

**UNIVERSIDAD NACIONAL
DE CORDOBA**

**FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS,
FISICAS Y NATURALES**

TESIS DOCTORAL

**Análisis Modal Experimental Aplicado a la Calibración de
Modelos de Sistemas con Interacción Suelo-Estructura**

POR

Ing. Marcelo A. Ceballos

**TRABAJO PRESENTADO EN CUMPLIMIENTO PARCIAL DE LOS
REQUERIMIENTOS PARA LA OBTENCION DEL TITULO DE
DOCTOR EN CIENCIAS DE LA INGENIERIA**

COMISION ASESORA

Dr. Ing. Carlos A. Prato (director)

Dr. Ing. José E. Stuardi

Dr. Ing. José A. Inaudi

CORDOBA, Octubre de 2004

Resumen

Este trabajo presenta un procedimiento para el ajuste de parámetros de modelos numéricos de sistemas con interacción suelo-estructura basado en funciones de transferencia experimentales obtenidas a través de ensayos dinámicos. La fuerte concentración de amortiguamiento en la fundación y las incertidumbres en los parámetros del suelo diferencian esta clase de problemas de otros tipos de sistemas estructurales ampliamente estudiados con análisis modal experimental.

Los modelos de estos sistemas comprenden todos los grados de libertad de la estructura y aquellos de la interfaz fundación-estructura. El modelo de coordenadas físicas de la fundación consiste en matrices independientes de la frecuencia derivadas de soluciones rigurosas de su rigidez dinámica a través de una nueva forma de una técnica experimental que produce matrices simétricas.

Estudios de sensibilidad de los parámetros del suelo y la estructura seleccionados para la calibración fueron realizados considerando el efecto de asunciones alternativas para la rigidez y el amortiguamiento de los grados de libertad de la interfaz además de la rigidez dinámica rigurosamente derivada. Estas alternativas se refieren a la flexibilidad del bloque de fundación y al uso de un semi-espacio homogéneo equivalente en lugar de las condiciones estratificadas de suelo. La dispersión de los parámetros ajustados se expresa a través de la comparación de los valores de la rigidez flexional de estructuras predominantemente unidimensionales y la velocidad de ondas de corte del suelo para las alternativas consideradas.

Los ensayos fueron realizados utilizando acelerómetros inductivos y equipos de adquisición de datos estándares. Los dispositivos de carga empleados para los ensayos fueron diseñados para ajustar los requerimientos de precisión de acuerdo a la masa del sistema. Para los ensayos de escala reducida la carga fue aplicada a través de una celda de carga montada sobre el extremo de un péndulo, mientras que para ensayos de gran escala la carga fue aplicada dejando caer un peso sobre una plataforma de carga. Se demuestra que la buena Coherencia de los resultados puede alcanzarse aún cuando la máxima carga instantánea sólo representa una muy pequeña fracción del peso total de la estructura y la fundación, tal como el 0.1 % para las estructuras de gran escala. Los resultados en la forma de modelos numéricos calibrados obtenidos han mostrado suministrar información útil en relación a las características dinámicas asociadas con efectos de interacción suelo-estructura para los casos estudiados de reducida y gran escala.

Summary

This work presents a procedure for parameter adjustment of numerical models of systems with soil-structure interaction based on experimental transfer functions obtained through dynamic tests. The strong concentration of damping in the foundation and the uncertainties in the soil parameters differentiate this class of problems from other types of structural systems often studied with experimental modal analysis.

The system models involve all the structure degrees of freedom and those of the foundation-structure interface. The model of the physical coordinates of the foundation consists of frequency independent matrices derived from rigorous dynamic stiffness solutions by means of a new form of an experimental technique that yields symmetric matrices.

Sensitivity studies of the soil and the structure parameters selected for calibration were performed and the effect of alternative assumptions for stiffness and damping of the interface degrees of freedom were considered in addition to the rigorously derived dynamic stiffness. These alternatives refer to the flexibility of the foundation block and to the use of a homogeneous equivalent half-space instead of stratified soil conditions. The dispersion of the adjusted parameters is expressed through the comparison of the values of the bending stiffness of predominantly unidimensional structures and the shear waves velocity of the soil for the considered alternatives.

The tests were performed using standard inductive accelerometers and data acquisition equipment. Loading devices used for the tests were custom made to fit the precision requirements in accordance to the mass of the system. For the small scale tests the load was applied through a load cell mounted on the tip of a pendulum, while for the full-scale tests the load was applied dropping a weight on a load pad. It is shown that good Coherence of the results can be achieved even when the maximum instantaneous load is only a very small fraction of the total weight of the structure and foundation, such as 0.1 % for full-scale structures. The results in the form of calibrated numerical models obtained are shown to provide useful data concerning the dynamic characteristics associated with soil-structure interaction effects for both the small and full-scale cases studied.

Resumo

Este trabalho apresenta um procedimento para o ajuste de parâmetros de modelos numéricos de sistemas com interação solo-estrutura baseado em funções de transferência experimentais obtidas através de ensaios dinâmicos. A forte concentração de amortecimento na fundação e as incertezas nos parâmetros do solo diferenciam esta classe de problemas de outros tipos de sistemas estruturais amplamente estudados com análise modal experimental.

Os modelos destes sistemas compreendem todos os graus de liberdade da estrutura e aqueles da interface fundação-estrutura. O modelo de coordenadas físicas da fundação consiste em matrizes independentes da frequência derivadas de soluções rigorosas de sua rigidez dinâmica através de uma nova forma de uma técnica experimental que produz matrizes simétricas.

Estudos de sensibilidade dos parâmetros do solo e a estrutura selecionados para a calibração foram realizados considerando o efeito de assunções alternativas para a rigidez e o amortecimento dos graus de liberdade da interface além da rigidez dinâmica rigorosamente derivada. Estas alternativas se referem à flexibilidade do bloco de fundação e ao uso de um semi-espaço homogêneo equivalente em lugar das condições estratificadas de solo. A dispersão dos parâmetros ajustados se expressa através da comparação dos valores da rigidez flexional de estruturas predominantemente uni-dimensionais e a velocidade de ondas de corte do solo para as alternativas consideradas.

Os ensaios foram realizados utilizando acelerômetros indutivos e equipes de aquisição de dados estándares. Os dispositivos de carga empregados para os ensaios foram desenhados para ajustar os requerimentos de precisão de acordo à massa do sistema. Para os ensaios de escala reduzida a carga foi aplicada através de uma cela de carga montado sobre o extremo de um pêndulo, enquanto para ensaios de grande escala a carga foi aplicada dando a entender um peso sobre uma plataforma de carga. Demonstra-se que a boa Coerência dos resultados pode atingir-se ainda quando o máximo carga instantânea só representa uma muito pequena fração do peso total da estrutura e a fundação, tal como o 0.1% para as estruturas de grande escala. Os resultados na forma de modelos numéricos calibrados obtidos mostraram fornecer informação útil em relação às características dinâmicas sócias com efeitos de interação solo-estrutura para os casos estudados de reduzida e grande escala.

Agradecimientos

La realización de este trabajo de investigación bajo la dirección del Dr. Carlos Prato significó para mí una importantísima experiencia. Deseo expresarle un profundo agradecimiento por brindarme sus invaluable conocimientos y contactarme con el campo experimental de las estructuras.

Agradezco a las autoridades del Departamento de Estructuras, en particular al director Ing. Gerald Pirard y al sub-director Ing. Julio Massa, por el apoyo brindado durante el desarrollo de mis actividades. Quiero agradecer además al personal del Laboratorio de Estructuras, en especial a la Inga. Gabriela Durán por el asesoramiento y el aporte de materiales para el hormigonado de la base de fundación del Prototipo de Interacción, y a la Inga. Patricia Irico y al Sr. Marcelo Tissera por la colaboración prestada durante la preparación del Prototipo de Interacción.

Agradezco al Dr. Luis Godoy por las magistrales clases que tuve la oportunidad de presenciar durante el dictado de sus cursos. A mis colegas y amigos, Fernando Flores, José Stuardi, Federico Pinto, Adriana Pernich y Carina Caballero, les agradezco las gratas experiencias compartidas.

Agradezco a toda mi familia por las palabras de aliento recibidas, en especial a mi mamá Graciela y a mis hermanos Pablo y Guillermo por el afecto y apoyo constantes.

El agradecimiento más importante es para Alejandra, mi compañera, amiga y esposa, por el apoyo y el amor brindado en estos largos años, y para mi hija Martina, la luz de mis ojos, por las horas que me *prestó* para completar mi trabajo.

Índice general

Resumen	i
Summary	ii
Resumo	iii
Agradecimientos	iv
1 Introducción	1
1.1 Consideraciones Generales	2
1.1.1 Aspectos analíticos	3
1.1.2 Aspectos experimentales	3
1.2 Objetivos y Alcances	5
1.3 Aspectos Originales del Trabajo	6
1.4 Hipótesis del Trabajo	6
1.5 Organización del Trabajo	7
2 Fundamentos Teóricos	9
2.1 Modelos Continuos y Discretos	10
2.1.1 Discretización Espacial	10
2.1.2 Discretización Temporal	11
2.2 Formulación de Segundo Orden	11
2.2.1 Modelos con Matriz de Amortiguamiento Proporcional	11
2.2.2 Modelos con Matriz de Amortiguamiento General	23
2.3 Formulación de Primer Orden	25
2.3.1 Modelos con Matriz de Masa No-Singular	25
2.3.2 Modelos con Matriz de Masa Singular	31
2.4 Modelos Completos e Incompletos	34

2.4.1	Limitación en el Número de Coordenadas	35
2.4.2	Limitación en el Número de Modos	37
3	Identificación de Modelos de Respuesta	39
3.1	Adquisición de Señales Experimentales	39
3.1.1	Efectos de la Digitalización	40
3.1.2	Efectos de los Filtros	40
3.2	Variables de Respuesta	41
3.2.1	Dominio del Tiempo	41
3.2.2	Dominio de la Frecuencia	41
3.3	Identificación de la FRF	42
3.3.1	Enfoque Determinístico	42
3.3.2	Enfoque Probabilístico	44
4	Identificación de Modelos Modales	47
4.1	Algoritmos de Identificación de Parámetros Modales	48
4.2	Método de la Fracción Polinómica Matricial (<i>MFPM</i>)	49
4.2.1	Determinación de Coeficientes Polinómicos Matriciales	50
4.2.2	Determinación de Matrices Modales	54
4.3	Método del Polinomio Matricial Complejo (<i>MPMC</i>)	57
4.3.1	Determinación de Coeficientes Polinómicos Matriciales	58
4.3.2	Determinación de Matrices Modales	60
5	Descripción Modal de la Rigidez Dinámica de una Fundación	61
5.1	Antecedentes	62
5.2	Determinación de Matrices Modales de la Fundación	63
5.3	Determinación de Matrices Físicas de la Fundación	63
5.3.1	Matrices Físicas de Primer Orden	64
5.3.2	Matrices Físicas de Segundo Orden	67
5.4	Ejemplos	71
5.4.1	Ejemplo A	72
5.4.2	Ejemplo B	74
6	Descripción Modal de Sistemas con Interacción Suelo-Estructura	81
6.1	Modelos Simplificados de Fundaciones Superficiales	82
6.1.1	Modelos Simplificados con Coeficientes de Diseño	82

6.1.2	Modelos Simplificados con Coeficientes Asintóticos	83
6.1.3	Modelos Simplificados con Masa Agregada	85
6.1.4	Comparación de Modelos Simplificados	85
6.2	Abacos de Interacción	86
6.3	Descripción Modal con Modelos Simples de Fundación	92
6.4	Descripción Modal con Modelos Exactos de Fundación	97
7	Calibración de Modelos de Sistemas con Interacción Suelo-Estructura	100
7.1	Métodos de Calibración de Modelos Analíticos	101
7.1.1	Métodos de Sensibilidad Modal	102
7.1.2	Métodos de Sensibilidad de Respuesta	102
7.2	Método de la Función de Respuesta en Frecuencia	102
7.3	Selección de Parámetros de Ajuste	105
7.4	Problemas de Condicionamiento Numérico	106
7.5	Problemas de Convergencia	107
8	Estudio de Sensibilidad de los Parámetros de Ajuste	108
8.1	Utilización de Coeficientes Asintóticos (<i>Variante I</i>)	109
8.2	Flexibilidad de la Base de Fundación (<i>Variante II</i>)	110
8.3	Estratificación del Perfil de Suelo (<i>Variante III</i>)	113
9	Casos Reales Estudiados	117
9.1	Prototipo de Interacción (Laboratorio de Estructuras)	117
9.1.1	Descripción general	117
9.1.2	Análisis del bloque de fundación	119
9.1.3	Análisis de la estructura	126
9.1.4	Análisis del sistema acoplado	143
9.1.5	Comentarios finales	165
9.2	Molino de Crudo (Planta L'Amalí - Loma Negra)	172
9.2.1	Descripción del sistema	172
9.2.2	Ensayo del sistema	173
9.2.3	Modelado del sistema	176
9.2.4	Ajuste del modelo del sistema	186
9.2.5	Comentarios finales	187
10	Conclusiones y Discusiones	192

10.1 Contribuciones	194
10.2 Comentarios y Recomendaciones	194
10.3 Futuras Líneas de Investigación	195
A Transformada de Laplace	196
B La Técnica de Descomposición de Valores Singulares	197
B.1 Rango de una Matriz	197
B.2 Descomposición de Valores Singulares	198
B.3 Aplicaciones de la Descomposición de Valores Singulares	199
B.3.1 Reconstrucción de la matriz $[A]$	199
B.3.2 Índice de condicionamiento	199
B.3.3 Sistema Lineal de Ecuaciones	199
B.3.4 Pseudo-inversa	200
B.3.5 Determinantes	201
C Abacos de Interacción de Modos Superiores	202

Capítulo 1

Introducción

La calibración de modelos de elementos finitos a través de la realización de ensayos dinámicos se ha convertido en las últimas décadas en un área de gran importancia para el diseño, construcción y mantenimiento de sistemas mecánicos y estructuras de ingeniería civil. La realimentación entre las mediciones del prototipo y los procedimientos de diseño permiten afianzar y mejorar los actuales métodos de cálculo. El modelo calibrado de un sistema existente permite efectuar modificaciones para adecuar su comportamiento frente a sollicitaciones diferentes a las utilizadas para su diseño. En otros casos, la calibración del modelo analítico de una estructura resulta imprescindible para la reevaluación de los coeficientes de seguridad y la reasignación de su funcionalidad (especialmente para puentes).

Las dificultades que surgen en el proceso de calibración se encuentran asociadas tanto a inexactitudes en el modelo como a distorsiones e insuficiencias de datos experimentales. La validez de las predicciones numéricas del comportamiento de un sistema se encuentra limitada por las hipótesis asumidas durante el desarrollo del modelo matemático. Las idealizaciones sobre vinculaciones entre elementos y condiciones de apoyo influyen en forma determinante en la capacidad del modelo en reproducir adecuadamente la respuesta del sistema. Una de las metas de la calibración de modelos resulta entonces la corrección de hipótesis inapropiadas utilizando los resultados de ensayos dinámicos.

La calibración de modelos se enmarca dentro de una disciplina denominada *análisis modal experimental (AME)* que a partir de la década de 1980 ha tenido un crecimiento vertiginoso. Este fenómeno se debe principalmente al desarrollo de sofisticados instrumentos de medición de vibraciones y veloces analizadores de señales dinámicas de bajo costo. En forma paralela un importante número de investigadores han desarrollado técnicas experimentales y analíticas que permiten procesar y utilizar eficientemente los datos dinámicos relevados. Las áreas relacionadas con las industrias aeronáutica, aeroespacial, automovilística y electro-mecánica se han desarrollado prematuramente dentro del *AME*. La necesidad de comprender y mejorar el comportamiento dinámico de sistemas mecánicos de relevante impacto económico y social o fabricados en serie produjo que investigadores de estas disciplinas contribuyeran intensamente en la gestación de los lineamientos generales del *AME*. El desarrollo reciente del *AME* dentro de la ingeniería estructural resulta notable. Las estructuras que han recibido mayor atención son centrales nucleares, puentes y torres. Estos grandes sistemas estructurales requieren consideraciones particulares dada la energía necesaria para excitarlos durante la realización de ensayos modales convencionales.

El *análisis modal experimental (AME)* es el proceso de determinar las características dinámicas de un sistema y utilizarlas para formular o adecuar un modelo analítico que describa su comportamiento dinámico. Los libros de Ewins [1] y Maia *et al.* [2] presentan una revisión exhaustiva de las distintas etapas comprendidas por el *AME* que se resumen a continuación.

- *Ensayo modal (modal testing)*. Consiste en la planificación y la realización del ensayo dinámico e involucra tópicos referidos a técnicas de medición: definición de la condición de apoyo del sistema, selección y ubicación de los transductores y el excitador dinámico, evaluación preliminar de los resultados, etc.
- *Procesamiento de señales (signal processing)*. En esta etapa se obtiene una versión discreta de la respuesta característica del sistema designada *modelo de respuesta*. Comprende la conversión de señales analógicas a digitales, la solución de problemas derivados del muestreo, el filtrado en determinados rangos de frecuencia, etc.
- *Identificación de parámetros modales (modal parameter identification)*. Consiste en la estimación de los parámetros modales del sistema utilizando su respuesta característica. El modelo matemático derivado se denomina *modelo modal*. Aunque esta etapa es prescindible permite condensar en forma adecuada la información experimental eliminando pequeñas inconsistencias que ocurren inevitablemente en los datos medidos. En ingeniería de control ([3]) como en otras áreas afines se utilizan habitualmente técnicas de *identificación de sistema (system identification)* para obtener a partir de los datos experimentales crudos un *modelo físico* condensado que reproduce la respuesta observada. Los parámetros modales pueden derivarse luego resolviendo un problema de autovalores.
- *Aplicaciones*. Los principales campos de aplicación de las distintas versiones de modelos experimentales (de respuesta, modales y físicos) son los siguientes:
 - a. *Acoplamiento estructural (coupling techniques)*. Estimación de las propiedades dinámicas globales de un sistema complejo a través del acoplamiento de modelos (derivados analítica y/o experimentalmente) de sus componentes analizados en forma independiente.
 - b. *Modificación estructural (structural modification)*. Estudio de los cambios en las propiedades dinámicas del sistema producidos por alteraciones de diseño impuestas por razones operativas. Evaluación de los cambios estructurales más convenientes para evitar problemas de resonancia sin introducir efectos indeseados.
 - c. *Calibración de modelos (model updating)*. Ajuste de los parámetros físicos del modelo analítico preexistente de un sistema en base a la correlación con el modelo experimental. La formulación de un modelo analítico sometido a un proceso de calibración requiere la consideración de aspectos normalmente no contemplados en la construcción de un modelo regular. El libro de Friswell y Mottershead [4] presenta los aspectos más relevantes de esta aplicación del *AME* en que se centra el presente trabajo.

1.1 Consideraciones Generales

Los sistemas con interacción suelo-estructura presentan características particulares que requieren especial atención en las distintas etapas del proceso de calibración de sus modelos.

1.1.1 Aspectos analíticos

El principal obstáculo en el modelado analítico de un sistema con interacción suelo-estructura es la existencia de un dominio ilimitado de suelo. Una práctica habitual en el análisis de vibraciones de máquinas con bloques rígidos de fundación apoyados en la superficie de suelos relativamente homogéneos es adoptar coeficientes de rigidez y amortiguamiento aproximados que se derivan de soluciones rigurosas para modelos de parámetros concentrados. El análisis individual de cada grado de libertad (GL) de cuerpo rígido presupone implícitamente un desacoplamiento completo del comportamiento dinámico. La determinación de valores representativos de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento que reproduzcan satisfactoriamente el comportamiento dinámico del sistema en un determinado rango de frecuencias constituye una delicada tarea. Los coeficientes de rigidez toman los valores estáticos de las soluciones rigurosas. Los coeficientes de amortiguamiento suelen expresarse en función de la masa total de la estructura y el bloque de fundación para garantizar una reproducción adecuada del factor de amplificación dinámica. En el libro de Richart *et al.* [5] se presentan los valores óptimos de estos coeficientes que fueron adoptados por algunos reglamentos.

Los coeficientes de rigidez y amortiguamiento aproximados resultan de suma utilidad en el diseño de fundaciones de máquinas y otras estructuras fundadas superficialmente sobre suelos homogéneos que pueden considerarse infinitamente rígidas a los efectos del cálculo de vibraciones. El análisis de sistemas con fundaciones profundas queda supeditado a la existencia de fórmulas simplificadas para cada caso particular. Sin embargo, la calibración de modelos exige aproximaciones más rigurosas que las adoptadas para el diseño. Estos coeficientes pueden resultar inapropiados en casos más generales donde debe considerarse la flexibilidad de la estructura e incluso de la fundación. La definición de un coeficiente de amortiguamiento que reproduzca adecuadamente la respuesta del primer modo puede producir desviaciones importantes en las predicciones de los restantes modos.

Una interpretación del problema de los modelos simplificados es que el número de GL físicos involucrados es insuficiente para describir con mayor rigurosidad la rigidez dinámica del sistema dentro de un determinado rango de frecuencias. Una técnica de acoplamiento estructural (*component mode synthesis*) utilizada dentro del *AME* representa las matrices físicas de cada componente a través de modelos que combinan GL físicos en correspondencia con las interfaces entre componentes y GL generalizados para acomodar la restante información modal contenida en la flexibilidad dinámica. En el libro de Wolf [6] se presentan modelos que poseen GL internos para reproducir adecuadamente la rigidez dinámica de los GL de la interfaz fundación-estructura para varios tipos de fundación. En el presente trabajo se combinan estas ideas generales para derivar de la solución rigurosa de la rigidez dinámica de la fundación matrices de rigidez y amortiguamiento independientes de la frecuencia que pueden ensamblarse directamente con las matrices físicas de la estructura para ajustar los parámetros globales del sistema.

1.1.2 Aspectos experimentales

La mayor parte de la energía suministrada a sistemas con interacción suelo-estructura para pequeñas deformaciones se disipa por radiación a través del suelo. La fuerte concentración de amortiguamiento geométrico en la zona de la fundación produce que las formas modales del sistema resulten esencialmente complejas. Los sistemas con formas modales complejas se

denominan sistemas de amortiguamiento general en contraposición a los sistemas de amortiguamiento clásico que poseen formas modales reales. Los sistemas de amortiguamiento clásico se conocen también como sistemas de amortiguamiento proporcional dado que la matriz de amortiguamiento puede expresarse como una combinación lineal de las matrices de rigidez y masa. Por razones opuestas, los sistemas de amortiguamiento general se designan sistemas de amortiguamiento no-proporcional. En el capítulo 9 del libro de Hurty y Rubinstein [7] y en los trabajos de Mitchell [8] y Lallement e Inman [9] se presentan tratados sobre sistemas con formas modales complejas.

Las técnicas de identificación de parámetros modales presentan algunas dificultades para detectar modos de interacción con alto amortiguamiento debido a que su contribución en la respuesta del sistema no presenta picos marcados en el dominio de la frecuencia como sucede para estructuras con bajo amortiguamiento. En el caso de estructuras que se comportan como un cuerpo rígido vinculado al bloque de fundación (máquinas con fundaciones masivas) puede ocurrir incluso que no se produzcan picos de resonancia para algunos GL con un desacoplamiento de la respuesta respecto a los restantes GL . Los problemas que surgen en la etapa de la calibración de modelos durante la vinculación entre modos experimentales y analíticos sugieren descartar los parámetros modales como parámetros de referencia en el ajuste.

El procedimiento utilizado en el presente trabajo para la calibración de modelos de sistemas con interacción suelo-estructura involucra como modelo experimental las *funciones de respuesta en frecuencia (FRF)* obtenidas directamente del procesamiento de señales. La información experimental de las *FRF* resulta más voluminosa respecto al modelo modal dado que no se condensan las características dinámicas del sistema como en los parámetros modales. Por lo tanto, la cantidad de información no redundante que poseen implícitamente las *FRF* depende de los modos presentes en el rango de frecuencias de análisis (excepto por la normalmente pequeña contribución de los modos fuera del rango de análisis velada por los ruidos de las mediciones).

El mejoramiento del modelo analítico de un sistema respecto a su capacidad de reproducir las mediciones del ensayo manteniendo el sentido físico de sus coeficientes requiere una adecuada selección de parámetros de ajuste. Esta selección de los parámetros de ajuste es una tarea importante en dos aspectos. El primero se refiere a la cantidad de parámetros que pueden ser seleccionados. Desde el punto de vista del condicionamiento numérico resulta óptimo tomar un pequeño número de parámetros de ajuste y utilizar un volumen importante de información experimental. La frecuencia de corte que depende del muestreo digital limita el rango de frecuencias de análisis. El segundo aspecto importante se refiere a *cuales* parámetros de los posibles candidatos son más convenientes. El analista debe estimar la confianza atribuida a los distintos parámetros del modelo. Los parámetros de ajuste deberían estar asociados con características dudosas del modelo por razones físicas. Las predicciones numéricas de la respuesta deben ser sensibles a pequeños cambios en los parámetros de ajuste sin que esta sensibilidad sea razón suficiente para la selección de un parámetro candidato. De lo contrario, la calibración puede imponer, para la reducción de la diferencia entre modelos analíticos y experimentales, variaciones inapropiadas en algunos parámetros por el cambio de otros parámetros más sensibles con menor necesidad de ajuste. El resultado puede ser entonces un modelo calibrado que reproduce las mediciones a costa de la pérdida del sentido físico de algunos parámetros con menor influencia sobre la respuesta.

1.2 Objetivos y Alcances

El objetivo principal de la tesis consiste en la calibración de modelos de sistemas con interacción suelo-estructura utilizando técnicas desarrolladas en el área del *análisis modal experimental (AME)*. La fuerte concentración de amortiguamiento en la zona de la fundación diferencia a los sistemas con interacción suelo-estructura de otros tipos de sistemas estructurales ampliamente estudiados en las aplicaciones del *AME*. Las incertidumbres vinculadas a los parámetros del modelo de la fundación constituyen un aspecto de particular importancia en la calibración del modelo completo de este tipo de sistemas.

Otros objetivos del trabajo son:

- Evaluación de las posibilidades y limitaciones de las técnicas experimentales actuales aplicadas al análisis de sistemas con interacción suelo-estructura.
- Determinación de matrices independientes de la frecuencia que reproduzcan el comportamiento dinámico de la fundación para los grados de libertad (*GL*) de la interfaz con la estructura dentro del rango de frecuencia de análisis.
- Caracterización de parámetros modales de sistemas con interacción suelo-estructura.
- Estudio de sensibilidad de los parámetros de ajuste en el proceso de calibración del modelo del sistema.
- Adquisición de datos experimentales confiables de sistemas con interacción suelo-estructura a través del análisis de casos reales de aplicación.

En la bibliografía consultada sobre calibración de modelos dentro del *AME* se encuentra una escasa cantidad de trabajos sobre el ajuste de parámetros de modelos de sistemas con interacción suelo-estructura en comparación con otros tipos de sistemas. Los trabajos encontrados se refieren fundamentalmente a puentes tomando resortes y amortiguadores para los modelos de la fundación de las pilas y los estribos cuyas constantes no se vinculan en forma explícita con las propiedades del suelo.

El modelado y el análisis de los sistemas con interacción suelo-estructura se realiza a través del método de sub-estructuración. El modelo de la fundación se deriva de soluciones rigurosas de la rigidez dinámica para ensamblarse luego con el modelo de la estructura obtenido con el método de elementos finitos.

Una motivación para la determinación de los parámetros modales de estos sistemas se debe a que algunas normas de diseño (en particular, la norma alemana *KTA 2201.4*) fijan valores máximos de las relaciones de amortiguamiento del *30 %* para modos de movimiento vertical y del *15 %* para modos de movimiento horizontal y de balanceo. La distinción entre estos modos puede tornarse dificultosa a medida que aumenta el acoplamiento de estos movimientos.

Los casos reales y simulados de los sistemas analizados poseen *fundaciones superficiales y estructuras predominantemente uni-dimensionales*. El procedimiento de ajuste propuesto puede aplicarse para sistemas con fundaciones profundas manteniendo un número reducido de grados de libertad (*GL*) en la interfaz con la estructura (requisito que se cumple en forma natural para estructuras lineales en altura).

El primer caso de aplicación que se analiza designado Prototipo de Interacción constituye un ejemplo típico de los problemas planteados. La estructura consiste básicamente

en un tubo de sección circular vinculado a un bloque cilíndrico de fundación. Este sistema construido íntegramente por motivos del presente trabajo permite el ensayo y análisis individual y conjunto de la estructura y la fundación. El segundo caso de aplicación presentado es el Molino de Crudo de una planta cementera. El bloque de fundación es prismático y posee alrededor del 80% de la masa total del sistema. La estructura del molino posee una elevada complejidad aunque puede representarse con un modelo simple a los efectos de la reproducción de las características dinámicas en bajas frecuencias. La selección de los casos de aplicación estudiados responde a la intención de comparar las dificultades y limitaciones experimentales asociadas a la calibración de modelos de sistemas de escala reducida y sistemas de grandes dimensiones.

1.3 Aspectos Originales del Trabajo

La proposición de un procedimiento para el ajuste de parámetros físicos de modelos de sistemas con interacción suelo-estructura constituye un aspecto original de tipo metodológico. El procedimiento involucra la ejecución de ensayos dinámicos impulsivos sobre el sistema, la obtención de un modelo de la fundación que permita expresar en forma explícita los parámetros de ajuste del suelo y la aplicación de un método estándar de calibración sumamente robusto utilizado en análisis modal experimental.

Un aspecto original de tipo algorítmico consiste en el desarrollo de un método para la obtención de matrices simétricas de la fundación independientes de la frecuencia. La utilización de técnicas experimentales de identificación de parámetros modales sobre curvas analíticas de rigidez dinámica derivadas de soluciones rigurosas para la obtención de un modelo de la fundación constituye también una contribución de la presente investigación.

Los aspectos originales de tipo experimental se relacionan con la generación de datos en forma de funciones de transferencia experimentales que permiten la comprobación de la validez de los modelos utilizados en la actualidad para el cálculo de la respuesta de sistemas con interacción suelo-estructura. Los casos de aplicación estudiados proporcionan información útil sobre las posibilidades y limitaciones de los ensayos impulsivos considerando la sensibilidad del sistema frente a diferentes niveles de carga.

1.4 Hipótesis del Trabajo

Las hipótesis asumidas en el presente trabajo son las siguientes:

1. Los sistemas son geométrica y mecánicamente lineales: se utilizan modelos de pequeños desplazamientos y giros.
2. Los sistemas se mantienen invariantes en el tiempo: las propiedades geométricas y mecánicas permanecen constantes.
3. Los modelos analíticos poseen una adecuada discretización espacial.
4. Los modelos experimentales poseen una adecuada discretización temporal.
5. Los modelos utilizados sólo poseen GL físicos en la estructura y en la interfaz con la fundación. La incorporación de GL generalizados al modelo de la fundación permite describir adecuadamente su comportamiento dinámico.

6. El número de GL físicos utilizados en la interfaz fundación-estructura es el mínimo necesario para estudiar las características principales del fenómeno de interacción.
7. El comportamiento dinámico de los sistemas analizados se describe satisfactoriamente utilizando modelos de amortiguamiento viscoso. El amortiguamiento de tipo histerético puede reproducirse en un determinado rango de frecuencias a través de la combinación de un cierto número de modos con amortiguamiento viscoso.
8. El suelo que sustenta la fundación del sistema posee una estratificación horizontal referida a sus parámetros mecánicos.
9. Los sistemas $3D$ analizados presentan un desacoplamiento de la respuesta en dos planos verticales perpendiculares que permite utilizar modelos $2D$ para la representación de su comportamiento dinámico.
10. Las funciones de transferencia experimentales se consideran exactas en los rangos de frecuencia donde la función de coherencia supera el valor de 0.9 .

1.5 Organización del Trabajo

En el capítulo 2 se presentan los fundamentos teóricos que permiten el modelado de la estructura y la fundación. Los efectos de la discretización espacial y temporal se discuten brevemente a fin de establecer las diferencias entre modelos continuos y discretos. La formulación de segundo orden utilizada en el modelado de sistemas con amortiguamiento clásico permite la derivación de una formulación de primer orden apta para el análisis de sistemas con interacción suelo-estructura. Esta última formulación permite la incorporación de matrices de masa singulares obtenidas para la fundación y la obtención de formas modales complejas. En la sección se discuten las limitaciones en el número de coordenadas y en el número de modos de los modelos experimentales.

En el capítulo 3 se presenta el procedimiento utilizado para la identificación del modelo experimental de respuesta. La correlación entre funciones de transferencia analíticas y experimentales permite el ajuste de los modelos de los sistemas estudiados.

El capítulo 4 presenta una técnica de identificación de parámetros modales denominada *método de la fracción polinómica matricial* que se aplica sobre datos experimentales en el ámbito del análisis modal experimental. La aplicación de esta técnica experimental sobre la flexibilidad dinámica de la fundación obtenida de soluciones rigurosas permite la identificación de un modelo modal que describe el comportamiento de la fundación. Las matrices físicas derivadas de este modelo modal resultan asimétricas. El *método del polinomio matricial complejo* desarrollado en el presente trabajo resulta aplicable para curvas de flexibilidad dinámica de variación suave comunes en este tipo de problemas permitiendo la derivación de matrices simétricas.

El capítulo 5 describe un procedimiento basado en la *síntesis de componentes modales* que permite la obtención de matrices de rigidez, amortiguamiento y eventualmente masa para la fundación utilizando el modelo modal derivado con las técnicas descritas en el capítulo anterior. Una particularidad que posee este modelo modal es que el número de modos supera al número de coordenadas físicas utilizadas para la fundación. La determinación de matrices físicas independientes de la frecuencia requiere entonces la utilización de coordenadas generalizadas. Los ejemplos presentados en la sección final ilustran el grado de

aproximación que puede esperarse con este procedimiento.

En el capítulo 6 se describen los parámetros modales de sistemas con interacción suelo-estructura caracterizados por estructuras uni-dimensionales prismáticas vinculadas a discos rígidos de fundación. Se comienza con una descripción de modelos simplificados de fundaciones superficiales compuestos por coeficientes de rigidez, amortiguamiento y eventualmente masa que se aplican en forma desacoplada para cada movimiento analizado. Los ábacos de interacción que se generan con estos coeficientes permiten la estimación de la influencia de los efectos de la interacción en los parámetros modales del sistema. Las versiones más rigurosas de estos parámetros modales se obtienen con modelos exactos de la fundación conformados por las matrices físicas derivadas con el procedimiento del capítulo anterior.

En el capítulo 7 se presenta el *método de la función de respuesta en frecuencia* que se utiliza en la calibración de modelos de sistemas con interacción suelo-estructura. La consideración de aspectos relacionados con una selección adecuada de parámetros de ajuste y con potenciales problemas de condicionamiento numérico y de convergencia permite optimizar el proceso de calibración.

El capítulo 8 presenta un estudio de sensibilidad que permite la estimación de las dispersiones que pueden esperarse en los valores de los parámetros ajustados por simplificaciones del modelo analítico de la fundación en función de la influencia de la interacción en el comportamiento dinámico del sistema.

El capítulo 9 describe dos casos reales de sistemas con interacción suelo-estructura analizados. El primer caso consiste en un sistema de escala reducida mientras que el segundo caso representa un sistema de grandes dimensiones.

El capítulo 10 presenta las conclusiones y las contribuciones de la investigación junto con recomendaciones y futuras líneas de investigación.

En el apéndice A se detallan algunas propiedades de la Transformada de Laplace.

En el apéndice B se describen las aplicaciones de la Descomposición de Valores Singulares utilizada exhaustivamente en técnicas de identificación.

El apéndice C incluye los ábacos de interacción de los modos 2, 3 y 4 que complementan los ábacos presentados en el capítulo 6.

Capítulo 2

Fundamentos Teóricos

La nomenclatura empleada se extrae básicamente de fuentes que constituyen pilares del análisis modal experimental (*AME*): los textos de Ewins [1] y Maia *et al.* [2], y las memorias de la *Conferencia Internacional de Análisis Modal*. Por regla general, las matrices se expresan entre corchetes y los vectores se escriben entre llaves.

Los modelos utilizados para representar la respuesta dinámica de sistemas con interacción suelo-estructura presentan una concentración importante de amortiguamiento en la zona de la fundación. El modelo de amortiguamiento viscoso para la estructura resulta satisfactorio dado que las fuerzas disipativas juegan un rol secundario. A pesar que el comportamiento de la fundación puede responder a otros modelos de amortiguamiento, el número de grados de libertad (*GL*) generalizados agregados a los *GL* físicos permite aproximar adecuadamente la respuesta dinámica de la fundación combinando un determinado número de modos con amortiguamiento viscoso. La totalidad de los modelos utilizados en el presente trabajo poseen entonces este tipo de amortiguamiento.

De acuerdo a una clasificación propuesta por Ewins [1] (adoptada en la literatura del *AME*) los sistemas dinámicos lineales pueden describirse utilizando 3 tipos de modelos matemáticos interrelacionados. El primero es el *modelo físico* que se obtiene de la discretización espacial de las propiedades físicas del sistema representadas por matrices simétricas de rigidez, masa y amortiguamiento. Las coordenadas del modelo se designan coordenadas físicas y coinciden con las utilizadas para describir los desplazamientos, velocidades y aceleraciones del sistema. Los procedimientos más utilizados para obtener el modelo físico se basan en el *Método de Elementos Finitos*.

El segundo es el *modelo modal* constituido por una matriz diagonal de polos del sistema y una matriz de formas modales que se obtienen resolviendo el problema de autovalores del modelo físico para el caso de vibración libre. Las coordenadas involucradas se conocen como coordenadas modales, principales o normales y surgen de la transformación de coordenadas físicas utilizando la matriz de formas modales.

El tercero es el *modelo de respuesta* que se compone de una única matriz en función de una variable independiente (tiempo o frecuencia) que describe desplazamientos, velocidades o aceleraciones del sistema. El modelo de respuesta obtenido experimentalmente puede transformarse al modelo modal utilizando técnicas de identificación de parámetros modales. La relevancia de esta transformación radica en la condensación que se produce respecto a las características dinámicas del sistema.

El orden de aparición de estos modelos matemáticos depende de la secuencia utilizada para derivarlos. La *secuencia analítica* parte del modelo físico: el modelo modal surge de la resolución del problema de autovalores y el modelo de respuesta se obtiene en función de los parámetros físicos o modales. La *secuencia experimental* parte del modelo de respuesta obtenido de un ensayo modal: el modelo modal se extrae utilizando técnicas de identificación de parámetros modales mientras que es posible derivar un modelo físico condensado a través de las condiciones de ortogonalidad. Los modelos matemáticos se presentan en este capítulo en la secuencia analítica mientras que en los restantes capítulos se sigue la secuencia experimental.

2.1 Modelos Continuos y Discretos

En esta sección se describen los efectos de la discretización espacial en los modelos analíticos que deben considerarse en la etapa de calibración. La discretización temporal producida durante la obtención de los modelos experimentales también posee efectos que deben reducirse al mínimo.

2.1.1 Discretización Espacial

Las estructuras reales poseen propiedades físicas de rigidez, masa y amortiguamiento que se encuentran distribuidas en el espacio dando origen a fuerzas elásticas, inerciales y disipativas respectivamente. Estos sistemas continuos pueden ser descritos en forma más conveniente con modelos de parámetros concentrados de múltiples grados de libertad (*GL*). Los *GL* de un sistema representan el número de coordenadas independientes necesarias para describir completamente su movimiento. Los sistemas continuos poseen rigurosamente un número infinito de grados de libertad imposibilitando la obtención de un modelo que reproduzca el comportamiento dinámico para cualquier rango de frecuencias. Sin embargo, en la mayoría de los casos se obtienen resultados satisfactorios separando las propiedades básicas en elementos discretos simples que se combinan adecuadamente para representar las propiedades del sistema con suficiente exactitud. Este procedimiento presupone siempre una aproximación que depende del grado de discretización y el rango de frecuencias de interés. La ubicación de los *GL* constituye la decisión inicial que debe tomar el analista en función del tipo de análisis y la precisión requerida.

La comparación de modelos continuos simples y sus contrapartes discretas sugieren que aproximadamente un tercio de los modos del modelo discreto resultan razonablemente exactos. Por lo tanto, el número necesario de *GL* del modelo discreto depende de la exactitud requerida dentro del rango de frecuencias de análisis. En el trabajo de Berman [10] se demuestra que existe un número ilimitado de modelos discretos capaces de reproducir la respuesta experimental de un sistema continuo.

La totalidad de los modelos de los sistemas analizados en el presente trabajo son espacialmente discretos. La formulación de segundo orden descrita en primer término surge naturalmente de consideraciones físicas. Los sistemas con interacción suelo-estructura estudiados requieren modelos con matrices de amortiguamiento general y masa singular. La incapacidad que posee la formulación de segundo orden para manipular estas matrices sugiere la utilización de una formulación de primer orden (formulación en espacio de estado)

que surge de una reestructuración de las ecuaciones de movimiento. La formulación de primer orden permite además el reconocimiento de los modos no-oscilantes que poseen los sistemas analizados.

2.1.2 Discretización Temporal

Las señales analógicas de los transductores utilizados durante los ensayos dinámicos se digitalizan a través de un *conversor A/D* (analógico a digital) que muestrea los datos experimentales en forma discreta. La eficiencia de las técnicas de identificación en base a modelos de tiempo discreto ([3]) se debe a la naturaleza discreta de los datos experimentales.

El modelado de los sistemas dinámicos lineales se realiza a través de ecuaciones de tiempo continuo o ecuaciones de tiempo discreto. Las ecuaciones de movimiento de los modelos de tiempo continuo resultan ecuaciones diferenciales en el dominio del tiempo y ecuaciones algebraicas en el dominio de la frecuencia. Los modelos de tiempo discreto poseen ecuaciones de movimiento descriptas a través de ecuaciones lineales de diferencias finitas.

En el presente trabajo se utilizan exclusivamente modelos temporalmente continuos. La reducción de los efectos del muestreo se consigue con una frecuencia de muestreo adecuada al rango de frecuencias de análisis.

2.2 Formulación de Segundo Orden

En la primera parte de esta sección se describen los modelos con amortiguamiento clásico o proporcional que resultan aptos para el análisis de un importante número de casos de la dinámica estructural. A continuación se analizan algunas características sobresalientes de los modelos con amortiguamiento general o no-proporcional expresadas en términos de la formulación de segundo orden que se describen con mayor generalidad en la presentación de la formulación de primer orden.

2.2.1 Modelos con Matriz de Amortiguamiento Proporcional

La definición de estos modelos se realiza de acuerdo a la secuencia analítica.

A) Modelo Físico

Las ecuaciones de movimiento de un sistema dinámico lineal pueden expresarse como un conjunto de N ecuaciones diferenciales de segundo orden, donde N es el número de coordenadas independientes. Se definen $[M]$, $[C]$ y $[K]$ como matrices simétricas $N \times N$ de masa, amortiguamiento y rigidez respectivamente. Las ecuaciones de movimiento se expresan en forma matricial como

$$[M] \{\ddot{u}(t)\} + [C] \{\dot{u}(t)\} + [K] \{u(t)\} = \{p(t)\} \quad (2.1)$$

donde $\{\ddot{u}(t)\}$, $\{\dot{u}(t)\}$ y $\{u(t)\}$ son vectores de aceleración, velocidad y desplazamiento respectivamente y $\{p(t)\}$ es el vector que contiene la distribución espacial y la variación

temporal de las fuerzas. Considerando la vibración libre del sistema en (2.1) se tiene

$$[M] \{\ddot{u}(t)\} + [C] \{\dot{u}(t)\} + [K] \{u(t)\} = \{0\} \quad (2.2)$$

Dado que las N ecuaciones simultáneas en (2.2) son homogéneas, si $\{v(t)\}$ representa una solución del sistema luego $\gamma \{v(t)\}$, con γ siendo una constante arbitraria no-nula, también representa una solución. Esto implica que la solución de (2.2) sólo puede encontrarse en términos de un movimiento relativo que responde a la forma

$$\{u(t)\} = \{U\} \bar{u}(t) \quad (2.3)$$

donde $\{U\}$ es un vector $N \times 1$ de amplitudes de respuesta independientes del tiempo y $\bar{u}(t)$ es la variación temporal de la carga. Sustituyendo (2.3) en (2.2) y aplicando transformada de Laplace con condiciones iniciales nulas se obtiene

$$(s^2 [M] + s [C] + [K]) \{U\} \bar{u}(s) = \{0\} \quad (2.4)$$

Para que se verifique (2.4) debe cumplirse

$$(s^2 [M] + s [C] + [K]) \{U\} = \{0\} \quad (2.5)$$

La solución trivial de (2.5) corresponde al caso donde $\{U\} = \{0\}$, que no resulta de interés dado que implica que el sistema permanece inmóvil. La determinación de la solución no-trivial requiere el cumplimiento de la siguiente condición

$$\det (s^2 [M] + s [C] + [K]) = 0 \quad (2.6)$$

La ecuación (2.6) se conoce como *ecuación característica del sistema*. Dado que esta ecuación resulta de orden $2N$ provee esta cantidad de posibles valores s_n designados genéricamente como polos. El subíndice n se refiere al número de modo y varía entre 1 y $2N$. Los vectores no-nulos asociados a cada polo se designan formas modales y se representan como $\{\psi_n\}$. Los polos poseen información global referida a la frecuencia de vibración y a la relación de amortiguamiento de cada modo. Las formas modales describen el movimiento relativo de todas las partes del sistema.

El cálculo de polos y formas modales de (2.5) se conoce como *problema de polinomio matricial*. Desde el punto de vista computacional el problema de autovalores planteado de esta forma resulta inadecuado. Por tal motivo, los algoritmos normalmente utilizados resuelven un *problema regular de autovalores* que se obtiene en forma natural durante la formulación en espacio de estado.

El problema de polinomio matricial para sistemas no-amortiguados o con amortiguamiento proporcional puede convertirse sin dificultad en un problema regular de autovalores. Los polos del sistema se calculan luego en función de los autovalores obtenidos. La matriz de formas modales posee propiedades de ortogonalidad que permiten desacoplar las ecuaciones de movimiento del sistema. En la formulación de segundo orden este desacoplamiento sólo es posible para sistemas con amortiguamiento proporcional.

B) Modelo Modal

La matriz de amortiguamiento se denomina clásica o proporcional cuando puede ser expresada como combinación lineal de las matrices de rigidez y masa.

$$[C] = \varepsilon [K] + \nu [M] \quad (2.7)$$

siendo ε y ν dos escalares arbitrarios. Por lo tanto, la ecuación (2.5) para el modo n adquiere la siguiente forma

$$\left((1 + \varepsilon s_n) [K] + (s_n^2 + \nu s_n) [M] \right) \{\psi_n\} = \{0\} \quad (2.8)$$

Dividiendo por el escalar $(1 + \varepsilon s_n)$ se obtiene un *problema generalizado de autovalores*

$$([K] - \lambda_r [M]) \{\psi_r\} = \{0\} \quad (2.9)$$

donde

$$\lambda_r = -\frac{(s_n^2 + \nu s_n)}{(1 + \varepsilon s_n)} \quad (2.10)$$

De (2.9) se observa que sólo es necesario encontrar N modos compuestos que tienen asociado un subíndice r que varía entre 1 y N . Cada uno de estos modos compuestos involucra un par de modos simples con la misma forma modal y con polos reales o complejos conjugados. La ecuación (2.9) puede transformarse en un problema regular de autovalores multiplicando por $[M]^{-1}$ (asumiendo matriz de masa no singular), es decir

$$([A] - \lambda_r [I]) \{\psi_r\} = \{0\} \quad (2.11)$$

con

$$[A] = [M]^{-1} [K] \quad (2.12)$$

Los autovalores λ_r resultan siempre positivos para matrices de rigidez y masa definidas positivas. De cada autovalor de (2.10) se obtienen dos polos resolviendo la siguiente ecuación cuadrática

$$s_n^2 + (\varepsilon \lambda_r + \nu) s_n + \lambda_r = 0 \quad (2.13)$$

para obtener

$$s_r = -\frac{(\varepsilon \lambda_r + \nu)}{2} + \sqrt{\left(\frac{(\varepsilon \lambda_r + \nu)}{2}\right)^2 - \lambda_r} \quad (2.14a)$$

$$s_{\bar{r}} = -\frac{(\varepsilon \lambda_r + \nu)}{2} - \sqrt{\left(\frac{(\varepsilon \lambda_r + \nu)}{2}\right)^2 - \lambda_r} \quad (2.14b)$$

con $\bar{r} = N + r$. Por analogía con sistemas de un *GL* se define

$$\omega_r = \sqrt{\lambda_r} \quad (2.15a)$$

$$\xi_r = \frac{1}{2} \left(\varepsilon \omega_r + \frac{\nu}{\omega_r} \right) \quad (2.15b)$$

donde ω_r y ξ_r se denominan frecuencia no-amortiguada y relación de amortiguamiento respectivamente. Utilizando (2.15) los polos en (2.14) resultan

$$s_r = -\xi_r \omega_r + \sqrt{\xi_r^2 - 1} \omega_r \quad (2.16a)$$

$$s_{\bar{r}} = -\xi_r \omega_r - \sqrt{\xi_r^2 - 1} \omega_r \quad (2.16b)$$

La naturaleza de los polos en (2.16) depende del valor que tome ξ_r para cada autovalor.

- $\xi_r > 1$ Cada autovalor genera dos polos reales, negativos y diferentes.
- $\xi_r = 1$ Cada autovalor genera dos polos reales, negativos e iguales.
- $\xi_r < 1$ Cada autovalor produce un par de polos complejos conjugados.

Para este último caso, la ecuación (2.16) puede escribirse como

$$s_r = -\xi_r \omega_r + i\sqrt{1 - \xi_r^2} \omega_r \quad (2.17a)$$

$$s_{\bar{r}} = -\xi_r \omega_r - i\sqrt{1 - \xi_r^2} \omega_r = s_r^* \quad (2.17b)$$

donde $i = \sqrt{-1}$ y el asterisco (*) simboliza complejo conjugado. La parte real de los polos controla la tasa de decaimiento de la amplitud y la parte imaginaria describe la frecuencia de oscilación. Además, se verifican las siguientes relaciones

$$s_r + s_r^* = -2\xi_r \omega_r \quad (2.18a)$$

$$s_r s_r^* = \omega_r^2 \quad (2.18b)$$

De (2.15b) se observa que $\xi_r = 0$ para $\varepsilon = \nu = 0$. Para este caso, se obtienen polos imaginarios puros y complejos conjugados correspondientes a sistemas no-amortiguados

$$s_r = +i\omega_r \quad (2.19a)$$

$$s_{\bar{r}} = -i\omega_r = s_r^* \quad (2.19b)$$

Las formas modales resultan directamente los autovectores de (2.9) que poseen componentes reales.

La comparación entre los números de parámetros independientes de los modelos físico y modal permite comprobar que ambos coinciden. En efecto, las matrices simétricas de rigidez y masa poseen cada una $\frac{1}{2}(N^2 + N)$ parámetros independientes. Según (2.7) la inclusión de la matriz de amortiguamiento agrega sólo 2 parámetros. Por lo tanto, el modelo físico tiene un total de $(N^2 + N + 2)$ parámetros independientes. Por otra parte, la matriz modal posee N^2 y la matriz diagonal de frecuencias no-amortiguadas tiene N parámetros independientes. Se observa de (2.15b) que las relaciones de amortiguamiento se encuentran en función de las frecuencias no-amortiguadas ya computadas y de los 2 parámetros de proporcionalidad de la matriz de amortiguamiento. De esta forma, el modelo modal posee también un total de $(N^2 + N + 2)$ parámetros independientes.

Propiedades de Ortogonalidad

Las propiedades de ortogonalidad resultan de gran importancia en el desacoplamiento de las ecuaciones de movimiento del sistema para obtener la contribución de cada modo en forma independiente. Utilizando (2.15a) la ecuación (2.9) para el modo genérico r resulta

$$([K] - \omega_r^2 [M]) \{\psi_r\} = \{0\} \quad (2.20)$$

en tanto que para el modo r' se tiene

$$([K] - \omega_{r'}^2 [M]) \{\psi_{r'}\} = \{0\} \quad (2.21)$$

Pre-multiplicando (2.20) por $\{\psi_{r'}\}^T$ resulta

$$\{\psi_{r'}\}^T ([K] - \omega_r^2 [M]) \{\psi_r\} = 0 \quad (2.22)$$

Por otro lado, post-multiplicando por $\{\psi_r\}$ la transpuesta de (2.21) resulta

$$\{\psi_{r'}\}^T ([K]^T - \omega_{r'}^2 [M]^T) \{\psi_r\} = 0 \quad (2.23)$$

que es igual a

$$\{\psi_{r'}\}^T ([K] - \omega_{r'}^2 [M]) \{\psi_r\} = 0 \quad (2.24)$$

dado que $[K]$ y $[M]$ son simétricas. Realizando la diferencia entre (2.24) y (2.22) se obtiene

$$(\omega_r^2 - \omega_{r'}^2) \{\psi_{r'}\}^T [M] \{\psi_r\} = 0 \quad (2.25)$$

que sólo puede ser satisfecha para $\omega_r \neq \omega_{r'}$ si

$$\{\psi_{r'}\}^T [M] \{\psi_r\} = 0 \quad (r \neq r') \quad (2.26)$$

Además, de (2.26) y (2.24) se deduce que

$$\{\psi_{r'}\}^T [K] \{\psi_r\} = 0 \quad (r \neq r') \quad (2.27)$$

Finalmente, tomando $r = r'$ y considerando (2.22) o (2.24) se obtiene

$$\{\psi_r\}^T [K] \{\psi_r\} = \omega_r^2 \{\psi_r\}^T [M] \{\psi_r\} \quad (2.28)$$

o

$$\frac{\{\psi_r\}^T [K] \{\psi_r\}}{\{\psi_r\}^T [M] \{\psi_r\}} = \frac{k_r}{m_r} = \omega_r^2 \quad (2.29)$$

donde k_r y m_r se denominan rigidez y masa generalizada, respectivamente, del modo r . Teniendo en cuenta (2.7) puede definirse además el amortiguamiento generalizado como

$$c_r = \varepsilon k_r + \nu m_r \quad (2.30)$$

Utilizando (2.30) y (2.15b) se obtiene

$$\frac{c_r}{m_r} = 2\xi_r \omega_r \quad (2.31)$$

Si se consideran todas las posibles combinaciones de modos r y r' las propiedades de ortogonalidad del sistema pueden expresarse como

$$[\Psi]^T [M] [\Psi] = [\backslash m_r \backslash] \quad (2.32a)$$

$$[\Psi]^T [C] [\Psi] = [\backslash c_r \backslash] \quad (2.32b)$$

$$[\Psi]^T [K] [\Psi] = [\backslash k_r \backslash] \quad (2.32c)$$

donde $[\Psi]$ representa la matriz de formas modales. De acuerdo a (2.32) las formas modales son linealmente independientes (ningún vector puede ser obtenido como combinación lineal de los restantes) y por lo tanto forman una base en el espacio N -dimensional. A diferencia de

los polos, que presentan valores únicos, las formas modales son conocidas dentro de un factor de escala indeterminado. Por lo tanto, k_r , c_r y m_r no pueden ser tomados separadamente ya que sus valores también están afectados por dicho factor de escala.

La presentación de las formas modales se encuentra habitualmente sujeta a un proceso de normalización. La asignación de un valor unitario al elemento de mayor módulo en cada vector constituye una forma de normalización. Una alternativa más conveniente consiste en escalar los vectores de formas modales de tal forma que

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [I] \quad (2.33)$$

donde $[I]$ es la matriz identidad y $[\Phi]$ es la matriz modal normalizada respecto a la matriz de masa constituida por vectores

$$\{\phi_r\} = \gamma_r \{\psi_r\} \quad (2.34)$$

que obedecen la relación

$$\{\phi_r\}^T [M] \{\phi_r\} = \gamma_r^2 \{\psi_r\}^T [M] \{\psi_r\} = 1 \quad (2.35)$$

para cada modo r . De (2.35) se obtiene

$$\gamma_r = \frac{1}{\sqrt{\{\psi_r\}^T [M] \{\psi_r\}}} = \frac{1}{\sqrt{m_r}} \quad (2.36)$$

Por lo tanto, las propiedades de ortogonalidad de la matriz modal normalizada respecto a la matriz de masa se expresan como

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [I] \quad (2.37a)$$

$$[\Phi]^T [C] [\Phi] = [\diagdown 2\xi_r \omega_r \diagup] \quad (2.37b)$$

$$[\Phi]^T [K] [\Phi] = [\diagdown \omega_r^2 \diagup] \quad (2.37c)$$

Las matrices del modelo físico pueden calcularse en función de las matrices del modelo modal a través de (2.37) resultando

$$[M] = [\Phi]^{-T} [\Phi]^{-1} \quad (2.38a)$$

$$[C] = [\Phi]^{-T} [\diagdown 2\xi_r \omega_r \diagup] [\Phi]^{-1} \quad (2.38b)$$

$$[K] = [\Phi]^{-T} [\diagdown \omega_r^2 \diagup] [\Phi]^{-1} \quad (2.38c)$$

La aplicación práctica de estas expresiones es limitada dado que requieren que la matriz de formas modales sea cuadrada. Esta condición implica que el número de coordenadas medidas debe coincidir con el número de modos identificados. Desde el punto de vista experimental no existe ninguna razón para que se cumpla este requerimiento. En la sección sobre *Modelos Completos e Incompletos* se analizan con mayor profundidad estas expresiones.

Descomposición Modal

Las propiedades de ortogonalidad pueden utilizarse para facilitar el cálculo de la respuesta de vibración forzada de (2.1). Definiendo la transformación de coordenadas

$$\{u(t)\} = [\Phi] \{v(t)\} \quad (2.39)$$

y sustituyendo en (2.1) se obtiene

$$[M] [\Phi] \{\ddot{v}(t)\} + [C] [\Phi] \{\dot{v}(t)\} + [K] [\Phi] \{v(t)\} = \{p(t)\} \quad (2.40)$$

Las coordenadas de respuesta $\{v(t)\}$ son conocidas como coordenadas principales, normales o modales. Pre-multiplicando (2.40) por $[\Phi]^T$

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] \{\ddot{v}(t)\} + [\Phi]^T [C] [\Phi] \{\dot{v}(t)\} + [\Phi]^T [K] [\Phi] \{v(t)\} = [\Phi]^T \{p(t)\} \quad (2.41)$$

y considerando (2.37) la representación matricial de las ecuaciones de movimiento resulta

$$\{\ddot{v}(t)\} + [\omega_r^2] \{v(t)\} = \{\hat{p}(t)\} \quad (2.42)$$

con

$$\{\hat{p}(t)\} = [\Phi]^T \{p(t)\} \quad (2.43)$$

La ecuación (2.42) representa un conjunto de N ecuaciones de movimiento desacopladas. La utilización de una matriz modal escalada arbitrariamente $[\Psi]$ produce la siguiente expresión

$$[\tilde{m}_r] \{\ddot{v}(t)\} + [\tilde{c}_r] \{\dot{v}(t)\} + [\tilde{k}_r] \{v(t)\} = \{\tilde{p}(t)\} \quad (2.44)$$

con

$$\{\tilde{p}(t)\} = [\Psi]^T \{p(t)\} \quad (2.45)$$

Esta transformación de coordenadas permite desacoplar un sistema de múltiples GL en N sistemas independientes de un GL . Cada ecuación de movimiento depende solamente de una coordenada $v_j(t)$ que se obtiene en forma separada como la respuesta de un oscilador simple no-amortiguado. Después de resolver $v_j(t)$ a través de (2.42) o (2.44), la solución final en términos de $\{u(t)\}$ se obtiene fácilmente a través de la transformación de coordenadas (2.39).

C) Modelo de Respuesta

El modelo de respuesta se deriva en la secuencia analítica en función de los modelos anteriores. En la secuencia experimental, este modelo constituye el punto de partida de un ensayo modal. A diferencia de los modelos físico y modal, la información básica del sistema se vincula en este caso a una variable independiente. El modelo de respuesta toma diferentes nombres descriptos en la Tabla 2.1 de acuerdo a la variable independiente involucrada.

Variable	Designación	Representación
Tiempo	Función de Respuesta a Impulso (<i>FRI</i>)	$[h(t)]$
Laplace	Función de Transferencia (<i>FT</i>)	$[H(s)]$
Frecuencia	Función de Respuesta en Frecuencia (<i>FRF</i>)	$[\alpha(\omega)]$

Tabla 2.1: Clasificación de modelos de respuesta

El tiempo y la frecuencia son variables reales en tanto que la variable de Laplace es un escalar complejo que posee una estrecha vinculación con la frecuencia. De hecho, la *FRF*

constituye un caso particular de la *FT*. Las representaciones del modelo de respuesta reciben un índice específico de acuerdo al parámetro de respuesta involucrado: los índices **D**, **V** y **A** se asignan a desplazamientos, velocidades y aceleraciones respectivamente. La *FRF* adopta nombres específicos en función del parámetro de respuesta utilizado según la Tabla 2.2.

Las componentes de estas matrices describen la relación entre la respuesta en una coordenada particular j y un impulso unitario aplicado en la coordenada k con el sistema partiendo del reposo. En el dominio del tiempo, el impulso equivale a producir una velocidad inicial en el instante $t = 0$ a través de una aceleración instantánea.

Las funciones $h_{jk}(t)$ y $H_{jk}(s)$ constituyen un *par de Laplace*. Por lo tanto, se verifica que

$$H_{jk}(s) = \mathcal{L}(h_{jk}(t)) = \int_0^{+\infty} h_{jk}(t) e^{-st} dt \quad (2.46a)$$

$$h_{jk}(t) = \mathcal{L}^{-1}(H_{jk}(s)) = \int_0^{+\infty} H_{jk}(s) e^{st} ds \quad (2.46b)$$

En el apéndice A se presentan algunas propiedades relevantes de la transformada de Laplace. Una forma directa de determinar la *FT* en función de desplazamientos consiste en aplicar a (2.1) la transformada de Laplace con condiciones iniciales nulas

$$(s^2 [M] + s [C] + [K]) \{u(s)\} = \{p(s)\} \quad (2.47)$$

de donde

$$\{u(s)\} = (s^2 [M] + s [C] + [K])^{-1} \{p(s)\} = [H_D(s)] \{p(s)\} \quad (2.48)$$

Las componentes individuales de la *FT* se calculan como

$$H_{jk}^D(s) = \frac{u_j(s)}{p_k(s)} \quad (2.49)$$

Evaluando la *FT* sobre el eje de la frecuencia se obtiene la *FRF*

$$[\alpha_D(\omega)] = [H_D(s)]_{s=i\omega} = ([K] + i\omega [C] - \omega^2 [M])^{-1} \quad (2.50)$$

La aparente simplicidad de la ecuación (2.50) no refleja la ineficiencia numérica que limita su utilidad en técnicas de identificación. En efecto, el cálculo de $[\alpha_D(\omega)]$ requiere la inversión de una matriz $N \times N$ para cada frecuencia de interés que resulta computacionalmente costosa para sistemas con un número importante de *GL*. Esta ineficiencia se agudiza en el caso que sólo interese un pequeño número de componentes de la receptancia. La utilización

Parámetro de Respuesta	Designación	Representación
Desplazamiento	Receptancia	$[\alpha_D(\omega)]$
Velocidad	Movilidad	$[\alpha_V(\omega)]$
Aceleración	Acelerancia	$[\alpha_A(\omega)]$

Tabla 2.2: Formas alternativas de la *FRF*

de parámetros modales permite obtener expresiones más útiles para $[\alpha_D(\omega)]$ que reflejan características importantes de la receptancia.

La inversión de la ecuación (2.50) produce

$$[\alpha_D(\omega)]^{-1} = ([K] + i\omega [C] - \omega^2 [M]) \quad (2.51)$$

Pre-multiplicando y post-multiplicando ambos miembros por $[\Phi]^T$ y $[\Phi]$ respectivamente resulta

$$[\Phi]^T [\alpha_D(\omega)]^{-1} [\Phi] = [\Phi]^T ([K] + i\omega [C] - \omega^2 [M]) [\Phi] \quad (2.52)$$

Considerando (2.37) se obtiene

$$[\Phi]^T [\alpha_D(\omega)]^{-1} [\Phi] = \left[\searrow (\omega_r^2 + 2i\xi_r\omega_r\omega - \omega^2) \searrow \right] \quad (2.53)$$

que puede reescribirse como

$$[\alpha_D(\omega)] = [\Phi] \left[\searrow (\omega_r^2 + 2i\xi_r\omega_r\omega - \omega^2) \searrow \right]^{-1} [\Phi]^T \quad (2.54)$$

La ecuación (2.54) permite calcular cualquier componente $\alpha_{jk}^D(\omega)$ de la *FRF* utilizando la siguiente expresión

$$\alpha_{jk}^D(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\phi_{jr}\phi_{kr}}{(\omega_r^2 + 2i\xi_r\omega_r\omega - \omega^2)} = \sum_{r=1}^N \frac{A_{jkr}}{(\omega_r^2 + 2i\xi_r\omega_r\omega - \omega^2)} \quad (2.55)$$

con $A_{jkr} = \phi_{jr}\phi_{kr}$ denominada *constante modal*. Las componentes de las formas modales son reales produciendo constantes modales reales. De acuerdo a (2.55), el conocimiento de cualquier fila o columna de la receptancia permite en teoría reconstruir la matriz completa. Una limitación práctica a esta afirmación surge cuando existe algún modo sin excitación por la presencia de un nodo (punto sin movimiento) cercano al punto de aplicación de la carga.

Las características dinámicas del sistema pueden describirse en términos de *polos* y *residuos* utilizando como modelo de respuesta la función de transferencia (*FT*). En efecto, la ecuación (2.55) puede expresarse como

$$H_{jk}^D(s) = \sum_{r=1}^N \frac{\phi_{jr}\phi_{kr}}{(\omega_r^2 + 2\xi_r\omega_r s + s^2)} = \sum_{r=1}^N \frac{A_{jkr}}{(\omega_r^2 + 2\xi_r\omega_r s + s^2)} \quad (2.56)$$

Expandiendo cada sumando de (2.56) en fracciones parciales se obtiene

$$H_{jk}^D(s) = \sum_{r=1}^N \frac{\varphi_{jr}\varphi_{kr}}{(s - s_r)} + \sum_{\bar{r}=1}^N \frac{\varphi_{j\bar{r}}\varphi_{k\bar{r}}}{(s - s_{\bar{r}})} = \sum_{r=1}^N \frac{R_{jkr}}{(s - s_r)} + \sum_{\bar{r}=1}^N \frac{R_{jk\bar{r}}}{(s - s_{\bar{r}})} \quad (2.57)$$

con s_r y $s_{\bar{r}}$ definidos en (2.17), y

$$R_{jkr} = \frac{A_{jkr}}{(s_r - s_{\bar{r}})} \quad \varphi_{jr} = \frac{\phi_{jr}}{\sqrt{(s_r - s_{\bar{r}})}} \quad \varphi_{kr} = \frac{\phi_{kr}}{\sqrt{(s_r - s_{\bar{r}})}} \quad (2.58)$$

$$R_{jk\bar{r}} = \frac{A_{jkr}}{-(s_r - s_{\bar{r}})} \quad \varphi_{j\bar{r}} = \frac{\phi_{jr}}{\sqrt{-(s_r - s_{\bar{r}})}} \quad \varphi_{k\bar{r}} = \frac{\phi_{kr}}{\sqrt{-(s_r - s_{\bar{r}})}} \quad (2.59)$$

Teniendo en cuenta que r y \bar{r} son modos genéricos del sistema la ecuación (2.57) puede expresarse como

$$H_{jk}^D(s) = \sum_{n=1}^{2N} \frac{\varphi_{jn}\varphi_{kn}}{(s - s_n)} = \sum_{n=1}^{2N} \frac{R_{jkn}}{(s - s_n)} \quad (2.60)$$

donde s_n y R_{jkn} son los polos y residuos del sistema respectivamente. La FT adquiere una amplitud indeterminada en correspondencia con los polos dado que se encuentran en el mismo dominio que la variable de Laplace. La FT puede expresarse en forma análoga a (2.54) definiendo la matriz diagonal de polos $[\Lambda] = [\diagdown s_n \diagup]$

$$[H_D(s)] = [\vartheta] (s[I] - [\Lambda])^{-1} [\vartheta]^T \quad (2.61)$$

donde $[\vartheta]$ agrupa las formas modales $\{\varphi_n\}$.

La ecuación (2.61) se considera fundamental en el desarrollo de técnicas de identificación dentro del análisis modal experimental. La normalización de estas formas modales coincide con la utilizada en la formulación en espacio de estado. Sin embargo, la disociación de los N modos compuestos utilizados en (2.54) para sistemas con amortiguamiento clásico produce que la normalización de las formas modales de los $2N$ modos simples en (2.61) difiera de la normalización respecto a la matriz de masa. Las ecuaciones (2.58) y (2.59) relacionan las componentes de las formas modales para ambas normalizaciones. En caso que s_r y $s_{\bar{r}}$ sean complejos conjugados (relación de amortiguamiento subcrítica) el radicando del denominador resulta imaginario. De esta forma, las componentes de $\{\varphi_r\}$ y $\{\varphi_{\bar{r}}\}$ consisten en números complejos que posee parte real e imaginaria con idéntico valor absoluto¹; los residuos resultan imaginarios. En el caso que s_r y $s_{\bar{r}}$ sean reales negativos (relación de amortiguamiento supercrítica), uno modo tendrá componentes reales y el otro modo tendrá componentes imaginarias; los residuos resultan reales.

Las componentes de la FRI en función de desplazamientos se calculan según (2.46b) como

$$h_{jk}^D(t) = \mathcal{L}^{-1}(H_{jk}^D(s)) = \sum_{n=1}^{2N} R_{jkn} e^{s_n t} \quad (2.62)$$

Dado que el sistema parte del reposo, el desplazamiento inicial debe ser nulo, es decir

$$h_{jk}^D(0) = \sum_{n=1}^{2N} R_{jkn} = \sum_{n=1}^{2N} \varphi_{jn}\varphi_{kn} = 0 \quad (2.63)$$

La ecuación (2.63) conocida como *restricción fundamental* se analiza en detalle en [11]. La restricción fundamental adquiere relevancia para técnicas de identificación que se desarrollan a partir de la formulación en espacio de estado. La generalización de la ecuación (2.63) para cualquier par de coordenadas j y k produce la siguiente expresión matricial

$$[\vartheta] [\vartheta]^T = 0 \quad (2.64)$$

¹Las partes real e imaginaria de las componentes de las formas modales correspondientes al polo con parte imaginaria positiva tienen distinto signo, mientras que para el polo con parte imaginaria negativa presentan el mismo signo.

La interrelación matemática que existe entre desplazamientos, velocidades y aceleraciones permite derivar las distintas versiones de la *FT* a partir de una *FT* en función de cualquier parámetro de respuesta. Desde el punto de vista experimental, los modelos de respuesta en base a aceleraciones tienen particular importancia dado que los transductores normalmente utilizados registran aceleraciones. Derivando (2.62) se obtienen las *FRI* para velocidad y aceleración

$$h_{jk}^V(t) = \frac{d}{dt} h_{jk}^D(t) = \sum_{n=1}^{2N} s_n R_{jkn} e^{s_n t} \quad (2.65)$$

$$\hat{h}_{jk}^A(t) = \frac{d^2}{dt^2} h_{jk}^D(t) = \sum_{n=1}^{2N} s_n^2 R_{jkn} e^{s_n t} \quad (2.66)$$

donde el símbolo (^) indica que las aceleraciones se calculan exclusivamente derivando desplazamientos o velocidades. La expresión completa de aceleraciones se obtiene agregando el término producido por el impulso en el instante inicial², es decir

$$h_{jk}^A(t) = \sum_{n=1}^{2N} s_n^2 R_{jkn} e^{s_n t} + \delta(t) h_{jk}^V(0) \quad (2.67)$$

donde la velocidad inicial resulta

$$h_{jk}^V(0) = \sum_{n=1}^{2N} s_n R_{jkn} \quad (2.68)$$

El término agregado en (2.67) se denomina *transmisión directa* y surge siempre que se utiliza la aceleración como parámetro de respuesta. Aplicando la transformada de Laplace a las *FRI* en términos de velocidad y aceleración, y considerando (2.63) junto con las expresiones del apéndice A, se obtiene

$$\begin{aligned} H_{jk}^V(s) &= \mathcal{L} \left(\frac{d}{dt} h_{jk}^D(t) \right) \\ &= -h_{jk}^D(0) + s H_{jk}^D(s) \\ &= s H_{jk}^D(s) \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned} H_{jk}^A(s) &= \mathcal{L} \left(\frac{d^2}{dt^2} h_{jk}^D(t) \right) + \mathcal{L} (\delta(t) h_{jk}^V(0)) \\ &= -h_{jk}^V(0) - s h_{jk}^D(0) + s^2 H_{jk}^D(s) + h_{jk}^V(0) \\ &= s^2 H_{jk}^D(s) \end{aligned} \quad (2.70)$$

²La aceleración instantánea $\ddot{\mathbf{u}}(t)$ de un oscilador simple de masa m se expresa como

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) = \delta(t) \dot{\mathbf{u}}_0$$

donde $\dot{\mathbf{u}}_0$ representa la velocidad inicial y $\delta(t)$ simboliza un delta de Dirac. De esta forma, el impulso producido por la fuerza $\mathbf{f}(t) = m\ddot{\mathbf{u}}(t)$ de duración infinitesimal ΔT es igual al producto de la masa por la velocidad inicial

$$\mathbf{I} = \int_0^{\Delta T} \mathbf{f}(t) dt = m \int_0^{\Delta T} \delta(t) \dot{\mathbf{u}}_0 dt = m \dot{\mathbf{u}}_0$$

Expandiendo en fracciones parciales y teniendo en cuenta (2.63) y (2.68) resultan

$$\begin{aligned}
 H_{jk}^V(s) &= \sum_{n=1}^{2N} \frac{sR_{jkn}}{(s-s_n)} \\
 &= \sum_{n=1}^{2N} R_{jkn} + \sum_{n=1}^{2N} \frac{s_n R_{jkn}}{(s-s_n)} \\
 &= \sum_{n=1}^{2N} \frac{s_n R_{jkn}}{(s-s_n)} \tag{2.71}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_{jk}^A(s) &= \sum_{n=1}^{2N} \frac{s^2 R_{jkn}}{(s-s_n)} \\
 &= \sum_{n=1}^{2N} s_n R_{jkn} + s \sum_{n=1}^{2N} R_{jkn} + \sum_{n=1}^{2N} \frac{s_n^2 R_{jkn}}{(s-s_n)} \\
 &= \sum_{n=1}^{2N} \frac{s_n^2 R_{jkn}}{(s-s_n)} + h_{jk}^V(0) \tag{2.72}
 \end{aligned}$$

La aplicación directa de la transformada de Laplace a (2.65) y (2.67) permite arribar a idénticas expresiones. Una observación importante es que el paso de las representaciones de un parámetro de respuesta a otro sólo implica una re-normalización de las formas modales a través de los polos. La expresión (2.72) permite obtener fácilmente desplazamientos a partir de aceleraciones en función de los parámetros modales. Descontado el término de transmisión directa a (2.72) la *FT* para aceleraciones resulta

$$\hat{H}_{jk}^A(s) = \sum_{n=1}^{2N} \frac{s_n^2 R_{jkn}}{(s-s_n)} \tag{2.73}$$

La ecuación (2.73) se obtiene también aplicando la transformada de Laplace a (2.66). Definiendo las formas modales y residuos para velocidad y aceleración como

$$R_{jkn}^V = s_n R_{jkn} \quad \varphi_{jn}^V = \sqrt{s_n} \varphi_{jn} \quad \varphi_{kn}^V = \sqrt{s_n} \varphi_{kn} \tag{2.74}$$

$$R_{jkn}^A = s_n^2 R_{jkn} \quad \varphi_{jn}^A = s_n \varphi_{jn} \quad \varphi_{kn}^A = s_n \varphi_{kn} \tag{2.75}$$

las *FT* asociadas resultan

$$H_{jk}^V(s) = \sum_{n=1}^{2N} \frac{R_{jkn}^V}{(s-s_n)} = \sum_{n=1}^{2N} \frac{\varphi_{jn}^V \varphi_{kn}^V}{(s-s_n)} \tag{2.76}$$

$$\hat{H}_{jk}^A(s) = \sum_{n=1}^{2N} \frac{R_{jkn}^A}{(s-s_n)} = \sum_{n=1}^{2N} \frac{\varphi_{jn}^A \varphi_{kn}^A}{(s-s_n)} \tag{2.77}$$

Las *FT* para velocidad y aceleración expresadas matricialmente son análogas a (2.61), es decir

$$[H_V(s)] = [\vartheta_V] (s[I] - [\Lambda])^{-1} [\vartheta_V]^T \tag{2.78}$$

$$[\hat{H}_A(s)] = [\vartheta_A] (s[I] - [\Lambda])^{-1} [\vartheta_A]^T \tag{2.79}$$

De acuerdo a (2.69) y (2.70) la movilidad y la acelerancia pueden obtenerse como

$$[\alpha_V(\omega)] = [H_V(s)]_{s=i\omega} = i\omega ([K] + i\omega [C] - \omega^2 [M])^{-1} \quad (2.80)$$

$$[\alpha_A(\omega)] = [H_A(s)]_{s=i\omega} = -\omega^2 ([K] + i\omega [C] - \omega^2 [M])^{-1} \quad (2.81)$$

Estas ecuaciones se expresan como fracciones parciales utilizando (2.71) y (2.72).

2.2.2 Modelos con Matriz de Amortiguamiento General

La clasificación utilizada para estos modelos coincide con la descripta para el caso de amortiguamiento clásico.

A) Modelo Físico

La derivación del modelo físico no presenta ninguna diferencia respecto al caso de amortiguamiento clásico.

B) Modelo Modal

La determinación de las matrices del modelo modal se efectúa a través de la transformación del problema de polinomio matricial de (2.5) en un problema regular de autovalores. La alternativa normalmente utilizada consiste en recurrir a la formulación de primer orden descripta en la siguiente sección. A continuación sólo se describen las principales características de los parámetros modales resultantes.

Las formas modales resultan esencialmente complejas y sus componentes se definen por una amplitud y un ángulo de fase (o por una parte real y una parte imaginaria). La visualización del movimiento representado por cada forma modal se torna dificultosa dado que los valores máximos de cada componente no ocurren simultáneamente. La normalización de las formas modales involucra tanto un factor de escala como una fase angular de referencia. Las formas modales correspondientes a polos complejos conjugados resultan complejas conjugadas. De esta forma, la combinación de dos formas modales complejas conjugadas produce una respuesta real.

Propiedades de Ortogonalidad

Las propiedades de ortogonalidad se deducen a partir de un razonamiento análogo al utilizado para sistemas con amortiguamiento clásico. La ecuación (2.5) para el modo n resulta

$$(s_n^2 [M] + s_n [C] + [K]) \{\psi_n\} = \{0\} \quad (2.82)$$

y similarmente para el modo n' , transponiendo la ecuación resultante y considerando la simetría de las matrices

$$\{\psi_{n'}\}^T (s_{n'}^2 [M] + s_{n'} [C] + [K]) = \{0\} \quad (2.83)$$

Pre-multiplicando (2.82) por $\{\psi_{n'}\}^T$ y post-multiplicando (2.83) por $\{\psi_n\}$ se obtiene

$$\{\psi_{n'}\}^T (s_n^2 [M] + s_n [C] + [K]) \{\psi_n\} = 0 \quad (2.84)$$

y

$$\{\psi_{n'}\}^T (s_{n'}^2 [M] + s_{n'} [C] + [K]) \{\psi_n\} = 0 \quad (2.85)$$

Realizando la diferencia entre las ecuaciones resultantes (asumiendo que $s_n \neq s_{n'}$) y dividiendo por $(s_n - s_{n'})$ resulta

$$(s_n + s_{n'}) \{\psi_{n'}\}^T [M] \{\psi_n\} + \{\psi_{n'}\}^T [C] \{\psi_n\} = 0 \quad (2.86)$$

Por otra parte, multiplicando (2.82) por $s_{n'}$ y (2.83) por s_n y restando una de la otra se obtiene

$$s_n s_{n'} \{\psi_{n'}\}^T [M] \{\psi_n\} - \{\psi_{n'}\}^T [K] \{\psi_n\} = 0 \quad (2.87)$$

Las ecuaciones (2.86) y (2.87) constituyen las propiedades de ortogonalidad que satisfacen las formas modales del sistema. Resulta interesante examinar la forma que adquieren las ecuaciones de ortogonalidad para modos n y n' complejos conjugados: $s_n = s_r$; $s_{n'} = s_r^*$; $\{\psi_n\} = \{\psi_r\}$ y $\{\psi_{n'}\} = \{\psi_r^*\}$. Teniendo en cuenta (2.31) y (2.29) se obtienen las siguientes expresiones

$$\frac{\{\psi_r^*\}^T [C] \{\psi_r\}}{\{\psi_r^*\}^T [M] \{\psi_r\}} = \frac{c_r}{m_r} = 2\xi_r \omega_r \quad (2.88)$$

y

$$\frac{\{\psi_r^*\}^T [K] \{\psi_r\}}{\{\psi_r^*\}^T [M] \{\psi_r\}} = \frac{k_r}{m_r} = \omega_r^2 \quad (2.89)$$

Los parámetros k_r , c_r y m_r de estas expresiones resultan reales y se denominan rigidez, amortiguamiento y masa generalizada respectivamente por analogía con sistemas con amortiguamiento proporcional. A pesar que ω_r y ξ_r pueden considerarse como la frecuencia natural no-amortiguada y la relación de amortiguamiento asociada a un oscilador simple, el significado de estos parámetros es diferente dado que

- no intervienen formas modales del mismo modo, sino de modos complejos conjugados,
- no surgen del desacoplamiento de las ecuaciones de movimiento,
- no representan parámetros equivalentes de osciladores simples que describen la contribución de los modos.

Descomposición Modal

La ecuación (2.42) resulta en este caso

$$\{\ddot{v}(t)\} + [\mathbf{C}] \{\dot{v}(t)\} + [\omega_r^2] \{v(t)\} = \{p(t)\} \quad (2.90)$$

donde $[\mathbf{C}]$ es, en general, una matriz $N \times N$ completa. La diagonalización de la matriz de amortiguamiento no resulta posible dado que la matriz modal $[\Phi]$ se deriva utilizando solamente las matrices de masa y rigidez. El acoplamiento adicional introducido por el amortiguamiento impide el análisis desacoplado de las ecuaciones de movimiento a través de la transformación descrita anteriormente.

La eliminación de los elementos fuera de la diagonal principal en $[\mathbf{C}]$ cuando el amortiguamiento es pequeño permite alcanzar una solución aproximada sin una pérdida importante de precisión. La utilización de la formulación en espacio de estado es inevitable para valores altos de amortiguamiento que impiden esta simplificación.

C) Modelo de Respuesta

La ecuación (2.55) es inaplicable debido al acoplamiento producido por el amortiguamiento. La expresión que resulta válida para estos casos es la ecuación (2.60) que responde a modelos con amortiguamiento general. Sin embargo, las componentes de las formas modales y los residuos no guardan ninguna relación entre sí como ocurre para modelos con amortiguamiento clásico.

La unión de términos correspondientes a polos complejos conjugados se analiza a continuación. La ecuación (2.57) puede expresarse como

$$H_{jk}^D(s) = \sum_{r=1}^N \left(\frac{R_{jkr}}{(s - s_r)} + \frac{R_{jkr}^*}{(s - s_r^*)} \right) \quad (2.91)$$

Considerando (2.17) la ecuación (2.91) resulta

$$H_{jk}^D(s) = \sum_{r=1}^N \left(\frac{\operatorname{Re}(R_{jkr}) - i \operatorname{Im}(R_{jkr})}{\left(s - \left(-\xi_r + i\sqrt{1 - \xi_r^2}\right)\omega_r\right)} + \frac{\operatorname{Re}(R_{jkr}) + i \operatorname{Im}(R_{jkr})}{\left(s - \left(-\xi_r - i\sqrt{1 - \xi_r^2}\right)\omega_r\right)} \right) \quad (2.92)$$

Operando se arriba a

$$H_{jk}^D(s) = \sum_{r=1}^N \frac{\operatorname{Re}(R_{jkr})(2\xi_r\omega_r + 2s) + \operatorname{Im}(R_{jkr})(2\sqrt{1 - \xi_r^2}\omega_r)}{(\omega_r^2 + 2\xi_r\omega_r s + s^2)} \quad (2.93)$$

Los sistemas con amortiguamiento clásico poseen residuos puramente imaginarios que permiten anular el término del numerador de los sumandos en (2.93) asociado a la parte real de R_{jkr} que depende de s .

Las expresiones para modelos de respuesta en términos de polos y residuos resultan idénticas a las obtenidas para sistemas con amortiguamiento clásico.

2.3 Formulación de Primer Orden

La formulación de segundo orden descrita en la sección anterior presenta dificultades en la representación de sistemas con amortiguamiento no-proporcional. En artículos de reciente publicación ([12], [13]) se presenta un álgebra específica para modelos de segundo orden en general (*Algebra de Clifford*) con óptimas ventajas desde el punto de vista numérico. Sin embargo, la formulación en espacio de estado posee aún mayor aceptación por la simplicidad de las expresiones resultantes.

2.3.1 Modelos con Matriz de Masa No-Singular

Los modelos descriptos a continuación constituyen una generalización de los modelos presentados en la formulación de segundo orden.

A) Modelo Físico

La ecuación (2.1) puede reescribirse como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden de varias formas distintas con diferentes ventajas computacionales. La formulación utilizada en este trabajo parte de la siguiente definición

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} [C] & [M] \\ [M] & [0] \end{bmatrix} \quad (2.94a)$$

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & -[M] \end{bmatrix} \quad (2.94b)$$

y

$$\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} \{u(t)\} \\ \{\dot{u}(t)\} \end{Bmatrix} \quad (2.95a)$$

$$\{p(t)\} = [P] \{\bar{p}(t)\} \quad (2.95b)$$

$$\{q(t)\} = [Q] \{\bar{p}(t)\} \quad (2.95c)$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} [P] \\ [0] \end{bmatrix} \quad (2.95d)$$

La matriz $[P]$ representa la matriz identidad con columnas eliminadas en correspondencia con los GL no excitados. El vector $\{\bar{p}(t)\}$ posee las funciones de carga de los GL excitados. La ecuación (2.1) se escribe entonces en forma más compacta como

$$[\mathbf{A}] \{\dot{x}(t)\} + [\mathbf{B}] \{x(t)\} = [Q] \{\bar{p}(t)\} = \{q(t)\} \quad (2.96)$$

Las matrices $[\mathbf{A}]$ y $[\mathbf{B}]$ son reales, simétricas y tienen dimensión $N \times N$ con $N = 2N$. Multiplicando (2.96) por $[\mathbf{A}]^{-1}$ se obtiene

$$\{\dot{x}(t)\} = [\mathcal{A}_c] \{x(t)\} + [\mathcal{B}_c] \{\bar{p}(t)\} \quad (2.97)$$

con

$$[\mathcal{A}_c] = -[\mathbf{A}]^{-1} [\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1} [K] & -[M]^{-1} [C] \end{bmatrix} \quad (2.98a)$$

$$[\mathcal{B}_c] = [\mathbf{A}]^{-1} [Q] = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ [M]^{-1} [P] \end{Bmatrix} \quad (2.98b)$$

En el caso de vibraciones libres (2.97) resulta

$$[\mathcal{A}_c] \{x(t)\} - \{\dot{x}(t)\} = \{0\} \quad (2.99)$$

El vector de estado puede expresarse como

$$\{x(t)\} = \{X\} \bar{x}(t) \quad (2.100)$$

Reemplazando (2.100) en (2.99) y aplicando la transformada de Laplace con condiciones iniciales nulas se obtiene

$$([\mathcal{A}_c] - s[I]) \{X\} = \{0\} \quad (2.101)$$

que representa un problema regular de autovalores cuya solución comprende un conjunto de $2N$ autovalores s_n que son reales o se presentan en pares complejos conjugados.

B) Modelo Modal

En este caso, a diferencia de los problemas de autovalores resultantes de la formulación de segundo orden, autovalores y polos representan los mismos parámetros. De esta forma, los polos y las formas modales se calculan como autovalores y autovectores respectivamente de

$$([\mathbf{B}] + s_n [\mathbf{A}]) \{\theta_n\} = \{0\} \quad (2.102)$$

La estructura matemática de las matrices $[\mathbf{A}]$ y $[\mathbf{B}]$ produce que la forma modal para un modo genérico n resulte

$$\{\theta_n\} = \begin{Bmatrix} \{\psi_n\} \\ s_n \{\psi_n\} \end{Bmatrix} \quad (2.103)$$

donde $\{\psi_n\}$ contiene los desplazamientos relativos de las coordenadas del sistema.

