Álgebras cuánticas de potencias divididas

por Fiorela Rossi Bertone

Presentado ante la Facultad de Matemática Astronomía y Física como parte de los requerimientos para la obtención del grado de Doctor en Matemática de la

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Marzo de 2016

Director: Dr. Nicolás Andruskiewitsch

A mi gran amor Emilio y a nuestra pequeña Sofía.

Resumen

En esta tesis definimos las álgebras cuánticas de potencias divididas asociadas a álgebras de Nichols de tipo diagonal de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero. Estudiamos sus propiedades básicas y sus presentaciones por generadores y relaciones.

Dada una matriz $\mathfrak{q} = (q_{ij})_{i,j\in\mathbb{I}}$, consideramos el álgebra de Nichols de tipo diagonal asociada a $\mathfrak{q}$. Angiono definió el álgebra pre-Nichols distinguida de manera tal que existe una proyección canónica del álgebra pre-Nichols sobre la Nichols. Aquí llamamos *álgebra de Lusztig* al dual graduado de dicho objeto, obteniendo así un álgebra que contiene al álgebra de Nichols de partida. Presentamos a estas álgebras por generadores y relaciones y a partir de allí obtenemos propiedades como la noetherianidad y la dimensión de Gelfand-Kirillov.

Luego consideramos el doble de Drinfeld de un álgebra de Lusztig, a quien llamamos álgebra cuántica de potencias divididas. En este caso también probamos una presentación por generadores y relaciones.

Además, tomamos un cierto cociente del álgebra de Lusztig y encontramos, en varios ejemplos, isomorfismos entre dichos cocientes y álgebra¡ universales de la parte positiva de álgebras de Lie semisimples.

En otra dirección, tomamos un álgebra de Hopf co-Frobenius H y un álgebra de Hopf trenzada R en la categoría de módulos de Yetter-Drinfeld sobre H de manera tal que $A = R\#H$ es un álgebra de Hopf. Demostramos entonces que R es co-Frobenius si y solamente si A lo es y a partir de equivalencias de categorías entre las categorías de módulos y comódulos de A y R probamos equivalencias análogas a las conocidas para el caso usual en el contexto trenzado.

Palabras claves: álgebra de Nichols, álgebras de Lusztig, grupos cuánticos, álgebras de Hopf co-Frobenius.

2010 Mathematics subject Classification: 16W30, 17B37, 16T20.

Abstract

In this thesis we define the quantum divided power algebras attached to finite dimensional Nichols algebras of diagonal type over an algebraically closed field of characteristic zero. We study their basic properties and their presentations by generators and relations.

Let $\mathfrak{q} = (q_{ij})_{i,j\in\mathbb{I}}$ be a matrix. We consider the Nichols algebra of diagonal type associated to $\mathfrak{q}$. Angiono defined the distinguished pre-Nichols algebra such that there exists a canonical epimorphism from the pre-Nichols onto the Nichols algebra. Here, the graded dual of this algebra is called *Lusztig algebra*. The original Nichols algebra is contained in the Lusztig algebra. We give a presentation of them by generators and relations and we prove some properties as noetherianity and their Gelfand-Kirillov dimension.

Then we consider the Drinfeld double of a Lusztig algebra, named the quantum divided power algebra. In this case, we also give a presentation by generators and relations.

We consider a quotient of the Lusztig algebra and we find, in several examples, isomorphisms between these quotients and universal algebras of the positive part of semisimple Lie algebras.

On the other hand, let H a co-Frobenius Hopf algebra and R a braided Hopf algebra in the category of Yetter-Drinfeld modules over H such that $A = R\#H$ is a Hopf algebra. We prove that R is co-Frobenius if and only if so is A. We prove an equivalence of monoidal categories between the categories of modules and comodules of R and A and we give some equivalences for the braided case which are known in the usual case.

Key words: Nichols algebras, Lusztig algebras, quantum groups, co-Frobenius Hopf algebras.

2010 Mathematics subject Classification: 16W30, 17B37, 16T20.

Agradecimientos

Quiero agradecer en primer lugar a mi director Nicolás por todo lo aprendido, por enseñarme tanto y prepararme para el futuro.

Al jurado por leer detalladamente y corregir este trabajo. A los profesores de FaMAF de quienes he aprendido mucho y a los profesores de la UNS quienes han plantado las bases para que pudiera hacerlo. A CONICET por el apoyo económico que posibilitó mi formación.

A Iván, con quien he tenido el placer de trabajar, así como también de compartir comidas, fútbol y charlas, gracias por la paciencia y generosidad.

A los amigos de siempre que, a pesar de la distancia, los siento presentes. A los nuevos amigos que he encontrado en esta facultad, particularmente a Monique, una gran mujer. A la familia Lauret, en especial a Jorge y Cynthia, quienes me han hecho sentir en casa.

A mi familia, quienes me han apoyado en cada decisión a lo largo de mi vida. Mis padres que desde pequeña me enseñaron con el ejemplo la importancia del esfuerzo cotidiano, el trabajo y sobre todo me han inculcado valores humanos. A mi hermana Antonela por caminar a la par toda la vida.

Quiero agradecer profundamente a Emilio: mi esposo, mi amor, mi compañero y mi amigo. La persona que me ha aconsejado, escuchado, animado y motivado. Quien me sostiene con amor y paciencia día a día.

Finalmente agradezco a Dios por darme la oportunidad de seguir trabajando, de aprender y rodearme de gente amable y generosa. Le agradezco, sobre todas las cosas, la bendición de nuestra hija Sofía que está por nacer.

Índice general

Introducción

En la década de 1950 aparecen en la bibliografía los primeros conceptos que aproximan la noción de álgebra de Hopf. Cartier en 1956 [**Ca**] introduce el concepto de *hiperálgebra* donde se pueden observar los primeros indicios de la definición de biálgebra. Por su parte Borel en 1953 da el nombre de *álgebra de Hopf* a un álgebra munida de una estructura de coproducto (no necesariamente coasociativo). A fines de la década del '60 Sweedler publicó su libro [**Sw**] donde estudia las álgebras de Hopf y marca un punto de partida a la teoría de dichas estructuras. Para una lectura más detallada sobre la historia y la evolución de estos conceptos referimos al artículo [**AF**].

La teoría de álgebras de Hopf recibió un profundo impulso en la década de los '80 con la introducción de los conceptos de *grupos cuánticos* y de álgebras envolventes cuantizadas por parte de Drinfeld [**Dr**] e independientemente de Jimbo [**J**]. Estas álgebras son deformaciones por un parámetro q de álgebras envolventes de álgebras de Lie semisimples de dimensión finita.

El parámetro q que define a las álgebras envolventes cuantizadas juega un papel fundamental. Si éste no es una raíz de la unidad (caso genérico) la teoría de representaciones de dichas álgebras es similar a la teoría de representaciones de las álgebras de Lie semisimples. Sin embargo, cuando q es una raíz de la unidad, la riqueza de la teoría de representaciones es mucho mayor. En este caso Lusztig ha introducido un análogo de dimensión finita de las álgebras envolventes llamado *grupo cuántico pequeño* o núcleo de Frobenius-Lusztig. En [**Lu4**] ha estudiado ampliamente estos objetos y ha mostrado su estrecha relación con los grupos algebraicos en característica positiva. Los grupos cuánticos pequeños son de radical importancia y han disparado numerosos trabajos, entre ellos la presente tesis.

Así, dada $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie semisimple de dimensión finita y q una raíz de la unidad, podemos observar diferentes estructuras de álgebras de Hopf asociadas:

- el álgebra envolvente cuantizada $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ [**DK, DKP, DP**];
- el grupo cuántico pequeño $\mathfrak{u}_q(\mathfrak{g})$;
- el álgebra cuántica de potencias divididas $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ [**Lu4, Lu1**].

Todas estas álgebras de Hopf admiten una descomposición triangular $U \simeq U^+ \otimes U^0 \otimes U^-$ cuya parte 0 es un álgebra de grupo y sus partes positiva y negativa son álgebras de Hopf trenzadas. Además, cabe destacar que existen morfismos:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{U}_q^+(\mathfrak{g}) \arrow[dr, two heads] & & \mathcal{U}_q^+(\mathfrak{g}) \\
& \mathfrak{u}_q^+(\mathfrak{g}) \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd} \tag{0.1}$$

A través de los años, ha cobrado gran importancia el problema de clasificación de las álgebras de Hopf de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero. Dicho problema se encuentra ampliamente abierto si bien ha habido importantes avances. Esta clasificación se bifurca en dos grandes caminos muy diferentes entre sí: el estudio de las álgebras de Hopf semisimples y las no-semisimples. En el segundo caso se han desarrollado técnicas poderosas para el estudio y clasificación de las álgebras de Hopf no-semisimples punteadas. Un álgebra de Hopf H se dice *punteada* si su corradical (su mayor subcoálgebra cosemisimple) es el álgebra de grupo de los elementos de tipo grupo

$$G(H) = \{h \neq 0 \in H : \Delta(h) = h \otimes h\}.$$

Las álgebras de grupo, las álgebras envolventes de álgebras de Lie, las álgebras envolventes cuantizadas y las álgebras estudiadas por Lusztig se enmarcan en este contexto. En particular, Andruskiewitsch y Schneider clasificaron las álgebras de Hopf punteadas de dimensión finita cuyo grupo $G(H)$ es abeliano y tiene orden coprimo con 210. Para ello han desarrollado un poderoso programa denominado *método de levante*, ver [**AS1**]. Este método se basa en una serie de pasos que resumimos a continuación:

- $\star$ Dado un grupo Γ, determinar todos los módulos de Yetter-Drinfeld V sobre Γ tales que el álgebra de Nichols asociada $\mathcal{B}(V)$ es de dimensión finita.
- $\star$ Para cada módulo de Yetter-Drinfeld V del punto anterior, encontrar todas las álgebras de Hopf H tales que $\operatorname{gr} H = \mathcal{B}(V)\#\mathbf{k}\Gamma$.
- $\star$ Probar que todas las álgebras de Hopf punteadas sobre Γ están generadas "en grado 1".

Cuando el grupo Γ es abeliano, más específicamente cuando el espacio vectorial trenzado es de tipo diagonal, el primer paso del método del levante se reformula en la siguiente pregunta:

PREGUNTA 1. [**A2**, 5.9] *Dado un espacio vectorial trenzado de tipo diagonal determinar si el álgebra de Nichols asociada es de dimensión finita. En tal caso, calcular su dimensión y dar una presentación por generadores y relaciones.*

La primera parte ha sido respondida por Heckenberger en [**H2**] quien dio una lista de los espacios trenzados (unívocamente determinados por su trenza) cuya álgebra de Nichols tiene un sistema de raíces finito. En esta lista se destacan tres familias de trenzas:

1. **Tipo estándar**: son aquellas que tienen asociada una matriz de Cartan [**AA1**]; dentro de esta familia encontramos las trenzas de tipo Cartan, como se mostró en [**AS2**], estas últimas están relacionada con los grupos cuánticos en raíces de la unidad [**Lu2, Lu4**]. Las álgebras de Nichols de tipo estándar fueron estudiadas en [**Ang1**].
2. **Tipo súper**: están relacionadas con súper álgebras de Lie contragradientes simples de dimensión finita. La descripción precisa de los espacios vectoriales trenzados de tipo súper se encuentra en [**AAY**].
3. **Tipo no identificado**: En muchos casos corresponden a súper álgebras de Lie contragradientes en característica 2 o 3, según un trabajo aún no publicado de Andruskiewitsch y Angiono.

Mientras tanto, Angiono respondió a la segunda parte de la pregunta dando una presentación explícita por generadores y relaciones de las álgebras de Nichols de tipo diagonal de dimensión finita en [**Ang2**]. Tanto los resultados de Heckenberger como de Angiono se basan en el estudio y entendimiento de elementos como el grupoide de Weyl, los isomorfismos de Lusztig, las bases PBW y los órdenes convexos de los sistemas de raíces asociados a las álgebras de Nichols.

Dada un álgebra de Hopf de dimensión finita H, la categoría de representaciones de dimensión finita $\operatorname{Rep} H$ es una categoría tensorial. Las categorías tensoriales pueden ser divididas en dos tipos: las semisimples y las no semisimples. Dentro de las categorías tensoriales semisimples, una clase que ha cobrado gran interés es la de las categorías de fusión. Éstas son categorías tensoriales semisimples sobre un cuerpo algebraicamente cerrado cuyos espacios de morfismos son de dimensión finita, poseen una cantidad finita de clases de isomorfismos de objetos simples y cuyo objeto unidad es simple. La clasificación de las categorías de fusión está, por el momento, fuera de alcance; por lo tanto es importante hallar ejemplos de ellas.

Si consideramos H un álgebra de Hopf esférica, es decir un álgebra de Hopf con una estructura adicional, se puede obtener una categoría tensorial vía un procedimiento menos obvio introducido en [**BaW1, BaW2**] inspirado en trabajos de Reshetikhin y Turaev [**RT1, RT2**]. El procedimiento para obtener una categoría tensorial a partir de un álgebra de Hopf esférica H consiste en tomar un cociente adecuado $\underline{\mathrm{Rep}}H$ de la categoría de representaciones $\mathrm{Rep}\, H$, ver [**BaW1, GK, Kn**]. Las categorías tensoriales obtenidas son semisimples pero raramente resultan ser categorías de fusión. Si bien no existe un método para encontrar subcategorías de fusión dentro de $\underline{\mathrm{Rep}}H$ una buena receta para hacerlo es considerar la subcategoría de los módulos inclinantes (en inglés *tilting modules*) cuya dimensión cuántica es no nula.

En [**AAGTV**] los autores explican las ideas fundamentales de esta receta y prueban que las álgebras de Nichols de dimensión finita no serán útiles para encontrar categorías de fusión siguiendo este procedimiento ya que sus módulos inclinantes son proyectivos y por lo tanto tienen dimensión cuántica nula. Sin embargo, plantean como alternativa el estudio de dos objetos estrechamente relacionados a las álgebras de Nichols de tipo diagonal $\mathcal{B}_{\mathsf{q}}$: las álgebras pre-Nichols distinguidas $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathsf{q}}$ y sus duales graduados $\mathcal{L}_{\mathsf{q}}$, bautizados en ese artículo como *álgebras de Lusztig* por ser una generalización de las álgebras de potencias divididas antes mencionadas. Así, el panorama es similar al planteado en (0.1):

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathsf{q}} \arrow[dr] & & \mathcal{L}_{\mathsf{q}} \\ & \mathcal{B}_{\mathsf{q}} \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd} \tag{0.2}$$

Las álgebras pre-Nichols distinguidas han sido definidas y estudiadas por Angiono en [**Ang5**] mientras que las álgebras de Lusztig y sus dobles de Drinfeld llamados álgebras cuánticas de potencias divididas se definen y estudian en el presente trabajo. Estos resultados aparecen en [**AAR1**].

El resultado principal de esta tesis es la presentación de las álgebras de Lusztig por generadores y relaciones:

Teorema. *El álgebra de Lusztig $\mathcal{L}_{\mathsf{q}}$ está generada por los elementos $\mathsf{y}_\beta^{(n)}$, $\beta \in \Delta_{\mathsf{q}}^{+}$, $n \in \mathbb{N}$ y relaciones*

$$\begin{array}{lr}
\mathsf{y}_\beta^{(N_\beta)} = 0, & \beta \in \Delta_{\mathsf{q}}^{+} - \mathfrak{O}_{\mathsf{q}}; \\[2mm]
\mathsf{y}_\beta^{(h)}\mathsf{y}_\beta^{(j)} = \binom{h+j}{j}_{q_{\beta\beta}} \mathsf{y}_\beta^{(h+j)}, & \begin{array}{c}\beta \in \Delta_{\mathsf{q}}^{+}, \\ h, j \in \mathbb{N}\end{array}; \\[2mm]
[\mathsf{y}_\beta^{(h)}, \mathsf{y}_\alpha^{(j)}]_c = \displaystyle\sum_{\mathsf{m} \in \mathsf{M}(\alpha,\beta,h,j)} \kappa_{\mathsf{m}}\, \mathsf{m}, & \begin{array}{c}\alpha < \beta \in \Delta_{\mathsf{q}}^{+}, \\ 0 < h < N_\alpha, \\ 0 < j < N_\beta;\end{array}
\end{array}$$

$$[\mathsf{y}_\beta^{(N_\beta)}, \mathsf{y}_\alpha^{(N_\alpha)}]_c = \kappa_\gamma \mathsf{y}_\gamma^{(N_\gamma)} + \sum_{\substack{0<l<N_\beta,\, 0<i<N_\alpha \\ \mathsf{m}\in\mathsf{M}(\alpha,\beta,N_\alpha-i,N_\beta-l)}} \kappa_{\mathsf{m}}^{i,l}\, \mathsf{y}_\beta^{(l)}\mathsf{m}\mathsf{y}_\alpha^{(i)}, \qquad \begin{array}{c}\alpha,\beta,\gamma\in\mathfrak{O}_{\mathsf{q}},\\ \alpha<\gamma<\beta;\end{array}$$

$$[\mathsf{y}_\beta^{(j)}, \mathsf{y}_\alpha^{(N_\alpha)}]_c = \sum_{\substack{0<i<N_\alpha, \\ \mathsf{m}\in\mathsf{M}(\alpha,\beta,N_\alpha-i,j)}} \kappa_{\mathsf{m}}^{i,0}\, \mathsf{y}_\alpha^{(i)}\mathsf{m}, \qquad \begin{array}{c}\alpha\in\mathfrak{O}_{\mathsf{q}},\\ \beta\in\Delta_{\mathsf{q}}^{+},\\ 0<j<N_\beta.\end{array}$$

Donde

$$\binom{h+j}{j}_{q_{\beta\beta}} = \prod_{s=1}^{j} \frac{1-q_{\beta\beta}^{h+j+1-s}}{1-q_{\beta\beta}^{s}};$$

$$\mathsf{M}(\alpha,\beta,h,j) = \{\mathsf{m}\in \widetilde{L}^\beta \cap \widetilde{\mathbf{L}}^\alpha : \deg \mathsf{m} = \deg \mathsf{y}_\alpha^{(h)} + \deg \mathsf{y}_\beta^{(j)}\};$$

$$\kappa_{\mathsf{m}}^{i,l} = \langle y_\beta^{(h)} y_\alpha^{(j)}, x_\beta^l x_{\beta_k}^{h_k}\cdots x_{\beta_r}^{h_r} x_\alpha^i\rangle;$$

$$\kappa_\gamma = \langle \mathsf{y}_\beta^{(N_\beta)} \mathsf{y}_\alpha^{(N_\alpha)}, x_\gamma^{N_\gamma}\rangle, \qquad \deg \mathsf{y}_\gamma^{(N_\gamma)} = \deg \mathsf{y}_\alpha^{(N_\alpha)} + \deg \mathsf{y}_\beta^{(N_\beta)}.$$

Si bien los coeficientes que aparecen en las relaciones no son explícitos y su cálculo no es tarea sencilla en todos los casos, la información que podemos obtener de dichas relaciones es suficiente para entender algunas propiedades de estas álgebras. Por ejemplo, a partir de esta presentación podemos dar una filtración de $\mathcal{L}_{\mathsf{q}}$ y definir el álgebra graduada asociada $\operatorname{gr}\mathcal{L}_{\mathsf{q}}$ que resulta ser noetheriana (y por lo tanto también lo es $\mathcal{L}_{\mathsf{q}}$).

Tras demostrar la existencia de un apareamiento de Hopf entre las bosonizaciones de dos álgebras de Lusztig ($\mathcal{L}_{\mathsf{q}}$ y $\mathcal{L}_{\mathsf{q}^t}$), podemos definir $\mathcal{U}_{\mathsf{q}}$ como el doble de Drinfeld de ellas al que denominaremos álgebra cuántica de potencias divididas. Esta álgebra es una generalización del álgebra $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ estudiada por Lusztig. La presentación por generadores y relaciones de $\mathcal{U}_{\mathsf{q}}$ sigue de la definición y la presentación del álgebra de Lusztig. La noetherianidad y dimensión de Gelfand-Kirillov de $\mathcal{U}_{\mathsf{q}}$ son propiedades que se siguen de considerar el graduado $\operatorname{gr}\mathcal{U}_{\mathsf{q}}$.

Las álgebras de Hopf co-Frobenius son aquellas que admiten una integral no nula. A lo largo de los años se han demostrado varias equivalencias (ver referencias en el capítulo 5), entre ellas destacamos que un álgebra de Hopf es co-Frobenius si y solamente si su categoría de comódulos tiene suficientes proyectivos.

La clasificación de las álgebras de Hopf co-Frobenius es un problema abierto. El estudio de las representaciones de las álgebras cuánticas de potencias divididas nos confirmará si sus duales son co-Frobenius. Mientras tanto, en esta tesis damos una versión trenzada de la definición y de las equivalencias antes mencionadas.

El presente trabajo está organizado en cinco capítulos. En el primero de ellos damos una serie de definiciones y resultados básicos sobre álgebras de Hopf, categorías monoidales y álgebras de Nichols. En el segundo capítulo enunciamos teoremas fundamentales sobre álgebras de Nichols de tipo diagonal [**Ang2**] e introducimos la definición de álgebra pre-Nichols distinguida haciendo un recorrido por el trabajo [**Ang5**].

El capítulo 3 se basa en el artículo [**AAR1**]. En él definimos los conceptos de álgebra de Lusztig y de su doble, el álgebra cuántica de potencias divididas. Entre los principales resultados se encuentran la presentación por generadores y relaciones de estas álgebras que nos llevan a demostrar propiedades básicas como su noetherianidad y calcular su dimensión de Gelfand-Kirillov.

En el cuarto capítulo presentamos una extensión de álgebras de Hopf trenzadas del álgebra de Lusztig y calculamos, en varios ejemplos de rango pequeño, isomorfismos entre un cociente del álgebra de Lusztig y la parte positiva del álgebra universal envolvente de álgebras de Lie semisimples, estos resultados se encuentran en el trabajo [**AAR2**].

En el capítulo 5, basado en el artículo en preparación [**AR**], planteamos diferentes caracterizaciones de la noción de álgebra de Hopf co-Frobenius y mediante una equivalencia de categorías monoidales demostramos resultados paralelos para el caso de las álgebras de Hopf trenzadas en categorías de módulos de Yetter-Drinfeld.

La presente tesis marca líneas de trabajo y preguntas en las que trabajaremos en el futuro. Algunas de ellas se detallan a continuación:

- Completar la lista de ejemplos vista en el capítulo 4 y definir a partir de allí un *morfismo de Frobenius cuántico* para el álgebra cuántica de potencias divididas $\mathcal{U}_{\mathfrak{q}}$.
- Estudiar la teoría de representaciones de $\mathcal{U}_{\mathfrak{q}}$ utilizando dicho morfismo de Frobenius.
- Definir duales de $\mathcal{U}_{\mathfrak{q}}$ mediante coeficientes matriciales y construir a partir de allí nuevos ejemplos de álgebras de Hopf co-Frobenius.
- Relacionar la filtración corradical de álgebras de Hopf trenzadas con la noción de álgebra de Hopf trenzada co-Frobenius.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo fijamos la notación que usaremos de aquí en adelante y exponemos las definiciones y nociones básicas de la teoría de álgebras de Hopf que utilizaremos en los capítulos subsiguientes.

Recordamos entre otras cosas las definiciones de álgebras y coálgebras que nos permitirán llegar a la noción de álgebra de Hopf. También introducimos las categorías tensoriales trenzadas y las álgebras de Hopf en dichas categorías. Además introducimos la noción de extensión de un álgebra de Hopf. Finalmente expondremos tres definiciones equivalentes de álgebras de Nichols y su relación con el método del levante.

Los contenidos de este capítulo pueden encontrarse por ejemplo en [**Mo, DNR, EGNO, A1, AS1**].

1.1. Convenciones

Trabajaremos sobre un cuerpo $\mathbf{k}$ algebraicamente cerrado de característica cero. Todos los espacios vectoriales, productos tensoriales, álgebras y coálgebras se considerarán sobre $\mathbf{k}$ salvo que se indique lo contrario.

Dado $\theta \in \mathbb{N}$ denotaremos por $\mathbb{I}_\theta$, o simplemente $\mathbb{I}$ si no cabe lugar a confusiones, al conjunto $\{1, 2, ..., \theta\}$.

Si Γ es un grupo, el grupo de caracteres multiplicativos de Γ, es decir el grupo de representaciones de dimensión 1 del mismo, será denotado por $\widehat{\Gamma}$.

Consideraremos $\mathbb{S}_n$ y $\mathbb{B}_n$ el grupo simétrico y el grupo de trenzas en n letras con generadores $\tau_i = (i\, i+1)$ y σ_i, $i \in \mathbb{I}_{n-1}$ respectivamente. Sea $s : \mathbb{S}_\theta \to \mathbb{B}_\theta$ la sección de conjuntos (llamada de Matsumoto) de la proyección $\pi : \mathbb{B}_\theta \twoheadrightarrow \mathbb{S}_\theta$, $\pi(\sigma_i) = \tau_i$, $i \in \mathbb{I}_{n-1}$, dada por $s(\omega) = \sigma_{i_1}\sigma_{i_2}...\sigma_{i_j}$, para $\omega = \tau_{i_1}\tau_{i_2}...\tau_{i_j} \in \mathbb{S}_\theta$ de largo j.

Los $\mathbf{q}$-números en el anillo de polinomios $\mathbb{Z}[\mathbf{q}]$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq n$, son

$$(n)_{\mathbf{q}} = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{q}^j, \qquad (n)^!_{\mathbf{q}} = \prod_{j=1}^{n} (j)_{\mathbf{q}}, \qquad \binom{n}{i}_{\mathbf{q}} = \frac{(n)^!_{\mathbf{q}}}{(n-i)^!_{\mathbf{q}}(i)^!_{\mathbf{q}}}.$$

Si $q \in \mathbf{k}$ entonces $(n)_q$, $(n)^!_q$, $\binom{n}{i}_q$ son las respectivas evaluaciones en q.

1.2. Álgebras, coálgebras y álgebras de Hopf

Daremos a continuación una serie de definiciones que utilizaremos a lo largo de esta tesis. Éstas pueden encontrarse en cualquier texto básico sobre álgebras de Hopf, en este caso referimos a los primeros capítulos de [**Mo**].

Definición 1.2.1. Una $\mathbf{k}$-*álgebra* con unidad es un $\mathbf{k}$-espacio vectorial no nulo A con dos aplicaciones $\mathbf{k}$-lineales, la multiplicación $m : A \otimes A \to A$ y la unidad $u : \mathbf{k} \to A$ tales que los siguientes diagramas de asociatividad y unidad conmutan:

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "m\otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes m"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\
A \otimes A \arrow[r, "m"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& A \otimes A \arrow[dd, "m"] & \\
\mathbf{k} \otimes A \arrow[ur, "u\otimes \mathrm{id}"] \arrow[dr] & & A \otimes \mathbf{k} \arrow[ul, "\mathrm{id}\otimes u"'] \arrow[dl] \\
& A &
\end{tikzcd}
$$

Ahora dualizaremos la noción de álgebra para obtener la definición de coálgebra.

Definición 1.2.2. Una $\mathbf{k}$-*coálgebra* con counidad es un $\mathbf{k}$-espacio vectorial no nulo C con dos aplicaciones $\mathbf{k}$-lineales, la comultiplicación $\Delta : C \to C \otimes C$ y la counidad $\varepsilon : C \to \mathbf{k}$ tales que los siguientes diagramas de coasociatividad y counidad conmutan:

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "\Delta\otimes \mathrm{id}"] \\
C \otimes C \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes \Delta"'] & C \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "1\otimes"'] \arrow[dr, "\otimes 1"] \arrow[dd, "\Delta"] & \\
\mathbf{k} \otimes C & & C \otimes \mathbf{k} \\
& C \otimes C \arrow[ul, "\varepsilon\otimes \mathrm{id}"] \arrow[ur, "\mathrm{id}\otimes \varepsilon"'] &
\end{tikzcd}
$$

A lo largo del manuscrito utilizaremos la notación de Heynemann-Sweedler. Si C es una coálgebra y $c \in C$, entonces $\Delta(c) = \sum_i a_i \otimes b_i \in C \otimes C$ y lo notaremos $\Delta(c) = c_{(1)} \otimes c_{(2)}$. La conveniencia de esta notación aparece cuando aplicamos Δ más de una vez, en ese caso gracias a la coasociatividad obtenemos

$$(c_{(1)})_{(1)} \otimes (c_{(1)})_{(2)} \otimes c_{(2)} = c_{(1)} \otimes (c_{(2)})_{(1)} \otimes (c_{(2)})_{(2)} = c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)}.$$

Definición 1.2.3. Sean $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ y $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ dos coálgebras.

(i) Una aplicación lineal $f : C \to D$ se dice *morfismo de coálgebras* si $\Delta_C \circ f = (f \otimes f)\Delta_D$ y $\varepsilon_C = \varepsilon_D \circ f$.

(ii) Un subespacio $I \subseteq C$ es un *coideal* de C si $\Delta_C(I) \subseteq I \otimes C + C \otimes I$ y $\varepsilon_C(I) = 0$.

(iii) Un subespacio $I \subseteq C$ es un *coideal a izquierda* (respectivamente, a derecha) de C si $\Delta_C(I) \subseteq I \otimes C$ (respectivamente, $\Delta_C(I) \subseteq C \otimes I$).
(iv) Un subespacio $B \subseteq C$ es una *subcoálgebra* de C si $\Delta_C(B) \subseteq B \otimes B$.

Observemos que un subespacio I de C es un coideal si y solamente si el cociente C/I es una coálgebra con la comultiplicación inducida por la proyección.

DEFINICIÓN 1.2.4. Una coálgebra se dice *simple* si no contiene subcoálgebras propias. El *corradical* C_0 de C es la suma de todas sus subcoálgebras simples. Si $C = C_0$, entonces C se dice *cosemisimple*.

Dados dos espacios vectoriales V y W consideramos la aplicación llamada *flip* $\tau : V \otimes W \to W \otimes V$ dada por $\tau(v \otimes w) = w \otimes v$.

DEFINICIÓN 1.2.5. Dada un álgebra (A, m) el *álgebra opuesta* A^{op} es el espacio vectorial A con la multiplicación $m^{\mathrm{op}} = m \circ \tau$. Dualmente, dada una coálgebra (C, Δ), la *coálgebra coopuesta* C^{cop} es el espacio vectorial C con la comultiplicación $\Delta^{\mathrm{cop}} = \tau \circ \Delta$.

DEFINICIÓN 1.2.6. Sean C una coálgebra y A un álgebra. Si $f, g \in \mathrm{Hom}(C, A)$, definimos el *producto de convolución* de f y g como el elemento de $\mathrm{Hom}(C, A)$ denotado por $f * g$ que resulta de la composición $m \circ (f \otimes g) \circ \Delta$. Es decir, $f * g(c) = f(c_{(1)})g(c_{(1)})$, $c \in C$.

Dado un espacio vectorial V, consideramos el dual lineal $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(V, \mathbf{k})$ y la forma bilineal $\langle\, , \rangle : V^* \times V \to \mathbf{k}$ definida por $\langle f, v \rangle = f(v)$. Además, si $\varphi : V \to W$ es $\mathbf{k}$-lineal, tenemos la aplicación traspuesta $\varphi^* : W^* \to V^*$ dada por $\varphi^*(f)(v) = f(\varphi(v))$. Observemos también que $V^* \otimes V^*$ se identifica con un subespacio de $(V \otimes V)^*$ vía:[1]

$$\langle f \otimes g, v \otimes w \rangle = \langle f, w \rangle \langle g, v \rangle; \qquad \forall f, g \in V^*,\ v, w \in V. \tag{1.1}$$

Así, obtenemos $\Delta^* : C^* \otimes C^* \to C^*$ dado por $\Delta^*(f \otimes g)(c) = (f \otimes g)\Delta(c)$ y se puede demostrar lo siguiente:

LEMA 1.2.7. *Si C es una coálgebra entonces C^* es un álgebra con multiplicación Δ^* y unidad ε^*.*

Dualmente, si (A, m, u) es un álgebra de dimensión finita, (A^*, m^*, u^*) es una coálgebra. Si A no es de dimensión finita, entonces $A^* \otimes A^*$ es un subespacio propio de $(A \otimes A)^*$ y por esta razón $m^* : A^* \to (A \otimes A)^*$ podría no caer en $A^* \otimes A^*$. Esto nos lleva a una nueva definición:

[1] Utilizaremos esta identificación en lugar de $\langle f \otimes g, v \otimes w \rangle = \langle f, v \rangle \langle g, w \rangle$ ya que es la que se extiende a categorías monoidales.

Definición 1.2.8. Sea A un álgebra. El *dual finito* o dual de Sweedler de A es $A^{\circ} = \{f \in A^* | f(I) = 0$ para algún ideal bilátero I de codimensión finita$\}$.

Ahora sí, si (A, m, u) es un álgebra entonces (A°, m^*, u^*) es una coálgebra, ver por ejemplo [**DNR**, 1.5.3].

Combinando las nociones de álgebra y coálgebra obtenemos la noción de biálgebra.

Definición 1.2.9. Decimos que $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ es una *biálgebra* si (B, m, u) es un álgebra, (B, Δ, ε) es una coálgebra y Δ y ε son morfismos de álgebras (o, equivalentemente, m y u son morfismos de coálgebras).

Un *morfismo de biálgebras* es un morfismo de álgebras y de coálgebras y un *biideal* es un subespacio I de B que es ideal y coideal. El *ideal de aumentación* de B es el núcleo $\ker \varepsilon_B$ del morfismo ε_B y lo denotaremos B^+. Notemos que, como ε es un morfismo de coálgebras, B^+ es un coideal de B y por ende un biideal de B.

En una coálgebra C existen elementos de especial importancia definidos como sigue:

Definición 1.2.10. Dada una coálgebra C y $c \in C$ decimos que

- c es un elemento de *tipo grupo* si $\Delta(c) = c \otimes c$ y $\varepsilon(c) = 1$. Denotamos por $G(C)$ al conjunto de los elementos de tipo grupo de C.
- Dados $g, h \in G(C)$, si c satisface $\Delta(c) = c \otimes g + h \otimes c$ se dice (g, h)-*primitivo*. Denotamos por $\mathcal{P}_{g,h}(C)$ al conjunto de los elementos (g, h)-primitivos de C.

Observemos que si B es una biálgebra entonces $1 \in G(C)$. Llamaremos *primitivos* a los elementos $(1, 1)$-primitivos y notaremos $\mathcal{P}(B) := \mathcal{P}_{1,1}(B)$.

Recordemos que dada un álgebra A, un espacio vectorial V se dice A-módulo a izquierda si existe una acción de A en V, es decir una aplicación lineal $\cdot : A \otimes V \to V$ tal que $1_A \cdot v = v$ y $(ab) \cdot v = a \cdot (b \cdot v)$ para todo $a, b \in A$, $v \in V$. Dualmente, podemos definir la noción de C-comódulo para una coálgebra C:

Definición 1.2.11. Sean C una coálgebra y V un $\mathbf{k}$-espacio vectorial, decimos que V es un C-*comódulo* a izquierda si existe una aplicación lineal

$\lambda : V \to C \otimes V$ tal que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\lambda"'] & C \otimes V \arrow[d, "\Delta\otimes\mathrm{id}"] \\ C \otimes V \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\lambda"] & C \otimes C \otimes V \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "\lambda"] \arrow[dr, "1\otimes"] & C \otimes V \arrow[d, "\varepsilon\otimes\mathrm{id}"] \\ & \mathbf{k} \otimes C \end{tikzcd}$$

Análogamente podemos definir la noción de módulo y comódulo a derecha. Utilizaremos la notación de Sweedler para comódulos tanto a izquierda como a derecha, en el primer caso escribimos para todo $v \in V$

$$\lambda(v) = v_{(-1)} \otimes v_{(0)} \in C \otimes V;$$

mientras que para un comódulo a derecha (V, ρ) escribimos para todo $v \in V$

$$\rho(v) = v_{(0)} \otimes v_{(1)} \in V \otimes C.$$

Sean (M, λ_M) y (N, λ_N) dos C-comódulos a izquierda, un *morfismo de C-comódulos* es una aplicación lineal $f : M \to N$ que cumple

$$\lambda_N \circ f = (\mathrm{id} \otimes f) \circ \lambda_M.$$

Un subespacio $S \subseteq M$ se dice *C-subcomódulo* si $\lambda_M(S) \subset C \otimes S$. La categoría de A-módulos (respectivamente C-comódulos) a izquierda la notaremos ${}_A\mathcal{M}$ (respectivamente ${}^C\mathcal{M}$).

En el siguiente lema se utiliza la identificación de (1.1).

LEMA 1.2.12. *(i) Dada una coálgebra C, si M es un C-comódulo a derecha, entonces M es un C^*-módulo a derecha.*

(ii) Dada un álgebra A, si M es un A-módulo a derecha entonces M es un A°-comódulo a derecha si y sólo si $\{A \cdot m\}$ es de dimensión finita para todo $m \in M$. □

Ya contamos con todos los ingredientes para definir las álgebras de Hopf:

DEFINICIÓN 1.2.13. Un *álgebra de Hopf* es una biálgebra H dotada de una aplicación lineal $\mathcal{S} : H \to H$ llamada *antípoda* que satisface

$$m(\mathcal{S} \otimes \mathrm{id})\Delta = u\varepsilon = m(\mathrm{id} \otimes \mathcal{S})\Delta.$$

En lo que sigue todas las álgebras de Hopf serán consideradas con antípoda biyectiva. Notemos que esta condición se cumple para toda álgebra de Hopf de dimensión finita [**Sw**, 5.1.6].

OBSERVACIÓN 1.2.14. La antípoda de un álgebra de Hopf se puede definir como el inverso de la identidad respecto al producto de convolución.

Dadas dos álgebras de Hopf H y K, un *morfismo de álgebras de Hopf* $f : H \to K$ es un morfismo de biálgebras ya que todo morfismo de biálgebras preserva la antípoda (por ser ésta el inverso de la identidad respecto a la convolución), es decir cumple $f \circ \mathcal{S}_H = \mathcal{S}_K \circ f$. Un biideal I de H es un *ideal de Hopf* si $\mathcal{S}(I) \subseteq I$.

EJEMPLO 1.2.15. Dado un grupo Γ el álgebra de grupo $\mathbf{k}\Gamma$ es un álgebra de Hopf con la estructura dada por

$$\Delta(g) = g \otimes g, \qquad \varepsilon(g) = 1, \qquad \mathcal{S}(g) = g^{-1}, \qquad \forall g \in \Gamma.$$

EJEMPLO 1.2.16. El álgebra universal envolvente $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Hopf con la estructura determinada, para cada $x \in \mathfrak{g}$, por

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x, \qquad \varepsilon(x) = 0, \qquad \mathcal{S}(x) = -x.$$

OBSERVACIÓN 1.2.17. Si H es un álgebra de Hopf, entonces los primitivos $\mathcal{P}(H)$ forman un álgebra de Lie. Más aún, existe un morfismo de álgebras de Hopf $\mathcal{U}(\mathcal{P}) \to H$.

EJEMPLO 1.2.18. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie semisimple de dimensión finita con matriz de Cartan $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$. Sea $D = \operatorname{diag}\{d_1, \dots, d_n\}$ una matriz diagonal tal que DA es simétrica, consideramos D tal que $d_i \in \{1, 2, 3\}$ para todo $i \in \mathbb{I}_n$. Dado $q \in \mathbf{k}^\times$ tal que $q^{2d_i} \neq 1$, denotaremos $q_i = q^{d_i}$ y $q_{ij} = q^{d_i a_{ij}}$. Consideramos el álgebra envolvente cuantizada $U_q(\mathfrak{g})$ definida por Drinfeld y Jimbo [**Dr, J**] generada por E_i, F_i, $K_i^{\pm 1}$, $i = 1, \dots, n$ con las relaciones

$$\begin{aligned}
&K_iK_j = K_jK_i, \qquad K_iK_i^{-1} = K_i^{-1}K_i = 1,\\
&K_iE_j = q_{ij}E_jK_i, \qquad K_iF_j = q_{ij}^{-1}F_jK_i,\\
&E_iF_j - F_jE_i = \delta_{i,j}\frac{K_i - K_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}},\\
&\sum_{n=0}^{1-a_{ij}} (-1)^n \binom{1-a_{ij}}{n}_{q_i} E_i^n E_j E_i^{1-a_{ij}-n} = 0,\\
&\sum_{n=0}^{1-a_{ij}} (-1)^n \binom{1-a_{ij}}{n}_{q_i} F_i^n F_j F_i^{1-a_{ij}-n} = 0.
\end{aligned}$$

En este caso, la estructura de álgebra de Hopf de $U_q(\mathfrak{g})$ está dada, para todo $1 \le i \le n$, por

$$\begin{aligned}
&\Delta(K_i^{\pm1}) = K_i^{\pm1} \otimes K_i^{\pm1}, && \mathcal{S}(K_i^{\pm1}) = K_i^{\mp1}, && \varepsilon(K_i^{\pm}) = 1\\
&\Delta(E_i) = E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i, && \mathcal{S}(E_i) = -K_i^{-1}E_i, && \varepsilon(E_i) = 0\\
&\Delta(F_i) = 1 \otimes F_i + F_i \otimes K_i^{-1}, && \mathcal{S}(K_i^{\pm}) = -F_iK_i, && \varepsilon(F_i) = 0.
\end{aligned}$$

DEFINICIÓN 1.2.19. Dada un álgebra de Hopf H, M un H-módulo a izquierda y N un H-comódulo a derecha:

- los *invariantes* de H en M son $M^H = \{m \in M | h \cdot m = \varepsilon(h)m \, \forall h \in H\}$;
- los *coinvariantes* de H en N son $N^{\mathrm{co}\, H} = \{n \in N | \rho(n) = n \otimes 1\}$.

DEFINICIÓN 1.2.20. Dadas un álgebra de Hopf H, un álgebra A y una coálgebra C diremos que:

⋆ A es una *H-módulo álgebra* (a izquierda) si A es un H-módulo (a izquierda), $h \cdot (ab) = (h_{(1)} \cdot a)(h_{(2)} \cdot b)$ y $h \cdot 1 = \varepsilon(h)1$ para todo $a, b \in A$, $h \in H$.

⋆ A es una *H-comódulo álgebra* (a derecha) si A es un H-comódulo (a derecha) vía ρ, $\rho(ab) = a_{(0)}b_{(0)} \otimes a_{(1)}b_{(1)}$ para todo $a, b \in A$ y $\rho(1) = 1 \otimes 1$.

⋆ C es una *H-módulo coálgebra* (a izquierda) si C es un H-módulo (a izquierda), $\Delta(h \cdot c) = h_{(1)} \cdot c_{(1)} \otimes h_{(2)} \cdot c_{(2)}$ y $\varepsilon(h \cdot c) = \varepsilon(h)\varepsilon(c)$, para todo $c \in C$, $h \in H$.

⋆ C es una *H-comódulo coálgebra* (a derecha) si C es un H-comódulo (a derecha), $(\Delta \otimes \mathrm{id})\rho(c) = c_{(1)_{(0)}} \otimes c_{(2)_{(0)}} \otimes c_{(1)_{(1)}}c_{(2)_{(1)}}$ y $(\varepsilon \otimes \mathrm{id})\rho(c) = \varepsilon(c)1$, para todo $c \in C$.

1.2.1. Filtraciones y graduaciones. Un álgebra A se dice *filtrada* si existe una sucesión de subespacios $0 = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots \subset A$ tales que $A = \bigcup_{n \geq 0} A_n$ y $A_n . A_m \subseteq A_{n+m}$ para todo $n, m \geq 0$. La familia $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ se dice una *filtración de álgebra* de A.

Análogamente, una familia de subcoálgebras $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ de una coálgebra C que satisface $C_n \subseteq C_{n+1}$, $C = \bigcup_{n \geq 0} C_n$ y $\Delta(C_n) \subseteq \sum_{i=0}^{n} C_i \otimes C_{n-i}$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$ se dice una *filtración de coálgebra* de C. Si existe una filtración de coálgebra de C decimos que C es *filtrada*.

DEFINICIÓN 1.2.21. Sea H un álgebra de Hopf y $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ una familia de subespacios de H. Decimos que $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ es una *filtración de álgebra de Hopf* de H si es una filtración de álgebra, una filtración de coálgebra y $\mathcal{S}(H_n) \subseteq H_n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

EJEMPLO 1.2.22. Una filtración de coálgebras muy importante es la *filtración corradical*. Si C es una coálgebra, definimos los subespacios C_n de manera inductiva: siendo C_0 el corradical de C y

$$C_n = \Delta^{-1}(C \otimes C_{n-1} + C_0 \otimes C).$$

Dado un conjunto G consideramos la coálgebra $\mathbf{k}G$. Decimos que un espacio vectorial V es *G-graduado* si es un $\mathbf{k}G$-comódulo, equivalentemente si $V = \oplus_{g \in G} V^g$. Si $x \in V^g$ diremos que x es un elemento homogéneo de grado g. Una aplicación lineal $f : V \to W$ con V, W G-graduados se dice G-graduada (o G-homogénea) si $f(V^g) \subseteq W^g$ para todo $g \in G$.

DEFINICIÓN 1.2.23. Si G es un monoide entonces $\mathbf{k}G$ es una biálgebra y por lo tanto la categoría de $\mathbf{k}G$-comódulos es tensorial. Dadas A un álgebra, C una coálgebra y H un álgebra de Hopf decimos que:

- A es un *álgebra G-graduada* si es graduada como espacio vectorial y los morfismos m, u son graduados;
- C es un *coálgebra G-graduada* si es graduada como espacio vectorial y los morfismos Δ, ε son graduados;
- H es un *álgebra de Hopf G-graduada* si es graduada como álgebra, como coálgebra y $\mathcal{S}$ es un morfismo graduado.

Diremos simplemente que una coálgebra/álgebra/álgebra de Hopf es graduada si es $\mathbb{N}_0$-graduada.

Dada un álgebra A (resp. una coálgebra C) y una filtración de álgebras $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ (resp. una filtración de coálgebras $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$). Definimos $A^0 = A_0$ y $A^n := A_n/A_{n-1}$ si $n > 0$ (resp. $C^0 = A_0$ y $C^n := C_n/C_{n-1}$ si $n > 0$). Entonces

$$m(A^i \otimes A^j) \subset A^{i+j}, \qquad (\text{resp. } \Delta(C^m) \subset \sum_{i+j=m} C^i \otimes C^j).$$

Así, $\operatorname{gr} A := \oplus_{n\geq 0} A^n$ es un álgebra $\mathbb{N}_0$-graduada (resp. $\operatorname{gr} C := \oplus_{n\geq 0} C^n$ es una coálgebra $\mathbb{N}_0$-graduada).

De igual manera, dada un álgebra de Hopf H y una filtración de álgebras de Hopf $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ tenemos que $\operatorname{gr} H = \oplus_{n\geq 0} H_n/H_{n-1}$ donde $H_{-1} = 0$ es un álgebra de Hopf $\mathbb{N}_0$-graduada llamada *álgebra de Hopf graduada asociada a H*.

1.3. Dimensión de Gelfand-Kirillov

Sea Φ el conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ tales que $f(n+1) \geq f(n)$ para casi todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $f \in \Phi$, $n \in \mathbb{N}$ escribimos

$$\log_n f(n) := \frac{\log(f(n))}{\log(n)}.$$

LEMA 1.3.1. [**KL**, 2.1] *Sea $f \in \Phi$, entonces*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \log_n f(n) = \inf\{\kappa \in \mathbb{R} : f(n) \leq n^\kappa\}. \quad \square$$

DEFINICIÓN 1.3.2. Sea A un álgebra finitamente generada decimos que el subespacio de dimensión finita V de A es un *subespacio generador* de A si $A = \cup_{n\in\mathbb{N}_0} V_n$ con $V_n = \mathbf{k}+V+V^2+\cdots+V^n$. Definimos la función $d_V : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ como $d_V(n) = \dim(V_n)$.

