_0) = v$ y $V_2(t_0) = w$. Por lo tanto el campo (V_1, V_2) es paralelo y $(V_1, V_2)(t_0) = (v, w) = V(t_0)$, donde V es el campo paralelo que se obtiene al trasladar paralelamente a lo largo de γ el vector (v, w). Luego $V = (V_1, V_2)$ y así $P_\gamma(v, w) = V(t_1) = (V_1, V_2)(t_1) = (P_{\gamma_1}v, P_{\gamma_2}w)$. Por último, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ es un lazo en (p, q) si y sólo si σ_1 y σ_2 son lazos en p y en q respectivamente. Por lo visto acerca del transporte paralelo en una variedad producto, se tiene la afirmación sobre la holonomía. $\square$

4. Relación entre variedades compactas planas y grupos de Bieberbach

El objetivo principal de esta sección es probar que si Γ es un grupo de Bieberbach de $\mathcal{M}_n$, entonces $\mathbb{R}^n/\Gamma$ es una variedad compacta plana. Más aún, veremos que toda variedad compacta plana se obtiene de esta manera. Esto nos permitirá formular los teoremas de Bieberbach para variedades compactas planas. Además, calcularemos el grupo de holonomía de $\mathbb{R}^n/\Gamma$.

Comenzaremos por darle estructura a $\mathbb{R}^n/\Gamma$.

Sea Γ un subgrupo de Bieberbach de $\mathcal{M}_n$. En el Teorema 1.26 del Capítulo 1 hemos visto que la proyección $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\Gamma$ es un cubrimiento. En particular π es un homeomorfismo local. Dotamos a $\mathbb{R}^n/\Gamma$ de la única estructura diferenciable tal que π sea un difeomorfismo local.

Definimos una conexión ∇ en $\mathbb{R}^n/\Gamma$ como sigue: sean $q \in \mathbb{R}^n/\Gamma$ y $p \in \mathbb{R}^n$ tales que $\pi(p) = q$. Sea U entorno abierto de p tal que $\pi(U)$ es abierto y $\pi\big|_U : U \to \pi(U)$ es un difeomorfismo. Denotamos a $\pi\big|_U$ por π_U. Definimos

$$(\nabla_X Y)_q = (d\pi)_p(\nabla^E_{(\pi_U^{-1})_*X}(\pi_U^{-1})_*Y)_p, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(U). \tag{7}$$

donde ∇^E es la conexión euclídea de $\mathbb{R}^n$. Observemos que ∇ es la conexión inducida de ∇^E por el difeomorfismo π_U^{-1}. Daremos una expresión en coordenadas para la fórmula de la conexión definida anteriormente. Notemos que $(\pi(U), \pi_U^{-1} = (x_1, \dots, x_n))$ es un entorno coordenado alrededor de q. Sean $(\pi_U^{-1})_* X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial r_i}\big|_U$ y $(\pi_U^{-1})_* Y = \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial}{\partial r_j}\big|_U$, donde $a_i, b_j \in C^\infty(U)$, entonces se cumple

$$(\nabla_X Y)_q = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_i(p) \frac{\partial b_j}{\partial r_i}\Big|_p \right) \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_q. \tag{8}$$

Demostremos (8). Notemos que $(d\pi)_p \frac{\partial}{\partial r_i}\Big|_p = \sum_{j=1}^n c_j(q) \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_q$, para ciertas funciones c_j. Para averiguar $c_k(q)$, evaluamos a ambos lados en x_k, de lo que resulta

$$(d\pi)_p \frac{\partial}{\partial r_i}\Big|_p (x_k) = \sum_{j=1}^n c_j(q) \frac{\partial x_k}{\partial x_j}\Big|_q,$$

de donde

$$\begin{aligned} c_k(q) &= \frac{\partial}{\partial r_i}\Big|_p (x_k \circ \pi) \\ &= \frac{\partial}{\partial r_i}\Big|_p (r_k \circ \pi^{-1} \circ \pi) \\ &= \delta_{ik}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $(d\pi)_p \frac{\partial}{\partial r_i}\Big|_p = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_q$.

Ahora, podemos verificar que vale (8):

$$\begin{aligned} (\nabla_X Y)_q &= (d\pi)_p \left(\nabla^E_{\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial r_i}} \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial}{\partial r_j} \right)_p \\ &= \sum_{i=1}^n a_i(p) (d\pi)_p \left(\nabla^E_{\frac{\partial}{\partial r_i}} \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial}{\partial r_j} \right)_p \\ &= \sum_{i=1}^n a_i(p) (d\pi)_p \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial b_j}{\partial r_i} \frac{\partial}{\partial r_j} + b_j \nabla^E_{\frac{\partial}{\partial r_i}} \frac{\partial}{\partial r_j} \right)_p \\ &= \sum_{i=1}^n a_i(p) \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial b_j}{\partial r_i}\Big|_p \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_q \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial b_j}{\partial r_i}\Big|_p \right) \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_q. \end{aligned}$$

Veremos ahora que la conexión no depende de la elección de p. Sea p' tal que $\pi(p') = q$, entonces resulta $p' = \alpha \cdot p$ para algún $\alpha = (A, v) \in \mathcal{M}_n$, y denotamos $\alpha(p) := \alpha \cdot p$. Sea V entorno abierto de $\alpha(p)$ tal que $\pi_V := \pi\big|_V$ es un difeomorfismo. Si $X \in \mathfrak{X}(V)$, entonces se cumple que

$$(d\pi)_{\alpha(p)}((\pi_V^{-1})_* X)_{\alpha(p)} = X_q.$$

Como se tiene la relación $\pi \circ \alpha = \pi$, entonces tenemos $(d\pi)_{\alpha(p)} \circ (d\alpha)_p = (d\pi)_p$. Luego,

$$(d\pi)_{\alpha(p)} \circ (d\alpha)_p \, ((\pi_U^{-1})_* X)_p = (d\pi)_p((\pi_U^{-1})_* X)_p = X_q.$$

Por unicidad del pushforward se tiene

$$((\pi_V^{-1})_* X)_{\alpha(p)} = (d\alpha)_p((\pi_U^{-1})_* X)_p = (\alpha_*((\pi_U^{-1})_* X))_{\alpha(p)}.$$

Entonces,

$$(d\pi)_{\alpha(p)}(\nabla^E_{(\pi_V^{-1})_*X}(\pi_V^{-1})_*Y)_{\alpha(p)} = (d\pi)_{\alpha(p)}(\nabla^E_{\alpha_*((\pi_U^{-1})_*X)}\alpha_*((\pi_U^{-1})_*Y))_{\alpha(p)}.$$

No es difícil verificar, realizando la cuenta, que α es una isometría de $\mathbb{R}^n$ como variedad riemanniana. Esto implica, por la Proposición 2.43, que vale

$$(\nabla^E_{\alpha_*X}\alpha_*Y)_{\alpha(p)} = (d\alpha)_p(\nabla^E_X Y)_p.$$

Usando esto, se tiene

$$(d\pi)_{\alpha(p)}(\nabla^E_{\alpha_*((\pi_U^{-1})_*X)}\alpha_*((\pi_U^{-1})_*Y))_{\alpha(p)} = (d\pi)_{\alpha(p)}((d\alpha)_p(\nabla^E_{(\pi_U^{-1})_*X}(\pi_U^{-1})_*Y)_p),$$

como $\pi \circ \alpha = \pi$, resulta $(d\pi)_{\alpha(p)} \circ (d\alpha)_p = (d\pi)_p$ y por lo tanto

$$(d\pi)_p(\nabla^E_{(\pi_U^{-1})_*X}(\pi_U^{-1})_*Y)_p.$$

En consecuencia, la definición de ∇ usando p ó $\alpha(p)$ es la misma. Por lo tanto la conexión ∇ es independiente de la elección de p tal que $\pi(p) = q$.

¿Qué podemos decir acerca de la curvatura de la conexión ∇? Por construcción, localmente en cada abierto $\pi(U)$ en $\mathbb{R}^n/\Gamma$ donde $\pi|_U^{-1}$ sea un difeomorfismo, la conexión ∇ es la conexión inducida por la conexión euclídea de $\mathbb{R}^n$ mediante π_U^{-1}. Una consecuencia de este hecho, por el Lema 2.33, es que el tensor de curvatura en $\pi(U)$ es nulo como el tensor de curvatura euclídeo. Como la curvatura es una noción local y depende de los campos en los que se evalúa sólo en el punto por el Lema 2.30, resulta que la conexión ∇ es plana.

Más aún, podemos equipar a $\mathbb{R}^n/\Gamma$ con una estructura de variedad riemanniana de modo tal que la proyección canónica resulte una isometría local, en cuyo caso la conexión de Levi-Civita resultará ser la conexión ∇. Procedemos como sigue: dados $q \in \mathbb{R}^n/\Gamma$ y $u, v \in T_q(\mathbb{R}^n/\Gamma)$, sea p tal que $\pi(p) = q$. Como π es un difeomorfismo local, $(d\pi)_p$ es un isomorfismo para todo $p \in \mathbb{R}^n$. Se define entonces

$$\langle u, v\rangle_q = \langle (d\pi)_p^{-1}u, (d\pi)_p^{-1}v\rangle_p.$$

Notemos que la métrica está bien definida, es decir que no depende del punto p tal que $\pi(p) = q$. En efecto, sea $p' \in \mathbb{R}^n$ tal que $\pi(p') = q$. Luego existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $p' = \gamma(p)$. Por lo tanto, se tiene que

$$\begin{aligned}\langle (d\pi)_{\gamma(p)}^{-1}u, (d\pi)_{\gamma(p)}^{-1}v\rangle_{\gamma(p)} &= \langle d(\pi\circ\gamma)_{\gamma(p)}^{-1}u, d(\pi\circ\gamma)_{\gamma(p)}^{-1}v\rangle_{\gamma(p)} \\ &= \langle (d\gamma)_{\gamma(p)}^{-1}\circ(d\pi)_p^{-1}u, (d\gamma)_{\gamma(p)}^{-1}\circ(d\pi)_p^{-1}v\rangle_{\gamma(p)} \\ &= \langle (d\pi)_p^{-1}u, (d\pi)_p^{-1}v\rangle_p.\end{aligned}$$

Hemos usado que $\pi \circ \gamma = \pi$ en la primera igualdad y que γ es una isometría de $\mathbb{R}^n$ como variedad riemanniana en la última igualdad. De aquí resulta la buena definición. Por construcción de la métrica, π es una isometría local. Esta métrica en $\mathbb{R}^n/\Gamma$ se llama *métrica inducida por el cubrimiento*. Nos preguntamos ahora cuál es la conexión de Levi-Civita asociada a esta métrica. Como π es una isometría local, en cada abierto $\pi(u)$ en $\mathbb{R}^n/\Gamma$ donde $\pi|_U^{-1}$ sea un difeomorfismo, resulta que la conexión ∇ coincide con la conexión de Levi-Civita. Como la conexión es local, en el sentido de la Proposición 2.23, resulta que la conexión de Levi-Civita de la variedad riemanniana $\mathbb{R}^n/\Gamma$ es precisamente la conexión ∇ definida en (8). Como hemos visto antes que ∇ es plana, resulta que $\mathbb{R}^n/\Gamma$ es una variedad plana.

Resumiendo lo hecho en esta sección, hemos probado que si Γ es un subgrupo de Bieberbach de $\mathcal{M}_n$, entonces el espacio de órbitas $\mathbb{R}^n/\Gamma$ admite una estructura de variedad riemanniana tal que $\mathbb{R}^n/\Gamma$ resulta una variedad compacta plana. Un hecho sorprendente, aunque bastante más difícil de probar, es que vale la recíproca, es decir que toda variedad compacta plana es isométrica a una variedad de la forma $\mathbb{R}^n/\Gamma$, con Γ un subgrupo de Bieberbach de $\mathcal{M}_n$. Probar este hecho requiere muchas definiciones y teoremas que por cuestiones de espacio no podemos introducir, por lo que sólo mencionaremos las definiciones necesarias para comprender el enunciado del teorema.

Uno de los aspectos más interesantes de la geometría diferencial es la relación que existe entre propiedades locales, es decir propiedades que dependen del comportamiento de la variedad en un entorno de un punto, y propiedades globales que dependen del comportamiento de la variedad considerada como un todo. Un ejemplo de esta relación es el teorema que queremos probar. Combinando una propiedad global (compacidad) con una propiedad local (variedad plana), se obtiene una restricción global fuerte sobre la variedad (isométrica a $\mathbb{R}^n/\Gamma$). Una noción global que será necesaria en nuestro camino es la de completitud. Para hablar de completitud previamente necesitamos introducir el concepto de geodésica. Hablando brevemente, las geodésicas son una generalización de las rectas en el espacio euclídeo, en el sentido en que minimizan localmente la distancia entre dos puntos. No ahondaremos en sus propiedades minimizantes, para un estudio profundo de ello, se puede ver por ejemplo [**15**, Capítulo 3].

Definición 2.58. Sea M una variedad C^∞ con una conexión afín ∇. Una curva $\gamma : [0,1] \to M$ se dice *geodésica* si el campo γ' es paralelo a lo largo de γ para todo $t \in [0,1]$, es decir $\frac{D\gamma'}{dt} \equiv 0$.

Ejemplo 2.59. En $\mathbb{R}^n$ con la conexión euclídea, las geodésicas son las rectas de la forma $c(t) = at+b$ con $a, b \in \mathbb{R}$. En efecto, si $\gamma : [0,1] \to M$ es una curva con $\gamma'(t) = \sum_{j=1}^n \gamma_i'(t) \frac{\partial}{\partial r_i}\big|_{\gamma(t)}$, entonces por la fórmula de la derivada covariante en $\mathbb{R}^n$ resulta $\frac{D\gamma'}{dt}\Big|_t = \sum_{j=1}^n \gamma_j''(t) \frac{\partial}{\partial r_j}\Big|_t$, luego

$$\frac{D\gamma'}{dt} \equiv 0 \iff \gamma_i'' \equiv 0 \iff \gamma_i(t) = a_i t + b_i \iff \gamma(t) = at + b,$$

donde $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n)$.

Asumiremos de aquí en adelante que las variedades M son conexas.

Definición 2.60. Una conexión afín ∇ en una variedad M se dice *completa* si para todo $p \in M$, todas las geodésicas con punto inicial p están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$. Una variedad riemanniana conexa M se dice *completa* si su conexión de Levi-Civita es completa.

Un primer ejemplo de variedad completa, es $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclídea, ya que las geodésicas de la conexión euclídea son las rectas.

Una propiedad importante de variedades completas es que si M y N son variedades riemannianas conexas y $\pi : M \to N$ es una isometría local, entonces M es completa si y sólo si N es completa. Vale mencionar además, que toda variedad compacta (y conexa) es completa, este hecho es un corolario del teorema de Hopf-Rinow, [**15**, Capítulo 7], en donde se caracterizan las variedades completas.

Enunciamos a continuación el teorema[9] que permite caracterizar las variedades compactas planas.

Teorema 2.61. *Sea M una variedad riemanniana completa y plana. Entonces M es isométrica al espacio de órbitas $\mathbb{R}^n/\Gamma$, donde Γ es un subgrupo del grupo de las isometrías de $\mathbb{R}^n$ que actúa de manera propiamente discontinua en $\mathbb{R}^n$, y la métrica en $\mathbb{R}^n/\Gamma$ es la inducida por el cubrimiento $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\Gamma$.*

Observaciones.

(1) En este teorema se habla de las isometrías de $\mathbb{R}^n$ como variedad riemanniana. No obstante, se puede probar[10] que el conjunto de isometrías de $\mathbb{R}^n$ como variedad riemanniana coincide con el conjunto de isometrías de $\mathbb{R}^n$ que preservan la distancia euclídea, es decir $\mathcal{M}_n$.

[9] Esta versión del teorema es un caso particular de [**15**, Capítulo 8, Proposición 4.8] que caracteriza los espacios de curvatura seccional constante.

[10] Vale el siguiente hecho general: sean f y g isometrías de M como variedad riemanniana. Si existe $p \in M$ tal que $f(p) = g(p)$ y $(df)_p = (dg)_p$ entonces $f = g$.

(2) Si M es una variedad compacta plana, por el Teorema 2.61, M es isométrica a $\mathbb{R}^n/\Gamma$ con la métrica de cubrimiento, donde Γ es un subgrupo cocompacto de $\mathcal{M}_n$ que actúa de manera propiamente discontinua en $\mathbb{R}^n$, esto es, que Γ es un subgrupo discreto y además actúa de manera libre, o equivalentemente es sin torsión. En conclusión, Γ es un subgrupo de Bieberbach de $\mathcal{M}_n$. Notemos además, que el grupo fundamental de la variedad $\mathbb{R}^n/\Gamma$ es el subgrupo Γ.

(3) Si M es una variedad riemanniana completa, plana y además simplemente conexa, entonces M es isométrica a $\mathbb{R}^n$ con la métrica usual.

El teorema, junto con las observaciones, terminan por caracterizar las variedades compactas planas. En conclusión, si Γ es un subgrupo de Bieberbach de $\mathcal{M}_n$, entonces el espacio de órbitas $\mathbb{R}^n/\Gamma$ con su estructura de variedad riemanniana y métrica inducida por el cubrimiento $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\Gamma$ es una variedad compacta plana. Recíprocamente, toda variedad compacta plana se obtiene mediante esta construcción.

El estudio previo que hemos hecho de los grupos de Bieberbach en el Capítulo 1, nos ayudará a entender ahora las variedades compactas planas.

Un ejemplo de esto es el grupo de holonomía de $\mathbb{R}^n/\Gamma$, el cual es bastante simple. Recordemos que hemos llamado grupo de holonomía de un subgrupo de Bieberbach de $\mathcal{M}_n$ a la parte rotacional del mismo. La elección de tal nombre se ve justificada en el siguiente teorema que será de suma utilidad para el Capítulo 4.

Teorema 2.62. *Sea Γ un subgrupo de Bieberbach de $\mathcal{M}_n$. Si consideramos la variedad riemanniana $\mathbb{R}^n/\Gamma$ con la conexión de Levi-Civita, entonces resulta*

$$\mathrm{Hol}(\mathbb{R}^n/\Gamma) \cong r(\Gamma),$$

donde $r : \Gamma \to \mathsf{O}(n)$ es la proyección $r((A, v)) = A$.

Demostración: Sean $q \in \mathbb{R}^n/\Gamma$ y $p \in \mathbb{R}^n$ tal que $\pi(p) = q$, y sea σ un lazo en q. Queremos entender cuál es la transformación inducida por el transporte paralelo P_σ. Por la teoría de espacios de cubrimiento, más precisamente el teorema del levantamiento de curvas, existe una única curva c en $\mathbb{R}^n$ con $c(0) = p$ y $\pi \circ c = \sigma$. Como σ es un lazo en q, entonces $\pi \circ c(0) = \pi \circ c(1)$. Esto implica que existe $\alpha = (A, v) \in \mathcal{M}_n$ tal que $\alpha(c(0)) = c(1)$. Sea $v_0 \in T_q(\mathbb{R}^n/\Gamma)$ y sea (U, φ) entorno coordenado en q tal que $\pi|_U$ es un difeomorfismo. Por la Proposición 2.48, resulta

$$(d\pi)_{c(1)} \circ P_c = P_\sigma \circ (d\pi)_{c(0)},$$

Como $\pi \circ \alpha = \pi$, se tiene que

$$(d\pi)_{\alpha(c(0))} \circ (d\alpha)_{c(0)} = (d\pi)_{c(0)},$$

de donde

$$(d\pi)_{c(1)} \circ P_c = P_\sigma \circ (d\pi)_{c(1)} \circ (d\alpha)_{c(0)}.$$

Por lo tanto,

$$P_\sigma(v_0) = (d\pi)_{c(1)} \circ P_c \circ (d\alpha)^{-1}_{c(0)} \circ (d\pi)^{-1}_{c(1)}(v_0).$$

Bajo la identificación $T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$, el transporte paralelo P_c en $\mathbb{R}^n$ es la transformación identidad y la diferencial $(d\alpha)^{-1}_{c(0)}$ se identifica con A^{-1}. Es decir que, intuitivamente, trasladar paralelamente en σ es simplemente multiplicar por la matriz A^{-1}. Con esto en mente, definimos la aplicación

$$\Phi : \mathrm{Hol}(\mathbb{R}^n/\Gamma) \to r(\Gamma)$$

mediante $\Phi(P_\sigma) = A^{-1}$.

Una vez que fijamos $p \in \mathbb{R}^n$ tal que $\pi(p) = q$, como la acción de Γ es libre, existe un único α tal que $\alpha(p) = c(1)$, por lo tanto la aplicación Φ es inyectiva. A su vez, dada una matriz B^{-1} en $r(\Gamma)$, sea $c : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ el segmento que une p con el vector $Bp \in \mathbb{R}^n$. Al proyectar la curva c obtenemos un lazo en q tal que $\Phi(P_{\pi\circ c}) = B^{-1}$. Comprobamos a continuación que es un morfismo de grupos: Sean σ y σ' lazos en q, debemos determinar la matriz que induce el transporte paralelo $P_\sigma \circ P_{\sigma'} = P_{\sigma'\sigma}$.

Sean c y c' los levantamientos de σ y σ' con $c(0) = c'(0) = p$. Como σ y σ' son lazos, existen $\alpha, \beta \in \mathcal{M}_n$ tales que $c(1) = \alpha(p)$ y $d(1) = \beta(p)$ respectivamente. Ahora, si consideramos $\gamma(t) = \beta(c(t))$, resulta que γ es un levantamiento de σ con $\gamma(0) = c'(1)$. Ahora, para ver la matriz inducida por la transformación $P_{\sigma'\sigma}$ debemos encontrar el levantamiento del lazo $\sigma'\sigma$. Consideremos la concatenación $c'\gamma$, la cual está bien definida pues $c'(1) = \gamma(0)$. Esta curva $c'\gamma$ es un levantamiento de $\sigma'\sigma$ que satisface $(c'\gamma)(0) = c'(0) = p$ y $(c'\gamma)(1) = \gamma(1) = \beta\alpha(p)$. Luego

$$\Phi(P_\sigma \circ P_{\sigma'}) = \Phi(P_{\sigma'\sigma}) = (r(\beta\alpha))^{-1} = (r(\beta)r(\alpha))^{-1} = r(\alpha)^{-1}r(\beta)^{-1} = \Phi(P_\sigma)\Phi(P_{\sigma'}).$$

Por lo tanto Φ es un isomorfismo. $\square$

Para concluir la sección y el capítulo, reinterpretaremos los teoremas de Bieberbach para grupos de Bieberbach, en el contexto de variedades compactas planas. Antes de probar los teoremas, vamos a mencionar [11] algunos conceptos acerca de la teoría de cubrimientos que ayudarán en la comprensión de los mismos.

Sea $\pi : (\tilde{X}, \tilde{x_0}) \to (X, x_0)$ una aplicación de cubrimiento entre espacios topológicos. En el caso en que $\tilde{X}$ sea simplemente conexo, el espacio $\tilde{X}$ se dice el *cubrimiento universal* de X y resulta ser único salvo cierta equivalencia. No siempre existe el cubrimiento universal de un espacio X, pero bajo ciertas hipótesis (que nos basta saber que las variedades topológicas conexas las cumplen) se puede construir un cubrimiento universal $\tilde{X}$ definiendo

$$\tilde{X} = \{[\gamma] \mid \gamma \text{ es una curva en } X \text{ que empieza en } x_0\},$$

donde $[\gamma]$ es la clase de equivalencia de homotopía de γ.

Teniendo el cubrimiento universal $\tilde{X}$, todos los demás cubrimientos de X pueden ser vistos como cocientes de $\tilde{X}$, como sigue: si $H \subset \pi_1(X, x_0)$ es un subgrupo, se define una relación de equivalencia en $\tilde{X}$ de la siguiente manera. Dados $[\gamma], [\gamma'] \in \tilde{X}$, definimos $[\gamma] \sim [\gamma']$ si y sólo si $\gamma(1) = \gamma'(1)$ y $[\gamma'\gamma^{-1}] \in H$. Como H es un subgrupo, la relación está bien definida y resulta que el espacio de órbitas $\tilde{X}/H$ es un cubrimiento de X con $\pi_1(\tilde{X}/H) \cong H$. Se prueba que todo cubrimiento de X se construye de esta manera.

Si el espacio X tiene cierta estructura adicional y $\tilde{X}$ es un cubrimiento de X entonces podemos transportar la estructura a $\tilde{X}$. Sea M una variedad C^∞ conexa y $\pi : \tilde{M} \to M$ un cubrimiento. Entonces $\tilde{M}$ resulta automáticamente un espacio de Hausdorff con base numerable y localmente euclídeo. Además, existe una única estructura diferenciable en $\tilde{M}$ tal que π es un difeomorfismo local. En efecto, para cada U parejamente cubierto de M con $\pi^{-1}(U) = \cup_{i\in I} U_i$, la estructura proviene de requerir que $\pi\big|_{U_i}$ sea un difeomorfismo para todo $i \in I$.

Si $(M, \langle\, ,\rangle)$ es una variedad riemanniana podemos definir una métrica riemanniana en $\tilde{M}$ como sigue: sean $p \in \tilde{M}, u, v \in T_p\tilde{M}$, definimos

$$\langle u, v\rangle_p^{\tilde{M}} = \langle (d\pi)_p u, (d\pi)_p v\rangle_{\pi(p)}^M.$$

Con esta métrica en $\tilde{M}$, la aplicación de cubrimiento π resulta una isometría local. Esta métrica se llama la *métrica de cubrimiento* y π se dice un *cubrimiento riemanniano.*

TEOREMA 2.63 (Bieberbach 1). *Sea M una variedad compacta plana. Entonces M admite un cubrimiento riemanniano por un toro plano y el cubrimiento es una isometría local. Más aún, el grupo de holonomía* $\mathrm{Hol}(M)$ *es finito.*

DEMOSTRACIÓN: Al ser una variedad compacta plana, podemos considerar a M como $\mathbb{R}^n/\Gamma$, con Γ un subgrupo de Bieberbach de $\mathcal{M}_n$. Sea $\Lambda \subset \Gamma$ el retículo de traslaciones. Como $\mathbb{R}^n$ es el cubrimiento universal de $\mathbb{R}^n/\Gamma$ cuyo grupo fundamental es Γ se tiene que $\mathbb{R}^n/\Lambda$ es un espacio de cubrimiento de $\mathbb{R}^n/\Gamma$. Más aún, el espacio $\mathbb{R}^n/\Lambda$ admite estructura de cubrimiento riemanniano tal que la aplicación de cubrimiento es una isometría local. Por el primer teorema de Bieberbach, como Λ es un subgrupo

[11] Ver [**8**] para un estudio profundo acerca de teoría de espacios de cubrimiento.

abeliano libre finitamente generado, $\mathbb{R}^n/\Lambda$ es un toro, y resulta plano pues la aplicación de cubrimiento es una isometría local. Por último, hemos probado que $\mathrm{Hol}(M) \cong r(\Gamma)$ el cual, por el primer teorema de Bieberbach es finito. □

TEOREMA 2.64 (Bieberbach 2). *Sean M y N variedades compactas planas tales que $\pi_1(M) \cong \pi_1(N)$. Entonces existe una equivalencia afín entre M y N.*

DEMOSTRACIÓN: Consideramos a M y N como $M = \mathbb{R}^n/\pi_1(M)$ y $N = \mathbb{R}^n/\pi_1(N)$ con $\pi_1(M)$ y $\pi_1(N)$ subgrupos de Bieberbach de $\mathcal{M}_n$. Supongamos que $\phi : \pi_1(M) \to \pi_1(N)$ es un isomorfismo. Por el segundo teorema de Bieberbach existe $\alpha \in \mathcal{A}_n$ tal que $\phi(\beta) = \alpha\beta\alpha^{-1}$ para todo $\beta \in \pi_1(M)$. Sean π_M y π_N las proyecciones de $\mathbb{R}^n$ en las variedades $\mathbb{R}^n/\pi_1(M)$ y $\mathbb{R}^n/\pi_1(N)$, respectivamente.

Definimos $F : \mathbb{R}^n/\pi_1(M) \to \mathbb{R}^n/\pi_1(N)$ por

$$F(x) = (\pi_N \circ \alpha \circ (\pi_M)^{-1})(x), \quad x \in \mathbb{R}^n/\pi_1(M).$$

Para verificar que está bien definida, sean $\tilde{x} \in \pi_M^{-1}(x)$ y $\beta \in \pi_1(M)$. Como $\alpha\beta\alpha^{-1} = \gamma \in \pi_1(N)$, resulta $\alpha\beta = \gamma\alpha$ y así

$$\pi_N(\alpha\beta(\widetilde{x})) = \pi_N(\gamma\alpha(\widetilde{x})) = \pi_N(\alpha(\widetilde{x})).$$

Veamos que F es una equivalencia afín. Al ser una composición de difeomorfismos locales, resulta F un difeomorfismo local. Además F tiene una inversa $G : \mathbb{R}^n/\pi_1(N) \to \mathbb{R}^n/\pi_1(M)$ definida por $G(y) = \pi_M \circ \alpha^{-1} \circ \pi_N^{-1}(y)$. Notemos que de manera análoga a la buena definición de F resulta la buena definición de G, teniendo en cuenta que $\alpha^{-1}\beta\alpha \in \pi_1(M)$ para todo $\beta \in \pi_1(N)$. Al ser un difeomorfismo local biyectivo, resulta un difeomorfismo.

Por último, veremos que la conexión inducida por la conexión de N mediante F coincide con la conexión de M. Para eso debemos ver que

$$(dF)_q(\nabla^M_U V)_q = (\nabla^N_{F_*U} F_*V)_{F(q)}, \quad q \in M, \;\; U, V \in \mathfrak{X}(M).$$

Realizamos los cálculos, teniendo en cuenta que π_M y π_N son isometrías locales. Sea $p \in \mathbb{R}^n$ tal que $\pi_M(p) = q$, entonces

$$\begin{aligned}
(dF)_q(\nabla^M_U V)_q &= (dF)_q((d\pi_M)_p(\nabla^{\mathbb{R}^n}_{(\pi_M^{-1})_*U}(\pi_M^{-1})_*V))_p \\
&= ((d\pi_N)_{\alpha(p)} \circ (d\alpha)_p)(\nabla^{\mathbb{R}^n}_{(\pi_M^{-1})_*U}(\pi_M^{-1})_*V)_p \\
&= (d\pi_N)_{\alpha(p)}(\nabla^{\mathbb{R}^n}_{\alpha_*(\pi_M^{-1})_*U}\alpha_*(\pi_M^{-1})_*V)_{\alpha(p)} \\
&= (\nabla^N_{(\pi_N)_*\alpha_*(\pi_M^{-1})_*U}(\pi_N)_*\alpha_*(\pi_M^{-1})_*V)_{\pi_N(\alpha(p))} \\
&= (\nabla^N_{F_*U}F_*V)_{F(q)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto F es una equivalencia afín. □

TEOREMA 2.65 (Bieberbach 3). *Para cada n fijo existe una cantidad finita de clases de equivalencia afín de variedades compactas planas de dimensión n.*

DEMOSTRACIÓN. Dado $n \in \mathbb{N}$, si dos variedades compactas planas son equivalentes de manera afín, entonces sus grupos fundamentales, los cuales son subgrupos de Bieberbach de $\mathcal{M}_n$, son isomorfos. Por el tercer teorema de Bieberbach, existe una cantidad finita de clases de isomorfismo de grupos de Bieberbach. Esto fuerza a que la cantidad de clases de equivalencia afín de variedades compactas planas sea finita. □

CAPÍTULO 3

Grupos de Lie con métricas invariantes a izquierda planas

En este capítulo nos introducimos en el mundo de los grupos de Lie y las álgebras de Lie. Queremos estudiar las métricas que son compatibles en algún sentido con la estructura invariante a izquierda del grupo. El objetivo principal del capítulo es estudiar la caracterización de los grupos de Lie que admiten una métrica invariante a izquierda plana dada por Milnor [**26**]. Además, tratamos en la última sección con cierto detalle el concepto de unimodularidad, el cual posee cierta relación con la existencia de subgrupos discretos de cociente compacto en grupos de Lie. Veremos además ejemplos y algunos criterios, además de mostrar una construcción de la medida de Haar para grupos de Lie.

1. Resultados preliminares de grupos de Lie

A modo de introducción y para presentar el lenguaje que utilizaremos en las próximas secciones, introducimos los grupos de Lie. Mencionaremos los resultados que necesitamos para lo que sigue.

DEFINICIÓN 3.1. Un *grupo de Lie* es una variedad diferenciable G que posee una estructura de grupo tal que las operaciones de grupo $m : G \times G \to G$ e $i : G \to G$ dadas por $m(g, h) = gh$ e $i(g) = g^{-1}$ son C^∞ para todo $g, h \in G$.

Se define la aplicación $L_g : G \to G$ por
$$L_g(h) = gh.$$
Notar que L_g es una función C^∞ pues L_g es igual a la composición de las funciones $h \mapsto (g, h) \mapsto gh$, las cuales son C^∞. Notar además que la función $L_{g^{-1}}$ es una inversa diferenciable para L_g, por lo que L_g es un difeomorfismo de G. De manera análoga se define el difeomorfismo $R_g : G \to G$ dado por $R_g(h) = hg$.

Será de fundamental importancia introducir las álgebras de Lie para estudiar los grupos de Lie.

DEFINICIÓN 3.2. Un *álgebra de Lie real* es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathfrak{g}$ junto con una operación bilineal $[\,,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ (llamada *corchete*) que satisface

(1) (Antisimetría)
$$[X, Y] = -[Y, X].$$
(2) (Identidad de Jacobi)
$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0,$$
donde $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

EJEMPLO 3.3. Si M es una variedad C^∞, el conjunto $\mathfrak{X}(M)$ es un álgebra de Lie (de dimensión infinita) con la operación $[\,,]$ dada por el corchete de Lie. Esto es consecuencia de la Proposición 2.14.

La importancia del concepto de álgebra de Lie es que para cada grupo de Lie hay asociada un álgebra de Lie destacada de dimensión finita, cuyas propiedades reflejan ciertas propiedades del grupo. Por ejemplo, los grupos de Lie simplemente conexos están completamente determinados (salvo isomorfismo) por sus álgebras de Lie. Por tanto, el estudio de estos grupos de Lie se reduce a estudiar sus álgebras de Lie.

Describimos a continuación el álgebra de Lie asociada a un grupo de Lie, para la cual necesitaremos del concepto de campos invariantes a izquierda.

Definición 3.4. Un campo vectorial X en G se dice *invariante a izquierda* si

$$(dL_g)_h X_h = X_{gh}, \quad g, h \in G.$$

En otras palabras, X es invariante a izquierda si X está L_g-relacionado consigo mismo para todo $g \in G$.

Notemos que un campo invariante a izquierda queda unívocamente determinado por su valor en e, pues $X_g = (dL_g)_e X_e$. Denotamos por $\mathfrak{g}$ al conjunto de campos vectoriales invariantes a izquierda en G, el cual posee muchas propiedades interesantes.

Proposición 3.5. *Sea G un grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ el conjunto de campos invariantes a izquierda en G. Valen las siguientes propiedades:*

(1) *Si $X \in \mathfrak{g}$ entonces $X \in \mathfrak{X}(G)$.*
(2) *El conjunto $\mathfrak{g}$ es un subespacio vectorial de $\mathfrak{X}(G)$ y es cerrado para el corchete de Lie.*
(3) *La aplicación $\alpha : \mathfrak{g} \to T_eG$ definida por $\alpha(X) = X_e$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.*

Demostración: La prueba de (1) es un poco técnica, puede encontrarse en [**24**, Corolario 8.38]. Para (2), es fácil verificar que $\mathfrak{g}$ es un espacio vectorial. Por otro lado, $\mathfrak{g}$ es cerrado para el corchete de Lie por la Proposición 2.15, dado que X está L_g-relacionado con X si $X \in \mathfrak{g}$. Por último para (3), como los campos invariantes a izquierda están determinados por su valor en e, la aplicación α es inyectiva. Para ver la sobreyectividad, dado $v \in T_eG$ basta definir el campo X por $X_g = (dL_g)_e v$. $\square$

Esta proposición nos dice que el conjunto $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie, llamada *el álgebra de Lie de G*. Más aún, $\mathfrak{g}$ es de dimensión finita, con $\dim \mathfrak{g} = \dim T_eG = \dim G$.

Definición 3.6. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie. Un subespacio $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ se dice una *subálgebra* si es cerrado para el corchete en $\mathfrak{g}$. Un ideal en $\mathfrak{g}$ es un subespacio $\mathfrak{h}$ tal que $[h, g] \in \mathfrak{h}$ para todo $h \in \mathfrak{h}$, $g \in \mathfrak{g}$.

Un álgebra de Lie particular pero sencilla que queremos introducir ahora es la siguiente. El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ es un grupo de Lie bajo la operación suma. Se verifica fácilmente que los campos invariantes a izquierda son simplemente los campos constantes, y por lo tanto el corchete entre dos de estos campos es 0. Como espacio vectorial, esta álgebra de Lie es isomorfa a $\mathbb{R}^n$, por esta razón la denotaremos así. Esta álgebra de Lie es un ejemplo de un tipo particular de álgebras de Lie.

Definición 3.7. Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice abeliana si dados $X, Y \in \mathfrak{g}$ arbitrarios se cumple que $[X, Y] = 0$.

Observación. Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie abeliana de dimensión n entonces $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R}^n$. En efecto, dada una base $\{X_1, \ldots, X_n\}$ en $\mathfrak{g}$, la aplicación $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}^n$ definida por $\varphi(\sum a_i X_i) = \sum a_i \frac{\partial}{\partial r_i}\big|_0$ es un isomorfismo. $\triangle$

Una propiedad que nos será de suma utilidad es que una base del álgebra de Lie provee una base de T_gG para todo $g \in G$.