Propiedades de Ortogonalidad

En el caso de dos modos genéricos n y n' se demuestra que los autovectores de (2.102) cumplen las siguientes propiedades de ortogonalidad

$$\{\theta_{n'}\}^T [\mathbf{A}] \{\theta_n\} = 0 \quad (n \neq n') \quad (2.104a)$$

$$\{\theta_{n'}\}^T [\mathbf{B}] \{\theta_n\} = 0 \quad (n \neq n') \quad (2.104b)$$

En el caso que $n = n'$ se obtiene la siguiente expresión pre-multiplicando (2.102) por $\{\theta_n\}^T$

$$\{\theta_n\}^T [\mathbf{B}] \{\theta_n\} = -s_n \{\theta_n\}^T [\mathbf{A}] \{\theta_n\} \quad (2.105)$$

ó

$$\frac{\{\theta_n\}^T [\mathbf{B}] \{\theta_n\}}{\{\theta_n\}^T [\mathbf{A}] \{\theta_n\}} = \frac{b_n}{a_n} = -s_n \quad (2.106)$$

Las propiedades de ortogonalidad del sistema surge de considerar todas las posibles combinaciones de n y n'

$$[\Theta]^T [\mathbf{A}] [\Theta] = [\backslash a_n \backslash] \quad (2.107a)$$

$$[\Theta]^T [\mathbf{B}] [\Theta] = [\backslash b_n \backslash] \quad (2.107b)$$

La siguiente normalización de las formas modales produce que las propiedades de ortogonalidad resulten función de los polos

$$[\Upsilon]^T [\mathbf{A}] [\Upsilon] = [I] \quad (2.108a)$$

$$[\Upsilon]^T [\mathbf{B}] [\Upsilon] = -[\Lambda] \quad (2.108b)$$

donde $[\Lambda] = [\backslash s_n \backslash]$ es la matriz diagonal conteniendo los polos y $[\Upsilon]$ es la matriz modal normalizada respecto a $[\mathbf{A}]$ formada por vectores $\{v_n\} = \rho_n \{\theta_n\}$ que obedecen la relación

$$\{v_n\}^T [\mathbf{A}] \{v_n\} = \rho_n^2 \{\theta_n\}^T [\mathbf{A}] \{\theta_n\} = 1 \quad (2.109)$$

para cada modo n . De (2.109) se obtiene

$$\rho_n = \frac{1}{\sqrt{\{\theta_n\}^T [\mathbf{A}] \{\theta_n\}}} = \frac{1}{\sqrt{a_n}} \quad (2.110)$$

Utilizando (2.103) se comprueba que

$$\begin{aligned} a_n &= \{\theta_n\}^T [\mathbf{A}] \{\theta_n\} \\ &= \left\{ \begin{array}{cc} \{\psi_n\}^T & s_n \{\psi_n\}^T \end{array} \right\} \begin{bmatrix} [C] & [M] \\ [M] & [0] \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \{\psi_n\} \\ s_n \{\psi_n\} \end{array} \right\} \\ &= \{\psi_n\}^T ([C] + 2s_n [M]) \{\psi_n\} \end{aligned} \quad (2.111)$$

La normalización difiere claramente de la utilizada para la formulación de segundo orden y en consecuencia

$$\{v_n\} = \left\{ \begin{array}{c} \{\varphi_n\} \\ s_n \{\varphi_n\} \end{array} \right\} \quad (2.112)$$

con $\{\varphi_n\} \neq \{\phi_n\}$. La matriz de formas modales normalizadas resulta

$$[\Upsilon] = \begin{bmatrix} [\vartheta] \\ [\vartheta] [\Lambda] \end{bmatrix} \quad (2.113)$$

Las ecuaciones (2.108) pueden escribirse en forma explícita como

$$\begin{bmatrix} [\vartheta]^T & [\Lambda] [\vartheta]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [C] & [M] \\ [M] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\vartheta] \\ [\vartheta] [\Lambda] \end{bmatrix} = [I] \quad (2.114a)$$

$$\begin{bmatrix} [\vartheta]^T & [\Lambda] [\vartheta]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & -[M] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\vartheta] \\ [\vartheta] [\Lambda] \end{bmatrix} = -[\Lambda] \quad (2.114b)$$

que operando resultan

$$[\vartheta]^T [C] [\vartheta] + [\Lambda] [\vartheta]^T [M] [\vartheta] + [\vartheta]^T [M] [\vartheta] [\Lambda] = [I] \quad (2.115a)$$

$$[\vartheta]^T [K] [\vartheta] - [\Lambda] [\vartheta]^T [M] [\vartheta] [\Lambda] = -[\Lambda] \quad (2.115b)$$

Estas expresiones constituyen una generalización de las ecuaciones (2.86) y (2.87) que representan los términos fuera de la diagonal principal en (2.115).

Las ecuaciones (2.108) pueden utilizarse para reconstruir las matrices de rigidez, amortiguamiento y masa en función de las matrices del modelo modal ([11]). En efecto, pre-multiplicando por $[\Upsilon]^{-T}$, post-multiplicando por $[\Upsilon]^{-1}$ e invirtiendo ambas expresiones se obtiene

$$[\mathbf{A}]^{-1} = [\Upsilon] [\Upsilon]^T \quad (2.116a)$$

$$[\mathbf{B}]^{-1} = -[\Upsilon] [\Lambda]^{-1} [\Upsilon]^T \quad (2.116b)$$

que considerando (2.113) resultan

$$[\mathbf{A}]^{-1} = \begin{bmatrix} [\vartheta] [\vartheta]^T & [\vartheta] [\Lambda] [\vartheta]^T \\ [\vartheta] [\Lambda] [\vartheta]^T & [\vartheta] [\Lambda]^2 [\vartheta]^T \end{bmatrix} \quad (2.117a)$$

$$[\mathbf{B}]^{-1} = \begin{bmatrix} -[\vartheta] [\Lambda]^{-1} [\vartheta]^T & -[\vartheta] [\vartheta]^T \\ -[\vartheta] [\vartheta]^T & -[\vartheta] [\Lambda] [\vartheta]^T \end{bmatrix} \quad (2.117b)$$

Por otra parte, de (2.94) se tiene

$$[\mathbf{A}]^{-1} = \begin{bmatrix} [0] & [M]^{-1} \\ [M]^{-1} & -[M]^{-1} [C] [M]^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.118a)$$

$$[\mathbf{B}]^{-1} = \begin{bmatrix} [K]^{-1} & [0] \\ [0] & -[M]^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.118b)$$

Comparando (2.117) y (2.118) se concluye que

$$[K] = - \left([\vartheta] [\Lambda]^{-1} [\vartheta]^T \right)^{-1} \quad (2.119a)$$

$$[M] = \left([\vartheta] [\Lambda] [\vartheta]^T \right)^{-1} \quad (2.119b)$$

$$[C] = - [M] [\vartheta] [\Lambda]^2 [\vartheta]^T [M] \quad (2.119c)$$

y

$$[\vartheta] [\vartheta]^T = 0 \quad (2.120)$$

La ecuación (2.120) conocida como *restricción fundamental* es idéntica a (2.64) y relaciona los parámetros modales resultantes del modelo físico descrito según (2.94). En el trabajo de Garvey *et al.* [14] se demuestra que las partes real e imaginaria de formas modales complejas no son parámetros totalmente independientes. Esto se comprueba comparando los números de parámetros independientes de los modelos físico y modal. El modelo físico posee un total de $\frac{3}{2}(N^2 + N)$ parámetros independientes dado que cada matriz física simétrica posee $\frac{1}{2}(N^2 + N)$. Por otra parte, la matriz diagonal de polos provee $2N$ parámetros reales en tanto que la matriz modal posee $2N^2$. De esta forma, el modelo modal acumula $2(N^2 + N)$ parámetros reales. La diferencia en el número de parámetros reales entre los modelos físico y modal revela la dependencia de $\frac{1}{2}(N^2 + N)$ parámetros modales a través de la restricción fundamental.

Las matrices físicas reconstruidas con (2.119) utilizando parámetros modales derivados en forma experimental sólo reproducen la respuesta medida si se garantiza el cumplimiento de la condición (2.120). En [11] se propone la incorporación explícita de la restricción fundamental en los algoritmos de identificación de parámetros modales para la obtención de matrices físicas de sistemas con amortiguamiento general.

Descomposición Modal

El desacoplamiento de las ecuaciones de movimiento comienza con la definición de la siguiente transformación de coordenadas

$$\{x(t)\} = [\Upsilon] \{w(t)\} \quad (2.121)$$

Reemplazando (2.121) en (2.96) y pre-multiplicando por $[\Upsilon]^T$ se obtiene

$$[\Upsilon]^T [\mathbf{A}] [\Upsilon] \{\dot{w}(t)\} + [\Upsilon]^T [\mathbf{B}] [\Upsilon] \{w(t)\} = [\Upsilon]^T \{q(t)\} \quad (2.122)$$

Teniendo en cuenta (2.108) se arriba a

$$\{\dot{w}(t)\} - [\Lambda] \{w(t)\} = \{\hat{q}(t)\} \quad (2.123)$$

con

$$\{\hat{q}(t)\} = [\Upsilon]^T \{q(t)\} \quad (2.124)$$

La ecuación (2.123) representa un conjunto de $2N$ ecuaciones desacopladas para cualquier modelo lineal de amortiguamiento.

C) Modelo de Respuesta

La función de transferencia (FT) en función de los parámetros modales resulta el modelo de respuesta más simple. Aplicando la transformada de Laplace a (2.96) con condiciones iniciales nulas se obtiene

$$([\mathbf{B}] + s [\mathbf{A}]) \{x(s)\} = \{q(s)\} \quad (2.125)$$

y por lo tanto

$$\{x(s)\} = ([\mathbf{B}] + s [\mathbf{A}])^{-1} \{q(s)\} = [\mathbf{H}(s)] \{q(s)\} \quad (2.126)$$

De la ecuación (2.126) se observa que

$$[\mathbf{H}(s)]^{-1} = ([\mathbf{B}] + s [\mathbf{A}]) \quad (2.127)$$

Pre-multiplicando y post-multiplicando ambos miembros por $[\Upsilon]^T$ y $[\Upsilon]$ respectivamente resulta

$$[\Upsilon]^T [\mathbf{H}(s)]^{-1} [\Upsilon] = [\Upsilon]^T ([\mathbf{B}] + s [\mathbf{A}]) [\Upsilon] \quad (2.128)$$

Considerando (2.108) se obtiene

$$[\Upsilon]^T [\mathbf{H}(s)]^{-1} [\Upsilon] = [\sphericalangle (s - s_n) \sphericalangle] \quad (2.129)$$

que se reescribe como

$$[\mathbf{H}(s)] = [\Upsilon] [\sphericalangle (s - s_n) \sphericalangle]^{-1} [\Upsilon]^T \quad (2.130)$$

Reemplazando (2.113) en (2.130) se obtiene

$$\begin{aligned} [\mathbf{H}(s)] &= \begin{bmatrix} [\vartheta] \\ [\vartheta] [\Lambda] \end{bmatrix} [\sphericalangle (s - s_n) \sphericalangle]^{-1} \begin{bmatrix} [\vartheta]^T & [\Lambda] [\vartheta]^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [\vartheta] [\sphericalangle (s - s_n) \sphericalangle]^{-1} [\vartheta]^T & [\vartheta] [\sphericalangle (s - s_n) \sphericalangle]^{-1} [\Lambda] [\vartheta]^T \\ [\vartheta] [\Lambda] [\sphericalangle (s - s_n) \sphericalangle]^{-1} [\vartheta]^T & [\vartheta] [\Lambda] [\sphericalangle (s - s_n) \sphericalangle]^{-1} [\Lambda] [\vartheta]^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [H_D(s)] & [H_V(s)] \\ [H_V(s)] & [\hat{H}_A(s)] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.131)$$

donde se observa que $[\mathbf{H}(s)]$ se compone de funciones de transferencia de desplazamiento, velocidad y aceleración. La ecuación (2.130) permite calcular cualquier componente de la función de transferencia $\mathbf{H}_{jk}(s)$ como

$$\mathbf{H}_{jk}(s) = \sum_{n=1}^{2N} \frac{v_{jn}v_{kn}}{(s-s_n)} = \sum_{n=1}^{2N} \frac{\mathbf{R}_{jkn}}{(s-s_n)} \quad (2.132)$$

donde s_n y \mathbf{R}_{jkn} son los polos y residuos de la función de transferencia respectivamente.

2.3.2 Modelos con Matriz de Masa Singular

El estudio de estos modelos tiene particular importancia en la representación de sistemas con interacción suelo-estructura dado que el comportamiento dinámico de las fundaciones suele reproducirse solamente con matrices de rigidez y amortiguamiento. Las expresiones presentadas se basan en el trabajo de Inaudi [15].

A) Modelo Físico

El comportamiento dinámico de sistemas que poseen algunos GL sin masa asociada se describe como

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [M_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{u}_1(t)\} \\ \{\ddot{u}_2(t)\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C_{11}] & [C_{12}] \\ [C_{21}] & [C_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{u}_1(t)\} \\ \{\dot{u}_2(t)\} \end{Bmatrix} + \dots \\ & \dots + \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_1(t)\} \\ \{u_2(t)\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [P_1] \\ [P_2] \end{bmatrix} \{\bar{p}(t)\} \end{aligned} \quad (2.133)$$

donde $\{u_1(t)\}$ y $\{u_2(t)\}$ representan los vectores de desplazamientos de los N_1 GL sin masa asociada y los N_2 GL con masa asociada respectivamente. En la formulación en espacio de estado la ecuación (2.133) toma la siguiente forma

$$[\mathbf{A}] \{\dot{x}(t)\} + [\mathbf{B}] \{x(t)\} = [\mathbf{Q}] \{\bar{p}(t)\} \quad (2.134)$$

donde

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} [C_{11}] & [C_{12}] & [0] \\ [C_{21}] & [C_{22}] & [M_{22}] \\ [0] & [M_{22}] & [0] \end{bmatrix} \quad (2.135a)$$

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] & [0] \\ [K_{21}] & [K_{22}] & [0] \\ [0] & [0] & -[M_{22}] \end{bmatrix} \quad (2.135b)$$

y

$$\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} \{u_1(t)\} \\ \{u_2(t)\} \\ \{\dot{u}_2(t)\} \end{Bmatrix} \quad (2.136a)$$

$$[\mathbf{Q}] = \begin{bmatrix} [P_1] \\ [P_2] \\ [0] \end{bmatrix} \quad (2.136b)$$

Las matrices $[\mathbf{A}]$ y $[\mathbf{B}]$ son reales, simétricas y tienen dimensión $N \times N$ en este caso con $N = N_1 + 2N_2$. Multiplicando (2.134) por $[\mathbf{A}]^{-1}$ se obtiene

$$\{\dot{x}(t)\} = [\mathcal{A}_c] \{x(t)\} + [\mathcal{B}_c] \{\bar{p}(t)\} \quad (2.137)$$

con

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}_c] &= -[\mathbf{A}]^{-1} [\mathbf{B}] \\ &= \begin{bmatrix} -[C_{11}]^{-1} [K_{11}] & -[C_{11}]^{-1} [K_{12}] & -[C_{11}]^{-1} [C_{12}] \\ [0] & [0] & [I] \\ -[M_{22}]^{-1} [\bar{K}_{21}] & -[M_{22}]^{-1} [\bar{K}_{22}] & -[M_{22}]^{-1} [\bar{C}_{22}] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.138a)$$

$$\begin{aligned} [\mathcal{B}_c] &= [\mathbf{A}]^{-1} [Q] \\ &= \begin{Bmatrix} [C_{11}]^{-1} [P_1] \\ [0] \\ [M_{22}]^{-1} ([P_2] - [C_{21}] [C_{11}]^{-1} [P_1]) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.138b)$$

y

$$[\bar{K}_{21}] = [K_{21}] - [C_{21}] [C_{11}]^{-1} [K_{11}] \quad (2.139a)$$

$$[\bar{K}_{22}] = [K_{22}] - [C_{21}] [C_{11}]^{-1} [K_{12}] \quad (2.139b)$$

$$[\bar{C}_{22}] = [C_{22}] - [C_{21}] [C_{11}]^{-1} [C_{12}] \quad (2.139c)$$

En el caso de vibración libre (2.137) resulta

$$[\mathcal{A}_c] \{x(t)\} - \{\dot{x}(t)\} = \{0\} \quad (2.140)$$

El vector de estado se expresa como

$$\{x(t)\} = \{X\} \bar{x}(t) \quad (2.141)$$

Reemplazando (2.141) en (2.140) y aplicando la transformada de Laplace con condiciones iniciales nulas se obtiene

$$([\mathcal{A}_c] - s[I]) \{X\} = \{0\} \quad (2.142)$$

que representa un problema regular de autovalores cuya solución comprende un conjunto de N autovalores s_n que son reales o se presentan en pares complejos conjugados.

B) Modelo Modal

Los polos y las formas modales se obtienen resolviendo el siguiente problema de autovalores

$$([\mathbf{B}] + s_n [\mathbf{A}]) \{\theta_n\} = \{0\} \quad (2.143)$$

Dadas las características intrínsecas de las matrices $[\mathbf{A}]$ y $[\mathbf{B}]$ la forma modal para un modo genérico n resulta

$$\{\theta_n\} = \begin{Bmatrix} \{\psi_n^1\} \\ \{\psi_n^2\} \\ s_n \{\psi_n^2\} \end{Bmatrix} \quad (2.144)$$

donde $\{\psi_n^1\}$ y $\{\psi_n^2\}$ contienen los desplazamientos relativos de las coordenadas del sistema. Las propiedades de ortogonalidad del sistema responden a (2.108) y (2.116) aunque con

$$[\Upsilon] = \begin{bmatrix} [\vartheta_1] \\ [\vartheta_2] \\ [\vartheta_2] [\Lambda] \end{bmatrix} \quad (2.145)$$

Reemplazando (2.145) en (2.116) se obtiene

$$[\mathbf{A}]^{-1} = \begin{bmatrix} [\vartheta_1] [\vartheta_1]^T & [\vartheta_1] [\vartheta_2]^T & [\vartheta_1] [\Lambda] [\vartheta_2]^T \\ [\vartheta_2] [\vartheta_1]^T & [\vartheta_2] [\vartheta_2]^T & [\vartheta_2] [\Lambda] [\vartheta_2]^T \\ [\vartheta_2] [\Lambda] [\vartheta_1]^T & [\vartheta_2] [\Lambda] [\vartheta_2]^T & [\vartheta_2] [\Lambda]^2 [\vartheta_2]^T \end{bmatrix} \quad (2.146a)$$

$$[\mathbf{B}]^{-1} = \begin{bmatrix} -[\vartheta_1] [\Lambda]^{-1} [\vartheta_1]^T & -[\vartheta_1] [\Lambda]^{-1} [\vartheta_2]^T & -[\vartheta_1] [\vartheta_2]^T \\ -[\vartheta_2] [\Lambda]^{-1} [\vartheta_1]^T & -[\vartheta_2] [\Lambda]^{-1} [\vartheta_2]^T & -[\vartheta_2] [\vartheta_2]^T \\ -[\vartheta_2] [\vartheta_1]^T & -[\vartheta_2] [\vartheta_2]^T & -[\vartheta_2] [\Lambda] [\vartheta_2]^T \end{bmatrix} \quad (2.146b)$$

Por otra parte, de (2.135) se tiene

$$[\mathbf{A}]^{-1} = \begin{bmatrix} [C_{11}]^{-1} & [0] & -[C_{11}]^{-1} [C_{12}] [M_{22}]^{-1} \\ [0] & [0] & [M_{22}]^{-1} \\ -[M_{22}]^{-1} [C_{21}] [C_{11}]^{-1} & [M_{22}]^{-1} & -[M_{22}]^{-1} [\bar{C}_{22}] [M_{22}]^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.147a)$$

$$[\mathbf{B}]^{-1} = \begin{bmatrix} \left[\begin{array}{cc} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{array} \right]^{-1} & \begin{bmatrix} [0] \\ [0] \end{bmatrix} \\ [0] & -[M_{22}]^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.147b)$$

donde

$$[\bar{C}_{22}] = [C_{22}] - [C_{21}] [C_{11}]^{-1} [C_{12}] \quad (2.147c)$$

Comparando (2.146) y (2.147), la relación entre matrices físicas y modales se obtiene como

$$[M_{22}] = \left([\vartheta_2] [\Lambda] [\vartheta_2]^T \right)^{-1} \quad (2.148a)$$

$$[C_{11}] = \left([\vartheta_1] [\vartheta_1]^T \right)^{-1} \quad (2.148b)$$

$$[C_{21}] = -[M_{22}] [\vartheta_2] [\Lambda] [\vartheta_1]^T [C_{11}] \quad (2.148c)$$

$$[C_{12}] = -[C_{11}] [\vartheta_1] [\Lambda] [\vartheta_2]^T [M_{22}] \quad (2.148d)$$

$$[C_{22}] = -[M_{22}] [\vartheta_2] [\Lambda]^2 [\vartheta_2]^T [M_{22}] + [C_{21}] [C_{11}]^{-1} [C_{12}] \quad (2.148e)$$

$$\left[\begin{array}{cc} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{array} \right] = - \left(\left(\begin{bmatrix} [\vartheta_1] \\ [\vartheta_2] \end{bmatrix} [\Lambda]^{-1} \begin{bmatrix} [\vartheta_1]^T & [\vartheta_2]^T \end{bmatrix} \right) \right)^{-1} \quad (2.148f)$$

Además, las formas modales deben satisfacer las siguientes condiciones

$$[\vartheta_1] [\vartheta_1]^T = [C_{11}]^{-1} \quad (2.149a)$$

$$[\vartheta_2] [\vartheta_1]^T = [0] \quad (2.149b)$$

$$[\vartheta_1] [\vartheta_2]^T = [0] \quad (2.149c)$$

$$[\vartheta_2] [\vartheta_2]^T = [0] \quad (2.149d)$$

La restricción fundamental resulta relajada por (2.149a) respecto a (2.120). Los modelos utilizados para los sistemas con interacción suelo-estructura analizados poseen la morfología descrita en (2.135). El modelado de la estructura en base a consideraciones físicas permite satisfacer la restricción fundamental de los *GL* en correspondencia con la estructura. La aplicación de técnicas de identificación de parámetros modales sobre las curvas de flexibilidad dinámica de la fundación (derivadas a través de soluciones rigurosas) permite obtener matrices independientes de la frecuencia que no garantizan el cumplimiento de esta condición. La ecuación (2.149) implica que el modelado de la fundación con *GL* sin masa asociada en correspondencia con los *GL* físicos libera a las formas modales de la necesidad de cumplir la restricción fundamental.

C) Modelo de Respuesta

Las ecuaciones del modelo de respuesta resultan idénticas a las obtenidas para el caso de matriz de masa no-singular utilizando (2.145) en lugar de (2.113).

2.4 Modelos Completos e Incompletos

El comportamiento de un sistema dinámico puede describirse a través de tres tipos diferentes de modelos presentados en las secciones anteriores: físicos, modales y de respuesta. Las versiones analíticas de estos modelos resultan esencialmente equivalentes dado que la transformación de uno a otro no implica pérdidas de información. La equivalencia supone que se utilizan modelos completos; es decir, se conocen todos los elementos de las matrices de rigidez, masa y amortiguamiento, o todos los polos y las componentes de las formas modales, o todos los elementos de las matrices de respuesta.

La medición de la respuesta o la aplicación de fuerzas excitatrices en todas las coordenadas del sistema definidas en el modelo analítico resulta prácticamente imposible. La relación que existe entonces entre el número de coordenadas de los modelos analíticos y experimentales puede alcanzar normalmente dos, tres o más órdenes de magnitud. Por otra parte, el número de modos experimentales que pueden identificarse en un ensayo modal depende de los parámetros de muestreo. Además, se considera que sólo un tercio del número de modos analíticos de un modelo discreto resultan representativos de un sistema continuo. La comparación entre el número de modos analíticos representativos y el número de modos experimentales identificados presenta también diferencias considerables. De esta forma, la inevitable utilización de modelos experimentales incompletos degrada la equivalencia entre los modelos físicos, modales y de respuesta.

Las limitaciones en el número de coordenadas y modos resulta irrelevante en casos que sólo interesa obtener modelos representacionales (modelos físicos condensados) que

reproduzcan la respuesta medida. Los coeficientes de las matrices de estos modelos no poseen una vinculación explícita con los parámetros físicos del sistema.

El objetivo principal del presente trabajo requiere la solución de los problemas vinculados a las limitaciones de los modelos experimentales. Los parámetros de ajuste que intervienen en el proceso de calibración de los modelos analíticos deben relacionarse con propiedades geométricas y mecánicas del sistema. La discrepancia entre modelos analíticos y experimentales se atribuye a valores inexactos de estos parámetros de ajuste. La correlación de estos modelos a los efectos de la calibración exige la utilización del mismo tipo de información: uno o ambos modelos deben transformarse a coordenadas físicas, modales o de respuesta. A continuación se analizan los efectos de las limitaciones del modelo experimental en función del tipo de modelo elegido para la correlación.

2.4.1 Limitación en el Número de Coordenadas

El número de coordenadas medidas suele limitarse por razones técnicas y económicas. La dificultad de medir giros o aplicar momentos excitatrices y la necesidad de acotar el tiempo de ejecución del ensayo modal resultan restricciones corrientes.

El procesamiento de señales y la aplicación de técnicas de identificación de parámetros modales sobre los datos experimentales permiten derivar modelos de respuesta y modelos modales respectivamente. Estos modelos vinculados íntimamente a la flexibilidad dinámica no resultan afectados por las coordenadas medidas. La derivación de la flexibilidad dinámica requiere la aplicación de una fuerza unitaria armónica en la coordenada de excitación mientras se asignan fuerzas nulas a las restantes coordenadas. La inclusión o exclusión de alguna coordenada no afecta los coeficientes de las coordenadas medidas.

Las técnicas de identificación de sistema o métodos directos permiten obtener modelos físicos condensados directamente de los datos experimentales. La limitación en el número de coordenadas afecta severamente los coeficientes de la matriz de rigidez dinámica de los modelos físicos. La derivación de la rigidez dinámica requiere el bloqueo de todas las coordenadas medidas mientras se aplica un desplazamiento unitario armónico en la coordenada de excitación. La inclusión o exclusión de alguna coordenada implica un bloqueo o desbloqueo que afecta los restantes coeficientes de las coordenadas medidas.

A) Modelo Físico

La correlación de modelos físicos en el proceso de calibración requiere la reducción de las matrices físicas de la contraparte analítica. La simple eliminación de filas y columnas que puede efectuarse en los modelos modales y de respuesta (vinculados a la flexibilidad dinámica) no es aplicable dado que se obtendría un modelo con propiedades completamente diferentes. La utilización de *técnicas de condensación o reducción dinámica* permiten la redistribución de las propiedades de rigidez, masa y amortiguamiento entre las coordenadas retenidas. En el trabajo de Avitabile *et al.* [16] se analizan varias técnicas de condensación. Las técnicas de reducción dinámica de mayor difusión son las siguientes:

- *Condensación estática* (Guyan [17]). La aplicación original de esta técnica se encuentra en la obtención de los primeros modos de vibración de modelos de gran tamaño sin amortiguamiento. Las matrices condensadas de rigidez y masa preservan las propieda-

des modales para baja frecuencia. El grado de aproximación de esta técnica depende de la selección de los GL retenidos.

- *Condensación dinámica* (Paz [18]). Esta técnica resulta exacta sólo para una frecuencia de referencia. La variación de la frecuencia de referencia en forma iterativa en la resolución de problemas de autovalores permite converger rápidamente a la solución exacta.
- *Condensación mejorada* (O'Callahan [19]). Las características dinámicas del modelo reducido se optimizan con la inclusión de la contribución de las fuerzas de inercia de los GL suprimidos.
- *Proceso equivalente de reducción-expansión* (O'Callahan *et al.* [20]). La condensación de las matrices del modelo se realiza a través de las formas modales analíticas. El modelo reducido posee exactamente las mismas frecuencias y formas modales que el modelo completo para los modos seleccionados. La capacidad de reproducción de las características dinámicas es insensible a la selección de GL retenidos en el modelo reducido.

En el trabajo de Lieven y Ewins [21] se analizan las principales desventajas de las técnicas de reducción dinámica. Desde el punto de vista de la calibración de modelos, los principales problemas de las matrices condensadas son la diseminación de los parámetros físicos y la disolución de las conectividades del sistema.

B) Modelo Modal

El modelo modal no resulta afectado por la reducción de coordenadas. Los parámetros modales experimentales se obtienen aplicando técnicas de identificación sobre el modelo de respuesta derivado del ensayo modal. El modelo modal analítico surge de la resolución de un problema de autovalores. Las técnicas de correlación de las formas modales permiten la vinculación de las contrapartes analítica y experimental a los efectos de la calibración. Esta correlación se efectúa con la simple eliminación de los GL no medidos de las formas modales analíticas.

La calibración del modelo analítico puede realizarse utilizando la matriz de sensibilidad del modelo modal respecto a los parámetros de ajuste. El cálculo de los coeficientes de la matriz de sensibilidad requiere que las formas modales experimentales posean todas las coordenadas del modelo analítico. La solución habitualmente adoptada para completar los datos faltantes consiste en utilizar *técnicas de expansión modal* para determinar valores de los elementos no medidos utilizando un modelo analítico preexistente. El grado de aproximación de la expansión depende de la exactitud del modelo analítico. En general, los resultados de la expansión resultan más apropiados para modos de baja frecuencia.

En el trabajo de Gysin [22] se comparan distintas técnicas de expansión modal que pueden agruparse en cuatro categorías de acuerdo al grado de dependencia respecto al modelo analítico:

1. *Expansión geométrica de datos experimentales*. El ajuste de curvas suaves y continuas a través de los datos experimentales medidos permite interpolar los datos faltantes sin necesidad de recurrir al modelo analítico. La principal ventaja de estas técnicas es la independencia respecto al modelo analítico. Sin embargo, la incapacidad de re-

presentar cambios espacialmente bruscos de las formas modales constituye el mayor inconveniente.

2. *Generación indirecta de datos utilizando el modelo analítico.* La información adquirida del modelo analítico permite realizar una interpolación geométrica apropiada de los datos experimentales. Estas técnicas constituyen una sofisticación de las técnicas de expansión geométrica.
3. *Generación directa de datos utilizando el modelo analítico y los datos experimentales.* Esta categoría posee las técnicas de expansión de mayor aplicación. Las matrices de transformación derivadas del modelo analítico permiten expandir los datos experimentales a todas las coordenadas analíticas.
4. *Sustitución de formas modales analíticas.* Las componentes faltantes de las formas modales se reemplazan directamente con los valores analíticos sin recurrir a los datos experimentales disponibles. La utilización de esta técnica expeditiva en modos de alta frecuencia puede producir discontinuidades en las formas modales.

Por regla general, una disminución en el número de coordenadas medidas no puede ser totalmente compensada con la utilización de técnicas de expansión modal.

C) Modelo de Respuesta

El modelo de respuesta no resulta afectado por la reducción de coordenadas. En efecto, la correlación de estos modelos sólo requiere la eliminación de filas y columnas de la contraparte analítica en correspondencia con los GL no medidos. Las matrices analíticas del modelo de respuesta se derivan directamente del modelo físico o se obtienen en forma más conveniente en función de los parámetros modales. Las técnicas de expansión descritas anteriormente se utilizan para determinar las matrices de sensibilidad involucradas en la calibración de los parámetros de ajuste.

2.4.2 Limitación en el Número de Modos

El número de modos experimentales identificados depende de la frecuencia de corte impuesta por el muestreo digital. Por otra parte, los modos analíticos de alta frecuencia deben omitirse.

A) Modelo Físico

El modelo físico resulta afectado por la pérdida de la contribución de los modos faltantes. En algunos casos, el número de coordenadas medidas resulta mayor que el número de modos identificados. Las matrices físicas de rango deficiente derivadas de estos modelos de respuesta proporcionan información útil respecto a las zonas de mayor discrepancia entre los modelos analíticos y experimentales. Sin embargo, la interpretación del sentido físico de los coeficientes de estas matrices singulares durante el proceso de calibración resulta dificultosa.

B) Modelo Modal

La limitación en el número de modos no presenta problemas en el modelo modal. La incapacidad de identificar algunos modos sólo repercute en el tamaño de las matrices modales sin afectar los restantes parámetros modales.

C) Modelo de Respuesta

El modelo de respuesta es afectado por la limitación en el número de modos. Sin embargo, el impacto de la frecuencia de corte en las funciones de respuesta en frecuencia (*FRF*) para bajas frecuencias resulta mínimo. La matriz de receptancia de un sistema de amortiguamiento proporcional con N coordenadas medidas y M modos identificados resulta

$$[\alpha_D(\omega)] = \underset{(N \times M)}{[\Phi]} \left[\underset{(M \times M)}{\omega_r^2 + 2i\xi_r\omega_r\omega - \omega^2} \right]^{-1} \underset{(M \times N)}{[\Phi]^T} \quad (2.150)$$

La matriz modal de $N \times M$ para el caso que $M < N$ produce una matriz de receptancia singular con orden N y rango M . El levantamiento de la singularidad se consigue con la contribución de los modos faltantes.

Capítulo 3

Identificación de Modelos de Respuesta

La determinación de un modelo experimental de respuesta es el principal objetivo de un ensayo modal. La planificación y ejecución de un ensayo modal constituyen tanto una ciencia como un arte. Los libros de Ewins [1] y Maia *et al.* [2] presentan los lineamientos generales referidos a la ejecución de un ensayo modal. En los trabajos de Patrick [23], Stein [24] y Tustin [25] se encuentran valiosas advertencias y recomendaciones sobre potenciales dificultades que surgen en las distintas etapas de un ensayo modal. En los trabajos de Lim [26] y Udwadia [27] se presentan técnicas para la determinación de las posiciones más favorables para la colocación de los transductores y la excitación dinámica. En el trabajo de Olsen [28] se describen los tipos de excitación más utilizados para la ejecución de un ensayo modal. En el trabajo de Corelli y Brown [29] se realizan consideraciones específicas del *ensayo de impacto* utilizado en el análisis de los casos reales presentados en el capítulo 9. Algunos aspectos específicos del procesamiento de señales adquiridas a través de ensayos de impacto y los inconvenientes asociados a la aplicación involuntaria de *dobles golpes* se encuentran en el trabajo de Trethewey y Cafeo [30].

La naturaleza discreta de las señales experimentales se analiza en primera instancia. A continuación se describen los distintos tipos de modelos de respuesta que pueden derivarse de las señales experimentales. Los modelos de respuesta utilizados en el presente trabajo son las *funciones de respuesta en frecuencia (FRF)*. En la sección final se describen entonces dos alternativas conceptualmente diferentes para la estimación de la *FRF*.

3.1 Adquisición de Señales Experimentales

Los transductores colocados en el sistema durante los ensayos dinámicos transforman la magnitud física del movimiento registrado en un voltaje que ingresa a la cadena de medición. Un conversor analógico-digital muestrea las señales de voltaje continuo con un intervalo fijo de tiempo produciendo señales experimentales discretas. La transformación del voltaje a desplazamientos, velocidades o aceleraciones se efectúa luego a través de un adecuado factor de conversión.

El procedimiento utilizado para la calibración de modelos analíticos en el presente

trabajo asume que los modelos de respuesta obtenidos en forma experimental son de naturaleza continua. Por lo tanto, el reconocimiento de las características de los modelos de respuesta esencialmente discretos derivados de los ensayos dinámicos y la mitigación de los efectos de la digitalización resultan cruciales.

3.1.1 Efectos de la Digitalización

La digitalización de las señales experimentales produce dos tipos de aproximaciones. En primer lugar, la discretización del tiempo impide el conocimiento de la variación de las señales entre los puntos de muestreo (los modelos de tiempo discreto asumen una variación lineal o a saltos entre estos puntos). La definición rigurosa del modelo de respuesta depende entonces de la frecuencia de muestreo. El instante inicial para el comienzo del registro de las señales puede afectar al modelo de respuesta en casos que la función de carga presente una rápida variación respecto a la frecuencia de muestreo. En segundo lugar, la discretización de la amplitud (denominada *cuantización*) implica la asignación de valores discretos a las señales muestreadas que resultan múltiplos de un incremento de amplitud que depende de la configuración y la calidad de los instrumentos de medición.

La influencia de estas inevitables aproximaciones durante la utilización de modelos discretos en lugar de modelos continuos se torna despreciable para pequeños incrementos de tiempo y amplitud. Sin embargo, la variación de las señales entre puntos de muestreo debe mantenerse aún suficientemente suave para evitar el *efecto de plegado* (*aliasing*). Este efecto se manifiesta a través de la aparición de picos espectrales virtuales dentro del rango de análisis que distorsionan el verdadero contenido de frecuencias de la respuesta. El efecto de plegado resulta sumamente peligroso dado que no presenta indicios de su aparición. La única forma de evitarlo es a través del filtrado de las señales analógicas antes del proceso de digitalización.

3.1.2 Efectos de los Filtros

La función de transferencia de los filtros normalmente utilizados para la eliminación del efecto de plegado presentan una amplitud casi constante dentro del rango de frecuencias de análisis. Sin embargo, la variación de la fase puede ser importante y su efecto debe compensarse durante el procesamiento de las señales. Los parámetros que permiten reproducir la función de transferencia de estos filtros deben encontrarse en los respectivos manuales de los instrumentos de medición.

Los transductores que registran el movimiento del sistema suelen actuar también como filtros analógicos. La función de transferencia de los acelerómetros inductivos utilizados en los casos reales estudiados en el presente trabajo poseen una amplitud prácticamente constante desde cero hasta la máxima frecuencia de trabajo (la mitad de su frecuencia natural) aunque la fase presenta una variación lineal en este rango de frecuencias. La compensación de esta función de transferencia se realiza sin dificultad con los parámetros suministrados por el fabricante.

La identificación del modelo de respuesta en el dominio de la frecuencia suele requerir la aplicación de filtros exponenciales sobre las señales experimentales digitalizadas para reducir el *efecto de fuga* (*leakage*) descrito más adelante. La aplicación de estos filtros exponenciales en el traspaso de las señales experimentales al dominio de la frecuencia equivale

implícitamente a la utilización de la transformada de Laplace con la parte real de la variable s asociada al parámetro de decaimiento. Por lo tanto, el modelo de respuesta analítico expresado en función de la misma variable de Laplace puede correlacionarse directamente con el modelo de respuesta experimental durante el proceso de calibración.

3.2 Variables de Respuesta

En esta sección se realiza una breve descripción de las posibles variables de respuesta que pueden utilizarse para el modelo de respuesta.

3.2.1 Dominio del Tiempo

La versión discreta de la Función de Respuesta a Impulso (*FRI*) es la Función de Respuesta a Pulso (*FRP*) constituida por una secuencia de matrices para cada incremento de tiempo denominadas *Parámetros de Markov*. Las expresiones para la determinación experimental de la *FRP* pueden encontrarse en el libro de Juang [3]. La principal ventaja de las técnicas de identificación en el dominio del tiempo es que se evitan las distorsiones producidas durante la transformación de las señales al dominio de la frecuencia por los efectos de la digitalización. El mayor inconveniente es la necesidad de invertir matrices con datos experimentales de gran tamaño. Además, las *FRP* no pueden utilizarse directamente en la calibración del modelo analítico sino que requieren una transformación al modelo modal o al dominio de la frecuencia.

3.2.2 Dominio de la Frecuencia

El principal atractivo de los modelos experimentales de respuesta en el dominio de la frecuencia es que permiten la correlación directa con el modelo analítico a los efectos de la calibración. Los modelos modales que se emplean también en la correlación de las contrapartes analítica y experimental requieren la aplicación de técnicas de identificación de parámetros modales. Estas técnicas presentan dificultades para sistemas con interacción suelo-estructura debido a la marcada diferencia que existe en la participación modal de los distintos modos en la respuesta dinámica. Además, la vinculación de los modos de ambas contrapartes suele resultar dificultosa mientras que con la *FRF* sólo se requiere correlacionar las matrices con la misma variable de frecuencia.

El efecto de fuga que suele producirse en la transformación de las señales experimentales al dominio de la frecuencia se contrarresta con la utilización de filtros exponenciales. La aplicación de la transformada de Fourier discreta a las señales filtradas equivale a la utilización de la transformada de Laplace sobre las señales originales con un valor no-nulo de la parte real de la variable de Laplace. Las funciones de transferencia experimentales pueden correlacionarse luego directamente con las versiones analíticas utilizando la misma variable de Laplace.

3.3 Identificación de la FRF

La determinación de la *FRF* se realiza con dos enfoques diferentes. El enfoque determinístico se basa en la definición analítica de la flexibilidad dinámica sin contemplar las características intrínsecas de los datos experimentales. El enfoque probabilístico permite suavizar la *FRF* por la eliminación de ruidos aleatorios utilizando los resultados de varias pruebas. Ambos enfoques comienzan con expresiones aplicables a funciones continuas que permiten establecer un vínculo con los fundamentos teóricos. Las expresiones válidas para funciones discretas se presentan luego para el procesamiento de las señales experimentales.

La receptancia es la *FRF* que aparece en las expresiones presentadas por considerarse la respuesta medida en términos de desplazamientos. El reemplazo de desplazamientos por velocidades o aceleraciones permite obtener la movilidad y la acelerancia respectivamente. La influencia que tiene el parámetro de respuesta medido en la calibración del modelo analítico sólo radica en el peso relativo dado a las amplitudes espectrales en función de la frecuencia.

3.3.1 Enfoque Determinístico

La identificación determinística de la *FRF* de tiempo continuo se basa en la *versión analítica de la Transformada de Fourier (TFA)*. La aplicación de esta transformada a la respuesta $u_j^i(t)$ de la coordenada j y a la carga $p_k^i(t)$ aplicada en la coordenada k para una determinada prueba i de un ensayo modal produce

$$u_j^i(\omega) = \mathcal{F}(u_j^i(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_j^i(t) e^{-i\omega t} dt \quad (3.1)$$

$$p_k^i(\omega) = \mathcal{F}(p_k^i(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_k^i(t) e^{-i\omega t} dt \quad (3.2)$$

Desde el punto de vista teórico, la componente $\alpha_{jk}(\omega)$ de la receptancia es independiente de la función de carga aplicada en la prueba i para un sistema dinámico lineal

$$\alpha_{jk}(\omega) = \alpha_{jk}^i(\omega) = \frac{u_j^i(\omega)}{p_k^i(\omega)} \quad (3.3)$$

La utilización de la *TFA* requiere que las funciones de respuesta y carga cumplan la condición de Dirichlet:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt < \infty \quad (3.4)$$

En el caso de señales de un proceso aleatorio que no satisfacen esta condición debe utilizarse indefectiblemente el enfoque probabilístico descrito en la siguiente sección. La aplicación de la *TFA* supone además que las funciones se definen en forma analítica y resultan continuas en el tiempo. Sin embargo, las señales obtenidas en forma experimental a partir de un ensayo modal resultan esencialmente discretas y de duración finita.

El procedimiento utilizado para señales experimentales involucra la *versión discreta de la Transformada de Fourier*¹ (*TFD*). Las ecuaciones (3.1) y (3.2) se reemplazan entonces

¹Las siglas *FFT* utilizadas en forma universal se derivan del inglés *Fast Fourier Transform* que consiste en un sofisticado algoritmo sumamente eficiente desde el punto de vista computacional desarrollado por Cooley y Tukey [31].

por

$$\tilde{u}_j^i(\omega_m) = \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{u}_j^i(t_l)) = \Delta t \sum_{l=1}^N \tilde{u}_j^i(t_l) e^{-i\omega_m t_l} \quad (3.5)$$

$$\tilde{p}_k^i(\omega_m) = \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{p}_k^i(t_l)) = \Delta t \sum_{l=1}^N \tilde{p}_k^i(t_l) e^{-i\omega_m t_l} \quad (3.6)$$

o expresando la frecuencia en ciclos por segundo $[Hz]$

$$\tilde{u}_j^i(f_m) = \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{u}_j^i(t_l)) = \Delta t \sum_{l=1}^N \tilde{u}_j^i(t_l) e^{-2i\pi f_m t_l} \quad (3.7)$$

$$\tilde{p}_k^i(f_m) = \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{p}_k^i(t_l)) = \Delta t \sum_{l=1}^N \tilde{p}_k^i(t_l) e^{-2i\pi f_m t_l} \quad (3.8)$$

con

$$t_l = (l - 1) \Delta t \quad \Delta t = \frac{T}{N} \quad (3.9)$$

$$\omega_m = (m - 1) \Delta \omega \quad \Delta \omega = \frac{2\pi}{T} \quad (3.10)$$

$$f_m = (m - 1) \Delta f \quad \Delta f = \frac{1}{T} \quad (3.11)$$

$$l = 1 \dots N \quad m = 1 \dots N \quad (3.12)$$

donde T es la duración de las señales (en segundos) y N es el número de puntos de muestreo. Una propiedad de la *TFD* de particular importancia es la existencia de una *frecuencia de corte* o *frecuencia de Nyquist* (f_{nyq}) sobre la cual las amplitudes espectrales se repiten con valores complejos conjugados

$$f_{nyq} = \frac{N}{2} \Delta f = \frac{N}{2T} = \frac{1}{2\Delta t} \quad (3.13)$$

En el caso de un número par de puntos N se verifica

$$\tilde{u}_j^i(f_{\bar{m}}) = \tilde{u}_j^{i*}(f_m) \quad (3.14)$$

$$\tilde{p}_k^i(f_{\bar{m}}) = \tilde{p}_k^{i*}(f_m) \quad (3.15)$$

$$\text{donde } \bar{m} = N + 2 - m \quad (3.16)$$

La componente $\tilde{\alpha}_{jk}^i(f_m)$ de la receptancia para la frecuencia f_m se calcula entonces como

$$\tilde{\alpha}_{jk}^i(f_m) = \frac{\tilde{u}_j^i(f_m)}{\tilde{p}_k^i(f_m)} \quad (3.17)$$

La versión discreta de la receptancia en (3.17) sólo se asume representativa de la versión analítica 3.3 con una adecuada discretización temporal.

En el trabajo de Richardson [32] se presenta una descripción detallada de las características más relevantes de la *TFD*. La resolución espectral puede mejorarse agregando al

final de las señales una serie de valores nulos (*zona muerta*) dado que el incremento de frecuencia es inversamente proporcional a la duración total de las señales.

La aplicación de la *TFD* presupone que las señales procesadas de duración finita se repiten periódicamente en el tiempo. En caso que la parte final de las señales no presente una determinada reducción de amplitud se produce una distorsión de las amplitudes espectrales denominada *efecto de fuga* (*leakage*). La solución más conveniente consiste en introducir un amortiguamiento ficticio en las señales a través de la utilización de filtros exponenciales antes de la aplicación de la *TFD*. La forma matemática del filtro exponencial es la siguiente

$$\mathcal{W}(t) = \exp(at) \quad (3.18)$$

El valor de la constante a que produce, por ejemplo, una reducción de la amplitud final del 1% se calcula como

$$a = \frac{\ln(0.01)}{T} \quad (3.19)$$

La aplicación de la transformada de Laplace a las señales experimentales originales con la parte real de la variable de Laplace $\Re(s) = a$ produce el mismo modelo de respuesta que se obtiene utilizando la *TFD* para las señales con filtros exponenciales. Por lo tanto, el modelo de respuesta analítico calculado con esta variable de respuesta puede correlacionarse directamente con la contraparte experimental durante el proceso de calibración.

3.3.2 Enfoque Probabilístico

Las señales obtenidas experimentalmente de un ensayo modal se encuentran afectadas por ruidos generados en la cadena de medición y por efectos de la discretización y el procesamiento de las señales. De esta forma, el resultado de la ecuación (3.17) puede presentar ligeras variaciones entre las distintas pruebas realizadas. La forma adecuada de obtener el valor más probable de las *FRF* con los datos de varias pruebas consiste en la estimación probabilística utilizada para señales aleatorias. En el trabajo de Mitchell [33] se presentan los fundamentos de las técnicas probabilísticas para la determinación de las *FRF* basadas en la utilización de *funciones de correlación* en el dominio del tiempo y *densidades espectrales* en el dominio de la frecuencia.

La función de correlación entre dos funciones estacionarias $v(t)$ y $w(t)$ se calcula como el valor esperado (o promedio) del producto $[v(t) \cdot w(t + \tau)]$ sobre el eje del tiempo

$$R_{vw}(\tau) = E[v(t) \cdot w(t + \tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} v(t) w(t + \tau) dt \quad (3.20)$$

La función de correlación $R_{vw}(\tau)$ satisface la condición de Dirichlet en contraposición con las funciones $v(t)$ y $w(t)$. La *TFA* de la función de correlación se conoce como densidad espectral

$$S_{vw}(\omega) = \mathcal{F}(R_{vw}(\tau)) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{vw}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (3.21)$$

considerada un indicador de la cantidad de energía suministrada al sistema. En el caso que las funciones correlacionadas sean idénticas $R_{vv}(\tau)$ se denomina *función de correlación*

propia (o función de autocorrelación) y $S_{vv}(\omega)$ se designa *densidad espectral propia*. En el caso que las funciones correlacionadas sean diferentes $R_{vw}(\tau)$ se denomina *función de correlación cruzada* y $S_{vw}(\omega)$ se designa *densidad espectral cruzada*. La densidad espectral propia resulta real por derivarse de la función de autocorrelación que es simétrica respecto a $\tau = 0$. La función de correlación cruzada es asimétrica produciendo una densidad espectral cruzada generalmente compleja con la siguiente propiedad de conjugación

$$S_{vw}(\omega) = S_{wv}^*(\omega) \quad (3.22)$$

En el caso que las funciones correlacionadas correspondan a la respuesta y la carga de un ensayo modal se derivan las siguientes relaciones de la dinámica estocástica

$$S_{uu}(\omega) = |\alpha(\omega)|^2 S_{pp}(\omega) \quad (3.23)$$

$$S_{pu}(\omega) = \alpha(\omega) S_{pp}(\omega) \quad (3.24)$$

$$S_{uu}(\omega) = \alpha(\omega) S_{up}(\omega) \quad (3.25)$$

donde se suprimen los subíndices correspondientes a la ubicación de la respuesta y la carga. Estas expresiones se aplican también para señales experimentales procesadas con la *TFD*. Las densidades espectrales se obtienen entonces como el promedio del producto de los espectros de la respuesta y la carga

$$\tilde{S}_{uu}(\omega_m) = \frac{1}{n_i} \sum_{i=1}^{n_i} u_j^{i*}(\omega_m) u_j^i(\omega_m) \quad \tilde{S}_{up}(\omega_m) = \frac{1}{n_i} \sum_{i=1}^{n_i} u_j^{i*}(\omega_m) p_k^i(\omega_m) \quad (3.26)$$

$$\tilde{S}_{pu}(\omega_m) = \frac{1}{n_i} \sum_{i=1}^{n_i} p_k^{i*}(\omega_m) u_j^i(\omega_m) \quad \tilde{S}_{pp}(\omega_m) = \frac{1}{n_i} \sum_{i=1}^{n_i} p_k^{i*}(\omega_m) p_k^i(\omega_m) \quad (3.27)$$

donde n_i representa el número de pruebas.

La ecuación (3.24) permite obtener el primer estimador de la *FRF*

$$\alpha_1(\omega) = \frac{S_{pu}(\omega)}{S_{pp}(\omega)} \quad (3.28)$$

mientras que el segundo estimador de la *FRF* se deriva de (3.25) como

$$\alpha_2(\omega) = \frac{S_{uu}(\omega)}{S_{up}(\omega)} \quad (3.29)$$

Aunque en condiciones ideales ambos estimadores proporcionan el mismo resultado, las imperfecciones de las señales experimentales producen que $\alpha_1(\omega)$ represente una cota inferior y $\alpha_2(\omega)$ represente una cota superior de la receptancia. Un tercer estimador se obtiene entonces con el promedio de ambos estimadores

$$\alpha_3(\omega) = \frac{1}{2} (\alpha_1(\omega) + \alpha_2(\omega)) \quad (3.30)$$

El estimador $\alpha_2(\omega)$ presenta resultados más confiables en correspondencia con las resonancias dado que la mayor sensibilidad de las señales de carga en estas regiones torna más vulnerable a $S_{pp}(\omega)$. Por el contrario, el estimador $\alpha_1(\omega)$ produce mejores resultados cerca de las anti-resonancias dado que la sensibilidad de las señales de respuesta afecta a $S_{uu}(\omega)$.

A los efectos de diseño, el estimador $\alpha_2(\omega)$ resulta más adecuado por su mejor aproximación en las zonas de resonancias. La relación de los estimadores $\alpha_1(\omega)$ y $\alpha_2(\omega)$ constituye una medida cualitativa de la exactitud obtenida

$$\gamma^2(\omega) = \frac{\alpha_1(\omega)}{\alpha_2(\omega)} = \frac{S_{pu}(\omega) S_{up}(\omega)}{S_{pp}(\omega) S_{uu}(\omega)} = \frac{|S_{pu}(\omega)|^2}{S_{pp}(\omega) S_{uu}(\omega)} \quad (3.31)$$

Esta relación se denomina *coherencia* y varía en función de la frecuencia entre 0 y 1. En condiciones ideales la coherencia toma un valor unitario. A medida que las imperfecciones se tornan importantes la coherencia se degrada presentando valores menores a la unidad. La utilización del promedio de varias pruebas permite disminuir el efecto nocivo de ruidos aleatorios sobre la coherencia. Sin embargo, las distorsiones sistemáticas que producen un *error de tendencia (bias)* no pueden removerse a través de la realización de varias pruebas. Las principales causas que generan una degradación de la coherencia se describen a continuación:

- La presencia de ruidos en la cadena de medición.
- La resolución en frecuencia determinada por la duración total de las señales resulta inadecuada para reproducir una rápida variación de las *FRF* en zonas de resonancias y antiresonancias para sistemas de bajo amortiguamiento.
- El sistema se encuentra sujeto a otras fuentes de excitación no consideradas en el análisis.
- El sistema no es completamente lineal.

En el caso que existan determinados rangos de frecuencia con baja coherencia resulta conveniente excluir los datos experimentales afectados o aplicar adecuadas funciones de peso en el proceso de calibración.

Capítulo 4

Identificación de Modelos Modales

Las técnicas de *identificación de parámetros modales* permiten extraer del modelo de respuesta experimental las matrices del modelo modal que condensan las principales propiedades dinámicas del sistema ensayado. La identificación de parámetros modales representa un caso típico de los denominados *problemas inversos* que comprenden la determinación de la función de transferencia del sistema que reproduce la respuesta medida para una carga determinada. Los problemas inversos se caracterizan por sistemas de ecuaciones no-lineales respecto a las incógnitas que poseen en general un mal-condicionamiento numérico. La forma habitual de resolver estos sistemas consiste en el planteo de una formulación lineal aproximada con una transformación de variables que permite un condicionamiento numérico adecuado. El éxito de los algoritmos de extracción de parámetros modales radica entonces en la obtención de un sistema linealizado de ecuaciones robusto e insensible a pequeñas dispersiones de los datos experimentales.

En el presente trabajo no resulta necesario identificar un modelo modal experimental de la respuesta medida dado que el modelo de respuesta experimental se utiliza directamente en el proceso de calibración del modelo analítico del sistema. Sin embargo, las técnicas de identificación de parámetros modales se aplican en este caso a las curvas analíticas de receptancia de la fundación en los *GL* de la interfaz con la estructura. El objetivo de este artificio consiste en obtener un modelo compacto de matrices independientes de la frecuencia que representen el comportamiento dinámico de la fundación en un determinado rango de frecuencias. El modelo modal derivado se transforma luego en un modelo físico de la fundación que se ensambla con el modelo de la estructura para el análisis del sistema acoplado de acuerdo al procedimiento descrito en el próximo capítulo.

Las curvas analíticas de la fundación utilizadas representan soluciones rigurosas obtenidas con modelos de elementos semi-analíticos del suelo. El programa de interacción suelo-estructura *SASSI* [34] se emplea para obtener las curvas de receptancia de la fundación de los casos estudiados. La descripción modal de la receptancia de las fundaciones modeladas con este programa se realiza utilizando dos técnicas de identificación de parámetros modales en el dominio de la frecuencia: el *método de la fracción polinómica matricial (MFPM)* y el *método del polinomio matricial complejo (MPMC)*. Los fundamentos de ambas técnicas son similares aunque cada uno presenta diferentes ventajas e inconvenientes de acuerdo a los casos analizados. El *MFPM* descrito en primer término se utiliza frecuentemente en análisis modal experimental para el ajuste de *FRF* de sistemas con bajo amortiguamiento que genera picos de resonancia y anti-resonancia pronunciados. La aproximación obtenida

con esta técnica es bastante satisfactoria aunque produce matrices asimétricas que pueden regularizarse a costas de distintos grados de pérdida de la bondad del ajuste. El *MPMC* descrito en segundo término constituye una contribución original del presente trabajo. Esta técnica produce matrices simétricas aunque el ajuste sólo resulta satisfactorio para curvas suaves de receptancia con alto amortiguamiento como las que se obtienen generalmente para fundaciones.

Los algoritmos de mayor aplicación sobre datos experimentales se describen brevemente a continuación con el objeto de generar un marco de referencia para los métodos seleccionados para el ajuste de las curvas analíticas de la fundación. Los ejemplos de aplicación de las técnicas descritas en las secciones finales se presentan en el próximo capítulo junto con las matrices físicas derivadas de los modelos modales respectivos.

4.1 Algoritmos de Identificación de Parámetros Modales

En los trabajos de Füllekrug [35] y Zhang *et al.* [36] se presentan distintas clasificaciones de los algoritmos de identificación de parámetros modales. En el trabajo de Allemang *et al.* [37] se describen estos algoritmos con un enfoque unificado basado en la aproximación de las componentes del modelo modal a través de polinomios matriciales: se demuestra que un considerable número de algoritmos en los dominios del tiempo y la frecuencia representan sólo casos particulares de una formulación polinómica general denominada *aproximación polinómica matricial unificada*.

La clasificación de los algoritmos puede realizarse utilizando distintos criterios. De acuerdo al dominio en que se procesan los datos se encuentran algoritmos en el *dominio del tiempo* y en el *dominio de la frecuencia*. De acuerdo al modelo experimental obtenido se distinguen algoritmos *directos* e *indirectos*. Los algoritmos directos utilizados en *identificación de sistema* se basan en las ecuaciones de equilibrio dinámico para obtener un modelo físico condensado que reproduce la respuesta medida. Los algoritmos indirectos basados en los parámetros modales permiten la derivación de un modelo modal. Los algoritmos indirectos en el dominio de la frecuencia presentan dos variantes: los algoritmos de *modo único* ajustan individualmente cada modo mientras que los algoritmos de *modos múltiples* analizan varios modos en forma simultánea.

Los algoritmos de identificación de parámetros modales se clasifican también de acuerdo a la porción ajustada de la matriz de receptancia. Los algoritmos de *carga única respuesta única* (*CURU*) analizan individualmente cada componente de la matriz de receptancia. Los algoritmos de *carga única respuesta múltiple* (*CURM*) analizan una columna completa con todos los *GL* medidos para una posición específica de la carga (o una fila completa con todos los *GL* excitados de a uno por vez para una determinada posición de un único transductor). Los algoritmos de *carga múltiple respuesta múltiple* (*CMRM*) denominados *poli-referenciales* analizan la matriz de respuesta completa para varias posiciones de la carga. Los autovalores obtenidos por los algoritmos de *CURU* presentan generalmente dispersiones normales para datos experimentales de acuerdo a la componente ajustada. Estas dispersiones pueden suavizarse a través de un promedio pesado en función de la participación modal en cada posición medida. Los algoritmos de *CURM* y *CMRM* permiten obtener los autovalores naturalmente suavizados como propiedades globales del sistema que no varían entre las componentes de la matriz de receptancia.

El *MPMC* utilizado en el presente trabajo se enmarca dentro de los algoritmos indirectos de *CURU* aplicados en el dominio de la frecuencia. Sin embargo, los coeficientes ajustados de los polinomios complejos no guardan una relación directa con los parámetros modales. Las matrices modales se determinan en una instancia posterior con la totalidad de los coeficientes de los *GL* ajustados para obtener un conjunto único de autovalores. Las matrices físicas derivadas de las matrices modales resultan simétricas.

El *MFPM* se enmarca dentro de los algoritmos de *CMRM*. Una característica de estos algoritmos es que la linealización de las ecuaciones de ajuste impide controlar la simetría de las matrices resultantes. El motivo de la asimetría obtenida es que el número de coeficientes ajustados es mayor que el número rigurosamente necesario de elementos para definir matrices simétricas. Una propiedad importante de los modelos asimétricos es que los *autovectores por derecha* difieren generalmente de los *autovectores por izquierda*. Sin embargo, la diferencia entre ambos conjuntos de autovectores suele resultar pequeña y la imposición de la simetría se consigue con una degradación mínima del ajuste obtenido.

Las matrices modales obtenidas con ambas técnicas utilizadas (*MFPM* y *MPMC*) suelen presentar polos inestables caracterizados por la parte real positiva. En el trabajo de Vold et al. [38] se demuestra la influencia que poseen las pequeñas dispersiones de fase de las componentes de las formas modales obtenidas en el ajuste respecto a la estabilidad de algunos polos. A pesar de una aparente contradicción física, el conjunto completo de los modos garantiza la estabilidad del sistema cuando la bondad del ajuste refleja las características de estabilidad de las curvas analíticas obtenidas con las soluciones rigurosas. La inestabilidad de los polos se manifiesta en la aparición de elementos negativos en la diagonal principal de las matrices físicas derivadas del modelo modal. La eliminación compulsiva de los modos con polos inestables puede atentar contra la bondad del ajuste conseguido. En el trabajo de Juang y Maghami [39] se proponen técnicas basadas en métodos de programación no-lineal que permiten efectuar un reajuste fino del modelo modal para la estabilización de los polos inestables y la obtención de un modelo físicamente más robusto. Estas técnicas no se profundizan dado que se apartan de los objetivos planteados en el presente trabajo.

4.2 Método de la Fracción Polinómica Matricial (*MFPM*)

El *MFPM* permite obtener un modelo modal a partir del ajuste de la *FRF*. La versión original del *MFPM* se presenta en el trabajo de Shih *et al.* [40] aunque en esta sección se describe con algunas variantes que presentan ventajas computacionales. Esta técnica surge como una extensión matricial del algoritmo de *CURU* denominado *método de la fracción racional de polinomios ortogonales* propuesto por Richardson y Formenti en [41]. En el capítulo 7 del libro de Juang [3] se describen dos versiones de este algoritmo basadas en modelos de tiempo discreto. El modelo modal ajustado a la receptancia analítica de la fundación se utiliza en el próximo capítulo para la determinación de matrices físicas independientes de la frecuencia que se ensamblan con el modelo físico de la estructura.

4.2.1 Determinación de Coeficientes Polinómicos Matriciales

La flexibilidad dinámica se ajusta a través de una fracción polinómica matricial de la siguiente forma¹

$$[H(s)] = [Q'(s)]^{-1}[R'(s)] \quad (4.1)$$

donde

$$[Q'(s)] = [I] + s^{-1}[Q'_1] + s^{-2}[Q'_2] + \dots + s^{-L}[Q'_L] \quad (4.2a)$$

$$[R'(s)] = [R'_0] + s^{-1}[R'_1] + s^{-2}[R'_2] + \dots + s^{-L}[R'_L] \quad (4.2b)$$

o alternativamente

$$[H(s)] = [R''(s)][Q''(s)]^{-1} \quad (4.3)$$

donde

$$[Q''(s)] = [I] + s^{-1}[Q''_1] + s^{-2}[Q''_2] + \dots + s^{-L}[Q''_L] \quad (4.4a)$$

$$[R''(s)] = [R''_0] + s^{-1}[R''_1] + s^{-2}[R''_2] + \dots + s^{-L}[R''_L] \quad (4.4b)$$

Estos modelos de orden L representan un sistema lineal de múltiples GL con amortiguamiento viscoso. Las matrices del polinomio $[Q'(s)]$ poseen dimensiones $J \times J$ donde J representa el número de filas de la matriz de flexibilidad dinámica. Las matrices del polinomio $[Q''(s)]$ poseen dimensiones $K \times K$ donde K representa el número de columnas de la matriz de flexibilidad dinámica. Las matrices de los polinomios $[R'(s)]$ y $[R''(s)]$ poseen dimensiones $J \times K$. La receptancia analítica de la fundación ajustada es siempre cuadrada ($J = K$) produciendo que las diferencias entre las formas modales derechas e izquierdas resulten pequeñas.

Las expresiones (4.1) y (4.3) representan aproximaciones de la flexibilidad dinámica especialmente convenientes por la obtención de los coeficientes matriciales en (4.2) y (4.4) a través de un sistema lineal de ecuaciones. Aunque carecen de una justificación física rigurosa, estas expresiones pueden interpretarse como una versión de tiempo continuo de un modelo comúnmente utilizado en ingeniería de control denominado ARMA (*auto-regressive moving average*). La utilización de (4.1) genera la *versión izquierda* del MFPM con $J \times L$ autovalores mientras que la utilización de (4.3) produce la *versión derecha* del MFPM con $K \times L$ autovalores. A continuación se desarrolla la versión izquierda que presenta algunas ventajas computacionales.

La multiplicación simultánea de $[Q'(s)]$ y $[R'(s)]$ por s^L no altera la aproximación de la flexibilidad dinámica en (4.1) que toma la siguiente forma

$$[H(s)] = [Q(s)]^{-1}[R(s)] \quad (4.5)$$

donde

$$[Q(s)] = [Q_0] + s[Q_1] + s^2[Q_2] + \dots + s^{L-1}[Q_{L-1}] + s^L[I] \quad (4.6a)$$

$$[R(s)] = [R_0] + s[R_1] + s^2[R_2] + \dots + s^{L-1}[R_{L-1}] + s^L[R_L] \quad (4.6b)$$

¹La utilización de la variable de Laplace ($s = i\omega$) permite obtener expresiones reales.

con

$$[Q_i] = [Q'_{L-i}] \quad [R_i] = [R'_{L-i}]$$

La multiplicación de (4.5) por $[Q(s)]$ y el reagrupamiento matricial considerando M frecuencias de medición produce

$$-\begin{bmatrix} [Q] & [I] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [S_{JA}] \\ [S_{JB}] \end{bmatrix} [H] + [R][S_K] = [0] \quad (4.7)$$

donde

$$[Q] = \begin{bmatrix} [Q_0] & [Q_1] & [Q_2] & \cdots & [Q_{L-1}] \end{bmatrix} \quad (4.8a)$$

$$[R] = \begin{bmatrix} [R_0] & [R_1] & [R_2] & \cdots & [R_{L-1}] & [R_L] \end{bmatrix} \quad (4.8b)$$

$$[S_{JA}] = \begin{bmatrix} [I_J] & [I_J] & [I_J] & \cdots & [I_J] \\ s_0 [I_J] & s_1 [I_J] & s_2 [I_J] & \cdots & s_{M-1} [I_J] \\ s_0^2 [I_J] & s_1^2 [I_J] & s_2^2 [I_J] & \cdots & s_{M-1}^2 [I_J] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_0^{L-1} [I_J] & s_1^{L-1} [I_J] & s_2^{L-1} [I_J] & \cdots & s_{M-1}^{L-1} [I_J] \end{bmatrix} \quad (4.8c)$$

$$[S_{JB}] = \begin{bmatrix} s_0^L [I_J] & s_1^L [I_J] & s_2^L [I_J] & \cdots & s_{M-1}^L [I_J] \end{bmatrix} \quad (4.8d)$$

$$[S_K] = \begin{bmatrix} [I_K] & [I_K] & [I_K] & \cdots & [I_K] \\ s_0 [I_K] & s_1 [I_K] & s_2 [I_K] & \cdots & s_{M-1} [I_K] \\ s_0^2 [I_K] & s_1^2 [I_K] & s_2^2 [I_K] & \cdots & s_{M-1}^2 [I_K] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_0^{L-1} [I_K] & s_1^{L-1} [I_K] & s_2^{L-1} [I_K] & \cdots & s_{M-1}^{L-1} [I_K] \\ s_0^L [I_K] & s_1^L [I_K] & s_2^L [I_K] & \cdots & s_{M-1}^L [I_K] \end{bmatrix} \quad (4.8e)$$

$$[H] = \begin{bmatrix} [H(s_0)] & [0] & [0] & \cdots & [0] \\ [0] & [H(s_1)] & [0] & \cdots & [0] \\ [0] & [0] & [H(s_2)] & \cdots & [0] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & [0] & \cdots & [H(s_{M-1})] \end{bmatrix} \quad (4.8f)$$

Las matrices $[Q]$ y $[R]$ se agrupan en una única matriz $[\mathcal{X}]$ expresando la ecuación (4.7) como

$$[\mathcal{X}][S_A] = [S_B] \quad (4.9)$$

donde

$$[\mathcal{X}] = \begin{bmatrix} [Q] & [R] \end{bmatrix} \quad (4.10a)$$

$$[S_A] = \begin{bmatrix} -[S_{JA}][H] \\ [S_K] \end{bmatrix} \quad (4.10b)$$

$$[S_B] = [S_{JB}][H] \quad (4.10c)$$

La aplicación del criterio de mínimos cuadrados permite obtener la matriz $[\mathcal{X}]$ como

$$[\mathcal{X}] = [S_B][S_A]^H ([S_A][S_A]^H)^{-1} = [S_B][S_A]^\dagger \quad (4.11)$$

donde $(^H)$ indica complejo conjugado transpuesto y $(^\dagger)$ representa pseudo-inversa². La utilización de la ecuación (4.11) presenta un serio problema numérico debido a que el mal-condicionamiento de la matriz $[S_A][S_A]^H$ producido por un rango deficiente genera una falla durante su inversión. Este mal-condicionamiento numérico se acentúa a medida que aumenta el grado L de los polinomios matriciales. La transformación de las matrices que intervienen en la ecuación (4.11) utilizando polinomios ortogonales permite generar un sistema de ecuaciones numéricamente balanceado.

Los *polinomios ortogonales de Forsythe* $[\bar{\mathcal{P}}]$ utilizados cumplen la siguiente propiedad

$$[\bar{\mathcal{P}}][\bar{\mathcal{P}}]^H = [I] \quad (4.12)$$

La transformación de la matriz de frecuencias $[\bar{S}]$ utilizando la matriz $[\bar{T}]$ produce

$$[\bar{T}][\bar{S}] = [\bar{\mathcal{P}}] \quad (4.13)$$

donde

$$[\bar{S}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{M-1} \\ s_0^2 & s_1^2 & s_2^2 & \cdots & s_{M-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_0^L & s_1^L & s_2^L & \cdots & s_{M-1}^L \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$[\bar{\mathcal{P}}] = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{0,0} & \bar{\sigma}_{0,1} & \bar{\sigma}_{0,2} & \cdots & \bar{\sigma}_{0,M-1} \\ \bar{\sigma}_{1,0} & \bar{\sigma}_{1,1} & \bar{\sigma}_{1,2} & \cdots & \bar{\sigma}_{1,M-1} \\ \bar{\sigma}_{2,0} & \bar{\sigma}_{2,1} & \bar{\sigma}_{2,2} & \cdots & \bar{\sigma}_{2,M-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\sigma}_{L,0} & \bar{\sigma}_{L,1} & \bar{\sigma}_{L,2} & \cdots & \bar{\sigma}_{L,M-1} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$$[\bar{T}] = \begin{bmatrix} T_{0,0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & T_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ T_{2,0} & 0 & T_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & T_{L,1} & 0 & \cdots & T_{L,L} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

El cálculo de los coeficientes $\bar{\sigma}_{l,m}$ de la matriz $[\bar{\mathcal{P}}]$ se realiza utilizando las siguientes fórmulas

²La pseudo-inversa de una matriz $[X]$ se calcula como

$$[X]^\dagger = [X]^H ([X][X]^H)^{-1}$$

de recurrencia

$$\begin{array}{lll}
 \sigma_{0,m} = 1 & d_0 = \left(\sum_{m=0}^{M-1} |\sigma_{0,m}^2| \right)^{\frac{1}{2}} & \bar{\sigma}_{0,m} = \frac{\sigma_{0,m}}{d_0} \\
 \sigma_{1,m} = s_m \bar{\sigma}_{0,m} & d_1 = \left(\sum_{m=0}^{M-1} |\sigma_{1,m}^2| \right)^{\frac{1}{2}} & \bar{\sigma}_{1,m} = \frac{\sigma_{1,m}}{d_1} \\
 \sigma_{2,m} = s_m \bar{\sigma}_{1,m} + d_1 \bar{\sigma}_{0,m} & d_2 = \left(\sum_{m=0}^{M-1} |\sigma_{2,m}^2| \right)^{\frac{1}{2}} & \bar{\sigma}_{2,m} = \frac{\sigma_{2,m}}{d_2} \\
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 \sigma_{L,m} = s_m \bar{\sigma}_{L-1,m} + d_{L-1} \bar{\sigma}_{L-2,m} & d_L = \left(\sum_{m=0}^{M-1} |\sigma_{L,m}^2| \right)^{\frac{1}{2}} & \bar{\sigma}_{L,m} = \frac{\sigma_{L,m}}{d_L}
 \end{array}$$

La matriz de transformación $[\bar{T}]$ adopta la siguiente forma

$$[\bar{T}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_0} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{d_0 d_1} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{d_1 T_{0,0}}{d_2} & 0 & \frac{1}{d_0 d_1 d_2} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{T_{2,0} + d_2 T_{1,1}}{d_3} & 0 & \frac{1}{d_0 d_1 d_2 d_3} & \dots \\ \frac{d_3 T_{2,0}}{d_4} & 0 & \frac{T_{3,1} + d_3 T_{2,2}}{d_4} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{T_{4,0} + d_4 T_{3,1}}{d_5} & 0 & \frac{T_{4,2} + d_4 T_{3,3}}{d_5} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Las matrices $[\mathcal{P}]$ y $[T]$ que se utilizan a continuación se componen de los elementos de las matrices $[\bar{\mathcal{P}}]$ y $[\bar{T}]$ en (4.15) y (4.16) multiplicados por las matrices de identidad $[I_J]$ y $[I_K]$. La ecuación (4.7) se expresa entonces como

$$\begin{aligned}
 & - \begin{bmatrix} [Q] & [I] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [T_{JA}]^{-1} & [0] \\ -[T_{JB}]^{-1}[T_{JC}][T_{JA}]^{-1} & [T_{JB}]^{-1} \end{bmatrix} \times \dots \\
 & \begin{bmatrix} [T_{JA}] & [0] \\ [T_{JC}] & [T_{JB}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [S_{JA}] \\ [S_{JB}] \end{bmatrix} [H] + [R][T_K]^{-1}[T_K][S_K] = [0] \tag{4.17}
 \end{aligned}$$

Operando se arriba a

$$- \begin{bmatrix} [Q] & [T_{JB}]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathcal{P}_{JA}] \\ [\mathcal{P}_{JB}] \end{bmatrix} [H] + [\mathcal{R}][\mathcal{P}_K] = [0] \tag{4.18}$$

$$-[Q][\mathcal{P}_{JA}][H] + [\mathcal{R}][\mathcal{P}_K] = [T_{JB}]^{-1}[\mathcal{P}_{JB}][H] \tag{4.19}$$

$$[Q][\mathcal{P}_Q] + [\mathcal{R}][\mathcal{P}_R] = [\mathcal{H}_P] \tag{4.20}$$

donde

$$\begin{aligned} [\mathcal{Q}] &= ([Q] - [T_{\text{JB}}]^{-1}[T_{\text{JC}}]) [T_{\text{JA}}]^{-1} & [\mathcal{R}] &= [R][T_{\text{K}}]^{-1} \\ [\mathcal{P}_{\text{JA}}] &= [T_{\text{JA}}][S_{\text{JA}}] & [\mathcal{P}_{\text{K}}] &= [T_{\text{K}}][S_{\text{K}}] \\ [\mathcal{P}_{\text{JB}}] &= [T_{\text{JC}}][S_{\text{JA}}] + [T_{\text{JB}}][S_{\text{JB}}] & [\mathcal{H}_{\text{P}}] &= [T_{\text{JB}}]^{-1}[\mathcal{P}_{\text{JB}}][H] \\ [\mathcal{P}_{\text{Q}}] &= -[\mathcal{P}_{\text{JA}}][H] & [\mathcal{P}_{\text{R}}] &= [\mathcal{P}_{\text{K}}] \end{aligned}$$

La resolución de (4.20) por mínimos cuadrados produce

$$[\mathcal{Q}][\mathcal{P}_1] + [\mathcal{R}][\mathcal{P}_2] = [\mathcal{H}_1] \quad (4.21a)$$

$$[\mathcal{Q}][\mathcal{P}_2]^H + [\mathcal{R}][I] = [\mathcal{H}_2] \quad (4.21b)$$

donde

$$\begin{aligned} [\mathcal{P}_1] &= \text{Re}([\mathcal{P}_{\text{Q}}][\mathcal{P}_{\text{Q}}]^H) & [\mathcal{H}_1] &= \text{Re}([\mathcal{H}_{\text{P}}][\mathcal{P}_{\text{Q}}]^H) \\ [\mathcal{P}_2] &= \text{Re}([\mathcal{P}_{\text{R}}][\mathcal{P}_{\text{Q}}]^H) & [\mathcal{H}_2] &= \text{Re}([\mathcal{H}_{\text{P}}][\mathcal{P}_{\text{R}}]^H) \\ [I] &= \text{Re}([\mathcal{P}_{\text{R}}][\mathcal{P}_{\text{R}}]^H) \end{aligned}$$

La forma explícita de (4.21) es la siguiente

$$[\mathcal{Q}] = ([\mathcal{H}_1] - [\mathcal{H}_2][\mathcal{P}_2]) ([\mathcal{P}_1] - [\mathcal{P}_2]^T[\mathcal{P}_2])^\dagger \quad (4.22)$$

$$[\mathcal{R}] = [\mathcal{H}_2] - [\mathcal{Q}][\mathcal{P}_2]^H \quad (4.23)$$

La determinación de las matrices $[Q]$ y $[R]$ como

$$[Q] = [\mathcal{Q}][T_{\text{JA}}] + [T_{\text{JB}}]^{-1}[T_{\text{JC}}] \quad (4.24)$$

$$[R] = [\mathcal{R}][T_{\text{K}}] \quad (4.25)$$

permite finalmente la recuperación de los coeficientes originales de la fracción polinómica matricial.

4.2.2 Determinación de Matrices Modales

El replanteo de la ecuación (4.5) en términos de *matrices de sistema*³ construidas en base a las componentes de los polinomios matriciales $[Q(s)]$ y $[R(s)]$ permite obtener expresiones más adecuadas para la determinación de las matrices modales

$$[H(s)] = [C](s[I] - [A])^{-1}[B] + [D] \quad (4.26)$$

³Esta designación es consistente con la utilizada para modelos de tiempo discreto.

donde

$$[\mathcal{A}] = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] & \cdots & [0] & -[Q_0] \\ [I] & [0] & [0] & \cdots & [0] & -[Q_1] \\ [0] & [I] & [0] & \cdots & [0] & -[Q_2] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [0] & [0] & [0] & \cdots & [0] & -[Q_{L-2}] \\ [0] & [0] & [0] & \cdots & [I] & -[Q_{L-1}] \end{bmatrix} \quad (4.27a)$$

$$[\mathcal{B}] = \begin{bmatrix} [R_0] - [Q_0][R_L] \\ [R_1] - [Q_1][R_L] \\ [R_2] - [Q_2][R_L] \\ \vdots \\ [R_{L-2}] - [Q_{L-2}][R_L] \\ [R_{L-1}] - [Q_{L-1}][R_L] \end{bmatrix} \quad (4.27b)$$

$$[\mathcal{C}] = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] & \cdots & [0] & [I] \end{bmatrix} \quad (4.27c)$$

$$[\mathcal{D}] = [R_L] \quad (4.27d)$$

La matriz $[\mathcal{D}]$ denominada matriz de transmisión directa sólo interviene en caso que la *FRF* ajustada sea la acelerancia. Sin embargo, esta matriz se descarta en el cálculo de las matrices modales. La transformación de las matrices de sistema a matrices modales requiere la resolución del problema regular de autovalores de la matriz $[\mathcal{A}]$. La asimetría de esta matriz produce que los autovectores por derecha difieran de los autovectores por izquierda. El problema de autovalores por derecha se define como

$$[\mathcal{A}][\Theta] = [\Theta][\Lambda] \quad (4.28)$$

La ecuación (4.28) constituye la *forma matricial asociada* del problema de polinomio matricial de la ecuación (4.5). La matriz $[\Theta]$ permite diagonalizar la matriz $[\mathcal{A}]$ y se utiliza como matriz de transformación a coordenadas modales

$$[\mathcal{A}_m] = [\Theta]^{-1}[\mathcal{A}][\Theta] = [\Lambda] \quad (4.29)$$

$$[\mathcal{B}_m] = [\Theta]^{-1}[\mathcal{B}] \quad (4.30)$$

$$[\mathcal{C}_m] = [\mathcal{C}][\Theta] \quad (4.31)$$

Las filas de la matriz $[\mathcal{B}_m]$ contienen factores de participación modal y las columnas de la matriz $[\mathcal{C}_m]$ contienen formas modales. Estas matrices pueden expresarse como

$$[\mathcal{B}_m] = \begin{bmatrix} \{\mathcal{B}_1\} \\ \{\mathcal{B}_2\} \\ \vdots \\ \{\mathcal{B}_{J \times L}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{ \mathcal{B}_1^1 & \mathcal{B}_1^2 & \cdots & \mathcal{B}_1^K \} \\ \{ \mathcal{B}_2^1 & \mathcal{B}_2^2 & \cdots & \mathcal{B}_2^K \} \\ \vdots \\ \{ \mathcal{B}_{J \times L}^1 & \mathcal{B}_{J \times L}^2 & \cdots & \mathcal{B}_{J \times L}^K \} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

$$[\mathcal{C}_m] = \begin{bmatrix} \{\mathcal{C}_1\} & \{\mathcal{C}_2\} & \cdots & \{\mathcal{C}_{J \times L}\} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \mathcal{C}_1^1 \\ \mathcal{C}_1^2 \\ \vdots \\ \mathcal{C}_1^J \end{matrix} \right\} & \left\{ \begin{matrix} \mathcal{C}_2^1 \\ \mathcal{C}_2^2 \\ \vdots \\ \mathcal{C}_2^J \end{matrix} \right\} & \cdots & \left\{ \begin{matrix} \mathcal{C}_{J \times L}^1 \\ \mathcal{C}_{J \times L}^2 \\ \vdots \\ \mathcal{C}_{J \times L}^J \end{matrix} \right\} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Las columnas de la matriz $[\mathcal{C}_m]$ deben ser proporcionales a las filas correspondientes de la matriz $[\mathcal{B}_m]$ para un modelo simétrico. La condición que debe cumplirse entonces en el ajuste de una matriz de flexibilidad dinámica cuadrada ($J = K$) es la siguiente

$$\{\mathcal{C}_l\} = \gamma_l \{\mathcal{B}_l\}^T \quad (4.34)$$

donde γ_l resulta una constante generalmente compleja. El cálculo de esta constante puede realizarse en función de cualquier componente k del modo l como $\gamma_l = \mathcal{C}_l^k / \mathcal{B}_l^k$ aunque resulta numéricamente conveniente utilizar la componente de mayor valor absoluto. La forma modal normalizada del modo l se calcula luego como

$$\{\varphi_l\} = \frac{1}{\sqrt{\gamma_l}} \{\mathcal{C}_l\} = \sqrt{\gamma_l} \{\mathcal{B}_l\}^T \quad (4.35)$$

La matriz de transformación

$$[T_\gamma] = [\sqrt{\gamma_l}]^{-1} \quad (4.36)$$

permite obtener

$$[\Lambda] = [T_\gamma]^{-1} [\mathcal{A}_m] [T_\gamma] \quad (4.37)$$

$$[\vartheta]^T = [T_\gamma]^{-1} [\mathcal{B}_m] \quad (4.38)$$

$$[\vartheta] = [\mathcal{C}_m] [T_\gamma] \quad (4.39)$$

La función de transferencia se expresa entonces como

$$[H(s)] = [\vartheta] (s[I] - [\Lambda])^{-1} [\vartheta]^T \quad (4.40)$$

que es idéntica a (2.61).

En general, las columnas de $[\mathcal{C}_m]$ no resultan estrictamente proporcionales a las filas correspondientes en $[\mathcal{B}_m]$ por lo que puede tomarse un promedio ponderado para el cálculo de las formas modales. En el caso genérico de una matriz de flexibilidad dinámica rectangular ($J \geq K$) resulta conveniente calcular la forma modal del modo l como

$$\{\varphi_l\} = \frac{1}{\sqrt{\gamma_l^o}} \{\mathcal{C}_l\} \quad (4.41)$$

donde

$$\gamma_l^o = \frac{\sum_{k=1}^K |\mathcal{B}_l^k| \frac{C_l^k}{\mathcal{B}_l^k}}{\sum_{k=1}^K |\mathcal{B}_l^k|} \quad (4.42)$$

que permite obtener la matriz de transformación reemplazando γ_l^o por γ_l en (4.36).

La obtención de la matriz de formas modales en el ajuste de las receptancias analíticas (cuadradas) de la fundación se basa en la técnica de *descomposición de valores singulares* (*SVD* del inglés *singular value decomposition*). Esta técnica ampliamente utilizada en los algoritmos de identificación se describe en el apéndice B. La determinación de la forma modal del modo l comienza con la definición de la siguiente matriz

$$[\mathcal{M}_l] = \frac{1}{2} \{C_l\} \{B_l\} + \frac{1}{2} \{B_l\}^T \{C_l\}^T \quad (4.43)$$

donde cada sumando representa una matriz de $J \times J$ de rango 1. Las matrices de los sumandos sólo resultan simétricas en el caso que las componentes del vector $\{C_l\}$ sean proporcionales a las componentes del vector $\{B_l\}$. La matriz $[\mathcal{M}_l]$ siempre es simétrica aunque sólo resulta de rango 1 si se cumple la condición anterior. La aplicación de *SVD* para $[\mathcal{M}_l]$ produce

$$\text{svd}([\mathcal{M}_l]) = [U_l] [\mathcal{S}_l] [V_l]^H \quad (4.44)$$

Las matrices $[U_l]$ y $[V_l]$ satisfacen

$$[U_l] [U_l]^H = [U_l]^H [U_l] = [V_l] [V_l]^H = [V_l]^H [V_l] = [I] \quad (4.45)$$

$$[U_l]^H = [U_l]^{-1} \quad \text{y} \quad [V_l]^H = [V_l]^{-1} \quad (4.46)$$

La matriz $[\mathcal{S}_l]$ contiene los valores singulares sobre la diagonal principal en orden decreciente. Los valores singulares a partir del tercero resultan siempre nulos por la definición de la matriz $[\mathcal{M}_l]$. La relación entre el segundo y el primer valor singular representa una medida de la asimetría de la forma modal (la condición ideal es que esta relación sea suficientemente pequeña). La matriz $[\mathcal{M}_l]$ se reconstruye despreciando el segundo valor singular

$$[\bar{\mathcal{M}}_l] = \{U_l^1\} \mathcal{S}_l^{1,1} \{V_l^1\}^H \quad (4.47)$$

donde $[\bar{\mathcal{M}}_l]$ resulta de rango 1. La columna k de $[\bar{\mathcal{M}}_l]$ designada $\{\bar{\mathcal{M}}_l^k\}$ que contiene a la componente de la diagonal principal con mayor valor absoluto $\bar{\mathcal{M}}_l^{k,k}$ se utiliza para determinar la forma modal del modo l como

$$\{\varphi_l\} = \frac{1}{\sqrt{\bar{\mathcal{M}}_l^{k,k}}} \{\bar{\mathcal{M}}_l^k\} \quad (4.48)$$

El mismo procedimiento se aplica a los restantes modos.

4.3 Método del Polinomio Matricial Complejo (MPMC)

El *MPMC* surge como una variante del *MFPM* particularmente útil en el ajuste de curvas suaves de receptancia con alto amortiguamiento como las que se presentan generalmente

para fundaciones. Las ventajas de esta técnica radican en el desacoplamiento del ajuste de los GL involucrados y en la simetría de las matrices físicas derivadas.

Este método se basa en la representación de un sistema continuo utilizando un modelo espacialmente discreto. El comportamiento dinámico de un sistema continuo para las coordenadas retenidas se determina en forma exacta a través de una matriz de rigidez dependiente de la frecuencia que involucra propiedades elásticas, inerciales y disipativas. En el capítulo 20 del libro de Clough y Penzien [42] se deducen los coeficientes de esta matriz de rigidez para elementos unidimensionales que se utiliza en el *método de rigidez dinámica directa*. La expansión en series de la matriz de rigidez dinámica respecto a la frecuencia genera un número infinito de términos matriciales aunque sólo se retienen los 3 primeros identificados como matrices de rigidez, amortiguamiento y masa respectivamente (la matriz de masa resultante es idéntica a la matriz de masa consistente determinada por otros métodos). Estos primeros términos retenidos que poseen un sentido físico definido brindan una representación adecuada para bajas frecuencias. En el capítulo 10 del libro de Przemieniecki [43] se comprueba que la adopción de un número mayor de términos permite una mejor aproximación para altas frecuencias. Sin embargo, la utilización de códigos estándares de elementos finitos requiere que los términos de orden superior se agrupen en términos de menor orden y mayor dimensión. El aumento del tamaño de las matrices involucradas se consigue con la incorporación de GL generalizados.

4.3.1 Determinación de Coeficientes Polinómicos Matriciales

La aproximación utilizada en el *MFPM* para el ajuste de la flexibilidad dinámica se reproduce a continuación

$$[H(s)] = [Q(s)]^{-1}[R(s)] \quad (4.49)$$

En el *MPMC* los polinomios matriciales toman la siguiente forma

$$[Q(s)] = [Q_0] + s[Q_1] + s^2[Q_2] + \dots + s^L[I] \quad (4.50a)$$

$$[R(s)] = [R_0] \quad (4.50b)$$

pudiendo la ecuación (4.49) expresarse como

$$[H(s)] = [\mathbf{Q}(s)]^{-1} \quad (4.51)$$

donde

$$[\mathbf{Q}(s)] = [\mathbf{Q}_0] + s[\mathbf{Q}_1] + s^2[\mathbf{Q}_2] + \dots + s^L[\mathbf{Q}_L] \quad (4.52)$$

y

$$[\mathbf{Q}_0] = [R_0]^{-1}[Q_0] \quad (4.53a)$$

$$[\mathbf{Q}_1] = [R_0]^{-1}[Q_1] \quad (4.53b)$$

$$[\mathbf{Q}_2] = [R_0]^{-1}[Q_2] \quad (4.53c)$$

⋮

$$[\mathbf{Q}_L] = [R_0]^{-1} \quad (4.53d)$$

El ajuste de la flexibilidad dinámica en (4.51) equivale al ajuste de la rigidez dinámica $[\mathbf{K}(s)]$ expresada como

$$[\mathbf{K}(s)] = [\mathbf{Q}(s)] \quad (4.54)$$

En el caso de $L = 2$ las matrices $[\mathbf{Q}_0]$, $[\mathbf{Q}_1]$ y $[\mathbf{Q}_2]$ pueden interpretarse como matrices de rigidez, amortiguamiento y masa respectivamente. Los coeficientes de cada GL en (4.54) se ajustan individualmente utilizando polinomios ortogonales de Forsythe. La componente $\mathbf{K}_{j,k}$ considerando M frecuencias de medición se aproxima como

$$\{\mathbf{Q}_{j,k}\}[\bar{S}] = \{\bar{\mathbf{K}}_{j,k}\} \quad (4.55)$$

donde

$$\{\mathbf{Q}_{j,k}\} = \left\{ \mathbf{Q}_{j,k}^0 \quad \mathbf{Q}_{j,k}^1 \quad \mathbf{Q}_{j,k}^2 \quad \cdots \quad \mathbf{Q}_{j,k}^L \right\} \quad (4.56a)$$

$$\{\bar{\mathbf{K}}_{j,k}\} = \left\{ \mathbf{K}_{j,k}(s_0) \quad \mathbf{K}_{j,k}(s_1) \quad \mathbf{K}_{j,k}(s_2) \quad \cdots \quad \mathbf{K}_{j,k}(s_{M-1}) \right\} \quad (4.56b)$$

y $[\bar{S}]$ se define en (4.14). La utilización de los polinomios ortogonales en (4.13) permite expresar la ecuación (4.55) como

$$\{\bar{\mathbf{Q}}_{j,k}\}[\bar{\mathcal{P}}] = \{\bar{\mathbf{K}}_{j,k}\} \quad (4.57)$$

donde

$$\{\bar{\mathbf{Q}}_{j,k}\} = \{\mathbf{Q}_{j,k}\}[\bar{T}]^{-1} \quad (4.58)$$

La resolución de (4.57) con el criterio de mínimos cuadrados produce

$$\{\bar{\mathbf{Q}}_{j,k}\} = \{\bar{\mathbf{K}}_{j,k}\}[\bar{\mathcal{P}}]^\dagger = \{\bar{\mathbf{K}}_{j,k}\}[\bar{\mathcal{P}}]^H \quad (4.59)$$

de acuerdo a (4.12). Los coeficientes originales del polinomio complejo se obtienen a través de (4.58) como

$$\{\mathbf{Q}_{j,k}\} = \{\bar{\mathbf{Q}}_{j,k}\}[\bar{T}] \quad (4.60)$$

Las matrices de (4.52) se obtiene finalmente ensamblando los coeficientes de cada GL ajustado.

