Álgebras de Hopf y Grupos Cuánticos

por Gastón Andrés García

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía y Física como parte
de los requerimientos para la obtención del grado de Doctor en Matemática de la

Universidad Nacional de Córdoba

Marzo de 2007

Director: Dr. Nicolás Andruskiewitsch

para Ana Inés y Lara

Índice general

Resumen

En esta tesis discutimos algunos resultados generales referentes al problema de clasificación de álgebras de Hopf de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k de característica cero. Dichos resultados son parte de tres trabajos [G], [AG], [AG2], estando el primero ya publicado.

Después de recordar en el Capítulo 1 definiciones básicas y algunos hechos conocidos, presentamos en el Capítulo 2 varios resultados sobre extensiones de álgebra de Hopf de dimensión finita que serán necesarios en los capítulos subsiguientes. Explícitamente, primero probamos que un álgebra de Hopf que es una extensión de un álgebra de Taft $T(q)$ de dimensión p^2 por un álgebra de grupo de dimensión p, con p un número primo impar y q una raíz de p-ésima de la unidad, es necesariamente punteada. Luego estudiamos extensiones centrales de álgebras de Hopf y mostramos cómo construir extensiones centrales de álgebras de Hopf a partir de una extensión central $B \hookrightarrow A \twoheadrightarrow H$ y dos epimorfismos $p : B \to K$ y $r : H \to L$. Más aún, describimos bajo ciertas hipótesis adicionales las clases de isomorfismos de este tipo de extensiones.

En el Capítulo 3 aplicamos los resultados obtenidos a las álgebras de Hopf H de dimensión p^3 sobre k. Según los grupos de elementos de tipo grupo de H y H^*, hay 10 casos posibles. Demostramos que en 8 de los 10 casos, se puede determinar la estructura del álgebra de Hopf. Además damos una clasificación parcial de las álgebras de Hopf cuasitriangulares de dimensión p^3 sobre k. En particular, probamos que toda álgebra de Hopf de cintas de dimensión p^3 sobre k es, o bien un álgebra de grupo, o bien un núcleo de Frobenius-Lusztig. Usando algunos resultados de [AN] y [BD] sobre cotas para la dimensión del primer término H_1 de la filtración corradical de H, finalizamos el capítulo dando la clasificación completa de las álgebras de Hopf cuasitriangulares de dimensión 27.

En el Capítulo 4 utilizamos la construcción de extensiones centrales para producir nuevos ejemplos de álgebras de Hopf de la misma dimensión no isomorfas entre sí, que forman parte de otro contraejemplo de la ya negada décima conjetura de Kaplansky: sea G un grupo de Lie conexo, simplemente conexo y semisimple sobre $\mathbb{C}$ con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, matriz de Cartan C y matriz simetrizada de Cartan CD. Sea $\ell \geq 3$ un número entero impar, coprimo con $\det CD$. Dada una inclusión σ de un grupo finito Γ en G y una raíz primitiva ℓ-ésima de la unidad ϵ, construimos una extensión central A_σ del álgebra de funciones $\mathbb{C}^\Gamma$ de Γ por el dual del núcleo de Frobenius-Lusztig $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$; A_σ es un cociente del álgebra de coordenadas cuantizada $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ y $\dim A_\sigma = |\Gamma|\ell^{\dim \mathfrak{g}}$. Si G es simple y $\sigma(\Gamma)$ no es central en G, obtenemos una familia infinita de álgebra de Hopf no isomorfas entre sí que son no semisimples, no punteadas y sus duales tampoco son punteados. Esto generaliza el resultado obtenido por E. Müller [Mu2] para $SL_2(\mathbb{C})$. Sin embargo, se sigue de resultados en [Mk5] que estas álgebras de Hopf son deformaciones por cociclos unas de otras. Cabe destacar que la construcción de tal familia requiere algunas preparaciones técnicas en la cohomología de Γ en un cierto subgrupo

$\mathbf{T}^{f\sigma}$ de un toro maximal fijo $\mathbf{T}$ de G, y la desigualdad

$$\dim G > \operatorname{rg} G + \dim M$$

para cualquier subgrupo reductivo maximal M de G. Como las subálgebras maximales de las álgebra de Lie simples fueron clasificadas por Dynkin, hemos probado esta desigualdad por inspección en las listas de [D1, D2]. Ver el Apéndice para más detalles.

Finalmente, usando algunas herramientas desarrolladas anteriormente, determinamos en el Capítulo 5 todos los subgrupos finitos de un grupo cuántico simple cuyo parámetro es una raíz de 1, generalizando así la clasificación de E. Müller para el caso de tipo A_n. Específicamente, primero mostramos cómo construir cocientes de $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ de dimensión finita y luego probamos que esta construcción es exhaustiva, es decir, todos los cocientes de $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ de dimensión finita se pueden construir de esta forma. Sean $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ una subálgebra de Cartan fija, Π la base del sistema de raíces $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ de $\mathfrak{g}$ con respecto a $\mathfrak{h}$ y $n = \operatorname{rg} \mathfrak{g}$. Brevemente, los cocientes están determinados por una colección de datos $\mathcal{D} = (I_+, I_-, N, \Gamma, \sigma, \delta)$ a la cual llamaremos *dato de subgrupo finito* donde

- $I_+ \subseteq \Pi$ e $I_- \subseteq -\Pi$. Estos conjuntos definen una subálgebra algebraica de Lie $\mathfrak{l}$ con subgrupo de Lie conexo L de G tal que $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{l}_-$ y $\mathfrak{l}_\pm = \sum_{\alpha \in \Psi_\pm} \mathfrak{g}_\alpha$ con $\Psi_\pm = \{\alpha \in \Phi : \operatorname{Sup} \alpha = I_\pm\}$. Sea $s = n - |I_+ \cup -I_-|$.
- N es un subgrupo de $(\mathbb{Z}/(\ell))^s$.
- Γ es un grupo finito.
- $\sigma : \Gamma \to L$ es un morfismo inyectivo de grupos.
- $\delta : N \to \widehat{\Gamma}$ es un morfismo de grupos.

Abstract

In this thesis we discuss some general results concerning the classification problem of finite dimensional Hopf algebras over an algebraically closed field k of characteristic zero. They are based on three articles [G], [AG], [AG2], being the first one already published.

After recalling the basic definitions and some known facts in Chapter 1, we present in Chapter 2 several results on extensions of finite-dimensional Hopf algebras which will be needed in the chapters thereafter. Explicitly, we prove first that a Hopf algebra which is an extension of a Taft algebra $T(q)$ of dimension p^2 by a group algebra of dimension p, with p an odd prime number and q a p-th root of unity, is necessarily pointed. Then we study central extensions of Hopf algebras and show how to construct central extensions of finite-dimensional Hopf algebras from a central extension $B \hookrightarrow A \twoheadrightarrow H$ and two epimorphisms $p : B \to K$ and $r : H \to L$. Moreover, we describe under certain conditions the classes of isomorphisms of this type of extensions.

Next we apply in Chapter 3 the obtained results to Hopf algebras H of dimension p^3 over k. There are 10 cases according to the group-like elements of H and H^*. We show that in 8 of the 10 cases, it is possible to determine the structure of the Hopf algebra. We also give a partial classification of the quasitriangular Hopf algebras of dimension p^3 over k. In particular, we prove that every ribbon Hopf algebra of dimension p^3 over k is either a group algebra or a Frobenius-Lusztig kernel. Using some results from [AN] and [BD] on bounds for the dimension of the first term H_1 in the coradical filtration of H, we end Chapter 3 by giving the complete classification of the quasitriangular Hopf algebras of dimension 27.

In Chapter 4 we use the construction of central extensions of finite-dimensional Hopf algebras to produce new examples of non-isomorphic Hopf algebras of the same dimension, which are another counter-example of the already negated Kaplansky 10-th conjecture: let G be a connected, simply connected complex semisimple Lie group with Lie algebra $\mathfrak{g}$, Cartan matrix C and symmetrized Cartan matrix CD. Let $\ell \geq 3$ be an odd integer, relatively prime to $\det CD$. Given an embedding σ of a finite group Γ on G and a primitive ℓ-th root of unity ϵ, we construct a central extension A_σ of the function algebra $\mathbb{C}^\Gamma$ by the dual of the Frobenius-Lusztig kernel $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$; A_σ is a quotient of the quantized coordinate algebra $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ and $\dim A_\sigma = |\Gamma|\ell^{\dim \mathfrak{g}}$. If G is simple and $\sigma(\Gamma)$ is not central in G, then we obtain an infinite family of pairwise non-isomorphic Hopf algebras which are non-semisimple, non-pointed and their duals are also non-pointed. This generalizes the result obtained by E. Müller [Mu2] for $SL_2(\mathbb{C})$. Nevertheless, it follows from results in [Mk5] that these Hopf algebras are cocycle deformations of each other. We notice that the construction of such a family requires some technical preparations on the cohomology of Γ in a certain subgroup $\mathbf{T}^{f\sigma}$ of a fixed maximal torus $\mathbf{T}$ of G, and the inequality

$$\dim G > \operatorname{rg} G + \dim M$$

for any maximal reductive subgroup M of G. As the maximal subalgebras of the simple Lie algebras were classified by Dynkin, we have proved this by inspection in the lists of [D1, D2]. See the Appendix for details.

Finally, using the machinery developed in the previous chapters, we determine in Chapter 5 all finite subgroups of a simple quantum group at roots of 1, generalizing in this way the classification of E. Müller for the case of type A_n. Specifically, we show first how to construct finite-dimensional quotients of $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ and then we prove that this construction is exhaustive, that is, all finite-dimensional quotients of $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ can be constructed in such a way. Let $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ be a fixed Cartan subalgebra, Π the basis of the root system $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ of $\mathfrak{g}$ with respect to $\mathfrak{h}$ and $n = \operatorname{rg} \mathfrak{g}$. Briefly, every quotient is determined by a 6-tuple $\mathcal{D} = (I_+, I_-, N, \Gamma, \sigma, \delta)$ which will be called *finite subgroup datum* where

- $I_+ \subseteq \Pi$ and $I_- \subseteq -\Pi$. This sets define an algebraic Lie subalgebra $\mathfrak{l}$ with connected Lie subgroup L of G such that $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{l}_-$ and $\mathfrak{l}_\pm = \sum_{\alpha \in \Psi_\pm} \mathfrak{g}_\alpha$ with $\Psi_\pm = \{\alpha \in \Phi : \operatorname{Sup} \alpha = I_\pm\}$. Let $s = n - |I_+ \cup -I_-|$
- N is a subgroup of $(\mathbb{Z}/(\ell))^s$.
- Γ is a finite group.
- $\sigma : \Gamma \to L$ is an injective group homomorphism.
- $\delta : N \to \widehat{\Gamma}$ is a group homomorphism.

Agradecimientos

Esta tesis ha sido realizada durante mi estadía en tres universidades: la Universidad de Buenos Aires (UBA), la Universidad de Munich, Alemania (Ludwig-Maximilians Universität, LMU) y la Universidad de Córdoba (UNC); siempre bajo la dirección de Nicolás Andruskiewitsch. Por ello, quiero agradecerle a Nicolás por haberme guiado de manera excelente durante todos estos años. Creo que sus aportes fueron fundamentales para mi formación como matemático. También quiero agradecer profundamente a María Ofelia Ronco y a Hans-Jürgen Schneider, pues he aprendido mucho de ellos y me han apoyado constantemente durante mis estadías en Buenos Aires y en Munich.

Durante mi doctorado he tenido el placer de conocer a varias personas que han influido de manera notable tanto en mi formación académica como humana. Es por tal motivo que quisiera agradecerle a Matías Graña, Fernando Cukierman y Eduardo Dubuc de la UBA, a Stefan Ufer, Daniela Hobst, York Sommerhäuser, Peter Schauenburg de la LMU y a Martín Mombelli, Fernando Fantino, César Galindo, Sonia Natale, Jorge Vargas, Roberto Miatello y Leandro Cagliero de la UNC.

Por otro lado, creo que sin el apoyo de personas por fuera de la matemática, no hubiera podido realizar esta tesis de manera eficiente; sobre todo en Munich. Es por ello que me siento en deuda tanto con mi esposa Ana Inés, por haberme apoyado incondicionalmente y por haberme acompañado en todo momento, como con mi familia, en especial con mi madre, por haberme dado tanto sin pedir nada a cambio. También han sido para mí de gran apoyo Guillermo M., Guillermo F., Aníbal A., Martín M., Pablo A., Leandro Z., Pablo G., Julio R., Julian F-B., Marcus, Flo, Martin, Jens, Vannesa, Mario, Rudi, Karli, Christian, Pablo R., Mauricio T., Marcos G., Sebastián S., Ricardo P., Pablo R., Jesus O. y Agustín G.

Finalmente quisiera agradecerle a la Agencia de Intercambio Académico Alemán (DAAD) por brindarme el apoyo para poder estudiar en Munich, y a la Universidad de Buenos Aires y al CONICET por haberme hecho posible el estudio de doctorado en el país.

Introducción

Las álgebras de Hopf fueron introducidas en la década del 50. Desde los 60, han sido estudiadas sistemáticamente, en primer lugar en relación con grupos algebraicos (han sido especialmente eficientes en la descripción de fenómenos típicos de característica positiva), y más adelante como objetos de interés en sí mismos. Ver por ejemplo [Sw].

Los grupos cuánticos, introducidos en 1986 por Drinfeld en su Conferencia [Dr], forman cierta clase particular de álgebras de Hopf. Se pueden presentar a partir de deformaciones en un parámetro de álgebras universales de álgebras de Lie o de álgebras de funciones regulares de grupos algebraicos afines. Aparecen naturalmente codificando la simetría de categorías trenzadas, esto es, categorías munidas de un producto tensorial asociativo y conmutativo. El punto distinguido aquí es que la transformación de conmutatividad

$$c : V \otimes W \to W \otimes V$$

no es involutiva. Es de este modo que se los pueden encontrar en diversas áreas relacionadas con la teoría conforme de campos; por ejemplo, en invariantes de variedades topológicas de dimensión baja.

Si el parámetro que aparece en la definición de los grupos cuánticos se especializa en una raíz de la unidad, se obtiene una conexión con grupos algebraicos sobre cuerpos de característica positiva. Como resultado de sus investigaciones sobre este tema, Lusztig introdujo familias de álgebras de Hopf de dimensión finita en [L1, L2]; estas álgebras se conocen como núcleos de Frobenius-Lusztig. En los últimos quince años, los grupos cuánticos han atraído el interés de matemáticos con diversas formaciones e intereses. En particular, ha habido gran interés en problemas de clasificación de álgebras de Hopf; ver por ejemplo [A2].

El estudio de los problemas de clasificación de álgebras de Hopf de dimensión finita se encarrila por dos vías muy diferentes: las semisimples y las no semisimples. Los resultados conocidos hasta ahora, y en particular los obtenidos en esta tesis, ponen de relieve la estrecha relación entre las álgebras de Hopf tanto con los grupos finitos como con las álgebras de Lie. Por un lado, los grupos finitos se relacionan estrechamente con las álgebras de Hopf semisimples y son de gran importancia en el estudio de las álgebras de Hopf no semisimples cuya dimensión es una potencia de un número primo. Por otro lado, ejemplos como los núcleos de Frobenius-Lusztig muestran la interacción de la teoría de Lie con la teoría de álgebras de Hopf no semisimples. Una de las estrategias para estudiar el caso no semisimple es mirar la posición relativa del corradical, es decir, de la mayor subcoálgebra cosemisimple. Específicamente, en [AS3, AS5] se consideró una subclase particular de las álgebras de Hopf no semisimples: las "punteadas", donde el corradical es una subálgebra de Hopf semisimple, y se mostró que determinadas clases de ellas están constituidas por variaciones de núcleos de Frobenius-Lusztig. El método para clasificar álgebras de Hopf punteadas, conocido como "método del levante", fue introducido por Andruskiewitsch y Schneider, ver el artículo panorámico [AS4].

$$\begin{tikzcd}
 & \text{semisimples} & \\
\begin{array}{c}\text{Álgebras de Hopf}\\ \text{de dim. finita}\end{array} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \text{punteadas} \\
 & \text{no semisimples} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & \text{no punteadas}
\end{tikzcd}$$

En esta tesis aportamos algunos resultados referentes al problema de clasificación de álgebras de Hopf de dimensión finita sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado de característica cero. Para algunos casos en particular, supondremos que $k = \mathbb{C}$. Gran parte de esta tesis se encuentra en los trabajos [G], [AG] y [AG2]. En el primero, ya publicado, se dan varios resultados parciales sobre la clasificación de álgebras de Hopf de dimensión p^3, con p un primo impar. Éstos nos llevan a conjeturar que no existe álgebra de Hopf de dimensión p^3 que sea no semisimple, no punteada y su dual sea no punteado. Sin embargo, en el segundo trabajo se muestra que esto es falso si la dimensión es distinta de p^3, pues allí se construye una familia infinita de álgebras de Hopf que cumplen con esas propiedades. En el tercer trabajo se determinan todos los subgrupos finitos de un grupo cuántico simple cuyo parámetro es una raíz de 1, generalizando de esta manera un resultado de E. Müller [Mu2] para grupos de tipo A_n. A continuación hacemos un resumen del contenido de esta tesis:

Sea p un número primo impar y sea $\mathbb{G}_p$ el grupo cíclico de raíces p-ésimas de la unidad. Notemos por $T(q)$ al álgebra de Taft de parámetro $q \in \mathbb{G}_p \setminus \{1\}$, ver Ejemplo 1.1.16. Las álgebras de Hopf de dimensión 8 fueron clasificadas por Williams [W]. Masuoka [Mk2] y Stefan [St] dieron más tarde una demostración diferente de este resultado. En general, el problema de clasificación de álgebras de Hopf sobre k de dimensión p^3 sigue abierto. Sin embargo, la clasificación es conocida para álgebras de Hopf semisimples o punteadas. Las álgebras de Hopf semisimples de dimensión p^3 fueron clasificadas por Masuoka [Mk1]; hay exactamente $p+8$ clases de isomorfismos, a saber:

(a) tres álgebras de grupo de grupos abelianos.

(b) dos álgebras de grupo de grupos no abelianos, y sus duales.

(c) $p+1$ álgebras de Hopf autoduales, las cuales no son conmutativas ni coconmutativas y están dadas por extensiones de $k[\mathbb{Z}/(p) \times \mathbb{Z}/(p)]$ por $k[\mathbb{Z}/(p)]$.

Las álgebras de Hopf punteadas no semisimples de dimensión p^3 fueron clasificadas en [AS3], [CD] y [SvO], por diferentes métodos. La lista explícita es la siguiente, donde $q \in \mathbb{G}_p \setminus \{1\}$:

(d) el álgebra de Hopf dada por el producto tensorial $T(q) \otimes k[\mathbb{Z}/(p)]$.

(e) $\widetilde{T(q)} := k < g,\ x|\ gxg^{-1} = q^{1/p}x,\ g^{p^2} = 1,\ x^p = 0 >$ con $q^{1/p}$ una raíz p-ésimas de q y con el coproducto determinado por $\Delta(x) = x \otimes g^p + 1 \otimes x,\ \Delta(g) = g \otimes g$.

(f) $\widehat{T(q)} := k < g,\ x|\ gxg^{-1} = qx,\ g^{p^2} = 1,\ x^p = 0 >$, con el coproducto determinado por $\Delta(x) = x \otimes g + 1 \otimes x,\ \Delta(g) = g \otimes g$.

(g) $\mathbf{r}(q) := k < g,\ x|\ gxg^{-1} = qx,\ g^{p^2} = 1,\ x^p = 1 - g^p >$, con el coproducto determinado por $\Delta(x) = x \otimes g + 1 \otimes x,\ \Delta(g) = g \otimes g$.

(h) el núcleo de Frobenius-Lusztig de $\mathfrak{sl}_2$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_q(\mathfrak{sl}_2) := k < g,\ x,\ y|\ gxg^{-1} = q^2x,\ gyg^{-1} = q^{-2}y,\ g^p = 1,\\ x^p = 0,\ y^p = 0,\ xy - yx = g - g^{-1} >,\end{aligned}$$

con el coproducto determinado por $\Delta(x) = x\otimes g+1\otimes x,\ \Delta(y) = y\otimes 1+g^{-1}\otimes y,\ \Delta(g) = g\otimes g$.

(i) el álgebra de Hopf *libro*

$$\begin{aligned}\mathbf{h}(q, m) := k < g,\ x,\ y|\ gxg^{-1} = qx,\ gyg^{-1} = q^m y,\\ g^p = 1,\ x^p = 0,\ y^p = 0,\ xy - yx = 0 >,\end{aligned}$$

para todo $m \in \mathbb{Z}/(p) \smallsetminus \{0\}$ y con el coproducto determinado por $\Delta(x) = x\otimes g+1\otimes x,\ \Delta(y) = y \otimes 1 + g^m \otimes y,\ \Delta(g) = g \otimes g$.

Más aún, existen dos ejemplos de álgebras de Hopf de dimensión p^3 que son no semisimples y no punteadas, a saber

(j) el dual del núcleo de Frobenius-Lusztig, $\mathbf{u}_q(\mathfrak{sl}_2)^*$.

(k) el dual del caso (g), $\mathbf{r}(q)^*$.

No existen isomorfismos entre las diferentes álgebras de Hopf de la lista. Más aún, las álgebras de Hopf de los casos $(d), \dots, (k)$ son no isomorfas para distintos valores de $q \in \mathbb{G}_p \smallsetminus \{1\}$, excepto para las álgebras libro, donde $\mathbf{h}(q, m)$ es isomorfa a $\mathbf{h}(q^{-m^2}, m^{-1})$. En particular, el álgebra de Hopf $\widetilde{T(q)}$ no depende, salvo isomorfismos, de la elección de la raíz p-ésimas de q. El álgebra de Hopf $\mathbf{r}(q)$ fue considerada por primera vez por Radford, ver [AS3], [R6].

Por los resultados descriptos anteriormente, conjeturamos lo siguiente.

Conjetura 1. Toda álgebra de Hopf H de dimensión p^3 sobre k es semisimple o punteada o su dual es punteado, esto es, H es una de las álgebras de Hopf de la lista $(a), \dots, (k)$.

En esta tesis probamos que esta conjetura es cierta bajo algunas hipótesis adicionales. Por ejemplo, en el Teorema 2.2.1 y el Corolario 2.2.2 mostramos que los módulos simples de un producto cruzado de un álgebra de Taft de dimensión p^2 con un álgebra de grupo de orden p son de dimensión 1, es decir, el álgebra dual del producto cruzado es punteada.

En el Capítulo 3 discutimos algunos resultados generales sobre álgebras de Hopf de dimensión finita y luego los aplicamos para el caso de las álgebras de Hopf de dimensión p^3. De acuerdo a los elementos de tipo grupo de H y H^* existen sólo 10 casos posibles, salvo dualidades. De esos 10 casos, mostramos que en 8 de ellos es posible determinar la estructura del álgebra de Hopf.

Diremos que un álgebra de Hopf H de dimensión p^3 es *extraña* si H es simple como álgebra de Hopf, no semisimple y si H y H^* no son punteadas. Se verá que un álgebra de Hopf H de dimensión p^3 es isomorfa a un álgebra de Hopf de la lista (a), $\dots$, (k), o

(I) H es extraña, $G(H) \simeq \mathbb{Z}/(p)$ y $G(H^*) = 1$, o

(I*) H es extraña, $G(H) = 1$ y $G(H^*) \simeq \mathbb{Z}/(p)$, o

(II) H es extraña, $G(H) \simeq \mathbb{Z}/(p)$, y $G(H^*) \simeq \mathbb{Z}/(p)$.

Cabe destacar que no se sabe si un álgebra de Hopf extraña existe o no. Claramente, el caso (I*) es dual a (I) y el caso (II) es autodual. Por lo tanto, sólo tendremos en cuenta los casos (I) y (II).

En la Subsección 3.1.1, se estudian álgebras de Hopf de dimensión p^3 no semisimples tales que $G(H) \simeq G(H^*) \simeq \mathbb{Z}/(p)$. El orden de la antípoda de tales álgebras de Hopf es necesariamente $2p$ o $4p$. Si el orden es $2p$, entonces H es una bosonización del álgebra de grupo $k[G(H)]$. En este caso, creemos que H es isomorfa a un álgebra de Hopf libro $\mathbf{h}(q,m)$, para algún $q \in \mathbb{G}_p \setminus \{1\}$, y $m \in \mathbb{Z}/(p) \setminus \{0\}$. Si el orden es $4p$, entonces H satisface (II), y todos los elementos casi-primitivos de H son triviales, es decir, están contenidos en $k[G(H)]$. Radford y Schneider [RS2] conjeturaron que el cuadrado de la antípoda de cualquier álgebra de Hopf de dimensión finita debe satisfacer una cierta condición, la cual llamaron la *condición fuerte de anulación* de la traza. Si H es un álgebra de Hopf de dimensión finita y B es la única subálgebra de Hopf semisimple maximal de H, entonces se deduce de la conjetura que el orden del cuadrado de la antípoda de H debe dividir a $\dim H/\dim B$, ver [RS2, Thm. 6]. En particular, si la conjetura es cierta y la dimensión de H es p^3 y $|G(H)| = |G(H^*)| = p$ o $|G(H)| = p$ y $|G(H^*)| = 1$, entonces el orden de la antípoda debe ser $2p$.

Por otro lado, se sabe que los núcleos de Frobenius-Lusztig $\mathbf{u}_q(\mathfrak{sl}_2)$ y las álgebras de grupo admiten una estructura cuasitriangular, ver por ejemplo [K, IX. 7]. En la Sección 3.2 probamos que éstas son las únicas álgebras Hopf cuasitriangulares contenidas en la lista. Probamos además en el Teorema 3.2.10 que no existen álgebras de Hopf cuasitriangulares de dimensión p^3 que satisfagan la condición (I). Específicamente, si H es un álgebra de Hopf cuasitriangular de dimensión p^3, entonces

(i) H es isomorfa a un álgebra de grupo o a $\mathbf{u}_q(\mathfrak{sl}_2)$, o

(ii) H satisface (II) y la aplicación $f_R : H^{*cop} \to H$ es un isomorfismo. Más aún, H y H^* son cuasitriangulares minimales, $1 =< \beta, x >$, para todo $\beta \in G(H^*)$, $x \in G(H)$ y $\operatorname{ord} \mathcal{S} = 4p$.

Una consecuencia de esto es el Corolario 3.2.11, el cual nos dice que toda álgebra de Hopf de cintas de dimensión p^3 es, o bien un álgebra de grupo, o bien un núcleo de Frobenius-Lusztig. Además, usando algunos resultados de [AN] y [BD] sobre acotaciones para la dimensión del primer término H_1 de la filtración corradical de H, clasificamos las álgebras de Hopf cuasitriangulares de dimensión 27.

En 1975, I. Kaplansky conjeturó que las álgebras de Hopf de una dimensión fija son finitas salvo isomorfismos. A fines de los 90, varios autores han demostrado que esta conjetura es falsa. Por diferentes métodos se ha construido familias infinitas de álgebras de Hopf no isomorfas. En esta dirección, los ejemplos dados por E. Müller [Mu2] difieren bastante de los otros. Estas álgebras de Hopf son extensiones centrales no triviales de álgebras de funciones $\mathbb{C}^\Gamma$ de subgrupos finitos Γ de SL_2 de orden ℓ, por el dual del núcleo de Frobenius-Lusztig $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{sl}_2)$, donde $\ell \geq 3$ es un número entero impar y ϵ es una raíz ℓ-ésima primitiva de la unidad. Además éstas resultan ser no semisimples, no punteadas y sus duales tampoco son punteados. Más aún, son cocientes del álgebra de coordenadas cuantizada $\mathcal{O}_\epsilon(SL_2)$ de SL_2 de dimensión finita y sus dimensiones son ℓ^4.

En este trabajo generalizamos la construcción dada por E. Müller a cualquier grupo de Lie G conexo, simplemente conexo y semisimple sobre $\mathbb{C}$. Esto es, dada cualquier inclusión $\sigma : \Gamma \to G$ de un grupo finito Γ en G, construimos una familia infinita de álgebras de Hopf A_σ de dimensión finita que son no isomorfas entre sí. Éstas son extensiones centrales del álgebra de funciones $\mathbb{C}^\Gamma$ por el dual del núcleo de Frobenius-Lusztig $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$, donde $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie semisimple asociada a G. De este hecho se sigue el título del capítulo, puesto que como es usual, se considera la categoría de grupos cuánticos como la categoría que es opuesta a la categoría de álgebras de Hopf. En el caso que G es simple y $\sigma(\Gamma)$ no es central en G obtenemos una familia infinita de álgebras de Hopf no semisimples y no punteadas de dimensión $|\Gamma|\ell^{\dim \mathfrak{g}}$, cuyos duales tampoco son punteados. Análogamente al caso de SL_2, estas álgebras son cocientes de dimensión finita del álgebra de coordenadas cuantizada $\mathcal{O}_\epsilon(G)$.

Para construir este tipo de extensiones describimos primero cómo construir extensiones centrales de álgebras de Hopf de dimensión finita a partir de una sucesión exacta de álgebras de Hopf

$$1 \to B \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} H \to 1,$$

y dos epimorfismos de álgebras de Hopf $p : B \to K$ y $r : H \to L$, siendo B central en A.

Aunque sólo utilicemos en esta tesis algunos resultados de este proceso, esta construcción la hacemos en general y a través de dos pasos. Primero usamos la información dada por el epimorfismo $p : B \to K$: sea $\mathcal{J} = \operatorname{Ker} p$ y $(\mathcal{J}) = A\mathcal{J}$. Entonces $(\mathcal{J})$ es un ideal de Hopf de A y el álgebra de Hopf $A_p = A/(\mathcal{J})$ está dada por un *pushout* y satisface el siguiente diagrama conmutativo, cuyas filas son sucesiones exactas de álgebras de Hopf y B, K son centrales en A y A_p respectivamente:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & B \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "p"'] & A \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "q"] & H \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & K \arrow[r, "j"] & A_p \arrow[r, "\pi_p"] & H \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

Para el segundo paso, suponemos que K y H son de dimensión finita e introducimos al epimorfismo $r : H \to L$ en el procedimiento. Al ser $\dim K$ y $\dim H$ finitas, se puede ver que la H-extensión A_p de K es cleft, i.e. existe un morfismo de K-módulos $\xi : A_p \to K$ que es inversible con respecto a la convolución y $\varepsilon\xi = \varepsilon$.

Sean $M_r = q(\operatorname{Ker} r\pi) = \operatorname{Ker} r\pi_p$ e $I_{r,\xi}$ el menor ideal de Hopf de A_p que contiene al conjunto $(\mathrm{id} - j\xi)(M_r)$. Entonces $\mathcal{I}_{r,\xi} = I_{r,\xi} \cap K$ es un ideal de Hopf de K y el álgebra de Hopf $A_{p,r,\xi} = A_p/I_{r,\xi}$ es parte de una sucesión exacta de álgebras de Hopf de dimensión finita

$$1 \to K_{r,\xi} \xrightarrow{j_\xi} A_{p,r,\xi} \xrightarrow{\pi_\xi} L \to 1,$$

donde $K_{r,\xi} = K/\mathcal{I}_{r,\xi}$ es central en $A_{p,r,\xi}$.

Luego de estos dos pasos se obtiene un álgebra de Hopf $A_{p,r,\xi}$ de dimensión finita asociada a los epimorfismos $p : B \to K$, $r : H \to L$, y la retracción $\xi : A_p \to K$, esto es, a una terna (p, r, ξ) que hace el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & B \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "p"'] & A \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "q"] & H \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & K \arrow[r, shift left, "j"] \arrow[d, "p_\xi"'] & A_p \arrow[r, shift right, "\pi_p"'] \arrow[l, shift left, dashed, "\xi"] \arrow[d, "q_\xi"] & H \arrow[r] \arrow[l, shift right, dashed, "\gamma"'] \arrow[d, "r"] & 1 \\
1 \arrow[r] & K_{r,\xi} \arrow[r, "j_\xi"] & A_{p,r,\xi} \arrow[r, "\pi_\xi"] & L \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

Posteriormente, aplicamos la primera construcción a un caso concreto. Sean G un grupo de Lie conexo, simplemente conexo y semisimple sobre $\mathbb{C}$, $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie con matriz de Cartan C y matriz simetrizada de Cartan CD. Sea $\ell \geq 3$ un número natural impar, coprimo con $\det CD$ y sea ϵ una raíz ℓ-ésima primitiva de la unidad. El álgebra de coordenadas cuantizada $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ de G en ϵ es una extensión central de $\mathcal{O}(G)$, el álgebra de funciones coordenadas sobre G, por el álgebra de Hopf $H = \mathcal{O}_\epsilon(G)/\mathcal{O}(G)^+\mathcal{O}_\epsilon(G)$. Esta álgebra de Hopf H resulta ser isomorfa al dual del núcleo de Frobenius-Lusztig $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ en ϵ y $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ es parte de una sucesión exacta de álgebras de Hopf

$$1 \to \mathcal{O}(G) \xrightarrow{\iota} \mathcal{O}_\epsilon(G) \xrightarrow{\pi} \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^* \to 1.$$

La inclusión $\mathcal{O}(G) \xrightarrow{\iota} \mathcal{O}_\epsilon(G)$ está asociada al morfismo cuántico de Frobenius, de allí el nombre de $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$. Más aún, existe un toro maximal fijo $\mathbf{T} \subseteq G$ asociado a esta inclusión, ver Subsección 4.1.2.

Si notamos $A = \mathcal{O}_\epsilon(G)$, $B = \mathcal{O}(G)$ y $H = \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^*$, dada una inclusión σ de un grupo finito Γ en G y usando la primera construcción se obtiene una extensión central A_σ del álgebra de funciones $\mathbb{C}^\Gamma$ por el dual del núcleo de Frobenius-Lusztig $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$; ésta viene dada por la sucesión exacta

$$1 \to \mathbb{C}^\Gamma \to A_\sigma \to \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^* \to 1.$$

Además, A_σ es un cociente del álgebra de coordenadas cuantizada $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ y $\dim A_\sigma = |\Gamma|\ell^{\dim \mathfrak{g}}$.

Seguidamente estudiamos las clases de isomorfismos de este tipo de extensiones. Suponiendo que G es simple, mostramos en el Teorema 4.2.20 que el conjunto de isomorfismos de álgebras de Hopf de las extensiones centrales A_σ inducen una relación de equivalencia en el conjunto $\mathrm{Emb}(\Gamma, G)$ de inclusiones de Γ en G. Esta equivalencia está dada por una terna (τ, f, v), donde $\tau \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$, f pertenece a un subgrupo $\mathrm{qAut}(G)$ de $\mathrm{Aut}(G)$ y v es un 1-cociclo con respecto a la cohomología de Γ en un subgrupo $\mathbf{T}^{f\sigma}$ del toro maximal $\mathbf{T}$ de G fijado por la inclusión ι. Sea $\sigma \in \mathrm{Emb}(\Gamma, G)$ y supongamos que $\sigma(\Gamma)$ no es central en G. En el Teorema 4.2.23 mostramos que la inclusión σ da lugar a una familia infinita de álgebras de Hopf A_{σ_i} no isomorfas entre sí, que son no semisimples, no punteadas, de dimensión $|\Gamma|\ell^{\dim \mathfrak{g}}$ y sus duales tampoco son punteados. Esto generaliza el resultado obtenido por E. Müller [Mu2] para $SL_2(\mathbb{C})$. Sin embargo, se sigue de resultados en [Mk5] que estas álgebras de Hopf son deformaciones por cociclos unas de otras. Cabe destacar que la construcción de tal familia requiere algunas preparaciones técnicas en la cohomología de Γ en $\mathbf{T}^{f\sigma}$ y la desigualdad

$$\dim G > \mathrm{rg}\, G + \dim M$$

para cualquier subgrupo reductivo maximal M de G. Como las subálgebras maximales de las álgebra de Lie simples fueron clasificadas por Dynkin, hemos probado esta desigualdad por inspección en las listas de [D1, D2]. Ver el Apéndice para mas detalles.

Finalmente, usando las herramientas desarrolladas anteriormente, determinamos en el Capítulo 5 *todos* los subgrupos finitos de un grupo cuántico simple cuyo parámetro es una raíz de 1, generalizando así la clasificación de E. Müller [Mu2] para el caso de tipo A_n. Sean $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ una subálgebra de Cartan fija, Π la base del sistema de raíces $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ de $\mathfrak{g}$ con respecto a $\mathfrak{h}$ y $n = \operatorname{rg} \mathfrak{g}$. Explícitamente, probaremos que todo cociente de dimensión finita de $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ está determinado por una colección de datos $\mathcal{D} = (I_+, I_-, N, \Gamma, \sigma, \delta)$ a la cual llamaremos *dato de subgrupo finito* donde

- $I_+ \subseteq \Pi$ e $I_- \subseteq -\Pi$. Estos conjuntos definen una subálgebra algebraica de Lie $\mathfrak{l}$ con subgrupo de Lie conexo L de G tal que $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{l}_-$ y $\mathfrak{l}_\pm = \sum_{\alpha \in \Psi_\pm} \mathfrak{g}_\alpha$ con $\Psi_\pm = \{\alpha \in \Phi : \operatorname{Sup} \alpha = I_\pm\}$. Sea $s = n - |I_+ \cup -I_-|$.
- N es un subgrupo de $(\mathbb{Z}/(\ell))^s$.
- Γ es un grupo finito.
- $\sigma : \Gamma \to L$ es un morfismo inyectivo de grupos.
- $\delta : N \to \widehat{\Gamma}$ es un morfismo de grupos.

Para hacerlo procedemos de la siguiente manera: en la primera sección se determinan todas las subálgebras de Hopf de $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$, ver [MuII]. En la segunda sección se construyen cocientes de dimensión finita de $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ sobre el cuerpo $\mathbb{Q}(\epsilon)$ y en la tercera sección se muestra que esta construcción es exhaustiva, es decir, *todos* los cocientes de $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ de dimensión finita son de esta forma.

Brevemente, todo cociente de álgebras de Hopf $r : \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^* \to H$ está determinado por una terna (Σ, I_+, I_-), donde I_+ e I_- son como más arriba y Σ es un subgrupo de $(\mathbb{Z}/(\ell))^n$. Usando esta terna se construyen subálgebras de Hopf $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{l}) \subseteq \Gamma_\epsilon(\mathfrak{g})$ y $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l}) \subseteq \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ y un subgrupo conexo L de G tales que $\mathfrak{l}$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ con $\operatorname{Lie}(L) = \mathfrak{l}$. Así, de éstas álgebras de Hopf se obtienen subálgebras de Hopf $\mathcal{O}(L) \subseteq \mathcal{O}(G)$ y $\mathcal{O}_\epsilon(L) \subseteq \mathcal{O}_\epsilon(G)$ tales que el siguiente diagrama es un diagrama conmutativo de sucesiones exactas de álgebras de Hopf:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathcal{O}(G) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\mathrm{res}"] & \mathcal{O}_\epsilon(G) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\mathrm{Res}"] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^* \arrow[r] \arrow[d, "P"] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathcal{O}(L) \arrow[r, "\iota_L"] & \mathcal{O}_\epsilon(L) \arrow[r, "\pi_L"] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^* \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Luego, si $\sigma : \Gamma \to G$ es una inclusión y $\sigma(\Gamma) \subseteq L$, se aplica la construcción *pushout* dada en la Sección 2.3, obteniendo un álgebra de Hopf $A_{\epsilon,\mathfrak{l},\sigma}$ de dimensión finita que es una extensión de $\mathbb{C}^\Gamma$ por $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^*$:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathcal{O}(G) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\mathrm{res}"'] & \mathcal{O}_\epsilon(G) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\mathrm{Res}"] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^* \arrow[r] \arrow[d, "P"] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathcal{O}(L) \arrow[r, "\iota_L"] \arrow[d, "{}^t\sigma"'] & \mathcal{O}_\epsilon(L) \arrow[r, "\pi_L"] \arrow[d, "s"] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^* \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathbb{C}^\Gamma \arrow[r, "j"] & A_{\epsilon,\mathfrak{l},\sigma} \arrow[r, "\bar{\pi}"] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^* \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

Finalmente, para cada morfismo de grupos $\delta : N \to \widehat{\Gamma}$, donde N es un grupo abeliano asociado a Σ (ver Observación 5.2.11) y $\widehat{\Gamma}$ es el grupo de caracteres de Γ, se construye un ideal de Hopf J_δ de $A_{\epsilon,\mathfrak{l},\sigma}$ tal que el álgebra de Hopf $A_{\mathcal{D}} := A_{\epsilon,\mathfrak{l},\sigma}/J_\delta$ es una extensión de $\mathbb{C}^\Gamma$ por $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^*$, tiene dimensión $|\Gamma| \dim H$, es un cociente de $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ y encaja en el siguiente diagrama de sucesiones exactas de álgebras de Hopf

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathcal{O}(G) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\mathrm{res}"'] & \mathcal{O}_\epsilon(G) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\mathrm{Res}"] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^* \arrow[r] \arrow[d, "P"] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathcal{O}(L) \arrow[r, "\iota_L"] \arrow[d, "t_\sigma"'] & \mathcal{O}_\epsilon(L) \arrow[r, "\pi_L"] \arrow[d, "s"] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^* \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathbb{C}^\Gamma \arrow[r, "j"] \arrow[d, equal] & A_{\epsilon,\mathfrak{l},\sigma} \arrow[r, "\bar{\pi}"] \arrow[d, "t"] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^* \arrow[r] \arrow[d, "v"] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathbb{C}^\Gamma \arrow[r, "\hat{\iota}"] & A_{\mathcal{D}} \arrow[r, "\hat{\pi}"] & H \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

Para probar que todo cociente de $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ se puede construir de esta manera son cruciales los siguientes hechos: todo cociente de A de $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ encaja en una sucesión exacta central y se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathcal{O}(G) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "t_\sigma"'] & \mathcal{O}_\epsilon(G) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "q"] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^* \arrow[r] \arrow[d, "r"] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathbb{C}^\Gamma \arrow[r, "\hat{\iota}"] & A \arrow[r, "\hat{\pi}"] & H \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

Más aún, por la descripción de las subálgebras de Hopf de $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$, H resulta ser un cociente de $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^*$ y el diagrama anterior se factoriza de la siguiente manera

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathcal{O}(G) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\mathrm{res}"'] \arrow[dd, dotted, bend right, "t_\sigma"'] & \mathcal{O}_\epsilon(G) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\mathrm{Res}"] \arrow[dd, dotted, bend right, "q"'] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^* \arrow[r] \arrow[d, "P"'] \arrow[dd, dotted, bend left, "r"] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathcal{O}(L) \arrow[r, "\iota_L"] \arrow[d, "u"] & \mathcal{O}_\epsilon(L) \arrow[r, "\pi_L"] \arrow[d, "w"] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^* \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathbb{C}^\Gamma \arrow[r, "\hat{\iota}"] & A \arrow[r, "\hat{\pi}"] & H \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

Al ser el álgebra de Hopf $A_{\epsilon,\mathfrak{l},\sigma}$ un *pushout*, se ve que A es el cociente de $A_{\epsilon,\mathfrak{l},\sigma}$ por un ideal de Hopf J_δ, para cierto morfismo de grupos δ.

La tesis está organizada de la siguiente manera. En el Capítulo 1 recordamos definiciones y resultados básicos de la teoría de álgebras de Hopf y de cohomología de grupos.

En el Capítulo 2 desarrollamos algunas herramientas necesarias para probar los resultados mencionados anteriormente. En particular, se estudian algunos hechos generales sobre extensiones de álgebras de Hopf. Entre ellos mostramos que toda álgebra de Hopf que es una extensión de una extensión de un álgebra de Taft $T(q)$ de dimensión p^2 por un álgebra de grupo de orden p, con p un primo impar y q una raíz p-ésima primitiva de la unidad, es necesariamente punteada. Además describimos como construir extensiones centrales de álgebras de Hopf de dimensión finita a partir de una sucesión exacta de álgebras de Hopf y dos epimorfismos.

En el Capítulo 3 se estudian las álgebras de Hopf de dimensión p^3 y se demuestran algunos de los teoremas de clasificación enunciados anteriormente.

En el Capítulo 4 aplicamos una construcción del Capítulo 2 al caso concreto de las álgebras de coordenadas cuantizadas $\mathcal{O}_\epsilon(G)$. Así, en la Sección 4.1 recordamos la definición del álgebra de coordenadas cuantizada $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ de G en ϵ, y que $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ es una extensión central de $\mathcal{O}(G)$, el álgebra de funciones coordenadas sobre G, por el álgebra de Hopf $H = \mathcal{O}_\epsilon(G)/\mathcal{O}(G)^+\mathcal{O}_\epsilon(G)$, ver [DL] y [BG]. Seguidamente estudiamos las clases de isomorfismos de este tipo de extensiones y damos una forma de construir una familia infinita de álgebras de Hopf de dimensión finita que son no semisimples, no punteadas y sus duales tampoco son punteados, mostrando así otro contra ejemplo a la 10° conjetura de Kaplansky.

Finalmente, en el Capítulo 5 se determinan todos los subgrupos finitos de un grupo cuántico simple cuyo parámetro es una raíz de 1. En la primera sección se clasifican todas las subálgebras de Hopf de un álgebra de Hopf punteada y se aplica al caso en el cual el álgebra de Hopf es $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$, ver [MuII]. En la segunda sección se construyen en tres pasos cocientes de dimensión finita de $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ y en la tercera sección se demuestra que todos los cocientes de $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ de dimensión finita son de esta forma.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo damos definiciones y resultados básicos sobre la teoría de álgebras de Hopf y la cohomología de grupos, que serán necesarios para demostrar los resultados más importantes. Nuestras referencias para la teoría de álgebras de Hopf son [Mo], [K], [Sch3] y [Sw], para álgebras de Lie [Hu1], para grupos cuánticos [J] y [K], y para cohomología de grupos [Br].

1.1. Definiciones y resultados básicos

Trabajaremos sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado de característica cero. Todos los productos tensoriales que consideramos son sobre el cuerpo k.

Definición 1.1.1. Una k-*álgebra* con unidad es un anillo A con un morfismo de anillos $u : k \to A$ cuya imagen está contenida en el centro de A. La aplicación $k \times A \to A$ dada por $(\lambda, a) \mapsto u(\lambda)a$ le da a A una estructura de k-espacio vectorial tal que la multiplicación $m : A \times A \to A$ resulta bilineal. Es decir, A es un k-espacio vectorial con dos aplicaciones k-lineales u y m tal que los siguientes diagramas conmutan:

Asociatividad:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "m \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes m"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\
A \otimes A \arrow[r, "m"'] & A
\end{tikzcd}$$

Unidad:

$$\begin{tikzcd}
& A \otimes A \arrow[dd, "m"] & \\
k \otimes A \arrow[ur, "u \otimes \mathrm{id}"] \arrow[dr] & & A \otimes k \arrow[ul, "\mathrm{id} \otimes u"'] \arrow[dl] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Notar que la unidad en A está dada por $1_A = u(1_k)$.

Definición 1.1.2. Sean V y W dos k-espacios vectoriales. Se define la aplicación *flip* τ como la aplicación lineal $\tau : V \otimes W \to W \otimes V$ dada por $\tau(v \otimes w) = w \otimes v$ para todo $v \in V,\ w \in W$.

Notar que A es conmutativa si y sólo si $m \circ \tau = m$ en $A \otimes A$. Dualizando la noción de álgebra se define:

Definición 1.1.3. Una *k-coálgebra* con counidad es un k-espacio vectorial no nulo C munido de dos aplicaciones lineales, la *comultiplicación* o *coproducto* $\Delta : C \to C \otimes C$ y la *counidad* $\varepsilon : C \to k$ tales que los siguientes diagramas conmutan:

<u>Coasociatividad</u>:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "\Delta\otimes\mathrm{id}"] \\
C \otimes C \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\Delta"'] & C \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}$$

<u>Counidad</u>:

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "\simeq"'] \arrow[dr, "\simeq"] \arrow[dd, "\Delta"] & \\
k \otimes C & & C \otimes k \\
& C \otimes C \arrow[ul, "\varepsilon\otimes\mathrm{id}"] \arrow[ur, "\mathrm{id}\otimes\varepsilon"'] &
\end{tikzcd}$$

Diremos que C es *coconmutativa* si $\tau \circ \Delta = \Delta$ en C.

Definición 1.1.4. Sean C y D dos coálgebras con comultiplicación Δ_C y Δ_D y counidad ε_C y ε_D respectivamente.

(i) Una aplicación lineal $f : C \to D$ es un *morfismo de coálgebras* si $\Delta_D \circ f = (f \otimes f)\Delta_C$ y $\varepsilon_C = \varepsilon_D \circ f$.

(ii) Un subespacio $I \subseteq C$ es un *coideal* si $\Delta(I) \subseteq I \otimes C + C \otimes I$ y $\varepsilon_C(I) = 0$.

Con esta definición es claro que I es un coideal de C si y sólo si el k-espacio vectorial C/I es una coálgebra con la comultiplicación inducida de Δ_C. Notar que, al ser ε_C un morfismo de coálgebras, se sigue que el subespacio $C^+ = \operatorname{Ker}\varepsilon \subseteq C$ es un coideal de C.

Para trabajar con coálgebras usaremos la *notación sigma* de Sweedler: si c es un elemento de una coálgebra (C, Δ, ε), notaremos al elemento $\Delta(c) = \sum_i a_i \otimes b_i \in C \otimes C$ de la siguiente forma

$$\Delta(c) = c_{(1)} \otimes c_{(2)}.$$

Por ejemplo, el axioma de coasociatividad de C dado por $(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta$, se puede expresar como

$$(c_{(1)})_{(1)} \otimes (c_{(1)})_{(2)} \otimes c_{(2)} = c_{(1)} \otimes (c_{(2)})_{(1)} \otimes (c_{(2)})_{(2)} = c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)},$$

para todo $c \in C$.

Definición 1.1.5. Sea C una k-coálgebra. Un *C-comódulo a derecha* es un k-espacio vectorial M munido de un morfismo lineal $\rho : M \to M \otimes C$ tal que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & M \otimes C \arrow[d, "\rho\otimes\mathrm{id}"] \\
M \otimes C \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\Delta_C"'] & M \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\simeq"'] & M \otimes C. \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\varepsilon"] \\
& M \otimes k
\end{tikzcd}$$

Análogamente se define un C-comódulo a izquierda. Las categorías de C-comódulos a derecha y a izquierda se denotarán por $\mathcal{M}^C$ y ${}^C\mathcal{M}$ respectivamente. También usaremos la notación sigma de Sweedler para los comódulos: si M es un C-comódulo a derecha, entonces escribimos

$$\rho(m) = m_{(0)} \otimes m_{(1)} \in M \otimes C \qquad \text{para todo } m \in M.$$

Análogamente, si M es un C-comódulo a izquierda con morfismo de estructura $\lambda : M \to C \otimes M$ entonces escribimos

$$\rho(m) = m_{(-1)} \otimes m_{(0)} \in C \otimes M \qquad \text{para todo } m \in M.$$

Sean M y N dos C-comódulos a derecha con morfismos de estructura ρ_M y ρ_N respectivamente. Una aplicación lineal $f : M \to N$ es un *morfismo de C-comódulos* a derecha si $\rho_N \circ f = (f \otimes \mathrm{id}) \circ \rho_M$.

Ejemplo 1.1.6. Sea $f : C \to D$ un morfismo de coálgebras. Entonces C es un D-comódulo a derecha y a izquierda vía los morfismos

$$\rho = (\mathrm{id} \otimes f)\Delta : C \to C \otimes D \qquad \text{y} \qquad \lambda = (f \otimes \mathrm{id})\Delta : C \to D \otimes C.$$

Definición 1.1.7. Sea C una coálgebra.

(*i*) Un elemento $c \in C$ se dice de *tipo grupo* si $\Delta(c) = c \otimes c$ y $\varepsilon(c) = 1$. El conjunto de elementos de tipo grupo de C se denota por $G(C)$.

(*ii*) Sean $a,\ b \in G(C)$. El conjunto de *elementos* (a, b)*-casi-primitivos* de C se define como

$$P_{a,b} = \{c \in C |\ \Delta(c) = a \otimes c + c \otimes b\};$$

en particular, $k(a - b) \subseteq P_{a,b}$. Diremos que un elemento casi-primitivo $c \in C$ es *trivial* si $c \in k[G(C)]$.

Diremos que una coálgebra C es *simple* si no posee subcoálgebras propias y diremos que es *cosemisimple* si es suma directa de subcoálgebras simples. En particular, se define el *corradical* de C como la suma de todas las subcoálgebras simples de C y se denota por C_0. Si todas las subcoálgebras simples de C tienen dimensión uno, entonces C se dice *punteada* y se tiene que $C_0 = k[G(C)]$.

De hecho, el corradical C_0 de una coálgebra C es el menor elemento de una filtración de C. Diremos que una familia de subespacios $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de C es una *filtración de coálgebras* si

(*i*) $C_n \subseteq C_{n+1}$ y $C = \cup_{n\in\mathbb{N}} C_n$.

(*ii*) $\Delta(C_n) \subseteq \sum_{i=0}^{n} C_i \otimes C_{n-i}$.

Si C_0 es el corradical de C, entonces se define recursivamente C_n para $n \geq 1$ como:

$$C_n = \Delta^{-1}(C \otimes C_{n-1} + C_0 \otimes C).$$

Luego, $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de subcoálgebras de C que da una filtración de coálgebras, ver [Mo, Cap. 5], [Sw, Cap. IX]. Dicha filtración recibe el nombre de *filtración corradical* de C.

Ejemplo 1.1.8. Sea G un grupo. Entonces $k[G] = \{\sum_{g\in G} a_g e_g |\ a_g \in k,\ a_g \neq 0$ para finitos $g\}$ es una coálgebra cosemisimple con todas sus subcoálgebras de dimensión 1. Su estructura está determinada por

$$\Delta(e_g) = e_g \otimes e_g \quad \text{y} \quad \varepsilon(e_g) = 1, \qquad \text{para todo } g \in G.$$

Claramente $e_g \in G(k[G])$ para todo $g \in G$. Más aún, se puede ver que $G(k[G]) = G$.

Definición 1.1.9. Una 5-upla $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ se dice una *biálgebra* si (B, m, u) es un álgebra, (B, Δ, ε) es una coálgebra y se cumple alguna de las siguientes condiciones equivalentes:

(i) Δ y ε son morfismos de álgebras.

(ii) m y u son morfismos de coálgebras.

Como es de esperar, una aplicación $f : B \to B'$ entre biálgebras es un *morfismo de biálgebras* si f es un morfismo de álgebras y un morfismos de coálgebras. Un subespacio $I \subseteq B$ es un *bi-ideal* si es un ideal bilátero y un coideal. Al igual que antes, I es un bi-ideal de una biálgebra B si y sólo si el k-espacio vectorial B/I es una biálgebra con las operaciones inducidas por el cociente.

Ejemplo 1.1.10. Sea $\mathcal{O}(M_n(k)) = k[X_{ij}|\ 1 \leq i, j \leq n]$ el álgebra de funciones polinomiales en la matrices de $n \times n$. Como álgebra, $\mathcal{O}(M_n(k))$ es simplemente el anillo conmutativo de polinomios en n^2 variables. $\mathcal{O}(M_n(k))$ admite una estructura de coálgebra con la comultiplicación y la counidad determinada por sus valores en los generadores del álgebra $\{X_{ij}\}_{1\leq i,j\leq n}$:

$$\Delta(X_{ij}) = \sum_{\ell=1}^{n} X_{i\ell} \otimes X_{\ell j}, \quad \text{y} \quad \varepsilon(X_{ij}) = \delta_{ij}, \qquad \text{para todo } 1 \leq i, j \leq n.$$

Definición 1.1.11. Sean C una coálgebra y A un álgebra. El conjunto $\operatorname{Hom}_k(C, A)$ tiene una estructura de álgebra con el *producto de convolución* dado por

$$(f * g)(c) = f(c_{(1)})g(c_{(2)}) \qquad \text{para todo } f,\ g \in \operatorname{Hom}_k(C, A),\ c \in C.$$

Definición 1.1.12. Sea $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ una biálgebra. Decimos que H es un *álgebra de Hopf* si existe un elemento $\mathcal{S} \in \operatorname{Hom}_k(H, H)$ que es la inversa de la identidad id_H con respecto al producto de convolución. Es decir, $\mathcal{S}$ debe satisfacer las igualdades

$$\mathcal{S}(h_{(1)})h_{(2)} = \varepsilon(h)1_H = h_{(1)}\mathcal{S}(h_{(2)}) \qquad \text{para todo } h \in H.$$

Tal $\mathcal{S}$ recibe el nombre de antípoda de H.

Al igual que para coálgebras y biálgebras, se tienen las definiciones obvias para morfismos e ideales: una aplicación $f : H \to K$ entre dos álgebras de Hopf es un *morfismo de álgebras de Hopf* si f es un morfismo de biálgebras y $f(\mathcal{S}_H(h)) = \mathcal{S}_K(f(h))$ para todo $h \in H$. En realidad, se puede ver que si $f : H \to K$ es un morfismo de biálgebras entre dos álgebras de Hopf, entonces necesariamente f preserva la antípoda, i.e. es un morfismo de álgebras de Hopf. Un subespacio I de H es un *ideal de Hopf* si I es un bi-ideal y $\mathcal{S}(I) \subseteq I$. Claramente, $I \subseteq H$ es un ideal de Hopf si y sólo si el espacio vectorial cociente H/I es un álgebra de Hopf. Por ejemplo, el coideal $H^+ = \operatorname{Ker} \varepsilon$ es un ideal de Hopf de H y se denomina el *ideal de aumento* de H.

Ejemplo 1.1.13. Sea $(H, m, u, \Delta, \varepsilon, \mathcal{S})$ un álgebra de Hopf. Entonces $(H^{\mathrm{op}}, m^{\mathrm{op}}, u, \Delta, \varepsilon, \mathcal{S}^{-1})$ y $(H^{\mathrm{cop}}, m, u, \Delta^{\mathrm{cop}}, \varepsilon, \mathcal{S}^{-1})$ son álgebras de Hopf, donde $H^{\mathrm{op}} = H$ como coálgebra pero con la multiplicación opuesta y $H^{\mathrm{cop}} = H$ como álgebra pero con la comultiplicación opuesta, esto es,

$$\Delta^{\mathrm{cop}}(h) = h_{(2)} \otimes h_{(1)} \qquad \text{para todo } h \in H.$$

Ejemplo 1.1.14. Sea G un grupo. Entonces el álgebra de grupo $k[G]$ es un álgebra de Hopf con la antípoda determinada por

$$\mathcal{S}(e_g) = e_{g^{-1}} \qquad \text{para todo } g \in G.$$

Ejemplo 1.1.15. Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y $U(\mathfrak{g})$ su álgebra envolvente universal. Entonces $U(\mathfrak{g})$ es un álgebra de Hopf con la estructura determinada por

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x, \qquad \varepsilon(x) = 0, \qquad \mathcal{S}(x) = -x \qquad \text{para todo } x \in \mathfrak{g}.$$

Luego, $x \in P_{1,1}(U(\mathfrak{g}))$ para todo $x \in \mathfrak{g}$. Más aún, se puede ver que $P_{1,1}(U(\mathfrak{g}))$ es un álgebra de Lie y $P_{1,1}(U(\mathfrak{g})) = \mathfrak{g}$. Para cualquier álgebra de Hopf H, a los elementos casi-primitivos $P_{1,1}(H)$ de H se los denomina *elementos primitivos*.

Ejemplo 1.1.16. Sea $N \geq 2$ un número entero y sea $q \in k$ una raíz N-ésima primitiva de la unidad. El *álgebra de Taft* $T(q)$ es la k-álgebra dada por generadores g, x y relaciones $g^N = 1$, $x^N = 0$ y $gx = qxg$. $T(q)$ posee una estructura de álgebra de Hopf determinada por

$$\Delta g = g \otimes g, \qquad \Delta x = x \otimes 1 + g \otimes x,$$

de donde se sigue que $\varepsilon(g) = 1$, $\varepsilon(x) = 0$, $\mathcal{S}(g) = g^{-1}$ y $\mathcal{S}(x) = -g^{-1}x$. Es sabido que $T(q)$ es un álgebra de Hopf punteada tal que $G(T(q)) = \langle g \rangle \simeq \mathbb{Z}/(N)$. Las subálgebras de Hopf propias de $T(q)$ están contenidas en $k\langle g \rangle$, y por lo tanto son semisimples. Además se tiene que:

(i) $T(q) \simeq T(q)^*$,

(ii) $T(q) \simeq T(q')$ si y sólo si $q = q'$.