Lema 3.8. *Sea $\{X_1, \ldots, X_n\}$ una base de $\mathfrak{g}$, entonces el conjunto $\{X_1\big|_g, \ldots, X_n\big|_g\}$ es una base de T_gG para todo $g \in G$.*

Demostración: Basta ver que el conjunto $\{X_1\big|_g, \dots, X_n\big|_g\}$ es linealmente independiente. Sean $a_i \in \mathbb{R}$ tales que $\sum_{i=1}^n a_i X_i\big|_g = 0$, luego

$$0 = \sum_{i=1}^n a_i (dL_g)_e X_i\big|_e = (dL_g)_e (\sum_{i=1}^n a_i X_i\big|_e).$$

Como $(dL_g)_e$ es un isomorfismo, resulta $0 = \sum_{i=1}^n a_i X_i\big|_e = (\sum_{i=1}^n a_i X_i)_e$. Como evaluar en e es un isomorfismo y los campos $X_1, \dots, X_n$ forman una base de $\mathfrak{g}$, resulta que $a_i = 0$ para todo i. □

Pasamos ahora a estudiar homomorfismos de grupos de Lie y de álgebras de Lie.

Definición 3.9. Sean G y H grupos de Lie y sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ álgebras de Lie. Una función $\varphi : G \to H$ se dice un *homomorfismo (de grupos de Lie)* si φ es C^∞ y es homomorfismo de grupos. Si además φ es un difeomorfismo, se dice que φ es un *isomorfismo*. Una función $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ se dice un *homomorfismo de (álgebras de Lie)* si φ es una transformación lineal que además satisface $[\varphi(X), \varphi(Y)] = \varphi([X, Y])$, para $X, Y \in \mathfrak{g}$ arbitrarios. Si además φ es una función biyectiva, se dice que φ es un *isomorfismo*.

Todo homomorfismo de grupos de Lie induce un homomorfismo de álgebras de Lie de la siguiente manera: si $\varphi : G \to H$ es un homomorfismo, definimos el *homomorfismo inducido* $d\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ mediante $X \mapsto d\varphi(X)$ donde $d\varphi(X)$ es el único campo invariante a izquierda tal que $(d\varphi(X))_e = (d\varphi)_e X_e$.

Los homomorfismos φ y $d\varphi$ están relacionados. Por ejemplo, una propiedad inmediata es que si φ es un isomorfismo de grupos de Lie entonces $d\varphi$ es un isomorfismo de álgebras de Lie. Un hecho sorprendente es que se puede construir un homomorfismo de grupos de Lie a partir de un homomorfismo de álgebras de Lie (lo cual suena mucho más complicado), como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 3.10. *Sean G y H grupos de Lie con álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ respectivamente, y supongamos que G es simplemente conexo. Sea $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ un homomorfismo, entonces existe un único homomorfismo $\varphi : G \to H$ tal que $d\varphi = \psi$.*

Demostración: La demostración no es sencilla, requiere muchos teoremas previos. No obstante, una demostración puede encontrarse en [**38**, Teorema 3.27]. □

Corolario 3.11. *Sean G y H grupos de Lie simplemente conexos con álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ respectivamente. Si $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h}$, entonces $G \cong H$.*

Debido al Teorema de Ado, dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ siempre existe un grupo de Lie, en particular simplemente conexo, con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Definimos ahora un elemento importante que relaciona un grupo de Lie con su álgebra de Lie, que es la aplicación exponencial, la cual resulta ser una generalización a grupos de Lie arbitrarios de la exponencial matricial.

Definición 3.12. Sea G un grupo de Lie y sea $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. Dado $X \in \mathfrak{g}$, la aplicación $\lambda \frac{d}{dr} \mapsto \lambda X$ es un homomorfismo del álgebra de Lie de $\mathbb{R}$ en $\mathfrak{g}$. Puesto que $\mathbb{R}$ es simplemente conexo, existe por el Teorema 3.10 un único homomorfismo

$$\exp_X : \mathbb{R} \to G$$

tal que

$$d \exp_X (\lambda \frac{d}{dr}) = \lambda X.$$

En otras palabras, $t \mapsto \exp_X(t)$ es el único homomorfismo $\varphi : \mathbb{R} \to G$ cuyo vector tangente en 0 es X_e. Se define la *aplicación exponencial*

$$\exp : \mathfrak{g} \to G$$

mediante

$$\exp(X) = \exp_X(1).$$

Listamos unas pocas propiedades de la función exponencial que nos servirán más adelante en este capítulo. Una demostración puede encontrarse en [**38**, Teorema 3.31 y 3.32].

LEMA 3.13. *Sea X un elemento del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ del grupo de Lie G. Entonces*

(1) *Para cada $t \in \mathbb{R}$ se tiene* $\exp(tX) = \exp_X(t)$.
(2) *Dados $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ arbitrarios, se cumple* $\exp((t_1+t_2)X) = (\exp(t_1X))(\exp(t_2X))$. *En particular, notar que si $t \in \mathbb{R}$, entonces* $(\exp(tX))^{-1} = \exp(-tX)$.
(3) *La aplicación exponencial* $\exp : \mathfrak{g} \to G$ *es C^∞ y* $\exp$ *es un difeomorfismo entre algún entorno abierto del 0 en $\mathfrak{g}$ y algún entorno abierto de e en G.*
(4) *Sea $\varphi : G \to H$ un homomorfismo. Entonces*

$$\varphi \circ \exp_{\mathfrak{h}} = \exp_{\mathfrak{g}} \circ d\varphi.$$

Lo último que queremos mencionar sobre la aplicación exponencial es que en el caso particular de que G es un grupo de Lie conexo, todo elemento puede escribirse como un producto de exponenciales. Esto es gracias a la siguiente proposición cuya prueba puede encontrarse en [**38**, Proposición 3.18]

PROPOSICIÓN 3.14. *Sea G un grupo de Lie conexo, y sea U un entorno abierto de e. Entonces $G = \cup_{n=1}^{\infty} U^n$ donde U^n consiste en todos los productos de n elementos de U.*

OBSERVACIÓN. Combinando la proposición anterior con (1) del Lema 3.13, obtenemos que si G es un grupo de Lie conexo entonces todo elemento $g \in G$ puede escribirse de la forma

$$g = \exp(X_1) \ldots \exp(X_n)$$

donde $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{g}$. △

Para concluir esta sección de preliminares, introduciremos la representación adjunta.

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ o sobre $\mathbb{C}$. Entonces el conjunto $\mathrm{Aut}(V)$ formado por todas las transformaciones lineales $T : V \to V$ que son isomorfismos posee una estructura de grupo de Lie, y su álgebra de Lie asociada es el conjunto $\mathrm{End}(V)$ formado por todas las transformaciones lineales $T : V \to V$. Nos será útil para más adelante describir concretamente la aplicación exponencial en este caso,

$$\exp : \mathrm{End}(V) \to \mathrm{Aut}(V),$$

la cual está dada por la exponenciación de endomorfismos. Si $T \in \mathrm{End}(V)$, entonces

$$\exp(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T^n}{n!},$$

donde $T^n = T \circ \ldots \circ T$ y $T^0 = \mathrm{Id}$. Una propiedad importante que usaremos es que

$$\det(e^T) = e^{\mathrm{tr}(T)}.$$

DEFINICIÓN 3.15. Un homomorfismo de grupos de Lie $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(V)$ para algún espacio vectorial V se dice una *representación de G*. Un homomorfismo de álgebras de Lie $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ se dice una *representación de* $\mathfrak{g}$.

La representación adjunta será un caso particular del concepto de representación inducida por una acción a izquierda.

DEFINICIÓN 3.16. Sea M una variedad C^∞ y sea G un grupo de Lie. Una función diferenciable $\mu : G \times M \to M$ tal que

$$\mu(gh, m) = \mu(g, \mu(h, m)), \quad \mu(e, m) = m, \quad \text{para}\, g, h \in G,\ m \in M,$$

se llama una *acción a izquierda* de G en M.

Si $\mu : G \times M \to M$ es una acción a izquierda de G en M, entonces para $g \in G$ fijo, la aplicación μ_g definida por $\mu_g(m) = \mu(g, m)$ es un difeomorfismo. Tenemos el siguiente teorema sobre acciones a izquierda.

TEOREMA 3.17. *Sea $\mu : G \times M \to M$ una acción a izquierda de G en M. Si $m \in M$ es un punto fijo por la acción, es decir $\mu_g(m) = m$ para todo $g \in G$, entonces la aplicación $\phi : G \to \operatorname{Aut}(T_m M)$ definida por $\phi(g) = (d\mu_g)_m$ es una representación de G.*

DEMOSTRACIÓN: ϕ es un homomorfismo pues si $p \in M$ se tiene que

$$\mu_{gh}(p) = \mu(gh, p) = \mu(g, \mu_h(p)) = \mu_g(\mu_h(p)) = (\mu_g \circ \mu_h)(p),$$

por lo que

$$\phi(gh) = (d\mu_{gh})_m = (d\mu_g)_{\mu_h(m)} \circ (d\mu_h)_m = (d\mu_g)_m \circ (d\mu_h)_m = \phi(g) \circ \phi(h).$$

La demostración de que ϕ es C^∞ puede verse en [**38**, Teorema 3.45]. $\square$

Ahora, un grupo de Lie G actúa en sí mismo a izquierda por conjugación:

$$C : G \times G \to G, \quad C(g, h) = ghg^{-1} = C_g(h).$$

La identidad es un punto fijo de esta acción, por lo que la aplicación

$$g \mapsto (dC_g)_e$$

es una representación de G en $\operatorname{Aut}(T_e G)$. Esta es llamada la *representación adjunta* y es denotada por

$$\operatorname{Ad} : G \to \operatorname{Aut}(T_e G).$$

Denotamos al homomorfismo inducido por Ad por ad. A menudo denotaremos $\operatorname{Ad}(g)$ por Ad_g y $\operatorname{ad}(X)$ por ad_X. Por las propiedades de la exponencial tenemos la relación

$$\operatorname{Ad} \circ \exp = \exp \circ \operatorname{ad}.$$

Además, también por el diagrama conmutativo de la exponencial tenemos que

$$\exp(t \operatorname{Ad}_g(X)) = C_g(\exp(tX)) = g \exp(tX) g^{-1}.$$

Lo último que queremos mencionar es que hay una manera sencilla de calcular la representación adjunta de álgebras de Lie. La demostración de la siguiente proposición involucra flujos de campos y la derivada de Lie, por lo que no la incluimos aquí.

PROPOSICIÓN 3.18. *Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, y sean $X, Y \in \mathfrak{g}$. Entonces*

$$\operatorname{ad}_X Y = [X, Y].$$

2. Métricas riemannianas invariantes a izquierda

En esta corta sección introducimos la definición y algunas propiedades básicas de las métricas invariantes a izquierda en un grupo de Lie G, y enunciamos un criterio preciso de cuando una tal métrica es plana. La demostración se pospondrá hasta la última sección, cuando se tengan todas las herramientas necesarias para realizar la misma.

DEFINICIÓN 3.19. Una métrica riemanniana en un grupo de Lie G se dice *invariante a izquierda* si para todo $g \in G$ se cumple que

$$\langle u, v\rangle_h = \langle (dL_g)_h u, (dL_g)_h v\rangle_{gh}, \quad u, v \in T_g G,\ h \in G.$$

En otras palabras la métrica $\langle\,,\rangle$ es invariante a izquierda si la traslación a izquierda L_g es una isometría de G en G para todo $g \in G$. Análogamente una métrica riemanniana en G se dice *invariante a derecha* si la traslación a derecha R_g es una isometría para todo $g \in G$.

Observación. Si $\langle\, ,\rangle$ es una métrica invariante a izquierda en un grupo de Lie G, entonces la variedad $(G, \langle\, ,\rangle)$ es *homogénea*, es decir que dados $g, h \in G$ arbitrarios, existe una isometría que lleva g en h. Se prueba que una variedad riemanniana homogénea es completa. Por lo tanto, todo grupo de Lie G con una métrica invariante a izquierda es completo como variedad riemanniana. △

Observación. Existe una correspondencia entre el conjunto de métricas riemannianas invariantes a izquierda en G y el conjunto de productos internos en $\mathfrak{g}$. En efecto, sea $\langle\, ,\rangle$ una métrica riemanniana invariante a izquierda en G, entonces $\langle\, ,\rangle_e$ define un producto interno en $\mathfrak{g}$ dado por

$$\langle X, Y\rangle = \langle X_e, Y_e\rangle_e.$$

Recíprocamente sea $(\, ,)$ un producto interno en $\mathfrak{g}$. Dados $g \in G$ y $u, v \in T_gG$ definimos

$$\langle u, v\rangle_g = (X, Y)$$

donde X e Y son los únicos campos invariantes a izquierda tal que $X_e = (dL_g)_g^{-1}u$ y $Y_e = (dL_g)_g^{-1}v$, respectivamente. La métrica es invariante a izquierda pues

$$\langle (dL_g)_h u, (dL_g)_h v\rangle_{gh} = (X, Y),$$

con

$$X_e = (dL_{gh})_{gh}^{-1} \circ (dL_g)_h u = (dL_{h^{-1}})_h \circ (dL_{g^{-1}})_{gh} \circ (dL_g)_h u = (dL_{h^{-1}})_h u,$$

y, de manera análoga, $Y_e = (dL_{h^{-1}})v$, por lo que $(X, Y) = \langle u, v\rangle_h$. △

Sea $\mathit{\Gamma}$ un subgrupo discreto de un grupo de Lie G. Veremos que una métrica riemanniana invariante a izquierda en G permite definir una métrica riemanniana en el espacio cociente $\mathit{\Gamma}\backslash G$ que preserva ciertas propiedades de G como por ejemplo la curvatura.

Primero necesitamos que el espacio cociente sea una variedad diferenciable, lo cual está asegurado por el siguiente teorema.

Teorema 3.20. *Sea H un subgrupo cerrado de un grupo de Lie G. Entonces el espacio de coclases a izquierda G/H es una variedad topológica de dimensión igual a $\dim G - \dim H$ y posee una única estructura diferenciable tal que la proyección $\pi : G \to G/H$ es diferenciable y $(d\pi)_g$ es suryectiva para todo $g \in G$.*

Una demostración puede hallarse en [**24**, Teorema 21.17]. Este teorema vale análogamente para el conjunto de coclases a derecha.

En el caso en que $\mathit{\Gamma}$ sea un subgrupo discreto de un grupo de Lie, resulta $\mathit{\Gamma}$ automáticamente cerrado por ser G un espacio de Hausdorff, por lo que el espacio cociente $\mathit{\Gamma}\backslash G$ es una variedad. Más aún, como $\mathit{\Gamma}$ es discreto, tenemos que

$$\dim(\mathit{\Gamma}\backslash G) = \dim G - \dim \mathit{\Gamma} = \dim G,$$

por lo que $(d\pi)_g$ es un isomorfismo para todo $g \in G$. Entonces, por el teorema de la función inversa para variedades, la proyección resulta un difeomorfismo local. Construimos una métrica riemanniana en $\mathit{\Gamma}\backslash G$ para que π resulte una isometría local: Sea $g \in G$, dados $u, v \in T_{\pi(g)}\mathit{\Gamma}\backslash G$, definimos

$$\langle u, v\rangle_{\pi(g)} = \langle (d\pi)_g^{-1}u, (d\pi)_g^{-1}v\rangle_g.$$

Esta construcción es la misma que cuando construimos una métrica riemanniana en la variedad $\mathbb{R}^n/\Gamma$ donde Γ era un subgrupo de isometrías de $\mathbb{R}^n$. De manera análoga, en este caso la buena definición de la métrica se sigue de que para todo $\gamma \in \Gamma$ se tiene $\pi \circ L_\gamma = \pi$ y de que la traslación a izquierda L_γ es una isometría de G. Por construcción de la métrica, es claro que π es una isometría local, y resulta entonces que la curvatura de $\mathit{\Gamma}\backslash G$ es idéntica a la curvatura de G. Esto nos dice que si G es un grupo de Lie con una métrica invariante a izquierda plana, al cocientar por subgrupos discretos obtendremos variedades planas. El caso en que $\mathit{\Gamma}\backslash G$ es compacto será de particular interés.

Pasamos ahora a estudiar métricas invariantes a izquierda que sean planas, siempre considerando la conexión de Levi-Civita en G.

Observación. Si G es un grupo de Lie abeliano, entonces cualquier métrica invariante a izquierda es plana. Esto se deduce de los dos siguientes hechos:

Primero, si G es abeliano entonces $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie abeliana. Una manera de ver esto es considerar la representación adjunta. Como el automorfismo C_g es la función identidad del grupo para todo $g \in G$, resulta que $\mathrm{Ad}(g) = (dC_g)_e = \mathrm{Id}$ para todo $g \in G$. Así, $[X, Y] = \mathrm{ad}_X Y = (d\,\mathrm{Ad})_X Y = 0$, pues Ad es una función constante por lo que su diferencial es nulo.

Segundo, si $\langle \, , \rangle$ es una métrica invariante a izquierda en G, y X, Y son campos invariantes a izquierda, entonces la función $\langle X, Y \rangle$ es constante. En efecto,

$$\langle X, Y \rangle_g = \langle X_g, Y_g \rangle_g = \langle (dL_g)_e X_e, (dL_g)_e Y_e \rangle_g = \langle X_e, Y_e \rangle_e = \langle X, Y \rangle_e.$$

Observamos la fórmula de Koszul. Dados $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(G)$, tenemos

$$2\langle \nabla_X Y, Z \rangle = X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [Z, Y], X \rangle.$$

Si $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, por los dos hechos del párrafo anterior resulta $\langle \nabla_X Y, Z \rangle = 0$, por lo que $R(X, Y)Z = 0$. Si $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(G)$ son arbitrarios, como R es $C^\infty(G)$-trilineal, desarrollando X, Y, Z en términos de la base de campos invariantes a izquierda, resulta $R(X, Y)Z = 0$. Esto dice que el tensor de curvatura R es idénticamente nulo, por lo que la métrica $\langle \, , \rangle$ es plana. $\triangle$

Hemos visto en el capítulo anterior que una variedad riemanniana completa es plana si y sólo si es isométrica a una variedad de la forma $\mathbb{R}^n/\Gamma$, donde Γ es un subgrupo de las isometrías de $\mathbb{R}^n$ que actúa de manera propiamente discontinua en $\mathbb{R}^n$, y la métrica es la inducida por el cubrimiento $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\Gamma$. En el caso de un grupo de Lie G con una métrica invariante a izquierda $\langle \, , \rangle$ existe un criterio dado por Milnor [**26**] para decidir si la variedad $(G, \langle \, , \rangle)$ es plana.

Teorema 3.21. *Un grupo de Lie admite una métrica invariante a izquierda plana si y sólo si su álgebra de Lie se descompone como una suma directa ortogonal* $\mathfrak{b} \oplus \mathfrak{u}$*, donde* $\mathfrak{b}$ *es una subálgebra abeliana,* $\mathfrak{u}$ *es un ideal abeliano y la transformación lineal* ad_b *es antisimétrica para todo* $b \in \mathfrak{b}$.

Para demostrar este teorema, necesitamos establecer algunos hechos sobre métricas bi-invariantes, por lo que posponemos la prueba hasta la última sección.

3. Grupos de Lie unimodulares

En el último capítulo estudiaremos la existencia de subgrupos discretos cocompactos en ciertos grupos de Lie. Una condición necesaria para que estos retículos existan es que el grupo sea unimodular. El objetivo de esta sección será probar esta condición de necesidad, así como también dar algún criterio para la unimodularidad y ejemplos de grupos de Lie unimodulares.

La unimodularidad está relacionada con el concepto de medida de Haar, el cual introducimos a continuación, y mostramos una construcción para la misma en grupos de Lie a partir de formas invariantes a izquierda.

Definición 3.22. Sea G un grupo topológico localmente compacto. Se dice que una medida μ en G es:

- *Regular*, si
$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E,\ K\,\text{compacto}\},$$
donde $E \subset G$ es un abierto y,
$$\mu(S) = \text{ínf}\{\mu(A) : S \subset A,\ A\,\text{abierto}\},$$
donde $S \subset G$ es un conjunto de Borel de G.
- *Localmente compacta* si todo conjunto compacto de G posee medida finita.

Una *medida de Haar a izquierda* en G es una medida no nula μ definida sobre la σ-álgebra de Borel de G que es regular, localmente compacta e invariante a izquierda, es decir $\mu(gE) = \mu(E)$ para todo conjunto E de Borel de G.

Se sabe que todo grupo topológico localmente compacto admite una medida de Haar a izquierda y más aún, es única salvo múltiplos positivos. En el caso particular de grupos de Lie, mostraremos la existencia de una medida de Haar a izquierda a partir de formas invariantes a izquierda. Necesitaremos de la noción de pullback de formas. Sean $F : M \to N$ una función diferenciable y $k \in \mathbb{N}$. Si ω es una k-forma diferenciable en N, se define una k-forma diferenciable en M mediante

$$(F^*(\omega))_p(v_1, \dots, v_k) = \omega_{F(p)}((dF)_p v_1, \dots, (dF)_p v_k), \quad p \in M, \ v_1, \dots, v_k \in T_pM.$$

Definición 3.23. Una k-forma ω en G es *invariante a izquierda* si $L_g^*\omega = \omega$ para todo $g \in G$.

Proposición 3.24. *Para todo grupo de Lie G de dimensión n existe una n-forma nunca nula*[1] *que es invariante a izquierda, y es única salvo una constante multiplicativa.*

Demostración: Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de T_eG, y sea $\{e^1, \dots, e^n\}$ su base dual. Entonces $\omega_e = e^1 \wedge \ldots \wedge e^n \in \Lambda^n(T_e^*G) - \{0\}$. Definimos una n-forma ω nunca nula en G dada por

$$\omega_g(v_1, \dots, v_n) = \omega_e((dL_{g^{-1}})_g v_1, \dots, (dL_{g^{-1}})_g v_n), \quad v_1, \dots, v_n \in T_pM.$$

Es invariante a izquierda pues

$$\begin{aligned}(L_g^*\omega)_h(v_1, \dots, v_n) &= \omega_{gh}((dL_g)v_1, \dots, (dL_g)v_n) \\ &= \omega_e((dL_{h^{-1}})v_1, \dots, (dL_{h^{-1}})v_n) \\ &= \omega_h(v_1, \dots, v_n).\end{aligned}$$

Más aún, supongamos que ω' es otra n-forma invariante a izquierda en G. Como $\dim \Lambda^n(T_e^*G) = 1$, existe una constante no nula C tal que $\omega'_e = C\omega_e$. Por la invarianza a izquierda, para cualquier $g \in G$ se tiene que $\omega'_g = C\omega_g$. □

Si M es una variedad orientada de dimensión n, existe una noción de integración que involucra formas diferenciables, ver por ejemplo [**24**, Capítulo 16]. Sea ω una n-forma diferenciable en M nunca nula fija, una tal ω es llamada una *forma de volumen* para M. Puede definirse $\int_M f\omega$ para toda f en el espacio $C_c(M)$ de funciones continuas con soporte compacto en M, y así se obtiene un funcional lineal $f \to \int_M f\omega$ en $C_c(M)$. Dada ω' otra forma de volumen, cambiando ω' por $-\omega'$ podemos suponer que ω' es *positiva*, es decir que $\omega' = c\omega$ con $c > 0$. En el caso que ω sea positiva, el funcional lineal $f \mapsto \int_M f\omega$ es positivo en el sentido en que $f \geq 0$ implica $\int_M f\omega \geq 0$. Por el teorema de representación de Riesz existe una medida de Borel $d\mu_\omega$ en M tal que $\int_M f\omega = \int_M f(x)d\mu_\omega(x)$ para toda $f \in C_c(M)$.

Para poder concluir que una medida de Haar en un grupo de Lie siempre existe, necesitamos de la noción de funciones que preserven orientación. Notemos que si $F : M \to N$ es un difeomorfismo y ω es una forma de volumen en N, entonces $F^*\omega$ es una forma de volumen en M.

Definición 3.25. Sean M y N variedades de dimensión n orientadas y sea $F : M \to N$ un difeomorfismo. Decimos que F preserva orientación si para toda forma de volumen ω positiva en N, se satisface que $F^*\omega$ es una forma de volumen positiva en M. Análogamente, F revierte orientación si $F^*\omega$ es una forma de volumen negativa en M.

La propiedad importante que utilizaremos de los difeomorfismos que preservan orientación es la siguiente. Una demostración puede encontrarse en [**23**].

[1] En particular, todo grupo de Lie es orientable.

PROPOSICIÓN 3.26. *Sean M y N variedades de dimensión n orientadas y sea $F : M \to N$ un difeomorfismo. Si ω es una n-forma C^∞ en N, entonces*

$$\int_N f\omega = \pm \int_M (f \circ F)F^*\omega, \quad f \in C_c(N),$$

de acuerdo a si F preserva o revierte orientación respectivamente.

Con todo lo hecho, ya podemos probar que en un grupo de Lie G una medida de Haar a izquierda siempre existe.

TEOREMA 3.27. *Si G es un grupo de Lie de dimensión m, entonces G admite una forma de volumen ω invariante a izquierda. Por lo tanto G puede ser orientado de manera que ω es positiva, y así ω define una medida de Borel $d\mu_l$ no nula en G que resulta ser una medida de Haar a izquierda.*

DEMOSTRACIÓN: Hemos visto en la Proposición 3.24 que ω siempre existe y que G puede ser orientado de manera que ω resulte positiva. Sea $d\mu_l$ la medida asociada tal que $\int_G f\omega = \int_G f(x)d\mu_l(x)$ para toda $f \in C_c(G)$. Como ω es invariante a izquierda, L_g es un difeomorfismo que preserva orientación para todo $g \in G$, luego por la Proposición 3.26 tenemos

$$\int_G f(gx)d\mu_l(x) = \int_G f(x)d\mu_l(x) \tag{9}$$

para toda $f \in C_c(G)$. Si K es un conjunto compacto, podemos aplicar (9) al conjunto de funciones continuas de soporte compacto que son mayores o iguales a la función característica de K. Tomando el ínfimo, resulta que $d\mu_l(gK) = d\mu_l(K)$ para todo $g \in G$. Como G posee una base numerable, la medida $d\mu_l$ es automáticamente regular, y así $d\mu_l(gE) = d\mu_l(E)$ para todo $g \in G$ y para todo E conjunto de Borel en G. □

Este teorema muestra que todo grupo de Lie G admite una medida de Haar invariante a izquierda. Más aún, se prueba que la medida de Haar es única salvo múltiplos positivos.

De manera análoga a como hemos definido una medida de Haar a izquierda en grupos topológicos localmente compactos, análogamente se define una *medida de Haar a derecha* en G como una medida no nula μ definida sobre la σ-álgebra de Borel de G que es invariante a derecha, es decir $\mu(Eg) = \mu(E)$ para todo conjunto E de Borel de G.

Queremos destacar una propiedad importante de la medida de Haar, y es que si $f \in C_c(G)$ satisface $f \geq 0$ pero f no es idénticamente nula entonces $\int_G f d\mu > 0$.

Ahora, pasamos a introducir la función modular. Si μ es una medida de Haar a izquierda en G, se define $\mu^g(E) = \mu(Eg)$, esta medida μ^g también resulta ser una medida de Haar a izquierda, por lo que $\mu = c\mu^g$ con $c > 0$. Esto da lugar a una función $\Delta : G \to \mathbb{R}_{>0}$ tal que $\mu(E) = \Delta(g)\mu^g(E)$, Δ se llama la *función modular*.

PROPOSICIÓN 3.28. *Toda medida de Haar a izquierda en G es también una medida de Haar a derecha si y sólo si $\Delta \equiv 1$.*

DEMOSTRACIÓN: Dadas μ medida de Haar a izquierda en G y f una función integrable en G, siguiendo la demostración del Teorema 3.27 se puede probar que μ es una medida de Haar a derecha si y sólo si $\int_G f(gh)d\mu(g) = \int_G f(g)d\mu(g)$. Por lo tanto basta probar que

$$\int_G f(gh)d\mu(g) = \Delta(h) \int_G f(g)d\mu(g), \quad \text{para todo } h \in G.$$

Sea χ_E la función característica de E, entonces

$$\begin{aligned}
\int_G \chi_E(gh)d\mu(g) &= \int_G \chi_{Eh^{-1}}(g)d\mu(g) \\
&= \mu(Eh^{-1}) = \Delta(h)\mu^h(Eh^{-1}) \\
&= \Delta(h)\mu(E) \\
&= \Delta(h)\int_G \chi_E(g)d\mu(g),
\end{aligned}$$

para todo E conjunto de Borel de G. La afirmación se sigue aproximando por combinaciones lineales de funciones características, y por lo tanto queda probada la proposición. $\square$

Definición 3.29. Un grupo topológico localmente compacto G se dice *unimodular* si toda medida de Haar invariante a izquierda en G es invariante a derecha. Equivalentemente, si la función modular $\Delta : G \to \mathbb{R}_{>0}$ satisface que $\Delta \equiv 1$.

En el caso de los grupos de Lie, existe una fórmula precisa para la función modular.

Lema 3.30. *Si G es un grupo de Lie, entonces la función modular para G está dada por*

$$\Delta(g) = |\det(\mathrm{Ad}(g))|.$$

Demostración: Supongamos que $\dim G = n$. Sea ω una forma de volumen invariante a izquierda positiva. Sean $g, h \in G$, $X \in \mathfrak{X}(G)$ y $f \in C^\infty(G)$. Entonces, se tiene que

$$((dR_{g^{-1}})_h X_h)f = (\mathrm{Ad}_g X)_{hg^{-1}} f.$$

En efecto, $\gamma(t) = h\exp(tX)$ es una curva tal que $\gamma(0) = h$ y $\gamma'(0) = (dL_h)_e X_e = X_h$. Luego

$$\begin{aligned}
((dR_{g^{-1}})_h X_h)f &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(h\exp(tX)g^{-1}) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(hg^{-1}C_g(\exp(tX))) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(hg^{-1}\exp(t\,\mathrm{Ad}_g X)) \\
&= (\mathrm{Ad}_g X)_{hg^{-1}} f.
\end{aligned}$$

En conclusión $(dR_{g^{-1}})_h X_h = (\mathrm{Ad}_g X)_{hg^{-1}}$. Con esto podemos calcular $(R^*_{g^{-1}})\omega$ como sigue:

$$\begin{aligned}
(R^*_{g^{-1}}\omega)_h(X_1, \dots, X_n)_h &= \omega_{hg^{-1}}((dR_{g^{-1}})_h X_1, \dots, (dR_{g^{-1}})_h X_n)_h \\
&= \omega_{hg^{-1}}(\mathrm{Ad}_g X_1, \dots \mathrm{Ad}_g X_n)_{hg^{-1}} \\
&= (\det(\mathrm{Ad}_g))\omega_{hg^{-1}}(X_1 \dots, X_n)_{hg^{-1}} \\
&= (\det(\mathrm{Ad}_g))\omega_h(X_1, \dots, X_n)_h.
\end{aligned}$$

En la última igualdad hemos usado que si ω es una k-forma invariante a izquierda y $X_1, \dots, X_k$ son k campos invariantes a izquierda entonces la función $\omega(X_1, \dots, X_k)(g) \mapsto \omega_g(X_1\big|_g, \dots, X_k\big|_g)$ es constante.

Por lo tanto $R^*_{g^{-1}}\omega = (\det(\mathrm{Ad}_g))\omega$. Usando esto, resulta que si $\det(\mathrm{Ad}_g) > 0$, entonces $R_{g^{-1}}$ preserva orientación, y así

$$\begin{aligned}(\det(\mathrm{Ad}_g)) \int_G f(x)d\mu_l(x) &= (\det(\mathrm{Ad}_g)) \int_G f\omega \\ &= \int_G f R^*_{g^{-1}}\omega \\ &= \int_G (f \circ R_g)\omega \\ &= \int_G f(xg)d\mu_l(x) \\ &= \Delta(g) \int_G f(x)d\mu_l(x),\end{aligned}$$

y así $\det(\mathrm{Ad}_g) = \Delta(g)$. Si $\det(\mathrm{Ad}_g) < 0$, entonces $R_{g^{-1}}$ revierte orientación, de lo que se obtiene $\det(\mathrm{Ad}_g) = -\Delta(g)$. En conclusión $\Delta(g) = |\det(\mathrm{Ad}_g)|$. □

COROLARIO 3.31.
(1) *La función modular* $\Delta : G \to \mathbb{R}_{>0}$ *es un homomorfismo de grupos de Lie.*
(2) *Los grupos abelianos son unimodulares.*
(3) *Los grupos compactos son unimodulares.*

DEMOSTRACIÓN: (1) es claro. Para (2), es claro que toda medida de Haar en G invariante a izquierda es invariante a derecha, por lo tanto G es unimodular. Para (3), notar que $\Delta(G)$ es un conjunto compacto del grupo $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$, por lo que debe ser el conjunto $\{1\}$. En efecto, si $a \in \Delta(G)$ y $a \neq 1$ entonces la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por $a_n = a^n$ no posee una subsucesión convergente ya que $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ o $\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$, lo cual es un absurdo. □

Para grupos de Lie, tenemos el siguiente criterio de unimodularidad en términos del álgebra de Lie.

LEMA 3.32. *Un grupo de Lie conexo* G *es unimodular si y sólo si* $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_X) = 0$ *para todo* $X \in \mathfrak{g}$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $X \in \mathfrak{g}$, se tiene la relación

$$|\det(\mathrm{Ad}(\exp(X)))| = |\det(e^{\mathrm{ad}_X})| = |e^{\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_X)}| = e^{\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_X)}.$$

$\Rightarrow$) Si G es unimodular, entonces $1 = e^{\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_X)}$ para todo $X \in \mathfrak{g}$, por lo que $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_X) = 0$.

$\Leftarrow$) Si $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_X) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$, entonces $\det(\mathrm{Ad}(\exp(X))) = 1$ para todo $X \in \mathfrak{g}$. Pero al ser G conexo, todo elemento de G puede ser escrito como $g = \exp(X_1) \dots \exp(X_n)$ para $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{g}$. Luego

$$\det(\mathrm{Ad}(g)) = \det(\mathrm{Ad}(\exp(X_1)\dots\exp(X_n))) = \det(\mathrm{Ad}(\exp(X_1)))\dots\det(\mathrm{Ad}(\exp(X_n))) = 1,$$

por lo que G es unimodular. □

Un ejemplo de álgebra de Lie que satisface este criterio es un álgebra de Lie nilpotente, ya que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$ es nilpotente si $\mathfrak{g}$ lo es, por lo que ad_X es una transformación nilpotente para todo $X \in \mathfrak{g}$, y esto implica que $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_X) = 0$.

Para finalizar la sección, probamos un interesante criterio de unimodularidad relacionado con la existencia de subgrupos discretos tal que el cociente posee una medida invariante a izquierda finita.

En general, si G es un grupo topológico localmente compacto y $\mathit{\Gamma}$ es un subgrupo discreto, se puede definir una noción de volumen en el cociente $\mathit{\Gamma}\backslash G$ usando un dominio fundamental para la acción de Γ en G.

Definición 3.33. Sea G un grupo topológico localmente compacto. Dado un subgrupo discreto $\varGamma$ de G, un *dominio fundamental* para $\varGamma\backslash G$ es un conjunto de Borel F de G tal que $\cup_{\gamma\in\varGamma}\gamma F = G$ y $\gamma_1 F \cap \gamma_2 F = \emptyset$ si $\gamma_1 \neq \gamma_2$.

Observación. Si G es un grupo topológico localmente compacto que posee una base numerable, siempre existe un dominio fundamental para $\varGamma\backslash G$. En efecto, como $\varGamma$ es un subgrupo discreto de G, existe un conjunto abierto $V \subset G$ que contiene al elemento neutro tal que $V \cap \varGamma = \{e\}$. Como G es un grupo topológico, existe un entorno abierto U que contiene a e tal que $UU^{-1} \subset V$. Luego si $\gamma_1 \neq \gamma_2 \in \varGamma$, entonces $\gamma_1 U \cap \gamma_2 U = \emptyset$, pues si $x \in \gamma_1 U \cap \gamma_2 U$, entonces

$$x = \gamma_1 u_1 = \gamma_2 u_2,$$

por lo que $\gamma_1^{-1} x x^{-1} \gamma_2 \in UU^{-1} \subset V$, es decir que $\gamma_1^{-1}\gamma_2 \in \varGamma \cap V = \{e\}$, luego $\gamma_2 = \gamma_1$. Como G posee una base numerable, cualquier cubrimiento abierto de G posee un subcubrimiento numerable, y como $\{Ug : g \in G\}$ es un tal cubrimiento, existe una sucesión $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset G$ tal que $G = \cup_{n=1}^{\infty} U g_n$. Finalmente, sea

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(U g_n - \bigcup_{i<n} \varGamma U g_i\right).$$

Puede verificarse que F es un dominio fundamental para $\varGamma\backslash G$. △

Proposición 3.34. *Sea G un grupo topológico localmente compacto con una base numerable y sea μ una medida de Haar a izquierda en G. Entonces para cualquier subgrupo discreto $\varGamma$ de G existe una medida inducida en $\varGamma\backslash G$.*

Demostración: Sea $\pi : G \to \varGamma\backslash G$ la proyección al cociente y sea F un dominio fundamental para la acción de $\varGamma$ en G. Entonces por definición del dominio fundamental $\pi\big|_F : F \to \varGamma\backslash G$ es inyectiva. Definimos una medida ν en $\varGamma\backslash G$ por $\nu(B) = \mu(F \cap \pi^{-1}(B))$, donde B es un conjunto de Borel de $\varGamma\backslash G$. Veamos que esta medida inducida es independiente de la elección de F. Sean F y F' dos dominios fundamentales. Basta ver que $\mu(F \cap A) = \mu(F' \cap A)$ para cualquier conjunto $A \subset G$ que sea invariante por $\varGamma$. Tenemos que

$$F \cap A = \cup_{\gamma\in\varGamma}\, \gamma F' \cap F \cap A,$$

luego

$$\mu(F\cap A) = \sum_{\gamma\in\varGamma} \mu(\gamma F' \cap F \cap A) = \sum_{\gamma\in\varGamma} \mu(F' \cap \gamma^{-1} F \cap \gamma^{-1} A) = \sum_{\gamma\in\varGamma} \mu(\gamma^{-1} F \cap F' \cap A) = \mu(F' \cap A).$$

Por lo tanto la medida inducida está bien definida. □

Definición 3.35. Sea μ una medida de Haar en un grupo topológico localmente compacto G. Un subgrupo discreto $\varGamma$ de G se llama un *retículo* si $\mu'(\varGamma\backslash G)$ es finita, donde μ' es la medida inducida en $\varGamma\backslash G$. Equivalentemente $\varGamma$ es un retículo si $\mu(F) < \infty$ para todo F dominio fundamental de $\varGamma$.

