

Universidad Nacional de Córdoba

TRABAJO FINAL DE PRÁCTICAS DE ENSEÑANZA

Profesorado en Matemática

Autores: Josefina Panadeiro / Paula Natalí Rodríguez



*Pythagoras
569 a.c. - 475 a.c
Filósofo y matemático
griego considerado el primer
matemático puro.*



Universidad Nacional de Córdoba



FAMAF
Facultad de Matemática,
Astronomía, Física y
Computación

Exploración de la función exponencial e introducción al logaritmo

Autores:

Panadeiro, Josefina
Rodriguez, Paula Natalí

Equipo responsable de MyPE:

Dra. Cristina Esteley (responsable)
Prof. Asinari, Marianela
Prof. Coirini, Araceli
Prof. Dipierri, Iris
Prof. Mina, María
Lic. Smith, Silvina

Profesora Supervisora de Práctica:

Lic. Smith, Silvina

Carrera:

Profesorado en Matemática

Fecha:

22/11/2018



Fecha: 22/11/2018 Trabajo Final de Prácticas por Josefina Panadeiro y Paula N. Rodriguez

.Esta obra está bajo una [Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).

Clasificación:

97 Mathematical Education

97D Education and instruction in mathematics

Palabras Claves

Planificación. Práctica profesional. Función exponencial. Logaritmo. Trabajo colaborativo y/o cooperativo.

Resumen

En el presente informe se detalla el desarrollo de la planificación y de las prácticas profesionales realizadas por dos alumnas del Profesorado en Matemática, efectuadas en un quinto año de una escuela pública de gestión privada de la ciudad de Córdoba. A lo largo de este trabajo, se presentan características de la institución y de los cursos, la planificación realizada teniendo en cuenta estas particularidades, la propuesta presentada para las clases de matemática y su ejecución, la elaboración de instrumentos evaluativos y el análisis de los resultados obtenidos. Además incluye la presentación y reflexión de una problemática. A modo de cierre, se encuentran las reflexiones finales.

Abstract

The present report shows the development of the planning and professional practices completed by two mathematics' pre-service teachers, carried out in a fifth year of a public school of private management, in the city of Córdoba.

Throughout this work, we will present the characteristics of the institution and the courses, the planification made by taking into account these particularities, the proposal presented for the mathematics classes and their implementation, the elaboration of evaluative instruments and the analysis of the results obtained. The presentation and reflection of a problematic will be shown as well. Finally, and as a way of closure, you will find the final conclusions.

Índice

1. Introducción.....	3
1.1. La institución.....	3
1.1.1. Aulas.....	5
1.2. Cursos.....	7
1.2.1. Las clases.....	8
1.2.2. Las clases de matemática.....	8
2. Planificación, ejecución de las clases e instrumentos evaluativos.....	11
2.1. Programa anual de matemática.....	11
2.2. Elaboración de nuestra planificación y ejecución de la misma.....	13
2.2.1. Aspectos que consideramos para la elaboración de nuestra planificación.....	14
2.2.2. Objetivos generales.....	16
2.2.3. Cambios realizados en la planificación.....	16
2.3. Planificación y ejecución de nuestras clases.....	17
2.3.1. Primera clase.....	17
2.3.2. Segunda clase.....	21
2.3.3. Tercera clase.....	25
2.3.4. Cuarta clase.....	28
2.3.5. Quinta clase.....	32
2.3.6. Sexta clase.....	35
2.3.7. Séptima clase.....	37
2.3.8. Octava clase.....	40
2.4. Instrumentos evaluativos: resultados y análisis.....	44
2.4.1. Trabajos prácticos evaluativos.....	44
2.4.2. Evaluación individual.....	51
2.4.3. Análisis de los instrumentos de evaluación.....	56

2.5. Breves reflexiones sobre planificación, metodología de trabajo empleada e instrumentos evaluativos.....	56
3. El trabajo colaborativo y/o cooperativo en el aula: una problemática para analizar y reflexionar.....	58
3.1. Origen y planteo de la problemática.....	58
3.2. Hacia una perspectiva del trabajo colaborativo y cooperativo en situaciones de aprendizaje.....	59
3.3. Relacionando con las actividades propuestas.....	62
3.4. Acercándonos a una respuesta de la problemática.....	66
4. Reflexiones finales.....	68
5. Bibliografía.....	71
6. Anexo.....	73

1. Introducción

El presente trabajo es el resultado de nuestro período de prácticas profesionales docentes en una institución de nivel medio de la ciudad de Córdoba, Argentina. Dichas prácticas representan el cierre de la carrera de Profesorado en Matemática que ofrece la facultad y son, a la vez, el paso hacia la vida profesional.

El modo de trabajo se basó en la interacción continua y la labor conjunta con el par pedagógico, el docente del curso y la profesora supervisora.

Nuestro primer acercamiento a la institución se produjo a partir de una serie de observaciones de clases, una de ellas de jornada completa (todas las asignaturas del día) y las demás de matemática. Esto nos permitió apreciar el comportamiento y el modo de trabajo de docentes y alumnos en cada una de las disciplinas, lo cual se constituyó en un componente clave para nuestras prácticas profesionales y todo lo que ellas conllevan: planificación, adaptación y puesta en práctica de la misma, interacción con la institución, trabajo en equipo. Esta primera entrada en una institución educativa fue de gran ayuda para comenzar a desempeñarnos como docentes.

Posteriormente, llevamos a cabo una propuesta de enseñanza diseñada especialmente para el curso asignado, la cual tuvo una duración de cuatro semanas. Este informe da cuenta de lo acontecido durante ese período. También ofrece un análisis de una problemática, a la luz de la bibliografía especializada.

1.1. La institución

El colegio secundario donde realizamos nuestras observaciones se fundó en 1954 y está ubicado en el Barrio Alta Córdoba, Córdoba Capital.

En sus inicios la escuela tenía una marcada tendencia hacia las artes en general, como prolongación de jornada se disponía de clases de declamación y arte escénico, danzas clásicas, españolas y folklóricas, dibujo y pintura, inglés y francés.

Comenzó siendo mixto en el nivel primario y solo femenino en el nivel secundario. En el año 1990 ingresaron los primeros varones al nivel secundario.

Actualmente esta escuela posee Nivel Inicial, destinado a niños desde los 3 años, Nivel Primario y Nivel Secundario, que comprende el Ciclo Básico con 1°, 2° y 3° año y el Ciclo Orientado que corresponde a 4°, 5° y 6° año, con dos orientaciones que son Economía y Administración, y Humanidades y Ciencias Sociales.

La escolaridad es simple y asisten más de 1000 niños y jóvenes, distribuidos con un promedio de 35 alumnos por aula.

Los alumnos de todos los niveles deben asistir con uniforme: chomba, pantalón jogging y camperas o buzos. Todas estas prendas deben ser de los colores representativos de la institución y llevar el logo de la misma. Además, los estudiantes del nivel primario asisten todos con la misma mochila.

La escuela está edificada en tres plantas. Los diferentes pisos están conectados a través de escaleras ubicadas a ambos lados de la entrada; las escaleras que se encuentran a la derecha son utilizadas por los alumnos del nivel primario y las de la izquierda por los del nivel secundario. No posee ascensores.

La institución cuenta con diversos espacios:

- En planta baja: salón de usos múltiples (SUM), patio, biblioteca, laboratorio, gimnasio, kiosco, fotocopiadora, gabinete de computación, dirección y preceptoría general, sala de profesores, baños para alumnos distintos de los baños para los docentes, sala de artes, oficina de acompañamiento pedagógico (con función permanente en ambos turnos), aulas de secundario y jardín.

- En el primer piso: dirección y preceptoría del nivel primario, aulas y baños adecuados para niños de este nivel.

- En el segundo piso: dirección y preceptoría del nivel secundario y 4 aulas de este mismo nivel.

Algunos de los espacios institucionales que hemos mencionado ameritan una descripción detallada:

➔Biblioteca: está abierta y habilitada en el horario escolar para el uso de los estudiantes y profesores. Cuenta con un espacio reducido pero adecuado a la cantidad de personas que la frecuentan. En la parte central, posee dos mesas con sillas en donde los alumnos tienen su lugar para leer o estudiar. Además, hay una computadora de escritorio para el uso de docentes y estudiantes, como así también elementos de geometría y otros materiales como tijeras, cartulinas, plasticolas, etcétera, disponibles para usar en las clases. En el ingreso, hay un mostrador en el que se encuentra una persona, que está a cargo del lugar y también del registro del uso de los espacios y recursos comunes de la institución; el profesor que desee usar alguno de éstos deberá dirigirse con varios días de anticipación a la biblioteca y realizar el pedido correspondiente (en el caso que desee utilizar computadoras con algún programa

específico, deberá solicitar también que sea cargado en las máquinas para el día correspondiente).

→SUM: es un espacio mucho más amplio que el de las aulas, no posee bancos para los estudiantes, pero sí hay sillas y algunas gradas en la parte final del salón. También cuenta con una pizarra, un proyector y lo necesario para reproducir audio.

→Gimnasio: tiene una gran amplitud, en el cual entran dos canchas de Básquet. Es un lugar en donde además de educación física se realizan otro tipo de actividades, como actos, pues al ser un espacio de gran dimensión es apto para que permanezcan todos los miembros de la escuela.

→Gabinete de computación: cuenta con computadoras de escritorio con acceso a Internet.

→Laboratorio: contiene mesadas con piletas, utensilios y herramientas propios de este espacio.

→Patios: Uno exclusivo para nivel inicial y otro compartido entre el nivel primario y secundario, con un mástil en el centro (donde realizan la formación y el izado de bandera por la mañana). Los niveles primario y secundario tienen los recreos diagramados de tal modo que el acceso al patio se produce en momentos diferentes. Ambos patios son internos.

→Fotocopiadora: ofrece la venta de artículos de librería esenciales; también se otorga a los docentes la posibilidad de enviar por correo electrónico al joven que atiende la fotocopiadora aquello que necesite que tengan los alumnos y luego cada estudiante es responsable de retirarlo abonando el valor de la fotocopia.

→Sala de profesores: cuenta con una mesa, sillas, tazas, un microondas, una pava eléctrica, infusiones, etc. Además aquí se guardan las llaves para el uso del baño de profesores.

1.1.1. Aulas

Nuestras prácticas se llevaron a cabo en dos cursos: 5to año sección A, con orientación en Gestión y Administración y 5to año sección B, con orientación en Humanidades y Ciencias Sociales.

Las aulas correspondientes a estos cursos están ubicadas en el segundo piso del Colegio y se encuentran en buenas condiciones, conservando un ambiente limpio, propicio para el dictado de clases. Consideramos que su dimensión es pequeña en relación a la cantidad de

alumnos que asisten, ya que se deben sentar muy cerca unos de otros (el docente no puede caminar por el medio de las filas formadas por los bancos) y muy próximos a la pizarra (imposibilitando una buena visión de la misma). La Figura 1 y la Figura 2 proveen una vista esquemática de cada una de las aulas. Como se puede observar, cada aula posee dos calefactores (C) ubicados al costado de la pizarra a fibrón (P) y dos ventiladores (V), cada uno ubicado al fondo del aula. El escritorio del docente (E) está a un costado de la pizarra, frente a los alumnos. Las líneas rojas representan las ventanas, que ocupan toda una pared; en el aula de la sección A, estas dan a la calle y en la de la sección B, al patio. Por último, los rectángulos en blanco esquematizan la distribución de los bancos, los cuales son individuales y movibles (cabe destacar que en las figuras, no se representa la cantidad exacta de bancos de cada curso, ya que éstos se corresponden a la cantidad de alumnos que asisten ese día a clase).

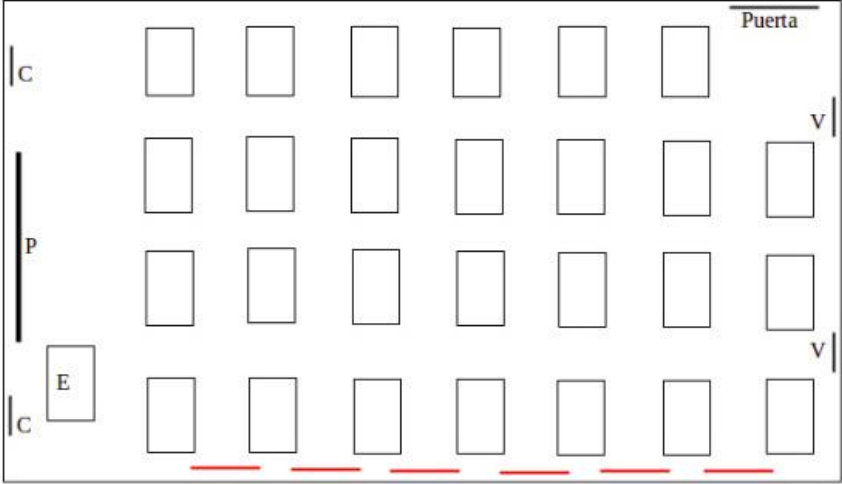


Figura 1: aula de 5to A

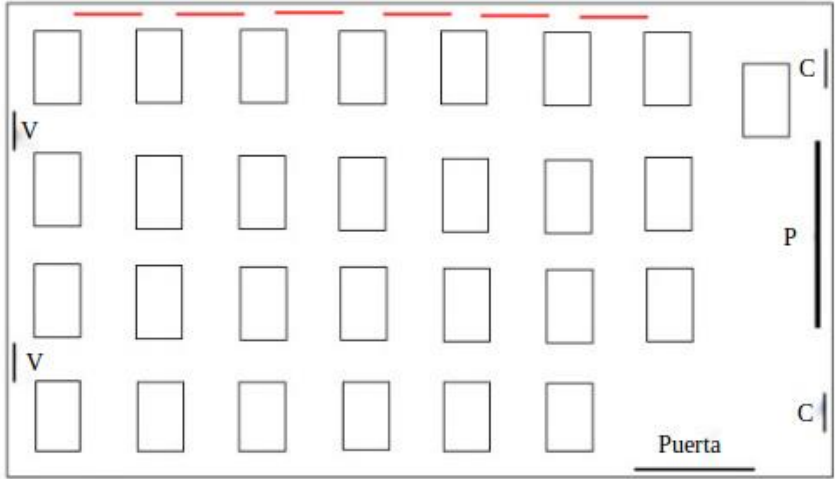


Figura 2: aula de 5to B

Además, estas aulas poseen un cesto de basura y en sus paredes se encuentra un calendario, afiches de la propia institución y otros creados por los alumnos en las diferentes asignaturas.

1.2. Cursos

A continuación presentamos dos tablas: la primera representa la cantidad de alumnos en cada curso (ver Tabla 1) y la segunda el horario de las clases de matemática (ver Tabla 2).

Curso	Cantidad de mujeres	Cantidad de varones	Total de alumnos
5to A	18	15	33
5to B	26	12	38

Tabla 1: cantidad de alumnos por curso.

Día/Horario	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
7:20 a 8:00	5to B				
8:00 a 8:40	5to B				
Recreo					
8:50 a 9:30					5to B
9:30 a 10:10					5to B
Recreo					
10:20 a 11:00			5to A		
11:00 a 11:40			5to A		
Recreo					
11:50 a 12:30		5to A			
12:30 a 13:10		5to A			

Tabla 2: horarios de las clases de matemática.

Como se puede observar en la Tabla 2, los recreos son otorgados cada 80 minutos (2 horas cátedra).

1.2.1. Las clases

Al comenzar la jornada escolar, la preceptora de los cursos es la encargada de tomar asistencia, nombrando a los estudiantes por su apellido en orden alfabético. Si algún alumno llega luego de esto, debe ir a preceptoría para avisar que está presente y si alguien se ausenta, la preceptora lo anota en un cuaderno, el cual permanece siempre en el aula junto al libro de temas, a disposición de todos los profesores.

Durante las observaciones de jornada completa, además de las clases de matemática presenciamos las de Economía, Geografía y Sistemas de Información Contable en 5to A y, Sociología e Historia en 5to B. Todas las clases que observamos transcurrieron en el aula respectiva de cada uno de los cursos. En cuanto a los materiales, utilizaron fotocopias o un libro de texto, el cual se pide a los alumnos al inicio del ciclo lectivo para trabajar durante todo el año. Podemos agregar que algunos docentes habilitan el uso del celular para trabajar con la calculadora del mismo o leer desde allí los archivos que no tengan en fotocopia.

Si bien la relación de los alumnos con todos los docentes es muy buena, de confianza, incluso dando lugar a chistes, notamos que constantemente se debe estar pidiendo silencio para poder escucharse mutuamente, ya sea entre compañeros o entre alumnos y el docente. Frente a esto, los profesores toman medidas como subir puntos en evaluaciones para quienes contesten preguntas o hagan ejercicios, propiciando de este modo la atención de los alumnos hacia la clase, o poner “signos menos”, restando puntos en la nota actitudinal a quienes dificulten el trabajo en clase.

Notamos en ambos cursos que varios de los alumnos trabajan constantemente y cuando se escribe en la pizarra, copian en sus carpetas lo escrito por su compañero o el docente; también participan en la clase y cumplen con la tarea, mientras que algunos otros (la minoría del curso) no están prestando atención y realizan actividades que no son propias de la materia.

Además, pudimos observar que los alumnos se ayudan entre ellos, por ejemplo comparando ejercicios y actividades, explicándose contenidos de distintas asignaturas, etcétera. Esto sucede no sólo durante el horario de clase, sino también en los recreos.

1.2.2. Las clases de matemática

Los contenidos desarrollados en las clases de matemática durante nuestras observaciones fueron el método de Gauss, la fórmula de Baskhara y los casos de factorización para encontrar las raíces de un polinomio y su correspondiente factorización.

El docente, al ingresar al aula, saluda, pide silencio y orden, y como introducción a la clase dedica aproximadamente 10 minutos para hacer un repaso de lo visto y trabajado anteriormente, generalmente haciéndoles preguntas a los alumnos, como por ejemplo: “¿Se acuerdan lo que vimos la clase pasada?”, “¿Qué dice Gauss?”, “¿En qué casos usamos Baskhara?”.

Luego de esto, comienzan a trabajar con ejercicios, por ejemplo, buscar las raíces de los siguientes polinomios:

$$p(x) = 4x^4 - 8x^2 + 4$$
$$q(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 16$$

Los alumnos trabajan con un cuadernillo de fotocopias, el cual es diseñado por el mismo docente. Este material de trabajo posee contenidos teóricos y prácticos, la mayoría de ellos extraídos del libro de Kaczor, F. (1999). *Matemática I*. Buenos Aires: Santillana.

En clases, siguiendo la teoría del cuadernillo, resuelven ejercicios en la pizarra. El profesor escribe un ejercicio en la pizarra y elige un estudiante para que pase a resolverlo, o bien acepta el ofrecimiento de algún alumno para pasar, siendo los que se ofrecen los que frecuentemente participan en las clases. Los demás compañeros, a medida que el alumno que está enfrente resuelve el ejercicio, lo ayudan con algunos comentarios si no se da cuenta de cómo avanzar, hacen preguntas al profesor o al mismo compañero que está escribiendo, comentan lo que piensan y se ayudan entre ellos. El docente generalmente se sienta al fondo del aula y en ciertos momentos que considera necesario, interrumpe para hacer preguntas, aclaraciones o corregir lo que el alumno va escribiendo en la pizarra.

Cuando terminan de resolver un ejercicio que permite realizar un gráfico, por ejemplo encontrar las raíces de un polinomio de segundo grado, hacen un dibujo aproximado de la función, ubicando las raíces en el eje de las abscisas, teniendo en cuenta el signo del coeficiente principal para saber hacia dónde apuntan las ramas de la parábola. Pudimos observar que los alumnos se sienten inseguros con respecto a la realización de gráficos, pero el profesor aclara que lo verán más adelante.

En una de las clases observadas, cuando los alumnos terminaron de buscar las raíces de un polinomio, uno de ellos preguntó: “¿Para qué nos sirve esto profe?”. Este episodio nos hizo reflexionar acerca de la importancia de darle sentido a la matemática en sus diferentes aplicaciones.

