

Aplicaciones analíticas y numéricas de la teoría de ecuaciones en derivadas parciales a ciertos problemas de evolución sobre espacios curvos

por

Federico León Carrasco

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía y Física
como parte de los requerimientos para la obtención del grado de

Doctor en Física
de la
Universidad Nacional de Córdoba

Abril de 2016
FaMAF – UNC

Director: Dr. Oscar A. Reula



Aplicaciones analíticas y numéricas de la teoría de ecuaciones en derivadas parciales a ciertos problemas de evolución sobre espacios curvos. Por Federico León Carrasco. Se distribuye bajo Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 2.5 Argentina.

A Sergio Dain

Agradecimientos

A la Universidad Pública.

A CONICET, por la posibilidad de vivir de lo que me gusta durante todos estos años.

A mis amigos y compañeros de FaMAF. A la oficina 231/232 y al grupo de Relatividad.

A los amigos de toda la vida..

A Luis, por una oportunidad increíble. Por su abierta disposición y su gran hospitalidad.

A Leco, por compartir tan generosamente sus conocimientos, y algunas enseñanzas que van más allá de lo académico.

A mi viejo, por acercarme desde muy chico la pasión por la física y las matemáticas.
Por apoyarme en éste y en todos los proyectos que alguna vez aventuré.

A mi vieja, por su energía inagotable y por estar, siempre estar..

A mi hermana, y al hermoso sobrino que me regaló.

A Lucía, por hacer de estos últimos años los más felices. Y a su familia, que ya siento propia.

Resumen

La presente tesis engloba distintos proyectos de investigación, cuyo eje común es la teoría de ecuaciones en derivadas parciales (EDP) y su aplicación, tanto analítica como numérica, a la dinámica de ciertos campos clásicos sobre espacios curvos. Estos trabajos podrían ser agrupados en tres proyectos preliminares y un proyecto central. Los proyectos preliminares corresponden a diferentes colaboraciones, cuyos contenidos serán reseñados brevemente a continuación. Mientras que el proyecto central reúne, en el abordaje de un único problema astrofísico, las distintas herramientas incorporadas a lo largo del doctorado: relatividad general, magnetohidrodinámica, lenguajes de programación (C), lenguajes simbólicos (*Mathematica*), y la formulación del problema de valores iniciales/contorno para EDP, particularmente para sistemas hiperbólicos.

El primer proyecto tiene que ver con la continuación de mi trabajo final de licenciatura: el estudio de nuevos sistemas tipo *Skyrmions* estabilizados mediante una interacción con un campo vectorial de mesones. Es sabido que la inclusión de dicho campo vectorial en tres dimensiones logra estabilizar el modelo sigma no lineal sin la necesidad de un término cuártico en las derivadas del campo de piones o “término de Skyrme”. El modelo resultante comparte muchas de las propiedades de la teoría de Skyrme usual, pero con una mejora matemática sustancial: las ecuaciones de evolución constituyen ahora un sistema semi-lineal, cuyas velocidades características no dependen de la solución. En este trabajo [1], hemos hallado numéricamente las soluciones *multi-solitónicas* estáticas de dicha estabilización alternativa, para el caso en que el espacio de partida es una 2-esfera. Se analizó la relación entre la carga topológica y la energía de estas configuraciones. Asimismo, se estudió la estabilidad de las soluciones, introduciendo pequeñas perturbaciones a la evolución del sistema dinámico completo.

El segundo proyecto se relaciona con el estudio de fluidos relativistas conformes, en el contexto de la denominada *gravity/fluid duality*. Lo que el escenario holográfico plantea, es la existencia de un mapa entre soluciones de las ecuaciones clásicas de Einstein con constante cosmológica negativa (en cualquier dimensión), y fluidos conformes en una dimensión menos. En dos trabajos sucesivos [2, 3], se implementó numéricamente la evolución correspondiente a esta clase especial de fluidos. Partiendo de configuraciones estacionarias que se corresponden con soluciones de agujeros negros asintóticamente AdS_4 , se examinaron las propiedades de estabilidad asociada a los modos cuasi-normales hidrodinámicos del agujero negro. Se encontró que para números de Reynolds suficientemente grandes, la solución desarrolla turbulencia y produce una cascada inversa hacia mayores longitudes de onda, dando lugar a la formación de grandes estructuras de tipo vórtices. Esto sugiere un nuevo e interesante comportamiento de perturbaciones sobre agujeros negros en espaciotiempos asintóticamente Anti-de-Sitter ($AAdS$), que no era capturado por el análisis usual de modos cuasi-normales.

El tercer proyecto consiste en un estudio teórico sobre la formulación de valores iniciales de la denominada electrodinámica no lineal. En este trabajo [4], se ha logrado enmarcar a aquellas teorías de electrodinámica no lineales provenientes de Lagrangeanos generales, dentro del formalismo de R. Geroch para el tratamiento de ecuaciones en derivadas parciales. De esta forma se consiguió caracterizar, mediante un criterio geométrico –y algebraico– muy simple, cuándo una realización particular de la teoría es simétrica hiperbólica.

En el proyecto central de la tesis, el sistema que nos interesa en concreto es un plasma tenue en las cercanías del horizonte de eventos de un agujero negro rotante. En estas regiones astrofísicas, los campos magnéticos dominan la dinámica –en relación a la materia que constituye dichos plasmas– y dan lugar a una descripción desacoplada para el electromagnetismo conocida como electrodinámica *force-free*. El proyecto se divide en tres grandes partes. La primera consiste en una formulación de valores iniciales alternativa para la electrodinámica *force-free* [5] mediante el uso del formalismo co-variante de Geroch. La segunda parte, tiene que ver con el desarrollo de una implementación apropiada de las condiciones de contorno para las ecuaciones de evolución halladas. Por último, se describen algunos detalles de la implementación numérica y, fundamentalmente los resultados obtenidos y su análisis. Se intenta comprender aquí los estados estacionarios alcanzados por los campos electromagnéticos, en relación a la posible extracción de energía de rotación del agujero negro, y las condiciones necesarias para el lanzamiento de los denominados “*jets*”.

Palabras Claves

ecuaciones en derivadas parciales – sistemas simétrico hiperbólicos – simulaciones numéricas
Skyrmions – fluidos conformes – electrodinámica – plasmas astrofísicos – *force-free* – *jets*

Clasificación (PACS)

02.30.Jr, 02.70.-c, 47.75.+f, 94.05.-a

Índice general

Agradecimientos	1
Resumen	2
1. Introducción	6
2. Solitones Topológicos	11
2.1. Introducción	11
2.2. Implementación	12
2.3. Resultados	13
2.4. Conclusiones y perspectivas	15
3. Fluidos Conformes	16
3.1. Introducción	16
3.1.1. Turbulencia	17
3.1.2. Modos cuasi-normales	17
3.2. Implementación	18
3.2.1. Fluido perfecto en la esfera	18
3.2.2. Fluido disipativo	19
3.3. Resultados	19
3.3.1. Fluido perfecto en la esfera	19
3.3.2. Fluido disipativo	21
3.4. Conclusiones	22
4. Electrodinámica no lineal	24
4.1. Introducción	24
4.2. Aspectos Generales	25
4.2.1. Lagrangeano y ecuaciones de movimiento	25
4.2.2. Superficies características y métricas efectivas	25
4.2.3. Estructura geométrica: <i>los conos</i>	26
4.3. Hiperbolización	27
4.4. Vínculos	30
4.5. Conclusiones	30
5. Electrodinámica force-free	32
5.1. Introducción	32
5.2. Formulación de la FFE	33
5.2.1. Sistema restringido	34
5.2.2. Sistema aumentado	35
5.2.3. Sistema extendido	35
5.3. Hiperbolización	36
5.3.1. Descomposición $3 + 1$	37

5.3.2.	Ecuaciones de evolución	38
5.3.3.	Estructura característica	39
5.4.	Implementación	42
5.4.1.	Hoja de corriente	42
5.4.2.	Condiciones de contorno	42
5.4.3.	Dato inicial	44
5.4.4.	Cantidades de monitoreo	46
5.5.	Resultados	48
5.6.	Conclusiones y perspectivas	52
6.	Palabras Finales	55
A.	Implementaciones Numéricas	57
A.1.	Esquema numérico general	57
A.2.	Esquema de grillas	58
A.2.1.	La esfera unidad	58
A.2.2.	La métrica de Kerr-Schild	59
A.3.	Condiciones de contorno y tratamiento de interfaces	60
A.3.1.	Ejemplo unidimensional	61
A.3.2.	Generalizaciones	63
A.3.3.	Ejemplo: ecuaciones de Maxwell	64
A.4.	Desarrollos complementarios	66
A.4.1.	Perturbaciones aleatorias	66
A.4.2.	Espectro de potencia	66
A.4.3.	Transformaciones de coordenadas	66
A.4.4.	Post-proceso	68
B.	Enstrophy	69
B.1.	Introducción	69
B.2.	Construcción para fluidos relativistas	69
C.	Formalismo Covariante	72
C.1.	Hiperbolizaciones	72
C.2.	Vínculos	73
C.3.	Existencia y unicidad (local) de soluciones	73
D.	Implementación FFE alternativa	74
D.1.	Ecuaciones de evolución	74
D.2.	Estructura característica	75
D.2.1.	Proyecciones	76
D.3.	Condiciones de contorno	76
D.4.	Resultados y comentarios	78
	Bibliografía	80

Capítulo 1

Introducción

La presente tesis se constituye en base al abordaje de cuatro problemas físicos distintos, y representa la culminación de un proceso de formación más amplio: el doctorado.

Los problemas que aquí se presentan corresponden, todos ellos, a sistemas de evolución no lineales sobre espacios curvos; esto en general significa que muy poco puede obtenerse desde un frente puramente analítico, ya que suelen ser escasas las soluciones exactas que pueden hallarse, y son frecuentemente muy limitadas en cuanto a su alcance o generalidad. Estas dificultades, sumadas al gran crecimiento en recursos computacionales, motivan la búsqueda de respuestas por medio de simulaciones numéricas. Una implementación numérica, por su parte, requiere muchas veces un estudio detallado de la estructura matemática subyacente al sistema en cuestión. Y en particular, en lo que respecta a su formulación de valores iniciales y de contorno (a nivel del continuo), que debe garantizar la existencia y unicidad de las soluciones; así como la continuidad respecto de los datos iniciales. Luego, la discretización trae aparejados además sus propios desafíos, que deben asegurar en última instancia la estabilidad de todo el esquema numérico en su conjunto.

Identificamos tres instancias o aspectos fundamentales entre los diferentes proyectos de investigación que conforman el cuerpo de esta tesis: un **aspecto teórico**, que involucra el estudio de la estructura matemática del sistema correspondiente; un **aspecto práctico**, que representa los detalles técnicos que hacen a la implementación numérica; y un **aspecto físico** del problema, donde deben formularse las preguntas apropiadas y llevarse a cabo la extracción/exploración de los resultados, junto con sus implicancias físicas.

El proyecto central de la tesis gira en torno a un problema astrofísico: el lanzamiento de *jets*. Los *jets* son flujos colimados de partículas y campos electromagnéticos, que se originan en las cercanías de objetos compactos como estrellas de neutrones o agujeros negros, entre otros. Estos procesos son extremadamente energéticos, al punto tal que la energía extraída representa una fracción considerable de la masa total del sistema. Se cree, por lo tanto, que esa energía debe ser gravitacional en origen. Por otra parte, se sabe que la presencia de campos magnéticos muy intensos¹ da lugar a la conformación de un plasma tenue en las cercanías de la región central de dichos sistemas conocida como “magnetosfera”. En estas regiones, los campos magnéticos dominan la dinámica –en relación a la materia que constituye dichos plasmas– y dan lugar a una descripción desacoplada para el electromagnetismo conocida como electrodinámica *force-free*. Así, los campos obedecen una versión modificada –no lineal– de las ecuaciones de Maxwell, mientras que el plasma sólo interviene acomodándose al campo electromagnético para cancelar localmente la fuerza de Lorentz.

En un trabajo fundacional, Blandford y Znajek [6] sugirieron un mecanismo análogo al proceso de Penrose, mediante el cual el plasma da origen a una configuración del campo de Maxwell

¹Soportados por un disco de acreción en el caso de agujeros negros, o por la magnetización de la propia estrella en el caso de las estrellas de neutrones.

que es capaz de extraer electromagnéticamente la energía de rotación del agujero negro. Este mecanismo sentó las bases sobre las cuales comprender la extracción de energía del objeto compacto central en un escenario medianamente realista. Actualmente existen ya muchas evidencias, en particular numéricas, que verifican el mensaje primario de estas ideas. Sin embargo, hemos notado que muchas de las simulaciones que evolucionan la dinámica *force-free*, no cuentan con una implementación del todo convincente de las condiciones de contorno. Es claro que, en un escenario en donde lo que se busca son configuraciones estacionarias, las condiciones de borde juegan un rol crucial y pueden afectar los resultados físicos significativamente. La intención de este proyecto es entonces lograr una evolución tridimensional de la electrodinámica *force-free*, que involucre principalmente una mejor aproximación al problema de contornos.

Podría decirse que la “espin dorsal” de esta tesis es una infraestructura computacional desarrollada en su gran mayoría por mi director, Oscar Reula. Esta infraestructura [7], que describiremos en algún grado de detalle en el Apéndice A, permite representar un dominio con la topología $S^2 \times \mathbb{R}^+$. Es decir, propone una discretización del espacio tridimensional en forma de capas esféricas concéntricas, lo cual da origen a su nombre informal: *onion* (cebolla). Esta estructura, como veremos, se adapta perfectamente a la geometría de nuestro problema astrofísico y en particular facilita el tratamiento de los contornos.

Para generar un dominio computacional de esas características es ineludible la utilización de múltiples grillas, que deben comunicar y transferir información adecuadamente entre sí. Esto es posible gracias a un método denominado *multi-block* [7], que es compatible con la utilización de diferencias finitas y permite garantizar la estabilidad del esquema en su conjunto mediante el *método de energía* y la *técnica de penalizaciones* (ver Apéndice A).

Una reducción natural a dos dimensiones del código tridimensional consiste en considerar un único cascarón esférico, y así obtener un dominio con topología S^2 : la esfera unidad. Esta versión bidimensional del código ha sido empleada en los primeros proyectos incluidos en esta tesis, Capítulos 2 y 3.

El primero de esos proyectos tiene que ver con una continuación de mi trabajo final de licenciatura, y representó mi primer acercamiento al código y al lenguaje de programación C. El problema específico consistió en hallar las configuraciones de mínima energía de un sistema de tipo “*Skyrmions*”, bajo una estabilización alternativa (propuesta por otros autores) donde se incluye un campo vectorial. Este tipo de modelos, constituyen en general mapas entre dos espacios (en este caso de S^2 a S^2) que determinan una estructura topológica no trivial, caracterizada en muchos casos por un número entero denominado carga topológica o *winding number*. Esta propiedad es la que otorga a las soluciones un “carácter de partículas”, que las convirtió en candidatos atractivos para representar nucleones en la década del 70. En la actualidad son en general consideradas teorías efectivas de interés en el contexto de teoría de cuerdas, y son utilizadas también en algunas aplicaciones en materia condensada.

Para buscar las soluciones de mínima energía mencionadas, se recurrió a un sistema parabólico auxiliar cuya relajación derivaba en las soluciones del problema elíptico en cuestión. Luego se verificó la validez y estabilidad de dichas soluciones mediante la evolución del sistema hiperbólico completo. Mi aporte en este proyecto tuvo que ver principalmente con el trabajo numérico: la exploración del espacio de parámetros, así como la extracción y el análisis de los resultados, que fueron publicados en [1].

El segundo proyecto se inicia ante la posibilidad de un viaje a Canadá, en el marco de un programa para estudiantes de doctorado ofrecido en el *Perimeter Institute*. Allí comenzamos una colaboración con el Dr. Luis Lehner, en el contexto de la denominada “*gravity/fluid duality*”. Lo que esta dualidad plantea es la existencia de un mapa entre soluciones de las ecuaciones clásicas de Einstein –asintóticamente Anti-de Sitter (*AAAdS*)– en cualquier dimensión, y fluidos relativistas conformes en una dimensión menos. El punto de partida es una simple y bien conocida observación respecto del comportamiento de turbulencia en fluidos Newtonianos en

dos dimensiones espaciales. Específicamente en tal caso, el fenómeno de turbulencia induce una *cascada inversa* de energía, de longitudes de onda cortas hacia longitudes de onda mayores. Esto contrasta con la *cascada directa* de energía de largas a pequeñas escalas que caracteriza al fenómeno de turbulencia en tres o más dimensiones. La pregunta que Luis tenía en mente era entonces la siguiente: ¿se comportan los fluidos (conformes) relevantes a la dualidad de la misma manera que los fluidos usuales en dos dimensiones? Y de ser así, ¿cuáles serían las implicancias para la teoría gravitatoria dual?

El problema puede pensarse tanto para horizontes esféricos en coordenadas globales, como para el caso de horizontes planos (*black branes*) en coordenadas de Poincaré. En el primer caso, el dominio de la teoría hidrodinámica (en dos dimensiones) es entonces la esfera unidad. Por ello, y para responder a la primer pregunta, se estudió el problema de fluidos conformes utilizando la infraestructura bidimensional antes mencionada.

En esta primera colaboración [2], se consideró el fluido perfecto (es decir, sin términos viscosos), y encontramos que efectivamente el flujo, luego de atravesar un régimen turbulento, desarrolla estructuras de gran escala (vórtices) y verifica la cascada inversa de energía. En ese trabajo mi aporte fue también principalmente numérico: derivé las ecuaciones de evolución y su estructura característica asociada, necesaria para la técnica de penalizaciones que utiliza el código. Además, fue necesario realizar una descomposición de las soluciones en armónicos esféricos (espectro de potencias) para poder analizar cuantitativamente el fenómeno de la cascada inversa². Asimismo, contribuí con la derivación de una prueba para la conservación de una cantidad denominada *enstrophy* (ver Apéndice B), que se cree que desempeña un papel clave en la diferencia cualitativa en el comportamiento de turbulencia en dos y tres dimensiones espaciales. Esta cantidad se sabe conservada en los fluidos Newtonianos bidimensionales, pero no se conocía –hasta donde yo sé– una versión de esta cantidad para fluidos conformes.

En una segunda instancia, y a razón de una segunda visita al *Perimeter Institute*, comenzamos una colaboración con un estudiante postdoctoral de Luis, el Dr. Stephen Green. El proyecto ahora apuntaba en dirección a la segunda pregunta: cuáles serían las contrapartidas gravitatorias de los efectos hallados anteriormente. Resultaba fundamental entonces incluir los términos disipativos en la teoría hidrodinámica, para poder correlacionarlos con el decaimiento de las perturbaciones sobre agujeros negros. En el trabajo [3] se examinaron las propiedades de estabilidad de *shear-flows* que corresponden a modos cuasi-normales hidrodinámicos del agujero negro; hallándose que para números de Reynolds suficientemente grandes, la solución desarrolla turbulencia y produce nuevamente la cascada inversa. Esto implica un nuevo e interesante comportamiento de perturbaciones sobre agujeros negros en espaciotiempos *AAAdS*. Concretamente, la naturaleza inestable de ciertos modos cuasi-normales de larga vida, indica que el decaimiento de una *black brane* suficientemente perturbada puede diferir significativamente de la imagen que sugiere la teoría de perturbaciones usual. En esta oportunidad quien estuvo a cargo de las simulaciones numéricas fue Stephen, que fueron desarrolladas utilizando la geometría plana (parche de Poincaré). Mi participación en este proyecto fue más analítica, intentando relacionar propiedades de las soluciones de fluido en términos de cantidades geométricas del lado gravitatorio. Los resultados al respecto fueron algo modestos: utilizando un desarrollo que permitía extender la teoría hidrodinámica del borde hacia el interior del espaciotiempo (definida sobre hipersuperficies $r = cte$), logré mostrar que el concepto de *enstrophy* no sólo podía definirse y resultaba conservada en cada hipersuperficie, sino que además los valores de estas cantidades coincidían entre sí, y con el valor original de *enstrophy* definido sobre la frontera. Además, se consideraron algunas cantidades geométricas definidas para una solución de fluido con el perfil de un vórtice. La impresión general es que en estos ordenes más bajos de validez la dualidad, el mapa básicamente traslada la dinámica del borde en estructuras de tipo tubulares hacia la región interior del espaciotiempo.

² Ver desarrollos complementarios en el Apéndice A.

El tercer proyecto de esta tesis nació de una estadía del Dr. Érico Goulart en nuestra Facultad. Él había trabajado previamente en una clase de teorías que surgen como generalizaciones del electromagnetismo usual, y estaba particularmente interesado en estudiar la formulación de valores iniciales para estas teorías. Así surgió una colaboración entre Érico, Oscar y dos de sus estudiantes: el Lic. Fernando Ábalos y yo. Este trabajo abarcó un aspecto exclusivamente teórico, y el enfoque fue desde el inicio enmarcar el problema en la elegante formulación co-variante para el tratamiento de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales de Robert Geroch [8].

Se logró caracterizar, mediante un criterio geométrico muy simple, cuándo estas teorías son simétrico hiperbólicas³. Tales propiedades geométricas están vinculadas directamente con los conos de propagación físicos de la teoría: esencialmente se halló que el sistema es bien puesto cuando los dos conos de propagación tienen intersección no vacía. Por otro lado, mostramos que esta propiedad geométrica se refleja en la positividad de una cierta función escalar. Esto proporciona un criterio algebraico complementario de gran utilidad que permitió, por ejemplo, aplicar los resultados a distintos modelos concretos como los de Born-Infeld, Gauss-Bonnet y Euler-Heisenberg. Puede decirse que los resultados que obtuvimos, publicados en [4], fueron muy generales y cerraron el problema planteado al inicio del proyecto.

Mi participación en esta colaboración se dio a la par de la Fernando, ambos orientados permanentemente por nuestro director en los aspectos conceptuales. Érico construyó el simetrizador del sistema, y con Fernando nos abocamos a probar la positividad del mismo. Esto significó extender algunas nociones ya conocidas sobre los aspectos geométrico de estas teorías, para poder conectarlos con la hiperbolicidad de las mismas. Asimismo introdujimos el cómputo simbólico, con *Mathematica*, lo que resultó ser una pieza clave para la construcción de las demostraciones.

Retornamos ahora al problema astrofísico que, como se ha dicho, representa el proyecto central de la tesis. Es “central”, en la medida que engloba los tres aspectos que destacamos al comienzo: teórico/práctico/físico. Además porque incorpora, en su desarrollo, muchas de las herramientas adquiridas a lo largo de los proyectos previos.

El aspecto teórico surgió casi accidentalmente a comienzo de 2015. Teníamos prácticamente todo listo para comenzar a simular la dinámica de un plasma *force-free*, cuando caímos en la cuenta de una observación que ya había sido hecha dos años antes por Pfeiffer en [9]: el problema característico de una “formulación directa” de la electrodinámica *force-free* produce un problema mal puesto. La estructura característica asociada a una tal formulación presenta en general una base completa de autovectores, pero para ciertas configuraciones de los campos esto deja de ser cierto⁴. Esto significa, en otras palabras, que el sistema de evolución es débilmente-hiperbólico. Afortunadamente pudimos hallar una hiperbolización de la teoría siguiendo el formalismo de Geroch, lo que permitió dar con un sistema de evolución con las propiedades de estabilidad deseadas. Estos resultados matemáticos obtenidos se encuentran actualmente publicados en [5].

En el aspecto numérico, por su parte, este proyecto significó el salto hacia el código tridimensional, lo cual involucra algunos nuevos desafíos. Uno de estos desafíos, es la necesidad de imponer condiciones de borde⁵. La implementación de condiciones de contorno que prevengan el ingreso de violaciones a los vínculos y que prescriban correctamente las atribuciones físicas que uno busca, es en general delicado. Nuestro código cuenta con una infraestructura de penalizaciones destinadas a transferir información entre las distintas grillas. Esta infraestructura, sumada a topología de nuestro dominio numérico (y en particular de la frontera exterior), facilitó mucho el tratamiento del problema de contornos.

El proyecto implicó también la necesidad de algunos desarrollos numéricos complementarios, entre los que pueden contarse funciones para realizar transformaciones de coordenadas, o cálculo de flujos, entre otros. Quizá lo más significativo dentro de estos desarrollos fue la separación

³ Características deseables para todo sistema de ecuaciones que apunte a describir un problema físico.

⁴ Notar que al tratarse de una teoría no lineal, tanto la *parte principal* como el sistema característico dependen de las soluciones punto a punto.

⁵ Que no existía en el caso bidimensional, por tratarse la esfera de una variedad compacta sin bordes.

de la evolución primaria del sistema, del procesamiento posterior de las soluciones. A tal fin, se confeccionó un código independiente que permitió optimizar considerablemente los tiempos de cómputo y esfuerzo humano. La evolución, que es la parte computacionalmente costosa, sólo se efectúa una vez. Luego pueden explorarse las soluciones obtenidas con corridas de sólo unos escasos minutos. Parte de ese post-proceso incluye también un *script* de *Mathematica* para producir distintos gráficos.

Finalmente, diremos respecto al aspecto físico, que hemos logrado reproducir algunos resultados previos de otros autores con una implementación novedosa en cuanto a las ecuaciones de evolución utilizadas, y por sobre todo, en cuanto al tratamiento de las condiciones de borde. Entre estos resultados está la generación de un flujo de Poynting colimado y la extracción de energía de rotación del agujero negro. El terreno está abierto, sin embargo, para seguir explorando la física de este escenario y aprovechar más intensivamente la implementación numérica desarrollada hasta aquí.

Antes de continuar, quizá sean convenientes algunas aclaraciones y/o advertencias al lector. Cada problema, de los cuatro que conforman esta tesis, posee su contexto particular, su marco teórico propio, etc. Aventurar, por tanto, una introducción detallada (y a un nivel muy general) de cada temática derivaría sin dudas en un texto por demás extenso. Podría perderse asimismo el hilo conductor que nuclea los proyectos, y posiblemente se diluirían o confundirían los aportes propios con los ya establecidos en la literatura. Hemos optado entonces por introducir sólo aquellos aspectos esenciales de cada tema, orientándolos a presentar las ideas y resultados principales de cada proyecto. De esta forma, mantendremos el foco sobre los elementos de la teoría de ecuaciones en derivadas parciales y las implementaciones numéricas desarrolladas, así como en los aportes producidos en las distintas líneas de investigación.

La mayoría de los contenidos de la presente tesis se encuentran ya publicados [1–5]. El criterio que se siguió al incluirlos es el siguiente: se busca brindar los elementos generales del tema y las motivaciones que derivan en el problema concreto que se analiza; luego se detallan las implementaciones o estrategias adoptadas; se describen los resultados principales obtenidos; y finalmente, se discuten sus implicancias y las perspectivas dentro del área. Mantendremos la cantidad de detalles técnicos los más acotada posible, trasladándolos hacia distintos apéndices o refiriendo al lector interesado –llegado el caso– a la publicación correspondiente.

La estructura de la tesis es muy simple: en los cuatro capítulos que siguen a continuación se presentan en más detalle los proyectos descriptos; el Capítulo 6 intenta retomar las líneas generales desarrolladas hasta aquí y dar un cierre global a la tesis, mientras que en los apéndices se incluye toda aquella información complementaria de relevancia. En algunos casos el material de los apéndices contiene producción propia, y en otros, simplemente se reseñan fragmentos de trabajos ajenos importantes para el desarrollo de un dado capítulo. En particular, el Apéndice A contiene los detalles más relevantes referidos a la infraestructura e implementaciones numéricas. Parte de ese material corresponde a los desarrollos de mi director (y colaboradores), y otra parte alude a desarrollos complementarios propios. El Apéndice B, incluye la derivación matemática de una cantidad conservada conocida como *enstrophy*, que corresponde a un aporte realizado en el contexto del estudio de fluidos conformes del Capítulo 3. En el Apéndice C, se consignan las definiciones y conceptos fundamentales del formalismo geométrico de Geroch [8] para ecuaciones en derivadas parciales, relevante para los desarrollos teóricos de los Capítulos 4 y 5. Por último, el Apéndice D, contiene algunos detalles de una implementación alternativa a las condiciones de contorno del Capítulo 5.

Se utilizan, a lo largo de esta tesis, unidades en donde la velocidad de la luz es $c = 1$ y la constante gravitacional de Newton, $G = 1$. Para las ecuaciones de Maxwell, por su parte, se emplean las unidades de Heaviside-Lorentz. Se utilizan índices latinos a, b, c, \dots para denotar índices tensoriales abstractos, y se sigue la notación de Einstein de suma sobre índices repetidos.

Capítulo 2

Solitones Topológicos

2.1. Introducción

En los años 60 y principios de los 70, una aproximación novedosa a la teoría cuántica de campos se desarrolló y popularizó. Físicos y matemáticos comenzaron a estudiar las ecuaciones de campos clásicos en su forma no lineal completa, e interpretaron algunas de las soluciones como candidatos a partículas de las teorías. Estas nuevas partículas eran diferentes de las partículas elementales que se derivan de la cuantización a las excitaciones (ondulatorias) de los campos. La característica central y novedosa de éstas, es el carácter no trivial de su estructura topológica. En muchos casos, dicha estructura es capturada por un simple número entero B , denominado carga topológica o *winding number*. Estas soluciones fueron agrupadas genéricamente bajo el nombre de “solitones topológicos” (ver [10] para una introducción más detallada).

Un modelo sigma es una teoría de campo, en donde los campos toman valores sobre una variedad Riemanniana. Es decir, un mapa ϕ de un espaciotiempo (M, g_{ab}) hacia un espacio de llegada (N, H_{AB}) . El modelo sigma no lineal, construido a partir de la acción

$$S(\phi) := \frac{1}{2} \int_{\Sigma_t} g^{ab} \nabla_a \phi^A \nabla_b \phi^B H_{AB} dV \quad (2.1)$$

es uno de los sistemas más simples que admite soluciones topológicas estáticas, caracterizadas por el grado del mapa,

$$B = \text{deg}[\phi] := \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_t} \Omega_{ab} \quad (2.2)$$

donde $\Omega_{ab} := \frac{1}{2} \nabla_a \phi^A \nabla_b \phi^B \varepsilon_{AB}$ es simplemente el *pull-back* del elemento de volumen sobre M . Identificando este mapa con un campo de piones en tres dimensiones espaciales, las diferentes soluciones estáticas pueden ser interpretadas como bariones.

Sin embargo, estas configuraciones resultan dinámicamente inestables, y el modelo requiere la incorporación de nuevos términos en la acción para lograr su estabilización. Considerando sólo los grados de libertad del campo de piones, la modificación resulta en la inclusión de un término cuártico en derivadas (término de Skyrme), que conduce al bien conocido *modelo de Skyrme* [11]. Dentro de esta teoría, un “solitón” con carga topológica $B = 1$, apropiadamente cuantizado, constituye un modelo para representar a un nucleón.

Varios años más tarde, se estableció que era posible estabilizar el modelo sigma no lineal sin la necesidad de incluir el término de Skyrme, por medio de la inclusión de un campo de mesones ω acoplado a la corriente bariónica [12]. Este modelo, además de estar físicamente bien motivado, posee algunas ventajas matemáticas significativas, al constituir un sistema semi-lineal cuyas velocidades de propagación no dependen de la solución. Por el contrario, el modelo de Skyrme es un sistema cuasi-lineal en donde velocidades de propagación dependen de la solución y dan lugar –para algunos datos iniciales– a velocidades imaginarias que destruyen la predictibilidad

de la teoría.

En este trabajo, se estudia esta estabilización alternativa del modelo sigma no lineal en su versión bidimensional sobre la esfera. Concretamente esto significa que la variedad de partida es $M \equiv \mathbb{R} \times S^2$ y el espacio de llegada, $N \equiv S^2$. El nuevo Lagrangeano se lee,

$$\mathcal{L} := \mathcal{L}_\sigma + V(\phi) + \frac{1}{2} \nabla_a \omega_b (\nabla^a \omega^b - \nabla^b \omega^a) + \frac{1}{2} M^2 \omega_a \omega^a + g \omega_a B^a \quad (2.3)$$

donde \mathcal{L}_σ corresponde al modelo sigma, y V es un potencial que sólo depende del campo ϕ^A . Por su parte, ω_a es el campo vectorial de mesones y ha sido acoplado al campo de piones a través de la corriente:

$$B^a := -\frac{1}{4\pi} \epsilon^{abc} \Omega_{bc} \quad (2.4)$$

Se buscan numéricamente las soluciones estáticas de este modelo, para luego ser comparadas con aquellas obtenidas en el mismo escenario para la teoría usual de Skyrme [13].

2.2. Implementación

Luego de computarse las ecuaciones de movimiento provenientes de la variación de la acción asociada a (2.3), se pueden expresar las ecuaciones de evolución de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \partial_t \phi_t^A &= H_D^A \left\{ \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_k (\sqrt{-g} \phi^{kD}) + \frac{g}{8\pi} \epsilon^{abc} \epsilon_{BC}^D \phi^B F_{ba} \phi_c^C + \left(\frac{\delta V}{\delta \phi_B} \phi^B \phi^D - \frac{\delta V}{\delta \phi_D} \right) \right\} - \phi^A \phi_t^B \phi_{tB} \\ \partial_t \phi_i^A &= \partial_i \phi_t^A \\ \partial_t E_i &= g^{jk} \nabla_k (\epsilon_{ij} F) + M^2 \omega_i + g B_i \\ \partial_t \omega_0 &= g^{ij} \nabla_i \omega_j \\ \partial_t F &= \epsilon^{ij} \partial_j E_i \\ \partial_t \omega_i &= \partial_i \omega_0 - E_i \end{aligned} \quad (2.5)$$

sujetas a los dos vínculos,

$$g^{jk} \nabla_k E_j - M^2 \omega_0 - g B_0 = 0 \quad (2.6)$$

$$F - \epsilon^{ij} \partial_i \omega_j = 0 \quad (2.7)$$

Notamos que el sistema fue llevado a primer orden por medio de las variables $\phi_a^A \equiv \partial_a \phi^A$; $F \equiv \frac{1}{2} \epsilon^{ij} F_{ij}$ y $E_i \equiv F_{i0}$ (con $F_{ab} := \nabla_{[a} \omega_{b]}$).

Para estudiar las posibles soluciones estáticas se adopta la siguiente estrategia:

1. Se observa que asumir una situación estática (es decir, donde todas las derivadas temporales son puestas a cero en (2.5)), determina el siguiente sistema elíptico:

$$H_D^A \left\{ \Delta \phi^D + \frac{g}{4\pi} \epsilon^{DBC} \epsilon^{ij} \phi_B (\partial_i \omega) (\partial_j \phi_C) + \left(\frac{\delta V}{\delta \phi_B} \phi^B \phi^D - \frac{\delta V}{\delta \phi_D} \right) \right\} = 0 \quad (2.8)$$

$$\Delta \omega - M^2 \omega - g B_0 = 0 \quad (2.9)$$

2. Para resolver este nuevo sistema se considera un flujo parabólico dado por,

$$\partial_t \phi^A = H_D^A \left\{ \Delta \phi^D + \frac{g}{4\pi} \epsilon^{DBC} \epsilon^{ij} \phi_B (\partial_i \omega) (\partial_j \phi_C) + \left(\frac{\delta V}{\delta \phi_B} \phi^B \phi^D - \frac{\delta V}{\delta \phi_D} \right) \right\} \quad (2.10)$$

$$\partial_t \omega = \Delta \omega - M^2 \omega - g B_0 \quad (2.11)$$

Cuando el flujo (2.10)-(2.11) disipe parte de la energía inicial y el sistema alcance un régimen estacionario, esto significará que se satisfacen las ecuaciones elípticas (2.8)-(2.9); y por tanto, que dichas configuraciones son soluciones estáticas de la teoría.