Más aún, se puede ver que $T(q)^{\mathrm{cop}} \simeq T(q)^{\mathrm{op}} \simeq T(q^{-1})$; en particular, $T(q)^{*\mathrm{cop}} \simeq T(q^{-1})$. El cuadrado de la antípoda de $T(q)$ coincide con el automorfismo interno inducido por g. Por lo tanto, $\mathcal{S}^4 \neq \mathrm{id}$ si $N > 2$.

Ejemplo 1.1.17. Sea A una k-álgebra. El *dual finito* o *dual de Sweedler* de A está dado por

$$A^\circ = \{f \in A^* |\ f(I) = 0, \text{ para algún ideal bilátero } I \text{ de } A \text{ tal que } \dim A/I < \infty\}.$$

Si $(A, m, u, \Delta, \varepsilon, \mathcal{S})$ es un álgebra de Hopf, entonces A° es un álgebra de Hopf con los morfismos de estructura dados por

$$\begin{array}{rlrcl}
m_{A^\circ} = & \Delta^* : A^\circ \otimes A^\circ \to A^\circ & < \Delta^*(f,g), a > & = & < f \otimes g, \Delta(a) >, \\
u_{A^\circ} = & \varepsilon^* : k \to A^\circ & < \varepsilon^*(\lambda), a > & = & \lambda < \varepsilon, a >, \\
\Delta_{A^\circ} = & m^* : A^\circ \to A^\circ \otimes A^\circ & < m^*(f), a \otimes b > & = & < f, ab >, \\
\varepsilon_{A^\circ} = & u^* : A^\circ \to k & u^*(f) & = & < f, 1 >, \\
\mathcal{S}_{A^\circ} = & \mathcal{S}^* : A^\circ \to A^\circ & < \mathcal{S}^*(f), a > & = & < f, \mathcal{S}(a) >,
\end{array}$$

para todo $a,\ b \in A,\ f,\ g \in A^\circ$. En particular, si A es de dimensión finita, $A^\circ = A^*$ y por lo tanto $(A^*, \Delta^*, \varepsilon^*, m^*, u^*, \mathcal{S}^*)$ resulta ser un álgebra de Hopf.

Usando la dualidad entre álgebras y coálgebras, se puede ver que un álgebra de Hopf H de dimensión finita es punteada si y sólo si todos los H^*-módulos simples tienen dimensión uno.

Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita. Entonces H actúa en H^* a derecha y a izquierda por

$$H \otimes H^* \xrightarrow{\rightharpoonup} H^* \qquad\qquad H^* \otimes H \xrightarrow{\leftharpoonup} H^*$$
$$< h \rightharpoonup \alpha, x >=< \alpha, xh > \qquad\qquad < \alpha \leftharpoonup h, x >=< \alpha, hx >,$$

para todo $h,\ x \in H$, $\alpha \in H^*$. Análogamente, H^* actúa en H a izquierda y a derecha por

$$H^* \otimes H \xrightarrow{\rightharpoonup} H \qquad\qquad H \otimes H^* \xrightarrow{\leftharpoonup} H$$
$$\beta \rightharpoonup h = h_{(1)}\beta(h_{(2)}) \qquad\qquad h \leftharpoonup \beta = \beta(h_{(1)})h_{(2)},$$

para todo $\beta \in H^*$ y $h \in H$.

Definición 1.1.18. Una *integral a izquierda* de H es un elemento $\Lambda \in H$ tal que $h\Lambda =< \varepsilon, h > \Lambda$ para todo $h \in H$. Análogamente se define integral a derecha de H. Los subespacios de H de integrales a izquierda y a derecha se denotan por $I_\ell(H)$ y $I_r(H)$ respectivamente.

Si $\dim H$ es finita, entonces vale que $\dim I_\ell(H) = \dim I_r(H) = 1$. En general, si $0 \neq \Lambda \in I_\ell(H)$ y $0 \neq \lambda \in I_r(H^*)$ entonces para todo $x \in H$, $\beta \in H^*$ se tiene que $\Lambda x \in I_\ell(H)$ y $\beta\lambda \in I_r(H^*)$. Luego, si $\dim H$ es finita, se definen los *elementos de tipo grupo modulares* $g \in H$ y $\alpha \in H^*$ como los elementos de H y H^* que cumplen las igualdades

$$\Lambda x =< \alpha, x > \Lambda \qquad \text{y} \qquad \beta\lambda =< \beta, g > \lambda,$$

para todo $x \in H$, $\beta \in H^*$. Se puede ver que α y g no dependen de la elección de Λ y λ. Existe una fórmula para $\mathcal{S}^4$ en términos de α y g, a la cual llamaremos la fórmula de Radford para la antípoda:

$$\mathcal{S}^4(h) = g(\alpha \rightharpoonup h \leftharpoonup \alpha^{-1})g^{-1} \qquad \text{para todo } h \in H, \tag{1.1}$$

Más aún, si λ y Λ son tales que $< \lambda, \Lambda >= 1$, entonces se tienen fórmulas para la traza de cualquier endomorfismo lineal f on H:

$$\operatorname{tr} f =< \lambda, \mathcal{S}(\Lambda_{(1)})f(\Lambda_{(2)}) >=< \lambda, (\mathcal{S} \circ f)(\Lambda_{(1)})\Lambda_{(2)} > . \tag{1.2}$$

Estas fórmulas se deben a varios autores, entre ellos Radford, ver [Mo], [R1], [Sch3].

Definición 1.1.19. [Mo, 3.4.1] Sea H un álgebra de Hopf y K una subálgebra de Hopf de H. Decimos que K es normal en H si

$$h_{(1)}b\mathcal{S}(h_{(2)}) \in K \qquad \text{y} \qquad \mathcal{S}(h_{(1)})bh_{(2)} \in K \qquad \text{para todo } h \in H,\ b \in K.$$

Un álgebra de Hopf H se dice *simple* si no contiene ninguna subálgebra de Hopf normal propia no trivial. H es dice *semisimple*, respectivamente *cosemisimple*, si es semisimple como álgebra, respectivamente si es cosemisimple como coálgebra.

El siguiente teorema se debe a varios autores que dieron equivalencias sobre la semisimplicidad de un álgebra de Hopf H, ver [LR1], [LR2], [R3, Prop. 2], [LS], [OSch1] y [OSch2]. Para una demostración completa ver [Sch3].

Teorema 1.1.20. *Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita sobre k, entonces son equivalentes:*

(a) *H es semisimple,*

(b) *H es cosemisimple,*

(c) $\mathcal{S}^2 = \mathrm{id}$,

(d) $\operatorname{tr} \mathcal{S}^2 \neq 0$,

(e) *H posee una integral no nula Λ tal que $< \varepsilon, \Lambda > \neq 0$.*

(f) *H^* posee una integral no nula λ tal que $< \lambda, 1 > \neq 0$.*

donde tr *denota la traza.* □

Observación 1.1.21. [Z] Si H es un álgebra de Hopf cuya dimensión es impar y $\mathcal{S}^4 = \mathrm{id}$, entonces necesariamente $\mathcal{S}^2 = \mathrm{id}$ y por lo tanto H es semisimple. Luego, si H es un álgebra de Hopf no semisimple de dimensión impar, por la fórmula (1.1), o bien $G(H)$, o $G(H^*)$ es no trivial.

Definición 1.1.22. Sean H un álgebra de Hopf y M un H-comódulo a derecha. Se define el conjunto de coinvariantes de H en M por

$$M^{\operatorname{co} H} = \{m \in M |\ \rho(m) = m \otimes 1\}.$$

Análogamente, si M es un H-comódulo a izquierda, se define el conjunto de coinvariantes de C en M por

$$^{\operatorname{co} H}M = \{m \in M |\ \lambda(m) = 1 \otimes m\}.$$

Sean A y H álgebras de Hopf y sea $A \xrightarrow{\pi} H$ un morfismo de álgebras de Hopf. Entonces por el Ejemplo 1.1.6, A admite una estructura de H-comódulo a derecha y a izquierda. Luego, los espacios coinvariantes se denotan por $A^{\operatorname{co} H} = A^{\operatorname{co} \pi}$ y $^{\operatorname{co} H}A = {}^{\operatorname{co} \pi}A$ y están dados por

$$A^{\operatorname{co} \pi} = \{a \in A |\ (\mathrm{id} \otimes \pi)\Delta(a) = a \otimes 1\} \qquad \text{y} \qquad {}^{\operatorname{co} \pi}A = \{a \in A |\ (\pi \otimes \mathrm{id})\Delta(a) = 1 \otimes a\}.$$

Más aún, estos espacios resultan ser subálgebras de A y se denominan las subálgebras de *coinvariantes*.

Finalizamos esta sección con un resultado de Nichols-Zoeller para álgebras de Hopf similar al teorema de Lagrange. Junto con sus generalizaciones, este teorema es uno de los más importantes en la teoría y lo aplicaremos sucesivamente en esta tesis.

Teorema 1.1.23. [NZ] *Sean H un álgebra de Hopf de dimensión finita y K una subálgebra de Hopf de H. Entonces todo (H, K)-módulo de Hopf es libre como K-módulo. En particular, H es un K-módulo libre y* $\dim K | \dim H$. □

1.2. Cohomología de grupos

Para describir las clases de isomorfismo de un cierto tipo de extensiones necesitaremos algunos resultados básicos de cohomología de grupos. Sean G y Γ dos grupos y supongamos que Γ actúa en G a derecha por automorfismos de grupos, es decir, existe una acción $G \times \Gamma \xrightarrow{\leftharpoondown} G$, tal que para todo $g,\ h \in G$ y $x \in \Gamma$ se tiene que

$$(gh) \leftharpoondown x = (g \leftharpoondown x)(h \leftharpoondown x) \text{ y } 1 \leftharpoondown x = 1. \tag{1.3}$$

Dados dos grupos K y L, denotamos por $\mathrm{Map}(K, L)$ al conjunto de funciones de K en L. Para $n = 0, 1$ se definen aplicaciones diferenciales ∂_n por

$$\begin{aligned} &\partial_0 : \mathrm{Map}(1, G) \to \mathrm{Map}(\Gamma, G), && \partial_0(g)(x) = (g \leftharpoondown x)g^{-1},\\ &\partial_1 : \mathrm{Map}(\Gamma, G) \to \mathrm{Map}(\Gamma \times \Gamma, G), && \partial_1(v)(x, y) = (v(x) \leftharpoondown y)v(y)v(xy)^{-1}, \end{aligned}$$

para todo $x,\ y \in \Gamma, g \in G$ y $v \in \mathrm{Map}(\Gamma, G)$. Notar que $\mathrm{Map}(1, G) = G$. Con esta definición, se tiene como es usual que $\partial^2 = 1$: sean $g \in G$ y $x,\ y \in \Gamma$, entonces

$$\begin{aligned} \partial^2(g)(x, y) &= \partial_1(\partial_0(g))(x, y) = ((\partial_0(g))(x) \leftharpoondown y)(\partial_0(g))(y)((\partial_0(g))(xy))^{-1}\\ &= [((g \leftharpoondown x)g^{-1}) \leftharpoondown y][(g \leftharpoondown y)g^{-1}][(g \leftharpoondown xy)g^{-1}]^{-1}\\ &= ((g \leftharpoondown x) \leftharpoondown y)(g^{-1} \leftharpoondown y)(g \leftharpoondown y)g^{-1}g(g \leftharpoondown xy)^{-1}\\ &= (g \leftharpoondown xy)(g \leftharpoondown xy)^{-1} = 1. \end{aligned}$$

Definición 1.2.1. (i) Una función $u \in \mathrm{Map}(\Gamma, G)$ se dice un 1-*coborde* si $u \in \mathrm{Im}\, \partial_0$, es decir, si existe $g \in G$ tal que

$$u(x) = \partial_0(g)(x) = (g \leftharpoondown x)g^{-1} \text{ para todo } x \in \Gamma.$$

(ii) Una función $v \in \mathrm{Map}(\Gamma, G)$ se dice un 1-*cociclo* si $\partial_1(v) = 1$, es decir, si

$$v(xy) = (v(x) \leftharpoondown y)v(y) \text{ para todo } x,\ y \in \Gamma.$$

Como $\partial^2 = 1$, todo 1-coborde es un 1-cociclo. Sea $Z^1(\Gamma, G)$ el subconjunto de 1-cociclos de $\mathrm{Map}(\Gamma, G)$. Entonces $G = \mathrm{Map}(1, G)$ actúa en $Z^1(\Gamma, G)$ por

$$(g \cdot v)(x) = (g \leftharpoondown x)v(x)g^{-1}, \tag{1.4}$$

para todo $g \in G$, $v \in Z^1(\Gamma, G)$ y $x \in \Gamma$. En efecto, es claro que $1 \cdot v = v$ para todo $v \in Z^1(\Gamma, G)$ y para $g,\ h \in G$ y $v \in Z^1(\Gamma, G)$, se tiene que

$$\begin{aligned} (g \cdot (h \cdot v))(x) &= (g \leftharpoondown x)(h \cdot v)(x)g^{-1} = (g \leftharpoondown x)(h \leftharpoondown x)v(x)h^{-1}g^{-1}\\ &= ((gh) \leftharpoondown x)v(x)(gh)^{-1} = ((gh) \cdot v)(x), \end{aligned}$$

para todo $x \in \Gamma$. Más aún,

$$\begin{aligned} &\partial_1(g \cdot v)(x, y) = ((g \cdot v)(x) \leftharpoondown y)(g \cdot v)(y)((g \cdot v)(xy))^{-1}\\ &= [((g \leftharpoondown x)v(x)g^{-1}) \leftharpoondown y][(g \leftharpoondown y)v(y)g^{-1}][(g \leftharpoondown (xy))v(xy)g^{-1}]^{-1}\\ &= ((g \leftharpoondown x) \leftharpoondown y)(v(x) \leftharpoondown y)(g^{-1} \leftharpoondown y)(g \leftharpoondown y)v(y)v(xy)^{-1}(g \leftharpoondown (xy))^{-1}\\ &= (g \leftharpoondown xy)[(v(x) \leftharpoondown y)v(y)v(xy)^{-1}](g \leftharpoondown (xy))^{-1}\\ &= (g \leftharpoondown xy)[\partial_1(v)(x, y)](g \leftharpoondown (xy))^{-1} = (g \leftharpoondown xy)(g \leftharpoondown (xy))^{-1} = 1, \end{aligned}$$

lo cual implica que $g \cdot v \in Z^1(\Gamma, G)$ para todo $g \in G$ y $v \in Z^1(\Gamma, G)$.

Esta acción define en $Z^1(\Gamma, G)$ una relación de equivalencia. Explícitamente, decimos que dos 1-cociclos v y u son *equivalentes*, y lo denotamos por $v \sim u$, si existe $g \in G$ tal que $v = g \cdot u$. Entonces se define el primer grupo de cohomología $H^1(\Gamma, G)$ de Γ en G como el conjunto dado por el cociente de $Z^1(\Gamma, G)$ por esta relación de equivalencia:

$$H^1(\Gamma, G) = Z^1(\Gamma, G)/G.$$

En particular, $\bar{v} = \bar{1}$ en $H^1(\Gamma, G)$ si y sólo si v es a 1-coborde, i.e. existe $g \in G$ tal que $v = g \cdot 1 = \partial_0(g)$.

Capítulo 2

Extensiones de álgebras de Hopf

En este capítulo demostramos algunos hechos generales sobre extensiones de álgebras de Hopf. Varios resultados de los capítulos que siguen están basados en hechos que aquí se demuestran, particularmente sobre extensiones centrales y extensiones del álgebra de Taft por un álgebra de grupo. Para este estudio seguimos [A1, AD, Hf, MS, Mo, Sch2].

2.1. Definiciones y resultados básicos

En esta sección recordamos algunas definiciones básicas y algunos hechos conocidos de extensiones de álgebras de Hopf.

Definición 2.1.1. [AD] Una sucesión de morfismos de álgebras de Hopf

$$1 \to B \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} H \to 1,$$

donde 1 representa el álgebra de Hopf k, es *exacta* si

(*i*) ι es inyectiva,

(*ii*) π es sobreyectiva,

(*iii*) $\operatorname{Ker} \pi = AB^+$,

(*iv*) $B = {}^{\operatorname{co} \pi}A$.

En tal caso, A se denomina una *extensión* del álgebra de Hopf B por el álgebra de Hopf H. Generalmente se identifica B con su imagen en A y decimos simplemente que A es una H-extensión de B, si no hay ninguna confusión. Si la imagen de B es central en A, decimos que A es una extensión *central* de B.

Ejemplo 2.1.2. Esta definición de sucesión exacta se puede ver como una generalización de la definición de sucesión exacta corta para grupos. Sean G un grupo finito, N un subgrupo normal de G y $F = G/N$. Entonces la sucesión de álgebras de Hopf

$$1 \to k[N] \to k[G] \to k[F] \to 1$$

es una sucesión de álgebras de Hopf.

Sean A y B dos álgebras de Hopf. Denotemos por $\mathrm{Reg}(B,A)$ al grupo de morfismos lineales de B a A que son inversibles con respecto al producto de convolución. Definimos entonces

$$\begin{aligned}\mathrm{Reg}_1(B,A) =& \{\alpha \in \mathrm{Reg}(B,A):\ \alpha(1)=1\},\\ \mathrm{Reg}_\varepsilon(B,A) =& \{\alpha \in \mathrm{Reg}(B,A):\ \varepsilon\alpha=\varepsilon\},\\ \mathrm{Reg}_{1,\varepsilon}(B,A) =& \mathrm{Reg}_1(B,A)\cap \mathrm{Reg}_\varepsilon(B,A).\end{aligned}$$

Claramente, los conjuntos $\mathrm{Reg}_1(B,A)$, $\mathrm{Reg}_\varepsilon(B,A)$ y $\mathrm{Reg}_{1,\varepsilon}(B,A)$ son subgrupos de $\mathrm{Reg}(B,A)$.

Un A-*comódulo álgebra* es un álgebra C que es simultáneamente un A-comódulo cuyo morfismo de estructura $\rho: C \to C\otimes A$ es un morfismo de álgebras. Si $R=\{c\in C:\ \rho(c)=c\otimes 1\}$ es la subálgebra de coinvariantes a derecha de C, decimos que C es una A-extensión de R. Una extensión de álgebras es *hendida* si existe γ en $\mathrm{Reg}_1(A,C)$ tal que $\rho\gamma=(\gamma\otimes \mathrm{id})\Delta$; un tal γ se denomina una *sección*.

Un A-*módulo coálgebra* es una coálgebra C que es simultáneamente un A-módulo cuyo morfismo de estructura $\mu: A\otimes C \to C$ es un morfismo de coálgebras. Si $D=C/A^+C$ es la coálgebra de coinvariantes, decimos que C es una A-extensión de D. Una extensión de coálgebras es *hendida* si existe ξ en $\mathrm{Reg}_\varepsilon(C,A)$ tal que $\xi(ac)=a\xi(c)$ para todo $a\in A,\ c\in C$; un tal ξ se denomina una *retracción*.

La siguiente definición fue dada por varios autores; ver por ejemplo [A1, Def. 3.1.14].

Definición 2.1.3. Sea $1\to B\xrightarrow{\iota} A\xrightarrow{\pi} H\to 1$ una sucesión exacta de álgebras de Hopf. Decimos que A es una *extensión hendida* del álgebra de Hopf B por el álgebra de Hopf H, si existe una sección $\gamma\in \mathrm{Reg}_1(H,A)$ de una extensión de álgebras y una retracción $\xi\in\mathrm{Reg}_\varepsilon(A,B)$ de una extensión de coálgebras que satisface una de las siguientes condiciones equivalentes para todo $a\in A$:

(i) $\gamma^{-1}(\pi(a))=\mathcal{S}(a_{(1)})\xi(a_{(2)})$;

(ii) $\gamma(\pi(a))=\xi^{-1}(a_{(1)})a_{(2)}$;

(iii) $\xi^{-1}(a)=\gamma(\pi(a_{(1)}))\mathcal{S}(a_{(2)})$;

(iv) $\xi(a)=a_{(1)}\gamma^{-1}(\pi(a_{(2)}))$;

(v) $\xi\gamma=\varepsilon_H 1_B$.

El siguiente resultado es una consecuencia de [Sch2, Thm. 2.2].

Teorema 2.1.4. *Una extensión de álgebras de Hopf de dimensión finita es siempre hendida.* □

Sea $1\to B\xrightarrow{\iota} A\xrightarrow{\pi} H\to 1$ una sucesión exacta de álgebras de Hopf de dimensión finita. Por el Teorema 2.1.4 tenemos que la extension A de B por H es hendida y por lo tanto, existe una sección γ en $\mathrm{Reg}_1(H,A)$. Usando esta sección, se puede construir una acción débil de B en H y un 2-cociclo $\sigma\in\mathrm{Reg}(H\otimes H,B)$ que le dan a A una estructura de producto cruzado $B\#_\sigma H$ de B con H, donde $B\#_\sigma H=B\otimes H$ como espacios vectoriales. La acción débil de H en B se define como sigue:

$$h\cdot b=\gamma(h_{(1)})b\gamma^{-1}(h_{(2)}),$$

para todo $h \in H,\ b \in B$, y satisface que

$$h \cdot (bb') = (h_{(1)} \cdot b)(h_{(2)} \cdot b') \text{ y } \ h \cdot 1 = \varepsilon(h)1_B,$$

para todo $h \in H,\ b,\ b' \in B$. El 2-cociclo σ está dado por

$$\sigma(h,t) = \gamma(h_{(1)})\gamma(t_{(1)})\gamma^{-1}(h_{(2)}t_{(2)}),$$

para todo $h,\ t \in H$, y satisface que

$$[h_{(1)} \cdot \sigma(h'_{(1)},\ h''_{(1)})]\sigma(h_{(2)},\ h'_{(2)}h''_{(2)}) = \sigma(h_{(1)},\ h'_{(1)})\sigma(h_{(2)}h'_{(2)},\ h'')$$

$$\text{y} \qquad \sigma(h,\ 1) = \sigma(1,\ h) = \varepsilon(h)1,$$

para todo $h,\ h',\ h'' \in H$. La multiplicación en el producto cruzado $B\#_\sigma H$ está dada por

$$(a\#h)(b\#t) = a(h_{(1)} \cdot b)\sigma(h_{(2)}, t_{(1)})\#h_{(3)}t_{(2)},$$

para todo $a,\ b \in B,\ h,\ t \in H$. El elemento unidad en $B\#_\sigma H$ es $1\#1$. Aquí escribimos $a\#h$ en lugar de $a \otimes h$ para denotar los elementos de $A\#_\sigma B$.

Sean A un álgebra de Hopf y B una subálgebra de Hopf de A. La siguiente proposición, obtenida independientemente por [AD] y [Sch2], nos dice bajo qué hipótesis B es normal en A, y por lo tanto, cuándo A resulta ser una extension de B por A/AB^+; para una demostración ver *loc. cit.* o [Mo, Prop. 3.4.3]. Antes necesitamos la siguiente definición.

Definición 2.1.5. Una extensión de anillos $B \subseteq A$ es fielmente playa a izquierda si para cualquier morfismo de B-módulos a derecha $f : M \to N$, f es inyectivo si y sólo si el morfismo de B-módulos $f \otimes \mathrm{id}_A : M \otimes_B A \to N \otimes_B A$ es inyectivo.

Proposición 2.1.6. *Sea A un álgebra de Hopf y sea B una subálgebra de Hopf de A tal que A es fielmente playa sobre B a izquierda o a derecha, y tal que $AB^+ = B^+A$. Sea $\bar{A} = A/AB^+$ y consideremos a A como un $\bar{A}$-comódulo a derecha y a izquierda vía $\rho = (\mathrm{id} \otimes \pi)\Delta$ y $\lambda = (\pi \otimes \mathrm{id})\Delta$ respectivamente, donde $\pi : A \to \bar{A}$ denota la proyección canónica. Entonces*

(*a*) $B = A^{\mathrm{co}\,\pi} = {}^{\mathrm{co}\,\pi}A$.

(*b*) *B es una subálgebra de Hopf normal de A.*

$\square$

2.2. Extensiones de un álgebra de Taft por un álgebra de grupo

Sea p un número primo impar. En la lista de álgebras de Hopf de dimensión p^3 dada en la introducción, los casos (d), (f) y (g) son extensiones de un álgebra de grupo de orden p por un álgebra de Taft de dimensión p^2 y por ende, son parte de una sucesión exacta de álgebras de Hopf de dimensión finita

$$1 \to k[\mathbb{Z}/(p)] \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} T(q) \to 1.$$

Mostraremos en esta sección que la recíproca es cierta. Más específicamente, si A es una extensión de un álgebra de grupo de orden p por un álgebra de Taft de dimensión p^2, entonces A es necesariamente punteada y es isomorfa a un álgebra de Hopf de la lista.

Si $B = k[\Gamma]$ es un álgebra de grupo de un grupo finito Γ, entonces el producto cruzado $A *_\sigma \Gamma := A\#_\sigma k[\Gamma]$ se denomina el producto Γ-cruzado de Γ sobre A. Notar que $A *_\sigma \Gamma$ es un álgebra Γ-graduada. Más aún, se puede ver que $A *_\sigma \Gamma$ está caracterizada como el álgebra Γ-graduada que contiene un elemento inversible en cada componente y la componente que contiene a 1 es A. En tal caso, decimos que A es la componente neutral de $A *_\sigma \Gamma$.

Teorema 2.2.1. *Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita que es parte de una sucesión exacta de álgebras de Hopf*

$$1 \to A \xrightarrow{\iota} H \xrightarrow{\pi} k[\Gamma] \to 1, \tag{2.1}$$

donde $\Gamma = \mathbb{Z}/(p)$ es el álgebra de grupo de orden p, A^* es punteada y $|G(A^*)| \leq p$. Entonces H^* es punteada.

Demostración. Para probar que H^* es punteada, mostraremos que todo H-módulo simple tiene dimensión uno. Para ello, basta probar que el álgebra $H/\operatorname{Rad} H$ es conmutativa. En efecto, puesto que su radical de Jacobson es nulo, el álgebra $H/\operatorname{Rad} H$ es un álgebra semisimple. Si es conmutativa, entonces por el teorema de Artin-Wedderburn se sigue que todo $H/\operatorname{Rad} H$-módulo simple, y por lo tanto todo H-módulo simple, tiene dimensión uno.

Como H es una extensión hendida de A por $k[\Gamma]$, probaremos lo siguiente: sea $H = A *_\sigma \Gamma$ un producto Γ-cruzado de dimensión finita con componente neutral A y supongamos que

(i) $A/\operatorname{Rad} A \simeq \operatorname{Map}(X, k)$, y

(ii) existe un epimorfismo $\pi : H \to k[\Gamma]$ de álgebras graduadas sobre Γ,

donde $\operatorname{Map}(X, k)$ es el conjunto de funciones de un conjunto finito X en k y $|X| \leq p$. Entonces $H/\operatorname{Rad} H$ es conmutativa.

Sea $\overline{A} = A/\operatorname{Rad} A$. Al ser A^* punteada, identificamos a X con el conjunto $\{\delta_0, \dots, \delta_m\}$ de idempotentes primitivos de $\overline{A}$.

Puesto que para todo $g \in \Gamma$, el morfismo $r(g) : A \to A$ dado por $r(g)(a) = g \cdot a$ es un morfismo de álgebras para todo $a \in A$, $\operatorname{Rad} A$ es estable por la acción débil de Γ en A y por lo tanto $(\operatorname{Rad} A) * \Gamma$ es un ideal Γ-graduado en H, que es nilpotente. En particular, $(\operatorname{Rad} A) * \Gamma \subseteq \operatorname{Rad} H$. Por lo tanto, se tiene un álgebra cociente $\overline{H} = \overline{A} * \Gamma$, que es un Γ-producto cruzado. Como car $k = 0$, $\overline{H}$ es semisimple, y consecuentemente $\overline{H} = H/\operatorname{Rad} H$. Más aún, puesto que $k[\Gamma]$ es un álgebra semisimple, se sigue que $\pi(\operatorname{Rad} H) = 0$ y π se factoriza a través de $\overline{H}$. Denotemos por $\bar{\pi} : \overline{H} \to k[\Gamma]$ al morfismo inducido por esta factorización.

Sea δ un idempotente primitivo de $\overline{A}$. Luego, para todo $g \in \Gamma$, $g \cdot \delta$ también es un idempotente primitivo de $\overline{A}$. Por lo tanto, la acción débil de Γ asociada a $\overline{H}$ proviene de un morfismo de grupos, digamos $\alpha : \Gamma \to \operatorname{Perm}(X)$. Puesto que para todo $g \in \Gamma$ y $\delta_i \in X$ se tiene

$$\bar{\pi}(\alpha(g)(\delta_i) * 1) = \bar{\pi}(g \cdot \delta_i * 1) = \bar{\pi}((1 * g)(\delta_i * 1)(1 * g^{-1})) = \varepsilon(\delta_i)1 = \delta_{i,0},$$

se sigue que Γ debe fijar al único elemento δ_0 en X que no es anulado por $\bar{\pi}$. Como $\Gamma = \mathbb{Z}/(p)$ y p no divide a $(|X| - 1)!$, el morfismo α debe ser trivial. Esto implica que la acción débil de Γ en $\overline{A}$ es trivial y por lo tanto el Γ-producto cruzado $\overline{H}$ es conmutativo. $\square$

Corolario 2.2.2. *Sea A un álgebra de Hopf de dimensión p^3 que es una extensión de un álgebra de grupo $k[\mathbb{Z}/(p)]$ por un álgebra de Taft $T(q)$ de dimensión p^2; en particular, A encaja en la siguiente sucesión exacta de álgebras de Hopf de dimensión finita:*

$$1 \to k[\mathbb{Z}/(p)] \xrightarrow{\iota} H \xrightarrow{\pi} T(q) \to 1. \tag{2.2}$$

Entonces H es punteada.

Demostración. Si dualizamos la sucesión (2.2), vemos que H^* es una extensión de un álgebra de Taft de orden p^2 por un álgebra de grupo de orden p,

$$1 \to T(q) \xrightarrow{\iota^*} H^* \xrightarrow{\pi^*} k[\mathbb{Z}/(p)] \to 1.$$

Como el álgebra de Taft satisfice las hipótesis sobre A del Teorema 2.2.1, se sigue que H es un álgebra de Hopf punteada. $\square$

El siguiente corolario establece que si existe un álgebra de Hopf H de dimensión p^3 que no es isomorfa a un álgebra de Hopf de la lista (a), ..., (k), entonces H es necesariamente extraña.

Corolario 2.2.3. *Sea H un álgebra de Hopf no semisimple de dimensión p^3 tal que H y H^* no son punteadas. Entonces H es simple como álgebra de Hopf.*

Demostración. Supongamos que H no es simple, entonces contiene una subálgebra de Hopf K propia que es normal y no trivial. Por lo tanto, se tiene una sucesión exacta de álgebras de Hopf

$$1 \to K \xrightarrow{\iota} H \xrightarrow{\pi} D \to 1, \tag{2.3}$$

donde $D = H/K^+H$. Luego, por el Teorema 1.1.23 se sigue que $p^3 = \dim K \dim D$, y la dimensión de K es p o p^2.

Si $\dim K = p^2$, entonces $\dim D = p$. Luego, por [Z, Thm. 2], $D \simeq k[\mathbb{Z}/(p)]$ y por [Ng, Thm. 5.5], $K \simeq T(q)$, un álgebra de Taft, puesto que H es no semisimple por hipótesis. Por lo tanto, H es una extensión de un álgebra de Taft de dimensión p^2 por un álgebra de grupo de orden p, lo que implica por el Corolario 2.2.2, que H^* debe ser punteada, lo cual es una contradicción. Si dim $K = p$, aplicando el mismo argumento a la extensión dual de (2.3) se tiene que H es punteada, lo cual también contradice nuestra hipótesis. $\square$

2.3. Extensiones centrales de álgebras de Hopf

En esta sección demostramos varios resultados que serán utilizados más adelante. En particular, damos aquí una construcción general de una familia de álgebras de Hopf a partir de una sucesión exacta y dos epimorfismos.

2.3.1. Resultados generales

Proposición 2.3.1. *Sean A y K álgebras de Hopf, B una subálgebra de Hopf central de A tal que A es fielmente playa sobre B y $p : B \to K$ un epimorfismo de álgebras de Hopf. Entonces $H = A/AB^+$ es un álgebra de Hopf y A encaja en una sucesión exacta de álgebras de Hopf*

$$1 \to B \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} H \to 1.$$

Si tomamos $\mathcal{J} = \operatorname{Ker} p \subseteq B$, entonces $(\mathcal{J}) = A\mathcal{J}$ es un ideal de Hopf de A y $A/(\mathcal{J})$ es un pushout *dado por la siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "p"'] & A \arrow[d, "q"] \\ K \arrow[r, "j"'] & A/(\mathcal{J}). \end{tikzcd}$$

Más aún, se puede identificar a K con una subálgebra de Hopf central de $A/(\mathcal{J})$ y $A/(\mathcal{J})$ es parte de la siguiente sucesión exacta

$$1 \to K \to A/(\mathcal{J}) \to H \to 1.$$

Demostración. La primera afirmación se sigue directamente de la Proposición 2.1.6. Al ser B central en A, $(\mathcal{J})$ es un ideal bilátero de A. Más aún, del hecho que ε y Δ son morfismos de álgebras y $\mathcal{S}(\mathcal{J}) \subseteq \mathcal{J}$, se sigue que $(\mathcal{J})$ es un ideal de Hopf. Identifiquemos a K con $B/\mathcal{J}$. Entonces el morfismo $j : K \to A/(\mathcal{J})$ dado por $j(b + \mathcal{J}) = \iota(b) + (\mathcal{J})$ define un morfismo de álgebras de Hopf pues ι es un morfismo de álgebras de Hopf. Como A es fielmente playa sobre B, por [Sch2, Cor. 1.8], B es un sumando directo en A como B-módulo, digamos $A = B \oplus M$. Entonces $(\mathcal{J}) \cap B = \mathcal{J}A \cap B = (\mathcal{J}B \oplus \mathcal{J}M) \cap B = (\mathcal{J} \oplus \mathcal{J}M) \cap B = \mathcal{J}$. Luego, si $j(b + \mathcal{J}) = 0$ entonces $\iota(b) \in (\mathcal{J})$ y esto implica que $b \in (\mathcal{J}) \cap B = \mathcal{J}$ por la igualdad anterior. Por lo tanto, j es inyectiva.

Veamos ahora que $A/(\mathcal{J})$ es un *pushout*: sea C un álgebra de Hopf y supongamos que existen morfismos de álgebras de Hopf $\varphi_1 : K \to C$ y $\varphi_2 : A \to C$ tales que $\varphi_1 p = \varphi_2 \iota$. Tenemos que mostrar que existe un único morfismo de álgebras de Hopf $\phi : A/(\mathcal{J}) \to C$ tal que $\phi q = \varphi_2$ y $\phi j = \varphi_1$.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "p"'] & A \arrow[d, "q"] \arrow[ddr, bend left, "\varphi_2"] & \\ K \arrow[r, "j"'] \arrow[drr, bend right, "\varphi_1"'] & A/(\mathcal{J}) \arrow[dr, dashed, "\exists!\phi"] & \\ & & C \end{tikzcd}$$

Como $\varphi_2((\mathcal{J})) = \varphi_2(A\mathcal{J}) = \varphi_2(A)\varphi_2(\iota(\mathcal{J})) = \varphi_2(A)\varphi_1(p(\mathcal{J})) = 0$, existe un único morfismo de álgebras de Hopf $\phi : A/(\mathcal{J}) \to C$ tal que $\phi q = \varphi_2$. Más aún, sea $x \in K$ y $b \in B$ tales que $p(b) = x$. Entonces $\phi j(x) = \phi j p(b) = \phi q \iota(b) = \varphi_2 \iota(b) = \varphi_1 p(b) = \varphi_1(x)$, de donde se sigue que $\phi j = \varphi_1$.

Denotemos también por K a la imagen de K por j. Para ver que K es central en $A/(\mathcal{J})$ hay que ver que $j(c)\bar{a} = \bar{a}j(c)$ para todo $\bar{a} \in A/(\mathcal{J})$, $c \in K$. Como p es sobreyectiva, para todo $c \in K$ existe $b \in B$ tal que $p(b) = c$ y como q es un morfismo de álgebras, se sigue que $\bar{a}j(c) = q(a)j(p(b)) = q(a)q(\iota(b)) = q(a\iota(b)) = q(\iota(b)a) = q(\iota(b))q(a) = j(c)\bar{a}$, puesto que B es central en A. En particular, el cociente $\widetilde{H} = [A/(\mathcal{J})]/[K^+(A/(\mathcal{J}))]$ es un álgebra de Hopf. Para ver que $A/(\mathcal{J})$ es una extensión central de K por $\widetilde{H}$, por la Proposición 2.1.6 basta probar que $A/(\mathcal{J})$ es playa sobre K y K es un sumando directo de $A/(\mathcal{J})$ como K-módulo, ya que por [Sch2, Cor. 1.8] esto implica que $A/(\mathcal{J})$ es fielmente playa sobre K.

Primero probaremos que $A/(\mathcal{J})$ es playa sobre K. Sean M_1 y M_2 dos K-módulos a derecha y sea $f : M_1 \to M_2$ un morfismo inyectivo de K-módulos. En particular, ambos admiten una estructura de B-módulo a través del morfismo $p : B \to K$, a las cuales denotamos por $\overline{M}_i$ para $i = 1, 2$ y f resulta ser un morfismo inyectivo de B-módulos. Como A es fielmente playa sobre B, el morfismo de A-módulos $f \otimes \mathrm{id} : \overline{M}_1 \otimes_B A \to \overline{M}_2 \otimes_B A$ también es inyectivo. Al ser J central en A, se tiene que $(\overline{M}_i \otimes_B A)(\mathcal{J}) = 0$ para $i = 1, 2$. Entonces los A-módulos también son $A/(\mathcal{J})$-módulos y $\overline{M}_i \otimes_B A \simeq M_i \otimes_K A/(\mathcal{J})$ como $A/(\mathcal{J})$-módulos por la construcción de $\overline{M}_i$. Por lo tanto, el morfismo de $A/(\mathcal{J})$-módulos $f \otimes \mathrm{id} : M_1 \otimes_K A/(\mathcal{J}) \to M_2 \otimes_K A/(\mathcal{J})$ es inyectivo y $A/(\mathcal{J})$ es playa sobre K.

Como $A = B \oplus M$ como B-módulos, se tiene que $(\mathcal{J}) = A\mathcal{J} = \mathcal{J} \oplus M\mathcal{J}$, donde $M\mathcal{J}$ es un B-submódulo de M y $\mathcal{J} = B \cap (\mathcal{J} \oplus M\mathcal{J})$. Por lo tanto $A/(\mathcal{J}) = (B \oplus M)/(\mathcal{J} \oplus M\mathcal{J}) = K \oplus (M/M\mathcal{J})$ como K-módulos, lo cual implica que K es un sumando directo de $A/(\mathcal{J})$. En conclusión, $A/(\mathcal{J})$ encaja en una sucesión exacta de álgebras de Hopf

$$1 \to K \xrightarrow{j} A/(\mathcal{J}) \xrightarrow{r} \widetilde{H} \to 1.$$

Como el morfismo $\Psi : K^+(A/(\mathcal{J})) \to (B^+A)/(\mathcal{J})$ definido por $\Psi(\overline{b}\overline{a}) = \overline{ba}$ es un isomorfismo k-lineal, se sigue que $\widetilde{H} = (A/(\mathcal{J}))/[K^+(A/(\mathcal{J}))] \simeq (A/(\mathcal{J}))/[(B^+A)/(\mathcal{J})] \simeq A/B^+A = H$ y por lo tanto $A/(\mathcal{J})$ encaja en una sucesión exacta

$$1 \to K \to A/(\mathcal{J}) \to H \to 1.$$

$\square$

La siguiente proposición nos será de utilidad.

Proposición 2.3.2. [Mu2, Prop. 3.4 (c)] *Sean $1 \to B \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} H \to 1$ una sucesión exacta de álgebras de Hopf, J un ideal de Hopf de A de codimensión finita y $\mathcal{J} = B \cap J$. Entonces la sucesión*

$$1 \to B/\mathcal{J} \to A/J \to H/\pi(J) \to 1$$

también es exacta. $\square$

2.3.2. De cocientes a extensiones

Sean A, B álgebras de Hopf tales que B es una subálgebra de Hopf central de A y A es fielmente playa sobre B. Por la Proposición 2.1.6, A encaja en la sucesión exacta

$$1 \to B \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} H \to 1, \tag{2.4}$$

donde $H = A/B^+A$. Sean $p : B \to K$ y $r : H \to L$ dos epimorfismos de álgebras de Hopf. En lo que sigue construimos a partir de los datos dados por p y r, álgebras de Hopf que son nuevamente extensiones centrales.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & B \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "p"'] & A \arrow[r, "\pi"] & H \arrow[r] \arrow[d, "r"] & 1. \\ & K & & L & \end{tikzcd}$$

Haremos esto en dos pasos. En el primero comenzamos con los datos asociados al epimorfismo $p : B \to K$: sea $\mathcal{J} = \operatorname{Ker} p$ y $(\mathcal{J}) = A\mathcal{J}$. Por la Proposición 2.3.1, $(\mathcal{J})$ es un ideal de Hopf de A y el álgebra de Hopf $A_p = A/(\mathcal{J})$ está dada por un *pushout* y encaja en el siguiente diagrama conmutativo, cuyas filas son sucesiones exactas de álgebras de Hopf y B y K son centrales en A y A_p respectivamente.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & B \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "p"'] & A \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "q"] & H \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ 1 \arrow[r] & K \arrow[r, "j"] & A_p \arrow[r, "\pi_p"] & H \arrow[r] & 1. \end{tikzcd} \tag{2.5}$$

A partir de aquí suponemos que K y H son de dimensión finita.

Entonces $\dim A_p$ también es finita por el siguiente lema.

Lema 2.3.3. *Sean K y H dos álgebras de Hopf de dimensión finita y supongamos que encajan en una sucesión exacta de álgebras de Hopf*

$$1 \to K \to \mathcal{A} \to H \to 1,$$

tal que K es central en $\mathcal{A}$. Entonces $\mathcal{A}$ también es de dimensión finita.

Demostración. Como K es conmutativa y de dimensión finita, es semisimple. Luego, todo K-módulo es proyectivo; en particular, $\mathcal{A}$ es proyectivo. Si $\mathcal{A}$ es de dimensión infinita, por [Sch1, Thm. 2.4], $\mathcal{A}$ es un K-módulo libre y $A \simeq K^{(I)}$ para cierto conjunto de índices I. Pero entonces $H \simeq \mathcal{A}/K^+\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}\otimes_K (K/K^+) \simeq K^{(I)}\otimes_K (K/K^+) \simeq (K/K^+)^{(I)}$ por ser $\mathcal{A}$ playa sobre K. Luego el cardinal de I, y *a fortiori* $\dim \mathcal{A}$ deben ser números finitos, lo cual nos lleva a una contradicción. $\square$

Observación 2.3.4. Sean H y K dos álgebras de Hopf de dimensión finita. Parece ser todavía un problema abierto determinar cuándo un álgebra de Hopf $\mathcal{A}$ que es una extensión de K por H, en el sentido de la Definición 2.1.1, es de dimensión finita.

Si S es un subconjunto de A_p, denotamos por $(S) = A_pSA_p$ al ideal bilátero de A_p generado por S.

Veamos ahora cómo el epimorfismo $r : H \to L$ entra en escena. Sea $M_r = q(\operatorname{Ker} r\pi) = \operatorname{Ker} r\pi_p$. Por el Lema 2.3.3 y el Teorema 2.1.4, la H-extensión A_p de K dada por la sucesión exacta

$$1 \to K \xrightarrow{\iota} A_p \xrightarrow{\pi_p} H \to 1 \tag{2.6}$$

es hendida. Por lo tanto, por la Definición 2.1.3, existen una retracción $\xi : A_p \to K$ en $\operatorname{Reg}_\varepsilon(A_p, K)$ y una sección $\gamma : H \to A_p$ en $\operatorname{Reg}_1(H, A_p)$.

Sea $I_{r,\xi}$ el menor ideal de Hopf de A_p que contiene al conjunto

$$(\operatorname{id} - j\xi)(M_r) = \{x - j\xi(x) |\ x \in M_r\}. \tag{2.7}$$

Notar que $I_{r,\xi} \subseteq M_r$ y $\pi_p(I_{r,\xi}) = \pi_p(M_r)$.

Proposición 2.3.5. *En la situación anterior, $\mathcal{I}_{r,\xi} := I_{r,\xi} \cap K$ es un ideal de Hopf de K y $A_{p,r,\xi} := A_p/I_{r,\xi}$ encaja en una sucesión exacta de álgebras de Hopf de dimensión finita*

$$1 \to K_{r,\xi} \xrightarrow{j_\xi} A_{p,r,\xi} \xrightarrow{\pi_\xi} L \to 1, \tag{2.8}$$

donde $K_{r,\xi} = K/\mathcal{I}_{r,\xi}$ es central en $A_{p,r,\xi}$.

Demostración. Por la Proposición 2.3.2, la sucesión exacta (2.6) induce una sucesión exacta de álgebras de Hopf de dimensión finita

$$1 \to K_{r,\xi} \to A_{p,r,\xi} \to H/\pi_p(I_{r,\xi}) \to 1,$$

donde $K_{r,\xi}$ es central en $A_{p,r,\xi}$. Como $M_r = \operatorname{Ker}(r\pi_p)$ y π_p es sobreyectiva, se sigue que $\pi_p(M_r) = \operatorname{Ker} r$. Entonces $L \simeq H/\operatorname{Ker} r = H/\pi_p(M_r) = H/\pi_p(I_{r,\xi})$ y se obtiene la sucesión (2.8). $\square$

Después de estos dos pasos, se obtiene un álgebra de Hopf de dimensión finita $A_{p,r,\xi}$ asociada a los epimorfismos $p : B \to K$ y $r : H \to L$, y a la retracción $\xi : A_p \to K$, esto es, a una terna (p, r, ξ), que encaja en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & B \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "p"'] & A \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "q"] & H \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & K \arrow[r, shift left, "j"] \arrow[d, "p_\xi"'] & A_p \arrow[l, dashed, shift left, "\xi"] \arrow[r, shift right, "\pi_p"'] \arrow[d, "q_\xi"] & H \arrow[l, dashed, shift right, "\gamma"'] \arrow[r] \arrow[d, "r"] & 1 \\
1 \arrow[r] & K_{r,\xi} \arrow[r, "j_\xi"] & A_{p,r,\xi} \arrow[r, "\pi_\xi"] & L \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd} \tag{2.9}$$

Por la Proposición 2.1.4, sabemos que la extensión dada por la sucesión (2.8) es hendida, con alguna sección $\bar{\gamma}$ y alguna retracción $\bar{\xi}$. La siguiente proposición nos muestra como elegir $\bar{\gamma}$ y $\bar{\xi}$ relacionadas con las aplicaciones que vienen dadas por la extensión hendida A_p de (2.6).

Proposición 2.3.6. *Si la extensión A_p dada por la sucesión exacta* (2.6) *es hendida vía $\gamma : H \to A_p$, entonces la extensión $A_{p,r,\xi}$ dada por* (2.8) *es hendida vía $\bar{\gamma} : L \to A_{p,r,\xi}$, donde $\bar{\gamma}(r(h)) = q_\xi\gamma(h)$.*

Demostración. Primero debemos probar que la sección $\bar{\gamma}$ está bien definida. Sean $h,\ h^{'} \in H$ tales que $r(h) = r(h^{'})$, entonces $h - h^{'} \in \operatorname{Ker} r$. Basta ver que $\gamma(\operatorname{Ker} r) \subseteq \operatorname{Ker} q_\xi$, pues esto implicaría que $\gamma(h - h^{'}) \in \operatorname{Ker} q_\xi$ y por lo tanto $\bar{\gamma}(r(h)) = q_\xi(\gamma(h)) = q_\xi(\gamma(h^{'})) = \bar{\gamma}(r(h^{'}))$. Sean $t \in \operatorname{Ker} r$ y $m \in M_r = \operatorname{Ker}(r\pi_p)$ tales que $\pi_p(m) = t$. Como $m \in M_r$, se tiene que $q_\xi(m) = p_\xi\xi(m)$ y por la Definición 2.1.3 (*ii*), $m = \xi(m_{(1)})\gamma(\pi_p(m_{(2)}))$. Entonces

$$p_\xi\xi(m) = q_\xi(m) = q_\xi(\xi(m_{(1)}))q_\xi(\gamma(\pi_p(m_{(2)}))),$$

lo cual implica que $p_\xi\xi(m) = (p_\xi\xi * q_\xi\gamma\pi_p)(m)$. Como ξ es inversible con respecto a la convolución y $p_\xi : K \to K_{r,\xi}$ es un morfismo de álgebras de Hopf, se sigue que $p_\xi\xi$ también es inversible con respecto a la convolución y por lo tanto $0 = \varepsilon(m) = q_\xi\gamma\pi_p(m) = q_\xi\gamma(t)$.

Recordar que $A_{p,r,\xi}$ es un L-comódulo álgebra a derecha vía $\rho = (\mathrm{id} \otimes \pi_\xi)\Delta$. Mostraremos ahora que $\bar{\gamma}$ es un morfismo de L-comódulos, es decir, $\rho\bar{\gamma}(t) = (\bar{\gamma} \otimes \mathrm{id})\Delta(t)$ para todo $t \in L$. Sean $t \in L$ y $h \in H$ tales que $r(h) = t$. Usando que q_ξ y r son morfismos de álgebras de Hopf, que γ es un morfismo de H-comódulos a derecha y la igualdad $\pi_\xi q_\xi = r\pi_p$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\rho\bar{\gamma}(t) &= \rho\bar{\gamma}(r(h)) = (\mathrm{id} \otimes \pi_\xi)\Delta(\bar{\gamma}(r(h))) \\
&= (\mathrm{id} \otimes \pi_\xi)\Delta(q_\xi(\gamma(h))) = (\mathrm{id} \otimes \pi_\xi)(q_\xi \otimes q_\xi)\Delta(\gamma(h)) \\
&= (q_\xi \otimes \pi_\xi q_\xi)\Delta(\gamma(h))) = (q_\xi \otimes r\pi_p)\Delta(\gamma(h)) \\
&= (q_\xi \otimes r)(\mathrm{id} \otimes \pi_p)\Delta(\gamma(h)) = (q_\xi \otimes r)(\gamma \otimes \mathrm{id})\Delta(h) \\
&= q_\xi(\gamma(h_{(1)})) \otimes r(h_{(2)}) = \bar{\gamma}(r(h_{(1)})) \otimes r(h_{(2)}) \\
&= \bar{\gamma}(r(h)_{(1)}) \otimes r(h)_{(2)} = (\bar{\gamma} \otimes \mathrm{id})\Delta(r(h)) \\
&= (\bar{\gamma} \otimes \mathrm{id})\Delta(t).
\end{aligned}$$

Para terminar, probamos que $\bar{\gamma} \in \mathrm{Reg}_1(L, A_{p,r,\xi})$. Es claro que $\bar{\gamma}(1) = \bar{\gamma}(r(1)) = q_\xi\gamma(1) = q_\xi(1) = 1$. Luego, basta mostrar que $\bar{\gamma}$ es inversible con respecto a la convolución. Sean $t \in L$ y $h \in H$ tales que $r(h) = t$ y definamos $\bar{\gamma}^{-1}(t) = q_\xi\gamma^{-1}(h)$. Al igual que antes, se puede ver que $\bar{\gamma}^{-1}$ es una función bien definida y es la inversa de $\bar{\gamma}$ con respecto a la convolución. A saber,

$$\begin{aligned}
\bar{\gamma} * \bar{\gamma}^{-1}(t) &= \bar{\gamma} * \bar{\gamma}^{-1}(r(h)) = \bar{\gamma}(r(h)_{(1)})\bar{\gamma}^{-1}(r(h)_{(2)}) \\
&= \bar{\gamma}(r(h_{(1)}))\bar{\gamma}^{-1}(r(h_{(2)})) = q_\xi\gamma(h_{(1)})q_\xi\gamma^{-1}(h_{(2)}) \\
&= q_\xi(\gamma(h_{(1)})\gamma^{-1}(h_{(2)})) = q_\xi(\varepsilon(h)) = \varepsilon(t).
\end{aligned}$$

La demostración de $\bar{\gamma}^{-1} * \bar{\gamma} = \varepsilon_L 1_{A_{p,r,\xi}}$ es similar.

Si para todo $a \in A_{p,r,\xi}$ definimos $\bar{\xi}(a) = a_{(1)}\bar{\gamma}^{-1}(\pi_\xi(a_{(2)}))$, entonces por [A1, Lemma 3.1.14] se tiene que $\bar{\xi} \in \mathrm{Reg}_\varepsilon(A_{p,r,\xi}, K_{r,\xi})$ y satisface la Definición 2.1.3 (*iv*), lo cual implica que la extensión es hendida vía $\bar{\gamma}$. □

Observación 2.3.7. Como la extensión A_p dada por (2.6) es hendida vía ξ y γ, A_p es isomorfa como álgebra de Hopf a un producto cruzado $K\ {}^{\tau}\#_\sigma H$, donde $\tau : H \to K \otimes K$ es un 2-cociclo determinado por ξ y $\sigma : H \otimes H \to K$ es un 2-cociclo determinado por γ, ver [DT, Thm. 11] y [AD, Prop. 3.2.9]. El isomorfismo

$$\phi : A_p \to K\ {}^{\tau}\#_\sigma H$$

está dado por la fórmula $\phi(a) = \xi(a_{(1)})\#\pi_p(a_{(2)})$ y su inversa ϕ^{-1} por $\phi^{-1}(b\#h) = b\gamma(h)$ para todo $a \in A_p,\ b \in K,\ h \in H$. Análogamente, el cociente $A_{p,r,\xi}$ es isomorfo a un producto cruzado $K_{r,\xi}\ {}^{\bar{\tau}}\#_{\bar{\sigma}} L$. Si componemos estos isomorfismos con el epimorfismo $q_\xi : A_p \to A_{p,r,\xi}$, se obtiene un epimorfismo de álgebras de Hopf entre los productos cruzados $\varphi : K\ {}^{\tau}\#_\sigma H \to K_{r,\xi}\ {}^{\bar{\tau}}\#_{\bar{\sigma}} L$. Este epimorfismo no es otro que el dado por la fórmula

$$\varphi(b\#h) = p_\xi(b)\#r(h) \qquad \text{para todo } b \in K,\ h \in H.$$

En efecto, como $\bar{\xi}$ es un morfismo de $\bar{K}$-módulos a izquierda y $\bar{\gamma}$ es un morfismo de L-comódulos a derecha se sigue que

$$\begin{aligned}
\varphi(b\#h) &= \bar{\phi}q_\xi\phi^{-1}(b\#h) = \bar{\phi}q_\xi(b\gamma(h)) = \bar{\phi}(q_\xi(b)q_\xi(\gamma(h))) \\
&= \bar{\phi}(p_\xi(b)\bar{\gamma}(r(h))) = \bar{\xi}((p_\xi(b)\bar{\gamma}(r(h)))_{(1)})\#\pi_\xi((p_\xi(b)\bar{\gamma}(r(h)))_{(2)}) \\
&= \bar{\xi}((p_\xi(b))_{(1)}(\bar{\gamma}(r(h)))_{(1)})\#\pi_\xi((p_\xi(b))_{(2)}(\bar{\gamma}(r(h)))_{(2)}) \\
&= \bar{\xi}(p_\xi(b_{(1)})(\bar{\gamma}(r(h)))_{(1)})\#\pi_\xi(p_\xi(b_{(2)})(\bar{\gamma}(r(h)))_{(2)}) \\
&= p_\xi(b_{(1)})\bar{\xi}((\bar{\gamma}(r(h)))_{(1)})\#\pi_\xi(p_\xi(b_{(2)}))\pi_\xi((\bar{\gamma}(r(h)))_{(2)}) \\
&= p_\xi(b_{(1)})\bar{\xi}(\bar{\gamma}(r(h)_{(1)}))\#\varepsilon(b_{(2)})r(h)_{(2)} \\
&= p_\xi(b)\bar{\xi}(\bar{\gamma}(r(h_{(1)})))\#r(h_{(2)}) = p_\xi(b)\varepsilon(r(h_{(1)})))\#r(h_{(2)}) \\
&= p_\xi(b)\#r(h).
\end{aligned}$$

□

Nuestro próximo objetivo es encontrar algunas condiciones que nos ayuden a describir al ideal $I_{r,\xi}$ y la retracción ξ más explícitamente. Denotemos por $(A_p)_0$ al corradical de A_p. Por [Mo, Thm. 5.4.2], existe un coideal N de A_p tal que $A_p = (A_p)_0 \oplus N$ como k-espacios vectoriales. Sea E el subgrupo de $G(A)$ dado por

$$E = \{x \in G(A) |\ r\pi(x) = 1\}$$

y sea $F = q(E)$. Claramente $G(B) \subseteq E$. Como B es conmutativa, K también es conmutativa y por lo tanto semisimple. Entonces KF es una subálgebra de Hopf de A_p que es semisimple, por el Teorema 1.1.20, pues $\mathcal{S}^2|_{KF} = \mathrm{id}_{KF}$. Luego $KF \subseteq (A_p)_0$. Como $(A_p)_0$ es una coálgebra cosemisimple, existe una coálgebra C tal que $(A_p)_0 = KF \oplus C$. En particular,

$$A_p = KF \oplus D, \tag{2.10}$$

donde $D = C \oplus N$. Más aún, podemos asumir que $\mathcal{S}(D) \subseteq D$, por el siguiente lema.