El docente, luego de una evaluación, se toma bastante tiempo para corregir, ya que no sólo se fija en los resultados obtenidos por los alumnos, sino en sus errores, analizando cuáles

son conceptuales y cuáles de distracción, haciendo así que la nota no se vea afectada por estos últimos.

El profesor concluye la clase haciendo un análisis de los ejercicios trabajados, y en caso que no se terminen de resolver todas las actividades presentadas, el docente las deja de tarea para los alumnos.

2. Planificación, ejecución de las clases e instrumentos evaluativos

2.1. Programa anual de matemática

El programa anual elaborado por el docente a cargo de la materia es el mismo para los dos cursos. En este se encuentran los objetivos que se esperan alcanzar y las capacidades principales que se pretenden desarrollar en los estudiantes, los contenidos a desarrollar, la bibliografía y la webgrafía de consulta.

Luego de analizar el programa, tuvimos en cuenta para nuestra planificación el siguiente objetivo propuesto por el docente: *emplear y resolver ejercicios con operaciones como la exponenciación y la logaritmicación y sus propiedades para resolver ecuaciones y problemas. Analizar el comportamiento de las variables exponenciales y logarítmicas e interpretar las gráficas y observar la interrelación entre las funciones exponenciales y logarítmicas*, el cual se relaciona fuertemente con los contenidos de la unidad que nos tocó enseñar.

Además, para la elección de las actividades respetamos las capacidades principales a desarrollar detalladas en el programa: 1) *Oralidad, lectura y escritura*. 2) *Abordaje y resolución de situaciones problemáticas*. 3) *Pensamiento crítico y creativo*. 4) *Trabajo en colaboración para aprender a relacionarse e interactuar*.

A continuación detallamos las 5 unidades descritas en el programa, las cuales incluyen los contenidos a desarrollar durante el año.

Unidad N°	Título	Contenidos
1	Función Polinómica I	Monomios. Función potencial. Función par e impar. Crecimiento y decrecimiento. Polinomios. Grado y características. Especialización de un polinomio. Operaciones con polinomios. Raíces de un polinomio. Teorema del Resto. Regla de Ruffini. Divisibilidad de polinomios. Teorema Fundamental del Álgebra.
2	Función Polinómica II	Polinomios expresados como producto: factor común, diferencia de cuadrados, factor común por grupos, trinomio cuadrado perfecto, y otros casos.

		Raíces de polinomios con coeficientes enteros. Teorema de Gauss. Polinomios primos. Factorización de polinomios. Raíz múltiple. Conjunto de positividad y negatividad. Teorema de Bolzano - Weierstrass. Gráficos.
3	Función Racional	Expresiones racionales. Operaciones con expresiones racionales. Ecuaciones e inecuaciones racionales. La función racional. Simplificación de expresiones racionales. Gráficos: intersección con el eje Y, ceros, asíntota vertical y horizontal.
4	Función Logarítmica	Logaritmación, operación inversa de la exponenciación. Propiedades de los logaritmos. Logaritmos decimales y naturales. Cambio de base. Antilogaritmo. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas. Análisis de las gráficas de las funciones.
5	Cónicas	Recta, elipse, circunferencia, parábola e hipérbola. Análisis de los parámetros de las funciones, rectas asíntóticas de la hipérbola, gráficos.

Tabla 3: Unidades y contenidos del programa anual.

En el transcurso de nuestras observaciones de clases en la institución, los cursos estaban culminando con la unidad 2 (ya habiendo trabajado con la unidad 1). El docente nos otorgó la posibilidad de elegir entre las unidades 3 y 4 para realizar nuestras prácticas, ya que no consideraba un factor importante en el aprendizaje el orden de estas unidades.

Nuestra elección fue la unidad 4 debido a que anteriormente, en clases de MyPE, analizamos y estudiamos estrategias de enseñanza-aprendizaje referidas al tema de esta unidad.

2.2. Elaboración de nuestra planificación y ejecución de la misma

Nuestras prácticas se llevaron a cabo en 18 clases que ocuparon un total de 36 horas cátedra. 8 de esas clases fueron dictadas en 5° A, 8 en 5° B y las clases número 9 de cada división fueron destinadas a la evaluación. Cada clase era de 80 minutos, no había recreos de por medio, pero sí antes de comenzar, lo cual nos quitaba unos minutos hasta que los alumnos ingresaban al aula y se organizaban para el comienzo efectivo de la clase.

En las observaciones de clases en la institución notamos que ambos cursos venían trabajando los mismos contenidos en la materia, por eso los temas a planificar y enseñar en nuestras prácticas fueron los mismos en 5° A y 5° B, como así también su secuenciación y la mayoría de las actividades a desarrollar. Como en el transcurso de las prácticas observamos algunas diferencias entre los cursos en cuanto a la disposición de los alumnos frente a la materia, decidimos modificar o agregar actividades en uno u otro curso, según lo que consideramos conveniente.

En la Tabla 4 se presenta nuestro primer cronograma, en el cual se establecen los contenidos, actividades, recursos y espacios a utilizar. Cabe destacar que el uso de estos últimos se comenzó a detallar en la primera planificación pues debíamos reservarlos con anticipación en el colegio para tenerlos a nuestra disposición el día que lo necesitáramos.

Semana	Contenidos	Actividades	Recursos y espacios
Primera semana	Introducción a la función exponencial y definición de la misma.	Actividades grupales con acercamiento experimental y práctico a la función exponencial.	Proyector, afiches, pizarra, lápiz, papel. A realizar en el SUM.
Segunda semana	Análisis del comportamiento del gráfico de la función. Definición de la función exponencial completa.	Actividades grupales con <i>GeoGebra</i> . Exposiciones orales y puestas en común de lo trabajado.	Netbooks con <i>GeoGebra</i> , pizarra, lápiz, papel. A realizar en el aula.
Tercera semana	Construcción de la función exponencial y análisis de	Entrega de un TP evaluable para realizar en la casa.	Pizarra, lápiz, papel. A realizar en el aula.

	situaciones problemáticas.	Actividades prácticas	
Cuarta semana	Introducción al logaritmo, definición del mismo y construcción y definición de propiedades.	Actividades que demanden la necesidad de la definición de una nueva función: logaritmo.	Pizarra, lápiz y papel. Rompecabezas logarítmico. A realizar en la sala de artes.
Quinta semana	Integración de los contenidos vistos las semanas anteriores.	Toma de evaluaciones y entrega de las mismas.	Pizarra, lápiz, papel. A realizar en el aula.

Tabla 4: nuestra primera planificación organizada en semanas.

Antes de comenzar las prácticas, ampliamos este primer cronograma escribiendo la planificación de cada clase en forma de guion conjetural¹. Produjimos un total de 8 guiones conjeturales, los cuales fueron controlados, antes y durante las prácticas, por nuestra profesora supervisora, como así también por el profesor a cargo de los cursos. La realización de dichos guiones nos resultó de gran ayuda, ya que en ellos describimos la manera de llevar a cabo las clases, actividades, formas de trabajo, supuestos interrogantes de los alumnos y nuestra forma de responder o accionar hacia los mismos. Nos permitió prevenir errores, ayudarnos a organizar el aula, el pizarrón, los recursos y el tiempo con el que contábamos. También ponernos en el lugar de los alumnos y entender sus necesidades y respuestas, tener claros los objetivos de cada clase, entre otras.

En anexo se encuentra, a modo de ejemplo, el guion conjetural correspondiente a nuestra primera clase.

2.2.1. Aspectos que consideramos para la elaboración de nuestra planificación

Para la elección y secuenciación de los contenidos a enseñar y la búsqueda de actividades a realizar tuvimos en cuenta:

- Tiempo: este factor influyó en la elección del contenido, ya que disponíamos de 5 semanas para desarrollar una unidad que pensábamos que requería un tiempo superior a este

¹ La noción de guion conjetural se puede consultar en el texto de Bombini, G. (2002)⁹.

para ser estudiada y aprendida con profundidad. Por esto el docente a cargo del curso nos sugirió planificar solo la primera parte de la unidad, adecuándonos a los días con los que contábamos, sin la necesidad de culminarla. Al terminar las prácticas, él continuaría trabajando con los contenidos restantes.

- Dependencia entre los contenidos: teniendo en cuenta lo que expresan Gvirtz y Palamidessi (2008), “[...] para entender un concepto se deberá haber entendido el concepto inmediato anterior en la cadena lógica.” (p.192) y después de analizar el programa anual en donde el logaritmo es presentado como la operación inversa a la exponenciación, decidimos comenzar estudiando la función exponencial, sus gráficos y situaciones problemáticas que contemplen este tipo de funciones, abarcando luego la resolución de ecuaciones exponenciales para introducir el logaritmo, destacando aquí la necesidad de conocer y manipular ambos conceptos (exponenciación y logaritmicación) para aprenderlos con totalidad.

- Espacios y recursos: para la elaboración de las actividades a realizar decidimos aprovechar los espacios y recursos con los que contaba la institución, como el SUM y la sala de artes, que ofrecían un lugar más amplio que el aula para la distribución de los alumnos en las tareas pensadas para trabajar en grupos. También utilizamos las netbooks para analizar funciones y realizar gráficos y el proyector para presentar un breve video. La decisión de hacer uso de estos recursos se debió a que consideramos importante introducir recursos tecnológicos en el aprendizaje de la matemática, pues como plantea Rojano (2014):

Los estudiantes pueden físicamente tocar y manipular representaciones de objetos matemáticos, lo cual permite una interacción directa entre el sujeto y el objeto de conocimiento. [...]

Este tipo de interacción tan directa con el objeto de conocimiento hace suponer que el trabajo con estos materiales tendrá repercusiones en el nivel cognitivo y epistemológico, es decir, en la forma en que los estudiantes construyen el conocimiento matemático. (p.24)

- Formas de trabajo: al decidir realizar actividades con las computadoras tuvimos en cuenta que la cantidad de unidades de este recurso con que contaba la escuela era menor que la cantidad de alumnos en cada curso, por lo cual pensamos en actividades grupales para los días que hiciéramos uso de ellas. De igual manera, tomamos esta decisión al trabajar con otros recursos y materiales. Además consideramos que las tareas grupales ayudan en la construcción del conocimiento matemático dando lugar al intercambio de ideas, al trabajo colaborativo y cooperativo, como así también a aprender a relacionarse e interactuar.

2.2.2. Objetivos generales

Para la ejecución de nuestras prácticas nos planteamos los siguientes objetivos:

- Despertar el interés de los alumnos a través de las actividades propuestas.
- Utilizar recursos tecnológicos, como así también otros que permitan un acercamiento experimental al contenido a trabajar en clase.
- Llevar a cabo actividades que posibiliten el análisis y la reflexión de las mismas.
- Presentar situaciones en las que los alumnos encuentren relación entre el mundo real y el matemático.
- Transitar por los distintos ambientes de aprendizaje que plantea Skovmose (2000): Actividades en forma de Paradigma del ejercicio o Escenarios de investigación, haciendo referencia a matemáticas puras, semirrealidad o situaciones de la vida real.
- Lograr la interacción y participación de todos los alumnos en las clases.
- Motivar el uso apropiado de la notación matemática, pues como afirma Polya (1989):

La elección de la notación constituye una etapa importante en la solución de un problema. Debe elegirse con cuidado. El tiempo que se consagre a la elección de una notación será largamente compensado por el que ganaremos más tarde al evitar cualquier duda y cualquier confusión. (p.129)

- Ejecutar actividades que involucren el análisis de datos y, a partir de ellos, la solución de problemáticas, como así también la producción de enunciados.
- Conseguir que los alumnos puedan construir un sentido para la matemática con las actividades realizadas. Según Sadovsky (2005): “Hay que construir un sentido, no es natural. [...] Hablar de sentido es hablar de lograr un modo de trabajo más satisfactorio, más placentero [...]” (pp. 10-11)

2.2.3. Cambios realizados en la planificación

Nuestro primer cronograma de planificación, detallado en la Tabla 4, no sufrió demasiadas modificaciones durante nuestras prácticas. Las diferencias entre dicha planificación y la que llevamos a cabo fueron:

- Los tiempos de ejecución: los alumnos dedicaron a la realización de algunas actividades más o menos tiempo del que habíamos estipulado para las mismas y como consecuencia de esto agregamos actividades o dejamos de lado algunas otras.

- Destinar la clase anterior a la evaluación a realizar una actividad de repaso para recordar e integrar todos los contenidos analizados durante las prácticas.

- Dedicarle más clases al estudio de la función exponencial, lo que causó que solo pudiésemos trabajar con la definición de logaritmo (como función inversa a la exponencial) y la introducción de algunas de sus propiedades, sin poder ejercitar las mismas.

2.3 Planificación y ejecución de nuestras clases

A continuación relataremos la puesta en práctica de cada una de las clases efectivamente dictadas en ambas divisiones. En dicho relato se determinan los momentos de cada clase: introducción, desarrollo y cierre. Se detallan también las actividades, recursos, espacios utilizados, los objetivos que nos planteamos para cada una de las clases y los aspectos más relevantes en relación a las interacciones alumno-alumno y docente-alumno.

Al final de cada relato se realiza una comparación entre lo sucedido en la clase y el guion conjetural correspondiente a la misma, sólo en el caso de que estos hayan sido distintos.

2.3.1. Primera clase

Objetivos:

- Crear un buen clima de trabajo para una actividad de tipo exploratoria en un espacio extra-áulico.

- Enseñar la importancia del trabajo en equipo, haciendo involucrar a todos los estudiantes en las actividades grupales.

- Acercar a los alumnos práctica y experimentalmente a la función exponencial.

- Lograr que los estudiantes descubran el crecimiento exponencial a través de la búsqueda de regularidades.

- Ayudar a los alumnos a entender la definición de función exponencial realizando un análisis para todos los posibles valores que puede tomar la base.

Introducción:

Al comenzar la primera clase, les recordamos a los alumnos nuestros nombres (pues ya nos habíamos presentado al hacer las observaciones) y también les comentamos que íbamos a ser sus profesoras aproximadamente durante un mes. Les pedimos a los estudiantes que se presentaran y a medida que lo hacían, una de nosotras, anotando en la pizarra, fue formando ocho grupos al azar, pero tratando de que los alumnos no quedaran en el mismo equipo que su compañero de al lado o del frente, ya que habíamos observado que tendían a agruparse de esa manera y teníamos la intención de promover un cambio al respecto.

Finalizadas las presentaciones, en el caso de 5°B, nos trasladamos hacia el SUM (cada alumno llevó lápiz y papel). Para el otro curso, 5°A, dicho espacio no estuvo disponible, y por ello realizamos la clase en el aula.

Una vez ubicados y armados los grupos, hicimos a los alumnos la siguiente pregunta en forma oral: “¿En qué bolsillo se guardarían un papel doblado 20 veces por la mitad?”

Ante este interrogante, hubo una variedad de respuestas por parte de los estudiantes: algunos respondieron que se lo guardarían en el bolsillo del pantalón o de la campera, otros dijeron que no iban a poder guardarlo ya que el tamaño sería muy grande, incluso algunos manifestaron que no iban a poder doblar 20 veces un papel o que iba a depender del tipo de papel con el que se trabaje, entre otras. Luego de escuchar sus respuestas, les informamos que la actividad que haríamos en esta clase nos ayudaría a responder esa pregunta.

Desarrollo:

Entregamos a cada grupo un cuarto de papel afiche y una fotocopia con el siguiente contenido:

Actividad: Comiencen a doblar el afiche por la mitad y repitan este paso las veces que sea necesario hasta completar la siguiente tabla:

Cantidad de veces que doblo el papel	Cantidad de capas de papel obtenidas
1	
2	
3	
4	
5	
6	

¿Cuántas capas de papel quedarán luego de doblar 20 veces el afiche? ¿Entrará entonces en el bolsillo que eligieron el papel así doblado?

Recomendación: Escriban el análisis que realizaron para responder la pregunta y completar la tabla, ya que realizaremos una puesta en común.

Con esta actividad queríamos acercar a los alumnos a la función exponencial $f(x) = 2^x$, ya que dicha función describe la cantidad de capas de papel en relación a la cantidad de veces que se dobla el mismo. La tabla nos pareció una buena herramienta para visualizar los datos y que a partir de ellos, los alumnos puedan encontrar una regularidad y llegar a la función deseada para poder responder a la pregunta de la actividad, ya que por una imposibilidad física del material, no iban a poder doblar 20 veces el afiche.

Los alumnos comenzaron a trabajar en grupos, doblando el papel y completando la tabla. Esta actividad exploratoria despertó interés en los alumnos haciendo que todos se involucraran en ella. En general no presentaron demasiadas dudas y la mayoría de los alumnos pudo encontrar la regularidad y la función que se esperaba para contestar la pregunta.

Cuando los estudiantes finalizaron la actividad, se corrigió en la pizarra. Dos estudiantes pasaron al frente, uno de ellos completó la tabla y el otro respondió a la pregunta. La resolución de ambos fue correcta. Luego de esto preguntamos a todos los alumnos cómo habían hecho para llegar a las respuestas y ellos nos comentaron sus métodos: para el llenado de la tabla, todos los grupos usaron el afiche, lo manipularon y contaron las capas, más allá de haberse dado cuenta que existía una regularidad (la cantidad de capas se duplicaba a medida que se doblaba el papel); en cambio, para responder la pregunta, algunos manifestaron haber encontrado la función (2^x) y haber reemplazado la variable x por 20. Otros alumnos usaron recursivamente el método de multiplicar por dos la cantidad de capas que habían obtenido en el doblar anterior hasta llegar a 20 dobleces. Sin encontrar la función, obtuvieron también el resultado correcto.

Por otra parte, hubo algunos grupos que calcularon la cantidad de capas al doblar 10 veces el papel y luego multiplicaron dicho resultado por 2. Al ver la resolución de sus compañeros, se dieron cuenta de que este crecimiento no era lineal y que la cantidad de capas era mucho mayor a la que habían calculado, poniendo en evidencia que el trabajo exploratorio grupal con posterior puesta en común contribuyó a la atribución de sentido, por parte de los estudiantes, de las conclusiones obtenidas.

Finalizada la verificación de la actividad mostramos un video², en el cual se dimensiona la altura que alcanzan las capas superpuestas de un papel luego de haberlo doblado 20 o 50 veces, haciendo una relación con la altura de la Estatua de la Libertad, la distancia de la Tierra a la Luna, etc. A partir de este video los alumnos, además de sorprenderse, tomaron conciencia de la velocidad de crecimiento de la función exponencial.

Luego de esto escribimos en la pizarra la primera definición de función exponencial y pedimos a los estudiantes que la copiaran en sus carpetas:

Definición: Dado $a > 0$ y $a \neq 1$, llamamos función exponencial de base a a la función definida por

$$f(x) = a^x$$

A partir de este momento, en los dos cursos se utilizaron distintas metodologías de trabajo. El cambio obrado en el segundo curso en el cual realizamos la actividad (5°A) se gestó en base a lo sucedido en el primer curso (5°B), poniendo de manifiesto lo que expresa Bombini (2002):

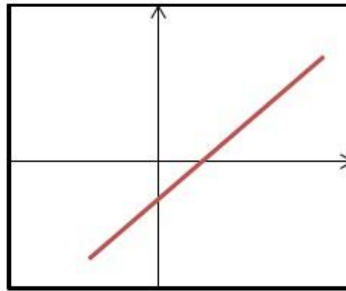
[...] el guión nunca termina de construirse, aun después de haberse llevado a la práctica concreta del aula. Quizás por eso su clave es que no es infalible: la práctica puede corroborarlo o desdecirlo, total o parcialmente; pero lo que es seguro, siempre lo modificará. (p. 6)

En 5°B se les pidió a los alumnos que pensarán y reflexionaran con sus compañeros de grupo por qué en la definición de función exponencial la base no podía ser 0, 1 o un número negativo. Esta modalidad abierta de trabajo, sin consignas específicas, determinó que el análisis se realizara demasiado rápido, obviando en algunos casos situaciones particulares que merecían ser tenidas en cuenta. Es por esto que al llevar a cabo la actividad en 5°A decidimos entregar a cada grupo una de las siguientes preguntas:

- a) ¿Por qué en la definición de función exponencial no puede pasar que a sea igual a 0?
- b) ¿Por qué en la definición de función exponencial no puede ser que a sea igual a 1?
- c) Analicen el caso en que $f(x) = (-1)^x$.
- d) Analicen el caso en que $f(x) = (k)^{\frac{1}{2}}$, con k un número real negativo.
- e) Analicen el caso en que $f(0) = 0^0$.

