



Facultad de Matemática,
Astronomía, Física y
Computación



UNC
Universidad
Nacional
de Córdoba

BISIMULACIÓN EN PROCESOS DE DECISIÓN DE MARKOV SOBRE ESPACIOS CONTINUOS

por

MARTÍN SANTIAGO MORONI

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación como parte de los requerimientos para la obtención del grado de Doctor en Matemática de la

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Octubre de 2022

Director: Dr. PEDRO SÁNCHEZ TERRAF

Tribunal Especial:

Dr. Alejandro Gustavo PETROVICH (FCEYN - UBA)

Dr. Andrés Alberto BARREA (FAMAFA)

Dr. Pedro Rubén D'ARGENIO (FAMAFA)

Suplentes:

Dr. Román SASYK (FCEYN - UBA)

Dr. Carlos Eduardo ARECES (FAMAFA)



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons
Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional.

Resumen

Los procesos de decisión de Markov sobre espacios continuos son un marco apropiado para estudiar y formalizar sistemas que involucran variables continuas y donde algunas de ellas son conocidas sólo de manera probabilista. En esta dirección, un *proceso de Markov etiquetado* (LMP) consiste de un espacio medible de estados y un conjunto etiquetado de subprobabilidades que codifican la interacción con el ambiente. Un concepto central, en sus diversas nociones existentes, es el de *bisimulación*, del cual se deriva la equivalencia de comportamiento o *bisimilitud* entre estados. El objetivo general de esta tesis es profundizar el estudio de la categoría de LMP y las variantes que surgen al agregar no determinismo, y la clasificación exhaustiva de las diversas nociones de bisimilitud. Para este fin usamos herramientas de teoría de la medida, teoría de conjuntos descriptiva y, en particular, de teoría de relaciones de equivalencia Borel.

En el caso de los LMP, el foco está en la bisimilitud de estados y en la bisimilitud de eventos. La primera puede considerarse como una generalización a espacios continuos de la bisimilitud probabilista de Larsen y Skou, mientras que la segunda está caracterizada por una lógica natural. C. Zhou expresó la bisimilitud de estados como el mayor punto fijo de un operador \mathcal{O} , e introdujo una medida ordinal de la discrepancia entre ambas bisimilitudes. En este trabajo estudiamos el operador \mathcal{O} en un contexto general, un operador dual \mathcal{G} , y la jerarquía de relaciones y σ -álgebras que estos inducen. Definimos el ordinal de Zhou $\mathfrak{Z}(\mathbb{S})$ de un LMP \mathbb{S} como el número de iteraciones necesarias para alcanzar la bisimilitud de estados si partimos de la de eventos. Nos enfocamos en la clase \mathcal{S} de LMP sobre espacios metrizables separables y en el supremo $\mathfrak{Z}(\mathcal{S})$ de los ordinales de Zhou de tales procesos. Probamos que $\mathfrak{Z}(\mathcal{S})$ es un ordinal límite de cofinalidad no numerable (y por ende es al menos ω_1). Construimos una familia de LMP $\{\mathbb{S}(\beta) \mid \beta \leq \omega_1\}$ para la cual $\mathfrak{Z}(\mathbb{S}(\beta)) = \beta$ cuando β es ordinal límite; estos procesos son separables para β contable. En el caso $\mathbb{S}(\omega_1)$, discutimos la consistencia de su separabilidad con los axiomas de teoría de conjuntos.

En un LMP la incertidumbre es sólo considerada como probabilista. Una generalización de estos modelos que incluye no determinismo interno está dada por los *procesos de Markov etiquetados no deterministas* (NLMP). Un NLMP admite, para cada estado s y cada acción a , un conjunto $T_a(s)$ (posiblemente infinito) de comportamientos probabilistas. Para estos procesos existen tres nociones distintas de bisimilitud: de estados, de impactos y de eventos. Luego de proponer una generalización de estas definiciones, nos concentramos en el caso de los NLMP de imagen contable sobre espacios de Borel estándar. Extendemos el resultado que prueba que las clases de bisimilitud son medibles, de manera análoga a la relación de isomorfismo sobre estructuras contables, para una clase de procesos con condiciones de regularidad adicionales. Además, probamos resultados de clasificación para la bisimilitud entre procesos no probabilistas que pueden representarse como árboles de rango acotado.

Palabras clave: proceso de Markov etiquetado, bisimilitud probabilista, no-determinismo, lógicas no-clásicas, teoría de conjuntos descriptiva.

2010 Mathematics Subject Classification: 03B70, 03B45, 03E15, 68Q85, 28A35.

Abstract

Markov decision processes over continuous spaces are an appropriate framework to study and formalize systems that involve continuous variables, and where some of them are known only in a probabilistic way. In this direction, a *labelled Markov process (LMP)* consists of a measurable space of states and a labelled set of subprobabilities that encodes interaction with the environment. A central concept, in its various existing notions, is that of *bisimulation*, from which derives the equivalence of behavior or *bisimilarity* between states. The overall objective of this thesis is to deepen the study of the category of LMPs and the variants that arise when adding non-determinism, and the exhaustive classification of the various notions of bisimilarity. To this end, we will use tools from measure theory, descriptive set theory and, in particular, from the theory of Borel equivalence relations.

In the case of LMPs, the focus is on the bisimilarity of states and on the bisimilarity of events. The first can be considered as a generalization to continuous spaces of the probabilistic bisimilarity of Larsen and Skou, while the second is characterized by a natural logic. C. Zhou expressed the bisimilarity of states as the greatest fixed point of an operator \mathcal{O} , and introduced an ordinal measure of the discrepancy between both bisimilarities. In this work we study the operator \mathcal{O} in a general context, a dual operator \mathcal{G} , and the hierarchy of relations and σ -algebras that these induce. We define the Zhou ordinal $\mathfrak{Z}(\mathbb{S})$ of an LMP \mathbb{S} as the number of iterations needed to reach the bisimilarity of states if we start from that of events. We focus on the class \mathcal{S} of LMPs over separable metrizable spaces and on the supreme $\mathfrak{Z}(\mathcal{S})$ of the Zhou ordinals of such processes. We prove that $\mathfrak{Z}(\mathcal{S})$ is a limit ordinal of uncountable cofinality (and thus is at least ω_1). We construct a family of LMPs $\{\mathbb{S}(\beta) \mid \beta \leq \omega_1\}$ for which $\mathfrak{Z}(\mathbb{S}(\beta)) = \beta$ when β is a limit ordinal; these processes are separable for countable β . In the case of $\mathbb{S}(\omega_1)$, we discuss the consistency of its separability with the axioms of set theory.

In an LMP the uncertainty is only considered as probabilistic. A generalization of these models that includes internal non-determinism is given by *non-deterministic labelled Markov processes (NLMPs)*. An NLMP admits, for each state s and each action a , a (possibly infinite) set $\mathbb{T}_a(s)$ of probabilistic behaviours. For these processes there are three different notions of bisimilarity: of states, of impacts and of events. After proposing a generalization of these definitions, we focus on the case of countable image NLMPs over standard Borel spaces. We extend the result that proves that bisimilarity classes are measurable, analogous to the isomorphism relationship for countable structures, for a class of processes with additional regularity conditions. In addition, we prove classification results for bisimilarity between non-probabilistic processes that can be represented as trees with bounded range.

Key words: labelled Markov process, probabilistic bisimilarity, non-determinism, non-classical logics, descriptive set theory.

2010 Mathematics Subject Classification: 03B70, 03B45, 03E15, 68Q85, 28A35.

Agradecimientos

Agradezco a todas las personas que formaron parte en este proceso. Tanta generalidad es intencional: todas ellas de un modo u otro, permanente o transitorio, con su guía, presencia, palabras o silencio, me ayudaron a concluir esta etapa. Dicho de otro modo: este “logro personal” de personal no tiene nada.

Muy especialmente entre todas estas personas, le agradezco a mi director Pedro. Quiero expresar mi profunda gratitud y mi deseo de que muchas personas se vean afectadas como yo lo fui por su inmensa habilidad matemática, su generosidad y su invaluable e imprescindible sostén. Muchas gracias Pedro.

Inmediatamente (pero inmediatamente) después le agradezco a mis amistades: cualquier expresión que pudiera escribir sería insuficiente. Quizás sí le haga un poco de justicia a todo lo que me brindan con la convicción de que nos convertimos en quienes amamos; yo sin duda, y con inmensa alegría, soy un poco de cada una de ellas.

A la Universidad Nacional de Córdoba por todo lo que permite, por toda su potencia, y a quienes le dan voces y manos. En particular, agradezco al tribunal por su disposición a evaluar esta tesis. Se me ocurre que en ese acto se sella la prolongación de un instante más en este largo pensamiento que es la matemática. También la Dirección de Deportes de la UNC me dio la dicha de encontrarme con Pía R., a ella le agradezco por su entrega y pasión inagotable para señalarnos el eterno camino hacia uno mismo.

Finalmente agradezco también que, después de todo, la matemática pueda ser sólo una excusa para convertirnos en mejores personas, y en mejores habitantes de este planeta.

Índice general

1	Introducción	5
1.1	Esquema de la tesis	8
1.2	Preliminares	9
2	Procesos de Markov Etiquetados	15
2.1	La categoría LMP	16
2.1.1	Otras presentaciones de un LMP	20
2.2	Nociones de bisimulación	21
2.2.1	Bisimulaciones internas	22
2.2.2	Bisimulaciones externas	31
2.2.3	Bisimulaciones en la categoría LMP	39
2.3	Cocientes	45
3	Distancia entre bisimilitudes	49
3.1	Los operadores \mathcal{O} y \mathcal{G}	50
3.2	Ordinal de Zhou	61
3.3	Una familia de ejemplos	70
3.4	Ordinal de Zhou de \mathbb{S}/Λ	76
3.5	Conclusiones	78
4	Procesos de Markov etiquetados no deterministas	80
4.1	Generalidades y generalizaciones	81
4.2	Versiones externas de bisimulación para NLMP	82
4.3	Subestructuras	87
4.4	Un juego para la bisimilitud de estados	91
5	Complejidad de la bisimilitud	93
5.1	Procesos bien fundados	96
5.1.1	LTS sobre \mathbb{N} bien fundados	98
5.1.2	Bisimilitud en $\omega\text{LTS}^{\leq\omega+2}$ no es suave	103
5.2	MLTS uniformemente medibles	107
5.2.1	Parte bien fundada de un MLTS uniformemente medible	118
5.3	NLMP discretos	119
5.4	Conclusiones	120
	Bibliografía	122

Capítulo 1

Introducción

Los procesos de decisión de Markov sobre espacios continuos son un marco apropiado para estudiar y formalizar sistemas que involucran variables continuas tales como las que aparecen en física, biología y economía; y donde algunas de las variables son conocidas sólo de manera probabilista. En esta dirección, los *procesos de Markov etiquetados (LMP)* fueron desarrollados en [Des99, DEP02] por Desharnais *et al.*. Un LMP tiene un conjunto etiquetado de *acciones* que codifican su interacción con el ambiente; por lo tanto, los LMP son modelos reactivos en los cuales hay distintas subprobabilidades de transición para cada acción. En estos modelos, la incertidumbre es (sólo) considerada como probabilista; por consiguiente, pueden considerarse como una generalización de los procesos deterministas. Íntimamente relacionados con los LMP se encuentran las *relaciones estocásticas* [Dob07b]; los LMP son exactamente los *marcos* de Kripke estocásticos.

El objetivo general es el estudio de diversas nociones de *bisimulación* aplicables a los procesos de Markov etiquetados y las variantes que surgen al agregar no-determinismo. En particular, se están investigando autómatas cuyo conjunto de estados sea un espacio de Borel estándar o analítico, y allí se estudia la medibilidad de las relaciones de bisimulación. En tal sentido, los problemas que se plantean vienen motivados por conceptos computacionales que se extrapolan al ámbito de espacios no numerables; pero cabe destacar de todos modos que el concepto de bisimulación ha tenido un rol importante en lógica (v.g., [BvB99, SR11]).

Hay diferentes nociones de bisimulación disponibles para procesos de decisión de Markov sobre espacios de estados continuos, tanto en procesos de Markov etiquetados como en la versión no determinista y uno de los objetivos particulares es delimitar sobre qué tipos de espacios las nociones coinciden. El estudio de las propiedades de conjuntos definibles en espacios métricos (en el sentido de la teoría de conjuntos descriptiva) es central para encarar estos problemas. En esta dirección, la “equivalencia de comportamiento” o *bisimilitud* de LMP puede verse de varias maneras. Una forma posible es clasificarla como *relacional*, *categorica* y *lógica*. Las conexiones entre estas distintas clasificaciones son el foco de nuestra atención; cada una tiene sus propias ventajas y limitaciones.

Desde la perspectiva relacional, se usan algunas generalizaciones naturales de *bisimilitud probabilista* a espacios continuos como las definidas por Larsen y Skou [LS91]. Así, las bisimulaciones y la relación de bisimilitud son simplemente relaciones binarias en el espacio base. Esta manera de definir bisimulaciones es la forma estándar para modelos de Kripke y jugará un papel central en este trabajo. Este punto de vista funciona muy bien en el caso *interno*, esto es cuando contamos con un único proceso. Cuando se quieren comparar estados de manera rela-

cional entre dos procesos diferentes, hay al menos dos posibilidades, una es construir primero la suma directa y la otra es adaptar la noción interna. Si bien las bisimulaciones en este sentido no tienen estructura (son conjuntos planos de pares ordenados), según el camino que se elija, ciertos hechos, como la transitividad de la relación de bisimilitud, pueden no ser directos.

Desde el punto de vista categórico hay varias opciones para describir el comportamiento de procesos. Una estrictamente *coalgebraica* [AM89, Rut00, Dob09] que a su vez involucra la existencia de un *span* de morfismos zigzag. Otra opción es la de *cocongruencia* ([Kur00, DDLP06]) la cual se define en términos de un *cospan* de morfismos y es a veces llamada equivalencia de comportamiento u observacional ([Ven07]).

En este contexto, un problema recurrente es el de la transitividad, y resulta no trivial. Se puede mostrar mediante propiedades functoriales que la equivalencia comportamental es transitiva, pero en el caso de spans se trata de un teorema profundo. Los enfoques existentes para este problema ([Eda99], [Dob05b]) están dirigidos a determinar situaciones bajo las cuales existen semipullbacks en la categoría de LMP sobre espacios de algún tipo; es decir, todo cospan puede completarse para formar un cuadrado conmutativo. La bisimilitud coalgebraica es un refinamiento del enfoque relacional, ya que el proceso mediador (el “vértice” del span) puede verse como una relación binaria con una estructura de LMP. Sin embargo, se debe notar que el pasaje al enfoque relacional no es completamente suave, dado que [ST11, Example 1] muestra que la suma directa no es siempre compatible con la bisimilitud coalgebraica.

Finalmente, desde el punto de vista de la lógica, se fija una variante de la lógica modal de Hennessy-Milner. Las fórmulas en la lógica modal pueden verse como experimentos o tests sobre un proceso y dos estados se dicen *lógicamente equivalentes* si satisfacen exactamente las mismas fórmulas. Hay un enfoque alternativo pero equivalente, llamado “bisimilitud de eventos” [DDLP06] donde el énfasis está en ciertas familias de subconjuntos medibles del espacio de estados. La conexión entre ambos es que la semántica (o conjuntos de validez) de las fórmulas de Hennessy-Milner son conjuntos medibles para cada interpretación (proceso). Este es un tema recurrente que será explotado en las aplicaciones. Existe una generalización de este enfoque lógico/de eventos a través de la investigación del *levantamiento* (“lifting”) de relaciones de equivalencia contablemente generadas al espacio de probabilidades [Dob07a].

Al igual que en marcos de Kripke o modelos, uno de los problemas principales sobre los LMP reside en encontrar una conexión entre el enfoque lógico y las demás caracterizaciones, especialmente la bisimilitud relacional y coalgebraica. Para la primera, el problema de la *caracterización lógica de la bisimilitud* en una clase de procesos consiste en probar que la bisimilitud (relacional) es lo mismo que la equivalencia lógica para cada proceso en la clase. Una de las formas más limpias de hacer esto es aplicar el *teorema de estructura única* para los espacios analíticos, tal como fue aplicado en el trabajo de Danos et al. [DDLP06]. Esto funciona para la clase de los LMP con espacio de estados analítico, pero se puede probar que ambas nociones son en realidad diferentes en la clase de LMP sobre espacios medibles generales, y que la bisimilitud coalgebraica no es ni siquiera transitiva [ST11] (notar que la equivalencia lógica sí lo es trivialmente). Cabe preguntarse qué “distancia” hay entre la bisimulación de estados y la de eventos en el caso general. Esto fue formalizado por Zhou [Zho13] expresando la bisimilitud de estados como el mayor punto fijo de la composición de dos operadores naturales entre relaciones de equivalencia y sub- σ -álgebras y midiendo la distancia como un ordinal.

Otro interés se encuentra en los modelos que incluyen no determinismo tanto probabilista como interno. Estos surgen naturalmente, como abstracción o subespecificación de LMP. En el caso discreto, la clase de los *autómatas probabilistas* [Seg95, SL95, Sto02] es un ejemplo. Sobre

espacios no contables de estados, la generalización común de LMP y autómatas probabilistas está dada por los *procesos de Markov etiquetados no deterministas* (NLMP) [DWSTC09, Wol12]. Un NLMP admite, para cada estado s y cada acción a , un conjunto (posiblemente infinito) de comportamientos probabilistas $T_a(s)$. Los NLMP deterministas (aquellos para los cuales $T_a(s)$ es un singulete para cada a, s) son esencialmente lo mismo que los LMP. (Vale la pena mencionar aquí un enfoque muy distinto a la subespecificación, que usa funciones superaditivas, propuesto en [DLT11]).

En [DWSTC09, DSTW12] se trata el problema de definir nociones adecuadas de bisimulación y de encontrar caracterizaciones lógicas para la bisimulación de NLMP. Allí definen tres nociones distintas de bisimilitud para estos procesos: la tradicional, una basada en estados y otra basada en eventos. Las primeras dos son “relacionales” en naturaleza, y en el caso de NLMP deterministas se reducen a la bisimilitud de estados. La bisimilitud de eventos es análoga al concepto de LMP con el mismo nombre y por consiguiente es caracterizada por una lógica, aunque ésta es mucho más compleja que la de Hennessy-Milner. Tiene dos niveles y una cantidad no contable de fórmulas en el caso general. Se observa un fenómeno similar al ocurrido en sistemas de transición etiquetados (LTS) versus lógica modal, donde la aridez de algunos operadores lógicos (por ejemplo la conjunción) debe ser igual a por lo menos la ramificación del proceso. Sin embargo, los argumentos usados en [DDL06] pueden generalizarse para incluir a los NLMP sobre espacios analíticos con imagen finita (es decir, cuando todos los conjuntos $T_a(s)$ son finitos). Una estrategia para la demostración puede encontrarse en [Cel06]: toda lógica \mathcal{L} contable y “medible” que satisfaga ciertas restricciones puede caracterizar la bisimilitud.

Varios ejemplos en [DSTW12] muestran que, en el caso de ramificación (“branching”) no contable, la lógica propuesta no caracteriza ninguna de las bisimilitudes relacionales consideradas, y que son todas distintas.

El caso restante (ramificación contable) fue resuelto en [ST15]. En ese artículo se mostró que la relación de bisimilitud no es Borel en un proceso adecuado \mathbb{F} de ramificación contable con espacio de estados polaco, y por lo tanto se prueba que no hay una lógica medible y contable que caracterice la bisimilitud en ninguna clase que lo contenga. El NLMP \mathbb{F} es grosso modo la suma directa de todos los procesos discretos contables (con una sola acción), y a pesar del resultado anterior, se prueba que las clases de bisimilitud sí son conjuntos Borel, de manera análoga a la relación de isomorfismo sobre estructuras contables (Scott [Sco64]). Este resultado vale en general para NLMP de imagen finita sobre espacios de estados analíticos (gracias a la caracterización lógica).

En el contexto delineado más arriba, se plantearon los siguientes interrogantes:

1. Obtener el supremo de las distancias (ordinales) entre la bisimulación de eventos y la de estados en un proceso \mathbb{S} en la categoría de LMP (sobre espacios con σ -álgebras contablemente generadas).
2. Extender el resultado que prueba que las clases de bisimilitud son medibles en NLMP (tentativamente para imagen contable), y determinar familias de procesos para las cuales la relación de bisimilitud es Borel.

1.1. Esquema de la tesis

Este trabajo está organizado en dos bloques de dos capítulos cada uno. El primer bloque, correspondiente a los Capítulos 2 y 3, está dedicado al primer interrogante planteado más arriba. El segundo bloque, Capítulos 4 y 5, tiene como objetivo el segundo interrogante.

En el Capítulo 2 estudiamos las distintas opciones para una definición de bisimulación existentes en la bibliografía. Si consideramos todas las definiciones, existe una distinción bien marcada entre lo que podríamos llamar una visión interna y una externa, esto es, cuando consideramos un único LMP o dos de ellos. En el caso de un único LMP, estudiamos las ya tradicionales bisimulaciones de estados y de eventos. No habrá nada realmente nuevo aquí, pero sí necesitamos entenderlas porque serán los conceptos centrales en el capítulo dos. En el caso de la visión externa, aparecen esencialmente dos versiones relacionales y tres versiones de corte categórico. Todas ellas dan lugar a una relación \sim entre los conjuntos base de los LMP y en este caso sí surgen algunas sorpresas al realizar una comparación pormenorizada entre ellas. Comparación que deja algunos interrogantes abiertos. Por último, damos una construcción algo más detallada de lo usual para un LMP sobre un conjunto cociente, información que también sirve de preliminar para el capítulo siguiente.

El Capítulo 3 se dedica a la pregunta específica sobre la diferencia entre ambas nociones internas de bisimulación. Esta diferencia se cuantifica con un ordinal que cuenta iteraciones de un operador \mathcal{O} que se define y estudia con detalle en la primera sección. El estudio continúa con las propiedades de tal ordinal y le siguen construcciones que brindan ejemplos que realizan ciertos ordinales como distancias concretas. Al final de este capítulo incluimos una breve conclusión que abarca todo el primer bloque, es decir Capítulos 2 y 3.

En cuanto al segundo bloque, el Capítulo 4 consiste de un estudio básico de los NLMP. Luego de refrescar las definiciones existentes de bisimulación, damos las versiones externas como continuación del mismo enfoque que en LMP. Desarrollamos además una versión de subestructuras para este concepto, con vistas al siguiente capítulo donde esta será una noción guía para los resultados ahí presentados. Finalmente, adaptamos un juego (al estilo de teoría de conjuntos descriptiva) para caracterizar la bisimilitud de estados entre dos NLMP.

Por último, en el Capítulo 5 nos ocupamos del segundo interrogante planteado. La herramienta por excelencia será la de reducciones Borel como forma de ubicar un problema de clasificación en términos de otros ya conocidos. En tal dirección, comenzamos con la definición clásica de ω -expansión, un representante canónico del tipo de bisimilitud de un LTS. Luego de enunciar el teorema básico sobre estas estructuras damos una demostración que brinda herramientas técnicas para el resto del capítulo. A continuación comenzamos el estudio de clasificar la bisimilitud en distintas familias de procesos. Trabajamos principalmente con NLMP no probabilistas. En primer lugar nos enfocamos en LTS que tienen representaciones como árboles bien fundados de ramificación contable. Imponiendo restricciones en el rango, vemos que la bisimilitud \sim es Borel, y más aun, que reduce a E_0 (una relación que aparece típicamente en problemas de clasificación). Esto permite decir que \sim no es suave y ello tiene consecuencias sobre el alcance en la propiedad de caracterización de una lógica modal medible y contable. Luego pasamos a definir la clase UMLTS de LTS con condiciones (uniformes) de medibilidad añadidas. Construimos representantes canónicos del tipo de bisimilitud de un estado y gracias a ellos obtenemos que es una relación analítica no Borel con clases medibles. Sin embargo, si nos restringimos a la clase de estos procesos con rango acotado recuperamos la clasificación Borel. Finalmente, damos otro pequeño paso al considerar NLMP cuyas transiciones son múltiplos de

deltas de Dirac. Al igual que al final del primer bloque, incluimos aquí una conclusión sobre el desarrollo del segundo bloque constituido por Capítulos 4 y 5.

1.2. Preliminares

Comenzamos con una revisión de definiciones y propiedades de diversos conceptos que usaremos a lo largo de la tesis. Agrupamos estos preliminares en secciones según las grandes áreas donde podrían encasillarse. Más que una presentación completa de los contenidos que se enumeran, el objetivo es fijar algunas notaciones y presentar herramientas teóricas que usaremos como técnica de demostración en el resto de los capítulos. Además de constituir una referencia rápida a las definiciones estándares más usadas a lo largo de la tesis.

Medida

La generalización de la teoría de sistemas de transición probabilistas discretos a aquellos con espacios de estados continuos requiere modelar las transiciones con conceptos de teoría de la medida. Algunas referencias típicas para este apartado son [Hal50], [Bil86]. Otras referencias incluyen la colosal obra [Fre00], el libro introductorio [Tao13] o los textos orientados al área de E. Doberkat [Dob07b] y [Dob14].

El primer concepto involucra a la clase de conjuntos que pueden ser medidos. Un álgebra sobre un conjunto S es una familia no vacía de subconjuntos de S cerrada por complemento y por uniones finitas. Es una σ -álgebra si además es cerrada por uniones contables. Dada una familia arbitraria \mathcal{U} de subconjuntos de S , usaremos $\sigma(\mathcal{U})$ para denotar la menor σ -álgebra sobre S que contiene a \mathcal{U} .

El próximo lema nos da una propiedad elemental que relaciona σ -álgebras y funciones. Si f es función, usaremos $f^{-1}[A]$ para denotar la imagen inversa de f ; si \mathcal{F} es familia de conjuntos, escribimos $f^{-1}[\mathcal{F}] := \{f^{-1}[A] \mid A \in \mathcal{F}\}$. Análogamente para las imágenes directas de un conjunto $f[A]$ y de una familia $f[\mathcal{F}]$.

Lema 1.1. *Sea $f : X \rightarrow Y$ función y $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(Y)$, entonces $f^{-1}[\sigma(\mathcal{U})] = \sigma(f^{-1}[\mathcal{U}])$. En consecuencia, la preimagen de una σ -álgebra es σ -álgebra.*

Demostración. Es sencillo ver que $f^{-1}[\sigma(\mathcal{U})]$ es σ -álgebra ya que $\sigma(\cdot)$ siempre lo es y la imagen inversa preserva uniones y complemento. Como $\mathcal{U} \subseteq \sigma(\mathcal{U})$, entonces $f^{-1}[\mathcal{U}] \subseteq f^{-1}[\sigma(\mathcal{U})]$ y por lo tanto $\sigma(f^{-1}[\mathcal{U}]) \subseteq f^{-1}[\sigma(\mathcal{U})]$. Para la segunda inclusión usamos la técnica del “good set principle”: sea $\mathcal{A} = \{A \in \sigma(\mathcal{U}) \mid f^{-1}[A] \in \sigma(f^{-1}[\mathcal{U}])\} \subseteq \sigma(\mathcal{U})$ la familia de conjuntos “buenos”. Es claro que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{A}$ pues $f^{-1}[\mathcal{U}] \subseteq \sigma(f^{-1}[\mathcal{U}])$. Además, \mathcal{A} es σ -álgebra por las mismas razones que probaron que $f^{-1}[\sigma(\mathcal{U})]$ lo es. De estos dos hechos deducimos que $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{U})$ y por ende $f^{-1}[\sigma(\mathcal{U})] \subseteq \sigma(f^{-1}[\mathcal{U}])$. \square

Un espacio medible es un par (S, Σ) donde S es conjunto y Σ una σ -álgebra sobre S . Llamaremos medibles a los conjuntos en Σ . Diremos que (S, Σ) (o Σ) es contablemente generada si existe alguna familia contable $\mathcal{U} \subseteq \Sigma$ tal que $\Sigma = \sigma(\mathcal{U})$.

Un subespacio del espacio medible (S, Σ) consiste de un subconjunto $Y \subseteq S$ con la σ -álgebra relativa $\Sigma|Y = \{A \cap Y \mid A \in \Sigma\}$. Si $\iota : Y \rightarrow S$ es la función inclusión, entonces $\Sigma|Y = \iota^{-1}[\Sigma]$. Como primera aplicación del Lema 1.1 vemos que, si $\Sigma = \sigma(\mathcal{U})$, entonces $\Sigma|Y = \sigma(\mathcal{U}|Y)$.

Si $(S, \Sigma), (S', \Sigma')$ son dos espacios medibles, decimos que $f : S \rightarrow S'$ es (Σ, Σ') -medible si $f^{-1}[A'] \in \Sigma$ para todo $A' \in \Sigma'$. Si Σ' es generada por \mathcal{U} , es suficiente verificar que $f^{-1}[U] \in \Sigma$ para todo $U \in \mathcal{U}$. La suma de dos espacios medibles (S, Σ) y (S', Σ') es $(S \oplus S', \Sigma \oplus \Sigma')$, con el siguiente abuso de notación: $S \oplus S'$ es la unión disjunta $\{(s, 0), (s', 1) \mid s \in S, s' \in S'\}$ (suma directa como conjuntos) y $\Sigma \oplus \Sigma' = \{Q \oplus Q' \mid Q \in \Sigma, Q' \in \Sigma'\} := \{(Q \times \{0\}) \cup (Q' \times \{1\}) \mid Q \in \Sigma, Q' \in \Sigma'\}$.

Supongamos que tenemos un subconjunto $V \subseteq S$. Denotaremos con Σ_V a $\sigma(\Sigma \cup \{V\})$, la extensión de Σ por el conjunto V . Es inmediato que $\Sigma_V = \{(B_1 \cap V) \cup (B_2 \cap V^c) \mid B_1, B_2 \in \Sigma\}$. Es también obvio que si Σ es contablemente generada, también lo es Σ_V . Si Y es espacio topológico, $\mathcal{B}(Y)$ denotará la σ -álgebra generada por los abiertos en Y , por lo tanto $(Y, \mathcal{B}(Y))$ es un espacio medible, el espacio Borel de Y . Diremos que una familia de conjuntos $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(S)$ separa puntos si para todo par de puntos distintos x, y en S , existe algún $A \in \mathcal{F}$ tal que $x \in A$ y $y \notin A$. Tenemos la siguiente proposición:

Proposición 1.2 ([Kec94, Prop. 12.1]). *Son equivalentes:*

1. (S, Σ) es isomorfo a algún $(Y, \mathcal{B}(Y))$, donde Y es separable metrizable.
2. (S, Σ) es isomorfo a algún $(Y, \mathcal{B}(Y))$ para $Y \subseteq [0, 1]$.
3. (S, Σ) es contablemente generada y separa puntos.

El siguiente teorema reúne dos resultados útiles que abordan la siguiente pregunta: dada una familia de conjuntos \mathcal{A} , ¿qué operaciones deben ejecutarse para construir la σ -álgebra generada por \mathcal{A} ? Si \mathcal{A} goza de ciertas propiedades estructurales, entonces podemos alcanzar tal σ -álgebra con menos operaciones que complementación y uniones contables. Una clase de subconjuntos de S se dice π -sistema si es cerrada por intersecciones finitas. Es un λ -sistema si contiene a S y es cerrada por complemento y uniones contables disjuntas. Por otro lado, decimos que una clase es monótona si es cerrada bajo uniones e intersecciones monótonas.

Teorema 1.3. 1. [Bil86, Thm. 3.2] *Teorema π - λ : si P es un π -sistema y L es un λ -sistema, entonces $P \subseteq L$ implica $\sigma(P) \subseteq L$.*

2. [Fre00, 136G] *Teorema de la clase monótona: si \mathcal{F} es álgebra de conjuntos y \mathcal{M} es clase monótona, entonces $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}$ implica $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{M}$.*

Dado un espacio medible (S, Σ) , una medida de subprobabilidad en S es una función $[0, 1]$ -valuada μ definida en Σ tal que $\mu(\emptyset) = 0$ y para toda colección $\{A_n \mid n \in \omega\} \subseteq \Sigma$ disjunta dos a dos, vale $\mu(\bigcup_{n \in \omega} A_n) = \sum_{n \in \omega} \mu(A_n)$. Para medidas de probabilidad requerimos además que $\mu(S) = 1$. Si $\Sigma \subseteq \Sigma'$ y μ, μ' son medidas definidas en $(S, \Sigma), (S, \Sigma')$ respectivamente, decimos que μ' extiende μ a (S, Σ') cuando $\mu' \upharpoonright \Sigma = \mu$. Una idea central en la construcción de ejemplos es la posibilidad de extender una medida en la siguiente forma particular:

Teorema 1.4. *Sea μ una medida finita definida en (S, Σ) y sea $V \subseteq S$ un conjunto no μ -medible. Entonces hay extensiones μ_1 y μ_2 a Σ_V de μ tales que $\mu_1(V) \neq \mu_2(V)$.*

La medida de Lebesgue \mathbf{m} en el intervalo unitario $I = (0, 1)$ será la herramienta principal en los ejemplos. La correspondiente clase de conjuntos medibles Lebesgue es $MEAS_{\mathbf{m}}$, la σ -álgebra generada por los conjuntos abiertos y los de medida cero. Como propiedades destacadas de \mathbf{m} , notamos que aplicada a intervalos mide su longitud y que el espacio de medida asociado es completo. Ver por ejemplo [Oxt71] para más detalles sobre su construcción y propiedades.

La siguiente definición incluye las dos clases principales de espacios topológicos y medibles a las que nos referiremos en esta tesis.

- Definición 1.5.**
1. Un espacio topológico X se dice completamente metrizable si admite una métrica compatible d tal que (X, d) es completo. Diremos que X es polaco si es separable y completamente metrizable.
 2. Un espacio separable metrizable será analítico si es la imagen continua de un espacio polaco.
 3. Un espacio medible (S, Σ) se dice de Borel estándar (analítico) si es isomorfo a $(Y, \mathcal{B}(Y))$ para algún espacio polaco (analítico) Y , o equivalentemente, si hay una topología polaca τ sobre S tal que $\Sigma = \mathcal{B}(\tau)$.

Notamos que todos los conjuntos Borel son analíticos, pero no al revés (los Borel se caracterizan como la clase de conjuntos analíticos con complemento también analítico). Decimos también que un conjunto analítico es completo si todos los conjuntos analíticos son preimagen continua de él; en consecuencia, los conjuntos analíticos completos no son Borel.

Un ejemplo importante de espacio medible con el que trabajaremos involucrará ordinales. Trabajamos con la definición de von Neumann.

Definición 1.6. Un ordinal α es un conjunto transitivo y bien ordenado por \in .

Denotamos con ORD a la clase ordinales y con ω_1 al primer ordinal no numerable. Una referencia básica en esta dirección es [Hal98, Sect. 19]. Otras opciones pueden ser [Kun11, JW96].

Teoría de conjuntos descriptiva

La Teoría de Conjuntos Descriptiva es el estudio de los conjuntos “definibles” en espacios polacos. En esta teoría, los conjuntos se clasifican de acuerdo a la complejidad de sus definiciones, y la estructura de los conjuntos en cada nivel de estas jerarquías se analiza sistemáticamente. Los conjuntos borelianos ocupan los primeros niveles de complejidad, seguidos por los conjuntos analíticos. Las referencias estándares al área incluyen los libros [Kec94, Mos09]. Una alternativa para centrarse en esta teoría aplicada a las relaciones de equivalencia es [Gao08] o los artículos [Ros16, Ros21].

Una herramienta combinatoria central es el concepto de árbol (en un sentido diferente, aunque cercano, al de teoría de grafos). Antes de definirlo necesitamos notación referida a sucesiones finitas. Si A es conjunto no vacío y $n \in \mathbb{N}$, A^n es el conjunto de sucesiones finitas $s = (s_0, s_1, \dots, s_n)$ de longitud n con elementos en A . Para el caso $n = 0$ tenemos la sucesión vacía \emptyset . El conjunto $A^{<\mathbb{N}}$ es la unión de todos los conjuntos A^n para $n \in \mathbb{N}$. La longitud de s es denotada $\text{length}(s)$. Si $s \in A^n$ y $m \leq n$, escribimos $s|_m = (s_0, \dots, s_{m-1})$ (y $s|_0 = \emptyset$). Si s, t son sucesiones finitas en A , decimos que s es segmento inicial de t (denotado $s \subseteq t$), o que t es una extensión de s , si $s = t|_m$ para algún $m \leq \text{length}(t)$. De este modo, \emptyset es segmento inicial de cualquier s .

Definición 1.7. Un árbol sobre un conjunto A es un subconjunto $T \subseteq A^{<\mathbb{N}}$ cerrado por segmentos iniciales: si $t \in T$ y $s \subseteq t$, entonces $s \in T$. Denotaremos con Tr_A al conjunto de árboles sobre A .

Notamos que $2^{A^{<\mathbb{N}}}$ es espacio polaco con la topología generada por los conjuntos subbásicos $\{X \subseteq A^{<\mathbb{N}} \mid s \in X\}$ y $\{X \subseteq A^{<\mathbb{N}} \mid t \notin X\}$ para cualesquiera $s, t \in A^{<\mathbb{N}}$. Resulta que Tr_A es un conjunto cerrado de tal espacio, y por lo tanto es también un espacio polaco. En el caso del conjunto de sucesiones infinitas $A^{\mathbb{N}}$, la topología estándar está dada por la base $N_s := \{x \in A^{\mathbb{N}} \mid s \subseteq x\}$ donde $s \in A^{<\mathbb{N}}$.

Llamamos nodo a cada elemento de un árbol T . Una rama infinita de T es una sucesión $x \in A^{\mathbb{N}}$ tal que $x|n \in T$ para todo n . El cuerpo de T es $[T]$, el conjunto de todas sus ramas infinitas. Si un árbol no tiene ramas infinitas, i.e. $[T] = \emptyset$, decimos que es bien fundado.

Definición 1.8. Si T es árbol bien fundado sobre A , el rango de $s \in A^{<\mathbb{N}}$ es $\rho_T(s) = \sup\{\rho_T(t) + 1 \mid t \in T, s \subsetneq t\}$. Además, $\rho_T(s) = 0$ si s no se extiende o si $s \notin T$. El rango de T se define como $\rho(T) = \sup\{\rho_T(s) + 1 \mid s \in T\}$.

Una herramienta común para evaluar complejidad es la siguiente.

Definición 1.9. 1. Sean X, Y conjuntos, $A \subseteq X, B \subseteq Y$. Una reducción de A a B es un mapa $f : X \rightarrow Y$ tal que $f^{-1}(B) = A$, i.e., $x \in A \iff f(x) \in B$. Si X, Y son espacios topológicos, decimos que A es reducible a B , en símbolos $A \leq_W B$, si existe una reducción continua de A a B .

2. Sea Γ una clase de conjuntos en espacios polacos. Si Y es espacio polaco, decimos que $B \subseteq Y$ es Γ -duro si $A \leq_W B$ para cualquier $A \in \Gamma(X)$ donde X es un espacio polaco cero dimensional. Más aún, si $B \in \Gamma(Y)$ decimos que B es Γ -completo.

Nos interesa una caso particular de la definición anterior:

Definición 1.10. Sean E y F relaciones de equivalencia definidas en espacios Borel X e Y respectivamente. Diremos que E es Borel reducible a F (en símbolos $E \leq_B F$) si existe una función Borel $f : X \rightarrow Y$ tal que para todo $x, y \in X$

$$x E y \iff f(x) F f(y).$$

Una función f como arriba se dirá una reducción (Borel) de E a F .

Una forma común de interpretar $E \leq_B F$ es decir que F es al menos tan complicada como E ; si también vale $F \leq_B E$ decimos que son bi-reducibles y lo interpretamos diciendo que tienen la misma complejidad.

Si tenemos una reducción Borel $f : X \rightarrow Y$ entonces el mapa $f \times f : X \times X \rightarrow Y \times Y$ es una reducción de E a F . Notamos que si E es reducible a F , entonces las clases de equivalencia satisfacen

$$[x]_E = \{y \in X \mid x E y\} = \{y \in X \mid f(x) F f(y)\} = f^{-1}[[f(x)]_F].$$

De este modo, si las F -clases satisfacen una propiedad preservada por preimágenes Borel, también la satisfarán las E -clases, por ejemplo ser conjunto Borel.

En el primer nivel en la clasificación de relaciones de equivalencia según su reducibilidad Borel se encuentran las relaciones suaves, aquellas que son Borel reducibles a $\text{id}(\mathbb{R})$. Luego, entre las que no son suaves sucede algo curioso: hay una minimal (salvo bi-reducibilidad Borel). Una definición de ella es como la relación E_0 de igualdad eventual en el espacio de Cantor $2^{\mathbb{N}}$, es decir:

$$x E_0 y \iff \exists n \forall m \geq n (x(m) = y(m)). \quad (1.1)$$

Teorema 1.11. *Sea E una relación de equivalencia Borel. Entonces E es suave o $E_0 \leq_B E$.*

Definición 1.12. Un problema (X, E) es clasificable por estructuras contables si es Borel reducible a la relación de isomorfismo de estructuras contables para un lenguaje relacional de primer orden.

La relación de isomorfismo de la definición previa puede construirse como una relación de equivalencia en un espacio polaco (y por ende de Borel estándar) como sigue:

Definición 1.13. Sea L un lenguaje contable, el cual por simplicidad supondremos relacional, digamos $L = (R_i)_{i \in I}$ con I contable y R_i un símbolo de relación n_i -ario. Denotamos con X_L al espacio $X_L = \prod_i 2^{\mathbb{N}^{n_i}}$. Pensamos en X_L como el espacio de todas las estructuras contables para L , ya que cada $x = (x_i) \in X_L$ puede identificarse con la estructura $\mathcal{A}_x := (\mathbb{N}, (R_i^{\mathcal{A}_x})_{i \in I})$ donde $R_i^{\mathcal{A}_x}(s) \iff x_i(s) = 1$ para $s \in \mathbb{N}^{n_i}$.

Teorema 1.14 ([Kec94, Thm.16.6]). *La clase de isomorfismo $\{y \mid \mathcal{A}_x \cong \mathcal{A}_y\}$ para cualquier $x \in X_L$ es Borel.*

Lógica modal

La lógica modal contemporánea comprende el estudio de una vasta familia de nociones modales (como los primeros operadores modales de “posibilidad” \diamond y “necesidad” \square) y se aplica en diversas áreas de filosofía y matemática, especialmente en ciencias de la computación. El monumental manual [BBW06], en particular los Capítulos 1, 5 y 6; contienen todos los conceptos necesarios. Recomendamos también la excelente propuesta [San09].

Trabajaremos con una única variable proposicional \top y modalidades $\langle a \rangle$ para un conjunto de etiquetas L y en base a ellas construimos las fórmulas modales. En el caso especial de una única etiqueta, denotamos con \diamond al operador modal unario y llamaremos lógica modal básica (BML) al conjunto de fórmulas consistente de las siguientes producciones

$$\top \mid \neg\varphi \mid \varphi_1 \wedge \varphi_2 \mid \diamond\varphi.$$

Los modelos para los lenguajes modales serán los marcos de Kripke, i.e., el objeto básico para dar semántica a una lógica modal. En este trabajo preferimos trabajar con sistemas de transición etiquetados (LTS) pues el enfoque está en los procesos y no en la lógica. Estas estructuras son básicamente grafos dirigidos.

Definición 1.15. Un sistema de transición etiquetado, o LTS, con lenguaje L es una tupla $\mathbb{S} = (S, \{R_a\}_{a \in L})$ donde S es un conjunto contable de estados y $R_a \subseteq S \times S$ son las relaciones de transición. Si $s R_a t$, escribimos $s \xrightarrow{a} t$.

A veces se incluye un elemento destacado $i \in S$ en la definición previa que se denomina *estado inicial*, en tal caso lo denotamos con (\mathbb{S}, i) . Definimos ahora inductivamente el concepto de satisfacción de una fórmula φ en un estado $s \in S$ como:

$$\begin{aligned} (\mathbb{S}, s) \models \top &\iff s \in S \text{ (i.e., todos los estados la satisfacen),} \\ (\mathbb{S}, s) \models \varphi \wedge \psi &\iff (\mathbb{S}, s) \models \varphi \text{ y } (\mathbb{S}, s) \models \psi, \\ (\mathbb{S}, s) \models \langle a \rangle \varphi &\iff \text{ existe } t \in S \text{ tal que } s \xrightarrow{a} t \text{ y } (\mathbb{S}, t) \models \varphi. \end{aligned}$$

La idea de equivalencia entre estados viene dada por el siguiente concepto de naturaleza coinductiva. Podría pensarse como un estadio intermedio entre homomorfismo e isomorfismo.

Definición 1.16. Sean $\mathbb{S} = (S, i, \{R_a\}_{a \in L})$ y $\mathbb{S}' = (S', i', \{R'_a\}_{a \in L})$ dos LTS con lenguaje L . Una relación $R \subseteq S \times S'$ es una bisimulación si $s R s'$ implica que para todo $a \in L$,

- si $s \xrightarrow{a} t$, entonces existe $t' \in S'$ tal que $s' \xrightarrow{a} t'$ y $t R t'$,
- si $s' \xrightarrow{a} t'$, entonces existe $t \in S$ tal que $s \xrightarrow{a} t$ y $t R t'$.

Dos estados s, s' son bisimilares si existe una bisimulación R tal que $s R s'$. Un LTS (\mathbb{S}, i) es bisimilar a (\mathbb{S}', i') si i es bisimilar a i' .

Es costumbre llamar a la primera condición *zig* y a la segunda *zag*. Extenderemos esas denominaciones a todas las bisimulaciones de la misma especie.

Capítulo 2

Procesos de Markov Etiquetados

En este capítulo presentamos las definiciones básicas de LMP y de todos los conceptos vinculados a ellos con los que trabajaremos en el presente y próximo capítulo. Hemos incluido las demostraciones de algunos resultados estándares en el área para familiarizar a quien lee con los conceptos y facilitar su comprensión; en muchas de ellas hay que tener especial cuidado con las nuevas sutilezas descubiertas en el desarrollo de esta tesis, sobre todo la posible intervención de conjuntos no medibles. Otra razón importante para incluir estas pruebas es el cambio de enfoque o notación, así como la necesidad de ampliar resultados conocidos al resto de las nociones.

En la Sección 2.1 encontramos las tres definiciones básicas de núcleo de Markov, LMP y morfismo zigzag, y también presentamos el proceso \mathbb{U} . Este será un ejemplo fundamental en todo el trabajo, ya sea por su rol como “semilla” de otros procesos o por su potencial de contraejemplo de muchas afirmaciones. Además, damos un breve repaso por otras presentaciones de los LMP que serán útiles para motivar definiciones más adelante o simplemente ampliar la mirada sobre estas estructuras.

En la Sección 2.2 está el concepto que nombra esta tesis: las bisimulaciones. Una guía para leer esta parte podría ser considerar el eje “estados en su contexto (o ambiente)”. En esta dirección el objeto central sería el de LMP punteado. En cuanto a la bisimulaciones, todas las definiciones posibles pueden definirse sin referencia específica a estados particulares, pero también existen las versiones punteadas de cada una. Bajo esta perspectiva, encontramos las siguientes maneras de pensar los estados:

1. dos estados en un mismo contexto;
2. dos estados cada uno con su contexto;
3. un estado con su mínimo contexto posible.

El último ítem no es desarrollado en extensión en esta parte, pero sí será importante en los últimos capítulos. Los primeros dos conforman el núcleo de este capítulo.

Del primer ítem estudiamos/repasamos las bisimulaciones de estados y de eventos como relaciones en un LMP. De esto se trata la Sección 2.2.1. Allí encontraremos un desarrollo de estos dos tipos de relaciones, cómo se vinculan entre ellas y con los morfismos zigzag. A la vez que definimos y enunciamos propiedades sobre dos operadores transversales a esta tesis: \mathcal{R} y Σ . El primero transforma una familia de conjuntos en la relación de indistinguibilidad por esa familia; el segundo lleva una relación en la clase de conjuntos medibles y cerrados por esa relación. Este

contenido es fundamental para el Capítulo 3. Al final de este apartado encontramos una breve discusión sobre la bisimulación de estados en la suma directa que será útil casi inmediatamente.

El segundo ítem en la enumeración se corresponde con las Secciones 2.2.2 y 2.2.3. Aquí repasamos las diferentes definiciones de los conceptos disponibles entre dos LMP y que diferenciaremos con los símbolos \oplus ; \times ; \wedge ; \vee y Δ . Quizás pensaríamos en esta perspectiva como la más natural y luego considerar dos estados y reunirlos en un único contexto. En esta dirección podemos pensar en la suma directa, forma natural de unir dos LMP, pero veremos que no se comporta bien. Las \oplus -bisimulaciones se construyen en base a relaciones en la suma. Si pensamos en el producto, no tenemos forma natural o canónica de definir estructura de LMP, aunque sí se puede adaptar la noción interna y definir las \times -bisimulaciones en base a relaciones en el producto cartesiano entre dos procesos. También estaremos interesados en la relación $(\sim_s)_+$ heredada del estudio anterior: la bisimilitud de estados interna en el proceso suma restringida a los estados en sendos procesos. El vínculo entre los tres conceptos es que $\sim^\times \subseteq (\sim_s)_+ \subseteq \sim^\oplus$. No podemos responder a ninguna de las otras contenciones, excepto en el caso de un mismo proceso o que se den condiciones adicionales de medibilidad. Cada una plantea una pregunta referida a la posibilidad de construir una bisimulación de algún tipo a partir de otra de otro tipo. Curiosamente, también surgen en torno a la cuestión sobre la transitividad de las bisimilitudes en discusión.

El estudio de estas primeras definiciones requiere especial atención al dominio de definición de las relaciones: si son relaciones en la suma, o entre los dos procesos. Por ello, encontraremos varias formas de pasar de relaciones de un tipo a otro; no hay aquí dificultad conceptual, sólo notacional. Por otro lado, todas estas bisimulaciones que se podrían agrupar bajo el eslogan “de estados”, siempre requieren información sobre conjuntos cerrados. Entonces es usual que cualquier afirmación sobre alguna de ellas venga precedida de una sobre conjuntos cerrados.

Las últimas tres nociones en la lista anterior son categóricas y están más vinculadas a la naturaleza coalgebraica de un LMP. En consecuencia algunos conceptos de teoría de categorías cobran mayor importancia, entre ellos los de pullback y pushout, sobre los que damos una breve discusión. Las dificultades aquí provienen de la teoría de la medida, en particular, de la capacidad de definir núcleos de Markov sobre relaciones arbitrarias.

Todas las interrelaciones entre las bisimilitudes asociadas a cada bisimulación se encuentran listadas en la Tabla 2.1. Un resumen fugaz sería que se dan las contenciones $\sim^\Delta \subseteq \sim^\wedge \subseteq \sim^\times \subseteq (\sim_s)_+ \subseteq \sim^\vee$; también se da la falla en la inclusión $\sim^\times \subseteq \sim^\wedge$ y esto refuta uno de los resultados principales en [Bac13]. Por otro lado \sim^\oplus parece ser mal gestada dada la insuficiencia de información que provee.

Concluimos el capítulo en 2.3 con una breve discusión sobre la posibilidad de construir un LMP sobre un conjunto cociente, con especial atención a las σ -álgebras involucradas. Esta es una construcción elemental con aplicaciones importantes, por ejemplo a la caracterización lógica de la bisimilitud de estados en espacios analíticos ([Des99]).

2.1. La categoría LMP

Comenzamos definiendo un tipo particular de funciones, las cuales serán parte constituyente de las estructuras objeto de estudio.

Definición 2.1. Un núcleo de Markov en un espacio medible (S, Σ) es una función $\tau : S \times \Sigma \rightarrow [0, 1]$ tal que para cada $s \in S$ fijo, $\tau(s, \cdot) : \Sigma \rightarrow [0, 1]$ es una medida de subprobabilidad, y para

cada conjunto $X \in \Sigma$ fijo, $\tau(\cdot, X) : S \rightarrow [0, 1]$ es una función $(\Sigma, \mathcal{B}[0, 1])$ -medible.

Estos núcleos se interpretarán como las funciones de transición en los procesos que definiremos a continuación. Sea L un conjunto contable que llamaremos lenguaje y cuyos elementos denominaremos etiquetas o acciones.

Definición 2.2. Un proceso de Markov etiquetado, o LMP, con conjunto de etiquetas L será un triple $\mathbb{S} = (S, \Sigma, \{\tau_a \mid a \in L\})$, donde S es un conjunto, cuyos puntos llamaremos estados, Σ es una σ -álgebra sobre S , y para todo $a \in L$, $\tau_a : S \times \Sigma \rightarrow [0, 1]$ es un núcleo de Markov.

Un comentario sobre la notación: en general el nombre de un LMP se corresponde con la notación del triple que lo define, por ejemplo \mathbb{T} denota el triple $(T, \Sigma_T, \{\tau_a^T \mid a \in L\})$ o \mathbb{S}' denota el triple $(S', \Sigma', \{\tau_a' \mid a \in L\})$. A veces sólo daremos el nombre del LMP para luego referirnos a cualquiera de sus partes constituyentes con la misma nomenclatura. También podemos escribir $\{\tau_a\}_{a \in L}$ en lugar de $\{\tau_a \mid a \in L\}$.

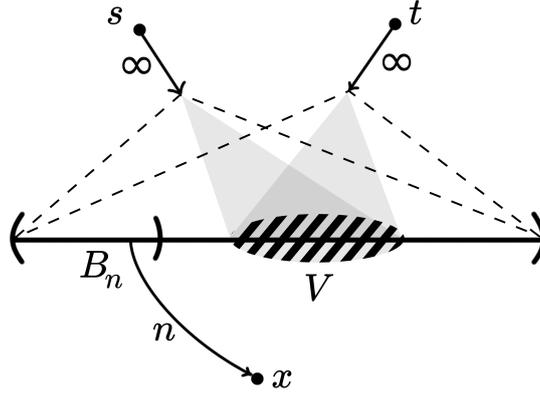
Esta clase de procesos fueron introducidas por Desharnais *et al.* como respuesta a la necesidad de generalizar a espacios continuos las estructuras análogas ya existentes para espacios discretos. Esta generalización exige el uso de conceptos y herramientas de la teoría de probabilidad y medida en general. En [Des99] y [DEP02] puede encontrarse una introducción al tema con diversos ejemplos. Allí se resume el funcionamiento de un LMP como sigue: tenemos un espacio de estados y un conjunto de etiquetas, en un momento dado el sistema se encuentra en un punto y se mueve entre estados. A qué estados puede transitar dependerá de su interacción con el ambiente, la cual está indicada por las etiquetas en L , también llamadas acciones. El sistema evoluciona según una ley de probabilidades, si ocurre una interacción codificada por una etiqueta, hará una transición a un nuevo estado gobernado por otra distribución de probabilidades. El término “Markov” en el nombre de estos procesos hace referencia a que las transiciones están gobernadas por el estado actual del sistema, y no por su historia pasada. Damos un primer ejemplo de un proceso sencillo pero útil que cuenta con una sola etiqueta.

Ejemplo 2.3 (LMP de Dirac). *Sea (S, Σ) espacio medible. Definimos un LMP \mathbb{D} sobre tal espacio con una única etiqueta. El núcleo está dado por*

$$\tau(x, E) = \delta_x(E) := \begin{cases} 1, & \text{si } x \in E, \\ 0, & \text{si } x \notin E. \end{cases}$$

En este trabajo requeriremos que el conjunto de etiquetas L sea contable. Esta condición garantiza resultados de caracterización lógica para ciertas lógicas modales muy simples definidas en [BDEP97] y [DEP98]. Por otro lado, con una cantidad infinita no numerable de etiquetas, las nociones de equivalencia que estudiaremos podrían trivializarse o incluso perder sentido computacional. También en esa dirección podemos justificar el uso de subprobabilidades en la definición: observamos que en un LMP dado podría suceder que existan estados que no acepten alguna acción con probabilidad uno, si no fuera así todos los estados tendrían el mismo comportamiento observable. Si para un estado s y etiqueta a tenemos $\tau_a(s, S) = 0$, entonces s no acepta la acción a . A su vez, el uso de subprobabilidades da margen para comportamiento sin especificar, incluida la posibilidad de ninguna acción observable.

Observamos además que la Definición 2.2 de LMP difiere de la dada en los trabajos citados donde se exige que el espacio medible considerado sea *analítico*. Con este requisito se tienen a mano teoremas útiles, como el teorema de estructura única para espacios analíticos, para probar, por ejemplo, la transitividad de la relación que definiremos como “bisimulación” entre procesos. Nosotros abandonamos esa suposición y trabajamos en espacios medibles generales.

Figura 2.1: El LMP \mathbb{U} .

Ejemplo 2.4. Presentaremos ahora el LMP \mathbb{U} , el cual fue introducido bajo el nombre \mathbf{S}_3 en [ST11]. Será un ejemplo importante en esta tesis para ilustrar conceptos y motivar distintas construcciones. De ahora en más, I denotará el intervalo unitario abierto $(0,1)$, \mathbf{m} será la medida de Lebesgue en I y \mathcal{B}_V denotará la σ -álgebra $\sigma(\mathcal{B}(I) \cup \{V\})$, donde V es un subconjunto de I no medible Lebesgue. Por Teorema 1.4 tenemos dos extensiones \mathbf{m}_0 y \mathbf{m}_1 de \mathbf{m} tales que $\mathbf{m}_0(V) \neq \mathbf{m}_1(V)$. Sea $\{q_n\}_{n \in \omega}$ una enumeración sin repeticiones de los racionales en I y definimos $B_n := (0, q_n)$; se sigue que $\{B_n \mid n \in \omega\}$ es una familia numerable generadora de $\mathcal{B}(I)$.

Sean $s, t, x \notin I$ distintos dos a dos; podemos pensar en \mathbf{m}_0 y \mathbf{m}_1 como medidas definidas en la suma directa $I \oplus \{s, t, x\}$, soportadas en I . El conjunto de etiquetas será $L := \omega \cup \{\infty\}$. Definimos entonces $\mathbb{U} = (U, \Upsilon, \{\tau_n \mid n \in L\})$ tal que

$$\begin{aligned} (U, \Upsilon) &:= (I \oplus \{s, t, x\}, \mathcal{B}_V \oplus \mathcal{P}(\{s, t, x\})), \\ \tau_n(r, A) &:= \chi_{B_n}(r) \cdot \delta_x(A), \\ \tau_\infty(r, A) &:= \chi_{\{s\}}(r) \cdot \mathbf{m}_0(A) + \chi_{\{t\}}(r) \cdot \mathbf{m}_1(A) \end{aligned}$$

para $n \in \omega$ y $A \in \Upsilon$. Esto define efectivamente un LMP ya que para todo r , $0 \leq \chi_{B_n}(r) \leq 1$ y $0 \leq \chi_{\{s\}}(r) + \chi_{\{t\}}(r) \leq 1$; la medibilidad se infiere del hecho de que $\tau_l(\cdot, A)$ es siempre una combinación lineal de funciones medibles.

Intuitivamente, la dinámica de este proceso es como sigue: los estados s y t sólo pueden hacer transiciones con etiqueta ∞ a un estado “uniformemente distribuido” en I , pero difieren en la probabilidad de alcanzar el subconjunto $V \subseteq I$. Además, cada punto de $B_n \subseteq I$ puede hacer una n -transición a x . Finalmente, x no puede hacer ninguna transición (ver Figura 2.1).

Notamos que el espacio de estados de \mathbb{U} es contablemente generado y separa puntos pero no es Borel estándar debido al no medible V . Este será un requisito general: aunque permitimos espacios medibles no analíticos, sí limitamos las σ -álgebras posibles a aquellas contablemente generadas y que separan puntos. Esta última condición se satisface si la σ -álgebra contiene a los singuletes, y en el caso de que sea contablemente generada ambas condiciones son equivalentes. La restricción a LMP separables (es decir LMP sobre espacios metrizable separables) es bastante natural; de otro modo aparecerían algunos casos patológicos en el estudio de la equivalencia de comportamiento entre estados ([PST21, Example 6.1]).

En su tesis [Des99], J. Desharnais define los procesos de Markov etiquetados como una 4-upla $\mathbb{S} = (S, i, \Sigma, \{\tau_a \mid a \in L\})$ donde $i \in S$ se denomina estado inicial del proceso. Llamaremos LMP punteados a estos procesos con un estado destacado y los denotaremos con (\mathbb{S}, i) para enfatizar el estado. El enfoque que utilizemos dependerá del contexto y de las preguntas que intentemos responder. A partir de la investigación sobre los conceptos de bisimulación para LMP que definiremos en la próxima sección, observamos que los protagonistas de estas nociones son los estados de un proceso. En este caso el enfoque más adecuado es el de LMP punteado ya que permite concentrarse en los estados. Sin embargo, si por ejemplo estudiamos estas equivalencias globalmente, lo que llamaremos bisimilitud, lo mejor es concentrarse en el LMP \mathbb{S} a secas.

En el camino a agrupar los LMP en una categoría, damos la siguiente definición que oficiará de morfismo entre objetos.

Definición 2.5. Un morfismo zigzag f entre dos LMP \mathbb{S} y \mathbb{S}' con lenguaje L es una función medible $f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}'$ que satisface

$$\forall a \in L, s \in S, B \in \Sigma' \quad \tau_a(s, f^{-1}[B]) = \tau'_a(f(s), B).$$

Si los LMP son punteados, f además debe mapear el estado inicial de \mathbb{S} en el estado inicial de \mathbb{S}' .

El nombre “zigzag” se hereda de la lógica modal donde refleja las condiciones de ida y vuelta en la Definición 1.16 de bisimulación en LTS.

Ejemplo 2.6. 1. La función identidad es zigzag entre dos LMP sobre el mismo conjunto y con núcleos coincidentes si y sólo si es una función medible entre los espacios medibles asociados, esto a su vez es equivalente a que la σ -álgebra del codominio sea sub- σ -álgebra del dominio.

2. La composición de dos zigzag $f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}'$ y $g : \mathbb{S}' \rightarrow \mathbb{S}''$ es zigzag: si $s \in S$ y $B \in \Sigma''$, entonces $\tau(s, (g \circ f)^{-1}[B]) = \tau(s, f^{-1}[g^{-1}[B]]) = \tau'(f(s), g^{-1}[B]) = \tau''(g(f(s)), B) = \tau''((g \circ f)(s), B)$.

Aquí marcamos otra diferencia con la bibliografía: en algunos trabajos se definen los morfismos zigzag como funciones *suryectivas*. Siguiendo [Des99], y por la importancia que asignamos a los estados, preferimos reemplazar esa condición por la preservación de estados iniciales cuando sea necesario. Por otro lado, en [DEP02] se justifica el requisito de suryectividad como una forma de impedir situaciones donde se tiene un sistema \mathbb{S} y otro que consiste en la suma directa de \mathbb{S} con cualquier otro sistema \mathbb{T} .

Si $f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}'$ es una función medible entre dos LMP y además $f[S] \in \Sigma'$, entonces podemos considerar la imagen $f[\mathbb{S}] := (f[S], \Sigma' \upharpoonright f[S], \{\tilde{\tau}_a \mid a \in L\})$ donde las funciones $\tilde{\tau}_a$ son las restricciones de los núcleos τ'_a a $f[S] \times \Sigma' \upharpoonright f[S]$. Debido a la medibilidad de $f[S]$, $\tilde{\tau}_a$ resultará también núcleo de Markov.

Definición 2.7. Dado un LMP $\mathbb{S} = (S, \Sigma, \{\tau_a \mid a \in L\})$ y $A \subseteq S$ medible, definimos el sub-LMP sobre A como la estructura $\mathbb{S} \upharpoonright A = (A, \Sigma \upharpoonright A, \{\tau_a \upharpoonright_{A \times \Sigma \upharpoonright A} \mid a \in L\})$.

Lema 2.8. $\mathbb{S} \upharpoonright A$ es LMP.

Demostración. Basta probar que la restricción $\tau_a \upharpoonright_{A \times \Sigma \upharpoonright A}$ es núcleo de Markov: si $s \in A$ entonces $\tau_a(s, \cdot) : \Sigma \upharpoonright A \rightarrow [0, 1]$ es medida de subprobabilidad ya que $\Sigma \upharpoonright A \subseteq \Sigma$ por ser A un Σ -medible. Por la misma razón, si $Q \in \Sigma \upharpoonright A$, $\{s \in A \mid \tau_a(s, Q) < q\} = \{s \in S \mid \tau_a(s, Q) < q\} \cap A \in \Sigma \upharpoonright A$ y por lo tanto $\tau_a(\cdot, Q)$ es medible respecto a $\Sigma \upharpoonright A$. \square

Con este concepto, las imágenes medibles de funciones medibles son sub-LMP. Un problema es que si $f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}'$ es zigzag, podría no serlo como mapa $\mathbb{S} \rightarrow f[\mathbb{S}]$, a menos que se impongan más condiciones a $f[\mathbb{S}]$ (veremos un caso en 4.33).

Ejemplo 2.9. *En el espacio medible $([0, 1], MEAS_m)$, consideramos dos procesos \mathbb{S} y \mathbb{S}' con una etiqueta y núcleos dados por $\tau(x, A) = \mathbf{m}(A)$ y $\tau'(x, A) = \chi_A(0)$ respectivamente. Si \mathcal{C} denota el conjunto de Cantor en $[0, 1]$, $V \subseteq (0, 1)$ es no medible Lebesgue y $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es función tal que $f[\mathcal{C}] = V$ y $f[[0, 1] \setminus \mathcal{C}] = \{0\}$, entonces $f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}'$ resulta zigzag y su imagen es no medible. La medibilidad de f se sigue del hecho de que $\mathbf{m}(\mathcal{C}) = 0$ y de la completitud de \mathbf{m} . Para verificar la propiedad zigzag, notamos que si $A \subseteq [0, 1]$ es medible y $0 \notin A$, entonces $f^{-1}[A] \subseteq \mathcal{C}$ y por lo tanto $\mathbf{m}(f^{-1}[A]) = 0$. Si por el contrario $0 \in A$, entonces $[0, 1] \setminus \mathcal{C} \subseteq f^{-1}[A]$ y por ende $\mathbf{m}(f^{-1}[A]) = 1$. Luego, $\tau(x, f^{-1}[A]) = \mathbf{m}(f^{-1}[A]) = \chi_A(0) = \tau'(f(x), A)$.*

La próxima definición reúne los procesos de Markov y los zigzag en una categoría (concreta). La verificación de los axiomas de categoría fue dada en el Ejemplo 2.6.

Definición 2.10. La categoría **LMP** tiene como objetos a los procesos de Markov etiquetados con conjunto de etiquetas L fijo y como morfismos a los zigzag entre ellos. Definimos también la categoría **LMPp** de procesos de Markov punteados con sus morfismos zigzag.

2.1.1. Otras presentaciones de un LMP

En este apartado damos algunas presentaciones distintas de los LMP. La primera es quizás una forma más sintética de definir un proceso de Markov aprovechando la estructura medible del espacio de medidas de subprobabilidad sobre un espacio. Luego damos una presentación categórica, estrictamente coalgebraica, de los LMP y por último una versión más general de los núcleos de Markov.

Dado un espacio medible (S, Σ) , definimos $\Delta(S, \Sigma)$ como el conjunto de todas las medidas de subprobabilidad $\mu : S \rightarrow [0, 1]$ sobre (S, Σ) . Cuando la σ -álgebra sea clara por el contexto lo denotaremos simplemente $\Delta(S)$. Para cada conjunto medible $E \in \Sigma$ tenemos una función evaluación $ev_E : \Delta(S) \rightarrow [0, 1]$ definida por $ev_E(\mu) := \mu(E)$. Podemos definir entonces una σ -álgebra sobre $\Delta(S)$, que denotaremos con $\Delta(\Sigma)$, como la σ -álgebra inicial para la familia $\{ev_E \mid E \in \Sigma\}$, es decir la menor σ -álgebra que hace que todas las funciones evaluación sean medibles respecto a $\mathcal{B}([0, 1])$. Otra caracterización de $\Delta(\Sigma)$ está dada por la propiedad de ser la σ -álgebra generada por los conjuntos $\Delta^{>q}(E) := \{\mu \mid \mu(E) > q\}$ para $q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ y $E \in \Sigma$. Se ve rápidamente que entonces todos los conjuntos (definidos de forma análoga) $\Delta^{\bowtie q}(E)$, con $\bowtie \in \{<, \leq, \geq\}$, están en $\Delta(\Sigma)$.

Lema 2.11 ([DSTW12, Lemma 2.1]). *Si (S, Σ) y (S', Σ') son espacios medibles, una función $f : S \rightarrow \Delta(S')$ es medible si y sólo si $f(\cdot)(E) : S \rightarrow [0, 1]$ es medible para todo $E \in \Sigma'$.*

En este contexto, un núcleo de Markov es una función $\tau : S \rightarrow \Delta(S)$ con la propiedad de ser $(\Sigma, \Delta(\Sigma))$ -medible. Un LMP con conjunto de etiquetas L puede pensarse entonces como un espacio medible (S, Σ) con una familia de núcleos $\{\tau_a : S \rightarrow \Delta(S) \mid a \in L\}$.

Damos ahora la presentación categórica. Necesitamos antes una definición.

Definición 2.12. Si C es una categoría y $T : C \rightarrow C$ es un endofunctor, una coálgebra para T es un par (A, α) donde A es un objeto de C (llamado objeto *base* de la coálgebra) y α es una flecha $\alpha : A \rightarrow TA$ (llamada *estructura*).

Las coálgebras para un funtor (a veces llamado funtor de comportamiento) forman una categoría donde un morfismo $h : (A, \alpha) \rightarrow (A', \alpha')$ es una flecha $h : A \rightarrow A'$ tal que $\alpha' \circ h = Th \circ \alpha$, es decir, que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & A' \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha' \\ TA & \xrightarrow{Th} & TA' \end{array}$$

La aplicación $S \mapsto \Delta(S)$ define un endofunctor en la categoría **Mes** de espacios medibles. Este mapa actúa en los morfismos como sigue: si $f : S \rightarrow S'$ es medible, $\Delta f : \Delta(S) \rightarrow \Delta(S')$ está dada por $\Delta f(\mu) = \mu \circ f^{-1}$. Este es el análogo para subprobabilidades del funtor (mónada) Π de Giry ([Gir81]). Del mismo modo que los LTS con conjunto de etiquetas L son coálgebras para, por ejemplo¹, el funtor en **Set** dado por $X \mapsto \{Y \mid Y \subseteq L \times X\}$ ([Mor15, Ejemplo 1.3]), los LMP resultan ser las coálgebras para un endofunctor en **Mes**. No podemos usar Δ porque necesitamos tener en cuenta las etiquetas, pero esto se soluciona considerando un nuevo endofunctor Δ^L . En cuanto a los objetos, $\Delta^L(S)$ está dado por el conjunto $\{\theta \mid \theta : L \rightarrow \Delta(S)\}$ junto con la σ -álgebra inicial para la familia de funciones $\{ev_E \circ ev_a \mid E \in \Sigma, a \in L\}$ donde $ev_a(\theta) = \theta(a)$. La acción de Δ^L sobre un morfismo $f : S \rightarrow S'$ es $(\Delta^L f)(g) = (\Delta f) \circ g \in \Delta^L(S')$.

Observación. Podemos definir el funtor exponencial constante Id^L que mapea un conjunto X en $X^L := \{\theta : L \rightarrow X\}$, y mapea una función $f : X \rightarrow Y$ a la función $\text{Id}^L f : X^L \rightarrow Y^L$ dada por $\text{Id}^L f(\theta) = f \circ \theta$. De este modo, Δ^L resulta el funtor composición $\text{Id}^L \circ \Delta$.

La categoría de coálgebras de Δ^L resulta exactamente la categoría **LMP** definida. Notar que no hay requisito de suryectividad para los morfismos de la categoría de coálgebras. Para ejemplificar en el caso de una etiqueta, el LMP de Dirac (2.3) es la coálgebra (S, δ) donde $\delta : S \rightarrow \Delta(S)$ es la función medible dada por $\delta(s) = \delta_s$.

Un punto de vista intermedio entre los dos anteriores es el de relación estocástica entre dos espacios medibles [Dob09, Def. 1.6.17]: una relación estocástica $K : (M, \mathcal{M}) \rightsquigarrow (N, \mathcal{N})$ entre los espacios medibles (M, \mathcal{M}) y (N, \mathcal{N}) es un mapa \mathcal{M} - \mathcal{N}^\bullet -medible $K : (M, \mathcal{M}) \rightarrow \Delta^L(N, \mathcal{N})$. Aquí, \mathcal{N}^\bullet es la σ -álgebra Borel de la topología de la convergencia débil, también llamada σ -álgebra débil*, otro nombre complicado para $\Delta(\Sigma)$ definida más arriba. Cuando ambos espacios medibles coinciden, una relación estocástica resulta un núcleo de Markov. Este concepto también puede verse como los morfismos de Kleisli de la mónada de Giry ([Dob07b, Def. 2.8]) y sirve como fundamento para una interpretación probabilista de las lógicas coalgebraicas ([Dob09]). Los morfismos entre relaciones estocásticas resultan ser los morfismos zigzag suryectivos en el caso particular de interés (ver [Dob09, Prop. 1.6.19]). Todo esto es, a su vez, caso particular de un núcleo de transición ([Dob14, Def. 2.10]).

2.2. Nociones de bisimulación

Ahora que ya tenemos definidos los procesos de Markov, en esta sección presentamos el concepto central de esta tesis referido a la equivalencia entre estados. Notamos que, según consideremos la equivalencia entre estados de un único proceso o entre estados de dos procesos, tendremos nociones internas y externas respectivamente. Otra manera de expresar esta distinción es considerando el ambiente de un estado: cuando los ambientes de dos estados sean

¹Otra posibilidad es el funtor dado en [Bac13, Example 3.3.3]

los mismos, tendremos una noción interna; cuando sean distintos, trabajaremos con la versión externa.