Lema 2.3.8. *Sean $\mathcal{A}$ un álgebra de Hopf cuya antípoda $\mathcal{S}$ tiene orden finito, $\mathcal{K}$ una subcoálgebra de $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{S}(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$ y $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{K}$ una proyección de coálgebras, i.e. $\pi^2 = \pi$. Entonces existe un coideal $\mathcal{D}$ de $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{S}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ y $\mathcal{A} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{D}$.*

Demostración. Sean $m = \operatorname{ord}\mathcal{S}$ el orden de $\mathcal{S}$ en $\mathcal{A}$ y $\tilde{\pi} : \mathcal{A} \to \mathcal{K}$ la aplicación k-lineal dada por

$$\tilde{\pi}(a) = \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m} \mathcal{S}^i\pi(\mathcal{S}^{m-i}(a)) \qquad \text{para todo } a \in \mathcal{A}.$$

Luego, $\tilde{\pi}$ es un morfismo de coálgebras y $\mathcal{S}\tilde{\pi} = \tilde{\pi}\mathcal{S}$. En efecto, la segunda afirmación se sigue directamente de la definición de $\tilde{\pi}$. Si m es impar, entonces $\mathcal{A}$ es conmutativa y coconmutativa. Por lo tanto, $\mathcal{S}$ y consecuentemente $\tilde{\pi}$ son morfismos de coálgebras. Luego, podemos suponer que m es par. Como las potencias pares de la antípoda son morfismos de coálgebras y π es un morfismo de coálgebras, basta probar la primera afirmación para los morfismos $\mathcal{S}^i\pi\mathcal{S}^{m-i}$ donde $1 \leq i \leq m$ es impar. Pero en este caso, el resultado se sigue del hecho que $m - i$ también es un número impar $\mathcal{S}^i$

y por lo tanto, $\mathcal{S}^{m-i}$ son antimorfismos de coálgebras: sea $a \in \mathcal{A}$, entonces

$$\begin{aligned}
\Delta(\mathcal{S}^i\pi(\mathcal{S}^{m-i}(a))) &= (\mathcal{S}^i\pi(\mathcal{S}^{m-i}(a)))_{(1)} \otimes (\mathcal{S}^i\pi(\mathcal{S}^{m-i}(a)))_{(2)} \\
&= \mathcal{S}^i((\pi(\mathcal{S}^{m-i}(a)))_{(2)}) \otimes \mathcal{S}^i((\pi(\mathcal{S}^{m-i}(a)))_{(1)}) \\
&= \mathcal{S}^i(\pi((\mathcal{S}^{m-i}(a))_{(2)})) \otimes \mathcal{S}^i(\pi((\mathcal{S}^{m-i}(a))_{(1)})) \\
&= \mathcal{S}^i(\pi(\mathcal{S}^{m-i}(a_{(1)})))\mathcal{S}^i(\pi(\mathcal{S}^{m-i}(a_{(2)}))) \\
&= (\mathcal{S}^i\pi\mathcal{S}^{m-i} \otimes \mathcal{S}^i\pi\mathcal{S}^{m-i})(\Delta(a)),
\end{aligned}$$

Como por hipótesis $\mathcal{S}(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$, se tiene que $\operatorname{Im}\tilde{\pi} \subseteq \operatorname{Im}\pi = \mathcal{K}$. Sea $x \in \operatorname{Im}\pi$, entonces $\mathcal{S}^{m-i}(x) \in \operatorname{Im}\pi$ para todo $1 \leq i \leq m$, y por ende $\pi(\mathcal{S}^{m-i}(x)) = \mathcal{S}^{m-i}(x)$. Esto implica que $\tilde{\pi}(x) = x = \pi(x)$ para todo $x \in \operatorname{Im}\pi$, y por lo tanto $\operatorname{Im}\pi \subseteq \operatorname{Im}\tilde{\pi}$. Más aún, para todo $x \in \mathcal{A}$ se tiene que $\tilde{\pi}^2(x) = \pi(\tilde{\pi}(x)) = \tilde{\pi}(x)$ de donde se sigue que $\tilde{\pi}$ también es una proyección de coálgebras.

Sea $\mathcal{D} = \operatorname{Ker}\tilde{\pi}$. Entonces $\mathcal{D}$ es un coideal de $\mathcal{A}$ que satisface $\mathcal{A} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{D}$ y $\mathcal{S}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ porque $\tilde{\pi}$ conmuta con la antípoda de $\mathcal{A}$. $\square$

Mostraremos ahora que en algunos casos especiales el ideal bilátero $((\operatorname{id} - j\xi)(M_r))$ de A_p es un ideal de Hopf.

Proposición 2.3.9. *Sea D como en* (2.10)*. Supongamos que $\xi(a) = 0$, para todo $a \in D \cap M_r$ y el morfismo $\xi|_F : F \to G(K)$ define un morfismo de grupos. Entonces $I_{r,\xi} = ((\operatorname{id} - j\xi)(M_r))$.*

Demostración. Como $\mathcal{S}(D) = D$, se tiene que $\mathcal{S}(D \cap M_r) \subseteq D \cap M_r$, pues M_r es un ideal de Hopf. Por lo tanto, el ideal bilátero $I_r := (D \cap M_r)$ es un ideal de Hopf y coincide con $((\operatorname{id} - j\xi)(D \cap M_r))$. Por otro lado, si KF^+ denota al ideal de Hopf de KF dado por $K(k[F]^+)$, entonces $KF \cap M_r = (KF)^+ = K^+F + KF^+$ y

$$((\operatorname{id} - j\xi)(KF \cap M_r)) = ((\operatorname{id} - j\xi)(KF^+)) = ((\operatorname{id} - j\xi)(F)),$$

ya que ξ es un morfismo de K-módulos tal que $\xi_K = \operatorname{id}_K$. Luego, si $\xi|_F$ define un morfismo de grupos se sigue que $I_\xi := ((\operatorname{id} - j\xi)(F))$ es un ideal de Hopf y $I_{r,\xi} = I_r + I_\xi = ((\operatorname{id} - j\xi)(M_r))$. $\square$

La siguiente proposición nos muestra bajo qué condiciones, existen retracciones ξ que satisfacen las hipótesis de la Proposición 2.3.9.

Proposición 2.3.10. *Supongamos que $A_p = KF \oplus D$ donde D es un K-módulo coideal. Sea $\beta : F \to G(K)$ un morfismo de grupos tal que $\beta q|_{\iota(G(B))} = p|_{G(B)}$. Entonces existe una retracción $\xi : A_p \to K$ tal que $\xi|_F = \beta$ y $\xi|_D = 0$.*

Demostración. Como $A_p = KF \oplus D$ como K-módulos, basta definir ξ en D y KF. Como KF es de dimensión finita, por el Teorema 1.1.23, KF es un K-módulo libre de rango $m = |F|/|G(K)|$. Sea $\{e_1, \ldots, e_m\}$ una base de KF que consiste de un conjunto de representantes de coclases a izquierda de $F/G(K)$ tal que $e_1 = 1$. Definimos $\widehat{\beta}$ como el único morfismo K-lineal dado por $\widehat{\beta}(e_i) = \beta(e_i)$. Luego, definimos $\xi|_D = 0$ y $\xi|_{KF} = \hat{\beta}$. Claramente, ξ es un morfismo de K-módulos tal que $\xi(1) = \hat{\beta}(1) = \beta(1) = 1$ y $\xi(a) = \xi(a \cdot 1) = \hat{\beta}(a \cdot 1) = a\hat{\beta}(1) = a$ para todo $a \in K$.

Por lo tanto, para probar que ξ es una sección se tiene que ver que ξ es inversible con respecto a la convolución. Como A_p admite una descomposición $A_p = KF \oplus D$, donde D es un coideal y un K-módulo, basta definir la inversa para ξ en KF. Definimos entonces $\xi^{-1}|_{KF} = \hat{\beta}^{-1}$, donde $\hat{\beta}^{-1}$ es el morfismo k-lineal dado por $\hat{\beta}^{-1}(ae) = \mathcal{S}(a)\beta^{-1}(e)$ para todo $a \in K$ y $e \in \{e_i\}_{1\leq i\leq m}$. Entonces para todo $a \in K$ y $e \in \{e_i\}_{1\leq i\leq m}$ se tiene

$$\hat{\beta} * \hat{\beta}^{-1}(ae) = \hat{\beta}(a_{(1)}e)\hat{\beta}^{-1}(a_{(2)}e) = a_{(1)}\beta(e)\mathcal{S}(a_{(2)})\beta^{-1}(e) = \varepsilon(ae).$$

Análogamente $\hat{\beta}^{-1} * \hat{\beta} = \varepsilon 1$, lo cual implica que $\hat{\beta} \in \operatorname{Reg}(A_p, K)$ es un morfismo de K-módulos. □

2.3.3. Sobre los isomorfismos de las extensiones obtenidas

En esta subsección estudiamos algunas propiedades de las extensiones construidas en la Subsección 2.3.2 que serán de utilidad en la Sección 4.2. Definimos primero el centro de Hopf de un álgebra de Hopf, que siempre existe por [A1, Cor. 2.2.2]

Definición 2.3.11. [A1, Def. 2.2.3] El *centro de Hopf* de un álgebra de Hopf A es la subálgebra central maximal de Hopf $\mathcal{Z}(A)$ de A.

Proposición 2.3.12. *Para $i = 1, 2$, sea $1 \to K_i \to A_i \to L_i \to 1$ una sucesión exacta de álgebras de Hopf tal que $K_i = \mathcal{Z}(A_i)$ y $L_i = A_i/(K_i^+A_i)$. Supongamos que $\omega : A_1 \to A_2$ es un isomorfismo de álgebras de Hopf. Entonces existen isomorfismos $\underline{\omega} : K_1 \to K_2$ y $\overline{\omega} : L_1 \to L_2$ tales que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & K_1 \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[d, "\underline{\omega}"'] & A_1 \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\omega"] & L_1 \arrow[r] \arrow[d, "\overline{\omega}"] & 1 \\ 1 \arrow[r] & K_2 \arrow[r, "\iota_2"] & A_2 \arrow[r, "\pi_2"] & L_2 \arrow[r] & 1. \end{tikzcd}$$

Demostración. Como $K_1 = \mathcal{Z}(A_1)$ y ω es sobreyectiva, $\omega(K_1)$ es una subálgebra de Hopf central de A_2. Entonces $\omega(K_1) \subseteq \mathcal{Z}(A_2) = K_2$. Análogamente $\omega^{-1}(K_2) \subseteq K_1$ y por lo tanto $\omega(K_1) = K_2$. Por consiguiente, el morfismo de álgebras de Hopf $\underline{\omega} : K_1 \to K_2$ dado por $\underline{\omega} = \omega|_{K_1}$ es un isomorfismo. Como $L_i = A/K_i^+A_i$ para $1 \leq i \leq 2$ y $\omega(K_1) = K_2$, ω induce un isomorfismo de álgebras de Hopf $\overline{\omega} : L_1 \to L_2$ dado por la fórmula $\overline{\omega}(\pi_1(a)) = \pi_2(\omega(a))$ para todo $a \in A$. En efecto, si $\overline{\omega}(\pi_1(a)) = 0$, entonces $\omega(a) \in K_2^+A_2 = \operatorname{Ker}\pi_2$. Pero como $K_2^+A_2 = \omega(K_1)^+\omega(A_1) = \omega(K_1^+A_1)$, existe $b \in K_1^+A_1$ tal que $\omega(a) = \omega(b)$. Al ser ω inyectiva, se sigue que $a = b \in K_1^+A_1 = \operatorname{Ker}\pi_1$ y por lo tanto $\underline{\omega}$ es inyectiva. La sobreyectividad de $\overline{\omega}$ se sigue de la sobreyectividad de ω. Finalmente, el diagrama es conmutativo por la definición de $\underline{\omega}$ y $\overline{\omega}$. □

Aquí probamos una condición que implica la hipótesis de la Proposición 2.3.12.

Lema 2.3.13. [A1, 3.3.9] *Consideremos la sucesión exacta de álgebras de Hopf de dimensión finita $1 \to K \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} L \to 1$, con K central en A. Si $\mathcal{Z}(L) = k$, entonces $\mathcal{Z}(A) = K$.*

Demostración. Como K es central en A, se tiene que $K \subseteq \mathcal{Z}(A)$. Al ser π sobreyectiva, $\pi(\mathcal{Z}(A))$ es central en L y por ende está contenida en $\mathcal{Z}(L) = k$. Luego, $\pi|_{\mathcal{Z}(A)} = \varepsilon|_{\mathcal{Z}(A)}$, lo cual implica que $\mathcal{Z}(A) \subseteq {}^{\operatorname{co}\pi}A = K$. □

En lo que sigue damos condiciones suficientes para que dos álgebras de Hopf construidas vía el *pushout* sean isomorfas. Consideremos la sucesión exacta (2.4) y sean $p_1 : B \to K_1$ y $p_2 : B \to K_2$ dos epimorfismos de álgebras de Hopf. Entonces por la Proposición 2.3.1, se pueden construir dos álgebras de Hopf $A_1 := A_{p_1}$ y $A_2 := A_{p_2}$, tales que K_i es central en A_i y encajan en el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & B \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "p_i"'] & A \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "q_i"] & H \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ 1 \arrow[r] & K_i \arrow[r, "j_i"] & A_i \arrow[r, "\pi_i"] & H \arrow[r] & 1. \end{tikzcd} \tag{2.11}$$

Lema 2.3.14. *Sea $f : K_1 \to K_2$ un isomorfismo de álgebras de Hopf tal que $fp_1 = p_2$. Entonces las álgebras de Hopf A_1 y A_2 son isomorfas.*

Demostración. Como $fp_1 = p_2$, se sigue que $q_2\iota = j_2p_2 = j_2fp_1$. Como A_1 es un *pushout* dado por p_1 y ι, existe un único morfismo de álgebras de Hopf $\omega : A_1 \to A_2$ tal que $\omega q_1 = q_2$ y $\omega j_1 = j_2 f$.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "p_1"'] & A \arrow[d, "q_1"] \arrow[ddr, bend left, "q_2"] & \\ K_1 \arrow[r, "j_1"'] \arrow[drr, bend right, "j_2 f"'] & A_1 \arrow[dr, dashed, "\exists!\omega"] & \\ & & A_2. \end{tikzcd}$$

Usando que $p_1 = f^{-1}p_2$, al igual que antes, se ve que existe un único morfismo de álgebras de Hopf $\omega^{-1} : A_2 \to A_1$ tal que $\omega^{-1}q_2 = q_1$ y $\omega^{-1}j_2 = j_1 f^{-1}$. Luego, se sigue que ω^{-1} es la inversa de ω, lo cual implica que A_1 y A_2 son isomorfas. □

Finalizamos esta sección con el siguiente teorema, el cual nos proporciona, bajo ciertas hipótesis, una caracterización de las clases de isomorfismos de este tipo de extensiones. Primero, necesitamos algunas definiciones: diremos que la H-extensión A de B satisface

(L) si todo automorfismo f de H se levanta a un automorfismo F de A tal que $\pi F = f\pi$, y

(Z) si $\mathcal{Z}(H) = k$.

Sea $f \in \mathrm{Aut}(H)$. Si (L) y (Z) se satisfacen, entonces por el Lema 2.3.13, $B = \mathcal{Z}(A)$ y el morfismo $g = F|_B$ define un automorfismo de B. Al subgrupo de $\mathrm{Aut}(B)$ generado por estos automorfismos lo llamaremos $\mathrm{qAut}(B)$.

Teorema 2.3.15. *Supongamos que (L) y (Z) se satisfacen. Si las álgebras de Hopf A_1 y A_2 son isomorfas entonces existe una terna $(\underline{\omega}, g, u)$ tal que*

(*a*) *$\underline{\omega} : K_1 \to K_2$ es un isomorfismo,*

(*b*) *$g \in \mathrm{qAut}(B)$,*

(c) *$u \in \mathrm{Reg}_{1,\varepsilon}(A, K_2)$ es un morfismo de álgebras tal que para todo $b \in B$ y $a \in A$ se tiene*

$$\begin{aligned} \underline{\omega}(p_1(b)) &= p_2(g(b_{(1)}))u(\iota(b_{(2)})), && (2.12)\\ \Delta(u(a)) &= u(a_{(2)}) \otimes q_2(F(\mathcal{S}(a_{(1)})a_{(3)}))u(a_{(4)}), && (2.13) \end{aligned}$$

donde $F \in \mathrm{Aut}(A)$ es el morfismo inducido por $\overline{\omega}$ tal que $F\iota = \iota g$. Recíprocamente, si $\dim K_1$ y $\dim H$ son finitas y existe tal terna, entonces A_1 y A_2 son isomorfas.

Demostración. Sea $\omega : A_1 \to A_2$ un isomorfismo de álgebras de Hopf. Como por hipótesis $\mathcal{Z}(H) = k$, del Lema 2.3.13 se sigue que $\mathcal{Z}(A_i) = K_i$ para $1 \leq i \leq 2$. Luego, por la Proposición 2.3.12, ω induce un isomorfismo $\underline{\omega} : K_1 \to K_2$ y un automorfismo $\overline{\omega} \in \mathrm{Aut}(H)$. Entonces existe $F \in \mathrm{Aut}(A)$ tal que $\pi F = \overline{\omega}\pi$ y el morfismo dado por $g = F|_B$ es un automorfismo de B tal que $F\iota = \iota g$. Sea $u : A \to A_2$ la aplicación k-lineal dada por

$$u(a) = q_2(F(\mathcal{S}(a_{(1)})))\omega(q_1(a_{(2)})) \qquad \text{para todo } a \in A,$$

esto es, $u = q_2F\mathcal{S} * \omega q_1$, el producto de convolución entre $q_2F\mathcal{S}$ y ωq_1. Al ser estas aplicaciones inversibles con respecto a la convolución, con inversas q_2F y $\omega q_1\mathcal{S}$ respectivamente, se sigue que u también es inversible con respecto a la convolución con inversa $u = \omega q_1\mathcal{S} * q_2F$. Más aún, $u \in \mathrm{Reg}_{1,\varepsilon}(A, K_2)$ es un morfismo de álgebras y satisface (2.12) y (2.13). En efecto, es claro que $u(1) = 1$ y $\varepsilon(u(a)) = \varepsilon(a)$ para todo $a \in A$. Para ver que $\mathrm{Im}\, u \subseteq K_2 = {}^{\mathrm{co}\,\pi_2}A_2$, tomemos $a \in A$. Entonces

$$\begin{aligned} (\pi_2 \otimes \mathrm{id})\Delta(u(a)) &= (\pi_2 \otimes \mathrm{id})\Delta(q_2(F(\mathcal{S}(a_{(1)})))\omega(q_1(a_{(2)}))) \\ &= \pi_2(q_2(F(\mathcal{S}(a_{(2)})))\omega(q_1(a_{(3)}))) \otimes q_2(F(\mathcal{S}(a_{(1)})))\omega(q_1(a_{(4)})) \\ &= \pi_2(q_2(F(\mathcal{S}(a_{(2)}))))\pi_2(\omega(q_1(a_{(3)}))) \otimes q_2(F(\mathcal{S}(a_{(1)})))\omega(q_1(a_{(4)})) \\ &= \pi(F(\mathcal{S}(a_{(2)})))\overline{\omega}\pi_1(q_1(a_{(3)})) \otimes q_2(F(\mathcal{S}(a_{(1)})))\omega(q_1(a_{(4)})) \\ &= \overline{\omega}\pi(\mathcal{S}(a_{(2)}))\overline{\omega}\pi(a_{(3)}) \otimes q_2(F(\mathcal{S}(a_{(1)})))\omega(q_1(a_{(4)})) \\ &= \varepsilon(a_{(2)}) \otimes q_2(F(\mathcal{S}(a_{(1)})))\omega(q_1(a_{(3)})) \\ &= 1 \otimes q_2(F(\mathcal{S}(a_{(1)})))\omega(q_1(a_{(2)})) = 1 \otimes u(a). \end{aligned}$$

Probaremos ahora que u es un morfismo de álgebras. Sean $a,\ b \in A$, entonces

$$\begin{aligned} u(ab) &= q_2(F(\mathcal{S}((ab)_{(1)})))\omega(q_1((ab)_{(2)})) = q_2(F(\mathcal{S}(a_{(1)}b_{(1)})))\omega(q_1(a_{(2)}b_{(2)})) \\ &= q_2(F(\mathcal{S}(b_{(1)})\mathcal{S}(a_{(1)})))\omega(q_1(a_{(2)}))\omega(q_1(b_{(2)})) \\ &= q_2(F(\mathcal{S}(b_{(1)})))q_2(F(\mathcal{S}(a_{(1)})))\omega(q_1(a_{(2)}))\omega(q_1(b_{(2)})) \\ &= q_2(F(\mathcal{S}(b_{(1)})))u(a)\omega(q_1(b_{(2)})) = u(a)(q_2(F(\mathcal{S}(b_{(1)})))\omega(q_1(b_{(2)}))) \\ &= u(a)u(b), \end{aligned}$$

pues $u(a) \in K_2$ y K_2 es central en A_2. Junto con $u(1) = 1$, esto implica que u es un morfismo de álgebras. Finalmente, probemos que u satisface las ecuaciones (2.12) y (2.13): sea $b \in B$, entonces $u(\iota(b)) = q_2(F(\mathcal{S}(\iota(b_{(1)}))))\omega(q_1(\iota(b_{(2)})))$ y por lo tanto

$$\underline{\omega}(p_1(b)) = \omega(q_1(\iota(b))) = q_2(F(\iota(b_{(1)})))u(\iota(b_{(2)})) = p_2(g(b_{(1)}))u(\iota(b_{(2)})).$$

Para la segunda ecuación, tomemos $a \in A$. Entonces

$$\begin{aligned}
\Delta(u(a)) &= (q_2(F(\mathcal{S}(a_{(1)})))\omega(q_1(a_{(2)})))_{(1)} \otimes (q_2(F(\mathcal{S}(a_{(1)})))\omega(q_1(a_{(2)})))_{(2)} \\
&= q_2(F(\mathcal{S}(a_{(1)})_{(1)}))\omega(q_1((a_{(2)})_{(1)})) \otimes q_2(F(\mathcal{S}(a_{(1)})_{(2)}))\omega(q_1((a_{(2)})_{(2)})) \\
&= q_2(F(\mathcal{S}(a_{(2)})))\omega(q_1(a_{(3)})) \otimes q_2(F(\mathcal{S}(a_{(1)})))\omega(q_1((a_{(4)}))) \\
&= u(a_{(2)}) \otimes q_2(F(\mathcal{S}(a_{(1)})))\omega(q_1(a_{(3)})) = u(a_{(2)}) \otimes q_2(F(\mathcal{S}(a_{(1)})))q_2(F(a_{(3)}))u(a_{(4)}) \\
&= u(a_{(2)}) \otimes q_2(F(\mathcal{S}(a_{(1)})a_{(3)}))u(a_{(4)}).
\end{aligned}$$

Probemos ahora la recíproca: sea $(\underline{\omega}, g, u)$ una terna que satisface (a), (b) y (c) y sean $F \in \mathrm{Aut}(A)$, $\overline{\omega} \in \mathrm{Aut}(H)$ tales que $F\pi = \overline{\omega}\pi$ y $F|_B = g$. Definamos $\varphi : A \to A_2$ como la aplicación k-lineal dada por

$$\varphi(a) = q_2(F(a_{(1)}))u(a_{(2)}) \qquad \text{para todo } a \in A.$$

Como K_2 es central en A_2 y $u \in \mathrm{Reg}_{1,\varepsilon}(A, K_2)$ es un morfismo de álgebras que satisface la ecuación (2.13), se sigue que φ es un morfismo de álgebras de Hopf. Más aún, por la ecuación (2.12) se tiene que

$$\varphi(\iota(b)) = j_2(p_2(g(b_{(1)}))u(\iota(b_{(2)}))) = j_2(\underline{\omega}(p_1(b))) \qquad \text{para todo } b \in B.$$

Al estar A_1 dado por un *pushout*, existe un único morfismo de álgebras de Hopf $\omega : A_1 \to A_2$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "p_1"'] & A \arrow[d, "q_1"] \arrow[ddr, bend left, "\varphi"] & \\
K_1 \arrow[r, "j_1"'] \arrow[dr, bend right, "\underline{\omega}"'] & A_1 \arrow[dr, dashed, "\exists! \omega"] & \\
& K_2 \arrow[r, "j_2"'] & A_2.
\end{tikzcd}$$

En particular, $j_2\underline{\omega} = \omega j_1$ y $\overline{\omega}\pi_1 = \pi_2\omega$, ya que para todo $a \in A_1$:

$$\begin{aligned}
\pi_2\omega(q_1(a)) &= \pi_2\varphi(a) = \pi_2(q_2(F(a_{(1)}))u(a_{(2)})) = \pi_2(q_2(F(a_{(1)})))\pi_2(u(a_{(2)})) = \pi(F(a_{(1)}))\varepsilon(a_{(2)}) \\
&= \pi(F(a)) = \overline{\omega}(\pi(a)) = \overline{\omega}(\pi_1(q_1(a))).
\end{aligned}$$

Luego, ambas sucesiones exactas son parte de un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & K_1 \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "\underline{\omega}"'] & A_1 \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\omega"] & H \arrow[r] \arrow[d, "\overline{\omega}"] & 1 \\
1 \arrow[r] & K_2 \arrow[r, "j_2"] & A_2 \arrow[r, "\pi_2"] & H \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd} \tag{2.14}$$

Si $\dim K_1$ y $\dim H$ son finitas, entonces $\dim A_1 = \dim A_2$ también son finitas por la Proposición 2.3.3. Como el diagrama (2.14) es conmutativo, se sigue que

$$\begin{aligned}
\dim \omega(A_1) &= \dim \underline{\omega}(K_1) \dim(\omega(A_1)/\omega(K_1)^+\omega(A_1)) = \dim \underline{\omega}(K_1) \dim \overline{\omega}(H) \\
&= \dim K_2 \dim H = \dim A_2,
\end{aligned}$$

lo cual implica que ω es un isomorfismo. $\square$

Capítulo 3

Sobre álgebras de Hopf de dimensión p^3

En este capítulo tratamos el problema de clasificación de las álgebras de Hopf de dimensión p^3. Sea p un número primo impar y sea $\mathbb{G}_p$ el grupo cíclico de raíces p-ésimas de la unidad. El problema de clasificación de álgebras de Hopf sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero de dimensión p^3 sigue abierto. Sin embargo, la clasificación es conocida para álgebras de Hopf semisimples o punteadas. En este capítulo se dan varios resultados generales que nos llevan a conjeturar que toda álgebra de Hopf no semisimple H sobre k es punteada o su dual es punteado. En particular, H es isomorfa a un álgebra de Hopf de la lista dada en la introducción.

3.1. Resultados generales

En esta sección se discuten primero algunos resultados generales sobre álgebras de Hopf de dimensión finita y luego se aplican a álgebras de Hopf de dimensión p^3.

Como es sabido, el orden de la antípoda juega un papel preponderante en la teoría de álgebras de Hopf de dimensión finita. El siguiente lema de álgebra lineal nos ayudará a determinar dicho orden en algunos casos particulares. Observar que (c) generaliza (b).

Lema 3.1.1. (a) [AS2, Lemma 2.6, (i)] *Sea T una transformación lineal de un espacio vectorial de dimensión finita $V \neq 0$ tal que* $\operatorname{tr} T = 0$ *y* $T^p = \mathrm{id}$. *Sean $q \in \mathbb{G}_p \smallsetminus \{1\}$ y $V(i)$ el autoespacio de T de autovalor q^i. Entonces* $\dim V(i)$ *es constante; en particular p divide a* $\dim V$.

(b) [AS2, Lemma 2.6, (ii)] *Si V es un espacio vectorial de dimensión p y $T \in \operatorname{End} V$ satisface que* $\operatorname{tr} T = 0$ *y* $T^{2p} = \mathrm{id}$*, entonces* $T^p = \pm\,\mathrm{id}$.

(c) *Sean $n \in \mathbb{N}$ y ω una raíz p^n-ésima primitiva de la unidad en k. Si V es un espacio vectorial de dimensión p y $T \in \operatorname{End} V$ satisface que* $\operatorname{tr} T = 0$ *y* $T^{2p^n} = \mathrm{id}$*, entonces existe m, $0 \leq m \leq p^{n-1} - 1$ tal que* $T^p = \pm\omega^{mp}\,\mathrm{id}$.

Demostración. Para probar (c) seguiremos las ideas de [AS2]. El punto crucial aquí es que se conoce el polinomio minimal sobre $\mathbb{Q}$ de una raíz p^n-ésima de la unidad y que V es de dimensión p.

Como $T^{2p^n} = \mathrm{id}$, los autovalores de T son de la forma $(-1)^a\omega^i$, donde $a \in \{0,1\}$ y $0 \leq i \leq p^n - 1$. Sea $V_{a,i} := \{v \in V : T(v) = (-1)^a\omega^i v\}$ el autoespacio de T de asociado al autovalor $(-1)^a\omega^i$. Como

$\operatorname{tr} T = 0$, se tiene que

$$0 = \operatorname{tr} T = \sum_{i=0}^{p^n-1} (\dim V_{0,i} - \dim V_{1,i})\omega^i. \tag{3.1}$$

Consideremos ahora el polinomio $P \in \mathbb{Z}[X]$ dado por $P(X) = \sum_{i=0}^{p^n-1}(\dim V_{0,i} - \dim V_{1,i})X^i$. Entonces $\operatorname{gr} P \leq p^n - 1$, $P(\omega) = 0$ y el número de coeficientes de P no nulos es menor o igual a p, ya que $V = \bigoplus_{a,i} V_{a,i}$ y dim $V = p$. Más aún, el polinomio minimal χ_ω de ω sobre $\mathbb{Q}$ debe dividir a P. En este caso, χ_ω es el polinomio ciclotómico dado por

$$T(X) = X^{p^{n-1}(p-1)} + X^{p^{n-1}(p-2)} + \cdots + X^{p^{n-1}} + 1.$$

En efecto, como $\omega^{p^n} = 1$ y $X^{p^n} - 1 = (X-1)T(X)$, se sigue que $T(\omega) = 0$. Luego, T es minimal pues $\operatorname{ord} T = p^{n-1}(p-1) = \varphi(p^n) = \operatorname{gr} \chi_\omega$, con φ la función φ de Euler. Por lo tanto, existe $Q \in \mathbb{Z}[X]$ tal que $P = Q\chi_\omega$, con $Q = 0$ o $\operatorname{gr} Q \leq p^{n-1} - 1$.

Si definimos

$$V_+ = \bigoplus_{i=0}^{p^n-1} V_{0,i} \quad \text{y} \quad V_- = \bigoplus_{i=0}^{p^n-1} V_{1,i},$$

es claro que $V = V_+ \oplus V_-$. Si $Q = 0$, entonces $P = 0$ y se sigue que $\dim V_{0,i} = \dim V_{1,i}$ para todo $0 \leq i \leq p^n - 1$. Pero esto implicaría que dim $V_+ =$ dim V_-, de donde se sigue que la dimensión de V es par, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, podemos asumir que Q no es el polinomio nulo. Supongamos que Q se escribe de la forma $Q(X) = \sum_{j=0}^{p^{n-1}-1} d_j X^j$, donde $d_m \neq 0$ para algunos $0 \leq m \leq p^{n-1} - 1$. Como $\chi_\omega(X) = X^{p^{n-1}(p-1)} + X^{p^{n-1}(p-2)} + \cdots + X^{p^{n-1}} + 1$, se tiene que

$$P(X) = \left(\sum_{i=0}^{p^{n-1}-1} d_i X^i\right)\left(\sum_{j=0}^{p-1} (X^{p^{n-1}})^j\right) = \sum_{i=0}^{p^{n-1}-1} d_i \left(\sum_{j=0}^{p-1} X^{i+jp^{n-1}}\right).$$

Al ser el número de coeficientes no nulos de P distinto de cero y menor o igual a p, existe un único ℓ, $0 \leq \ell \leq p^{n-1} - 1$ tal que $d_\ell \neq 0$ y $d_i = 0$ para todo $i \neq \ell$, $0 \leq i \leq p^{n-1} - 1$. Por lo tanto, $\ell = m$ y entonces $P(X) = d_m X^m \chi_\omega$, lo que implica que para todo $0 \leq j \leq p-1$, $0 \leq i \leq p^n - 1$ tal que $i \neq m + jp^{n-1}$ se tiene que

$$\dim V_{0,m+jp^{n-1}} - \dim V_{1,m+jp^{n-1}} = d_m, \text{ y } \dim V_{0,i} - \dim V_{1,i} = 0.$$

De estas igualdades se sigue que $\dim V_+ - \dim V_- = d_m p$. Como $\dim V_+ + \dim V_- = p$, se tiene que

$$V_+ = \bigoplus_{j=0}^{p-1} V_{0,m+jp^{n-1}} = V \qquad \text{o} \qquad V_- = \bigoplus_{j=0}^{p-1} V_{1,m+jp^{n-1}} = V,$$

y esto implica que $T^p(v) = \pm(\omega^m)^p v = \pm\omega^{mp} v$ para todo $v \in V$. $\square$

El siguiente resultado da un ejemplo de cómo el orden de la antípoda ayuda a determinar la estructura de un álgebra de Hopf.

Proposición 3.1.2. [AS2, Prop. 5.1] *Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita cuya antípoda $\mathcal{S}$ tiene orden $2p$. Supongamos además que H contiene una subálgebra de Hopf cosemisimple B tal que* $\dim H = p \ \dim B$. *Entonces B es el corradical de H.* □

En la siguiente proposición usamos el Lema 3.1.1 (c) para generalizar un resultado de Radford y Schneider [RS1]. Como se muestra en la observación que le sigue a la demostración, dicho resultado da una demostración alternativa de la clasificación de las álgebras de Hopf de dimensión p^2 sobre k.

Proposición 3.1.3. *Sea H un álgebra de Hopf no semisimple de dimensión finita que contiene una subálgebra de Hopf conmutativa B tal que* $\dim H = p \ \dim B$. *Si* $\mathcal{S}^{4p^n} = \mathrm{id}$ *para algún* $n \in \mathbb{N}$, *entonces* $\mathcal{S}^{2p} = \mathrm{id}$, *y consecuentemente B es el corradical de H.*

Demostración. Seguiremos las ideas de la demostración de [RS1]. Por el Teorema 1.1.20, sabemos que B es semisimple, puesto que es conmutativa. Sea $\{e_j\}_{1\leq j\leq s}$ el conjunto de idempotentes centrales primitivos de B tales que $1_B = e_1+\cdots+e_s$ y sea $I_j = He_j$; entonces podemos escribir $H = \bigoplus_{j=1}^{s} I_j$.

Afirmación 1. $\mathrm{tr}(\mathcal{S}^2|_{I_j}) = 0$ para todo $1 \leq j \leq s$.

Es claro que $\mathcal{S}^2(I_j) \subseteq I_j$, pues $\mathcal{S}^2(I_j) = \mathcal{S}^2(He_j) = \mathcal{S}^2(H)\mathcal{S}^2(e_j) = \mathcal{S}^2(H)(e_j) \subseteq He_j = I_j$. Sea $P_j : H \to I_j$ la proyección lineal dada por $P_j(a) = ae_j$ para todo $a \in H$, y sea $r(h)$ la aplicación lineal dada por $r(h)(x) = xh$ para todo $x,\ h \in H$. Entonces $\mathcal{S}^2|_{I_j} = \mathcal{S}^2 \circ P_j = \mathcal{S}^2 \circ r(e_j)$, ya que ambas aplicaciones coinciden en I_j. Sean $\lambda \in H^*$ una integral a derecha y $\Lambda \in H$ una integral a izquierda tales que $<\lambda,\ \Lambda>= 1$. Luego, $(\Lambda_{(1)},\ \mathcal{S}(\Lambda_{(2)}))$ son bases duales para la aplicación de Frobenius λ, ver [Sch3]. Por la fórmula (1.2), tenemos que

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\mathcal{S}^2|_{I_j}) &= \mathrm{tr}((\mathcal{S}^2)\circ r(e_j)) =<\lambda,\ \mathcal{S}(\Lambda_{(2)})[\mathcal{S}^2\circ r(e_j)](\Lambda_{(1)})>=<\lambda,\ \mathcal{S}(\Lambda_{(2)})\ \mathcal{S}^2(\Lambda_{(1)}e_j)> \\ &=<\lambda,\ \mathcal{S}(\Lambda_{(2)})\mathcal{S}^2(\Lambda_{(1)})\mathcal{S}_B^2(e_j)>=<\lambda,\ \mathcal{S}(\mathcal{S}(\Lambda_{(1)})\Lambda_{(2)})\ e_j> \\ &=<\lambda,\ e_j><\varepsilon,\ \Lambda>= 0,\end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue del Teorema 1.1.20 ya que H es no semisimple.

Afirmación 2. $\dim I_j = p$ para todo $1 \leq j \leq s$.

Como para todo idempotente $e \in B,\ e \neq 0$, $He \cong H \otimes_B Be$ como espacios vectoriales sobre k, se tiene que $\dim He = \mathrm{rg}_B H \cdot \dim Be$, donde $\mathrm{rg}_B H$ es el rango de H como B-módulo libre. Pero esta dimensión es p, ya que $\dim Be = 1$, por ser B conmutativa.

Sea $T_j = \mathcal{S}^2|_{I_j},\ 1 \leq j \leq s$. Por las afirmaciones anteriores, se sigue que $\mathrm{tr}(T_j) = 0,\ T_j^{2p^n} = \mathrm{id}_{I_j}$ y $\dim\ I_j = p$, lo cual implica por el Lema 3.1.1 (c) que $T_j^p = \pm\omega_j^{m_j p}\,\mathrm{id}_{I_j}$, donde ω_j es una raíz p^n-ésima de la unidad y $0 \leq m_j \leq p^{n-1} - 1$. Como $T_j(e_j) = \mathcal{S}^2|_{I_j}(e_j) = e_j$, tenemos que $m_j = 0$ y $T_j^p = \mathrm{id}_{I_j}$, para todo $1 \leq j \leq s$, esto es, $\mathcal{S}^{2p}|_{I_j} = \mathrm{id}_{I_j}$ para todo $1 \leq j \leq s$. Luego, la proposición se sigue de la Proposición 3.1.2. □

Observación 3.1.4. [RS1] Radford y Schneider probaron la Proposición 3.1.3 para el caso $n = 1$ usando el Lema 3.1.1 (b). Este resultado da una demostración alternativa de la clasificación de las álgebras de Hopf de dimensión p^2, la cual fue dada recientemente por S-H. Ng [Ng]. A saber, si H es semisimple, entonces por un resultado de Masuoka [Mk3], es isomorfa a un álgebra de grupo de orden p^2. Supongamos ahora que H es no semisimple. Por la Observación 1.1.21, $G(H)$ o $G(H)^*$ es no trivial y el orden de cada grupo es menor a p^2. Supongamos que $G(H)$ es no trivial. Entonces $\dim H = p|G(H)|$ y de la fórmula (1.1) se sigue que $\mathcal{S}^{4p} = \mathrm{id}$. Por lo tanto, por la proposición anterior, H debe ser punteada y por [AS2, Thm. A (ii)], H es isomorfa a un álgebra de Taft.

Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita y supongamos que $G(H)$ es abeliano de orden p^n, $n \geq 0$. Siguiendo la clasificación de grupos abelianos finitos, decimos que $G(H)$ es de tipo $(p^{i_1}, p^{i_2}, \dots, p^{i_s})$ si $G(H) \simeq \mathbb{Z}/(p^{i_1}) \times \dots \times \mathbb{Z}/(p^{i_s})$. Supongamos además que $G(H^*)$ también es abeliano y su orden es una potencia de p.

Definición 3.1.5. Decimos que el álgebra de Hopf H es de *tipo* $(p^{i_1}, \dots, p^{i_s}; p^{j_1}, \dots, p^{j_t})$ si $G(H)$ y $G(H^*)$ son de tipo $(p^{i_1}, \dots, p^{i_s})$ y $(p^{j_1}, \dots, p^{j_t})$ respectivamente.

Si H es un álgebra de Hopf no semisimple de dimensión p^3, entonces $G(H)$ y $G(H^*)$ son abelianos y sus órdenes son potencias de p, por el Teorema 1.1.23. Salvo dualidad, se tienen sólo 10 tipos posibles. A continuación probamos que es posible clasificar 8 de los 10 tipos posibles.

Teorema 3.1.6. (a) *No existe álgebra de Hopf H de dimensión p^3 tal que H o H^* es de uno de los siguientes tipos:*

$$(1;1),\ (p,p;1),\ (p,p;p),\ (p,p;p^2),\ (p^2;1).$$

(b) *Sea H un álgebra de Hopf no semisimple de dimensión p^3.*

- (i) *Si H es de tipo $(p,p;p,p)$, entonces $H \simeq T(q) \otimes k[\mathbb{Z}/(p)]$.*
- (ii) *Si H es de tipo $(p^2;p)$, entonces $H \simeq \mathbf{r}(q)$.*
- (iii) *Si H es de tipo $(p^2;p^2)$, entonces, o bien $H \simeq \widehat{T(q)}$, o bien $H \simeq \widetilde{T(q)}$.*

Demostración. De la clasificación de Masuoka se sigue que ningún álgebra de Hopf semisimple satisface alguna de las condiciones en (a). Entonces, si existe un álgebra de Hopf H que satisface una de las condiciones anteriores, H debe ser no semisimple. El tipo $(1;1)$ es imposible por Observación 1.1.21. Para los otros tipos, se tiene que $|G(H)| = p^2$ y por la fórmula (1.1), el orden de la antípoda divide a $4p^2$. Por lo tanto, por la Proposición 3.1.3, H debe ser punteada. Comparando los casos con la lista, se sigue que los casos en (a) son imposibles y en el caso (i), H debe ser isomorfa a $T(q) \otimes k[\mathbb{Z}/(p)]$, en el caso (ii), H debe ser isomorfa a $\mathbf{r}(q)$ y en el caso (iii), H debe ser isomorfa, o bien a $\widehat{T(q)}$, o bien a $\widetilde{T(q)}$. $\square$

Observación 3.1.7. Del Teorema 3.1.6 y el Corolario 2.2.3 se sigue que un álgebra de Hopf H de dimensión p^3 es isomorfa a un álgebra de Hopf de la lista $(a), \dots, (k)$ de la introducción o H satisface la condición (I), (I*) o (II), *i.e.* H es extraña y su tipo es, o bien $(p;1)$, o bien $(1;p)$, o bien $(p;p)$.

Observación 3.1.8. De la clasificación de Masuoka se sigue que no existe álgebra de Hopf semisimple de dimensión p^3 de tipo $(p;1)$ o de tipo $(p;p)$. Los núcleos de Frobenius-Lusztig $\mathbf{u}_q(\mathfrak{sl}_2)$, $q \in \mathbb{G}_p \smallsetminus \{1\}$ son de tipo $(p;1)$ y las álgebras libro $\mathbf{h}(q,m)$, $q \in \mathbb{G}_p \smallsetminus \{1\}$, $m \in \mathbb{Z}/(p) \smallsetminus \{0\}$ son de tipo $(p;p)$. Éstas son las únicas álgebras de Hopf no semisimples y punteadas de tipo $(p;1)$ o $(p;p)$, ver [AS2, Section 6].

3.1.1. Álgebras de Hopf de tipo $(\mathbf{p}; \mathbf{p})$

Con el objetivo de colaborar con la clasificación completa de álgebras de Hopf de dimensión p^3, damos en esta sección algunos resultados sobre álgebras de Hopf de tipo $(p; p)$.

El siguiente teorema nos será de mucha utilidad para estudiar el caso cuasitriangular.

Teorema 3.1.9. *Sea H un álgebra de Hopf no semisimple de dimensión finita tal que $G(H)$ es abeliano, $\mathcal{S}^{4p} = \mathrm{id}$ y $< \alpha, x >= 1$ para todo $x \in G(H)$, donde α es el elemento modular de H^*. Supongamos además que existe un epimorfismo de álgebras de Hopf $\pi : H \to L$, tal que $\pi(x) = 1$ para todo $x \in G(H)$, donde L es un álgebra de Hopf semisimple tal que $\dim L = \dim H/p|G(H)|$. Entonces $\operatorname{ord} \mathcal{S} = 4p$.*

Demostración. Como H es no semisimple, el orden de la antípoda es mayor a 2, y por la fórmula (1.1), éste debe dividir a $4p$. Claramente no es p, ya que el orden debe ser par. Supongamos que $\mathcal{S}^{2p} = \mathrm{id}$.

Sea $\{e_0, \dots, e_s\}$ el conjunto de idempotentes centrales primitivos de $k[G(H)]$. Como en la demostración de la Proposición 3.1.3, podemos escribir $1 = e_0 + \cdots + e_s$ y por lo tanto $H = \bigoplus_{j=0}^{s} I_j$, donde $I_j = He_j$. Puesto que $G(H)$ es abeliano, se sigue que $\dim k[G(H)]e_j = 1$ para todo $0 \leq j \leq s$, y esto implica que $\dim I_j = \dim H/|G(H)|$ para todo $0 \leq j \leq s$, ya que

$$\dim I_j = \dim H \otimes_{k[G(H)]} k[G(H)]e_j = \mathrm{rg}_{k[G(H)]} H \dim k[G(H)]e_j = \dim H/|G(H)|.$$

Se mostró también en la demostración de la Proposición 3.1.3 que estos espacios son invariantes por la acción de $\mathcal{S}^2$ y $\mathrm{tr}(S^2|_{I_j}) = 0$. Sea $q \in \mathbb{G}_p \smallsetminus \{1\}$. Como $\mathcal{S}^{2p} = \mathrm{id}$, por el Lema 3.1.1 (a) tenemos que $I_j = \bigoplus_{m=0}^{p-1} I_{j,m}$ para todo $0 \leq j \leq s$, donde $I_{j,m} = \{h \in I_j : \mathcal{S}^2(h) = q^m h\}$, y $p \dim I_{j,m} = \dim I_j$ para todo $0 \leq m \leq p-1$. En particular,

$$\dim I_{0,0} = \dim I_0/p = \dim H/p|G(H)| = \dim L,$$

y podemos descomponer H como $H = \bigoplus_{j,m=0}^{p-1} I_{j,m}$.

De la hipótesis $\pi(x) = 1$ para todo $x \in G(H)$, se sigue ahora que $\pi(e_j) = 0$ para todo $j \neq 0$, esto es, $I_j \subseteq \operatorname{Ker} \pi$ para todo $j \neq 0$. Más aún, $I_{0,m} \subseteq \operatorname{Ker} \pi$ para todo $m \neq 0$, ya que para todo $h \in I_{0,m}$, con $m \neq 0$, se tiene que $q^m \pi(h) = \pi(\mathcal{S}^2(h)) = \mathcal{S}^2(\pi(h)) = \pi(h)$, por ser L semisimple. Por lo tanto $\bigoplus_{(j,m)\neq(0,0)} I_{j,m} \subseteq \operatorname{Ker} \pi$, lo cual implica que

$$\operatorname{Ker} \pi = \bigoplus_{(j,m)\neq(0,0)} I_{j,m}, \tag{3.2}$$

por tener la misma dimensión.

Sea $\Lambda \in H$ una integral a izquierda no nula, entonces $\Lambda \in I_{0,0}$. En efecto, como $H = \bigoplus_{j=0}^{s} I_j$, existen $h_0, \dots, h_s$ en H tales que $\Lambda = h_0 e_0 + \cdots + h_s e_s$. Por lo tanto, $\Lambda = < \alpha, e_0 > \Lambda = \Lambda e_0 = h_0 e_0$, ya que $< \alpha, x >= 1$ para todo $x \in G(H)$ y $e_0 = \frac{1}{|G(H)|} \sum_{x \in G(H)} x$. Más aún, por [R3, Prop. 3, d)], sabemos que $\mathcal{S}^2(\Lambda) =< \alpha, g^{-1} > \Lambda$, donde $g \in G(H)$ es el elemento modular de H. Esto implica que $\Lambda \in I_{0,0}$, ya que por hipótesis tenemos que $< \alpha, g^{-1} >= 1$ y $\Lambda = h_0 e_0 \in I_0$.

Por otro lado, al ser H no semisimple se tiene que $< \varepsilon, \Lambda > = < \varepsilon, \pi(\Lambda) > = 0$ y esto implica que $\pi(\Lambda) = 0$, por ser $\pi(\Lambda)$ una integral a izquierda y L semisimple. Entonces $\Lambda \in \operatorname{Ker} \pi \cap I_{0,0}$ y por lo tanto, (3.2) implica que $\Lambda = 0$, lo cual es una contradicción a nuestra elección de Λ. $\square$

Observación 3.1.10. Sean H, I_0, Λ y $\alpha \in G(H^*)$ como en el Teorema 3.1.9 y sean $e_0, \dots, e_s$ idempotentes primitivos de $k[G(H)]$ tales que $1 = e_0 + \cdots + e_s$. Entonces $\Lambda \in I_0$ si y sólo si $< \alpha, x >= 1$, para todo $x \in G(H)$.

Demostración. Supongamos que $\Lambda \in I_0$. Entonces existe $h \in H$ tal que $\Lambda = he_0$. En particular, para todo $x \in G(H)$ se tiene que $\Lambda x = < \alpha, x > \Lambda = he_0 x = he_0 = \Lambda$, y esto implica que $< \alpha, x >= 1$, para todo $x \in G(H)$.

Recíprocamente, supongamos que $< \alpha, x >= 1$, para todo $x \in G(H)$. Como $H = He_0 + \cdots + He_s$, existen $h_0, \dots, h_s \in H$ tal que $\Lambda = h_0 e_0 + \cdots + h_s e_s$. Puesto que $< \alpha, e_0 >= 1$, se tiene que $\Lambda = < \alpha, e_0 > \Lambda = \Lambda e_0 = h_0 e_0$, lo que implica que $\Lambda \in I_0$. $\square$

Observación 3.1.11. La demostración del teorema anterior estuvo inspirada en algunos resultados de Ng; los espacios $I_{j,m}$, $0 \leq j, m \leq p-1$ son el espacios $H^w_{0,m,j}$, $w = q \in \mathbb{G}_p \setminus \{1\}$, definidos en [Ng, Section 3] en el caso particular que $\mathcal{S}^{2p} = \mathrm{id}$.

Corolario 3.1.12. *Sea H un álgebra de Hopf no semisimple de dimensión p^3 y tipo $(p;p)$.*

(*a*) *Entonces el orden de la antípoda es $2p$ o $4p$.*

(*b*) *Si $< \beta, x >= 1$ para todo $\beta \in G(H^*)$, $x \in G(H)$, entonces el orden de la antípoda es $4p$.*

Demostración. (*a*) Como H es no semisimple, el orden de la antípoda es mayor a 2 y por la fórmula (1.1) debe dividir a $4p$. Luego, $\operatorname{ord} \mathcal{S}$ es $2p$ o $4p$, ya que éste es par y p es impar.

(*b*) Consideremos el epimorfismo de álgebras de Hopf $\pi : H \to k^{G(H^*)}$ dado por la fórmula $< \pi(h), \beta >=< \beta, h >$ para todo $h \in H$, $\beta \in G(H^*)$. Entonces $\pi(x) = 1$ para todo $x \in G(H)$, ya que por hipótesis $< \beta, x >= 1$ para todo $\beta \in G(H^*)$, $x \in G(H)$. Luego, la afirmación se sigue directamente del Teorema 3.1.9, pues $k^{G(H^*)}$ es semisimple, $\dim k^{G(H^*)} = p = \dim H/p|G(H)|$ y $\mathcal{S}^{4p} = \mathrm{id}$. $\square$

Sea H un álgebra de Hopf provista de una proyección $H \xrightarrow{\pi} B$, que admite una sección de álgebras de Hopf $B \xrightarrow{\gamma} H$. Entonces $A = H^{co\,\pi}$ es un álgebra de Hopf en la categoría de módulos de Yetter-Drinfeld sobre B y H es isomorfa al producto smash $A \# B$. En tal caso, siguiendo la terminología de Majid, decimos que H es una *bosonización* de B. Por referencias sobre la correspondencia entre álgebras de Hopf con una proyección y álgebras de Hopf en la categoría de módulos de Yetter-Drinfeld ver [Mj], [R5].

Proposición 3.1.13. *Sea H un álgebra de Hopf no semisimple de dimensión finita y supongamos que $G(H)$ es no trivial, abeliano y $G(H) \simeq G(H^*)$.*

(*a*) *Si $|G(H)| = p$, entonces H es una bosonización de $k[G(H)]$ si y sólo si existe $\beta \in G(H^*)$ y $x \in G(H)$ tal que $< \beta, x >\neq 1$.*

(*b*) *Si $\dim H = p|G(H)|$, entonces H es una bosonización de $k[G(H)]$.*

Demostración. (a) Supongamos que H es una bosonización de $k[G(H)]$. Entonces existe una proyección de álgebras de Hopf $H \xrightarrow{\pi} k[G(H)]$ que admite una sección de álgebras de Hopf $k[G(H)] \xrightarrow{\gamma} H$, con $\pi \circ \gamma = \mathrm{id}$. Sea $G = G(H)$ y denotemos por $\widehat{G}$ al grupo de caracteres de G. En lo que sigue, identificamos $\widehat{G}$ con $\mathrm{Alg}(k[G], k) = G(k[G]^*)$. Como $G \neq 1$, existen $x \in G$, $\beta \in \widehat{G}$ tales que $< \beta, x > \neq 1$. Sea $\widehat{G} \xrightarrow{\varphi} G(H^*)$ el morfismo de grupos dado por $\varphi(\chi) = \chi \circ \pi$ para todo $\chi \in \hat{G}$. Entonces $\beta \circ \pi \in G(H^*)$, $\gamma(x) \in G$ y $< \beta \circ \pi, \gamma(x) > = < \beta, \pi \circ \gamma(x) > = < \beta, x > \neq 1$.

Supongamos ahora que H no es una bosonización de $k[G]$. Mostraremos que para todo $\beta \in G(H^*)$, $x \in G$, $< \beta, x > = 1$. Sea $k[G] \xrightarrow{\iota} H$ la inclusión del álgebra de grupo en H. Como $G(H^*)$ es no trivial, se tiene un epimorfismo de álgebras de Hopf $H \xrightarrow{\pi} k^{G(H^*)}$, dado por $< \pi(h), \beta > = < \beta, h >$ para todo $h \in H$, $\beta \in G(H^*)$.

Afirmación 1. $\pi(x) = 1_{k^{G(H^*)}}$ para todo $x \in G$.

Al ser $G(H^*)$ abeliano, se tiene que $k^{G(H^*)} \simeq k[\widehat{G(H^*)}] \simeq k[G]$ como álgebras de Hopf. Más aún, la composición de estos isomorfismos con π induce un epimorfismo de álgebras de Hopf $H \xrightarrow{\tau'} k[G]$. Si existe $x \in G$ tal que $\pi(x) \neq 1_{k^{G(H^*)}}$, entonces $\tau'(x) \neq 1$ y la restricción $\tau' \circ \iota$ define un automorfismo de $k[G]$, por ser $|G| = p$ un número primo. Definamos ahora $\tau : H \to k[G]$ via $\tau = (\tau' \circ \iota)^{-1} \circ \tau'$. Entonces $\tau \circ \iota = \mathrm{id}_{k[G]}$ y H es una bosonización de $k[G]$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto para todo $\beta \in G(H^*)$, $x \in G$ tenemos que $< \beta, x > = < \pi(x), \beta > = < 1_{k^{G(H^*)}}, \beta > = 1$, lo cual prueba (a).

(b) Sea $H \xrightarrow{\tau'} k[G]$ el epimorfismo definido en la demostración de la Afirmación 1.

Afirmación 2. $\tau'|_G$ define un automorfismo de G.

Supongamos por el contrario, que $\tau'|_G$ no define un automorfismo de G. Entonces existe $h \in G$ tal que $h \neq 1$ y $\tau'(h) = 1$; en particular, $h \in H^{co\ \tau'}$.

Por otro lado, $\dim H^{co\ \tau'} = p$, puesto que $\dim k^{G(H^*)} = |\widehat{G(H^*)}| = |G|$, y $\dim H = p|G| = \dim H^{co\ \tau'} \dim k^{G(H^*)}$, por el Teorema 1.1.23. Al ser p primo, se sigue que $\mathrm{ord}\, h = p$ y $k < h > = H^{co\ \tau'}$. En particular, se tiene la sucesión exacta de álgebras de Hopf de dimensión finita

$$1 \to k < h > \xrightarrow{\iota} H \xrightarrow{\tau'} k[G] \to 1,$$

lo que implica, como es sabido, que H es semisimple, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, el automorfismo $\tau'|_G$ define un automorfismo de álgebras de Hopf en $k[G]$, y H es una bosonización de $k[G]$. □

Observación 3.1.14. Si se examinan las álgebras de Hopf de la lista $(a), \ldots, (k)$ en la introducción, se ve que los casos (d), (e), (f) y (i) son bosonizaciones. En el caso (d), es claro que el álgebra de Hopf dada por el producto tensorial es la bosonización de $k[\mathbb{Z}/(p)]$ y por la proposición anterior también es una bosonización de $k[\mathbb{Z}/(p) \times \mathbb{Z}/(p)]$. Los casos (e) y (f) son bosonizaciones de $k[\mathbb{Z}/(p^2)]$ y las álgebras de Hopf libro $\mathbf{h}(q, m)$ del caso (i) son bosonizaciones de $k[\mathbb{Z}/(p)]$. En el caso de las álgebras libro, Andruskiewitsch y Schneider probaron en [AS2] que también son bosonizaciones del álgebra de Taft, *i.e.* son isomorfas al producto smash $R\#T(q)$. Más aún, también probaron que las álgebras R son todas las álgebras de Hopf no semisimples de orden p en la categoría de módulos de Yetter-Drinfeld sobre $T(q)$, salvo isomorfismos.

Ahora probaremos que un álgebra de Hopf H de dimensión p^3 es una bosonización de $k[\mathbb{Z}/(p)]$ en los siguiente dos casos. Aunque se pueden conocer algunas propiedades de H, lamentablemente no podemos determinar su estructura, ya que esto implicaría conocer la clasificación de álgebras de Hopf de dimensión p^3 que son bosonizaciones de $k[\mathbb{Z}/(p)]$, esto es, de álgebras de Hopf trenzadas de dimensión p^2 en la categoría de módulos de Yetter-Drinfeld sobre $k[\mathbb{Z}/(p)]$, el cual sigue siendo un problema abierto. En particular, podría haber algún álgebra de Hopf de dimensión p^3 y de tipo $(p;p)$ que sea una bosonización, pero que no sea isomorfa a un álgebra libro.

Corolario 3.1.15. *Sea H un álgebra de Hopf no semisimple de dimensión p^3 y tipo $(p;p)$. Si $\mathcal{S}^{2p} = \mathrm{id}$ entonces H es una bosonización de $k[\mathbb{Z}/(p)]$.*

Demostración. Se sigue del Corolario 3.1.12 (b) y de la Proposición 3.1.13 (a). □

Corolario 3.1.16. *Sea H un álgebra de Hopf de dimensión p^3 y tipo $(p;p)$ tal que H contiene un elemento casi-primitivo no trivial. Entonces H es una bosonización de $k[\mathbb{Z}/(p)]$.*

Demostración. Supongamos por el contrario, que H no es una bosonización de $k[\mathbb{Z}/(p)]$. Por [AN, Prop. 1.8], H contiene una subálgebra de Hopf B que es isomorfa a un álgebra de Taft de dimensión p^2. Sean $x,\ h \in H$, los generadores de B, tales que $1 \neq h \in G(H)$ y $x \in P_{1,h}$.

Consideremos ahora el epimorfismo de álgebras de Hopf $\pi : H \to k^{G(H^*)}$ dado por $< \pi(t), \beta > =< \beta, t >$ para todo $t \in H,\ \beta \in G(H^*)$. Si π es no trivial en $G(H)$, entonces H es una bosonización de $k[\mathbb{Z}/(p)]$, por la Proposición 3.1.13 (a). Si π es trivial en $G(H)$, entonces $t \in H^{co\ \pi}$ para todo $t \in G(H)$. Como π es un epimorfismo de álgebras de Hopf y $\Delta(x) = x \otimes 1 + h \otimes x$, tenemos que $\pi(x)$ es un elemento primitivo en $k^{G(H^*)}$. Puesto que $G(H^*)$ tiene orden finito, $\pi(x) = 0$ y por lo tanto $(\mathrm{id} \otimes \pi)\Delta(x) = x \otimes 1$, es decir $x \in H^{co\ \pi}$. Al estar B generado por x y $h \in G(H)$, se tiene que $B \subseteq H^{co\ \pi}$ y por lo tanto $B = H^{co\ \pi}$, ya que ambos tienen dimensión p^2. Luego, H encaja en la sucesión exacta de álgebras de Hopf

$$1 \to B \xrightarrow{\iota} H \xrightarrow{\pi} k^{G(H^*)} \to 1.$$

Al ser $G(H^*) \simeq \mathbb{Z}/(p)$, tenemos por el Teorema 2.2.1 que H^* es punteada. Como las únicas álgebras de Hopf no semisimples y punteadas de dimensión p^3 y tipo $(p;p)$ son las álgebras libro, se sigue que $H^* \simeq \mathbf{h}(q, -m)$, donde $q \in \mathbb{G}_p \setminus \{1\}$ y $m \in \mathbb{Z}/(p) \setminus \{0\}$. Por lo tanto, $H \simeq \mathbf{h}(q, m)$ y por consiguiente H es punteada, ya que para todo $q \in \mathbb{G}_p \setminus \{1\},\ m \in \mathbb{Z}/(p) \setminus \{0\}$ se tiene que $\mathbf{h}(q, -m)^* \simeq \mathbf{h}(q, m)$, ver [AS2, Section 6]. Luego, por la Observación 3.1.14, H es una bosonización de $k[\mathbb{Z}/(p)]$. □

Para finalizar con esta sección, damos un resultado bastante particular sobre álgebras de Hopf de dimensión p^3 basándonos en [Na2, Prop. 1.3] y el Teorema 2.2.1.