4.3.2 Determinación de Matrices Modales

Las matrices de sistema toman en este caso la siguiente forma

$$[\mathcal{A}] = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] & \cdots & [0] & -[\mathbf{Q}_L]^{-1}[\mathbf{Q}_0] \\ [I] & [0] & [0] & \cdots & [0] & -[\mathbf{Q}_L]^{-1}[\mathbf{Q}_1] \\ [0] & [I] & [0] & \cdots & [0] & -[\mathbf{Q}_L]^{-1}[\mathbf{Q}_2] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [0] & [0] & [0] & \cdots & [0] & -[\mathbf{Q}_L]^{-1}[\mathbf{Q}_{L-2}] \\ [0] & [0] & [0] & \cdots & [I] & -[\mathbf{Q}_L]^{-1}[\mathbf{Q}_{L-1}] \end{bmatrix} \quad (4.61a)$$

$$[\mathcal{B}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{Q}_L]^{-1} \\ [0] \\ [0] \\ \vdots \\ [0] \\ [0] \end{bmatrix} \quad (4.61b)$$

$$[\mathcal{C}] = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] & \cdots & [0] & [I] \end{bmatrix} \quad (4.61c)$$

$$[\mathcal{D}] = [0] \quad (4.61d)$$

El cálculo de las matrices modales se realiza en forma análoga a la utilizada en el *MFPM*. La diferencia fundamental es que las formas modales por derecha y por izquierda resultan idénticas debido a la simetría de los coeficientes matriciales del polinomio complejo.

Capítulo 5

Descripción Modal de la Rigidez Dinámica de una Fundación

En el análisis del comportamiento dinámico de un sistema con interacción suelo-estructura sólo se realiza el modelado de la fundación en los GL correspondientes a la interfaz con la estructura. La forma habitual de calcular la respuesta del sistema consiste en la determinación de la rigidez dinámica de la fundación en estos GL a través de soluciones rigurosas y el ensamblaje con el modelo de la estructura para el análisis frecuencia por frecuencia. El modelado de la rigidez dinámica de la fundación en los GL de la interfaz a través de matrices independientes de la frecuencia permite la utilización de modelos de elementos finitos estándares para el análisis de la respuesta de la estructura acoplada. El cálculo de las matrices modales analíticas del sistema completo sólo requiere la resolución de un problema de autovalores posibilitando la descomposición modal de la respuesta.

La principal característica de los modelos modales ajustados con el *MFPM* y el *MPMC* presentados en el capítulo anterior es que el número de modos excede generalmente al número de GL de la interfaz fundación-estructura. La determinación de matrices físicas independientes de la frecuencia para la fundación requiere entonces la utilización de GL generalizados. Una técnica propuesta por Craig y Bampton [44] conocida como *síntesis de componentes modales* (*CMS* del inglés *component mode synthesis*) permite derivar matrices físicas de sub-sistemas analizados o ensayados en forma separada para el ensamblaje y la predicción del comportamiento dinámico del sistema completo. La técnica *CMS* desarrollada para sistemas sin amortiguamiento se utiliza exhaustivamente en el análisis modal experimental dentro de un área específica referida a técnicas de acoplamiento. Las matrices de formas modales reales de los sub-sistemas se caracterizan precisamente por un número de modos que supera al número de GL retenidos pertenecientes a las interfaces con los restantes sub-sistemas. Las características dinámicas de cada sub-sistema se acomodan extendiendo la base de coordenadas físicas retenidas a través de coordenadas generalizadas.

El comportamiento dinámico de la fundación de un sistema con interacción suelo-estructura se describe a través de un modelo mixto obtenido con la técnica *CMS* adaptada para formas modales complejas. Este modelo combina GL físicos y GL generalizados en la determinación de matrices físicas de coeficientes reales aptas para el ensamblaje con el modelo de la estructura. Las ideas principales de la técnica descrita en este capítulo se presentan en el trabajo de Ceballos *et al.* [45].

5.1 Antecedentes

En una serie de trabajos de Wolf ([6], [46] y [47]) se presenta una técnica que permite la obtención de modelos discretos para fundaciones constituidos por matrices simétricas de coeficientes reales que describen satisfactoriamente sus características dinámicas. Los elementos de la matriz de rigidez dinámica de la fundación se aproximan individualmente utilizando el criterio de mínimos cuadrados con la relación de dos polinomios que se expanden luego en fracciones parciales. Los términos de la expansión se representan a través de modelos simples de resortes, amortiguadores y eventualmente masas con GL internos que pueden relacionarse con los GL generalizados que se utilizan en CMS . Los coeficientes de estos elementos suelen resultar negativos produciendo polos inestables con parte real positiva. Sin embargo, la consideración del conjunto completo de modos garantiza la estabilidad del sistema ajustado. Las matrices físicas completas que representan la rigidez dinámica de la fundación se obtienen a través del ensamblaje de los modelos simples derivados del ajuste individual de cada elemento. Un aspecto no contemplado en los trabajos de Wolf es el condicionamiento numérico de las ecuaciones de ajuste de los coeficientes polinómicos. La solución adoptada consiste en la utilización de polinomios de pocos términos y funciones de peso con diferencias de varios órdenes de magnitud entre altas y bajas frecuencias. La técnica desarrollada en este capítulo presenta una estrecha vinculación con la técnica propuesta por Wolf. La diferencia fundamental radica en la derivación previa de matrices modales para la aplicación de la técnica CMS adaptada a formas modales complejas que permite una determinación más directa y sistemática de las matrices físicas de la fundación.

La restricción fundamental presentada en el capítulo 2 para sistemas con amortiguamiento general condiciona los modelos físicos derivados de formas modales complejas. En general, la asignación de elementos de masa en los GL físicos retenidos de la fundación no resulta posible utilizando un modelo modal derivado mediante técnicas ordinarias de identificación de parámetros modales. En el trabajo de Joeng *et al.* [11] se demuestra que el origen de la restricción fundamental se vincula a la condición de valor inicial nulo que debe cumplir la función de respuesta a impulso para desplazamientos de acuerdo a la ecuación (2.63). En los trabajos de Garvey *et al.* ([14] y [12]) se asocia la restricción fundamental obtenida en (2.120) a la dependencia que existe entre las componentes reales e imaginarias de los modos complejos derivados de matrices físicas reales y simétricas. La forma más simple de satisfacer la restricción fundamental consiste en descartar la asignación de elementos de masa en los GL físicos retenidos. A pesar que en los trabajos de Wolf no se considera explícitamente la restricción fundamental sólo se asignan elementos de masa a los GL internos de la fundación.

En el trabajo de Potter *et al.* [48] se derivan expresiones que permiten la reconstrucción de matrices físicas condensadas a partir de matrices modales. La aplicación de estas expresiones supone que el número de GL físicos coincide con el número de modos identificados. En el caso de formas modales complejas se requiere además el cumplimiento de la restricción fundamental. Las fundaciones analizadas no satisfacen estas condiciones. En el trabajo de Alvin *et al.* [49] se propone entonces complementar la matriz de formas modales con coordenadas generalizados utilizando vectores ortogonales a sus filas. Las matrices físicas resultantes de esta aplicación implícita de la técnica CMS poseen el tamaño mínimo indispensable para acomodar los modos ajustados. El trabajo de Morgan *et al.* [50] extiende la técnica propuesta por Alvin *et al.* para sistemas con amortiguamiento general. Sin embargo, las matrices obtenidas resultan complejas restringiendo su aplicación práctica.

La técnica desarrollada en este capítulo permite realizar una descripción modal de la rigidez dinámica de una fundación a través de un modelo físico de coordenadas mixtas (físicas y generalizadas) compuesto por matrices con coeficientes reales.

5.2 Determinación de Matrices Modales de la Fundación

Las matrices modales se determinan utilizando el *MFPM* o el *MPMC* descritos en el capítulo anterior. Los elementos de estas matrices constituyen parámetros modales globales de la fundación completa. Los sistemas de ecuaciones lineales que se resuelven en la determinación de los coeficientes polinómicos matriciales no contemplan restricciones físicas. Por lo tanto, la estabilidad de la aproximación obtenida para el sistema se verifica en caso que los elementos de la diagonal principal de la rigidez dinámica posean parte imaginaria no-negativa en el rango completo de frecuencias de análisis.

La receptancia de una fundación genérica con n_L *GL* en la interfaz con la estructura se ajusta a través de n_M modos utilizando el *MFPM* o el *MPMC*. El aspecto general de la matriz de formas modales responde a

$$[\vartheta] = \begin{bmatrix} [\vartheta_R] & [\vartheta_I] & [\vartheta_C] & [\vartheta_C^*] \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

donde $[\vartheta_R]$ es una matriz de $n_L \times n_R$ que contiene formas modales puramente reales, $[\vartheta_I]$ es una matriz de $n_L \times n_I$ que contiene formas modales puramente imaginarias, $[\vartheta_C]$ es una matriz de $n_L \times n_C$ que contiene formas modales complejas y $[\vartheta_C^*]$ es una matriz de $n_L \times n_C$ que contiene las formas modales complejas conjugadas de $[\vartheta_C]$. En general, n_R , n_I y n_C no guardan ninguna relación entre sí pudiendo resultar nulo cualquiera de estos números. En el caso particular de un modelo con n_1 *GL* sin masa asociada y n_2 *GL* con masa asociada se verifica que

$$n_C + n_R = n_1 + n_2$$

$$n_C + n_I = n_2$$

La matriz diagonal de polos adquiere la siguiente forma

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} [\Lambda_R] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [\Lambda_I] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [\Lambda_C] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [\Lambda_C^*] \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

donde $[\Lambda_R]$ y $[\Lambda_I]$ contienen polos reales, $[\Lambda_C]$ contiene polos complejos con parte imaginaria negativa y $[\Lambda_C^*]$ contiene polos complejos conjugados de $[\Lambda_C]$.

5.3 Determinación de Matrices Físicas de la Fundación

Los trabajos de Alvin y Morgan se extienden en esta sección para la obtención de matrices físicas reales a partir de matrices modales de un sistema con amortiguamiento general. El procedimiento propuesto no asigna elementos de masa a los *GL* físicos de la fundación para evitar inconvenientes relacionados con la restricción fundamental. Las transformaciones que permiten recobrar las matrices de segundo orden se deducen utilizando los criterios presentados en los trabajos de Garvey, Friswell y Penny [51] y [13].

5.3.1 Matrices Físicas de Primer Orden

Las matrices físicas obtenidas en esta sección se vinculan directamente con las matrices $[\mathbf{A}]$ y $[\mathbf{B}]$ presentadas en la formulación de primer orden de los fundamentos teóricos. Estas matrices pueden considerarse como matrices particulares de amortiguamiento y rigidez con las mismas características dinámicas de las matrices físicas que las componen (las formulaciones de primer y segundo orden no presentan ninguna diferencia esencial). Las coordenadas extendidas de las matrices $[\mathbf{A}]$ y $[\mathbf{B}]$ vinculadas a velocidades pueden considerarse como GL internos que contribuyen a la caracterización dinámica del sistema. Además, los elementos negativos en la diagonal principal de la matriz $[\mathbf{B}]$ no implican una contradicción física.

La determinación de las matrices físicas se realiza a partir de las ecuaciones de ortogonalidad en (2.108). La matriz de formas modales $[\vartheta]$ se complementa con una hipotética matriz $[\vartheta_G]$ que contiene $n_G = (n_M - n_L)$ filas con las componentes de los GL generalizados para los modos ajustados. El aspecto de $[\vartheta_G]$ respecto a las columnas se considera idéntico a (5.1). La matriz completa de formas modales resulta

$$[\Upsilon] = \begin{bmatrix} [\vartheta] \\ [\vartheta_G] \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Una transformación propuesta por Garvey *et al.* [13] para la eliminación de las componentes imaginarias en las ecuaciones de ortogonalidad utiliza la matriz $[J]$ definida como

$$[J] = \begin{bmatrix} [I_R] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & i[I_I] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & \frac{1}{\sqrt{2}}[I_C] & \frac{-i}{\sqrt{2}}[I_C] \\ [0] & [0] & \frac{1}{\sqrt{2}}[I_C] & \frac{i}{\sqrt{2}}[I_C] \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Pre-multiplicando (2.108) por $[J]^T$ y post-multiplicando por $[J]$ se obtienen las siguientes ecuaciones de ortogonalidad de coeficientes puramente reales

$$[\Upsilon^{\Re}]^T [\mathbf{A}] [\Upsilon^{\Re}] = [I^{\Re}] \quad (5.5a)$$

$$[\Upsilon^{\Re}]^T [\mathbf{B}] [\Upsilon^{\Re}] = -[\Lambda^{\Re}] \quad (5.5b)$$

donde

$$[\Upsilon^{\Re}] = [\Upsilon] [J] = \begin{bmatrix} [\vartheta^{\Re}] \\ [\vartheta_G^{\Re}] \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

$$[I^{\Re}] = [J]^T [J] = \begin{bmatrix} [I_R] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & -[I_I] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [I_C] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & -[I_C] \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

$$[\Lambda^{\Re}] = [J]^T [\Lambda] [J] = \begin{bmatrix} [\Lambda_R^{\Re}] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & -[\Lambda_I^{\Re}] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [\Lambda_C^{\Re}] & [\Lambda_C^{\Im}] \\ [0] & [0] & [\Lambda_C^{\Im}] & -[\Lambda_C^{\Re}] \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

con $[\Lambda_{\mathbf{R}}^{\Re}]$, $[\Lambda_{\mathbf{I}}^{\Re}]$ y $[\Lambda_{\mathbf{C}}^{\Re}]$ conteniendo la parte real de los polos y $[\Lambda_{\mathbf{C}}^{\Im}]$ conteniendo la parte imaginaria de los polos complejos conjugados. La matriz diagonal $[I^{\Re}]$ contiene elementos iguales a $+1$ ó -1 dado que $[I_{\mathbf{R}}]$, $[I_{\mathbf{I}}]$ e $[I_{\mathbf{C}}]$ representan matrices identidad.

El número de modelos físicos de una fundación capaces de reproducir las características dinámicas del modelo modal para $n_{\mathbf{L}} < n_{\mathbf{M}}$ resulta ilimitado. La definición de matrices únicas se consigue asignando a la matriz $[\mathbf{B}]$ la rigidez estática en los GL físicos de la fundación, una matriz diagonal con elementos de módulo unitario en los GL generalizados y matrices de acoplamiento nula entre ambos conjuntos de coordenadas. Los GL generalizados de la matriz $[\mathbf{A}]$ poseen como máximo tres diagonales no-nulas. Una primera aproximación de la matriz $[\mathbf{B}]$ se expresa entonces como

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} [\mathcal{K}] & [0] \\ [0] & [\mathcal{K}_{\mathbf{G}}] \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

donde $[\mathcal{K}]$ representa la matriz de rigidez estática. La ecuación (5.5b) resulta

$$\begin{bmatrix} [\vartheta^{\Re}]^T & [\vartheta_{\mathbf{G}}^{\Re}]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathcal{K}] & [0] \\ [0] & [\mathcal{K}_{\mathbf{G}}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\vartheta^{\Re}] \\ [\vartheta_{\mathbf{G}}^{\Re}] \end{bmatrix} = -[\Lambda^{\Re}] \quad (5.10)$$

$$[\vartheta^{\Re}]^T [\mathcal{K}] [\vartheta^{\Re}] + [\vartheta_{\mathbf{G}}^{\Re}]^T [\mathcal{K}_{\mathbf{G}}] [\vartheta_{\mathbf{G}}^{\Re}] = -[\Lambda^{\Re}] \quad (5.11)$$

La matriz $[\mathcal{K}]$ se determina expresando la ecuación (5.10) como

$$\begin{bmatrix} [\mathcal{K}]^{-1} & [0] \\ [0] & [\mathcal{K}_{\mathbf{G}}]^{-1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} [\vartheta^{\Re}] [\Lambda^{\Re}]^{-1} [\vartheta^{\Re}]^T & [\vartheta^{\Re}] [\Lambda^{\Re}]^{-1} [\vartheta_{\mathbf{G}}^{\Re}]^T \\ [\vartheta_{\mathbf{G}}^{\Re}] [\Lambda^{\Re}]^{-1} [\vartheta^{\Re}]^T & [\vartheta_{\mathbf{G}}^{\Re}] [\Lambda^{\Re}]^{-1} [\vartheta_{\mathbf{G}}^{\Re}]^T \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

donde

$$[\mathcal{K}] = - \left([\vartheta^{\Re}] [\Lambda^{\Re}]^{-1} [\vartheta^{\Re}]^T \right)^{-1} \quad (5.13)$$

De la ecuación (5.11) se obtiene

$$-[\Lambda^{\Re}] - [\vartheta^{\Re}]^T [\mathcal{K}] [\vartheta^{\Re}] = [\vartheta_{\mathbf{G}}^{\Re}]^T [\mathcal{K}_{\mathbf{G}}] [\vartheta_{\mathbf{G}}^{\Re}] = [\Delta^{\Re}] \quad (5.14)$$

La *descomposición de valores singulares (SVD)* de la matriz $[\Delta^{\Re}]$ permite la definición de una base para los GL generalizados

$$[U] [\setminus S \setminus] [V]^T = \mathbf{svd}[\Delta^{\Re}] \quad (5.15)$$

El rango de $[\Delta^{\Re}]$ de acuerdo a (5.14) resulta $n_{\mathbf{G}} = (n_{\mathbf{M}} - n_{\mathbf{L}})$. La matriz $[\setminus S \setminus]$ sólo provee entonces $n_{\mathbf{G}}$ valores singulares no-nulos definiéndose la matriz $[\vartheta_{\mathbf{G}}^{\Re}]$ igual a las primeras $n_{\mathbf{G}}$ filas de la matriz $[V]^T$. De (5.5) se obtiene luego

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} [\mathcal{C}] & [\mathcal{C}_{\mathbf{A}}] \\ [\mathcal{C}_{\mathbf{A}}]^T & [\mathcal{C}_{\mathbf{G}}] \end{bmatrix} = [\Upsilon^{\Re}]^{-T} [I^{\Re}] [\Upsilon^{\Re}]^{-1} \quad (5.16a)$$

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} [\mathcal{K}] & [0] \\ [0] & [\mathcal{K}_{\mathbf{G}}] \end{bmatrix} = -[\Upsilon^{\Re}]^{-T} [\Lambda^{\Re}] [\Upsilon^{\Re}]^{-1} \quad (5.16b)$$

La transformación de $[\mathcal{K}_G]$ en una matriz diagonal con elementos de módulo unitario requiere la resolución del siguiente problema de autovalores

$$[\mathcal{K}_G] [\bar{\vartheta}] [\bar{\Lambda}] + [\mathcal{C}_G] [\bar{\vartheta}] = [0] \quad (5.17)$$

con

$$[\bar{\vartheta}]^T [\mathcal{K}_G] [\bar{\vartheta}] = [\bar{I}] \quad (5.18a)$$

$$[\bar{\vartheta}]^T [\mathcal{C}_G] [\bar{\vartheta}] = -[\bar{\Lambda}] \quad (5.18b)$$

El aspecto general de la matriz de formas modales $[\bar{\vartheta}]$ es el siguiente

$$[\bar{\vartheta}] = \begin{bmatrix} [\bar{\vartheta}_N] & [\bar{\vartheta}_R] & [\bar{\vartheta}_I] & [\bar{\vartheta}_C] & [\bar{\vartheta}_C^*] \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

donde $[\bar{\vartheta}_N]$ es una matriz $n_G \times \bar{n}_N$ con formas modales puramente imaginarias (asociadas a polos nulos), $[\bar{\vartheta}_R]$ es una matriz $n_G \times \bar{n}_R$ con formas modales puramente reales, $[\bar{\vartheta}_I]$ es una matriz $n_G \times \bar{n}_I$ con formas modales puramente imaginarias, $[\bar{\vartheta}_C]$ es una matriz $n_G \times \bar{n}_C$ con formas modales complejas y $[\bar{\vartheta}_C^*]$ es una matriz $n_G \times \bar{n}_C$ con las formas modales complejas conjugadas de $[\bar{\vartheta}_C]$. La matriz diagonal de polos $[\bar{\Lambda}]$ resulta

$$[\bar{\Lambda}] = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [\bar{\Lambda}_R] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [\bar{\Lambda}_I] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [\bar{\Lambda}_C] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [\bar{\Lambda}_C^*] \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

donde $[\bar{\Lambda}_R]$ y $[\bar{\Lambda}_I]$ contienen polos reales, $[\bar{\Lambda}_C]$ contiene polos complejos con parte imaginaria negativa y $[\bar{\Lambda}_C^*]$ contiene polos complejos conjugados de $[\bar{\Lambda}_C]$. La aparición de polos nulos resulta sumamente improbable en casos reales a menos que se trate de simulaciones. Estos polos nulos se vinculan a elementos de masa que podrían asociarse a los GL físicos de la fundación. La matriz de transformación que permite la eliminación de las componentes imaginarias en (5.18) es la siguiente

$$[\bar{J}] = \begin{bmatrix} i [I_N] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [I_R] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & i [I_I] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & \frac{1}{\sqrt{2}} [I_C] & \frac{-i}{\sqrt{2}} [I_C] \\ [0] & [0] & [0] & \frac{1}{\sqrt{2}} [I_C] & \frac{i}{\sqrt{2}} [I_C] \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

que produce

$$[\bar{\vartheta}^{\mathfrak{R}}] = [\bar{\vartheta}] [\bar{J}] \quad (5.22)$$

$$[\bar{I}^{\mathfrak{R}}] = [\bar{J}]^T [\bar{J}] = \begin{bmatrix} -[\bar{I}_N] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [\bar{I}_R] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & -[\bar{I}_T] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [\bar{I}_C] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & -[\bar{I}_C] \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

$$[\bar{\Lambda}^{\mathfrak{R}}] = [\bar{J}]^T [\bar{\Lambda}] [\bar{J}] = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [\bar{\Lambda}_R^{\mathfrak{R}}] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & -[\bar{\Lambda}_T^{\mathfrak{R}}] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [\bar{\Lambda}_C^{\mathfrak{R}}] & [\bar{\Lambda}_C^{\mathfrak{S}}] \\ [0] & [0] & [0] & [\bar{\Lambda}_C^{\mathfrak{S}}] & -[\bar{\Lambda}_C^{\mathfrak{R}}] \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

Los *GL* generalizados de (5.16) se transforman luego de la siguiente forma

$$[\bar{\mathbf{A}}] = \begin{bmatrix} [I] & [0] \\ [0] & [\bar{\vartheta}^{\mathfrak{R}}]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathcal{C}] & [\mathcal{C}_A] \\ [\mathcal{C}_A]^T & [\mathcal{C}_G] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I] & [0] \\ [0] & [\bar{\vartheta}^{\mathfrak{R}}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathcal{C}] & [\bar{\mathcal{C}}_A] \\ [\bar{\mathcal{C}}_A]^T & -[\bar{\Lambda}^{\mathfrak{R}}] \end{bmatrix} \quad (5.25a)$$

$$[\bar{\mathbf{B}}] = \begin{bmatrix} [I] & [0] \\ [0] & [\bar{\vartheta}^{\mathfrak{R}}]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathcal{K}] & [0] \\ [0] & [\mathcal{K}_G] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I] & [0] \\ [0] & [\bar{\vartheta}^{\mathfrak{R}}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathcal{K}] & [0] \\ [0] & [\bar{I}^{\mathfrak{R}}] \end{bmatrix} \quad (5.25b)$$

Estas matrices son únicas en función de los parámetros modales ajustados utilizándose como matrices de amortiguamiento y rigidez en la representación de la respuesta dinámica de los *GL* físicos de la fundación. El número de parámetros independientes en (5.25) igual a $(n_L + 1) \times n_M$ coincide con el número que presentan las matrices modales $[\vartheta]$ y $[\Lambda]$.

5.3.2 Matrices Físicas de Segundo Orden

La deteminación de matrices de rigidez, amortiguamiento y masa para la fundación no resulta indispensable a efectos de la descripción del comportamiento dinámico de la fundación. Sin embargo, la asignación de elementos de masa a determinados *GL* generalizados permite la reducción del número de *GL* del modelo de la fundación sin alterar sus propiedades dinámicas. La realización de transformaciones adicionales a (5.25) para la obtención de matrices con el aspecto de $[\mathbf{A}]$ y $[\mathbf{B}]$ en (2.135) posibilita la identificación de sub-matrices que representen matrices físicas de segundo orden. La aparición de polos inestables en el problema de autovalores (5.17) no impide la continuación de las sucesivas transformaciones aunque puede producir elementos negativos sobre la diagonal principal de las matrices físicas. La asignación de elementos unitarios a los *GL* generalizados con masa asociada de la matriz de masa permite la definición de matrices físicas únicas.

Los GL generalizados de $[\bar{\Lambda}^{\Re}]$ se reacomodan de la siguiente forma

$$[\tilde{\Lambda}^{\Re}] = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [\check{\Lambda}_R^{\Re}] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & -[\check{\Lambda}_I^{\Re}] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [\tilde{\Lambda}_R^{\Re}] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [\bar{\Lambda}_C^{\Re}] & [0] & [\bar{\Lambda}_C^{\Im}] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & -[\check{\Lambda}_I^{\Re}] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [\bar{\Lambda}_C^{\Im}] & [0] & -[\bar{\Lambda}_C^{\Re}] \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

donde las matrices diagonales de polos reales $[\bar{\Lambda}_R^{\Re}]$ y $[\bar{\Lambda}_I^{\Re}]$ se expresan como

$$[\bar{\Lambda}_R^{\Re}] = \begin{bmatrix} [\check{\Lambda}_R^{\Re}] & [0] \\ [0] & [\check{\Lambda}_R^{\Re}] \end{bmatrix} \quad [\bar{\Lambda}_I^{\Re}] = \begin{bmatrix} [\check{\Lambda}_I^{\Re}] & [0] \\ [0] & [\check{\Lambda}_I^{\Re}] \end{bmatrix}$$

con

$$\begin{aligned} [\check{\Lambda}_R^{\Re}] &= \begin{bmatrix} [\check{\Lambda}_R^-] & [0] \\ [0] & [\check{\Lambda}_R^+] \end{bmatrix} & [\check{\Lambda}_I^{\Re}] &= \begin{bmatrix} [\check{\Lambda}_I^-] & [0] \\ [0] & [\check{\Lambda}_I^+] \end{bmatrix} \\ [\tilde{\Lambda}_R^{\Re}] &= \begin{bmatrix} [\tilde{\Lambda}_R^-] & [0] \\ [0] & [\tilde{\Lambda}_R^+] \end{bmatrix} & [\tilde{\Lambda}_I^{\Re}] &= \begin{bmatrix} [\tilde{\Lambda}_I^-] & [0] \\ [0] & [\tilde{\Lambda}_I^+] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Los supraíndices $-$ y $+$ indican polos estables e inestables respectivamente. Los criterios de reagrupamiento de los polos de las matrices $[\check{\Lambda}_R^{\Re}]$, $[\check{\Lambda}_I^{\Re}]$, $[\tilde{\Lambda}_R^{\Re}]$ y $[\tilde{\Lambda}_I^{\Re}]$ se describen más adelante. La matriz $[\tilde{I}^{\Re}]$ se transforma entonces en

$$[\tilde{I}^{\Re}] = \begin{bmatrix} -[\bar{I}_N] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [\check{I}_R] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & -[\check{I}_I] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [\tilde{I}_R] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [\bar{I}_C] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & -[\tilde{I}_I] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & -[\bar{I}_C] \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

en tanto que la matriz $[\tilde{C}_A]$ se transforma en

$$[\tilde{C}_A] = \begin{bmatrix} [\tilde{C}_A^a] & [\tilde{C}_A^b] & [\tilde{C}_A^c] & [\tilde{C}_A^d] & [\tilde{C}_A^e] & [\tilde{C}_A^f] & [\tilde{C}_A^g] \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

El número de GL sin asignación de elementos de masa es $n_1 = n_L + \bar{n}_N + \bar{n}_J$ donde \bar{n}_J representa el número total de polos reales contenidos en las matrices $[\check{\Lambda}_R^{\Re}]$ y $[\check{\Lambda}_I^{\Re}]$. El número de GL generalizados con asignación de elementos de masa resulta $n_2 = \bar{n}_K + \bar{n}_C$ donde \bar{n}_K representa el número polos reales contenidos en $[\tilde{\Lambda}_R^{\Re}]$ (que coincide con el número de polos reales contenidos en $[\tilde{\Lambda}_I^{\Re}]$). Las matrices $[\tilde{\Lambda}_R^{\Re}]$ y $[\tilde{\Lambda}_I^{\Re}]$ se encuentran posicionadas en forma estratégica para interactuar entre sí durante las sucesivas transformaciones. Por lo tanto, los polos de $[\tilde{\Lambda}_R^{\Re}]$ se encuentran *asociados* a los polos de $[\tilde{\Lambda}_I^{\Re}]$ así como los polos complejos

se encuentran *asociados* a sus complejos conjugados. El número de GL generalizados con masa asociada coincide entonces con el número de modos asociados. La asociación de polos complejos conjugados no genera ningún tipo de dificultades. Los criterios de asociación de polos reales descriptos a continuación impiden la aparición de componentes imaginarias durante las sucesivas transformaciones:

- Un polo vinculado a una forma modal real se asocia a un polo vinculado a una forma modal imaginaria.
- El módulo del polo vinculado a la forma modal real debe ser mayor al módulo del polo vinculado a la forma modal imaginaria.
- Los polos asociados deben tener el mismo signo (ambos deben ser estables o inestables).

El procedimiento que se presenta a continuación permite la optimización del número de modos asociados en virtud del elevado número de posibilidades de asociación.

1. Dividir los polos reales en dos grupos de acuerdo a su signo: $[\bar{\Lambda}_R^-]$ y $[\bar{\Lambda}_R^+]$.
2. Dividir los polos imaginarios en dos grupos de acuerdo a su signo: $[\bar{\Lambda}_I^-]$ y $[\bar{\Lambda}_I^+]$.
3. Ordenar cada grupo de acuerdo al módulo de mayor a menor.
4. Aplicar separadamente para polos estables e inestables la siguiente secuencia hasta acabar los elementos de $[\bar{\Lambda}_R^\mp]$ o $[\bar{\Lambda}_I^\mp]$ comenzando con $i_R = 1$ e $i_I = 1$:
 - a) si $|\bar{\Lambda}_R^\mp(i_R)| > |\bar{\Lambda}_I^\mp(i_I)|$ asociarlos y continuar con $(i_R + 1)$ e $(i_I + 1)$
 - b) si $|\bar{\Lambda}_R^\mp(i_R)| \leq |\bar{\Lambda}_I^\mp(i_I)|$ continuar con i_R e $(i_I + 1)$

Los polos sin asociación se disponen en las matrices $[\check{\Lambda}_R^{\Re}]$ y $[\check{\Lambda}_I^{\Re}]$. La ecuación (5.25) se expresa entonces como

$$[\mathbf{A}'] = \begin{bmatrix} [\mathbf{A}'_{11}] & [\mathbf{A}'_{12}] & [\mathbf{A}'_{13}] \\ [\mathbf{A}'_{21}] & [\check{\mathbf{A}}'_{22}] & [\check{\mathbf{A}}'_{23}] \\ [\mathbf{A}'_{31}] & [\check{\mathbf{A}}'_{32}] & [\check{\mathbf{A}}'_{33}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{A}'_{11}] & [\mathbf{A}'_{12}] & [\mathbf{A}'_{13}] \\ [\mathbf{A}'_{12}]^T & [\Lambda_2^{\Re}] & [\Lambda_2^{\Im}] \\ [\mathbf{A}'_{13}]^T & [\Lambda_2^{\Im}] & -[\Lambda_3^{\Re}] \end{bmatrix} \quad (5.29a)$$

$$[\mathbf{B}'] = \begin{bmatrix} [\mathbf{B}'_{11}] & [0] & [0] \\ [0] & [I_2] & [0] \\ [0] & [0] & -[I_2] \end{bmatrix} \quad (5.29b)$$

donde

$$[\mathbf{A}'_{11}] = \begin{bmatrix} [\mathcal{C}] & [\tilde{\mathcal{C}}_A^a] & [\tilde{\mathcal{C}}_A^b] & [\tilde{\mathcal{C}}_A^c] \\ [\tilde{\mathcal{C}}_A^a]^T & [0] & [0] & [0] \\ [\tilde{\mathcal{C}}_A^b]^T & [0] & [\check{\Lambda}_R^{\Re}] & [0] \\ [\tilde{\mathcal{C}}_A^c]^T & [0] & [0] & -[\check{\Lambda}_I^{\Re}] \end{bmatrix} \quad [\mathbf{A}'_{12}] = \begin{bmatrix} [\tilde{\mathcal{C}}_A^d] & [\tilde{\mathcal{C}}_A^e] \\ [0] & [0] \\ [0] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{B}'_{11}] = \begin{bmatrix} [\mathcal{K}] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & -[\bar{I}_N] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [\check{I}_R] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & -[\check{I}_I] \end{bmatrix} \quad [\mathbf{A}'_{13}] = \begin{bmatrix} [\tilde{\mathcal{C}}_A^f] & [\tilde{\mathcal{C}}_A^g] \\ [0] & [0] \\ [0] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{aligned} [\Lambda_2^{\mathfrak{R}}] &= \begin{bmatrix} [\tilde{\Lambda}_R^{\mathfrak{R}}] & [0] \\ [0] & [\tilde{\Lambda}_C^{\mathfrak{R}}] \end{bmatrix} & [\Lambda_3^{\mathfrak{R}}] &= \begin{bmatrix} [\tilde{\Lambda}_I^{\mathfrak{R}}] & [0] \\ [0] & [\tilde{\Lambda}_C^{\mathfrak{R}}] \end{bmatrix} \\ [\Lambda_2^{\mathfrak{S}}] &= \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [\tilde{\Lambda}_C^{\mathfrak{S}}] \end{bmatrix} & [I_2] &= \begin{bmatrix} [\tilde{I}_R] & [0] \\ [0] & [\tilde{I}_C] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\tilde{I}_I] & [0] \\ [0] & [\tilde{I}_C] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La matriz de transformación que permite la eliminación de $[\setminus \mathbf{A}'_{33\setminus}]$ sin perturbar la forma de la ecuación (5.29b) se expresa como

$$[T'] = \begin{bmatrix} [I_1] & [0] & [0] \\ [0] & [I_2] & [\setminus E_{\setminus}] \\ [0] & [\setminus E_{\setminus}] & [I_2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I_1] & [0] & [0] \\ [0] & [\setminus F_{\setminus}] & [0] \\ [0] & [0] & [\setminus F_{\setminus}] \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

donde las matrices $[\setminus E_{\setminus}]$ y $[\setminus F_{\setminus}]$ deben satisfacer las siguientes condiciones

$$-[\Lambda_3^{\mathfrak{R}}] + [\setminus E_{\setminus}] [\Lambda_2^{\mathfrak{S}}] + [\Lambda_2^{\mathfrak{S}}] [\setminus E_{\setminus}] + [\setminus E_{\setminus}] [\Lambda_2^{\mathfrak{R}}] [\setminus E_{\setminus}] = [0] \quad (5.31)$$

$$[\setminus F_{\setminus}] \left([I_2] - [\setminus E_{\setminus}]^2 \right) [\setminus F_{\setminus}] = [I_2] \quad (5.32)$$

Las matrices de las ecuaciones (5.31) y (5.32) son diagonales. Por lo tanto, la ecuación (5.31) denominada ecuación algebraica de Ricatti se resuelve como una ecuación escalar cuadrática

$$[\setminus E_{\setminus}] = \left(-[\Lambda_2^{\mathfrak{S}}] + \left([\Lambda_2^{\mathfrak{S}}]^2 + [\Lambda_2^{\mathfrak{R}}][\Lambda_3^{\mathfrak{R}}] \right)^{\frac{1}{2}} \right) [\Lambda_2^{\mathfrak{R}}]^{-1} \quad (5.33)$$

mientras que la ecuación (5.32) produce

$$[\setminus F_{\setminus}] = \left([I_2] \left([I_2] - [\setminus E_{\setminus}]^2 \right)^{-1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.34)$$

Premultiplicando las matrices de (5.29) por $[T']^T$ y postmultiplicando por $[T']$ se obtiene

$$[\mathbf{A}'] = \begin{bmatrix} [\mathbf{A}'_{11}] & [\mathbf{A}'_{12}] & [\mathbf{A}'_{13}] \\ [\mathbf{A}'_{21}] & [\setminus \mathbf{A}'_{22\setminus}] & [\setminus \mathbf{A}'_{23\setminus}] \\ [\mathbf{A}'_{31}] & [\setminus \mathbf{A}'_{32\setminus}] & [0] \end{bmatrix} \quad (5.35a)$$

$$[\mathbf{B}'] = \begin{bmatrix} [\mathbf{B}'_{11}] & [0] & [0] \\ [0] & [I_2] & [0] \\ [0] & [0] & -[I_2] \end{bmatrix} \quad (5.35b)$$

La matriz de transformación utilizada para la eliminación de $[\mathbf{A}'_{31}]$ y $[\mathbf{A}'_{13}]$ resulta

$$[T''] = \begin{bmatrix} [I_1] & [0] & [0] \\ -[\mathbf{A}'_{13}] [\setminus \mathbf{A}'_{23\setminus}]^{-1} & [I_2] & [0] \\ [0] & [0] & [I_2] \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

produciendo

$$[\mathbf{A}'''] = \begin{bmatrix} [\mathbf{A}''_{11}] & [\mathbf{A}''_{12}] & [0] \\ [\mathbf{A}''_{21}] & [\mathbf{A}''_{22}] & [\mathbf{A}''_{23}] \\ [0] & [\mathbf{A}''_{32}] & [0] \end{bmatrix} \quad (5.37a)$$

$$[\mathbf{B}'''] = \begin{bmatrix} [\mathbf{B}''_{11}] & [\mathbf{B}''_{12}] & [0] \\ [\mathbf{B}''_{21}] & [I_2] & [0] \\ [0] & [0] & -[I_2] \end{bmatrix} \quad (5.37b)$$

La matriz de transformación que convierte a $[\mathbf{A}''_{32}]$ y $[\mathbf{A}''_{23}]$ en matrices identidad resulta

$$[T''] = \begin{bmatrix} [I_1] & [0] & [0] \\ [0] & [\mathbf{A}''_{32}]^{-1} & [0] \\ [0] & [0] & [I_2] \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

de tal forma que

$$[\hat{\mathbf{A}}] = \begin{bmatrix} [\hat{\mathbf{A}}_{11}] & [\hat{\mathbf{A}}_{12}] & [0] \\ [\hat{\mathbf{A}}_{21}] & [\hat{\mathbf{A}}_{22}] & [I_2] \\ [0] & [I_2] & [0] \end{bmatrix} \quad (5.39a)$$

$$[\hat{\mathbf{B}}] = \begin{bmatrix} [\hat{\mathbf{B}}_{11}] & [\hat{\mathbf{B}}_{12}] & [0] \\ [\hat{\mathbf{B}}_{21}] & [\hat{\mathbf{B}}_{22}] & [0] \\ [0] & [0] & -[I_2] \end{bmatrix} \quad (5.39b)$$

La comparación de las matrices $[\hat{\mathbf{A}}]$ y $[\hat{\mathbf{B}}]$ con las matrices de (2.135) permite la siguiente identificación de matrices físicas

$$[K] = \begin{bmatrix} [\hat{\mathbf{B}}_{11}] & [\hat{\mathbf{B}}_{12}] \\ [\hat{\mathbf{B}}_{21}] & [\hat{\mathbf{B}}_{22}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{bmatrix} \quad (5.40a)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} [\hat{\mathbf{A}}_{11}] & [\hat{\mathbf{A}}_{12}] \\ [\hat{\mathbf{A}}_{21}] & [\hat{\mathbf{A}}_{22}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [C_{11}] & [C_{12}] \\ [C_{21}] & [C_{22}] \end{bmatrix} \quad (5.40b)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [I_2] \end{bmatrix} \quad (5.40c)$$

El número de parámetros independientes en (5.40) coincide con el número de parámetros independientes en las matrices físicas $[\bar{\mathbf{A}}]$ y $[\bar{\mathbf{B}}]$ o en las matrices modales $[\vartheta]$ y $[\Lambda]$.

5.4 Ejemplos

Los dos casos presentados en esta sección consisten en discos circulares infinitamente rígidos apoyados sobre semi-espacios con distintas características. Las receptancias de estas fundaciones se calculan con el programa *SASSI* [34] que tiene la capacidad de representar bordes

transmisores para simular las condiciones de radiación al infinito. Los 2 *GL* ajustados en ambos casos estudiados corresponden al movimiento de balanceo en un plano vertical. La técnica utilizada para el ajuste de estos ejemplos es el *MFPM* dado que el *MPMC* se utiliza exhaustivamente en el estudio de los casos reales.

Un aspecto relevante en la aplicación de las técnicas del capítulo anterior es que una diferencia pronunciada en las amplitudes relativas de las componentes de la receptancia producida por una diferencia de unidades puede generar un ajuste desbalanceado. La degradación del ajuste para las componentes de menor amplitud se agrava en caso de forzar la simetría de las formas modales. Un artificio apropiado para balancear el ajuste consiste en la utilización de funciones de peso acordes a las amplitudes de cada *GL*. La solución más adecuada en base a este criterio consiste entonces en el ajuste de las curvas adimensionales de la receptancia. Las amplitudes originales se restauran luego escalando las coordenadas físicas de las matrices adimensionales de la fundación.

5.4.1 Ejemplo A

Este ejemplo consiste en un disco rígido sin masa que reposa sobre un semi-espacio homogéneo. La solución numérica de este caso se encuentra en el trabajo de Luco *et al.* [52]. Los 2 *GL* físicos ajustados en el presente análisis son el desplazamiento horizontal (**h**) y la rotación de balanceo (**m**). El parámetro *r* representa el radio del disco, mientras ρ , ν y *G* representan la densidad, el coeficiente de Poisson y el módulo de elasticidad transversal del suelo respectivamente. El coeficiente de Poisson adoptado es $\nu = 1/3$. Las amplitudes de la receptancia se adimensionalizan a través de las siguientes flexibilidades estáticas

$$\alpha_{\text{hh}}^o = \frac{1}{8} \frac{(2 - \nu)}{Gr} \quad \alpha_{\text{mm}}^o = \frac{3}{8} \frac{(1 - \nu)}{Gr^3} \quad \alpha_{\text{mh}}^o = \alpha_{\text{hm}}^o = \sqrt{\alpha_{\text{hh}}^o} \sqrt{\alpha_{\text{mm}}^o}$$

La frecuencia adimensional a_o utilizada se calcula en función de la frecuencia circular ω como

$$a_o = a\omega \quad \text{donde:} \quad a = r \sqrt{\frac{\rho}{G}}$$

La receptancia se expresa en función de las matrices modales como

$$[\alpha] = [\vartheta] (i\omega [I] - [\Lambda])^{-1} [\vartheta]^T$$

donde

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} \alpha_{\text{hh}} & \alpha_{\text{hm}} \\ \alpha_{\text{mh}} & \alpha_{\text{mm}} \end{bmatrix} \quad [\vartheta] = \begin{bmatrix} [\vartheta_{\text{h}}] \\ [\vartheta_{\text{m}}] \end{bmatrix}$$

La adimensionalización de la receptancia se realiza a través de la siguiente matriz de transformación

$$[T] = [T]^T = \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha_{\text{hh}}^o} & 0 \\ 0 & \sqrt{\alpha_{\text{mm}}^o} \end{bmatrix}$$

y reemplazando $\omega = \frac{a_o}{a}$ para obtener

$$[T]^{-1} [\alpha] [T]^{-1} = [T]^{-1} [\vartheta] \sqrt{a} (ia_o [I] - a [\Lambda])^{-1} \sqrt{a} [\vartheta]^T [T]^{-T}$$

$$[\bar{\alpha}] = [\bar{\vartheta}] (ia_o [I] - [\bar{\Lambda}])^{-1} [\bar{\vartheta}]^T$$

donde

$$[\bar{\alpha}] = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_{hh} & \bar{\alpha}_{hm} \\ \bar{\alpha}_{mh} & \bar{\alpha}_{mm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_{hh}}{\alpha_{hh}^o} & \frac{\alpha_{hm}}{\alpha_{hm}^o} \\ \frac{\alpha_{mh}}{\alpha_{mh}^o} & \frac{\alpha_{mm}}{\alpha_{mm}^o} \end{bmatrix}$$

$$[\bar{\Lambda}] = a [\Lambda] \quad [\bar{\vartheta}] = \sqrt{a} [T]^{-1} [\vartheta] = \begin{bmatrix} [\bar{\vartheta}_h] \\ [\bar{\vartheta}_m] \end{bmatrix}$$

La receptancia se expresa en función de matrices físicas como

$$[\alpha] = [\tilde{I}] ([K] + i\omega [C] - \omega^2 [M])^{-1} [\tilde{I}]^T$$

donde

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_0] & [K_A] \\ [K_A^T] & [K_G] \end{bmatrix} \quad [M] = \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [I_G] \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} [C_0] & [C_A] \\ [C_A^T] & [C_G] \end{bmatrix} \quad [\tilde{I}] = \begin{bmatrix} [I_0] & [0] \end{bmatrix}$$

La matriz de transformación que permite la adimensionalización de las matrices físicas resulta

$$[\tilde{T}] = \begin{bmatrix} [T] & [0] \\ [0] & a [I] \end{bmatrix}$$

La receptancia se adimensionaliza utilizando las matrices de transformación $[T]$ y $[\tilde{T}]$ y reemplazando $\omega = \frac{a\omega_o}{a}$ de la siguiente forma

$$[T]^{-1} [\alpha] [T]^{-1} = [T]^{-1} [\tilde{I}] ([K] + i\omega [C] - \omega^2 [M])^{-1} [\tilde{I}]^T [T]^{-1}$$

$$= [\tilde{I}][\tilde{T}]^{-1} \left([K] + i\frac{a\omega_o}{a} [C] - \frac{a\omega_o^2}{a^2} [M] \right)^{-1} [\tilde{T}]^{-1} [\tilde{I}]^T$$

$$= [\tilde{I}] \left([\tilde{T}] [K] [\tilde{T}] + i\frac{a\omega_o}{a} [\tilde{T}] [C] [\tilde{T}] - \frac{a\omega_o^2}{a^2} [\tilde{T}] [M] [\tilde{T}] \right)^{-1} [\tilde{I}]^T$$

$$[\bar{\alpha}] = [\tilde{I}] ([\bar{K}] + ia\omega_o [\bar{C}] - a\omega_o^2 [\bar{M}])^{-1} [\tilde{I}]^T$$

donde

$$[\bar{K}] = [\tilde{T}] [K] [\tilde{T}] \quad [\bar{C}] = \frac{1}{a} [\tilde{T}] [C] [\tilde{T}]$$

$$[\bar{M}] = \frac{1}{a^2} [\tilde{T}] [M] [\tilde{T}] = [M]$$

La rigidez dinámica adimensional se calcula como la inversa de la receptancia adimensional

$$[\bar{K}_D] = [\bar{\alpha}]^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{hh} & \bar{K}_{hm} \\ \bar{K}_{mh} & \bar{K}_{mm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_{hh} & \bar{\alpha}_{hm} \\ \bar{\alpha}_{mh} & \bar{\alpha}_{mm} \end{bmatrix}^{-1}$$

La figura 5.1 muestra el buen ajuste que produce el *MFPM* para las partes real e imaginaria de las componentes de la receptancia adimensional calculadas con el programa *SASSI*. La matriz de receptancia obtenida con este programa resulta simétrica ($\alpha_{mh}^o = \alpha_{hm}^o$) a diferencia de la solución derivada por Luco. La figura 5.2 muestra las partes real e imaginaria de las componentes de la rigidez dinámica adimensional.

Las matrices modales adimensionales identificadas son

$$[\bar{\Lambda}] = \text{diag} \begin{bmatrix} -0.7239 \\ -6.2657 \\ -1.5272 \pm 0.5663i \\ -2.3316 \pm 2.4823i \\ -1.3471 \pm 3.1292i \end{bmatrix} \quad [\bar{\vartheta}]^T = \begin{bmatrix} 0.2471 & -0.0539 \\ -0.3914 & 2.1894 \\ 0.8007 \mp 0.2373i & 0.6460 \pm 0.7607i \\ -0.3728 \pm 0.0829i & 1.0055 \mp 1.2695i \\ 0.0222 \pm 0.1385i & 0.2145 \pm 0.1450i \end{bmatrix}$$

que se dimensionalizan a través de

$$[\Lambda] = \frac{1}{a} [\bar{\Lambda}] \quad [\vartheta] = \frac{1}{\sqrt{a}} [T] [\bar{\vartheta}]$$

Las matrices físicas de segundo orden ajustadas que involucran 3 *GL* generalizados son

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} 1.3679 & 0.0462 & -1.4128 & 0.8678 & 0.4454 \\ 0.0462 & 2.7892 & 6.2841 & 0.4776 & 0.6538 \\ -1.4128 & 6.2841 & 32.6749 & 0 & 0 \\ 0.8678 & 0.4776 & 0 & 11.6818 & 0 \\ 0.4454 & 0.6538 & 0 & 0 & 0.7903 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{C}] = \begin{bmatrix} 0.6211 & 0.0083 & -0.3357 & 0.1117 & 0.4771 \\ 0.0083 & 0.3011 & 0.7353 & 0.0229 & 0.9140 \\ -0.3357 & 0.7353 & 6.7017 & 0 & 0 \\ 0.1117 & 0.0229 & 0 & 2.5616 & 0 \\ 0.4771 & 0.9140 & 0 & 0 & 1.7970 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{M}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que se dimensionalizan a través de

$$[K] = [\tilde{T}]^{-1} [\bar{K}] [\tilde{T}]^{-1} \quad [C] = a[\tilde{T}]^{-1} [\bar{C}] [\tilde{T}]^{-1}$$

$$[M] = a^2[\tilde{T}]^{-1} [\bar{M}] [\tilde{T}]^{-1} = [\bar{M}]$$

Los parámetros de las matrices modales y físicas son sensibles a las funciones de peso utilizadas en el *MFPM* aun manteniendo la bondad del ajuste de la receptancia. Las matrices modales al igual que las matrices físicas poseen 24 parámetros independientes.

5.4.2 Ejemplo B

Este ejemplo consiste en un disco rígido con masa que reposa sobre un estrato elástico de 10 metros apoyado en un semi-espacio homogéneo. Los *GL* involucrados en el ajuste son el

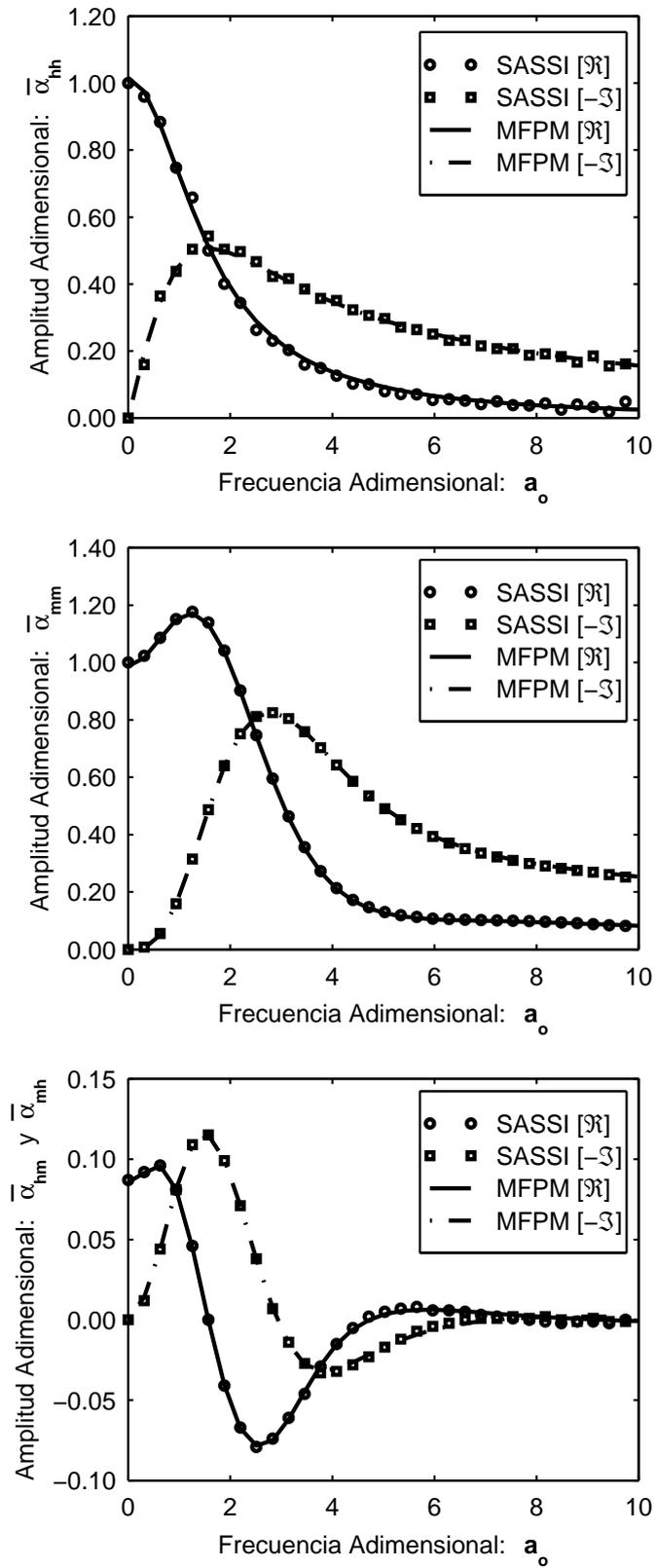


Fig. 5.1: Receptancia del Ejemplo A.

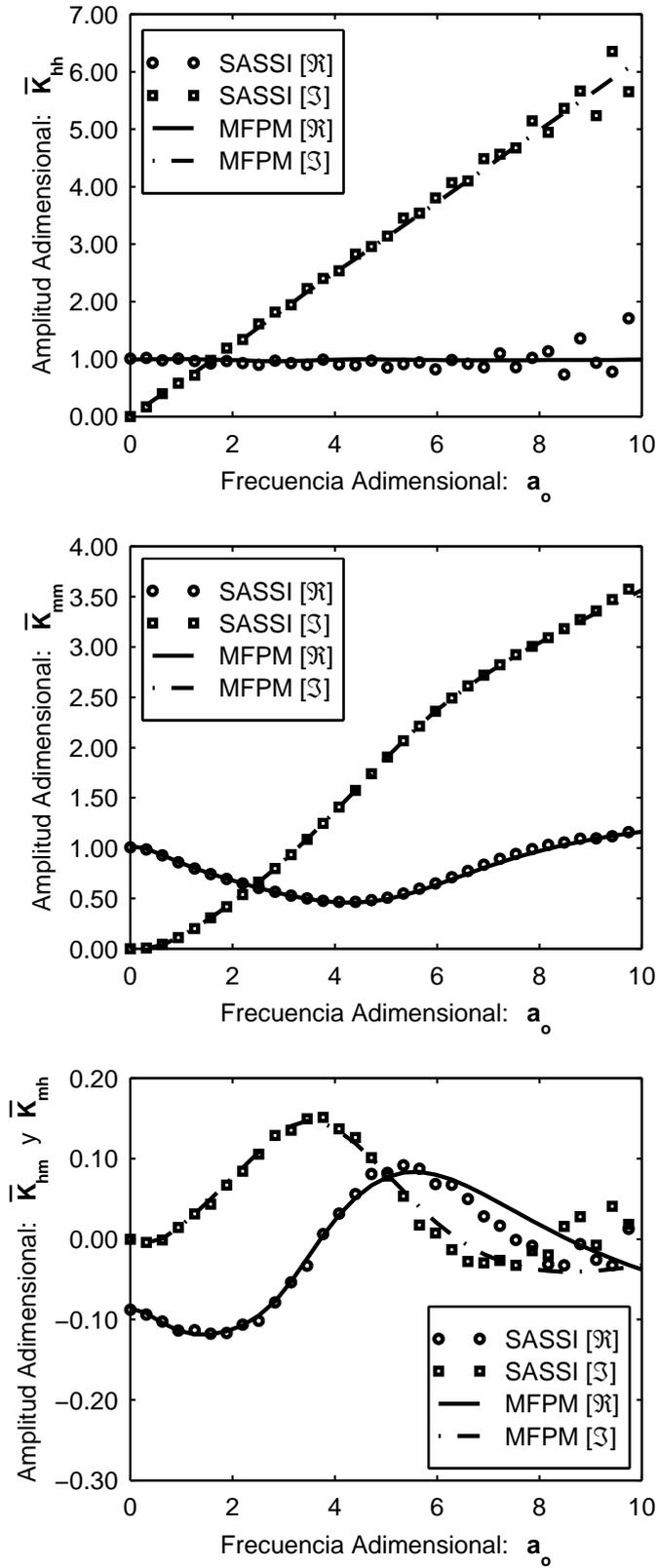


Fig. 5.2: Rigidez dinámica del Ejemplo A.

desplazamiento horizontal (**h**) y la rotación de balanceo (**m**). El radio del disco es $r = 5 \text{ m}$ y la masa por unidad de superficie es $q_d = 2400 \text{ kg.m}^{-2}$. El estrato y el semi-espacio poseen una densidad de $\rho = 1800 \text{ kg.m}^{-3}$ y un coeficiente de Poisson de $\nu = 1/3$. El módulo de elasticidad transversal del estrato es $G_1 = 1.800 \times 10^4 \text{ kN.m}^{-2}$ mientras que el semi-espacio posee un módulo $G_2 = 1.125 \times 10^5 \text{ kN.m}^{-2}$.

La figura 5.3 muestra las componentes de la receptancia calculadas con el programa *SASSI* junto con las mismas componentes ajustadas por el *MFPM*. El buen ajuste obtenido se consigue con 11 pares de modos complejos conjugados. Las matrices físicas derivadas presentan algunos elementos negativos sobre la diagonal principal. La figura 5.4 muestra las componentes de la rigidez dinámica obtenidas a través de la inversión de la receptancia.

Las matrices modales adimensionales identificadas son

$$[\Lambda] = \text{diag} \begin{bmatrix} -1.215 \pm 2.818i \\ -1.030 \pm 3.796i \\ -0.874 \pm 4.328i \\ -1.121 \pm 5.898i \\ -0.908 \pm 7.467i \\ -3.956 \pm 7.986i \\ -0.870 \pm 9.798i \\ -0.330 \pm 11.06i \\ -1.083 \pm 11.38i \\ -1.082 \pm 11.63i \\ -1.940 \pm 16.94i \end{bmatrix} \quad [\vartheta]^T = 10^{-4} \times \begin{bmatrix} 3.509 \mp 1.342i & -0.020 \mp 0.043i \\ 0.751 \pm 1.320i & -0.203 \mp 0.029i \\ 1.650 \mp 0.904i & 0.592 \mp 0.065i \\ 0.448 \mp 1.275i & 0.230 \mp 0.106i \\ 1.745 \mp 2.005i & -0.104 \pm 0.029i \\ -1.265 \pm 0.771i & 1.199 \mp 1.072i \\ -0.523 \pm 0.037i & 0.200 \mp 0.063i \\ 0.759 \mp 0.422i & 0.037 \mp 0.070i \\ 0.052 \mp 1.256i & 0.316 \mp 0.250i \\ 1.139 \mp 1.640i & 0.100 \pm 0.130i \\ 0.884 \mp 0.550i & 0.307 \mp 0.361i \end{bmatrix}$$

Las matrices físicas de segundo orden ajustadas son

$$[K] = \begin{bmatrix} [K'_{11}] & [K'_{12}] \\ [K'_{21}] & [K'_{22}] \end{bmatrix} \quad [C] = \begin{bmatrix} [C'_{11}] & [C'_{12}] \\ [C'_{21}] & [C'_{22}] \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [M'_{22}] \end{bmatrix}$$

donde

$$[K'_{11}] = 10^7 \times \begin{bmatrix} 0.2799 & 0.2614 \\ 0.2614 & 1.3907 \end{bmatrix} \quad [C'_{11}] = 10^4 \times \begin{bmatrix} -3.6683 & -3.8790 \\ -3.8790 & 3.3145 \end{bmatrix}$$

$$[K'_{21}] = 10^5 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.0379 & 0.0058 \\ 0.0519 & -0.2360 \\ -0.1102 & -0.1393 \\ -0.4078 & -0.5451 \\ -0.0722 & 0.0400 \\ -0.5051 & -0.5248 \\ 0.0297 & -0.0561 \\ -0.0739 & 0.0256 \\ -0.5480 & -1.0783 \end{bmatrix} \quad [C'_{21}] = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0.0301 & 0.0113 \\ -0.0013 & -0.0499 \\ 0.0526 & -0.0059 \\ -0.2824 & -1.4873 \\ -0.1466 & -0.6247 \\ 0.0246 & 0.0039 \\ 0.0513 & -0.1716 \\ -0.0667 & 0.0269 \\ -0.1028 & -0.1348 \\ 0.0142 & -0.4574 \\ -0.1307 & 0.5634 \end{bmatrix}$$

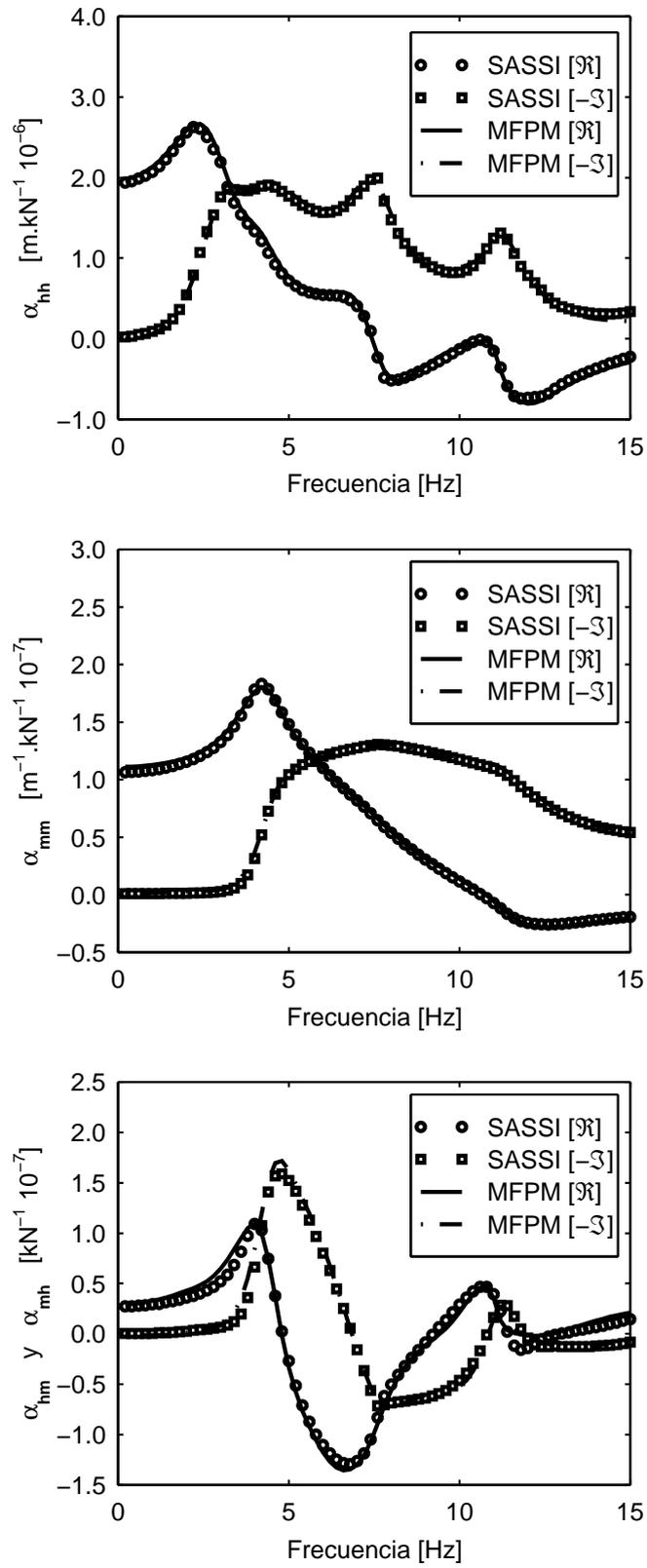


Fig. 5.3: Receptancia del Ejemplo B.

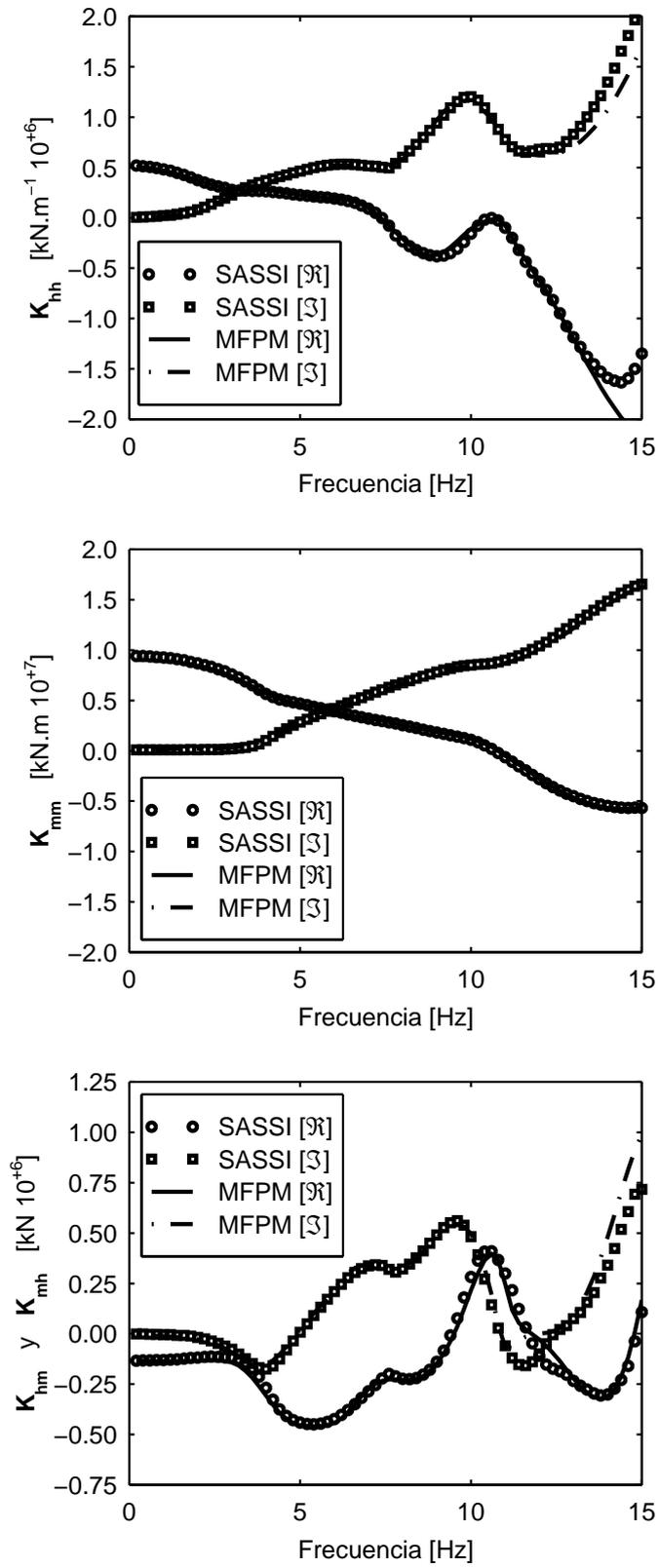


Fig. 5.4: Rigidez dinámica del Ejemplo B.

$$[\hat{K}'_{22}] = 10^3 \times \text{diag} \begin{bmatrix} -0.0010 \\ -0.0010 \\ 0.5984 \\ 0.7222 \\ 1.5580 \\ 1.4398 \\ 3.7520 \\ 3.8433 \\ 4.7883 \\ 5.2194 \\ 9.7859 \end{bmatrix} \quad [\hat{C}'_{22}] = \text{diag} \begin{bmatrix} -0.0093 \\ -0.0041 \\ 10.812 \\ 22.632 \\ 16.280 \\ 35.390 \\ 10.968 \\ 26.788 \\ 5.1169 \\ 14.751 \\ 26.398 \end{bmatrix}$$

$$[\hat{M}'_{22}] = \text{diag} [0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

Las matrices modales al igual que las matrices físicas poseen 66 parámetros independientes. Las primeras dos componentes de la diagonal principal de $[\hat{K}'_{22}]$ poseen módulo unitario y se asumen como valores impuestos a pesar que el signo puede ser positivo o negativo. Una forma de justificar el número de parámetros independientes obtenidos para las matrices físicas consiste en transformar los dos primeros *GL* generalizados utilizando

$$[\hat{T}] = \text{diag} \left[1 \ 1 \ \frac{1}{0.0301 \times 10^3} \ \frac{1}{-0.0013 \times 10^3} \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \right]$$

La adopción de valores unitario con signo positivo para los elementos de la primer columna y las dos primeras filas de $[\hat{C}'_{21}]$ libera de la condición de parámetros independientes a las dos primeras componentes de la diagonal principal de $[\hat{K}'_{22}]$.

Capítulo 6

Descripción Modal de Sistemas con Interacción Suelo-Estructura

Los métodos tradicionales de diseño de fundaciones superficiales que se comportan como una placa rígida apoyada sobre un semi-espacio homogéneo emplean coeficientes aproximados de rigidez y amortiguamiento para los 6 GL espaciales. Las matrices físicas de la fundación obtenidas con estos coeficientes resultan diagonales dado que se descartan los términos de acoplamiento que existen en el movimiento de balanceo (en inglés se designa *rocking*). Los coeficientes de rigidez se toman de los valores estáticos obtenidos de soluciones rigurosas. La determinación de los coeficientes de amortiguamiento se basa en la descripción adecuada del factor de amplificación dinámica del modo fundamental. Los coeficientes de amortiguamiento para los GL de los movimientos rotacionales caracterizados por un menor amortiguamiento por radiación se definen entonces en función de las propiedades inerciales del cuerpo rígido que conforman la estructura y la fundación.

La descripción modal de estructuras apoyadas en fundaciones superficiales requiere el empleo de coeficientes que sean representativos en un amplio rango de frecuencias. Por lo tanto, los *coeficientes de diseño* resultan inadecuados dado que sólo representan en forma razonable al modo fundamental. Las soluciones rigurosas de la rigidez dinámica de una placa de fundación apoyada en un semi-espacio homogéneo poseen valores asintóticos para bajas y altas frecuencias que permiten la obtención de coeficientes más apropiados para el cálculo de los modos superiores. Estos *coeficientes asintóticos* que resultan inadecuados para el diseño se utilizan en un estudio paramétrico de niveles de interacción en función de la rigidez relativa entre la estructura y la fundación.

En el presente capítulo se analizan los modos flexionales de una estructura prismática sin amortiguamiento afectados por el movimiento de balanceo de la placa de fundación. La identificación de los parámetros adimensionales que gobiernan el comportamiento dinámico de estos sistemas permite la construcción de *ábacos de interacción* que describen el impacto de la interacción tanto en la reducción de las frecuencias flexionales de base empotrada como en el surgimiento de amortiguamiento debido íntegramente a la disipación por radiación. Los ábacos de interacción permiten una selección adecuada de casos relevantes para el estudio de la composición modal de estos sistemas. El modelo modal se compone básicamente de modos primarios caracterizados por amplitudes espectrales importantes y modos secundarios que adquieren relevancia en la medida que aumenta la flexibilidad del suelo en relación a la

estructura.

El modelado de la fundación a través de matrices independientes de la frecuencia con las técnicas presentadas en los capítulos anteriores permite la determinación de matrices modales analíticas de un número importante de sistemas con interacción suelo-estructura. Estas matrices físicas de la fundación con una precisión adecuada en un amplio rango de frecuencias conforman el denominado *modelo exacto de la fundación* que se utiliza en el análisis de los mismos casos estudiados con coeficientes asintóticos. La comparación de la composición modal de ambas versiones permite comprobar que el número de modos primarios se mantiene aunque surge un mayor número de modos secundarios que depende de los *GL* generalizados incorporados a la fundación. Las propiedades dinámicas de los modos primarios sufren modificaciones vinculadas a la aproximación conseguida con los coeficientes asintóticos.

6.1 Modelos Simplificados de Fundaciones Superficiales

Los modelos simplificados utilizan exclusivamente los *GL* físicos de la fundación prescindiendo de otros *GL* agregados (internos o generalizados). Los primeros criterios de diseño para el análisis de estructuras apoyadas sobre fundaciones superficiales incorporan solamente resortes con coeficientes de rigidez estática en los *GL* de la interfaz para la obtención de matrices modales con amortiguamiento clásico. Las formas modales reales resultantes permiten la aplicación del método de descomposición modal utilizando la formulación de segundo orden. En los trabajos de Roesset *et al.* [53] y Bielak [54] se recurre a criterios energéticos en la determinación de un *amortiguamiento modal equivalente* para cada uno de los modos clásicos superpuestos. El grado de aproximación conseguido se evalúa en comparación con soluciones rigurosas obtenidas frecuencia por frecuencia.

Los criterios actuales de diseño utilizan coeficientes de rigidez y amortiguamiento para la diagonal principal de las matrices físicas de la fundación que producen formas modales complejas. Las distintas pautas aplicadas en la determinación de estos coeficientes permiten reproducir diferentes características dinámicas del sistema. La incorporación de una *matriz de masa agregada* (independiente de la masa propia de la fundación y la estructura) mejora además la aproximación de la rigidez dinámica exacta en rangos de baja y media frecuencia. En la Figura 6.1 se muestra el sistema de coordenadas de referencia utilizado en la descripción de los movimientos de la fundación.

6.1.1 Modelos Simplificados con Coeficientes de Diseño

En el libro de Richart *et al.* [5] se presentan coeficientes de diseño para placas de fundación que reproducen adecuadamente la amplificación dinámica del modo fundamental de cuerpo rígido. Los coeficientes utilizados para placas circulares se muestran en la Tabla 6.1 mientras que los coeficientes válidos para placas cuadradas se muestran en la Tabla 6.2. Estos coeficientes de diseño se adoptan en el Estándar del ASCE [55] para el análisis sísmico de estructuras relacionadas a la actividad nuclear. Los coeficientes con subíndice x se aplican también para el movimiento traslacional en la dirección horizontal vinculada al eje y de la Figura 6.1. Los coeficientes con subíndice ψ se utilizan para el movimiento rotacional alrededor de los ejes x e y mientras que el subíndice θ se vincula al giro alrededor del eje z .

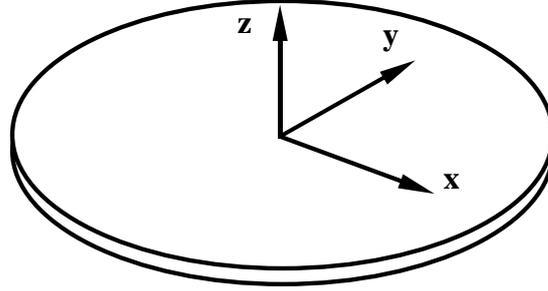


Fig. 6.1: Sistema de coordenadas de referencia de los movimientos de la fundación

Los parámetros intervinientes en las expresiones de estos coeficientes son la densidad ρ , la velocidad de propagación de ondas de corte V_s y el coeficiente de Poisson ν del suelo junto con el radio r de la placa circular o el semi-ancho b de la placa cuadrada. Los parámetros adimensionales de inercia rotacional μ que aparecen en las expresiones de los movimientos rotacionales permiten reproducir altos factores de amplificación producidos por el bajo amortiguamiento por radiación de estos movimientos. Las relaciones de amortiguamiento viscoso junto con expresiones de masas de los distintos movimientos se presentan en la Tabla 6.3.

Los coeficientes de amortiguamiento de diseño se determinan en función de las relaciones de amortiguamiento y los coeficientes de amortiguamiento crítico. La relación de amortiguamiento del movimiento genérico i se expresa como

$$\xi_i = \frac{c_i}{c_i^{crítico}} \quad (6.1)$$

de donde

$$c_i = \xi_i \cdot c_i^{crítico} \quad (6.2)$$

La relación de amortiguamiento ξ_i se extrae de la Tabla 6.3 en tanto que $c_i^{crítico}$ se calcula como

$$c_i^{crítico} = 2\sqrt{k_i m_i} \quad (6.3)$$

donde k_i es el coeficiente de rigidez estática y m_i es la masa de cuerpo rígido que se extrae de la Tabla 6.3 en función de un parámetro de inercia adimensional.

6.1.2 Modelos Simplificados con Coeficientes Asintóticos

Los coeficientes asintóticos para placas circulares se presentan en el trabajo de Wolf [6] en tanto que los coeficientes asintóticos para placas cuadradas se recopilan en el trabajo de Wu y Lee [56]. El coeficiente de rigidez corresponde al valor asintótico puramente real de la rigidez dinámica para bajas frecuencias mientras que el coeficiente de amortiguamiento se vincula al valor asintótico puramente imaginario de la pendiente de la rigidez dinámica para altas frecuencias. Estos coeficientes asintóticos se presentan en la Tabla 6.4 para placas circulares y en la Tabla 6.5 para placas cuadradas. El coeficiente asintótico de rigidez

Movimiento	Rigidez equivalente	Amortig. equivalente
Vertical	$k_z = \frac{4}{(1-\nu)} \rho V_s^2 r$	$c_z = \frac{3.40}{(1-\nu)} \rho V_s r^2$
Horizontal	$k_x = \frac{32(1-\nu)}{(7-8\nu)} \rho V_s^2 r$	$c_x = \frac{18.4(1-\nu)}{(7-8\nu)} \rho V_s r^2$
Balanceo	$k_\psi = \frac{8}{3(1-\nu)} \rho V_s^2 r^3$	$c_\psi = \frac{0.80}{(1-\nu)(1+\mu_\psi)} \rho V_s r^4$
Torsional	$k_\theta = \frac{16}{3} \rho V_s^2 r^3$	$c_\theta = \frac{2.31\sqrt{\mu_\theta}}{(1+2\mu_\theta)} \rho V_s r^4$

Tabla 6.1: Coeficientes de diseño para la placa de fundación circular

Movimiento	Rigidez equivalente	Amortig. equivalente
Vertical	$k_z = \frac{4.30}{(1-\nu)} \rho V_s^2 b$	$c_z = \frac{4.33}{(1-\nu)} \rho V_s b^2$
Horizontal	$k_x = 4(1+\nu) \rho V_s^2 b$	$c_x = \frac{23.4(1-\nu)}{(7-8\nu)} \rho V_s b^2$
Balanceo	$k_\psi = \frac{4}{(1-\nu)} \rho V_s^2 b^3$	$c_\psi = \frac{1.36}{(1-\nu)(1+\mu_\psi)} \rho V_s b^4$
Torsional	$k_\theta = 7.93 \rho V_s^2 b^3$	$c_\theta = \frac{3.92\sqrt{\mu_\theta}}{(1+2\mu_\theta)} \rho V_s b^4$

Tabla 6.2: Coeficientes de diseño para la placa de fundación cuadrada

Movimiento	Relación de amortig.	Masa adimensional	Coefficiente de masa
Vertical	$\xi_z = \frac{0.425}{\sqrt{\mu_z}}$	$\mu_z = \frac{(1-\nu)}{4} \frac{m_z}{\rho r^3}$	$m_z = \frac{4}{(1-\nu)} \rho r^3 \mu_z$
Horizontal	$\xi_x = \frac{0.288}{\sqrt{\mu_x}}$	$\mu_x = \frac{(7-8\nu)}{32(1-\nu)} \frac{m_x}{\rho r^3}$	$m_x = \frac{32(1-\nu)}{(7-8\nu)} \rho r^3 \mu_x$
Balanceo	$\xi_\psi = \frac{0.15}{(1+\mu_\psi)\sqrt{\mu_\psi}}$	$\mu_\psi = \frac{3(1-\nu)}{8} \frac{I_\psi}{\rho r^5}$	$I_\psi = \frac{8}{3(1-\nu)} \rho r^5 \mu_\psi$
Torsional	$\xi_\theta = \frac{0.50}{(1+2\mu_\theta)}$	$\mu_\theta = \frac{I_\theta}{\rho r^5}$	$I_\theta = \rho r^5 \mu_\theta$

Tabla 6.3: Relaciones utilizadas en el cálculo de los coeficientes de amortiguamiento

horizontal difiere levemente del coeficiente de diseño debido a las distintas hipótesis consideradas durante la eliminación del término de acoplamiento del movimiento de balanceo.

De acuerdo al trabajo de Gazetas y Dobry [57] el comportamiento para altas frecuencias de una fundación apoyada sobre un semi-espacio homogéneo se relaciona con la propagación de ondas unidimensionales de una barra prismática vertical semi-infinita con la sección de

la placa de fundación. El coeficiente de amortiguamiento asintótico se calcula entonces de la siguiente forma

$$c_i = \rho AV \tag{6.4}$$

El parámetro A es el área de la placa de fundación para los movimientos traslacionales, el momento de inercia axial para el movimiento de balanceo y el momento de inercia polar para el movimiento torsional. El parámetro V es la velocidad de propagación de ondas longitudinales V_p para los movimientos vertical y de balanceo y la velocidad de propagación de ondas transversales V_s para los movimientos horizontal y torsional. En el trabajo de Wolf [6] se sugiere la utilización de $2V_s$ en lugar de V_p para $\nu > \frac{1}{3}$ dado que esta velocidad tiende a infinito para un suelo incompresible ($\nu \rightarrow \frac{1}{2}$).

Movimiento	Rigidez equivalente	Amortig. equivalente
Vertical	$k_z = \frac{4}{(1-\nu)}\rho V_s^2 r$	$c_z = \pi \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)}}\rho V_s r^2 \quad (\nu \leq \frac{1}{3})$ $c_z = 2\pi\rho V_s r^2 \quad (\nu > \frac{1}{3})$
Horizontal	$k_x = \frac{8}{(2-\nu)}\rho V_s^2 r$	$c_x = \pi\rho V_s r^2$
Balanceo	$k_\psi = \frac{8}{3(1-\nu)}\rho V_s^2 r^3$	$c_\psi = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)}}\rho V_s r^4 \quad (\nu \leq \frac{1}{3})$ $c_\psi = \frac{\pi}{2}\rho V_s r^4 \quad (\nu > \frac{1}{3})$
Torsional	$k_\theta = \frac{16}{3}\rho V_s^2 r^3$	$c_\theta = \frac{\pi}{2}\rho V_s r^4$

Tabla 6.4: Coeficientes asintóticos para la placa de fundación circular

6.1.3 Modelos Simplificados con Masa Agregada

La introducción de coeficientes de masa agregada independientes de la masa propia de la fundación y la estructura mejoran la aproximación para bajas y medias frecuencias respecto a las soluciones rigurosas de la rigidez dinámica. Los resultados más exactos que pueden obtenerse en estos rangos de frecuencia sin la incorporación de GL generalizados en las matrices físicas de la fundación se consiguen utilizando los coeficientes propuestos en el trabajo de Wolf [58] reproducidos en la Tabla 6.6. Sin embargo, los errores producidos por la masa agregada para altas frecuencias resultan significativos.

6.1.4 Comparación de Modelos Simplificados

Las relaciones entre los coeficientes de diseño y asintóticos de amortiguamiento se muestran en las Figuras 6.2 y 6.3. La relación de los coeficientes torsionales no varía con ν aunque presenta un valor máximo para $\mu_\theta = 0.50$. Los valores menores a este máximo de aproximadamente 0.52 se repiten para un valor menor y un valor mayor de esta masa adimensional.

Movimiento	Rigidez equivalente	Amortig. equivalente
Vertical	$k_z = \frac{4.7}{(1-\nu)}\rho V_s^2 b$	$c_z = 4\sqrt{\frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)}}\rho V_s b^2 \quad (\nu \leq \frac{1}{3})$ $c_z = 8\rho V_s b^2 \quad (\nu > \frac{1}{3})$
Horizontal	$k_x = \frac{9.2}{(2-\nu)}\rho V_s^2 b$	$c_x = 4\rho V_s b^2$
Balanceo	$k_\psi = \frac{4}{(1-\nu)}\rho V_s^2 b^3$	$c_\psi = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)}}\rho V_s b^4 \quad (\nu \leq \frac{1}{3})$ $c_\psi = \frac{8}{3}\rho V_s b^4 \quad (\nu > \frac{1}{3})$
Torsional	$k_\theta = 8.31\rho V_s^2 b^3$	$c_\theta = \frac{8}{3}\rho V_s b^4$

Tabla 6.5: Coeficientes asintóticos para la placa de fundación cuadrada

Movimiento	Rigidez equivalente	Amortig. equivalente	Masa equivalente
Vertical	$k_z = \frac{4}{(1-\nu)}\rho V_s^2 r$	$c_z = \frac{3.40}{(1-\nu)}\rho V_s r^2$	$m_z = \frac{1.08}{(1-\nu)}\rho r^3$
Horizontal	$k_x = \frac{8}{(2-\nu)}\rho V_s^2 r$	$c_x = \frac{4.64}{(1-2\nu)}\rho V_s r^2$	$m_x = \frac{0.76}{(2-\nu)}\rho r^3$
Balanceo	$k_\psi = \frac{8}{3(1-\nu)}\rho V_s^2 r^3$	$c_\psi = \frac{0.80}{(1-\nu)(1+\mu_\psi)}\rho V_s r^4$	$I_\psi = \frac{0.64}{(1-\nu)}\rho r^5$
Torsional	$k_\theta = \frac{16}{3}\rho V_s^2 r^3$	$c_\theta = \frac{2.31\sqrt{\mu_\theta}}{(1+2\mu_\theta)}\rho V_s r^4$	$I_\theta = 0.24\rho r^5$

Tabla 6.6: Coeficientes de osciladores simples de baja y media frecuencia

La relación entre el coeficiente de diseño y el coeficiente asintótico de rigidez para el movimiento traslacional horizontal se muestra en la Figura 6.4. La diferencia observada se asocia a la eliminación del término de acoplamiento entre el movimiento horizontal y el movimiento de balanceo. De hecho, la igualdad de ambos coeficientes coincide con la anulación de este término de acoplamiento para $\nu \rightarrow \frac{1}{2}$.

6.2 Abacos de Interacción

Los ábacos de interacción se construyen para sistemas compuestos por una estructura prismática sin amortiguamiento propio vinculada a un disco de fundación apoyado sobre un semi-espacio homogéneo de suelo. La caracterización de estos sistemas se relaciona con el comportamiento flexional de la estructura y el movimiento de balanceo de la placa de fundación. Los parámetros relevantes de la estructura resultan entonces la longitud L , la rigidez flexional EI y la masa por unidad de longitud m . Los comportamientos axial

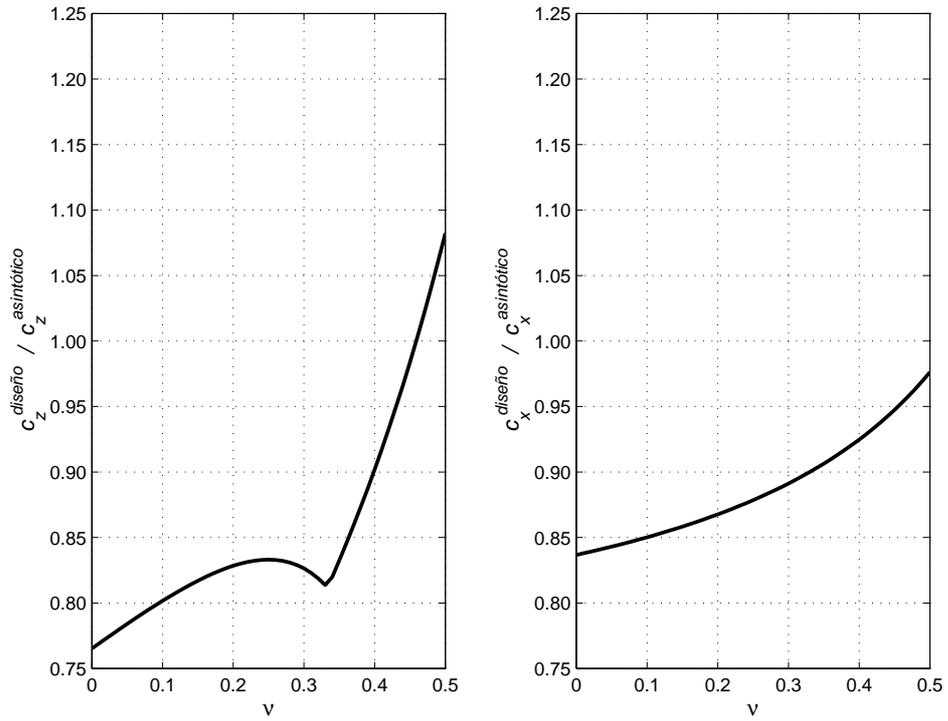


Fig. 6.2: Relaciones entre coeficientes de amortiguamiento para movimientos traslacionales

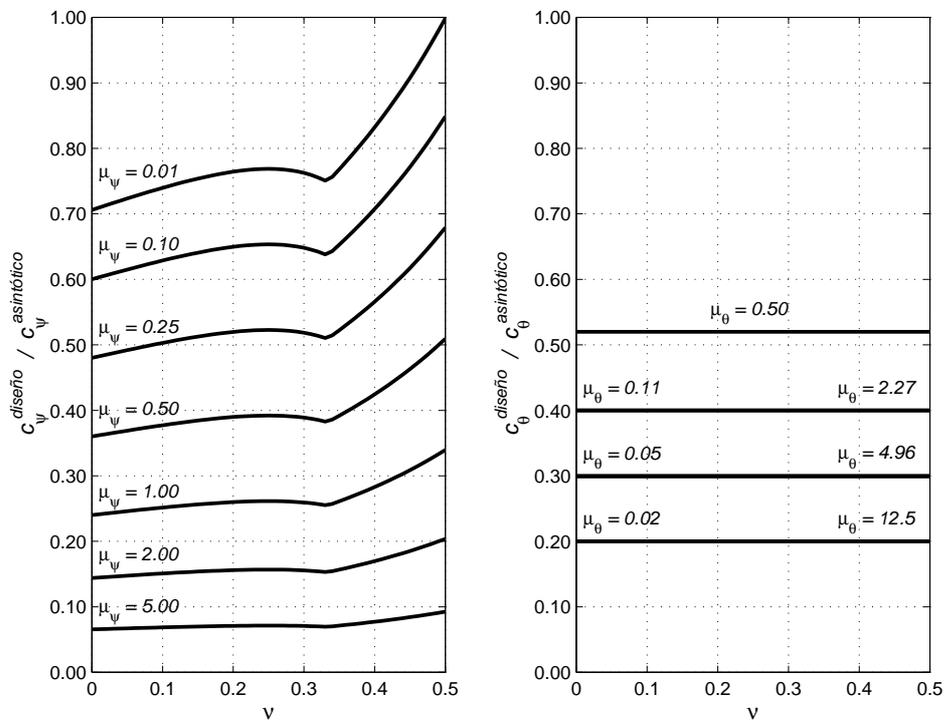


Fig. 6.3: Relaciones entre coeficientes de amortiguamiento para movimientos rotacionales

y torsional son más sencillos y pueden analizarse en forma desacoplada. Los coeficientes asintóticos se utilizan como parámetros de la fundación dado que resultan representativos en un amplio rango de frecuencias siendo más adecuados en el cálculo de los modos superiores de vibración.