En este estudio se han utilizado dos códigos numéricos distintos, ambos adaptados a la geometría particular del problema. Uno implementa la dinámica completa a través de la evolución del sistema hiperbólico (2.5), mientras que el otro es utilizado para la búsqueda de las posibles configuraciones estáticas mediante la evolución del sistema parabólico (2.10)-(2.11). La idea es que se utilizará la solución hallada luego del proceso difusivo (código parabólico) como dato inicial para la evolución de la dinámica (código hiperbólico). De esta forma se puede determinar si la configuración encontrada es realmente una solución estática estable de la teoría, o no.

Para más detalles vinculados a los códigos referimos al lector interesado al Apéndice A.

2.3. Resultados

Para el caso en que no hay potencial ($V = 0$), se obtienen las configuraciones estáticas para los sectores topológicos $2 \leq B \leq 16$, como se muestran en la Figura 2.1. Lo que se grafica es la distribución angular de densidad de carga topológica; es decir, los valores de la densidad de carga topológica sobre cada punto de la esfera (dominio numérico) determinan una distribución angular¹. El sector topológico $B = 1$ (ausente en la figura) es el único en el cual se preserva el grupo de simetría completo $O(3)$ de la teoría. La solución para $B = 2$ resulta axialmente simétrica (i.e. pertenece al grupo $O(2)$); mientras que el resto de las soluciones correspondientes a cargas topológicas mayores presentan subgrupos de $O(3)$ de simetrías discretas. Es interesante notar que los sectores $B = 3$, $B = 4$ y $B = 7$, exhiben algunas de las llamadas “simetrías platónicas”: tetraédrica, cúbica e icosaédrica, respectivamente.

La forma en que han sido representadas las soluciones estáticas en la Figura 2.1 desnuda la íntima relación que guardan con las distribuciones de carga topológica del modelo de Skyrme tridimensional. Esta conexión entre el modelo bidimensional en la esfera y el modelo tridimensional fue sugerida en [13], donde se argumenta que las simetrías del modelo de Skyrme 3D están determinadas solamente por la dependencia angular del campo de piones, y que el modelo 2D sobre la esfera puede ser pensado como el modelo tridimensional con una coordenada radial “congelada”. Las similitudes entre las soluciones halladas en este trabajo y las obtenidas para el modelo con el término de Skyrme en [13] son asombrosas, no sólo a un nivel cualitativo sino también a un nivel cuantitativo. En el Cuadro 2.1 se comparan las energías (normalizadas por $4\pi B$) de ambas teorías, utilizando parámetros apropiados a tal fin.

Luego, se consideró la inclusión de un potencial de la forma

$$V(\vec{\phi}) = m^2(1 - \phi_3) \quad (2.12)$$

motivado en analogía con el tradicionalmente empleado en el modelo de Skyrme 3D, y en donde el nombre sugestivo del parámetro m proviene de la identificación con un término de masa para el campo de piones. Se sabe que la inclusión del potencial proporciona a los solitones una escala espacial característica (dependiente de los parámetros). Al considerarse la teoría sobre una esfera de radio finito (esfera unidad), existe asimismo una escala natural fija asociada al espacio. Por lo tanto, la inclusión de este potencial posibilita una interrelación entre estas dos escalas y la idea de una “densidad” de solitones. En particular, hallamos que esta noción de densidad es capturada por una combinación particular de parámetros, $\beta := \sqrt{\frac{g}{mM}}$. Esta combinación representa el cociente entre la nueva escala propia de los solitones y la escala natural del espacio.

Las soluciones “multi-solitónicas” pueden ser clasificadas básicamente en una fase de bajas densidades ($\beta \lesssim 2$) y en una fase de alta densidad ($\beta \gtrsim 3$). La transición entre estos dos

¹ Cabe mencionarse aquí, que la densidad de energía presenta distribuciones angulares muy similares a éstas.

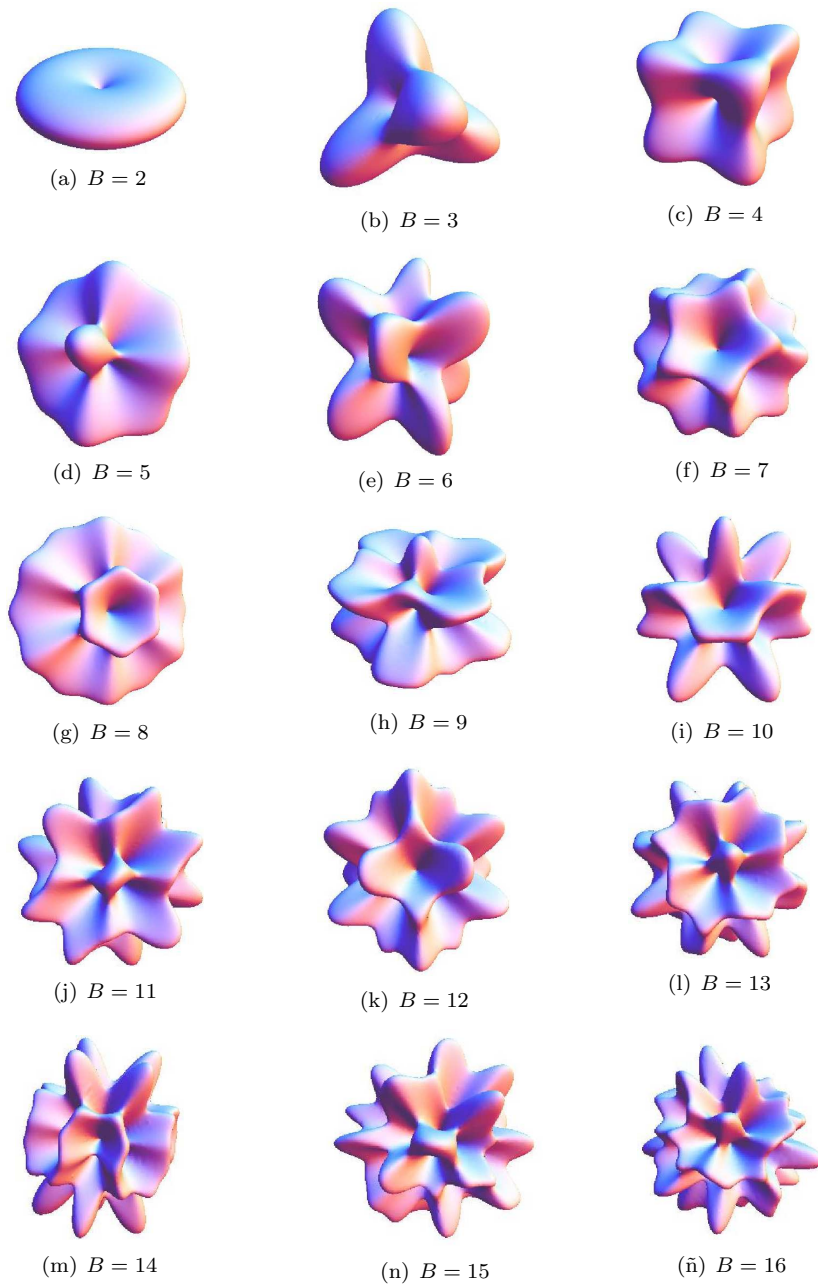


Figura 2.1: Caso $V = 0$. Soluciones estáticas para los sectores topológicos $2 \leq B \leq 16$, con parámetros $g = 18$ y $M \approx 6,4$ ($\kappa^2 = (\frac{g}{4\pi M})^2 = 0,05$).

Cuadro 2.1: Energías y grupos de simetría para los modelos de mesones vectoriales y para el modelo *baby-Skyrme*. $\kappa^2 = (\frac{g}{4\pi M})^2 = 0,05$ (con $g = 18$, $M \approx 6,4$). * datos tomados de [13]

Carga	Baby Skyrme *		Mesones Vectoriales	
	$E/4\pi B$	Simetría	$E/4\pi B$	Simetría
2	1.071	$D_{\infty h}$	1.068	$D_{\infty h}$
3	1.105	T_d	1.099	T_d
4	1.125	O_h	1.117	O_h
5	1.168	D_{2d}	1.155	D_{4d}
6	1.194	D_{4d}	1.179	D_{4d}
7	1.209	I_h	1.193	I_h
8	1.250	D_{6d}	1.229	D_{6d}
9	1.281	D_{4d}	1.256	D_{4d}
10	1.306	D_{4d}	1.278	D_{4d}
11	1.337	D_{3h}	1.306	D_{3h}
12	1.360	T_d	1.328	T_d
13	1.386	O_h	1.352	O_h
14	1.421	D_2	1.383	D_{4d}

regímenes parece no estar definida de forma abrupta, y como fue notado en [14], no corresponde a una transición de fase en el sentido usual. La principal diferencia cualitativa que se observa es que en el primer régimen, los solitones están localizados en el espacio, individualmente o agrupados de a pares (anillos); mientras que en la fase densa, los solitones se esparcen por toda la esfera formando configuraciones altamente estructuradas.

2.4. Conclusiones y perspectivas

En este trabajo se ha estudiado la estabilización alternativa del modelo sigma sobre la esfera unidad, mediante una implementación numérica del problema que permitió hallar las soluciones multi-solitónicas estáticas de la teoría, así como también garantizar dinámicamente la estabilidad de dichas soluciones. Las configuraciones encontradas para el caso $V = 0$ revelan una íntima conexión con las correspondientes soluciones del modelo de Skyrme tridimensional, así como observan una gran similitud cualitativa y cuantitativa con sus análogos en la esfera, pero para la estabilización usual mediante el término de Skyrme.

Asimismo, se exploraron en este proyecto la inclusión de un término potencial, y la interrelación generada entre la nueva escala espacial introducida y la escala natural provista por la esfera unidad. Se identificó el parámetro relativo a la densidad de solitones y se observó la clasificación general entre dos regímenes o fases diferentes. La fase de bajas densidades produce soluciones localizadas que permiten recrear el caso plano sobre la esfera; mientras que la fase de altas densidades presenta distribuciones de carga topológica muy similares a las del caso $V = 0$, pero ligeramente distorsionadas. En particular, se entiende que el potencial implica la ruptura de la simetría original $O(3)$, y por tanto, las simetrías puntuales para las soluciones multi-solitónicas son ahora subgrupos de $O(2)$.

Una posibilidad interesante para continuar este trabajo, sería la exploración de los aspectos dinámicos de la teoría utilizando estas soluciones localizadas (de baja densidad) y aprovechando el hecho de contar con un código capaz de simular la dinámica completa del sistema. De particular interés, sería el análisis de los procesos de *scattering* (solitón/solitón) y aniquilación (solitón/anti-solitón), como los estudiados en [15, 16].

Capítulo 3

Fluidos Conformes

3.1. Introducción

La denominada “*gravity/fluid duality*” [17–19], relaciona dos importantes sistemas no lineales: relatividad general (ecuaciones de Einstein) y dinámica de fluidos (ecuación de Navier-Stokes). En principio, esta conexión aparece como un límite particular dentro de un ámbito más general conocido como la correspondencia *AdS/CFT* [20], que propone una sorprendente conexión entre gravedad cuántica en $d+1$ dimensiones y teoría cuántica de campos en d dimensiones. Sin embargo, se ha notado que ciertas formas más precisas de esta dualidad entre gravedad e hidrodinámica pueden ser derivadas de una manera independiente y puramente clásica (ver [18] para la derivación original y [3] para una versión más compacta). Las ecuaciones hidrodinámicas que gobiernan las perturbaciones de baja frecuencia en torno a un estado de equilibrio, surgen término a término en una expansión que proviene de perturbar determinadas geometrías de agujeros negros asintóticamente Anti-de Sitter (*AAdS*). Esto permite un mapeo explícito entre soluciones de una teoría en la otra, y en particular, proporciona un nuevo e interesante método de análisis basado en la correlación de fenómenos conocidos de un lado de la dualidad con sus contrapartidas en la teoría dual.

Esta idea ha sido utilizada para enmarcar preguntas correspondientes a la dinámica de fluidos en términos de la teoría gravitatoria. Por ejemplo, en [21] se exploró la relación entre la desigualdad de Penrose (que permite detectar, por medio de la conjetura del censor cósmico, la aparición de singularidades desnudas en relatividad general) y el problema de las singularidades a tiempo finito en las soluciones hidrodinámicas. En [22], fue sugerida la posibilidad de utilizar un dual gravitatorio para comprender el complejo fenómeno de turbulencia. Asimismo, muchas simulaciones numéricas han sido realizadas para comprender los procesos de isotropización y termalización de sistemas que empiezan lejos del equilibrio (e.g. [23–25]).

En este trabajo se consideró, en cambio, la ruta opuesta: estudiar las implicaciones que el fenómeno de turbulencia puede tener en nuestra comprensión de la relatividad general. El punto de partida es una simple y bien conocida observación respecto del comportamiento de turbulencia en fluidos Newtonianos en dos dimensiones espaciales. Específicamente en tal caso, el fenómeno de turbulencia induce una *cascada inversa* de energía, de longitudes de onda cortas hacia longitudes de onda mayores (e.g. [26]). Esto contrasta con la *cascada directa* de energía de largas a pequeñas escalas que caracteriza al fenómeno de turbulencia en tres o más dimensiones. La pregunta obvia es entonces si este efecto aparece en los fluidos relativistas conformes relevantes para la dualidad, y de ser así, cuál es su interpretación en la teoría gravitacional. Lo que se estudiará concretamente es el comportamiento de un tipo de fluidos específicos, que son duales a perturbaciones de agujeros negros de Schwarzschild y Kerr en AdS_4 . Se analizará el problema para horizontes esféricos en coordenadas globales, así como el caso de horizontes planos (*black branes*) descritos por coordenadas de Poincaré.

3.1.1. Turbulencia

La turbulencia es una propiedad ubicua de los fluidos observada en la naturaleza [27]. Cualitativamente, puede ser pensada como un régimen de flujos caracterizados por un comportamiento caótico o estocástico. La mayor parte de nuestro conocimiento teórico acerca de este fenómeno proviene del estudio de fluidos incompresibles no relativistas. Ciertamente no se tiene un conocimiento acabado del complejo fenómeno de turbulencia, pero sí existen algunos resultados sólidos: para el caso no viscoso en dos dimensiones espaciales un teorema global de regularidad ha sido probado, junto con teoremas de unicidad y existencia de soluciones [28], implicando la imposibilidad de que el campo de velocidades desarrolle singularidades en tiempo finito. Para el caso tridimensional en cambio, todavía no ha podido establecerse un resultado análogo, y resolver esa pregunta constituye uno de los grandes problemas abiertos en la actualidad (ver e.g. [29]). Es sabido sin embargo, que cualitativamente la turbulencia en dos y tres dimensiones exhibe profundas diferencias, atribuidas a la existencia de una cantidad conservada clave en el caso bidimensional. Se ha argumentado que esta cantidad, denominada *enstrophy*, determina un cambio radical en la cascada de energía respecto del caso tridimensional [30]. Se incluye en el Apéndice B una derivación de esa conservación para el caso concreto de fluidos relativistas conformes.

Un objeto importante en la teoría de turbulencia es el campo de **vorticidad**¹, que mide la magnitud y orientación de los remolinos (*eddies*). Mientras que en tres dimensiones este campo representa un pseudo-vector $\omega^i := \epsilon^{ijk} \partial_j u_k$; en dos dimensiones se reduce a un campo pseudo-escalar definido por,

$$\omega := \epsilon^{ij} \partial_i u_j \quad (3.1)$$

Otro concepto clave en este contexto es el **número de Reynolds**, que constituye una cantidad adimensional usada para predecir la estabilidad de los flujos (ver e.g. [31]). Éste, básicamente cuantifica la relación entre los términos no lineales y los viscosos en las ecuaciones de Navier-Stokes. Para valores suficientemente bajos del número de Reynolds, el fluido es estable respecto a pequeñas perturbaciones y es conocido como “flujo laminar”; mientras que para valores altos de este coeficiente, el flujo se vuelve inestable y da origen al fenómeno de turbulencia.

3.1.2. Modos cuasi-normales

Los modos cuasi-normales son en esencia los modos característicos de sistemas disipativos. Las perturbaciones de espaciotiempos que constituyen agujeros negros son intrínsecamente disipativas debido a la presencia de un horizonte de eventos, dando lugar a modos cuasi-normales. Éstos, aparecen como soluciones formales a las ecuaciones linealizadas de Einstein que describen las perturbaciones alrededor de una solución de agujero negro. El análisis y clasificación del espectro de modos cuasi-normales implica la resolución de un problema de autovalores –no Hermitiano– asociado al sistema lineal de ecuaciones diferenciales. Estos modos poseen en general frecuencias complejas, cuya parte imaginaria se relaciona al decaimiento de la perturbación.

Los modos cuasi-normales de las soluciones de agujero negro *AAdS* relevantes para la dualidad pueden ser agrupados en tres “canales”, de acuerdo a las propiedades de transformación ante rotaciones: los canales *sound*, *shear* y *scalar*. Aquellos modos de “larga vida” dentro de las familias *sound* y *shear* son, a su vez, denominados modos hidrodinámicos [32]. El fluido dual captura el comportamiento asociado a este grupo hidrodinámico de modos cuasi-normales. Sin embargo, es importante destacar que el fluido responde a ecuaciones no lineales, mientras que los modos cuasi-normales corresponden –como se dijo– a perturbaciones gravitatorias linealizadas.

Para analizar el tipo de decaimiento sugerido por los modos cuasi-normales en el contexto de la dualidad, será fundamental por tanto incorporar los términos disipativos a la teoría hidrodinámica dual. Tales incorporaciones serán discutidas en la próxima sección.

¹Este campo será utilizado para reflejar alguno de los resultados de este trabajo (Figuras 3.1 y 3.3).

3.2. Implementación

La construcción perturbativa del mapa mencionado, proporciona el tensor energía-momento del fluido conforme –orden por orden en las derivadas de las variables correspondientes:

$$T_{ab} = \alpha T^3 \left((g_{ab} + 3 u_a u_b) - \frac{3\beta}{T} \sigma_{ab} + \mathcal{O}(T^{-2}) \right) \quad (3.2)$$

donde u^a es la quadri-velocidad del fluido y T –la temperatura del agujero negro–, está asociada con su densidad de energía local. Mientras que g_{ab} es la métrica en la subvariedad (de borde) donde está definida la teoría hidrodinámica, y α, β son coeficientes adimensionales que caracterizan al fluido. El primer término en la expansión corresponde a un fluido perfecto, mientras que σ_{ab} (*shear*) describe la contribución viscosa a primer orden, y $\mathcal{O}(T^{-2})$ representa las contribuciones de ordenes más altos. Como puede notarse, la participación de los términos disipativos puede suprimirse arbitrariamente al incrementar la temperatura T .

Este proyecto consta de dos instancias. La primera [2], se restringe a estudiar la dinámica al orden más bajo en la expansión, i.e. fluido perfecto. Se encuentra que, al igual que los fluidos Newtonianos, estos fluidos conformes también desarrollan una cascada inversa de energía. En una segunda instancia [3], se incluyeron los primeros ordenes disipativos al fluido. Esto permite comparar el comportamiento del flujo, con el decaimiento esperado en la teoría dual de acuerdo a la descripción de modos cuasi-normales.

3.2.1. Fluido perfecto en la esfera

Se implementan las ecuaciones resultantes de la conservación del tensor energía-momento en (3.2) a orden de fluido perfecto. Es sabido que éste constituye un sistema simétrico hiperbólico, y por tanto, su problema de Cauchy es bien puesto.

Los estados de equilibrio para un fluido conforme sobre la esfera unidad corresponden a un fluido rotando rigidamente,

$$u^\theta = 0 \quad , \quad u^\phi = \gamma \omega_0 \quad , \quad T = \gamma \tau \quad (3.3)$$

donde $\gamma = (1 - \omega_0^2 \sin^2(\theta))^{-1/2}$ es el factor de Lorentz. Los dos parámetros ω_0 y τ , corresponden respectivamente a la velocidad angular y a la temperatura local medida por observadores co-rotantes. Siguiendo [33, 34], la solución relevante desde el punto de vista gravitatorio es en este caso el agujero negro de Kerr AdS_4 . Los parámetros asociados a esta métrica, a y r_+ , representan el momento angular por unidad de masa y el radio del horizonte. La conexión entre las soluciones en el límite de r_+ grandes, implica la siguiente correspondencia entre los parámetros (ver [33]),

$$\omega_0 \longleftrightarrow a \quad , \quad (3.4)$$

$$\tau \longleftrightarrow \frac{3 r_+}{4\pi} \quad . \quad (3.5)$$

Por lo tanto, la configuración estática del fluido ($\omega_0 = 0$) es dual a Schwarzschild AdS_4 , mientras que las rotantes ($\omega_0 \neq 0$) son duales a la geometría de Kerr AdS_4 , para agujeros negros de gran tamaño (temperaturas altas).

Las perturbaciones que se considerarán como datos iniciales son de la forma,

$$u^\phi \rightarrow u^\phi = \gamma(\omega_0 + \delta \omega_p(\theta, \phi)) \quad , \quad (3.6)$$

para algún valor pequeño δ y una perturbación angular ω_p , generalmente elegida entre los elementos de la base de armónicos esféricos, $Y_\ell^m(\theta, \phi)$.

3.2.2. Fluido disipativo

En este caso se consideran las ecuaciones que surgen de la conservación de (3.2), ahora incluyendo no sólo los términos viscosos de primer orden sino también algunos de segundo orden. La razón para ello, tiene que ver con que las formulaciones de primer orden de fluidos relativistas disipativos, como la de Eckart [35], llevan a propagaciones no causales y son generalmente mal puestos [36]. Incluyendo algunos términos de segundo orden de manera adecuada, resulta posible construir un sistema hiperbólico [36–39]. Para una discusión más detallada de este asunto y para ver las ecuaciones finales, referimos al lector a [3] (y las referencias ahí contenidas). Asimismo, aclaramos que en este caso se ha utilizado la descripción en las coordenadas de Poincaré, en donde la geometría del horizonte resulta plana (*black branes*). Por lo tanto, la métrica en (3.2) corresponde a Minkowski (i.e. $g_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu}$) y el dominio numérico para el fluido es un toro.

Los datos iniciales se eligen de forma tal que se correspondan con los modos cuasi-normales hidrodinámicos de tipo *shear* del agujero negro. Por lo tanto se toman,

$$\rho(t=0) = \rho_0 = \text{constante} \quad (3.7)$$

$$u_x(t=0) = v_0 \sin\left(\frac{2\pi ny}{D}\right) \quad (3.8)$$

mientras que todas las demás componentes de la velocidad son fijadas a cero. Se consideran distintos valores para la densidad de energía ρ_0 , la amplitud de la velocidad v_0 , el número de modos n y el tamaño del toro $[0, D]^2$. Se incluye además una pequeña perturbación aleatoria al campo u_x , y se estudian los efectos de esta perturbación para analizar la estabilidad del decaimiento de modos cuasi-normales puros.

3.3. Resultados

3.3.1. Fluido perfecto en la esfera

Tanto los casos rotantes como los no rotantes, asociados a sendas perturbaciones de Kerr y Schwarzschild, presentan un comportamiento cualitativo similar. Por ello, y a los fines de mantener razonable la extensión de esta tesis, no será discutido aquí el caso rotante². Se puede clasificar la dinámica del sistema en cuatro estadios distintos. En la Figura 3.1, se presenta el campo de vorticidad para cuatro instantes representativos. La primera instancia corresponde a un período en donde la configuración inicial aparenta permanecer inalterada por un tiempo. Una inspección más detallada, sin embargo, revela que una dinámica no trivial comienza a manifestarse y a dar lugar a un crecimiento exponencial de algunos modos (ver Figura 3.2). A medida que estos modos se vuelven lo suficientemente grandes (aproximadamente commensurables a la magnitud de la perturbación inicial), la simetría original del sistema se rompe dando lugar a la aparición de una cierta cantidad de *eddies* que comienzan a moverse por la esfera. Ese instante puede interpretarse como el comienzo de la turbulencia (Figura 3.1(b)). A medida que la dinámica continúa, los *eddies* gradualmente se tornan vórtices individuales y se comportan en forma caótica, durante una instancia que será referida como turbulencia completamente desarrollada (Figura 3.1(c)). Con los vórtices propagándose en la esfera, los encuentros de vórtices del mismo signo van dando lugar a estructuras cada vez más grandes. Durante este período, gobernado por los efectos no lineales, la energía es transferida desde los modos ℓ más altos a los más bajos. El proceso continúa hasta que sólo quedan cuatro vórtices: dos de cada signo (Figura 3.1(d)).

En la Figura 3.2 se muestran algunos modos representativos del espectro correspondiente a la vorticidad. Los modos $\ell = 9$ y $\ell = 11$ dominan el espectro inicial, de acuerdo con la perturbación considerada en este caso (i.e. $\omega_p \sim Y_{10}^0$). El resto de los modos exhibe un crecimiento exponencial desde el inicio de la evolución, como ya fue mencionado. A medida que la turbulencia se dispara,

²El lector interesado puede acudir a [2].

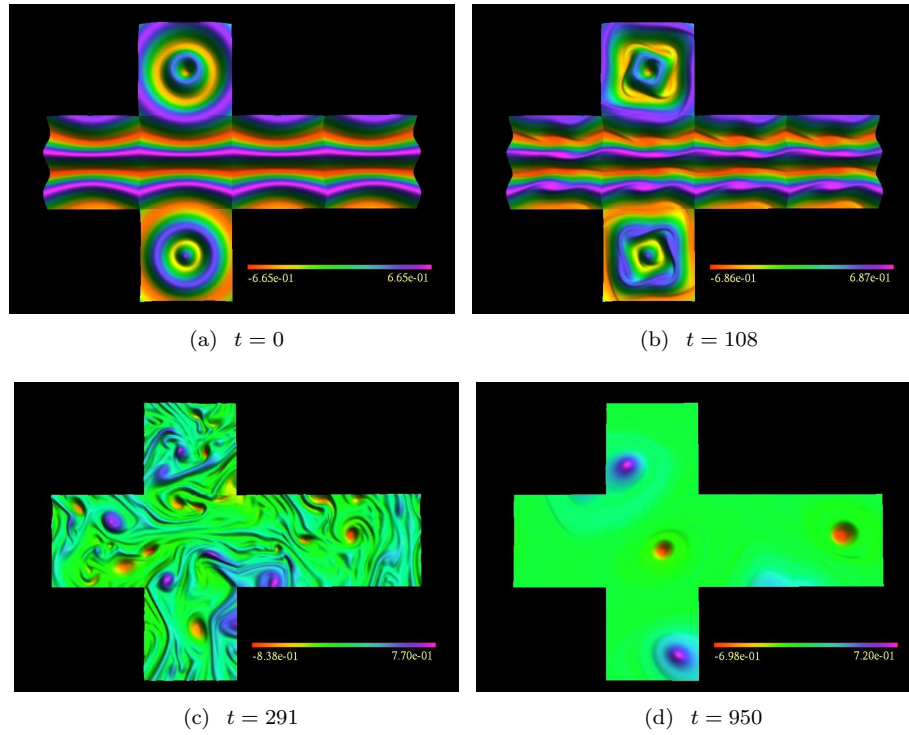


Figura 3.1: Campo de vorticidad a distintos instantes de la dinámica: (a) Configuración inicial, (b) inicio de turbulencia, (c) turbulencia completamente desarrollada, (d) estado final.

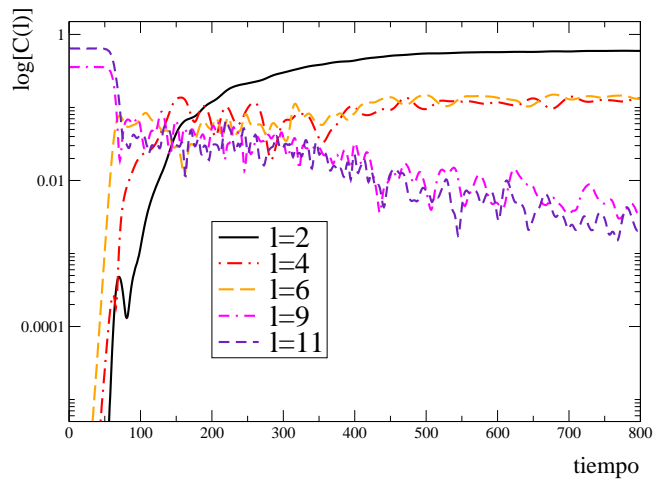


Figura 3.2: Amplitud de algunos modos representativos en el espectro del campo de vorticidad (para una perturbación $\omega_p = Y_{10}^0$ y $\delta = 0,2$). Se observa un crecimiento exponencial inicial de los modos más bajos; al volverse conmensurables, los distintos modos atraviesan una fase compleja; y derivan finalmente en una solución dominada por los modos más bajos, en particular $\ell = 2$.

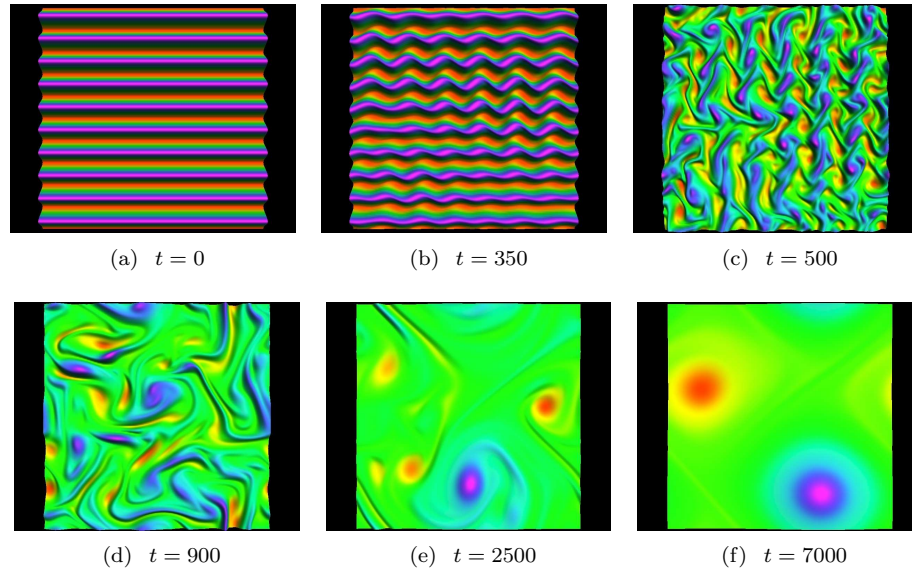


Figura 3.3: Campo de vorticidad a distintos instantes de la dinámica: la *cascada inversa* puede notarse con claridad, derivando en dos vórtices contra-rotantes finales que decaen lentamente.

y luego de un corto estadio de gran complejidad en la estructura de modos, los modos iniciales decrecen mientras que los más bajos crecen y gradualmente dominan el flujo. Particularmente el modo $\ell = 2$, que representa la contribución cuadripolar, parece ser el que domina a tiempos largos³.

3.3.2. Fluido disipativo

Se considera el número de Reynolds,

$$R \sim \frac{\rho v L}{\eta} \quad (3.9)$$

donde ρ , v , L y η son los parámetros característicos asociados a la densidad de energía local, fluctuaciones en la velocidad, escala espacial y viscosidad del fluido, respectivamente⁴.

Se determinó numéricamente –teniendo en cuenta las perturbaciones aquí consideradas– un valor crítico para el número de Reynolds⁵,

$$R_c \approx \left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} 6\pi \times 0,7 (1 + 0,07n), \quad (3.10)$$

a partir del cual se verifica la aparición de inestabilidades en los flujos.

Se describen a continuación las tres fases de un flujo turbulento: el crecimiento inicial de las inestabilidades, la cascada inversa de energía, y el decaimiento exponencial final. Este comportamiento típico es ilustrado en la Figura 3.3, donde se observan capturas de la vorticidad a distintos instantes de tiempo.

En la Figura 3.4 se muestran las normas L_2 correspondientes a la vorticidad y las distintas

³Es importante notar que los vórtices finales permanecen en un estado cuasi-estacionario dado que no se incluyen términos disipativos, lo que ciertamente afectaría el comportamiento a tiempos largos de las soluciones.

⁴Esta definición del número de Reynolds es no relativista por naturaleza. Sin embargo, en este estudio hemos adoptado esta definición dado que lidiamos con velocidades de flujo pequeñas.

⁵Referimos al lector interesado a [3], donde se deriva este resultado en detalle.

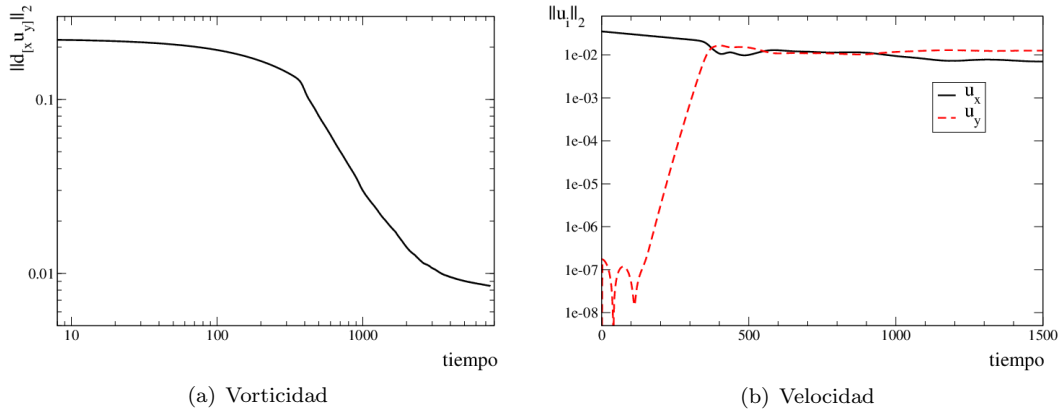


Figura 3.4: Normas L_2 de (a) vorticidad, y (b) u_i , como función del tiempo para un flujo turbulento. En (a) hay un decaimiento exponencial inicial, seguido de una ley de potencias durante la cascada inversa, seguida de un nuevo decaimiento exponencial (más lento que el inicial). En (b), u_y crece exponencialmente hasta que alcanza una magnitud similar a la de u_x .

componentes de la velocidad. Se observa que inicialmente, tanto la vorticidad como la componente u_x , decaen exponencialmente como es esperable para *shear flows*. Sin embargo durante ese mismo intervalo de tiempo, $\|u_y\|_2$ transita un crecimiento exponencial hasta alcanzar aproximadamente el mismo valor que $\|u_x\|_2$. Esto lleva a la solución a un estado de equi-partición de la energía entre u_x y u_y . Y a partir de este punto, el decaimiento inicial se detiene y el régimen turbulento comienza.

Como se observa en la Figura 3.3(c), el flujo inicial es completamente distorsionado y el campo de vorticidad exhibe una cierta cantidad de *eddies* turbulentos. El decaimiento exponencial de la vorticidad en la Figura 3.4(a) se detiene y es reemplazado por un decaimiento en ley de potencias⁶.