EJEMPLO 1.3.3. Sea $A = \mathbf{k}\langle x, y\rangle$ el álgebra libre en dos generadores. Entonces $V = \mathbf{k}x + \mathbf{k}y$ es un subespacio generador de A y

$$d_V(n) = \dim(\sum_{i=0}^{n} V^i) = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

DEFINICIÓN 1.3.4. La *dimensión de Gelfand-Kirillov* de un álgebra A es

$$\mathrm{GKdim}(A) := \sup \overline{\lim_{n\to\infty}} \log_n d_V(n),$$

donde el supremo se considera sobre todos los subespacios de dimensión finita de A.

1.4. Categorías monoidales trenzadas y módulos de Yetter-Drinfeld

Las definiciones dadas a continuación, así como también un mayor desarrollo de la teoría de categorías monoidales, pueden encontrarse en [**EGNO**].

DEFINICIÓN 1.4.1. Una *categoría monoidal* es una 6-upla $(\mathcal{C}, \otimes, a, \mathbf{1}, l, r)$ donde:

- $\mathcal{C}$ es una categoría;
- $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es un bifuntor llamado producto tensorial;
- a, l, r son isomorfismos naturales $a_{U,V,W} : (U \otimes V) \otimes W \to U \otimes (V \otimes W)$, $l_V : \mathbf{1} \otimes V \to V$ y $r_V : V \otimes \mathbf{1} \to V$ que hacen conmutar los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd}
 & ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W \arrow[dl, "a_{X,Y,Z} \otimes \mathrm{id}_W"'] \arrow[dr, "a_{X \otimes Y,Z,W}"] & \\
(X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes W \arrow[d, "a_{X,Y \otimes Z,W}"] & & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes W) \arrow[d, "a_{X,Y,Z \otimes W}"'] \\
X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes W) \arrow[rr, "\mathrm{id}_X \otimes a_{Y,Z,W}"] & & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes W))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes \mathbf{1}) \otimes Y \arrow[rr, "r_X \otimes \mathrm{id}_Y"] \arrow[dr, "a_{X,\mathbf{1},Y}"'] & & X \otimes Y \\
 & X \otimes (\mathbf{1} \otimes Y) \arrow[ur, "\mathrm{id}_X \otimes l_Y"'] &
\end{tikzcd}$$

DEFINICIÓN 1.4.2. Dadas $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías monoidales, un *funtor monoidal* es una terna (F, J, ϕ) tal que:

- $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un funtor;
- $J = \{J_{X,Y} : F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y) \xrightarrow{\sim} F(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) | X, Y \in \mathcal{C}\}$ es un isomorfismo natural;
- $\phi : \mathbf{1}_{\mathcal{D}} \to F(\mathbf{1}_{\mathcal{C}})$;
- los siguientes diagramas conmutan para todo $X, Y, Z \in \mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd}
(F(X) \otimes F(Y)) \otimes F(Z) \arrow[r, "a_{F(X),F(Y),F(Z)}"] \arrow[d, "J_{X,Y} \otimes \mathrm{id}_{F(Z)}"'] & F(X) \otimes (F(Y) \otimes F(Z)) \arrow[d, "\mathrm{id}_{F(X)} \otimes J_{Y,Z}"] \\
F(X \otimes Y) \otimes F(Z) \arrow[d, "J_{X \otimes Y, Z}"'] & F(X) \otimes F(Y \otimes Z) \arrow[d, "J_{X, Y \otimes Z}"] \\
F((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[r, "F(a_{X,Y,Z})"] & F(X \otimes (Y \otimes Z))
\end{tikzcd} \tag{1.2}$$

(1.3)

$$\begin{tikzcd}
F(X) \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{D}} \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \phi"] \arrow[d, "r_{F(X)}"'] & F(X) \otimes F(\mathbf{1}_{\mathcal{C}}) \arrow[d, "J_{X,\mathbf{1}_{\mathcal{C}}}"] \\
F(X) & F(X \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{C}}) \arrow[l, "F(r_X)"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{1}_{\mathcal{D}} \otimes F(X) \arrow[r, "\phi \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "l_{F(X)}"'] & F(\mathbf{1}_{\mathcal{C}}) \otimes F(X) \arrow[d, "J_{\mathbf{1}_{\mathcal{C}},X}"] \\
F(X) & F(\mathbf{1}_{\mathcal{C}} \otimes X) \arrow[l, "F(l_X)"]
\end{tikzcd}$$

Dado un objeto $V \in \mathcal{C}$, decimos que (V^*, e_V, b_V) es dual a derecha de V si V^* es un objeto de $\mathcal{C}$ y $e_V : V^* \otimes V \to \mathbf{k}$, $b_V : \mathbf{k} \to V \otimes V^*$ son morfismos en $\mathcal{C}$ tales que

$$(\mathrm{id}_V \otimes e_V) \circ a_{V,V^*,V} \circ (b_V \otimes \mathrm{id}_V) = r_V \circ \mathrm{id}_V \circ l_V,$$
$$(e_V \otimes \mathrm{id}_{V^*}) \circ a_{V^*,V,V^*} \circ (\mathrm{id}_{V^*} \otimes b_V) = l_{V^*} \circ \mathrm{id}_{V^*} \circ r_{V^*}.$$

Análogamente se define el dual a derecha $({}^*V, e'_V, b'_V)$ de V donde ${}^*V \in \mathcal{C}$ y $e'_V : V \otimes {}^*V \to \mathbf{k}$, $b'_V : \mathbf{k} \to {}^*V \otimes V$ son morfismos en $\mathcal{C}$ que cumple diagramas similares a los anteriores. Notemos que si V^* es dual a izquierda de V entonces V es dual a derecha de V^*.

Definición 1.4.3. Un objeto en una categoría monoidal $\mathcal{C}$ se dice *rígido* si admite dual a derecha e izquierda. La categoría $\mathcal{C}$ se dice *rígida* si todo objeto es rígido.

Definición 1.4.4. Una *categoría monoidal trenzada* es una categoría monoidal $\mathcal{C}$ con un isomorfismo natural $c = \{c_{X,Y} : X \otimes Y \to Y \otimes X | X, Y \in \mathcal{C}\}$ llamado *trenza* que satisface

$$c_{X,Y \otimes Z} = (\mathrm{id}_Y \otimes c_{X,Z}) \circ (c_{X,Y} \otimes \mathrm{id}_Z),$$
$$c_{X \otimes Y,Z} = (c_{X,Z} \otimes \mathrm{id}_Y) \circ (\mathrm{id}_X \otimes c_{Y,Z}).$$

1.4.1. Módulos de Yetter-Drinfeld y espacios trenzados.

Definición 1.4.5. Sea H un álgebra de Hopf . Un *módulo de Yetter-Drinfeld V sobre H* es un H-módulo y un H-comódulo que satisface la condición de compatibilidad

$$\delta(h \cdot v) = h_{(1)} v_{(-1)} \mathcal{S}(h_{(3)}) \otimes h_{(2)} \cdot v_{(0)}, \qquad h \in H, v \in V.$$

Un morfismo de módulos de Yetter-Drinfeld es un morfismo de módulos y de comódulos. Los módulos de Yetter-Drinfeld sobre un álgebra de Hopf H forman una categoría abeliana ${}^H_H\mathcal{YD}$. Más aún, ${}^H_H\mathcal{YD}$ es monoidal con el producto tensorial de espacios vectoriales y la acción y coacción de H dadas, para $V, W \in {}^H_H\mathcal{YD}$, $v \in V$, $w \in W$, por

$$h \cdot (v \otimes w) = h_{(1)} \cdot v \otimes h_{(2)} \cdot w;$$
$$\rho(v \otimes w) = v_{(-1)} w_{(-1)} \otimes v_{(0)} \otimes w_{(0)}.$$

Además, ${}^H_H\mathcal{YD}$ es trenzada con trenza

$$c_{V,W}(v \otimes w) = v_{(-1)} \cdot w \otimes v_{(0)}, \qquad V, W \in {}^H_H\mathcal{YD},\ v \in V, w \in W;$$

cuya inversa es

$$c^{-1}_{W,V}(w \otimes v) = w_{(0)} \otimes \mathcal{S}^{-1}(w_{(-1)}) \cdot v, \qquad V, W \in {}^H_H\mathcal{YD},\ v \in V, w \in W.$$

La subcategoría plena de ${}^H_H\mathcal{YD}$ formada por los objetos de dimensión finita es rígida.

Definición 1.4.6. Un *espacio vectorial trenzado* es un par (V, c) formado por un espacio vectorial V junto con un isomorfismo lineal $c : V \otimes V \to V \otimes V$ que es solución de la ecuación de trenzas

$$(c \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes c)(c \otimes \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \otimes c)(c \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes c).$$

Observación 1.4.7. Un módulo $V \in {}^H_H\mathcal{YD}$ es un espacio vectorial trenzado con trenza $c(v \otimes w) = v_{(-1)} \cdot w \otimes v_{(0)}$. Recíprocamente, un espacio vectorial trenzado (V, c) de dimensión finita se puede realizar como un H-módulo de Yetter-Drinfeld sobre algún álgebra de Hopf H (no de manera única) si y solamente si la trenza c es *rígida*, es decir si la aplicación lineal $c^\flat : V^* \otimes V \to V \otimes V^*$ dada por

$$c^\flat = (e_V \otimes \mathrm{id}_{V \otimes V^*})(\mathrm{id}_{V^*} \otimes c \otimes \mathrm{id}_{V^*})(\mathrm{id}_{V^* \otimes V} \otimes b_V)$$

es un isomorfismo [**T**].

Como hemos mencionado en la sección 1.2, dado un espacio vectorial V podemos identificar el espacio $V^* \otimes V^*$ con un subespacio de $(V \otimes V)^*$ mediante $\langle f \otimes g, v \otimes w \rangle = \langle f, w \rangle \langle g, v \rangle$, para $v, w \in V$, $f, g \in V^*$. Si (V, c) es un espacio vectorial trenzado de dimensión finita, entonces (V^*, c^t) es el espacio vectorial trenzado dual, donde $c^t : V^* \otimes V^* \to V^* \otimes V^*$ es

$$\langle c^t(f \otimes g), v \otimes w \rangle = \langle f \otimes g, c(v \otimes w) \rangle.$$

Proposición 1.4.8. [**AG**, 2.2.1] *Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita. Entonces las categorías ${}^H_H\mathcal{YD}$, ${}^{H^*}_{H^*}\mathcal{YD}$, $\mathcal{YD}^H_H$ y $\mathcal{YD}^{H^*}_{H^*}$ son equivalentes.* $\square$

1.4.2. Álgebras de Hopf en categorías trenzadas. Tanto las definiciones dadas a continuación como los resultados básicos de las álgebras de Hopf trenzadas pueden encontrarse en [**T**].

Dada una categoría monoidal $\mathcal{C}$ podemos definir álgebras y coálgebras en la categoría:

- Una terna (A, m, u) es un *álgebra* asociativa en $\mathcal{C}$ si A es un objeto de $\mathcal{C}$ y $m : A \otimes A \to A$, $u : \mathbf{1} \to A$ son morfismos en $\mathcal{C}$ tales que $m \circ (m \otimes \mathrm{id}) = m \circ (\mathrm{id} \otimes m) \circ a_{A,A,A}$, $m \circ (u \otimes \mathrm{id}) = l_A$ y $m \circ (\mathrm{id} \otimes u) = r_A$.
- Una terna (C, Δ, ε) es una *coálgebra* coasociativa en $\mathcal{C}$ si C es un objeto de $\mathcal{C}$ y $\Delta : C \to C \otimes C$, $\varepsilon : C \to \mathbf{1}$ son morfismos en $\mathcal{C}$ tales que $(\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta = a_{A,A,A} \circ (\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta$, $l_C \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = \mathrm{id}_C$ y $r_C \circ (\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta = \mathrm{id}_C$.

Sean $\mathcal{C}$ una categoría monoidal trenzada y A, B álgebras en $\mathcal{C}$. Los morfismos de álgebras y coálgebras en $\mathcal{C}$ se definin de la manera evidente. Definimos además una estructura de álgebra asociativa en $\mathcal{C}$ sobre el objeto $A \otimes B$ dada por

$$m_{A \otimes B} = (m_A \otimes m_B) \circ (\mathrm{id}_A \otimes c_{B,A} \otimes \mathrm{id}_B).$$

Asimismo, dadas C, D coálgebras en $\mathcal{C}$, la comultiplicación

$$\Delta_{C \otimes D} = (\mathrm{id}_C \otimes c_{D,C} \otimes {}_D) \circ (\mathit{\Delta}_C \otimes \mathit{\Delta}_D)$$

nos da una estructura de coálgebra coasociativa en $\mathcal{C}$ para $C \otimes D$.

Definición 1.4.9. Una *biálgebra* en una categoría trenzada $\mathcal{C}$ es una 5-upla $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ tal que (H, m, u) es un álgebra en $\mathcal{C}$, (H, Δ, ε) es una coálgebra en $\mathcal{C}$ y Δ, ε son morfismos de álgebras.

Definición 1.4.10. Un *álgebra de Hopf* en $\mathcal{C}$ (*álgebra de Hopf trenzada*) es una biálgebra $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ en $\mathcal{C}$ junto con un morfismo $\mathcal{S} : H \to H$ tal que $m \circ (\mathcal{S} \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = u\varepsilon = m \circ (\mathrm{id} \otimes \mathcal{S}) \circ \Delta$.

Sea $R = \bigoplus_{n \geq 0} R^n$ un álgebra de Hopf trenzada graduada tal que R^n es rígido para todo n. Entonces su dual graduado $R^d = \bigoplus_{n \geq 0} (R^n)^*$ es nuevamente un álgebra de Hopf trenzada graduada.

En lo que sigue utilizaremos una variación de la notación de Sweedler $\underline{\Delta}(X) = X^{(1)} \otimes X^{(2)}$ para el coproducto en álgebras de Hopf trenzadas.

Siguiendo [**AS1**, §1.5] introducimos la acción adjunta (trenzada) de un álgebra de Hopf (trenzada). Si A es un álgebra de Hopf, la representación adjunta ad de A en sí misma está dada por

$$\mathrm{ad}(a)b = a_{(1)}b\mathcal{S}(a_{(2)}), \qquad a, b \in A. \tag{1.4}$$

Mientras que si H es un álgebra de Hopf y A es un álgebra de Hopf en ${}^H_H\mathcal{YD}$, la acción adjunta trenzada de A en sí misma se define por

$$\mathrm{ad}_c(a)b = m(m \otimes \mathcal{S})(\mathrm{id} \otimes c)(\underline{\Delta} \otimes \mathrm{id})(a \otimes b), \qquad a, b \in A. \tag{1.5}$$

También se define el conmutador trenzado $[-,-]_c : A \otimes A \to A$ como

$$[a, b]_c = ab - m \circ c(a \otimes b), \qquad a, b \in A. \tag{1.6}$$

Notemos que $\mathrm{ad}_c(a)(b) = [a, b]_c$ si a es primitivo.

1.4.3. Bosonización y doble de Drinfeld. A continuación definiremos el biproducto de Radford-Majid también llamado bosonización definido por Radford [**Ra**] e interpretado en términos de categorías trenzadas por Majid [**Ma**].

Sea H un álgebra de Hopf sobre $\mathbf{k}$. Consideramos la categoría de módulos de Yetter-Drinfeld ${}^H_H\mathcal{YD}$. Sea A un álgebra de Hopf sobre $\mathbf{k}$ dotada de morfismos de álgebras de Hopf $\iota : H \to A$ y $\pi : A \to H$ tales que $\pi \circ \iota = \mathrm{id}_H$. Definimos

$$R = A^{\mathrm{co}\, H} = \mathrm{Lker}\, \pi = \{a \in A | (\mathrm{id} \otimes \pi)\Delta(a) = a \otimes 1\}.$$

Entonces R es un álgebra de Hopf en ${}^H_H\mathcal{YD}$ con la multiplicación y unidad de A (R es una subálgebra de A), la comultiplicación $\underline{\Delta}(r) = r_{(1)}\iota\mathcal{S}_H(\pi r_{(2)}) \otimes r_{(3)}$ para todo $r \in R$, la counidad de A, la antípoda $\mathcal{S}_R(r) = \iota\pi(r_{(1)})\mathcal{S}_A(r_{(2)})$ y la acción y coacción de H en R dadas por,

$$h \rightharpoonup r = \mathrm{ad}(h)r = h_{(1)}r\mathcal{S}(h_{(2)}), \quad \rho(r) = (\pi \otimes \mathrm{id})\Delta(r) \quad \forall r \in R,\, h \in H.$$

Por otro lado, si R es un álgebra de Hopf en ${}^H_H\mathcal{YD}$, definimos $A = R\#H$ como el álgebra de Hopf $R \otimes H$ con la estructura dada por

$$\begin{aligned}
&(r\#h)(r'\#h') = r(h_{(1)} \cdot r')\#h_{(2)}h', && 1_A = 1_R\#1_H,\\
&\Delta(r\#h) = (r^{(1)}\#(r^{(2)})_{(-1)}h_{(1)}) \otimes ((r^{(2)})_{(0)}\#h_{(2)}), && \varepsilon(r\#h) = \varepsilon(r)\varepsilon(h),\\
&\mathcal{S}(r\#h) = (1\#\mathcal{S}_H(r_{(-1)}h))(\mathcal{S}_S(r_{(0)})\#1), && \forall r, r' \in R,\, h, h' \in H.
\end{aligned}$$

Consideramos los morfismos $\iota : H \to A$ y $\pi : A \to H$ dados por $\iota(h) = 1\#h$ y $\pi(r\#h) = \varepsilon(r)h$ respectivamente. Así, tenemos una correspondencia uno a uno entre álgebras dotadas de morfismos $A \underset{\pi}{\overset{\iota}{\leftrightarrows}} H$ tales que $\pi \circ \iota = \mathrm{id}_H$ y álgebras de Hopf trenzadas R en ${}^H_H\mathcal{YD}$.

Definición 1.4.11. Dada H un álgebra de Hopf sobre $\mathbf{k}$ y R un álgebra de Hopf en ${}^H_H\mathcal{YD}$, llamamos a $A = R\#H$ la *bosonización* o *biproducto* de R por H.

Ejemplo 1.4.12. Si H es un álgebra de Hopf cuyo corradical H_0 es una subálgebra de Hopf, entonces la filtración corradical es una filtración de álgebras de Hopf [**Mo**, 5.2.8]. Consideramos $\operatorname{gr} H$ el álgebra de Hopf graduada asociada a la filtración corradical de H. Sean $\pi : \operatorname{gr} H \to H_0$ la proyección homogénea, $\iota : H_0 \to \operatorname{gr} H$ la inclusión, y $R = (\operatorname{gr} H)^{\operatorname{co}\pi}$. Entonces R es un álgebra de Hopf en ${}^{H_0}_{H_0}\mathcal{YD}$ y $\operatorname{gr} H \simeq R\#H_0$.

Definiremos a continuación el doble de Drinfeld de dos álgebras de Hopf respecto a un apareamiento de Hopf, esta construcción se debe originalmente a [**Dr**] pero aquí seguiremos el capítulo 3 de [**Jo**].

Definición 1.4.13. Dadas dos álgebras de Hopf A y B, un *apareamiento de Hopf* (en inglés, *Hopf pairing*) entre ellas es una aplicación bilineal $(\cdot|\cdot) : A \times B \to \mathbf{k}$ que satisface las siguientes propiedades para todo $a, a' \in A$, $b, b' \in B$:

$$(1|\,1) = 1, \tag{1.7}$$

$$(aa'|\,b) = (a|\,b_{(2)})(a'|\,b_{(1)}) \tag{1.8}$$

$$(a|\,bb') = (a_{(1)}|\,b')(a_{(2)}|\,b) \tag{1.9}$$

$$(\mathcal{S}_A(a)|\,b) = (a|\,\mathcal{S}_B(b)). \tag{1.10}$$

Definición 1.4.14. [**Jo**, §3.2] Dadas A y B dos álgebras de Hopf y $(\cdot|\cdot) : A \times B^{\mathrm{cop}} \to \mathbf{k}$ un apareamiento de Hopf entre A y B^{cop}, el *doble de Drinfeld* entre A y B, es el álgebra de Hopf $A \otimes B$ con la estructura dada, para todo $a \in A$ y $b \in B$, por

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = (a'_{(1)}|\,\mathcal{S}(b_{(1)}))aa'_{(2)} \otimes b_{(2)}b'(a'_{(3)}|\,b_{(3)}),$$
$$\Delta(a \otimes b) = a_{(1)}b_{(1)} \otimes a_{(2)}b_{(2)}.$$

Si consideramos A de dimensión finita, $B = A^*$ y $D(A)$ el doble de Drinfeld de A y A^*, entonces la categoría ${}_{D(A)}\mathcal{M}$ de módulos a izquierda sobre $D(A)$ es isomorfa a la categoría de módulos de Yetter-Drinfeld ${}^A_A\mathcal{YD}$.

1.5. Extensiones de álgebras de Hopf

En esta sección daremos la definición de extensiones de álgebras de Hopf, es decir de sucesiones exactas cortas. También expondremos algunos resultados básicos y bien conocidos sobre ellas. Referimos al lector a [**A1, AD**] para un estudio más riguroso.

Definición 1.5.1. Una sucesión de morfismos de álgebras de Hopf

$$(\mathcal{C}) \qquad \mathbf{k} \to A \overset{\iota}{\hookrightarrow} C \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} B \to \mathbf{k}$$

es *exacta* si

(i) ι es inyectivo,
(ii) π es suryectivo,
(iii) $\ker \pi = C\iota(A)^+$ y
(iv) $\iota(A) = \{c \in C |\, (\pi \otimes \mathrm{id})\Delta(c) = 1 \otimes c\}$.

En tal caso decimos que C es una *extensión* del álgebra de Hopf A por el álgebra de Hopf B.

Dadas R y S dos álgebras de Hopf, denotamos por $\mathrm{Reg}(R, S)$ al grupo de morfismos lineales de R a S que son inversibles respecto al producto de convolución. Definimos además:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Reg}_1(R, S) &= \{\psi \in \mathrm{Reg}(R, S) | \psi(1) = 1\},\\
\mathrm{Reg}_\varepsilon(R, S) &= \{\psi \in \mathrm{Reg}(R, S) | \varepsilon\psi = \varepsilon\},\\
\mathrm{Reg}_{1,\varepsilon}(R, S) &= \mathrm{Reg}_1(R, S) \cap \mathrm{Reg}_\varepsilon(R, S).
\end{aligned}$$

Definición 1.5.2. [**A1**, 3.1.13, 3.1.14] Sea $\mathbf{k} \to A \overset{\iota}{\hookrightarrow} C \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} B \to \mathbf{k}$ una sucesión exacta de álgebras de Hopf. Decimos que C es una *extensión hendida* (en inglés, *cleft extension*) de A por B si se cumple alguna de las siguientes condiciones equivalentes:

(a) existe una sección $\gamma \in \mathrm{Reg}_{1,\varepsilon}(B, C)$ tal que $(\mathrm{id} \otimes \pi)\Delta\gamma = (\gamma \otimes \mathrm{id})\Delta$;
(b) existe una retracción $\xi \in \mathrm{Reg}_{1,\varepsilon}(C, A)$ tal que $\xi(ac)a\xi(c)$ para todo $a \in A$, $c \in C$;
(c) existe un morfismo de A-módulos $\xi : C \to A$ y un morfismo de B-módulos $\gamma : B \to C$ tales que $\xi\gamma = \varepsilon_B\, \mathrm{id}_A$ y $(\iota\xi) * (\gamma\pi) = \mathrm{id}_C$.

Proposición 1.5.3. [**Sch**, 2.2] *Sea* $(\mathcal{C})$ *una extensión de álgebras de Hopf de dimensión finita, entonces* $(\mathcal{C})$ *es hendida.*

Proposición 1.5.4. [**A1**, 3.3.1] *Sea* $(\mathcal{C})$ *una sucesión de morfismos de álgebras de Hopf con* ι *inyectivo y* π *suryectivo. Si* C *es de dimensión finita entonces son equivalentes:*

- $\diamond$ $(\mathcal{C})$ *es exacta;*
- $\diamond$ $\ker \pi = C\iota(A)^+$*;*
- $\diamond$ $\iota(A) = \{c \in C |\, (\pi \otimes \mathrm{id})\Delta(c) = 1 \otimes c\}$*;*

$\diamond$ $(\mathcal{C}^*)$ *es exacta, donde*

$$(\mathcal{C}^*) \qquad \mathbf{k} \to B^* \overset{\pi^*}{\hookrightarrow} C^* \overset{\iota^*}{\twoheadrightarrow} A^* \to \mathbf{k}.$$

□

1.6. Álgebras de Nichols

1.6.1. Definiciones. El álgebra de Nichols $\mathcal{B}(V)$ de un espacio vectorial trenzado (V, c) es un álgebra de Hopf trenzada graduada con propiedades muy rígidas. Hay varias definiciones alternativas (equivalentes) de álgebras de Nichols, ver [**AS1**]. Daremos a continuación tres de ellas pero no probaremos las equivalencias.

Definición 1.6.1. Dado $V \in {}^H_H\mathcal{YD}$, el *álgebra de Nichols* de V es un álgebra de Hopf graduada $\mathcal{B} = \oplus_{n\geq 0}\mathcal{B}^n$ en ${}^H_H\mathcal{YD}$ tal que $\mathcal{B}^0 \simeq \mathbf{k}$, $\mathcal{B}^1 \simeq V$ en ${}^H_H\mathcal{YD}$,

(i) $\mathcal{P}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}^1$ y
(ii) $\mathcal{B}^1$ genera a $\mathcal{B}$ como álgebra.

Para dar la segunda definición equivalente de $\mathcal{B}(V)$ introducimos las definiciones de álgebra tensorial y cotensorial. Dado un espacio vectorial trenzado $V \in {}^H_H\mathcal{YD}$ denotamos por $T(V)$ al espacio vectorial trenzado $T(V) = \oplus_{n\geq 0}T^n(V)$ con la trenza inducida por V. Sea $T(V)\underline{\otimes}T(V) = T(V) \otimes T(V)$ con la multiplicación $(m \otimes m)(\mathrm{id} \otimes c \otimes \mathrm{id})$ y $\Delta : T(V) \to T(V)\underline{\otimes}T(V)$ el único morfismo de álgebras tal que $\Delta(v) = v \otimes 1 + 1 \otimes v$ para todo $v \in V$. Entonces $T(V)$ es un álgebra de Hopf trenzada graduada respecto a la comultiplicación Δ y multiplicación $m = \oplus_{i,j}m_{i,j}$ con $m_{i,j} = \mathrm{id} : T^i(V) \otimes T^j(V) \to T^{i+j}(V)$.

De manera dual, consideramos la coálgebra cotensorial $T^c(V)$ isomorfa a $T(V)$ como espacio vectorial con la comultiplicación $\Delta = \oplus_{i,j}\Delta_{i,j}$ dada por $\Delta_{i,j} = \mathrm{id} : T^c(V)^{i+j} \to T^c(V)^i \otimes T^c(V)^j$ y la multiplicación dada por el único morfismo de coálgebras tal que $m = \mathrm{id} : \mathbf{k} \otimes V \to V$ y $m = \mathrm{id} : V \otimes \mathbf{k} \to V$, ver [**Ro, AG**].

Observación 1.6.2. Existe un único morfismo de álgebras de Hopf trenzadas $\Theta : T(V) \to T^c(V)$ tal que $\Theta|_V = \mathrm{id}_V$.

Definición 1.6.3. El *álgebra de Nichols* de V es la imagen del morfismo Θ en $T^c(V)$.

La tercera descripción de $\mathcal{B}(V)$ será como cociente del álgebra de Hopf trenzada $T(V)$: Sean $\mathfrak{S}$ el conjunto parcialmente ordenado de ideales de Hopf graduados de $T(V)$ cuya intersección con $\mathbf{k} \oplus V$ es trivial y $\mathcal{J}(V)$ el elemento maximal de $\mathfrak{S}$, entonces $\mathcal{B}(V) = T(V)/\mathcal{J}(V)$.

1.6.2. El método del levante. En esta sección expondremos una herramienta fundamental de la teoría de las álgebras de Hopf, el *método del levante*. En particular, Andruskiewitsch y Schneider aplicaron este método a la clasificación de álgebras de Hopf punteadas de dimensión finita sobre grupos abelianos de orden coprimo con 210.

Dada un álgebra de Hopf H, decimos que es *punteada* si todas sus subcoálgebras simples tienen dimensión uno, en particular tenemos $H_0 \simeq \mathbf{k}G(H)$. Si Γ es un grupo y H un álgebra de Hopf punteada tal que $G(H) \cong \Gamma$ decimos que H es punteada sobre Γ.

Sean H un álgebra de Hopf y $\{H_n\}_{n\geq 0}$ su filtración corradical. Si H es punteada entonces el corradical de H es una subálgebra de Hopf. Como vimos en el Ejemplo 1.4.12 tenemos $\operatorname{gr} H \simeq R\#\mathbf{k}G(H)$ Además, la subálgebra de R generada por V es isomorfa a $\mathcal{B}(V)$.

Los pasos del Método de Levante [**AS1**] son los siguientes:

(I) Dado un grupo finito Γ, determinar los espacios vectoriales trenzados $V \in {}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$ tales que el álgebra de Nichols asociada $\mathcal{B}(V)$ sea de dimensión finita.

(II) Para cada V del punto anterior, dar todas las álgebra de Hopf H tales que $\operatorname{gr} H = \mathcal{B}(V)\#\mathbf{k}\Gamma$.

(III) Decidir si toda álgebra de Hopf punteada H sobre Γ es una de las halladas en el paso anterior, es decir si A está generada por el primer término de su filtración corradical.

1.6.3. Álgebras Pre- y post-Nichols. Al igual que en la Subsección 1.6.1, consideramos $\mathfrak{S}$ el conjunto parcialmente ordenado de ideales de Hopf graduados de $T(V)$ cuya intersección con $\mathbf{k}\oplus V$ es trivial, y el elemento maximal $\mathcal{J}(V)$ tal que $\mathcal{B}(V) = T(V)/\mathcal{J}(V)$.

Por diferentes motivos, resulta interesante considerar álgebras de Hopf trenzadas $T(V)/I$ para diferentes $I \in \mathfrak{S}$. Estas son llamadas *álgebras pre-Nichols* [**M**]. El conjunto $\mathfrak{Pre}(V) = \{T(V)/I : I \in \mathfrak{S}\}$ está parcialmente ordenado con el orden dado por las suryecciones; luego, este conjunto es isomorfo a $(\mathfrak{S}, \subseteq)$. El elemento minimal de $\mathfrak{Pre}(V)$ es $T(V)$, y el maximal es $\mathcal{B}(V)$. De manera dual, podemos definir el conjunto parcialmente ordenado $\mathfrak{Post}(V)$ que consiste en las subálgebras de Hopf trenzadas $S = \bigoplus_{n\geq 0} S^n$ de $T^c(V)$ tales que $S^1 = V$, ordenadas por la inclusión. En este caso el elemento minimal es $\mathcal{B}(V)$ y el maximal $T^c(V)$. Llamaremos a las álgebras de este conjunto *álgebras post-Nichols*.

Observación 1.6.4. Supongamos que V es de dimensión finita, entonces la aplicación $\Phi : \mathfrak{Pre}(V) \to \mathfrak{Post}(V^*)$, $\Phi(R) = R^d$, es un anti-morfismo de conjuntos parcialmente ordenados.

Demostración. Si $R = T(V)/I \in \mathfrak{Pre}(V)$, entonces

$$R^d = I^\perp := \{y \in T(V)^d | \langle y, x\rangle = 0 \,\forall x \in I\}.$$

Por lo tanto, Φ está bien definido e invierte el orden. Además, Φ es suryectivo pues dado $S \in \mathfrak{Post}(V^*)$, $I = S^\perp$ es un ideal de Hopf graduado de $T(V)$ y $S = (T(V)/I)^d$. $\square$

Capítulo 2

Álgebras pre-Nichols distinguidas

En este capítulo recordaremos algunos de resultados de [**Ang2**] sobre álgebras de Nichols de tipo diagonal de dimensión finita e introduciremos la noción de álgebra pre-Nichols distinguida [**Ang5**] y algunas de sus propiedades que utilizaremos en los capítulos subsiguientes.

2.1. Álgebras de Nichols de tipo diagonal

Las álgebras de Nichols de tipo diagonal juegan un rol fundamental en la clasificación de las álgebras de Hopf punteadas de dimensión finita. Como ya hemos mencionado, una pregunta básica en el programa de clasificación [**AS1**] es determinar para qué espacios vectoriales trenzados el álgebra de Nichols asociada es de dimensión finita, y en caso de serlo determinar su dimensión y dar una presentación por generadores y relaciones. La primera parte fue resuelta por Heckenberger [**H2**] para el caso de tipo diagonal, quien obtuvo la lista de matrices para las cuales el álgebra de Nichols asociada tiene dimensión finita. Luego de algunos resultados parciales, Angiono determinó las relaciones que definen a las álgebras de Nichols de tipo diagonal [**Ang2**].

Un espacio vectorial trenzado (V, c) se dice de *tipo diagonal* si existe una base $x_1, \dots, x_\theta$ de V y una matriz $\mathfrak{q} = (q_{ij}) \in M_\theta(\mathbf{k}^\times)$ tal que $c(x_i \otimes x_j) = q_{ij} x_j \otimes x_i$ para todo $i, j \in \mathbb{I} = \mathbb{I}_\theta$.

En lo que sigue denotaremos por $(V, \mathfrak{q})$ en lugar de (V, c) al espacio vectorial trenzado de tipo diagonal con la trenza dada por la matriz $\mathfrak{q}$. Asimismo, utilizaremos la notación $\mathcal{J}_\mathfrak{q}$ y $\mathcal{B}_\mathfrak{q}$ en lugar de $\mathcal{J}(V)$ y $\mathcal{B}(V)$.

Sea $(V, \mathfrak{q})$ un espacio vectorial trenzado de tipo diagonal, entonces su dual (V^*, c^t) es también un espacio vectorial trenzado de tipo diagonal con matriz $\mathfrak{q}$. En efecto, si $y_1, \dots, y_\theta$ es la base dual de $x_1, \dots, x_\theta$, entonces

$$\begin{aligned}\langle c^t(y_i \otimes y_j), x_h \otimes x_k \rangle &= \langle y_i \otimes y_j, c(x_h \otimes x_k) \rangle = q_{hk} \langle y_i \otimes y_j, x_k \otimes x_h \rangle \\ &= q_{hk} \delta_{jk} \delta_{ih} = q_{ij} \langle y_j \otimes y_i, x_h \otimes x_k \rangle.\end{aligned}$$

Dada un álgebra de Hopf H, decimos que un par $(g, \chi) \in G(H) \times \mathrm{Alg}(H, \mathbf{k})$ es un *YD-par* si para todo elemento $h \in H$ se cumple

$$\chi(h) g = \chi(h_{(2)}) h_{(1)} g \mathcal{S}(h_{(3)}).$$

En particular, resulta que g es un elemento central en H.

Sean H un álgebra de Hopf, (g_i, χ_i), $i \in \mathbb{I}$, YD-pares tales que $\chi_j(g_i) = q_{ij}$, $i, j \in \mathbb{I}$. Entonces (V, c) se realiza en ${}^H_H\mathcal{YD}$ por $h \cdot x_i = \chi_i(h)x_i$ y $\rho(x_i) = g_i \otimes x_i$ para todo $i \in \mathbb{I}$, $h \in H$ [**AAGMV**], a esta realización se la llama *realización principal* de (V, c).

Consideraremos el caso $H = \mathbf{k}\mathbb{Z}^\theta$, $g_i = \alpha_i$ y $\chi_j \in \widehat{\mathbb{Z}^\theta}$ dado por $\chi_j(\alpha_i) = q_{ij}$, $i, j \in \mathbb{I}$. Aquí $\alpha_1, \dots, \alpha_\theta$ denota la base canónica de $\mathbb{Z}^\theta$.

La matriz $\mathfrak{q}$ da lugar a una $\mathbb{Z}$-forma bilineal $\mathbf{q} : \mathbb{Z}^\theta \times \mathbb{Z}^\theta \to \mathbf{k}^\times$ dada por $\mathbf{q}(\alpha_j, \alpha_k) = q_{jk}$ para todo $j, k \in \mathbb{I}$. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^\theta$, también escribimos

$$q_{\alpha\beta} = \mathbf{q}(\alpha, \beta). \tag{2.1}$$

El álgebra $T(V)$ es $\mathbb{Z}^\theta$-graduada; si $x, y \in T(V)$ son elementos homogéneos de grado $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^\theta$ respectivamente, entonces como hemos definido en (1.6) su conmutador trenzado es

$$[x, y]_c = xy - m \circ c(x \otimes y) = xy - q_{\alpha\beta} yx,$$

donde m denota la multiplicación. Decimos que x $\mathfrak{q}$-*conmuta* con una familia de elementos homogéneos $(y_i)_{i \in I}$ si $[x, y_i]_c = 0$, para todo $i \in I$.

Una herramienta crucial utilizada tanto para la clasificación [**H2**] como para la presentación [**Ang2**] de las álgebras de Nichols de tipo diagonal es la noción de grupoide de Weyl. El grupoide de Weyl, que denotaremos por $\mathcal{W}_\mathfrak{q}$ juega el papel del grupo de Weyl en el caso de las álgebras de Lie. La definición del grupoide de Weyl no es trivial y el entendimiento de su comportamiento requiere un gran esfuerzo. Sin embargo, a los efectos de esta tesis nos bastará con definir las reflexiones $s_i^\mathfrak{q} \in GL(\mathbb{Z}^\theta)$ y recordar que $\Delta_\mathfrak{q}^+$ es el conjunto de raíces positivas de $\mathcal{B}_\mathfrak{q}$.

Sea $(c_{ij}^\mathfrak{q})_{i,j \in \mathbb{I}}$ la matriz con entradas en $\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ dadas por $c_{ii}^\mathfrak{q} = 2$,

$$c_{ij}^\mathfrak{q} := -\min\left\{n \in \mathbb{N}_0 : (n+1)_{q_{ii}}(1 - q_{ii}^n q_{ij} q_{ji}) = 0\right\}, \qquad i \neq j. \tag{2.2}$$

Asumimos de ahora en adelante que $\dim \mathcal{B}_\mathfrak{q} < \infty$. Luego $c_{ij}^\mathfrak{q} \in \mathbb{Z}$ para todo $i, j \in \mathbb{I}$ [**Ro**, §3.2]. Definimos entonces las reflexiones $s_i^\mathfrak{q} \in GL(\mathbb{Z}^\theta)$ por $s_i^\mathfrak{q}(\alpha_j) = \alpha_j - c_{ij}^\mathfrak{q}\alpha_i$ para todo $i, j \in \mathbb{I}$.

Consideraremos un sistema generalizado de raíces $\Delta_\mathfrak{q} = \Delta_\mathfrak{q}^+ \cup (-\Delta_\mathfrak{q}^+)$ de $\mathcal{B}_\mathfrak{q}$ donde $\Delta_\mathfrak{q}^+$ es el conjunto de los grados de los generadores de una base de Poincaré-Birkhoff-Witt (PBW) de $\mathcal{B}_\mathfrak{q}$, contados con multiplicidades [**AA1, H1**]. El siguiente resultado relaciona las raíces positivas con un elemento de longitud máxima del grupoide de Weyl:

Proposición 2.1.1. [**CH**, Prop. 2.12] *Si* $w = \sigma_{i_1}^\mathfrak{q} \cdots \sigma_{i_N}^\mathfrak{q} \in \mathcal{W}_\mathfrak{q}$ *es tal que la longitud de* w *es* M, *entonces todas las raíces* $\beta_j = s_{i_1}^\mathfrak{q} \cdots s_{i_{j-1}}^\mathfrak{q}(\alpha_{i_j}) \in \Delta_\mathfrak{q}$ *son* *positivas y diferentes dos a dos. En particular, si el sistema de raíces es finito y w es un elemento de longitud máxima, entonces $\Delta_{\mathfrak{q}}^{+} = \{\beta_j | 1 \leq j \leq M\}$.* $\square$

2.1.1. Dobles de Drinfeld. Sea $(V, \mathfrak{q})$ el espacio vectorial trenzado de tipo diagonal realizado en ${}^{\mathbf{k}\mathbb{Z}^\theta}_{\mathbf{k}\mathbb{Z}^\theta}\mathcal{YD}$ y $x_1, \dots, x_\theta$ una base de V como antes. Entonces $T(V)$ y $\mathcal{B}_{\mathfrak{q}}$ son álgebras de Hopf en ${}^{\mathbf{k}\mathbb{Z}^\theta}_{\mathbf{k}\mathbb{Z}^\theta}\mathcal{YD}$ y podemos considerar las bosonizaciones $T(V)\#\mathbf{k}\mathbb{Z}^\theta$ y $\mathcal{B}_{\mathfrak{q}}\#\mathbf{k}\mathbb{Z}^\theta$.

Describiremos los dobles de Drinfeld de $T(V)\#\mathbf{k}\mathbb{Z}^\theta$ y $\mathcal{B}_{\mathfrak{q}}\#\mathbf{k}\mathbb{Z}^\theta$. Esta construcción se debe esencialmente a Drinfeld [**Dr**] y ha sido adaptada a lo largo de los años; aquí seguimos la presentación dada en [**H3**].

Definición 2.1.2. El doble de Drinfeld $U_{\mathfrak{q}}$ de $T(V)\#\mathbf{k}\mathbb{Z}^\theta$ es el álgebra generada por los elementos E_i, F_i, K_i, K_i^{-1}, L_i, L_i^{-1}, $i \in \mathbb{I}$, y las relaciones

$$
\begin{aligned}
XY &= YX, & X, Y &\in \{K_i^{\pm}, L_i^{\pm} : i \in \mathbb{I}\},\\
K_iK_i^{-1} &= L_iL_i^{-1} = 1, & E_iF_j - F_jE_i &= \delta_{i,j}(K_i - L_i).\\
K_iE_j &= q_{ij}E_jK_i, & L_iE_j &= q_{ji}^{-1}E_jL_i,\\
K_iF_j &= q_{ij}^{-1}F_jK_i, & L_iF_j &= q_{ji}F_jL_i.
\end{aligned}
$$

Así, $U_{\mathfrak{q}}$ es un álgebra de Hopf $\mathbb{Z}^\theta$-graduada, donde la comultiplicación y la graduación están dadas, para $i \in \mathbb{I}$, por

$$
\begin{aligned}
\Delta(K_i^{\pm 1}) &= K_i^{\pm 1} \otimes K_i^{\pm 1}, & \Delta(E_i) &= E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i,\\
\Delta(L_i^{\pm 1}) &= L_i^{\pm 1} \otimes L_i^{\pm 1}, & \Delta(F_i) &= F_i \otimes L_i + 1 \otimes F_i.\\
\deg(K_i) &= \deg(L_i) = 0, & \deg(E_i) &= \alpha_i = -\deg(F_i).
\end{aligned}
$$

Fijamos la siguiente notación:

- $U_{\mathfrak{q}}^{+}$ (respectivamente, $U_{\mathfrak{q}}^{-}$) es la subálgebra generada por E_i (respectivamente, F_i), $i \in \mathbb{I}_\theta$;
- $U_{\mathfrak{q}}^{\geq 0}$ (respectivamente, $U_{\mathfrak{q}}^{\leq 0}$) es la subálgebra generada por E_i, K_i, K_i^{-1} (respectivamente, F_i, L_i, L_i^{-1}), $i \in \mathbb{I}_\theta$,
- $U_{\mathfrak{q}}^{+0}$ (respectivamente, $U_{\mathfrak{q}}^{-0}$) es la subálgebra generada por K_i, K_i^{-1} (respectivamente, L_i, L_i^{-1}), $i \in \mathbb{I}_\theta$, las cuales son isomorfos a $\mathbf{k}\mathbb{Z}^\theta$ como álgebras de Hopf;
- $U_{\mathfrak{q}}^{0}$ es la subálgebra generada por K_i, K_i^{-1}, L_i y L_i^{-1}, $i \in \mathbb{I}_\theta$. Se puede probar que es isomorfa a $\mathbf{k}\mathbb{Z}^{2\theta}$ como álgebra de Hopf.

Entonces tenemos un isomorfismo vía la multiplicación que nos da la descomposición triangular $U_{\mathfrak{q}} \simeq U_{\mathfrak{q}}^{+} \otimes U^{0} \otimes U_{\mathfrak{q}}^{-}$. Además, $U_{\mathfrak{q}}^{+}$ y $U_{\mathfrak{q}}^{-}$ son álgebras de

Hopf en ${}^{\mathbf{k}\mathbb{Z}^\theta}_{\mathbf{k}\mathbb{Z}^\theta}\mathcal{YD}$ vía las acciones y coacciones

$$K_i \cdot E_j = q_{ij} E_j, \qquad \delta(E_i) = K_i \otimes E_i;$$
$$L_i \cdot F_j = q_{ji} F_j, \qquad \delta(F_i) = L_i \otimes F_i.$$

Consideramos el espacio vectorial trenzado de tipo diagonal $(W, c) = (V, \mathfrak{q}^t)$ con base $y_1, \dots, y_\theta$. Luego, existen isomorfismos $\psi^+ : T(V) \to U_q^+$, $\psi^- : T(W) \to U_q^-$ de álgebras de Hopf en ${}^{\mathbf{k}\mathbb{Z}^\theta}_{\mathbf{k}\mathbb{Z}^\theta}\mathcal{YD}$ dados por $\psi^+(x_i) = E_i$ y $\psi^-(y_i) = F_i$.

Por lo tanto,

$$\mathfrak{u}_\mathfrak{q} = U_\mathfrak{q}/(\psi^-(\mathcal{J}_{\mathfrak{q}^t}) + \psi^+(\mathcal{J}_\mathfrak{q}))$$

es el doble de Drinfeld de $\mathcal{B}_\mathfrak{q}\#\mathbf{k}\mathbb{Z}^\theta$. Denotamos por E_i, F_i, K_i, L_i los elementos de $\mathfrak{u}_\mathfrak{q}$ que son imágenes de sus homónimos en $U_\mathfrak{q}$. Sea $\mathfrak{u}^0$ (respectivamente, $\mathfrak{u}_\mathfrak{q}^+$, $\mathfrak{u}_\mathfrak{q}^-$) la subálgebra de $\mathfrak{u}_\mathfrak{q}$ generada por K_i, L_i, (respectivamente, por E_i, por F_i), $i \in \mathbb{I}$. Entonces $\mathfrak{u}^0 \simeq \mathbf{k}\mathbb{Z}^{2\theta}$; además

- existe una descomposición triangular $\mathfrak{u}_\mathfrak{q} \simeq \mathfrak{u}_\mathfrak{q}^+ \otimes \mathfrak{u}^0 \otimes \mathfrak{u}_\mathfrak{q}^-$;
- $\mathfrak{u}_\mathfrak{q}^+ \simeq \mathcal{B}_\mathfrak{q}$, $\mathfrak{u}_\mathfrak{q}^- \simeq \mathcal{B}_{\mathfrak{q}^t}$.

2.2. Isomorfismos de Lusztig y bases PBW

Lusztig definió automorfismos del álgebra envolvente cuántica $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ de un álgebra de Lie simple $\mathfrak{g}$, ver [**Lu2**]. Estos automorfismos satisfacen las relaciones del grupo de trenzas que cubre al grupo de Weyl de $\mathfrak{g}$. Gracias a ellos es posible construir bases PBW de $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$. En [**H3**], estos resultados se extienden a los dobles de Drinfeld de álgebras de Nichols de tipo diagonal de dimensión finita donde el grupoide de Weyl juega el papel del grupo de Weyl como ya hemos mencionado.