Proposición 3.1.17. *Sea H un álgebra de Hopf no semisimple de dimensión p^3 y supongamos que H contiene una subcoálgebra simple C de dimensión 4 tal que $\mathcal{S}(C) = C$. Entonces H^* es punteada. En particular, H no puede ser de tipo $(p;p)$.*

Demostración. Sea B el álgebra generada por C; claramente B es una subálgebra de Hopf de H y se tiene que $\dim B | p^3$, por el Teorema 1.1.23. Como $C \subseteq B \subseteq H$, B es no semisimple y no punteada. En efecto, como $C \subseteq B$, B es no punteada. Si B fuera semisimple, entonces $\dim B = p$ o p^2, ya que H es no semisimple por hipótesis. Pero en este caso, por [Z, Thm. 2] y [Ng, Thm.

5.5], B sería isomorfa a un álgebra de grupo, lo cual es imposible, ya que éstas no contienen a ninguna subcoálgebra de dimensión mayor a 1. Entonces necesariamente $B = H$, pues por los mismos resultados anteriores, las únicas álgebras de Hopf no semisimples cuyas dimensiones son una potencia de p con exponente menor a 3 son las álgebras de Taft, las cuales son punteadas. Por lo tanto, H está generada como álgebra por una coálgebra simple de dimensión 4 que es estable por la antípoda. Por [Na2, Prop. 1.3], H encaja en una sucesión exacta

$$1 \to k^G \to H \to A \to 1,$$

donde G es un grupo finito y A^* es un álgebra de Hopf punteada no semisimple.

Por el Teorema 1.1.23, sabemos que $|G(H)|$ divide a p^3. Como H es no semisimple y no punteada, por el Teorema 3.1.6 se sigue que $|G(H)| = 1$ o $|G(H)| = p$, puesto que si $|G(H)| = p^2$ o p^3, tendríamos que H es semisimple o punteada. Si $|G(H)| = 1$, entonces $H = A$ y por lo tanto H^* es punteada. Si $|G(H)| = p$, entonces por el Teorema 2.2.1, H es punteada, lo cual es imposible por hipótesis. Más aún, si H^* es punteada y de tipo $(p;p)$, entonces H^* es isomorfa a un álgebra libro $\mathbf{h}(q, m)$, para ciertos $q \in \mathbb{G}_p \setminus \{1\}$, $m \in \mathbb{Z}/(p) \setminus \{0\}$. Por lo tanto, H también es punteada y no puede contener una subcoálgebra simple de dimensión 4. $\square$

3.2. Álgebras de Hopf cuasitriangulares de dimensión p^3

Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita y sea $R \in H \otimes H$. Como es usual, usamos la notación simbólica para $R = R^{(1)} \otimes R^{(2)}$. Se define la aplicación lineal $f_R : H^* \to H$ por

$$f_R(\beta) =< \beta, R^{(1)} > R^{(2)} \qquad \text{para todo } \beta \in H^*.$$

Definición 3.2.1. [Dr] El par $(H,\ R)$ se dice un *álgebra de Hopf cuasitriangular* si se satisfacen los siguientes axiomas:

(QT.1) $\Delta^{\mathrm{cop}}(h)R = R\Delta(h)$ para todo $h \in H$,

(QT.2) $(\Delta \otimes \mathrm{id})(R) = R_{13}R_{23}$,

(QT.3) $(\varepsilon \otimes \mathrm{id})(R) = 1$,

(QT.4) $(\mathrm{id} \otimes \Delta)(R) = R_{13}R_{12}$,

(QT.5) $(\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(R) = 1$;

o equivalentemente si $f_R : H^{*cop} \to H$ es un morfismo de biálgebras y se satisface (QT.1). Aquí usamos R_{12} para denotar al elemento $R \otimes 1 \in H^{\otimes 3}$; de manera análoga escribimos R_{13} y R_{23}. Notar que $(H^{\mathrm{cop}}, R_{21})$ y $(H^{\mathrm{op}}, R_{21})$ también son cuasitriangulares, donde $R_{21} := R^{(2)} \otimes R^{(1)}$. Nos referiremos a un par $(H,\ R)$ que satisface los cinco axiomas anteriores como un álgebra de Hopf cuasitriangular o simplemente diciendo que H admite una estructura cuasitriangular. Ver por ejemplo [R2].

Un morfismo $f : (H,\ R) \to (H',\ R')$ de álgebras de Hopf cuasitriangulares es un morfismo de álgebras de Hopf $f : H \to H'$ tal que $R' = (f \otimes f)(R)$. Si $\widetilde{R} = R_{21}$, se tiene otro morfismo de álgebras de Hopf $f_{\widetilde{R}} : H^* \to H^{op}$ por

$$f_{\widetilde{R}}(\beta) =< \beta, R^{(2)} > R^{(1)} \qquad \text{para todo } \beta \in H^*.$$

Con la identificación usual de espacios vectoriales de H y H^{**}, las aplicaciones $f_{\widetilde{R}}$ y f_R están relacionadas por la ecuación $f_{\widetilde{R}} = f_R^*$.

Observación 3.2.2. Sean L y K las imágenes de f_R y $f_{\widetilde{R}}$ respectivamente. Entonces L y K son subálgebras de Hopf de H de dimensión $n > 1$, salvo que H sea coconmutativa y $R = 1 \otimes 1$; a esta dimensión se la denomina el rango de R. Por [R2, Prop. 2], se tiene que $L \simeq K^{*\mathrm{cop}}$.

Sea H_R la subálgebra de Hopf de H generada por L y K. Si B es una subálgebra de Hopf de H tal que $R \in B \otimes B$, entonces $H_R \subseteq B$. Por lo tanto, decimos que $(H,\ R)$ es un *álgebra de Hopf cuasitriangular minimal* si $H = H_R$. En [R2, Thm. 1] se muestra que $H_R = LK = KL$. Si L es semisimple, entonces K es semisimple y por lo tanto H_R es semisimple. Las álgebras de Hopf cuasitriangulares minimales fueron introducidas y estudiadas por primera vez en [R2].

Recordamos ahora algunas propiedades fundamentales de álgebras de Hopf cuasitriangulares de dimensión finita, para más detalles ver [Dr, Mo].

(i) El elemento R es inversible con inversa $R^{-1} = (\mathcal{S} \otimes I)(R) = (I \otimes \mathcal{S}^{-1})(R)$, y vale que $R = (\mathcal{S} \otimes \mathcal{S})(R)$.

(ii) Sea $u = \mathcal{S}(R^{(2)})R^{(1)}$, entonces u también es inversible, donde

(a) $u^{-1} = R^{(2)}\mathcal{S}^2(R^{(1)})$,

(b) $\Delta(u) = (u \otimes u)(\widetilde{R}R)^{-1} = (\widetilde{R}R)^{-1}(u \otimes u)$,

(c) $\varepsilon(u) = 1$,

(d) $\mathcal{S}^2(h) = uhu^{-1} = (\mathcal{S}(u))^{-1}h\mathcal{S}(u)$ para todo $h \in H$.

Consecuentemente, $u\mathcal{S}(u)$ es un elemento central de H. Como $\mathcal{S}^2(h) = h$ para todo $h \in G(H)$, se sigue que u conmuta con los elementos de tipo grupo de H. A $u \in H$ se lo llama el *elemento de Drinfeld* de H.

Decimos que $v \in H$ es un *elemento cinta* de $(H,\ R)$ si las siguientes condiciones se satisfacen:

(R.1) $v^2 = u\mathcal{S}(u)$,

(R.2) $\mathcal{S}(v) = v$,

(R.3) $\varepsilon(v) = 1$,

(R.4) $\Delta(v) = (\widetilde{R}R)^{-1}(v \otimes v)$ y

(R.5) $vh = hv$ para todo $h \in H$.

Si H contiene un elemento cinta, entonces la terna $(H,\ R,\ v)$ o simplemente H se dice un *álgebra de Hopf de cintas*, ver [K, XIV. 6], [KR], [R4, Section 2.2].

El siguiente teorema será crucial para probar algunos resultados para el caso en el cual la dimensión del álgebra de Hopf es p^3.

Teorema 3.2.3. [Na1, Thm. 2.3] *Sea H un álgebra de Hopf cuasitriangular de dimensión pq sobre k, donde p y q son primos impares no necesariamente distintos. Entonces H es isomorfa a un álgebra de grupo $k[F]$, donde F es un grupo de orden pq. En particular, H es semisimple.* □

Observación 3.2.4. El teorema anterior implica el resultado conocido que el álgebra de Taft $T(q)$ de dimensión p^2, con p impar, no admite ninguna estructura cuasitriangular.

El siguiente resultado se debe a S. Gelaki.

Teorema 3.2.5. *Sea* $(H,\ R)$ *un álgebra de Hopf cuasitriangular de dimensión finita con antípoda* $\mathcal{S}$ *sobre un cuerpo* k *de característica* 0.

(a) [Ge1, Thm. 3.3] *Si el elemento de Drinfeld* u *de* H *actúa como la multiplicación por un escalar sobre cualquier representación irreducible de* H *(e.g. si* H^* *es punteada), entonces* $u = \mathcal{S}(u)$ *y en particular* $\mathcal{S}^4 = \mathrm{id}$.

(b) [Ge2, Thm. 1.3.5] *Si* H_R *es semisimple, entonces* $u = \mathcal{S}(u)$ *y* $\mathcal{S}^4 = \mathrm{id}$.

(c) Si H^* *es punteada, entonces* H *es semisimple o* $\dim H$ *es par.*

Demostración. (c) se sigue de (a) y la Observación 1.1.21. □

Ahora podemos probar nuestro primer resultado sobre álgebras de Hopf cuasitriangulares.

Proposición 3.2.6. *Entre las álgebras de Hopf de la lista* $(a),\dots,(k)$ *en la introducción, sólo las álgebras de grupo y los núcleos de Frobenius-Lusztig* $\mathbf{u}_q(\mathfrak{sl}_2)$, *con* $q \in \mathbb{G}_p \setminus \{1\}$, *admiten una estructura cuasitriangular.*

Demostración. Se sabe que las álgebras de grupo y los núcleos de Frobenius-Lusztig son cuasitriangulares, ver [K, IX.7]. Luego, basta mostrar que las otras álgebras de Hopf de la lista no admiten estructura cuasitriangular. Sean $q \in \mathbb{G}_p \setminus \{1\}$ y $m \in \mathbb{Z}/(p) \setminus \{1\}$.

Las álgebras de Hopf en los casos (d), (f) y (g) no admiten estructura cuasitriangular, ya que poseen un epimorfismo de álgebras de Hopf al álgebra de Taft $T(q)$ de dimensión p^2 y por la Observación 3.2.4, $T(q)$ no es cuasitriangular (ver [AS3, Section 1]).

Sea H una de las álgebras de Hopf $\widetilde{T(q)}$, $\mathbf{h}(q,m)$, $\mathbf{u}_q(\mathfrak{sl}_2)^*$, $\mathbf{r}(q)^*$, *i.e.* H es uno de los casos (e), (i), (j), (k) de la lista. Entonces H^* es punteada y H es no semisimple de dimensión impar. Por lo tanto, por el Teorema 3.2.5 (c), H no puede admitir una estructura cuasitriangular.

Sea G un grupo finito. Si $H = k^G$ admite una estructura cuasitriangular, entonces G es abeliano por (QT1), pues k^G es conmutativa y tendríamos que $\Delta^{\mathrm{cop}} = \Delta$. EN particular, H es isomorfa a un álgebra de grupo.

Finalmente, las álgebras de Hopf semisimples de dimensión p^3 en (c) no son cuasitriangulares por [Mk4, Thm. 1]. □

Observación 3.2.7. La demostración para $\widetilde{T(q)}$ de la Proposición 3.2.6 también se sigue de [R4, Section 5]. En ese trabajo, Radford define álgebras de Hopf que dependen de ciertos parámetros y prueba que estas álgebras admiten una estructura cuasitriangular si y sólo si estos parámetros satisfacen ciertas relaciones. Se puede ver que estas álgebras de Hopf son de este tipo y las condiciones necesarias para que admitan una estructura cuasitriangular no se cumplen.

En lo que sigue damos una descripción parcial de las álgebras de Hopf cuasitriangulares de dimensión p^3.

Sea $D(H)$ el doble de Drinfeld de H (ver [Mo] o [R2] para la definición y propiedades básicas). Identificaremos $D(H) = H^{*cop} \otimes H$ como espacios vectoriales y para $\beta \in H^*$ y $h \in H$, el elemento $\beta \otimes h \in D(H)$ se denotará por $\beta \# h$. También identificaremos $D(H)^* = H^{op} \otimes H^*$ y para $h \in H^{op}$ y $\beta \in H^*$, el elemento $h \otimes \beta \in D(H)^*$ se denotará por $h \# \beta$, si no hay confusión.

Para toda álgebra de Hopf cuasitriangular de dimensión finita $(H,\ R)$, existe un epimorfismo F de álgebras de Hopf dado por

$$D(H) \xrightarrow{F} H, \quad F(\beta \# h) =< \beta, R^{(1)} > R^{(2)} h,$$

el cual induce por dualidad una inclusión de álgebras de Hopf $H^* \xrightarrow{F^*} D(H)^*$. Más aún, por [R2, Prop. 10] todos los elementos de tipo grupo de $D(H)^*$ tienen la forma $x \# \beta$, para ciertos $x \in G(H),\ \beta \in G(H^*)$. Además, $k[G(D(H)^*)]$ es una subálgebra de Hopf central de $D(H)$ vía el monomorfismo $\iota(x \# \beta) = \beta \# x$ para todo $x \# \beta \in G(D(H)^*)$ y se tiene una sucesión exacta de álgebras de Hopf

$$1 \to k[G(D(H)^*)] \xrightarrow{\iota} D(H) \xrightarrow{\pi} A \to 1, \tag{3.3}$$

donde A es el álgebra de Hopf dada por el cociente $D(H)/D(H)k[G(D(H)^*)]^+$.

El siguiente lema se debe a S. Natale.

Lema 3.2.8. [Na1, Lemma 3.2] *Sea $1 \to A \xrightarrow{\iota} H \xrightarrow{\pi} B \to 1$ una sucesión exacta de álgebras de Hopf de dimensión finita y sea $L \subseteq H$ una subálgebra de Hopf. Si L es simple entonces, o bien $L \subseteq \iota(A)$, o $L \cap \iota(A) = k1$. En el último caso, la restriction $\pi|_L : L \to B$ es inyectiva.* □

Como aplicación del resultado anterior tenemos el siguiente lema.

Lema 3.2.9. *Sea H un álgebra de Hopf cuasitriangular de dimensión p^3 tal que el morfismo f_R de álgebras de Hopf definido anteriormente es un isomorfismo. Supongamos además que H es simple como álgebra de Hopf. Entonces $G(H) \simeq G(H^*)$, $|G(H)| = p$ y $< \alpha, g >= 1$, donde α y g son los elementos modulares de H^* y H, respectivamente.*

Demostración. H no puede ser semisimple, puesto que de serlo, H admitiría un elemento de tipo grupo central no trivial por [Mk3, Thm. 1] y esto contradice la hipótesis de simplicidad de H. Más aún, H no puede ser unimodular, puesto que de lo contrario H^* sería también unimodular y por la fórmula de Radford para la antípoda tendríamos que $\mathcal{S}^4 = \mathrm{id}$, lo cual implicaría por la Observación 1.1.21 que H es semisimple. Como f_R es un isomorfismo, H^* también es no semisimple, simple como álgebra de Hopf y $G(H) \simeq G(H^*)$. Por lo tanto, por el Teorema 1.1.23 se puede suponer que $|G(H)| = |G(H^*)| = p$ o $|G(H)| = |G(H^*)| = p^2$.

El orden de $G(H)$ no puede ser p^2, ya que de lo contrario, H sería punteada por la Proposición 3.1.3 y consecuentemente isomorfa a un núcleo de Frobenius-Lusztig $\mathbf{u}_q(\mathfrak{sl}_2)$, para cierto $q \in \mathbb{G}_p \smallsetminus \{1\}$, por la Proposición 3.2.6. Esto es una contradicción, ya que $|G(\mathbf{u}_q(\mathfrak{sl}_2))| = p$.

Por lo tanto, la única posibilidad es que $|G(H)| = |G(H^*)| = p$. Por [Ge2, Cor. 2.10, 1)], sabemos que $f_{\widetilde{R}}(\alpha) = g^{-1}$ y por [R4, Prop. 3], $f_{\widetilde{R}R} = f_{\widetilde{R}} * f_R$ y $f_{\widetilde{R}R}(\alpha) = 1$. Esto implica necesariamente que $f_R(\alpha) = g$ y por lo tanto el orden de g y α deben ser iguales.

Consideremos ahora el epimorfismo de álgebras de Hopf $F : D(H) \to H$ y la inclusión de álgebras de Hopf $F^* : H^* \to D(H)^*$ definidas anteriormente. Como $G(H^*) \neq 1$, se tiene que $G = G(D(H)^*) \neq 1$, y dualizando la extensión (3.3), obtenemos otra extensión de álgebras de Hopf dada por

$$1 \to A^* \xrightarrow{\pi^*} D(H)^* \xrightarrow{\iota^*} k^G \to 1.$$

Sea $L = F^*(H^*) \subseteq D(H)^*$. Como H^* es simple como álgebra de Hopf, por el Lema 3.2.8 se tiene que $L \subseteq \pi^*(A^*)$ o $L \cap \pi^*(A^*) = k1$. Pero lo último no puede ocurrir, ya que de lo contrario la restricción $\iota^*|_L : L \to k^G$ sería inyectiva, implicando que H^* es semisimple. Por lo tanto $L \subseteq \pi^*(A^*)$.

Entonces existen $\beta \in G(H^*)$, $\beta \neq \varepsilon$ y $x \in G(H) \setminus \{1\}$ tales que $x\#\beta \in G(\pi^*(A^*)) \subseteq G$. Más aún, como la imagen de G en $D(H)$ es central y F es un epimorfismo de álgebras de Hopf, se sigue que $F(\beta\#x) \in G(H) \cap Z(H)$ y por simplicidad de H tenemos que $F(\beta\#x) = 1$.

Al ser ambos elementos modulares no triviales, se sigue que $G(H^*) =< \alpha >$ y $G(H) =< g >$ y por lo tanto $|G(D(H))| = p^2$. Más aún, $|G(H^*)| = |G(A^*)| = p$, pues de lo contrario $|G(A^*)| = |G(D(H)^*)| = |G(D(H))| = p^2$ y esto implicaría que H contiene un elemento de tipo grupo central no trivial, lo cual contradice la hipótesis de simplicidad de H. Por consiguiente el elemento de tipo grupo $\beta\#x$ genera $G(\pi^*(A^*))$, y $\beta = \alpha^j$, $x = g^i$ para ciertos $1 \leq i, j \leq p-1$. En particular,

$$1 = F(\alpha^j\#g^i) =< \alpha^j, R^{(1)} > R^{(2)}g^i = f_R(\alpha^j)g^i = f_R(\alpha)^j g^i = g^j g^i.$$

Entonces se tiene que $j \equiv -i \mod p$ y $\pi^*(G(A^*)) =< g\#\alpha^{-1} >$. Más aún, por [Na2, Cor. 2.3.2], se sigue que $< \alpha^{-1}, g >^2 = 1$, y esto implica que $1 =< \alpha^{-1}, g >=< \alpha, g >^{-1}$, pues $|G(H)| = |G(H^*)| = p$ y p es impar. □

Probamos ahora uno de nuestros resultados principales.

Teorema 3.2.10. *Sea H un álgebra de Hopf cuasitriangular de dimensión p^3. Entonces*

(*i*) *H es un álgebra de grupo, o*

(*ii*) *H es isomorfa a $\mathbf{u}_q(\mathfrak{sl}_2)$, para algún $q \in \mathbb{G}_p \setminus \{1\}$, o*

(*iii*) *H es un álgebra de Hopf extraña de tipo $(p;p)$ y el morfismo f_R es un isomorfismo. Más aún, H y H^* son cuasitriangulares minimales, $1 =< \beta, x >$ para todo $\beta \in G(H^*)$, $x \in G(H)$, y $\operatorname{ord} \mathcal{S} = 4p$.*

Demostración. Si H es semisimple, el afirmación se sigue de [Mk4, Thm. 1], ya que H es isomorfa a un álgebra de grupo.

Supongamos ahora que H es no semisimple y sea H_R la subálgebra de Hopf cuasitriangular minimal de H. Recordar que $H_R = KL = LK$, donde $K = \operatorname{Im} f_R$ y $L = \operatorname{Im} f_{\widetilde{R}}$. Por el Teorema 3.2.5 (*b*) y la Observación 1.1.21, H_R es necesariamente no semisimple. Como por [Z, Thm. 2] y [Ng, Thm. 5.5], las únicas álgebras de Hopf no semisimples cuyas dimensiones son una potencia de p con exponente menor a 3 son las álgebras de Taft y las álgebras de Taft no son cuasitriangulares por la Observación 3.2.4, concluimos que $\dim H_R = p^3$.

Luego, el único caso posible es cuando $H_R = H$ y $(H,\ R)$ es un álgebra de Hopf cuasitriangular minimal. Entonces por [R2, Cor. 3], se sigue que $\dim H|(\dim K)^2$ y por lo tanto la dimensión de K es p^2 o p^3.

Supongamos que la dimensión de K es p^2. Como H es no semisimple, K es no semisimple por la Observación 3.2.2. Más aún, por [Ng, Thm. 5.5], K debe ser isomorfa a un álgebra de Taft $T(q)$, donde $q \in \mathbb{G}_p \setminus \{1\}$. Como $L \simeq K^{*\mathrm{cop}}$, L también es isomorfa a un álgebra de Taft y por el Ejemplo 1.1.16, $L \simeq T(q^{-1})$.

Es claro que $G(K) \subseteq G(H)$ y $G(L) \subseteq G(H)$, donde el orden de $G(H)$ es p o p^2. Como H es un producto de dos álgebras de Taft, se tiene que $\mathcal{S}^{4p} = \mathrm{id}$. Si el orden de $G(H)$ es p^2, entonces por la Proposición 3.1.3, H es punteada. Luego, por [AS3, Thm. 0.1] y la Proposición 3.2.6, H es isomorfa a un núcleo de Frobenius-Lusztig $\mathbf{u}_q(\mathfrak{sl}_2)$; lo cual es imposible, pues $|G(\mathbf{u}_q(\mathfrak{sl}_2))| = p$.

Por lo tanto $|G(H)| = p$, y consecuentemente $G(H) = G(K) = G(L)$. Sean $g \in G(H)$, $x \in K$ los generadores de K, y $g' \in G(H)$, $y \in L$ los generadores de L. Éstos están sujetos a las relaciones del Ejemplo 1.1.16, ya que ambas son isomorfas a álgebras de Taft, pero en diferentes raíces de la unidad. Más aún, g' debe ser una potencia de g, ya que $|G(H)| = p$. Luego, H está generada como álgebra por $g,\ x$ e y, lo cual implica por [Mo, Lemma 5.5.1] que H es punteada. Entonces por [AS3, Thm. 0.1] y la Proposición 3.2.6, H es isomorfa a $\mathbf{u}_q(\mathfrak{sl}_2)$, para algún $q \in \mathbb{G}_p \setminus \{1\}$.

Supongamos ahora que $\dim K = p^3$. Entonces el morfismo $f_R : H^{*cop} \to H$ es un isomorfismo de álgebras de Hopf. Más aún, H es no punteada y por ende simple como álgebra de Hopf por el Corolario 2.2.3, ya que de lo contrario H sería isomorfa a un núcleo de Frobenius-Lusztig $\mathbf{u}_q(\mathfrak{sl}_2)$, lo cual es imposible pues $\mathbf{u}_q(\mathfrak{sl}_2)^*$ no es punteada ni cuasitriangular. Entonces, por el Lema 3.2.9 se tiene que $|G(H)| = p$ y $< \alpha, g >= 1$, donde α y g son los elementos modulares de H^* y H respectivamente. Puesto que de la demostración del Lema 3.2.9 se tiene que $f_R(\alpha) = g$, se sigue de la Observación 1.1.21 que H y H^* no son unimodulares. Por lo tanto, $< \beta, x >= 1$ para todo $\beta \in G(H^*)$, $x \in G(H)$, lo cual implica por el Corolario 3.1.12 (b) que $\operatorname{ord} \mathcal{S} = 4p$. En conclusión, H es un álgebra de Hopf extraña de tipo $(p;p)$ que satisface todas las condiciones en (iii). □

Es un hecho conocido que las álgebras de grupo y los núcleos de Frobenius-Lusztig son álgebras de Hopf de cintas, ver [K]. A continuación, probamos que no existe otra álgebra de Hopf de cintas de dimensión p^3.

Corolario 3.2.11. *Sea H un álgebra de Hopf de cintas de dimensión p^3. Entonces H es un álgebra de grupo o H es isomorfa a $\mathbf{u}_q(\mathfrak{sl}_2)$ para algún $q \in \mathbb{G}_p \setminus \{1\}$.*

Demostración. Supongamos por el contrario que H es un álgebra de Hopf de cintas de dimensión p^3 que no es un álgebra de grupo y H no es isomorfa a un núcleo de Frobenius-Lusztig. Entonces por el teorema anterior, H es de tipo $(p;p)$ y $\operatorname{ord} \mathcal{S} = 4p$. Sin embargo esto no puede ocurrir, ya que por [KR, Thm. 2], el cuadrado de la antípoda debe tener orden impar. □

Usando el Teorema 3.2.10 y algunos resultados de [AN] y [BD], clasificamos en el siguiente teorema las álgebras de Hopf cuasitriangulares de dimensión 27. Al igual que en [BD], $M^c(n,k)$ denotan las coálgebras matriciales simples contenidas en el corradical.

Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita y sea H_0 el corradical de H. Luego, $H_0 \simeq \bigoplus_{\tau \in \hat{H}} H_\tau$, donde H_τ es una subcoálgebra simple de dimensión $d_\tau^2,\ d_\tau \in \mathbb{Z}$, y $\hat{H}$ es el conjunto de clases de isomorfismo de H-comódulos simples a izquierda. Definimos entonces

$$H_{0,d} = \bigoplus_{\tau \in \hat{H}:\ d_\tau = d} H_\tau.$$

Por ejemplo, $H_{0,1} = k[G(H)]$ y $H_{0,2}$ es la suma de todas las subcoálgebras simples de dimensión 4 de H. Por [AN, Lemma 2.1 (i)], el orden de $G(H)$ divide a la dimensión de $H_{0,d}$ para todo $d \geq 1$.

Teorema 3.2.12. *Sea H un álgebra de Hopf cuasitriangular de dimensión 27. Entonces H es un álgebra de grupo o H es isomorfa a $\mathbf{u}_q(\mathfrak{sl}_2)$ para algún $q \in \mathbb{G}_3 \setminus \{1\}$. Más precisamente, H es isomorfa sólo a un álgebra de Hopf de la siguiente lista, donde $q \in \mathbb{G}_3 \setminus \{1\}$,*

(a) $k[\mathbb{Z}/(27)]$

(b) $k[\mathbb{Z}/(9) \times \mathbb{Z}/(3)]$

(c) $k[\mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(3)]$

(d) $\mathbf{u}_q(\mathfrak{sl}_2)$

Demostración. Por el Teorema 3.2.10, basta mostrar que no existe álgebra de Hopf cuasitriangular H de dimensión 27 que satisface (iii).

Supongamos que tal álgebra de Hopf existe. Como H es no semisimple, por el Teorema 1.1.20 H tampoco es cosemisimple. Más aún, por el Corolario 3.1.16 y la Proposición 3.1.13 (a), H no posee elementos casi-primitivos no triviales.

Sea $H_0 = k[G(H)] \oplus M^c(n_1, k) \oplus \cdots \oplus M^c(n_t, k)$, el corradical de H, donde $2 \leq n_1 \leq \cdots \leq n_t \leq 3$, pues $3 | \dim H_{0,d}$ para todo $d \geq 1$. Más aún, como H no es cosemisimple, se tienen las siguientes posibilidades para H_0:

(1) $H_0 = k[G(H)] \oplus M^c(3, k)$, con $\dim H_0 = 12$,

(2) $H_0 = k[G(H)] \oplus M^c(2, k)^3$, con $\dim H_0 = 15$,

(3) $H_0 = k[G(H)] \oplus M^c(3, k)^2$, con $\dim H_0 = 21$,

(4) $H_0 = k[G(H)] \oplus M^c(2, k)^3 \oplus M^c(3, k)$, con $\dim H_0 = 24$.

Puesto que todos los elementos casi-primitivos de H son triviales, por [BD, Cor. 4.3] se tiene que

$$27 = \dim H > \dim H_1 \geq (1 + 2n_1)3 + \sum_{i=1}^{t} n_i^2. \tag{3.4}$$

Reemplazando las dimensiones correspondientes en la ecuación (3.4), se sigue que ninguno de los casos $(1), \ldots,$ (4) es posible. $\square$

Capítulo 4

Extensiones de grupos cuánticos finitos por grupos finitos

Sea G un grupo de Lie conexo, simplemente conexo y semisimple sobre $\mathbb{C}$, con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, matriz de Cartan C y matriz simetrizada de Cartan CD. Sea $\ell \geq 1$ un número natural impar, coprimo con $\det CD$. Dada una inclusión σ de un grupo finito Γ en G y una raíz ℓ-ésima primitiva de la unidad ϵ, construimos en este capítulo una extensión central A_σ del álgebra de funciones $\mathbb{C}^\Gamma$ por el dual del núcleo de Frobenius-Lusztig $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$; A_σ es un cociente del álgebra de coordenadas cuantizada $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ y $\dim A_\sigma = |\Gamma|\ell^{\dim \mathfrak{g}}$. Más aún, si G es simple y $\sigma(\Gamma)$ no es central en G, obtenemos una familia infinita de Hopf álgebras de Hopf no isomorfas entre sí que son no semisimples, no punteadas y sus duales tampoco son punteados. Esto generaliza un resultado obtenido por E. Müller [Mu2] para $SL_2(\mathbb{C})$. Sin embargo, en la Subsección 4.2.4 mostramos, siguiendo algunos resultados de Masuoka [Mk5], que estas álgebra de Hopf son deformaciones por cociclos unas de otras.

4.1. Álgebras de coordenadas cuantizadas

En esta sección recordamos la definición del álgebra de coordenadas cuantizada de G y que la misma es una extensión central de $\mathcal{O}(G)$, el álgebra de funciones coordenadas de G. Sea $R = \mathbb{Q}[q, q^{-1}]$, con q una indeterminada. En [DL], De Concini y Lyubashenko construyen una forma integral $\Gamma(\mathfrak{g})$ del álgebra envolvente cuantizada $U_q(\mathfrak{g})$, la cual es una R-álgebra de Hopf. Usando la teoría de representaciones de $\Gamma(\mathfrak{g})$, definen una R-subálgebra del dual de Sweedler de $\Gamma(\mathfrak{g})$ (ver Ejemplo 1.1.17), obteniendo así una R-álgebra de Hopf $R_q[G]$.

Para más información sobre las definiciones y las demostraciones de los resultados que aquí se enuncian, ver *loc. cit.* o el libro de Jantzen [J]. Allí se demuestran los resultados con gran detalle.

4.1.1. Definiciones

Comenzamos primero recordando la información asociada a $\mathfrak{g}$:

- Denotaremos por $C = (a_{ij})$ a la matriz de Cartan con respecto a alguna elección de una subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ y raíces simples $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$.

- $n = \dim \mathfrak{h}$ no depende de la elección de la subálgebra de Cartan. Luego, se define es el rango de $\mathfrak{g}$ como $\operatorname{rg} \mathfrak{g} = n$.
- Denotaremos por Φ al sistema de raíces y por W al grupo de Weyl asociado.
- El *reticulado de raíces* de $\mathfrak{g}$ se define por $Q = \mathbb{Z}\Phi = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\alpha_i \subseteq \mathfrak{h}^*$.
- Los pesos fundamentales $\varpi_1, \ldots, \varpi_n \in \mathfrak{h}^*$ están definidos por las condiciones
$$(\alpha_j, \varpi_i) = d_i \delta_{ij} \qquad \text{para todo } 1 \leq i, j \leq n,$$
donde $(-,-)$ es la forma bilineal positiva simétrica en $\mathfrak{h}^*$ inducida por la forma de Killing de $\mathfrak{g}$ y $d_i = \frac{(\alpha_i,\alpha_i)}{2} \in \{1, 2, 3\}$.
- El *reticulado de pesos* se define por $P = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\varpi_i \subseteq \mathfrak{h}^*$. Más aún, se puede ver que $\alpha_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}\varpi_i$ para todo $1 \leq j \leq n$. En particular, $Q \subseteq P$.

Definición 4.1.1. Para todo reticulado M con $Q \subseteq M \subseteq P$ se define el *álgebra envolvente cuantizada* $U_q(\mathfrak{g}, M)$ de $\mathfrak{g}$ como la $\mathbb{Q}(q)$-álgebra generada por los elementos $E_1, \ldots, E_n$, $F_1, \ldots, F_n$ y $\{K_\lambda |\ \lambda \in M\}$, que satisfacen las siguientes relaciones para $\lambda,\ \mu \in M$ y $1 \leq i, j \leq n$:

$$\begin{gathered}
K_0 = 1 \qquad K_\lambda K_\mu = K_{\lambda+\mu} \\
K_\lambda E_j K_{-\lambda} = q^{(\alpha_j,\lambda)} E_j, \qquad K_\lambda F_j K_{-\lambda} = q^{-(\alpha_j,\lambda)} F_j, \\
E_i F_j - F_j E_i = \delta_{ij} \frac{K_{\alpha_i} - K_{\alpha_i}^{-1}}{q_i - q_i^{-1}}, \\
\sum_{m=0}^{1-a_{ij}} (-1)^m \left[\begin{smallmatrix} 1-a_{ij} \\ m \end{smallmatrix} \right]_{q_i} E_i^{1-a_{ij}-m} E_j E_i^m = 0 \qquad (i \neq j), \\
\sum_{m=0}^{1-a_{ij}} (-1)^m \left[\begin{smallmatrix} 1-a_{ij} \\ m \end{smallmatrix} \right]_{q_i} F_i^{1-a_{ij}-m} F_j F_i^m = 0 \qquad (i \neq j).
\end{gathered}$$

Cuando $M = Q$, el álgebra $U_q(\mathfrak{g}, M) = U_q(\mathfrak{g}, Q)$ se llama la *forma adjunta* del álgebra envolvente cuantizada y se denota por $U_q(\mathfrak{g})$. En el otro extremo, cuando $M = P$, el álgebra envolvente cuantizada que se obtiene se llama la *forma simplemente conexa* y se denota por $\check{U}_q(\mathfrak{g})$.

Observación 4.1.2. Si $E_i^{(m)}$ y $F_i^{(m)}$ denotan E_i^m y F_i^m divididos por $(m)_{q_i}!$ respectivamente, por [L2] podemos escribir las últimas dos relaciones de la forma:

$$\begin{gathered}
\sum_{r+s=1-a_{ij}} (-1)^s E_i^{(r)} E_j E_i^{(s)} = 0 \qquad (i \neq j), \\
\sum_{r+s=1-a_{ij}} (-1)^s F_i^{(r)} F_j F_i^{(s)} = 0 \qquad (i \neq j).
\end{gathered}$$

Teorema 4.1.3. *$U_q(\mathfrak{g}, M)$ es un álgebra de Hopf con la estructura determinada por*

$$\begin{aligned}
&\Delta(K_\lambda) = K_\lambda \otimes K_\lambda && \varepsilon(K_\lambda) = 1 && \mathcal{S}(K_\lambda) = K_{-\lambda} \\
&\Delta(E_i) = E_i \otimes 1 + K_{\alpha_i} \otimes E_i && \varepsilon(E_i) = 0 && \mathcal{S}(E_i) = -K_{-\alpha_i} E_i \\
&\Delta(F_i) = F_i \otimes K_{-\alpha_i} + 1 \otimes F_i && \varepsilon(F_i) = 0 && \mathcal{S}(F_i) = -F_i K_{\alpha_i}
\end{aligned}$$

para todo $1 \leq i \leq n$ *y* $\lambda \in M$.

Demostración. Ver [J, Cap. 4]. $\square$

Para $t,\ m \in \mathbb{N}_0$ y $u \in \mathbb{Q}(q) \setminus \{0, \pm 1\}$ usamos la siguiente notación para q-números:

$$[t]_u := \frac{u^t - u^{-t}}{u - u^{-1}}, \qquad [t]_u! := [t]_u[t-1]_u \cdots [1]_u, \qquad \begin{bmatrix} m \\ t \end{bmatrix}_u := \frac{[m]_u!}{[t]_u![m-t]_u!}$$
$$(t)_u := \frac{u^t - 1}{u - 1}, \qquad (t)_u! := (t)_u(t-1)_u \cdots (1)_u, \qquad \binom{m}{t}_u := \frac{(m)_u!}{(t)_u!(m-t)_u!}.$$

Definición 4.1.4. [DL, Section 3.4] El álgebra $\Gamma(\mathfrak{g})$ es la R-subálgebra de $\check{U}_q(\mathfrak{g})$ generada por los elementos

$$K_{\alpha_i}^{-1} \qquad (1 \leq i \leq n),$$
$$\left(\begin{array}{c} K_{\alpha_i}; 0 \\ t \end{array} \right) := \prod_{s=1}^{t} \left(\frac{K_{\alpha_i} q_i^{-s+1} - 1}{q_i^s - 1} \right) \qquad (t \geq 1,\ 1 \leq i \leq n),$$
$$E_i^{(t)} := \frac{E_i^t}{[t]_{q_i}!} \qquad (t \geq 1,\ 1 \leq i \leq n),$$
$$F_i^{(t)} := \frac{F_i^t}{[t]_{q_i}!} \qquad (t \geq 1,\ 1 \leq i \leq n),$$

donde $q_i = q^{d_i}$ para $1 \leq i \leq n$.

Observación 4.1.5. De la misma forma se pueden definir las formas integrales $\Gamma(\mathfrak{b}_+)$ y $\Gamma(\mathfrak{b}_-)$ de las subálgebras de Borel. Tomando las relaciones que las definen y usando resultados de Lusztig [L2], se pueden obtener relaciones que definen $\Gamma(\mathfrak{g})$, ver [DL, Sec. 3.4]. Cabe observar que las mismas no son necesariamente independientes; en particular, las relaciones (4.5) y (4.6) que siguen muestran que los elementos $\left(\begin{array}{c} K_{\alpha_i}; c \\ t \end{array} \right) := \prod_{s=1}^{t} \left(\frac{K_{\alpha_i} q_i^{c-s+1} - 1}{q_i^s - 1} \right)$ están en la R-subálgebra generada por los elementos de la forma $\left(\begin{array}{c} K_{\alpha_i}; 0 \\ s \end{array} \right)$. Más aún, por Lusztig [L3, Cor. 3.1.9] se tiene que las relaciones (4.16), (4.17) y (4.18) se satisfacen en $\check{U}_q(\mathfrak{g})$, y por lo tanto se satisfacen en $\Gamma(\mathfrak{g})$.

$$\text{todos los } K_{\alpha_i}^{-1},\ \left(\begin{array}{c} K_{\alpha_i}; c \\ t \end{array} \right) \text{ conmutan,} \tag{4.1}$$

$$\left(\begin{array}{c} K_{\alpha_i}; c \\ 0 \end{array} \right) = 1, \qquad (q_i - 1)\left(\begin{array}{c} K_{\alpha_i}; 0 \\ 1 \end{array} \right) = K_{\alpha_i} - 1, \tag{4.2}$$

$$\left(\begin{array}{c} K_{\alpha_i}; c \\ t \end{array} \right)\left(\begin{array}{c} K_{\alpha_i}; c - t \\ s \end{array} \right) = \binom{t+s}{t}_{q_i} \left(\begin{array}{c} K_{\alpha_i}; c \\ t+s \end{array} \right), \quad t,\ s \geq 0, \tag{4.3}$$

$$\left(\begin{array}{c} K_{\alpha_i}; c+1 \\ t \end{array} \right) - q_i^t \left(\begin{array}{c} K_{\alpha_i}; c \\ t \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} K_{\alpha_i}; c \\ t-1 \end{array} \right), \qquad t \geq 1, \tag{4.4}$$

$$\left(\begin{array}{c} K_{\alpha_i}; c \\ t \end{array} \right) = \sum_{0 \leq p}^{p \leq c, t} q_i^{(c-p)(t-p)} \binom{c}{p}_{q_i} \left(\begin{array}{c} K_{\alpha_i}; 0 \\ t-p \end{array} \right), \quad c \geq 0, \tag{4.5}$$

$$\left(\begin{array}{c} K_{\alpha_i};-c \\ t \end{array}\right) = \sum_{p=0}^{t}(-1)^p q_i^{-t(c+p)+p(p+1)/2} \binom{p+c-1}{p}_{q_i} \left(\begin{array}{c} K_{\alpha_i};0 \\ t-p \end{array}\right), \quad c \geq 1, \tag{4.6}$$

$$\left(\begin{array}{c} K_{\alpha_i};c+1 \\ t \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c} K_{\alpha_i};c \\ t \end{array}\right) = q_i^{c-t+1} K_{\alpha_i} \left(\begin{array}{c} K_{\alpha_i};c \\ t-1 \end{array}\right), \quad t \geq 1, \tag{4.7}$$

$$K_\lambda E_j^{(t)} = q^{t(\alpha_j,\lambda)} E_j^{(t)} K_\lambda, \quad \lambda \in P, \tag{4.8}$$

$$K_\lambda F_j^{(t)} = q^{-t(\alpha_j,\lambda)} F_j^{(t)} K_\lambda, \quad \lambda \in P, \tag{4.9}$$

$$\left(\begin{array}{c} K_{\alpha_i};c \\ t \end{array}\right) E_j^{(m)} = E_j^{(m)} \left(\begin{array}{c} K_{\alpha_i};c+ma_{ij} \\ t \end{array}\right), \tag{4.10}$$

$$\left(\begin{array}{c} K_{\alpha_i};c \\ t \end{array}\right) F_j^{(m)} = F_j^{(m)} \left(\begin{array}{c} K_{\alpha_i};c-ma_{ij} \\ t \end{array}\right), \tag{4.11}$$

$$E_i^{(r)} E_i^{(s)} = \begin{bmatrix} r+s \\ r \end{bmatrix}_{q_i} E_i^{(r+s)}, \qquad E_i^{(0)} = 1, \tag{4.12}$$

$$F_i^{(r)} F_i^{(s)} = \begin{bmatrix} r+s \\ r \end{bmatrix}_{q_i} F_i^{(r+s)}, \qquad F_i^{(0)} = 1, \tag{4.13}$$

$$\sum_{r+s=1-a_{ij}} (-1)^s E_i^{(r)} E_j E_i^{(s)} = 0, \tag{4.14}$$

$$\sum_{r+s=1-a_{ij}} (-1)^s F_i^{(r)} F_j F_i^{(s)} = 0, \tag{4.15}$$

$$E_i^{(r)} F_j^{(s)} = F_j^{(s)} E_i^{(r)}, \quad i \neq j \tag{4.16}$$

$$E_i^{(r)} F_i^{(s)} = \sum_{0\leq t}^{t\leq r,s} F_i^{(s-t)} \left[\begin{array}{c} K_{\alpha_i};2t-r-s \\ t \end{array}\right] E_i^{(r-t)}, \tag{4.17}$$

$$F_i^{(s)} E_i^{(r)} = \sum_{0\leq t}^{t\leq r,s} (-1)^t E_i^{(r-t)} \left[\begin{array}{c} K_{\alpha_i};r+s-t-1 \\ t \end{array}\right] F_i^{(s-t)}. \tag{4.18}$$

En lo que sigue definimos el álgebra de coordenadas cuantizada de G. Sea $\mathcal{C}$ la subcategoría estricta plena de $\Gamma(\mathfrak{g})$-mod cuyos objetos son $\Gamma(\mathfrak{g})$-módulos M tales que M es un R-módulo libre de rango finito con una base sobre la cual los operadores K_{α_i} y $\left(\begin{smallmatrix} K_{\alpha_i};0 \\ t \end{smallmatrix}\right)$ actúan por matrices diagonales con autovalores q_i^m y $\binom{m}{t}_{q_i}$ respectivamente.

Definición 4.1.6. [DL, Section 4.1] Denotemos por $R_q[G]$ al R-submódulo de $\mathrm{Hom}_R(\Gamma(\mathfrak{g}), R)$ generado por las funciones coordenadas t_i^j de representaciones M de $\mathcal{C}$

$$< t_i^j, g > = < m^j, g \cdot m_i >,$$

donde (m_i) es la R-base de M, (m^j) es la base dual y $g \in \Gamma(\mathfrak{g})$. Como la subcategoría $\mathcal{C}$ es tensorial, $R_q[G]$ es un álgebra de Hopf.

Sea ϵ una raíz ℓ-ésima primitiva de 1. Si denotamos por $\chi_\ell(q) \in R$ al ℓ-ésimo polinomio ciclotómico, entonces $R/[\chi_\ell(q)R] \simeq \mathbb{Q}(\epsilon)$.

Definición 4.1.7. [DL, Section 6] El álgebra $R_q[G]/[\chi_\ell(q)R_q[G]]$ se denota por $\mathcal{O}_\epsilon(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$ y se denomina el *álgebra de coordenadas cuantizada* de G sobre $\mathbb{Q}(\epsilon)$ en la raíz de la unidad ϵ. De la misma manera que para $\mathcal{O}_\epsilon(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$, podemos tomar la $\mathbb{Q}(\epsilon)$-álgebra de Hopf $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{g}) := \Gamma(\mathfrak{g})/[\chi_\ell(q)\Gamma(\mathfrak{g})]$.

Usando la siguiente definición, podemos relacionar las álgebras de Hopf $\mathcal{O}_\epsilon(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$ y $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{g})$.

Definición 4.1.8. Sean U y H dos álgebras de Hopf sobre un anillo A. Un *apareamiento de Hopf* entre U y H es una forma bilineal $(-,-) : H \times U \to A$ tal que para todo $u,\ v \in U$ y $f,\ h \in H$,

(i) $(h, uv) = (h_{(1)}, u)(h_{(2)}, v)$;

(ii) $(fh, u) = (f, u_{(1)})(h, u_{(2)})$;

(iii) $(1, u) = \varepsilon(u)$ y $(h, 1) = \varepsilon(h)$;

(iv) $(h, \mathcal{S}(u)) = (\mathcal{S}(h), u)$.

Dado un apareamiento de Hopf, los morfismos inducidos $U \to H^*$ y $H \to U^*$ son en realidad morfismos de la forma $U \to H^\circ$ y $H \to U^\circ$ que resultan ser morfismos de álgebras de Hopf, donde H° y U° son los duales de Sweedler de H y U respectivamente. El apareamiento se dice *perfecto* o *no degenerado* si los morfismos anteriores son inyectivos.

Proposición 4.1.9. *Existe un apareamiento de Hopf perfecto entre* $R_q[G]$ *y* $\Gamma(\mathfrak{g})$

$$R_q[G] \otimes_R \Gamma(\mathfrak{g}) \to R$$

que induce un apareamiento de Hopf perfecto entre $\mathcal{O}_\epsilon(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$ *y* $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{g})$

$$\mathcal{O}_\epsilon(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \otimes_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \Gamma_\epsilon(\mathfrak{g}) \to \mathbb{Q}(\epsilon).$$

En particular, $\mathcal{O}_\epsilon(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \subseteq \Gamma_\epsilon(\mathfrak{g})^\circ$ *y* $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{g}) \subseteq \mathcal{O}_\epsilon(G)^\circ_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$.

Demostración. Ver [DL, Lemmas 4.1 y 6.1]. □

Si k es cualquier cuerpo que contiene a $\mathbb{Q}(\epsilon)$, se puede construir una k-forma de $\mathcal{O}_\epsilon(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$, a saber $\mathcal{O}_\epsilon(G)_k := \mathcal{O}_\epsilon(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \otimes_{\mathbb{Q}(\epsilon)} k$. Cuando $k = \mathbb{C}$, simplemente escribimos $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ para $\mathcal{O}_\epsilon(G)_{\mathbb{C}}$. Los siguientes resultados implican, por la Proposición 2.1.6, que $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ es una extensión central de $\mathcal{O}(G)$ por un álgebra de Hopf de dimensión finita.

Teorema 4.1.10. *(a)* $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ *contiene una subálgebra de Hopf central isomorfa al álgebra de funciones coordenadas* $\mathcal{O}(G)$ *en* G.

(b) $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ *es un* $\mathcal{O}(G)$*-módulo proyectivo finitamente generado de rango* $\ell^{\dim G}$.

Demostración. Ver [DL, Prop. 6.4 y Thm. 7.2]. □

Más aún, Brown, Gordon y Strafford mostraron lo siguiente.

Teorema 4.1.11. $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ *es un* $\mathcal{O}(G)$*-módulo libre de rango* $\ell^{\dim G}$.

Demostración. Ver [BG, Section III.7.11]. □

4.1.2. Un toro maximal

En esta subsección mostraremos que la inclusión dada por el Teorema 4.1.10 (a) determina un toro maximal $\mathbf{T}$ de G.

Sea $k = \mathbb{C}$. En [DL, Section 9.2], se define una acción de $\mathbb{C}^n$ en $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{g})$: sea $\phi' : \Gamma(\mathfrak{g}) \to \Gamma_\epsilon(\mathfrak{g})$ la proyección canónica y, para cada $1 \leq i \leq n$ sea H_i el elemento primitivo dado por

$$H_i = \phi' \left(\frac{K_{\alpha_i}^\ell - 1}{\ell(q_i^\ell - 1)} \right) \in \Gamma_\epsilon(\mathfrak{g}) \qquad \text{para todo } 1 \leq i \leq n.$$

Entonces para cualquier n-upla $(p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{C}^n$ y para cualquier $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{g})$-módulo M de dimensión finita, los elementos $\exp(\sum_i p_i H_i)$ definen operadores en M que conmutan con todo morfismo de $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{g})$-módulos. Por lo tanto, definen caracteres sobre $\mathcal{O}_\epsilon(G)$. Claramente, los elementos $\exp(\sum_i p_i H_i) \in \mathcal{O}_\epsilon(G)^*$ forman un grupo y el morfismo dado por

$$\phi : \mathbb{C}^n \to \mathrm{Alg}(\mathcal{O}_\epsilon(G), \mathbb{C}), \quad (p_1, \ldots, p_n) \mapsto \exp\left(\sum_i p_i H_i \right),$$

define un morfismo de grupos cuyo núcleo es el subgrupo $2\pi i\ell\mathbb{Z}^n$. Más aún, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 4.1.12. *El monomorfismo* $(\mathbb{C}/2\pi i\ell\mathbb{Z})^n \hookrightarrow \mathrm{Alg}(\mathcal{O}_\epsilon(G), \mathbb{C})$ *es un isomorfismo.*

Demostración. Ver [DL, Thm. 10.8]. □

Además, la inclusión $\mathcal{O}(G) \xrightarrow{\iota} \mathcal{O}_\epsilon(G)$ dada por el Teorema 4.1.10 (a) induce por restricción un morfismo de grupos $\mathrm{Alg}(\mathcal{O}_\epsilon(G), \mathbb{C}) \xrightarrow{t_\iota} \mathrm{Alg}(\mathcal{O}(G), \mathbb{C})$. La composición de este morfismo de grupos con ϕ define un morfismo de grupos

$$\varphi : \mathbb{C}^n \xrightarrow{\phi} \mathrm{Alg}(\mathcal{O}_\epsilon(G), \mathbb{C}) \xrightarrow{t_\iota} \mathrm{Alg}(\mathcal{O}(G), \mathbb{C}) = G,$$

cuyo núcleo es el subgrupo $2\pi i\mathbb{Z}^n$, por [DL, Prop. 9.3 (c)]. Sea $\mathbf{T}$ el subgrupo de G dado por la imagen de φ.

Lema 4.1.13. $\mathbf{T}$ *es un toro maximal en* G.

Demostración. De la definición se sigue que $\mathbf{T} \simeq (\mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z})^n \simeq (\mathbb{C}^\times)^n$. Luego $\mathbf{T}$ es abeliano, semisimple, conexo y $\dim \mathbf{T} = n$. Si $\mathbf{T}$ no fuera maximal, existiría un toro maximal $\mathbf{T}'$ tal que $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{T}'$. Si $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{h}'$ son sus álgebras de Lie, tendríamos que $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{h}'$, pues G es conexo. Pero entonces $\dim \mathfrak{h}' = n = \dim \mathfrak{h}$, lo que implica que $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}$, y por lo tanto $\mathbf{T} = \mathbf{T}'$. □

4.1.3. Una sucesión exacta

Finalizamos esta sección mostrando explícitamente quién es el cociente de $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ por su subálgebra de Hopf central $\mathcal{O}(G)$.

Sea $\overline{\mathcal{O}_\epsilon(G)} = \mathcal{O}_\epsilon(G)/[\mathcal{O}(G)^+\mathcal{O}_\epsilon(G)]$ y denotemos por $\pi : \mathcal{O}_\epsilon(G) \to \overline{\mathcal{O}_\epsilon(G)}$ al epimorfismo que da el cociente. Por los Teoremas 4.1.10 y 4.1.11, $\overline{\mathcal{O}_\epsilon(G)}$ es un álgebra de Hopf de dimensión $\ell^{\dim G}$. Como $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ es un $\mathcal{O}(G)$-módulo libre, es fielmente playo y por la Proposición 2.1.6, se sigue que $\mathcal{O}(G) = \mathcal{O}_\epsilon(G)^{\operatorname{co}\pi} = {}^{\operatorname{co}\pi}\mathcal{O}_\epsilon(G)$. Esto implica que $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ encaja en la sucesión exacta

$$1 \to \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}_\epsilon(G) \to \overline{\mathcal{O}_\epsilon(G)} \to 1.$$

Nuestro objetivo es determinar el álgebra de Hopf $\overline{\mathcal{O}_\epsilon(G)}$. Para ello, consideramos la forma adjunta del álgebra envolvente cuantizada $U_q(\mathfrak{g})$ con sistema de raíces asociado Φ y grupo de Weyl W. El *grupo de trenzas* B_W de tipo Φ asociado al grupo de Weyl W es el grupo generado por los elementos $t_1, \dots, t_n$ que satisfacen las relaciones

$$t_it_jt_i \cdots = t_jt_it_j \cdots , \text{ para } i \neq j,$$

con m_{ij} factores en ambos lados de la igualdades, donde m_{ij} es el orden del producto $s_{\alpha_i}s_{\alpha_j}$ de las reflexiones simples s_{α_i} y s_{α_j} en W.

Lusztig, e independientemente Levendorskii y Soibelman, probaron que los generadores t_i satisfacen las relaciones de trenza y que B_W actúa a través de automorfismos de álgebras en $U_q(\mathfrak{g})$. Para una discusión detallada sobre estas afirmaciones ver [J, Section 8].

Consideraremos ahora el álgebra de Hopf $\check{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$, con ϵ una raíz ℓ-ésima primitiva de la unidad. El siguiente teorema se debe a De Concini, Kac y Procesi.

Teorema 4.1.14. *Con la misma notación que en la* Definición 4.1.1 *se tiene que*

(*a*) *$U_\epsilon(\mathfrak{g}, M)$ tiene los mismos generadores que $U_q(\mathfrak{g}, M)$ que satisfacen las mismas relaciones, pero con q reemplazado por ϵ.*

(*b*) *$U_\epsilon(\mathfrak{g}, M)$ es un álgebra de Hopf con las mismas definiciones de Δ, ε y $\mathcal{S}$ que para $U_q(\mathfrak{g}, M)$ pero con q reemplazado por ϵ.*

(*c*) *Al igual que $U_q(\mathfrak{g})$, $U_\epsilon(\mathfrak{g}, M)$ admite una acción de B_W.*

Demostración. Ver [DK], [DKP]. □

Sea Z_0 la menor subálgebra B_W-invariante de $\check{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$ que contiene a los elementos

$$K_{\ell\alpha} = K_\alpha^\ell,\ E_i^\ell,\ F_i^\ell \quad \text{para } \alpha \in P \text{ y } 1 \leq i \leq n.$$

Entonces por [BG, Thm. III.6.2], Z_0 es una subálgebra de Hopf central de $\check{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$ y $\check{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$ es un Z_0-módulo libre de rango $\ell^{\dim \mathfrak{g}}$. El álgebra de Hopf de dimensión $\ell^{\dim \mathfrak{g}}$ dada por el cociente $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g}) := \check{U}_\epsilon(\mathfrak{g})/[Z_0^+\check{U}_\epsilon(\mathfrak{g})]$ se llama el *álgebra envolvente cuantizada restringida* de $\mathfrak{g}$ en ϵ o el *núcleo de Frobenius-Lusztig* de $\mathfrak{g}$ en ϵ.

Aunque es un resultado bien conocido que el álgebra de Hopf $\overline{\mathcal{O}_\epsilon(G)}$ es isomorfa al dual del álgebra envolvente cuantizada restringida $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$, sólo pudimos hallar la siguiente referencia.

Teorema 4.1.15. *Las álgebras de Hopf $\overline{\mathcal{O}_\epsilon(G)}$ y $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^*$ son isomorfas.*

Demostración. Ver [BG, Thm. III.7.10]. □

Observación 4.1.16. Varios autores definen el núcleo de Frobenius-Lusztig $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ como la subálgebra de $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{g})$ generada por los elementos E_i, F_i y K_{α_i} para $1 \leq i \leq n$, la cual es de hecho una subálgebra de Hopf de $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{g})$. Sin embargo, esta definición coincide con la dada aquí (ver [BG] para más detalles): por la Proposición 4.1.9, sabemos que existe un apareamiento de Hopf perfecto

$$\mathcal{O}_\epsilon(G) \otimes_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \Gamma_\epsilon(\mathfrak{g}) \to \mathbb{Q}(\epsilon),$$

que induce un apareamiento de Hopf perfecto

$$\overline{\mathcal{O}_\epsilon(G)} \otimes_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \widehat{U}_\epsilon(\mathfrak{g}) \to \mathbb{Q}(\epsilon),$$

donde $\widehat{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$ es la subálgebra de Hopf de $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{g})$ generada por los elementos E_i, F_i y K_{α_i} para $1 \leq i \leq n$. Esto induce un morfismo de álgebras de Hopf de $\overline{\mathcal{O}_\epsilon(G)}$ a $\widehat{U}_\epsilon(\mathfrak{g})^*$ que es un isomorfismo por [BG, Dem. del Thm. III.7.10]. Por lo tanto, $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ es isomorfa a $\widehat{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$ y el epimorfismo

$$\pi : \mathcal{O}_\epsilon(G) \to \overline{\mathcal{O}_\epsilon(G)}$$

se corresponde con un monomorfismo ${}^t\pi : \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g}) \to \Gamma_\epsilon(\mathfrak{g}) \subseteq \mathcal{O}_\epsilon(G)^\circ$.

Más aún, el siguiente resultado muestra que no sólo el núcleo de Frobenius-Lusztig es un cociente de $\check{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$ sino que también es un cociente de $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{g})$.