Durante el decaimiento en ley de potencias, los *eddies* se funcionan en vórtices y esto se va repitiendo dando lugar a estructuras cada vez mayores (Figuras 3.3(d)-3.3(e)). Vórtices del mismo signo se fusionan mientras que aquellos con sentidos de rotación opuestos se repelen, análogamente al caso no viscoso. A tiempos largos, los vórtices remanentes continúan decayendo en amplitud hasta que finalmente desaparecen. La solución final es entonces la superposición de los modos *shear* y *sound* (de grandes longitudes de onda), que decaen exponencialmente.

Como resultado de la cascada inversa de energía, la tasa de decaimiento a tiempos largos es menor que la del decaimiento inicial. Por lo tanto, puede decirse que la aparición del régimen turbulento, y en particular la cascada inversa, demoran drásticamente el tiempo que tarda la perturbación inicial en relajarse hacia el flujo uniforme.

3.4. Conclusiones

En este trabajo se estudió numéricamente la dinámica de fluidos relativistas conformes en dos dimensiones espaciales. En una primera instancia se consideró un fluido perfecto, lo que permitió verificar que el fenómeno de turbulencia tiene lugar en las teorías hidrodinámicas relevantes para la dualidad. Además se logró comprobar, que análogamente a los fluidos Newtonianos incompresibles, la dinámica turbulenta genera una cascada inversa de energía [2]. En una segunda instancia se incorporaron los términos viscosos que siguen en la expansión (ec. (3.2)) de acuerdo a la dualidad, y se observó que –a partir de un valor crítico del número de Reynolds– las soluciones desarrollan turbulencia y dan lugar nuevamente a una cascada inversa.

⁶ Se observó típicamente $\|\omega\|_2 \propto t^{-\alpha}$, con $\alpha \simeq 1,2 \pm 0,2$.

La presencia de los términos disipativos permiten ahora relacionar de manera más concreta los resultados del frente hidrodinámico –a través de la dualidad– con los comportamientos esperados para las perturbaciones sobre agujeros negros $AAdS_4$; en particular, con la descripción que provee el estudio de modos cuasi-normales. Encontramos que el caso laminar se corresponde efectivamente con el decaimiento usual del modo cuasi-normal hidrodinámico de la *black brane*. Mientras que para $R > R_c$, la inestabilidad del flujo señala una inestabilidad del modo cuasi-normal⁷; una vez que el modo creciente se vuelve conmensurable al modo (perturbación) original, el decaimiento inicial es interrumpido y el comportamiento general es drásticamente modificado por la aparición de turbulencia.

Se concluye que la teoría de perturbaciones ordinaria sobre agujeros negros $AAdS_4$ no es el método más adecuado para capturar estos efectos analíticamente. La naturaleza inestable de ciertos modos cuasi-normales sugiere que el decaimiento de una *black brane* suficientemente perturbada difiere significativamente de la imagen que brinda la teoría de perturbaciones usual. Físicamente, la razón es que para *black branes* de alta temperatura, los modos cuasi-normales decaen muy lentamente. Entonces, para una dada perturbación, los términos viscosos (lineales) se vuelven pequeños comparados con los términos no lineales de la ecuación de Einstein. De esta forma, el régimen de aplicabilidad de la teoría de perturbaciones lineales es empujado hacia perturbaciones de la métrica más pequeñas. Del lado hidrodinámicos, esas propiedades son convenientemente capturadas por el número de Reynolds; sería por tanto muy interesante obtener un análogo geométrico del número de Reynolds, que permitiera predecir de alguna manera la presencia de turbulencia en gravedad [40].

Se concluye asimismo que los agujeros negros $AAdS$ perturbados se comportan de una manera fuertemente dependiente de la dimensionalidad, tanto a nivel cualitativo como cuantitativo.

⁷Enfatizamos que esto no implica una inestabilidad del agujero negro, dado que persiste en todo momento un decaimiento neto.

Capítulo 4

Electrodinámica no lineal

4.1. Introducción

La electrodinámica no lineal (NLE, por sus siglas en inglés) engloba genéricamente aquellas modificaciones no lineales a la teoría usual de Maxwell. En la mayoría de los casos, estas teorías provienen de un principio variacional que involucra un Lagrangeano construido a partir de los dos invariantes del tensor electromagnético, y han demostrado ser relevantes en diversas áreas de la física. Por ejemplo, en algunos materiales dieléctricos y cristales la interacción entre las moléculas y los campos electromagnéticos externos puede ser modelada mediante una teoría no lineal efectiva, típicamente observada a intensidades de luz muy altas generadas por *pulsed lasers* [41, 42]. En electrodinámica cuántica, la polarización del vacío lleva naturalmente a efectos no lineales que son descritos por un Lagrangeano de Euler-Heisenberg (e.g: [43]). Asimismo, posibles consecuencias de NLE han sido exploradas en cosmología y astrofísica, en particular, se cree que las no linealidades juegan un rol muy importante en la descripción del “sector oscuro” del Universo (e.g: [44–47]), o en la física de agujeros negros cargados (e.g: [48–50]). Finalmente, el modelo de Born-Infeld [51–53] posee conexiones matemáticas con la teoría de cuerdas (ver e.g: [54]). En general, las teorías NLE atraen atención porque ofrecen un acercamiento en la comprensión de la propagación de luz en el marco de la relatividad, tanto en estudios experimentales como teóricos.

Una primera pregunta ante cualquiera de estas generalizaciones del electromagnetismo, es si su problema de valores iniciales es bien puesto. Esta propiedad hace al poder de predictibilidad de una teoría, asegurando que las soluciones existen localmente, son únicas, y dependen continuamente del dato inicial. Esto resulta fundamental y constituye un requisito básico para que un dado modelo matemático pueda ser dotado de un sentido físico genuino. La teoría matemática para lidiar con la formulación de valores iniciales se encuentra bien desarrollada, y en este caso, consiste en verificar si el sistema de ecuaciones en derivadas parciales (cuasi-lineal) de primer orden es hiperbólico. En el contexto de teorías de campo sobre espaciotiempos curvos, las ecuaciones de evolución dependen en general de la descomposición 3+1 del espaciotiempo. Más aún, frente a la presencia de vínculos como es el caso de las teorías NLE, las ecuaciones de evolución no están definidas unívocamente y el análisis referido a hiperbolicidad resulta más sutil. Una definición de sistemas simétrico hiperbólicos, así como las herramientas para tratarlos (y lidiar con los vínculos) en forma co-variante, fue desarrollada por Geroch en [8].

En este trabajo, se utilizó el formalismo co-variante de Geroch para desarrollar un criterio simple que permita decidir cuándo una teoría NLE (proveniente de un Lagrangeano general) da lugar a un sistema de evolución bien puesto. El criterio hallado tiene una interpretación geométrica interesante, así como una caracterización algebraica muy útil, que resultan equivalentes entre sí. La interpretación geométrica nos dice que el sistema es simétrico hiperbólico, sí y sólo sí, los dos conos de propagación (de la teoría NLE particular) tienen una intersección no vacía. Mientras que por otro lado, puede probarse que esta propiedad geométrica se traduce

en la positividad de una cierta función escalar. Este escalar se construye explícitamente a partir del Lagrangeano y sus derivadas, y depende únicamente de los valores de los dos invariantes de Lorentz.

4.2. Aspectos Generales

Se presentan aquí las consideraciones generales respecto a las teorías de electrodinámica no lineal provenientes de un principio variacional. Se introduce la formulación básica y la notación, así como varios aspectos bien conocidos de las teorías NLE. En particular, las relaciones de dispersión y las métricas efectivas que surgen de ellas, poniendo el énfasis en su contenido geométrico.

4.2.1. Lagrangeano y ecuaciones de movimiento

Sea un espaciotiempo (\mathbf{M}, g) bajo la convención de signatura $(+, -, -, -)$. Se definen los dos invariantes de Lorentz escalares como,

$$F := F^{ab}F_{ab} \quad G := F^{ab}F_{ab}^* \quad (4.1)$$

F_{ab} es el tensor electromagnético, y $F_{ab}^* \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{abcd}F^{cd}$ denota su dual. Se consideran entonces aquellos modelos NLE que provengan de una acción,

$$S = \int \mathcal{L}(F, G)\sqrt{-g} d^4x, \quad (4.2)$$

donde el Lagrangeano $\mathcal{L}(F, G)$ es una función arbitraria de los invariantes, y $g := \det(g_{ab})$. El sistema de ecuaciones de primer orden correspondiente se lee¹,

$$\nabla_a (\mathcal{L}_F F^{ab} + \mathcal{L}_G F^{*ab}) = 0 \quad \nabla_{[a} F_{bc]} = 0 \quad (4.3)$$

donde se ha denotado $\mathcal{L}_X := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X}$. También se definen por futura conveniencia las cantidades,

$$\xi_1 := 2\mathcal{L}_{FF}/\mathcal{L}_F, \quad \xi_2 := 2\mathcal{L}_{FG}/\mathcal{L}_F, \quad \xi_3 := 2\mathcal{L}_{GG}/\mathcal{L}_F. \quad (4.4)$$

4.2.2. Superficies características y métricas efectivas

Es bien sabido que las perturbaciones de alta frecuencia sobre una solución de fondo de las ecuaciones (4.3) son controladas por dos métricas efectivas (ver e.g. los trabajos de Boillat [55] y Plebanski [56] a principio de los años 70). Obukhov y Rubilar [57] notaron luego que el sistema (4.3) puede verse como una instancia particular de electrodinámica dentro de un medio material descrito por relaciones constitutivas no lineales generales. Si Σ es una superficie característica descrita por $f(x^a) = \text{const}$, los vectores de onda $k_m := \partial_m f$ están dados por los ceros de un polinomio (en el fibrado co-tangente $T^*\mathbf{M}$),

$$\mathcal{P}^*(x, k) := \mathfrak{G}^{abcd}(x) k_a k_b k_c k_d = 0. \quad (4.5)$$

Físicamente, (4.5) juega el rol de las relaciones de dispersión para las ondas linealizadas y da lugar a una especie de “ecuación de Fresnel co-variante” [58, 59].

Para la clase de teorías NLE a las que se restringe este trabajo (i.e. las que provienen de la acción (4.2)), el polinomio de cuarto orden (4.5) se factoriza en el producto de dos superficies cuadráticas,

$$\mathfrak{g}_1^{ab}(x)k_a k_b = 0, \quad \mathfrak{g}_2^{ab}(x)k_a k_b = 0, \quad (4.6)$$

¹La primera ecuación proviene de variar la acción (4.2) (respecto del potencial vector A_a), mientras que la segunda –ecuación de Faraday– ha sido asumida de arranque.

donde las métricas efectivas (inversas) \mathfrak{g}_1^{ab} y \mathfrak{g}_2^{ab} pueden expresarse,

$$\mathfrak{g}_1^{ab} : = ag^{ab} + b_1 F_c^a F^{bc} \quad (4.7)$$

$$\mathfrak{g}_2^{ab} : = g^{ab} + (b_2/a) F_c^a F^{bc} \quad (4.8)$$

de acuerdo a las siguientes definiciones:

$$a := (1 + \xi_2 G - \xi_3 F - RG^2/16) \quad (4.9)$$

$$Q := 2(\xi_1 + \xi_3 - RF/4) \quad (4.10)$$

$$R := 4(\xi_1 \xi_3 - \xi_2^2) \quad (4.11)$$

$$b_1 := \frac{Q + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad b_2 := \frac{Q - \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \Delta := Q^2 - 4aR. \quad (4.12)$$

Como fue notado en [55], las raíces en los coeficientes b_i siempre existen en virtud de,

$$\Delta = 4(N_1^2 + N_2^2) \quad \text{con} \quad N_1 := (\xi_1 - \xi_3) - RF/4, \quad N_2 := 2\xi_2 - RG/4. \quad (4.13)$$

Asimismo, fue observado por Obukhov y Rubilar, que las métricas efectivas son ambas Lorentzianas siempre que la métrica de fondo también lo sea.

4.2.3. Estructura geométrica: *los conos*

Las métricas efectivas están definidas a menos de transformaciones conformes. Sin embargo, poseen una propiedad geométrica intrínseca, invariante ante estas redefiniciones conformes: sus conos. Éstos serán denotados por $C_{\mathfrak{g}_i}$ y representan al conjunto de todos los vectores temporales (orientados futuros) respecto de las métricas \mathfrak{g}_i . Por su parte, sus *conos duales* (o *co-conos*) se definen como $C_{\mathfrak{g}_i}^* := \text{int}(\{n_a \in T_p^* \mathbf{M} \mid n_a v^a > 0, \forall v^a \in C_{\mathfrak{g}_i}\})$.

Se estudian aquí algunas relaciones geométricas entre estos conos, relevantes para el estudio de la hiperbolicidad que se desarrollará en la próxima sección. A tal fin, distinguiremos entre dos casos distintos, de acuerdo a la naturaleza del tensor electromagnético de fondo: **i)** caso *general*, cuando $F^2 + G^2 \neq 0$; **ii)** caso *nulo*, cuando $F^2 + G^2 = 0$.

Caso general

Una 2-forma general F_{ab} (en un dado punto), posee dos vectores nulos asociados k^a y l^a . Estas direcciones son las llamadas “direcciones principales nulas” [60–62], y juegan un rol clave en nuestra construcción en [4]. Mayormente, sirvieron en el armado de una base que permitió una simplificación considerable de todos los cálculos². Aquí sólo se presentan las ideas cualitativas, que reposan sobre la siguiente observación: los vectores k^a y l^a son nulos respecto de las tres métricas, es decir, la métrica de fondo y las efectivas. Puede decirse entonces que todos los conos (sus clausuras en realidad) comparten estas direcciones principales nulas, y el plano expandido por estas dos direcciones constituye el objeto geométrico esencial del sistema.

Esto significa que existen sólo tres configuraciones posibles para los conos efectivos, las cuales han sido ilustradas en la Figura 4.1. Los tres conos se intersecan (Figura 4.1(a)); no hay intersección común entre los conos de las métricas efectivas como se ve en la Figura 4.1(b); o bien los dos conos efectivos se intersecan entre sí, pero no con el cono asociado a la métrica física (Figura 4.1(c)).

Caso nulo

Para un campo electromagnético nulo, las dos direcciones nulas colapsan en una sola. Nuevamente puede verse ahora que esta dirección es nula respecto a las tres métricas, y por lo tanto,

² Ver [4] (y en particular el Apéndice A de este trabajo) para más detalles sobre este punto.

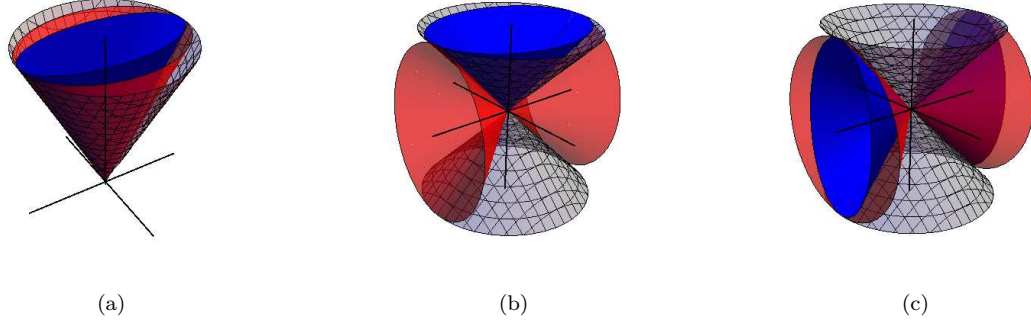


Figura 4.1: Caso general: las posibles configuraciones para las superficies nulas de las métricas g_{ab}^1 (rojo); g_{ab}^2 (azul); g_{ab} (gris).

hay en principio dos posibilidades: o los conos de las métricas efectivas no se intersecan, o bien uno esta incluido dentro del otro. Usando una base conveniente, se pudo deducir el siguiente resultado que jugará un rol importante en la hiperbolización de la teoría.

Proposición 1 Cuando F_{ab} es nulo, los conos efectivos siempre se intersecan entre sí y con la métrica de fondo, i.e. $C_{g_1}^* \cap C_{g_2}^* \cap C_g^* \neq \emptyset$.

Este resultado se prueba en [4], y permite aquí dar una idea cualitativa de las distintas configuraciones posibles, como se ilustra en la Figura 4.2.

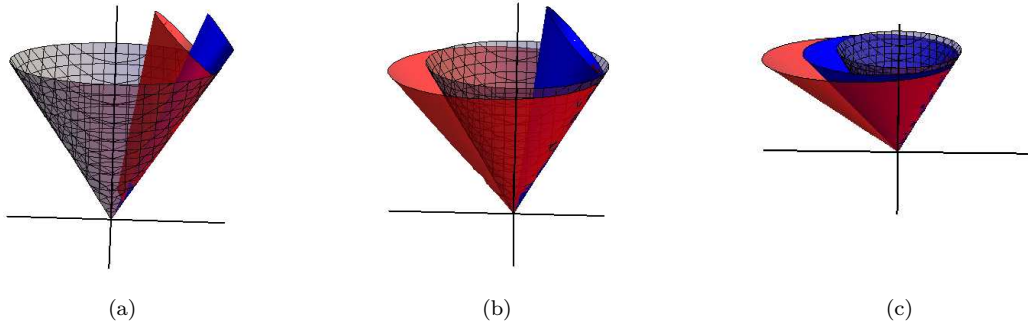


Figura 4.2: Caso nulo: las posibles configuraciones para las superficies nulas de las métricas g_{ab}^1 (rojo); g_{ab}^2 (azul); g_{ab} (gris).

4.3. Hiperbolización

Se trabajará ahora con el sistema (4.3) siguiendo el formalismo propuesto por Geroch [8]. Para hacer esta tesis lo más autocontenida posible, y dado que necesitaremos nuevamente estas herramientas en el capítulo siguiente, se incluyen las ideas y definiciones fundamentales de dicho formalismo en el Apéndice C.

El primer paso es escribir el sistema (4.3) en la forma,

$$K_A^m{}_\alpha(x, \Phi) \nabla_m \Phi^\alpha + J_A(x, \Phi) = 0 \quad (4.14)$$

Se identifican entonces los campos, $\Phi^\alpha \rightarrow F^{bc}$, y el *símbolo principal* puede escribirse,

$$K_A^m{}_\alpha \rightarrow \left(- [g_a^m{}_{bc} + F_a^m (\xi_1 F_{bc} + \xi_2 F_{bc}^*) + F_a^{*m} (\xi_2 F_{bc} + \xi_3 F_{bc}^*)], \frac{1}{2} \epsilon_a^m{}_{bc} \right) \quad (4.15)$$

con $g_{abcd} := \frac{1}{2}(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc})$.

De acuerdo a la Definición 1 del Apéndice C, la primera tarea es hallar un *simetrizador* h_α^A , tal que la contracción $h_\alpha^A K_A^m{}_\beta$, sea simétrica en los índices α y β . Identificando una variación, $\delta\hat{\Phi}^\alpha$, con un tensor anti-simétrico arbitrario (i.e. $\delta\hat{\Phi}^\alpha \equiv \hat{X}^{ab}$) se tiene,

$$K_A^m{}_\beta \delta\hat{\Phi}^\beta = \left(- [\hat{X}_a^m + A_{\hat{\mathbf{X}}} F_a^m + B_{\hat{\mathbf{X}}} F_a^m], \hat{X}_a^{*m} \right) \quad (4.16)$$

donde se han definido,

$$A_{\hat{\mathbf{X}}} := [\xi_1(\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{X}}) + \xi_2(\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{X}})] \quad B_{\hat{\mathbf{X}}} := [\xi_2(\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{X}}) + \xi_3(\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{X}})] \quad (4.17)$$

y se denota la contracción de tensores, $\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} \equiv X^{ab} Y_{ab}$.

Se construyó un simetrizador dado por la siguiente fórmula:

$$h_\alpha^A \delta\Phi^\alpha = (X_q^a, -X^{*a}_q - A_{\mathbf{X}} F^{*a}_q + B_{\mathbf{X}} F_q^a) t^q \quad (4.18)$$

Al igual que el simetrizador para la teoría usual de Maxwell, notamos que éste depende linealmente de un campo vectorial t^q . Esto significa que en realidad no se trata sólo de un simetrizador, sino de toda una familia de simetrizadores, parametrizada por el campo vectorial.

Luego de algunas manipulaciones algebraicas, se puede escribir:

$$\delta\Phi^\alpha h_\alpha^A K_A^m{}_\beta \delta\hat{\Phi}^\beta = (M_q^m + N_q^m + L_q^m) t^q \quad (4.19)$$

con

$$\begin{aligned} M_q^m &= (X_q^a \hat{X}_a^m + \hat{X}_q^a X_a^m) + \frac{1}{2}(\mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{X}}) \delta_q^m \\ N_q^m &= -(A_{\hat{\mathbf{X}}} X_q^a + A_{\mathbf{X}} \hat{X}_q^a) F_a^m - (B_{\hat{\mathbf{X}}} X_q^a + B_{\mathbf{X}} \hat{X}_q^a) F_a^{*m} \\ L_q^m &= \frac{1}{2} \{ \xi_1(\mathbf{F} \cdot \mathbf{X})(\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{X}}) + \xi_2[(\mathbf{F}^* \cdot \mathbf{X})(\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{X}}) + (\mathbf{F}^* \cdot \hat{\mathbf{X}})(\mathbf{F} \cdot \mathbf{X})] + \xi_3(\mathbf{F}^* \cdot \mathbf{X})(\mathbf{F}^* \cdot \hat{\mathbf{X}}) \} \delta_q^m \end{aligned}$$

Puede verse entonces que la contracción resulta simétrica ante el intercambio $X \rightleftharpoons \hat{X}$, y por tanto se verifica la primer condición en la Definición 1. Además, puede notarse que este resultado no depende de la forma específica del Lagrangeano y es válido por tanto para cualquier teoría NLE. Se observa asimismo, que la parte del simetrizador que no depende del campo electromagnético de fondo (parte lineal de la teoría) coincide con el simetrizador correspondiente al caso de Maxwell.

Ahora sólo resta verificar la segunda condición de la Definición 1. Para ello definimos la siguiente forma bi-lineal,

$$H_{\alpha\beta}(t, w) := h_\alpha^A(t) K_A^m{}_\beta w_m \quad (4.20)$$

Lo que se quiere verificar es que exista al menos un par (t^q, w_m) , tal que $H_{\alpha\beta}(t, w)$ sea definida positiva. Esto es,

$$\delta\Phi^\alpha H_{\alpha\beta}(t, w) \delta\Phi^\beta > 0 \quad (4.21)$$

para cualquier variación no trivial $\delta\Phi^\alpha$.

¿Cuáles son las condiciones sobre una teoría NLE (y la solución de fondo) para que exista al menos un par (t^a, w_m) que cumpla (4.21)? Dentro de aquellos casos, ¿cuál es el conjunto de todos los vectores t^a (simetrizadores) posibles y los conos de propagación asociados? Las respuestas a estas preguntas se condensan a continuación bajo la forma de dos teoremas. Se bosquejarán luego las ideas y pasos centrales para sus demostraciones, mientras que para ver los detalles completos de la prueba remitiremos al lector interesado a [4].

Teorema 1 *El sistema es simétrico hiperbólico, sí y sólo sí, los conos (co-conos) efectivos tienen intersección no vacía, i.e. $C_{\mathfrak{g}_1} \cap C_{\mathfrak{g}_2} \neq \emptyset$ ($C_{\mathfrak{g}_1}^* \cap C_{\mathfrak{g}_2}^* \neq \emptyset$). Este será el caso, toda vez que*

$$1 + \frac{1}{2} \left((FN_1 + GN_2) - \sqrt{N_1^2 + N_2^2} \sqrt{F^2 + G^2} \right) > 0 \quad (4.22)$$

La estrategia para demostrar este teorema empieza al expresar $H_{\alpha\beta}(t, w)$ en una representación conveniente³, y construir a partir de ella una matriz T_{β}^{α} tal que,

$$H_{\alpha\beta} = p_{\alpha\gamma} T_{\beta}^{\gamma} \quad (4.23)$$

donde $p_{\alpha\gamma}$ es algún producto interno Riemanniano en \mathbb{R}^6 . Luego, se busca la positividad de todos los autovalores de T_{β}^{α} , que es esencialmente equivalente a que $H_{\alpha\beta}$ sea definida positiva⁴. El análisis de este conjunto de autovalores, $\{\lambda_i\}_{i=1}^6$, revela finalmente que su positividad impone una restricción sobre los posibles valores de los invariantes y de las teorías (a través de ξ_i). Esa restricción es precisamente (4.22), y además se puede probar que es equivalente la condición que los conos de las métricas efectivas se intersequen entre sí.

Teorema 2 *Una teoría que satisface (4.22), admite una colección de simetrizadores parametrizados por vectores t^a , tales que: $t^a \in C_{\mathfrak{g}_1} \cap C_{\mathfrak{g}_2}$. Independientemente de la elección particular, el cono de propagación resultante C_H , estará dado por (la clausura de) la unión de los conos efectivos, i.e. $C_H = \bar{C}_{\mathfrak{g}_1} \cup \bar{C}_{\mathfrak{g}_2}$.*

El punto de partida para la demostración de este segundo teorema es la construcción de un par (t_o^a, w_a^o) explícito que satisfaga la condición de positividad. Luego se muestra que esta pareja necesariamente debe pertenecer a la intersección de los conos (co-conos) efectivos. Entonces, analizando la expresión para el determinante de T_{β}^{α} hallada en *Mathematica*,

$$\begin{aligned} \det(T_{\beta}^{\alpha}) &= \Omega_1 \Omega_2 (\mathfrak{g}_1^{ab} w_a w_b) (\mathfrak{g}_2^{ab} w_a w_b) (w_a t^a)^2 (\mathfrak{g}_{ab}^1 t^a t^b) (\mathfrak{g}_{ab}^2 t^a t^b) \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_6 \end{aligned} \quad (4.24)$$

es posible argumentar respecto de cuánto es posible extender el vector t_o^a sin “perder” la positividad de los autovalores. Resulta que el límite para extenderlo es precisamente la clausura de la intersección postulada en el teorema: $t^a \in C_{\mathfrak{g}_1} \cap C_{\mathfrak{g}_2}$. Siguiendo el mismo camino se obtienen el conjunto de los posibles co-vectores w_a , y a partir de ahí resulta sencillo computar el cono de propagación C_H . De acuerdo a la Definición 2 (Apéndice C), éste resulta $C_H = \bar{C}_{\mathfrak{g}_1} \cup \bar{C}_{\mathfrak{g}_2}$.

³ Las direcciones principales nulas introducidas en la Sección 4.2.3 nos permitieron construir un *frame* donde la métrica de fondo es Minkowski, los campos eléctrico y magnético resultan paralelos entre sí, y los cálculos se simplifican de manera considerable. Por supuesto esta elección es irrelevante desde un punto de vista conceptual, pero muy importante desde lo operacional.

⁴ La razón para introducir $p_{\alpha\gamma}$ es de carácter práctico, ya que permite trasladar el problema de positividad a uno de autovalores. Puede sonar como un detalle técnico en principio, pero resulta que no hay una forma única (o natural) de subir el índice en este contexto. Existe una arbitrariedad inherente en la elección del producto interno y los autovalores no estarán definidos de forma invariante en general (se introduce implícitamente una dependencia en la base utilizada). Sin embargo, la positividad de los autovalores sí resulta invariante y garantiza la positividad de $H_{\alpha\beta}$ como forma bi-lineal, siempre que $p_{\alpha\gamma}$ sea efectivamente un producto interno.

El lector puede hallar una demostración completa de estos dos teoremas en [4], así como también una buena lista de ejemplos donde se han aplicado los resultados aquí presentados. Entre estos ejemplos se encuentran los modelos de Born-Infeld, Gauss-Bonnet y Euler-Heisenberg.

4.4. Vínculos

Siguiendo la Definición 3 del Apéndice C, se obtiene que las teorías NLE poseen un espacio lineal de vínculos caracterizado por vectores (x, y) en \mathbb{R}^2 , de la forma: $c^{An} = (xg^{an}, yg^{an})$. Para verificar que c^{An} satisface de hecho (C.2), simplemente se contrae éste con el símbolo principal

$$c^{An} K_A^m{}_\alpha = -x \left\{ \frac{1}{2} g^{nmbc} + F^{nm} (\xi_1 F^{bc} + \xi_2 F^{*bc}) + F^{*nm} (\xi_2 F^{bc} + \xi_3 F^{*bc}) \right\} + \frac{1}{2} y \epsilon^{nmbc} \quad (4.25)$$

que resulta claramente anti-simétrico en los índices n y m . Los vínculos son además **completos** en el sentido que la dimensión de las ecuaciones de evolución más la dimensión del espacio de vínculo, resulta igual a la dimensión del espacio de ecuaciones original.

De acuerdo a la Definición 4 debemos ver que,

$$\frac{\partial}{\partial \Phi^\beta} (c^{An} K_A^m{}_\alpha) \nabla_m \Phi^\alpha \nabla_n \Phi^\beta = 0 \quad (4.26)$$

sea una consecuencia algebraica de las ecuaciones de movimiento. Para ello se reescribirán las ecuaciones (4.3) en la forma,

$$\nabla_m (\tilde{K}_A^m{}_\alpha \Phi^\alpha) = 0 \quad (4.27)$$

con $\tilde{K}_A^m{}_\alpha \rightarrow \frac{1}{2} (\mathcal{L}_F g_a^{mbc} + \mathcal{L}_G \epsilon_a^{mbc}, \epsilon_a^{mbc})$. Aplicando $c^{An} \nabla_n$ a la expresión anterior, y notando que c^{An} conmuta con las derivadas, se obtiene que el lado izquierdo de (4.27) es

$$\nabla_n \nabla_m (c^{An} \tilde{K}_A^m{}_\alpha \Phi^\alpha) \quad (4.28)$$

Pero dado que $c^{An} \tilde{K}_A^m{}_\alpha$ es anti-simétrico en n y m , esta cantidad es idénticamente cero. Entonces la ecuación (4.26) se satisface trivialmente, y por tanto, los vínculos son **integrables**.

4.5. Conclusiones

En este trabajo se ha estudiado la formulación de valores iniciales correspondiente a aquellas teorías de electrodinámica no lineal provenientes de una acción (4.2). Para ello, se utilizó el enfoque co-variante provisto por Geroch [8], que significó la construcción explícita de un simetrizador general para estas teorías. Además, se ha profundizado en algunos aspectos conocidos de las teorías NLE, en particular, sobre la estructura geométrica derivada de sus relaciones de dispersión. Esto permitió la conexión entre estos aspectos geométricos de las teorías y su hiperbolicidad, que fueron plasmados en la forma de dos teoremas. Estos teoremas encierran los resultados centrales de este proyecto, y aquí sólo se han incluido los esquemas básicos de sus demostraciones.

Además del criterio geométrico mencionado, se halló un criterio algebraico equivalente que resulta de gran utilidad a la hora de considerar ejemplos concretos. Es importante destacar que la condición para que un determinado sistema resulte o no hiperbólico, depende en general no sólo de la teoría particular sino también de los valores de los campos (el valor de los invariantes, más precisamente) en cada punto. Por lo tanto, durante la evolución es factible que una solución perfectamente bien comportada pueda derivar en un escenario donde el sistema deje de ser bien puesto. Utilizando la condición algebraica, uno podría caracterizar en principio aquellas teorías en donde la hiperbolicidad sea válida para todos los valores del campo: ese conjunto de teorías debiera ser preferido por sobre las demás.

Como fue mencionado, el análisis realizado involucró la construcción explícita de simetrizadores (ver expresión (4.18)). Al momento de evolucionar estas teorías, el simetrizador proporciona un sistema de ecuaciones que pueden ser evolucionadas con seguridad. Los conos de propagación de estos simetrizadores coinciden con el más pequeño de los conos efectivos, y por lo tanto, se recupera las mismas propiedades de causalidad que el sistema original. En ese sentido puede decirse que los simetrizadores hallados son óptimos, y permiten todas las posibles hipersuperficies donde el dato inicial puede ser dado.

Asimismo, hemos mostrado aquí que los vínculos en estas teorías resultan, en todos los casos, completos e integrables en el sentido de Geroch⁵. Esto significa que si son satisfechos por los datos iniciales y el sistema es hiperbólico, entonces seguirán satisfaciéndose durante la evolución (siempre que el sistema continúe siendo hiperbólico) dentro del correspondiente dominio de dependencia.

⁵ Esto es así porque que su estructura es muy cercana a la de los vínculos en Maxwell.

Capítulo 5

Electrodinámica force-free

5.1. Introducción

En la actualidad ya es ampliamente aceptada la idea de que los agujeros negros son comunes en el universo, y que juegan un papel protagónico en algunos de los eventos astronómicos más violentos como núcleos galácticos activos y *gamma-ray bursts*. Estos eventos aparecen frecuentemente en forma de flujos colimados de partículas y campo electromagnético, conocidos como “*jets*”. Una de las características más espectaculares de los *jets*, es que su extensión supera en muchos ordenes de magnitud el tamaño del objeto compacto alojado en la región central. Además, se observa que la cantidad de energía liberada durante estos eventos es enorme; ésta puede tener en principio dos orígenes: por un lado, puede ser energía gravitacional del material que está acretando el agujero negro (o en el colapso gravitatorio que da origen a uno), o bien, la energía de rotación del propio agujero negro siendo extraída por medio de algún mecanismo.

La electrodinámica *force-free* (FFE, por sus siglas en inglés) describe un régimen particular de plasmas magnéticamente dominados que juega un rol clave en la física de estos eventos. En tales regímenes, los campos magnéticos dominan la dinámica –en relación a la materia que constituye dichos plasmas– y dan lugar a una descripción desacoplada para el electromagnetismo conocida como electrodinámica *force-free*. Así, los campos obedecen una versión modificada –no lineal– de las ecuaciones de Maxwell, mientras que el plasma sólo interviene acomodándose al campo electromagnético para cancelar localmente la fuerza de Lorentz. Existen dos condiciones centrales para que esta aproximación sea una descripción adecuada para una situación astrofísica particular: en primer lugar, es necesario justificar la presencia del plasma en los alrededores del objeto central; y en segundo lugar, debe verificarse que la densidad de masa del plasma sea mucho menor (varios ordenes de magnitud menor) que la densidad de energía electromagnética. Tales requerimientos son de hecho satisfechos en ciertos escenarios astrofísicos realistas.

En un artículo pionero, Goldreich y Julian [63] analizaron la solución de vacío para una estrella de neutrones rotante y con un momento magnético dipolar alineado al eje de rotación. Ellos argumentaron que el campo eléctrico inducido rotacionalmente era lo suficientemente intenso como para “arrancar” partículas cargadas de la superficie estelar, y de esa forma, generar un plasma en los alrededores de la estrella. Continuando con estas ideas y motivados por una observación de Wald [64], que mostró que un agujero negro rotante sobre un campo magnético de prueba daba origen a un campo eléctrico con $\vec{E} \cdot \vec{B} \neq 0$, Blandford y Znajek [6] argumentaron que un mecanismo de producción de pares (electrón-positrón) podría operar para producir una magnetosfera *force-free* cerca de un agujero negro rodeado de un disco de acreción. Más aún, argumentaron que las soluciones de vacío serían inestables ante una cascada de creación de pares, bajo circunstancias astrofísicas típicas.

La idea es que este mecanismo que genera el plasma se regula a sí mismo: las cargas producidas actuarán para apantallar la componente de campo eléctrico a lo largo de las líneas de campo magnético, eventualmente apagando la producción cuando $\vec{E} \cdot \vec{B}$ se vuelva lo suficiente-

mente pequeño. Esto permite estimar una densidad característica de partículas –la denominada densidad de Goldreich-Julian [63]–, y por tanto inferir que (bajo condiciones típicas) los efectos inerciales del plasma debieran ser despreciables. Esta conclusión fue luego avalada por simulaciones numéricas del sistema magnetohidrodinámico completo (ver e.g. [65–68]), que sugieren que la densidad de plasma es muy baja lejos del disco de acreción y especialmente en la región del *jet*, por lo cual la dinámica es efectivamente *force-free*.