2.2.1. Bisimulaciones internas

Comenzaremos con las definiciones internas, es decir trabajamos sobre un único proceso. El enfoque será *relacional* y necesitaremos algunos conceptos previos.

Definición 2.13. Si R es una relación binaria sobre un conjunto S , decimos que $X \subseteq S$ es R -cerrado si $\{s \in S \mid \exists x \in X (x R s \vee s R x)\} \subseteq X$.

Podemos definir el conjunto $R^d[X] = \{s \in S \mid \exists x \in X x R s\}$ de los elementos relacionados a *derecha* con elementos de X y análogamente $R^i[X] = \{s \in S \mid \exists x \in X s R x\}$. Los predicados R^d -cerrado y R^i -cerrado se definen como $R^d[X] \subseteq X$ y $R^i[X] \subseteq X$ respectivamente. Entonces R -cerrado sería la conjunción R^d -cerrado y R^i -cerrado. Si es R simétrica, todas las propiedades coinciden pues $R^d[X] = R^i[X]$. Otra caracterización útil de este concepto es la siguiente: X es R -cerrado si y sólo si satisface la propiedad $\forall (s, t) \in R (s \in X \iff t \in X)$.

Si $\Gamma \subseteq \mathcal{P}(S)$, denotamos con $\Gamma(R)$ a la familia de todos los conjuntos R -cerrados que son elementos de Γ . Podemos pensar a $\Gamma(\cdot)$ como un *operador* que lleva relaciones en subfamilias de $\mathcal{P}(S)$. Destacamos el caso particular cuando Γ es la σ -álgebra de un espacio medible (S, Σ) y notamos que en tal situación $\Sigma(R)$ es siempre una sub- σ -álgebra de Σ . Por la forma en que hemos definido R -cerrado, este hecho no requiere ninguna suposición extra sobre R . Dada la dependencia de Γ y de R en la definición de esta operación, deberíamos denotarla con algo así como $\text{Clo}(\Gamma, R)$, pero preferimos conservar la notación anterior donde la familia Γ nombra la operación.

Otro operador que será importante en este trabajo, y que va en el sentido contrario al anterior, es el operador \mathcal{R} que asocia a cada familia $\Lambda \subseteq \mathcal{P}(S)$ una relación $\mathcal{R}(\Lambda)$ en S definida por

$$(s, t) \in \mathcal{R}(\Lambda) \text{ si y sólo si } \forall A \in \Lambda (s \in A \iff t \in A).$$

Esta relación asocia los puntos que están en exactamente los mismos conjuntos de Λ . Observamos que es siempre una relación de equivalencia, independientemente de las condiciones sobre Λ .

Recolectamos en la siguiente proposición algunos resultados elementales sobre los dos operadores recién descritos que serán útiles en muchas demostraciones y cálculos.

Proposición 2.14. Sean $\Lambda, \Lambda' \subseteq \Gamma \subseteq \mathcal{P}(S)$ y $R, R' \subseteq S \times S$.

1. $\Lambda \subseteq \Gamma(\mathcal{R}(\Lambda))$.
2. $R \subseteq \mathcal{R}(\Gamma(R))$.
3. *Antimonotonía de $\mathcal{R}(\cdot)$:* si $\Lambda \subseteq \Lambda'$, entonces $\mathcal{R}(\Lambda) \supseteq \mathcal{R}(\Lambda')$.
4. *Antimonotonía de $\Gamma(\cdot)$:* si $R \subseteq R'$, entonces $\Gamma(R) \supseteq \Gamma(R')$.
5. $\mathcal{R}(\Gamma(\mathcal{R}(\Lambda))) = \mathcal{R}(\Lambda)$.
6. $\Gamma(\mathcal{R}(\Gamma(R))) = \Gamma(R)$.
7. $\mathcal{R}(\Lambda) = \mathcal{R}(\sigma(\Lambda))$.

Demostración. Los primeros cuatro ítems son directos de las definiciones. La inclusión (\supseteq) en la propiedad (5) se sigue de (2) y la contención (\subseteq) se sigue de (1) y (3). Análogamente para la propiedad (6) usando (1), (2) y (4).

Para el Ítem (7), la contención (\supseteq) se desprende de la antimonotonía de \mathcal{R} . Para la inclusión (\subseteq), tomamos $(s, t) \in \mathcal{R}(\Lambda)$ y consideramos la σ -álgebra $\mathcal{A}_{s,t} = \{A \mid s \in A \iff t \in A\}$. Dado que $\Lambda \subseteq \mathcal{A}_{s,t}$, entonces $\sigma(\Lambda) \subseteq \mathcal{A}_{s,t}$. \square

Ya tenemos los elementos para dar la primera definición de bisimulación para LMP. La idea general es que dos estados relacionados por una bisimulación pueden, para cada etiqueta $a \in L$, hacer a -transiciones que los hagan indistinguibles desde el punto de vista del comportamiento observable. En sistemas probabilistas esto quiere decir que transiten con la misma probabilidad a otros estados también relacionados por la bisimulación. Una dificultad en espacios continuos es que puede suceder que las medidas de subprobabilidad $\tau_a(s, \cdot)$ asignen medida 0 a los singuletes, por ende no podemos expresar punto a punto la idea de equivalencia. En este caso lo mejor que podemos hacer es pedir que se iguale la probabilidad de transitar a conjuntos cerrados por la relación (“clases de equivalencia” en su versión más refinada) que sean medibles (para poder efectivamente calcular su probabilidad). De ahí la importancia de $\Sigma(R)$ como la fuente de conjuntos “test” en la próxima definición.

Definición 2.15. Dado un LMP $\mathbb{S} = (S, \Sigma, \{\tau_a \mid a \in L\})$ una bisimulación de estados interna R en \mathbb{S} es una relación binaria en S tal que si $s R t$, entonces para todo $C \in \Sigma(R)$ se cumple

$$\forall a \in L \tau_a(s, C) = \tau_a(t, C).$$

Decimos que s y t son bisimilares por estados, denotado con $s \sim_{s,\mathbb{S}} t$, si existe alguna bisimulación de estados R tal que $s R t$.

En general escribiremos \sim_s a menos que haya una posible ambigüedad en el LMP ambiente. El adjetivo *interna* en el nombre de estas relaciones es para diferenciar este concepto de las definiciones externas de la próxima sección. Por lo tanto obviaremos esa palabra hasta que sea necesario marcar la diferencia.

Ejemplo 2.16. 1. El ejemplo más sencillo de una bisimulación de estados en un LMP \mathbb{S} es la relación identidad $\text{id}_S = \{(s, s) \mid s \in S\}$.

2. En el LMP de Dirac 2.3 cualquier relación R es bisimulación de estados. En efecto, la Definición 2.15 se particulariza en la siguiente condición:

$$\begin{aligned} (s, t) \in R &\implies \forall C \in \Sigma(R) \tau(s, C) = \tau(t, C) \\ &\iff \forall C \in \Sigma(R) \delta_s(C) = \delta_t(C) \\ &\iff \forall C \in \Sigma(R) (s \in C \iff t \in C) \\ &\iff (s, t) \in \mathcal{R}(\Sigma(R)). \end{aligned}$$

Dado que $R \subseteq \mathcal{R}(\Sigma(R))$ por Proposición 2.14(2), esta condición se cumple para cualquier relación.

Una noción que será útil más adelante es la de levantamiento de una relación al espacio de medidas de subprobabilidad: si R es una relación en el espacio medible (S, Σ) , podemos levantarla a una relación de equivalencia \bar{R} sobre $\Delta(S)$ como sigue:

$$\mu \bar{R} \mu' \iff \forall Q \in \Sigma(R) \mu(Q) = \mu'(Q).$$

Con esta definición, la condición para ser bisimulación de estados se expresa por

$$s R t \implies \forall a \in L \tau_a(s, \cdot) \bar{R} \tau_a(t, \cdot).$$

Usaremos esta notación en el Capítulo 4 donde el espacio de medidas juega un rol preponderante.

Un resultado importante que se deriva directamente de la Proposición 2.14(4) es el siguiente:

Proposición 2.17. *La unión de una familia de bisimulaciones de estados es también bisimulación de estados.*

En virtud de esta propiedad, la relación $\sim_s = \bigcup \{R \subseteq S \times S \mid R \text{ es bisimulación de estados}\}$ es también una bisimulación de estados que llamaremos bisimilitud de estados. De su definición sabemos que será la mayor bisimulación de este tipo. Además es una relación de equivalencia en cualquier LMP: la reflexividad se deduce del hecho de que id_S es bisimulación de estados en cualquier \mathbb{S} ; la simetría se debe a que si R bisimulación, entonces $R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$ también lo es (simplemente por la simetría en la definición de bisimulación). Finalmente la transitividad se prueba constructivamente mostrando que, dadas R_0, R_1 bisimulaciones, la clausura transitiva de $R_0 \cup R_0^{-1} \cup R_1 \cup R_1^{-1}$ es también bisimulación. En particular esto quiere decir que la familia de bisimulaciones de estados en un LMP tiene un supremo que coincide con la misma operación en el reticulado de relaciones de equivalencia de S .

Ejemplo 2.18 (Bisimilitud de estados en Ejemplo 2.4). *Reproducimos parte de la prueba de [ST11, Theorem 15] que caracteriza la bisimilitud de estados en \mathbb{U} : es sencillo verificar que el singlete formado por el (único) estado nulo x debe ser una clase de equivalencia de \sim_s . Para cualquier otro estado $r \in \mathbb{U}$, existe $l \in L$ tal que $\tau_l(r, U) = 1$ pero $\tau_l(x, U) = 0$ ($y U$ es obviamente \sim_s -cerrado). Tomamos ahora $y \neq z \in I$; mostremos que y y z no pueden estar relacionados por \sim_s . Dado que $\{B_a \mid a \in \omega\}$ genera $\mathcal{B}(I)$, existe $a \in \omega \subseteq L$ tal que B_a separa y de z . Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $\{y, z\} \cap B_a = \{y\}$. Entonces $\tau_a(y, \{x\}) = 1$ pero $\tau_a(z, \{x\}) = 0$. Concluimos que \sim_s restringida a $I \cup \{x\}$ es la relación identidad y (en particular) $V \subseteq I$ es \sim_s -cerrado. Finalmente, observamos que $\tau_\infty(s, V) \neq \tau_\infty(t, V)$, y por lo tanto s y t no son bisimilares por estados.*

La bisimilitud de estados es preservada por morfismos zigzag.

Lema 2.19. *Sea $f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}'$ un morfismo zigzag. Si $s \sim_s t$ en \mathbb{S} entonces $f(s) \sim_{\mathbb{S}'} f(t)$ en \mathbb{S}' .*

Demostración. Sea R una bisimulación tal que $s R t$ y definimos $R' := f[R] = \{(f(x), f(y)) \mid x R y\}$. Si verificamos que R' es bisimulación en \mathbb{S}' , dado que $f(s) R' f(t)$ tendremos que $f(s) \sim_{\mathbb{S}'} f(t)$. Supongamos que $f(x) R' f(y)$ con $x R y$ y sea $A \in \Sigma'$ un conjunto R' -cerrado. Queremos verificar que $\tau'_a(f(x), A) = \tau_a(x, f^{-1}[A])$ es igual a $\tau'_a(f(y), A) = \tau_a(y, f^{-1}[A])$. Para ello basta ver que $f^{-1}[A] \in \Sigma(R)$ pues $x \sim_s y$. La medibilidad es inmediata. Comprobamos que $f^{-1}[A]$ es R -cerrado: sean $w \in f^{-1}[A]$ y $z \in S$ tales que $w R z$; dado que $f(w) R' f(z)$, $f(w) \in A$ y A es R' -cerrado, concluimos $f(z) \in A$, i.e. $z \in f^{-1}[A]$. El caso $z R w$ es similar. \square

Ejemplo 2.20. *La recíproca del Lema 2.19 no es cierta: consideramos la función identidad $\text{id} : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}_B$ donde $\mathbb{U}_B := (U, \mathcal{B}(I) \oplus \mathcal{P}(\{s, t, x\}), \{\tau_a\}_{a \in L})$. Llamemos Φ a la σ -álgebra de \mathbb{U}_B . Vemos que tal función es medible pues $\Phi \subseteq \Upsilon$ y claramente cumple la condición zigzag. Pero en \mathbb{U}_B tenemos que $s \sim_s t$ ya que no se encuentra disponible el no medible Lebesgue V para distinguirlos, sin embargo $s \not\sim_{\mathbb{U}_B} t$ en \mathbb{U} .*

En [Des99] se define una lógica modal \mathcal{L} muy simple y se prueba que dos estados son bisimilares si y sólo si son lógicamente equivalentes, es decir, satisfacen exactamente las mismas fórmulas. Sin embargo la prueba ofrecida sólo funciona en el caso de espacio de estados analítico. En [DDL06] se presenta una nueva noción de bisimulación, la bisimulación de eventos, la cual cambia el foco desde las relaciones de equivalencia a la estructura medible del LMP. En el mismo trabajo prueban que la bisimilitud asociada al nuevo concepto es caracterizada por la lógica \mathcal{L} y esto vale para procesos de Markov definidos sobre espacios medibles generales. La siguiente es la noción central en este tipo de bisimulaciones.

Definición 2.21. Sea $\mathbb{S} = (S, \Sigma, \{\tau_a \mid a \in L\})$ un LMP y $\Lambda \subseteq \Sigma$. Decimos que Λ es estable con respecto a \mathbb{S} si para todo $A \in \Lambda$, $r \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, $a \in L$, vale que $\{s \in S \mid \tau_a(s, A) > r\} \in \Lambda$.

A veces diremos simplemente que Λ es estable si el LMP se entiende del contexto. Una observación importante es que, en el caso de que Λ sea σ -álgebra, podemos reemplazar el mayor estricto $>$ en la definición anterior por cualquiera de las relaciones de orden en \mathbb{R} . En efecto, usando las operaciones de σ -álgebra podemos escribir $\{s \mid \tau_a(s, A) > r\}$ como $\{s \mid \tau_a(s, A) \leq r\}^c$, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{s \mid \tau_a(s, A) < r + 1/n\}^c$ o $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{s \mid \tau_a(s, A) \geq r + 1/n\}$.

Notamos que la condición de medibilidad de $\tau(\cdot, A)$ en la definición de LMP es exactamente que Σ sea estable con respecto a \mathbb{S} . Más aún, observar que una sub- σ -álgebra Λ de Σ es estable si y sólo si $(S, \Lambda, \{\tau_a \mid a \in L\})$ es un LMP: sólo debemos verificar la medibilidad de $\tau_a(\cdot, A)$ con respecto a Λ , pero por definición $\tau_a(\cdot, A)^{-1}[(r, 1]] = \{s \mid \tau_a(s, A) > r\} \in \Lambda$ para cualquier $A \in \Lambda$.

Si $R \subseteq S \times S$ es relación, por lo recién observado $\Sigma(R)$ es estable si y sólo si $(S, \Sigma(R), \{\tau_a\}_{a \in L})$ es LMP. De esto se deduce el siguiente resultado.

Lema 2.22 ([DDL06, Lemma 4.1]). *R es bisimulación de estados si y sólo si $(S, \Sigma(R), \{\tau_a\}_{a \in L})$ es LMP.*

Demostración. Notamos que para todo $a \in L$ y $Q \in \Sigma$ vale

$$\tau_a(s, Q) = \tau_a(t, Q) \iff \forall r \in [0, 1] (s \in \{x \in S \mid \tau_a(x, Q) > r\} \iff t \in \{x \in S \mid \tau_a(x, Q) > r\}).$$

Supongamos que $s R t$ y $Q \in \Sigma(R)$. Si R es bisimulación de estados, la ida en esta equivalencia muestra que $\{x \in S \mid \tau_a(x, Q) > r\}$ es R -cerrado. Recíprocamente, si $\Sigma(R)$ es estable, la vuelta muestra que R es bisimulación de estados. \square

Ejemplo 2.23. 1. Si \mathbb{S} es LMP, la σ -álgebra trivial sobre S es estable si y sólo si el triple $(S, \{\emptyset, S\}, \{\tau_a\}_{a \in L})$ es LMP. Esto a su vez es equivalente a que la relación total sea bisimulación de estados. Observar también que en este caso $\text{id} : (S, \Sigma, \{\tau_a\}_{a \in L}) \rightarrow (S, \{\emptyset, S\}, \{\tau_a\}_{a \in L})$ es zigzag.

2. Con respecto al LMP \mathbb{D} de 2.3, cualquier sub- σ -álgebra de Σ será estable ya que para cualquier $E \in \Sigma$ y $q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, $\tau^{-1}(\cdot, E)([0, q]) \in \{\emptyset, E^c\}$.

Otra propiedad importante es que la estabilidad se preserva por preimagen de morfismos zigzag.

Lema 2.24 ([DDL06, Lemma 4.5]). Si $f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}'$ es morfismo zigzag y Λ es sub- σ -álgebra estable de \mathbb{S}' , entonces $f^{-1}[\Lambda]$ es sub- σ -álgebra estable de \mathbb{S} .

Demostración. Sabemos por Lema 1.1 que $f^{-1}[\Lambda]$ es σ -álgebra de S . Si $Q \in f^{-1}[\Lambda]$, entonces $Q = f^{-1}[A]$ para algún $A \in \Lambda$. Afirmamos que $\{s \in S \mid \tau_a(s, Q) < q\} = f^{-1}[\{s' \in S' \mid \tau'_a(s', A) < q\}]$. En efecto, como f es zigzag $\tau_a(x, Q) = \tau'_a(f(x), A)$ y por lo tanto $x \in \{s \in S \mid \tau_a(s, Q) < q\}$ sii $f(x) \in \{s' \in S' \mid \tau'_a(s', A) < q\}$ sii $x \in f^{-1}[\{s' \in S' \mid \tau'_a(s', A) < q\}]$.

Dado que Λ es estable y $A \in \Lambda$, entonces $\{s' \in S' \mid \tau'_a(s', A) < q\} \in \Lambda$ y en consecuencia $\{s \in S \mid \tau_a(s, Q) < q\} \in f^{-1}[\Lambda]$. \square

Definición 2.25. Sea $\mathbb{S} = (S, \Sigma, \{\tau_a \mid a \in L\})$ un LMP. Una relación R en S será una bisimulación de eventos si existe una sub- σ -álgebra estable $\Lambda \subseteq \Sigma$ tal que $R = \mathcal{R}(\Lambda)$.

Dos estados s y t de un LMP son bisimilares por eventos, denotado con $s \sim_{e, \mathbb{S}} t$ (o $s \sim_e t$), si existe alguna bisimulación de eventos R tal que $s R t$.

En [DDL06] se define una bisimulación de eventos como una sub- σ -álgebra $\Lambda \subseteq \Sigma$ tal que $(S, \Lambda, \{\tau_a \mid a \in L\})$ es LMP. Preferimos este ligero cambio en la presentación de los conceptos para privilegiar la noción de *estabilidad* de una sub- σ -álgebra, ya que entendemos que esta es la herramienta principal de cálculo para encontrar bisimulaciones de este tipo.

Ejemplo 2.26. 1. La relación identidad es bisimulación de eventos en $(S, \Sigma, \{\tau_a \mid a \in L\})$ si y sólo si Σ separa puntos.

2. Si $f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}'$ es zigzag y Σ' separa puntos, entonces $\ker(f) = \{(s, t) \in S \mid f(s) = f(t)\}$ es bisimulación de eventos ya que $\ker(f) = \mathcal{R}(f^{-1}[\Sigma'])$.

Ejemplo 2.27. Una condición necesaria y suficiente para que una bisimulación de estados R sea una bisimulación de eventos es que $R = \mathcal{R}(\Sigma(R))$. Si, por ejemplo, una relación de equivalencia R tiene todas sus clases en Σ , entonces vale la igualdad anterior. En particular, cualquier bisimulación de estados que sea equivalencia es también de eventos si $\Sigma = \mathcal{P}(S)$ (en el caso de los espacios medibles numerables, esta igualdad es equivalente a ser espacio analítico).

La condición necesaria en el ejemplo previo es independiente del requisito de ser bisimulación de estados: notamos que si $R = \mathcal{R}(\Gamma)$ para alguna familia Γ , entonces $\Gamma \subseteq \Sigma(\mathcal{R}(\Gamma)) = \Sigma(R)$. En consecuencia, $R \subseteq \mathcal{R}(\Sigma(R)) \subseteq \mathcal{R}(\Gamma) = R$ y por lo tanto vale la igualdad $\mathcal{R}(\Sigma(R)) = R$. Por otro lado, la condición suficiente es consecuencia del siguiente hecho:

Proposición 2.28 ([DDL06, Prop. 4.12]). Si R es bisimulación de estados entonces $\mathcal{R}(\Sigma(R))$ es bisimulación de estados y de eventos.

Demostración. Como R es de estados, $\Sigma(R)$ es estable por Lema 2.22 y entonces $\mathcal{R}(\Sigma(R))$ es de eventos. Para verificar que es también de estados vemos que $\Sigma(\mathcal{R}(\Sigma(R)))$ es estable, pero esto es inmediato usando Proposición 2.14(6). \square

De este resultado se sigue que la mayor bisimulación de estados, i.e. la bisimilitud de estados, es también bisimulación de eventos. De manera análoga al caso estados, denominaremos a la relación \sim_e (la unión de todas las bisimulaciones de eventos) como bisimilitud de eventos y lo anterior implica que $\sim_s \subseteq \sim_e$.

Veamos un poco sobre la caracterización lógica de la bisimilitud de eventos que anticipamos previamente. Este es un resultado importante que permite mostrar por ejemplo que la bisimilitud de eventos es ella misma una bisimulación de eventos. En consecuencia es de equivalencia y

además resulta ser la bisimulación más grande de este tipo. La lógica modal \mathcal{L} definida en [Des99] tiene la siguiente sintaxis:

$$\top \mid \varphi_1 \wedge \varphi_2 \mid \langle a \rangle_{>q} \varphi, \quad (2.1)$$

donde a es una acción del conjunto contable L y q es un número racional en $[0, 1]$. Diremos que $s \models \langle a \rangle_{>q} \varphi$ si y sólo si existe $A \in \Sigma$ tal que para todo $t \in A$, se cumple $t \models \varphi$ y $\tau_a(s, A) > q$. Llamaremos semántica (o conjunto de validez) de una fórmula φ al conjunto $\llbracket \varphi \rrbracket$ formado por todos los estados que la satisfacen y escribimos $\llbracket \mathcal{L} \rrbracket$ para la colección de conjuntos $\llbracket \varphi \rrbracket$. Cuando el contexto lo requiera, agregaremos subíndices para indicar el LMP ambiente.

Podemos enriquecer la lógica anterior con fórmulas correspondientes a las otras relaciones de orden. El caso \geq es similar al dado y sólo debemos reemplazar $>$ por \geq . Por otro lado, diremos que $s \models \langle a \rangle_{<q} \varphi$ si y sólo si existe $A \in \Sigma$ tal que $\llbracket \varphi \rrbracket \subseteq A$ y $\tau_a(s, A) < q$. El caso \leq es análogo.

Definición 2.29. La lógica \mathcal{L} consiste de todas las fórmulas generadas por las producciones

$$\top \mid \varphi_1 \wedge \varphi_2 \mid \langle a \rangle_{\bowtie q} \varphi,$$

donde a es una acción del conjunto contable L , $\bowtie \in \{<, \leq, >, \geq\}$ y q es un número racional en $[0, 1]$.

Usando inducción estructural es sencillo probar que $\llbracket \mathcal{L} \rrbracket \subseteq \Sigma$, por ello decimos que la lógica es *medible*. Probamos los casos inductivos correspondientes a las fórmulas no triviales con modalidades $\langle a \rangle_{\bowtie q}$ para $\bowtie \in \{<, \leq, >, \geq\}$: por hipótesis inductiva sabemos que $\llbracket \varphi \rrbracket$ es medible y por lo tanto

$$\{s \in S \mid \tau_a(s, \llbracket \varphi \rrbracket) \bowtie q\} = \{s \in S \mid \tau_a(s) \in \Delta^{\bowtie q}(\llbracket \varphi \rrbracket)\} = \tau_a^{-1}[\Delta^{\bowtie q}(\llbracket \varphi \rrbracket)]$$

también lo es (notar que en los últimos pasos pensamos un núcleo de Markov como una función medible $\tau : S \rightarrow \Delta(S)$). Pero vemos que $\{s \in S \mid \tau_a(s, \llbracket \varphi \rrbracket) \bowtie q\}$ es exactamente $\llbracket \langle a \rangle_{\bowtie q} \varphi \rrbracket$. En efecto, gracias a la HI, podemos usar $\llbracket \varphi \rrbracket$ como conjunto medible A en la definición de satisfacción de las fórmulas y así obtenemos la contención (\subseteq). La inclusión recíproca está asegurada nuevamente por la HI y por la monotonía de las medidas de subprobabilidad. En vista de este argumento, escribiremos \mathcal{L} para la lógica modal aumentada.

Las semánticas de las fórmulas son preservadas por los morfismos zigzag como se muestra en el siguiente lema (ver [DEP02, Prop 9.2] para un enunciado un poco más general).

Lema 2.30. *Si $f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}'$ es zigzag, para toda fórmula $\varphi \in \mathcal{L}$ vale $f^{-1}(\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathbb{S}'}) = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathbb{S}}$. En consecuencia $s \models \varphi \iff f(s) \models \varphi$.*

Demostración. La demostración es por inducción estructural: el caso $\varphi = \top$ se desprende de la igualdad $f^{-1}[S'] = S$ y para la conjunción usamos que preimagen por una función preserva intersección. Para las modalidades no triviales, por HI tenemos que

$$\begin{aligned} f^{-1}[\llbracket \langle a \rangle_{\bowtie q} \varphi \rrbracket_{\mathbb{S}'}] &= \{s \in S \mid \tau'_a(f(s), \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathbb{S}'}) \bowtie q\} = \{s \in S \mid \tau_a(s, f^{-1}[\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathbb{S}'}]) \bowtie q\} \\ &= \{s \in S \mid \tau_a(s, \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathbb{S}}) \bowtie q\} = \llbracket \langle a \rangle_{\bowtie q} \varphi \rrbracket_{\mathbb{S}}. \end{aligned} \quad \square$$

La manera rápida de enunciar la consecuencia del lema previo es afirmar que s y $f(s)$ son lógicamente equivalentes.

Corolario 2.31. *Si $f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}'$ es zigzag, entonces $f^{-1}[\sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket_{\mathbb{S}'})] = \sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket_{\mathbb{S}})$.*

Demostración. Usamos Lema 1.1 para obtener

$$f^{-1}[\sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket_{\mathcal{S}})] = \sigma(f^{-1}[\llbracket \mathcal{L} \rrbracket_{\mathcal{S}}]) = \sigma(\{f^{-1}[\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{S}}] \mid \varphi \in \mathcal{L}\}) = \sigma(\{\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{S}} \mid \varphi \in \mathcal{L}\}) = \sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket_{\mathcal{S}}). \quad \square$$

De la definición de estabilidad podemos deducir rápidamente que la unión e intersección de familias estables es estable. El próximo teorema identifica a la menor σ -álgebra estable.

Teorema 2.32 ([DDL06, Prop. 5.5]). *Dado un LMP $(S, \Sigma, \{\tau_a \mid a \in L\})$, $\sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket)$ es la menor σ -álgebra estable incluida en Σ .*

Corolario 2.33. *\mathcal{L} caracteriza la bisimilitud de eventos, i.e., $\sim_e = \mathcal{R}(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket)$.*

Demostración. Si $\Lambda \subseteq \Sigma$ es estable, entonces $\sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket) \subseteq \Lambda$ y por lo tanto $\mathcal{R}(\Lambda) \subseteq \mathcal{R}(\sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket)) = \mathcal{R}(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket)$. De esto concluimos que $s \sim_e t$ si y sólo si existe $\Lambda \subseteq \Sigma$ estable tal que $(s, t) \in \mathcal{R}(\Lambda)$ si y sólo si $(s, t) \in \mathcal{R}(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket)$. \square

En el caso de que el espacio de estados sea analítico, esta lógica caracteriza también a la bisimilitud de estados y en consecuencia ambas coinciden. En [ST11] se muestra que esto no vale para espacios medibles generales, un contraejemplo es el LMP \mathbb{U} .

Ejemplo 2.34 (Bisimilitud de eventos en Ejemplo 2.4). *Verificamos que s y t no son separados por una σ -álgebra estable particular, por lo tanto no pueden ser separados por la menor de tales σ -álgebras, la cual genera la mayor relación de bisimulación de eventos. Sea $\Xi := \sigma(\mathcal{B}(I) \cup \{\{s, t\}, \{x\}\})$. Al igual que en la prueba de que \mathbb{U} es LMP, se puede ver que $\tau_a(\cdot, A)$ es Ξ -medible para todo $a \in \omega$ y $A \in \Upsilon$ (a fortiori, para $A \in \Xi$). Dado que \mathbf{m}_0 y \mathbf{m}_1 coinciden en $\sigma(\mathcal{B}(I) \cup \mathcal{P}(\{s, t, x\}))$; para todo $A \in \Xi$, $\tau_{\infty}(s, A) = \tau_{\infty}(t, A)$. En consecuencia, para todo $B \subseteq I$, s está en $\tau_{\infty}(\cdot, A)^{-1}(B)$ si y sólo si t también lo está. Por 2.26(2), esto también puede mostrarse viendo que $(s, t) \in \ker(f)$ para un morfismo zigzag (como en 2.90 por ejemplo). Con esto y el Ejemplo 2.18 podemos concluir que $\sim_s \subsetneq \sim_e$.*

La σ -álgebra Ξ resulta ser $\sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket)$, por lo tanto $\sim_e = \text{id}_U \cup \{(s, t), (t, s)\}$. Esto implica que $\sim_s = \text{id}_U$ ya que hemos probado que la inclusión $\sim_s \subseteq \sim_e$ siempre es válida y además, como acabamos de ver, s y t no son bisimilares por estados. En consecuencia, este es un ejemplo donde la bisimilitud de estados está contenida propiamente en la bisimilitud de eventos. De hecho, el LMP \mathbb{U} fue presentado en [ST11] para mostrar que ambos tipos de bisimilitud difieren en LMP sobre espacios medibles generales. Como adelantamos, este importante ejemplo servirá como una semilla para varias construcciones que haremos en el Capítulo 3.

Un enfoque posible para el estudio de las bisimilitudes es el de teoría de puntos fijos ([DGJP03], [Zho13]).

Teorema 2.35 ([Zho13, Thm. 3.4]). *La bisimilitud de estados y la bisimilitud de eventos son puntos fijos del operador $\mathcal{R} \circ \Sigma$.*

Demostración. Por Proposición 2.14(2) tenemos que $\sim_s \subseteq \mathcal{R}(\Sigma(\sim_s))$. Dado que \sim_s es bisimulación de estados, de Proposición 2.28 concluimos que $\mathcal{R}(\Sigma(\sim_s))$ es también bisimulación de estados y por ende $\mathcal{R}(\Sigma(\sim_s)) \subseteq \sim_s$.

En el caso de la bisimilitud de eventos, por la caracterización lógica sabemos que $\sim_e = \mathcal{R}(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket)$. Luego, por Proposición 2.14(5), $\mathcal{R}(\Sigma(\sim_e)) = \mathcal{R}(\Sigma(\mathcal{R}(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket))) = \mathcal{R}(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket) = \sim_e$. \square

Notar que esto da otra prueba de que la bisimilitud de estados es relación de equivalencia.

Observación 2.36. Dado que la definición de núcleo de Markov sólo exige subprobabilidades, $\tau \equiv 0$ es un núcleo válido. Su presencia en un LMP no afecta las bisimulaciones de estados ni de eventos ya que no impone condiciones no triviales: si $Q \in \Sigma$, $0 = \tau(s, Q) = \tau(t, Q)$ para todo par (s, t) y además $\{s \in S \mid \tau(s, Q) > q\} = \emptyset \in \Sigma$ para todo $q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Esto es útil si, por ejemplo, trabajamos con un LMP \mathbb{S} con lenguaje L y necesitamos agregar etiquetas. Siempre podemos definir núcleos extra idénticamente cero para todas aquellas etiquetas que no existían en el LMP original y no modificaremos las relaciones de bisimilitud entre los estados.

Otra manera quizás menos trivial de agregar núcleos bajo una nueva etiqueta y que no se modifiquen las bisimilitudes, es a través de los bucles o lazos.

Ejemplo 2.37. Si $\mathbb{S} = (S, \Sigma, \{\tau_a \mid a \in L\})$ es LMP con lenguaje L y $\circ \notin L$, definimos el núcleo $\tau_\circ(s, Q) = \delta_s(Q)$. Sea $\mathbb{S}_D = (S, \Sigma, \{\tau_a \mid a \in L\} \cup \{\tau_\circ\})$ la expansión de \mathbb{S} al lenguaje $L' = L \cup \{\circ\}$. Veamos que, si \sim_e° y \sim_s° denotan las bisimilitudes de eventos y estados en \mathbb{S}_D , entonces $\sim_e^\circ = \sim_e$ y $\sim_s^\circ = \sim_s$. En el primer caso, notamos que $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ y por lo tanto $\sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket) \subseteq \sigma(\llbracket \mathcal{L}' \rrbracket)$. Para la inclusión recíproca, basta ver por inducción estructural que $\forall \varphi \in \mathcal{L}' \llbracket \varphi \rrbracket \in \sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket)$. Los casos \top y conjunción son inmediatos, para las fórmulas con modalidades usamos la HI para obtener:

$$\begin{aligned} \llbracket \langle \circ \rangle \bowtie q \varphi \rrbracket &= \{s \in S \mid \delta_s(\llbracket \varphi \rrbracket) \bowtie q\} \in \{\llbracket \varphi \rrbracket, \llbracket \varphi \rrbracket^c, S, \emptyset\} \subseteq \sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket), \\ \llbracket \langle a \rangle \bowtie q \varphi \rrbracket &= \tau_a^{-1}(\cdot, \llbracket \varphi \rrbracket) \{r \in [0, 1] \mid r \bowtie q\} \in \sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket) \text{ por estabilidad de } \sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket). \end{aligned}$$

En el caso de la bisimilitud de estados, probamos en general que R es bisimulación de estados en \mathbb{S} si y sólo si es bisimulación de estados en \mathbb{S}_D : si $s R t$ y $Q \in \Sigma(R)$, en ambos casos sabemos que $\forall a \in L \tau_a(s, Q) = \tau_a(t, Q)$ (y esto es suficiente para probar (\Leftarrow)). Como Q es R -cerrado vale que $s \in Q \iff t \in Q$, pero esto es equivalente a $\tau_\circ(s, Q) = \tau_\circ(t, Q)$ y esto prueba (\Rightarrow) .

Bisimulación de estados en $\mathbb{S} \oplus \mathbb{S}$.

Definición 2.38. Dados dos LMP \mathbb{S} y \mathbb{S}' , el LMP suma directa $\mathbb{S} \oplus \mathbb{S}'$ tiene como espacio medible subyacente a la suma de espacios medibles $(S \oplus S', \Sigma \oplus \Sigma')$ y el núcleo de Markov $\tau_a^\oplus((x, i), A \oplus A')$ se define como $\tau_a(x, A)$ si $i = 0$ o $\tau'_a(x, A')$ si $i = 1$.

Al dar estas definiciones preferimos no hacer el abuso de notación que sí usamos en algunos ejemplos. Dado que nos interesan distintas variaciones de un mismo concepto y sus diferencias, consideramos que es mejor conservar la precisión mientras se preserve la facilidad de lectura.

La construcción anterior se corresponde con el coproducto o suma categórica en la categoría **LMP**. En efecto, las inyecciones canónicas son zigzag y el mapa $g : \mathbb{S} \oplus \mathbb{S}' \rightarrow \mathbb{T}$ dado por $g(r) = f(r)$ si $r \in S$ y $g(r) = f'(r)$ si $r \in S'$ es zigzag y hace conmutar el diagrama que define coproducto.

Es directo de las definiciones que valen las siguientes equivalencias:

$$((s, 0) \in A \oplus A' \iff (s', 1) \in A \oplus A') \iff (s \in A \iff s' \in A'), \quad (2.2)$$

$$\tau_a(s, A) = \tau'_a(s', A') \iff \tau_a^\oplus((s, 0), A \oplus A') = \tau_a^\oplus((s', 1), A \oplus A'). \quad (2.3)$$

Si $R \subseteq S \times S$, podemos “levantarla” a una relación en $\mathbb{S} \oplus \mathbb{S}'$ como $R_l := \{((s, 0), (t, 0)) \mid s R t\}$. Es fácil verificar directo de las definiciones que si R es bisimulación de estados en \mathbb{S} , entonces R_l es bisimulación de estados en $\mathbb{S} \oplus \mathbb{S}'$. Esto sólo depende del hecho de que $(\Sigma \oplus \Sigma')(R) \upharpoonright S = \Sigma(R)$

(ver Lema 3.30). De paso, observamos que esto dice que la suma de dos LMP no puede hacer más chica la bisimilitud de estados en uno de los sumandos, sólo puede agrandarla.

En el caso de que $\mathbb{S} = \mathbb{S}'$ podemos levantar R de varias maneras: al sumando izquierdo, al derecho, de manera cruzada o completa. Nos centraremos en este último caso. Si $R \subseteq S \times S$ definimos

$$R^+ := \{((s, i), (t, j)) \mid s R t \wedge i, j \in \{0, 1\}\} \subseteq (S \oplus S) \times (S \oplus S).$$

Notar que R es de equivalencia si y sólo si R^+ lo es.

Lema 2.39. *Sea $R \subseteq S \times S$.*

1. $A \subseteq S$ es R -cerrado si y sólo si $A \oplus A = \{(s, i) \mid s \in A \wedge i \in \{0, 1\}\}$ es R^+ -cerrado. Además todo conjunto R^+ -cerrado es de esa forma.
2. $R \subseteq S \times S$ es bisimulación de estados en \mathbb{S} si y sólo si R^+ es bisimulación de estados en $\mathbb{S} \oplus \mathbb{S}$.

Demostración. 1. Supongamos que A es R -cerrado, $(s, i) \in A \oplus A$ y $(s, i) R^+ (t, j)$. Por definición de R^+ , $s R t$. Como A es R -cerrado, entonces $t \in A$ y en consecuencia $(t, j) \in A \oplus A$. Para la vuelta, si $s \in A$ y $s R t$, entonces $(s, 0) R^+ (t, 0)$ y $(s, 0) \in A \oplus A$. Como $A \oplus A$ es R^+ -cerrado, se sigue que $(t, 0) \in A \oplus A$ y por ende $t \in A$. Para la última afirmación, si X es R^+ -cerrado, es claro que $X = (p(X))^+$ donde $p(X) = \{s \mid (s, 0) \in X \vee (s, 1) \in X\}$.

2. Supongamos que R^+ es bisimulación de estados en $\mathbb{S} \oplus \mathbb{S}$ y $s R t$, por lo tanto $(s, 0) R^+ (t, 0)$. Si A es R -cerrado medible, entonces $A \oplus A$ es R^+ -cerrado medible en $\mathbb{S} \oplus \mathbb{S}$ y vale $\tau_a(s, A) = \tau_a^\oplus((s, 0), A \oplus A) = \tau_a^\oplus((t, 0), A \oplus A) = \tau_a(t, A)$. La vuelta es muy similar y usamos que todo R^+ -cerrado es de la forma $A \oplus A$ para un R -cerrado A . \square

Escribiremos $\sim_s^\oplus := \sim_{s, \mathbb{S} \oplus \mathbb{S}}$. Tenemos la siguiente (para nada sorprendente) caracterización: la bisimilitud de estados en la suma es el levantamiento completo de la bisimilitud en \mathbb{S} .

Proposición 2.40. $\sim_s^\oplus = (\sim_s)^+$.

Demostración. La contención (\supseteq) se sigue inmediatamente del Lema 2.39(2) anterior. Para la otra inclusión, supongamos que $(s, i) \sim_s^\oplus (t, j)$. Como id_S es bisimulación en \mathbb{S} , $(\text{id}_S)^+ \subseteq \sim_s^\oplus$ y en consecuencia $(s, 0) \sim_s^\oplus (t, 0)$. Queremos probar que $s \sim_s t$, pero ello es consecuencia directa de la siguiente

Afirmación. $\sim_s^\oplus \upharpoonright S = \{(x, y) \mid (x, 0) \sim_s^\oplus (y, 0)\} = \sim_s$.

Probamos la afirmación: la inclusión (\subseteq) queda probada si mostramos que $\sim_s^\oplus \upharpoonright S$ es bisimulación de estados en \mathbb{S} . Sea $(s, t) \in \sim_s^\oplus \upharpoonright S$ y $A \in \Sigma(\sim_s^\oplus \upharpoonright S)$. Sabemos que $A \oplus A$ es medible, veamos que es \sim_s^\oplus -cerrado: si $(x, i) \in A \oplus A$ y $(x, i) \sim_s^\oplus (y, j)$, entonces nuevamente sabemos que $(x, 0) \sim_s^\oplus (y, 0)$. Luego, $(x, y) \in \sim_s^\oplus \upharpoonright S$ y como A es cerrado para la restricción, $y \in A$. Concluimos que, $\tau_a(s, A) = \tau_a^\oplus((s, 0), A \oplus A) = \tau_a^\oplus((t, 0), A \oplus A) = \tau_a(t, A)$. Para la recíproca, ya dijimos que toda bisimulación de estados en \mathbb{S} , en particular \sim_s , es (se levanta a) una bisimulación de estados en $\mathbb{S} \oplus \mathbb{S}'$. \square

2.2.2. Bisimulaciones externas

Hasta aquí trabajamos con definiciones de bisimulación como relaciones en un único LMP o espacio ambiente. Nos interesa ahora el caso en el que se tienen dos LMP \mathbb{S} y \mathbb{S}' y se quieren bisimulaciones entre estados de sendos procesos.

\oplus -bisimulaciones.

Una primera posibilidad es construir la suma directa 2.38 entre ambos espacios, este es el enfoque con el que se define bisimulación de estados en [Des99].

Definición 2.41. Una \oplus -bisimulación entre \mathbb{S} y \mathbb{S}' es una relación de equivalencia R en $S \oplus S'$ tal que para $s \in S$ y $s' \in S'$ con $(s, 0) R (s', 1)$ y para todo $A \oplus A' \in (\Sigma \oplus \Sigma')(R)$ se cumple

$$\forall a \in L \tau_a(s, A) = \tau'_a(s', A').$$

Dos estados en sendos procesos son \oplus -bisimilares si hay una \oplus -bisimulación que los relaciona. Dos LMP punteados son \oplus -bisimilares si sus estados iniciales lo son.

Dijimos que el interés en definir una bisimulación de estados externa R es detectar dos estados bisimilares, uno en cada proceso. La definición anterior lleva esa premisa al límite: no establece ninguna condición sobre el valor de los núcleos de Markov para pares de estados en el *mismo* proceso, la única exigencia es que la relación resulte de equivalencia. Esto es desafortunado ya que, por ejemplo, una tal relación restringida al primer espacio podría identificar todos los puntos que no estén R -relacionados con alguien del segundo espacio. En un caso extremo, R podría ser la unión de dos relaciones de equivalencia, una en cada proceso.

En virtud de la definición de τ^\oplus y la equivalencia (2.3), vemos que la condición para ser \oplus -bisimulación es la misma que la de bisimulación interna en $\mathbb{S} \oplus \mathbb{S}'$ excepto que se aplica a menos pares. De esto deducimos inmediatamente el siguiente resultado sencillo'.

Lema 2.42. Si R es bisimulación de estados interna en la suma $\mathbb{S} \oplus \mathbb{S}'$ y es de equivalencia, entonces es \oplus -bisimulación entre \mathbb{S} y \mathbb{S}' .

En particular, esto dice que la bisimilitud de estados $\sim_{\mathbb{S}}^\oplus$ en $\mathbb{S} \oplus \mathbb{S}'$ es \oplus -bisimulación. Por otro lado, y si tenemos en mente la observación que siguió a la Definición 2.41, es claro que no toda \oplus -bisimulación R es bisimulación interna en la suma. Por ejemplo, la relación $R = \text{id}_{U \oplus U} \cup \{((s, 0), (t, 0)), ((t, 0), (s, 0))\}$ es \oplus -bisimulación entre \mathbb{U} y \mathbb{U} . Sin embargo esta relación no es bisimulación interna en la suma $\mathbb{U} \oplus \mathbb{U}$ ya que $V \oplus \emptyset$ es R -cerrado, ni tampoco puede estar contenida en ninguna bisimulación interna en la suma por Proposición 2.40.

Ahora bien, no hemos definido todavía el símbolo \sim^\oplus que corresponde a la \oplus -bisimilitud. En lugar de definirla como una relación en la suma, para facilitar las comparaciones con las otras bisimilitudes la definiremos del siguiente modo:

Definición 2.43. Si $s \in S$ y $s' \in S'$, diremos que $s \sim^\oplus s'$ si y sólo si existe una \oplus -bisimulación R entre \mathbb{S} y \mathbb{S}' tal que $((s, 0), (s', 1)) \in R$.

De este manera $\sim^\oplus \subseteq S \times S'$ y por lo tanto no puede ser una \oplus -bisimulación. Notar que en la definición decimos que dos estados pueden ser \oplus -bisimilares sólo si están en sumandos distintos.

Si tenemos una relación en la suma $S \oplus S'$, definimos su “descenso”

$$R_+ := \{(s, s') \mid ((s, 0), (s', 1)) \in R\} \subseteq S \times S'.$$

Con abuso de notación, escribiríamos esto como $R \cap (S \times S')$ o diríamos que es “la restricción al producto”. Observamos que si R es \oplus -bisimulación, entonces $R_+ \subseteq \sim^\oplus$. Y si escribimos T para la unión de todas las \oplus -bisimulaciones (lo que sería la manera usual de definir una bisimilitud), entonces resulta $T_+ = \sim^\oplus$.

Destacamos en la siguiente definición la última relación de bisimilitud vinculada con sumas.

Definición 2.44. $(\sim_s)_+$ es el descenso de \sim_s^\oplus . Es decir, $(\sim_s)_+ = (\sim_s^\oplus)_+ = (\sim_{s, S \oplus S'})_+$.

Lo primero que notamos es la siguiente consecuencia sencilla del Lema 2.42 anterior:

Corolario 2.45. $(\sim_s)_+ \subseteq \sim^\oplus$.

La pregunta sobre la inclusión recíproca quedó abierta. Ya ejemplificamos que no toda \oplus -bisimulación es bisimulación interna en $\mathbb{S} \oplus \mathbb{S}'$, pero tampoco hay manera obvia de generar una a partir de ella que todavía relacione los mismos estados de sumandos distintos.

Pregunta 2.46. Si R es \oplus -bisimulación entre \mathbb{S} y \mathbb{S}' , ¿ $R \cap ((S \times \{0\}) \times (S' \times \{1\}))$ está incluida en una bisimulación interna en la suma?

Una respuesta afirmativa implicaría que $\sim^\oplus \subseteq (\sim_s)_+$ y por lo tanto tendríamos la igualdad.

Otra discusión que se plantea con este enfoque es que en el caso $\mathbb{S} = \mathbb{S}'$ quisiéramos conciliar esta definición con la de bisimulación de estados interna. Sin embargo, no podemos hacer una comparación directa ya que las \oplus -bisimulaciones son equivalencias en $S \oplus S$, y por lo tanto subconjuntos de $(S \oplus S) \times (S \oplus S)$, mientras que las bisimulaciones internas son relaciones en S , o subconjuntos de $S \times S$. Marcamos esta diferencia diciendo que ambos conceptos tienen distinto *tipo* (como en *tipo de datos* en computación).

Podemos decir algo en una dirección: por Lema 2.39(2), sabemos que si $R \subseteq S \times S$ es bisimulación de estados y de equivalencia, entonces R^+ es bisimulación interna en $\mathbb{S} \oplus \mathbb{S}$ y de equivalencia. Por Lema 2.42, R^+ es también \oplus -bisimulación entre \mathbb{S} y \mathbb{S} . En el caso de \sim_s , por Proposición 2.40 sabemos incluso que $\sim_s = ((\sim_s)^+)_+ = (\sim_s^\oplus)_+ \subseteq \sim^\oplus$. Dada la laxitud en la definición de \oplus -bisimulación, no podemos decir mucho en la otra dirección.

\times -bisimulaciones.

Pasamos ahora a otra noción externa. En [Bac13] proponen una definición de bisimulación de estados entre dos procesos de Markov generalizados, esto es, procesos en los que $\tau_a(s)$ es una medida general en (S, Σ) , sin la restricción de ser subprobabilidad. La definición es similar al caso interno, pero requerimos el concepto análogo de conjunto R -cerrado para el caso $R \subseteq S \times S'$, i.e., relaciones entre dos conjuntos posiblemente distintos.

Definición 2.47. Sea $R \subseteq S \times S'$ una relación, $A \subseteq S$ y $A' \subseteq S'$. El par (A, A') se dice par R -cerrado si $R \cap (A \times S') = R \cap (S \times A')$.

Denotamos con $R[A]$ al conjunto $\{s' \in S' \mid \exists x \in A \ x R s'\}$ (los estados en S' relacionados con algún estado en A) y análogamente $R^{-1}[A'] := \{s \in S \mid \exists x' \in A' \ s R x'\}$. El siguiente lema nos da una reformulación de la definición de par R -cerrado y además una propiedad de clausura básica que ellos cumplen.

Lema 2.48. 1. (A, A') es par R -cerrado si y sólo si $R[A] \subseteq A' \wedge R^{-1}[A'] \subseteq A$ si y sólo si $\forall (s, s') \in R (s \in A \Leftrightarrow s' \in A')$.

2. La familia de pares R -cerrados es cerrada por complemento y uniones e intersecciones arbitrarias en coordenadas.

3. Si $R_0 \subseteq R_1$, entonces todo par R_1 -cerrado es R_0 -cerrado.

Demostración. 1. Basta notar que valen las equivalencias

$$\begin{aligned} R \cap (A \times S') \subseteq R \cap (S \times A') &\iff R[A] \subseteq A' \iff \forall (s, s') \in R (s \in A \Rightarrow s' \in A'), \\ R \cap (A \times S') \supseteq R \cap (S \times A') &\iff R^{-1}[A'] \subseteq A \iff \forall (s, s') \in R (s \in A \Leftarrow s' \in A'). \end{aligned}$$

2. Si (A, A') es par R -cerrado, usando la equivalencia anterior tenemos que $\forall (s, s') \in R (s \in A \Leftrightarrow s' \in A')$ lo cual es equivalente a $\forall (s, s') \in R (s \in A^c \Leftrightarrow s' \in (A')^c)$. Por lo tanto $(A^c, (A')^c)$ es par R -cerrado. Si ahora $\{(A_i, A'_i)\}_{i \in I}$ es una familia de pares R -cerrados, es sencillo ver que $R[\bigcup_{i \in I} A_i] \subseteq \bigcup_{i \in I} A'_i$; $R[\bigcap_{i \in I} A_i] \subseteq \bigcap_{i \in I} A'_i$ y análogamente para R^{-1} .

3. Notamos que $R_0 \subseteq R_1$ implica que $R_0[A] \subseteq R_1[A]$ y $R_0^{-1}[A'] \subseteq (R_1)^{-1}[A']$. \square

Cuando los dos conjuntos son iguales, las nociones de par R -cerrado y conjunto R -cerrado coinciden en el siguiente sentido.

Lema 2.49. Si $R \subseteq S \times S$, entonces valen las siguientes afirmaciones:

1. A es R -cerrado si y sólo si (A, A) es par R -cerrado.

2. Si R es reflexiva y (A, A') es par R -cerrado entonces $A = A'$.

Demostración. Para el primer ítem vemos que A es R -cerrado $\iff R[A] \cup R^{-1}[A] = R^d[A] \cup R^i[A] \subseteq A \iff R[A] \subseteq A$ y $R^{-1}[A] \subseteq A$. Para el segundo ítem, basta notar que si R es reflexiva entonces $A \subseteq R[A]$ y $A' \subseteq R^{-1}[A']$. \square

Si tenemos espacios medibles (S, Σ) y (S', Σ') , decimos que (A, A') es un par medible si $A \in \Sigma$ y $A' \in \Sigma'$.

Definición 2.50. Una bisimulación externa (o \times -bisimulación) entre dos LMP \mathbb{S} y \mathbb{S}' es una relación $R \subseteq S \times S'$ tal que si $s R s'$ y (A, A') es par R -cerrado medible, se cumple

$$\forall a \in L \tau_a(s, A) = \tau'_a(s', A').$$

Dos estados $s \in S$ y $s' \in S'$ son bisimilares externos, denotado con $s \sim_{\mathbb{S}, \mathbb{S}'}^{\times} s'$, si hay una bisimulación externa que los relaciona. Dos LMP punteados son bisimilares externos si sus estados iniciales lo son.

En general simplificaremos la notación y escribiremos \sim^{\times} cuando los procesos se entiendan del contexto. Si queremos aprovechar la información que hemos recolectado sobre bisimulaciones internas, podemos pensar en algún nexo entre ellas y las bisimulaciones externas recién definidas. La forma natural de hacerlo es pensar las relaciones entre \mathbb{S} y \mathbb{S}' como relaciones en $\mathbb{S} \oplus \mathbb{S}'$. La siguiente proposición muestra que hay coincidencia entre las perspectivas \times -bisimulación y bisimulación interna en la suma siempre que esta última esté en el producto $S \times S'$. Podemos

precisar esto con la siguiente notación: si $R \subseteq S \times S'$, la levantamos a una relación en $\mathbb{S} \oplus \mathbb{S}'$ como

$$\widehat{R} := \{((s, 0), (s', 1)) \mid s R s'\} \subseteq (S \oplus S') \times (S \oplus S').$$

Proposición 2.51. 1. Sea R una relación en $S \oplus S'$. Si $A \oplus A'$ es R -cerrado, entonces (A, A') es par R_+ -cerrado. Recíprocamente, si $R \subseteq S \times S'$ y (A, A') es par R -cerrado, entonces $A \oplus A'$ es \widehat{R} -cerrado.

2. Si $R \subseteq S \times S'$ es \times -bisimulación, entonces \widehat{R} es bisimulación de estados interna en $\mathbb{S} \oplus \mathbb{S}'$. Recíprocamente, si R es bisimulación interna en $\mathbb{S} \oplus \mathbb{S}'$ tal que $R \subseteq \widehat{R}_+$, entonces R_+ es \times -bisimulación.

La hipótesis $R \subseteq \widehat{R}_+$ en el segundo ítem no es otra cosa que pedir que R no relacione puntos del mismo sumando.

Demostración. 1. Usaremos la segunda equivalencia en Lema 2.48(1) y la equivalencia sobre estados (2.2). Para la primera parte, si $(s, s') \in R_+$, entonces $(s, 0) R (s', 1)$. Como $A \oplus A'$ es R -cerrado vale la primera equivalencia en (2.2). La segunda afirmación es muy similar: si $(s, 0) \widehat{R} (s', 1)$ entonces $s R s'$ y vale la segunda equivalencia.

2. De forma similar al ítem anterior, esta prueba depende de la equivalencia sobre núcleos (2.3). Si $R \subseteq S \times S'$ es \times -bisimulación y $A \oplus A' \subseteq S \oplus S'$ es \widehat{R} -cerrado medible, por el ítem anterior (A, A') es par $(\widehat{R})_+$ -cerrado medible. Es claro que $(\widehat{R})_+ = R$. Luego, si $(s, s') \in R$ entonces $\tau_a^\oplus((s, 0), A \oplus A') = \tau_a(s, A) = \tau_a'(s', A') = \tau_a^\oplus((s', 1), A \oplus A')$.

Si ahora R es bisimulación interna en $\mathbb{S} \oplus \mathbb{S}'$ y (A, A') es par R_+ -cerrado medible, entonces $A \oplus A'$ es \widehat{R}_+ -cerrado medible en $\mathbb{S} \oplus \mathbb{S}'$ y por hipótesis resulta R -cerrado. Luego, si $(s, s') \in R_+$ tenemos que $\tau_a(s, A) = \tau_a^\oplus((s, 0), A \oplus A') = \tau_a^\oplus((s', 1), A \oplus A') = \tau_a'(s', A')$. \square

Como queríamos, ya podemos sacar ventaja de esta equivalencia (módulo tipos) y deducir propiedades de las bisimulaciones externas con la información conocida sobre las internas. Por ejemplo tenemos el siguiente

Corolario 2.52. Unión de bisimulaciones externas es externa. En particular, \sim^\times lo es.

Demostración. Dada una familia \mathcal{F} de bisimulaciones externas entre \mathbb{S} y \mathbb{S}' , por Proposición 2.51(2) basta chequear que $\bigcup\{\widehat{R} \mid R \in \mathcal{F}\}$ es bisimulación de estados en $\mathbb{S} \oplus \mathbb{S}'$ que solo relaciona estados en sendos procesos. Pero esto es directo de Proposición 2.17 y de la definición de \widehat{R} . \square

Corolario 2.53. $\sim^\times \subseteq (\sim_s)_+$.

Demostración. Como \sim^\times es \times -bisimulación, tenemos que $\widehat{\sim^\times}$ es interna en $\mathbb{S} \oplus \mathbb{S}'$ y por lo tanto $\widehat{\sim^\times} \subseteq \sim_s^\oplus$. Dado que claramente $(\widehat{\sim^\times})_+ = \sim^\times$ concluimos $\sim^\times \subseteq (\sim_s^\oplus)_+ = (\sim_s)_+$. \square

Esta información sumada a 2.45 nos dice que $\sim^\times \subseteq (\sim_s)_+ \subseteq \sim^\oplus$. La siguiente pregunta implicaría que se de la inclusión $\sim^\oplus \subseteq \sim^\times$ y por consiguiente tendríamos la igualdad:

Pregunta 2.54. Si R es \oplus -bisimulación, ¿existe una \times -bisimulación que contenga a R_+ ?

También daría una respuesta afirmativa a 2.46, ya que $R \cap ((S \times \{0\}) \times (S' \times \{1\})) = \widehat{R}_+$ y por la primera parte de Proposición 2.51(2), concluiríamos que es bisimulación interna en la suma. La pregunta por la inclusión $(\sim_s)_+ \subseteq \sim^\times$ la postergamos un momento cuando resurja referida a otro problema.

Además de la unión, otra propiedad de clausura que cumplen las \times -bisimulaciones tiene que ver con el siguiente concepto: una relación $R \subseteq S \times S'$ es z -cerrada si para todo $x, y \in S$ y $x', y' \in S'$, $(x, x'), (y, x'), (y, y') \in R \implies (x, y') \in R$. La z -clausura de una relación es la menor relación z -transitiva que la contiene. El siguiente lema se prueba en [dVR97, Lemma 5.7] y en [Bac13, Lemma 15.3.5] se adapta a la noción de bisimulación externa.

Lema 2.55. *Si R es \times -bisimulación entre \mathbb{S} y \mathbb{S}' , también lo es su z -clausura R^* .*

De esto deducimos que \sim^\times es z -cerrada, por lo tanto vale que si $x \sim^\times x', y \sim^\times x'$ y $y \sim^\times y'$, entonces $x \sim^\times y'$.

En el caso de que $\mathbb{S} = \mathbb{S}'$ podemos hacer una comparación directa entre las bisimulaciones externas y las internas porque son del mismo tipo. En esta situación, el Lema 2.49 nos garantiza que toda \times -bisimulación es bisimulación interna y que ambos conceptos coinciden para las relaciones reflexivas.

Proposición 2.56. *Si $\mathbb{S} = \mathbb{S}'$ valen las igualdades $\sim^\times = \sim_s = (\sim_s)_+$.*

Demostración. Como sabemos que \sim_s es de equivalencia, entonces es también \times -bisimulación y por lo tanto $\sim_s \subseteq \sim^\times$. Para la contención recíproca, es claro que la \times -bisimulación \sim^\times es reflexiva pues id_S es \times -bisimulación (otra forma de ver esto es recordar que $\sim_s = (\sim_s)_+$ y usar el Corolario 2.53). La última igualdad se discutió en el párrafo previo a esta subsección. \square

Una consecuencia inmediata es que \sim^\times es relación de equivalencia ([BBLM14, Thm.8]). Esta información, combinada con la aportada por el Lema 2.39 y por la Proposición 2.51 particularizada al caso $\mathbb{S} = \mathbb{S}'$ muestra que no hay grandes sorpresas entre las bisimulaciones internas, externas e internas en la suma siempre que cumplan algunas condiciones sencillas de regularidad. Recordemos que toda bisimulación de estados en un LMP \mathbb{S} está incluida en una bisimulación de estados que también es de equivalencia (Proposición 2.28).

Si ahora volvemos al caso de dos procesos distintos \mathbb{S} y \mathbb{S}' , notamos que la misma definición de \sim^\times depende del orden en el que se dan los mismos ya que es una relación en el producto cartesiano $S \times S'$. Por ende no tiene sentido la pregunta sobre su simetría, aunque sí es sencillo verificar que si R es \times -bisimulación entre \mathbb{S} y \mathbb{S}' entonces $R^{-1} = \{(s', s) \mid (s, s') \in R\}$ es \times -bisimulación entre \mathbb{S}' y \mathbb{S} . La pregunta interesante es quizás la referida a la transitividad cuando tenemos tres LMP:

$$s \sim_{\mathbb{S}_0, \mathbb{S}_1}^\times s' \wedge s' \sim_{\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_2}^\times s'' \implies s \sim_{\mathbb{S}_0, \mathbb{S}_2}^\times s''. \quad (2.4)$$

La cuestión sobre la transitividad de las distintas nociones de bisimilitud no es en general una pregunta con respuesta directa. Por ejemplo, para el caso de la \oplus -bisimilitud de LMP punteados, en [Des99] se responde con la caracterización lógica en espacios analíticos. En [Pan09, Prop. 7.12] se da una prueba de transitividad para una definición modificada y ligeramente más complicada de bisimilitud (se pide una \oplus -bisimulación en un tercer proceso que los tenga como sumandos directos). En las definiciones de corte más categórico que veremos en la próxima sección, la misma pregunta requiere herramientas muy técnicas para ser respondida en ciertos casos.

Las estructuras que se definen en [ST11, Example 1] dan un contraejemplo a (2.4). Lo reproducimos a continuación, con algunas modificaciones en la notación, ya que nos será útil en otras ocasiones.

Ejemplo 2.57. Consideramos el LMP \mathbb{U} de 2.4 y las siguientes modificaciones:

$$\begin{aligned}\mathbb{U}_s &= (U \setminus \{t\}, \Upsilon \upharpoonright (U \setminus \{t\}), \{\tau_a \mid a \in L\}), \\ \mathbb{U}_t &= (U \setminus \{s\}, \Upsilon \upharpoonright (U \setminus \{s\}), \{\tau_a \mid a \in L\}), \\ \mathbb{T}' &= ((U \setminus \{s, t\}) \cup \{t'\}, \sigma(\mathcal{B}(I) \cup \mathcal{P}(\{t', x\})), \{\bar{\tau}_a \mid a \in L\}).\end{aligned}$$

Entendemos aquí que los núcleos en \mathbb{U}_s y \mathbb{U}_t son las restricciones adecuadas. Los núcleos $\bar{\tau}_a$ coinciden con τ_a si $a \in \omega$ y para $E \in \sigma(\mathcal{B}(I) \cup \mathcal{P}(\{t', x\}))$

$$\bar{\tau}_\infty(t', E) = \mathbf{m}(E), \quad \bar{\tau}_\infty(r, E) = 0 \text{ para } r \neq t'.$$

El hecho que el no medible V no está disponible en \mathbb{T}' permite que se de la bisimilitud $s \sim_{\mathbb{U}_s, \mathbb{T}'}^\times t'$. Además, es claro que $t' \sim_{\mathbb{T}', \mathbb{U}_t}^\times t$. Sin embargo $s \not\sim_{\mathbb{U}_s, \mathbb{U}_t}^\times t$. Si lo fueran, $(s, 0)$ y $(t, 1)$ serían bisimilares por estados en $\mathbb{U}_s \oplus \mathbb{U}_t$ y la prueba de que no lo son es muy similar a la dada en Ejemplo 2.18 donde se explicita la bisimilitud de estados.

Si dos LMP coinciden en la implicación (2.4), sabemos que $\sim_{s, \mathbb{S}}$ y $\sim_{\mathbb{S}, \mathbb{S}}^\times$ coinciden, por lo tanto la pregunta puede leerse como un vínculo entre la bisimilitud interna en uno de ellos y la externa entre los dos. Si $\mathbb{S}_0 = \mathbb{S}_2$ obtenemos la implicación $x \sim^\times x' \wedge y \sim^\times x' \implies x \sim_s y$. No es difícil ver que tampoco vale, un contraejemplo es considerar el LMP \mathbb{U}_B (Ejemplo 2.20) obtenido al modificar la σ -álgebra de \mathbb{U} y permitir sólo conjuntos Borel en el intervalo. Entre \mathbb{U} y \mathbb{U}_B vale que $s \sim^\times s$ y $t \sim^\times s$ pero $s \not\sim_s t$ en \mathbb{U} . Que esta propiedad falle es razonable porque una bisimulación externa no impone condiciones a lo que pasa dentro de uno de los dos LMP.

El tercer tipo de transitividad corresponde al caso $\mathbb{S}_0 = \mathbb{S}_1$, a saber

Pregunta 2.58. $y \sim_s x \wedge x \sim^\times x' \implies y \sim^\times x'$.

Un intento de probar tal propiedad es considerar el LMP suma directa $\mathbb{S} \oplus \mathbb{S}'$. Informalmente, diríamos que por Proposición 2.51(2), \sim^\times es bisimulación de estados interna en $\mathbb{S} \oplus \mathbb{S}'$. Por otro lado, recordamos que $\sim_{s, \mathbb{S}}$ también es bisimulación de estados en $\mathbb{S} \oplus \mathbb{S}'$. Además, como consecuencia de la prueba constructiva de que \sim_s es equivalencia, sabemos que la composición relacional de estas dos bisimulaciones internas está incluida en una bisimulación interna $R_\circ \subseteq (S \oplus S') \times (S \oplus S')$ (R_\circ es la menor relación de equivalencia que contiene a $\sim_s \cup \sim^\times$). Podríamos concluir la prueba si demostramos que su descenso $R \cap (S \times S')$ es \times -bisimulación. Sin embargo el siguiente ejemplo nos sirve para descartar la posibilidad de demostrar que, en general, si R es bisimulación interna en $\mathbb{S} \oplus \mathbb{S}'$ entonces $R \cap (S \times S')$ es \times -bisimulación.

Ejemplo 2.59. Usaremos las mismas estructuras que en Ejemplo 2.57. Para diferenciarlos, llamemos I_s , I_t e $I_{t'}$ al conjunto $(0, 1) \cup \{x\}$ en \mathbb{U}_s , \mathbb{U}_t y \mathbb{T}' respectivamente. Consideramos la relación $R := \{(s, t)\} \cup \{(r, r) \in I_s \times I_t\} \cup \{(r, r) \in I_t \times I_{t'}\}$. Entonces R es bisimulación de estados en $\mathbb{U}_s \oplus (\mathbb{U}_t \oplus \mathbb{T}')$ ya que todo R -cerrado medible es de la forma $(B \oplus (B \oplus B)) \cup F$ con $B \in \mathcal{B}(I)$ y F finito R -cerrado. Sin embargo, $R \cap (U_s \times (U_t \oplus T')) = \{(s, t)\} \cup \{(r, r) \in I_s \times I_t\}$ no es \times -bisimulación ya que el par $(V, V) \subseteq \mathcal{P}(I_s) \times \mathcal{P}(I_t)$ que distingue a s y t es medible y cerrado para la restricción.

Notar que en este ejemplo la relación R no es \oplus -bisimulación por no ser de equivalencia. Esto abre el siguiente interrogante (más débil que 2.54):

Pregunta 2.60. Sea R una equivalencia y bisimulación interna en la suma (en particular es \oplus -bisimulación), ¿existe una \times -bisimulación que contenga a R_+ ?

Ya sabemos que para las bisimulaciones en la suma del tipo correcto (que por lo tanto no serán de equivalencia) la respuesta es positiva, la pregunta es entonces si aún tenemos esa propiedad para relaciones más ricas. En el caso particular $R = \sim_s^\oplus$, por Corolario 2.53 sabemos que vale $(\sim_s^\oplus)_+ = (\sim_s)_+ \supseteq \sim^\times$ y por lo tanto hay varias formulaciones de la pregunta: existe una \times -bisimulación que contiene a $(\sim_s)_+$ sii $(\sim_s)_+ \subseteq \sim^\times$ sii $(\sim_s)_+ = \sim^\times$ sii $(\widehat{\sim_s})_+$ es interna en $\mathbb{S} \oplus \mathbb{S}'$.

Proposición 2.61. Supongamos que $(\sim_s)_+ = \sim^\times$. Si $R \subseteq S \times S$ es bisimulación interna de equivalencia y $R' \subseteq S \times S'$ es \times -bisimulación, entonces $R \circ R' \subseteq \sim^\times$ donde $s R \circ R' s' \iff \exists t \in S \ s R t \wedge t R' s'$. En consecuencia, vale la transitividad de 2.58.

Demostración. Sabemos que $\widehat{R'}$ y $R_l = \{(s, 0), (t, 0) \mid s R t\}$ son bisimulaciones de estados en $\mathbb{S} \oplus \mathbb{S}'$ y por lo tanto $R_l \circ \widehat{R'}$ está incluida en una bisimulación interna $R_o \subseteq (S \oplus S') \times (S \oplus S')$. Dado que $R_o \subseteq \sim_s^\oplus$, entonces $R \circ R' \subseteq (R_l \circ \widehat{R'})_+ \subseteq (\sim_s)_+ = \sim^\times$. \square

Veremos ahora un caso particular donde se satisface la igualdad $(\sim_s)_+ = \sim^\times$. Diremos que un par (A, A') es saturado si $R[A] = A'$ y $A = R^{-1}[A']$.

Lema 2.62. Sea R una \oplus -bisimulación.

1. Si (A, A') es par R_+ -saturado, entonces $A \oplus A'$ es R -cerrado.
2. Si $\text{dom}(R_+) \in \Sigma$, entonces $\forall s \in \text{dom}(R_+) \forall a \in L \ \tau_a(s, S \setminus \text{dom}(R_+)) = 0$.

Demostración. 1. Sea $x \in A$ tal que $(x, 0) R (y, i)$. Si $i = 1$, ya que $R_+[A] \subseteq A'$, tenemos $y \in A'$. Supongamos que $i = 0$. Como (A, A') es saturado, existe $x' \in A'$ tal que $x R_+ x'$, por ende $(x, 0) R (x', 1)$. Dado que R es de equivalencia, tenemos que $(y, 0) R (x', 1)$ y como $(R_+)^{-1}[A'] \subseteq A$ concluimos $y \in A$. El caso $x \in A$ tal que $(x', 1) R (y, i)$ es análogo.

2. Veamos primero que $S_{\text{anti}} := (S \setminus \text{dom}(R_+)) \oplus \emptyset$ es R -cerrado: sea $(x, 0) \in S_{\text{anti}}$ y supongamos que $(x, 0) R (y, i)$. Claramente $i = 0$, si no tendríamos inmediatamente que $x \in \text{dom}(R_+)$. Por el absurdo, si $y \in \text{dom}(R_+)$, entonces existe $y' \in \text{img}(R_+)$ tal que $y R_+ y'$. Luego, $(y, 0) R (y', 1)$ y por transitividad de R tenemos $(x, 0) R (y', 1)$. Así, $x \in \text{dom}(R_+)$, una contradicción.

Sea ahora $s' \in \text{img}(R_+)$ tal que $s R_+ s'$. Como S_{anti} es R -cerrado y medible, tenemos que para todo $a \in L$ vale $\tau_a(s, S \setminus \text{dom}(R_+)) = \tau_a^\oplus((s, 0), S_{\text{anti}}) = \tau_a^\oplus((s', 1), S_{\text{anti}}) = \tau_a'(s', \emptyset) = 0$. \square

Proposición 2.63. Sea R una \oplus -bisimulación tal que $\text{dom}(R_+) \in \Sigma$ e $\text{img}(R_+) \in \Sigma'$, entonces R_+ es \times -bisimulación.

Demostración. Notamos primero que $(\text{dom}(R_+), \text{img}(R_+))$ es par R_+ -saturado. Si $(s, s') \in R_+$, por Lema 2.62(1) tenemos que $\tau_a(s, \text{dom}(R_+)) = \tau_a'(s', \text{img}(R_+))$. Usamos esta igualdad junto al hecho que $S \oplus S'$ es R -cerrado y 2.62(2) para calcular $\tau_a'(s', S' \setminus \text{img}(R_+)) = \tau_a'(s', S') - \tau_a'(s', \text{img}(R_+)) = \tau_a(s, S) - \tau_a(s, \text{dom}(R_+)) = \tau_a(s, S \setminus \text{dom}(R_+)) = 0$.