Sea $(V, \mathfrak{q})$ como antes; recordemos que estamos trabajando bajo la hipótesis $\dim \mathcal{B}_\mathfrak{q} < \infty$. Fijado $i \in \mathbb{I}$, definimos el espacio vectorial trenzado de tipo diagonal $\rho_i(V)$ con matriz $\rho_i(\mathfrak{q})$, donde

$$\rho_i(\mathfrak{q})_{jk} = \mathbf{q}(s_i^\mathfrak{q}(\alpha_j), s_i^\mathfrak{q}(\alpha_k)), \qquad j, k \in \mathbb{I}. \tag{2.3}$$

Para $i \neq j \in \mathbb{I}$ y $n \in \mathbb{N}_0$, definimos los elementos de $\mathfrak{u}_\mathfrak{q}$

$$E_{j,n} = (\operatorname{ad} E_i)^n E_j, \qquad F_{j,n} = (\operatorname{ad} F_i)^n F_j.$$

Sean $\underline{E}_j$, $\underline{F}_j$, $\underline{K}_j$, $\underline{L}_j$ los generadores de $\mathfrak{u}_{\rho_i(\mathfrak{q})}$. Establecemos

$$a_j(\mathfrak{q}) := (-c_{ij}^\mathfrak{q})_{q_{ii}}! \prod_{s=0}^{-c_{ij}^\mathfrak{q}-1} (q_{ii}^s q_{ij} q_{ji} - 1), \qquad j \neq i. \tag{2.4}$$

TEOREMA 2.2.1. [**H3**, 6.11] *Para cada $i \in \mathbb{I}$ existe un isomorfismo de álgebras $T_i : \mathfrak{u}_{\mathfrak{q}} \to \mathfrak{u}_{\rho_i(\mathfrak{q})}$ unívocamente determinado, para $h, j \in \mathbb{I}$, $j \neq i$, por*

$$T_i(K_h) = \underline{K}_i^{-c_{ih}^{\mathfrak{q}}} \underline{K}_h, \quad T_i(E_i) = \underline{F}_i \underline{L}_i^{-1}, \quad T_i(E_j) = \underline{E}_{j,-c_{ij}^{\mathfrak{q}}},$$
$$T_i(L_h) = \underline{L}_i^{-c_{ih}^{\mathfrak{q}}} \underline{L}_h, \quad T_i(F_i) = \underline{K}_i^{-1} \underline{E}_i, \quad T_i(F_j) = \frac{1}{a_j(\rho_i(\mathfrak{q}))} \underline{F}_{j,-c_{ij}^{\mathfrak{q}}}. \quad \square$$

DEFINICIÓN 2.2.2. Los morfismos del Teorema 2.2.1 son llamados *isomorfismos de Lusztig* de $\mathfrak{u}_{\mathfrak{q}}$.

Como antes, consideramos $w \in \mathcal{W}_{\mathfrak{q}}$ un elemento de longitud máxima del grupoide de Weyl y fijamos una expresión reducida $w = \sigma_{i_1}^{\mathfrak{q}} \sigma_{i_2}^{\mathfrak{q}} \cdots \sigma_{i_M}^{\mathfrak{q}}$. Entonces, por [**CH**], $\Delta_{\mathfrak{q}}^+ = \{\beta_k | k \in \mathbb{I}_M\}$ donde

$$\beta_k = s_{i_1}^{\mathfrak{q}} \cdots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k}). \tag{2.5}$$

Sea $N_{\beta_k} = \operatorname{ord} q_{\beta_k \beta_k}$ para todo $\beta_k \in \Delta_{\mathfrak{q}}^+$.

Definimos

$$E_{\beta_k} = T_{i_1} \cdots T_{i_{k-1}}(E_{i_k}). \tag{2.6}$$

Si $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_M) \in \mathbb{N}_0^M$, escribimos

$$\mathbf{E}^{\mathbf{h}} = E_{\beta_M}^{h_M} E_{\beta_{M-1}}^{h_{M-1}} \cdots E_{\beta_1}^{h_1}. \tag{2.7}$$

TEOREMA 2.2.3. [**HY**, 4.5, 4.8, 4.9] *El siguiente conjunto forma una base de $\mathfrak{u}_{\mathfrak{q}}^+$:*

$$\{\mathbf{E}^{\mathbf{h}} \,|\, \mathbf{h} \in \mathbb{N}_0^M,\, 0 \leq h_k < N_k,\, k \in \mathbb{I}_M\}.$$

Más aún, para cada par $1 \leq k \leq l \leq M$,

$$E_{\beta_k} E_{\beta_l} - \boldsymbol{q}(\beta_k, \beta_l) E_{\beta_l} E_{\beta_k} = \sum c_{h_{k+1} \dots h_{l-1}} E_{\beta_{l-1}}^{h_{l-1}} \dots E_{\beta_{k+1}}^{h_{k+1}} \in \mathcal{B}_{\mathfrak{q}}.$$

$\square$

La segunda parte de este teorema fue probado de manera independiente y utilizando diferentes herramientas por Angiono en [**Ang4**].

2.3. Presentación por generadores y relaciones

A continuación daremos la presentación explícita por generadores y relaciones de las álgebras de Nichols de tipo diagonal dada por Angiono. Una de las principales herramientas utilizadas para la prueba fue la existencia de los isomorfismos de Lusztig.

Introduciremos primero la definición de vértice de Cartan y fijaremos la notación $\widetilde{q}_{ij} := q_{ij} q_{ji}$.

DEFINICIÓN 2.3.1. Sea $i \in \mathbb{I}$, decimos que i es un *vértice de Cartan* de $\mathfrak{q}$ si

$$q_{ij}q_{ji} = q_{ii}^{c_{ij}^{\mathfrak{q}}}, \qquad \text{para todo } j \neq i, \tag{2.8}$$

con $c_{ij}^{\mathfrak{q}}$ como en (2.2).

El conjunto de las raíces de Cartan de $\mathfrak{q}$ es

(2.9)

$$\mathfrak{O}_{\mathfrak{q}} = \{s_{i_1}^{\mathfrak{q}} s_{i_2} \dots s_{i_k}(\alpha_i) \in \Delta_{\mathfrak{q}}^{+} : i \in \mathbb{I} \text{ es vértice de Cartan de } \rho_{i_k} \dots \rho_{i_2}\rho_{i_1}(\mathfrak{q})\}.$$

TEOREMA 2.3.2. [**Ang2**, 3.1] *Sea $(V, \mathfrak{q})$ un espacio vectorial trenzado de dimensión finita θ de tipo diagonal con matriz $\mathfrak{q} = (q_{ij})_{i,j \in \mathbb{I}}$; fijamos una base $x_1, \dots, x_\theta$ de V tal que $c(x_i \otimes x_j) = q_{ij}x_j \otimes x_i$. Sea $\boldsymbol{q}$ el bicaracter asociado a $\mathfrak{q}$ y $\mathbb{G}_n$ el grupo de raíces n-ésimas de la unidad. Asumimos que el sistema de raíces $\Delta_{\mathfrak{q}}$ es finito. Entonces $\mathcal{B}(V)$ es presentada por generadores $x_1, \dots, x_\theta$ y relaciones:*

$$x_\alpha^{N_\alpha} = 0, \qquad \forall \alpha \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}; \tag{2.10}$$

$$(\operatorname{ad}_c x_i)^{m_{ij}+1} x_j = 0, \qquad \textit{si } q_{ii}^{m_{ij}+1} \neq 1; \tag{2.11}$$

$$x_i^{N_i} = 0, \qquad \textit{si } i \textit{ no es un vértice de Cartan}; \tag{2.12}$$

$$((\operatorname{ad}_c x_i)x_j)^2 = 0, \qquad \textit{si } q_{ii} = \widetilde{q}_{ij} = q_{jj} = -1; \tag{2.13}$$

$$[(\operatorname{ad}_c x_i)(\operatorname{ad}_c x_j)x_k, x_j)]_c = 0, \qquad \begin{array}{c} \textit{si } q_{jj} = -1 \\ \widetilde{q}_{ik} = \widetilde{q}_{ij}\widetilde{q}_{jk} = 1; \end{array} \tag{2.14}$$

$$[(\operatorname{ad}_c x_i)^2 x_j, (\operatorname{ad}_c x_i)x_j]_c = 0, \qquad \begin{array}{c} \textit{si } q_{jj} = -1, q_{ii}\widetilde{q}_{ij} \in \mathbb{G}_6 \\ \textit{y } q_{ii} \in \mathbb{G}_3 \textit{ o } m_{ij} \geq 3; \end{array} \tag{2.15}$$

$$[(\operatorname{ad}_c x_i)^2(\operatorname{ad}_c x_j)x_k, (\operatorname{ad}_c x_i)x_j]_c = 0, \qquad \begin{array}{c} \textit{si } q_{ii} = \pm\widetilde{q}_{ij} \in \mathbb{G}_3, \widetilde{q}_{ik} = 1 \\ \textit{y } \; -q_{jj} = \widetilde{q}_{ji}\widetilde{q}_{jk} = 1 \\ \textit{o } q_{jj}^{-1} = \widetilde{q}_{ji} = \widetilde{q}_{jk} \neq -1; \end{array} \tag{2.16}$$

$$\begin{array}{c} [x_i, (\operatorname{ad}_c x_j)x_k]_c - \frac{1-\widetilde{q}_{jk}}{q_{kj}(1-\widetilde{q}_{ik})}[(\operatorname{ad}_C x_i)x_k, x_j]_c \\ = q_{ij}(1-\widetilde{q}_{kj})x_j(\operatorname{ad}_c x_i)x_k \end{array}, \qquad \textit{si } \widetilde{q}_{ik}, \widetilde{q}_{ij}, \widetilde{q}_{jk} \neq 1; \tag{2.17}$$

$$[[(\operatorname{ad}_c x_i)x_j, (\operatorname{ad}_c x_i)(\operatorname{ad}_c x_j)x_k]_c, x_j]_c = 0, \qquad \begin{array}{c} \textit{si } \widetilde{q}_{ik} = -1 \\ \textit{y ocurre alguna de } (\maltese); \end{array} \tag{2.18}$$

(2.19)

$$[[(\operatorname{ad}_c x_i)x_j, [(\operatorname{ad}_c x_i)x_i, (\operatorname{ad}_c x_i)(\operatorname{ad}_c x_j)x_k]_c]_c, x_j]_c = 0, \qquad \begin{array}{c} \textit{si } q_{ii} = q_{jj} = -1, \widetilde{q}_{ik} = 1 \\ \textit{y } (\widetilde{q}_{ij})^3 = (\widetilde{q}_{jk})^{-1}; \end{array}$$

(2.20)

$$[[[(\operatorname{ad}_c x_i)(\operatorname{ad}_c x_j)(\operatorname{ad}_c x_k)x_l, x_k]_c, x_j]_c, x_k]_c = 0, \qquad \begin{array}{c} \textit{si } q_{jj}\widetilde{q}_{ij} = q_{jj}\widetilde{q}_{kj} = 1, \\ (\widetilde{q}_{kj})^2 = (\widetilde{q}_{lk})^{-1} = q_{ll}, \\ q_{kk} = -1, \widetilde{q}_{ik} = \widetilde{q}_{il} = \widetilde{q}_{jl} = 1; \end{array}$$

(2.21)

$$[[(\operatorname{ad}_c x_i)(\operatorname{ad}_c x_j)x_k, x_j]_c, x_j]_c = 0, \qquad \textit{si } q_{jj} = q_{ij}^{-1}q_{ji}^{-1} = q_{jj} = \widetilde{q}_{jk} \in \mathbb{G}_3;$$

(2.22)

$$[[[(\operatorname{ad}_c x_i)(\operatorname{ad}_c x_j)x_k, x_j]_c, x_j]_c, x_j]_c = 0, \qquad \textit{si } q_{jj} = q_{ij}^{-1}q_{ji}^{-1} = q_{jj} = \widetilde{q}_{jk} \in \mathbb{G}_4;$$

(2.23)

$$[(\operatorname{ad}_c x_i)x_j, (\operatorname{ad}_c x_i)(\operatorname{ad}_c x_j)x_k]_c = 0, \qquad \begin{gathered}\textit{si } q_{ii} = -1, \widetilde{q}_{ik} = 1,\\ q_{jj}^{-1} = -\widetilde{q}_{ij}\widetilde{q}_{jk} \notin \{-1, \widetilde{q}_{ij}\};\end{gathered}$$

(2.24)

$$[(\operatorname{ad}_c x_i)^2 x_j, (\operatorname{ad}_c x_i)^2 x_k]_c = 0, \qquad \begin{gathered}\textit{si } q_{ii} \in \mathbb{G}_3, \widetilde{q}_{jk} = 1,\\ \widetilde{q}_{ij}, \widetilde{q}_{ki} \neq q_{ii}^{-1};\end{gathered}$$

(2.25)

$$\begin{aligned}&(1-\widetilde{q}_{ij})q_{jj}q_{ji}[x_i, [(\operatorname{ad}_c x_i)x_j, x_j]_c]_c\\ &\quad = (1+q_{jj})(1-q_{jj}\widetilde{q}_{ji})((\operatorname{ad}_c x_i)x_j)^2,\end{aligned} \qquad \textit{si } -q_{ii}, -q_{jj}, q_{ii}\widetilde{q}_{ij}, q_{jj}\widetilde{q}_{ji} \neq 1;$$

(2.26)
$$\begin{aligned}&[x_i, [(\operatorname{ad}_c x_i)^2 x_j, (\operatorname{ad}_c x_i)x_j]_c]_c\\ &\quad = \tfrac{1-q_{ii}\widetilde{q}_{ji}-q_{ii}^2\widetilde{q}_{ji}^2q_{ii}}{(1-q_{ii}\widetilde{q}_{ij})q_{ji}}((\operatorname{ad}_c x_i)^2 x_j)^2,\end{aligned} \qquad \begin{gathered}\textit{si } q_{jj} = -1, q_{ii}\widetilde{q}_{ij} \in \mathbb{G}_6,\\ \textit{y } m_{ij} \in \{4,5\} \textit{ o } m_{ij} = 3, q_{ii} \in \mathbb{G}_4;\end{gathered}$$

(2.27)
$$[x_{3\alpha_i+2\alpha_j}, (\operatorname{ad}_c x_i)x_j]_c = 0, \qquad \begin{gathered}\textit{si } 4\alpha_i + 3\alpha_j \notin \Delta_{\mathfrak{q}}^+, q_{jj} = -1 \textit{ o } m_{ji} \geq 2\\ \textit{y además } m_{ij} \geq 3 \textit{ o } m_{ij} = 2, q_{ii} \in \mathbb{G}_3;\end{gathered}$$

(2.28)
$$[(\operatorname{ad}_c x_i)^2 x_j, x_{3\alpha_i+2\alpha_j}]_c = 0, \qquad \begin{gathered}\textit{si } 3\alpha_i + 2\alpha_j \in \Delta_{\mathfrak{q}}^+, 5\alpha_i + 3\alpha_j \notin \Delta_{\mathfrak{q}}^+,\\ q_{ii}^3\widetilde{q}_{ij}, q_{ii}^4\widetilde{q}_{ij} \neq 1;\end{gathered}$$

(2.29)
$$[x_{4\alpha_i+3\alpha_j}, (\operatorname{ad}_c x_i)x_j]_c = 0, \qquad \textit{si } 4\alpha_i + 3\alpha_j \in \Delta_{\mathfrak{q}}^+, 5\alpha_i + 4\alpha_j \notin \Delta_{\mathfrak{q}}^+;$$

(2.30)

$$[[(\operatorname{ad}_c x_i)^3 x_j, (\operatorname{ad}_c x_i)^2 x_j]_c, (\operatorname{ad}_c x_i)^2 x_j]_c = 0, \quad \textit{si } 5\alpha_i + 2\alpha_j \in \Delta_{\mathfrak{q}}^+, 7\alpha_i + 3\alpha_j \notin \Delta_{\mathfrak{q}}^+;$$

(2.31)
$$[x_{2\alpha_i+\alpha_j}, x_{4\alpha_i+3\alpha_j}]_c = \omega\, x_{3\alpha_i+2\alpha_j}^2, \qquad \textit{si } q_{jj} = -1, 5\alpha_i + 4\alpha_j \in \Delta_{\mathfrak{q}}^+;$$

donde $\widetilde{q}_{rs} := q_{rs}q_{sr}$, $\nu = (1-\widetilde{q}_{ij})(1-q_{ii}^4\widetilde{q}_{ij}) - (1-q_{ii}\widetilde{q}_{ij})(1+q_{ii})q_{ii}\widetilde{q}_{ij}$,

$$\omega = \frac{((1-\widetilde{q}_{ij})(1-q_{ii}^6\widetilde{q}_{ij}^5) - \nu\, q_{ii}\widetilde{q}_{ij}) - (1+q_{ii})(1-q_{ii}\widetilde{q}_{ij})(1+\widetilde{q}_{ij}+q_{ii}\widetilde{q}_{ij}^2)q_{ii}^6\widetilde{q}_{ij}^4}{\nu\, q_{ii}^3 q_{ij}^2 q_{ji}^3},$$

(✠)
$$\begin{cases} q_{ii} &= q_{jj} = -1, (\widetilde{q}_{ij})^2 = (\widetilde{q}_{jk})^{-1}\\ q_{kk} &= q_{jj} = \widetilde{q}_{jk} = -1, q_{ii} = -\widetilde{q}_{ij} \in \mathbb{G}_3\\ q_{ii} &= q_{jj} = q_{kk} = -1, \widetilde{q}_{ij} = \widetilde{q}_{kj} \in \mathbb{G}_3\\ q_{ii} &= q_{kk} = -1, q_{jj} = -\widetilde{q}_{kj} = (\widetilde{q}_{ij})^{\pm 1} \in \mathbb{G}_3;\end{cases}$$

□

2.4. Álgebras pre-Nichols distinguidas

En esta sección daremos la definición y algunas propiedades de las llamadas álgebras pre-Nichols distinguidas introducidas en [**Ang2**] y estudiadas en [**Ang5**].

Fijamos $(V, \mathfrak{q})$ un espacio vectorial trenzado de tipo diagonal tal que $\mathcal{B}_{\mathfrak{q}}$ tiene dimensión finita. Como antes denotaremos por $\mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}$ al conjunto de raíces de Cartan de $\mathfrak{q}$, ver (2.9).

Sea $\mathcal{I}_{\mathfrak{q}} \subset \mathcal{J}_{\mathfrak{q}}$ el ideal de $T(V)$ generado por todas las relaciones del Teorema 2.3.2, salvo las siguientes consideraciones:

- se excluyen las potencias de vectores raíz $E_\alpha^{N_\alpha}$, $\alpha \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}$,
- se agregan las relaciones de Serre cuánticas $(\operatorname{ad}_c E_i)^{1-c_{ij}^{\mathfrak{q}}} E_j$ para aquellos $i \neq j$ tales que $q_{ii}^{c_{ij}^{\mathfrak{q}}} = q_{ij}q_{ji} = q_{ii}$.

Definición 2.4.1. [**Ang5**, 3.1] El *álgebra pre-Nichols distinguida* de V es

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}} = T(V)/\mathcal{I}_{\mathfrak{q}}.$$

Sea $\widetilde{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{q}} = \mathbf{U}_{\mathfrak{q}}/(\psi^-(\mathcal{I}_{\mathfrak{q}^t}) + \psi^+(\mathcal{I}_{\mathfrak{q}}))$ el doble de Drinfeld de $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}\#\mathbf{k}\mathbb{Z}^\theta$. Entonces existe una descomposición triangular $\widetilde{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{q}} \simeq \widetilde{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{q}}^+ \otimes \widetilde{\mathfrak{u}}^0 \otimes \widetilde{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{q}}^-$ donde $\widetilde{\mathfrak{u}}^0 \simeq \mathfrak{u}^0 \simeq \mathbf{k}\mathbb{Z}^{2\theta}$, $\widetilde{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{q}}^+ \simeq \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$ y $\widetilde{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{q}}^- \simeq \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}^t}$ como ha sido demostrado en [**Ang5**].

Si β_k es como en (2.5), $k \in \mathbb{I}_M$, entonces escribimos

$$\widetilde{N}_k = \begin{cases} N_k & \text{si } \beta_k \notin \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}, \\ \infty & \text{si } \beta_k \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}. \end{cases}$$

Para simplificar la notación, definimos

$$\mathtt{H} = \{\mathbf{h} \in \mathbb{N}_0^M : 0 \leq h_k < \widetilde{N}_k, \text{ para todo } k \in \mathbb{I}_M\}. \tag{2.32}$$

De manera análoga al caso Nichols, valen los siguientes resultados:

Teorema 2.4.2. [**Ang5**, 3.4] *Para todo $i \in \mathbb{I}$ existen isomorfismos de álgebras $\widetilde{T}_i : \widetilde{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{q}} \to \widetilde{\mathfrak{u}}_{\rho_i(\mathfrak{q})}$ que inducen isomorfismos $T_i : \mathfrak{u}_{\mathfrak{q}} \to \mathfrak{u}_{\rho_i(\mathfrak{q})}$. Por lo tanto, los elementos E_{β_k}, $\mathbf{E}^{\mathbf{h}}$ en* (2.6), (2.7) *tienen sentido en $\widetilde{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{q}}$.*

Teorema 2.4.3. [**Ang5**, 3.6,3.15] *El conjunto $\{\mathbf{E}^{\mathbf{h}} \,|\, \mathbf{h} \in \mathtt{H}\}$ es una base de $\widetilde{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{q}}^+$. Además $E_{\beta_k}E_{\beta_l} - \boldsymbol{q}(\beta_k, \beta_l)E_{\beta_l}E_{\beta_k} = \sum c_{h_{k+1}\dots h_{l-1}} E_{\beta_{l-1}}^{h_{l-1}} \dots E_{\beta_{k+1}}^{h_{k+1}} \in \mathcal{B}_{\mathfrak{q}}$.* □

Como antes, tenemos un isomorfismo $\widetilde{\psi} : \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}} \to \widetilde{\mathfrak{u}}_q^+$ de álgebras de Hopf en la categoría ${}^{\mathbf{k}\mathbb{Z}^\theta}_{\mathbf{k}\mathbb{Z}^\theta}\mathcal{YD}$, entonces podemos definir

$$x_{\beta_k} = \widetilde{\psi}^{-1}(E_{\beta_k}), \qquad k \in \mathbb{I}_M; \qquad \mathbf{x}^{\mathbf{h}} = \widetilde{\psi}^{-1}(\mathbf{E}^{\mathbf{h}}), \qquad \mathbf{h} \in \mathtt{H}.$$

Notemos que E_{β_k} es una sucesión bien definida de conmutadores trenzados de los elementos E_i, $i \in \mathbb{I}$; luego x_{β_k} es la misma sucesión de conmutadores trenzados en los elementos x_i. Además, $\mathbf{x}^{\mathbf{h}} = x_{\beta_M}^{h_M} x_{\beta_{M-1}}^{h_{M-1}} \cdots x_{\beta_1}^{h_1}$ y

$$\mathtt{B} = \{\mathbf{x}^{\mathbf{h}} \,|\, \mathbf{h} \in \mathtt{H}\}$$

es una base de $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$.

La serie de Hilbert de un espacio vectorial graduado $V = \oplus_{n\in\mathbb{N}_0} V^n$ es $\mathcal{H}_V = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \dim V^n \, T^n \in \mathbb{Z}[[T]]$. Entonces, por el Teorema 2.4.3, tenemos

$$\text{(2.33)} \qquad \operatorname{GKdim} \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}} = |\mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}|, \qquad \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}} = \prod_{\beta_k \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}} \frac{1}{1 - T^{\deg \beta}} \cdot \prod_{\beta_k \notin \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}} \frac{1 - T^{N_\beta \deg \beta}}{1 - T^{\deg \beta}}.$$

A continuación introduciremos algo de notación de [**Ang5**] y [**AY**] que será de gran utilidad en capítulos subsiguientes. Expondremos además algunos resultados útiles presentados en estos trabajos.

Dados $(V, \mathfrak{q})$, $\mathcal{B}_{\mathfrak{q}}$ y $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$ como antes, para $i \in \mathbb{I}_M$ definimos los conjuntos

$$\begin{aligned} B^i &= \langle \{x_{\beta_i}^{h_i} \cdots x_{\beta_1}^{h_1} | 0 \le h_j < N_j\} \rangle \subseteq \mathcal{B}_{\mathfrak{q}}, \\ \mathbf{B}^i &= \langle \{x_{\beta_M}^{h_M} \cdots x_{\beta_i}^{h_i} | 0 \le h_j < N_j\} \rangle \subseteq \mathcal{B}_{\mathfrak{q}}, \\ \widetilde{B}^i &= \langle \{x_{\beta_i}^{h_i} \cdots x_{\beta_1}^{h_1} | 0 \le h_j < \widetilde{N}_j\} \rangle \subseteq \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}, \\ \widetilde{\mathbf{B}}^i &= \langle \{x_{\beta_M}^{h_M} \cdots x_{\beta_i}^{h_i} | 0 \le h_j < \widetilde{N}_j\} \rangle \subseteq \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}. \end{aligned}$$

Los subconjuntos B^i y $\mathbf{B}^i$ son subálgebras coideales de $\mathcal{B}_{\mathfrak{q}}$:

Proposición 2.4.4. [**AY**, 4.2, 4.11] *B^i (respectivamente, $\mathbf{B}^i$) es una subálgebra coideal a derecha (respectivamente, a izquierda) de $\mathcal{B}_{\mathfrak{q}}$.* □

Lo mismo sucede con el subconjunto $\widetilde{B}^i$ como consecuencia de las proposiciones que siguen:

Proposición 2.4.5. [**Ang5**, 4.1] *Si $\beta \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}$ entonces $x_\beta^{N_\beta}$ $\mathfrak{q}$-conmuta con todo elemento de $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$.* □

Proposición 2.4.6. [**Ang5**, 4.9] *Si $\beta_i \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}$, existe $X(n_1, \dots, n_{i-1}) \in \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$ tal que*

$$\begin{aligned} \underline{\Delta}(x_{\beta_i}^{N_{\beta_i}}) &= x_{\beta_i}^{N_{\beta_i}} \otimes 1 + 1 \otimes x_{\beta_i}^{N_{\beta_i}} \\ &\quad + \sum_{n_k \in \mathbb{N}_0} x_{\beta_{i-1}}^{n_{i-1} N_{\beta_{i-1}}} \dots x_{\beta_1}^{n_1 N_{\beta_1}} \otimes X(n_1, \dots, n_{i-1}). \qquad \square \end{aligned}$$

Corolario 2.4.7. *$\widetilde{B}^i$ es una subálgebra coideal a derecha de $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$.* □

Definamos ahora el subconjunto

$$C^i = \langle \{x_{\beta_M}^{h_M} \cdots x_{\beta_1}^{h_1} \in \mathcal{B}_{\mathfrak{q}} | \, \exists j > i \text{ tal que } h_j \neq 0\} \rangle \subseteq \mathcal{B}_{\mathfrak{q}}.$$

En el caso Nichols, Angiono y Yamane [**AY**, 4.3] probaron que para $i \in \mathbb{I}$ vale

$$\underline{\Delta}(x_{\beta_i}) \in x_{\beta_i} \otimes 1 + 1 \otimes x_{\beta_i} + B^{i-1} \otimes C^i.$$

Siguiendo la prueba dada en dicho caso podemos demostrar el resultado análogo en el caso pre-Nichols:

PROPOSICIÓN 2.4.8. *Dado $i \in \mathbb{I}$ consideramos el subconjunto $\widetilde{C}^i$ de $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$ dado por $\widetilde{C}^i = \langle \{ x_{\beta_M}^{h_M} \cdots x_{\beta_1}^{h_1} \in \mathtt{B} | \, \exists j > i \text{ s.t. } h_j \neq 0 \} \rangle$. Entonces*

$$\underline{\Delta}(x_{\beta_i}) \in x_{\beta_i} \otimes 1 + 1 \otimes x_{\beta_i} + \widetilde{B}^{i-1} \otimes \widetilde{C}^i. \tag{2.34}$$

DEMOSTRACIÓN. Por el Corolario 2.4.7 tenemos que

$$\underline{\Delta}(x_{\beta_i}) = x_{\beta_i} \otimes 1 + 1 \otimes x_{\beta_i} + \sum x_{\beta_{i-1}}^{h_{i-1}} \dots x_{\beta_1}^{h_1} \otimes X_{h_1,\dots,h_{i-1}},$$

para algún $X_{h_1,\dots,h_{i-1}} \in \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$. Podemos expresar estos elementos como combinación lineal de elementos en $\mathtt{B}$, digamos

$$X_{h_1,\dots,h_{i-1}} = \sum c_{k_1 \dots k_M}^{h_1 \dots h_{i-1}} x_{\beta_M}^{k_M} \dots x_{\beta_1}^{k_1}.$$

Supongamos que $c_{k_1 \dots k_M}^{h_1 \dots h_{i-1}} \neq 0$, como $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$ es $\mathbb{Z}^\theta$-graduada, $\beta_i = \sum k_j \beta_j + \sum h_l \beta_l$. Por la segunda parte del Teorema 2.4.3, teniendo en cuenta que $1 \leq l \leq i-1$, tenemos que existe $j > i$ tal que $k_j \neq 0$. $\square$

THEOREM 2.4.9. [**Ang5**, 3.19] *Las álgebras $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$ y $\widetilde{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{q}}$ son noetherianas.* $\square$

TEOREMA 2.4.10. [**Ang5**, 4.10, 4.13] *Sea $Z_{\mathfrak{q}}$ la subálgebra de $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$ generada por $x_\beta^{N_\beta}$, $\beta \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}$, entonces $Z_{\mathfrak{q}}$ es una subálgebra de Hopf trenzada normal de $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$. Más aún $Z_{\mathfrak{q}} = {}^{co\,\pi}\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}} := \{x \in \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}} | (\pi \otimes \mathrm{id})\underline{\Delta}(x) = 1 \otimes x\}$ donde π es la proyección de $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$ en $\mathcal{B}_{\mathfrak{q}}$.* $\square$

Capítulo 3

Álgebra de Lusztig y álgebra cuántica de potencias divididas

Dada un álgebra de Lie semisimple de dimensión finita, Lusztig definió un álgebra de potencias divididas $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ que contiene al grupo cuántico pequeño $\mathfrak{u}_q(\mathfrak{g})$, ver[**Lu2, Lu4**]. Como hemos mencionado anteriormente, dada $\mathcal{B}_{\mathfrak{q}}$ un álgebra de Nichols de tipo diagonal de dimensión finita asociada a una matriz $\mathfrak{q}$, el doble de Drinfeld $\mathfrak{u}_{\mathfrak{q}}$ generaliza el concepto de grupo cuántico pequeño. Consideramos el dual graduado del álgebra pre-Nichols distinguida $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$, a quien llamaremos el *álgebra de Lusztig* y notaremos $\mathcal{L}_{\mathfrak{q}}$. En este caso, el doble de Drinfeld es el álgebra cuántica de potencias divididas $\mathcal{U}_{\mathfrak{q}}$ que naturalmente generaliza al álgebra $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ considerada por Lusztig.

A lo largo de este capítulo daremos las definiciones de álgebra de Lusztig y álgebra cuántica de potencias divididas. Además las presentaremos por generadores y relaciones, calcularemos su dimensión de Gelfand-Kirillov y probaremos que son noetherianas.

Las definiciones y resultados expuestos a lo largo de este capítulo han sido incluidos en el artículo [**AAR1**].

3.1. Álgebra de Lusztig

Como antes, consideramos una matriz $\mathfrak{q} = (q_{ij}) \in M_\theta(\mathbf{k}^\times)$ tal que el álgebra de Nichols $\mathcal{B}_{\mathfrak{q}}$ asociada sea de dimensión finita. Sean $(V, \mathfrak{q})$ el espacio vectorial trenzado de tipo diagonal correspondiente a $\mathfrak{q}$ y $(V^*, \mathfrak{q})$ su espacio trenzado dual.

Definimos, como en [**AAGTV**, 3.3.4], el *álgebra de Lusztig* $\mathcal{L}_{\mathfrak{q}}$ de $(V, \mathfrak{q})$ como el dual graduado del álgebra pre-Nichols distinguida $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$ correspondiente a $(V^*, \mathfrak{q})$, es decir $\mathcal{L}_{\mathfrak{q}} := \widetilde{\mathcal{B}}^d$. Notemos que $\mathcal{B}_{\mathfrak{q}} \hookrightarrow \mathcal{L}_{\mathfrak{q}}$ ya que $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$ se proyecta sobre $\mathcal{B}_{\mathfrak{q}}$ y $\mathcal{B}_{\mathfrak{q}}^d \simeq \mathcal{B}_{\mathfrak{q}}$.

3.1.1. Presentación por generadores y relaciones.

En lo que sigue consideraremos la forma bilineal $\langle\, , \,\rangle : \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}} \times \mathcal{L}_{\mathfrak{q}} \to \mathbf{k}$ que surge de la identificación $V^* \otimes V^* \simeq (V \otimes V)^*$, la cual satisface para todo $x, x' \in \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$, $y, y' \in \mathcal{L}_{\mathfrak{q}}$

$$\langle y, xx' \rangle = \langle y^{(2)}, x \rangle \langle y^{(1)}, x' \rangle \qquad \text{y} \qquad \langle yy', x \rangle = \langle y, x^{(2)} \rangle \langle y', x^{(1)} \rangle.$$

Para cada $\mathbf{h} \in \mathtt{H}$, cf. (2.32), definimos $\mathbf{y_h} \in \mathcal{L}_\mathfrak{q}$ mediante $\langle \mathbf{y_h}, \mathbf{x^j} \rangle = \delta_{\mathbf{h},\mathbf{j}}$, $\mathbf{j} \in \mathtt{H}$. Luego $\mathbf{y_h} \in \mathcal{L}_\mathfrak{q}$ y $\{\mathbf{y_h} \,|\, \mathbf{h} \in \mathtt{H}\}$ es una base de $\mathcal{L}_\mathfrak{q}$.

Si denotamos por $(\mathbf{h}_k)_{k \in \mathbb{I}_M}$ a los elementos de la base canónica de $\mathbb{Z}^M$, entonces escribimos $y_\beta^{(n)} := \mathbf{y}_{n\mathbf{h}_k}$ para $k \in \mathbb{I}_M$ y $\beta = \beta_k \in \Delta_\mathfrak{q}^+$.

En analogía con los subconjuntos de $\widetilde{\mathcal{B}}_\mathfrak{q}$ presentados en la sección 2.4, definimos los siguientes subespacios de $\mathcal{L}_\mathfrak{q}$:

$$\widetilde{L}^i = \langle \{ y_{\beta_1}^{(h_1)} \cdots y_{\beta_i}^{(h_i)} | 0 \leq h_j < \widetilde{N}_j \} \rangle \subseteq \mathcal{L}_\mathfrak{q},$$
$$\widetilde{\mathbf{L}}^i = \langle \{ y_{\beta_i}^{(h_i)} \cdots y_{\beta_M}^{(h_M)} | 0 \leq h_j < \widetilde{N}_j \} \rangle \subseteq \mathcal{L}_\mathfrak{q}.$$

El siguiente lema sobre el comportamiento de los elementos del álgebra pre-Nichols $\widetilde{\mathcal{B}}_\mathfrak{q}$ respecto a la comultiplicación es de vital importancia para los resultados subsiguientes.

Lema 3.1.1. [**AAR1**, 4.3] *Sean x, x_1 y x_2 elementos de $\mathtt{B}$ (la base PBW de $\widetilde{\mathcal{B}}_\mathfrak{q}$). Escribimos $\underline{\Delta}(x)$ como combinación lineal de $\{a \otimes b | a, b \in \mathtt{B}\}$ y asumimos que $x_1 \otimes x_2$ tiene coeficiente no nulo en dicha combinación de $\underline{\Delta}(x)$. Si además $x_1 x_2$, la concatenación de x_1 y x_2, pertenece a $\mathtt{B}$, entonces $x = x_1 x_2$.*

Demostración. Suponemos que $x = x_{\beta_i}^{h_i} \cdots x_{\beta_1}^{h_1}$ con $h_i > 0$ y notamos $m(x)$ al mínimo $j \in \mathbb{N}$ tal que $h_j \neq 0$. Sea

$$\mathcal{D}(x) = \sum_{j=1}^{i} \sum_{t=1}^{h_j} \binom{h_j}{t}_{q_{\beta_j \beta_j}} x_{\beta_i}^{h_i} \cdots x_{\beta_j}^{t} \otimes x_{\beta_j}^{h_j - t} \cdots x_{\beta_1}^{h_1} + 1 \otimes x,$$

observemos que si $x_1 \otimes x_2 \in \mathcal{D}(x)$ entonces $x = x_1 x_2$.

Recordemos la definición del subespacio $\widetilde{C}^i \subseteq \widetilde{\mathcal{B}}_\mathfrak{q}$,

$$\widetilde{C}^i = \langle \{ x_{\beta_M}^{h_M} \cdots x_{\beta_1}^{h_1} \in \mathtt{B} | \, \exists j > i \text{ s.t. } h_j \neq 0 \} \rangle.$$

Ahora, si $x_1 \otimes x_2 \in \sum_{u \in \widetilde{B}^i} u \otimes \widetilde{C}^{m(u)}$ obtenemos que $x_1 x_2 \notin \mathtt{B}$.

En consecuencia, para demostrar el lema basta probar

$$\underline{\Delta}(x) \in \mathcal{D}(x) + \sum_{u \in \widetilde{B}^i} u \otimes \widetilde{C}^{m(u)}.$$

Para ello procederemos por inducción en i. Si $i = 1$ tenemos $x = x_{\beta_1}^h$. Sabemos que x_{β_1} es primitivo, por lo tanto

$$\underline{\Delta}(x_{\beta_1}^h) = \sum_{0 \leq k \leq h} \binom{h}{k}_{q_{\beta_1 \beta_1}} x_{\beta_1}^k \otimes x_{\beta_1}^{h-k} = \mathcal{D}(x_{\beta_1}^h).$$

Sea $i > 1$. Ahora haremos inducción en h_i. Fijamos $x' = x_{\beta_i}^{h_i - 1} x_{\beta_{i-1}}^{h_{i-1}} \cdots x_{\beta_1}^{h_1}$ de modo tal que $x = x_{\beta_i} x'$. Notemos que, por 2.4.8,

$$\underline{\Delta}(x_{\beta_i}) \in x_{\beta_i} \otimes 1 + 1 \otimes x_{\beta_i} + \widetilde{B}^{i-1} \otimes \widetilde{C}^i. \tag{3.1}$$

Luego, por las hipótesis inductivas y (3.1) vale

$$\begin{aligned}\underline{\Delta}(x) &= \underline{\Delta}(x_{\beta_i})\underline{\Delta}(x') \\ &\in \big(x_{\beta_i}\otimes 1 + 1\otimes x_{\beta_i} + \widetilde{B}^{i-1}\otimes \widetilde{C}^{i}\big)\Big(\mathcal{D}(x') + \sum_{u\in \widetilde{B}^{i}} u\otimes \widetilde{C}^{m(u)}\Big).\end{aligned}$$

Analizaremos término a término el lado derecho de esta ecuación y probaremos que está contenido en $\mathcal{D}(x) + \sum_{u\in\widetilde{B}^i} u\otimes \widetilde{C}^{m(u)}$.

En primer lugar notemos que

$$(x_{\beta_i}\otimes 1 + 1\otimes x_{\beta_i})\mathcal{D}(x') \in \mathcal{D}(x) + \sum_{u\in \widetilde{B}^{i}} u\otimes \widetilde{C}^{m(u)}.$$

En efecto, si $h_i = 1$ el lado izquierdo es igual a

$$\begin{aligned} x_{\beta_i}\otimes x' + 1\otimes x_{\beta_i}x' &+ \sum_{j=1}^{i-1}\sum_{t=1}^{h_j}\binom{h_j}{t}_{q_{\beta_j\beta_j}} x_{\beta_i}^{h_i}\cdots x_{\beta_j}^{t}\otimes x_{\beta_j}^{h_j-t}\cdots x_{\beta_1}^{h_1} \\ &+ \upsilon\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{t=1}^{h_j}\binom{h_j}{t}_{q_{\beta_j\beta_j}} x_{\beta_{i-1}}^{h_{i-1}}\cdots x_{\beta_j}^{t}\otimes x_{\beta_i}x_{\beta_j}^{h_j-t}\cdots x_{\beta_1}^{h_1} \\ &\in \sum_{j=1}^{i}\sum_{t=1}^{h_j}\binom{h_j}{t}_{q_{\beta_j\beta_j}} x_{\beta_i}^{h_i}\cdots x_{\beta_j}^{t}\otimes x_{\beta_j}^{h_j-t}\cdots x_{\beta_1}^{h_1} + \sum_{u\in\widetilde{B}^i} u\otimes \widetilde{C}^{i-1};\end{aligned}$$

con $\upsilon \in \mathbf{k}$. En el caso $h_i > 1$, tenemos

$$\begin{aligned}(x_{\beta_i}\otimes 1 + 1\otimes x_{\beta_i})\mathcal{D}(x') &= \sum_{j=1}^{i-1}\sum_{t=1}^{h_j}\binom{h_j}{t}_{q_{\beta_j\beta_j}} x_{\beta_i}^{h_i}\cdots x_{\beta_j}^{t}\otimes x_{\beta_j}^{h_j-t}\cdots x_{\beta_1}^{h_1} \\ &+ \upsilon\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{t=1}^{h_j}\binom{h_j}{t}_{q_{\beta_j\beta_j}} x_{\beta_i}^{h_i-1}\cdots x_{\beta_j}^{t}\otimes x_{\beta_i}x_{\beta_j}^{h_j-t}\cdots x_{\beta_1}^{h_1} + x_{\beta_i}\otimes x' + 1\otimes x_{\beta_i}x' \\ &+ \sum_{t=1}^{h_i-1} q_{\beta_i\beta_i}^{t}\binom{h_i-1}{t}_{q_{\beta_i\beta_i}} x_{\beta_i}^{t}\otimes x_{\beta_i}^{h_i-t}\cdots x_{\beta_1}^{h_1} + \sum_{t=2}^{h_i}\binom{h_i-1}{t-1}_{q_{\beta_i\beta_i}} x_{\beta_i}^{t}\otimes x_{\beta_i}^{h_i-t}\cdots x_{\beta_1}^{h_1}.\end{aligned}$$

Además, para $h_i > 1$, $1 \le t < h_i$ vale

$$\binom{h_i-1}{t-1}_{q_{\beta_i\beta_i}} + q_{\beta_i\beta_i}^{t}\binom{h_i-1}{t}_{q_{\beta_i\beta_i}} = \binom{h_i}{t}_{q_{\beta_i\beta_i}}.$$

Por lo tanto $(x_{\beta_i}\otimes 1 + 1\otimes x_{\beta_i})\mathcal{D}(x')$ pertenece a

$$\sum_{j=1}^{i}\sum_{t=1}^{h_j}\binom{h_j}{t}_{q_{\beta_j\beta_j}} x_{\beta_i}^{h_i}\cdots x_{\beta_j}^{t}\otimes x_{\beta_j}^{h_j-t}\cdots x_{\beta_1}^{h_1} + \sum_{u\in\widetilde{B}^i} u\otimes \widetilde{C}^{i-1}.$$

Por otro lado $(\widetilde{B}^{i-1} \otimes \widetilde{C}^i)\mathcal{D}(x') \subset \widetilde{B}^{i-1}\widetilde{B}^i \otimes \widetilde{C}^i\widetilde{B}^i$. Como $\widetilde{B}^{i-1} \subset \widetilde{B}^i$, $\widetilde{B}^i$ es una subálgebra y $\widetilde{C}^i z \subset \widetilde{C}^i$ para todo $z \in \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$ (ver [**Ang5**, 3.15]), sigue que

$$(\widetilde{B}^{i-1} \otimes \widetilde{C}^i)\mathcal{D}(x') \subset \widetilde{B}^{i-1}\widetilde{B}^i \otimes \widetilde{C}^i\widetilde{B}^i \subset \widetilde{B}^i \otimes \widetilde{C}^i.$$

Además, si $u \in \widetilde{B}^i$ entonces $x_{\beta_i}u \in \widetilde{B}^i$ y $m(u) = m(x_{\beta_i}u)$, entonces

$$x_{\beta_i}u \otimes \widetilde{C}^{m(u)} = x_{\beta_i}u \otimes \widetilde{C}^{m(x_{\beta_i}u)} \quad \text{y} \quad u \otimes x_{\beta_i}\widetilde{C}^{m(u)} \subset u \otimes \widetilde{C}^{m(u)}.$$

Por último, $\widetilde{B}^{i-1}u \otimes \widetilde{C}^i\widetilde{C}^{m(u)} \subset \widetilde{B}^i \otimes \widetilde{C}^i \subset \sum_{v\in\widetilde{B}^i} v \otimes \widetilde{C}^{m(v)}$ para todo $u \in \widetilde{B}^i$. Así queda demostrado el paso inductivo y el lema. □

COROLARIO 3.1.2. *Si $\beta \in \Delta_{\mathfrak{q}}^+$, entonces*

$$y_\beta^{(r)} = \frac{y_\beta^r}{(r)^!_{q_{\beta\beta}}}, \qquad r < N_\beta = \operatorname{ord} q_{\beta\beta}; \tag{3.2}$$

$$y_\beta^{(n)} = \frac{(y_\beta^{(N_\beta)})^s}{s!} y_\beta^{(r)}, \qquad \beta \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}},\ n = sN_\beta + r,\ r < N_\beta. \tag{3.3}$$

DEMOSTRACIÓN. El caso $r = 1$ es trivial. Inductivamente, suponemos que $y_\beta^{r-1} = (r-1)^!_{q_{\beta\beta}} y_\beta^{(r-1)}$. Sea $x = \mathbf{x}^{\mathbf{h}} \in \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$ tal que

$$\langle y_\beta^r, x\rangle = \langle y_\beta, x^{(1)}\rangle\langle y_\beta^{r-1}, x^{(2)}\rangle \neq 0,$$

por el Lema 3.1.1 y la hipótesis inductiva tenemos $x = x_\beta^r$. Más aún,

$$\langle y_\beta^r, x_\beta^r\rangle = \langle y_\beta, (x_\beta^r)^{(1)}\rangle\langle y_\beta^{r-1}, (x_\beta^r)^{(2)}\rangle = (r)_{q_{\beta\beta}}(r-1)^!_{q_{\beta\beta}} = (r)^!_{q_{\beta\beta}}.$$

La segunda ecuación es inmediata pues $\langle y_\beta^{(N_\beta)} y_\beta^{(r)}, x_\beta^{N_\beta+r}\rangle = 1$ y $\langle (y_\beta^{(N_\beta)})^s, x_\beta^{sN_\beta}\rangle = s!$. □

Como ya hemos mencionado, la motivación para definir estas álgebras surge de las álgebras $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ definidas por Lusztig. En el corolario anterior vemos que, si bien los elementos $y_\beta^{(n)}$ se definen utilizando la dualidad entre las álgebras pre-Nichols y post-Nichols, tienen la propiedad de ser "potencias divididas".

A continuación probaremos un Lema que resultará crucial para la presentación por generadores y relaciones de las álgebras de Lusztig.

LEMA 3.1.3. *Sean $i \in \mathbb{I}_M$ y $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_M) \in \mathtt{H}$, entonces*

$$\mathbf{y}_{\mathbf{h}} = y_{\beta_1}^{(h_1)} \cdots y_{\beta_M}^{(h_M)}. \tag{3.4}$$

Luego, $\{y_{\beta_1}^{(h_1)} \cdots y_{\beta_M}^{(h_M)} \,|\, 0 \le h_i < \widetilde{N}_{\beta_i}\}$ es una base del espacio vectorial $\mathcal{L}_{\mathfrak{q}}$.

DEMOSTRACIÓN. La prueba de este lema es por inducción en $\operatorname{ht}(\mathbf{h}) := \sum_{i\in\mathbb{I}_M} h_i$. Si $\operatorname{ht}(\mathbf{h}) = 1$ entonces $\mathbf{y}_{\mathbf{h}} = y_\beta$ para algún $\beta \in \Delta_{\mathfrak{q}}^+$ y la afirmación sigue por definición.

Sean $1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq M$, $n_k < \widetilde{N}_{\beta_{i_k}}$ y $n_1 = sN_{\beta_{i_1}} + r \neq 0$ con $r < N_{\beta_{i_1}}$. Sea $y = y_{\beta_{i_1}}^{(n_1)} \dots y_{\beta_{i_j}}^{(n_j)} \in \mathcal{L}_\mathfrak{q}$. Como $\{\mathbf{y_h} \,|\, \mathbf{h} \in \mathtt{H}\}$ es una base de $\mathcal{L}_\mathfrak{q}$, podemos expresar a y como una combinación lineal $y = \sum_{\mathbf{h}\in\mathtt{H}} c_\mathbf{h} \mathbf{y_h}$. Notemos que $c_\mathbf{h} \neq 0$ si y solamente si $\langle y, x^\mathbf{h} \rangle \neq 0$.