Blandford y Znajek [6] consideraron en detalle el problema de una magnetosfera *force-free* axi-simétrica y estacionaria alrededor de un agujero negro de Kerr, y construyeron perturbativamente –en el parámetro de espín– una solución válida para agujeros negros que rotan lentamente. Lo interesante de dicha solución, es que exhibe un flujo saliente de energía y momento angular electromagnético, cuya potencia estimada es lo suficientemente alta como para dar cuenta de las observaciones de radiogalaxias y quásares. El mensaje central de estos resultados es que un agujero negro, inmerso en un plasma tenue y magnéticamente dominado, puede transferir energía de rotación al campo electromagnético y ésta puede escapar a infinito como un flujo de Poynting. Se utiliza en la actualidad “mecanismo de Blandford-Znajek” para referir a cualquier proceso de extracción de energía rotacional por medio de campo electromagnético. Sugerimos al lector, el capítulo 5 de [69] para una reseña más acabada acerca de *jets* y [70] para una formulación co-variante (muy completa) de la electrodinámica *force-free*; mientras que para una discusión más amplia respecto al mecanismo de Blandford-Znajek referimos a e.g. [71–73].

A pesar de que las ecuaciones FFE existen desde hace ya varios años, su estructura causal sólo ha comenzado a revelarse recientemente [9, 74, 75]¹. Ahora sabemos que este sistema de ecuaciones no sólo es fuertemente hiperbólico, sino también simétrico hiperbólico, dado que ha sido encontrado [9] un sistema adecuado para una descomposición (3+1) particular. En este capítulo se presenta una hiperbolización para el sistema FFE (Sección 5.3), siguiendo el formalismo co-variante de Geroch [8]. El interés no es sólo matemático, sino fundamentalmente práctico, dado que este conocimiento era necesario para implementar el sistema numéricamente. Luego, en la Sección 5.4, se dan algunos detalles de la implementación numérica. En especial, destacamos la discusión en torno a las condiciones de contorno y los métodos utilizados para lidiar con ellas. Finalmente, se analizan los resultados obtenidos: la generación de *jets* y la extracción de energía del agujero negro por medio de configuraciones electromagnéticas estacionarias. Se verifican además el correcto funcionamiento de las condiciones de borde y el control de los vínculos en todo el dominio numérico.

5.2. Formulación de la FFE

El punto de partida son las ecuaciones de Maxwell,

$$\nabla_b F^{*ab} = 0 \quad (5.1)$$

$$\nabla_b F^{ab} = j^a \quad (5.2)$$

donde F_{ab} es el campo electromagnético y F_{ab}^* el tensor de Faraday. Cuando las susceptibilidades eléctrica y magnética del medio son cero, como es el caso tanto del vacío como de plasmas altamente ionizados, el tensor de Faraday es simplemente el dual de Hodge del tensor de Maxwell (ver e.g. [78]),

$$F_{ab}^* := \frac{1}{2} \epsilon_{abcd} F^{cd} \quad (5.3)$$

¹ Hasta donde sabemos, su formulación de valores iniciales/contorno no ha sido aún muy desarrollada, y la mayor parte de lo que se hace respecto a las condiciones de contorno utiliza la estructura característica de la teoría de Maxwell, en vez de la que corresponde a un sistema genuinamente *force-free* (ver e.g. [76, 77]).

donde $\epsilon_{abcd} \equiv \sqrt{-g} e_{abcd}$ es el elemento de volumen asociado a la métrica, y e_{abcd} , el símbolo de Levi-Civita. El tensor de energía momento está dado por,

$$T_{ab}^{EM} = F_{ac}F_b^c - \frac{1}{4}g_{ab}F_{cd}F^{cd} \quad (5.4)$$

El intercambio de energía con la materia se expresa como $\nabla^b T_{ab}^{EM} = -F_{ab}j^b$, donde $F_{ab}j^b$ define la fuerza local de Lorentz. La electrodinámica *force-free* describe al campo electromagnético en un régimen donde la transferencia de energía y momento entre el campo y el plasma puede ser despreciada, no porque la corriente sea insignificante sino porque la energía y el momento electromagnético dominan sobre aquellos del plasma (i.e. $T_{ab} = T_{ab}^{EM} + T_{ab}^{plasma} \approx T_{ab}^{EM}$).

La teoría es por tanto gobernada por las ecuaciones de Maxwell modificadas por la condición,

$$F_{ab}j^b = 0 \quad (5.5)$$

Puede notarse que esta condición, para una corriente $j^a \neq 0$, implica que el tensor de Maxwell es degenerado (i.e. no invertible). Esto puede expresarse como,

$$G := F^{ab}F_{ab}^* = 0 \quad (5.6)$$

En efecto, $\det F^a_b = G^2$ por lo que cuando $G = 0$, el *kernel* de F^a_b tiene dimensión dos o cuatro. En el caso de interés físico, es decir, cuando el campo magnético es mayor que el campo eléctrico se tiene:

$$F := F^{ab}F_{ab} > 0, \quad (5.7)$$

La condición $G = 0$ significa que existe un vector temporal u^a (proporcional a j^a) que cumple $F_{ab}u^b = 0$. Esto es, constituye un *frame* donde el campo eléctrico es cero. Por lo tanto existe un cuadri-vector v^a , tal que:

$$F_{ab}^* = 2v_{[a}u_{b]} \quad (5.8)$$

Es importante notar, sin embargo, que cualquier combinación lineal de u^a y v^a puede ser utilizada para definir F_{ab}^* —siempre que alguna condición sobre sus normas relativas se mantenga fija—. Esto refleja que no son estos vectores individuales lo importante, sino el plano que definen. Entonces, en el caso degenerado, el campo de Maxwell corresponde geoméricamente a un 2-plano en el espacio tangente. Resulta además que esto puede extenderse a un análisis local: cuando un campo es degenerado, localmente bien comportado, y satisface la ecuación de Faraday (5.1), entonces el *kernel* de F_{ab} resulta integrable, i.e. tangente a una subvariedad bidimensional. La prueba de esta observación se basa en el teorema de Frobenius y permite una interpretación geométrica interesante de estas superficies. En el caso magnéticamente dominado, estas subvariedades son temporales y su intersección con una hipersuperficie espacial determina las líneas de campo magnético definidas por los observadores ortogonales a dichas hipersuperficies².

Es usual considerar el vector temporal u^a normalizado, i.e. $u^a u_a = -1$, y tomar v^a (el campo magnético en ese *frame*) perpendicular a u^a , mediante la definición $v^a := -F^{*ab}u_b$.

5.2.1. Sistema restringido

Sucede que en un régimen *force-free* (i.e. $G = 0$ y $F > 0$), el campo electromagnético puede ser evolucionado autónomamente. Esto se logra eliminando la corriente asociada al plasma j^a , al combinar las ecuaciones (5.2) y (5.5),

$$F^a_b \nabla_c F^{bc} = 0 \quad (5.9)$$

La doble degeneración del tensor de Maxwell implica que (5.9) representa sólo dos ecuaciones. Por su parte, (5.1) representa tres ecuaciones de evolución y un vínculo (a saber, $\nabla \cdot \vec{B} = 0$).

² Para un desarrollo completo referimos principalmente a [70] (basado a su vez en estudios anteriores [79, 80])

Este sistema proporciona entonces la evolución para los cinco grados de libertad de un tensor electromagnético restringido por (5.6), y será denominado en consecuencia, *sistema restringido*.

5.2.2. Sistema aumentado

Para evolucionar todo el tensor de Maxwell es necesario agrandar el sistema, y la idea es hacerlo de forma tal que al menos sobre la subvariedad $G = 0$ el flujo de la evolución se mantenga tangente a la misma. La estrategia natural parece ser entonces promover el vínculo algebraico (5.6) a una ecuación diferencial como $\nabla_a G = 0$. Esto es lo que esencialmente se hace en [74], y constituye lo que ellos han denominado *sistema aumentado*. Por tanto, se considera:

$$F^{ab}\nabla^c F_{bc} = 0 \quad (5.10)$$

$$\nabla_b F^{*ab} = 0 \quad (5.11)$$

$$F^{*bc}\nabla^a F_{bc} = 0 \quad (5.12)$$

Remitimos al Apéndice B de [5] para una discusión sobre los vínculos de este sistema.

5.2.3. Sistema extendido

En una simulación numérica, los vínculos nunca serán satisfechos de manera exacta, y por ello resulta necesario extender el sistema más allá de la subvariedad del vínculo ($G = 0$). Al hacerlo sin embargo, no se quiere alterar drásticamente la estructura de las ecuaciones y vínculos: la sutileza aparece en la ecuación (5.10), donde puede notarse que la extensión a un entorno de la superficie del vínculo no es en absoluto trivial.

Cabe mencionarse que hay una significativa libertad en la construcción de una extensión, dado que físicamente, las ecuaciones únicamente son relevantes sobre la subvariedad. Se quiere garantizar dos cosas importantes en esta extensión: preservar la co-variancia de forma que sean siempre las mismas ecuaciones, independientemente de la descomposición 3+1 usada para evolucionarlas; y además, se quiere mantener las ecuaciones bien puestas, para garantizar que se pueden evolucionar de forma única y controlada.

Comenzamos por definir la siguiente extensión para el campo de fondo,

$$\tilde{F}_{ab} := F_{ab} + \sigma F_{ab}^* \quad ; \quad \sigma = \frac{G}{F + \sqrt{F^2 + G^2}} \quad (5.13)$$

No es difícil notar que sobre la subvariedad $G = 0$ coincide con el campo original. Además, vemos que este campo es ahora degenerado y magnéticamente dominado por construcción. En efecto, usando que $F_{ab}^{**} = -F_{ab}$, y $F_{ab}^* F^{*ab} = -F_{ab} F^{ab}$ se puede ver que,

$$\tilde{G} \equiv \tilde{F}^{ab} \tilde{F}_{ab}^* = 0 \quad ; \quad \tilde{F} \equiv \tilde{F}^{ab} \tilde{F}_{ab} = \frac{2(F^2 + G^2)}{F + \sqrt{F^2 + G^2}} \geq F > 0$$

Al igual que antes³, se pueden definir ahora vectores (\tilde{u}^a, \tilde{v}^a) que satisfacen,

$$\tilde{F}_{ab} \tilde{u}^b = 0 \quad ; \quad \tilde{u}^a \tilde{u}_a = -1 \quad ; \quad \tilde{v}_a = -\tilde{F}_{ab}^* \tilde{u}^b \quad ; \quad \tilde{F}_{ab}^* = 2\tilde{v}_{[a} \tilde{u}_{b]} \quad (5.14)$$

Luego, el sistema extendido puede escribirse explícitamente como,

$$\tilde{F}^{ab}\nabla^c \tilde{F}_{bc} = 0 \quad (5.15)$$

$$\nabla_b \tilde{F}^{*ab} = 0 \quad (5.16)$$

$$\tilde{F}^{*bc}\nabla^a \tilde{F}_{bc} = 0 \quad (5.17)$$

³Siempre que el campo original sea magnéticamente dominado, i.e. $F > 0$.

Este es el sistema que nos interesa a los fines de una implementación numérica, y se procederá en la sección que sigue a la construcción de una hiperbolización apropiada del mismo.

5.3. Hiperbolización

En esta sección, se construye una familia de simetrizadores para el sistema extendido⁴, en las mismas líneas del capítulo anterior; es decir, utilizando el formalismo co-variante de Geroch [8], que ha sido consignado brevemente en el Apéndice C de esta tesis.

Antes de comenzar, se discute la inclusión de un nuevo campo escalar ϕ , que se incorpora al sistema (5.15)-(5.17) para controlar el vínculo asociado a la divergencia del campo magnético. Esta forma de lidiar con este vínculo es estándar en la actualidad (ver e.g. [72, 78, 81, 82]), y se adapta muy bien al formalismo co-variante que aquí utilizaremos. La idea es no forzar el vínculo de manera exacta, sino promover una evolución que mantenga al sistema cercano a la superficie del vínculo. La ecuación (5.16) se modifica de acuerdo a,

$$\nabla_b F^{*ab} + \nabla^a \phi = \kappa n^a \phi \quad (5.18)$$

Y se sabe que tanto $\nabla \cdot \vec{B}$, como la nueva variable ϕ , satisfacen una ecuación del tipo “telegráfica”,

$$\square \phi + \kappa \partial_t \phi = 0 \quad (5.19)$$

que determina tanto la propagación como el decaimiento de dichos campos, y se asegura así el cumplimiento del vínculo de manera dinámica⁵.

Se escribirá, como primer paso, el sistema (5.15),(5.18),(5.17) en la forma (C.1). Los campos son entonces ahora $\Phi^\alpha \equiv \{F_{ab}, \phi\}$, y el símbolo principal puede leerse,

$$K_{A\alpha}^m \leftrightarrow \left\{ \left(\tilde{F}^{a[b} g^{c]m}, \frac{1}{2} \epsilon^{ambc}, \tilde{F}^{*bc} g^{am} \right), (0, g^{am}, 0) \right\} \quad (5.20)$$

donde los paréntesis dividen distintas componentes del índice de ecuaciones A , y los corchetes distinguen las componentes de los índices α que señalan los campos. La corriente es por su parte,

$$J_A \leftrightarrow (0, -\kappa n^a \phi, 0) \quad (5.21)$$

Al igual que en el capítulo anterior, se construye aquí una familia de simetrizadores con un parámetro vectorial t^a , que contraído con una variación arbitraria $\delta \hat{\Phi}^\alpha \equiv \{\hat{X}_{ab}, \delta \hat{\phi}\}$ se lee,

$$\delta \hat{\Phi}^\alpha h_\alpha^A = \left(\hat{X}_{ab}^* \tilde{F}^{*b}{}_{c} t^c, \hat{X}_{ab}^* \tilde{F}^b{}_{c} t^c - \tilde{P}_{ab} t^b \delta \hat{\phi}, -\frac{1}{2} \hat{X}_{ab} \tilde{F}^{*b}{}_{c} t^c - \frac{1}{2} t_a (\tilde{\mathbf{F}}^* \cdot \hat{\mathbf{X}}) \right) \quad (5.22)$$

⁴Esta construcción puede hacerse también para los sistemas restringido y aumentado (ver [5]), pero no serán incluidas aquí. El sistema extendido es el que en definitiva nos interesa para realizar la implementación numérica.

⁵ Se observa que, contrariamente a lo que sucede en magnetohidrodinámica ideal por ejemplo, la inclusión de este campo no es esencial para la hiperbolización en sí. Hiperbolizaciones para el sistema original pueden ser fácilmente recuperadas fijando $\phi = 0$, junto con algunos reajustes menores adicionales.

donde se ha definido $\tilde{P}_b^a := \frac{1}{2}\tilde{F}\delta_b^a + \tilde{F}^{ac}\tilde{F}_{cb}$. Luego, la contracción completa resulta en:

$$\begin{aligned} \delta\hat{\Phi}^\alpha h_\alpha^A K_{A\beta}^m w_m \delta\Phi^\beta &= t^a \tilde{P}_a^b w_m \left[\hat{X}^{cm} X_{cb} + X^{cm} \hat{X}_{cb} - \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{X})\delta_b^m \right] \\ &\quad - \frac{1}{2}t^a \tilde{F}_{ab}^* w_m \left[X^{bm}(\tilde{\mathbf{F}}^* \cdot \hat{\mathbf{X}}) + \hat{X}^{bm}(\tilde{\mathbf{F}}^* \cdot \mathbf{X}) \right] - \frac{1}{2}t^a w_a(\tilde{\mathbf{F}}^* \cdot \hat{\mathbf{X}})(\tilde{\mathbf{F}}^* \cdot \mathbf{X}) \\ &\quad + \tilde{P}_{ab} t^b w_m \left[\hat{X}^{*ma} \delta\phi + X^{*ma} \delta\hat{\phi} \right] - (t^a \tilde{P}_a^m w_m) \delta\phi \delta\hat{\phi} \end{aligned} \quad (5.23)$$

que es claramente simétrica ante el intercambio $\delta\hat{\Phi} \rightleftharpoons \delta\Phi$ (ver Definición 1-1).

Para estudiar la positividad (Definición 1-2), fijaremos un simetrizador particular por medio de $t^a = \tilde{u}^a$ (recordar las relaciones en (5.14)).

De esta manera, si se considera además el co-vector $w_a = \tilde{u}_a$, la expresión (5.23) –para una única variación $\delta\Phi$ – se reduce significativamente:

$$\begin{aligned} \delta\Phi^\alpha h_\alpha^A K_{A\beta}^m n_m \delta\Phi^\beta &= \frac{1}{2}\tilde{F}\tilde{u}^a \tilde{u}^b \left[2X_a^c X_{bc} - \frac{1}{2}(\mathbf{X} \cdot \mathbf{X})g_{ab} \right] + \frac{1}{2}\tilde{F}\delta\phi^2 \\ &= \frac{1}{2}\tilde{F}(\delta E^2 + \delta B^2 + \delta\phi^2) \end{aligned} \quad (5.24)$$

donde se han definido $\delta E_a := X_{ab}\tilde{u}^b$ y $\delta B_a := -X_{ab}^*\tilde{u}^b$. Ciertamente ésta es una cantidad positiva para cualquier variación no trivial $\delta\Phi^\alpha$, y por lo tanto, el sistema es simétrico hiperbólico.

Por completitud, se escribe el sistema “simetrizado” resultante (ver ecuación (C.4)):

$$\epsilon_{abcd} [\tilde{v}^c l^d + \tilde{v}^2 \tilde{u}^c p^d] = \tilde{v}_{[a} r_{b]} + \tilde{F}_{ab}^* u^c r_c \quad (5.25)$$

$$\tilde{v}^2 \tilde{u}_a p^a = 0 \quad (5.26)$$

donde se ha denotado,

$$l^a \equiv \tilde{F}^{ac} \nabla^b (F_{cb}) \quad ; \quad p^a \equiv \nabla_b (F^{*ab}) + \nabla^a \phi - \kappa \phi n^a \quad ; \quad r_a \equiv \tilde{F}^{*bc} \nabla_a F_{bc}$$

5.3.1. Descomposición 3 + 1

A los fines de obtener un sistema apropiado para la discretización numérica y posterior evolución, seguiremos básicamente una descomposición 3+1 estándar (ver e.g. [83]). Se considera una región del espaciotiempo foliada por las hipersuperficies de nivel de una función suave t , $\{\Sigma_t\}_{t \in \mathbb{R}}$, y un campo vectorial t^a (siempre transversal), que será normalizado de manera que $t^a \nabla_a t = 1$. Dado cualquier parche coordenado local en Σ_0 , $\{x^i\}$, éste puede ser extendido a $\{\Sigma_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ propagando constantemente los valores de las coordenadas en Σ_0 a lo largo de las curvas integrales de $\frac{\partial}{\partial t}$. Esto es,

$$\frac{\partial}{\partial t} \cdot dx^i = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot dx^j = \delta_i^j$$

De esta forma, se obtiene un sistema de coordenadas completo $\{t, x^i\}$, para el cual las coordenadas “espaciales” son preservadas a lo largo del campo vectorial $t^a := (\partial_t)^a$. La normal a la hipersuperficie se obtiene al promover $\nabla_a t$ a un vector con la métrica del espaciotiempo,

$$n^a := -\alpha g^{ab} (dt)_b$$

donde la normalización α se denomina *lapse function*. Y es útil definir, asimismo, el *shift vector*:

$$\beta^a = t^a - \alpha n^a$$

En este sistema de coordenadas así construido, la métrica puede expresarse como:

$$ds^2 = (\beta^2 - \alpha^2)dt^2 + 2\beta_i dx^i dt + h_{ij} dx^i dx^j \quad (5.27)$$

donde h_{ij} es la métrica espacial inducida en las hipersuperficies Σ_t . Notamos por último, una relación útil que surge de la construcción anterior,

$$\sqrt{-g} = \alpha\sqrt{h}$$

y se expresan las componentes del vector normal en estas coordenadas como,

$$n_a = (-\alpha, 0, 0, 0) \quad ; \quad n^a = \frac{1}{\alpha} (1, -\beta^i).$$

Ahora utilizaremos el vector normal n^a como *frame* para descomponer al campo en sus componentes eléctrica y magnética, i.e.

$$E_a := F_{ab}n^b \quad (5.28)$$

$$B_a := -F_{ab}^*n^b \quad (5.29)$$

De donde pueden deducirse las siguientes relaciones inversas,

$$F_{ab} = 2n_{[a}E_{b]} + \epsilon_{abcd}n^c B^d, \quad (5.30)$$

$$F_{ab}^* = 2B_{[a}n_{b]} + \epsilon_{abcd}n^c E^d. \quad (5.31)$$

Asimismo, definimos el vector de Poynting como:

$$S^a := n_e \epsilon^{abc} E_b B_c. \quad (5.32)$$

Definiciones idénticas $\tilde{E}^a, \tilde{B}^a, \tilde{S}^a$, aplican para la descomposición del tensor electromagnético \tilde{F}_{ab} . Pero en este caso, dado que \tilde{F}_{ab} es siempre degenerado (por construcción), estos tres vectores espaciales resultan ortogonales entre sí. Por lo tanto, junto con la normal n^a , éstos conforman una tetradra ortogonal que será muy importante en lo que sigue. Las relaciones entre los vectores con y sin tilde se leen,

$$\tilde{E}^i = E^i - \sigma B^i, \quad (5.33)$$

$$\tilde{B}^i = B^i + \sigma E^i, \quad (5.34)$$

$$\tilde{S}^i = (1 + \sigma^2)S^i. \quad (5.35)$$

En términos de la “base tilde”, es posible expresar los vectores \tilde{u}^a y \tilde{v}^a de forma unívoca,

$$\tilde{u}^a := \lambda \left(n^a + \frac{\tilde{S}^a}{\tilde{B}^2} \right), \quad \tilde{v}^a := -\tilde{F}^{*ab}\tilde{u}_b = \frac{1}{\lambda}\tilde{B}^a, \quad \lambda := \sqrt{\frac{2\tilde{B}^2}{\tilde{F}}}$$

siendo λ un factor adimensional para imponer la normalización, $\tilde{u}_a\tilde{u}^a = -1$.

5.3.2. Ecuaciones de evolución

La tarea ahora es extraer, de las expresiones (5.25)-(5.26), las ecuaciones de evolución para los campos (E^i, B^i, ϕ) . La idea es extraer sus componentes utilizando la tetradra $\{n^a, \tilde{E}^a, \tilde{B}^a, \tilde{S}^a\}$. Luego de una cuenta tediosa pero directa, se obtiene finalmente el sistema de evolución:

$$\partial_t \phi = \beta^k \partial_k \phi - \alpha^2 d_j (B^j / \alpha) - \alpha \kappa \phi - \frac{\alpha}{\tilde{F}} \tilde{E}^k r_k \quad (5.36)$$

$$\begin{aligned} \partial_t (E^i / \alpha) &= \left(\delta_k^i - \frac{\tilde{B}^i \tilde{B}_k}{\tilde{B}^2} \right) [\beta^k d_j (E^j / \alpha) + d_j (F^{kj})] - \frac{\alpha \tilde{S}^i}{\tilde{B}^2} d_j (E^j / \alpha) \\ &\quad + \frac{\tilde{B}^i}{\tilde{B}^2} \left[\tilde{E}_k d_j (F^{*kj}) - \tilde{E}_\beta d_j (B^j / \alpha) + \frac{\beta^k}{2\alpha} r_k + \tilde{E}^k \partial_k \phi \right] \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$\partial_t (B^i / \alpha) = -d_j (F^{*ij}) + \beta^i d_j (B^j / \alpha) + \frac{1}{\tilde{F}} \tilde{\epsilon}^{ijk} r_j \tilde{B}_k + \frac{\tilde{E}^i}{\tilde{F} \tilde{B}^2} \tilde{S}^k r_k - h^{ij} \partial_j \phi \quad (5.38)$$

donde

$$r_i := \frac{\alpha^2}{2} (\partial_i (G/\alpha^2) + \sigma \partial_i (F/\alpha^2)) \quad (5.39)$$

Además, se ha denotado $\tilde{\epsilon}^{ijk} \equiv n_a \epsilon^{abcd}$ al elemento de volumen inducido en la hipersuperficie, y el operador diferencial, $d_j(\cdot) \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_j (\sqrt{-g} \cdot)$. Por supuesto, F^{ij} y F^{*ij} pueden ser reescritos en función de los campos eléctrico y magnético, de acuerdo a las ecuaciones (5.30)-(5.31). Debe destacarse de las ecuaciones finales, que todas las derivadas actúan sobre campos sin tilde; mientras que la estructura no lineal se escribe en términos de las variables tilde.

5.3.3. Estructura característica

Se realiza la descomposición característica de las ecuaciones de evolución obtenidas, respecto a una dirección de propagación genérica $k_a = (\lambda, m_i)$ asociada a un frente de ondas. Es decir, se consideran las perturbaciones linealizadas ($\hat{\phi}, \hat{E}^i, \hat{B}^i$) sobre una solución de fondo (ϕ, E^i, B^i), y sus campos tilde asociados. A tal fin, se introducen antes algunas definiciones convenientes:

$$A_m \equiv m_i A^i \quad ; \quad A_p^i \equiv A^i - A_m m^i \quad ; \quad A_\ell^i \equiv m_k \epsilon^{kij} A_j \quad (5.40)$$

para cualquier vector A^i dado.

De esta forma el sistema característico se lee,

$$\begin{aligned} (\lambda - \beta_m) / \alpha \hat{\phi} &= -\hat{B}_m - \frac{\tilde{E}_m}{\Delta^2} (\tilde{E}_k \hat{B}^k + \tilde{B}_k \hat{E}^k) \\ (\lambda - \beta_m) / \alpha \hat{E}^i &= -\hat{B}_\ell^i + \frac{\tilde{B}^i}{\tilde{B}^2} [\tilde{B}_k \hat{B}_\ell^k - \tilde{E}_k \hat{E}_\ell^k + \tilde{E}_m \hat{\phi}] - \frac{\tilde{S}^i}{\tilde{B}^2} \hat{E}_m \\ (\lambda - \beta_m) / \alpha \hat{B}^i &= \hat{E}_\ell^i - \frac{1}{\Delta^2} \left[\tilde{B}_\ell^i - \frac{\tilde{S}_m}{\tilde{B}^2} \tilde{E}^i \right] (\tilde{E}_k \hat{B}^k + \tilde{B}_k \hat{E}^k) - m^i \hat{\phi} \end{aligned}$$

donde $\Delta := \sqrt{\tilde{B}^2 - \tilde{E}^2}$.

La solución a este problema de autovalores/autovectores resulta:

$$\begin{aligned} U_1^\pm &= \left\{ 1, \frac{\pm \tilde{E}_m}{(\tilde{B}_p^2 \pm \tilde{S}_m)} \tilde{B}_p^i, \frac{\tilde{E}_m}{(\tilde{B}_p^2 \pm \tilde{S}_m)} \tilde{B}_\ell^i \mp m^i \right\}, \quad \lambda_1^\pm = \beta_m \pm \alpha \\ U_2^\pm &= \left\{ 0, \tilde{E}_p^i \pm \tilde{B}_\ell^i, \tilde{B}_p^i \pm \tilde{E}_\ell^i \right\}, \quad \lambda_2^\pm = \beta_m \pm \alpha \\ U_3^\pm &= \left\{ 0, \tilde{B}^2 n^i - \sigma_A^\pm (\tilde{S}^i \pm \Delta \tilde{B}^i), \tilde{S}_\ell^i \pm \Delta \tilde{B}_\ell^i \right\}, \quad \lambda_3^\pm = \beta_m - \alpha \sigma_A^\pm \\ U_4 &= \left\{ 0, \tilde{B}^i, -\tilde{E}^i \right\}, \quad \lambda_4 = \beta_m - \alpha \frac{\tilde{S}_m}{\tilde{B}^2}, \end{aligned}$$

donde $\sigma_A^\pm := \frac{1}{\tilde{B}^2}(\tilde{S}_m \pm \Delta\tilde{B}_m)$, y se han expresado los autovectores como $U \equiv \{\hat{\phi}, \hat{E}^i, \hat{B}^i\}$.

El primer conjunto de autovectores no representa ningún modo físico: corresponde a los modos asociados con la divergencia de B^i y al campo ϕ . El segundo par se identifica con los modos magneto-sónicos rápidos y pertenece al mismo subespacio anterior, con propagaciones a la velocidad de la luz. El tercer conjunto, corresponde al límite *force-free* de los modos Alfvén de la magnetohidrodinámica; mientras que el último modo está relacionado al vínculo algebraico $G = 0$, y por tanto, tampoco representa un modo físico.

Genéricamente, los autovalores correspondientes a los distintos subespacios son diferentes entre sí, y el sistema anterior conforma una base completa para espacio tangente. La co-base asociada es en este caso,

$$\begin{aligned}\Theta_1^\pm &= \frac{1}{2} \left\{ 1, \mp \frac{\tilde{E}_m}{\Delta^2} \tilde{B}_i, \mp \frac{\tilde{E}_m}{\Delta^2} \tilde{E}_i \mp m_i \right\} \\ \Theta_2^\pm &= \frac{1}{2(\tilde{E}_p^2 + \tilde{B}_p^2 \pm 2\tilde{S}_m)} \left\{ a^\pm, b^\pm \frac{\tilde{E}_m}{\Delta^2} \tilde{B}_i - \tilde{E}_{pi} \mp \tilde{B}_{li}, b^\pm \left(\frac{\tilde{E}_m}{\Delta^2} \tilde{E}_i + m_i \right) - \tilde{B}_{pi} \mp \tilde{E}_{li} \right\} \\ \Theta_3^\pm &= \frac{1}{2\Delta\tilde{B}^2(1 - (\sigma_A^\pm)^2)} \left\{ \mp \tilde{E}_m, \Delta m_i + \frac{\tilde{B}_m}{\Delta} \tilde{B}_i \mp \tilde{E}_{li}, \frac{\tilde{B}_m}{\Delta} \tilde{E}_i \pm \tilde{B}_{li} \right\} \\ \Theta_4 &= \frac{1}{\Delta^2} \{0, \tilde{B}_i, \tilde{E}_i\}\end{aligned}$$

donde han sido definidos, $a^\pm := \frac{\mp \tilde{B}_m \tilde{E}_m}{(\tilde{B}_p^2 \pm \tilde{S}_m)}$ y $b^\pm := (\tilde{B}_m \pm a^\pm)$.

Degeneraciones

Aquí se analizan en detalle aquellos casos en que alguno de los subespacios característicos se degeneran y mezclan entre ellos. Esto es, los casos donde dos (o más) autovalores de diferentes subespacios coinciden, y sus autovectores asociados se vuelven singulares o linealmente dependientes. Dado que el sistema es simétrico hiperbólico, y por tanto fuertemente hiperbólico, sabemos que debe existir en cada punto un conjunto completo de autovectores. Sin embargo, como los subespacios se cruzan o se vuelven singulares, una elección diferente de base puede ser necesaria.

Las tres degeneraciones posibles son:

1. $\sigma_A^+ = \sigma_A^- = \frac{\tilde{S}_m}{\tilde{B}^2}$
2. $\sigma_A^+ = \pm 1$ ó $\sigma_A^- = \pm 1$
3. $\sigma_A^+ = \pm 1$ y $\sigma_A^- = \mp 1$ (simultáneamente)

1. Aquí el subespacio de Alfvén colapsa internamente y a su vez, con el modo U_4 (vínculo algebraico). Como estamos considerando campos de fondo que son magnéticamente dominados, $\Delta > 0$, esta degeneración sólo ocurre si $\tilde{B}_m = 0$. Es fácil de ver, de la expresión general de los autovectores, que los vectores correspondientes continúan siendo linealmente independientes en este límite. Por lo tanto, existe la base completa de autovectores y no es necesario en este caso redefinirla.
2. La segunda posibilidad es que una de las velocidades de Alfvén coincida con uno de los modos magneto-sónicos rápidos. Puede verse que los dos autovectores correspondientes colapsan a cero en cualquiera de los cuatro casos posibles.

Comenzaremos el análisis de la siguiente observación general:

$$1 - (\sigma_A^\pm)^2 = \frac{1}{\tilde{B}^4} (\tilde{S}_p^i \pm \Delta \tilde{B}_p^i)^2.$$

Entonces, usando la ortogonalidad de $\tilde{E}^i, \tilde{B}^i, \tilde{S}^i$ (y la dominación magnética), cada vez que hay una coincidencia de autovalores se sigue que:

$$\tilde{E}_m = 0 \quad , \quad \tilde{E}_p^i \perp \tilde{B}_p^i \quad , \quad \tilde{E}_p^2 = \tilde{B}_p^2 \quad \text{y} \quad \Delta \equiv |\tilde{B}_m|$$

En todos los posibles casos de coincidencia, puede hallarse la siguiente estructura común para el sistema característico,

$$\begin{aligned} U_1^\pm &= \{1, 0, \mp m^i\} & ; & \quad \Theta_1^\pm = \frac{1}{2} \{1, 0, \mp m_i\} \\ U_2^\pm &= \{0, \tilde{B}_\ell^i, \mp \tilde{B}_p^i\} & ; & \quad \Theta_2^\pm = \frac{1}{2\tilde{B}_p^2} \{0, \tilde{B}_{\ell i}, \mp \tilde{B}_{pi}\} \\ U_4 &= \{0, \tilde{B}^i, -\tilde{E}^i\} & ; & \quad \Theta_4 = \frac{1}{\tilde{B}_m^2} \{0, \tilde{B}_i, \tilde{E}_i\} \end{aligned}$$

mientras que los dos autovectores (y co-vectores) remanentes pueden ser organizados en dos grupos diferentes:

i) $\sigma_A^+ = 1$ ó $\sigma_A^- = 1$:

$$\begin{aligned} U_3^{(1)} &= \{0, \tilde{B}_p^i, \tilde{B}_\ell^i\} & ; & \quad \Theta_3^{(1)} = \frac{1}{2\tilde{B}_p^2} \{0, \tilde{B}_{pi}, \tilde{B}_{\ell i}\} + \frac{1}{2\tilde{B}_m^2} \{0, -\tilde{B}_m m_i - \tilde{B}_i, \tilde{B}_{\ell i}\} \\ U_3^{(2)} &= \frac{1}{\tilde{B}_p^2} \{0, \tilde{B}_p^i, \tilde{B}_\ell^i\} + \frac{1}{\tilde{B}_m^2} \{0, \tilde{B}_m m^i + \tilde{B}^i, \tilde{B}_\ell^i\} & ; & \quad \Theta_3^{(2)} = \frac{1}{2} \{0, -\tilde{B}_{pi}, \tilde{B}_{\ell i}\} \end{aligned}$$

con autovalores $\lambda_3^{(1)} = \beta_m - \alpha$ y $\lambda_3^{(2)} = \beta_m - \alpha(1 - 2\frac{\tilde{B}_m^2}{\tilde{B}^2})$, respectivamente.

ii) $\sigma_A^+ = -1$ ó $\sigma_A^- = -1$:

$$\begin{aligned} U_3^{(1)} &= \{0, -\tilde{B}_p^i, \tilde{B}_\ell^i\} & ; & \quad \Theta_3^{(1)} = \frac{1}{2\tilde{B}_p^2} \{0, -\tilde{B}_{pi}, \tilde{B}_{\ell i}\} + \frac{1}{2\tilde{B}_m^2} \{0, \tilde{B}_m m_i + \tilde{B}_i, \tilde{B}_{\ell i}\} \\ U_3^{(2)} &= \frac{1}{\tilde{B}_p^2} \{0, \tilde{B}_p^i, \tilde{B}_\ell^i\} + \frac{1}{\tilde{B}_m^2} \{0, -\tilde{B}_m m^i - \tilde{B}^i, \tilde{B}_\ell^i\} & ; & \quad \Theta_3^{(2)} = \frac{1}{2} \{0, \tilde{B}_{pi}, \tilde{B}_{\ell i}\} \end{aligned}$$

con autovalores $\lambda_3^{(1)} = \beta_m + \alpha$ y $\lambda_3^{(2)} = \beta_m + \alpha(1 - 2\frac{\tilde{B}_m^2}{\tilde{B}^2})$, respectivamente.