Sea ahora (A, A') un par R_+ -cerrado medible. Escribimos

$$\begin{aligned} A &= (A \cap \text{dom}(R_+)) \cup (A \setminus \text{dom}(R_+)) =: A_{\text{sat}} \cup A_{\text{anti}}, \\ A' &= (A' \cap \text{img}(R_+)) \cup (A' \setminus \text{img}(R_+)) =: A'_{\text{sat}} \cup A'_{\text{anti}}. \end{aligned}$$

Observamos que $(A_{\text{sat}}, A'_{\text{sat}})$ es par medible R_+ -saturado, $A_{\text{anti}} \subseteq S \setminus \text{dom}(R_+)$ y $A'_{\text{anti}} \subseteq S' \setminus \text{img}(R_+)$. Por lo tanto $\tau_a(s, A_{\text{sat}}) = \tau'_a(s', A'_{\text{sat}})$; $\tau_a(s, A_{\text{anti}}) \leq \tau_a(s, S \setminus \text{dom}(R_+)) = 0$ y $\tau'_a(s', A'_{\text{anti}}) \leq \tau'_a(s', S' \setminus \text{img}(R_+)) = 0$. Luego,

$$\tau_a(s, A) = \tau_a(s, A_{\text{sat}}) + \tau_a(s, A_{\text{anti}}) = \tau_a(s', A'_{\text{sat}}) + 0 = \tau'_a(s', A'_{\text{sat}}) + \tau'_a(s', A'_{\text{anti}}) = \tau_a(s', A'). \quad \square$$

Este es el único caso en donde hemos podido decir algo sobre una \oplus -bisimulación. No sabemos por ejemplo cómo generar \oplus -bisimulaciones más grandes que una dada, o que la composición de dos también lo sea. Si se diera esto último, bajo la luz de la Proposición anterior, siempre podríamos componer un \oplus -bisimulación con id^+ y estaríamos en las condiciones de medibilidad necesarias. Podríamos responder afirmativamente a 2.54 y concluir entonces que $\sim^\oplus = \sim^\times$. La evidencia (y la bibliografía) parecen indicar que no es una definición conveniente. Sin embargo, la generalidad del resultado previo nos dice que bajo esa hipótesis alcanzan condiciones más débiles que ser bisimulación interna en la suma para conseguir una bisimulación externa. Restringir las bisimulaciones a otras más potentes no parece resolver la necesidad de alguna hipótesis sobre medibilidad. Desde el punto de vista de los estados, esto nos dice que si $s \sim^\oplus s'$ está atestiguado por una \oplus -bisimulación que cumple las hipótesis, entonces $s \sim^\times s'$.

Corolario 2.64. *Si $\text{dom}((\sim_s)_+) \in \Sigma$ e $\text{img}((\sim_s)_+) \in \Sigma'$, entonces $(\sim_s)_+ = \sim^\times$.*

Nos ocupemos ahora de los morfismos zigzags. Como es esperable, estas funciones brindan una forma de obtener bisimulaciones externas.

Lema 2.65. *Si $f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}'$ es zigzag, entonces $\text{graf}(f) = \{(s, f(s)) \mid s \in S\}$ es \times -bisimulación. Recíprocamente, si f es función medible, sobreyectiva y $\text{graf}(f)$ es \times -bisimulación, entonces f es zigzag.*

Demostración. Observamos primero que, por Lema 2.48, (E, E') es par $\text{graf}(f)$ -cerrado si y sólo si $\text{graf}(f)[E] \subseteq E'$ y $E \supseteq \text{graf}(f)^{-1}[E']$. Esto es equivalente a $f[E] \subseteq E'$ y $f^{-1}[E'] \subseteq E$.

Para la primera parte, supongamos que $(s, s') \in \text{graf}(f)$ y que $E \in \Sigma$ y $E' \in \Sigma'$ es par $\text{graf}(f)$ -cerrado. Entonces $E \subseteq f^{-1}[f[E]] \subseteq f^{-1}[E'] \subseteq E$ y por lo tanto $f^{-1}[E'] = E$. Usamos ahora que f es zigzag para concluir

$$\tau_a(s, E) = \tau_a(s, f^{-1}[E']) = \tau'_a(f(s), E').$$

Para la segunda afirmación, sea $s \in S$ y $E' \in \Sigma'$. Como f es medible, $f^{-1}[E'] \in \Sigma$ y también $f[f^{-1}[E']] = E'$ pues f es sobre. Por lo observado al inicio de la prueba, $(f^{-1}[E'], E')$ es par $\text{graf}(f)$ -cerrado, y usando que $\text{graf}(f)$ es \times -bisimulación para el par $(s, f(s)) \in \text{graf}(f)$ concluimos $\tau_a(s, f^{-1}[E']) = \tau_a(f(s), E')$. \square

Con este lema más general, recuperamos el siguiente resultado.

Corolario 2.66 ([Des99, Prop. 3.5.3]). *Si $f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}'$ es zigzag, entonces $s \sim^\times f(s)$.*

Culminamos esta sección con un breve comentario sobre la posibilidad (o el deseo) de generar procesos a partir de un estado que preserven su comportamiento. Supongamos que tenemos un único LMP \mathbb{S} y dos estados $s_0, s_1 \in S$ tales que $s_0 \sim_s s_1$. Nos preguntamos si podemos generar dos LMP \mathbb{S}_0 y \mathbb{S}_1 tales que $s_0 \in \mathbb{S}_0$, $s_1 \in \mathbb{S}_1$ y $s_0 \sim^\times s_1$. Una forma trivial de lograrlo como consecuencia del Lema 2.49 es duplicar el LMP \mathbb{S} . Con este enfoque los estados conservan su conjunto ambiente. Otra forma de encarar el problema es modificar el conjunto ambiente y definir el (algún) LMP *generado* por un estado $s \in S$. Supongamos que X_s es el espacio base de tal LMP, nos interesa que se cumplan las siguientes propiedades:

1. $s \in X_s$;
2. no se puede perder probabilidad de traza entre estados;
3. lo que queda fuera de X_s debe ser irrelevante, es decir, $\tau_a(r, S \setminus X_s) = 0$ para todo $a \in L$ y $r \in X_s$.

No podemos definir X_s como un conjunto \subseteq -minimal para estas propiedades porque a veces podemos quitar puntos sin modificar las probabilidades, por ejemplo cuando las medidas son continuas. Para un $s \in S$ fijo, cualquier sub-LMP (Definición 2.7) que contenga a s debe incluir toda la información probabilista. Sin embargo, con esa idea, si $s, t \in S$ son bisimilares por estados puede suceder que no estén relacionados por ninguna bisimulación externa entre los LMP generados. Un caso de ello será el Ejemplo 2.72 en la próxima sección. El concepto de proceso generado cobrará importancia en el Capítulo 5.

2.2.3. Bisimulaciones en la categoría LMP

Δ -bisimulaciones.

En la Sección 2.1.1 presentamos a los LMP como coálgebras del endofunctor Δ^L y a los zigzag como morfismos de Δ^L -coálgebras. La definición de bisimulación entre coálgebras se debe a Aczel y Mendler [AM89] y fue desarrollada al contexto que nos interesa por [dVR97].

Definición 2.67. Una *bisimulación coalgebraica*, o Δ -bisimulación, entre dos Δ^L -coálgebras \mathbb{S} y \mathbb{S}' es una relación $R \subseteq S \times S'$ tal que existe una estructura de Δ^L -coálgebra $\gamma : R \rightarrow \Delta^L(R)$ que hace que las proyecciones $\pi : R \rightarrow S$ y $\pi' : R \rightarrow S'$ sean morfismos de coálgebras, es decir, que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 S & \xleftarrow{\pi} & R & \xrightarrow{\pi'} & S' \\
 \tau \downarrow & & \downarrow \gamma & & \downarrow \tau' \\
 \Delta^L(S) & \xleftarrow{\Delta^L(\pi)} & \Delta^L(R) & \xrightarrow{\Delta^L(\pi')} & \Delta^L(S')
 \end{array}$$

Diremos que $s \in S$ y $s' \in S'$ son Δ -bisimilares si existe una Δ -bisimulación R tal que $s R s'$. Lo denotamos con $s \sim^\Delta s'$.

Proposición 2.68 ([Bac13, Prop. 5.2.4]). *Sea R una Δ -bisimulación entre los LMP \mathbb{S} y \mathbb{S}' , entonces R es \times -bisimulación.*

Demostración. Supongamos que $(s, s') \in R$ y sea (E, E') un par R -cerrado.

$$\begin{aligned}
\tau_a(s, E) &= \tau_a(\pi(s, s'), E) = \gamma_a((s, s'), \pi^{-1}[E]) \\
&= \gamma_a((s, s'), R \cap (E \times S')) \\
&= \gamma_a((s, s'), R \cap (S \times E')) \\
&= \gamma_a((s, s'), (\pi')^{-1}[E']) = \tau'_a(\pi'(s, s'), E') = \tau'_a(s', E'). \quad \square
\end{aligned}$$

Por definición, una Δ -bisimulación es una relación R con más estructura. Esta posibilidad de enriquecer a R con una estructura de cóalgebra de modo que las proyecciones canónicas sean morfismos es un caso particular de *span*.

Definición 2.69. Un span entre dos objetos X, Y en una categoría \mathbf{C} consiste de un objeto Z y dos morfismos $f : Z \rightarrow X$ y $g : Z \rightarrow Y$. Lo denotamos con (Z, f, g) . Un cospan entre U y V consiste de un objeto W y dos morfismos con el mismo codominio $j : U \rightarrow W$ y $k : V \rightarrow W$.

El primer concepto puede pensarse como un cono para un funtor $\mathbf{2} \rightarrow \mathbf{C}$ donde $\mathbf{2}$ es la categoría discreta con dos objetos. Un cospan es el concepto dual, o cocono. En el siguiente diagrama representamos un span a la izquierda y un cospan a la derecha.

$$\begin{array}{ccc}
& Z & \\
f \swarrow & & \searrow g \\
X & & Y
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
U & & V \\
& \searrow j & \swarrow k \\
& W &
\end{array}
\qquad (2.5)$$

\wedge -bisimulaciones.

Como mencionamos, un span es una generalización de relación binaria pensada como un diagrama $X \xleftarrow{\pi_X} R \xrightarrow{\pi_Y} Y$ en la categoría \mathbf{Set} (un “jointly monic span”) y sirve para dar una definición categórica más general de bisimulación.

Definición 2.70. Una bisimulación categórica (o \wedge -bisimulación) entre dos LMP \mathbb{S} y \mathbb{S}' es un span (\mathbb{T}, f, g) en la categoría \mathbf{LMP} . Diremos que $s \in S$ y $s' \in S'$ son \wedge -bisimilares si existe un span de morfismos (\mathbb{T}, f, g) tal que $f(t) = s$ y $g(t) = s'$ para algún t en T . En tal caso, escribimos $s \sim^\wedge s'$.

Esta definición se presenta en [BDEP97] donde los morfismos zigzag incluyen la condición sobreyectivos, de la cual prescindimos en este trabajo.

El siguiente resultado indica que la existencia de un span permite generar una bisimulación de estados externa.

Proposición 2.71. Si hay span de morfismos zigzag $\mathbb{S} \xleftarrow{f} \mathbb{W} \xrightarrow{g} \mathbb{S}'$, entonces para todo $w \in W$ vale $f(w) \sim^\times g(w)$.

Demostración. Consideramos la relación $R = \{(s, s') \mid \exists w \in W \ s = f(w) \wedge s' = g(w)\} = \{(f(w), g(w)) \mid w \in W\} = (f \times g)[W] \subseteq S \times S'$. Verificamos que R es \times -bisimulación: sea (A, A') par R -cerrado medible. Comprobemos que $f^{-1}[A] = g^{-1}[A']$, o equivalentemente $f(w) \in A \iff g(w) \in A'$. Si $f(w) \in A$, dado que $(f(w), g(w)) \in R$, entonces $g(w) \in R[A] \subseteq A'$. Recíprocamente, si $g(w) \in A'$, entonces $f(w) \in R^{-1}[A'] \subseteq A$. Luego,

$$\tau_a(f(w), A) = \tau_a^W(w, f^{-1}[A]) = \tau_a^W(w, g^{-1}[A']) = \tau'_a(g(w), A'). \quad \square$$

La prueba de esta proposición generaliza la primera parte del Lema 2.65 y si nos enfocamos en los estados, quiere decir que $\sim^\wedge \subseteq \sim^\times$. Además, da también un caso donde sí vale la transitividad (2.4): $f(w) \sim^\times w \sim^\times g(w) \implies f(w) \sim^\times g(w)$.

El siguiente ejemplo muestra que no vale la recíproca en el siguiente sentido: se pueden tener dos LMP tales que cada estado del primero es bisimilar externo a uno del segundo y viceversa y sin embargo no exista span que preserve esa relación.

Ejemplo 2.72. *Retomamos el LMP \mathbb{U} las modificaciones del Ejemplo 2.57. En los LMP \mathbb{U}_s y $\mathbb{U}_t \oplus \mathbb{T}'$ todo elemento del primero es bisimilar externo a uno del segundo y viceversa. En efecto, la relación R que tiene por clases de equivalencia al conjunto $\{s, t, t'\}$ y todos los otros triples con sendos elementos en \mathbb{U}_s y $\mathbb{U}_t \oplus \mathbb{T}'$ respectivamente es relación de bisimulación en la suma como se prueba en [ST11, Example 1]. Más aún es la bisimilitud \sim_s^\oplus y por Corolario 2.64, su restricción al producto es la bisimilitud externa. Sin embargo, probaremos que no hay span $\mathbb{U}_s \xleftarrow{f} \mathbb{W} \xrightarrow{g} \mathbb{U}_t \oplus \mathbb{T}'$ tal que $f(w_0) = s$ y $g(w_0) = t$ para algún w_0 en W .*

Por el absurdo, supongamos que sí existe y definimos $\bar{W} := W \setminus g^{-1}[T']$ y el sub-LMP $\bar{\mathbb{W}} := (\bar{W}, \Sigma_W \upharpoonright \bar{W}, \{\tau_a^W \upharpoonright_{\bar{W} \times \Sigma_W \upharpoonright \bar{W}}\})$. Podemos entonces restringir los morfismos y considerar $f \upharpoonright_{\bar{W}} : \bar{W} \rightarrow \mathbb{U}_s$ y $g \upharpoonright_{\bar{W}} : \bar{W} \rightarrow \mathbb{U}_t$. Probamos que estas restricciones son también morfismos zigzag: la medibilidad de ambos se sigue del hecho que \bar{W} es medible. Verificamos que $f \upharpoonright_{\bar{W}}$ es zigzag: si $A \subseteq \mathbb{U}_s$ es medible y $\bar{w} \in \bar{W}$ veamos que $\tau_a^W(\bar{w}, f^{-1}[A]) = \tau_a^W(\bar{w}, (f \upharpoonright_{\bar{W}})^{-1}[A])$. Escribimos $f^{-1}[A] = (f^{-1}[A] \cap \bar{W}) \cup (f^{-1}[A] \cap g^{-1}[T']) = (f \upharpoonright_{\bar{W}})^{-1}[A] \cup (f^{-1}[A] \cap g^{-1}[T'])$. Dado que $f^{-1}[A] \cap g^{-1}[T'] \subseteq g^{-1}[T']$ y $g(\bar{w}) \notin T'$, entonces $\tau_a^W(\bar{w}, f^{-1}[A] \cap g^{-1}[T']) \leq \tau_a^W(\bar{w}, g^{-1}[T']) = \tau_a(g(\bar{w}), T') = 0$. Luego $\tau_a(f \upharpoonright_{\bar{W}}(\bar{w}), A) = \tau_a(f(\bar{w}), A) = \tau_a^W(\bar{w}, f^{-1}[A]) = \tau_a^W(\bar{w}, (f \upharpoonright_{\bar{W}})^{-1}[A])$ y por lo tanto $f \upharpoonright_{\bar{W}}$ es zigzag. El caso de $g \upharpoonright_{\bar{W}}$ es un poco más sencillo: si $B \subseteq \mathbb{U}_t$ es medible, entonces $g^{-1}[B] = (g \upharpoonright_{\bar{W}})^{-1}[B]$ y por lo tanto $\tau_a(g \upharpoonright_{\bar{W}}(\bar{w}), B) = \tau_a(g(\bar{w}), B) = \tau_a^W(\bar{w}, g^{-1}[B]) = \tau_a^W(\bar{w}, (g \upharpoonright_{\bar{W}})^{-1}[B])$, lo que prueba que esta restricción también es zigzag.

Hemos construido un span $\mathbb{U}_s \xleftarrow{f \upharpoonright_{\bar{W}}} \bar{\mathbb{W}} \xrightarrow{g \upharpoonright_{\bar{W}}} \mathbb{U}_t$ tal que $f \upharpoonright_{\bar{W}}(w_0) = s$ y $g \upharpoonright_{\bar{W}}(w_0) = t$. Pero esto no es posible ya que la Proposición 2.71 implicaría que $s \sim^\times t$ y esto contradice lo visto en Ejemplo 2.57. Otra forma de verlo es notar que en este caso ι_s, ι_t , las inclusiones de \mathbb{U}_s y \mathbb{U}_t en \mathbb{U} respect., son zigzag y por lo tanto s y t serían bisimilares en \mathbb{U} .

Es claro que $\sim^\Delta \subseteq \sim^\wedge$ ya que la bisimulación coalgebraica es un caso particular de span en el que una relación tiene estructura de LMP y las proyecciones son zigzag. La Proposición 2.71 mostró que $\sim^\wedge \subseteq \sim^\times$ y por lo tanto tenemos que $\sim^\Delta \subseteq \sim^\wedge \subseteq \sim^\times$ (la Proposición 2.68 es una prueba directa de $\sim^\Delta \subseteq \sim^\times$). Sin embargo, el Ejemplo 2.72 anterior muestra que no vale la recíproca de la segunda contención y por lo tanto tampoco puede valer $\sim^\times \subseteq \sim^\Delta$.

En [BBLM14, Prop.14] se afirma que \sim^\times y \sim^Δ son equivalentes. Para ello argumentan que toda bisimulación externa es coalgebraica enunciando primero una herramienta técnica sobre medidas en productos. Tal herramienta emula la construcción de la medida producto en espacios σ -finitos a través de la extensión de Hahn-Kolmogorov de una pre-medida en un álgebra de subconjuntos. Pero hay un inconveniente en el argumento que prueba la σ -aditividad de la extensión. Esta estrategia es estándar para construir medidas producto ([Tao13, Prop. 1.7.11]), pero pareciera que lo delicado es pasar de los espacios coordenados al conjunto $R \subseteq X \times Y$. Acabamos de ver que ambas bisimilitudes no coinciden en todos los casos. Sin embargo, queda la pregunta sobre la equivalencia entre las bisimilitudes \sim^Δ y \sim^\wedge .

Pregunta 2.73. *$\hat{\sim}^\wedge \subseteq \hat{\sim}^\Delta$? Esto es, si dos estados son bisimilares vía un span, ¿existe también una Δ -bisimulación que los relaciona?*

Un antecedente a esta pregunta está en [dVR97, Thm. 5.8] donde se prueba que para LMP en la categoría de espacios ultramétricos con mapas expansivos, toda \times -bisimulación que admite una descomposición Borel es también una Δ -bisimulación. Pero esta condición parece ser demasiado restrictiva.

Dado un span (\mathbb{T}, f, g) , podríamos preguntarnos por la posibilidad de construir una bisimulación coalgebraica que incluya a $(f \times g)[T]$, aunque esto es quizás demasiado porque la pregunta por $\sim^\wedge \subseteq \sim^\Delta$ no implica que la *misma* relación atestigüe la \wedge -bisimilitud.

Con esto en mente, veamos un caso particular muy sencillo donde la respuesta a 2.73 es positiva. Recordamos que si (X, Σ_X) es espacio medible y $h : X \rightarrow Y$, entonces $\Sigma_Y = \{B \subseteq Y \mid h^{-1}[B] \in \Sigma_X\}$ es la mayor σ -álgebra en Y que hace que h sea medible. Le llamamos la σ -álgebra final con respecto a h .

Proposición 2.74. *Sea $\mathbb{S} \leftarrow \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{S}'$ un span mónico. Entonces la relación $R := (f \times g)[T]$ con la σ -álgebra final de $f \times g$, Σ_R , es LMP si definimos $\tau_a((f(t), g(t)), Q) := \tau_a^{\mathbb{T}}(t, (f \times g)^{-1}[Q])$.*

Demostración. Como **Set** tiene productos, que el span sea inyectivo es equivalente a pedir $f \times g : T \rightarrow S \times S'$ inyectiva. Gracias a ello, τ_a está bien definida. Para $r = (f(t), g(t))$ fijo, $\tau_a(r, \cdot)$ es medida de subprobabilidad. Si fijamos $Q \in \Sigma_R$,

$$\begin{aligned} \tau_a(\cdot, Q)^{-1}[(0, q)] &= \{(f(t), g(t)) \in R \mid \tau_a((f(t), g(t)), Q) < q\} \\ &= \{(f(t), g(t)) \in R \mid \tau_a^{\mathbb{T}}(t, (f \times g)^{-1}[Q]) < q\} \\ &= (f \times g)[\{t \in T \mid \tau_a^{\mathbb{T}}(t, (f \times g)^{-1}[Q]) < q\}]. \end{aligned}$$

Dado que $f \times g$ es inyectiva, tenemos que $(f \times g)^{-1}[(f \times g)[C]] = C$ para cualquier conjunto C . Luego, por definición de Σ_R , $(f \times g)[\{t \in T \mid \tau_a^{\mathbb{T}}(t, (f \times g)^{-1}[Q]) < q\}] \in \Sigma_R$ y concluimos que $\tau_a(\cdot, Q)$ es medible. \square

Este resultado es muy débil porque un span mónico en **Set** es (isomorfo a) una relación. Por lo tanto las hipótesis requieren prácticamente una bisimulación coalgebraica. Pero sí aporta algo si se quiere buscar un contraejemplo a 2.73: no considerar spans inyectivos (y por lo tanto ninguno de los morfismos puede ser inyectivo).

En [Sok05] se listan propiedades de la bisimulación coalgebraica (con pruebas en [Rut00]). Los funtores que allí se utilizan tienen una propiedad particular: preservan weak pullbacks o preservan débilmente pullbacks. La segunda condición es más débil que la primera pero ambas son equivalentes si la categoría tiene pullbacks. El pullback de un cospan es un objeto y dos morfismos que completan el diagrama correspondiente en 2.5 a un cuadrado conmutativo, además de gozar de una propiedad universal. El concepto dual es el de pushout. Un weak pullback completa el cuadrado conmutativo sin unicidad en la propiedad universal, y un semipullback sólo completa el cuadrado conmutativo. La importancia de que un functor conserve de alguna forma estas construcciones es, entre otras, que las bisimulaciones entre sus coálgebras gozan de buenas propiedades ([Vig05, p.10]).

Supongamos que \mathbb{S}, \mathbb{S}' son LMP en una categoría \mathbf{C} y que $s \in S$ y $s' \in S'$ son \wedge -bisimiliares vía (\mathbb{T}, f, g) . Supongamos también que \mathbf{C} tiene pullbacks y productos finitos. Podemos primero construir el pushout $(\mathbb{W}, p_S, p_{S'})$ de (\mathbb{T}, f, g) y luego el pullback de $(\mathbb{W}, \pi_S, \pi_{S'})$. La unicidad garantizada por la propiedad universal del pullback asegura que el span derivado de este pullback es mónico, y como la categoría tiene productos, esto es lo mismo que una relación $R \subseteq S \times S'$ con estructura de coálgebra, i.e., un LMP en la misma categoría. Más aún, por construcción, $s R s'$. Bajo estas suposiciones sobre \mathbf{C} , dos estados \wedge -bisimiliares son también Δ -bisimiliares.

Este esquema de razonamiento imita el resultado bien conocido que afirma que, si el funtor de comportamiento preserva weak pullbacks, las cocongruencias dan lugar a bisimulaciones coalgebraicas vía pullbacks ([Bac13, Prop. 3.5.4], [Sok05, Lem. 3.4.4]). Resultado inútil en nuestro contexto pues el funtor de Giry Δ que nos interesa no preserva weak pullbacks en **Mes** ([Vig05, Sec. 3.2]).

Lamentablemente la estrategia anterior no funciona pues no tenemos pullbacks en la categoría de LMP sobre espacios generales, de hecho ni siquiera tiene semi-pullbacks ([ST11, Thm. 12]). Sin embargo, si restringimos la categoría a la de LMP sobre ciertos tipos de espacios, entonces sí existen semipullbacks cuyos conjuntos base resultan ser relaciones. Es el caso de los LMP sobre espacios separables metrizable tales que $\tau_a(s)$ es una medida de Radon ([PST21, Thm. 5.1]); o de los LMP sobre espacios separables universalmente medibles ([PST21, Thm. 5.3]). Una consecuencia de esto es que las categorías de LMP sobre conjuntos analíticos (coanalíticos) tienen semipullbacks analíticos (coanalíticos) que resultan ser los pullbacks en **Set** y que por lo tanto son relaciones. En estos casos, podemos afirmar que la bisimilitud categórica coincide con la coalgebraica. Cabe recordar que el caso analítico ya había sido probado para la categoría de relaciones estocásticas sobre espacios analíticos, más aún el semipullback puede elegirse polaco ([Dob05a, Thm. 5.2]).

Todos estos resultados se inscriben dentro del problema de establecer la existencia de semi-pullbacks. Un antecedente importante es [Eda99] que se ocupa de LMP sobre espacios analíticos con transiciones universalmente medibles. Recordemos que en [Des99] se introducen los LMP generalizados con el propósito de explotar ese resultado. Estos son LMP con espacio de estados analítico donde las funciones $\tau_a(\cdot, A)$ se requieren sólo universalmente medibles para cada $A \in \Sigma$. Se prueba que en tal caso hay una equivalencia entre la definición relacional de \oplus -bisimilitud entre procesos puntuados y la definición categórica como span generalizado. En el contexto de espacios medibles generales ya no tenemos una correspondencia entre ambas definiciones.

\forall -bisimulaciones.

Nos ocuparemos ahora de las bisimulaciones de eventos en contexto categórico. En el Corolario 2.33 enunciamos la caracterización lógica de la bisimilitud de eventos vía la lógica modal \mathcal{L} . A partir del Lema 2.30 podemos concluir que, si f y g forman un span de morfismos zigzag, entonces $f(w)$ y $g(w)$ satisfacen las mismas fórmulas de \mathcal{L} . Del mismo modo, si j, k forman ahora un cospan de morfismos zigzag y $j(s) = k(s')$ entonces s y s' son lógicamente equivalentes. Notamos que la equivalencia lógica permite hablar en sentido externo y además se comporta como una relación de equivalencia, en cambio la bisimilitud de eventos como sub- σ -álgebra es interna al LMP.

El cospan es la estructura natural si se está interesado en las relaciones de equivalencia; en esta dirección, en [DDL06] se indica que la bisimilitud de eventos se corresponde con cospans de morfismos zigzag suryectivos en la categoría **LMP**. Una ventaja de este enfoque es que la transitividad de la bisimilitud dada por cospans es directa gracias a la existencia de pushouts en **LMP** (que se construyen a partir del pushout en **Mes**).

Definición 2.75. Una bisimulación de eventos entre \mathbb{S} y \mathbb{S}' es un cospan de suryecciones a algún objeto \mathbb{T} en la categoría de coálgebras. Diremos que s y s' son \forall -bisimilares (o cocongruentes) si existe un cospan de morfismos (\mathbb{T}, f, g) tal que $f(s) = g(s')$. En tal caso, escribimos $s \sim^\forall s'$.

Ejemplo 2.76. La función $\text{swap} : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}_B$ (ver Ejemplo 2.20) que manda $s \mapsto t$ y $t \mapsto s$ (y es la identidad en el resto) es zigzag. Por lo tanto $\mathbb{U} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{U}_B \xleftarrow{\text{swap}} \mathbb{U}$ es cospan que atestigua

$s \sim^\vee t$.

Proposición 2.77. *Si $s \sim^\vee s'$, entonces son bisimilares por eventos en $\mathbb{S} \oplus \mathbb{S}'$.*

Demostración. Dado un cospan (\mathbb{T}, f, g) tal que $f(s) = g(s')$, debemos probar que existe una σ -álgebra estable Λ en $\mathbb{S} \oplus \mathbb{S}'$ tal que $(s, 0) \mathcal{R}(\Lambda) (s', 1)$. Sea $\mathcal{F} = \{f^{-1}[A] \oplus g^{-1}[A] \mid A \in \Sigma_T\}$. Usando que f y g son zigzag se ve que para cualquier $A \in \Sigma_T$,

$$\{r \in \mathbb{S} \oplus \mathbb{S}' \mid \tau_a^\oplus(r, f^{-1}[A] \oplus g^{-1}[A]) < q\} = f^{-1}[B] \oplus g^{-1}[B]$$

donde $B = \{t \in T \mid \tau_a^\mathbb{T}(t, A) < q\}$. En consecuencia \mathcal{F} es estable y además forma un π -sistema. Por [DDL06, Lema 5.4], la σ -álgebra generada por un π -sistema estable también es estable. Luego, $\Lambda := \sigma(\mathcal{F})$ es estable.

Por último, notamos que $(s, 0) \mathcal{R}(\Lambda) (s', 1) \Leftrightarrow (s, 0) \mathcal{R}(\mathcal{F}) (s', 1) \Leftrightarrow (f(s) \in A \Leftrightarrow g(s') \in A)$ lo cual es siempre verdadero. \square

En la prueba anterior no parece usarse la condición de suryectividad que exige la definición. Más aún, tal exigencia pone una limitación a la posible equivalencia entre la definición relacional 2.25 y como cocongruencia de la bisimilitud de eventos. Consideremos los siguientes LMP finitos:



Notamos que los conjuntos $\{s_1, s_2, s'_1\}$, $\{s_3, s'_2\}$ y $\{s'_3\}$ son clases para la equivalencia lógica en la suma $\mathbb{S} \oplus \mathbb{S}'$ (el álgebra generada por tales conjuntos es estable) y los morfismos zigzag deben preservar esta propiedad. Por lo tanto si $f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{T}$ y $g : \mathbb{S}' \rightarrow \mathbb{T}$ son zigzag, entonces $g(s'_3) \notin \text{Im}(f)$ y por lo tanto f no podría ser sobre.

En el caso de un único ambiente (visión interna), [DDL06, Def. 6.1] propone lo siguiente:

Definición 2.78. Una bisimulación de eventos en \mathbb{S} es una suryección en la categoría de coálgebras de Δ^L para algún \mathbb{T} .

Veamos que esta definición se corresponde con la usual de bisimulación de eventos como sub- σ -álgebra estable de \mathbb{S} .

Proposición 2.79. *Dado un LMP \mathbb{S} , hay una correspondencia entre las bisimilitudes de eventos en \mathbb{S} (Definición 2.78) y sus sub- σ -álgebras estables.*

Demostración. Supongamos que se tiene una suryección de coálgebras, es decir un morfismo zigzag suryectivo f de \mathbb{S} sobre algún LMP \mathbb{T} . Por Lema 2.24, $f^{-1}[\Sigma_T]$ es σ -álgebra estable de \mathbb{S} . Para la recíproca, consideramos $\Lambda \subseteq \Sigma$ una sub- σ -álgebra estable. En la próxima sección definiremos un LMP \mathbb{S}/Λ sobre el conjunto cociente $\mathbb{S}/\mathcal{R}(\Lambda)$ y la proyección $\pi : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}/\Lambda$ resultará un zigzag sobre. Con esta información es fácil ver que si $s(\sim_s)_+ s'$ entonces $s \sim^\vee s'$: sabemos que $\sim_s^\oplus \subseteq \sim_e$, y esta última es la relación $\mathcal{R}(\Lambda)$ en $\mathbb{S} \oplus \mathbb{S}'$ para la σ -álgebra estable $\sigma(\mathcal{L})$. Luego,

$$\mathbb{S} \xrightarrow{\pi \circ \iota} (\mathbb{S} \oplus \mathbb{S}') / \sigma(\mathcal{L}) \xleftarrow{\pi' \circ \iota'} \mathbb{S}' \quad (2.6)$$

es el cospan requerido. \square

Notamos que a partir de este resultado obtenemos la implicación recíproca en la Proposición 2.77. A partir de esta igualdad $\sim_{e, \mathbb{S} \oplus \mathbb{S}'} = \sim^\vee$, y por medio de la caracterización lógica 2.33, concluimos que \sim^\vee es también la equivalencia lógica $\cong_{\mathcal{L}}$ entre \mathbb{S} y \mathbb{S}' .

Observación 2.80. A partir de la correspondencia entre sub- σ -álgebras estables y morfismos zigzag suyectivos descrita luego de la Definición 2.78, podemos definir mapas F, G por $f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{T} \xrightarrow{F} f^{-1}[\Sigma_{\mathbb{T}}]$ y $\Lambda \xrightarrow{G} \pi_{\Lambda} : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}/\mathcal{R}(\Lambda)$. Notamos que $\Lambda = \pi_{\Lambda}^{-1}[\Sigma/\Lambda]$ y por consiguiente $\pi_{\Lambda} = \pi_{\pi_{\Lambda}^{-1}[\Sigma/\Lambda]}$. Esto dice que $G \circ F \circ G = G$. De forma análoga, $f^{-1}[\Gamma] = (\pi_{f^{-1}[\Gamma]})^{-1}[\Sigma_{f^{-1}[\Gamma]}]$ y por lo tanto $F \circ G \circ F = F$.

La Tabla 2.1 resume las relaciones entre las distintas definiciones de bisimilitud entre dos LMP \mathbb{S} y \mathbb{S}' estudiadas hasta este punto. Recordamos que el foco está en los estados, por lo tanto las bisimilitudes deben pensarse como relaciones entre estados y no como afirmaciones entre los procesos. La entrada (i, j) contiene el símbolo \checkmark si la bisimilitud correspondiente a la fila i está *incluida* en la bisimilitud de la columna j , contiene el símbolo \times si no, o $?$ con su significado obvio. Cada casilla incluye además una indicación para la justificación de cada afirmación, puede ser una referencia a algún resultado, una palabra que sugiere la respuesta o una referencia a otra celda (i, j) de la misma tabla ((1,1) corresponde a la celda $\sim^{\oplus} \subseteq \sim^{\oplus}$). Algunas \checkmark no se justifican por ser evidentes (por reflexividad o transitividad). Notar que hay tres entradas de la tabla que contienen doble símbolo, el afirmativo corresponde a casos donde sí se da la contención.

\subseteq	\sim^{\oplus}	$(\sim_s)_+$	\sim^{\times}	\sim^{Δ}	\sim^{\wedge}	\sim^{\vee}
\sim^{\oplus}	\checkmark	$?$ 2.46	$?$ 2.54	\times (3,4)	\times (3,5)	$?$
$(\sim_s)_+$	\checkmark 2.45	\checkmark	$?$ - 2.60 \checkmark - 2.64	\times (2,5) y (4,5)	\times (3,2) y (3,5)	\checkmark cospan (2.6)
\sim^{\times}	\checkmark	\checkmark 2.53	\checkmark	\times (3,5) y (4,5)	\times 2.72	\checkmark (2,6)
\sim^{Δ}	\checkmark	\checkmark	\checkmark 2.68	\checkmark	\checkmark 2.67	\checkmark (5,6)
\sim^{\wedge}	\checkmark	\checkmark	\checkmark 2.71	$?$ 2.73	\checkmark	\checkmark pushouts
\sim^{\vee}	$?$	\times 2.76	\times (3,2) y (6,2)	\times \checkmark - semipull.	\times - [ST11] \checkmark - semipull.	\checkmark

Tabla 2.1: Comparación de las nociones de bisimilitud.

2.3. Cocientes

En esta última sección del capítulo estudiamos la posibilidad de munir a un conjunto cociente con una estructura de LMP. Sea R una relación de equivalencia en S y $\pi : S \rightarrow S/R$ la proyección canónica sobre el conjunto de clases de equivalencia de R . La clase de $s \in S$ será denotada con $[s] = \pi(s)$.

Notamos que si $W \subseteq S/R$, entonces $\pi^{-1}[W] = \bigcup\{[s] \mid \pi(s) \in W\}$, es decir que tomar preimágenes de π es unir clases de equivalencia. Además, como π es suryectiva, $\pi[\pi^{-1}[W]] = W$. La composición $\pi^{-1} \circ \pi$ cumple una igualdad análoga:

Observación 2.81. Si $Q \subseteq S$ es R -cerrado, entonces $s \in Q \iff \pi(s) \in \pi[Q]$ y por lo tanto $\pi^{-1}[\pi[Q]] = Q$.

Si S tiene estructura medible Σ , podemos asignar una σ -álgebra a S/R de modo que π sea medible. La más grande entre ellas es la σ -álgebra final para π , la llamaremos σ -álgebra cociente y la denotamos mediante Σ_π . Es claro que $\Sigma_\pi = \{W \subseteq S/R \mid \pi^{-1}[W] \in \Sigma\}$, y también tenemos la siguiente caracterización:

Lema 2.82. $\Sigma_\pi = \pi[\Sigma(R)] = \{\pi[Q] \mid Q \in \Sigma(R)\}$.

Demostración. (\subseteq): si $Q' \in \Sigma_\pi$, entonces $\pi^{-1}[Q'] \in \Sigma$ es R -cerrado y como π es sobre vale $Q' = \pi[\pi^{-1}[Q']]$.

(\supseteq): si $Q \in \Sigma(R)$, $\pi^{-1}[\pi[Q]] = Q \in \Sigma$, por lo tanto $\pi[Q] \in \Sigma_\pi$. □

Fijamos $\Lambda \subseteq \Sigma$ una sub- σ -álgebra y consideramos la relación de equivalencia $R = \mathcal{R}(\Lambda)$ junto con la proyección $\pi : S \rightarrow S/\mathcal{R}(\Lambda)$. Para cualquier colección $\Theta \subseteq \Lambda$ definimos la siguiente familia:

$$\Theta/\mathcal{R}(\Lambda) := \pi[\Theta] = \{\pi[Q] \mid Q \in \Theta\}.$$

Lema 2.83. Si $\Theta \subseteq \Lambda$ es σ -álgebra, $\Theta/\mathcal{R}(\Lambda)$ es σ -álgebra sobre $S/\mathcal{R}(\Lambda)$.

Demostración. Notamos que todo $Q \in \Lambda$ es $\mathcal{R}(\Lambda)$ -cerrado y por ende $s \in Q \iff \pi(s) \in \pi[Q]$. Con esta equivalencia tenemos que

$$\pi[Q]^c = \{\pi(s) \mid \pi(s) \notin \pi[Q]\} = \{\pi(s) \mid s \notin Q\} = \{\pi(s) \mid s \in Q^c\} = \pi[Q^c].$$

Dado que imagen directa preserva uniones, $\bigcup_{n \in \omega} \pi[Q_n] = \pi[\bigcup_{n \in \omega} Q_n]$. Luego, si $\pi[Q], \pi[Q_n] \in \Theta/\mathcal{R}(\Lambda)$ para todo $n \in \omega$, entonces por las igualdades anteriores, $\pi[Q]^c, \bigcup_{n \in \omega} \pi[Q_n] \in \Theta/\mathcal{R}(\Lambda)$. Como claramente tal familia es no vacía, concluimos que es σ -álgebra. □

El siguiente resultado nos dice que tomar imágenes directas e inversas de π conmuta con generar σ -álgebras.

Lema 2.84. 1. Sea $\Theta \subseteq \Lambda$, entonces $\pi[\sigma(\Theta)] = \sigma(\pi[\Theta])$.

2. Sea $\Xi \subseteq \mathcal{P}(S/\mathcal{R}(\Lambda))$, entonces $\pi^{-1}[\sigma(\Xi)] = \sigma(\pi^{-1}[\Xi])$.

Demostración. 1. Para la contención (\supseteq) notamos que $\pi[\Theta] \subseteq \pi[\sigma(\Theta)]$ y ya que esta última es σ -álgebra sobre $S/\mathcal{R}(\Lambda)$ por Lema 2.83, $\sigma(\pi[\Theta]) \subseteq \pi[\sigma(\Theta)]$. Para la inclusión recíproca, sea $\mathcal{F} := \{Q \in \Lambda \mid \pi[Q] \in \sigma(\pi[\Theta])\} \subseteq \Lambda$. Queremos probar que $\Lambda \subseteq \mathcal{F}$ para obtener el resultado. La familia \mathcal{F} es no vacía pues $\Theta \subseteq \mathcal{F}$. Como los elementos de \mathcal{F} son $\mathcal{R}(\Lambda)$ -cerrados, vemos que, si $Q, Q_n \in \mathcal{F}$ para todo $n \in \omega$, entonces $\pi[Q^c] = \pi[Q]^c \in \sigma(\pi[\Theta])$ y $\pi[(\bigcup_{n \in \omega} Q_n)] = \bigcup_{n \in \omega} \pi[Q_n] \in \sigma(\pi[\Theta])$. Esto prueba que \mathcal{F} es σ -álgebra y, dado que contiene a Θ , concluimos $\Lambda \subseteq \mathcal{F}$.

2. Para esta afirmación, podemos directamente aplicar Lema 1.1 o, análogamente al inciso anterior, considerar la colección $\mathcal{D} := \{W \subseteq S/\mathcal{R}(\Lambda) \mid \pi^{-1}[W] \in \sigma(\pi^{-1}[\Xi])\}$. □

Corolario 2.85. Sea $\Theta \subseteq \Lambda$, entonces $\Lambda = \sigma(\Theta) \iff \Lambda/\mathcal{R}(\Lambda) = \sigma(\pi[\Theta])$. En consecuencia, Λ es contablemente generada si y sólo si $\Lambda/\mathcal{R}(\Lambda)$ lo es.

Demostración. La ida en la primera afirmación es consecuencia directa del Ítem 1 del Lema previo. Para la vuelta usamos la suryectividad de π y el Ítem 2 para obtener $\Lambda = \pi^{-1}[\pi[\Lambda]] = \pi^{-1}[\sigma(\pi[\Lambda])] = \sigma(\pi^{-1}[\pi[\Theta]]) = \sigma(\Theta)$. \square

Nos concentramos ahora en el caso $\Theta = \Lambda$ y en la relación entre $\Lambda/\mathcal{R}(\Lambda)$ y la σ -álgebra cociente Σ_π . El siguiente lema nos da una condición necesaria y suficiente para la igualdad entre ambas.

Lema 2.86. $\Lambda/\mathcal{R}(\Lambda)$ es la σ -álgebra cociente si y sólo si $\Lambda = \Sigma(\mathcal{R}(\Lambda))$.

Demostración. Por Lema 2.82, $\Lambda/\mathcal{R}(\Lambda) = \pi[\Lambda]$ es la σ -álgebra cociente si y sólo si $\pi[\Lambda] = \pi[\Sigma(\mathcal{R}(\Lambda))]$. Esta igualdad es trivial si $\Lambda = \Sigma(\mathcal{R}(\Lambda))$ y de ello concluimos la implicación (\Leftarrow). Para la ida, basta notar que todo elemento de Λ (al igual que todo elemento de $\Sigma(\mathcal{R}(\Lambda))$) es $\mathcal{R}(\Lambda)$ -cerrado y por lo tanto $\pi[\Lambda] = \pi[\Sigma(\mathcal{R}(\Lambda))] \implies \Lambda = \pi^{-1}[\pi[\Lambda]] = \pi^{-1}[\pi[\Sigma(\mathcal{R}(\Lambda))]] = \Sigma(\mathcal{R}(\Lambda))$. \square

Notar que, como $\Lambda \subseteq \Sigma(\mathcal{R}(\Lambda))$, siempre vale la contención $\Lambda/\mathcal{R}(\Lambda) = \pi[\Lambda] \subseteq \pi[\Sigma(\mathcal{R}(\Lambda))] = \Sigma_\pi$.

Observación 2.87. La forma en la que definimos $\Lambda/\mathcal{R}(\Lambda)$ nos asegura que si ahora consideramos $\pi : (S, \Lambda) \rightarrow S/\mathcal{R}(\Lambda)$ (cambiamos el dominio de π), entonces $\Lambda/\mathcal{R}(\Lambda)$ es la σ -álgebra cociente (que denotaríamos con Λ_π). Esto es lo mismo que decir que vale la equivalencia $W \in \Lambda/\mathcal{R}(\Lambda) \iff \pi^{-1}[W] \in \Lambda$.

Si ahora tenemos un LMP $\mathbb{S} = (S, \Sigma, \{\tau_a\}_{a \in L})$ y Λ es sub- σ -álgebra estable de \mathbb{S} , podemos dotar al espacio recién construido $(S/\mathcal{R}(\Lambda), \Lambda/\mathcal{R}(\Lambda))$ de una estructura de LMP. Definimos funciones $\bar{\tau}_a : S/\mathcal{R}(\Lambda) \times \Lambda/\mathcal{R}(\Lambda) \rightarrow [0, 1]$ por

$$\bar{\tau}_a(\pi(s), Q') := \tau_a(s, \pi^{-1}[Q']).$$

Probamos su buena definición: supongamos por el absurdo que $\pi(s) = \pi(t)$ pero $\tau_a(s, Q) < q < \tau_a(t, Q)$ para algún $Q \in \Lambda$ y $q \in \mathbb{Q}$. Por estabilidad de Λ se tiene $s \in \{x \mid \tau_a(x, Q) < q\} \in \Lambda$ y, como $s \mathcal{R}(\Lambda) t$, entonces $t \in \{x \mid \tau_a(x, Q) < q\}$, absurdo. Luego $\tau_a(s, Q) = \tau_a(t, Q)$.

Lema 2.88. Sea $\mathbb{S} = (S, \Sigma, \{\tau_a\}_{a \in L})$ un LMP y Λ una sub- σ -álgebra estable de \mathbb{S} . Entonces $\mathbb{S}/\Lambda := (S/\mathcal{R}(\Lambda), \Lambda/\mathcal{R}(\Lambda), \{\bar{\tau}_a\}_{a \in L})$ es LMP.

Demostración. Basta probar que $\bar{\tau}_a : S/\mathcal{R}(\Lambda) \times \Lambda/\mathcal{R}(\Lambda) \rightarrow [0, 1]$ es núcleo de Markov. Fijamos $\pi[Q] \in \Lambda/\mathcal{R}(\Lambda)$ y sea $q \in \mathbb{Q}$, entonces

$$\begin{aligned} \{\pi(s) \mid \bar{\tau}_a(\pi(s), \pi[Q]) < q\} &= \{\pi(s) \mid \tau_a(s, \pi^{-1}[\pi[Q]]) < q\} = \{\pi(s) \mid \tau_a(s, Q) < q\} \\ &= \{\pi(s) \mid s \in \tau_a(\cdot, Q)^{-1}[[0, q]]\} = \pi[\tau_a(\cdot, Q)^{-1}[[0, q]]]. \end{aligned}$$

Como $\tau_a(\cdot, Q)^{-1}[[0, q]]$ está en Λ por estabilidad, concluimos que $\bar{\tau}_a(\cdot, \pi[Q])$ es medible. Si ahora fijamos $\pi(s) \in S/\mathcal{R}(\Lambda)$, $\bar{\tau}_a(\pi(s), \cdot) = \tau_a(s, \pi^{-1}[\cdot])$ es medida de subprobabilidad (notar que es $\Delta\pi(\tau_a(s, \cdot))$ para el endofunctor Δ). \square

Por la forma de definir \mathbb{S}/Λ obtenemos fácilmente la siguiente propiedad básica de la proyección canónica.

Lema 2.89. $\pi : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}/\Lambda$ es morfismo zigzag sobreyectivo. Lo mismo vale si consideramos $\pi : (S, \Lambda, \{\tau_a\}_{a \in L}) \rightarrow \mathbb{S}/\Lambda$.

Demostración. La proyección π es siempre sobreyectiva. La medibilidad es consecuencia de que $\Lambda/\mathcal{R}(\Lambda) \subseteq \Sigma_\pi$ (y $\Lambda/\mathcal{R}(\Lambda) = \Lambda_\pi$ en el segundo caso) y la condición zigzag se sigue inmediatamente de la definición de $\bar{\tau}$. \square

Ejemplo 2.90. Una aplicación sencilla del cociente es que toda bisimulación de estados R que sea de equivalencia es el núcleo de un morfismo zigzag (ver Ejemplo 2.26(2)) ya que $\Sigma(R)$ es estable y resulta $\ker(\pi) = R$. En [vMOW05] se prueba que si f es zigzag con dominio analítico, entonces vale una especie de recíproca: $\ker(f)$ está contenido en una bisimulación de estados. Notamos que esto deja no es cierto si el dominio no es analítico como lo muestra el ejemplo $f : \mathbb{U} \rightarrow (\mathbb{U}_s)_B$ dada por $f(s) = f(t) = s$ y la identidad en el resto. Aquí, $(\mathbb{U}_s)_B$ es el LMP \mathbb{U}_s del Ejemplo 2.57 que se obtiene al restringir la σ -álgebra en el intervalo a los conjuntos Borel.

Del Lema 2.89 obtenemos entonces el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 & (S, \Sigma, \{\tau_a\}) & \\
 \text{id} \swarrow & & \searrow \pi \\
 (S, \Lambda, \{\tau_a\}) & & \mathbb{S}/\Lambda \\
 \pi \searrow & & \swarrow \text{id} \\
 & \mathbb{S}/\Lambda &
 \end{array} \tag{2.7}$$

De esta forma hemos explicitado un span y cospan que atestiguan que para todo $s \in S$, s y $\pi(s)$ son Λ -bisimilares y cocongruentes. Más aún, el cospan en este diagrama resulta ser el pushout del span superior:

Lema 2.91. El diagrama (2.7) es un diagrama de pushout.

Demostración. Notar que si $f : (S, \Lambda, \{\tau_a\}) \rightarrow \mathbb{T}$ y $g : \mathbb{S}/\Lambda \rightarrow \mathbb{T}$ son zigzags tales que $f \circ \text{id} = g \circ \pi$, entonces $\alpha := g : \mathbb{S}/\Lambda \rightarrow \mathbb{T}$ es el único morfismo zigzag que cumple $\alpha \circ \text{id} = g$ y $\alpha \circ \pi = f$. \square

Capítulo 3

Distancia entre bisimilitudes

If the fool would persist in his folly he
would become wise.

William Blake, *The Proverbs of Hell*

En el capítulo previo presentamos las nociones centrales de esta tesis, entre ellas las distintas variantes de bisimilitud. Ahora, nos concentraremos en las bisimilitudes de estados \sim_s y de eventos \sim_e en versión interna, es decir, las estudiaremos como relaciones entre los estados de un LMP fijo \mathbb{S} .

La lógica modal \mathcal{L} dada por las fórmulas en (2.1), aunque muy simple, caracteriza la bisimilitud de eventos y también la de estados para una clase muy amplia de LMP (y por consiguiente, ambos tipos de bisimilitud coinciden). Sin embargo, si no asumimos ciertas propiedades de regularidad del espacio de estados, la propiedad de Hennessy-Milner se pierde (el LMP \mathbb{U} del Ejemplo 2.4 es prueba de ello). Es por lo tanto interesante entender qué tanto difieren la bisimilitud de estados y la de eventos en LMP sobre espacios medibles generales. C. Zhou propone en [Zho13] una manera de cuantificar esta diferencia al expresar la bisimilitud de estados como el mayor punto fijo de un operador \mathcal{O} y construye un LMP para el cual se requieren más de ω iteraciones del mismo para alcanzarla.

En la Sección 3.1 de este capítulo estudiamos el operador \mathcal{O} en un marco más general, definimos una versión dual \mathcal{G} del mismo y una jerarquía de relaciones y σ -álgebras, respectivamente, inducida por ellos. Si bien desarrollamos una extensa teoría general de los operadores \mathcal{O} y \mathcal{G} , la Figura 3.1 resume los nexos más destacados entre ambos para los casos de interés.

En la Sección 3.2 definimos entonces el ordinal de Zhou $\mathfrak{Z}(\mathbb{S})$ de un LMP \mathbb{S} como el número de iteraciones necesarias para alcanzar la bisimilitud de estados si comenzamos con la de eventos. Luego nos enfocamos en la clase \mathcal{S} de LMP sobre espacios metrizable separables, ó “LMP separables”, y en el supremo $\mathfrak{Z}(\mathcal{S})$ de los ordinales de Zhou de tales procesos. Uno de los resultados principales es que $\mathfrak{Z}(\mathcal{S})$ es un ordinal límite de cofinalidad no numerable (y por lo tanto es al menos ω_1).

En la Sección 3.3 siguiente construimos una familia de LMP $\{\mathbb{S}(\beta) \mid \beta \leq \omega_1\}$ con $\mathfrak{Z}(\mathbb{S}(\beta)) = \beta$ cuando β es ordinal límite; estos procesos son separables para β contable. También discutimos la consistencia con los axiomas de teoría de conjuntos que la cota ω_1 efectivamente se alcanza en un LMP separable.

A continuación, en la Sección 3.4 seguimos con el estudio iniciado en la Sección 2(2.3) sobre

LMP en cocientes. Dado un proceso con ordinal de Zhou α , esta construcción permite obtener procesos con ordinal de Zhou λ para cada límite $\lambda < \alpha$. Además, tiene la ventaja de que la bisimulación de estados es siempre la identidad.

Por último, en la Sección 3.5 hacemos unos breves comentarios sobre los resultados obtenidos en el primer bloque de esta tesis.

3.1. Los operadores \mathcal{O} y \mathcal{G}

Fijamos un LMP $\mathbb{S} = (S, \Sigma, \{\tau_a \mid a \in L\})$. Trabajaremos con los operadores \mathcal{R}^T y \mathcal{O} definidos en [Zho13] e introducimos un nuevo operador \mathcal{G} :

Definición 3.1. Sean $\Lambda \subseteq \Sigma$ y $R \subseteq S \times S$,

- la relación $\mathcal{R}^T(\Lambda)$ se define por

$$(s, t) \in \mathcal{R}^T(\Lambda) \iff \forall a \in L \forall E \in \Lambda \tau_a(s, E) = \tau_a(t, E).$$

- $\mathcal{O}(R) := \mathcal{R}^T(\Sigma(R))$.
- $\mathcal{G}(\Lambda) := \Sigma(\mathcal{R}^T(\Lambda))$.

Notamos que $\mathcal{O}(R)$ es siempre relación de equivalencia para cualquier R y que si Λ es σ -álgebra, entonces $\mathcal{G}(\Lambda)$ también lo es. Una posible motivación para la definición del operador \mathcal{R}^T es relacionar estados que son indistinguibles desde el punto de vista de la probabilidad que le asignan a un conjunto fijo de “tests”, dados aquí por la familia Λ de eventos. Una relación de equivalencia R en el conjunto de estados induce naturalmente $\Sigma(R)$ como familia de tests. Se sigue que R es una bisimulación de estados si y sólo si $R \subseteq \mathcal{R}^T(\Sigma(R)) = \mathcal{O}(R)$.

Ejemplo 3.2. Hagamos algunos cálculos simples con el operador \mathcal{O} concernientes al LMP \mathbb{U} . Si ∇ denota la relación total $U \times U$,

$$\mathcal{O}(\nabla) = \mathcal{R}^T(\Upsilon(\nabla)) = \mathcal{R}^T(\{\emptyset, U\}) = \text{id}_U \cup \{(s, t), (t, s)\} = \sim_e.$$

Además, dado que $V \in \Upsilon(\sim_e)$,

$$\mathcal{O}(\sim_e) = \mathcal{R}^T(\Upsilon(\sim_e)) = \text{id}_U = \sim_s.$$

Destacamos el hecho que una única aplicación de \mathcal{O} desde la bisimilitud de eventos \sim_e lleva a la bisimilitud de estados \sim_s .

Lema 3.3. 1. \mathcal{R}^T es antimónico. En consecuencia \mathcal{O} y \mathcal{G} son monótonos.

2. Si $\Lambda \subseteq \Sigma$ es estable, entonces $\mathcal{R}(\Lambda) \subseteq \mathcal{R}^T(\Lambda)$.

Demostración. 1. Supongamos que $\Lambda \subseteq \Lambda'$ y $s \mathcal{R}^T(\Lambda') t$. Si $A \in \Lambda$, entonces $A \in \Lambda'$ y por lo tanto $\tau(s, A) = \tau(t, A)$. Concluimos que $s \mathcal{R}^T(\Lambda) t$. De esto y la Proposición 2.14(4) obtenemos la segunda afirmación.

2. Supongamos que dos estados $s, t \in S$ satisfacen $s \mathcal{R}(\Lambda) t$ pero no cumplen $s \mathcal{R}^T(\Lambda) t$. Sin pérdida de generalidad, existen $A \in \Lambda$ y $q \in \mathbb{Q}$ tales que $\tau(s, A) < q < \tau(t, A)$. Como Λ es estable, $\{x \in S \mid \tau(x, A) < q\} \in \Lambda$, pero tal conjunto permite distinguir s de t lo cual contradice la suposición $s \mathcal{R}(\Lambda) t$, absurdo. Luego, $s \mathcal{R}^T(\Lambda) t$. \square

Como en el trabajo de Zhou [Zho13], nos interesa construir cadenas de relaciones y σ -álgebras a partir de los operadores \mathcal{O} y \mathcal{G} . Para comenzar observamos que trivialmente se cumple $\mathcal{O}(R) \subseteq R$ si R es la relación total y que $\Lambda \subseteq \mathcal{G}(\Lambda)$ si Λ es la σ -álgebra trivial. Hay otro caso más interesante donde se cumplen tales contenciones, es el caso donde $\Lambda = \sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket)$ y R es la bisimulación de eventos $\sim_e = \mathcal{R}(\sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket))$. Para demostrar esto usaremos el siguiente

Lema 3.4. $\mathcal{R}^T(\sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket)) = \mathcal{R}(\sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket))$.

Demostración. Como $\sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket)$ es estable, por 3.3(2) vale la inclusión $\mathcal{R}(\sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket)) \subseteq \mathcal{R}^T(\sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket))$. Probamos la otra inclusión por inducción en la estructura de las fórmulas. Supongamos entonces que $(s, t) \in \mathcal{R}^T(\sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket))$. Si $A := \llbracket \top \rrbracket = S$ entonces $s \in A \Leftrightarrow t \in A$. El caso $A := \llbracket \phi \wedge \psi \rrbracket = \llbracket \phi \rrbracket \cap \llbracket \psi \rrbracket$ es también trivial a partir de la hipótesis inductiva. Para el caso $A := \llbracket \langle a \rangle_{\bowtie q} \phi \rrbracket$ observamos que la hipótesis $(s, t) \in \mathcal{R}^T(\sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket))$ implica $s \in A \Leftrightarrow \tau(s, \llbracket \phi \rrbracket) \bowtie q \Leftrightarrow \tau(t, \llbracket \phi \rrbracket) \bowtie q \Leftrightarrow t \in A$. Luego, la σ -álgebra $\mathcal{A}_{s,t} := \{A \in \Sigma \mid s \in A \Leftrightarrow t \in A\}$ contiene a $\llbracket \mathcal{L} \rrbracket$. Concluimos que $\sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket) \subseteq \mathcal{A}_{s,t}$, i.e., $(s, t) \in \mathcal{R}(\sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket))$. \square

Corolario 3.5. $\sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket) \subseteq \mathcal{G}(\sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket))$ y $\mathcal{O}(\sim_e) \subseteq \sim_e$.

Demostración. Dado que $\Sigma \circ \mathcal{R}$ es expansivo por Proposición 2.14(1), por el Lema previo tenemos que $\sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket) \subseteq \Sigma(\mathcal{R}(\sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket))) = \Sigma(\mathcal{R}^T(\sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket))) = \mathcal{G}(\sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket))$. Y por la antimonotonía de \mathcal{R}^T obtenemos el resultado para \mathcal{O} :

$$\mathcal{O}(\sim_e) = \mathcal{R}^T(\Sigma(\mathcal{R}(\sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket)))) \subseteq \mathcal{R}^T(\sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket)) = \mathcal{R}(\sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket)) = \sim_e. \quad \square$$

No es cierto en general que se dan las inclusiones $\mathcal{O}(R) \subseteq R$ y $\Lambda \subseteq \mathcal{G}(\Lambda)$ para R y Λ arbitrarias. Por ejemplo si $\tau_a \equiv 0$ para todas las etiquetas, $\mathcal{O}(R) = S \times S$ para cualquier relación R y para cualquier familia Λ se tiene $\mathcal{G}(\Lambda) = \Sigma(S \times S) = \{\emptyset, S\}$, la σ -álgebra trivial. También se pueden dar ejemplos donde la medida $\tau(s, \cdot)$ sea de probabilidad para al menos un s .

Dada una relación R , definimos ahora una sucesión transfinita de relaciones de equivalencia a partir del operador \mathcal{O} :

- $\mathcal{O}^0(R) := R$,
- $\mathcal{O}^{\alpha+1}(R) := \mathcal{O}(\mathcal{O}^\alpha(R))$,
- $\mathcal{O}^\lambda(R) := \bigcap_{\alpha < \lambda} \mathcal{O}^\alpha(R)$ si λ es un ordinal límite.

Similarmente, si $\Lambda \subseteq \Gamma$ es una sub- σ -álgebra, el operador \mathcal{G} permite generar una familia de σ -álgebras dada por:

- $\mathcal{G}^0(\Lambda) := \Lambda$,
- $\mathcal{G}^{\alpha+1}(\Lambda) := \mathcal{G}(\mathcal{G}^\alpha(\Lambda))$,
- $\mathcal{G}^\lambda(\Lambda) := \sigma(\bigcup_{\alpha < \lambda} \mathcal{G}^\alpha(\Lambda))$ si λ es un ordinal límite.

Notar que en el caso límite de esta última definición debemos tomar la σ -álgebra generada ya que no necesariamente la unión de σ -álgebras será σ -álgebra¹.

¹De hecho, en el caso contable, la unión nunca lo es ([BH77]).

Proposición 3.6. Si $\Lambda \subseteq \Sigma$, para todo α vale $\mathcal{O}^\alpha(\mathcal{R}^T(\Lambda)) = \mathcal{R}^T(\mathcal{G}^\alpha(\Lambda))$.

Demostración. Hacemos inducción en α . El caso $\alpha = 0$ se sigue directo de las definiciones de \mathcal{O}^0 y \mathcal{G}^0 . Supongamos ahora que vale para α . Calculamos $\mathcal{O}^{\alpha+1}(\mathcal{R}^T(\Lambda)) = \mathcal{O}(\mathcal{O}^\alpha(\mathcal{R}^T(\Lambda))) = \mathcal{O}(\mathcal{R}^T(\mathcal{G}^\alpha(\Lambda))) = \mathcal{R}^T(\Sigma(\mathcal{R}^T(\mathcal{G}^\alpha(\Lambda)))) = \mathcal{R}^T(\mathcal{G}(\mathcal{G}^\alpha(\Lambda))) = \mathcal{R}^T(\mathcal{G}^{\alpha+1}(\Lambda))$. Luego, vale para $\alpha+1$.

Asumimos ahora que el enunciado es verdadero para todo $\alpha < \lambda$, con λ un ordinal límite. Tenemos $\mathcal{O}^\lambda(\mathcal{R}^T(\Lambda)) = \bigcap_{\alpha < \lambda} \mathcal{O}^\alpha(\mathcal{R}^T(\Lambda)) = \bigcap_{\alpha < \lambda} \mathcal{R}^T(\mathcal{G}^\alpha(\Lambda))$. Probaremos que el último término es igual a $\mathcal{R}^T(\bigcup_{\alpha < \lambda} \mathcal{G}^\alpha(\Lambda))$. Sean $s, t \in S$, entonces:

$$\begin{aligned} (s, t) \in \bigcap_{\alpha < \lambda} \mathcal{R}^T(\mathcal{G}^\alpha(\Lambda)) &\Leftrightarrow \forall \alpha < \lambda \forall a \in L \forall Q (Q \in \mathcal{G}^\alpha(\Lambda) \Rightarrow \tau_a(s, Q) = \tau_a(t, Q)) \\ &\Leftrightarrow \forall a \in L \forall Q \forall \alpha < \lambda (Q \in \mathcal{G}^\alpha(\Lambda) \Rightarrow \tau_a(s, Q) = \tau_a(t, Q)) \\ &\Leftrightarrow \forall a \in L \forall Q (\exists \alpha < \lambda Q \in \mathcal{G}^\alpha(\Lambda) \Rightarrow \tau_a(s, Q) = \tau_a(t, Q)) \\ &\Leftrightarrow \forall a \in L \forall Q (Q \in \bigcup_{\alpha < \lambda} \mathcal{G}^\alpha(\Lambda) \Rightarrow \tau_a(s, Q) = \tau_a(t, Q)) \\ &\Leftrightarrow (s, t) \in \mathcal{R}^T(\bigcup_{\alpha < \lambda} \mathcal{G}^\alpha(\Lambda)). \end{aligned}$$

Afirmación. $\mathcal{R}^T(\bigcup_{\alpha < \lambda} \mathcal{G}^\alpha(\Lambda)) = \mathcal{R}^T(\sigma(\bigcup_{\alpha < \lambda} \mathcal{G}^\alpha(\Lambda)))$.

Con esto concluiría la prueba de la Proposición ya que: $\mathcal{R}^T(\sigma(\bigcup_{\alpha < \lambda} \mathcal{G}^\alpha(\Lambda))) = \mathcal{R}^T(\mathcal{G}^\lambda(\Lambda))$.

Probamos ahora la afirmación: sean $s, t \in S$ tales que $(s, t) \in \mathcal{R}^T(\bigcup_{\alpha < \lambda} \mathcal{G}^\alpha(\Lambda))$. Definimos $\mathcal{D}_{s,t}^a := \{A \in \Sigma \mid \tau_a(s, A) = \tau_a(t, A)\}$. Veamos que $\mathcal{D}_{s,t}^a$ es una clase monótona en S . Si $\{A_i\}_{i \in \omega}$ es una familia creciente de subconjuntos de S tal que $A_i \in \mathcal{D}_{s,t}^a$, la continuidad por arriba de las medidas $\tau_a(s, \cdot)$ y $\tau_a(t, \cdot)$ implica:

$$\tau_a(s, \bigcup_{i \in \omega} A_i) = \lim_i \tau_a(s, A_i) = \lim_i \tau_a(t, A_i) = \tau_a(t, \bigcup_{i \in \omega} A_i).$$

Similarmente para la intersección de una familia decreciente en $\mathcal{D}_{s,t}^a$ usando la continuidad por abajo de las medidas (finitas) involucradas. Dado que $(s, t) \in \mathcal{R}^T(\bigcup_{\alpha < \lambda} \mathcal{G}^\alpha(\Lambda))$, entonces $\bigcup_{\alpha < \lambda} \mathcal{G}^\alpha(\Lambda) \subseteq \mathcal{D}_{s,t}^a$ y como la familia $\bigcup_{\alpha < \lambda} \Sigma_\alpha$ es un álgebra de subconjuntos de S , el teorema de la clase monótona nos permite concluir que $\sigma(\bigcup_{\alpha < \lambda} \mathcal{G}^\alpha(\Lambda)) \subseteq \mathcal{D}_{s,t}^a$. Por lo tanto $(s, t) \in \mathcal{R}^T(\sigma(\bigcup_{\alpha < \lambda} \mathcal{G}^\alpha(\Lambda)))$.

Como la inclusión inversa $\mathcal{R}^T(\bigcup_{\alpha < \lambda} \mathcal{G}^\alpha(\Lambda)) \supseteq \mathcal{R}^T(\sigma(\bigcup_{\alpha < \lambda} \mathcal{G}^\alpha(\Lambda)))$ es trivial, tenemos el resultado. \square

Sea $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ una sub- σ -álgebra y $R_0 \subseteq S \times S$ una relación. A partir de los iterados de \mathcal{O} y \mathcal{G} definimos nuevas σ -álgebras y relaciones:

Definición 3.7. Para un ordinal cualquiera α definimos $\Sigma_\alpha := \mathcal{G}^\alpha(\Sigma_0)$ y $R_\alpha := \mathcal{O}^\alpha(R_0)$.

Una aclaración sobre la notación: en esta sección hemos fijado un LMP \mathbb{S} con su σ -álgebra Σ y la definición anterior respeta esa designación. En general estas σ -álgebras llevarán el nombre de la σ -álgebra del LMP con el correspondiente subíndice. Para las relaciones R_α usaremos un superíndice cuando debamos indicar el LMP.

Se sigue de las definiciones que para cualquier ordinal α , $\Sigma_{\alpha+1} = \mathcal{G}^{\alpha+1}(\Sigma_0) = \mathcal{G}(\mathcal{G}^\alpha(\Sigma_0)) = \mathcal{G}(\Sigma_\alpha)$, y análogamente $R_{\alpha+1} = \mathcal{O}(R_\alpha)$. Además, es también claro que si $\alpha < \lambda$ entonces $R_\lambda \subseteq R_\alpha$, pues $R_\lambda = \mathcal{O}^\lambda(R_0) = \bigcap_{\beta < \lambda} \mathcal{O}^\beta(R_0) = \bigcap_{\beta < \lambda} R_\beta \subseteq R_\alpha$. Igual de sencillo es verificar a partir de las definiciones que $\Sigma_\alpha \subseteq \Sigma_\lambda$. Nos interesa determinar qué otras contenciones o igualdades podemos establecer entre estas relaciones y σ -álgebras. Si comenzamos con cualquier σ -álgebra Σ_0 y relación R_0 no sabemos a priori que pueda darse alguna igualdad o contención

entre los elementos de ambas sucesiones. Pero si comenzamos con $\Sigma_0 = \sigma([\mathcal{L}])$ y $R_0 = \sim_e$, por el Corolario 2.33 y el Lema 3.4 tenemos la igualdad $R_0 = \mathcal{R}(\Sigma_0) = \mathcal{R}^T(\Sigma_0)$. La validez de estas igualdades será nuestra hipótesis general en el estudio de las familias $\{\Sigma_\alpha\}$ y $\{R_\alpha\}$.

Corolario 3.8. *Si $R_0 = \mathcal{R}^T(\Sigma_0)$, entonces para todo α vale $R_\alpha = \mathcal{R}^T(\Sigma_\alpha)$.*

Demostración. Por Proposición 3.6,

$$R_\alpha = \mathcal{O}^\alpha(R_0) = \mathcal{O}^\alpha(\mathcal{R}^T(\Sigma_0)) = \mathcal{R}^T(\mathcal{G}^\alpha(\Sigma_0)) = \mathcal{R}^T(\Sigma_\alpha). \quad \square$$

Corolario 3.9. *Si $R_0 = \mathcal{R}^T(\Sigma_0)$, entonces para todo α vale $\Sigma(R_\alpha) = \Sigma_{\alpha+1}$.*

Demostración. Usando el corolario previo obtenemos que $\Sigma(R_\alpha) = \Sigma(\mathcal{R}^T(\Sigma_\alpha)) = \mathcal{G}(\Sigma_\alpha) = \Sigma_{\alpha+1}$. \square

Proposición 3.10. *Si $R_0 = \mathcal{R}(\Sigma_0) = \mathcal{R}^T(\Sigma_0)$, entonces para todo α vale $R_{\alpha+1} \subseteq R_\alpha$.*

Demostración. Probamos el resultado por inducción en α . La antimonotonía de \mathcal{R}^T y la inclusión $\Sigma(\mathcal{R}(\Sigma_0)) \supseteq \Sigma_0$ prueban el caso $\alpha = 0$, en efecto:

$$R_1 = \mathcal{O}(R_0) = \mathcal{R}^T(\Sigma(R_0)) = \mathcal{R}^T(\Sigma(\mathcal{R}(\Sigma_0))) \subseteq \mathcal{R}^T(\Sigma_0) = R_0.$$

Suponemos el resultado válido para α , entonces por monotonía de \mathcal{O} aplicada a la hipótesis inductiva se tiene $R_{\alpha+2} = \mathcal{O}(R_{\alpha+1}) \subseteq \mathcal{O}(R_\alpha) = R_{\alpha+1}$. Para el caso de un ordinal límite λ observamos que para todo $\alpha < \lambda$ la monotonía de \mathcal{O} y la hipótesis inductiva aseguran que $R_{\lambda+1} = \mathcal{O}(R_\lambda) \subseteq \mathcal{O}(R_\alpha) = R_{\alpha+1} \subseteq R_\alpha$. Luego, $R_{\lambda+1} \subseteq \bigcap_{\alpha < \lambda} R_\alpha = R_\lambda$. \square

Corolario 3.11. *Si $R_0 = \mathcal{R}(\Sigma_0) = \mathcal{R}^T(\Sigma_0)$, entonces para todo α vale $\Sigma_\alpha \subseteq \Sigma_{\alpha+1}$.*

Demostración. Para el caso $\alpha = 0$ observamos que $\Sigma_0 \subseteq \Sigma(\mathcal{R}(\Sigma_0)) = \Sigma(\mathcal{R}^T(\Sigma_0)) = \mathcal{G}(\Sigma_0) = \Sigma_1$. Para ordinales sucesores, usamos la Proposición 3.10 y el Corolario 3.8 para obtener:

$$\Sigma_{\alpha+1} = \mathcal{G}(\Sigma_\alpha) = \Sigma(\mathcal{R}^T(\Sigma_\alpha)) = \Sigma(R_\alpha) \subseteq \Sigma(R_{\alpha+1}) = \Sigma_{\alpha+2}.$$

Finalmente, para el caso de ordinales límite, observamos que para todo $\alpha < \lambda$, $\Sigma_\alpha \subseteq \Sigma_\lambda$, luego, por hipótesis inductiva y monotonía de \mathcal{G} tenemos: $\Sigma_\alpha \subseteq \Sigma_{\alpha+1} = \mathcal{G}(\Sigma_\alpha) \subseteq \mathcal{G}(\Sigma_\lambda) = \Sigma_{\lambda+1}$. Por lo tanto $\Sigma_\lambda = \sigma(\bigcup_{\alpha < \lambda} \Sigma_\alpha) \subseteq \Sigma_{\lambda+1}$. \square

Observación 3.12. Las conclusiones de la Proposición 3.10 y su Corolario podrían darse de modo inverso. Puede probarse de manera muy similar a la demostración de la Proposición que $\Sigma_\alpha \subseteq \Sigma_{\alpha+1}$ y luego usar el Corolario 3.8 para concluir que $R_\alpha = \mathcal{R}^T(\Sigma_\alpha) \supseteq \mathcal{R}^T(\Sigma_{\alpha+1}) = R_{\alpha+1}$. Es decir que ambas contenciones son equivalentes.

A partir de aquí, usaremos la siguiente notación: para $q \in \mathbb{R}$, $Q \in \Sigma$ y $a \in L$,

$$\langle a \rangle_{>q} Q := \{s \in S \mid \tau_a(s, Q) > q\} = \tau_a(\cdot, Q)^{-1}[(q, 1]].$$

Y similarmente para las otras relaciones de orden.