En el capítulo siguiente trabajaremos con retículos tal que el cociente $\varGamma\backslash G$ sea compacto. A este tipo de retículos se los define de manera frecuente como *retículos uniformes*.

Es bien sabido que para que G admita un retículo se necesita que G sea unimodular. Probaremos esto a continuación para finalizar la sección.

Proposición 3.36. *Si un grupo topológico localmente compacto G admite un retículo $\varGamma$ entonces G es unimodular.*

Demostración: Sabemos que existe un dominio fundamental F tal que $0 < \mu(F) < \infty$. Para cada $g \in G$ el conjunto Fg también es un dominio fundamental, por lo que $\mu(Fg) = \mu(F)$ para todo $g \in G$, esto resulta por la definición de la medida inducida en $\varGamma\backslash G$. Ahora, según la definición de la función modular, se tiene para cada E conjunto de Borel de G,

$$\Delta(g)\mu^g(E) = \mu(E),$$

donde $\mu^g(E) = \mu(Eg)$. Luego $\Delta(g)\mu^g(F) = \mu(F) = \mu(Fg) = \mu^g(F)$, como $0 < \mu(Fg) < \infty$ para todo $g \in G$ por ser Fg dominio fundamental, resulta $\Delta \equiv 1$ y por lo tanto G es unimodular. □

4. Métricas bi-invariantes

Algunos grupos de Lie poseen una métrica que no es sólo invariante a izquierda, si no que también es invariante a derecha.

DEFINICIÓN 3.37. Una métrica riemanniana en G se dice *bi-invariante* si es invariante a izquierda e invariante a derecha.

En esta sección desarrollaremos la teoría de métricas bi-invariantes, siguiendo el Capítulo 7 de [**26**], con la cual podremos concluir el capítulo probando el criterio que caracteriza las métricas invariantes a izquierda planas. Veremos que la condición de admitir métricas bi-invariantes es bastante restrictiva para el grupo de Lie G. Primero daremos un criterio en términos del álgebra de Lie que caracteriza las métricas invariantes a izquierda que también son invariantes a derecha. Necesitamos un lema previo.

LEMA 3.38. *Una métrica invariante a izquierda en un grupo de Lie G es a su vez invariante a derecha si y sólo si para cada $g \in G$, la transformación lineal $\mathrm{Ad}_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ es una isometría lineal respecto al producto interno inducido en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $g \in G$ arbitrario. Notemos que la conjugación C_g es igual a la composición de una traslación a derecha con una traslación a izquierda, más precisamente $C_g = L_g \circ R_{g^{-1}}$. Esto implica que

$$\mathrm{Ad}_g = (dC_g)_e = (d(L_g \circ R_{g^{-1}}))_e = (dL_g)_{g^{-1}} \circ (dR_{g^{-1}})_e.$$

Luego, dados $X, Y \in \mathfrak{g}$ tenemos

$$\begin{aligned}(\mathrm{Ad}_g X, \mathrm{Ad}_g Y) &= \langle (\mathrm{Ad}_g X)_e, (\mathrm{Ad}_g Y)_e \rangle_e \\ &= \langle (dL_g)_{g^{-1}}((dR_{g^{-1}})_e X_e), (dL_g)_{g^{-1}}((dR_{g^{-1}})_e Y_e) \rangle_e \\ &= \langle (dR_{g^{-1}})_e X_e, (dR_{g^{-1}})_e Y_e \rangle_{g^{-1}}.\end{aligned}$$

$\Rightarrow$) Si la métrica es invariante a derecha entonces

$$\langle (dR_{g^{-1}})_e X_e, (dR_{g^{-1}})_e Y_e \rangle_{g^{-1}} = \langle X_e, Y_e \rangle_e,$$

por lo que Ad_g es una isometría lineal respecto del producto interno $(\,,)$.

$\Leftarrow$) Recíprocamente, si Ad_g es una isometría para todo $g \in G$, particularizando para g^{-1} resulta

$$\langle (dR_g)_e X_e, (dR_g)_e Y_e \rangle_g = \langle X_e, Y_e \rangle_e.$$

Como todo vector en T_eG se escribe como X_e para algún campo $X \in \mathfrak{g}$, resulta que, dados $u_0, v_0 \in T_eG$ se tiene

$$\langle u_0, v_0 \rangle_e = \langle (dR_g)_e u_0, (dR_g)_e v_0 \rangle_g.$$

Ahora, queremos ver que dado $h \in G$ y $u, v \in T_hG$, se cumple

$$\langle u, v \rangle_h = \langle (dR_g)_h u, (dR_g)_h v \rangle_{hg}.$$

Como $(dR_h)_e$ es un isomorfismo, existen únicos $\tilde{u}, \tilde{v} \in T_eG$ tales que $u = (dR_g)_e \tilde{u}$ y $v = (dR_g)_e \tilde{v}$. Así,

$$\begin{aligned}\langle (dR_g)_h u, (dR_g)_h v \rangle_{hg} &= \langle (dR_g)_h (dR_h)_e \tilde{u}, (dR_g)_h (dR_h)_e \tilde{v} \rangle_{hg} \\ &= \langle (d(R_g \circ R_h))_e \tilde{u}, (d(R_g \circ R_h))_e \tilde{v} \rangle_{hg} \\ &= \langle (dR_{hg})_e \tilde{u}, (dR_{hg})_e \tilde{v} \rangle_{hg} \\ &= \langle \tilde{u}, \tilde{v} \rangle_e \\ &= \langle (dR_h)_e \tilde{u}, (dR_h)_e \tilde{v} \rangle_h \\ &= \langle u, v \rangle_h.\end{aligned}$$

En conclusión, $\langle\, , \rangle$ es invariante a derecha. □

Para enunciar el criterio que caracteriza las métricas invariantes a izquierda que además resultan ser invariantes a derecha, precisamos la noción de adjunta de una transformación lineal entre espacios con producto interno.

LEMA 3.39. *Sea $F = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Si V es un espacio vectorial sobre F de dimensión n con un producto interno y $\ell : V \to F$ es un funcional lineal, entonces existe un único $w \in V$ tal que $\ell(v) = \langle v, w\rangle$ para todo $v \in V$.*

DEMOSTRACIÓN: La unicidad se sigue de que el producto interno es no degenerado y la existencia se prueba eligiendo una base ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^n$ de V y definiendo $v = \sum_{k=1}^n \ell(e_k)e_k$. □

Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita sobre un cuerpo F con un producto interno y sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces para cada $w \in W$ la aplicación $\ell : V \to F$ definida por $\ell(v) = \langle T(v), w\rangle$ es un funcional lineal. Por el lema anterior existe un único $y \in V$ tal que $\ell(v) = \langle y, v\rangle$.

DEFINICIÓN 3.40. Se define la *transformación adjunta* T^* de T como la transformación $T^* : W \to V$ tal que para cada $w \in W$, $T^*(w)$ es el único vector que cumple

$$\langle T(v), w\rangle = \langle v, T^*(w)\rangle.$$

Una transformación lineal $T : V \to V$ se dice *antisimétrica* si $T^* = -T$.

Es sencillo verificar que T^* es lineal y que $(\lambda T)^* = \lambda T^*$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

OBSERVACIÓN. Para el caso en que $T : V \to V$ es una isometría lineal, se tiene que T es un isomorfismo pues $\langle T(x), T(x)\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2$. Más aún, $T^* = T^{-1}$ debido a que

$$\langle x, y\rangle = \langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, T^*T(y)\rangle,$$

por lo que $T^*T = \mathrm{Id}$, luego $T^{-1} = T^*$. Es claro que también vale la recíproca, es decir que si $T : V \to V$ es un isomorfismo lineal tal que $T^{-1} = T^*$, entonces T es una isometría lineal. △

Podemos demostrar ahora un criterio para la bi-invariancia de una métrica invariante a izquierda, en términos del álgebra de Lie.

PROPOSICIÓN 3.41. *Sea G un grupo de Lie conexo, entonces una métrica invariante a izquierda es bi-invariante si y sólo si la transformación lineal ad_X es antisimétrica para todo $X \in \mathfrak{g}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $X \in \mathfrak{g}$. Por la relación entre las representaciones Ad y ad, para todo $t \in \mathbb{R}$ vale $\mathrm{Ad}(\exp(tX)) = \exp(t\,\mathrm{ad}(X))$. Por un lado,

$$(\mathrm{Ad}(\exp(tX)))^{-1} = (\exp(t\,\mathrm{ad}(X)))^{-1} = \exp(-t\,\mathrm{ad}(X)),$$

por otro lado

$$(\mathrm{Ad}(\exp(tX)))^* = (\exp(t\,\mathrm{ad}(X)))^* = \exp(t\,\mathrm{ad}(X)^*).$$

En la última igualdad usamos que si $T : V \to V$ es lineal, entonces $(\exp(T))^* = \exp(T^*)$ lo cual se sigue de la continuidad del producto interno.

$\Rightarrow$) Si G posee una métrica bi-invariante, por el Lema 3.38, Ad_g es una isometría de $\mathfrak{g}$ para todo $g \in G$, en particular para $g = \exp(tX)$. Como notamos en la observación anterior, resulta

$$\mathrm{Ad}(\exp(tX)))^{-1} = (\mathrm{Ad}(\exp(tX)))^*.$$

Esto implica que

$$\exp(-t\,\mathrm{ad}(X)) = \exp(t\,\mathrm{ad}(X)^*).$$

Derivando en $t = 0$ a ambos lados obtenemos que $-\mathrm{ad}_X = \mathrm{ad}_X^*$, por lo que ad_X es antisimétrica.

$\Leftarrow$) Si ad_X es antisimétrica para todo $X \in \mathfrak{g}$, se tiene que

$$\exp(-t\,\mathrm{ad}(X)) = \exp(t\,\mathrm{ad}(X)^*).$$

Esto implica que

$$\mathrm{Ad}(\exp(tX)))^{-1} = (\mathrm{Ad}(\exp(tX)))^*.$$

Por la observación anterior, $\mathrm{Ad}(\exp(tX))$ es una isometría lineal. Como G es conexo, todo elemento $g \in G$ se escribe como $g = \exp(X_1) \dots \exp(X_n)$ para $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{g}$. Por lo que

$$\mathrm{Ad}(g) = \mathrm{Ad}(\exp(X_1) \dots \exp(X_n)) = \mathrm{Ad}(\exp(X_1)) \circ \dots \circ \mathrm{Ad}(\exp(X_n)),$$

que resulta una isometría por ser composición de isometrías. □

Será conveniente definir productos internos en $\mathfrak{g}$ que sean bi-invariantes.

DEFINICIÓN 3.42. Un producto interno en $\mathfrak{g}$ es *bi-invariante* si la transformación lineal ad_X es antisimétrica para todo $X \in \mathfrak{g}$.

Una propiedad importante de los productos internos bi-invariantes es la siguiente. Recordemos que un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice *simple* si no contiene otros ideales distintos de 0 y $\mathfrak{g}$.

LEMA 3.43. *Si el producto interno en $\mathfrak{g}$ es bi-invariante, entonces el complemento ortogonal de cualquier ideal es un ideal. Por lo tanto $\mathfrak{g}$ se descompone en una suma directa ortogonal de ideales simples.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathfrak{a}$ un ideal de $\mathfrak{g}$. Debemos probar que el complemento ortogonal de $\mathfrak{a}$ respecto de $\langle\, ,\rangle$ es un ideal. Si $Y \in \mathfrak{g}$ es ortogonal al ideal $\mathfrak{a}$, debemos probar que $[X, Y]$ es ortogonal a $\mathfrak{a}$ para todo $X \in \mathfrak{g}$. Usando la bi-invariancia resulta

$$\langle [X, Y], A\rangle = \langle \mathrm{ad}_X(Y), A\rangle = -\langle Y, \mathrm{ad}_X(A)\rangle = -\langle Y, [X, A]\rangle = 0, \quad \text{para } A \in \mathfrak{a}.$$

Por lo tanto $\mathfrak{a}^\perp$ es un ideal. Así,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp.$$

Si estos dos ideales no son simples, podemos descomponerlos en una suma ortogonal de dos ideales de dimensión más chica, y así sucesivamente. Como $\mathfrak{g}$ es de dimensión finita, este proceso acaba en algún momento, por lo que vale la afirmación. □

Ahora queremos probar que si G admite una métrica bi-invariante entonces G se descompone como producto de grupos abelianos y grupos compactos. Para esto necesitaremos introducir otro tensor, relacionado a la curvatura, que tiene una gran importancia en la geometría riemanniana.

DEFINICIÓN 3.44. Sea M una variedad diferenciable y ∇ una conexión afín en M. Dado $p \in M$, definimos el *tensor de Ricci* por

$$\mathrm{Ric}(Y, Z)_p = \mathrm{tr}(v \mapsto R_p(v, Y_p)Z_p), \quad Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Se define la *curvatura de Ricci* r, dada por

$$r(X) = \frac{\mathrm{Ric}(X, X)}{\langle X, X\rangle}, \quad \text{para } X \in \mathfrak{X}(M) \text{ no nulo.}$$

Se verifica fácilmente que Ric es $C^\infty(M)$-bilineal, lo que asegura que Ric es un tensor. Sea $(M, \langle\, ,\rangle)$ una variedad riemanniana y sea $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base ortonormal de T_pM , entonces tenemos la fórmula $\mathrm{Ric}(Y, Z)_p = \sum_{i=1}^n \langle R_p(e_i, Y_p)Z_p, e_i\rangle_p$.

OBSERVACIÓN. Notemos que $r(X) = r(\lambda X)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, por lo que sólo basta calcular $r(X)$ para $X \in \mathfrak{g}$ unitario. △

PROPOSICIÓN 3.45. *Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ equipado con una métrica bi-invariante y sean $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. Consideremos ∇ la conexión de Levi-Civita. Entonces valen las siguientes afirmaciones:*

(1) $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$.

(2) $R(X, Y)Z = -\frac{1}{4}[[X, Y], Z]$.

(3) $r(X) \geq 0$ *para todo* $X \in \mathfrak{g}$ *y* $r(X) = 0$ *si y sólo si* $[X, U] = 0$ *para todo* $U \in \mathfrak{g}$. *En consecuencia si el centro*[2] *de* $\mathfrak{g}$ *es nulo, entonces* G *tiene curvatura de Ricci positiva.*

DEMOSTRACIÓN: Usaremos que ad_X es antisimétrica para todo $X \in \mathfrak{g}$, es decir que

$$\langle [X, Y], Z \rangle = \langle Y, [Z, X] \rangle.$$

(1) Usamos la fórmula de Koszul. Dado $W \in \mathfrak{g}$ arbitrario, recordemos que $X\langle Y, W\rangle = 0$ pues la métrica es invariante a izquierda y los campos también, por lo que resulta

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X Y, W \rangle &= \langle [X, Y], W \rangle - \langle [Y, W], X \rangle + \langle [W, X], Y \rangle \\ &= \langle [X, Y], W \rangle - \langle Y, [W, X] \rangle + \langle [W, X], Y \rangle \\ &= \langle [X, Y], W \rangle. \end{aligned}$$

(2) Por definición,

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \\ &= \nabla_X \left(\frac{1}{2}[Y, Z] \right) - \nabla_Y \left(\frac{1}{2}[X, Z] \right) - \frac{1}{2}[[X, Y], Z] \\ &= \frac{1}{4}[X, [Y, Z]] - \frac{1}{4}[Y, [X, Z]] - \frac{1}{2}[[X, Y], Z] \\ &= \frac{1}{4}[X, [Y, Z]] + \frac{1}{4}[Y, [Z, X]] - \frac{1}{2}[[X, Y], Z] \\ &= -\frac{1}{4}[Z, [X, Y]] - \frac{1}{2}[[X, Y], Z] \\ &= -\frac{1}{4}[[X, Y], Z]. \end{aligned}$$

(3) Sean $g \in G$ y $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base ortonormal de $T_g G$, y sean $X_1, \ldots, X_n$ los campos invariantes a izquierda tales que $X_i\big|_g = e_i$. Sea $W \in \mathfrak{g}$ de norma 1. Entonces

$$\begin{aligned} r(W)_g &= \mathrm{Ric}(X, X)_g \\ &= \sum_{i=1}^n \langle R_g(e_i, W_g) W_g, e_i \rangle_g \\ &= \sum_{i=1}^n \langle -\frac{1}{4}[[X_i, W], W], X_i \rangle_g \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \langle [X_i, W], [W, X_i] \rangle_g \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \| [X_i, W] \|_g^2 . \end{aligned}$$

Por lo tanto $r(W) \geq 0$ y la igualdad se da si y sólo si $[W, U] = 0$ para todo $U \in \mathfrak{g}$. □

Recordamos un teorema de geometría riemanniana, una demostración puede encontrarse en [**15**].

[2]Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie, se define el *centro* de $\mathfrak{g}$, por $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}} = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0 \text{ para todo } Y \in \mathfrak{g}\}$.

TEOREMA 3.46 (Bonnet-Myers). *Sea M una variedad riemanniana completa de dimensión n. Si la curvatura de Ricci de M satisface $r_p(v) > \frac{1}{r^2} > 0$ para todo $p \in M$ y para todo $v \in T_pM$. Entonces el diámetro*[3] *satisface $diam(M) \leq \pi r^2$ y M es compacta.*

OBSERVACIÓN. En el caso de un grupo de Lie G con una métrica invariante a izquierda, la hipótesis $r_g(v) > 0$ para todo $g \in G$ y $v \in T_gG$ alcanza para asegurar que G es compacto. En efecto, es fácil comprobar que si $F : M \to N$ es una isometría entre variedades riemannianas entonces

$$r_p(v) = r_{F(p)}((dF)_p v), \quad p \in M,\, v \in T_pM.$$

En particular, dados $g \in G$ y $v \in T_gG$, resulta $r_g(v) = r_e((dL_{g^{-1}})_g v)$. Por otro lado, la imagen de la esfera unitaria de $\mathfrak{g}$ por r es un conjunto compacto de $\mathbb{R}_{>0}$, por lo que posee un valor mínimo $r_0 > 0$. Por lo tanto $r_g(v) \geq r_0 > 0$ para todo $g \in G$, $v \in T_gG$. Aplicando el teorema de Bonnet-Myers resulta G compacto. △

Combinando las cosas que hemos visto hasta ahora, podemos obtener el siguiente teorema.

TEOREMA 3.47. *Sea G un grupo de Lie simplemente conexo con una métrica bi-invariante. Entonces*

$$G \cong A_1 \times \cdots \times A_n$$

donde A_i es un grupo de Lie abeliano o compacto para cada $1 \leq i \leq n$.

DEMOSTRACIÓN: Como G admite una métrica bi-invariante, $\mathfrak{g}$ admite un producto interno bi-invariante. Por el Lema 3.43 el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se descompone en una suma de ideales $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n$ donde $\mathfrak{a}_i$ es abeliano o simple para cada $1 \leq i \leq n$. Por lo tanto, al ser G simplemente conexo, resulta que $G \cong A_1 \times \cdots \times A_n$ con $\mathfrak{a}_i$ el álgebra de Lie de A_i. Si $\mathfrak{a}_i$ es abeliano, entonces $A_i \cong \mathbb{R}$. Si $\mathfrak{a}_i$ es simple, entonces el centro de $\mathfrak{a}_i$ debe ser nulo, por lo que A_i tiene curvatura de Ricci positiva por la Proposición 3.45. Por la observación anterior se sigue que A_i es compacto. □

Veremos que la condición de que G sea simplemente conexo en este teorema puede removerse. Para poder probar esto, necesitamos repasar algunas nociones del cubrimiento universal de grupos de Lie.

Si G es un grupo de Lie, posee un cubrimiento universal $\tilde{G}$, con una única estructura tal que $\tilde{G}$ es una variedad diferenciable y la proyección $\pi : \tilde{G} \to G$ es C^∞. Más aún, se le puede dar a $\tilde{G}$ una estructura de grupo tal que $\tilde{G}$ es un grupo de Lie y π es un homomorfismo. La multiplicación en $\tilde{G}$ está dada como sigue: consideremos la aplicación

$$\alpha : \tilde{G} \times \tilde{G} \to G \text{ tal que } \alpha(\tilde{g}, \tilde{h}) = \pi(\tilde{g})\pi(\tilde{h}^{-1}).$$

Sea $\tilde{e} \in \pi^{-1}(e)$. Como $\tilde{G} \times \tilde{G}$ es simplemente conexo, existe una única aplicación $\tilde{\alpha} : \tilde{G} \times \tilde{G} \to \tilde{G}$ tal que $\pi \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ y tal que $\tilde{\alpha}(\tilde{e}, \tilde{e}) = \tilde{e}$. Para $\tilde{g}$ y $\tilde{h}$ en $\tilde{G}$ se define

$$\tilde{g}\tilde{h} = \tilde{\alpha}(\tilde{g}, \tilde{\alpha}(\tilde{e}, \tilde{h})).$$

OBSERVACIÓN. Si G es un grupo de Lie con una métrica invariante a izquierda $\langle\, , \rangle$ entonces la métrica de cubrimiento en $\tilde{G}$ dada por

$$\langle u, v\rangle^{\sim}_{\tilde{g}} = \langle (d\pi)_{\tilde{g}} u, (d\pi)_{\tilde{g}} v\rangle_{\pi(\tilde{g})}, \quad u, v \in T_{\tilde{g}}\tilde{G},$$

[3]El *diámetro* de una variedad riemanniana M está definido por $diam(M) := \sup_{p,q\in M} d(p,q)$.

es invariante a izquierda. En efecto, vale la relación $\pi \circ L_{\tilde{g}} = L_{\pi(\tilde{g})} \circ \pi$ pues dado $\tilde{h} \in \tilde{G}$,

$$\begin{aligned}(\pi \circ L_{\tilde{g}})(\tilde{h}) &= \pi(\tilde{g}\tilde{h}) \\ &= \pi(\tilde{\alpha}(\tilde{g}, \tilde{\alpha}(\tilde{e}, \tilde{h}))) \\ &= \alpha(\tilde{g}, \tilde{\alpha}(\tilde{e}, \tilde{h})) \\ &= \pi(\tilde{g})\pi(\tilde{\alpha}(\tilde{e}, \tilde{h})^{-1}) \\ &= \pi(\tilde{g})\alpha(\tilde{e}, \tilde{h})^{-1} \\ &= \pi(\tilde{g})(\pi(\tilde{e})\pi(\tilde{h})^{-1})^{-1} \\ &= \pi(\tilde{g})\pi(\tilde{h}) = (L_{\pi(\tilde{g})} \circ \pi)(\tilde{h}).\end{aligned}$$

Usando esto, es fácil verificar que $\langle\, , \rangle^{\sim}$ es invariante a izquierda. △

La siguiente proposición muestra que el álgebra de Lie de $\tilde{G}$ es isomorfa al álgebra de Lie de G, en el caso en que G sea conexo. Para una demostración de ella, ver [**38**, Proposición 3.26].

Proposición 3.48. *Sean G y H grupos de Lie conexos, y sea $\varphi : G \to H$ un homomorfismo. Entonces φ es una aplicación de cubrimiento si y sólo si $d\varphi : T_eG \to T_eH$ es un isomorfismo.*

Por último, queremos mencionar que en el contexto de grupos de Lie también vale el primer teorema de isomorfismo para grupos abstractos, una demostración de esto puede verse en [**24**, Teorema 21.27].

Ahora podemos caracterizar los grupos de Lie conexos que admiten una métrica bi-invariante.

Teorema 3.49. *Un grupo de Lie conexo G admite una métrica bi-invariante si y sólo si es isomorfo al producto cartesiano de un grupo compacto y un grupo abeliano.*

Demostración:
$\Leftarrow$) Toda métrica invariante a izquierda en un grupo abeliano es bi-invariante. Para un grupo compacto H, se puede definir una métrica bi-invariante como sigue: Dado un producto interno fijo $(\, ,)$ en $\mathfrak{g}$ definimos $\langle\, , \rangle$ por

$$\langle u, v\rangle = \int_G (\mathrm{Ad}_g\, u, \mathrm{Ad}_g\, v)_g d\mu_l,$$

donde μ_l es la medida de Haar a izquierda en G. La buena definición del producto interno es gracias a las propiedades de la medida de Haar, y la bi-invariancia es por definición.

$\Rightarrow$) Si G admite una métrica bi-invariante, el teorema anterior muestra que el cubrimiento universal $\tilde{G}$ se descompone como un producto cartesiano de un grupo compacto H y un grupo abeliano $\mathbb{R}^m$. Por el primer teorema de isomorfismo, $\tilde{G}/\operatorname{Ker}(\pi) \cong G$, donde $\operatorname{Ker}(\pi)$ es un subgrupo normal de $\tilde{G}$ y además es discreto pues π es un difeomorfismo local. Si definimos $\Gamma := \operatorname{Ker}(\pi)$ y proyectamos Γ a $\mathbb{R}^m$, sea V el espacio vectorial generado por su imagen, y $V^{\perp}$ el complemento ortogonal. Entonces G es isomorfo al producto cartesiano del grupo compacto $(H \times V)/\Gamma$ y el grupo abeliano $V^{\perp}$. □

4.1. Caracterización de grupos de Lie con una métrica invariante a izquierda plana.

Probaremos a continuación la anteriormente mencionada caracterización de aquellos grupos de Lie que admiten una métrica invariante a izquierda plana. Antes, precisamos un lema.

Lema 3.50. *Sea G un grupo compacto de isometrías de $\mathbb{R}^n$. Entonces la acción de G en $\mathbb{R}^n$ tiene un punto fijo.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $x \in \mathbb{R}^n$ fijo, entonces la aplicación $g \to gx$ es continua. Sea μ_l la medida de Haar normalizada en G, es decir tal que $\int_G d\mu_l = 1$. Sea $v \in \mathbb{R}^n$ y consideremos $\int_G gv\, d\mu_l$. Integrando componente a componente, el resultado es un vector $v' \in \mathbb{R}^n$ que depende de v. Por invariancia a izquierda de la medida para $h^{-1} \in G$ y usando que G actúa por isometrías resulta

$$h^{-1}v' = h^{-1}\int_G gvd\mu_l = \int_G h^{-1}(gv)d\mu_l = \int_G (h^{-1}g)vd\mu_l = \int_G gvd\mu_l = v'.$$

Por lo que $h^{-1}v' = v'$, y de aquí $hv' = v'$ para todo $h \in G$. □

Damos ahora una demostración de la caracterización de grupos de Lie que admiten una métrica invariante a izquierda plana probada por Milnor en [**26**].

TEOREMA 3.51. *Una métrica invariante a izquierda en un grupo de Lie es plana si y sólo si su álgebra de Lie se descompone como una suma directa ortogonal* $\mathfrak{b} \oplus \mathfrak{u}$*, donde* $\mathfrak{b}$ *es una subálgebra abeliana,* $\mathfrak{u}$ *es un ideal abeliano y la transformación lineal* ad_b *es antisimétrica para todo* $b \in \mathfrak{b}$*.*

DEMOSTRACIÓN:

$\Rightarrow$) Sea G un grupo de Lie con una métrica invariante a izquierda plana. Consideramos el cubrimiento universal $\tilde{G}$ con la métrica de cubrimiento, la cual es invariante a izquierda. Entonces, como variedad riemanniana $\tilde{G}$ resulta isométrico a $\mathbb{R}^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. En particular, cualquier subgrupo compacto H de $\tilde{G}$ es trivial. En efecto, al hacer actuar H por multiplicación a izquierda en $\tilde{G}$, podemos considerar a H como un subgrupo compacto de isometrías de $\mathbb{R}^n$, y por el Lema 3.50 H tendría un punto fijo, pero la acción de multiplicar a izquierda no tiene puntos fijos, por lo tanto H debe ser trivial.

Ahora, sea $\langle\, ,\rangle$ el producto interno en $\mathfrak{g}$ correspondiente a la métrica de cubrimiento en $\tilde{G}$ y sea ∇ la conexión de Levi-Civita de $\tilde{G}$. Definimos una transformación lineal

$$\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{so}(\mathfrak{g})$$

dada por

$$\varphi(X) = \nabla_X$$

donde $\mathfrak{so}(\mathfrak{g})$ es el conjunto de todas las transformaciones lineales antisimétricas de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}$.

La aplicación φ está bien definida pues por compatibilidad de ∇ con la métrica, dados $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ se tiene que $\langle \nabla_X Y, Z\rangle = X\langle Y, Z\rangle - \langle Y, \nabla_X Z\rangle$, pero $X\langle Y, Z\rangle = 0$ y por lo tanto

$$\langle \nabla_X Y, Z\rangle = -\langle Y, \nabla_X Z\rangle.$$

Si $(G, \langle\, ,\rangle)$ es una variedad plana, entonces $R \equiv 0$. Como la proyección $\pi : \tilde{G} \to G$ es una isometría local, la variedad $(\tilde{G}, \langle\, ,\rangle^{\sim})$ también es plana por lo que

$$\nabla_{[X,Y]} = \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X.$$

Esto dice que φ es un homomorfismo de álgebras de Lie y por lo tanto $\mathfrak{u} = \operatorname{Ker}\varphi$ es un ideal. Como la conexión ∇ es sin torsión,

$$[u, v] = \nabla_u v - \nabla_v u = 0, \quad \text{para } u, v \in \mathfrak{u}.$$

por lo que $\mathfrak{u}$ es conmutativo.

Sea $\mathfrak{b}$ el complemento ortogonal de $\mathfrak{u}$. Para cada $b \in \mathfrak{b}$ la identidad

$$[b, u] = \nabla_b u - \nabla_u b = \nabla_b u$$

muestra que ∇_b manda $\mathfrak{u}$ en $\mathfrak{u}$. Por lo tanto ∇_b manda $\mathfrak{b}$ en $\mathfrak{b}$ ya que $\langle \nabla_b b', v\rangle = -\langle b', \nabla_b v\rangle = 0$. Se sigue que $\mathfrak{b}$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ pues ∇ es sin torsión.

La aplicación $\varphi|_{\mathfrak{b}}$ es un isomorfismo, debido a que si $b \in \mathfrak{b}$ satisface $\nabla_b = 0$ entonces $b \in \mathfrak{b} \cap \mathfrak{u} = \{0\}$. Esto nos permite considerar a $\mathfrak{b}$ como una subálgebra de Lie de $\mathfrak{so}(\mathfrak{g})$. Como $\mathfrak{so}(\mathfrak{g})$ es el álgebra de Lie del grupo ortogonal, el cual es compacto, posee un producto interno bi-invariante, por lo que $\mathfrak{b}$ posee un producto interno bi-invariante. Por el Lema 3.43, $\mathfrak{b}$ se parte como una suma directa $\mathfrak{b}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{b}_k$ de ideales simples o abelianos. Si alguno de estos $\mathfrak{b}_i$ fuera un ideal no abeliano, entonces el correspondiente grupo de Lie B_i sería compacto. Por otro lado, la inclusión $\mathfrak{b}_i \subset \mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ induciría un homomorfismo no trivial de B_i a $\tilde{G}$. Pero de esta manera, $\tilde{G}$ tendría un subgrupo compacto no trivial, lo cual es absurdo. En conclusión cada $\mathfrak{b}_i$ es un ideal abeliano y así $\mathfrak{b}$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ abeliana.

Por último, para cada $b \in \mathfrak{b}$, resulta ad_b antisimétrica pues $\mathrm{ad}_b\big|_{\mathfrak{b}}$ es trivial al ser $\mathfrak{b}$ abeliana y $\mathrm{ad}_b\big|_{\mathfrak{u}} = \nabla_b$, la cual es una transformación antisimétrica.

$\Leftarrow$) Si $\mathfrak{g}$ admite un producto interno tal que $\mathfrak{g}$ se escribe como una suma directa ortogonal $\mathfrak{g} = \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{b}$, con $\mathfrak{b}$ una subálgebra abeliana, $\mathfrak{u}$ un ideal abeliano y ad_b antisimétrica para todo $b \in \mathfrak{b}$, queremos ver que la métrica invariante asociada en G es plana. Primero mostraremos que si $u \in \mathfrak{u}$ y $b \in \mathfrak{b}$ entonces $\nabla_u = 0$ y $\nabla_b = \mathrm{ad}_b$. Notemos que esto implica que $\nabla_{[x,y]} = 0$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$. En efecto, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \in \mathfrak{u}$ pues $\mathfrak{b}$ es una subálgebra abeliana y $\mathfrak{u}$ es un ideal.

Veamos que $\nabla_u = 0$. Usaremos la fórmula de Koszul: para $x, y \in \mathfrak{g}$,

$$2\langle \nabla_u x, y\rangle = \langle [u, x], y\rangle - \langle [x, y], u\rangle + \langle [y, u], x\rangle,$$

Miremos el miembro de la derecha.

Si $x, y \in \mathfrak{b}$, al ser $\mathfrak{u}$ un ideal, $\mathfrak{b}$ una subálgebra y ser la suma ortogonal, resulta cada uno de los términos igual a 0.

Si $x \in \mathfrak{b}$ e $y \in \mathfrak{u}$, al ser ad_x antisimétrica los dos primeros términos se cancelan y el último es 0 pues $\mathfrak{u}$ es abeliano. La situación es completamente análoga si $x \in \mathfrak{u}$ e $y \in \mathfrak{b}$.

Si $x, y \in \mathfrak{u}$, al ser $\mathfrak{u}$ abeliano, resulta cada uno de los términos igual a 0.

Veamos que $\nabla_b = \mathrm{ad}_b$. Por la fórmula de Koszul,

$$2\langle \nabla_b x, y\rangle = \langle [b, x], y\rangle - \langle [x, y], b\rangle + \langle [y, b], x\rangle.$$

Miremos el miembro de la derecha.

Si $x, y \in \mathfrak{b}$, cada uno de los términos es 0 pues $\mathfrak{b}$ es abeliana.

Si $x \in \mathfrak{b}$ e $y \in \mathfrak{u}$, al ser $\mathfrak{b}$ abeliana, $\mathfrak{u}$ un ideal y la suma $\mathfrak{b} \oplus \mathfrak{u}$ ortogonal, cada uno de los términos es igual a 0.

Luego $\nabla_b x = 0 = \mathrm{ad}_b\, x, \quad \text{si}\, x \in \mathfrak{b}$.

Si $x \in \mathfrak{u}$ e $y \in \mathfrak{b}$, de manera completamente análoga al segundo caso cada uno de los términos es igual a 0.

Si $x, y \in \mathfrak{u}$, al ser una suma ortogonal y $\mathfrak{u}$ un ideal resulta $\langle [x, y], b\rangle = 0$ y al ser ad_b antisimétrica resulta $2\langle \nabla_b x, y\rangle = 2\langle [b, x], y\rangle$.

Por lo tanto $\nabla_b x = \mathrm{ad}_b\, x, \quad \text{si}\, x \in \mathfrak{u}$ y así resulta $\nabla_b = \mathrm{ad}_b$.

De aquí se sigue que el tensor de curvatura es idénticamente nulo. En efecto, como R es un tensor, basta calcularlo para campos invariantes a izquierda. Sean $x, y, z \in \mathfrak{g}$. Si x o y pertenecen al ideal $\mathfrak{u}$, hemos visto que $\nabla_u = 0$ para $u \in \mathfrak{u}$, por lo que en este caso $R(x, y)z = 0$ automáticamente. Luego basta considerar el caso en que $x, y \in \mathfrak{b}$, en donde vale $\nabla_x = \mathrm{ad}_x$ y $\nabla_y = \mathrm{ad}_y$.

$$R(x, y)z = \nabla_x\nabla_y z - \nabla_y\nabla_x z = [x, [y, z]] - [y, [x, z]] = -[x, [z, y]] - [y, [x, z]] = [z, [x, y]] = 0,$$

usando la identidad de Jacobi y que $\mathfrak{b}$ es una subálgebra abeliana. □

En [**3**], Barberis, Dotti y Fino refinaron este teorema descomponiendo aún más el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ en el caso en que es plana. A fines de usar esta versión en el próximo capítulo, reproduciremos una versión de su demostración a continuación. En este trabajo diremos que un álgebra de Lie es *plana* si el grupo de Lie simplemente conexo asociado posee una métrica invariante a izquierda plana.

TEOREMA 3.52. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie plana. Entonces $\mathfrak{g}$ se descompone como una suma directa ortogonal,*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{b} \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$$

donde $\mathfrak{b}$ es una subálgebra de Lie abeliana, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ es abeliano y satisfacen:

(1) $\mathrm{ad} : \mathfrak{b} \to \mathfrak{so}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$ *es inyectiva y* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *es de dimensión par y* $\dim \mathfrak{b} \leq \frac{\dim([\mathfrak{g},\mathfrak{g}])}{2}$*;*
(2) $\mathrm{ad}_X = \nabla_X$ *para todo* $X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{b}$.

Demostración: Por el Teorema 3.51 un álgebra de Lie plana $\mathfrak{g}$ se descompone como una suma directa ortogonal, $\mathfrak{g} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{u}$ donde $\mathfrak{b}$ es una subálgebra de Lie abeliana, $\mathfrak{u}$ es el ideal abeliano definido por $\mathfrak{u} = \{u \in \mathfrak{g} \mid \nabla_u = 0\}$ y ad_X es antisimétrica para todo $X \in \mathfrak{b}$. Como se vio en la demostración anterior, $\nabla_X = \mathrm{ad}_X$ para $X \in \mathfrak{b}$. Luego, para $X \in \mathfrak{b}$, si $\mathrm{ad}_X = 0$ entonces $\nabla_X = 0$ por lo que $X \in \mathfrak{b} \cap \mathfrak{u} = \{0\}$, en consecuencia resulta que $\mathrm{ad} : \mathfrak{b} \to \mathfrak{so}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$ es inyectiva.