Si $r \neq 0$ escribimos $y = \frac{1}{(r)_q} y_{\beta_{i_1}} y'$ con $y' = y_{\beta_{i_1}}^{(n_1-1)} \dots y_{\beta_{i_j}}^{(n_j)}$ y $q = q_{\beta_{i_1}\beta_{i_1}}$. Entonces $\langle y, x^\mathbf{h} \rangle = \frac{1}{(r)_q} \langle y_{\beta_{i_1}}, (x^\mathbf{h})^{(2)} \rangle \langle y', (x^\mathbf{h})^{(1)} \rangle$. Por la hipótesis inductiva y el Lema 3.1.1, $c_\mathbf{h} \neq 0$ si y sólo si $\mathbf{h} = (0, \dots, n_1, \dots, n_k, 0, \dots)$. Más aún, el coeficiente no nulo $c_\mathbf{h}$ es igual a 1 y la prueba en este caso está finalizada.

Si $r = 0$ entonces $n_1 = sN_{\beta_{i_1}}$ y escribimos $y = y_{\beta_{i_1}}^{(N_{\beta_{i_1}})} y'$. Por el mismo argumento de antes obtenemos (3.4). Por lo tanto, como $\{\mathbf{y_h} : \mathbf{h} \in \mathtt{H}\}$ por definición es una base de $\mathcal{L}_\mathfrak{q}$, el conjunto $\{y_{\beta_1}^{(h_1)} \cdots y_{\beta_M}^{(h_M)} \,|\, 0 \leq h_i < \widetilde{N}_{\beta_i}\}$ también lo es. □

Buscamos una presentación por generadores y relaciones de $\mathcal{L}_\mathfrak{q}$. Para ello consideraremos un álgebra $\mathbb{L}$ y daremos un isomorfismo $\Upsilon : \mathbb{L} \to \mathcal{L}_\mathfrak{q}$.

Sea $\mathbb{L}$ el álgebra generada por los elementos $\mathsf{y}_\beta^{(n)}$, $\beta \in \Delta_\mathfrak{q}^+$, $n \in \mathbb{N}$ y las relaciones

$$\mathsf{y}_\beta^{(N_\beta)} = 0, \qquad \beta \in \Delta_\mathfrak{q}^+ - \mathfrak{O}_\mathfrak{q}; \tag{3.5}$$

$$\mathsf{y}_\beta^{(h)} \mathsf{y}_\beta^{(j)} = \binom{h+j}{j}_{q_{\beta\beta}} \mathsf{y}_\beta^{(h+j)}, \qquad \beta \in \Delta_\mathfrak{q}^+,\ h, j \in \mathbb{N}; \tag{3.6}$$

$$[\mathsf{y}_\beta^{(h)}, \mathsf{y}_\alpha^{(j)}]_c = \sum_{\mathsf{m} \in \mathsf{M}(\alpha,\beta,h,j)} \kappa_\mathsf{m}\, \mathsf{m}, \qquad \alpha < \beta \in \Delta_\mathfrak{q}^+,\ 0 < h < N_\alpha,\ 0 < j < N_\beta; \tag{3.7}$$

$$[\mathsf{y}_\beta^{(N_\beta)}, \mathsf{y}_\alpha^{(N_\alpha)}]_c = \kappa_\gamma \mathsf{y}_\gamma^{(N_\gamma)} + \sum_{\substack{0<l<N_\beta,\, 0<i<N_\alpha \\ \mathsf{m} \in \mathsf{M}(\alpha,\beta,N_\alpha - i, N_\beta - l)}} \kappa_\mathsf{m}^{i,l}\, \mathsf{y}_\alpha^{(i)} \mathsf{m} \mathsf{y}_\beta^{(l)}, \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{O}_\mathfrak{q},\ \alpha < \gamma < \beta; \tag{3.8}$$

$$[\mathsf{y}_\beta^{(j)}, \mathsf{y}_\alpha^{(N_\alpha)}]_c = \sum_{\substack{0<i<N_\alpha, \\ \mathsf{m} \in \mathsf{M}(\alpha,\beta,N_\alpha - i, j)}} \kappa_\mathsf{m}^{i,0}\, \mathsf{y}_\alpha^{(i)} \mathsf{m}, \qquad \alpha \in \mathfrak{O}_\mathfrak{q},\ \beta \in \Delta_\mathfrak{q}^+,\ 0 < j < N_\beta. \tag{3.9}$$

Donde utilizamos la siguiente notación

$$\begin{aligned}
\mathsf{M}(\alpha, \beta, h, j) &= \{\mathsf{m} = \mathsf{y}_{\beta_r}^{(h_r)} \cdots \mathsf{y}_{\beta_k}^{(h_k)} \in \widetilde{L}^\beta \cap \widetilde{\mathbf{L}}^\alpha : \deg \mathsf{m} = \deg \mathsf{y}_\alpha^{(h)} + \deg \mathsf{y}_\beta^{(j)}\}; \\
\kappa_\mathsf{m}^{i,l} &= \langle y_\beta^{(h)} y_\alpha^{(j)}, x_\beta^l x_{\beta_k}^{h_k} \cdots x_{\beta_r}^{h_r} x_\alpha^i \rangle; \\
\kappa_\gamma &= \langle \mathsf{y}_\beta^{(N_\beta)} \mathsf{y}_\alpha^{(N_\alpha)}, x_\gamma^{N_\gamma} \rangle, \qquad \deg \mathsf{y}_\gamma^{(N_\gamma)} = \deg \mathsf{y}_\alpha^{(N_\alpha)} + \deg \mathsf{y}_\beta^{(N_\beta)}.
\end{aligned}$$

TEOREMA 3.1.4. *Existe un isomorfismo de álgebras $\Upsilon : \mathbb{L} \to \mathcal{L}_\mathfrak{q}$ dado por*

$$\Upsilon(\mathsf{y}_\beta^{(n)}) = y_\beta^{(n)}, \qquad \beta \in \Delta_\mathfrak{q}^+,\ n < \widetilde{N}_\beta.$$

Demostración. Primero debemos probar que la aplicación Υ está bien definida, es decir que los elementos $y_\beta^{(n)} \in \mathcal{L}_\mathfrak{q}$ satisfacen las ecuaciones (3.5)–(3.9). La relación (3.5) es trivial puesto que $x_\beta^{N_\beta} = 0$ si $\beta \notin \mathfrak{O}_\mathfrak{q}$ y la relación (3.6) sigue de (3.2).

Para el resto, dado $\alpha < \beta$ y $h, j \in \mathbb{N}$, escribimos $y_\beta^{(h)} y_\alpha^{(j)} = \sum_{\mathbf{h}\in\mathbb{H}} c_\mathbf{h} \mathbf{y_h}$. Luego

$$c_\mathbf{h} = \langle y_\beta^{(h)} y_\alpha^{(j)}, \mathbf{x^h}\rangle = \langle y_\alpha^{(j)}, (\mathbf{x^h})^{(1)}\rangle \langle y_\beta^{(h)}, (\mathbf{x^h})^{(2)}\rangle$$

es el coeficiente de $x_\alpha^j \otimes x_\beta^h$ en la expresión de $\underline{\Delta}(\mathbf{x^h})$ como combinación lineal de elementos de la base PBW de $\widetilde{\mathcal{B}}_\mathfrak{q}$ en ambos lados del producto tensorial.

Si $j < N_\alpha$ y $h < N_\beta$, entonces $y_\alpha^{(j)}, y_\beta^{(h)} \in \mathcal{B}_\mathfrak{q}$. Asumamos $c_\mathbf{h} \neq 0$, esto implica que $\mathbf{x^h}$ aparece en la expresión de $x_\alpha^j x_\beta^h$ en elementos de la base PBW, ver [**Ang4**, Section 3]. Por lo tanto, por 2.2.3, $\mathbf{x^h} \in \mathbf{B}^\alpha \cap B^\beta$, y la relación (3.7) sigue.

Sean $\alpha, \beta \in \mathfrak{O}_\mathfrak{q}$, $j = N_\alpha$ y $h = N_\beta$. Supongamos que existe $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_M)$ tal que $c_\mathbf{h} \neq 0$ y $h_i \geq N_i$ para algún $i \in \mathbb{I}_M$. Como $x_{\beta_i}^{N_i}$ $\mathfrak{q}$-conmuta con todos los elementos de $\widetilde{\mathcal{B}}_\mathfrak{q}$, obtenemos

$$\mathbf{x^h} = c\, x_{\beta_i}^{N_i} \mathbf{x^{h'}}$$

donde

$$\mathbf{h}' = (h_1, \dots, h_i - N_i, \dots, h_M) \text{ y } c = \mathbf{q}(h_M\beta_M + \dots + h_{i+1}\beta_{i+1}, N_i\beta_i) \in \mathbf{k}.$$

Entonces $\underline{\Delta}(\mathbf{x^h}) = c\,\underline{\Delta}(x_{\beta_i}^{N_i})\underline{\Delta}(\mathbf{x^{h'}})$ y por lo tanto la Proposición 2.4.6 implica $\mathbf{x^h} = x_{\beta_i}^{N_i}$. Para los $\mathbf{j}$ restantes tales que $c_\mathbf{j} \neq 0$ vale $j_i < N_i$ para todo $i \in \mathbb{I}_M$. Escribimos

$$x_\alpha^{N_\alpha} \otimes x_\beta^{N_\beta} = \xi(1 \otimes x_\beta^n)(x_\alpha^{N_\alpha - m} \otimes x_\beta^{N_\beta - n})(x_\alpha^m \otimes 1)$$

con $\xi = \mathbf{q}^{-1}((N_\alpha - m)\alpha, n\beta)\mathbf{q}^{-1}(m\alpha, (N_\beta - n)\beta)$. Luego, por el mismo argumento que en la prueba de la relación anterior para $y_\beta^{(N_\beta - n)} y_\alpha^{(N_\alpha - m)}$, obtenemos que $\mathbf{y_j} = \mathsf{y}_\alpha^{(m)} \mathsf{m} \mathsf{y}_\beta^{(n)}$, $\mathsf{m} \in \widetilde{L}^\beta \cap \widetilde{\mathbf{L}}^\alpha$. Aquí, o bien $m < N_\alpha$, $n < N_\beta$; o

$$m = N_\alpha,\ n = N_\beta, \qquad \mathbf{y_j} = \mathbf{q}(N_\alpha\alpha, N_\beta\beta)\mathsf{y}_\alpha^{(N_\alpha)} \mathsf{y}_\beta^{(N_\beta)}.$$

Así, la relación (3.8) sigue de considerar el grado correcto de $\mathbf{y_h}$.

En el caso de (3.9), $c_\mathbf{h} \neq 0$ implica $\mathbf{x^h} \in \mathcal{B}_\mathfrak{q}$ por el mismo argumento de antes y el hecho que $Z_\mathfrak{q}$ es una subálgebra de Hopf trenzada por el Teorema 2.4.10. En consecuencia, Υ es un morfismo de álgebras.

Por último, observando la presentación de $\mathbb{L}$ se prueba fácilmente que $\{\mathsf{y}_{\beta_1}^{(h_1)} \dots \mathsf{y}_{\beta_M}^{(h_M)} : h_i < \widetilde{N}_i\}$ es un sistema de generadores de $\mathbb{L}$. Por lo tanto, Υ lleva un sistema de generadores de $\mathbb{L}$ en una base de $\mathcal{L}_\mathfrak{q}$ por el Lema 3.1.3 y esto dice que es biyectivo. $\square$

Hemos probado así que el álgebra de Lusztig $\mathcal{L}_{\mathfrak{q}}$ puede ser presentada por generadores y relaciones. Dichas relaciones nos permiten observar las diferencias entre el comportamiento de las álgebras pre y post Nichols. Sin embargo los coeficientes que en ellas aparecen no son fáciles de calcular. A continuación daremos un ejemplo sencillo en el que podemos observar lo antes mencionado.

EJEMPLO 3.1.5. Sean $q \in \mathbf{k}^{\times}$, $\operatorname{ord} q = N$ y $\theta = 3 \leq N$. Consideramos una trenza diagonal (de tipo A_θ súper) dada por la matriz $\mathfrak{q} = (q_{ij})_{i,j \in \mathbb{I}_3}$ con

$$q_{11} = q_{23}q_{32} = q, \qquad q_{12}q_{21} = q^{-1}, \qquad q_{22} = q_{33} = -1, \qquad q_{13}q_{31} = 1.$$

Sea $\alpha_{jk} = \sum_{j \leq i \leq k} \alpha_i$; entonces

$$\Delta_{\mathfrak{q}}^{+} = \{\alpha_{jk} : 1 \leq j \leq k \leq 3\},$$
$$\mathfrak{O}_{\mathfrak{q}} = \{\alpha_1, \alpha_{23}, \alpha_{13}\}.$$

En este caso el álgebra pre-Nichols asociada a $\mathfrak{q}$ está generada por x_{ij}, $1 \leq i \leq j \leq 3$ con las relaciones

$$x_2^2 = x_3^2 = x_{12}^2 = 0, \qquad [x_{13}, x_2]_c = [x_1, x_3]_c = 0, \qquad (\operatorname{ad}_c x_1)^2 x_2 = 0,$$
$$[x_1, x_2]_c = x_{12}, \qquad [x_2, x_3]_c = x_{23}, \qquad [x_1, [x_2, x_3]_c]_c = x_{13}.$$

El coproducto, ver [**Ang5**, 5.2, 5.2], está dado por

$$\underline{\Delta}(x_i) = x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i, \qquad i = 1, 2, 3;$$
$$\underline{\Delta}(x_{12}) = x_{12} \otimes 1 + 1 \otimes x_{12} + (1 - q_{12}q_{21}) x_1 \otimes x_2;$$
$$\underline{\Delta}(x_{23}) = x_{23} \otimes 1 + 1 \otimes x_{23} + (1 - q_{23}q_{32}) x_2 \otimes x_3;$$
$$\underline{\Delta}(x_{13}) = x_{13} \otimes 1 + 1 \otimes x_{13} + (1 - q_{12}q_{21}) x_1 \otimes x_{23} + (1 - q_{23}q_{32}) x_{12} \otimes x_3;$$
$$\underline{\Delta}(x_1^N) = x_1^N \otimes 1 + 1 \otimes x_1^N;$$
$$\underline{\Delta}(x_{23}^N) = x_{23}^N \otimes 1 + 1 \otimes x_{23}^N;$$
$$\underline{\Delta}(x_{13}^N) = x_{13}^N \otimes 1 + 1 \otimes x_{23}^N + (1 - q_{12}q_{21})^N \mathbf{q}(\alpha_1, \alpha_{23})^{\frac{N(N-1)}{2}} x_1^N \otimes x_{23}^N.$$

Luego, el álgebra de Lusztig $\mathcal{L}_{\mathfrak{q}}$ es el álgebra presentada por generadores $y_{jk}^{(n)}$, $1 \leq j \leq k \leq 3$, $n \in \mathbb{N}$ y relaciones:

$$y_{12}^{(2)} = y_2^{(2)} = y_3^{(2)} = 0,$$
$$y_{jk}^{(n)} y_{jk}^{(m)} = \binom{n+m}{n}_{q_{jk}} y_{jk}^{(n+m)}, \quad n, m \in \mathbb{N},$$

$$[y_{12}, y_1]_c = [y_{13}, y_1]_c = [y_3, y_1]_c = [y_{13}, y_{12}]_c = [y_2, y_{12}]_c = [y_{23}, y_{12}]_c = 0,$$
$$[y_2, y_{13}]_c = [y_{23}, y_{13}]_c = [y_3, y_{13}]_c = [y_{23}, y_2]_c = [y_3, y_{23}]_c = 0,$$

$$
\begin{aligned}
[y_2, y_1]_c &= (1-q^{-1})y_{12}, \qquad & [y_3, y_{12}]_c &= (1-q)y_{13},\\
[y_{23}, y_1]_c &= (1-q^{-1})y_{13}, \qquad & [y_3, y_2]_c &= (1-q)y_{23},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[y_{23}^{(N)}, y_1]_c &= (1-q^{-1})(q_{21}q_{31})^{N-1}y_{13}y_{23}^{(N-1)},\\
[y_{23}, y_1^{(N)}]_c &= (1-q^{-1})(q_{21}q_{31})^{N-1}y_1^{(N-1)}y_{13},\\
[y_2, y_1^{(N)}]_c &= (1-q^{-1})q_{21}^{N-1}y_1^{(N-1)}y_{12},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&[y_{12}, y_1^{(N)}]_c = [y_{13}, y_1^{(N)}]_c = [y_3, y_1^{(N)}]_c = 0,\\
&[y_{13}^{(N)}, y_1]_c = [y_{13}^{(N)}, y_{12}]_c = [y_2, y_{13}^{(N)}]_c = [y_{23}, y_{13}^{(N)}]_c = [y_3, y_{13}^{(N)}]_c = 0,\\
&[y_{23}^{(N)}, y_{12}]_c = [y_{23}^{(N)}, y_{13}]_c = [y_{23}^{(N)}, y_2]_c = [y_3, y_{23}^{(N)}]_c = 0,\\
&[y_{13}^{(N)}, y_1^{(N)}]_c = [y_{23}^{(N)}, y_{13}^{(N)}]_c = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[y_{23}^{(N)}, y_1^{(N)}]_c &= (1-q^{-1})^N(q_{21}q_{31})^{N\frac{N-1}{2}}y_{13}^{(N)}\\
&\quad + \sum_{k=1}^{N-1}(1-q^{-1})^k(q_{21}q_{31})^{k\frac{2N-k-1}{2}}y_1^{(N-k)}y_{13}^{(k)}y_{23}^{(N-k)}.
\end{aligned}
$$

En efecto, para calcular $y_{23}^{(N)}y_1^{(N)}$ en $\mathcal{L}_{\mathfrak{q}}$, necesitamos describir todos los $\mathbf{h} \in \mathtt{H}$ tales que $x_1^N \otimes x_{23}^N$ aparecen en $\underline{\Delta}(\mathbf{x}^{\mathbf{h}})$ con coeficiente no nulo, donde

$$\mathbf{x}^{\mathbf{h}} = x_3^{h_1}x_{23}^{h_2}x_2^{h_3}x_{123}^{h_4}x_{12}^{h_5}x_1^{h_6}.$$

Uno de estos $\mathbf{x}^{\mathbf{h}}$ es $x_{23}^N x_1^N$, con coeficiente $q_{N\alpha_1(N\alpha_2+N\alpha_3)}$. Sea $\mathbf{h}$ tal que $x_1^N \otimes x_{23}^N$ tiene coeficiente no nulo en $\underline{\Delta}(\mathbf{x}^{\mathbf{h}})$. Entonces, observando las fórmulas del coproducto antes mencionadas, podemos deducir que $h_1 = 0$. Más aún, mirando $\underline{\Delta}(x_{23}^{h_2})$ notamos que la única contribución posible es $(1 \otimes x_{23})^{h_2}$. De manera similar, obtenemos que $h_3 = h_5 = 0$, y $h_6 = h_2 = N - h_4$. En este caso, escribimos $h_4 = k$ para simplificar la notación, luego

$$(1 \otimes x_{23})^{N-k}(x_1 \otimes x_{23})^k(x_1 \otimes 1)^{N-k} = (q_{21}q_{31})^{k\frac{2N-k-1}{2}}x_1^N \otimes x_{23}^N.$$

Esto nos da la última relación. Las demás se obtienen de manera análoga.

Corolario 3.1.6. *El álgebra $\mathcal{L}_{\mathfrak{q}}$ es finitamente generada.*

Demostración. Por (3.6), $\mathcal{L}_{\mathfrak{q}}$ está generada como álgebra por

$$\{y_\beta : \beta \in \Delta_{\mathfrak{q}}^+\} \cup \{y_\alpha^{(N_\alpha)} : \alpha \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}\}.$$

□

Observación 3.1.7. En realidad, la subálgebra $\mathcal{B}_{\mathfrak{q}} \subset \mathcal{L}_{\mathfrak{q}}$ está generada por sus elementos primitivos $\{y_\alpha : \alpha \in \Pi_{\mathfrak{q}}\}$ donde $\Pi_{\mathfrak{q}}$ denota al conjunto de raíces simples $\alpha_1, \dots, \alpha_\theta$.

Más aún, $y_\gamma^{(N_\gamma)} \in \mathbf{k}^\times [y_\beta^{(N_\beta)}, y_\alpha^{(N_\alpha)}]_c$ si y solamente si $x_\alpha^{N_\alpha} \otimes x_\beta^{N_\beta}$ tiene coeficiente no nulo en la expresión de $\Delta(x_\gamma^{N_\gamma})$. Por lo tanto,

$$\{y_\alpha : \alpha \in \Pi_{\mathfrak{q}}\} \cup \{y_\alpha^{(N_\alpha)} : \alpha \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}},\, x_\alpha^{N_\alpha} \in \mathcal{P}(\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}})\}$$

genera $\mathcal{L}_{\mathfrak{q}}$ como álgebra.

De manera dual al Corolario 2.4.7, vale el siguiente resultado:

Proposición 3.1.8. *$\widetilde{\mathbf{L}}^i$ es una subálgebra coideal a derecha de $\mathcal{L}_{\mathfrak{q}}$.*

Demostración. Por el Teorema 3.1.4 tenemos que $y_{\beta_j}^{(n)} y_{\beta_i}^{(m)} \in \widetilde{\mathbf{L}}^i$ para $i < j$, luego $\widetilde{\mathbf{L}}^i$ es una subálgebra de $\mathcal{L}_{\mathfrak{q}}$.

Por otro lado sabemos que

$$\langle y_\beta^{(n)}, xx' \rangle = \langle (y_\beta^{(n)})^{(2)}, x \rangle \langle (y_\beta^{(n)})^{(1)}, x' \rangle.$$

Entonces $y_{\mathbf{j}} \otimes y_{\mathbf{h}}$ aparece con coeficiente no nulo en $\underline{\Delta}(y_\beta^{(n)})$ si y sólo si x_β^n aparece con coeficiente no nulo en la expresión de $x^{\mathbf{h}} x^{\mathbf{j}}$ en elementos de la base PBW. Esto último implica que $x^{\mathbf{h}} \in \widetilde{B}^\beta$ y $x^{\mathbf{j}} \in \widetilde{\mathbf{B}}^\beta$. Por lo tanto,

$$\underline{\Delta}(y_\beta^{(n)}) \in \sum_{i=0}^{n} y_\beta^{(i)} \otimes y_\beta^{(n-i)} + \widetilde{\mathbf{L}}^\beta \otimes \widetilde{L}^\beta.$$

Luego, $\underline{\Delta}(y_{\beta_i}^{(n_i)} \dots y_{\beta_M}^{(n_M)}) = \underline{\Delta}(y_{\beta_i}^{(n_i)}) \underline{\Delta}(y_{\beta_{i+1}}^{(n_{i+1})} \dots y_{\beta_M}^{(n_M)}) \in \widetilde{\mathbf{L}}^i \otimes \mathcal{L}_{\mathfrak{q}}$ y esto completa la prueba. $\square$

3.1.2. Propiedades básicas. De manera análoga al caso pre-Nichols, ver [**Ang5**, Section 3.4], cf. [**DP**]; demostraremos que el álgebra de Lusztig $\mathcal{L}_{\mathfrak{q}}$ es noetheriana.

Consideramos el orden lexicográfico en $\mathbb{N}_0^M$, tal que $\mathbf{h}_M < \dots < \mathbf{h}_1$, donde $(\mathbf{h}_j)_{j \in \mathbb{I}_M}$ denota la base canónica de $\mathbb{Z}^M$.

Lema 3.1.9. *Sea $\mathcal{L}_{\mathfrak{q}}(\mathbf{h})$ el subespacio de $\mathcal{L}_{\mathfrak{q}}$ generado por $\mathbf{y}_{\mathbf{j}}$, con $\mathbf{j} \leq \mathbf{h}$. Entonces $\mathcal{L}_{\mathfrak{q}}(\mathbf{h})$ es una $\mathbb{N}_0^M$-filtración de álgebras de $\mathcal{L}_{\mathfrak{q}}$.*

Demostración. Es suficiente probar que $\mathbf{y}_{\mathbf{h}} \mathbf{y}_{\mathbf{j}} \in \mathcal{L}_{\mathfrak{q}}(\mathbf{h} + \mathbf{j})$ para todo $\mathbf{h}, \mathbf{j} \in \mathtt{H}$. Consideramos el caso $\mathbf{h} = n\mathbf{h}_k$, $\mathbf{j} = m\mathbf{h}_l$, $k, l \in \mathbb{I}_M$, $n, m \in \mathbb{N}$ donde, como antes, $\mathbf{h}_i$ denota al elemento i-ésimo de la base canónica de $\mathbb{Z}^M$. Afirmamos que $y_{\beta_k}^{(n)} y_{\beta_l}^{(m)} \in \mathcal{L}_{\mathfrak{q}}(n\mathbf{h}_k + m\mathbf{h}_l)$. Esto sigue por definición cuando

$k \leq l$. Si $l < k$, entonces $[y_{\beta_k}^{(n)}, y_{\beta_l}^{(m)}]_c \in \sum_{j<m} y_{\beta_l}^{(j)}.\widetilde{\mathbf{L}}^{l+1}$ por el Teorema 3.1.4, luego

$$y_{\beta_k}^{(n)} y_{\beta_l}^{(m)} \in \mathcal{L}_{\mathfrak{q}}(n\mathbf{h}_k + m\mathbf{h}_l) \qquad \text{pues} \qquad \sum_{j=l+1}^{M} a_j \mathbf{h}_j < n\mathbf{h}_k + m\mathbf{h}_l.$$

Reordenando los factores de $\mathbf{y_h y_j}$ para todo $\mathbf{h}, \mathbf{j} \in \mathbb{N}_0^M$ el lema queda demostrado. □

Consideramos ahora el álgebra graduada

$$\operatorname{gr} \mathcal{L}_{\mathfrak{q}} = \oplus_{\mathbf{h} \in \mathbb{N}_0^M} \operatorname{gr}^{\mathbf{h}} \mathcal{L}_{\mathfrak{q}}, \qquad \text{donde} \qquad \operatorname{gr}^{\mathbf{h}} \mathcal{L}_{\mathfrak{q}} = \mathcal{L}_{\mathfrak{q}}(\mathbf{h}) / \sum_{\mathbf{j}<\mathbf{h}} \mathcal{L}_{\mathfrak{q}}(\mathbf{j}).$$

Lema 3.1.10. *El álgebra* $\operatorname{gr} \mathcal{L}_{\mathfrak{q}}$ *es presentada por generadores* $\mathrm{y}_k^{(n)}$, $k \in \mathbb{I}_M$, $n \in \mathbb{N}$, *y relaciones*

$$\begin{aligned} &\mathrm{y}_k^{(N_k)} = 0, \quad \beta_k \notin \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}, \\ &\mathrm{y}_k^{(n)} \mathrm{y}_k^{(m)} = \binom{n+m}{m}_{q_{\beta_k \beta_k}} \mathrm{y}_k^{(n+m)}, \\ &[\mathrm{y}_k^{(n)}, \mathrm{y}_l^{(m)}]_c = 0, \quad l < k. \end{aligned}$$

Demostración. Sea $\mathcal{G}$ el álgebra presentada por los generadores y relaciones del enunciado y $\pi : \mathcal{G} \to \operatorname{gr} \mathcal{L}_{\mathfrak{q}}$ el morfismo de álgebras dado por $\mathrm{y}_k^{(n)} \mapsto y_{\beta_k}^{(n)}$. Por el Teorema 3.1.4, las relaciones se cumple en $\operatorname{gr} \mathcal{L}_{\mathfrak{q}}$ por lo que π está bien definido. Por cálculos directos se puede probar que $\mathcal{G}$ tiene una base

$$\{\mathrm{y}_1^{(h_1)} \dots \mathrm{y}_M^{(h_M)} : h_i < \widetilde{N}_i\}.$$

Por otro lado, $\mathbf{y_h} \in \mathcal{L}_{\mathfrak{q}}(\mathbf{h}) - \sum_{\mathbf{j}<\mathbf{h}} \mathcal{L}_{\mathfrak{q}}(\mathbf{j})$. Por lo tanto la proyección de la base PBW de $\mathcal{L}_{\mathfrak{q}}$ es una base de $\operatorname{gr} \mathcal{L}_{\mathfrak{q}}$ y π es un isomorfismo. □

Proposición 3.1.11. *El álgebra* $\mathcal{L}_{\mathfrak{q}}$ *es noetheriana.*

Demostración. Sea $\mathcal{Z}^+$ la subálgebra de $\operatorname{gr} \mathcal{L}_{\mathfrak{q}}$ generada por los elementos $\mathrm{y}_\beta^{(N_\beta)}$, $\beta \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}$. Entonces $\mathcal{Z}^+$ es un espacio cuántico afín y $\operatorname{gr} \mathcal{L}_{\mathfrak{q}}$ es un $\mathcal{Z}^+$-modulo libre finitamente generado. Luego $\operatorname{gr} \mathcal{L}_{\mathfrak{q}}$ es noetheriana y $\mathcal{L}_{\mathfrak{q}}$ también lo es. □

Tanto por el Lema 3.1.3 como por 3.1.10 podemos calcular la dimensión de Gelfand-Kirillov de $\mathcal{L}_{\mathfrak{q}}$:

Corolario 3.1.12. $\operatorname{GKdim} \mathcal{L}_{\mathfrak{q}} = |\mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}|$. □

3.2. Álgebra cuántica de potencias divididas

Fijamos $\mathfrak{q}$ la matriz del espacio vectorial trenzado de tipo diagonal $(V, \mathfrak{q})$ tal que $\dim \mathcal{B}_{\mathfrak{q}} < \infty$. Sea $W = V$, con la matriz $\mathfrak{q}^t$, y sean $\{z_\beta^{(n)} : \beta \in \Delta_{\mathfrak{q}}^+, n \in \mathbb{N}\}$ generadores de $\mathcal{L}_{\mathfrak{q}^t}$. En este caso consideramos $W \in {}^{\mathbf{k}\mathbb{Z}^\theta}_{\mathbf{k}\mathbb{Z}^\theta}\mathcal{YD}$ vía la equivalencia de categorías ${}^{(\mathbf{k}\mathbb{Z}^\theta)^*}_{(\mathbf{k}\mathbb{Z}^\theta)^*}\mathcal{YD} \cong {}^{\mathbf{k}\mathbb{Z}^\theta}_{\mathbf{k}\mathbb{Z}^\theta}\mathcal{YD}$, ver [**AG**]. Entonces, tenemos una aplicación natural dada por $\langle w_j, v_i \rangle = \delta_{ij}$ que satisface $\langle w \otimes w', v \otimes v' \rangle = \langle w \otimes v' \rangle \langle w' \otimes v \rangle$. En esta sección definiremos el *álgebra cuántica de potencias divididas* $\mathcal{U}_{\mathfrak{q}}$ de $(V, \mathfrak{q})$ y expondremos algunas propiedades básicas.

Sean Γ y Λ dos copias de $\mathbb{Z}^\theta$ generadas por $(K_i)_{i\in\mathbb{I}}$ y $(L_i)_{i\in\mathbb{I}}$ respectivamente; luego, $(K_i^{\pm 1})_{i\in\mathbb{I}}$ y $(L_i^{\pm 1})_{i\in\mathbb{I}}$ son los generadores de $\mathbf{k}\Gamma$ y $\mathbf{k}\Lambda$ respectivamente. Notemos $K_\alpha = K_1^{a_1} \dots K_\theta^{a_\theta}$ y $L_\alpha = L_1^{a_1} \dots L_\theta^{a_\theta}$ para $\alpha = (a_1, \dots, a_\theta) \in \mathbb{Z}^\theta$. Entonces $\mathcal{L}_{\mathfrak{q}} \in {}^{\mathbf{k}\Gamma}_{\mathbf{k}\Gamma}\mathcal{YD}$ y $\mathcal{L}_{\mathfrak{q}^t} \in {}^{\mathbf{k}\Lambda}_{\mathbf{k}\Lambda}\mathcal{YD}$ con la estructura determinada por las fórmulas

$$
\begin{aligned}
K_\alpha^{\pm 1} \cdot y_\beta^{(n)} &= q_{\alpha\beta}^{\pm n} y_\beta^{(n)}, & \qquad \rho(y_\beta^{(n)}) &= K_\beta^n \otimes y_\beta^{(n)};\\
L_\alpha^{\pm 1} \cdot z_\beta^{(n)} &= q_{\beta\alpha}^{\pm n} z_\beta^{(n)}, & \qquad \rho(z_\beta^{(n)}) &= L_\beta^n \otimes y_\beta^{(n)}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, podemos considerar las bosonizaciones $\mathcal{L}_{\mathfrak{q}} \# \mathbf{k}\Gamma$ y $\mathcal{L}_{\mathfrak{q}^t} \# \mathbf{k}\Lambda$.

Definamos ahora el doble de Drinfeld de $\mathcal{L}_{\mathfrak{q}} \# \mathbf{k}\Gamma$ siguiendo la Definición 1.4.14. Para ello necesitaremos un apareamiento de Hopf entre $\mathcal{L}_{\mathfrak{q}} \# \mathbf{k}\Gamma$ y $\mathcal{L}_{\mathfrak{q}^t} \# \mathbf{k}\Lambda$.

Lema 3.2.1. *Existe una única forma bilineal* $(\,|\,) : T^c(V) \times T^c(W) \to \mathbf{k}$ *tal que* $(1|1) = 1$,

$$
\begin{aligned}
&(y_i|z_j) = \delta_{ij}, && i, j \in \mathbb{I};\\
&(y|zz') = (y^{(1)}|z)(y^{(2)}|z'), && y \in T^c(V),\ z, z' \in T^c(W);\\
&(yy'|z) = (y|z^{(1)})(y'|z^{(2)}), && y, y' \in T^c(V),\ z \in T^c(W);\\
&(y|z) = 0, && |y| \neq |z|,\ y \in T^c(V),\ z \in T^c(W).
\end{aligned}
$$

Demostración. Sea $\mathbf{T}^n = \sum_{\sigma\in\mathbb{S}_n} s(\sigma) : (T^c)^n(W) \to T^n(W)$, donde $s : \mathbb{S}_n \to \mathbb{B}_n$ es la sección de Matsumoto, ver [**AG**, §3.2]. Consideramos, como antes, $\langle\,,\,\rangle : T^c(V) \otimes T(W) \to \mathbf{k}$ la aplicación evaluación. Definimos entonces $(1|1) = 1$,

$$
\begin{aligned}
&(y|z) = \langle y, \mathbf{T}^n(z) \rangle, && y \in (T^c)^n(V), z \in (T^c)^n(W);\\
&(y|z) = 0, && y \in (T^c)^n(V), z \in (T^c)^m(W), n \neq m.
\end{aligned}
$$

Notemos que $\mathbf{T}^{i+j} = \mathbf{T}_{i,j}(\mathbf{T}^i \otimes \mathbf{T}^j)$ con $\mathbf{T}_{i,j} = \sum s(\sigma^{-1})$ donde la sumatoria es considerada sobre todos los (i, j)-shuffles σ. Luego, para $y \in (T^c)^n(V)$,

$z \in (T^c)^{n-i}(W)$, $z' \in (T^c)^i(W)$,

$$\begin{aligned}(y|zz') &= \langle y, \mathbf{T}^n(zz')\rangle = \langle y, \mathbf{T}_{i,n-i}(\mathbf{T}^i \otimes \mathbf{T}^{n-i})(zz')\rangle \\ &= \langle y, \mathbf{T}_{i,n-i}(\mathbf{T}^i(z) \otimes \mathbf{T}^{n-i}(z'))\rangle = \langle y^{(1)}, \mathbf{T}^{n-i}(z)\rangle\langle y^{(2)}, \mathbf{T}^i(z')\rangle \\ &= (y^{(1)}|z)(y^{(2)}|z').\end{aligned}$$

Las condiciones restantes son claras. $\square$

Esta forma bilineal puede restringirse a $\mathcal{L}_{\mathsf{q}} \times \mathcal{L}_{\mathsf{q}^t}$ y luego ser extendida a sus bosonizaciones. Entonces tendremos:

Corolario 3.2.2. *Existe un único apareamiento de Hopf*

$$(\,|\,) : \mathcal{L}_{\mathsf{q}}\#\mathbf{k}\Gamma \times \mathcal{L}_{\mathsf{q}^t}\#\mathbf{k}\Lambda \to \mathbf{k}$$

tal que para todo $Y, Y' \in \mathcal{L}_{\mathsf{q}}\#\mathbf{k}\Gamma$, $Z, Z' \in \mathcal{L}_{\mathsf{q}^t}\#\mathbf{k}\Lambda$, $y_\alpha^{(n)} \in \mathcal{L}_{\mathsf{q}}$, $K_\alpha \in \mathbf{k}\mathbb{Z}^\theta$, $z_\beta^{(m)} \in \mathcal{L}_{\mathsf{q}^t}$ *y* $L_\beta \in \mathbf{k}\mathbb{Z}^\theta$

$$\begin{aligned}&(Y|ZZ') = (Y_{(1)}|Z)(Y_{(2)}|Z'), \quad (YY'|z) = (Y|Z_{(1)})(Y'|Z_{(2)}),\\ &(y_\alpha|z_\beta) = \delta_{\alpha,\beta}, \quad (y_\alpha^{(N_\alpha)}|z_\beta^{(N_\beta)}) = \delta_{\alpha,\beta},\\ &(y_\alpha^{(n)}|L_\beta) = 0, \quad (K_\alpha|z_\beta^{(m)}) = 0, \quad (K_\alpha|L_\beta) = q_{\alpha\beta}.\end{aligned}$$

Más aún, este apareamiento satisface $(yK|zL) = (y|z)(K|L)$. $\square$

Sea $\mathcal{U}_{\mathsf{q}}$ el doble de Drinfeld de $\mathcal{L}_{\mathsf{q}}\#\mathbf{k}\Gamma$ y $(\mathcal{L}_{\mathsf{q}^t}\#\mathbf{k}\Lambda)^{\mathrm{cop}}$ respecto a la forma bilineal del Corolario 3.2.2. En otras palabras,

Definición 3.2.3. $\mathcal{U}_{\mathsf{q}}$ es la única álgebra de Hopf que satisface:

1. $\mathcal{U}_{\mathsf{q}} = (\mathcal{L}_{\mathsf{q}}\#\mathbf{k}\Gamma) \otimes (\mathcal{L}_{\mathsf{q}^t}\#\mathbf{k}\Lambda)$ como espacios vectoriales,
2. los mapeos $Y \mapsto Y \otimes 1$ y $Z \mapsto 1 \otimes Z$ son morfismos de álgebras de Hopf,
3. la multiplicación está dada por

$$(Y \otimes Z)(Y' \otimes Z') = (Y'_{(1)}|\mathcal{S}(Z_{(1)}))YY'_{(2)} \otimes Z_{(2)}Z'(Y'_{(3)}|Z_{(3)})$$

para todo $Y, Y' \in \mathcal{L}_{\mathsf{q}}\#\mathbf{k}\Gamma$ and $Z, Z' \in (\mathcal{L}_{\mathsf{q}^t}\#\mathbf{k}\Lambda)^{\mathrm{cop}}$.

Por la construcción de $\mathcal{U}_{\mathsf{q}}$, existe una descomposición triangular vía la multiplicación $\mathcal{U}_{\mathsf{q}} \simeq \mathcal{U}_{\mathsf{q}}^+ \otimes \mathcal{U}^0 \otimes \mathcal{U}_{\mathsf{q}}^-$ donde

$$\mathcal{U}_{\mathsf{q}}^+ \simeq \mathcal{L}_{\mathsf{q}}, \qquad \mathcal{U}_{\mathsf{q}}^- \simeq \mathcal{L}_{\mathsf{q}^t}, \qquad \mathcal{U}^0 \simeq \mathbf{k}(\mathbb{Z}^\theta \times \mathbb{Z}^\theta).$$

3.2.1. Presentación. Damos a continuación una presentación por generadores y relaciones del álgebra $\mathcal{U}_{\mathfrak{q}}$. En lo que sigue omitiremos los signos del producto tensorial en los elementos de $\mathcal{U}_{\mathfrak{q}}$.

PROPOSICIÓN 3.2.4. *El álgebra $\mathcal{U}_{\mathfrak{q}}$ está generada por los elementos $y_\beta^{(n)}$, $z_\beta^{(n)}$, $K_\beta^{\pm 1}$, $L_\beta^{\pm 1}$ para $\beta \in \Delta_+^{\mathfrak{q}}$, $n \in \mathbb{N}$; y las relaciones* (3.5), …, (3.9) *entre los $y_\beta^{(n)}$'s, relaciones similares entre los $z_\beta^{(n)}$'s más la relaciones*

$$K_\beta K_\beta^{-1} = L_\beta^{-1} L_\beta = 1, \qquad K_\beta^{\pm 1} L_\alpha^{\pm 1} = L_\alpha^{\pm 1} K_\beta^{\pm 1}, \tag{3.10}$$

$$K_\alpha y_\beta^{(n)} = q_{\alpha\beta}^n y_\beta^{(n)} K_\alpha, \qquad L_\alpha y_\beta^{(n)} = q_{\beta\alpha}^{-n} y_\beta^{(n)} L_\alpha, \tag{3.11}$$

$$K_\alpha z_\beta^{(n)} = q_{\alpha\beta}^{-n} z_\beta^{(n)} K_\alpha, \qquad L_\alpha z_\beta^{(n)} = q_{\beta\alpha}^{n} z_\beta^{(n)} L_\alpha, \tag{3.12}$$

$$zy = (y^{(1)} | \mathcal{S}(z^{(3)}))\, (K_2 K_3 | L_3^{-1})\, (y^{(3)} | z^{(1)})\, y^{(2)} K_3 z^{(2)} L_3, \tag{3.13}$$

para todo $\alpha, \beta \in \Delta_+^{\mathfrak{q}}$, $n, m \in \mathbb{N}$. Aquí utilizamos (3.13) *$y = y_\beta^{(n)} \in \mathcal{L}_{\mathfrak{q}}$, $z = z_\alpha^{(m)} \in \mathcal{L}_{\mathfrak{q}^t}$, y notamos $K_i = (y^{(i)})_{(-1)}$ y $L_i = (z^{(i)})_{(-1)}$ las coacciones de $\mathbf{k}\Gamma$ y $\mathbf{k}\Lambda$ respectivamente.* □

Notemos que si $y = y_{\alpha_i}$, $z = z_{\alpha_j}$ con $\alpha_i, \alpha_j \in \Pi_{\mathfrak{q}}$ entonces y, z son primitivos y las relación (3.13) es $zy - yz = \delta_{ij}(K_i - L_i)$.

3.2.2. Noetherianidad y dimensión de Gelfand-Kirillov. Procediendo como en [**DP, Ang5**], probaremos que el álgebra $\mathcal{U}_{\mathfrak{q}}$ es noetheriana. Para cada $\mathbf{h}, \mathbf{j} \in \mathtt{H}$, $K \in \Gamma$, $L \in \Lambda$, escribimos

$$d_1(\mathbf{y_h} K L \mathbf{z_j}) = \sum_{i \in \mathbb{I}_M} (h_i + j_i)\, \mathrm{ht}(\beta_i),$$
$$d(\mathbf{y_h} K L \mathbf{z_j}) = \Big(d_1(\mathbf{y_h} K L \mathbf{z_j}),\, h_1, \dots, h_M,\, j_1, \dots, j_M \Big) \in \mathbb{N}_0^{2M+1}.$$

Consideramos el orden lexicográfico en $\mathbb{N}_0^{2M+1}$. Si $\mathbf{u} \in \mathbb{N}_0^{2M+1}$, entonces

$$\mathcal{U}_{\mathfrak{q}}(\mathbf{u}) = \text{span of } \{\mathbf{y_h} K L \mathbf{z_j} : \mathbf{h}, \mathbf{j} \in \mathtt{H},\, K \in \Gamma,\, L \in \Lambda,\, d(\mathbf{y_h} K L \mathbf{z_j}) \le \mathbf{u}\}.$$

LEMA 3.2.5. $(\mathcal{U}_{\mathfrak{q}}(\mathbf{u}))_{\mathbf{u} \in \mathbb{N}_0^{2M+1}}$ *es una $\mathbb{N}_0^{2M+1}$-filtración de álgebras de $\mathcal{U}_{\mathfrak{q}}$.*

DEMOSTRACIÓN. Basta probar que $(\mathbf{y_h} K L \mathbf{z_j})(\mathbf{y_{h'}} K' L' \mathbf{z_{j'}}) \in \mathcal{U}_{\mathfrak{q}}(\mathbf{u} + \mathbf{u}')$ para todo $\mathbf{h}, \mathbf{j}, \mathbf{h}', \mathbf{j}' \in \mathtt{H}$, $K, K' \in \Gamma$ y $L, L' \in \Lambda$ donde $d(\mathbf{y_h} K L \mathbf{z_j}) = \mathbf{u}$ y $d(\mathbf{y_{h'}} K' L' \mathbf{z_{j'}}) = \mathbf{u}'$.

Primero afirmamos que

$$d_1(z_\beta^{(n)} y_\alpha^{(m)} - y_\alpha^{(m)} z_\beta^{(n)}) < m\, \mathrm{ht}(\alpha) + n\, \mathrm{ht}(\beta). \tag{3.14}$$

En efecto, como el coproducto en $\mathcal{L}_{\mathfrak{q}}$ (resp. $\mathcal{L}_{\mathfrak{q}^t}$) es graduado, tenemos que $d_1((y_\alpha^{(m)})^{(2)}) < m\, \mathrm{ht}(\alpha)$ si $(y_\alpha^{(m)})^{(1)} \neq 1$ (resp. $d_1((z_\beta^{(n)})^{(2)}) < n\, \mathrm{ht}(\beta)$ si

$(z_\beta^{(n)})^{(1)} \neq 1)$. Por lo tanto, para $K \in \Gamma$ y $L \in \Lambda$ vale

$$d_1((y_\alpha^{(m)})^{(2)} KL(z_\beta^{(n)})^{(2)}) \leq m\,\mathrm{ht}(\alpha) + n\,\mathrm{ht}(\beta).$$

Por la Proposición 3.2.4 la afirmación sigue.

Tenemos que K y L $\mathfrak{q}$-conmutan con todos los elementos de $\mathcal{L}_\mathfrak{q}$ y $\mathcal{L}_{\mathfrak{q}^t}$ para todo $K \in \Gamma$ y $L \in \Lambda$. Luego, procediendo de manera similar a la demostración del Lema 3.1.9 se reduce la prueba al caso del producto entre $z_{\beta_i}^{(n)}$ y $y_{\beta_j}^{(m)}$. Sigue directamente de (3.14) que

$$z_{\beta_i}^{(n)} y_{\beta_j}^{(m)} \in \mathcal{U}_\mathfrak{q}(m\,\mathrm{ht}(\beta_j) + n\,\mathrm{ht}(\beta_i), \delta_j, \delta_i).$$

□

Consideramos el álgebra graduada asociada $\mathrm{gr}\,\mathcal{U}_\mathfrak{q} = \oplus_{\mathbf{v} \in \mathbb{N}_0^{2M+1}} \mathcal{U}_\mathfrak{q}{}^{\mathbf{v}}$ donde $\mathcal{U}_\mathfrak{q}{}^{\mathbf{v}} = \mathcal{U}_\mathfrak{q}(\mathbf{v}) / \sum_{\mathbf{u}<\mathbf{v}} \mathcal{U}_\mathfrak{q}(\mathbf{u})$.