² Disponible en <https://www.youtube.com/watch?v=25HUYfYnpqW> (a partir del segundo 27).

f) ¿Podría el siguiente gráfico representar una función exponencial?



Con estas actividades logramos que los alumnos discutieran entre ellos y llegaran a conclusiones como:

- Si la base de la función exponencial fuera 1, la función sería constante.
- Si la base de la función exponencial fuera un número negativo, la función sería alternada, o no tendría solución en los números reales.
- Considerando que la base de la función exponencial fuera 0, si lo elevamos al exponente 0 llegaríamos a un indefinido, y si lo elevamos a cualquier otro exponente sería una constante.
- El crecimiento de una función exponencial es totalmente diferente al de una función lineal.

Si bien las metodologías de trabajo empleadas en ambos cursos fueron diferentes, todos pudieron llegar a las conclusiones antes mencionadas a través de los debates entre compañeros, de la ayuda docente y de la puesta en común.

Cierre:

Al finalizar esta clase, recogimos los materiales, ordenamos el aula y anunciamos a los alumnos que la siguiente clase íbamos a trabajar con netbooks.

2.3.2. Segunda clase

Objetivos:

- Generar curiosidad e interés en los alumnos a partir de actividades con las computadoras que requieran el uso del programa *GeoGebra*.
- Acercar a los estudiantes al comportamiento de la función exponencial a través del análisis de su gráfica.

- Lograr que los alumnos interactúen entre ellos y generen conclusiones a partir de los gráficos realizados en las computadoras.

Introducción:

Se realizó un breve repaso de la clase anterior, primero de manera oral y luego la docente fue recuperando lo expresado oralmente por los alumnos, escribiendo en la pizarra la definición de función exponencial.

A continuación, repartimos las computadoras a los estudiantes, una cada dos de ellos (ya que iban a trabajar de a pares), les pedimos que ingresaran a *GeoGebra* y una vez que todos tuvieron acceso al programa, escribimos en la pizarra las funciones básicas del mismo que íbamos a necesitar para la resolución de la actividad.

Desarrollo:

Entregamos a cada alumno una fotocopia con la siguiente actividad:

Dibuje en *GeoGebra* las siguientes funciones:

$$f(x) = 3^x \quad g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x \quad h(x) = 2^x \quad t(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Asígnele un color distinto a cada una de ellas y complete:

a) La función $f(x)$ corta al eje de las ordenadas en el punto (..... ;)

La función $g(x)$ corta al eje de las ordenadas en el punto (..... ;)

La función $h(x)$ corta al eje de las ordenadas en el punto (..... ;)

La función $t(x)$ corta al eje de las ordenadas en el punto (..... ;)

b) ¿Alguna de las funciones corta al eje de las abscisas?

c) ¿Cuál es el conjunto imagen de las funciones?

d) Mencione las funciones crecientes:

e) Mencione las funciones decrecientes:

Con esta actividad se buscaba, en primer lugar, que los alumnos conocieran un programa que facilitaría la observación y el análisis de las gráficas de las funciones. Además, queríamos lograr que los alumnos desarrollaran la capacidad de generar conclusiones, a partir de esas gráficas, sobre el punto de corte de las funciones con el eje de las ordenadas, el conjunto imagen de las mismas y la caracterización de cada función como creciente o decreciente.

Todos los alumnos se pusieron a graficar en sus computadoras y mientras tanto nosotras íbamos recorriendo el aula, observando cómo trabajaban y respondiendo dudas que en su mayoría fueron sobre el uso del programa. Era la primera vez que los alumnos trabajaban con *GeoGebra* pero esto no significó una dificultad para la realización de la tarea, sino que les permitió experimentar nuevas formas de trabajo e incorporar una visión más amplia de los conceptos. Como expresa Villarreal (2013):

Al trabajar en un ambiente computacional con abordajes no tradicionales, con el planteo de problemas más abiertos que admiten diversas estrategias para su resolución, con intervenciones del profesor como guía y auxilio y dejando que los estudiantes sigan sus propios caminos de exploración, dos procesos son favorecidos: la visualización y la experimentación. (p. 109)

Si bien en nuestro caso las actividades planteadas eran de naturaleza cerrada, las palabras de la autora se ajustan a lo que sucedió en nuestras aulas.

En esta clase notamos que algunos alumnos no recordaban con claridad los nombres de los ejes, qué era el conjunto imagen de una función y cuándo las funciones eran crecientes o decrecientes. Los interrogantes de cada grupo acerca de las cuestiones mencionadas fueron contestados de manera particular. Cuando los alumnos culminaron con la actividad, la corregimos todos juntos de la siguiente manera:

En el inciso a) se llegó a la conclusión de que todas las funciones intersecaban al eje de las ordenadas en el punto (0,1), dejando en claro por qué sucede esto, escribiendo en la pizarra:

$$a \neq 0$$
$$x = 0 \text{ entonces, } f(0) = a^0 = 1$$

En el inciso b), la respuesta obtenida fue que ninguna de las funciones cortaba al eje de las abscisas. Para la verificación de esta conclusión se utilizaron dos métodos. Uno de ellos consistió en hacerle zoom a la función graficada en *GeoGebra* y notar que nunca cortaba al eje x . Si bien este método es poco formal, contribuyó a que los alumnos pudiesen tomar conciencia del comportamiento asintótico de la función. Por otro lado, se les pidió que ingresaran en la calculadora funciones exponenciales con una base mayor que uno y le otorgaran a x valores cada vez más grandes (noción de tendencia a ∞). Con esto vimos que, a

medida que aumentábamos el valor del exponente, el resultado daba un número cada vez más cerca de 0. Del mismo modo procedimos con funciones exponenciales con base entre cero y uno, asignando en este caso a x valores cada vez más chicos (noción de tendencia a $-\infty$). Les comentamos que si en algún caso la calculadora les daba como resultado 0, era porque el número tenía más ceros después de la coma que la cantidad de dígitos decimales que puede representar la calculadora. Finalmente, institucionalizamos la conclusión: el gráfico de una función exponencial no corta al eje de las abscisas.

En el inciso c) las respuestas de los alumnos fueron variadas, no sólo por las diversas maneras en que se puede escribir el conjunto imagen de las funciones sino también porque comenzaron a aparecer errores en las respuestas.

Las respuestas correctas por parte de los alumnos fueron:

- $(0, \infty)$
- Los reales positivos
- $R > 0$

Las respuestas incorrectas:

- $[0, \infty)$
- $[1, \infty)$
- $[0, \infty]$

Para estas últimas se hizo un análisis del error de cada una de ellas, asegurándonos de que quedara en claro por qué no definían el conjunto imagen de las funciones.

Por ejemplo, para la primera respuesta se hizo una relación con el inciso b): dado que en ese inciso habíamos respondido que ninguna función cortaba al eje de las abscisas, no era posible que alguna de ellas tomara el valor 0.

Para analizar la segunda respuesta incorrecta preguntamos si $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$, entre otros, pertenecían o no a la imagen de las funciones. Con esto logramos que los alumnos se dieran cuenta de que estaban dejando fuera del conjunto imagen los números entre 0 y 1.

En el caso de la última respuesta incorrecta, además de observar que el 0 no estaba incluido en la imagen por lo analizado anteriormente, hicimos notar a los alumnos que utilizar corchete en el infinito constituye un error de notación, ya que el corchete se usa para valores que pueden alcanzarse y el infinito no cumple esta condición.

Los incisos d) y e) se corrigieron de forma conjunta. Todos los grupos tuvieron errores, por lo que se les pidió a los alumnos que recordaran cuándo una función es creciente y cuándo

decreciente. Con ayuda de la docente, llegaron a las conclusiones correctas y quedó escrito en la pizarra:

Función creciente: a mayor valor de x , mayor valor de y

Función decreciente: a mayor valor de x , menor valor de y

Cierre:

Para finalizar la clase, luego de corregir las respuestas de la actividad, dejamos la resolución escrita correctamente en la pizarra, pedimos a los alumnos que corroboraran con lo que habían escrito en sus fotocopias y que corrigieran si fuese necesario.

Con la actividad de esta clase, queríamos llegar a conclusiones que serán detalladas en la introducción del apartado 2.3.3., ya que por falta de tiempo no se logró hacer el análisis este día.

2.3.3. Tercera clase

Objetivos:

- Recuperar los conocimientos adquiridos sobre el comportamiento de la función exponencial.
- Introducir a los alumnos a la definición de función exponencial completa (es decir, $f(x) = ka^{x+b} + c$), a través del uso de *GeoGebra*.
- Potenciar el análisis, la reflexión y la escritura de conjeturas matemáticas.
- Fomentar la interacción entre los alumnos.
- Lograr que los estudiantes construyan sus propias conclusiones con una mínima intervención de las docentes.

Introducción:

Se realizó un repaso de funciones crecientes y decrecientes. Seguido de esto, analizamos nuevamente los incisos d) y e) de la actividad de la clase anterior, haciendo la siguiente tabla en la pizarra:

Funciones crecientes	Funciones decrecientes
3^x	$\left(\frac{1}{3}\right)^x$
2^x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$

Preguntamos a los alumnos qué relación encontraban entre la base de las funciones y su caracterización como crecientes o decrecientes. Rápidamente contestaron: “cuando la base es un número entero la función es creciente y cuando la base es una fracción la función decrece”.

Nos detuvimos en la frase “cuando la base es una fracción la función decrece” y propusimos la función $\left(\frac{4}{3}\right)^x$ como ejemplo para ver qué sucedía. Primero hicimos

$$\left(\frac{4}{3}\right)^1 = \frac{4}{3}$$

Luego aumentamos el valor de x a dos y resolvimos

$$\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$$

Finalmente volvimos a aumentar el valor de x a 3 e hicimos

$$\left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}$$

Con esto, notamos que a medida que el valor de x aumentaba, el resultado (valor de y) también aumentaba, es decir, la función $\left(\frac{4}{3}\right)^x$ tiene como base una fracción pero es creciente. Así, quedó establecido que lo que determina que la función sea creciente o decreciente no es el hecho de ser la base una fracción. Nuevamente, el trabajo colectivo permitió que los alumnos atribuyeran sentido a las nociones.

Con todo el análisis realizado se llegó a la conclusión que cuando la base es mayor que 1 la función crece y cuando está entre 0 y 1, decrece.

Luego de que todos estuvieron de acuerdo y convencidos de lo concluido anteriormente, se procedió a escribir en la pizarra:

Conclusiones:

- Cuando $a > 1$, $f(x) = a^x$ es una función creciente.
- Cuando $0 < a < 1$, $f(x) = a^x$ es una función decreciente.

Desarrollo:

Se les entregó a los alumnos una computadora cada dos y la siguiente actividad:

Elijan un valor de a que pueda ser base de una función exponencial y grafiquen la función $f(x) = a^x$. Luego, manteniendo fijo el valor de a elegido, realicen lo siguiente:

a) Sumen una constante c a la función anterior, es decir, consideren la función $g(x) = a^x + c$. Comparen el gráfico de $f(x)$ con el de $g(x)$ para distintos valores de c . Escriban sus conclusiones en la carpeta.

b) Sumen una constante b en el exponente de la función $f(x) = a^x$, es decir, consideren la función $h(x) = a^{x+b}$. Analicen qué pasa con el gráfico de $h(x)$, comparado con el de $f(x)$, a medida que cambia el valor de b . Escriban sus conclusiones en la carpeta.

c) Multipliquen la función $f(x) = a^x$ por una constante k , es decir, consideren la función $t(x) = k \cdot a^x$. Analicen qué sucede con el gráfico de la función $t(x)$, comparado con el de $f(x)$, otorgándole distintos valores a la constante k . Escriban sus conclusiones en la carpeta.

Con esta actividad se pretendía introducir la definición de función exponencial completa y también que los alumnos elaboraran conclusiones acerca del comportamiento y las gráficas de este tipo de funciones a través del análisis de los distintos parámetros de la función.

Los parámetros c , b y k elegidos por los grupos eran generalmente positivos, por lo cual en la mayoría de los grupos fue necesario sugerir que consideraran también parámetros negativos.

La puesta en común de la actividad produjo las siguientes conclusiones:

- El gráfico de la función $g(x) = a^x + c$ se corre para arriba o para abajo con respecto al gráfico de $f(x) = a^x$.
- El punto de corte en el eje de las ordenadas ya no es $(0,1)$.
- El gráfico de $g(x) = a^x + c$ se corre para arriba si c es positivo y para abajo si c es negativo.

A partir de estas intervenciones de los alumnos, la docente gestionó la clase con la finalidad de formalizar y precisar las ideas. Así, por ejemplo, lograron afirmar que la función se desplazaba sobre el eje de las ordenadas y este desplazamiento era hacia arriba si c era positivo y hacia abajo si c era negativo.

Para concluir que el punto de corte de la función $g(x) = a^x + c$ con el eje de las ordenadas era $(0, 1 + c)$, se hizo notar que x debía tomar el valor 0 y se escribió en la pizarra:

$$\text{Si } x = 0, \text{ entonces } g(0) = a^0 + c = 1 + c$$

Cierre:

Comunicamos a los alumnos que los demás incisos de la actividad serían analizados la clase siguiente. Les informamos que la próxima semana les entregaríamos un trabajo práctico evaluativo domiciliario, a realizar de a pares, el cual aportaría dos de los diez puntos de la evaluación individual. Les pedimos que para la próxima clase tuvieran decididos los grupos.

La tercera clase tuvo lugar primero en 5°B y al finalizar nos dimos cuenta que trabajando con las computadoras, no quedó registro sobre los gráficos que habían realizado los alumnos en *GeoGebra*, por lo que al curso 5°A se le pidió que a medida que fueran graficando en la computadora, lo hicieran también en la carpeta o le sacaran fotos a los gráficos para tener un registro de ellos. La decisión en relación al modo de paliar la falta de registros en 5°B será detallada en el apartado 2.3.5.

2.3.4. Cuarta Clase

Objetivos:

- Recuperar los conocimientos adquiridos sobre el comportamiento de la función exponencial.
- Potenciar el análisis, la reflexión y la escritura de conjeturas matemáticas.
- Fomentar la interacción entre los alumnos.
- Lograr que los estudiantes elaboren sus propias conclusiones.
- Acercar a los alumnos a la práctica y ejercitación de problemáticas que contemplen funciones exponenciales completas.

Introducción

Comenzamos esta clase formalizando en la pizarra las conclusiones obtenidas la clase anterior: El gráfico de la función $g(x) = a^x + c$ es un desplazamiento del gráfico de la función $f(x) = a^x$ sobre el eje de las ordenadas.

Si $c > 0$ este desplazamiento será hacia arriba, si $c < 0$, será hacia abajo. En ambos casos, la cantidad que se desplaza el gráfico es igual al valor absoluto de c .

Si $c = 0$ no habrá modificaciones en el gráfico de la función.

Los alumnos copiaron esta conclusión en sus carpetas para ampliar y formalizar la que ellos habían escrito anteriormente.

Desarrollo

Se comenzó con el análisis del ítem b) de la actividad de la clase anterior, lo cual nos resultó un poco difícil, pues en esta clase no contábamos con las netbooks. Con el aporte de todos logramos determinar el punto de corte de la función $h(x) = a^{x+b}$ con el eje de las ordenadas, reemplazando $x = 0$ en la función, lo que nos dio por resultado a^b . También pudimos concluir, con ayuda de gráficos cualitativos que realizó la docente en la pizarra, que el efecto del parámetro b era un desplazamiento en el eje de las abscisas (ver figura 3) y que la cantidad que se desplazaba estaba dada por el valor absoluto de b .

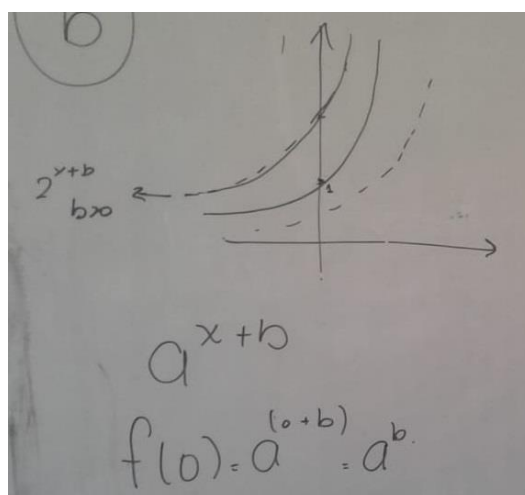


Figura 3: Efecto del parámetro b en la función $h(x) = a^{x+b}$

Al terminar con el análisis de este punto se les dictó a los alumnos la siguiente conclusión:

El gráfico de la función $h(x) = a^{x+b}$ es un desplazamiento del gráfico de la función $f(x) = a^x$ sobre el eje de las abscisas.

Si $b > 0$ este desplazamiento será hacia la izquierda, si $b < 0$ será hacia la derecha. En ambos casos, la cantidad que se desplaza es igual al valor absoluto de b .

Si $b = 0$ no habrá modificaciones en el gráfico de la función.

Del mismo modo, se analizó de forma oral el ítem c), trabajando ahora con la función $t(x) = k \cdot a^x$, sólo para el caso en el que la base es mayor que uno, ya que ningún alumno había elegido una base entre 0 y 1. Luego de la puesta en común y la realización de gráficos cualitativos en la pizarra, se dictó la siguiente conclusión:

Caso $a > 1$:

Cuando $k > 0$:

- Si $k > 1$, el gráfico se desplaza hacia la izquierda.
- Si $k < 1$, el gráfico se desplaza hacia la derecha.

Cuando $k < 0$:

- Si $k < -1$, el gráfico se desplaza hacia la izquierda y se refleja respecto del eje x .
- Si $-1 < k < 0$, el gráfico se desplaza hacia la derecha y se refleja respecto del eje x .

El punto de corte en el eje de las ordenadas es $(0, k)$.

Caso $0 < a < 1$:

Dado que este caso no fue tenido en cuenta por los alumnos, y considerando que el análisis del caso $a > 1$ había sido suficientemente exhaustivo, decidimos reservar el análisis de una función exponencial de base menor que uno para el trabajo práctico domiciliario.

A diferencia de lo ocurrido con el ítem a), en esta ocasión no mencionamos la magnitud del desplazamiento porque para ello era necesario utilizar la función logaritmo, que aún no había sido introducida.

Se tomó la decisión de dictar las conclusiones correspondientes a los ítems b) y c), ya que notamos que al copiar en la pizarra la conclusión del ítem a) los alumnos se dispersaron bastante y luego se dificultó volver a retomar el ritmo de la clase.

Si bien las conclusiones se obtuvieron a través de generalizaciones de lo que parecieran ser insuficientes casos particulares, cada alumno tuvo libertad para experimentar gráficos de cualquier función exponencial, con lo cual, en la puesta en común de la actividad, se pudo constatar la existencia de muchos casos diferentes en los que se cumplían las conclusiones a las que arribamos. Es importante destacar que no se realizaron demostraciones de estas, ya

que el docente del curso nos informó anteriormente que no trabajaban con la elaboración de demostraciones, por lo que incluirlas en nuestras prácticas no fue un objetivo.

Luego, optamos por dictar la definición de función exponencial completa, que fue la siguiente:

Llamamos función exponencial completa a toda función del tipo:

$$f(x) = k \cdot a^{x+b} + c$$

a es la base de la función y es un número real positivo distinto de 1.

b es un término del exponente de la función y es un número real.

c es el término independiente de la función y es un número real.

k es el coeficiente de la función y es un número real no nulo.

Cierre:

Finalizadas las conclusiones, dictamos lo siguiente:

Actividad 1: En verano, una cierta especie de arbusto se ramifica cada una hora, produciendo siempre 3 ramas nuevas a partir de la punta de cada rama. El día lunes, Fernando contó 10 ramas en un arbusto de ese tipo. Encuentre una función que describa la cantidad de ramas del arbusto en relación al tiempo a partir del momento en el cual Fernando realizó el conteo.