Ahora, notemos que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{u}$ pues $\mathfrak{u}$ es un ideal y $\mathfrak{b}$ es abeliana. Esto dice que $\mathfrak{u}$ se descompone ortogonalmente como

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{v} \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}].$$

Veamos que $\mathfrak{v} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. En efecto, al ser $\mathrm{ad}_X : [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \to [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ antisimétrica para $X \in \mathfrak{b}$, preserva $\mathfrak{v}$. Por lo tanto,

$$[X, \mathfrak{v}] \subset \mathfrak{v} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \{0\},$$

por lo que $\mathfrak{v} \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Por otro lado, si $Y \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ entonces

$$0 = \langle [Y, X], U \rangle = \langle Y, [X, U] \rangle, \quad \text{para } X \in \mathfrak{b}, U \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}],$$

es decir que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \perp [\mathfrak{b}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]]$. Pero resulta que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{b}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]]$, pues como ad_b preserva $\mathfrak{v}$ para todo $b \in \mathfrak{b}$, debe preservar su complemento ortogonal. Además resulta de analizar los distintos casos que para todo $x, y \in \mathfrak{g}$ se tiene que $[x, y] \in [\mathfrak{b}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]]$. Por lo tanto $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \perp [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Dado que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{b} = \{0\}$, pues ad_X es inyectiva en $\mathfrak{b}$, resulta $\mathfrak{v} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

Para probar que la dimensión de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ es par, asumimos que $\dim[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 2m+1$. Como $\{\mathrm{ad}_X \mid X \in \mathfrak{b}\}$ es una subálgebra abeliana de $\mathfrak{so}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) \cong \mathfrak{so}(2m+1)$, podemos verla incluida en una subálgebra abeliana maximal. Todas las subálgebras abelianas maximales de $\mathfrak{so}(2m+1)$ son conjugadas y tienen dimensión igual a la dimensión de una subálgebra de Cartan, ver [**23**]. Una de ellas es la familia de matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & & & & \\ -a_1 & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & a_m & \\ & & & -a_m & 0 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{con } a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto existe una base $\mathcal{B} = \{e_1, f_1, \ldots, e_m, f_m, z\}$ de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ tal que para $X \in \mathfrak{b}$ se tiene

$$[\mathrm{ad}_X]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1(X) & & & & \\ -\alpha_1(X) & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & \alpha_m(X) & \\ & & & -\alpha_m(X) & 0 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathfrak{b}^*.$$

Por lo tanto $\mathrm{ad}_X(z) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{b}$. Se sigue que $z \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, lo cual es absurdo, de lo que se sigue que $\dim([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$ es par. Se sabe que la dimensión de la subálgebra de Cartan de $\mathfrak{so}(2n)$ es n, de lo que se sigue que $\dim \mathfrak{b} \leq \frac{\dim([\mathfrak{g},\mathfrak{g}])}{2}$. Finalmente, por la fórmula de Koszul resulta $\nabla_Y = 0 = \mathrm{ad}_Y$ para $Y \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. En conclusión $\mathrm{ad}_Y = \nabla_Y$ para todo $Y \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{b}$. $\square$

CAPÍTULO 4

Solvariedades planas

Las solvariedades son variedades compactas que se obtienen al cocientar un grupo de Lie soluble simplemente conexo por un retículo, es decir un subgrupo discreto cocompacto. En este capítulo vamos a estudiar solvariedades de la forma $\Gamma\backslash G$ equipadas con una métrica riemanniana plana inducida por una métrica invariante a izquierda plana en el grupo de Lie G. Nuestro enfoque será usar el teorema de caracterización de Milnor de los grupos de Lie con métricas invariantes a izquierda planas demostrado en el Capítulo 3 para estudiar dichas solvariedades, centrándonos en dimensiones bajas. Además, dado que G es isométrico a $\mathbb{R}^n$ con la métrica usual por ser una variedad completa y simplemente conexa, veremos que podemos identificar a Γ con un subgrupo de Bieberbach del grupo de isometrías de $\mathbb{R}^n$, lo cual nos permitirá aplicar la teoría de grupos de Bieberbach y variedades compactas planas, en particular podremos calcular la holonomía de la solvariedad $\Gamma\backslash G$. Para la clase especial de solvariedades planas casi abelianas, en donde el grupo de Lie G asociado es un producto semidirecto de la forma $\mathbb{R} \ltimes_\varphi \mathbb{R}^n$, podremos construir retículos y calcular los posibles grupos de holonomía de manera explícita, gracias a un criterio descripto por [**8**]. Finalmente, basándonos en las construcciones que haremos para describir retículos y los correspondientes grupos de holonomía en dimensiones bajas, exhibiremos de manera general solvariedades planas con holonomía $\mathbb{Z}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

1. Definiciones y resultados básicos acerca de solvariedades

Describir de manera global una variedad diferenciable en general es muy difícil. A menudo se obtiene información precisa y concreta pero sólo localmente, en un entorno de algún punto. Sin embargo, existen clases particulares de variedades, por ejemplo solvariedades y nilvariedades, para las cuales es posible determinar propiedades globales.

El estudio de nilvariedades fue iniciado por Malcev en 1949 mientras que las solvariedades fueron estudiadas originariamente por Mostow en 1954. Esta clase de variedades ha sido una fuente importante de ejemplos y contraejemplos en geometría diferencial, podemos citar que el primer ejemplo de una variedad simpléctica que no admite una estructura de Kähler es debido a Thurston y es una nilvariedad [**36**].

Una nilvariedad se define como un cociente compacto $\Gamma\backslash G$, donde G es un grupo de Lie simplemente conexo nilpotente y Γ es un retículo en G, es decir un subgrupo discreto cocompacto. Una generalización natural de esto es considerar una solvariedad, que se obtiene en el caso que G sea soluble. Muchas propiedades globales de las nilvariedades no pueden ser generalizadas a solvariedades, razón por la cual las solvariedades son ampliamente estudiadas en la actualidad. Mencionamos a modo de ejemplo que siempre se puede determinar la cohomología de de Rham de una nilvariedad $\Gamma\backslash G$ en términos del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G, lo cual fue probado por Nomizu [**31**] en 1954. Esto no es cierto para solvariedades en general, sólo en casos particulares como por ejemplo cuando el grupo de Lie es completamente soluble (debido a un teorema de Hattori [**19**]), o cuando vale la llamada “condición de Mostow” [**28**].

No es fácil determinar cuando un grupo de Lie admite retículos. Para grupos de Lie nilpotentes existe un criterio sencillo debido a Malcev. Desafortunadamente, en grupos de Lie solubles no hay un criterio general para determinar la existencia de retículos, pero sí existe un método para construir retículos si el grupo de Lie es casi abeliano.

Para construir nilvariedades y solvariedades, necesitamos hablar de grupos de Lie nilpotentes y solubles. Primero, recordamos la definición de grupos y álgebras de Lie nilpotentes y solubles.

Definición 4.1.

(1) Sea G un grupo. Se definen la *serie conmutador*[1] G^k y la *serie central* G_k de subgrupos de G inductivamente como sigue:

$$G^0 = G_0 = G, \quad G^k = [G^{k-1}, G^{k-1}], \quad G_k = [G, G_{k-1}].$$

El grupo G se dice *soluble* si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $G^k = \{e\}$. El grupo G se dice *nilpotente* si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $G_k = \{e\}$.

(2) Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie. Se definen la *serie conmutador* y *central* de subálgebras de $\mathfrak{g}$ por

$$\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}^k = [\mathfrak{g}^{k-1}, \mathfrak{g}^{k-1}], \quad \mathfrak{g}_k = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{k-1}].$$

El álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice *soluble* si $\mathfrak{g}^k = \{0\}$ para algún $k \in \mathbb{N}$. El álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice *nilpotente* si $\mathfrak{g}_k = \{0\}$ para algún $k \in \mathbb{N}$.

Se tiene la siguiente proposición sobre grupos y álgebras de Lie solubles y nilpotentes. Una prueba puede encontrarse en [**37**].

Proposición 4.2.

(1) *Los subgrupos de las series conmutador y central de un grupo G son normales. Además, en el caso en que G sea un grupo de Lie simplemente conexo, son cerrados en G y resultan grupos de Lie simplemente conexos.*

(2) *Las subálgebras de las series conmutador y central de un álgebra de Lie son ideales.*

(3) *Un grupo de Lie es soluble si y sólo si su álgebra de Lie es soluble y es nilpotente si y sólo si su álgebra de Lie lo es.*

Observación. Como $\mathfrak{g}^k \subset \mathfrak{g}_k$ para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, resulta que todo álgebra de Lie nilpotente es soluble. Claramente, lo mismo vale para grupos. △

Queremos estudiar cocientes de grupos de Lie solubles por subgrupos discretos cocompactos, los cuales son usualmente denominados *retículos*. Sin embargo, existe una definición de retículo más general. Recordemos la definición que dimos en el Capítulo 3. Dada μ una medida de Haar a izquierda en un grupo de Lie G, un retículo es un subgrupo discreto tal que $\mu'(\Gamma\backslash G) < \infty$ donde μ' es la medida inducida por μ. Es claro que si $\Gamma\backslash G$ es una variedad compacta, entonces Γ es un retículo. Por otro lado, debido a un resultado de Mostow [**29**], si G es soluble entonces la variedad $\Gamma\backslash G$ resulta compacta si Γ es un retículo. Como estudiaremos grupos de Lie solubles, diremos simplemente que un retículo Γ de G es un subgrupo discreto tal que el cociente $\Gamma\backslash G$ es compacto.

Definición 4.3. Una *solvariedad* S es un cociente compacto de la forma $\Gamma\backslash G$ donde G es un grupo de Lie soluble simplemente conexo y Γ es un retículo en G, es decir un subgrupo discreto cocompacto. Si G es nilpotente, S se dice una *nilvariedad*.

[1] Si G es un grupo, el *subgrupo conmutador* $[G, G]$ se define como el subgrupo generado por todos los elementos de la forma $[g, h]$ donde $g, h \in G$ y $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$.

Observación. Cabe aclarar que existen diferentes definiciones de solvariedades en la literatura. Por ejemplo, L. Auslander define una solvariedad como un cociente de un grupo de Lie conexo soluble por un subgrupo cerrado, [**2**]; K. Hasegawa define una solvariedad S como un espacio homogéneo compacto de un grupo de Lie soluble, esto es una variedad compacta en la cual un grupo de Lie soluble G actúa de manera transitiva, [**20**]. Como se observa en la página 132 de [**20**], se puede asumir que $S = \Gamma\backslash\tilde{G}$, donde $\tilde{G}$ es el cubrimiento universal de G y Γ es un subgrupo cerrado de $\tilde{G}$. Notemos que un grupo cerrado de un grupo de Lie soluble no tiene por qué ser discreto; sin embargo, toda solvariedad compacta en el sentido de Auslander posee una solvariedad $\Gamma\backslash\tilde{G}$ con subgrupo de isotropía discreto Γ como un espacio de cubrimiento,[**2**]. En este trabajo sólo se considerarán solvariedades como en la definición que dimos. $\triangle$

Una propiedad que es importante remarcar de las solvariedades según nuestra definición es que son orientables. Más aún, el siguiente teorema asegura que son paralelizables.

Teorema 4.4. *Sea G un grupo de Lie y sea Γ un retículo en G. Entonces $\Gamma\backslash G$ es paralelizable.*

Demostración: Por el Lema 3.8, todo grupo de Lie es paralelizable, por lo que existe una base de campos invariantes a izquierda $\{X_1, \dots, X_n\}$ tales que $\{X_1(g), \dots, X_n(g)\}$ es una base de T_gG para todo $g \in G$. Consideremos la acción de Γ por multiplicación a izquierda en G, y sea $\pi : G \to \Gamma\backslash G$ la proyección canónica. Tenemos que $(d\pi)_g(X_g) = (d\pi)_h(X_h)$ si $\pi(g) = \pi(h)$. En efecto, si $\pi(g) = \pi(h)$, entonces $h = \gamma g$ para algún $\gamma \in \Gamma$. Luego

$$(d\pi)_{\gamma g}(X_{\gamma g}) = (d\pi)_{\gamma g}(dL_\gamma)_g X_g = d(\pi \circ L_\gamma)_g X_g = (d\pi)_g X_g.$$

Por lo tanto los campos X_i inducen únicos campos Y_i en el cociente $\Gamma\backslash G$ que son C^∞ tales que $X_i \sim_\pi Y_i$. Como Γ es discreto, $(d\pi)_g$ es un isomorfismo para todo $g \in G$. Esto implica, dado que $\{X_1(g), \dots, X_n(g)\}$ es una base, que el conjunto $\{Y_1(\pi(g)), \dots, Y_n(\pi(g))\}$ es una base de $T_{\pi(g)}\Gamma\backslash G$ para todo $g \in G$. Luego, $\Gamma\backslash G$ es paralelizable. $\square$

Es claro que toda nilvariedad es una solvariedad. Sin embargo, existen solvariedades que no son difeomorfas a ninguna nilvariedad pues todo retículo en un grupo de Lie nilpotente es nilpotente, pero en general los retículos en grupos de Lie solubles no son nilpotentes y por lo tanto las correspondientes solvariedades no son nilvariedades.

Todo grupo de Lie soluble simplemente conexo es difeomorfo a $\mathbb{R}^n$ (véase por ejemplo [**37**]) para algún $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que una solvariedad es asférica, esto es que los grupos de homotopía de orden mayor a 1 son nulos, y que su grupo fundamental es isomorfo al retículo por el cual se está cocientando, es decir que

$$\pi_1(\Gamma\backslash G) \cong \Gamma.$$

El grupo fundamental juega un rol importante en el estudio de las solvariedades. Más aún, están determinadas salvo difeomorfismo según su grupo fundamental, debido al Teorema de Mostow, cuya prueba puede encontrarse en [**32**, Teorema 3.6].

Teorema 4.5 (Mostow). *Sean G_1 y G_2 grupos de Lie solubles simplemente conexos. Si Γ_1 y Γ_2 son retículos en G_1 y G_2 respectivamente, entonces, dado un isomorfismo $\phi : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ existe un difeomorfismo $\tilde{\phi} : G_1 \to G_2$ tal que*

- $\tilde{\phi}|_{\Gamma_1} = \phi$,
- $\tilde{\phi}(\gamma g) = \phi(\gamma)\tilde{\phi}(g), \quad \gamma \in \Gamma_1, g \in G_1.$

Corolario 4.6. *Dos solvariedades con grupos fundamentales isomorfos son difeomorfas.*

En general no es fácil construir una solvariedad, pues dado un grupo de Lie soluble no existe un método general para encontrar retículos. Para nilvariedades el problema tiene una solución precisa debido a Malcev [**25**].

TEOREMA 4.7. *Sea G un grupo de Lie nilpotente simplemente conexo y sea $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. Entonces G admite un retículo Γ si y sólo si $\mathfrak{g}$ admite una base $\{X_1, \ldots, X_n\}$ tal que las constantes de estructura C_{ij}^k definidas por la ecuación*

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^k X_k$$

son números racionales.

Para solvariedades en general sólo tenemos una condición necesaria, que es la que probamos en el Capítulo 3: si un grupo de Lie soluble admite un retículo entonces G es unimodular, lo cual es equivalente a que $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_X) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$. Para un caso particular de grupos de Lie solubles, los grupos de Lie casi abelianos, existe una condición necesaria y suficiente, como veremos.

En las próximas secciones estudiaremos solvariedades planas en dimensiones bajas. La mayoría de los grupos de Lie solubles de tales dimensiones poseen una estructura de producto semidirecto, por lo que recordamos a continuación ciertas nociones de productos semidirectos.

DEFINICIÓN 4.8. Dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, una *derivación* es una transformación lineal $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ que satisface

$$D([X, Y]) = [D(X), Y] + [X, D(Y)], \quad \text{para todo}\, X, Y \in \mathfrak{g}.$$

El espacio vectorial de todas las derivaciones en $\mathfrak{g}$ se denota por $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ y resulta ser una subálgebra de Lie de $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$.

LEMA 4.9. *Si G es un grupo de Lie simplemente conexo, entonces el conjunto* $\mathrm{Aut}(G)$ *de todos los automorfismos de grupos de Lie es un grupo de Lie con la composición y su álgebra de Lie es* $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$.

DEMOSTRACIÓN: Ver [**38**] 3.57, (b). □

DEFINICIÓN 4.10. Sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ álgebras de Lie y sea $\psi : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}(\mathfrak{h})$ un homomorfismo, se define el *producto semidirecto* $\mathfrak{g} \ltimes_\psi \mathfrak{h}$ como el espacio vectorial $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ con el corchete dado por

$$[(X_1 + Y_1), (X_2 + Y_2)] := [X_1, X_2] + [Y_1, Y_2] + \psi(X_1)(Y_2) - \psi(X_2)(Y_1),$$

donde $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}$, $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{h}$.

Sean G y H grupos de Lie y sea $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(H)$ un homomorfismo, se define el *producto semidirecto* $G \ltimes_\varphi H$ como el producto $G \times H$ con la operación de grupo dada por

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) := \big(g_1 g_2, h_1 \varphi(g_1)(h_2)\big),$$

donde $g_1, g_2 \in G$, $h_1, h_2 \in H$.

El producto semidirecto de álgebras de Lie resulta ser un álgebra de Lie, y el producto semidirecto de grupos de Lie resulta ser un grupo de Lie. Más aún, están relacionados según muestra la siguiente proposición, cuya prueba puede encontrarse por ejemplo en [**37**].

PROPOSICIÓN 4.11. *Sea $\mathfrak{g} \ltimes_\psi \mathfrak{h}$ un producto semidirecto de álgebras de Lie, entonces el grupo de Lie simplemente conexo asociado es $G \ltimes_\varphi H$ donde G y H son los grupos de Lie simplemente conexos asociados a $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ respectivamente, y $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(H)$ es el único homomorfismo tal que $d\varphi = \psi$.*

En las próximas secciones, aparecerán de manera frecuente solvariedades planas especiales, las cuales se obtendrán a partir de grupos de Lie con estructura sencilla.

Definición 4.12. Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice *casi abeliana* si no es abeliana y posee un ideal abeliano de codimensión 1, es decir que se puede escribir como

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}x \ltimes_{\mathrm{ad}_x} \mathbb{R}^n$$

para algún $n \in \mathbb{N}$.

Notemos que la condición de que un álgebra de Lie casi abeliana no sea abeliana se traduce en que $\mathrm{ad}_x\big|_{\mathbb{R}^n} \neq 0$. Por otro lado, un álgebra de Lie casi abeliana es soluble pues $[[\mathfrak{g},\mathfrak{g}],[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]] = 0$, y es nilpotente si y sólo si $\mathrm{ad}_x|_{\mathbb{R}^n}$ es nilpotente.

Definición 4.13. Un grupo de Lie se dice *casi abeliano* si su álgebra de Lie es casi abeliana.

Un grupo de Lie simplemente conexo casi abeliano se escribe como

$$G = \mathbb{R} \ltimes_{\varphi} \mathbb{R}^n, \quad \text{donde} \quad \varphi(t) = e^{t\,\mathrm{ad}_x},$$

ya que por la Proposición 4.11 la aplicación φ es el único homomorfismo que cumple $d\varphi = \mathrm{ad}_x$. Por lo tanto

$$\varphi(t) = \mathrm{Ad}_{\exp(x)}(t) = e^{t\,\mathrm{ad}_x}.$$

Notemos que $\mathbb{R}^n$ es un subgrupo normal de G.

Un hecho importante de los grupos casi abelianos es que existe un criterio para la existencia de retículos como veremos más adelante.

1.1. Un primer resultado sobre holonomía de solvariedades planas. Recordemos del Capítulo 3 que si G es un grupo de Lie con una métrica riemanniana invariante a izquierda $\langle\, ,\rangle$ y Γ es un subgrupo discreto de G, entonces $\langle\, ,\rangle$ induce una métrica riemanniana en el cociente $\Gamma\backslash G$.

Queremos estudiar solvariedades $\Gamma\backslash G$ con una métrica plana inducida por una métrica invariante a izquierda plana en G, partiendo de la caracterización de Milnor de los grupos de Lie que admiten una métrica invariante a izquierda plana, la cual se ha demostrado al final del capítulo anterior. Notemos que un tal grupo de Lie es soluble y unimodular.

Observación. Notar que no asumimos que G actúa por isometrías en $\Gamma\backslash G$. De hecho, es sabido que si M es una variedad riemanniana plana con un grupo transitivo de isometrías, entonces $M \cong T^m \times \mathbb{R}^k$ para algún k y algún m, [**39**]. △

En general, si G es un grupo de Lie simplemente conexo que admite una métrica invariante a izquierda plana, entonces G es isométrico como variedad riemanniana a $\mathbb{R}^n$ con la métrica usual. Esto nos permite identificar a Γ con un subgrupo de isometrías de $\mathbb{R}^n$ del siguiente modo:

Sea $\psi : G \to \mathbb{R}^n$ una isometría, definimos una acción de G en $\mathbb{R}^n$ como sigue: dado $x \in \mathbb{R}^n$, existe un único $h \in G$ tal que $x = \psi(h)$. Sea entonces $\tau_g(x) = \psi(gh)$. Notemos que esta acción es por isometrías, en efecto, dados $u, v \in T_x\mathbb{R}^n$, usando que ψ es una isometría y que $\psi \circ L_g = \tau_g \circ \psi$ resulta

$$\begin{aligned}
\langle (d\tau_g)_{\psi(h)}u, (d\tau_g)_{\psi(h)}v\rangle_{\psi(gh)} &= \langle (d\psi^{-1})_{\psi(gh)}(d\tau_g)_{\psi(h)}u, (d\psi^{-1})_{\psi(gh)}(d\tau_g)_{\psi(h)}\rangle_{gh} \\
&= \langle d(\psi^{-1} \circ \tau_g)_{\psi(h)}u, d(\psi^{-1} \circ \tau_g)_{\psi(h)}v\rangle_{gh} \\
&= \langle d(L_g \circ \psi^{-1})_{\psi(h)}u, d(L_g \circ \psi^{-1})_{\psi(h)}v\rangle_{gh} \\
&= \langle (d\psi^{-1})_{\psi(h)}u, (d\psi^{-1})_{\psi(h)}v\rangle_{h} \\
&= \langle u, v\rangle_{\psi(h)}.
\end{aligned}$$

Luego podemos definir la aplicación $i : G \to \mathcal{M}_n$ dada por $i(g) = \tau_g$, la cual es claramente un homomorfismo de grupos inyectivo. Por lo tanto, identificaremos a Γ con su imagen y consideraremos a Γ como un subgrupo de isometrías de $\mathbb{R}^n$.

La solvariedad $\varGamma\backslash G$ es isométrica a $\mathbb{R}^n/\varGamma$ mediante la aplicación $\phi([g]) = [\psi(g)]$. Observemos que ϕ está bien definida pues $\phi([\gamma g]) = [\psi(\gamma g)] = [\tau_\gamma(\psi(g))] = [\psi(g)] = \phi([g])$. Más aún es inyectiva, pues si $[\psi(g)] = [\psi(h)]$ entonces $\psi(g) = \tau_\gamma(\psi(h))$ por lo que $\psi(g) = \psi(\gamma h)$ y así $g = \gamma h$ por lo que $[g] = [h]$. Es claro que ϕ es suryectiva, y al ser una composición de isometrías locales y biyectiva resulta una isometría. Por lo tanto $\varGamma$ es un subgrupo de Bieberbach de $\mathcal{M}_n$ y por el Teorema 2.62,

$$\mathrm{Hol}(\mathbb{R}^n/\varGamma) \cong r(\varGamma),$$

donde $r : \mathcal{M}_n \to \mathsf{O}(n)$ es la proyección $r(A, v) = A$. Recordemos que $r(\varGamma)$ se identifica con el grupo finito $\varGamma/\Lambda$ donde Λ es el subgrupo normal abeliano maximal de $\varGamma$. En conclusión

$$\mathrm{Hol}(\varGamma\backslash G) \cong \varGamma/\Lambda. \tag{10}$$

Terminaremos este capítulo probando un primer resultado sobre holonomía de solvariedades planas. Más precisamente, probaremos que la holonomía de una solvariedad plana es un grupo abeliano.

TEOREMA 4.14. *El grupo de holonomía de cualquier solvariedad plana es abeliano.*

DEMOSTRACIÓN: Sea G un grupo de Lie simplemente conexo con una métrica invariante a izquierda plana y sea $\varGamma$ un retículo en G. Si $\mathfrak{g}$ denota el álgebra de Lie de G, sabemos por el Teorema 3.51 que $\mathfrak{g} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{u}$ donde $\mathfrak{b}$ es una subálgebra abeliana, $\mathfrak{u}$ es un ideal abeliano y $\mathrm{ad}_x : \mathfrak{u} \to \mathfrak{u}$ es antisimétrico para todo $x \in \mathfrak{b}$. Podemos reescribir a $\mathfrak{g}$ como $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^k \ltimes_{\mathrm{ad}} \mathbb{R}^\ell$ donde $m = \dim \mathfrak{b}$ y $n = \dim \mathfrak{u} \geq 2$. En consecuencia G puede escribirse como el producto semidirecto $G = \mathbb{R}^k \ltimes_\varphi \mathbb{R}^\ell$ para cierto homomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^\ell)$.

Como $\varGamma \subset \mathbb{R}^k \ltimes_\varphi \mathbb{R}^\ell$ es un grupo de Bieberbach existe un subgrupo normal abeliano maximal Λ de índice finito en $\varGamma$. Ahora, el subgrupo $\varGamma \cap \mathbb{R}^\ell$ es un subgrupo normal y abeliano de $\varGamma$ entonces por la maximalidad de Λ (Proposición 1.28) tenemos que $\varGamma \cap \mathbb{R}^\ell \subset \Lambda$. Veremos a continuación que $\varGamma/(\varGamma \cap \mathbb{R}^\ell)$ es abeliano. En efecto, consideremos la composición

$$\varGamma \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^k \ltimes \mathbb{R}^\ell \xrightarrow{\pi} (\mathbb{R}^k \ltimes \mathbb{R}^\ell)/\mathbb{R}^\ell,$$

entonces por el primer teorema de isomorfismo resulta

$$\varGamma/(\varGamma \cap \mathbb{R}^\ell) \simeq \mathrm{Im}(\pi \circ \iota) \prec (\mathbb{R}^k \ltimes \mathbb{R}^\ell)/\mathbb{R}^\ell \simeq \mathbb{R}^k,$$

por lo que efectivamente el grupo de la izquierda es abeliano.

La aplicación natural $\varGamma/(\varGamma \cap \mathbb{R}^\ell) \to \varGamma/\Lambda$ es un homomorfismo suryectivo, y al ser $\varGamma/(\varGamma \cap \mathbb{R}^\ell)$ abeliano, resulta $\varGamma/\Lambda$ abeliano. Debido a (10) obtenemos que la holonomía es abeliana. □

Más adelante, en la Sección 4, probaremos que todo grupo abeliano finito es el grupo de holonomía de una solvariedad plana.

Una última propiedad que probaremos en relación a los grupos de Bieberbach es que los retículos de grupos de Lie planos no son primitivos, es decir que su centro no es trivial. Recordemos que el *centro* de un grupo G se define como $Z_G = \{g \in G \mid gh = hg \text{ para todo } h \in G\}$.

PROPOSICIÓN 4.15. *Sea G un grupo de Lie que admite una métrica invariante a izquierda plana y sea $\varGamma$ un retículo de G. Entonces $\varGamma$ no es primitivo.*

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar, si Γ es un grupo de Bieberbach entonces el centro de Γ es trivial si y sólo si la abelianización $\Gamma/[\Gamma, \Gamma]$ es finita [**34**, Proposición 4.1]. En particular, el centro de Γ es trivial si y sólo si la solvariedad $\Gamma\backslash G$ posee su primer número de Betti[2] β_1 igual a 0. Sin embargo, se tiene que $\beta_1(\Gamma\backslash G) > 0$ ya que se puede probar (usando más herramientas) que $\beta_1(\varGamma\backslash G) > \dim(\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$ y este último es un número positivo dado que $\mathfrak{g}$ es soluble. En consecuencia el centro de Γ no puede ser trivial. □

[2]Ver Sección 3 para la definición precisa de β_1.

2. Grupos de Lie casi abelianos planos

En esta sección nos concentraremos en las solvariedades planas que se pueden obtener a partir de grupos de Lie casi abelianos planos, los cuales aparecerán de manera frecuente en dimensiones bajas. Deduciremos propiedades sobre retículos y los grupos de holonomía de las correspondientes solvariedades.

2.1. Álgebras de Lie casi abelianas planas. Caracterizaremos a continuación las álgebras de Lie casi abelianas planas, en relación al Teorema 3.52.

TEOREMA 4.16. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie plana y sea*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{b} \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \tag{11}$$

su descomposición en suma directa ortogonal como en el Teorema 3.52, donde $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ es un ideal abeliano de dimensión par, $\mathfrak{b}$ es una subálgebra abeliana y $\mathrm{ad} : \mathfrak{b} \to \mathfrak{so}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$ es inyectiva. Entonces $\mathfrak{g}$ es casi abeliana si y sólo si $\dim \mathfrak{b} = 1$.

DEMOSTRACIÓN: $\Rightarrow$) Sea $\mathfrak{u} \simeq \mathbb{R}^n$ un ideal abeliano de codimensión 1 y sea $x \neq 0$ perpendicular a $\mathfrak{u}$. Entonces $\mathfrak{g}$ se escribe como $\mathfrak{g} = \mathbb{R}x \ltimes_{\mathrm{ad}_x} \mathbb{R}^n$, con $\mathbb{R}x \perp \mathbb{R}^n$. Queremos probar que $x \in \mathfrak{b}$, para lo cual notamos antes que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subset \mathbb{R}^n$. En efecto, es claro que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathbb{R}^n$ y también se tiene que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subset \mathbb{R}^n$ dado que si un elemento $z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ se escribe como $z = ax + u$ para $a \in \mathbb{R}$ no nulo y $u \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$0 = [z, x] = [u, x].$$

En consecuencia, al ser $\mathbb{R}^n$ abeliano, se tiene que $u \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ y esto implica que $x \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ lo cual es absurdo pues $\mathfrak{g}$ no es abeliana. Luego $a = 0$ y así $z \in \mathbb{R}^n$ por lo que

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathbb{R}^n.$$

Ahora escribimos $x = z + b + y$ según la descomposición (11) y así resulta $0 = \langle x, z\rangle = \langle x, y\rangle$. Como $\langle x, z\rangle = \|z\|^2 + \langle b, z\rangle + \langle y, z\rangle = \|z\|^2$ y análogamente $\langle x, y\rangle = \|y\|^2$ se tiene que $0 = \|z\|^2 = \|y\|^2$ lo que implica que $x \in \mathfrak{b}$. Podemos descomponer a $\mathfrak{b}$ como

$$\mathfrak{b} = \mathbb{R}x \oplus (\mathbb{R}x)^\perp.$$

Si $v \in \mathfrak{b} \cap (\mathbb{R}x)^\perp$, entonces $v \in \mathfrak{b} \cap \mathbb{R}^n$, lo que implica que $v \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, por lo tanto $v = 0$. En consecuencia $\mathfrak{b} = \mathbb{R}x$.

$\Leftarrow$) Si $\dim \mathfrak{b} = 1$ entonces el ideal $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ es abeliano y posee codimensión 1, luego $\mathfrak{g}$ es casi abeliana. $\square$

Como consecuencia de este teorema, resulta que si $\mathfrak{g} = \mathbb{R}x \ltimes_{\mathrm{ad}_x} \mathbb{R}^m$ es un álgebra de Lie plana, entonces ad_x es una transformación antisimétrica y

$$\mathbb{R}^m = \mathrm{Ker}(\mathrm{ad}_x) \oplus \mathrm{Im}(\mathrm{ad}_x), \quad \text{donde } \mathrm{Ker}(\mathrm{ad}_x) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}),\ \mathrm{Im}(\mathrm{ad}_x) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \text{ y } \dim([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) \text{ es } \textit{par}.$$

Por lo tanto existe una base $\mathcal{B} = \{e_1, f_1 \, \dots , e_n, f_n\}$ de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ y una base $\mathcal{B}'$ de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ tales que

$$[\mathrm{ad}_x]_{\mathcal{B}' \cup \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0_{s\times s} & & & & & \\ & 0 & a_1 & & & \\ & -a_1 & 0 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 0 & a_n \\ & & & & -a_n & 0 \end{pmatrix} \quad \text{donde } s = \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \text{ y } a_1, \dots , a_n \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Denotaremos al álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathbb{R}x \ltimes_{\mathrm{ad}_x} \mathbb{R}^{s+2n}$ por $\mathfrak{g}_{s,a_1,\dots,a_n}$. Es claro que fijada la base $\mathcal{B}$, el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ queda determinada por los parámetros $s, a_1, \dots , a_n$.

LEMA 4.17.

(1) *El álgebra de Lie* $\mathfrak{g}_{s,a_1,\dots,a_i,\dots,a_j,\dots,a_n}$ *es isomorfa a* $\mathfrak{g}_{s,a_1,\dots,a_j,\dots,a_i,\dots,a_n}$.

(2) *El álgebra de Lie* $\mathfrak{g}_{s,a_1,\dots,a_i,\dots,a_n}$ *es isomorfa a* $\mathfrak{g}_{s,a_1,\dots,-a_i,\dots,a_n}$.

(3) *El álgebra de Lie* $\mathfrak{g}_{s,a_1,\dots,a_n}$ *es isomorfa a* $\mathfrak{g}_{s,ca_1,\dots,ca_n}$ *para todo* $c \in \mathbb{R}$ *no nulo.*

DEMOSTRACIÓN:

(1) Un isomorfismo es $\phi : \mathfrak{g}_{s,a_1,\dots,a_i,\dots,a_j,\dots,a_n} \to \mathfrak{g}_{s,a_1,\dots,a_j,\dots,a_i,\dots,a_n}$ dado por

$$\phi(e_j) = e_i,\ \phi(f_j) = f_i, \quad \phi(e_i) = e_j,\ \phi(f_i) = f_j,$$

y en los demás elementos de la base $\{x\} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ es la identidad. En efecto, calculamos

$$\phi([x, e_i]) = \phi(-a_i f_i) = -a_i f_j,$$
$$[\phi(x), \phi(e_i)] = [x, e_j] = -a_i f_j.$$

La verificación para los demás corchetes se realiza de manera análoga.

(2) Un isomorfismo es $\phi : \mathfrak{g}_{s,a_1,\dots,a_i,\dots,a_n} \to \mathfrak{g}_{s,a_1,\dots,-a_i,\dots,a_n}$ dado por

$$\phi(e_i) = -e_i,\ \phi(f_i) = f_i,$$

y en los demás elementos de la base $\{x\} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ es la identidad. En efecto, calculamos

$$\phi([x, e_i]) = \phi(-a_i f_i) = -a_i f_i,$$
$$[\phi(x), \phi(e_i)] = [x, -e_i] = -[x, e_i] = -a_i f_i.$$

La verificación para los demás corchetes se realiza de manera análoga.

(3) Un isomorfismo es $\phi : \mathfrak{g}_{s,a_1,\dots,a_n} \to \mathfrak{g}_{s,ca_1,\dots,ca_n}$ dado por

$$\phi(X) = \frac{1}{c}X, \quad X \in \mathfrak{g}.$$

En efecto, calculamos

$$\phi([x, e_j]) = \phi(-a_j f_j) = -\frac{1}{c}a_j f_j,$$
$$[\phi(x), \phi(e_j)] = \frac{1}{c^2}[x, e_j] = -\frac{1}{c}a_j f_j.$$

La verificación para los demás corchetes se realiza de manera análoga. □

En virtud de este lema, podemos suponer que $a_1, \dots, a_n$ son todos positivos y que $a_1 = 1$. Más aún, no es difícil verificar, planteando las correspondientes ecuaciones, que si $b_1, \dots, b_{n-1}$ y $c_1, \dots, c_{n-1}$ cumplen la condición $1 \geq b_1 \geq \cdots \geq b_{n-1} > 0$ y $1 \geq c_1 \geq \cdots \geq c_{n-1} > 0$ entonces $\mathfrak{g}_{s,1,b_1,\dots,b_{n-1}}$ es isomorfa a $\mathfrak{g}_{s',1,c_1,\dots,c_{n-1}}$ si y sólo $s = s'$ y $b_i = c_i$ para todo $1 \leq i \leq n-1$. Sin embargo, nos olvidaremos de esta condición más adelante. En resumen, un álgebra de Lie plana casi abeliana $\mathfrak{g}$ se escribe de la forma

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}x \ltimes_{\mathrm{ad}_x} \mathbb{R}^{s+2n}$$

y existen bases $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^{2n}$ y $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^s$ tal que

$$[\mathrm{ad}_x]_{\mathcal{B}'\cup\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0_{s\times s} & & & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & & \\ & -1 & 0 & & & & & \\ & & & 0 & b_1 & & & \\ & & & -b_1 & 0 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 0 & b_{n-1} \\ & & & & & & -b_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{con } b_1, \dots, b_{n-1} > 0.$$

Para describir el grupo simplemente conexo asociado a un álgebra de Lie casi abeliana recordamos brevemente propiedades de exponenciación de matrices. El conjunto $\mathsf{GL}(m,\mathbb{R})$ de matrices inversibles de tamaño $m\times m$ es un grupo de Lie y su álgebra de Lie asociada es el conjunto $\mathfrak{gl}(m,\mathbb{R})$ de todas las matrices de tamaño $m\times m$. La función exponencial $\exp:\mathfrak{gl}(m,\mathbb{R})\to\mathsf{GL}(m,\mathbb{R})$ está dada por la exponencial de matrices

$$e^A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}.$$

Es fácil verificar que si A es una matriz en bloques de la forma $A=\begin{pmatrix}A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_r\end{pmatrix}$, entonces

$$\exp(A)=\begin{pmatrix}\exp(A_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \exp(A_r)\end{pmatrix}$$

Por otro lado, si $a\in\mathbb{R}$, usando la serie de Taylor de las funciones sen y cos resulta que

$$\exp\begin{pmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(a) & \operatorname{sen}(a)\\ -\operatorname{sen}(a) & \cos(a)\end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el grupo de Lie simplemente conexo asociado a $\mathfrak{g}=\mathbb{R}x\ltimes_{\operatorname{ad}_x}\mathbb{R}^{s+2n}$ es

$$G=\mathbb{R}\ltimes_{\varphi}\mathbb{R}^{s+2n},$$

donde

$$\varphi(t)=\exp(t\operatorname{ad}_x)=\begin{pmatrix}\mathrm{Id}_{s\times s} & 0\\ 0 & \tilde\varphi(t)\end{pmatrix}$$

con

$$\tilde\varphi(t)=\begin{pmatrix}\cos(t) & \operatorname{sen}(t) & & & & & \\ -\operatorname{sen}(t) & \cos(t) & & & & & \\ & & \cos(b_1t) & \operatorname{sen}(b_1t) & & & \\ & & -\operatorname{sen}(b_1t) & \cos(b_1t) & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \cos(b_{n-1}t) & \operatorname{sen}(b_{n-1}t)\\ & & & & & -\operatorname{sen}(b_{n-1}t) & \cos(b_{n-1}t)\end{pmatrix} \tag{12}$$

y $b_1,\dots,b_{n-1}>0$.