Sea Γ una subfamilia de Σ , entonces

$$\begin{aligned} s \mathcal{R}^T(\Gamma) t &\iff \forall a \in L \forall Q \in \Gamma \tau_a(s, Q) = \tau_a(t, Q) \\ &\iff \forall a \in L \forall Q \in \Gamma \forall q \in \mathbb{Q} (\tau_a(s, Q) > q \text{ sii } \tau_a(t, Q) > q) \\ &\iff \forall a \in L \forall Q \in \Gamma \forall q \in \mathbb{Q} (s \in \langle a \rangle_{>q} Q \text{ sii } t \in \langle a \rangle_{>q} Q). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Esto sugiere que podemos definir un operador \diamond como

$$\diamond\Gamma := \{\langle a \rangle_{>q}Q \mid a \in L, q \in \mathbb{Q}, Q \in \Gamma\}.$$

De este modo obtenemos la igualdad $\mathcal{R}^T(\Gamma) = \mathcal{R}(\diamond(\Gamma))$. Podemos pensar en \diamond como una operación que facilita la comprensión de equivalencia probabilista $\mathcal{R}^T(\Gamma)$ ya que construye conjuntos que determinan tal relación como equivalencia según la familia $\diamond(\Gamma)$. La elección de $\langle a \rangle_{>q}Q$ se hará evidente en un momento, pero cualquier relación de orden es suficiente (ver observación luego de la Definición 2.21). Más aún, podríamos haber definido \diamond como la σ -álgebra definida por tales conjuntos, pero dado que a \mathcal{R} le es indistinto una familia o su σ -álgebra generada, preferimos la opción más económica.

Es claro que \diamond es monótono y preserva contabilidad, es decir, Λ contable implica $\diamond\Lambda$ contable. El siguiente Lema da algunas otras propiedades elementales, incluida la identidad consecuencia de (3.1) para futura referencia.

Lema 3.13. *Valen las siguientes afirmaciones:*

1. $\mathcal{R}^T = \mathcal{R} \circ \diamond$.
2. $\diamond\Sigma_\alpha \subseteq \Sigma_{\alpha+1}$.
3. Λ es estable sii $\diamond\Lambda \subseteq \Lambda$.

Demostración. Para 2, $\diamond\Sigma_\alpha \subseteq \Sigma(\mathcal{R}(\diamond\Sigma_\alpha)) = \Sigma(\mathcal{R}^T(\Sigma_\alpha)) = \mathcal{G}(\Sigma_\alpha) = \Sigma_{\alpha+1}$. El Ítem 3 es inmediato de la definición de estabilidad. \square

Notar que del Ítem 3 recuperamos el resultado del Lema 3.3(2): $\mathcal{R}(\Lambda) \subseteq \mathcal{R}^T(\Lambda)$ para Λ estable.

Lema 3.14. *Si $R_0 = \mathcal{R}^T(\Sigma_0)$, entonces $R_\alpha = \mathcal{R}(\Sigma_{\alpha+1})$.*

Demostración. Por Lema 3.13(1) existe una familia $\Lambda \subseteq \Sigma$ tal que $\mathcal{R}^T(\Sigma_\alpha) = \mathcal{R}(\Lambda)$ y por Proposición 2.14(5) tenemos la igualdad $\mathcal{R}^T(\Sigma_\alpha) = \mathcal{R}(\Sigma(\mathcal{R}^T(\Sigma_\alpha)))$. Del Corolario 3.8 se sigue que

$$R_\alpha = \mathcal{R}^T(\Sigma_\alpha) = \mathcal{R}(\Sigma(\mathcal{R}^T(\Sigma_\alpha))) = \mathcal{R}(\mathcal{G}(\Sigma_\alpha)) = \mathcal{R}(\Sigma_{\alpha+1}). \quad \square$$

Proposición 3.15. *Si $R_0 = \mathcal{R}(\Sigma_0) = \mathcal{R}^T(\Sigma_0)$, entonces para λ límite vale $\mathcal{R}(\Sigma_\lambda) = \mathcal{R}^T(\Sigma_\lambda)$.*

Demostración. Sea λ un ordinal límite. Como $\Sigma_{\alpha+1} \subseteq \Sigma_\lambda$ es válido para todo $\alpha < \lambda$, por Lema 3.14 tenemos que $\mathcal{R}(\Sigma_\lambda) \subseteq \mathcal{R}(\Sigma_{\alpha+1}) = R_\alpha$. Luego, $\mathcal{R}(\Sigma_\lambda) \subseteq \bigcap_{\alpha < \lambda} R_\alpha = R_\lambda = \mathcal{R}(\Sigma_{\lambda+1}) \subseteq \mathcal{R}(\Sigma_\lambda)$ y por lo tanto $R_\lambda = \mathcal{R}(\Sigma_\lambda)$. Como también vale $R_\lambda = \mathcal{R}^T(\Sigma_\lambda)$ por Corolario 3.8, obtenemos el resultado. \square

En la Sección 3.3 construiremos un LMP para el cual $\mathcal{R}(\Sigma_{\alpha+1}) \not\supseteq \mathcal{R}^T(\Sigma_{\alpha+1})$, por lo tanto la igualdad anterior no vale en general para ordinales sucesores.

Corolario 3.16. *Supongamos que $R_0 = \mathcal{R}(\Sigma_0) = \mathcal{R}^T(\Sigma_0)$ y sea λ ordinal límite. Si $\Sigma_\lambda = \Sigma(\mathcal{R}(\Sigma_\lambda))$ entonces $\mathcal{R}(\Sigma_\lambda)$ es bisimulación de estados.*

Demostración. $\mathcal{O}(\mathcal{R}(\Sigma_\lambda)) = \mathcal{R}^T(\Sigma(\mathcal{R}(\Sigma_\lambda))) = \mathcal{R}^T(\Sigma_\lambda) = \mathcal{R}(\Sigma_\lambda)$. Luego, $\mathcal{R}(\Sigma_\lambda)$ es bisimulación de estados. \square

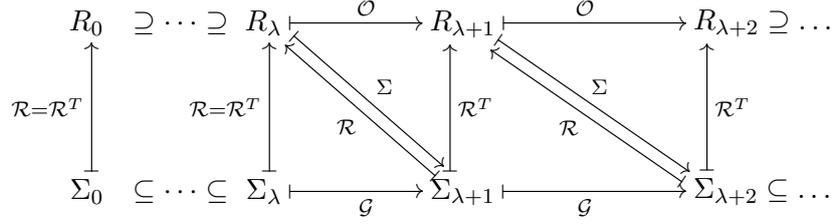


Figura 3.1: Cadenas de relaciones y σ -álgebras inducidas por \mathcal{O} y \mathcal{G} (λ límite).

En el caso que valga la hipótesis $R_0 = \mathcal{R}(\Sigma_0) = \mathcal{R}^T(\Sigma_0)$ podemos resumir los resultados hasta ahora obtenidos en la siguiente Figura 3.1:

Observación 3.17. Notamos lo siguiente con respecto a la Figura 3.1: si $\mathcal{G}(\Gamma) = \Gamma$ entonces $\mathcal{O}(\mathcal{R}^T(\Gamma)) = \mathcal{R}^T(\Sigma(\mathcal{R}^T(\Gamma))) = \mathcal{R}^T(\mathcal{G}(\Gamma)) = \mathcal{R}^T(\Gamma)$. Esto significa que un punto fijo en la parte inferior fuerza un punto fijo en la parte superior del diagrama. Sin embargo la recíproca no es cierta: en el LMP \mathbb{U} de 2.4, la σ -álgebra $\Psi := \sigma(\mathcal{B}_V \cup \{\{s, t\}, \{x\}\}) \subseteq \Upsilon$ cumple $\text{id} = \mathcal{R}^T(\Psi)$ y por lo tanto $\mathcal{O}(\mathcal{R}^T(\Psi)) = \mathcal{R}^T(\Psi)$, sin embargo $\mathcal{G}(\Psi) = \Upsilon \neq \Psi$. Además, también se cumple $\Upsilon(\mathcal{R}(\Psi)) = \Psi$ y Ψ no es estable. Por lo tanto debe suceder $\mathcal{O}(\mathcal{R}(\Psi)) \neq \mathcal{R}(\Psi)$.

Como corolario inmediato de Lema 3.14 tenemos que $\Sigma_{\alpha+1} = \mathcal{G}(\Sigma_\alpha)$ es punto fijo de $\Sigma \circ \mathcal{R}$. Esto es general: por Proposición 2.14(6), si Λ es de la forma $\Sigma(R)$ para una relación en S , entonces $\Sigma(R)$ es punto fijo de $\Sigma \circ \mathcal{R}$. En particular $\mathcal{G}(\Gamma) = \Sigma(\mathcal{R}(\mathcal{G}(\Gamma)))$ para cualquier $\Gamma \subseteq \Sigma$.

En el siguiente resultado vemos una equivalencia para los puntos fijos de $\Sigma \circ \mathcal{R}$ y encontramos que esta es una condición suficiente para que una bisimulación de eventos sea también de estados.

Lema 3.18. *Sea Λ una sub- σ -álgebra de Σ tal que $\Sigma(\mathcal{R}(\Lambda)) = \Lambda$, entonces son equivalentes*

1. Λ es estable.
2. $\mathcal{R}(\Lambda) \subseteq \mathcal{R}^T(\Lambda)$.
3. $\mathcal{R}(\Lambda)$ es bisimulación de estados.

Demostración. El Lema 3.3(2) muestra que 1 implica 2. Para la implicación de 2 a 3, observamos que $\mathcal{R}(\Lambda) \subseteq \mathcal{R}^T(\Lambda) = \mathcal{R}^T(\Sigma(\mathcal{R}(\Lambda))) = \mathcal{O}(\mathcal{R}(\Lambda))$ y esto significa que $\mathcal{R}(\Lambda)$ es bisimulación de estados. Finalmente, en virtud del Lema 2.22, el Ítem 3 implica que $(S, \Sigma(\mathcal{R}(\Lambda)), \{\tau_a \mid a \in L\})$ es un LMP, pero entonces $\Sigma(\mathcal{R}(\Lambda)) = \Lambda$ es estable. \square

Ejemplo 3.19. *La hipótesis en Lema 3.18 es necesaria: en $[0, 1]$, tomamos $\Sigma = \mathcal{B}([0, 1])$, Λ la σ -álgebra contable-cocontable y $\tau(x, A) := \delta_x(A)$ para $x \in [0, \frac{1}{2}]$ y $\tau(x, A) := \frac{1}{2}\delta_x(A)$ si $x \in (\frac{1}{2}, 1]$. Entonces $\Sigma(\mathcal{R}(\Lambda)) = \Sigma \neq \Lambda$, $\mathcal{R}(\Lambda) = \text{id}_{[0,1]} = \mathcal{R}^T(\Lambda)$ y Λ no es estable ya que, por ejemplo, $\{x \mid \tau(x, [0, 1]) > \frac{1}{2}\} = [0, \frac{1}{2}] \notin \Lambda$. Este ejemplo muestra que en general 2 no implica 1. Dado que la relación identidad es bisimulación de estados, también concluimos que 3 no implica 1 en general.*

Otro ejemplo es considerar el LMP \mathbb{U}_B (Ejemplo 2.20) con su σ -álgebra $\Phi = \sigma(\mathcal{B}(I) \cup \mathcal{P}(\{s, t, x\}))$. En este caso vale $(s, t) \in \mathcal{R}^T(\Phi)$ pues no contamos con el conjunto no medible para distinguirlos, pero $(s, t) \notin \mathcal{R}(\Phi)$. Además Φ es estable y $\mathcal{O}(\mathcal{R}(\Phi)) = \text{id} = \mathcal{R}(\Phi)$. Notar que $\Sigma = \Sigma(\mathcal{R}(\Phi)) \supsetneq \Phi$.

La σ -álgebra Σ_ω correspondiente al LMP que presentaremos en la Sección 3.3, satisface $\mathcal{R}^T(\Sigma_\omega) = \mathcal{R}(\Sigma_\omega)$ pero $\mathcal{R}(\Sigma_\omega)$ no es bisimulación de estados. Por lo tanto 2 no implica 3 en general. En este mismo ejemplo hay una σ -álgebra estable Σ_0 pero $R_0 = \mathcal{R}(\Sigma_0)$ no es bisimulación de estados; por lo tanto 1 no siempre implica 3.

Una última observación respecto a la validez de las implicaciones del Lema 3.18 es que si bien la hipótesis es necesaria para la equivalencia, no es necesaria para las implicaciones $3 \Rightarrow 2$ ni $1 \Rightarrow 2$. El segundo caso es Lema 3.3(2). Para el primer caso, si $\mathcal{R}(\Lambda)$ es bisimulación de estados, entonces $\mathcal{O}(\mathcal{R}(\Lambda)) \supseteq \mathcal{R}(\Lambda)$ y dado que $\Lambda \subseteq \Sigma(\mathcal{R}(\Lambda))$, por antimonotonía de \mathcal{R}^T vale $\mathcal{R}^T(\Lambda) \supseteq \mathcal{R}^T(\Sigma(\mathcal{R}(\Lambda))) = \mathcal{O}(\mathcal{R}(\Lambda)) \supseteq \mathcal{R}(\Lambda)$.

Lema 3.20. *Sea R una bisimulación de estados, entonces*

1. $\mathcal{G}(\Sigma(R)) \subseteq \Sigma(R)$.
2. $\mathcal{O}(R)$ es bisimulación de estados.
3. $\mathcal{G}(\Sigma(R))$ es estable.

Demostración. 1. Como $\Sigma(R)$ es estable, por Lema 3.13(3) tenemos que $\diamond(\Sigma(R)) \subseteq \Sigma(R)$. Luego, $\mathcal{G}(\Sigma(R)) = \Sigma(\mathcal{R}^T(\Sigma(R))) = \Sigma(\mathcal{R}(\diamond(\Sigma(R)))) \subseteq \Sigma(\mathcal{R}(\Sigma(R))) = \Sigma(R)$.

2. Usamos que \mathcal{R}^T es antimonótona y el Ítem anterior para obtener

$$\mathcal{O}(R) = \mathcal{R}^T(\Sigma(R)) \subseteq \mathcal{R}^T(\mathcal{G}(\Sigma(R))) = \mathcal{R}^T(\Sigma(\mathcal{R}^T(\Sigma(R)))) = \mathcal{O}(\mathcal{O}(R)).$$

3. Como $\mathcal{G}(\Sigma(R))$ es punto fijo de $\Sigma \circ \mathcal{R}$, por Lema 3.18 basta ver que $\mathcal{R}(\mathcal{G}(\Sigma(R)))$ es bisimulación de estados. Por Lema 3.13(1), $\mathcal{O}(R) = \mathcal{R}^T(\Sigma(R)) = \mathcal{R}(\Theta)$ para una familia Θ . Entonces $\mathcal{R}(\mathcal{G}(\Sigma(R))) = \mathcal{R}(\Sigma(\mathcal{R}^T(\Sigma(R)))) = \mathcal{R}(\Sigma(\mathcal{R}(\Theta))) = \mathcal{R}(\Theta) = \mathcal{O}(R)$. Por el Ítem 2, es bisimulación de estados. \square

Apuntamos ahora a mostrar que Σ_λ es estable para λ límite. Notamos que en el caso de los ordinales sucesores, si $R_0 = \mathcal{R}^T(\Sigma_0)$ y $\Sigma_{\alpha+1}$ es estable entonces $\Sigma_{\alpha+1} = \Sigma_{\alpha+2}$. En efecto, ya que $R_\alpha = \mathcal{R}(\Sigma_{\alpha+1}) \subseteq \mathcal{R}^T(\Sigma_{\alpha+1})$ tenemos que $\Sigma_{\alpha+1} = \Sigma(R_\alpha) \supseteq \Sigma(\mathcal{R}^T(\Sigma_{\alpha+1})) = \mathcal{G}(\Sigma_{\alpha+1}) = \Sigma_{\alpha+2}$. Además $\Sigma(\mathcal{R}(\Sigma_{\alpha+1})) = \Sigma_{\alpha+1}$ y por lo tanto R_α es bisimulación de estados por Lema 3.18.

Dada una etiqueta $a \in L$, definimos el siguiente conjunto:

$$\mathcal{A}_a := \{Q \in \Sigma \mid \forall q \in \mathbb{Q} (\langle a \rangle_{\geq q} Q \in \Sigma_\lambda \wedge \langle a \rangle_{> q} Q \in \Sigma_\lambda)\}.$$

Luego, para probar que Σ_λ es estable es suficiente probar que $\Sigma_\lambda \subseteq \mathcal{A}_a$ para todo $a \in L$. Es cierto que para esta afirmación la definición de \mathcal{A}_a es redundante; pero por cuestiones técnicas necesitamos incluir ambos tipos de conjuntos en \mathcal{A}_a .

Lema 3.21. *Si λ es ordinal límite, entonces $\forall a \in L \forall \alpha < \lambda \Sigma_\alpha \subseteq \mathcal{A}_a$.*

Demostración. Sean $\alpha < \lambda$, $Q \in \Sigma_\alpha$ y $q \in \mathbb{Q}$. Por Lema 3.13(2), $\langle a \rangle_{> q} Q \in \diamond \Sigma_\alpha \subseteq \Sigma_{\alpha+1} \subseteq \Sigma_\lambda$. En el caso de $\langle a \rangle_{\geq q} Q$, notamos que para todo $m \in \mathbb{N}$, $\langle a \rangle_{> q-1/m} Q \in \diamond \Sigma_\alpha \subseteq \Sigma_{\alpha+1}$. Luego, $\langle a \rangle_{\geq q} Q = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \langle a \rangle_{> q-1/m} Q \in \Sigma_{\alpha+1} \subseteq \Sigma_\lambda$. \square

Observación 3.22. En el caso particular $\text{cf}(\lambda) > \omega_1$, vale $\Sigma_\lambda = \sigma(\bigcup_{\alpha < \lambda} \Sigma_\alpha) = \bigcup_{\alpha < \lambda} \Sigma_\alpha \subseteq \mathcal{A}_a$ y por lo tanto Σ_λ es estable.

Lema 3.23. 1. Si $\{A_n\}_{n < \omega}$ es sucesión no decreciente de medibles, entonces para todo $a \in L$ y para todo $q \in \mathbb{Q}$, $\langle a \rangle_{>q} \bigcup_{n \in \omega} A_n = \bigcup_{n \in \omega} \langle a \rangle_{>q} A_n$.

2. Si $\{B_n\}_{n < \omega}$ es sucesión no creciente de medibles, entonces para todo $a \in L$ y para todo $q \in \mathbb{Q}$, $\langle a \rangle_{\geq q} \bigcap_{n \in \omega} B_n = \bigcap_{n \in \omega} \langle a \rangle_{\geq q} B_n$.

3. \mathcal{A}_a es clase monótona.

Demostración. 1. En general, si $A \subseteq B$ son medibles, entonces $\langle a \rangle_{>q} A \subseteq \langle a \rangle_{>q} B$ por monotonía de las medidas. De esto se deduce la inclusión (\supseteq) . Para la otra inclusión, si $s \in \langle a \rangle_{>q} \bigcup_{n \in \omega} A_n$, la continuidad de la medida $\tau_a(s, \cdot)$ implica $q < \tau_a(s, \bigcup_{n \in \omega} A_n) = \lim \tau(s, A_n)$. Luego, existe $n \in \omega$ tal que $\tau_a(s, A_n) > q$ y por lo tanto $s \in \langle a \rangle_{>q} A_n$.

2. De modo similar a 1, para la inclusión (\subseteq) tenemos

$$\bigcap_{n \in \omega} B_n \subseteq B_m \implies \langle a \rangle_{\geq q} \bigcap_{n \in \omega} B_n \subseteq \langle a \rangle_{\geq q} B_m \implies \langle a \rangle_{\geq q} \bigcap_{n \in \omega} B_n \subseteq \bigcap_{m \in \omega} \langle a \rangle_{\geq q} B_m.$$

Para la otra inclusión, si $s \in S$ cumple $\forall n \in \omega \tau_a(s, B_n) \geq q$, la continuidad de la medida $\tau_a(s, \cdot)$ asegura que $\tau_a(s, \bigcap_{n \in \omega} B_n) = \lim \tau_a(s, B_n) \geq q$.

3. Sea $\{A_n\}_{n \in \omega} \subseteq \mathcal{A}_a$ sucesión no decreciente. Sea $q \in \mathbb{Q}$; la parte 1 nos permite concluir que $\langle a \rangle_{>q} \bigcup_{n \in \omega} A_n = \bigcup_{n \in \omega} \langle a \rangle_{>q} A_n \in \Sigma_\lambda$ y también que

$$\langle a \rangle_{\geq q} \bigcup_{n \in \omega} A_n = \bigcap_{m \in \omega} \langle a \rangle_{>q-1/m} (\bigcup_{n \in \omega} A_n) = \bigcap_{m \in \omega} \bigcup_{n \in \omega} (\langle a \rangle_{>q-1/m} A_n) \in \Sigma_\lambda.$$

Luego, $\bigcup_{n \in \omega} A_n \in \mathcal{A}_a$.

Sea ahora $\{B_n\}_{n \in \omega} \subseteq \mathcal{A}_a$ sucesión no creciente y $q \in \mathbb{Q}$. La parte 2 nos permite concluir que $\langle a \rangle_{\geq q} \bigcap_{n \in \omega} B_n = \bigcap_{n \in \omega} \langle a \rangle_{\geq q} B_n \in \Sigma_\lambda$ y también que

$$\langle a \rangle_{>q} \bigcap_{n \in \omega} B_n = \bigcup_{m \in \omega} \langle a \rangle_{\geq q+1/m} (\bigcap_{n \in \omega} B_n) = \bigcup_{m \in \omega} \bigcap_{n \in \omega} (\langle a \rangle_{\geq q+1/m} B_n) \in \Sigma_\lambda.$$

Luego, $\bigcap_{n \in \omega} B_n \in \mathcal{A}_a$. □

Teorema 3.24. Si λ es ordinal límite, Σ_λ es σ -álgebra estable.

Demostración. Dado que $\bigcup_{\alpha < \lambda} \Sigma_\alpha$ es álgebra de conjuntos, del Lema 3.21, Lema 3.23(3) y Teorema de la Clase Monótona, concluimos que $\Sigma_\lambda = \sigma(\bigcup_{\alpha < \lambda} \Sigma_\alpha) \subseteq \mathcal{A}_a$ para cualquier etiqueta $a \in L$. □

Notamos que en la prueba del Lema 3.23(3) sólo usamos que Σ_λ es σ -álgebra. Podemos explotar este método y probar el siguiente resultado análogo a la Proposición 2.14(7).

Proposición 3.25. Si \mathcal{F} es álgebra de conjuntos, entonces $\sigma(\diamond(\sigma(\mathcal{F}))) = \sigma(\diamond\mathcal{F})$. En consecuencia, $\mathcal{R}^T(\sigma(\mathcal{F})) = \mathcal{R}^T(\mathcal{F})$.

Demostración. La inclusión (\supseteq) es obvia a partir de $\sigma(\mathcal{F}) \supseteq \mathcal{F}$ por la monotonía de las operaciones. Para la otra inclusión, para cada etiqueta $a \in L$ definimos la familia $\mathcal{A}_a := \{Q \in \Sigma \mid \forall q \in \mathbb{Q} \langle a \rangle_{\geq q} Q, \langle a \rangle_{>q} Q \in \sigma(\diamond\mathcal{F})\}$ y resulta clase monótona. Dado que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}_a$, el teorema de la clase monótona nos dice que $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{A}_a$. Luego, $\diamond(\sigma(\mathcal{F})) = \bigcup_{a \in L} \{\langle a \rangle_{>q} Q \mid q \in \mathbb{Q}, Q \in \sigma(\mathcal{F})\} \subseteq \sigma(\diamond\mathcal{F})$. La conclusión final se desprende de 2.14(7). □

Una pregunta natural que surge es referida a la preservación de separabilidad del operador \mathcal{G} : si Λ es sub- σ -álgebra contablemente generada de Σ , ¿es $\mathcal{G}(\Lambda)$ contablemente generada? Se ve rápidamente que la respuesta puede ser no si Σ no es contablemente generada: basta tomar cualquier Σ que no lo sea y considerar el LMP de Dirac \mathbb{D} . Luego, para cualquier Λ que separe puntos se obtiene $\mathcal{R}^T(\Lambda) = \text{id}$ y por lo tanto $\mathcal{G}(\Lambda) = \Sigma$. Un ejemplo es $([0, 1], \mathcal{P}([0, 1]), \delta_x(A))$ y tomar la sub- σ -álgebra separable $\mathcal{B}([0, 1])$.

Usando la Proposición 3.25 podemos reformular la pregunta: si $\Lambda = \sigma(\mathcal{F})$ con \mathcal{F} un álgebra contable, entonces $\mathcal{G}(\Lambda) = \Sigma(\mathcal{R}^T(\sigma(\mathcal{F}))) = \Sigma(\mathcal{R}^T(\mathcal{F})) = \Sigma(\mathcal{R}(\diamond\mathcal{F}))$ y recordamos que $\diamond\mathcal{F}$ es contable. Marcin Sabok nos respondió esta pregunta afirmativamente:

Proposición 3.26. *Sea Σ una σ -álgebra contablemente generada sobre S y $\mathcal{F} \subseteq \Sigma$ subfamilia contable, entonces $\Sigma(\mathcal{R}(\mathcal{F}))$ es contablemente generada.*

Demostración. Supongamos que Σ está generada por los conjuntos S_i ($i \in \omega$), podemos considerar la función $f : S \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$ definida por $f(s)(n) = 1$ si $s \in S_n$ y 0 si $s \notin S_n$. Esta función no es necesariamente inyectiva pero podemos identificar los elementos de S mapeados al mismo punto del Cantor $2^{\mathbb{N}}$, i.e. considerar la relación de equivalencia $(s, t) \in R_f \iff f(s) = f(t)$, y así Σ es σ -álgebra contablemente generada sobre el conjunto $S' = S/R_f$. De este modo Σ separa puntos. Podemos asumir entonces que Σ separa puntos por hipótesis. Notar que f es una inyección Borel de S en el Cantor, en efecto, si $x \in 2^{<\mathbb{N}}$ entonces $f^{-1}(N_x) = \bigcap \{S_n \mid x(n) = 1\} \cap \bigcap \{S_n^c \mid x(n) = 0\} \in \Sigma$. Podemos asumir que S es un subconjunto de $2^{\mathbb{N}}$ y Σ es la σ -álgebra $\{S \cap B \mid B \in \mathcal{B}(2^{\mathbb{N}})\}$.

Si ahora \mathcal{F} es una colección contable de elementos de Σ , luego de un posible cambio en la topología de $2^{\mathbb{N}}$ (que no modifica su estructura Borel) ([Kec94, Ejercicio 13.5]) podemos asumir que \mathcal{F} consiste de conjuntos clopen. Así $\mathcal{R}(\mathcal{F})$ resulta una relación de equivalencia cerrada: si $(s, t) \notin \mathcal{R}(\mathcal{F}) \implies \exists F_n \in \mathcal{F} (s \in F_n \wedge t \notin F_n) \implies (s, t) \in F_n \times F_n^c \subseteq (S \times S) \setminus \mathcal{R}(\mathcal{F})$ y $F_n \times F_n^c$ es abierto en $S \times S$.

Dado que toda relación cerrada en $2^{\mathbb{N}}$ es suave ([Kec94, Ejercicio 18.20]), hay una función Borel $g : 2^{\mathbb{N}} \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$ tal que $s \mathcal{R}(\mathcal{F}) t$ si y sólo si $g(s) = g(t)$. Luego, $\Sigma(\mathcal{R}(\mathcal{F}))$ resulta ser la σ -álgebra $\{S \cap g^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}(2^{\mathbb{N}})\}$. Pero esta última es contablemente generada por $\{S \cap g^{-1}(U_n) \mid U_n \text{ abierto básico}\}$. \square

Concluimos esta sección explorando el comportamiento de la cadena de relaciones de equivalencia y σ -álgebras generadas a partir de los operadores \mathcal{O} y \mathcal{G} cuando se tienen dos LMP \mathbb{S}, \mathbb{S}' y una función medible $f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}'$ entre ellos. Supondremos que en todos los LMP involucrados, dada la σ -álgebra inicial Σ_0 , la relación R_0 satisface las igualdades $R_0 = \mathcal{R}(\Sigma_0) = \mathcal{R}^T(\Sigma_0)$. Diferenciaremos el LMP ambiente de todos los objetos u operadores con superíndices o respetando la nomenclatura de cada proceso (por ejemplo con tildes) cuando sea necesario.

En los siguientes resultados también necesitaremos expandir L a un lenguaje L' con posiblemente más etiquetas. Por consiguiente el operador $\mathcal{R}^T = \mathcal{R} \circ \diamond$ variará según el lenguaje del que se trate. Para ser explícitos, usaremos $\diamond_{L'}$ y $\mathcal{R}_{L'}^T$ para denotar estos operadores en procesos con lenguaje L' y \diamond_L y \mathcal{R}_L^T para sus restricciones a las etiquetas en L . Además, escribiremos \mathbb{S}_L para representar el *reducto* de \mathbb{S} al lenguaje L .

De forma análoga a la definición de imagen directa de una relación, tenemos la relación “imagen inversa”: si $R' \subseteq S' \times S'$ y $f : S \rightarrow S'$, definimos la relación $f^{-1}[R']$ en S por

$$f^{-1}[R'] := \{(s, t) \in S \times S \mid (f(s), f(t)) \in R'\}.$$

Lema 3.27. Sean \mathbb{S}, \mathbb{S}' LMP con lenguajes L y L' respectivamente tales que $L \subseteq L'$. Sean $f : S \rightarrow S'$ una función medible, $R' \subseteq S' \times S'$ y $\Gamma' \subseteq \Sigma'$. Valen las afirmaciones:

1. $f^{-1}[\Sigma'(R')] \subseteq \Sigma(f^{-1}[R'])$.
2. $f^{-1}[\mathcal{R}(\Gamma')] = \mathcal{R}(f^{-1}[\Gamma'])$.
3. Si $f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}'_L$ es zigzag, entonces $\forall Q' \in \Sigma' f^{-1}[\langle a \rangle_{>q} Q'] = \langle a \rangle_{>q} f^{-1}[Q']$. En consecuencia, $f^{-1}[\diamond_L \Gamma'] = \diamond f^{-1}[\Gamma']$.

Demostración. 1. Sea $Q' \in \Sigma'(R')$. Como $f^{-1}[Q'] \in \Sigma$, basta ver que tal conjunto es $f^{-1}[R']$ -cerrado: si $s \in f^{-1}[Q']$ y $(s, t) \in f^{-1}[R']$, entonces $(f(s), f(t)) \in R'$. Como $f(s) \in Q'$ y Q' es R' -cerrado, se sigue que $f(t) \in Q'$ y por ende $t \in f^{-1}[Q']$.

$$\begin{aligned} 2. f^{-1}[\mathcal{R}(\Gamma')] &= \{(s, t) \mid (f(s), f(t)) \in \mathcal{R}(\Gamma')\} = \{(s, t) \mid \forall Q' \in \Gamma' (f(s) \in Q' \Leftrightarrow f(t) \in Q')\} \\ &= \{(s, t) \mid \forall Q' \in \Gamma' (s \in f^{-1}[Q'] \Leftrightarrow t \in f^{-1}[Q'])\} \\ &= \{(s, t) \mid \forall Q \in f^{-1}[\Gamma'] (s \in Q \Leftrightarrow t \in Q)\} \\ &= \mathcal{R}(f^{-1}[\Gamma']). \end{aligned}$$

3. Si $a \in L$, entonces

$$\begin{aligned} f^{-1}[\langle a \rangle_{>q} Q'] &= \{s \in S \mid f(s) \in \langle a \rangle_{>q} Q'\} = \{s \in S \mid \tau'_a(f(s), Q') > q\} \\ &= \{s \in S \mid \tau_a(s, f^{-1}[Q']) > q\} = \langle a \rangle_{>q} f^{-1}[Q']. \end{aligned}$$

De esto, la segunda afirmación es inmediata:

$$\begin{aligned} f^{-1}[\diamond_L \Gamma'] &= \{f^{-1}[W'] \mid W' \in \diamond_L \Gamma'\} = \{f^{-1}[\langle a \rangle_{>q} Q'] \mid a \in L, q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], Q' \in \Gamma'\} \\ &= \{\langle a \rangle_{>q} f^{-1}[Q'] \mid a \in L, q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], Q' \in \Gamma'\} \\ &= \{\langle a \rangle_{>q} Q \mid a \in L, q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], Q \in f^{-1}[\Gamma']\} = \diamond f^{-1}[\Gamma']. \quad \square \end{aligned}$$

Tenemos las siguientes relaciones entre las cadenas de ambos LMP.

Proposición 3.28. Sean \mathbb{S} y \mathbb{S}' dos LMP con lenguajes $L \subseteq L'$ respectivamente y $f : S \rightarrow S'$ medible tal que:

- h1. $f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}'_L$ es zigzag;
- h2. $f^{-1}[\Sigma'_0] \subseteq \Sigma_0$;
- h3. para toda relación $R \subseteq R'_0$, $f^{-1}[\mathcal{R}_L^T(\Sigma'(R))] = f^{-1}[\mathcal{R}_{L'}^T(\Sigma'(R))]$,

entonces para todo $\alpha \geq 0$ valen las contenciones $R_\alpha \subseteq f^{-1}[R'_\alpha]$ y $f^{-1}[\Sigma'_\alpha] \subseteq \Sigma_\alpha$.

Demostración. Usamos inducción en α . Para el caso 0, sabemos por hipótesis h2 que $f^{-1}[\Sigma'_0] \subseteq \Sigma_0$ y usando la antimonotonía de \mathcal{R} y Lema 3.27(2) concluimos $R_0 = \mathcal{R}(\Sigma_0) \subseteq \mathcal{R}(f^{-1}[\Sigma'_0]) = f^{-1}[\mathcal{R}(\Sigma'_0)] = f^{-1}[R'_0]$.

Supongamos ahora que las contenciones valen para α . Por antimonotonía del operador Σ y por Lema 3.27(1)

tenemos

$$R_\alpha \subseteq f^{-1}[R'_\alpha] \implies \Sigma(R_\alpha) \supseteq \Sigma(f^{-1}[R'_\alpha]) \supseteq f^{-1}[\Sigma'(R'_\alpha)]. \quad (3.2)$$

Esto prueba $f^{-1}[\Sigma'_{\alpha+1}] \subseteq \Sigma_{\alpha+1}$. Si ahora aplicamos a esto el operador diamante \diamond_L y usamos el Lema 3.27(3),

lo cual es posible gracias a la hipótesis $h1$, obtenemos

$$f^{-1}[\diamond_L \Sigma'_{\alpha+1}] = \diamond f^{-1}[\Sigma'_{\alpha+1}] \subseteq \diamond \Sigma_{\alpha+1}$$

y por Lema 3.27(2) y antimonotonía de \mathcal{R} :

$$f^{-1}[\mathcal{R}_L^T(\Sigma'_{\alpha+1})] = f^{-1}[\mathcal{R}(\diamond_L \Sigma'_{\alpha+1})] = \mathcal{R}(f^{-1}[\diamond_L \Sigma'_{\alpha+1}]) \supseteq \mathcal{R}(\diamond \Sigma_{\alpha+1}) = \mathcal{R}^T(\Sigma_{\alpha+1}) = R_{\alpha+1}.$$

Si usamos la hipótesis $h3$, como $R'_\alpha \subseteq R'_0$ y $\Sigma'_{\alpha+1} = \Sigma'(R'_\alpha)$, tenemos que

$$f^{-1}[\mathcal{R}_L^T(\Sigma'_{\alpha+1})] = f^{-1}[\mathcal{R}_{L'}^T(\Sigma'_{\alpha+1})] = f^{-1}[R'_{\alpha+1}].$$

Se sigue que la afirmación vale para $\alpha + 1$.

Para el caso límite, si el resultado vale para todo $\alpha < \lambda$, entonces

$$R_\lambda = \bigcap_{\alpha < \lambda} R_\alpha \subseteq \bigcap_{\alpha < \lambda} f^{-1}[R'_\alpha] = f^{-1}[\bigcap_{\alpha < \lambda} R'_\alpha] = f^{-1}[R'_\lambda].$$

En el caso de Σ_λ tenemos

$$f^{-1}[\Sigma'_\lambda] = f^{-1}[\sigma(\bigcup_{\alpha < \lambda} \Sigma'_\alpha)] = \sigma(\bigcup_{\alpha < \lambda} f^{-1}[\Sigma'_\alpha]) \subseteq \sigma(\bigcup_{\alpha < \lambda} \Sigma_\alpha) = \Sigma_\lambda. \quad \square$$

Un caso particular en el que podemos aplicar este resultado es cuando ambos LMP tienen el mismo lenguaje y $f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}'$ es zigzag. Si trabajamos con la cadena de σ -álgebras y relaciones a partir de la bisimilitud de eventos, por Corolario 2.31 sabemos que $\Sigma_0 = \sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket_{\mathbb{S}}) = f^{-1}[\sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket_{\mathbb{S}'})] = f^{-1}[\Sigma'_0]$.

Corolario 3.29. *Si $f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}'$ es zigzag, $\Sigma'_0 = \sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket_{\mathbb{S}'})$ y $\Sigma_0 = \sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket_{\mathbb{S}})$, entonces para todo $\alpha \geq 0$ valen las contenciones $R_\alpha \subseteq f^{-1}[R'_\alpha]$ y $f^{-1}[\Sigma'_\alpha] \subseteq \Sigma_\alpha$.*

En esta situación, dado que $\mathcal{R}^T = \mathcal{R} \circ \diamond$, por Lema 3.27(2),(3) podemos concluir que también vale la igualdad $f^{-1}[\mathcal{R}^T(\Gamma')] = \mathcal{R}^T(f^{-1}[\Gamma'])$. Observamos que el operador Σ es el problemático porque podría no preservar igualdad en la implicación (3.2) en la prueba de la Proposición 3.28.

Nuestro principal interés está en aplicar estos resultados en sumas directas. Supongamos que \mathbb{S} es sumando de \mathbb{S}' y que la inclusión $\iota : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}'$ es zigzag, es decir que se cumple la condición $\forall s \in S \forall a \in L \tau'_a(s, A) = \tau_a(s, A \cap S)$. Si desarrollamos las cadenas $\{\Sigma_\alpha\}$ y $\{R_\alpha\}$ a partir de la bisimilitud de eventos, el Corolario 3.29 nos da las contenciones $\Sigma'_\alpha \upharpoonright S \subseteq \Sigma_\alpha$ y $R_\alpha \subseteq R'_\alpha \upharpoonright S$. En la próxima sección necesitaremos fortalecer estas inclusiones a igualdades. Veremos que una condición suficiente para ello es que la equivalencia lógica no asocie estados entre sumandos distintos.

Lema 3.30. *Sea $\mathbb{S}' = (S', \Sigma', \{\tau'_a \mid a \in L'\})$ un LMP sobre la suma directa $(S', \Sigma') = (S \oplus \bar{S}, \Sigma \oplus \bar{\Sigma})$ de espacios medibles. Si R es relación en S' tal que $R \cap (S \times \bar{S}) = \emptyset = R \cap (\bar{S} \times S)$, entonces $\Sigma'(R) \upharpoonright S = \Sigma(R \upharpoonright S)$.*

Demostración. La contención (\subseteq) está dada por Lema 3.27(1) aplicado a la inclusión $\iota : S \rightarrow S'$. Para (\supseteq), basta ver que si A es $R \upharpoonright S$ -cerrado, entonces es R -cerrado ya que la condición de medibilidad está garantizada por $\Sigma \subseteq \Sigma'$. Si $s \in A$ y $(s, t) \in R$, debe suceder $t \in S$ por hipótesis sobre R . Luego, dado que A es $R \upharpoonright S$ -cerrado, $t \in A$. El caso $s \in A$ y $(t, s) \in R$ es análogo usando la otra hipótesis. \square

Proposición 3.31. Sean $\mathbb{S} = (S, \Sigma, \{\tau_a \mid a \in L\})$ un LMP con lenguaje L y $(\bar{S}, \bar{\Sigma})$ un espacio medible. Supongamos que $L \subseteq L'$ y $\mathbb{S}' = (S', \Sigma', \{\tau'_a \mid a \in L'\})$ es un LMP sobre la suma directa $(S', \Sigma') = (S \oplus \bar{S}, \Sigma \oplus \bar{\Sigma})$ de los espacios medibles tal que

- h1. la inclusión $\iota : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}'_L$ es zigzag;
- h2. $\Sigma'_0 \upharpoonright S = \Sigma_0$;
- h3. para toda relación $R \subseteq R'_0$, $\mathcal{R}_L^T(\Sigma'(R)) \upharpoonright S = \mathcal{R}_{L'}^T(\Sigma'(R)) \upharpoonright S$.

Entonces valen las siguientes afirmaciones:

1. Si $R'_0 \cap (S \times \bar{S}) = \emptyset = R'_0 \cap (\bar{S} \times S)$, para todo α valen las igualdades $\Sigma'_\alpha \upharpoonright S = \Sigma_\alpha$ y $R'_\alpha \upharpoonright S = R_\alpha$. Más aún, $R'_\alpha = R_\alpha \cup R'_\alpha \upharpoonright \bar{S}$.
2. Si $S \in \Sigma'_0$, entonces $\Sigma'_\alpha \upharpoonright S = \Sigma_\alpha \subseteq \Sigma'_\alpha$ y $R'_\alpha = R_\alpha \cup R'_\alpha \upharpoonright \bar{S}$.

Demostración. 1. La demostración es similar a la prueba de la Proposición 3.28 aplicada a la función inclusión $f = \iota : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}'$ y reemplazando las contenciones por igualdades. Notamos que la hipótesis sobre R'_0 implica que toda R'_α también la satisface, ya que $R'_\alpha \subseteq R'_0$; así podemos usar el Lema 3.30 y obtener igualdades en la implicación (3.2) de dicha prueba. La última afirmación del enunciado es inmediata del mismo hecho: ninguna R'_α relaciona estados de S y \bar{S} .

2. Notamos que la condición $S \in \Sigma'_0$ implica por un lado que $\Sigma'_\alpha \upharpoonright S \subseteq \Sigma'_\alpha$ para todo α (ya que $S \in \Sigma'_0 \subseteq \Sigma'_\alpha$) y también que $R'_0 = \mathcal{R}(\Sigma'_0)$ satisface la hipótesis del Ítem 1. Así, podemos usarlo para obtener que $\Sigma_\alpha = \Sigma'_\alpha \upharpoonright S \subseteq \Sigma'_\alpha$ y $R'_\alpha = R_\alpha \cup R'_\alpha \upharpoonright \bar{S}$ para todo α . \square

Corolario 3.32. Sea $\mathbb{S} = (S, \Sigma, \{\tau_a \mid a \in L\})$ LMP y $\mathbb{S}' = (S', \Sigma', \{\tau'_a \mid a \in L'\})$ un LMP sobre una suma directa $(S', \Sigma') = (S \oplus \bar{S}, \Sigma \oplus \bar{\Sigma})$ tal que la inclusión $\iota : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}'$ es zigzag. Si $\Sigma'_0 = \sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket_{S'})$, $\Sigma_0 = \sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket_S)$ y $S \in \Sigma'_0$, entonces para todo $\alpha \geq 0$ vale $\Sigma'_\alpha \upharpoonright S = \Sigma_\alpha \subseteq \Sigma'_\alpha$ (equivalentemente $\Sigma'_\alpha = \Sigma_\alpha \oplus \Sigma'_\alpha \upharpoonright \bar{S}$) y $R'_\alpha = R_\alpha \cup R'_\alpha \upharpoonright \bar{S}$.

La igualdad sobre R'_α , nos dice que para conocer tal relación basta determinarla en S y en \bar{S} por separado. Podemos interpretar esto pensando que, cuando se da la condición $S \in \Sigma'_0$, en la suma directa no perdemos ninguna información relevante sobre el LMP \mathbb{S} .

Observación 3.33. Pedir que la tercera hipótesis en 3.31 sea $\diamond_L = \diamond_{L'}$ (que es equivalente a $\forall l \in L' \setminus L \forall Q \in \mathcal{F} (\langle l \rangle_{>q} Q) \in \diamond_L \mathcal{F}$), es demasiado fuerte. Sólo queremos que el operador \mathcal{R}^T que incluye las nuevas etiquetas no modifique las relaciones R_α en el LMP primitivo \mathbb{S} . Para lograrlo, el nuevo operador diamante podría agregar tests triviales (por ejemplo todo el conjunto S) que ya han sido usados en un paso anterior (por ejemplo, el caso S ya fue usado en la equivalencia lógica).

3.2. Ordinal de Zhou

Zhou presenta en [Zho13] una caracterización de la bisimilitud de estados como un punto fijo.

Teorema 3.34 ([Zho13, Thm. 3.4]). *La bisimilitud de estados \sim_s es el mayor punto fijo del operador \mathcal{O} .*

Demostración. Dado que \sim_s es bisimulación de estados por Proposición 2.17, $\sim_s \subseteq \mathcal{O}(\sim_s)$. Además $\mathcal{O}(\sim_s)$ es también bisimulación de estados por Lema 3.20 y por lo tanto $\mathcal{O}(\sim_s) \subseteq \sim_s$. Esto prueba que es punto fijo. Para ver que es el mas grande, basta notar que si R es punto fijo entonces es bisimulación de estados y en consecuencia $R \subseteq \sim_s$. \square

Necesitaremos algunos conceptos elementales de teoría de puntos fijos. Si $F : A \rightarrow A$ es una función en un reticulado completo A , definimos los iterados de F como $F^0(x) := x$, $F^{\alpha+1}(x) := F(F^\alpha(x))$ y $F^\lambda(x) := \bigwedge_{\alpha < \lambda} F^\alpha(x)$ si λ es ordinal límite. Diremos que x es pre-punto fijo (resp., post-punto fijo) de F si $F(x) \leq x$ (resp., $x \leq F(x)$).

Lema 3.35. Sean $F : A \rightarrow A$ una función monótona en un reticulado completo A y x un pre-punto fijo de F . Entonces valen las siguientes afirmaciones:

1. $\forall \alpha, F^{\alpha+1}(x) \leq F^\alpha(x) \leq x$.
2. Si $\beta < \alpha$ entonces $F^\alpha(x) \leq F^\beta(x)$.

Demostración. 1. Hacemos inducción en α . El caso $\alpha = 0$ es la propiedad de ser pre-punto fijo y la definición de F^0 . Si la afirmación vale para α , la monotonía de F aplicada a la hipótesis inductiva permite escribir $F^{\alpha+2}(x) \leq F^{\alpha+1}(x) \leq F^\alpha(x) \leq x$. Por lo tanto vale para $\alpha + 1$. Finalmente, supongamos que el enunciado vale para todo $\alpha < \lambda$ con λ límite. Para cualquier $\alpha < \lambda$ tenemos $F^\lambda(x) = \bigwedge_{\beta < \lambda} F^\beta(x) \leq F^\alpha(x) \leq x$, luego $F^{\lambda+1}(x) \leq F^{\alpha+1}(x) \leq F^\alpha(x)$. Concluimos entonces que $F^{\lambda+1}(x) \leq \bigwedge_{\alpha < \lambda} F^\alpha(x) = F^\lambda(x) \leq x$.

2. Fijamos β y probamos por inducción completa en α la propiedad $P(\alpha) : \beta < \alpha \implies F^\alpha(x) \leq F^\beta(x)$.

El primer caso no trivial es $\alpha = \beta + 1$ y ya se probó en el ítem anterior. Para el caso sucesor, supongamos que vale $P(\delta)$ para todo $\delta \leq \alpha$ y verificamos $P(\alpha + 1)$. Si $\beta < \alpha + 1$ entonces $\beta < \alpha$ o $\beta = \alpha$. En el primer caso la hipótesis inductiva garantiza $P(\alpha)$ y $P(\beta + 1)$, además por monotonía de F tenemos: $F^{\alpha+1}(x) = F(F^\alpha(x)) \leq F(F^\beta(x)) = F^{\beta+1}(x) \leq F^\beta(x)$. El caso $\alpha = \beta$ es trivial pues el consecuente es verdadero. Concluimos que vale $P(\alpha + 1)$.

Resta el caso límite: supongamos $P(\alpha)$ verdadero para todo $\alpha < \lambda$ con λ ordinal límite. Si $\beta < \lambda$ entonces existe α tal que $\beta < \alpha < \lambda$ pues si no $\lambda = \beta + 1$. Por hipótesis inductiva $F^\beta(x) \geq F^\alpha(x) \geq \bigwedge_{\delta < \lambda} F^\delta(x) = F^\lambda(x)$. Por lo tanto vale $P(\lambda)$. \square

Se sabe que si F es un operador en un reticulado completo A e iteramos F según la definición dada anteriormente a partir del máximo elemento \top , entonces en algún ordinal α alcanzamos el mayor punto fijo de F ; además podemos elegir α tal que $|\alpha| \leq |A|$. Observamos trivialmente que $F(\top) \leq \top$ y probamos la siguiente Proposición que generaliza tal resultado comenzando con cualquier punto pre-fijo.

Proposición 3.36 ([San12, Exercise 2.8.10]). Sea $F : A \rightarrow A$ una función monótona en un reticulado completo A . Definimos $F^\infty(x) = \bigwedge_\lambda F^\lambda(x)$. Si x es pre-punto fijo de F , entonces $F^\infty(x)$ es el mayor punto fijo de F que está por debajo de x .

Demostración. Denotamos con $\text{gfp}(x)$ al mayor punto fijo de F por debajo de x . Dividimos la prueba en varios pasos:

1. $\forall \alpha, \text{gfp}(x) \leq F^\alpha(x)$ y por lo tanto $\text{gfp}(x) \leq F^\infty(x)$.

Por definición, $\text{gfp}(x) \leq x$ y por lo tanto la afirmación vale para $\alpha = 0$. Si es cierta para α , por monotonía de F tenemos $\text{gfp}(x) = F(\text{gfp}(x)) \leq F(F^\alpha(x)) = F^{\alpha+1}$ y por lo tanto es verdadera para $\alpha + 1$. Finalmente, si $\text{gfp}(x) \leq F^\alpha(x)$ para todo $\alpha < \lambda$, entonces $\text{gfp}(x) \leq \bigwedge_{\alpha < \lambda} F^\alpha(x) = F^\lambda(x)$.

2. Si $\beta < \lambda$ (λ límite) y $F^\beta(x) = F^\lambda(x)$ entonces $F^\beta(x)$ es punto fijo de F .

Dado que λ es límite y $\beta < \lambda$, entonces $\beta < \beta + 1 < \lambda$ y por el Lema 3.35 $F^\beta(x) \geq F^{\beta+1}(x) \geq F^\lambda(x) = F^\beta(x)$. Luego $F^\beta(x) = F^{\beta+1}(x) = F(F^\beta(x))$.

3. Hay un ordinal β tal que $F^\beta(x) = F^{\beta+1}(x)$.

Supongamos que no lo hay y sea α el primer ordinal de cardinal estrictamente mayor que el cardinal de A . Por el Lema 3.35 concluimos que $\{F^\delta(x)\}_{\delta < \alpha}$ es estrictamente decreciente y por lo tanto tendríamos una inyección $\alpha \rightarrow A$, absurdo pues $|\alpha| > |A|$.

4. $F^\infty(x)$ es punto fijo de F por debajo de x y por lo tanto $F^\infty(x) \leq \text{gfp}(x)$.

Por el tercer paso sabemos que hay β tal que $F^\beta(x) = F^{\beta+1}(x)$. Veamos que $\forall \alpha \geq \beta$ $F^\alpha(x) = F^\beta(x)$: si $\alpha = \beta$ no hay nada que probar. Supongamos que vale la afirmación para α , entonces $F^{\alpha+1}(x) = F(F^\alpha(x)) = F(F^\beta(x)) = F^{\beta+1}(x) = F^\beta(x)$. Si vale para todo α tal que $\beta \leq \alpha < \lambda$, dado que $\{F^\delta(x)\}_{\delta \geq 0}$ es decreciente, entonces $F^\alpha(x) = \bigcap_{\delta \leq \alpha} F^\delta(x)$. Luego, $F^\lambda(x) = \bigcap_{\delta < \lambda} F^\delta(x) = \bigcap_{\alpha \leq \delta < \lambda} F^\delta(x) = \bigcap_{\alpha \leq \delta < \lambda} F^\beta(x) = F^\beta(x)$. Basta entonces tomar algún ordinal límite $\lambda > \beta$ y se cumplirá $F^\beta(x) = F^\lambda(x)$. Por el paso 2 concluimos que $F^\beta(x)$ es punto fijo de F y además está debajo de x , luego $F^\infty(x) = F^\beta(x) \leq \text{gfp}(x)$.

De los pasos 1 y 4 concluimos que $F^\infty(x) = \text{gfp}(x)$. □

Dado el LMP $\mathbb{S} = (S, \Sigma, \{\tau_a \mid a \in L\})$, consideramos el poset

$$\mathbb{P} := \{R \subseteq S \times S \mid R \text{ es relación de equivalencia y } \sim_s \subseteq R\}.$$

Entonces \mathbb{P} es un subreticulado completo del reticulado de relaciones de equivalencia sobre S . Además $\mathcal{O} : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ ya que \sim_s es punto fijo de \mathcal{O} y por lo tanto $\sim_s \subseteq R \implies \sim_s = \mathcal{O}(\sim_s) \subseteq \mathcal{O}(R) \implies \mathcal{O}(R) \in \mathbb{P}$. Si $R \in \mathbb{P}$ es un post-punto fijo de \mathcal{O} , es decir $R \subseteq \mathcal{O}(R)$, entonces R es bisimulación de estados en \mathbb{S} y por lo tanto $R \subseteq \sim_s$, de donde concluimos $R = \sim_s$. Se sigue que el único punto fijo de \mathcal{O} en \mathbb{P} es \sim_s .

Teorema 3.37. *Sea R relación de equivalencia en S tal que $\sim_s \subseteq R$ y $\mathcal{O}(R) \subseteq R$, entonces existe un ordinal α tal que $|\alpha| \leq |S|$ y $\mathcal{O}^\alpha(R) = \sim_s$.*

Demostración. Consideramos el reticulado completo \mathbb{P} , el operador monótono $\mathcal{O} : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ y aplicamos la Proposición 3.36. □

Corolario 3.38 ([Zho13, Thm. 4.1]). *La bisimilitud de estados \sim_s puede obtenerse iterando el operador \mathcal{O} a partir de la relación total o de la bisimilitud de eventos \sim_e .*

Demostración. Aplicamos Teorema 3.37 y Corolario 3.5. □

Gracias a este resultado podemos definir el siguiente concepto.

Definición 3.39. El ordinal de Zhou de un LMP \mathbb{S} , denotado $\mathfrak{Z}(\mathbb{S})$, es el mínimo α tal que $\mathcal{O}^\alpha(\sim_e) = \sim_e$. El ordinal de Zhou de una clase \mathcal{A} de procesos, denotado $\mathfrak{Z}(\mathcal{A})$, es el supremo de la clase $\{\mathfrak{Z}(\mathbb{S}) \mid \mathbb{S} \in \mathcal{A}\}$ si está acotada o ∞ en caso contrario.

Conforme a esta definición, a partir de ahora las cadenas $\{\Sigma_\alpha\}$ y $\{R_\alpha\}$ comenzarán siempre en $\Sigma_0 = \sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket)$ y $R_0 = \sim_e$. A veces nos referiremos a ellas como cadenas de Zhou. Nos enfocaremos en el estudio del ordinal de Zhou de la clase \mathcal{S} de procesos de Markov sobre espacios medibles separables. Es inmediato que tal ordinal está acotado por el cardinal sucesor de $|\mathbb{R}|$.

Lema 3.40. $\mathfrak{Z}(\mathcal{S}) \leq (2^{\aleph_0})^+$.

Demostración. Todo espacio separable metrizable S satisface $|S| \leq 2^{\aleph_0}$, y por lo tanto la cota se sigue de Teorema 3.37. \square

Al definir el ordinal de Zhou, puede que haya un poco de ambigüedad sobre el lenguaje, del cual no decimos nada. Sabemos que cualquier LMP con lenguaje contable puede pensarse como uno con algún conjunto contable fijo, por ejemplo \mathbb{N} , como lenguaje. Esto lo único que hace es renombrar las etiquetas y posiblemente agregar el núcleo nulo. Es fácil ver que tal núcleo no cambia el operador \mathcal{R}^T y por lo tanto no modifica el ordinal de Zhou. En consecuencia, y por comodidad, cuando estudiamos el ordinal de una clase, nos permitimos trabajar con procesos con distintos lenguajes, la única (e importante) restricción es que sean todos contables.

Ejemplo 3.41 (Continuación del Ejemplo 2.37). *Ya vimos que las bisimilitudes de estados y eventos en el LMP con lazos \mathbb{S}_D son las mismas relaciones que en \mathbb{S} . Veamos qué sucede con sus cadenas de Zhou $\{R_\alpha^\circ\}$ y $\{\Sigma_\alpha^\circ\}$. Notamos que el operador Σ es el mismo en ambos procesos. Si \mathcal{F} es familia de conjuntos, es inmediato que $\diamond_{L'}\mathcal{F} = \diamond_L\mathcal{F} \cup \mathcal{F} \cup \{\emptyset\}$. De esto deducimos que $\mathcal{R}_{L'}^T(\mathcal{F}) = \mathcal{R}_L^T(\mathcal{F}) \cap \mathcal{R}(\mathcal{F})$.*

Probemos ahora por inducción en α que $\forall \alpha$ $R_\alpha^\circ \subseteq R_\alpha$. Para el caso 0, sabemos que $\sim_e^\circ = \sim_e$. Si la inclusión vale para todo $\beta < \alpha$, entonces

$$R_\alpha^\circ \subseteq R_{\beta+1}^\circ = \mathcal{R}_{L'}^T(\Sigma(R_\beta^\circ)) \subseteq \mathcal{R}_{L'}^T(\Sigma(R_\beta)) \subseteq \mathcal{R}_L^T(\Sigma(R_\beta)) = R_{\beta+1}.$$

Como $\bigcap_{\beta < \alpha} R_{\beta+1} = R_\alpha$, tenemos el paso inductivo. El corolario inmediato es que $\Sigma_{\alpha+1} \subseteq \Sigma_{\alpha+1}^\circ$. Como además $\Sigma_0 = \Sigma_0^\circ$ y el caso límite se sigue del caso sucesor, vale que $\forall \alpha$ $\Sigma_\alpha \subseteq \Sigma_\alpha^\circ$. De esto concluimos que $\mathfrak{Z}(\mathbb{S}_D) \leq \mathfrak{Z}(\mathbb{S})$, i.e., el ordinal de Zhou de \mathbb{S}_D podría ser menor que el de \mathbb{S} , pese a que las relaciones de partida y llegada son las mismas.

A continuación, damos un último ingrediente técnico necesario en las construcciones que presentaremos en los Teoremas 3.45 y 3.46. Es un manera muy simple, pero eficiente, de agrandar un LMP dado de modo que la estructura original quede “aislada” y preserve sus propiedades en el agrandamiento. Más precisamente, queremos que se incruste en el nuevo LMP y además que no se modifiquen sus cadenas de Zhou.

Supongamos que \mathbb{T} es LMP con lenguaje L . Sea $e \notin T$ un nuevo estado y $L' = L \cup \{\nabla, \dagger\}$ una expansión del lenguaje con dos nuevas etiquetas. En el espacio medible $(T^*, \Sigma^*) := (T \oplus \{e\}, \Sigma \oplus \{\{e\}, \emptyset\})$ definimos la estructura \mathbb{T}^* con núcleos $\{\tau_a^* \mid a \in L\} \cup \{\tau_\nabla, \tau_\dagger\}$ dados por

$$\begin{aligned} \tau_a^*(r, Q) &:= \chi_T(r) \cdot \tau_a(r, Q \cap T), \\ \tau_\nabla(r, Q) &:= \chi_T(r) \cdot \delta_e(Q), \\ \tau_\dagger(r, Q) &:= \chi_{\{e\}}(r) \cdot \delta_e(Q). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Es claro que \mathbb{T}^* es LMP. El núcleo τ_{∇} permite transitar a e desde cualquier estado $t \in T$ con probabilidad 1 y el núcleo τ_{\dagger} da un único lazo alrededor de e . Notamos que si $Q \in \Sigma^*$ y $q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$, entonces

$$\begin{aligned} \langle \nabla \rangle_{>q} Q &= \{r \in T^* \mid \chi_T(r) \cdot \delta_e(Q) > q\} = \{t \in T \mid \delta_e(Q) > q\} \in \{T, \emptyset\}, \\ \langle \dagger \rangle_{>q} Q &= \{r \in T^* \mid \chi_{\{e\}}(r) \cdot \delta_e(Q) > q\} = \{e \mid e \in Q\} \in \{\{e\}, \emptyset\}, \\ \langle a \rangle_{>q} Q &= \{r \in T^* \mid \tau_a^*(r, Q) > q\} = \{t \in T \mid \tau_a(t, Q \cap T) > q\}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

El uso de un nuevo estado y dos núcleos (en lugar de un único núcleo como en el Ejemplo 2.37) es una forma de asegurar que \mathcal{R}^T como operador sobre conjuntos no cambia, modulo e , para \mathbb{T} y \mathbb{T}^* . Esto se evidencia en el siguiente resultado.

Lema 3.42. *Para todo α valen las igualdades $\Sigma_\alpha^* = \Sigma_\alpha \oplus \{\{e\}, \emptyset\}$ y $R_\alpha^* = R_\alpha \cup \{(e, e)\}$.*

Demostración. Verificamos que se dan las hipótesis para aplicar la Proposición 3.31(2). La inclusión $\iota : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}_L^*$ es zigzag por la definición de τ_a^* para $a \in L$. Para verificar que se cumple la segunda hipótesis, probamos que $\Sigma_0^* = \Sigma_0 \oplus \{\{e\}, \emptyset\}$. Veamos primero que $\Sigma_0 \oplus \{\{e\}, \emptyset\}$ es estable: basta ver que contiene a los conjuntos $\langle l \rangle_{>q} Q$ para toda etiqueta $l \in L'$, $q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$ y $Q \in \Sigma_0 \cup \{\{e\}, \emptyset\}$. Pero esto se sigue de las ecuaciones (3.4) y de la estabilidad de Σ_0 . Luego, $\Sigma_0^* \subseteq \Sigma_0 \oplus \{\{e\}, \emptyset\}$. Para la inclusión recíproca, observamos primero que $\{e\} = \llbracket \langle \dagger \rangle_{>0} \top \rrbracket \in \Sigma_0^*$. Entonces resta ver que $\Sigma_0 \subseteq \Sigma_0^*$, lo cual es consecuencia del predicado $\forall \varphi \in \mathcal{L} \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathbb{T}} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathbb{T}^*} \cap T$. Pero esto es directo del Lema 2.30 aplicado a $\iota : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}_L^*$.

Para la tercera hipótesis, probamos que si $\mathcal{F} \subseteq \Sigma^*$, entonces $\mathcal{R}_L^T(\mathcal{F}) \upharpoonright T = \mathcal{R}_{L'}^T(\mathcal{F}) \upharpoonright T$. Nuevamente por las ecuaciones (3.4) y Lema 3.27(2) vemos que

$$\begin{aligned} T \times T &\supseteq \mathcal{R}_{L'}^T(\mathcal{F}) \upharpoonright T = \mathcal{R}(\diamond_{L'}(\mathcal{F})) \upharpoonright T \\ &= \mathcal{R}(\diamond_{L'}(\mathcal{F}) \upharpoonright T) \\ &= \mathcal{R}(\{(\langle l \rangle_{>q} Q) \cap T \mid l \in L', Q \in \mathcal{F}\}) \\ &= \mathcal{R}(\{(\langle a \rangle_{>q} Q) \cap T \mid a \in L, Q \in \mathcal{F}\}) \\ &= \mathcal{R}(\diamond_L(\mathcal{F}) \upharpoonright T) \\ &= \mathcal{R}(\diamond_L(\mathcal{F})) \upharpoonright T = \mathcal{R}_L^T(\mathcal{F}) \upharpoonright T. \end{aligned}$$

Finalmente, $T = \langle \nabla \rangle_{>0} T^* = \llbracket \langle \nabla \rangle_{>0} \top \rrbracket \in \Sigma_0^*$. Luego, por la Proposición mencionada concluimos que para todo α , $\Sigma_\alpha^* \upharpoonright T = \Sigma_\alpha \subseteq \Sigma_\alpha^*$ y $R_\alpha^* = R_\alpha \cup R_\alpha^* \upharpoonright \{e\}$. Como toda R_α^* es de equivalencia, $R_\alpha^* \upharpoonright \{e\} = \{(e, e)\}$. Resta ver que $\Sigma_\alpha^* \upharpoonright \{e\} = \{\{e\}, \emptyset\}$. Pero la contención no trivial (\supseteq) es inmediata de las igualdades $\{e\} = \llbracket \langle \dagger \rangle_{>0} \top \rrbracket \in \Sigma_0^* \subseteq \Sigma_\alpha^*$ y $\emptyset = T \cap \{e\} \in \Sigma_0^* \upharpoonright \{e\}$. \square

La consecuencia inmediata y que usaremos en lo que sigue es:

Corolario 3.43. *El ordinal de Zhou es invariante por el mapa $\mathbb{T} \mapsto \mathbb{T}^*$, es decir $\mathfrak{Z}(\mathbb{T}^*) = \mathfrak{Z}(\mathbb{T})$.*

Las demostraciones de los principales resultados de esta sección se basan en un análisis más profundo del LMP \mathbb{U} del Ejemplo 2.4, el cual fue el primer ejemplo de un proceso con ordinal de Zhou positivo. Más aún, $\mathfrak{Z}(\mathbb{U}) = 1$ como se destaca en el Ejemplo 3.2. Una idea clave detrás de la definición de \mathbb{U} es que el no medible V es esencialmente el único conjunto que distingue \mathfrak{m}_0 de \mathfrak{m}_1 y en consecuencia s de t . Tal conjunto V se torna “disponible” cuando todos los intervalos racionales se pueden usar para separar puntos en $I = (0, 1)$. Bajo este punto de vista, podemos controlar la aparición de V usando $B_n = (0, q_n)$ para que se vuelvan “disponibles como tests”

de forma simultánea o *en paralelo*, y esta es la razón por la cual la bisimilitud de estados se alcanza en un paso en \mathbb{U} . Usaremos el mismo patrón en el Teorema 3.45. Por otro lado, usaremos el enfoque *en serie* para descubrir la familia $\{B_n\}$ en la prueba del Teorema 3.46.

Probaremos nuestro primer resultado importante sobre $\mathfrak{Z}(\mathcal{S})$, a saber, que es un ordinal límite. Para ello, daremos primero la construcción de un LMP que jugará un papel central en la prueba de tal resultado.

Comenzamos con cualquier \mathbb{T} tal que $\mathfrak{Z}(\mathbb{T}) = \alpha + 1$. Consideramos el LMP \mathbb{T}^* construido vía las Ecuaciones (3.3), que por comodidad denotaremos con $\mathbb{S} = (S, \Sigma, \{\tau_m \mid m \in \omega\} \cup \{\tau_\nabla, \tau_\dagger\})$. Por Corolario 3.43, $\mathfrak{Z}(\mathbb{S}) = \alpha + 1$. Sean $z, y \in S \setminus \{e\}$ tales que $z R_\alpha y$ pero $z R_{\alpha+1} \not y$. Entonces deben existir $A_0 \in \Sigma_{\alpha+1} \setminus \Sigma_\alpha$ y $n \in \omega$ para los cuales $\tau_n(z, A_0) \neq \tau_n(y, A_0)$. Definimos un nuevo proceso: sea

$$\mathbb{S}' = (S \oplus I \oplus \{s, t\}, \Sigma \oplus \mathcal{B}_V \oplus \mathcal{P}(\{s, t\}), \{\tau'_m\}_{m \in \omega} \cup \{\tau'_\nabla, \tau'_\dagger, \tau'_\infty\}),$$

donde

$$\tau'_m(r, Q) := \begin{cases} \tau_m(r, Q \cap S), & \text{si } r \in S, \\ \tau_n(z, Q \cap S), & \text{si } r \in I, r < q_m, \\ \tau_n(y, Q \cap S), & \text{si } r \in I, r \geq q_m, \\ 0, & \text{si } r \in \{s, t\}, \end{cases}$$

$$\tau'_\square(r, Q) := \chi_S(r) \cdot \tau_\square(r, Q \cap S) \quad \text{para } \square \in \{\nabla, \dagger\},$$

$$\tau'_\infty(r, Q) := \chi_{\{s\}}(r) \cdot \mathbf{m}_0(Q \cap I) + \chi_{\{t\}}(r) \cdot \mathbf{m}_1(Q \cap I).$$

Llamaremos Σ' a la σ -álgebra de \mathbb{S}' y todo lo referido a este LMP llevará tilde (por ejemplo $\Sigma'_\alpha, R'_\alpha, \sim'_\xi$). Este nuevo proceso actuará como una amalgama de \mathbb{S} y \mathbb{U} con x reemplazado por S : cada estado en I se comporta ya sea como z o y según la etiqueta $m \in \omega$, y luego el proceso continúa dentro de \mathbb{S} . Las etiquetas ∇ y \dagger permiten separar el LMP \mathbb{S} del resto de modo que su comportamiento permanece independiente del LMP global. De no ser así, la bisimilitud de eventos podría identificar estados de S e $I \cup \{s, t\}$ y limitar los conjuntos en $\Sigma'_\alpha \upharpoonright S$. Observamos que \mathbb{S}' tendrá infinitos núcleos distintos, aunque \mathbb{S} podría tener finitos. Notamos también que para $r \in I$, hay únicamente tres valores posibles de $\tau'(r, Q)$: $\tau_n(z, Q \cap S)$, $\tau_n(y, Q \cap S)$ o 0; muy similar a \mathbb{U} donde los valores posibles de $\tau_n(r, Q)$ también estaban restringidos sólo a 0 o 1.

Lema 3.44. \mathbb{S}' es un LMP. Además, $\forall \beta \Sigma'_\beta \upharpoonright S = \Sigma_\beta \subseteq \Sigma'_\beta$ y $R'_\beta = R_\beta \cup R'_\beta \upharpoonright I \cup \{s, t\}$.

Demostración. Para mostrar que \mathbb{S}' es un LMP, sólo debemos verificar que τ'_a es un núcleo de Markov para cada $a \in \omega \cup \{\infty, \nabla, \dagger\}$. Si $Q \in \Sigma'$, la medibilidad de $\tau'_m(\cdot, Q)$ se sigue del hecho que $\tau_m(\cdot, Q \cap S)$ es medible para todo $m \in \omega$ y de la medibilidad de los conjuntos $(0, q_m)$ y $\{s, t\}$. La medibilidad de $\tau'_\square(\cdot, Q)$ para $\square \in \{\nabla, \dagger, \infty\}$ sólo depende de la medibilidad de las funciones características involucradas. Finalmente, para $r \in S'$ fijo, todos los mapas $\tau'_a(r, \cdot)$ son claramente medidas de subprobabilidad.

Para la segunda parte consideramos el LMP obtenido al añadir a \mathbb{S} el núcleo cero con etiqueta ∞ . Esta operación no modifica R_α ni Σ_α . Además, es directo que para todo $r \in S$ y etiqueta a vale $\tau'_a(\iota(r), Q) = \tau_a(r, Q \cap S)$; en consecuencia la inclusión $\iota : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}'$ resulta zigzag. Notamos también que $S \in \Sigma'_0$ ya que $\llbracket \langle \dagger \rangle_{>0} \top \rrbracket_{\mathbb{S}'} \cup \llbracket \langle \nabla \rangle_{>0} \top \rrbracket_{\mathbb{S}'} = S$. Así, podemos aplicar el Corolario 3.32 a \mathbb{S} y al espacio medible $(I \oplus \{s, t\}, \mathcal{B}_V \oplus \mathcal{P}(\{s, t\}))$ para obtener el resultado. \square

Ahora ya estamos listos para probar el resultado previamente anunciado.

Teorema 3.45. $\mathfrak{Z}(\mathcal{S})$ es ordinal límite.

Demostración. Primero observamos que $\mathfrak{Z}(\mathcal{S}) > 0$ como se muestra en [ST11]. Supongamos por el absurdo que $\mathfrak{Z}(\mathcal{S}) = \alpha + 1$ para algún $\alpha \geq 0$. Como es el supremo de una familia de ordinales, en este caso debe ser un máximo, entonces existe un LMP separable \mathbb{T} tal que $\mathfrak{Z}(\mathbb{T}) = \alpha + 1$. Consideramos el LMP \mathcal{S}' que construimos previamente. Mostraremos que $\mathfrak{Z}(\mathcal{S}') = \alpha + 2$, lo cual será consecuencia de las siguientes afirmaciones:

1. Si $\beta \leq \alpha$, $\Sigma'_\beta = \Sigma_\beta \oplus \{I, \emptyset\} \oplus \{\{s, t\}, \emptyset\}$ y $R'_\beta = R_\beta \cup (I \times I) \cup (\{s, t\} \times \{s, t\})$.
2. $\Sigma'_{\alpha+1} = \Sigma_{\alpha+1} \oplus \{I, \emptyset\} \oplus \{\{s, t\}, \emptyset\}$ y $R'_{\alpha+1} = \sim_{\mathbb{S}} \cup \text{id}_I \cup (\{s, t\} \times \{s, t\})$.
3. $\Sigma'_{\alpha+2} = \Sigma_{\alpha+2} \oplus \mathcal{B}_V \oplus \{\{s, t\}, \emptyset\}$ y $R'_{\alpha+2} = \sim_{\mathbb{S}} \cup \text{id}_{I \cup \{s, t\}} = \sim'_{\mathbb{S}}$.