Proposición 4.1.17. *Existe un epimorfismo de álgebras $\varphi : \Gamma_\epsilon(\mathfrak{g}) \to \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ tal que $\varphi|_{\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})} = \mathrm{id}$.*

Demostración. Como $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{g}) = \Gamma(\mathfrak{g})/[\chi_\ell(q)\Gamma(\mathfrak{g})]$, podemos definir φ como una aplicación de $\Gamma(\mathfrak{g})$ en $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ tal que $\varphi(q) = \epsilon$. Sea entonces φ el único morfismo de álgebras que toma los siguientes valores en los generadores:

$$\varphi(E_i^{(m)}) = \begin{cases} E_i^{(m)} & \text{si } 1 \leq m < \ell \\ 0 & \text{si } \ell \geq m \end{cases},$$

$$\varphi(F_i^{(m)}) = \begin{cases} F_i^{(m)} & \text{si } 1 \geq m < \ell \\ 0 & \text{si } \ell \geq m \end{cases},$$

$$\varphi(\left(\begin{smallmatrix} K_{\alpha_i};0 \\ m \end{smallmatrix}\right)) = \begin{cases} \left(\begin{smallmatrix} K_{\alpha_i};0 \\ m \end{smallmatrix}\right) & \text{si } 1 \leq m < \ell \\ 0 & \text{si } \ell \leq m \end{cases},$$

$$\varphi(K_{\alpha_i}^{-1}) = K_{\alpha_i}^{\ell-1} \qquad \varphi(q) = \epsilon,$$

para todo $1 \leq i \leq n$. Puesto que φ es, por definición, la identidad en los generadores de $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ y $E_i^\ell = 0 = F_i^\ell$, $K_{\alpha_i}^\ell = 1$ en $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$, de un cálculo directo se sigue que φ satisface las relaciones dadas en la Observación 4.1.5. En efecto, es claro que φ satisface las relaciones (4.1), (4.2), (4.8) y (4.9). Además, las relaciones (4.5) y (4.6) solamente dicen que los elementos $\left(\begin{matrix} K_{\alpha_i};c \\ t \end{matrix}\right)$ están en la R-subálgebra generada por los elementos de la forma $\left(\begin{matrix} K_{\alpha_i};0 \\ s \end{matrix}\right)$. Luego, basta verificar las relaciones restantes para los elementos $\left(\begin{matrix} K_{\alpha_i};0 \\ s \end{matrix}\right)$. Así, de la definición de φ se sigue directamente que se verifican las relaciones (4.10) y (4.11). La relación (4.3) se satisface directamente cuando $t+s<\ell$. Si $t+s\geq\ell$, φ satisface la relación pues $\epsilon_i^m \binom{t+s}{t}_{\epsilon_i^2} = \begin{bmatrix} t+s \\ t \end{bmatrix}_{\epsilon_i}$ con $m\in\mathbb{Z}$ y $\epsilon_i=\epsilon^{d_i}$, y por [L3, Lemma 34.1.2] se tiene que $\begin{bmatrix} t+s \\ t \end{bmatrix}_{\epsilon_i} = 0$. Análogamente, la relación (4.4) se satisface para $t<\ell$ y $t>\ell$. Para $t=\ell$ y $c=0$ la relación se lee

$$\left(\begin{matrix} K_{\alpha_i};1 \\ \ell \end{matrix} \right) - q_i^\ell \left(\begin{matrix} K_{\alpha_i};0 \\ \ell \end{matrix} \right) = \left(\begin{matrix} K_{\alpha_i};0 \\ \ell-1 \end{matrix} \right),$$

y es simplemente la misma relación que (4.5). Usando las definiciones se ve claramente que la relación (4.7) para $c=0$ es la misma relación que (4.4). Las relaciones (4.12) y (4.13) se satisfacen trivialmente para el caso en que $r+s<\ell$. Si $r+s\geq\ell$ tenemos que $E_i^{(r)}E_i^{(s)}=0$ en $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ pues la relación se satisface en $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{g})$ y vale que $\begin{bmatrix} r+s \\ r \end{bmatrix}_{\epsilon_i} = 0$. Por la Observación 4.1.2, las relaciones (4.14) y (4.15) son relaciones en $\check{U}_q(\mathfrak{g})$. Por ser $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ un cociente de $\check{U}_q(\mathfrak{g})$, éstas se verifican luego de tomar el cociente por el álgebra central Z_0, que en particular contiene a los elementos E_i^ℓ, F_i^ℓ para todo $1\leq i\leq n$. Como aplicar φ a la ecuación es lo mismo que ver la ecuación en el cociente, se sigue que φ satisface estas dos relaciones. Finalmente, por [L3, Cor. 3.1.9], la relación (4.16) y las relaciones cuánticas de Serre (4.17) y (4.18) se satisfacen en $\check{U}_q(\mathfrak{g})$, por lo tanto, φ las satisface por satisfacer las anteriores. Esto implica que φ es un morfismo de álgebras bien definido tal que su imagen es $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ y $\varphi|_{\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})}=\mathrm{id}$. □

Resumiendo lo visto en esta sección, tenemos que el álgebra de coordenadas cuantizada $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ de G en ϵ es una extensión central de $\mathcal{O}(G)$ y $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ es fielmente playa sobre $\mathcal{O}(G)$. En particular, $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ encaja en la sucesión exacta

$$1\to\mathcal{O}(G)\xrightarrow{\iota}\mathcal{O}_\epsilon(G)\xrightarrow{\pi}\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^*\to 1. \tag{4.19}$$

4.2. Cocientes de $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ de dimensión finita

Continuamos en esta sección con la misma notación que en la Sección 4.1; en particular, se tiene un toro fijo $\mathbf{T}$ de G (ver Subsección 4.1.2). En lo que sigue construimos nuevos ejemplos de álgebras de Hopf de dimensión finita que son extensiones de álgebras de funciones de subgrupos finitos no centrales Γ de un grupo de Lie G conexo, simplemente conexo y semisimple sobre $\mathbb{C}$, por el dual del núcleo de Frobenius-Lusztig $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$. De aquí en más supondremos que $k=\mathbb{C}$.

4.2.1. Construcción de los cocientes

Comenzamos esta subsección estableciendo explícitamente el siguiente resultado clásico.

Lema 4.2.1. *Sea Γ un subgrupo finito de G. Entonces existe un epimorfismo de álgebras de Hopf $\varrho:\mathcal{O}(G)\to\mathbb{C}^\Gamma$. Recíprocamente, si $\varrho:\mathcal{O}(G)\to H$ es un epimorfismo de álgebras de Hopf y H es de dimensión finita, entonces existe un subgrupo finito Γ de G tal que $H\simeq\mathbb{C}^\Gamma$.*

Demostración. Como $G \simeq \mathrm{Alg}(\mathcal{O}(G), \mathbb{C})$, podemos suponer que $\Gamma \subseteq \mathrm{Alg}(\mathcal{O}(G), \mathbb{C})$. Si denotamos $\mathfrak{J} = \bigcap_{g\in\Gamma} \mathrm{Ker}\, g$, se sigue que $\mathfrak{J}$ es un ideal de Hopf de $\mathcal{O}(G)$ y $\Gamma \simeq \mathrm{Alg}(\mathcal{O}(G)/\mathfrak{J}, \mathbb{C})$. Como $\mathrm{Alg}(\mathbb{C}^\Gamma, \mathbb{C}) \simeq \Gamma$, concluimos que $\mathcal{O}(G)/\mathfrak{J} \simeq \mathbb{C}^\Gamma$ y el epimorfismo de álgebras de Hopf está dado por el cociente $\varrho : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G)/\mathfrak{J}$.

Recíprocamente, al ser $\mathcal{O}(G)$ conmutativa, H es un álgebra de Hopf de dimensión finita que es conmutativa, y por ende isomorfa a $\mathbb{C}^\Gamma$ donde Γ es el grupo finito dado por $\Gamma = \mathrm{Alg}(H, \mathbb{C})$. Como ϱ es sobreyectiva, existe una inclusión ${}^t\varrho : \Gamma = \mathrm{Alg}(H, \mathbb{C}) \to \mathrm{Alg}(\mathcal{O}(G), \mathbb{C}) = G$, de donde se sigue la afirmación. $\square$

Ahora aplicamos la construcción general de la Subsección 2.3.2 en el contexto de $\mathcal{O}_\epsilon(G)$.

Construcción 1. Sea Γ un grupo finito y sea $\sigma : \Gamma \to G$ una inclusión de Γ en G. Denotemos por ϱ al epimorfismo de álgebras de Hopf $\varrho : \mathcal{O}(G) \to \mathbb{C}^\Gamma$ dado por el Lema 4.2.1. Entonces la sucesión exacta de álgebras de Hopf (4.19) da lugar por la Proposición 2.3.1 a una sucesión exacta de álgebras de Hopf de dimensión finita

$$1 \to \mathbb{C}^\Gamma \xrightarrow{j} \mathcal{O}_\epsilon(G)/(\mathcal{J}) \xrightarrow{\bar{\pi}} \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^* \to 1, \tag{4.20}$$

donde $\mathcal{J} = \mathrm{Ker}\,\varrho$, $(\mathcal{J}) = \mathcal{O}_\epsilon(G)\mathcal{J}$ y $\mathbb{C}^\Gamma$ es central en $\mathcal{O}_\epsilon(G)/(\mathcal{J})$. Luego, el álgebra de Hopf $\mathcal{O}_\epsilon(G)/(\mathcal{J})$ está dada por un *pushout* y por el Lema 2.3.3, $\dim \mathcal{O}_\epsilon(G)/(\mathcal{J})$ es finita. De aquí en más escribimos $A_\sigma = \mathcal{O}_\epsilon(G)/(\mathcal{J})$.

Construcción 2. Sean σ como en la Construcción 1 y $r : \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^* \to L$ un epimorfismo de álgebras de Hopf. Por el Teorema 2.1.4, tenemos que la extensión central A_σ es cleft. Entonces existe una retracción $\xi \in \mathrm{Reg}_\varepsilon(A_\sigma, k^\Gamma)$ y por la Proposición 2.3.5, se tiene una sucesión exacta de álgebras de Hopf asociada a la terna (σ, r, ξ):

$$1 \to K_{r,\xi} \to A_{\sigma,r,\xi} \to L \to 1,$$

donde $K_{r,\xi} = \mathbb{C}^\Gamma/(I \cap \mathbb{C}^\Gamma)$ es central en $A_{\sigma,r,\xi}$ y $\dim A_{\sigma,r,\xi}$ es finita.

Aunque ambas construcciones parecen ser de interés, nos concentraremos sólo en la primera para dar nuevos resultados sobre familias infinitas de álgebras de Hopf de dimensión finita. El siguiente lema generaliza [Mu2, Prop 5.3].

Lema 4.2.2. *Consideremos el siguiente diagrama conmutativo de sucesiones exactas de álgebras de Hopf*

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathcal{O}(G) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "p"'] & \mathcal{O}_\epsilon(G) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "q"] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^* \arrow[r] \arrow[d, "r"'] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathbb{C}^\Gamma \arrow[r, "j"] & \mathcal{A} \arrow[r, "\bar{\pi}"] & L \arrow[r] & 1,
\end{tikzcd}$$

donde Γ es un grupo finito y p, q, r son epimorfismos de álgebras de Hopf. Sea $\sigma : \Gamma \to G$ el monomorfismo de grupos inducido por p. Entonces

(a) *El morfismo $\mathbb{C}^\Gamma \xrightarrow{j} \mathcal{A}$ induce un morfismo de grupos $G(\mathcal{A}^*) \xrightarrow{{}^t j} \Gamma$ e $\mathrm{Im}\,\sigma({}^t j) \subseteq \mathbf{T} \cap \sigma(\Gamma)$.*

(b) *Si $\mathcal{A}^*$ es punteada, entonces $\sigma(\Gamma)$ es un subgrupo del toro maximal $\mathbf{T}$ de G.*

Demostración. (a) Como L es un cociente de $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^*$, que es de dimensión finita, $\dim L$ es finita. Más aún, como Γ es finito por hipótesis, por el Lema 2.3.3 $\mathcal{A}$ también es de dimensión finita. Entonces, la sucesión exacta

$$1 \to \mathbb{C}^\Gamma \xrightarrow{j} \mathcal{A} \xrightarrow{\pi} L \to 1$$

induce una sucesión exacta de álgebras de Hopf de dimensión finita

$$1 \to L^* \xrightarrow{{}^t\pi} \mathcal{A}^* \xrightarrow{{}^tj} \mathbb{C}[\Gamma] \to 1$$

y ésta, una sucesión exacta de grupos

$$1 \to G(L^*) \xrightarrow{{}^t\pi} G(\mathcal{A}^*) \xrightarrow{{}^tj} \Gamma, \tag{4.21}$$

que es parte del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & G(\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})) \arrow[r, "{}^t\pi"] & \mathrm{Alg}(\mathcal{O}_\epsilon(G), \mathbb{C}) \arrow[r, "{}^t\iota"] & \mathrm{Alg}(\mathcal{O}(G), \mathbb{C}) = G \\
1 \arrow[r] & G(L^*) \arrow[u, "{}^tr"] \arrow[r, "{}^t\pi"] & G(\mathcal{A}^*) \arrow[u, "{}^tq"'] \arrow[r, "{}^tj"] & \Gamma. \arrow[u, "\sigma"']
\end{tikzcd}$$

Como q es sobreyectiva, se sigue que ${}^tq : G(\mathcal{A}^*) \to \mathrm{Alg}(\mathcal{O}_\epsilon(G), \mathbb{C})$ es inyectiva. Por el Teorema 4.1.12, sabemos que $\mathrm{Alg}(\mathcal{O}_\epsilon(G), \mathbb{C}) \simeq (\mathbb{C}/2\pi i\ell\mathbb{Z})^n$ y por la Subsección 4.1.2, la imagen del morfismo de restricción ${}^t\iota : \mathrm{Alg}(\mathcal{O}_\epsilon(G), \mathbb{C}) \to G$ es el toro maximal $\mathbf{T}$ de G. Por lo tanto, el subgrupo $\sigma({}^tj)(G(\mathcal{A}^*))$ de $\sigma(\Gamma)$ debe ser un subgrupo de $\mathbf{T}$.

(b) Como ${}^tj : \mathcal{A}^* \to \mathbb{C}[\Gamma]$ es sobreyectiva, por [Mo, Cor. 5.3.5], la imagen del corradical de $\mathcal{A}^*$ es el corradical de $\mathbb{C}[\Gamma]$. Por lo tanto, si $\mathcal{A}^*$ es punteada entonces ${}^tj(G(\mathcal{A}^*)) = \Gamma$. Entonces por el item (a), $\sigma(\Gamma)$ debe ser un subgrupo de $\mathbf{T}$. □

Usando el siguiente lema podemos deducir algunas propiedades de la L-extensión $\mathcal{A}$ de $\mathbb{C}^\Gamma$ a partir de propiedades de Γ y L.

Lema 4.2.3. *Sea $1 \to \mathbb{C}^\Gamma \to \mathcal{A} \to L \to 1$ una sucesión exacta de álgebras de Hopf de dimensión finita. Entonces*

(a) *$\mathcal{A}$ es semisimple si y sólo si L es semisimple.*

(b) *Si $\mathcal{A}$ es punteada, entonces L es punteada. Más aún, sea p un número primo impar y supongamos que $|\Gamma| = p$ y $|G(L)| \leq p$. Si L es punteada, entonces $\mathcal{A}$ es punteada.*

Demostración. (a) Es sabido que $\mathcal{A}$ es semisimple si y sólo si $\mathbb{C}^\Gamma$ y L son semisimples. Luego, la afirmación se sigue del hecho que $\mathbb{C}^\Gamma$ es semisimple.

(b) Como L es un cociente de $\mathcal{A}$, por [Mo, Cor. 5.3.5] se tiene que L es punteada si $\mathcal{A}$ es punteada. La recíproca se sigue del Teorema 2.2.1. □

El siguiente teorema resume en cierto modo lo hecho hasta ahora.

Teorema 4.2.4. *Sea G un grupo de Lie conexo, simplemente conexo y semisimple sobre $\mathbb{C}$. Sean Γ un grupo finito y $\sigma : \Gamma \to G$ una inclusión de Γ en G tal que $\sigma(\Gamma)$ no está incluido en el toro maximal $\mathbf{T}$. Entonces el álgebra de Hopf A_σ construida anteriormente es no semisimple, no punteada y su dual tampoco es punteado. Es un cociente de $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ de dimensión $|\Gamma|\ell^{\dim \mathfrak{g}}$ y encaja en la sucesión exacta*

$$1 \to \mathbb{C}^\Gamma \to A_\sigma \to \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^* \to 1,$$

donde $\mathbb{C}^\Gamma$ es central en A_σ.

Demostración. Sabemos que $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ encaja en la sucesión exacta (4.19) y que es una extensión central de $\mathcal{O}(G)$ por $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^*$. Como $\sigma(\Gamma)$ es un subgrupo de G, por el Lema 4.2.1 existe un epimorfismo de álgebras de Hopf $\varrho : \mathcal{O}(G) \to \mathbb{C}^\Gamma$. Si denotamos $\mathcal{J} = \operatorname{Ker} \varrho$ y $(\mathcal{J}) = \mathcal{J}\mathcal{O}_\epsilon(G)$, entonces $\mathbb{C}^\Gamma \simeq \mathcal{O}(G)/\mathcal{J}$ y por la Proposición 2.3.1, el álgebra de Hopf $A_\sigma = \mathcal{O}_\epsilon(G)/(\mathcal{J})$ está dada por un *pushout* y encaja en la sucesión exacta

$$1 \to \mathbb{C}^\Gamma \to A_\sigma \to \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^* \to 1,$$

donde $\mathbb{C}^\Gamma$ es central en A_σ. Por el Lema 4.2.3, A_σ es no semisimple y no punteada pues, como es sabido, el álgebra de Hopf $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^*$ no es semisimple ni punteada. El hecho que A_σ^* tampoco es punteada se sigue del Lema 4.2.2. □

4.2.2. Cohomología de grupos y equivalencia de inclusiones

Para describir las clases de isomorfismos de este tipo de extensiones necesitaremos algunos resultados básicos de cohomología de grupos. Seguimos la misma notación que en la Subsección 1.2.

De ahora en más supondremos que G es simple.

Propiedades de las extensiones:

Sea Γ un grupo finito. Por el Teorema 4.2.4, para toda inclusión $\sigma : \Gamma \to G$ tenemos un álgebra de Hopf de dimensión finita A_σ que encaja en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathcal{O}(G) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "p"'] & \mathcal{O}_\epsilon(G) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "q"] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^* \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathbb{C}^\Gamma \arrow[r, "j"] & A_\sigma \arrow[r, "\pi"] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^* \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

Comenzamos primero mostrando que la $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^*$-extensión $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ de $\mathcal{O}(G)$ satisface la propiedad (L) de la Subsección 2.3.3.

Lema 4.2.5. *Cada automorfismo de $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ induce un automorfismo de G, que deja invariante a $\mathbf{T}$.*

Demostración. Por la Observación 4.1.16, podemos ver a $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ como una subálgebra de Hopf de $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{g})$ a través de la inclusión ${}^t\pi : \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g}) \to \Gamma_\epsilon(\mathfrak{g})$. Sea $\overline{F}$ un automorfismo de $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$. Por [MuI, Cor. 5.10], existe un único automorfismo F de $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{g})$ tal que $F|_{\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})} = \overline{F}$, esto es $F{}^t\pi = {}^t\pi\overline{F}$.

Consideremos ahora el morfismo cuántico de Frobenius $\mathrm{Fr}: \Gamma_\epsilon(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$, definido en los generadores de $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{g})$ por

$$\mathrm{Fr}(E_i^{(m)}) = \begin{cases} e_i^{(m/\ell)} & \text{si } \ell | m \\ 0 & \text{si } \ell \nmid m \end{cases}, \qquad \mathrm{Fr}(F_i^{(m)}) = \begin{cases} f_i^{(m/\ell)} & \text{si } \ell | m \\ 0 & \text{si } \ell \nmid m \end{cases},$$

$$\mathrm{Fr}(\left({K_i;0 \atop m} \right)) = \begin{cases} \left({h_i;0 \atop m} \right) & \text{si } \ell | m \\ 0 & \text{si } \ell \nmid m \end{cases}, \qquad \mathrm{Fr}(K_i^{-1}) = 1,$$

para todo $1 \leq i \leq n$. Entonces por [DL, Thm. 6.3], Fr está bien definido y es un morfismo de álgebras de Hopf cuyo núcleo es el ideal bilátero generado por el conjunto

$$\{E_i^{(m)}, F_i^{(m)}, \left({K_i;0 \atop m} \right), K_i - 1, \chi_\ell(q) |\ m > 0, \ell \nmid m\}.$$

Usando la descripción explícita del grupo de automorfismos de $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ dada recientemente en [AS5, Thm. 7.2], se puede ver que $F \operatorname{Ker}\mathrm{Fr} = \operatorname{Ker}\mathrm{Fr}$. Por lo tanto, F se factoriza a través de un automorfismo de álgebras de Hopf $\underline{F}: U(\mathfrak{g})_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \to U(\mathfrak{g})_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$. Pero por [H1, Thm. 3.1], se tiene que $U(\mathfrak{g})^\circ \simeq \mathcal{O}(G)$, y por lo tanto, la transpuesta ${}^t\underline{F}$ de $\underline{F}$ induce un automorfismo de $\mathcal{O}(G)$, y por lo tanto un automorfismo f de G que proviene de un automorfismo $\underline{F}$ de $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$.

Finalmente, mostramos que $f(\mathbf{T}) = \mathbf{T}$. Recordar que $\mathbf{T} = {}^t\iota(G_\epsilon)$, donde $G_\epsilon = \operatorname{Alg}(\mathcal{O}_\epsilon(G), \mathbb{C})$. Como por la Proposición 4.1.9, existe un apareamiento de Hopf perfecto entre $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ y $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{g})$, el automorfismo F induce un automorfismo ${}^tF$ de $\mathcal{O}_\epsilon(G)$. Como F se factoriza a través de $\underline{F}$ se tiene que $\underline{F}\eta = \eta F$. Como ${}^t\eta = \iota$, transponiendo se tiene que ${}^tF\iota = \iota\, {}^t\underline{F}$ y por lo tanto,

$$f(\mathbf{T}) = f({}^t\iota(G_\epsilon)) = {}^t(\iota\, {}^t\underline{F})(G_\epsilon) = {}^t({}^tF\iota)(G_\epsilon) = {}^t\iota(F(G_\epsilon)) = {}^t\iota(G_\epsilon) \subseteq \mathbf{T}.$$

Luego $f(\mathbf{T}) = \mathbf{T}$, puesto que f es un automorfismo. □

Corolario 4.2.6. *La $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^*$-extensión $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ de $\mathcal{O}(G)$ satisface (L).*

Demostración. Como $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ es de dimensión finita, todo automorfismo α de $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^*$ se corresponde con un automorfismo $\overline{F}$ de $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$. Luego, por la demostración del lema anterior, $\overline{F}$ induce un automorfismo F de $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{g})$ tal que $F\, {}^t\pi = {}^t\pi\overline{F}$. Por lo tanto, ${}^tF \in \operatorname{Aut}(\mathcal{O}_\epsilon(G))$ y $\alpha\pi = \pi\, {}^tF$, lo cual implica que la $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^*$-extensión $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ de $\mathcal{O}(G)$ satisface (L). □

Definición 4.2.7. Denotemos por $\operatorname{qAut}(G)$ al subgrupo de $\operatorname{Aut}(G)$ generado por los automorfismos de G que provienen de un automorfismo de $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$.

Recordar que un *subgrupo de Borel* de un grupo de Lie G semisimple es un subgrupo soluble maximal conexo. Cada subgrupo de Borel es igual a su normalizador y contiene a un único toro maximal. Más aún, todos los subgrupos de Borel son conjugados, ver [Hu2]. Fijemos ahora un subgrupo de Borel B de G que contenga a $\mathbf{T}$, lo cual implica fijar una base Π del sistema de raíces Φ determinado por $\mathbf{T}$. Sea D el subgrupo de $\operatorname{Aut}(G)$ dado por

$$D = \{f \in \operatorname{Aut}(G) |\ f(\mathbf{T}) = \mathbf{T} \text{ y } f(B) = B\}.$$

Cada $f \in D$ induce de manera obvia un automorfismo $\hat{f}$ de Φ, puesto que $f(\mathbf{T}) = \mathbf{T}$. Más aún, como $f(B) = B$, se tiene que $f(\Pi) = \Pi$. Por lo tanto, $\hat{f}$ pertenece al grupo $\operatorname{Aut}_d(\Phi)$ de automorfismos de diagrama de Φ y la aplicación $\hat{}: D \to \mathrm{Aut}_d(\Phi)$ es inyectiva. Además, si $\mathrm{Int}(G)$ es el subgrupo de automorfismos interiores de G, entonces por [Hu2, Thm. 27.4] se tiene que $\mathrm{Int}(G)$ es normal en $\mathrm{Aut}(G)$ y $\mathrm{Aut}(G) = \mathrm{Int}(G) \rtimes D$. En particular, $\mathrm{Int}(G)$ tiene índice finito en $\mathrm{Aut}(G)$.

Como para todo $t \in \mathbf{T}$, el automorfismo interior $\mathrm{Int}(t)$ de G dado por la conjugación deja invariantes a $\mathbf{T}$ y a B, ver [Hu2, Lemma 24.1], se sigue que la imagen $\mathrm{Int}(\mathbf{T})$ de $\mathbf{T}$ en $\mathrm{Aut}(G)$ es un subgrupo de D.

Por otro lado, por [MuI, Cor. 5.7] se sigue que D está contenido en $\mathrm{qAut}(G)$. Denotemos por $\mathrm{Int}(N_G(\mathbf{T}))$ al subgrupo de automorfismos interiores de $\mathrm{Aut}(G)$ cuyos elementos están dados por la conjugación de elementos del normalizador $N_G(\mathbf{T})$. Entonces se tiene el siguiente lema.

Lema 4.2.8. (a) $\mathrm{qAut}(G)$ *es un subgrupo de* $\mathrm{Int}(N_G(\mathbf{T})) \rtimes D$.

(b) $\mathbf{T}$ *actúa en* $\mathrm{qAut}(G)$ *por multiplicación a izquierda de* $\mathrm{Int}(\mathbf{T})$.

(c) *El conjunto de órbitas* $\mathrm{qAut}(G)/\mathbf{T}$ *correspondiente a la acción anterior es finito.*

Demostración. Sea $f \in \mathrm{qAut}(G)$. Entonces existe $\alpha \in \mathrm{Int}(G)$, $\beta \in D$ tal que $f = \alpha\beta$. Como $f(\mathbf{T}) = \mathbf{T}$ y $\beta(\mathbf{T}) = \mathbf{T}$, se sigue que $\alpha(\mathbf{T}) = \mathbf{T}$. Sea $g \in G$ tal que $\alpha = \mathrm{Int}(g)$, entonces $\mathrm{Int}(g)(\mathbf{T}) = g\mathbf{T}g^{-1} = \mathbf{T}$, lo cual implica que $g \in N_G(\mathbf{T})$ de donde se sigue la afirmación (a).

Al ser $\mathrm{Int}(\mathbf{T})$ es un subgrupo de D, se sigue que $\mathrm{Int}(\mathbf{T})$ es un subgrupo de $\mathrm{qAut}(G)$. Por lo tanto, la multiplicación a izquierda por elementos de $\mathrm{Int}(\mathbf{T})$ define una acción de $\mathbf{T}$ en $\mathrm{qAut}(G)$.

Por (a), tenemos que $\mathrm{qAut}(G) \subseteq \mathrm{Int}(N_G(\mathbf{T})) \rtimes D$, entonces

$$|\,\mathrm{qAut}(G)/\mathbf{T}| \leq |[\mathrm{Int}(N_G(\mathbf{T})) \rtimes D]/\mathbf{T}| \leq |N_G(\mathbf{T})/\mathbf{T}||D| = |W_{\mathbf{T}}||D|,$$

donde $W_{\mathbf{T}}$ es el grupo de Weyl asociado a $\mathbf{T}$. La última igualdad se sigue del hecho $C_G(\mathbf{T}) = \mathbf{T}$, para todo G semisimple y $W_{\mathbf{T}} = N_G(\mathbf{T})/C_G(\mathbf{T})$. Luego, (c) se sigue del hecho que los órdenes de $W_{\mathbf{T}}$ y D son finitos. □

Cohomología de las extensiones:

Sea Γ un finito grupo y $\sigma : \Gamma \to G$ una inclusión de Γ en G. Entonces para cada automorfismo $f \in \mathrm{Aut}(G)$ se define una acción de Γ en G, dependiendo de σ y f:

$$G \times \Gamma \xrightarrow{\leftharpoonup} G, \qquad g \leftharpoonup x = (f\sigma(x))^{-1} g (f\sigma(x)), \tag{4.22}$$

para todo $g \in G,\ x \in \Gamma$. Claramente, ambas condiciones en (1.3) se satisfacen. Por lo tanto, una función $u \in \mathrm{Map}(\Gamma, G)$ es un 1-coborde si y sólo si existe $g \in G$ tal que

$$u(x) = \partial_0(g)(x) = (g \leftharpoonup x)g^{-1} = (f\sigma(x))^{-1} g (f\sigma(x)) g^{-1}, \tag{4.23}$$

para todo $x \in \Gamma$, y una función $v \in \mathrm{Map}(\Gamma, G)$ es un 1-cociclo si y sólo si

$$v(xy) = (v(x) \leftharpoonup y)v(y) = (f\sigma(y))^{-1} v(x) (f\sigma(y)) v(y), \tag{4.24}$$

para todo $x,\ y \in \Gamma$. Como la acción depende de σ y f, denotamos por $Z^1_{f,\sigma}(\Gamma, G)$ al conjunto de 1-cociclos asociados a esta acción. Sea $\mathrm{Emb}(\Gamma, G)$ el conjunto de inclusiones de Γ en G.

Definición 4.2.9. Sean Γ un grupo finito y $\sigma_1,\ \sigma_2 \in \mathrm{Emb}(\Gamma, G)$. Decimos que σ_1 es *equivalente* a σ_2, y escribimos $\sigma_1 \sim \sigma_2$, si existen $\tau \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$, $f \in \mathrm{qAut}(G)$ y $v \in \mathrm{Map}(\Gamma, G)$ tales que

$$\sigma_1(\tau(x)) = f(\sigma_2(x))v(x) \qquad \text{para todo } x \in \Gamma.$$

Notar que la función v está unívocamente determinada por $\sigma_1\tau$ y $f\sigma_2$ con $v(x) = f(\sigma_2(x))^{-1}\sigma_1(\tau(x))$ para todo $x \in \Gamma$. Más aún, se tiene que $v \in Z^1_{f,\sigma_2}(\Gamma, G)$:

$$\begin{aligned} v(xy) &= f(\sigma_2(xy))^{-1}\sigma_1(\tau(xy)) \\ &= f(\sigma_2(y))^{-1}f(\sigma_2(x))^{-1}\sigma_1(\tau(x))\sigma_1(\tau(y)) \\ &= f(\sigma_2(y))^{-1}f(\sigma_2(x))^{-1}\sigma_1(\tau(x))f(\sigma_2(y))v(y) \\ &= f(\sigma_2(y))^{-1}v(x)f(\sigma_2(y))v(y). \end{aligned}$$

Observación 4.2.10. Si el 1-cociclo v es un 1-coborde, entonces existe $g \in G$ tal que $v(x) = \partial(g)(x) = (g \leftharpoonup x)g^{-1} = f(\sigma_2(x))^{-1}gf(\sigma_2(x))g^{-1}$ para todo $x \in \Gamma$ y esto implica que

$$\sigma_1(\tau(x)) = gf(\sigma_2(x))g^{-1}.$$

Esto es, σ_1 se obtiene a través de los automorfismos $\tau,\ f$ y la conjugación por un elemento de G.

Lema 4.2.11. *$\sim$ es una relación de equivalencia en* $\mathrm{Emb}(\Gamma, G)$.

Demostración. Debemos probar que $\sim$ es (a) reflexiva, (b) simétrica y (c) transitiva.

(a) Tomando $f = \mathrm{id} \in \mathrm{qAut}(G)$, $\tau = \mathrm{id} \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ y $v = 1 \in Z^1_{\mathrm{id},\sigma}(\Gamma, G)$ es claro que $\sigma \sim \sigma$ para todo $\sigma \in \mathrm{Emb}(\Gamma, G)$. Por lo tanto $\sim$ es reflexiva.

(b) Supongamos que $\sigma_1 \sim \sigma_2$. Entonces existe $\tau \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$, $f \in \mathrm{qAut}(G)$ y $v \in Z^1_{f,\sigma_2}(\Gamma, G)$ tales que

$$\sigma_1(\tau(x)) = f(\sigma_2(x))v(x) \qquad \text{para todo } x \in \Gamma.$$

Por lo tanto, de la ecuación anterior se sigue que

$$\sigma_2(\tau^{-1}(x)) = f^{-1}(\sigma_1(x))f^{-1}(v(\tau^{-1}(x))^{-1}) = f^{-1}(\sigma_1(x))\hat{v}(x),$$

para todo $x \in \Gamma$, donde $\hat{v}$ está dado por $\hat{v}(x) = f^{-1}(v(\tau^{-1}(x))^{-1})$. Como $\tau^{-1} \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ y $f^{-1} \in \mathrm{qAut}(G)$, esto prueba que $\sigma_2 \sim \sigma_1$.

(c) Sean $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3 \in \mathrm{Emb}(\Gamma, G)$ y supongamos que $\sigma_1 \sim \sigma_2$ y $\sigma_2 \sim \sigma_3$. Esto es, existen $f,\ g \in \mathrm{qAut}(G)$, $\tau,\ t \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ y $v \in Z^1_{f,\sigma_2}(\Gamma, G)$, $u \in Z^1_{g,\sigma_3}(\Gamma, G)$ tales que

$$\sigma_1(\tau(x)) = f\sigma_2(x)v(x) \text{ y } \sigma_2(t(x)) = g\sigma_3(x)u(x),$$

para todo $x \in \Gamma$. Usando ambas ecuaciones se tiene que

$$\begin{aligned} \sigma_1(\tau(x)) &= f(g(\sigma_3(t^{-1}(x)))u(t^{-1}(x)))v(x) \\ &= f(g(\sigma_3(t^{-1}(x))))f(u(t^{-1}(x)))v(x), \end{aligned}$$

y por lo tanto se sigue que $\sigma_1(\tau t(x)) = f(g(\sigma_3(x)))f(u(x))v(t(x)) = f(g(\sigma_3(x)))\hat{v}(x)$, donde $\hat{v}(x) = f(u(x))v(t(x))$ para todo $x \in \Gamma$. Como $\tau t \in \mathrm{Aut}(G)$ y $fg \in \mathrm{qAut}(\Gamma)$, se sigue $\sigma_1 \sim \sigma_3$. $\square$

Definición 4.2.12. Sea $\sigma \in \mathrm{Emb}(\Gamma, G)$ y $f \in \mathrm{qAut}(G)$. Definimos entonces $\mathbf{T}^{f\sigma}$ como el subgrupo de $\mathbf{T}$ dado por

$$\mathbf{T}^{f\sigma} = \bigcap_{y\in\Gamma} f\sigma(y)\mathbf{T}f\sigma(y^{-1}).$$

Puesto que para todo $\sigma \in \mathrm{Emb}(\Gamma, G)$ y $f \in \mathrm{qAut}(G)$ la acción de Γ en G se define por

$$g \leftharpoonup x = f\sigma(x^{-1})gf\sigma(x) \qquad \text{para todo } x \in \Gamma,\ g \in G,$$

se sigue que el subgrupo $\mathbf{T}^{f\sigma}$ es estable por esta acción. Veremos más adelante en el Teorema 4.2.20 que los cociclos que provienen de las extensiones construidas en el Teorema 4.2.4 son en realidad elementos de $Z^1_{f,\sigma}(\Gamma, \mathbf{T}^{f\sigma})$ para ciertos $f \in \mathrm{qAut}(G)$ y $\sigma \in \mathrm{Emb}(\Gamma, G)$.

Ahora probamos algunos lemas que dan propiedades sobre la cohomología de Γ en los grupos abelianos $\mathbf{T}^{f\sigma}$ para $f \in \mathrm{qAut}(G)$ y $\sigma \in \mathrm{Emb}(\Gamma, G)$.

Lema 4.2.13. $Z^1_{f,\sigma}(\Gamma, \mathbf{T}^{f\sigma}) = Z^1_{(t\cdot f),\sigma}(\Gamma, \mathbf{T}^{(t\cdot f)\sigma})$ *para todo* $t \in \mathbf{T}$.

Demostración. Supongamos que $v \in Z^1_{(t\cdot f),\sigma}(\Gamma, \mathbf{T}^{(t\cdot f)\sigma})$. Entonces $v(x) \in \mathbf{T}^{(t\cdot f)\sigma}$ para todo $x \in \Gamma$. Pero

$$\begin{aligned}\mathbf{T}^{(t\cdot f)\sigma} &= \bigcap_{y\in\Gamma}(t\cdot f)\sigma(y)\mathbf{T}(t\cdot f)\sigma(y^{-1}) = \bigcap_{y\in\Gamma} tf\sigma(y)t^{-1}\mathbf{T}tf\sigma(y^{-1})t^{-1}\\ &= \bigcap_{y\in\Gamma} tf\sigma(y)\mathbf{T}f\sigma(y^{-1})t^{-1} = t\mathbf{T}^{f\sigma}t^{-1} = \mathbf{T}^{f\sigma},\end{aligned}$$

pues $\mathbf{T}^{f\sigma} \subset \mathbf{T}$ y $t \in \mathbf{T}$. Por lo tanto, $\mathbf{T}^{(t\cdot f)\sigma} = \mathbf{T}^{f\sigma}$ para todo $t \in \mathbf{T}$. Más aún, v es un 1-cociclo con respecto a f y a σ:

$$\begin{aligned}v(xy) &= (t\cdot f)(\sigma(y^{-1}))v(x)(t\cdot f)(\sigma(y))v(y) = tf(\sigma(y^{-1}))t^{-1}v(x)tf(\sigma(y))t^{-1}v(y)\\ &= tf(\sigma(y^{-1}))v(x)f(\sigma(y))v(y)t^{-1} = f(\sigma(y^{-1}))v(x)f(\sigma(y))v(y).\end{aligned}$$

La última igualdad se sigue del hecho que $f(\sigma(y^{-1}))v(x)f(\sigma(y))v(y) \in \mathbf{T}$ para todo $x,\ y \in \Gamma$. La otra inclusión se sigue directamente de cálculos similares. $\square$

Lema 4.2.14. *Sean* $\sigma \in \mathrm{Emb}(\Gamma, G)$, $\tau \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *y* $f \in \mathrm{qAut}(G)$. *Definimos entonces*

$$\mathfrak{C}_{\sigma,f,\tau} = \{\eta \in \mathrm{Emb}(\Gamma, G) |\ \sigma \sim \eta \text{ vía la terna } (\tau, f, v),\ v \in Z^1_{f,\sigma}(\Gamma, \mathbf{T}^{f\sigma})\}.$$

Entonces $\mathbf{T}^{f\sigma}$ *actúa en* $\mathfrak{C}_{\sigma,f,\tau}$ *por* $t\cdot\eta = \mathrm{Int}(t)\eta$ *para todo* $\eta \in \mathfrak{C}_{\sigma,f,\tau}$. *Más aún, existe una aplicación inyectiva*

$$\mathfrak{C}_{\sigma,f,\tau}/\mathbf{T}^{f\sigma} \to H^1_{f,\sigma}(\Gamma, \mathbf{T}^{f\sigma}), \qquad [\eta] \mapsto [v_\eta],$$

donde $v_\eta(x) = f(\sigma(x))^{-1}\eta(\tau(x))$ *es el único 1-cociclo tal que* $\eta(\tau(x)) = f(\sigma(x))v_\eta(x)$ *para todo* $x \in \Gamma$.

Demostración. Sea $\eta \in \mathfrak{C}_{\sigma,f,\tau}$. Por definición, existe $v = v_\eta \in Z^1_{f,\sigma}(\Gamma, \mathbf{T}^{f\sigma})$ tal que $\eta(\tau(x)) = f(\sigma(x))v(x)$ para todo $x \in \Gamma$. Entonces, para todo $t \in \mathbf{T}^{f\sigma}$ se tiene que

$$\begin{aligned} t \cdot \eta(\tau(x)) &= t\eta(\tau(x))t^{-1} = tf(\sigma(x))v(x)t^{-1} = f(\sigma(x))f(\sigma(x))^{-1}tf(\sigma(x))v(x)t^{-1} \\ &= f(\sigma(x))[f(\sigma(x))^{-1}tf(\sigma(x))]v(x)t^{-1} = f(\sigma(x))(t \leftharpoonup x)v(x)t^{-1} \\ &= f(\sigma(x))(t \cdot v)(x), \end{aligned}$$

lo cual implica que $t \cdot \eta \in \mathfrak{C}_{\sigma,f,\tau}$. Claramente, $s \cdot (t \cdot \eta) = (st) \cdot \eta$ para todo $t,\ s \in \mathbf{T}^{f\sigma}$. Por lo tanto, la aplicación $(t, \eta) \mapsto t \cdot \eta$ define una acción de $\mathbf{T}^{f\sigma}$ en $\mathfrak{C}_{\sigma,f,\tau}$. Denotemos por $[\eta]$ a la clase de η en $\mathfrak{C}_{\sigma,f,\tau}/\mathbf{T}^{f\sigma}$. Entonces $[\eta] = [\nu]$ si y sólo si existe $t \in \mathbf{T}^{f\sigma}$ tal que $t \cdot \eta = \nu$.

Luego, la aplicación definida por

$$\mathfrak{C}_{\sigma,f,\tau}/\mathbf{T}^{f\sigma} \to H^1_{f,\sigma}(\Gamma, \mathbf{T}^{f\sigma}), \qquad [\eta] \mapsto [v_\eta],$$

está bien definida y es inyectiva, puesto que de los cálculos anteriores se deduce que $\nu = t \cdot \eta$ si y sólo si $v_\nu = t \cdot v_\eta$ para todo $t \in \mathbf{T}^{f\sigma}$. $\square$

Antes de probar los siguientes lemas necesitamos una definición.

Definición 4.2.15. Sea G un grupo algebraico. Decimos que G es un *d-grupo* si el anillo de coordenadas $\mathcal{O}(G)$ tiene una base que consiste de caracteres.

Claramente un toro T contenido en un grupo algebraico G es un d-grupo, ya que cualquier función polinómica es una combinación de monomios construidos a partir de las funciones coordenadas y sus inversas.

Lema 4.2.16. [Hu1, Prop. 16.1 y Thm. 16.2]

(a) *Si H es un subgrupo cerrado de un d-grupo G, entonces H también es un d-grupo.*

(b) *Un d-grupo conexo es un toro.*

El siguiente lema es crucial para la demostración del Teorema 4.2.23.

Lema 4.2.17. *El grupo $H^1_{f,\sigma}(\Gamma, \mathbf{T}^{f\sigma})$ es finito.*

Demostración. Sea $\mathbf{T}_0^{f\sigma}$ la componente conexa de $\mathbf{T}^{f\sigma}$ que contiene a la identidad y sea $\mathfrak{T} = \mathbf{T}^{f\sigma}/\mathbf{T}_0^{f\sigma}$. Entonces $|\mathfrak{T}|$ es finito, ya que como es sabido, $\mathbf{T}_0^{f\sigma}$ tiene índice finito en $\mathbf{T}^{f\sigma}$. Como la acción de Γ en $\mathbf{T}^{f\sigma}$ está dada por la conjugación vía f y σ, se sigue que para todo $x \in \Gamma$, x actúa en $\mathbf{T}^{f\sigma}$ por un automorfismo continuo. Por lo tanto, $\mathbf{T}_0^{f\sigma}$ es estable bajo la acción de Γ y por ende, la acción de Γ en $\mathbf{T}^{f\sigma}$ induce una acción de Γ en $\mathfrak{T}$. Luego, se tiene una sucesión exacta de Γ-módulos

$$\mathbf{T}_0^{f\sigma} \hookrightarrow \mathbf{T}^{f\sigma} \twoheadrightarrow \mathfrak{T},$$

la cual induce por [Br, Prop. III.6.1] una sucesión exacta larga

$$0 \longrightarrow H^0_{f,\sigma}(\Gamma, \mathbf{T}_0^{f\sigma}) \xrightarrow{\alpha^0_*} H^0_{f,\sigma}(\Gamma, \mathbf{T}^{f\sigma}) \xrightarrow{\beta^0_*} H^0_{f,\sigma}(\Gamma, \mathfrak{T}) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^1_{f,\sigma}(\Gamma, \mathbf{T}_0^{f\sigma}) \xrightarrow{\alpha^1_*} H^1_{f,\sigma}(\Gamma, \mathbf{T}^{f\sigma}) \xrightarrow{\beta^1_*} H^1_{f,\sigma}(\Gamma, \mathfrak{T}) \longrightarrow \cdots$$

Como Γ y $\mathfrak{T}$ son grupos finitos, el orden de $H^1_{f,\sigma}(\Gamma, \mathfrak{T})$ es finito. Por lo tanto, basta probar que $|H^1_{f,\sigma}(\Gamma, \mathbf{T}_0^{f\sigma})|$ es finito, ya que en tal caso $|H^1_{f,\sigma}(\Gamma, \mathbf{T}^{f\sigma})| = |\operatorname{Im} \alpha^1_*||\operatorname{Im} \beta^1_*|$ también es finito.

Como $\mathbf{T}$ es cerrado, se sigue que $f(\sigma(x))\mathbf{T}f(\sigma(x^{-1}))$ es cerrado para todo $x \in \Gamma$. Luego, $\mathbf{T}^{f\sigma}$ también es cerrado, pues es la intersección de $f(\sigma(x))\mathbf{T}f(\sigma(x^{-1}))$ para todo $x \in \Gamma$. Entonces por el Lema 4.2.16 (a), $\mathbf{T}^{f\sigma}$ y consecuentemente $\mathbf{T}_0^{f\sigma}$ son d-grupos. Como $\mathbf{T}_0^{f\sigma}$ es conexo, se sigue por el Lema 4.2.16 (b) que $\mathbf{T}_0^{f\sigma}$ es un toro. En particular, $\mathbf{T}_0^{f\sigma}$ es un grupo divisible.

Por [Br, Cor. III.10.2], sabemos que $H^n_{f,\sigma}(\Gamma, \mathbf{T}_0^{f\sigma})$ es anulado por $m = |\Gamma|$ para todo $n > 0$. Entonces, para todo $\alpha \in Z^1_{f,\sigma}(\Gamma, \mathbf{T}_0^{f\sigma})$ existe $t \in \mathbf{T}_0^{f\sigma}$ tal que $\alpha^m = \partial(t)$. Como $\mathbf{T}_0^{f\sigma}$ es divisible, existe $s \in \mathbf{T}_0^{f\sigma}$ tal que $t = s^m$. Sea $\beta = \partial(s^{-1})\alpha$, entonces $\beta^m = 1$ y por lo tanto $\beta \in Z^1_{f,\sigma}(\Gamma, D_m)$, donde $D_m = \{t \in \mathbf{T}_0^{f\sigma} |\ t^m = 1\}$. Pero entonces $[\alpha] = [\beta]$ y por la inclusión de $Z^1_{f,\sigma}(\Gamma, D_m)$ en $Z^1_{f,\sigma}(\Gamma, \mathbf{T}_0^{f\sigma})$ se tiene una aplicación sobreyectiva

$$H^1_{f,\sigma}(\Gamma, D_m) \to H^1_{f,\sigma}(\Gamma, \mathbf{T}_0^{f\sigma}).$$

Como $\mathbf{T}_0^{f\sigma}$ es un toro, se sigue que D_m es un grupo finito y por lo tanto $|H^1_{f,\sigma}(\Gamma, D_m)|$ es finito, lo cual implica que $|H^1_{f,\sigma}(\Gamma, \mathbf{T}_0^{f\sigma})|$ también es finito. □

4.2.3. Clases de isomorfismos

En esta subsección estudiamos los isomorfismos entre las álgebras de Hopf A_σ dadas por el Teorema 4.2.4. En particular, probamos en el Teorema 4.2.23 que bajo ciertas condiciones, existe una familia infinita de álgebras de Hopf de dimensión finita que son no isomorfas entre sí, no semisimples, no punteadas y sus duales son no punteados.

Fijemos un grupo finito Γ y sean $\sigma_1,\ \sigma_2 \in \operatorname{Emb}(\Gamma, G)$ y denotemos $A_i = A_{\sigma_i}$. Por el Corolario 4.2.6, sabemos que todo automorfismo de $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^*$ se puede levantar a un automorfismo de $\mathcal{O}(G)$, esto es, la extensión $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ de $\mathcal{O}(G)$ por $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^*$ satisface la propiedad (L). Veamos ahora que también satisface la propiedad (Z).

Lema 4.2.18. *La $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^*$-extensión $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ de $\mathcal{O}(G)$ satisface (Z).*

Demostración. Como por hipótesis el orden ℓ de la raíz de la unidad ϵ y el determinante de la matriz simetrizada de Cartan DC son coprimos, de [AS1, Prop. A.3] se sigue que los núcleos de Frobenius-Lusztig $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ son simples como álgebras de Hopf, es decir, no poseen subálgebras de Hopf normales propias no triviales. Observar que, si $\mathfrak{g}$ no es de tipo A_n, siempre se cumple que $\operatorname{ord} \ell$ y $\det DC$ son coprimos. Luego, $\mathcal{Z}(\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^*) = \mathbb{C}$, puesto que de lo contrario $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^*$ tendría una subálgebra de Hopf central propia $\mathbf{v}$ y en ese caso, $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^*$ sería una extensión de $\mathbf{v}$ por $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^*/\mathbf{v}^+\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^*$. Esto implicaría por dualidad la existencia de una subálgebra de Hopf normal propia en $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ dual a $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^*/\mathbf{v}^+\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^*$, lo cual es imposible, ya que $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ es simple. Por lo tanto, $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^*$ satisface la propiedad (Z). □

Observación 4.2.19. Las álgebras de Hopf $A_\sigma = \mathcal{O}_\epsilon(G)/(\mathcal{J})$ no sólo dependen de σ sino también de $\mathfrak{g}$ y la raíz de la unidad ϵ. Sin embargo, estos datos son invariantes con respecto a la primera construcción: si $A_{\sigma,\epsilon,\mathfrak{g}} \simeq A_{\sigma',\epsilon',\mathfrak{g}'}$ entonces $\epsilon = \epsilon'$, $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}'$ y $\Gamma \simeq \Gamma'$. A saber, denotemos por $\varphi : A_{\sigma,\epsilon,\mathfrak{g}} \to A_{\sigma',\epsilon',\mathfrak{g}'}$ el isomorfismo. Como $\mathcal{Z}(\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^*) = \mathcal{Z}(\mathbf{u}_{\epsilon'}(\mathfrak{g}')^*) = \mathbb{C}$, por el Lema 2.3.13 tenemos que $\mathcal{Z}(A_{\sigma,\epsilon,\mathfrak{g}}) = \mathbb{C}^\Gamma$ y $\mathcal{Z}(A_{\sigma',\epsilon',\mathfrak{g}'}) = \mathbb{C}^{\Gamma'}$. Así, por la Proposición 2.3.12, φ induce dos isomorfismo $\underline{\varphi} : \mathbb{C}^\Gamma \to \mathbb{C}^{\Gamma'}$ y $\overline{\varphi} : \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^* \to \mathbf{u}_{\epsilon'}(\mathfrak{g}')^*$. En particular se tiene que $\Gamma \simeq \Gamma'$ y $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g}) \simeq \mathbf{u}_{\epsilon'}(\mathfrak{g}')$. Puesto que los núcleos de Frobenius-Lusztig son espacios lineales cuánticos de tipo Cartan, de [AS5, Thm. 7.2] se sigue que $\epsilon = \epsilon'$ y $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}'$.

Más adelante en esta tesis notaremos $A_{\epsilon,\mathfrak{g},\sigma} = A_\sigma$ para enfatizar la dependencia en la terna.

Recordar que, por la Definición 4.2.9, dos inclusiones σ_1 y σ_2 son equivalentes si existe una terna (τ, f, v) donde

(*i*) $\tau \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$,

(*ii*) $f \in \mathrm{qAut}(G)$ y

(*iii*) $v \in Z^1_{f,\sigma_2}(\Gamma, G)$ con $v(1) = 1$.

Si aplicamos el Teorema 2.3.15 a las extensiones A_1 y A_1 obtenemos lo siguiente.

Teorema 4.2.20. *Si las álgebras de Hopf A_1 y A_2 son isomorfas entonces $\sigma_1 \sim \sigma_2$ a través de una terna (τ, f, v) con $v \in Z^1_{f,\sigma_2}(\Gamma, \mathbf{T}^{f\sigma_2})$.*

Demostración. Por el Teorema 2.3.15, sabemos que las álgebras de Hopf A_1 y A_2 son isomorfas si y sólo si existe una terna $(\underline{\omega}, g, u)$ tal que $\underline{\omega} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^\Gamma)$, $g \in \mathrm{qAut}(\mathcal{O}(G))$ y $u \in \mathrm{Reg}_{1,\varepsilon}(\mathcal{O}_\epsilon(G), \mathbb{C}^\Gamma)$ es un morfismo de álgebras que satisface las propiedades (2.12) y (2.13). Las transpuestas de estas aplicaciones inducen las aplicaciones ${}^t\underline{\omega} = \tau \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$, ${}^tg = f \in \mathrm{qAut}(G)$ y ${}^tu = \mu \in \mathrm{Map}(\Gamma, G_\epsilon)$, donde $G_\epsilon = \mathrm{Alg}(\mathcal{O}_\epsilon(G), \mathbb{C})$ y $\mu(1) = 1$.

Sea $v = {}^t\iota\mu$, entonces v es un 1-cociclo que satisface (*iii*): por la Subsección 4.1.2, la imagen de ${}^t\iota : G_\epsilon \to G$ es el toro maximal $\mathbf{T}$, entonces la composición $v = {}^t\iota\mu$ es una función $v : \Gamma \to \mathbf{T} \subset G$, que por las ecuaciones (2.12) y (2.13) satisface que

$$\begin{aligned}\sigma_1(\tau(x)) = f(\sigma_2(x))v(x) \text{ y } v(xy) &= f(\sigma_2(y))^{-1}v(x)\sigma_1(\tau(y))\\ &= f(\sigma_2(y))^{-1}v(x)f(\sigma_2(y))v(y)\\ &= (v(x) \leftharpoonup y)v(y).\end{aligned}$$

para todo $g,\ h \in \Gamma$. En efecto, para todo $x,\ y \in \Gamma$ y $b \in \mathcal{O}(G)$ tenemos que

$$\begin{aligned}< \sigma_1(\tau(x)), b > &=< {}^tp_1({}^t\underline{\omega}(x)), b >=< {}^t(\underline{\omega}p_1)(x), b >=< x, \underline{\omega}p_1(b) >\\ &=< x, p_2g(b_{(1)})u\iota(b_{(2)}) >=< x, p_2g(b_{(1)}) >< x, u\iota(b_{(2)}) >\\ &=< {}^t(p_2g)(x), b_{(1)} >< {}^t(u\iota)(x), b_{(2)} >=< {}^tg({}^tp_2(x)), b_{(1)} >< {}^t\iota({}^tu(x)), b_{(2)} >\\ &=< f(\sigma_2(x)), b_{(1)} >< v(x), b_{(2)} >=< f(\sigma_2(x))v(x), b >,\end{aligned}$$

de donde se sigue la primera igualdad. Usando que ι es un morfismo de álgebras de Hopf y la igualdad (2.13) tenemos que

$$\begin{aligned}
< v(xy), b > &=< ({}^t\iota{}^t u)(xy), b >=< {}^t(u\iota)(xy), b >=< xy, u\iota(b) >=< x\otimes y, \Delta(u\iota(b)) > \\
&=< x\otimes y, u\iota(b_{(2)})\otimes q_2(F(\mathcal{S}(\iota(b_{(1)}))\iota(b_{(3)})))u\iota(b_{(4)}) > \\
&=< x, u\iota(b_{(2)}) >< y, q_2(F(\mathcal{S}(\iota(b_{(1)}))\iota(b_{(3)})))u\iota(b_{(4)}) > \\
&=< x, u\iota(b_{(2)}) >< y, p_2(g(\mathcal{S}(b_{(1)})b_{(3)}))u\iota(b_{(4)}) > \\
&=< x, u\iota(b_{(2)}) >< y, p_2(g(\mathcal{S}(b_{(1)}))) >< y, p_2(g(b_{(3)})) >< y, u\iota(b_{(4)}) > \\
&=< v(x), b_{(2)} >< \mathcal{S}(f(\sigma_2(y))), b_{(1)} >< f(\sigma_2(y)), b_{(3)} >< v(y), b_{(4)} > \\
&=< v(x), b_{(2)} >< f(\sigma_2(y))^{-1}, b_{(1)} >< f(\sigma_2(y)), b_{(3)} >< v(y), b_{(4)} > \\
&=< f(\sigma_2(y))^{-1}v(x)f(\sigma_2(y))v(y), b > .
\end{aligned}$$

Más aún, de las igualdades anteriores se sigue que

$$v(xy)v(y)^{-1} = f(\sigma_2(y))^{-1}v(x)f(\sigma_2(y)) \qquad \text{para todo } x,\ y\in\Gamma,$$

lo cual implica que $f(\sigma_2(y))^{-1}v(x)f(\sigma_2(y))\in\mathbf{T}$ para todo $x,\ y\in\Gamma$. Luego, $v(x)\in\mathbf{T}^{f\sigma_2}$ para todo $x\in\Gamma$ y por ende $v\in Z^1_{f,\sigma_2}(\Gamma,\mathbf{T}^{f\sigma_2})$. Por definición, ambas igualdades se satisfacen si y sólo si $\sigma_1\sim\sigma_2$ vía $\tau\in\mathrm{Aut}(\Gamma)$, $f\in\mathrm{qAut}(G)$ y $v\in Z^1_{f,\sigma_2}(\Gamma,\mathbf{T}^{f\sigma_2})$. □

Notar que $\mathrm{Aut}(G)$ actúa en $\mathrm{Emb}(\Gamma,G)$ por $f\circ\sigma$ para todo $f\in\mathrm{Aut}(G)$ y $\sigma\in\mathrm{Emb}(\Gamma,G)$. En particular, G y $\mathbf{T}$ actúan en $\mathrm{Emb}(\Gamma,G)$ por $\mathrm{Int}(G)$ e $\mathrm{Int}(\mathbf{T})$ respectivamente. Denotemos $\mathrm{Int}(g)\circ\sigma = g\cdot\sigma$ para todo $\sigma\in\mathrm{Emb}(\Gamma,G)$, $g\in G$ y $G\cdot\sigma$ a la órbita de σ en $\mathrm{Emb}(\Gamma,G)$ dada por la acción de G. Es claro que, si $C=C_G(\sigma(\Gamma))$ es el centralizador de $\sigma(\Gamma)$ en G, entonces $G\cdot\sigma\simeq G/C$ y el conjunto de $\mathbf{T}$-órbitas en $G\cdot\sigma$ es equivalente a $\mathbf{T}\backslash G/C$. A saber, $\mathbf{T}$ actúa en $G\cdot\sigma$ por $t\cdot(g\cdot\sigma)=(tg)\cdot\sigma$ para todo $t\in\mathbf{T}$. Luego, $[g\cdot\sigma]=[h\cdot\sigma]$ en $G\cdot\sigma/\mathbf{T}$ si y sólo si existe $t\in\mathbf{T}$ tal que $(tg)\cdot\sigma=h\cdot\sigma$. Pero esto ocurre si y sólo si $h^{-1}tg\in C$, es decir, si existe $c\in C$ tal que $tg=hc$. Pero esto es equivalente a que $[g]=[h]$ en $\mathbf{T}\backslash G/C$.

Lema 4.2.21. *Si $\sigma(\Gamma)$ no es central en G, entonces $\mathbf{T}\backslash G/C$ es infinito.*

Demostración. Para probar que el conjunto $\mathbf{T}\backslash G/C$ es infinito basta ver que

$$\dim G > \dim\mathbf{T} + \dim C = \mathrm{rg}\, G + \dim C.$$

Pues si $m=\#\mathbf{T}\backslash G/C$ fuera finito, entonces $G=\bigcup_{i=1}^m \mathbf{T}g_iC$ y esto implicaría que $\dim G\leq \dim\mathbf{T}+\dim C$. Como $\sigma(\Gamma)$ no es central en G y $C=\cup_{x\in\Gamma}C_G(\sigma(x))$ existe $x\in\Gamma$ tal que $\sigma(x)$ no es central en G y $C\subseteq C_G(\sigma(x))$. En ese caso, C está incluido en un subgrupo reductivo maximal M de G, pues como es sabido, el centralizador de un elemento semisimple es un subgrupo reductivo propio de G (ver por ejemplo [R]). Sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{m}$ las álgebras de Lie de G y M respectivamente. Como las subálgebras maximales de las álgebras de Lie simples fueron clasificadas por Dynkin, por inspección en [D1, D2] se puede ver que para toda subálgebra reductiva maximal se tiene que

$$\dim\mathfrak{g} > \mathrm{rg}\,\mathfrak{g} + \dim\mathfrak{m},$$

de donde se sigue el lema. Ver el Apéndice para más detalles. □

Lema 4.2.22. *Si $\sigma(\Gamma)$ no es central en G, entonces existe una familia infinita $\{g_i\}_{i\in I}$ de elementos de G tales que $(g_i\cdot\sigma)(\Gamma)\nsubseteq \mathbf{T}$.*

Demostración. Sea $\{g_j\}_{j\in J}$ un conjunto de representantes de $\mathbf{T}\backslash G/C$. Luego, J es infinito por el Lema 4.2.21. Probaremos que puede haber sólo un número finito de elementos g_j tales que $(g_j\cdot\sigma)(\Gamma)\subseteq\mathbf{T}$.