Observación. Se tiene que $\tilde\varphi(t)^k=\tilde\varphi(kt)$ para todo $k\in\mathbb{Z}$. En efecto, de manera inductiva se prueba que

$$\begin{pmatrix}\cos(bt) & \operatorname{sen}(bt)\\ -\operatorname{sen}(bt) & \cos(bt)\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}\cos(bkt) & \operatorname{sen}(bkt)\\ -\operatorname{sen}(bkt) & \cos(bkt)\end{pmatrix},\quad \text{para todo } b\in\mathbb{R}.$$

La afirmación se sigue por la forma en bloques que tiene la matriz $\tilde\varphi(t)$. △

Una ventaja de los grupos casi abelianos es que existe un criterio para decidir la existencia de retículos [**8**].

Proposición 4.18. *Sea $G=\mathbb{R}\ltimes_\phi\mathbb{R}^m$ un grupo de Lie casi abeliano. Entonces G admite un retículo Γ si y sólo si existe un $t_0\neq 0$ tal que $\phi(t_0)$ se puede conjugar a una matriz entera inversible en $\mathbb{Z}$. En este caso, el retículo Γ está dado por*

$$\Gamma=t_0\mathbb{Z}\ltimes_\phi P\mathbb{Z}^m,$$

donde $P^{-1}\phi(t_0)P$ es una matriz entera.

Teniendo en cuenta este criterio, veremos condiciones necesarias para que la matriz $\varphi(t_0)$ como en (12) sea conjugada a una matriz entera para $t_0\neq 0$.

2.2. Sobre la conjugación a una matriz entera. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y A una matriz con coeficientes en $\mathbb{K}$. El *polinomio característico* de A es el polinomio mónico

$$p_A(x) := \det(x \operatorname{Id} - A) \in \mathbb{K}[x],$$

y el *polinomio minimal* $m_A(x)$ es el único generador mónico del ideal de polinomios tales que $p(A) = 0$. Observemos que por el teorema de Cayley-Hamilton, se tiene que $p_A(A) = 0$. Una raíz α del polinomio característico de A se dice un *autovalor* de A.

Es un hecho de álgebra lineal que las raíces del polinomio característico y del polinomio minimal son las mismas, salvo quizás por la multiplicidad. Además, si dos matrices son conjugadas en $\mathbb{K}$, entonces poseen el mismo polinomio característico y el mismo polinomio minimal. En el caso en que una matriz se puede conjugar a una matriz entera, sigue valiendo un resultado similar. Una idea de la prueba puede encontrarse por ejemplo en [**8**, Teorema B.3].

TEOREMA 4.19. *Sea $A \in M(n, \mathbb{C})$ una matriz que se puede conjugar a una matriz entera. Entonces $p_A(x), m_A(x) \in \mathbb{Z}[x]$.*

Este teorema nos dice que dado $t_0 \neq 0$ una condición necesaria para que la matriz $\varphi(t_0)$ se pueda conjugar a una matriz entera es que el polinomio característico y el polinomio minimal de $\varphi(t_0)$ posean coeficientes enteros. Más aún, por la forma que tiene $\varphi(t_0)$, veremos que otra condición necesaria es que el orden[3] de $\varphi(t_0)$ debe ser finito. Para demostrar esto, necesitaremos de un hecho sobre polinomios con coeficientes enteros.

DEFINICIÓN 4.20. Un número complejo se dice *algebraico* si es raíz de un polinomio no nulo con coeficientes racionales. Un número complejo se dice un *entero algebraico* si es raíz de un polinomio mónico no nulo con coeficientes enteros.

Si α es un número algebraico, entonces entre todos los polinomios p con coeficientes racionales tales que α es raíz de p, existe un único polinomio mónico ϕ de grado mínimo, y por lo tanto irreducible, tal que α es raíz de ϕ. Las demas raíces de ϕ se llaman los *conjugados de α*. Se tiene el siguiente teorema debido a Kronecker. Una referencia para la demostración es [**18**].

TEOREMA 4.21 (Kronecker). *Todo entero algebraico $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| = 1$ y $|\alpha'| = 1$ para todos los conjugados α' de α, es una raíz de la unidad, es decir que existe algún $k \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha^k = 1$.*

Este teorema nos permite demostrar el resultado sobre el orden de $\varphi(t_0)$ que buscábamos.

TEOREMA 4.22. *Si $t_0 \neq 0$ satisface que la matriz $\varphi(t_0) = \begin{pmatrix} \operatorname{Id}_{s\times s} & 0 \\ 0 & \tilde{\varphi}(t_0) \end{pmatrix}$ como en (12) se puede conjugar a una matriz entera, entonces $\varphi(t_0)$ tiene orden finito.*

DEMOSTRACIÓN: Basta ver que la matriz $\tilde{\varphi}(t_0)$ tiene orden finito. Escribimos

$$\tilde{\varphi}(t_0) = \begin{pmatrix} \theta(t_0) & & & \\ & \theta(b_1 t_0) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \theta(b_{n-1} t_0) \end{pmatrix} \quad \text{donde } \theta(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \operatorname{sen}(t) \\ -\operatorname{sen}(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Supongamos que existe $P \in \mathsf{GL}(2n, \mathbb{R})$ tal que $P^{-1}\varphi(t_0)P$ es una matriz entera. Por lo tanto, el polinomio minimal y el polinomio característico de $\varphi(t_0)$ deben tener coeficientes enteros. El polinomio característico de $\theta(t)$ es

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda\cos(t) + 1$$

[3]Denotamos por $\operatorname{ord}(A)$ al menor entero positivo k tal que $A^k = \operatorname{Id}$. Si no existe tal k se dice que el orden de A es infinito.

por lo que los autovalores de $\theta(t)$ son $\lambda^+(t) = \cos(t) + i\,\mathrm{sen}(t)$ y $\lambda^-(t) = \cos(t) - i\,\mathrm{sen}(t)$. Entonces, los autovalores de $\varphi(t_0)$ son

$$1, \lambda^\pm(t_0), \lambda^\pm(b_1 t_0), \ldots, \lambda^\pm(b_{n-1} t_0),$$

los cuales son todos de norma 1.

Si consideramos un autovalor λ de $\varphi(t_0)$, el cual es un entero algebraico, el único polinomio mónico de grado mínimo correspondiente a λ debe dividir al polinomio minimal. Por lo tanto, el conjunto de los conjugados de λ es un subconjunto de los autovalores de $\varphi(t_0)$. Luego, por el teorema de Kronecker, todos los autovalores de $\varphi(t_0)$ son raíces de la unidad.

Si $\lambda^+(t) = \cos(t) + i\,\mathrm{sen}(t)$ es una raíz de la unidad, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(\lambda^+(t))^k = 1$. Se tiene que $(\lambda^+(t))^k = \lambda^+(kt)$, luego $\lambda^+(kt) = 1$ y también $\lambda^-(kt) = 1$. Esto implica que $\theta(t)^k = \mathrm{Id}$.

Si $\lambda^+(t_0), \lambda^+(b_1 t_0), \ldots, \lambda^+(b_{n-1} t_0)$ son raíces de la unidad de orden $k_1, \ldots, k_n$ respectivamente, entonces

$$\mathrm{ord}(\tilde{\varphi}(t_0)) = \mathrm{mcm}(k_1, \ldots, k_n),$$

con lo cual el orden de $\tilde{\varphi}(t_0)$ es finito. □

Observación. $\theta(t)$ tiene orden finito si y sólo si $t \in \pi\mathbb{Q}$. En efecto, sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $\theta(t)^k = \mathrm{Id}$, luego $\cos(kt) = 1$ y $\mathrm{sen}(kt) = 0$, por lo que $kt \in 2\pi\mathbb{Z}$, o equivalentemente $t \in \pi\mathbb{Q}$. Recíprocamente, si $t = \frac{m}{n}\pi$ entonces $\theta(t)^{2n} = \mathrm{Id}$. △

Juntando esta observación con el Teorema 4.22, deducimos que una condición necesaria, aunque no suficiente como veremos, para que $\varphi(t_0)$ se pueda conjugar a una matriz entera es que

$$t_0,\, b_1 t_0,\, \ldots, b_{n-1} t_0 \in \pi\mathbb{Q}$$

Notemos que $t_0 \in \pi\mathbb{Q}$ y $b_i t_0 \in \pi\mathbb{Q}$ si y sólo si $t_0 \in \pi\mathbb{Q}$ y $b_i \in \mathbb{Q}$.

Ya estudiamos condiciones necesarias para que, dado $t_0 \in \mathbb{R}$ no nulo, la matriz $\varphi(t_0)$ como en (12) se pueda conjugar a una matriz entera. Ahora queremos dar condiciones suficientes, para lo cual recordamos el concepto de matriz compañera.

Definición 4.23. Dado un polinomio mónico $p(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_{n-1} t^{n-1} + t^n$, se define su *matriz compañera* como la matriz

$$C(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -c_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Se tiene el siguiente teorema de álgebra lineal:

Teorema 4.24. *Sea A una matriz de tamaño $n \times n$ con entradas en un cuerpo $\mathbb{K}$, entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(1) *A es conjugada en $\mathbb{K}$ a la matriz compañera sobre $\mathbb{K}$ de su polinomio característico.*
(2) *El polinomio característico de A coincide con el polinomio minimal de A*
(3) *Existe un vector cíclico $v \in \mathbb{K}^n$ para A, es decir que $\{v, Av, \ldots, A^{n-1}v\}$ es una base para $\mathbb{K}^n$.*

Notemos que para que $\varphi(t_0) = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{s\times s} & 0 \\ 0 & \tilde{\varphi}(t_0) \end{pmatrix}$ sea conjugada a una matriz entera basta que $\tilde{\varphi}(t_0)$ lo sea. A la luz de este teorema, una condición suficiente para que $\tilde{\varphi}(t_0)$ como en (12) sea conjugada a una matriz entera es que todos sus autovalores sean distintos y su polinomio característico tenga coeficientes enteros.

Una clase especial de polinomios con coeficientes enteros que aparecerán en nuestro camino, sobre todo cuando analicemos dimensiones arbitrarias, son los llamados polinomios ciclotómicos.

Definición 4.25. Dado $n \in \mathbb{N}$, una *raíz n-ésima primitiva de la unidad* es un número complejo ζ tal que $\zeta^n = 1$ y $\zeta^k \neq 1$ para todo $1 \leq k \leq n-1$.

No es difícil probar que dado $n \in \mathbb{N}$, todas las raíces n-ésimas primitivas de la unidad son

$$\left\{ \exp\left(\frac{2\pi i}{n} k\right) \;\Big|\; 1 \leq k \leq n,\ \operatorname{mcd}(k,n) = 1 \right\},$$

es decir que hay $\varphi(n)$ raíces primitivas de la unidad donde $\varphi(n)$ es la *función multiplicativa de Euler* que cuenta la cantidad de enteros positivos coprimos menores o iguales que n. Recordemos algunas propiedades que cumple la función φ. Se sigue de la definición que $\varphi(1) = 1$. Para otros números se cumple que:

(1) $\varphi(p^k) = (p-1)p^{k-1}$ si p es primo y $k \in \mathbb{N}$.

(2) φ es multiplicativa, es decir que si m y n son coprimos, entonces $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.

Definición 4.26. Dado $n \in \mathbb{N}$, se define el *n-ésimo polinomio ciclotómico* $\Phi_n(x)$, por

$$\Phi_n(x) = \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \operatorname{mcd}(k,n)=1}} \left(x - e^{\frac{2\pi i}{n} k}\right)$$

Una propiedad fundamental (que no probaremos) es que $\Phi_n(x)$ es un polinomio mónico irreducible en $\mathbb{Q}[x]$ con coeficientes enteros, es decir $\Phi_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

2.3. Retículos en grupos de Lie casi abelianos planos. Queremos estudiar ahora retículos en grupos de Lie simplemente conexos casi abelianos planos. Recordemos que un álgebra de Lie casi abeliana plana se escribe como $\mathfrak{g} = \mathbb{R}x \ltimes_{\mathrm{ad}_x} \mathbb{R}^{s+2n}$ donde $s = \dim(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}))$ y $2n = \dim([\mathfrak{g},\mathfrak{g}])$, por lo que el grupo de Lie simplemente conexo asociado se escribe como

$$G = \mathbb{R} \ltimes_\varphi \mathbb{R}^{s+2n}, \quad \text{con} \quad \varphi(t) = e^{t\,\mathrm{ad}_x}.$$

Supongamos que G admite un retículo Γ. Entonces por la Proposición 4.18 existe un $t_0 \neq 0$ tal que $\varphi(t_0)$ se puede conjugar a una matriz entera y el retículo Γ está dado por

$$\Gamma = t_0\mathbb{Z} \ltimes_\varphi P\mathbb{Z}^{s+2n}$$

donde $P^{-1}\varphi(t_0)P$ es una matriz entera, digamos E. Por el Teorema 4.22, $\varphi(t_0)$ tiene orden finito. Notemos que $\det(E) = \det(\varphi(t_0)) = 1$, por lo que existe una matriz inversa E^{-1} para E, y es una matriz entera.

El producto en Γ está dado por

$$(t_0k, Pm_1) \cdot (t_0\ell, Pm_2) = \left(t_0(k+\ell), Pm_1 + \varphi(t_0)^k Pm_2\right),$$

y el inverso de un elemento (t_0k, Pm) está dado por

$$(t_0k, Pm)^{-1} = (-t_0k, -\varphi(t_0)^{-k}Pm).$$

Nos será útil, sobre todo al estudiar álgebras de Lie planas en dimensiones bajas, identificar de manera explícita un retículo de la forma $\Gamma = t_0\mathbb{Z} \ltimes_\varphi P\mathbb{Z}^d$ como un subgrupo de isometrías de $\mathbb{R}^{d+1}$.

PROPOSICIÓN 4.27. *Sea Γ el retículo de $\mathbb{R} \ltimes_\varphi \mathbb{R}^d$ dado por $\Gamma = t_0\mathbb{Z} \ltimes_\varphi P\mathbb{Z}^d$ donde $P^{-1}\varphi(t_0)P = E$ con E una matriz entera. Sea U el subgrupo de $\mathcal{M}_{d+1}$ definido por*

$$U = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 & \\ & E \end{pmatrix}^k, \left(\frac{k}{\operatorname{ord}(\varphi(t_0))}, m \right) \right) \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^d \right\}.$$

Entonces Γ y U son isomorfos como grupos.

DEMOSTRACIÓN: Podemos definir un isomorfismo $\phi : \Gamma \to U$ por

$$\phi(t_0 k, Pm) = \left(\begin{pmatrix} 1 & \\ & E \end{pmatrix}^k, \left(\frac{k}{\operatorname{ord}(\varphi(t_0))}, m \right) \right),$$

la biyección es clara, comprobamos que es un morfismo de grupos:

$$\begin{aligned}
\phi\Big((t_0k, Pm_1)(t_0\ell, Pm_2)\Big) &= \phi\left(t_0(k+\ell), Pm_1 + \varphi(t_0)^k Pm_2\right) \\
&= \phi\left(t_0(k+\ell), Pm_1 + PE^k m_2\right) \\
&= \left(\begin{pmatrix} 1 & \\ & E \end{pmatrix}^{k+\ell}, \left(\frac{k+\ell}{\operatorname{ord}(\varphi(t_0))}, m_1 + E^k m_2 \right) \right) \\
&= \left(\begin{pmatrix} 1 & \\ & E \end{pmatrix}^{k}, \left(\frac{k}{\operatorname{ord}(\varphi(t_0))}, m_1 \right) \right) \left(\begin{pmatrix} 1 & \\ & E \end{pmatrix}^{\ell}, \left(\frac{\ell}{\operatorname{ord}(\varphi(t_0))}, m_2 \right) \right) \\
&= \phi(t_0k, Pm_1)\phi(t_0\ell, Pm_2).
\end{aligned}$$

En consecuencia ϕ es un isomorfismo de grupos. $\square$

Otra manera de ver al retículo $\Gamma = t_0\mathbb{Z} \ltimes_\varphi P\mathbb{Z}^d$ es la siguiente. Si $A \in \mathsf{GL}(d, \mathbb{R})$, definimos el producto semidirecto $\mathbb{Z} \ltimes_A \mathbb{Z}^d$ donde la acción está dada por $k \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_d \end{pmatrix} = A^k \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_d \end{pmatrix}$.

PROPOSICIÓN 4.28. *Sean $t_0 \neq 0$ y $P \in \mathsf{GL}(d, \mathbb{R})$ tales que $P^{-1}\varphi(t_0)P = E$ donde E es una matriz entera. Entonces $\Gamma = t_0\mathbb{Z} \ltimes_\varphi P\mathbb{Z}^d$ es isomorfo a $\mathbb{Z} \ltimes_E \mathbb{Z}^d$.*

DEMOSTRACIÓN: Un isomorfismo es $\phi : t_0\mathbb{Z} \ltimes_\varphi P\mathbb{Z}^d \to \mathbb{Z} \ltimes_E \mathbb{Z}^d$ definido por $\phi(t_0k, Pm) = (k, m)$. Es claro que ϕ es biyectivo, verificamos a continuación que es un homomorfismo.

$$\begin{aligned}
\phi\Big((t_0k, Pm_1)(t_0\ell, Pm_2)\Big) &= \phi\left(t_0(k+\ell), Pm_1 + \varphi(t_0)^k Pm_2\right) \\
&= \phi\left(t_0(k+\ell), Pm_1 + PE^k m_2\right) \\
&= (k+\ell, m_1 + E^k m_2) \\
&= (k, m_1)(\ell, m_2) \\
&= \phi(t_0k, Pm_1)\phi(t_0\ell, Pm_2)
\end{aligned}$$

Por lo tanto ϕ es un isomorfismo. $\square$

Nos interesa clasificar salvo isomorfismo los retículos $\Gamma = t_0\mathbb{Z} \ltimes_\varphi P\mathbb{Z}^d$. El problema es que pueden existir varias matrices P que conjuguen la matriz $\varphi(t_0)$ como en (12) a una matriz entera, por lo que puede haber distintos retículos para un mismo t_0. Si $P, Q \in \mathsf{GL}(d, \mathbb{R})$ satisfacen que $P^{-1}\varphi(t_0)P = E$ y $Q^{-1}\varphi(t_0)Q = E'$, es claro que

$$t_0\mathbb{Z} \ltimes_\varphi P\mathbb{Z}^d \cong t_0\mathbb{Z} \ltimes_\varphi Q\mathbb{Z}^d \text{ si y sólo si } \mathbb{Z} \ltimes_E \mathbb{Z}^d \cong \mathbb{Z} \ltimes_{E'} \mathbb{Z}^d.$$

Para estudiar el problema del isomorfismo de retículos para un mismo t_0 nos será útil pasar al problema de estudiar el isomorfismo entre $\mathbb{Z} \ltimes_E \mathbb{Z}^d$ y $\mathbb{Z} \ltimes_{E'} \mathbb{Z}^d$.

En general si A y B son matrices enteras inversibles y d es un entero positivo, no es fácil decidir si los productos semidirectos $\mathbb{Z} \ltimes_A \mathbb{Z}^d$ y $\mathbb{Z} \ltimes_B \mathbb{Z}^d$ son isomorfos o no. En el caso particular en que B sea conjugada por una matriz entera a A o A^{-1} entonces la respuesta es afirmativa, como lo muestra la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 4.29. *Sean $A, B, C \in \mathsf{GL}(d, \mathbb{Z})$ tales que $C^{-1}BC = A$ o $C^{-1}BC = A^{-1}$. Entonces*

$$\mathbb{Z} \ltimes_A \mathbb{Z}^d \cong \mathbb{Z} \ltimes_B \mathbb{Z}^d.$$

DEMOSTRACIÓN: Si $C^{-1}BC = A$, entonces definimos la aplicación $\phi : \mathbb{Z} \ltimes_A \mathbb{Z}^d \to \mathbb{Z} \ltimes_B \mathbb{Z}^d$ por $\phi(k, n) = (k, Cn)$, la cual es biyectiva pues posee una inversa ϕ^{-1} dada por $\phi^{-1}(k, n) = (k, C^{-1}n)$. Resta verificar que es un homomorfismo de grupos:

$$\begin{aligned}
\phi((k, m_1)(\ell, m_2)) &= \phi(k + \ell, m_1 + A^k m_2) \\
&= (k + \ell, Cm_1 + CA^k m_2) \\
&= (k + \ell, Cm_1 + B^k Cm_2) \\
&= (k, Cm_1)(\ell, Cm_2) \\
&= \phi(k, m_1)\phi(\ell, m_2).
\end{aligned}$$

Si $C^{-1}BC = A^{-1}$, definimos la aplicación $\phi : \mathbb{Z} \ltimes_A \mathbb{Z}^d \to \mathbb{Z} \ltimes_B \mathbb{Z}^d$ por $\phi(k, n) = (-k, Cn)$, la cual tiene una inversa $\phi^{-1}(k, n) = (-k, C^{-1}n)$, por lo que es biyectiva. Verificamos a continuación que es un homomorfismo de grupos:

$$\begin{aligned}
\phi((k, m_1)(\ell, m_2)) &= \phi(k + \ell, m_1 + A^k m_2) \\
&= (-k - \ell, Cm_1 + CA^k m_2) \\
&= (-k - \ell, Cm_1 + B^{-k} Cm_2) \\
&= (-k, Cm_1)(-\ell, Cm_2) \\
&= \phi(k, m_1)\phi(\ell, m_2).
\end{aligned}$$

En cualquier caso, resulta $\mathbb{Z} \ltimes_A \mathbb{Z}^d \cong \mathbb{Z} \ltimes_B \mathbb{Z}^d$. $\square$

Es importante observar que esta proposición es una condición suficiente para que $\mathbb{Z} \ltimes_A \mathbb{Z}^d$ sea isomorfo a $\mathbb{Z} \ltimes_B \mathbb{Z}^d$. No sabemos si resulta necesaria o no. Se puede probar que si A y B son matrices hiperbólicas, es decir que ninguno de sus autovalores complejos tenga norma 1, entonces sí resulta una condición necesaria. Sin embargo, en nuestro contexto las matrices enteras que queremos analizar son conjugadas a la matriz $\varphi(t_0)$ como en (12) la cual posee todos sus autovalores de norma 1. Más adelante, cuando tratemos las dimensiones 3, 4 y 5, analizaremos caso por caso y podremos obtener una clasificación de los retículos de $\mathbb{R} \ltimes_\varphi \mathbb{R}^d$ en base a la clasificación de las clases de conjugación en $\mathsf{GL}(d, \mathbb{Z})$ para $d = 2, 3$ y 4, la cual por supuesto es difícil de obtener explícitamente en dimensiones mayores.

Respecto al grupo de holonomía de solvariedades obtenidas como cocientes de subgrupos discretos de $\mathbb{R} \ltimes_\varphi \mathbb{R}^d$, probaremos a continuación que es un grupo cíclico y más aún, daremos una fórmula explícita para calcularlo, la cual utilizaremos a lo largo de todo el capítulo en dimensiones bajas y también para exhibir solvariedades con grupo de holonomía cíclico en dimensiones arbitrarias.

Recordemos que el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de un grupo de Lie simplemente conexo casi abeliano plano G era de la forma $\mathfrak{g} = \mathbb{R}x \ltimes_{\mathrm{ad}_x} \mathbb{R}^{s+2n}$ con $s = \dim(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}))$ y $2n = \dim([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$, por lo que

$$G = \mathbb{R} \ltimes_\varphi \mathbb{R}^{s+2n},$$

donde $\varphi(t) = \exp(t\,\mathrm{ad}_x)$.

Teorema 4.30. *Sea* $G = \mathbb{R} \ltimes_\varphi \mathbb{R}^{s+2n}$ *un grupo de Lie casi abeliano plano y sea* $t_0 \neq 0$ *tal que la matriz* $\varphi(t_0) = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{s\times s} & 0 \\ 0 & \tilde{\varphi}(t_0) \end{pmatrix}$ *como en* (12) *se puede conjugar a una matriz entera mediante una matriz* $P \in \mathsf{GL}(s+2n, \mathbb{R})$*, donde*

$$\tilde{\varphi}(t_0) = \begin{pmatrix} \theta(t_0) & & & \\ & \theta(b_1 t_0) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \theta(b_{n-1}t_0) \end{pmatrix} \quad \text{con } \theta(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \operatorname{sen}(t) \\ -\operatorname{sen}(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Si Γ *es el retículo dado por* $\Gamma = t_0\mathbb{Z} \ltimes_\varphi P\mathbb{Z}^{s+2n}$ *y*

$$d = \operatorname{mcm}\left(\operatorname{ord}(\theta(t_0)), \operatorname{ord}(\theta(b_1 t_0)), \dots, \operatorname{ord}(\theta(b_{n-1}t_0))\right),$$

entonces

$$\operatorname{Hol}(\Gamma\backslash G) = \begin{cases} \mathbb{Z}_d & \text{si } d > 1, \\ \{e\} & \text{si } d = 1. \end{cases}$$

Demostración: Si $d = 1$, entonces $\varphi(t_0) = \mathrm{Id}$, por lo que G es abeliano y entonces la solvariedad $\Gamma\backslash G$ es un toro, el cual posee grupo de holonomía trivial. Si $d > 1$, afirmamos que el subgrupo abeliano maximal es $\Lambda = dt_0\mathbb{Z} \ltimes_\varphi P\mathbb{Z}^{s+2n}$. En efecto, es claro que $dt_0\mathbb{Z} \ltimes_\varphi P\mathbb{Z}^{s+2n}$ es normal y además,

- Λ es abeliano: sean (dt_0k, Pm) y $(dt_0\ell, Pr)$ en Λ. Es claro que $\varphi(t_0)^d = \mathrm{Id}$, y así

$$\begin{aligned}(dt_0k, Pm)(dt_0\ell, Pr) &= \left(dt_0(k+\ell), Pm + \varphi(t_0)^{dk}Pr\right) \\ &= \left(dt_0(\ell+k), Pr + \varphi(t_0)^{d\ell}Pm\right) \\ &= (dt_0\ell, Pr)(dt_0k, Pm).\end{aligned}$$

- Λ es maximal como subgrupo abeliano normal: Sea H otro subgrupo abeliano normal de Γ tal que $\Lambda \subset H$. Probaremos que $H \subset \Lambda$. Sean $\gamma_h = (t_0k, Pm) \in H$ y $\gamma_\lambda = (t_0\ell, Pr) \in \Lambda$. Queremos ver que $k = dk_0$ para algún $k_0 \in \mathbb{N}$. Del hecho de que γ_h y γ_λ conmuten, deducimos, mirando las últimas coordenadas, que

$$Pm + \varphi(t_0)^k Pr = Pr + Pm,$$

por lo que $\varphi(t_0)^k Pr = Pr$. Entonces $P^{-1}\varphi(t_0)^k P$ es una matriz que fija r para todo $r \in \mathbb{Z}^{s+2n}$. Como r es arbitrario, dejándolo variar por la base canónica, debe ser $P^{-1}\varphi(t_0)^k P = \mathrm{Id}$ y esto dice que $\varphi(t_0)^k = \mathrm{Id}$. Como $d = \operatorname{ord}(\varphi(t_0))$, entonces $k = dk_0$ para algún $k_0 \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $H \subset \Lambda$, esto concluye la demostración de la afirmación.

Resta identificar el grupo Γ/Λ con $\mathbb{Z}_d$. Sea $\phi : \Gamma \to \mathbb{Z}_d$ el homomorfismo suryectivo definido por

$$\phi(t_0k, Pm) = [k]_d.$$

Notemos que $(t_0k, Pm) \in \operatorname{Ker}(\phi) \iff k = dk_0 \iff (t_0k, Pm) \in \Lambda$. Por el primer teorema de isomorfismo concluimos que $\operatorname{Hol}(\Gamma\backslash G) \cong \mathbb{Z}_d$. □

3. Solvariedades planas en dimensiones bajas

Partiendo de la caracterización de álgebras de Lie planas la cual fue demostrada al final del capítulo anterior, nuestro objetivo es estudiar solvariedades con una métrica inducida por una métrica invariante a izquierda plana en el grupo de Lie correspondiente. Analizaremos en concreto y con el mayor detalle posible las dimensiones 3, 4, 5 y 6, en las cuales podemos particularizar resultados obtenidos en la sección anterior, como por ejemplo el cálculo del grupo de holonomía para una solvariedad proveniente de un grupo de Lie casi abeliano. En dimensión 3, 4 y 5 podremos lograr una clasificación completa de tales solvariedades, mientras que en dimensión 6 nos concentraremos más bien en la holonomía de solvariedades y daremos una manera de construir retículos que dan origen a solvariedades con grupos de holonomía que no son cíclicos.

Observación (Sobre dimensiones 1 y 2). Notemos que por el Teorema 3.52 si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie plana no abeliana entonces $\dim \mathfrak{g} > 2$. Si $\dim \mathfrak{g} = 1$ ó $\dim \mathfrak{g} = 2$ y $\mathfrak{g}$ es plana resulta $\mathfrak{g}$ abeliana por lo que el grupo de Lie simplemente conexo asociado G es abeliano y entonces la solvariedad $\Gamma\backslash G$ es difeomorfa a un toro para cualquier retículo Γ de G. Observemos además que, si bien la botella de Klein es una variedad compacta plana de dimensión 2, esta no se obtiene como una solvariedad. Esto también se sigue de que toda solvariedad es orientable por el Teorema 4.4, mientras que la botella de Klein no lo es. △

De aquí en adelante, descartaremos el caso en que $\mathfrak{g}$ es abeliana ya que cualquier solvariedad obtenida a partir del grupo de Lie simplemente conexo asociado es difeomorfa a un toro y su grupo de holonomía es trivial.

3.1. Dimensión 3. Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{b} \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ un álgebra de Lie plana no abeliana de dimensión 3, entonces la única posibilidad es $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$, $\dim \mathfrak{b} = 1$ y $\dim([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 2$, por lo que

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}x \ltimes_{\mathrm{ad}_x} \mathbb{R}^2,$$

es decir que toda álgebra de Lie plana de dimensión 3 es un álgebra de Lie plana casi abeliana. Como la transformación ad_x es antisimétrica, existe una base $\mathcal{B} = \{e_1, f_1\}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que

$$[\mathrm{ad}_x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{con}\, a \in \mathbb{R} \text{ no nulo.}$$

Por el Lema 4.17 particularizado a un sólo parámetro podemos suponer que $a = 1$. Este álgebra de Lie es el álgebra de Lie del grupo de las transformaciones rígidas del plano euclídeo y tradicionalmente es denotada por $\mathfrak{e}(2)$, es decir

$$\mathfrak{e}(2) = \mathbb{R}x \ltimes_{\mathrm{ad}_x} \mathbb{R}^2,$$

con corchetes dados por

$$[x, e_1] = -f_1, \quad [x, f_1] = e_1.$$

El grupo de Lie simplemente conexo asociado a $\mathfrak{e}(2)$ es

$$E(2) = \mathbb{R} \ltimes_{\varphi} \mathbb{R}^2, \qquad \varphi(t) = e^{t\,\mathrm{ad}_x} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \mathrm{sen}(t) \\ -\mathrm{sen}(t) & \cos(t) \end{pmatrix}. \tag{13}$$

La variedad subyacente es $\mathbb{R}^3$ con su estructura diferenciable usual, el producto está dado por

$$(t, x, y) \cdot (t', x', y') = (t + t', x + x' \cos(t) + y' \,\mathrm{sen}(t), y - x' \,\mathrm{sen}(t) + y' \cos(t)) \tag{14}$$

y el inverso está dado por

$$(t, x, y)^{-1} = (-t, -x\cos(t) + y\,\mathrm{sen}(t), -x\,\mathrm{sen}(t) - y\cos(t)).$$

A continuación estudiaremos la existencia de retículos en $E(2)$. Por la Proposición 4.18, para hallar los retículos de $E(2)$ debemos hallar los valores de t_0 no nulos tales que $\varphi(t_0)$ como en (13) sea conjugada a una matriz entera mediante una matriz $P \in \mathsf{GL}(2, \mathbb{R})$.

Proposición 4.31. *Para $t_0 \neq 0$ la matriz $\varphi(t_0)$ es conjugada en $\mathbb{R}$ a una matriz entera si y sólo si $t_0 \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \pi, 2\pi\right\} + 2\pi\mathbb{Z}$.*

Demostración:
$\Rightarrow$) Si $\varphi(t_0)$ es conjugada a una matriz entera, entonces

$$2\cos(t_0) = \mathrm{tr}(\varphi(t_0)) = k, \quad \text{para algún}\, k \in \mathbb{Z}.$$

Como $-2 \leq 2\cos(t_0) \leq 2$ las únicas posibilidades que tenemos para para k son $k = 0, \pm 1, \pm 2$, de donde $\cos(t_0) = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$ lo que implica que $t_0 \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \pi, 2\pi\} + 2\pi\mathbb{Z}$.

$\Leftarrow$) Si $t_0 \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \pi, 2\pi\} + 2\pi\mathbb{Z}$ entonces $\varphi(t_0)$ es trivialmente conjugada a una matriz entera ya que ella misma es una matriz entera.

Supongamos ahora que $t_0 \in \{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\} + 2\pi\mathbb{Z}$. Para cualquiera de estos t_0 los autovalores de la matriz $\varphi(t_0)$ son $\cos(t_0) \pm i\,\mathrm{sen}(t_0)$, los cuales son distintos. Por lo tanto $\varphi(t_0)$ es conjugada en $\mathbb{C}$ a la matriz compañera de su polinomio característico $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda\cos(t_0) + 1$ el cual es un polinomio con coeficientes enteros pues $2\cos(t_0) = \pm 1$ donde el signo depende de t_0. En conclusión $\varphi(t_0)$ es conjugada en $\mathbb{C}$ a la matriz compañera de su polinomio característico, la cual es entera. Como ambas matrices tienen entradas reales y son conjugadas en $\mathbb{C}$, también son conjugadas en $\mathbb{R}$. $\square$

Estudiaremos ahora los retículos salvo isomorfismo para los distintos valores de t_0 encontrados. Primero, observaremos a continuación que podemos restringir aún más la lista de valores de t_0. En efecto sea $t_0 \in (0, 2\pi]$, por la Proposición 4.27 el retículo $\Gamma = t_0\mathbb{Z} \ltimes_\varphi P\mathbb{Z}^2$ es isomorfo al subgrupo $U \subset \mathcal{M}_3$ dado por

$$U = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 & \\ & E \end{pmatrix}^k, \left(\frac{k}{\mathrm{ord}(\varphi(t_0))}, m \right) \right) \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^2 \right\}, \quad \text{donde } E = P^{-1}\varphi(t_0)P.$$

Observemos que si $r \in \mathbb{Z}$ es tal que $t_0 + 2\pi r \neq 0$ entonces $t_0\mathbb{Z} \ltimes_\varphi P\mathbb{Z}^2$ y $(t_0 + 2\pi r)\mathbb{Z} \ltimes_\varphi P\mathbb{Z}^2$ son isomorfos pues $\varphi(t_0) = \varphi(t_0 + 2\pi r)$ por lo que es evidente que como subgrupos de isometrías de $\mathbb{R}^3$ son el mismo conjunto. Por otro lado, existe un isomorfismo entre los retículos $(2\pi - t_0)\mathbb{Z} \ltimes_\varphi P\mathbb{Z}^2$ y $t_0\mathbb{Z} \ltimes_\varphi QP\mathbb{Z}^2$ donde $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, dado por $f((2\pi - t_0)k, Pm) = (t_0 k, QPm)$. La aplicación f resulta homomorfismo debido a que $\varphi(2\pi - t_0) = \varphi(t_0)^{-1}$ con lo que resulta $Q\varphi(2\pi - t_0)^k = \varphi(t_0)^k Q$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

En conclusión, para estudiar los distintos retículos de $E(2)$ salvo isomorfismo, basta considerar

$$t_0 \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \pi, 2\pi \right\}. \tag{15}$$

Hemos mencionado que dado $t_0 \neq 0$, pueden existir varias matrices que conjuguen la matriz $\varphi(t_0)$ a una matriz entera. Queremos mostrar que en dimensión 3 la clase de isomorfismo de un retículo no depende de la matriz, es decir que si P y Q conjugan $\varphi(t_0)$ a matrices enteras E_1 y E_2 respectivamente, entonces los retículos $\Gamma = t_0\mathbb{Z} \ltimes_\varphi P\mathbb{Z}^2$ y $\Gamma' = t_0\mathbb{Z} \ltimes_\varphi Q\mathbb{Z}^2$ son isomorfos. Ya demostramos en la sección anterior que si E_1 y E_2 se pueden conjugar mediante una matriz entera, entonces Γ y Γ' son isomorfos. La cuestión se reduce entonces a mostrar que estas matrices E_1 y E_2 pertenecen a la misma clase de conjugación en $\mathsf{GL}(2, \mathbb{Z})$, para lo cual utilizaremos la clasificación de las matrices de orden finito de $\mathsf{GL}(2, \mathbb{Z})$ por conjugación, que se encuentra listada por ejemplo en [**35**].

Proposición 4.32. *Toda matriz de orden d en $\mathsf{GL}(2, \mathbb{Z})$ con determinante 1 se conjuga sólo a la siguiente matriz:*

$$d = 2: \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$d = 3: \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$d = 4: \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$d = 6: \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $t_0 = 2\pi$ o $t_0 = \pi$ entonces para cualquier $P \in \mathsf{GL}(2, \mathbb{R})$ se tiene que $P^{-1}\varphi(t_0)P = \varphi(t_0)$, por lo que hay una única matriz entera a la cual puedan conjugarse $\varphi(\pi)$ y $\varphi(2\pi)$. Por otro lado, si $t_0 \in \{\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\}$, existe una única clase de conjugación en $\mathsf{GL}(2, \mathbb{Z})$ para matrices de orden 3, 4 y 6 respectivamente. En virtud de esto, sólo bastará encontrar una matriz P que conjugue $\varphi(t_0)$ a una matriz entera y estudiar el retículo Γ asociado a t_0 y a dicha matriz.