Invitamos a los alumnos a pensar en esta actividad los minutos restantes y les comunicamos que la clase siguiente trabajaríamos en su resolución y corrección. Mientras tanto, nos encargamos de anotar los grupos para la realización del trabajo práctico que sería entregado la siguiente clase.

Para esta clase teníamos planeadas más actividades prácticas, que por falta de tiempo no pudimos llevar a cabo; las mismas se detallarán en el apartado 2.3.5.

2.3.5. Quinta clase

Objetivos:

- Lograr que los alumnos se apoderen de los conceptos trabajados, a través de actividades de tipo ejercicios y situaciones que contemplen la función exponencial completa.
- Acercar a los estudiantes a la definición de logaritmo, a partir de la necesidad del mismo para resolver ciertas ecuaciones.

Introducción:

En el caso de 5°B, primero se les entregó una fotocopia con 4 gráficos de funciones exponenciales completas en los que tenían que colocar cuál era la función determinada por ese gráfico. Esto se hizo con el fin de que les quedara un registro de los gráficos de las funciones y sus comportamientos. La actividad se corrigió en la pizarra, pasando 4 alumnos distintos (uno por cada gráfico) a detallar cómo habían elegido la función.

Tanto en 5°A como en 5°B les otorgamos unos minutos a los alumnos para que terminaran de resolver la actividad 1 dictada la clase anterior. Los estudiantes se agruparon para discutir y resolver la actividad.

Desarrollo:

Cuando todos culminaron con la resolución, se hizo pasar al frente a un alumno para que explicara cómo había resuelto el problema, a fin de poder discutir sobre ello. A continuación, se detalla la resolución del alumno en la pizarra:

0hs	10 ramas
1h	$30 = 10 \cdot 3 = 10 \cdot 3^1$ ramas
2hs	$90 = 10 \cdot 9 = 10 \cdot 3 \cdot 3 = 10 \cdot 3^2$ ramas
3hs	$270 = 10 \cdot 27 = 10 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 10 \cdot 3^3$ ramas
xhs	$10 \cdot 3^x$ ramas

Notemos que el alumno descompone la cantidad de ramas que obtiene cada día, para poder encontrar una regularidad. Además, se hizo evidente que el trabajo previo, de todas las

clases anteriores, proporcionó al estudiante las herramientas y la seguridad necesaria para resolver la actividad de esta manera.

En el caso de 5°A, finalizada esta corrección, se repartieron las siguientes actividades:

Actividad 2: Si una población de bacterias comenzó con 100 de ellas y se duplica cada 3 horas, la cantidad de ejemplares después de t horas es:

$$f(t) = 100 \cdot 2^{\frac{t}{3}}$$

- a) ¿Cuántos ejemplares habrá luego de 9 horas?
- b) ¿Cuántas horas habrán pasado si tenemos 1600 bacterias? ¿Y si tenemos 50000?

Actividad 3: Encuentre el valor de x en las siguientes ecuaciones:

- a) $5^x = 25$
 - b) $\frac{3}{2} \cdot 2^x = 24$
 - c) $3 \cdot 3^{-x} = \frac{1}{3}$
 - d) $2,2^x = 5$
 - e) $8^x = 22$
-

Con estas actividades se buscaba que los alumnos ejercitaran los conceptos ya vistos e introducir el logaritmo, ya que para resolver el ítem b) de la actividad 2 y algunos ítems de la actividad 3, era necesario conocer esta nueva noción.

Luego de unos minutos, se procedió a la corrección de la actividad 2. Un alumno pasó a la pizarra a relatar y escribir su resolución, la cual transcribimos agregando algunos comentarios que facilitan su interpretación:

2. a) $9 = t$ entonces,

$$\begin{aligned} f(9) &= 100 \cdot 2^{\frac{9}{3}} \\ &= 100 \cdot 2^3 \\ &= 100 \cdot 8 \\ &= 800 \end{aligned}$$

b) Para la primera pregunta,

$$1600 = 100 \cdot 2^{\frac{t}{3}},$$

entonces

$$\frac{1600}{100} = 2^{\frac{t}{3}}$$

y así,

$$16 = 2^{\frac{t}{3}}$$

Como $16 = 2^4$, entonces:

$$\frac{t}{3} = 4$$

de donde resulta

$$t = 12$$

Para la segunda pregunta, utilizaron el mismo procedimiento llegando a que

$$500 = 2^{\frac{t}{3}}$$

y con ayuda de la calculadora fueron probando y aproximando el valor de t para esa ecuación.

Quienes habían avanzado con la resolución de la actividad 3, también utilizaron la deducción o la aproximación para encontrar el valor de x , pero dejaron algunos ítems en blanco.

Cierre:

La clase para 5°B finalizó luego de la corrección de la actividad 1, con el dictado de la actividad 2, ya que el agregado de la actividad de repaso de los gráficos mencionada anteriormente insumió tiempo de clase.

Uno de los principales propósitos de estas actividades era poner en evidencia la imposibilidad de resolución completa del ítem b) de la actividad 2 y de la actividad 3, ya que las mismas requerían conocer la definición de logaritmo. Esto dio pie al dictado de la misma:

Definición: El logaritmo en base a de un número b es el número c , si a elevado al exponente c da como resultado b .

En símbolos:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

a es la base del logaritmo, el cual es un número real positivo distinto de 1.

b es el argumento del logaritmo y debe ser un número real positivo

En ambos cursos se hizo entrega del enunciado del trabajo práctico en los últimos minutos de esta clase, recordando la fecha de entrega (séptima clase).

2.3.6. Sexta Clase

Objetivos:

- Introducir y analizar el concepto de logaritmo.
- Lograr que los alumnos resuelvan actividades de ejercitación aplicando todos los conceptos ya vistos.
- Recuperar las ideas y resoluciones de los estudiantes, siendo ellos los protagonistas de la clase.

Introducción:

En 5°A se realizó un breve repaso de la definición de logaritmo y se otorgaron 10 minutos para que cada uno analizara y produjera sus conclusiones acerca de por qué la base y el argumento del logaritmo debían cumplir las condiciones descriptas en la definición. Luego, la docente recuperó los análisis de los estudiantes y los escribió en la pizarra para que todos tuvieran un registro.

En el caso de 5°B, se realizó primero la corrección de la actividad 2, que había quedado de tarea. Luego, se dictó la definición de logaritmo y se trabajó de igual manera que en 5°A.

Desarrollo:

Posteriormente se corrigió la actividad 3 (en 5°B se destinaron unos minutos a su resolución). Para ello se dividió la pizarra en 5 sectores, uno para cada ítem de la actividad, como se muestra en la figura 4. Primero pasó un alumno a resolver el ítem a). Una vez que todos habían corregido y despejado sus dudas, pasó otro alumno para resolver el ítem b) y así hasta finalizar con la actividad.

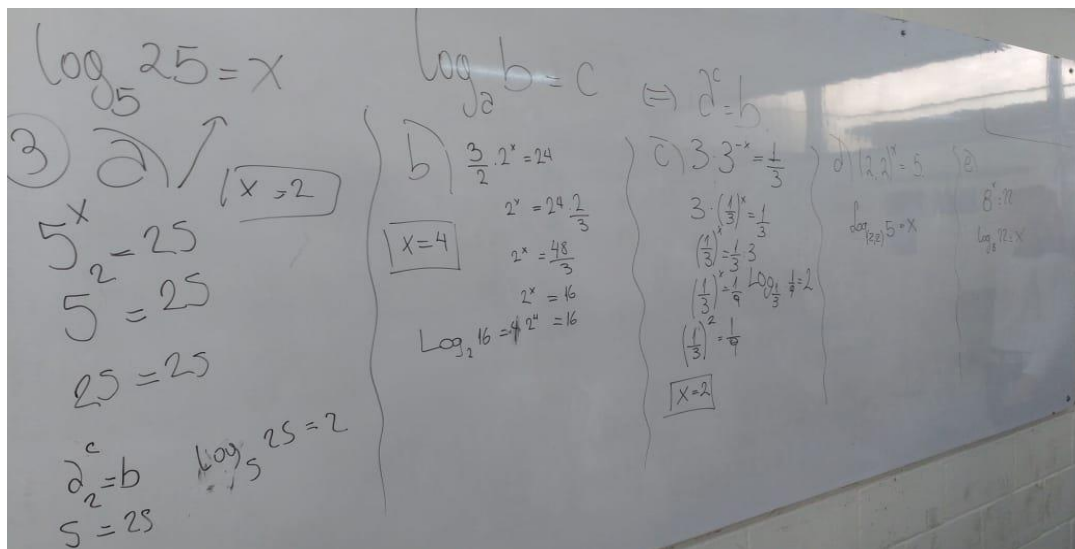


Figura 4: división de la pizarra en 5 sectores, uno para cada uno de los ítems de la actividad, con la resolución de los propios alumnos.

Finalizada la corrección de la actividad, se procedió a dictar el siguiente problema:

Después del primer mes de vida, el crecimiento de una cierta especie de árbol responde a la ecuación $h(t) = 12 \cdot \log_3(t) + 7$, donde la altura está dada en centímetros y el tiempo en meses.

- ¿Cuánto medirá el árbol a los 9 meses?
- ¿Cuánto medirá el árbol transcurridos 2 años y 3 meses?
- ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que el árbol alcance una altura de 55cm?

Algunos alumnos usaron calculadora para calcular los logaritmos; otros aplicaron la definición. Luego de aproximadamente 20 minutos, en ambos cursos, pasó un estudiante a la pizarra para corregir la actividad:

- $t = 9$, entonces

$$\begin{aligned} h(9) &= 12 \cdot \log_3(9) + 7 \\ &= 12 \cdot 2 + 7 \\ &= 31 \end{aligned}$$

Al cabo de 9 meses el árbol medirá 31 metros.

- b) $t = 27$ (el tiempo de la función estaba dado en meses, por lo que destacamos que los alumnos pudieron interpretar que 2 años y 3 meses equivalen a 27 meses), entonces

$$\begin{aligned}h(27) &= 12 \cdot \log_3(27) + 7 \\ &= 12 \cdot 3 + 7 \\ &= 43\end{aligned}$$

Al cabo de 2 años y 3 meses el árbol medirá 43 metros.

- c) $h(t) = 55$, entonces

$$55 = 12 \cdot \log_3(t) + 7$$

Despejando el logaritmo en la igualdad, obtenemos

$$\frac{48}{12} = 4 = \log_3(t)$$

Usando la definición de logaritmo,

$$t = 3^4$$

$$t = 81$$

Para que el árbol mida 55cm deben pasar 81 meses.

Cierre:

Ningún alumno manifestó no haber entendido la consigna o la resolución de la misma, por lo que no hubo dudas ni preguntas y terminó la jornada.

2.3.7 Séptima Clase

Objetivos:

- Lograr que los alumnos se apropien del concepto de logaritmo y ejerciten su aplicación.
- Evidenciar la relación entre la exponenciación y la logaritmación.
- Fomentar el trabajo lúdico y colaborativo.

Introducción:

Comenzamos esta clase informando a los alumnos que nos trasladaríamos a la sala de artes, pues íbamos a hacer un juego y necesitábamos un lugar más amplio que el aula para realizarlo.

Antes de salir del salón, les dijimos oralmente los grupos en los cuáles habíamos dividido a los alumnos. Pedimos a los estudiantes que llevaran lápiz, papel y calculadora.

Desarrollo:

Ya instalados en la sala de artes, repartimos a cada grupo las piezas de un rompecabezas logarítmico (ver figura 5), el cual debían armar usando la definición enunciada en las clases anteriores.



Figura 5: piezas del rompecabezas logarítmico.

También hicimos entrega de la siguiente consigna:

Aquí tienen 9 fichas de un rompecabezas cuadrado logarítmico. Como pueden observar, cada ficha tiene, en todos sus lados, ecuaciones logarítmicas expresadas en función de x o un valor para esta incógnita.

Actividad: Construyan el rompecabezas haciendo coincidir dos lados, uno de ellos con la ecuación logarítmica y el otro con el valor de x correspondiente a esa ecuación.

Estaba permitido el uso de la calculadora, ya que por más que la usaran, necesariamente debían saber y aplicar la definición de logaritmo para resolver el juego, y ese era el principal conocimiento del cuál queríamos que los estudiantes se apropiaran.

El rompecabezas quedaba armado como se muestra en la siguiente Figura:

$10^{0,0} = x$ $x = 12$ $x = 3$ $2 \log_2 8 = x$	$x = 8 \wedge 8^x \log$ $x = 3,33$ $x = 0$ $\log_5 125^x = \frac{3}{2}$	$x = 10$ $x = 4$ $\frac{2}{1} = x$ $\log_2 8^2 = x$
$7 = x$ $2 + x = \frac{1}{2} = x + 2$ $\log_{\sqrt{8}} \sqrt[3]{8} = x$ $\bar{x} = 6$	$x = 3$ $\log_{\pi} \pi = x$ $x = 1$ $\log_{0,3} 1 = x$	$x = 11$ $0 = x^{\frac{21}{10}} \log$ $\log_x 3 = 1$ $\bar{x} = 6$
$x = 16$ $x = 0,9$ $x = -2$ $x = \frac{1}{2}$	$x = 45$ $x = 95$ $x = 1$ $\frac{2}{3} = \log_5 125 = \frac{3}{5}$	$x = -4$ $1 = x^{5,6} \log$ $x = 3$ $\bar{x} = \frac{9}{2}$

Figura 6: Rompecabezas armado.

Notamos la motivación de los estudiantes por esta actividad lúdica, ya que como se observa en las figuras 7 y 8, se involucraron, lo resolvieron y discutieron grupalmente hasta armarlo por completo



Figura 7: un grupo de trabajo de 5° B



Figura 8: un grupo de trabajo de 5° A

Mientras tanto, las docentes tratamos de guiarlos en este proceso de resolución de la actividad, los ayudábamos recordando a los alumnos el importante y fundamental uso de la definición de logaritmo.

Una vez que corroboramos que los grupos habían armado el rompecabezas de manera correcta, les entregamos una fotocopia con la imagen del rompecabezas armado, ya que una vez que moviéramos las piezas no iban a contar con un registro de dicha actividad.

Les preguntamos a los alumnos cómo habían resultado algunas de las ecuaciones, y con sus respuestas y fundamentos notamos que la actividad sirvió para ejercitar y dejar en claro el concepto de logaritmo.

Cierre:

Culminada la actividad, regresamos al aula y destinamos los minutos restantes a responder dudas sobre el trabajo práctico evaluativo, para que pudieran culminar con el mismo.

Al tocar el timbre recogimos los trabajos prácticos y anunciamos que la próxima clase se haría una actividad de repaso para la evaluación.

2.3.8 Octava Clase

Objetivos:

- Lograr que los alumnos utilicen los conceptos trabajados las semanas anteriores.
- Realizar una integración de dichos conceptos y ponerlos en práctica.
- Repasar actividades o conclusiones que ayuden a la institucionalización de los conocimientos.

Introducción:

Al comenzar esta clase se pegó en la pizarra un afiche con la siguiente tabla:

Ecuación	Valor de x	Reemplazo por el valor de x
$\log_x 3 = 1$	$x = 3$	$\log_3 3 = 1$
$\log_\pi \pi = x$	$x = 1$	$\log_\pi \pi = 1$
$\log_{95} x = 1$	$x = 95$	$\log_{95} 95 = 1$

$\log_{\sqrt{\pi}}x = 0$	$x = 1$	$\log_{\sqrt{\pi}}1 = 0$
$\log_{0,3}1 = x$	$x = 0$	$\log_{0,3}1 = 0$
$\log_{\frac{1}{2}}1 = x + 2$	$x = -2$	$\log_{\frac{1}{2}}1 = -2 + 2 = 0$
$\log_2 8^2 = x$	$x = 6$	$\log_2 8^2 = 6$
$2 \cdot \log_2 8 = x$	$x = 6$	$2 \cdot \log_2 8 = 6$
$x \cdot \log_5 125 = \frac{3}{2}$	$x = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \log_5 125 = \frac{3}{2}$
$\log_5 125^x = \frac{3}{2}$	$x = \frac{1}{2}$	$\log_5 125^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$
$3 \cdot \log_{\sqrt{8}}\sqrt{8} = x$	$x = 3$	$3 \cdot \log_{\sqrt{8}}\sqrt{8} = 3$
$\log_{\sqrt{8}}\sqrt{8}^3 = x$	$x = 3$	$\log_{\sqrt{8}}\sqrt{8}^3 = 3$

Las ecuaciones allí escritas eran las mismas con las que habían trabajado en el rompecabezas. A modo de repaso, pedimos a los alumnos que las leyeran e identificaran en la actividad anterior.

Desarrollo:

A través de esta tabla intentamos que los alumnos notaran regularidades que iban a dar lugar a la formulación de algunas de las propiedades del logaritmo.

Comenzamos por analizar las tres primeras filas. Oralmente preguntamos a los alumnos si notaban algo en común entre ellas, a lo que respondieron que todas las ecuaciones daban igual a 1 y que la base era igual al argumento. Es decir, el logaritmo de la base da igual a 1. Para convencer a los alumnos de que esto siempre sucede, realizamos una demostración usando la definición de logaritmo (ver Figura 9).

ECUACIÓN	VALOR DE X	REEMPLAZO EL VALOR DE X EN LA ECUACIÓN
$\log_3 3 = 1$	$x = 3$	$\log_3 3 = 1$
$\log_\pi \pi = x$	$x = 1$	$\log_\pi \pi = 1$
$\log_{95} 95 = 1$	$x = 95$	$\log_{95} 95 = 1$
$\log_{10} 1 = 0$	$x = 1$	$\log_{10} 1 = 0$
$\log_{10} 1 = x$	$x = 0$	$\log_{10} 1 = 0$
$\log_2 1 = x + 2$	$x = -2$	$\log_2 1 = 2 + (-2) = 0$
$\log_8 8 = x$	$x = 1$	$\log_8 8 = 1$
$2 \log_8 8 = x$	$x = 2$	$2 \log_8 8 = 2$
$x \log_{125} \frac{3}{5}$	$x = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \log_{125} \frac{3}{5}$
$\log_3 125 = \frac{3}{2}$	$x = \frac{3}{2}$	$\log_3 125 = \frac{3}{2}$
$3 \log_8 8 = x$	$x = 3$	$3 \log_8 8 = 3$
$\log_{17} 17 = x$	$x = 1$	$\log_{17} 17 = 1$

$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$
 $\log_a a = c \Leftrightarrow a^c = a \Rightarrow c = 1$

$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$
 $\log_a a = c \Leftrightarrow a^c = a \Rightarrow c = 1$

Figura 9: Tabla y análisis de la propiedad 1 del logaritmo.

Después de esto se dictó la primera propiedad (los casos $a \leq 0$ y $a = 1$ están explícitamente excluidos en la definición de logaritmo):

Propiedad 1: El logaritmo de la base a , cualquiera sea ésta, es 1.
 En símbolos:

$$\log_a a = 1$$

Un análisis similar se realizó con las filas siguientes de la tabla y con ello pudieron conjeturarlas dos propiedades siguientes, que también fueron dictadas a los estudiantes:

Propiedad 2: El logaritmo de uno, en cualquier base, es 0.
 En símbolos:

$$\log_a 1 = 0$$

Propiedad 3: El logaritmo en base a de un número que puede expresarse en la forma b^n es igual al producto de n por el logaritmo en base a de b .
 En símbolos:

$$\log_a (b^n) = n \cdot \log_a b$$

Se les aclaró a los alumnos que las propiedades enunciadas esta clase no serían tomadas en la evaluación, ni tampoco trabajaríamos con ellas por falta de tiempo. Luego, el profesor del curso las retomaría y continuarían estudiando dicho tema.