Corolario 3.2.6. *El álgebra* $\mathrm{gr}\,\mathcal{U}_\mathfrak{q}$ *es presentada por generadores* $\mathsf{y}_j^{(n)}$, $\mathsf{z}_j^{(n)}$, $K_j^{\pm 1}$, $L_j^{\pm 1}$, $j \in \mathbb{I}_M$, $n \in \mathbb{N}$ *y relaciones*

$$\begin{aligned}
&RS = SR, && R, S \in \{K_j^{\pm 1}, L_j^{\pm 1} : j \in \mathbb{I}_M\};\\
&K_\beta K_\beta^{-1} = L_\beta L_\beta^{-1} = 1; && \mathsf{y}_k^{(n)} \mathsf{z}_l^{(m)} = \mathsf{z}_l^{(m)} \mathsf{y}_k^{(n)};\\
&\mathsf{y}_k^{(N_k)} = 0, \quad \beta_k \notin \mathfrak{O}_\mathfrak{q}; && \mathsf{z}_k^{(N_k)} = 0, \quad \beta_k \notin \mathfrak{O}_\mathfrak{q};\\
&\mathsf{y}_k^{(n)} \mathsf{y}_k^{(m)} = \binom{n+m}{m}_{q_{\beta_k\beta_k}} \mathsf{y}_k^{(n+m)}; && \mathsf{z}_k^{(n)} \mathsf{z}_k^{(m)} = \binom{n+m}{m}_{q_{\beta_k\beta_k}} \mathsf{z}_k^{(n+m)};\\
&[\mathsf{y}_k^{(n)}, \mathsf{y}_l^{(m)}]_c = 0, \quad l < k; && [\mathsf{z}_k^{(n)}, \mathsf{z}_l^{(m)}]_c = 0, \quad l < k;\\
&K_\alpha y_\beta^{(n)} = q_{\alpha\beta}^n y_\beta^{(n)} K_\alpha; && K_\alpha z_\beta^{(n)} = q_{\alpha\beta}^{-n} z_\beta^{(n)} K_\alpha;\\
&L_\alpha y_\beta^{(n)} = q_{\beta\alpha}^{-n} y_\beta^{(n)} L_\alpha; && L_\alpha z_\beta^{(n)} = q_{\beta\alpha}^{n} z_\beta^{(n)} L_\alpha.
\end{aligned}$$

Demostración. La prueba de este resultado es similar a la prueba del Lema 3.1.10 si se chequea previamente que $y_k^{(n)} z_l^{(m)} = z_l^{(m)} y_k^{(n)}$ para todo $y_k^{(n)} \in \mathcal{L}_\mathfrak{q}$ y $z_l^{(m)} \in \mathcal{L}_{\mathfrak{q}^t}$; pero esto último sigue de (3.14). □

Proposición 3.2.7. *El álgebra* $\mathcal{U}_\mathfrak{q}$ *es noetheriana.*

Demostración. Sea $\mathcal{Z}$ la subálgebra de $\mathrm{gr}\,\mathcal{U}_\mathfrak{q}$ generada por

$$\{K_i, L_i : i \in \mathbb{I}\} \cup \{y_\beta^{(N_\beta)}, z_\beta^{(N_\beta)} : \beta \in \mathfrak{O}_\mathfrak{q}\}.$$

Entonces $\mathcal{Z}$ es la localización de un espacio cuántico afín y $\mathrm{gr}\,\mathcal{U}_\mathfrak{q}$ es un $\mathcal{Z}$-módulo libre de rango $\prod_{i\in\mathbb{I}_M} N_i$. Por lo que $\mathrm{gr}\,\mathcal{U}_\mathfrak{q}$ es noetheriana y $\mathcal{U}_\mathfrak{q}$ también.

□

Más aún, por [**KL**, Prop. 6.6], tenemos que

$$\operatorname{GKdim} \mathcal{U}_{\mathfrak{q}} = \operatorname{GKdim} \operatorname{gr} \mathcal{U}_{\mathfrak{q}} = \operatorname{GKdim} \mathcal{Z}.$$

Por lo tanto vale el siguiente Corolario:

Corolario 3.2.8. $\operatorname{GKdim} \mathcal{U}_{\mathfrak{q}} = 2|\mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}| + 2\theta.$ □

Capítulo 4

Álgebras de Lie asociadas a $\mathcal{L}_{\mathfrak{q}}$.

En este capítulo consideraremos el álgebra de Hopf trenzada $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$ que es el dual graduado del álgebra $Z_{\mathfrak{q}}$ introducida en el Teorema 2.4.10. Luego presentaremos a $\mathcal{L}_{\mathfrak{q}}$ como una $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$-extensión de $\mathcal{B}_{\mathfrak{q}}$.

Estudiaremos las álgebras $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$ cuando $\mathfrak{q}$ es:

- una trenza de rango 2, ver Cuadro 1;
- una trenza de tipo A de rango n, ver Cuadro 2;
- la trenza de rango 3 correspondiente a la súper álgebra $D(2,1,\alpha)$;
- una trenza de rango 3 de tipo B;
- la trenza de rango 4 correspondiente a un diagrama de tipo no identificado.

En todos estos casos encontraremos un isomorfismo entre el álgebra de Hopf $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$ y el álgebra envolvente de la parte positiva de un álgebra de Lie semisimple. Conjeturamos que siempre es ese el caso, lo que generalizaría los resultados de Lusztig y nos permitiría en un futuro encontrar una extensión de álgebras de Hopf de $\mathfrak{u}_{\mathfrak{q}}$ por un álgebra universal de un álgebra de Lie.

A lo largo de todo el capítulo, $\mathfrak{q} = (q_{ij})_{i,j\in\mathbb{I}}$ será una matriz de tamaño $\theta\times\theta$ tal que $\mathcal{B}_{\mathfrak{q}}$, su álgebra de Nichols asociada, es de dimensión finita. Como antes $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$ denotará al álgebra pre-Nichols distinguida y $\mathcal{L}_{\mathfrak{q}}$ al álgebra de Lusztig presentada en el capítulo anterior. Además, $\Delta_{\mathfrak{q}}^{+}$ denotará el conjunto de raíces positivas de $\mathcal{B}_{\mathfrak{q}}$ y $\mathfrak{O}_{\mathfrak{q}} \subseteq \Delta_{\mathfrak{q}}^{+}$ el conjunto de raíces de Cartan. De aquí en adelante pedimos una hipótesis extra sobre la matriz $\mathfrak{q}$: si $\alpha,\beta\in\mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}$ entonces $q_{\alpha\beta}^{N_\beta}=1$.

Los resultados expuestos en este capítulo han sido incluidos en el artículo [**AAR2**].

4.1. Extensiones de álgebras de Hopf trenzadas

Hemos mencionado ya la definición de extensiones de álgebras de Hopf, ver 1.5.2. Damos ahora la versión trenzada de dicha noción. Incluimos aquí la definición dada en [**AN**], otras definiciones pueden verse, por ejemplo en [**BD, GG**].

Dado $\pi : C \to B$ un morfismo de álgebras de Hopf en ${}^{H}_{H}\mathcal{YD}$, escribimos

$$C^{\operatorname{co}\pi} = \{c\in C \,|\, (\operatorname{id}\otimes\pi)\underline{\Delta}(c) = c\otimes 1\},$$
$${}^{\operatorname{co}\pi}C = \{c\in C \,|\, (\pi\otimes\operatorname{id})\underline{\Delta}(c) = 1\otimes c\}.$$

Definición 4.1.1. [**AN**, §2.5] Sea H un álgebra de Hopf. Una sucesión de morfismos de álgebras de Hopf en ${}^H_H\mathcal{YD}$

$$\mathbf{k} \to A \overset{\iota}{\hookrightarrow} C \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} B \to \mathbf{k}$$

es una *extensión de álgebras de Hopf trenzadas* si

(i) ι es inyectivo,
(ii) π es suryectivo,
(iii) $\ker \pi = C\iota(A)^+$,
(iv) $A = C^{\operatorname{co}\pi}$, o equivalentemente $A = {}^{\operatorname{co}\pi}C$.

Más aún, la extensión se dice *hendida* (en inglés, *cleft*) si π admite una sección B-colineal (es decir que es morfismo de B-comódulos) en ${}^H_H\mathcal{YD}$, inversible respecto al producto de convolución.

Recordemos en primer lugar que $\mathcal{B}_{\mathfrak{q}} \simeq \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}/\langle x_\beta^{N_\beta}, \beta \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}\rangle$. Además, tenemos el resultado 2.4.10 de álgebras pre-Nichols:

Teorema 4.1.2. [**Ang5**, 4.10, 4.13] *$Z_{\mathfrak{q}}$ es una subálgebra de Hopf trenzada normal de $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$. Más aún $Z_{\mathfrak{q}} = {}^{co\pi}\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$.* □

Observemos que la inclusión $\iota : Z_{\mathfrak{q}} \to \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$ es inyectiva y la proyección $\pi : \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}} \to \mathcal{B}_{\mathfrak{q}}$ es suryectiva. Por otra parte, $\ker \pi$ es el ideal bilátero generado por $\iota(Z_{\mathfrak{q}}^+)$. Como $Z_{\mathfrak{q}}$ es normal, vale $\ker \pi = \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}\iota(Z_{\mathfrak{q}}^+)$. Así, tenemos una extensión de álgebras de Hopf trenzadas

$$\mathbf{k} \to Z_{\mathfrak{q}} \overset{\iota}{\hookrightarrow} \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}} \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \mathcal{B}_{\mathfrak{q}} \to \mathbf{k}. \tag{4.1}$$

Sea $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$ el dual graduado de $Z_{\mathfrak{q}}$. Como los morfismos ι y π son graduados, tomando duales graduados obtenemos una nueva sucesión de morfismos de algebras de Hopf trenzadas

$$\mathcal{B}_{\mathfrak{q}} \overset{\pi^*}{\hookrightarrow} \mathcal{L}_{\mathfrak{q}} \overset{\iota^*}{\twoheadrightarrow} \mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}. \tag{4.2}$$

Proposición 4.1.3. *La sucesión* (4.2) *es una extensión de álgebras de Hopf trenzadas.*

Demostración. Como las álgebras de Hopf trenzadas graduadas en cuestión tienen componentes homogéneas finito dimensionales, podemos adaptar el argumento de la prueba de la Proposición 1.5.4 a nuestro caso.

La aplicación $\pi^* : \mathcal{B}_{\mathfrak{q}} \to \mathcal{L}_{\mathfrak{q}}$ está dada por $\pi^*(y)(x) = \langle y, \pi(x)\rangle$ para todo $y \in \mathcal{B}_{\mathfrak{q}}$, $x \in \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$. Luego, como π es suryectivo, si $\pi^*(y) = 0$ entonces $\langle y, \overline{x}\rangle = 0$ para todo $\overline{x} \in \mathcal{B}_{\mathfrak{q}}$. Por lo tanto $y = 0$ y π^* es inyectivo. Asimismo, ι^* es suryectivo. En efecto, fijamos $\alpha \in \mathbb{Z}^\theta$ y consideramos la componente homogénea de dimensión finita $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}(\alpha)$ de $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$. Como hemos observado ι es graduado e inyectivo y por definición $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}(\alpha) = Z_{\mathfrak{q}}(\alpha)^*$. Por lo tanto, $\iota^*|_{\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}(\alpha)}$ es suryectivo y por ende ι^* también lo es.

Sean $y \in \mathcal{L}_{\mathfrak{q}}$, $x \in \mathcal{B}_{\mathfrak{q}}^+$. Entonces, para todo $z \in Z_{\mathfrak{q}} = {}^{co\pi}\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}} = \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}^{co\pi}$, vale

$$\langle y\pi^*(x), z\rangle = \langle y \otimes x, (\pi \otimes \mathrm{id})\underline{\Delta}(z)\rangle = \langle y \otimes x, 1 \otimes z\rangle = 0;$$
$$\langle \pi^*(x)y, z\rangle = \langle x \otimes y, (\mathrm{id} \otimes \pi)\underline{\Delta}(z)\rangle = \langle x \otimes y, z \otimes 1\rangle = 0.$$

Además, si $y \in \ker \iota^*$, entonces $\langle y, \iota(x)\rangle = \iota^*(y)(x) = 0$ para todo $x \in Z_{\mathfrak{q}}$. Claramente si $x \in \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}} - Z_{\mathfrak{q}}$ entonces $x \notin (\ker \iota^*)^\perp$ y $x \notin (\mathcal{L}_{\mathfrak{q}}\pi^*(\mathcal{B}_{\mathfrak{q}}^+))^\perp$. Así, $(\ker \iota^*)^\perp = Z_{\mathfrak{q}} = (\mathcal{L}_{\mathfrak{q}}\pi^*(\mathcal{B}_{\mathfrak{q}}^+))^\perp$ y $\mathcal{L}_{\mathfrak{q}}\pi^*(\mathcal{B}_{\mathfrak{q}}^+) = \ker \iota^*$.

Resta ver que $\mathcal{B}_{\mathfrak{q}} = \mathcal{L}_{\mathfrak{q}}^{\mathrm{co}\,\iota^*}$. Dados $x \in \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$, $y \in \mathcal{B}_{\mathfrak{q}}$ y $z \in Z_{\mathfrak{q}}$ tenemos

$$\begin{aligned}\langle (\mathrm{id} \otimes \iota^*)\underline{\Delta}(\pi^*(y)), z \otimes x\rangle &= \langle \pi^*(y), \iota(z)x\rangle = \varepsilon(z)\langle y, \pi(x)\rangle \\ &= \langle \pi^*(y) \otimes 1, z \otimes x\rangle.\end{aligned}$$

Finalmente, si $y \in \mathcal{L}_{\mathfrak{q}}^{\mathrm{co}\,\iota^*}$, entonces para todo $z \in Z_{\mathfrak{q}}^+$ y $x \in \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$

$$\langle y, \iota(z)x\rangle = \langle (\mathrm{id} \otimes \iota^*)\underline{\Delta}(y), z \otimes x\rangle = \varepsilon(z)\langle y, x\rangle = 0.$$

Como $\iota(Z_{\mathfrak{q}}^+)\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}} = \ker \pi$, entonces $y \in (\ker \pi)^\perp = \mathcal{B}_{\mathfrak{q}}$. Así, $\mathcal{B}_{\mathfrak{q}} = \mathcal{L}_{\mathfrak{q}}^{\mathrm{co}\,\iota^*}$ y (4.2) es una extensión de álgebras de Hopf trenzadas. □

Asumimos la condición $q_{\alpha\beta}^{N_\beta} = 1$ para todo $\alpha, \beta \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}$. El siguiente resultado será utilizado en los ejemplos que siguen en el capítulo.

TEOREMA 4.1.4. *El álgebra de Hopf trenzada $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$ es un álgebra de Hopf usual, isomorfa al álgebra universal envolvente del álgebra de Lie $\mathfrak{n}_{\mathfrak{q}} = \mathcal{P}(\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}})$. Más aún, los elementos $\xi_\beta := \iota^*(y_\beta^{(N_\beta)})$, $\beta \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}$, forman una base de $\mathfrak{n}_{\mathfrak{q}}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $A_{\mathfrak{q}}$ el subespacio de $\mathcal{L}_{\mathfrak{q}}$ generado por los monomios $y_{\beta_{i_1}}^{(r_1 N_{\beta_{i_1}})} \dots y_{\beta_{i_k}}^{(r_k N_{\beta_{i_k}})}$ donde $\beta_{i_k} < \dots < \beta_{i_k}$ son todas las raíces de Cartan de $\mathcal{B}_{\mathfrak{q}}$ y $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{N}_0$. Entonces la multiplicación $\mu : \mathcal{B}_{\mathfrak{q}} \otimes A_{\mathfrak{q}} \to \mathcal{L}_{\mathfrak{q}}$ nos da un isomorfismo de espacios vectoriales $\mathcal{B}_{\mathfrak{q}} \otimes A_{\mathfrak{q}} \to \mathcal{L}_{\mathfrak{q}}$. En efecto, por las relaciones de conmutación en $\mathcal{L}_{\mathfrak{q}}$ tenemos que μ es suryectivo. Además, de las bases de cada uno de los espacios $\mathcal{L}_{\mathfrak{q}}$, $\mathcal{B}_{\mathfrak{q}}$ y $A_{\mathfrak{q}}$ sigue que las series de Hilbert respectivas son:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\mathcal{L}_{\mathfrak{q}}} &= \prod_{\beta_k \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}} \frac{1}{1 - T^{\deg \beta}} \cdot \prod_{\beta_k \notin \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}} \frac{1 - T^{N_\beta \deg \beta}}{1 - T^{\deg \beta}}; \\ \mathcal{H}_{\mathcal{B}_{\mathfrak{q}}} &= \prod_{\beta_k \in \Delta_{\mathfrak{q}}^+} \frac{1 - T^{N_\beta \deg \beta}}{1 - T^{\deg \beta}}; \\ \mathcal{H}_{A_{\mathfrak{q}}} &= \prod_{\beta_k \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}} \frac{1}{1 - T^{N_\beta \deg \beta}}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, como la multiplicación es graduada y $\mathcal{H}_{\mathcal{L}_{\mathfrak{q}}} = \mathcal{H}_{\mathcal{B}_{\mathfrak{q}}}\mathcal{H}_{A_{\mathfrak{q}}}$, μ es inyectivo. Así, μ es un isomorfismo y

$$\mathcal{L}_{\mathfrak{q}} = A_{\mathfrak{q}} \oplus \mathcal{B}_{\mathfrak{q}}^{+} A_{\mathfrak{q}}. \tag{4.3}$$

Consideramos ahora $\iota^* : \mathcal{L}_{\mathfrak{q}} \to \mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$, la traspuesta del morfismo graduado ι. Veamos que la restricción de este morfismo a $A_{\mathfrak{q}}$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. En primer lugar notemos que $\ker \iota^* = \mathcal{L}_{\mathfrak{q}}\mathcal{B}_{\mathfrak{q}}^{+} = \mathcal{B}_{\mathfrak{q}}^{+}\mathcal{L}_{\mathfrak{q}}$, entonces $\ker \iota^* = \mathcal{B}_{\mathfrak{q}}^{+}\mathcal{L}_{\mathfrak{q}} = \mathcal{B}_{\mathfrak{q}}^{+}(\mathcal{B}_{\mathfrak{q}}A_{\mathfrak{q}}) = \mathcal{B}_{\mathfrak{q}}^{+}A_{\mathfrak{q}}$. Por (4.3), $\iota^*(A_{\mathfrak{q}}) = \mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$.

Como $Z_{\mathfrak{q}}$ es un álgebra de Hopf conmutativa, tenemos que $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$ es un álgebra de Hopf coconmutativa. Además, los elementos $\xi_\beta := \iota^*(y_\beta^{(N_\beta)})$ son primitivos, es decir pertenecen a $\mathfrak{n}_{\mathfrak{q}}$. Los monomios $\xi_{\beta_{i_1}}^{r_1} \dots \xi_{\beta_{i_k}}^{r_k}$, $\beta_{i_k} < \cdots < \beta_{i_k} \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}$, $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{N}_0$ forman una base de $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$. Por lo tanto

$$\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}} = \mathbf{k}\langle \xi_\beta : \beta \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}} \rangle \subseteq \mathcal{U}(\mathfrak{n}_{\mathfrak{q}}) \subseteq \mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}.$$

Así, $(\xi_\beta)_{\beta \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}}$ es una base de $\mathfrak{n}_{\mathfrak{q}}$ y $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}} = \mathcal{U}(\mathfrak{n}_{\mathfrak{q}})$. □

4.2. Algunos preliminares

4.2.1. Palabras de Lyndon y base PBW. Presentaremos a continuación el concepto de palabra de Lyndon y algunos resultados básicos de Kharchenko y Rosso que nos proveerán una base PBW formada por productos ordenados de dichas palabras de $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$. Gracias a la convexidad del orden del conjunto de raíces positivas $\Delta_{\mathfrak{q}}^{+}$, cada elemento generador de dicha base será un múltiplo constante no nulo de los generadores x_β de nuestra base PBW obtenida a partir de los isomorfismos de Lusztig. Este cambio de base nos facilitará los cálculos y no cambiará el resultado final buscado.

Consideramos $(V, \mathfrak{q})$ un espacio vectorial trenzado de tipo diagonal de dimensión θ y fijamos una base $X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_\theta\}$ de V. Denotamos por $\mathbb{X}$ al conjunto de palabras con letras en X; la palabra vacía es 1 y dada $u \in \mathbb{X}$ escribimos $\ell(u)$ para referirnos a su longitud. Consideraremos el orden lexicográfico en $\mathbb{X}$.

Definición 4.2.1. Un elemento $u \in \mathbb{X} - 1$ se dice una *palabra de Lyndon* si para toda descomposición $u = vw$, $v, w \in \mathbb{X} - 1$ vale $u < w$. Denotaremos por $\mathbf{L}$ al conjunto de palabras de Lyndon.

Ejemplo 4.2.2.
1. Toda elemento de X es una palabra de Lyndon.
2. Si X es el abecedario $\{a, b, \dots, z\}$ entonces la palabra $aaefagh$ es de Lyndon pero $abftaagh$ no lo es pues $abftaagh > aagh$.

Un teorema básico sobre estas palabras, atribuido al mismo Lyndon, establece que toda palabra $u \in \mathbb{X}$ admite una descomposición única como producto no creciente de palabras de Lyndon,

$$u = l_1 l_2 \dots l_r, \quad l_i \in \mathbf{L},\, l_r \leq \cdots \leq l_1.$$

Esta descomposición se llama *descomposición de Lyndon* de u y cada $l_i \in \mathbf{L}$ *letra de Lyndon* de u.

Cada $u \in \mathbf{L} - X$ admite una descomposición $u = u_1 u_2$, $u_1, u_2 \in \mathbf{L}$ tal que u_2 es el menor final propio de u entre todas las posibles descomposiciones de esta forma. Ésta se llama *descomposición de Shirshov* de u y se puede ver que toda palabra de Lyndon admite una descomposición de Shirshov, ver por ejemplo [**Kh**].

Identificamos $\mathbf{k}\mathbb{X}$ con $T(V)$ y recordamos la definición del conmutador trenzado entre dos elementos $a, b \in T(V)$, dada en (1.6),

$$[a, b]_c = ab - m \circ c(a \otimes b).$$

A partir de este conmutador definimos un endomorfismo lineal $[-]_c$ de $T(V)$ como sigue:

$$[u]_c := \begin{cases} u, & \text{si } u = 1 \text{ o } u \in X; \\ [[v]_c, [w]_c]_c, & \text{si } u \in \mathbf{L} - X,\ u = vw \text{ su desc. de Shirshov;} \\ [u_1]_c \dots [u_t]_c, & \text{si } u \in \mathbb{X} - \mathbf{L},\ u = u_1 \dots u_t \text{ su desc. de Lyndon.} \end{cases}$$

Definición 4.2.3. La *hiperletra* correspondiente a $l \in \mathbf{L}$ es el elemento $[l]_c$. Una *hiperpalabra* es una palabra escrita en hiperletras. Una hiperpalabra W se dice *monótona* si $W = [u_1]_c^{k_1} \dots [u_t]_c^{k_t}$ con $u_t < \cdots < u_1$.

Podemos considerar un orden diferente, llamado *deg-lex order* sobre el conjunto de palabras $\mathbb{X}$, ver [**Kh, U**]. Para cada par $u, v \in \mathbb{X}$ decimos que $u \succ v$ si $\ell(u) < \ell(v)$ o $\ell(u) = \ell(v)$ y $u > v$ para el orden lexicográfico. Observemos que este orden es total, su elemento maximal es 1 y es invariante por multiplicación a izquierda y derecha.

Dado un ideal de Hopf I de $T(V)$ definimos

$$G_I := \{u \in \mathbb{X} : u \notin \mathbf{k}\mathbb{X}_{\succ u} + I\}.$$

Así, si $u \in G_I$ y $u = vw$, entonces $v, w \in G_I$. Consideramos $S_I = G_I \cap \mathbf{L}$ y definimos $h_I : S_I \to \{2, 3, \dots\} \cup \{\infty\}$ dado por

$$h_I(u) = \text{mín}\{k \in \mathbb{N} : u^k \in \mathbf{k}\mathbb{X}_{\succ u^k} + I\}.$$

Proposición 4.2.4. [**Kh**] *El conjunto*

$$\{[u_1]_c^{k_1} \dots [u_m]_c^{k_m} : m \in \mathbb{N}_0, u_1 > \cdots > u_m, u_i \in S_I, 0 < k_i < h_I(u_i)\}$$

es una base PBW de $T(V)/I$. □

Nos referiremos a esta base como *base PBW de Kharchenko* de $T(V)/I$.

COROLARIO 4.2.5. [**Kh**] *Una palabra u pertenece a G_I si y sólo si la hiperpalabra $[u]_c$ no es una combinación lineal, módulo I, de hiperpalabras mayores $[w]_c$, $w \succ u$ cuyas hiperletras están en S_I.* □

Como ya hemos mencionado en la sección 2.1, el sistema generalizado de raíces positivas $\Delta_{\mathfrak{q}}^+$ es el conjunto de los grados de los generadores de una base PBW de $\mathcal{B}_{\mathfrak{q}}$ y no depende de la base PBW elegida.

DEFINICIÓN 4.2.6. [**Ang4**, 2.6] Dado un sistema de raíces finito y un orden total $<$ sobre Δ^+, decimos que el orden es *convexo* si para cada $\alpha, \beta \in \Delta^+$ tal que $\alpha < \beta$ y $\alpha + \beta \in \Delta^+$ vale $\alpha < \alpha + \beta < \beta$. El orden se dice *fuertemente convexo* si para cada subconjunto ordenado $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_k$ de elementos de Δ^+ tal que $\alpha = \sum_i \alpha_i \in \Delta^+$ vale $\alpha_1 < \alpha < \alpha_k$.

Una propiedad sumamente importante de las raíces positivas de $\mathcal{B}_{\mathfrak{q}}$ es la convexidad del orden $\beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_M$, $\beta_i \in \Delta_{\mathfrak{q}}^+$. (Implícitamente hemos utilizado esta propiedad durante los capítulos 2 y 3).

TEOREMA 4.2.7. [**Ang4**, 2.11] *Dado un orden sobre Δ^+, son equivalentes:*

- *el orden es convexo,*
- *el orden es fuertemente convexo,*
- *el orden está asociado a una expresión reducida del elemento de longitud máxima, cf.* (2.5). □

El siguiente teorema nos permitirá trabajar con la base PBW de Kharchenko lo que nos facilitará los cálculos de los coproductos en los ejemplos.

TEOREMA 4.2.8. [**AY**, 4.12] *Sean $(\mathbf{x}_\beta)_{\beta \in \Delta_{\mathfrak{q}}^+}$ elementos no nulos de $\mathcal{B}_{\mathfrak{q}}$ tales que $\mathbf{x}_\beta \in (\mathcal{B}_{\mathfrak{q}})_\beta$ y existe un orden $\beta_1 < \cdots < \beta_M$ de las raíces tal que, para cada $k \in \mathbb{I}_M$, los elementos $\mathbf{x}_{\beta_M}^{a_M} \cdots \mathbf{x}_{\beta_k}^{a_k}$, $0 \leq a_j < N_{\beta_j}$ determinan una base de un subespacio Y_k que es una subálgebra coideal de $\mathcal{B}_{\mathfrak{q}}$. Entonces el orden de las raíces es convexo. Más aún, si $(x_\beta)_{\beta \in \Delta_{\mathfrak{q}}^+}$ denota el conjunto de generadores PBW correspondientes al elemento de orden maximal de $\mathcal{W}$, entonces existen escalares no nulos c_β tales que $x_\beta = c_\beta \mathbf{x}_\beta$.* □

Así, como los generadores de la base PBW de Kharchenko satisfacen las hipótesis del teorema [**Ang4**, 2.14], cada uno de ellos es un múltiplo escalar no nulo de los generadores de la base utilizada hasta ahora (obtenida a partir de los isomorfismos de Lusztig).

El siguiente resultado nos será de gran utilidad al momento de calcular la hiperpalabra $[l_\beta]_c$ asociada a una raíz $\beta \in \Delta_{\mathfrak{q}}^+$:

PROPOSICIÓN 4.2.9. [**Ang4**, 2.17] *Para cada* $\beta \in \Delta_{\mathfrak{q}}^{+}$,

$$l_\beta = \begin{cases} \mathbf{x}_{\alpha_i}, & \textit{si } \beta = \alpha_i,\ i \in \mathbb{I}; \\ \text{máx}\{l_{\delta_1} l_{\delta_2} : \delta_1, \delta_2 \in \Delta_{\mathfrak{q}}^{+}, \delta_1 + \delta_2 = \beta, l_{\delta_1} < l_{\delta_2}\}, & \textit{si } \beta \neq \alpha_i,\ i \in \mathbb{I}. \end{cases} \qquad \square$$

Por ejemplo, tomemos $\beta = 4\alpha_1 + 3\alpha_2$. Entonces las posibles palabras de Lyndon l_β asociadas a β serían: $l_1l_1l_1l_1l_2l_2l_2$, $l_1l_1l_1l_2l_1l_2$, $l_1l_1l_2l_1l_2l_1l_2$ y $l_1l_1l_2l_1l_1l_2l_2$. Cada una de ellas la escribimos como $l_{\delta_1}l_{\delta_2}$ y nos quedamos con la mayor, que en este caso es la tercera. Por lo que la palabra de Lyndon l_β es $l_{\delta_1}l_{\delta_2}$ con $\delta_1 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$ y $\delta_2 = \alpha_1 + \alpha_2$.

Damos a continuación una lista de las hiperpalabras de Lyndon asociadas a las raíces β que aparecerán en los ejemplos:

Raíz	Hiperpalabra	Notación
α_i	$\mathbf{x}_i$	x_i
$n\alpha_1 + \alpha_2$	$(\text{ad}_c\, \mathbf{x}_1)^n \mathbf{x}_2$	$x_{1\ldots 12}$
$\alpha_1 + 2\alpha_2$	$[\mathbf{x}_{\alpha_1+\alpha_2}, \mathbf{x}_2]_c$	$[x_{12}, x_2]_c$
$3\alpha_1 + 2\alpha_2$	$[\mathbf{x}_{2\alpha_1+\alpha_2}, \mathbf{x}_{\alpha_1+\alpha_2}]_c$	$[x_{112}, x_{12}]_c$
$4\alpha_1 + 3\alpha_2$	$[\mathbf{x}_{3\alpha_1+2\alpha_2}, \mathbf{x}_{\alpha_1+\alpha_2}]_c$	$[[x_{112}, x_{12}]_c, x_{12}]_c$
$5\alpha_1 + 3\alpha_2$	$[\mathbf{x}_{2\alpha_1+\alpha_2}, \mathbf{x}_{3\alpha_1+2\alpha_2}]_c$	$[x_{112}, [x_{112}, x_{12}]_c]_c$

Además utilizaremos una notación similar para los elementos de $\mathcal{L}_{\mathfrak{q}}$: por ejemplo escribiremos $y_{112,12}$ para referirnos al elemento de $\mathcal{L}_{\mathfrak{q}}$ que corresponde a $[x_{112}, x_{12}]_c$ y $y_{(112,12),12}$ al que corresponde a $[[x_{112}, x_{12}]_c, x_{12}]_c$.

4.2.2. Álgebras de Lie de rango pequeño. En los ejemplos en los que trabajaremos aparecerán las álgebras de Lie simples de rango menor o igual a dos. En la siguiente tabla se detalla, para cada una de ellas, la respectiva matriz de Cartan asociada y el conjunto de raíces positivas Δ^+ en término de las raíces simples δ_1 y δ_2. Recordar que $B_2 \simeq C_2$ y que D_2 no es simple ya que es isomorfa a dos copias de A_1.

Nombre	Matriz	Δ^+
A_1	(2)	$\{\delta_1\}$
A_2	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\{\delta_1, \delta_1+\delta_2, \delta_2\}$
B_2	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$	$\{\delta_1, \delta_1+\delta_2, 2\delta_1+\delta_2, \delta_2\}$
C_2	$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\{\delta_1, \delta_1+\delta_2, \delta_1+2\delta_2, \delta_2\}$
G_2	$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\{\delta_1, \delta_1+\delta_2, 2\delta_1+\delta_2, 3\delta_1+\delta_2, 3\delta_1+2\delta_2, \delta_2\}$

El siguiente teorema nos presenta a las álgebras de Lie semisimples por generadores y relaciones, el mismo se debe a Serre y nos será de gran utilidad en lo que resta del capítulo.

TEOREMA 4.2.10 (Serre). *Sea $A = (a_{ij})_{i,j\in\mathbb{I}}$ una matriz de Cartan. Entonces existe una única, salvo isomorfismo, álgebra de Lie semisimple compleja $\mathfrak{g}$ (cuya matriz de Cartan es equivalente a A), tal que $\mathfrak{g}$ está definida por un conjunto de 3θ generadores $\{e_i, f_i, h_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ y relaciones*

$$\begin{aligned} &[h_i, h_j] = 0, && [e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i, \\ &[h_i, e_j] = a_{ij} e_j, && [h_i, f_j] = -a_{ij} f_j, \\ &(\operatorname{ad} e_i)^{-a_{ij}+1} e_j = 0, && (\operatorname{ad} f_i)^{-a_{ij}+1} f_j = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Es bien sabido que toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ admite una descomposición triangular $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^+ \otimes \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{g}^-$ donde $\mathfrak{g}^+$ es la subálgebra generada por los e_i, $\mathfrak{g}^-$ la subálgebra generada por los f_i y $\mathfrak{h}$ la subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ generada por los h_i, $i \in \mathbb{I}$. A lo largo de este capítulo escribiremos $\mathcal{U}(\mathfrak{g}^+)$ para referirnos al álgebra envolvente de la parte positiva del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Haciendo un abuso de notación escribiremos por ejemplo $\mathcal{U}(A_2^+)$ en el caso que $\mathfrak{g} \simeq A_2$.

Enunciamos además el teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt que nos da una base PBW del álgebra universal envolvente.

TEOREMA 4.2.11. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie compleja y $\{X_i\}_{i\in A}$ una base de $\mathfrak{g}$. Fijamos un orden simple (es decir un orden parcial donde todo par de elementos son comparables) del conjunto de índices A. Entonces el conjunto de todos los monomios $\iota(X_{i_1})^{j_1}\cdots\iota(X_{i_k})^{j_k}$ con $i_1 < \cdots < i_k$ y $j_r \geq 0$ es una base de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. En particular la inclusión canónica $\iota : \mathfrak{g} \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ es inyectiva.* $\square$

4.2.3. Sistemas de raíces finito de rango 2. Para una presentación ordenada de los ejemplos de este capítulo seguiremos la clasificación de Heckenberger de los sistemas de raíces finitos de álgebras de Nichols de tipo digonal, [**H2**].

En primer lugar introduciremos la noción de *diagrama de Dynkin generalizado* asociado a $\mathfrak{q}$. Dada una matriz $\mathfrak{q} = (q_{ij})_{i,j\in\mathbb{I}}$, consideramos el grafo de θ vértices, cada uno de ellos etiquetado con el correspondiente q_{ii}, y con arista entre el vértice i y el j si $q_{ij}q_{ji} \neq 1$ etiquetada con dicho escalar.

Ejemplo 4.2.12. Si consideramos la matriz $\mathfrak{q}$ dada por

$$q_{11} = -1, \qquad q_{22} = q_{33} = q, \qquad q_{12}q_{21} = q_{23}q_{32} = q^{-1}, \qquad q_{13}q_{31} = 1.$$

Entonces, el correspondiente diagrama generalizado de Dynkin es

$$\overset{-1}{\circ}\xrightarrow[\quad]{q^{-1}}\!\!\!\!\!-\overset{q}{\circ}\xrightarrow[\quad]{q^{-1}}\!\!\!\!\!-\overset{q}{\circ} \quad .$$

En Cuadro 1 damos la lista completa de los diagramas conexos de rango 2 dada por Heckenberger en [**H2**]. En la última columna incluimos los resultados obtenidos en la siguiente sección, es decir escribimos el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{n}_\mathfrak{q} \simeq \mathfrak{g}^+$. En la penúltima columna mencionamos el tipo al que corresponde la trenza $\mathfrak{q}$ según [**AA2**].

Utilizamos la notación $\mathbb{G}_n$ para referirnos a las raíces n-ésimas de la unidad y $\mathbb{G}'_n \subset \mathbb{G}_n$ para las primitivas.

4.3. Rango 2

En esta sección probaremos el siguiente resultado:

Teorema 4.3.1. *Sea $\mathfrak{q} \in \mathbf{k}_{2\times 2}$ tal que $\mathcal{B}_\mathfrak{q}$ es de dimensión finita. Entonces $\mathfrak{n}_\mathfrak{q}$ es 0 o isomorfa a $\mathfrak{g}^+$, donde $\mathfrak{g}^+$ es la parte positiva del álgebra de Lie semisimple de dimensión finita $\mathfrak{g}$ que aparece en la última columna del Cuadro 1.*

Recordar que asumimos una hipótesis extra sobre la matriz $\mathfrak{q}$: si $\alpha, \beta \in \mathfrak{O}_\mathfrak{q}$, entonces $q_{\alpha\beta}^{N_\beta} = q_{\beta\alpha}^{N_\beta} = 1$, donde, como siempre N_β es el orden de $q_{\beta\beta}$. Así, en $\mathcal{L}_\mathfrak{q}$ tenemos

$$\begin{aligned}[y_\beta^{(N_\beta)}, y_\alpha^{(N_\alpha)}]_c &= y_\beta^{(N_\beta)} y_\alpha^{(N_\alpha)} - q_{\beta\alpha}^{N_\alpha N_\beta} y_\beta^{(N_\beta)} y_\alpha^{(N_\alpha)} \\ &= y_\beta^{(N_\beta)} y_\alpha^{(N_\alpha)} - y_\beta^{(N_\beta)} y_\alpha^{(N_\alpha)} = [y_\beta^{(N_\beta)}, y_\alpha^{(N_\alpha)}].\end{aligned}$$

Para probar el Teorema 4.3.1 utilizaremos los siguientes hechos:

- $Z_\mathfrak{q}$ es una subálgebra de Hopf de $\widetilde{\mathcal{B}}_\mathfrak{q}$;
- $\underline{\Delta}$ es un morfismo graduado;
- $\mathfrak{Z}_\mathfrak{q}$ está generada por $\{\xi_\beta | x_\beta^{N_\beta} \in \mathcal{P}(\widetilde{\mathcal{B}}_\mathfrak{q})\}$.

Fila	Diagrama de Dynkin	Parámetro	Tipo de $\mathcal{B}_{\mathfrak{q}}$	$\mathfrak{n}_{\mathfrak{q}} \simeq \mathfrak{g}^+$
1	$\overset{q}{\circ}\overset{q^{-1}}{\text{———}}\overset{q}{\circ}$	$q \neq 1$	Cartan A	A_2
2	$\overset{q}{\circ}\overset{q^{-1}}{\text{———}}\overset{-1}{\circ} \quad \overset{-1}{\circ}\overset{q}{\text{———}}\overset{-1}{\circ}$	$q \neq \pm 1$	Súper A	A_1
3	$\overset{q}{\circ}\overset{q^{-2}}{\text{———}}\overset{q^2}{\circ}$	$q \neq \pm 1$	Cartan B	B_2
4	$\overset{q}{\circ}\overset{q^{-2}}{\text{———}}\overset{-1}{\circ} \quad \overset{-q^{-1}}{\circ}\overset{q^2}{\text{———}}\overset{-1}{\circ}$	$q \notin \mathbb{G}_4$	Súper B	$A_1 \oplus A_1$
5	$\overset{\zeta}{\circ}\overset{q^{-1}}{\text{———}}\overset{q}{\circ} \quad \overset{\zeta}{\circ}\overset{\zeta^{-1}q}{\text{———}}\overset{\zeta q^{-1}}{\circ}$	$\zeta \in \mathbb{G}_3 \not\ni q$	$\mathfrak{br}(2,a)$	$A_1 \oplus A_1$
6	$\overset{\zeta}{\circ}\overset{-\zeta}{\text{———}}\overset{-1}{\circ} \quad \overset{\zeta^{-1}}{\circ}\overset{-\zeta^{-1}}{\text{———}}\overset{-1}{\circ}$	$\zeta \in \mathbb{G}'_3$	Estándar B	0
7	$\overset{-\zeta^{-2}}{\circ}\overset{-\zeta^{3}}{\text{———}}\overset{-\zeta^{2}}{\circ} \quad \overset{-\zeta^{-2}}{\circ}\overset{\zeta^{-1}}{\text{———}}\overset{-1}{\circ} \quad \overset{-\zeta^{2}}{\circ}\overset{-\zeta}{\text{———}}\overset{-1}{\circ}$ $\overset{-\zeta^{3}}{\circ}\overset{\zeta}{\text{———}}\overset{-1}{\circ} \quad \overset{-\zeta^{3}}{\circ}\overset{-\zeta^{-1}}{\text{———}}\overset{-1}{\circ}$	$\zeta \in \mathbb{G}'_{12}$	$\mathfrak{ufo}(7)$	0
8	$\overset{-\zeta^{2}}{\circ}\overset{\zeta}{\text{———}}\overset{-\zeta^{2}}{\circ} \quad \overset{-\zeta^{2}}{\circ}\overset{\zeta^{3}}{\text{———}}\overset{-1}{\circ} \quad \overset{-\zeta^{-1}}{\circ}\overset{-\zeta^{3}}{\text{———}}\overset{-1}{\circ}$	$\zeta \in \mathbb{G}'_{12}$	$\mathfrak{ufo}(8)$	A_1
9	$\overset{-\zeta}{\circ}\overset{\zeta^{-2}}{\text{———}}\overset{\zeta^{3}}{\circ} \quad \overset{\zeta^{3}}{\circ}\overset{\zeta^{-1}}{\text{———}}\overset{-1}{\circ} \quad \overset{-\zeta^{2}}{\circ}\overset{\zeta}{\text{———}}\overset{-1}{\circ}$	$\zeta \in \mathbb{G}'_9$	$\mathfrak{brj}(2;3)$	$A_1 \oplus A_1$
10	$\overset{q}{\circ}\overset{q^{-3}}{\text{———}}\overset{q^3}{\circ}$	$q \notin \mathbb{G}_2 \cup \mathbb{G}_3$	Cartan G_2	G_2
11	$\overset{\zeta^{2}}{\circ}\overset{\zeta}{\text{———}}\overset{\zeta^{-1}}{\circ} \quad \overset{\zeta^{2}}{\circ}\overset{-\zeta^{-1}}{\text{———}}\overset{-1}{\circ} \quad \overset{\zeta}{\circ}\overset{-\zeta}{\text{———}}\overset{-1}{\circ}$	$\zeta \in \mathbb{G}'_8$	Estándar G_2	$A_1 \oplus A_1$
12	$\overset{\zeta^{6}}{\circ}\overset{-\zeta^{-1}}{\text{———}}\overset{-\zeta^{-4}}{\circ} \quad \overset{\zeta^{6}}{\circ}\overset{\zeta}{\text{———}}\overset{\zeta^{-1}}{\circ}$ $\overset{-\zeta^{-4}}{\circ}\overset{\zeta^{5}}{\text{———}}\overset{-1}{\circ} \quad \overset{\zeta}{\circ}\overset{\zeta^{-5}}{\text{———}}\overset{-1}{\circ}$	$\zeta \in \mathbb{G}'_{24}$	$\mathfrak{ufo}(9)$	$A_1 \oplus A_1$
13	$\overset{\zeta}{\circ}\overset{\zeta^{2}}{\text{———}}\overset{-1}{\circ} \quad \overset{-\zeta^{-2}}{\circ}\overset{\zeta^{-2}}{\text{———}}\overset{-1}{\circ}$	$\zeta \in \mathbb{G}'_5$	$\mathfrak{brj}(2;5)$	B_2
14	$\overset{\zeta}{\circ}\overset{\zeta^{-3}}{\text{———}}\overset{-1}{\circ} \quad \overset{-\zeta}{\circ}\overset{-\zeta^{-3}}{\text{———}}\overset{-1}{\circ}$ $\overset{-\zeta^{-2}}{\circ}\overset{\zeta^{3}}{\text{———}}\overset{-1}{\circ} \quad \overset{-\zeta^{-2}}{\circ}\overset{-\zeta^{3}}{\text{———}}\overset{-1}{\circ}$	$\zeta \in \mathbb{G}'_{20}$	$\mathfrak{ufo}(10)$	$A_1 \oplus A_1$
15	$\overset{-\zeta}{\circ}\overset{-\zeta^{-3}}{\text{———}}\overset{\zeta^{5}}{\circ} \quad \overset{\zeta^{3}}{\circ}\overset{-\zeta^{4}}{\text{———}}\overset{-\zeta^{-4}}{\circ}$ $\overset{\zeta^{5}}{\circ}\overset{-\zeta^{-2}}{\text{———}}\overset{-1}{\circ} \quad \overset{\zeta^{3}}{\circ}\overset{-\zeta^{2}}{\text{———}}\overset{-1}{\circ}$	$\zeta \in \mathbb{G}'_{15}$	$\mathfrak{ufo}(11)$	$A_1 \oplus A_1$
16	$\overset{-\zeta}{\circ}\overset{-\zeta^{-3}}{\text{———}}\overset{-1}{\circ} \quad \overset{-\zeta^{-2}}{\circ}\overset{-\zeta^{3}}{\text{———}}\overset{-1}{\circ}$	$\zeta \in \mathbb{G}'_7$	$\mathfrak{ufo}(12)$	G_2

CUADRO 1. Diagramas conexos de rango 2

Así, si $|\mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}| \leq 2$, los elementos ξ_β, $\beta \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}$ generan $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$ y por lo tanto $\mathfrak{n}_{\mathfrak{q}} \simeq \mathfrak{g}^+$ con $\mathfrak{g}$ de tipo A_1 o $A_1 \oplus A_1$. Si $|\mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}| > 2$, calcularemos los coproductos de los $x_\beta^{N_\beta}$ en $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$, $\beta \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}$ y en todos los casos obtendremos sólo dos elementos primitivos, digamos $x_{\beta_1}^{N_{\beta_1}}$ y $x_{\beta_2}^{N_{\beta_2}}$. Luego, $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$ está generada por ξ_{β_1} y ξ_{β_2}. En estos caso, utilizando la dualidad entre el producto de $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$ y el coproducto de

$Z_\mathfrak{q}$, comprobaremos que

$$(\operatorname{ad}\xi_{\beta_i})^{1-a_{ij}}\xi_{\beta_j}=0, \qquad 1\le i\neq j\le 2. \tag{4.4}$$

Para probar (4.4), bastará observar que en $\mathfrak{n}_\mathfrak{q}$ la componente homogénea de grado $N_{\beta_i}(1-a_{ij})\beta_i+N_{\beta_j}\beta_j$ es trivial. Por lo tanto, (4.4) implica que existe un epimorfismo de álgebras de Hopf $\mathfrak{F}:\mathcal{U}(\mathfrak{g}^+)\twoheadrightarrow\mathfrak{Z}_\mathfrak{q}$ tal que $e_i\mapsto\xi_{\beta_i}$. Como la restricción $\mathfrak{g}^+\xrightarrow{*}\mathfrak{n}_\mathfrak{q}$ es un isomorfismo puesto que en cada caso $*$ es suryectivo y $\dim\mathfrak{g}^+=\dim\mathfrak{n}_\mathfrak{q}=|\mathfrak{O}_\mathfrak{q}|$, entonces $\mathfrak{F}$ es un isomorfismo.

Referimos a [**Ang1, AAY, Ang3**] para la presentación, sistema de raíces y raíces de Cartan de las trenzas $\mathfrak{q}$ de tipo standard, súper y de tipo no identificado respectivamente.

Como hemos hecho hasta el momento, denotaremos por ξ_β al elemento de $\mathfrak{Z}_\mathfrak{q}$ que es la imagen por ι^* del elemento $y_\beta^{(N_\beta)}\in\mathcal{L}_\mathfrak{q}$. Así, denotaremos por ejemplo por ξ_{112} al elemento de $\mathfrak{Z}_\mathfrak{q}$ que es imagen del elemento $y_{112}^{(N)}$ de $\mathcal{L}_\mathfrak{q}$.