Ahora queremos estudiar en detalle las solvariedades planas obtenidas al cocientar el grupo de Lie $E(2)$ por los distintos retículos $\Gamma = t_0\mathbb{Z} \ltimes_\varphi P\mathbb{Z}^2$ asociados a los valores de $t_0 \in \{2\pi, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\}$. Unos invariantes interesantes de una variedad compacta son los números de Betti, los cuales se calculan a partir de los complejos de homología singular de la variedad. En general, dado un entero no negativo k, el *k-ésimo número de Betti* $\beta_k(X)$ de un espacio topológico X se define como el rango del grupo abeliano $H_k(X, \mathbb{Z})$, si es que este último es finitamente generado. En el contexto más particular de variedades diferenciables compactas, se define $\beta_k(M)$ como la dimensión del k-ésimo grupo de Cohomología de De Rham de M. El Teorema de De Rham asegura que los números de Betti son invariantes topológicos, más precisamente que existe un isomorfismo entre $H^k_{dR}(M, \mathbb{R})$ y $H^k(M, \mathbb{R})$, el k-ésimo grupo de cohomología singular. Por otro lado, los grupos de homología con coeficientes enteros determinan a los grupos de homología y cohomología con coeficientes arbitrarios, esto es gracias al llamado Teorema del Coeficiente universal. Por último, el famoso Teorema conocido como la "dualidad de Poincaré" asegura que si M es una variedad compacta y orientada de dimensión n entonces existe un isomorfismo entre $H^k(M, \mathbb{R})$ y $H_{n-k}(M, \mathbb{R})$. Juntando estos tres resultados, observamos que para calcular los números de Betti de una variedad M compacta y orientada de dimensión n, basta calcular $H_k(M, \mathbb{Z})$, y se tiene que

$$\beta_k(M) = \beta_{n-k}(M) \quad \text{para todo } 0 \le k \le n.$$

En el caso particular de las solvariedades planas de dimensión 3, al ser arcoconexas, es claro que $H_0(\Gamma\backslash G) \cong \mathbb{Z}$, lo que implica $\beta_0 = \beta_3 = 1$. Para calcular β_1 y en consecuencia β_2, usaremos el siguiente resultado clásico debido a Hurewicz, que nos permitirá calcular el primer grupo de homología de una solvariedad de la forma $\Gamma\backslash E(2)$ con facilidad. Una demostración del teorema puede encontrarse en [**9**].

TEOREMA 4.33 (Hurewicz). *Si X es un espacio topológico arcoconexo, entonces*

$$H_1(X, \mathbb{Z}) \cong \pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)],$$

en otras palabras el primer grupo de homología con coeficientes enteros del espacio X es isomorfo a la abelianización de su grupo fundamental.

La clasificación de variedades compactas planas de dimensión 3 se sigue de la clasificación de los subgrupos de Bieberbach de las isometrías de $\mathbb{R}^3$. Esta clasificación fue completada por W. Hantzsche y H. Wendt en 1935 [**17**]. En el libro de Wolf [**39**] están listadas las 10 variedades compactas planas de dimensión 3 salvo difeomorfismo, de las cuales 6 son orientables y 4 no lo son. Recientemente, Conway y Rossetti en [**14**] estudiaron en detalle estas variedades, dando una nueva nomenclatura sistemática que describe algunas de las propiedades de estas variedades. Allí, proponen llamarlas *platycosms*, o sea "universos planos". Los símbolos y nombres propuestos son los siguientes:

Nombre [**39**]	Hol(M)	$H_1(M,\mathbb{Z})$	Orientable	Símbolo[**14**]	Nombre[**14**]
$\mathcal{G}_1$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	✓	$c1$	*torocosm*
$\mathcal{G}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$	✓	$c2$	*dicosm*
$\mathcal{G}_3$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_3$	✓	$c3$	*tricosm*
$\mathcal{G}_4$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2$	✓	$c4$	*tetracosm*
$\mathcal{G}_5$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}$	✓	$c6$	*hexacosm*
$\mathcal{G}_6$	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_4$	✓	$c22$	*didicosm*
$\mathcal{B}_1$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2$	×	$+a1$	*first amphicosm*
$\mathcal{B}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	×	$-a1$	*second amphicosm*
$\mathcal{B}_3$	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$	×	$+a2$	*first amphidicosm*
$\mathcal{B}_4$	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_4$	×	$-a2$	*second amphidicosm*

Además, los "platycosms" orientables con grupo de holonomía cíclico se llaman *helicosms*. Para una descripción explícita de los grupos de Bieberbach en dimensión 3 y las correspondientes variedades compactas planas, ver página 46 de [**34**]. Cabe aclarar que la descripción allí dada se corresponde con la identificación que dimos en la Proposición 4.27.

En lo que sigue vamos a identificar cuáles de estas variedades compactas planas de dimensión 3 podemos obtener a partir de solvariedades planas. Como toda solvariedad es paralelizable, en particular orientable, las variedades no orientables $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ y $\mathcal{B}_4$ no se obtienen como solvariedades planas, y además por el Teorema 4.30 una solvariedad casi abeliana posee grupo de holonomía cíclico, por lo que la variedad $\mathcal{G}_6$, la cual es la Variedad de Hantzsche-Wendt que estudiamos en el Capítulo 1, tampoco se obtiene como una solvariedad plana. Veremos que podemos obtener las variedades restantes $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3, \mathcal{G}_4$ y $\mathcal{G}_5$ como cocientes de $E(2)$ por subgrupos discretos.

Observación (Sobre el conmutador). Si $\mathit{\Gamma}$ es un retículo de $E(2)$, para calcular el primer grupo de homología de la solvariedad $\mathit{\Gamma}\backslash E(2)$ debemos identificar el espacio $\mathit{\Gamma}/[\mathit{\Gamma},\mathit{\Gamma}]$. Como $\mathit{\Gamma} = t_0\mathbb{Z} \ltimes_\varphi P\mathbb{Z}^2$ es isomorfo a $\Gamma = \mathbb{Z} \ltimes_E \mathbb{Z}^2$, donde $E = P^{-1}\varphi(t_0)P$, analizaremos el espacio $\Gamma/[\Gamma,\Gamma]$ ya que esto facilitará las cuentas y la intuición.

Si $(k,m),(\ell,n) \in \Gamma$, mediante un cálculo directo se verifica que su conmutador está dado por

$$[(k,m),(\ell,n)] = (0, m + E^k n - E^\ell m - n) = (0, (\mathrm{Id} - E^\ell)m + (E^k - \mathrm{Id})n).$$

Para identificar el subgrupo conmutador de $\mathit{\Gamma}$ no hace falta considerar todas las posibilidades para k y ℓ, podremos suponer $k = 0$. En efecto, considerando el caso en que $k = 0$ y $0 < \ell < \mathrm{ord}(E)$ deduciremos una condición sobre $[\Gamma,\Gamma]$ para que el elemento $(0, m - E^\ell m)$ pertenezca a $[\Gamma,\Gamma]$, mientras que considerando $0 < k < \mathrm{ord}(E)$ y $\ell = 0$, obtendremos una condición sobre $[\Gamma,\Gamma]$ para que el elemento $(0, E^k n - n)$ pertenezca a $[\Gamma,\Gamma]$. Por lo tanto, impuestas las condiciones sobre $[\Gamma,\Gamma]$ al considerar $k = 0$ o $\ell = 0$, no se agregará ninguna nueva condición al considerar $k \neq 0$ y $\ell \neq 0$. Por otro lado, haciendo variar m y n en $\mathbb{Z}^2$, es claro que identificar cuál es la condición para que un elemento de la forma $E^k n - n$ pertenezca a un subgrupo de $\mathbb{Z}^2$ es la misma a identificar para un elemento de la forma $-E^\ell m + m$, por lo que considerar $k = 0$ y $\ell \neq 0$ o $k \neq 0$ y $\ell = 0$ es indistinto. En conclusión, para analizar el subgrupo conmutador, basta considerar $k = 0$ y $0 < \ell < \mathrm{ord}(E)$, con lo que $[(0,m)(\ell,n)] = (0, m - E^\ell m)$, es decir que basta ver la imagen de $\mathbb{Z}^2$ por el operador $\mathrm{Id} - E^\ell$ para $0 < \ell < \mathrm{ord}(E)$. Notemos que esta observación se puede generalizar a dimensiones mayores. △

Por todo lo dicho, el grupo de Lie casi abeliano $E(2) = \mathbb{R} \ltimes_\varphi \mathbb{R}^2$ admite 5 retículos, salvo isomorfismo, que son de la forma $\mathit{\Gamma} = t_0\mathbb{Z} \ltimes_\varphi P\mathbb{Z}^2$ para $t_0 \in \{2\pi, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\}$ y P es alguna matriz fija tal que $P^{-1}\varphi(t_0)P$ es una matriz entera. A continuación describiremos las 5 solvariedades asociadas con sus nombres según [**14**].

Torocosm. Sea $t_0 = 2\pi$, $\varphi(2\pi) = \mathrm{Id}$ la cual es entera por lo que el retículo asociado es

$$\mathit{\Gamma}_1 = 2\pi\mathbb{Z} \ltimes_\varphi \mathbb{Z}^2.$$

Por la Proposición 4.27 resulta que $\mathit{\Gamma}_1$ es isomorfo al subgrupo de las traslaciones puras de $\mathcal{M}_3$ el cual es isomorfo a $\mathbb{Z}^3$ por lo que la solvariedad $\mathit{\Gamma}_1\backslash E(2)$ es difeomorfa al toro $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$, lo que nos dice que

$$\mathrm{Hol}(\mathit{\Gamma}_1\backslash E(2)) \cong \{e\}$$

y que sus números de Betti están dados por

$$\beta_k = \binom{3}{k}, \quad \text{para } 0 \leq k \leq 3.$$

Dicosm. Sea $t_0 = \pi$, $\varphi(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ la cual es entera por lo que el retículo asociado es

$$\mathit{\Gamma}_2 = \pi\mathbb{Z} \ltimes_\varphi \mathbb{Z}^2,$$

el cual es isomorfo a $\Gamma_2 = \mathbb{Z} \ltimes_{\varphi(\pi)} \mathbb{Z}^2$ de acuerdo con la Proposición 4.28. El orden de $\varphi(\pi)$ es 2, entonces por el Teorema 4.30 tenemos que

$$\mathrm{Hol}(\mathit{\Gamma}_2\backslash E(2)) \cong \mathbb{Z}_2.$$

Calculamos a continuación el primer grupo de homología de $\mathit{\Gamma}_2\backslash E(2)$.

Lema 4.34. $H_1(\Gamma_2\backslash E(2),\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$.

Demostración: Analizaremos el subgrupo conmutador $[\Gamma_2,\Gamma_2]$.
Sean $(0,m,n),(\ell,r,s)\in\Gamma_2$, entonces

$$[(0,m,n),(\ell,r,s)]=\left(0,\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}^{\ell}\right)\begin{pmatrix}m\\n\end{pmatrix}\right).$$

Como $\mathrm{ord}(E)=2$, basta elegir $\ell=1$ que da como resultado $(0,2m,2n)$. Luego, $[\Gamma_2,\Gamma_2]\subseteq 0\mathbb{Z}\oplus 2\mathbb{Z}\oplus 2\mathbb{Z}$ y recíprocamente, dado un elemento $(0,2m,2n)\in 0\mathbb{Z}\oplus 2\mathbb{Z}\oplus 2\mathbb{Z}$, resulta $[(0,m,n),(\pi,0,0)]=(0,2m,2n)$. Por lo tanto,

$$[\Gamma_2,\Gamma_2]=0\mathbb{Z}\oplus 2\mathbb{Z}\oplus 2\mathbb{Z}.$$

Ahora, sea $f:\Gamma_2\to\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$ dada por

$$f(k,m,n)=(k,[m]_2,[n]_2).$$

Claramente $\ker(f)=[\Gamma_2,\Gamma_2]$ y f es suryectiva, además es un homomorfismo debido a que $[(-1)^k]_2=[1]_2$ para todo $k\in\mathbb{Z}$. Por el primer teorema de isomorfismo $\Gamma_2/[\Gamma_2,\Gamma_2]\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$. $\square$

En particular los números de Betti de $\Gamma_2\backslash E(2)$ están dados por

$$\beta_0=\beta_1=\beta_2=\beta_3=1.$$

Tricosm. Sea $t_0=\frac{2\pi}{3}$, $\varphi(\frac{2\pi}{3})=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, la cual no es entera. Para hallar una matriz P tal que $P^{-1}\varphi(\frac{2\pi}{3})P$ sea entera, basta observar que $v_1=\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}$ y $v_2=\begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix}$ son autovectores de $\varphi(\frac{2\pi}{3})$ de autovalores $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ y $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ respectivamente, y que $v:=v_1+v_2=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ es un vector cíclico pues el conjunto formado por $\{v,\varphi(\frac{2\pi}{3})v\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$, donde $\varphi(\frac{2\pi}{3})v=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-1\end{pmatrix}$. Luego podemos escoger $P_3=\begin{pmatrix}0&\sqrt{3}\\2&-1\end{pmatrix}$ que conjuga $\varphi(\frac{2\pi}{3})$ a la matriz entera $E_3=\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}$ y el retículo asociado es

$$\Gamma_3=\frac{2\pi}{3}\mathbb{Z}\ltimes_{\varphi}P_3\mathbb{Z}^2,$$

el cual es isomorfo a $\Gamma_3=\mathbb{Z}\ltimes_{E_3}\mathbb{Z}^2$ de acuerdo con la Proposición 4.28. El orden de $\varphi(\frac{2\pi}{3})$ es 3, entonces por el Teorema 4.30 tenemos que

$$\mathrm{Hol}(\Gamma_3\backslash E(2))\cong\mathbb{Z}_3.$$

Calculamos a continuación el primer grupo de homología de $\Gamma_3\backslash E(2)$.

Lema 4.35. $H_1(\Gamma_3\backslash E(2),\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_3$.

Demostración: Analizamos el subgrupo conmutador $[\Gamma_3,\Gamma_3]$.
Sean $(0,m,n),(\ell,r,s)\in\Gamma_3$, entonces

$$[(0,m,n),(\ell,r,s)]=\left(0,\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}^{\ell}\right)\begin{pmatrix}m\\n\end{pmatrix}\right).$$

Analizamos las distintas posibilidades para ℓ en la siguiente tabla.

ℓ	$[(0,m,n),(\ell,r,s))]$
1	$(0,m+n,-m+2n)$
2	$(0,2m-n,m+n)$

De la tabla observamos que $[\Gamma_3, \Gamma_3] \subset \{(0, p, q) \mid p, q \in \mathbb{Z}, p+q \equiv 0(3)\}$ y que dado $(0, p, q)$ con $p+q \equiv 0(3)$, resulta $\left[\left(0, \frac{2p-q}{3}, \frac{p+q}{3}\right), (1,0,0)\right] = (0, p, q)$. Por lo tanto

$$[\Gamma_3, \Gamma_3] = \{(0, p, q) \mid p, q \in \mathbb{Z}, p+q \equiv 0(3)\}.$$

Ahora, sea $f : \Gamma_3 \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_3$ dada por

$$f(k, m, n) = (k, [m+n]_3).$$

Es claro que f es suryectiva y que $\mathrm{Ker}(f) = [\Gamma_3, \Gamma_3]$. La verificación de que es homomorfismo se realiza separando en los casos de acuerdo a la congruencia módulo 3, luego por el primer teorema de isomorfismo $\Gamma_3/[\Gamma_3, \Gamma_3] \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_3$. □

En particular los números de Betti de $\Gamma_3 \backslash E(2)$ están dados por

$$\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1.$$

Tetracosm. Sea $t_0 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ la cual es entera por lo que el retículo asociado es

$$\Gamma_4 = \frac{\pi}{2}\mathbb{Z} \ltimes_\varphi \mathbb{Z}^2,$$

el cual es isomorfo a $\Gamma_4 = \mathbb{Z} \ltimes_{\varphi(\frac{\pi}{2})} \mathbb{Z}^2$ según la Proposición 4.28. El orden de $\varphi(\frac{\pi}{2})$ es 4, entonces por el Teorema 4.30 tenemos que

$$\mathrm{Hol}(\Gamma_4 \backslash E(2)) \cong \mathbb{Z}_4.$$

Calculamos a continuación el primer grupo de homología de $\Gamma_4 \backslash E(2)$.

Lema 4.36. $H_1(\Gamma_4 \backslash E(2), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$.

Demostración: Analizamos el subgrupo conmutador $[\Gamma_4, \Gamma_4]$.

Sean $(0, m, n), (\ell, r, s) \in \Gamma_4$, entonces

$$[(0, m, n), (\ell, r, s)] = \left(0, \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^\ell\right)\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}\right).$$

Analizamos las posibilidades para ℓ en la siguiente tabla.

ℓ	$[(0, m, n), (\ell, r, s)]$
1	$(0, m-n, n+m)$
2	$(0, 2m, 2n)$
3	$(0, m+n, -m+n)$

De la tabla observamos que $[\Gamma_4, \Gamma_4] \subset \{(0, m, n) : m \equiv n(2)\}$, y recíprocamente vemos que dado un elemento $(0, m, n) \in \{(0, m, n) : m \equiv n(2)\}$, resulta $\left[(0, \frac{m-n}{2}, \frac{m+n}{2}), (1, 0, 0)\right] = (0, m, n)$. Por lo tanto

$$[\Gamma_4, \Gamma_4] = \{(0, m, n) : m \equiv n(2)\}.$$

Ahora, sea $f : \Gamma_4 \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ dada por

$$f\,(k, m, n) = (k, [m+n]_2).$$

Es claro que f es suryectiva y que $[\Gamma_4, \Gamma_4] = \mathrm{Ker}(f)$. La comprobación de que es homomorfismo se hace por casos, distinguiendo la clase de congruencia de k módulo 4. Luego, por el primer teorema de isomorfismo $\Gamma_4/[\Gamma_4, \Gamma_4] \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$. □

En particular los números de Betti de $\Gamma_4 \backslash E(2)$ están dados por

$$\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1.$$

Hexacosm. Sea $t_0 = \frac{\pi}{3}$, $\varphi(\frac{\pi}{3}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ la cual no es entera. Si observamos que $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ son autovectores de $\varphi(\frac{\pi}{3})$ de autovalores $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ y $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ respectivamente, y que el vector $v := v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ es un vector cíclico, hallamos la matriz $P_6 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ que conjuga la matriz $\varphi(\frac{\pi}{3})$ a la matriz entera $E_6 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. El retículo asociado es

$$\mathit{\Gamma}_6 = \frac{\pi}{3}\mathbb{Z} \ltimes_\varphi P\mathbb{Z}^2,$$

el cual es isomorfo a $\mathbb{Z} \ltimes_{E_6} \mathbb{Z}^2$ de acuerdo a la Proposición 4.28. El orden de $\varphi(\frac{\pi}{3})$ es 6, entonces por el Teorema 4.30 tenemos que

$$\mathrm{Hol}(\mathit{\Gamma}_6\backslash E(2)) \cong \mathbb{Z}_6.$$

Calculamos a continuación el primer grupo de homología de $\mathit{\Gamma}_6\backslash E(2)$.

Lema 4.37. *$H_1(\mathit{\Gamma}_6\backslash E(2), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.*

Demostración: Analizamos el subgrupo conmutador $[\Gamma_6, \Gamma_6]$.
Sean $(0, m, n), (\ell, r, s) \in \Gamma_6$, entonces

$$[(0,m,n),(\ell,r,s)] = \left(0, \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{\ell}\right)\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}\right).$$

Analizamos las distintas posibilidades para ℓ en la siguiente tabla.

ℓ	$[(0,m,n),(\ell,r,s)]$
1	$(0, m+n, -m)$
2	$(0, 2m+n, -n+m))$
3	$(0, 2m, 2n)$
4	$(0, m-n, m+2n)$
5	$(0, -n, m+n)$

De la tabla observamos que dado $(0,p,q)$ resulta $[(0,-q,p+q),(1,0,0)] = (0,p,q)$. Por lo tanto

$$[\Gamma_6, \Gamma_6] = 0\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Luego $\Gamma_6/[\Gamma_6, \Gamma_6] \cong \mathbb{Z}$. □

En particular los números de Betti de $\mathit{\Gamma}_6\backslash E(2)$ están dados por

$$\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1.$$

Clasificación de solvariedades planas de dimensión 3. A modo de resumen de esta sección y de la clasificación de las solvariedades planas de dimensión 3, concluimos con la siguiente tabla:

Solvariedades planas de dimensión 3				
Solvariedad M	$\mathrm{Hol}(M)$	$H_1(M,\mathbb{Z})$	Notación [**39**]	Nombre[**14**]
$(2\pi\mathbb{Z} \ltimes_\varphi \mathbb{Z}^2)\backslash E(2)$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	$\mathcal{G}_1$	*torocosm*
$(\pi\mathbb{Z} \ltimes_\varphi \mathbb{Z}^2)\backslash E(2)$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathcal{G}_2$	*dicosm*
$(\frac{\pi}{3}\mathbb{Z} \ltimes_\varphi P_3\mathbb{Z}^2)\backslash E(2)$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_3$	$\mathcal{G}_3$	*tricosm*
$(\frac{\pi}{2}\mathbb{Z} \ltimes_\varphi \mathbb{Z}^2)\backslash E(2)$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathcal{G}_4$	*tetracosm*
$(\frac{2\pi}{3}\mathbb{Z} \ltimes_\varphi P_6\mathbb{Z}^2)\backslash E(2)$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}$	$\mathcal{G}_5$	*hexacosm*

3.2. Dimensión 4. Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{b} \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ un álgebra de Lie plana no abeliana de dimensión 4, entonces la única posibilidad es $\dim([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 2$, y por el Teorema 3.52 resulta $\dim \mathfrak{b} = 1$ y por lo tanto $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 1$. De acuerdo al Lema 4.17

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}x \ltimes_{\mathrm{ad}_x} \mathbb{R}^3, \quad \text{donde } [\mathrm{ad}_x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

para alguna base $\mathcal{B} = \{z, e_1, f_1\}$ de $\mathbb{R}^3$. Luego, el grupo de Lie simplemente conexo correspondiente es

$$G = \mathbb{R} \ltimes_{\varphi} \mathbb{R}^3, \quad \text{con } \varphi(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(t) & \operatorname{sen}(t) \\ 0 & -\operatorname{sen}(t) & \cos(t) \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Como G es casi abeliano, podemos utilizar la Proposición 4.18 para determinar sus retículos.

Lema 4.38. *Para $t_0 \neq 0$ la matriz $\varphi(t_0)$ es conjugada a una matriz entera si y sólo si*

$$t_0 \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \pi, 2\pi\right\} + 2\pi\mathbb{Z}. \tag{17}$$

Demostración:
$\Rightarrow$) Si $\varphi(t_0)$ es conjugada a una matriz entera, entonces

$$1 + 2\cos(t_0) = \operatorname{tr}(\varphi(t_0)) = k, \quad \text{para algún } k \in \mathbb{Z}.$$

Luego $2\cos(t_0) = k$, lo que implica que t_0 es como en (17).

$\Leftarrow$) Si t_0 es como en (17), ya demostramos en la Proposición 4.31 que la matriz $\begin{pmatrix} \cos(t_0) & \operatorname{sen}(t_0) \\ -\operatorname{sen}(t_0) & \cos(t_0) \end{pmatrix}$ es conjugada a una matriz entera mediante una matriz $P \in \mathsf{GL}(2, \mathbb{R})$. Basta definir $\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$, luego $\tilde{P}^{-1}\varphi(t_0)\tilde{P}$ es entera. □

Respecto a la cuestión de los retículos, de igual manera que en dimensión 3, podemos restringirnos a estudiar retículos asociados a $t_0 \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \pi, 2\pi\}$. Si $t_0 = 2\pi$ resulta G abeliano por lo que la solvariedad $\Gamma\backslash G$ es difeomorfa a un toro. Para los demás t_0, ya no es cierto como en dimensión 3 que todas las matrices enteras e inversibles de un orden d con $d \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ sean conjugadas en $\mathsf{GL}(3, \mathbb{Z})$. Sin embargo de igual manera podremos clasificar los retículos salvo isomorfismo. Debemos analizar caso por caso las posibles matrices enteras no conjugadas a las que podemos conjugar la matriz $\varphi(t_0)$ como en (16). Usaremos la clasificación de las matrices de orden finito de $\mathsf{GL}(3, \mathbb{Z})$ salvo conjugación, que se encuentra en [**35**]. Listaremos sólo aquellas matrices que tengan determinante 1 ya que analizaremos las posibles matrices enteras que resultan de conjugar mediante una matriz $P \in \mathsf{GL}(3, \mathbb{R})$ la matriz $\varphi(t_0)$, la cual posee determinante 1.

Proposición 4.39. *Toda matriz de orden d en $\mathsf{GL}(3, \mathbb{Z})$ con determinante 1 se conjuga a una y sólo a una de las siguientes matrices:*

$$d = 2: \quad M_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_3^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$d = 3: \quad M_1^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_2^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$d = 4: \quad M_1^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$d=6: \quad M_1^{(6)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En lo que sigue veremos para cada $t_0 \in \{\pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\}$, dado un orden $d \in \{2,3,4,6\}$, cuáles son las matrices de orden d que aparecen en la Proposición 4.39 que se pueden obtener mediante conjugar la matriz $\varphi(t_0)$ con una matriz arbitraria $P \in \mathsf{GL}(3,\mathbb{R})$.

♣ Si $t_0 = \pi$, entonces $\varphi(t_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, la cual es una matriz entera de orden 2.

Lema 4.40. *Si $M_1^{(2)}$ y $M_3^{(2)}$ son las matrices de orden 2 de la Proposición 4.39, entonces se puede conjugar la matriz $\varphi(\pi)$ a cada una de ellas mediante una matriz inversible con coeficientes reales.*

Demostración: Se tiene $\mathrm{Id}\,\varphi(\pi)\,\mathrm{Id} = M_1^{(2)}$ y $P_2^{-1}\varphi(\pi)P_2 = M_3^{(2)}$ donde $P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. ☐

Lema 4.41. *Los productos semidirectos $\Gamma_1^{(2)} = \mathbb{Z} \ltimes_{M_1{}^{(2)}} \mathbb{Z}^3$ y $\Gamma_3^{(2)} = \mathbb{Z} \ltimes_{M_3{}^{(2)}} \mathbb{Z}^3$ no son isomorfos.*

Demostración: Analizamos en la siguiente tabla los subgrupos conmutador de $\Gamma_1^{(2)}$ y $\Gamma_3^{(2)}$.

ℓ	$[(0,m),(\ell,n)]_1^{(2)}$	$[(0,m),(\ell,n)]_3^{(2)}$
1	$(0,0,2m_2,2m_3)$	$(0,2m_1,m_2-m_3,-m_2+m_3)$

Se deduce que $[\Gamma_1^{(2)},\Gamma_1^{(2)}] = 0\mathbb{Z}\oplus 0\mathbb{Z}\oplus 2\mathbb{Z}\oplus 2\mathbb{Z}$ y que $[\Gamma_3^{(2)},\Gamma_3^{(2)}] = \{(0,2p_1,p_2,p_3) \mid p_2+p_3=0\}$. Es fácil verificar entonces que

$$\Gamma_1^{(2)}/[\Gamma_1^{(2)},\Gamma_1^{(2)}] \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2 \quad \text{y} \quad \Gamma_3^{(2)}/[\Gamma_3^{(2)},\Gamma_3^{(2)}] \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2.$$

Por lo tanto $\Gamma_1^{(2)}$ y $\Gamma_3^{(2)}$ no son isomorfos. ☐

♣ Si $t_0 = \frac{2\pi}{3}$, entonces $\varphi(t_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, la cual es una matriz de orden 3.

Lema 4.42. *Si $M_1^{(3)}$ y $M_2^{(3)}$ son las matrices de orden 3 de la Proposición 4.39, entonces se puede conjugar la matriz $\varphi(\frac{2\pi}{3})$ a cada una de ellas mediante una matriz inversible con coeficientes reales.*

Demostración: Eligiendo $P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, resulta $P_3^{-1}\varphi(\frac{2\pi}{3})P_3 = M_1^{(3)}$. Por otro lado al elegir la matriz $Q_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ resulta $Q_3^{-1}\varphi(\frac{2\pi}{3})Q_3 = M_2^{(3)}$. ☐

Lema 4.43. *Los productos semidirectos $\Gamma_1^{(3)} = \mathbb{Z} \ltimes_{M_1{}^{(3)}} \mathbb{Z}^3$ y $\Gamma_2^{(3)} = \mathbb{Z} \ltimes_{M_2{}^{(3)}} \mathbb{Z}^3$ no son isomorfos.*

Demostración: Analizamos los subgrupos conmutador de $\Gamma_1^{(3)}$ y $\Gamma_2^{(3)}$.

ℓ	$[(0,m),(\ell,n)]_1^{(3)}$	$[(0,m),(\ell,n)]_2^{(3)}$
1	$(0,0,m_2+m_3,-m_2+2m_3)$	$(0,m_1-m_2,m_2-m_3,-m_1+m_3)$
2	$(0,0,2m_2-m_3,m_2+m_3)$	$(0,m_1-m_3,-m_1+m_2,-m_2+m_3)$

De la tabla se deduce de manera sencilla que $[\Gamma_1^{(3)},\Gamma_1^{(3)}]=\{(0,0,p,q)\mid p+q\equiv 0(3)\}$ y además que $[\Gamma_2^{(3)},\Gamma_2^{(3)}]=\{(0,p_1,p_2,p_3)\mid p_1+p_2+p_3=0\}$. Es fácil verificar entonces que

$$\Gamma_1^{(3)}/[\Gamma_1^{(3)},\Gamma_1^{(3)}]\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_3 \quad \text{y} \quad \Gamma_2^{(3)}/[\Gamma_2^{(3)},\Gamma_2^{(3)}]\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}.$$

Por lo tanto no son isomorfos. □

♣ Si $t_0=\frac{\pi}{2}$, entonces $\varphi(t_0)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$, la cual es una matriz de orden 4.

Lema 4.44. *Si $M_1^{(4)}$ y $M_3^{(4)}$ son las matrices de orden 4 de la Proposición 4.39, entonces se puede conjugar la matriz $\varphi(\frac{\pi}{2})$ a cada una de ellas mediante una matriz inversible con coeficientes reales.*

Demostración: Resulta $P_4^{-1}\varphi(\frac{\pi}{2})P_4=M_1^{(4)}$ y $Q_4^{-1}\varphi(\frac{\pi}{2})Q_4=M_3^{(4)}$ donde $P_4=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ y $Q_4=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&2&3\\0&3&-2\end{pmatrix}$. □

Lema 4.45. *Los productos semidirectos $\Gamma_1^{(4)}=\mathbb{Z}\ltimes_{M_1{}^{(4)}}\mathbb{Z}^3$ y $\Gamma_3^{(4)}=\mathbb{Z}\ltimes_{M_3{}^{(4)}}\mathbb{Z}^3$ no son isomorfos.*

Demostración: Analizamos los subgrupos conmutador de $\Gamma_1^{(4)}$ y $\Gamma_3^{(4)}$.

ℓ	$[(0,m),(\ell,n)]^1$	$[(0,m),(\ell,n)]^3$
1	$(0,0,m_2+m_3,-m_2+m_3)$	$(0,-m_3,m_2+m_3,-m_2+m_3)$
2	$(0,0,2m_2,2m_3)$	$(0,-m_2-m_3,2m_2,2m_3)$
3	$(0,0,m_2-m_3,m_2+m_3)$	$(0,-m_2,m_2-m_3,m_2+m_3)$

Observamos que $[\Gamma_1^{(4)},\Gamma_1^{(4)}]=\{(0,0,p,q)\mid p+q\equiv 0(2)\}$ y $[\Gamma_3^{(4)},\Gamma_3^{(4)}]=\{(0,p_1,p_2,p_3)\mid p_2+p_3+2p_1=0\}$. Es fácil verificar entonces que

$$\Gamma_1^{(4)}/[\Gamma_1^{(4)},\Gamma_1^{(4)}]\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2 \quad \text{y} \quad \Gamma_3^{(4)}/[\Gamma_3^{(4)},\Gamma_3^{(4)}]\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}.$$

Por lo tanto no son isomorfos. □

♣ Si $t_0=\frac{\pi}{3}$, entonces $\varphi(t_0)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&-\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, la cual es una matriz de orden 6.

Lema 4.46. *Si $M_1^{(6)}$ es la matriz de orden 6 de la Proposición 4.39, entonces se puede conjugar la matriz $\varphi(\frac{\pi}{3})$ a $M_1^{(6)}$ mediante una matriz inversible con coeficientes reales.*

Demostración: Es directo verificar que $P_6^{-1}\varphi(\frac{\pi}{3})P_6=M_1^{(6)}$, donde $P_6=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&-\sqrt{3}\end{pmatrix}$. □

Si $\Gamma_1^{(6)}=\mathbb{Z}\ltimes_{M_1{}^{(6)}}\mathbb{Z}^3$, teniendo en cuenta los cálculos que hicimos en dimensión 3 para $t_0=\frac{\pi}{3}$, no es difícil ver que $\Gamma_1^{(6)}/[\Gamma_1^{(6)},\Gamma_1^{(6)}]\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$.

Clasificación de solvariedades planas de dimensión 4. Llamemos $G(4) = \mathbb{R} \ltimes_\varphi \mathbb{R}^3$. Concluimos esta sección con la clasificación de solvariedades planas de dimensión 4 en la siguiente tabla:

Solvariedades planas de dimensión 4		
Solvariedad M	$\mathrm{Hol}(M)$	$H_1(M,\mathbb{Z})$
T^4	$\{e\}$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$
$(\pi\mathbb{Z} \ltimes_\varphi \mathbb{Z}^3)\setminus G(4)$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$
$(\pi\mathbb{Z} \ltimes_\varphi P_2\mathbb{Z}^3)\setminus G(4)$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2$
$(\frac{2\pi}{3}\mathbb{Z} \ltimes_\varphi P_3\mathbb{Z}^3)\setminus G(4)$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_3$
$(\frac{2\pi}{3}\mathbb{Z} \ltimes_\varphi Q_3\mathbb{Z}^3)\setminus G(4)$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$
$(\frac{\pi}{2}\mathbb{Z} \ltimes_\varphi P_4\mathbb{Z}^3)\setminus G(4)$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2$
$(\frac{\pi}{2}\mathbb{Z} \ltimes_\varphi Q_4\mathbb{Z}^3)\setminus G(4)$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$
$(\frac{\pi}{3}\mathbb{Z} \ltimes_\varphi P_6\mathbb{Z}^3)\setminus G(4)$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$

NOTA. Se sabe que los números de Betti de T^4 están dados por $\beta_k = \binom{4}{k}$ para $1 \le k \le 4$. De la tabla podemos observar que todas las demás solvariedades de dimensión 4 poseen $\beta_1 = 2$, y por la dualidad de Poincaré resulta $\beta_3 = 2$. Además es claro que $\beta_0 = \beta_4 = 1$. Podemos calcular β_2 observando lo siguiente. Para una variedad compacta se define la *Característica de Euler* de M por

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \beta_i.$$

Por ejemplo la característica de Euler de un toro T^n es 0 pues $\chi(T^n) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$. Se sabe que si $p : E \to B$ es una aplicación de cubrimiento de k hojas entre dos espacios topológicos con grupos de homología finitamente generados entonces

$$\chi(E) = k\chi(B).$$

Por el Teorema 2.63, una variedad compacta plana $M = \mathbb{R}^n/\mathit{\Gamma}$ posee un cubrimiento $p : T_\Lambda \to M$ con una cantidad finita de hojas k donde T_Λ es el toro plano $T_\Lambda \cong \mathbb{R}^n/\Lambda$ y Λ es el retículo de traslaciones en $\mathit{\Gamma}$. De aquí resulta que la característica de Euler de una variedad compacta plana es nula ya que $\chi(M) = k\chi(T_\Lambda) = 0$. En el caso de una solvariedad de dimensión 4 que no sea el toro, resulta $\beta_2 = 2$.

Notemos que todos los números de Betti impares de las solvariedades planas de dimensión 4 son pares, propiedad que cumplen las llamadas variedades Kähler. Esto no es coincidencia, ya que Barberis, Dotti y Fino probaron en [**3**] que toda álgebra de Lie plana de dimensión par admite estructura Kähler. En particular todas las solvariedades planas de dimensión 4 poseen estructura Kähler. Hubo un tiempo en donde se creía que la única solvariedad que admitía una estructura Kähler era el toro. Hasegawa [**20**] fue el primero que probó que esta conjetura era falsa y dió ejemplos de solvariedades no difeomorfas a un toro que admitían estructura Kähler.

3.3. Dimensión 5. Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{b} \oplus [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ un álgebra de Lie plana no abeliana de dimensión 5, entonces puede ser $\dim([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = 2$ ó $\dim([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = 4$.

- Si $\dim([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = 2$ entonces $\dim\mathfrak{b} = 1$ y $\dim\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 2$ por lo que, de acuerdo al Lema 4.17

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}x \ltimes_{\mathrm{ad}_x} \mathbb{R}^4, \quad \text{donde } [\mathrm{ad}_x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

para alguna base $\mathcal{B} = \{z_1, z_2, e_1, f_1\}$ de $\mathbb{R}^4$. Por lo tanto el correspondiente grupo de Lie simplemente conexo es

$$G = \mathbb{R} \ltimes_{\tilde{\varphi}} \mathbb{R}^4, \quad \text{con } \tilde{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(t) & \operatorname{sen}(t) \\ 0 & 0 & -\operatorname{sen}(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Al igual que en dimensión 4, utilizando la Proposición 4.18 se deduce que los únicos valores de t_0 para los cuales $\mathbb{R} \ltimes_{\tilde{\varphi}} \mathbb{R}^4$ admite retículos son 2π, π, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{3}$. Detallaremos más sobre su clasificación en el caso siguiente ya que ahí obtendremos retículos isomorfos a los obtenidos en este caso.

- Si $\dim([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 4$ entonces debe ser $\dim \mathfrak{b} = 1$ y $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$, por lo que de acuerdo al Lema 4.17

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}x \ltimes_{\mathrm{ad}_x} \mathbb{R}^4, \quad \text{donde } [\mathrm{ad}_x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & -b & 0 \end{pmatrix},$$

para alguna base $\mathcal{B} = \{e_1, f_1, e_2, f_2\}$ de $\mathbb{R}^4$ y algún $b \in \mathbb{R}$ positivo, esta álgebra de Lie será denotada por $\mathfrak{g}_b$. El correspondiente grupo de Lie simplemente conexo asociado a $\mathfrak{g}_b$ es

$$G_b = \mathbb{R} \ltimes_{\varphi_b} \mathbb{R}^4, \quad \text{con } \varphi_b(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \operatorname{sen}(t) & & \\ -\operatorname{sen}(t) & \cos(t) & & \\ & & \cos(bt) & \operatorname{sen}(bt) \\ & & -\operatorname{sen}(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Usaremos nuevamente la Proposición 4.18 para analizar la existencia de retículos. Necesitamos un $t_0 \neq 0$ tal que la matriz $\varphi_b(t_0)$ sea conjugada a una matriz entera.