Después de esto, avisamos a los estudiantes que se realizaría un repaso para la evaluación y les entregamos una fotocopia que contenía lo siguiente:

ACTIVIDAD DE REPASO PARA LA EVALUACIÓN

1. Encierre las funciones exponenciales

$$f_1(x) = (-3)^x \quad f_2(x) = x + 2^2 \quad f_3(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad f_4(x) = x^2$$
$$f_5(x) = 1^x \quad f_6(x) = a^x \quad f_7(x) = k \cdot a^{x+b} + c \quad f_8(x) = a^{x-\pi}$$

2. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F) según corresponda. Justifique sus respuestas.

a) Dada la función $f(x) = a^x$

- I. Su gráfico corta al eje de las ordenadas en el punto (1,0).
- II. Su dominio es el conjunto de los números reales.
- III. El conjunto imagen de la función contiene al 0.
- IV. Si $a > 1$ la función decrece.

b) Dada la función $g(x) = a^x + c$

- I. Su gráfico corta al eje de las ordenadas en el punto (0,c).
- II. Si $c > 0$, el gráfico de la función $g(x)$ es un desplazamiento hacia abajo del gráfico de la función $f(x) = a^x$.
- III. Si $a > 1$ la función es creciente.
- IV. El gráfico de la función $g(x)$ es un desplazamiento de la función $f(x)$ sobre el eje de las ordenadas.

c) Dada la función $h(x) = a^{x+b}$

- I. Su gráfico corta al eje de las abscisas.
- II. El punto de corte en el eje de las ordenadas es $(0, a^b)$
- III. Si $b = 0$, el gráfico de la función $h(x)$ es un desplazamiento hacia la izquierda del gráfico de la función $f(x) = a^x$.
- IV. b debe ser un número natural.

3. Unir con flechas las expresiones equivalentes

$$\log_{\sqrt{3}} \sqrt[3]{8} = x$$

$$2^{\sqrt{3}} = x$$

$$x^{\pi} = 0,5$$

$$\log_x \frac{1}{2} = \pi$$

$$\pi^x = \frac{1}{2}$$

$$\log_{0,5} x = \pi$$

$$\log_{\sqrt[3]{8}} x = \sqrt{3}$$

$$(\sqrt{3})^x = 2$$

$$\frac{1^{\pi}}{2} = x$$

$$\log_{\pi} \frac{1}{2} = x$$

A medida que los alumnos resolvían esta tarea, pasábamos por los bancos respondiendo dudas, interrogando a los alumnos y observando sus producciones.

Notamos que muchas nociones que se habían prestado a confusión durante las clases anteriores, ahora estaban claras, como por ejemplo que el crecimiento de una función exponencial era muy diferente a un crecimiento de proporcionalidad directa. También pudimos ver que al realizar la actividad leían y revisaban las clases anteriores, los conceptos y las definiciones trabajadas.

Cierre:

Para terminar esta clase, se realizó la corrección de la actividad de repaso de forma oral. Todos los alumnos pudieron realizarla y sacarse las dudas, aunque lo indispensable fue revisar las clases anteriores para poder integrar los conocimientos y responder correctamente, por eso hicimos mucho hincapié en el estudio de las definiciones, conclusiones y actividades ya vistas para obtener buenos resultados en las evaluaciones que se llevarían a cabo la clase próxima.

2.4. Instrumentos evaluativos: resultados y análisis

2.4.1. Trabajos prácticos evaluativos

Efectuar un trabajo práctico evaluativo antes de la evaluación fue una decisión que se tomó teniendo en cuenta lo siguiente:

- Realizar un repaso completo de función exponencial antes de introducir el concepto de logaritmo.
- Hacer notar la importancia del uso de un programa graficador tal como lo habíamos trabajado en clase.
- Favorecer y evaluar el trabajo en equipo en la construcción de los conocimientos matemáticos.
- Diagnosticar los conceptos aprendidos por los alumnos como así también los que se debían repasar antes de continuar con la unidad.

Decidimos que este trabajo práctico sería parte de la evaluación individual, aportando 2 puntos de la misma, ya que contemplaría temas que no serían evaluados posteriormente, por ejemplo, el análisis de gráficos de la función exponencial completa.

Además, se debía realizar en grupos de a dos sin excepciones, puesto que el mismo fue pensado y confeccionado para fomentar el trabajo en equipo.

Cabe destacar que realizamos 4 temas distintos de trabajos prácticos, cambiando los gráficos, funciones y problemas en cada uno de ellos por otros similares.

A continuación, se presentan las actividades del trabajo práctico, las expectativas de logro para cada una de ellas (planteadas a priori), un breve análisis de las mismas y los cambios en las consignas para cada uno de los 4 temas.

Actividad 1: Teniendo en cuenta que los gráficos siguientes describen funciones exponenciales del tipo $f(x) = a^x$, indiquen en cada uno de los gráficos si $a < 1$ o $a > 1$, escriba el conjunto imagen de cada función y el punto de corte con el eje de las ordenadas.

Gráfico 1:

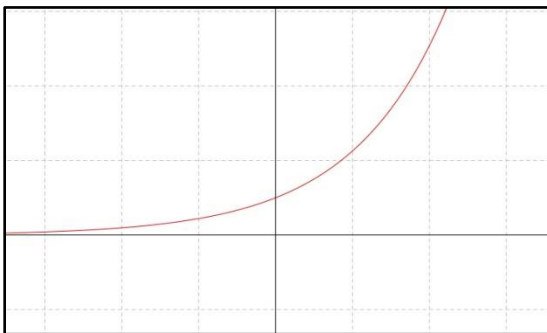
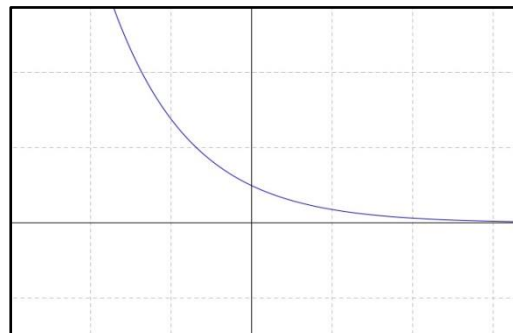


Gráfico 2:



Tipo de actividad: paradigma del ejercicio - matemática pura.

Expectativas de logro: esperamos que los alumnos repasen las nociones de crecimiento y decrecimiento, conjunto imagen y punto de corte con el eje de las ordenadas de las funciones exponenciales del tipo $f(x) = a^x$, trabajados al inicio de nuestras prácticas.

Puntaje asignado: 0,3 puntos sobre 2.

Actividad 2:

(a) Grafiquen la función $f(x) = 0,5^x$

(b) Cada uno de los gráficos que se muestran a continuación corresponde a una función de la forma $g(x) = k \cdot 0,5^{(x+b)} + c$ (es decir, cada gráfico corresponde a una “modificación” de la función $f(x)$ graficada en el ítem anterior). Analicen, en cada caso, qué “modificación” se produjo en la función $f(x)$ y escriban la expresión de la función que corresponde al gráfico.

Gráfico 1:

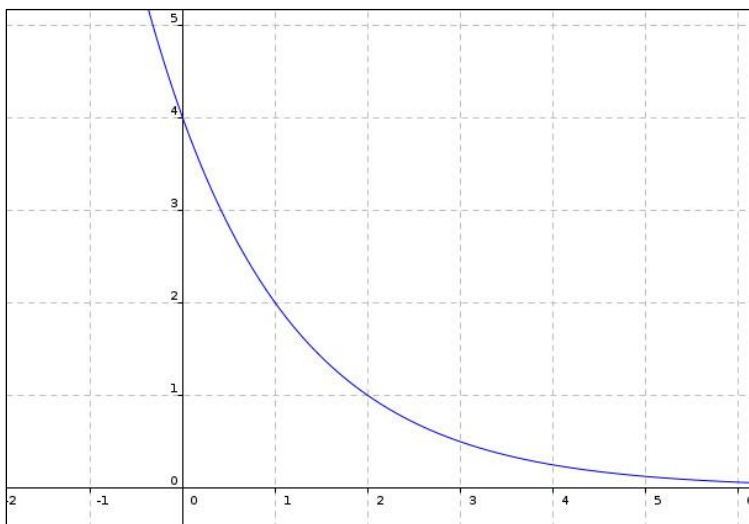


Gráfico 2:

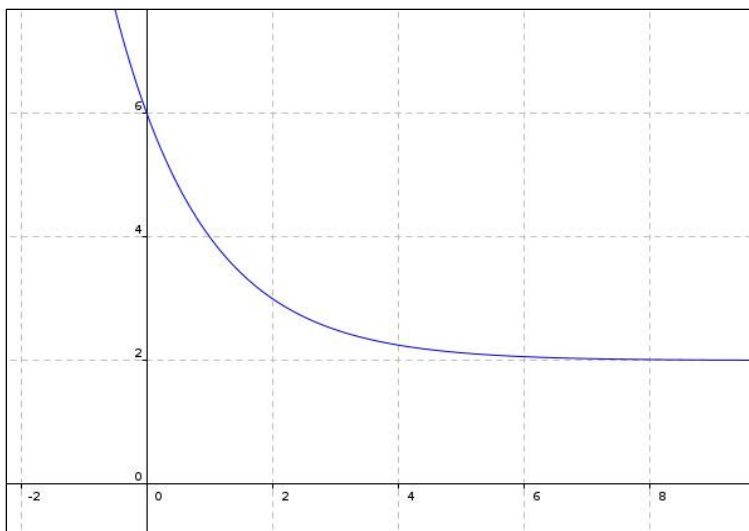
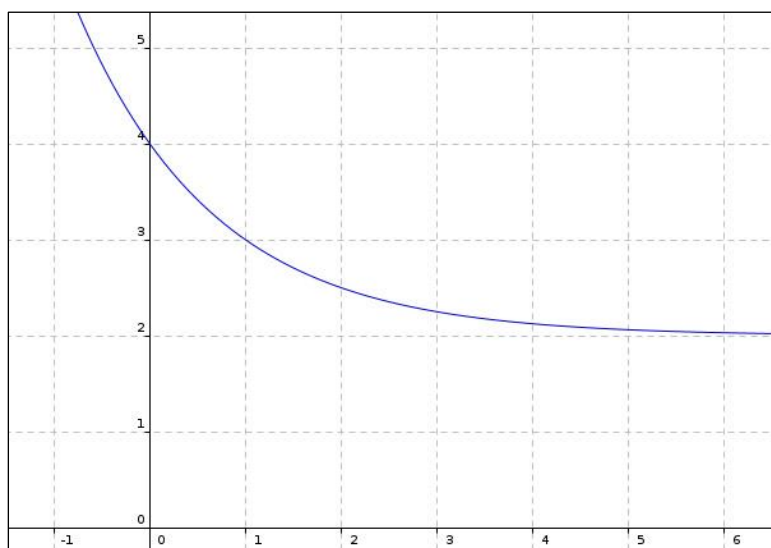


Gráfico 3:



Tipo de actividad: escenario de investigación – matemática pura.

Expectativas de logro: esperamos que los alumnos tengan la necesidad de manipular un programa graficador, exploren posibles funciones para cada gráfico y hagan una relación con los análisis y las conclusiones trabajadas durante las clases.

Cambios en los otros temas: Se pensaron diferentes funciones y gráficos correspondientes a cada una de ellas. Consideramos $f(x) = 0,5^x$, $f(x) = 1,5^x$, $f(x) = 5^x$ y $f(x) = 3^x$ para los temas 1, 2, 3 y 4 respectivamente.

Puntaje asignado: 0,3 puntos sobre 2.

Actividad 3: Encuentren una función exponencial que pase por todos los puntos de la siguiente tabla y escriban una breve historia que pueda representarse por dicha función:

x	$f(x)$
-3	1/64
-1	1/4
0	1
4	256

Tipo actividad: paradigma del ejercicio – semirrealidad/matemática pura

Expectativas de logro: esperamos que los alumnos hagan un correcto análisis de datos para encontrar la función exponencial correspondiente a los puntos de la tabla y puedan crear un enunciado de una situación que la represente.

Cambios en los otros temas: Si bien la función que debían encontrar era la misma para todos los temas ($f(x) = 4^x$), los puntos de la tabla cambiaban de la siguiente manera:

Tema 1		Tema 2		Tema 3		Tema 4	
x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
-3	1/64	-4	1/256	-2	1/16	-3	1/64
-1	1/4	-2	1/16	-1	1/4	-1	1/4
0	1	1	4	0	1	0	1
4	256	3	64	3	64	2	16

Puntaje asignado: 0,5 puntos sobre 2.

Actividad 4 para 5°A: Juan Carlos realiza un plazo fijo en un banco depositando la suma de \$15000 durante 3 meses a una tasa anual del 16%.

- ¿A cuánto asciende el monto de la operación?
- Si decide renovar el plazo fijo por otros tres meses y así sucesivamente hasta completar 12 meses ¿Cuánto dinero tendrá al final de esta nueva operación?
- Realice un gráfico en el que se muestre la variación del monto en función del tiempo.
- ¿Les parece que el crecimiento del monto en función del tiempo es un crecimiento exponencial? (Relacionen con lo trabajado en las clases anteriores para fundamentar su respuesta).

Actividad 4 para 5°B³: En un pueblo de 1000 habitantes se encuentra un laboratorio, en el cual se trabaja con diferentes microorganismos para la obtención de medicamentos para prevenir y tratar diferentes enfermedades.

El biólogo, Lisardo Funes, que trabaja en dicho laboratorio, tiene un accidente en un experimento, durante el cual un microorganismo se escapa, quedando Funes expuesto al mismo. Dadas las condiciones óptimas de temperatura y humedad presentes en el cuerpo humano, este microorganismo tiene una proliferación peculiar: una vez que ingresa en una persona, tarda una hora en adecuarse al medio y proliferar por el sistema sanguíneo. Al cabo de la hora siguiente ya se ha reproducido. A partir de este momento se reproduce una vez por hora. El contagio se realiza cada vez que el microorganismo se reproduce, es decir, dos horas después de ingresar en una persona y luego cada hora. Por la naturaleza del microorganismo, solo puede contagiarse a una persona por vez.

- Siendo ustedes parte del departamento de infectología del laboratorio, estimen con la mayor exactitud posible el número de infectados luego de transcurridas 6 horas a partir del momento del accidente.

³ Adaptación de la actividad presente en *El número de oro y sus representaciones*. Informe Final de Metodología y Práctica de la Enseñanza. Córdoba: FAMAFA-UNC. Pacher, P. y Villada, F. (2017).

b) Realicen un gráfico en el que se muestre la cantidad de personas infectadas en función del tiempo.

c) Considerando que no se elabora un medicamento necesario para combatir dicho microorganismo, ¿Cuánto tiempo pasará hasta que todo el pueblo quede infectado? Fundamenten.

d) El crecimiento de la cantidad de infectados en función del tiempo, ¿es un crecimiento exponencial? Relacionen con lo trabajado en las clases anteriores para fundamentar su respuesta.

Tipo de actividad: paradigma del ejercicio – semirrealidad.

Expectativas de logro: Esperamos que los alumnos realicen un análisis de los datos de cada problema y puedan establecer una relación con las características de la función exponencial, haciendo referencia a la búsqueda de regularidades y fundamentando correctamente.

Puntaje asignado: 0,4 puntos sobre 2.

Actividad 5: Elijan un valor de a entre cero y uno ($0 < a < 1$) y grafiquen la función exponencial $f(x) = a^x$. Analicen qué sucede con el gráfico de la función $g(x) = k \cdot a^x$ para distintos valores de la constante k . Escriban sus conclusiones.

Tipo de actividad: escenario de investigación – matemática pura

Expectativas de logro: Esperamos que los alumnos elaboren sus conclusiones de una manera similar a la propuesta en clase para el caso $a > 1$ (detallada en el apartado 2.3.4.), utilizando un programa graficador que ayude al análisis de todos los casos posibles para así evitar las confusiones que puedan surgir al graficar funciones en lápiz y papel.

Puntaje asignado: 0,5 puntos sobre 2.

Los criterios de evaluación y corrección tomados en cuenta para los trabajos fueron los siguientes:

- Evaluar cada actividad por separado, teniendo en cuenta el proceso de resolución con sus respectivos argumentos.
- Priorizar el trabajo en equipo, considerando la participación activa de cada integrante.
- Valorar la entrega en tiempo y forma.

- Evitar que el arrastre de errores condicione toda la actividad cuando los incisos dependan unos de otros, prestando mayor atención al procedimiento de cada uno de ellos por separado.
- Tener en cuenta el uso adecuado del lenguaje matemático, de los recursos tecnológicos y de la relación teórico-práctica.

Las figuras 10 y 11 muestran el puntaje obtenido por los alumnos de cada división en los trabajos prácticos.

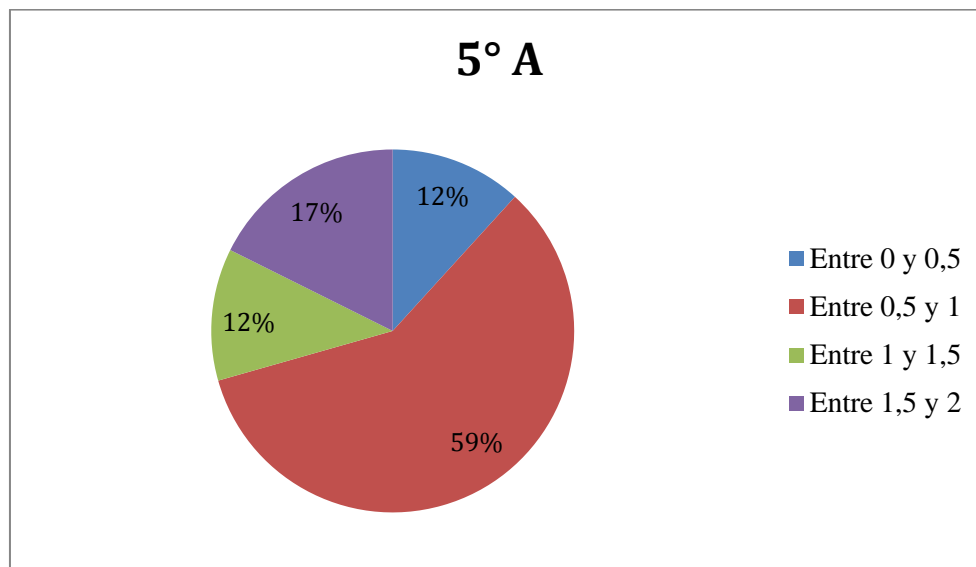


Figura 10: Puntaje obtenido por los alumnos de 5° A en el trabajo práctico domiciliario.

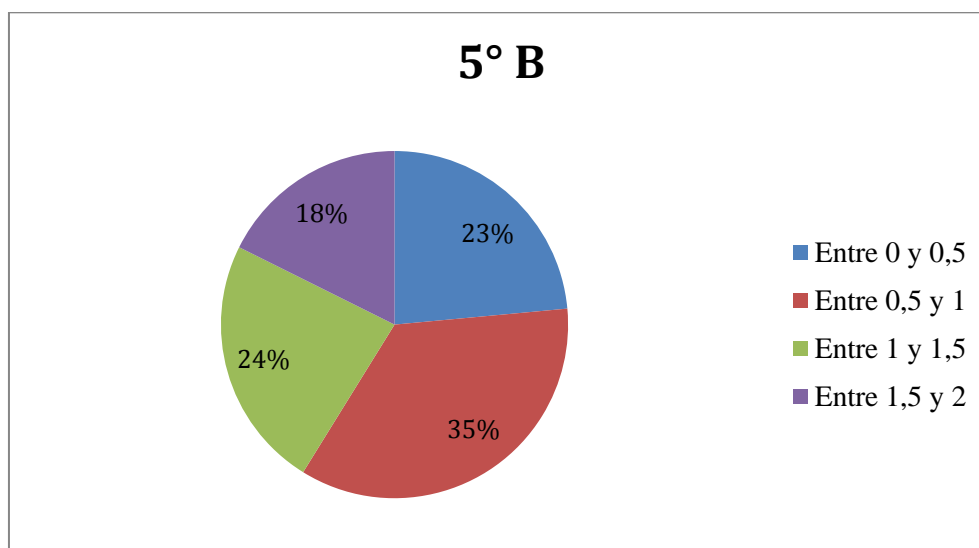


Figura 11: Puntaje obtenido por los alumnos de 5° B en el trabajo práctico domiciliario.