4.3.1. Prueba del Teorema 4.3.1.

Fila 1. El diagrama $\overset{q}{\circ}\overset{q^{-1}}{\text{———}}\overset{q}{\circ}$ con $q\neq 1$ una raíz de la unidad de orden N corresponde a una trenza Cartan de tipo A con raíces positivas

$$\Delta_\mathfrak{q}^+=\{\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2\}.$$

En este caso todas las raíces son de Cartan con $N_\beta=N$, $\beta\in\mathfrak{O}_\mathfrak{q}=\Delta_\mathfrak{q}^+$ y $q_{12}^N=q_{21}^N=1$. Los elementos $x_1,x_2\in\widetilde{\mathcal{B}}_\mathfrak{q}$ son primitivos y

$$\underline{\Delta}(x_{12})=x_{12}\otimes 1+1\otimes x_{12}+(1-q^{-1})x_1\otimes x_2.$$

Por lo tanto los coproductos de los elementos $x_1^N,x_{12}^N,x_2^N\in\widetilde{\mathcal{B}}_\mathfrak{q}$ son:

$$\underline{\Delta}(x_1^N)=x_1^N\otimes 1+1\otimes x_1^N;\qquad \underline{\Delta}(x_2^N)=x_2^N\otimes 1+1\otimes x_2^N;$$
$$\underline{\Delta}(x_{12}^N)=x_{12}^N\otimes 1+1\otimes x_{12}^N+(1-q^{-1})^N q_{21}^{\frac{N(N-1)}{2}}x_1^N\otimes x_2^N.$$

Luego, utilizando la dualidad entre el producto de $\mathfrak{Z}_\mathfrak{q}$ y el coproducto de $Z_\mathfrak{q}$, tenemos

$$[\xi_2,\xi_1]=(1-q^{-1})^N q_{21}^{\frac{N(N-1)}{2}}\xi_{12};$$
$$[\xi_2,\xi_{12}]=[\xi_1,\xi_{12}]=0.$$

Definimos entonces el morfismo de álgebras $\mathfrak{F}:\mathcal{U}(A_2^+)\to\mathfrak{Z}_\mathfrak{q}$ dado por

$$e_1\mapsto\xi_1,\qquad e_2\mapsto\xi_2.$$

Además, $\mathfrak{F}(\operatorname{ad}e_1(e_2))=(1-q^{-1})^N q_{21}^{\frac{N(N-1)}{2}}\xi_{12}$. Entonces, dicho morfismo envía el elemento $e_1^r e_{\delta_1+\delta_2}^s e_2^t$, $r,s,t\in\mathbb{N}_0$, a $c\,\xi_{\alpha_1}^r\xi_{\alpha_1+\alpha_2}^s\xi_{\alpha_2}^t$ con $c\neq 0$ y por lo tanto aplica una base en una base, así $\mathfrak{Z}_\mathfrak{q}\simeq\mathcal{U}(A_2^+)$.

FILA 2. Los diagramas de la segunda fila corresponden a una trenza súper de tipo A con raíces positivas

$$\Delta_{\mathfrak{q}}^{+} = \{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2\}.$$

En el primer caso tenemos el diagrama $\overset{q}{\circ}\overset{q^{-1}}{\text{———}}\overset{-1}{\circ}$ con q una raíz de la unidad de orden $N > 2$.

En este caso la única raíz de Cartan es α_1 y $N_{\alpha_1} = N$. El elemento $x_1^N \in \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$ es primitivo y $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$ está generada por ξ_1. Definimos entonces el morfismo de álgebras $\mathfrak{F} : \mathcal{U}(A_1^+) \to \mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$ dado por $e_1 \mapsto \xi_1$. Claramente es biyectivo y así $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}} \simeq \mathcal{U}(A_1^+)$.

En el segundo caso, el diagrama $\overset{-1}{\circ}\overset{q}{\text{———}}\overset{-1}{\circ}$ con q una raíz de la unidad de orden $N > 2$, también tiene una única raíz de Cartan, $\alpha_1 + \alpha_2$. El elemento $x_{12}^N \in \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$ es primitivo y $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$ está generada por ξ_{12}. Entonces $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}} \simeq \mathcal{U}(A_1^+)$.

FILA 3. El diagrama $\overset{q}{\circ}\overset{q^{-2}}{\text{———}}\overset{q^2}{\circ}$ con $q \neq 1$ una raíz de la unidad de orden N corresponde a una trenza Cartan de tipo B con raíces positivas

$$\Delta_{\mathfrak{q}}^{+} = \{\alpha_1, 2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2\}.$$

En este caso todas las raíces son de Cartan y $q_{21}^N = 1$. Los coproductos de los generadores en $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$ son:

$$\begin{aligned}
\underline{\Delta}(x_1) =& x_1 \otimes 1 + 1 \otimes x_1; \qquad \underline{\Delta}(x_2) = x_2 \otimes 1 + 1 \otimes x_2;\\
\underline{\Delta}(x_{12}) =& x_{12} \otimes 1 + 1 \otimes x_{12} + (1 - q^{-2})\, x_1 \otimes x_2;\\
\underline{\Delta}(x_{112}) =& x_{112} \otimes 1 + 1 \otimes x_{112} + (1 - q^{-1})(1 - q^{-2})\, x_1^2 \otimes x_2\\
&+ q(1 - q^{-2})\, x_1 \otimes x_{12}.
\end{aligned}$$

Dividiremos el estudio de estas álgebras dependiendo de la paridad de N.

CASO 1: Si N es impar, entonces $N_\beta = N$ para toda raíz β.

Los coproductos de los elementos $x_1^N, x_{12}^N, x_{112}^N, x_2^N \in \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$ son:

$$\begin{aligned}
\underline{\Delta}(x_1^N) =& x_1^N \otimes 1 + 1 \otimes x_1^N; \qquad \underline{\Delta}(x_2^N) = x_2^N \otimes 1 + 1 \otimes x_2^N;\\
\underline{\Delta}(x_{12}^N) =& x_{12}^N \otimes 1 + 1 \otimes x_{12}^N + (1 - q^{-2})^N x_1^N \otimes x_2^N;\\
\underline{\Delta}(x_{112}^N) =& x_{112}^N \otimes 1 + 1 \otimes x_{112}^N + (1 - q^{-1})^N (1 - q^{-2})^N x_1^{2N} \otimes x_2^N\\
&+ C\, x_1^N \otimes x_{12}^N;
\end{aligned}$$

donde C es un escalar no nulo. Por lo tanto, en $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$ tenemos

$$\begin{aligned}
&[\xi_1, \xi_2] = (1 - q^{-2})^N \xi_{12};\\
&[\xi_{12}, \xi_1] = C\, \xi_{112};\\
&[\xi_1, \xi_2] = (1 - q^{-1})^N (1 - q^{-2})^N \xi_{112} + (1 - q^{-2})^N \xi_1 \xi_{12};\\
&[\xi_1, \xi_{112}] = [\xi_2, \xi_{12}] = 0.
\end{aligned}$$

Definimos entonces el morfismo de álgebras $\mathfrak{F} : \mathcal{U}(B_2^+) \to \mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$ dado por

$$e_1 \mapsto \xi_1, \qquad e_2 \mapsto \xi_2.$$

Las relaciones en $\mathcal{U}(B_2^+)$ implican que $C = 2(1 - q^{-1})^N (1 - q^{-2})^N$. Dicho morfismo envía $e_1^r e_{\delta_1+\delta_2}^s e_{2\delta_1+\delta_2}^t e_2^u$ a $c\, \xi_1^r \xi_{\alpha_1+\alpha_2}^s \xi_{2\alpha_1+\alpha_2}^t \xi_{\alpha_2}^u$ con $c \neq 0$ y por lo tanto aplica una base en una base, así $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}} \simeq \mathcal{U}(B_2^+)$.

CASO 2: Si $N = 2M > 2$, entonces $N_{\alpha_1} = N_{\alpha_1+\alpha_2} = N$ y $N_{2\alpha_1+\alpha_2} = N_{\alpha_2} = M$. Los coproductos de los elementos $x_1^N, x_{12}^N, x_{112}^M, x_2^M \in \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$ son:

$$\begin{aligned}
\underline{\Delta}(x_1^N) =& x_1^N \otimes 1 + 1 \otimes x_1^N; \qquad \underline{\Delta}(x_2^M) = x_2^M \otimes 1 + 1 \otimes x_2^M;\\
\underline{\Delta}(x_{12}^N) =& x_{12}^N \otimes 1 + 1 \otimes x_{12}^N + (1 - q^{-2})^N q_{21}^{M(N-1)}\, x_1^N \otimes x_2^{2M}\\
&+ (1 - q^{-2})^M q_{21}^{M^2} x_{112}^M \otimes x_2^M;\\
\underline{\Delta}(x_{112}^M) =& x_{112}^M \otimes 1 + 1 \otimes x_{112}^M + (1 - q^{-1})^M (1 - q^{-2})^M q_{21}^{M(M-1)} x_1^N \otimes x_2^M.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, en $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$ tenemos

$$\begin{aligned}
&[\xi_2, \xi_1] = (1 - q^{-1})^M (1 - q^{-2})^M q_{21}^{M(M-1)} \xi_{112};\\
&[\xi_{112}, \xi_2] = (1 - q^{-2})^M q_{21}^{M^2} \xi_{12};\\
&[\xi_1, \xi_{112}] = [\xi_2, \xi_{12}] = 0.
\end{aligned}$$

Definimos entonces el morfismo de álgebras $\mathfrak{F} : \mathcal{U}(C_2^+) \to \mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$ dado por

$$e_1 \mapsto \xi_1, \qquad e_2 \mapsto \xi_2.$$

Dicho morfismo envía $e_1^r e_{\delta_1+\delta_2}^s e_{\delta_1+2\delta_2}^t e_2^u$ a $c\, \xi_{\alpha_1}^r \xi_{\alpha_1+\alpha_2}^s \xi_{2\alpha_1+\alpha_2}^t \xi_{\alpha_2}^u$ con $c \neq 0$ y por lo tanto aplica una base en una base, así $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}} \simeq \mathcal{U}(C_2^+)$.

FILA 4. Los diagramas de esta fila corresponden a una trenza súper de tipo B con raíces positivas

$$\Delta_{\mathfrak{q}}^+ = \{\alpha_1, 2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2\}.$$

En el diagrama $\overset{q}{\circ}\overset{q^{-2}}{\text{———}}\overset{-1}{\circ}$ con $q \neq 1$ una raíz de la unidad de orden $N \neq 4$, las raíces de Cartan son α_1 con $N_{\alpha_1} = N$ y $\alpha_1 + \alpha_2$ con $N_{\alpha_1+\alpha_2} = M$ donde M es N si N es impar y $\frac{N}{2}$ si N es par. Los elementos $x_1^N, x_{12}^M \in \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$ son primitivos. Luego, en $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$ tenemos $[\xi_{12}, \xi_1] = 0$. Definimos entonces el morfismo de álgebras $\mathfrak{F} : \mathcal{U}((A_1 \oplus A_1)^+) \to \mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$ dado por

$$e_1 \mapsto \xi_1, \qquad e_2 \mapsto \xi_{12}.$$

Dicho morfismo es biyectivo, así $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}} \simeq \mathcal{U}((A_1 \oplus A_1)^+)$.

Consideramos el diagrama $\overset{-q^{-1}}{\circ}\overset{q^{2}}{\rule{2em}{0.4pt}}\overset{-1}{\circ}$ con $q \neq 1$ una raíz de la unidad de orden $N \neq 4$. Las raíces de Cartan son α_1 con $N_{\alpha_1} = M$ y $\alpha_1 + \alpha_2$ con $N_{\alpha_1+\alpha_2} = N$. Los elementos $x_1^M, x_{12}^N \in \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$ son primitivos. Luego, en $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$ tenemos $[\xi_{12}, \xi_1] = 0$. Definimos entonces el morfismo de álgebras $\mathfrak{F} : \mathcal{U}((A_1 \oplus A_1)^+) \to \mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$ dado por

$$e_1 \mapsto \xi_1, \qquad e_2 \mapsto \xi_{12}.$$

Resulta $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}} \simeq \mathcal{U}((A_1 \oplus A_1)^+)$.

Fila 5. El diagrama $\overset{\zeta}{\circ}\overset{q^{-1}}{\rule{2em}{0.4pt}}\overset{q}{\circ}$ con $q \neq 1$ una raíz de la unidad de orden $N \neq 3$ y ζ una raíz de orden 3 corresponde a una trenza estándar de tipo B con raíces positivas

$$\Delta_{\mathfrak{q}}^+ = \{\alpha_1, 2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2\}.$$

En este caso las raíces de Cartan son $2\alpha_1 + \alpha_2$, con $N_{2\alpha_1+\alpha_2} = M$ donde M es igual a N si N es múltiplo de 3 y $3N$ si no lo es; y α_2 con $N_{\alpha_2} = N$. Los elementos $x_{112}^M, x_2^N \in \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$ son primitivos. Luego, en $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$ tenemos $[\xi_{112}, \xi_2] = 0$. Definimos entonces el morfismo de álgebras $\mathfrak{F} : \mathcal{U}((A_1 \oplus A_1)^+) \to \mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$ dado por

$$e_1 \mapsto \xi_{112}, \qquad e_2 \mapsto \xi_2.$$

Dicho morfismo envía el elemento $e_1^r e_2^s$ a $c\,\xi_{2\alpha_1+\alpha_2}^r \xi_{\alpha_2}^s$ con $c \neq 0$ y por lo tanto aplica una base en una base, así $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}} \simeq \mathcal{U}((A_1 \oplus A_1)^+)$.

De manera similar procedemos con el segundo diagrama de la fila. Las raíces de Cartan correspondientes al diagrama $\overset{\zeta}{\circ}\overset{q\zeta^{-1}}{\rule{2em}{0.4pt}}\overset{\zeta q^{-1}}{\circ}$ son α_2 y $2\alpha_1 + \alpha_2$. En este caso también obtenemos $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}} \simeq \mathcal{U}((A_1 \oplus A_1)^+)$.

Fila 6. Los diagramas $\overset{\zeta}{\circ}\overset{-\zeta}{\rule{2em}{0.4pt}}\overset{-1}{\circ}$ y $\overset{\zeta^{-1}}{\circ}\overset{-\zeta^{-1}}{\rule{2em}{0.4pt}}\overset{-1}{\circ}$ con ζ una raíz de orden 3 corresponden a una trenza estándar de tipo B con raíces positivas

$$\Delta_{\mathfrak{q}}^+ = \{\alpha_1, 2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2\}.$$

En estos casos ninguna raíz es de Cartan por lo que, tanto $Z_{\mathfrak{q}}$ como $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$, son triviales.

Fila 7. El diagrama $\overset{-\zeta^{-2}}{\circ}\overset{-\zeta^{3}}{\rule{2em}{0.4pt}}\overset{-\zeta^{2}}{\circ}$ con ζ una raíz primitiva de orden 12 corresponde a una trenza de tipo no identificado con raíces positivas

$$\Delta_{\mathfrak{q}}^+ = \{\alpha_1, 2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2\}.$$

En este caso ninguna raíz es de Cartan por lo que tanto $Z_{\mathfrak{q}}$ como $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$ son triviales.

Lo mismo ocurre con el resto de los diagramas de la fila 7, aunque los conjuntos de raíces positivas son distintos, en ninguno de los casos existen raíces de Cartan por lo que todos los $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$ son triviales.

Fila 8. Los diagramas de esta fila, con ζ una raíz primitiva de orden 12, corresponden a trenzas de tipo no identificado. El diagrama $\overset{-\zeta^{2}}{\circ}\overset{\zeta}{\text{———}}\overset{-\zeta^{2}}{\circ}$ tiene raíces positivas

$$\Delta_{\mathfrak{q}}^{+} = \{\alpha_1, 2\alpha_1+\alpha_2, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_1+2\alpha_2, \alpha_2\}.$$

En este caso la única raíz de Cartan es $\alpha_1+\alpha_2$, con $N_{\alpha_1+\alpha_2} = 12$. El elemento $x_{12}^{12} \in \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$ es primitivo por ser $Z_{\mathfrak{q}}$ subálgebra de Hopf. Definimos entonces el morfismo de álgebras $\mathfrak{F} : \mathcal{U}(A_1^{+}) \to \mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$ dado por $e_1 \mapsto \xi_{12}$. Claramente es biyectivo y así $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}} \simeq \mathcal{U}(A_1^{+})$.

Los conjuntos de raíces positivas correspondiente a los diagramas $\overset{-\zeta^{2}}{\circ}\overset{\zeta^{3}}{\text{———}}\overset{-1}{\circ}$ y $\overset{-\zeta^{-1}}{\circ}\overset{-\zeta^{3}}{\text{———}}\overset{-1}{\circ}$ son

$$\{\alpha_1, 2\alpha_1+\alpha_2, 3\alpha_1+2\alpha_2, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_2\} \text{ y}$$
$$\{\alpha_1, 3\alpha_1+\alpha_2, 2\alpha_1+\alpha_2, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_2\}$$

respectivamente. Ambos tienen sólo una raíz de Cartan por lo que también obtenemos $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}} \simeq \mathcal{U}(A_1^{+})$.

Fila 9. El diagrama $\overset{-\zeta}{\circ}\overset{\zeta^{7}}{\text{———}}\overset{\zeta^{3}}{\circ}$ con $\zeta \in \mathbb{G}_9'$ corresponde a una trenza de tipo no identificado con raíces positivas

$$\Delta_{\mathfrak{q}}^{+} = \{\alpha_1, 2\alpha_1+\alpha_2, 3\alpha_1+2\alpha_2, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_1+2\alpha_2, \alpha_2\}.$$

En este caso las raíces de Cartan son α_1 y $\alpha_1+\alpha_2$ con $N_{\alpha_1} = N_{\alpha_1+\alpha_2} = 18$. Los elementos $x_1^{18}, x_{12}^{18} \in \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$ son primitivos por ser $Z_{\mathfrak{q}}$ subálgebra de Hopf. Luego, en $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$ tenemos $[\xi_{12}, \xi_1] = 0$. Definimos entonces el morfismo de álgebras $\mathfrak{F} : \mathcal{U}((A_1 \oplus A_1)^{+}) \to \mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$ dado por

$$e_1 \mapsto \xi_1, \qquad e_2 \mapsto \xi_{12}.$$

Este morfismo envía el elemento $e_1^r e_2^s$ a $c\,\xi_{\alpha_1}^r \xi_{\alpha_1+\alpha_2}^s$ con $c \neq 0$ y por lo tanto aplica una base en una base, así $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}} \simeq \mathcal{U}((A_1 \oplus A_1)^{+})$.

Al mismo resultado llegamos si consideramos los diagramas $\overset{\zeta^{3}}{\circ}\overset{\zeta^{8}}{\text{———}}\overset{-1}{\circ}$ y $\overset{-\zeta^{2}}{\circ}\overset{\zeta}{\text{———}}\overset{-1}{\circ}$ con conjuntos de raíces positivas

$$\{\alpha_1, 2\alpha_1+\alpha_2, 3\alpha_1+2\alpha_2, 4\alpha_1+3\alpha_2, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_2\} \text{ y}$$
$$\{\alpha_1, 4\alpha_1+\alpha_2, 3\alpha_1+\alpha_2, 2\alpha_1+\alpha_2, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_2\};$$

y raíces de Cartan $\alpha_1+\alpha_2, 2\alpha_1+\alpha_2$ y $\alpha_1, 2\alpha_1+\alpha_2$ respectivamente.

FILA 10. El diagrama $\overset{q}{\circ}\overset{q^{-3}}{\text{———}}\overset{q^{3}}{\circ}$ con $q \neq 1$ una raíz de la unidad de orden N corresponde a una trenza Cartan de tipo G_2 con raíces positivas

$$\Delta_{\mathfrak{q}}^{+} = \{\alpha_1, \alpha_1+\alpha_2, 2\alpha_1+\alpha_2, 3\alpha_1+\alpha_2, 3\alpha_1+2\alpha_2, \alpha_2\}.$$

En este caso todas las raíces son de Cartan.

Los coproductos de los generadores de la base son:

$$\begin{aligned}
&\underline{\Delta}(x_1) = x_1\otimes 1 + 1\otimes x_1; \qquad \underline{\Delta}(x_2) = x_2\otimes 1 + 1\otimes x_2;\\
&\underline{\Delta}(x_{12}) = x_{12}\otimes 1 + 1\otimes x_{12} + (1-q^{-3})\, x_1\otimes x_2;\\
&\underline{\Delta}(x_{112}) = x_{112}\otimes 1 + 1\otimes x_{112} + (1+q)(1-q^{-2})\, x_1\otimes x_{12}\\
&\quad + (1-q^{-2})(1-q^{-3})\, x_1^2\otimes x_2;\\
&\underline{\Delta}(x_{1112}) = x_{1112}\otimes 1 + 1\otimes x_{1112} + (1-q^{-1})(1+q+q^2)\, x_1\otimes x_{112}\\
&\quad + (1-q^{-2})(1-q^{-1})(1+q+q^2)\, x_1^2\otimes x_{12}\\
&\quad + (1-q^{-3})(1-q^{-2})(1-q^{-1})\, x_1^3\otimes x_2;\\
&\underline{\Delta}([x_{112}, x_{12}]_c) = [x_{112}, x_{12}]_c\otimes 1 + 1\otimes [x_{112}, x_{12}]_c + (q-q^{-1})\, x_{112}\otimes x_{12}\\
&\quad + (1-q^{-3})(1+q)(1-q^{-1}+q)\, x_{112}x_1\otimes x_2\\
&\quad - qq_{21}(1-q^{-3})(1+q-q^2)\, x_{1112}\otimes x_2 + q^2 q_{21}(1-q^{-3})\, x_1\otimes [x_{112}, x_2]_c\\
&\quad + (q^2-q^{-1})(1-q^{-3})(1-q^{-2})\, x_1^2\otimes x_2x_{12}\\
&\quad + q_{21}(1-q^{-3})^2(1-q^{-2})(1-q^{-1})\, x_1^3\otimes x_2^2.
\end{aligned}$$

Dividiremos el estudio de estas álgebras dependiendo si N es múltiplo de 3 o no.

CASO 1: Si N no es múltiplo de 3, entonces $N_\beta = N$ para toda raíz β.

Los coproductos de los elementos $x_1^N, x_{12}^N, x_{112}^N, x_{1112}^N, [x_{112}, x_{12}]_c^N, x_2^N \in \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$ son los siguientes:

$$\begin{aligned}
&\underline{\Delta}(x_1^N) = x_1^N\otimes 1 + 1\otimes x_1^N; \qquad \underline{\Delta}(x_2^N) = x_2^N\otimes 1 + 1\otimes x_2^N;\\
&\underline{\Delta}(x_{12}^N) = x_{12}^N\otimes 1 + 1\otimes x_{12}^N + a_1\, x_1^N\otimes x_2^N;\\
&\underline{\Delta}(x_{112}^N) = x_{112}^N\otimes 1 + 1\otimes x_{112}^N + a_2\, x_1^N\otimes x_{12}^N + a_3\, x_1^{2N}\otimes x_2^N;\\
&\underline{\Delta}(x_{1112}^N) = x_{1112}^N\otimes 1 + 1\otimes x_{1112}^N + a_4\, x_1^N\otimes x_{112}^N + a_5\, x_1^{2N}\otimes x_{12}^N\\
&\qquad\quad + a_6\, x_1^{3N}\otimes x_2^N;\\
&\underline{\Delta}([x_{112}, x_{12}]_c^N) = [x_{112}, x_{12}]_c^N\otimes 1 + 1\otimes [x_{112}, x_{12}]_c^N + a_7\, x_{112}^N\otimes x_{12}^N\\
&\qquad\quad + a_8\, x_{1112}^N\otimes x_2^N + a_9\, x_1^N\otimes x_{12}^{2N} + a_{10}\, x_1^{2N}\otimes x_2^N x_{12}^N\\
&\quad + a_{11}\, x_{112}^N x_1^N\otimes x_2^N + a_{12}\, x_1^{3N}\otimes x_2^{2N};
\end{aligned}$$

con $a_i \in \mathbf{k}$. Como $a_1 = (1-q^{-3})^N q_{21}^{\frac{N(N-1)}{2}}$, $a_3 = (1-q^{-2})^N(1-q^{-3})^N$, $a_6 = (1-q^{-1})^N(1-q^{-2})^N(1-q^{-3})^N q_{21}^{\frac{3N(N-1)}{2}}$ y $a_{12} = (1-q^{-1})^N(1-q^{-2})^N(1-q^{-3})^{2N}$ son no nulos, entonces ξ_1 y ξ_2 generan $\mathfrak{Z}_\mathfrak{q}$.

Por la dualidad entre $Z_\mathfrak{q}$ y $\mathfrak{Z}_\mathfrak{q}$ tenemos

$$[\xi_2,\xi_1] = a_1\,\xi_{12}; \qquad [\xi_{12},\xi_1] = a_2\,\xi_{112};$$
$$[\xi_{112},\xi_1] = a_4\,\xi_{1112}; \qquad [\xi_1,\xi_{1112}] = [\xi_2,\xi_{12}] = 0.$$

Definimos entonces el morfismo de álgebras $\mathfrak{F}: \mathcal{U}(G_2^+) \to \mathfrak{Z}_\mathfrak{q}$ dado por

$$e_1 \mapsto \xi_1, \qquad e_2 \mapsto \xi_2.$$

Dicho morfismo envía $e_{a\delta_1+b\delta_2}$ a $c_{a,b}\,\xi_{a\alpha_1+b\alpha_2}$ con $c_{a,b}\neq 0$ y por lo tanto aplica una base en una base, así $\mathfrak{Z}_\mathfrak{q} \simeq \mathcal{U}(G_2^+)$.

CASO 2: Si $N = 3M > 3$, entonces $N_{\alpha_1} = N_{\alpha_1+\alpha_2} = N_{2\alpha_1+\alpha_2} = N$ y $N_{3\alpha_1+\alpha_2} = N_{3\alpha_1+2\alpha_2} = N_{\alpha_2} = M$.

Los coproductos de los elementos $x_1^N, x_{12}^N, x_{112}^N, x_{1112}^M, [x_{112},x_{12}]_c^M, x_2^M \in \widetilde{\mathcal{B}}_\mathfrak{q}$ son:

$$\begin{aligned}
&\underline{\Delta}(x_1^N) = x_1^N\otimes 1 + 1\otimes x_1^N; \qquad \underline{\Delta}(x_2^M) = x_2^M\otimes 1 + 1\otimes x_2^M;\\
&\underline{\Delta}(x_{12}^N) = x_{12}^N\otimes 1 + 1\otimes x_{12}^N + b_1\,[x_{112},x_{12}]_c^M\otimes x_2^M\\
&\qquad + b_2\,x_{1112}^M\otimes x_2^{2M} + (1-q^{-3})^N q_{21}^{\frac{N(N-1)}{2}}\,x_1^N\otimes x_2^{3M};\\
&\underline{\Delta}(x_{112}^N) = x_{112}^N\otimes 1 + 1\otimes x_{112}^N + b_3\,x_1^N\otimes x_{12}^N + b_4\,x_{1112}^M\otimes [x_{112},x_{12}]_c^M\\
&\qquad + (1-q^{-2})^N(1-q^{-3})^N x_1^{2N}\otimes x_2^{3M} + b_5\,x_{1112}^{2M}\otimes x_2^M\\
&\qquad + b_6\,x_{1112}^M x_1^N\otimes x_2^{2M} + b_7\,x_1^N\otimes x_2^M[x_{112},x_{12}]_c^M;\\
&\underline{\Delta}(x_{1112}^M) = x_{1112}^M\otimes 1 + 1\otimes x_{1112}^M + b_8\,x_1^N\otimes x_2^M;\\
&\underline{\Delta}([x_{112},x_{12}]_c^M) = [x_{112},x_{12}]_c^M\otimes 1 + 1\otimes [x_{112},x_{12}]_c^M\\
&\qquad + b_9\,x_1^N\otimes x_2^{2M} + b_{10}\,x_{1112}^M\otimes x_2^M;
\end{aligned}$$

con $b_i \in \mathbf{k}$. Como

$$b_8 = (1-q^{-3})^M(1-q^{-2})^M(1-q^{-1})^M q_{21}^{\frac{N(M-1)}{2}} \neq 0,$$
$$b_9 = (1-q^{-3})^{2M}(1-q^{-2})^M(1-q^{-1})^M q_{21}^M \neq 0.$$

Entonces ξ_1 y ξ_2 generan $\mathfrak{Z}_\mathfrak{q}$. Además, en $\mathfrak{Z}_\mathfrak{q}$ tenemos

$$\begin{aligned}
&[\xi_2,\xi_1] = b_7\,\xi_{1112};\\
&[\xi_2,\xi_{1112}] = b_9\,\xi_{112,12};\\
&[\xi_2,\xi_{112,12}] = (1-q^{-3})^M q_{21}^{\frac{N(M-1)}{2}}\,\xi_{12};\\
&[\xi_1,\xi_{1112}] = [\xi_2,\xi_{12}] = 0.
\end{aligned}$$

Definimos entonces el epimorfismo de álgebras $\mathfrak{F} : \mathcal{U}(G_2^+) \to \mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$ dado por

$$e_2 \mapsto \xi_1, \qquad e_1 \mapsto \xi_2.$$

Dicho morfismo envía una base en una base y por lo tanto $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}} \simeq \mathcal{U}(G_2^+)$. Notar que a partir de este isomorfismo podemos calcular el resto de las constantes b_i.

FILA 11. Los diagramas de esta fila, con ζ una raíz primitiva de orden 8 corresponden a una trenza estándar de tipo G_2 con raíces positivas

$$\Delta_{\mathfrak{q}}^+ = \{\alpha_1, 3\alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2\}.$$

En el caso del diagrama $\overset{\zeta^2}{\circ}\overset{\zeta}{\text{———}}\overset{\zeta^{-1}}{\circ}$ las raíces de Cartan son $2\alpha_1 + \alpha_2$ y α_2 con $N_{2\alpha_1+\alpha_2} = N_{\alpha_2} = 8$. Los elementos $x_{112}^8, x_2^8 \in \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$ son primitivos. Luego, en $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$ tenemos $[\xi_2, \xi_{112}] = 0$. El morfismo de álgebras $\mathfrak{F} : \mathcal{U}((A_1 \oplus A_1)^+) \to \mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$ dado por

$$e_1 \mapsto \xi_{112}, \qquad e_2 \mapsto \xi_2.$$

es biyectivo y por lo tanto $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}} \simeq \mathcal{U}((A_1 \oplus A_1)^+)$. Lo mismo sucede con el resto de los diagramas de la fila.

FILA 12. El diagrama $\overset{\zeta^6}{\circ}\overset{\zeta^{11}}{\text{———}}\overset{\zeta^{8}}{\circ}$ con ζ una raíz primitiva de orden 24 corresponde a una trenza de tipo no identificado con raíces positivas

$$\Delta_{\mathfrak{q}}^+ = \{\alpha_1, 3\alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + 2\alpha_2, 4\alpha_1 + 3\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2\}.$$

En este caso las raíces de Cartan son $\alpha_1+\alpha_2$ y $3\alpha_1+\alpha_2$ con $N_{\alpha_1+\alpha_2} = N_{3\alpha_1+\alpha_2} = 24$. Los elementos $x_{12}^{24}, x_{1112}^{24} \in \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$ son primitivos por ser $Z_{\mathfrak{q}}^+$ subálgebra de Hopf. Luego, en $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$ tenemos $[\xi_{12}, \xi_{1112}] = 0$. Definimos entonces el morfismo de álgebras $\mathfrak{F} : \mathcal{U}((A_1 \oplus A_1)^+) \to \mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$ dado por

$$e_1 \mapsto \xi_{1112}, \qquad e_2 \mapsto \xi_{12}.$$

Este morfismo envía el elemento $e_1^r e_2^s$ a $c\, \xi_{3\alpha_1+\alpha_2}^r \xi_{\alpha_1+\alpha_2}^s$ con $c \neq 0$ y por lo tanto aplica una base en una base, así $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}} \simeq \mathcal{U}((A_1 \oplus A_1)^+)$.

Por su parte, los diagramas $\overset{\zeta^6}{\circ}\overset{\zeta}{\text{———}}\overset{\zeta^{-1}}{\circ}$, $\overset{\zeta^8}{\circ}\overset{\zeta^5}{\text{———}}\overset{-1}{\circ}$ y $\overset{\zeta}{\circ}\overset{\zeta^{19}}{\text{———}}\overset{-1}{\circ}$ tienen conjuntos de raíces positivas

$$\{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + 2\alpha_2, 5\alpha_1 + 2\alpha_2, 5\alpha_1 + 3\alpha_2, \alpha_2\};$$

$$\{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + 2\alpha_2, 4\alpha_1 + 3\alpha_2, 5\alpha_1 + 3\alpha_2, 5\alpha_1 + 4\alpha_2, \alpha_2\} \text{ y}$$

$$\{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + \alpha_2, 4\alpha_1 + \alpha_2, 5\alpha_1 + \alpha_2, 5\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2\}.$$

Sus raíces de Cartan son $2\alpha_1 + \alpha_2$ y α_2; $\alpha_1 + \alpha_2$ y $5\alpha_1 + 3\alpha_2$ y α_1 y $5\alpha_1 + 2\alpha_2$ respectivamente. En todos los casos obtenemos un isomorfismo entre $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$ y $\mathcal{U}((A_1 \oplus A_1)^+)$.

FILA 13. Los diagramas de esta fila corresponden a una trenza de tipo no identificado relacionada a la súper álgebra de Lie $\mathfrak{brj}(2,5)$ en un cuerpo de característica 5. Ver [**Ang5**, §5.2], en especial la Observación 5.5.

El diagrama $\overset{\zeta}{\circ}\overset{\zeta^2}{\text{———}}\overset{-1}{\circ}$ con ζ una raíz primitiva de orden 5 tiene raíces positivas

$$\Delta_{\mathfrak{q}}^{+} = \{\alpha_1, 3\alpha_1+\alpha_2, 2\alpha_1+\alpha_2, 5\alpha_1+3\alpha_2, 3\alpha_1+2\alpha_2, 4\alpha_1+3\alpha_2, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_2\}.$$

En este caso las raíces de Cartan son α_1, $\alpha_1+\alpha_2$, $2\alpha_1+\alpha_2$ y $3\alpha_1+\alpha_2$ con $N_{\alpha_1} = N_{3\alpha_1+2\alpha_2} = 5$ y $N_{\alpha_1+\alpha_2} = N_{2\alpha_1+\alpha_2} = 10$. Pedimos además $q_{21}^5 = 1$.

Los coproductos de los elementos x_1, x_{12}, x_{112} y $[x_{112}, x_{12}]_c$ son:

$$\begin{aligned}
&\underline{\Delta}(x_1) = x_1 \otimes 1 + 1 \otimes x_1;\\
&\underline{\Delta}(x_{12}) = x_{12} \otimes 1 + 1 \otimes x_{12} + (1-\zeta^2)\, x_1 \otimes x_2;\\
&\underline{\Delta}(x_{112}) = x_{112} \otimes 1 + 1 \otimes x_{112} + (1+\zeta)(1-\zeta^3)\, x_1 \otimes x_{12}\\
&\qquad + (1-\zeta^2)(1-\zeta^3)\, x_1^2 \otimes x_2;\\
&\underline{\Delta}([x_{112}, x_{12}]_c) = [x_{112}, x_{12}]_c \otimes 1 + 1 \otimes [x_{112}, x_{12}]_c\\
&\qquad - \zeta^3(1-\zeta^3)(1+\zeta)^2\, x_1 \otimes x_{12}^2 - \zeta q_{21}\, x_1 x_{112} \otimes x_2\\
&\qquad + (1+q_{21}+\zeta^3 q_{21})\, x_{112} x_1 \otimes x_2 + \zeta(1-\zeta^2)\, x_1 x_{12} x_1 \otimes x_2\\
&\qquad + (1-\zeta^2)(1-\zeta^3)^2\, x_1^2 \otimes x_2 x_{12}.
\end{aligned}$$

Luego, los coproductos de los elementos $x_1^5, x_{12}^{10}, x_{112}^{10}, [x_{112}, x_{12}]_c^5, \in \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$ son

$$\begin{aligned}
&\underline{\Delta}(x_1^5) = x_1^5 \otimes 1 + 1 \otimes x_1^5; \qquad \underline{\Delta}(x_{12}^{10}) = x_{12}^{10} \otimes 1 + 1 \otimes x_{12}^{10};\\
&\underline{\Delta}(x_{112}^{10}) = x_{112}^{10} \otimes 1 + 1 \otimes x_{112}^{10} + a_1\, x_1^{10} \otimes x_{12}^{10}\\
&\qquad + a_2\, x_1^5 \otimes [x_{112}, x_{12}]_c^5;\\
&\underline{\Delta}([x_{112}, x_{12}]_c^5) = [x_{112}, x_{12}]_c^5 \otimes 1 + 1 \otimes [x_{112}, x_{12}]_c^5 + a_3\, x_1^5 \otimes x_{12}^{10}.
\end{aligned}$$

Para escalares $a_i \in \mathbf{k}$. Por lo tanto, en $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$ tenemos

$$\begin{aligned}
&[\xi_{12}, \xi_1] = a_3 \xi_{112,12};\\
&[\xi_{112,12}, \xi_1] = a_2 \xi_{112};\\
&[\xi_1, \xi_{112,12}] = [\xi_{12}, \xi_{112}] = 0.
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
a_1 &= -(1-\zeta^3)^5(1+\zeta)^5(1+62\zeta-15\zeta^2-87\zeta^3+70\zeta^4) \neq 0;\\
a_3 &= -(1-\zeta^3)^5(1+\zeta)^8(4-8\zeta-19\zeta^2-3\zeta^3-50\zeta^4) \neq 0,
\end{aligned}$$

los elementos $x_{112}^{10}, [x_{112}, x_{12}]_c^5$ no son primitivos, por lo que ξ_1, ξ_{12} generan $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$. Definimos entonces el morfismo de álgebras $\mathfrak{F} : \mathcal{U}(B_2^+) \to \mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$ dado por

$$e_1 \mapsto \xi_1, \qquad e_2 \mapsto \xi_{12}.$$

Dicho morfismo aplica una base en una base, así $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}} \simeq \mathcal{U}(B_2^+)$.

El diagrama $\overset{-\zeta^3}{\circ}\overset{\zeta^3}{\text{———}}\overset{-1}{\circ}$ $\zeta \in \mathbb{G}'_5$ tiene raíces positivas

$$\Delta_{\mathfrak{q}}^+ = \{\alpha_1, 4\alpha_1+\alpha_2, 3\alpha_1+\alpha_2, 5\alpha_1+2\alpha_2, 2\alpha_1+\alpha_2, 3\alpha_1+2\alpha_2, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_2\}.$$

En este caso las raíces de Cartan son α_1, $3\alpha_1+\alpha_2$, $2\alpha_1+\alpha_2$ y $\alpha_1+\alpha_2$ con $N_{\alpha_1} = N_{\alpha_1+\alpha_2} = 10$ y $N_{3\alpha_1+\alpha_2} = N_{\alpha_1+\alpha_2} = 5$. Pedimos además $q_{21}^{10} = 1$.

Los coproductos de los generadores asociados a raíces de Cartan son:

$$\begin{aligned}
&\underline{\Delta}(x_1) = x_1 \otimes 1 + 1 \otimes x_1;\\
&\underline{\Delta}(x_{12}) = x_{12} \otimes 1 + 1 \otimes x_{12} + (1-\zeta^3)\, x_1 \otimes x_2;\\
&\underline{\Delta}(x_{112}) = x_{112} \otimes 1 + 1 \otimes x_{112} + (1+\zeta)(1-\zeta^3)\, x_1 \otimes x_{12}\\
&\qquad + (1+\zeta^2)(1-\zeta^3)\, x_1^2 \otimes x_2;\\
&\underline{\Delta}(x_{1112}) = x_{1112} \otimes 1 + 1 \otimes x_{1112} + (1+\zeta-\zeta^3)(1-\zeta^4)\, x_1 \otimes x_{112}\\
&\quad + (1+\zeta)(1+\zeta-\zeta^3)(1-\zeta^4)\, x_1^2 \otimes x_{12} + (1+\zeta)(1-\zeta^3)(1-\zeta^4)\, x_1^3 \otimes x_2.
\end{aligned}$$

Luego, los coproductos de las potencias correspondientes son

$$\begin{aligned}
&\underline{\Delta}(x_1^{10}) = x_1^{10} \otimes 1 + 1 \otimes x_1^{10}; \qquad \underline{\Delta}(x_{12}^5) = x_{12}^5 \otimes 1 + 1 \otimes x_{12}^5;\\
&\underline{\Delta}(x_{112}^{10}) = x_{112}^{10} \otimes 1 + 1 \otimes x_{112}^{10} - (1+\zeta)^5(1-\zeta^3)^5 x_{1112}^5 \otimes x_{12}^5\\
&\qquad + (1+\zeta)^{10}(1-\zeta^3)^{10}\, x_1^{10} \otimes x_{12}^{10};\\
&\underline{\Delta}(x_{1112}^5) = x_{1112}^5 \otimes 1 + 1 \otimes x_{1112}^5 + (1+\zeta)^{10}(1-\zeta^3)^5 x_1^{10} \otimes x_{12}^5.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, en $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$ tenemos

$$\begin{aligned}
&[\xi_{12}, \xi_1] = (1+\zeta)^{10}(1-\zeta^3)^5 \xi_{1112};\\
&[\xi_{1112}, \xi_{12}] = -(1+\zeta)^5(1-\zeta^3)^5 \xi_{112};\\
&[\xi_1, \xi_{1112}] = [\xi_{12}, \xi_{112}] = 0.
\end{aligned}$$

Definimos entonces el morfismo de álgebras $\mathfrak{F} : \mathcal{U}(C_2^+) \to \mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$ dado por

$$e_1 \mapsto \xi_1, \qquad e_2 \mapsto \xi_{12}.$$

Dicho morfismo envía $e_1^r e_{\delta_1+\delta_2}^s e_{\delta_1+2\delta_2}^t e_2^u$ a $c\, \xi_{\alpha_1}^r \xi_{3\alpha_1+\alpha_2}^s \xi_{2\alpha_1+\alpha_2}^t \xi_{\alpha_1+\alpha_2}^u$ con $c \neq 0$ y por lo tanto aplica una base en una base, así $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}} \simeq \mathcal{U}(C_2^+)$.

Fila 14. El diagrama $\overset{\zeta}{\circ}\overset{\zeta^{17}}{\text{———}}\overset{-1}{\circ}$ con ζ una raíz primitiva de orden 20 corresponde a una trenza de tipo no identificado con raíces positivas

$$\Delta_{\mathfrak{q}}^+ = \{\alpha_1, 3\alpha_1+\alpha_2, 2\alpha_1+\alpha_2, 5\alpha_1+3\alpha_2, 3\alpha_1+2\alpha_2, 4\alpha_1+3\alpha_2, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_2\}.$$

En este caso las raíces de Cartan son α_1 y $3\alpha_1+2\alpha_2$ con $N_{\alpha_1} = N_{3\alpha_1+2\alpha_2} = 20$. Los elementos $x_1^{20}, [x_{112}, x_{12}]_c^{20} \in \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$ son primitivos. Luego, en $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$ tenemos

$[\xi_{12}, \xi_{112,12}] = 0$. Tenemos así un isomorfismo de álgebras $\mathfrak{F} : \mathcal{U}((A_1 \oplus A_1)^+) \to \mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$ dado por

$$e_1 \mapsto \xi_{112,12}, \qquad e_2 \mapsto \xi_{12}.$$

Resultados análogos se obtienen para el resto de los diagramas de la fila.

FILA 15. El diagrama $\overset{-\zeta}{\circ}\overset{-\zeta^{12}}{\text{———}}\overset{\zeta^{5}}{\circ}$ con ζ una raíz primitiva de orden 15 corresponde a una trenza de tipo no identificado con raíces positivas

$$\Delta_{\mathfrak{q}}^{+} = \{\alpha_1, 3\alpha_1 + \alpha_2, 5\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2\}.$$

En este caso las raíces de Cartan son α_1 y $3\alpha_1 + 2\alpha_2$ con $N_{\alpha_1} = N_{3\alpha_1+2\alpha_2} = 30$. Los elementos $x_1^{30}, [x_{112}, x_{12}]_c^{30} \in \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$ son primitivos. Luego, en $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$ tenemos $[\xi_{12}, \xi_{112,12}] = 0$.

Definimos entonces el morfismo de álgebras $\mathfrak{F} : \mathcal{U}((A_1 \oplus A_1)^+) \to \mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$ dado por

$$e_1 \mapsto \xi_{112,12}, \qquad e_2 \mapsto \xi_{12}.$$

Entonces, $\mathfrak{F}$ envía el elemento $e_1^r e_2^s$ a $c\,\xi_{3\alpha_1+2\alpha_2}^r \xi_{\alpha_1}^s$ con $c \neq 0$ y por lo tanto aplica una base en una base, así $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}} \simeq \mathcal{U}((A_1 \oplus A_1)^+)$.

Lo mismo ocurre con el resto de los diagramas de la fila 15, aunque los conjuntos de raíces positivas son distintos, en cada uno de los casos existen dos raíces de Cartan por lo que todos los $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$ son isomorfos a $\mathcal{U}((A_1 \oplus A_1)^+)$.

FILA 16. El diagrama $\overset{-\zeta^5}{\circ}\overset{-\zeta^{3}}{\text{———}}\overset{-1}{\circ}$ con $\zeta \in \mathbb{G}_7'$ corresponde a una trenza de tipo no identificado con raíces positivas

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathfrak{q}}^{+} = \{&\alpha_1, 5\alpha_1 + \alpha_2, 4\alpha_1 + \alpha_2, 7\alpha_1 + 2\alpha_2, 3\alpha_1 + \alpha_2, 8\alpha_1 + 3\alpha_2,\\ &5\alpha_1 + 2\alpha_2, 7\alpha_1 + 3\alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2\}.\end{aligned}$$

En este caso las raíces de Cartan son α_1, $4\alpha_1 + \alpha_2$, $3\alpha_1 + \alpha_2$, $5\alpha_1 + 2\alpha_2$, $2\alpha_1 + \alpha_2$ y $\alpha_1 + \alpha_2$ con $N_\beta = 14$, $\beta \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}$.