Lema 4.47. *Sea $t_0 \neq 0 \in \mathbb{R}$. Entonces $\varphi_b(t_0)$ es conjugada a una matriz entera si y sólo si se da uno de los siguientes casos*[4]*:*

	Valores para t_0	*Valores para bt_0*
Caso (1)	$2\pi\mathbb{Z}$	$\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \pi, 2\pi\} + 2\pi\mathbb{Z}$

	Valores para t_0	*Valores para bt_0*
Caso (2)	$\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \pi\} + 2\pi\mathbb{Z}$	$\{t_0, -t_0\} + 2\pi\mathbb{Z}$

	Valores para t_0	*Valores para bt_0*
Caso (3)	$\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\} + 2\pi\mathbb{Z}$	$\pi + 2\pi\mathbb{Z}$
	$\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\} + 2\pi\mathbb{Z}$	$\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\} + 2\pi\mathbb{Z}$
	$\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\} + 2\pi\mathbb{Z}$	$\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\} + 2\pi\mathbb{Z}$

	Valores para t_0	*Valores para bt_0*
Caso (4)	$\{\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\} + 2\pi\mathbb{Z}$	$\{\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\} + 2\pi\mathbb{Z}$
	$\{\frac{\pi}{5}, \frac{9\pi}{5}\} + 2\pi\mathbb{Z}$	$\{\frac{3\pi}{5}, \frac{7\pi}{5}\} + 2\pi\mathbb{Z}$
	$\{\frac{2\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}\} + 2\pi\mathbb{Z}$	$\{\frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}\} + 2\pi\mathbb{Z}$
	$\{\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\} + 2\pi\mathbb{Z}$	$\{\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\} + 2\pi\mathbb{Z}$

[4] Los roles de t_0 y bt_0 son intercambiables.

DEMOSTRACIÓN: $\Rightarrow$) Denotemos por $P_{\varphi_b(t_0)}(\lambda)$ al polinomio característico de la matriz $\varphi_b(t_0)$. Si $\varphi_b(t_0)$ es conjugada a una matriz entera entonces debe ser $P_{\varphi_b(t_0)}(\lambda) \in \mathbb{Z}[\lambda]$. Tenemos que

$$\begin{aligned} P_{\varphi_b(t_0)}(\lambda) &= ((\lambda - \cos(t_0))^2 + \operatorname{sen}(t_0)^2)((\lambda - \cos(bt_0))^2 + \operatorname{sen}(bt_0)^2) \\ &= (\lambda^2 - 2\cos(t_0)\lambda + 1)(\lambda^2 - 2\cos(bt_0)\lambda + 1) \\ &= \lambda^4 - 2(\cos(t_0) + \cos(bt_0))\lambda^3 + (2 + 4\cos(t_0)\cos(bt_0))\lambda^2 - 2(\cos(t_0) + \cos(bt_0))\lambda + 1, \end{aligned}$$

por lo que debe ser $4\cos(t_0)\cos(bt_0) \in \mathbb{Z}$ y $\cos(t_0) + \cos(bt_0) \in \mathbb{Z}$. Llamemos $x = \cos(t_0)$ e $y = \cos(bt_0)$, de esta manera tenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2(x + y) = m \\ 4xy = n \end{cases},$$

para ciertos enteros m y n. Despejando y de la primera ecuación obtenemos $y = \frac{m}{2} - x$ por lo que

$$\begin{aligned} 4x^2 - 2mx + n &= 0 \\ x &= \frac{2m \pm \sqrt{4m^2 - 16n}}{8} \\ x &= \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4n}}{4} \end{aligned}$$

de donde

$$y = \frac{m \mp \sqrt{m^2 - 4n}}{4}$$

Por lo tanto

$$\cos(t_0) = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4n}}{4} \quad \text{y } \cos(bt_0) = \frac{m \mp \sqrt{m^2 - 4n}}{4}.$$

Supongamos que $\cos(t_0) = \frac{m+\sqrt{m^2-4n}}{4}$, entonces $\cos(bt_0) = \frac{m-\sqrt{m^2-4n}}{4}$. Queremos analizar los pares (m, n) posibles, es decir las restricciones que hay para los enteros m y n. Como $m = 2(\cos(t_0)+\cos(bt_0)))$ debe ser $|m| \leq 4$. Por otra parte como $|\cos(t_0)| \leq 1$ y $|\cos(bt_0)| \leq 1$ tenemos que $|m + \sqrt{m^2 - 4n}| \leq 4$ y $|m - \sqrt{m^2 - 4n}| \leq 4$, luego

$$-4 \leq m + \sqrt{m^2 - 4n} \leq 4 \quad \text{y } -4 \leq m - \sqrt{m^2 - 4n} \leq 4.$$

Entonces

$$-4 - m \leq \sqrt{m^2 - 4n} \leq 4 - m \quad \text{y } -4 - m \leq -\sqrt{m^2 - 4n} \leq 4 - m.$$

Como $|m| \leq 4$ debe pasar

$$0 \leq \sqrt{m^2 - 4n} \leq 4 + m \quad \text{y} \quad 0 \leq \sqrt{m^2 - 4n} \leq 4 - m.$$

Si $m = 0$, entonces $0 \leq \sqrt{-4n} \leq 4$ por lo que $-4 \leq n \leq 0$.
Si $m = \pm 1$, entonces $0 \leq \sqrt{1 - 4n} \leq 3$ por lo que $-2 \leq n \leq \frac{1}{4}$.
Si $m = \pm 2$, entonces $0 \leq \sqrt{4 - 4n} \leq 2$ por lo que $0 \leq n \leq 1$.
Si $m = \pm 3$, entonces $0 \leq \sqrt{9 - 4n} \leq 1$ por lo que $2 \leq n \leq \frac{9}{4}$.
Si $m = \pm 4$, entonces $0 \leq \sqrt{16 - 4n} \leq 0$ por lo que $n = 4$.
Así, los pares posibles para (m, n) son

$$(0, -4), (0, -3), (0, -2), (0, -1), (0, 0), (\pm 1, -2), (\pm 1, -1), (\pm 1, 0), (\pm 2, 0), (\pm 2, 1), (\pm 3, 2), (\pm 4, 4),$$

y los correspondientes valores para

$$\cos(t_0) = \frac{m + \sqrt{m^2 - 4n}}{4} \quad \text{y } \cos(bt_0) = \frac{m - \sqrt{m^2 - 4n}}{4}$$

son

Caso (1)					
	$(2,0)$	$(1,-2)$	$(3,2)$	$(0,-4)$	$(4,4)$
$\cos(t_0)$	1	1	1	1	1
$\cos(bt_0)$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	1

Caso (2)				
	$(0,0)$	$(-2,1)$	$(2,1)$	$(-4,4)$
$\cos(t_0)$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1
$\cos(bt_0)$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1

Caso (3)						
	$(-2,0)$	$(-3,2)$	$(-1,-2)$	$(-1,0)$	$(1,0)$	$(0,-1)$
$\cos(t_0)$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\cos(bt_0)$	-1	-1	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$

Caso (4)				
	$(0,-2)$	$(1,-1)$	$(-1,-1)$	$(0,-3)$
$\cos(t_0)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos(bt_0)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{4}$	$-\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Si $\cos(t_0) = \frac{m-\sqrt{m^2-4n}}{4}$ y $\cos(bt_0) = \frac{m+\sqrt{m^2-4n}}{4}$ simplemente se intercambian los valores de las tablas de los casos $(1), (2), (3)$ y (4) respectivamente. De aquí se sigue la lista del enunciado.

$\Leftarrow$) Para los casos $(1), (2)$ y (3), usamos la Proposición 4.31 y de esa manera obtenemos que para cada $t \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \pi, 2\pi\} + 2\pi\mathbb{Z}$ existe una matriz $P \in \mathsf{GL}(2,\mathbb{R})$ que conjuga la matriz $\theta(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \operatorname{sen}(t) \\ -\operatorname{sen}(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ a una matriz entera. Luego, se puede conjugar la matriz $\varphi_b(t_0)$ como en (18) mediante una matriz en bloques.

Para el caso (4), como todos los autovalores de la matriz $\varphi_b(t_0)$ como en (18) son distintos, se puede conjugar $\varphi_b(t_0)$ a la matriz compañera de su polinomio característico el cual tiene coeficientes enteros pues esa condición impusimos al despejar los pares posibles para $\cos(t_0)$ y $\cos(bt_0)$. $\square$

Teniendo todos los valores de t_0 y bt_0 para los cuales $\mathbb{R} \ltimes_{\varphi_b} \mathbb{R}^4$ admite retículos, podemos obtener todos los posibles grupos de holonomía de solvariedades planas de dimensión 5.

Teorema 4.48. *Los posibles grupos de holonomía de solvariedades planas de dimensión* 5 *son:*

$$\{e\}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_{12}.$$

Demostración: Si $\theta(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \operatorname{sen}(t) \\ -\operatorname{sen}(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$, por el Teorema 4.30, el grupo de holonomía de la solvariedad $(t_0\mathbb{Z} \ltimes_{\varphi_b} P\mathbb{Z}^4)\backslash(\mathbb{R} \ltimes_{\varphi_b} \mathbb{R}^4)$ es $\mathbb{Z}_d$ donde $d = \operatorname{mcm}(\operatorname{ord}(\theta(t_0)), \operatorname{ord}(\theta(bt_0)))$. Analizando caso por caso la tabla de valores que hemos obtenido en el Lema 4.47 obtenemos la tabla siguiente de donde se deduce el resultado. Observemos que $\theta(2\pi - t_0) = \theta(t_0)^{-1}$ por lo que $\operatorname{ord}(\theta(2\pi - t_0)) = \operatorname{ord}(\theta(t_0))$.

	Valores para t_0	Valores para bt_0	$\operatorname{ord}(\varphi(t_0))$
Caso (1)	$2\pi\mathbb{Z}$	$\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \pi, 2\pi\} + 2\pi\mathbb{Z}$	$\{4,3,6,2,1\}$
Caso (2)	$\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \pi\} + 2\pi\mathbb{Z}$	$\{t_0, -t_0\} + 2\pi\mathbb{Z}$	$\{4,3,6,2\}$
Caso (3)	$\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\} + 2\pi\mathbb{Z}$	$\pi + 2\pi\mathbb{Z}$	$\{4,6,6\}$
	$\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\} + 2\pi\mathbb{Z}$	$\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\} + 2\pi\mathbb{Z}$	12
	$\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\} + 2\pi\mathbb{Z}$	$\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\} + 2\pi\mathbb{Z}$	$\{12,6\}$
Caso (4)	$\{\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\} + 2\pi\mathbb{Z}$	$\{\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\} + 2\pi\mathbb{Z}$	8
	$\{\frac{\pi}{5}, \frac{9\pi}{5}\} + 2\pi\mathbb{Z}$	$\{\frac{3\pi}{5}, \frac{7\pi}{5}\} + 2\pi\mathbb{Z}$	10
	$\{\frac{2\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}\} + 2\pi\mathbb{Z}$	$\{\frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}\} + 2\pi\mathbb{Z}$	5
	$\{\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\} + 2\pi\mathbb{Z}$	$\{\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\} + 2\pi\mathbb{Z}$	12

□

En cuanto al estudio de los retículos, el siguiente lema, el cual se verifica de manera directa, nos permitirá restringir los valores de t_0.

LEMA 4.49. *Sean* $t_0 \in (0, 2\pi]$ *y* $r \in \mathbb{Z}$ *tal que* $t_0 + 2\pi r \neq 0$ *y sea* $\Gamma^b_{t_0,P}$ *el retículo* $t_0\mathbb{Z} \ltimes_{\varphi_b} P\mathbb{Z}^4$. *Entonces valen las siguientes afirmaciones:*

(1) *El retículo* $\Gamma^b_{t_0+2\pi r,P}$ *es isomorfo al retículo* $\Gamma^{b'}_{t_0,P}$ *donde* $b' = \frac{bt_0}{t_0+2\pi r}$.

(2) *Si* Q *es la matriz que permuta las dos primeras filas de la matriz* Id_4 *con las dos últimas, entonces el retículo* $\Gamma^b_{t_0,P}$ *es isomorfo al retículo* $\Gamma^1_{bt_0,QP}$.

(3) *Si* $t_0 \in (0, 2\pi)$ *y* Q_1 *es la matriz que permuta las dos primeras filas de la matriz* Id_4*, entonces el retículo* $\Gamma^b_{2\pi-t_0,P}$ *es isomorfo al retículo* $\Gamma^{b'}_{t_0,Q_1P}$ *donde* $b' = \frac{b(2\pi-t_0)}{t_0}$.

(4) *Si* $t_0 \in (0, 2\pi)$*,* $bt_0 = 2\pi - t_0$ *y* Q_2 *es la matriz que permuta las dos últimas filas de la matriz* Id_4*, entonces el retículo* $\Gamma^b_{t_0,P}$ *es isomorfo al retículo* $\Gamma^1_{t_0,Q_2P}$.

En virtud de este lema podemos suponer $t_0 \in (0, 2\pi]$ y descartar los valores $2\pi - t_0$ que aparecen en la tabla del Lema 4.47. Además, conviene olvidarnos del parámetro b y analizar directamente las posibles matrices que hemos obtenido en ese mismo lema, las cuales detallaremos a continuación en un orden más conveniente para su estudio. Utilizaremos la notación $A \oplus B$ para describir a la matriz diagonal en bloques $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

Caso (1): $\mathrm{Id}_4, \quad \mathrm{Id}_2 \oplus (-\mathrm{Id}_2), \quad \mathrm{Id}_2 \oplus \theta\left(\frac{2\pi}{3}\right), \quad \mathrm{Id}_2 \oplus \theta\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad \mathrm{Id}_2 \oplus \theta\left(\frac{\pi}{3}\right);$

Caso (2): $-\mathrm{Id}_4, \quad \theta\left(\frac{2\pi}{3}\right) \oplus \theta\left(\frac{2\pi}{3}\right), \quad \theta\left(\frac{\pi}{2}\right) \oplus \theta\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad \theta\left(\frac{\pi}{3}\right) \oplus \theta\left(\frac{\pi}{3}\right);$

Caso (3): $-\mathrm{Id}_2 \oplus \theta\left(\frac{2\pi}{3}\right), \quad -\mathrm{Id}_2 \oplus \theta\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad -\mathrm{Id}_2 \oplus \theta\left(\frac{\pi}{3}\right),$

$\theta\left(\frac{\pi}{2}\right) \oplus \theta\left(\frac{2\pi}{3}\right), \quad \theta\left(\frac{2\pi}{3}\right) \oplus \theta\left(\frac{\pi}{3}\right), \quad \theta\left(\frac{\pi}{2}\right) \oplus \theta\left(\frac{\pi}{3}\right);$

Caso (4): $\theta\left(\frac{2\pi}{5}\right) \oplus \theta\left(\frac{4\pi}{5}\right), \quad \theta\left(\frac{\pi}{4}\right) \oplus \theta\left(\frac{3\pi}{4}\right), \quad \theta\left(\frac{\pi}{5}\right) \oplus \theta\left(\frac{3\pi}{5}\right), \quad \theta\left(\frac{\pi}{6}\right) \oplus \theta\left(\frac{5\pi}{6}\right).$

Para clasificar los retículos salvo isomorfismo vamos a recurrir a la clasificación de las matrices de orden finito de $\mathsf{GL}(4,\mathbb{Z})$ por conjugación, la cual es determinada por ejemplo en [**40**]. Listaremos sólo aquellas que tengan determinante 1 ya que analizaremos las matrices enteras que resultan de conjugar mediante una matriz $P \in \mathsf{GL}(4,\mathbb{R})$ la matriz $\varphi(t_0) = \theta(t_0) \oplus \theta(bt_0)$, la cual posee determinante 1.

TEOREMA 4.50. *Sean las matrices*

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Toda matriz de orden d en $\mathsf{GL}(4,\mathbb{Z})$ con determinante 1 se conjuga a una y sólo a una de las siguientes[5]*:*

$d = 2:$ $\quad -\operatorname{Id}_4, \quad \operatorname{Id}_2 \oplus (-\operatorname{Id}_2), \quad K \oplus U, \quad U \oplus U;$

$d = 3:$ $\quad W \oplus W, \quad \operatorname{Id}_2 \oplus W, \quad \begin{pmatrix} \operatorname{Id}_2 & E \\ 0 & W \end{pmatrix};$

$d = 4:$ $\quad J \oplus J, \quad \operatorname{Id}_2 \oplus J, \quad \begin{pmatrix} \operatorname{Id}_2 & E \\ 0 & J \end{pmatrix}, \quad (-\operatorname{Id}_2) \oplus J, \quad \begin{pmatrix} -\operatorname{Id}_2 & E \\ 0 & J \end{pmatrix};$

$d = 5:$ $\quad C_5;$

$d = 6:$ $\quad -(W \oplus W), \quad \operatorname{Id}_2 \oplus (-W), \quad (-\operatorname{Id}_2) \oplus W, \quad -(\operatorname{Id}_2 \oplus W),$
$\quad \begin{pmatrix} -\operatorname{Id}_2 & E \\ 0 & -W \end{pmatrix}, \quad W \oplus (-W), \quad \begin{pmatrix} W & E \\ 0 & -W \end{pmatrix};$

$d = 8:$ $\quad C_8;$

$d = 10:$ $\quad C_{10};$

$d = 12:$ $\quad C_{12}, \quad J \oplus W, \quad J \oplus (-W).$

Analizaremos para cada uno de nuestros casos las posibles clases de conjugación de matrices enteras que resultan de conjugar la matriz $\varphi(t_0) = \theta(t_0) \oplus \theta(bt_0)$ mediante una matriz $P \in \mathsf{GL}(4,\mathbb{R})$.

LEMA 4.51 (Caso (1)). *Teniendo en cuenta el Teorema 4.50 se tiene la siguiente tabla:*

Matriz	*Clases de conjugación enteras mediante $P \in \mathsf{GL}(4,\mathbb{R})$*
Id_4	Id_4
$\operatorname{Id}_2 \oplus (-\operatorname{Id}_2)$	$\operatorname{Id}_2 \oplus (-\operatorname{Id}_2)$, $K \oplus U$, $U \oplus U$
$\operatorname{Id}_2 \oplus \theta\left(\frac{2\pi}{3}\right)$	$\operatorname{Id}_2 \oplus W$, $\begin{pmatrix} \operatorname{Id}_2 & E \\ 0 & W \end{pmatrix}$
$\operatorname{Id}_2 \oplus \theta\left(\frac{\pi}{2}\right)$	$\operatorname{Id}_2 \oplus J$, $\begin{pmatrix} \operatorname{Id}_2 & E \\ 0 & J \end{pmatrix}$
$\operatorname{Id}_2 \oplus \theta\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\operatorname{Id}_2 \oplus (-W)$

DEMOSTRACIÓN: Comparando la traza de cada una de las matrices de la columna izquierda de la tabla de un orden d dado con la traza de las matrices de orden d en el Teorema 4.50 se descartan las clases de conjugación que no aparezcan en la columna derecha.

Por otro lado, conjugando $\operatorname{Id}_2 \oplus (-\operatorname{Id}_2)$ por $P_{(1,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & 7 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ obtenemos $K \oplus U$ y conjugando por $Q_{(1,2)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ obtenemos $U \oplus U$.

[5] Dado $n \in \mathbb{N}$, la matriz C_n denotará la matriz compañera del n-ésimo polinomio ciclotómico $\Phi_n(x)$.

Conjugando $\mathrm{Id}_2 \oplus \theta\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ por $P_{(1,3)} = \mathrm{Id}_2 \oplus \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y por $Q_{(1,3)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ obtenemos $\mathrm{Id}_2 \oplus W$ y $\begin{pmatrix} \mathrm{Id}_2 & E \\ 0 & W \end{pmatrix}$ respectivamente.

Conjugando $\mathrm{Id}_2 \oplus\ \theta\left(\frac{\pi}{2}\right)$ por $P_{(1,4)} = \mathrm{Id}_2 \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y por $Q_{(1,4)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ se obtienen $\mathrm{Id}_2 \oplus J$ y $\begin{pmatrix} \mathrm{Id}_2 & E \\ 0 & J \end{pmatrix}$ respectivamente.

Conjugando $\mathrm{Id}_2 \oplus \theta\left(\frac{\pi}{3}\right)$ por $P_{(1,6)} = \mathrm{Id}_2 \oplus \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ obtenemos $\mathrm{Id}_2 \oplus (-W)$. $\square$

Lema 4.52 (Caso (2)). *Teniendo en cuenta el Teorema 4.50 se tiene la siguiente tabla:*

Matriz	*Clases de conjugación enteras mediante* $P \in \mathsf{GL}(4,\mathbb{R})$
$-\mathrm{Id}_4$	$-\mathrm{Id}_4$
$\theta\left(\frac{2\pi}{3}\right) \oplus\ \theta\left(\frac{2\pi}{3}\right)$	$W \oplus\ W$
$\theta\left(\frac{\pi}{2}\right) \oplus\ \theta\left(\frac{\pi}{2}\right)$	$J \oplus\ J$
$\theta\left(\frac{\pi}{3}\right) \oplus\ \theta\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$-(W \oplus W)$

Demostración: De manera análoga al lema anterior comparando la traza de las matrices de la columna izquierda de la tabla de un cierto orden d con la traza de las matrices de orden d en el Teorema 4.50 se descartan las clases de conjugación que no aparecen en la columna derecha.

Por otro lado, conjugando $\theta\left(\frac{2\pi}{3}\right) \oplus\ \theta\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ por $P_{(2,3)} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ se obtiene $W \oplus W$.

Conjugando $\theta\left(\frac{\pi}{2}\right) \oplus\ \theta\left(\frac{\pi}{2}\right)$ por $P_{(2,4)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ se obtiene $J \oplus J$.

Conjugando $\theta\left(\frac{\pi}{3}\right) \oplus\ \theta\left(\frac{\pi}{3}\right)$ por $P_{(2,6)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ se obtiene $-(W \oplus W)$. $\square$

Lema 4.53 (Caso (3)). *Teniendo en cuenta el Teorema 4.50 se tiene la siguiente tabla:*

Matriz	*Clases de conjugación enteras mediante* $P \in \mathsf{GL}(4,\mathbb{R})$
$-\mathrm{Id}_2 \oplus \theta\left(\frac{2\pi}{3}\right)$	$-\mathrm{Id}_2 \oplus W$
$-\mathrm{Id}_2 \oplus \theta\left(\frac{\pi}{2}\right)$	$-\mathrm{Id}_2 \oplus J$, $\begin{pmatrix} -\mathrm{Id}_2 & E \\ 0 & J \end{pmatrix}$
$-\mathrm{Id}_2 \oplus \theta\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$-(\mathrm{Id}_2 \oplus W)$, $\begin{pmatrix} -\mathrm{Id}_2 & E \\ 0 & -W \end{pmatrix}$
$\theta\left(\frac{\pi}{2}\right) \oplus\ \theta\left(\frac{2\pi}{3}\right)$	$J \oplus W$
$\theta\left(\frac{2\pi}{3}\right) \oplus\ \theta\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$W \oplus (-W)$, $\begin{pmatrix} W & E \\ 0 & -W \end{pmatrix}$
$\theta\left(\frac{\pi}{2}\right) \oplus\ \theta\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$J \oplus (-W)$

Demostración. Tomamos una matriz de la columna izquierda de la tabla, si tiene orden d distinto de 12, basta comparar su traza con las matrices de orden d del Teorema 4.50 para descartar las clases de conjugación que no aparecen en la columna derecha. Si la matriz tiene orden 12 se descarta la clase de conjugación de C_{12} pues el polinomio característico de C_{12} es irreducible mientras que los polinomios característicos de las matrices que estamos considerando son todos reducibles.

Por otro lado, conjugando $-\operatorname{Id}_2 \oplus \theta\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ por $P_{(3,3)} = \operatorname{Id}_2 \oplus \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ obtenemos $-\operatorname{Id}_2 \oplus W$.

Conjugando $-\operatorname{Id}_2 \oplus \theta\left(\frac{\pi}{2}\right)$ por $P_{(3,4)} = \operatorname{Id}_2 \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y por $Q_{(3,4)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ obtenemos $-\operatorname{Id}_2 \oplus J$ y $\begin{pmatrix} -\operatorname{Id}_2 & E \\ 0 & J \end{pmatrix}$ respectivamente.

Conjugando $-\operatorname{Id}_2 \oplus \theta\left(\frac{\pi}{3}\right)$ por $P_{(3,6)} = \operatorname{Id}_2 \oplus \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ y por $Q_{(3,6)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ se obtiene $-(\operatorname{Id}_2 \oplus W)$ y $\begin{pmatrix} -\operatorname{Id}_2 & E \\ 0 & -W \end{pmatrix}$ respectivamente.

Conjugando $\theta\left(\frac{\pi}{2}\right) \oplus \theta\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ por $P_{(3,12)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ obtenemos $J \oplus W$.

Conjugando $\theta\left(\frac{2\pi}{3}\right) \oplus \theta\left(\frac{\pi}{3}\right)$ por $\tilde{P}_{(3,6)} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ obtenemos $W \oplus (-W)$ y conjugando por $\tilde{Q}_{(3,6)} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} & 4\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \\ 6 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{-3-3\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 3 & \frac{-3+3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ obtenemos $\begin{pmatrix} W & E \\ 0 & -W \end{pmatrix}$.

Finalmente, conjugando $\theta\left(\frac{\pi}{2}\right) \oplus \theta\left(\frac{\pi}{3}\right)$ por $\tilde{P}_{(3,12)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ se obtiene $J \oplus (-W)$. $\square$

LEMA 4.54 (Caso (4)). *Teniendo en cuenta el Teorema 4.50 se tiene la siguiente tabla:*

Matriz	*Clases de conjugación enteras mediante $P \in \mathsf{GL}(4,\mathbb{R})$*
$\theta\left(\frac{2\pi}{5}\right) \oplus \theta\left(\frac{4\pi}{5}\right)$	C_5
$\theta\left(\frac{\pi}{4}\right) \oplus \theta\left(\frac{3\pi}{4}\right)$	C_8
$\theta\left(\frac{\pi}{5}\right) \oplus \theta\left(\frac{3\pi}{5}\right)$	C_{10}
$\theta\left(\frac{\pi}{6}\right) \oplus \theta\left(\frac{5\pi}{6}\right)$	C_{12}

DEMOSTRACIÓN: Existe una única clase de conjugación en $\mathsf{GL}(4,\mathbb{Z})$ para matrices de orden 5, 8 y 10. Para la matriz $\theta(\frac{\pi}{6}) \oplus \theta(\frac{5\pi}{6})$ basta notar que su polinomio característico tiene como raíces a todas las raíces sextas primitivas de la unidad, luego su polinomio característico es $\Phi_6(x)$ el cual es irreducible, mientras que los polinomios característicos de las demás clases de conjugación de orden 12 son reducibles. Por otro lado, para conjugar cada una de las matrices en la columna izquierda de la tabla a una matriz entera, notamos que sus autovalores son todos distintos, por lo que la suma de sus autovectores resultará un vector cíclico. Con este método podemos escoger:
Para $\theta(\frac{2\pi}{5}) \oplus \theta(\frac{4\pi}{5})$ la matriz $P_{(4,5)}$ cuyas columnas son potencias sucesivas del vector $v = (0,1,1,0)$ y así conjugar a la matriz C_5 que es la matriz compañera del polinomio $\lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1$.
Para $\theta(\frac{\pi}{4}) \oplus \theta(\frac{3\pi}{4})$ la matriz $P_{(4,8)}$ cuyas columnas son potencias sucesivas del vector $v = (1,0,0,1)$ y así conjugar a la matriz C_8 que es la matriz compañera del polinomio $\lambda^4 + 1$.
Para $\theta(\frac{\pi}{5}) \oplus \theta(\frac{3\pi}{5})$ la matriz $P_{(4,10)}$ cuyas columnas son potencias sucesivas del vector $v = (1,0,1,0)$ y así conjugar a la matriz C_{10} que es la matriz compañera del polinomio $\lambda^4 - \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1$.
Para $\theta(\frac{\pi}{6}) \oplus \theta(\frac{5\pi}{6})$ la matriz $P_{(4,12)}$ cuyas columnas son potencias sucesivas del vector $v = (1,0,1,0)$ y así conjugar a la matriz C_{12} que es la matriz compañera del polinomio $\lambda^4 - \lambda^2 + 1$. $\square$

Veremos que la gran mayoría de los retículos Γ asociados a los distintos productos semidirectos que hemos obtenido resultan ser no isomorfos 2 a 2, dado que el espacio cociente $\Gamma/[\Gamma,\Gamma]$ los distingue. Los cálculos son parecidos a los que ya hemos hecho en dimensión 3 y 4 por lo que daremos directamente los primeros grupos de homología para todas las solvariedades obtenidas.

Clasificación de solvariedades planas de dimensión 5. Llamemos $G_b(5) = \mathbb{R} \ltimes_{\varphi_b} \mathbb{R}^4$. A modo de resumen tenemos la siguiente tabla que describe todas las solvariedades planas de dimensión 5.

Solvariedad M	Matriz entera asociada	$\mathrm{Hol}(M)$	$H_1(M,\mathbb{Z})$
T^5	Id_4	$\{e\}$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$
$(2\pi\mathbb{Z} \ltimes_{\varphi_{\frac{1}{2}}} \mathbb{Z}^4)\backslash G_{\frac{1}{2}}(5)$	$\mathrm{Id}_2 \oplus (-\mathrm{Id}_2)$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$
$(2\pi\mathbb{Z} \ltimes_{\varphi_{\frac{1}{2}}} P_{(1,2)}\mathbb{Z}^4)\backslash G_{\frac{1}{2}}(5)$	$K\oplus U$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2$
$(2\pi\mathbb{Z} \ltimes_{\varphi_{\frac{1}{2}}} Q_{(1,2)}\mathbb{Z}^4)\backslash G_{\frac{1}{2}}(5)$	$U\oplus U$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$
$(2\pi\mathbb{Z} \ltimes_{\varphi_{\frac{1}{3}}} P_{(1,3)}\mathbb{Z}^4)\backslash G_{\frac{1}{3}}(5)$	$\mathrm{Id}_2\oplus W$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_3$
$(2\pi\mathbb{Z} \ltimes_{\varphi_{\frac{1}{3}}} Q_{(1,3)}\mathbb{Z}^4)\backslash G_{\frac{1}{3}}(5)$	$\begin{pmatrix}\mathrm{Id}_2 & E\\ 0 & W\end{pmatrix}$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$
$(2\pi\mathbb{Z} \ltimes_{\varphi_{\frac{1}{4}}} P_{(1,4)}\mathbb{Z}^4)\backslash G_{\frac{1}{4}}(5)$	$\mathrm{Id}_2\oplus J$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2$
$(2\pi\mathbb{Z} \ltimes_{\varphi_{\frac{1}{4}}} P_{(1,4)}\mathbb{Z}^4)\backslash G_{\frac{1}{4}}(5)$	$\begin{pmatrix}\mathrm{Id}_2 & E\\ 0 & J\end{pmatrix}$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$
$(2\pi\mathbb{Z} \ltimes_{\varphi_{\frac{1}{6}}} P_{(1,6)}\mathbb{Z}^4)\backslash G_{\frac{1}{6}}(5)$	$\mathrm{Id}_2\oplus(-W)$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$
$(\pi\mathbb{Z} \ltimes_{\varphi_1} \mathbb{Z}^4)\backslash G_1(5)$	$-\mathrm{Id}_4$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$
$(\frac{2\pi}{3}\mathbb{Z} \ltimes_{\varphi_1} P_{(2,3)}\mathbb{Z}^4)\backslash G_1(5)$	$W\oplus W$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_3\oplus\mathbb{Z}_3$
$(\frac{\pi}{2}\mathbb{Z} \ltimes_{\varphi_1} P_{(2,4)}\mathbb{Z}^4)\backslash G_1(5)$	$J\oplus J$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$
$(\frac{\pi}{3}\mathbb{Z} \ltimes_{\varphi_1} P_{(2,6)}\mathbb{Z}^4)\backslash G_1(5)$	$-(W\oplus W)$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}$
$(\pi\mathbb{Z} \ltimes_{\varphi_{\frac{2}{3}}} P_{(3,3)}\mathbb{Z}^4)\backslash G_{\frac{2}{3}}(5)$	$-\mathrm{Id}_2\oplus W$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_3$
$(\pi\mathbb{Z} \ltimes_{\varphi_{\frac{1}{2}}} P_{(3,4)}\mathbb{Z}^4)\backslash G_{\frac{1}{2}}(5)$	$-\mathrm{Id}_2\oplus J$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$
$(\pi\mathbb{Z} \ltimes_{\varphi_{\frac{1}{2}}} Q_{(3,4)}\mathbb{Z}^4)\backslash G_{\frac{1}{2}}(5)$	$\begin{pmatrix}-\mathrm{Id}_2 & E\\ 0 & J\end{pmatrix}$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_4$
$(\pi\mathbb{Z} \ltimes_{\varphi_{\frac{1}{3}}} P_{(3,6)}\mathbb{Z}^4)\backslash G_{\frac{1}{3}}(5)$	$-(\mathrm{Id}_2\oplus W)$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$
$(\pi\mathbb{Z} \ltimes_{\varphi_{\frac{1}{3}}} Q_{(3,6)}\mathbb{Z}^4)\backslash G_{\frac{1}{3}}(5)$	$\begin{pmatrix}-\mathrm{Id}_2 & E\\ 0 & -W\end{pmatrix}$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$
$(\frac{\pi}{2}\mathbb{Z} \ltimes_{\varphi_{\frac{4}{3}}} P_{(3,12)}\mathbb{Z}^4)\backslash G_{\frac{4}{3}}(5)$	$J\oplus W$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_3$
$(\frac{2\pi}{3}\mathbb{Z} \ltimes_{\varphi_{\frac{1}{2}}} \tilde{P}_{(3,6)}\mathbb{Z}^4)\backslash G_{\frac{1}{2}}(5)$	$W\oplus(-W)$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_3$
$(\frac{2\pi}{3}\mathbb{Z} \ltimes_{\varphi_{\frac{1}{2}}} \tilde{Q}_{(3,6)}\mathbb{Z}^4)\backslash G_{\frac{1}{2}}(5)$	$\begin{pmatrix}W & E\\ 0 & -W\end{pmatrix}$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_3$
$(\frac{\pi}{2}\mathbb{Z} \ltimes_{\varphi_{\frac{2}{3}}} \tilde{P}_{(3,12)}\mathbb{Z}^4)\backslash G_{\frac{2}{3}}(5)$	$J\oplus(-W)$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2$
$(\frac{2\pi}{5}\mathbb{Z} \ltimes_{\varphi_2} P_{(4,5)}\mathbb{Z}^4)\backslash G_2(5)$	C_5	$\mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_5$
$(\frac{\pi}{4}\mathbb{Z} \ltimes_{\varphi_3} P_{(4,8)}\mathbb{Z}^4)\backslash G_3(5)$	C_8	$\mathbb{Z}_8$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2$
$(\frac{\pi}{5}\mathbb{Z} \ltimes_{\varphi_3} P_{(4,10)}\mathbb{Z}^4)\backslash G_3(5)$	C_{10}	$\mathbb{Z}_{10}$	$\mathbb{Z}$
$(\frac{\pi}{6}\mathbb{Z} \ltimes_{\varphi_5} P_{(4,12)}\mathbb{Z}^4)\backslash G_5(5)$	C_{12}	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}$

Observación. De la tabla notamos que no se pueden distinguir mediante el primer grupo de homología o el grupo de holonomía las solvariedades $(\pi\mathbb{Z}\ltimes_{\varphi_{\frac{1}{3}}} P_{(3,6)}\mathbb{Z}^4)\backslash G_{\frac{1}{3}}(5)$ y $(\pi\mathbb{Z}\ltimes_{\varphi_{\frac{1}{3}}} Q_{(3,6)}\mathbb{Z}^4)\backslash G_{\frac{1}{3}}(5)$

ni tampoco las solvariedades $(\frac{2\pi}{3}\mathbb{Z} \ltimes_{\varphi_{\frac{1}{2}}} \tilde{P}_{(3,6)}\mathbb{Z}^4)\backslash G_{\frac{1}{2}}(5)$ y $(\frac{2\pi}{3}\mathbb{Z} \ltimes_{\varphi_{\frac{1}{2}}} \tilde{Q}_{(3,6)}\mathbb{Z}^4)\backslash G_{\frac{1}{2}}(5)$. Sin embargo, en [**27**, Teorema 5] se prueba que las clases de difeomorfismo de solvariedades planas de dimensión 5 con $\beta_1 = 1$ están en correspondencia 1-1 con las clases de conjugación en $\mathsf{GL}(4,\mathbb{Z})$ de matrices enteras de orden finito sin puntos fijos. Como las matrices $-(\mathrm{Id}_2 \oplus W)$ y $\begin{pmatrix} -\mathrm{Id}_2 & E \\ 0 & -W \end{pmatrix}$ pertenecen a clases de conjugación enteras distintas y no poseen puntos fijos, los retículos asociados no son isomorfos y lo mismo sucede con $W \oplus (-W)$ y $\begin{pmatrix} W & E \\ 0 & -W \end{pmatrix}$. En consecuencia nuestra tabla exhibe efectivamente todas las clases de difeomorfismo de solvariedades planas de dimensión 5. △

3.4. Dimensión 6. Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{b} \oplus [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ un álgebra de Lie plana no abeliana de dimensión 6, entonces puede ser $\dim([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = 2$ ó $\dim([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = 4$.