Supongamos que existe $g_i\in G$ tal que $(g_i\cdot\sigma)(\Gamma)\subseteq\mathbf{T}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\Gamma\subseteq\mathbf{T}$. Consideremos ahora los conjuntos

$$\mathcal{L}=\{h\in G|\ h\Gamma h^{-1}\subseteq\mathbf{T}\}\qquad\text{y}\qquad \Lambda=\sum_{h\in\mathcal{L}}h\Gamma h^{-1}.$$

Claramente $\mathbf{T}\subseteq\mathcal{L}$ y $\Lambda\subset\mathbf{T}$. En lo que sigue, mostraremos que $\mathbf{T}\backslash\mathcal{L}/C$ es finito. Sea $N=|\Gamma|$, entonces $N\Lambda=0$, lo cual implica que $\Lambda\subseteq(\mathbb{G}_N)^n$, donde $\mathbb{G}_N$ es el grupo de raíces N-ésimas de la unidad. Por lo tanto, Λ es un subgrupo finito de $\mathbf{T}$. En particular, contiene sólo una cantidad finita de subgrupos que son distintos entre sí e isomorfos a Γ. Sean $\Gamma_1,\dots,\Gamma_s$ estos subgrupos y $h_1,\dots,\ h_s\in\mathcal{L}$ tales que $h_i\Gamma h_i^{-1}=\Gamma_i$. Si $h\in\mathcal{L}$, entonces $h\Gamma h^{-1}=h_i\Gamma h_i^{-1}$ para algún $1\le i\le s$. Luego, $h_i^{-1}h\Gamma h^{-1}h_i=\Gamma$ y por ende $h_i^{-1}h\in N_G(\Gamma)$, el normalizador de Γ en G. En consecuencia $\mathcal{L}=\coprod_{i=1}^s h_iN_G(\Gamma)$.

Por otro lado, existe un homomorfismo $N_G(\Gamma)\to\operatorname{Aut}(\Gamma)$ que se factoriza por el monomorfismo $N_G(\Gamma)/C\hookrightarrow\operatorname{Aut}(\Gamma)$. Como Γ es finito, el orden de $N_G(\Gamma)/C$ es finito y consecuentemente $\mathcal{L}/C$ es finito. Como por hipótesis $\Gamma\subseteq\mathbf{T}$, se sigue que $\mathbf{T}\subseteq C$ y por lo tanto existe una aplicación inyectiva $\mathbf{T}\backslash\mathcal{L}/C\to\mathcal{L}/C$, lo cual implica que $\{g_j\}_{j\in J}$ contiene sólo un número finito de elementos tales que $g_j\Gamma g_j^{-1}\subseteq\mathbf{T}$. □

El que sigue es uno de los resultados más importantes de esta tesis.

Teorema 4.2.23. *Sea $\sigma\in\operatorname{Emb}(\Gamma,G)$ tal que $\sigma(\Gamma)$ no es central en G. Entonces existe una familia infinita $\{\sigma_j\}_{j\in J}$ en $\operatorname{Emb}(\Gamma,G)$ tal que las álgebras de Hopf $\{A_{\sigma_j}\}_{j\in J}$ de dimensión $|\Gamma|\ell^{\dim\mathfrak{g}}$ son no isomorfas entre sí, no semisimples, no punteadas y sus duales tampoco son punteados.*

Demostración. Como $\sigma(\Gamma)$ no es central en G, del Lema 4.2.21 se sigue que existe un conjunto infinito $\{g_i\}_{i\in I}$ de elementos de G tal que $(tg_i)\cdot\sigma\neq\ g_j\cdot\sigma$ para todo $i\neq j$ y $t\in\mathbf{T}$. Denotemos $\sigma_i=g_i\cdot\sigma$ para todo $i\in I$. Por el Lema 4.2.11 sabemos que

$$\operatorname{Emb}(\Gamma,G)=\coprod_{\eta\in E}\mathfrak{C}_\eta,$$

donde $\mathfrak{C}_\eta=\{\mu\in\operatorname{Emb}(\Gamma,G)|\ \eta\sim\mu\}$ y E es un conjunto de representantes de $\operatorname{Emb}(\Gamma,G)$ por la relación de equivalencia $\sim$. Para encontrar la familia, probaremos primero que no puede haber infinitos σ_i incluidos en un solo $\mathfrak{C}_\eta$.

Supongamos por el contrario que existe $\eta\in\operatorname{Emb}(\Gamma,G)$ tal que $\mathfrak{C}_\eta$ contiene infinitos σ_i. Por el Teorema 4.2.20, sabemos que

$$\mathfrak{C}_\eta=\bigcup_{\tau\in\operatorname{Aut}(\Gamma),\,f\in\operatorname{qAut}(G)}\mathfrak{C}_{\eta,f,\tau},$$

donde $\mathfrak{C}_{\eta,f,\tau}=\{\mu\in\operatorname{Emb}(\Gamma,G)|\ \eta\sim\mu$ vía la terna (τ,f,v) para algún $v\in Z^1_{f,\eta}(\Gamma,\mathbf{T}^{f\eta})\}$.

Por el Lema 4.2.8 sabemos que $\mathbf{T}$, y en particular $\mathbf{T}^{f\eta}$, actúa en $\mathrm{qAut}(G)$ por $t\cdot f(x) = tf(x)t^{-1}$ para todo $f \in \mathrm{qAut}(G)$, $t \in \mathbf{T}$.

Afirmación: si $t \in \mathbf{T}^{f\eta}$, entonces $\mathfrak{C}_{\eta,t\cdot f,\tau} = \mathfrak{C}_{\eta,f,\tau}$.

En efecto, $\mu \in \mathfrak{C}_{\eta,t\cdot f,\tau}$ si y sólo si existe $v \in Z^1_{(t\cdot f),\eta}(\Gamma, \mathbf{T}^{(t\cdot f)\eta})$ tal que $\mu(\tau(x)) = (t\cdot f)(\eta(x))v(x)$. En tal caso

$$\begin{aligned}\mu(\tau(x)) &= (t\cdot f)(\eta(x))v(x) = tf(\eta(x))t^{-1}v(x) = tf(\eta(x))v(x)t^{-1}\\ &= f(\eta(x))[f(\eta(x))^{-1}tf(\eta(x))]v(x)t^{-1} = f(\eta(x))(t\cdot v)(x),\end{aligned}$$

lo que implica que $\mu \in \mathfrak{C}_{\eta,f,\tau}$, ya que por el Lema 4.2.13, $Z^1_{(t\cdot f),\eta}(\Gamma, \mathbf{T}^{(t\cdot f)\eta}) = Z^1_{f,\eta}(\Gamma, \mathbf{T}^{f\eta})$ para todo $t \in \mathbf{T}$, y por el Lema 4.2.14, $t\cdot v \in Z^1_{f,\eta}(\Gamma, \mathbf{T}^{f\eta})$. Luego, $\mathfrak{C}_{\eta,t\cdot f,\tau} \subseteq \mathfrak{C}_{\eta,f,\tau}$. Reemplazando f por $t^{-1}\cdot f$ se sigue la otra inclusión. Entonces podemos escribir

$$\mathfrak{C}_\eta = \coprod_{\tau\in\mathrm{Aut}(\Gamma)} \coprod_{f\in\mathfrak{J}} \coprod_{t\in\mathfrak{t}} \mathfrak{C}_{\eta,t\cdot f,\tau},$$

donde $\mathfrak{J}$ es un conjunto de representantes de $\mathrm{qAut}(G)/\mathbf{T}$ y $\mathfrak{t}$ es un conjunto de representantes de $\mathbf{T}/\mathbf{T}^{f\eta}$. Como $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ es finito, y por el Lema 4.2.8 (c), $\mathfrak{J}$ también es finito, si $\mathfrak{C}_\eta$ contiene infinitos σ_i entonces existen $\tau \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ y $f \in \mathfrak{J}$ tal que $\coprod_{t\in\mathfrak{t}} \mathfrak{C}_{\eta,t\cdot f,\tau}$ contiene infinitos σ_i. Si $\sigma_i \in \mathfrak{C}_{\eta,t\cdot f,\tau}$ para algún $t \in \mathfrak{t}$, entonces $t^{-1}\cdot\sigma_i \in \mathfrak{C}_{\eta,f,\tau}$. Pero por los Lemas 4.2.14 y 4.2.17, sabemos que el conjunto $\mathfrak{C}_{\eta,f,\tau}/\mathbf{T}^{f\eta}$ es finito, lo que implica que deben existir σ_j, $i \neq j$ y $s \in \mathbf{T}$ tales que $[t^{-1}\cdot\sigma_i] = [s^{-1}\cdot\sigma_j]$. Pero esto contradice la hipótesis sobre la familia $\{\sigma_i\}_{i\in I}$ puesto que en tal caso, existiría $r \in \mathbf{T}^{f\eta}$ tal que $t^{-1}\cdot\sigma_i = r\cdot(s^{-1}\cdot\sigma_j) = (rs^{-1})\cdot\sigma_j$, esto es $\sigma_i = (trs^{-1})\cdot\sigma_j$ con $trs^{-1} \in \mathbf{T}$.

En conclusión, existen sólo finitos elementos del conjunto $\{\sigma_i\}_{i\in I}$ en cada $\mathfrak{C}_\eta$, para todo $\eta \in E$. Por lo tanto, por los Teoremas 4.2.4 y 4.2.20 y el Lema 4.2.22, existe un subconjunto $J \subset I$ infinito tal que las álgebras de Hopf $\{A_{\sigma_j}\}_{j\in J}$ son no isomorfas entre sí, no semisimples, no punteadas y sus duales tampoco son punteados. $\square$

Ejemplo 4.2.24. Sea $n \geq 2$ y sea Γ un subgrupo finito de $SL(2)$. Consideremos la inclusión $\sigma : \Gamma \to SL_n(\mathbb{C})$ dada por $\sigma(x) = \left(\begin{smallmatrix} x & 0\\ 0 & I_{n-2}\end{smallmatrix}\right)$, $x \in \Gamma$. Si Γ no es central, esto es $\Gamma \nsubseteq \{\pm\,\mathrm{id}\}$, obtenemos una familia infinita de álgebras de Hopf no isomorfas entre sí, no semisimples, no punteadas con duales no punteados y de dimensión $|\Gamma|\ell^{n^2-1}$. Un ejemplo análogo se puede describir para cualquier G simple. Los ejemplos dados por Müller en [Mu2, Thm. 5.13] son un caso particular de la situación anterior, para $G = SL(2)$ y $\Gamma = \mathbb{G}_\ell$.

Ejemplo 4.2.25. Dado G un grupo algebraico afín simple, en general no se sabe cuáles son sus subgrupos finitos. Más aún, en caso de conocerlos resultaría imposible dar una lista explícita de ellos. Por ejemplo, existen infinitos subgrupos finitos dentro de un toro maximal de G.

Usando teoría de caracteres e indicadores de Frobenius-Schur, es posible determinar si un grupo finito fijo Γ está incluido en alguno de los grupos clásicos $SL(N)$, $O(N)$ y $Sp(N)$: si $\rho : \Gamma \to GL(N)$ es una representación fiel irreducible de Γ y χ es su carácter, el indicador de Frobenius-Schur se define por $\varepsilon = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{g\in\Gamma}\chi(g^2)$. Luego, Γ está incluido en $SL(N)$, $O(N)$ o $Sp(N)$ si $\varepsilon = 0,\ 1$ o -1 respectivamente.

El problema resulta más complejo si el grupo de Lie simple es excepcional. Varios autores han estudiado inclusiones de grupos finitos simples o extensiones centrales de grupos finitos simples en los grupos de Lie excepcionales, ver por ejemplo [CW], [GR].

Para ilustrar lo dicho anteriormente, mostramos en lo que sigue algunos resultados de Serre y de Pianzola y Weiss.

Teorema 4.2.26. [S, Thm. 1] *Sea G un grupo algebraico lineal conexo y simple sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k. Sean h su número de Coxeter y p un número primo.*

(a) *Si $p = h+1$, el grupo $G(k)$ contiene un subgrupo isomorfo a $PGL_2(\mathbb{F}_p)$, salvo que* $\operatorname{car} k = 2$ *y $G \simeq PGL_2$.*

(b) *Si $p = 2h+1$, $G(k)$ contiene un subgrupo isomorfo a $PSL_2(\mathbb{F}_p)$.*

Los siguientes resultados establecen cuándo un grupo de Lie simple G contiene un elemento de orden p. En particular, usando el Teorema 4.2.4 obtenemos álgebras de Hopf de dimensión $p \cdot \ell^{\dim \mathfrak{g}}$.

Proposición 4.2.27. [S, Prop. 4] *Supongamos que $G(k)$ es simple y sea h el número de Coxeter asociado a G. Si $p = mh+1$, con $m \geq 1$, entonces G contiene un elemento regular de orden p.*

Sea G un grupo de Lie compacto, conexo y simple. Si $x \in G$ es un elemento de orden N, entonces los valores de los caracteres $\operatorname{tr}_V(\rho(x))$, para toda representación (ρ, V) de dimensión finita de G, generan un cuerpo $A(x)$ sobre $\mathbb{Q}$. Este cuerpo $A(x)$ es un subcuerpo del cuerpo ciclotómico $\mathbb{Q}(\xi)$, donde $\xi = e^{2\pi i/N}$. El grado de la extensión $\mathbb{Q}(\xi)/A(x)$ se denomina la profundidad de x.

Teorema 4.2.28. [PW, Thm. 3] *Sea p un número primo que no divide a $|W|$ y sea d un número entero positivo. Entonces G tiene un elemento de orden p y profundidad d si y sólo si se cumple las siguientes condiciones:*

(a) *d divide a $p-1$.*

(b) *d divide a $m+1$ para algún exponente m de W.*

(c) *Si d es impar entonces G es, o bien de tipo A_n, o de tipo E_6, o de tipo D_n, con n un múltiplo impar de d.*

4.2.4. Clases de casi-isomorfismos

En 1975 I. Kaplansky conjeturó lo siguiente:

Conjetura 2. Las álgebras de Hopf de una dimensión dada son finitas salvo isomorfismos, si el cuerpo k es algebraicamente cerrado y su característica no divide a dicha dimensión.

Varios autores han encontrado contraejemplos a esta conjetura, entre ellos E. Müller. Claramente, las familias de álgebras de Hopf A_{σ_j} encontradas anteriormente a través de una generalización de los resultados de E. Müller, son un nuevo contraejemplo de esta conjetura.

Sin embargo, en 2001 A. Masuoka [Mk5] demostró que todas las familias de álgebras de Hopf encontradas hasta ese momento consistían en una cantidad finita de álgebras de Hopf salvo casi-isomorfismos, es decir, salvo deformación por cociclos. Por tal motivo, propuso la siguiente variante a la conjetura de Kaplansky:

Conjetura 3. Las álgebras de Hopf de una dimensión dada son finitas salvo casi-isomorfismos, si el cuerpo k es algebraicamente cerrado y su característica no divide a dicha dimensión.

Siguiendo sus métodos, mostraremos que las familias de álgebras de Hopf A_{σ_j} consisten en álgebras de Hopf casi-isomorfas entre sí.

Cabe destacar que la conjetura de Masuoka también ha sido negada por varios autores, por ejemplo Etingof y Gelaki [EG], que encontraron familias infinitas continuas de álgebras de Hopf que no son casi-isomorfas.

Definición 4.2.29. (i) Sea A un álgebra de Hopf con antípoda $\mathcal{S}$. Un 2-*cociclo* normalizado para A es una aplicación lineal $\sigma \in \mathrm{Reg}(A \otimes A, k)$ que satisface las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} \sigma(a_{(1)}, b_{(1)})\sigma(a_{(2)}b_{(2)}, c) &= \sigma(b_{(1)}, c_{(1)})\sigma(a, b_{(2)}c_{(2)}) \\ \sigma(1, a) = \sigma(a, 1) &= \varepsilon(a), \end{aligned}$$

para todo $a,\ b,\ c \in A$.

(ii) Una *deformación por cociclo* A^σ de A por un 2-cociclo σ es el álgebra de Hopf definida como A como coálgebra pero con el siguiente producto $\cdot$ y la siguiente antípoda $\mathcal{S}^\sigma$:

$$\begin{aligned} a \cdot b &= \sigma(a_{(1)}, b_{(1)})a_{(2)}b_{(2)}\sigma^{-1}(a_{(3)}, b_{(3)}), \\ \mathcal{S}^\sigma(a) &= \sigma(a_{(1)}, \mathcal{S}(a_{(2)}))\mathcal{S}(a_{(3)})\sigma^{-1}(a_{(4)}, a_{(5)}), \end{aligned}$$

para todo $a,\ b \in A$. Usando las condiciones de cociclo de σ, es fácil ver que el producto $\cdot$ de A^σ resulta asociativo con unidad 1 y A^σ resulta un álgebra de Hopf con antípoda $\mathcal{S}^\sigma$. Más aún, el inverso σ^{-1} de σ con respecto a la convolución es un 2-cociclo para A^σ y se puede ver que se verifica $(A^\sigma)^{\sigma^{-1}} = A$. Por lo tanto, A y A^σ son deformaciones por cociclos una de otra.

Si dos álgebras de Hopf A y B son deformaciones de cociclo una de otra, entonces son monoidalmente co-Morita equivalentes, es decir, existe una equivalencia monoidal k-lineal entre las categorías de comódulos a derecha $\mathcal{M}^A \simeq \mathcal{M}^B$. Más aún, por [Sbg, Cor. 5.9], si A y B son de dimensión finita entonces vale la recíproca.

Sea A un álgebra de Hopf y consideremos $\mathrm{Alg}(A, k)$ el grupo de morfismos de álgebras de A en k. $\mathrm{Alg}(A, k)$ actúa a izquierda y a derecha en A a través de:

$$\beta \rightharpoonup a = a_{(1)} < \beta, a_{(2)} > \qquad \text{y} \qquad a \leftharpoonup \beta =< \beta, a_{(1)} > a_{(2)},$$

para todo $a \in A$ y $\beta \in \mathrm{Alg}(A, k)$. Más aún, ambas acciones conmutan entre sí, es decir

$$\beta \rightharpoonup (a \leftharpoonup \beta') = (\beta \rightharpoonup a) \leftharpoonup \beta'$$

para todo $a \in A,\ \beta,\ \beta' \in \mathrm{Alg}(A, k)$ y el automorfismo de A definido por $a \mapsto \beta \rightharpoonup a \leftharpoonup \beta^{-1}$ para $\beta \in \mathrm{Alg}(A, k)$ es un morfismo de álgebras de Hopf.

Definición 4.2.30. Dos ideales de Hopf $I,\ J$ de un álgebra de Hopf A se dicen *conjugados* si existe un morfismo de álgebras $\beta \in \mathrm{Alg}(A, k)$ tal que

$$J = \beta \rightharpoonup I \leftharpoonup \beta^{-1} = \{< \beta^{-1}, a_{(1)} > a_{(2)} < \beta, a_{(3)} > \mid a \in I\}.$$

Teorema 4.2.31. [Mk5, Thm.2] *Sea B una subálgebra de Hopf central de un álgebra de Hopf A. Si dos ideales I, J de B son conjugados, entonces las álgebras de Hopf $A/(I)$ y $A/(J)$ dadas por el* pushout *son co-Morita equivalentes.* □

En particular, si los cocientes $A/(I)$ y $A/(J)$ son de dimensión finita, entonces dichas álgebras de Hopf son deformaciones por cociclos una de otra.

En lo que sigue probamos que las álgebras de Hopf dadas por el Teorema 4.2.23 son deformaciones por cociclos unas de otras. La demostración se basa en el hecho que las álgebras de Hopf A_{σ_j} se construyen a través de un *pushout* a partir de las inclusiones $\iota : \mathcal{O}(G) \hookrightarrow \mathcal{O}_\epsilon(G)$ y $g_j \cdot \sigma : \Gamma \hookrightarrow G$ y que los subgrupos $(g_j \cdot \sigma)(\Gamma)$ de G son todos conjugados entre sí.

La siguiente proposición se sigue directamente de un resultado de Masuoka sobre $SL_n(\mathbb{C})$. Sean G un grupo de Lie conexo, simplemente conexo y simple sobre $\mathbb{C}$, Γ y $\widetilde{\Gamma}$ dos subgrupos finitos de G y denotemos por A_Γ y $A_{\widetilde{\Gamma}}$ a las álgebras de Hopf dadas por la construcción por el *pushout*.

Proposición 4.2.32. *Si Γ y $\widetilde{\Gamma}$ son conjugados en G, entonces las álgebras de Hopf A_Γ y $A_{\widetilde{\Gamma}}$ son deformaciones por cociclos una de otra.*

Comparar con [Mk5, Prop. 4].

Demostración. Denotemos por $p_1 : \mathcal{O}(G) \to \mathbb{C}^\Gamma$ y $p_2 : \mathcal{O}(G) \to \mathbb{C}^{\widetilde{\Gamma}}$ los epimorfismos de álgebras de Hopf dados por las inclusiones de Γ y $\widetilde{\Gamma}$ en G. Entonces, los subgrupos Γ y $\widetilde{\Gamma}$ son conjugados por un elemento $g \in \mathrm{Alg}(\mathcal{O}(G), \mathbb{C}) = G$ si y sólo si los ideales $I = \operatorname{Ker} p_1$ y $J = \operatorname{Ker} p_2$ son conjugados por g. En efecto, como $\Gamma = \mathrm{Alg}(\mathbb{C}^\Gamma, k) = \mathrm{Alg}(\mathcal{O}(G)/I, k)$ se sigue que $I = \cap_{\gamma\in\Gamma} \operatorname{Ker}\gamma$. Análogamente $J = \cap_{\tilde{\gamma}\in\widetilde{\Gamma}} \operatorname{Ker}\tilde{\gamma}$. Luego, si Γ y $\widetilde{\Gamma}$ son conjugados en G, entonces existe $g \in G$ tal que $g\Gamma g^{-1} = \widetilde{\Gamma}$. Pero $x \in J$ si y sólo si $<\tilde{\gamma}, x>= 0$ para todo $\tilde{\gamma} \in \widetilde{\Gamma}$ y esto ocurre si y sólo si

$$\begin{aligned}0 &=< g\gamma g^{-1}, x >=< g, x_{(1)} >< \gamma, x_{(2)} >< g^{-1}, x_{(3)} > \\ &=< \gamma, < g, x_{(1)} > x_{(2)} < g^{-1}, x_{(3)} >> \\ &=< \gamma, g^{-1} \rightharpoonup x \leftharpoonup g >\end{aligned}$$

para todo $\gamma \in \Gamma$, lo cual se cumple si y sólo si $g^{-1} \rightharpoonup x \leftharpoonup g \in I$ para todo $x \in J$, es decir $I = g^{-1} \rightharpoonup J \leftharpoonup g$ y los ideales son conjugados por $g \in G = \mathrm{Alg}(\mathcal{O}(G), k)$. Luego, la proposición se sigue del teorema anterior. □

Corolario 4.2.33. *Las álgebras de Hopf A_{σ_j} dadas por el Teorema 4.2.23 son todas casi-isomorfas entre sí.*

Demostración. Se sigue directamente de la construcción de dichas álgebras de Hopf y de los resultados anteriores. □

Capítulo 5

Subgrupos finitos de un grupo cuántico simple cuyo parámetro es una raíz de 1

En este último capítulo se determinan todos los cocientes de dimensión finita del álgebra de coordenadas cuantizada $\mathcal{O}_\epsilon(G)$, para todo grupo de Lie G conexo, simplemente conexo y simple sobre $\mathbb{C}$, donde ϵ es una raíz ℓ-ésima primitiva de la unidad. Recordemos que $\mathfrak{g}$ denota el álgebra de Lie de G, $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ es una subálgebra de Cartan fija, $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ es la base del sistema de raíces $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ de $\mathfrak{g}$ con respecto a $\mathfrak{h}$ y $n = \operatorname{rg} \mathfrak{g}$.

Probaremos que todo cociente de dimensión finita de $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ está determinado por una colección de datos $\mathcal{D} = (I_+, I_-, N, \Gamma, \sigma, \delta)$ a la cual llamaremos *dato de subgrupo finito* donde

- $I_+ \subseteq \Pi$ e $I_- \subseteq -\Pi$. Estos conjuntos definen una subálgebra algebraica de Lie $\mathfrak{l}$ con subgrupo de Lie conexo L de G, tal que $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{l}_-$ y $\mathfrak{l}_\pm = \sum_{\alpha \in \Psi_\pm} \mathfrak{g}_\alpha$ con $\Psi_\pm = \{\alpha \in \Phi : \operatorname{Sup} \alpha = I_\pm\}$. Sea $s = n - |I_+ \cup -I_-|$.
- N es un subgrupo de $(\mathbb{Z}/(\ell))^s$.
- Γ es un grupo finito.
- $\sigma : \Gamma \to L$ es un morfismo inyectivo de grupos.
- $\delta : N \to \widehat{\Gamma}$ es un morfismo de grupos.

Para hacerlo procedemos de la siguiente manera: en la primera sección se determinan todas las subálgebras de Hopf de $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$, ver [MuII]. En la segunda sección se construyen cocientes de dimensión finita de $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ sobre el cuerpo $\mathbb{Q}(\epsilon)$ y en la tercera sección se muestra que esta construcción es exhaustiva, es decir, *todos* los cocientes de $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ de dimensión finita son de esta forma.

Brevemente, todo cociente de álgebras de Hopf $r : \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^* \to H$ está determinado por una terna (Σ, I_+, I_-), donde I_+ e I_- son como más arriba y Σ es un subgrupo de $(\mathbb{Z}/(\ell))^n$. Usando esta terna se construyen subálgebras de Hopf $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{l}) \subseteq \Gamma_\epsilon(\mathfrak{g})$ y $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l}) \subseteq \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ y un subgrupo conexo L de G tales que $\mathfrak{l}$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ con $\operatorname{Lie}(L) = \mathfrak{l}$ y la siguiente sucesión es exacta:

$$1 \to \mathcal{O}(L) \to \mathcal{O}_\epsilon(L) \to \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^* \to 1.$$

Luego, si $\sigma : \Gamma \to G$ es una inclusión y $\sigma(\Gamma) \subseteq L$, se aplica la construcción *pushout* dada en la Sección 2.3, obteniendo un álgebra de Hopf $A_{\epsilon,\mathfrak{l},\sigma}$ de dimensión finita que es una extensión de $\mathbb{C}^\Gamma$ por $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^*$. Entonces, para cada morfismo de grupos $\delta : N \to \widehat{\Gamma}$, donde N es un grupo abeliano asociado a Σ (ver Observación 5.2.11) y $\widehat{\Gamma}$ es el grupo de caracteres de Γ, se construye un ideal de Hopf J_δ de $A_{\epsilon,\mathfrak{l},\sigma}$ tal que el álgebra de Hopf $A_{\mathcal{D}} = A_{\epsilon,\mathfrak{l},\sigma}/J_\delta$ es una extensión de $\mathbb{C}^\Gamma$ por $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^*$ y un cociente de $\mathcal{O}_\epsilon(G)$.

5.1. Subálgebras de Hopf de un álgebra de Hopf punteada

En esta sección se describen las subálgebras de Hopf de álgebras de Hopf punteadas. Sea U un álgebra de Hopf tal que el corradical U_0 es una subálgebra de Hopf. U admite una filtración de coálgebras, la filtración corradical, que resulta ser de álgebras de Hopf, por ser U_0 una subálgebra. Denotemos por $(U_n)_{n\geq 0}$ a la filtración corradical de U, $U_{-1} = 0$ y sean $\operatorname{gr} U(n) = U_n/U_{n-1}$ el espacio homogéneo de grado n y $\operatorname{gr} U = \oplus_{n\geq 0} \operatorname{gr} U(n)$ el álgebra de Hopf graduada asociada a la filtración. Sean $\iota : U_0 \to \operatorname{gr} U$ la inclusión canónica, y $\pi : \operatorname{gr} U \to U_0$ la proyección homogénea. Luego, el conjunto $R := (\operatorname{gr} U)^{\operatorname{co}\pi}$ es una subálgebra de $\operatorname{gr} U$ que se denomina el diagrama de U. Más aún, R resulta ser un álgebra de Hopf graduada trenzada, es decir, un álgebra de Hopf en la categoría ${}^{U_0}_{U_0}\mathcal{YD}$ de módulos de Yetter-Drinfeld de U_0. Explícitamente, R es una subálgebra graduada de $\operatorname{gr} U$, con una acción a izquierda y una coacción a izquierda de U_0 dada por

$$h \cdot r = h_{(1)} r \mathcal{S}(h_{(2)}), \qquad \rho(r) = r_{(-1)} \otimes r_{(0)} = \pi(r_{(1)}) \otimes r_{(2)},$$

para todo $r \in R$, $h \in U_0$. La comultiplicación de R está dada por

$$\Delta_R(r) = r^{(1)} \otimes r^{(2)} = \vartheta_R(r_{(1)}) \otimes r_{(2)},$$

donde $\vartheta_R : \operatorname{gr} U \to R$ es la aplicación definida para todo $a \in \operatorname{gr} U$ como

$$\vartheta_R(a) = a_{(1)} \iota\pi(\mathcal{S} a_{(2)}). \tag{5.1}$$

Se puede probar fácilmente que

$$\vartheta_R(rh) = r\epsilon(h), \qquad \vartheta_R(hr) = h \cdot r \tag{5.2}$$

para todo $r \in R$, $h \in U_0$. Por consiguiente, se tiene que $\operatorname{gr} U \simeq R\# U_0$, es decir, $\operatorname{gr} U$ es una bosonización de R con $R = \oplus_{n\geq 0} R(n)$, donde $R(0) \simeq \mathbb{C}$, $R(1) = \mathcal{P}(R)$.

Diremos que R es un *álgebra de Nichols* si R está generada como álgebra por $R(1)$. Ver [AS2] para más detalles.

Para formular los siguientes resultados, necesitaremos introducir cierta terminología. Sean A una álgebra de Hopf, M un módulo de Yetter-Drinfeld sobre A y B una subálgebra de Hopf de A. Decimos que un subespacio vectorial N de M es *B-compatible* si

(i) es estable bajo la acción de B, y

(ii) posee una estructura de B-comódulo que induce la coacción de A.

Siendo poco exactos pero descriptivos, diremos que "N es un submódulo de Yetter-Drinfeld sobre B", aunque M no sea necesariamente un módulo de Yetter-Drinfeld sobre B.

Lema 5.1.1. *Sea Y una subálgebra de Hopf de U. Entonces el corradical Y_0 es una subálgebra de Hopf y el diagrama S de Y es una subálgebra de Hopf trenzada de R (en el sentido de [Tk]).*

Si $R = \mathfrak{B}(V)$ es un álgebra de Nichols tal que $\dim V < \infty$, entonces S es también un álgebra de Nichols. En este caso, las subálgebras de Hopf de U están parametrizadas por pares (Y_0, W) donde Y_0 es una subálgebra de Hopf de U_0 y $W \subset V = R(1)$ es Y_0-compatible.

Demostración. La primera afirmación se sigue del hecho que $Y_0 = Y \cap U_0$ y la intersección de dos subálgebras de Hopf es una subálgebra de Hopf. Más aún, por [Mo, Lemma 5.2.12], la filtración corradical de Y está dada por $Y_n = Y \cap U_n$; por lo tanto existe un morfismo homogéneo inyectivo de álgebras de Hopf $\gamma : \operatorname{gr} Y \hookrightarrow \operatorname{gr} U$ que induce el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \operatorname{gr} Y \arrow[r, hook, "\gamma"] \arrow[d, "\pi_Y"] & \operatorname{gr} U \arrow[d, "\pi"] \\ Y_0 \arrow[r, hook] & U_0. \end{tikzcd}$$

Así, $S = (\operatorname{gr} Y)^{\operatorname{co} \pi_Y} = \{a \in \operatorname{gr} Y : (\operatorname{id} \otimes \pi_Y)\Delta(a) = a \otimes 1\}$ es una subálgebra de R que es además un subespacio vectorial trenzado. Más aún, como $\gamma\vartheta_S = \vartheta_R\gamma$ y γ es de álgebras de Hopf, *cf.* (5.1), se sigue que S es una subcoálgebra de R y por lo tanto una subálgebra de Hopf trenzada de R.

Supongamos ahora que $R \simeq \mathfrak{B}(V)$ es un álgebra de Nichols con $\dim V < \infty$. Tomando duales graduados, *i. e.* la suma directa de los espacios duales de las componentes homogéneas, se tiene un epimorfismo de álgebras de Hopf graduadas trenzadas $\wp : \mathfrak{B}(V^*) \to S^{\operatorname{gr dual}}$. Como $\mathfrak{B}(V^*)$ y $S^{\operatorname{gr dual}}$ son coalgebras irreducibles punteadas, por [Sw, Thm. 9.1.4], $\wp$ manda la filtración corradical de la primera suryectivamente sobre la filtración corradical de la segunda. Por ende, $\mathcal{P}(S^{\operatorname{gr dual}}) = S^{\operatorname{gr dual}}(1)$ y *a fortiori* S está generada en grado 1, *i. e.* es un álgebra de Nichols. Además, Y está determinada por Y_0 y $S(1)$, siendo este último Y_0-compatible. Recíprocamente, si Y_0 es una subálgebra de Hopf de U_0 y $W \subset R(1)$ es Y_0-compatible, entonces se pueden elegir $(y_i)_{i\in I}$ en U_1 tal que las clases $(\overline{y}_i)_{i\in I}$ en U_1/U_0 generan $W\#1$. Entonces la subálgebra Y de U generada por Y_0 y $(y_i)_{i\in I}$ es una subálgebra de Hopf de U que se corresponde al par (Y_0, W). $\square$

Observación 5.1.2. El lema anterior también es válido si V es localmente finito como espacio trenzado, *i. e.* para todo $v \in V$ existe un subespacio trenzado $W \subseteq V$ tal que $v \in W$ y $\dim W < \infty$.

Volvamos ahora a las subálgebras de Hopf de álgebras de Hopf punteadas. La noción de "compatibilidad" para grupos se puede leer de la siguiente manera. Sean G un grupo y M un módulo de Yetter-Drinfeld sobre $\mathbb{C}[G]$. Si F es un subgrupo de G, un subespacio vectorial N de M es F-compatible si

(i) es estable bajo la acción de F, y

(ii) es un $\mathbb{C}[G]$-comódulo y el soporte $\operatorname{Sup} N := \{g \in G : N^g \neq 0\}$ está contenido en F.

Corolario 5.1.3. *Sea U un álgebra de Hopf punteada cuyo diagrama R es un álgebra de Nichols. Entonces las subálgebras de Hopf de U están parametrizadas por pares (F, W) donde F es un subgrupo de $G(U)$ y $W \subset R(1)$ es F-compatible.* $\square$

El resultado del corolario se lee mejor aún si $G(U)$ es abeliano y $\dim R(1)^g = 1$ para todo $g \in \operatorname{Sup} R(1)$; pues las subálgebras de Hopf de U están parametrizadas en este caso por pares (F, J) donde F es un subgrupo de $G(U)$ y $J \subset \operatorname{Sup} R(1)$ está contenido en F. De esta manera, se recuperan resultados de [CM, MuI, MuII].

Como corolario, aplicamos el resultado a los núcleos de Frobenius-Lusztig. Comparar con [MuII, Thm. 6.3].

Corolario 5.1.4. *Las subálgebras de Hopf de $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ están parametrizadas por ternas (Σ, I_+, I_-) donde Σ es un subgrupo de $T := \langle K_{\alpha_1}, \ldots, K_{\alpha_n}\rangle$ e $I_+ \subseteq \Pi$, $I_- \subseteq -\Pi$ son tales que $K_{\alpha_i} \in \Sigma$ si $\alpha_i \in I_+ \cup -I_-$.* □

5.2. Construcción de subgrupos cuánticos finitos

En esta sección se construyen cocientes de dimensión finita del álgebra de coordenadas cuantizada $\mathcal{O}_\epsilon(G)$. Este proceso se realizará en tres pasos.

Sean G un grupo de Lie conexo, simplemente conexo y simple sobre $\mathbb{C}$ con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, ϵ una raíz ℓ-ésima primitiva de la unidad y $\ell \in \mathbb{N}$ como en el capítulo anterior. Recordemos que $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ es parte de la sucesión exacta de álgebras de Hopf

$$1 \to \mathcal{O}(G) \xrightarrow{\iota} \mathcal{O}_\epsilon(G) \xrightarrow{\pi} \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^* \to 1. \tag{5.3}$$

5.2.1. Primer paso

Sea $r : \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^* \to H$ un epimorfismo de álgebras de Hopf. En lo que sigue se construyen cocientes de $\mathcal{O}_\epsilon(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$ sobre $\mathbb{Q}(\epsilon)$ asociados a una subálgebra de Hopf de $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ y se corresponden a una subálgebra de Lie algebraica y regular de $\mathfrak{g}$ y a un subgrupo de Lie conexo L. Como $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ es de dimensión finita, la aplicación r induce un monomorfismo ${}^t r : H^* \to \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$. Luego, por el Corolario 5.1.4, el álgebra de Hopf H^* está parametrizada por una terna (Σ, I_+, I_-).

La subálgebra de Hopf $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{l})$ de $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{g})$

Definición 5.2.1. Para toda terna (Σ, I_+, I_-) se define $\Gamma(\mathfrak{l})$ como la subálgebra de $\Gamma(\mathfrak{g})$ generada por los elementos

$$\begin{aligned}
&K_{\alpha_i}^{-1} && (1 \le i \le n),\\
&\begin{pmatrix} K_{\alpha_i};0 \\ m \end{pmatrix} := \prod_{s=1}^{m} \left(\frac{K_{\alpha_i} q_i^{-s+1} - 1}{q_i^s - 1} \right) && (m \ge 1,\ 1 \le i \le n),\\
&E_j^{(m)} := \frac{E_j^m}{[m]_{q_j}!} && (m \ge 1,\ \alpha_j \in I_+),\\
&F_k^{(m)} := \frac{F_k^m}{[m]_{q_k}!} && (m \ge 1,\ \alpha_k \in I_-),
\end{aligned}$$

donde $q_i = q^{d_i}$ para todo $1 \le i \le n$. Notar que $\Gamma(\mathfrak{l})$ no depende de Σ, sino solamente de I_+ e I_-.

Eligiendo una expresión reducida $s_{i_1} \cdots s_{i_N}$ del mayor elemento del grupo de Weyl, se puede ordenar totalmente la parte positiva Φ_+ del sistema de raíces Φ con $\beta_1 = \alpha_{i_1}$, $\beta_2 = s_{i_1}\alpha_{i_2}, \ldots, \beta_N = s_{i_1} \cdots s_{i_{N-1}}\alpha_{i_N}$. Luego, usando los automorfismos de álgebras T_i introducidos por Lusztig [L2] se pueden definir vectores raíces correspondientes $E_{\beta_k} = T_{i_1} \cdots T_{i_{k-1}} E_{i_k}$ y $F_{\beta_k} = T_{i_1} \cdots T_{i_{k-1}} F_{i_k}$.

Recordemos que $R = \mathbb{Q}[q, q^{-1}]$ con q una indeterminada y que $\chi_\ell(q) \in R$ es el ℓ-ésimo polinomio ciclotómico (ver página 43). Consideremos ahora los R-submódulos de $\Gamma(\mathfrak{g})$ dados por

$$J_\ell = R\Big\{ \prod_{\beta \geq 0} F_\beta^{(n_\beta)} \cdot \prod_{i=1}^{n} \left(\begin{array}{c} K_{\alpha_i}; 0 \\ t_i \end{array} \right) K_{\alpha_i}^{\mathrm{Ent}(t_i/2)} \cdot \prod_{\alpha \geq 0} E_\alpha^{(m_\alpha)} : \ \exists\, n_\beta, t_i, m_\alpha \not\equiv 0 \mod (\ell) \Big\},$$

$$\Gamma_\ell = R\Big\{ \prod_{\beta \geq 0} F_\beta^{(n_\beta)} \cdot \prod_{i=1}^{n} \left(\begin{array}{c} K_{\alpha_i}; 0 \\ t_i \end{array} \right) K_{\alpha_i}^{\mathrm{Ent}(t_i/2)} \cdot \prod_{\alpha \geq 0} E_\alpha^{(m_\alpha)} : \ \forall\, n_\beta, t_i, m_\alpha \equiv 0 \mod (\ell) \Big\}.$$

Luego, por [DL, Thm. 6.3], existe una descomposición de R-módulos libres $\Gamma(\mathfrak{g}) = J_\ell \otimes \Gamma_\ell$ y $\Gamma_\ell/[\chi_\ell(q)\Gamma_\ell] \simeq U(\mathfrak{g})_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$. Denotemos por $Q_{I_\pm} = \bigoplus_{\alpha_i \in I_\pm} \mathbb{Z}\alpha_i$ a los subretículos de Q con soporte en I_+ e I_- respectivamente. Definimos entonces los siguientes R-submódulos de $\Gamma(\mathfrak{l})$:

$$\begin{aligned} I_\ell = R\Big\{ &\prod_{\beta \geq 0} F_\beta^{(n_\beta)} \cdot \prod_{i=1}^{n} \left(\begin{array}{c} K_{\alpha_i}; 0 \\ t_i \end{array} \right) K_{\alpha_i}^{\mathrm{Ent}(t_i/2)} \cdot \prod_{\alpha \geq 0} E_\alpha^{(m_\alpha)} : \\ &\exists\, n_\beta, t_i, m_\alpha \not\equiv 0 \mod (\ell) \text{ con } \beta \in Q_{I_-}, \alpha \in Q_{I_+}, 1 \leq i \leq n \Big\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Theta_\ell = R\Big\{ &\prod_{\beta \geq 0} F_\beta^{(n_\beta)} \cdot \prod_{i=1}^{n} \left(\begin{array}{c} K_{\alpha_i}; 0 \\ t_i \end{array} \right) K_{\alpha_i}^{\mathrm{Ent}(t_i/2)} \cdot \prod_{\alpha \geq 0} E_\alpha^{(m_\alpha)} : \\ &\forall\, n_\beta, t_i, m_\alpha \equiv 0 \mod (\ell) \text{ con } \beta \in Q_{I_-}, \alpha \in Q_{I_+}, 1 \leq i \leq n \Big\} \end{aligned}$$

Usando la descomposición de $\Gamma(\mathfrak{g})$ como R-módulo libre tenemos el siguiente lema.

Lema 5.2.2. *Existe una descomposición de R-módulos libres* $\Gamma(\mathfrak{l}) = I_\ell \otimes \Theta_\ell$. *En particular,* $\Gamma(\mathfrak{l})$ *es un sumando directo de* $\Gamma(\mathfrak{g})$ *como R-módulo.*

Demostración. Puesto que $\Gamma(\mathfrak{g}) = J_\ell \otimes \Gamma_\ell$ como R-módulos libres, $I_\ell \otimes \Theta_\ell$ es un R-módulo libre que claramente está contenido en $\Gamma(\mathfrak{l})$. Luego, basta mostrar que $\Gamma(\mathfrak{l}) \subseteq I_\ell \otimes \Theta_\ell$, pero esto se sigue directamente del hecho que $\Gamma(\mathfrak{l})$ está generada como álgebra sobre R por los elementos en la Definición 5.2.1 que satisfacen las relaciones de la Observación 4.1.5. $\square$

Consideremos ahora la $\mathbb{Q}(\epsilon)$-álgebra $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{l}) := \Gamma(\mathfrak{l})/[\chi_\ell(q)\Gamma(\mathfrak{l})]$ dada por el cociente por el ideal bilátero generado por el polinomio ciclotómico $\chi_\ell(q)$.

Proposición 5.2.3. *(a)* $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{l})$ *es una subálgebra de Hopf de* $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{g})$.

(b) $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{g}) \simeq \Gamma(\mathfrak{g}) \otimes_R R/[\chi_\ell(q)R]$ *y* $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{l}) \simeq \Gamma(\mathfrak{l}) \otimes_R R/[\chi_\ell(q)R]$.

Demostración. (a) Por definición, sabemos que los elementos E_j son $(K_{\alpha_i}, 1)$-primitivos, los F_k son $(1, K_{\alpha_k}^{-1})$-primitivos y los K_{α_i} son elementos de tipo grupo. Más aún, la antípoda está dada por $\mathcal{S}(K_{\alpha_i}) = K_{\alpha_i}^{-1}$, $\mathcal{S}(E_j) = -K_{\alpha_j}^{-1}E_j$ y $\mathcal{S}(F_k) = -F_kK_{\alpha_k}$ para todo $1 \leq i \leq n$, $\alpha_j \in I_+$ y $\alpha_k \in I_-$. Por lo tanto, la subálgebra de $\Gamma(\mathfrak{l})$ generada por estos elementos es una subálgebra de Hopf de $\Gamma(\mathfrak{g})$ y $\Gamma(\mathfrak{l})/[\chi_\ell(q)\Gamma(\mathfrak{g}) \cap \Gamma(\mathfrak{l})]$ es una subálgebra de Hopf de $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{g})$. Como por el Lema 5.2.2 sabemos que $\Gamma(\mathfrak{g}) = \Gamma(\mathfrak{l}) \oplus N$ para algún R-submódulo N, tenemos que $\chi_\ell(q)\Gamma(\mathfrak{g}) \cap \Gamma(\mathfrak{l}) = \chi_\ell(q)(\Gamma(\mathfrak{l}) \oplus N) \cap \Gamma(\mathfrak{l}) = \chi_\ell(q)\Gamma(\mathfrak{l})$, lo cual implica que $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{l}) = \Gamma(\mathfrak{l})/[\chi_\ell(q)\Gamma(\mathfrak{g}) \cap \Gamma(\mathfrak{l})]$.

(b) Probaremos la afirmación sólo para $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{g})$, pues la demostración de la otra afirmación es análoga. Consideremos la aplicación $\alpha : \Gamma(\mathfrak{g}) \otimes_R R/[\chi_\ell(q)R] \to \Gamma_\epsilon(\mathfrak{g})$ dada por $\alpha(x \otimes \bar{a}) = \overline{xa}$. Claramente α es un morfismo de $\mathbb{Q}(\epsilon)$-álgebras bien definido. Más aún, dicho morfismo es inversible con inversa $\beta : \Gamma_\epsilon(\mathfrak{g}) \to \Gamma(\mathfrak{g}) \otimes_R R/[\chi_\ell(q)R]$ dada por $\beta(\bar{x}) = x \otimes \bar{1}$. Está bien definido pues $\bar{x} = 0$ si y sólo si $x \in \chi_\ell(q)\Gamma(\mathfrak{g})$, esto es, si y sólo si existe $y \in \Gamma(\mathfrak{g})$ tal que $x = \chi_\ell(q)y$; en tal caso, $x \otimes \bar{1} = y \otimes \overline{\chi_\ell(q)} = 0$. Más aún, β es la inversa ya que $\alpha\beta(\bar{x}) = \alpha(x \otimes \bar{1}) = \bar{x}$ y $\beta\alpha(x \otimes \bar{a}) = \beta(\overline{xa}) = x \otimes \bar{a}$. Por lo tanto, α es un isomorfismo de $\mathbb{Q}(\epsilon)$-álgebras. □

El núcleo regular de Frobenius-Lusztig $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})$

Sea $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})$ la subálgebra de $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{l})$ generada por los elementos

$$\{K_{\alpha_i}, E_j, F_k : \ 1 \leq i \leq n, \alpha_j \in I_+, \alpha_k \in I_-\}.$$

Lema 5.2.4. $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})$ *es una subálgebra de Hopf de* $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{l})$ *tal que* $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{l}) \cap \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g}) = \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})$. *Como subálgebra de Hopf de* $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ *está determinada por la terna* (T, I_+, I_-) *con* $T = \langle K_{\alpha_1}, \ldots, K_{\alpha_n}\rangle$.

Demostración. Por la demostración de la parte (a) del lema anterior se sigue fácilmente que $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})$ es una subálgebra de Hopf de $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{l})$. Como el núcleo de Frobenius-Lusztig $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ es la subálgebra de Hopf de $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{g})$ generada como álgebra por los elementos $\{K_{\alpha_i}, E_i, F_i : \ 1 \leq i \leq n\}$, es claro que $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l}) \subseteq \Gamma_\epsilon(\mathfrak{l}) \cap \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$. Más aún, del Lema 5.2.2 se sigue que cada elemento de $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{l}) \cap \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ debe estar contenido en $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})$. La última afirmación se sigue inmediatamente del Corolario 5.1.4. □

Como consecuencia del lema anterior se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g}) \arrow[r, hook] & \Gamma_\epsilon(\mathfrak{g}) \\ \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l}) \arrow[r, hook] \arrow[u, hook] & \Gamma_\epsilon(\mathfrak{l}). \arrow[u, hook] \end{tikzcd} \tag{5.4}$$

Recordar que el morfismo cuántico de Frobenius $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\mathrm{Fr}} U(\mathfrak{g})_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$ está definido en los generadores de $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{g})$ por

$$\mathrm{Fr}(E_i^{(m)}) = \begin{cases} e_i^{(m/\ell)} & \text{si } \ell | m \\ 0 & \text{si } \ell \nmid m \end{cases}, \qquad \mathrm{Fr}(F_i^{(m)}) = \begin{cases} f_i^{(m/\ell)} & \text{si } \ell | m \\ 0 & \text{si } \ell \nmid m \end{cases},$$

$$\mathrm{Fr}(\left(\begin{smallmatrix} K_{\alpha_i};0 \\ m \end{smallmatrix}\right)) = \begin{cases} \left(\begin{smallmatrix} h_i;0 \\ m \end{smallmatrix}\right) & \text{si } \ell | m \\ 0 & \text{si } \ell \nmid m \end{cases}, \qquad \mathrm{Fr}(K_{\alpha_i}^{-1}) = 1, \text{ para todo } 1 \leq i \leq n.$$

y se tiene la sucesión exacta de álgebras de Hopf (ver [DL, Thm. 6.3]):

$$1 \to \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g}) \to \Gamma_\epsilon(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\mathrm{Fr}} U(\mathfrak{g})_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \to 1.$$

Si definimos $U(\mathfrak{l})_{\mathbb{Q}(\epsilon)} := \mathrm{Fr}(\Gamma_\epsilon(\mathfrak{l}))$, entonces $U(\mathfrak{l})_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$ es una subálgebra de $U(\mathfrak{g})_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$ y el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g}) \arrow[r, hook] & \Gamma_\epsilon(\mathfrak{g}) \arrow[r, two heads, "\mathrm{Fr}"] & U(\mathfrak{g})_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \\ \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l}) \arrow[r, hook] \arrow[u, hook] & \Gamma_\epsilon(\mathfrak{l}) \arrow[r, two heads, "\overline{\mathrm{Fr}}"] \arrow[u, hook] & U(\mathfrak{l})_{\mathbb{Q}(\epsilon)}, \arrow[u, hook] \end{tikzcd} \tag{5.5}$$

donde $\overline{\mathrm{Fr}}$ es la restricción de Fr a $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{l})$.

Observación 5.2.5. (a) Sea $\mathfrak{l}$ el conjunto de elementos primitivos $P(U(\mathfrak{l})_{\mathbb{Q}(\epsilon)})$ de $U(\mathfrak{l})_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$. Entonces $\mathfrak{l}$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$, ya que $U(\mathfrak{l})_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \subset U(\mathfrak{g})_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$ y $\mathfrak{g} = P(U(\mathfrak{g})_{\mathbb{Q}(\epsilon)})$. De hecho $\mathfrak{l}$ es regular en el sentido de [D1], ver la Definición A.0.1 en el Apéndice. En efecto, de la definición se sigue que $\mathfrak{l}$ debe ser la subálgebra de Lie generada por el conjunto $\{h_i, e_j, f_k : 1 \leq i \leq n, \alpha_j \in I_+, \alpha_k \in I_-\}$. Así, tenemos que $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{l}_-$, donde $\mathfrak{l}_\pm = \sum_{\alpha\in\Psi_\pm} \mathfrak{g}_\alpha$, con $\Psi_\pm = \{\alpha \in \Phi :\ \mathrm{Sup}\,\alpha = I_\pm\}$.

(b) $\mathrm{Ker}\,\overline{\mathrm{Fr}}$ es el ideal bilátero $\mathcal{I}$ de $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{l})$ generado por el conjunto

$$\left\{E_j^{(m)}, F_k^{(m)}, \begin{pmatrix} K_{\alpha_i}; 0 \\ m \end{pmatrix}, K_{\alpha_i} - 1 : 1 \leq i \leq n, \alpha_j \in I_+, \alpha_k \in I_-, m \geq 0, \ell \nmid m\right\},$$

y coincide con I_ℓ. En efecto, por [DL, Thm. 6.3] sabemos que $\mathrm{Ker}\,\mathrm{Fr} = J_\ell$ y éste coincide con el ideal bilátero generado por

$$\left\{E_i^{(m)}, F_i^{(m)}, \begin{pmatrix} K_{\alpha_i}; 0 \\ m \end{pmatrix}, K_{\alpha_i} - 1 : 1 \leq i \leq n, m \geq 0, \ell \nmid m\right\}.$$

Como por el Lema 5.2.2, la base de $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{l})$ como R-módulo está contenida en la base de $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{g})$, se tiene entonces que $\mathrm{Ker}\,\overline{\mathrm{Fr}} = \mathrm{Ker}\,\mathrm{Fr} \cap \Gamma_\epsilon(\mathfrak{l}) = J_\ell \cap \Gamma_\epsilon(\mathfrak{l}) = I_\ell$ y éste coincide con el ideal $\mathcal{I}$.

(c) Por [DL, Thm. 6.3], sabemos que el morfismo $\Gamma_\ell/[\chi_\ell(q)\Gamma_\ell] \to U(\mathfrak{g})_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$ inducido por el morfismo cuántico de Frobenius es biyectivo. Puesto que por definición se tiene que $\Theta_\ell \subseteq \Gamma_\ell$ y $U(\mathfrak{l})_{\mathbb{Q}(\epsilon)} = \mathrm{Fr}(U(\mathfrak{g})_{\mathbb{Q}(\epsilon)})$, por el Lema 5.2.2 se sigue que $\Theta_\ell \cap \chi_\ell(q)\Gamma_\ell = \chi_\ell(q)\Theta_\ell$ y el morfismo $\Theta_\ell/[\chi_\ell(q)\Theta_\ell] \to U(\mathfrak{l})_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$ también es biyectivo.

La siguiente proposición enumera algunos propiedades de $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})$ que usaremos más adelante.

Proposición 5.2.6. (a) *La sucesión de álgebras de Hopf*

$$1 \to \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l}) \xrightarrow{j} \Gamma_\epsilon(\mathfrak{l}) \xrightarrow{\overline{\mathrm{Fr}}} U(\mathfrak{l})_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \to 1 \tag{5.6}$$

es exacta.

(b) *Existe un epimorfismo de álgebras* $\psi : \Gamma_\epsilon(\mathfrak{l}) \to \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})$ *tal que* $\psi|_{\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})} = \mathrm{id}$.

Demostración. (a) Basta probar que $\operatorname{Ker}\overline{\mathrm{Fr}} = \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^+\Gamma_\epsilon(\mathfrak{l})$ y ${}^{\mathrm{co}\,\overline{\mathrm{Fr}}}\Gamma_\epsilon(\mathfrak{l}) = \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})$. La primera igualdad se sigue directamente de la Observación 5.2.5 (b), puesto que el ideal bilátero generado por $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^+$ coincide con $\mathcal{I}$. La segunda igualdad se sigue del Lema 5.2.4, ya que ${}^{\mathrm{co}\,\mathrm{Fr}}\Gamma_\epsilon(\mathfrak{g}) = \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ por [A1, Lemma 3.4.1] y $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l}) = \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g}) \cap \Gamma_\epsilon(\mathfrak{l}) = {}^{\mathrm{co}\,\mathrm{Fr}}\Gamma_\epsilon(\mathfrak{g}) \cap \Gamma_\epsilon(\mathfrak{l}) = {}^{\mathrm{co}\,\overline{\mathrm{Fr}}}\Gamma_\epsilon(\mathfrak{l})$.

(b) Por la Proposición 4.1.17 sabemos que existe un epimorfismo de álgebras $\varphi : \Gamma_\epsilon(\mathfrak{g}) \to \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ tal que $\varphi|_{\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})} = \mathrm{id}$. Definimos entonces $\psi := \varphi|_{\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})} : \Gamma_\epsilon(\mathfrak{l}) \to \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$. Claramente, por la definición de φ se tiene que $\operatorname{Im}\psi \subseteq \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})$ y que $\varphi|_{\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})} = \mathrm{id}$, de donde se sigue que $\operatorname{Im}\psi = \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})$. $\square$

El álgebra de coordenadas cuantizada $\mathcal{O}_\epsilon(L)$

Por la Proposición 4.1.9, sabemos que existe un apareamiento de Hopf perfecto

$$<,>: \mathcal{O}_\epsilon(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \otimes_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \Gamma_\epsilon(\mathfrak{g}) \to \mathbb{Q}(\epsilon).$$

En particular, se tienen las inclusiones $\mathcal{O}_\epsilon(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \subseteq \Gamma_\epsilon(\mathfrak{g})^\circ$ y $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{g}) \subseteq \mathcal{O}_\epsilon(G)^\circ_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$. Además, el monomorfismo de álgebras de Hopf $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{l}) \hookrightarrow \Gamma_\epsilon(\mathfrak{g})$ determina por dualidad un morfismo de álgebras de Hopf $\mathrm{Res} : \Gamma_\epsilon(\mathfrak{g})^\circ \to \Gamma_\epsilon(\mathfrak{l})^\circ$. Se define entonces

$$\mathcal{O}_\epsilon(L)_{\mathbb{Q}(\epsilon)} := \mathrm{Res}(\mathcal{O}_\epsilon(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}).$$

Como $\mathcal{O}(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \subseteq \mathcal{O}_\epsilon(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$, $\mathrm{Res}(\mathcal{O}(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)})$ es una subálgebra de Hopf central de $\mathcal{O}_\epsilon(L)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$ y por lo tanto existe un subgrupo algebraico afín L de G tal que $\mathrm{Res}(\mathcal{O}(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}) = \mathcal{O}(L)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$. En lo que sigue mostraremos que L es conexo y que el álgebra de Lie correspondiente a L no es otra que $\mathfrak{l}$. Primero necesitamos algunas definiciones.

Definición 5.2.7. (i) Una Lie subálgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ se dice *algebraica* si existe un subgrupo algebraico $H \subseteq G$ tal que $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(H)$.

(ii) Decimos que $\mathfrak{h}^+$ es la *cápsula algebraica* de $\mathfrak{h}$ si $\mathfrak{h}^+$ es una subálgebra algebraica de $\mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{h}^+$ y si $\mathfrak{a}$ es una subálgebra algebraica de $\mathfrak{g}$ que contiene a $\mathfrak{h}$, entonces $\mathfrak{h}^+ \subseteq \mathfrak{a}$.

Cabe observar que no toda subálgebra de Lie $\mathfrak{h}$ de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es algebraica, ver algunos ejemplos en [FR].

Proposición 5.2.8. *El grupo algebraico L es conexo y* $\mathrm{Lie}(L) = \mathfrak{l}$.