- El último caso es cuando las dos degeneraciones anteriores se dan simultáneamente, es decir que cada modo de Alfvén colapsa con uno de los modos rápidos. No es difícil de ver que este caso sólo es posible cuando $\tilde{E}^i = 0$ y $\tilde{B}_p^i = 0$. Pero entonces, la estructura resultante es exactamente aquella de la teoría de Maxwell, i.e. modos transversales a la velocidad de la luz. Mientras los modos no físicos restantes, asociados a los vínculos, propagarán sobre las direcciones normales.

5.4. Implementación

Se evoluciona el sistema (5.36)-(5.38) sobre la infraestructura numérica detallada en el Apéndice A, que representa una cierta foliación del espaciotiempo de Kerr. Los dominios que se han considerado van desde el interior del horizonte de eventos hasta radios entre 17 a 65 M , empleando para ello típicamente dos resoluciones distintas: 21x21x81 y 41x41x161, para cada uno de los 12 parches que cubren la región. Para el tratamiento de las interfaces discutido en la Sec. A.3, se utiliza la información del sistema característico que fue introducida en el apartado anterior. Se brindan a continuación algunos detalles importantes referidos a la implementación.

5.4.1. Hoja de corriente

Las dos condiciones algebraicas que debe cumplir la FFE, como se mostró al comienzo de este capítulo, son $G = 0$ y $F > 0$. De la primera se habló extensamente, y es en principio una propiedad que es preservada por la evolución. En cambio, esto mismo no puede decirse respecto de la segunda condición, usualmente referida como “dominación magnética”. De hecho, es sabido que la dinámica *force-free* desarrolla genéricamente regiones en las cuales ésta deja de cumplirse. En particular, en el escenario astrofísico que nos interesa, esto sucede sobre el plano ecuatorial (especialmente dentro de la ergoesfera) donde se establece una hoja de corriente. Esto no debería ser muy sorprendente teniendo en cuenta que el modelo surge como un límite de una teoría más general, a saber: magnetohidrodinámica resistiva. Y por lo tanto, estas situaciones deben leerse simplemente como un indicador que señala el fin de validez de la aproximación. Incluso, como se vio en el análisis del sistema característico, la violación de esta condición marca también un quiebre matemático de la teoría, en el sentido que ésta deja de ser bien puesta.

Existe sin embargo una salida a este conflicto; Komissarov [78], argumentando sobre bases físicas, plantea que en estas hojas de corriente se da lugar a una resistividad finita que disipará campo electromagnético y mantendrá las magnitudes de E^i y B^i muy próximas, i.e. $F \sim 0$. Esto permitió a Komissarov proponer un tratamiento físicamente consistente –aunque matemáticamente no muy atractivo– para resolver estas regiones dentro de la FFE; esencialmente se introduce una resistividad finita que actúa para reducir el campo eléctrico toda vez que éste se acerca en magnitud al campo magnético.

En este trabajo hemos seguido una prescripción muy similar a la propuesta en [72], en donde se “recorta” campo eléctrico cada vez que éste supera un umbral respecto del campo magnético. La única diferencia es que hemos suavizado un poco aquí la manera de realizar dicho recorte. Concretamente, se implementa a cada paso temporal:

$$E^i \rightarrow f \left(\frac{|E|}{|B|} \right) E^i$$

donde $f(x)$ es una función suave construida a tramos, que vale uno para $x \leq 1 - 2\varepsilon$ (con ε un parámetro pequeño); está dada por un polinomio en x (quinto orden) para el tramo intermedio $1 - 2\varepsilon < x < 1 - \varepsilon$; y finalmente, $f \sim \frac{1}{x}$ para valores mayores.

5.4.2. Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno son de dos tipos: unas tienen que ver con la restricción del ingreso a posibles violaciones de los vínculos, y otras tienen que ver con la condición física que se desea imponer, de acuerdo al problema particular.

Control de los vínculos

Se comenzará por el control de la divergencia del campo magnético. Recordamos que en los puntos interiores se ha utilizado el método de *divergence-cleaning* (ver discusión en torno a la ecuación (5.18)). Para restringir el ingreso de posibles violaciones desde la frontera externa

seguiremos el método propuesto en [82]. La idea es estudiar un sistema subsidiario que describe la dinámica del vínculo, e imponer la condición “no entrante” sobre esos modos. Esa condición a los modos del sistema subsidiario se traducirá finalmente en una corrección a las ecuaciones de evolución para los puntos del borde.

El sistema de evolución de primer orden para el vínculo, se obtiene a partir de la definición de las variables $D := \frac{1}{\sqrt{h}}\partial_j(\sqrt{h}B^j)$ y $\delta_i := \partial_i\phi$,

$$\begin{aligned}\partial_t D &= \beta^k \partial_k D + \frac{D}{\sqrt{h}} \partial_j(\sqrt{h}\beta^j) - \frac{\alpha}{\sqrt{h}} \partial_j(\sqrt{h}\delta^j) - \delta^k \partial_k \alpha + \frac{1}{\sqrt{h}} \partial_j(\sqrt{h}Z^j) \\ \partial_t \delta^i &= \partial^i(\beta^k \delta_k) - \alpha(\partial^i D + \kappa \delta^i) - (D + \kappa\phi)\partial^i \alpha - \partial^i W\end{aligned}$$

donde se uso que $Z^i \equiv \frac{\alpha}{F} \left[\hat{e}^{ijk} r_j \tilde{B}_k + \frac{\tilde{E}^i}{B^2} \tilde{S}^k r_k \right]$ y $W \equiv \frac{\alpha}{F} \tilde{E}^k r_k$.

Su sistema característico se reduce luego de algunas manipulaciones a,

$$\begin{aligned}(\lambda - \beta_m) \hat{D} &= -\alpha \hat{\delta}_m \\ (\lambda - \beta_m) \hat{\delta}^i &= -\alpha \hat{D} m^i\end{aligned}$$

Con lo cual la condición “no entrante” resulta,

$$P_+(U) \equiv \frac{1}{2}(\delta_m - D) = 0 \quad (5.41)$$

Despejando finalmente D y δ_m de las ecuaciones de evolución (generales) e imponiendo la condición (5.41), se obtiene la corrección al lado derecho de las ecuaciones para los puntos del borde:

$$\partial_t \phi = (\partial_t \phi)^o + \frac{1}{2} \alpha \left[\frac{1}{\sqrt{h}} \partial_j(\sqrt{h}B^j) - m^j \partial_j \phi \right] \quad (5.42)$$

$$\partial_t B^i = (\partial_t B^i)^o - \frac{1}{2} \alpha m^i \left[\frac{1}{\sqrt{h}} \partial_j(\sqrt{h}B^j) - m^j \partial_j \phi \right] \quad (5.43)$$

donde m^i es la dirección (unitaria) de propagación, normal a la superficie del borde.

Para considerar el vínculo algebraico ($G = 0$) en el borde exterior, lo primero es identificar cuáles son los modos característicos asociados. Como ya se vio en la Sección 5.3.3, éstos corresponden al autovalor λ_4 y es posible escribir el proyector de dicho subespacio como,

$$P_4 \equiv U_4 \Theta_4 = \frac{1}{\Delta^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{B}^i \tilde{B}_j & \tilde{B}^i \tilde{E}_j \\ 0 & -\tilde{E}^i \tilde{B}_j & -\tilde{E}^i \tilde{E}_j \end{pmatrix}$$

La idea es entonces que cuando este modo sea entrante (i.e. $\lambda_4 > 0$), se le remuevan a las ecuaciones de evolución sobre la frontera la componente en dicho subespacio. Es decir,

$$\partial_t U \rightarrow \partial_t U - P_4(\partial_t U)$$

Con lo cual se obtienen las siguientes correcciones a las ecuaciones de evolución sobre el borde:

$$\partial_t E^i = (\partial_t E^i)^o + \frac{1}{2\Delta^2} \tilde{B}^i \left(\beta^k - \frac{\alpha}{B^2} \tilde{S}^k \right) r_k \quad (5.44)$$

$$\partial_t B^i = (\partial_t B^i)^o - \frac{1}{2\Delta^2} \tilde{E}^i \left(\beta^k - \frac{\alpha}{B^2} \tilde{S}^k \right) r_k \quad (5.45)$$

Sin embargo, es importante notar que debido a la extensión que se hizo del sistema fuera

de la subvariedad $G = 0$, lo que propaga este modo es en realidad la combinación $G + \sigma F$, y no G . Por esta razón, el “no ingreso” de violaciones al vínculo algebraico estará garantizado en la medida que éste (y por tanto σ) se mantenga controlado en el interior del dominio. Sobre este punto recordamos que en nuestra construcción del sistema G debería mantenerse pequeño durante la dinámica, y no necesitamos a priori ningún mecanismo extra. Aún así, se agrega a las ecuaciones de evolución (¡en los puntos interiores!) un término de *damping*,

$$\partial_t E^i = (\partial_t E^i)^o - \alpha \delta \frac{(E_k B^k)}{B^2} B^i \quad (5.46)$$

donde el parámetro δ nos permite un mayor control sobre este vínculo. Esta estrategia fue adoptada en [75], y representa una mejora respecto de otra variante ampliamente utilizada, que consiste en remover la componente de campo E^i a lo largo de B^i luego de cada paso temporal (ver e.g. [72, 84–86]).

Condición física

El escenario físico que se considera aquí, es el de un disco de acreción muy lejano ($\sim 10^3 M$) originando una corriente circular que proporciona (sobre nuestra región computacional) un campo magnético aproximadamente uniforme y alineado con el eje de simetría. La idea es que la presencia del plasma en las cercanías del agujero negro modifique la dinámica en el interior de esa zona *force-free*, y a medida que nos alejemos, la solución se acerque a la configuración de campo uniforme generada por el disco de acreción.

Para representar tal escenario se hará uso de la infraestructura de penalizaciones que posee nuestro código (Sección A.3), que a grandes rasgos, corrige las posibles discrepancias entre los valores que toman los campos característicos a uno y otro lado de una interfase. Lo que hace, es tomar la diferencia entre los campos interno y externo, y proyectarla sobre los subespacios característicos positivos, i.e. modos entrantes (ver expresión (A.25)). La idea es entonces establecer ese campo externo como el campo magnético uniforme antes descrito, y aplicar sólo aquellas proyecciones que se correspondan con modos físicos.

Conviene pensar esta condición de contorno como una especie de “baño térmico” que rodea al sistema *force-free*, que no afecta sus modos salientes pero sí influye sobre los modos físicos que ingresarán al sistema –acorde a la presencia de dicho campo exterior–. Notamos que esta prescripción no fija (ni busca fijar) la solución interior a los valores del campo exterior⁶.

En cuanto a la condición sobre el borde interior, recordamos que éste es colocado dentro del horizonte de eventos externo y fuera del interno. Esto determina que todos los modos resultarán salientes, y no es por tanto necesario prescribir nada sobre dicha superficie. Notamos que siempre es posible ubicar el borde numérico entre ambos horizontes, como se ilustra en la Figura 5.1.

5.4.3. Dato inicial

Se considera como dato inicial un campo magnético uniforme alineado con el eje de simetría del agujero negro,

$$B^x = B^y = 0 \quad ; \quad B^z = \frac{1}{\sqrt{h'}} B_o \quad (5.47)$$

donde se ha expresado el campo en coordenadas Kerr-Schild “cartesianas”, y h' representa el determinante de la métrica espacial en dichas coordenadas. Notamos que tal factor es incluido para que el dato inicial respete el vínculo, es decir: $\frac{1}{\sqrt{h'}} \partial_i (\sqrt{h'} B^i) = 0$. Por su parte, B_o representa la magnitud del campo magnético, cuyo valor será fijado en el próximo apartado.

⁶ Esa otra posibilidad se exploró, sin embargo, en una implementación de la electrodinámica *force-free* alternativa (cuya estructura característica es considerablemente más simple) y se presenta en el Apéndice D.

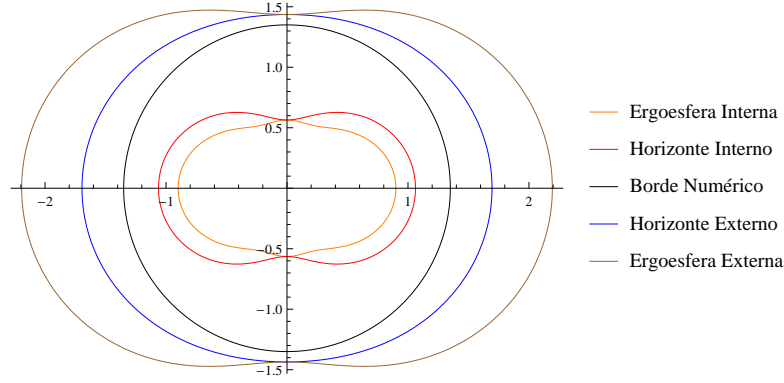


Figura 5.1: Distintas superficies relevantes para un espacio-tiempo de Kerr (plano $y = 0$). Este caso corresponde al parámetro $a = 0,9$, y el borde interno ha sido colocado en $r = 1,35M$.

En este caso, que es lo suficientemente sencillo, es posible escribir explícitamente el dato en nuestras coordenadas internas “cubito” (ver la transformación de coordenadas, Sección A.4.3). Resulta:

$$B_{(0-3)}^i = \frac{cB_o}{\sqrt{h}D^4} \begin{pmatrix} D^2 \\ 0 \\ ac \end{pmatrix}, \quad B_{(4)}^i = \frac{cB_o}{\sqrt{h}D^4} \begin{pmatrix} -aD^2 \\ -bD^2 \\ c \end{pmatrix}, \quad B_{(5)}^i = \frac{cB_o}{\sqrt{h}D^4} \begin{pmatrix} aD^2 \\ bD^2 \\ -c \end{pmatrix}$$

donde ahora h es el determinante de la métrica espacial pero en coordenadas cubito, y los subíndices (j) representan los distintos parches de la esfera.

Unidades y magnitudes

Los únicos parámetros físicos relevantes de nuestro problema numérico son la masa y el espín del agujero negro, y el campo magnético asintótico del plasma. Para lograr simulaciones que sean razonables desde una perspectiva astrofísica, será por tanto necesario “calibrar” estas cantidades de manera adecuada. El escenario que nos interesa en particular, es el de un agujero negro de masa $m \sim 10^{6-10}M_\odot$ y un campo magnético del orden de $B \sim 10^{1-4}$ “gauss” [87]. Sin embargo, en el código todos los campos están expresados en “unidades geometrizadas”: es decir, donde la constante gravitacional G y la velocidad de la luz c han sido fijadas a uno. Todas las cantidades que tienen dimensión expresable en términos de longitud L , tiempo T y masa M en unidades convencionales, tendrán en unidades geometrizadas dimensión de longitud (a una cierta potencia). Siguiendo el Apéndice F de [62], vemos que es sencillo convertir de unidades ordinarias a unidades geometrizadas mediante simples factores de conversión, que básicamente reponen los valores de las constantes omitidas G y c . Buscamos entonces encontrar una relación entre la masa y el valor del campo magnético asintótico en las unidades geometrizadas del código, que guarde la correlación del escenario físico realista.

Lo primero que notamos es que el campo magnético tiene unidades ordinarias $M^{1/2}L^{-3/2}$, que representa en unidades geometrizadas: $[B] \sim L^{-1}$. Mientras que la masa del agujero negro, tiene unidades geometrizadas $[m] \sim L^1$. Por lo tanto, resulta natural tomar el producto para obtener una cantidad adimensional que codifique la información de la proporcionalidad entre

estas dos cantidades. Aplicando los factores de conversión apropiados vemos que,

$$\begin{aligned}\hat{m} &= m \left(\frac{G}{c^2} \right) \\ \hat{B} &= B \left(\frac{G^{1/2}}{c} \right)\end{aligned}$$

donde hemos denotado con y sin *hat* las cantidades en unidades geometrizadas y en unidades ordinarias, respectivamente. Elijiendo ahora los valores físicos,

$$\begin{aligned}m_f &= 10^{10} M_\odot \approx 2 \times 10^{40} \text{Kg} \\ B_f &= 10^4 G \approx \text{Kg C}^{-1} \text{s}^{-1}\end{aligned}$$

Obtenemos luego⁷,

$$\hat{m}\hat{B} \sim \hat{m}_f\hat{B}_f = m_f B_f \left(\frac{\sqrt{G}}{c} \right)^3 \approx 4 \times 10^{-6} \quad (5.48)$$

Por lo tanto, dado que en el código se ha fijado $\hat{m} = 1$, la magnitud del campo magnético que se considera para los datos iniciales (y condiciones de contorno) será de $\hat{B} \sim 10^{-6}$.

5.4.4. Cantidades de monitoreo

Energía, momento angular, y sus respectivos flujos.

Es bien sabido que dado un tensor de energía-momento conservado, T^{ab} , y un campo vectorial de Killing ξ^a , entonces se puede construir una corriente conservada $j^a := T^{ab}\xi_b$. Luego, aplicando el teorema de Stokes:

$$\begin{aligned}0 &= \int_S (\nabla_a j^a) \sqrt{-g} d^4x = \int_{\partial S} j^a dS_a \\ &= \int_{\Sigma_t} j^a dS_a - \int_{\Sigma_o} j^a dS_a + \int_{r_{ext}} j^a d\hat{S}_a - \int_{r_{int}} j^a d\hat{S}_a\end{aligned}$$

puede interpretarse que existe una cantidad –definida en las hipersuperficies Σ_t – que resulta preservada, a menos de un flujo que abandona (o ingresa) el dominio (ver Figura 5.2).

Considerando los bordes como superficies esféricas $r = cte$, los elementos normales son:

$$\begin{aligned}dS_a &= n_a \sqrt{\hat{h}} d^3x = -(dt)_a \sqrt{-g} d^3x \\ d\hat{S}_a &= N_a \sqrt{-\hat{h}} dt d^2x = (dr)_a \sqrt{-g} dt d^2x\end{aligned}$$

La condición *force-free* supone que el tensor energía-momento electromagnético (ec. (5.4)) es conservado. Asimismo, en el espaciotiempo de Kerr existen dos vectores de Killing k^a y m^a asociados con la estacionariedad y la simetría axial, respectivamente. Por tanto, existen dos conservaciones que son identificadas con la energía y el momento angular del sistema.

Se define el cuadri-momento,

$$p^a := -T^{ab}k_b \quad (5.49)$$

observando que el vector de Killing coincide con el campo t^a usado en la descomposición 3 + 1,

⁷ Se recuerdan los valores de las constantes $G = 6,67 \times 10^{-8} \text{cm}^3 \text{g}^{-1} \text{s}^{-2}$ y $c = 3 \times 10^{10} \text{cm s}^{-1}$. Además se ha usado la siguiente relación para pasar de unidades en SI a *Gaussian-cgs*: $1 \text{statC} = g^{1/2} \text{cm}^{3/2} \text{s}^{-1} \equiv 3,335 \times 10^{-10} \text{C}$.

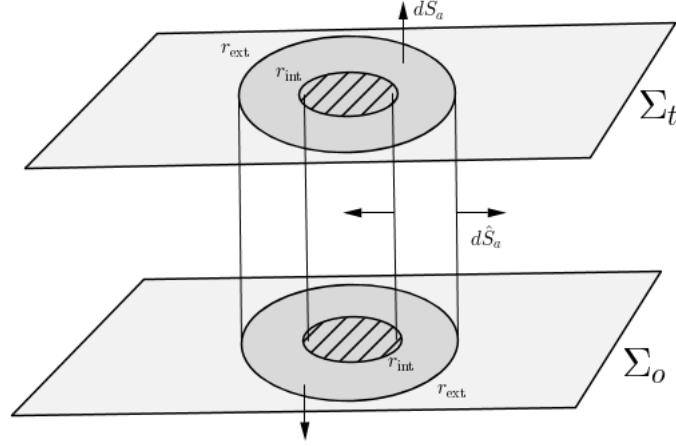


Figura 5.2: Conservación y flujos: teorema de Stokes.

y por tanto, $k_a = \alpha n_a + \beta_a$. Luego,

$$p^a = -\frac{1}{2}(E^2 + B^2)k^a + [\alpha(E^2 + B^2) + S_o] n^a + (E_o E^a + B_o B^a) - \alpha S^a \quad (5.50)$$

donde se han denotado las contracciones $A_o \equiv \beta_i A^i$. Entonces la energía a tiempo t se define,

$$E(t) := \int_{\Sigma_t} \mathcal{E} \sqrt{h} d^3x$$

con $\mathcal{E} := -p^a n_a = \frac{\alpha}{2}(E^2 + B^2) + S_o$, representando la densidad de energía.

De acuerdo al teorema de Stokes, tendremos por tanto que la diferencia de energía en un intervalo de tiempo estará dado por el flujo neto a través de las superficies interna y externa:

$$\Delta E \equiv E(t) - E(t_o) = \int_{r_{ext}} \Phi_{\mathcal{E}} dt d^2x - \int_{r_{int}} \Phi_{\mathcal{E}} dt d^2x$$

donde al campo $\Phi_{\mathcal{E}} := \sqrt{-g} p^r$, se lo identifica usualmente como “flujo de Poynting”.

De manera completamente análoga, pero utilizando ahora el vector de Killing axial $m^a := \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^a$, pueden definirse tanto el momento angular a tiempo t ,

$$L(t) := \int_{\Sigma_t} S_a m^a \sqrt{h} d^3x$$

como el flujo radial de momento angular, dado por la expresión $\Phi_{\mathcal{L}} := \sqrt{-g} T^r_a m^a$.

Frecuencia de rotación

Otra cantidad muy útil en el contexto del mecanismo de extracción de Blandford-Znajek es la “frecuencia de rotación”,

$$\Omega_F := \frac{F_{t\theta}}{F_{\theta\varphi}} \quad (5.51)$$

que en el caso de un campo estacionario y axi-simétrico captura la noción de “velocidad angular de las líneas de campo magnético” (ver e.g. [6, 72, 78]).

5.5. Resultados

Todas las soluciones, luego de una transición dinámica inicial, alcanzan estadios estacionarios que exhiben flujos colimados de energía, conocidos como *jets*. En la Figura 5.3, puede verse un ejemplo de esta estructura final (para el caso $a = 0,9$); mientras que en la Figura 5.4 se muestra en más detalle la dependencia angular para distintos radios. El flujo neto, integrado sobre una esfera (en principio arbitraria) arroja una cantidad positiva, y esto es interpretado como la extracción de energía de rotación del agujero negro por parte del campo electromagnético. Es sabido que este tipo de configuraciones no son posibles en electro-vacío, y que la presencia de cargas y corrientes en el modelo *force-free* constituyen la diferencia crucial que permite generar los flujos de Poynting y en definitiva la extracción de energía.

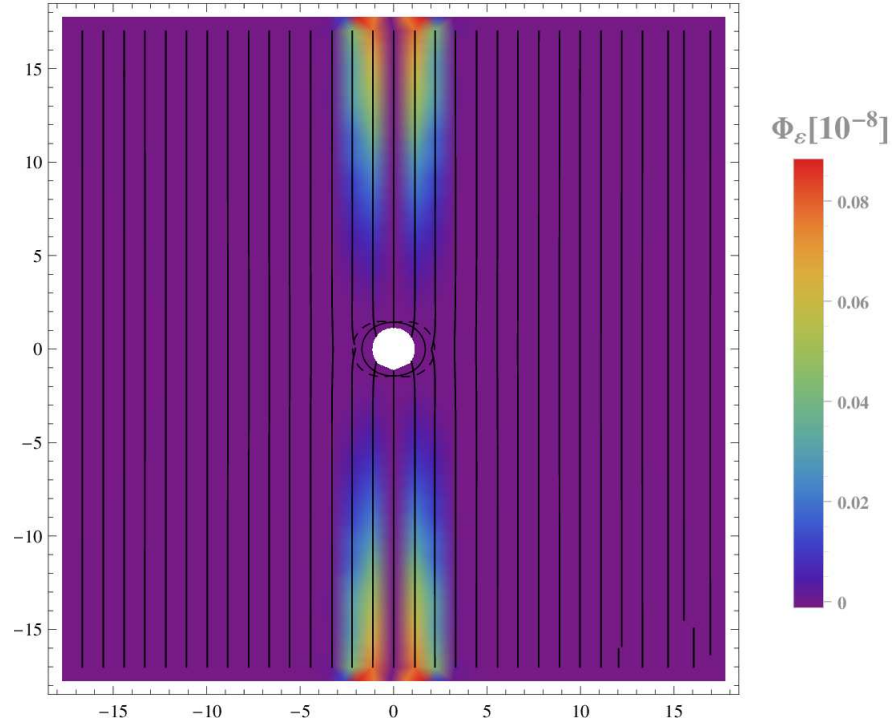


Figura 5.3: Flujo de Poynting colimado correspondiente a una solución *force-free* a $t = 150M$, para un agujero negro rotante con $a = 0,9$. Se representa asimismo la configuración de las líneas de campo magnético poloidales. Se muestra el plano $y = 0$ (en unidades de M), donde la línea punteada demarca la ergoesfera; la continua, el horizonte de eventos; y la región interior blanca no pertenece al dominio.

Encontramos asimismo (Figura 5.5), que todas las líneas de campo magnético que atraviesan la ergoesfera adquieren una frecuencia de rotación consistente con estudios previos [72, 78, 88]. Notamos que en configuraciones estacionarias y axi-simétricas como las estudiadas en el trabajo original de Blandford y Znajek [6], el flujo de energía posee una dependencia,

$$\Phi_{\mathcal{E}} \propto \Omega_F (\Omega_H - \Omega_F)$$

y por lo tanto el valor $\Omega_F = 0,5 \Omega_H$ representa el flujo máximo.

Resulta interesante además notar la generación de cargas eléctricas, entendiendo la densidad de carga como aquella definida por $\rho \equiv \nabla \cdot \vec{E}$. En la Figura 5.6, puede observarse la distribución de cargas de la solución estacionaria hallada, junto con las corrientes inducidas. Las corrientes

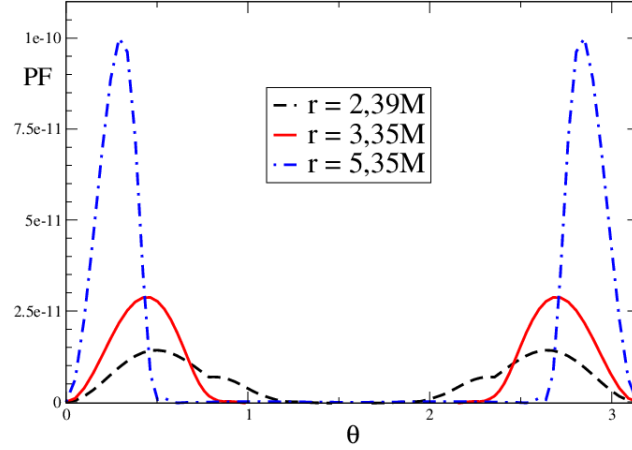


Figura 5.4: Se representa la dependencia angular del flujo de energía, para distintos radios próximos al horizonte: $r = 2,39M$; $r = 3,35M$ y $r = 5,35M$.

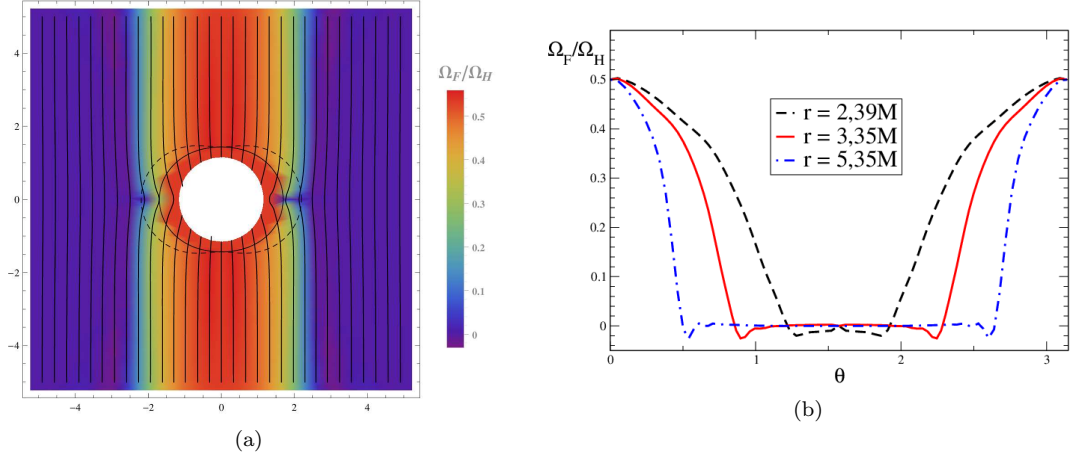


Figura 5.5: Velocidad angular (relativa) de las líneas de campo magnético, $\frac{\Omega_F}{\Omega_H}$. (a) se muestra el plano $y = 0$, donde puede notarse cómo las líneas que penetran la ergoesfera son “forzadas” a co-rotar con el agujero negro. (b) distribución angular para distintos radios: $r = 2,39M$; $r = 3,35M$ y $r = 5,35M$.

fluyen en la dirección del eje de simetría: hacia el agujero negro en toda una franja cercana al eje, y en el sentido contrario sobre un cascarón cilíndrico más delgado, que nace de la zona que marca el fin de la ergoesfera sobre la hoja de corriente ecuatorial. Esto es también consistente con resultados ya establecidos cualitativa y numéricamente (e.g. [72, 78]).

La principal diferencia de nuestra implementación numérica, además del sistema de evolución utilizado, radica en el tratamiento de las condiciones de contorno. Hasta donde sabemos, los estudios de evolución *force-free* tridimensionales utilizan condiciones de contorno “máximamente disipativas”. En términos físicos –y matemáticos–, esto establece que nada (ningún modo característico) puede ingresar al sistema desde el borde exterior⁸. Además, se utiliza en muchos casos incluso la estructura característica de Maxwell y no la genuinamente *force-free* (ver e.g. [76, 77]). En [72] por ejemplo, se coloca el borde exterior (en la dirección de simetría) a una distancia de $100M$ y se analizan las soluciones a un tiempo $t = 100M$. Esto significa que las

⁸ Mientas que los modos salientes (¡nada puede prescribirse sobre ellos!) son libres de abandonar el dominio.

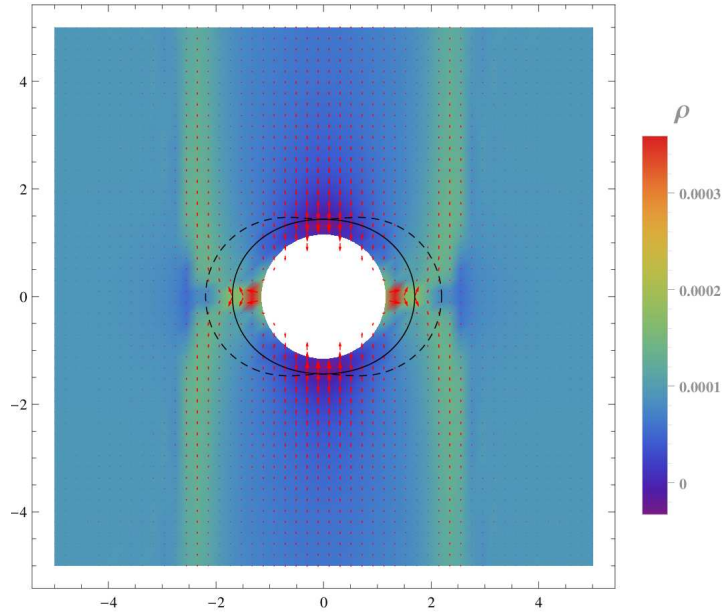


Figura 5.6: Distribución de las cargas eléctricas y de las corrientes inducidas sobre el plano $y = 0$, correspondiente a la solución estacionaria con $a = 0,9$.

señales que inicialmente salen desde la región cercana al horizonte, apenas si pueden encontrarse cruzando el borde exterior, y viceversa. Es decir, el contacto causal entre estas dos regiones es mínimo. Es por eso que se utiliza allí la expresión “cuasi-estacionarias” para describir las configuraciones obtenidas.

Utilizando las condiciones de borde discutidas en la Sección 5.4.2, hemos hallado soluciones “verdaderamente” estacionarias⁹. Esto puede notarse directamente en el comportamiento de todos los campos dinámicos. Como indicador de ello, se muestra en la Figura 5.7 la energía y momento angular en función del tiempo de una corrida típica.

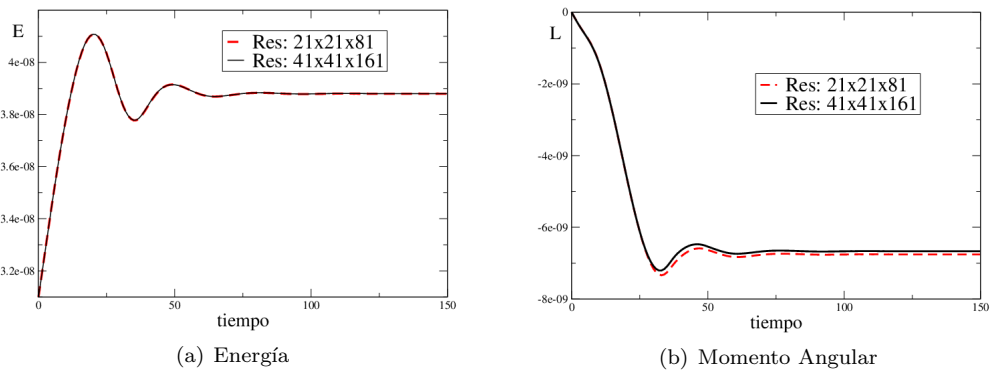


Figura 5.7: Comportamiento de la energía y el momento angular del sistema para dos resoluciones diferentes, con el borde externo colocado a radio $17,35M$.

⁹ Como ya fue mencionado, hemos ubicado la frontera exterior en radios de entre $17M$ y $65M$; mientras que los tiempos de evolución fueron en general de $t = 200M$.

Además, se presentan los flujos netos correspondientes a una esfera de radio $r_o = 5,35M$ para un mismo escenario, pero con el borde externo colocado a distintas distancias (Figura 5.8). Esto muestra que el *jet*, y la estructura general de la solución, no es afectada significativamente por la ubicación de la frontera numérica exterior.