2.4.2. Evaluación individual

La evaluación fue elaborada para que los alumnos pudieran realizarla en un plazo no mayor a 2 horas cátedra, con el propósito de culminar con el proceso de aprendizaje de los temas alcanzados de la unidad correspondiente. La misma tenía un valor total de 8 puntos, de modo que al sumar el puntaje del trabajo práctico, totalizaban 10 puntos.

A continuación presentamos uno de los dos temas de la evaluación:

EVALUACIÓN DE MATEMÁTICA

Curso: 5to año

Fecha: 28/08/2018

Tema 1

NOMBRE Y APELLIDO: _____

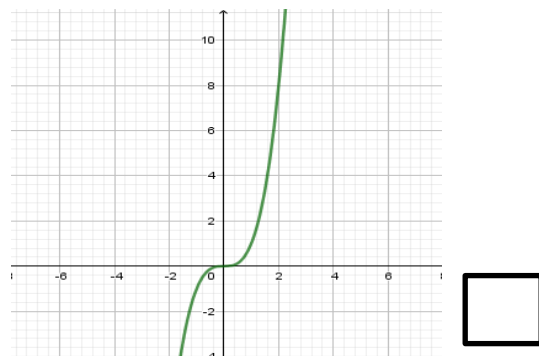
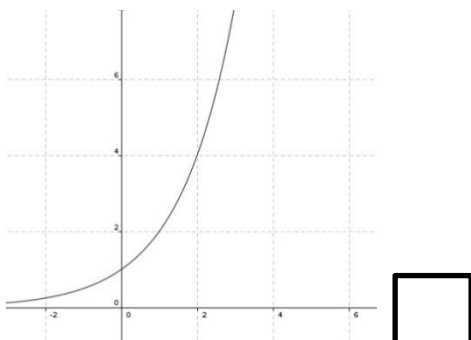
Tema a evaluar: Función Exponencial y Logaritmo.

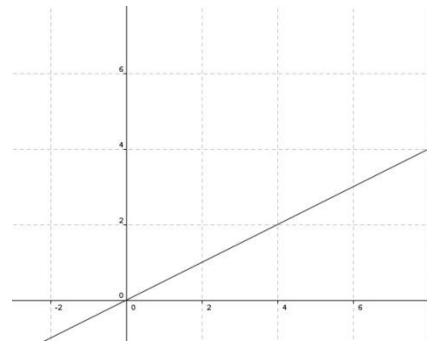
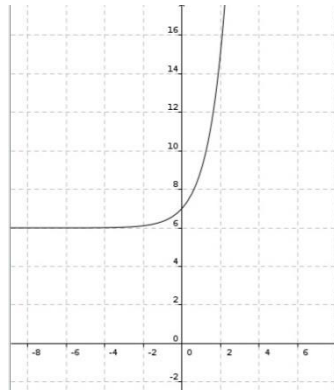
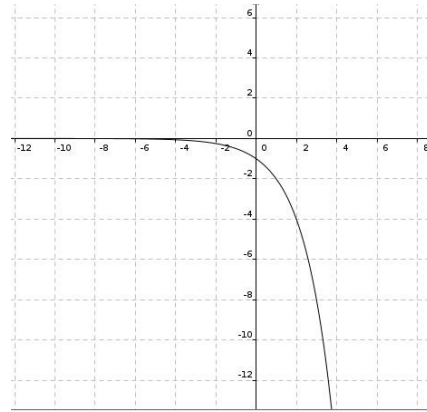
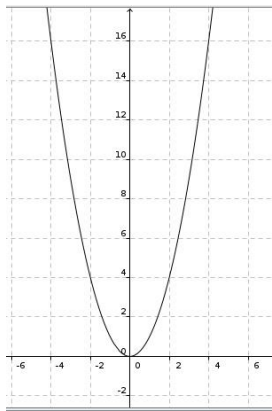
1	2	3	4	5	T.P.	TOTAL

Criterios de evaluación:

- Razonamiento correcto.
- Justificación de los pasos realizados.
- Registros de los cálculos parciales.
- Se tendrá en cuenta la prolijidad, claridad y ortografía.

1. Indique con una cruz cuáles de los siguientes gráficos representan al de una función exponencial. Aquellos que deje sin marcar explique por qué.





2. Jazmín está estudiando el crecimiento de una población de insectos; inicialmente cuenta con 20 de ellos. Al día siguiente realiza el conteo de los insectos y ahora son 40. Siguiendo su estudio notó que la cantidad de insectos se duplicaba cada día. Encuentre la función que describa la cantidad de insectos según los días transcurridos.

3. Decida si las siguientes afirmaciones son VERDADERAS (V) o FALSAS (F). Justifique su respuesta.
 - a) La función $g(x) = (-2)^x$ es una función exponencial.
 - b) El conjunto imagen de las funciones del tipo $f(x) = k \cdot a^{x+b} + c$ es $(0, \infty)$.
 - c) La función $h(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ es decreciente.
 - d) Las funciones del tipo $t(x) = a^{x+b}$ cortan al eje de las ordenadas en el punto $(0, a^b)$.
 - e) Las funciones del tipo $p(x) = a^x$ cortan el eje de las abscisas.

4. Defina logaritmo.

5. Escriba las siguientes expresiones en función de logaritmo.
 - a) $a^2 = k$
 - b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{0,2} = x$
 - c) $\sqrt{2} = x$

Presentamos en la siguiente tabla las expectativas de logro para cada una de las actividades, un breve análisis de las mismas y los cambios en las consignas para el tema 2.

Actividad	Tipo de actividad	Expectativas de logro	Cambios en el tema 2	Puntaje asignado
1	Paradigma del ejercicio - matemática pura	Reconocer las diferencias entre los distintos tipos de funciones presentadas	Orden de los gráficos	1,5p
2	Paradigma del ejercicio - semirrealidad	Encontrar la función que describe la situación a través de la búsqueda de regularidades	Situación problemática similar a la del tema 1, que hace referencia a $f(x) = 35 \cdot 3^x$	2p
3	Argumentativa - matemática pura	Hacer un correcto análisis de cada afirmación, argumentando las mismas teniendo en cuenta lo trabajado en clase	Cambios de funciones en 3 ítems sin modificar el resto de la afirmación. a) $g(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^x$ c) $h(x) = 1,5^x$ d) $t(x) = k \cdot a^x$	2p (0,4p cada afirmación)
4	Teórica - matemática pura	Reconocer la estructura de una definición, escribiéndola de manera completa	No se realizaron cambios	1p
5	Paradigma del ejercicio - matemática pura	Aplicar correctamente la definición descrita en la consigna 4	Cambios en las fórmulas: a) $\left(\frac{1}{a}\right)^2 = k$ b) $(3)^x = \pi$ c) $\sqrt{5} = x$	1,5p (0,5p cada ítem)

Tabla 5: análisis completo de las actividades de la evaluación.

Para la corrección de la evaluación tuvimos en cuenta:

- El proceso de resolución con sus respectivos argumentos de cada actividad por separado.
- El uso adecuado del lenguaje matemático.
- La relación teórico-práctica establecida.
- La coherencia en las respuestas.
- La razonabilidad de los resultados.

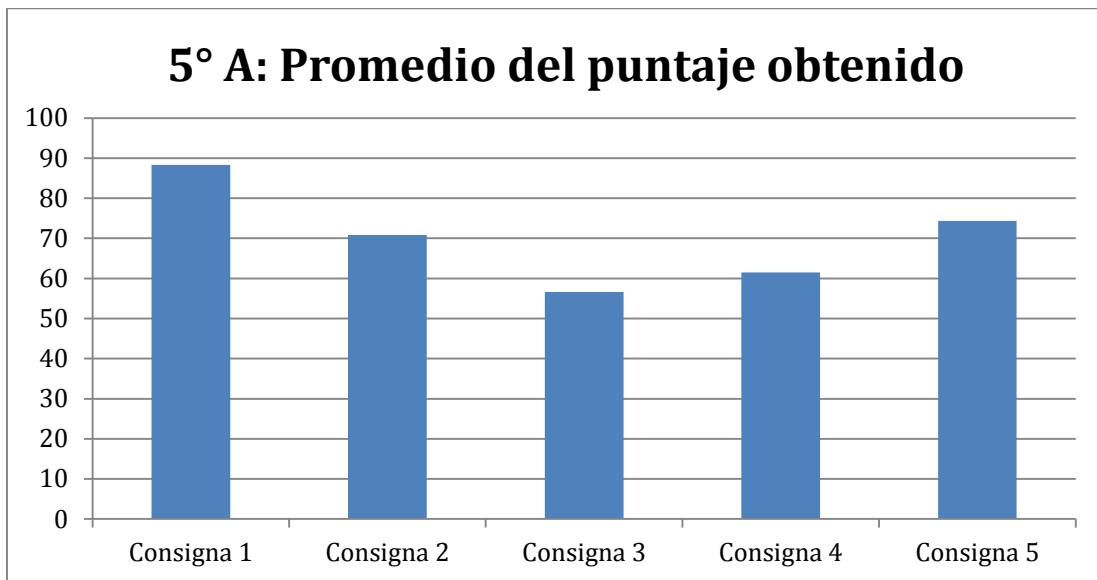


Figura 12: Promedio del puntaje obtenido en cada consigna de la evaluación en 5° A.

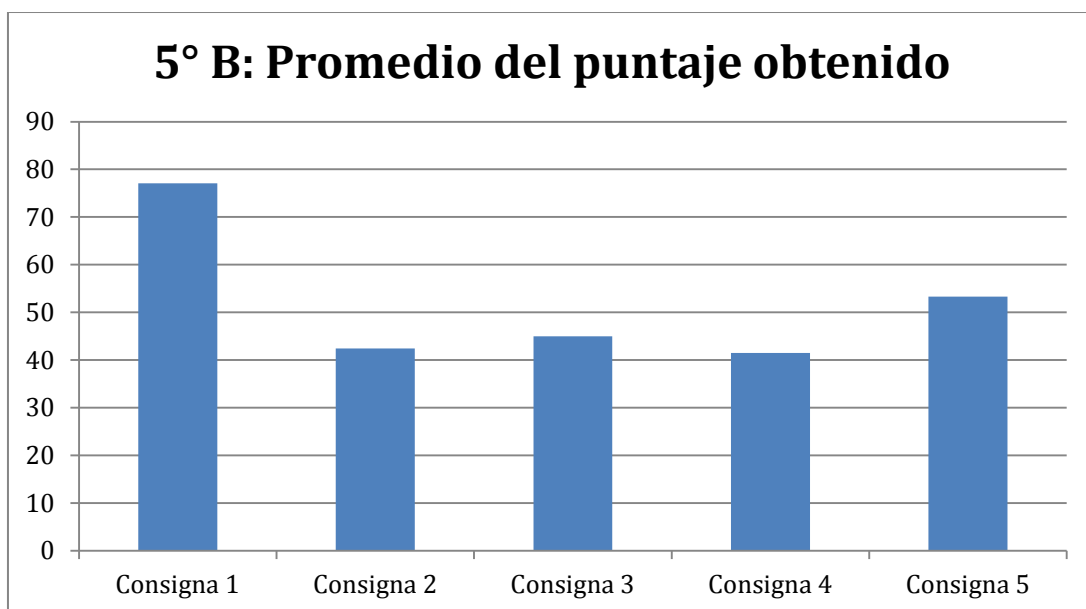


Figura 13: Promedio del puntaje obtenido en cada consigna de la evaluación en 5° B.

Los porcentajes de los alumnos aprobados y desaprobados en las evaluaciones de cada división se ven reflejados en las siguientes figuras:

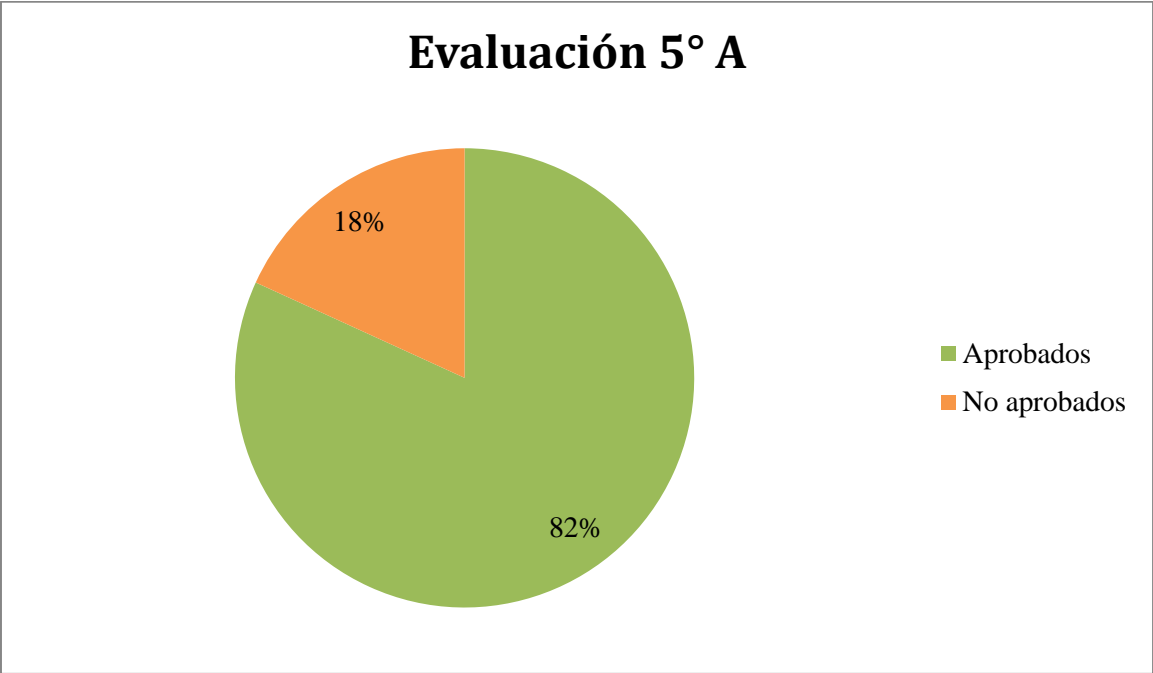


Figura 14: Porcentaje de aprobados en 5° A.

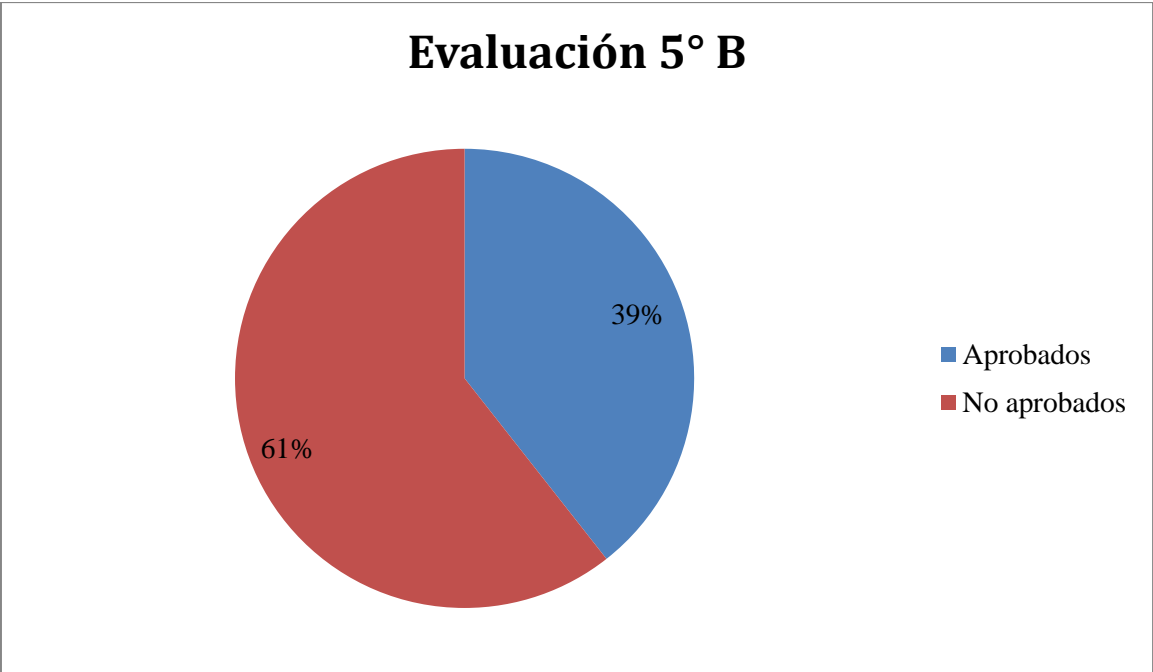


Figura 14: Porcentaje de aprobados en 5° B.

Consideramos que la disparidad de resultados en cada uno de los cursos se debió a las diferencias entre ellos referidas al modo de trabajo, a la disciplina de los alumnos y a la predisposición hacia la materia, posiblemente vinculada a la orientación.

2.4.3. Análisis de los instrumentos de evaluación

Los dos instrumentos de evaluación que presentamos fueron, según su finalidad, formativos o sumativos.

La evaluación formativa se orienta a recolectar datos de los procesos de enseñanza y aprendizaje y se realiza con el objetivo de mejorar dichos procesos. Por lo tanto, las instancias que consideramos de tipo formativa fueron el trabajo práctico, la corrección de actividades durante las puestas en común, las actividades grupales realizadas, la actividad de repaso y el proceso de resolución de las mismas. Gracias a este tipo de evaluación, pudimos hacer un seguimiento de todos los alumnos.

La evaluación sumativa se realiza sobre los productos del aprendizaje, se propone apreciar el grado de apropiación de los contenidos por parte del alumno; tiene un enfoque retrospectivo: juzga al aprendiz desde el final del proceso y se preocupa por ver qué y cuánto ha aprendido un alumno. Por esto, consideramos a la evaluación individual escrita, tomada a los alumnos hacia el final de nuestras prácticas, de tipo sumativa.

2.5. Breves reflexiones sobre planificación, metodología de trabajo empleada e instrumentos evaluativos

Para finalizar este capítulo queremos destacar que:

- La planificación es un elemento fundamental para la realización de las prácticas y el futuro trabajo docente, pues como plantean Gvirtz y Palamidessi (1998):

El diseño de la práctica de enseñanza nos servirá de guía, de eje vertebrador y nos permitirá pensar una y otra vez sobre nuestra propia tarea. [...] El diseño y la planificación constituyen un momento y una herramienta para afirmar nuestra condición de enseñantes. Es nuestra hipótesis de trabajo que, seguramente, hemos de ajustar en un futuro. (p.22)

- En la metodología de trabajo empleada durante nuestras prácticas se priorizó el trabajo grupal, la puesta en común con la participación activa de todos los estudiantes, el uso y la manipulación de recursos tecnológicos para la introducción de algunos conceptos

matemáticos, sin quitarle importancia a la práctica en lápiz y papel y al trabajo individual, puesto que, como establece el Diseño Curricular de Educación Secundaria- Orientación Economía y Administración (2011-2020):

[...] Es importante el modo en que se plantea el trabajo dentro del aula. La participación de cada uno de los actores enriquece la producción y permite poner en discusión la diversidad de representaciones y significados de los objetos matemáticos que surgen de las prácticas. (p.13)

- Además de los instrumentos empleados para evaluar, tuvimos en cuenta el respeto entre los alumnos y hacia los docentes, el trabajo en clase, la responsabilidad y el compromiso con respecto a la disciplina.

3. El trabajo colaborativo y/o cooperativo en el aula: una problemática para analizar y reflexionar

3.1. Origen y planteo de la problemática

La propuesta que presentamos contenía una metodología de trabajo, un estilo de actividades e instrumentos de evaluación muy distintos a los ya establecidos en ambos cursos, pues como mencionamos anteriormente, nosotras priorizamos el trabajo grupal, las actividades que contemplaran los diferentes ambientes de aprendizaje, las puestas en común y las instancias de evaluación centradas en el trabajo continuo, grupal e individual, de los estudiantes.