Demostración. Puesto que $\mathcal{O}(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \subseteq U(\mathfrak{g})^\circ_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$, dualizando el diagrama (5.5) se tiene que $\mathcal{O}(L)_{\mathbb{Q}(\epsilon)} = \mathrm{Res}(\mathcal{O}(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}) \subseteq U(\mathfrak{l})^\circ_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$. Pero por [H2, XVI.3], $U(\mathfrak{l})^\circ_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$ es un dominio íntegro y consecuentemente $\mathcal{O}(L)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$ también es un dominio íntegro, lo cual implica que L es irreducible y por lo tanto conexo.

Para ver que $\mathrm{Lie}(L) = \mathfrak{l}$, probaremos que $\mathrm{Lie}(L)$ es la cápsula algebraica de $\mathfrak{l}$ y que $\mathfrak{l}$ es una subálgebra de Lie algebraica.

Como $\operatorname{Ker}(\mathcal{O}_\epsilon(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \xrightarrow{\mathrm{Res}} \mathcal{O}_\epsilon(L)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}) = \{f \in \mathcal{O}_\epsilon(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)} :\ f|_{\Gamma_\epsilon(\mathfrak{l})} = 0\}$ y la inclusión $\mathcal{O}(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \subseteq \mathcal{O}_\epsilon(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$ está dada por la transpuesta del morfismo cuántico de Frobenius, se sigue que $\mathcal{O}(L)_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \simeq$

$\mathcal{O}(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}/J$, donde

$$\begin{aligned} J &= \{f \in \mathcal{O}(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)} : < f, \mathrm{Fr}(x) >= 0, \forall\ x \in \Gamma_\epsilon(\mathfrak{l})\} \\ &= \{f \in \mathcal{O}(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)} : < f, x >= 0, \forall\ x \in U(\mathfrak{l})_{\mathbb{Q}(\epsilon)}\}. \end{aligned}$$

Además, sabemos que $x(f) =< f, x >= 0$ para todo $x \in U(\mathfrak{l})_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$. Como por [FR, Lemma 6.9], se tiene que

$$\mathrm{Lie}(L) = \{\tau \in \mathfrak{g} : \ \tau(f) = 0, \ \forall f \in J\},$$

es claro que $\mathfrak{l} \subseteq \mathrm{Lie}(L)$. Consideremos ahora $H \subseteq G$ un subgrupo de G tal que $\mathfrak{l} \subseteq \mathrm{Lie}(H) =: \mathfrak{h}$ y denotemos por I al ideal de H. Entonces $\mathfrak{h} = \{\tau \in \mathfrak{g} : \tau(I) = 0\}$. Como $\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{h}$, tenemos que $\tau(I) = 0$ para todo $\tau \in \mathfrak{l}$. Al ser el apareamiento de Hopf $<,>$ multiplicativo, esto implica que $< f, x >= 0$, para todo $x \in U(\mathfrak{l})_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$, $f \in I$. Luego $I \subseteq J$ y por lo tanto $L \subseteq H$. Así $\mathrm{Lie}(L) \subseteq \mathfrak{h}$ para toda subálgebra de Lie algebraica $\mathfrak{h}$ tal que $\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{h}$, lo cual implica que $\mathrm{Lie}(L) = \mathfrak{l}^+$.

Mostraremos ahora que $\mathfrak{l}$ es algebraica. En tal caso, $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}^+$ y por el párrafo anterior tenemos que $\mathfrak{l} = \mathrm{Lie}(L)$ que es lo que queríamos probar. Consideremos a $\mathfrak{g}$ como un G-módulo con la acción adjunta y sean $G_\mathfrak{l}$ y $\mathfrak{g}_\mathfrak{l}$ los conjuntos

$$G_\mathfrak{l} = \{x \in G : \ x \cdot \mathfrak{l} = \mathfrak{l}\} \qquad \text{y} \qquad \mathfrak{g}_\mathfrak{l} = \{\tau \in \mathfrak{g} : \ [\tau, \mathfrak{l}] \subseteq \mathfrak{l}\}.$$

Por [FR, Ex. 8.4.7], se tiene que $\mathrm{Lie}(G_\mathfrak{l}) = \mathfrak{g}_\mathfrak{l}$. Luego, para ver que $\mathfrak{l}$ es algebraica basta mostrar que $\mathfrak{l}$ es igual a su normalizador en $\mathfrak{g}$, es decir, $\mathfrak{g}_\mathfrak{l} = \mathfrak{l}$.

Por la Observación 5.2.5 (a), sabemos que $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{l}_-$, donde $\mathfrak{h}$ es la subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ correspondiente al sistema de raíces fijado y $\mathfrak{l}_\pm = \bigoplus_{\alpha \in \Psi_\pm} \mathfrak{g}_\alpha$, con $\Psi_\pm = \{\alpha \in \Phi : \ \mathrm{Sup}(\alpha) \subseteq I_\pm\}$. Sea $x \in \mathfrak{g}_\mathfrak{l}$, entonces podemos escribir

$$x = \sum_{\alpha \in \Phi} c_\alpha x_\alpha + x_0 \qquad \text{con} \qquad x_0 \in \mathfrak{h}.$$

Por lo tanto, para todo $H \in \mathfrak{h}$ se tiene que

$$[H, x] = \sum_{\alpha \in \Phi} c_\alpha \alpha(H) x_\alpha \in \mathfrak{l}.$$

Esto implica que para todo $H \in \mathfrak{h}$, $c_\alpha \alpha(H) = 0$ para todo $\alpha \notin \Psi = \Psi_+ \cup \Psi_-$. Por lo tanto, necesariamente debe ser $c_\alpha = 0$ para todo $\alpha \notin \Psi$, lo que implica que $x \in \mathfrak{l}$. □

Al ser $\mathcal{O}(L)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$ una subálgebra central en $\mathcal{O}_\epsilon(L)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$, el cociente

$$\overline{\mathcal{O}_\epsilon(L)}_{\mathbb{Q}(\epsilon)} := \mathcal{O}_\epsilon(L)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}/[\mathcal{O}(L)^+_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \mathcal{O}_\epsilon(L)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}]$$

es un álgebra de Hopf que resulta ser de dimensión finita. La siguiente proposición muestra que, como era de esperar, esta álgebra es isomorfa a $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^*$.

Proposición 5.2.9. (a) *La sucesión de álgebras de Hopf*

$$1 \to \mathcal{O}(L)_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \xrightarrow{\iota_L} \mathcal{O}_\epsilon(L)_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \xrightarrow{\pi_L} \overline{\mathcal{O}_\epsilon(L)}_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \to 1 \tag{5.7}$$

es exacta.

(*b*) *Existe un epimorfismo* $P : \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^* \to \overline{\mathcal{O}_\epsilon(L)}_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$ *de álgebras de Hopf que hace que el siguiente diagrama conmute:*

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathcal{O}(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\mathrm{res}"] & \mathcal{O}_\epsilon(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\mathrm{Res}"] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^* \arrow[r] \arrow[d, "P"] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathcal{O}(L)_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \arrow[r, "\iota_L"] & \mathcal{O}_\epsilon(L)_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \arrow[r, "\pi_L"] & \overline{\mathcal{O}_\epsilon(L)}_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd} \tag{5.8}$$

(*c*) $\overline{\mathcal{O}_\epsilon(L)}_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \simeq \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^*$ *como álgebras de Hopf. En particular,* $\dim \overline{\mathcal{O}_\epsilon(L)}_{\mathbb{Q}(\epsilon)} = \mathrm{rg}_{\mathcal{O}(L)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}} \mathcal{O}_\epsilon(L)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$ *es finita.*

Demostración. (*a*) Necesitamos mostrar solamente que $\mathcal{O}(L)_{\mathbb{Q}(\epsilon)} = {}^{\mathrm{co}\,\pi_L}\mathcal{O}_\epsilon(L)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$. Veamos, el álgebra $\mathcal{O}_\epsilon(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$ es noetheriana, pues contiene a $\mathcal{O}(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$ que es noetheriana. Esto último se deduce del teorema de la base de Hilbert, pues $\mathcal{O}(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$ es un álgebra conmutativa finitamente generada. En ese caso, $\mathcal{O}_\epsilon(L)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$ también es noetheriana, por ser un cociente de $\mathcal{O}_\epsilon(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$. Entonces por [Sch1, Thm.3.3], $\mathcal{O}_\epsilon(L)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$ es fielmente playo sobre $\mathcal{O}(L)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$ y, por la Proposición 2.1.6 tenemos que $\mathcal{O}(L)_{\mathbb{Q}(\epsilon)} = {}^{\mathrm{co}\,\pi_L}\mathcal{O}_\epsilon(L)_{\mathbb{Q}(\epsilon)} = \mathcal{O}_\epsilon(L)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}^{\mathrm{co}\,\pi_L}$, que es lo que se quería probar.

(*b*) Puesto que la sucesión (5.3) es exacta, tenemos que $\operatorname{Ker}\pi = \mathcal{O}(G)^+_{\mathbb{Q}(\epsilon)}\mathcal{O}_\epsilon(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$ y $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^* \simeq \mathcal{O}_\epsilon(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}/[\mathcal{O}(G)^+_{\mathbb{Q}(\epsilon)}\mathcal{O}_\epsilon(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}]$. Pero entonces, $\pi_L \operatorname{Res}(\operatorname{Ker}\pi) = \pi_L(\mathcal{O}(L)^+_{\mathbb{Q}(\epsilon)}\mathcal{O}_\epsilon(L)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}) = 0$, lo cual implica que existe un morfismo de álgebras de Hopf $P : \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^* \to \overline{\mathcal{O}_\epsilon(L)}_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$ que hace que el diagrama conmute.

(*c*) Dualizando el diagrama (5.5) obtenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
U(\mathfrak{g})^\circ_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \arrow[r, hook, "{}^t\mathrm{Fr}"] \arrow[d] & \Gamma_\epsilon(\mathfrak{g})^\circ \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\mathrm{Res}"] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^* \arrow[d, "s"] \\
U(\mathfrak{l})^\circ_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \arrow[r, hook, "{}^t\overline{\mathrm{Fr}}"'] & \Gamma_\epsilon(\mathfrak{l})^\circ \arrow[r, "f"'] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^*.
\end{tikzcd} \tag{5.9}$$

Como $\mathcal{O}_\epsilon(L)_{\mathbb{Q}(\epsilon)} = \operatorname{Res}(\mathcal{O}_\epsilon(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)})$, $\mathcal{O}(L)_{\mathbb{Q}(\epsilon)} = \operatorname{Res}(\mathcal{O}(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)})$ y $\mathcal{O}(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \simeq U(\mathfrak{g})^\circ_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$, pues $\mathfrak{g}$ es simple, se sigue que $\mathcal{O}(L)_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \subseteq {}^t\overline{\mathrm{Fr}}(U(\mathfrak{l})^\circ_{\mathbb{Q}(\epsilon)})$; en particular, $\mathcal{O}(L)^+_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \subseteq \operatorname{Ker} f$. Más aún, puesto que $\rho(\mathcal{O}_\epsilon(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}) = \pi(\mathcal{O}_\epsilon(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}) = \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^*$, tenemos que $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^* = s(\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^*) = f \operatorname{Res}(\mathcal{O}_\epsilon(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}) = f(\mathcal{O}_\epsilon(L)_{\mathbb{Q}(\epsilon)})$. Por lo tanto, existe un epimorfismo de álgebras de Hopf $\beta : \overline{\mathcal{O}_\epsilon(L)}_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \to \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^*$ y tenemos que $\dim \overline{\mathcal{O}_\epsilon(L)}_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \geq \dim \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^*$.

En lo que sigue, mostraremos que existe un epimorfismo $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^* \to \overline{\mathcal{O}_\epsilon(L)}_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$, hecho del cual se deduce que ambos objetos tienen la misma dimensión y por ende la aplicación β es un isomorfismo. Consideremos el morfismo de álgebras de Hopf $s : \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^* \to \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^*$ y sea $a \in \operatorname{Ker} s$. Veremos que $a \in \operatorname{Ker} P$.

Al ser $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ de dimensión finita, se tiene que las funciones coordenadas de la representación regular de $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ generan linealmente $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^*$. En efecto, sea $a \in \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^*$ y fijemos una base $\{1, v_2, \ldots, v_s\}$ de $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ con base dual $\{\delta_1, \ldots, \delta_s\}$. Entonces para todo $v \in \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ tenemos que

$$a(v) = \sum_{i=1}^{s} a(v_i)\delta_i(v) = \sum_{i=1}^{s} a(v_i)\delta_i(v \cdot 1) = \sum_{i=1}^{s} a(v_i) < t_1^i, v >= \langle \sum_{i=1}^{s} a(v_i)t_1^i, v \rangle.$$

Luego, podemos suponer sin pérdida de generalidad que a es una función coordenada de una representación M de $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ de dimensión finita. Puesto que s es simplemente el morfismo dado por la restricción y $a \in \operatorname{Ker} s$, se tiene que a debe ser trivial en toda base de $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})$, en particular la siguiente:

$$\Big\{ \prod_{\beta \geq 0} F_\beta^{n_\beta} \cdot \prod_{i=1}^{n} K_{\alpha_i}^{t_i} \cdot \prod_{\alpha \geq 0} E_\alpha^{m_\alpha} : 0 \leq n_\beta, t_i, m_\alpha < \ell, \beta \in Q_{I_-}, 1 \leq i \leq n, \alpha \in Q_{I_+} \Big\}.$$

Por otro lado, sabemos por la Proposición 4.1.17 que existe un epimorfismo de álgebras $\varphi : \Gamma_\epsilon(\mathfrak{g}) \to \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ tal que $\varphi|_{\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})} = \mathrm{id}$. Por lo tanto, el $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$-módulo M admite una estructura de $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{g})$-módulo vía φ. Como M es de dimensión finita y $K_{\alpha_i}^\ell$ actúa por la identidad para todo $1 \leq i \leq n$, se sigue que cada operador K_{α_i} es diagonalizable con autovalores ϵ_i^m para algún $m \in \mathbb{N}$. Esto implica, por definición, que toda función coordenada $\varphi^*(a)$ del $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{g})$-módulo M está contenida en $\mathcal{O}_\epsilon(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$. Luego, usando la definición de φ se tiene que $\operatorname{Res} \varphi^*(a)$ debe anular al conjunto

$$\begin{aligned} I_\ell = \mathbb{Q}(\epsilon)\Big\{ & \prod_{\beta \geq 0} F_\beta^{(n_\beta)} \cdot \prod_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} K_{\alpha_i}; 0 \\ t_i \end{pmatrix} K_{\alpha_i}^{\operatorname{Ent}(t_i/2)} \cdot \prod_{\alpha \geq 0} E_\alpha^{(m_\alpha)} : \\ & \exists\, n_\beta, t_i, m_\alpha \not\equiv 0 \mod (\ell) \text{ con } \beta \in Q_{I_-}, 1 \leq i \leq n, \alpha \in Q_{I_+} \Big\}. \end{aligned}$$

Pero por el Lema 5.2.2, tenemos que $\Gamma(\mathfrak{l}) = I_\ell \otimes \Theta_\ell$ como R-módulos libres y por la Observación 5.2.5 (b), tenemos que $\operatorname{Ker} \overline{Fr} = I_\ell$ y la aplicación $\Theta_l/[\chi_\ell(q)\Theta_\ell] \to U(\mathfrak{l})_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$ inducida por la restricción del morfismo cuántico de Frobenius $\overline{\mathrm{Fr}}$ es biyectiva. Entonces existe $b \in U(\mathfrak{l})^\circ_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$ tal que ${}^t\overline{\mathrm{Fr}}(b) = \operatorname{Res}(\varphi^*(a))$ y se tiene que

$$P(a) = P(\pi(\varphi^*(a))) = \pi_L(\operatorname{Res}(\varphi^*(a))) = \pi_L(j(b)) = \varepsilon(b) = \varepsilon(a) = 0,$$

y $a \in \operatorname{Ker} P$. En conclusión $\operatorname{Ker} s \subseteq \operatorname{Ker} P$ y por lo tanto existe un epimorfismo $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^* \to \overline{\mathcal{O}_\epsilon(L)}_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$. $\square$

Observación 5.2.10. La proposición anterior da el siguiente diagrama conmutativo de sucesiones exactas de álgebras de Hopf

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \mathcal{O}(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, two heads, "\mathrm{res}"] & \mathcal{O}_\epsilon(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, two heads, "\mathrm{Res}"] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^* \arrow[r] \arrow[d, two heads, "P"] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \mathcal{O}(L)_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \arrow[r, "\iota_L"] & \mathcal{O}_\epsilon(L)_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \arrow[r, "\pi_L"] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^* \arrow[r] & 1 \end{tikzcd} \tag{5.10}$$

5.2.2. Segundo Paso

En lo que sigue consideraremos la forma compleja de las álgebras definidas anteriormente:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(G) &= \mathcal{O}(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \otimes_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \mathbb{C}, & \mathcal{O}_\epsilon(G) &= \mathcal{O}_\epsilon(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \otimes_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \mathbb{C}, \\ \mathcal{O}(L) &= \mathcal{O}(L)_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \otimes_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \mathbb{C}, & \mathcal{O}_\epsilon(L) &= \mathcal{O}_\epsilon(L)_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \otimes_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \mathbb{C}, \end{aligned}$$

y denotaremos simplemente como $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ y $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})$ a las $\mathbb{C}$-formas de los núcleos de Frobenius-Lusztig.

Sea Γ un grupo finito y $\sigma : \Gamma \to G$ una inclusión en G tal que $\sigma(\Gamma) \subseteq L := \mathrm{Alg}(\mathcal{O}(L), \mathbb{C})$. Se tiene entonces un epimorfismo de álgebras de Hopf ${}^t\sigma : \mathcal{O}(L) \to \mathbb{C}^\Gamma$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(G) \arrow[r] \arrow[dr] & \mathcal{O}(L) \arrow[d, "{}^t\sigma"] \\ & \mathbb{C}^\Gamma \end{tikzcd}$$

Así, aplicando la construcción *pushout* dada en la Proposición 2.3.1, obtenemos un álgebra de Hopf de dimensión finita $A_{\epsilon,\mathfrak{l},\sigma}$ la cual es parte de una sucesión exacta de álgebras de Hopf y encaja en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \mathcal{O}(G) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\mathrm{res}"'] & \mathcal{O}_\epsilon(G) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\mathrm{Res}"] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^* \arrow[r] \arrow[d, "P"] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \mathcal{O}(L) \arrow[r, "\iota_L"] \arrow[d, "{}^t\sigma"'] & \mathcal{O}_\epsilon(L) \arrow[r, "\pi_L"] \arrow[d, "s"] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^* \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \mathbb{C}^\Gamma \arrow[r, "j"] & A_{\epsilon,\mathfrak{l},\sigma} \arrow[r, "\bar{\pi}"] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^* \arrow[r] & 1. \end{tikzcd} \tag{5.11}$$

En particular, $\dim A_{\epsilon,\mathfrak{l},\sigma} = |\Gamma| \dim \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})$.

5.2.3. Tercer Paso

En esta subsección realizamos el tercer y último paso de la construcción. Éste consta, esencialmente, de tomar el cociente por un ideal de Hopf generado por diferencias de elementos de tipo grupo centrales de $A_{\epsilon,\mathfrak{l},\sigma}$. El punto crucial aquí es la descripción de H como cociente de $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^*$ y la existencia de un morfismo de coálgebras $\psi^* : \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^* \to \mathcal{O}_\epsilon(L)$.

Recordemos que fijamos un epimorfismo de álgebras de Hopf $r : \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^* \to H$ y que H^* está determinada por la terna (Σ, I_+, I_-). Como la subálgebra de Hopf $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})$ está determinada por la terna (T, I_+, I_-) con $\Sigma \subseteq T$, tenemos que $H^* \subseteq \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l}) \subseteq \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ lo que implica que H es un cociente de $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^*$ y el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^* \arrow[r, two heads, "P"] \arrow[dr, "r"'] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^* \arrow[d, two heads, "v"] \\ & H. \end{tikzcd}$$

Observación 5.2.11. Por el Corolario 5.1.4, sabemos que $K_{\alpha_i} \in \Sigma$ para todo $\alpha_i \in I = I_+ \cup -I_-$. Por lo tanto $(\mathbb{Z}/(\ell))^{n-s} \subseteq \Sigma \subseteq (\mathbb{Z}/(\ell))^n = (\mathbb{Z}/(\ell))^{n-s} \times (\mathbb{Z}/(\ell))^s$, donde $n-s$ es el cardinal de I. Si denotamos $\Omega = \Sigma \cap (\mathbb{Z}/(\ell))^s$, se sigue claramente que

$$\Sigma \simeq (\mathbb{Z}/(\ell))^{n-s} \times \Omega.$$

En efecto, si $x \in \Sigma$ entonces existen $x_1 \in (\mathbb{Z}/(\ell))^{n-s}$ y $x_2 \in (\mathbb{Z}/(\ell))^s$ tales que $x = x_1 + x_2$. Como $(\mathbb{Z}/(\ell))^{n-s} \subseteq \Sigma$, se sigue que $x_1 \in \Sigma$ y por lo tanto $x_2 \in \Omega$. Así, Σ se descompone como un producto, que evidentemente resulta ser directo. En particular, Σ es el subgrupo abeliano generado por los elementos K_{α_i} tales que $\alpha_i \in I = I_+ \cup -I_-$ y por monomios M compuestos por elementos $K_{\alpha_{i_j}}^{n_{i_j}}$ tales que $\alpha_{i_j} \notin I$, $0 \leq n_{i_j} < \ell$.

Notar además que dar un subgrupo Σ tal que $(\mathbb{Z}/(\ell))^{n-s} \subseteq \Sigma \subseteq (\mathbb{Z}/(\ell))^n$ es lo mismo que dar un subgrupo $\Omega \subseteq (\mathbb{Z}/(\ell))^s$, y que es lo mismo que dar un subgrupo $N \subseteq \widehat{(\mathbb{Z}/(\ell))^s} = (\mathbb{Z}/(\ell))^s$, donde N es el núcleo del morfismo de grupos $\rho : \widehat{(\mathbb{Z}/(\ell))^s} = \widehat{(\mathbb{Z}/(\ell))^s} \to \widehat{\Omega}$ entre los grupos de caracteres inducido por la inclusión de Ω en $(\mathbb{Z}/(\ell))^s$.

$$(\mathbb{Z}/(\ell))^{n-s} \subseteq \Sigma \subseteq (\mathbb{Z}/(\ell))^n \leftrightsquigarrow \Omega \subseteq (\mathbb{Z}/(\ell))^s \leftrightsquigarrow N \subseteq (\mathbb{Z}/(\ell))^s. \tag{5.12}$$

En particular, tenemos que

$$|\Sigma| = \ell^{n-s}|\Omega| = \frac{\ell^n}{|N|}.$$

Definición 5.2.12. Para todo $1 \leq i \leq n$ tal que $\alpha_i \notin I_+$ o $\alpha_i \notin I_-$ definimos $D_i \in G(\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^*) = \mathrm{Alg}(\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l}), \mathbb{C})$ en los generadores de $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})$ por

$$\begin{aligned} &D_i(E_j) = 0 \quad \forall\, j,\ \alpha_j \in I_+, && D_i(F_k) = 0 \quad \forall\, k,\ \alpha_k \in I_-,\\ &D_i(K_{\alpha_t}) = 1 \quad \forall\, t \neq i,\ 1 \leq t \leq n, && D_i(K_{\alpha_i}) = \epsilon_i, \end{aligned}$$

donde ϵ_i es una raíz ℓ-ésima primitiva de la unidad. Si $\alpha_i \notin I_+$ o $\alpha_i \notin I_-$, se tiene que E_i o F_i no es un generador de $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})$, respectivamente. Luego, D_i es un morfismo de álgebras bien definido, pues verifica todas las relaciones de la Observación 4.1.5. Notar que las únicas relaciones que pueden traer conflicto son (4.17) y (4.18), pero éstas no son relaciones en $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})$ por la condición sobre i.

Así, si $\Pi \setminus (I_+ \cup -I_-) = \{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_s}\}$ y $N \subseteq (\mathbb{Z}/(\ell))^s$, se corresponde a Σ como en la Observación 5.2.11, definimos para todo $z = (z_1, \ldots, z_s) \in N$ el elemento de tipo grupo

$$D^z := D_{i_1}^{z_1} \cdots D_{i_s}^{z_s}.$$

Lema 5.2.13. *(a) Si $\alpha_i \notin I$ entonces D_i es central. En particular D^z es central par todo $z \in N$.*

(b) $H \simeq \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^*/(D^z - 1 | z \in N)$.

Demostración. (a) Para ver que D_i es central, tenemos que ver que $D_i f = f D_i$ para todo $f \in \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^*$. Observar que D_i coincide con la counidad de $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})$ salvo en aquellos elementos de la base que contengan a alguna potencia de K_{α_i}, que es un elemento de tipo grupo. Además, como $\alpha_i \notin I$, de las relaciones en la Observación 4.1.5 se sigue que K_{α_i} es un elemento central en $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})$. Más aún, por el Lema 5.2.2 sabemos que $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})$ tiene una base de la forma

$$\Big\{ \prod_{\beta \geq 0} F_\beta^{n_\beta} \cdot \prod_{i=1}^{n} K_{\alpha_i}^{t_i} \cdot \prod_{\alpha \geq 0} E_\alpha^{m_\alpha} : 0 \leq n_\beta, t_i, m_\alpha < \ell, \text{ con } \beta \in Q_{I_-}, \alpha \in Q_{I_+}, 1 \leq i \leq n \Big\}.$$

Así, todo monomio de esta base es de la forma $K_{\alpha_i}^{t_i} M$ con $0 \leq t_i < \ell$. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} D_i f(K_{\alpha_i}^{t_i} M) &= D_i(K_{\alpha_i}^{t_i} M_{(1)}) f(K_{\alpha_i}^{t_i} M_{(2)}) = D_i(K_{\alpha_i}^{t_i}) D_i(M_{(1)}) f(K_{\alpha_i}^{t_i} M_{(2)})\\ &= \epsilon_i^{t_i} \varepsilon(M_{(1)}) f(K_{\alpha_i}^{t_i} M_{(2)}) = \epsilon_i^{t_i} f(K_{\alpha_i}^{t_i} M)\\ &= f D_i(K_{\alpha_i}^{t_i} M), \end{aligned}$$

que es lo que se quería probar.

(b) Por la parte (a), tenemos que D^z es un elemento de tipo grupo central en $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^*$ para todo $z \in N$. Por lo tanto el cociente $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^*/(D^z - 1|z \in N)$ es un álgebra de Hopf.

Por otro lado, sabemos que H^* está determinada por la terna (Σ, I_+, I_-) y consecuentemente H^* está incluida en $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})$. Si denotamos por $v : \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^* \to H$ al epimorfismo dado por esta inclusión, tenemos que $\operatorname{Ker} v = \{f \in \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^* : \ f(h) = 0, \ \forall\ h \in H^*\}$. Por lo tanto, $D^z - 1 \in \operatorname{Ker} v$ para todo $z \in N$, puesto que $D^z(\omega) = \rho(z)(\omega) = 1$ para todo $\omega \in \Omega$. Entonces existe un epimorfismo de álgebras de Hopf

$$\gamma : \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^*/(D^z - 1|\ z \in N) \twoheadrightarrow H.$$

Sin embargo, combinando el Corolario 5.1.4 con las bases PBW de H y de $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})$ tenemos que

$$\begin{aligned} \dim H &= \ell^{|I_+|+|I_-|}|\Sigma| = \ell^{|I_+|+|I_-|}\ell^{n-s}|\Omega| = \ell^{|I_+|+|I_-|}\ell^{n-s}|\widehat{\Omega}| = \ell^{|I_+|+|I_-|}\frac{\ell^n}{|N|} \\ &= \dim(\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^*/(D^z - 1|\ z \in N)), \end{aligned}$$

lo cual implica que γ es un isomorfismo. $\square$

Observación 5.2.14. Cabe destacar que el resultado del lema anterior es muy similar a un resultado usado por E. Müller en el caso de tipo A_n [Mu2, Sec. 4] para la clasificación de los cocientes finitos de $\mathcal{O}_\epsilon(SL_N)$. El nuevo enfoque aquí consiste en ver a H como un cociente del dual del núcleo regular de Frobenius-Lusztig $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})$.

Antes de seguir con la construcción necesitamos otro lema técnico.

Lema 5.2.15. *El álgebra de Hopf $A_{\epsilon,\mathfrak{l},\sigma}$ contiene un subgrupo $\mathbf{Z} := \{\partial^z | z \in (\mathbb{Z}/(\ell))^s\}$ de $G(A_{\epsilon,\mathfrak{l},\sigma})$ que consiste de elementos centrales y cuyo orden es ℓ^s.*

Demostración. Consideremos el conjunto $\mathbf{X} = \{D^z|\ z \in (\mathbb{Z}/(\ell))^s\}$ de elementos de tipo grupo centrales de $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^*$ dado por el Lema 5.2.13. Por la Proposición 5.2.6 (b), sabemos que existe un morfismo de álgebras $\psi : \Gamma_\epsilon(\mathfrak{l}) \to \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})$. Este morfismo induce un morfismo de coálgebras $\psi^* : \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^* \to \Gamma_\epsilon(\mathfrak{l})^\circ$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \Gamma_\epsilon(\mathfrak{g})^\circ \arrow[d, two heads, "\mathrm{Res}"'] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^* \arrow[l, "\varphi^*"'] \arrow[d, two heads, "P"] \\ \Gamma_\epsilon(\mathfrak{l})^\circ & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^* \arrow[l, "\psi^*"] \end{tikzcd}$$

donde φ^* es el morfismo de coálgebras inducido por el morfismo de álgebras $\varphi : \Gamma_\epsilon(\mathfrak{g}) \to \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})$ dado por la Proposición 4.1.17, cuya restricción a $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{l})$ define ψ. Pero por la demostración de la Proposición 5.2.6 (c), la imagen de φ^* está contenida en $\mathcal{O}_\epsilon(G)$. Luego, como $\operatorname{Res}(\mathcal{O}_\epsilon(G)) = \mathcal{O}_\epsilon(L)$, se sigue que la imagen de ψ^* está contenida en $\mathcal{O}_\epsilon(L)$. De esta manera queda definido el conjunto de elementos de tipo grupo $\mathbf{Y} = \{d^z = \psi^*(D^z)|\ z \in (\mathbb{Z}/(\ell))^s\}$. Más aún, usando el Lema 5.2.2 y las definiciones de ψ y de los elementos D_i con $\alpha_i \notin I$, se puede ver, al igual que antes, que estos elementos son centrales, ya que coinciden con la counidad de $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{l})$ salvo en aquellos elementos de la base que contengan a alguna potencia de $K_{\alpha i}$.

Como la aplicación $s : \mathcal{O}_\epsilon(L) \to A_{\epsilon,\mathfrak{l},\sigma}$ dada por la construcción *pushout* es un epimorfismo de álgebras de Hopf, la imagen de $\mathbf{Y}$ define un conjunto de elementos de tipo grupo centrales en $A_{\epsilon,\mathfrak{l},\sigma}$ que denotaremos por

$$\mathbf{Z} = \{\partial^z = s(d^z) |\ z \in (\mathbb{Z}/(\ell))^s\}.$$

Además, $|\mathbf{Z}| = |\mathbf{Y}| = |\mathbf{X}| = \ell^s$. A saber, $\bar\pi(\mathbf{Z}) = \bar\pi s(\mathbf{Y}) = \pi_L(\mathbf{Y}) = \pi_L\psi^*(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$ pues el diagrama (5.11) es conmutativo y $\pi_L\psi^* = \mathrm{id}$. Luego $|\bar\pi(\mathbf{Z})| = |\mathbf{X}|$, de donde se sigue nuestra afirmación. $\square$

Ahora estamos en condiciones de enunciar el teorema que da la construcción de los cocientes de $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ de dimensión finita. Recordar que por el primer paso, todo epimorfismo $r : \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^* \to H$ de álgebras de Hopf determina un núcleo regular de Frobenius-Lusztig $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})$ y éste un subgrupo conexo L de G. Comparar con [Mu2, Thm. 4.11].

Definición 5.2.16. Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie simple, $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ una subálgebra de Cartan fija, Π la base del sistema de raíces $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ de $\mathfrak{g}$ con respecto a $\mathfrak{h}$, $n = \mathrm{rg}\,\mathfrak{g}$ y sea ϵ una raíz de la unidad de orden ℓ. Un *dato de subgrupo finito* es una colección $\mathcal{D} = (I_+, I_-, N, \Gamma, \sigma, \delta)$ tal que

- $I_+ \subseteq \Pi$ e $I_- \subseteq -\Pi$. Estos conjuntos definen una subálgebra algebraica de Lie $\mathfrak{l}$ con subgrupo de Lie conexo L de G, tal que $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{l}_-$ y $\mathfrak{l}_\pm = \sum_{\alpha\in\Psi_\pm} \mathfrak{g}_\alpha$ con $\Psi_\pm = \{\alpha \in \Phi :\ \mathrm{Sup}\,\alpha = I_\pm\}$. Sea $s = n - |I_+ \cup -I_-|$.
- N es un subgrupo de $(\mathbb{Z}/(\ell))^s$.
- Γ es un grupo finito.
- $\sigma : \Gamma \to L$ es un morfismo inyectivo de grupos.
- $\delta : N \to \widehat{\Gamma}$ es un morfismo de grupos.

Notar que, salvo σ, todos los datos de la colección son discretos.

Sea H el álgebra de Hopf cuyo dual es la subálgebra de $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ que se corresponde por el Corolario 5.1.4 a la terna (Σ, I_+, I_-) donde $(\mathbb{Z}/(\ell))^{n-s} \subseteq \Sigma \subseteq (\mathbb{Z}/(\ell))^n$ es el subgrupo que se corresponde a $N \subseteq (\mathbb{Z}/(\ell))^s$ como en la Observación 5.2.11.

Teorema 5.2.17. *Para todo dato de subgrupo finito $\mathcal{D} = (I_+, I_-, N, \Gamma, \sigma, \delta)$ existe un álgebra de Hopf $A_\mathcal{D}$ de dimensión $|\Gamma| \dim H$ que es un cociente de $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ y encaja en la sucesión exacta*

$$1 \to \mathbb{C}^\Gamma \xrightarrow{\hat\iota} A_\mathcal{D} \xrightarrow{\hat\pi} H \to 1,$$

Más aún, $A_\mathcal{D}$ está dada por el cociente $A_{\epsilon,\mathfrak{l},\sigma}/J_\delta$ donde J_δ es el ideal bilátero generado por el conjunto

$\{\partial^z - \delta(z) | z \in N\}$ *y el siguiente diagrama de sucesiones exactas de álgebras de Hopf es conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathcal{O}(G) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\mathrm{res}"'] & \mathcal{O}_\epsilon(G) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\mathrm{Res}"] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^* \arrow[r] \arrow[d, "P"] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathcal{O}(L) \arrow[r, "\iota_L"] \arrow[d, "{}^t\sigma"'] & \mathcal{O}_\epsilon(L) \arrow[r, "\pi_L"] \arrow[d, "s"] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^* \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathbb{C}^\Gamma \arrow[r, "j"] \arrow[d, equal] & A_{\epsilon,\mathfrak{l},\sigma} \arrow[r, "\bar{\pi}"] \arrow[d, "t"] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^* \arrow[r] \arrow[d, "v"] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathbb{C}^\Gamma \arrow[r, "\hat{\iota}"] & A_{\mathcal{D}} \arrow[r, "\hat{\pi}"] & H \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

Demostración. Por la Observación 5.2.11, N determina un subgrupo Σ de $(\mathbb{Z}/(\ell))^n$ y la terna (Σ, I_+, I_-) da lugar a un epimorfismo $r : \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^* \to H$ de álgebras de Hopf. Si $\sigma : \Gamma \to L \subseteq G$ es inyectivo, por los primeros dos pasos se puede construir un álgebra de Hopf $A_{\epsilon,\mathfrak{l},\sigma}$ que es un cociente de dimensión $|\Gamma| \dim \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})$ de $\mathcal{O}_\epsilon(G)$, donde $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})$ es la subálgebra de Hopf de $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ asociada a la terna (T, I_+, I_-). Más aún, por el Lema 5.2.13 (b), H es el cociente de $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^*$ por el ideal bilátero $(D^z - 1 |\ z \in N)$. Si $\delta : N \to \widehat{\Gamma}$ es un morfismo de grupos y $\widehat{\Gamma} \simeq \mathrm{Alg}(\mathbb{C}[\Gamma], \mathbb{C}) = G(\mathbb{C}^\Gamma)$, entonces los elementos $\delta(z)$ son elementos de tipo grupo centrales en $A_{\epsilon,\mathfrak{l},\sigma}$ para todo $z \in N$. Luego, el ideal bilátero J_δ de $A_{\epsilon,\mathfrak{l},\sigma}$ generado por el conjunto $\{\partial^z - \delta(z) | z \in N\}$ es un ideal de Hopf. Así, por la Proposición 2.3.2 la siguiente sucesión es exacta

$$1 \to \mathbb{C}^\Gamma/\mathfrak{J} \to A_{\epsilon,\mathfrak{l},\sigma}/J_\delta \to \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^*/\bar{\pi}(\mathfrak{J}_\delta) \to 1,$$

donde $\mathfrak{J} = J_\delta \cap \mathbb{C}^\Gamma$. Como $\bar{\pi}(\partial^z) = D^z$ y $\bar{\pi}(\delta(z)) = 1$ para todo $z \in N$, tenemos que $\bar{\pi}(J_\delta)$ es el ideal bilátero de $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^*$ dado por $(D^z - 1 |\ z \in N)$, lo que implica por el Lema 5.2.13 (b) que $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^*/\bar{\pi}(\mathfrak{J}_\delta) = H$. Por lo tanto, si denotamos $A_{\mathcal{D}} := A_{\epsilon,\mathfrak{l},\sigma}/J_\delta$, la sucesión exacta anterior se escribe de la forma

$$1 \to \mathbb{C}^\Gamma/\mathfrak{J} \to A_{\mathcal{D}} \to H \to 1. \tag{5.13}$$

Entonces, para finalizar la demostración basta ver que $\mathfrak{J} = J_\delta \cap \mathbb{C}^\Gamma = 0$. Claramente, J_δ coincide con el ideal bilátero $(\partial^z \delta(z)^{-1} - 1 |\ z \in N)$ de $A_{\epsilon,\mathfrak{l},\sigma}$. Más aún, $\Upsilon = \{\partial^z \delta(z)^{-1} | z \in N\}$ es un subgrupo de elementos de tipo grupo centrales de $G(A_{\epsilon,\mathfrak{l},\sigma})$ y $J_\delta = (g - 1 | g \in \Upsilon)$. Luego, por [Mu2, Lemma 4.8] tenemos que $\dim A_{\mathcal{D}} = \dim A_{\epsilon,\mathfrak{l},\sigma}/|\Upsilon|$. Como $A_{\epsilon,\mathfrak{l},\sigma}$ y $A_{\mathcal{D}}$ están dadas por extensiones, tenemos que

$$\dim \mathbb{C}^\Gamma \frac{\dim \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})}{|\Upsilon|} = \dim A_{\mathcal{D}} = \dim(\mathbb{C}^\Gamma/\mathfrak{J}) \dim H = \dim(\mathbb{C}^\Gamma/\mathfrak{J}) \frac{\dim \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})}{|N|}. \tag{5.14}$$

Al ser $\bar{\pi}(\Upsilon) = \{D^z | z \in N\}$ y $\bar{\pi}(\partial^z \delta(z)^{-1}) = D^z = 1$ si y sólo $z = 0$, tenemos que $|\Upsilon| = |N|$. Así, de las igualdades (5.14) se deduce que $\mathbb{C}^\Gamma = \mathbb{C}^\Gamma/\mathfrak{J}$. $\square$

5.3. Determinación de subgrupos cuánticos finitos

En esta sección mostraremos que la construcción hecha en la Sección 5.2 es exhaustiva, es decir, *todo* subgrupo finito de un grupo cuántico simple se construye a través de los tres pasos desarrollados. Formalmente, el principal resultado de la tesis es el siguiente:

Teorema 5.3.1. *Existe una biyección entre*

(*a*) *Cocientes* $q : \mathcal{O}_\epsilon(G) \to A$ *de álgebras de Hopf con* $\dim A < \infty$.

(*b*) *Datos de subgrupo finito.*

Demostración. La demostración del hecho que todo dato de grupo finito $\mathcal{D}$ da un cociente de $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ de dimensión finita está dada por el Teorema 5.2.17.

La prueba que todo cociente $q : \mathcal{O}_\epsilon(G) \to A$ de álgebras de Hopf con $\dim A < \infty$ está determinado por un dato de subgrupo finito está dada por una sucesión de lemas que demostraremos en lo que sigue. □

Sea $q : \mathcal{O}_\epsilon(G) \to A$ un epimorfismo de álgebras de Hopf con $\dim A < \infty$. Entonces la subálgebra de Hopf $K = q(\mathcal{O}(G))$ es central en A y en ese caso, A es una H-extensión de K, donde H es el álgebra de Hopf $H = A/AK^+$. Puesto que K es conmutativa, existe un grupo finito Γ y una inclusión $\sigma : \Gamma \to G$ tal que $K \simeq \mathbb{C}^\Gamma$. Más aún, como $q(\mathcal{O}_\epsilon(G)\mathcal{O}(G)^+) = AK^+$, tenemos que $\mathcal{O}_\epsilon(G)\mathcal{O}(G)^+ \subseteq \operatorname{Ker} \hat{\pi} q$, donde $\hat{\pi} : A \to H$ es el epimorfismo canónico. Así, por ser $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^* \simeq \mathcal{O}_\epsilon(G)/[\mathcal{O}_\epsilon(G)\mathcal{O}(G)^+]$, existe un epimorfismo $r : \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^* \to H$ y por la Proposición 5.1.3, H^* está determinada por una terna (Σ, I_+, I_-). En particular, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathcal{O}(G) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "{}^t\sigma"'] & \mathcal{O}_\epsilon(G) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "q"] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^* \arrow[r] \arrow[d, "r"] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathbb{C}^\Gamma \arrow[r, "\hat{\iota}"] & A \arrow[r, "\hat{\pi}"] & H \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd} \tag{5.15}$$

En lo que sigue, mostraremos que $A = A_\mathcal{D}$ para cierto dato de subgrupo $\mathcal{D} = (I_+, I_-, N, \Gamma, \sigma, \delta)$. Como en la Subsección 5.2.1, consideremos el núcleo regular de Frobenius-Lusztig $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})$. Éste está dado por la terna (T, I_+, I_-) donde $T = \langle K_{\alpha_1}, \dots, K_{\alpha_n} \rangle \simeq (\mathbb{Z}/(\ell))^n$. Luego, $\Sigma \subseteq T$ y consecuentemente $H^* \subseteq \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})$. Denotemos por $v : \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^* \to H$ al epimorfismo inducido por esta inclusión.

Lema 5.3.2. *El diagrama* (5.15) *se factoriza a través de la sucesión exacta*

$$1 \longrightarrow \mathcal{O}(L) \xrightarrow{\iota_L} \mathcal{O}_\epsilon(L) \xrightarrow{\pi_L} \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^* \longrightarrow 1,$$

es decir, el siguiente diagrama de sucesiones exactas de álgebras de Hopf conmuta

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathcal{O}(G) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\mathrm{res}"'] \arrow[dd, bend right, dotted, "{}^t\sigma"'] & \mathcal{O}_\epsilon(G) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\mathrm{Res}"] \arrow[dd, bend right, dotted, "q"'] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^* \arrow[r] \arrow[d, "P"'] \arrow[dd, bend left, dotted, "r"] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathcal{O}(L) \arrow[r, "\iota_L"] \arrow[d, "u"] & \mathcal{O}_\epsilon(L) \arrow[r, "\pi_L"] \arrow[d, "w"] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^* \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathbb{C}^\Gamma \arrow[r, "\hat{\iota}"] & A \arrow[r, "\hat{\pi}"] & H \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

Demostración. Para mostrar la existencia de las aplicaciones u y w basta probar que $\operatorname{Ker} \operatorname{Res} \subseteq \operatorname{Ker} q$, ya que u es simplemente $w\iota_L$.

Sean $\check{U}_\epsilon(\mathfrak{b}_+)$ y $\check{U}_\epsilon(\mathfrak{b}_-)$ las subálgebras de Borel de la forma simplemente conexa $\check{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$ del álgebra envolvente cuantizada de $\mathfrak{g}$ (ver Definición 4.1.1), y sea $\mathbb{A}_\epsilon$ la subálgebra de $\check{U}_\epsilon(\mathfrak{b}_+)\otimes\check{U}_\epsilon(\mathfrak{b}_-)$ generada por los elementos

$$\{1\otimes e_j, f_j\otimes 1, K_{-\lambda}\otimes K_\lambda :\ 1\leq j\leq n, \lambda\in P\},$$

donde P es el reticulado de pesos con $P=\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\varpi_i\subseteq\mathfrak{h}^*$. Por [DL, Sec. 4.3], esta álgebra tiene una base dada por el conjunto $\{fK_{-\lambda}\otimes K_\lambda e\}$ con $\lambda\in P$ y e, f monomios en e_α y f_β respectivamente, α, $\beta\in Q_+$. Más aún, $\mathbb{A}_\epsilon$ es un álgebra graduada por (Q_-,P,Q_+), donde la graduación está dada por

$$\deg(f_j\otimes 1)=(-\alpha_j,0,0),\qquad \deg(1\otimes e_j)=(0,0,\alpha_j),\qquad \deg(K_{-\lambda}\otimes K_\lambda)=(0,\lambda,0),$$

para todo $1\leq j\leq n$, $\lambda\in P$. Más aún, por [DL, Lemma 4.3 y Prop. 6.5], existe un morfismo inyectivo de álgebras $\mu_\epsilon:\mathcal{O}_\epsilon(G)\to\mathbb{A}_\epsilon$ tal que $\mu_\epsilon(\mathcal{O}(G))\subseteq\mathbb{A}_0$, donde $\mathbb{A}_0$ es la subálgebra de $\mathbb{A}_\epsilon$ generada por los elementos

$$\{1\otimes e_j^\ell, f_j^\ell\otimes 1, K_{-\ell\lambda}\otimes K_{\ell\lambda} :\ 1\leq j\leq n, \lambda\in P\}.$$

Por lo tanto, basta mostrar que $\mu_\epsilon(\operatorname{Ker}\operatorname{Res})\subseteq\mu_\epsilon(\operatorname{Ker} q)$.

Afirmación: $\mu_\epsilon(\operatorname{Ker}\operatorname{Res})$ es el ideal $\mathcal{I}$ generado por los elementos

$$\{1\otimes e_k, f_j\otimes 1 :\ \alpha_k\notin I_-, \alpha_j\notin I_+\}.$$

En efecto, por [DL, Sec. 4.4] existen coeficientes matriciales $\psi_{\pm\lambda}^{\pm\alpha}$, $\lambda\in P_+$ y $\alpha\in R_+$ tales que

$$\begin{aligned}\psi_\lambda(FME)&=\delta_{1,E}\delta_{1,F}M(\lambda), & \psi_{-\lambda}(EMF)&=\delta_{1,E}\delta_{1,F}M(-\lambda),\\ \psi_{-\lambda}^{\alpha}(EMF)&=\psi_{-\lambda}(EMFE_\alpha), & \psi_{-\lambda}^{-\alpha}(EMF)&=\psi_{-\lambda}(F_\alpha EMF),\end{aligned}$$

para todo elemento FME de la base PBW de $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{g})$, donde $M\in Q$ y la forma $M(\lambda)$ es simplemente la extensión lineal de la forma bilineal $<\alpha_j,\lambda>=\epsilon^{d_i(\alpha_i,\lambda)}$ para todo $\lambda\in P$, $1\leq i\leq n$. Más aún, se tiene que

$$\mu_\epsilon(\psi_{-\varpi_i})=K_{-\varpi_i}\otimes K_{\varpi_i},\qquad \mu_\epsilon(\psi_{-\varpi_i}^{\alpha_k})=K_{-\varpi_i}\otimes K_{\varpi_i}e_k,\qquad \mu_\epsilon(\psi_{-\varpi_i}^{-\alpha_j})=f_jK_{-\varpi_i}\otimes K_{\varpi_i},$$

para todo $1\leq i,j\leq n$. A través de un cálculo directo se ve que $\psi_{-\varpi_i}^{\alpha_k}$, $\psi_{-\varpi_i}^{-\alpha_j}\in\operatorname{Ker}\operatorname{Res}$ y además

$$\mu_\epsilon(\psi_{\varpi_i}\psi_{-\varpi_i}^{\alpha_k})=1\otimes e_k\qquad \mu_\epsilon(\psi_{-\varpi_i}^{-\alpha_j}\psi_{\varpi_i})=f_j\otimes 1.$$

para todo $\alpha_k\notin I_-$, $\alpha_j\notin I_+$. Por lo tanto, los generadores de $\mathcal{I}$ están en $\mu_\epsilon(\operatorname{Ker}\operatorname{Res})$.

Supongamos ahora que $h\in\operatorname{Ker}\operatorname{Res}$ y veamos que $\mu_\epsilon(h)\in\mathcal{I}$. Si $h\in\operatorname{Ker}\operatorname{Res}$, entonces $h|_{\Gamma_\epsilon(\mathfrak{l})}=0$ y por definición se tiene que

$$<\mu_\epsilon(h), EM\otimes NF>=<h, EMNF>=0,$$

para todo elemento $EMNF$ de la base PBW de $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{l})$. Así, usando la existencia de apareamientos perfectos (ver [DL, Sec. 3.2]) y evaluando en elementos adecuados, se sigue que todo término de la base $\{fK_{-\lambda}\otimes K_\lambda e\}$ que aparece en $\mu_\epsilon(h)$ debe estar en $\mathcal{I}$.

Finalmente, si $h \in \operatorname{Ker}\operatorname{Res}$, entonces $0 = \pi_L \operatorname{Res}(h) = r\pi(h) = \hat{\pi}q(h)$. Esto implica que $q(h) \in \operatorname{Ker}\hat{\pi} = (\mathbb{C}^\Gamma)^+ A = q(\mathcal{O}(G)^+\mathcal{O}_\epsilon(G))$. Entonces existen $a \in \mathcal{O}(G)^+\mathcal{O}_\epsilon(G)$ y $c \in \operatorname{Ker} q$ tales que $h = a + c$; en particular, para todo generador t de $\mathcal{I}$ tenemos que $t = \mu_\epsilon(a) + \mu_\epsilon(c)$, donde $\mu_\epsilon(a)$ está contenido en $\mathbb{A}_0$. Comparando grados en ambos lados de la igualdad se sigue que $\mu_\epsilon(a) = 0$, lo cual implica que cada generador de $\mathcal{I}$ está en $\mu_\epsilon(\operatorname{Ker} q)$. □

El siguiente lema muestra la conveniencia de caracterizar a los cocientes $A_{\epsilon,\mathfrak{l},\sigma}$ de $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ de dimensión finita como *pushout*.

Lema 5.3.3. *$\sigma(\Gamma) \subseteq L$ y por lo tanto A es un cociente del álgebra de Hopf $A_{\epsilon,\mathfrak{l},\sigma}$ dada por el* pushout. *Más aún, el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathcal{O}(G) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\mathrm{res}"'] & \mathcal{O}_\epsilon(G) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\mathrm{Res}"] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^* \arrow[r] \arrow[d, "P"] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathcal{O}(L) \arrow[r, "\iota_L"] \arrow[d, "u"'] & \mathcal{O}_\epsilon(L) \arrow[r, "\pi_L"] \arrow[d, "s"] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^* \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathbb{C}^\Gamma \arrow[r, "j"] \arrow[d, equal] & A_{\epsilon,\mathfrak{l},\sigma} \arrow[r, "\bar{\pi}"] \arrow[d, "t"] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^* \arrow[r] \arrow[d, "v"] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathbb{C}^\Gamma \arrow[r, "\hat{\iota}"] & A \arrow[r, "\hat{\pi}"] & H \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

Demostración. Por el lema anterior tenemos que $w\iota_L = \hat{\iota}u$, es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(L) \arrow[r, "\iota_L"] \arrow[d, "u"'] & \mathcal{O}_\epsilon(L) \arrow[d, "s"] \arrow[ddr, bend left, "w"] & \\
\mathbb{C}^\Gamma \arrow[r, "j"'] \arrow[drr, bend right, "\hat{\iota}"'] & A_{\epsilon,\mathfrak{l},\sigma} & \\
 & & A.
\end{tikzcd}$$

Como $A_{\epsilon,\mathfrak{l},\sigma}$ es un *pushout*, existe un único morfismo de álgebras de Hopf $t : A_{\epsilon,\mathfrak{l},\sigma} \to A$ tal que $ts = w$ y $tj = \hat{\iota}$. Esto implica que $\operatorname{Ker}\bar{\pi} = j(\mathbb{C}^\Gamma)^+ A_{\epsilon,\mathfrak{l},\sigma} \subseteq \operatorname{Ker}\hat{\pi}t$ y por lo tanto el siguiente diagrama de sucesiones exactas de álgebras de Hopf es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathbb{C}^\Gamma \arrow[r, "j"] \arrow[d, equal] & A_{\epsilon,\mathfrak{l},\sigma} \arrow[r, "\bar{\pi}"] \arrow[d, "t"] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^* \arrow[r] \arrow[d, "v"] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathbb{C}^\Gamma \arrow[r, "\hat{\iota}"] & A \arrow[r, "\hat{\pi}"] & H \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

□

Sea (Σ, I_+, I_-) la terna que determina H y $s = n - |I_+ \cup -I_-|$. Recordemos que, por la Observación 5.2.11, dar un grupo Σ tal que $(\mathbb{Z}/(\ell))^{n-s} \subseteq \Sigma \subseteq (\mathbb{Z}/(\ell))^n$ es lo mismo que dar un subgrupo $N \subseteq (\mathbb{Z}/(\ell))^s$. De hecho, por el tercer paso de la construcción dada en la sección anterior, sabemos que el álgebra de Hopf $A_{\epsilon,\mathfrak{l},\sigma}$ contiene un conjunto de elementos centrales de tipo grupo

$\mathbf{Z} = \{\partial^z |\ z \in N\}$ tal que $\bar{\pi}(\partial^z) = D^z$ para todo $z \in N$ y $H = \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^*/(D^z - 1|\ z \in N)$. Para ver que $A = A_{\mathcal{D}}$ para un cierto dato de grupo finito $\mathcal{D} = (I_+, I_-, N, \Gamma, \sigma, \delta)$ basta encontrar el morfismo de grupos $\delta : N \to \widehat{\Gamma}$ tal que $A = A_{\epsilon,\mathfrak{l},\sigma}/J_\delta$. Esto viene dado por el último lema de esta tesis.

Lema 5.3.4. *Existe un morfismo de grupos $\delta : N \to \widehat{\Gamma}$ tal que $J_\delta = (\partial^z - \delta(z)|\ z \in N)$ es un ideal de Hopf de $A_{\epsilon,\mathfrak{l},\sigma}$ y $A = A_{\epsilon,\mathfrak{l},\sigma}/J_\delta$.*

Demostración. Sea $\partial^z \in \mathbf{Z}$. Entonces por el Lema 5.2.13 (b), tenemos que $\hat{\pi}t(\partial^z) = v\bar{\pi}(\partial^z) = 1$ para todo $z \in N$. Luego, se tiene que $t(\partial^z) \in \operatorname{Ker} \hat{\pi}$. Como $t(\partial^z)$ es un elemento tipo grupo, esto implica que $t(\partial^z) \in \mathbb{C}^\Gamma$. Así, usando que $G(\mathbb{C}^\Gamma) = \operatorname{Alg}(\mathbb{C}[\Gamma], \mathbb{C}) = \widehat{\Gamma}$, tenemos definido un morfismo de grupos

$$\delta : N \to \widehat{\Gamma}, \qquad \delta(z) = t(\partial^z) \quad \forall\ z \in N.$$

Consideremos entonces el ideal bilátero de $A_{\epsilon,\mathfrak{l},\sigma}$ dado por $J_\delta = (\partial^z - \delta(z)|\ z \in N)$. Claramente J_δ es un ideal de Hopf y $t(J_\delta) = 0$. Esto implica que $J_\delta \subseteq \operatorname{Ker} t$ y por consiguiente se tiene un epimorfismo de álgebras de Hopf

$$\eta : A_{\epsilon,\mathfrak{l},\sigma}/J_\delta \twoheadrightarrow A.$$

Pero por el Teorema 5.2.17 tenemos que $A_{\mathcal{D}} := A_{\epsilon,\mathfrak{l},\sigma}/J_\delta$ es una $\mathbb{C}^\Gamma$-extensión de H, lo que implica que $\dim A_{\mathcal{D}} = |\Gamma| \dim H = \dim A$ y por lo tanto η es un isomorfismo. $\square$

Apéndice

Subálgebras maximales de álgebras de Lie simples

Sea G un grupo de Lie simple, conexo y simplemente conexo sobre $\mathbb{C}$ de rango $\operatorname{rg} G = n$ y sea M un subgrupo propio no trivial reductivo maximal de G. En este apéndice probaremos la desigualdad

$$\dim G > \dim M + \operatorname{rg} G, \tag{A.1}$$

basándonos en la clasificación de las subálgebras maximales de las álgebras de Lie simples dada por Dynkin en [D1, D2], ya que basta ver que se verifica

$$\dim \mathfrak{g} > \dim \mathfrak{m} + \operatorname{rg} \mathfrak{g}, \tag{A.2}$$

donde $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{m}$ son las álgebras de Lie correspondientes a G y M. Notar que por [Bk, Cor. VIII.10.1] toda subálgebra maximal de un álgebra de Lie semisimple es parabólica o reductiva.

Recordemos que esta desigualdad es crucial para la demostración del Teorema 4.2.23. Como en toda esta tesis notaremos $\mathfrak{g}$ como el álgebra de Lie de G, Φ su sistema de raíces y Π como el conjunto de raíces simples.

Definición A.0.1. Una subálgebra $\tilde{\mathfrak{g}}$ de $\mathfrak{g}$ se dice *regular* si tiene una base que consiste de elementos de alguna subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ y de vectores de raíces del álgebra $\mathfrak{g}$ relativos a $\mathfrak{h}$.

Recordar que para cada subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ existe una descomposición canónica

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha,$$

donde $\mathfrak{g}_\alpha$ es el espacio asociado a la raíz $\alpha \in \mathfrak{h}^*$. Si $\tilde{\mathfrak{g}}$ es una subálgebra regular de $\mathfrak{g}$, por definición existe una subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ tal que

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{h}} + \sum_{\alpha \in \tilde{\Phi}} \mathfrak{g}_\alpha,$$

donde $\tilde{\mathfrak{h}} \subseteq \mathfrak{h}$ y $\tilde{\Phi} \subseteq \Phi$.

Para ver que la desigualdad (A.2) se verifica para toda subálgebra maximal reductiva $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{g}$, descomponemos el estudio de las subálgebras maximales en tres casos. A saber:

(I) regulares,

(II) no regulares simples,

(III) no regulares no simples.

El Teorema A.1.2 clasifica las subálgebras maximales regulares de un álgebra de Lie simple $\mathfrak{g}$. Éstas vienen dadas por dos familias, las semisimples y las no semisimples. Por construcción, las no semisimples son subálgebras parabólicas maximales de $\mathfrak{g}$. Por lo tanto, veremos que la desigualdad se satisface para las subálgebras maximales regulares semisimples y para las subálgebras reductivas maximales incluidas en las subálgebras parabólicas maximales. Por otro lado, veremos en las secciones subsiguientes que *toda* subálgebra maximal no regular satisface la desigualdad.

La clasificación de las subálgebras maximales de tipo (I), (III) y de las subálgebras maximales de tipo (II) de las álgebras de Lie simples excepcionales se encuentra en [D1]. La clasificación para subálgebras maximales de tipo (II) de las álgebras de Lie simples clásicas se hace a través de la teoría de grupos de Lie y es el principal resultado de [D2].

A.1. Subálgebras maximales regulares

Antes de enunciar el primer teorema necesitamos algunas definiciones.