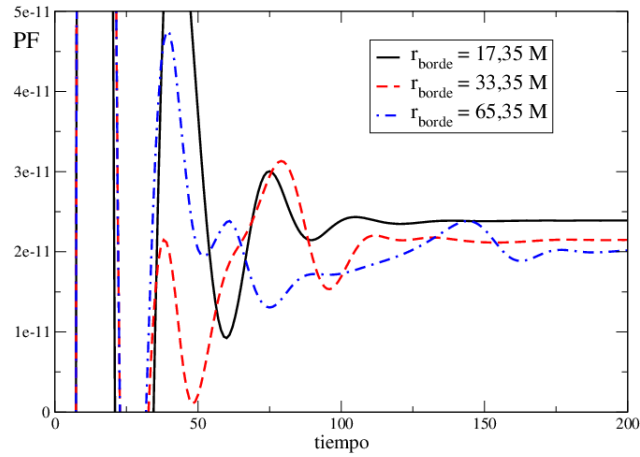


Figura 5.8: Flujo de energía neto, integrado sobre una esfera de radio $r_o = 5,35M$ (fijo), para simulaciones en donde el borde numérico ha sido colocado a distintas distancias.

Respecto de las condiciones de contorno, encontramos que las líneas de campo asintóticas mantienen la alineación inicial con el eje de simetría, salvo en la región del *jet*, donde aparece una componente toroidal significativa en el campo magnético. En la Figura 5.9 se gráfica el cociente,

$$\zeta = \frac{(B^x)^2 + (B^y)^2}{(B^z)^2}$$

sobre la esfera que representa el borde. Por otra parte, midiendo el cociente entre la magnitud del campo magnético simulado y el inicial (i.e. B^2/B_o^2), observamos que sólo se da un incremento de aproximadamente 27% (esencialmente) uniforme en toda la esfera exterior del dominio. Asimismo, advertimos que no se verifica un crecimiento excesivo del campo magnético, ni aún en las región del *jet* próximas al agujero negro donde alcanza un crecimiento cercano al 87%.

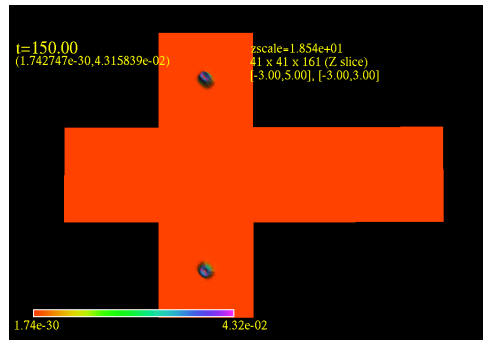


Figura 5.9: Valores del coeficiente ζ sobre la frontera exterior, representando la intensidad relativa del campo magnético entre sus componentes ortogonales/alineadas al eje de simetría.

En la Figura 5.10, se ilustra la configuración de la hoja de corriente, cuya formación fue discutida en la Sección 5.4.1. Observamos que ésta se da sobre el plano ecuatorial y dentro de la ergoesfera, aunque afecta claramente las regiones circundantes. Resulta aparente de la dinámica, que en esa región es donde se generan las cargas y las corrientes, y pareciera ser en gran medida responsable del flujo de Poynting. Komissarov sugirió que es el apantallamiento del campo eléctrico dentro de la ergoesfera lo que implica la generación de las corrientes poloidales. Estas corrientes, a su vez, dan lugar a la aparición de componentes toroidales de campo magnético, y por lo tanto a un flujo de energía distinto de cero [78]. Además, la hoja de corriente es el lugar donde actúa el mecanismo disipativo (ver apartado 5.4.1) y eso implica que ahí no se conserva el tensor de energía momento electromagnético. Eso podría estar actuando por tanto, como fuente de energía y momento angular, y sería importante e interesante determinar hasta qué punto el mecanismo numérico elegido para lidiar con estas regiones, afecta el resultado físico.

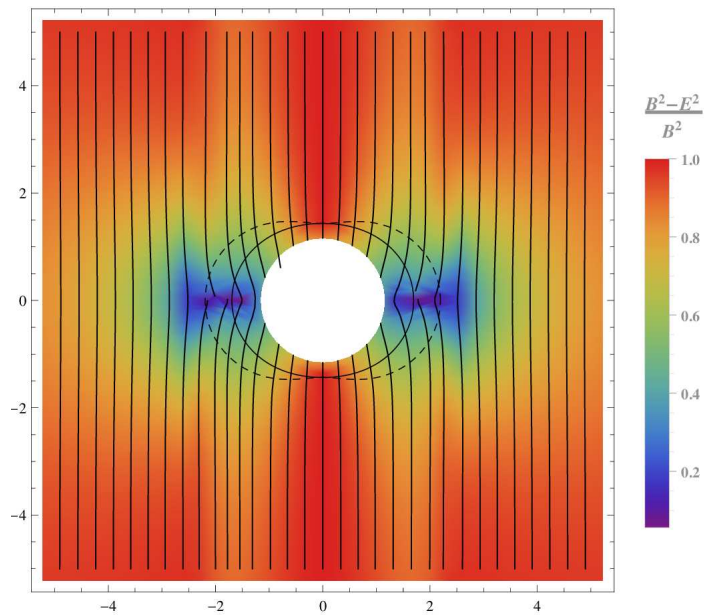


Figura 5.10: Se muestra el campo $\frac{B^2 - E^2}{B^2}$ sobre el plano $y = 0$, que ilustra la configuración de la hoja de corriente ecuatorial típica de estas soluciones.

Finalmente, hemos analizado el comportamiento de los vínculos. Se observa que no ingresan violaciones a ninguno de ellos desde la frontera exterior, y se verifica además que éstos no desarrollan crecimientos significativos dentro del dominio numérico. Para esto último, se computan la evolución de la norma L2 para los distintos casos (apropiadamente normalizados), así como también del *divergence-cleaning* (i.e. campo ϕ), hallándose resultados satisfactorios en todos los casos (ver Figura 5.11).

5.6. Conclusiones y perspectivas

En este trabajo se consideró una aproximación numérica novedosa al problema de la formación de *jets* y la extracción de energía en sistemas *force-free*, en los alrededores de un agujero negro supermasivo rotante, y con un campo magnético externo –justificado por la existencia de un disco de acreción–. La novedad radica en tres elementos principales: 1) la infraestructura *multi-block* desarrollada por mi director (detallada en el Apéndice A), que permite un esquema numérico estable sobre un dominio de topología $S^2 \times \mathbb{R}^+$ que se adapta naturalmente al problema y facilita además el tratamiento de contornos. 2) la hiperbolización de la FFE desarrollada

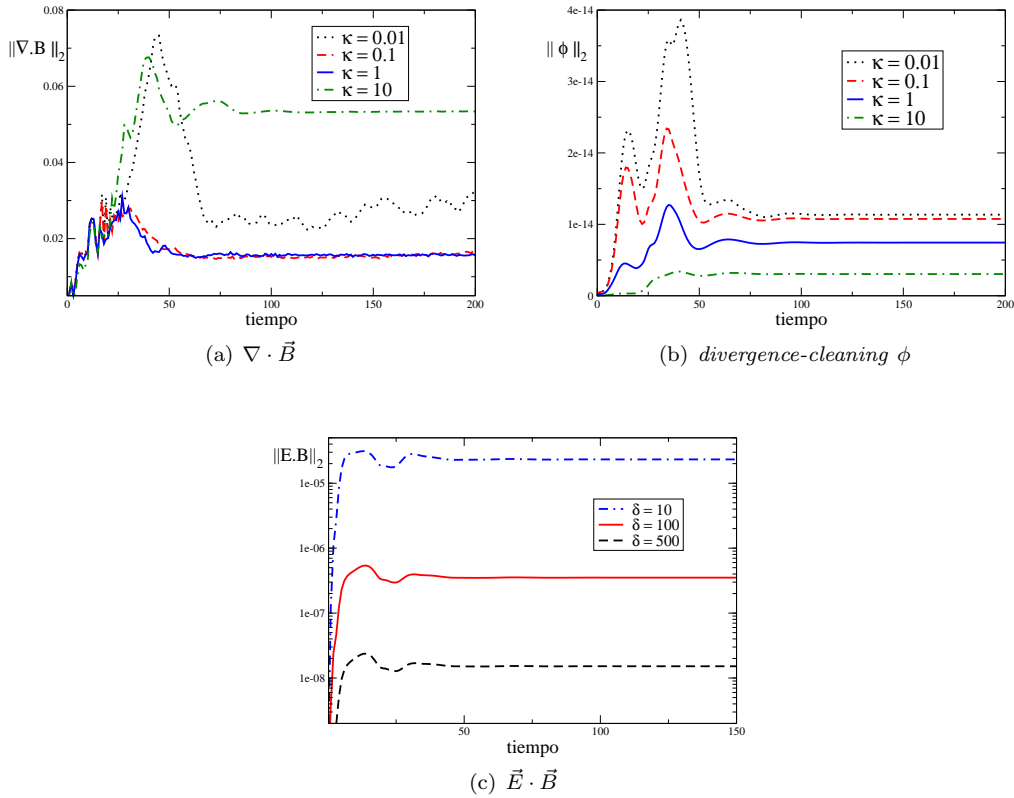


Figura 5.11: Se grafica la norma L2 como función del tiempo de los distintos campos asociados a los vínculos en una corrida típica. (a) $\frac{\|\nabla \cdot \vec{B}\|_2}{\|\partial_i(\sqrt{h}B^i)\|_2}$ y (b) $\|\phi\|_2$, para diferentes valores de κ . (c) se considera $\frac{\|\vec{E} \cdot \vec{B}\|_2}{\|B^2\|_2}$ utilizando distintos valores para el parámetro δ en la expresión (5.46).

en este capítulo, que nos garantiza un sistema de evolución bien puesto. 3) el análisis e implementación de condiciones de contorno estables que por un lado impiden el ingreso de posibles violaciones a los vínculos, y por el otro, representan (creemos) una buena aproximación el escenario físico deseado. Es decir, una región lejana dominada por un campo magnético uniforme de magnitudes realistas alineado al eje de simetría.

Es importante enfatizar que la hiperbolización de la teoría no fue un “capricho” matemático, sino una necesidad concreta que enfrentamos para llevar a cabo la evolución del sistema, especialmente teniendo en cuenta el “método de penalizaciones” utilizado para transmitir la información entre las grillas. Desafortunadamente la FFE no pertenece a las teorías electromagnéticas no lineales estudiadas en el capítulo anterior; el motivo tiene que ver con la presencia del vínculo $G = 0$, que implica una estructura causal distinta y demandó por tanto, un tratamiento especial. Se logró extender el sistema –y la hiperbolicidad– más allá de la subvariedad de este vínculo algebraico, lo cual es crucial para una implementación numérica.

Puede decirse que los resultados encontrados en este capítulo son aún preliminares, en el sentido que sólo reproducen una fenomenología ya establecida previamente por otros autores: la extracción de energía por medio de un flujo de Poynting muy potente y altamente colimado; la presencia de la hoja de corriente sobre el plano ecuatorial; la inducción de un circuito de corrientes; y la co-rotación de todas aquellas líneas de campo que atraviesan la ergoesfera. Podría agregarse a esta lista un estudio sobre la dependencia del flujo de Poynting respecto del parámetro de espín a , para luego compararla con aquella hallada en [72].

Si bien es cierto que los elementos novedosos de nuestra implementación pueden agregar algún valor a los resultados obtenidos, conviene considerarlos como un *test* satisfactorio del

código y la implementación en general. Sería útil orientar la búsqueda hacia algún detalle específico del problema que no haya sido considerado en profundidad por otros autores, o incluso hacia nuevas preguntas físicas elegidas de acuerdo a la potencialidad de nuestro enfoque numérico. Un primer paso para continuar en esta línea, consistirá en el estudio del caso de un campo magnético (inicial y exterior) no alineado a la rotación del agujero negro. Esto sumaría cierto grado de dificultad a la interpretación de las condiciones de borde, y permitiría aprovechar asimismo la tridimensionalidad del código. En general sería deseable también estudiar otras condiciones iniciales y de contorno, y ganar así intuición acerca de cuáles son los factores claves que determinan la solución estacionaria final¹⁰. En particular, nos interesa considerar un campo electromagnético externo que represente el movimiento del agujero negro no rotante respecto de un campo magnético uniforme (en una dirección ortogonal al movimiento), a los fines de analizar la posibilidad de extraer energía cinética –en vez de rotacional– del agujero negro y la consecuente generación de *jets* en ese contexto, como fuera observado en [89, 90].

Sería además muy interesante analizar con más detenimiento el rol que juega el mecanismo numérico utilizado en el tratamiento de la hoja de corriente. La primera impresión es que la manera y la intensidad con la que se disipe efectivamente en esa zona, impacta de forma directa sobre la potencia del flujo saliente. Una pregunta importante sería si el mecanismo de extracción tiene origen en la disipación sobre la hoja de corriente –actuando como fuente de energía–, o si en cambio, tiene que ver con un fenómeno estacionario más cercano a un proceso tipo Penrose. Por último, podríamos observar en más detalle el efecto del parámetro δ (ver ecuación (5.46)) sobre la física de las soluciones, en vistas a una comparación entre las ecuaciones implementadas aquí y aquellas descriptas en el Apéndice D.

¹⁰ En caso de que exista tal configuración final.

Capítulo 6

Palabras Finales

En esta tesis se han abordado, con base en la relatividad general y la teoría de ecuaciones en derivadas parciales, algunos problemas que corresponden a diversas áreas de la física. Entre estas áreas temáticas distinguimos principalmente la dinámica de fluidos, el electromagnetismo –junto con sus variantes no lineales–, y la magnetohidrodinámica. Del abordaje de los problemas de evolución aquí tratados, emergen algunos elementos o instancias comunes a destacar.

La primera instancia tiene que ver con un estudio analítico de los sistemas en cuestión, y en particular, en lo que respecta a su formulación de valores iniciales. El elemento matemático relevante, en tal sentido, es el concepto de sistema simétrico hiperbólico; propiedad que garantiza la existencia y unicidad local de las soluciones, así como la continuidad de las mismas respecto del dato inicial. Esto es crucial para que la teoría tenga sentido físico, y esencial al momento de intentar un acercamiento numérico al problema. Una definición particular de sistemas simétrico hiperbólicos, provista por Robert Geroch (reseñada en el Apéndice C), fue utilizada en los Capítulos 4 y 5. La ventaja principal de ésta, es que provee de un enfoque co-variante y permite incluir los vínculos de la teoría de forma unificada. En el caso de las generalizaciones no lineales del electromagnetismo, nos permitió construir un criterio simple y muy general para decidir cuándo estas teorías son simétrico hiperbólicas; para ello, fueron incorporados conceptos geométricos en relación a las superficies características del sistema y sus conos de propagación. En el caso de la electrodinámica *force-free*, nos permitió hallar un sistema de evolución bien puesto para poder proceder a la implementación numérica. Además se logró extender el sistema fuera de la subvariedad de vínculo, de forma que continúe siendo simétrico hiperbólico aún allí; esto es muy importante para la implementación, ya que no es posible garantizar numéricamente que el sistema permanecerá dentro de dicha subvariedad durante la evolución.

La segunda instancia tiene que ver con el aspecto práctico asociado a la implementación numérica. Como fue mencionado en la introducción, la “espinas dorsal” de la tesis fue una infraestructura diseñada principalmente por mi director (descrita en el Apéndice A). La característica central de dicha infraestructura, es que permite obtener esquemas de discretización estables sobre dominios constituidos en base a múltiples grillas. Esta propiedad permitió representar la esfera unidad para el abordaje de los problemas en los Capítulos 2 y 3, así como también un dominio tridimensional de topología $S^2 \times \mathbb{R}^+$, que posibilitó un mejor tratamiento de las condiciones de contorno en el problema del Capítulo 5. El elemento central de este esquema “multi-malla” es la técnica de penalizaciones (Sección A.3), que asegura una comunicación adecuada entre las distintas grillas. Esta técnica reposa sobre la estructura característica del sistema de evolución particular; es por ello que en cada sistema considerado fue necesario estudiar en detalle su problema característico¹. Mi principal aporte en el plano numérico tiene que ver con el desarrollo de las condiciones de contorno para el sistema astrofísico del Capítulo 5; allí se combinaron algunas herramientas analíticas (ver e.g. [7, 76, 82]) para lograr condiciones

¹ En el caso de la electrodinámica *force-free* el problema característico resultó de particular complejidad, principalmente debido a los distintos casos de degeneraciones posibles.

de borde estables, que preservan los vínculos, y que representan adecuadamente el escenario físico que se quería simular (i.e. una región exterior al dominio dada por un campo magnético uniforme alineado al eje de rotación). Asimismo, fueron necesarios en cada caso algunos desarrollos numéricos complementarios²; entre estos aportes –reseñados en el Apéndice A–, destaco la descomposición en modos armónicos sobre la esfera que posibilitó el estudio de la cascada inversa en el problema de fluidos conformes, así como las transformaciones de coordenadas y el post-proceso de las soluciones construido para el Capítulo 5.

Como última instancia, resaltamos los aportes físicos más relevantes en las distintas líneas de investigación. En el caso de los solitones topológicos (Capítulo 2), se hallaron numéricamente las soluciones estáticas –a diferentes valores de carga topológica– para una estabilización alternativa del modelo sigma mediante un campo vectorial. Las configuraciones encontradas revelan una íntima conexión con las correspondientes soluciones del modelo de Skyrme tridimensional, así como una gran similitud cualitativa y cuantitativa con sus análogos en la esfera. Por su parte, en el proyecto sobre fluidos conformes (Capítulo 3) se pudo verificar que los fluidos relevantes a la dualidad se comportan de manera análoga a los fluidos Newtonianos en dos dimensiones: es decir, desarrollan turbulencia y se da lugar a una cascada inversa de energía. Esto implica, por medio de la dualidad, un comportamiento diferente al que describe la teoría de perturbaciones usual –en término de modos cuasi-normales– para perturbaciones sobre agujeros negros $AAdS$. Finalmente, en el proyecto central de la tesis (Capítulo 5) se lograron reproducir algunos resultados centrales del área, como la generación de un flujo de Poynting colimado y la extracción de energía mediante una configuración de campo electromagnético genuinamente estacionaria³. Una de las preguntas más importantes que surgen tiene que ver con el mecanismo de extracción; ¿es la energía del *jet* producto de una configuración estacionaria del campo (proceso análogo al de Penrose), o es energía proveniente de la disipación que tiene lugar en la hoja de corriente? Para responder ese interrogante sería clave profundizar en el estudio de la hoja de corriente: ¿en qué medida afecta la intensidad del flujo el método numérico utilizado para lidiar con ella? Puede decirse que el código que hemos desarrollado en este proyecto es una herramienta muy valiosa, y que tenemos aún mucho terreno para explorar en términos de la física del problema.

² En general orientados a extraer la información física relevante de las soluciones halladas.

³ Esto fue posible gracias a un tratamiento novedoso de las condiciones de contorno.

Apéndice A

Implementaciones Numéricas

En este apéndice se presentan los detalles más relevantes de una infraestructura numérica común a los distintos proyectos de esta tesis. Dicha infraestructura general, desarrollada casi en su totalidad por Oscar Reula (director), ya se encontraba construida al momento de iniciarse estos trabajos. Hay en esencia un esquema general y una estructura de grillas que son la base de todas las implementaciones numéricas realizadas. Cada problema fue montado, con sus particularidades y sus requerimientos específicos, sobre este esqueleto central. Tanto en el problema de los solitones topológicos como el de fluidos conformes (Capítulos 2 y 3, respectivamente), demandaban un dominio numérico con la topología de una 2-esfera. La estructura de grillas que posibilita esa configuración, así como las estrategias para generar un esquema estable serán detalladas aquí. Luego, para el tratamiento de la electrodinámica *force-free*, se explica cómo esa esfera original se extiende en forma de capas hacia un dominio tridimensional, que será utilizado para representar una foliación apropiada del espaciotiempo de Kerr.

A.1. Esquema numérico general

A los fines de construir un esquema de diferencias finitas estables para nuestros problemas de valores iniciales, se utiliza el “método de líneas” [91]. Esto significa que primero se discretizan las derivadas espaciales (construyendo operadores en diferencias finitas), obteniendo un gran sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias para las funciones de grilla. A éste se lo conoce como sistema semi-discreto.

Para garantizar la estabilidad del esquema numérico se utiliza el “método de energía” [92]. Primero, se debe corroborar que los problemas de valores iniciales a implementar sean bien puestos en el continuo, y que las soluciones satisfacen una estimación de energía que acote alguna norma de la solución. Luego, se eligen los operadores discretos de forma tal que satisfagan suma por partes (SBP, por sus siglas en inglés) en la versión discreta de dicha norma –el equivalente a integración por partes–. Estos operadores, junto con los términos de penalización apropiados en las interfaces entre grillas (Sección A.3), implican una cota para la energía que garantiza la estabilidad del sistema semi-discreto. Finalmente, se discretizan las derivadas temporales. Si el sistema semi-discreto es estable, es posible probar que la versión completamente discreta del sistema también resultará estable, siempre que se elija un método de integración apropiado¹. En todos los casos, se ha utilizado un algoritmo clásico de Runge-Kutta de cuarto orden.

¹En el sentido que su región de estabilidad sea acorde al problema particular que se quiere tratar.

A.2. Esquema de grillas

La topología del dominio computacional en los códigos bidimensionales utilizados en los Capítulos 2 y 3, es S^2 (la esfera unidad). Mientras que en las simulaciones tridimensionales utilizadas en el Capítulo 5, el dominio numérico es $S^2 \times \mathbb{R}^+$. Dado que no es posible cubrir la esfera mediante un único sistema de coordenadas que sea regular en todas partes, se utiliza un esquema de múltiples parches.

Para resolver un problema de evolución en un estructura de parches múltiples, se debe asegurar una adecuada transferencia de información entre las diferentes grillas. Utilizamos para ello la técnica “*multi-block*” [7], que se aplica en casos donde no hay superposición entre los parches y sólo los puntos sobre las fronteras son compartidos por más de una grilla (Sec. A.3).

Una estructura de parches y un sistema de coordenadas convenientes a tal fin, es aquel definido por las coordenadas “cubito”: cada parche utiliza coordenadas $\{a, b, c\}$, que se describirán en relación a las coordenadas cartesianas usuales $\{x, y, z\}$. En todos los casos se tiene que $c = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, mientras que a y b se definen para cada parche de la siguiente manera:

- Parche 0 (alrededor de $x = 1$): $a = z/x, \quad b = y/x$
- Parche 1 (alrededor de $y = 1$): $a = z/y, \quad b = -x/y$
- Parche 2 (alrededor de $x = -1$): $a = -z/x, \quad b = y/x$
- Parche 3 (alrededor de $y = -1$): $a = -z/y, \quad b = -x/y$
- Parche 4 (alrededor de $z = 1$): $a = -x/z, \quad b = y/z$
- Parche 5 (alrededor de $z = -1$): $a = -x/z, \quad b = -y/z$

Y la transformación inversa,

- Parche 0: $x = c/D, \quad y = cb/D, \quad z = ac/D$
- Parche 1: $x = -bc/D, \quad y = c/D, \quad z = ac/D$
- Parche 2: $x = -c/D, \quad y = -cb/D, \quad z = ac/D$
- Parche 3: $x = bc/D, \quad y = -c/D, \quad z = ac/D$
- Parche 4: $x = -ac/D, \quad y = cb/D, \quad z = c/D$
- Parche 5: $x = ac/D, \quad y = cb/D, \quad z = -c/D$

donde se ha definido, $D := \sqrt{1 + a^2 + b^2}$. Esto provee una estructura de tipo *multi-block* relativamente simple para S^2 , donde cada parche constituye una grilla plana uniforme en las coordenadas a y b , que se unen unos a otros como se muestra en la Figura A.1.

A.2.1. La esfera unidad

Para obtener la métrica de la esfera unidad en estas coordenadas puede procederse de la siguiente forma. Primero se considera la métrica plana,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

y se la transforma a coordenadas cubito. El resultado es el mismo para todos los parches:

$$ds^2 = dc^2 + c^2 D^{-4} [(1 + b^2) da^2 + (1 + a^2) db^2 - 2ab da db] \quad (\text{A.1})$$

Ahora se proyecta sobre la esfera unidad (definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$) y se obtiene finalmente,

$$d\Omega^2 = D^{-4} [(1 + b^2) da^2 + (1 + a^2) db^2 - 2ab da db] \quad (\text{A.2})$$

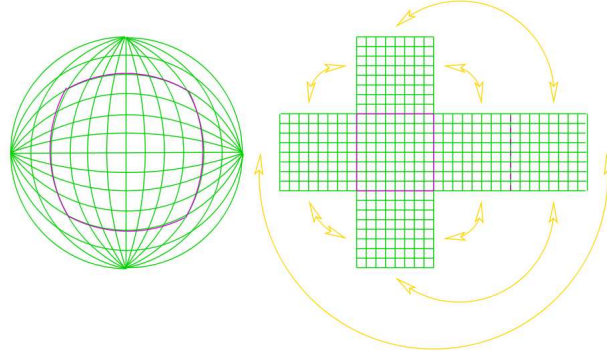


Figura A.1: Coordenadas *cubito*: seis parches cartesianos que cubren la esfera.

Además pueden escribirse los símbolos de Christoffel (distintos de cero),

$$\Gamma_{aa}^a = \frac{-2a}{D} \quad , \quad \Gamma_{ab}^a = \frac{-b}{D} \quad , \quad \Gamma_{bb}^b = \frac{-2b}{D} \quad , \quad \Gamma_{ab}^b = \frac{-a}{D}$$

utilizados en la implementación numérica del Capítulo 3.

A.2.2. La métrica de Kerr-Schild

La idea es extender el dominio a tres dimensiones espaciales al incluir ahora la coordenada radial c , extendiendo cada una de las grillas bidimensionales anteriores a grillas cúbicas uniformes, como se ilustra en la Figura A.2. El espacio tridimensional quedará foliado entonces por esferas concéntricas, tal como las capas de una cebolla, lo que da lugar al nombre informal del código: *onion*. Estas capas esféricas comienzan en algún radio interior y terminan en un radio exterior, donde será necesario imponer condiciones de borde apropiadas. La gran ventaja de esta construcción es que por un lado evita la necesidad de escindir la singularidad del dominio numérico, y al mismo tiempo resulta muy conveniente para tratar el problema de contornos. Además permite correr en paralelo –para el caso de la Figura A.2, por ejemplo, en 12 núcleos distintos– mediante el uso de MPI (*Message Passing Interface*). Sólo los valores de los campos sobre los puntos de las interfases deben ser comunicados entre las grillas a cada paso temporal.

Se considera en particular la adaptación de esta estructura al espaciotiempo de Kerr. Para ello comenzaremos por escribir la métrica de Kerr en la forma de Kerr-Schild, que tiene la ventaja de ser regular a través del horizonte de eventos. El elemento de línea está dado por,

$$ds^2 = (\eta_{\mu\nu} + 2Hl_{\mu}l_{\nu}) dx^{\mu} dx^{\nu} \quad (\text{A.3})$$

donde $\eta_{\mu\nu}$ representa la métrica plana,

$$H = \frac{mr}{r^2 + A^2 \cos^2 \theta} \quad (\text{A.4})$$

$$r^2 = \frac{1}{2}(\rho^2 - A^2) + \sqrt{\frac{1}{4}(\rho^2 - A^2)^2 + A^2 z^2} \quad (\text{A.5})$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (\text{A.6})$$

y l es un cierto vector nulo respecto de ambas métricas (la plana y la completa). En coordenadas

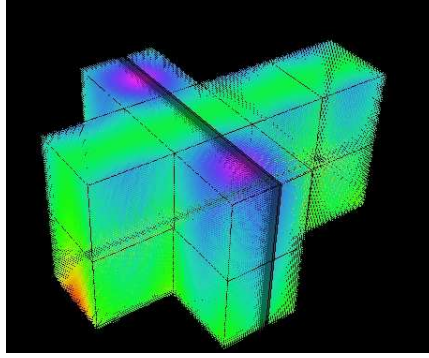


Figura A.2: Dominio tridimensional: 12 grillas que representan la topología $S^2 \times \mathbb{R}^+$.

cartesianas el co-vector l se lee,

$$l = dt + \frac{rx + Ay}{r^2 + A^2} dx + \frac{ry - Ax}{r^2 + A^2} dy + \frac{z}{r} dz \quad (\text{A.7})$$

Ahora se puede expresar tanto la parte plana de la métrica como el co-vector l , en coordenadas cubito. La métrica plana se obtiene fácilmente de la ecuación (A.1),

$$\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + dc^2 + c^2 D^{-4} [(1 + b^2) da^2 + (1 + a^2) db^2 - 2ab da db] \quad (\text{A.8})$$

mientras que el co-vector se escribe como,

$$l = dt - \frac{c^2 a A^2 (a^2 - D^2)}{D^4 r (r^2 + A^2)} da - \frac{c^2 A (D^2 r + A b a^2)}{D^4 r (r^2 + A^2)} db + \frac{c (D^2 r^2 + a^2 A^2)}{D^2 r (r^2 + A^2)} dc \quad (\text{parches 0-3})$$

$$l = dt - \frac{c^2 A (D^2 r b + a A)}{D^4 r (r^2 + A^2)} da + \frac{c^2 A (r a D^2 - A b)}{D^4 r (r^2 + A^2)} db + \frac{c (D^2 r^2 + A^2)}{D^2 r (r^2 + A^2)} dc \quad (\text{parche 4})$$

$$l = dt - \frac{c^2 A (-D^2 r b + a A)}{D^4 r (r^2 + A^2)} da - \frac{c^2 A (r a D^2 + A b)}{D^4 r (r^2 + A^2)} db + \frac{c (D^2 r^2 + A^2)}{D^2 r (r^2 + A^2)} dc \quad (\text{parche 5})$$

A.3. Condiciones de contorno y tratamiento de interfaces

Como se ha mencionado, utilizaremos un conjunto de múltiples parches donde sólo los puntos sobre las fronteras son compartidos por más de una grilla. Esta técnica *multi-block* se describe en forma detallada en [7], y aquí sólo incluiremos una breve reseña para mantener la tesis razonablemente autocontenida. Además, la exposición de las ideas principales permitirá luego la discusión de las condiciones de contorno para el problema del Capítulo 5.

La estrategia básica es discretizar las ecuaciones en cada grilla o bloque individual, dando a los puntos en las fronteras un tratamiento especial. Estos puntos pueden ser “verdaderos” bordes (en el sentido global del dominio), o bien, puntos que pertenecen a las interfases entre grillas. En el último caso, estos puntos comunes pueden pensarse como multi-valuados, y deberán ser tratados de forma consistente y estable, para garantizar que las posibles diferencias converjan a cero con la resolución. El núcleo de esta técnica consiste en la adición de términos de penalización a las ecuaciones de evolución en dichos puntos [93–95]. En el caso de sistemas hiperbólicos, estos términos penalizan las posibles discrepancias entre los valores que puedan tomar los campos característicos sobre las interfaces. Y para el caso de las condiciones de borde “genuinas”, se penaliza la diferencia entre cada modo característico entrante y la condición de contorno que

uno desea imponerle.

La idea general es la siguiente: en cada grilla individual existe una familia de energías semi-discretas, definidas tanto por el simetrizador de la ecuaciones a nivel del continuo como por un producto escalar discreto para el cual se verifique la SBP de los operadores en diferencias finitas utilizados. Es posible definir una energía para todo el dominio, simplemente sumando las diferentes energías correspondientes a cada grilla. El uso de los operadores que satisfacen SBP permite obtener una estimación de energía, a menos de los términos de borde (contorno/interfase) que quedan luego de la suma por partes. Las penalizaciones permiten entonces controlar estas contribuciones, y obtener así una estimación de energía para el sistema completo. Para que esto sea posible, las penalizaciones dependen en términos generales de las posibles discrepancias de los campos en esos puntos, las velocidades características, el producto escalar SBP utilizado, la resolución de cada grilla involucrada, y por último, de un parámetro libre que regula la intensidad de la penalización.

A.3.1. Ejemplo unidimensional

Se considera aquí un ejemplo sencillo en una dimensión espacial para ilustrar las ideas presentadas. Optamos por un caso ligeramente más completo que el presentado en [7], para tener una distinción más clara entre modos entrantes y salientes, y entre las variables dinámicas y características (para introducir el concepto de proyecciones sobre subespacios característicos). El problema que se considera es la ecuación de onda,

$$\ddot{\varphi} = c^2 \varphi_{xx} \quad (\text{A.9})$$

siendo c una constante. Los puntos indican diferenciación respecto de t , y los subíndices x , respecto de x . El sistema es llevado a primer orden por medio de la siguientes definiciones:

$$\pi := \dot{\varphi} \quad (\text{A.10})$$

$$\omega := \lambda \varphi_x \quad (\text{A.11})$$

donde se ha denotado $\lambda \equiv \sqrt{c^2} \geq 0$. Con lo cual, el sistema de primer orden se lee:

$$\dot{\pi} = \lambda \omega_x \quad (\text{A.12})$$

$$\dot{\omega} = \lambda \pi_x \quad (\text{A.13})$$

Haciendo un nuevo cambio de variables podemos llevar al sistema a su forma diagonal, que representa las ecuaciones de movimiento para una onda u propagándose hacia la izquierda y otra v hacia la derecha:

$$\begin{aligned} u &:= \omega + \pi & \dot{u} &= \lambda u_x \\ v &:= \omega - \pi & \dot{v} &= -\lambda v_x \end{aligned}$$

Consideraremos una discretización como la que se ilustra en la Figura A.3. A izquierda se tiene una grilla A que cubre el segmento $(-\infty, 0]$, y a la derecha, o bien una grilla B entre $[0, \infty)$ –en el caso de una interfase– o bien una región exterior. La razón para pensar los límites de las grillas como infinito (con condiciones de decaimiento) es simplemente para facilitar el análisis, y sólo concentrarnos en una única frontera en $x = 0$. La extensión para nuevas fronteras, así como para más dimensiones, resulta luego bastante natural.

Sea D un operador en diferencias finitas que satisface suma por partes con respecto al producto escalar (definido por sus coeficientes σ_{ij}),

$$\langle w, z \rangle = \Delta x \sum_{i,j} w_i z_j \sigma_{ij} \quad (\text{A.14})$$

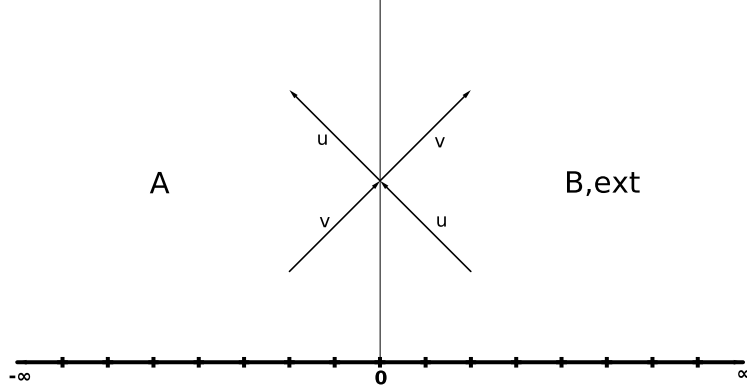


Figura A.3: Esquema unidimensional. A la izquierda hay una grilla A , que cubre el segmento $(-\infty, 0]$. Mientras que a la derecha se tiene o bien una región exterior, o bien otra grilla análoga B , abarcando el segmento $[0, \infty)$. Los vectores u y v simbolizan los modos característicos entrantes y salientes, respecto de la frontera ($x = 0$).

La propiedad de satisfacer suma por partes significa concretamente,

$$\langle w, Dz \rangle + \langle z, Dw \rangle = (wz)|_a^b \quad (\text{A.15})$$

para funciones de grilla w y z . Donde a y b son los puntos inicial y final, respectivamente.