Frente a la propuesta presentada creemos que los estudiantes, más allá de sufrir un cambio de escenario para trabajar, tuvieron una respuesta positiva. Trabajaron muy bien en equipo en las actividades planteadas con este fin y para las que estaban destinadas a la resolución individual, igualmente se agrupaban o comentaban entre ellos para resolverlas. En cuanto a la puesta en común, era más propicia cuando era guiada por nosotras las docentes, ya que de lo contrario, los alumnos hablaban todos juntos y no se escuchaban entre ellos.

Analizando el modo de trabajo, la actitud de los alumnos, observando globalmente y reflexionando acerca de los resultados de la práctica, surgieron en nosotras varios interrogantes sobre problemáticas que atravesaron fuertemente este periodo, de los cuales uno en particular llamó mayormente nuestra atención:

¿Cuáles son las actividades que potencian el trabajo cooperativo y/o colaborativo en la producción del conocimiento matemático?

Antes de arribar a una conclusión sobre este interrogante, en el apartado 3.2., nos enfocaremos en aclarar los significados de cooperación y colaboración, destacando la diferencia entre ellos y sus caracterizaciones, a través de los aportes de distintos autores.

3.2. Hacia una perspectiva del trabajo colaborativo y cooperativo en situaciones de aprendizaje

Si bien en la vida cotidiana los verbos *laborar* y *operar* son utilizados como sinónimos, hay una diferencia de alcance entre ellos.

Operar es realizar una operación, en muchos casos relativamente simple y bien definida; es producir cierto efecto; funcionar o hacer funcionar de acuerdo con un plan o sistema.

Laborar es desarrollar una actividad para alcanzar determinados fines; es pensar, preparar, reflexionar, formar, empeñarse. El plan de trabajo puede no estar completamente determinado antes del inicio del trabajo, de la labor. Lo que lo orienta son los objetivos a alcanzar teniendo en cuenta los contextos naturales y sociales en los que el trabajo se desarrolla.

El término colaboración es adecuado en los casos en que los diversos agentes trabajan en conjunto, ayudándose mutuamente y alcanzando objetivos que beneficien a todos.

La cooperación, por el contrario, es una simple realización conjunta de diversas operaciones, donde las relaciones de poder y los papeles de los participantes no son cuestionados.

Para diferenciar mejor la cooperación de la colaboración, presentaremos un ejemplo. En una clase de matemática se solicita a los alumnos la realización de un trabajo práctico de 6 problemas, en grupos de 2 integrantes. Si dos estudiantes de un grupo se reparten 3 problemas cada uno para resolverlos individualmente, luego juntan estas resoluciones en una misma carpeta y la entregan a la profesora, cumpliendo el objetivo (entregar el trabajo completo), pero sin haber desarrollado una fuerte interacción en el proceso, se está produciendo un trabajo cooperativo. Por el contrario, si deciden realizar los problemas de manera conjunta, intercambiando ideas sobre las resoluciones, ayudándose uno con otro, aprendiendo e involucrándose ambos en todo el trabajo y alcanzando el objetivo, se produce un trabajo colaborativo.

Un primer análisis de las actividades que presentamos en ambos cursos, basado en los conceptos anteriores y considerando el modo en que los alumnos las resolvieron, nos permite clasificarlas, en su mayoría, como actividades de tipo colaborativo, siendo sólo dos de ellas de tipo cooperativo.

A fin de poder realizar un análisis más profundo y fundamentar adecuadamente la clasificación de las actividades propuestas, creemos necesario indagar en la literatura especializada las nociones de trabajo colaborativo y cooperativo.

Boavida y Ponte (2002) mencionan distintas formas de colaboración, entre ellas la colaboración espontánea y la colaboración forzada, “[...] siendo la primera de la iniciativa de los respectivos participantes y la segunda determinada por instancias superiores con autoridad para hacerlo.” (p. 5). Los autores realizan también una caracterización de la colaboración, a partir de la consideración de diversos aspectos, que por cierto están íntimamente relacionados y por lo tanto no son mutuamente excluyentes. Consideramos relevante para nuestro análisis destacar y explicar dicha caracterización.

La colaboración como toma conjunta de decisiones y acciones, implica una comunicación efectiva y un aprendizaje mutuo entre los participantes. Además, es vista como un proceso emergente, donde es fundamental que los actores respeten las diferencias y particularidades individuales y se dispongan a una relación mutua: todos tienen algo que dar y algo que recibir del trabajo conjunto. Si la relación es muy desequilibrada, habiendo unos que dan mucho y reciben poco, o viceversa, no es posible asignar a esa actividad un carácter totalmente colaborativo.

La colaboración para alcanzar objetivos grupales e individuales. En un trabajo colaborativo es necesaria la existencia de objetivos en común y que se adopten modos de trabajo favorables para todos los integrantes.

La colaboración basada en la confianza y el diálogo. La primera es fundamental para que los actores se sientan cómodos en cuestionar abiertamente las ideas, los valores y las acciones de los demás, en un clima de respeto y cuidado mutuo. Sin confianza de los participantes unos en otros y sin confianza en sí mismos no existe la colaboración, puesto que la misma está asociada a la disposición para escuchar con atención a los demás, al sentimiento de pertenencia a un grupo y a la valoración de las contribuciones de cada uno, por eso es fundamental que se acepte la voz personal y es necesario tener siempre presente que ninguna idea es definitiva. Por otro lado, el diálogo, más que un instrumento de consenso, sirve para anular contradicciones y como instrumento de confrontación de ideas y de construcción de nuevas comprensiones, ya que la comprensión se enriquece a medida que una voz se entrelaza con otras voces.

La colaboración vista como un juego, como una conversación y como una lucha. La idea de juego apunta a la existencia de un objetivo en común y la necesidad de establecer reglas compartidas, con las correspondientes oportunidades de aprendizaje. La idea de conversación sugiere reciprocidad y diálogo entre los participantes, subrayando el carácter no prescriptivo y no jerárquico de su relación. La noción de lucha destaca que la colaboración

está llena de dificultades e imprevistos, involucrando obstáculos y frustraciones, donde el éxito no está nunca asegurado pero depende fuertemente de los respectivos actores.

Terigi (2015, entrevista en el marco del Programa Nacional de Formación Permanente, auspiciado por el Ministerio de Educación de la Nación) propone la idea de pensar en cuál puede ser la función de los docentes en la regulación de los intercambios entre los estudiantes. En situaciones donde los alumnos van a trabajar en conjunto, es necesaria la intervención del docente para que los intercambios no den lugar a la competencia o al trabajo individual.

A continuación nos enfocaremos en el trabajo cooperativo. En este se produce una división de tareas, para posteriormente integrarlas para la consecución del objetivo. De esta manera, quienes se responsabilizan más, aprenden más y sólo se puede alcanzar el objetivo si cada participante alcanza los suyos.

Johnson, Johnson y Holubec (1999) señalan que son cinco los elementos básicos que forman el aprendizaje cooperativo. Explicaremos brevemente cada uno de ellos.

La interdependencia positiva. Está relacionado con el sentimiento de necesidad hacia el trabajo de los demás. Los miembros del grupo están vinculados entre sí para realizar una tarea y no pueden tener éxito a menos que cada uno de ellos lo logre. Si todos consiguen sus objetivos individuales, se logrará el objetivo final del grupo. De este modo, todos necesitan de los demás y se sienten parte importante del trabajo.

La interacción “cara a cara” o simultánea. Hace referencia a que los estudiantes tienen que trabajar juntos, compartir conocimientos, recursos, discutir sobre los distintos puntos de vista, sobre la manera de enfocar determinada actividad y, sobre todo, explicar a los demás lo que cada uno va aprendiendo.

La responsabilidad individual. Cada miembro, individualmente, tiene que asumir la responsabilidad de conseguir las metas que se le han asignado. Sentir que algo depende de uno mismo y que los demás confían en la propia capacidad de trabajo (y viceversa) aumenta la motivación hacia la tarea y el rendimiento individual y grupal.

Las habilidades sociales. Están vinculadas a las relaciones entre los miembros y a los roles que cada persona va ejerciendo en el equipo (líder, organizador, animador, etc.), la gestión que hagan de los posibles conflictos que surjan y el ambiente general que existe en el mismo.

Si bien los trabajos cooperativos y colaborativos tienen particularidades propias, también poseen características similares y algunas compartidas, ya que en ambos se trabaja conjuntamente y existe una fuerte dependencia entre todos los miembros del grupo. Por tal motivo, no siempre es evidente cómo clasificar el desempeño de un grupo frente a una determinada tarea. Más aún, es posible que parte de la tarea sea trabajada de modo colaborativo, mientras otra parte sea ejecutada de modo cooperativo. Una característica que ayuda a clasificar es que en el trabajo cooperativo se le da una gran importancia a los objetivos individuales por encima del grupal, mientras que en el colaborativo sucede de manera contraria.

3.3. Relacionando con las actividades propuestas

En este apartado analizaremos cada una de las actividades que llevamos a cabo con los alumnos a lo largo de nuestras prácticas y procuraremos clasificarlas a partir de la revisión bibliográfica realizada, con la intención de poder luego dar respuesta a la problemática planteada.

En la actividad de plegado del papel descrita en el apartado 2.3.1., el objetivo en común que tenía cada grupo era encontrar una regularidad y a partir de esta, descubrir la función matemática que describía la situación planteada, a fin de poder responder a la pregunta de la consigna. Todos los grupos lograron el objetivo. Quienes tuvieron confusiones o tardaron un poco más, fueron ayudados por la puesta en común. Hubo una variedad de respuestas con distintos fundamentos de los estudiantes, y esto se debió al debate que se realizó en los grupos y entre todo el curso y también al comparar las distintas formas de trabajar de cada uno, pues el objetivo en estas instancias era que todos entendieran la resolución y las distintas formas de trabajo de cada equipo.

Notamos una gran motivación en los estudiantes. Esta se vio reflejada en la manera que los alumnos decidieron resolver el enunciado. Estaban todos concentrados, manipulando el material otorgado (papel afiche), discutiendo sobre lo que realizaban, creando conjeturas y validándolas o refutándolas.

Consideramos que este trabajo fue de tipo colaborativo pues potenció el intercambio de diversas formas de trabajo, de distintas ideas y ayudó a la participación activa de todos los integrantes del curso. La actividad se prestó para realizar un rico debate y para construir ideas matemáticas muy fuertes con respecto a la función exponencial.

Teniendo en cuenta la caracterización del trabajo colaborativo, creemos que el modo de trabajo empleado por los grupos y el curso en general para resolver la actividad, puede relacionarse con la colaboración vista como una conversación, ya que el diálogo y la reciprocidad fueron factores claves para la producción del conocimiento. Además lo caracterizamos como colaboración forzada ya que fuimos nosotras quienes agrupamos a los alumnos y les dimos indicaciones a seguir para resolver la actividad.

En la primera actividad con *GeoGebra* (descrita en el apartado 2.3.2.) los fines fueron dos: al comenzar la clase, el objetivo general del curso era aprender a usar un programa desconocido, por lo cual en una puesta en común dirigida por nosotras y respondiendo las preguntas de los alumnos, se logró alcanzar esta meta a lo largo de la clase, más allá de las dificultades que se presentan al experimentar una nueva forma de trabajo. El otro objetivo y al que apuntaba la actividad, era que pudieran responder a la consigna manipulando el recurso tecnológico, relacionando lo que veían en la pantalla con la teoría analizada anteriormente y con las características de la función exponencial que debían descubrir. Para alcanzar este fin, los alumnos discutían entre los integrantes del grupo y con otros grupos también, se ayudaban mayormente con el uso de *GeoGebra* y en menor medida con los contenidos matemáticos necesarios. La mayoría de los alumnos respondió a la consigna y quienes no lo hicieron de manera completa pudieron culminarla luego de participar en la puesta en común donde se resolvió la actividad. La consigna se basaba en completar espacios en blanco sin necesidad de argumentaciones.

En un principio la actividad fue pensada para que los alumnos la resolvieran de manera individual, pero decidimos realizarla de manera grupal por la falta de recursos (computadoras). Creemos que si lo hubieran realizado de manera individual no se hubiesen obtenido los mismos resultados, ya que de esta manera fue más efectivo para el aprendizaje de nuevas herramientas y para el análisis de conceptos matemáticos conocidos y por conocer.

Con todo este análisis diremos que se produjo un trabajo colaborativo, caracterizándolo de tipo forzado, ya que indicamos nosotras que se agruparan de a pares. Además determinamos aquí la colaboración producida como una lucha, ya que se presentó una dificultad al cambiar la forma de trabajo habitual, con un recurso desconocido, pero finalmente los alumnos pudieron superar esas adversidades y lograr los objetivos trabajando con su par en la computadora y colaborativamente también con el curso y las docentes.

En la segunda actividad con *GeoGebra* (descrita en el apartado 2.3.3.) los grupos para trabajar fueron elegidos de la misma manera que en la clase anterior. El objetivo estaba centrado en la obtención de conclusiones por parte de los alumnos a partir de lo que

graficaban en las netbooks. Los estudiantes pudieron ver y analizar todos los contenidos matemáticos puestos en juego, pero no alcanzaron a lograr totalmente el objetivo. A la mayoría se les dificultó la escritura de conclusiones, es decir les resultó muy difícil expresar en palabras lo que estaban viendo en la pantalla, pues las producciones escritas en la mayoría de los casos no reflejaban directamente lo que el estudiante quería decir. Se realizó una puesta en común de todo el curso y tratamos de construir juntos esas conclusiones para resolver de manera completa la actividad. Este trabajo fomentó el debate, el intercambio, la producción de conjeturas matemáticas, el planteo de preguntas y la ayuda mutua. También se presentaron dificultades a la hora de escribir esas conjeturas, pero cabe destacar que cada grupo intentó realizar producciones escritas luego de mucho esfuerzo, discusión y acuerdos.

En esta actividad, las docentes actuamos como guías para los alumnos. No sólo respondíamos preguntas y aclarábamos dudas, sino que también interveníamos para ayudar a los estudiantes a realizar sus producciones o hacíamos comentarios pertinentes para el curso en general.

Este trabajo también había sido pensado para realizarse individualmente, pero por la misma razón que la actividad descrita anteriormente, se realizó en grupos de dos integrantes. Consideramos, luego de analizar nuestras clases, que la complejidad que presentaba dicha actividad era adecuada para hacerla en equipo, no de manera individual.

Frente a esta actividad, los alumnos actuaron colaborativamente. Nos pareció muy productivo el trabajo de los estudiantes en cuanto a la creación de conjeturas matemáticas que fueron producto del diálogo y de la labor conjunta en los grupos y entre ellos. Por esto, relacionamos este trabajo con la colaboración vista como conversación y lucha.

En la actividad del rompecabezas logarítmico (descrita en el apartado 2.3.7.), los estudiantes contaban con los materiales necesarios para el armado del mismo, el cual era de tamaño mediano y gracias a eso todos los alumnos podían ubicarse alrededor, involucrándose en el trabajo o viendo el aporte de sus compañeros. El objetivo de los grupos consistía en resolver las ecuaciones logarítmicas para poder armar el rompecabezas de manera completa. La actividad motivó a los estudiantes a cumplir con este fin, incluso tratando de hacerlo lo más rápido posible para comparar con los demás equipos. Cabe destacar que este “juego” ayudó a aprender matemática de manera más dinámica, a ejercitar y también constituyó una instancia de aprendizaje y fijación de contenidos relacionados a la definición de logaritmo. Un detalle no menor fue que si bien todos los alumnos estaban atentos a la actividad, dentro de los grupos, había algunos estudiantes que resolvían muchas más ecuaciones que otros, ya que el primero que encontraba el resultado de la ecuación lo comunicaba al resto y se armaba esa

parte del rompecabezas rápidamente. Por esto no todos “jugaron” lo suficiente. Notamos entonces, que la interacción producida entre los alumnos fue más de índole cooperativa que colaborativa. Por un lado, cooperativa porque cada integrante tiene algo que dar y algo que recibir del trabajo conjunto, y en este caso, algunos alumnos dieron más que otros para poder lograr el fin, priorizando objetivos individuales y no tanto grupales. Por otro lado, colaborativa y sin duda caracterizada como un juego, porque los alumnos debían seguir reglas para el armado del rompecabezas (establecidas en la consigna) y con el aporte de los compañeros y el uso de la calculadora podían resolver de manera completa lo que se les pedía.

Las actividades de ejercitación (incluimos aquí la actividad 1 descrita en el apartado 2.3.4., las actividades 2 y 3 del apartado 2.3.5. y el problema trabajado en el apartado 2.3.6.), tenían como objetivo común consolidar los conceptos vistos a través de la práctica de los mismos. Fueron entregadas o dictadas a los alumnos sin ningún tipo de condición para su resolución, otorgando así a los estudiantes la libertad de elegir la metodología a emplear para resolverlas. En este tipo de actividades, la intervención docente se basó en responder las dudas y preguntas que podían surgir por parte de los alumnos. Además despertó nuestra atención que los alumnos se agruparan para resolver las actividades, corroborar y discutir los resultados. Cabe destacar entonces que, este trabajo producido fue colaborativo, y totalmente espontáneo por parte de los estudiantes.

En cuanto al trabajo práctico domiciliario, no pudimos observar la resolución completa del mismo. En los minutos destinados a culminar el trabajo antes de entregarlo, notamos que entre los integrantes del grupo se dividieron las actividades a resolver y existían relaciones de poder, ya que siempre uno de los participantes cumplía el rol de líder. A partir de esto, consideramos que el trabajo producido por los estudiantes fue de tipo cooperativo, pues cada miembro, individualmente, se hizo cargo de su parte del trabajo. La cooperación propone una interacción “cara a cara” o simultánea de los integrantes del grupo. A pesar de producirse una división de tareas, necesariamente los alumnos debieron interactuar simultáneamente.

Las puestas en común tuvieron lugar en casi todas las clases de nuestras prácticas, fueron usadas para la corrección de actividades, para apartar las dudas de los alumnos, conocer todas las formas de trabajo, analizar errores y para institucionalizar conocimientos. En este caso el tipo de colaboración fue mayormente espontáneo. Los alumnos contaban la forma de resolución de las actividades, pasaban al frente a explicar a sus compañeros y los demás escuchaban y hacían preguntas o nosotras realizábamos las actividades recuperando producciones de los alumnos.

En las puestas en común, el objetivo grupal era que todos los alumnos logaran entender con totalidad el fin de cada actividad y pudieran compartir sus experiencias y producciones. Consideramos que hubo puestas en común que fueron más productivas que otras, ya que en algunas ocasiones costaba que los alumnos se escucharan entre ellos e hicieran silencio para poder apreciar todas las opiniones. Por esto, se vio reflejada la necesidad de intervención de nosotras las docentes para mejorar el clima de la clase y ayudar a quienes querían expresar sus ideas y no podían hacerlo con claridad.

La confianza fue un factor fundamental, puesto que los estudiantes se sentían cómodos en cuestionar abiertamente las ideas y las acciones de los demás, pero no siempre en un clima de respeto y escucha, propicio para este tipo de trabajo.

Consideramos a las puestas en común como colaboración y en este caso, la relacionamos con una conversación, ya que el intercambio, el diálogo y el aprendizaje mutuo entre todos los participantes fue lo principal en estas instancias.

3.4. Acercándonos a una respuesta de la problemática

En la Tabla 6 que se muestra a continuación, sintetizamos nuestra clasificación del tipo de trabajo que se produjo en los grupos durante la resolución de las actividades propuestas en nuestras prácticas. Esta clasificación la realizamos teniendo en cuenta el análisis realizado en el apartado anterior.

Trabajo Colaborativo	Trabajo Cooperativo
Actividad de plegado del papel afiche Primera actividad con <i>GeoGebra</i> : análisis del comportamiento del gráfico de $f(x) = a^x$ Segunda actividad con <i>GeoGebra</i> : análisis del comportamiento del gráfico de $f(x) = k \cdot a^{x+b} + c$ Actividad del rompecabezas logarítmico Actividades de ejercitación Puestas en común	Actividad del rompecabezas logarítmico Trabajo práctico domiciliario

Tabla 6: clasificación de actividades según el tipo de trabajo producido.

En las actividades de tipo colaborativo se evidenció el trabajo en conjunto para llegar a un mismo objetivo, la necesidad de interactuar con algún compañero para arribar a las conclusiones deseadas, la importancia de escuchar las distintas ideas de resolución y manifestar las propias, produciendo así un intercambio de conocimientos y realizando un aprendizaje colaborativo.