Los ábacos de interacción se componen de dos gráficos por cada par de modos complejos conjugados obtenidos con la formulación de primer orden. El primer gráfico describe la reducción del módulo de los polos naturales complejos conjugados de flexión respecto a la condición de base empotrada. El segundo gráfico muestra una relación de amortiguamiento del sistema (en porcentaje) debida íntegramente a la disipación del suelo por radiación. El cálculo de este amortiguamiento para el modo r se realiza en función de la relación entre la parte real y el módulo del polo s_r de la siguiente forma

$$\xi_r = -\frac{\text{Re}(s_r)}{|s_r|} \tag{6.5}$$

La forma de cálculo de esta relación de amortiguamiento es análoga a la utilizada para sistemas con amortiguamiento clásico aunque su significado no resulta estrictamente equivalente. La complejidad de las formas modales no considerada en forma explícita en los ábacos se encuentra íntimamente ligada a la relación de amortiguamiento en (6.5).

Los ábacos de interacción permiten la identificación de casos relevantes para el estudio de la composición modal del tipo de sistemas analizados. Los parámetros adimensionales que definen las características dinámicas del sistema junto con los posibles rangos de variación para la mayoría de los casos reales se indican en la Tabla 6.7.

Parámetro adimensional	Mínimo	Máximo
$\bar{L} = \frac{L}{r}$ longitud de la estructura	1	10
$\overline{EI} = \frac{EI}{\rho V_s^2 L^4}$ rigidez flexional de la estructura	10^{-4}	10^{-1}
$\overline{m} = \frac{m}{\rho L^2}$ masa por unidad de longitud	10^{-4}	10^{-0}

Tabla 6.7: Parámetros adimensionales de los ábacos de interacción

Los gráficos se expresan en función directa de \bar{L} y \overline{EI} construyéndose para determinados valores de la masa adimensional \overline{m} . Los ábacos de interacción correspondientes al 1° modo se presentan en las Figuras 6.5 a 6.9 mientras que los ábacos del 2°, 3° y 4° modo se encuentran en el apéndice C.

Los casos de estudio seleccionados se indican con círculos en las Figuras 6.6, 6.7 y 6.8 mientras que sus parámetros adimensionales se encuentran en la Tabla 6.8. La rigidez flexional adimensional que se toma para todos los casos de estudio resulta $\overline{EI} = 10^{-3} \cdot \bar{L}$.

Los parámetros que toman valores fijos en la descripción modal de los casos de estudio son los siguientes

$$L = 2.50 \text{ m}$$

$$EI = 4000 \text{ kN.m}^2$$

$$\rho = 1.60 \text{ tn/m}^3$$

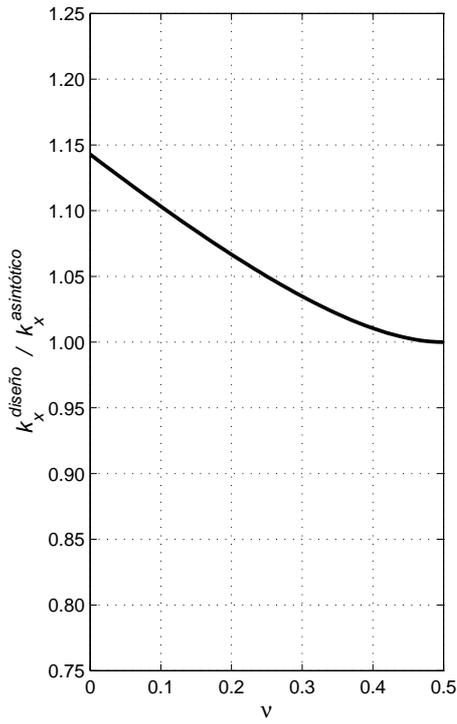


Fig. 6.4: Relación entre coeficientes de rigidez para el movimiento traslacional horizontal

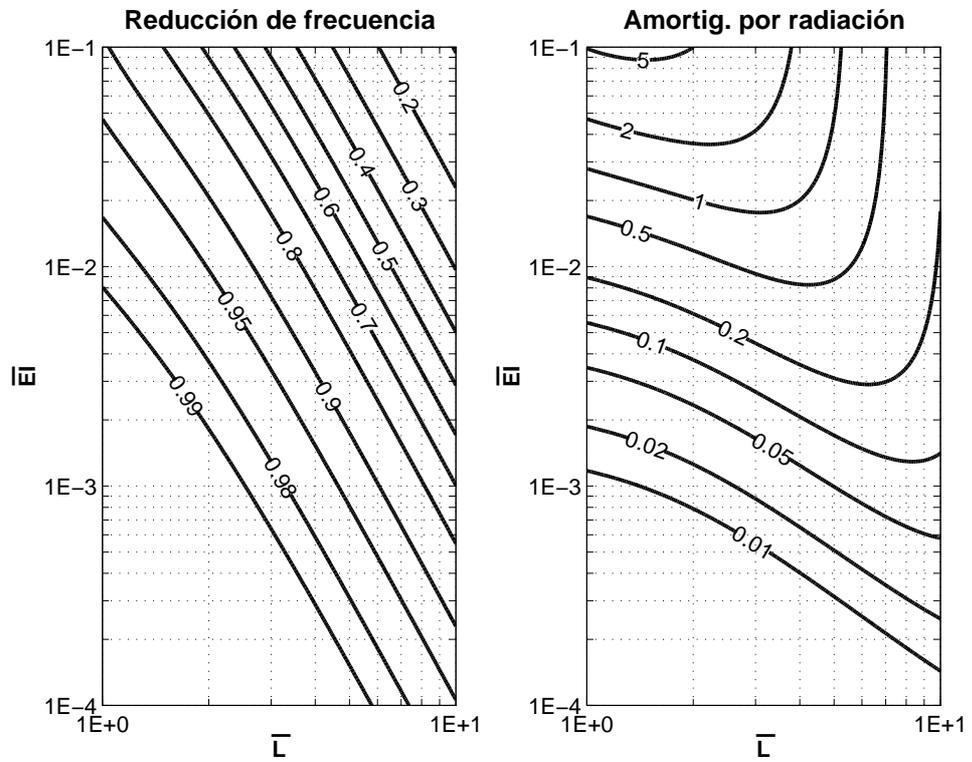


Fig. 6.5: Abacos de Interacción del 1º modo para $\bar{m} = 10^0$

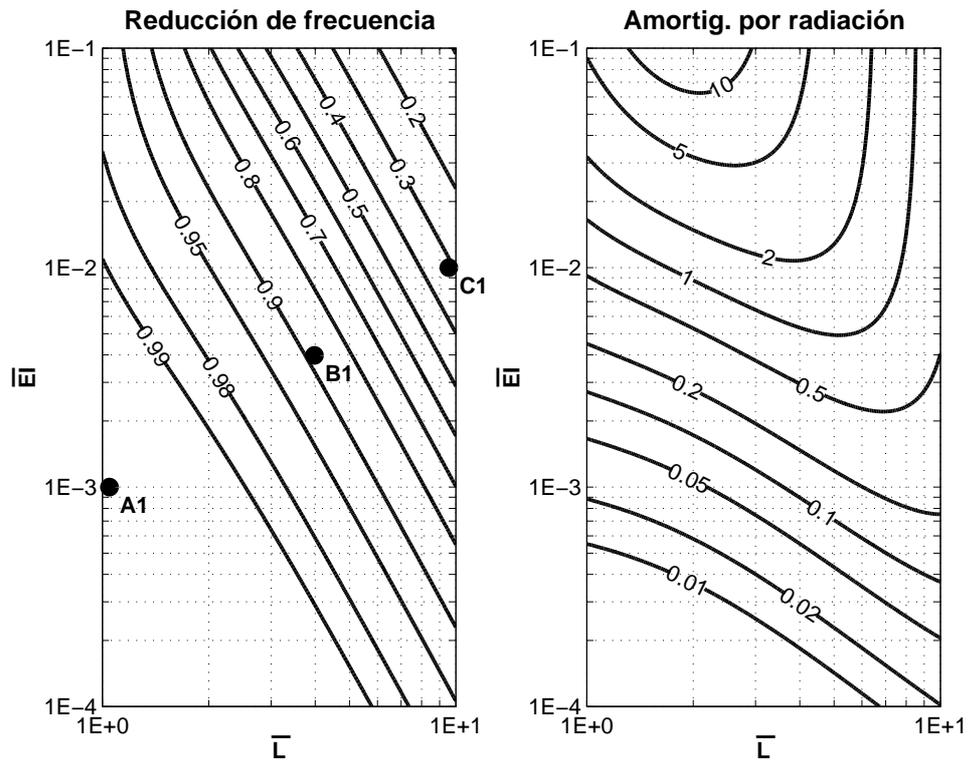


Fig. 6.6: Abacos de Interacción del 1º modo para $\bar{m} = 10^{-1}$

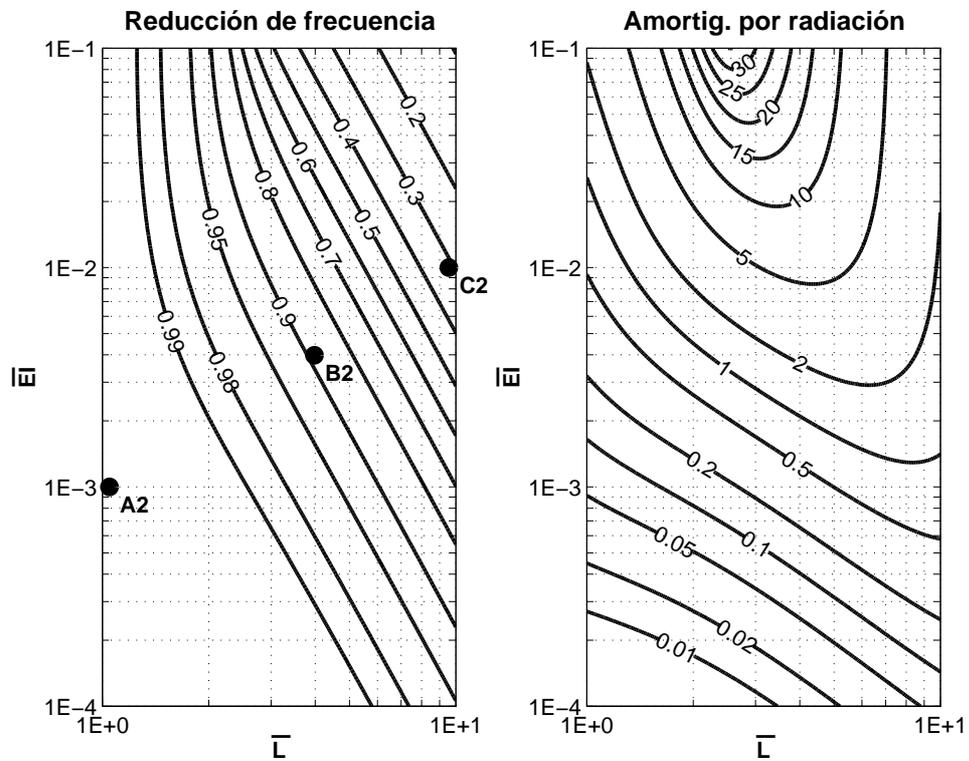


Fig. 6.7: Abacos de Interacción del 1º modo para $\bar{m} = 10^{-2}$

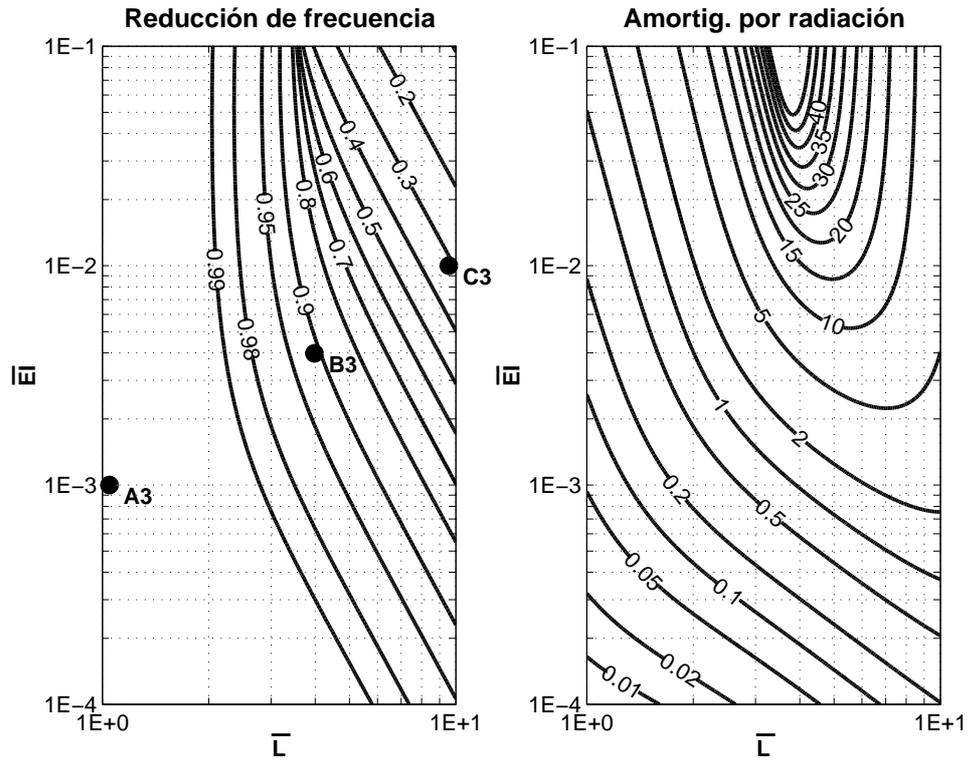


Fig. 6.8: Abacos de Interacción del 1º modo para $\bar{m} = 10^{-3}$

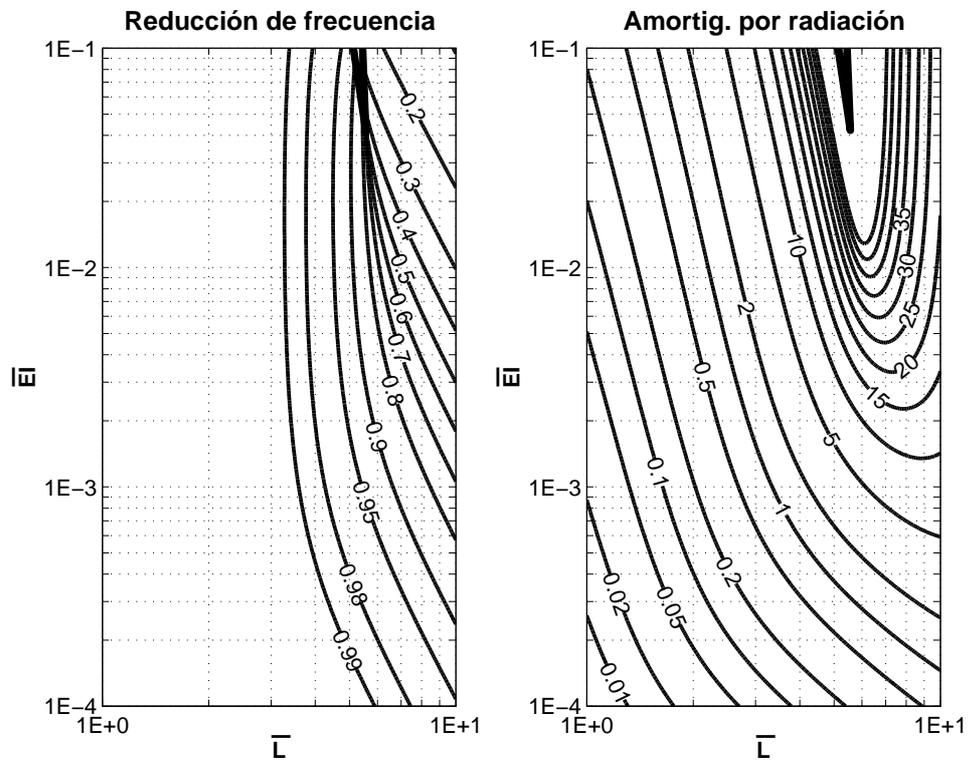


Fig. 6.9: Abacos de Interacción del 1º modo para $\bar{m} = 10^{-4}$

\bar{L}	\bar{m}		
	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
1	A1	A2	A3
4	B1	B2	B3
10	C1	C2	C3

Tabla 6.8: Parámetros adimensionales de los casos de estudio

mientras que los restantes parámetros se calculan en función de los parámetros adimensionales correspondientes

$$r = \frac{L}{\bar{L}}$$

$$V_s = \sqrt{\frac{EI}{\bar{EI}} \frac{1}{\rho L^4}}$$

$$m = \bar{m} \rho L^2$$

6.3 Descripción Modal con Modelos Simples de Fundación

Los parámetros modales de los casos de estudio seleccionados se presentan en las Tablas 6.9, 6.10 y 6.11. Las frecuencias naturales que aparecen en las tablas se refieren a la parte imaginaria (oscilante) de cada par de polos complejos conjugados. La incorporación de los GL de la interfaz introduce 4 polos adicionales respecto a la condición de base empotrada. Los polos adicionales resultan reales para una fundación relativamente rígida respecto a la rigidez flexional de la estructura (casos A1, A2 y A3) convirtiéndose algunos en polos complejos conjugados cuando se flexibiliza el suelo de apoyo de la fundación. La transformación de un par de polos reales (en este caso el 2° con el 3° y el 1° con el 4°) en polos complejos conjugados produce discontinuidades en los ábacos de interacción que resultan más evidentes para los modos superiores.

Las frecuencias naturales que disminuyen a medida que decrece la rigidez relativa de la fundación poseen como cota inferior la frecuencia del modo inferior para base empotrada (esta cota se alcanza en el 4° modo del caso C2). El aumento de las frecuencias del 4° y 5° modo para los casos B2 y B3 se relaciona con la inminente transformación de un par de polos reales en un nuevo polo complejo conjugado con una frecuencia mayor en relación al 3° modo y menor en relación al 4° modo.

Las Figuras 6.10, 6.11 y 6.12 muestran la amplitud de la receptancia de los casos de estudio para el desplazamiento horizontal de puntos ubicados en el extremo libre, en la mitad y en los cuartos de la longitud de la estructura. La designación de *modos primarios* se utiliza para modos con amplitudes espectrales importantes en tanto que los *modos secundarios* se caracterizan por pequeñas amplitudes de las formas modales. Esta diferenciación resulta evidente para los casos A1, A2 y A3 donde los modos primarios guardan una estrecha relación con los modos de base empotrada mientras que los modos secundarios poseen polos reales. La Figura 6.13 muestra la fase de la receptancia de los casos A2, B2 y C2.

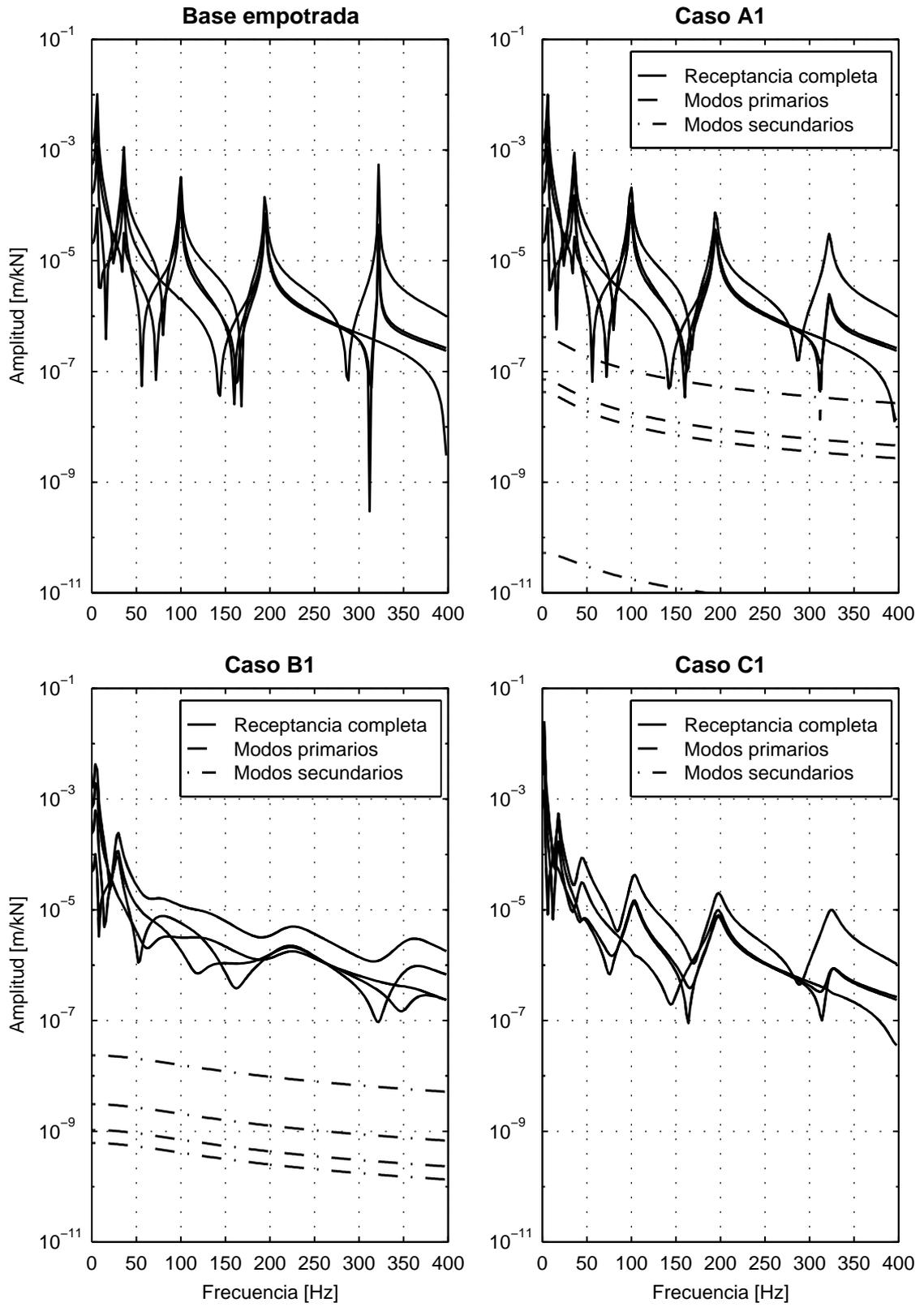


Fig. 6.10: Amplitud de la receptancia de los casos A1, B1 y C1

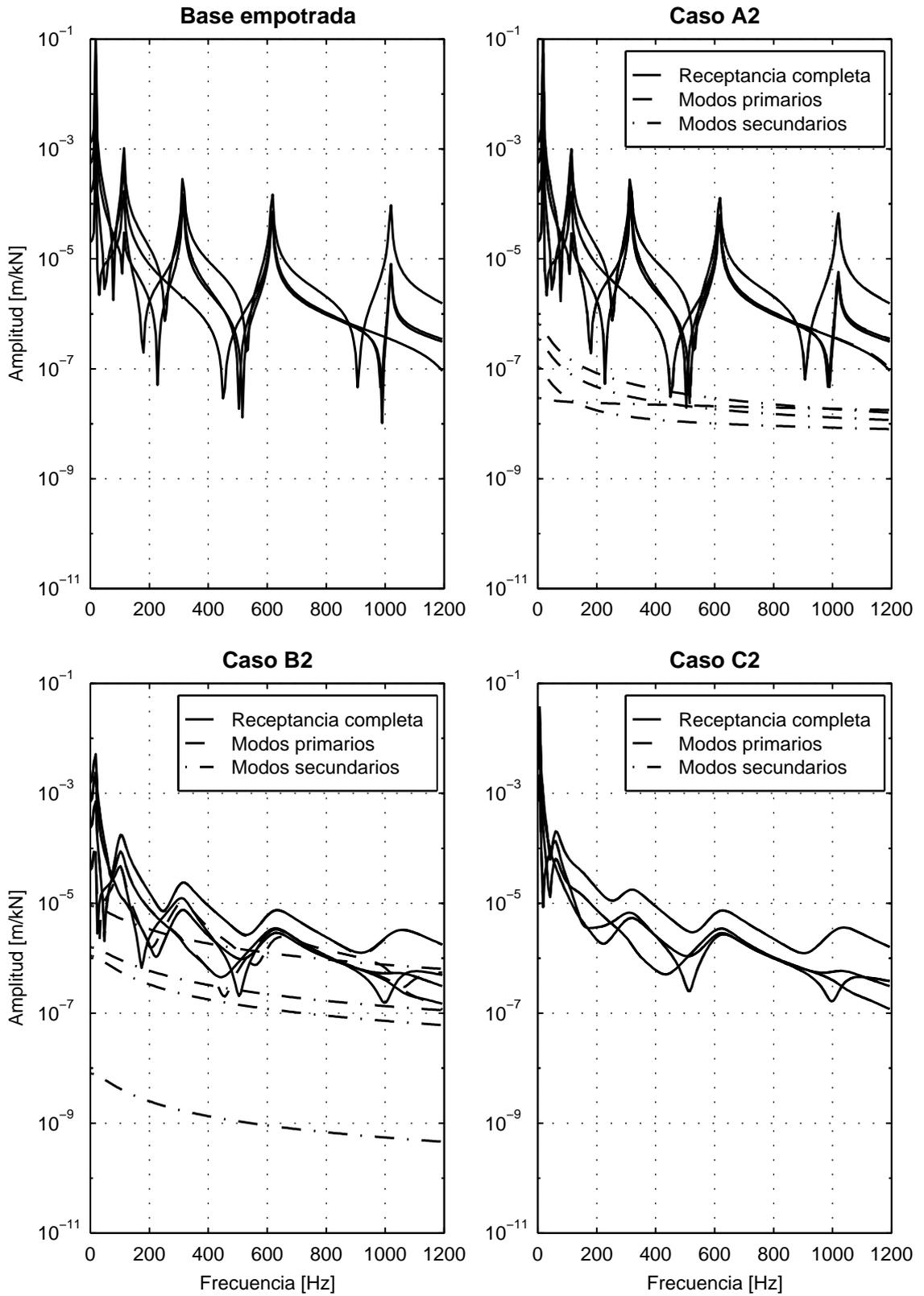


Fig. 6.11: Amplitud de la receptancia de los casos A2, B2 y C2

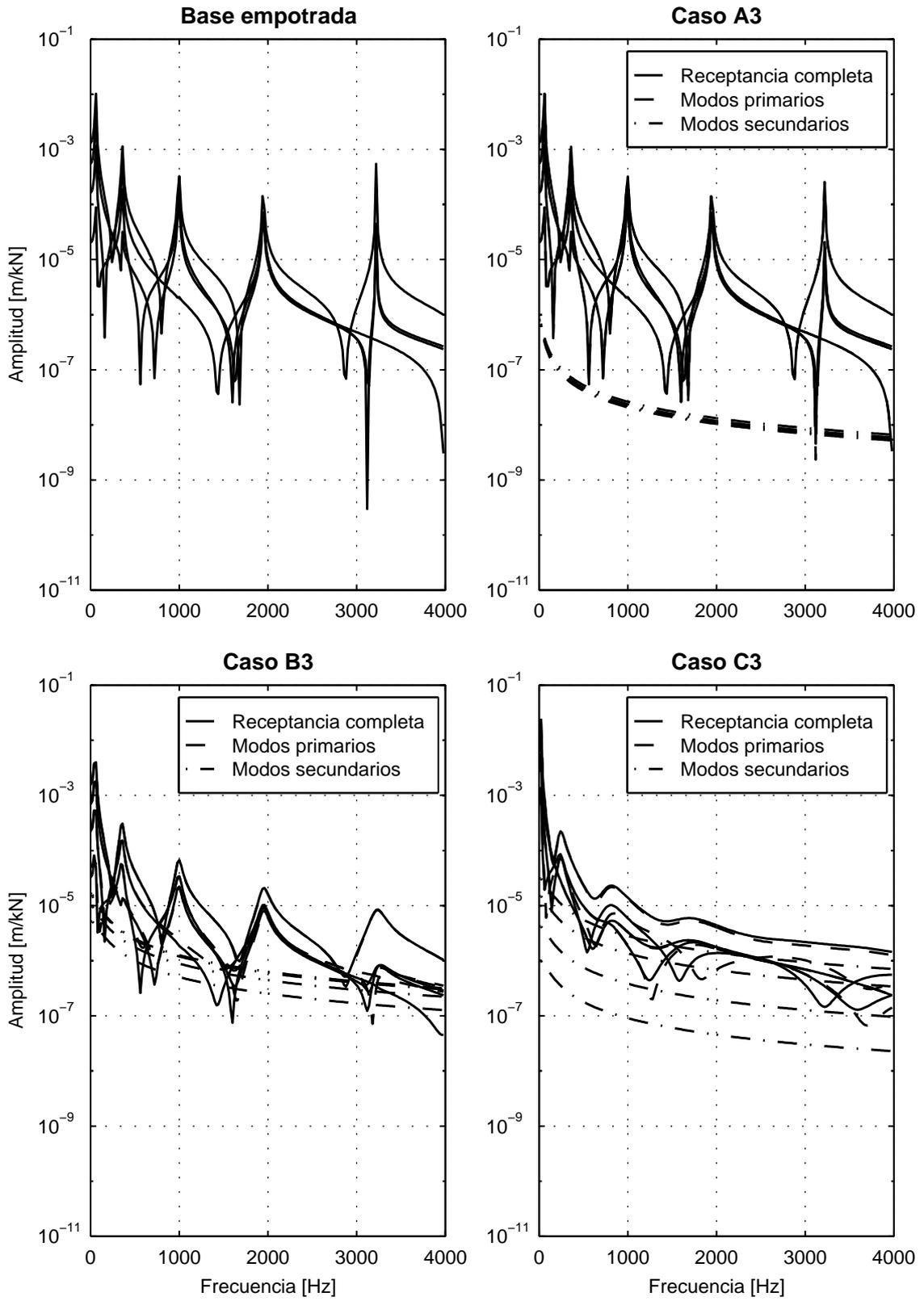


Fig. 6.12: Amplitud de la receptancia de los casos A3, B3 y C3

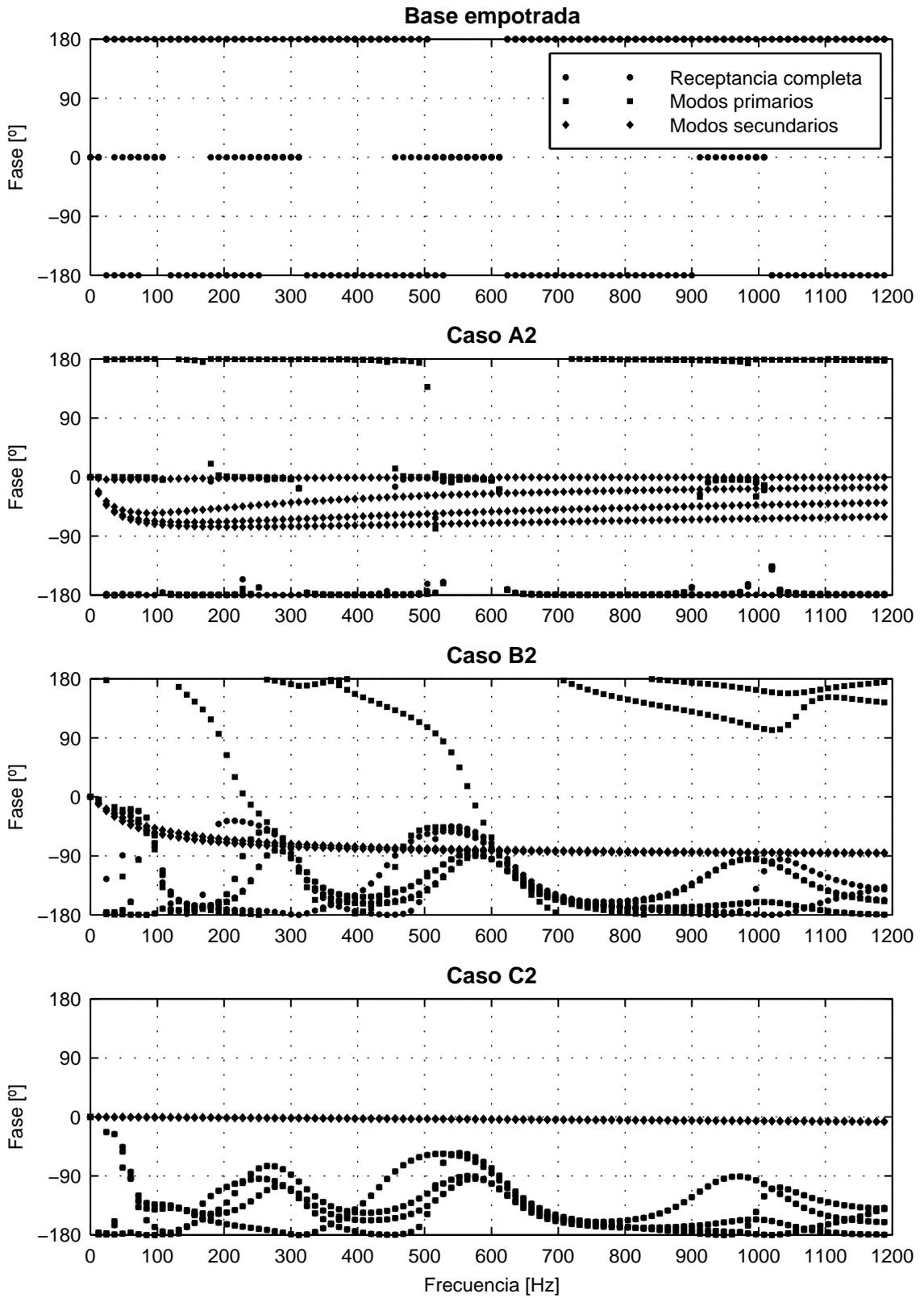


Fig. 6.13: Fase de la receptancia de los casos A2, B2 y C2

Modo	Base empotrada		Caso A1		Caso B1		Caso C1	
	f [Hz]	ξ [%]						
	–		4 polos reales		2 polos reales		2 polos reales	
1	5.663	0.00	5.656	0.02	4.998	0.72	1.672	0.60
2	35.49	0.00	35.37	0.48	29.05	8.17	17.85	6.67
3	99.37	0.00	99.22	0.62	73.27	27.8	44.09	9.76
4	194.7	0.00	194.6	0.64	123.5	24.5	102.8	4.39
5	321.9	0.00	321.8	0.64	222.4	11.1	197.1	2.63

Tabla 6.9: Parámetros modales de los casos A1, B1 y C1

Modo	Base empotrada		Caso A2		Caso B2		Caso C2	
	f [Hz]	ξ [%]						
	–		4 polos reales		4 polos reales		2 polos reales	
1	17.91	0.00	17.89	0.06	15.86	2.23	5.287	1.89
2	112.2	0.00	112.2	0.22	103.1	11.3	59.48	20.2
3	314.2	0.00	314.2	0.21	310.7	10.1	131.6	36.1
4	615.8	0.00	615.7	0.20	623.7	8.28	314.2	14.6
5	1018	0.00	1018	0.20	1044	7.00	617.5	8.59

Tabla 6.10: Parámetros modales de los casos A2, B2 y C2

Modo	Base empotrada		Caso A3		Caso B3		Caso C3	
	f [Hz]	ξ [%]						
	–		4 polos reales		4 polos reales		2 polos reales	
1	56.63	0.00	56.61	0.05	51.46	5.67	16.70	5.97
2	354.9	0.00	354.9	0.07	351.0	4.91	241.8	16.0
3	993.7	0.00	993.6	0.07	992.6	3.10	793.3	16.9
4	1947	0.00	1947	0.06	1949	2.58	1650	19.1
5	3219	0.00	3219	0.06	3226	2.36	2683	24.9

Tabla 6.11: Parámetros modales de los casos A3, B3 y C3

6.4 Descripción Modal con Modelos Exactos de Fundación

La utilización de modelos exactos de fundación con GL generalizados para los casos de estudio con una masa adimensional $\bar{m} = 10^{-2}$ permiten la definición de los casos A2', B2'

y $C2'$. La composición modal de estos nuevos casos se presenta en la Tabla 6.12. Los modos secundarios designados con letras presentan polos complejos conjugados y se caracterizan por altos valores de amortiguamiento y formas modales con bajas amplitudes y marcada complejidad.

Modo	Base empotrada		Caso $A2'$		Caso $B2'$		Caso $C2'$	
	f [Hz]	ξ [%]						
	–		4 polos reales		4 polos reales		4 polos reales	
a	-	-	0.897	93.6	5.436	99.5	178.1	32.8
b	-	-	39.71	67.6	102.0	50.1	252.7	52.1
c	-	-	55.78	34.2	107.0	38.4	-	-
1	17.91	0.00	17.88	0.06	15.64	0.69	5.256	0.05
2	112.2	0.00	112.2	0.23	102.9	15.2	58.37	18.6
3	314.2	0.00	314.2	0.22	309.9	10.6	131.0	29.6
4	615.8	0.00	615.7	0.22	623.6	8.89	312.6	14.7
5	1018	0.00	1018	0.21	1046	7.42	620.2	7.73

Tabla 6.12: Parámetros modales de los casos $A2'$, $B2'$ y $C2'$

El amortiguamiento por radiación del modo fundamental de los casos $B2'$ y $C2'$ disminuye notablemente respecto a los casos $B2$ y $C2$. El mayor factor de amplificación que se produce indica la importancia que puede tener la utilización de modelos exactos de la fundación para reproducir adecuadamente el comportamiento dinámico del sistema. Los 10 modos adicionales que aparecen en los casos $A2'$ y $B2'$ se deben a la incorporación de 2 GL con masa de la interfaz (agregan 4 modos) y 6 GL generalizados de la fundación (agregan 6 modos). El par de modos complejos conjugados faltantes en el caso $C2'$ forma parte del conjunto de los modos primarios. La amplitud de la receptancia de los casos $A2'$, $B2'$ y $C2'$ se muestra en la Figura 6.14 para los mismos puntos utilizados en los casos de estudio con coeficientes asintóticos.

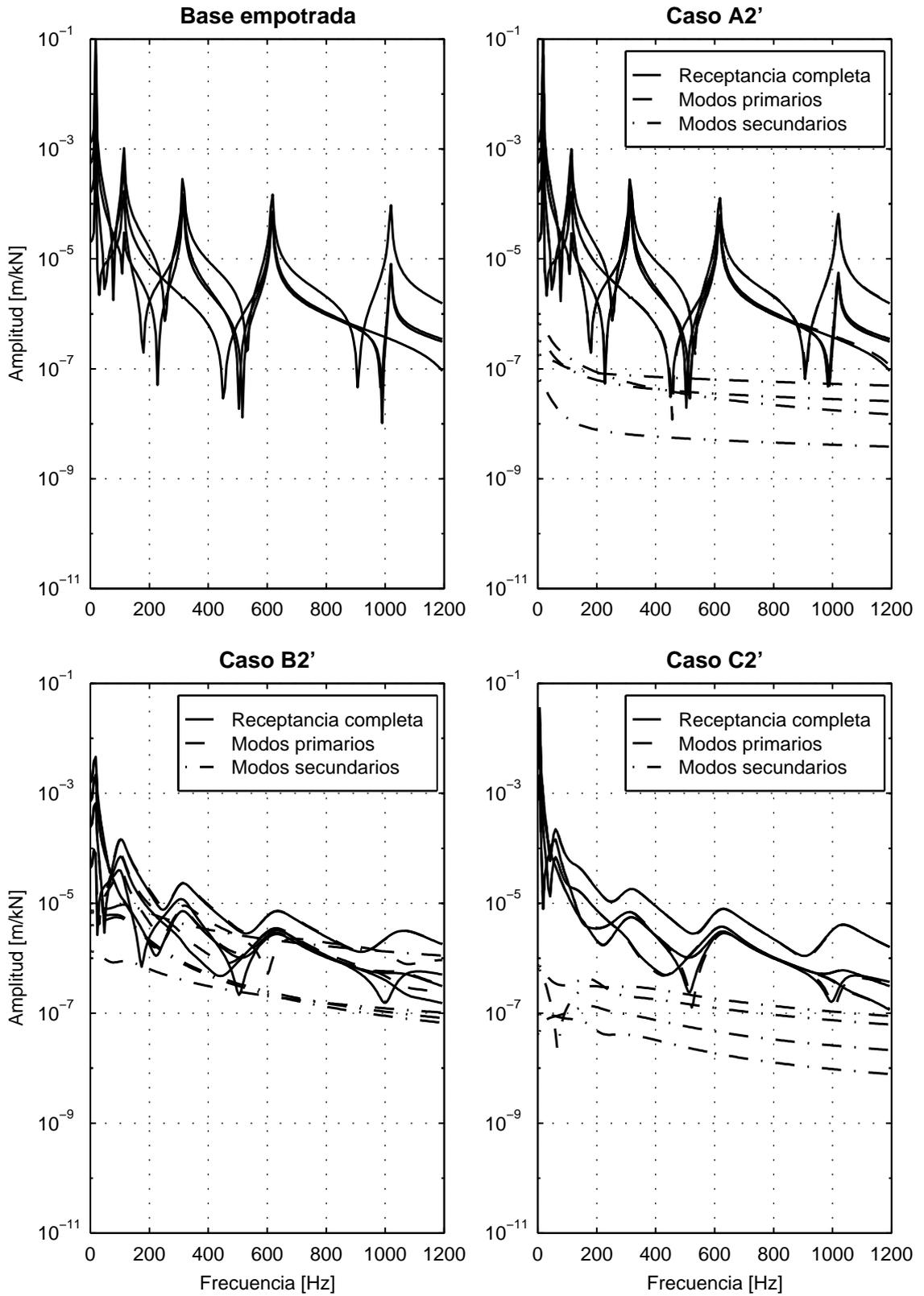


Fig. 6.14: Amplitud de la receptancia de los casos A2', B2' y C2'

Capítulo 7

Calibración de Modelos de Sistemas con Interacción Suelo-Estructura

La determinación de un modelo analítico que describa el comportamiento dinámico de sistemas sometidos a diferentes estados de carga representa el principal objetivo del análisis modal experimental para la ingeniería estructural. La breve introducción presentada a continuación permite la definición de un marco de referencia para el método de calibración utilizado en el presente trabajo.

Los *métodos directos* o métodos de *identificación de sistema* permiten la identificación en un único paso de un *modelo representacional* con las mismas coordenadas del modelo experimental que reproduce la respuesta de los *GL* medidos. La inexistencia de conectividades entre componentes del sistema para el modelo representacional debida a la condensación implícita de sus matrices imposibilita la vinculación de sus coeficientes con propiedades físicas de rigidez, masa y amortiguamiento. La utilización de este modelo para la predicción de la respuesta del sistema con cargas aplicadas en coordenadas diferentes a las medidas no resulta factible.

Los *métodos iterativos* realizan ajustes en pasos sucesivos de ciertos parámetros físicos de un *modelo analítico* preexistente construido en base a características geométricas y mecánicas del sistema conservando un número adecuado de coordenadas que mantienen las conectividades entre sus componentes. La necesidad de un proceso iterativo se debe a la linealización de las expresiones de sensibilidad de los parámetros experimentales respecto a los parámetros de ajuste. El modelo analítico ajustado permite la predicción de la respuesta del sistema para cargas aplicadas en puntos diferentes a los utilizados durante la ejecución de los ensayos dinámicos. El número de *GL* requerido por un modelo analítico para reproducir satisfactoriamente la respuesta medida del sistema resulta superior al número de *GL* de los modelos experimentales modal y de respuesta. La designación de *calibración* en lugar del término *identificación* utilizado en los capítulos 3 y 4 se debe entonces a la diferencia en el número de coordenadas de los modelos analíticos y experimentales. El término *reconciliación* resulta más adecuado aún en caso de reconocerse la influencia de las inexactitudes del modelo experimental sobre las discrepancias con la contraparte analítica.

7.1 Métodos de Calibración de Modelos Analíticos

El libro de Friswell y Mottershead [4] constituye una referencia adecuada para el estudio de aspectos generales relacionados con la calibración de modelos. Una disciplina estrechamente vinculada a la calibración de modelos por la utilización de las mismas técnicas de correlación entre modelos analíticos y experimentales es la *detección de daños*.

Los métodos de calibración que se describen a continuación se encuadran dentro de los métodos iterativos que utilizan el *criterio de mínimos cuadrados* en el proceso de ajuste¹. Los datos experimentales se asumen correctos mientras se considera que las imprecisiones de los parámetros del modelo analítico producen las discrepancias entre ambas contrapartes. Los potenciales problemas que pueden afectar a los datos experimentales son los siguientes:

- El número de *GL* medidos es insuficiente.
- La medición de *GL* rotacionales es dificultosa.
- La frecuencia de muestreo impide la identificación de un número suficiente de modos.
- La disposición de transductores y/o cargas aplicadas impide la identificación de algunos modos.
- Los ruidos en la cadena de medición son significativos.
- El efecto de no-linealidades del sistema distorsiona el modelo lineal de respuesta.

Los aspectos problemáticos asociados a los modelos analíticos se resumen a continuación:

- La aproximación de las condiciones de borde es inadecuada.
- El modelado de nudos de vinculación de barras es inadecuado.
- La discretización de los parámetros distribuidos del sistema es burda.
- La estimación de parámetros geométricos y mecánicos es imprecisa.
- El modelo de amortiguamiento es inexistente o inadecuado.
- La condensación del modelo analítico a los *GL* experimentales impide la identificación de parámetros físicos.

El problema de la incompatibilidad del número de coordenadas entre ambos modelos se soluciona utilizando las *técnicas de expansión* del modelo experimental o las *técnicas de reducción* del modelo analítico descritas en el capítulo 2. El sentido físico de los parámetros de ajuste sólo se mantiene a través de la expansión de los datos experimentales sobre el conjunto de coordenadas del modelo analítico. Las técnicas de reducción sólo se justifican en caso que el número de *GL* del modelo analítico resulte demasiado grande en relación al número de *GL* medidos produciendo un esparcimiento excesivo de la información experimental utilizada en el proceso de ajuste.

Los modelos experimentales modales y de respuesta se utilizan en la calibración de modelos analíticos generando dos conjuntos de métodos basados en los parámetros modales y en las *FRF* respectivamente.

¹La utilización de *métodos de máximo gradiente*, *simulaciones de tratamiento térmico*, *algoritmos genéticos* y *redes neuronales* en el ajuste de modelos analíticos adquiere un notable desarrollo en recientes años.

7.1.1 Métodos de Sensibilidad Modal

Estos métodos se basan en las variaciones que producen los cambios de los parámetros de ajuste en los polos y formas modales del modelo analítico. La minimización de las diferencias entre los modelos analíticos y experimentales requiere un proceso de vinculación entre los modos de ambos modelos a través de *técnicas de comparación*. La utilización de un número limitado de *GL* durante los ensayos dinámicos produce que habitualmente varios modos analíticos no encuentren su contraparte experimental. La técnica presenta en el trabajo de Allemang y Brown [59] denominada *criterio de aseguramiento modal*² (*MAC* del inglés *modal assurance criterion*) se emplea exhaustivamente en la comparación de modos analíticos y experimentales resultando aplicable para modos complejos y datos experimentales incompletos.

Los métodos de sensibilidad modal en la calibración de modelos de sistemas con interacción suelo-estructura presentan algunas dificultades en la etapa de identificación de los modos experimentales debido a los altos valores de amortiguamiento y a las bajas amplitudes que poseen algunos de estos modos.

7.1.2 Métodos de Sensibilidad de Respuesta

Las variaciones que producen los cambios de los parámetros de ajuste en las *FRF* conforman la base de los métodos de sensibilidad de respuesta. La correlación entre los modelos analíticos y experimentales no requiere ninguna técnica especial dado que se realiza frecuencia por frecuencia.

La calibración de modelos analíticos de sistemas suelo-estructura se realiza en el presente trabajo a través del *método de la función de respuesta en frecuencia* desarrollado por Lin y Ewins [60]. En el trabajo de Visser y Imregun [61] se analizan los aspectos más relevantes de este método que representa la primera implementación del ajuste de modelos analíticos con el criterio de mínimos cuadrados en el dominio de la frecuencia. La inclusión de una matriz de amortiguamiento en el modelo físico de sistemas suelo-estructura resulta un requerimiento esencial para una correspondencia adecuada entre la respuesta analítica y experimental.

La conveniencia de los métodos de sensibilidad de respuesta para el ajuste de los casos analizados radica en la utilización de los datos experimentales crudos sin necesidad de recurrir a técnicas de identificación de modelos modales. La única información adicional que poseen las *FRF* respecto al modelo modal es la contribución de los modos fuera del rango de análisis. Sin embargo, la contribución de estos modos resulta generalmente intrascendente y/o afectada por ruidos experimentales del mismo orden de magnitud.

7.2 Método de la Función de Respuesta en Frecuencia

Este método presentado en el trabajo de Lin y Ewins [60] se utiliza en la calibración de los modelos analíticos de los sistemas con interacción suelo-estructura analizados. El método se basa en el criterio de mínimos cuadrados para la minimización de una norma de error

²La designación *coherencia de amplitud modal* (*MAC* del inglés *modal amplitude coherence*) utilizada en algunos trabajos resulta rigurosamente más correcta.

que se define en función de las *FRF* analíticas y experimentales junto con expresiones de la sensibilidad de estos modelos de respuesta respecto a los parámetros de ajuste seleccionados. Una variante introducida al método original consiste en el reemplazo de las *FRF* por *funciones de transferencia* con una variable de Laplace que involucra un amortiguamiento ficticio adecuado para la mitigación del efecto de fuga en el procesamiento de señales experimentales descrito en el capítulo 3.

La diferencia de varios órdenes de magnitud que pueden presentar los parámetros de ajuste atenta contra el condicionamiento numérico del método. Los parámetros con mayor valor absoluto poseen además mayor peso produciendo un ajuste desbalanceado. La utilización de las tasas de cambio de las propiedades físicas seleccionadas como parámetros de ajuste en el proceso de calibración constituye una solución óptima. La propiedad física corregida P_i^{I+1} se expresa en función de la propiedad física actual P_i^I en la iteración I como

$$P_i^{I+1} = P_i^I (1 + p_i^I) \quad (7.1)$$

donde el parámetro adimensional de ajuste p_i^I resulta

$$p_i^I = \frac{(P_i^{I+1} - P_i^I)}{P_i^I} \quad (7.2)$$

El procedimiento utilizado para el ajuste de los parámetros p_i^I se detalla a continuación. La matriz de rigidez dinámica del modelo ajustado $[\mathbf{K}_u(s)]$ puede expresarse como una expansión en series de Taylor de la matriz de rigidez dinámica del modelo original $[\mathbf{K}_a(s)]$ respecto a los parámetros adimensionales de ajuste de la siguiente forma

$$[\mathbf{K}_u(s)] = [\mathbf{K}_a(s)] + [\Delta\mathbf{K}(s)] \quad (7.3)$$

$$= [\mathbf{K}_a(s)] + \sum_{i=1}^{n_p} \frac{\partial[\mathbf{K}(s)]}{\partial p_i} p_i + \mathbf{O}(p_i^2) \quad (7.4)$$

En caso que las matrices físicas dependan en forma no-lineal de los parámetros de ajuste sólo se conservan los términos de primer orden de la expansión generando la necesidad de recurrir a un proceso iterativo

$$[\Delta\mathbf{K}(s)] = \sum_{i=1}^{n_p} \frac{\partial[\mathbf{K}(s)]}{\partial p_i} p_i \quad (7.5)$$

El grado de aproximación de los parámetros ajustados en cada iteración depende entonces de la importancia relativa de los términos eliminados así como de la proximidad de los valores iniciales.

La aplicación de una carga en la coordenada k del modelo analítico permite la determinación experimental del vector correspondiente de la función de transferencia $\{H_{x,k}^D(s)\}$ en términos de desplazamientos que verifica

$$[\mathbf{K}_u(s)]\{H_{x,k}^D(s)\} = \{I_k\} = [\mathbf{K}_a(s)]\{H_{a,k}^D(s)\} \quad (7.6)$$

donde $\{I_k\}$ representa la columna k de la matriz identidad mientras $\{H_{a,k}^D(s)\}$ constituye la versión analítica de $\{H_{x,k}^D(s)\}$. De acuerdo a (7.3) la ecuación (7.6) puede expresarse como

$$[\Delta\mathbf{K}(s)]\{H_{x,k}^D(s)\} = \{I_k\} - [\mathbf{K}_a(s)]\{H_{x,k}^D(s)\} \quad (7.7)$$

donde $[\Delta\mathbf{K}(s)] = [\mathbf{K}_u(s)] - [\mathbf{K}_a(s)]$ representa la *matriz error* de la rigidez dinámica. La multiplicación de la ecuación (7.7) por la función de transferencia analítica del modelo original $[H_a^D(s)]$ permite una mejora en el condicionamiento numérico

$$[H_a^D(s)][\Delta\mathbf{K}(s)]\{H_{x,k}^D(s)\} = \{H_{a,k}^D(s)\} - \{H_{x,k}^D(s)\} = \{\Delta H_k^D(s)\} \quad (7.8)$$

donde $\{\Delta H_k^D(s)\}$ representa la diferencia entre el modelo analítico y el modelo experimental de respuesta. La medición de solamente n_J coordenadas genera que la ecuación (7.8) adquiera la siguiente forma

$$[\tilde{H}_a^D(s)][\Delta\mathbf{K}(s)]\{H_{x,k}^D(s)\} = \{\tilde{H}_{a,k}^D(s)\} - \{\tilde{H}_{x,k}^D(s)\} = \{\Delta\tilde{H}_k^D(s)\} \quad (7.9)$$

donde el símbolo (\sim) indica que sólo se consideran las filas vinculadas a los *GL* medidos. El reemplazo de $[\Delta\mathbf{K}(s)]$ de acuerdo a la ecuación (7.5) produce

$$[\mathbf{S}(s)]\{p\} = \{\Delta\tilde{H}_k^D(s)\} \quad (7.10)$$

con

$$[\mathbf{S}(s)] = [\tilde{H}_a^D(s)] \left[\frac{\partial[\mathbf{K}(s)]}{\partial p_1} \{H_{x,k}^D(s)\} \quad \cdots \quad \frac{\partial[\mathbf{K}(s)]}{\partial p_{n_p}} \{H_{x,k}^D(s)\} \right] \quad (7.11)$$

Las filas de la matriz de sensibilidad $[\mathbf{S}(s)]$ definen la sensibilidad de la respuesta de cada *GL* para el conjunto de los n_p parámetros adimensionales de ajuste. La ecuación (7.10) representa un conjunto de n_J ecuaciones con n_p incógnitas para una determinada frecuencia. La medición de n_K columnas de la función de transferencia y la consideración de n_S puntos espectrales permiten la formación de un sistemas de $n_J \times n_K \times n_S$ ecuaciones con n_p incógnitas que se resuelven simultáneamente utilizando el criterio de mínimos cuadrados

$$\{p\} = ([\mathbf{S}(s)]^T[\mathbf{S}(s)])^{-1} [\mathbf{S}(s)]^T \{\Delta\tilde{H}_k^D(s)\} = [\mathbf{S}(s)]^\dagger \{\Delta\tilde{H}_k^D(s)\} \quad (7.12)$$

La descomposición de valores singulares de la matriz de sensibilidad permite la obtención de una versión numéricamente optimizada de la pseudo-inversa. Las ecuaciones (7.9) y (7.10) expresadas en términos de aceleraciones resultan

$$[\tilde{H}_a^A(s)][\Delta\mathbf{K}(s)]\{H_{x,k}^A(s)\} = s^2\{\tilde{H}_{a,k}^A(s)\} - s^2\{\tilde{H}_{x,k}^A(s)\} = s^2\{\Delta\tilde{H}_k^A(s)\} \quad (7.13)$$

$$[\tilde{\mathbf{S}}(s)]\{p\} = s^2\{\Delta\tilde{H}_k^A(s)\} \quad (7.14)$$

con

$$[\tilde{\mathbf{S}}(s)] = [\tilde{H}_a^A(s)] \left[\frac{\partial[\mathbf{K}(s)]}{\partial p_1} \{H_{x,k}^A(s)\} \quad \cdots \quad \frac{\partial[\mathbf{K}(s)]}{\partial p_{n_p}} \{H_{x,k}^A(s)\} \right] \quad (7.15)$$

donde se observa que la variable de respuesta sólo afecta al peso dado a las distintas frecuencias.

El primer miembro de la ecuación (7.9) involucra todas las coordenadas de la función de transferencia experimental a pesar que en el segundo miembro sólo se correlaciona la respuesta de los *GL* medidos. Algunos autores sugieren completar los datos experimentales faltantes con la contraparte analítica mientras que otros autores utilizan directamente $\{H_{a,k}^D(s)\}$ en reemplazo de $\{H_{x,k}^D(s)\}$ para evitar cambios bruscos de la respuesta. En el

presente trabajo se adopta esta última alternativa justificada por la inmensa diferencia que existe habitualmente entre el número de GL no-medidos en relación a los GL medidos del modelo analítico. Los resultados obtenidos son satisfactorios aunque una diferencia importante en las respuestas analítica y experimental puede producir problemas de convergencia.

Un artificio que produce buenos resultados en el ajuste de los modelos de sistemas suelo-estructura es la utilización de una norma adimensional que se obtiene dividiendo cada fila de la ecuación (7.10) por la respectiva respuesta experimental. Sin embargo, la existencia de anti-resonancias pronunciadas en la respuesta experimental que ocurren en otros tipos de sistemas atenta contra el éxito del proceso de optimización.

7.3 Selección de Parámetros de Ajuste

La potencialidad y versatilidad de los métodos iterativos de calibración se deben a la posibilidad de seleccionar parámetros de ajuste y funciones de peso. Una selección adecuada de los parámetros de ajuste resulta esencial en la mejora del modelo analítico respecto a su capacidad de predicción de la respuesta medida sin una pérdida del sentido físico de sus coeficientes. Los parámetros de ajuste del modelo analítico deberían asociarse entonces a propiedades que posean algún grado de incertidumbre por razones físicas.

La relevancia de la selección de parámetros de ajuste en el proceso de calibración se manifiesta en dos aspectos. El primero se vincula a la cantidad de parámetros seleccionados. La utilización de un número pequeño de parámetros de ajuste asociado a un volumen importante de datos experimentales resulta óptimo desde el punto de vista del condicionamiento numérico. La información experimental disponible depende del número de modos de vibración presentes en el rango de frecuencias de análisis definido por la resolución del muestreo digital.

El segundo aspecto importante en la selección de parámetros analíticos se relaciona con *cuales* se eligen como parámetros de ajuste. Una estimación de la confiabilidad atribuida a los distintos parámetros del modelo facilita esta tarea. Las *técnicas de localización* presentadas en los trabajos de Lieven y Ewins [62] y Fissette e Ibrahim [63] permiten la ubicación de zonas críticas del modelo analítico con mayor necesidad de ajuste. La selección de dos o más parámetros de ajuste con similar influencia sobre los modelos correlacionados generan potenciales problemas de condicionamiento numérico. La sensibilidad de los modelos correlacionados respecto a pequeños cambios de los parámetros candidatos constituye una razón necesaria pero no suficiente para la selección de los parámetros de ajuste. De lo contrario, el proceso de calibración puede imponer cambios inadecuados cuando las discrepancias entre ambos modelos se minimizan a través de la variación de parámetros de ajuste más sensibles con menor necesidad de ajuste. El modelo analítico ajustado reproduce entonces los datos experimentales a costa de una pérdida del sentido físico de sus propiedades.

El ajuste de coeficientes individuales de las matrices físicas del modelo analítico puede producir que los valores finales presenten diferencias de varios órdenes de magnitud y/o cambios de signo en relación a los valores iniciales. Estas importantes fluctuaciones dificultan la definición de incrementos y rangos de variación de estos coeficientes necesarios para evitar problemas de convergencia vinculados a la linealización de las expresiones de sensibilidad.

En el trabajo de Wei y Janter [64] se destaca la conveniencia del ajuste de parámetros globales del modelo analítico en lugar de coeficientes individuales de rigidez, masa y

amortiguamiento: las propiedades físicas se escalan uniformemente en todas las direcciones mientras se mantienen las conectividades del modelo analítico. La agrupación de matrices elementales o la formación de macro-elementos permiten además una disminución importante del número de parámetros de ajuste. Las técnicas de reducción no son recomendables en el ajuste de parámetros físicos dado que la implementación del procedimiento de optimización requiere la utilización del modelo analítico completo.

La utilización de propiedades físicas del sistema como parámetros de ajuste permite expresar la matriz error de la rigidez dinámica en la ecuación (7.5) a través del ensamble de matrices elementales de rigidez, amortiguamiento y masa

$$[\Delta \mathbf{K}(s)] = \sum_{i=1}^{n_K} k_i [K_i^e] + s \sum_{i=1}^{n_C} c_i [C_i^e] + s^2 \sum_{i=1}^{n_M} m_i [M_i^e] \quad (7.16)$$

donde

$$\{p\} = \{k_1, \dots, k_{n_K}, c_1, \dots, c_{n_C}, m_1, \dots, m_{n_M}\} \quad (7.17)$$

De esta forma, la sensibilidad de la rigidez dinámica respecto a los parámetros físicos de ajuste se calcula como

$$\frac{\partial[\mathbf{K}(s)]}{\partial k_i} = [K_i^e] \quad \frac{\partial[\mathbf{K}(s)]}{\partial c_i} = s[C_i^e] \quad \frac{\partial[\mathbf{K}(s)]}{\partial m_i} = s^2[M_i^e] \quad (7.18)$$

Las matrices físicas de primer orden de la fundación de sistemas con interacción suelo-estructura pueden expresarse en función de la velocidad de propagación de ondas de corte V_s y de la densidad del suelo ρ del estrato superior de referencia de la siguiente forma

$$[\mathcal{K}_F] = \rho V_s^2 [\bar{\mathcal{K}}_F] = \rho V_s^2 \begin{bmatrix} [\mathcal{K}_{ff}] & [0] \\ [0] & [\mathcal{K}_{gg}] \end{bmatrix} \quad (7.19)$$

$$[\mathcal{C}_F] = \rho V_s [\bar{\mathcal{C}}_F] = \rho V_s \begin{bmatrix} [\mathcal{C}_{ff}] & [\mathcal{C}_{fg}] \\ [\mathcal{C}_{gf}] & [\mathcal{C}_{gg}] \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

La sensibilidad de la rigidez dinámica respecto a la tasa de cambio de estas propiedades adoptadas como parámetros adimensionales de ajuste se calcula como

$$\begin{aligned} \frac{\partial[\mathbf{K}(s)]}{\partial p(V_s)} &= 2\rho V_s^2 (1 + p(V_s)) [\bar{\mathcal{K}}_F] + s\rho V_s [\bar{\mathcal{C}}_F] \\ &\approx 2\rho V_s^2 [\bar{\mathcal{K}}_F] + s\rho V_s [\bar{\mathcal{C}}_F] \end{aligned} \quad (7.21)$$

$$\frac{\partial[\mathbf{K}(s)]}{\partial p(\rho)} = \rho V_s^2 [\bar{\mathcal{K}}_F] + s\rho V_s [\bar{\mathcal{C}}_F] \quad (7.22)$$

7.4 Problemas de Condicionamiento Numérico

Los problemas de condicionamiento numérico constituyen una manifestación típica de los *problemas inversos* en general más que una característica particular de los métodos de calibración de modelos analíticos. La solución de los problemas de mal-condicionamiento resulta esencial para la obtención de técnicas robustas de calibración con el criterio de

mínimos cuadrados. El mayor esfuerzo debe centrarse en una adecuada selección de los parámetros de ajuste. La normalización de estos parámetros permite además mejorar el condicionamiento del sistema de ecuaciones.

Los métodos de calibración se utilizan para la minimización de una norma de error definida en función de las diferencias entre el modelo analítico y el modelo experimental. El proceso de optimización procura el encuentro del mínimo global de la norma de error respecto a los parámetros de ajuste. La ondulación brusca de la superficie de error en el espacio de los parámetros de ajuste puede producir que sólo se arribe a un mínimo local. En caso que esta superficie resulte demasiado suave puede suceder que la solución se encuentre cerca en términos de la norma de error aunque lejos del valor correcto de los parámetros de ajuste.

7.5 Problemas de Convergencia

Los problemas de convergencia se encuentran estrechamente ligados a la linealización de las expresiones de sensibilidad del modelo de respuesta analítico respecto a los parámetros de ajuste que restringe la validez de estas expresiones para pequeñas variaciones. La convergencia de los parámetros de ajuste se mejora agregando ecuaciones de restricción a la norma de error en forma de *multiplicadores de Lagrange* y *funciones de penalización*. La incorporación de restricciones a las tasas máximas de cambio en cada paso de iteración permite una convergencia suave de los parámetros de ajuste. De acuerdo a la experiencia acumulada en el presente trabajo se recomienda no superar el 10% en la variación de los parámetros de ajuste en cada paso de iteración. La definición de rangos absolutos de variación de los parámetros de ajuste permite además mantener el sentido físico de los parámetros de ajuste.

La definición de las restricciones de los valores absolutos de los parámetros de ajuste en función de los parámetros adimensionales se expresan de la siguiente forma

$$P_L \leq P_i \leq P_U \quad (7.23)$$

$$+p_i P_i \leq P_U - P_i \quad \Rightarrow \quad +p_i \leq \frac{P_U}{P_i} - 1 \quad (7.24)$$

$$-p_i P_i \leq P_i - P_L \quad \Rightarrow \quad -p_i \leq 1 - \frac{P_L}{P_i} \quad (7.25)$$

Las principales causas de no-convergencias o convergencias oscilantes son las siguientes:

- Mal-condicionamiento numérico del sistema de ecuaciones.
- Modelado inadecuado del sistema.
- Modelo experimental deficiente.
- Utilización de valores iniciales lejanos a los valores finales de los parámetros de ajuste.
- Tasa máxima de cambio de los parámetros de ajuste inapropiada.
- Selección inadecuada de los parámetros de ajuste.
- Incremento de frecuencia burdo del modelo de respuesta.

Capítulo 8

Estudio de Sensibilidad de los Parámetros de Ajuste

El propósito de este estudio de sensibilidad es la estimación de las dispersiones que pueden esperarse en los valores de los parámetros ajustados por simplificaciones del modelo analítico en función de la influencia de la interacción en el comportamiento dinámico del sistema. El estudio de sensibilidad permite además la determinación de la confiabilidad de los resultados obtenidos de acuerdo al tipo de simplificación efectuada. Una forma habitual de realizar estos estudios consiste en la simulación del proceso de optimización incorporando distintos modelos de ruidos en las señales experimentales. La cantidad y el tipo de ruidos dependen de varios factores: la calidad de los equipos de medición, las amplitudes de la respuesta medida y las condiciones ambientales del sistema ensayado constituyen sin duda los factores de mayor relevancia. El estudio de sensibilidad en el presente trabajo se realiza en base a perturbaciones comunes del modelo analítico dada la existencia de cierta arbitrariedad en la formulación de las hipótesis requeridas para el modelado del ruido.

Los casos analizados en este estudio son idénticos a los definidos en el capítulo 6. La respuesta experimental simulada se extrae del extremo superior, de la sección central y de las secciones ubicadas en los cuartos de la altura de la estructura. Las cargas simuladas se aplican en la sección central y en la sección ubicada en el cuarto inferior. La rigidez flexional adimensional de los casos de estudio se obtiene en función de la longitud adimensional como $\overline{EI} = 10^{-3} \cdot \overline{L}$ mientras que los restantes parámetros adimensionales se indican en la Tabla 8.1. Los parámetros seleccionados para el ajuste son la rigidez flexional de la estructura cuyo valor exacto para todos los casos es $EI = 4000 \text{ kN.m}^2$ y la velocidad de propagación de ondas de corte del suelo V_s cuyos valores exactos se presentan en la penúltima columna de la Tabla 8.1 en función de la longitud adimensional. El parámetro K_ϕ que se encuentra en la última columna de esta Tabla representa la constante de un resorte rotacional utilizado durante el estudio de la flexibilidad de la base de fundación.

Las simplificaciones adoptadas para los modelos analíticos de la fundación en relación a los casos reales planteados son las siguientes:

1. *Variante I.* Utilización de coeficientes asintóticos de rigidez y amortiguamiento en reemplazo de la solución exacta de un disco rígido de fundación apoyado en un semi-espacio homogéneo.
2. *Variante II.* Utilización de la solución exacta de un disco rígido de fundación apoyado

\bar{L}	\bar{m}			r [m]	V_s [m/s]	K_ϕ [kN.m]
	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}			
1	A1	A2	A3	2.500	253.0	$3.20 \cdot 10^7$
4	B1	B2	B3	0.625	126.5	$1.25 \cdot 10^5$
10	C1	C2	C3	0.250	80.00	$3.20 \cdot 10^3$

Tabla 8.1: *Parámetros de los casos de estudio*

en un semi-espacio homogéneo en reemplazo de un disco flexible con un módulo de elasticidad longitudinal ($E = 9.00 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$) que produce un aumento del 20% en α_{mm} respecto al disco rígido. Una alternativa analizada consiste en agregar como parámetro de ajuste un resorte rotacional entre la estructura y el disco rígido que representa la flexibilidad de la base de fundación.

3. *Variante III.* Utilización de la solución exacta de un disco rígido de fundación apoyado en un semi-espacio homogéneo en reemplazo de un estrato con una profundidad equivalente al diámetro del disco apoyado sobre un semi-espacio con una velocidad de corte 1.5 veces mayor. Una alternativa analizada consiste en aumentar a 2.5 veces la relación entre las velocidades de propagación de ondas de corte del semi-espacio y el estrato.

8.1 Utilización de Coeficientes Asintóticos (*Variante I*)

Los coeficientes asintóticos utilizados en el modelado de la fundación se extraen de la Tabla 6.4 mientras que la rigidez dinámica adimensional del disco rígido apoyado sobre un semi-espacio homogéneo de suelo se muestra en la Figura 5.2. Los valores ajustados de la rigidez flexional de la estructura y la velocidad de ondas de corte del semi-espacio se muestran en la Tabla 8.2.

\bar{L}	Parámetro de ajuste	\bar{m}		
		10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
1	EI	4000 (+0.0%)	4000 (+0.0%)	4000 (+0.0%)
	V_s	241.4 (-4.6%)	241.4 (-4.6%)	239.9 (-5.2%)
4	EI	3994 (-0.2%)	4001 (+0.0%)	3996 (-0.1%)
	V_s	120.0 (-5.2%)	116.0 (-8.3%)	112.8 (-11%)
10	EI	4000 (+0.0%)	4000 (+0.0%)	4009 (+0.2%)
	V_s	79.75 (-0.3%)	78.41 (-2.0%)	77.55 (-3.1%)

Tabla 8.2: *Utilización de coeficientes asintóticos*

El ajuste de los valores de EI es excelente para fundaciones relativamente rígidas ($\bar{L} = 1$) presentando leves dispersiones en la medida que aumenta la flexibilidad del suelo. La influencia de la utilización de coeficientes simplificados para la fundación parece tener poca

relevancia sobre el ajuste de los parámetros de la estructura. Los valores ajustados de V_s presentan dispersiones importantes para fundaciones relativamente rígidas que disminuyen con el aumento de la participación de la flexibilidad del suelo en el comportamiento dinámico del sistema ($\bar{L} = 10$).

8.2 Flexibilidad de la Base de Fundación (*Variante II*)

El cálculo de la receptancia del disco flexible de fundación apoyado en un semi-espacio homogéneo se realiza con el programa *SASSI* [34]. La aproximación conseguida para la receptancia y la rigidez dinámica con las matrices de rigidez y amortiguamiento obtenidas a través del *MFPM* se muestra en las Figuras 8.1 y 8.2 respectivamente. Los valores de receptancia utilizados para la adimensionalización de las curvas corresponden al disco rígido apoyado en un semi-espacio homogéneo. Las curvas de receptancia del disco flexible son prácticamente idénticas a las curvas del disco rígido (Figura 5.1) excepto que la parte real de α_{mm} presenta un corrimiento casi constante en la dirección positiva de las ordenadas. Esta observación sugiere que un resorte rotacional entre la estructura y la fundación puede compensar parcialmente la flexibilidad del disco. Los valores ajustados de la rigidez flexional de la estructura y la velocidad de ondas de corte del semi-espacio se muestran en la Tabla 8.3.

\bar{L}	Parámetro de ajuste	\bar{m}		
		10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
1	EI	4000 (+0.0 %)	4000 (+0.0 %)	4000 (+0.0 %)
	V_s	254.6 (+0.7 %)	255.4 (+0.9 %)	243.6 (-3.7 %)
4	EI	3973 (-0.7 %)	3971 (-0.7 %)	3969 (-0.8 %)
	V_s	120.7 (-4.6 %)	126.3 (-0.2 %)	112.5 (-11 %)
10	EI	3995 (-0.1 %)	3998 (-0.0 %)	4046 (+1.2 %)
	V_s	79.40 (-0.7 %)	77.93 (-2.6 %)	77.96 (-2.5 %)

Tabla 8.3: Base flexible de fundación sin resorte rotacional

El ajuste de los valores de EI es nuevamente excelente para fundaciones relativamente rígidas ($\bar{L} = 1$) presentando dispersiones próximas al 1 % para una flexibilidad intermedia del suelo y para una masa estructural pequeña con una flexibilidad alta del suelo. Los valores ajustados de V_s resultan menos sensibles a este nivel de flexibilidad del disco que a la utilización de coeficientes asintóticos para el modelado de la base de fundación.

La flexibilidad rotacional del disco de fundación equivalente al 20 % de la flexibilidad del suelo puede expresarse como (despreciando el término de acoplamiento entre los movimientos de balanceo y horizontal)

$$\frac{1}{K_\phi} = 0.2 \cdot \alpha_{mm}$$

Por lo tanto, los valores iniciales de las constantes de resortes rotacionales que se intercalan

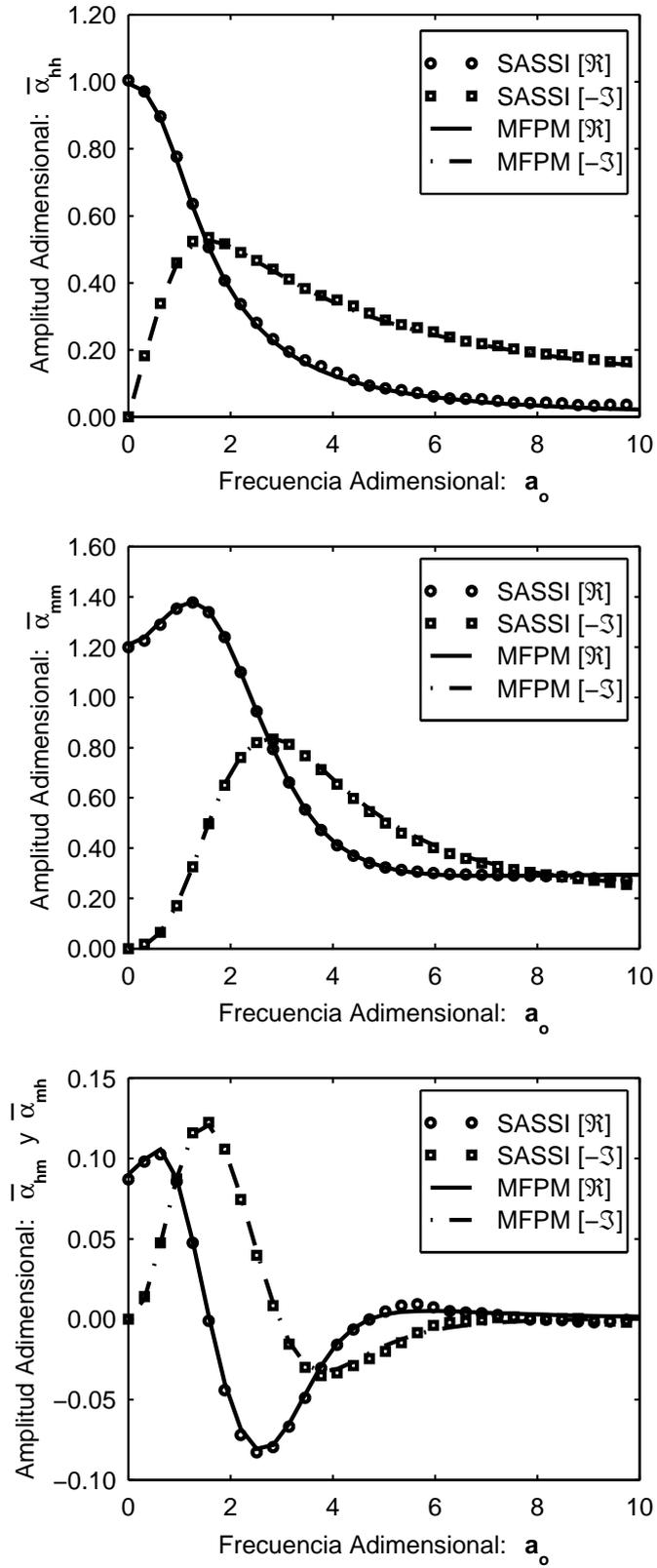


Fig. 8.1: Receptancia del disco flexible de fundación de la variante II

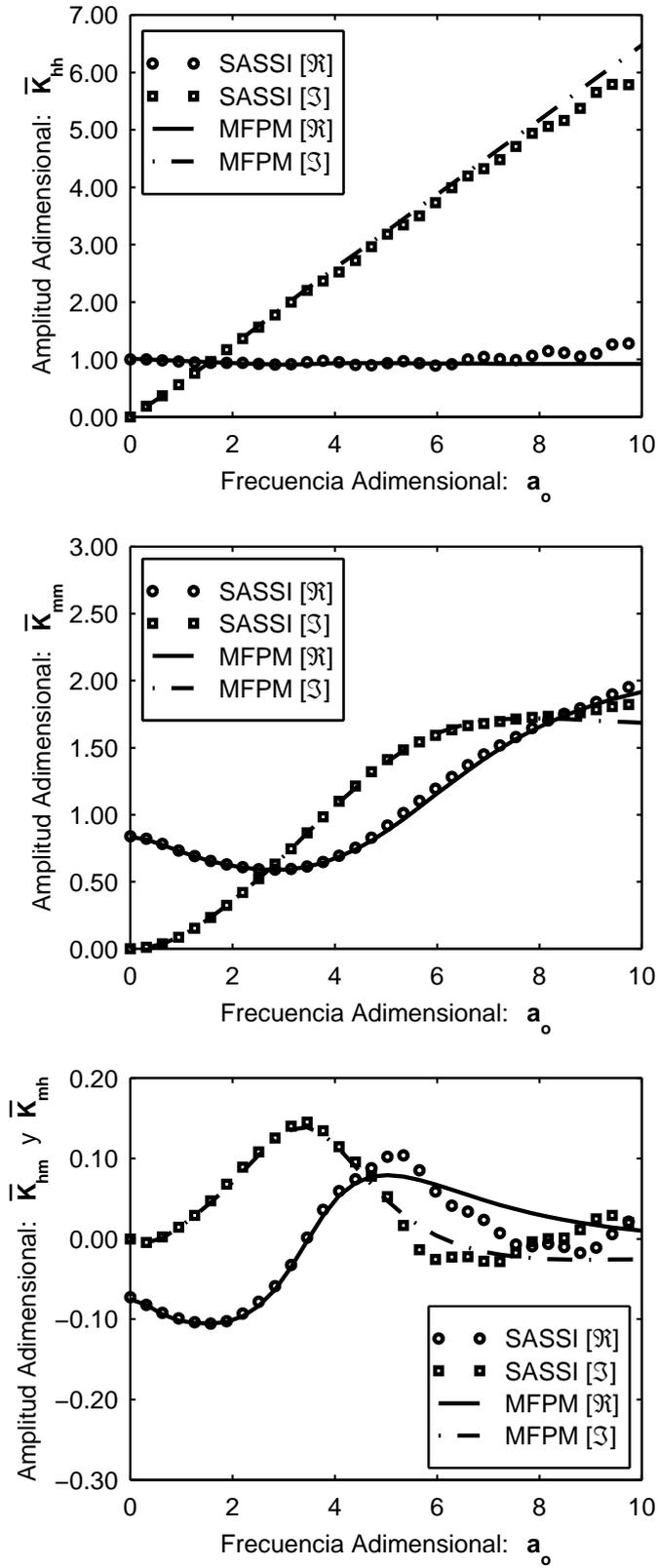


Fig. 8.2: Rigidez dinámica del disco flexible de fundación de la variante II

entre la estructura y la fundación se calculan de la siguiente forma

$$K_\phi = \frac{1}{0.2 \cdot \alpha_{mm}} = \frac{40}{3} \frac{\rho V_s^2 r^3}{(1 - \nu)}$$

Los valores de referencia de las constantes de estos resortes rotacionales se presentan en la última columna de la Tabla 8.1. Los valores finales de los parámetros de ajuste se muestran en la Tabla 8.4. La introducción del resorte rotacional mejora notoriamente el ajuste de la rigidez flexional de la estructura y levemente el ajuste de la velocidad de propagación de ondas de corte del suelo. En general, la estimación del valor inicial de la constante del resorte rotacional es satisfactoria.

\bar{L}	Parámetro de ajuste	\bar{m}		
		10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
1	EI	4000 (+0.0 %)	4000 (+0.0 %)	4000 (+0.0 %)
	K_ϕ	$\approx \infty$	$3.38 \cdot 10^7$ (+5.6 %)	$8.39 \cdot 10^7$ (+162 %)
	V_s	254.6 (+0.7 %)	255.6 (+1.0 %)	243.8 (-3.6 %)
4	EI	4003 (+0.1 %)	4003 (+0.1 %)	3996 (-0.1 %)
	K_ϕ	$1.19 \cdot 10^5$ (-4.9 %)	$1.17 \cdot 10^5$ (-6.1 %)	$1.32 \cdot 10^5$ (+5.8 %)
	V_s	125.3 (-1.0 %)	126.5 (+0.0 %)	117.6 (-7.0 %)
10	EI	3997 (-0.1 %)	3993 (-0.2 %)	3991 (-0.2 %)
	K_ϕ	$2.76 \cdot 10^3$ (-14 %)	$3.42 \cdot 10^3$ (+7.0 %)	$2.34 \cdot 10^3$ (-27 %)
	V_s	80.12 (+0.1 %)	79.57 (-0.5 %)	81.83 (+2.3 %)

Tabla 8.4: Base flexible de fundación con resorte rotacional

8.3 Estratificación del Perfil de Suelo (Variante III)

La receptancia del disco rígido de fundación apoyado en un estrato con una profundidad equivalente al diámetro del disco sobre un semi-espacio homogéneo se calcula con el programa SASSI [34]. La aproximación conseguida para la receptancia y la rigidez dinámica con las matrices de rigidez y amortiguamiento obtenidas a través del MFPM se muestra en las Figuras 8.3 y 8.4 respectivamente. Los valores de receptancia utilizados para la adimensionalización de las curvas corresponden al disco rígido apoyado en un semi-espacio homogéneo. Los valores ajustados de la rigidez flexional y la velocidad de ondas de corte del estrato superior se muestran en las Tablas 8.5 y 8.6 para relaciones de velocidad entre el semi-espacio (V_s^∞) y el estrato (V_s^1) de 1.5 y 2.5 respectivamente.

El ajuste de los valores de EI es excelente para fundaciones relativamente rígidas ($\bar{L} = 1$) presentando dispersiones que no superan el 0.5 % para flexibilidades intermedias y altas del suelo. Los valores ajustados de V_s presentan un error medio aproximado del 3 % para ambos casos aunque la dispersión de los errores resulta mayor para $V_s^\infty/V_s^1 = 1.5$ que para $V_s^\infty/V_s^1 = 2.5$. En definitiva, los valores ajustados de los parámetros de la estructura muestran una marcada insensibilidad respecto a los parámetros de la fundación para bajas flexibilidades del suelo.

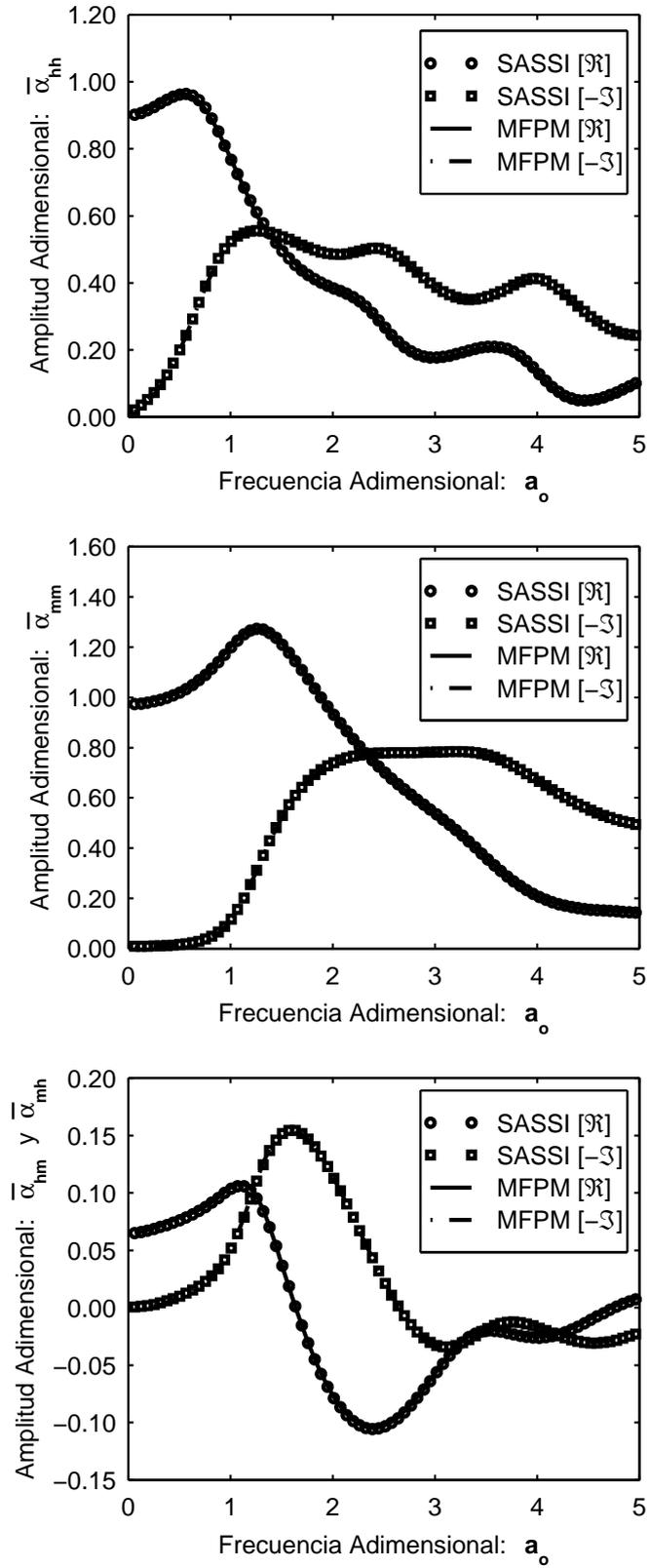


Fig. 8.3: Receptancia para el perfil estratificado de suelo de la variante III

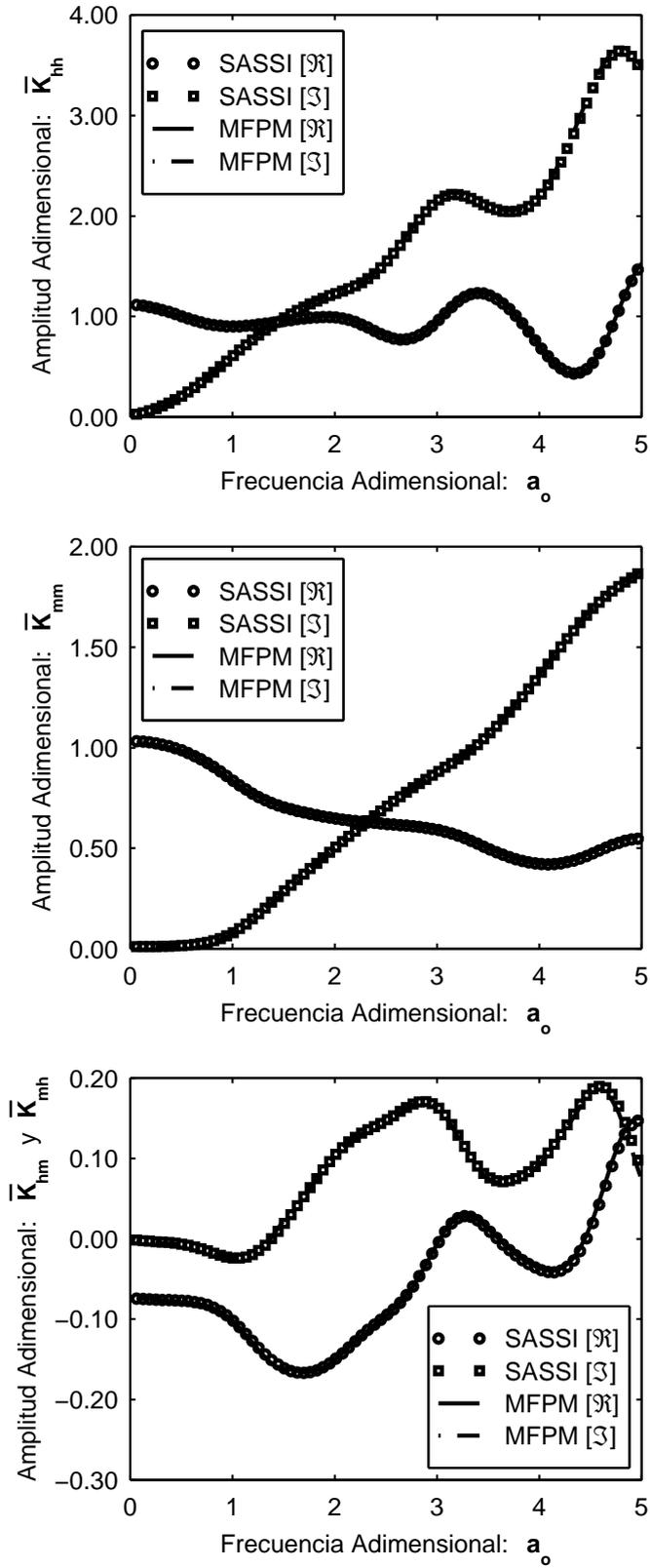


Fig. 8.4: Rigidez dinámica para el perfil estratificado de suelo de la variante III

\bar{L}	Parámetro de ajuste	\bar{m}		
		10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
1	EI	4001 (+0.0 %)	4000 (+0.0 %)	4000 (+0.0 %)
	V_s	239.9 (-5.2 %)	269.0 (+6.3 %)	287.6 (+14 %)
4	EI	4016 (+0.4 %)	4004 (+0.1 %)	4002 (+0.1 %)
	V_s	127.1 (+0.5 %)	128.7 (+1.7 %)	125.6 (-0.7 %)
10	EI	3998 (-0.1 %)	3998 (-0.0 %)	4017 (+0.4 %)
	V_s	80.67 (+0.8 %)	78.82 (-1.5 %)	82.01 (+2.5 %)

Tabla 8.5: Perfil de suelo estratificado con $V_s^\infty / V_s^1 = 1.5$

\bar{L}	Parámetro de ajuste	\bar{m}		
		10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
1	EI	4001 (+0.0 %)	4000 (+0.0 %)	4000 (+0.0 %)
	V_s	242.1 (-4.3 %)	264.3 (+4.5 %)	284.8 (+1.3 %)
4	EI	4020 (+0.5 %)	4003 (+0.1 %)	4003 (+0.1 %)
	V_s	123.5 (-2.4 %)	128.9 (+1.9 %)	122.9 (-2.8 %)
10	EI	4000 (+0.0 %)	4007 (+0.2 %)	4016 (+0.4 %)
	V_s	82.03 (+2.5 %)	78.30 (-2.1 %)	82.80 (+3.5 %)

Tabla 8.6: Perfil de suelo estratificado con $V_s^\infty / V_s^1 = 2.5$

Capítulo 9

Casos Reales Estudiados

El procedimiento de calibración de modelos de sistemas con interacción suelo-estructura junto con la técnica utilizada para la representación matricial del comportamiento dinámico de un bloque rígido de fundación se aplican durante el estudio de dos casos reales:

1. Prototipo de Interacción (Laboratorio de Estructuras).
2. Molino de Crudo (Planta L'Amalí - Loma Negra).

9.1 Prototipo de Interacción (Laboratorio de Estructuras)

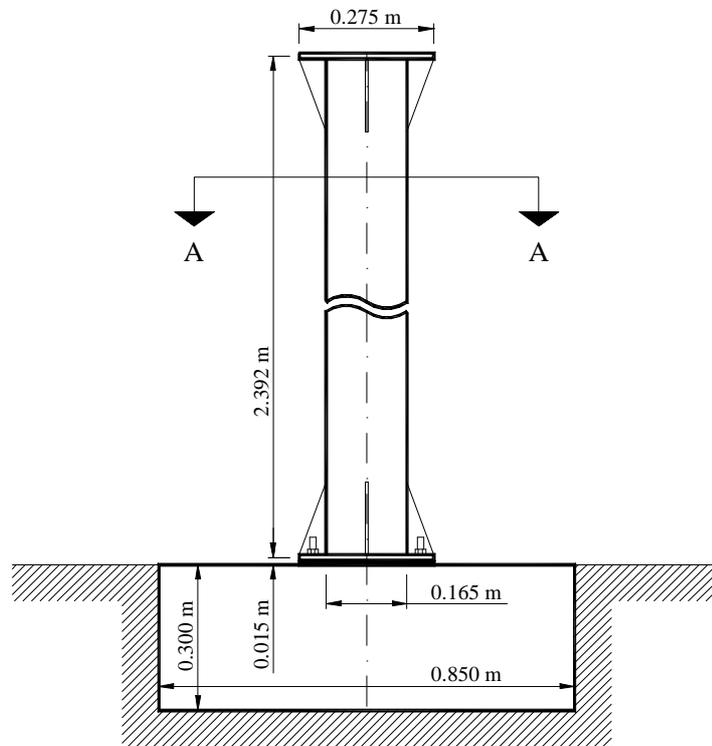
El Prototipo de Interacción consiste en una columna cilíndrica de acero montada sobre un macizo de hormigón en el predio de esta Facultad de Ingeniería que representa un caso simple de sistemas con interacción suelo-estructura. El análisis de este sistema tiene por objeto estudiar la sensibilidad de los parámetros de ajuste para una estructura predominantemente unidimensional sometida a cargas impulsivas.