Daremos ahora la prescripción para las penalizaciones sobre el sistema diagonal, y luego mostraremos la estimación de energía correspondiente. Las ecuaciones semi-discretas sobre la grilla A se corrigen de acuerdo a,

$$\dot{u}_i^A = \lambda D u_i^A + \frac{\lambda \delta_{0i}}{\sigma_{00} \Delta x} (g(t) - u_0^A) \quad (\text{A.16})$$

$$\dot{v}_i^A = -\lambda D v_i^A \quad (\text{A.17})$$

Una observación fundamental es que u_0^A converge a g (a orden $s + 1$) para un operador SBP de precisión s sobre el borde (ver [7]).

En términos de las variables originales (código), las ecuaciones quedarían:

$$\dot{\pi}_i^A = \lambda D \omega_i^A + \frac{\lambda \delta_{0i}}{2\sigma_{00} \Delta x} (g(t) - u_0^A) \quad (\text{A.18})$$

$$\dot{\omega}_i^A = \lambda D \pi_i^A + \frac{\lambda \delta_{0i}}{2\sigma_{00} \Delta x} (g(t) - u_0^A) \quad (\text{A.19})$$

- En el caso de una **interfaz entre dos grillas** A y B , el modo entrante u_0^A será dado directamente por el modo saliente de la grilla vecina, i.e. $g(t) \equiv u_0^B(t)$. Expresiones análogas a (A.16) y (A.17) se obtienen para la grilla B ,

$$\dot{u}_i^B = \lambda D u_i^B \quad (\text{A.20})$$

$$\dot{v}_i^B = -\lambda D v_i^B + \frac{\lambda \delta_{0i}}{\sigma_{00} \Delta x} (v_0^A - v_0^B) \quad (\text{A.21})$$

La energía total² del sistema A - B viene dada por la suma $E = E^A + E^B$,

$$E^{(A,B)} := \langle \pi^{(A,B)}, \pi^{(A,B)} \rangle + \langle \omega^{(A,B)}, \omega^{(A,B)} \rangle \equiv \langle u^{(A,B)}, u^{(A,B)} \rangle + \langle v^{(A,B)}, v^{(A,B)} \rangle$$

Utilizando la propiedad (A.15) y haciendo uso de las ecuaciones (A.16),(A.17),(A.20),(A.21), pueden calcularse las variaciones de energía en cada grilla:

$$\begin{aligned} \dot{E}^A &= \lambda(u_0^A)^2 - \lambda(v_0^A)^2 + 2\lambda(u_0^B - u_0^A)u_0^A \\ \dot{E}^B &= -\lambda(u_0^B)^2 + \lambda(v_0^A)^2 + 2\lambda(v_0^A - v_0^B)v_0^B \end{aligned}$$

y por lo tanto la variación total resulta,

$$\dot{E} = -\lambda \{ (u_0^A - u_0^B)^2 + (v_0^A - v_0^B)^2 \} \leq 0 \quad (\text{A.22})$$

- En el caso de un **borde externo**, la idea es prescribir el modo entrante en función del saliente, y alguna “fuente” adicional. Por ejemplo,

$$g(t) = Rv_0^A + 2f(t) \quad (\text{A.23})$$

De modo que en nuestro ejemplo tendremos dos límites importantes,

$$\frac{1}{2}(g(t) - u_0^A) = \begin{cases} f - \omega_0 & , R = -1 \\ f - \pi_0 & , R = 1 \end{cases}$$

que permiten dar en este caso una interpretación simple a la condición de borde en términos de las variables originales, i.e. $\omega_0 = f$ y $\pi_0 = f$, respectivamente. Puede construirse también aquí una cota para la energía asociada a la grilla A , pensando ahora la región B como ajena al dominio computacional. Se tiene para la variación de la energía,

$$\begin{aligned} \dot{E}^A &= \lambda(u_0^A)^2 - \lambda(v_0^A)^2 + 2\lambda(g - u_0^A)u_0^A \\ &= -\lambda \{ (v_0^A)^2 + (u_0^A - g)^2 \} + \lambda g^2 \\ &\leq \lambda g^2 \end{aligned}$$

recuperándose la estimación del continuo.

A.3.2. Generalizaciones

Partiendo del ejemplo anterior, podemos expresar:

$$(u_0^B - u_0^A)^\alpha \equiv P_{(u)\beta}^\alpha (U_0^B - U_0^A)^\beta \quad (\text{A.24})$$

donde $P_{(u)\beta}^\alpha$ representa el proyector en el subespacio del modo u y $U^\alpha := \begin{pmatrix} \omega \\ \pi \end{pmatrix}$ el vector de campos dinámicos en la base no diagonal. Esto puede entonces generalizarse a más dimensiones espaciales (y campos), y es lo que se implementa en el código:

$$\dot{U}_o^{A\alpha} = K_{\beta}^{\alpha i} D_i U_o^{A\beta} + \sum_a \left(\frac{\lambda(a)}{\Delta x \sigma_o} \right) P_{(a)\beta}^\alpha (U_o^B - U_o^A)^\beta \quad (\text{A.25})$$

El subíndice “ o ” simboliza que se trata de un punto de la frontera (interfase/borde), el primer término representa el lado derecho del sistema de ecuaciones (construido con los operadores

²Ésta se construye a partir de la energía en el continuo (en este caso, por ejemplo, $E = \int (\pi^2 + \omega^2) dx$), proveniente de un simetrizador, utilizando luego la norma discreta para reemplazar la integral por la suma.

discretos), mientras que la suma en el segundo término está dada sobre todos los subespacios de autovalores positivos (modos entrantes), $\lambda_{(a)} > 0$.

Al igual que como sucedía en el ejemplo unidimensional, $U_o^{B\alpha}$ puede referirse al valor de los campos sobre el punto compartido la grilla contigua (interfaz), o puede pensarse como un campo externo, definido en término de los modos salientes de A (borde externo). Esto es,

$$U_{ext}^\alpha := R^\alpha_\beta U_A^\beta + 2f^\alpha \quad (\text{A.26})$$

donde el operador $R : V_- \mapsto V_+$ es algún mapa del subespacio negativo al positivo, que debe construirse de acuerdo a lo que se necesite imponer. Lo mismo sucede con el vector f^α , que se puede acomodar de acuerdo a la condición que se desea. De la expresión $P_{(a)\beta}^\alpha (U_{ext} - U_A)^\beta = 0$ surgirán las relaciones que van a imponerse en el borde, y los requisitos que deberán cumplir tanto R como f^α para posibilitarlo.

A.3.3. Ejemplo: ecuaciones de Maxwell

Ilustramos con un ejemplo concreto y más cercano a lo que trabajamos en el problema del Capítulo 5 (y en el Apéndice D). El ejemplo es desarrollar el tratamiento estable para las condiciones de contorno exteriores asociadas a los modos físicos en la teoría de Maxwell. La idea es prescribir lo más que se pueda el campo magnético sobre los puntos del borde.

Los modos físicos en la teoría lineal, como es sabido, son transversales y propagan a la velocidad de la luz. La base asociada al subespacio (4-dimensional) está dada por:

$$u_1^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \pm \vec{e}_1 \\ -\vec{e}_2 \end{pmatrix} \quad ; \quad u_2^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \vec{e}_2 \\ \pm \vec{e}_1 \end{pmatrix}$$

donde “ \pm ” representa modos entrantes y salientes. Mientras que la co-base es,

$$\Theta_1^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\pm \vec{e}_1, -\vec{e}_2) \quad ; \quad \Theta_2^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_2, \pm \vec{e}_1)$$

donde \vec{e}_i son ambos espaciales y ortogonales a la dirección de propagación \vec{m} ; además $\vec{e}_2 := \vec{m} \times \vec{e}_1$, y por lo tanto, ortogonales entre sí y ambos unitarios.

La proyección en el subespacio transversal positivo puede escribirse como,

$$P_+^T \equiv u_1^+ \Theta_1^+ + u_2^+ \Theta_2^+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \delta_j^i - m^i m_j & m_k \hat{\epsilon}^{ki}_j \\ -m_k \hat{\epsilon}^{ki}_j & \delta_j^i - m^i m_j \end{pmatrix}$$

Buscamos ahora un mapa R del espacio transversal negativo al positivo; escribimos en forma general entonces,

$$R^T := R_{11} u_1^+ \Theta_1^- + R_{12} u_1^+ \Theta_2^- + R_{21} u_2^+ \Theta_1^- + R_{22} u_2^+ \Theta_2^-$$

La idea es igualar el término de penalización a cero, i.e.

$$P_+^T (R^T(U) + 2f - U) = 0 \quad (\text{A.27})$$

y ajustar los coeficientes R_{ij} y el vector (en el espacio de variables) f , para imponer las condiciones de borde deseadas. Este proceso nos debería indicar cuáles son las componentes de nuestra solución, U , que podremos fijar en el borde y cuáles no. La ecuación (A.27) impone una condición sobre la componente u_1^+ y otra sobre u_2^+ . Si elegimos,

$$R_{11} = -1 \quad ; \quad R_{12} = R_{21} = 0 \quad ; \quad R_{22} = 1$$

y las componentes del vector f como,

$$f_{E_p}^i = 0 \quad ; \quad f_{B_p}^i = B_p^{oi}$$

entonces podremos controlar la componente perpendicular del campo magnético en el borde, i.e.

$$B_p^i(\text{borde}) = B_p^{oi} \quad (\text{A.28})$$

Por lo tanto, el campo “externo” que necesitamos es:

$$U_{ext} = \left\{ \frac{1}{2}(E_p^i - B_\ell^i), 2B^{oi} - \frac{1}{2}(E_\ell^i + B_p^i) \right\} \quad (\text{A.29})$$

con lo que resulta,

$$P_+^T (U_{ext} - U) = \{B_\ell^{oi} - B_\ell^i, B_p^{oi} - B_p^i\}$$

Queremos ver cómo podemos controlar la norma al incluir la penalización sobre el borde externo. Para ello, miramos la derivada temporal de la energía:

$$\dot{E} = \lambda_- \|U^-\|^2 + \lambda_+ \|U^+\|^2 + 2\lambda_+ \langle U^+, (U_{ext}^+ - U^+) \rangle \quad (\text{A.30})$$

Esos son los términos de borde remanentes, donde el producto interno se define en este caso como:

$$\langle U, V \rangle \equiv \frac{1}{2} (\vec{E}_U \cdot \vec{E}_V + \vec{B}_U \cdot \vec{B}_V) \quad (\text{A.31})$$

con lo cual esto puede reescribirse,

$$4\dot{E} = \lambda_- C_-^2 - \lambda_+ C_+^2 + 2\lambda_+ [(R\vec{C}_- + 2\vec{B}_p^o) \cdot \vec{C}_+] \quad (\text{A.32})$$

donde se ha definido, $C_\pm^i := -E_\ell^i \pm B_p^i$.

Si elegimos ahora $R = 1 - \delta^2$, podemos acotar la energía de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 4\dot{E} &\leq [\lambda_- + \lambda_+(1 - \delta^2)] C_-^2 - \delta^2 C_+^2 + \lambda_+ 4(\vec{B}_p^o \cdot \vec{C}_+) \\ &\leq [2\beta_m - \lambda_+ \delta^2] C_-^2 + \lambda_+ \frac{4}{\delta^2} |B_p^o|^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, siempre que se cumpla $\delta^2 \geq \frac{2\beta_m}{\lambda_+} \equiv 1 + \frac{\lambda_-}{\lambda_+}$, tendremos bien controlada la energía. Eligiendo el menor valor posible, $\delta^2 = \frac{2|\beta_m|}{\beta_m + \alpha}$, queremos ver cuánto nos alejamos de la condición que queríamos imponer. Consideramos entonces la diferencia,

$$U_{ext}^+ - U^+ = \left\{ B_\ell^{oi} - B_\ell^i + \frac{\delta^2}{2}(B_\ell^i - E_p^i), B_p^{oi} - B_p^i + \frac{\delta^2}{2}(E_\ell^i + B_p^i) \right\}$$

y observamos que la condición impuesta es consistente. Resulta:

$$|\beta_m|(E_\ell^i + B_p^i) = \lambda_+(B_p^i - B_p^{oi}) \quad (\text{A.33})$$

Es importante notar que aunque la condición de contorno que se deriva no es exactamente la que queríamos, el valor de δ^2 se hace más y más chico al alejar la frontera hacia radios mayores. Y por lo tanto, nos estaremos acercando a la condición correcta a medida que alejamos la frontera.

A.4. Desarrollos complementarios

A.4.1. Perturbaciones aleatorias

A los fines de garantizar que las configuraciones estáticas halladas en el Capítulo 2 no eran influenciadas por los datos iniciales elegidos ni por la estructura de grillas utilizada, se incluyó una perturbación numérica artificial montada sobre el proceso de relajación (código parabólico). Este mecanismo consistía en la adición, a todos los campos sobre cada punto de grilla y cada paso temporal, de un número aleatorio elegido en el rango $(-1, 1)$, multiplicado por un coeficiente δ (generalmente $\delta = 10^{-3}$). Mediante ese artificio numérico, fue posible mostrar que el método para hallar las soluciones era robusto e independiente de la implementación particular. Se logró asimismo, como efecto colateral, acelerar el proceso de difusión.

A.4.2. Espectro de potencia

Para estudiar el fenómeno de la cascada inversa en el Capítulo 3, se realizó una descomposición en armónicos esféricos hasta $\ell=12$ de los campos relevantes y calcular el espectro de potencia asociado como función del tiempo (ver Figura 3.2). Este análisis de procesamiento de señales se deriva simplemente de una generalización del teorema de Parseval, que establece que la potencia total de una función f definida en la esfera se relaciona con sus coeficientes espectrales de acuerdo a,

$$\frac{1}{4\pi} \int_{S^2} |f(\theta, \phi)|^2 d\Omega = \sum_{\ell=0}^{\infty} C_f(\ell) \quad (\text{A.34})$$

$$C_f(\ell) = \sum_{m=-\ell}^{\ell} |A_{\ell m}|^2 \quad (\text{A.35})$$

donde $A_{\ell m}$ son los coeficientes de la expansión de f en armónicos esféricos.

A tal fin, se construyó una librería con la base de armónicos esféricos³, $Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)$ (hasta $\ell=12$). Luego, se generó una función que toma –a cada paso temporal– el campo f a analizar y lo convoluciona, integrando sobre la esfera con los armónicos esféricos apropiados para obtener así los distintos coeficientes:

$$A_{\ell m} \equiv \int_{S^2} f(\theta, \phi) Y_{\ell}^{m*}(\theta, \varphi) d\Omega \quad (\text{A.36})$$

Finalmente, se computa la suma (A.35) para cada modo ℓ .

A.4.3. Transformaciones de coordenadas

En general es necesario transformar, ya sea un dato inicial (*input*) o un resultado obtenido con el código (*output*), entre un sistema de coordenadas dado y nuestras coordenadas internas. Pongamos como ejemplo el caso en que se quiera incorporar como dato inicial que viene dado como un tensor de Maxwell en coordenadas Boyer-Lindquist, y debe ser llevado a un campo eléctrico y magnético en coordenadas “cubito”. Todo este tipo de transformaciones han sido incorporadas al código mediante una serie de funciones. Aquí se incluirán algunas de las transformaciones más relevantes, simplemente a modo de información que puede ser de utilidad.

Dada una transformación de coordenadas genérica $\{x^a\} \rightarrow \{\hat{x}^a\}$, vectores y 2-formas trans-

³ Se incluyen en realidad las funciones correspondientes a la parte real e imaginaria por separado.

forman de acuerdo a:

$$\begin{aligned}\hat{V}^a(\hat{x}) &= \frac{\partial \hat{x}^a}{\partial x^b} V^b(x(\hat{x})) \\ \hat{F}_{ab}(\hat{x}) &= \frac{\partial x^c}{\partial \hat{x}^a} \frac{\partial x^d}{\partial \hat{x}^b} F_{cd}(x(\hat{x}))\end{aligned}$$

donde la matriz $\frac{\partial \hat{x}^a}{\partial x^b}$ se conoce como el Jacobiano de la transformación.

Boyer-Lindquist a Kerr-Schild “cartesianas” $(\{t, r, \theta, \varphi\} \rightarrow \{\bar{t}, x, y, z\})$

$$\begin{aligned}\bar{t} &= t + 2M^2 f(r) + M \ln(\Delta) \\ x &= \sin(\theta) (r \cos(\varphi + af(r)) - a \sin(\varphi + af(r))) \\ y &= \sin(\theta) (r \sin(\varphi + af(r)) + a \cos(\varphi + af(r))) \\ z &= r \cos(\theta)\end{aligned}$$

donde

$$f(r) := \int \frac{dr}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - M^2}} \arctan\left(\frac{r - M}{\sqrt{a^2 - M^2}}\right)$$

Para transformar el campo electromagnético se necesitará el Jacobiano de la transformación inversa,

$$\begin{aligned}t &= \bar{t} - 2M^2 f(r) - M \ln(\Delta) \\ r &= \left(\frac{1}{2}(\rho^2 - a^2) + \sqrt{\frac{1}{4}(\rho^2 - a^2)^2 + a^2 z^2}\right)^{1/2} \\ \theta &= \arctan\left(\frac{r\sqrt{x^2 + y^2}}{z\sqrt{r^2 + a^2}}\right) \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \arctan\left(\frac{a}{r}\right) - af(r)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial x^c}{\partial \hat{x}^a} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2Mr}{\Delta} \frac{\partial r}{\partial x} & -\frac{2Mr}{\Delta} \frac{\partial r}{\partial y} & -\frac{2Mr}{\Delta} \frac{\partial r}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial z} \\ 0 & \frac{z}{\gamma} (xr(r^2 + a^2) + a^2(x^2 + y^2) \frac{\partial r}{\partial x}) & \frac{z}{\gamma} (yr(r^2 + a^2) + a^2(x^2 + y^2) \frac{\partial r}{\partial y}) & -\frac{(x^2 + y^2)}{\gamma} (a^2 r + r^3 - a^2 z \frac{\partial r}{\partial z}) \\ 0 & -\frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{2aMr}{(r^2 + a^2)\Delta} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{2aMr}{(r^2 + a^2)\Delta} \frac{\partial r}{\partial y} & -\frac{2aMr}{(r^2 + a^2)\Delta} \frac{\partial r}{\partial z} \end{pmatrix}$$

donde se ha definido $\gamma := \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{r^2 + a^2} [z^2(r^2 + a^2) + r^2(x^2 + y^2)]$, y

$$\frac{\partial r}{\partial x^i} = \frac{rx^i}{\sqrt{(\rho^2 - a^2)^2 + 4a^2 z^2}} \quad ; \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z(r^2 + a^2)}{r\sqrt{(\rho^2 - a^2)^2 + 4a^2 z^2}}$$

Cartesianas a “cubito” $(\{x, y, z\} \mapsto \{a, b, c\})$

Escribimos el Jacobiano para los diferentes parches,

$$\frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j}(0) = \begin{pmatrix} -aD/c & 0 & D/c \\ -bD/c & D/c & 0 \\ 1/D & b/D & a/D \end{pmatrix}; \quad \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j}(1) = \begin{pmatrix} 0 & -aD/c & D/c \\ -D/c & -bD/c & 0 \\ -b/D & 1/D & a/D \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j}(2) &= \begin{pmatrix} aD/c & 0 & D/c \\ bD/c & -D/c & 0 \\ -1/D & -b/D & a/D \end{pmatrix}; & \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j}(3) &= \begin{pmatrix} 0 & aD/c & D/c \\ D/c & bD/c & 0 \\ b/D & -1/D & a/D \end{pmatrix} \\ \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j}(4) &= \begin{pmatrix} -D/c & 0 & -aD/c \\ 0 & D/c & -bD/c \\ -a/D & b/D & 1/D \end{pmatrix}; & \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j}(5) &= \begin{pmatrix} D/c & 0 & aD/c \\ 0 & D/c & bD/c \\ a/D & b/D & -1/D \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Asimismo se tiene que el Jacobiano inverso esta dado por,

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^j}(0) &= \frac{1}{D^3} \begin{pmatrix} -ac & -bc & D^2 \\ -abc & c(1+a^2) & bD^2 \\ c(1+b^2) & -abc & aD^2 \end{pmatrix}; & \frac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^j}(1) &= \frac{1}{D^3} \begin{pmatrix} abc & -c(1+a^2) & -bD^2 \\ -ac & -bc & D^2 \\ c(1+b^2) & -abc & aD^2 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^j}(2) &= \frac{1}{D^3} \begin{pmatrix} ac & bc & -D^2 \\ abc & -c(1+a^2) & -bD^2 \\ c(1+b^2) & -abc & aD^2 \end{pmatrix}; & \frac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^j}(3) &= \frac{1}{D^3} \begin{pmatrix} -abc & c(1+a^2) & bD^2 \\ ac & bc & -D^2 \\ c(1+b^2) & -abc & aD^2 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^j}(4) &= \frac{1}{D^3} \begin{pmatrix} -c(1+b^2) & abc & -aD^2 \\ -abc & c(1+a^2) & bD^2 \\ -ac & -bc & D^2 \end{pmatrix}; & \frac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^j}(5) &= \frac{1}{D^3} \begin{pmatrix} c(1+b^2) & -abc & aD^2 \\ -abc & c(1+a^2) & bD^2 \\ ac & bc & -D^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A.4.4. Post-proceso

A los fines de optimizar los tiempos de cómputo, se creó para el código *onion* utilizado en el Capítulo 5, un código complementario *post onion* que permite separar la evolución de los campos físicos básicos de su posterior análisis. La idea es mantener la evolución principal separada y lo más simple posible, dado que ésta representa la parte computacionalmente costosa, y diferir todo el procesamiento de los resultados a un programa secundario. Lo que este programa secundario hace básicamente es leer los campos de evolución primarios –cada cierto intervalo de tiempo–, y calcular luego todo tipo de campos auxiliares asociados como puede ser densidad de energía y momento angular electromagnéticos (y sus respectivos flujos), densidad de carga y corrientes, distintas cantidades de monitoreo, etc. Es decir, está orientado a explorar y a extraer toda la información de relevancia física de las simulaciones. La gran ventaja de esta modalidad es que permite modificar, agregar y mejorar continuamente los elementos del análisis, en corridas que demoran sólo unos minutos sin la necesidad de correr la evolución completa una y otra vez.

Asimismo, esto fue complementado con la construcción de un *script* de *Mathematica* que apunta a la generación de imágenes como campos vectoriales y densidades escalares (ver por ejemplo las Figuras 5.3, 5.5(a) y 5.6). Esto demostró ser una manera muy eficiente de visualizar rápidamente los aspectos físicos de interés de los resultados, y orientar de esta manera la búsqueda numérica.

Apéndice B

Enstrophy

En este apéndice se presenta una ley de conservación para fluidos relativistas perfectos en dos dimensiones espaciales; esta conservación es conocida en el contexto de los fluidos Newtonianos bajo el nombre de *enstrophy*. Se extiende aquí esta noción siguiendo la derivación dada en [3], la cual es ligeramente más general que la presentada para el caso de fluidos conformes en [2]. Para ello, se utilizaron algunas ideas desarrolladas por Brandon Carter [96].

B.1. Introducción

Un objeto importante en el contexto de turbulencia es el campo de vorticidad, que mide la intensidad y la orientación de los remolinos (*eddies*). En tres dimensiones espaciales éste es un (pseudo)-vector $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$; mientras que en dos dimensiones, en cambio, es un (pseudo)-escalar $\omega = \epsilon^{ij} \partial_i u_j$. La *enstrophy* se define –en ambos casos– como la integral de la vorticidad al cuadrado, i.e.

$$Z \equiv \frac{1}{2} \int \omega^2 dS$$

La diferencia fundamental es que en el caso bidimensional es una cantidad conservada, mientras que en el caso tridimensional no lo es. Esta diferencia implica, de acuerdo a Kraichnan [30], un escenario muy distinto en cuanto a cómo fluye¹ la energía entre las distintas escalas en uno y otro caso. La conservación de *enstrophy* en dos dimensiones es señalada como la responsable de un fenómeno conocido como “cascada inversa”, en donde la transferencia de energía se da de menores a mayores longitudes de onda.

B.2. Construcción para fluidos relativistas

Las ecuaciones relativistas de Euler surgen de las conservaciones,

$$\nabla_a N^a = 0 \tag{B.1}$$

$$\nabla_a T^{ab} = 0 \tag{B.2}$$

siendo $N^a = nu^a$ la corriente de partículas, y T^{ab} el tensor de energía-momento de un fluido perfecto, i.e.

$$T^{ab} = (\rho + p) u^a u^b + p g^{ab} \tag{B.3}$$

¹ Este “fluir” entre escalas debe entenderse como las transferencias de energía entre los distintos modos, debido a la fuerte presencia de los términos no lineales durante un régimen turbulento.

donde u^a es un vector temporal que representa la velocidad del fluido y ρ , n son la densidad de energía y de partículas, respectivamente. Las ecuaciones que describen la dinámica son:

$$u^c \nabla_c n = -n \nabla_a u^a \quad (\text{B.4})$$

$$u^c \nabla_c \rho = -(\rho + p) \nabla_a u^a \quad (\text{B.5})$$

$$P^{ab} \nabla_b p = -(\rho + p) u^c \nabla_c u^a \quad (\text{B.6})$$

donde $p = p(\rho, n)$ es la ecuación de estado y $P^{ab} := g^{ab} + u^a u^b$ el proyector ortogonal a la dirección del flujo. Notamos que las ecuaciones (B.5) y (B.6) son las componentes, paralela y ortogonal a u^a , de la ecuación (B.2).

Nos restringimos a partir de ahora a los casos en que la ecuación de estado es independiente de la densidad de partículas, i.e. $p = p(\rho)$. Notamos que de esta forma la ec. (B.4) queda efectivamente desacoplada del sistema y es posible “prescindir” de n como variable dinámica. Esto nos permite reescribir la ecuación (B.6) en la forma de Lichnerowicz [97],

$$\Omega_{ab} u^b = 0 \quad (\text{B.7})$$

Definiendo para ello la 2-forma $\Omega_{ab} := 2\nabla_{[a} \alpha u_{b]}$, y con α dado por:

$$\alpha(\rho) \propto [\rho + p(\rho)] e^{-\int \frac{d\rho'}{\rho' + p(\rho')}} \quad (\text{B.8})$$

El exponente en la expresión está dado por una integral indefinida, y asumiremos que se puede resolver esa integración una vez que se conoce la ecuación de estado $p = p(\rho)$.

Usando la identidad de Cartan, notamos que Ω_{ab} es *fuertemente conservada* por el flujo, i.e.

$$\mathcal{L}_{\lambda \mathbf{u}} \Omega = \lambda \mathbf{u} \cdot \mathbf{d}\Omega + \mathbf{d}(\lambda \mathbf{u} \cdot \Omega) = 0 \quad (\text{B.9})$$

donde λ es un campo escalar arbitrario. Notar que el primer término en la expresión es cero por tratarse de una forma cerrada (i.e. $\mathbf{d}\Omega = 0$), y el segundo, debido a (B.7).

Motivada en la conservación anterior se construye ahora una corriente de la forma:

$$J^a := \lambda \Omega u^a \quad (\text{B.10})$$

donde se ha denotado $\Omega \equiv \Omega_{ab} \Omega^{ab}$. La idea es que esta corriente pueda hacerse conservada eligiendo adecuadamente el escalar λ . La expresión que proponemos para λ es la siguiente:

$$\lambda(\rho) \propto e^{-\int \frac{d\rho'}{\rho' + p(\rho')}} \quad (\text{B.11})$$

Computando la divergencia se obtiene,

$$\begin{aligned} \nabla_a J^a &= \Omega [\lambda \nabla_a u^a + u^c \nabla_c \lambda] + 2\lambda \Omega^{ab} u^c \partial_c \Omega_{ab} \\ &= \Omega [\lambda \nabla_a u^a + u^c \nabla_c \lambda] - 4\lambda \Omega^{ac} \Omega_{bc} (\nabla_a u^b) \\ &= \Omega [u^c \nabla_c \lambda - \lambda \nabla_a u^a] \\ &= 0 \end{aligned}$$

La primera línea proviene simplemente de la definición de la corriente y de tomar la divergencia. Hemos usado la definición de la derivada de Lie y la conservación (B.9) para la segunda línea.

La tercera, por su parte, sigue de la identidad²:

$$\Omega^{ac}\Omega_{bc} = \frac{1}{2}\Omega P_b^a \quad (\text{B.12})$$

Mientras que la última igualdad se sigue de la elección de λ en (B.11) y de la ecuación (B.5).

Por lo tanto, la expresión final (general) para la *enstrophy* resulta:

$$Z := \int_{\Sigma_t} \gamma (\rho + p)^2 e^{-3 \int \frac{d\rho'}{\rho' + p(\rho')}} \omega_{ab} \omega^{ab} dS^2 \quad (\text{B.13})$$

donde se ha definido la vorticidad, $\omega_{ab} := P_a^c P_b^d \nabla_{[c} u_{d]}$.

Para el caso particular de un fluido conforme, la ecuación de estado (en dos dimensiones) está dada por, $p = \frac{1}{2}\rho$. Con lo cual, la expresión anterior se reduce a:

$$Z = \int_{\Sigma_t} \gamma \omega_{ab} \omega^{ab} dS^2 \quad (\text{B.14})$$

que es exactamente la misma que fuera derivada originalmente en [2].

² En dos dimensiones espaciales y cuando vale la condición (B.7), se puede escribir $\Omega_{ab} = \zeta \epsilon_{abc} u^c$. El factor de proporcionalidad ζ puede hallarse en términos de Ω , y conduce finalmente a la identidad (B.12).

Apéndice C

Formalismo Covariante

En este apéndice se incluyen los elementos y herramientas básicas sobre la formulación covariante de Robert Geroch para el tratamiento de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales. La idea es proveer al lector de las definiciones fundamentales que fueron utilizadas intensivamente en los Capítulos 4 y 5, a los fines de tornar la presente tesis más autocontenida. Por supuesto, el lector interesado podrá explorar en el artículo original [8] muchos más detalles de este formalismo –junto con otros tantos conceptos que aquí se omiten–, y una variada cantidad de ejemplos que ilustran la teoría¹.

C.1. Hiperbolizaciones

El punto de partida es escribir todo sistema cuasi-lineal de primer orden de manera unificada como,

$$K_A^m{}_\alpha(x, \Phi)\nabla_m\Phi^\alpha + J_A(x, \Phi) = 0, \quad (\text{C.1})$$

donde $K_A^m{}_\alpha(x, \Phi)$ es llamado “símbolo principal” y $J_A(x, \Phi)$ representa las contribuciones semi-lineales. Los índices latinos en mayúscula representan las distintas ecuaciones tensoriales; los índices latinos en minúscula, los índices de espaciotiempo; mientras que los índices griegos simbolizan de manera compacta el conjunto de índices tensoriales que caracteriza a los distintos campos presentes en la teoría. Típicamente, soluciones suaves a la ecuación (C.1) son interpretadas como secciones transversales $\Phi^\alpha(x)$ sobre un fibrado \mathcal{B} , con puntos $\kappa = (x^\alpha, \Phi^\alpha)$. Se interpreta la fibra sobre un punto de la variedad, x^α , como el espacio de estados físicos permitidos sobre x^α ; es decir, como el espacio de todos los posibles valores del campo en ese punto. En el caso del campo electromagnético, por ejemplo, se tiene que $\kappa = (x^\alpha, F_{ab})$ y $\dim(\mathcal{B}) = 10$. Una sección transversal sobre una subvariedad de M representa el campo electromagnético $F_{ab}(x)$ sobre esa región.

Definición 1 *Por una hiperbolización de (C.1) sobre una subvariedad $S \in M$, se entiende un **simetrizador** suave $h^A{}_\alpha$ tal que:*

1. *el campo $h^A{}_\alpha K_A^m{}_\beta$ es simétrico en α, β sobre S ;*
2. *existe un co-vector $w_m \in T^*S$ tal que $h^A{}_\alpha K_A^m{}_\beta w_m$ es positivo definido.*

*Si un sistema de primer orden admite un simetrizador que cumpla esas dos condiciones, entonces diremos que es **simétrico hiperbólico**.*

¹ De particular interés para nuestro caso es el ejemplo de la teoría de Maxwell, que resulta muy útil para comprender la mayoría de los conceptos.

Se introduce a continuación la noción de propagación física. Se denota por C_H^* a la colección de todos los co-vectores w_a que satisfacen la condición (2.) anterior. Luego, C_H^* es naturalmente un cono convexo no vacío.

Definición 2 Las “*direcciones de propagación*” estarán dadas por todos aquellos vectores tangentes p^a , tales que: $p^a w_a > 0, \forall w_a \in C_H^*$. El conjunto de p^a forma un cono (no vacío) cerrado y convexo denotado por C_H ; es decir, el cono dual de C_H^* .

Estos conos en principio pueden depender de la hiperbolización seleccionada². Sin embargo, sucede que para la mayoría de los ejemplos físicos, estos conos resultan esencialmente independientes de la hiperbolización.

C.2. Vínculos

Definición 3 Un *vínculo* en un punto $\kappa \in \mathcal{B}$ es un tensor c^{An} (en κ), tal que:

$$c^{A(n} K_A^m)_{\alpha} = 0 \tag{C.2}$$

Notamos que los vínculos –en cada punto– constituyen un espacio vectorial.

La noción de “suficientes” vínculos queda capturada por la siguiente definición: los vínculos se dicen **completos** si la dimensión de su espacio vectorial asociado (i.e. $\dim(c^{An} w_n)$) sumada a la dimensión del espacio de campos, es igual a la dimensión del espacio de ecuaciones original.

Definición 4 Un *vínculo* c^{An} se dice *integrable* sí,

$$\nabla_n (c^{An} K_A^m \nabla_m \Phi^\alpha + J_A) = 0 \tag{C.3}$$

es una consecuencia algebraica de la ecuación (C.1).

C.3. Existencia y unicidad (local) de soluciones

Dado un sistema de la forma (C.1), y supongamos que existe un simetrizador h_α^A que satisface ambas condiciones de la Definición 1. Supongamos asimismo que sus vínculos son completos e integrables, y sea además (S, ϕ_o) un dato inicial que satisface dichos vínculos. Entonces, mediante un teorema general de existencia y unicidad³, se concluye que existe una única solución $U \xrightarrow{\phi} \mathcal{B}$ que satisface las ecuaciones de evolución,

$$h_\alpha^A [K_A^m \nabla_m \Phi^\beta + J_A] = 0 \tag{C.4}$$

con $\phi|_S = \phi_o$, donde U es algún entorno apropiado de la subvariedad tridimensional S .

² Al parecer no hay una “receta” que permita sistematizar la construcción del simetrizador, o incluso que permita decidir si una hiperbolización es a priori posible, o no. Y aún en los casos en que sí es posible dicha construcción, no implica en general que ésta sea única.

³ Ver la Sección 3 y el Apéndice A de [8].

Apéndice D

Implementación FFE alternativa

En este apéndice se incluyen algunos detalles referidos a una implementación alternativa de la electrodinámica *force-free* que se realizó. Esta versión de las ecuaciones ha sido muy utilizada (e.g. [72, 77, 98]), y se cimienta sobre la consideración de una corriente efectiva en las ecuaciones de Maxwell. Esto es, en lugar de considerar la corriente no lineal completa que resulta de la teoría FFE, se toma sólo una parte de dicha corriente y se prescribe el resto de una manera efectiva que describiremos luego brevemente. De esta forma se evade el conflicto que suponía una formulación directa de la teoría completa, observado por [9], que conducía a un sistema débilmente hiperbólico. En cambio, esta formulación alternativa sólo modifica ligeramente la estructura característica de la teoría lineal, y proporciona un sistema fuertemente hiperbólico.