Probemos el primer ítem por inducción en β . Para el caso 0 verificamos que $\Sigma_0 \oplus \{I, \emptyset\} \oplus \{\{s, t\}, \emptyset\}$ es estable: basta ver que contiene a los conjuntos $\langle a \rangle_{>q} Q = \{r \in S' \mid \tau'_a(r, Q) > q\}$ para toda etiqueta $a, q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$ y $Q \in \Sigma_0 \cup \{I, \{s, t\}, I \cup \{s, t\}, \emptyset\}$. Para las etiquetas ∇ y \dagger es sencillo pues para cualquier conjunto Q vale $\langle \dagger \rangle_{>q} Q \in \{\{e\}, \emptyset\} \subseteq \Sigma_0$ y $\langle \nabla \rangle_{>q} Q \in \{S \setminus \{e\}, \emptyset\} \subseteq \Sigma_0$. Para la etiqueta ∞ , los únicos casos donde $\langle \infty \rangle_{>q} Q$ es no vacío son $\langle \infty \rangle_{>q} I = \langle \infty \rangle_{>q} (I \cup \{s, t\}) = \{s, t\}$. Para $m \in \omega$, $\langle m \rangle_{>q} Q$ es vacío si $Q \in \{I, \{s, t\}, I \cup \{s, t\}\}$ y es no vacío si $Q \in \Sigma_0$, en cuyo caso es el conjunto $\{s \in S \mid \tau_m(s, Q) > q\} \cup \{I \mid \tau_n(z, Q) = \tau_n(y, Q) > q\} \in \Sigma_0 \oplus \{I, \emptyset\}$. De esto concluimos que $\Sigma'_0 \subseteq \Sigma_0 \oplus \{I, \emptyset\} \oplus \{\{s, t\}, \emptyset\}$. Como $\Sigma_0 \subseteq \Sigma'_0$, sólo resta ver que $I, \{s, t\} \in \Sigma'_0$. Pero esto se sigue de las igualdades $\llbracket \langle \infty \rangle_{>0} \top \rrbracket = \{s, t\}$ e $I = S' \setminus (S \cup \{s, t\})$ (recordamos que $S \in \Sigma'_0$). En el caso de R'_0 , con lo anterior es directo que $R'_0 = \mathcal{R}(\Sigma'_0) = R_0 \cup (I \times I) \cup (\{s, t\} \times \{s, t\})$. Notar que de esta igualdad deducimos que ninguna R'_β relaciona estados en sumandos distintos.

Supongamos que valen las igualdades para $\beta < \alpha$. Ya tenemos que $\Sigma_{\beta+1} \subseteq \Sigma'_{\beta+1}$ e $I, \{s, t\} \in \Sigma'_0 \subseteq \Sigma'_{\beta+1}$, por lo tanto $\Sigma_{\beta+1} \oplus \{I, \emptyset\} \oplus \{\{s, t\}, \emptyset\} \subseteq \Sigma'_{\beta+1}$. Sea $Q \in \Sigma'_{\beta+1} = \Sigma'(R'_\beta)$, entonces $Q = (Q \cap S) \cup (Q \cap I) \cup (Q \cap \{s, t\})$ y sabemos que $Q \cap S \in \Sigma_{\beta+1}$. Como Q es R'_β -cerrado e $I \times I \subseteq R'_\beta$ entonces $Q \cap I \neq \emptyset \Rightarrow Q \cap I = I$. De forma análoga, como $(s, t) \in R'_\beta$, $Q \cap \{s, t\} \neq \emptyset \Rightarrow Q \cap \{s, t\} = \{s, t\}$. Luego, $Q \cap (I \cup \{s, t\}) \in \{I, \{s, t\}, I \cup \{s, t\}, \emptyset\}$.

Con esto probado, calculamos ahora $R'_{\beta+1} = \mathcal{R}^T(\Sigma'_{\beta+1})$. Ya sabemos que $R'_{\beta+1} = R_{\beta+1} \cup R'_{\beta+1} \upharpoonright I \cup \{s, t\}$, por ende basta determinar la restricción. Si $Q \in \Sigma'_{\beta+1}$ entonces $Q \cap S \in \Sigma_{\beta+1}$, y dado que $(z, y) \in \mathcal{R}^T(\Sigma_{\beta+1})$ ($\beta+1 \leq \alpha$) vale la igualdad $\tau_n(z, Q \cap S) = \tau_n(y, Q \cap S)$. Se sigue que, si $r, r' \in I, \forall m \in \omega \tau'_m(r, Q) = \tau'_m(r', Q)$. Además $\tau'_a(r, Q) = \tau'_a(r', Q) = 0$ para $a \in \{\nabla, \dagger, \infty\}$. Luego, $I \times I \subseteq R'_{\beta+1}$. Vemos ahora que $(s, t) \in R'_{\beta+1}$. Por un lado $\forall a \in \omega \cup \{\nabla, \dagger\} \tau'_a(s, Q) = \tau'_a(t, Q) = 0$ y por el otro, como $Q \cap I \in \{I, \emptyset\}$, tenemos que $\tau'_\infty(s, Q) = \tau'_\infty(t, Q) \in \{0, 1\}$.

Probamos ahora el segundo ítem. Para la igualdad sobre $\Sigma'_{\alpha+1}$ simplemente notamos que la primera parte del paso inductivo del ítem 1 sirve mutatis mutandis para el caso $\beta = \alpha$. En cuanto a $R'_{\alpha+1} = \mathcal{R}^T(\Sigma'_{\alpha+1})$, vemos que ahora $A_0 \in \Sigma_{\alpha+1} \subseteq \Sigma'_{\alpha+1}$ y recordamos que habíamos elegido z, y tales que $\tau_n(z, A_0) \neq \tau_n(y, A_0)$. En consecuencia podemos distinguir los puntos en I de modo que $R'_{\alpha+1} \upharpoonright I = \text{id}_I$. Como los núcleos no nulos asociados a s y t sólo siguen dependiendo de $Q \in \Sigma'_{\alpha+1} \upharpoonright (I \cup \{s, t\}) = \{I, \{s, t\}, I \cup \{s, t\}, \emptyset\}$, tenemos que $(s, t) \in R'_{\alpha+1}$. Por último, sabemos por hipótesis sobre \mathbb{S} que $R_{\alpha+1} = \sim_{\mathbb{S}}$.

Finalmente, para el tercer ítem, deducimos rápidamente del ítem 2 que cualquier conjunto $Q \in \Sigma'$ no vacío y $R'_{\alpha+1}$ -cerrado que contiene a s o t cumple $Q \cap \{s, t\} = \{s, t\}$. Del mismo modo, como $R'_{\alpha+1} \upharpoonright I = \text{id}$, cualquier $Q \in \mathcal{B}_V$ es $R'_{\alpha+1}$ -cerrado. En consecuencia $\mathcal{B}_V \subseteq \Sigma'_{\alpha+2}$, y en particular $V \in \Sigma'_{\alpha+2}$. Por lo tanto $(s, t) \notin \mathcal{R}^T(\Sigma'_{\alpha+2}) = R'_{\alpha+2}$ ya que

$\tau'_\infty(s, V) = \mathfrak{m}_0(V) \neq \mathfrak{m}_1(V) = \tau'_\infty(t, V)$. Con esto probamos que $R'_{\alpha+2} = \sim_s^{\mathbb{S}} \cup \text{id}_{I \cup \{s, t\}}$. Notamos que $R'_{\alpha+2}$ es bisimulación de estados en \mathbb{S}' y es la más grande, por lo tanto es la bisimilitud de estados. Esto prueba que $\mathfrak{Z}(\mathbb{S}') = \alpha + 2$. \square

De la prueba de este Teorema podemos concluir que a partir de cualquier proceso separable con ordinal de Zhou $\alpha + 1$ se puede construir otro proceso separable con ordinal $\alpha + 2$. Sin embargo, esta construcción no permite construir un proceso con ordinal de Zhou positivo a partir de uno con ordinal de Zhou nulo (i.e., uno que goza de la propiedad de Hennessy-Milner).

En el próximo teorema, la cofinalidad $\text{cf}(\lambda)$ de un ordinal límite λ es el menor tipo de orden (equivalentemente, el menor cardinal) de un subconjunto no acotado de λ .

Teorema 3.46. $\text{cf}(\mathfrak{Z}(\mathcal{S})) > \omega$.

Demostración. Usamos reducción al absurdo, para ello supongamos que para cada $m \in \omega$ tenemos un LMP separable $\mathbb{S}_m = (S^m, \Sigma^m, \{\tau_n^m\}_{n \in \omega})$ con conjunto de etiquetas $\{(m, n) \mid n \in \omega\}$ tal que $\zeta_m := \mathfrak{Z}(\mathbb{S}_m)$ y además se satisface $\sup_{m \in \omega} \zeta_m = \mathfrak{Z}(\mathcal{S})$. Supondremos que estos LMP han pasado por la construcción dada en (3.3) de modo que cada uno tiene dos etiquetas distinguidas (que por comodidad seguiremos denotando con (m, ∇) y (m, \dagger)) que permitirán diferenciarlos entre sí con fórmulas de la lógica. Podemos asumir también que $\zeta_0 > 0$ y que $\{\zeta_m\}_{m \in \omega}$ es una sucesión estrictamente creciente; por conveniencia definimos $\zeta_{-1} := 0$. De esta manera, $\zeta_{m-1} < \zeta_m$ para todo $m \geq 0$ y por lo tanto podemos elegir $x_m, y_m \in S^m$ tales que $x_m R_{\zeta_{m-1}}^m y_m$ pero $x_m R_{\zeta_m}^m y_m$. Entonces, hay un conjunto $A_m \in \Sigma_{\zeta_m}^m \setminus \Sigma_{\zeta_{m-1}}^m$ tal que para algún $i \in \omega$ vale $\tau_i^m(x_m, A_m) \neq \tau_i^m(y_m, A_m)$. Mediante un reordenamiento de las etiquetas de los núcleos de Markov de cada LMP si hiciera falta, podemos asumir que $i \in \omega$ es exactamente m .

Definamos un nuevo LMP con conjunto de etiquetas $L := \{(m, n) \mid m, n \in \omega\} \cup \{\infty\}$:

$$\mathbb{S} := \left(\left(\bigoplus_{m \in \omega} S^m \right) \oplus I \oplus \{s, t\}, \left(\bigoplus_{m \in \omega} \Sigma^m \right) \oplus \mathcal{B}_V \oplus \mathcal{P}(\{s, t\}), \{\tilde{\tau}_n^m\}_{m, n \in \omega} \cup \{\tilde{\tau}_\infty\} \right).$$

donde los núcleos están dados por

$$\tilde{\tau}_n^m(r, Q) := \begin{cases} \tau_n^m(r, Q \cap S^m), & \text{si } r \in S^m, \\ \tau_m^m(x_m, Q \cap S^m), & \text{si } r \in (0, q_m) \text{ y } m = n, \\ \tau_m^m(y_m, Q \cap S^m), & \text{si } r \in [q_m, 1) \text{ y } m = n, \\ 0, & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

$$\tilde{\tau}_\infty(r, Q) := \chi_{\{s\}}(r) \cdot \mathfrak{m}_0(Q \cap I) + \chi_{\{t\}}(r) \cdot \mathfrak{m}_1(Q \cap I).$$

En este caso el LMP \mathbb{S} es la amalgama entre la suma de todos los \mathbb{S}^m y \mathbb{U} (el rol de x lo juega la suma de los \mathbb{S}^m). Los conjuntos $(0, q_n) = B_n$ se tornarán disponibles de manera sucesiva; usamos así un enfoque en serie para revelar el conjunto no medible V . De esta manera podemos superar el límite de los ordinales de Zhou de los LMP \mathbb{S}^m .

Denotaremos con (S, Σ) al espacio medible de \mathbb{S} . Es sencillo ver que la definición anterior efectivamente da un LMP y la separabilidad del espacio base se deduce de la separabilidad de cada uno de los contables sumandos que lo componen. Necesitaremos los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned} \langle (m, n) \rangle_{>q} Q &= \{r \in S \mid \tilde{\tau}_n^m(r, Q) > q\} = \{s \in S^m \mid \tau_n^m(s, Q \cap S^m) > q\} \\ &= \langle n \rangle_{>q}^m(Q \cap S^m) \text{ (si } n \neq m). \\ \langle (m, m) \rangle_{>q} Q &= \{r \in S \mid \tilde{\tau}_m^m(r, Q) > q\} = \{s \in S^m \mid \tau_m^m(s, Q \cap S^m) > q\} \\ &\quad \cup \{(0, q_m) \mid \tau_m^m(x_m, Q \cap S^m) > q\} \cup \{[q_m, 1) \mid \tau_m^m(y_m, Q \cap S^m) > q\}. \\ \langle \infty \rangle_{>q} Q &= \{s \in S \mid \tilde{\tau}_\infty(s, Q) > q\} = \{s \mid \mathfrak{m}_0(Q \cap I) > q\} \cup \{t \mid \mathfrak{m}_1(Q \cap I) > q\}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Notamos además que para cada $m \in \omega$, si agregamos a \mathbb{S}^m núcleos nulos τ_∞, τ_n^j para $j \neq m$, la inclusión $\iota_m : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}$ es zigzag. Además $S^m \in \Sigma_0$ gracias a las etiquetas distinguidas ya que $S^m = \llbracket \langle (m, \dagger) \rangle_{>0} \top \rrbracket \cup \llbracket \langle (m, \nabla) \rangle_{>0} \top \rrbracket$ (observar que (m, ∇) y (m, \dagger) no pueden corresponder a la etiqueta (m, m) en ningún \mathbb{S}^m). Por Corolario 3.32, para cada $m \in \omega$ y η tenemos que $\Sigma_\eta = \Sigma_\eta^m \oplus \Sigma_\eta \upharpoonright (S \setminus S^m)$ y $R_\eta = R_\eta^m \cup R_\eta \upharpoonright (S \setminus S^m)$. De esto deducimos que $\Sigma_\eta = (\bigoplus_{m \in \omega} \Sigma_\eta^m) \oplus \Sigma_\eta \upharpoonright (I \cup \{s, t\})$ para todo η (la contención (\supseteq) en esta igualdad se deduce rápidamente del hecho de que tenemos una cantidad numerable de sumandos) y también $R_\eta = (\bigcup_{m \in \omega} R_\eta^m) \cup R_\eta \upharpoonright (I \cup \{s, t\})$. Además $\{s, t\} = \llbracket \langle \infty \rangle_{>0} \top \rrbracket$, por lo tanto $I, \{s, t\} \in \Sigma_0 \subseteq \Sigma_\eta$. Entonces podemos reescribir $\Sigma_\eta \upharpoonright (I \cup \{s, t\}) = \Sigma_\eta \upharpoonright I \oplus \Sigma_\eta \upharpoonright \{s, t\} = \{A \in \Sigma_\eta \mid A \subseteq I\} \oplus \{A \in \Sigma_\eta \mid A \subseteq \{s, t\}\}$ y $R_\eta \upharpoonright (I \cup \{s, t\}) = R_\eta \upharpoonright I \cup R_\eta \upharpoonright \{s, t\}$. En conclusión

$$\Sigma_\eta = \bigoplus_{m \in \omega} \Sigma_\eta^m \oplus \Sigma_\eta \upharpoonright I \oplus \Sigma_\eta \upharpoonright \{s, t\}. \quad (3.6)$$

Mostraremos que $\mathfrak{Z}(\mathbb{S}) = \mathfrak{Z}(\mathcal{S}) + 1$, lo cual nos daría una contradicción. Esto será consecuencia del siguiente refinamiento de la Ecuación (3.6): si Θ_η es la σ -álgebra en I generada por los intervalos $\{(0, q_n) \mid \zeta_n < \eta\}$, entonces para todo $\eta \leq \mathfrak{Z}(\mathcal{S})$ vale la igualdad

$$\Sigma_\eta = \bigoplus_{m \in \omega} \Sigma_\eta^m \oplus \Theta_\eta \oplus \{\{s, t\}, \emptyset\}. \quad (3.7)$$

La probamos por inducción en η . Para el caso 0 tenemos que $\Theta_0 = \{\emptyset, I\}$ y usando (3.6) es suficiente verificar que $\bigoplus_{m \in \omega} \Sigma_0^m \oplus \{I, \emptyset\} \oplus \{\{s, t\}, \emptyset\}$ es estable. Basta ver que contiene a los conjuntos $\langle a \rangle_{>q} Q = \{r \in S \mid \tilde{\tau}_a(r, Q) > q\}$ para toda etiqueta $a, q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$ y $Q \in \bigcup_{m \in \omega} \Sigma_0^m \cup \{I, \{s, t\}\}$. Pero esto se sigue de las Ecuaciones (3.5) si observamos que $\langle n \rangle_{>q} (Q \cap S^m) \in \diamond^m \Sigma_0^m \subseteq \Sigma_0^m$; $\{(0, q_m) \mid \tau_m^m(x_m, Q \cap S^m) > q\} \cup \{(q_m, 1) \mid \tau_m^m(y_m, Q \cap S^m) > q\} \in \{I, \emptyset\}$ ya que $\forall m \in \omega (x_m, y_m) \in \mathcal{R}^T(\Sigma_0^m) = R_0^m$; y por último, $\{s \mid \mathbf{m}_0(Q \cap I) > q\} \cup \{t \mid \mathbf{m}_1(Q \cap I) > q\} \in \{\{s, t\}, \emptyset\}$ si $Q \in \{I, \emptyset\}$.

Supongamos ahora que tenemos la igualdad para $\eta < \mathfrak{Z}(\mathcal{S})$. Basta verificar que $\{A \in \Sigma_{\eta+1} \mid A \subseteq I\} = \Theta_{\eta+1}$ y $\{A \in \Sigma_{\eta+1} \mid A \subseteq \{s, t\}\} = \{\{s, t\}, \emptyset\}$. Notamos que los núcleos en \mathbb{S} solamente dependen de una, y sólo una, de las restricciones de Σ a S^m e I ; usamos esto junto con la HI para obtener

$$R_\eta = \mathcal{R}^T(\Sigma_\eta) = \mathcal{R}^T(\bigoplus_{m \in \omega} \Sigma_\eta^m \oplus \Theta_\eta) = \mathcal{R}^T(\bigoplus_{m \in \omega} \Sigma_\eta^m) \cap \mathcal{R}^T(\Theta_\eta).$$

Notamos que, como $\mathcal{R}^T(\Theta_\eta) = (S \setminus \{s, t\} \times S \setminus \{s, t\}) \cup \{(s, t), (t, s)\}$, entonces R_η es la unión disjunta $R_\eta = (\bigcup_{m \in \omega} R_\eta^m) \cup (\mathcal{R}^T(\bigoplus_{m \in \omega} \Sigma_\eta^m) \upharpoonright I \cup \{(s, t), (t, s)\})$. Luego, $A \subseteq I$ es R_η -cerrado si y sólo si es $\mathcal{R}^T(\bigoplus_{m \in \omega} \Sigma_\eta^m)$ -cerrado. Observamos además que de la elección de x_m, y_m podemos concluir $(\mathcal{R}(\diamond \bigoplus_{m \in \omega} \Sigma_\eta^m)) \upharpoonright I = \mathcal{R}(\sigma(\{(0, q_n) \mid \zeta_n \leq \eta\})) \upharpoonright I$. De esto deducimos

$$\begin{aligned} \{A \in \Sigma_{\eta+1} \mid A \subseteq I\} &= \{A \in \Sigma \mid A \subseteq I \wedge \text{es } R_\eta\text{-cerrado}\} \\ &= \{A \in \mathcal{B}_V \mid A \text{ es } \mathcal{R}^T(\bigoplus_{m \in \omega} \Sigma_\eta^m)\text{-cerrado}\} \\ &= \sigma(\{(0, q_n) \mid \zeta_n \leq \eta\}) = \Theta_{\eta+1}. \end{aligned}$$

Por otro lado, como $(s, t) \in R_\eta$, entonces $\{A \in \Sigma_{\eta+1} \mid A \subseteq \{s, t\}\} = \{\{s, t\}, \emptyset\}$.

Para el caso límite, asumamos que $\Sigma_\eta \upharpoonright I = \Theta_\eta$ para todo $\eta < \lambda \leq \mathfrak{Z}(\mathcal{S})$. Calculamos

$$\Sigma_\lambda \upharpoonright I = \sigma(\bigcup_{\eta < \lambda} \Sigma_\eta) \upharpoonright I = \sigma(\bigcup_{\eta < \lambda} (\Sigma_\eta \upharpoonright I)) = \sigma(\bigcup_{\eta < \lambda} \Theta_\eta) = \Theta_\lambda.$$

Para la contención no trivial en la última igualdad observamos que si $\zeta_n < \lambda$, entonces existe η con $\zeta_n < \eta < \lambda$. De forma análoga, $\Sigma_\lambda \upharpoonright \{s, t\} = \{\{s, t\}, \emptyset\}$. Esto concluye el paso inductivo y la prueba de la igualdad (3.7).

En particular, tenemos que $\Sigma_{\mathfrak{z}(S)} = \bigoplus_{m \in \omega} \Sigma_{\mathfrak{z}(S)}^m \oplus \mathcal{B}(I) \oplus \{\{s, t\}, \emptyset\}$ y en consecuencia $R_{\mathfrak{z}(S)} = \mathcal{R}^T(\Sigma_{\mathfrak{z}(S)}) = \bigcup_{m \in \omega} \sim_s^m \cup \text{id}_I \cup (\{s, t\} \times \{s, t\})$. Aplicando el operador Σ una vez más obtenemos $\Sigma_{\mathfrak{z}(S)+1} = \bigoplus_{m \in \omega} \Sigma_{\mathfrak{z}(S)}^m \oplus \mathcal{B}_V \oplus \{\{s, t\}, \emptyset\}$ y dado que ahora $(s, t) \notin \mathcal{R}^T(\mathcal{B}_V)$ concluimos $R_{\mathfrak{z}(S)+1} = \bigcup_{m \in \omega} \sim_s^m \cup \text{id}_{I \cup \{s, t\}} = \sim_s$. \square

Corolario 3.47. $\mathfrak{z}(S) \geq \omega_1$.

Observación 3.48. El uso de la construcción \mathbb{T}^* en los Teoremas 3.45 y 3.46 sirvió para aislar los LMP originales sin modificar sus cadenas ni su ordinal de Zhou. Las pruebas también pueden lograrse sin modificar los LMP dados definiendo nuevos núcleos. En el caso del Teorema 3.45 podemos definir $\tau'(r, Q) := \delta_r(Q \cap (I \cup \{s, t\}))$, esto agrega lazos bajo una nueva etiqueta sólo en el espacio medible anexado y por lo tanto lo separa en la bisimilitud de eventos. Para el Teorema 3.46, podríamos definir $\tilde{\tau}(r, Q) := \sum_{m \in \omega} \chi_{S^m}(r) \cdot \mathbf{m}(Q \cap (0, q_m))$. Esto nos permite distinguir cada conjunto S^m en la bisimilitud de eventos. Sin embargo, en el primer teorema la inclusión resulta zigzag mientras que en el segundo no. En ese caso deberíamos recurrir a la Proposición 3.31 en lugar de su Corolario 3.32. Elegimos presentar las pruebas de la forma dada para aunar resultados y mostrar un método uniforme de formar una suma directa y que se preserven propiedades de cada sumando.

3.3. Una familia de ejemplos

En esta sección construimos, para cada ordinal $\beta \leq \omega_1$, un LMP $\mathbb{S}(\beta)$ tal que para β límite, $\mathfrak{z}(\mathbb{S}(\beta)) = \beta$. Para ello, consideramos el conjunto $I \times \beta = (0, 1) \times \beta$ junto con la σ -álgebra producto $\Sigma := \mathcal{B}_V \otimes \mathcal{P}(\beta)$ donde V denota un conjunto no medible Lebesgue.

Sea $\{C_n\}_{n \geq 2}$ la familia de intervalos racionales abiertos incluidos en I y fijamos $C_0 := V$ y $C_1 := V^c$; tenemos que $\{C_n\}_{n \in \omega}$ genera \mathcal{B}_V . Ahora definimos una jerarquía de conjuntos $\Sigma_\xi^V(I)$ completamente análoga a la jerarquía Borel. $\Sigma_1^V(I)$ es la familia de uniones (contables) de conjuntos en $\{C_n\}_{n \in \omega}$. Los miembros de $\Pi_\xi^V(I)$ son los complementos de los conjuntos en $\Sigma_\xi^V(I)$ y $\Sigma_\xi^V(I) := \{\bigcup_{n \in \omega} A_n \mid A_n \in \Pi_{\xi_n}^V(I), \xi_n < \xi\}$, para $\xi > 1$. Notamos que $\Sigma_1^V(I)$ incluye a todos los subconjuntos abiertos de I y sus uniones con V .

Dado $Q \subseteq I \times \beta$, llamaremos seccioness de Q a los conjuntos $Q_\alpha := \{r \mid (r, \alpha) \in Q\}$ para $\alpha < \beta$ (para evitar confusiones usaremos únicamente letras griegas como subíndices para las secciones). A veces diremos que Q_α es la “ α -sección” para explicitar el ordinal. Los conjuntos $I \times \{\alpha\}$ serán las fibras. Para Q en $\mathcal{B}_V \otimes \mathcal{P}(\beta)$, cada sección Q_α está en $\Sigma_\xi^V(I)$ para algún ξ . Diremos que la complejidad de Q en α es $\text{comp}(Q, \alpha) := \min\{\xi \mid Q_\alpha \in \Sigma_\xi^V(I)\}$, y la complejidad (total) de Q es $\text{comp}(Q) := \sup_{\alpha < \beta} \text{comp}(Q, \alpha)$. Los conjuntos en $\mathcal{B}_V \otimes \mathcal{P}(\beta)$ pueden ser caracterizados en términos de esta medida de complejidad.

Lema 3.49. $Q \in \mathcal{B}_V \otimes \mathcal{P}(\beta)$ si y sólo si $\text{comp}(Q) < \omega_1$

Demostración. (\Rightarrow) Verifiquemos que $\mathcal{A} = \{A \subseteq I \times \beta \mid \text{comp}(A) < \omega_1\}$ es una σ -álgebra. Sea $A \in \mathcal{A}$. Dado que $\text{comp}(A^c, \alpha) \leq \text{comp}(A, \alpha) + 1$, entonces $A^c \in \mathcal{A}$. Ahora supongamos que $\{A_n\}_{n \in \omega} \subseteq \mathcal{A}$. Luego, $\alpha_n := \text{comp}(A_n) < \omega_1$ para todo $n \in \omega$. De esto concluimos que $\text{comp}(\bigcup_{n \in \omega} A_n) \leq \sup_{n \in \omega} (\alpha_n + 1) < \omega_1$, y por lo tanto \mathcal{A} es σ -álgebra. Ya que \mathcal{A} incluye a todos los rectángulos medibles, tenemos que $\mathcal{B}_V \otimes \mathcal{P}(\beta) \subseteq \mathcal{A}$.

(\Leftarrow) Mostremos por inducción en ξ que $\text{comp}(Q) = \xi < \omega_1 \implies Q \in \mathcal{B}_V \otimes \mathcal{P}(\beta)$. Si $\text{comp}(Q) = 1$, entonces para todo $\alpha < \beta$, $Q_\alpha = \bigcup\{C_n \mid C_n \subseteq Q_\alpha\}$ y en consecuencia $Q =$

$\bigcup_{n \in \omega} (C_n \times \{\alpha \mid C_n \subseteq Q_\alpha\}) \in \mathcal{B}_V \otimes \mathcal{P}(\beta)$. Supongamos que el resultado vale para todo η con $\eta < \xi < \omega_1$ y más aún supongamos $\text{comp}(Q) = \xi$. Entonces $\forall \alpha < \beta$, $Q_\alpha \in \Sigma_\xi^V(I)$. Luego, $Q_\alpha = \bigcup_{n < \omega} A_n^\alpha$ para algún $A_n^\alpha \in \Pi_{\xi_n(\alpha)}^V(I) \subseteq \Sigma_{\xi_n(\alpha)+1}^V(I)$ y $\xi_n(\alpha) < \xi$ no decreciente. Sea $\{\theta_n\}_{n \in \omega}$ tal que $\theta_n + 1$ es una sucesión no decreciente con límite ξ . Si definimos $\tilde{A}_n^\alpha = \bigcup_{m \leq n} \{A_m^\alpha \mid A_m^\alpha \in \Sigma_{\theta_n}^V(I)\}$, tenemos que $\forall \alpha$ $\tilde{A}_n^\alpha \in \Sigma_{\theta_n}^V(I)$ y $Q_\alpha = \bigcup_{n \in \omega} \tilde{A}_n^\alpha$. Por la HI, para cada $n \in \omega$, $\mathcal{B}_V \otimes \mathcal{P}(\beta)$ contiene los conjuntos $C_n = \bigcup_{\alpha < \beta} (\tilde{A}_n^\alpha \times \{\alpha\})$ cuya α -sección es \tilde{A}_n^α , de complejidad $\theta_n < \xi$. Concluimos que $Q = \bigcup_{n \in \omega} C_n \in \mathcal{B}_V \otimes \mathcal{P}(\beta)$. \square

Definiremos ahora una familia contable de núcleos de Markov. Como antes, fijamos una enumeración $\{q_n\}_{n \in \omega}$ de los números racionales en I . Definimos $\alpha_n(0) := 0$ ($n \in \omega$); y para cada ordinal sucesor $\eta + 1$, sea $\alpha_n(\eta + 1) := \eta$ ($n \in \omega$). Para λ límite elegimos $\{\alpha_n(\lambda)\}_{n \in \omega}$ una sucesión estrictamente creciente cofinal en $\lambda - \{0\}$ de tipo de orden ω .

Recordemos que el Teorema 1.4 nos da dos extensiones \mathbf{m}_0 y \mathbf{m}_1 de la medida de Lebesgue \mathbf{m} tales que $\mathbf{m}_0(V) \neq \mathbf{m}_1(V)$. Para cada $n \in \omega$ definimos $\tau_n : (I \times \beta) \times (\mathcal{B}_V \otimes \mathcal{P}(\beta)) \rightarrow [0, 1]$ como sigue:

$$\tau_n((x, \eta), A) = \begin{cases} x \cdot \mathbf{m}_0(A_0), & \eta = 0, \\ \mathbf{m}_0(A_{\alpha_n(\eta)}), & \eta > 0, x \in (0, q_n), \\ \mathbf{m}_1(A_{\alpha_n(\eta)}), & \eta > 0, x \in [q_n, 1). \end{cases} \quad (3.8)$$

Aquí $A_{\alpha_n(\eta)}$ es la $\alpha_n(\eta)$ -sección de A definida antes del Lema 3.49. Como en las construcciones anteriores, la definición de los núcleos está motivada por el proceso \mathbb{U} . Los dos “comportamientos” que describimos, en paralelo y en serie, son imitados (en virtud de la definición de $\alpha_n(\eta)$) en los ordinales η sucesores y límite, respectivamente.

Lema 3.50. *Para cada $n \in \omega$, τ_n es un núcleo de Markov.*

Demostración. Es claro que para (x, η) fijo, el mapa $\tau_n((x, \eta), \cdot) : \mathcal{B}_V \otimes \mathcal{P}(\beta) \rightarrow [0, 1]$ es medida de subprobabilidad. Sea $A \in \mathcal{B}_V \otimes \mathcal{P}(\beta)$; queremos mostrar que $\tau_n(\cdot, A)$ es medible. Para ello, fijamos $q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ y consideramos el conjunto $\{(x, \alpha) \in I \times \beta \mid \tau_n((x, \alpha), A) < q\}$. Por inspección de la definición de τ_n en cada fibra, obtenemos que este conjunto es la unión de los siguientes:

$$\begin{aligned} & \{(x, 0) \mid x \cdot \mathbf{m}_0(A_0) < q\}, \quad \bigcup_{\eta < \beta} \{(0, q_n) \times \{\eta + 1\} \mid \mathbf{m}_0(A_\eta) < q\}, \\ & \bigcup_{\eta < \beta} \{[q_n, 1) \times \{\eta + 1\} \mid \mathbf{m}_1(A_\eta) < q\}, \quad \bigcup_{\lambda < \beta} \{(0, q_n) \times \{\lambda\} \mid \mathbf{m}_0(A_{\alpha_n(\lambda)}) < q\}, \\ & \bigcup_{\lambda < \beta} \{[q_n, 1) \times \{\lambda\} \mid \mathbf{m}_1(A_{\alpha_n(\lambda)}) < q\}. \end{aligned}$$

Observamos que cada sección de esta unión es abierta o cerrada. Luego, es medible en el espacio producto gracias al Lema 3.49. \square

Así, reunimos esta construcción en el siguiente LMP

Definición 3.51. Para cada $\beta \leq \omega_1$, escribimos $\mathbb{S}(\beta) := (I \times \beta, \mathcal{B}_V \otimes \mathcal{P}(\beta), \{\tau_n\}_{n \in \omega})$, con los núcleos τ_n definidos en (3.8).

Lema 3.52. *La bisimilitud de estados \sim_s en $\mathbb{S}(\beta)$ es la identidad.*

Demostración. Mostraremos pro inducción que para todo $1 \leq \eta \leq \beta$, $\sim_s \upharpoonright (I \times \eta)$ es la identidad. Para el caso $\eta = 1$, observamos que si $(x, 0) \neq (x', 0)$, entonces para cualquier $n \in \omega$ vale que

$$\tau_n((x, 0), I \times \beta) = x \neq x' = \tau_n((x', 0), I \times \beta).$$

Supongamos ahora que el resultado vale para η y que $\eta + 1 \leq \beta$. Por la hipótesis inductiva $\sim_s \upharpoonright (I \times \eta)$ es la identidad. Es suficiente considerar estados $(x, \alpha) \neq (x', \eta)$ para algún $\alpha \leq \eta$. Analizamos primero el caso $\alpha < \eta$. La HI garantiza que todo (r, γ) está únicamente \sim_s -relacionado a sí mismo cuando $\gamma < \eta$; dado que $\alpha_n(\eta) < \eta$, se sigue que el conjunto medible $A(n) := (I \times \{\alpha_n(\eta)\}) \cup (I \times \{\xi \mid \eta \leq \xi < \beta\})$ es un elemento de $\Sigma(\sim_s)$ para todo $n \in \omega$. Si $\eta = 1$ entonces $\alpha = 0$, y en tal caso $\tau_n((x, \eta), A(n)) = \tau_n((x, \eta), I \times \beta) = 1 > x' = \tau_n((x', 0), A(n))$ vale para cualquier $n \in \omega$. Para $\eta > 1$, existe $n \in \omega$ tal que $\alpha_n(\eta) \neq \alpha_n(\alpha)$ y tenemos

$$\tau_n((x, \eta), A(n)) = \mathbf{m}_i(A(n)_{\alpha_n(\eta)}) = \mathbf{m}_i(I) = 1 \neq 0 = \tau_n((x', \alpha), A(n)).$$

Supongamos ahora que $\eta = \alpha$ y $x \neq x'$; sin pérdida de generalidad podemos elegir $n \in \omega$ tal que $x < q_n < x'$. De nuevo, ya que $\alpha_n(\eta) = \alpha_n(\alpha) < \eta$, la hipótesis inductiva garantiza que el conjunto $A := (V \times \{\alpha_n(\eta)\}) \cup (I \times \{\xi \mid \eta \leq \xi < \beta\})$ está en $\Sigma(\sim_s)$. Pero entonces

$$\tau_n((x, \eta), A) = \mathbf{m}_0(A_{\alpha_n(\eta)}) = \mathbf{m}_0(V) \neq \mathbf{m}_1(V) = \mathbf{m}_1(A_{\alpha_n(\alpha)}) = \tau_n((x', \alpha), A).$$

Esto muestra que la afirmación también es cierta para $\eta + 1$. Finalmente, supongamos que λ es ordinal límite. Como $\sim_s \upharpoonright (I \times \lambda) = \bigcup_{\eta < \lambda} \sim_s \upharpoonright (I \times \eta)$, el resultado se sigue directo de la HI. \square

Calcularemos ahora un cota para la bisimilitud de eventos $\sim_e = \mathcal{R}(\sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket))$. Definimos

$$\Lambda := \{A \subseteq I \times \beta \mid A_0 \in \mathcal{B}(I) \wedge \forall \alpha > 0 (A_\alpha \in \{\emptyset, I\})\}. \quad (3.9)$$

Vemos que Λ depende de β . Cuando hablemos de alguna propiedad de Λ que necesite explicitar tal dependencia escribiremos $\Lambda(\beta)$. Por la caracterización 3.49 $\Lambda \subseteq \mathcal{B}_V \otimes \mathcal{P}(\beta)$.

Lema 3.53. $\sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket) \subseteq \Lambda$.

Demostración. Es claro que Λ es una σ -álgebra, verifiquemos que es estable. Sea $A \in \Lambda$ y $q \in \mathbb{Q} \cap I$. Por el mismo razonamiento que en la prueba del Lema 3.50, $\{(x, \alpha) \in I \times \beta \mid \tau_n((x, \alpha), A) < q\} \in \Lambda$ ya que es Borel en la 0-fibra y, dado que $\mathbf{m}_0(A_\eta) = \mathbf{m}_1(A_\eta)$ para todo $\eta > 0$, las secciones restantes son \emptyset o I . De esto se sigue que Λ es estable. Dado que $\sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket)$ es la menor σ -álgebra estable por Teorema 2.32, entonces $\sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket) \subseteq \Lambda$. \square

Esta cota es bastante cercana a $\sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket)$, como indica el siguiente resultado.

Lema 3.54. Para todo $\alpha < \beta$, $I \times \{\alpha\} \in \sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket)$. Además, para cualquier $B \in \mathcal{B}(I)$, $B \times \{0\} \in \sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket)$.

Demostración. Probamos la primera afirmación por inducción: para el caso $\alpha = 0$ observamos que para cualquier $n \in \omega$ $\{(x, \eta) \mid \tau_n((x, \eta), I \times \beta) < q\} = (0, q) \times \{0\}$, y este conjunto está en $\sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket)$ ya que esta σ -álgebra es estable. Si elegimos $q = 1$ obtenemos el caso base.

Supongamos ahora que para $\eta < \beta$ dado, $I \times \{\alpha\} \in \sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket)$ para todo $\alpha < \eta$. Fijamos $n \in \omega$, y puesto que $\alpha_n(\eta) < \eta$, el siguiente conjunto está en $\sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket)$: $\{(x, \xi) \mid \tau_n((x, \xi), I \times \{\alpha_n(\eta)\}) < q\} = \bigcup_{\alpha < \beta} \{I \times \{\alpha\} \mid \alpha_n(\alpha) \neq \alpha_n(\eta)\} = I \times (\{\eta\} \cup \{\alpha < \beta \mid \alpha_n(\alpha) = \alpha_n(\eta)\})^c$. Si tomamos complemento en el lado derecho obtenemos $A(n) := I \times (\{\eta\} \cup \{\alpha < \beta \mid \alpha_n(\alpha) =$

$\alpha_n(\eta)\} \in \sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket)$. Pero $I \times \{\eta\} = \bigcap_{n \in \omega} A(n) \in \sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket)$ ya que para $\alpha \neq \eta$ existe $n \in \omega$ tal que $\alpha_n(\alpha) \neq \alpha_n(\eta)$. Esto completa el paso inductivo.

Para la segunda afirmación, notamos que para $q \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ la semántica de $\llbracket \langle n \rangle_{>q} \top \rrbracket$ es el conjunto $\{s \in I \times \beta \mid \tau_n(s, \llbracket \top \rrbracket) > q\} = \{(x, 0) \in I \mid x > q\} \cup \bigcup_{\alpha > 0} \{(x, \alpha) \in I \times \{\alpha\} \mid 1 > q\} = ((q, 1) \times \{0\}) \cup (I \times \beta \setminus \{0\})$. Usando las operaciones de σ -álgebra vemos que todos los conjuntos $(q_0, q_1) \times \{0\}$ para $q_0, q_1 \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ están en $\sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket)$ y por lo tanto $\forall B \in \mathcal{B}(I) B \times \{0\} \in \sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket)$. \square

Observar que de este lema deducimos inmediatamente que $\sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket)$ contiene a todos los conjuntos $A \subseteq I \times \beta$ tales que A_0 es Borel, $X = \{\alpha < \beta \mid A_\alpha = I\}$ es contable o cocontable y $\forall \alpha \notin X A_\alpha = \emptyset$. Sin embargo, esta familia no es estable.

Dado que $\sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket)$ es siempre contablemente generada, nos preguntamos si Λ también lo es como condición para intentar probar que efectivamente coinciden.

Lema 3.55. $\Lambda = \Lambda(\beta)$ es contablemente generada si y sólo si $\mathcal{P}(\beta)$ es contablemente generada

Demostración. (\Rightarrow) Supongamos que Λ es contablemente generada por la familia $\{G_n\}_{n \in \omega}$. Sea $h : \Lambda \rightarrow \mathcal{P}(\beta \setminus \{0\})$, $h(A) = \{\alpha \mid 0 < \alpha < \beta \wedge A_\alpha = I\}$. Es claro que h es sobreyectiva. Definimos $\mathcal{A} = \{A \in \Lambda \mid h(A) \in \sigma(\{h(G_n)\}_{n \in \omega})\}$. Verificamos que \mathcal{A} es σ -álgebra:

- \mathcal{A} es no vacía pues $\emptyset \in \mathcal{A}$ ya que $h(\emptyset) = \emptyset$.
- Si $A \in \mathcal{A}$, $h(A^c) = \{\alpha > 0 \mid (A^c)_\alpha = I\} = \{\alpha > 0 \mid A_\alpha = \emptyset\} = \{\alpha > 0 \mid A_\alpha = I\}^c \setminus \{0\} = h(A)^c \in \sigma(\{h(G_n)\}_{n \in \omega})$. Luego, $A^c \in \mathcal{A}$.
- Si $\{A_n\}_{n \in \omega} \subseteq \mathcal{A}$, $h(\bigcup_{n \in \omega} A_n) = \{\alpha > 0 \mid (\bigcup_{n \in \omega} A_n)_\alpha = I\} = \{\alpha > 0 \mid \exists n \in \omega (A_n)_\alpha = I\} = \bigcup_{n \in \omega} \{\alpha > 0 \mid (A_n)_\alpha = I\} = \bigcup_{n \in \omega} h(A_n) \in \sigma(\{h(G_n)\}_{n \in \omega})$. Luego, $\bigcup_{n \in \omega} A_n \in \mathcal{A}$.

Dado que $\{G_n\}_{n \in \omega} \subseteq \mathcal{A}$, podemos concluir que $\Lambda = \mathcal{A}$. Si $X \in \mathcal{P}(\beta \setminus \{0\})$, entonces $X = h(A)$ para cierto $A \in \mathcal{A}$ y por lo tanto $X \in \sigma(\{h(G_n)\}_{n \in \omega})$. Luego $\mathcal{P}(\beta \setminus \{0\})$ es contablemente generada y por lo tanto $\mathcal{P}(\beta)$ también lo es.

(\Leftarrow) Supongamos ahora que $\mathcal{P}(\beta)$ es generada por $\{X_n\}_{n \in \omega}$. Sea $\mathcal{F} = \{U_n \times \{0\}\}_{n \in \omega} \cup \{I \times X_n\}_{n \in \omega}$ donde $\{U_n\}_{n \in \omega}$ es generador de $\mathcal{B}(I)$. Es claro que $\mathcal{F} \subseteq \Lambda$ y por lo tanto $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \Lambda$. Recíprocamente, notamos que si $A \in \Lambda$, entonces $A = (B \times \{0\}) \cup (I \times X)$ para algún Borel B y conjunto $X \subseteq \omega_1$. Observamos ahora que

$$B \times \{0\} \in \sigma(\{U_n\}_{n \in \omega}) \times \{0\} \stackrel{*}{\subseteq} \sigma(\{U_n \times \{0\}\}_{n \in \omega}) \subseteq \sigma(\mathcal{F}),$$

$$I \times X \in I \times \sigma(\{X_n\}_{n \in \omega}) \stackrel{*}{\subseteq} \sigma(\{I \times X_n\}_{n \in \omega}) \subseteq \sigma(\mathcal{F}).$$

Para probar las contenciones $*$ se pueden considerar las familias $\mathcal{C} = \{A \subseteq I \mid A \times \{0\} \in \sigma(\{U_n \times \{0\}\}_{n \in \omega})\}$ y $\mathcal{C}' = \{X \subseteq \beta \mid I \times X \in \sigma(\{I \times X_n\}_{n \in \omega})\}$. Concluimos entonces que $A \in \sigma(\mathcal{F})$ y por lo tanto $\Lambda = \sigma(\mathcal{F})$. \square

Corolario 3.56. Si β es contable entonces $\Lambda(\beta)$ es contablemente generada. Para el caso $\beta = \omega_1$, la afirmación “ $\Lambda(\omega_1)$ es contablemente generada” es independiente de ZFC.

Corolario 3.57. Si β es contable, entonces $\sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket) = \Lambda(\beta)$.

Demostración. Como β es contable, la familia $\{\{\alpha\}\}_{\alpha < \beta}$ genera $\mathcal{P}(\beta)$. Si \mathcal{F} es la familia generadora de Λ como en la prueba del Lema 3.55, entonces por Lema 3.54 se tiene $\mathcal{F} \subseteq \sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket)$ y por lo tanto $\Lambda \subseteq \sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket)$. La inclusión recíproca está dada por Lema 3.53. \square

El próximo lema da información sobre la σ -álgebra $\mathcal{G}^\xi(\Lambda)$. Dados $\eta < \beta$ y una σ -álgebra \mathcal{A} , denotaremos con $\mathcal{A}|_\eta$ a la restricción $\mathcal{A}|I \times \{\eta\}$, i.e. la σ -álgebra de η -secciones de elementos de \mathcal{A} .

Lema 3.58. *Si η satisface $\beta > \eta \geq \xi$, entonces $\mathcal{G}^\xi(\Lambda)|_\eta \subseteq \mathcal{B}(I)$. Además, $\mathcal{G}^\xi(\Lambda)|_{\zeta+1}$ es trivial cuando $\xi < \zeta + 1 < \beta$.*

Demostración. Por inducción en ξ . Si $\xi = 0$, entonces $\mathcal{G}^0(\Lambda) = \Lambda$ y por su misma definición vale $\Lambda|_\eta \subseteq \mathcal{B}(I)$. Supongamos ahora que el resultado vale para $\xi \geq 0$ y elegimos $\eta \geq \xi + 1$. Sea $A \in \mathcal{G}^{\xi+1}(\Lambda) = \mathcal{G}(\mathcal{G}^\xi(\Lambda)) = \Sigma(\mathcal{R}^T(\mathcal{G}^\xi(\Lambda)))$, i.e. $A \in \mathcal{B}_V \otimes \mathcal{P}(\beta)$ es $\mathcal{R}^T(\mathcal{G}^\xi(\Lambda))$ -cerrado y por lo tanto es cerrado para esta relación en cada fibra. Queremos probar que A_η es Borel. Distinguimos dos casos: Si η es $\zeta + 1$ para algún ζ , entonces $\zeta \geq \xi$ y por la HI $\mathcal{G}^\xi(\Lambda)|_\zeta$ consiste de conjuntos Borel. Por lo tanto, para cualquier conjunto $D \in \mathcal{G}^\xi(\Lambda)$, cualquier $n \in \omega$ y $x \in I$, $\tau_n((x, \eta), D) = \mathfrak{m}(D_{\eta-1})$. En consecuencia, si $A_\eta \neq \emptyset$ entonces debe suceder que $A_\eta = I$ porque este conjunto es $\mathcal{R}^T(\mathcal{G}^\xi(\Lambda))$ -cerrado. Más aún, podemos concluir la segunda afirmación del enunciado del lema.

Si η es ordinal límite no podemos argumentar como antes ya que para determinar la relación $\mathcal{R}^T(\mathcal{G}^\xi(\Lambda))$ necesitamos conocer las secciones $D_{\alpha_n(\eta)}$ de los elementos en $\mathcal{G}^\xi(\Lambda)$, y podría suceder que $\alpha_n(\eta) < \xi$. Sin embargo, $\{n \in \omega \mid \alpha_n(\eta) < \xi\}$ es finito y para el resto de los naturales m , τ_m no distingue puntos en A_η debido a que, por la HI, $D_{\alpha_n(\eta)}$ es Borel. Ahora, si $\alpha_n(\eta) < \xi$, entonces τ_n sólo puede distinguir puntos entre $(0, q_n)$ y $[q_n, 1)$; en consecuencia, $\mathcal{G}^{\xi+1}(\Lambda)|_\eta$ es la σ -álgebra generada por tales intervalos, la cual está claramente incluida en la σ -álgebra Borel. Esto termina el caso $\xi + 1$.

Para el caso ξ límite, la HI asegura que para todo $\gamma < \xi$ y $\eta \geq \gamma$, $\mathcal{G}^\gamma(\Lambda)|_\eta \subseteq \mathcal{B}(I)$. Luego, si $\eta \geq \xi$ entonces $\eta > \gamma$ y esto lleva a $\mathcal{G}^\xi(\Lambda)|_\eta = \sigma(\bigcup_{\gamma < \xi} \mathcal{G}^\gamma(\Lambda)|_\eta) = \sigma(\bigcup_{\gamma < \xi} \mathcal{G}^\gamma(\Lambda)|_\eta) \subseteq \mathcal{B}(I)$. \square

Corolario 3.59. *Si $\beta > \eta + 1 \geq \xi$, entonces $\mathcal{O}^\xi(\sim_e)|I \times \{\eta + 1\}$ es la relación total. En consecuencia $\mathfrak{Z}(\mathbb{S}(\beta)) \geq \beta$ si β es límite, y $\mathfrak{Z}(\mathbb{S}(\zeta + 1)) \geq \zeta$ para todo ζ .*

Demostración. Si combinamos la inclusión en Lema 3.53 con la monotonía de \mathcal{G} , vemos que $\Sigma_\xi = \mathcal{G}^\xi(\sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket)) \subseteq \mathcal{G}^\xi(\Lambda)$ y por Lema 3.58 $\Sigma_\xi|_\eta$ también consiste de conjuntos Borel si $\eta \geq \xi$. En consecuencia, $\mathcal{O}^\xi(\sim_e) = R_\xi \supseteq \mathcal{R}^T(\Sigma_\xi)$ restringida a $I \times \{\eta + 1\}$ es la relación total debido a que las medidas \mathfrak{m}_i no pueden distinguir puntos si los conjuntos permitidos son Borel.

Para la segunda afirmación del Lema, en el caso β límite tomamos $\xi = \eta + 1$ para cualquier $\xi < \beta$. Para el segundo caso, si ζ no es límite tomamos $\xi = \eta = \zeta - 1$. Si ahora ζ es límite, supongamos por el absurdo que $\mathfrak{Z}(\mathbb{S}(\zeta + 1)) < \zeta$ y elegimos cualquier η tal que $\mathfrak{Z}(\mathbb{S}(\zeta + 1)) < \eta < \zeta$, entonces $\sim_s|I \times \{\eta + 1\} = \mathcal{O}^{\mathfrak{Z}(\mathbb{S}(\zeta+1))}(\sim_e)|I \times \{\eta + 1\}$ es la relación total. Esto es una contradicción ya que \sim_s es la relación identidad. \square

El siguiente lema nos da un análisis más detallado de las relaciones R_α .

Lema 3.60. *Para todo $\alpha < \beta$, $R_\alpha|I \times (\alpha + 1)$ es la identidad y $V \times \{\alpha\}$ está en $\Sigma(R_\alpha)$.*

Demostración. Para el caso $\alpha = 0$, notamos que $I \times \beta \in \sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket)$, luego, para cualquier $q \in \mathbb{Q}$, $\{(x, \eta) \mid \tau_n((x, \eta), I \times \beta) < q\} \in \sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket)$. Dado que $\tau_n((s, 0), I \times \beta) = s \cdot \mathfrak{m}_0(I) = s < 1$, si $s < t$, entonces para cualquier $q \in \mathbb{Q}$ entre s y t tenemos que $(s, 0) \in \{(x, \eta) \mid \tau_n((x, \eta), I \times \beta) < q\} \not\prec (t, 0)$. Luego, $((s, 0), (t, 0)) \notin \sim_e = \mathcal{R}(\sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket))$. Esto muestra que $R_0 = \sim_e$ es la identidad en $I \times \{0\}$. Más aún, si $\eta > 0$ y $x \in I$ entonces para cualquier n , $\tau_n((x, \eta), I \times \beta) = 1$ y

por consiguiente $((s, 0), (x, \eta)) \notin \sim_e$. En consecuencia, el conjunto $V \times \{0\} \in \mathcal{B}_V \otimes \mathcal{P}(\beta)$ es \sim_e -cerrado. Notamos que, ya que $\sim_e \supseteq R_\alpha$ para cualquier α , la oración anterior muestra que la R_α -clase de un punto $(s, 0)$ es el singulete $\{(s, 0)\}$.

Supongamos ahora que $\alpha + 1 < \beta$ y que el resultado vale para α . Gracias a la inclusión $R_{\alpha+1} \subseteq R_\alpha$, la HI asegura que $R_{\alpha+1} \upharpoonright I \times (\alpha + 1)$ es la relación identidad y el conjunto $V \times \{\alpha\}$ está en $\Sigma(R_\alpha)$. Si $s < t$ elegimos $n \in \omega$ tal que $s < q_n < t$ y por lo tanto $\tau_n((s, \alpha + 1), V \times \{\alpha\}) = \mathfrak{m}_0(V) \neq \mathfrak{m}_1(V) = \tau_n((t, \alpha + 1), V \times \{\alpha\})$. Más aún, el mismo conjunto $V \times \{\alpha\}$ sirve como test para distinguir puntos entre la $(\alpha + 1)$ -sección y las secciones anteriores: $\tau_n((s, \alpha + 1), V \times \{\alpha\}) > 0 = \tau_n((t, \eta), V \times \{\alpha\})$ para cualquier $\eta < \alpha + 1$. Se sigue que $R_{\alpha+1} = \mathcal{R}^T \Sigma(R_\alpha) \upharpoonright I \times (\alpha + 2)$ es también la identidad. Para mostrar que $V \times \{\alpha + 1\} \in \Sigma(R_{\alpha+1})$ es suficiente probar que $((s, \alpha + 1), (t, \eta)) \notin R_{\alpha+1}$ si $\alpha + 1 < \eta$. Para ello volvemos a usar $V \times \{\alpha\}$ provisto por la HI. Si η es ordinal sucesor, para cualquier n vale que $\tau_n((t, \eta), V \times \{\alpha\}) = 0$, y si η es límite, elegimos $n \in \omega$ tal que $\alpha_n(\eta) \neq \alpha$ y de nuevo obtenemos $\tau_n((t, \eta), V \times \{\alpha\}) = 0$.

Sólo resta verificar el caso límite. Supongamos que $\lambda < \beta$ es ordinal límite y que el resultado vale para todo $\alpha < \lambda$. Dado que $R_\lambda = \bigcap_{\alpha < \lambda} R_\alpha \subseteq R_\alpha$, $R_\lambda \upharpoonright I \times (\alpha + 1) \subseteq R_\alpha \upharpoonright I \times (\alpha + 1)$ debe ser la identidad por HI. De esto concluimos que $R_\lambda \upharpoonright I \times \lambda$ es la relación identidad. Si $s < t$, sea $q_n \in \mathbb{Q}$ tal que $s < q_n < t$. Por HI, $V \times \{\alpha_n(\lambda)\} \in \Sigma(R_{\alpha_n(\lambda)})$ y en consecuencia la desigualdad $\tau_n((s, \lambda), V \times \{\alpha_n(\lambda)\}) \neq \tau_n((t, \lambda), V \times \{\alpha_n(\lambda)\})$ nos permite concluir que $((s, \lambda), (t, \lambda)) \notin R_{\alpha_n(\lambda)+1} \supseteq R_\lambda$. Ahora, si $\eta \neq \lambda$, elegimos n tal que $\alpha_n(\eta) \neq \alpha_n(\lambda)$ y tenemos $\tau_n((s, \lambda), V \times \{\alpha_n(\lambda)\}) > 0 = \tau_n((t, \eta), V \times \{\alpha_n(\lambda)\})$. Como antes $((s, \lambda), (t, \eta)) \notin R_{\alpha_n(\lambda)+1} \supseteq R_\lambda$. Se sigue que $R_\lambda \upharpoonright I \times (\lambda + 1)$ es la identidad y $V \times \{\lambda\}$ está en $\Sigma(R_\lambda)$. \square

Con la información provista por el Lema previo y el Lema 3.58, obtenemos que:

- $[(s, \eta)]_{R_\alpha} = \{(s, \eta)\}$ si $\eta \leq \alpha$.
- $[(s, \eta + 1)]_{R_\alpha} \supseteq I \times \{\eta + 1\}$ si $\eta + 1 > \alpha$ porque $V \times \{\alpha\} \notin \Sigma_\alpha$ como consecuencia del Lema 3.58.
- Si λ es ordinal límite y $0 < \alpha < \lambda$, R_α induce en $I \times \{\lambda\}$ la partición generada por aquellos q_n tales que $\alpha_n(\lambda) < \alpha$.

Corolario 3.61. $\mathfrak{Z}(\mathbb{S}(\zeta + 1)) \leq \zeta$. Si β es ordinal límite, entonces $\mathfrak{Z}(\mathbb{S}(\beta)) \leq \beta$.

Demostración. La primera afirmación es inmediata de Lema 3.60 si tomamos $\alpha = \zeta$. Para la segunda parte del enunciado, si β es ordinal límite $\forall \alpha < \beta$ $R_\alpha \supseteq R_\beta$, luego si $R_\alpha \upharpoonright I \times (\alpha + 1)$ es la relación identidad, $R_\beta \upharpoonright I \times (\alpha + 1)$ también lo es. En consecuencia $R_\beta \upharpoonright I \times \beta$ es la identidad y $\mathfrak{Z}(\mathbb{S}(\beta)) \leq \beta$. \square

Teorema 3.62. Para un ordinal límite $\beta \leq \omega_1$, $\mathfrak{Z}(\mathbb{S}(\beta)) = \beta$; y si $\beta < \omega_1$, entonces $\mathfrak{Z}(\mathbb{S}(\beta + 1)) = \beta$.

De esto tenemos otra prueba del Corolario 3.47, ya que es muy sencillo verificar que para β contable, $\mathbb{S}(\beta)$ es separable.

Cerramos esta sección con comentarios sobre la posible dependencia del valor de $\mathfrak{Z}(\mathbb{S})$ bajo diferentes hipótesis de la teoría de conjuntos (consistentes relativas con la teoría de Zermelo-Fraenkel).

Asumiendo la Hipótesis del Continuo (*CH*) tenemos que $2^{\aleph_0} = \aleph_1 < 2^{\aleph_1}$ y en consecuencia el espacio $(I \times \omega_1, \mathcal{B}_V \otimes \mathcal{P}(\omega_1))$ no es separable. En efecto, hay $2^{\aleph_1} = |\mathcal{P}(\omega_1)|$ subconjuntos de

ω_1 y cada uno de ellos define un conjunto medible distinto en la σ -álgebra producto, pero el cardinal de una σ -álgebra contablemente generada es a lo sumo 2^{\aleph_0} .

Por otro lado, si asumimos el Axioma de Martin (*MA*) y la negación de *CH*, cualquier subconjunto no numerable $X \subseteq \mathbb{R}$ de cardinal menor que 2^{\aleph_0} es un Q -conjunto (ver e.g. Miller [Mil07]), i.e. un conjunto tal que todos sus subconjuntos son G_δ relativos. Si elegimos X tal que $|X| = \aleph_1$, la topología relativa tiene una base numerable (la relativización de una tal base para \mathbb{R}) y genera $\mathcal{P}(X)$ como σ -álgebra ya que X es un Q -conjunto. Luego, $\mathcal{P}(X) \cong \mathcal{P}(\omega_1)$ es separable y en consecuencia $(I \times \omega_1, \mathcal{B}_V \otimes \mathcal{P}(\omega_1))$, el espacio base de $\mathbb{S}(\omega_1)$, también lo es. En este contexto, la cota del Corolario 3.47 es efectivamente alcanzada.

3.4. Ordinal de Zhou de \mathbb{S}/Λ

En esta sección continuamos con el estudio del LMP sobre un conjunto cociente definido en la Sección 2.3. Dada $\Lambda \subset \Sigma$ una sub- σ -álgebra estable de \mathbb{S} , queremos calcular el ordinal de Zhou $\mathfrak{Z}(\mathbb{S}/\Lambda)$. Primero debemos determinar la bisimilitud de eventos en \mathbb{S}/Λ . Sabemos que $\sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket)$ es la menor σ -álgebra estable de \mathbb{S} y por lo tanto $\sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket) \subseteq \Lambda$. El Lema 2.83 nos asegura entonces que $\sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket)/\mathcal{R}(\Lambda)$ es σ -álgebra.

Lema 3.63. *Si $\varphi \in \mathcal{L}$ entonces $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathbb{S}/\Lambda} = \pi[\llbracket \varphi \rrbracket]$. En consecuencia, $\sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket_{\mathbb{S}/\Lambda}) = \sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket)/\mathcal{R}(\Lambda)$.*

Demostración. Por Lema 2.30 aplicada a la proyección π obtenemos que $\pi^{-1}[\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathbb{S}/\Lambda}] = \llbracket \varphi \rrbracket$. Si aplicamos π a esta igualdad, por suryectividad obtenemos $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathbb{S}/\Lambda} = \pi[\pi^{-1}[\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathbb{S}/\Lambda}]] = \pi[\llbracket \varphi \rrbracket]$. Para la última afirmación, usamos Corolario 2.31 o alternativamente Lema 2.84(1) para $\Theta = \llbracket \mathcal{L} \rrbracket$. \square

El corolario inmediato es que la bisimilitud de eventos en \mathbb{S}/Λ es la relación inducida por $\sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket)/\mathcal{R}(\Lambda)$. Si esta es nuestra σ -álgebra inicial $(\Lambda/\mathcal{R}(\Lambda))_0$, calcularemos las σ -álgebras $(\Lambda/\mathcal{R}(\Lambda))_\alpha$ y relaciones $R_\alpha^{\mathbb{S}/\Lambda}$ dadas por la Definición 3.7 para el LMP \mathbb{S}/Λ .

Lema 3.64. *Si $\Sigma_\alpha \subseteq \Lambda$, entonces $(\Lambda/\mathcal{R}(\Lambda))_\alpha = \Sigma_\alpha/\mathcal{R}(\Lambda)$.*

Demostración. Probamos el lema por inducción en α : por Lema 3.63 tenemos $(\Lambda/\mathcal{R}(\Lambda))_0 = \sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket_{\mathbb{S}/\Lambda}) = \sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket)/\mathcal{R}(\Lambda) = \Sigma_0/\mathcal{R}(\Lambda)$. Supongamos ahora que la afirmación vale para α y que $\Sigma_{\alpha+1} \subseteq \Lambda$. Por hipótesis inductiva tenemos

$$(\Lambda/\mathcal{R}(\Lambda))_{\alpha+1} = \mathcal{G}((\Lambda/\mathcal{R}(\Lambda))_\alpha) = \mathcal{G}(\Sigma_\alpha/\mathcal{R}(\Lambda)) = \Lambda/\mathcal{R}(\Lambda)(\mathcal{R}^T(\Sigma_\alpha/\mathcal{R}(\Lambda))).$$

Además,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^T(\Sigma_\alpha/\mathcal{R}(\Lambda)) &= \{(\pi(s), \pi(t)) \mid \forall a \in L \forall \pi[Q] \in \Sigma_\alpha/\mathcal{R}(\Lambda) \bar{\tau}_a(\pi(s), \pi[Q]) = \bar{\tau}_a(\pi(t), \pi[Q])\} \\ &= \{(\pi(s), \pi(t)) \mid \forall a \in L \forall Q \in \Sigma_\alpha \bar{\tau}_a(\pi(s), \pi[Q]) = \bar{\tau}_a(\pi(t), \pi[Q])\} \\ &= \{(\pi(s), \pi(t)) \mid \forall a \in L \forall Q \in \Sigma_\alpha \tau_a(s, Q) = \tau_a(t, Q)\} \\ &= \{(\pi(s), \pi(t)) \mid (s, t) \in \mathcal{R}^T(\Sigma_\alpha)\}. \end{aligned}$$

Por otro lado, $\Sigma_{\alpha+1}/\mathcal{R}(\Lambda) = \{\pi[Q] \mid Q \in \Sigma_{\alpha+1}\} = \{\pi[Q] \mid Q \in \Sigma(\mathcal{R}^T(\Sigma_\alpha))\}$.

Probamos ambas inclusiones de la igualdad $\Sigma_{\alpha+1}/\mathcal{R}(\Lambda) = (\Lambda/\mathcal{R}(\Lambda))_{\alpha+1}$:

- (\subseteq) Sea $Q \in \Sigma_{\alpha+1}$. Entonces $\pi[Q] \in \Lambda/\mathcal{R}(\Lambda)(\mathcal{R}^T(\Sigma_\alpha/\mathcal{R}(\Lambda)))$ si y sólo si $\pi[Q] \in \Lambda/\mathcal{R}(\Lambda)$ y es $\mathcal{R}^T(\Sigma_\alpha/\mathcal{R}(\Lambda))$ -cerrado. La primera condición es válida ya que $\Sigma_{\alpha+1} \subseteq \Lambda$. Para la segunda: si $\pi(s) \in \pi[Q]$ y $(\pi(s), \pi(t)) \in \mathcal{R}^T(\Sigma_\alpha/\mathcal{R}(\Lambda))$ entonces $(s, t) \in \mathcal{R}^T(\Sigma_\alpha) = R_\alpha = \mathcal{R}(\Sigma_{\alpha+1})$. Como $s \in Q \in \Sigma_{\alpha+1}$, entonces $t \in Q$ y por lo tanto $\pi(t) \in \pi[Q]$.
- (\supseteq) Sea ahora $\pi[Q] \in \Lambda/\mathcal{R}(\Lambda)$ un conjunto $\mathcal{R}^T(\Sigma_\alpha/\mathcal{R}(\Lambda))$ -cerrado, queremos verificar que $Q \in \Sigma_{\alpha+1}$. Basta ver que Q es $\mathcal{R}^T(\Sigma_\alpha)$ -cerrado. Sean $s \in Q$ y $t \in S$ tales que $(s, t) \in \mathcal{R}^T(\Sigma_\alpha)$. Entonces $(\pi(s), \pi(t)) \in \mathcal{R}^T(\Sigma_\alpha/\mathcal{R}(\Lambda))$, luego $\pi(t) \in \pi[Q]$ y por lo tanto $t \in Q$.

Resta el caso límite: supongamos que para todo $\alpha < \lambda$, si $\Sigma_\alpha \subseteq \Lambda$ entonces $(\Lambda/\mathcal{R}(\Lambda))_\alpha = \Sigma_\alpha/\mathcal{R}(\Lambda)$. Si $\Sigma_\lambda \subseteq \Lambda$ entonces para todo $\alpha < \lambda$ $\Sigma_\alpha \subseteq \Sigma_\lambda \subseteq \Lambda$ y podemos usar la hipótesis inductiva: $(\Lambda/\mathcal{R}(\Lambda))_\lambda = \sigma(\bigcup_{\alpha < \lambda} (\Lambda/\mathcal{R}(\Lambda))_\alpha) = \sigma(\bigcup_{\alpha < \lambda} \Sigma_\alpha/\mathcal{R}(\Lambda))$. Probamos que este último término es $\Sigma_\lambda/\mathcal{R}(\Lambda)$.

- (\subseteq) Dado que $\Sigma_\alpha \subseteq \Sigma_\lambda$ para todo $\alpha < \lambda$, entonces $\Sigma_\alpha/\mathcal{R}(\Lambda) \subseteq \Sigma_\lambda/\mathcal{R}(\Lambda)$ para todo $\alpha < \lambda$ y por lo tanto $\sigma(\bigcup_{\alpha < \lambda} \Sigma_\alpha/\mathcal{R}(\Lambda)) \subseteq \Sigma_\lambda/\mathcal{R}(\Lambda)$.
- (\supseteq) La hipótesis sobre Σ_λ implica que $\Sigma_\alpha \subseteq \{Q \in \Lambda \mid \pi[Q] \in \sigma(\bigcup_{\alpha < \lambda} \Sigma_\alpha/\mathcal{R}(\Lambda))\}$ y esta última familia es sub- σ -álgebra de Λ . Luego $\Sigma_\lambda = \sigma(\bigcup_{\alpha < \lambda} \Sigma_\alpha) \subseteq \{Q \in \Lambda \mid \pi[Q] \in \sigma(\bigcup_{\alpha < \lambda} \Sigma_\alpha/\mathcal{R}(\Lambda))\}$; es decir $\sigma(\bigcup_{\alpha < \lambda} \Sigma_\alpha/\mathcal{R}(\Lambda)) \supseteq \Sigma_\lambda/\mathcal{R}(\Lambda)$. \square

Destacamos el siguiente cálculo en la prueba anterior.

Corolario 3.65. Si $\Sigma_\alpha \subseteq \Lambda$, entonces $R_\alpha^{\mathbb{S}/\Lambda} = \{(\pi(s), \pi(t)) \mid (s, t) \in R_\alpha\}$.

De esto tenemos una cota $\mathfrak{Z}(\mathbb{S}/\Lambda)$. Recordamos que por la misma Definición 3.39 de $\mathfrak{Z}(\mathbb{S})$ y por Teorema 3.34 vale que $R_{\mathfrak{Z}(\mathbb{S})} = \mathcal{O}^{\mathfrak{Z}(\mathbb{S})}(\sim_e) = \sim_s$, $\forall \alpha < \mathfrak{Z}(\mathbb{S})$ $R_\alpha \not\supseteq \sim_s$ y $\forall \alpha \geq \mathfrak{Z}(\mathbb{S})$ $R_\alpha = R_{\mathfrak{Z}(\mathbb{S})} = \sim_s$.

Corolario 3.66. $\mathfrak{Z}(\mathbb{S}/\Lambda) \leq \mathfrak{Z}(\mathbb{S})$.

Demostración. Si $\alpha \geq \mathfrak{Z}(\mathbb{S})$, entonces $R_\alpha = R_{\mathfrak{Z}(\mathbb{S})}$. Por Corolario 3.65, $R_\alpha^{\mathbb{S}/\Lambda} = \pi \times \pi[R_\alpha] = \pi \times \pi[R_{\mathfrak{Z}(\mathbb{S})}]$ es constante y por lo tanto ya se alcanzó $\sim_s^{\mathbb{S}/\Lambda}$. \square

Nos podemos ocupar ahora del caso particular $\Lambda = \Sigma_\lambda = \mathcal{G}^\lambda(\sigma([\mathcal{L}]))$ para un ordinal límite λ , ya que por Teorema 3.24 es σ -álgebra estable de \mathbb{S} .

Lema 3.67. Si λ es límite, $R_\lambda^{\mathbb{S}/\Sigma_\lambda} = \text{id}_{\mathbb{S}/\Sigma_\lambda}$. En consecuencia $\sim_s^{\mathbb{S}/\Sigma_\lambda}$ es la identidad.

Demostración. Por el Corolario 3.65, $R_\lambda^{\mathbb{S}/\Sigma_\lambda} = (\pi \times \pi)[R_\lambda]$. Supongamos que existe $(s, t) \in R_\lambda$ tal que $\pi(s) \neq \pi(t)$. Entonces existe $\tilde{A} \in \Sigma_\lambda$ tal que $s \in \tilde{A} \not\supseteq t$. Luego, por Proposición 2.14(7), deben existir $\alpha < \lambda$ y $A \in \Sigma_\alpha$ tales que $s \in A \not\supseteq t$. Dado que $\Sigma_\alpha \subseteq \Sigma_{\alpha+1}$, $(s, t) \notin \mathcal{R}(\Sigma_{\alpha+1}) = R_\alpha \supseteq R_\lambda$. Pero esto contradice la elección de s, t ; luego $\pi(s) = \pi(t)$ y tenemos el resultado. \square

Una lectura práctica de este resultado es que $\mathfrak{Z}(\mathbb{S}/\Sigma_\lambda)$ será el primer α tal que $R_\alpha^{\mathbb{S}/\Sigma_\lambda}$ es la identidad. Un corolario inmediato es que $\mathfrak{Z}(\mathbb{S}/\Sigma_\lambda) \leq \lambda$. Dado que $\Sigma_\lambda = \Sigma_{\lambda'}$ si $\lambda, \lambda' \geq \mathfrak{Z}(\mathbb{S})$, tenemos que $\mathbb{S}/\Sigma_\lambda = \mathbb{S}/\Sigma_{\lambda'}$ y por lo tanto basta considerar ordinales límite $\lambda \leq \mathfrak{Z}(\mathbb{S})$.

Otra consecuencia del Lema 3.67 es que $\Sigma_\lambda/\mathcal{R}(\Sigma_\lambda)$ separa puntos ya que en el caso límite vale $\mathcal{R}^T = \mathcal{R}$ por Proposición 3.15.