•) Si $\dim([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = 2$, por el Teorema 3.52 debe ser $\dim \mathfrak{b} = 1$ y por lo tanto $\dim(\mathfrak{z}(\mathfrak{g})) = 3$, por lo que el grupo de Lie simplemente conexo asociada al álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathbb{R}x \ltimes_{\mathrm{ad}_x} \mathbb{R}^5$ es

$$G = \mathbb{R} \ltimes_{\tilde{\varphi}} \mathbb{R}^5, \quad \text{con } \tilde{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{3\times 3} & 0 \\ 0 & \theta(t) \end{pmatrix}, \quad \text{donde } \theta(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \operatorname{sen}(t) \\ -\operatorname{sen}(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Es claro que $\tilde{\varphi}(t_0)$ es conjugada a una matriz entera si y sólo si $t_0 \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \pi, 2\pi\} + 2\pi\mathbb{Z}$, por lo que no conseguiremos nuevos grupos de holonomía. La clasificación de los retículos ya se tornaría más complicada y más tediosa por lo que no la hacemos.

• Si $\dim([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = 4$, por el Teorema 3.52 puede ser $\dim \mathfrak{b} = 1$ ó $\dim \mathfrak{b} = 2$. El caso más interesante pero también más complicado será $\dim \mathfrak{b} = 2$, ya que no es un grupo de Lie casi abeliano.

♦ Si $\dim \mathfrak{b} = 1$ entonces $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 1$ y por lo tanto el grupo de Lie plano casi abeliano será

$$G = \mathbb{R} \ltimes_{\tilde{\varphi}} \mathbb{R}^5, \quad \text{donde } \tilde{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \theta(t) & \\ & & \theta(bt) \end{pmatrix}, \text{ con } b > 0.$$

La caracterización de los valores para t_0 y bt_0 que dimos en dimensión 5 sigue siendo válida para este caso. Por lo tanto podremos conseguir los mismos grupos de holonomía de dimensión 5 dados en el Teorema 4.48, es decir $\{e\}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_{10}$ y $\mathbb{Z}_{12}$.

♦ Si $\dim \mathfrak{b} = 2$ entonces $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$. Notemos que en este caso $\mathfrak{g}$ no es un álgebra de Lie casi abeliana, por lo que no podemos usar la Proposición 4.18 para determinar si existen o no retículos. En este caso lo único que haremos será dar ejemplos de solvariedades planas con grupos de holonomía no cíclico, los cuales son

$$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2,\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3,\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4,\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_6,\ \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3,\ \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_4,\ \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_6,\ \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4,\ \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_6,\ \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_6. \quad (19)$$

Estos ejemplos se darán en la última sección, donde se dará una construcción general para el caso en que $\dim \mathfrak{b} = \frac{\dim[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}{2}$.

Nota. Como ya hemos mencionado, toda solvariedad plana de dimensión par admite una estructura de Kähler. En [**16**] se determinaron todos los grupos de holonomía posibles de variedades Kähler compactas planas de dimensión 6. En ese listado aparecen todos los grupos que tenemos hasta el momento, los cuales son el trivial, $\mathbb{Z}_n$ para $n = 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12$, los grupos de (19) y un grupo no abeliano, el grupo diedral D_8. Se menciona en [**16**] que hay una única variedad Kähler compacta plana de dimensión 6 que posee a este grupo como grupo de holonomía y esta variedad tiene $\beta_1 = 0$. Esta variedad compacta plana no es homeomorfa a una solvariedad plana pues su grupo fundamental es primitivo, mientras que por lo visto en la Proposición 4.15 el grupo fundamental de cualquier solvariedad plana cumple que no es primitivo.

En conclusión, los posibles grupos de holonomía de solvariedades planas de dimensión 6 son los que ya encontramos y no hay más.

4. Resultados generales en dimensiones arbitrarias

En esta última sección nos dedicaremos a generalizar para dimensiones altas algunas cuestiones sobre retículos y holonomía que hemos observado en dimensiones bajas. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie plana, entonces por el Teorema 3.52 $\mathfrak{g}$ se descompone en una suma directa ortogonal

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{b} \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}],$$

donde $\mathfrak{b}$ es una subálgebra abeliana, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ es un ideal abeliano de dimensión par con $\dim \mathfrak{b} \leq \frac{\dim([\mathfrak{g},\mathfrak{g}])}{2}$ y $\mathrm{ad} : \mathfrak{b} \to \mathfrak{so}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$ es inyectiva. Profundizaremos sobre los siguientes casos:

♣ $\dim \mathfrak{b} = \frac{\dim([\mathfrak{g},\mathfrak{g}])}{2}$;

♣ $\dim \mathfrak{g} = 2n + 1$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y $\dim([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 2n$, por lo que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$ y $\dim \mathfrak{b} = 1$.

• Si $\dim \mathfrak{b} = \frac{\dim([\mathfrak{g},\mathfrak{g}])}{2}$, el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ tiene una estructura sencilla, como se ve en la siguiente proposición.

Proposición 4.55. *Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{b} \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ es un álgebra de Lie plana con $\dim \mathfrak{b} = \frac{\dim([\mathfrak{g},\mathfrak{g}])}{2}$, entonces*

$$\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \times \mathfrak{e}(2)^n,$$

donde $n = \dim \mathfrak{b}$.

Demostración: En la demostración del Teorema 3.52 vimos que existe una base $\mathcal{B} = \{f_1, \ldots , f_{2n}\}$ de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ tal que para todo $x \in \mathfrak{b}$

$$[\mathrm{ad}_x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} & \alpha_1(x) & & & \\ -\alpha_1(x) & & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & \alpha_n(x) \\ & & & -\alpha_n(x) & \end{pmatrix} \quad \text{para } \alpha_1, \ldots , \alpha_n \in \mathfrak{b}^*.$$

Como $\mathrm{ad} : \mathfrak{b} \to \mathfrak{so}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$ es inyectiva se tiene que $\cap_{i=1}^n \ker \alpha_i = \{0\}$, en efecto si $x \in \cap_{i=1}^n \ker \alpha_i$ resulta $\mathrm{ad}_x = 0$ por lo que $x = 0$. Luego, usando que $\alpha_1, \ldots , \alpha_k \in (\mathbb{R}^n)^*$ son linealmente independientes si y sólo si $\dim(\cap_{i=1}^k \ker \alpha_i) = n - k$, resulta que $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ es base de $\mathfrak{b}^*$.

Sea ahora $\{e_i\}_{i=1}^n$ la base dual de $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$. Entonces

$$[\mathrm{ad}_{e_i}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & -1 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

es decir que los únicos corchetes no nulos son $[e_i, f_{2i-1}] = -f_{2i}$ y $[e_i, f_{2i}] = f_{2i-1}$, para $1 \leq i \leq n$. Sea $\mathfrak{g}_i = \mathrm{span}\{e_i, f_{2i-1}, f_{2i}\}$, que resulta ser un ideal de $\mathfrak{g}$ isomorfo a $\mathfrak{e}(2)$ para todo i. Por lo tanto $\mathfrak{g}$ se parte como un producto directo de álgebras de Lie, es decir $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \times \mathfrak{g}_1 \times \cdots \times \mathfrak{g}_n \simeq \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \times e(2)^n$. □

El correspondiente grupo de Lie G simplemente conexo asociado será de la forma

$$G = \mathbb{R}^s \times E(2) \times \cdots \times E(2),$$

donde $s = \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ y $E(2)$ es isomorfo como grupo de Lie a $\mathbb{R}^3$ con su estructura diferenciable usual y el producto está dado por (14). Sean $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots , \Gamma_n$ retículos en $E(2)$. Podemos construir un retículo en G dado por

$$\Gamma = \mathbb{Z}^s \times \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_n.$$

Consideremos la solvariedad asociada

$$\Gamma\backslash G \cong \mathbb{Z}^s\backslash\mathbb{R}^s \times \Gamma_1\backslash E(2) \times \cdots \times \Gamma_n\backslash E(2)$$

con la métrica plana g_0 inducida por la métrica invariante a izquierda en G. Por otro lado, consideremos en $\Gamma\backslash G$ la métrica producto g_* de las métricas inducidas en $\Gamma_i\backslash E(2)$ por alguna métrica plana invariante a izquierda en $E(2)$. Entonces $(\Gamma\backslash G, g_0)$ y $(\Gamma\backslash G, g_*)$ son dos variedades compactas planas cuyos grupos fundamentales son isomorfos. Por el Teorema 2.64 existe una equivalencia afín entre ellas, lo que implica $\mathrm{Hol}(\Gamma\backslash G, g_0) \cong \mathrm{Hol}(\Gamma\backslash G, g_*)$, según la Proposición 2.56. Esta última es isomorfa, de acuerdo con la Proposición 2.57 a

$$\mathrm{Hol}(T^s) \times \mathrm{Hol}(\Gamma_1\backslash E(2)) \times \cdots \times \mathrm{Hol}(\Gamma_n\backslash E(2)).$$

En conclusión

$$\mathrm{Hol}(\Gamma\backslash G) = \mathbb{Z}_{k_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{k_n}, \quad \text{con } k_j = |\Lambda_j\backslash\Gamma_j|,$$

donde Λ_j es el subgrupo abeliano maximal de Γ_j. Esto permite construir solvariedades planas con grupo de holonomía $\mathbb{Z}_{k_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{k_n}$ donde $k_i \in \{2, 3, 4, 6\}$.

• Si $\dim \mathfrak{g} = 2n+1$ y $\dim([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = 2n$ resulta $\dim \mathfrak{b} = 1$, y por lo tanto $\mathfrak{g}$ es casi abeliana con centro trivial, por lo que se escribe de la forma

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}x \ltimes_{\mathrm{ad}_x} \mathbb{R}^{2n}, \quad \text{donde } [\mathrm{ad}_x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & & & \\ -b_1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & b_n \\ & & & -b_n & 0 \end{pmatrix},$$

para alguna base ortonormal $\mathcal{B} = \{e_1, f_1, \ldots, e_n, f_n\}$ de $\mathbb{R}^{2n}$ y $b_1, \ldots, b_n > 0$, según lo visto en la Sección 2.1.

Denotaremos por G_b al grupo de Lie simplemente conexo asociado, el cual está dado por

$$G_b = \mathbb{R} \ltimes_{\varphi_b} \mathbb{R}^{2n},$$

donde

$$\varphi_b(t) = \begin{pmatrix} \cos(b_1 t) & \operatorname{sen}(b_1 t) & & & \\ -\operatorname{sen}(b_1 t) & \cos(b_1 t) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \cos(b_n t) & \operatorname{sen}(b_n t) \\ & & & -\operatorname{sen}(b_n t) & \cos(b_n t) \end{pmatrix}. \tag{20}$$

En lo que resta vamos a estudiar la cuestión sobre la dimensión mínima en la cual aparece una solvariedad plana con holonomía $\mathbb{Z}_n$, para $n \in \mathbb{N}$ arbitrario. En primer lugar, dado p un número primo y $k \in \mathbb{N}$ daremos ejemplos de solvariedades planas con grupos de holonomía $\mathbb{Z}_{p^k}$ y $\mathbb{Z}_{2p^k}$ respectivamente. Estas solvariedades se obtendrán como cocientes de grupos de Lie casi abelianos $G_b = \mathbb{R} \ltimes_{\varphi_b} \mathbb{R}^{(p-1)p^{k-1}}$ por algún retículo.

LEMA 4.56. *Sean p primo impar y $k \in \mathbb{N}$, entonces existen solvariedades planas de dimensión $(p-1)p^{k-1}+1$ con grupos de holonomía $\mathbb{Z}_{p^k}$ y $\mathbb{Z}_{2p^k}$, respectivamente. Si $p = 2$ la afirmación vale para $k \geq 2$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $p = 2$ exhibimos a continuación una solvariedad con holonomía $\mathbb{Z}_{2^k}$ para $k \geq 2$. Sea $n = 2^{k-2}$, elegimos $t_0 = \frac{\pi}{2^{k-1}}$ y $b_\ell = 2\ell - 1$ para $1 \leq \ell \leq n$, es decir

$$b_1 t_0 = \frac{\pi}{2^{k-1}}, \quad \ldots \quad , \quad b_n t_0 = \frac{(2^{k-1}-1)\pi}{2^{k-1}}.$$

Los autovalores de la matriz $\varphi(t_0)$ como en (20) para estos valores son

$$\exp\left(\pm\frac{\pi i}{2^{k-1}}\right), \quad \dots \quad , \quad \exp\left(\pm\frac{(2^{k-1}-1)\pi i}{2^{k-1}}\right).$$

Notemos que si $j, \ell \in \mathbb{N}$ entonces

$$\exp\left(-\frac{j\pi i}{\ell}\right) = -\exp\left(\frac{(\ell-j)\pi i}{\ell}\right).$$

Si $1 \leq j \leq 2^{k-1}-1$ es impar entonces $1 \leq 2^{k-1}-j \leq 2^{k-1}-1$ es impar por lo que los autovalores de $\varphi(t_0)$ resultan ser

$$\exp\left(\frac{\pi i}{2^{k-1}}\right), \quad -\exp\left(\frac{\pi i}{2^{k-1}}\right), \quad \dots \quad , \exp\left(\frac{(2^{k-1}-1)\pi i}{2^{k-1}}\right), \; -\exp\left(\frac{(2^{k-1}-1)\pi i}{2^{k-1}}\right),$$

los cuales son 2^{k-1} raíces 2^{k-1}-ésimas de -1, todas distintas. Así, el polinomio característico $P_{\varphi(t_0)}(\lambda)$ de $\varphi(t_0)$ es

$$P_{\varphi(t_0)}(\lambda) = \lambda^{2^{k-1}} + 1 \in \mathbb{Z}[\lambda].$$

Como todos los autovalores de $\varphi(t_0)$ son distintos, por el Teorema 4.24 la matriz $\varphi(t_0)$ es conjugada en $\mathbb{C}$ a la matriz compañera de $p_{\varphi(t_0)}(\lambda)$ la cual es entera, y no es difícil probar que si dos matrices con coeficientes reales son conjugadas en $\mathbb{C}$ entonces también son conjugadas en $\mathbb{R}$. Luego, por la Proposición 4.18 el grupo de Lie $G_{b_2} = \mathbb{R} \ltimes_{\varphi_{b_2}} \mathbb{R}^{2^{k-1}}$ de dimensión $2^{k-1}+1$, donde $b_2 = (1, 3, 5, \dots, 2^{k-1}-1)$, admite un retículo de la forma

$$\Gamma_{2^k} = \frac{\pi}{2^{k-1}}\mathbb{Z} \ltimes_{\varphi_{b_2}} P\mathbb{Z}^{2^{k-1}}, \quad \text{para alguna matriz } P \in \mathsf{GL}(2^{k-1}, \mathbb{R}).$$

Por el Teorema 4.30 el grupo de holonomía de la solvariedad $\Gamma_{2^{k-1}} \backslash G_{b_2}$ es $\mathbb{Z}_d$ donde

$$d = \operatorname{mcm}\left(\operatorname{ord}\left(\theta\left(\frac{\pi}{2^{k-1}}\right)\right), \operatorname{ord}\left(\theta\left(\frac{3\pi}{2^{k-1}}\right)\right) \dots, \operatorname{ord}\left(\theta\left(\frac{(2^{k-1}-1)\pi}{2^{k-1}}\right)\right)\right) = 2^k.$$

Si p es impar, exhibimos a continuación una solvariedad con holonomía $\mathbb{Z}_{p^k}$, $k \geq 1$. Sea $n = \frac{(p-1)p^{k-1}}{2}$ y sea el grupo de Lie $G_{p^k} = \mathbb{R} \ltimes_\varphi \mathbb{R}^{(p-1)p^{k-1}}$, el cual es de dimensión $(p-1)p^{k-1}+1$. Elegimos los valores de t_0 y b_ℓ, para $1 \leq \ell \leq n$, de la siguiente manera. Primero consideramos los $\frac{p^k-1}{2}$ valores

$$\frac{2\pi}{p^k}, \; \frac{4\pi}{p^k}, \; \dots, \; \frac{(p^k-1)\pi}{p^k},$$

y luego eliminamos los $\frac{p^{k-1}-1}{2}$ valores

$$\frac{2p\pi}{p^k}, \; \frac{4p\pi}{p^k}, \; \dots, \; \frac{(p^{k-1}-1)p\pi}{p^k}.$$

Notar que nos quedamos con $\frac{p^k-1}{2} - \left(\frac{p^{k-1}-1}{2}\right) = \frac{(p-1)p^{k-1}}{2} = n$ elementos, los cuales son de la forma $b_\ell t_0$ para $t_0 = \frac{2\pi}{p^k}$ y $b_\ell = \ell$ con $1 \leq \ell \leq \frac{p^k-1}{2}$, $\operatorname{mcd}(\ell, p) = 1$.

Los autovalores de la matriz $\varphi(t_0)$ como en (20) para esta elección de t_0 y b_ℓ serán

$$\exp\left(\pm\frac{2\pi i}{p^k}\ell\right), \quad 1 \leq \ell \leq \frac{p^k-1}{2}, \; \operatorname{mcd}(\ell, p) = 1,$$

los cuales son $(p-1)p^{k-1}$ raíces p^k-ésimas primitivas distintas de la unidad, que son todas porque justamente hay $p^k - p^{k-1}$ raíces p^k-ésimas primitivas de la unidad. Así, el polinomio característico de la matriz $\varphi(t_0)$ será el p^k-ésimo polinomio ciclotómico $\Phi_{p^k}(x)$, el cual tiene coeficientes enteros. Como todos los autovalores de $\varphi(t_0)$ son distintos, esta se puede conjugar a la matriz compañera de $\Phi_{p^k}(x)$ la cual es entera, luego por la Proposición 4.18 el grupo de Lie G_{p^k} admite un retículo Γ_{p^k} de la forma

$$\Gamma_{p^k} = \frac{2\pi}{p^k}\mathbb{Z} \ltimes_\varphi P\mathbb{Z}^{(p-1)p^{k-1}}, \quad \text{para alguna matriz } P \in \mathsf{GL}((p-1)p^{k-1}, \mathbb{R}).$$

Por el Teorema 4.30 el grupo de holonomía de la solvariedad $\Gamma_{p^k}\backslash G_{p^k}$ es $\mathbb{Z}_d$ donde

$$d = \text{mcm}\left(\text{ord}\left(\theta\left(\frac{2\pi}{p^k}\right)\right), \text{ ord}\left(\theta\left(\frac{4\pi}{p^k}\right)\right) \dots, \text{ ord}\left(\theta\left(\frac{(p^k-1)\pi}{p^k}\right)\right)\right) = p^k.$$

Ahora, exhibiremos una solvariedad con holonomía $\mathbb{Z}_{2p^k}$, $k \geq 1$. Elegimos los valores de t_0 y b_ℓ, para $1 \leq \ell \leq n$, de la siguiente manera. Primero consideramos los $\frac{p^k-1}{2}$ valores

$$\frac{\pi}{p^k}, \frac{3\pi}{p^k}, \dots, \frac{(p^k-2)\pi}{p^k},$$

y luego eliminamos los $\frac{p^{k-1}-1}{2}$ valores

$$\frac{p\pi}{p^k}, \frac{3p\pi}{p^k}, \dots, \frac{(p^{k-1}-2)p\pi}{p^k}.$$

Notar que nos quedamos con $\frac{p^k-1}{2} - \left(\frac{p^{k-1}-1}{2}\right) = \frac{(p-1)p^{k-1}}{2} = n$ elementos los cuales son de la forma $b\ell t_0$ para $t_0 = \frac{\pi}{p^k}$ y $b_\ell = 2\ell - 1$ con $1 \leq \ell \leq \frac{p^k-1}{2}$, $\text{mcd}(b_\ell, p) = 1$.

Los autovalores de la matriz $\varphi(t_0)$ como en (20) para esta elección de t_0 y b_ℓ serán de la forma

$$\exp\left(\pm\frac{\pi i}{p^k}b_\ell\right), \quad b_\ell,\ 1 \leq b_\ell \leq p^k - 2,\ \text{mcd}(b_\ell, p) = 1,$$

o equivalentemente

$$\exp\left(\pm\frac{2\pi i}{2p^k}b_\ell\right), \quad b_\ell,\ 1 \leq b_\ell \leq p^k - 2,\ \text{mcd}(b_\ell, p) = 1,$$

los cuales son $(p-1)p^{k-1}$ raíces $2p^k$-ésimas primitivas distintas de la unidad, que son todas porque justamente hay $p^k - p^{k-1}$ raíces $2p^k$-ésimas primitivas de la unidad. Así, el polinomio característico será el $2p^k$-ésimo polinomio ciclotómico $\Phi_{2p^k}(x)$, el cual tiene coeficientes enteros. Como todos los autovalores de la matriz $\varphi(t_0)$ son distintos, esta se puede conjugar a la matriz compañera de $\Phi_{2p^k}(x)$ la cual es entera, luego por la Proposición 4.18 el grupo de Lie G_{p^k} admite un retículo Γ_{2p^k} de la forma

$$\Gamma_{2p^k} = \frac{\pi}{p^k}\mathbb{Z} \ltimes_\varphi P\mathbb{Z}^{(p-1)p^{k-1}}, \quad \text{para cierta matriz } P \in \mathsf{GL}((p-1)p^{k-1}, \mathbb{R}).$$

Por el Teorema 4.30 el grupo de holonomía de la solvariedad $\Gamma_{2p^k}\backslash G_{p^k}$ es $\mathbb{Z}_d$ donde

$$d = \text{mcm}\Big(\text{ord}\Big(\theta\Big(\frac{\pi}{p^k}\Big)\Big), \text{ ord}\Big(\theta\Big(\frac{3\pi}{p^k}\Big)\Big) \dots, \text{ ord}\Big(\theta\Big(\frac{(p^k-2)\pi}{p^k}\Big)\Big)\Big) = 2p^k.$$

□

Es fácil ahora mostrar la recíproca del Teorema 4.14, es decir que todo grupo abeliano finito es el grupo de holonomía de una solvariedad plana.

Teorema 4.57. *Sea A un grupo abeliano finito, entonces existe una solvariedad plana con grupo de holonomía A.*

Demostración: Por el teorema de estructura de grupos abelianos finitamente generados se tiene

$$A \cong \mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_n^{k_n}},$$

donde $p_1, \ldots, p_n$ son números primos (no necesariamente distintos) y $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$. En el Lema 4.56 hemos construido una solvariedad $\Gamma_i \backslash G_i$ con grupo de holonomía $\mathbb{Z}_{p_i^{k_i}}$ para todo $1 \leq i \leq n$. Sea G el grupo de Lie dado por $G = G_1 \times \cdots \times G_n$ y Γ el retículo de G dado por $\Gamma = \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_n$. Consideramos la solvariedad

$$\Gamma \backslash G \cong \Gamma_1 \backslash G_1 \times \cdots \times \Gamma_n \backslash G_n$$

equipada con la métrica producto, que es plana. Por la Proposición 2.57 se tiene

$$\mathrm{Hol}(\Gamma \backslash G) = \mathrm{Hol}(\Gamma_1 \backslash G_1) \times \cdots \times \mathrm{Hol}(\Gamma_n \backslash G_n) \simeq \mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_n^{k_n}}.$$

□

Corolario 4.58. *Dado un grupo abeliano finito A existe una solvariedad plana Kähler que tiene grupo de holonomía A.*

Demostración: Sea A un grupo abeliano finito. Por el Teorema 4.57 existe una solvariedad plana $\Gamma \backslash G$ de dimensión n que tiene al grupo A como grupo de holonomía. En [**3**] se prueba que toda solvariedad plana de dimensión par admite una estructura Kähler, por lo que si n es par, no hay nada que probar. Si n es impar, basta tomar la solvariedad obtenida como cociente del grupo de Lie $\mathbb{R} \times G$ por el retículo $\mathbb{Z} \times \Gamma$ equipada con la métrica producto. Entonces, se cumple

$$\mathrm{Hol}(\mathbb{Z} \times \Gamma \backslash \mathbb{R} \times G) \simeq \mathrm{Hol}(T^1) \times \mathrm{Hol}(\Gamma \backslash G) \simeq \{e\} \times A \simeq A.$$

□

La dimensión de la solvariedad construida en el Teorema 4.57 podría no ser la mínima. Es bien sabido que cualquier grupo finito G es el grupo de holonomía de una variedad compacta plana [**1**]. Resulta de interés encontrar la dimensión mínima de una variedad compacta plana con grupo de holonomía G. En [**12**] Charlap clasificó las variedades compactas planas con grupo de holonomía $\mathbb{Z}_p$, p primo, y probó que la dimensión mínima es p. Más generalmente, Hiller [**21**] probó que la dimensión mínima $d(n)$ de una variedad compacta plana que posee grupo de holonomía $\mathbb{Z}_n$ es

$$d(n) = \Phi(n) + 1, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

donde Φ es una versión "aditiva" de la función φ de Euler que se define de la siguiente manera.

Definición 4.59. Se define la función Φ por las siguientes dos reglas:

(1) Si p es primo $\Phi(p^k) = \varphi(p^k)$, para todo $k \in \mathbb{N}$.
(2) Si m y n son coprimos, entonces $\Phi(mn) = \Phi(m) + \Phi(n)$, a menos que $m = 2$ y n sea un número impar mayor o igual que 3, en cuyo caso $\Phi(2n) = \Phi(n)$.

Notar que $\Phi(1) = 0$, $\Phi(2) = 1$ y $\Phi(n)$ es par para todo $n \geq 3$.

Consideramos ahora el problema de encontrar la dimensión mínima $d_S(n)$ de una solvariedad plana con grupo de holonomía $\mathbb{Z}_n$. En principio tenemos que $d(n) \leq d_S(n)$ para todo n. Para $n = 2$ la desigualdad es estricta. En efecto, $d(2) = 2$ pues la Botella de Klein es una variedad compacta plana de dimensión 2 con grupo de holonomía $\mathbb{Z}_2$, mientras que $d_S(2) = 3$ ya que toda solvariedad de dimensión 2 es difeomorfa a un toro y el "dicosm" es una solvariedad de dimensión 3 con holonomía $\mathbb{Z}_2$. Afortunadamente, este es el único caso donde se da la desigualdad estricta ya que mostraremos que para todo $n \geq 3$ se tiene $d(n) = d_S(n)$. Primero probamos unos resultados auxiliares.

Exhibimos en primer lugar una construcción sencilla que permite conseguir solvariedades planas con grupo de holonomía $\mathbb{Z}_{mn}$ en términos de solvariedades planas con grupos de holonomía $\mathbb{Z}_m$ y $\mathbb{Z}_n$ en el caso en que m y n sean coprimos.

Proposición 4.60. *Sean* $G_b = \mathbb{R} \ltimes_{\varphi_b} \mathbb{R}^{2d_1}$ *y* $G_c = \mathbb{R} \ltimes_{\varphi_c} \mathbb{R}^{2d_2}$ *grupos de Lie casi abelianos con centro trivial. Si existen* $t_0,\ t_1 \in \mathbb{R}$ *no nulos tales que* $\varphi_b(t_0)$ *y* $\varphi_c(t_1)$ *se pueden conjugar a matrices enteras con* $\operatorname{ord}(\varphi_b(t_0)) = m$ *y* $\operatorname{ord}(\varphi_c(t_1)) = n$*, entonces existe una solvariedad de dimensión* $\dim G_b + \dim G_c - 1$ *con grupo de holonomía* $\mathbb{Z}_{\mathrm{mcm}(m,n)}$*.*

Demostración: Sean $\varphi_b(t) = \theta(b_1 t) \oplus \cdots \oplus \theta(b_{d_1} t)$ y $\varphi_c(t) = \theta(c_1 t) \oplus \cdots \oplus \theta(c_{d_2} t)$. Sea el grupo de Lie $G_d = \mathbb{R} \ltimes_{\varphi_d} \mathbb{R}^{2d_1+2d_2}$ donde

$$\varphi_d(t) = \varphi_b(t) \oplus \varphi_{c'}(t), \quad \text{con } c_j' t_0 = c_j t_1, \text{ para } 1 \leq j \leq d_2.$$

Sean P_1, P_2 las matrices inversibles tales que $P_1^{-1}\varphi_b(t_0)P_1 = E_1$ y $P_2^{-1}\varphi_c(t_1)P_2 = E_2$, entonces la matriz $P = P_1 \oplus P_2$ conjuga la matriz

$$\varphi_d(t_0) = \varphi_b(t_0) \oplus \varphi_{c'}(t_0) = \varphi_b(t_0) \oplus \varphi_c(t_1)$$

a la matriz entera $E_1 \oplus E_2$. Por la Proposición 4.18 el grupo de Lie G_d admite un retículo Γ_d, y según el Teorema 4.30 la correspondiente solvariedad tiene grupo de holonomía $\mathbb{Z}_d$ con

$$d = \operatorname{ord}(\varphi_d(t_0)) = \mathrm{mcm}(\operatorname{ord}(\varphi_b(t_0)), \operatorname{ord}(\varphi_c(t_1)) = \mathrm{mcm}(m, n).$$

□

Podemos generalizar de manera inductiva esta proposición y así obtener el siguiente resultado.

Corolario 4.61. *Si* $\mathbb{Z}_{m_1}, \ldots, \mathbb{Z}_{m_n}$ *aparecen como grupos de holonomía de solvariedades obtenidas como cocientes de grupos de Lie casi abelianos de la forma* $G_i = \mathbb{R} \ltimes_{\varphi_{b(i)}} \mathbb{R}^{2d_i}$ *para* $i = 1, \ldots, n$ *entonces existe una solvariedad de dimensión*

$$\sum_{i=1}^{n} (\dim G_i - 1) + 1 = 1 + 2\sum_{i=1}^{n} d_i$$

con grupo de holonomía $\mathbb{Z}_d$ *con* $d = \mathrm{mcm}(m_1, \ldots, m_n)$*.*

Ahora estamos en condiciones de probar el resultado enunciado anteriormente.

Teorema 4.62. *Sea* $n \geq 3$*, entonces* $d(n) = d_S(n)$*.*

Demostración: Veamos primero que vale para potencias de primos. Si $n = p^k$ con p un número primo y $k \in \mathbb{N}$ ($k \geq 2$ si $p = 2$), en el Lema 4.56 hemos construido una solvariedad plana de dimensión $(p-1)p^{k-1} + 1$ con grupo de holonomía $\mathbb{Z}_{p^k}$ por lo que

$$d_S(p^k) \leq (p-1)p^{k-1} + 1.$$

Por otro lado

$$d_S(p^k) \geq d(p^k) = \Phi(p^k) + 1 = (p-1)p^{k-1} + 1.$$

En consecuencia

$$d_S(p^k) = (p-1)p^{k-1} + 1 = d(p^k).$$

Ahora, sea $n = 2^k p_1^{k_1} \ldots p_m^{k_m}$ con $k \in \mathbb{N}_0$, $k \neq 1$ y p_i primos impares distintos con $k_i \in \mathbb{N}$. Para 2^k y las demás potencias de primos podemos construir, según el Lema 4.56, solvariedades planas obtenidas de grupos de Lie casi abelianos $G_0 = \mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^{\Phi(2^k)}$, $G_1 = \mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^{\Phi(p_1^{k_1})}, \ldots, G_n = \mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^{\Phi(p_m^{k_m})}$ con grupos de holonomía $\mathbb{Z}_{2^k}, \mathbb{Z}_{p_1^{k_1}}, \ldots, \mathbb{Z}_{p_m^{k_m}}$ respectivamente. Luego, por el Corolario 4.61 podemos construir una solvariedad plana de dimensión $\Phi(2^k) + \Phi(p_1^{k_1}) + \cdots + \Phi(p_m^{k_m}) + 1$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} d_S(n) &\leq \Phi(2^k) + \Phi(p_1^{k_1}) + \cdots + \Phi(p_m^{k_m}) + 1 \\ &= \Phi(2^k p_1^{k_1} \ldots p_m^{k_m}) + 1 \\ &= d(n). \end{aligned}$$

Por lo tanto son iguales. Es claro que si $k = 0$ la prueba también funciona para números que son producto de potencias de primos impares distintos.

Por último, sea $n = 2p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}$ con p_i primos impares distintos y $k_i \in \mathbb{N}$. Según el Lema 4.56 podemos obtener una solvariedad plana como cociente de un grupo de Lie casi abeliano $G_1 = \mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^{\Phi(p_1^{k_1})}$ con grupo de holonomía $\mathbb{Z}_{2p_1^{k_1}}$. Como en el caso anterior, combinando el Lema 4.56 con el Corolario 4.61, para el número $p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$ podemos obtener una solvariedad plana a partir del grupo de Lie $G_2 = \mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^{\Phi(p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m})}$. Luego, por el Corolario 4.61 de nuevo, tenemos que

$$\begin{aligned} d_S(n) &\leq \Phi({p_1}^{k_1}) + \Phi({p_2}^{k_2} \dots {p_m}^{k_m}) + 1 \\ &= \Phi({p_1}^{k_1}{p_2}^{k_2} \dots {p_m}^{k_m}) + 1 \\ &= \Phi(2{p_1}^{k_1}{p_2}^{k_2} \dots {p_m}^{k_m}) + 1 \\ &= d(n). \end{aligned}$$

Por lo tanto son iguales. En conclusión, $d_S(n) = d(n)$ para todo $n \geq 3$. $\square$

En otras palabras, este teorema dice que la variedad compacta plana con grupo de holonomía $\mathbb{Z}_n$ de dimensión mínima puede ser elegida como una solvariedad.

Referencias

[1] L. Auslander, M. Kuranishi, On the holonomy group of locally Euclidean spaces, *Ann. of Math.* **65** (1957), 411–415.

[2] L. Auslander, Discrete uniform subgroups of solvable Lie groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **99** (1961), 398-–402.

[3] M. L. Barberis, I. Dotti, A. Fino, Hyper-Kähler quotients of solvable Lie groups, *J. Geom. Phys.* **56** (2006), 691–711.

[4] L. Bieberbach, Über die Bewegungsgruppen des n-dimensionalen euklidischen Raumes mit einem endlichen Fundamentalbereich, *Gött. Nachr.*(1910) 75–84.

[5] L. Bieberbach, Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume I, *Math. Ann.* **70** (1911), 297–336.

[6] L. Bieberbach, Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume II, *Math. Ann.* **72** (1912), 207–216.

[7] L. Bieberbach, Über die Minkowskische Reduktion der positiven quadratischen Formen und die endlichen Gruppen linearer ganzzahliger Substitutionen, *Gött. Nachr.* (1912), 207–216.

[8] C. Bock, On low-dimensional solvmanifolds, *Asian J. Math.* **20** (2016), 199–262.

[9] G. Bredon, *Topology and geometry*, Springer, New York, 1993.

[10] H. Brown, R. Bülow, J. Neubüser, H. Wondratschek, H. Zassenhaus, *Crystallographic groups of four-dimensional space*, Wiley, New York, 1978.

[11] E. Calabi, Closed locally Euclidean four-dimensional manifolds, *Bull. Amer. Math. Soc* **63** (1957), 135.

[12] L. Charlap, *Bieberbach groups and flat manifolds*, Springer, New York, 1986.

[13] C. Cid, T. Schulz, Computation of five- and six-dimensional Bieberbach groups, *Exp. Math.* **10** (2001), 109–115.

[14] J. H. Conway, J. P. Rossetti, Describing the platycosms, `arXiv:math/0311476 [math.DG]`

[15] M. do Carmo, *Riemannian geometry*, Birkhäuser, Boston, 1992.

[16] K. Dekimpe, M. Halenda, A. Szczepanski, Kähler flat manifolds, *J. Math. Soc. Japan* **61** (2009), 363–377.

[17] W. Hantzsche, H. Wendt, Dreidimensionale euklidische Raumformen, *Math. Ann.* **110** (1935), 593–611.

[18] G. Greiter, A simple proof for a theorem of Kronecker, *Amer. Math. Monthly* **9** (1978), 756–757.

[19] A. Hattori, Spectral sequence in the de Rham cohomology of fibre bundles, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo I* **8** (1960), 289–331.

[20] K. Hasegawa, A note on compact solvmanifolds with Kähler structures, *Osaka J. Math.* **43** (2006), 131–135.

[21] H. Hiller, Minimal dimension of flat manifolds with abelian holonomy, no publicado.

[22] H. Hiller, C. Sah, Holonomy of flat manifolds with $b_1 = 0$, *Q. J. Math.* **37** (1986), 177–187.

[23] A. Knapp, *Lie groups beyond an introduction*, Birkhäuser, Boston, 1996.

[24] J. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, Springer, New York, 2003.

[25] A. Malcev, On a class of homogeneous spaces, *Izv. Akad. Nauk. Armyan. SSSR Ser. Mat* **13** (1949), 201–212.

[26] J. Milnor, Curvatures of left invariant metrics on Lie groups, *Adv. Math.* **21** (1976), 293–329.

[27] A. Morgan, The classification of flat solvmanifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.* **239** (1978), 321–351.

[28] G. Mostow, Cohomology of topological groups and solvmanifolds, *Ann. of Math.* **73** (1961), 20–48.

[29] G. Mostow, Homogeneous spaces of finite invariant measure. *Ann. of Math.* **75** (1962), 17–37.

[30] K. Nomizu, *Lie groups and differential geometry*, The Math. Soc. of Japan, Tokyo, 1956.

[31] K. Nomizu, On the cohomology of compact homogeneous space of nilpotent Lie groups, *Ann. of Math.* **59** (1954), 531–538.

[32] M. Raghunathan, *Discrete subgroups of Lie groups*, Springer, Berlin, 1972.

[33] J. G. Ratcliffe, *Foundations of hyperbolic manifolds*, Springer, New York, 1994.

[34] A. Szczepanski, *Geometry of crystallographic groups*, World Scientific, Singapore, 2012.

[35] K. Tahara, On the finite subgroups of $\mathsf{GL}(3,\mathbb{Z})$, *Nagoya Math. J.* **41** (1971), 169–209.

[36] W. Thurston, Some simple examples of symplectic manifolds, *Proc. Amer. Math. Soc.* **55** (1976), 467–468.

[37] V. Varadarajan, *Lie groups, Lie algebras and their representations*, Springer, New York, 1984.

[38] F. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[39] J. Wolf, *Spaces of constant curvature*, McGraw-Hill, New York, 1967.

[40] Q. Yang, Conjugacy classes of torsion in $\mathsf{GL}_n(\mathbb{Z})$, *Electron. J. Linear Algebra* **30** (2015), 478–493.

[41] H. Zassenhaus, Über einen Algorithmus zur Bestimmung der Raumgruppen,*Comment. Math. Helv.* **21** (1948), 117–141.

Los abajo firmantes, miembros del tribunal de evaluación de tesis, damos fe que el presente ejemplar impreso, se corresponde con el aprobado por este Tribunal.