9.1.1 Descripción general

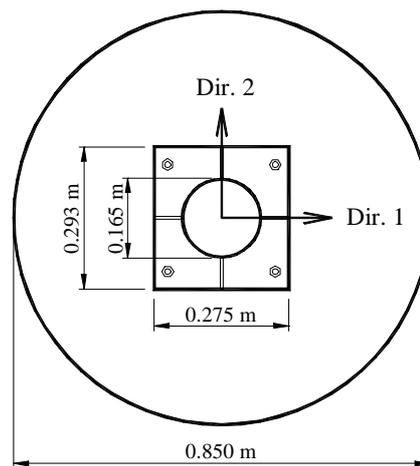
La fundación del sistema es un bloque cilíndrico de hormigón armado con $0.850m$ de diámetro y $0.300m$ de altura. La estructura consiste en un tubo de acero sin costura con $0.165m$ de diámetro exterior y $0.0048m$ de espesor que posee placas rectangulares de $0.293m \times 0.275m \times 0.012m$ soldadas en los extremos y reforzadas con escuadras. La placa superior posee una abertura circular centrada de $0.120m$ de diámetro para un eventual relleno del tubo. La longitud del tubo entre los baricentros de las placas extremas es de $2.392m$ resultando la masa total de la estructura de aproximadamente $60kg$. En la parte superior del bloque de fundación se encuentra embutida hasta la mitad de su espesor una placa de apoyo con idénticas dimensiones que las placas extremas del tubo. La placa inferior del tubo se encuentra adherida a esta placa de apoyo con una capa de $0.003m$ de resina epoxi y abulonada al bloque de fundación a través de pernos empotrados en el hormigón. De esta forma, la distancia vertical entre el baricentro de la placa inferior del tubo y la superficie del bloque de fundación resulta de $0.015m$.

El Prototipo de Interacción se muestra en vista y en corte en la Figura 9.1. A efectos de estudiar la influencia de la pequeña diferencia de longitud en las caras de las placas de

la estructura se definen dos direcciones de análisis: la *dirección 1* se define paralela a los bordes cortos de las placas en tanto que la *dirección 2* resulta paralela a los bordes largos de las placas



Vista



Corte A-A

Fig. 9.1: Prototipo de Interacción

En una instancia posterior al análisis del sistema original presentado en la Figura 9.1 se coloca una *masa adicional* sobre la placa superior del tubo con una masa ligeramente superior a 50kg para obtener una variante de la estructura con características dinámicas diferentes. En el modelado esta masa se asume infinitamente rígida aunque vinculada a la placa superior del tubo a través de resortes rotacionales. En la Figura 9.2 se muestra el modelo *CAD* utilizado para determinar las propiedades inerciales de la masa adicional. En las Figuras 9.3 y 9.4 se observan fotos con los detalles de vinculación de la masa adicional a la placa superior.

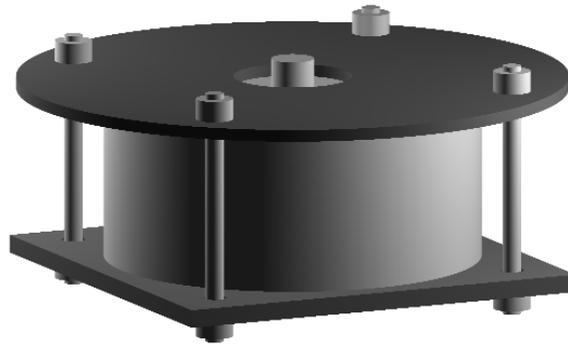


Fig. 9.2: Modelo *CAD* de la masa adicional

Los transductores utilizados durante la fase experimental para la medición de la respuesta del sistema son acelerómetros inductivos *HBM - B12/500* con una frecuencia natural de 500Hz y una respuesta prácticamente lineal en amplitud hasta los 250Hz . Las cargas aplicadas se registran a través de una celda de carga con una fuerza estática máxima de 4.5tn . Las señales de los acelerómetros se filtran y amplifican utilizando un acondicionador *HBM - MGCplus/TG001*, y se procesan luego junto a la señal de la celda de carga con un analizador de señales dinámicas *HP35670A*. El sistema de adquisición se completa con una computadora portátil utilizada para la verificación y el almacenamiento de los datos.

En una etapa previa al ensamblaje de la estructura con la fundación para el análisis del sistema completo se realizan ensayos impulsivos y ajustes de modelos tanto del bloque de fundación como de la estructura. El análisis de ambas componentes en forma separada permite evaluar las dificultades en el acoplamiento de los modelos e investigar posibles desviaciones en los parámetros de ajuste de sendos modelos durante la calibración del sistema acoplado para compensar pequeñas inexactitudes en el modelado.

9.1.2 Análisis del bloque de fundación

La realización de ensayos sobre el bloque de fundación y el terreno circundante permite obtener modelos independientes del comportamiento dinámico del macizo de hormigón sin recurrir al ajuste y desacoplamiento de un modelo más complejo que involucre al sistema completo.



Fig. 9.3: *Vista inferior de la masa adicional*



Fig. 9.4: *Vista superior de la masa adicional*

Ensayos del bloque de fundación

El bloque de fundación se somete a ensayos impulsivos utilizando el martillo modal que se muestra en la Figura 9.5. El dispositivo se monta sobre tablas apoyadas en zonas alejadas al bloque de fundación con el objeto de no agregar masa ni generar fuentes de excitación espurias por su movimiento durante el impacto (Figura 9.6). El martillo modal posee un motor que enrolla, a través de un conjunto de poleas, un cable utilizado para izar una masa suspendida con un electroimán. La liberación súbita del electroimán provoca el deslizamiento en caída libre de la masa a través de guías impactando verticalmente sobre el espécimen de ensayo. Un amortiguador fijado a la parte inferior de la masa deslizante permite obtener un golpe adecuado para un amplio rango de estructuras. La función de carga aplicada se registra con una celda de carga montada en el extremo de impacto del amortiguador. El peso total de la masa deslizante, su altura de caída y la dureza de la punta de goma adosada a la celda de carga controlan la energía y el contenido de frecuencias del golpe.

La disposición de sensores y los puntos de aplicación de las cargas impulsivas sobre el bloque de fundación se indican en la Figura 9.7. Los sensores se colocan en los puntos 1 a 4 ubicados sobre las direcciones principales con separaciones angulares de 90° a distancias de $0.360m$ del centro del bloque. Las cargas se aplican en el punto **o** ubicado en el centro de la superficie del bloque y en los puntos **a** a **d** sobre las direcciones principales a $0.230m$ del centro del bloque con separaciones angulares de 90° .

Un estudio de flexibilidad realizado con el modelo de elementos finitos de un cuarto de la fundación que se muestra en la Figura 9.8 indica que el bloque puede asumirse infinitamente rígido para el rango de frecuencias considerado. Por lo tanto, el movimiento del bloque puede describirse a través de *6 grados de libertad (GL)* espaciales. La calibración del modelo del bloque de fundación se realiza utilizando componentes de la matriz de flexibilidad dinámica relacionadas con aquellos *GL* que se excitan con el martillo modal. Los golpes aplicados en el centro del bloque permiten determinar la componente α_{vv} de la diagonal principal asociada al *GL* vertical. El desacoplamiento existente entre el *GL* vertical y los 2 *GL* de giro alrededor de las direcciones 1 y 2 permite utilizar los golpes excéntricos para calcular la flexibilidad al giro simultáneamente con otras estimaciones de la flexibilidad vertical a pesar que la definición rigurosa de la matriz de flexibilidad requiere la aplicación exclusiva de cargas para cada *GL*. La axil-simetría del bloque permite además asumir que las componentes de la diagonal principal de la matriz de flexibilidad asociadas al giro alrededor de las direcciones 1 y 2 son idénticas. La designación común utilizada para ambas componentes es entonces α_{mm} . Las receptancias α_{vv} y α_{mm} son independientes de la cota de referencia adoptada sobre el eje baricéntrico vertical como consecuencia de la hipótesis de cuerpo rígido de bloque de fundación. Los términos de acoplamiento de los *GL* horizontales con los *GL* de giro alrededor de las direcciones 1 y 2 se ignoran en esta instancia por su escasa participación en la flexibilidad dinámica del bloque de fundación.

En la Figura 9.9 se muestran curvas experimentales promediadas para las componentes medidas de la matriz de flexibilidad dinámica. La receptancia experimental α_{vv} se calcula como promedio de 10 curvas obtenidas tomando el valor medio de la respuesta de los sensores ubicados sobre una misma dirección para cada uno de los 5 puntos asignados para la aplicación de las cargas. La receptancia experimental α_{mm} resulta del promedio de 4 curvas derivadas de los golpes excéntricos considerando el momento aplicado respecto al centro del bloque y el giro calculado con la respuesta de los sensores alineados con el punto de impacto.



Fig. 9.5: *Ensayo impulsivo sobre el bloque de fundación*

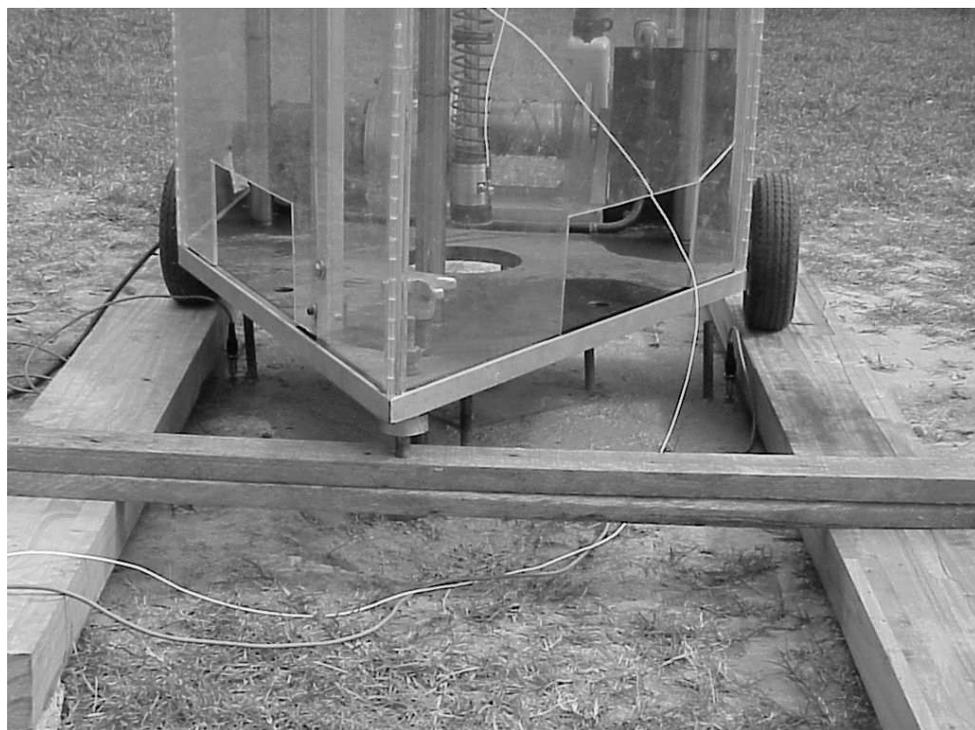


Fig. 9.6: *Desvinculación del martillo modal con el bloque de fundación*

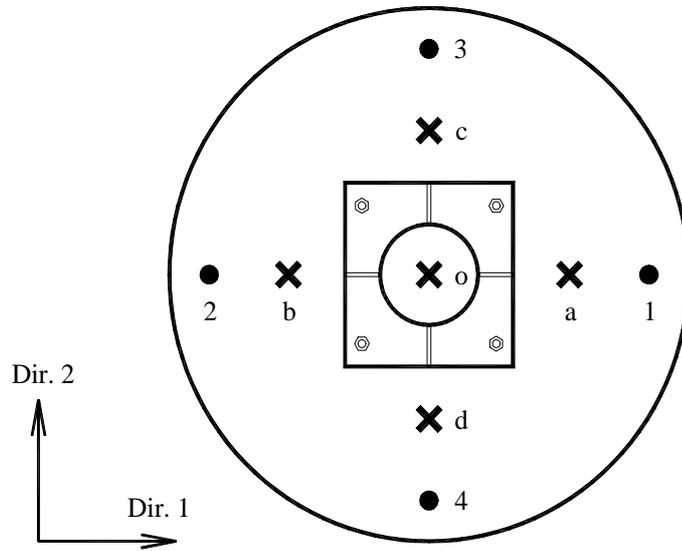


Fig. 9.7: Disposición de sensores e impactos en el bloque de fundación

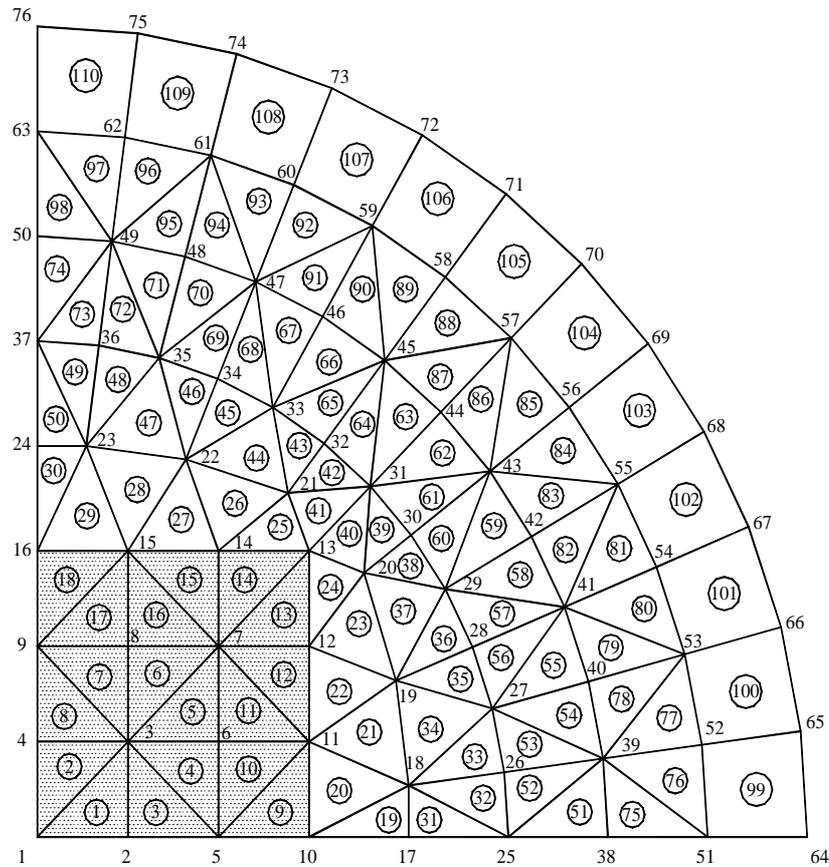


Fig. 9.8: Estudio de flexibilidad del bloque de fundación

Ensayos del terreno circundante

La construcción de un modelo del bloque de fundación embebido en el suelo requiere la caracterización geométrica y mecánica del terreno circundante. La topografía del lugar de emplazamiento del Prototipo de Interacción permite asumir la hipótesis de un semi-espacio compuesto por estratos horizontales que poseen propiedades uniformes en todo su espesor. La caracterización mecánica de cada estrato del perfil se realiza a través de los siguientes parámetros: la densidad ρ , el coeficiente de Poisson ν y la velocidad de propagación de ondas de corte V_s . De acuerdo a las dimensiones del bloque de fundación sólo es necesario definir los parámetros del suelo hasta una profundidad de aproximadamente $3m$ dado que la influencia en la respuesta dinámica de los estratos inferiores resulta insignificante. Según estudios realizados en zonas cercanas al sitio de emplazamiento por investigadores del área de geotecnia de esta Facultad de Ingeniería (Rinaldi *et al.* [65] y Clariá *et al.* [66]) se comprueba que tanto la densidad como el coeficiente de Poisson del suelo presentan pequeñas dispersiones en función de la profundidad y el contenido de humedad. Los valores medios adoptados de $\nu = \frac{1}{4}$ y $\rho = 1.40 \text{ tn}/m^3$ se consideran suficientemente representativos para todo el dominio de suelo modelado. Sin embargo, la velocidad de propagación de ondas de corte (que se encuentra estrechamente vinculada a la rigidez del suelo) presenta variaciones importantes con la profundidad.

La medición de velocidades de propagación de ondas superficiales en estructuras masivas de hormigón, utilizadas para la estimación del módulo de elasticidad longitudinal y el coeficiente de Poisson, es una técnica ampliamente difundida en los últimos años ([67]). La aplicación de esta técnica en las paredes de calicatas realizadas en el terreno permite obtener valores de referencia de las velocidades de propagación de ondas de corte a distintas profundidades. Los valores medios de tres calicatas obtenidos a $0.15m$ y $0.45m$ de profundidad resultan de $V_s = 156 \text{ m}/s$ y $V_s = 185 \text{ m}/s$ respectivamente.

El análisis espectral de ondas superficiales (SASW) descrito en [68] es una técnica utilizada para determinar las velocidades de propagación de ondas de corte de los estratos de perfiles tentativos. A través de esta técnica se evalúan posibles perfiles de velocidades de ondas de corte para el sitio de emplazamiento del Prototipo de Interacción. La etapa experimental consiste en la aplicación de golpes verticales directamente sobre el terreno y el registro del paso del tren de ondas superficiales (*ondas de Rayleigh*) a través de dos sensores alineados con el punto de impacto. La separación de los sensores se relaciona con la profundidad de suelo involucrada en la respuesta que depende de la energía y el contenido de frecuencias de los golpes. El procesamiento de las señales permite obtener una *curva de dispersión* que relaciona la velocidad de propagación de ondas superficiales V_R con la longitud de onda λ . En el caso de un semi-espacio homogéneo se obtiene una curva de dispersión constante dado que la velocidad de propagación de ondas superficiales es independiente de la longitud de onda. Por consiguiente, la forma de la curva de dispersión se relaciona directamente con la estratificación del terreno. La etapa analítica de esta técnica consiste en el ajuste de un perfil propuesto con determinados espesores de estratos que poseen valores iniciales de velocidades de ondas de corte. La información obtenida a través de sondeos, ensayos de penetración y mediciones directas de velocidades de propagación resulta sumamente valiosa en esta instancia. Los estratos del perfil propuesto se discretizan a través de un procedimiento numérico a los efectos de calcular la versión analítica de la curva de dispersión junto con la sensibilidad de esta curva respecto a la velocidad de ondas de corte de cada estrato. Un proceso iterativo permite obtener el conjunto de velocidades del

perfil propuesto que produce una correspondencia óptima entre ambas curvas de dispersión en relación a una cierta norma.

Un determinado perfil de suelo posee una única curva de dispersión. Sin embargo, las curvas de dispersión obtenidas en las proximidades del bloque de fundación muestran una dependencia con la separación de los sensores y la dirección analizada acusando cierta heterogeneidad del terreno¹. Dado que la dispersión observada no resulta tan pronunciada como para invalidar la hipótesis de semi-espacio estratificado se utiliza el rango de variación de las curvas de dispersión para proponer un conjunto de perfiles que presenten una correspondencia satisfactoria. La caracterización de estos perfiles se realiza definiendo el espesor de sus estratos y la relación de las velocidades de las ondas de corte de los distintos estratos respecto a una velocidad de referencia asignada al estrato superior. La ventaja de esta caracterización es que la variación de la velocidad de referencia sólo cambia las escalas tanto de amplitud como de frecuencia manteniendo la forma de las curvas de receptancia del bloque de fundación. De esta forma, las soluciones numéricas adimensionales de la flexibilidad dinámica del bloque de fundación obtenidas con el programa *SASSI* conservan su validez mientras se mantengan las relaciones geométricas y mecánicas del modelo.

Modelado del bloque de fundación

Los perfiles propuestos para el modelado del bloque de fundación se presentan en la Tabla 9.1. El perfil 0 se construye en base a una variación lineal discreta de la velocidad de ondas de corte a través de los valores medidos en forma directa en el terreno hasta una profundidad de 0.80m que coincide aproximadamente con el diámetro del bloque de fundación. Los perfiles 1 a 3 poseen un estrato con un espesor de 0.30m ó 0.60m (una o dos veces la altura del bloque de fundación) apoyado sobre un semi-espacio. El perfil 4 representa un semi-espacio homogéneo.

Perfil	Número de estratos	Espesor de estratos [m]	Relación de velocidades	V_s^1 [m/s]	$\ \Delta\alpha\ $
0	8	0.10	$V_s^{i+1}/V_s^i \approx 1.05$	146.8	0.1659
1	1	0.30	$V_s^2/V_s^1 = 1.25$	151.9	0.1942
2	1	0.30	$V_s^2/V_s^1 = 1.50$	134.6	0.1698
3	1	0.60	$V_s^2/V_s^1 = 1.25$	172.2	0.1771
4	0	—	—	176.1	0.2370

Tabla 9.1: Perfiles propuestos para el terreno circundante al bloque de fundación

Las curvas adimensionales de receptancia para los perfiles propuestos obtenidas con el programa *SASSI* se muestran en las Figuras 9.10 a 9.14. Las componentes de la receptancia $\bar{\alpha}_{hh}$ y $\bar{\alpha}_{hm}$ intervinientes en el modelo del sistema acoplado se presentan junto a las componentes de receptancia $\bar{\alpha}_{mm}$ y $\bar{\alpha}_{vv}$ utilizadas para el ajuste del modelo del bloque de

¹La rigidez horizontal evaluada en el extremo superior de pilotes próximos al lugar de emplazamiento del Prototipo de Interacción presenta variaciones superiores al 50% que sugieren también una heterogeneidad marcada en el terreno.

fundación. La adimensionalización de las curvas se realiza con los valores de flexibilidad estática de un disco con el diámetro del bloque de fundación apoyado sobre un semi-espacio homogéneo con una velocidad de propagación de ondas de corte igual a la del estrato superior del perfil considerado.

Ajuste del modelo del bloque de fundación

Las velocidades de referencia ajustadas y los valores obtenidos de la norma de error $\|\Delta\alpha\|$ se indican en las últimas dos columnas de la Tabla 9.1. La norma de error utilizada se basa en las receptancias experimentales α_{vv} y α_{mm}

$$\|\Delta\alpha\| = \sqrt{\frac{1}{n_k} \sum_{k=1}^{n_k} \left| \frac{\alpha_{vv}^{\mathbf{a}}(f_k) - \alpha_{vv}^{\mathbf{x}}(f_k)}{\alpha_{vv}^{\mathbf{x}}(f_k)} \right|^2 + \frac{1}{n_k} \sum_{k=1}^{n_k} \left| \frac{\alpha_{mm}^{\mathbf{a}}(f_k) - \alpha_{mm}^{\mathbf{x}}(f_k)}{\alpha_{mm}^{\mathbf{x}}(f_k)} \right|^2} \quad (9.1)$$

donde los índices **a** y **x** representan versión analítica y experimental respectivamente. En la Figura 9.15 se observa que las curvas de dispersión correspondientes a los perfiles ajustados se adaptan satisfactoriamente al rango de variación de las curvas experimentales indicadas con líneas de trazo. El perfil correspondiente al semi-espacio homogéneo presenta las mayores dificultades para reproducir la tendencia de las curvas de dispersión. Los perfiles ajustados de velocidades de propagación de ondas de corte se muestran en la Figura 9.16.

El ajuste del modelo del bloque de fundación con los distintos perfiles propuestos en relación a las receptancias experimentales se presenta en las Figuras 9.17 a 9.21. La inadecuación de la hipótesis de un semi-espacio homogéneo para el terreno de fundación se manifiesta nuevamente tanto en la norma de error como en el ajuste que se observa en la Figura 9.21.

9.1.3 Análisis de la estructura

La realización de ensayos sobre la estructura aislada permite afinar detalles de modelado cuyos defectos pueden ser arrastrados al modelo de la fundación durante el ajuste del modelo del sistema acoplado. Este efecto se acentúa en la medida que la respuesta del sistema sea poco sensible a los parámetros de la fundación por una elevada rigidez en relación a la estructura. De esta forma, errores pequeños en las propiedades geométricas y mecánicas de la estructura pueden amplificar las desviaciones en los parámetros de ajuste de la fundación necesarias para acomodar la respuesta del conjunto. El espesor efectivo del tubo se verifica a través de la expresión del volumen que permite reproducir la relación entre el peso total del tubo y el peso específico del acero. Los ensayos dinámicos permiten ajustar el módulo de elasticidad del acero, las propiedades inerciales de las placas extremas del tubo y las constantes de los resortes rotacionales de vinculación con la placa superior del tubo en cada dirección para la variante de la estructura con la masa adicional.

La incorporación de una matriz de amortiguamiento al modelo de la estructura mejora el ajuste del modelo del sistema completo sin incrementar el número de parámetros de ajuste. El modelo de amortiguamiento proporcional para la estructura describe satisfactoriamente los valores observados durante los ensayos dinámicos. El amortiguamiento puede considerarse básicamente proporcional a la matriz de masa y el valor ajustado del parámetro de proporcionalidad de la ecuación (2.7) resulta $\nu = 1.80$. De acuerdo a la ecuación

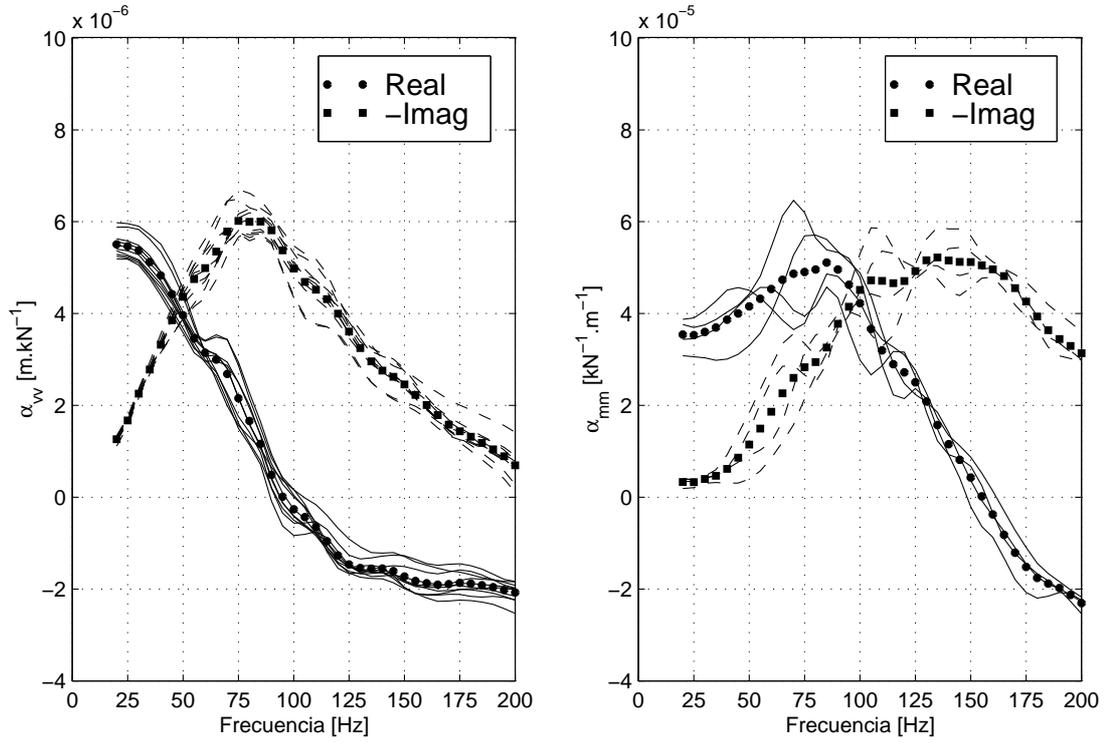


Fig. 9.9: Receptancia experimental del bloque de fundación

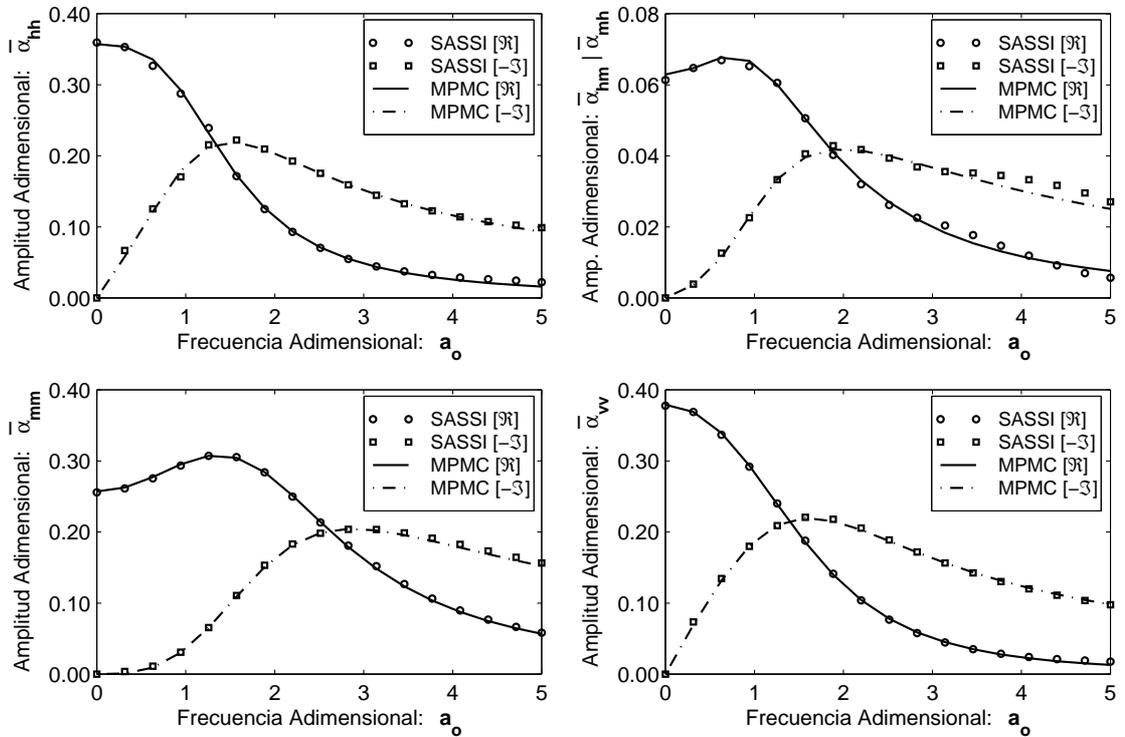


Fig. 9.10: Receptancia analítica del bloque de fundación con el perfil 0

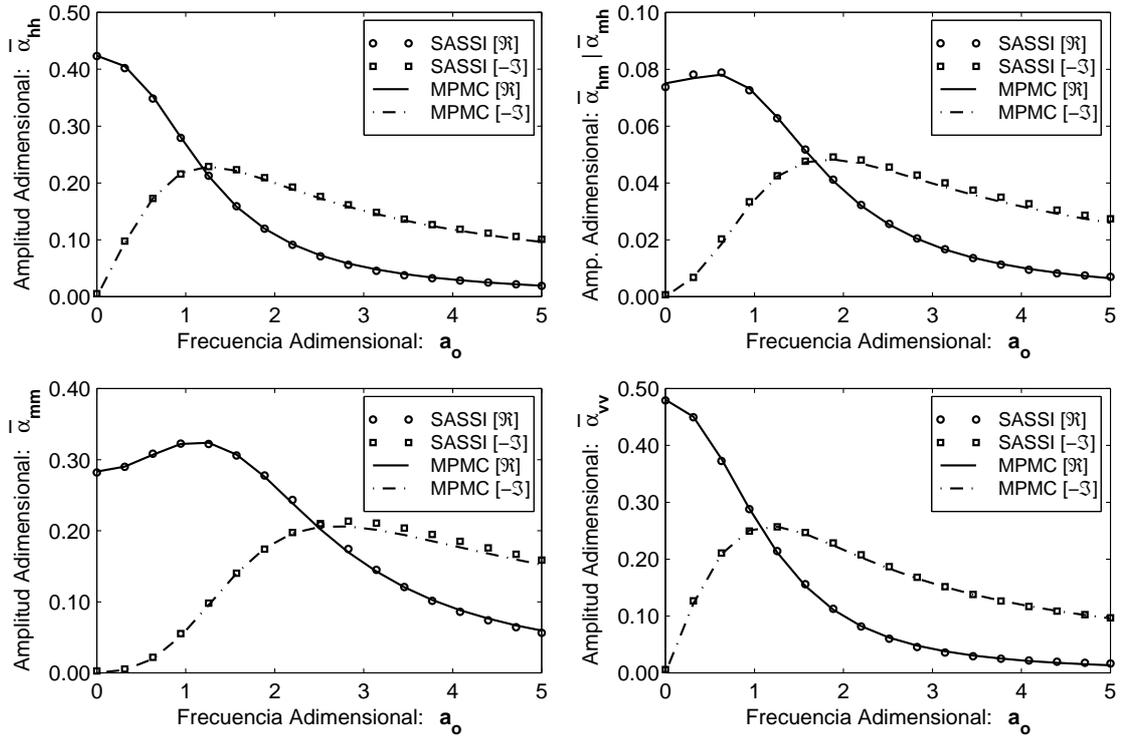


Fig. 9.11: Receptancia analítica del bloque de fundación con el perfil 1

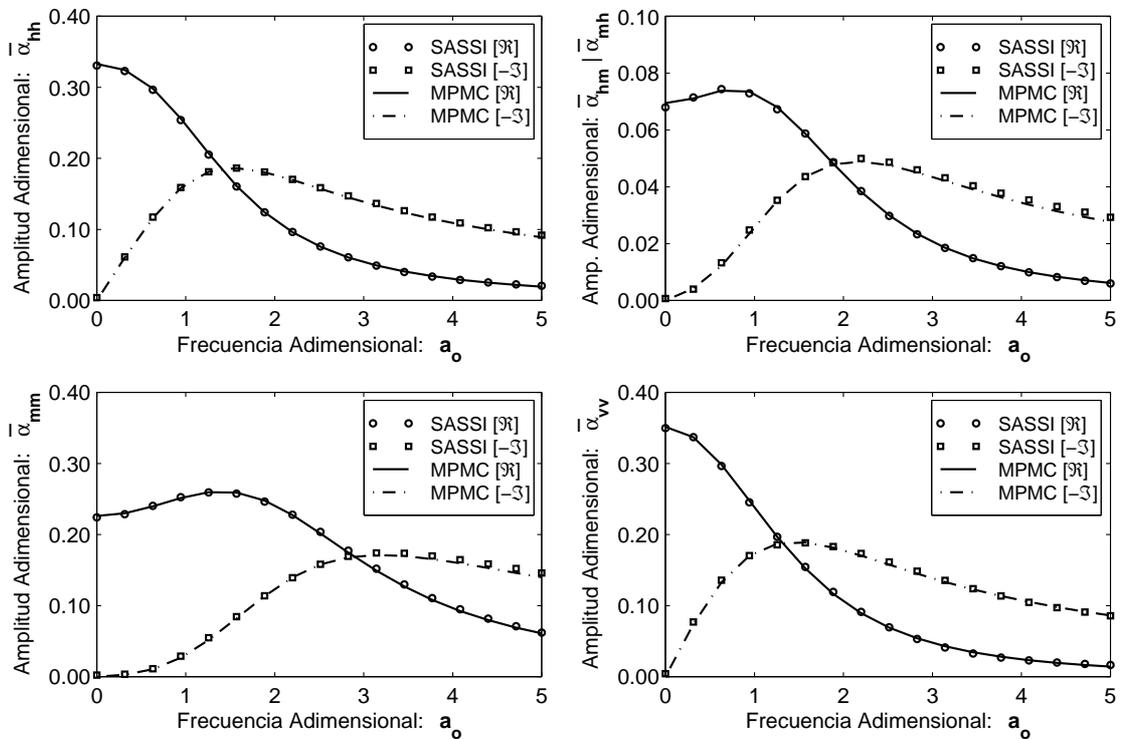


Fig. 9.12: Receptancia analítica del bloque de fundación con el perfil 2

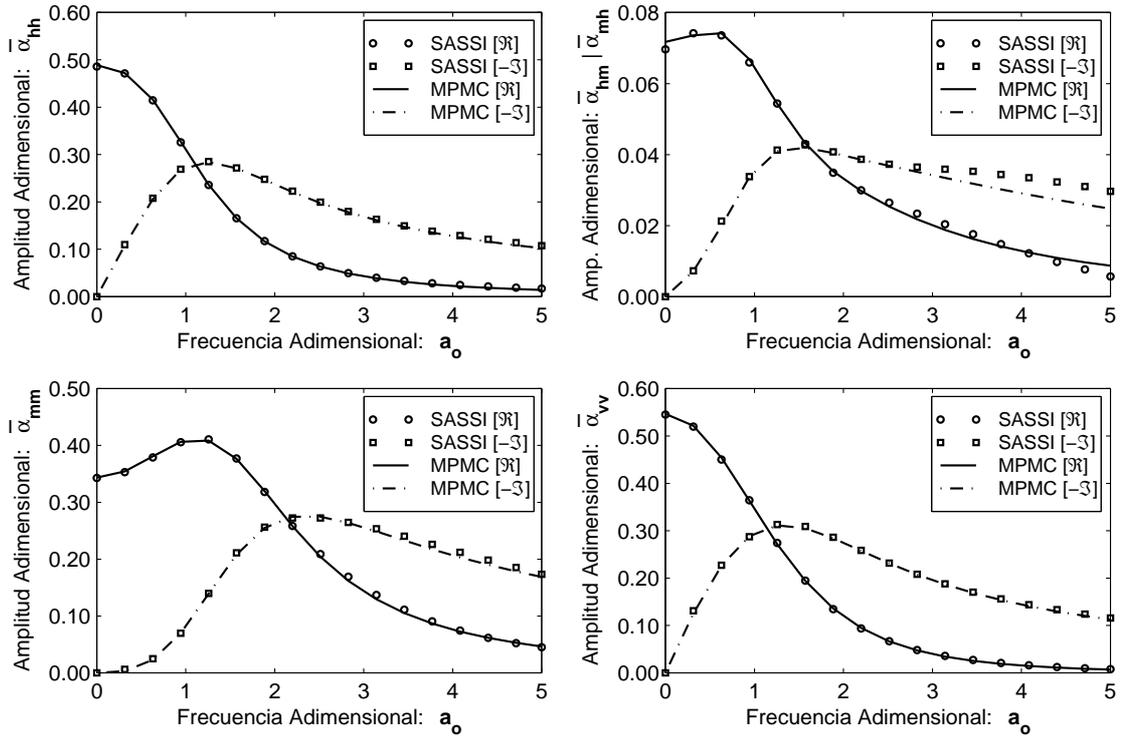


Fig. 9.13: Receptancia analítica del bloque de fundación con el perfil 3

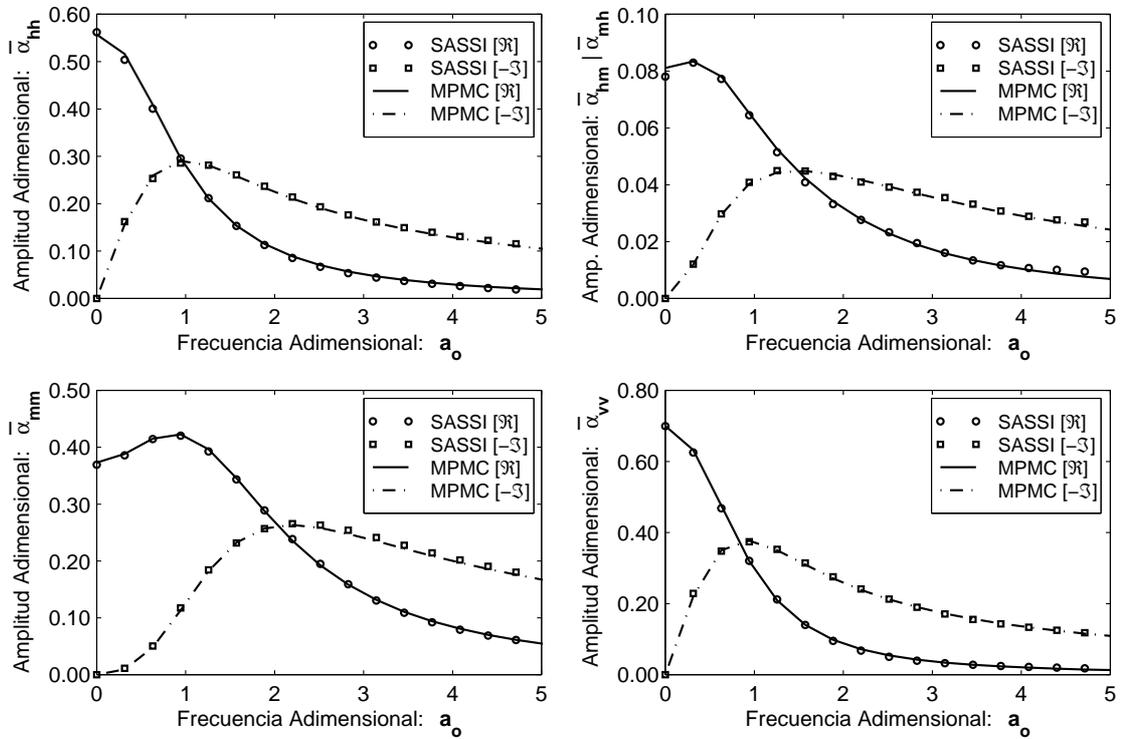


Fig. 9.14: Receptancia analítica del bloque de fundación con el perfil 4

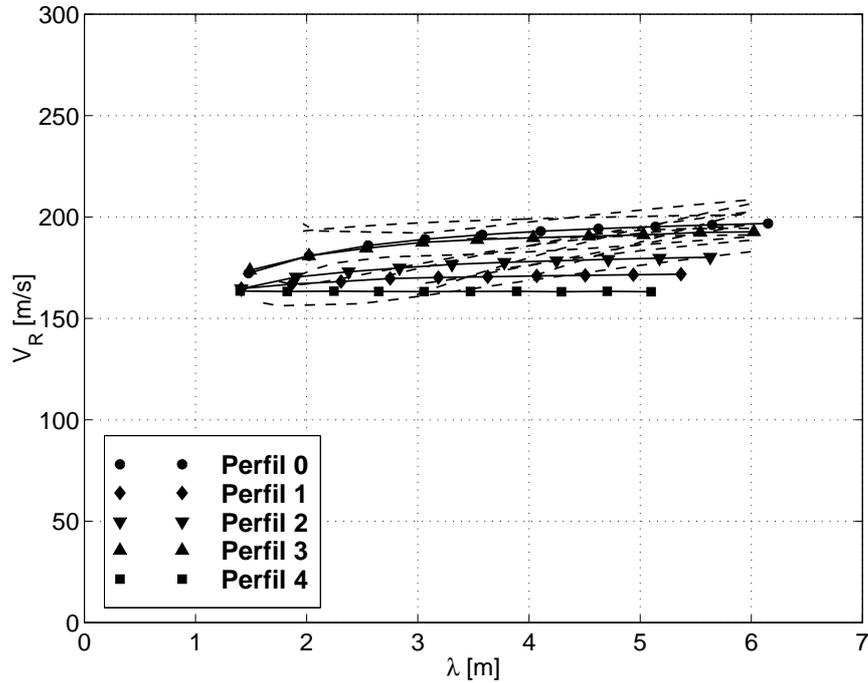


Fig. 9.15: Curvas de dispersión analíticas y experimentales

(2.15b), la relación de amortiguamiento disminuye con el aumento de las frecuencias naturales rondando los valores obtenidos para los modos flexionales identificados en el orden del 0.1 %.

Ensayos de la estructura

Un aspecto relevante en el ensayo de la estructura son las condiciones de apoyo del tubo. La materialización de un empotramiento que pueda modelarse como infinitamente rígido resulta muy dificultosa en la práctica a tal punto que esta condición es sistemáticamente desalentada en el ámbito del análisis modal experimental. El apoyo de tubo directamente en el piso a través de sus placas extremas en busca de una condición bi-articulada no representa una mejor solución dado que se genera una respuesta no-lineal con desplazamientos relativos entre las placas y el piso. Además:

- los modos en que las placas giran en el mismo sentido son afectados por un comportamiento de pórtico que involucra la inercia traslacional en la dirección axial, y
- los modos en que las placas giran en sentido inverso son afectados por la restricción al giro que se genera por la fricción de las placas contra el piso.

La condición adoptada para ensayar la estructura es la *flotante* o *libre-libre* dado que resulta la condición de apoyo óptima para la realización de un análisis modal. Esta condición presenta ventajas importantes desde el punto de vista analítico y experimental por lo que se recomienda en la medida que sea posible su implementación (a pesar que en la mayoría de los casos de ingeniería civil resulta impracticable). La condición flotante no se consigue en

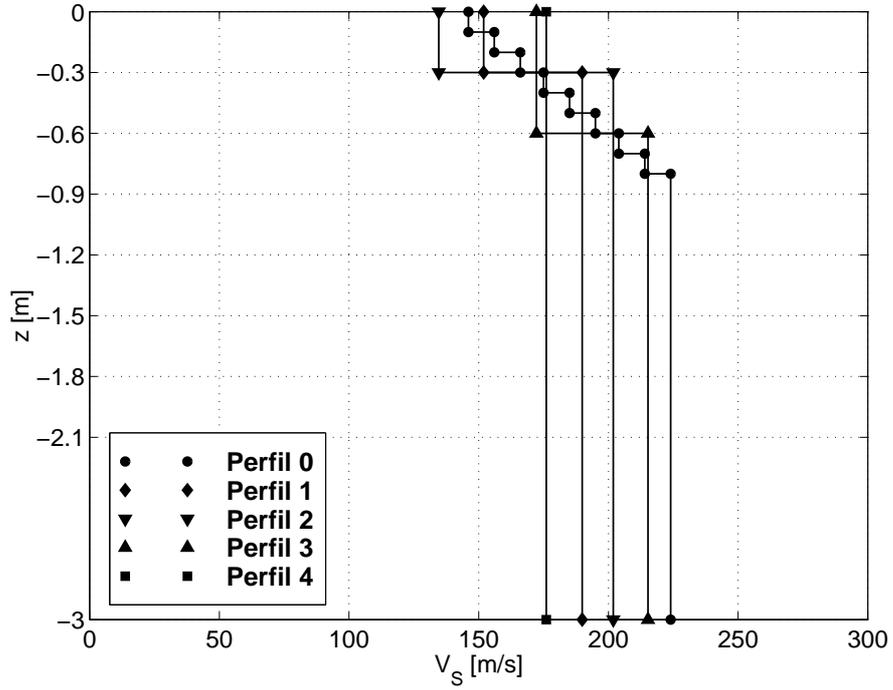


Fig. 9.16: Perfiles ajustados de velocidades de ondas de corte

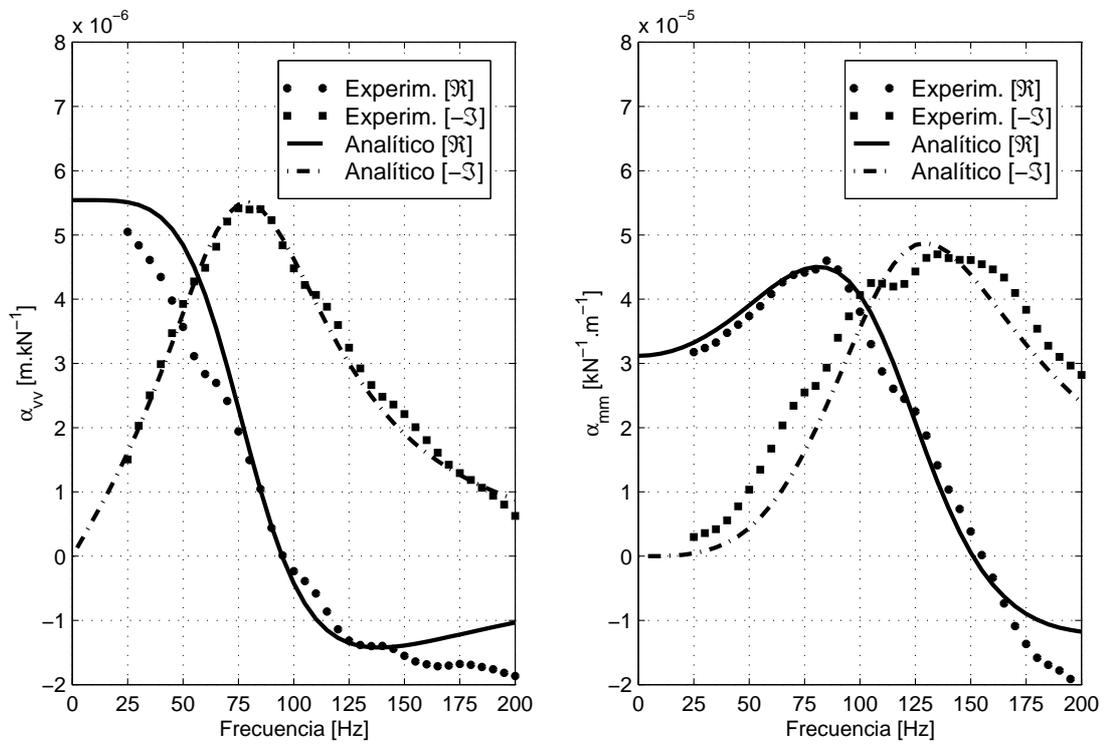


Fig. 9.17: Ajuste de receptancia del bloque de fundación con el perfil 0

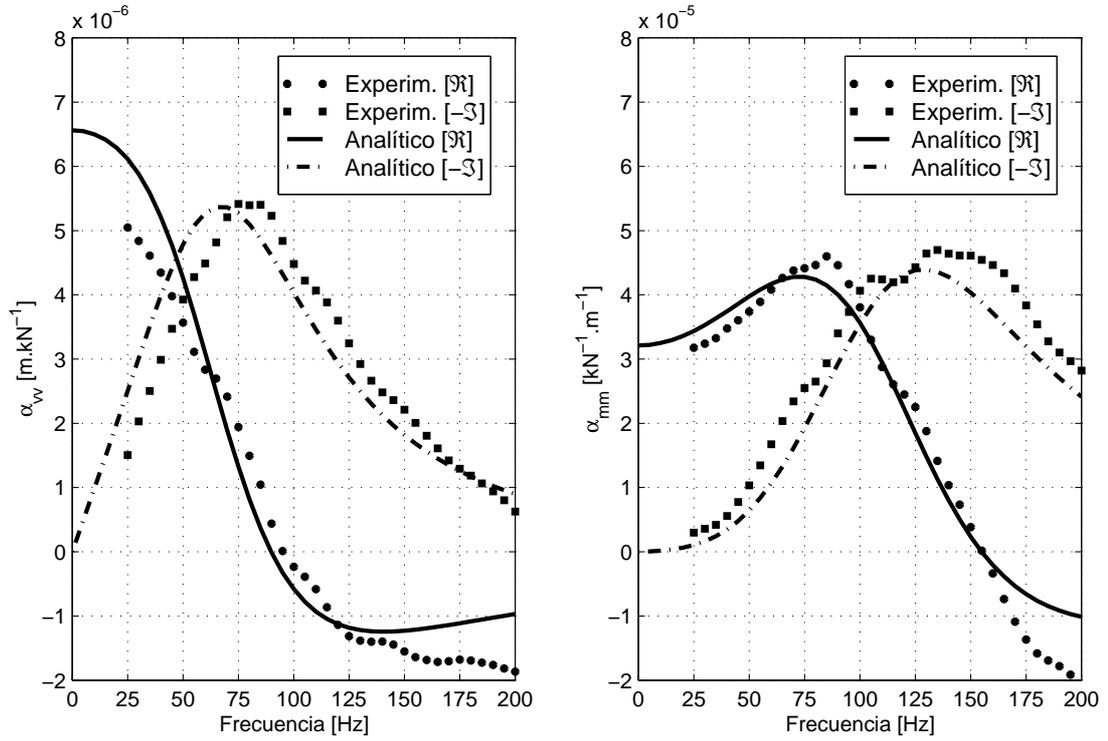


Fig. 9.18: Ajuste de receptancia del bloque de fundación con el perfil 1

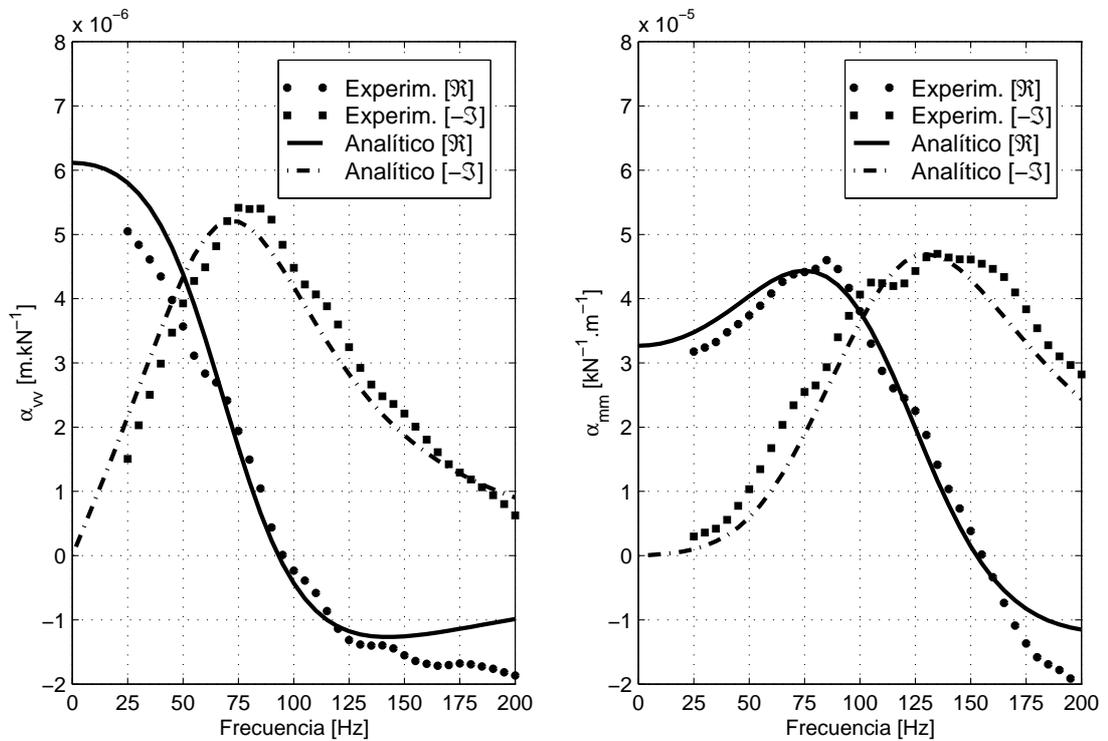


Fig. 9.19: Ajuste de receptancia del bloque de fundación con el perfil 2

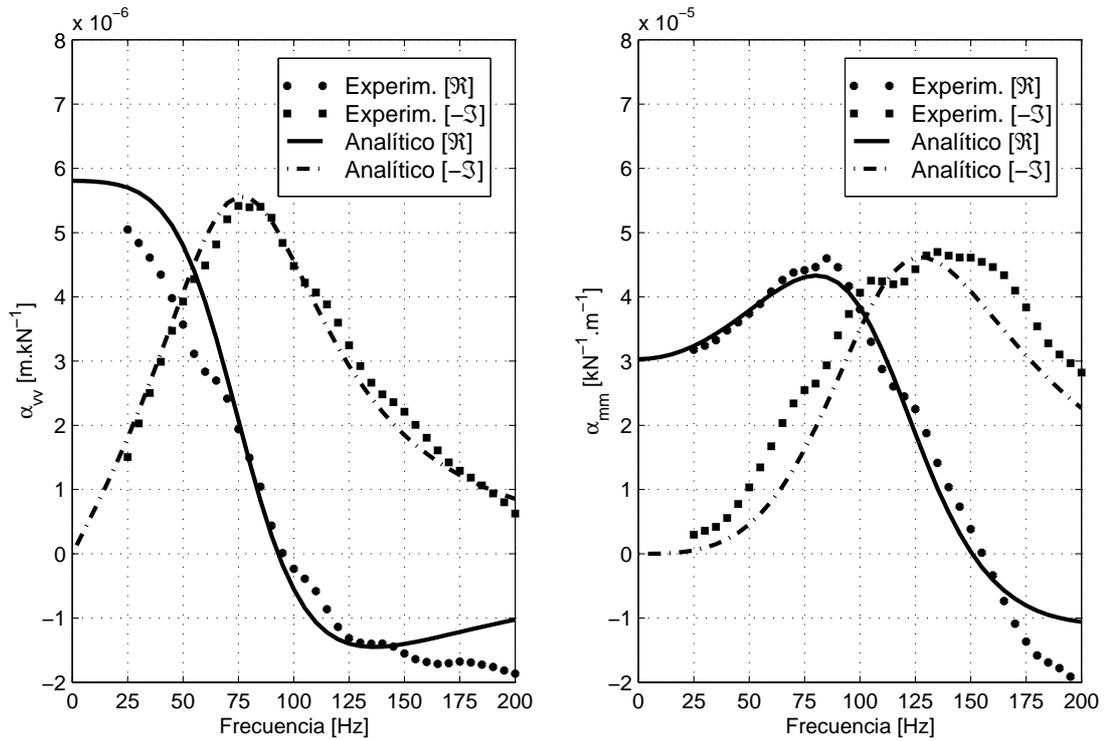


Fig. 9.20: Ajuste de receptancia del bloque de fundación con el perfil 3

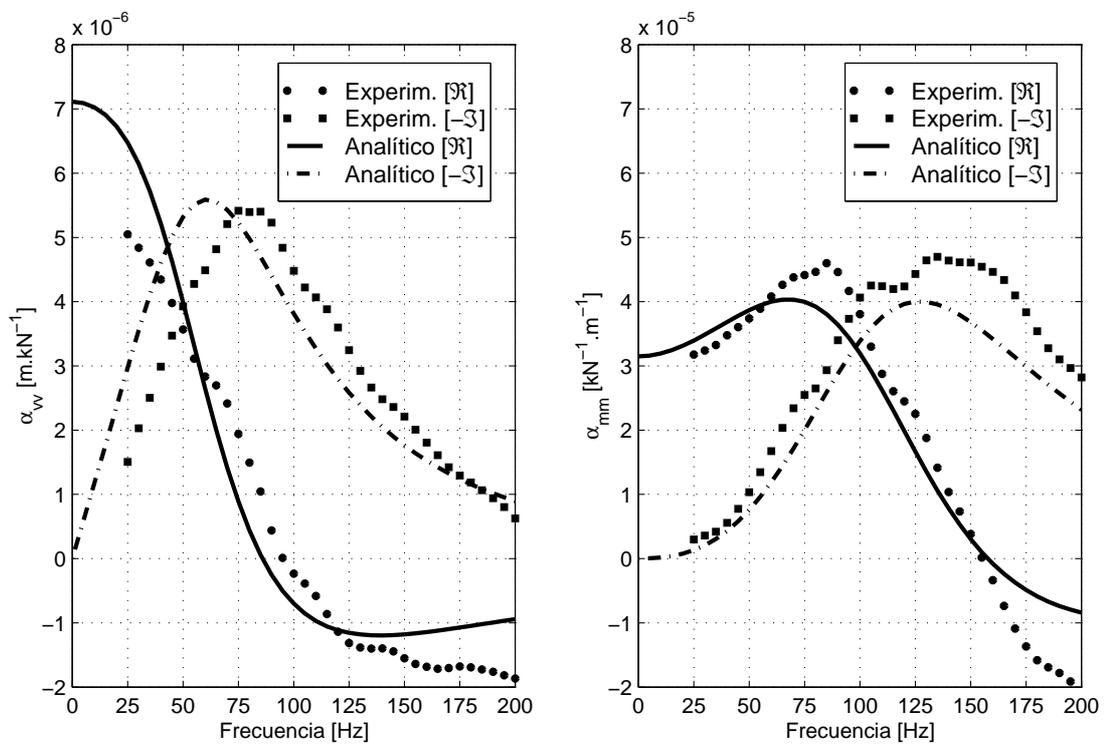


Fig. 9.21: Ajuste de receptancia del bloque de fundación con el perfil 4

forma rigurosa sino que se utilizan resortes suficientemente flexibles para que las frecuencias de los modos de vibración considerados de cuerpo rígido (sin deformación apreciable de la estructura) resulten al menos de un orden de magnitud menor a la frecuencia fundamental de la estructura.

El tubo se cuelga de la placa superior (en referencia al sistema ensamblado) a través de una cuerda que ofrece una vinculación rígida en la dirección axial pero muy flexible en la dirección transversal y el giro. La condición de apoyo obtenida para el comportamiento flexional resulta adecuada considerando el desacoplamiento que existe con el comportamiento axial. Las frecuencias de cuerpo rígido calculadas en forma aproximada a continuación permiten estimar la efectividad de la condición de apoyo alcanzada.

La masa traslacional m_u^t y la masa rotacional m_θ^t del tubo se calculan en función de la densidad del acero ($\rho = 7.850 \text{ tn}/\text{m}^3$), la longitud del tubo ($L = 2.392 \text{ m}$), la sección del tubo ($A = 2.416 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$) y el momento de inercia del tubo ($I = 7.757 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$)

$$m_u^t = \rho \cdot A \cdot L = 0.04537 \text{ tn} \quad (9.2)$$

$$m_\theta^t = \rho \cdot \left(I \cdot L + \frac{A \cdot L^3}{12} \right) = 0.02178 \text{ tn.m}^2 \quad (9.3)$$

En virtud de la pequeña diferencia en la geometría de las placas de los extremos del tubo se asumen parámetros de masa promedio para ambas placas en ambas direcciones con lo que se obtiene el centro de gravedad de la estructura en la mitad de la longitud del tubo. La masa traslacional m_u^p y la masa rotacional m_θ^p de las placas referidas a sus centros de gravedad resultan

$$m_u^p = 6.989 \cdot 10^{-3} \text{ tn} \quad m_\theta^p = 4.976 \cdot 10^{-5} \text{ tn.m}^2 \quad (9.4)$$

La matriz de masa de cuerpo rígido de la estructura referida al centro de gravedad resulta entonces

$$M_o^{rig} = \begin{bmatrix} m_u^t + 2 \cdot m_u^p & 0 \\ 0 & m_\theta^t + 2 \cdot \left(m_\theta^p + m_u^p \cdot \left(\frac{L}{2} \right)^2 \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.05935 & 0 \\ 0 & 0.04187 \end{bmatrix} \quad (9.5)$$

Las constantes de los resortes equivalentes en el extremo superior del tubo se calculan a través de consideraciones geométricas en función de la longitud de la cuerda utilizada ($l_c = 0.950 \text{ m}$), la longitud del tubo ($L = 2.392 \text{ m}$), la aceleración de la gravedad ($g = 9.807 \text{ m}/\text{s}$) y el peso del tubo ($P = g \cdot m_u^t + 2 \cdot g \cdot m_u^p = 0.5820 \text{ kN}$)

$$k_u = \frac{P}{l_c} = 0.6127 \text{ kN}/\text{m} \quad k_\theta = \frac{PL}{2} = 0.6961 \text{ kN.m} \quad (9.6)$$

La matriz de rigidez geométrica de cuerpo rígido de la estructura referida al extremo superior resulta entonces

$$K_e^{rig} = \begin{bmatrix} k_u & 0 \\ 0 & k_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6127 & 0 \\ 0 & 0.6961 \end{bmatrix} \quad (9.7)$$

La matriz de rigidez referida al centro de gravedad se obtiene a través de la siguiente transformación

$$K_o^{rig} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{L}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_u & 0 \\ 0 & k_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{L}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6127 & -0.7328 \\ -0.7328 & 1.5725 \end{bmatrix} \quad (9.8)$$

Resolviendo el problema de autovalores con las matrices K_o^{rig} y M_o^{rig} se obtienen las frecuencias para los modos de cuerpo rígido que coinciden aproximadamente con las medidas durante el ensayo de la estructura

$$f_1^{rig} = 0.314 \text{ Hz} \qquad f_2^{rig} = 1.055 \text{ Hz} \qquad (9.9)$$

La frecuencia fundamental de flexión en la condición flotante ($f_1^{flex} = 123.4 \text{ Hz}$) resulta dos órdenes de magnitud mayor a la frecuencia más alta de cuerpo rígido.

En un ensayo preliminar realizado con un pequeño martillo sobre la estructura en condición flotante se obtuvieron las densidades espectrales que se muestran en la Figura 9.22. Las mediciones de la respuesta se realizaron con sensores colocados en la sección central y en una sección al tercio de la longitud del tubo para ambas direcciones principales y los golpes se efectuaron en puntos diametralmente opuestos a la ubicación de los sensores. El resumen de las frecuencias flexionales identificadas se muestra en la Tabla 9.2 donde se observa que el segundo modo del tubo con la masa adicional presenta una diferencia en la frecuencia del 5.0% producida por una variación entre ambas direcciones de la flexibilidad del paquete que conforma la masa adicional.

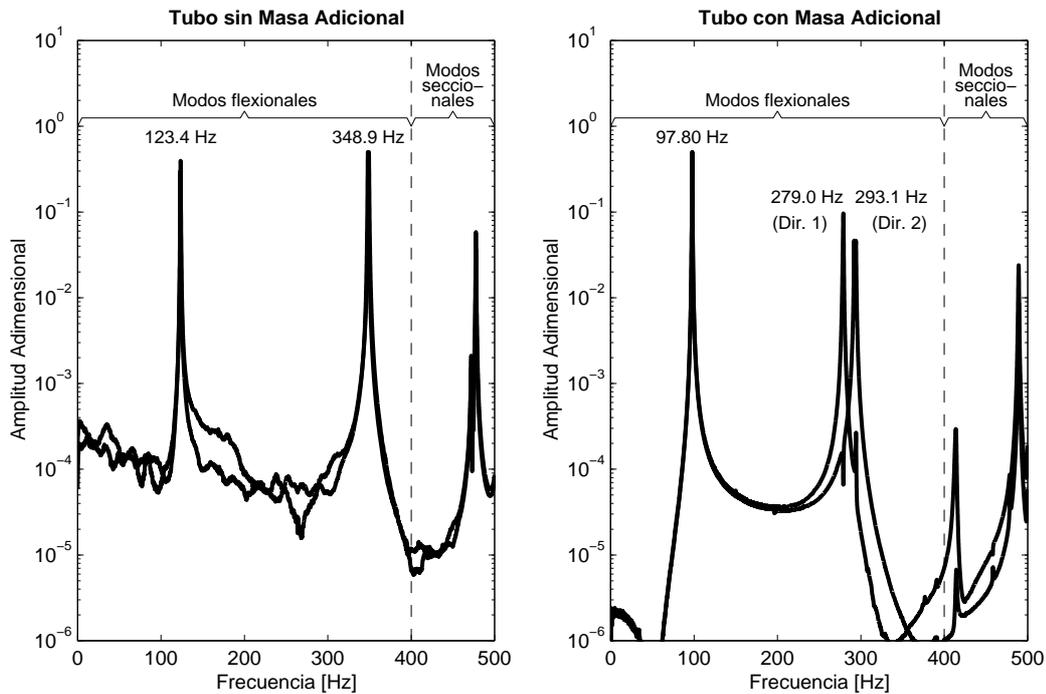


Fig. 9.22: Densidades espectrales del tubo en condición flotante

En el rango de frecuencias entre 400Hz y 500Hz aparecen picos pertenecientes a modos que involucran deformación de las secciones del tubo (modos seccionales). Aunque el rango de frecuencias de estudio en el modelado del sistema acoplado sólo se extiende hasta 200Hz la deformación seccional en frecuencias próximas a este límite puede no ser despreciable (particularmente para la sección del golpe). El estudio del comportamiento seccional se realiza a través de un modelo bidimensional que asume una longitud infinita del tubo y un modelo tridimensional construido con elementos de placa. En la Figura 9.23 se muestran

Modo	Tubo s/ masa adicional			Tubo c/ masa adicional		
	Dir. 1	Dir. 2	Prom.	Dir. 1	Dir. 2	Prom.
1	123.6	123.2	123.4	97.76	97.84	97.80
2	349.2	348.1	348.6	293.1	279.0	286.0

Tabla 9.2: Frecuencias flexionales del tubo en condición flotante

los modos seccionales con sus respectivas frecuencias que se obtienen a través del modelo bidimensional.

En la etapa de ajuste de parámetros del sistema surge entonces el siguiente dilema: la utilización de un modelo tridimensional resulta computacionalmente muy costoso en tanto que un modelo unidimensional no tiene la capacidad de reproducir el comportamiento seccional. La solución adoptada para este problema consiste en la utilización de un modelo híbrido descrito en el próximo apartado que se basa en un modelo unidimensional complementado con los primeros modos seccionales de un modelo tridimensional. Además de la incorporación del efecto espacial en el modelado de la estructura se colocan dos pernos de rigidización en dirección normal y en secciones próximas a los golpes para reducir a un mínimo la influencia de la deformación seccional (Figura 9.24).

El ajuste final del modelo híbrido de la estructura se realiza a través de ensayos impulsivos en el tubo sin masa adicional con cargas aplicadas en forma perpendicular a su baricentro sobre ambas direcciones principales. La disposición de sensores sobre la estructura se indica en la mitad izquierda de la Figura 9.25. El punto 5 sólo se utiliza en el ensayo del sistema acoplado pero se incluye en el gráfico como referencia de aspectos de modelado. Los golpes se efectúan en puntos diametralmente opuestos a los puntos 3 y 4 utilizando una viga de madera con una celda de carga montada en el extremo de impacto. El dispositivo de impacto ideado para obtener una serie regular de golpes sobre el tubo se describe más adelante dado que se utiliza también en el ensayo del sistema acoplado. Una delgada lámina de goma dura adherida directamente sobre la celda de carga permite obtener golpes de corta duración (5ms) y forma adecuada para alcanzar con suficiente holgura una frecuencia de análisis de 400Hz. Los golpes se repiten 5 veces por cada punto a fin de utilizar los estimadores probabilísticos descritos en el capítulo 3 para obtener acelerancias y funciones de coherencia.

La reciprocidad entre las acelerancias experimentales A_{34} y A_{43} para ambas direcciones de ensayo se presenta en la Figura 9.26: se observa que la influencia de las deformaciones seccionales comienza a apreciarse a partir de los 200Hz. En la misma figura se muestra también que la coherencia toma valores próximos a la unidad incluso para frecuencias inmediatas a cero excepto en correspondencia con los picos de antiresonancias.

El reconocimiento de una pequeña deformación de las secciones implica que rigurosamente no se obtienen elementos de la diagonal principal de la receptancia experimental aplicando golpes en puntos diametralmente opuestos a los puntos de medición de la respuesta. Este hecho resulta trascendente en la identificación de un modelo modal basado directamente en datos experimentales dado que se pierde la escala de los modos. Sin embargo, el procedimiento propuesto para el ajuste de los parámetros de los modelos permite aprovechar una parte de la matriz de receptancia experimental sin elementos de la diago-

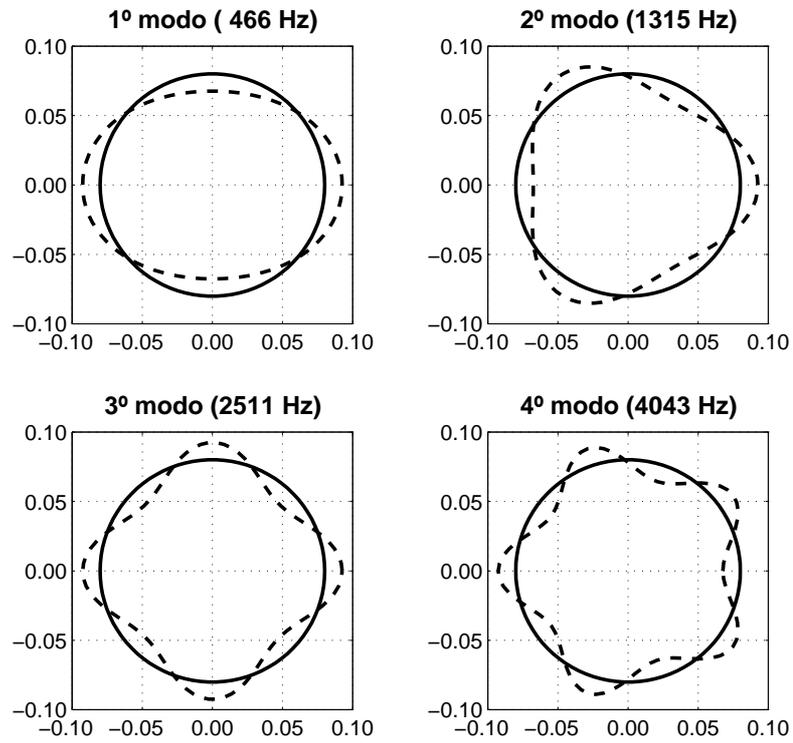


Fig. 9.23: Modos seccionales del modelo bidimensional de la estructura



Fig. 9.24: Perno de rigidización seccional de la estructura

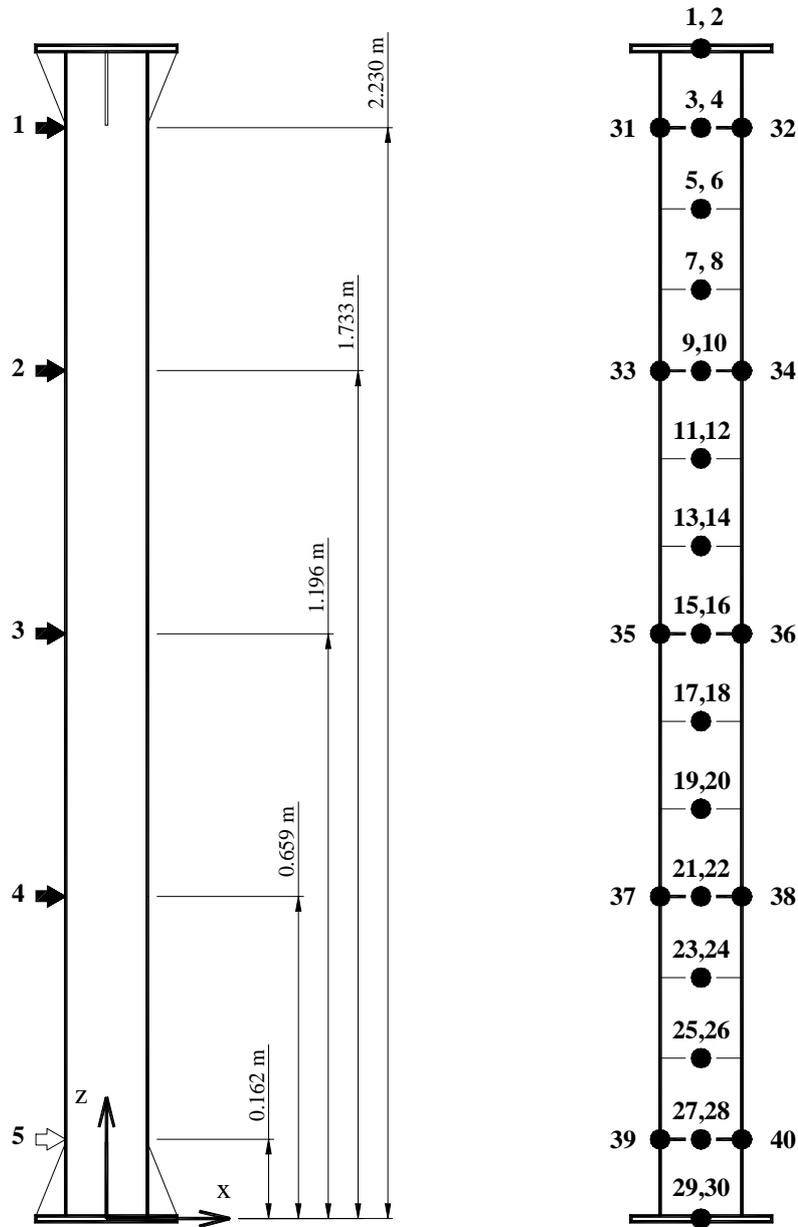


Fig. 9.25: Ubicación de puntos de ensayo y modelado de la estructura

nal principal. De todas maneras, en la presentación de los resultados se utiliza una misma designación para puntos diametralmente opuestos a fines de simplificar la notación.

Modelado de la estructura

La flexibilidad del modelo de un sistema con un número finito de GL puede expresarse en forma exacta a través de la superposición de la totalidad de sus modos. La eliminación de un cierto número de modos implica una rigidización del modelo que depende de los modos ignorados. Un modelo unidimensional que pueda representar adecuadamente el

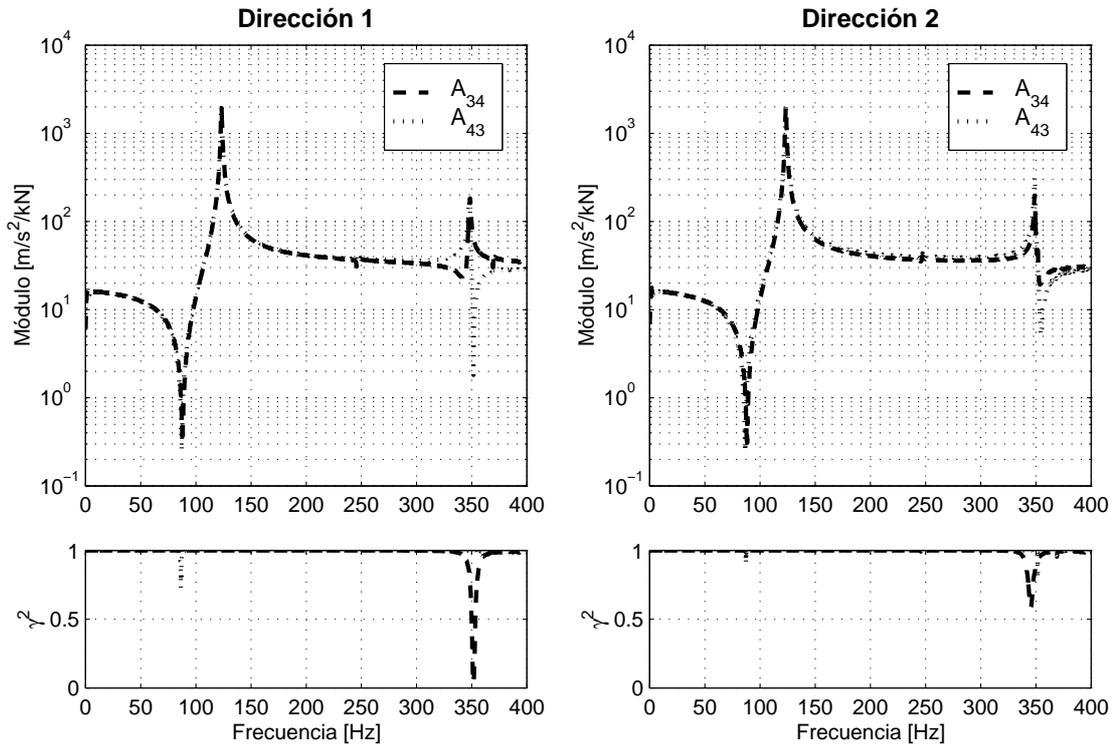


Fig. 9.26: Reciprocidad y coherencia de acelerancias de la estructura

comportamiento flexional del tubo posee un truncamiento implícito de modos seccionales.

La definición analítica de la estructura se realiza a través de un modelo híbrido que combina el comportamiento flexional de un modelo unidimensional de barras con un conjunto de modos seccionales obtenidos con un modelo tridimensional de placas finamente discretizado. La generación de este modelo híbrido se basa en el desacoplamiento existente entre los comportamientos flexional y seccional para bajas frecuencias. En el comportamiento flexional las secciones no se deforman: los puntos ubicados en una misma sección poseen el mismo desplazamiento transversal respecto al eje baricéntrico y el mismo giro respecto al eje principal perpendicular al plano de flexión. En el comportamiento seccional no se producen deformaciones flexionales dado que los desplazamientos generalizados del eje baricéntrico calculados integrando desplazamientos y giros de cada sección resultan nulos.

Los modos seccionales son independientes de las condiciones de borde del tubo dado que no producen desplazamientos y giros de las placas extremas que se comportan como infinitamente rígidas. En consecuencia, la rigidez de los extremos del tubo sólo depende de la rigidez flexional. La resolución del problema de autovalores del modelo tridimensional para la condición biempotrada permite la identificación de los modos seccionales que se incorporan al modelo híbrido. Los modos flexionales del modelo tridimensional se descartan por encontrarse incorporados en el modelo unidimensional. Los modos seccionales poseen masas modales nulas garantizando la conservación de la masa del modelo híbrido. Estos modos pueden reagruparse en familias de modos que poseen el mismo patrón de deformación en distintas secciones pero presentan una variación en altura de la escala de este patrón distinta para cada modo. Los modos pertenecientes a una misma familia suelen presentar

muy pequeña variación en la frecuencia natural. El número total de modos seccionales incorporados es $n_s = 40$ abarcando tres familias de modos: modos seccionales de tipo *I*, *II* y *III* con patrones de deformación relacionados con los modos 1° , 2° y 3° respectivamente del modelo bidimensional que se muestran en la Figura 9.23.

El procedimiento propuesto para generar el modelo híbrido comprende 4 pasos:

1. Construcción de un modelo unidimensional de barras flexionales.
2. Cálculo de la totalidad de los modos para la condición biempotrada.
3. Complementación de la base modal con los modos seccionales obtenidos del modelo tridimensional de placas.
4. Reconstrucción de las matrices de rigidez y masa del modelo híbrido.

La totalidad de los *GL* de la estructura, que incluyen los *GL* físicos indicados en la mitad derecha de la Figura 9.25, se dividen en 4 grupos:

1. Los *GL* de las placas extremas con subíndice **e**: 1, 2, 29 y 30 ($n_e = 4$).
2. Los *GL* internos del eje baricéntrico del tubo con subíndice **i**: 3 a 28 ($n_i = 26$).
3. Los *GL* agregados en la pared del tubo con subíndice **o**: 31 a 40 ($n_o = 10$).
4. Los *GL* generalizados con subíndice **r**: 41 a 70 ($n_r = n_s - n_o = 30$).

Los *GL* 1 a 30 se encuentran sobre el eje baricéntrico del tubo: los *GL* impares representan desplazamientos transversales mientras que los *GL* pares representan giros. Los *GL* 31 a 40 se agregan al modelo unidimensional sobre la pared del tubo en secciones utilizadas para la aplicación de las cargas impulsivas y/o la medición de la respuesta: los *GL* pares se encuentran en puntos diametralmente opuestos a los *GL* impares. Dado que el número de modos seccionales incorporados al modelo híbrido ($n_s = 40$) es mayor al número de *GL* agregados ($n_o = 10$) se requiere la utilización de los *GL* generalizados 41 a 70 ($n_r = 30$) para la generación de las matrices físicas del modelo híbrido. El número total de modos de la estructura para la condición biempotrada resulta: $n = n_i + n_s = 66$.

Los *GL* de las matrices de rigidez $[\tilde{K}]$ y masa $[\tilde{M}]$ del modelo unidimensional de barras se dividen entonces en *GL* de las placas extremas y *GL* internos del eje baricéntrico del tubo

$$[\tilde{K}] = \begin{bmatrix} [\tilde{K}_{ee}] & [\tilde{K}_{ei}] \\ [\tilde{K}_{ie}] & [\tilde{K}_{ii}] \end{bmatrix} \quad [\tilde{M}] = \begin{bmatrix} [\tilde{M}_{ee}] & [\tilde{M}_{ei}] \\ [\tilde{M}_{ie}] & [\tilde{M}_{ii}] \end{bmatrix} \quad (9.10)$$

La incorporación de los modos seccionales sólo afecta a las submatrices $[\tilde{K}_{ii}]$ y $[\tilde{M}_{ii}]$ mientras las restantes submatrices permanecen inalteradas. Las matrices modales de flexión para la condición biempotrada $[\Phi_{ii}]$ de $n_i \times n_i$ y $[\setminus\Omega_{i\setminus}]$ de $n_i \times n_i$ se obtienen resolviendo el siguiente problema de autovalores

$$[\tilde{K}_{ii}][\Phi_{ii}] = [\tilde{M}_{ii}][\Phi_{ii}][\setminus\Omega_{i\setminus}] \quad (9.11)$$

Las matrices de los modos seccionales incluidos $[\Phi_{os}]$ de $n_o \times n_s$ y $[\setminus\Omega_{s\setminus}]$ de $n_s \times n_s$ se obtienen del modelo tridimensional de placas. La matriz $[\Phi_{os}]$ sólo contiene información de los n_o *GL* agregados sobre la pared del tubo.

Debido a que el modelo unidimensional no posee nudos en las paredes del tubo y el modelo tridimensional no posee nudos en el eje baricéntrico resulta necesario completar ambas matrices de formas modales en base a las siguientes consideraciones:

- Las componentes de las formas modales flexionales sobre las paredes del tubo para una determinada sección son idénticas a las componentes de desplazamientos transversales de su baricentro: $[\Phi_{oi}]$ de $n_o \times n_i$.
- Las componentes de las formas modales seccionales son nulas en los GL sobre el eje baricéntrico: $[\Phi_{is}] = [0]$ de $n_i \times n_s$.

Las matrices modales vinculadas a los GL físicos resultan entonces

$$[\Phi_m] = \begin{bmatrix} [\Phi_{ii}] & [0] \\ [\Phi_{oi}] & [\Phi_{os}] \end{bmatrix} \quad [\Omega_{\setminus}] = \begin{bmatrix} [\Omega_{i\setminus}] & [0] \\ [0] & [\Omega_{s\setminus}] \end{bmatrix} \quad (9.12)$$

La aplicación de técnicas de síntesis de componentes modales (CMS) descritas en [49] utilizando las matrices modales en (9.12) permite reconstruir matrices de rigidez y masa para el modelo híbrido conteniendo matrices reducidas estáticamente equivalentes a las obtenidas con la reducción de Guyan ([17]). La definición completa de la matriz de formas modales se obtiene agregando una desconocida matriz $[\Phi_r]$ de $n_r \times n$ constituida por las componentes de las formas modales para los GL generalizados

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} [\Phi_m] \\ [\Phi_r] \end{bmatrix} \quad (9.13)$$

De esta forma, las matrices de rigidez $[\hat{K}]$ y masa $[\hat{M}]$ para la estructura biempotrada resultan

$$[\hat{K}] = \begin{bmatrix} [\bar{K}] & [0] \\ [0] & [\Omega_{r\setminus}] \end{bmatrix} \quad [\hat{M}] = \begin{bmatrix} [\bar{M}] & [\bar{M}_c] \\ [\bar{M}_c^T] & [I_{r\setminus}] \end{bmatrix} \quad (9.14)$$

donde la submatriz $[\bar{K}]$ de $n_m \times n_m$ representa la matriz de rigidez de los GL físicos internos, la submatriz $[\Omega_{r\setminus}]$ de $n_r \times n_r$ representa una matriz diagonal con los autovalores de los GL generalizados, la submatriz $[\bar{M}]$ de $n_m \times n_m$ representa la matriz de masa reducida estáticamente de los GL físicos internos y la submatriz $[\bar{M}_c]$ de $n_m \times n_r$ contiene términos de acoplamiento de la matriz de masa entre los GL físicos internos y los GL generalizados. Las matrices definidas en (9.14) poseen las siguientes condiciones de ortogonalidad

$$\begin{bmatrix} [\Phi_m]^T & [\Phi_r]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\bar{K}] & [0] \\ [0] & [\Omega_{r\setminus}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Phi_m] \\ [\Phi_r] \end{bmatrix} = [\Omega_{\setminus}] \quad (9.15)$$

$$\begin{bmatrix} [\Phi_m]^T & [\Phi_r]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\bar{M}] & [\bar{M}_c] \\ [\bar{M}_c^T] & [I_{r\setminus}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Phi_m] \\ [\Phi_r] \end{bmatrix} = [I_{\setminus}] \quad (9.16)$$

De la ecuación (9.15) surge la siguiente expresión

$$[\Phi_r]^T [\Omega_{r\setminus}] [\Phi_r] = [\Omega_{\setminus}] - [\Phi_m]^T [\bar{K}] [\Phi_m] = [\Delta\Omega] \quad (9.17)$$

donde la matriz de rigidez condensada $[\bar{K}]$ se calcula como

$$[\bar{K}] = ([\Phi_m] [\Omega_{\setminus}]^{-1} [\Phi_m]^T)^{-1} \quad (9.18)$$

La matriz entre paréntesis en (9.18) es de rango completo e invertible en virtud de que el número total de modos es mayor al número de GL físicos.