Tenemos los siguientes coproductos:

$$\begin{aligned}
&\underline{\Delta}(x_1) = x_1 \otimes 1 + 1 \otimes x_1;\\
&\underline{\Delta}(x_{12}) = x_{12} \otimes 1 + 1 \otimes x_{12} + (1 + \zeta^3)\, x_1 \otimes x_2;\\
&\underline{\Delta}(x_{112}) = x_{112} \otimes 1 + 1 \otimes x_{112} + (1 - \zeta)(1 - \zeta^5)\, x_1 \otimes x_{12}\\
&\qquad + (1 - \zeta)(1 + \zeta^3)\, x_1^2 \otimes x_2;\\
&\underline{\Delta}(x_{1112}) = x_{1112} \otimes 1 + 1 \otimes x_{1112} + (1 + \zeta^3 - \zeta^5)(1 + \zeta^6)\, x_1 \otimes x_{112}\\
&\qquad + (1 + \zeta^3 - \zeta^5)(1 + \zeta^6)(1 - \zeta)\, x_1^2 \otimes x_{12} + (1 + \zeta^3)(1 + \zeta^6)(1 - \zeta)\, x_1^3 \otimes x_2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\underline{\Delta}(x_{11112}) = x_{11112}\otimes 1 + 1\otimes x_{11112} - \zeta(1-\zeta)(1-\zeta^2)\, x_1\otimes x_{1112}\\
&\quad + \zeta^3(1+\zeta^3-\zeta^5)(1+\zeta^6)(1-\zeta)\, x_1^2\otimes x_{112} - \zeta(1-\zeta)^2(1-\zeta^2)(1+\zeta^6)\, x_1^3\otimes x_{12}\\
&\quad + (1-\zeta)(1+\zeta^3)(1-\zeta^4)(1+\zeta^6)\, x_1^4\otimes x_2;\\
&\underline{\Delta}([x_{1112},x_{112}]_c) = [x_{1112},x_{112}]_c\otimes 1 + 1\otimes [x_{1112},x_{112}]_c\\
&\quad - \frac{(1-\zeta^5)}{(1+\zeta)}(\zeta(1+\zeta^3)+(1-\zeta)(1-\zeta^3))\, x_1\otimes x_{112}^2\\
&\quad - q_{21}(1-\zeta)(1-\zeta^5)(1+\zeta^3-\zeta^5)\, x_1^2\otimes [x_{112},x_{12}]_c\\
&\quad + (1-\zeta)(-4+3\zeta^2-\zeta^3-\zeta^4+3\zeta^5)\, x_1^2\otimes x_{12}x_{112}\\
&\quad - q_{21}(1-\zeta)(1+\zeta^6)(1-\zeta^5)(1-2\zeta-3\zeta^4-2\zeta^5+\zeta^6)\, x_1^3\otimes x_{12}^2\\
&\quad + (1-\zeta)^2(1+\zeta^3)^2(1+\zeta^6)\, x_1^3\otimes x_2x_{112} - \zeta(1-\zeta)(1-\zeta^2)\, x_{1112}\otimes x_{112}\\
&\quad + q_{21}(1-\zeta)^2(1+\zeta^6)(1+\zeta^3)(\zeta+2\zeta^2-\zeta^4-2\zeta^5)\, x_1^4\otimes x_2x_{12}\\
&\quad - q_{12}^2(1+\zeta^3)(1-\zeta)(1-\zeta^4+\zeta^6)\, x_{111112}\otimes x_2\\
&\quad + \zeta^2 q_{21}(1+\zeta^3)(1-\zeta)(1-\zeta^2)(1-\zeta+\zeta^6)\, x_{11112}x_1\otimes x_2\\
&\quad + (1-\zeta)(1+\zeta^3)(-\zeta+2\zeta^2+\zeta^3-\zeta^4-\zeta^5)\, x_{1112}x_1^2\otimes x_2\\
&\quad + (1-\zeta)(1+\zeta^2+\zeta^3-\zeta^4-\zeta^5)\, x_{1112}x_1\otimes x_{12}\\
&\quad + \zeta q_{21}(1-\zeta)(2-\zeta-\zeta^2-\zeta^3+\zeta^4)\, x_{11112}\otimes x_{12}.
\end{aligned}$$

Los coproductos de las potencias en $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$ son:

$$\begin{aligned}
&\underline{\Delta}(x_1^{14}) = x_1^{14}\otimes 1 + 1\otimes x_1^{14}; \qquad \underline{\Delta}(x_{12}^{14}) = x_{12}^{14}\otimes 1 + 1\otimes x_{12}^{14};\\
&\underline{\Delta}(x_{112}^{14}) = x_{112}^{14}\otimes 1 + 1\otimes x_{112}^{14} + a_1\, x_1^{14}\otimes x_{12}^{14};\\
&\underline{\Delta}(x_{1112}^{14}) = x_{1112}^{14}\otimes 1 + 1\otimes x_{1112}^{14} + a_2\, x_1^{14}\otimes x_{112}^{14} + a_3\, x_1^{28}\otimes x_{12}^{14};\\
&\underline{\Delta}(x_{11112}^{14}) = x_{11112}^{14}\otimes 1 + 1\otimes x_{11112}^{14} + a_4\, x_1^{14}\otimes x_{1112}^{14}\\
&\qquad\quad + a_5\, x_1^{28}\otimes x_{112}^{14} + a_6\, x_1^{42}\otimes x_{12}^{14};\\
&\underline{\Delta}([x_{1112},x_{112}]_c^{14}) = [x_{1112},x_{112}]_c^{14}\otimes 1 + 1\otimes [x_{1112},x_{112}]_c^{14} + a_7\, x_{1112}^{14}\otimes x_{12}^{14}\\
&\qquad\quad + a_8\, x_{11112}^{14}\otimes x_{12}^{14} + a_9\, x_1^{42}\otimes x_{12}^{28} + a_{10}\, x_1^{14}\otimes x_{112}^{28}\\
&\qquad\quad + a_{11}\, x_1^{28}\otimes x_{12}^{14}x_{112}^{14} + a_{12}\, x_{1112}^{14}x_1^{14}\otimes x_{12}^{14};
\end{aligned}$$

donde $a_i\in\mathbf{k}$. Para probar que $x_{112}^{14}, x_{1112}^{14}, x_{11112}^{14}, [x_{1112},x_{112}]_c^{14}$ no son primitivos en $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$ basta con ver que a_1, a_3, a_6 y a_9 son no nulas. El cálculo de dichas constantes es trabajoso ya que por ejemplo

$$(1\otimes x_{112})(x_1^2\otimes x_2) = \zeta^5\, x_1^2\otimes x_{12}^2 - \zeta^5\, x_1^2\otimes x_2x_{112}.$$

Esto nos dice que el término $x_1^{14} \otimes x_{12}^{14}$ aparece en muchas oportunidades al calcular $(\underline{\Delta}(x_{112}))^{14}$. La constante que acompaña a dicho término es

$$a_1 = q_{21}^7(-2352\zeta^5 + 2548\zeta^4 + 2548\zeta^3 - 2352\zeta^2 + 4067).$$

Como $\zeta \in \mathbb{G}_7'$, entonces $a_1 \neq 0$. De manera similar calculamos

$$\begin{aligned}
a_3 &= 5860813\zeta^5 + 974589\zeta^4 - 3164658\zeta^3 + 3609109\zeta^2 \\
&\qquad + 5243917\zeta - 1667869 \neq 0; \\
a_6 &= q_{21}^7(10074385052942\zeta^5 + 31910289509889\zeta^4 + 12118010152752\zeta^3 \\
&\qquad - 909500144560\zeta^2 + 24680570802531\zeta + 26319432020966) \neq 0; \\
a_9 &= 5736482678185949424\zeta^5 + 10808606486393112796\zeta^4 \\
&\qquad + 2814368183725984844\zeta^3 + 1300044629337708464\zeta^2 \\
&\qquad + 9968706251262033856\zeta + 7625687982247823061 \neq 0.
\end{aligned}$$

Luego, ξ_1 y ξ_{12} generan $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$. Además, en $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$ tenemos

$$\begin{aligned}
&[\xi_{12}, \xi_1] = a_1\, \xi_{112}; && [\xi_1, \xi_{112}] = a_2\, \xi_{1112}; \\
&[\xi_1, \xi_{1112}] = a_4\, \xi_{11112}; && [\xi_1, \xi_{11112}] = [\xi_{12}, \xi_{112}] = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathfrak{F} : \mathcal{U}(G_2^+) \to \mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$ dado por $e_1 \mapsto \xi_{12}$ y $e_2 \mapsto \xi_1$ es un isomorfismo de álgebras.

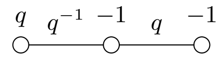
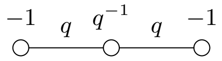
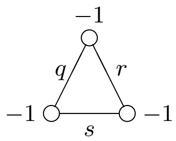
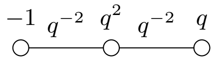
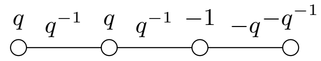
El diagrama $\overset{-\zeta}{\circ}\overset{-\zeta^4}{\text{——}}\overset{-1}{\circ}$ con ζ una raíz primitiva de orden 7 corresponde a una trenza de tipo no identificado con raíces positivas

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathfrak{q}}^+ = \{&\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + 2\alpha_2, 4\alpha_1 + 3\alpha_2, \\
&5\alpha_1 + 3\alpha_2, 5\alpha_1 + 4\alpha_2, 7\alpha_1 + 4\alpha_2, 7\alpha_1 + 5\alpha_2, 8\alpha_1 + 5\alpha_2, \alpha_2\}.
\end{aligned}$$

En este caso las raíces de Cartan son α_1, $\alpha_1+\alpha_2$, $2\alpha_1+\alpha_2$, $3\alpha_1+2\alpha_2$, $4\alpha_1+3\alpha_2$ y $5\alpha_1 + 3\alpha_2$ con $N_\beta = 14$, $\beta \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}$.

Los coproductos de los elementos x_1^{14}, x_{12}^{14}, x_{112}^{14}, $[x_{112}, x_{12}]_c^{14}$, $[[x_{112}, x_{12}]_c, x_{12}]_c^{14}$ y $[x_{112}, [x_{112}, x_{12}]_c]_c^{14}$ en $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$ son:

$$\begin{aligned}
&\underline{\Delta}(x_1^{14}) = x_1^{14} \otimes 1 + 1 \otimes x_1^{14}; \qquad \underline{\Delta}(x_{12}^{14}) = x_{12}^{14} \otimes 1 + 1 \otimes x_{12}^{14}; \\
&\underline{\Delta}(x_{112}^{14}) = x_{112}^{14} \otimes 1 + 1 \otimes x_{112}^{14} + b_1\, x_1^{14} \otimes x_{12}^{14}; \\
&\underline{\Delta}([x_{112}, x_{12}]_c^{14}) = [x_{112}, x_{12}]_c^{14} \otimes 1 + 1 \otimes [x_{112}, x_{12}]_c^{14} \\
&\quad + b_2\, x_{112}^{14} \otimes x_{12}^{14} + b_3\, x_1^{14} \otimes x_{12}^{28}; \\
&\underline{\Delta}([[x_{112}, x_{12}]_c, x_{12}]_c^{14}) = [[x_{112}, x_{12}]_c, x_{12}]_c^{14} \otimes 1 + 1 \otimes [[x_{112}, x_{12}]_c, x_{12}]_c^{14} \\
&\qquad + b_4\, [x_{112}, x_{12}]_c^{14} \otimes x_{12}^{14} + b_5\, x_{112}^{14} \otimes x_{12}^{28} + b_6\, x_1^{14} \otimes x_{12}^{42};
\end{aligned}$$

Diagramas de Dynkin generalizados	Parámetros	Rango	$\mathfrak{n}_{\mathfrak{q}} \simeq \mathfrak{g}^{+}$
tipo A súper	$q \neq 1$	$m+n+1$	$A_m \oplus A_n$
	$q \neq 1$	3	A_2
	$q \neq 1$	3	$A_1 \oplus A_1$
	$qrs = 1$	3	$A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$
	$q \neq 1$	3	$B_2 \oplus A_1$
	$q \neq 1$	4	$A_2 \oplus A_2$

CUADRO 2. Diagramas conexos de rango mayor

$$
\begin{aligned}
\underline{\Delta}([x_{112},[x_{112},x_{12}]_c]_c^{14}) &= [x_{112},[x_{112},x_{12}]_c]_c^{14} \otimes 1 + 1 \otimes [x_{112},[x_{112},x_{12}]_c]_c^{14} \\
&\quad + b_7\, x_{112}^{14} \otimes [x_{112},x_{12}]_c^{14} + b_8\, x_1^{14} \otimes [[x_{112},x_{12}]_c, x_{12}]_c^{14} + b_9\, x_{112}^{28} \otimes x_{12}^{14} \\
&\quad + b_{10}\, x_1^{28} \otimes x_{12}^{42} + b_{11}\, x_{112}^{14} x_1^{14} \otimes x_{12}^{28} + b_{12}\, x_1^{14} \otimes x_{12}^{14}[x_{112},x_{12}]_c^{14};
\end{aligned}
$$

donde $b_i \in \mathbf{k}$ no nulos. Por lo tanto, en $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$ tenemos

$$
\begin{aligned}
&[\xi_{12},\xi_1] = b_1\, \xi_{112}; && [\xi_{12},\xi_{112}] = b_2\, \xi_{112,12}; \\
&[\xi_{12},\xi_{112,12}] = b_4\, \xi_{(112,12),12}; && [\xi_1,\xi_{112}] = [\xi_{12},\xi_{(112,12),12}] = 0.
\end{aligned}
$$

Entonces $e_1 \mapsto \xi_{12}$, $e_2 \mapsto \xi_1$ nos define un isomorfismo de álgebras $\mathcal{U}(G_2^{+}) \simeq \mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$.

4.4. Rango mayor

En esta sección estudiaremos algunas trenzas de rango mayor. En todos los casos encontraremos un isomorfismo entre $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$ y el álgebra envolvente de la parte positiva de un álgebra de Lie. En Cuadro 2 se resumen los resultados encontrados.

4.4.1. Trenzas súper de tipo A. Consideremos ahora un diagrama (súper) de tipo A. Sea q una raíz de la unidad de orden $N \geq 3$. Sea $0 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq \theta$ un subconjunto ordenado de $\mathbb{I} = \{1, 2, \dots \theta\}$ y $\mathfrak{q} = (q_{ij})_{i,j \in \mathbb{I}}$ la matriz que satisface

- $q_{11}^2 q_{12} q_{21} = q$;
- si $i \neq i_l$ para todo $1 \leq l \leq k$, entonces $q_{ii} q_{(i-1)i} q_{i(i-1)} = q_{ii} q_{(i+1)i} q_{i(i+1)} = 1$;
- si $i = i_l$ para algún $1 \leq l \leq k$, entonces $q_{ii} = -1$ y $q_{(i-1)i} q_{i(i-1)} q_{(i+1)i} q_{i(i+1)} = 1$;
- si $i, j \in \mathbb{I}$, $|i-j| > 1$, entonces $q_{ij} q_{ji} = 1$.

El conjunto de raíces positivas correspondiente a esta trenza es

$$\Delta_{\mathfrak{q}}^{+} = \{\alpha_{i,j} : 1 \le i \le j \le \theta\}, \qquad \text{donde } \alpha_{i,j} = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_j.$$

Diremos que una raíz simple α_i es par si $i \notin \{i_1, \dots, i_k\}$ y en caso contrario diremos que es impar. Una raíz $\alpha_{i,j}$ tendrá la paridad de la suma de las raíces $\alpha_i + \cdots + \alpha_j$. El conjunto de raíces de Cartan $\mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}$ es el conjunto de raíces positivas pares. Notemos que

$$q_{\beta\beta} = \begin{cases} q^{\pm 1}, & \text{si } \beta \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}; \\ -1, & \text{si } \beta \notin \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}. \end{cases}$$

Sea $x_i = x_{\alpha_i}$ y $x_{i,j} = (\operatorname{ad}_c x_i) \dots (\operatorname{ad}_c x_{j-1}) x_j = x_{\alpha_{i,j}}$. Enunciaremos una serie de resultados de [**AS1**] que nos facilitarán los cálculos de los coproductos.

LEMA 4.4.1. [**AS1**, 6.3,6.4,6.7] *Con la notación anterior, en $\mathcal{B}_{\mathfrak{q}}$ valen las siguientes relaciones para $i, j \in \mathbb{I}$:*

- $[x_i, x_j]_c = 0$ *si* $|i - j| > 1$*;*
- $[x_{i,j}, x_{k,l}]_c = 0$ *si* $1 \le i < j+1 < k \le l \le \theta$*;*
- $[x_{k,l}, x_{i,j}]_c = 0$ *si* $1 \le i < j+1 < k \le l \le \theta$*;*
- $[x_{i,j}, x_{j+1,k}]_c = x_{i,k}$ *si* $1 \le i \le j < k \le \theta$*;*
- $[x_{i,j}, x_{k,l}]_c = 0$ *si* $1 \le i < k \le l < j \le \theta$*;*
- $[x_{i,j}, x_{i,l}]_c = 0$ *si* $1 \le i \le j < l \le \theta$*;*
- $[x_{i,j}, x_{k,j}]_c = 0$ *si* $1 \le i < k \le j \le \theta$*.* □

LEMA 4.4.2. [**AS1**, 6.5][**Ang5**, 5.1] *Sean $1 \le i \le j \le \theta$, entonces*

$$\underline{\Delta}(x_{i,j}) = x_{i,j} \otimes 1 + 1 \otimes x_{i,j} + \sum_{i \le k < j} (1 - q_{k(k+1)} q_{(k+1)k}) x_{i,k} \otimes x_{k+1,j}. \tag{4.5}$$

□

LEMA 4.4.3. [**AS1**, 6.9][**Ang5**, 5.2] *Sean $1 \le i \le j \le \theta$ tales que $\alpha_{i,j} \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}$, entonces*

$$\begin{aligned} \underline{\Delta}(x_{i,j}^N) = & x_{i,j}^N \otimes 1 + 1 \otimes x_{i,j}^N \\ & + \sum_{i \le k < j,\, \alpha_{i,k} \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}} (1 - q_{k(k+1)} q_{(k+1)k})^N \boldsymbol{q}(\alpha_{i,k}, \alpha_{k+1,j})^{\frac{N(N-1)}{2}} x_{i,k}^N \otimes x_{k+1,j}^N. \end{aligned}$$

□

Como antes, pedimos una hipótesis extra en la trenza:

$$q_{\alpha\beta}^N = 1, \qquad \text{si } \alpha, \beta \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}.$$

Con estos resultados, pasando al álgebra de Lusztig $\mathcal{L}_{\mathfrak{q}}$ y luego al cociente, tenemos las siguientes relaciones en $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$:

$$[\xi_{i,k}, \xi_{l,r}] = 0 \qquad \text{si } k+1 \neq l,\ i \neq r+1; \tag{4.6}$$

$$[\xi_{i,k}, \xi_{k+1,j}] = \begin{cases} C_{i,j,k}\, \xi_{i,j}, & \text{si } \alpha_{i,j} \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}; \\ 0, & \text{si } \alpha_{i,j} \notin \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}; \end{cases} \tag{4.7}$$

donde $\alpha_{i,k}, \alpha_{k+1,j}, \alpha_{l,r} \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}$ y $C_{i,j,k} = (1 - q_{k(k+1)} q_{(k+1)k})^N \mathbf{q}(\alpha_{i,k}, \alpha_{k+1,j})^{\frac{N(N-1)}{2}}$.

Queremos ahora particionar $\mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}$ de manera que si α, β y $\alpha+\beta$ son todas raíces pares, entonces estén en el mismo subconjunto.

Consideramos el conjunto de las raíces pares $\mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}$ y tomamos el subconjunto $A \subseteq \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}$ como sigue: sea i el menor índice tal que alguna $\alpha_{i,j}$ es par. Notemos que si $i \neq 1$ entonces necesariamente $i = 2$. Si $\alpha_{i,k} \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}$ entonces $\alpha_{i,k} \in A$. Ahora, si $\alpha_{i,k} \in A$ y $\alpha_{j,k} \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}$, $j \in \mathbb{I}$ entonces $\alpha_{j,k} \in A$. Notemos que si $i = 2$ entonces $A = \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}$. Suponemos entonces $i = 1$.

De manera similar definimos el subconjunto $B \subset \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}$: sea h el menor índice tal que existe $\alpha_{h,j} \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}} - A$. Luego si $\alpha_{h,l} \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}$, $\alpha_{h,l} \in B$. Si $\alpha_{h,l} \in B$ y $\alpha_{k,l} \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}$ entonces $\alpha_{k,l} \in B$.

Proposición 4.4.4. *Los conjuntos A y B son disjuntos y $\mathfrak{O}_{\mathfrak{q}} = A \cup B$.*

Demostración. Sea $\alpha_{k,l} \in A$. Supongamos que $\alpha_{k,l} \in B$, entonces $\alpha_{h,l}$ pertenece a B, donde h es el de la definición de B. Luego, existe $\alpha_{h,j} \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}} - A$. Supongamos $j < l$, como $\alpha_{h,j}, \alpha_{h,l} \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}$ entonces $\alpha_{j+1,l} \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}$. Pero $\alpha_{1,l} \in A \subset \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}$, entonces $\alpha_{1,j} \in A$ y por lo tanto $\alpha_{h,j} \in A$ lo que contradice la elección de dicha raíz. Luego $\alpha_{k,l} \notin B$.

Sea $\alpha_{r,s} \in B$, entonces $\alpha_{h,s} \in B$. Como antes, existe $\alpha_{h,j} \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}} - A$, suponemos $j < s$ y obtenemos $\alpha_{j+1,s} \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}$. Luego $\alpha_{1,s} \notin \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}$ y por lo tanto $\alpha_{r,s} \notin A$. En consecuencia $A \cap B = \emptyset$.

Tomamos $\alpha_{k,l} \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}} - A$. Consideramos el menor índice i tal que $\alpha_{i,l} \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}$ (en particular sabemos que $\alpha_{i,l} \notin A$ pues $\alpha_{1,l} \notin A$) y sea j el menor índice tal que $\alpha_{i,j} \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}$. Como $\alpha_{i,j}$ y $\alpha_{i,l}$ son pares entonces $\alpha_{j+1,l}$ también lo es; por lo tanto $\alpha_{i,j} \notin A$ puesto que en caso contrario $\alpha_{1,j}$, $\alpha_{1,l}$ y $\alpha_{k,l} \in A$. Ahora, basta probar que $\alpha_{i,j} \in B$. En efecto, si $\alpha_{i,j} \in B$ entonces $\alpha_{i,l} \in B$ y finalmente $\alpha_{k,l} \in B$.

Por la elección de $\alpha_{i,j}$ tenemos que $\alpha_{1,j}, \dots, \alpha_{i-1,j}, \alpha_{i,i}, \dots, \alpha_{i,j-1} \notin \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}$. Por lo tanto α_j es impar y $\alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{j-1}$ son pares. De allí sigue que, si $1 \leq m < i$ y $i \leq n < j$ entonces $\alpha_{m,n} \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}$. Más aún, $\alpha_{t,i-1} \notin \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}$ si $1 \leq t < i$ y $\alpha_{r,s} \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}$ si $1 \leq r \leq s < i-1$. Así, todas las raíces pares $\alpha_{k,l}$ con $1 \leq k < i$, $1 \leq l < j$ pertenecen al conjunto A y por lo tanto $\alpha_{i,j} \in B$. $\square$

En conclusión, el conjunto de raíces pares se divide en a lo sumo dos conjuntos disjuntos.

Proposición 4.4.5. *Sea* $\mathfrak{q}$ *una trenza (súper) de tipo* A*, entonces* $\mathfrak{Z}_\mathfrak{q}$ *es isomorfa a* $\mathcal{U}((A_m \oplus A_n)^+)$.

Demostración. Sean $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_m \le \theta$ tales que α_{1,i_j} son todas las raíces pares que empiezan en 1. Entonces que A está en biyección con el conjunto de raíces positivas del álgebra de Lie A_m. En efecto, las raíces pares que pertenecen a A son $\alpha_{1,i_1},\ \alpha_{1,i_2}, \alpha_{j_1,i_2},\ \alpha_{1,i_3}, \alpha_{j_1,i_3}, \alpha_{j_2,i_3}$, $\alpha_{1,i_4}, \alpha_{j_1,i_4}, \alpha_{j_2,i_4}, \alpha_{j_3,i_4}, \dots, \alpha_{1,i_m}, \alpha_{j_1,i_m}, \dots, \alpha_{j_{m-1},i_m}$ con $1 < j_1 < j_2 < \cdots < j_m \le \theta$. Así $\delta_1 \mapsto \alpha_{1,i_1}$, $\delta_k \mapsto \alpha_{j_{k-1},i_k}$ nos da la biyección entre el conjunto de raíces positivas de A_m y A. De manera similar, si $\alpha_{h,r_1}, \dots, \alpha_{h,r_n} \in B$, $1 \le r_1 < r_2 < \cdots < r_n \le \theta$ son todas las raíces pares que empiezan con h y h es el de la definición del conjunto B, tenemos una biyección entre B y el conjunto de raíces positivas de A_n.

Por lo tanto, por las relaciones (4.6) y (4.7) que describimos en $\mathfrak{Z}_\mathfrak{q}$, tenemos un isomorfismo de álgebras $\mathcal{U}((A_m \oplus A_n)^+) \simeq \mathfrak{Z}_\mathfrak{q}$. □

Es importante observar que la parte par de la súper álgebra de Lie clásica $A(m,n)$ de rango $m+n+1$ es isomorfa al álgebra de Lie $A_m \oplus A_n \oplus U(1)$ donde $U(1) = \mathbf{k}J$ con J una matriz diagonal.

Veamos algunos ejemplos con θ pequeño. Tomemos $\theta = 3$ y los diagramas de tipo A

con q una raíz primitiva de orden $N > 2$. En ambos casos el conjunto de raíces positivas es

$$\{\alpha_1, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_2, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3\}.$$

En el primer diagrama las raíces pares son α_1, $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ y $\alpha_2+\alpha_3$ y el conjunto $A = \mathfrak{D}_\mathfrak{q}$. Las relaciones entre los generadores de $\mathfrak{Z}_\mathfrak{q}$ son

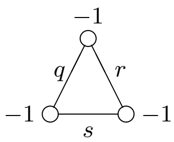
$$[\xi_1, \xi_{2,3}] = (1-q)^N \xi_{1,3};$$
$$[\xi_1, \xi_{1,3}] = [\xi_{1,3}, \xi_{2,3}] = 0$$

Por lo tanto tenemos un isomorfismo de álgebras $\mathfrak{Z}_\mathfrak{q} \simeq \mathcal{U}(A_2^+)$.

En el segundo diagrama las raíces pares son α_2 y $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, entonces $A = \{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\}$ y $B = \{\alpha_2\}$. Los generadores de $\mathfrak{Z}_\mathfrak{q}$ conmutan entre sí y por lo tanto tenemos un isomorfismo de álgebras $\mathfrak{Z}_\mathfrak{q} \simeq \mathcal{U}((A_1 \oplus A_1)^+)$.

4.4.2. Más ejemplos.

EJEMPLO 4.4.6. Consideramos el diagrama



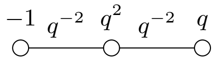
con $qrs = 1$, $q \neq r \neq s$ raíces primitivas de la unidad de órdenes N_q, N_r y N_s respectivamente. Este diagrama corresponde a una trenza súper de tipo $D(2,1,\alpha)$. El conjunto de raíces positivas es

$$\Delta_{\mathfrak{q}}^{+} = \{\alpha_1, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_2, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_1+\alpha_3, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3\};$$

mientras que sus raíces de Cartan son $\alpha_1+\alpha_2$, $\alpha_2+\alpha_3$ y $\alpha_1+\alpha_3$.

Los elementos $x_{12}^{N_q}$, $x_{23}^{N_r}$ y $x_{13}^{N_s}$ son primitivos en $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$ y por lo tanto en $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$ los generadores ξ_{12}, ξ_{23} y ξ_{13} conmutan entre sí. Así, tenemos un isomorfismo de álgebras $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}} \simeq \mathcal{U}((A_1 \oplus A_1 \oplus A_1)^{+})$.

Notar que la parte par de la súper álgebra de Lie básica $D(2,1,\alpha)$ es justamente isomorfa al álgebra de Lie $A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$.

EJEMPLO 4.4.7. El diagrama 

con $q \neq 1$ una raíz de la unidad de orden N impar corresponde a una trenza súper de tipo B con raíces positivas

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathfrak{q}}^{+} = \{&\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_2+\alpha_3,\\ &\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3, \alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3, \alpha_2+2\alpha_3\}.\end{aligned}$$

En este caso las raíces de Cartan son $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_2+\alpha_3+\alpha_2+2\alpha_3$ con q_β de orden N y $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ con q_β de orden $2N$. Pedimos además $q_{23}^N = q_{32}^N = 1$. Los coproductos de los elementos x_2^N, x_3^N, x_{23}^N, $[x_{23}, x_3]_c^N$ y $x_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}^{2N}$ en $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$ son:

$$\begin{aligned}
\underline{\Delta}(x_2^N) =& x_2^N \otimes 1 + 1 \otimes x_2^N; \qquad \underline{\Delta}(x_3^N) = x_3^N \otimes 1 + 1 \otimes x_3^N;\\
\underline{\Delta}(x_{23}^N) =& x_{23}^N \otimes 1 + 1 \otimes x_{23}^N + (1-q^{-2})^N x_2^N \otimes x_3^N;\\
\underline{\Delta}([x_{23}, x_3]_c^N) =& [x_{23}, x_3]_c^N \otimes 1 + 1 \otimes [x_{23}, x_3]_c^N + (1-q^{-1})^N (1-q^{-2})^N x_2^N \otimes x_3^{2N}\\
&+ 2(1-q^{-1})^N (1-q^{-2})^N\, x_{23}^N \otimes x_3^N;\\
\underline{\Delta}(x_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}^{2N}) =& x_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}^{2N} \otimes 1 + 1 \otimes x_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}^{2N}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, en $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{q}}$ tenemos

$$\begin{aligned}
&[\xi_3, \xi_2] = (1-q^{-2})^N \xi_{23};\\
&[\xi_3, \xi_{23}] = 2(1-q^{-1})^N (1-q^{-2})^N\, \xi_{233};\\
&[\xi_3, \xi_{233}] = [\xi_2, \xi_{23}] = 0;\\
&[\xi_{123}, \xi_2] = [\xi_{123}, \xi_3] = [\xi_{123}, \xi_{23}] = [\xi_{123}, \xi_{233}] = 0.
\end{aligned}$$

Definimos entonces el morfismo de álgebras $\mathfrak{F} : \mathcal{U}((B_2 \oplus A_1)^+) \to \mathfrak{Z}_\mathfrak{q}$ dado por

$$e_1 \mapsto \xi_3, \qquad e_2 \mapsto \xi_2 \qquad e_1' \mapsto \xi_{123}.$$

Dicho morfismo aplica una base en una base, así $\mathfrak{Z}_\mathfrak{q} \simeq \mathcal{U}((B_2 \oplus A_1)^+)$.

Notemos que la parte par de la súper álgebra de Lie de rango tres $B(2,1)$ es isomorfa al álgebra de Lie $B_2 \oplus A_1$.

Ejemplo 4.4.8. Consideremos el diagrama de rango 4

$$\overset{q}{\circ}\overset{q^{-1}}{\text{———}}\overset{q}{\circ}\overset{q^{-1}}{\text{———}}\overset{-1}{\circ}\overset{-q}{\text{———}}\overset{-q^{-1}}{\circ}$$

con q una raíz primitiva de orden $N > 2$. Este diagrama corresponde a una trenza de tipo no identificado con raíces positivas

$$\begin{aligned}\{&\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4,\\ &\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4,\\ &\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4\}.\end{aligned}$$

En este caso las raíces de Cartan son

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_4, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4\}.$$

Las tres primeras raíces tienen $q_\beta = q$ mientras que las últimas tres igual a $-q^{-1}$. Sea $M = N$ si N es par y $M = 2N$ si es impar. Pedimos además $q_{\beta\alpha}^{N_\beta} = 1$ si $\beta, \alpha \in \mathfrak{O}_\mathfrak{q}$.

Los coproductos en $Z_\mathfrak{q}$ son:

$$\begin{aligned}&\underline{\Delta}(x_1^N) = x_1^N \otimes 1 + 1 \otimes x_1^N;\\ &\underline{\Delta}(x_2^N) = x_2^N \otimes 1 + 1 \otimes x_2^N;\\ &\underline{\Delta}(x_{12}^N) = x_{12}^N \otimes 1 + 1 \otimes x_{12}^N + (1 - q^{-1})^N x_1^N \otimes x_2^N;\\ &\underline{\Delta}(x_4^M) = x_4^M \otimes 1 + 1 \otimes x_4^M;\\ &\underline{\Delta}(x_\alpha^M) = x_\alpha^M \otimes 1 + 1 \otimes x_\alpha^M;\\ &\underline{\Delta}(x_\beta^M) = x_\beta^M \otimes 1 + 1 \otimes x_\beta^M + C x_\alpha^M \otimes x_4^M.\end{aligned}$$

donde C es una constante no nula, $\alpha = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4$ y $\beta = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4$. Por lo tanto, en $\mathfrak{Z}_\mathfrak{q}$ tenemos las relaciones

$$\begin{aligned}&[\xi_1, \xi_2] = (1 - q^-1)^N \xi_{12}; \qquad [\xi_1, \xi_{12}] = [\xi_{12}, \xi_2] = 0;\\ &[\xi_4, \xi_\alpha] = C\xi_\beta; \qquad [\xi_4, \xi_\beta] = [\xi_\beta, \xi_\alpha] = 0;\\ &[\xi_4, \xi_1] = [\xi_4, \xi_2] = [\xi_4, \xi_{12}] = 0\\ &[\xi_\alpha, \xi_1] = [\xi_\alpha, \xi_2] = [\xi_\alpha, \xi_{12}] = 0;\\ &[\xi_\beta, \xi_1] = [\xi_\beta, \xi_2] = [\xi_\beta, \xi_{12}] = 0.\end{aligned}$$

Así, tenemos un isomorfismo de álgebras $\mathfrak{Z}_\mathfrak{q} \simeq \mathcal{U}((A_2 \oplus A_2)^+)$.

Capítulo 5

Álgebras de Hopf co-Frobenius

En este capítulo, expondremos en primer lugar definiciones y resultados sobre álgebras de Hopf co-Frobenius. Luego probaremos versiones análogas de algunos de estos resultados para álgebras de Hopf trenzadas en categorías de módulos de Yetter-Drinfeld sobre un álgebra de Hopf.

5.1. Categorías monoidales equivalentes

Dada A un álgebra denotaremos por ${}_A\mathcal{M}$ a la categoría de A-módulos a izquierda. Análogamente, dada C una coálgebra, ${}^C\mathcal{M}$ denotará la categoría de C-comódulos a izquierda. Estas categorías son abelianas.

Definición 5.1.1. Sean H un álgebra de Hopf y R un H-módulo álgebra a izquierda; el *producto smash* de R y H, denotado por $R\#H$, es el álgebra con espacio vectorial subyacente $R\otimes H$ y estructura dada por

$$(r\#h)(s\#k) = r(h_{(1)}.s)\#h_{(2)}k, \qquad r,s\in R,\ h,k\in H. \tag{5.1}$$

Análogamente, si S es un H-comódulo coálgebra a izquierda, el *coproducto smash* $S\#H$ es el espacio vectorial $S\otimes H$ con la estructura de coálgebra dada, para todo $s\in S$ y $h\in H$, por

$$\Delta(s\#h) = s^{(1)}\#(s^{(2)})^{(-1)}h_{(1)}\otimes (s^{(2)})^{(0)}\#h_{(2)}; \quad \varepsilon(s\#h)=\varepsilon(s)\varepsilon(h). \tag{5.2}$$

Por abuso de notación utilizaremos el símbolo # tanto para el producto como para el coproducto smash.

Si R es un álgebra de Hopf en la categoría ${}^H_H\mathcal{YD}$, en particular R es un H-módulo álgebra a izquierda y un H-comódulo coálgebra a izquierda, entonces $A=R\#H$ es un álgebra de Hopf con el producto smash y el coproducto smash, como se vio en la Definición 1.4.11.

Observación 5.1.2. La noción de H-módulo álgebra, ver 1.2.20, es equivalente a la noción de álgebra en la categoría ${}_H\mathcal{M}$. Análogamente, la noción de H-comódulo coálgebra es equivalente a la de coálgebra en ${}^H\mathcal{M}$.

Sea R un H-módulo álgebra. En lo que sigue ${}_R\underline{\mathcal{M}}$ denotará la categoría de R-módulos a izquierda dentro de ${}_H\mathcal{M}$. Esto es, si $V\in{}_R\underline{\mathcal{M}}$, V es un H-módulo con acción "$\triangleright$" y V es un R-módulo con acción "$\rightharpoonup$" tal que $\rightharpoonup$ es un morfismo de H-módulos, es decir

$$h \triangleright (r \rightharpoonup v) = (h_{(1)}.r) \rightharpoonup (h_{(2)} \triangleright v), \qquad \forall h \in H,\ r \in R,\ v \in V. \tag{5.3}$$

Sea S un H-comódulo coálgebra. Por su parte ${}^{S}\underline{\mathcal{M}}$ denotará la categoría de S-comódulos a izquierda con S en ${}^{H}\mathcal{M}$. Es decir, si $V \in {}^{S}\underline{\mathcal{M}}$, V es un S-comódulo vía ρ_S, un H-comódulo vía ρ_H y ρ_S es un morfismo de H-comódulos.

La siguiente proposición es un resultado bien conocido, ver por ejemplo [**AM**, Proposition 1.19] y [**AAY, AAB**] para los casos súper y color.

Proposición 5.1.3. *Sea H un álgebra de Hopf.*

(i) Si R es un H-módulo álgebra y $A = R\#H$ el producto smash, entonces las categorías ${}_{A}\mathcal{M}$ y ${}_{R}\underline{\mathcal{M}}$ son equivalentes.
(ii) Si R es un H-comódulo coálgebra y $A = R\#H$ el coproducto smash, entonces las categorías ${}^{A}\mathcal{M}$ y ${}^{R}\underline{\mathcal{M}}$ son equivalentes.

Demostración. (i) Sea V un espacio vectorial en ${}_{R}\underline{\mathcal{M}}$. Definimos $\cdot : A \otimes V \longrightarrow V$ por $(r\#h) \cdot v := r \rightharpoonup (h \triangleright v)$. Esta aplicación es una acción por la compatibilidad (5.3). En efecto, para todo $h, k \in H$, $r, s \in R$ y $v \in V$, vale

$$\begin{aligned}(r\#h) \cdot ((s\#k) \cdot v) &= r \rightharpoonup (h \triangleright (s \rightharpoonup (k \triangleright v))) = r \rightharpoonup (h_{(1)} \cdot s \rightharpoonup h_{(2)} \triangleright (k \triangleright v)) \\ &= r(h_{(1)} \cdot s) \rightharpoonup (h_{(2)}k \triangleright v) = (r(h_{(1)} \cdot s)\#h_{(2)}k) \cdot v = ((r\#h)(s\#k)) \cdot v.\end{aligned}$$

Así, tenemos un funtor $G : {}_{R}\underline{\mathcal{M}} \longrightarrow {}_{A}\mathcal{M}$ que aplica $(V, \rightharpoonup, \triangleright)$ en $(V, \cdot)$ y $G(f) = f$ para todo morfismo f.

Recíprocamente, podemos definir un funtor $F : {}_{A}\mathcal{M} \longrightarrow {}_{R}\underline{\mathcal{M}}$ tal que, para todo $V \in {}_{A}\mathcal{M}$, $F(V) = V$ con la estructura dada por

$$r \rightharpoonup v := (r\#1) \cdot v \qquad \text{y} \qquad h \triangleright v := (1\#h) \cdot v.$$

Esto se debe a la existencia de morfismos $\iota : H \to A$, $h \mapsto 1\#h$ y $\pi : A \to H$, $r\#h \mapsto \varepsilon(r)h$. Si $h, k \in H$, $r, s \in R$ y $v \in V$, entonces

$$\begin{aligned}r \rightharpoonup (s \rightharpoonup v) &= (r\#1) \cdot ((s\#1) \cdot v) \\ &= ((r\#1)(s\#1)) \cdot v = (rs\#1) \cdot v = (rs) \rightharpoonup v;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h \triangleright (k \triangleright v) &= (1\#h) \cdot ((1\#k) \cdot v) = ((1\#h)(1\#k)) \cdot v \\ &= (h_{(1)}.1\#h_{(2)}k) \cdot v = (1\#hk) \cdot v = (hk) \triangleright v;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h \triangleright (r \rightharpoonup v) &= ((1\#h)(r\#1)) \cdot v = (h_{(1)}.r\#h_{(2)}) \cdot v \\ &= (h_{(1)}.r\#1)(1\#h_{(2)}) = (h_{(1)}.r) \rightharpoonup (h_{(2)} \triangleright v).\end{aligned}$$

Además,

$$
\begin{aligned}
(r\#h)\cdot G(F(v)) &= r \rightharpoonup (h \triangleright F(v)) = (r\#1)\cdot((1\#h)\cdot v) = (r\#h)\cdot v,\\
h \triangleright F(G(v)) &= (1\#h)\cdot G(v) = 1 \rightharpoonup (h \triangleright v) = h \triangleright v,\\
r \rightharpoonup F(G(v)) &= (r\#1)\cdot G(v) = r \rightharpoonup (1 \triangleright v) = r \rightharpoonup v.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto F y G son mutuamente inversos y así ${}_A\mathcal{M}$ y ${}_R\underline{\mathcal{M}}$ son categorías equivalentes.

(ii) En el caso de las categorías de comódulos, definimos los funtores $F : {}^A\mathcal{M} \to {}^R\underline{\mathcal{M}}$ y $G : {}^R\underline{\mathcal{M}} \to {}^A\mathcal{M}$ tales que $F(V) = V$, $G(V) = V$, $F(f) = f$ y $G(f) = f$ para todo espacio vectorial V y todo morfismo f.

Denotaremos las coacciones de R, H y A en V por ρ_R, ρ_H y ρ_A respectivamente y la coacción de H en R por ρ'_R. Sea $V \in {}^R\underline{\mathcal{M}}$, definimos la estructura de A-comódulo en $G(V)$ por $\rho_A = (1_R \otimes \rho_H)\rho_R$. Debemos probar que ρ_A es una coacción, para ello utilizaremos los siguientes hechos:

- ρ_H es una coacción, esto es $(1_H \otimes \rho_H)\rho_H = (\Delta_H \otimes 1_V)\rho_H$,
- ρ_R es una coacción, esto es $(1_R \otimes \rho_R)\rho_R = (\Delta_R \otimes 1_V)\rho_R$,
- ρ_R es un morfismo de H-comódulos, es decir $(1_H \otimes \rho_R)\rho_H = (m_H \otimes 1_R \otimes 1_V)(1_H \otimes \tau \otimes 1_V)(\rho'_H \otimes \rho_H)\rho_R$,
- $\Delta_A = (1_R \otimes m_H \otimes 1_R \otimes 1_H)(1_R \otimes 1_H \otimes \tau \otimes 1_H)(1_R \otimes \rho'_H \otimes 1_H \otimes 1_H)(\Delta_R \otimes \Delta_H)$,

donde $\tau(r \otimes h) = h \otimes r$ y m_H es la multiplicación en H. Así tenemos

$$
\begin{aligned}
(\Delta_A \otimes 1_V)\rho_A &= (1_R \otimes m_H \otimes 1_R \otimes 1_H \otimes 1_V)(1_R \otimes 1_H \otimes \tau \otimes 1_H \otimes 1_V)\\
&\qquad \circ (1_R \otimes \rho'_H \otimes 1_H \otimes 1_H \otimes 1_V)(\Delta_R \otimes \Delta_H \otimes 1_V)(1_R \otimes \rho_H)\rho_R\\
&= (1_R \otimes m_H \otimes 1_R \otimes 1_H \otimes 1_V)(1_R \otimes 1_H \otimes \tau \otimes 1_H \otimes 1_V)\\
&\qquad \circ (1_R \otimes \rho'_H \otimes 1_H \otimes 1_H \otimes 1_V)(1_R \otimes 1_R \otimes 1_H \otimes \rho_H)\\
&\qquad \circ (1_R \otimes 1_R \otimes \rho_H)(1_R \otimes \rho_R)\rho_R\\
&= (1_R \otimes m_H \otimes 1_R \otimes 1_H \otimes 1_V)(1_R \otimes 1_H \otimes \tau \otimes 1_H \otimes 1_V)\\
&\qquad \circ (1_R \otimes 1_H \otimes 1_R \otimes 1_H \otimes \rho_H)(1_R \otimes \rho'_H \otimes \rho_H)(1_R \otimes \rho_R)\rho_R\\
&= (1_R \otimes 1_H \otimes 1_R \otimes \rho_H)(1_R \otimes 1_H \otimes \rho_R)(1_R \otimes \rho_H)\rho_R\\
&= (1_A \otimes \rho_A)\rho_A.
\end{aligned}
$$

Recíprocamente, si $(V, \rho_A) \in {}^A\mathcal{M}$ tenemos los morfismos de coálgebras $\psi_R : A \to R$ y $\psi_H : A \to H$ dados por $\psi_R(r\#h) = r\varepsilon(h)$ y $\psi_H(r\#h) = \varepsilon(r)h$. Entonces, definimos las coacciones de R y H en $F(V)$ por correstricción, es decir $\rho_R = (\psi_R \otimes 1_V)\rho_A$ y $\rho_H = (\psi_H \otimes 1_V)\rho_A$. Efectivamente, ρ_R es coacción:

$$
\begin{aligned}
(\Delta_R \otimes 1_V)\rho_R &= (\Delta_R \otimes 1_V)(\psi_R \otimes 1_V)\rho_A = (\psi_R \otimes \psi_R \otimes 1_V)(\Delta_A \otimes 1_V)\rho_A\\
&= (\psi_R \otimes \psi_R \otimes 1_V)(1_A \otimes \rho_A)\rho_A = (1_R \otimes \rho_R)\rho_R.
\end{aligned}
$$

De manera similar se ve que ρ_H es coacción. Sólo resta probar que la composición de F y G es la identidad:

$$\begin{aligned}
\rho_A \circ G \circ F &= (1_R \otimes \rho_H)\rho_R \circ F = \big[1_R \otimes ((\psi_H \otimes 1_V)\rho_A)\big](\psi_R \otimes 1_V)\rho_A;\\
&= (\psi_R \otimes \psi_H \otimes 1_V)(\Delta_A \otimes 1_V)\rho_A = \rho_A;\\
\rho_R \circ F \circ G &= (\psi_R \otimes 1_V)\rho_A \circ F = (1_R \otimes \varepsilon \otimes 1_V)(1_R \otimes \rho_H)\rho_R = \rho_R;\\
\rho_H \circ F \circ G &= (\psi_H \otimes 1_V)\rho_A \circ F = (\varepsilon \otimes 1_H \otimes 1_V)(1_R \otimes \rho_H)\rho_R = \rho_H.
\end{aligned}$$

□

Observación 5.1.4. Es bien sabido que tanto la categoría de módulos como de comódulos sobre un álgebra de Hopf tienen una estructura monoidal. Si A es un álgebra de Hopf, $V, W \in {}_A\mathcal{M}$, $v \in V$, $w \in W$, $a \in A$, $X, Y \in {}^A\mathcal{M}$, $x \in X$, $y \in Y$, dichas estructuras monoidales están dadas por

$$\begin{aligned}
a \cdot (v \otimes w) &= a_{(1)} \cdot v \otimes a_{(2)} \cdot w;\\
\rho_A(x \otimes y) &= x_{(-1)}y_{(-1)} \otimes x_{(0)} \otimes y_{(0)}.
\end{aligned}$$

Así, si consideramos H un álgebra de Hopf, $R \in {}^H_H\mathcal{YD}$ y $A = R\#H$ el biproducto smash, entonces podemos dar una estructura monoidal a las categorías ${}_R\underline{\mathcal{M}}$ y ${}^R\underline{\mathcal{M}}$. Si $V, W \in {}_R\underline{\mathcal{M}}$, $v \in V$, $w \in W$, $r \in R$, $h \in H$, las acciones de R y H sobre $V \otimes W$ están dadas respectivamente por

$$\begin{aligned}
r \rightharpoonup (v \otimes w) &= (r\#1) \cdot v \otimes w = (r^{(1)}\#(r^{(2)})^{(-1)}) \cdot v \otimes ((r^{(2)})^{(0)}\#1) \cdot w\\
&= r^{(1)} \rightharpoonup ((r^{(2)})^{(-1)} \triangleright v) \otimes (r^{(2)})^{(0)} \rightharpoonup w;\\
h \triangleright (v \otimes w) &= (1\#h) \cdot v \otimes w = (1\#h_{(1)}) \cdot v \otimes (1\#h_{(2)}) \cdot w = h_{(1)} \triangleright v \otimes h_{(2)} \triangleright w.
\end{aligned}$$

Utilizando la notación $\rho_A(x) = (x_{(-1)R}\#x_{(-1)H}) \otimes x_{(0)}$ para la coacción de A, si $V, W \in {}^R\underline{\mathcal{M}}$, las coacciones de R y H en $V \otimes W$, están dadas respectivamente por, para $v \in V$, $w \in W$,

$$\begin{aligned}
\rho_R(v \otimes w) &= \varepsilon(v_{(-1)H})\varepsilon(w_{(-1)H})\, v_{(-1)R}w_{(-1)R} \otimes v_{(0)} \otimes w_{(0)},\\
\rho_H(v \otimes w) &= \varepsilon(v_{(-1)R})\varepsilon(w_{(-1)R})\, v_{(-1)H}w_{(-1)H} \otimes v_{(0)} \otimes w_{(0)}.
\end{aligned}$$

De esta manera, las equivalencias dadas en la Proposición 5.1.3 son equivalencias de categorías monoidales.