Lema 3.68. $\forall \alpha \leq \lambda, R_\alpha^{\mathbb{S}/\Sigma_\lambda} = \text{id}_{\mathbb{S}/\Sigma_\lambda} \iff \pi[\Sigma_{\alpha+1}] \text{ separa puntos} \iff R_\alpha = R_\lambda.$

Demostración. $\text{id}_{\mathbb{S}/\Sigma_\lambda} = R_\alpha^{\mathbb{S}/\Sigma_\lambda} = \mathcal{R}((\Sigma_\lambda/\mathcal{R}(\Sigma_\lambda))_{\alpha+1}) \iff (\Sigma_\lambda/\mathcal{R}(\Sigma_\lambda))_{\alpha+1} = \pi[\Sigma_{\alpha+1}] \text{ separa puntos en } \mathbb{S}/\mathcal{R}(\Sigma_\lambda).$ Para la segunda equivalencia:

$$\begin{aligned} \pi[\Sigma_{\alpha+1}] \text{ separa puntos} &\iff \forall s, t \in S (\pi(s) \neq \pi(t) \Rightarrow \exists Q \in \Sigma_{\alpha+1} \pi(s) \in \pi[Q] \not\propto \pi(t)) \\ &\iff \forall s, t \in S (\exists A \in \Sigma_\lambda s \in A \not\propto t \Rightarrow \exists Q \in \Sigma_{\alpha+1} s \in Q \not\propto t) \\ &\iff \mathcal{R}(\Sigma_\lambda)^c \subseteq \mathcal{R}(\Sigma_{\alpha+1})^c \\ &\iff \mathcal{R}(\Sigma_{\alpha+1}) \subseteq \mathcal{R}(\Sigma_\lambda) \\ &\iff \mathcal{R}(\Sigma_{\alpha+1}) = \mathcal{R}(\Sigma_\lambda) \iff R_\alpha = R_\lambda. \quad \square \end{aligned}$$

Corolario 3.69. *Si λ es ordinal límite tal que $\lambda \leq \mathfrak{Z}(\mathbb{S})$, entonces $\mathfrak{Z}(\mathbb{S}/\Sigma_\lambda) = \lambda$.*

Demostración. La hipótesis implica que $\forall \alpha < \lambda R_\alpha \neq R_\lambda$. Por Lemas 3.68 y 3.67, $R_\alpha^{\mathbb{S}/\Sigma_\lambda} \neq \text{id}_{\mathbb{S}/\Sigma_\lambda} = \sim_s^{\mathbb{S}/\Sigma_\lambda}$ y por lo tanto $\mathfrak{Z}(\mathbb{S}/\Sigma_\lambda) \geq \lambda$. Por lo observado luego del Lema 3.67 tenemos la igualdad. \square

Una pregunta natural es si el ordinal de Zhou es invariante por bisimilitud. El resultado 3.69 de esta sección responde rápidamente que no es invariante: si $\mathfrak{Z}(\mathbb{S}) > \lambda$, la proyección $\pi : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}/\Sigma_\lambda$ es zigzag (\mathbb{S} y $\mathbb{S}/\Sigma_\lambda$ son \wedge -bisimilares) pero sus ordinales de Zhou difieren. Otro ejemplo de esto es (oh sorpresa) el LMP \mathbb{U} : el mapa $\text{id} : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}_B$ (ver Ejemplo 2.20) es zigzag y $\mathfrak{Z}(\mathbb{U}) = 1$ mientras que el ordinal de Zhou del codominio es 0.

Notamos que si el zigzag es la proyección al LMP \mathbb{S}/Λ , el Lema 3.64 implica que tenemos las igualdades $\pi^{-1}[\Sigma'_\alpha] = \Sigma_\alpha$ y de ello dedujimos que $\mathfrak{Z}(\mathbb{S}/\Lambda) \leq \mathfrak{Z}(\mathbb{S})$. Es material de futuro estudio conocer si esta desigualdad puede generalizarse cada vez que tenemos un zigzag sobreyectivo $f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}'$. Es claro que la desigualdad no vale para zigzag generales: si por ejemplo tomamos $\lambda < \lambda'$ ordinales límite, la inclusión $\iota : \mathbb{S}(\lambda) \rightarrow \mathbb{S}(\lambda')$ es zigzag. En el caso de las proyecciones tenemos la ventaja que $\pi^{-1}[\pi[Q]] = Q$ para cualquier conjunto $\mathcal{R}(\Lambda)$ -cerrado (Observación 2.81).

3.5. Conclusiones

En el primer bloque de esta tesis nos hemos enfocado en el concepto central de equivalencia entre estados de procesos de Markov etiquetados. Luego de identificar las distintas opciones para una tal definición de bisimulación, encontramos que las posibles intuiciones que se podrían tener para este concepto son muchas veces desafiadas por la presencia de conjuntos no medibles. Identificamos éste como el principal inconveniente al razonar sobre las mismas y como la fuente de contraejemplos para algunas de las equivalencias entre las distintas bisimilitudes. De hecho, quizás la pregunta más interesante que quedó sin respuesta en el segundo capítulo es la referida a la contención (y por lo tanto posible equivalencia) $\sim^\wedge \subseteq \sim^\Delta$. La misma surgió luego de romperse la supuesta igualdad entre \sim^\times y \sim^Δ debido al Ejemplo 2.72 que involucra no medibles Lebesgue. Curiosamente, dificultades también asociadas a la medibilidad surgieron en el estudio sobre la equivalencia entre $(\sim_s)_+$ y \sim^\times , la cual fue solucionada en algunos casos si asumimos hipótesis extras.

Cuando nos concentramos en un único proceso de Markov etiquetado sobre un espacio medible general, el ordinal de Zhou nos provee de una medida del fracaso de la propiedad

de Hennessy-Milner. El estudio general de este ordinal en procesos sobre espacios metrizable separables ha abierto varias preguntas.

La prueba del Teorema 3.45 muestra en particular que dado un proceso \mathbb{S} con $\mathfrak{Z}(\mathbb{S}) \geq \alpha$, podemos construir un segundo proceso \mathbb{S}' con $\mathfrak{Z}(\mathbb{S}') = \alpha + 1$, siempre que α sea un ordinal sucesor. Pero no sabemos cómo obtener este resultado para un α general. Esto es aún más claro para $\alpha = 0$: la construcción del contraejemplo inicial de [ST11] no sigue el patrón de lo que hicimos aquí en el pasaje de $\alpha + 1$ a $\alpha + 2$. Lo mismo sucede en la prueba del Teorema 3.46. Dada una familia $\{\mathbb{S}_\alpha\}_{\alpha < \beta}$ con β límite, la segunda pregunta general es cómo construir de manera natural algún \mathbb{S}_β tal que $\mathfrak{Z}(\mathbb{S}_\beta) = \sup_{\alpha < \beta} \mathfrak{Z}(\mathbb{S}_\alpha)$. Para el caso de β contable, obtuvimos un proceso \mathbb{S} con $\mathfrak{Z}(\mathbb{S}) > \sup_{\alpha < \beta} \mathfrak{Z}(\mathbb{S}_\alpha)$. Notamos que, si β es límite, la última desigualdad se puede mejorar a una igualdad si pasamos a un cociente adecuado. Una particularidad sobre la bisimilitud de eventos en los procesos $\mathbb{S}(\alpha)$ es que probamos que la cota Λ de (3.9) es efectivamente igual a $\sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket)$ para α contables; también, como $\sigma(\llbracket \mathcal{L} \rrbracket)$ es siempre contablemente generada, consistentemente Λ en $\mathbb{S}(\omega_1)$ no es la bisimilitud de eventos.

Como pregunta abierta importante, no determinamos si $\mathfrak{Z}(\mathcal{S})$ es un cardinal (regular). Una primera conjetura fue que $\mathfrak{Z}(\mathcal{S}) = \omega_1$ (incondicionalmente), pero esto ahora resulta contraintuitivo dada la existencia de un LMP separable con tal ordinal de Zhou bajo la hipótesis $MA + \neg CH$. También observamos que si pudiéramos pasar de cualquier proceso con ordinal α a uno con ordinal $\alpha + 1$, las mismas hipótesis conjuntistas nos permitirían concluir que $\mathfrak{Z}(\mathcal{S}) \geq \omega_1 \cdot 2$ por Teorema 3.46. Para ser precisos, encontrar (consistentemente) un LMP separable \mathbb{S} con $\mathfrak{Z}(\mathbb{S}) \geq \omega_1 + 1$ es la próxima pregunta a ser encarada.

Capítulo 4

Procesos de Markov etiquetados no deterministas

Hasta aquí hemos trabajado con procesos que no incluyen no determinismo interno. Esto es, para cada etiqueta existe un único comportamiento probabilista posible. A partir de este momento abandonamos esa suposición para dar lugar a los procesos que nombran este capítulo, o NLMP por sus siglas en inglés. Como indicamos en la Introducción, el interés sobre estas estructuras reside en la jerarquía descriptiva tanto de la relación de bisimilitud como de sus clases de equivalencia; motivación heredada de los resultados en [ST15]. Una estrategia para abordar tal problema es encontrar representaciones adecuadas que de algún modo codifiquen toda la información requerida para determinar bisimilitud. Aquí la lógica juega un rol central como la forma preponderante para decidir bisimilitud. Además de una “buena” representación, necesitamos que los espacios ambiente de las mismas sean igualmente favorables, por ejemplo de Borel estándares. Esto lleva naturalmente a imponer restricciones a los procesos para que se amolden a estas necesidades. En esta dirección surge la pregunta sobre el mínimo ambiente que puede contener a un estado sin pérdida de información relevante. Este capítulo surge como respuesta a las necesidades técnicas de generar una tal estructura.

Comenzamos con un breve repaso de definiciones y de algunos resultados importantes de la bibliografía en la Sección 4.1. Luego damos paso a nuestro desarrollo en la Sección 4.2 con las versiones externas de las distintas nociones de bisimulación en NLMP. Esto requiere primero algunas definiciones y notación que adapten todo lo realizado en el caso interno y externo de LMP a los conceptos análogos en el espacio de medidas de subprobabilidad. Esto incluye pares cerrados medibles, levantamiento de relaciones, σ -álgebras entre dos espacios, etcétera. Una vez superado este paso engorroso pero necesario, y ya establecidas las definiciones, podemos probar algunos nexos entre los distintos conceptos. No encontramos sorpresas, algunos resultados siguen el mismo esquema que en el caso de un único NLMP (cf. [DSTW12]).

En la Sección 4.3 observamos el comportamiento del funtor de Giry Δ en subespacios de (S, Σ) y sobre la base de conjuntos gruesos construimos un modelo de subestructura. La siguiente tarea es estudiar el comportamiento de las bisimulaciones en la subestructura y su relación con el proceso original. Es aquí donde necesitamos la maquinaria desarrollada previamente para tratar un proceso y una subestructura como dos NLMP independientes. La Proposición 4.34 es un buen indicador de que el concepto preserva la información que esperábamos.

En la Sección 4.4 que cierra el capítulo, adaptamos con éxito un juego que caracteriza bisimilitud en LMP al contexto de NLMP.

Una observación importante es que asumiremos analiticidad de los espacios con los que trabajemos. Esto continúa la línea de los trabajos previos ya citados y asegura que el espacio de medidas goza de buenas propiedades. Además, en este capítulo, el lenguaje L no juega ningún papel especial y puede fijarse.

4.1. Generalidades y generalizaciones

En la Sección 2.1.1 notamos que un LMP puede verse como un espacio medible (S, Σ) junto con funciones de transición (o núcleos) $\tau_a : S \rightarrow \Delta(S)$ hacia el espacio $\Delta(S)$ de medidas de subprobabilidad sobre S . El requisito de medibilidad de un núcleo de Markov es exactamente $(\Sigma, \Delta(\Sigma))$ -medibilidad. Los procesos de Markov etiquetados no deterministas (NLMP) fueron introducidos en [DWSTC09, Wol12] como una alternativa para incluir no determinismo interno en procesos de Markov etiquetados. Esto se logra modificando el codominio de las funciones de transición, ahora denotadas con T_a , para que devuelvan un *conjunto* medible de medidas de subprobabilidad para cada estado, es decir un elemento de $\Delta(\Sigma)$, a diferencia de un LMP donde se tiene una única medida para cada etiqueta. La definición también requiere que tales funciones de transición sean medibles, pero esto exige primero una σ -álgebra sobre el conjunto $\Delta(\Sigma)$. Usaremos la notación estándar para ciertos conjuntos destacados de medidas que ya presentamos en la sección mencionada: si $E \in \Sigma$ y $\bowtie \in \{<, \leq, >, \geq\}$, $\Delta^{\bowtie q}(E)$ denota el conjunto $\{\mu \in \Delta(S) \mid \mu(E) \bowtie q\}$. Recordamos que la familia \mathcal{C}_0 de todos estos conjuntos para $\bowtie = >$, $q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ y $E \in \Sigma$ es generadora de la σ -álgebra $\Delta(\Sigma)$. En general, si $\Gamma \subseteq \Sigma$, $\Delta(\Gamma) := \sigma(\{\Delta^{\bowtie q}(E) \mid E \in \Gamma\})$.

Definición 4.1. Dado un conjunto X y una familia $\Gamma \subseteq \mathcal{P}(X)$, la σ -álgebra de impactos $H(\Gamma)$ es la menor σ -álgebra sobre Γ que contiene a todos los conjuntos $H_D := \{G \in \Gamma \mid G \cap D \neq \emptyset\}$ con $D \in \Gamma$.

La candidata a σ -álgebra sobre $\Delta(\Sigma)$ es entonces $H(\Delta(\Sigma))$. Una motivación posible para esta elección es la necesidad de seguir contando con semánticas medibles para las formulas 2.1 de la lógica modal \mathcal{L} que usamos en los capítulos previos. En el caso de una fórmula con modalidad $\langle a \rangle_{\bowtie q} \varphi$ tenemos que

$$\begin{aligned} \llbracket \langle a \rangle_{\bowtie q} \varphi \rrbracket &= \{s \in S \mid \exists \mu \in \mathsf{T}_a(s) \mu(\llbracket \varphi \rrbracket) \bowtie q\} = \{s \in S \mid \mathsf{T}_a(s) \cap \Delta^{\bowtie q}(\llbracket \varphi \rrbracket) \neq \emptyset\} \\ &= \mathsf{T}_a^{-1}(\{D \in \Delta(\Sigma) \mid D \cap \Delta^{\bowtie q}(\llbracket \varphi \rrbracket) \neq \emptyset\}) = \mathsf{T}_a^{-1}(H_{\Delta^{\bowtie q}(\llbracket \varphi \rrbracket)}). \end{aligned}$$

Por lo tanto la medibilidad de $\llbracket \langle a \rangle_{\bowtie q} \varphi \rrbracket$ está garantizada si $H_{\Delta^{\bowtie q}(\llbracket \varphi \rrbracket)} \in H(\Delta(\Sigma))$. Es interesante notar que, si bien $\Delta(\Sigma) = \sigma(\mathcal{C}_0)$ para la familia generadora \mathcal{C}_0 , en [DSTW12, Example 5.1] se muestra que $\sigma(\{H_\xi \mid \xi \in \Delta(\Sigma)\}) \neq \sigma(\{H_\xi \mid \xi \in \mathcal{C}_0\})$; lo que indica que tomar una familia generadora de $\Delta(\Sigma)$ no es suficiente para generar $H(\Delta(\Sigma))$.

Definición 4.2. Un proceso de Markov etiquetado no determinista, o NLMP, es una estructura $\mathbb{S} = (S, \Sigma, \{\mathsf{T}_a \mid a \in L\})$ donde Σ es una σ -álgebra sobre el conjunto de estados S , y para cada etiqueta $a \in L$, $\mathsf{T}_a : (S, \Sigma) \rightarrow (\Delta(\Sigma), H(\Delta(\Sigma)))$ es medible. Diremos que \mathbb{S} es de imagen finita (contable) si todos los conjuntos $\mathsf{T}_a(s)$ son finitos (contables). Los NLMP que no son de imagen contable son denominados de imagen infinita (no numerable).

Originalmente, la definición de NLMP en [DWSTC09] requiere que las medidas sean de *probabilidad* y agregan el núcleo $\tau_a(s) = 0$ al espacio de probabilidades para indicar que la acción a es rechazada en el estado s con certeza. En este trabajo seguiremos trabajando con subprobabilidades en un intento de preservar la generalidad de los resultados que nos interesan.

Ejemplo 4.3 (LMP como NLMP). *Dado que en la Definición 4.2 permitimos subprobabilidades, un LMP \mathbb{S} puede verse como un NLMP sin nodeterminismo interno, esto es, un proceso donde $\mathsf{T}_a(s)$ es un singulete para cada $a \in L$ y $s \in S$. El único requisito es que los conjuntos $\{\mu\}$ sean medibles en $\Delta(S)$, de este modo $\mathsf{T}_a(s) = \{\tau_a(s)\} \in \Delta(\Sigma)$. Una condición suficiente es que Σ esté generada por un álgebra contable. Un modificación de la prueba de [DWSTC09, Lemma 3.1] usando el Teorema de la Clase Monótona es demostración de ello.*

Antes de definir las bisimulaciones recordamos la notación introducida en el Capítulo 2 para el levantamiento de una relación: si R es una relación en el espacio medible (S, Σ) , su levantamiento \bar{R} a $\Delta(S)$ es la relación de equivalencia dada por:

$$\mu \bar{R} \mu' \iff \forall Q \in \Sigma(R) \mu(Q) = \mu'(Q). \quad (4.1)$$

En [DWSTC09, DSTW12] se definen las siguientes tres nociones de bisimulación. Los nombres están actualizados a las últimas versiones.

- Definición 4.4.**
1. Una relación $R \subseteq S \times S$ es una bisimulación de estados en un NLMP $(S, \Sigma, \{\mathsf{T}_a \mid a \in L\})$ si es simétrica y para todo $a \in L$, $s R t$ implica que para toda $\mu \in \mathsf{T}_a(s)$ existe $\mu' \in \mathsf{T}_a(t)$ tal que $\mu \bar{R} \mu'$.
 2. Una relación $R \subseteq S \times S$ es una bisimulación de impactos si es simétrica y para todo $a \in L$, $s R t$ implica $\forall \xi \in \Delta(\Sigma(R))$ vale $\mathsf{T}_a(s) \cap \xi \neq \emptyset \iff \mathsf{T}_a(t) \cap \xi \neq \emptyset$.
 3. Una bisimulación de eventos es una sub- σ -álgebra Λ de Σ tal que el mapa $\mathsf{T}_a : (S, \Lambda) \rightarrow (\Delta(\Sigma), H(\Delta(\Lambda)))$ es medible para cada $a \in L$. También diremos que una relación R es una bisimulación de eventos si hay una bisimulación de eventos Λ tal que $R = \mathcal{R}(\Lambda)$.

Diremos que $s, t \in S$ son bisimilares por estados (impactos, eventos, respectivamente), denotado con $s \sim_s t$ ($s \sim_h t$, $s \sim_e t$), si hay una bisimulación de estados (impactos, eventos) R tal que $s R t$.

Notamos que todas estas nociones de bisimulación/bisimilitud están definidas con respecto a un único NLMP, o siguiendo con el vocabulario para LMP, son *internas*. La bisimulación de eventos es una generalización directa del mismo concepto para LMP y es la que mejor refleja la estructura medible del espacio base. La bisimulación de estados es la generalización más fiel, tanto de la bisimulación probabilista de Larsen y Skou como de la definición estándar de bisimulación para procesos no deterministas (por ejemplo LTS). Por otro lado, la bisimilitud de impactos es un concepto intermedio entre las anteriores, es en general más fina que la bisimilitud de eventos pero respeta más la estructura medible que la bisimilitud de estados. Para que R sea bisimulación de impactos, se requiere que los conjuntos de transiciones impacten los mismos conjuntos \bar{R} -cerrados de medidas, este es un requisito más débil que el de bisimulación de estados. Referimos a [DSTW12] para mayor discusión sobre estas nociones.

Teorema 4.5 ([DSTW12, Thm.5.6, Thm.5.10]). 1. *Se dan las inclusiones $\sim_s \subsetneq \sim_h \subsetneq \sim_e$.*

2. *Si \mathbb{S} es NLMP de imagen finita sobre un espacio analítico todas las bisimilitudes coinciden.*

4.2. Versiones externas de bisimulación para NLMP

En este apartado daremos las versiones externas de las distintas definiciones de bisimulación. Dada una relación $R \subseteq S \times S'$, reutilizamos la Definición 2.47 de par R -cerrado y por

conveniencia usaremos la notación $\Sigma^\times(R)$ para la familia de pares (Q, Q') R -cerrados medibles. Levantamos R a la relación en $\Delta(S) \times \Delta(S')$ dada por

$$\mu \bar{R} \mu' \iff \forall (Q, Q') \in \Sigma^\times(R) \mu(Q) = \mu'(Q'). \quad (4.2)$$

Usaremos también la notación análoga $\Delta(\Sigma)^\times(\bar{R})$ para la familia de pares (Θ, Θ') de conjuntos medibles de medidas que son \bar{R} -cerrados.

Observación 4.6. Por Lema 2.49(2), si $\mathbb{S} = \mathbb{S}'$ y R es reflexiva, entonces $(Q, Q') \in \Sigma^\times(R) \iff Q = Q' \in \Sigma(R)$. Por lo tanto los levantamientos (4.1) y (4.2) coinciden.

El siguiente lema con propiedades elementales del levantamiento de una relación se sigue inmediatamente del Lema 2.48 y de las definiciones.

Lema 4.7. 1. La familia de pares \bar{R} -cerrados es cerrada por complemento y uniones e intersecciones arbitrarias en coordenadas.

2. Si $R \subseteq R'$ entonces $\bar{R} \subseteq \bar{R}'$.

3. Si $(Q, Q') \in \Sigma^\times(R)$, entonces $(\Delta^{<q}(Q), \Delta^{<q}(Q')) \in \Delta(\Sigma)^\times(\bar{R})$.

También necesitaremos la siguiente construcción sobre familias de pares:

Definición 4.8. Sea $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S')$ una familia de pares de conjuntos. Definimos $\sigma^\times(\mathcal{D})$ como la menor familia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S')$ tal que

1. $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{F}$.
2. $(E, F) \in \mathcal{F} \implies (E^c, F^c) \in \mathcal{F}$.
3. $\forall n \in \omega (E_n, F_n) \in \mathcal{F} \implies (\bigcup_{n \in \omega} E_n, \bigcup_{n \in \omega} F_n) \in \mathcal{F}$.

Llamaremos bi- σ -álgebra a cualquier subfamilia no vacía \mathcal{F} de $\mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S')$ que cumpla 2 y 3.

Una observación inmediata y sencilla es que la proyección de una bi- σ -álgebra en cualquiera de sus coordenadas es una σ -álgebra.

Definición 4.9. Si $(S, \Sigma), (S', \Sigma')$ son espacios medibles y $\mathcal{D} \subseteq \Sigma \times \Sigma'$, definimos $\Delta^\times(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{P}(\Delta(S)) \times \mathcal{P}(\Delta(S'))$ como

$$\Delta^\times(\mathcal{D}) := \sigma^\times(\{(\Delta^{<q}(Q), \Delta^{<q}(Q')) \mid q \in \mathbb{Q}, (Q, Q') \in \mathcal{D}\}).$$

Observación 4.10. Notar que $\Delta^\times(\mathcal{D}) \subseteq \Delta(\Sigma) \times \Delta(\Sigma')$ ya que $\mathcal{F} = \Delta(\Sigma) \times \Delta(\Sigma')$ cumple con todas las condiciones en la Definición 4.8.

Lema 4.11. Si $(S, \Sigma) = (S', \Sigma')$ en la Definición 4.9 y $\mathcal{D} = \{(D, D) \mid D \in \mathcal{A}\}$ para alguna familia $\mathcal{A} \subseteq \Sigma$, entonces $\Delta^\times(\mathcal{D}) = \{(\Theta, \Theta) \mid \Theta \in \Delta(\mathcal{A})\}$.

Demostración. (\subseteq) Sea $\mathcal{F} = \{(\Theta, \Theta) \in \Delta(\Sigma) \times \Delta(\Sigma) \mid \Theta \in \Delta(\mathcal{A})\}$. Veamos que $\Delta^\times(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{F}$. Si $D \in \mathcal{A}$, $\Theta := \Delta^{<q}(D) \in \Delta(\mathcal{A})$. En consecuencia $\{(\Delta^{<q}(D), \Delta^{<q}(D)) \mid q \in \mathbb{Q}, (D, D) \in \mathcal{D}\} \subseteq \mathcal{F}$. Si $(\Theta, \Theta), (\Theta_n, \Theta_n) \in \mathcal{F}$, entonces $\Theta, \Theta_n \in \Delta(\mathcal{A})$ y por ser esta σ -álgebra tenemos que $\Theta^c, \bigcup_{n \in \omega} \Theta_n \in \Delta(\mathcal{A})$. Luego, $(\Theta^c, \Theta^c), (\bigcup_{n \in \omega} \Theta_n, \bigcup_{n \in \omega} \Theta_n) \in \mathcal{F}$. Concluimos que $\Delta^\times(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{F}$ como queríamos.

(\supseteq) Definimos $\mathcal{H} = \{\Theta \in \Delta(\Sigma) \mid (\Theta, \Theta) \in \Delta^\times(\mathcal{D})\}$. Como $\Delta^\times(\mathcal{D})$ es cerrada por complemento y uniones contables en cada coordenada, \mathcal{H} es σ -álgebra. Además, si $D \in \mathcal{A}$, entonces $(\Delta^{<q}(D), \Delta^{<q}(D)) \in \Delta^\times(\mathcal{D})$ para cualquier $q \in \mathbb{Q}$; por lo tanto $\Delta^{<q}(D) \in \mathcal{H}$. Se sigue que $\Delta(\mathcal{A}) = \sigma(\{\Delta^{<q}(D) \mid q \in \mathbb{Q}, D \in \mathcal{A}\}) \subseteq \mathcal{H}$. \square

Corolario 4.12. *Sea $R \subseteq S \times S$ reflexiva. Entonces $(\Theta, \Theta') \in \Delta^\times(\Sigma^\times(R))$ si y solamente si $\Theta = \Theta' \in \Delta(\Sigma(R))$.*

Demostración. Por la Observación 4.6, $\Sigma^\times(R) = \{(Q, Q) \mid Q \in \Sigma(R)\}$. Usamos Lema 4.11 para obtener $\Delta^\times(\Sigma^\times(R)) = \{(\Theta, \Theta) \mid \Theta \in \Delta(\Sigma(R))\}$. \square

Otra consecuencia del Lema 4.11 es que, si π es cualquiera de las proyecciones, entonces $\pi[\Delta^\times(\{(D, D) \mid D \in \mathcal{A}\})] = \Delta(\mathcal{A}) = \Delta(\pi[\{(D, D) \mid D \in \mathcal{A}\}])$. Este hecho es general, como se muestra en el siguiente resultado que probamos para la proyección π en la primera coordenada (vale *mutatis mutandis* para la proyección en la segunda coordenada).

Lema 4.13. *Si $\mathcal{D} \subseteq \Sigma \times \Sigma'$, entonces $\pi[\Delta^\times(\mathcal{D})] = \Delta(\pi[\mathcal{D}])$.*

Demostración. (\subseteq) Notamos que $\Delta(\pi[\mathcal{D}]) \times \Delta(\Sigma')$ es bi- σ -álgebra que contiene a los generadores de $\Delta^\times(\mathcal{D})$. Por lo tanto $\Delta^\times(\mathcal{D}) \subseteq \Delta(\pi[\mathcal{D}]) \times \Delta(\Sigma')$ y por ende $\pi[\Delta^\times(\mathcal{D})] \subseteq \Delta(\pi[\mathcal{D}])$.

(\supseteq) Sabemos que $\pi[\Delta^\times(\mathcal{D})]$ es σ -álgebra. Si $Q \in \pi[\mathcal{D}]$, existe $Q' \in \Sigma'$ tal que $(Q, Q') \in \mathcal{D}$. Luego $(\Delta^{<q}(Q), \Delta^{<q}(Q')) \in \Delta^\times(\mathcal{D})$ y por consiguiente $\Delta^{<q}(Q) \in \pi[\Delta^\times(\mathcal{D})]$. Concluimos que $\Delta(\pi[\mathcal{D}]) \subseteq \pi[\Delta^\times(\mathcal{D})]$. \square

El siguiente Lema nos dice que si \mathcal{C} consiste de pares medibles R -cerrados, entonces $\Delta^\times(\mathcal{C})$ consiste de pares $\Delta(\Sigma)$ -medibles \bar{R} -cerrados.

Lema 4.14. *Si $\mathcal{C} \subseteq \Sigma^\times(R)$, entonces $\Delta^\times(\mathcal{C}) \subseteq \Delta(\Sigma)^\times(\bar{R})$.*

Demostración. Si (Q, Q') es un par R -cerrado medible, por Lema 4.7(3) $(\Delta^{<q}(Q), \Delta^{<q}(Q')) \in \Delta(\Sigma)^\times(\bar{R})$. Además, por Lema 4.7(1) $\Delta(\Sigma)^\times(\bar{R})$ es bi- σ -álgebra. Esto muestra que $\mathcal{F} := \Delta(\Sigma)^\times(\bar{R})$ satisface las propiedades en Definición 4.8 para la familia generadora de $\Delta^\times(\Sigma^\times(R))$. En consecuencia, $\Delta^\times(\Sigma^\times(R)) \subseteq \Delta(\Sigma)^\times(\bar{R})$. Si ahora $\mathcal{C} \subseteq \Sigma^\times(R)$, entonces valen las contenciones $\Delta^\times(\mathcal{C}) \subseteq \Delta^\times(\Sigma^\times(R)) \subseteq \Delta(\Sigma)^\times(\bar{R})$. \square

Usando todos estos conceptos podemos proponer las siguientes definiciones para bisimulaciones entre dos NLMP.

Definición 4.15. 1. Una relación $R \subseteq S \times S'$ es una bisimulación de estados externa si para todo $a \in L$, $s R s'$ implica que para toda $\mu \in T_a(s)$ existe $\mu' \in T_a(s')$ tal que $\mu \bar{R} \mu'$ y para toda $\mu' \in T_a(s')$ existe $\mu \in T_a(s)$ tal que $\mu \bar{R} \mu'$.

2. Una relación $R \subseteq S \times S'$ es una bisimulación de impactos externa si para todo $a \in L$, $s R s'$ implica que para todo par $(\Theta, \Theta') \in \Delta^\times(\Sigma^\times(R))$ vale $T_a(s) \cap \Theta \neq \emptyset \iff T_a(s') \cap \Theta' \neq \emptyset$.

Diremos que $s \in S, s' \in S'$ son ext-bisimilares por estados (impactos), denotado con $s \sim_s^\times s'$ ($s \sim_h^\times s'$), si hay una bisimulación de estados (impactos) externa R tal que $s R s'$.

Lema 4.16. *Si $\mathbb{S} = \mathbb{S}'$, las definiciones externas de bisimulación en el caso reflexivo coinciden con las internas.*

Demostración. En el caso de la bisimulación de estados, la Observación 4.6 prueba que si R es reflexiva, entonces es bisimulación de estados externa si y sólo si es bisimulación de estados interna.

Supongamos que $R \subseteq S \times S$ y $s R s'$. Si R es bisimulación de impactos externa y $\Theta \in \Delta(\Sigma(R))$, entonces $(\Theta, \Theta) \in \Delta^\times(\Sigma^\times(R))$ por Corolario 4.12. Por lo tanto $T_a(s) \cap \Theta \neq \emptyset \iff$

$\mathsf{T}_a(t) \cap \Theta \neq \emptyset$. Recíprocamente, si R es bisimulación de impactos interna y $(\Theta, \Theta') \in \Delta^\times(\Sigma^\times(R))$ entonces $\Theta = \Theta' \in \Delta(\Sigma(R))$ por el mismo Corolario y vale $\mathsf{T}_a(s) \cap \Theta \neq \emptyset \iff \mathsf{T}_a(t) \cap \Theta' \neq \emptyset$. \square

Si una bisimulación de estados externa R en el Lema previo no fuese reflexiva, es muy sencillo verificar que $R \cup R^{-1}$ es bisimulación de estados interna (veremos un resultado más general en 4.41).

Proposición 4.17. *Unión de bisimulaciones de impactos (estados) externas es bisimulación de impactos (estados) externa. En consecuencia, \sim_h^\times (\sim_s^\times) es bisimulación de impactos (estados) externa.*

Demostración. Sea $\{R_i \mid i \in I\}$ una familia de relaciones y $R = \bigcup\{R_i \mid i \in I\}$. Si $s R s'$, existe $i \in I$ tal que $s R_i s'$; como $R_i \subseteq R$, por Lemas 2.48(3) y 4.7(2) tenemos que

1. $\Sigma^\times(R) \subseteq \Sigma^\times(R_i)$, y por lo tanto $\Delta^\times(\Sigma^\times(R)) \subseteq \Delta^\times(\Sigma^\times(R_i))$;
2. $\bar{R}_i \subseteq \bar{R}$.

Si R_i es de impactos y $(\Theta, \Theta') \in \Delta(\Sigma^\times(R))$, por el primer ítem anterior tenemos que $(\Theta, \Theta') \in \Delta(\Sigma^\times(R_i))$ y vale $s \in \mathsf{T}_a^{-1}[H_\Theta] \iff s' \in (\mathsf{T}'_a)^{-1}[H_{\Theta'}]$.

Si ahora R_i es bisimulación de estados y $\mu \in \mathsf{T}_a(s)$, existe $\mu' \in \mathsf{T}'_a(s')$ tal que $\mu \bar{R}_i \mu'$. Por ítem 2 obtenemos que $\mu \bar{R} \mu'$. La condición zag es análoga. \square

Lema 4.18. *Si R es bisimulación de estados externa, también es bisimulación de impactos externa.*

Demostración. Sean $(s, s') \in R$ y $(\Theta, \Theta') \in \Delta^\times(\Sigma^\times(R))$. Por Lema 4.14, (Θ, Θ') es par medible \bar{R} -cerrado. Si existe $\mu \in \mathsf{T}_a(s)$ tal que $\mu \in \Theta$, como R es bisimulación de estados existe $\mu' \in \mathsf{T}'_a(s')$ tal que $\mu \bar{R} \mu'$. Luego, dado que $\bar{R}[\Theta] \subseteq \Theta'$, $\mu' \in \mathsf{T}'_a(s') \cap \Theta'$. La implicación recíproca es similar usando la condición zag. \square

El siguiente lema nos indica que también vale la vuelta para NLMP de imagen contable, tal como en el caso interno ([DSTW12, Thm.4.5]).

Lema 4.19. *Si \mathbb{S} y \mathbb{S}' son NLMP de imagen contable, toda bisimulación de impactos externa es también bisimulación de estados externa.*

Demostración. Supongamos que $R \subseteq S \times S'$ es bisimulación de impactos y que existe $(s, t) \in R$ tal que $s \not\sim_s^\times t$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que existe $\mu \in \mathsf{T}_a(s)$ tal que para toda μ'_n en una enumeración $\{\mu'_m\}_{m \in \omega}$ de $\mathsf{T}'_a(t)$, existen $q_n \in \mathbb{Q}$, $\bowtie_n \in \{<, >\}$ y (Q_n, Q'_n) pares medibles R -cerrados tales que $\mu(Q_n) \bowtie_n q_n \bowtie_n \mu'_n(Q'_n)$. Sean $\Theta := \bigcap\{\Delta^{\bowtie_n q_n}(Q_n) \mid n \in \omega\}$ y $\Theta' := \bigcap\{\Delta^{\bowtie_n q_n}(Q'_n) \mid n \in \omega\}$. Entonces $(\Theta, \Theta') \in \Delta^\times(\Sigma^\times(R))$. Por construcción, $\mu \in \Theta$ y por lo tanto $s \in \mathsf{T}_a^{-1}[H_\Theta]$, pero $t \notin (\mathsf{T}'_a)^{-1}[H_{\Theta'}]$ ya que para todo $n \in \omega$ vale $q_n \bowtie_n \mu'_n(Q'_n)$. Esto contradice que R sea bisimulación de impactos. \square

Corolario 4.20. *Si \mathbb{S}, \mathbb{S}' son NLMP de imagen contable y $s \not\sim_s^\times t$, entonces existe un par medible \sim_s^\times -cerrado (C, C') tal que $s \in C \iff t \notin C'$.*

Demostración. Construimos Θ, Θ' como en la prueba del Lema 4.19 para $R = \sim_s^\times$ y definimos $(C, C') := (\mathbb{T}_a^{-1}[H_\Theta], (\mathbb{T}'_a)^{-1}[H_{\Theta'}])$. Es claro que es par medible. Para verificar que es también \sim_s^\times -cerrado usaremos la segunda equivalencia en Lema 2.48(1). Notamos que, por Proposición 4.17 y Lema 4.18, \sim_s^\times es también bisimulación de impactos. Luego, para w y z arbitrarios, si $w \sim_s^\times z$, entonces $w \in \mathbb{T}_a^{-1}[H_\Theta] \iff z \in (\mathbb{T}'_a)^{-1}[H_{\Theta'}]$. \square

Queda por definir la versión externa de bisimulación de eventos. Nuevamente, lo central será el concepto de estabilidad. La definición correspondiente en LMP se motiva en la búsqueda de la σ -álgebra más pequeña Λ tal que se preserve la estructura de LMP. En un único NLMP esta propiedad se pierde ya que las imágenes de las funciones de transición $\mathbb{T}_a(s)$ posiblemente siguen siendo elementos de $\Delta(\Sigma)$ y no de $\Delta(\Lambda)$.

Definición 4.21. Diremos que $\mathcal{C} \subseteq \Sigma \times \Sigma'$ es \times -estable si cumple

$$\forall a \in L \forall (\Theta, \Theta') \in \Delta^\times(\mathcal{C}) (\mathbb{T}_a^{-1}[H_\Theta], (\mathbb{T}'_a)^{-1}[H_{\Theta'}]) \in \mathcal{C}.$$

Esta definición nuevamente coincide con su análoga interna en el siguiente sentido:

Lema 4.22. 1. $\mathcal{C} \subseteq \Sigma$ es estable si y sólo si $\tilde{\mathcal{C}} := \{(C, C) \mid C \in \mathcal{C}\} \subseteq \Sigma \times \Sigma$ es \times -estable.

2. Si $\mathcal{C} \subseteq \Sigma \times \Sigma'$ es bi- σ -álgebra \times -estable entonces $\pi[\mathcal{C}]$ y $\pi'[\mathcal{C}]$ son σ -álgebras estables.

Demostración. 1. Si $(\Theta, \Theta') \in \Delta^\times(\tilde{\mathcal{C}})$, por Lema 4.11, $\Theta = \Theta' \in \Delta(\mathcal{C})$. Como \mathcal{C} es estable tenemos que $\mathbb{T}_a^{-1}[H_\Theta] \in \mathcal{C}$. En consecuencia $(\mathbb{T}_a^{-1}[H_\Theta], (\mathbb{T}'_a)^{-1}[H_{\Theta'}]) \in \tilde{\mathcal{C}}$.

2. Sabemos que $\pi[\mathcal{C}]$ y $\pi'[\mathcal{C}]$ son σ -álgebras. Veamos que $\pi[\mathcal{C}]$ es estable: sea $\Theta \in \Delta(\pi[\mathcal{C}])$. Por Lema 4.13, $\Theta \in \pi[\Delta^\times(\mathcal{C})]$. Entonces existe $\Theta' \in \Sigma'$ tal que $(\Theta, \Theta') \in \Delta^\times(\mathcal{C})$ y como \mathcal{C} es \times -estable tenemos que $(\mathbb{T}_a^{-1}[H_\Theta], (\mathbb{T}'_a)^{-1}[H_{\Theta'}]) \in \mathcal{C}$. Luego, $\mathbb{T}_a^{-1}[H_\Theta] \in \pi[\mathcal{C}]$. \square

Proposición 4.23. Sea $R \subseteq S \times S'$. Entonces R es bisimulación de impactos externa si y sólo si $\Sigma^\times(R)$ es \times -estable.

Demostración. Tenemos la equivalencia

$$\forall (s, s') \in R (\mathbb{T}_a(s) \cap \Theta \neq \emptyset \iff \mathbb{T}'_a(s') \cap \Theta' \neq \emptyset) \iff (\mathbb{T}_a^{-1}[H_\Theta], (\mathbb{T}'_a)^{-1}[H_{\Theta'}]) \in \Sigma^\times(R).$$

Luego, si R es de impactos y $(\Theta, \Theta') \in \Delta^\times(\Sigma^\times(R))$ la ida en la equivalencia muestra que $\Sigma^\times(R)$ es estable. Mientras que si $\Sigma^\times(R)$ es estable, la vuelta prueba que R es de impactos. \square

Definición 4.24. Si $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S')$ definimos una relación $\mathcal{R}^\times(\mathcal{D}) \subseteq S \times S'$ por

$$s \mathcal{R}^\times(\mathcal{D}) s' \iff \forall (Q, Q') \in \mathcal{D} (s \in Q \iff s' \in Q').$$

Definición 4.25. Una relación $R \subseteq S \times S'$ es una bisimulación de eventos externa si existe una bi- σ -álgebra \times -estable $\mathcal{D} \subseteq \Sigma \times \Sigma'$ tal que $R = \mathcal{R}^\times(\mathcal{D})$.

Lema 4.26. 1. $R \subseteq \mathcal{R}^\times(\Sigma^\times(R))$.

2. $\Sigma^\times(R) = \Sigma^\times(\mathcal{R}^\times(\Sigma^\times(R)))$.

Demostración. El primer ítem es directo de las definiciones. Para el segundo, supongamos que $(Q, Q') \in \Sigma^\times(R)$ y $z \mathcal{R}^\times(\Sigma^\times(R)) w$. Por definición de \mathcal{R}^\times , $z \in Q \iff w \in Q'$. Luego, (Q, Q') es par $\mathcal{R}^\times(\Sigma^\times(R))$ -cerrado y se tiene la contención $\Sigma^\times(R) \subseteq \Sigma^\times(\mathcal{R}^\times(\Sigma^\times(R)))$. Para la inclusión recíproca usamos el primer ítem y la antimonotonía de Σ^\times dada por el Lema 2.48(3). \square

Corolario 4.27. *Si $R \subseteq S \times S'$ es bisimulación de impactos externa, entonces $\mathcal{R}^\times(\Sigma^\times(R))$ es bisimulación de impactos y de eventos externa.*

Demostración. Para verificar que es de impactos, tomamos $(s, s') \in \mathcal{R}^\times(\Sigma^\times(R))$ y un par $(\Theta, \Theta') \in \Delta(\Sigma^\times(\mathcal{R}^\times(\Sigma^\times(R))))$. Por Lema 4.26(2) $(\Theta, \Theta') \in \Delta(\Sigma^\times(R))$ y, dado que R es de impactos, $s \in \mathbb{T}_a^{-1}[H_\Theta] \iff s' \in (\mathbb{T}'_a)^{-1}[H_{\Theta'}]$. Además, por Proposición 4.23, $\mathcal{R}^\times(\Sigma^\times(R))$ es también bisimulación de eventos. \square

4.3. Subestructuras

Dado un NLMP fijo $\mathbb{S} = (S, \Sigma, \{\mathbb{T}_a \mid a \in L\})$, estamos interesados en una noción de subestructura de \mathbb{S} . Si $A \subseteq S$, recordamos que sobre A tenemos la familia $\Sigma \upharpoonright A = \{Q \cap A \mid Q \in \Sigma\}$. Esta es la σ -álgebra inicial para la inclusión $i : A \rightarrow S$ ya que $i^{-1}[Q] = Q \cap A \in \Sigma \upharpoonright A$, y por lo tanto $i : (A, \Sigma \upharpoonright A) \rightarrow (S, \Sigma)$ es medible. Por aplicación del funtor Δ obtenemos el mapa medible e inyectivo $\Delta i : (\Delta(A), \Delta(\Sigma \upharpoonright A)) \rightarrow (\Delta(S), \Delta(\Sigma))$ dado por $(\Delta i)(\tilde{\mu}) = \tilde{\mu} \circ i^{-1}$. Notamos que para $Q \in \Sigma$,

$$\begin{aligned} (\Delta i)^{-1}[\Delta^{<q}(Q)] &= \{\tilde{\mu} \in \Delta(A) \mid \Delta i(\tilde{\mu}) \in \Delta^{<q}(Q)\} \\ &= \{\tilde{\mu} \in \Delta(A) \mid \tilde{\mu}(i^{-1}(Q)) < q\} \\ &= \{\tilde{\mu} \in \Delta(A) \mid \tilde{\mu}(Q \cap A) < q\} \\ &= \Delta^{<q}(Q \cap A) \in \Delta(\Sigma \upharpoonright A). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Lema 4.28. *Si $A \subseteq S$ y $\Gamma \subseteq \Sigma$, entonces $(\Delta i)^{-1}[\Delta(\Gamma)] = \Delta(\Gamma \upharpoonright A)$.*

Demostración.

$$\begin{aligned} (\Delta i)^{-1}[\Delta(\Gamma)] &= (\Delta i)^{-1}[\sigma(\{\Delta^{<q}(Q) \mid Q \in \Gamma\})] && \text{Definición de } \Delta(\Gamma) \\ &= \sigma((\Delta i)^{-1}[\{\Delta^{<q}(Q) \mid Q \in \Gamma\}]) && \text{Lema 1.1 aplicado a } \Delta i \\ &= \sigma(\{\Delta^{<q}(Q \cap A) \mid Q \in \Gamma\}) && \text{Ecuación (4.3)} \\ &= \sigma(\{\Delta^{<q}(Q') \mid Q' \in \Gamma \upharpoonright A\}) && \text{Definición de } \Gamma \upharpoonright A \\ &= \Delta(\Gamma \upharpoonright A). && \square \end{aligned}$$

En particular, $\Delta(\Sigma \upharpoonright A) = (\Delta i)^{-1}[\Delta(\Sigma)]$.

Usaremos el siguiente concepto y resultado de [Hal50]: un subconjunto A de un espacio de medida (X, Σ, μ) se dice grueso con respecto a μ si $\mu^*(A) = \mu(X)$. Esto es equivalente a la condición $\forall F \in \Sigma (F \cap A = \emptyset \implies \mu(F) = 0)$.

Teorema 4.29 ([Hal50, p.75]). *Sea A un subconjunto grueso de un espacio de medida (S, Σ, μ) y para $E \in \Sigma \upharpoonright A$ definimos $\mu_A(E \cap A) := \mu(E)$. Entonces $(A, \Sigma \upharpoonright A, \mu_A)$ es espacio de medida.*

Si A es medible, la condición de ser grueso con respecto a μ es equivalente a $\mu(A) = \mu(S)$. Además, $E \cap A \in \Sigma$ y $\mu_A(E \cap A) = \mu(E) = \mu(E \cap A) + \mu(E \cap A^c) = \mu(E \cap A)$, por lo tanto $\mu_A = \mu \upharpoonright_{\Sigma \upharpoonright A}$.

Lema 4.30. *Si A es medible, Δi es biyección entre $\Delta(A, \Sigma \upharpoonright A)$ y $\{\mu \in \Delta(S) \mid \mu(A) = \mu(S)\}$ con inversa j definida por $j(\mu) = \mu_A$.*

Demostración. Si $\tilde{\mu} \in \Delta(A)$ y $E \in \Sigma$, $\Delta i(\tilde{\mu})(S) = \tilde{\mu}(A) = \Delta i(\tilde{\mu})(A)$. Por lo tanto A es grueso con respecto a $\Delta i(\tilde{\mu}) \in \Delta(S)$. Es claro que Δi es inyectiva: notar que $\tilde{\mu}(E \cap A) = \tilde{\mu} \circ i^{-1}(E) = \Delta i(\tilde{\mu})(E) = (\Delta i(\tilde{\mu}))_A(E \cap A)$, y por lo tanto $(j \circ \Delta i)(\tilde{\mu}) = \tilde{\mu}$.

Supongamos ahora que A es grueso con respecto a $\mu \in \Delta(S)$. Entonces por definición de $\mu_A \in \Delta(A)$ tenemos que $(\Delta i \circ j)(\mu) = \mu_A \circ i^{-1} = \mu$. Esto prueba la suryectividad. \square

Observamos que $\text{dom}(j) = \{\mu \in \Delta(S) \mid \mu(A) = \mu(S)\}$ está en $\Delta(\Sigma)$ pues es el conjunto donde coinciden las dos funciones medibles ev_A y ev_S . Si $E \in \Sigma$,

$$\begin{aligned} j^{-1}[\Delta^{<q}(E \cap A)] &= \{\mu \in \text{dom}(j) \mid \mu_A \in \Delta^{<q}(E \cap A)\} = \{\mu \in \text{dom}(j) \mid \mu_A(E \cap A) < q\} \\ &= \{\mu \in \text{dom}(j) \mid \mu(E) < q\} = \Delta^{<q}(E) \cap \text{dom}(j) \in \Delta(\Sigma). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Supongamos que $A \subseteq S$ es grueso para toda $\mu \in \bigcup\{\mathbb{T}_a(s) \mid s \in A, a \in L\}$. Por Teorema 4.29, para cada $s \in A$ tenemos un conjunto de medidas

$$(\mathbb{T}_a \upharpoonright A)(s) := \{\mu_A \in \Delta(A) \mid \mu \in \mathbb{T}_a(s)\} \subseteq \Delta(A)$$

y podemos considerar la tupla

$$\mathbb{A} := (A, \Sigma \upharpoonright A, \{\mathbb{T}_a \upharpoonright A \mid a \in L\}). \quad (4.5)$$

Observación 4.31. Sea $D \in \Delta(\Sigma)$ y $s \in A$. Dado que para toda $\mu_A \in \mathbb{T}_a \upharpoonright A(s)$ vale $\Delta i(\mu_A) = \mu$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_a \upharpoonright A(s) \cap (\Delta i)^{-1}[D] \neq \emptyset &\iff \exists \mu \in \mathbb{T}_a(s) \Delta i(\mu_A) \in D \\ &\iff \exists \mu \in \mathbb{T}_a(s) \mu \in D \\ &\iff \mathbb{T}_a(s) \cap D \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Proposición 4.32. *Sea $A \subseteq S$ medible tal que para todo $s \in A$, $a \in L$ y toda medida $\mu \in \mathbb{T}_a(s)$, A es un subconjunto grueso de (S, Σ, μ) . Entonces \mathbb{A} en (4.5) es un NLMP.*

Demostración. Si $\mu \in \mathbb{T}_a(s)$, entonces $\mu = \mu_A \circ i^{-1}$ y dado que $\mathbb{T}_a(s) \in \Delta(\Sigma)$, tenemos que

$$\begin{aligned} (\mathbb{T}_a \upharpoonright A)(s) &= \{\mu_A \in \Delta(A) \mid \mu \in \mathbb{T}_a(s)\} = \{\mu_A \in \Delta(A) \mid \Delta i(\mu_A) \in \mathbb{T}_a(s)\} \\ &= \{\mu \in \Delta(A) \mid \Delta i(\mu) \in \mathbb{T}_a(s)\} = (\Delta i)^{-1}[\mathbb{T}_a(s)] \in \Delta(\Sigma \upharpoonright A). \end{aligned}$$

Además $\mathbb{T}_a \upharpoonright A : A \rightarrow \Delta(\Sigma \upharpoonright A)$ es función medible. En efecto, sea $\tilde{D} \in \Delta(\Sigma \upharpoonright A)$ y $D \in \Delta(\Sigma)$ tal que $\tilde{D} = (\Delta i)^{-1}[D]$, entonces

$$\begin{aligned} (\mathbb{T}_a \upharpoonright A)^{-1}[H_{\tilde{D}}] &= \{s \in A \mid (\mathbb{T}_a \upharpoonright A)(s) \cap \tilde{D} \neq \emptyset\} = \{s \in A \mid \mathbb{T}_a(s) \cap D \neq \emptyset\} \\ &= \mathbb{T}_a^{-1}[H_D] \cap A \in \Sigma \upharpoonright A. \end{aligned} \quad \square$$

Definición 4.33. Sea \mathbb{S} un NLMP y $A \subseteq S$ medible tal que para todo $s \in A$, $a \in L$ y toda medida $\mu \in \mathbb{T}_a(s)$, A es un subconjunto grueso de (S, Σ, μ) . Diremos que \mathbb{A} definido en (4.5) es una subestructura (o sub-NLMP) de \mathbb{S} .

Proposición 4.34. *Sea \mathbb{S} un NLMP y \mathbb{A} una subestructura. Si $s \in A$, entonces $(\mathbb{S}, s) \sim_s^\times (\mathbb{A}, s)$.*

Demostración. Basta ver que la relación $R \subseteq S \times A$ dada por $R := \text{id} \upharpoonright A$ es bisimulación de estados externa entre (\mathbb{S}, s) y (\mathbb{A}, s) . Sean $(x, x) \in R$ y (E, E') un par R -cerrado tal que $E \in \Sigma$ y $E' \in \Sigma \upharpoonright A$. Entonces $E \cap A = E'$. Luego, si $\mu \in \mathbb{T}_a(x)$, como A es grueso con respecto a μ , $\mu(E) = \mu(E \cap A) = \mu_A(E')$. Recíprocamente, si $\mu_A \in \mathbb{T}_a \upharpoonright A(x)$ entonces $\mu_A(E') = \mu_A(E \cap A) = \mu(E)$. \square

Nos ocupamos ahora de las nociones de bisimulación en la subestructura \mathbb{A} . Como siempre, primero necesitamos decir algo sobre los conjuntos medibles y cerrados para relaciones en A .

Lema 4.35. Sean $A \subseteq S$ y $R \subseteq A \times A$, entonces $\Sigma(R) \upharpoonright A = \Sigma \upharpoonright A(R)$.

Demostración. (\subseteq) Es claro que $\Sigma(R) \upharpoonright A \subseteq \Sigma \upharpoonright A$. Sólo resta ver que todo $B \cap A \in \Sigma(R) \upharpoonright A$ es R -cerrado: si $x \in B \cap A$ y $x R y$, entonces $y \in B$ (pues B es R -cerrado) y $y \in A$ (pues $R \subseteq A \times A$), luego $y \in B \cap A$.

(\supseteq) Si $B \in \Sigma \upharpoonright A(R)$, entonces $B \in \Sigma \upharpoonright A$ y por lo tanto $B = B' \cap A$ para algún $B' \in \Sigma$. Si $x \in B'$ y $x R y$, entonces $x, y \in A$. Luego $x \in B' \cap A = B$ y, por ser B un R -cerrado, se tiene $y \in B \subseteq B'$. Luego, B' es R -cerrado y por lo tanto $B \in \Sigma(R) \upharpoonright A$. \square

Lema 4.36. Supongamos que \mathbb{A} es una subestructura de \mathbb{S} y sea $R \subseteq A \times A$ relación simétrica.

1. R es bisimulación de estados en \mathbb{A} si y sólo si es bisimulación de estados en \mathbb{S} .
2. R es bisimulación de impactos en \mathbb{A} si y sólo si es bisimulación de impactos en \mathbb{S} .
3. Si $\Lambda \subseteq \Sigma$ es bisimulación de eventos en \mathbb{S} , entonces $\Lambda \upharpoonright A$ es bisimulación de eventos en \mathbb{A} .

Demostración. Sean $s, t \in S$ tales que $s R t$ (notar que por hipótesis $s, t \in A$).

1. (\Rightarrow) Si R es bisimulación en \mathbb{A} y $\mu \in T_a(s)$, entonces $\mu_A \in T_a \upharpoonright A(s)$. Dado que $s R t$, entonces $s, t \in A$ y existe $\mu' \in T_a(t)$ tal que $\mu_A R \mu'_A$. Verificamos que $\mu \bar{R} \mu'$ y por lo tanto R es bisimulación de estados en \mathbb{S} . Usando el Lema 4.35, si $B \in \Sigma(R)$, entonces $B \cap A \in \Sigma(R) \upharpoonright A = \Sigma \upharpoonright A(R)$ y vale que $\mu(B) = \mu_A(B \cap A) = \mu'_A(B \cap A) = \mu'(B)$.

(\Leftarrow) Si R es bisimulación en \mathbb{S} y $\tilde{\mu} \in T_a \upharpoonright A(s)$, entonces $\tilde{\mu} = \mu_A$ para alguna $\mu \in T_a(s)$. Dado que $s R t$, existe $\mu' \in T_a(t)$ tal que $\mu \bar{R} \mu'$. Verificamos que $\mu_A \bar{R} \mu'_A$ y por lo tanto R es bisimulación de estados en \mathbb{A} : si $B \in \Sigma \upharpoonright A(R) = \Sigma(R) \upharpoonright A$ entonces $B = B' \cap A$ con $B' \in \Sigma(R)$ y vale $\mu_A(B \cap A) = \mu(B') = \mu'(B') = \mu'_A(B \cap A)$.

2. (\Rightarrow) Supongamos que R es bisimulación de impactos en \mathbb{A} y sea $D \in \Delta(\Sigma(R))$.

$$\begin{aligned} T_a(s) \cap D \neq \emptyset &\iff T_a \upharpoonright A(s) \cap (\Delta i)^{-1}[D] \neq \emptyset \\ &\iff T_a \upharpoonright A(t) \cap (\Delta i)^{-1}[D] \neq \emptyset \\ &\iff T_a(t) \cap D \neq \emptyset. \end{aligned}$$

(\Leftarrow) Aplicamos el Lema 4.28 a $\Gamma = \Sigma(R)$ y vía el Lema 4.35 obtenemos la igualdad $(\Delta i)^{-1}[\Delta(\Sigma(R))] = \Delta(\Sigma \upharpoonright A(R))$. Si R es bisimulación de impactos en \mathbb{S} y $\tilde{D} \in \Delta(\Sigma \upharpoonright A(R))$, sea $D \in \Delta(\Sigma(R))$ tal que $\tilde{D} = (\Delta i)^{-1}[D]$. Luego,

$$\begin{aligned} T_a \upharpoonright A(s) \cap \tilde{D} \neq \emptyset &\iff T_a \upharpoonright A(s) \cap (\Delta i)^{-1}[D] \neq \emptyset \\ &\iff T_a(s) \cap D \neq \emptyset \\ &\iff T_a(t) \cap D \neq \emptyset \\ &\iff T_a \upharpoonright A(t) \cap \tilde{D} \neq \emptyset. \end{aligned}$$

3. Primero aplicamos el Lema 4.28 a $\Gamma = \Lambda$ para obtener que $(\Delta i)^{-1}[\Delta(\Lambda)] = \Delta(\Lambda \upharpoonright A)$. Debemos verificar que $T_a \upharpoonright A : (A, \Lambda \upharpoonright A) \rightarrow (\Delta(\Sigma \upharpoonright A), H(\Delta(\Lambda \upharpoonright A)))$ es medible. Sean $\tilde{D} \in$

$\Delta(\Lambda \upharpoonright A)$ y $D \in \Delta(\Lambda)$ tales que $\tilde{D} = (\Delta i)^{-1}[D]$, entonces

$$\begin{aligned} (\mathbb{T}_a \upharpoonright A)^{-1}[H_{\tilde{D}}] &= \{s \in A \mid \mathbb{T}_a \upharpoonright A(s) \in H_{\tilde{D}}\} \\ &= \{s \in A \mid \mathbb{T}_a \upharpoonright A(s) \cap \tilde{D} \neq \emptyset\} \\ &= \{s \in A \mid \mathbb{T}_a \upharpoonright A(s) \cap (\Delta i)^{-1}[D] \neq \emptyset\} \\ &= \{s \in A \mid \mathbb{T}_a(s) \cap D \neq \emptyset\} \\ &= (\mathbb{T}_a)^{-1}[H_D] \cap A. \end{aligned}$$

Ya que $D \in \Delta(\Lambda)$, entonces $H_D \in H(\Delta(\Lambda))$ y por lo tanto $(\mathbb{T}_a)^{-1}[H_D] \in \Lambda$ por ser bisimulación de eventos. \square

Ejemplo 4.37. *Construyamos un proceso \mathbb{S} que muestre que la restricción de una bisimulación de estados en \mathbb{S} a una subestructura \mathbb{A} no siempre resulta bisimulación de estados en \mathbb{A} .*

Consideramos el intervalo $I = (0, 1)$ con la medida de Lebesgue \mathbf{m} y un subconjunto $V \subseteq (0, \frac{1}{2})$ \mathbf{m} -medible no Borel. Sean $Q \subseteq V$ y $Q' \subseteq I \setminus V$ conjuntos Borel tales que $\mathbf{m}(Q) = \mathbf{m}(V)$ y $\mathbf{m}(Q') = \mathbf{m}(I \setminus V)$ y fijamos $c \in (0, 1)$. En el espacio medible $(S, \Sigma) := (I \cup \{s, t\}, \sigma(\mathcal{B}(I) \cup \mathcal{P}(\{s, t\})))$ tomamos las transiciones

$$\begin{aligned} \tau(s) &= \mathbf{m}, \\ \tau(t) &= c\mathbf{m} \upharpoonright (0, \frac{1}{2}) + (1 - c)\mathbf{m} \upharpoonright [\frac{1}{2}, 1). \end{aligned}$$

Si $R := \mathcal{R}(\{V, \{s, t\}\})$, entonces $\Sigma(R) = \{S, \emptyset, I, \{s, t\}\}$ y por lo tanto R es bisimulación de estados.

Definimos $A := Q \cup Q' \cup \{s, t\}$, entonces A es medible y grueso para todas las transiciones. La relación $R \upharpoonright A := R \cap A \times A$ tiene por clases de equivalencia a Q , Q' y $\{s, t\}$. Además vale la contención estricta

$$\Sigma(R) \upharpoonright A = \{A, \{s, t\}, Q \cup Q', \emptyset\} \subsetneq \sigma(\{Q, Q', \{s, t\}\}) = \Sigma \upharpoonright A(R \upharpoonright A).$$

Se sigue que $R \upharpoonright A$ no es bisimulación de estados en \mathbb{A} ya que $(s, t) \in R \upharpoonright A$ y sin embargo $Q \in \Sigma \upharpoonright A(R \upharpoonright A)$ satisface $\tau(s)(Q) = \mathbf{m}(V) \neq c\mathbf{m}(V) = \tau(t)(Q)$.

Un problema en el ejemplo previo es que la bisimulación R no es “buena”.

Lema 4.38 ([Gao08, Lemma 5.4.6]). *Sea E una relación de equivalencia analítica en un espacio de Borel estándar X . Sean $B, C \subseteq X$ dos conjuntos analíticos E -invariantes disjuntos. Entonces existe un conjunto Borel E -invariante D tal que $B \subseteq D$ y $D \cap C = \emptyset$.*

Lema 4.39 ([Arv76, Cor.2 p.73]). *Sea X un espacio medible analítico y R una relación de equivalencia en X . Supongamos que existe una sucesión de funciones Borel $f_1, f_2, \dots : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para cualesquiera $x, y \in X$ vale que $x R y \iff \forall n f_n(x) = f_n(y)$. Entonces X/R es espacio medible analítico.*

Recordamos que una relación de equivalencia R en un espacio de Borel estándar es suave si y sólo si existe una familia contable \mathcal{F} de conjuntos Borel tal que $R = \mathcal{R}(\mathcal{F})$. En particular, satisface las hipótesis del lema anterior si tomamos las funciones características de los conjuntos en \mathcal{F} .

Lema 4.40. *Supongamos que \mathbb{A} es una subestructura de \mathbb{S} y sea $R \subseteq S \times S$ una bisimulación de estados suave. Entonces $R \upharpoonright A = R \cap A \times A$ es bisimulación de estados en \mathbb{A} .*

Demostración. Por Lema 4.39 el espacio cociente S/R es analítico. Supongamos que $R \upharpoonright A$ es no vacío y sean $(s, s') \in R \upharpoonright A$ y $\mu_A \in \mathbb{T}_a \upharpoonright A(s)$. Sea $\mu' \in \mathbb{T}_a(s')$ tal que $\mu \bar{R} \mu'$. Verificamos que $\mu_A \bar{R} \upharpoonright \bar{A} \mu'_A$. Por Lema 4.35, $\Sigma \upharpoonright A(R \upharpoonright A) = \Sigma(R \upharpoonright A) \upharpoonright A$ y como A es medible, $\Sigma \upharpoonright A(R \upharpoonright A) \subseteq \Sigma(R \upharpoonright A)$. Si $W \in \Sigma \upharpoonright A(R \upharpoonright A)$, $W \in \Sigma$ está incluido en A . Si $W = A$, $\mu_A(W) = \mu(A) = \mu(S) = \mu'(S) = \mu'_A(W)$. Si $W \subsetneq A$, sea $z \in A \setminus W$ y definimos $B := \pi^{-1}[\pi[W]]$, $C := \pi^{-1}[\pi[\{s\}]]$. Ambos conjuntos son analíticos R -invariantes y $B \cap C = \emptyset$. Por Lema 4.38, existe un conjunto $D \in \Sigma(R)$ que contiene a B y es disjunto de C . Luego, $W = D \cap A \in \Sigma(R) \upharpoonright A$ y por lo tanto $\mu_A(W) = \mu(D) = \mu'(D) = \mu'_A(W)$. \square

Concluimos la sección con un resultado que vincula las bisimulaciones de estados externas entre subestructuras de un mismo NLMP con sus bisimulaciones internas.

Lema 4.41. *Sean \mathbb{A} y \mathbb{A}' dos subestructuras de \mathbb{S} . Si $R \subseteq A \times A'$ es bisimulación de estados externa, entonces $R \cup R^{-1}$ es bisimulación de estados en \mathbb{S} .*

Demostración. Notamos primero que $R \cup R^{-1}$ es simétrica. Sea $(s, s') \in R \cup R^{-1}$ y $\mu \in \mathbb{T}_a(s)$. Si $(s', s) \in R$, por condición zag en la definición de bisimulación externa, existe $\mu' \in \mathbb{T}_a(s')$ tal que $\mu' \bar{R} \mu$ (en sentido externo). Si $(s, s') \in R$ usamos la condición zig. Si $E \subseteq S$ es medible y $R \cup R^{-1}$ -cerrado, entonces $(E \cap A, E \cap A')$ es par R -cerrado; en efecto, si $e \in E$ y $t \in S$ entonces $e R t \Rightarrow e R \cup R^{-1} t \Rightarrow t \in E$ y también $t R e \Rightarrow e R \cup R^{-1} t \Rightarrow t \in E$. Se sigue que $\mu(E) = \mu(E \cap A) = \mu'(E \cap A') = \mu'(E)$. \square

Si tenemos bisimulación interna $R \subseteq S \times S$, entonces $R \cup \text{id}$ también es bisimulación interna y externa por Lema 2.49. Por lo tanto en un mismo NLMP, $s \sim_s t \iff (\mathbb{S}, s) \sim_s^\times (\mathbb{S}, t)$.

4.4. Un juego para la bisimilitud de estados

Un problema típico al trabajar con bisimulaciones entre procesos de algún tipo es la pregunta sobre la caracterización de la bisimilitud en términos de juegos. Para concepto básicos del tipo de juegos que nos interesan referimos, por ejemplo, a [Kec94, Section 20.A].

En [CFKP19, p.23] se presenta un juego para caracterizar la bisimilitud de estados entre dos LMP. A continuación adaptamos tal juego para caracterizar la bisimilitud de estados externa entre dos NLMP de imagen contable $\mathbb{S}_0 = (S_0, \Sigma_0, \{\mathbb{T}_a^0 \mid a \in L\})$ y $\mathbb{S}_1 = (S_1, \Sigma_1, \{\mathbb{T}_a^1 \mid a \in L\})$. El juego comienza en un par de estados $x_0^0 \in S_0$, $x_1^0 \in S_1$ y se desarrolla según las siguientes reglas:

1. Spoiler juega una etiqueta $a \in L$, un índice $i \in \{0, 1\}$, una medida $\mu \in \mathbb{T}_a^i(x_i^j)$ y una sucesión de pares medibles (C_n, C'_n) tales que $\forall n \mu(C_n) \neq \mu'_n(C'_n)$ para una enumeración $\mathbb{T}_a^{1-i}(x_{1-i}^j) = \{\mu'_n\}_{n \in \omega}$.
2. Duplicator responde con estados $x_0^{j+1} \in S_0$ y $x_1^{j+1} \in S_1$ tales que para algún $n \in \omega$ $x_0^{j+1} \in C_n \iff x_1^{j+1} \notin C'_n$. El juego continúa desde (x_0^{j+1}, x_1^{j+1}) .

Si un jugador no puede responder una jugada, pierde esa partida. Duplicator gana si el juego es infinito. Spoiler puede ganar cuando es capaz de seleccionar $(C_n, C'_n) = (S_0, S_1)$ para todo $n \in \omega$; un caso particular de esto es cuando alguno, y sólo uno, de los dos conjuntos $\mathbb{T}_a^i(x_i^j)$ es vacío. Por otro lado, Duplicator puede ganar ya sea forzando un juego infinito o eligiendo

estados para los cuales ambos conjuntos $\mathbb{T}_a^i(x_i^j)$ son vacíos o cumplen que $\mu(C) = \mu'(C')$ para cualesquiera medidas $\mu \in \mathbb{T}_a^0(x_0^j)$, $\mu' \in \mathbb{T}_a^1(x_1^j)$ y par de medibles $C \in \Sigma_0$, $C' \in \Sigma_1$.

Las jugadas de Duplicator serán pares de estados (x_0^j, x_1^j) sobre los cuales afirma que son bisimilares por estados mientras que Spoiler quiere probar que no lo son. Para ello elige una etiqueta a y un comportamiento posible (i.e. una medida) de modo que ningún comportamiento del otro estado asociado a la misma etiqueta pueda imitarlo. Los pares de medibles (C_n, C'_n) , supuestamente cerrados por bisimilitud, atestiguarían esta diferencia de comportamiento. Sin embargo, la razón de esa discrepancia no es disputada por Duplicator, quien afirma que algún par (C_n, C'_n) no es cerrado por bisimilitud. Para ello elige dos estados $x_0^{j+1} \in S_0$ y $x_1^{j+1} \in S_1$ tales que $x_0^{j+1} \in C_n \iff x_1^{j+1} \notin C'_n$ y afirma que son bisimilares.

Lema 4.42. *El juego está determinado para cualquier posición inicial (x_0^0, x_1^0) .*

Demostración. El argumento depende únicamente de que en todas las partidas infinitas gana Duplicator. Supongamos que Spoiler no tiene estrategia ganadora, entonces para cada una de sus posibles primeras jugadas debe existir una jugada (x_0^1, x_1^1) de Duplicator tal que Spoiler tampoco tiene estrategia ganadora en el juego a partir de (x_0^1, x_1^1) . Repetimos este argumento para seleccionar una segunda jugada de Duplicator (x_0^2, x_1^2) . Continuando de este modo obtenemos una estrategia ganadora para Duplicator ya que la partida resulta infinita y por ende ella gana ese juego. \square

Proposición 4.43. *Dos estados $x_0^0 \in S_0$, $x_1^0 \in S_1$ son ext-bisimilares por estados si y sólo si Duplicator tiene estrategia ganadora en el juego que comienza en (x_0^0, x_1^0) .*

Demostración. (\Rightarrow) Si Spoiler puede llevar a cabo la primera jugada, entre su elección de pares medibles (C_n, C'_n) debe existir alguno que no sea cerrado para bisimilitud externa. Duplicator puede entonces elegir un par de estados bisimilares tales que $x_0^1 \in C_n \iff x_1^1 \notin C'_n$ y repetir esta estrategia en cada jugada.

(\Leftarrow) Mostramos que $x_0^0 \sim_{\mathcal{S}}^{\times} x_1^0$. Sea R el conjunto de pares $(x, y) \in S_0 \times S_1$ para los cuales Duplicator tiene estrategia ganadora en el juego que comienza en (x, y) . Probemos que R es bisimulación de estados externa. Por el absurdo, supongamos que no lo es y sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe $(s, t) \in R$ y $\mu \in \mathbb{T}_a^0(s)$ tal que para toda $\mu'_n \in \mathbb{T}_a^1(t)$ existe (C_n, C'_n) par medible R -cerrado tal que $\mu(C_n) \neq \mu'_n(C'_n)$.

Definimos $i = 0, \mu, \{(C_n, C'_n) \mid n \in \omega\}$ como la primera jugada de Spoiler. Sin importar qué par (s', t') juegue Duplicator, debe suceder $(s', t') \notin R$ ya que (C_n, C'_n) es par R -cerrado para todo n y, por definición de la jugada, existe $N \in \omega$ tal que $s' \in C_N \iff t' \notin C'_N$. Como el juego está determinado, Spoiler debe tener estrategia ganadora desde (s', t') . Esto define una estrategia ganadora para Spoiler desde $(s, t) \in R$, lo cual es absurdo. Luego, R es bisimulación de estados externa. \square

Para el caso de la bisimilitud interna, podemos usar el juego presentado con la suposición $\mathbb{S}_0 = \mathbb{S}_1$. En tal situación, Spoiler se ve obligado a elegir pares coincidentes $C = C'$, caso contrario Duplicator puede seleccionar un par (x, x) para algún x tal que $x \in C \iff x \notin C'$ y ganar la partida. Por lo tanto, si trabajamos en un único NLMP podemos simplificar el juego a uno donde Spoiler elige medibles C_n (y no pares medibles) y ambos juegos son equivalentes. Si los procesos no incluyen nodeterminismo, i.e. pueden pensarse como LMP, el juego resultante en este caso es idéntico al juego propuesto en [CFKP19] ya que la jugada de Spoiler se reduce a una etiqueta $a \in L$ y un medible $C \in \Sigma$ tal que $\tau_a(x_0, C) \neq \tau_a(x_1, C)$.

Capítulo 5

Complejidad de la bisimilitud

Conceal me what I am, and be my aid for
such disguise as haply shall become the
form of my intent.

William Shakespeare, *Twelfth Night*

Hemos llegado al capítulo final, el cual contiene el desarrollo central del segundo interrogante planteado al inicio de esta tesis. Iniciamos repasando un resultado bien conocido de la teoría de modelos de lógica modal para el cual damos una prueba dirigida a nuestras aplicaciones. Luego, en la Sección 5.1 comenzamos el estudio con las estructuras más simples que exhiben no determinismo interno no probabilista: procesos que pueden representarse como árboles. La ramificación contable es una hipótesis fija a lo largo de todo este capítulo y añadiremos restricciones al rango de los procesos, vía una caracterización por fórmulas, para sacar ventaja de resultados de clasificación existentes. En 5.1.1 nos concentramos en LTS puntuados sobre los naturales para los cuales damos una reducción continua que preserva rangos. A partir de esto, restringir el rango de los procesos nos permite crear un ambiente propicio para las codificaciones y usar resultados sobre árboles bien fundados. En la sección siguiente, 5.1.2, probamos que la bisimilitud en la clase de LTS sobre \mathbb{N} de cierto rango contable reduce a la relación que divide la clasificación entre las relaciones suaves y las que no lo son. Esto tiene consecuencias importantes sobre la lógica modal básica (BML).

En la Sección 5.2 retornamos al contexto de NLMP y si bien continuamos en el caso no probabilista (MLTS), diseñamos condiciones de medibilidad que permiten ubicar en la jerarquía descriptiva a la bisimilitud en un tal proceso, los ahora llamados UMLTS. Análogo a lo probado en la sección anterior, en 5.2.1 vemos que restricciones en el rango “bajan” la clasificación. De hecho este último desarrollo permite simplificar el trabajo previo, los Diagramas (5.7) y (5.10) ilustran ambos caminos.