Definición A.1.1. (a) Decimos que una raíz $\delta \in \Phi$ es expresable en término de las raíces $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ si $\delta = \gamma_{i_1} + \cdots + \gamma_{i_s}$ y para $k = 1, \ldots, s$ la suma $\gamma_{i_1} + \cdots + \gamma_{i_k} \in \Phi$.

(b) Un subsistema Σ de Φ se dice un sistema Π si

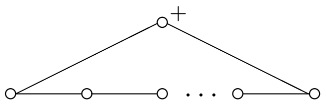
(i) $\alpha \in \Sigma$, $\beta \in \Sigma$, entonces $\alpha - \beta \notin \Sigma$,

(ii) Σ es un sistema linealmente independiente.

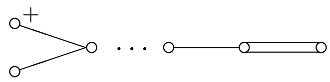
Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ raíces que forman un sistema Π que no se parte en dos sistemas ortogonales. Supongamos además que las raíces $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ son positivas. Decimos que una raíz δ es *mínima* con respecto a $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ si es la menor raíz expresable en término de $\pm\alpha_1, \ldots, \pm\alpha_m$. Si $\mathfrak{g}$ es simple, su sistema de raíces Φ tiene una base $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ que es un sistema Π y no se parte en dos sistemas ortogonales. Luego, existe una raíz mínima δ con respecto a Π, que llamaremos *la menor raíz en Φ con respecto a* Π. Si $\mathfrak{g}$ es semisimple, Π se descompone en dos o más sistemas ortogonales Π_j. En ese caso, cada componente Π_j tiene una raíz mínima δ_j y la menor raíz en Φ con respecto a Π es la menor de las raíces δ_j.

Sea $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ un sistema Π que no se parte en dos sistemas ortogonales y adjuntemos a Σ la menor raíz δ expresable en término de $\pm\alpha_1, \ldots, \pm\alpha_m$. Obtenemos así un nuevo sistema $\Sigma' = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \delta\}$ al que llamaremos una *extensión* del sistema Σ. A través cálculos directos, se puede ver que los diagramas que más abajo enumeramos se corresponden con las extensiones de los sistemas de raíces simples de las álgebras de Lie simples. A estos diagramas los llamaremos los *diagramas extendidos de Dynkin*. Con el símbolo $+$ denotamos la raíz agregada:

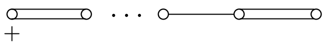
A_n :



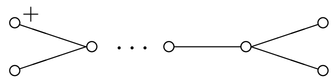
B_n :



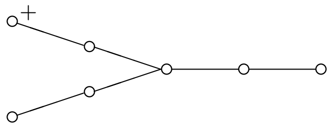
C_n :



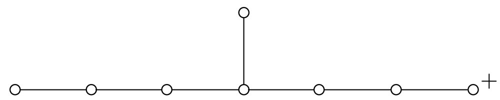
D_n :



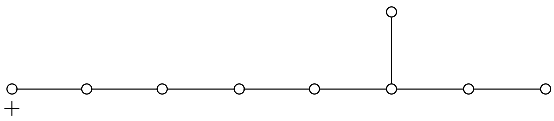
E_6 :



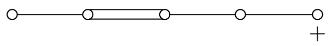
E_7 :



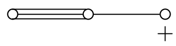
E_8 :



F_4 :



G_2 :



El siguiente teorema clasifica las subálgebras maximales regulares de las álgebras de Lie semisimples.

Teorema A.1.2. [D1, Thm. 5.5] *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie semisimple, Φ su sistema de raíces, $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ el conjunto de raíces simples, Π_α el conjunto de raíces simples que se obtiene omitiendo $\alpha \in \Pi$ y δ la menor raíz en Φ con respecto a Π. Sea $\mathfrak{g}(\alpha)$ la subálgebra generada por los elementos $e_\beta,\ e_{-\beta}$ con $\beta \in \Pi_\alpha$ y $e_\delta,\ e_{-\delta}$; y sea $\mathfrak{g}[\alpha]$ la subálgebra generada por los elementos $e_\beta,\ e_{-\beta}$ con $\beta \in \Pi_\alpha$ y $\alpha,\ e_\alpha$. Entonces toda subálgebra $\mathfrak{g}(\alpha)$ con $\alpha \in \Phi$ y toda subálgebra $\mathfrak{g}[\alpha]$ con $\alpha \in \Phi$ excepto $\mathfrak{g}$ es una subálgebra maximal regular de $\mathfrak{g}$. Más aún, toda subálgebra maximal regular es conjugada a una de estas subálgebras.*

Observación A.1.3. Las subálgebras $\mathfrak{g}(\alpha)$ dan todas las subálgebras semisimples maximales regulares de $\mathfrak{g}$ y las subálgebras $\mathfrak{g}[\alpha]$ dan todas las subálgebras no semisimples maximales regulares de $\mathfrak{g}$. Más aún, estas últimas son parabólicas por construcción.

Basándonos en el teorema y en los diagramas extendidos de Dynkin, enumeramos en la Tabla A.1 los tipos de subálgebras $\mathfrak{g}(\alpha)$ para toda álgebra de Lie simple tales que $\mathfrak{g}(\alpha) \neq \mathfrak{g}$, ver [D1, Tabla 12]. Observar que las álgebras de tipo A_n no poseen subálgebras regulares del tipo $\mathfrak{g}(\alpha)$ propias. De esta tabla se sigue que toda subálgebra maximal regular semisimple verifica la desigualdad (A.2). La primera columna denota el tipo del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, la segunda $\dim \mathfrak{g}$, la tercera el tipo de la subálgebra $\mathfrak{g}(\alpha)$, la cuarta $\dim \mathfrak{g}(\alpha)$ y la quinta $\dim \mathfrak{g} - \operatorname{rg} \mathfrak{g}$.

Claramente, la ecuación (A.2) con $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}(\alpha)$ se verifica para los casos excepcionales. Para los casos clásicos debemos probar las desigualdades correspondientes. El caso B_n se deduce inmediatamente del caso C_n, puesto que las desigualdades para $n = 2$ y $n \geq 2,\ k = n$ se verifican trivialmente.

Tabla A.1: Subálgebras maximales regulares de tipo $\mathfrak{g}(\alpha)$

$\mathfrak{g}$	$\dim \mathfrak{g}$	$\mathfrak{g}(\alpha)$	$\dim \mathfrak{g}(\alpha)$	$\dim \mathfrak{g} - \operatorname{rg} \mathfrak{g}$
B_n $n \geq 2$	$2n^2 + n$	$D_k + B_{n-k}$ $2 \leq k \leq n$	$k(2k-1) + (n-k)(2n-2k+1)$	$2n^2$
C_n $n \geq 3$	$2n^2 + n$	$C_k + C_{n-k}$ $1 \leq k \leq n-1$	$k(2k+1) + (n-k)(2n-2k+1)$	$2n^2$
D_n $n \geq 4$	$2n^2 - n$	$D_k + D_{n-k}$ $2 \leq k \leq n-2$	$k(2k-1) + (n-k)(2n-2k-1)$	$2n^2 - 2n$
G_2	14	$A_1 + A_1$	6	12
		A_2	8	
F_4	52	$A_1 + C_3$	24	48
		$A_2 + A_2$	16	
		$A_3 + A_1$	18	
		B_4	36	
E_6	78	$A_5 + A_1$	38	72
		$3A_2$	24	
E_7	133	$D_6 + A_1$	69	126
		$A_5 + A_2$	43	
		$2A_3 + A_1$	33	
		A_7	63	
E_8	248	$A_1 + E_7$	136	240
		$A_2 + E_6$	86	
		$A_3 + D_5$	60	
		$2A_4$	48	
		$A_5 + A_2 + A_1$	46	
		$A_7 + A_1$	66	
		D_8	136	
		A_8	80	

Caso 1: $\mathfrak{g}$ de tipo C_n. Debemos ver que se verifica la desigualdad

$$k(2k+1)+(n-k)(2n-2k+1)<2n^2 \qquad \text{para todo } 1\leq k\leq n-1. \tag{A.3}$$

Demostración. Sea $1\leq k\leq n-1$. Entonces

$$\begin{aligned} k(2k+1)+(n-k)(2n-2k+1) &= 4k^2+2n^2-4nk+n<2n^2 \\ &\Leftrightarrow 4k^2-4nk+n<0 \Leftrightarrow (2k-n)^2+n-n^2<0. \end{aligned}$$

Si $n/2<k\leq n-1$ entonces $0<2k-n\leq n-2$ y tenemos que

$$(2k-n)^2-n(n-1)<(n-2)^2-n(n-1)<0.$$

Si $0<k\leq n/2$, entonces $-n<2k-n\leq 0$ y por ende $0\leq n-2k<n$, lo que implica que

$$(2k-n)^2-n(n-1)=(n-2k)^2-n(n-1)<(n-1)^2-n(n-1)<0.$$

□

Caso 2: $\mathfrak{g}$ de tipo D_n. Debemos verificar la desigualdad

$$k(2k-1)+(n-k)(2n-2k-1)<2n^2-2n \qquad \text{para todo } 2\leq k\leq n-2. \tag{A.4}$$

Demostración. Sea $2\leq k\leq n-2$. Entonces

$$\begin{aligned} k(2k-1)+(n-k)(2n-2k-1) &= 4k^2+2n^2-4nk-n<2n^2-2n \\ &\Leftrightarrow 4k^2-4nk+n<0 \Leftrightarrow (2k-n)^2+n-n^2<0. \end{aligned}$$

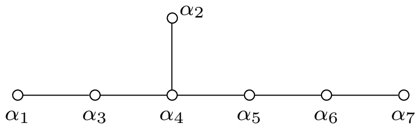
Luego, la desigualdad (A.4) se sigue de la demostración del caso anterior. □

Sea $\mathfrak{r}$ una subálgebra reductiva de $\mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{r}$ está contenida en una subálgebra maximal regular $\mathfrak{m}$. Si $\mathfrak{m}$ es semisimple, entonces es reductiva y, por la Tabla A.1, verifica la desigualdad (A.2). El siguiente lema nos ayudará a resolver el caso en el que $\mathfrak{m}$ es parabólica. Recordar que por [Bk, Prop. VIII.3.13] si $\mathfrak{p}$ es una subálgebra parabólica de $\mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{p}=\mathfrak{s}\oplus\mathfrak{n}$ donde $\mathfrak{s}$ es reductiva en $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{n}$ es el radical nilpotente de $\mathfrak{p}$. Además el centro de $\mathfrak{p}$ es nulo.

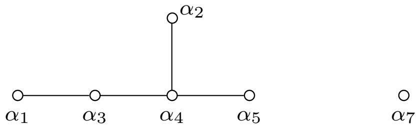
Lema A.1.4. *Sea $\mathfrak{r}$ una subálgebra reductiva de $\mathfrak{g}$ y supongamos que $\mathfrak{r}$ está contenida en una subálgebra maximal regular parabólica $\mathfrak{p}=\mathfrak{s}\oplus\mathfrak{n}$. Entonces $\mathfrak{r}\subseteq\mathfrak{s}$.*

Demostración. Basta ver que $\mathfrak{r}\cap\mathfrak{n}=0$. Pero $\mathfrak{r}\cap\mathfrak{n}$ es un ideal nilpotente de $\mathfrak{r}$ y por lo tanto está contenido en el radical nilpotente de $\mathfrak{r}$. Pero $\mathfrak{r}$ es un álgebra de Lie reductiva, y por ende su radical nilpotente es nulo. □

En la Tabla A.2 describimos la situación para las subálgebras maximales regulares del tipo $\mathfrak{g}[\alpha]$. Como este tipo de subálgebras son no semisimples, en la tercera columna se denotará el tipo de la subálgebra reductiva maximal $\mathfrak{m}$ dada por la construcción de $\mathfrak{g}[\alpha]$ en el Teorema A.1.2: $\mathfrak{m}$ es la subálgebra generada por los elementos $e_\beta,\ e_{-\beta}$ con $\beta\in\Pi_\alpha$ y α. Este tipo de subálgebras es fácil de construir a partir del diagrama de Dynkin de $\mathfrak{g}$, pues el diagrama de su parte semisimple se obtiene a partir del diagrama de $\mathfrak{g}$ simplemente quitando un nodo. Por ejemplo, consideremos un diagrama de tipo E_7 con la numeración estándar de las raíces simples $\alpha_1, \ldots, \alpha_7$:



Si quitamos la raíz α_6 del diagrama obtenemos el nuevo diagrama:



que representa un álgebra semisimple de tipo D_5+A_1. Luego, el álgebra reductiva maximal contenida en la parabólica maximal $\mathfrak{g}[\alpha_6]$ será del tipo $D_5 + \mathbb{C} + A_1$.

Por convención, cuando un subíndice sea 0, la subálgebra de Lie correspondiente será la trivial, i.e. $A_0 = B_0 = C_0 = D_0 = 0$. Además, notaremos $B_1 = C_1 = A_1$, $B_2 = C_2$, etc. En la cuarta columna se indicará directamente la dimensión de $\mathfrak{m}$.

Análogamente al caso anterior, debemos ver que para las álgebras de Lie clásicas se satisface la desigualdad (A.2). Como veremos, todos los cálculos son similares y fáciles de verificar.

Caso 1: $\mathfrak{g}$ de tipo A_n. Debemos verificar la desigualdad

$$k(k+2) + (n-1-k)(n-k+1) + 1 < n^2 + n \qquad \text{para todo } 0 \leq k \leq n-1. \tag{A.5}$$

Demostración. Sea $0 \leq k \leq n-1$. Entonces

$$\begin{aligned}
k(k+2) + (n-1-k)(n-k+1) + 1 &= 2k^2 + n^2 - 2nk + 2k < n^2 + n \\
&\Leftrightarrow 2k^2 + 2k - 2nk - n < 0 \\
&\Leftrightarrow 2(n-k)^2 - 2n^2 + 2nk - n + 2k < 0 \\
&\Leftrightarrow 2(n-k)^2 - 2n(n-k) - (n-k) + k < 0 \\
&\Leftrightarrow (n-k)(2(n-k) - 2n - 1) + k < 0 \\
&\Leftrightarrow (n-k)(-2k-1) + k < 0 \\
&\Leftrightarrow k - (n-k)(2k+1) < 0
\end{aligned}$$

lo cual es siempre cierto, pues $(n-k) > 0$. $\square$

Caso 2: $\mathfrak{g}$ de tipo B_n o C_n. Debemos verificar la desigualdad

$$k(k+2) + (n-1-k)(2n-2k-1) + 1 < 2n^2 \qquad \text{para todo } 0 \leq k \leq n-1. \tag{A.6}$$

Tabla A.2: Subálgebras reductivas maximales en $\mathfrak{g}[\alpha]$

$\mathfrak{g}$	$\dim \mathfrak{g}$	$\mathfrak{m}$	$\dim \mathfrak{m}$	$\dim \mathfrak{g} - \operatorname{rg} \mathfrak{g}$
A_n $n \geq 1$	$n^2 + 2n$	$A_k + A_{n-1-k} + \mathbb{C}$ $0 \leq k \leq n-1$	$k(k+2)+$ $+(n-1-k)(n+1-k)+1$	$n^2 + n$
B_n $n \geq 2$	$2n^2 + n$	$A_k + B_{n-1-k} + \mathbb{C}$ $0 \leq k \leq n-1$	$k(k+2)+$ $+(n-1-k)(2n-2k-1)+1$	$2n^2$
C_n $n \geq 3$	$2n^2 + n$	$A_k + C_{n-1-k} + \mathbb{C}$ $0 \leq k \leq n-1$	$k(k+2)+$ $+(n-1-k)(2n-2k-1)+1$	$2n^2$
D_n $n \geq 4$	$2n^2 - n$	$A_k + D_{n-1-k} + \mathbb{C}$ $0 \leq k \leq n-1$	$k(k+2)+$ $+(n-1-k)(2n-2k-3)+1$	$2n^2 - 2n$
G_2	14	$A_1 + \mathbb{C}$	4	12
F_4	52	$C_3 + \mathbb{C}$	22	48
		$B_3 + \mathbb{C}$	22	
		$A_1 + A_2 + \mathbb{C}$	12	
E_6	78	$A_5 + \mathbb{C}$	36	72
		$D_5 + \mathbb{C}$	46	
		$A_1 + A_4 + \mathbb{C}$	28	
		$A_2 + A_2 + A_1 + \mathbb{C}$	20	
E_7	133	$A_6 + \mathbb{C}$	49	126
		$D_6 + \mathbb{C}$	67	
		$A_1 + A_5 + \mathbb{C}$	39	
		$A_1 + A_2 + A_3 + \mathbb{C}$	27	
		$A_1 + D_5 + \mathbb{C}$	49	
		$A_2 + A_4 + \mathbb{C}$	33	
		$E_6 + \mathbb{C}$	79	
E_8	248	$D_7 + \mathbb{C}$	92	240
		$A_7 + \mathbb{C}$	64	
		$A_1 + A_6 + \mathbb{C}$	52	
		$A_2 + A_1 + A_4 + \mathbb{C}$	34	
		$A_4 + A_3 + \mathbb{C}$	40	
		$D_5 + A_2 + \mathbb{C}$	54	
		$A_1 + E_6 + \mathbb{C}$	82	
		$E_7 + \mathbb{C}$	134	

Demostración. Sea $0 \leq k \leq n-1$. Entonces

$$\begin{aligned} k(k+2)+(n-1-k)(2n-2k-1)+1 = 2n^2+3k^2+5k-3n-4nk+2 < 2n^2 \\ \Leftrightarrow 3k^2+5k-3n-4nk+2<0 \\ \Leftrightarrow 3k(k-n)+3(k-n)+k(2-n)+2<0 \\ \Leftrightarrow -(n-k)(3k+3)-k(n-2)+2<0 \end{aligned}$$

lo cual es siempre cierto, pues $(n-k)>0$. □

Caso 3: $\mathfrak{g}$ de tipo D_n. Debemos verificar la desigualdad

$$k(k+2)+(n-1-k)(2n-2k-3)+1 < 2n^2-2n \qquad \text{para todo } 0 \leq k \leq n-1. \tag{A.7}$$

Demostración. Sea $0 \leq k \leq n-1$. Entonces

$$\begin{aligned} k(k+2)+(n-1-k)(2n-2k-3)+1 = 2n^2+3k^2+7k-5n-4nk+4 < 2n^2-2n \\ \Leftrightarrow 3k^2+7k-3n-4nk+4<0 \\ \Leftrightarrow 3k(k-n)+3(k-n)-nk+4k+4<0 \\ \Leftrightarrow 3k(k-n)+3(k-n)+k(4-n)+4<0 \\ \Leftrightarrow -(3k+3)(n-k)-k(n-4)+4<0 \end{aligned}$$

lo cual es siempre cierto, pues $(n-k)>0$ y $n \geq 4$. □

A.2. Subálgebras maximales no regulares de las álgebras de Lie simples excepcionales

Las subálgebras maximales no regulares, i.e. los casos (II) y (III), de las subálgebras de Lie excepcionales están dadas por el siguiente teorema. De la Tabla A.3 se deduce que *todas* dichas subálgebras verifican la desigualdad (A.2).

Teorema A.2.1. [D1, Thm. 14.1] *La Tabla* A.3 *da todas las subálgebras maximales no regulares de álgebras de Lie simples excepcionales.*

En la tercera columna denotamos el tipo de la subálgebra maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{g}$.

A.3. Subálgebras maximales no regulares de las álgebras de Lie simples clásicas

En esta sección recordamos la clasificación de los subgrupos maximales irreducibles de los grupos de Lie clásicos dada por Dynkin en [D2]. Allí se determinan todos los subgrupos maximales de los grupos clásicos: el grupo SL_N de todas las matrices complejas de $N \times N$ con determinante 1, el grupo $SO(N)$ de todas las matrices complejas ortogonales de $N \times N$ con determinante 1 y el grupo $Sp(N)$ de todas las matrices complejas simplécticas de $N \times N$. Esta clasificación se divide, al igual que antes, en subgrupos maximales irreducibles simples y subgrupos maximales irreducibles no simples.

Tabla A.3: Subálgebras maximales no regulares de álgebras de Lie simples excepcionales

$\mathfrak{g}$	$\dim \mathfrak{g}$	$\mathfrak{m}$	$\dim \mathfrak{m}$	$\dim \mathfrak{g} - \operatorname{rg} \mathfrak{g}$
G_2	14	A_1	3	12
F_4	52	A_1	3	48
		$G_2 + A_1$	17	
E_6	78	A_1	3	72
		G_2	14	
		C_4	36	
		$G_2 + A_2$	22	
		F_4	52	
E_7	133	A_1	3	126
		A_2	8	
		$G_2 + C_3$	35	
		$F_4 + A_1$	55	
		$G_2 + A_1$	17	
		$A_1 + A_1$	6	
E_8	248	A_1	3	240
		$G_2 + F_4$	66	
		$A_1 + A_2$	11	
		B_2	10	

Recordemos brevemente cómo se realizan las álgebras de Lie simples sobre $\mathbb{C}$. En lo que sigue, V denotará un espacio vectorial complejo.

$\mathbf{A}_n$: sea $\dim V = n+1$. Denotamos por $\mathfrak{sl}_{n+1}$, el *álgebra especial lineal*, al conjunto de endomorfismos de V que tienen traza cero. Su dimensión es $\dim \mathfrak{sl}_{n+1} = (n+1)^2 - 1$ y su rango es n. Por lo tanto $\dim \mathfrak{sl}_{n+1} - \operatorname{rg} \mathfrak{sl}_{n+1} = (n+1)^2 - (n+1)$.

$\mathbf{C}_n$: sea $\dim V = 2n$ con base $\{v_1, \ldots, v_{2n}\}$. Se define una forma bilineal antisimétrica f de V por la matriz $s = \left(\begin{smallmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Denotamos por $\mathfrak{sp}_{2n}$, el *álgebra simpléctica*, al conjunto de endomorfismos T de V que satisfacen que $f(T(v), w) = -f(v, T(w))$ para todo $v,\ w \in V$. Su dimensión es $\dim \mathfrak{sp}_{2n} = 2n^2 + n$ y su rango es n. Por lo tanto $\dim \mathfrak{sp}_{2n} - \operatorname{rg} \mathfrak{sp}_{2n} = 2n^2$.

$\mathbf{B}_n$: sea $\dim V = 2n+1$ con base $\{v_1, \ldots, v_{2n+1}\}$. Se define una forma bilineal simétrica no degenerada f de V por la matriz $s = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Denotamos por $\mathfrak{so}_{2n+1}$, el *álgebra ortogonal*, al conjunto de endomorfismos T de V que satisfacen que $f(T(v), w) = -f(v, T(w))$ para todo $v,\ w \in V$. Su dimensión es $\dim \mathfrak{so}_{2n+1} = 2n^2 + n$ y su rango es n. Por lo tanto $\dim \mathfrak{so}_{2n+1} - \operatorname{rg} \mathfrak{so}_{2n+1} = 2n^2$.

$\mathbf{D}_n$: sea $\dim V = 2n$ con base $\{v_1, \ldots, v_{2n}\}$. Se define una forma bilineal simétrica no degenerada f de V por la matriz $s = \left(\begin{smallmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{smallmatrix}\right)$. El *álgebra ortogonal* $\mathfrak{so}_{2n}$, se define de manera análoga al caso $\dim V = 2n+1$. Su dimensión es $\dim \mathfrak{so}_{2n} = 2n^2 - n$ y su rango es n. Por lo tanto $\dim \mathfrak{so}_{2n} - \operatorname{rg} \mathfrak{so}_{2n} = 2n^2 - 2n$.

Definición A.3.1. Diremos que un grupo G de transformaciones lineales del espacio complejo de dimensión N es *reducible* si existe un subespacio lineal no nulo y propio de $\mathbb{C}^N$ que es invariante por la acción de G. Diremos que un grupo es *irreducible* si no es reducible.

Observación A.3.2. Sean G un grupo de transformaciones lineales del espacio complejo de dimensión N, S un subgrupo de G y $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{s}$ sus álgebras de Lie respectivamente. Entonces, S es un subgrupo reducible de G si y sólo si $\mathfrak{s}$ es una subálgebra regular de $\mathfrak{g}$, en el sentido de la definición A.0.1. En efecto, las álgebras de tipo B_n, C_n y D_n se pueden ver como álgebras de transformaciones lineales de un espacio R cuyos elementos A satisfacen las condiciones

$$\operatorname{tr} A = 0 \qquad Q(Av, w) + Q(v, Aw) = 0,$$

donde $Q(v, w)$ es una forma bilineal no degenerada en R, simétrica o anti-simétrica. Luego, las subálgebras del tipo $\mathfrak{g}(\alpha)$ se pueden pensar como el conjunto de matrices que transforma un subespacio $\widetilde{R}$ de dimensión $2k$ en sí mismo y las subálgebras de tipo $\mathfrak{g}[\alpha]$ como el conjunto de matrices que transforma un subespacio de dimensión k en sí mismo. Para más detalles ver [D2, Thm. 1.1, 1.2].

A.3.1. Subálgebras maximales no regulares no simples

Los subgrupos maximales irreducibles no simples de los grupos clásicos se pueden describir por los siguientes teoremas.

Teorema A.3.3. [D2, Thm. 1.3] *El conjunto de matrices*

$$SL(s) \times SL(t), \ \textit{con } st = N, \ 2 \leq s \leq t,$$

es un subgrupo maximal de $SL(N)$. Los subgrupos maximales irreducibles no simples de $SL(N)$ están todos dados por subgrupos de este tipo, salvo conjugación.

Teorema A.3.4. [D2, Thm. 1.4] *El conjunto de matrices*

$$Sp(s) \times SO(t), \ \textit{con } s \textit{ par}, \ st = N, \ s \geq 2, \ t \geq 3, \ t \neq 4; \ \textit{o } s = 2, \ t = 4,$$

es un subgrupo maximal de $Sp(N)$. Todo subgrupo maximal irreducible no simple de $Sp(N)$ es conjugado en $Sp(N)$ a un subgrupo de este tipo. Los conjuntos de matrices

$$Sp(s) \times Sp(t), \ \textit{con } s, \ t \textit{ pares}, \ st = N, \ 2 \leq s \leq t, \ \textit{y}$$

$$SO(s) \times SO(t), \ \textit{con } st = N, \ 2 \leq s \leq t, \ s, \ t \neq 4,$$

son subgrupos maximales de $SO(N)$. Todo subgrupo maximal irreducible no simple de $SO(N)$ es conjugado en $SO(N)$ a uno de estos subgrupos.

Por lo tanto, las subálgebras maximales no regulares no simples de las álgebras de Lie clásicas vienen dadas por la Tabla A.4, donde $\mathfrak{g}$ denota el álgebra de Lie y $\mathfrak{m}$ la subálgebra maximal.

Veamos ahora que en todos los casos se verifica la desigualdad (A.2).

Caso 1: $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_N$. Debemos ver que

$$s^2 - 1 + t^2 - 1 < N^2 - N \qquad \text{para todo } 2 \leq s \leq t, \ st = N. \tag{A.8}$$

Tabla A.4: Subálgebras maximales no regulares no simples de álgebras de Lie simples clásicas

$\mathfrak{g}$	$\dim \mathfrak{g}$	$\mathfrak{m}$	$\dim \mathfrak{m}$	$\dim \mathfrak{g} - \operatorname{rg} \mathfrak{g}$
$\mathfrak{sl}_N$	$N^2 - 1$	$\mathfrak{sl}_s \times \mathfrak{sl}_t$ $st = N,\ 2 \leq s \leq t$	$s^2 - 1 + t^2 - 1$	$N^2 - N$
$\mathfrak{sp}_N$ $N \geq 6$ par	$\frac{N(N+1)}{2}$	$\mathfrak{sp}_s \times \mathfrak{so}_t$ s par, $st = N$ $s \geq 2,\ t \geq 3,\ t \neq 4$; o $s = 2,\ t = 4$	$\frac{s(s+1)}{2} + \frac{t(t-1)}{2}$	$\frac{N^2}{2}$
$\mathfrak{so}_N$ $N \geq 6$	$\frac{N(N-1)}{2}$	$\mathfrak{sp}_s \times \mathfrak{sp}_t$ $s,\ t$ pares $st = N,\ 2 \leq s \leq t$	$\frac{s(s+1)}{2} + \frac{t(t+1)}{2}$	N par: $\frac{N(N-2)}{2}$ N impar: $\frac{(N-1)(N-1)}{2}$
		$\mathfrak{so}_s \times \mathfrak{so}_t$ $st = N,\ 3 \leq s \leq t,\ s,\ t \neq 4$	$\frac{s(s-1)}{2} + \frac{t(t-1)}{2}$	

Demostración. Como $st = N$ y $2 \leq s \leq t$, se sigue que $s \leq N/2$ y $t \leq N/2$. Entonces

$$s^2 - 1 + t^2 - 1 \leq \frac{N^2}{4} - 1 + \frac{N^2}{4} - 1 \leq \frac{N^2}{2} - 2 = \frac{N^2 - 4}{2} = \frac{(N+2)(N-2)}{2} < N(N-1),$$

pues $\frac{(N+2)}{2} \leq N$ para todo $N \geq 2$. □

Caso 2: $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_N$. Debemos ver que

$$\frac{s(s+1)}{2} + \frac{t(t-1)}{2} < \frac{N^2}{2} \qquad \text{para todo } s \geq 2,\ t \geq 3,\ t \neq 4;\ \text{o } s = 2,\ t = 4,\ st = N. \tag{A.9}$$

Demostración. Al igual que el caso anterior tenemos que $s \leq N/2$ y $t \leq N/2$. Luego

$$\frac{s(s+1)}{2} + \frac{t(t-1)}{2} \leq \frac{N(N+2)}{8} + \frac{N(N-2)}{8} = \frac{N^2}{4} < \frac{N^2}{2}.$$

□

Caso 3: $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_N$. Probaremos las desigualdades correspondientes para el caso N par y N impar. Claramente, $\mathfrak{so}_N$ tiene subgrupos del tipo $\mathfrak{sp}_s \times \mathfrak{sp}_t$, $st = N$, sólo si $4|N$.

Demostración. Supongamos que N es par. Luego, basta ver que

$$\frac{s(s+1)}{2} + \frac{t(t+1)}{2} < \frac{N(N-2)}{2} \qquad \text{para todo } s,\ t \text{ pares con } 2 \leq s \leq t,\ st = N. \tag{A.10}$$

Pero

$$\frac{s(s+1)}{2} + \frac{t(t+1)}{2} \leq \frac{N(N+2)}{8} + \frac{N(N+2)}{8} = \frac{N(N+2)}{4} < \frac{N(N-2)}{2},$$

pues $\frac{(N+2)}{2} < N - 2$ para todo $N > 6$. Si $N = 6$, por el Teorema A.3.4, $\mathfrak{so}_N$ no posee subálgebras maximales irreducibles no simples no triviales de este tipo.

Supongamos ahora que N es impar. Debemos ver que

$$\frac{s(s-1)}{2}+\frac{t(t-1)}{2}<\frac{(N-1)^2}{2}, \text{ para todo } st=N,\ 3\leq s\leq t,\ s,\ t\neq 4. \tag{A.11}$$

Como $s\leq N/2$ y $t\leq N/2$ tenemos que

$$\frac{s(s-1)}{2}+\frac{t(t-1)}{2}\leq\frac{N(N-2)}{8}+\frac{N(N-2)}{8}=\frac{N(N-2)}{4}.$$

Pero

$$\frac{N(N-2)}{4}<\frac{(N-1)^2}{2}\Leftrightarrow N^2-2N<2N^2-4N+2\Leftrightarrow 0<N^2-2N+2=(N-1)^2+1,$$

lo cual siempre se cumple. □

A.3.2. Subálgebras maximales no regulares simples

La clasificación de los subgrupos maximales irreducibles simples de los grupos clásicos se deduce del hecho que los grupos irreducibles de transformaciones lineales y los subgrupos maximales de los grupos clásicos esencialmente coinciden.

Recordar que un grupo unimodular de transformaciones lineales de $\mathbb{C}^N$ es un grupo de matrices de determinante 1.

Teorema A.3.5. [D2, Thm. 1.5] *Todo grupo unimodular irreducible de transformaciones lineales de $\mathbb{C}^N$ es, salvo algunas excepciones conocidas, maximal o bien en $SL(N)$, si no posee una forma bilineal invariante, o en $Sp(N)$, si posee una forma bilineal antisimétrica invariante, o en $SO(N)$, si posee una forma bilineal simétrica invariante.*

Observación A.3.6. (a) Las excepciones a la regla general dada por el teorema anterior están descritas en [D2, Tabla 1].

(b) Las tres posibilidades en el teorema anterior son mutuamente excluyentes, ya que un subgrupo irreducible no puede tener simultáneamente una forma invariante simétrica y antisimétrica no nula.

(c) Los grupos irreducibles de transformaciones lineales unimodulares fueron clasificados por Cartan [Ca]. Luego, del teorema anterior y de la Observación (a) se sigue la clasificación de los subgrupos maximales irreducibles simples de los grupos clásicos. En efecto, todos los grupos irreducibles de transformaciones lineales unimodulares son conocidos y se sabe cuáles no son maximales en $SL(N)$, $Sp(N)$ o en $SO(N)$. Claramente, si G es un grupo clásico y M es un subgrupo maximal irreducible simple, entonces M es un grupo de transformaciones lineales unimodulares.

La demostración del Teorema A.3.5 se realiza a través de la teoría de representaciones. Sea G un grupo de Lie simple complejo y $\rho: G\to SL(N)$ una representación lineal de G. El espacio de representación en el cual G actúa será denotado por R_ρ y su dimensión por $N(\rho)$. Diremos que la representación (ρ, R_ρ) es *fiel* si ρ es inyectiva. Si un subespacio $\widetilde{R}$ de R_ρ es invariante bajo la acción de G, diremos que $\widetilde{R}$ *reduce* a ρ. Así, una representación se dice *reducida* si es reducida por algún subespacio propio no nulo. Finalmente, un subgrupo H de G se dice *irreducible* con respecto a ρ si $(\rho|_H, R_\rho)$ es irreducible.

Tabla A.5: Subgrupos irreducibles de $SL(N)$ con respecto a la alternación

H	$\dim H$	N	$\dim SL(N)$
B_n $n \geq 2$	$n(2n+1)$	$2n+1$	$4n^2+4n$
D_n $n \geq 3$	$n(2n-1)$	$2n$	$4n^2-1$
A_n $n \geq 3$	$n(n+2)$	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{n^2(n+1)^2}{4}-1$
A_n $n \geq 2$	$n(n+2)$	$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$	$\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}-1$
D_5	45	16	255
E_6	78	27	728

Luego, basta encontrar para cada grupo de Lie simple clásico G y cada representación fiel ρ de G todos los subgrupos H de G que son irreducibles con respecto a ρ. A continuación, enunciamos los teoremas que resuelven el problema y luego de cada enunciado adjuntamos la tabla correspondiente a las álgebras de Lie. Como el estudio de las representaciones de G no es el tema que aquí nos ocupa, para definiciones referimos directamente al trabajo de Dynkin [D2].

Subálgebras maximales de $\mathfrak{sl}_N$

El siguiente teorema da la clasificación de los subgrupos irreducibles de $SL(N)$.

Teorema A.3.7. [D2, Thm. 4.1] *Toda representación no trivial ρ de $SL(N)$ que es irreducible con respecto a algún subgrupo propio H es una alternación π_k o una simetrización de las representaciones fundamentales. El subgrupo simpléctico $Sp(N)$ es irreducible con respecto a las simetrizaciones de todo orden. Con respecto a cualquier otro grupo, las simetrizaciones de orden $k \geq 2$ son reducibles. La clasificación completa de todos los casos en los cuales H es irreducible con respecto a la alternación está dada por la Tabla* A.5.

La Tabla A.5 difiere un poco de [D2, Tabla 6]. Notaremos como $N = N(\rho)$ la dimensión de la representación fiel de $SL(N)$. Luego, $\dim SL(N) = N^2 - 1$. Observar que el subgrupo $SO(N) \subseteq SL(N)$ (primeros dos casos) es irreducible con respecto a la alternación.

Usando el teorema anterior obtenemos una lista completa de las subálgebras maximales no regulares simples de $\mathfrak{sl}_N$.

Claramente, para $\mathfrak{m}$ de tipo D_5 y E_6 se satisface (A.2). Veamos que también se satisface en los otros casos.

Caso 1: $\mathfrak{m}$ de tipo C_n. Debemos ver que

$$n(2n+1) < 4n^2 - 2n \qquad \text{para todo } n \geq 3. \tag{A.12}$$

Tabla A.6: Subálgebras maximales no regulares simples de $\mathfrak{sl}_N$

$\mathfrak{m}$	$\dim \mathfrak{m}$	N	$\dim \mathfrak{sl}_N$	$\dim \mathfrak{sl}_N - \operatorname{rg} \mathfrak{sl}_N$
C_n $n \geq 3$	$n(2n+1)$	$2n$	$4n^2 - 1$	$4n^2 - 2n$
B_n $n \geq 2$	$n(2n+1)$	$2n+1$	$4n^2 + 4n$	$4n^2 + 2n$
D_n $n \geq 4$	$n(2n-1)$	$2n$	$4n^2 - 1$	$4n^2 - 2n$
A_n $n \geq 3$	$n(n+2)$	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{n^2(n+1)^2}{4} - 1$	$\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)}{2}$
A_n $n \geq 2$	$n(n+2)$	$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$	$\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} - 1$	$\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} - \frac{(n+1)(n+2)}{2}$
D_5	45	16	255	240
E_6	78	27	728	702

Pero $n(2n+1) = 2n^2 + n < 4n^2 - 2n \Leftrightarrow 0 < 2n^2 - 3n \Leftrightarrow 0 < n(2n-3) \Leftrightarrow n \geq 2$.

Caso 2: $\mathfrak{m}$ de tipo B_n. Debemos ver que

$$n(2n+1) < 4n^2 + 2n \qquad \text{para todo } n \geq 2. \tag{A.13}$$

Pero $n(2n+1) = 2n^2 + n < 4n^2 + 2n \Leftrightarrow 0 < 2n^2 + n \Leftrightarrow n \geq 1$.

Caso 3: $\mathfrak{m}$ de tipo D_n se sigue del caso 1.

Caso 4: $\mathfrak{m}$ de tipo A_n, $n \geq 3$. Debemos ver que

$$n(n+2) < \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{para todo } n \geq 3. \tag{A.14}$$

Pero (A.14) se satisface si y sólo si se satisface la desigualdad

$$4n(n+2) < n(n+1)(n(n+1) - 1) \qquad \text{para todo } n \geq 3,$$

y ésta siempre se cumple ya que $4 \leq n+1$ y $n+2 < n(n+1) - 1$ si $n \geq 3$.

Caso 5: $\mathfrak{m}$ de tipo A_n, $n \geq 2$. Debemos ver que

$$n(n+2) < \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} - \frac{(n+1)(n+2)}{2} \qquad \text{para todo } n \geq 2. \tag{A.15}$$

Análogamente al caso anterior, (A.15) se satisface si y sólo si se satisface la desigualdad

$$4n(n+2) < (n+1)(n+2)((n+1)(n+2) - 1) \qquad \text{para todo } n \geq 2,$$

y ésta siempre se cumple ya que $2 < n+1$ y $2n < (n+1)(n+2) - 1$ si $n \geq 2$. $\square$

Tabla A.7: Subgrupos irreducibles de $Sp(N)$

H	$\dim H$	N	$\dim Sp(N)$
A_1	3	4	10
A_5	35	20	210
C_3	21	14	105
D_6	66	32	528
E_7	133	56	1596

Tabla A.8: Subálgebras maximales no regulares simples de $\mathfrak{sp}_N$

$\mathfrak{m}$	$\dim \mathfrak{m}$	N	$\dim \mathfrak{sp}_N$	$\dim \mathfrak{sp}_N - \operatorname{rg} \mathfrak{sp}_N$
A_1	3	4	10	8
A_5	35	20	210	200
C_3	21	14	105	98
D_6	66	32	528	512
E_7	133	56	1596	1568

Subálgebras maximales de $\mathfrak{sp}_N$

El siguiente teorema da la clasificación de los subgrupos irreducibles de $Sp(N)$.

Teorema A.3.8. [D2, Thm. 5.1] *Sea ρ una representación de $Sp(N)$ que es irreducible con respecto a un subgrupo propio no trivial H. Entonces ρ es una de las representaciones básicas de $Sp(N)$. La clasificación completa de todos los casos posibles está dada por la Tabla* A.7.

Usando el teorema anterior obtenemos una lista completa de las subálgebras maximales no regulares simples de $\mathfrak{sp}_N$. Recordemos que $\dim Sp(N) = \frac{N(N+1)}{2}$ y que $\operatorname{rg} Sp(N) = \frac{N}{2}$. Luego, $\dim \mathfrak{sp}_N - \operatorname{rg} \mathfrak{sp}_N = \frac{N^2}{2}$. Más aún, de la tabla se sigue que la desigualdad (A.2) se satisface para toda subálgebra maximal $\mathfrak{m}$ no regular simple de $\mathfrak{sp}_N$.

Subálgebras maximales de $\mathfrak{so}_N$

La clasificación de los subgrupos irreducibles de $SO(N)$ está dada por tres teoremas. El primero clasifica los subgrupos irreducibles de los grupos de tipo B_n, o sea de $SO(2n+1)$, con $n \geq 3$. El segundo teorema clasifica los subgrupos irreducibles de los grupos de tipo D_n, o sea de $SO(2n)$, con $n \geq 5$ y el último teorema clasifica los subgrupos irreducibles de un grupo de tipo D_4, o sea de $SO(8)$.

Teorema A.3.9. [D2, Thm. 6.1] *Sea H un subgrupo propio de B_n con $n \geq 3$. Una representación arbitraria ρ de B_n distinta de la representación fundamental τ_1 es reducible con respecto a H.*

Tabla A.9: Subgrupos irreducibles de D_n

H	$\dim H$	$N = 2n$	$\dim D_n$
B_2	10	10	45
$A_1 \cdot A_1$	6	10	45
B_2	10	14	91
G_2	14	14	91
C_3	21	14	91
B_4	36	16	120
F_4	52	26	325
B_n $n \geq 4$	$n(2n+1)$	$2(n+1)$	$2(n+1)^2 - (n+1)$
$B_{n_1} \cdot B_{n_2}$ $n_1 + n_2 \geq 4$ $n_1,\ n_2 \geq 1$	$n_1(2n_1+1)+$ $+n_2(2n_2+1)$	$n_1 + n_2 + 1$	$2(n_1+n_2+1)^2-$ $-(n_1+n_2+1)$
$B_n \cdot A_1$ $n \geq 2$	$n(2n+1)+3$	$2(n+3)$	$2(n+3)^2 - (n+3)$

Tabla A.10: Subgrupos irreducibles de D_4

H	$\dim H$	$\dim D_4$
B_3	21	28
$A_1 \cdot A_1$	6	28
$B_2 \cdot A_1$	13	28
A_8	8	28

Las únicas excepciones son las simetrizaciones de τ_1 de B_3 que son irreducibles con respecto a un subgrupo de tipo G_2.

Teorema A.3.10. [D2, Thm. 6.2] *Sea H un subgrupo propio de D_n con $n \geq 5$ y ρ una representación de D_n distinta de la fundamental τ_1. Una lista completa de los casos cuando ρ es irreducible con respecto a H está dada por la Tabla* A.9.

Teorema A.3.11. [D2, Thm. 6.3] *En el grupo D_4 hay en total 4 clases de subgrupos. En cada clase, los subgrupos son isomorfos por un automorfismo de D_4 y todos ellos son irreducibles con respecto a cualquier representación.*

La Tabla A.10 da una lista de las 4 clases de subgrupos de D_4 mencionadas por el teorema.

Usando los tres teoremas anteriores podemos describir las subálgebras maximales no regulares

Tabla A.11: Subálgebras maximales no regulares simples de $\mathfrak{so}_N$

$\mathfrak{g}$	$\dim \mathfrak{g}$	$\mathfrak{m}$	$\dim \mathfrak{m}$	$\dim \mathfrak{g} - \operatorname{rg} \mathfrak{g}$
B_3	21	G_2	14	18
D_4	28	B_3	21	24
		$A_1 + A_1$	6	
		$A_2 + A_1$	13	
		A_2	8	
D_5	45	B_2	10	40
		$A_1 + A_1$	6	
D_7	91	B_2	10	84
		G_2	14	
D_8	120	B_4	36	112
D_{13}	325	F_4	52	312
D_{n+1} $n \geq 4$	$2(n+1)^2 - (n+1)$	B_n	$n(2n+1)$	$2(n+1)n$
$D_{n_1+n_2+1}$ $n_1 + n_2 \geq 4$ $n_1,\ n_2 \geq 1$	$2(n_1+n_2+1)^2 -$ $-(n_1+n_2+1)$	$B_{n_1} + B_{n_2}$	$n_1(2n_1+1)+$ $+n_2(2n_2+1)$	$2(n_1+n_2+1)(n_1+n_2)$
D_{n+3} $n \geq 2$	$2(n+3)^2 - (n+3)$	$B_n + A_1$	$n(2n+1)+3$	$2(n+3)(n+2)$

simples de $\mathfrak{so}_N$. En la primera columna de la Tabla A.11 indicamos el tipo del álgebra clásica que es representada por $\mathfrak{so}_N$.

Luego, para ver que toda subálgebra maximal no regular de $\mathfrak{so}_N$ verifica la desigualdad (A.2), basta probarlo para los tres últimos casos de la tabla anterior.

Caso 1: $\mathfrak{g} = D_n$ y $\mathfrak{m} = B_n$ con $n \geq 4$. Hay que ver que $\dim \mathfrak{m} = n(2n+1) < \dim \mathfrak{g} - \operatorname{rg} \mathfrak{g} = 2n(n+1)$. Pero $n(2n+1) = 2n(n+\frac{1}{2}) < 2n(n+1)$ para todo $n \geq 4$.

Caso 2: $\mathfrak{g} = D_{n_1+n_2+1}$ y $\mathfrak{m} = B_{n_1} + B_{n_2}$ con $n_1 + n_2 \geq 4$ y $n_1,\ n_2 \geq 1$. Luego, para todo $n_1,\ n_2 \geq 1$ tenemos que

$$n_1(2n_1+1)+n_2(2n_2+1) = 2n_1^2+2n_2^2+n_1+n_2 < 2(n_1^2+n_2)^2+2(n_1^2+n_2) = 2(n_1+n_2+1)(n_1+n_2),$$

que es lo que queríamos probar.

Caso 3: $\mathfrak{g} = D_{n+3}$ y $\mathfrak{m} = B_n + A_1$ con $n \geq 2$. Entonces, para todo $n \geq 2$ tenemos que

$$n(2n+1)+3 < 2(n+3)(n+2) \Leftrightarrow 2n^2+n+3 < 2(n^2+5n+6) \Leftrightarrow 0 < 9n+3,$$

lo cual siempre se cumple. $\square$

Bibliografía

[A1] N. Andruskiewitsch, 'Notes on extensions of Hopf algebras', *Can. J. Math.* 48 (1996), no. 1, 3–42.

[A2] N. Andruskiewitsch, 'About finite dimensional Hopf algebras', Notes of the Lectures at the school 'Quantum Symmetries in the Theorical Physics and Mathematics', Bariloche, January 2000.

[AD] N. Andruskiewitsch y J. Devoto, 'Extensions of Hopf algebras', *St. Petersburg Math. J.* 7 (1996), no. 1, 17–52.

[AG] N. Andruskiewitsch y G. A. García, 'Extensions of finite quantum groups by finite groups'. Enviado. Preprint: ArXiv: math.QA/0608647, 34 pp.

[AG2] N. Andruskiewitsch y G. A. García, 'Finite subgroups of a simple quantum group'. Preprint.

[AN] N. Andruskiewitsch y S. Natale, 'Counting arguments for Hopf algebras of low dimension', *Tsukuba J. Math* 25 (2001), no. 1, 178–201.

[AS1] N. Andruskiewitsch y H-J. Schneider, Appendix to [A1].

[AS2] N. Andruskiewitsch y H-J. Schneider, 'Hopf algebras of order p^2 and braided Hopf algebras of order p', *J. Algebra* 199 (1998), no. 2, 430–454.

[AS3] N. Andruskiewitsch y H-J. Schneider, 'Lifting of quantum linear spaces and pointed Hopf algebras of order p^3', *J. Algebra* 209 (1998), no. 2, 658–691.

[AS4] N. Andruskiewitsch y H-J. Schneider, 'Pointed Hopf Algebras', In 'New directions in Hopf algebras', MSRI series Cambridge Univ. Press (2002), 1-68.

[AS5] N. Andruskiewitsch y H-J. Schneider, 'On the classification of finite-dimensional pointed Hopf algebras'. *Ann. Math.*, to appear.

[BD] M. Beattie y S. Dascalescu, 'Hopf algebras of dimension 14', *J. Lond. Math. Soc.* (2) 69 (2004), no. 1, 65–78.

[Bk] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique: groupes et algèbres de Lie. Chapitre 7 et 8.* Masson, Paris, 1982.

[Br] K. S. Brown, *Cohomology of Groups*, Graduate Texts in Mathematics, 87 (1982). New York - Heidelberg - Berlin: Springer-Verlag.

[BG] K. A. Brown y K. R. Goodearl, *Lectures on Algebraic Quantum Groups*, Advanced Courses in Mathematics - CRM Barcelona. Basel: Birkhäuser.

[CD] S. Caenepeel y S. Dascalescu, 'Pointed Hopf algebras of dimension p^3', *J. Algebra* 209 (1998), no. 2, 622–634.

[Ca] E. Cartan, 'Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane', *Bull. Soc. Math. France* 41 (1913), 53–96.

[CM] W. Chin and I. Musson, 'The coradical filtration for quantized universal enveloping algebras', *J. London Math. Soc.* 53 (1996), 50–67.

[CW] A. M. Cohen y D. B. Wales, 'Finite simple subgroups of semisimple complex Lie groups—a survey', *Groups of Lie type and their geometries* (Como, 1993), 77–96, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 207, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[DK] C. De Concini y V. G. Kac, 'Representations of quantum groups at roots of 1', Operator algebras, unitary representations, enveloping algebras, and invariant theory, Proc. Colloq. in Honour of J. Dixmier, 1989 Paris/Fr. (1990) Prog. Math. 92, 471-506.

[DKP] C. De Concini, V. G. Kac y C. Procesi 'Quantum coadjoint action', *J. Am. Math. Soc.* 5 (1992), no. 1, 151–189.

[DL] C. De Concini y V. Lyubashenko, 'Quantum function algebra at roots of 1', *Adv. Math.* 108 (1994), no. 2, 205–262.

[DT] Y. Doi y M. Takeuchi, 'Cleft comodule algebras for a bialgebra', *Commun. Algebra* 14 (1986), 801–818.

[Dr] V. Drinfeld, 'Quantum groups', *Proc. Int. Congr. Math.*, Berkeley 1986, Vol. 1 (1987), 798-820.

[D1] E. B. Dynkin, 'Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras', *Am. Math. Soc., Transl.*, II. Ser. 6 (1957), 111-243.

[D2] E. B. Dynkin, 'Maximal subgroups of the classical groups', *Am. Math. Soc., Transl.*, II. Ser. 6 (1957), 245-378.

[EG] P. Etingof y S. Gelaki, 'On families of triangular Hopf algebras', *Int. Math. Res. Not.* no. 14 (2002), 757–768.

[FR] W. Ferrer Santos and A. Ritatore, *Actions and Invariants of Algebraic Groups.*

[G] G. A. García, 'On Hopf algebras of dimension p^3', *Tsukuba J. Math.* 29 (2005), no. 1, 259–284.

[Ge1] S. Gelaki, 'Some properties and examples of triangular pointed Hopf algebras', *Math. Res. Lett.* 6 (1999), no. 5-6, 563–572.

[Ge2] S. Gelaki, 'Quantum Groups of dimension pq^2', *Israel J. Math.* 102 (1997), 227–267.

[GR] R. L. Griess Jr. y A. J. Ryba, 'Finite simple groups which projectively embed in an exceptional Lie group are classified!' *Bull. Amer. Math. Soc.* (N.S.) 36 (1999), no. 1, 75–93.

[H1] G. Hochschild, 'Algebraic groups and Hopf algebras', *Ill. J. Math.* 14 (1970), 52–65.

[H2] G. Hochschild, *Basic theory of algebraic groups and Lie algebras.* Graduate Texts in Mathematics, 75. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1981.

[Hf] I. Hofstetter, 'Extensions of Hopf algebras and their cohomological description', *J. Algebra* 164 (1994), no. 1, 264–298.

[Hu1] J.E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Graduate Texts in Mathematics, 9 (1980). New York - Heidelberg - Berlin: Springer-Verlag. XII

[Hu2] J.E. Humphreys, *Linear Algebraic Groups*, Graduate Texts in Mathematics, 21 (1981). New York - Heidelberg - Berlin: Springer-Verlag. XVI

[J] J.C. Jantzen, *Lectures on Quantum Groups*, Graduate Studies in Mathematics. 6 (1996). Providence, RI: American Mathematical Society (AMS).

[K] C. Kassel, *Quantum Groups*, Graduate Texts in Mathematics. 155 (1995). New York, NY: Springer-Verlag.

[KR] L.H. Kauffman y D. Radford, 'A necessary and sufficient condition for a finite-dimensional Drinfel'd double to be a ribbon Hopf algebra', *J. Algebra* 159 (1993), no.1, 98–114.

[LS] R. Larson y D. Radford, 'An associative orthogonal bilinear form for Hopf algebras' *Amer. J. Math.* 91 (1969), 75–94.

[LR1] R. Larson y D. Radford, 'Semisimple cosemisimple Hopf algebras', *Amer. J. Math.* 110 (1988), no. 1, 187–195.

[LR2] R. Larson y D. Radford, 'Finite dimensional cosemisimple Hopf algebras in characteristic 0 are semisimple', *J. Algebra* 117 (1988), no. 2, 267–289.

[L1] G. Lusztig, 'Finite dimensional Hopf algebras arising from quantized universal enveloping algebras', *J. of Amer. Math. Soc.* 3, 257-296.

[L2] G. Lusztig, 'Quantum groups at roots of 1', *Geom. Dedicata* 35 (1990), 89-114.

[L3] G. Lusztig, *Introduction to quantum groups*, Progress in Mathematics, 110 (1993). Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA.

[Mj] S. Majid, 'Crossed products by braided groups and bosonization', *J. Algebra* 163 (1994), no. 1, 165–190.

[MS] S. Majid and Ya. S. Soibelman, 'Bicrossproduct structure of the quantum Weyl group', *J. Algebra* 163 (1994), no. 1, 68–87.

[Mk1] A. Masuoka, 'Self dual Hopf algebras of dimension p^3 obtained by extensions', *J. Algebra* 178 (1995), no. 3, 791–806.

[Mk2] A. Masuoka, 'Semisimple Hopf algebras of dimension 6, 8', *Israel. J. Math.* 92 (1995), no. 1-3, 361–373.

[Mk3] A. Masuoka, 'The p^n theorem for semisimple Hopf algebras', *Proc. Amer. Math. Soc.* 124 (1996), no. 3, 735–737.

[Mk4] A. Masuoka, 'Examples of almost commutative Hopf algebras which are not coquasitriangular', Hopf algebras, *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.,* 237 (2004), Dekker, New York, 185–191.

[Mk5] A. Masuoka, 'Defending the negated Kaplansky conjecture', *Proc. Am. Math. Soc.* 129 (2001), no. 11, 3185–3192.

[Mo] S. Montgomery, *Hopf Algebras y their Actions on Rings*, CBMS Reg. Conf. Ser. Math. 82 (1993). American Mathematical Society (AMS).

[MuI] E. Müller, 'Some topics on Frobenius-Lusztig kernels I', *J. Algebra* 206 (1998), no. 2, 624–658.

[MuII] E. Müller, 'Some topics on Frobenius-Lusztig kernels II', *J. Algebra* 206 (1998), no. 2, 659–681.

[Mu2] E. Müller, 'Finite subgroups of the quantum general linear group', *Proc. London Math. Soc.* (3) 81 (2000), no. 1, 190–210.

[Na1] S. Natale, 'Quasitriangular Hopf algebras of dimension pq', *Bull. Lond. Math. Soc.* 34 (2002), no. 3, 301–307.

[Na2] S. Natale, 'On semisimple Hopf algebras of dimension pq^2', *J. Algebra* 221 (1999), no. 1, 242–278.

[Ng] S-H. Ng, 'Non-semisimple Hopf algebras of Dimension p^2', *J. Algebra* 255 (2002), no. 1, 182–197.

[NZ] W.D. Nichols y M. B. Zoeller, 'A Hopf algebra freeness Theorem', *Am. J. Math.* 111 (1989), no. 2, 381–385.

[OSch1] U. Oberst y H-J. Schneider, 'Untergruppen formeller Gruppen von endlichem Index', *J. Algebra* 31 (1974), 10–44.

[OSch2] U. Oberst y H-J. Schneider, 'Über Untergruppen endlicher algebraischer Gruppen', *Manuscripta Math.* 8 (1973), 217–241.

[PW] A. Pianzolla y A. Weiss, 'The Rationality of Elements of Prime Order in Compact Connected Simple Lie Groups', *J. Algebra* 144 (1991), 510–521.

[R] R.W. Richardson, 'Orbits, invariants, and representations associated to involutions of reductive groups' *Invent. Math.* 66, 287-312 (1982).

[R1] D. Radford, 'The order of the antipode of a finite dimensional Hopf algebra is finite', *Am. J. Math.* 98 (1976), no 2, 333–355.

[R2] D. Radford, 'Minimal quasitriangular Hopf algebras', *J. Algebra* 157 (1993), no. 2, 285–315.

[R3] D. Radford, 'The Trace Functions and Hopf algebras', *J. Algebra* 163 (1994), no. 3, 583–622.

[R4] D. Radford, 'On Kauffman's Knot Invariants Arising from Finite-Dimensional Hopf algebras', Advances in Hopf algebras, Lec. Notes Pure Appl. Math. 158, 205–266, Marcel Dekker, N. Y., 1994.

[R5] D. Radford, 'Hopf algebras with a projection', *J. Algebra* 92 (1985), no. 2, 322–347.

[R6] D. Radford, 'On a coradical of a finite-dimensional Hopf algebra', *Proc. Amer. Math. Soc.* 53 (1975), no. 1, 9–15.

[RS1] D. Radford y H-J. Schneider, 'Comunicación oral', (2002).

[RS2] D. Radford y H-J. Schneider, 'On the even powers of the antipode of a finite-dimensional Hopf algebra' *J. Algebra* 251 (2002), no. 1, 185–212.

[S] J. P. Serre, 'Exemples de plongements des groups $PSL_2(F_p)$ dans des groupes de Lie simples', *Invent. Math.* 124 (1996), no. 1-3, 525-562.

[Sbg] P. Schauenburg, 'Hopf bi-Galois extensions', *Comm. Algebra* 24 (1996), no. 12, 3797–3825.

[Sch1] H-J. Schneider, 'Some remarks on exact sequences of quantum groups', *Commun. Algebra* 21 (1993), no. 9, 3337–3357.

[Sch2] H-J. Schneider, 'Normal basis and transitivity of crossed products for Hopf algebras', *J. Algebra* 152 (1992), no. 2, 289–312.

[Sch3] H-J. Schneider, 'Lectures on Hopf algebras' (1995), *Trabajos de Matemática* 31/95 (FaMAF, 1995).

[St] D. Stefan, 'Hopf algebras of low dimension' *J. Algebra* 211 (1999), no. 1, 343–361.

[SvO] D. Stefan y F. van Oystaeyen, 'Hochschild cohomology and coradical filtration of pointed coalgebras: Applications', *J. Algebra* 210 (1998), no. 2, 535–556.

[Sw] M. Sweedler , 'Hopf algebras', Benjamin, New York, 1969.

[Tk] M. Takeuchi, 'Survey of braided Hopf algebras', in "New Trends in Hopf Algebra Theory"; *Contemp. Math.* 267 (2000), 301–324.

[W] R. Williams, 'Finite dimensional Hopf algebras', *Ph. D. Thesis, Florida State University* (1988).

[Z] Y. Zhu, 'Hopf algebras of prime dimension' *Internat. Math. Res. Notices* 1 (1994), 53–59.

Índice alfabético