La descomposición de valores singulares (DVS) de la matriz $[\Delta\Omega]$ calculada a través de las expresiones (9.17) y (9.18) permite obtener matrices de la estructura biempotrada que sólo dependen de $[\Phi_m]$ y $[\Omega_r]$

$$[U][S][U]^T = \text{DVS}(\Delta\Omega) \quad (9.19)$$

De la ecuación (9.17) se deduce que la matriz sólo posee n_r valores singulares no nulos. La submatriz $[U_r]$ que contiene las n_r primeras columnas de la matriz $[U]$ conjuntamente con las matrices modales vinculadas a los GL físicos permite obtener las siguientes matrices

$$\begin{bmatrix} [\bar{K}] & [0] \\ [0] & [K_r] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Phi_m] \\ [U_r]^T \end{bmatrix} [\Omega_r]^{-1} \begin{bmatrix} [\Phi_m]^T & [U_r] \end{bmatrix}^{-1} \quad (9.20)$$

$$\begin{bmatrix} [\bar{M}] & [M_c] \\ [M_c]^T & [M_r] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Phi_m] \\ [U_r]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Phi_m]^T & [U_r] \end{bmatrix}^{-1} \quad (9.21)$$

La resolución del siguiente problema de autovalores

$$\begin{aligned} [K_r][V_r] &= [M_r][V_r][\Omega_r] \\ [V_r]^T[K_r][V_r] &= [\Omega_r] \\ [V_r]^T[M_r][V_r] &= [I_r] \end{aligned} \quad (9.22)$$

permite derivar las matrices de transformación para obtener la forma final de las matrices de la estructura biempotrada de la expresión (9.14)

$$[\hat{K}] = \begin{bmatrix} [I_m] & [0] \\ [0] & [V_r]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\bar{K}] & [0] \\ [0] & [K_r] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I_m] & [0] \\ [0] & [V_r] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{K}] & [0] \\ [0] & [\Omega_r] \end{bmatrix} \quad (9.23)$$

$$[\hat{M}] = \begin{bmatrix} [I_m] & [0] \\ [0] & [V_r]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\bar{M}] & [M_c] \\ [M_c]^T & [M_r] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I_m] & [0] \\ [0] & [V_r] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{M}] & [\bar{M}_c] \\ [\bar{M}_c]^T & [I_r] \end{bmatrix} \quad (9.24)$$

Teniendo en cuenta que

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{ii}] & [\bar{K}_{io}] \\ [\bar{K}_{oi}] & [\bar{K}_{oo}] \end{bmatrix} \quad [\bar{M}] = \begin{bmatrix} [\bar{M}_{ii}] & [\bar{M}_{io}] \\ [\bar{M}_{oi}] & [\bar{M}_{oo}] \end{bmatrix} \quad [\bar{M}_c] = \begin{bmatrix} [\bar{M}_{ir}] \\ [\bar{M}_{or}] \end{bmatrix} \quad (9.25)$$

se obtiene finalmente las matrices de rigidez y masa utilizadas para el modelado de la estructura

$$[K] = \begin{bmatrix} [\tilde{K}_{ee}] & [\tilde{K}_{ei}] & [0] & [0] \\ [\tilde{K}_{ie}] & [\tilde{K}_{ii}] & [\bar{K}_{io}] & [0] \\ [0] & [\bar{K}_{oi}] & [\bar{K}_{oo}] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [\Omega_r] \end{bmatrix} \quad (9.26)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} [\tilde{M}_{ee}] & [\tilde{M}_{ei}] & [0] & [0] \\ [\tilde{M}_{ie}] & [\bar{M}_{ii}] & [\bar{M}_{io}] & [\bar{M}_{ir}] \\ [0] & [\bar{M}_{oi}] & [\bar{M}_{oo}] & [\bar{M}_{or}] \\ [0] & [\bar{M}_{ri}] & [\bar{M}_{ro}] & [I_r] \end{bmatrix} \quad (9.27)$$

Ajuste del modelo de la estructura

La verificación del módulo de elasticidad del acero junto con el ajuste de las propiedades inerciales de las placas extremas del tubo y las constantes de los resortes rotacionales de vinculación con la placa superior del tubo se realizan utilizando las frecuencias naturales experimentales y las sensibilidades de la frecuencias analíticas respecto a los parámetros de ajuste. La comparación entre las acelerancias experimentales resultantes del promedio de las dos direcciones y las acelerancias analíticas obtenidas del modelo ajustado de la estructura se realiza en la Figura 9.27.

Una característica que permite verificar la validez de las curvas de acelerancia de sistemas en condición flotante es que los valores al origen del eje de frecuencias resultan de la combinación de las aceleraciones traslacional y rotacional que surgen aplicando la segunda ley de Newton con los valores de masa de cuerpo rígido. El punto 3 de aplicación de las cargas impulsivas coincide con el centro de gravedad del tubo por lo que las aceleraciones sólo tienen componente traslacional. El valor inicial de las curvas vinculadas a las cargas aplicadas en el punto 3 se calcula entonces para una fuerza unitaria con la masa traslacional de la ecuación (9.5)

$$a_o = \frac{1 \text{ kN}}{0.05935 \text{ tn}} = 16.85 \text{ m/s}^2 \quad (9.28)$$

9.1.4 Análisis del sistema acoplado

Los valores calibrados de los parámetros de ajuste de los modelos de la estructura y el bloque de fundación analizados en forma separada se comparan con los valores ajustados del modelo completo en base a ensayos realizados sobre el sistema acoplado. La flexibilidad de los pernos de anclaje que vinculan físicamente ambos subsistemas requiere especial atención durante el ensamblaje de sus modelos.

Ensayos del sistema acoplado

El sistema acoplado se ensaya en ambas direcciones aplicando cargas impulsivas con una celda de carga montada sobre una viga de madera en los mismos puntos utilizados durante el ensayo de la estructura. A los puntos 1 a 4 sobre el tubo (Figura 9.25) se agregan otros puntos sobre la parte inferior de la estructura y el bloque de fundación. La disposición completa de sensores sobre el sistema se indica en la Figura 9.28. Los sensores colocados en los puntos 7a y 7b se utilizan para determinar el giro de la placa inferior del tubo mientras que la rotación del bloque de fundación se obtiene con sensores ubicados en los puntos 8a y 8b (Figura 9.29). La disposición programada de sensores se cubre secuencialmente con sólo dos sensores dado que la utilización de la celda de carga permite evaluar la acelerancia en cualquier punto del sistema independientemente de los sensores utilizados en cada prueba. Los golpes se repiten 5 veces por cada punto a fin de utilizar los estimadores probabilísticos descritos en el capítulo 3 para obtener acelerancias y funciones de coherencia.

La viga de impacto se sujeta de ambos extremos a la parte superior de una escalera tijera a través de una cuerda. El movimiento pendular que se produce entre las patas de la escalera indicado en la Figura 9.30 permite generar una serie regular de golpes sobre la

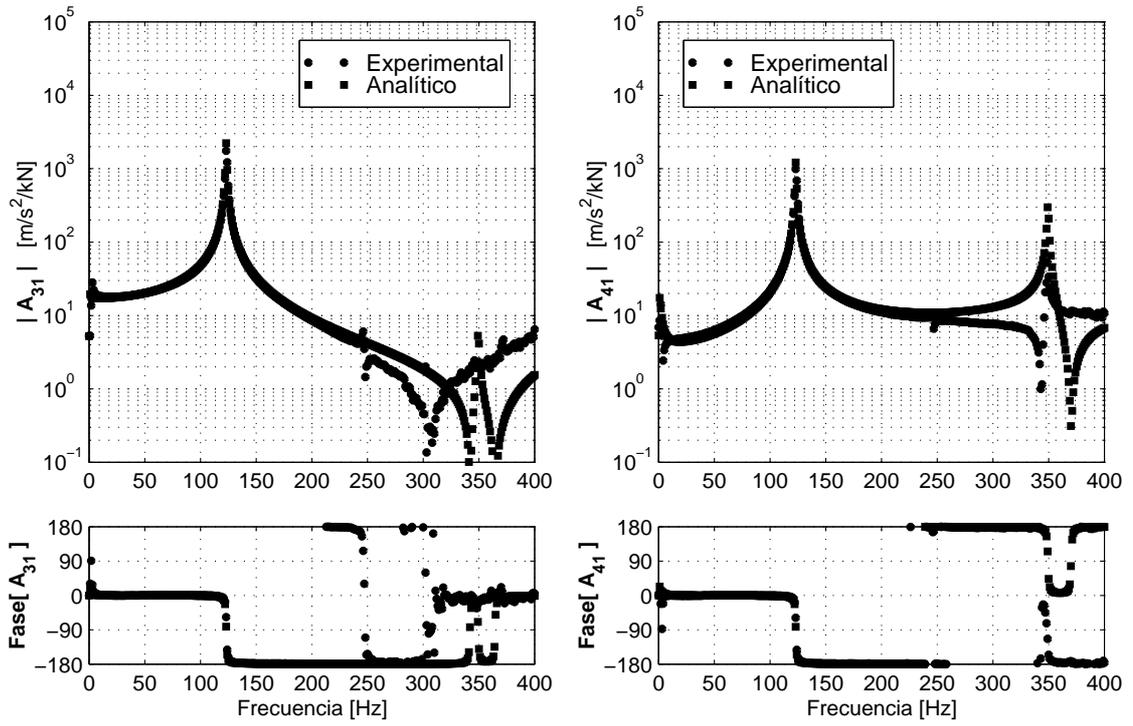


Fig. 9.27: Ajuste de la estructura sin masa adicional

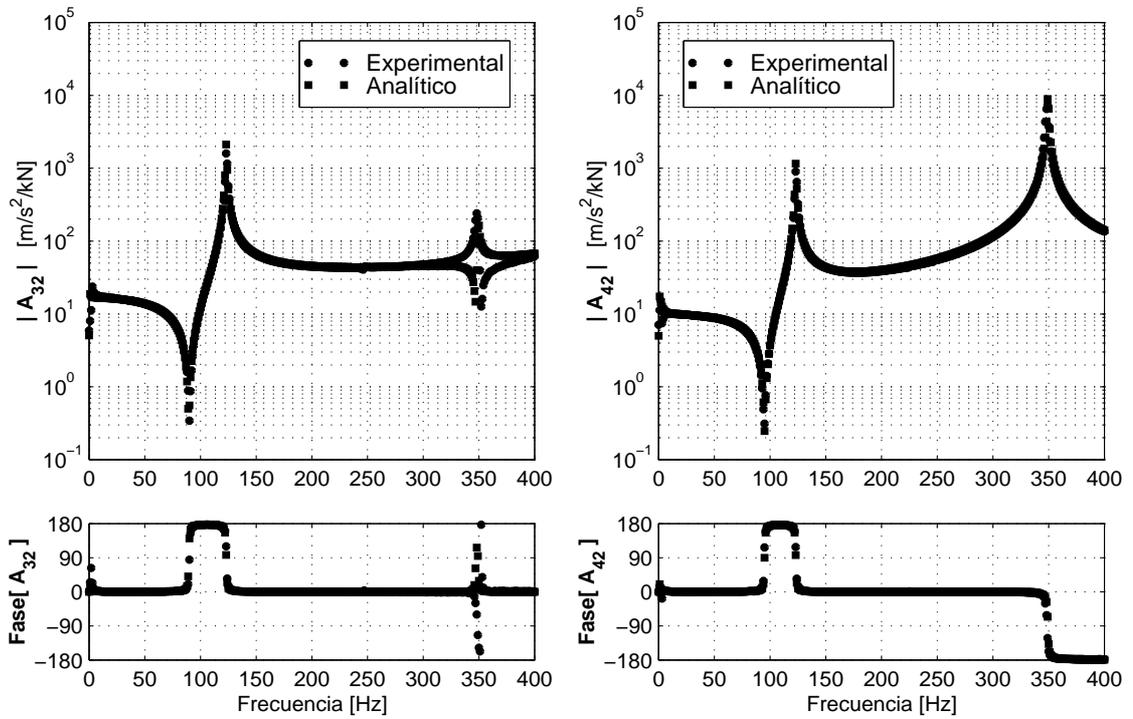


Fig. 9.27: Ajuste de la estructura sin masa adicional (cont.)

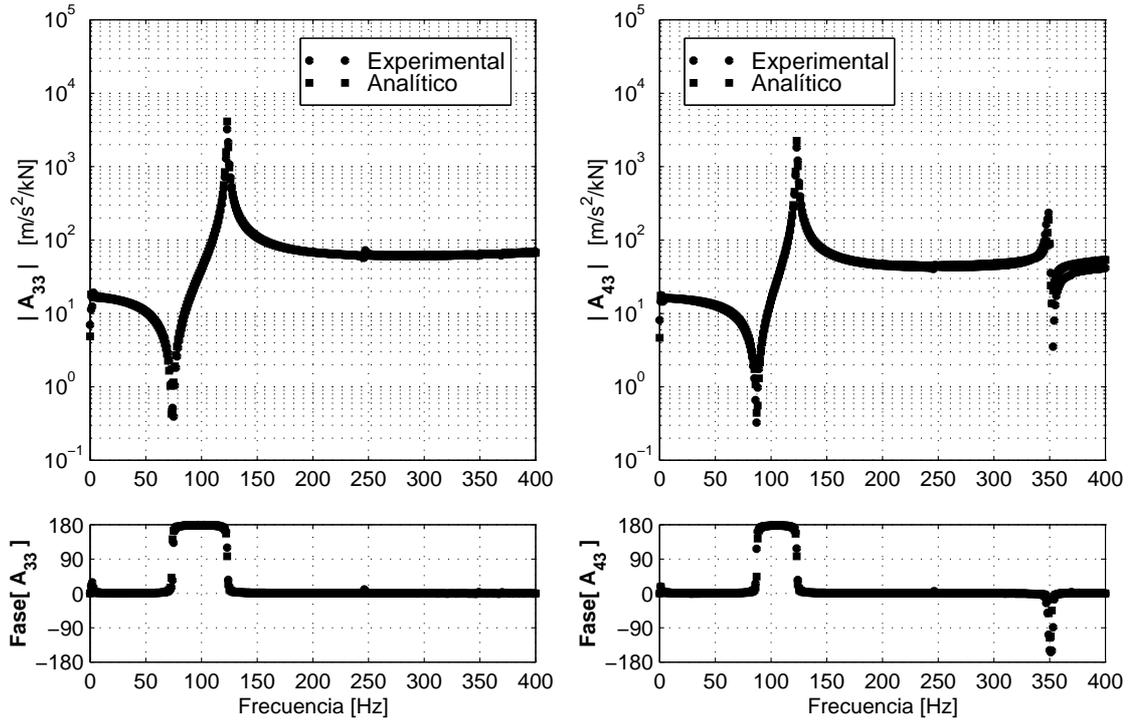


Fig. 9.27: Ajuste de la estructura sin masa adicional (cont.)

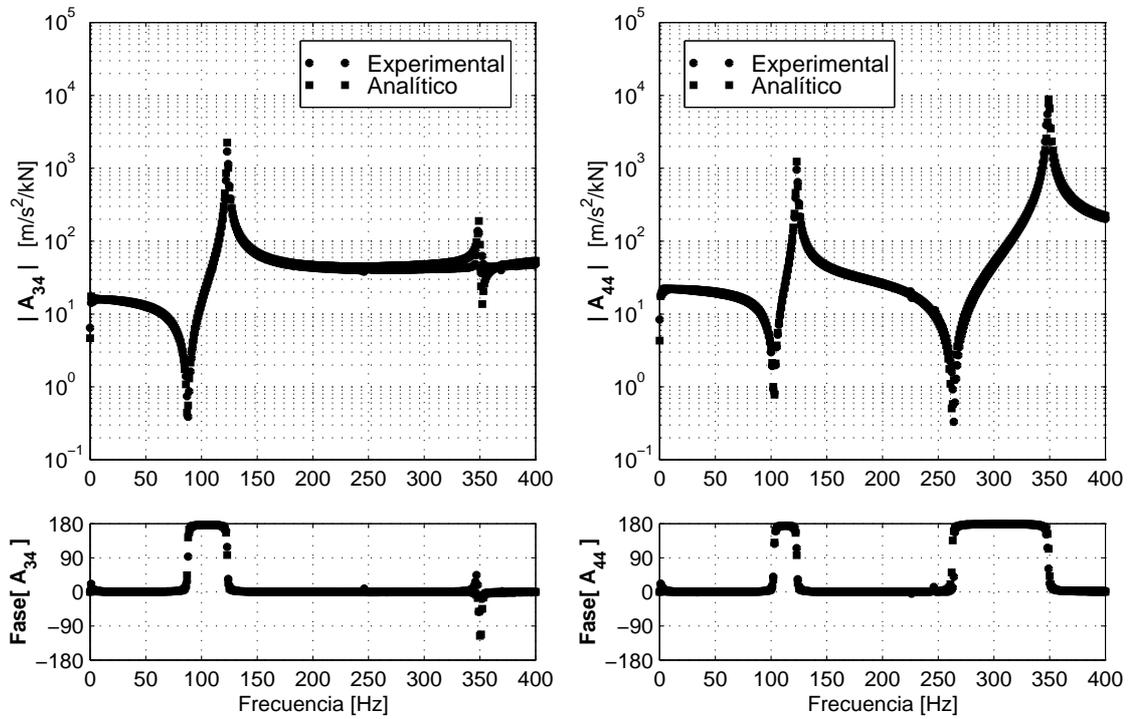


Fig. 9.27: Ajuste de la estructura sin masa adicional (cont.)

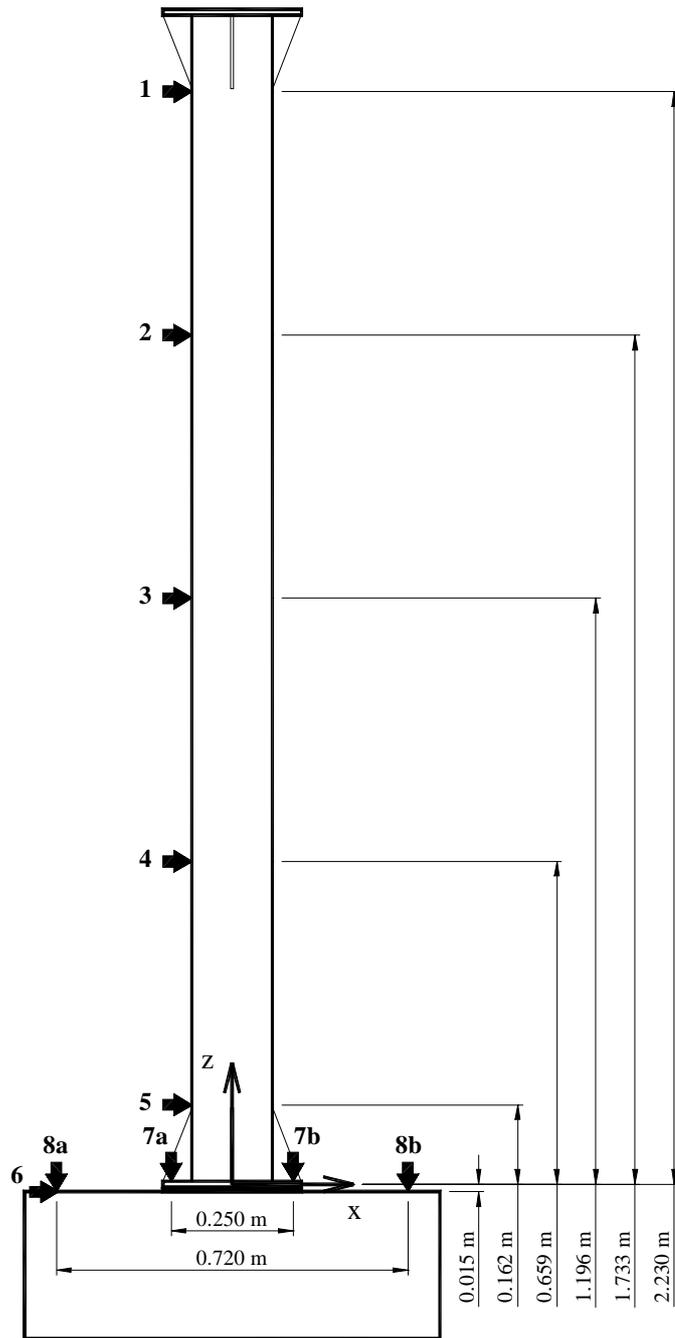


Fig. 9.28: Disposición de sensores en el ensayo del sistema acoplado

estructura. El dispositivo de impacto preparado para aplicar un golpe en el punto 4 junto al sistema completo de adquisición de datos se presenta en la Figura 9.31.

En la Figuras 9.32 y 9.33 se observa que la reciprocidad entre las acelerancias A_{34} y A_{43} se cumple satisfactoriamente: las posibles deformaciones seccionales no poseen una influencia relevante para frecuencias menores a 200Hz como ocurre en el ensayo de la estructura aislada. En ambas figuras se incluyen también las funciones de coherencia que presentan va-



Fig. 9.29: *Determinación de la rotación del bloque de fundación*

lores próximos a la unidad para frecuencias mayores a $5\sim 10\text{Hz}$ excepto en correspondencia con los picos de antiresonancias.

Modelado del sistema acoplado

El ensamblaje de los modelos de la estructura y la fundación requiere la determinación de la flexibilidad de los pernos de anclaje. En las Figuras 9.34 a 9.37 se muestran los desplazamientos y giros que ocurren en la interfaz de la estructura con el bloque de fundación para la dirección 1 (la dirección 2 presenta resultados similares). Los *GL* experimentales 7 y 8 se refieren a los giros de la estructura y el bloque de fundación en la interfaz respectivamente. Los *GL* 6' y 6 describen los desplazamientos transversales de la estructura y el bloque de fundación en la interfaz respectivamente. Los desplazamientos del *GL* 6' se calculan imponiendo los desplazamientos experimentales de los *GL* 1 a 5 y el giro del *GL* 7 en el modelo ajustado de la estructura con el criterio de mínimos cuadrados como se detalla a continuación.

La ecuación de movimiento del sistema acoplado para cargas unitarias aplicadas secuencialmente en cada uno de los *GL* resulta

$$[\hat{K}][\alpha] = [I] \quad (9.29)$$

siendo $[\hat{K}]$ la matriz condensada de rigidez dinámica y $[\alpha]$ la matriz de flexibilidad dinámica



Fig. 9.30: Ejecución del ensayo de impacto del sistema acoplado

o receptancia. La ecuación (9.29) puede particionarse de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} [\hat{K}_{aa}^E] & [\hat{K}_{ab}^E] & [\hat{K}_{ac}^E] \\ [\hat{K}_{ba}^E] & [\hat{K}_{bb}^E] + [\hat{K}_{bb}^F] & [\hat{K}_{bc}^E] + [\hat{K}_{bc}^F] \\ [\hat{K}_{ca}^E] & [\hat{K}_{cb}^E] + [\hat{K}_{cb}^F] & [\hat{K}_{cc}^E] + [\hat{K}_{cc}^F] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\alpha_{aa}] & [\alpha_{ab}] & [\alpha_{ac}] \\ [\alpha_{ba}] & [\alpha_{bb}] & [\alpha_{bc}] \\ [\alpha_{ca}] & [\alpha_{cb}] & [\alpha_{cc}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [I_a] & [0] & [0] \\ [0] & [I_b] & [0] \\ [0] & [0] & [I_c] \end{bmatrix} \quad (9.30)$$

donde el subíndice a representa los GL 1 a 5, el subíndice b representa el GL 6' y el subíndice c representa el GL 7, en tanto que los supraíndices E y F se refieren a la estructura y la fundación respectivamente. Teniendo en cuenta que las cargas sólo se aplican en la estructura se obtiene

$$\begin{bmatrix} [\hat{K}_{aa}^E] & [\hat{K}_{ab}^E] & [\hat{K}_{ac}^E] \\ [\hat{K}_{ba}^E] & [\hat{K}_{bb}^E] + [\hat{K}_{bb}^F] & [\hat{K}_{bc}^E] + [\hat{K}_{bc}^F] \\ [\hat{K}_{ca}^E] & [\hat{K}_{cb}^E] + [\hat{K}_{cb}^F] & [\hat{K}_{cc}^E] + [\hat{K}_{cc}^F] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\alpha_{ai}] \\ [\alpha_{bi}] \\ [\alpha_{ci}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [J_{ai}] \\ [0] \\ [0] \end{bmatrix} \quad (9.31)$$

donde el subíndice i representa los GL 3 y 4 (puntos de impacto) y la matriz $[J_{ai}]$ se obtiene eliminando las columnas de $[I_a]$ correspondientes a los GL sin cargas aplicadas.



Fig. 9.31: *Dispositivo de impacto / Sistema de adquisición*

Los desplazamientos de la interfaz pueden calcularse utilizando solamente submatrices del modelo de la estructura de la siguiente manera

$$[\alpha_{bi}] = [\hat{K}_{ab}^E]^\dagger \left([J_{ai}] - [\hat{K}_{aa}^E][\alpha_{ai}] - [\hat{K}_{ac}^E][\alpha_{ci}] \right) \quad (9.32)$$

El desplazamiento relativo entre la estructura y el bloque de fundación en la interfaz resulta despreciable como se muestra en las Figuras 9.34 y 9.35. La definición del *GL 6'* se torna entonces redundante dado que la constante de un resorte traslacional de vinculación con el *GL 6* tendría un valor elevado. Por el contrario, la importancia del giro relativo que se aprecia en las Figuras 9.36 y 9.37 revela que la incorporación de un resorte rotacional en el acoplamiento de los modelos de ambos subsistemas resulta imprescindible². Los desplazamientos y giros relativos mostrados en las Figuras 9.34 a 9.37 corresponden a la *dirección 1* aunque la *dirección 2* presenta las mismas características. En la etapa de la calibración del modelo del sistema completo se comprueba que la colocación de un amortiguador rotacional no mejora en forma apreciable el ajuste por lo que su inclusión se descarta a efectos de no incrementar innecesariamente el número de parámetros de ajuste.

El cálculo del valor inicial de la constante del resorte rotacional se realiza en base al esquema del bloque de fundación de la Figura 9.38. La excelente coherencia obtenida durante los ensayos que se muestra en la parte inferior de las Figuras 9.32 y 9.33 permite asumir una hipótesis lineal para el giro de las placas en la interfaz dado que un marcado comportamiento no-lineal debería dejar importantes secuelas en las funciones de coherencia. La rigidez axial de dos pernos representada por k_z se calcula en función del módulo de

²En la vinculación del tubo con la masa adicional de la estructura se presenta la misma situación.

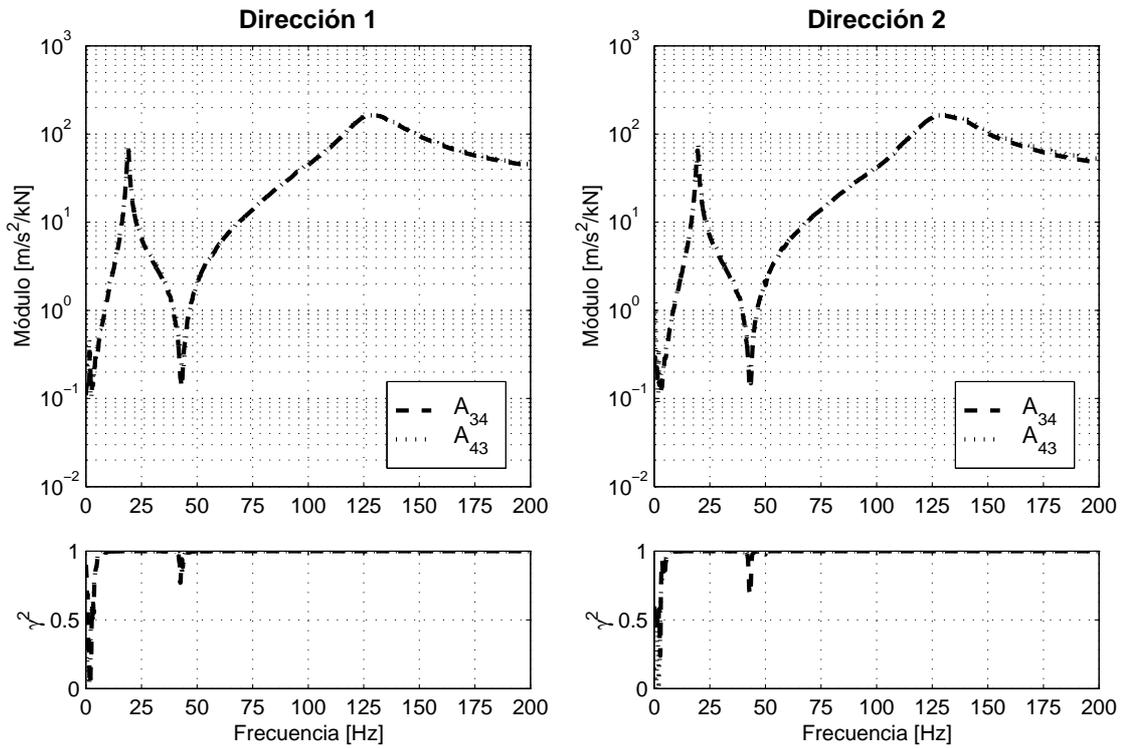


Fig. 9.32: Reciprocidad y coherencia de acelerancias para el sistema sin masa adicional

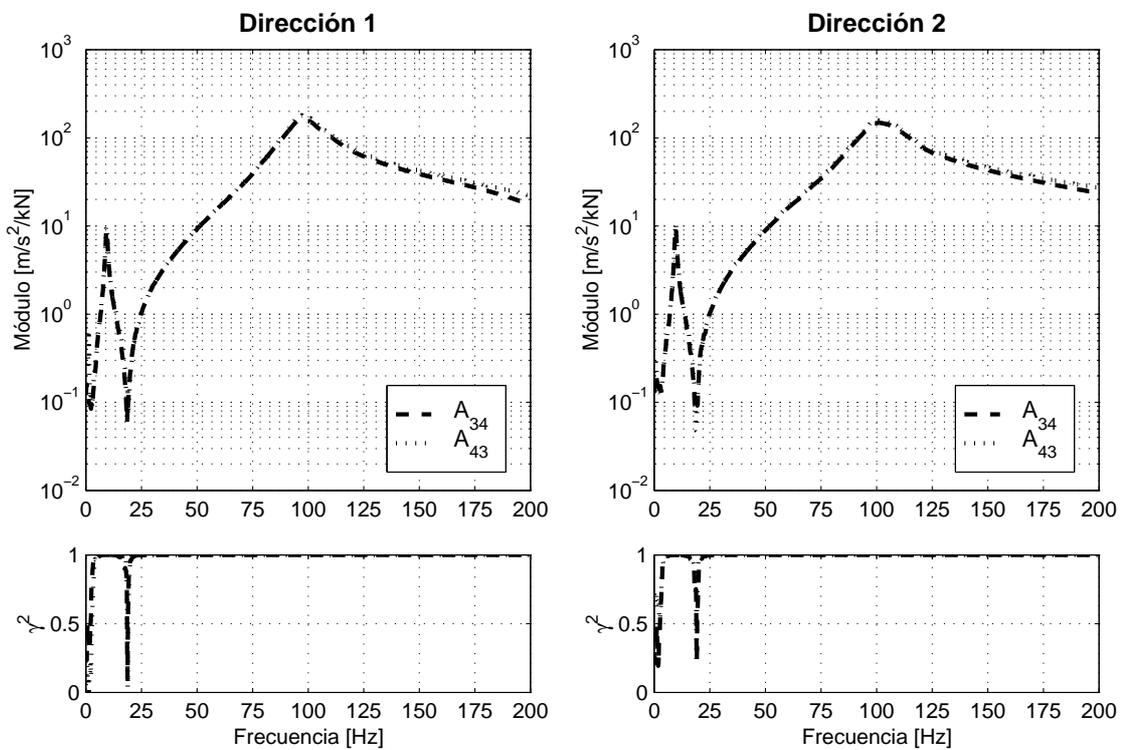


Fig. 9.33: Reciprocidad y coherencia de acelerancias para el sistema con masa adicional

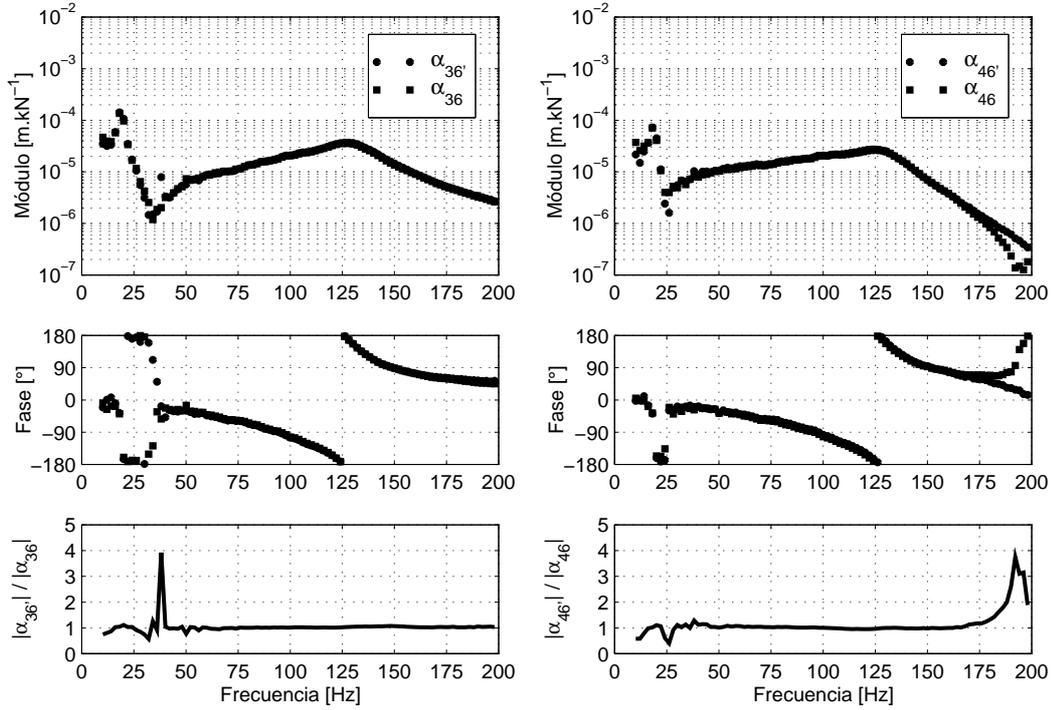


Fig. 9.34: Desplazamiento relativo de interfaz para el sistema sin masa adicional

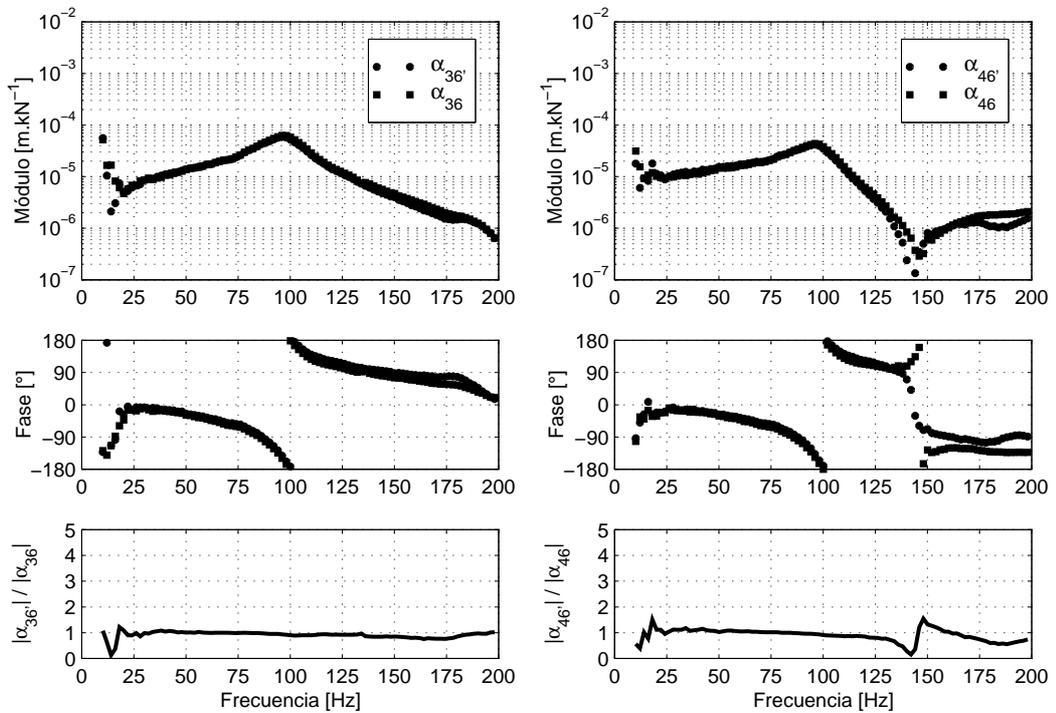


Fig. 9.35: Desplazamiento relativo de interfaz para el sistema con masa adicional

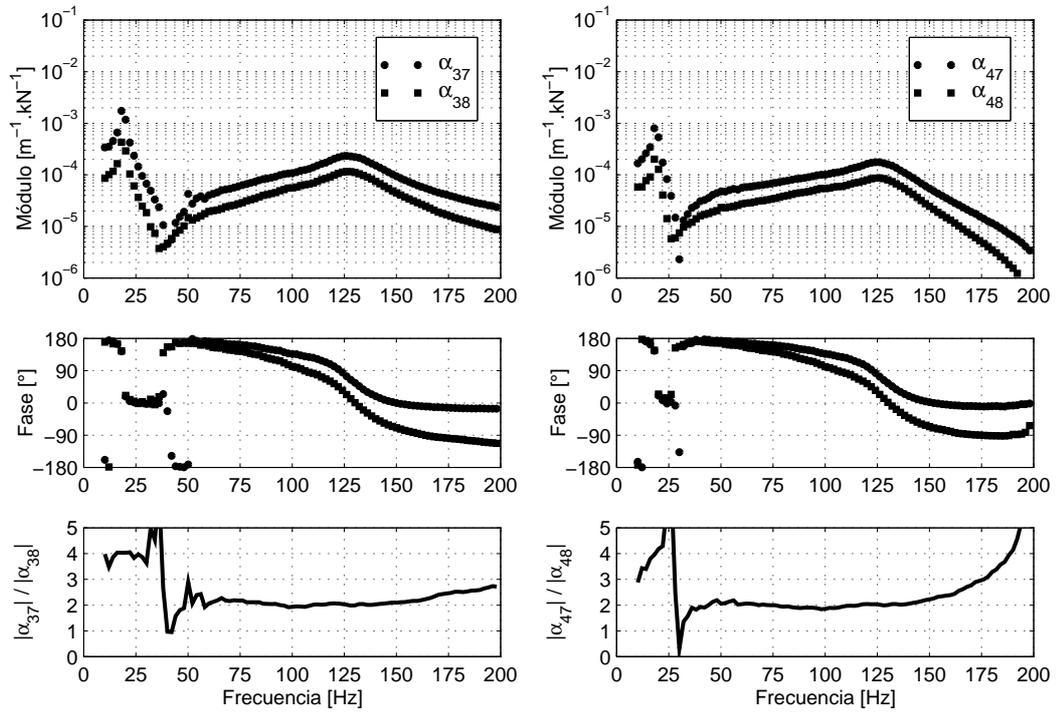


Fig. 9.36: Giro relativo de interfaz para el sistema sin masa adicional

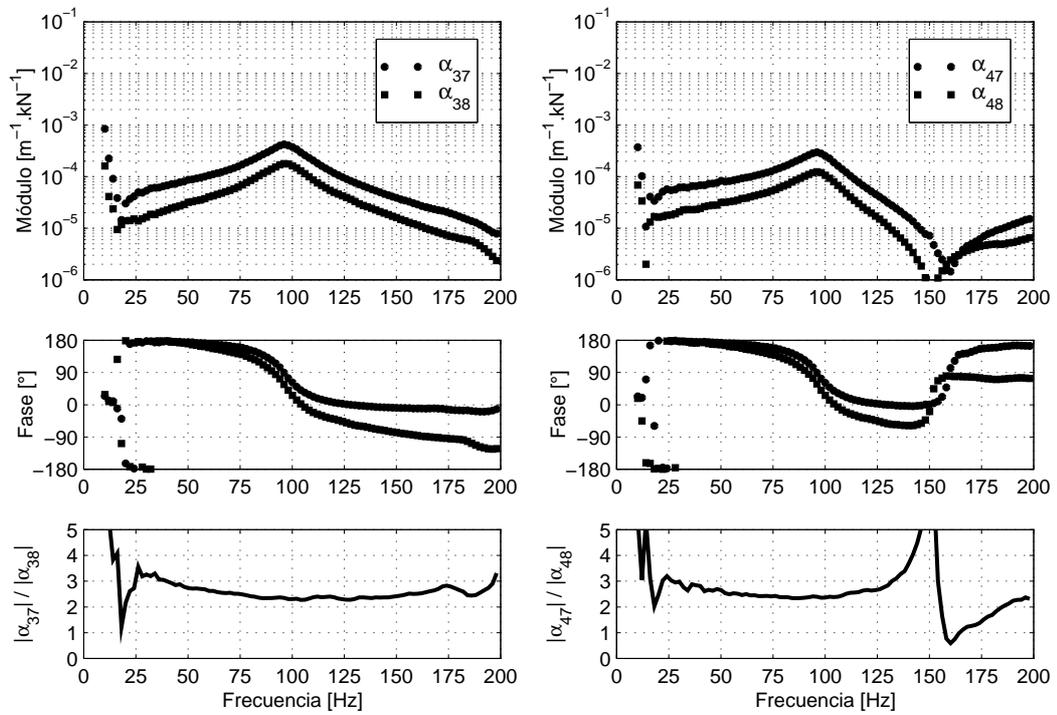


Fig. 9.37: Giro relativo de interfaz para el sistema con masa adicional

elasticidad longitudinal $E = 2.06 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$, el área efectiva de los pernos $A = \pi\phi^2/4 = 9.503 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$ (con un diámetro efectivo $\phi = 0.011 \text{ m}$) y una adoptada longitud efectiva de los pernos $h \approx 0.100 \text{ m}$ de la siguiente forma

$$k_z = 2 \frac{EA}{h} \approx 400000 \text{ kN/m} \quad (9.33)$$

Por lo tanto, la rigidez rotacional k_θ para un giro unitario de las placas de la interfaz $\theta = 1 \text{ rad}$ alrededor del punto o con una separación de los pernos $l = 0.220 \text{ m}$, un desplazamiento axial del extremo de los pernos $u_z = \theta l/2 = 0.110 \text{ m}$ y una fuerza axial en los pernos $F_z = k_z \cdot u_z \approx 44000 \text{ kN}$ resulta

$$k_\theta = F_z \cdot l \approx 10000 \text{ kN.m} \quad (9.34)$$

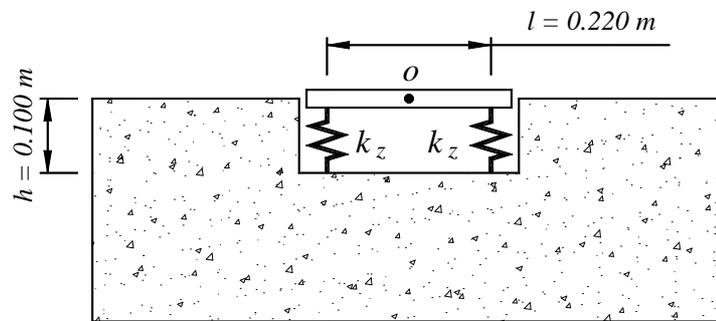


Fig. 9.38: Cálculo del valor inicial de la constante del resorte rotacional

Ajuste del modelo del sistema acoplado

Las variantes de ensayo para el sistema acoplado se representan agrupando siglas que se refieren al sistema *sin* y *con* masa adicional (SM y CM respectivamente) y a la dirección analizada (D1 y D2 respectivamente). Las variantes de ajuste se diferencian también a través de siglas que se refieren tanto al perfil de suelo utilizado para el modelo del bloque de fundación (P0, P1, P2, P3 y P4) como al conjunto de parámetros de ajuste involucrados combinando EI (rigidez flexional del tubo), V_s (velocidad de propagación de ondas de corte del estrato superior del perfil) y k_θ (rigidez del resorte rotacional entre la estructura y la fundación).

- Variante N3: se ajustan simultáneamente EI , V_s y k_θ .
- Variante N2: se ajustan V_s y k_θ adoptando el valor de EI obtenido durante los ensayos de la estructura.
- Variante N1: se ajusta k_θ adoptando el valor de EI obtenido durante los ensayos de la estructura y el valor de V_s obtenido durante los ensayos del bloque de fundación.

El número total de variantes combinadas (n_{vc}) se obtiene como el producto del número de variantes de ensayo ($n_{ve} = 2 \times 2 = 4$) y el número de variantes de ajuste ($n_{va} = 5 \times 3 = 15$) resultando $n_{vc} = n_{ve} \times n_{va} = 60$. El ajuste de las curvas experimentales de

receptancia vinculadas a la dirección 1 (variantes de ensayo SM-D1 y CM-D1) utilizando el perfil 0 para el modelo de la fundación y los parámetros de ajuste EI , k_θ y V_s (variante de ajuste P0-N3) se muestra en las Figuras 9.39 y 9.40. Las curvas vinculadas a la dirección 2 presentan características similares. El grado de aproximación es muy bueno para todos los GL considerando especialmente la reproducción de la fase de los giros de la placa inferior de la estructura y del bloque de fundación. La bondad del ajuste refleja la precisión que puede conseguirse en el cálculo de los parámetros modales del sistema a través del modelo calibrado.

Los parámetros ajustados para la totalidad de las variantes combinadas junto al promedio para las variantes de ensayo se presentan en las Tablas 9.3 a 9.5. La marcada diferencia en los valores ajustados de k_θ para cada dirección de análisis sugiere tomar promedios separados. El ajuste se realiza en el rango de frecuencias de 5 a 200Hz utilizando para el control de la convergencia la siguiente norma de error

$$\|\Delta\alpha\| = \sqrt{\frac{1}{n_i} \frac{1}{n_j} \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_i} \sum_{j=1}^{n_j} \sum_{k=1}^{n_k} \left| \frac{\alpha_{ij}^a(f_k) - \alpha_{ij}^x(f_k)}{\alpha_{ij}^x(f_k)} \right|^2} \quad (9.35)$$

La convergencia de los parámetros de ajuste de la variante combinada SM-D1-P0-N3 representativa del resto de los casos se muestra en la Figura 9.41.

Los valores ajustados de la rigidez flexional del tubo para la variante N3 resultan entre 1.0% y 1.3% mayores al valor teórico de $EI = 1597 \text{ kN.m}^2$ verificado durante la calibración del modelo de la estructura desacoplada. Si se considera la fuerte interrelación que existe entre los parámetros de ajuste en el proceso de calibración es probable que la diferencia promedio ligeramente superior al 1.0% con dispersión menor al 0.2% corrija alguna inevitable aunque despreciable inexactitud del modelo. De esta forma se explica que los valores ajustados de la velocidad de propagación de ondas de corte V_s resulten sistemáticamente menores a los obtenidos en la calibración del modelo del bloque de fundación. La diferencia promedio de estos valores es aproximadamente del 5.0% con importante dispersión debido a la menor sensibilidad que posee la respuesta dinámica del sistema completo respecto a V_s .

En la variante N2 se adopta el valor teórico para EI produciendo una disminución del error en el valor ajustado de V_s independientemente del perfil adoptado para el suelo. Por otra parte, la norma de error aumenta indefectiblemente a medida que se eliminan parámetros de ajuste en función del alejamiento de los valores adoptados respecto a los valores resultantes de la calibración con todos los parámetros. Los valores ajustados de k_θ presentan en la mayoría de los casos una diferencia menor al 20% respecto al valor inicial calculado a través de la fórmula en (9.34).

La secuencia en que ocurren los menores promedios de la norma de error en relación al perfil de suelo adoptado resulta casi coincidente con la secuencia para el ajuste del bloque de fundación desacoplado. El perfil 0 resulta el más adecuado para las variantes N3 y N2 mientras que para la variante N1 el perfil 2 presenta el menor error. El perfil 4 que representa un semi-espacio homogéneo posee el mayor error para todas las variantes.

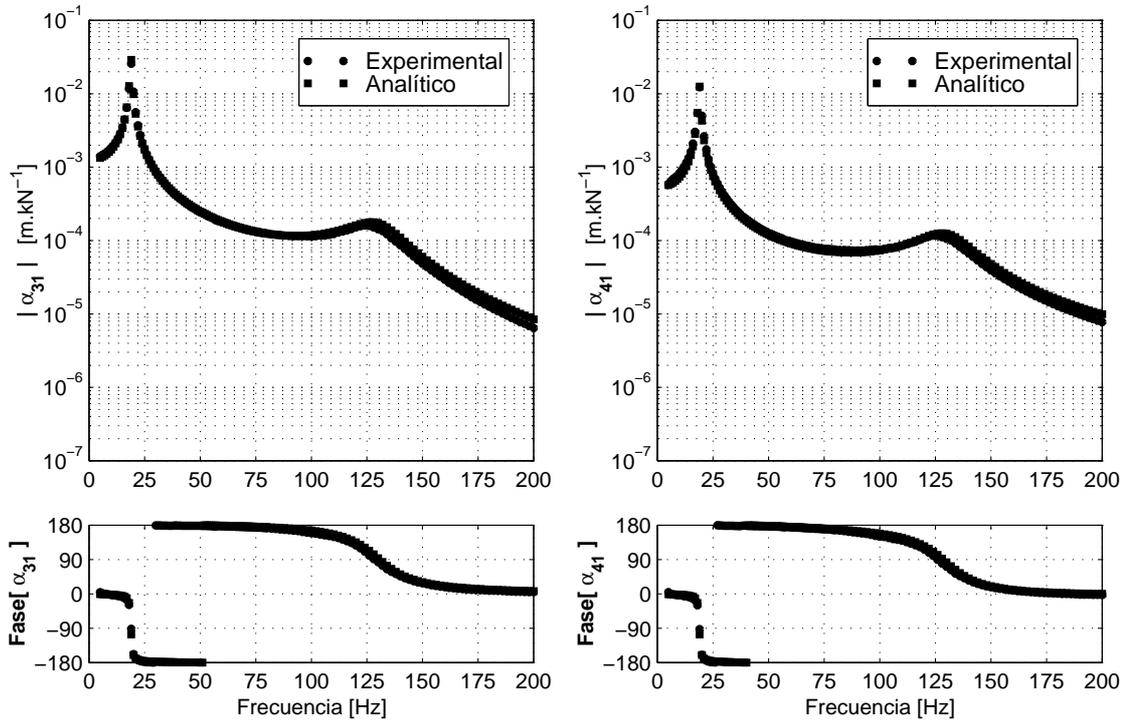


Fig. 9.39: Ajuste de la receptancia de la variante SM-D1-P0-N3

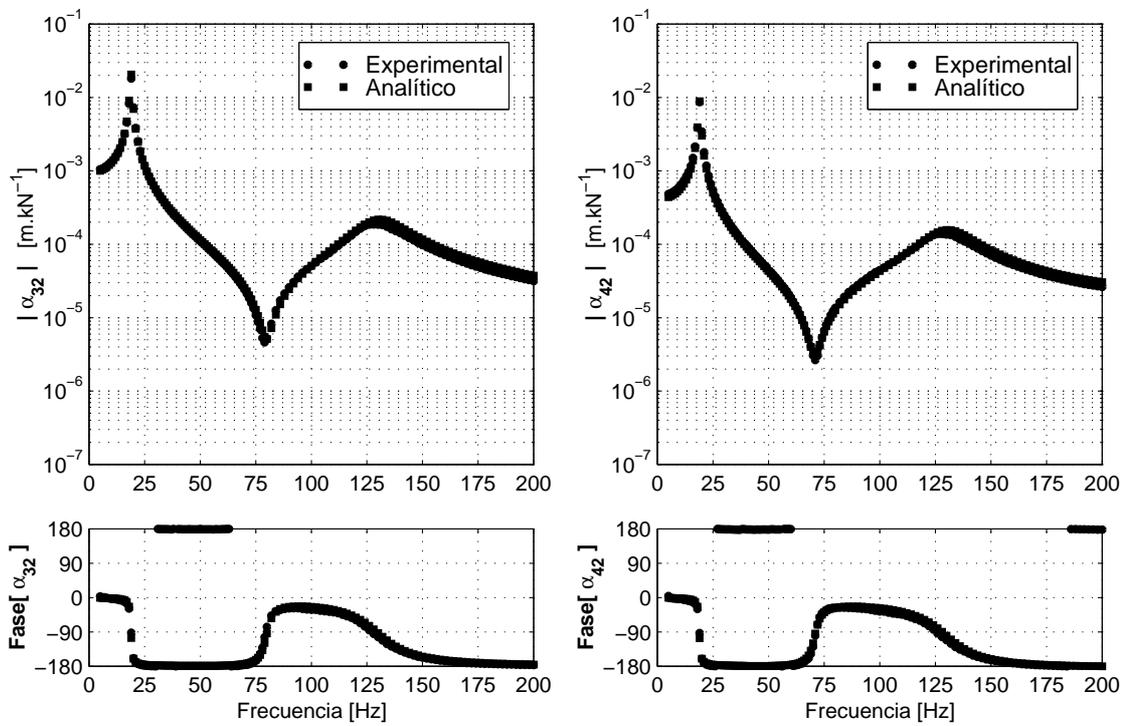


Fig. 9.39: Ajuste de la receptancia de la variante SM-D1-P0-N3 (cont.)

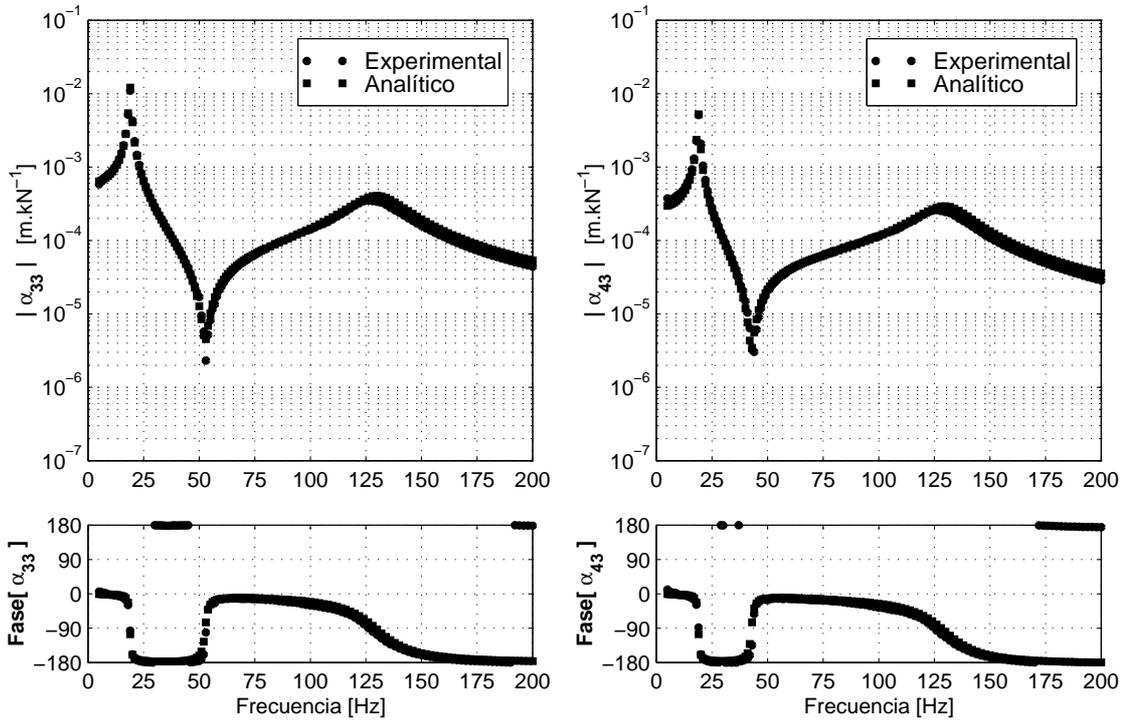


Fig. 9.39: Ajuste de la receptancia de la variante SM-D1-P0-N3 (cont.)

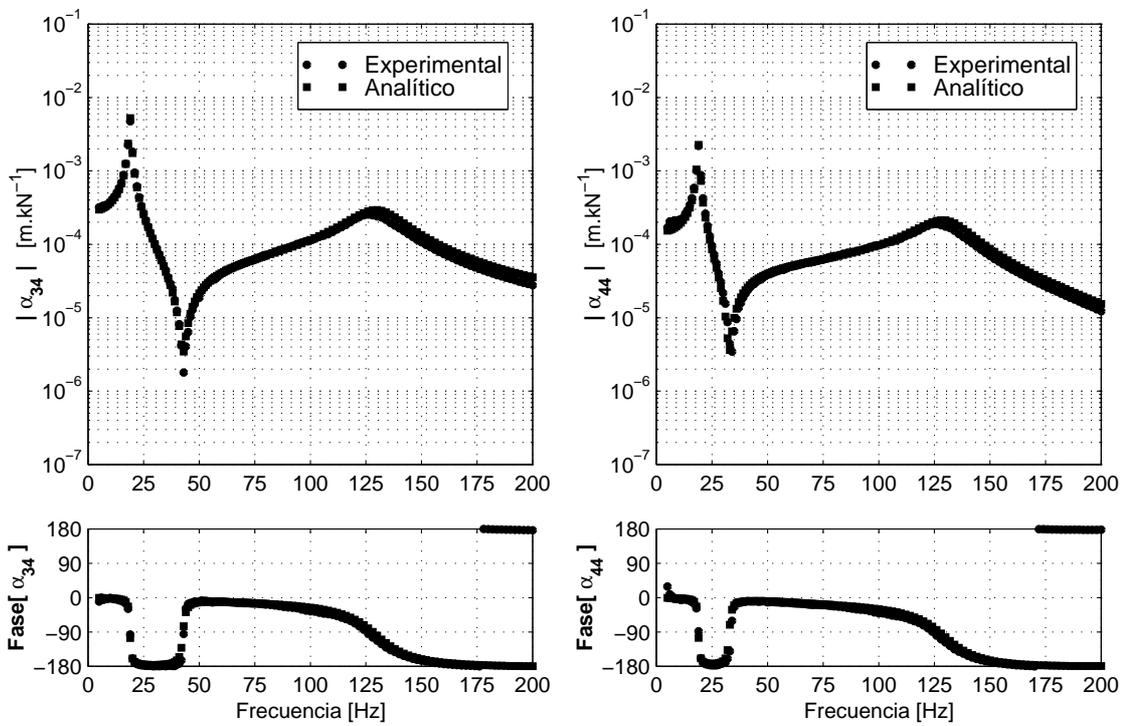


Fig. 9.39: Ajuste de la receptancia de la variante SM-D1-P0-N3 (cont.)

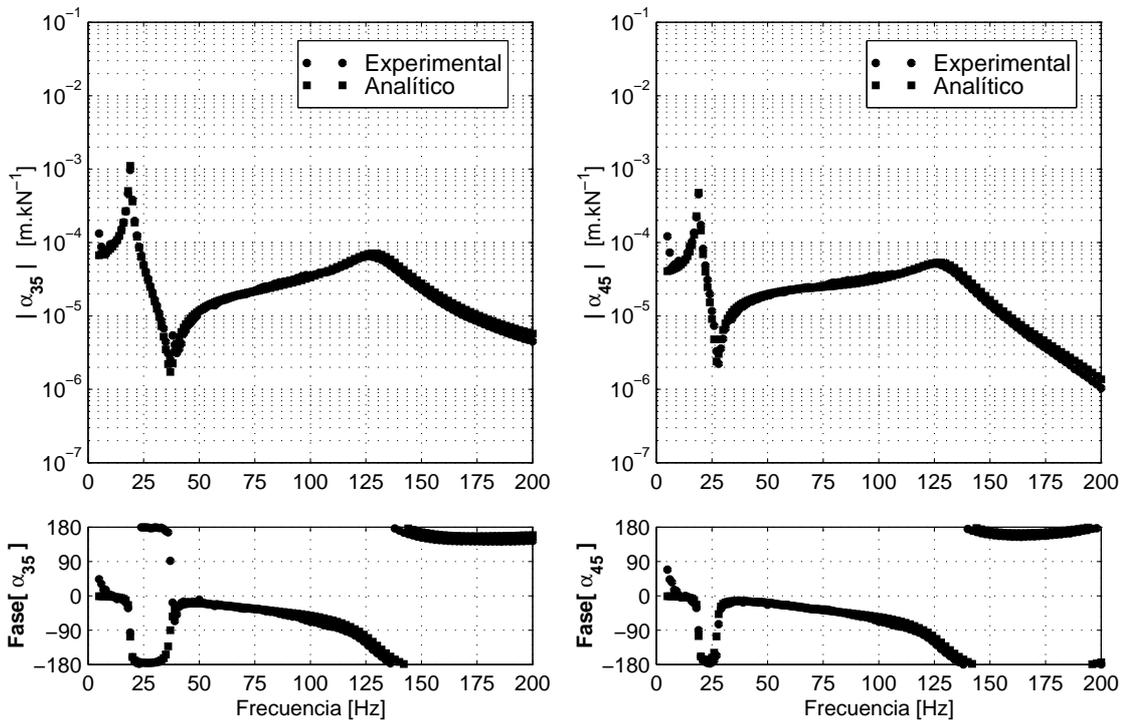


Fig. 9.39: Ajuste de la receptancia de la variante SM-D1-P0-N3 (cont.)

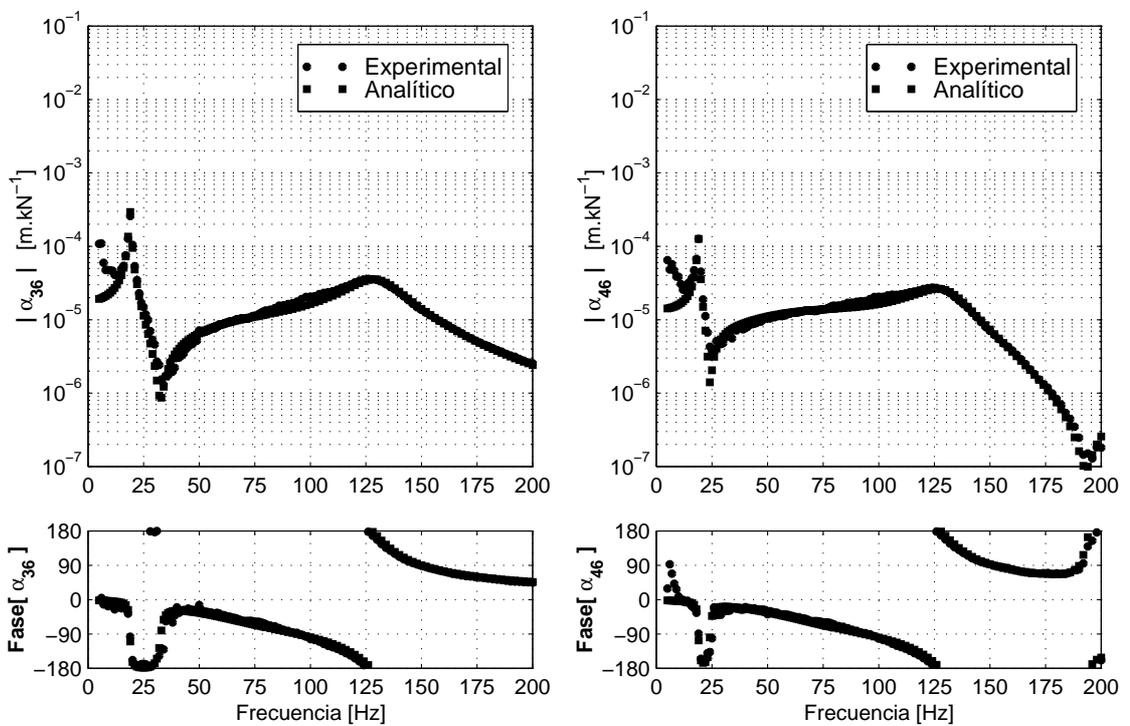


Fig. 9.39: Ajuste de la receptancia de la variante SM-D1-P0-N3 (cont.)

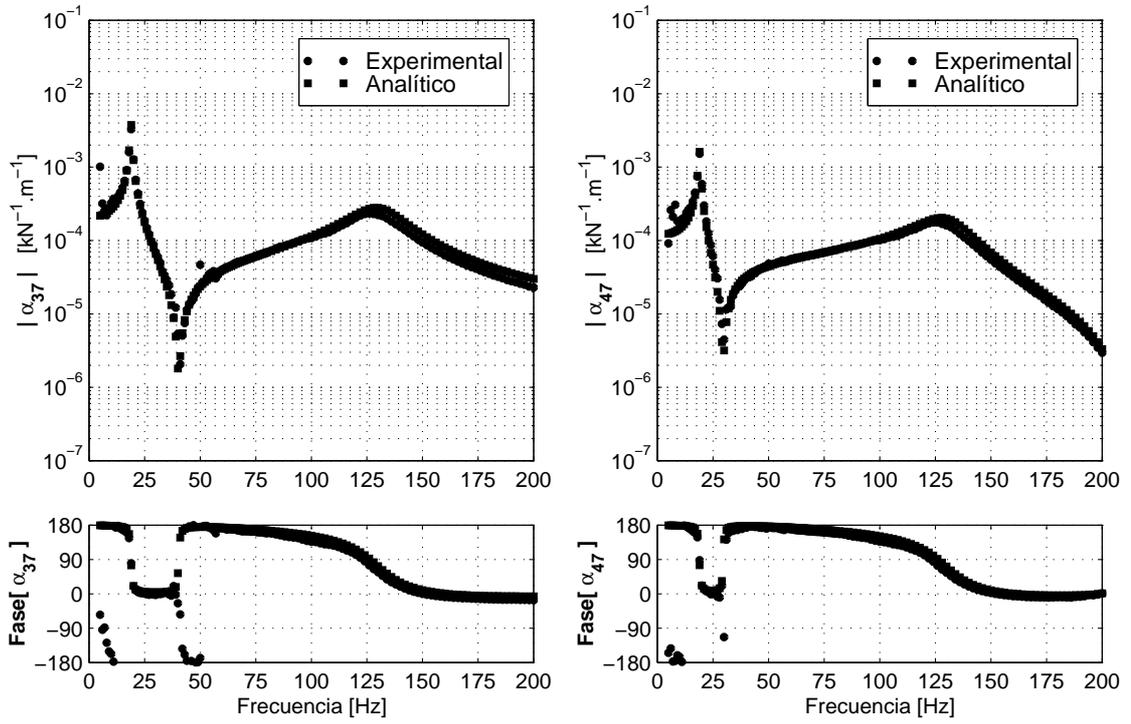


Fig. 9.39: Ajuste de la receptancia de la variante SM-D1-P0-N3 (cont.)

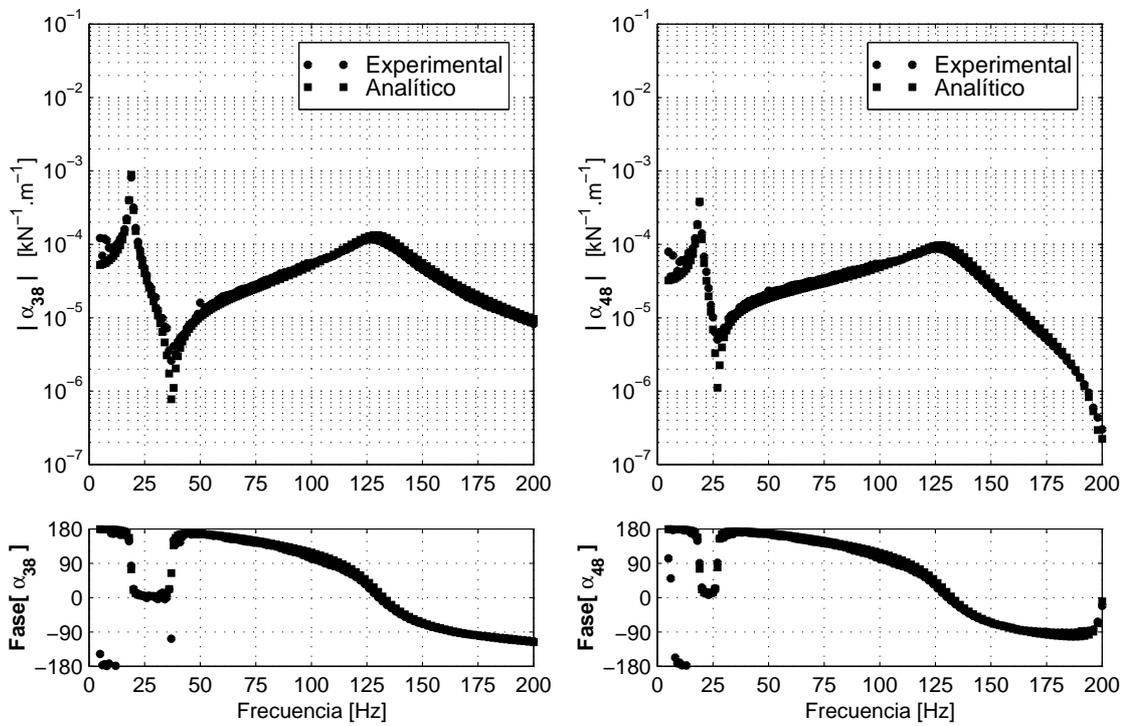


Fig. 9.39: Ajuste de la receptancia de la variante SM-D1-P0-N3 (cont.)

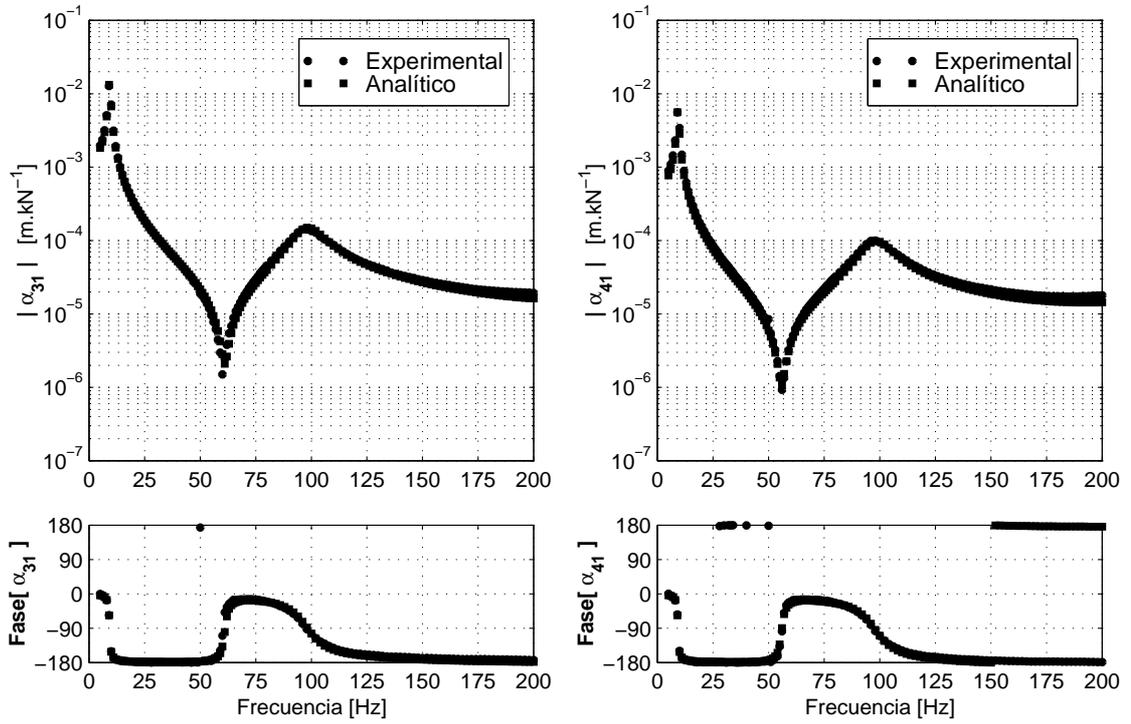


Fig. 9.40: Ajuste de la receptancia de la variante CM-D1-P0-N3

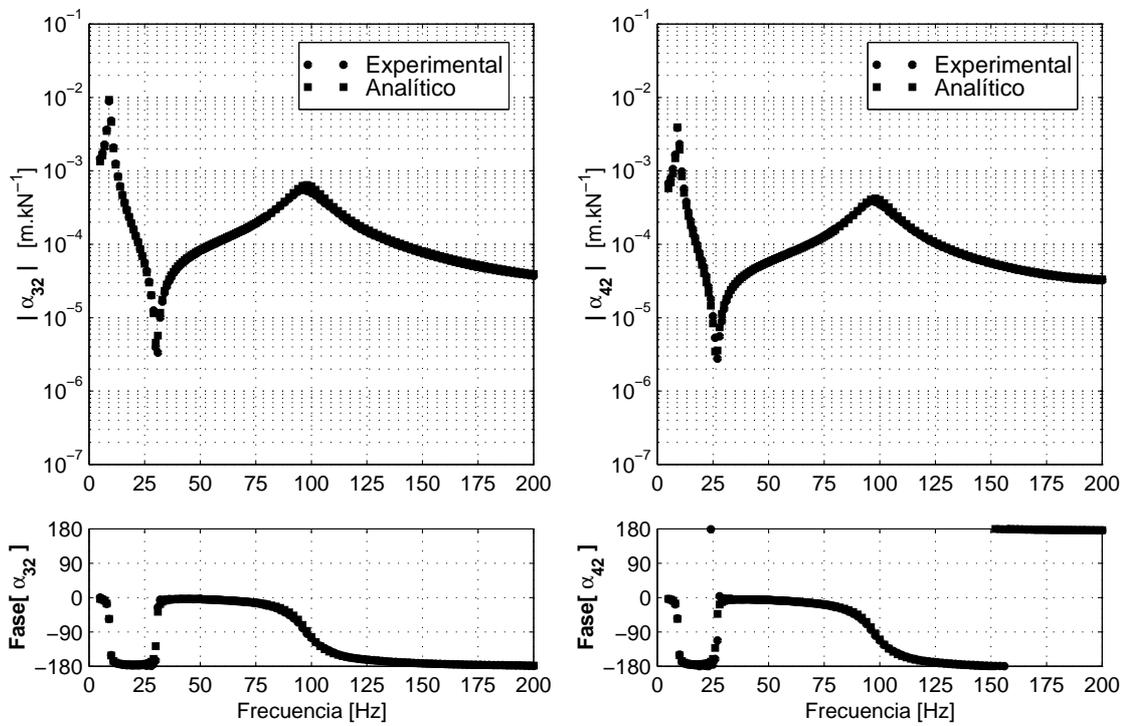


Fig. 9.40: Ajuste de la receptancia de la variante CM-D1-P0-N3 (cont.)

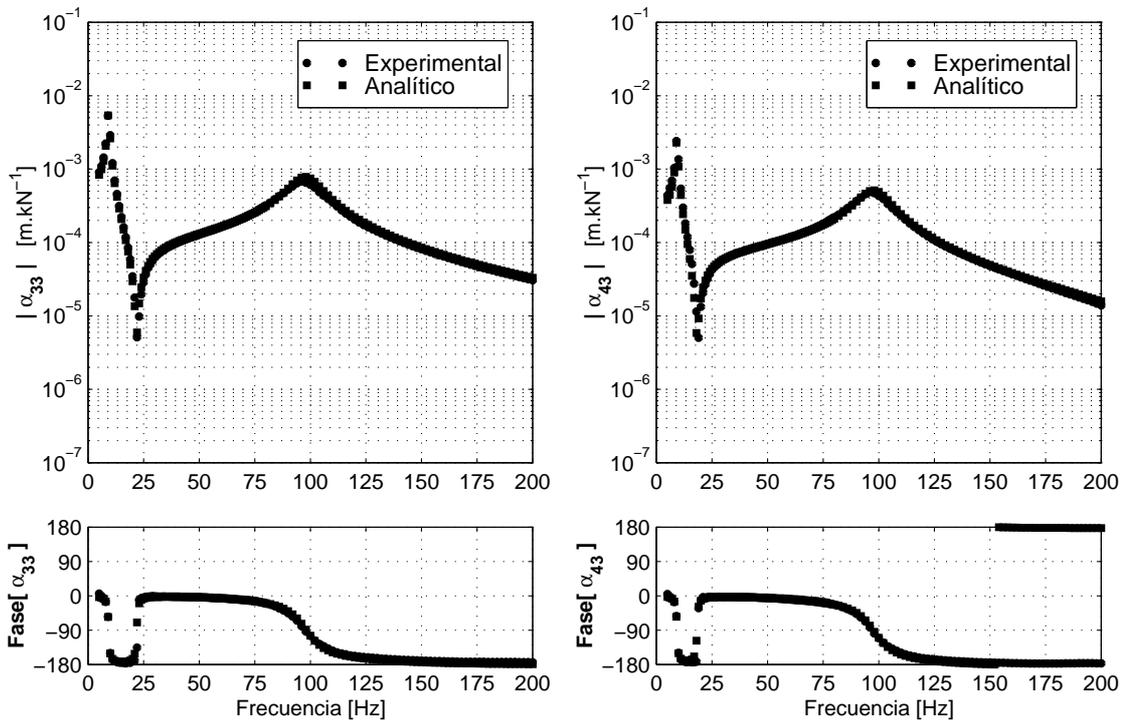


Fig. 9.40: Ajuste de la receptancia de la variante CM-D1-P0-N3 (cont.)

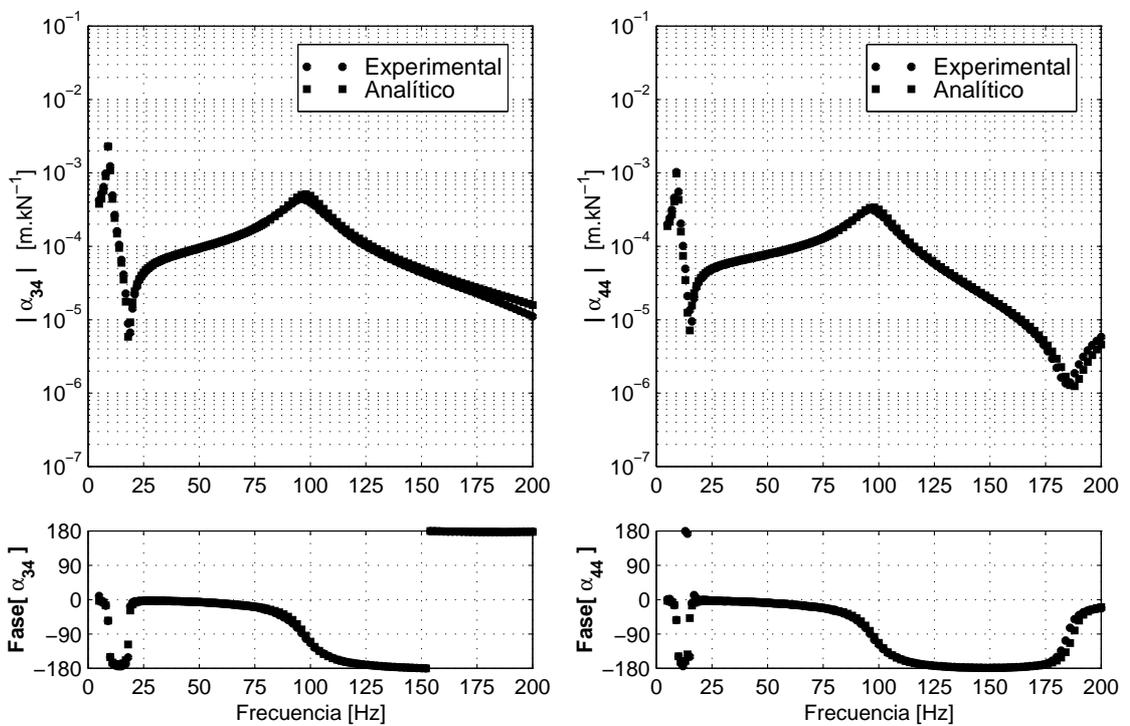


Fig. 9.40: Ajuste de la receptancia de la variante CM-D1-P0-N3 (cont.)

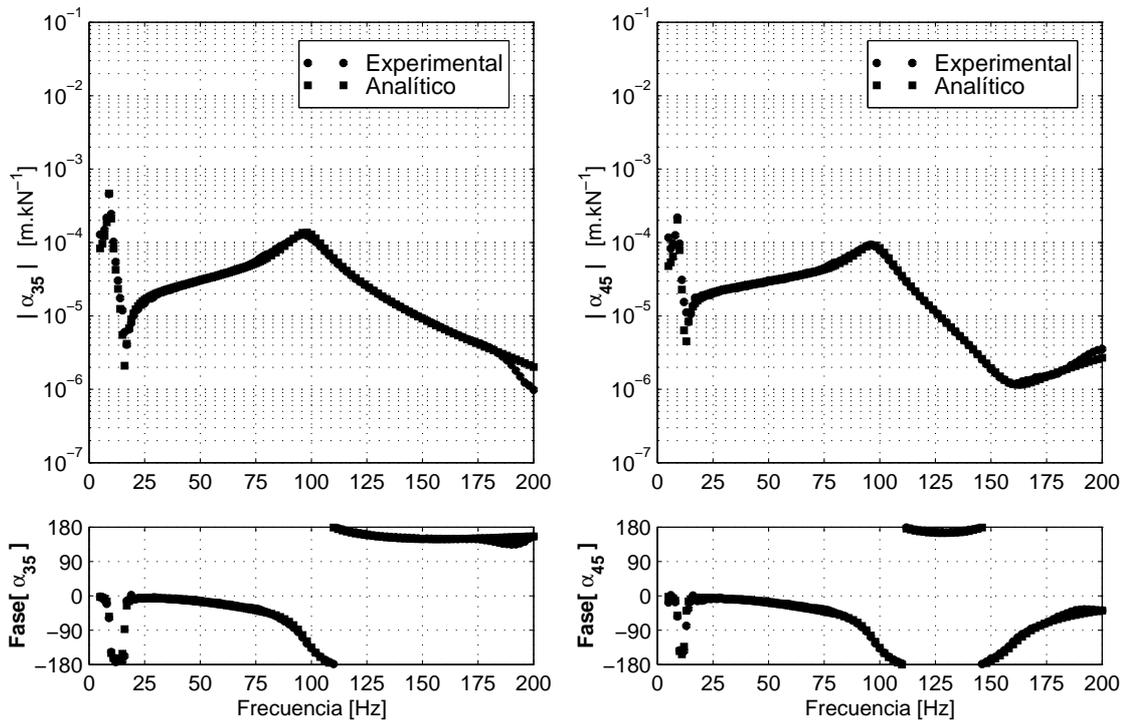


Fig. 9.40: Ajuste de la receptancia de la variante CM-D1-P0-N3 (cont.)

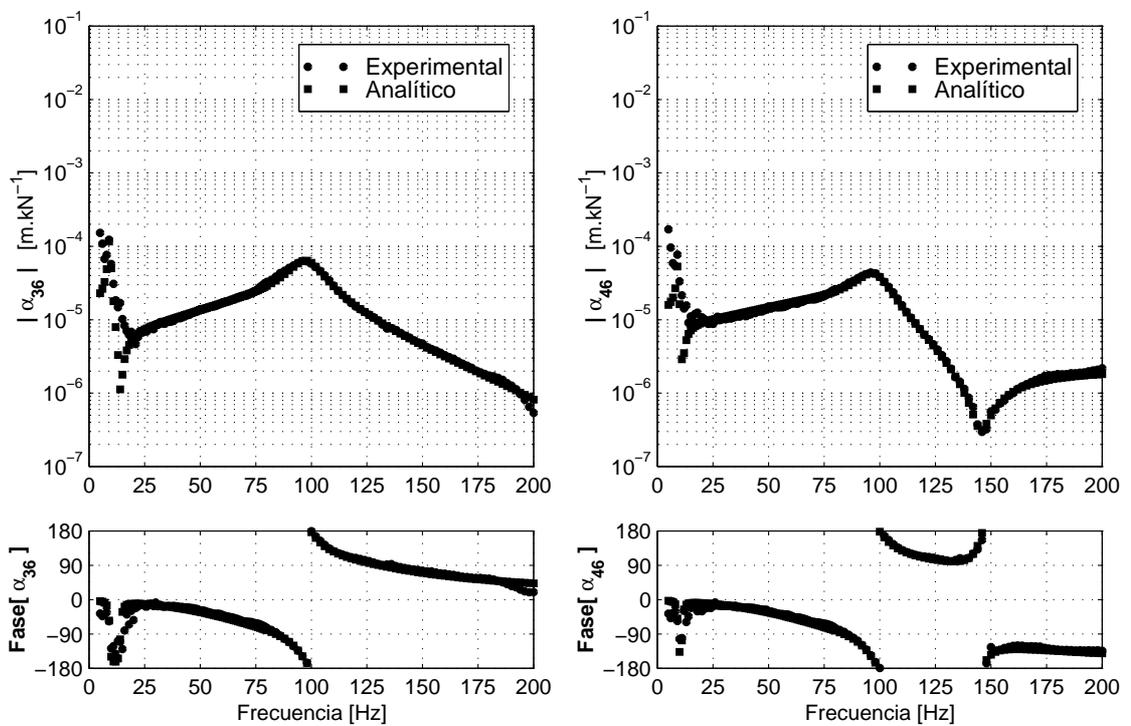


Fig. 9.40: Ajuste de la receptancia de la variante CM-D1-P0-N3 (cont.)

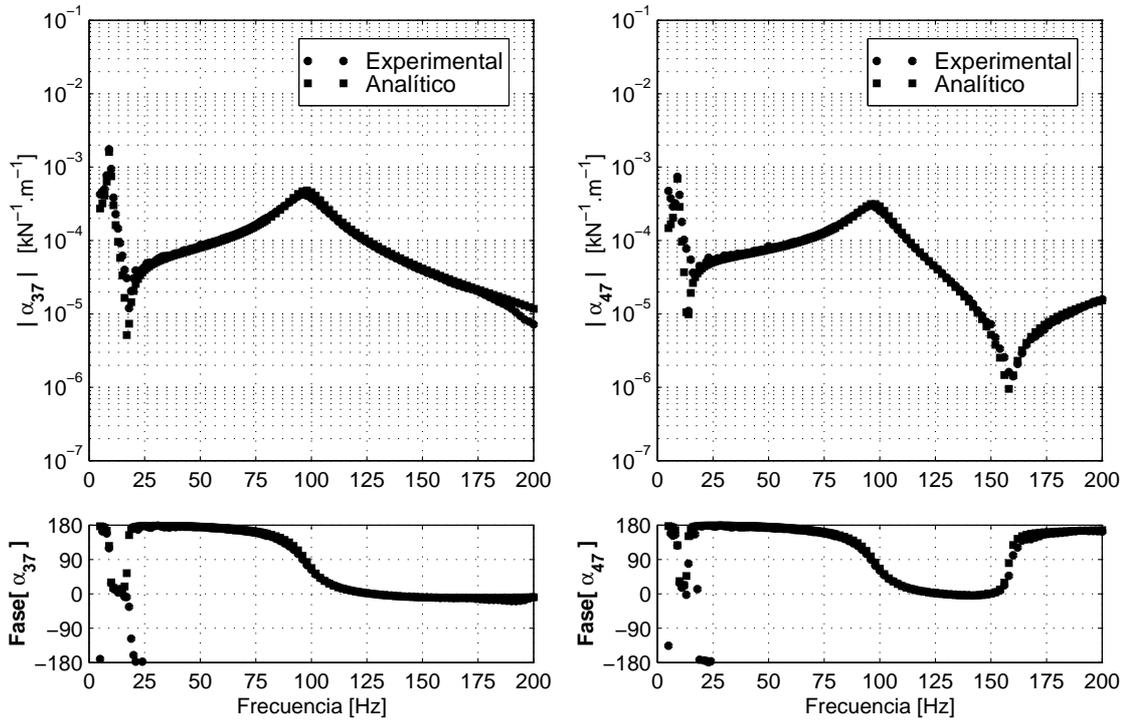


Fig. 9.40: Ajuste de la receptancia de la variante CM-D1-P0-N3 (cont.)