Finalmente, en la Sección 5.3 damos un pequeño paso para deshacernos del no probabilismo impuesto hasta ese momento e introducimos procesos cuyas transiciones son múltiplos de deltas de Dirac. Usando técnicas anteriores, en particular la de dar definiciones Borel de la bisimilitud, probamos que tal relación es analítica en estos procesos. En la sección de conclusiones 5.4 hacemos algunos comentarios finales.

Comenzamos la exposición con una breve motivación. Supongamos que tenemos un LMP \mathbb{S} sobre un espacio de estados analítico y con una cantidad contable de etiquetas. Gracias a la caracterización lógica y a la medibilidad de las semánticas $[[\phi]]$ para cada $\phi \in \mathcal{L}$, la relación de

bisimilitud resulta ser un conjunto Borel de $S \times S$. En efecto, la siguiente es una definición Borel de la misma:

$$s \sim_s t \iff (s, t) \in \bigcap \{([\phi] \times [\phi]) \cup ((S \setminus [\phi]) \times (S \setminus [\phi])) \mid \phi \in \mathcal{L}\}.$$

Una consecuencia es que las clases de bisimilitud de estados también serán conjuntos Borel ya que son secciones de \sim_s : $[s_0] = \{s \in S \mid (s, s_0) \in \sim_s\} = \iota_{s_0}^{-1}(\sim_s)$ donde $\iota_{s_0} : S \rightarrow S \times S$ es la inclusión $\iota_{s_0}(s) = (s, s_0)$. En muchos ejemplos que hemos visto hasta ahora la bisimilitud de estados es la relación identidad y al estar basados en espacios metrizable separables, los singuletes, o sea las clases de bisimilitud, también son Borel.

Esto ilustra que la cuestión sobre la complejidad (en el sentido descriptivo) de las relaciones de bisimilitud y de las clases de bisimilitud es una pregunta interesante sobre las distintas familias de procesos. Por los resultados en [ST15] sabemos que en NLMP la bisimilitud de estados puede no ser Borel. En este capítulo estudiaremos algunos casos de estructuras donde podemos “bajar” la complejidad y recuperar su clasificación Borel. Comenzaremos con LTS (Definición 1.15), para los cuales ya sabemos que la bisimilitud es analítica completa, pero con restricciones sobre su profundidad. La herramienta principal será el uso de árboles como representantes canónicos del tipo de bisimilitud de un estado en un LTS (referimos a Definición 1.7 y subsiguientes para conceptos y notación vinculada a árboles). Por medio del desplegado (*tree unfolding*), cualquier LTS punteado es bisimilar a un árbol. Pero si se quiere que la bisimilitud se corresponda con isomorfismo entre los árboles asociados, se debe tener en cuenta la multiplicidad de los sucesores. En el caso de ramificación contable, este requisito se resuelve con las ω -expansiones. Adaptamos la siguiente definición de [BBW06, p.275]:

Definición 5.1. Dado un LTS $\mathbb{S} = (S, \{R_a\}_{a \in L})$, un camino ω -indexado desde $s \in S$ es una sucesión de la forma

$$u = (s_1, a_1, n_1)(s_2, a_2, n_2) \dots (s_m, a_m, n_m)$$

tal que $a_i \in L$, $n_i \in \mathbb{N}$, $s \xrightarrow{a_1} s_1$ y para todo $i \in \{1, \dots, m-1\}$ $s_i \xrightarrow{a_{i+1}} s_{i+1}$.

La ω -expansión en s de \mathbb{S} es el LTS $(Tr_{\mathbb{S}}(s), \{Suc_{\mathbb{S}}^a(s)\}_{a \in L})$ donde $Tr_{\mathbb{S}}(s) \subseteq (S \times L \times \mathbb{N})^{<\mathbb{N}}$ es el conjunto de todos los caminos ω -indexados desde s junto a la palabra vacía ϵ , y $Suc_{\mathbb{S}}^a(s) \subseteq Tr_{\mathbb{S}}(s) \times Tr_{\mathbb{S}}(s)$ se define por $(u, v) \in Suc_{\mathbb{S}}^a(s)$ si y sólo si $v = u(t, a, n)$ para algún $t \in S$ y $n \in \mathbb{N}$.

Notamos que $Tr_{\mathbb{S}}(s)$ es un *árbol* en $S \times L \times \mathbb{N}$, i.e., es cerrado por segmentos iniciales. La relevancia de esta construcción está dada por el siguiente resultado:

Teorema 5.2 ([GO07, Corollary 47]). *Si (\mathbb{S}, s) y (\mathbb{S}', s') son LTS de ramificación contable: $(\mathbb{S}, s) \sim (\mathbb{S}', s') \iff (Tr_{\mathbb{S}}(s), \{Suc_{\mathbb{S}}^a(s)\}_{a \in L}) \cong (Tr_{\mathbb{S}'}(s'), \{Suc_{\mathbb{S}'}^a(s')\}_{a \in L})$.*

A continuación daremos una prueba de la dirección (\implies) de este teorema que explicita un isomorfismo con propiedades particulares que nos servirá en la Sección 5.2 más adelante. Probamos primero el siguiente resultado auxiliar.

Lema 5.3. *Si R una bisimulación entre los LTS (\mathbb{S}, s) y (\mathbb{S}', s') , la relación \bar{R} dada por*

$$\begin{aligned} \epsilon \bar{R} u' &\iff u' = \epsilon, \\ u \bar{R} \epsilon &\iff u = \epsilon, \\ u(r, a, n) \bar{R} u'(r', a', n') &\iff u \bar{R} u' \wedge r R r' \wedge a = a' \end{aligned}$$

es bisimulación entre $(Tr_{\mathbb{S}}(s), \epsilon)$ y $(Tr_{\mathbb{S}'}(s'), \epsilon)$.

Demostración. Observamos primero que $u \bar{R} u' \implies |u| = |u'|$. Si $u, v \in Tr_{\mathbb{S}}(s)$ satisfacen $(u, v) \in Suc_{\mathbb{S}}^a(s)$ y $u \bar{R} u'$ entonces, por definición de $Suc_{\mathbb{S}}^a(s)$, $v = u(r, a, n)$ para ciertos $r \in S$ y $n \in \omega$. Dividimos en dos casos:

1. Si $u = \epsilon$, entonces $s \xrightarrow{a} r$ y por lo tanto existe $r' \in S'$ tal que $s' \xrightarrow{a} r'$ y $r \bar{R} r'$. Sea $v' = \epsilon(r', a, n)$, entonces $(\epsilon, v') \in Suc_{\mathbb{S}'}^a(s')$ y $v \bar{R} v'$.
2. Si $|u| \geq 1$, entonces $u = u_0(r_0, b, m)$ para r_0 tal que $r_0 \xrightarrow{a} r$. Ya que $u \bar{R} u'$, entonces $|u'| = |u| \geq 1$ y por lo tanto $u' = u'_0(r'_0, b, m')$ con $u_0 \bar{R} u'_0$ y $r_0 \bar{R} r'_0$. Sea $r' \in S'$ tal que $r'_0 \xrightarrow{a} r'$ y $r \bar{R} r'$. Sea $v' = u'(r', a, n)$, entonces $(u', v') \in Suc_{\mathbb{S}'}^a(s')$ y $v \bar{R} v'$.

La condición recíproca es completamente análoga. Tenemos entonces una bisimulación \bar{R} tal que $\epsilon \bar{R} \epsilon$. \square

A partir de este resultado podemos construir el siguiente isomorfismo.

Proposición 5.4. Sean \mathbb{S}, \mathbb{S}' LTS de ramificación contable, R una bisimulación entre (\mathbb{S}, s) y (\mathbb{S}', s') y \bar{R} la correspondiente bisimulación como en Lema 5.3. Entonces existe isomorfismo $g : (Tr_{\mathbb{S}}(s), \{Suc_{\mathbb{S}}^a(s)\}_{a \in L}) \cong (Tr_{\mathbb{S}'}(s'), \{Suc_{\mathbb{S}'}^a(s')\}_{a \in L})$ tal que $u \bar{R} g(u)$.

Notamos que la conclusión de la proposición implica que, si $u \neq \epsilon$, las primeras coordenadas en las tuplas que conforman u están R -relacionadas con las respectivas primeras coordenadas en las tuplas que conforman $g(u)$.

Demostración. Dada R bisimulación tal que $s \bar{R} s'$, usaremos la bisimulación \bar{R} del Lema 5.3 para construir el isomorfismo. Definimos $g : Tr_{\mathbb{S}}(s) \rightarrow Tr_{\mathbb{S}'}(s')$ por inducción en la longitud l del camino ω -indexado de modo que satisfaga las siguientes propiedades:

1. $|g(u)| = |u|$,
2. $u \bar{R} g(u)$,
3. g es inyectiva,
4. g alcanza todos los caminos de longitud l .

Para el caso $l = 0$ definimos $g(\epsilon) = \epsilon$ y es claro que se satisfacen todas las propiedades. Para el caso inductivo, supongamos que g está definida para todos los caminos u de longitud l , que satisface las propiedades listadas y sea $v = u(r, a, n)$ un camino de longitud $l + 1$. Denotaremos con r_0 al último estado en el camino $u \neq \epsilon$, o $r_0 = s$ en el caso $u = \epsilon$. Por definición de camino ω -indexado, $r_0 \xrightarrow{a} r$. Dado que \bar{R} es bisimulación, $u \bar{R} g(u)$ y $(u, v) \in Suc_{\mathbb{S}}^a(s)$, existe $v' \in Tr_{\mathbb{S}'}(s')$ tal que $v' = g(u)(r', a, n')$ y $v \bar{R} v'$. Si r'_0 denota el último estado de $g(u)$, o $r'_0 = s'$ en el caso $u = \epsilon$, entonces $r'_0 \xrightarrow{a} r'$ y por definición de \bar{R} vale $r_0 \bar{R} r'_0$ y $r \bar{R} r'$.

Consideramos enumeraciones sin repeticiones $\{t_i\}_{i \in A} = \{t \in S \mid r_0 \xrightarrow{a} t\}$ y $\{t'_i\}_{i \in A'} = \{t' \in S' \mid r'_0 \xrightarrow{a} t'\}$ de los a -sucesores de r_0 y r'_0 con índices en conjuntos $A, A' \subseteq \mathbb{N}$. Dado que $r_0 \bar{R} r'_0$, existen mapas $f : \{t_i\}_{i \in A} \rightarrow \{t'_i\}_{i \in A'}$ y $f' : \{t'_i\}_{i \in A'} \rightarrow \{t_i\}_{i \in A}$ tales que $t_i \bar{R} f(t_i)$ y $f'(t'_i) \bar{R} t'_i$. A partir de f, f' y alguna biyección fija $\alpha : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ podemos definir funciones

h, h' como sigue:

$$\begin{aligned} h &: \{(t, a, n) \mid r_0 \xrightarrow{a} t, n \in \omega\} \rightarrow \{(t', a, n) \mid r'_0 \xrightarrow{a} t', n \in \omega\} \\ h(t_i, a, n) &= (f(t_i), a, \alpha(i, n)), \\ h' &: \{(t', a, n) \mid r'_0 \xrightarrow{a} t', n \in \omega\} \rightarrow \{(t, a, n) \mid r_0 \xrightarrow{a} t, n \in \omega\} \\ h'(t'_i, a, n) &= (f'(t'_i), a, \alpha(i, n)). \end{aligned}$$

Gracias a la biyección α , se ve que h y h' son inyectivas. Por Teorema de Cantor-Bernstein-Schröder, para cada $\gamma = \gamma(u, a) = (r_0, r'_0, a)$ existe una función biyectiva

$$H_\gamma : \{(t, a, n) \mid r_0 \xrightarrow{a} t, n \in \omega\} \rightarrow \{(t', a, n) \mid r'_0 \xrightarrow{a} t', n \in \omega\}.$$

Notar que, por construcción, t está R -relacionado con la primera componente de $H_\gamma(t, a, n)$ (y por lo tanto son bisimilares) y además H_γ es la identidad en la segunda coordenada. Definimos

$$g(v) = g(u(r, a, n)) := g(u)H_{\gamma(u, a)}(r, a, n).$$

Verificamos que g satisface las condiciones 1-4 anteriores:

1. Esta condición es clara pues por HI $|u| = |g(u)|$ y $|H_\gamma(t, a, n)| = 1$.
2. Por HI $u \bar{R} g(u)$ y, como observamos antes, t está R -relacionado con la primera componente de $H_\gamma((t, a, n))$. Luego, $v \bar{R} g(v)$.
3. Si $g(u_0(t_0, a_0, n_0)) = g(u_1(t_1, a_1, n_1))$, por definición de g tenemos $g(u_0) = g(u_1)$ y $H_{\gamma(u_0, a_0)}(t_0, a_0, n_0) = H_{\gamma(u_1, a_1)}(t_1, a_1, n_1)$. Por HI, $u_0 = u_1$. Además, dado que H_γ es la identidad en las etiquetas, $a_0 = a_1$ y por consiguiente $\gamma(u_0, a_0) = \gamma(u_1, a_1)$. Luego, de la inyectividad de H_γ concluimos la inyectividad de g para palabras de longitud $l + 1$.
4. Si $v' = u'(t', a', n')$ es camino de longitud $|u| + 1$ en $Tr_{\mathbb{S}'}(s')$, por HI existe $u \in Tr_{\mathbb{S}}(s)$ tal que $u \sim g(u) = u'$. Sea $\gamma = \gamma(u, a')$. Como (t', a', n') está en codominio de H_γ , por suryectividad existe (t, a', n) tal que $H_\gamma(t, a', n) = (t', a', n')$. Luego, $v' = g(u(t, a', n))$ lo cual prueba el requisito 4. Más aún, esto prueba que $g^{-1}(v') = g^{-1}(u')H_\gamma^{-1}(t', a', n')$.

Por Principio de Inducción sobre \mathbb{N} , tenemos definida $g : Tr_{\mathbb{S}}(s) \rightarrow Tr_{\mathbb{S}'}(s')$ que cumple con las propiedades listadas.

Finalmente, probamos que $\forall a \in L, (u, v) \in Suc_{\mathbb{S}}^a(s) \iff (g(u), g(v)) \in Suc_{\mathbb{S}'}^a(s')$ para concluir que g es isomorfismo. Por construcción de g es claro que si $(u, v) \in Suc_{\mathbb{S}}^a(s)$, entonces $(g(u), g(v)) \in Suc_{\mathbb{S}'}^a(s')$. Recíprocamente, si $(g(u), g(v)) \in Suc_{\mathbb{S}'}^a(s')$, entonces $g(v) = g(u)(r', a', n') = g(u(H_{\gamma(u, a')}^{-1}(r', a', n')))$. Por inyectividad de g , $v = u(H_{\gamma(u, a')}^{-1}(r', a', n'))$, por lo tanto $(u, v) \in Suc_{\mathbb{S}}^a(s)$. \square

5.1. Procesos bien fundados

Si un árbol bien fundado tiene rango finito, sus ramas no pueden tener longitud mayor al rango. Si además contamos con una única etiqueta, la bisimilitud sólo detecta longitudes de ramas y por lo tanto la lógica modal básica sin conjunción, i.e. \top y \diamond , alcanza para caracterizar la bisimilitud. Si no nos restringimos al caso bien fundado finito esto ya no es cierto; el ejemplo

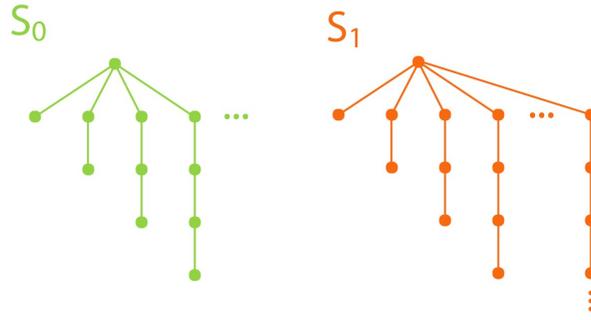


Figura 5.1: LTS no bisimilares equivalentes según BML.

típico es tomar un árbol S_0 con una rama de longitud n para cada $n \in \mathbb{N}$ y un árbol S_1 con la misma propiedad y además una rama infinita (ver Figura 5.1)¹.

Al final de esta sección mostraremos que esta limitación de BML perdura aún si nos restringimos a árboles bien fundados. Más aún, incluso tomando un fragmento contable de la extensión de BML con conjunciones y disyunciones numerables, tampoco se puede caracterizar la bisimilitud. Esto mejora drásticamente el Teorema 28 de [ST15].

En lo que sigue trabajaremos con LTS que pueden representarse como árboles de ramificación contable (más aún, serán árboles sobre conjuntos contables) y de rango contable y acotado. Para el caso de los árboles bien fundados de rango $\omega + 2$ mostraremos que la bisimilitud \sim es Borel y el resultado sobre la lógica será consecuencia de que la relación E_0 de igualdad eventual de sucesiones definida en (1.1) se reduce a \sim .

Definimos fórmulas φ_α para $\alpha < \omega_1$ como sigue:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &:= \top, \\ \varphi_{\alpha+1} &:= \bigvee_{a \in L} \langle a \rangle \varphi_\alpha, \\ \varphi_\lambda &:= \bigwedge_{\alpha < \lambda} \varphi_\alpha \quad \text{si } \lambda \text{ es ordinal límite.} \end{aligned} \tag{5.1}$$

Con estas fórmulas podemos definir el rango de un estado en un LTS con lenguaje L .

Definición 5.5. Si \mathbb{S} es LTS y $s \in S$, decimos que (\mathbb{S}, s) es bien fundado si existe un ordinal α tal que $(\mathbb{S}, s) \not\models \varphi_{\alpha+1}$. El rango de (\mathbb{S}, s) es el menor de tales ordinales cuando existe e ∞ si no. La parte bien fundada de \mathbb{S} es el conjunto de estados con rango distinto de ∞ .

El objetivo de esta sección será entonces estudiar la complejidad de la bisimilitud en procesos bien fundados con alguna restricción sobre el rango.

Proposición 5.6. $(\mathbb{S}, s) \sim (\mathbb{S}', s') \implies ((\mathbb{S}, s) \models \varphi_\alpha \Leftrightarrow (\mathbb{S}', s') \models \varphi_\alpha)$.

La prueba por inducción en α de esta proposición es muy sencilla y directa de las definiciones. El corolario inmediato es que estados bisimilares tienen el mismo rango. Notamos además que no vale la vuelta en este resultado. Un ejemplo sencillo sería tomar dos estados, cada uno con un único lazo para etiquetas distintas. Las fórmulas sólo expresan la posibilidad de caminos de cierta longitud, pero no diferencian etiquetas.

¹Agradezco a Marcos G. por su ayuda, entusiasmo y curiosidad en la confección de las figuras de este capítulo.

5.1.1. LTS sobre \mathbb{N} bien fundados

Definición 5.7. Denotaremos con ωLTS al espacio producto $\mathbb{N} \times \prod_{a \in L} 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ (\mathbb{N} discreto). Cada punto $x = (x(*), (x_a)_{a \in L}) \in \omega LTS$ representará un LTS punteado sobre \mathbb{N} con raíz $x(*)$ y relaciones de transición $\chi_{R_a} = x_a$.

A partir de esta codificación de la clase de LTS punteados sobre \mathbb{N} usaremos expresiones tales como $(\mathbb{N}, s) \in \omega LTS$ o $\llbracket \varphi \rrbracket \subseteq \omega LTS$, identificando un LTS con el punto que lo representa y viceversa.

Proposición 5.8. Para todo $\alpha < \omega_1$, $\llbracket \varphi_\alpha \rrbracket$ es subconjunto Borel de ωLTS .

Demostración. Usamos inducción en α . El caso $\alpha = 0$ es trivial pues $\llbracket \varphi_0 \rrbracket = \omega LTS$. En el caso límite, $\llbracket \varphi_\lambda \rrbracket = \bigcap_{\alpha < \lambda} \llbracket \varphi_\alpha \rrbracket$ y como la intersección es contable, la HI asegura que $\llbracket \varphi_\lambda \rrbracket \in \mathcal{B}(\omega LTS)$. Para el caso sucesor, usaremos una función auxiliar $g : \omega LTS \times \mathbb{N} \rightarrow \omega LTS$ dada por $g(x, t)(*) = t$ y $\forall a \in L \ g(x, t)(a) = x_a$ (i.e. g mueve la raíz del LTS codificado por x a t). Esta función resulta continua: si $a \in L$, $t, i, j \in \mathbb{N}$, $g^{-1}[\{x \in \omega LTS \mid x(*) = t \wedge x_a(i, j) = 1\}] = \{x \in \omega LTS \mid x_a(i, j) = 1\} \times \{t\}$.

Hacemos una observación que será útil en el próximo cálculo: si $t \in \mathbb{N}$, $\omega LTS \times \{t\}$ es subespacio de $\omega LTS \times \mathbb{N}$ homeomorfo a ωLTS vía la (restricción de la) proyección $p_1 : \omega LTS \times \mathbb{N} \rightarrow \omega LTS$. Por lo tanto, para todo $B \in \mathcal{B}(\omega LTS \times \{t\}) = \mathcal{B}(\omega LTS \times \mathbb{N}) \cap \omega LTS \times \{t\}$, vale que $p_1[B] \in \mathcal{B}(\omega LTS)$.

Calculamos ahora $\llbracket \varphi_{\alpha+1} \rrbracket \subseteq \omega LTS$:

$$\begin{aligned} \llbracket \varphi_{\alpha+1} \rrbracket &= \{x \in \omega LTS \mid \exists a \in L \exists t \in \mathbb{N} \ x_a(x(*), t) = 1 \wedge g(x, t) \models \varphi_\alpha\} \\ &= \bigcup_{a \in L} \bigcup_{t \in \mathbb{N}} \{x \mid x_a(x(*), t) = 1\} \cap \{x \mid g(x, t) \models \varphi_\alpha\} \\ &= \bigcup_{a \in L} \bigcup_{t \in \mathbb{N}} \{x \mid \pi_a(x)(\pi_*(x), t) = 1\} \cap p_1[g^{-1}[\llbracket \varphi_\alpha \rrbracket] \cap (\omega LTS \times \{t\})] \\ &= \bigcup_{a \in L} \bigcup_{t \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{b \in \mathbb{N}} \{x \mid \pi_a(x)(b, t) = 1\} \cap \{x \mid \pi_*(x) = b\} \right) \cap p_1[g^{-1}[\llbracket \varphi_\alpha \rrbracket] \cap (\omega LTS \times \{t\})] \\ &= \bigcup_{a \in L} \bigcup_{t \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{b \in \mathbb{N}} \pi_a^{-1}[\{f \in 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \mid f(b, t) = 1\}] \cap \pi_*^{-1}[\{b\}] \right) \cap p_1[g^{-1}[\llbracket \varphi_\alpha \rrbracket] \cap (\omega LTS \times \{t\})]. \end{aligned}$$

Todos los términos involucrados en esta unión son conjuntos Borel por medibilidad de las proyecciones, por HI y por lo observado sobre $\omega LTS \times \{t\}$. Se sigue que el resultado es válido también para $\alpha + 1$ y por ende para todo ordinal $\alpha < \omega_1$. \square

Definición 5.9. Si $\alpha < \omega_1$, denotaremos con $\omega LTS^{\leq \alpha}$ a la familia de LTS punteados sobre \mathbb{N} bien fundados de rango a lo sumo α .

Corolario 5.10. Para cada $\alpha < \omega_1$, el conjunto $\omega LTS^{\leq \alpha}$ es Borel en ωLTS .

Demostración. $(\mathbb{N}, s) \in \omega LTS^{\leq \alpha} \iff (\mathbb{N}, s) \not\models \varphi_{\alpha+1} \iff (\mathbb{N}, s) \notin \llbracket \varphi_{\alpha+1} \rrbracket$. \square

Por conveniencia usaremos la notación $M := \mathbb{N} \times L \times \mathbb{N}$. La Definición 5.1 de ω -expansión en un punto de un LTS aplicada al caso particular de ωLTS nos da un mapa $\Omega : \omega LTS \rightarrow Tr_M \times \prod_{a \in L} 2^{M^{< \mathbb{N}} \times M^{< \mathbb{N}}}$. Cuando sea necesario escribiremos Ω en componentes $\Omega(x) = (\Omega_0(x), \{\Omega_a(x) \mid a \in L\})$. Por Teorema 5.2, se cumple $\forall x, y \in \omega LTS \ (\mathbb{N}, x(*)) \sim (\mathbb{N}, y(*)) \iff \Omega(x) \cong \Omega(y)$.

Lema 5.11. $\Omega : \omega LTS \rightarrow Tr_M \times \prod_{a \in L} 2^{M^{<\mathbb{N}} \times M^{<\mathbb{N}}}$ es continua.

Demostración. Veamos que las funciones componentes de $\Omega(x) = (\Omega_0(x), \{\Omega_a(x) \mid a \in L\})$ son continuas. Sea $u = (n_0, a_0, m_0) \dots (n_k, a_k, m_k) \in M^{<\mathbb{N}}$ fijo, calculamos

$$\begin{aligned} \Omega_0^{-1}[\{T \in Tr_M \mid u \in T\}] &= \{x \in \omega LTS \mid u \in \Omega_0(x)\} \\ &= \{x \mid x_{a_0}(x(*), n_0) = 1 \wedge x_{a_1}(n_0, n_1) = 1 \wedge \dots \wedge x_{a_k}(n_{k-1}, n_k) = 1\} \\ &= \{x \mid x_{a_0}(x(*), n_0) = 1\} \cap \bigcap_{1 \leq i \leq k} \{x \mid x_{a_i}(n_{i-1}, n_i) = 1\}. \end{aligned}$$

De manera análoga a lo calculado en la prueba de la Proposición 5.8, $\{x \mid x_{a_0}(x(*), n_0) = 1\} = \bigcup_{b \in \mathbb{N}} \pi_{a_0}^{-1}[\{f \in 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \mid f(b, n_0) = 1\}] \cap \pi_*^{-1}[\{b\}]$ es abierto en ωLTS y para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, $\{x \mid x_{a_i}(n_{i-1}, n_i) = 1\}$ también lo es.

Si $a \in L$ y $u, v \in M^{<\mathbb{N}}$, $\Omega_a^{-1}[\{X \subseteq M^{<\mathbb{N}} \times M^{<\mathbb{N}} \mid (u, v) \in X\}] = \{x \in \omega LTS \mid (u, v) \in \Omega_a(x)\}$. Si $v = u^\wedge(n, a, m)$ para algún $n, m \in \mathbb{N}$, entonces este conjunto es $\{x \mid u, v \in \Omega_0(x)\} = \{x \mid v \in \Omega_0(x)\}$ el cual es un conjunto abierto por continuidad de Ω_0 . Si u, v no son de esa forma, es vacío. \square

A continuación veremos que Ω preserva rangos, esto es, dado un estado $s \in S$ de rango α , su ω -expansión da un árbol $\Omega_0(\mathbb{S}, s)$ que resulta bien fundado y cuyo rango (como árbol) $\rho(\Omega_0(\mathbb{S}, s))$ es también α .

Usaremos WF para denotar el espacio de árboles bien fundados sobre \mathbb{N} . Además, mediante $WF^{\bowtie \alpha}$ ($\bowtie \in \{=, <, \leq, >, \geq\}$) denotaremos la subfamilia formada por los árboles de rango " $\bowtie = \alpha$ ". Añadiremos un subíndice X si nos referimos a las mismas colecciones para árboles sobre X .

Daremos primero una caracterización de $WF^{\leq \alpha}$ en términos de fórmulas. Consideramos las fórmulas ψ_α para $\alpha < \omega_1$ definidas recursivamente como:

$$\begin{aligned} \psi_0 &:= \top, \\ \psi_{\alpha+1} &:= \diamond \psi_\alpha, \\ \psi_\lambda &:= \bigwedge_{\alpha < \lambda} \psi_\alpha \quad \text{si } \lambda \text{ es ordinal límite.} \end{aligned}$$

Notamos la correspondencia entre las fórmulas φ en (5.1) y ψ para el caso de una única etiqueta dada por $\bigvee_{a \in L} \langle a \rangle \varphi_\alpha \leftrightarrow \diamond \psi_\alpha$. La satisfabilidad de ambas expresa que un estado (nodo) puede hacer una transición a un estado (nodo) que satisface φ_α (ψ_α).

Si $T \in Tr_{\mathbb{N}}$ y $s \in T$, el subárbol T_s está definido por $t \in T_s \iff s^\wedge t \in T$. Recordamos que WF_T denota la parte bien fundada de T . También usaremos la siguiente notación cuando haga falta: si $u \in WF_T$ es de la forma $(n)^\wedge u'$, denotamos u' con $\text{tail}(u)$.

Lema 5.12. Si $T \in Tr_{\mathbb{N}}$ y $u \in WF_T$ es de la forma $(n)^\wedge u'$, entonces $\rho_T(u) = \rho_{T_{(n)}}(u')$.

Demostración. Notamos que si $v \in T$ extiende a u , entonces $\text{tail}(v)$ extiende a $\text{tail}(u)$. Y recíprocamente, si $v \in T_{(n)}$ extiende a $\text{tail}(u)$ entonces $(n)^\wedge v$ extiende a u . Probamos el resultado por inducción en $\alpha = \rho_T(u)$. Para el caso base, si u es terminal en T , entonces $\text{tail}(u)$ también debe serlo en $T_{(n)}$ por lo recién observado. Supongamos ahora que la afirmación vale para toda

palabra no vacía en T de rango $\beta < \alpha$ y sea $u = (n) \frown u' \in T$ tal que $\rho_T(u) = \alpha$. Entonces

$$\begin{aligned} \rho_T(u) &= \sup\{\rho_T(v) + 1 \mid v \in T, u \not\subseteq v\} \\ &= \sup\{\rho_T((n) \frown v') + 1 \mid v' \in T_{(n)}, \text{tail}(u) \not\subseteq v'\} \\ &= \sup\{\rho_{T_{(n)}}(v') + 1 \mid v' \in T_{(n)}, \text{tail}(u) \not\subseteq v'\} \\ &= \rho_{T_{(n)}}(\text{tail}(u)). \end{aligned} \quad \square$$

La siguiente proposición vale para árboles sobre cualquier conjunto. Por simplicidad, la enunciamos y probamos para árboles sobre \mathbb{N} .

Proposición 5.13. $T \notin WF^{<\alpha} \iff (T, \emptyset) \models \psi_\alpha$.

Demostración. (\Rightarrow) Supongamos primero que $T \notin WF$ y sea $x = (x_i)_{i \in \omega} \in 2^{\mathbb{N}} \cap [T]$ una rama infinita. Probamos por inducción en $\alpha < \omega_1$ que $\forall i \geq 0 (T, x|i) \models \psi_\alpha$: el caso base es trivial y el caso límite se sigue de la definición de ψ_λ y de la HI. Supongamos que $\forall i \geq 0 (T, x|i) \models \psi_\alpha$. Como $x|i \rightarrow x|i+1$ y $(T, x|i+1) \models \psi_\alpha$, entonces $(T, x|i) \models \diamond\psi_\alpha$; por lo tanto $(T, x|i) \models \psi_{\alpha+1}$ y se tiene probada la afirmación. En particular, $(T, \emptyset) = (T, x|0) \models \psi_\alpha$ para todo $\alpha < \omega_1$.

Veamos ahora el caso de árboles bien fundados. Probemos por inducción la siguiente afirmación: si $T \in WF$ y existe $u \in T$ tal que $\rho_T(u) \geq \alpha$, entonces $(T, \emptyset) \models \psi_\alpha$. El caso $\alpha = 0$ es trivial pues $(T, \emptyset) \models \top$. Supongamos que la afirmación es verdadera para α y sean $T \in WF$ y $u \in T$ tales que $\rho_T(u) \geq \alpha + 1$. Entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $v := u \frown (k) \in T$ y $\rho_T(v) \geq \alpha$. Si n_0 es la primera coordenada de u (o \emptyset si $u = \emptyset$), por Lema 5.12, $\rho_{T_{(n_0)}}(\text{tail}(v)) \geq \alpha$. Por HI tenemos que $(T_{(n_0)}, \emptyset) \models \psi_\alpha$, y por lo tanto $(T, (n_0)) \models \psi_\alpha$. Luego, $(T, \emptyset) \models \diamond\psi_\alpha$ y en consecuencia $(T, \emptyset) \models \psi_{\alpha+1}$. Para el caso λ límite, si $\rho_T(u) \geq \lambda$, entonces $\forall \alpha < \lambda \rho_T(u) \geq \alpha$ y por HI $\forall \alpha < \lambda (T, \emptyset) \models \psi_\alpha$. En consecuencia $(T, \emptyset) \models \bigwedge_{\alpha < \lambda} \psi_\alpha = \psi_\lambda$.

(\Leftarrow) Supongamos que $(T, \emptyset) \models \psi_\alpha$, debemos mostrar que $T \notin WF \vee T \in WF^{\geq \alpha}$. Usamos inducción en α para probar que si T es bien fundado y $(T, \emptyset) \models \psi_\alpha$, entonces $T \in WF^{\geq \alpha}$. Para el caso $\alpha = 0$ no hay nada que probar pues $WF = WF^{\geq 0}$. Supongamos que $(T, \emptyset) \models \psi_{\alpha+1} = \diamond\psi_\alpha$. Entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(k) \in T$ y $(T_{(k)}, \emptyset) \models \psi_\alpha$. Dado que $T_{(k)}$ es bien fundado si T lo es, por HI tenemos que $T_{(k)} \in WF^{\geq \alpha}$. Se sigue que para todo $\beta < \alpha$ existe $v_\beta \in T_{(k)}$ tal que $\rho_{T_{(k)}}(v_\beta) \geq \beta$. Si $u_\beta := (k) \frown v_\beta$, entonces $u_\beta \in T$ y por Lema 5.12 vale que $\forall \beta < \alpha \rho_T(u_\beta) = \rho_{T_{(k)}}(v_\beta) \geq \beta$. Por lo tanto $\rho_T(\emptyset) \geq \alpha$ y en consecuencia $\rho(T) = \rho_T(\emptyset) + 1 \geq \alpha + 1$.

Finalmente, para el caso λ límite notamos que si $(T, \emptyset) \models \psi_\lambda$ entonces $\forall \alpha < \lambda (T, \emptyset) \models \psi_\alpha$ y por HI $\forall \alpha < \lambda T \in WF^{\geq \alpha}$. Luego, $T \in WF^{\geq \lambda}$. \square

Lema 5.14. $(\mathbb{S}, s) \models \varphi_\alpha \iff (\Omega_0(\mathbb{S}, s), \emptyset) \models \psi_\alpha$.

Demostración. Usamos inducción en α . El caso $\alpha = 0$ es trivial y el caso λ límite se sigue directo de la definición de las fórmulas y de la HI. Para el caso sucesor, si $(\mathbb{S}, s) \models \varphi_{\alpha+1}$, existen $a \in L$ y $t \in S$ tales que $s \xrightarrow{a} t$ y $(\mathbb{S}, s_0) \models \varphi_\alpha$. Luego, $(t, a, n) \in S \times L \times \mathbb{N}$ atestigua que $(\Omega(\mathbb{S}, s), \emptyset) \models \diamond\psi_\alpha = \psi_{\alpha+1}$. La recíproca es similar. \square

Corolario 5.15. $(\mathbb{N}, s) \models \varphi_\alpha \iff \Omega_0(\mathbb{N}, s) \notin WF_M^{<\alpha}$. En consecuencia, la restricción de Ω_0 a $\omega LTS^{\leq \alpha}$ tiene codominio $WF_M^{\leq \alpha}$.

Demostración. Por Lema 5.14 y Proposición 5.13 $(\mathbb{N}, s) \models \varphi_\alpha \iff (\Omega_0(\mathbb{N}, s), \emptyset) \models \psi_\alpha \iff \Omega_0(\mathbb{N}, s) \notin WF_M^{<\alpha}$. Si ahora $(\mathbb{N}, s) \in \omega LTS^{\leq \alpha}$, entonces $(\mathbb{N}, s) \not\models \varphi_{\alpha+1}$ y por lo tanto $\Omega_0(\mathbb{N}, s) \not\models \psi_{\alpha+1}$. Luego, $\Omega_0(\mathbb{N}, s) \in WF_M^{<\alpha+1} = WF_M^{\leq \alpha}$. \square

Recordemos que la clase WF es un subconjunto coanalítico (no Borel) de $Tr_{\mathbb{N}}$. Una propiedad clave de los conjuntos de este tipo es que admiten rangos coanalíticos ([Kec94, Thm. 34.4]), los cuales gozan de buenas propiedades de definibilidad. Una consecuencia es que si $\phi : A \rightarrow ORD$ es un rango en el conjunto coanalítico A , sus segmentos iniciales $A_\xi := \{x \in A \mid \phi(x) \leq \xi\}$ están uniformemente en $\mathcal{B}(A)$.

Teorema 5.16 ([Kec94, Ex.34.6]). *El mapa $T \mapsto \rho(T)$ es un Π_1^1 -rango sobre el conjunto WF .*

Esto implica que, para cada $\alpha < \omega_1$, la clase $WF^{\leq \alpha}$ resulta un subconjunto Borel de $Tr_{\mathbb{N}}$, y por lo tanto es un espacio de Borel estándar.

Corolario 5.17. *$WF_M^{\leq \alpha}$ es espacio de Borel estándar.*

Demostración. Dado que se tiene un rango en el subconjunto coanalítico WF de $2^{<\mathbb{N}}$, los segmentos iniciales $WF^{\leq \alpha} = \{T \in WF \mid \rho(T) \leq \alpha\}$ están uniformemente en $\Pi_1^1(2^{<\mathbb{N}}) \cap \Sigma_1^1(2^{<\mathbb{N}}) = \mathcal{B}(2^{<\mathbb{N}})$. Dado que M es contable, los espacios $Tr_{\mathbb{N}}$ y Tr_M son isomorfos y obtenemos el resultado para $WF_M^{\leq \alpha}$. \square

Definición 5.18. Para cada $1 \leq \alpha < \omega_1$, definimos una relación $\cong_\alpha \subseteq Tr_M \times Tr_M$ por

$$T \cong_\alpha T' \iff T, T' \in WF_M^{\leq \alpha} \wedge (T, \{Suc_a(T)\}_{a \in L}) \cong (T', \{Suc_a(T')\}_{a \in L}),$$

donde $(u, v) \in Suc_a(T)$ si y sólo si $\exists x \in M \pi_2(x) = a \wedge v = u \hat{\ } (x)$.

A continuación probaremos que \cong_α es Borel. Escribimos $M_{inj}^k \subseteq M^k$ para denotar el conjunto de k -uplas sin repeticiones, es decir funciones $k \rightarrow M$ inyectivas. También, para $k \geq 1$ y $2 \leq \alpha < \omega_1$, denotamos con $forth_k^\alpha(T, T')$ y $back_k^\alpha(T, T')$ las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} forth_k^\alpha(T, T') : T \in WF_M^{\leq \alpha} \wedge \forall u \in M_{inj}^k (\forall i < k (u_i) \in T \implies (\exists u' \in M_{inj}^k \forall i < k (u'_i) \in T' \wedge \\ \wedge \forall i < k \pi_2(u_i) = \pi_2(u'_i) \wedge \forall i < k \exists \beta < \alpha T_{(u_i)} \cong_\beta T'_{(u'_i)})), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} back_k^\alpha(T, T') : T' \in WF_M^{\leq \alpha} \wedge \forall u' \in M_{inj}^k (\forall i < k (u'_i) \in T' \implies (\exists u \in M_{inj}^k \forall i < k (u_i) \in T \wedge \\ \wedge \forall i < k \pi_2(u_i) = \pi_2(u'_i) \wedge \forall i < k \exists \beta < \alpha T_{(u_i)} \cong_\beta T'_{(u'_i)})). \end{aligned}$$

Con la primera de estas condiciones expresamos que para cualquier familia finita de nodos en el primer nivel de T (es decir nodos de longitud uno), hay nodos en el primer nivel de T' que los imitan uno a uno, donde imitar quiere decir que los subárboles correspondientes son isomorfos. La segunda condición es lo mismo pero comenzamos en T' .

Observación 5.19. Si $T, T' \in Tr_M$ satisfacen la segunda parte de las definiciones de $forth_1^\alpha(T, T')$ y $back_1^\alpha(T, T')$, entonces podemos probar que $T, T' \in WF_M^{\leq \alpha+1}$. En efecto: para cada $(u) \in T$ existen $(u') \in T'$ y $\beta_u < \alpha$ tales que $T_{(u)} \cong_{\beta_u} T'_{(u')}$. Por definición de \cong_{β_u} , $T_{(u)} \in WF_M^{\leq \beta_u}$ y por Lema 5.12, $\rho(T_{(u)}) = \rho_{T_{(u)}}(\emptyset) + 1 = \rho_T((u)) + 1$. Es claro que $T \in WF_M$ pues todos los árboles $T_{(u)}$ con $(u) \in T$ son bien fundados. Luego,

$$\begin{aligned} \rho(T) &= \rho_T(\emptyset) + 1 = \sup\{\rho_T((u)) + 1 \mid (u) \in T\} + 1 \\ &= \sup\{\rho(T_{(u)}) \mid (u) \in T\} + 1 \leq \sup\{\beta_u \mid (u) \in T\} + 1 \leq \alpha + 1. \end{aligned}$$

Análogamente para T' .

Lema 5.20. *Dado $x \in M$, la función $h_x : Tr_M \rightarrow Tr_M$ dada por $h_x(T) = T_{(x)}$ es continua.*

Demostración. Sea $\emptyset \neq u \in M^{<\mathbb{N}}$ fijo y notamos que $h_x^{-1}[\{T \in Tr_M \mid u \in T\}] = \{T \in Tr_M \mid u \in h_x(T)\} = \{T \in Tr_M \mid u \in T_{(x)}\} = \{T \in Tr_M \mid (x) \wedge u \in T\}$ es un conjunto abierto de Tr_M . \square

Teorema 5.21. *Para todo $2 \leq \alpha < \omega_1$, $T \cong_\alpha T' \iff \forall k \geq 1 (\text{forth}_k^\alpha(T, T') \wedge \text{back}_k^\alpha(T, T'))$.*

Demostración. (\implies) Sean $(T, T') \in \cong_\alpha$. Por definición $T, T' \in WF_M^{\bar{\alpha}}$ y tenemos un isomorfismo $f : (T, \{Suc_a(T)\}) \cong (T', \{Suc_a(T')\})$. Sea $k \geq 1$ y $u = (u_i) \in M_{\text{inj}}^k$ tal que $\forall i < k (u_i) \in T$. Definimos $u' = (f((u_i)))_{0 \leq i < k} \in M^k$, entonces $(u'_i) \in T'$ y dado que $(\emptyset, (u_i)) \in Suc_a(T) \iff (\emptyset, f((u_i))) \in Suc_a(T')$ tenemos que $\pi_2(u_i) = \pi_2(u'_i)$. Sea $\beta_i := \rho(T_{(u_i)})$. Por Lema 5.12, $\beta_i < \rho(T) = \alpha$. Dado que la restricción $f_i = f \upharpoonright T_{(u_i)}$ es isomorfismo entre $T_{(u_i)}$ y $T'_{(u'_i)}$, tenemos que $T'_{(u'_i)} \in WF_M^{\bar{\beta}_i}$ y por ende $T_{(u_i)} \cong_{\beta_i} T'_{(u'_i)}$. Esto prueba $\text{forth}_k^\alpha(T, T')$. La condición $\text{back}_k^\alpha(T, T')$ es análoga.

(\impliedby) Sean $T, T' \in Tr_M$ árboles no vacíos tales que $\forall k \geq 1 (\text{forth}_k^\alpha(T, T') \wedge \text{back}_k^\alpha(T, T'))$. Por definición de las condiciones, $T, T' \in WF_M^{\bar{\alpha}}$ y sólo debemos construir un iso $f : (T, \{Suc_a(T)\}) \cong (T', \{Suc_a(T')\})$. Para cada $a \in L$, definimos $D_a(T) := \{n \in \mathbb{N} \mid (n, a, 0) \in T\}$ y $D_a(T')$ de manera análoga. Es suficiente dar una biyección $g : D_a(T) \rightarrow D_a(T')$ tal que $T_{(n,a,0)} \cong T'_{(g(n),a,0)}$ para todo $n \in D_a(T)$. Si alguno de los dos conjuntos es infinito, la validez de las condiciones $\text{forth}_k^\alpha(T, T')$ y $\text{back}_k^\alpha(T, T')$ para todo $k \geq 1$ asegura que ambos son infinitos. En este caso, para construir la biyección requerida consideramos los tipos de isomorfismo de $T_{(n,a,0)}$. Las condiciones para $k = 1$ dicen que en T y T' ocurren exactamente los mismos tipos. Si para alguno de estos tipos hay k ocurrencias en T , la condición $\text{forth}_k^\alpha(T, T')$ implica que hay al menos k ocurrencias en T' , y recíprocamente usando la condición $\text{back}_k^\alpha(T, T')$. Si algún tipo ocurre infinitas veces en uno de los árboles, ocurre infinitas veces en el otro. En ambos casos tenemos una biyección entre $D_a(T)$ y $D_a(T')$ que preserva tipos de isomorfismo.

Por otro lado, si los conjuntos son finitos, usando la condición forth_k^α con $k = |D_a(T)|$ y $\text{back}_{k'}^\alpha$ con $k' = |D_a(T')|$ obtenemos que tienen el mismo cardinal y más aún obtenemos una biyección que satisface lo requerido. \square

Corolario 5.22. *Para cada $1 \leq \alpha < \omega_1$, \cong_α es Borel.*

Demostración. Usamos inducción fuerte en α : en el caso $\alpha = 1$ notamos que $\cong_1 = \{(\{\emptyset\}, \{\emptyset\})\}$ es Borel en $Tr_M \times Tr_M$. Supongamos ahora que para todo $\beta < \alpha$, \cong_β es Borel. Por Teorema 5.21, basta ver que los predicados $\text{back}_k^\alpha(T, T')$ y $\text{forth}_k^\alpha(T, T')$ definen subconjuntos Borel de $Tr_M \times Tr_M$. Notamos primero que, por Corolario 5.17, las condiciones $T, T' \in WF_M^{\bar{\alpha}}$ son Borel. Además, todos los cuantificadores son sobre conjuntos contables y la condición $(u) \in T$ define un clopen. Por último, el predicado $T_{(u)} \cong_\beta T'_{(u')}$ es equivalente a $(T, T') \in (h_u \times h_{u'})^{-1}[\cong_\beta]$ para la función h_u del Lema 5.20, lo cual define un Borel por HI. \square

Finalmente, probamos que la restricción de la bisimilitud en ωLTS a $\omega LTS^{\leq \alpha}$ es Borel.

Corolario 5.23. *\sim en $\omega LTS^{\leq \alpha}$ es Borel.*

Demostración. Por Lema 5.11 y Teorema 5.2, $\Omega_\alpha := \Omega \upharpoonright \omega LTS^{\leq \alpha} : \omega LTS^{\leq \alpha} \rightarrow WF_M^{\leq \alpha} \times \prod_{a \in L} 2^{M^{<\mathbb{N}} \times M^{<\mathbb{N}}}$ es reducción continua de $\sim \subseteq \omega LTS^{\leq \alpha} \times \omega LTS^{\leq \alpha}$ a \cong_α , i.e., $(\mathbb{N}, s) \sim (\mathbb{N}, s') \iff \Omega_\alpha(\mathbb{N}, s) \cong_\alpha \Omega_\alpha(\mathbb{N}, s')$. Dado que \cong_α es Borel, \sim también lo es. \square

5.1.2. Bisimilitud en $\omega LTS^{\leq \omega+2}$ no es suave

En este apartado damos un paso más en la clasificación de la bisimilitud en ωLTS y mostramos que en cierto caso reduce a E_0 (ver Definición 1.10). Por la dicotomía dada por el Teorema 1.11 concluiremos que no es una relación suave.

Comenzamos con LTS sobre un lenguaje con sólo dos etiquetas disponibles, digamos 0 y 1. Esto nos lleva a considerar el espacio de Cantor $2^{\mathbb{N}}$ ya que cada uno de sus puntos puede pensarse como un camino en un tal LTS.

Por cuestiones de medibilidad, necesitaremos una manera uniforme de listar todas las modificaciones finitas de un punto $x = (x_0, x_1, \dots) \in 2^{\mathbb{N}}$. Escribimos cada número natural $n \in \mathbb{N}$ en binario y consideramos la sucesión $b_n \in 2^{\mathbb{N}}$ obtenida al revertir la expresión binaria y agregar ceros (ver Tabla 5.1). Las sucesiones $m_n(x) := b_n \text{ XOR } x$ (disyunción exclusiva) dan lugar a todas las posibles modificaciones finitas de x .

n	bin	b_n	$m_n(x)$
0	0	(0 ,0,0,0,0,...)	(x_0, x_1, \dots)
1	1	(1 ,0,0,0,0,...)	(\bar{x}_0, x_1, \dots)
2	10	(0 , 1 ,0,0,0,...)	$(x_0, \bar{x}_1, x_2, \dots)$
3	11	(1 , 1 ,0,0,0,...)	$(\bar{x}_0, \bar{x}_1, x_2, \dots)$
4	100	(0 , 0 , 1 ,0,0,...)	$(x_0, x_1, \bar{x}_2, x_3, \dots)$
5	101	(1 , 0 , 1 ,0,0,...)	$(\bar{x}_0, x_1, \bar{x}_2, x_3, \dots)$
6	110	(0 , 1 , 1 ,0,0,...)	$(x_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, x_3, \dots)$
7	111	(1 , 1 , 1 ,0,0,...)	$(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, x_3, \dots)$
8	1000	(0 , 0 , 0 , 1 ,0,...)	$(x_0, x_1, x_2, \bar{x}_3, x_4, \dots)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Tabla 5.1: Enumeración de todas las modificaciones finitas de $x \in 2^{\mathbb{N}}$

Consideramos la función $m_n : 2^{\mathbb{N}} \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$, $m_n(x) := b_n \text{ XOR } x$. Fijado $k \in \mathbb{N}$, obtenemos que

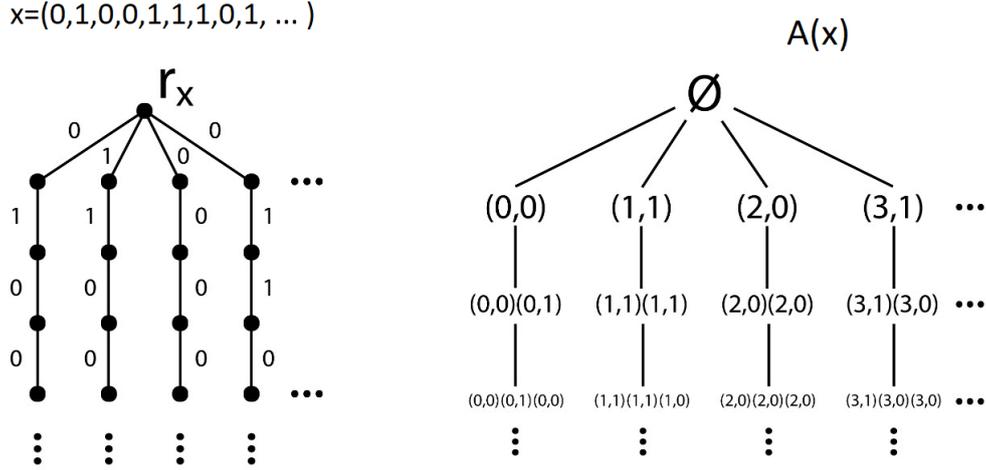
$$m_n^{-1}[\{y \in 2^{\mathbb{N}} \mid y(k) = 1\}] = \{x \in 2^{\mathbb{N}} \mid (m_n(x))(k) = 1\} = \begin{cases} \{x \in 2^{\mathbb{N}} \mid x(k) = 0\}, & \text{si } b_n(k) = 1, \\ \{x \in 2^{\mathbb{N}} \mid x(k) = 1\}, & \text{si } b_n(k) = 0, \end{cases}$$

y en consecuencia m_n es continua.

Sea $x \in 2^{\mathbb{N}}$. Para facilitar la intuición detrás de las construcciones que siguen, podemos representar a x como una rama infinita en un LTS con etiquetas 0 y 1. Consideramos las modificaciones finitas $m_n(x)$ de x y construimos un LTS que consiste únicamente de una cantidad contable de ramas infinitas a partir de la raíz r_x , una por cada modificación finita de x . Luego, representamos este LTS como un árbol $A(x)$ sobre $\mathbb{N} \times L$ para $L = \{0, 1\}$. En la Figura 5.2 damos una representación visual para ejemplificar esta construcción. Notar que en cada nodo de $A(x)$, la primera coordenada de cada par es una constante k que indica que estamos en la rama correspondiente a la modificación $m_k(x)$. Mientras que con las segundas coordenadas recuperamos un segmento inicial de $m_k(x)$.

Lema 5.24. $A : 2^{\mathbb{N}} \rightarrow 2^{(\mathbb{N} \times L)^{< \mathbb{N}}}$ es continua.

Demostración. Fijamos $s = (n_0, a_0)(n_1, a_1) \dots (n_k, a_k) \in (\mathbb{N} \times L)^{< \mathbb{N}}$. Si $n_0 = n_1 = \dots = n_k =: n$,

Figura 5.2: El árbol $A(x)$.

entonces

$$\begin{aligned}
 A^{-1}[\{X \subseteq (\mathbb{N} \times L)^{<\mathbb{N}} \mid s \in X\}] &= \{x \in 2^{\mathbb{N}} \mid s \in A(x)\} \\
 &= \{x \in 2^{\mathbb{N}} \mid (a_0, a_1, \dots, a_k) \subseteq m_n(x)\} \\
 &= \{x \in 2^{\mathbb{N}} \mid m_n(x) \in N_{(a_0, a_1, \dots, a_k)}\} \\
 &= m_n^{-1}[N_{(a_0, a_1, \dots, a_k)}].
 \end{aligned}$$

Este conjunto es abierto en $2^{\mathbb{N}}$ ya que $N_{(a_0, a_1, \dots, a_k)}$ es abierto subbásico de $2^{\mathbb{N}}$ y m_n es continua. Además, si existen i, j tales que $n_i \neq n_j$, entonces $A^{-1}[\{X \subseteq (\mathbb{N} \times L)^{<\mathbb{N}} \mid s \in X\}] = \emptyset$. Como la familia de conjuntos $\{X \subseteq (\mathbb{N} \times L)^{<\mathbb{N}} \mid s \in X\}$ con $s \in (\mathbb{N} \times L)^{<\mathbb{N}}$ junto a sus complementos forma una subbase de $2^{(\mathbb{N} \times L)^{<\mathbb{N}}}$, concluimos que A es función continua. \square

Si $T \in 2^{(\mathbb{N} \times L)^{<\mathbb{N}}}$ es árbol, para cada $a \in L$ definimos $R_a \subseteq T \times T$ por

$$s \xrightarrow{a} t \iff \exists n \in \mathbb{N} \ t = s \hat{\ } (n, a).$$

Esto convierte a $(T, \{R_a \mid a \in L\})$ en un LTS. En el próximo lema probamos que la bisimilitud entre estos LTS reduce a E_0 . Necesitamos primero la siguiente notación: para una palabra no vacía $z = (z_0, z_1, \dots, z_k) \in 2^{<\mathbb{N}}$ escribimos $\langle z \rangle := \langle z_0 \rangle \langle z_1 \rangle \langle z_2 \rangle \dots \langle z_k \rangle$.

Proposición 5.25. Si $x, y \in 2^{\mathbb{N}}$, entonces $x E_0 y \iff (A(x), \emptyset) \sim (A(y), \emptyset)$.

Demostración. (\Rightarrow) Si $x \neq y$ difieren en finitos índices, el conjunto de modificaciones finitas de x y y coinciden y existe una biyección $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $m_n(x) = m_{h(n)}(y)$. Así, los LTS $A(x)$ y $A(y)$ sólo difieren en un reordenamiento de las ramas donde se permutan las primeras coordenadas de los nodos según tal biyección. La relación $R \subseteq A(x) \times A(y)$ que pega los raíces y las respectivas ramas $m_n(x)$ y $m_{h(n)}(y)$ es bisimulación.

(\Leftarrow) Si ahora $x \not E_0 y$, observamos que $(A(x), \emptyset) \models \langle x(0) \rangle \bigwedge_{z \subseteq x \setminus \{\omega \setminus 1\}} \langle z \rangle \top$ (se satisface en la rama asociada a x). Sin embargo $(A(y), \emptyset)$ no satisface tal fórmula pues toda rama de $A(y)$ difiere de x en infinitos índices. \square

Notamos que el árbol $A(x)$ no es bien fundado. Con algunas modificaciones en la construcción anterior podemos reducir la relación E_0 a la bisimilitud entre árboles bien fundados de un rango

específico. Por Corolario 5.17, $WF^{\leq \omega+2}$ es un espacio de Borel estándar, a diferencia de la situación anterior donde el conjunto de árboles sobre \mathbb{N} que no son bien fundados es analítico completo ([Kec94, Thm. 27.1]). Es conveniente pensar ahora en E_0 como una relación entre subconjuntos de \mathbb{N} identificando a $x \subseteq \mathbb{N}$ con su función característica $\mathbb{N} \rightarrow 2$.

Fijamos un árbol T_ω sobre \mathbb{N} que tiene una única rama de longitud $k+1$ para cada $0 \leq k \in \omega$, de modo que ramas correspondientes a distintas longitudes son incompatibles, i.e, no tienen segmentos en común (ver Figura 5.3(a)). Diremos que $u \in 2^{<\mathbb{N}}$ es admisibile si $u \in T_\omega$. Notamos que cada u admisible determina un único natural $k = k(u)$ correspondiente a la rama a la que pertenece. Dado un subconjunto $x \subseteq \mathbb{N}$, consideramos el árbol T_x que se obtienen a partir de T_ω por restricción a las ramas de longitud $k+1$ para cada $k \in x$ (ver Figura 5.3(b)).

Lema 5.26. Si $x \subseteq \mathbb{N}$, $(T_x, \emptyset) \models \diamond^{k+1}(\neg \diamond \top) \iff k \in x$.

Demostración. $(T_x, \emptyset) \models \diamond^{k+1}(\neg \diamond \top) \iff \exists s \in T_x \text{ length}(s) = k+1 \wedge \rho_{T_x}(s) = 0$
 $\iff (k, k-1, \dots, 0) \in T_x$
 $\iff (k) \in T_x$
 $\iff k \in x. \quad \square$

Sea $\mathbb{N}' = \{n' \mid n \in \mathbb{N}\}$ una copia de los naturales. Dado $x \subseteq \mathbb{N}$, construimos un árbol $B(x)$ sobre $\mathbb{N} \cup \mathbb{N}'$ que represente todas las modificaciones finitas de x : adjuntamos a la raíz nodos (n') que enumerarán las modificaciones finitas de x de modo que el árbol $T_{m_n(x)}$ queda asociado al segmento inicial (n') (ver Figura 5.3(c)). Observamos que el rango de $B(x)$ es a lo sumo $\omega+2$. Además, $B(x) \in 2^{(\mathbb{N} \cup \mathbb{N}')^{<\mathbb{N}}}$ conforma un LTS con la relación sucesor.

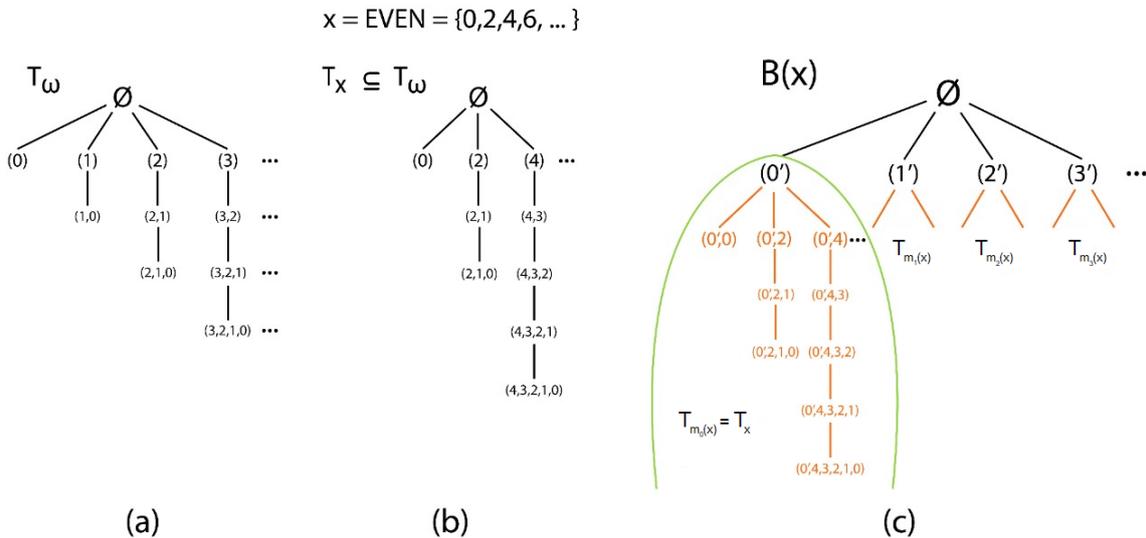


Figura 5.3: El árbol $B(x)$.

Lema 5.27. $B : 2^{\mathbb{N}} \rightarrow WF_{\mathbb{N} \cup \mathbb{N}'}^{\leq \omega+2}$ es continua.

Demostración. Dividimos la construcción de la función B en dos pasos:

1. Sea $M : 2^{\mathbb{N}} \rightarrow \prod_{n \in \omega} Tr_{\mathbb{N}}$ dada por $M(x) = (T_{m_i(x)})_{i \in \omega}$. Veamos que M es continua:

$$\begin{aligned} M^{-1}[\pi_n^{-1}[\{T \in Tr_{\mathbb{N}} \mid u \in T\}]] &= \{x \in 2^{\mathbb{N}} \mid u \in \pi_n(M(x))\} = \{x \in 2^{\mathbb{N}} \mid u \in T_{m_n(x)}\} \\ &= \begin{cases} \emptyset, & \text{si } u \text{ no es admisible,} \\ \{x \in 2^{\mathbb{N}} \mid m_n(x)(k(u)) = 1\}, & \text{si } u \text{ es admisible} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \emptyset, & \text{si } u \text{ no es admisible,} \\ m_n^{-1}[\{y \in 2^{\mathbb{N}} \mid y(k(u)) = 1\}], & \text{si } u \text{ es admisible.} \end{cases} \end{aligned}$$

La continuidad de m_n asegura que el caso no trivial es también un conjunto abierto.

2. Sea ahora $P : \prod_{n \in \omega} Tr_{\mathbb{N}} \rightarrow Tr_{\mathbb{N} \cup \mathbb{N}'}$ el mapa “unión” que pega una sucesión de árboles a una raíz: $P((T_i)_{i \in \omega}) = \{\emptyset\} \cup \{i' \wedge s \mid s \in T_i\}$. Verificamos que P es también continua: sea $u \in (\mathbb{N} \cup \mathbb{N}')^{<\mathbb{N}}$ tal que $u = k' \wedge v$ para algún $k \in \omega$ y $v \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Calculamos

$$\begin{aligned} P^{-1}[\{T \in Tr_{\mathbb{N} \cup \mathbb{N}'} \mid u \in T\}] &= \{(T_i) \in \prod_{n \in \omega} Tr_{\mathbb{N}} \mid v \in T_k\} \\ &= \prod_{i < k} Tr_{\mathbb{N}} \times \{T \in Tr_{\mathbb{N}} \mid v \in T\} \times \prod_{i > k} Tr_{\mathbb{N}} \end{aligned}$$

y este conjunto es abierto en el producto. Si u no es de la forma anterior entonces la preimagen es vacía.

Dado que $B = P \circ M$, hemos probado su continuidad. \square

Proposición 5.28. *Si $x, y \subseteq \mathbb{N}$, entonces $x E_0 y \iff (B(x), \emptyset) \sim (B(y), \emptyset)$. En consecuencia $E_0 \leq_B \sim_{WF \leq \omega + 2}$.*

Demostración. (\implies) De manera análoga a la Proposición 5.25, si x e y difieren en finitos elementos, el conjunto de sus modificaciones finitas es el mismo y existe una biyección $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $m_n(x) = m_{h(n)}(y)$. La relación $R \subseteq B(x) \times B(y)$ que pega las raíces y los respectivos subárboles representantes de $m_n(x)$ y $m_{h(n)}(y)$ es bisimulación.

(\impliedby) Dado $z \subseteq \mathbb{N}$, consideramos la fórmula

$$\varphi(z) := \bigwedge_{n \in z} \diamond^{n+1}(\neg \diamond \top) \wedge \bigwedge_{n \notin z} \neg(\diamond^{n+1}(\neg \diamond \top)),$$

y observamos por Lema 5.26 que $(T_z, \emptyset) \models \varphi(w) \iff w = z$.

Supongamos que $x \not E_0 y$. Dado que $B(x)$ contiene un subárbol bisimilar a $T_x = T_{m_0(x)}$, tenemos que $(B(x), \emptyset) \models \diamond \varphi(x)$. Sin embargo $\emptyset \in B(y)$ no satisface tal fórmula ya que ninguno de los subárboles $T_{m_n(y)}$ satisface $\varphi(x)$. \square

Si trabajamos con un LTS sobre un espacio medible diremos que una lógica es medible si los conjuntos de validez de sus fórmulas son conjuntos medibles. A través del Teorema 1.11 deducimos que \sim no es suave y obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 5.29. *No hay lógica contable y medible que caracterice la bisimilitud para árboles bien fundados de ramificación contable y rango $\omega + 2$.*

Resaltamos que sí existe al menos una lógica que caracteriza la bisimilitud para LTS contables ([ST15, Exm.13]), pero por lo anterior ninguna será medible.

Por un argumento de cardinalidad, sabemos que no hay fórmulas de la lógica modal básica que caractericen las clases de bisimilitud entre árboles de rango $\omega + 2$ ya que hay una cantidad no numerable de tales árboles no bisimilares dos a dos (por ejemplo, la familia $\{B(x) \mid x \in X\}$ con X un transversal para E_0). El siguiente corolario implica que esto tampoco se cumple si expandimos la lógica a BML_{ω_1} , la lógica modal básica con conjunciones contables.

Corolario 5.30. *No hay fragmento contable de BML_{ω_1} que caracterice la bisimilitud para árboles bien fundados de ramificación contable y rango $\omega + 2$.*

5.2. MLTS uniformemente medibles

Abordamos la pregunta sobre la complejidad de la bisimilitud en NLMP. Comenzamos con el caso de los NLMP no probabilistas ([Wol12]), esto es, procesos $(S, \Sigma, \{\tau_a \mid a \in L\})$ en los cuales $\tau_a(s)$ es un conjunto de medidas puntuales, o de Dirac. En tal caso podemos escribir $\tau_a(s) = \{\delta_x \mid x \in \tilde{T}_a(s)\}$ donde $\tilde{T}_a(s) \subseteq S$ para cada $s \in S$. Puesto que la aplicación $\delta : (S, \Sigma) \rightarrow (\Delta(S), \Delta(\Sigma))$ dada por $\delta(s) = \delta_s$ es un embedding cuando S es metrizable separable, podemos prescindir del espacio $(\Delta(S), \Delta(\Sigma))$ y trabajar con la estructura $(S, \Sigma, \{\tilde{T}_a \mid a \in L\})$.

Definición 5.31. Un sistema de transición etiquetado medible, o MLTS, es una tupla $\mathbb{S} = (S, \Sigma, \{\tilde{T}_a \mid a \in L\})$ donde (S, Σ) es un espacio medible y para cada etiqueta $a \in L$, $\tilde{T}_a : (S, \Sigma) \rightarrow (\Sigma, H(\Sigma))$ es un mapa medible.

El hecho que la aplicación δ es embedding permite probar la siguiente correspondencia entre NLMP no probabilistas y MLTS.

Proposición 5.32 ([Wol12, Prop. 4.7]). *Supongamos que Σ es contablemente generada y separa puntos en S , y para todo $a \in L$ y $s \in S$, $\tau_a(s) = \{\delta_x \mid x \in \tilde{T}_a(s)\}$ para conjuntos $\tilde{T}_a(s) \subseteq S$. Entonces $(S, \Sigma, \{\tau_a \mid a \in L\})$ es un NLMP si y sólo si $(S, \Sigma, \{\tilde{T}_a(s) \mid a \in L\})$ es un MLTS.*

Un MLTS \mathbb{S} es un LTS con ciertas restricciones de medibilidad. Las relaciones de transición $R_a \subseteq S \times S$ están definidas por

$$x R_a y \iff y \in \tilde{T}_a(x). \quad (5.2)$$

Si $x R_a y$, lo denotaremos de la manera usual para LTS usando $x \xrightarrow{a} y$. Recordamos que para LTS tenemos la noción relacional estándar de bisimulación (interna y externa) 1.16 y por ende podemos usarla también en el contexto de los MLTS. En el caso de la bisimulación de estados externa, la Definición (4.2) de levantamiento de una relación resulta $\delta_x \bar{R} \delta_{x'}$ si y sólo si para todo par (Q, Q') R -cerrado medible vale $x \in Q \iff x' \in Q'$. De esto deducimos que R es bisimulación de estados externa si se cumple que:

$s R s'$ implica $\forall x \in \tilde{T}_a(s) \exists x' \in \tilde{T}_a(s') x R^\times(\Sigma^\times(R)) x'$ y la condición recíproca.

Proposición 5.33. 1. [ST15, Prop. 12] *Para un MLTS de imagen contable sobre un espacio separable, todas las nociones de bisimilitud internas (eventos, impactos, estados y estándar) coinciden.*

2. *Si \mathbb{S} y \mathbb{S}' son MLTS de imagen contable sobre espacios separables, $R \subseteq S \times S'$ es bisimulación tradicional si y sólo si es bisimulación de estados externa.*

Demostración. Probamos la segunda afirmación: supongamos que $R \subseteq S \times S'$ es bisimulación tradicional, $s R s'$ y $x \in \tilde{T}_a(s)$, es decir $s \xrightarrow{a} x$. Entonces existe $x' \in S'$ tal que $s' \xrightarrow{a} x'$ y $x R x'$. En consecuencia, si (Q, Q') es par R -cerrado medible, $x \in Q \iff x' \in Q'$. La condición zag es similar y por ende R es bisimulación de estados externa.

Para vuelta, podemos considerar el MLTS suma directa $\mathbb{S} \oplus \mathbb{S}'$. Dado que \mathbb{S} y \mathbb{S}' son subestructuras, por Lema 4.41 tenemos que si $R \subseteq S \times S'$ es bisimulación de estados externa, entonces $R \cup R^{-1}$ es bisimulación de estados interna en $\mathbb{S} \oplus \mathbb{S}'$. Luego, $R \cup R^{-1}$ resulta bisimulación tradicional y por lo tanto R también lo es. \square

Dado este resultado, denotaremos con \sim a cualquiera de las bisimilitudes. En [DWSTC09, DSTW12] pueden encontrarse ejemplos de MLTS de imagen no numerable donde todas las nociones anteriores difieren.

Con la siguiente definición queremos representar, para un MLTS \mathbb{S} y un estado $s \in S$, el conjunto A_s formado por s y todos los estados accesibles desde s (sucesores de s , sucesores de sucesores de s y así en una cantidad finita de pasos).

Definición 5.34. Dado un MLTS $\mathbb{S} = (S, \Sigma, \{\tilde{T}_a \mid a \in L\})$ y $s \in S$, definimos $A_s := \bigcup_{n \in \omega} A_n(s)$ donde la familia $\{A_n(s)\}_{n \in \omega}$ está dada recursivamente por:

- $A_0(s) = \{s\}$,
- $A_{n+1}(s) = A_n(s) \cup (\bigcup \{\tilde{T}_a(x) \mid x \in A_n(s), a \in L\})$.

Observación 5.35. Si $s \xrightarrow{a} t$, entonces $A_t \subseteq A_s$.

Notar que si el proceso es de imagen contable, entonces $A_s \subseteq S$ es medible ya que es un conjunto contable. Si consideramos a \mathbb{S} como un NLMP, es claro que para todo $x \in A_s$ y para todo $\delta_y \in \mathbb{T}_a(x)$ vale $\delta_y(S) = \delta_y(A_s)$. Podemos trabajar entonces con la subestructura \mathbb{A}_s definida en 4.33.

Lema 5.36. Sean \mathbb{S} y \mathbb{S}' dos MLTS de imagen contable sobre espacios separables. Si $R \subseteq S \times S'$ es bisimulación entre (\mathbb{S}, s) y (\mathbb{S}', s') , entonces $R \cap (A_s \times A_{s'})$ es bisimulación entre (\mathbb{A}_s, s) y $(\mathbb{A}_{s'}, s')$.

Demostración. Dado que todas las nociones de bisimulación coinciden, usamos la definición tradicional. Si $(r, r') \in R \cap (A_s \times A_{s'})$ y $r \xrightarrow{a} t$, entonces $t \in A_r \subseteq A_s$. Como R es bisimulación, existe $t' \in S'$ tal que $r' \xrightarrow{a} t'$ y $t R t'$. Luego, $t' \in A_{r'} \subseteq A_{s'}$ y por lo tanto $(t, t') \in R \cap (A_s \times A_{s'})$. La propiedad recíproca es análoga. \square

Corolario 5.37. Sea \mathbb{S} un MLTS de imagen contable sobre un espacio separable. Si $s, t \in S$, $s \sim t$ si y sólo si $(\mathbb{A}_s, s) \sim (\mathbb{A}_t, t)$.