Esta formulación de la teoría nos sirvió como punto de partida para implementar luego el sistema del Capítulo 5, dado que su problema característico resulta considerablemente más sencillo. Esto nos permitió, entre otras cosas, experimentar con algunas posibles condiciones de contorno que aquí se detallan brevemente.

D.1. Ecuaciones de evolución

La corriente completa que surge de las condiciones *force-free* puede leerse (ver e.g. [9, 99]),

$$\vec{J} = q \frac{\vec{S}}{B^2} + \frac{\vec{B}}{B^2} \left[\vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{B}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{E}) \right] \quad (\text{D.1})$$

donde q representa la densidad de carga eléctrica y se despeja de las ecuaciones de Maxwell,

$$q := \frac{1}{\sqrt{h}} \partial_k (\sqrt{h} E^k) \quad (\text{D.2})$$

Siguiendo [72], se considera sólo la corriente en la dirección del vector de Poynting, mientras que los términos a lo largo del campo magnético (que representan la condición $\partial_t(\vec{E} \cdot \vec{B}) = 0$) se instrumentan de manera efectiva mediante la prescripción siguiente:

$$E^i \rightarrow \left(\delta_k^i - \frac{B^i}{B^2} B_k \right) E^k \quad (\text{D.3})$$

Esta proyección se aplica en cada punto del espacio y a cada paso temporal durante la evolución.

El sistema de evolución que resulta es entonces¹,

$$\partial_t \phi = \beta^i \partial_i \phi + \frac{\alpha}{\sqrt{h}} \partial_k (\sqrt{h} B^k) - \alpha \kappa \phi \quad (\text{D.4})$$

$$\partial_t E^i = \frac{1}{\sqrt{h}} \partial_j (H^{ij}) + \beta^i \frac{1}{\sqrt{h}} \partial_k (\sqrt{h} E^k) + \frac{\alpha S^i}{B^2} \frac{1}{\sqrt{h}} \partial_k (\sqrt{h} E^k) \quad (\text{D.5})$$

$$\partial_t B^i = \frac{1}{\sqrt{h}} \partial_j (G^{ij}) + \frac{\beta^i}{\alpha} (\partial_t \phi + \alpha \kappa \phi - \beta^k \partial_k \phi) + \alpha h^{ij} \partial_j \phi \quad (\text{D.6})$$

donde se han definido

$$\begin{aligned} H^{ij} &:= \sqrt{-g} \quad F^{ij} = \sqrt{h} (E^i \beta^j - E^j \beta^i) + \alpha \epsilon^{ijk} B_k \\ G^{ij} &:= \sqrt{-g} * F^{ij} = \sqrt{h} (B^i \beta^j - B^j \beta^i) - \alpha \epsilon^{ijk} E_k \end{aligned}$$

D.2. Estructura característica

La descomposición característica respecto a una dirección de propagación genérica, $k_a = (\lambda, m_i)$, se sigue de forma análoga a la desarrollada en la Sección 5.3.3. Para ello recordamos las definiciones:

$$A_m \equiv m_i A^i \quad ; \quad A_p^i \equiv A^i - A_m m^i \quad ; \quad A_\ell^i \equiv m_k \epsilon^{kij} A_j \quad (\text{D.7})$$

El sistema característico puede escribirse entonces como,

$$\begin{aligned} (\lambda - \beta_m) / \alpha \hat{\phi} &= \hat{B}_m \\ (\lambda - \beta_m) / \alpha \hat{E}^i &= \hat{B}_\ell^i + \frac{S^i}{B^2} \hat{E}_m \\ (\lambda - \beta_m) / \alpha \hat{B}^i &= -\hat{E}_\ell^i + m^i \hat{\phi} \end{aligned}$$

Y la solución al problema de autovalores/autovectores resulta:

$$\begin{aligned} U_1^\pm &= \{1, 0^i, \pm m^i\} & , \quad \lambda_1^\pm &= \beta_m \pm \alpha \\ U_2^\pm &= \{0, \pm S_p^i, -S_\ell^i\} & , \quad \lambda_2^\pm &= \beta_m \pm \alpha \\ U_3^\pm &= \{0, S_\ell^i, \pm S_p^i\} & , \quad \lambda_3^\pm &= \beta_m \pm \alpha \\ U_4 &= \left\{0, B^2 m^i - \frac{S_m}{B^2} S^i, S_\ell^i\right\} & , \quad \lambda_4 &= \beta_m + \alpha \frac{S_m}{B^2}, \end{aligned}$$

y la co-base asociada,

$$\begin{aligned} \Theta_1^\pm &= \frac{1}{2} \{1, 0_i, \pm m_i\} \\ \Theta_2^\pm &= \frac{1}{2S_p^2} \left\{0, \frac{S_p^2}{(B^2 \mp S_m)} m_i \pm S_{pi}, -S_{\ell i}\right\} \\ \Theta_3^\pm &= \frac{1}{2S_p^2} \{0, S_{\ell i}, \pm S_{pi}\} \\ \Theta_4 &= \frac{B^2}{(B^4 - S_m^2)} \{0, m_i, 0_i\} \end{aligned}$$

¹Notar que se ha utilizado una convención distinta a la del Capítulo 5, respecto a la definición del campo magnético. Aquí se utilizó que $B_a := F_{ab}^* n^b$, en lugar de (5.29). Este signo relativo, si es trasladado consistentemente (aunque penoso) no afecta en absoluto los resultados, aunque sí hay que tener cuidado con algunas definiciones como, por ejemplo, la frecuencia de rotación en (5.51).

Como puede notarse, el espacio característico está dividido básicamente en dos: una parte asociada al autovalor $\lambda_{\pm} = \beta_m \pm \alpha$ (modos 1, 2 y 3), y otra a $\lambda_{\rho} = \beta_m + \alpha \frac{S_m}{B^2}$ (modo 4). El primer gran subespacio contiene modos longitudinales (modo 1) y modos transversales (2 y 3) muy similares a la estructura de la teoría lineal, con la diferencia que aparece en el subespacio transversal una dirección “privilegiada” determinada por el vector de Poynting de la solución de fondo². El modo restante, que en la teoría de Maxwell está asociado al vínculo $\nabla \cdot \vec{E} = \rho$, es aquí interpretado como la propagación de la densidad de carga eléctrica ρ .

La única degeneración posible se da cuando $\lambda_{\pm} = \lambda_{\rho}$, y eso sólo puede suceder si el campo de fondo viola la condición de dominación magnética. Por lo tanto, mientras éste sea magnéticamente dominado, el sistema resultante es fuertemente hiperbólico. Observamos además que cuando $S^i = 0$, el sistema se reduce a la teoría electromagnética usual. Esto puede verse directamente desde las ecuaciones de evolución.

Definiremos a continuación las proyecciones sobre los distintos subespacios.

D.2.1. Proyecciones

Se denota P_{\pm}^L a los proyectores asociados a los subespacios longitudinales,

$$P_{\pm}^L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \pm m_j \\ 0 & 0 & 0 \\ \pm m^i & 0 & m^i m_j \end{pmatrix}$$

Por su parte, la proyección sobre el subespacio transversal puede escribirse,

$$P_{\pm}^T = (P_{\pm}^T)_o + \frac{1}{2S_p^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm a_{\pm} S_p^i m_j & 0 \\ 0 & -a_{\pm} S_p^i m_j & 0 \end{pmatrix}$$

donde el proyector $(P_{\pm}^T)_o$ representa la proyección transversal en la teoría de Maxwell,

$$(P_{\pm}^T)_o = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_j^i - m^i m_j & \pm m_k \hat{\epsilon}^{kj} \\ 0 & \mp m_k \hat{\epsilon}^{ki} & \delta_j^i - m^i m_j \end{pmatrix}$$

donde recordamos $\hat{\epsilon}_{ijk}$ simboliza el elemento de volumen sobre la hipersuperficie espacial. Por último, la proyección sobre el subespacio asociado a la densidad de carga está dada por:

$$P_{\rho} = \frac{B^2}{(B^4 - S_m^2)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (B^2 m^i - \frac{S_m}{B^2} S^i) m_j & 0 \\ 0 & S_p^i m_j & 0 \end{pmatrix}$$

D.3. Condiciones de contorno

Subespacio transversal

Seguiremos aquí un camino análogo al presentado en la Sección A.3.3 para el caso de Maxwell. A los modos transversales se suma otro modo más, que puede ser entrante o saliente según sea el signo de λ_{ρ} :

$$u_1^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \pm \vec{e}_1 \\ -\vec{e}_2 \end{pmatrix} ; \quad u_2^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \vec{e}_2 \\ \pm \vec{e}_1 \end{pmatrix} ; \quad u_3 = \begin{pmatrix} c\vec{e}_3 - \tilde{\sigma}_E S_p \vec{e}_1 \\ S_p \vec{e}_2 \end{pmatrix}$$

² Mientras que en la teoría lineal usual, los modos de propagación no dependen de la solución de fondo.

mientras que la co-base es,

$$\Theta_1^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_\pm S_p \vec{e}_3 \pm \vec{e}_1, -\vec{e}_2) \quad ; \quad \Theta_2^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_2, \pm \vec{e}_1) \quad ; \quad \Theta_3 = \frac{1}{c}(\vec{e}_3, 0)$$

$$\vec{e}_1 \equiv \frac{\vec{S}_p}{S_p} \quad ; \quad \vec{e}_2 \equiv \frac{\vec{S}_N}{S_p} \quad ; \quad \vec{e}_3 \equiv \vec{m} \quad ; \quad a_\pm \equiv \frac{1}{c}(1 \pm \tilde{\sigma}_E) \quad ; \quad c \equiv B^2(1 - \tilde{\sigma}_E^2) \quad ; \quad \tilde{\sigma}_E \equiv \frac{S_m}{B^2}.$$

- Caso saliente $\lambda_\rho < 0$. Construimos la penalización con

$$U_{ext} := R(U) + 2f$$

tomando R como algún operador que toma los modos salientes y devuelve algo en el subespacio positivo, y f alguna inhomogeneidad que usaremos para fijar el valor exterior del campo magnético. Al igual que antes construimos R partiendo de la expresión general,

$$R := [R_{11}u_1^+ + R_{21}u_2^+] \Theta_1^- + [R_{12}u_1^+ + R_{22}u_2^+] \Theta_2^- + [R_{13}u_1^+ + R_{23}u_2^+] \Theta_3$$

que luego se particulariza a:

$$R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \delta^i_j - m^i m_j + a_+ S_p^i m_j & -m_k \hat{\epsilon}^{ki}_j \\ -m_k \hat{\epsilon}^{ki}_j - a_+ S_\ell^i m_j & -\delta^i_j + m^i m_j \end{pmatrix}$$

con lo cual el campo externo que necesitamos resulta

$$U_{ext} = \left\{ 0, \frac{1}{2}(E_p^i - B_\ell^i + a_+ E_m S_p^i), 2B^{oi} - \frac{1}{2}(E_\ell^i + B_p^i + a_+ E_m S_\ell^i) \right\} \quad (D.8)$$

Notamos aquí que la penalización resultará en este caso igual a la de Maxwell, i.e.

$$P_+(U_{ext} - U) = \{0, B_\ell^{oi} - B_\ell^i, B_p^{oi} - B_p^i\}$$

- Caso entrante $\lambda_\rho > 0$.

El mapa del subespacio negativo al positivo es en general,

$$R := [R_{11}u_1^+ + R_{21}u_2^+ + R_{31}u_3] \Theta_1^- + [R_{12}u_1^+ + R_{22}u_2^+ + R_{32}u_3] \Theta_2^-$$

Mientras que el proyector al subespacio positivo viene dado por,

$$P_+ := u_1^+ \Theta_1^+ + u_2^+ \Theta_2^+ + u_3 \Theta_3$$

Es fundamental notar aquí, que la teoría es no lineal y que por tanto la estructura característica depende de una solución de fondo (en este caso, la solución interior sobre la frontera). Esto hace que los coeficientes del mapa puedan en general depender de estos campos de fondo. Permitiendo eso, logramos construir la condición que buscamos de la siguiente forma:

$$R_{11} = \frac{1}{2\Delta^2(1 - \tilde{\sigma}_E)} [\Delta^2(1 + \tilde{\sigma}_E) - 2c] \quad ; \quad R_{13} = \frac{-\sqrt{2}|S_p|}{B^2\Delta^2(1 - \tilde{\sigma}_E)} \quad ; \quad R_{22} = 1$$

mientras que los restantes son fijados a cero, $R_{12} = R_{21} = 0$. Con estos coeficientes se obtiene,

$$U_{ext} = \left\{ 0, \frac{1}{2}(E_p^i - B_\ell^i + a_- E_m S_p^i + 2E_m m^i), 2B^{oi} - \frac{1}{2}(E_\ell^i + B_p^i - a_- E_m S_\ell^i) \right\} \quad (D.9)$$

mientras que la proyección del campo interior es,

$$P_+(U) = \left\{ 0, \frac{1}{2}(E_p^i + B_\ell^i + a_- E_m S_p^i + 2E_m m^i), \frac{1}{2}(B_p^i - E_\ell^i + a_- E_m S_\ell^i) \right\}$$

Luego, en ambos casos estaremos implementando la misma condición de borde. Es decir,

$$B_p^i = B_p^{oi} \quad (\text{D.10})$$

Subespacio longitudinal

Este subespacio es idéntico al de Maxwell. Aplicamos el mismo tratamiento para controlar el ingreso de las violaciones del vínculo $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ de la Sección 5.4.2, se obtienen llamativamente las mismas correcciones. Esto es, aplicaremos las ecuaciones (5.42)-(5.43).

Ingreso de carga eléctrica

Nos resta prescribir aún el ingreso del modo asociado a λ_ρ . Lo que impondremos aquí, es que no ingrese carga por la frontera externa. La idea física detrás de esta elección es la asunción que en la región asintótica de la magnetosfera el espacio es esencialmente vacío: no hay plasma, y por tanto, no debería ingresar carga desde la frontera exterior. Sin embargo, esto no es tan claro si la frontera no está situada lo suficientemente lejos³.

Implementaremos esta restricción de forma análoga a como fuera considerado el control de vínculos en la Sección 5.4.2. Es decir, lo aplicaremos directamente sobre el lado derecho de las ecuaciones. Para que no haya modo entrante simplemente debemos garantizar que $\partial_t E_m = 0$, por lo tanto, proyectaremos las ecuaciones sobre la superficie exterior de la siguiente manera:

$$\partial_t E^i = (\partial_t E^i)^o - m^i \left[\frac{m_k}{\sqrt{h}} \partial_j (H^{kj}) + \frac{\lambda_\rho}{\sqrt{h}} \partial_j (\sqrt{h} E^j) \right] \quad (\text{D.11})$$

D.4. Resultados y comentarios

La simpleza relativa del problema característico de esta formulación alternativa de la electrodinámica *force-free*, nos permitió explorar una condición de contorno diferente a la utilizada en el capítulo 5. Se intentó fijar aquí el campo magnético sobre el borde, tanto como fuera posible, al valor asintótico que se supone corresponde al campo generado por el disco de acreción. Vimos que sólo es posible fijar la componente tangencial a la superficie del borde (en nuestro caso una esfera); mientras que la componente restante queda regulada a través de las restricciones a la violación de $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, y no tenemos mayor control sobre ella.

Lo que se observó como resultado de esta implementación fue una oscilación en la dinámica, lo cual le impide al sistema alcanzar un estado estacionario. Esto queda elocuentemente reflejado en la Figura D.1, donde se compara la energía en función del tiempo para tres condiciones de borde distintas. La primera (BC1) es análoga a la utilizada en el Capítulo 5, pero por supuesto empleando los modos propios de la presente formulación. La segunda (BC3) corresponde a la condición discutida aquí. Además, se incluyó una tercera condición (BC2) que representa la denominada condición “máximamente disipativa”, donde se colocan todos los modos físicos entrantes a cero. Hemos notado que la condición BC1 se comporta de manera similar que en la otra formulación de la teoría, en cuanto a la configuración de campo asintótico que genera. Es decir, se registra un incremento de la intensidad del orden del 27% (respecto del campo exterior) uniformemente distribuido sobre toda la esfera (borde). Y asimismo, las líneas de campo

³ Podría decirse que no es una condición tan transparente como la del Capítulo 5, donde lo que se restringe es el ingreso de violación al vínculo $G = 0$.

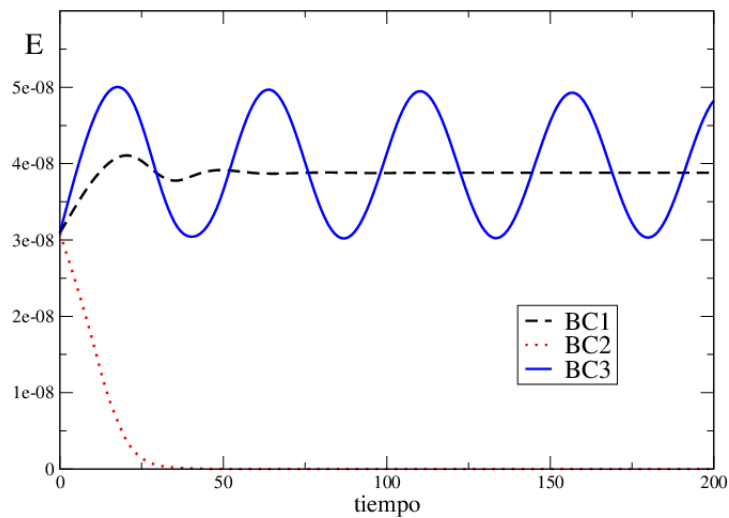


Figura D.1: Energía en función del tiempo, para las tres condiciones de borde exploradas.

asintóticas se mantienen alineadas con el eje de simetría, salvo en un pequeño anillo sobre los polos donde la componente toroidal se vuelve relevante.

Por su parte, la condición BC3 produce un comportamiento oscilatorio en la energía (aproximadamente en torno al valor de la energía final en BC1), que refleja el comportamiento de la solución. Este fenómeno puede entenderse en términos de la relación entre los modos entrantes y salientes. Esto es, para fijar la componente del campo tangencial se prescribieron los modos entrantes utilizando la información de los salientes. Esto resulta de forma tal, que básicamente la onda saliente termina reflejándose (toda o parte) en la frontera y retornando al sistema. Esto es análogo a la “condición de espejo” en electromagnetismo.

Puede notarse finalmente que con la condición máximamente disipativa (BC2), como era esperable, el sistema pierde rápidamente gran parte de su energía.

Bibliografía

- [1] Federico Carrasco and Oscar Reula. Multisolitons with vector mesons on the two-sphere. *Physical Review D*, 90(4):045007, 2014.
- [2] Federico Carrasco, Luis Lehner, Robert Myers, Oscar Reula, and Ajay Singh. Turbulent flows for relativistic conformal fluids in 2+ 1 dimensions. *Physical Review D*, 86(12):126006, 2012.
- [3] Stephen R Green, Federico Carrasco, and Luis Lehner. Holographic path to the turbulent side of gravity. *Physical Review X*, 4(1):011001, 2014.
- [4] Fernando Abalos, Federico Carrasco, Érico Goulart, and Oscar Reula. Nonlinear electrodynamics as a symmetric hyperbolic system. *Physical Review D*, 92(8):084024, 2015.
- [5] Federico Carrasco and Oscar Reula. Covariant hyperbolization of force-free electrodynamics. *Physical Review D*, 93(8):085013, 2016.
- [6] R. D. Blandford and R. L. Znajek. Electromagnetic extraction of energy from kerr black holes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 179(3):433–456, 1977.
- [7] Luis Lehner, Oscar Reula, and Manuel Tiglio. Multi-block simulations in general relativity: high-order discretizations, numerical stability and applications. *Classical and Quantum Gravity*, 22(24):5283, 2005.
- [8] Robert Geroch. Partial differential equations of physics. *General Relativity, Aberdeen, Scotland*, pages 19–60, 1996.
- [9] Harald P Pfeiffer and Andrew I MacFadyen. Hyperbolicity of force-free electrodynamics. *arXiv preprint arXiv:1307.7782*, 2013.
- [10] N. Manton and P. Sutcliffe. *Topological Solitons*. Cambridge University Press, 2004.
- [11] T. H. R. Skyrme. A non-linear field theory. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 260(1300):127–138, 1961.
- [12] Gregory S. Adkins and Chiara R. Nappi. Stabilization of chiral solitons via vector mesons. *Physics Letters B*, 137(3-4):251–256, 1984.
- [13] Itay Hen and Marek Karliner. Baby skyrmions on the two-sphere. *Physical Review E*, 77(3):036612, 2008.
- [14] M De Innocentis and RS Ward. Skyrmions on the 2-sphere. *Nonlinearity*, 14(3):663, 2001.
- [15] RD Amado, MA Halasz, and P Protopapas. Two skyrmion dynamics with ω mesons. *Physical Review D*, 61(7):074022, 2000.
- [16] MA Halasz and RD Amado. Skyrmion–anti-skyrmion annihilation with ω mesons. *Physical Review D*, 63(5):054020, 2001.

-
- [17] Rudolf Baier, Paul Romatschke, Dam Thanh Son, Andrei O Starinets, and Mikhail A Stephanov. Relativistic viscous hydrodynamics, conformal invariance, and holography. *Journal of High Energy Physics*, 2008(04):100, 2008.
- [18] Sayantani Bhattacharyya, Shiraz Minwalla, Veronika E Hubeny, and Mukund Rangamani. Nonlinear fluid dynamics from gravity. *Journal of High Energy Physics*, 2008(02):045, 2008.
- [19] Sayantani Bhattacharyya, R Loganayagam, Ipsita Mandal, Shiraz Minwalla, and Ankit Sharma. Conformal nonlinear fluid dynamics from gravity in arbitrary dimensions. *Journal of High Energy Physics*, 2008(12):116, 2008.
- [20] Juan Maldacena. The large- n limit of superconformal field theories and supergravity. *International journal of theoretical physics*, 38(4):1113–1133, 1999.
- [21] Yaron Oz and Michael Rabinovich. The penrose inequality and the fluid/gravity correspondence. *Journal of High Energy Physics*, 2011(2):1–14, 2011.
- [22] Christopher Eling, Itzhak Fouxon, and Yaron Oz. Gravity and a geometrisation of turbulence: an intriguing correspondence. *Contemporary Physics*, 52(1):43–54, 2011.
- [23] Paul M Chesler and Laurence G Yaffe. Holography and colliding gravitational shock waves in asymptotically ad_s spacetime. *Physical review letters*, 106(2):021601, 2011.
- [24] Keiju Murata, Shunichiro Kinoshita, and Norihiro Tanahashi. Non-equilibrium condensation process in a holographic superconductor. *Journal of High Energy Physics*, 2010(7):1–20, 2010.
- [25] Hans Bantilan, Frans Pretorius, and Steven S Gubser. Simulation of asymptotically ad_s spacetimes with a generalized harmonic evolution scheme. *Physical Review D*, 85(8):084038, 2012.
- [26] Chi-kwan Chan, Dhrubaditya Mitra, and Axel Brandenburg. Dynamics of saturated energy condensation in two-dimensional turbulence. *Physical Review E*, 85(3):036315, 2012.
- [27] P.A. Davidson. *Turbulence: An Introduction for Scientists and Engineers*. Oxford University Press, USA, 2004.
- [28] HA Rose and PL Sulem. Fully developed turbulence and statistical mechanics. *Journal de Physique*, 39(5):441–484, 1978.
- [29] Krzysztof Gawedzki. Easy turbulence. *arXiv preprint chao-dyn/9907024*, 1999.
- [30] R.H. Kraichnan. Inertial ranges in two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, 10:1417–1423, 1967.
- [31] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Fluid Mechanics*. Butterworth-Heinemann, Oxford, UK, 1987.
- [32] Pavel K Kovtun and Andrei O Starinets. Quasinormal modes and holography. *Physical Review D*, 72(8):086009, 2005.
- [33] Sayantani Bhattacharyya, Subhaneil Lahiri, R Loganayagam, and Shiraz Minwalla. Large rotating ad_s black holes from fluid mechanics. *Journal of High Energy Physics*, 2008(09):054, 2008.
- [34] Gary W Gibbons, Hong Lü, Don N Page, and CN Pope. The general kerr–de sitter metrics in all dimensions. *Journal of Geometry and Physics*, 53(1):49–73, 2005.

- [35] Carl Eckart. The thermodynamics of irreversible processes. iii. relativistic theory of the simple fluid. *Physical review*, 58(10):919, 1940.
- [36] Werner Israel. Nonstationary irreversible thermodynamics: a causal relativistic theory. *Annals of Physics*, 100(1-2):310–331, 1976.
- [37] W Israel and JM Stewart. Thermodynamics of nonstationary and transient effects in a relativistic gas. *Physics Letters A*, 58(4):213–215, 1976.
- [38] Werner Israel and JM Stewart. Transient relativistic thermodynamics and kinetic theory. *Annals of Physics*, 118(2):341–372, 1979.
- [39] William A Hiscock and Lee Lindblom. Stability and causality in dissipative relativistic fluids. *Annals of Physics*, 151(2):466–496, 1983.
- [40] Jarah Evslin. Hydrodynamic vortices and their gravity duals. *Fortschritte der Physik*, 60(9-10):1005–1011, 2012.
- [41] Y.R. Shen. *Principles of nonlinear optics*. Wiley-Interscience, New York, NY, USA, 1984.
- [42] M. Born and E. Wolf. *Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. Cambridge university press, 1999.
- [43] Gerald V Dunne. Heisenberg-euler effective lagrangians: basics and extensions. *From fields to strings: Circumnavigating theoretical physics*, 1:445, 2005.
- [44] Nora Bretón. Nonlinear electrodynamics and cosmology. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 229, page 012006. IOP Publishing, 2010.
- [45] VA De Lorenci, R Klippert, M Novello, and JM Salim. Nonlinear electrodynamics and frw cosmology. *Physical Review D*, 65(6):063501, 2002.
- [46] M Novello, SE Perez Bergliaffa, and J Salim. Nonlinear electrodynamics and the acceleration of the universe. *Physical Review D*, 69(12):127301, 2004.
- [47] M Novello, E Goulart, JM Salim, and SE Perez Bergliaffa. Cosmological effects of nonlinear electrodynamics. *Classical and Quantum Gravity*, 24(11):3021, 2007.
- [48] JF Plebański et al. Type-d solutions of the einstein and Born-Infeld nonlinear-electrodynamics equations. *Il Nuovo Cimento B Series 11*, 84(1):65–90, 1984.
- [49] Nora Bretón. Born-Infeld black hole in the isolated horizon framework. *Physical Review D*, 67(12):124004, 2003.
- [50] Wissam A Chemissany, Mees De Roo, and Sudhakar Panda. Thermodynamics of Born-Infeld black holes. *Classical and Quantum Gravity*, 25(22):225009, 2008.
- [51] M Born and L Infeld. Foundations of the new field theory. *Nature*, 132:1004, 1933.
- [52] Max Born. Modified field equations with a finite radius of the electron. *Nature*, 132:282, 1933.
- [53] Max Born and Leopold Infeld. Foundations of the new field theory. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, pages 425–451, 1934.
- [54] G. W. Gibbons. Aspects of Born-Infeld theory and string/m-theory. *Rev. Mex. Fis.* 49S1, 19, 2003.

-
- [55] Guy Boillat. Nonlinear electrodynamics: Lagrangians and equations of motion. *Journal of Mathematical Physics*, 11(3):941–951, 1970.
- [56] JF Plebanski. Lectures on nonlinear electrodynamics (nordita, copenhagen, 1968). *Journal of Mathematical Physics*, 28:2171, 1987.
- [57] Yuri N Obukhov and Guillermo F Rubilar. Fresnel analysis of wave propagation in nonlinear electrodynamics. *Physical Review D*, 66(2):024042, 2002.
- [58] Yuri N Obukhov, Tetsuo Fukui, and Guillermo F Rubilar. Wave propagation in linear electrodynamics. *Physical Review D*, 62(4):044050, 2000.
- [59] Guillermo F Rubilar, Yuri N Obukhov, and Friedrich W Hehl. Generally covariant fresnel equation and the emergence of the light cone structure in linear pre-metric electrodynamics. *International Journal of Modern Physics D*, 11(08):1227–1242, 2002.
- [60] Roger Penrose and Wolfgang Rindler. *Spinors and space-time: Volume 2, Spinor and twistor methods in space-time geometry*. Cambridge University Press, 1988.
- [61] Felix AE Pirani. Introduction to gravitational radiation theory. *Lectures on general relativity*, 1:249–373, 1964.
- [62] Robert M Wald. *General relativity*. University of Chicago press, 1984.
- [63] Peter Goldreich and William H Julian. Pulsar electrodynamics. *The Astrophysical Journal*, 157:869, 1969.
- [64] Robert Wald. Black hole in a uniform magnetic field. *Physical Review D*, 10:1680–1685, Sep 1974.
- [65] Jonathan C McKinney. General relativistic force-free electrodynamics: a new code and applications to black hole magnetospheres. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 367(4):1797–1807, 2006.
- [66] Alexander Tchekhovskoy, Jonathan C McKinney, and Ramesh Narayan. Simulations of ultrarelativistic magnetodynamic jets from gamma-ray burst engines. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 388(2):551–572, 2008.
- [67] Alexander Tchekhovskoy, Ramesh Narayan, and Jonathan C McKinney. Efficient generation of jets from magnetically arrested accretion on a rapidly spinning black hole. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, 418(1):L79–L83, 2011.
- [68] Jonathan C McKinney, Alexander Tchekhovskoy, and Roger D Blandford. General relativistic magnetohydrodynamic simulations of magnetically choked accretion flows around black holes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 423(4):3083–3117, 2012.
- [69] Gustavo E Romero and Gabriela S Vila. *Introduction to black hole astrophysics*, volume 876. Springer, 2013.
- [70] Samuel E Gralla and Ted Jacobson. Spacetime approach to force-free magnetospheres. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 445(3):2500–2534, 2014.
- [71] Serguei S Komissarov. Blandford-znajek mechanism versus penrose process. *arXiv preprint arXiv:0804.1912*, 2008.
- [72] Carlos Palenzuela, Travis Garrett, Luis Lehner, and Steven L Liebling. Magnetospheres of black hole systems in force-free plasma. *Physical Review D*, 82(4):044045, 2010.

- [73] J-P Lasota, E Gourgoulhon, M Abramowicz, A Tchekhovskoy, and R Narayan. Extracting black-hole rotational energy: The generalized penrose process. *Physical Review D*, 89(2):024041, 2014.
- [74] SS Komissarov. Time-dependent, force-free, degenerate electrodynamics. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 336(3):759–766, 2002.
- [75] Fan Zhang, Sean T McWilliams, and Harald P Pfeiffer. Stability of exact force-free electrodynamic solutions and scattering from spacetime curvature. *Physical Review D*, 92(2):024049, 2015.
- [76] Carlos Palenzuela, Carles Bona, Luis Lehner, and Oscar Reula. Robustness of the blandford–znajek mechanism. *Classical and Quantum Gravity*, 28(13):134007, 2011.
- [77] Carlos Palenzuela, Luis Lehner, and Shin Yoshida. Understanding possible electromagnetic counterparts to loud gravitational wave events: Binary black hole effects on electromagnetic fields. *Physical Review D*, 81(8):084007, 2010.
- [78] SS Komissarov. Electrodynamics of black hole magnetospheres. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 350(2):427–448, 2004.
- [79] B Carter, SW Hawking, and W Israel. General relativity: An einstein centenary survey. *Cambridge UP, Cambridge*, 1979.
- [80] Toshio Uchida. Theory of force-free electromagnetic fields. i. general theory. *Physical Review E*, 56(2):2181, 1997.
- [81] Andreas Dedner, Friedemann Kemm, Dietmar Kröner, C-D Munz, Thomas Schnitzer, and Matthias Wesenberg. Hyperbolic divergence cleaning for the mhd equations. *Journal of Computational Physics*, 175(2):645–673, 2002.
- [82] Mariana Cécere, Luis Lehner, and Oscar Reula. Constraint preserving boundary conditions for the ideal newtonian mhd equations. *Computer Physics Communications*, 179(8):545–554, 2008.
- [83] Kip S Thorne and Douglas Macdonald. Electrodynamics in curved spacetime: 3+ 1 formulation. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 198(2):339–343, 1982.
- [84] SS Komissarov. General relativistic magnetohydrodynamic simulations of monopole magnetospheres of black holes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 350(4):1431–1436, 2004.
- [85] Anatoly Spitkovsky. Time-dependent force-free pulsar magnetospheres: axisymmetric and oblique rotators. *The Astrophysical Journal Letters*, 648(1):L51, 2006.
- [86] Kyle Parfrey, Andrei M Beloborodov, and Lam Hui. Introducing phaedra: a new spectral code for simulations of relativistic magnetospheres. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 423(2):1416–1436, 2012.
- [87] RD Blandford, H Netzer, and L Woltjer. Physics of active galactic nuclei. *Springer, Berlin*, 133, 1992.
- [88] SS Komissarov and Jonathan C McKinney. The ‘meissner effect’ and the blandford—znajek mechanism in conductive black hole magnetospheres. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, 377(1):L49–L53, 2007.
- [89] Carlos Palenzuela, Luis Lehner, and Steven L Liebling. Dual jets from binary black holes. *Science*, 329(5994):927–930, 2010.

-
- [90] David Neilsen, Luis Lehner, Carlos Palenzuela, Eric W Hirschmann, Steven L Liebling, Patrick M Motl, and Travis Garrett. Boosting jet power in black hole spacetimes. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 108(31):12641–12646, 2011.
- [91] B. Gustafsson J. Olinger H. Kreiss. *Time Dependent Problems And Difference Methods*. John Wiley and Sons, Inc., 1995.
- [92] Gioel Calabrese, Luis Lehner, Oscar Reula, Olivier Sarbach, and Manuel Tiglio. Summation by parts and dissipation for domains with excised regions. *Classical and Quantum Gravity*, 21(24):5735, 2004.
- [93] Mark H Carpenter, David Gottlieb, and Saul Abarbanel. Time-stable boundary conditions for finite-difference schemes solving hyperbolic systems: methodology and application to high-order compact schemes. *Journal of Computational Physics*, 111(2):220–236, 1994.
- [94] Mark H Carpenter, Jan Nordström, and David Gottlieb. A stable and conservative interface treatment of arbitrary spatial accuracy. *Journal of Computational Physics*, 148(2):341–365, 1999.
- [95] Jan Nordström and Mark H Carpenter. High-order finite difference methods, multidimensional linear problems, and curvilinear coordinates. *Journal of Computational Physics*, 173(1):149–174, 2001.
- [96] Brandon Carter. Covariant theory of conductivity in ideal fluid or solid media. *Lecture Notes in Mathematics*, 1385:1–64, 1989.
- [97] André Lichnerowicz, Southwest Center for Advanced Studies, and The Mathematical Physics Monograph Series. *Relativistic hydrodynamics and magnetohydrodynamics*, volume 35. WA Benjamin New York, 1967.
- [98] Huan Yang, Fan Zhang, and Luis Lehner. Magnetosphere of a kerr black hole immersed in magnetized plasma and its perturbative mode structure. *Physical Review D*, 91(12):124055, 2015.
- [99] Andrei Gruzinov. Pulsar emission and force-free electrodynamics. *The Astrophysical Journal Letters*, 667(1):L69, 2007.