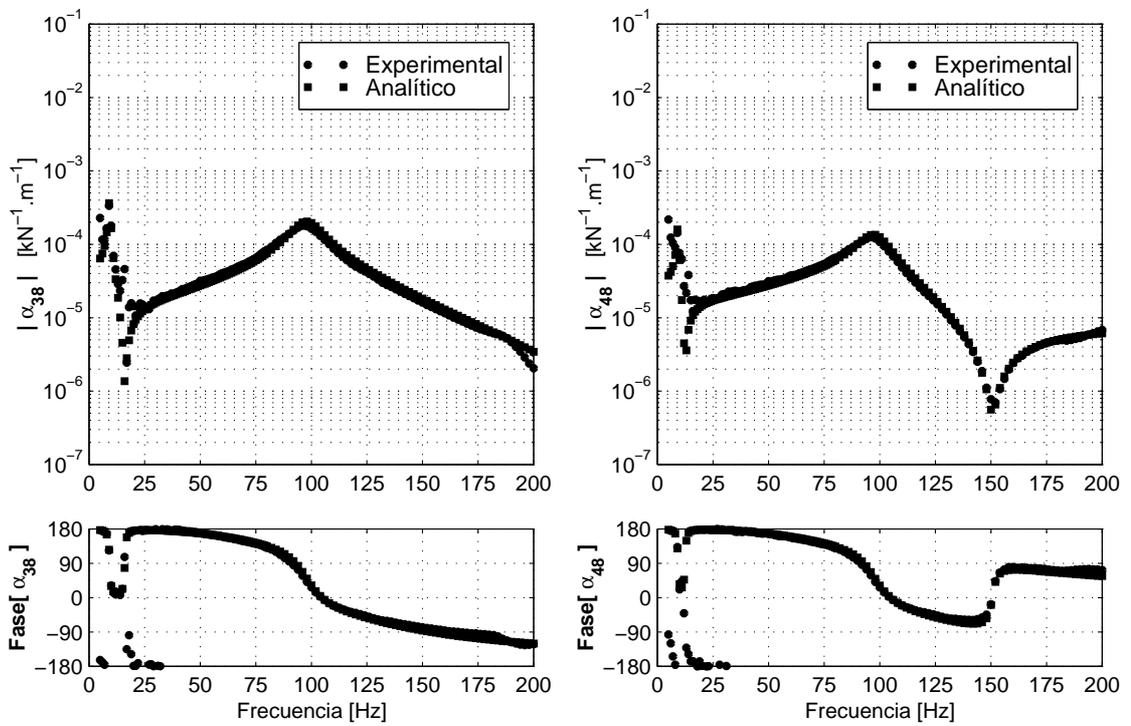


Fig. 9.40: Ajuste de la receptancia de la variante CM-D1-P0-N3 (cont.)

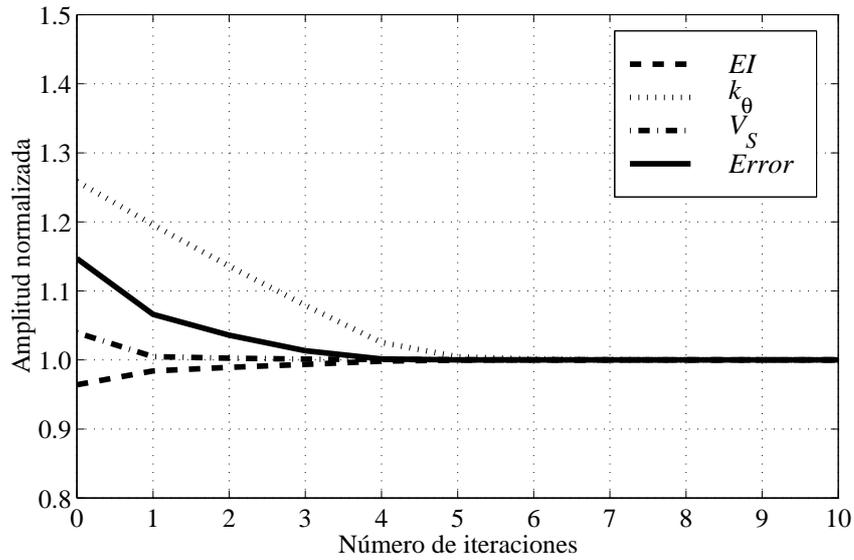


Fig. 9.41: Convergencia de los parámetros de ajuste de la variante SM-D1-P0-N3

Modelo de fundación	Parámetro de ajuste	Variante de ensayo				Promedio
		SM-D1	SM-D2	CM-D1	CM-D2	
Perfil 0	EI	1656	1630	1564	1625	1619 (+1.3 %)
	k_{θ}	7791	11298	7558	10376	7675 / 10837
	V_s	141.2	141.4	139.9	138.6	140.3 (-4.4 %)
	$\ \Delta\alpha\ $	0.2501	0.2758	0.2081	0.2952	0.2573
Perfil 1	EI	1653	1628	1563	1623	1617 (+1.2 %)
	k_{θ}	7920	11513	7541	10405	7731 / 10954
	V_s	146.2	146.2	145.3	144.3	145.5 (-4.2 %)
	$\ \Delta\alpha\ $	0.2550	0.2792	0.2125	0.3002	0.2617
Perfil 2	EI	1656	1630	1564	1624	1618 (+1.3 %)
	k_{θ}	7797	11327	7489	10317	7643 / 10817
	V_s	133.9	133.8	133.2	132.0	133.2 (-1.0 %)
	$\ \Delta\alpha\ $	0.2516	0.2773	0.2102	0.3000	0.2598
Perfil 3	EI	1653	1626	1562	1623	1616 (+1.2 %)
	k_{θ}	7893	11435	7628	10493	7760 / 10964
	V_s	160.3	160.8	158.5	157.4	159.2 (-7.5 %)
	$\ \Delta\alpha\ $	0.2527	0.2784	0.2099	0.2951	0.2590
Perfil 4	EI	1650	1624	1562	1621	1614 (+1.0 %)
	k_{θ}	8093	11788	7588	10474	7840 / 11131
	V_s	162.6	162.9	161.6	160.8	162.0 (-8.0 %)
	$\ \Delta\alpha\ $	0.2620	0.2844	0.2193	0.3043	0.2675

Tabla 9.3: Ajuste de los parámetros de la variante N3

Modelo de fundación	Parámetro de ajuste	Variante de ensayo				Promedio
		SM-D1	SM-D2	CM-D1	CM-D2	
Perfil 0	k_θ	8974	12298	6895	11209	7935 / 11759
	V_s	143.7	143.2	139.0	140.0	141.5 (-3.7%)
	$\ \Delta\alpha\ $	0.2805	0.2856	0.2188	0.3015	0.2716
Perfil 1	k_θ	9058	12445	6889	11160	7974 / 11798
	V_s	148.6	148.0	144.3	145.8	146.7 (-3.4%)
	$\ \Delta\alpha\ $	0.2817	0.2875	0.2230	0.3053	0.2744
Perfil 2	k_θ	8967	12318	6850	11092	7908 / 11710
	V_s	136.2	135.5	132.3	133.3	134.4 (-0.2%)
	$\ \Delta\alpha\ $	0.2813	0.2871	0.2204	0.3055	0.2736
Perfil 3	k_θ	9019	12337	6936	11268	7977 / 11798
	V_s	162.8	162.5	157.3	158.8	160.4 (-6.9%)
	$\ \Delta\alpha\ $	0.2792	0.2862	0.2212	0.3005	0.2718
Perfil 4	k_θ	9175	12612	6919	11180	8047 / 11896
	V_s	165.1	164.5	160.4	162.4	163.1 (-7.4%)
	$\ \Delta\alpha\ $	0.2842	0.2906	0.2301	0.3086	0.2784

Tabla 9.4: Ajuste de los parámetros de la variante N2

Modelo de fundación	Parámetro de ajuste	Variante de ensayo				Promedio
		SM-D1	SM-D2	CM-D1	CM-D2	
Perfil 0	k_θ	8945	12269	6879	11209	7911 / 11739
	$\ \Delta\alpha\ $	0.2819	0.2875	0.2288	0.3077	0.2765
Perfil 1	k_θ	9020	12386	6868	11151	7945 / 11768
	$\ \Delta\alpha\ $	0.2830	0.2894	0.2312	0.3096	0.2783
Perfil 2	k_θ	8985	12337	6844	11092	7915 / 11710
	$\ \Delta\alpha\ $	0.2818	0.2872	0.2214	0.3058	0.2740
Perfil 3	k_θ	8946	12269	6907	11258	7926 / 11768
	$\ \Delta\alpha\ $	0.2881	0.2953	0.2460	0.3169	0.2866
Perfil 4	k_θ	9059	12435	6868	11160	7963 / 11798
	$\ \Delta\alpha\ $	0.2947	0.3020	0.2538	0.3233	0.2934

Tabla 9.5: Ajuste de los parámetros de la variante N1

9.1.5 Comentarios finales

El modelo del Prototipo de Interacción resulta menos sensible al perfil adoptado para el suelo que a otros parámetros como EI y k_θ con mayor influencia en puntos sobre la estructura que poseen las mayores amplitudes de la respuesta dinámica. De esta forma, el intento de determinar el perfil de suelo en base a ensayos realizados sobre el sistema acoplado puede resultar demasiado pretencioso. Por otra parte, la representación matricial del comportamiento del bloque de fundación restringe severamente el número de parámetros de ajuste del suelo dado que deben mantenerse las relaciones geométricas y mecánicas entre los distintos estratos. Los valores ajustados de velocidad de propagación son bastante similares a los obtenidos en el ajuste del modelo del bloque de fundación evidenciando la importancia que tiene toda información que permita la caracterización del perfil del suelo.

La incorporación de resortes rotacionales de vinculación de la masa adicional con el tubo y del tubo con el bloque de fundación resulta notablemente más importante que la utilización de resortes traslacionales. Los resortes rotacionales permiten además compensar en pequeña medida la flexibilidad de la masa adicional, el bloque de fundación y las placas extremas del tubo. Sin embargo, esta compensación introduce alguna inexactitud en el modelo que debe mantenerse dentro de ciertos márgenes.

La descomposición modal de la flexibilidad dinámica de las variantes SM-D1-P0-N1 y CM-D1-P0-N1 se muestra en las Figuras 9.42 y 9.43 respectivamente. Los pares de modos complejos conjugados $1/2$, $3/4$ y $5/6$ constituyen los modos primarios que surgen como variantes de los modos de empotramiento perfecto. Los modos reales a y b junto con los pares de modos complejos conjugados c/d y e/f resultan modos secundarios que aparecen por la incorporación de los 2 GL de la interfaz y la introducción de 4 GL generalizados en las matrices del bloque de fundación. La contribución de los modos secundarios a la respuesta resulta prácticamente despreciable para los casos analizados (no aparece ningún modo propio de la interacción) aunque su influencia es más notoria a medida que los GL se encuentren más próximos al bloque de fundación. El número de GL generalizados que se utilizan en la definición de las matrices de la fundación condiciona el número de modos secundarios. Sin embargo, la receptancia permanece casi inalterada en caso que no se modifiquen sustancialmente los modos primarios.

La mayor complejidad en relación a la forma modal se presenta en el 2° modo global primario constituido por el par de modos complejos conjugados $3/4$. Las Figuras 9.44 y 9.45 muestran el 2° modo global primario para las variantes SM-D1-P0-N1 y CM-D1-P0-N1 respectivamente. Los instantes 1° y 3° se encuentran separados 90° del ciclo completo del modo y muestran la forma modal en los momentos de giro máximo y nulo de la placa superior respectivamente. Los instantes 2° y 4° se encuentran también separados 90° del ciclo completo: en la variante de ensayo SM muestran la forma modal en los momentos de giro máximo y nulo del bloque de fundación mientras que en la variante de ensayo CM muestran la forma modal en los momentos de giro nulo y máximo del bloque de fundación.

En las Tablas 9.6 y 9.7 se presentan los primeros polos del sistema (s_r) expresados en Hz para la condición de empotramiento perfecto junto con los polos obtenidos en la variante de ajuste P0-N1. La matriz de amortiguamiento de la estructura es proporcional a la matriz de masa produciendo que las relaciones de amortiguamiento para empotramiento perfecto verifiquen la ecuación (2.15b) con $\nu = 1.8$. El amortiguamiento de los modos secundarios de la variante de ajuste P0-N1 toma valores altos que superan el 30 % del amortiguamiento

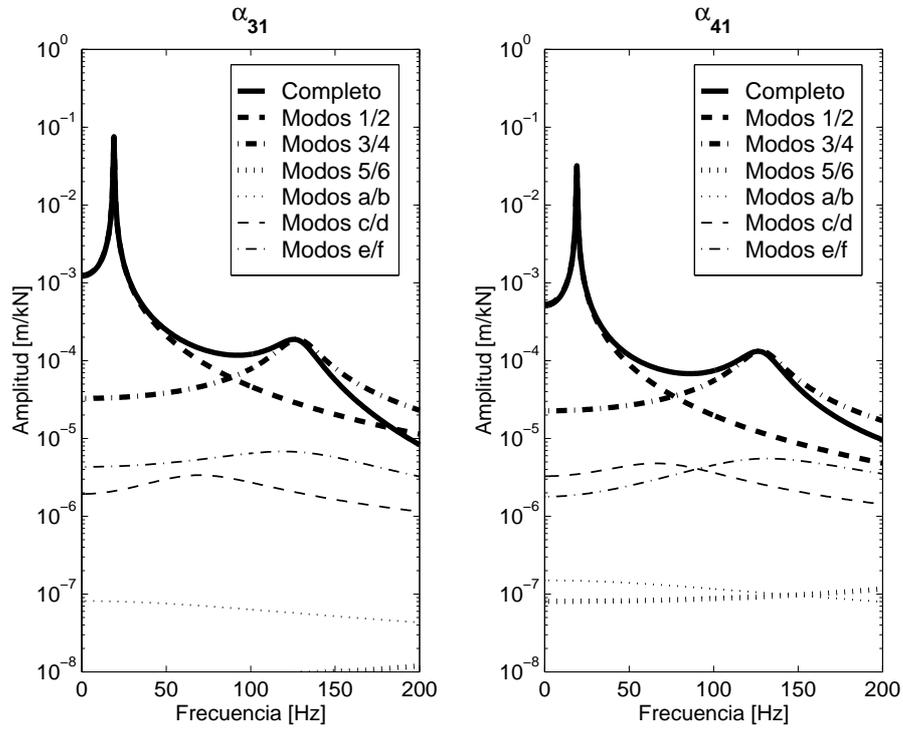


Fig. 9.42: Descomposición modal de la receptancia de la variante SM-D1-P0-N1

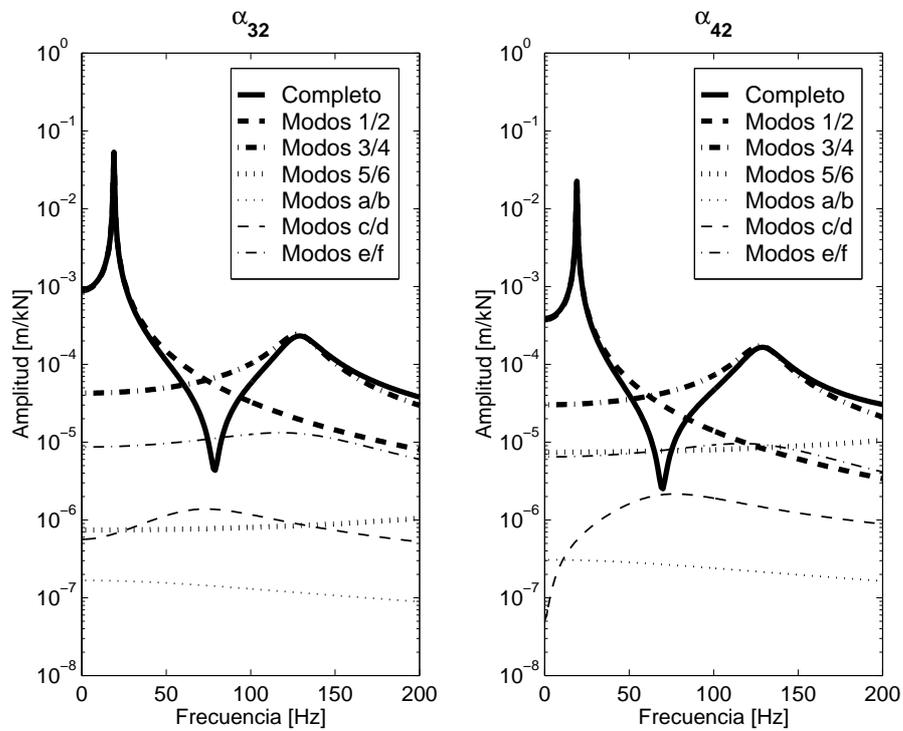


Fig. 9.42: Descomposición modal de la receptancia de la variante SM-D1-P0-N1 (cont.)

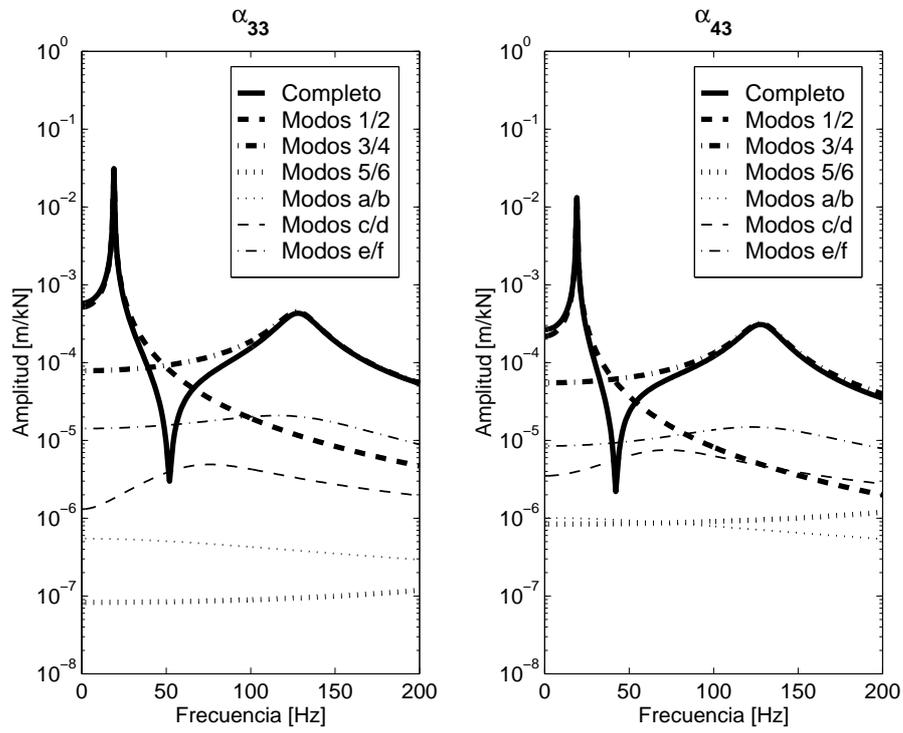


Fig. 9.42: Descomposición modal de la receptancia de la variante SM-D1-P0-N1 (cont.)

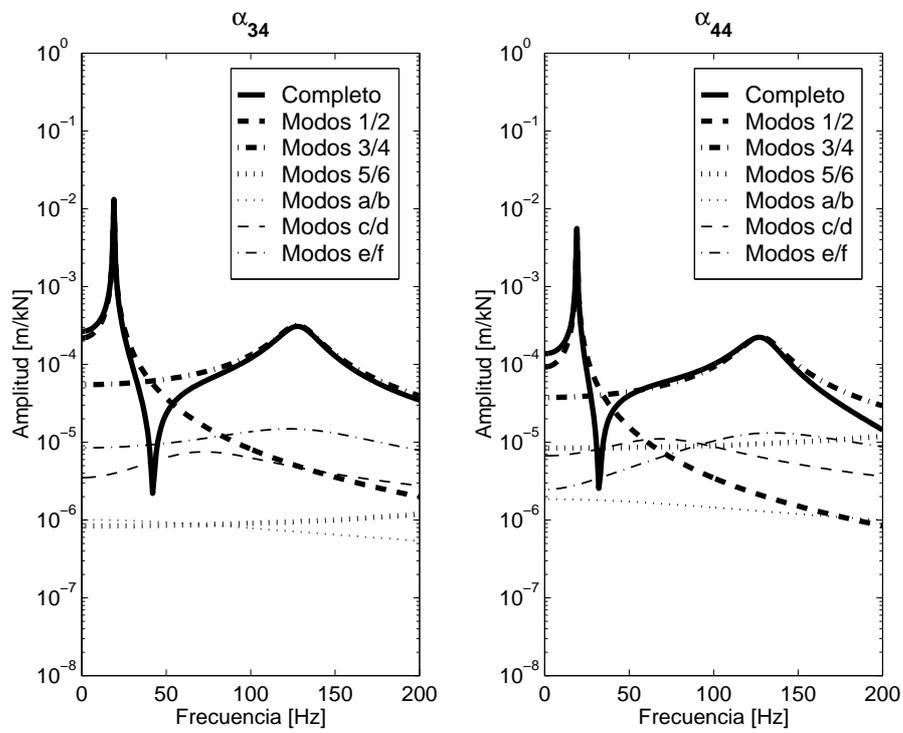


Fig. 9.42: Descomposición modal de la receptancia de la variante SM-D1-P0-N1 (cont.)

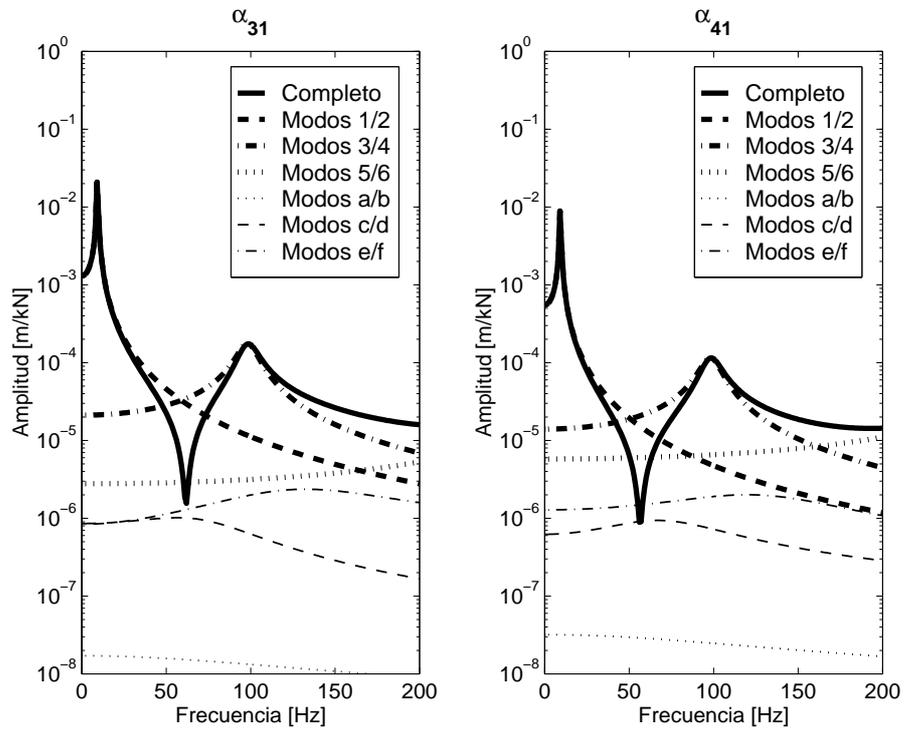


Fig. 9.43: Descomposición modal de la receptancia de la variante CM-D1-P0-N1

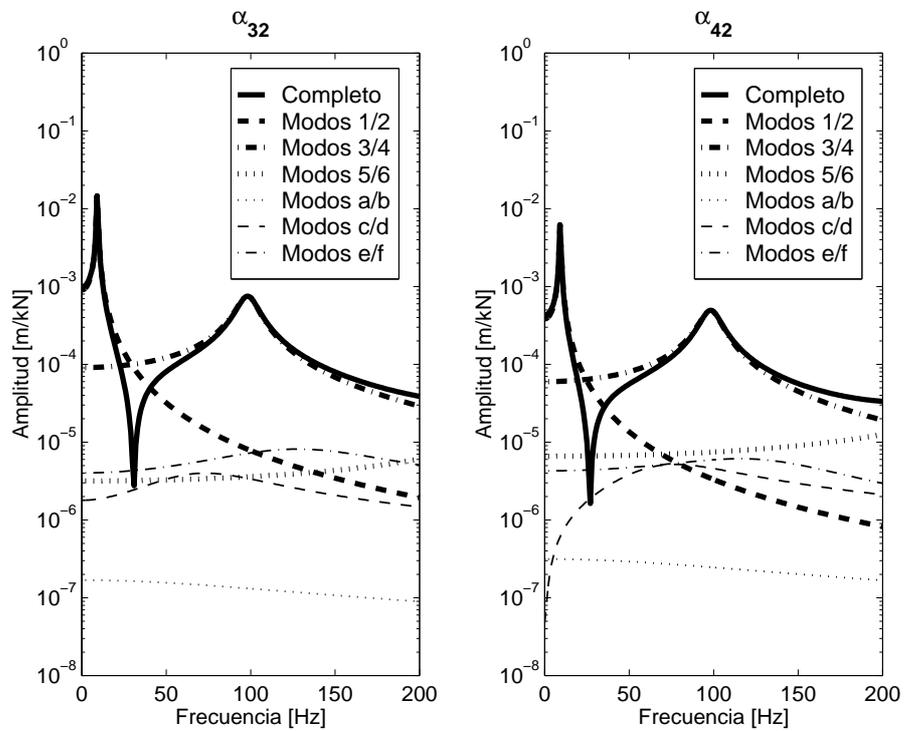


Fig. 9.43: Descomposición modal de la receptancia de la variante CM-D1-P0-N1 (cont.)

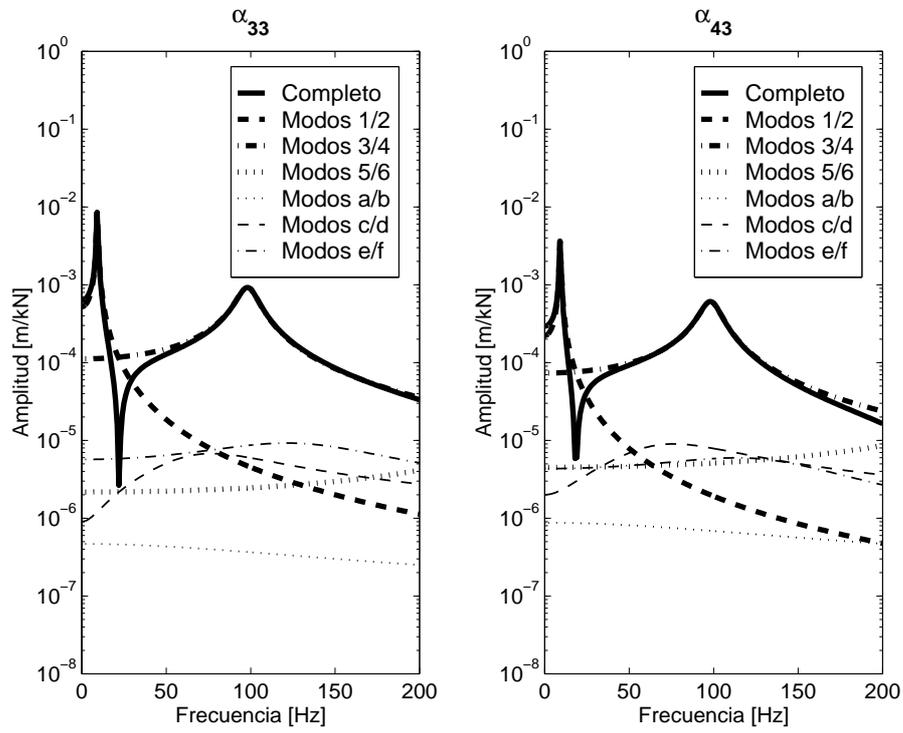


Fig. 9.43: Descomposición modal de la receptancia de la variante CM-D1-P0-N1 (cont.)

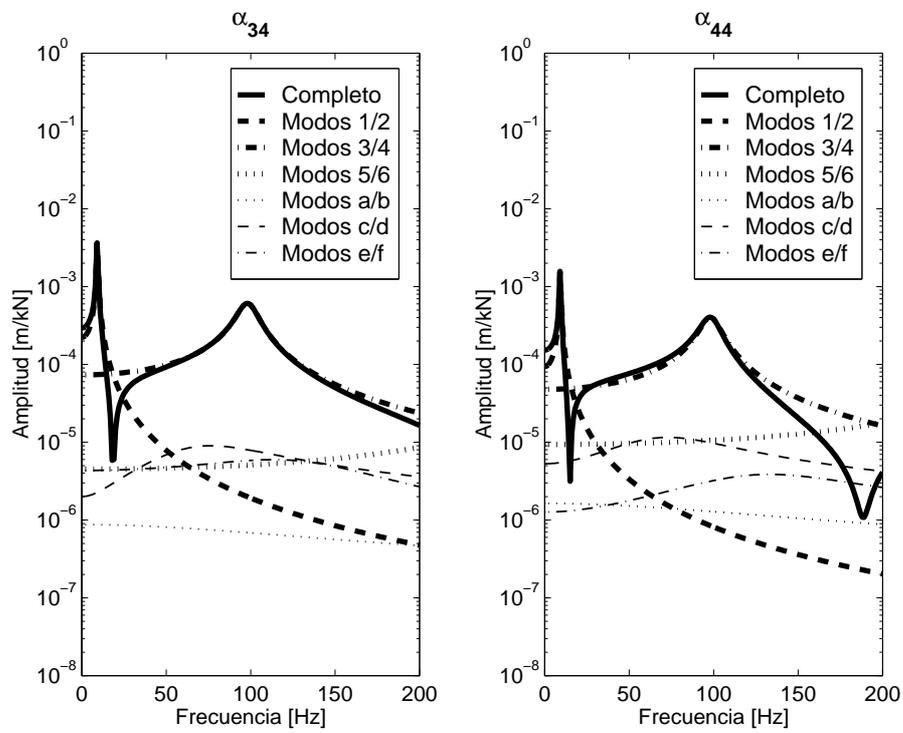


Fig. 9.43: Descomposición modal de la receptancia de la variante CM-D1-P0-N1 (cont.)

crítico. El amortiguamiento del 1° modo global primario (constituido por el par de modos complejos conjugados 1/2) resulta ligeramente superior al valor correspondiente a la condición de empotramiento perfecto en tanto que el amortiguamiento del 2° modo global primario (constituido por el par de modos complejos conjugados 3/4) toma valores notablemente superiores. La complejidad en la forma modal y el alto incremento en el valor del amortiguamiento indican que el 2° modo global primario resulta el más afectado por el fenómeno de interacción. La disminución del valor de la componente oscilatoria (parte imaginaria) de los polos producida por la flexibilización del apoyo para los 2 primeros modos globales primarios varía aproximadamente entre 10% y 15%. El 3° modo global primario (constituido por el par de modos complejos conjugados 5/6) se encuentra fuera del rango de análisis debido a la disminución de la sensibilidad de los transductores utilizados en el ensayo dinámico para frecuencias mayores a 250Hz. Sin embargo, las funciones de transferencia experimentales que alcanzan los 500Hz muestran claramente que el amortiguamiento del 3° modo resulta del orden del amortiguamiento del 1° modo.

Modo	Emp. perfecto		Dirección 1		Dirección 2	
	s_r	ξ_r [%]	s_r	ξ_r [%]	s_r	ξ_r [%]
a/b	–	–	–120.1 / – 206.2	100	–119.6 / – 205.2	100
c/d	–	–	–38.34 ± 66.78i	49.8	–38.31 ± 66.81i	49.7
e/f	–	–	–49.57 ± 126.0i	36.6	–47.66 ± 126.9i	35.2
1/2	–0.143 ± 22.43i	0.64	–0.157 ± 18.99i	0.82	–0.158 ± 19.54i	0.81
3/4	–0.143 ± 145.2i	0.10	–11.32 ± 128.2i	8.79	–13.39 ± 131.3i	10.1
5/6	–0.143 ± 395.9i	0.04	–2.385 ± 366.7i	0.65	–2.662 ± 373.4i	0.71

Tabla 9.6: Comparación de polos de empotramiento perfecto y variante SM-P0-N1

Modo	Emp. perfecto		Dirección 1		Dirección 2	
	s_r	ξ_r [%]	s_r	ξ_r [%]	s_r	ξ_r [%]
a/b	–	–	–120.4 / – 207.0	100	–119.7 / – 205.5	100
c/d	–	–	–38.10 ± 67.20i	49.3	–38.00 ± 67.26i	49.2
e/f	–	–	–54.17 ± 125.6i	39.6	–52.86 ± 128.3i	38.1
1/2	–0.143 ± 10.94i	1.31	–0.144 ± 9.252i	1.56	–0.145 ± 9.682i	1.49
3/4	–0.143 ± 117.2i	0.12	–5.938 ± 98.23i	6.04	–7.570 ± 101.6i	7.43
5/6	–0.143 ± 325.3i	0.04	–2.344 ± 289.4i	0.81	–3.099 ± 313.8i	0.99

Tabla 9.7: Comparación de polos de empotramiento perfecto y variante CM-P0-N1

La utilización de los ábacos de interacción presentados en el capítulo 6 y en el Apéndice C permiten la obtención de valores aproximados de las reducciones de las frecuencias y de las relaciones de amortiguamiento por radiación del Prototipo de Interacción debidas a los efectos de la interacción suelo-estructura. La utilización de una sección uniforme para la estructura con una masa por unidad de longitud $m = 0.01896 \text{ tn/m}$ y la adopción de un disco rígido de fundación apoyado sobre un semi-espacio homogéneo de suelo con una velocidad

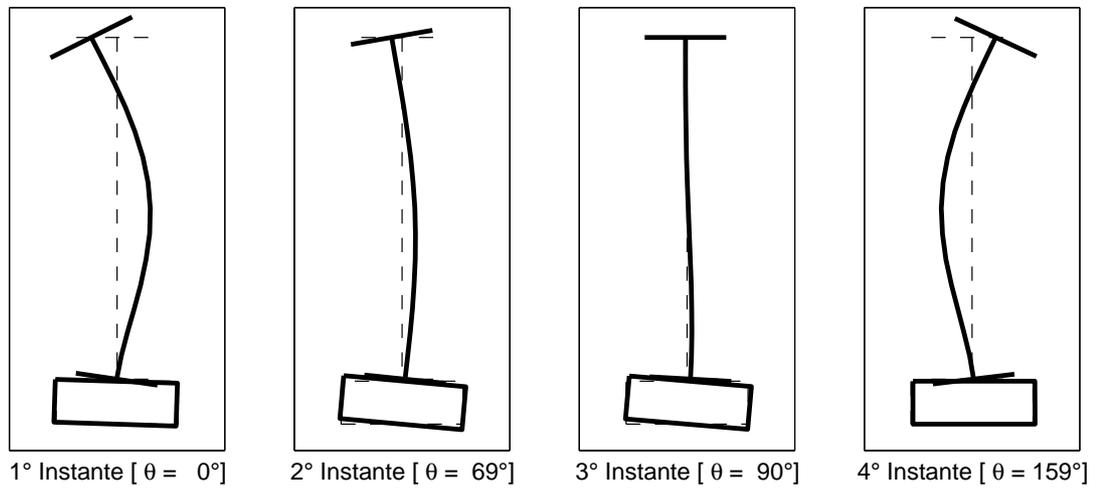


Fig. 9.44: Forma modal del 2° modo global primario de la variante SM-D1-P0-N1

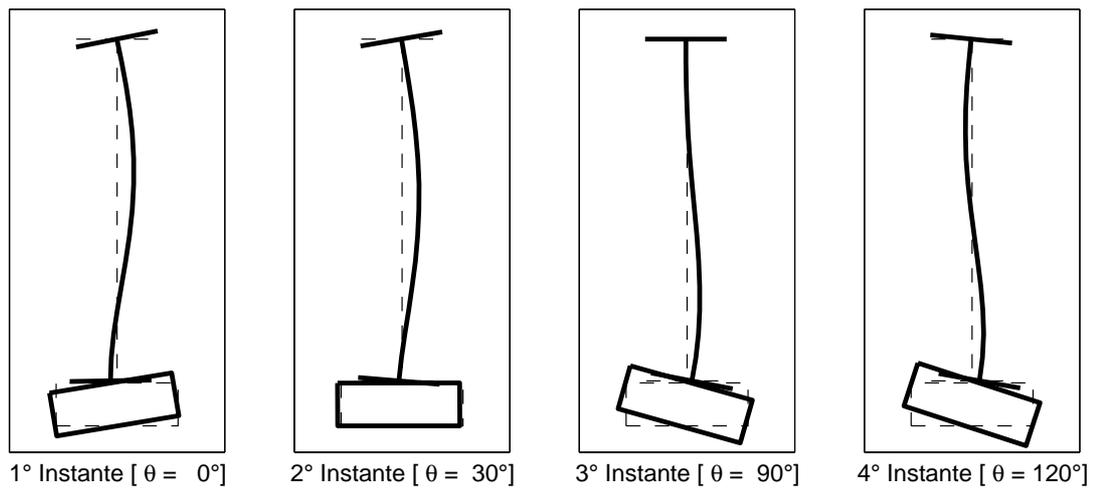


Fig. 9.45: Forma modal del 2° modo global primario de la variante CM-D1-P0-N1

de ondas de corte $V_s = 170 \text{ m/s}$ producen los siguientes parámetros adimensionales

$$\bar{L} = \frac{L}{r} = \frac{2.392 \text{ m}}{0.425 \text{ m}} \approx 5.6$$

$$\bar{EI} = \frac{EI}{\rho V_s^2 L^4} = \frac{1597 \text{ kN.m}^2}{1.40 \text{ tn/m}^3 \times 170^2 \text{ m}^2/\text{s}^2 \times 2.392^4 \text{ m}^4} \approx 1.2 \times 10^{-3}$$

$$\bar{m} = \frac{m}{\rho L^2} = \frac{0.01896 \text{ tn/m}}{1.40 \text{ tn/m}^3 \times 2.392^2 \text{ m}^2} \approx 2.4 \times 10^{-3}$$

En la Tabla 9.8 se presentan las relaciones entre los módulos de los polos promediados de ambas direcciones y los polos de empotramiento perfecto de los modelos calibrados del Prototipo de Interacción sin masa adicional junto con las relaciones entre módulos de polos extraídas de los ábacos de interacción utilizando los parámetros adimensionales calculados. La Tabla 9.8 muestra además las relaciones de amortiguamiento para estos mismos casos. Los valores promediados de las relaciones entre módulos de polos de los modelos calibrados resultan algo menores que los valores obtenidos de los ábacos de interacción debido a los efectos del resorte rotacional considerado. Las relaciones de amortiguamiento de los modos 1/2 y 5/6 de los modelos calibrados resultan menores a las obtenidas de los ábacos de interacción a pesar del amortiguamiento propio de los modelos de la estructura del Prototipo de Interacción. La causa de esta diferencia puede atribuirse a la menor disipación por radiación de los modelos calibrados por el menor giro del bloque de fundación debido al resorte rotacional. Las relaciones de amortiguamiento del modo 3/4 sólo presentan diferencias del orden del 25%.

Modo	Modelos calibrados		Abacos de interacción	
	$\frac{ s_r^{flex} }{ s_r^{emp} }$	ξ_r [%]	$\frac{ s_r^{flex} }{ s_r^{emp} }$	ξ_r [%]
1/2	0.86	0.8	0.90	~ 2.0
3/4	0.90	9.4	0.96	~ 7.0
5/6	0.94	0.7	0.98	~ 4.0

Tabla 9.8: Comparación de relaciones de polos y relaciones de amortiguamientos

9.2 Molino de Crudo (Planta L'Amalí - Loma Negra)

La Planta L'Amalí pertenece a la fábrica Loma Negra que se encuentra en la ciudad de Olavarría (provincia de Buenos Aires). El Molino de Crudo es una estructura de grandes dimensiones con una importante interacción suelo-estructura que representa un caso real relevante desde el punto de vista del presente trabajo.

9.2.1 Descripción del sistema

El Molino de Crudo consiste en una estructura metálica con un recipiente que almacena la materia prima y piezas móviles que realizan la trituración. La fundación del molino

está constituida por un bloque masivo de hormigón armado que puede considerarse prismático a los efectos del modelado. La característica más sobresaliente del sistema es que una considerable fracción de la masa total de aproximadamente un 80 % se encuentra concentrada en el bloque de fundación. En las Figuras 9.46 y 9.47 se presentan la planta y un corte del bloque de fundación respectivamente.

El objetivo principal del trabajo encargado por los propietarios consiste en el estudio de la propagación de las vibraciones producidas por el molino a través del suelo a los edificios colindantes. El interés se centra entonces en la respuesta dinámica del bloque de fundación para bajas frecuencias que depende fundamentalmente de los primeros modos naturales de vibración del sistema. Estos modos involucran principalmente la deformación del suelo circundante, el movimiento de cuerpo rígido del bloque de fundación y la deformación casi estática (o primer modo de base rígida) de la estructura del molino. Por lo tanto, a pesar de la gran complejidad de su estructura no es necesario utilizar un modelo riguroso del molino para reproducir el comportamiento del sistema para bajas frecuencias. De esta forma, la utilización de un oscilador simple acoplado al bloque de fundación resulta suficiente para representar la contribución de la estructura del molino a la respuesta global del sistema para este rango de frecuencias.

9.2.2 Ensayo del sistema

El sistema posee un plano vertical de simetría. La respuesta del sistema para cargas aplicadas sobre este plano de simetría puede reproducirse utilizando un modelo plano desacoplado de los restantes grados de libertad espaciales. De esta forma, la condición de simetría permite utilizar un modelo simple para ajustar propiedades globales del sistema.

La posición de los ejes cartesianos utilizados como referencia de las coordenadas del sistema es la siguiente:

- el eje X es horizontal y se encuentra en la intersección de la superficie del terreno y el plano de simetría,
- el eje Y es horizontal y perpendicular al plano de simetría, y se encuentra en la intersección de la superficie del terreno y una cara lateral del bloque de fundación, y
- el eje Z es vertical y está contenido en el plano de simetría.

La determinación experimental de la receptancia se realiza a través de ensayos impulsivos sobre la superficie del bloque de fundación que se encuentra a $2.00m$ sobre la superficie del terreno natural. Las cargas impulsivas se aplican sobre un único punto simbolizado con un triángulo en las Figuras 9.46 y 9.47 cuya ubicación se encuentra en la intersección del plano de simetría y la superficie del bloque de fundación a una distancia horizontal de $1.50m$ respecto al origen de coordenadas. Estas cargas se obtienen dejando caer a través de una grúa un bloque de hormigón de $0.50m \times 0.50m \times 1.00m$ designado en adelante como *martillo* de una altura de aproximadamente $0.60m$ sobre una plataforma rectangular provista con una cama de arena de $0.20m$ de espesor para eliminar contenidos de alta frecuencia. Esta plataforma posee en sus vértices celdas de carga vinculadas rígidamente con resina epoxi a la superficie del bloque de fundación para asegurar una transferencia efectiva de las cargas. En las Figuras 9.48 y 9.49 se muestra la secuencia de impacto del martillo sobre el bloque de fundación durante los ensayos impulsivos.

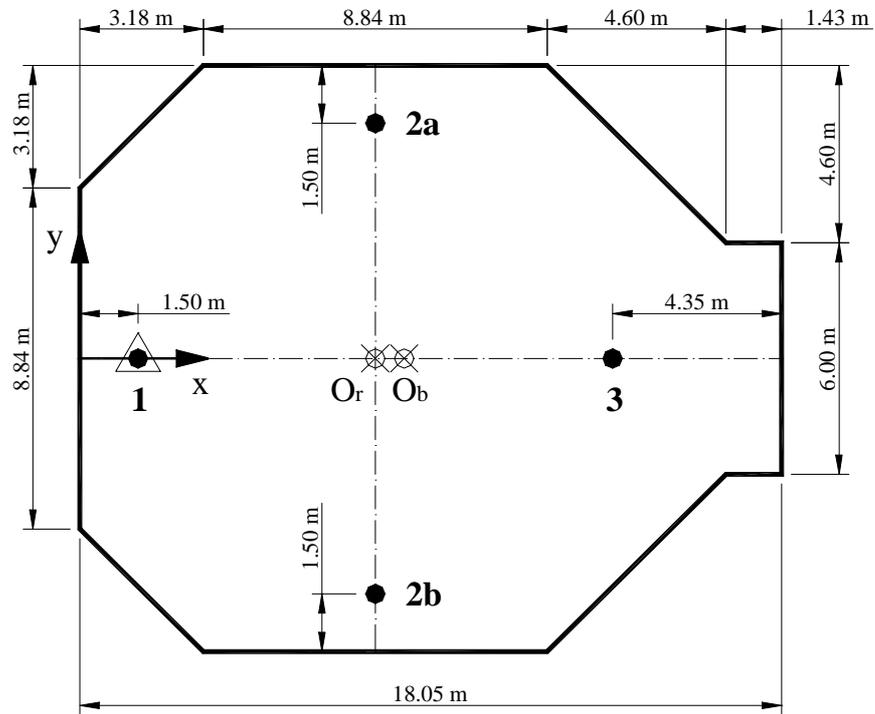


Fig. 9.46: Planta del bloque de fundación del Molino de Crudo

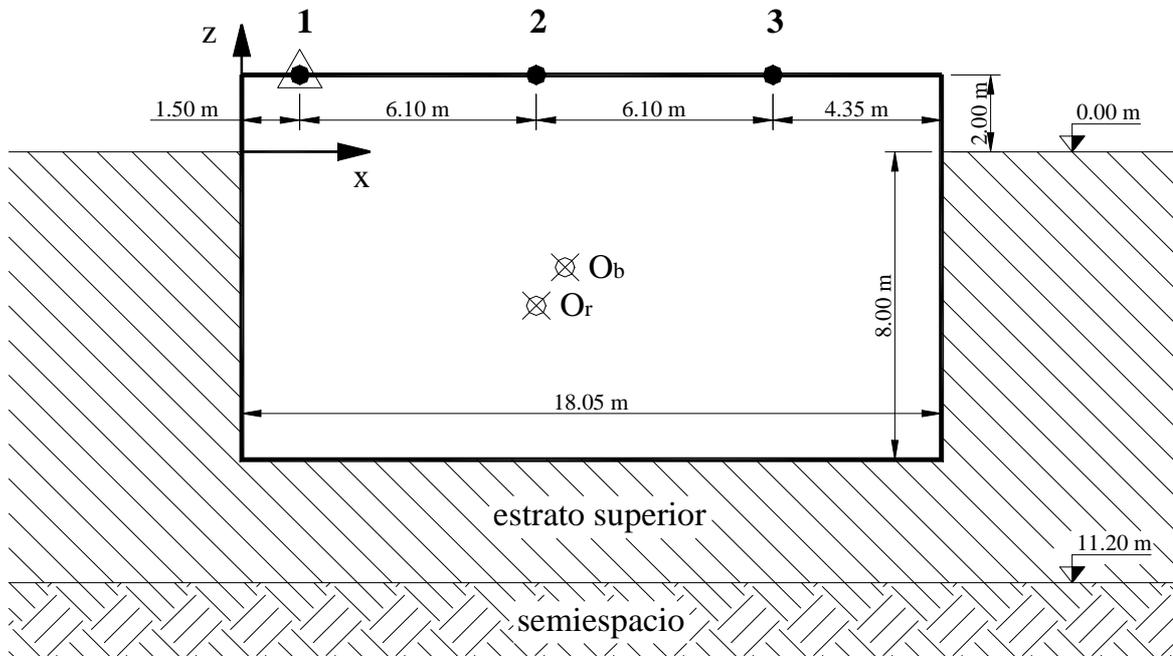


Fig. 9.47: Corte del bloque de fundación del Molino de Crudo



Fig. 9.48: *Martillo tomado por la grúa*

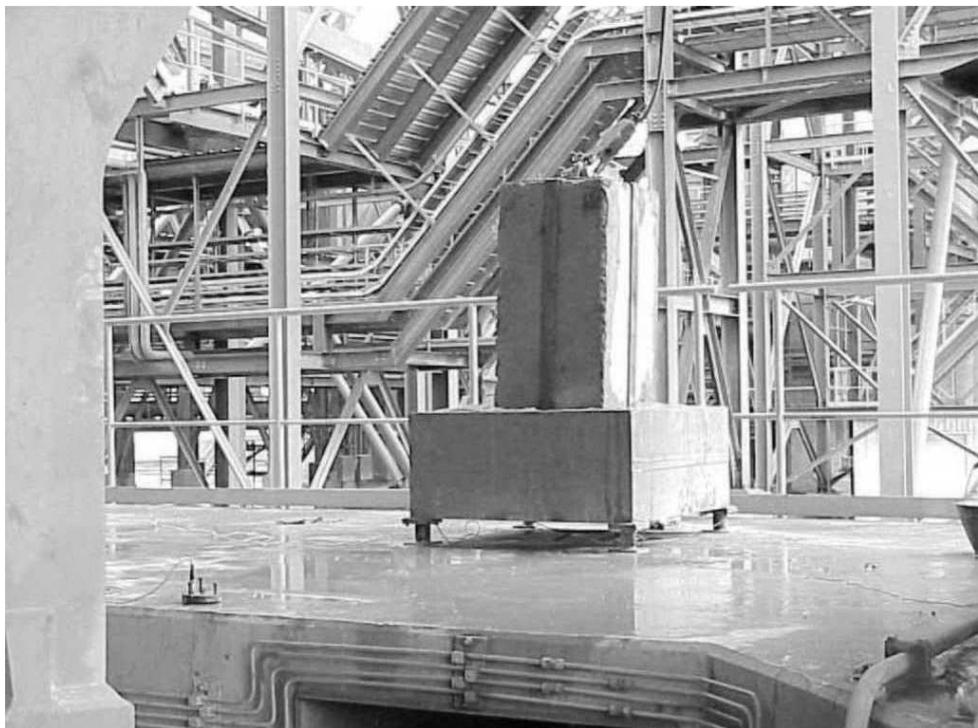


Fig. 9.49: *Martillo sobre la plataforma luego del impacto*

La respuesta del sistema se registra a través de sensores de aceleración uniaxiales colocados en dirección vertical sobre la superficie del bloque de fundación. La posición de los sensores se representa con círculos en las Figuras 9.46 y 9.47. La respuesta simétrica de los puntos 2a y 2b se promedia para obtener la respuesta en el plano X-Z del punto 2 ubicado sobre la línea que une los puntos 1 y 3 en la superficie del bloque. Las coordenadas relativas de estos puntos respecto al punto de aplicación de las cargas resultan

Punto	X	Y	Z
1	0.000	0.000	0.000
2	6.100	0.000	0.000
3	12.200	0.000	0.000

Dado que el bloque de fundación presenta una ligera flexibilidad se utiliza la respuesta de los puntos 1, 2 y 3 (que sería redundante si el bloque fuese infinitamente rígido) para ajustar con el criterio de mínimos cuadrados las componentes vertical y de giro del movimiento equivalente de cuerpo rígido. El movimiento vertical de un punto sobre la superficie del bloque de fundación puede obtenerse en función de las componentes de cuerpo rígido respecto al punto de impacto del martillo como

$$u_i = u_z^F - x \cdot \phi_y^F \tag{9.36}$$

La respuesta de los puntos medidos podría calcularse entonces como

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -6.10 \\ 1 & -12.20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_z^F \\ \phi_y^F \end{bmatrix} \tag{9.37}$$

Por lo tanto, las componentes de la receptancia experimental que pueden obtenerse con la disposición utilizada para los sensores son los *GL* vertical y de giro del bloque de fundación considerado infinitamente rígido

$$\begin{bmatrix} u_z^F \\ \phi_y^F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -6.10 \\ 1 & -12.20 \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \tag{9.38}$$

Esta expresión que se aplica para cada frecuencia de análisis permite obtener la columna de la matriz de receptancia vinculada al único punto utilizado para aplicar las cargas impulsivas. Los *GL* vertical y de giro se encuentran acoplados a diferencia del caso del bloque de fundación del Prototipo de Interacción. Por lo tanto, las componentes de la matriz de receptancia utilizadas para el ajuste son el término de la diagonal principal asociado al movimiento vertical y el término de acoplamiento de los movimientos vertical y de giro. La receptancia experimental toma valores considerados confiables en el rango de frecuencias entre 6Hz y 25Hz donde la coherencia supera 0.9.

9.2.3 Modelado del sistema

La definición de la receptancia experimental sobre el plano de simetría X-Z y la hipótesis de bloque de fundación infinitamente rígido permiten utilizar un modelo plano de pocos

GL para reproducir la respuesta del sistema dentro del rango de frecuencias de análisis. El modelo propuesto para el sistema completo se muestra en la Figura 9.50. Los 4 GL independientes de este modelo son

- 3 GL del bloque de fundación (u_x^F , u_z^F y ϕ_y^F), y
- 1 GL horizontal adicional para la estructura del molino (u_x^M).

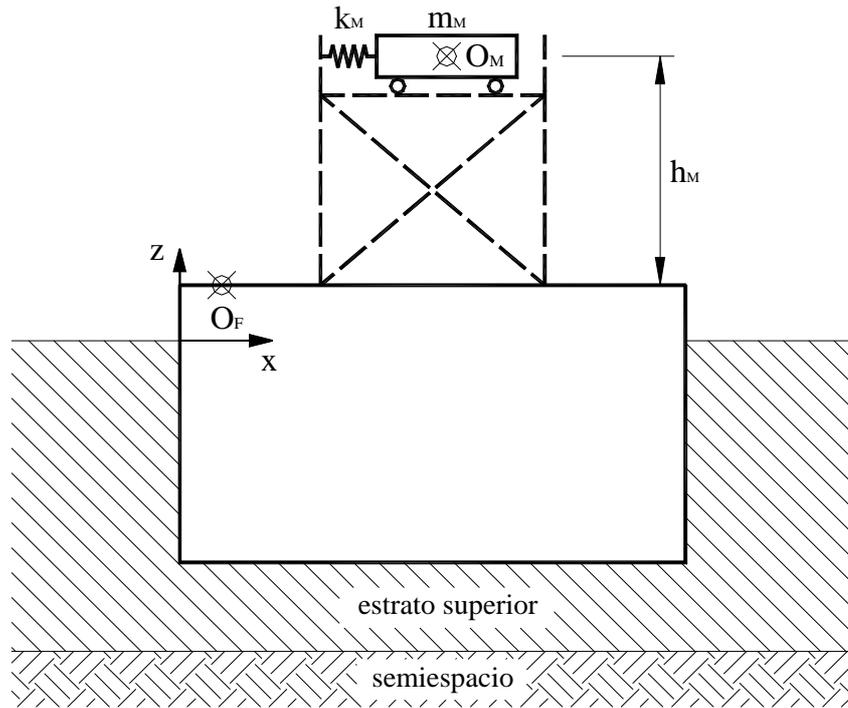


Fig. 9.50: Modelo del Molino de Crudo

La flexibilidad dinámica analítica en el plano $X-Z$ del bloque de fundación considerado infinitamente rígido y sin masa se calcula con el programa *SASSI* ([34]). El GL vertical de la fundación para este sistema resulta siempre acoplado a los GL horizontal y de giro debido tanto a la posición del punto de impacto como a la excentricidad existente entre el baricentro y el centro de rigidez.

Los datos obtenidos del perfil de suelo a través de ensayos de hoyos cruzados (*cross hole*) y de análisis espectral de ondas superficiales (*SASW*) sugieren la adopción de un perfil simplificado que consiste en un estrato de $11.20m$ de espesor apoyado sobre un semiespacio. En ambos dominios se adopta una densidad $\rho = 1.75 \text{ tn}/m^3$ y un coeficiente de Poisson $\nu = 1/3$. La velocidad de propagación de ondas de corte del estrato V_s es un parámetro de ajuste en tanto que la relación entre velocidades del estrato y el semiespacio V_s/V_s^∞ toma valores discretos. A los efectos de la adimensionalización de las curvas de receptancia calculadas con el programa *SASSI* se utilizan como valores de referencia los coeficientes de flexibilidad estática de un disco rígido sobre la superficie de un semiespacio extraídos del trabajo de Luco et al. ([52]). El cálculo de los coeficientes de flexibilidad estática se realiza utilizando la velocidad de propagación correspondiente al estrato superior y un radio equivalente $r = 7.600m$. Dado que la forma de las curvas adimensionalizadas depende de la relación entre las velocidades del estrato y el semiespacio se adoptan 3 valores que

generan los siguientes casos de análisis

- *Caso 1:* $V_s/V_s^\infty = 0.50$
- *Caso 2:* $V_s/V_s^\infty = 0.60$
- *Caso 3:* $V_s/V_s^\infty = 0.70$

Los valores de flexibilidad estática utilizados para la adimensionalización de las curvas tomando $V_s = 250m/s$ para el caso 1, $V_s = 300m/s$ para el caso 2 y $V_s = 350m/s$ para el caso 3 se presentan en la Tabla 9.9.

Caso	α_{hh}^o $\frac{1}{8} \frac{(2-\nu)}{\rho V_s^2 r}$ $\left[10^{-7} \frac{m}{kN} \right]$	α_{vv}^o $\frac{1}{4} \frac{(1-\nu)}{\rho V_s^2 r}$ $\left[10^{-7} \frac{m}{kN} \right]$	α_{mm}^o $\frac{3}{8} \frac{(1-\nu)}{\rho V_s^2 r^3}$ $\left[10^{-9} \frac{1}{kN.m} \right]$	$\alpha_{hm}^o \mid \alpha_{mh}^o$ $\sqrt{\alpha_{hh}^o \cdot \alpha_{mm}^o}$ $\left[10^{-8} \frac{1}{kN} \right]$	$\alpha_{vm}^o \mid \alpha_{mv}^o$ $\sqrt{\alpha_{vv}^o \cdot \alpha_{mm}^o}$ $\left[10^{-8} \frac{1}{kN} \right]$	$\alpha_{hv}^o \mid \alpha_{vh}^o$ $\sqrt{\alpha_{hh}^o \cdot \alpha_{vv}^o}$ $\left[10^{-7} \frac{m}{kN} \right]$
1	2.506	2.005	5.207	3.612	3.231	2.242
2	1.740	1.392	3.616	2.509	2.244	1.557
3	1.279	1.023	2.657	1.843	1.649	1.144

Tabla 9.9: Valores de flexibilidad estática de referencia

El bloque de fundación se apoya en forma efectiva en el fondo de la excavación a una profundidad de $8m$ de la superficie del terreno natural. Sin embargo, las caras laterales de la fundación poseen una interfaz flexible en contacto con el suelo constituida por material de baja compacidad colocado luego del hormigonado del bloque. La simulación de esta característica se realiza asumiendo una *flexibilidad aparente* del bloque de fundación que se apoya sobre una superficie infinitamente rígida en el fondo de la excavación donde se traslada el punto de referencia de la rigidez. El efecto de flexibilización lateral se estudia para el caso 2 utilizando 3 relaciones entre los módulos de elasticidad longitudinal del hormigón E_{H° y el suelo E_{S°

- *Caso 2A:* $E_{H^\circ}/E_{S^\circ} = 10$
- *Caso 2B:* $E_{H^\circ}/E_{S^\circ} = 2.5$
- *Caso 2C:* $E_{H^\circ}/E_{S^\circ} = 1$

donde

$$E_{S^\circ} = 2 \cdot (1 + \nu) \cdot \rho \cdot V_s^2 \tag{9.39}$$

Las curvas analíticas de los casos analizados calculadas con el programa *SASSI* se muestran en las Figuras 9.51 a 9.56 junto con las curvas ajustadas con el *MPMC* para obtener matrices modales que se convierten luego en matrices equivalentes de rigidez y amortiguamiento. Los índices utilizados para los *GL* del bloque de fundación son los siguientes

<i>GL</i>	u_x^F	u_z^F	ϕ_y^F
<i>Indice</i>	h	v	m

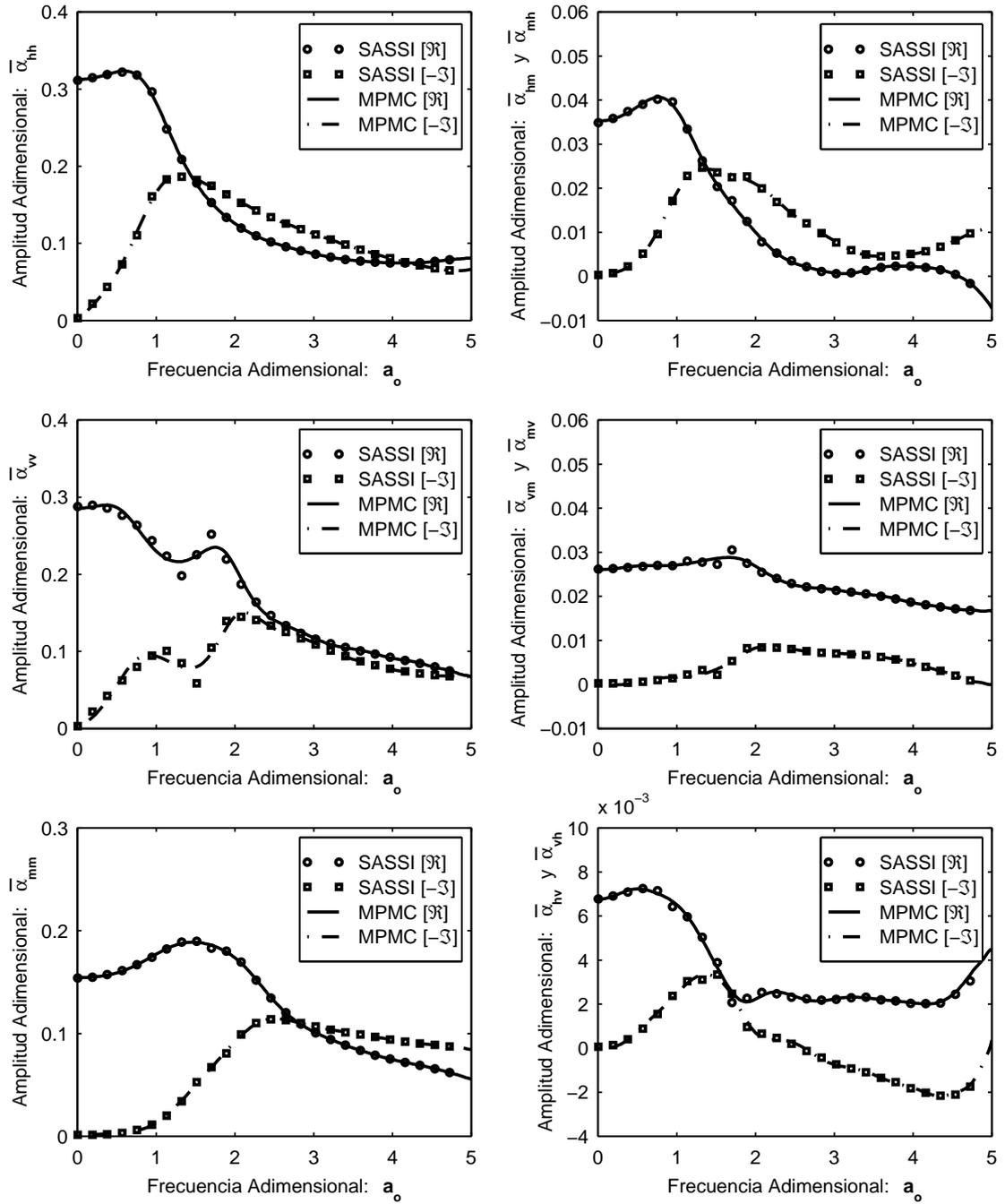


Fig. 9.51: Curvas analíticas de receptancia adimensional del caso 1 ($V_s/V_s^\infty = 0.50$)

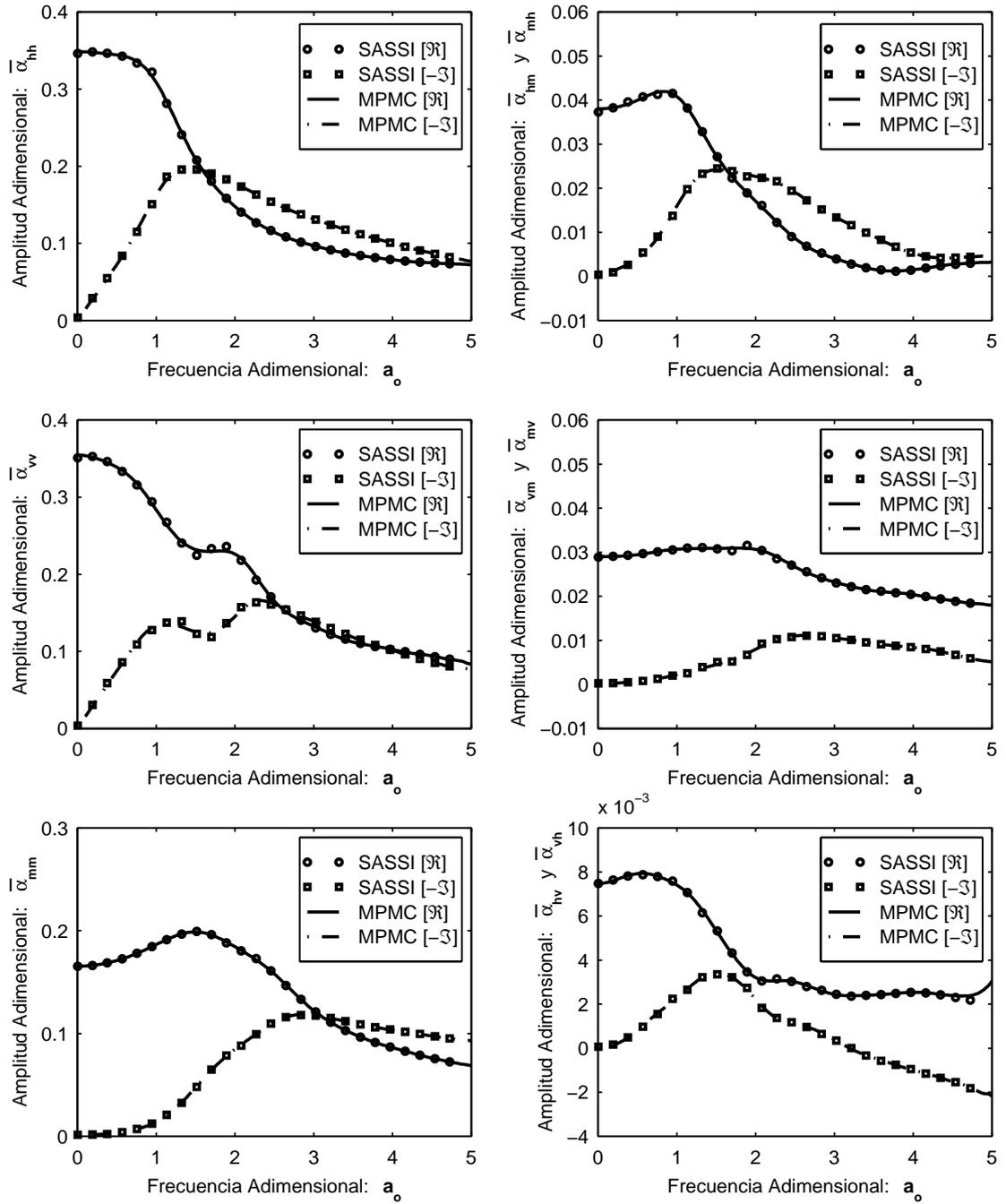


Fig. 9.52: Curvas analíticas de receptancia adimensional del caso 2 ($V_s/V_s^\infty = 0.60$)

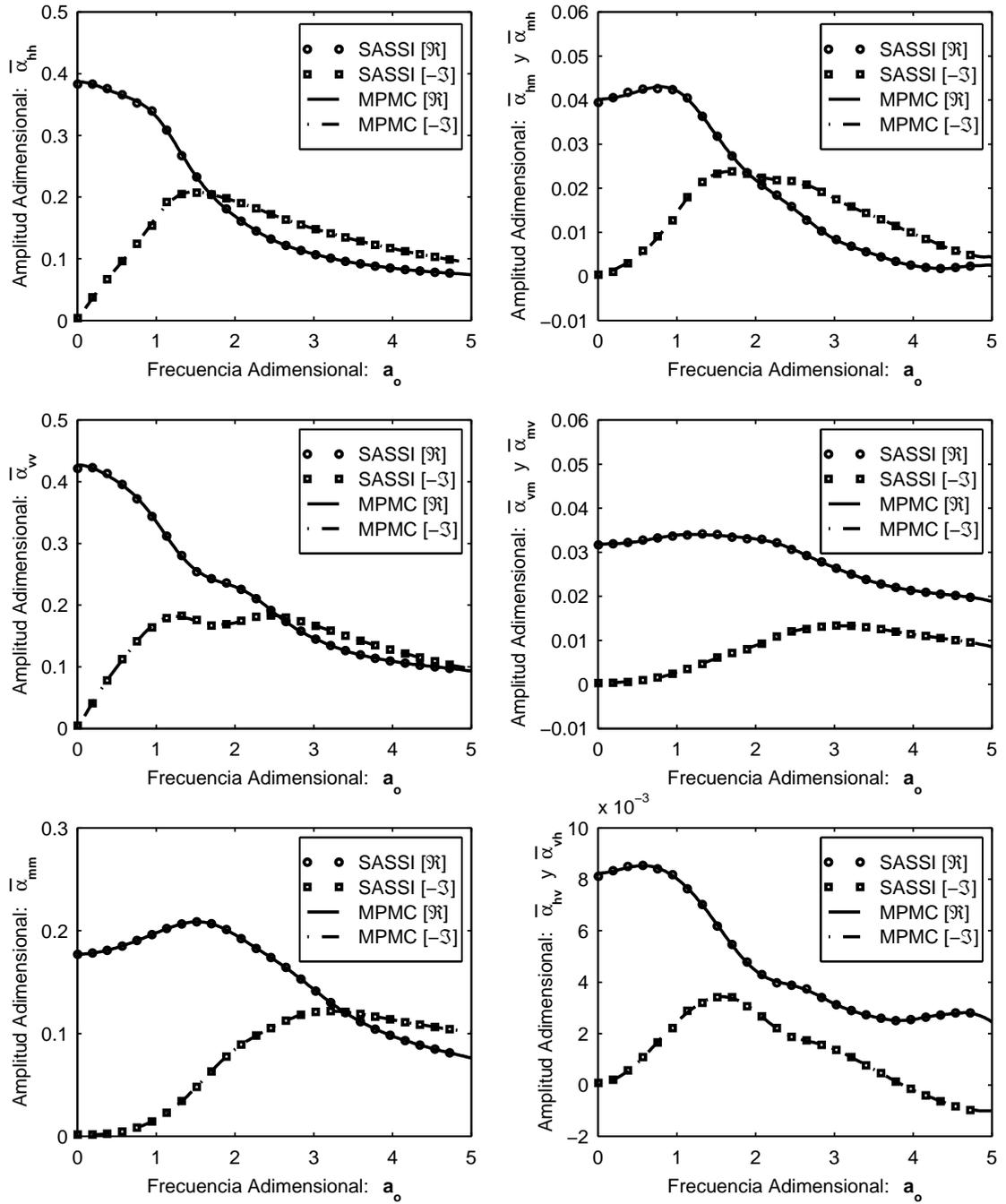


Fig. 9.53: Curvas analíticas de receptancia adimensional del caso 3 ($V_s/V_s^\infty = 0.70$)

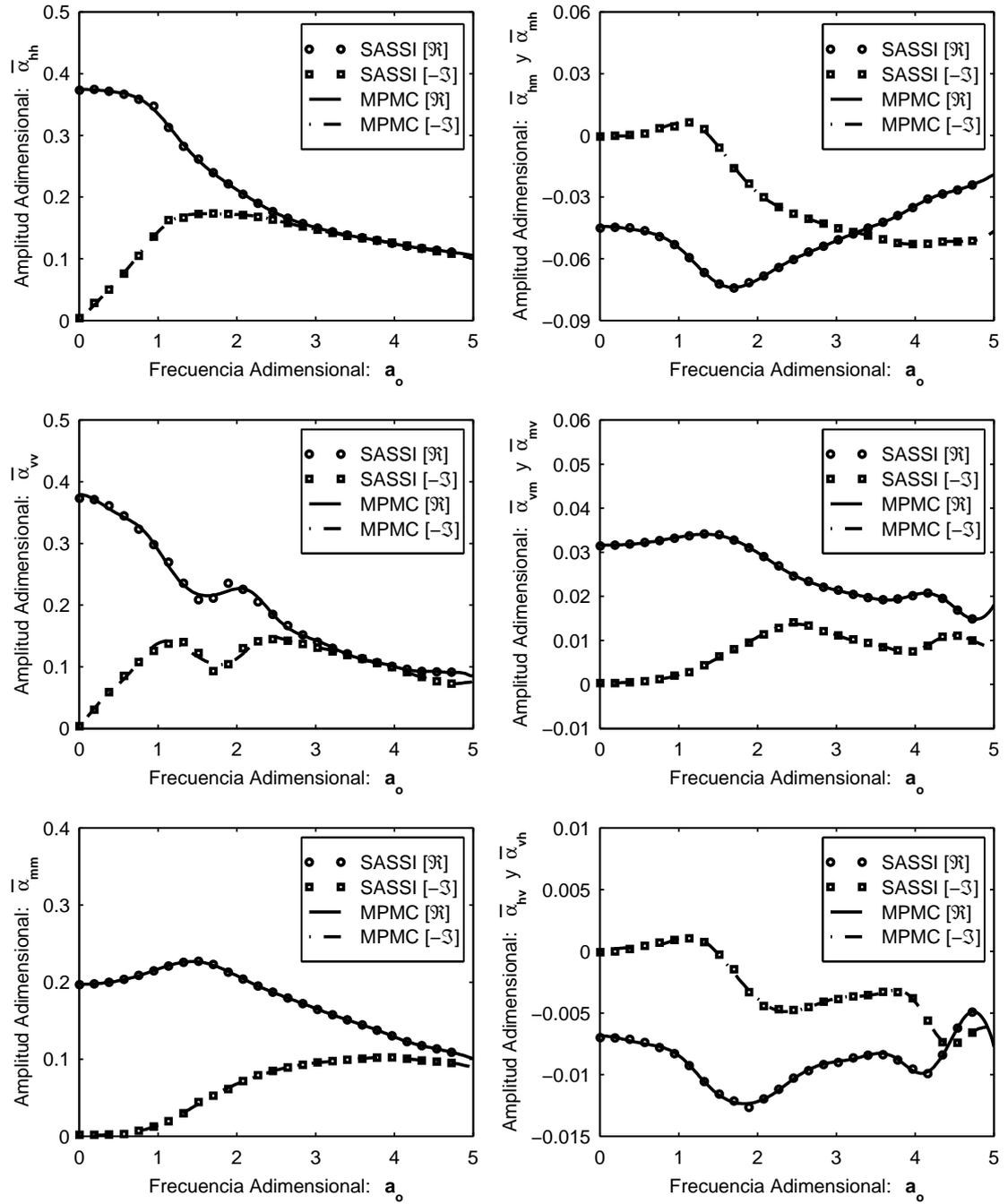


Fig. 9.54: Curvas analíticas de receptancia adimensional del caso 2A ($E_{H^0}/E_{S^0} = 10$)

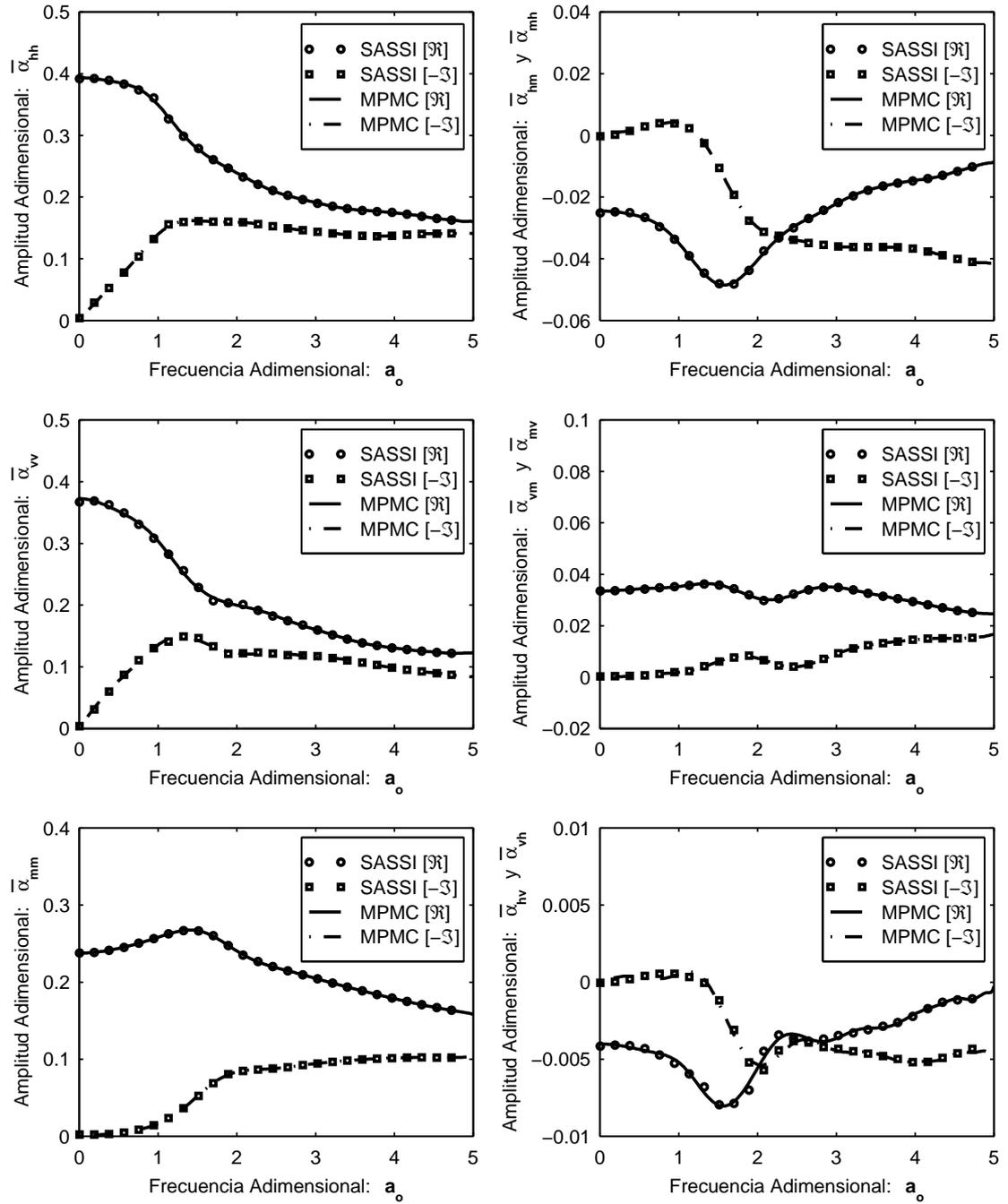


Fig. 9.55: Curvas analíticas de receptancia adimensional del caso 2B ($E_{H^0}/E_{S^0} = 2.5$)

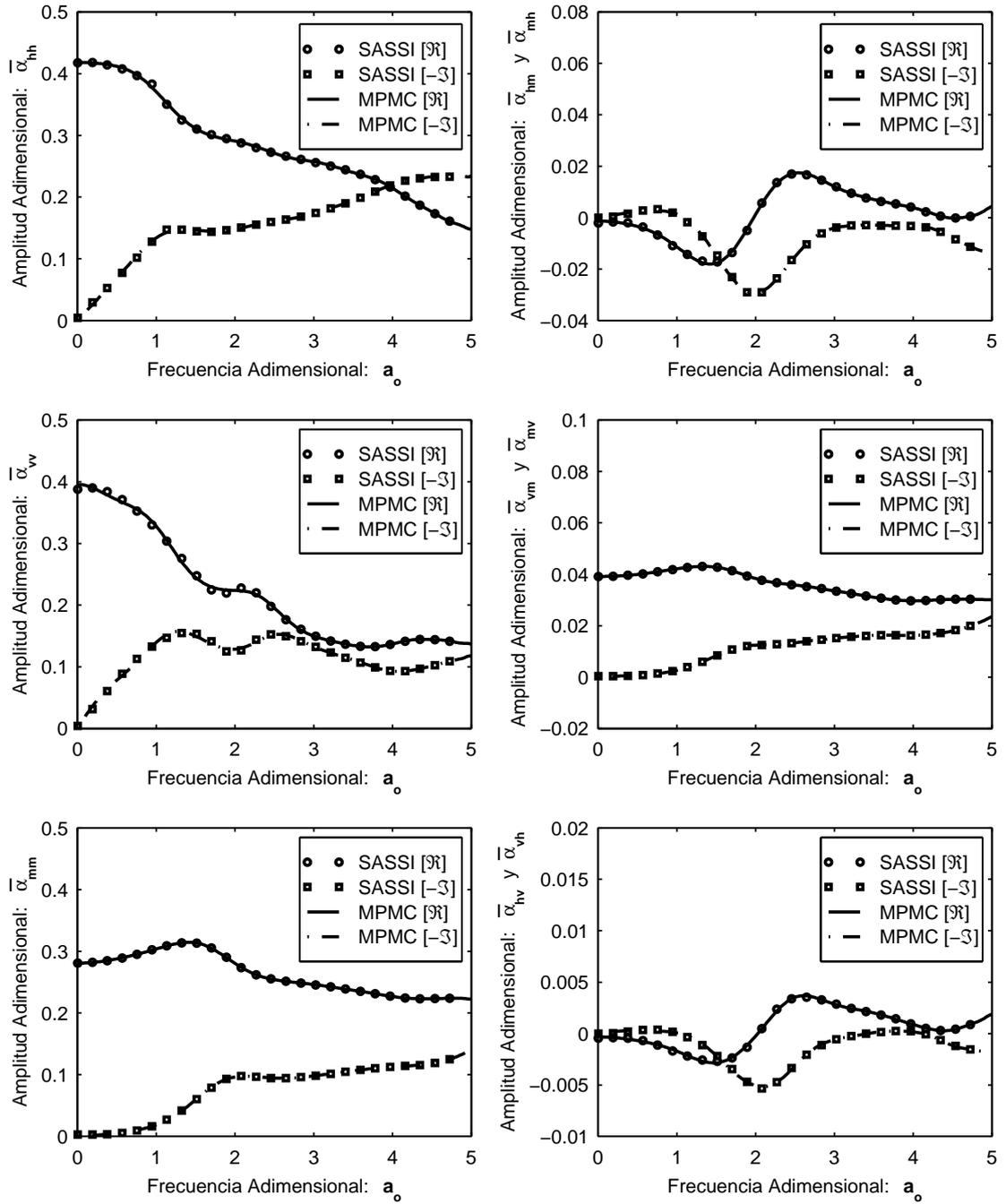


Fig. 9.56: Curvas analíticas de receptancia adimensional del caso 2C ($E_{H^0}/E_{S^0} = 1$)

Las cargas unitarias para evaluar la flexibilidad dinámica de la fundación se aplican en el punto de referencia de la rigidez \mathbf{O}_r . La matriz diagonal de masa referida al baricentro \mathbf{O}_b se calcula en función de la densidad, el volumen y el momento de inercia respecto al eje Y de la fundación. En las Figuras 9.46 y 9.47 se muestra la ubicación del punto de referencia de la rigidez \mathbf{O}_r y del baricentro \mathbf{O}_b del bloque de fundación. Las coordenadas de las matrices del modelo analítico referidas a estos puntos deben transformarse a las coordenadas del punto de aplicación de las cargas impulsivas \mathbf{O}_F para obtener la contraparte analítica de la receptancia. Las coordenadas de estos puntos son

Punto	X	Y	Z
\mathbf{O}_r	7.600	0.000	-4.000
\mathbf{O}_b	8.342	0.000	-3.000
\mathbf{O}_F	1.500	0.000	2.000

La matriz de masa del bloque de fundación referida al baricentro es la siguiente

$$M_b = \begin{bmatrix} 5633 \text{ tn} & 0 & 0 \\ 0 & 5633 \text{ tn} & 0 \\ 0 & 0 & 169000 \text{ tn.m}^2 \end{bmatrix} \quad (9.40)$$

Las coordenadas del baricentro se obtienen en función de las coordenadas del punto de impacto como

$$\begin{bmatrix} u_x^b \\ u_z^b \\ \phi_y^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & z_b \\ 0 & 1 & -x_b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x^F \\ u_z^F \\ \phi_y^F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5.000 \\ 0 & 1 & -6.842 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x^F \\ u_z^F \\ \phi_y^F \end{bmatrix} \quad (9.41)$$

La matriz de masa referida al punto de impacto deja de ser diagonal resultando

$$M_F = \begin{bmatrix} 5633 \text{ tn} & 0 & -28170 \text{ tn.m} \\ 0 & 5633 \text{ tn} & -38540 \text{ tn.m} \\ -28170 \text{ tn.m} & -38540 \text{ tn.m} & 573500 \text{ tn.m}^2 \end{bmatrix} \quad (9.42)$$

Las coordenadas del punto de referencia de la rigidez se obtienen en función de las coordenadas del punto de impacto como

$$\begin{bmatrix} u_x^r \\ u_z^r \\ \phi_y^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & z_r \\ 0 & 1 & -x_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x^F \\ u_z^F \\ \phi_y^F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6.000 \\ 0 & 1 & -6.100 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x^F \\ u_z^F \\ \phi_y^F \end{bmatrix} \quad (9.43)$$

Esta matriz de transformación permite referir las coordenadas físicas de las matrices de rigidez y amortiguamiento al punto de impacto. Las coordenadas generalizadas de estas matrices no necesitan ser transformadas.

El cuarto *GL* del sistema es el desplazamiento horizontal u_x^M de la estructura del molino. La masa m_M del molino se considera concentrada en el punto \mathbf{O}_M (se desprecia su inercia rotacional) a una altura h_M de la superficie del terreno y vinculada a través de un resorte k_M a un punto infinitamente próximo \mathbf{O}_m con las mismas coordenadas pero formando parte del

bloque de fundación. La masa del molino se asume rígidamente vinculada a la fundación en la dirección vertical. Las matrices de rigidez y masa de la estructura del molino en función de las coordenadas u_x^M , u_x^m , u_z^m y ϕ_y^m resultan

$$K_{\mathbf{m}} = \left[\begin{array}{c|ccc} k_M & -k_M & 0 & 0 \\ \hline -k_M & k_M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad M_{\mathbf{m}} = \left[\begin{array}{c|ccc} m_M & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (9.44)$$

Estas coordenadas se obtienen en función de las coordenadas globales del sistema u_x^M , u_x^F , u_z^F y ϕ_y^F como

$$\left[\begin{array}{c} u_x^M \\ u_x^m \\ u_z^m \\ \phi_y^m \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & z_m \\ 0 & 0 & 1 & -x_m \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} u_x^M \\ u_x^F \\ u_z^F \\ \phi_y^F \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & h_M \\ 0 & 0 & 1 & -6.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} u_x^M \\ u_x^F \\ u_z^F \\ \phi_y^F \end{array} \right] \quad (9.45)$$

Por lo tanto, las matrices de la estructura del molino referidas a las coordenadas globales resultan

$$K_M = \left[\begin{array}{c|ccc} k_M & -k_M & 0 & -h_M \cdot k_M \\ \hline -k_M & k_M & 0 & h_M \cdot k_M \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -h_M \cdot k_M & h_M \cdot k_M & 0 & h_M^2 \cdot k_M \end{array} \right] \quad (9.46)$$

$$M_M = \left[\begin{array}{c|ccc} m_M & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_M & -6.1 \cdot m_M \\ 0 & 0 & -6.1 \cdot m_M & 37.21 \cdot m_M \end{array} \right] \quad (9.47)$$

El ensamblaje de las matrices del bloque de fundación y de la estructura del molino permite obtener las matrices del sistema completo utilizadas en el cálculo de la receptancia analítica.

9.2.4 Ajuste del modelo del sistema

Los parámetros de ajuste seleccionados para la calibración del modelo del sistema completo son

1. la constante del resorte de vinculación de la estructura y la fundación k_M ,
2. la masa de la estructura del molino m_M ,
3. la altura de la masa del molino desde la superficie del terreno h_M , y
4. la velocidad de propagación de las ondas de corte del estrato superior V_s .

El ajuste se realiza en el rango de frecuencias con buena coherencia que se extiende de 6 a 25Hz utilizando la siguiente norma de error para el control de la convergencia

$$\|\Delta\alpha\|_I = \sqrt{\frac{w_{vv}^2}{n_k} \sum_{k=1}^{n_k} |\alpha_{vv}^x(f_k) - \alpha_{vv}^a(f_k)|^2 + \frac{w_{mv}^2}{n_k} \sum_{k=1}^{n_k} |\alpha_{mv}^x(f_k) - \alpha_{mv}^a(f_k)|^2} \quad (9.48)$$

donde w_{vv} y w_{mv} son pesos relativos utilizados para conseguir un ajuste balanceado en virtud de la diferencia de unidades de los GL medidos. Los resultados de los ajustes de los distintos casos se muestran en las Figuras 9.57 a 9.62.

A pesar de sus escasas dimensiones se observa que el modelo tiene la capacidad de reproducir satisfactoriamente las curvas experimentales excepto para α_{mv}^x en el rango de frecuencias de 8 a 13Hz. Las variantes estudiadas del caso 2 permiten comprobar que estos picos no pueden atribuirse a la flexibilización lateral del bloque de fundación. La norma de error alternativa $\|\Delta\alpha\|_{II}$ excluye entonces el rango de frecuencias de α_{mv}^x con ajuste pobre para obtener la bondad del ajuste en las zonas de la receptancia con mejor aproximación. Los valores de los parámetros ajustados se presentan en la Tabla 9.10 donde se comprueba que el caso 3 con menor valor de $\|\Delta\alpha\|_I$ produce el mejor ajuste global. Sin embargo, la misma norma de error para el caso 2 sólo resulta ligeramente superior. La relación entre la masa del bloque de fundación (m_F) y la masa total ajustada del sistema ($m_F + m_M$) para el caso 3 resulta del 76 % mientras que para el caso 2 resulta del 81 %. Ambas relaciones son muy próximas al valor estimado del 80 % teniendo en cuenta las incertidumbres en la cantidad de material considerada dentro del molino.

En la Figura 9.63 se muestran los perfiles de velocidad de ondas de corte del suelo obtenidos con los métodos de auscultación dinámica junto con el perfil del modelo analítico que utiliza los parámetros ajustados para el caso 3. Se observa que las bajas velocidades de propagación de las capas superficiales del suelo entre 0 y 4m no influyen en el valor ajustado del estrato unificado que toma un valor medio de las profundidades entre 4m y el límite inferior del estrato en 11.2m. Por otra parte, las caídas de la velocidad de propagación de las profundidades entre 15 y 20m no repercuten en el valor ajustado para el semiespacio.