Demostración. La ida es consecuencia del Lema previo. Para la vuelta, usamos Proposición 4.34 para obtener que $(\mathbb{S}, s) \sim_{\mathbb{S}}^{\times} (\mathbb{A}_s, s)$ y lo mismo para t . Por Proposición 5.33(2) podemos reemplazar $\sim_{\mathbb{S}}^{\times}$ por bisimilitud tradicional entre LTS, la cual es transitiva. \square

En lo que sigue, y dada la coincidencia de las relaciones de bisimilitud, será suficiente trabajar con la estructura de LTS de \mathbb{A}_s vía las ecuaciones (5.2), es decir con el sistema $(A_s, \{R_a \mid a \in L\})$. Siguiendo el esquema en [ST15], queremos representarlo como un árbol sobre \mathbb{N} y de este modo encontrar una reducción de la relación de bisimilitud a la relación de isomorfismo.

Trabajaremos con procesos que satisfacen una condición adicional: la posibilidad de enumerar de una manera uniforme todos los estados accesibles a partir de otros estados. Probaremos que en este caso podemos encontrar una reducción Borel adecuada a isomorfismo entre estructuras de primer orden, mediante una sucesión de lemas intermedios. A posteriori, llegamos a la conclusión de que un camino alternativo, esbozado en la Observación 5.58 podría ser aplicada para evitar algunos de los recursos técnicos utilizados.

Dado un MLTS \mathbb{S} y una etiqueta $a \in L$, supongamos que para aquellos $s \in S$ tales que $\tilde{T}_a(s) \neq \emptyset$ (i.e. que pueden hacer alguna transición) podemos elegir una enumeración $\tilde{T}_a(s) = \{\tilde{t}_{n,a}(s)\}_{n < \omega}$ tal que $\tilde{t}_{n,a} : \{s \in S \mid \tilde{T}_a(s) \neq \emptyset\} \rightarrow S$ es medible para todo $n \in \omega$. Esta condición tiene la desventaja que no podemos componer las funciones $\tilde{t}_{n,a}(s)$ pues normalmente serán funciones parciales. Para resolver esta situación introducimos un nuevo elemento $\perp \notin S$ al conjunto de estados y consideramos el conjunto $S^\perp := S \cup \{\perp\}$ y la σ -álgebra $\Sigma' = \sigma(\Sigma \cup \{\{\perp\}\})$ (que sigue siendo separable si Σ lo es). Tenemos así la siguiente

Definición 5.38. Un MLTS $\mathbb{S} = (S, \Sigma, \{\tilde{T}_a \mid a \in L\})$ es uniformemente medible si existen funciones medibles $t_{n,a} : S^\perp \rightarrow S^\perp$ tales que $t_{n,a}(\perp) = \perp$ y para cada $s \in S$, $\tilde{T}_a(s) = \{\tilde{t}_{n,a}(s)\}_{n < \omega} \setminus \{\perp\}$. Denotamos con UMLTS a la clase de estos procesos.

Observamos que la definición exige funciones $t_{n,a}$ para cada natural $n \in \omega$, las cuales pueden ser idénticas o repetir estados en la enumeración. Notamos también que si $s \in S$ no tiene sucesores entonces debe suceder $t_{n,a}(s) = \perp$ para todo natural n y etiqueta a . Por otro lado, si s no es accesible desde ningún estado, entonces no está en la imagen de ninguna función $t_{n,a}$.

Supongamos que contamos con funciones $\tilde{t}_{n,a} : \{s \in S \mid \tilde{T}_a(s) \neq \emptyset\} \rightarrow S$ tales que $\tilde{T}_a(s) = \{\tilde{t}_{n,a}(s)\}_{n < \omega}$. Definimos para cada $n \in \omega$ y $a \in L$ las aplicaciones:

$$t_{n,a}(s) := \begin{cases} \tilde{t}_{n,a}(s), & \text{si } s \in S, \tilde{T}_a(s) \neq \emptyset, \\ \perp, & \text{si } s \in S, \tilde{T}_a(s) = \emptyset, \\ \perp, & \text{si } s = \perp. \end{cases} \quad (5.3)$$

De este modo obtenemos funciones totales $t_{n,a} : S^\perp \rightarrow S^\perp$. Evaluemos ahora su medibilidad. Notamos primero que $\{s \in S \mid \tilde{T}_a(s) \neq \emptyset\} = \tilde{T}_a^{-1}[H_S]$, el cual es un conjunto medible en S y por lo tanto los casos de definición de $t_{n,a}$ son sobre conjuntos medibles. Por definición de $\Sigma' = \sigma(\Sigma \cup \{\perp\})$, $A \in \Sigma'$ si y sólo si $A \setminus \{\perp\} \in \Sigma$. Luego, si $A \in \Sigma'$

$$t_{n,a}^{-1}[A] = \begin{cases} \{s \in S \mid \tilde{t}_{n,a}(s) \in A\}, & \text{si } \perp \notin A, \\ \{s \in S \mid \tilde{t}_{n,a}(s) \in A\} \cup \{s \in S \mid \tilde{T}_a(s) = \emptyset\} \cup \{\perp\}, & \text{si } \perp \in A. \end{cases} \quad (5.4)$$

Si asumimos que $\{s \in S \mid \tilde{t}_{n,a}(s) \in A\} = (\tilde{t}_{n,a})^{-1}[A] \in \Sigma$ cuando $A \in \Sigma$, ambos conjuntos de la derecha en la ecuación (5.4) están en Σ' y por lo tanto $t_{n,a}$ es medible. Recíprocamente, si suponemos que cada $t_{n,a}$ es medible, $t_{n,a}[\{s \in S \mid \tilde{T}_a(s) \neq \emptyset\}] = \tilde{t}_{n,a}$ es también medible. Tenemos entonces que $\tilde{t}_{n,a}$ es medible si y sólo si $t_{n,a}$ lo es. Esto nos dice que la condición de la Definición 5.38 no es más fuerte que contar con las funciones $\tilde{t}_{n,a}$, y veremos que es suficiente para generar una enumeración medible y uniforme de los sucesores de cada estado particular $s \in S$.

Ejemplo 5.39. Sea $\mathbb{S} = (S, \Sigma, \{\tilde{T}_a \mid a \in L\})$ un MLTS y supongamos que existe una topología polaca τ en S tal que $\tilde{T}_a(s)$ es cerrado y discreto para toda etiqueta $a \in L$ y todo $s \in S$. Probamos que \mathbb{S} es uniformemente medible. Dado que (S, τ) es polaco, por Teorema de selección para $F(S)$

[Kec94, Thm. 12.13] hay una sucesión de funciones Borel $d_n : F(S) \rightarrow S$ tal que $\{d_n(F)\}_{n \in \omega}$ es denso en F para cualquier F cerrado no vacío. Si $\emptyset \neq \tilde{T}_a(s) \in F(S)$, entonces $\{d_n(\tilde{T}_a(s))\}_{n \in \omega}$ es denso en $\tilde{T}_a(s)$, pero dado que $\tilde{T}_a(s)$ es discreto, entonces $\{d_n(\tilde{T}_a(s))\} = \tilde{T}_a(s)$. Se sigue que

$$t_{n,a}(s) := \begin{cases} d_n(\tilde{T}_a(s)), & \text{si } \tilde{T}_a(s) \neq \emptyset, \\ \perp, & \text{si } \tilde{T}_a(s) = \emptyset \text{ o } s = \perp. \end{cases}$$

es medible.

En particular, cualquier MLTS de imagen finita sobre un espacio de Borel estándar es uniformemente medible.

Ejemplo 5.40. Consideremos el MLTS $\mathbb{F} = (Tr_{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}, \mathcal{B}(Tr_{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}), \tilde{T})$. El conjunto de estados accesibles para la única etiqueta está dado por $\tilde{T}((T, s)) = \{(T, s') \mid s, s' \in T \wedge s \prec s'\}$, donde $s \prec s' \iff \exists n \in \mathbb{N} \ s' = s^{\wedge n}$. Este proceso fue definido en [ST15, 3.2], allí sirvió como ejemplo de MLTS sobre un espacio polaco cuya relación de bisimilitud es analítica no Borel. Veamos que podemos definir enumeraciones que lo hacen uniformemente medible. Para $n \in \omega$ definimos $t_n : F^{\perp} \rightarrow F^{\perp}$ como

$$t_n(\perp) = \perp; \quad t_n((T, s)) = \begin{cases} (T, s^{\wedge n}), & \text{si } s^{\wedge n} \in T, \\ \perp, & \text{si } s^{\wedge n} \notin T. \end{cases}$$

Es claro que $\tilde{T}((T, s)) = \{t_n((T, s)) \mid n \in \omega\} \setminus \{\perp\}$. Verificamos que t_n es medible. Para un subconjunto $A \subseteq Tr_{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ y $c \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ denotamos con $A|_c$ a la sección $\{T \in Tr_{\mathbb{N}} \mid (T, c) \in A\}$. Recordamos que si A es Borel, $A|_c$ también lo es. Sea $Q \in \mathcal{B}(Tr_{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}})$, entonces

$$\begin{aligned} t_n^{-1}[Q] &= \{x \in F \cup \{\perp\} \mid t_n(x) \in Q\} \\ &= \{(T, s) \in F \mid s^{\wedge n} \in T \wedge (T, s^{\wedge n}) \in Q\} \\ &= \bigcup_{s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}} \{(T, s) \mid s^{\wedge n} \in T \wedge (T, s^{\wedge n}) \in Q\} \\ &= \bigcup_{s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}} (Q \cap \{(T, s^{\wedge n}) \mid s^{\wedge n} \in T\})|_{s^{\wedge n}} \times \{s\} \\ &= \bigcup_{s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}} (Q \cap (\{T \mid s^{\wedge n} \in T\} \times \{s^{\wedge n}\}))|_{s^{\wedge n}} \times \{s\}, \end{aligned}$$

y este conjunto es Borel. Si $\perp \in Q'$, entonces $Q = Q' \setminus \{\perp\} \in \mathcal{B}(Tr_{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}})$, por lo tanto

$$\begin{aligned} t_n^{-1}[Q'] &= t_n^{-1}[Q] \cup \{(T, s) \mid s^{\wedge n} \notin T\} \cup \{\perp\} \\ &= t_n^{-1}[Q] \cup (\bigcup_{s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}} \{T \mid s^{\wedge n} \notin T\} \times \{s\}) \cup \{\perp\}, \end{aligned}$$

el cual también es Borel.

Dado un MLTS \mathbb{S} , las relaciones de transición $\{R_a \mid a \in L\}$ de (5.2) pueden extenderse a relaciones $R_a^{\perp} \subseteq S^{\perp} \times S^{\perp}$ del siguiente modo:

$$\begin{aligned} x, y \in S, \quad x \xrightarrow{a} y &\iff y \in \tilde{T}_a(x), \\ \perp \xrightarrow{a} y &\iff y = \perp, \\ x \xrightarrow{a} \perp &\iff \tilde{T}_a(x) = \emptyset \vee x = \perp. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Si \mathbb{S} es uniformemente medible y el conjunto de acciones L es contable, entonces tenemos una cantidad numerable de funciones $t_{n,a}$ y a partir de ellas podemos obtener todos los estados accesibles en una cantidad finita de transiciones desde un estado fijo $s \in S$. Esto nos permitirá describir al conjunto A_s de la Definición 5.34 a través de las composiciones de las funciones $t_{n,a}$.

Definición 5.41. Si \mathbb{S} es MLTS uniformemente medible con enumeración $\{t_{n,a} \mid a \in L, n \in \omega\}$, definimos $\{x_n : S^\perp \rightarrow S^\perp \mid n \geq 2\}$ una enumeración de todas las composiciones finitas entre las funciones $t_{n,a}$. Además definimos $x_0(s) = \perp$ y $x_1(s) = s$ para todo $s \in S^\perp$.

Notamos que todas las funciones x_n son medibles (por ser composiciones de medibles) y tienen la siguiente propiedad: existe un camino de s a t si y sólo si existe $n \geq 2$ tal que $t = x_n(s)$.

Es conveniente también incorporar \perp a A_s y considerar tal conjunto como LTS para las relaciones de transición (5.5) restringidas apropiadamente. Definimos entonces

$$\begin{aligned} A_s^\perp &:= A_s \cup \{\perp\}, \\ \mathbb{A}_s^\perp &:= (A_s^\perp, \{R_a^\perp \upharpoonright A_s^\perp \mid a \in L\}). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Probamos las siguientes propiedades elementales de \mathbb{A}_s^\perp .

Lema 5.42. 1. $A_s^\perp = \{x_n(s) \mid n \in \omega\}$.

2. $x_n(s) \xrightarrow{a} x_m(s)$ si y sólo si $\exists k \in \omega$ $x_m(s) = t_{k,a}(x_n(s))$.

3. Si $R \subseteq S \times S'$ es bisimulación entre (\mathbb{S}, s) y (\mathbb{S}', s') , entonces $(R \cap (A_s \times A_{s'})) \cup \{(\perp, \perp)\}$ es bisimulación entre (\mathbb{A}_s^\perp, s) y $(\mathbb{A}_{s'}^\perp, s')$.

Demostración. 1. Probamos por inducción en m que $A_m(s) \subseteq \{x_n(s)\}_{n \in \omega}$. Para el caso base, $\{s\} = A_0(s) \subseteq \{x_n(s)\}_{n \in \omega}$ pues $x_1(s) = s$. Si $A_m(s) \subseteq \{x_n(s)\}_{n \in \omega}$ y $r \in A_{m+1}(s) \setminus A_m(s)$ entonces $r \in \tilde{T}_a(y)$ para algún $y \in A_m(s)$. Por HI, $y = x_{n_0}(s)$ para algún $n_0 \in \omega$ y por lo tanto $r = t_{m,a}(x_{n_0}(s)) = x_{n_1}(s)$ para ciertos $m, n_1 \in \omega$. Luego, $r \in \{x_n(s)\}_{n \in \omega}$. Concluimos que $A_{m+1}(s) \subseteq \{x_n(s)\}_{n \in \omega}$. Además $\perp = x_0(s)$ y por lo tanto $A_s^\perp \subseteq \{x_n(s)\}_{n \in \omega}$.

Para la inclusión recíproca notar que $t_{n,a}(s) \in \tilde{T}_a(s) \cup \{\perp\} \subseteq A_s^\perp$ y por la Observación 5.35, $t_{n,a}(s) \xrightarrow{b} y \implies A_y^\perp \subseteq A_{t_{n,a}(s)}^\perp \subseteq A_s^\perp$. Por un argumento de inducción en la longitud de la composición que define a x_n se ve entonces que $x_n(s) \in A_s^\perp$ para todo $n \geq 2$. Además, por definición $x_0(s), x_1(s) \in A_s^\perp$.

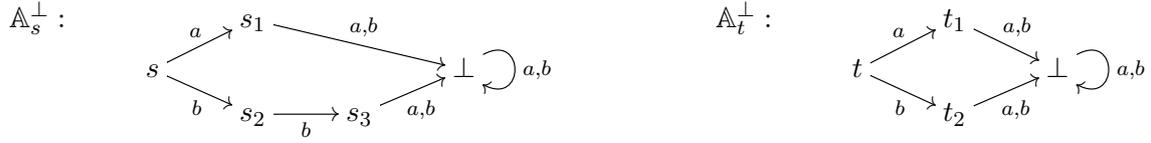
2. Verificamos cada caso en la definición (5.5): si $x_n(s), x_m(s) \in S$, $x_n(s) \xrightarrow{a} x_m(s) \iff x_m(s) \in \tilde{T}_a(x_n(s)) \iff \exists k \in \omega$ $x_m(s) = t_{k,a}(x_n(s))$. Si $x_n(s) = \perp$, $\perp \xrightarrow{a} x_m(s) \iff x_m(s) = \perp = t_{k,a}(\perp)$ para cualquier $k \in \omega$. Por último, si $x_m(s) = \perp$ y $x_n(s) \neq \perp$, $x_n(s) \xrightarrow{a} \perp \iff \tilde{T}_a(x_n(s)) = \emptyset \iff \perp = t_{k,a}(x_n(s))$ para todo $k \in \omega$.

3. Por Lema 5.36, $R \cap (A_s \times A_{s'})$ es bisimulación entre (\mathbb{A}_s, s) y $(\mathbb{A}_{s'}, s')$. Si $(x, y) \in R \cap (A_s \times A_{s'})$ y $x \xrightarrow{a} \perp$ entonces $\tilde{T}_a(x) = \emptyset$; como R es bisimulación, debe suceder $\tilde{T}_a(y) = \emptyset$ y por lo tanto $y \xrightarrow{a} \perp$. Finalmente, dado que $\perp \xrightarrow{a} y \iff y = \perp$, la condición de bisimulación se cumple trivialmente para el par (\perp, \perp) . \square

Ejemplo 5.43. Consideremos los siguientes LTS \mathbb{S} y \mathbb{T} :



Tenemos que \mathbb{A}_s^\perp y \mathbb{A}_t^\perp se obtienen al agregar \perp y las respectivas transiciones al mismo:

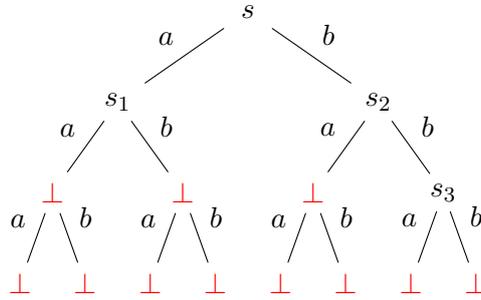


Notar en este Ejemplo que la relación total $A_s^\perp \times A_t^\perp$ es una bisimulación y por lo tanto cualesquiera dos estados en sendos LTS son bisimilares. Este efecto, consecuencia de agregar \perp al LTS, es general y por supuesto es inconveniente. Es el costo por definir funciones *globales* que enumeren los estados sucesores. Sin embargo, a partir de un estado $s \in S$ y la estructura asociada \mathbb{A}_s^\perp , construiremos un nuevo LTS que servirá como representante canónico de su tipo de bisimilitud. A continuación desarrollamos una estrategia estándar para tal fin con el agregado de algunas construcciones específicas a nuestro contexto.

Nuevamente las herramientas serán las ω -expansiones definidas en 5.1. Observamos que la ω -expansión en s de \mathbb{S} es el mismo LTS que la ω -expansión en s de \mathbb{A}_s^\perp : en efecto, si existe un camino de s a t , entonces $t \in A_s$ y por lo tanto vale la contención $Tr_{\mathbb{S}}(s) \subseteq (A_s \times L \times \mathbb{N})^{<\mathbb{N}}$.

Si \mathbb{S}, \mathbb{S}' son LTS de ramificación contable, $s \in S$ y $s' \in S'$, entonces trivialmente se cumple que las ω -expansiones de \mathbb{A}_s^\perp y $\mathbb{A}_{s'}^\perp$ son isomorfas (incluso para estados no bisimilares entre sí) ya que ambas serán los árboles completos de ramificación $|L|$.

Ejemplo 5.44 (Continuación Ejemplo 5.43). *La ω -expansión de \mathbb{A}_s^\perp en s es la ω -expansión del árbol binario completo (aquí truncado al cuarto nivel):*



Similarmente para la ω -expansión de \mathbb{A}_t^\perp en t . Notar que estas ω -expansiones son isomorfas, sin embargo, los dos estados s y t no son bisimilares ya que, por ejemplo, s satisface la fórmula $\langle a \rangle \langle a \rangle \top$ mientras que t no la satisface.

El origen de esta situación indeseable está en las ocurrencias de \perp , con el paso de A_s a A_s^\perp perdimos la propiedad dada por el Teorema 5.2. Una forma de recuperar esta caracterización es añadir un conjunto $Bot_{\mathbb{S}}(s)$ que sirva para destacar los puntos en la expansión que representan al estado \perp y permita establecer una correspondencia entre los mismos.

Definición 5.45. Si $\mathbb{S} = (S, \{R_a\}_{a \in L})$ es LTS y $s \in S$ definimos

$$\Omega_{\mathbb{S}}(s) := (Tr_{\mathbb{A}_s^\perp}(s), \{Suc_{\mathbb{A}_s^\perp}^a(s) \mid a \in L\}, Bot_{\mathbb{S}}(s)),$$

donde $(Tr_{\mathbb{A}_s^\perp}(s), \{Suc_{\mathbb{A}_s^\perp}^a(s) \mid a \in L\})$ es la ω -expansión en s de \mathbb{A}_s^\perp y $Bot_{\mathbb{S}}(s) \subseteq Tr_{\mathbb{A}_s^\perp}(s)$ está dado por

$$Bot_{\mathbb{S}}(s) := \{v \in Tr_{\mathbb{A}_s^\perp}(s) \mid \exists u \in Tr_{\mathbb{A}_s^\perp}(s) \exists a \in L \exists n \in \mathbb{N} v = u(\perp, a, n)\}.$$

Para dos estados s y s' , diremos que $\Omega_{\mathbb{S}}(s)$ es isomorfo a $\Omega_{\mathbb{S}'}(s')$ si lo son como estructuras de primer orden.

Esta estructura nos permitirá recuperar una condición equivalente para la bisimilitud con un estado s en términos de la ω -expansión de \mathbb{A}_s^\perp .

Teorema 5.46. *Sean \mathbb{S}, \mathbb{S}' LTS de ramificación contable, $s \in S, s' \in S'$. Entonces $s \sim s'$ si y sólo si $\Omega_{\mathbb{S}}(s) \cong \Omega_{\mathbb{S}'}(s')$.*

Demostración. (\Rightarrow) Supongamos que $s \sim s'$ y sea R bisimulación tal que $s R s'$. Consideramos la bisimulación entre (\mathbb{A}_s^\perp, s) y $(\mathbb{A}_{s'}^\perp, s')$ dada por el Lema 5.42(3). Notar que el elemento \perp de estos LTS sólo está relacionado con \perp . Vía el isomorfismo g de la Proposición 5.4 para tal bisimulación entre (\mathbb{A}_s^\perp, s) y $(\mathbb{A}_{s'}^\perp, s')$ tenemos que $(Tr_{\mathbb{A}_s^\perp}(s), \{Suc_{\mathbb{A}_s^\perp}(s)\}_{a \in L}) \cong (Tr_{\mathbb{A}_{s'}^\perp}(s'), \{Suc_{\mathbb{A}_{s'}^\perp}(s')\}_{a \in L})$. Basta probar entonces que g también preserva el predicado Bot , i.e., $g[Bot_{\mathbb{S}}(s)] = Bot_{\mathbb{S}'}(s')$:

(\subseteq) si $v \in Bot_{\mathbb{S}}(s)$, entonces $v = u(\perp, a, n)$ para cierto $u \in Tr_{\mathbb{A}_s^\perp}(s)$, $a \in L$ y $n \in \omega$. Dado que \perp está R -relacionado con el correspondiente estado en $g(v)$, debe suceder $g(v) = g(u)(\perp, a, n')$ para algún $n' \in \omega$. Concluimos que $g(v) \in Bot_{\mathbb{S}'}(s')$.

(\supseteq) si ahora $v' \in Bot_{\mathbb{S}'}(s')$, entonces $v' = u'(\perp, a', n')$ para algún $u' \in Tr_{\mathbb{A}_{s'}^\perp}(s')$, $a' \in L$ y $n' \in \omega$. Dado que $v' = g(v)$ para algún $v \in Tr_{\mathbb{A}_s^\perp}(s)$, por la misma razón que antes v debe ser de la forma $u(\perp, a', n)$ para algún $n \in \omega$. Luego, $v' \in g[Bot_{\mathbb{S}}(s)]$.

Concluimos que g es iso entre las estructuras correspondientes.

(\Leftarrow) Supongamos que $h : \Omega_{\mathbb{S}}(s) \cong \Omega_{\mathbb{S}'}(s')$ es isomorfismo, queremos definir $R \subseteq S \times S'$ bisimulación tal que $s R s'$. Notar que la preservación del predicado Suc^a implica que un tal iso preserva la longitud de las palabras, más aún, $h(\epsilon) = \epsilon'$ y $h(u(r, a, \cdot)) = h(u)(r', a, \cdot)$. Dado que h satisface $h[Bot_{\mathbb{S}}(s)] = Bot_{\mathbb{S}'}(s')$ podemos tomar la restricción $h : Tr_{\mathbb{A}_s^\perp}(s) \setminus Bot_{\mathbb{S}}(s) \rightarrow Tr_{\mathbb{A}_{s'}^\perp}(s') \setminus Bot_{\mathbb{S}'}(s')$. Sea $R \subseteq S \times S'$ definida por $s R s'$ o $r R r'$ sii existen $u \in (S \setminus \{\perp\} \times L \times \mathbb{N})^{<\mathbb{N}}$, $u' \in (S' \setminus \{\perp\} \times L \times \mathbb{N})^{<\mathbb{N}}$ tales que $h(u(r, \cdot, \cdot)) = u'(r', \cdot, \cdot)$.

Por definición $s R s'$. Verificamos ahora que es bisimulación, para ello dividimos en dos casos según la definición de R :

1. caso $s R s'$: si $s \xrightarrow{a} r$, buscamos $r' \in S'$ tal que $s' \xrightarrow{a} r'$ y $r R r'$. Dado que $s \xrightarrow{a} r$ en S , entonces $(r, a, \cdot) \in Tr_{\mathbb{A}_s^\perp}(s) \setminus Bot_{\mathbb{S}}(s)$ y por lo tanto $h((r, a, \cdot)) \in Tr_{\mathbb{A}_{s'}^\perp}(s') \setminus Bot_{\mathbb{S}'}(s')$. Como h preserva Suc^a , $h((r, a, \cdot)) = (r', a, \cdot)$ para algún $r' \neq \perp$ tal que $s' \xrightarrow{a} r'$. Si definimos $u, u' = \epsilon$ obtenemos $r R r'$.
2. Para el segundo caso en la definición de R , supongamos que $r R r'$ y $r \xrightarrow{a} r_1 \in S$. Sean u, u' tales que $h(u(r, \cdot, \cdot)) = u'(r', \cdot, \cdot)$. Dado que $r_1 \in S$, entonces $u(r, \cdot, \cdot)(r_1, a, \cdot) \in Tr_{\mathbb{A}_s^\perp}(s) \setminus Bot_{\mathbb{S}}(s)$. Luego, $h(u(r, \cdot, \cdot)(r_1, a, \cdot)) = h(u(r, \cdot, \cdot))(r'_1, a, \cdot) = u'(r', \cdot, \cdot)(r'_1, a, \cdot) \in Tr_{\mathbb{A}_{s'}^\perp}(s') \setminus Bot_{\mathbb{S}'}(s')$ para cierto $r'_1 \neq \perp$ tal que $r' \xrightarrow{a} r'_1$. Si elegimos $u := u(r, \cdot, \cdot)$, $u' := u'(r', \cdot, \cdot)$, obtenemos que $r_1 R r'_1$.

Las condiciones recíprocas para la bisimulación se obtienen de manera análoga considerando el isomorfismo $h^{-1} : \Omega_{\mathbb{S}'}(s') \cong \Omega_{\mathbb{S}}(s)$. \square

Hasta aquí obtuvimos lo siguiente: dado un MLTS $\mathbb{S} = (S, \Sigma, \{\tilde{T}_a \mid a \in L\})$ y un estado $s \in S$, construimos el LTS $\mathbb{A}_s^\perp = (A_s^\perp, \{R_a^\perp \mid a \in L\})$ y lo ω -expandimos para obtener un árbol

sobre un conjunto contable (parte de la estructura $\Omega_{\mathbb{S}}(s)$). Notamos que la medibilidad uniforme no ha jugado ningún rol en esto. El siguiente paso será encontrar representaciones uniformes de estas estructuras, para ello usaremos árboles sobre \mathbb{N} . El siguiente diagrama 5.7 resume todo el proceso (como ya mencionamos, más adelante describiremos un camino alternativo que hace uso de algunos de estos ingredientes pero evita el uso de \perp). Notamos que en las estructuras de la primera fila los conjuntos de base involucran a S , mientras que en la segunda los estados ya se han codificado como naturales.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{UMLTS} \ni (\mathbb{S}, s) & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{A}_s^\perp & \xrightarrow{\omega\text{-exp}+Bot(s)} & \Omega_{\mathbb{S}}(s) \\
 & & \downarrow f^{(s)} \wr & & \cong \text{(5.4)} \\
 & & (\mathbb{N}, \{f^{(s)}[R_a^\perp \upharpoonright A_s^\perp]\}_{a \in L}) & \longrightarrow & x^s = (Tr(s), \{Suc_a(s)\}, Bot(s)) & \longrightarrow & A_s = (M^{<\mathbb{N}}, (R_i^s)_{i \in \{1, \perp\} \cup L})
 \end{array}$$

$\Omega(5.49)$

(5.7)

Retomamos las funciones $x_n(s)$ de 5.41 y definimos la siguiente aplicación:

$$f^{(s)} : A_s^\perp \rightarrow \mathbb{N}, \quad f^{(s)}(r) = \min\{m \in \mathbb{N} : x_m(s) = r\}. \quad (5.8)$$

Notamos que $f^{(s)}$ es inyectiva, en efecto, si $f^{(s)}(r_1) = f^{(s)}(r_2)$ entonces $r_1 = x_{f^{(s)}(r_1)}(s) = x_{f^{(s)}(r_2)}(s) = r_2$. Además $f^{(s)}(s) = 1$ y $f^{(s)}(\perp) = 0$.

Lema 5.47. *Si \mathbb{S} es LTS y $s \in S$, el mapa $f^{(s)} : A_s^\perp \rightarrow (\mathbb{N}, \{f^{(s)}[R_a^\perp \upharpoonright A_s^\perp]\}_{a \in L})$ es zigzag. Por lo tanto A_s^\perp es bisimilar a su imagen.*

Demostración. Es inmediato ya que $x_n(s) \xrightarrow{a} x_m(s) \iff f^{(s)}(x_n(s)) \xrightarrow{a} f^{(s)}(x_m(s))$. \square

La función $f^{(s)}$ nos permitirá pasar de $\Omega_{\mathbb{S}}(s)$ a una estructura isomorfa sobre los naturales. Consideremos el LTS $(Tr_{f^{(s)}[A_s^\perp]}(1), \{Suc_{f^{(s)}[A_s^\perp]}^a(1) \mid a \in L\})$. Por Lema 5.47, el gráfico de $f^{(s)}$, es decir el conjunto $\{(r, f(r)) \mid r \in A_s^\perp\} \subseteq A_s^\perp \times \mathbb{N}$, es una bisimulación entre A_s^\perp y su imagen. Por Proposición 5.4 aplicada a esta bisimulación obtenemos un isomorfismo $g : Tr_{A_s^\perp}(s) \cong Tr_{f^{(s)}[A_s^\perp]}(1)$ con la propiedad adicional $g[Bot_{\mathbb{S}}(s)] = \{v \in Tr_{f^{(s)}[A_s^\perp]}(1) \mid \exists u \in Tr_{f^{(s)}[A_s^\perp]}(1) v = u(0, \cdot, \cdot)\}$.

Con el propósito de simplificar la notación, definimos

$$\begin{aligned}
 M &:= \mathbb{N} \times L \times \mathbb{N}, \\
 Tr(s) &:= Tr_{f^{(s)}[A_s^\perp]}(1) \subseteq M^{<\mathbb{N}}, \\
 Bot(s) &:= \{v \in Tr(s) \mid \exists u \in Tr(s) \exists a \in L \exists n \in \mathbb{N} v = u(0, a, n)\} \subseteq M^{<\mathbb{N}}, \\
 Suc_a(s) &:= Suc_{f^{(s)}[A_s^\perp]}^a(1) \subseteq M^{<\mathbb{N}} \times M^{<\mathbb{N}}
 \end{aligned}$$

y lo expuesto en el párrafo previo se resume en el siguiente

Corolario 5.48. *Si \mathbb{S} es LTS, $\Omega_{\mathbb{S}}(s) \cong (Tr(s), \{Suc_a(s) \mid a \in L\}, Bot(s))$.*

Notamos que si $u \in Tr(s)$, $u(n, a, m) \in Bot(s) \iff n = 0$. Además, si $v \in Bot(s)$, $v(n, a, m) \in Tr(s) \iff n = 0$.

Para cada $s \in S$, el árbol $Tr(s)$ al igual que el conjunto $Bot(s)$ pueden considerarse como elementos de $2^{M^{<N}}$ y $Suc_a(s)$ como un elemento de $2^{M^{<N} \times M^{<N}}$ para cada $a \in L$. Asociamos a $s \in S$ el punto $x^s = (x_1^s, (x_a^s)_{a \in L}, x_\perp^s) \in 2^{M^{<N}} \times (\prod_{a \in L} 2^{M^{<N} \times M^{<N}}) \times 2^{M^{<N}}$ definido como

$$\begin{aligned} x_1^s(u) = 1 &\iff u \in Tr(s), \\ x_a^s(u, v) = 1 &\iff (u, v) \in Suc_a(s), \\ x_\perp^s(u) = 1 &\iff u \in Bot(s) \end{aligned}$$

para $u, v \in M^{<N}$, $a \in L$. Podemos definir entonces el mapa

$$\begin{aligned} \Omega : S &\rightarrow 2^{M^{<N}} \times (2^{M^{<N} \times M^{<N}})^L \times 2^{M^{<N}}, \\ s &\mapsto x^s. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Recordemos que hay un isomorfismo Borel $2^{M^{<N}} \cong \mathcal{P}(M^{<N})$ donde los abiertos subbásicos de este último espacio son $U = \{X \subseteq M^{<N} \mid u \in X\}$ para cada $u \in M^{<N}$ fijo y el complemento de estos conjuntos. Es inmediato que la σ -álgebra Borel en el conjunto potencia es generada por los conjuntos del primer tipo. Con esta estructura en el conjunto de palabras probamos la siguiente

Proposición 5.49. *Si S es MLTS uniformemente medible de imagen contable entonces Ω definida por (5.9) es una función medible.*

Demostración. Basta probar que las funciones coordenadas son medibles. Esto es equivalente a probar que $s \mapsto Tr(s)$, $s \mapsto Bot(s)$ y $s \mapsto Suc_a(s)$ son todas medibles ya que, por ejemplo, $(x_1^s)^{-1}[\{f \in 2^{M^{<N}} \mid f(u) = 1\}] = \{s \in S \mid x_1^s(u) = 1\} = \{s \in S \mid u \in Tr(s)\} = Tr^{-1}[\{X \subseteq M^{<N} \mid u \in X\}]$. Probaremos primero por inducción en la longitud de $u \in M^{<N}$ que $Tr^{-1}[\{X \mid u \in X\}]$ y $Bot^{-1}[\{X \mid u \in X\}]$ son ambos medibles. En el caso base $u = \epsilon$ obtenemos

$$\begin{aligned} Tr^{-1}[\{X \mid \epsilon \in X\}] &= \{s \in S \mid \epsilon \in Tr(s)\} = S, \\ Bot^{-1}[\{X \mid \epsilon \in X\}] &= \{s \in S \mid \epsilon \in Bot(s)\} = \emptyset. \end{aligned}$$

Supongamos ahora que ambos conjuntos son medibles cuando u es palabra de longitud l y sea $v = u(n, a, m) \in M^{<N}$ de longitud $l + 1$. Comenzamos con Tr : sea n_u la primera coordenada de la última terna de u ó $n_u = 1$ si $u = \epsilon$.

$$\begin{aligned} Tr^{-1}[\{X \mid v \in X\}] &= \{s \in S \mid u(n, a, m) \in Tr(s)\} \\ &= \{s \in S \mid u \in Tr(s) \wedge \exists k x_n(s) = t_{k,a}(x_{n_u}(s))\} \\ &= \{s \in S \mid u \in Tr(s)\} \cap \{s \in S \mid \exists k \in \omega x_n(s) = t_{k,a}(x_{n_u}(s))\} \\ &= \{s \in S \mid u \in Tr(s)\} \cap \bigcup_{k \in \omega} \{s \in S \mid x_n(s) = t_{k,a}(x_{n_u}(s))\}. \end{aligned}$$

El primer conjunto en esta intersección es medible por hipótesis inductiva y cada término en la unión es medible pues es el conjunto donde coinciden dos funciones medibles. Esto termina la prueba para el caso de $Tr(\cdot)$. Para el caso $Bot(\cdot)$ suponemos primero $n = 0$ en la palabra $v = u(n, a, m)$:

$$\begin{aligned} Bot^{-1}[\{X \mid v \in X\}] &= \{s \in S \mid u(0, a, m) \in Bot(s)\} \\ &= \{s \in S \mid u \in Bot(s)\} \cup \\ &\quad \cup \{s \in S \mid u \in Tr(s) \wedge \forall b \forall i \geq 1 \forall j (u(i, b, j) \notin Tr(s))\} \\ &= \{s \in S \mid u \in Bot(s)\} \cup \\ &\quad \cup (\{s \in S \mid u \in Tr(s)\} \cap \bigcap_{b \in L} \bigcap_{i \geq 1} \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \{s \in S \mid u(i, b, j) \notin Tr(s)\}). \end{aligned}$$

Tal conjunto es medible por hipótesis inductiva y por la recién probada medibilidad de $Tr(\cdot)$. En el caso $n \neq 0$ observamos que $Bot^{-1}[\{X \mid v \in X\}] = \{s \in S \mid u(n, a, m) \in Bot(s)\} = \emptyset$.

Verificamos ahora que para cada etiqueta $a \in L$, $s \mapsto Suc_a(s)$ es medible: si $u, v \in M^{<\mathbb{N}}$ no satisfacen $|v| = |u| + 1$ entonces $Suc_a^{-1}[\{X \mid (u, v) \in X\}] = \emptyset$. En el caso $v = u(n, a, m)$ notamos que

$$\begin{aligned} Suc_a^{-1}[\{X \mid (u, v) \in X\}] &= \{s \in S \mid (u, v) \in Suc_a(s)\} \\ &= \{s \in S \mid u \in Tr(s) \wedge v \in Tr(s)\} \\ &= \{s \in S \mid v \in Tr(s)\} = Tr^{-1}[\{X \mid v \in X\}]. \quad \square \end{aligned}$$

Para cada x^s tenemos asociada una estructura $\mathcal{A}_s = (M^{<\mathbb{N}}, (R_i^s)_{i \in \{1, \perp\} \cup L})$ donde

$$\begin{aligned} R_1^s &= Tr(s), \\ R_a^s &= Suc_a(s), \\ R_\perp^s &= Bot(s). \end{aligned}$$

Lema 5.50. *Si \mathbb{S}, \mathbb{S}' son LTS, $s \in S$ y $s' \in S'$, entonces $\Omega_{\mathbb{S}}(s) \cong \Omega_{\mathbb{S}'}(s') \iff \mathcal{A}_s \cong \mathcal{A}_{s'}$*

Demostración. (\implies) Si $\Omega_{\mathbb{S}}(s) \cong \Omega_{\mathbb{S}'}(s')$, por Corolario 5.48 tenemos un isomorfismo $h : Tr(s) \rightarrow Tr(s')$. Notar que $M^{<\mathbb{N}} \setminus Tr(s)$ y $M^{<\mathbb{N}} \setminus Tr(s')$ son ambos conjuntos infinitos numerables y por lo tanto se tiene una biyección h^c entre ellos. Sea $h^* : M^{<\mathbb{N}} \rightarrow M^{<\mathbb{N}}$ definida por

$$h^*(u) = \begin{cases} h(u), & \text{si } u \in Tr(s), \\ h^c(u), & \text{si } u \notin Tr(s). \end{cases}$$

Claramente h^* es biyectiva y que preserve los predicados R_i se sigue inmediatamente de que h es isomorfismo:

$$\begin{aligned} R_1^s(u) &\iff u \in Tr(s) \iff h(u) \in Tr(s') \iff R_1^{s'}(h(u)), \\ R_a^s(u, v) &\iff (u, v) \in Suc_a(s) \iff (h(u), h(v)) \in Suc_a(s') \iff R_a^{s'}(h(u), h(v)), \\ R_\perp^s(u) &\iff u \in Bot(s) \iff h(u) \in Bot(s') \iff R_\perp^{s'}(h(u)). \end{aligned}$$

(\impliedby) Sea $f : \mathcal{A}_s \cong \mathcal{A}_{s'}$. Si $u \in M^{<\mathbb{N}}$ entonces $u \in Tr(s) \iff R_1^s(u) \iff R_1^{s'}(f(u)) \iff f(u) \in Tr(s')$. Luego, podemos considerar la restricción $f \upharpoonright Tr(s) : Tr(s) \rightarrow Tr(s')$ y también es isomorfismo. Por lo tanto $\Omega_{\mathbb{S}}(s) \cong \Omega_{\mathbb{S}'}(s')$. \square

Corolario 5.51. *Si \mathbb{S} es MLTS uniformemente medible de imagen contable, la bisimilitud en \mathbb{S} es clasificable por estructuras contables.*

Demostración. Por Proposición 5.49, el mapa $\Omega : S \rightarrow 2^{M^{<\mathbb{N}}} \times (2^{M^{<\mathbb{N}} \times M^{<\mathbb{N}}})^L \times 2^{M^{<\mathbb{N}}}$ es Borel. Veamos que es una reducción de \sim en S a la relación \cong en $2^{M^{<\mathbb{N}}} \times (2^{M^{<\mathbb{N}} \times M^{<\mathbb{N}}})^L \times 2^{M^{<\mathbb{N}}}$ dada por $x^s \cong x^t \iff \mathcal{A}_s \cong \mathcal{A}_t$:

$$\begin{aligned} s \sim t &\iff \Omega_{\mathbb{S}}(s) \cong \Omega_{\mathbb{S}}(t) && \text{por Teorema 5.46} \\ &\iff \mathcal{A}_s \cong \mathcal{A}_t && \text{por Lema 5.50} \\ &\iff x^s \cong x^t \\ &\iff \Omega(s) \cong \Omega(t) && \text{por Definición de } \Omega. \quad \square \end{aligned}$$

Notamos que la relación de isomorfismo entre estructuras contables es analítica ([Kec94, 16.C]) pero en general no es Borel ([Kec94, 27.D]). Dado que en el MLTS uniformemente medible \mathbb{F} del Ejemplo 5.40 la bisimilitud no es Borel ([ST15, Thm. 27]), esto es lo mejor que podemos decir sobre la relación de bisimilitud para esta clase de MLTS.

Un corolario inmediato de esta clasificación es el siguiente

Corolario 5.52. *Si \mathbb{S} es MLTS uniformemente medible de imagen contable, las clases de bisimilitud son conjuntos medibles.*

Demostración. El Teorema de Scott 1.14 garantiza que las clases $[\mathcal{A}_s]_{\cong} = \{x^t \mid \mathcal{A}_s \cong \mathcal{A}_t\}$ son conjuntos Borel de $2^{M^{<\mathbb{N}}} \times (\prod_{a \in L} 2^{M^{<\mathbb{N}} \times M^{<\mathbb{N}}}) \times 2^{M^{<\mathbb{N}}}$. De lo observado luego de la Definición 1.10 obtenemos el resultado. \square

En la siguiente proposición damos una prueba directa de la analiticidad de la bisimilitud en un MLTS de imagen contable como consecuencia de una definición Borel de bisimulación; esto es, una definición que sólo involucre conjuntos o funciones Borel, conectivos lógicos y cuantificadores con variables en un rango contable (ver algoritmo de Tarski-Kuratowski, [Kec94, p. 355]).

Proposición 5.53. *La bisimilitud en un MLTS uniformemente medible de imagen contable \mathbb{S} es Σ_1^1 .*

Demostración. $s \sim s'$ si y sólo si existe una bisimulación $R \subseteq S \times S$ tal que $(s, s') \in R$. Por Corolario 5.37, esto es equivalente a que exista una bisimulación $R \subseteq A_s \times A_{s'}$. Por Lema 5.42(1) podemos escribir la definición de bisimulación en términos de la enumeración $x_n(\cdot)$; por ejemplo la condición zig quedaría:

$$x_n(s) R x_{n'}(s') \implies \forall a \forall m ((x_m(s) \neq \perp \wedge x_n(s) \xrightarrow{a} x_m(s)) \implies \exists m' (x_m(s) R x_{m'}(s') \wedge x_{n'}(s') \xrightarrow{a} x_{m'}(s'))).$$

Vía la traducción $f^{(s)}$ de A_s a un LTS sobre $\mathbb{N}_{>0}$ dada por (5.8), podemos escribir

$$s \sim s' \iff \exists R \in 2^{\mathbb{N}_{>0} \times \mathbb{N}_{>0}} (1, 1) \in R \wedge \text{zig} \wedge \text{zag},$$

donde

$$\text{zig} : n R n' \implies \forall a \forall m (\exists k x_m(s) = t_{k,a}(x_n(s)) \implies \exists m' (m, m') \in R \wedge \exists k' x_{m'}(s') = t_{k',a}(x_{n'}(s'))),$$

$$\text{zag} : n R n' \implies \forall a \forall m' (\exists k' x_{m'}(s') = t_{k',a}(x_{n'}(s')) \implies \exists m (m, m') \in R \wedge \exists k x_m(s) = t_{k,a}(x_n(s))),$$

y por lo tanto basta ver que el conjunto definido dentro del cuantificador existencial es Borel en $2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \times S \times S$. La condición zig resulta:

$$\forall (n, n') \in R (s, s') \in \bigcap_{a \in L} \bigcap_{m \in \omega} [\{(x, y) \mid x \in \bigcup_{k \in \omega} \{r \in S \mid x_m(r) = t_{k,a} \circ x_n(r)\}\}^c \cup \bigcup_{m' \in \omega} \{(x, y) \mid (m, m') \in R \wedge y \in \bigcup_{k' \in \omega} \{r' \in S' \mid x_{m'}(r') = t_{k',a} \circ x_{n'}(r')\}\}].$$

Equivalentemente:

$$\forall (n, n') \in R (s, s') \in \bigcap_{a \in L} \bigcap_{m \in \omega} [(\bigcup_{k \in \omega} \{r \mid x_m(r) = t_{k,a} \circ x_n(r)\} \times S)^c \cup \bigcup_{\substack{m' \in \omega \\ (m, m') \in R}} S \times \bigcup_{k' \in \omega} \{r' \mid x_{m'}(r') = t_{k',a} \circ x_{n'}(r')\}].$$

Si denotamos con $B_{n,n'}$ al conjunto a la derecha de (s, s') , entonces $B_{n,n'}$ es claramente Borel en $S \times S$ y por lo tanto tenemos una condición de la forma $\forall(n, n') \in R (s, s') \in B_{n,n'}$ la cual define un conjunto Borel en $2^{\mathbb{N}_{>0} \times \mathbb{N}_{>0}} \times S \times S$. La condición zag es análoga. \square

5.2.1. Parte bien fundada de un MLTS uniformemente medible

Concluimos esta sección con un resultado análogo al Corolario 5.23 donde clasificamos la bisimilitud para LTS de rango acotado. Sea $\mathbb{S} = (S, \Sigma, \{\tilde{T}_a \mid a \in L\})$ un MLTS uniformemente medible de imagen contable y trabajamos con su estructura de LTS dada por (5.2). Consideramos las fórmulas definidas en (5.1).

Proposición 5.54. *Para todo $\alpha < \omega_1$, $\llbracket \varphi_\alpha \rrbracket \in \Sigma$.*

Demostración. Procedemos por inducción en α . El único caso no trivial es el de $\varphi_{\alpha+1}$ para el cual usaremos la estructura medible de \mathbb{S} :

$$\begin{aligned} \llbracket \varphi_{\alpha+1} \rrbracket &= \{s \in S \mid (\mathbb{S}, s) \models \bigvee_{a \in L} \langle a \rangle \varphi_\alpha\} \\ &= \{s \in S \mid \exists t \in S \ s \xrightarrow{a} t \wedge t \in \llbracket \varphi_\alpha \rrbracket\} \\ &= \bigcup_{a \in L} T_a^{-1}[\llbracket \varphi_\alpha \rrbracket]. \end{aligned}$$

Por HI, $\llbracket \varphi_\alpha \rrbracket \in \Sigma$ y la medibilidad de T_a asegura que $\llbracket \varphi_{\alpha+1} \rrbracket \in \Sigma$. \square

Corolario 5.55. *Para cada $\alpha < \omega_1$, el conjunto $S^{\leq \alpha}$ de estados $s \in S$ tales que (\mathbb{S}, s) es bien fundado de rango a lo sumo α es medible.*

Demostración. $s \in S^{\leq \alpha} \iff (\mathbb{S}, s) \not\models \varphi_{\alpha+1} \iff s \notin \llbracket \varphi_{\alpha+1} \rrbracket$. \square

El mapa $f^{(s)} : A_s \rightarrow \mathbb{N}_{>0}$ dado por $f^{(s)}(r) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid x_n(s) = r\}$ es un morfismo zigzag entre los LTS \mathbb{A}_s y su imagen. En consecuencia la ω -expansión 5.1 de $f^{(s)}[\mathbb{A}_s]$ da una representación bisimilar de \mathbb{A}_s como LTS sobre $\mathbb{N}_{>0}$. Recordemos que una tal estructura es un punto $x \in \omega LTS$, y en este caso cumple $x(*) = 1$.

Lema 5.56. *La aplicación $h : S \rightarrow \omega LTS$ dada por $h(s) = f^{(s)}[\mathbb{A}_s] \in \omega LTS$ es medible.*

Demostración. Sean $W \subseteq \mathbb{N}$ y $n, m \in \mathbb{N}$ fijos,

$$\begin{aligned} h^{-1}[W \times \pi_a^{-1}[\{X \mid (n, m) \in X\}]] &= \{s \in S \mid h(s)(*) \in W \wedge \pi_a(h(s))(n, m) = 1\} \\ &= \{s \in S \mid h(s)(*) \in W\} \cap \{s \in S \mid \pi_a(h(s))(n, m) = 1\} \\ &= \{s \in S \mid 1 \in W\} \cap \{s \in S \mid x_n(s) \xrightarrow{a} x_m(s)\} \\ &= \{s \in S \mid 1 \in W\} \cap \{s \in S \mid \exists k \in \omega \ x_n(s) = t_{k,a}(x_m(s))\} \\ &= \{s \in S \mid 1 \in W\} \cap \bigcup_{k \in \omega} \{s \in S \mid x_n(s) = t_{k,a}(x_m(s))\}. \end{aligned}$$

Como este conjunto es medible y la σ -álgebra en ωLTS está generada por los conjuntos de la forma $W \times \pi_a^{-1}[\{X \mid (n, m) \in X\}]$, obtenemos la medibilidad de h . \square

Si $s \in S^{\leq \alpha}$, como $(\mathbb{S}, s) \sim (\mathbb{A}_s, s) \sim (f^{(s)}[\mathbb{A}_s], 1)$, por Proposición 5.6 tenemos que $h(s) \in \omega LTS^{\leq \alpha}$. Por Corolario 5.15, $\Omega_0(h(s)) \in WF_M^{\leq \alpha}$.

Proposición 5.57. *La bisimilitud en $S^{\leq \alpha}$ es Borel.*

Demostración. Por Lemas 5.11 y 5.56, la función $\Omega \circ h : S^{\leq \alpha} \rightarrow WF_M^{\leq \alpha} \times \prod_{a \in L} 2^{M^{< \mathbb{N}} \times M^{< \mathbb{N}}}$ es medible. Por Teorema 5.2 es una reducción de \sim en $S^{\leq \alpha}$ a la relación de isomorfismo \cong_α . \square

Observación 5.58. La aplicación h del Lema 5.56 da un camino alternativo y más directo para probar que la bisimilitud en MLTS uniformemente medibles es clasificable por estructuras contables:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{UMLTS} \ni (\mathbb{S}, s) & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{A}_s \\
 & \searrow^{h(5.56)} & \downarrow f(s) \\
 & & \omega\text{LTS} \ni (\mathbb{N}, \{f(s)[R_a \upharpoonright A_s]\}_{a \in L}) \xrightarrow{\Omega(5.11)} (Tr(s), \{Suc_a(s)\}) \\
 & \searrow^{\Omega \circ h} & \nearrow
 \end{array} \quad (5.10)$$

5.3. NLMP discretos

Nos ocupamos ahora del caso de un NLMP \mathbb{S} de imagen contable donde todas las transiciones $u \in T_a(s)$ son de la forma $r\delta_x$ para algún $x \in S$ y $r \geq 0$. Probaremos que la bisimilitud de estados en un tal NLMP es analítica siguiendo la línea de la Proposición 5.53, esto es, dando una definición Borel de bisimulación.

Al igual que para los MLTS, podemos definir el conjunto $\tilde{T}_a(s)$ para representar la familia de estados que son accesibles desde s a través de alguna a -transición no nula, esto es:

$$\tilde{T}_a(s) = \{x \in S \mid \exists r > 0 \ r\delta_x \in T_a(s)\}.$$

De este modo, podemos reutilizar en este caso particular la Definición 5.34 y A_s resulta ser nuevamente un conjunto medible (por ser contable) y grueso para toda medida en $T_a(x)$ si $x \in A_s$; en consecuencia podemos considerar la subestructura asociada \mathbb{A}_s .

Observación 5.59. Si R es bisimulación de estados en \mathbb{S} , el levantamiento \bar{R} a $\Delta(S)$ aplicado a dos transiciones de la forma $r\delta_x$ resulta en la equivalencia

$$r_1\delta_x \bar{R} r_2\delta_y \iff r_1 = r_2 \ \& \ (r_1 \neq 0 \Rightarrow (x, y) \in \mathcal{R}(\Sigma(R))).$$

En efecto, dado que S es R -cerrado, $r_1 = r_1\delta_x(S) = r_2\delta_y(S) = r_2$. Si $r_1 = r_2 > 0$ y $Q \in \Sigma(R)$, $r_1\delta_x(Q) = r_2\delta_y(Q) \iff \delta_x(Q) = \delta_y(Q) \iff (x \in Q \Leftrightarrow y \in Q)$. Esto implica que $(x, y) \in \mathcal{R}(\Sigma(R))$.

Lema 5.60. *Sea $\mathbb{S} = (S, \Sigma, \{T_a \mid a \in L\})$ un NLMP tal que toda $\mu \in T_a(\cdot)$ es de la forma $\mu = r\delta_x$. Si $s, s' \in S$, entonces $s \sim_s s'$ si y sólo si existe $R \subseteq A_s \times A_{s'}$ bisimulación de estados externa entre \mathbb{A}_s y $\mathbb{A}_{s'}$ tal que $s R s'$.*

Demostración. (\Rightarrow) Sea $R \subseteq S \times S$ una bisimulación de estados que atestigua $s \sim_s s'$. Por 4.18, 4.26 y 4.27 podemos suponer que R satisface la igualdad $R = \mathcal{R}(\Sigma(R))$, por lo tanto R es relación de equivalencia. Probemos que $R_A := R \cap (A_s \times A_{s'})$ es bisimulación de estados externa: sean $(t, t') \in R_A$ y $r_1\delta_x \in T_a(t)$. Como $(t, t') \in R$, existe $r_2\delta_y \in T_a(t')$ tal que $r_1\delta_x \bar{R} r_2\delta_y$. Por la Observación 5.59, $r_1 = r_2$ y $(r_1 > 0 \Rightarrow (x, y) \in \mathcal{R}(\Sigma(R)) = R)$. Si $r_1 = 0$ es claro que $r_1\delta_x \bar{R}_A r_2\delta_y$. Supongamos que $r_1 > 0$ y sea (Q, Q') un par R_A -cerrado (notamos que la medibilidad de Q, Q' es inmediata pues la σ -álgebra en las subestructuras es $\mathcal{P}(\cdot)$). Por construcción $x \in A_s$ y $y \in A_{s'}$, y por hipótesis $(x, y) \in \mathcal{R}(\Sigma(R)) = R$. Luego, $(x, y) \in R_A$ y como (Q, Q') es par

R_A -cerrado tenemos que $x \in Q \iff y \in Q'$. Por lo tanto $\delta_x(Q) = 1 \iff \delta_y(Q') = 1$ y concluimos que $r_1 \delta_x \overline{R_A} r_2 \delta_y$.

(\Leftarrow) Se sigue de Lema 4.41. □

De forma similar al trabajo hecho para MLTS uniformemente medibles, supondremos que tenemos funciones medibles $r_{n,a} : S^\perp \rightarrow [0, \infty)$ y $t_{n,a} : S^\perp \rightarrow S^\perp$ tales que

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_a(s) \cup \{0\} &= \{r_{n,a}(s) \delta_{t_{n,a}(s)} \mid n \in \omega\} \cup \{0\}, \\ r_{n,a}(\perp) &= 0 \quad \& \quad t_{n,a}(\perp) = \perp. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Para un estado $s \in S$, vale que $\tilde{\mathbb{T}}_a(s) = \{t_{n,a}(s) \mid n \in \omega \wedge r_{n,a}(s) > 0\} \setminus \{\perp\}$. La Definición 5.41 de las funciones $x_n : S^\perp \rightarrow S^\perp$ también tiene sentido en este contexto aunque no tendremos la propiedad dada en el Lema 5.42(1) ya que podría suceder que para algún $x \in A_s$ y $n \in \omega$ se de que $r_{n,a}(x) = 0$ y $t_{n,a}(x) \notin A_s$. Sin embargo sí es cierto que $A_s \subseteq \{x_n(s) \mid n \in \omega\}$.

Diremos que un NLMP es discreto si todas las transiciones son de la forma $r \delta_x$ para $r \in [0, \infty)$, $x \in S$ y además se cuenta con funciones que satisfacen (5.11). Si expandimos la condición zig para una bisimulación de estados en este caso particular de NLMP con transiciones de la forma $r_{n,a}(s) \delta_{t_{n,a}(s)}$ obtenemos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \text{zig} : x R y \implies & x, y \neq \perp \ \& \ \forall a \forall m (t_{m,a}(x) \neq \perp \implies \exists m' t_{m',a}(y) \neq \perp \ \& \\ & r_{m,a}(x) = r_{m',a}(y) \ \& \ (r_{m,a}(x) \neq 0 \implies t_{m,a}(x) R t_{m',a}(y))). \end{aligned}$$

La condición de zag es análoga cambiando los roles de x e y . Por Lema 5.60, la bisimilitud entre s y s' está determinada por las bisimulaciones entre \mathbb{A}_s y $\mathbb{A}_{s'}$, pero en estos procesos todos los estados son de la forma $x_n(s)$ y $x_m(s')$ respectivamente. Deducimos que la relación de bisimilitud de estados en S está dada por:

$$\begin{aligned} s \sim_s s' \iff & \exists R \in 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} (1, 1) \in R \ \& \ \forall (n, n') \in R [x_n(s), x_{n'}(s') \neq \perp \ \& \\ & \forall a \forall m (t_{m,a}(x_n(s)) \neq \perp \implies \exists m' t_{m',a}(x_{n'}(s')) \neq \perp \ \& \ r_{m,a}(x_n(s)) = r_{m',a}(x_{n'}(s')) \ \& \\ & (r_{m,a}(x_n(s)) \neq 0 \implies \exists l, l' (l, l') \in R \ \& \ x_l(s) = t_{m,a}(x_n(s)) \ \& \ x_{l'}(s') = t_{m',a}(x_{n'}(s'))))] \ \& \ \text{zag}. \end{aligned}$$

Dado que en esta caracterización todas las condiciones luego de $\exists R \in 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ son Borel y todos los cuantificadores son sobre familias contables, obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 5.61. *La bisimilitud de estados en un NLMP discreto es Σ_1^1 .*

5.4. Conclusiones

El segundo bloque de esta tesis se ocupó del estudio de la definibilidad de la relación de bisimilitud en una clase de modelos estocásticos continuos que incorporan no determinismo interno, los NLMP. Podemos mencionar algunos obstáculos o preguntas que quedaron en torno a cuestiones, digamos, elementales. Lo primero que podría observarse es que la estructura medible de estos procesos se basa en la σ -álgebra de impactos, la cual es demasiado grande, por ejemplo no es contablemente generada. La sub- σ -álgebra generada por los conjuntos H_D con D una intersección finita de conjuntos $\Delta^{>q}(E)$ es suficiente para procesos de imagen finita. Pero queda la cuestión sobre su adecuación para el caso general o si acaso intersecciones contables serían suficientes. Otro problema es que la definición de bisimulación de eventos como σ -álgebra (estabilidad) no es satisfactoria en un NLMP. En LMP, la motivación al definir estabilidad es que

la restricción a una sub- σ -álgebra preserve la definición de LMP; en NLMP eso ya no sucede, ¿acaso Λ estable debería implicar $\text{img}(\mathcal{T}_a) \subseteq \Delta(\Lambda)$?

Cabe destacar que no nos hemos ocupamos del enfoque categórico para NLMP en este trabajo. Los primeros pasos ya fueron dados en [DST15, p. 10] donde se propone una noción de morfismo. Sin embargo aún no hay evidencia de que la “categoría de NLMP” así definida sea la noción más adecuada; en particular no permite una presentación coalgebraica clara de estos modelos. En estas condiciones un estudio paralelo al que se hizo en el Capítulo 2 sobre LMP está vacante.

Con respecto a la lógica, la hemos utilizado para al menos dos objetivos distintos: como herramienta técnica, en el caso no probabilista para caracterizar rangos. Además, y quizás más fundamental que el uso anterior, es que ha sido el único mecanismo para refutar bisimilitud de estados. En particular no hemos podido utilizar el juego asociado que obtuvimos. De igual modo no tienen sentido las esperanzas de utilizar la determinación de un juego como herramienta, tal como se propone en [ST11, Sect. 6]. Notar que, a priori, el espacio de jugadas del juego (tanto para LMP como para NLMP) es demasiado grande.

En el último capítulo encontramos los resultados sobre clasificación logrados en esta tesis. Recordamos que los casos de lenguaje con cantidad no numerable de modalidades y procesos de imagen no numerable son muy patológicos. Por otro lado, con modalidades contables e imagen finita, todo funciona muy bien, (por ejemplo existe una caracterización vía una lógica finitaria y medible). Resta entonces el caso de modalidades contables e imagen numerable. El resultado de que la bisimilitud de estados no es Borel en clases generales de NLMP (y por lo tanto no hay lógica medible y contable que la caracterice) de [ST15] fue el ignitor de toda esta investigación. A esto se suma la afirmación más precisa que, en el NLMP \mathbf{F} allí construido, la bisimilitud se comporta como la relación de isomorfismo entre estructuras contables, i.e., es relación analítica con clases de equivalencia Borel. Con este trasfondo emprendimos la búsqueda de generalizaciones o mejoramientos de tal resultado.

El problema abierto principal es decidir si bisimilitud en NLMP sobre espacios de Borel estándares es analítica. Los resultados obtenidos permiten afirmar que es efectivamente así en los casos estudiados: LTS sobre \mathbb{N} de rango acotado, UMLTS y NLMP discretos. Y arriesgamos afirmar que la misma clasificación (y el mismo método) serviría para NLMP cuyas medidas sean sumas finitas de deltas de Dirac.

En el camino a afinar las clasificaciones (con el mismo espíritu que en la Proposición 5.28) conjeturamos que la relación E_1 se reduce a bisimilitud de estados en los NLMP anteriores, y quizás más aún, en NLMP con medidas discretas (quizás este último nombre sería el más adecuado para procesos en donde todas las medidas sean discretas, pero dejamos ese cambio de nomenclatura para el futuro). Aquí, E_1 es la relación de equivalencia *hipersuave* canónica, definida en $2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ por $x E_1 y \iff \exists m \forall n \geq m \forall k x(n, k) = y(n, k)$.

La pregunta sobre la jerarquía de la bisimilitud puede continuar para incluir cualquier generalización sobre los conjuntos de medidas del NLMP, y donde quizás la teoría descriptiva de conjuntos (invariante) juegue un rol más preponderante.

Bibliografía

- [AM89] Peter Aczel and Nax Mendler, *A final coalgebra theorem*, Category Theory and Computer Science (Berlin, Heidelberg) (David H. Pitt, David E. Rydeheard, Peter Dybjer, Andrew M. Pitts, and Axel Poigné, eds.), Springer Berlin Heidelberg, 1989, pp. 357–365.
- [Arv76] William Arveson, *An invitation to C^* -algebra*, Graduate texts in mathematics, Springer-Verlag, 1976.
- [Bac13] Giorgio Bacci, *Generalized labelled Markov processes, coalgebraically*, Ph.D. thesis, Università degli Studi di Udine, 2013.
- [BBLM14] Giorgio Bacci, Giovanni Bacci, Kim Guldstrand Larsen, and Radu Mardare, *Bisimulation on Markov processes over arbitrary measurable spaces*, Horizons of the Mind, 2014.
- [BBW06] Patrick Blackburn, Johan van Benthem, and Frank Wolter, *Handbook of modal logic*, Studies in Logic and Practical Reasoning, vol. 3, Elsevier Science Inc., New York, NY, USA, 2006.
- [BDEP97] Richard Blute, Josée Desharnais, Abbas Edalat, and Prakash Panangaden, *Bisimulation for labelled Markov processes*, Proceedings of Twelfth Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science, 1997, pp. 149–158.
- [BH77] Allen Broughton and Barthel W. Huff, *A comment on unions of sigma-fields*, The American Mathematical Monthly **84** (1977), no. 7, 553–554.
- [Bil86] Patrick Billingsley, *Probability and measure*, John Wiley & Sons, New York, 1986.
- [BvB99] Jon Barwise and Johan van Benthem, *Interpolation, preservation, and pebble games*, J. Symb. Log. **64** (1999), no. 2, 881–903.
- [Cel06] Pablo Celayes, *Procesos de Markov etiquetados sobre espacios de Borel estándar*, Master’s thesis, FaMAF, Universidad Nacional de Córdoba, 2006.
- [CFKP19] Florence Clerc, Nathanaël Fijalkow, Bartek Klin, and Prakash Panangaden, *Expressiveness of probabilistic modal logics: A gradual approach*, Information and Computation **267** (2019), 145 – 163.
- [DDL06] Vincent Danos, Josée Desharnais, François Laviolette, and Prakash Panangaden, *Bisimulation and congruence for probabilistic systems*, Inf. Comput. **204** (2006), 503–523.

- [DEP98] Josée Desharnais, Abbas Edalat, and Prakash Panangaden, *A logical characterization of bisimulation for labeled Markov processes*, Proceedings. Thirteenth Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science (Cat. No.98CB36226), 1998, pp. 478–487.
- [DEP02] ———, *Bisimulation for labelled Markov processes*, Inf. Comput. **179** (2002), no. 2, 163–193.
- [Des99] Josée Desharnais, *Labelled Markov processes*, Ph.D. thesis, McGill University, 1999.
- [DGJP03] Josée Desharnais, Vineet Gupta, Radha Jagadeesan, and Prakash Panangaden, *Approximating labelled Markov processes*, Information and Computation **184** (2003), no. 1, 160–200.
- [DLT11] Josée Desharnais, François Laviolette, and Amélie Turgeon, *A logical duality for underspecified probabilistic systems*, Inf. Comput. **209** (2011), no. 5, 850–871.
- [Dob05a] Ernst-Erich Doberkat, *Semi-pullbacks for stochastic relations over analytic spaces*, Mathematical Structures in Comp. Sci. **15** (2005), no. 4, 647–670.
- [Dob05b] ———, *Stochastic relations: Congruences, bisimulations and the Hennessy–Milner theorem*, SIAM J. Comput. **35** (2005), no. 3, 590–626.
- [Dob07a] ———, *Kleisli morphisms and randomized congruences for the Giry monad*, Journal of Pure and Applied Algebra **211** (2007), no. 3, 638–664.
- [Dob07b] ———, *Stochastic relations: Foundations for Markov transition systems*, Chapman & Hall/CRC Studies in Informatics Series, Taylor & Francis, 2007.
- [Dob09] ———, *Stochastic coalgebraic logic*, Monographs in theoretical computer science, Springer, 2009.
- [Dob14] ———, *Measures and all that — a tutorial*, 2014.
- [DST15] Ernst-Erich Doberkat and Pedro Sánchez Terraf, *Stochastic nondeterminism and effectivity functions*, Journal of Logic and Computation (2015).
- [DSTW12] Pedro R. D’Argenio, Pedro Sánchez Terraf, and Nicolás Wolovick, *Bisimulations for non-deterministic labelled Markov processes*, Mathematical Structures in Comp. Sci. **22** (2012), no. 1, 43–68.
- [dVR97] Erik P. de Vink and J. J. M. M. Rutten, *Bisimulation for probabilistic transition systems: A coalgebraic approach*, Theor. Comput. Sci., 1997.
- [DWSTC09] Pedro R. D’Argenio, Nicolás Wolovick, Pedro Sánchez Terraf, and Pablo Celayes, *Nondeterministic labeled Markov processes: Bisimulations and logical characterization*, QEST, 2009, pp. 11–20.
- [Eda99] Abbas Edalat, *Semi-pullbacks and bisimulation in categories of Markov processes*, Mathematical Structures in Comp. Sci. **9** (1999), no. 5, 523–543.
- [Fre00] David H. Fremlin, *Measure theory*, Measure theory, no. v. 1, Torres Fremlin, 2000.
- [Gao08] Su Gao, *Invariant descriptive set theory*, Chapman & Hall/CRC Pure and Applied Mathematics, CRC Press, 2008.

- [Gir81] Michèle Giry, *A categorical approach to probability theory*, Categorical Aspects of Topology and Analysis, LNM, vol. 915, Springer, 1981, pp. 68–85.
- [GO07] Valentin Goranko and Martin Otto, *5 model theory of modal logic*, Handbook of Modal Logic (Patrick Blackburn, Johan Van Benthem, and Frank Wolter, eds.), Studies in Logic and Practical Reasoning, vol. 3, Elsevier, 2007, pp. 249–329.
- [Hal50] Paul R. Halmos, *Measure theory*, Van Nostrand Company, Inc., 1950.
- [Hal98] ———, *Naive set theory*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer New York, 1998.
- [JW96] Winfried Just and Martin Weese, *Discovering modern set theory. I*, Grad. Studies in Mathematics, vol. 8, American Mathematical Society, 1996.
- [Kec94] Alexander S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 156, Springer-Verlag, 1994.
- [Kun11] Kenneth Kunen, *Set theory*, Studies in Logic: Mathematical, College Publications, 2011.
- [Kur00] Alexander Kurz, *Logics for coalgebras and applications to computer science*, Ph.D. thesis, München: Univ. München, Fakultät für Mathematik und Informatik, 2000.
- [LS91] Kim G. Larsen and Arne Skou, *Bisimulation through probabilistic testing*, Inf. Comput. **94** (1991), no. 1, 1–28.
- [Mil07] Arnold W. Miller, *A hodgepodge of sets of reals*, Note di Matematica **27** (2007), no. Supplemento 1, 25–39.
- [Mor15] Martín S. Moroni, *Monadicidad de procesos probabilistas y no deterministas*, Master’s thesis, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba, 2015.
- [Mos09] Yiannis N. Moschovakis, *Descriptive set theory*, 2 ed., Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, 2009.
- [Oxt71] John C. Oxtoby, *Measure and category: A survey of the analogies between topological and measure spaces*, Graduate Texts in Mathematics, Springer New York, 1971.
- [Pan09] Prakash Panangaden, *Labelled markov processes*, Imperial College Press, 2009.
- [PST21] Jan Pachl and Pedro Sánchez Terraf, *Semipullbacks of labelled Markov processes*, Logical Methods in Computer Science **17** (2021), no. 2, 3:1–3:12.
- [Ros16] Luca Motto Ros, *Can we classify complete metric spaces up to isometry*, Bollettino Della Unione Matematica Italiana **10** (2016), 369–410.
- [Ros21] ———, *Classification problems from the descriptive set theoretical perspective*, 2021.
- [Rut00] J. J. M. M. Rutten, *Universal coalgebra: a theory of systems*, Theor. Comput. Sci. **249** (2000), 3–80.

- [San09] Davide Sangiorgi, *On the origins of bisimulation and coinduction.*, ACM Trans. Program. Lang. Syst. **31** (2009), no. 4, 15:1–15:41.
- [San12] ———, *Introduction to bisimulation and coinduction*, Cambridge University Press, Cambridge, 2012.
- [Sco64] Dana Scott, *Invariant Borel sets*, Fund. Math. **56** (1964), 117–128.
- [Seg95] Roberto Segala, *A compositional trace-based semantics for probabilistic automata*, CONCUR (Insup Lee and Scott A. Smolka, eds.), Lecture Notes in Computer Science, vol. 962, Springer, 1995, pp. 234–248.
- [SL95] Roberto Segala and Nancy A. Lynch, *Probabilistic simulations for probabilistic processes*, Nord. J. Comput. **2** (1995), no. 2, 250–273.
- [Sok05] Ana Sokolova, *Coalgebraic analysis of probabilistic systems*, Ph.D. thesis, Mathematics and Computer Science, 2005.
- [SR11] Davide Sangiorgi and J. J. M. M. Rutten, *Advanced topics in bisimulation and coinduction*, Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, Cambridge University Press, 2011.
- [ST11] Pedro Sánchez Terraf, *Unprovability of the logical characterization of bisimulation*, Information and Computation **209** (2011), no. 7, 1048–1056.
- [ST15] ———, *Bisimilarity is not Borel*, Mathematical Structures in Computer Science **FirstView** (2015), 1265–1284.
- [Sto02] Mariëlle Stoelinga, *An introduction to probabilistic automata*, Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science **78** (2002), 176–198.
- [Tao13] Terence Tao, *An introduction to measure theory*, Graduate studies in mathematics, American Mathematical Society, 2013.
- [Ven07] Yde Venema, *6 algebras and coalgebras*, Handbook of Modal Logic (Patrick Blackburn, Johan Van Benthem, and Frank Wolter, eds.), Studies in Logic and Practical Reasoning, vol. 3, Elsevier, 2007, pp. 331–426.
- [Vig05] Ignacio D. Viglizzo, *Coalgebras on measurable spaces*, Ph.D. thesis, Indiana University, 2005.
- [vMOW05] Franck van Breugel, Michael Mislove, Joël Ouaknine, and James Worrell, *Domain theory, testing and simulation for labelled Markov processes*, Theoretical Computer Science **333** (2005), no. 1, 171–197, Foundations of Software Science and Computation Structures.
- [Wol12] Nicolás Wolovick, *Continuous probability and nondeterminism in labeled transition systems*, Ph.D. thesis, Universidad Nacional de Córdoba, 2012.
- [Zho13] Chunlai Zhou, *Approximating bisimilarity for Markov processes*, Electr. Notes Theor. Comput. Sci. **298** (2013), 427–440.

lokāssamastāḥ sukhinobhavantu.