Por otra parte, en las actividades clasificadas como cooperativas, el trabajo realizado por los alumnos era mayormente repartido y no tanto compartido, beneficiándose así algunos estudiantes más que otros en la producción y ejercitación de los conceptos.

Basándonos en nuestra experiencia de prácticas profesionales y en la bibliografía consultada, creemos que en todo trabajo colaborativo existe un trabajo de tipo cooperativo, por lo que diferenciar estos dos tipos de trabajo en el aula no es “fácil” ni evidente.

Por último diremos que de todas las actividades propuestas, las que mayor potenciaron el trabajo colaborativo y/o cooperativo entre los alumnos fueron las de naturaleza exploratoria (actividad de plegado del papel y actividades con *GeoGebra*), ya que lograron un diálogo efectivo, una toma conjunta de decisiones y acciones, una confianza mutua para cuestionar y expresar ideas; y también despertaron un fuerte interés en los alumnos al conocer las distintas maneras que tenía cada uno de manipular el recurso utilizado. Finalmente destacamos que estas dos actividades presentaron una mayor complejidad que las demás y consideramos que por esto se generó una fuerte necesidad de ayuda mutua, compartiendo ideas y resolviendo las actividades de manera conjunta.

4. Reflexiones finales

La etapa de prácticas profesionales es una de las más esperadas a lo largo de nuestra carrera. Dichas prácticas requieren de un arduo trabajo y presentan un gran desafío vinculado con nuestra primera experiencia como docentes, con la observación, la planificación y puesta en práctica, la adaptación a la institución, los cambios a realizar por causas externas o no previstas y la toma de decisiones en tiempo real para resolver situaciones que se presentan.

La planificación detallada y escrita en formato de guion conjetural, fue de gran ayuda para nosotras. Nos brindó la seguridad suficiente antes de comenzar el periodo de prácticas. Nos permitió, por ejemplo, pensar en cómo enseñar los conceptos matemáticos aprendidos a lo largo de nuestra carrera, adecuándolos para que todos los alumnos pudieran entenderlos y aprenderlos con claridad. Nos ayudó a distribuir tiempos y espacios, definir criterios y objetivos. Además, contar con la planificación durante el dictado de nuestras clases nos resultó una herramienta fundamental para no dejar de lado ningún elemento importante, como así también para tener en cuenta la manera en que debíamos intervenir o reaccionar frente a ciertas preguntas y situaciones áulicas.

Las puestas en común, las cuales atravesaron nuestras prácticas como un eje vertebrador, representaron un gran desafío. La mayor dificultad que se nos presentó fue lograr el necesario silencio y orden en los cursos, que permitiera llevar a cabo con éxito la actividad. No se consiguió que todos los alumnos se escucharan entre ellos y esperaran cada uno su turno para hablar. A raíz de esto consideramos que en un principio las puestas en común deben estar guiadas por el docente para que, a medida que transcurre el tiempo los estudiantes se apropien de este tipo de escenario, ya que resulta valioso habituar a los alumnos a esta práctica.

Concluyendo con el desarrollo de las clases, debemos destacar que hubo una gran predisposición por parte del docente a cargo del curso y de la mayoría de los alumnos, en aceptar nuestra propuesta de trabajo, a pesar del desafío que implicó esta para ellos.

Para finalizar nuestra reflexión sobre las prácticas queremos destacar una serie de desafíos que hacia el final de las prácticas profesionales pudimos considerar como aprendizajes.

Si bien habíamos realizado observaciones con anterioridad a las prácticas, en aquella oportunidad nuestro rol había sido pasivo, prácticamente sin interacción con los demás actores institucionales. Notamos una gran diferencia entre esa situación e insertarse en la escuela con un rol activo en donde se tiene a cargo un curso y se necesita comunicación con la mayoría de los integrantes de la institución; por ejemplo, con la bibliotecaria para reservar los espacios y recursos a utilizar, con la vicedirectora para pedir permisos, con las preceptoras para tener registro de las asistencias, con los demás docentes para conocer las diferentes formas de trabajo, con el director para tomar ciertas decisiones, entre otras.

Por primera vez en nuestras vidas nos posicionamos frente a un curso como docentes. Al principio sentíamos cierta inseguridad en nosotras mismas que con el transcurso de las prácticas fue desapareciendo. Confiando en nuestros conocimientos y con el apoyo de la profesora supervisora y del par pedagógico, se pudo generar un desenvolvimiento, personal y profesional, adecuado que nos permitirá luego, estando solas a cargo de un curso, sentirnos seguras. Gracias a las prácticas, pudimos despegarnos de nuestro rol de alumnas para posicionarnos como docentes y asumir las responsabilidades que esto implica.

El uso de recursos, en particular tecnologías digitales, como mediadores para el aprendizaje, significó un gran desafío para nosotras. Por un lado, porque durante las observaciones, y luego de dialogar con el docente y los alumnos, supimos que se trabajaba exclusivamente con el libro de matemática. Usar computadoras para el aprendizaje de esta asignatura iba a ser una metodología de trabajo nueva en estos cursos. Por otra parte, porque nuestra experiencia con el uso de recursos tecnológicos era (y es) muy escasa, lo cual generó en nosotras intranquilidad al llevar a cabo actividades de este tipo al aula. No obstante, decidimos planificar actividades de esta naturaleza ya que estamos convencidas de que es importante incluir las tecnologías digitales para motivar a los alumnos, fomentar el pensamiento crítico y creativo, la exploración, el intercambio de ideas y obtener una mejor visualización del objeto en estudio. Por último, resultó que las clases en donde estaban presentes los recursos novedosos para los alumnos, fueron las más enriquecedoras para la producción de conocimientos y el trabajo en equipo.

La mayoría de nuestras actividades se realizaron de manera grupal pero creemos que no hay que dejar de lado las individuales. Cada alumno necesita un espacio personal para crear sus propios criterios y fundamentaciones del tema en cuestión.

Se debe tener en cuenta que para generar una situación de trabajo colaborativo y/o cooperativo habrá que poner mayor atención en la elaboración de la consigna de las actividades a presentar, como así también en el rol que debe cumplir el docente durante el desarrollo de las mismas.

Finalmente, con respecto a la problemática presentada en el capítulo 3 y el análisis de la bibliografía consultada llegamos a la conclusión que las actividades que fortalecen el trabajo colaborativo y cooperativo en el aula fueron las de naturaleza exploratoria, resultando muy efectivas para la producción de conocimientos matemáticos. Se produjo entre los participantes una interacción basada en la confianza necesaria para dialogar, intercambiar y discutir ideas, persiguiendo un fin en común que no se hubiese alcanzado sin el aporte de todos los miembros, la capacidad de escucha y el respeto entre ellos. En estas actividades se utilizaron recursos novedosos para los alumnos. Resulta lógico preguntarse si lo que hemos observado y analizado en nuestras prácticas puede generalizarse. Es por ello que finalizamos este informe dejando abierto un interrogante: ¿será que las actividades de exploración con recursos innovadores favorecen el trabajo colaborativo y/o cooperativo en el aula?

5. Bibliografía

Boavida, A. M. y Ponte, J. P. (2002). Investigación colaborativa: Potencialidades e problemas. En GTI–Grupo de Trabalho de Investigação (Ed.). *Refletir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 43-55). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Bombini, G (2002). *Prácticas docentes y escritura: hipótesis y experiencias en torno a una relación productiva*. Recuperado de:

http://www.famaf.proed.unc.edu.ar/pluginfile.php/38595/mod_resource/content/0/Material_MOPE_2012/Bibliografia/Guion_conjetural-bombini.pdf

Coria A., Edelstein, G., Fiorentini, D., Fregona, D., Fabietti, M. G., Glória Gohn, M., Jeffrey, D., Lucchesi de Carvalho, D. Villarreal, M. y Zan, D. (2013). Humanos-con-medios: un marco para comprender la producción matemática y repensar prácticas educativas. UNC (Ed.), *Formación de Profesores, Currículum, Sujetos y Prácticas Educativas* (85-122). Córdoba, Argentina: E-Book.

Esteley, C. (2014). *Desarrollo profesional en escenarios de Modelización Matemática: voces y sentidos* (ISBN 978-950-33-1134-9). Facultad de Filosofía y Humanidades-UNC.

Feldman, D. y Terigi, F. (2015). *El trabajo colaborativo en el aula*. Disponible en: <https://www.youtube.com/watch?v=R1yVbHuPTOI>

Gobierno de la Provincia de Córdoba. Ministerio de Educación. Subsecretaría de Promoción de Igualdad y Calidad Educativa. Diseño Curricular: Ciclo Básico de la Educación Secundaria (Versión 2011 - 2020). Disponible en:

<http://www.igualdadycalidadcba.gov.ar/SIPECCBA/publicaciones/EducacionSecundaria/LISTO%20PDF/TOMO%202%20Ciclo%20Basico%20de%20la%20Educacion%20Secundaria%20web%208-2-11.pdf> (último acceso 25/10/2018)

Gobierno de la Provincia de Córdoba. Ministerio de Educación. Subsecretaría de Promoción de Igualdad y Calidad Educativa. Diseño Curricular: Ciclo Orientado de la Educación Secundaria Economía y Administración. (Versión 2012 - 2020). Disponible en:

<http://www.igualdadycalidadcba.gov.ar/SIPECCBA/publicaciones/EducacionSecundaria/LISTO%20PDF/ORIENTACION%20ECONOMIA%20Y%20ADMINISTRACION%2017-11-11.pdf> (último acceso 25/10/2018)

Gvirtz, S. y Palamidessi, M. (1998). *El ABC de la tarea docente: currículum y enseñanza*. Buenos Aires, Argentina: AIQUE.

Holubec, E., Johnson, D., y Johnson R. (1999). El concepto de aprendizaje cooperativo. *El aprendizaje cooperativo en el aula*. (5-12). Buenos Aires, Argentina: Editorial Paidós SAICF.

Polya, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas*. México, D. F.: Editorial Trillas.

Rojano, T. (2014). El futuro de las tecnologías digitales en la educación matemática: prospectiva a 30 años de investigación intensiva en el campo. *Educación Matemática*, 26, (11-30).

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar Matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. *Revista EMA*, 6, N°1, (3-26).

Una de mates (2015). *Crecimiento exponencial*. Disponible en:
<https://www.youtube.com/watch?v=25HUYfYnpqw>

6. Anexo

Guion conjetural de la primera clase

(5to H: Lunes 23 de Julio de 7:20hs. a 8:40hs.)

(5to E: Martes 24 de Julio de 11:50hs a 13:25hs.)

Saludamos a los alumnos, les recordamos nuestros nombres, qué estudiamos, en dónde estudiamos, qué hacemos en la Institución, etc.

Profes: “Bueno, para comenzar la clase de hoy vamos a ir al SUM”

Una vez en el SUM, les pediremos a los alumnos que nos recuerden su nombre uno por uno, eligiendo nosotras el orden. Luego de 4 presentaciones, les diremos que ellos formarán un grupo, y así siguiendo con los demás. (En el caso de que a lo último nos queden 3, 2 o 1 alumno, decidiremos en el momento cómo distribuirlos entre los grupos ya armados). Esta elección es propuesta por nosotras, ya que tenemos la intención de que no se formen los mismos grupos vistos en las observaciones. (Tiempo estimado para el traslado al SUM, presentaciones y armado de grupos: 15/20 minutos)

Finalizadas las presentaciones y la organización de los grupos, los ubicaremos aprovechando el espacio del lugar y preguntaremos: “¿En qué bolsillo guardarían un papel luego de haberlo doblado 20 veces por la mitad?”.

Si los alumnos manifiestan que la respuesta a la pregunta depende del papel que se utilice, les mostraremos el cuarto de afiche que utilizaremos para la actividad siguiente.

Dado que puede haber múltiples respuestas y discusiones sobre la pregunta anterior entre los alumnos, diremos: “Vamos a realizar una actividad para validar estas respuestas”. Entregaremos la primera actividad junto con el papel que utilizarán para trabajar.

Actividad: Comiencen a doblar el afiche por la mitad y repitan este paso las veces que sea necesario hasta completar la siguiente tabla:

<i>Cantidad de veces que doblo el papel</i>	<i>Cantidad de capas de papel obtenidas</i>
1	
2	
3	
4	
5	
6	

¿Cuántas capas de papel quedarán luego de doblar 20 veces el afiche? ¿Entrará entonces en el bolsillo que eligieron el papel así doblado?

Recomendación: Escriban el análisis que realizaron para responder la pregunta y completar la tabla, ya que realizaremos una puesta en común.

Solución a la pregunta de ésta actividad: La cantidad de capas que quedarán luego de doblar 20 veces el afiche es: $2^{20} = 1048576$

Mientras los alumnos van trabajando por grupos, pasaremos a observar cómo lo hacen, dando indicaciones si es necesario y respondiendo dudas.

Posibles preguntas o dudas de los alumnos mientras resuelven la actividad:

- ¿Cómo cuento las capas de papel obtenidas? (Después de doblarlo más de dos veces puede llegar a ser un poco más complejo contarlas).

Acción docente: hacer evidente que la cantidad de capas que se obtienen al doblar el papel es equivalente a la cantidad de rectángulos que quedan marcados en el afiche. Cada vez que doblen el papel pueden volver a abrir el afiche e ir contando los rectángulos.

- Luego de completar la tabla y llegar a la pregunta de la actividad los alumnos podrían manifestar que no pueden responderla pues no pueden doblar 20 veces el afiche.

Acción docente: Trataremos con ciertas intervenciones de que los estudiantes noten que no es necesario doblar el afiche 20 veces para responder a esa pregunta. Por ejemplo, si tomaran un papel más grande quizá podrían doblarlo hasta 30 veces, con otro papel aún de mayor dimensión podrían doblarlo 50 veces, así sucesivamente hasta que los alumnos se den cuenta de que siempre va a haber una limitación para doblar cierta cantidad de veces el papel. Con esto se hace notoria la necesidad de la utilización de los datos obtenidos para buscar una regularidad y obtener una relación que me permita responder la pregunta de la actividad.

En el caso de que la mayoría de los alumnos no encuentre la regularidad, les recomendaremos recolectar más datos y ampliar la tabla que les dimos. Si sigue habiendo dificultad para hallar la relación, optaremos por realizar un análisis oral entre todos.

Suponemos que el tiempo que les llevará a los alumnos realizar esta actividad es entre 15 y 20 minutos.

Cuando veamos que todos los grupos hayan culminado con la actividad, preguntaremos qué fue lo que hicieron, pidiendo que levanten la mano para responder. Si no todos los grupos participan en la respuesta, le preguntaremos particularmente a ese grupo cómo resolvieron.

Los alumnos podrían responder lo siguiente:

- Fuimos doblando el papel, y completando la tabla. Nos dimos cuenta que todos los números eran potencias de dos, y así sacamos la cantidad de capas al doblar 20 veces el afiche, pues iba a ser dos elevado a la 20.

- El exponente al que elevo el 2 para sacar la cantidad de capas, se corresponde con la cantidad de veces que doblo el papel.

- Algún grupo podría completar su tabla hasta llegar a 20 dobleces y leer el resultado directamente de la tabla.

→ Si algunos grupos no encuentran que la relación entre ambas columnas de la tabla involucra potencias de 2, les pediremos a los que si la hayan encontrado que le cuenten cómo fue que llegaron hasta ella.

→ Si ningún grupo manifiesta haber encontrado una relación con potencias de 2, haremos que algún alumno complete la tabla en el pizarrón y analizaremos entre todos, la relación de la cantidad de veces que doblo el papel y la cantidad de capas que me quedan.

Sabemos que pueden surgir diversos modos de abordar el problema, pero todos conducen a la misma relación: la potencia de 2, por lo que nos aseguraremos de que todos lleguen a descubrir dicha relación para luego continuar haciendo una conclusión o un resumen de lo que dijeron los alumnos. Esto se abordará de la siguiente manera:

Primero la docente preguntará a los alumnos si servirá el bolsillo que eligieron al principio para guardar el papel doblado 20 veces, a lo que los alumnos podrían responder que sí o que no. Para poder terminar de contestar esta pregunta, pasaremos un video en el que se hacen relaciones entre la cantidad de capas obtenidas y el grosor del papel doblado, contrastando esto con la realidad. El vídeo se puede observar en el siguiente link (desde los 27 segundos hasta el final): <https://www.youtube.com/watch?v=25HUYfYnpqw>

Con esto se empezaría a notar el rápido crecimiento de la exponencial.

Luego de esto, la profesora expresaría lo siguiente:

“Viendo la manera en que resolvieron la actividad, podríamos coincidir en que está sumamente relacionada a las potencias de dos, donde lo que varía es el exponente. Entonces si quisiéramos calcular la cantidad de capas luego de doblar “x” veces el afiche serían... (los alumnos responderán 2 elevado a la “x” cantidad de capas) Si los alumnos no respondieron lo anterior haríamos esa afirmación en forma de pregunta para ellos”

Suponemos que debatir sobre lo que hicieron los alumnos nos llevaría 20 o 25 minutos.

De manera oral, invitaremos a los alumnos a analizar qué pasa ahora si en vez de doblar el papel por la mitad, lo doblamos en 3 partes iguales, o en 5, o en 10, etc. Luego de esto puede ocurrir lo siguiente:

- Si quedó claro el análisis realizado con la potencia de 2, es decir, que ese 2 equivale a doblar el papel por la mitad, los alumnos responderían rápidamente que si lo doblamos en 3, vamos a obtener 3 elevado a x, y así con los demás casos.

- En el caso que no suceda lo planteado en el ítem anterior, creemos que los alumnos comenzarán a doblar otro papel en 3, 5 o 10 partes, la cantidad de veces que sea necesario para completar la tabla y darse cuenta de la regularidad.

Luego de que quede claro de que la incógnita ahora queda expresada en el exponente, la profesora dirá que es necesario definir una nueva función que será quien contemple comportamientos como los vistos en la actividad ya resuelta (rápido crecimiento, incógnita en el exponente).

De esta manera escribiremos en la pizarra la primera definición de función exponencial:

Dado $a > 0$, $a \neq 1$, llamamos función exponencial de base a a la función definida por:

$$f(x) = a^x$$

Haremos que los alumnos la copien en sus carpetas y preguntaremos si tienen alguna duda sobre ella.

Preguntas que pueden llegar a surgir dada la definición:

- ¿Por qué a tiene que ser distinto de uno?

Respuesta docente: Notemos que si a es igual a uno, no importa qué valor tome x , la función siempre será igual a uno, entonces sería una función constante y no reflejaría el comportamiento que hemos observado en la actividad, es decir, dejaría de ser una función exponencial.

- ¿Por qué a tiene que ser mayor que cero?

Respuesta docente: En este caso haremos un contraejemplo que quede a la vista de los alumnos en el que no se pueda calcular esta función, como:

Si $a = -2$ y $x = \frac{1}{2} \rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = -2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}$ (no está definida dentro de los reales).

Si estas dos preguntas anteriores no surgen por parte de los alumnos, seremos nosotras (las docentes) quienes preguntaremos esto a los estudiantes.

Dar la definición y trabajar dudas de los alumnos nos llevaría entre 10 y 15 minutos.

Si queda tiempo concluiríamos la clase haciendo algunos comentarios. (Como por ejemplo el rápido crecimiento de la función, también haríamos notar a los alumnos que las funciones y la matemática en general se encuentran en cosas cotidianas como doblar un papel, el crecimiento de cierta bacteria y cómo combatirla, entre otras actividades que ya veremos más adelante).

Los abajo firmantes, miembros del Tribunal de Evaluación del Trabajo Final de Prácticas de *Metodología y Práctica de la Enseñanza*, damos Fe que el presente ejemplar impreso se corresponde con el aprobado por el Tribunal.



Universidad Nacional de Córdoba



FAMAF
Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

www.famaf.unc.edu.ar
Medina Allende s/n, Ciudad Universitaria
CP: X5000HUA, Córdoba, Argentina
Tel: +54 351 4334051 (rotativas)
Fax: +54 351 4334054