Caso	k_M [$10^7 \frac{kN}{m}$]	m_M [tn]	h_M [m]	V_s [$\frac{m}{s}$]	V_s^∞ [$\frac{m}{s}$]	$\ \Delta\alpha\ _I$ [10^6]	$\ \Delta\alpha\ _{II}$ [10^6]
1	0.373	878	12.4	305	610	0.203	0.154
2	0.569	1314	8.49	324	540	0.168	0.134
3	0.797	1804	5.72	343	491	0.163	0.146
2A	0.701	1412	5.78	339	564	0.185	0.172
2B	0.823	1402	4.04	362	603	0.190	0.175
2C	1.448	2099	0.09	396	660	0.203	0.183

Tabla 9.10: Valores de los parámetros ajustados del Molino de Crudo

9.2.5 Comentarios finales

El modelo simplificado del sistema completo permite simular satisfactoriamente la respuesta medida sobre el bloque de fundación. La adopción de un perfil de suelo con un único estrato apoyado sobre un semiespacio resulta adecuada. La inclusión de sólo un GL para la masa superior de la estructura del molino es suficiente para reproducir el pico próximo a 20Hz y acomodar la fase de la respuesta. Los picos de α_{mv}^x en el rango de frecuencias de 8 a 13Hz atribuidos a resonancias de la estructura no se reproducen por la simplificación del modelo

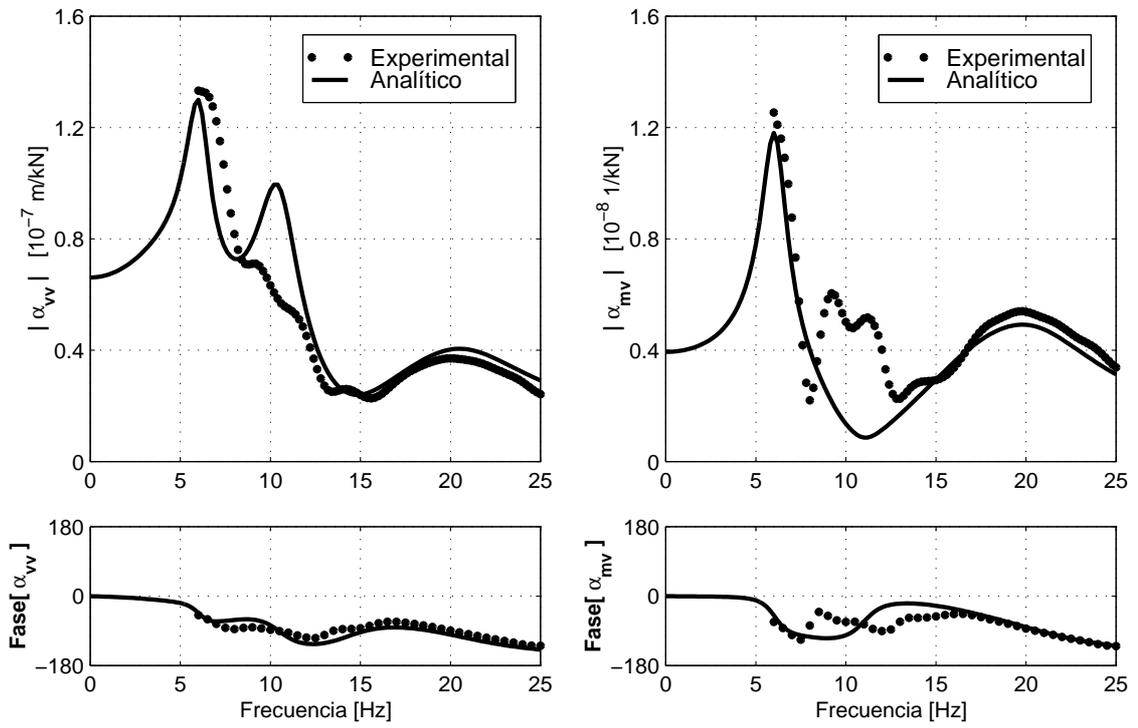


Fig. 9.57: Ajuste de receptancia del caso 1

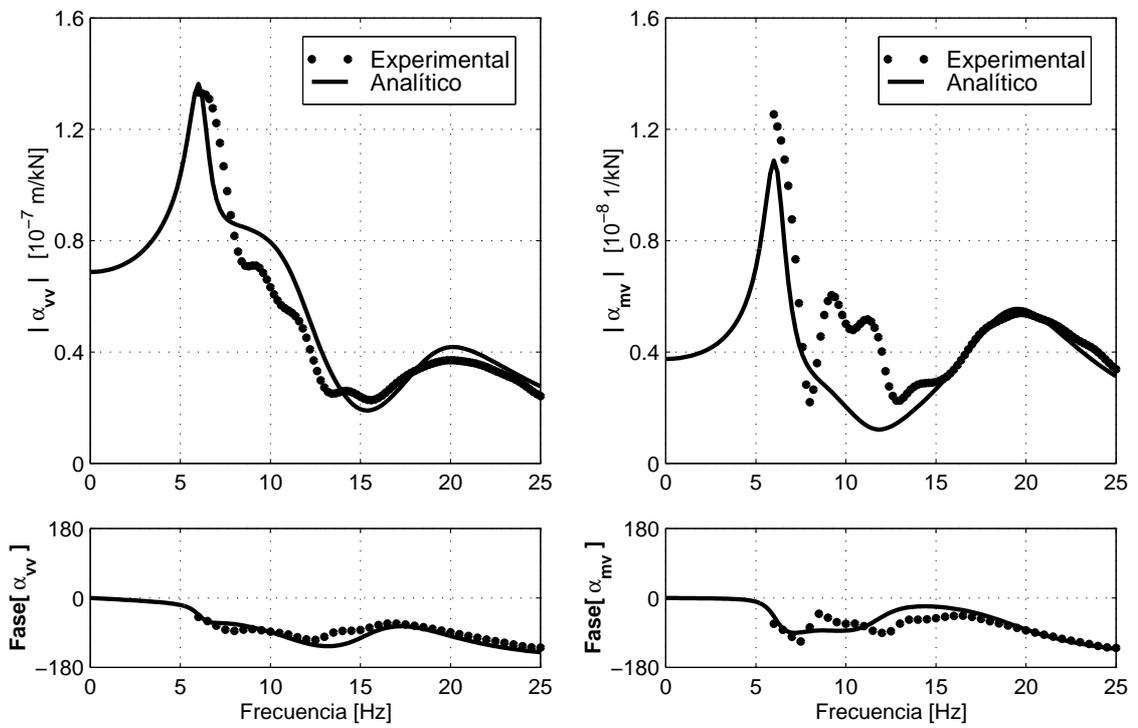


Fig. 9.58: Ajuste de receptancia del caso 2

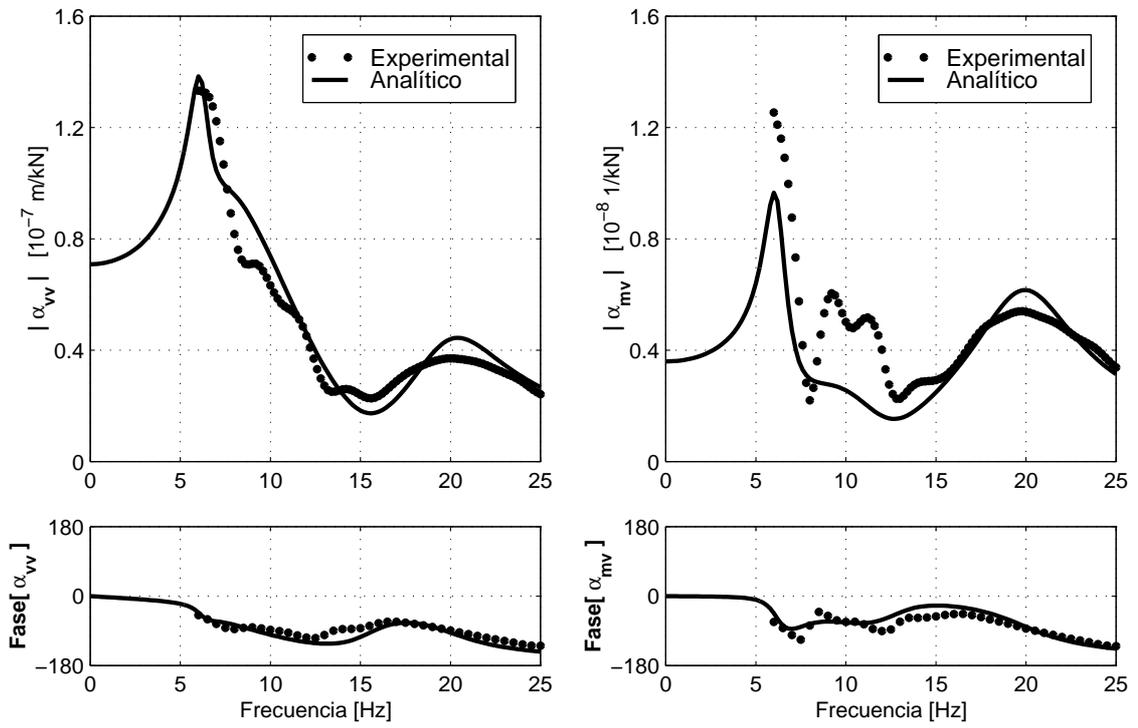


Fig. 9.59: Ajuste de receptancia del caso 3

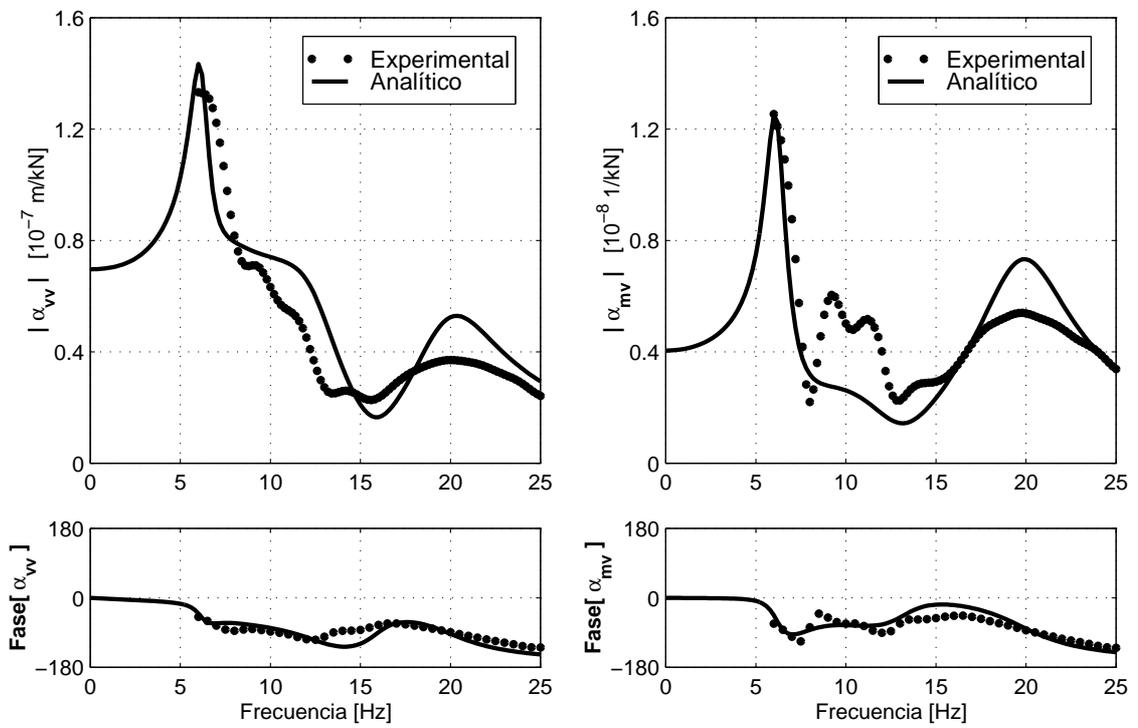


Fig. 9.60: Ajuste de receptancia del caso 2A

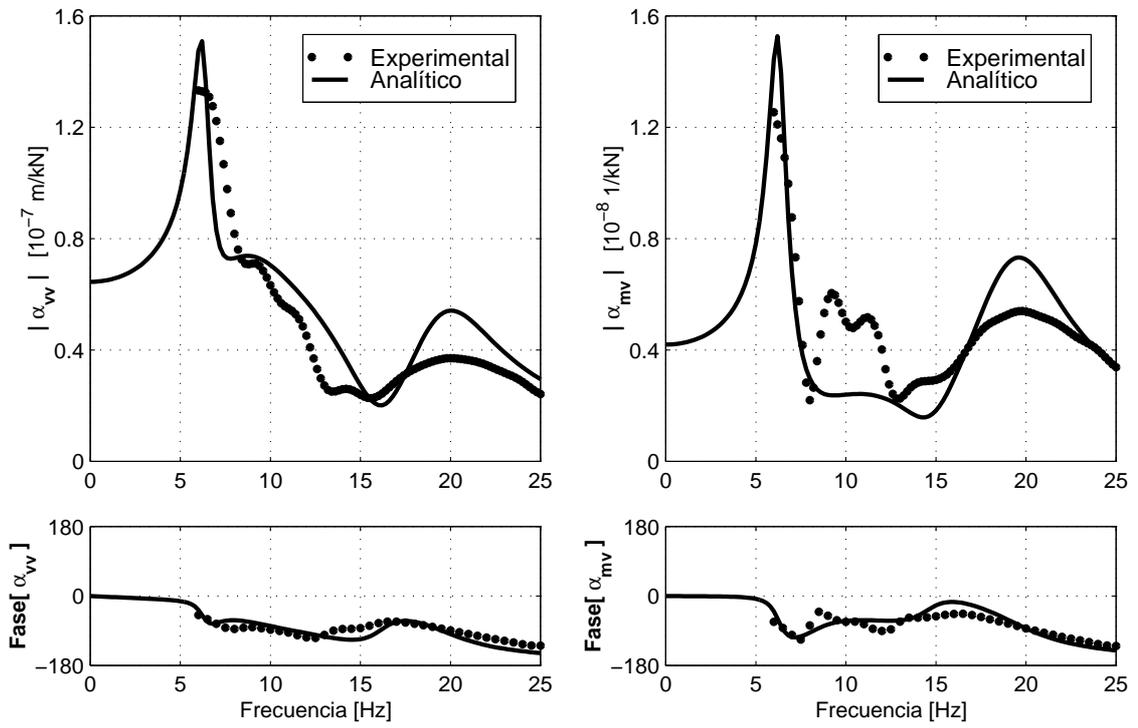


Fig. 9.61: Ajuste de receptancia del caso 2B

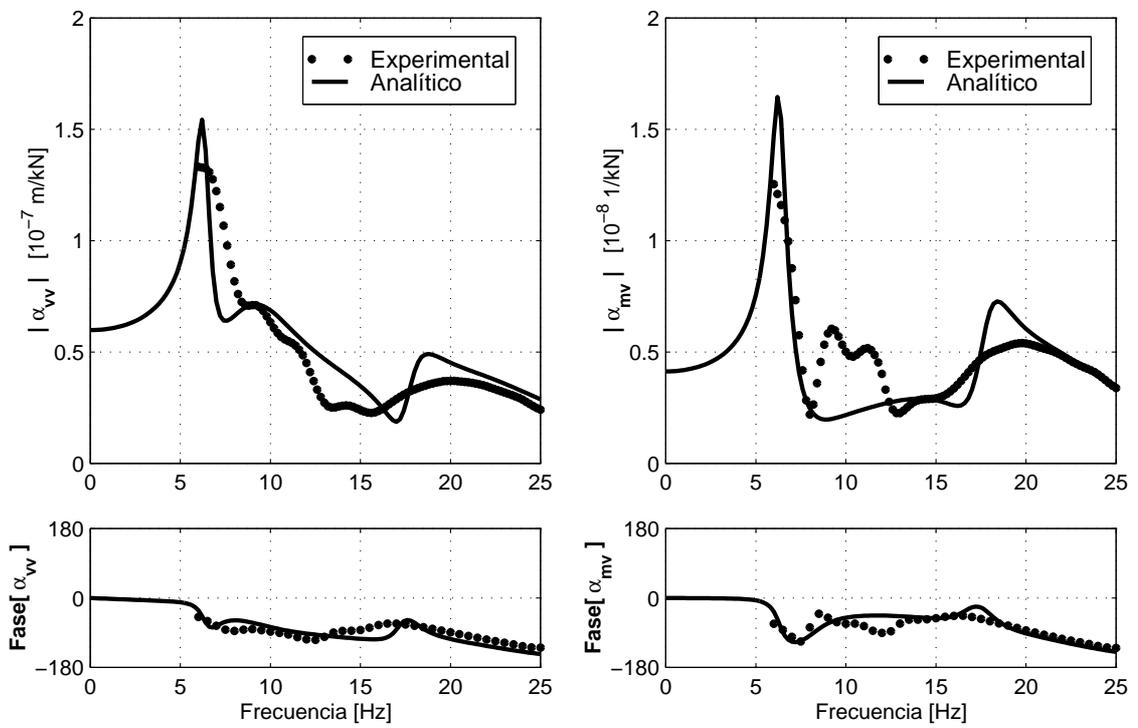


Fig. 9.62: Ajuste de receptancia del caso 2C

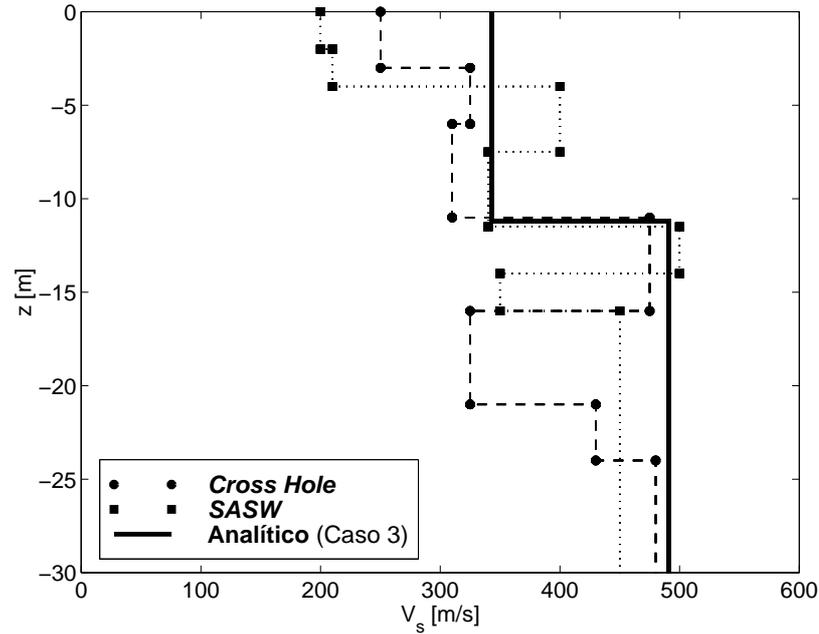


Fig. 9.63: Comparación de perfiles de velocidad de ondas de corte del suelo

del molino aunque estos modos no dependen de la rigidez del bloque de fundación ni del fenómeno de interacción suelo-estructura. La interfaz flexible entre el bloque de fundación y el suelo no influye en forma apreciable en el ajuste por lo que este efecto puede prescindirse en el modelo. Los parámetros de ajuste calibrados pueden incorporarse a un modelo de mayor sofisticación para el estudio de propagación de vibraciones a través del suelo a los edificios adyacentes dentro de la planta.

En la Tabla 9.11 se presentan los principales polos del modelo ajustado del caso 3 junto a las relaciones de amortiguamiento respectivas que superan el 10 % para todos los modos. Los mayores valores de amortiguamiento se producen para el 2° y 3° modo mientras que los valores de amortiguamiento del 1° y 4° modo son similares. La distribución del amortiguamiento en los primeros modos de vibración se asemeja a la observada en el Prototipo de Interacción. Sin embargo, los valores de amortiguamiento resultan superiores debido a la mayor disipación del suelo para movimientos verticales.

Modo	s_r	ξ_r [%]
1	$-0.624 \pm 6.158i$	10.1
2	$-2.935 \pm 7.642i$	35.8
3	$-3.046 \pm 10.36i$	28.2
4	$-2.857 \pm 19.83i$	14.3

Tabla 9.11: Polos y relaciones de amortiguamiento del modelo ajustado del caso 3

Capítulo 10

Conclusiones y Discusiones

El procedimiento propuesto para la calibración de modelos de sistemas con interacción suelo-estructura compuestos por una estructura de desarrollo lineal en altura y una fundación superficial es el siguiente:

- Realización de un ensayo dinámico sobre puntos adecuados de la estructura y de la interfaz con la fundación.
- Procesamiento de las señales experimentales para la determinación de las funciones de transferencia del sistema.
- Modelado de la estructura con los métodos tradicionales.
- Modelado de la fundación en los GL de la interfaz a través de matrices de rigidez y amortiguamiento (y eventualmente masa) con GL generalizados.
- Acoplamiento de los modelos de la estructura y la fundación.
- Selección de parámetros de ajuste de la estructura y el suelo.
- Determinación de la sensibilidad de las funciones de transferencia analíticas respecto a los parámetros seleccionados.
- Utilización del *método de la función de respuesta en frecuencia* para la calibración de los parámetros de ajuste.

La obtención de las matrices físicas de la fundación requiere el cálculo de soluciones rigurosas de la receptancia en los GL de la interfaz con la estructura. La caracterización del perfil de suelo puede realizarse en base a un análisis espectral de ondas superficiales o utilizando otros métodos de auscultación dinámica. La aplicación de técnicas experimentales de identificación de parámetros modales sobre la receptancia analítica de la fundación permite determinar matrices modales que se transforman luego en las matrices físicas utilizadas en el modelado.

Las propiedades mecánicas de los suelos determinadas con distintos métodos de auscultación suelen presentar importantes dispersiones. El ajuste de estas propiedades a través del análisis modal experimental de sistemas con interacción suelo-estructura permite obtener valores globales optimizados y representativos del terreno circundante para una descripción adecuada del comportamiento dinámico de la estructura acoplada a la fundación.

Las conclusiones de este trabajo son:

1. La técnica propuesta para el modelado de la fundación permite mantener en forma explícita los parámetros de ajuste del suelo. La determinación de matrices de rigidez y amortiguamiento independientes de la frecuencia para la fundación en los GL de la interfaz con la estructura permite la calibración simultánea de parámetros de ajuste del suelo y la estructura.
2. La identificación de parámetros modales del sistema completo a través del modelo calibrado posibilita la aplicación del método de descomposición modal con una formulación de primer orden para el cálculo de la respuesta frente a diferentes estados de carga.
3. Los ábacos de interacción obtenidos permiten la estimación de los efectos de la interacción en los parámetros modales de estructuras predominantemente uni-dimensionales sobre discos rígidos de fundación. La utilización de estos ábacos requiere el cálculo de parámetros adimensionales que gobiernan el comportamiento dinámico del sistema.
4. Los estudios de sensibilidad frente a simplificaciones introducidas en el modelado de la fundación revelan las dispersiones de los parámetros ajustados del suelo y la estructura en función de la influencia de los efectos de la interacción en la respuesta del sistema. Estas dispersiones se expresan a través de la comparación de los valores de la rigidez flexional de estructuras predominantemente uni-dimensionales y la velocidad de ondas de corte del suelo para las variantes consideradas.
5. La calibración de los parámetros de ajuste de modelos simplificados de los perfiles de suelo para los casos reales estudiados permiten la compensación de heterogeneidades del terreno de fundación. La presencia de estas heterogeneidades se detectó a través de ensayos independientes del suelo que consisten en la medición de velocidades de propagación de ondas de corte.
6. La comparación de los valores de velocidad de ondas de corte del suelo y de rigidez flexional de la estructura del Prototipo de Interacción ajustados primero con el sistema desacoplado y luego con el sistema acoplado permiten advertir que se produce una variación sistemática de estos valores para compensar posibles inexactitudes en el modelado de los pernos de vinculación de ambos sub-sistemas. Los valores de rigidez flexional ajustados con el sistema acoplado son mayores mientras que los valores de la velocidad de ondas de corte son menores en relación a los valores obtenidos con la estructura y la fundación desacopladas.
7. La determinación de los parámetros mecánicos de los elementos de vinculación entre la estructura y la fundación no resulta una tarea sencilla. La realización de ensayos dinámicos sobre el bloque de fundación aislado permite un ajuste independiente de sus parámetros que luego se desafectan del proceso de calibración del sistema acoplado. Los parámetros ajustados de la fundación pueden incorporarse directamente al modelo completo reduciendo el número total de parámetros de ajuste del sistema y permitiendo la obtención de valores más confiables de los parámetros mecánicos de los elementos de vinculación.
8. Los dispositivos de carga empleados para los ensayos realizados se diseñaron para ajustar los requerimientos de precisión de acuerdo a la masa del sistema. La aplicación de la carga para los ensayos de escala reducida se realizó a través de una celda de carga montada sobre el extremo de un péndulo, mientras que para ensayos de gran escala

la carga se aplicó dejando caer un peso sobre una plataforma de carga. Los resultados obtenidos demuestran que puede alcanzarse una buena coherencia aún cuando la máxima carga instantánea sólo representa una muy pequeña fracción del peso total de la estructura y la fundación, tal como el 0.1 % para las estructuras de gran escala.

9. Los resultados de los ensayos en la forma de modelos numéricos calibrados han mostrado suministrar información útil en relación a las características dinámicas asociadas con efectos de interacción suelo-estructura para los casos estudiados de reducida y gran escala.
10. Los casos de aplicación estudiados revelan la importancia de ensayos independientes del terreno circundante al sistema para una caracterización adecuada del perfil de velocidades de ondas de corte del suelo.

10.1 Contribuciones

El procedimiento propuesto al comienzo del capítulo constituye la principal contribución original. Otras contribuciones propias son:

1. Utilización de funciones de transferencia experimentales en lugar de funciones de respuesta en frecuencia en el proceso de ajuste. Un valor adecuado de la parte real de la variable de Laplace permite una aplicación implícita de un filtro exponencial en el procesamiento de señales experimentales eliminando el efecto de fuga.
2. Desarrollo del método del polinomio matricial complejo (*MPMC*) durante la obtención de un modelo modal de la fundación.
3. Aplicación de una técnica experimental de identificación de parámetros modales sobre un modelo de respuesta analítico durante la obtención de un modelo físico de la fundación.
4. Construcción de ábacos de interacción para el análisis de la influencia de la interacción en el comportamiento flexional de una estructura prismática acoplado al movimiento de balanceo de un disco de fundación.
5. Generación de datos experimentales confiables de sistemas con interacción suelo-estructura de escala reducida y de grandes dimensiones.

10.2 Comentarios y Recomendaciones

Los casos analizados en el presente trabajo involucran fundaciones superficiales y estructuras de desarrollo lineal en altura. La aplicación directa del procedimiento propuesto para sistemas con fundaciones profundas no presenta impedimentos manteniendo acotado el número de *GL* en la interfaz con la estructura.

Las curvas adimensionales de la receptancia de la fundación obtenidas a través de soluciones rigurosas sólo se utilizan manteniendo la relación entre los parámetros de los distintos estratos. El ajuste simultáneo de los parámetros de distintos estratos del perfil de suelo requiere el conocimiento de la contribución de cada estrato a la receptancia de la fundación y la sensibilidad de esta receptancia respecto a los parámetros de ajuste. De acuerdo a la experiencia adquirida con el análisis espectral de ondas superficiales (*SASW*),

el número de estratos y de parámetros de ajuste no debe ser excesivo para evitar una pérdida del sentido físico durante el proceso de calibración. La utilización de restricciones para la definición de rangos de variación de los parámetros de ajuste resulta siempre recomendable.

Las deficiencias en el modelado de la estructura y de los elementos de vinculación con la fundación tienden a compensarse a través de cambios inadecuados de los parámetros del suelo durante la calibración del sistema completo. Por lo tanto, la realización de ensayos sobre los bloques de fundación aislados durante la etapa constructiva del sistema resulta muy conveniente considerando la posibilidad de un ajuste independiente de los parámetros del suelo.

10.3 Futuras Líneas de Investigación

Algunas posibles líneas de investigación relacionadas con el procedimiento propuesto son:

1. Estudios experimentales que permitan un adecuado modelado de los elementos de vinculación de la estructura y la fundación para diferentes tipos de sistemas.
2. Estudios experimentales de estructuras vinculadas a bloques masivos fundados sobre pilotes.
3. Estudios experimentales de estructuras apoyadas sobre fundaciones desvinculadas considerando el acoplamiento dinámico de las distintas fundaciones.
4. Aplicación del procedimiento de ajuste a otros casos de interacción con un mayor número de GL en la interfaz.
5. Desarrollo de técnicas de desacoplamiento para la calibración de modelos de sub-sistemas utilizando datos experimentales del sistema completo. El número de GL medidos del sub-sistema debería presentar cierta redundancia en relación al número de GL de la interfaz.

Apéndice A

Transformada de Laplace

La transformada de Laplace provee una forma conveniente de resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de tiempo invariante. Las ecuaciones diferenciales se transforman en un sistema de ecuaciones algebraicas que facilitan la obtención de la respuesta dinámica de una estructura.

La transformada de Laplace de una función $g(t)$ para el tiempo de 0 a ∞ se define como

$$g(s) = \mathcal{L}(g(t)) = \int_0^{\infty} g(t) e^{-st} dt \quad (\text{A.1})$$

donde s es un escalar complejo conocido como variable de Laplace. La información contenida en $g(t)$ previa a $t = 0$ se ignora o considera nula: la causalidad asumida para los sistemas estudiados implica que la carga aplicada en el instante $t = 0$ no produce respuesta para tiempos negativos. La transformada inversa de Laplace se simboliza $\mathcal{L}^{-1}(g(s))$.

La aplicación de la transformada de Laplace a las derivadas primera y segunda de $g(t)$ produce

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\dot{g}(t)) &= \int_0^{\infty} \dot{g}(t) e^{-st} dt \\ &= [g(t) e^{-st}]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} g(t) \left(\frac{d}{dt} e^{-st} \right) dt \\ &= -g(0) + s \int_0^{\infty} g(t) e^{-st} dt \\ &= -g(0) + s\mathcal{L}(g(t)) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\ddot{g}(t)) &= \int_0^{\infty} \ddot{g}(t) e^{-st} dt \\ &= [\dot{g}(t) e^{-st}]_0^{\infty} + s [g(t) e^{-st}]_0^{\infty} + s^2 \int_0^{\infty} g(t) e^{-st} dt \\ &= -\dot{g}(0) - sg(0) + s^2\mathcal{L}(g(t)) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

donde $g(0)$ y $\dot{g}(0)$ son los valores iniciales de $g(t)$ y $\dot{g}(t)$, respectivamente, para el instante $t = 0$.

Apéndice B

La Técnica de Descomposición de Valores Singulares

En este apéndice se presenta una breve introducción de la técnica de Descomposición de Valores Singulares (*SVD*) destacando sus principales características y describiendo algunas aplicaciones comunes.

B.1 Rango de una Matriz

El concepto de rango de una matriz se relaciona directamente con la dependencia lineal de sus filas y columnas. Por ejemplo, una matriz de $N \times N$ cuyas filas son linealmente independientes tiene un rango igual a N (*rango completo*). La matriz tiene un rango $N - 1$ en caso que una fila resulte una combinación lineal de las restantes filas. Por lo tanto, el rango de una matriz es igual al número de filas linealmente independientes. Una matriz de $M \times N$ con $M \geq N$ posee *rango completo* si su rango sea igual a N mientras que posee *rango deficiente* si su rango es menor que N . La deficiencia de rango para matrices cuadradas implica que la matriz es singular y su determinante es igual a cero.

El cálculo clásico del rango de una matriz se realiza a través de la eliminación de Gauss. Una matriz de $N \times N$ con rango $r < N$ posee $N - r$ filas nulas luego de la aplicación de la eliminación de Gauss. La consideración de dos filas linealmente dependientes como vectores implica que ambos son paralelos. De esta forma, la mayor independencia entre dos filas se produce cuando ambos vectores son ortogonales. La totalidad de los casos prácticos se encuentran entre estos casos extremos.

Las filas de la matriz correspondientes a dos vectores *casi* paralelos no resultan totalmente dependientes. La aplicación de la eliminación de Gauss no produce entonces filas exactamente nulas aunque contienen un conjunto de elementos relativamente pequeños. La comparación de estas filas *casi* nulas con las restantes filas de la matriz permite la estimación del rango de la matriz. En general, esta comparación de filas no resulta una tarea sencilla especialmente para matrices de grandes dimensiones. El problema se complica cuando los elementos de la matriz poseen valores complejos. La *SVD* permite la determinación del rango de la matriz a través de la comparación de escalares reales.

B.2 Descomposición de Valores Singulares

La *SVD* de una matriz real $[A]$ se define de la siguiente forma

$$\underset{(M \times N)}{[A]} = \underset{(M \times M)}{[U]} \underset{(M \times N)}{[S]} \underset{(N \times N)}{[V]^T} \quad (\text{B.1})$$

donde $[U]$ y $[V]$ son *matrices ortogonales* que verifican

$$[U]^T [U] = [U] [U]^T = [V]^T [V] = [V] [V]^T = [I] \quad (\text{B.2})$$

$$[U]^T = [U]^{-1} \quad \text{y} \quad [V]^T = [V]^{-1} \quad (\text{B.3})$$

La matriz real $[S]$ posee elementos $\sigma_{ij} = \sigma_i$ para $i = j$ y $\sigma_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Los valores σ_i se denominan *valores singulares* de la matriz $[A]$ y se posicionan en la diagonal principal de $[S]$ en forma decreciente ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_N$)

$$[S] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_N \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

El rango de la matriz $[A]$ coincide con el número de valores singulares no-nulos (la multiplicación por matrices ortogonales no altera el valor del rango). La dependencia lineal de una fila de una matriz de 3×3 produce que σ_3 sea igual a cero. La aplicación de la *SVD* para la estimación del rango de la matriz permite comparar un valor pequeño de σ_3 , producido cuando la fila considerada no resulta totalmente dependiente, con los restantes valores singulares. La utilización de un criterio de rechazo o aceptación de valores singulares pequeños permite determinar el valor del rango. Este criterio depende de la exactitud atribuida a los resultados. La ecuación (B.1) toma la siguiente forma en caso que la matriz $[A]$ sea compleja

$$\underset{(M \times N)}{[A]} = \underset{(M \times M)}{[U]} \underset{(M \times N)}{[S]} \underset{(N \times N)}{[V]^H} \quad (\text{B.5})$$

donde (H) significa complejo conjugado transpuesto. Las *matrices unitarias* $[U]$ y $[V]$ verifican

$$[U]^H [U] = [U] [U]^H = [V]^H [V] = [V] [V]^H = [I] \quad (\text{B.6})$$

$$[U]^H = [U]^{-1} \quad \text{y} \quad [V]^H = [V]^{-1} \quad (\text{B.7})$$

Los valores singulares σ_i son las raíces cuadradas no-negativas de los autovalores de la matriz $[A]^T [A]$ si $[A]$ es real o de la matriz $[A]^H [A]$ si $[A]$ es compleja. Los autovalores de $[A]^T [A]$ y $[A]^H [A]$ resultan siempre reales produciendo que las ecuaciones (B.1) y (B.5) posean valores singulares reales. La estrecha relación que existe entre los valores singulares de $[A]$ y los autovalores de $[A]^T [A]$ produce que las columnas de $[U]$ y $[V]$ sean los autovectores de $[A] [A]^T$ y $[A]^T [A]$ que se denominan vectores singulares por derecha e izquierda respectivamente. En general, los algoritmos de *SVD* resultan muy similares a los algoritmos utilizados para el cálculo de autovalores y autovectores.

B.3 Aplicaciones de la Descomposición de Valores Singulares

En la presentación de estas aplicaciones se asume que $M \geq N$ y que la matriz $[A]$ es real.

B.3.1 Reconstrucción de la matriz $[A]$

La reconstrucción de la matriz $[A]$ luego de la remoción de pequeños valores singulares no-nulos para el cálculo del rango permite obtener una matriz $[A]$ mejorada. La aplicación de la *SVD* para una matriz $[A]$ de 5×3 produce matrices $[U]$ de 5×5 , $[S]$ de 5×3 y $[V]^T$ de 3×3 . En caso que el rango sea 2 sólo las dos primeras columnas de $[U]$ y $[V]$ intervienen en la reconstrucción de $[A]$ a través de matrices $[U]$ de 5×2 , $[S]$ de 2×2 y $[V]^T$ de 2×3 .

B.3.2 Índice de condicionamiento

El índice de condicionamiento de una matriz se define como la relación $\sigma_{\text{máx}} / \sigma_{\text{mín}}$ donde $\sigma_{\text{mín}}$ es el menor valor singular no-nulo. Los valores altos de este índice reflejan un mal-condicionamiento de la matriz que produce potenciales problemas numéricos.

B.3.3 Sistema Lineal de Ecuaciones

La resolución de un sistema de ecuaciones lineales con un mayor número de ecuaciones que incógnitas constituye la aplicación más interesante de la *SVD* en relación a la calibración de modelos. El sistema de ecuaciones se expresa de la siguiente forma

$$\begin{matrix} [A] & \{x\} & = & \{b\} \\ (M \times N) & (N \times 1) & & (M \times 1) \end{matrix} \quad (B.8)$$

donde $M \geq N$. La *SVD* de la matriz $[A]$ produce

$$\begin{matrix} [U] & [S] & [V]^T & \{x\} & = & \{b\} \\ (M \times M) & (M \times N) & (N \times N) & (N \times 1) & & (M \times 1) \end{matrix} \quad (B.9)$$

o

$$\begin{matrix} [S] & [V]^T & \{x\} & = & [U]^T & \{b\} \\ (M \times N) & (N \times N) & (N \times 1) & & (M \times M) & (M \times 1) \end{matrix} \quad (B.10)$$

$$\begin{matrix} [S] & \{z\} & = & \{d\} \\ (M \times N) & (N \times 1) & & (M \times 1) \end{matrix} \quad (B.11)$$

con

$$\{z\} = [V]^T \{x\} \quad (B.12)$$

$$\{d\} = [U]^T \{b\} \quad (B.13)$$

La ecuación (B.11) representa un conjunto de M ecuaciones desacopladas con N incógnitas donde

$$\sigma_j \cdot z_j = d_j \quad \text{para } j \leq N \text{ y } \sigma_j \neq 0 \quad (B.14a)$$

$$0 \cdot z_j = d_j \quad \text{para } j \leq N \text{ y } \sigma_j = 0 \quad (B.14b)$$

$$0 = d_j \quad \text{para } j > N \quad (B.14c)$$

Las ecuaciones (B.14b) y (B.14c) sólo se satisfacen si $d_j = 0$ para $j \leq N$ con $\sigma_j = 0$ y para $j > N$. El rango de la matriz $[A]$ se relaciona con el conjunto de elementos de $\{b\}$ para los que $[A] \{x\} = \{b\}$ tiene una solución $\{x\}$. En caso que d_j no se anule para $j \leq N$ con $\sigma_j = 0$ y para $j > N$, el rango de la matriz $[A]$ no concuerda con el tamaño del vector $\{b\}$ y la ecuación (B.8) no posee solución exacta. Por lo tanto, la ecuación (B.14b) no permite la determinación z_j aunque puede obtenerse una solución aproximada asumiendo que z_j es igual a cero cuando $\sigma_j = 0$. Esta solución aproximada coincide con la minimización de $\|[A] \{x\} = \{b\}\|^2$ utilizando el criterio de mínimos cuadrados. La ecuación (B.12) permite obtener luego el vector $\{x\}$ en función del vector $\{z\}$ como

$$\{x\} = [V] \{z\} \quad (\text{B.15})$$

B.3.4 Pseudo-inversa

La matriz $[A]^\dagger$ de $N \times M$ representa la pseudo-inversa de $[A]$ si se satisfacen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & [A] [A]^\dagger [A] = [A] \\ \text{ii)} \quad & [A]^\dagger [A] [A]^\dagger = [A]^\dagger \\ \text{iii)} \quad & [A] [A]^\dagger \text{ es simétrica} \\ \text{iv)} \quad & [A]^\dagger [A] \text{ es simétrica} \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

La matriz $[A]^\dagger$ existe siempre resultando única. La pseudo-inversa de una matriz cuadrada $[A]$ no-singular se calcula como $[A]^\dagger = [A]^{-1}$ mientras que para una matriz rectangular $[A]$ de rango completo se obtiene como $[A]^\dagger = ([A]^T [A])^{-1} [A]^T$. En el caso que la matriz $[A]$ sea compleja resulta $[A]^\dagger = ([A]^H [A])^{-1} [A]^H$. La SVD permite el cálculo de la pseudo-inversa de una matriz $[A]$ de rango deficiente. El problema de mínimos cuadrados relacionado con el valor de $\{x\}$ que minimiza $\|[A] \{x\} = \{b\}\|^2$ puede solucionarse como $\{x\} = [A]^\dagger \{b\}$. El cálculo de la pseudo-inversa de la ecuación (B.1) produce

$$\begin{matrix} [A]^\dagger & = & ([V]^T)^\dagger & [S]^\dagger & [U]^\dagger \\ (\text{N} \times \text{M}) & & (\text{N} \times \text{N}) & (\text{N} \times \text{M}) & (\text{M} \times \text{M}) \end{matrix} \quad (\text{B.17})$$

La pseudo-inversa de las matrices ortogonales $[U]$ y $[V]$ de rango completo coincide con la inversa clásica. Por lo tanto, la consideración de (B.3) permite expresar

$$\begin{matrix} [A]^\dagger & = & [V] & [S]^\dagger & [U]^T \\ (\text{N} \times \text{M}) & & (\text{N} \times \text{N}) & (\text{N} \times \text{M}) & (\text{M} \times \text{M}) \end{matrix} \quad (\text{B.18})$$

La matriz diagonal $[S]^\dagger$ real de $N \times M$ se compone de los valores inversos de los valores singulares no-nulos σ_i . Una forma eficiente de calcular los elementos de $[A]^\dagger$ es la siguiente

$$a_{ij}^\dagger = \sum_{\sigma_k \neq 0} \frac{v_{ik} u_{jk}}{\sigma_k} \quad (\text{B.19})$$

donde v_{ik} y u_{jk} corresponden a elementos de $[V]$ y $[U]^T$. La sumatoria excluye los valores nulos de σ_k . La consideración exclusiva de valores singulares mayores a un valor crítico τ permite obtener

$$a_{ij}^\dagger = \sum_{\sigma_k > \tau} \frac{v_{ik} u_{jk}}{\sigma_k} \quad (\text{B.20})$$

Esta condición práctica de aceptación para los valores singulares σ_k implica que la primer condición de (B.16) deja de verificarse (dado que $[A]^\dagger [A]$ no resulta igual a la matriz identidad) debiendo reemplazarse por

$$\| [A] [A]^\dagger [A] - [A] \| < \tau \quad (\text{B.21})$$

Las restantes condiciones de (B.16) permanecen válidas. La pseudo-inversa no es única dado que no se cumple una de las cuatro condiciones de (B.16). Sin embargo, la condición (B.21) que minimiza $\| [A]^\dagger \|$ permite obtener un valor óptimo de la pseudo-inversa con el criterio de mínimos cuadrados entre todos los posibles resultados.

B.3.5 Determinantes

La evaluación de los valores de z que anulan el determinante de $[A(z)]$ produciendo la singularidad de la matriz puede realizarse a través de la *SVD* de la siguiente forma

$$\det [A] = \det [U] \det [S] \det [V]^T \quad (\text{B.22})$$

Dado que los determinantes de las matrices ortogonales $[U]$ y $[V]$ resultan ± 1 se obtiene

$$\det [A] = \pm \prod_{i=1}^N \sigma_i \quad (\text{B.23})$$

El valor exacto de $\det [A]$ se obtiene como el producto de los valores singulares mientras que la anulación del determinante sólo requiere el seguimiento de la variación de σ_N (el valor singular más pequeño) para determinar el valor de z que produce su valor mínimo.

Apéndice C

Abacos de Interacción de Modos Superiores

Los ábacos de interacción se construyen para sistemas compuestos por una estructura prismática sin amortiguamiento propio vinculada a un disco de fundación apoyado sobre un semi-espacio homogéneo de suelo. La transformación de un par de polos reales en polos complejos conjugados produce las discontinuidades que se observan en los ábacos de interacción de los modos superiores presentados a continuación. Los ábacos de interacción correspondientes al 2º, 3º y 4º modo se presentan en las Figuras C.1, C.2 y C.3 respectivamente.

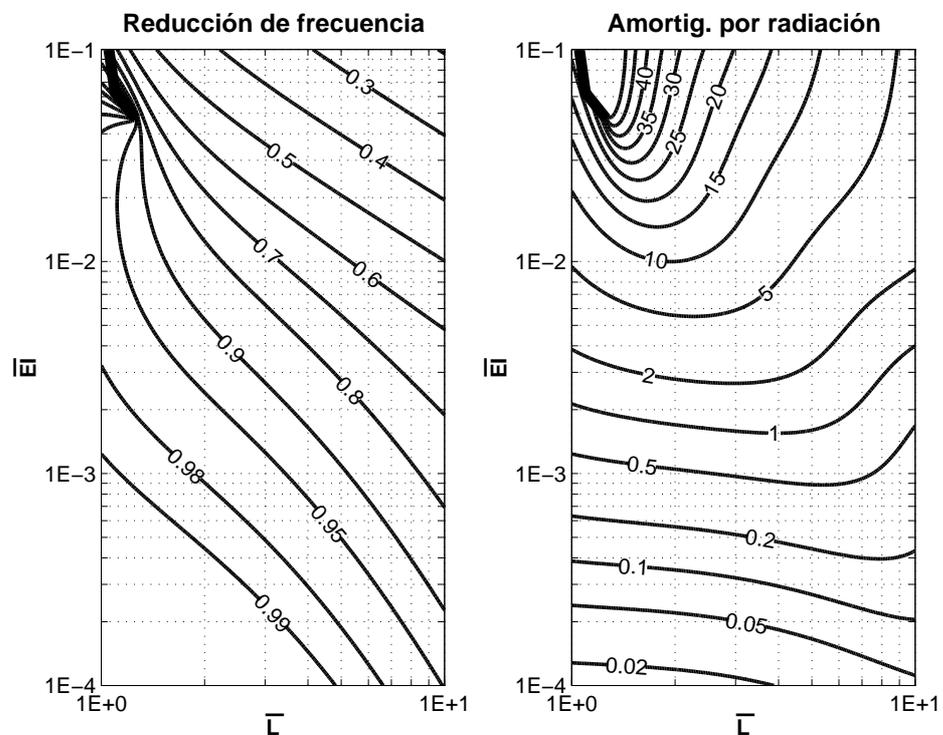


Fig. C.1: Abacos de Interacción del 2º modo para $\bar{m} = 10^0$

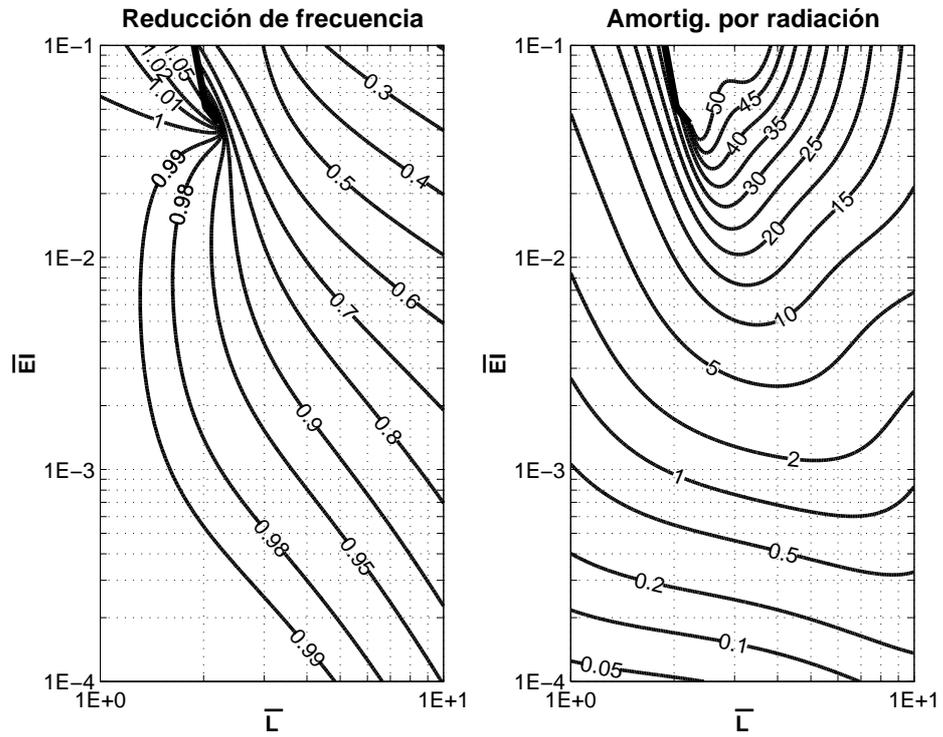


Fig. C.1: Abacos de Interacción del 2º modo para $\bar{m} = 10^{-1}$ (cont.)

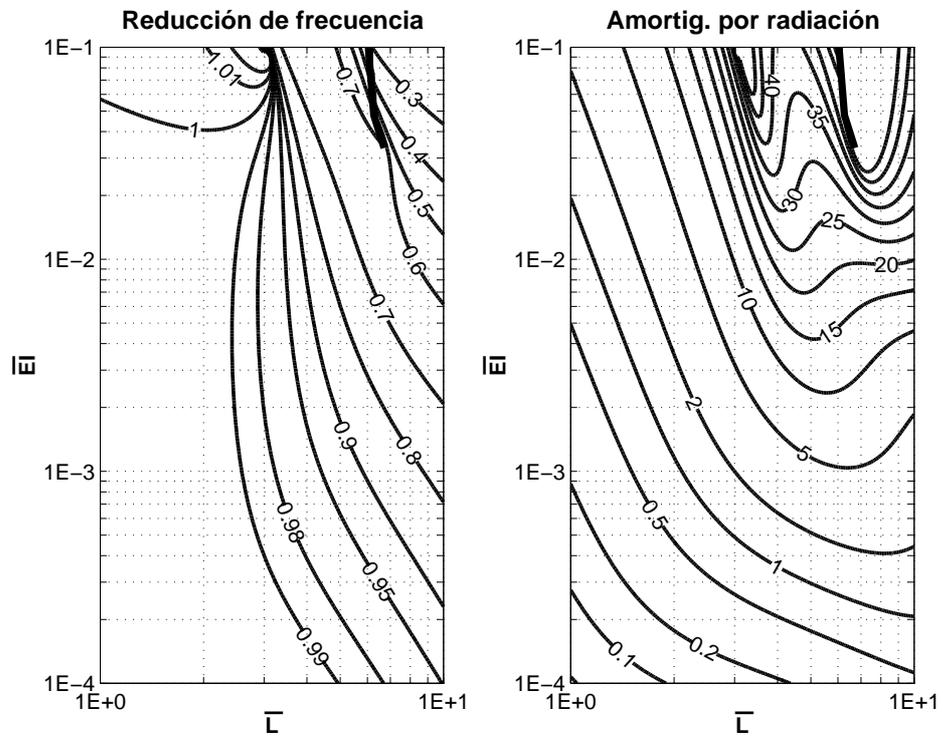


Fig. C.1: Abacos de Interacción del 2º modo para $\bar{m} = 10^{-2}$ (cont.)

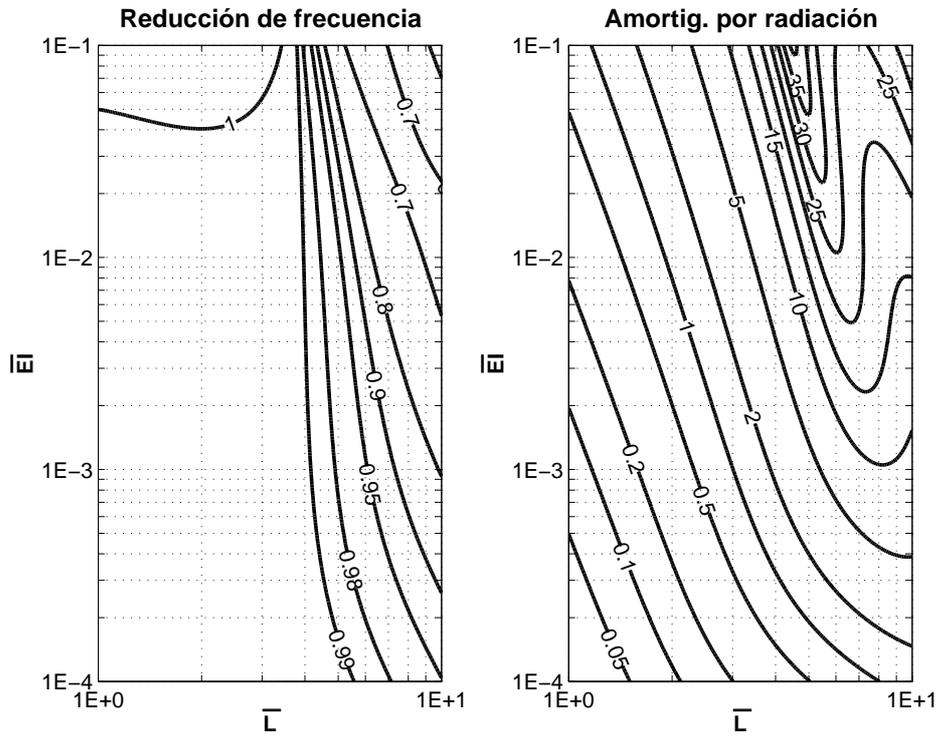


Fig. C.1: Abacos de Interacción del 2º modo para $\bar{m} = 10^{-3}$ (cont.)

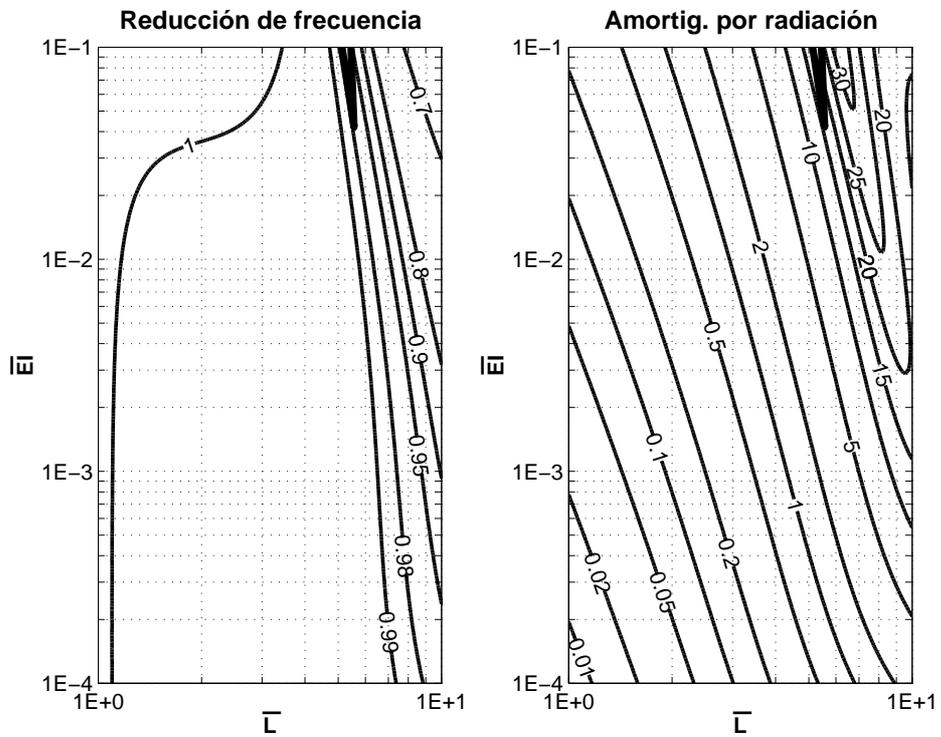


Fig. C.1: Abacos de Interacción del 2º modo para $\bar{m} = 10^{-4}$ (cont.)

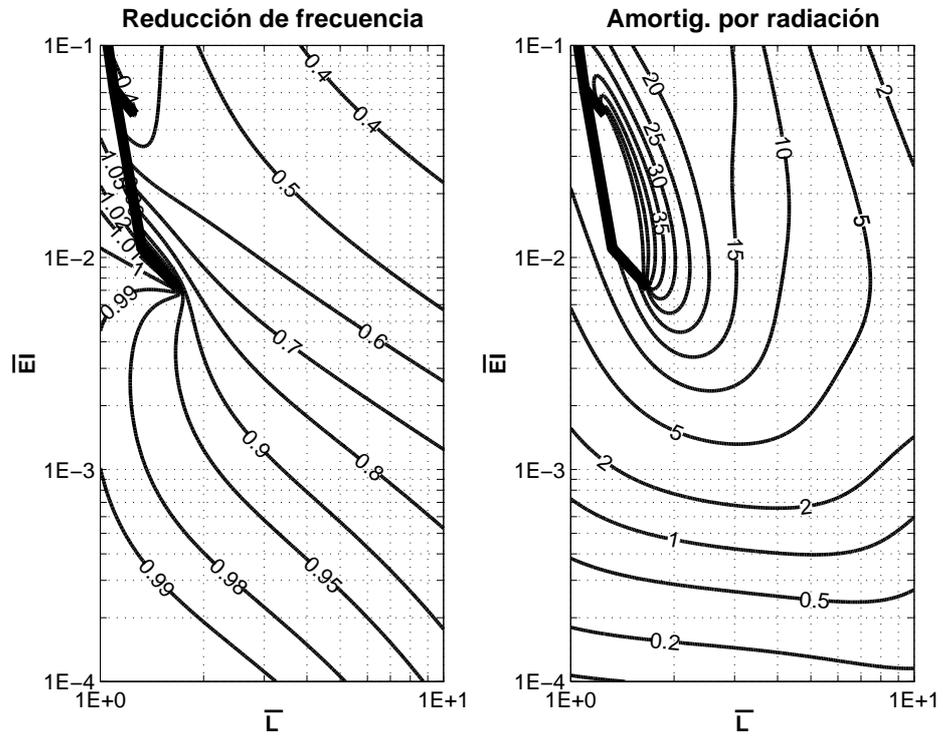


Fig. C.2: Abacos de Interacción del 3º modo para $\bar{m} = 10^0$

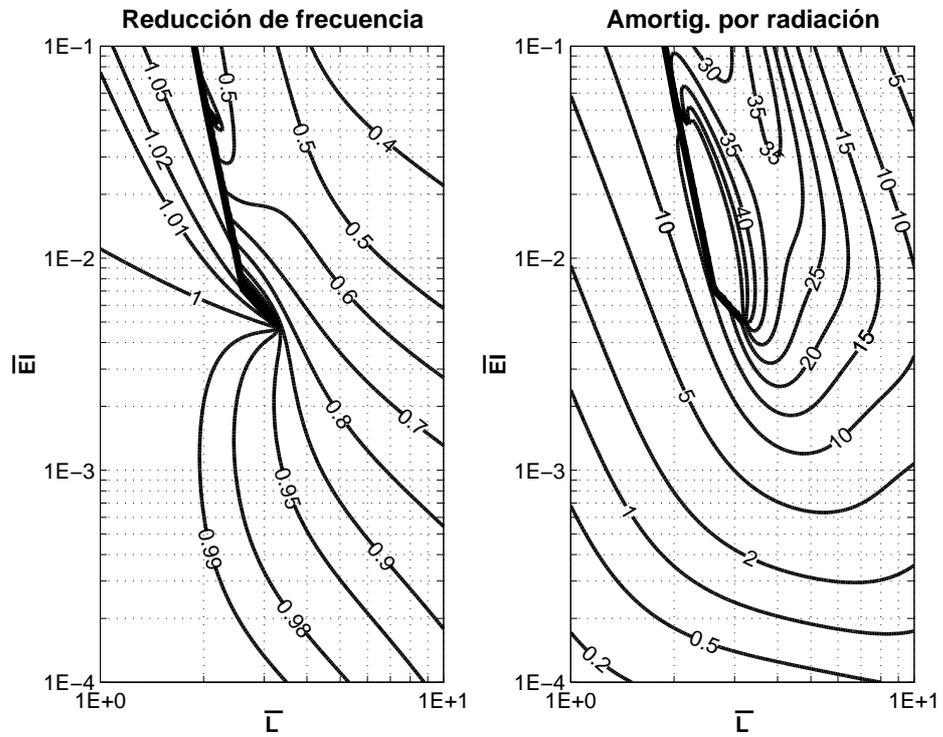


Fig. C.2: Abacos de Interacción del 3º modo para $\bar{m} = 10^{-1}$ (cont.)

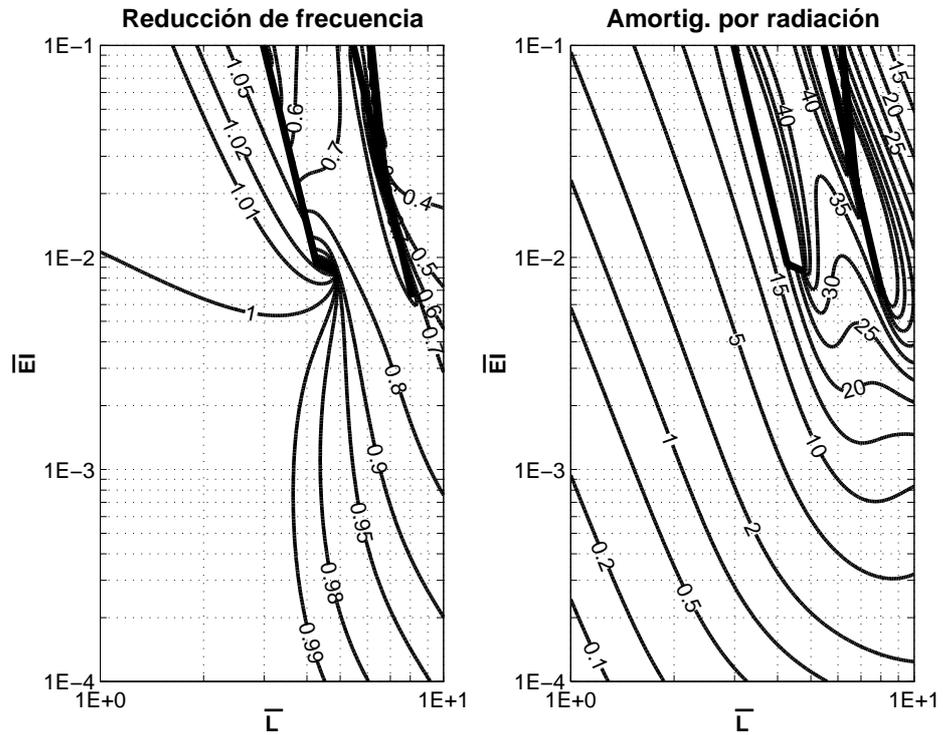


Fig. C.2: Abacos de Interacción del 3° modo para $\bar{m} = 10^{-2}$ (cont.)

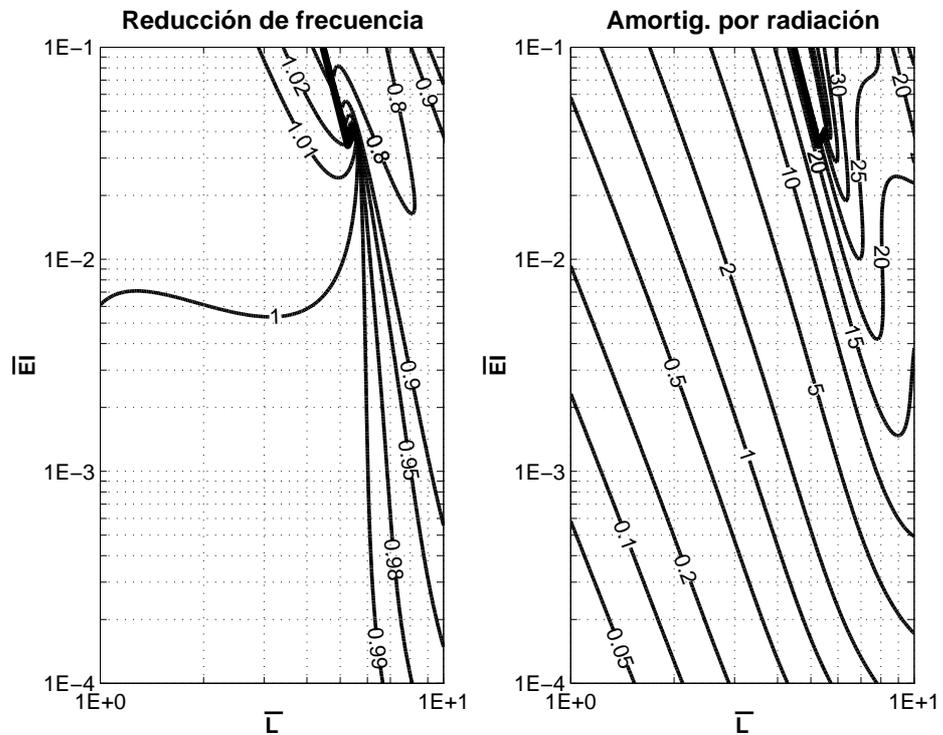


Fig. C.2: Abacos de Interacción del 3° modo para $\bar{m} = 10^{-3}$ (cont.)

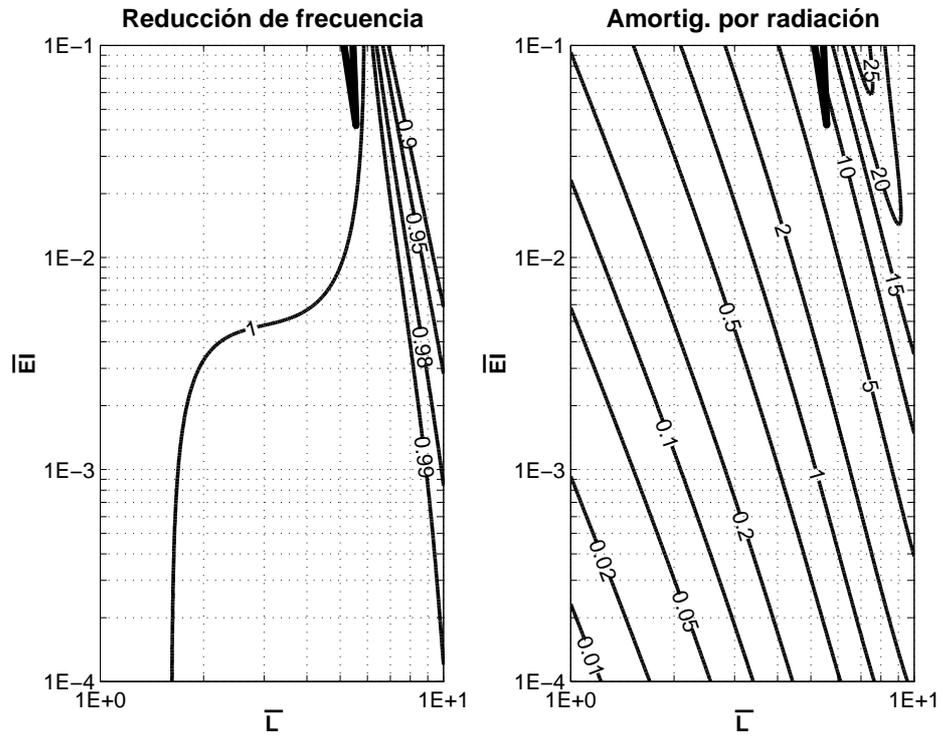


Fig. C.2: Abacos de Interacción del 3º modo para $\bar{m} = 10^{-4}$ (cont.)

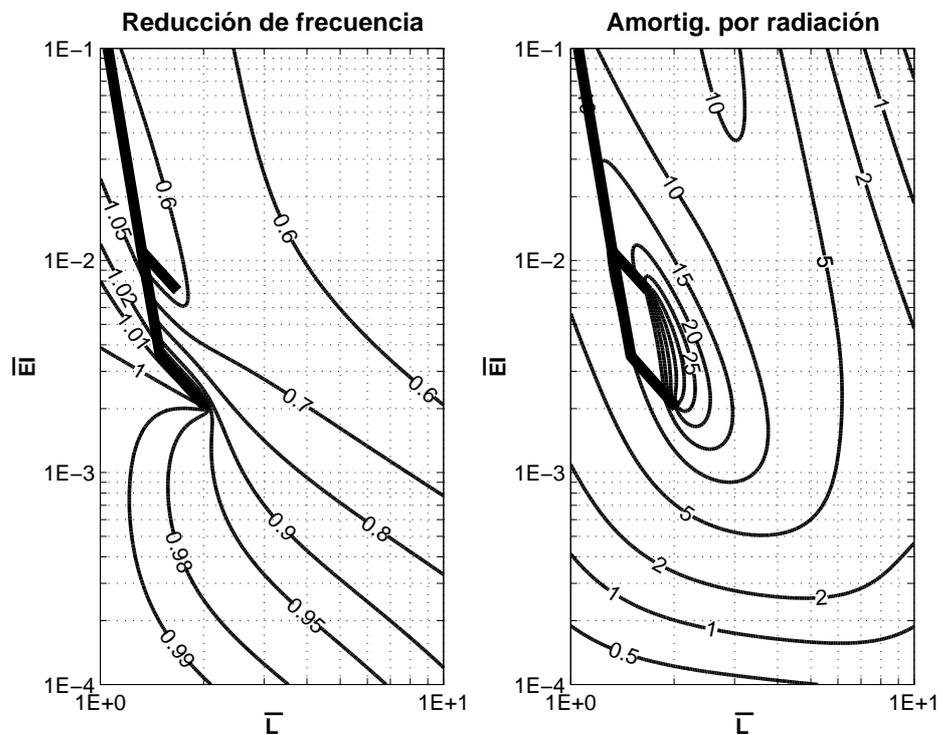


Fig. C.3: Abacos de Interacción del 4º modo para $\bar{m} = 10^0$

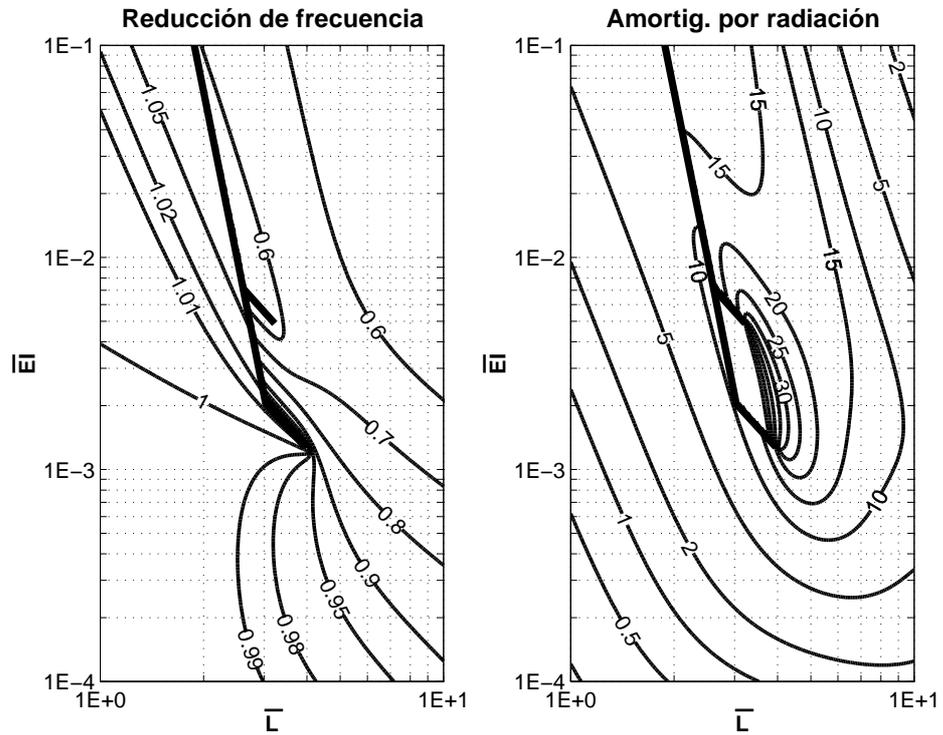


Fig. C.3: Abacos de Interacción del 4º modo para $\bar{m} = 10^{-1}$ (cont.)

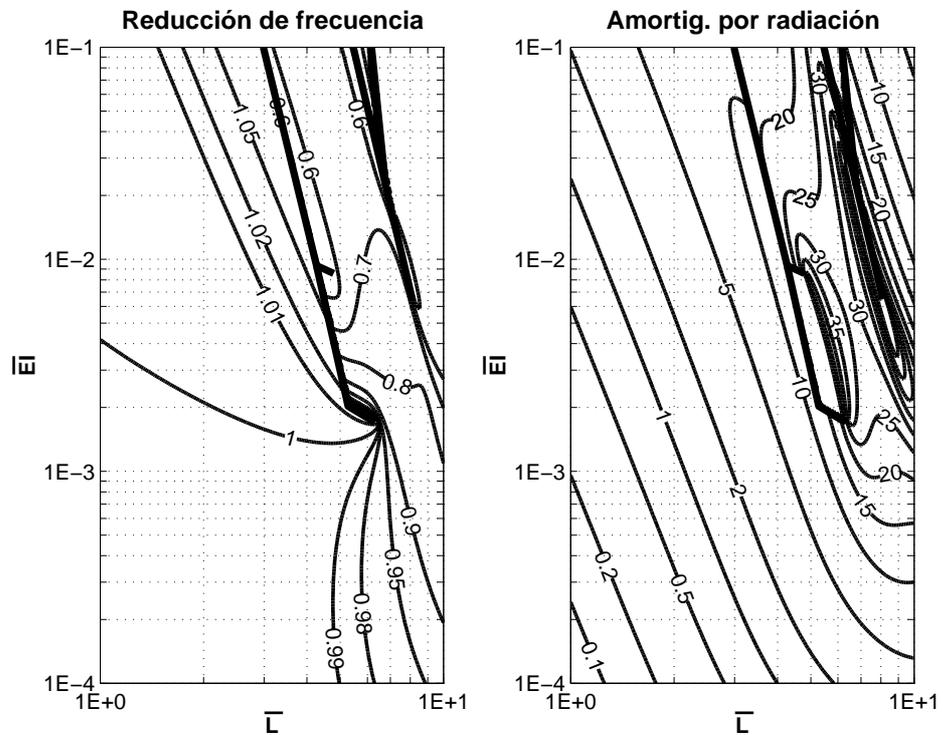


Fig. C.3: Abacos de Interacción del 4º modo para $\bar{m} = 10^{-2}$ (cont.)

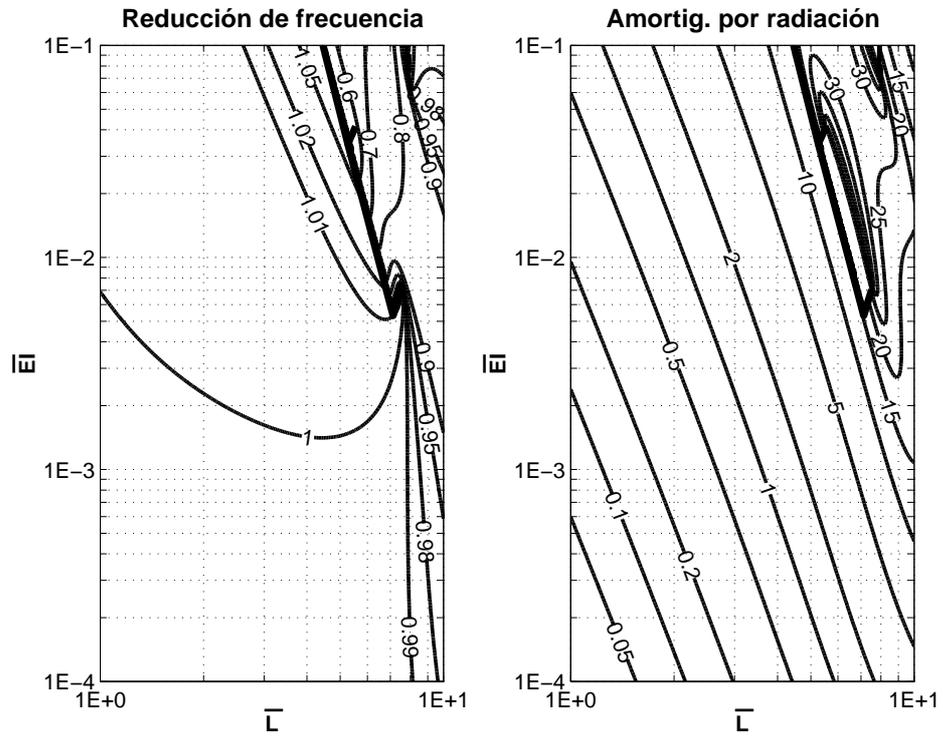


Fig. C.3: Abacos de Interacción del 4º modo para $\bar{m} = 10^{-3}$ (cont.)

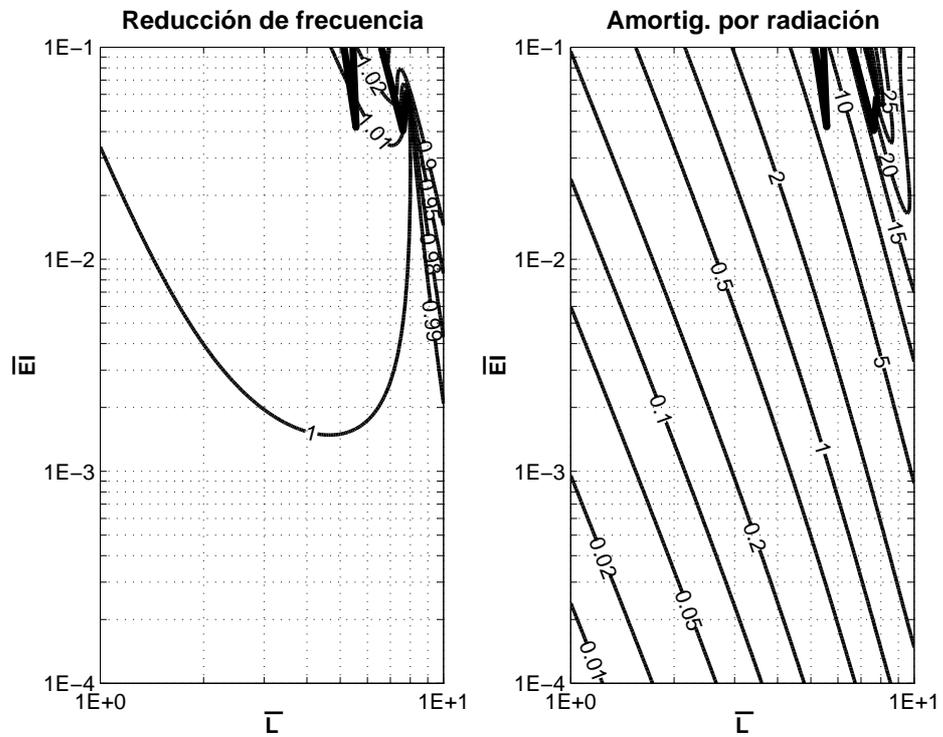


Fig. C.3: Abacos de Interacción del 4º modo para $\bar{m} = 10^{-4}$ (cont.)

Bibliografía

- [1] D. J. EWINS. “Modal Testing: Theory and Practice”. Research Studies Press Ltd., England (1984).
- [2] N. M. M. MAIA Y J. M. M. SILVA, editores. “Theoretical and Experimental Modal Analysis”. Research Studies Press Ltd., England (1997).
- [3] JER-NAN JUANG. “Applied System Identification”. PTR Prentice-Hall, Inc., New Jersey, U.S.A. (1994).
- [4] M. I. FRISWELL Y J. E. MOTTERSHEAD. “Finite Element Model Updating in Structural Dynamics”. Kluwer Academic Publishers (1995).
- [5] F. E. RICHART, R. D. WOODS Y J. R. HALL. “Vibrations of Soils and Foundations”. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey (1970).
- [6] JOHN P. WOLF. “Foundation Vibration Analysis Using Simple Physical Models”. PTR Prentice-Hall, Inc., New Jersey, U.S.A. (1994).
- [7] W. C. HURTY Y M. F. RUBINSTEIN. “Dynamics of Structures”. Prentice-Hall, Inc., New Jersey, U.S.A. (1964).
- [8] L. D. MITCHELL. Complex modes: A review. En “8^o International Modal Analysis Conference”, páginas 891–899, Kissimmee, FL, U.S.A. (1990).
- [9] G. LALLEMENT Y D. J. INMAN. A tutorial on complex eigenvalues. En “13^o International Modal Analysis Conference”, páginas 490–495, Nashville, TN, U.S.A. (1995).
- [10] A. BERMAN. Nonunique structural system identification. En “7^o International Modal Analysis Conference”, páginas 355–359, Las Vegas, NV, U.S.A. (1989).
- [11] W. B. JEONG Y A. ÑAGAMATSU. A new approach for identification of physical matrices by modal testing. En “10^o International Modal Analysis Conference”, páginas 265–271, San Diego, CA, U.S.A. (1992).
- [12] S. D. GARVEY, M. I. FRISWELL Y J. E. T. PENNY. Some further insight into self-adjoint second-order systems. *Journal of Vibration and Control* **5**, 237–252 (1999).
- [13] S. D. GARVEY, M. I. FRISWELL Y J. E. T. PENNY. Clifford algebraic perspective on second-order linear systems. *Journal of Guidance, Control and Dynamics* **24**(1), 35–45 (2001).

-
- [14] S. D. GARVEY, J. E. T. PENNY Y M. I. FRISWELL. The relationship between the real and imaginary parts of complex modes. *Journal of Sound and Vibration* **212**(1), 75–83 (1998).
- [15] J. A. INAUDI. Análisis en espacio de estado de modelos M-C-K con M singular. Notas del curso dictado en la U.N.C.: Vibraciones Aleatorias (1999).
- [16] P. AVITABILE, F. PECHINSKY Y J. O'CALLAHAN. Study of modal vector correlation using various techniques for model reduction. En “10^o International Modal Analysis Conference”, páginas 572–583, San Diego, CA, U.S.A. (1992).
- [17] R. J. GUYAN. Reduction of stiffness and mass matrices. *AIAA Journal* **3**, 380 (1965).
- [18] M. PAZ. Dynamic condensation. *AIAA Journal* **22**, 724–727 (1984).
- [19] J. O'CALLAHAN, P. AVITABILE Y R. RIEMER. System equivalent reduction expansion process. En “7^o International Modal Analysis Conference”, páginas 29–37, Las Vegas, NV, U.S.A. (1989).
- [20] J. O'CALLAHAN. A procedure for an improved reduction system (IRS) model. En “7^o International Modal Analysis Conference”, páginas 17–21, Las Vegas, NV, U.S.A. (1989).
- [21] N. A. J. LIEVEN Y D. J. EWINS. Expansion of modal data for correlation. En “8^o International Modal Analysis Conference”, páginas 605–609, Kissimmee, FL, U.S.A. (1990).
- [22] H. P. GYSIN. Comparison of expansion methods for FE modeling error localization. En “8^o International Modal Analysis Conference”, páginas 195–204, Kissimmee, FL, U.S.A. (1990).
- [23] G. B. PATRICK. Practicalities of acquiring valid data during modal tests. En “3^o International Modal Analysis Conference”, páginas 845–849, Orlando, FL, U.S.A. (1985).
- [24] P. K. STEIN. Experimental error? No! Experimenter's error!: A measurement engineer's view of experimental modal analysis. En “3^o International Modal Analysis Conference”, páginas 824–830, Orlando, FL, U.S.A. (1985).
- [25] W. TUSTIN. Warning: Modal test sensors can lie! En “16^o International Modal Analysis Conference”, páginas 1094–1098, Santa Barbara, CA, U.S.A. (1998).
- [26] T. W. LIM. Actuator/sensor placement for modal parameter identification of flexible structures. *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis* **8**(1), 1–13 (1993).
- [27] F. E. UDWADIA. Methodology for optimum sensor locations for parameter identification in dynamic systems. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE* **120**(2), 368–390 (1994).
- [28] N. OLSEN. Excitation functions for structural frequency response measurements. En “2^o International Modal Analysis Conference”, páginas 894–902, Orlando, FL, U.S.A. (1984).

-
- [29] D. CORELLI Y D. L. BROWN. Impact testing considerations. En “2^o International Modal Analysis Conference”, páginas 735–742, Orlando, FL, U.S.A. (1984).
- [30] M. W. TRETHERWEY Y J. A. CAFEO. Tutorial: Signal processing aspects of structural impact testing. *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis* **7**(2), 129–149 (1992).
- [31] J. W. COOLEY Y J. W. TUKEY. An algorithm for the machine calculation of complex fourier series. *Mathematics of Computation* **19**, 297–301 (1965).
- [32] M. H. RICHARDSON. Fundamentals of the discrete fourier transform. *Sound & Vibration Magazine* (1978).
- [33] L. D. MITCHELL. Improved methods for the fast fourier transform (FFT) calculation of the frequency response function. *Journal of Mechanical Design, ASME* **104**, 277–279 (1982).
- [34] Stevenson & Associates Inc. “SUPER SASSI/PC Program: Complete Dynamic Soil-Structure Interaction Analysis System on Personal Computers” (1995). Original code: SASSI, Lysmer et al., University of California, Berkeley, U.S.A., 1988.
- [35] U. FÜLLEKRUG. Survey of parameter estimation methods in experimental modal analysis. En “5^o International Modal Analysis Conference”, páginas 460–467, London, U.K. (1987).
- [36] L. ZHANG Y Y. YAO. Advances in modal identification - from SISO, SIMO to MIMO methods. En “5^o International Modal Analysis Conference”, páginas 1003–1007, London, U.K. (1987).
- [37] R. J. ALLEMANG, D. L. BROWN Y W. FLADUNG. Modal parameter estimation: A unified matrix polynomial approach. En “12^o International Modal Analysis Conference”, páginas 501–514, Honolulu, HI, U.S.A. (1994).
- [38] H. VOLD, A. MELO Y P. SERGENT. Phase errors in component mode synthesis. En “10^o International Modal Analysis Conference”, páginas 389–396, San Diego, CA, U.S.A. (1992).
- [39] J.-N. JUANG Y P. G. MAGHAMI. Optimal frequency-domain system realization with weighting. Technical Memorandum 209135, NASA (Abril 1999).
- [40] C. Y. SHIH, Y. G. TSUEI, R. J. ALLEMANG Y D. L. BROWN. A frequency domain global parameter estimation method for multiple reference frequency response measurements. En “6^o International Modal Analysis Conference”, páginas 389–396, Kissimmee, FL, U.S.A. (1988).
- [41] M. H. RICHARDSON Y D. L. FORMENTI. Parameter estimation from frequency measurements using rational fraction polynomials. En “1^o International Modal Analysis Conference”, páginas 167–181, Orlando, FL, U.S.A. (1982).
- [42] R. W. CLOUGH Y J. PENZIEN. “Dynamics of Structures”. McGraw-Hill, Inc. (1975).
- [43] J. S. PRZEMIENIECKI, editor. “Theory of Matrix Structural Analysis”. McGraw-Hill, Inc. (1968).

-
- [44] R. R. CRAIG JR. Y M. C. C. BAMPTON. Coupling of substructures for dynamic analysis. *AIAA Journal* **7**, 1313–1319 (1968).
- [45] M. A. CEBALLOS Y C. A. PRATO. Modal description of foundation dynamics. En “20^o International Modal Analysis Conference”, Los Angeles, CA, U.S.A. (2002).
- [46] J. P. WOLF. Consistent lumped-parameter models for unbounded soil: Physical representation. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* **20**, 11–32 (1991).
- [47] J. P. WOLF. Consistent lumped-parameter models for unbounded soil: Frequency-independent stiffness, damping and mass matrices. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* **20**, 33–41 (1991).
- [48] R. POTTER Y M. RICHARDSON. Mass, stiffness and damping matrices from measured modal parameters. En “ISA 74 International Instrumentation-Automation Conference & Exhibit” (1974).
- [49] K. F. ALVIN, L. D. PETERSON Y K. C. PARK. A method for determining minimum-order mass and stiffness matrices from modal test data. En “11^o International Modal Analysis Conference”, páginas 1287–1293, Kissimmee, FL, U.S.A. (1993).
- [50] J. A. MORGAN, C. PIERRE Y G. M. HULBERT. Component mode synthesis methods for non-proportionally damped systems. En “17^o International Modal Analysis Conference”, páginas 1472–1480, Kissimmee, FL, U.S.A. (1999).
- [51] M. I. FRISWELL, S. D. GARVEY Y J. E. T. PENNY. Extracting second-order systems from state-space representations. *AIAA Journal* **37**(1), 132–135 (1998).
- [52] J. E. LUCO Y R. A. WESTMANN. Dynamic response of circular footings. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE* **97**(EM5), 1381–1395 (1971).
- [53] J. M. ROESSET, R. V. WHITMAN Y R. DOBRY. Modal analysis for structures with foundation interaction. *Journal of the Structural Division, ASCE* **99**(ST3), 399–416 (1973).
- [54] J. BIELAK. Modal analysis for building-soil interaction. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE* **102**(EM5), 771–786 (1976).
- [55] ASCE STANDARD. “Seismic Analysis of Safety-Related Nuclear Structures and Commentary on Standard for Seismic Analysis of Safety Related Nuclear Structures” (1986).
- [56] W.-H. WU Y W.-H. LEE. Systematic lumped-parameter models for foundations based on polynomial-fraction approximation. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* **31**, 1383–1412 (2002).
- [57] G. GAZETAS Y R. DOBRY. Simple radiation damping model for piles and footings. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE* **110**(6), 937–956 (1984).
- [58] J. P. WOLF. Spring-dashpot-mass models for foundation vibrations. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* **26**, 931–949 (1997).

-
- [59] R. J. ALLEMANG Y D. L. BROWN. A correlation coefficient for modal vector analysis. En “1^o International Modal Analysis Conference”, páginas 110–116, Orlando, FL, U.S.A. (1982).
- [60] R. M. LIN Y D. J. EWINS. Model updating using FRF data. En “15^o International Seminar on Modal Analysis”, páginas 141–163, K.U. Leuven, Bélgica (1990).
- [61] W. J. VISSER Y M. IMREGUN. A technique to update finite element models using frequency response data. En “9^o International Modal Analysis Conference”, páginas 462–468, Florence, Italy (1991).
- [62] N. A. J. LIEVEN Y D. J. EWINS. Spatial correlation of mode shapes, the coordinate modal assurance criterion (comac). En “6^o International Modal Analysis Conference”, páginas 690–695, Kissimmee, FL, U.S.A. (1988).
- [63] E. FISSETTE Y S. IBRAHIM. Error location and updating of analytical dynamic models using a force balance method. En “6^o International Modal Analysis Conference”, páginas 1063–1070, Kissimmee, FL, U.S.A. (1988).
- [64] M. L. WEI Y T. JANter. Optimization of mathematical model via selected physical parameters. En “6^o International Modal Analysis Conference”, páginas 73–79, Kissimmee, FL, U.S.A. (1988).
- [65] V. A. RINALDI, J. J. CLARIÁ Y J. C. SANTAMARINA. The small-strain shear modulus (G_{max}) of argentinean loess. En “XV International Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering”, tomo 1, páginas 495–499, Estambul, Turquía (2001).
- [66] J. J. CLARIÁ Y V. A. RINALDI. Relación de Poisson medida en loess inalterado por medio de análisis multimodal. En “XVII Congreso Argentino de Mecánica de Suelos e Ingeniería en Fundaciones”, Córdoba, Argentina (2004).
- [67] J. S. POPOVICS, W. SONG, J. D. ACHENBACH, J. H. LEE Y R. F. ANDRE. One-sided stress wave velocity measurement in concrete. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE* **124**(12), 1346–1353 (1998).
- [68] K. H. STOKOE (II), S. G. WRIGHT, J. A. BAY Y J. M. ROËSSET. Characterization of geotechnical sites by SASW method. Technical report: Geophysical characterization of sites, ISSMFTE Technical Comitee 10, 15–25 (1994). Editado por R. D. Woods, Oxford Publishers, New Delhi, India.