5.2. Álgebras de Hopf co-Frobenius

5.2.1. Algunas definiciones categóricas. Daremos una serie de definiciones básicas que serán utilizadas posteriormente.

Definición 5.2.1.
- Un morfismo $f : M \to N$ en una categoría $\mathcal{C}$ es un *monomorfismo* si para todo par de morfismos $g, h : S \to M$ tales que $f \circ g = f \circ h$ vale $g = h$.

- Un monomorfismo $f : M \to N$ en $\mathcal{C}$ se dice *esencial* si para todo morfismo g tal que $g \circ f$ es un monomorfismo entonces g es un monomorfismo.
- Un objeto $Q \in \mathcal{C}$ se dice *inyectivo* si para todo monomorfismo $\iota : M \to N$ de $\mathcal{C}$ y para todo $f : M \to Q$ existe un morfismo $g : N \to Q$ tal que $g \circ \iota = f$.
- Una *cápsula inyectiva* de un objeto $M \in \mathcal{C}$ es un par (Q, f) donde $f : M \to Q$ es un monomorfismo esencial y Q un objeto inyectivo.

DEFINICIÓN 5.2.2.

- Un morfismo $f : M \to N$ en una categoría $\mathcal{C}$ es un *epimorfismo* si para todo par de morfismos $g, h : N \to S$ tales que $g \circ f = h \circ f$ vale $g = h$.
- Un epimorfismo $f : M \to N$ en $\mathcal{C}$ se dice *esencial* si para todo morfismo $g : L \to M$ tal que $f \circ g$ es un epimorfismo entonces g es un epimorfismo.
- Un objeto $P \in \mathcal{C}$ se dice *proyectivo* si para todo epimorfismo $\pi : M \to N$ de $\mathcal{C}$ y para todo $f : P \to N$ existe un morfismo $g : P \to M$ tal que $\pi \circ g = f$.
- Un *cubrimiento proyectivo* de un objeto $M \in \mathcal{C}$ es un par (P, f) donde $f : P \to M$ es un epimorfismo esencial y P un objeto proyectivo.

Decimos que una categoría abeliana $\mathcal{C}$ tiene suficientes proyectivos si todo objeto $X \in \mathcal{C}$ tiene un cubrimiento proyectivo. De manera análoga, diremos que la categoría abeliana $\mathcal{C}$ tiene suficientes inyectivos si todo objeto de la categoría tiene una cápsula inyectiva.

OBSERVACIÓN 5.2.3. [**DNR**, 2.4.6] Sea C una coálgebra. Todo objeto $M \in {}^C\mathcal{M}$ tiene una cápsula inyectiva, digamos $E(M)$. Así, ${}^C\mathcal{M}$ tiene suficientes inyectivos pero no necesariamente suficientes proyectivos, como veremos en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5.2.4. Sea C un $\mathbf{k}$-espacio vectorial con base $\{c_i : i \in \mathbb{N}_0\}$ y estructura de coálgebra dada por,

$$\Delta(c_i) = \sum_{j=0}^{i} c_j \otimes c_{i-j}, \qquad \varepsilon(c_i) = \delta_{0i}, \qquad \forall\, i \in \mathbb{N}_0.$$

Consideramos el álgebra dual C^*, ver 1.2.7. Entonces C^* es isomorfa al álgebra $\mathbf{k}[[x]]$ de series de potencias formales en la indeterminada x. Además, ${}^C\mathcal{M}$ es la clase de todos los $\mathbf{k}[[x]]$-módulos de torsión. En esta categoría el único objeto proyectivo es 0, por lo tanto ${}^C\mathcal{M}$ no tiene suficientes proyectivos.

5.2.2. Coálgebras con propiedades especiales. Las siguientes definiciones y resultados pueden encontrarse en el capítulo 3 de [**DNR**].

Observación 5.2.5. En lo que sigue, a diferencia de como lo hemos hecho hasta el momento, dado un espacio vectorial V, consideramos la identificación

$$\langle f \otimes g, v \otimes w\rangle = \langle f, v\rangle\langle g, w\rangle$$

de $V^* \otimes V^*$ con un subespacio de $(V \otimes V)^*$. La razón de este cambio es la coherencia con la bibliografía utilizada.

Sean C una coálgebra y C^* su álgebra dual. Si (M, ρ_M) es un C-comódulo a derecha, entonces M resulta un C^*-módulo a izquierda vía

$$c^* \cdot m := (1 \otimes c^*)\rho_M(m), \qquad c^* \in C^*,\ m \in M. \tag{5.4}$$

Definición 5.2.6. [**L, DNR**] Sea C una coálgebra. Un C^*-módulo a izquierda se dice *racional* si la acción se define a partir de una estructura de C-comódulo a derecha, cf. (5.4).

Sea C una coálgebra, entonces C es un C^*-módulo racional a izquierda (resp. a derecha) vía $c^* \rightharpoonup c = c^*(c_{(2)})c_{(1)}$ (resp. $c \leftharpoonup c^* = c^*(c_{(1)})c_{(2)}$), $c \in C$, $c^* \in C^*$. Más aún, todo C-comódulo es un C^*-módulo racional con la estructura dada por (5.4).

Además, la suma de una familia de C^*-módulos racionales es un C^*-módulo racional [**DNR**, 2.2.6]. Por lo tanto todo C^*-módulo admite un submódulo racional maximal. Denotamos por $\mathrm{Rat}({}_{C^*}C^*)$ o simplemente $\mathrm{Rat}(C^*)$ al máximo submódulo racional del C^*-módulo a izquierda C^*. De manera análoga, intercambiando los lados izquierda/derecha podemos definir C^*-módulos racionales a derecha. Denotamos por $\mathrm{Rat}(C^*_{C^*})$ al máximo submódulo racional del C^*-módulo a derecha C^*.

De ahora en adelante enunciaremos todas las definiciones y resultados a un sólo lado, dejando a cargo del lector el enunciado intercambiando los lados izquierda/derecha.

Teorema 5.2.7. [**DNR**, 3.2.3] *Sea C una coálgebra. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- *La categoría ${}^C\mathcal{M}$ tiene suficientes proyectivos.*
- $\mathrm{Rat}(C^*_{C^*})$ *es un subconjunto denso de C^*.*
- *$E(S)$ tiene dimensión finita para todo comódulo simple $S \in \mathcal{M}^C$.*
- *Todo C-comódulo a izquierda de dimensión finita tiene un cubrimiento proyectivo.* □

Definición 5.2.8. Una coálgebra C se dice *semiperfecta a izquierda* si cumple las condiciones equivalentes del Teorema 5.2.7.

OBSERVACIÓN 5.2.9. Si C es una coálgebra semiperfecta a izquierda y derecha entonces $\mathrm{Rat}({}_{C^*}C^*) = \mathrm{Rat}(C^*_{C^*})$.

COROLARIO 5.2.10. [**DNR**, 3.2.11] *Sean C una coálgebra semiperfecta a izquierda y D una subcoálgebra de C, entonces D es semiperfecta a izquierda.* $\square$

DEFINICIÓN 5.2.11. Una coálgebra C se dice *cuasi co-Frobenius a izquierda* si existen un C^*-módulo libre F y un morfismo inyectivo de C^*-módulos a izquierda $f : C \to F$. Además, C se dice *co-Frobenius a izquierda* si existe un monomorfismo de C^*-módulos a izquierda de C a C^*.

TEOREMA 5.2.12. [**DNR**, 3.3.4] *Sea C una coálgebra, entonces C es cuasi co-Frobenius a izquierda si y sólo si todo C-comódulo a derecha inyectivo es proyectivo.* $\square$

Una forma bilineal $b : C \times C \to \mathbf{k}$ se dice C^*-balanceada si

$$b(x \leftharpoonup c^*, y) = b(x, c^* \rightharpoonup y), \qquad \forall\, x, y \in C, c^* \in C^*.$$

Dicha forma bilineal se dice no-degenerada a izquierda si $b(x, y) = 0$ para todo $x \in C$ implica $y = 0$.

TEOREMA 5.2.13. [**DNR**, 3.3.5] *Una coálgebra C es co-Frobenius a izquierda si y sólo si existe una forma lineal C^*-balanceada no degenerada a izquierda.*

DEMOSTRACIÓN. Dada una forma bilineal $b : C \times C \to \mathbf{k}$, definimos $f : C \to C^*$ por $f(y)(x) = b(x, y)$, $x, y \in C$ y viceversa. Entonces b es C^*-balanceada si y sólo si f es un morfismo de C^*-módulos. Además, b es no degenerada a izquierda si y sólo si f es inyectivo. $\square$

PROPOSICIÓN 5.2.14. [**DNR**, 3.3.6] *Si C es una coálgebra cuasi co-Frobenius a izquierda entonces es semiperfecta a izquierda y* $\mathrm{Rat}(C^*) \neq 0$. $\square$

5.2.3. Álgebras de Hopf co-Frobenius. El siguiente enunciado es conocido como Teorema fundamental de módulos de Hopf. Recordemos primero la definición de módulo de Hopf.

DEFINICIÓN 5.2.15. Sea A un álgebra de Hopf. Un espacio vectorial V se dice A-módulo de Hopf a derecha si es un A-módulo a derecha con acción $\triangleleft$ y un A-comódulo a derecha con coacción ρ tal que

$$\rho(v \triangleleft a) = v_{(0)} \triangleleft a^{(1)} \otimes v_{(1)} a^{(2)}, \qquad v \in V, a \in A.$$

Teorema 5.2.16 (Teorema fundamental de módulos de Hopf). [**DNR**, 4.4.6] *Sean A un álgebra de Hopf y V un A-módulo de Hopf a derecha. Entonces la aplicación $f : V^{\mathrm{co}\,A} \otimes A \to V$ definida por $f(v \otimes a) = va$, $v \in V^{\mathrm{co}\,A}$, $a \in A$, es un isomorfismo de módulos de Hopf; donde $V^{\mathrm{co}\,A} = \{v \in V : \rho(v) = v \otimes 1\}$.* $\square$

Definición 5.2.17. Dada un álgebra de Hopf A, una *integral a izquierda* para A es una aplicación lineal $\lambda : A \to \mathbf{k}$ tal que $\alpha\lambda = \alpha(1_A)\lambda$ para todo α en A^*. Equivalentemente, $\lambda(a_{(2)})a_{(1)} = \lambda(a)1_A$ para todo $a \in A$. Denotaremos por $\int_l$ al conjunto de integrales a izquierda de A. Análogamente, una *integral a derecha* para A es una aplicación lineal $\lambda : A \to \mathbf{k}$ tal que $\lambda\alpha = \alpha(1_A)\lambda$ para todo α en A^*. Equivalentemente, $\lambda(a_{(1)})a_{(2)} = \lambda(a)1_A$ para todo $a \in A$. Denotaremos por $\int_r$ al conjunto de integrales a derecha de A.

Definición 5.2.18. Un álgebra de Hopf se dice *co-Frobenius* si admite una integral a izquierda no nula.

Teorema 5.2.19. [**DNR**, 5.2.3] *Sean A un álgebra de Hopf y $\int_l$ su espacio de integrales a izquierda, entonces $\int_l \otimes A \simeq \mathrm{Rat}(A^*)$.*

Demostración. Como $\mathrm{Rat}(A^*)$ es un A^*-módulo racional a izquierda, tiene una estructura de A-comódulo a derecha ρ tal que, si $a^* \in \mathrm{Rat}(A^*)$, $fa^* = f(a^*_{(1)})a^*_{(0)}$ para todo $f \in A^*$.

Sea $a^* \in \mathrm{Rat}(A^*)$. Entonces $a^* \in \mathrm{Rat}(A^*)^{\mathrm{co}\,A}$ si y sólo si $\rho(a^*) = a^* \otimes 1$ lo que es equivalente a $fa^* = f(1)a^*$ para todo $f \in A^*$, es decir a^* es una integral a izquierda. Por lo tanto $\mathrm{Rat}(A^*)^{\mathrm{co}\,A} = \int_l$.

Además, $\mathrm{Rat}(A^*)$ es un A-módulo a derecha vía la acción $\leftharpoondown$, definida por $(a^* \leftharpoondown a)(b) = a^*(b\mathcal{S}(a))$, $a, b \in A$, $a^* \in \mathrm{Rat}(A^*)$.

Veamos que $\leftharpoondown$ y ρ le dan a $\mathrm{Rat}(A^*)$ una estructura de A-módulo de Hopf a derecha. Denotaremos por $\rightharpoondown$ la acción de A sobre A^* inducida por la estructura canónica de A como A-módulo a derecha: $(a \rightharpoondown a^*)(b) = a^*(ba)$, $a, b \in A$, $a^* \in A^*$; entonces $a^* \leftharpoondown a = \mathcal{S}(a) \rightharpoondown a^*$. Dados, $a, b \in A$, $a^* \in \mathrm{Rat}(A^*)$ y $f \in A^*$ tenemos

$$\begin{aligned}
(f(a^* \leftharpoondown a))(b) &= f(b_{(1)})a^*(b_{(2)}\mathcal{S}(a)) = f(b_{(1)}\varepsilon(a_{(2)}))a^*(b_{(2)}\mathcal{S}(a_{(1)})) \\
&= f(b_{(1)}\mathcal{S}(a_{(2)})a_{(3)})a^*(b_{(2)}\mathcal{S}(a_{(1)})) \\
&= (a_{(3)} \rightharpoondown f)(b_{(1)}\mathcal{S}(a_{(2)}))a^*(b_{(2)}\mathcal{S}(a_{(1)})) \\
&= (a_{(2)} \rightharpoondown f)((b\,\mathcal{S}(a_{(1)}))_{(1)})a^*((b\,\mathcal{S}(a_{(1)}))_{(2)}) \\
&= ((a_{(2)} \rightharpoondown f)a^*)(b\,\mathcal{S}(a_{(1)})) = (a_{(2)} \rightharpoondown f)(a^*{}_{(1)})a^*{}_{(0)}(b\,\mathcal{S}(a_{(1)})) \\
&= f(a^*{}_{(1)}a_{(2)})a^*{}_{(0)}(b\,\mathcal{S}(r_{(1)})) = f(a^*{}_{(1)}a_{(2)})(a^*{}_{(0)} \leftharpoondown a_{(1)})(b).
\end{aligned}$$

El teorema sigue por el teorema fundamental de módulos de Hopf aplicado a $\mathrm{Rat}(A^*)$. $\square$

OBSERVACIÓN 5.2.20. Si A es un álgebra de Hopf co-Frobenius entonces es una coálgebra co-Frobenius.

DEMOSTRACIÓN. Notemos en primer lugar que la estructura canónica de A como A-módulo a derecha induce una acción de A sobre A^*:

$$(x \rightharpoondown a^*)(y) = a^*(yx), \quad x, y \in A,\ a^* \in A^*.$$

Sea $\lambda \in A^*$ una integral a izquierda no nula para A. Definimos la forma bilineal $b : A \times A \to \mathbf{k}$ por $b(x, y) = \lambda(x\mathcal{S}(y))$. Veamos que esta forma bilineal es A^*-balanceada. Dados $x, y \in A$, $a^* \in A^*$ tenemos

$$\begin{aligned} b(x \leftharpoonup a^*, y) &= a^*(x_{(1)})\lambda(x_{(2)}\mathcal{S}(y)) = a^*(x_{(1)})\lambda(x_{(2)}\mathcal{S}(y_{(1)}))\varepsilon(y_{(2)}) \\ &= a^*(x_{(1)}\mathcal{S}(y_{(2)})y_{(3)})\lambda(x_{(2)}\mathcal{S}(y_{(1)})) \\ &= (y_{(3)} \rightharpoondown a^*)(x_{(1)}\mathcal{S}(y_{(2)}))\lambda(x_{(2)}\mathcal{S}(y_{(1)})) \\ &= (y_{(2)} \rightharpoondown a^*)((x\mathcal{S}(y_{(1)}))_{(1)})\lambda((x\mathcal{S}(y_{(1)}))_{(2)}) \\ &= (y_{(2)} \rightharpoondown a^*)(1_H)\lambda(x\mathcal{S}(y_{(1)})) = a^*(y_{(2)})\lambda(x\mathcal{S}(y_{(1)})) \\ &= b(x, y_{(1)}a^*(y_{(2)})) = b(x, a^* \rightharpoonup y). \end{aligned}$$

Además, $b(x, y) = \lambda(x\mathcal{S}(y)) = (\mathcal{S}(y) \rightharpoonup \lambda)(x)$. Luego $b(x, y) = 0$ para todo $x \in A$ si y sólo si $\mathcal{S}(y) \rightharpoonup \lambda = 0$. El isomorfismo del teorema anterior implica que $y = 0$ y por lo tanto b es no degenerada a izquierda. Por el Teorema 5.2.13 esto es equivalente a decir que la coálgebra A es co-Frobenius. □

De la observación anterior y los resultados de coálgebras enunciados en la sección anterior obtenemos el siguiente teorema.

TEOREMA 5.2.21 (Lin, Larson, Sweedler, Sullivan). [**DNR**, 5.3.2] *Sea A un álgebra de Hopf. Son equivalentes:*

- ⋆ *A tiene una integral a izquierda no nula.*
- ⋆ *A es una coálgebra co-Frobenius a izquierda.*
- ⋆ *A es una coálgebra cuasi co-Frobenius a izquierda.*
- ⋆ *A es una coálgebra semiperfecta a izquierda.*
- ⋆ *A tiene una integral a derecha no nula.*
- ⋆ *A es una coálgebra co-Frobenius a derecha.*
- ⋆ *A es una coálgebra cuasi co-Frobenius a derecha.*
- ⋆ *A es una coálgebra semiperfecta a derecha.* □

COROLARIO 5.2.22. *Si A es un álgebra de Hopf co-Frobenius y B es una subálgebra de Hopf de A entonces B es co-Frobenius.*

DEMOSTRACIÓN. En efecto si A es co-Frobenius entonces es una coálgebra semiperfecta. Por el Corolario 5.2.10 B también lo es, lo que es equivalente a decir que B es co-Frobenius. □

TEOREMA 5.2.23. [**DNR**, 5.4.2] *Sean A un álgebra de Hopf co-Frobenius y M un A-comódulo a derecha de dimensión finita. Entonces* $\dim(\mathrm{Hom}_{A^*}(A, M)) = \dim(M)$. *En particular* $\dim(\int_r) = \dim(\int_l) = 1$. $\square$

Enunciaremos a continuación una serie de caracterizaciones de las álgebras de Hopf co-Frobenius.

COROLARIO 5.2.24. [**L**, 3 y 10] *Sea A un álgebra de Hopf. Los siguientes son equivalentes:*

- ◇ *A es co-Frobenius.*
- ◇ *$E(S)$ tiene dimensión finita para todo $S \in {}^{A}\mathcal{M}$ simple.*
- ◇ *Todo $V \in {}^{A}\mathcal{M}$ tiene un cubrimiento proyectivo.*
- ◇ $\mathrm{Rat}(A^*) \neq 0$.

Así, si A es co-Frobenius, entonces ${}^{A}\mathcal{M}$ tiene objetos proyectivos no nulos.

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 5.2.21 A es semiperfecta a izquierda y derecha, por lo tanto valen el resto de las afirmaciones, por 5.2.7. Por último, el isomorfismo del Teorema 5.2.19 nos dice que si $\mathrm{Rat}(A^*) \neq 0$ entonces $\int_l \neq 0$ lo que es equivalente a decir que A es co-Frobenius. $\square$

TEOREMA 5.2.25. [**AC**, 2.3 y 2.8] *Sea A un álgebra de Hopf. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- ◇ *A es co-Frobenius.*
- ◇ *Todo A-comódulo no nulo tiene un cociente no nulo de dimensión finita.*
- ◇ *Todo A-comódulo inyectivo no nulo tiene un cociente no nulo de dimensión finita.*
- ◇ *Existe un A-comódulo inyectivo no nulo que tiene un cociente no nulo de dimensión finita.*
- ◇ *${}^{A}\mathcal{M}$ tiene objetos proyectivos no nulos.*
- ◇ *Todo A-comódulo inyectivo es proyectivo.* $\square$

PROPOSICIÓN 5.2.26. [**DN**, 2.3] *Sea A un álgebra de Hopf. Si ${}^{A}\mathcal{M}$ tiene un objeto inyectivo no nulo de dimensión finita entonces A es co-Frobenius.* $\square$

TEOREMA 5.2.27. [**ADa, ACE**] *Un álgebra de Hopf A es co-Frobenius si y solamente si su filtración corradical es finita.* $\square$

En resumen, por los resultados antes mencionados, tenemos el siguiente teorema:

TEOREMA 5.2.28. *Dada A un álgebra de Hopf, son equivalentes:*

(i) A es co-Frobenius.
(ii) $E(S)$ tiene dimensión finita para todo $S \in {}^{A}\mathcal{M}$ simple.

(iii) $E(\mathbf{k})$ *tiene dimensión finita.*
(iv) ${}^{A}\mathcal{M}$ *tiene un objeto inyectivo no nulo de dimensión finita.*
(v) *Todo A-comódulo no nulo tiene un cociente no nulo de dimensión finita.*
(vi) *Todo A-comódulo inyectivo no nulo tiene un cociente no nulo de dimensión finita.*
(vii) *Existe un A-comódulo inyectivo no nulo que tiene un cociente no nulo de dimensión finita.*
(viii) ${}^{A}\mathcal{M}$ *tiene objetos proyectivos no nulos.*
(ix) *Todo* $V \in {}^{A}\mathcal{M}$ *tiene un cubrimiento proyectivo.*
(x) *Todo objeto inyectivo en* ${}^{A}\mathcal{M}$ *es proyectivo.*
(xi) $\mathrm{Rat}(A^*) \neq 0$.
(xii) *La filtración corradical de A es finita.* □

EJEMPLO 5.2.29. Sea A un álgebra de Hopf cosemisimple, ver 1.2.4. Entonces A tiene una integral λ tal que $\lambda(1_A) = 1$, ver por ejemplo [**Sw**, 14.0.3] o [**Ab**, 3.3.2]. En efecto, si A es cosemisimple entonces todo A-comódulo es completamente reducible, en particular A como A-comódulo lo es. Consideramos el morfismo unidad $u : \mathbf{k} \to A$. Como A es completamente reducible, existe un morfismo de comódulos $\lambda : A \to \mathbf{k}$ tal que $\lambda \circ u = \mathrm{id}_{\mathbf{k}}$, luego $\lambda(1_A) = 1$. Como λ es de comódulos, $(\mathrm{id} \otimes \lambda)\Delta = u \circ \lambda$ lo que es equivalente a decir que λ es una integral para A. Notar que $A = \oplus\,(V \otimes V^*)$ donde la suma es sobre todos los A-módulos irreducibles V, entonces $\lambda : A \to \mathbf{k}$ es la proyección sobre la componente trivial de dicha descomposición.

LEMA 5.2.30. [**ADa**, 3.1] *Sean A un álgebra de Hopf y K una subálgebra de Hopf tales que:*

(i) $KA_0 \subseteq A_0$*,*
(ii) *A es un K-módulo finitamente generado.*

Entonces la filtración corradical de A es finita y por lo tanto A es co-Frobenius. □

EJEMPLO 5.2.31. [**ADa**, 3.4] Fijamos $\mathbf{k}$ un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero. Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie simple de dimensión finita de rango θ y G el grupo algebraico simplemente conexo correspondiente. Dado $N \in \mathbb{N}$ impar, $N > 2$ y coprimo con 3 si $\mathfrak{g}$ contiene una componente de tipo G_2, consideramos $q \in \mathbf{k}$ una raíz N-ésima de la unidad.

Sea $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ el álgebra envolvente cuantizada definida por Lusztig. Recordemos la siguiente definición y resultados de [**Lu3**]:

1. Un $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-módulo V se dice de tipo uno si para todo $v \in V$ e $i \in \mathbb{I}$ vale $K_i^N \cdot v = v$.

2. El conjunto de clases de isomorfismo de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-módulos simples de tipo uno de dimensión finita está parametrizado por $\mathbb{Z}^{\theta}_{\geq 0}$. Denotamos por $L(\mu)$, $\mu \in \mathbb{Z}^{\theta}_{\geq 0}$ al módulo de peso máximo μ.
3. Si escribimos $\mu = \mu' + N\mu''$ con $\mu', \mu'' \in \mathbb{Z}^{\theta}_{\geq 0}$ con cada entrada de μ' en el intervalo $[0, N-1]$. Entonces tenemos una descomposición de tipo Steinberg de $L(\mu)$, $L(\mu) \simeq L(\mu') \otimes L(N\mu'')$.
4. El epimorfismo de álgebras de Hopf $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ induce una estructura de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulo en $L(N\mu'')$ tal que resulta ser un módulo simple de peso máximo μ''.

Sea $A = \mathcal{O}_q(G)$ el álgebra de coeficientes matriciales de los módulos de tipo uno. El corradical de A está generado por los coeficientes matriciales de los módulos simples $L(\mu)$, $\mu \in \mathbb{Z}^{\theta}_{\geq 0}$. Sea K la subálgebra generada por los coeficientes matriciales de los módulos simples $L(N\mu'')$, $\mu'' \in \mathbb{Z}^{\theta}_{\geq 0}$, entonces K es una subálgebra de Hopf de A isomorfa al álgebra $\mathcal{O}(G)$ de funciones regulares sobre G. Por [**DL**], K es central y cumple (i). Además, por la descomposición de tipo Steinberg de $L(\mu)$ y por ser $\mathfrak{g}$ semisimple tenemos:

$$\begin{aligned} L(\mu) \otimes L(N\delta) \simeq L(\mu') \otimes L(N\mu'') \otimes L(N\delta) \simeq L(\mu') \otimes (\oplus_j L(N\sigma_j)) \\ \simeq \oplus_j (L(\mu') \otimes L(N\sigma_j)) \simeq \oplus_j L(\mu' + N\sigma_j). \end{aligned}$$

Así, $KA_0 \subseteq A_0$ y por el lema anterior A es co-Frobenius.

Otras dos pruebas diferentes de que $\mathcal{O}_q(G)$ es co-Frobenius pueden hallarse en [**AC**, 2.11] y [**APW**, §9].

5.3. Álgebras de Hopf trenzadas co-Frobenius

A lo largo de esta sección consideraremos H un álgebra de Hopf, $R \in {}^H_H\mathcal{YD}$ un álgebra de Hopf trenzada y $A = R\#H$ el biproducto de R y H.

Definición 5.3.1. Sea R un álgebra de Hopf en ${}^H_H\mathcal{YD}$. Una integral a derecha (resp. izquierda) para R es un elemento $\lambda \in R^*$ tal que $\lambda f = f(1)\lambda$ (resp. $f\lambda = f(1)\lambda$) para todo $f \in R^*$.

Definición 5.3.2. Un álgebra de Hopf trenzada R en ${}^H_H\mathcal{YD}$ se dice co-Frobenius a derecha (resp. izquierda) si posee una integral a derecha (resp. izquierda) no nula.

Definición 5.3.3. Un espacio vectorial V se dice R-módulo de Hopf a derecha si es un R-módulo a derecha con acción $\triangleleft$ y un R-comódulo a derecha con coacción ρ tal que

$$\rho(v \triangleleft r) = v_{(0)} \triangleleft r^{(1)} \otimes v_{(1)} r^{(2)}, \qquad v \in V, r \in R.$$

El siguiente resultado es la versión trenzada del Teorema fundamental de módulos de Hopf:

TEOREMA 5.3.4. [**MS**, 3.1] *Sean H un álgebra de Hopf, R un álgebra de Hopf en ${}^H_H\mathcal{YD}$ y V un R-módulo de Hopf a derecha. Entonces*

$$V^{\operatorname{co} R} \otimes R \to V, \quad v \otimes r \mapsto vr, \qquad v \in V^{\operatorname{co} R},\, r \in R,$$

es biyectivo; donde $V^{\operatorname{co} R} = \{v \in V : \rho(v) = v \otimes 1\}$. □

Los siguientes resultados valen para álgebras de Hopf y sus demostraciones en el caso trenzado son análogas, ver [**GZ**].

TEOREMA 5.3.5. [**GZ**, §2] *Sean H un álgebra de Hopf, R un álgebra de Hopf en ${}^H_H\mathcal{YD}$ y $\int_l$ el espacio de integrales a izquierda de R, entonces $\int_l \otimes R \simeq$ $\operatorname{Rat}(R^*)$.*

DEMOSTRACIÓN. Como $\operatorname{Rat}(R^*)$ es un R^*-módulo racional a izquierda, tiene una estructura de R-comódulo a derecha ρ tal que

$$(\mathrm{id} \otimes \langle\, ,\, \rangle)(c \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \rho) = m;$$

donde $\langle\, ,\, \rangle : R^* \otimes R \to \mathbf{k}$ es la evaluación usual y c la trenza en ${}^H_H\mathcal{YD}$. En efecto, tenemos

$$\begin{aligned}(\mathrm{id} \otimes \langle\, ,\, \rangle \otimes \langle\, ,\, \rangle)(c \otimes c \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes c \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \rho \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \rho)&\\ = m(\mathrm{id} \otimes m) = m(m \otimes \mathrm{id})&\\ = (\mathrm{id} \otimes \langle\, ,\, \rangle \otimes \langle\, ,\, \rangle)(c \otimes c \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes c \otimes \underline{\Delta})(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \rho).&\end{aligned}$$

Esto es $(\rho \otimes \mathrm{id})\rho = (\mathrm{id} \otimes \underline{\Delta})\rho$.

Sea $r^* \in \operatorname{Rat}(R^*)$. Entonces $r^* \in \operatorname{Rat}(R^*)^{\operatorname{co} R}$ si y sólo si $\rho(r^*) = r^* \otimes 1$ lo que es equivalente a $fr^* = f(1)r^*$ para todo $f \in R^*$, es decir r^* es una integral a izquierda. Por lo tanto $\operatorname{Rat}(R^*)^{\operatorname{co} R} = \int_l$.

Además, $\operatorname{Rat}(R^*)$ es un R-módulo a derecha vía la acción $\leftharpoondown$, definida por $\leftharpoondown = \rightharpoondown \circ (\mathcal{S} \otimes \mathrm{id})c$ donde $\langle\, ,\, \rangle \circ (\rightharpoondown \otimes \mathrm{id}) = \langle\, ,\, \rangle \circ (\mathrm{id} \otimes m)(\mathrm{id} \otimes c)(c \otimes \mathrm{id})$. En efecto,

$$\begin{aligned}\langle\, ,\, \rangle(\leftharpoondown \otimes \mathrm{id})(\leftharpoondown \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) &= \langle\, ,\, \rangle(\mathrm{id} \otimes m)(\mathrm{id} \otimes c)(\leftharpoondown \otimes \mathcal{S} \otimes \mathrm{id})\\ &= \langle\, ,\, \rangle(\mathrm{id} \otimes m)(\mathrm{id} \otimes c)(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes m)(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes c)(\mathrm{id} \otimes \mathcal{S} \otimes \mathcal{S} \otimes \mathrm{id})\\ &= \langle\, ,\, \rangle(\mathrm{id} \otimes c)(\mathrm{id} \otimes \mathcal{S} \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id}) = \langle\, ,\, \rangle(\leftharpoondown \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id}).\end{aligned}$$

Veamos que $\leftharpoondown$ y ρ le dan a $\operatorname{Rat}(R^*)$ una estructura de R-módulo de Hopf a derecha. Para ello usaremos que $m(\mathrm{id} \otimes \leftharpoondown)$ es igual a

$$\leftharpoondown (m \otimes \mathrm{id})(\rightharpoondown \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(c \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes c \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes c)(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \underline{\Delta}).$$

Esta identidad se prueba de manera directa y su demostración puede verse en [**GZ**, 1.3]. Así,

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{id}\otimes\langle\,,\,\rangle)(c\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\rho)(1\otimes\leftharpoondown)=m(\mathrm{id}\otimes\leftharpoondown)\\
&=\leftharpoondown(m\otimes\mathrm{id})(\rightharpoondown\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})(c\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes c\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes c)(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\underline{\Delta})\\
&\quad=(\langle\,,\,\rangle\otimes\mathrm{id})(\rightharpoondown\otimes\mathrm{id}\otimes\leftharpoondown)(c\otimes c\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes c\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes c\otimes\mathrm{id})\\
&\qquad\qquad(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes c)(\mathrm{id}\otimes\rho\otimes\underline{\Delta})\\
&\qquad=(\langle\,,\,\rangle\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes m\otimes\leftharpoondown)(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes c\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes c\otimes c)(\mathrm{id}\otimes\rho\otimes\underline{\Delta})\\
&\qquad\quad=(\langle\,,\,\rangle\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes c)(\mathrm{id}\otimes\leftharpoondown\otimes m)(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes c\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\rho\otimes\underline{\Delta}).
\end{aligned}
$$

Esto es, $\rho\circ\leftharpoondown=(\leftharpoondown\otimes m)(\mathrm{id}\otimes c\otimes\mathrm{id})(\rho\otimes\underline{\Delta})$. Por lo tanto $\mathrm{Rat}(R^*)$ es un R-módulo de Hopf.

El teorema sigue por el teorema fundamental de módulos de Hopf aplicado a $\mathrm{Rat}(R^*)$. □

Corolario 5.3.6. *Bajo las hipótesis del teorema anterior,* $\mathrm{Rat}(R^*)\neq 0$ *si y sólo si* $\int_l\neq 0$. □

Observación 5.3.7. Si R es co-Frobenius a izquierda entonces R es co-Frobenius a derecha. En efecto, R es co-Frobenius como coálgebra, la prueba es análoga a la del caso no trenzado ya que podemos definir la forma R^*-balanceada de manera similar a partir de la integral, ver 5.2.20. Además vale el Teorema fundamental de módulos de Hopf. Entonces R es una coálgebra cuasi co-Frobenius a izquierda lo que implica, por la Proposición 5.2.14, que R es semiperfecta a izquierda. Por lo tanto $\mathrm{Rat}(R^*_{R^*})\neq 0$. Por la versión a derecha del corolario anterior (reemplazando R por $R^{op,cop}$), tenemos $\mathrm{Rat}(R^*_{R^*})\neq 0$ si y sólo si $\int_r\neq 0$ lo que es equivalente a decir que R es co-Frobenius a derecha.

Proposición 5.3.8. *Dadas H y R como antes. La bosonización $A=R\#H$ es co-Frobenius si y sólo si H y R son co-Frobenius.*

Demostración. Supongamos que R y H son co-Frobenius. Sea $\lambda_R\neq 0$ una integral a derecha no nula para R y $\lambda_H\neq 0$ una integral a derecha no nula para H. Luego, por [**Ra**, Prop. 4] $\lambda=\lambda_R\#\lambda_H$ es una integral a derecha no nula para A y A es co-Frobenius. En efecto, escribimos

$$
\begin{aligned}
f:&A\to A, && f(r\#h)=r\#\lambda_H(h)1_H;\\
\rho:&R\to A, && \rho(r)=r^{(0)}\#r^{(-1)}.
\end{aligned}
$$

Entonces, si $r \in R$, $h \in H$,

$$\begin{aligned}
\lambda((r\#h)_{(1)})(r\#h)_{(2)} &= \lambda(r^{(1)}\#(r^{(2)})^{(-1)}h_{(1)})\,(r^{(2)})^{(0)}\#h_{(2)} \\
&= \lambda_R(r^{(1)})\lambda_H((r^{(2)})^{(-1)}h_{(1)})\,((r^{(2)})^{(0)}\#1_H)(1_R\#h_{(2)}) \\
&= f(\lambda_R(r^{(1)})(r^{(2)})^{(0)}\#(r^{(2)})^{(-1)}h_{(1)})\,1_R\#h_{(2)} \\
&= f((\lambda_R(r^{(1)})(r^{(2)})^{(0)}\#(r^{(2)})^{(-1)})(1_R\#h_{(1)})\,1_R\#h_{(2)} \\
&= \lambda_R(r)f(1\#h_{(1)})\,1_R\#h_{(2)} = \lambda_R(r)\lambda_H(h_{(1)})\,1_R\#h_{(2)} \\
&= \lambda_R(r)1_R\#\lambda_H(h)1_H = \lambda(r\#h)1_A
\end{aligned}$$

pues

$$\lambda_R(r)1_R\#1_H = \rho(\lambda_R(r)1_R) = \rho(\lambda_R(r^{(1)})r^{(2)}) = \lambda_R(r^{(1)})(r^{(2)})^{(0)}\#(r^{(2)})^{(-1)}.$$

Recíprocamente, si A es co-Frobenius, entonces H también lo es por ser subálgebra de Hopf de A, ver 5.2.22. Sea λ una integral a izquierda no nula para A, fijamos un elemento $r\#h \in A$ tal que $\lambda(r\#h) \neq 0$ y definimos $\lambda_R(s) = \lambda(s\#h)$ para todo $s \in R$. Así, λ_R es una integral no nula para R. En efecto, $\lambda_R(r) \neq 0$ pues $\lambda(r\#h) \neq 0$ y es integral dado que, si $\psi : A \to R$, $\psi(s\#k) = \varepsilon(k)s$, entonces para todo $s \in R$ tenemos

$$\begin{aligned}
\lambda_R(s)1_R = \psi \circ \iota(\lambda_R(s)1_R) &= \psi(\lambda(s\#h)1_A) = \psi((s\#h)_{(1)}\lambda((s\#h)_{(2)})) \\
&= \psi(s_{(1)}\#(s_{(2)})^{(-1)}h_{(1)})\lambda((s_{(2)})^{(0)}\#h_{(2)}) \\
&= \varepsilon((s_{(2)})^{(-1)}h_{(1)})\,s_{(1)}\lambda((s_{(2)})^{(0)}\#h_{(2)}) = s_{(1)}\lambda(s_{(2)}\#h) = s_{(1)}\lambda_R(s_{(2)}).
\end{aligned}$$

□

Nuestro objetivo es probar una versión del Teorema 5.2.28 para el álgebra de Hopf trenzada R. Los siguientes dos teoremas nos dan caracterizaciones para álgebras de Hopf co-Frobenius en la categoría ${}^H_H\mathcal{YD}$.

TEOREMA 5.3.9. *Dadas un álgebra de Hopf H y R un álgebra de Hopf en ${}^H_H\mathcal{YD}$; las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) R es co-Frobenius.
(ii) $E(S)$ tiene dimensión finita para todo $S \in {}^R\mathcal{M}$ simple.
(iii) Todo objeto no nulo en ${}^R\mathcal{M}$ tiene un cociente no nulo de dimensión finita.
(iv) Todo objeto inyectivo no nulo en ${}^R\mathcal{M}$ tiene un cociente no nulo de dimensión finita.
(v) Existe un objeto inyectivo no nulo en ${}^R\mathcal{M}$ que tiene un cociente no nulo de dimensión finita.
(vi) Todo $V \in {}^R\mathcal{M}$ tiene un cubrimiento proyectivo.
(vii) Todo objeto inyectivo en ${}^R\mathcal{M}$ es proyectivo.

(viii) $\mathrm{Rat}(R^*) \neq 0$.

DEMOSTRACIÓN. La equivalencia $(i) \Leftrightarrow (viii)$ sigue del Corolario 5.3.6. Como hemos observado en 5.3.7 si R es co-Frobenius lo es también como coálgebra, por lo tanto es cuasi co-Frobenius y semiperfecta como coálgebra y $\mathrm{Rat}(R^*) \neq 0$, por la Proposición 5.2.14. Por el Teorema 5.2.7 tenemos que R semiperfecta es equivalente a (ii) y (vi) e implica $(viii)$. Así $(i) \Rightarrow (ii) \Leftrightarrow (vi) \Rightarrow (viii)$. Además, por 5.2.12, R es una coálgebra quasi-co-Frobenius si y sólo si vale (vii) y por lo tanto $(i) \Rightarrow (vii)$. Además, la Proposición 5.2.14 nos dice que $(vii) \Rightarrow (viii)$. Por último $(ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (v) \Rightarrow (viii)$ por [**AC**, 2.3], cf. 5.2.25. $\square$

En este resultado faltan algunas de las equivalencias del Teorema 5.2.28; las cuales esperamos poder probar más adelante.

El Teorema anterior admite un refinamiento si consideramos una hipótesis extra sobre H:

TEOREMA 5.3.10. *Sean H un álgebra de Hopf* ***co-Frobenius*** *y R un álgebra de Hopf en ${}^H_H\mathcal{YD}$. Son equivalentes:*

(i) R es co-Frobenius.
(ii) $E(S)$ tiene dimensión finita para todo $S \in {}^R\underline{\mathcal{M}}$ simple.
(iii) $E(\mathbf{k})$ tiene dimensión finita.
(iv) ${}^R\underline{\mathcal{M}}$ tiene un objeto inyectivo no nulo de dimensión finita.
(v) Todo objeto no nulo en ${}^R\underline{\mathcal{M}}$ tiene un cociente no nulo de dimensión finita.
(vi) Todo objeto inyectivo no nulo en ${}^R\underline{\mathcal{M}}$ tiene un cociente no nulo de dimensión finita.
(vii) Existe un objeto inyectivo no nulo en ${}^R\underline{\mathcal{M}}$ que tiene un cociente no nulo de dimensión finita.
(viii) ${}^R\underline{\mathcal{M}}$ tiene objetos proyectivos no nulos.
(ix) Todo $V \in {}^R\underline{\mathcal{M}}$ tiene un cubrimiento proyectivo.
(x) Todo objeto inyectivo en ${}^R\underline{\mathcal{M}}$ es proyectivo.
(xi) $\mathrm{Rat}(R^*) \neq 0$.

DEMOSTRACIÓN. El álgebra de Hopf trenzada R es co-Frobenius si y sólo si $A = R\#H$ es co-Frobenius por la Proposición 5.3.8. Además, por el Teorema 5.2.28 y la equivalencia de categorías dada en la Proposición 5.1.3 (notando que dicha equivalencia respeta dimensiones, objetos inyectivos y proyectivos, cápsulas inyectivas y cubrimientos proyectivos) los puntos $(i) - (x)$ son equivalentes. Finalmente $(i) \Leftrightarrow (xi)$ por el Corolario 5.3.6. $\square$

PREGUNTA 5.3.11. *Si H es un álgebra de Hopf co-Frobenius y R un álgebra de Hopf en ${}^H_H\mathcal{YD}$. ¿Cuál es la relación entre ${}^R\mathcal{M}$ y ${}^R\underline{\mathcal{M}}$?*

5.3.1. Filtración corradical finita. Finalmente, se debe considerar la siguiente pregunta: *¿R es co-Frobenius si y sólo si su filtración corradical es finita?*

Una de las implicaciones es directa por el siguiente teorema:

TEOREMA 5.3.12. [**ADa**, 1.2] *Sea C una coálgebra tal que su filtración corradical es finita. Entonces* $\mathrm{Rat}(C^*) \neq 0$. □

COROLARIO 5.3.13. *Sea H un álgebra de Hopf y R un álgebra de Hopf en ${}^H_H\mathcal{YD}$. Si la filtración corradical de R es finita, entonces R co-Frobenius.*

DEMOSTRACIÓN. Si la filtración corradical de la coálgebra R es finita, por el Teorema 5.3.12 tenemos que $\mathrm{Rat}(R^*) \neq 0$. Luego, por el Corolario 5.3.6, R tiene una integral no nula y por lo tanto es co-Frobenius. □

La otra implicación, es decir: "Si R es co-Frobenius entonces tiene filtración corradical finita" no la hemos podido demostrar aún. Nos parece importante destacar que en el caso no trenzado dicho enunciado fue conjeturado por Andruskiewitsch y Dascalescu en 2003 [**ADa**]. En ese artículo, como hemos mencionado, se prueba la recíproca. Sin embargo esta conjetura fue probada 12 años después por Andruskiewitsch, Cuadra y Etingof en [**ACE**].

Bibliografía

[Ab] E. Abe, *Hopf algebras*, Cambridge Univ. Press. 1977.

[APW] H. Andersen, P. Polo, K. Wen, *Representations of quantum algebras*, Invent. Math. **104** (1991), 1–59.

[A1] N. Andruskiewitsch. *Notes on extensions of Hopf algebras*, Canadian J. of Math. **48** (1996), 3–42.

[A2] N. Andruskiewitsch. *About finite dimensional Hopf algebras*, Notes of a course given at the CIMPA School Quantum Symmetries in theoretical physics and mathematics Bariloche 2000. Contemp. Math. **294** (2002), 1–57.

[AA1] N. Andruskiewitsch, I. Angiono. *On Nichols algebras with generic braiding*, in "Modules and Comodules". Trends in Mathematics (2008), 47–64.

[AA2] ______. *Generalized root systems, contragredient Lie superalgebras and Nichols algebras*, en preparación.

[AAB] N. Andruskiewitsch, I. Angiono, D. Bagio. *Examples of pointed color Hopf algebras*, J. Alg. Appl. **13** (2014), 28 p.

[AAGMV] N. Andruskiewitsch, I. Angiono, A. García Iglesias, A. Masuoka, C. Vay. *Lifting via cocycle deformation*, J. Pure Appl. Alg. **218** (2014), 684–703.

[AAGTV] N. Andruskiewitsch, I. Angiono, A. García Iglesias, B. Torrecillas, C. Vay. *From Hopf algebras to tensor categories*, Conformal field theories and tensor categories, Mathematical Lectures from Peking University. Bai, C. et al, eds. Springer (2014), 1–32.

[AAR1] N. Andruskiewitsch, I. Angiono, F. Rossi Bertone. *The quantum divided power algebra of a finite-dimensional Nichols algebra of diagonal type*, Math. Res. Lett., en prensa. `arXiv:1501.04518`.

[AAR2] ______. *A finite-dimensional Lie algebra arising from a Nichols algebra of diagonal type (rank 2)*, `arxiv.org/abs/1603.09387`.

[AAY] N. Andruskiewitsch, I. Angiono, H. Yamane. *On pointed Hopf superalgebras*, Contemp. Math. **544** (2011), 123–140.

[AC] N. Andruskiewitsch, J. Cuadra. *On the structure of (co-Frobenius) Hopf algebras*, J. Noncommut. Geom. **7** (2013), 83–104.

[ACE] N. Andruskiewitsch, J. Cuadra, P. Etingof. *On two finitness conditions for Hopf algebras with nonzero integral*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci. (5) XIV (2015), 1–40.

[ADa] N. Andruskiewitsch, S. Dascalescu. *Co-Frobenius Hopf algebras and the coradical filtration*, Math. Z. **243** (2003), 145–154.

[AD] N. Andruskiewitsch, J. Devoto. *Extensions of Hopf algebras*, St. Petersburg Math. J. **7** (1996), 17–52.

[AF] N. Andruskiewitsch, W. Ferrer Santos. *The beginnings of the theory of Hopf algebras*, Acta Appl. Math. **108** (2009), 3–17.

[AG] N. Andruskiewitsch, M. Graña. *Braided Hopf algebras over non-abelian finite groups*, Bol. Acad. Nac. Cienc. (Córdoba) **63** (1999), 45–78.

[AM] N. Andruskiewitsch, M. Mombelli. *On module categories over finite-dimensional Hopf algebras*, J. Algebra **314** (2007), 383–418.

[AN] N. Andruskiewitsch, S. Natale. *Braided Hopf algebras arising from matched pairs of groups*, J. Pure Appl. Alg. **182** (2003), 119–149.

[AR] N. Andruskiewitsch, F. Rossi Bertone. *On braided co-Frobenius Hopf algebras*, en preparación.

[AS1] N. Andruskiewitsch, H.-J. Schneider. *Pointed Hopf algebras*, New directions in Hopf algebras, MSRI series, Cambridge Univ. Press (2002), 1–68.

[AS2] ——— *Finite quantum groups and Cartan matrices*, Adv. Math. **154** (2002), 1–45.

[Ang1] I. Angiono. *On Nichols algebras with standard braiding*, Alg. and Number Theory **1** (2009), 35–106.

[Ang2] ——— *On Nichols algebras of diagonal type*, J. Reine Angew. Math. **683** (2013), 189–251.

[Ang3] ——— *Nichols algebras of unidentified diagonal type*, Comm. Alg **41** (2013), 4667–4693.

[Ang4] ——— *A presentation by generators and relations of Nichols algebras of diagonal type and convex orders on root systems*, J. Europ. Math. Soc. **17** (2015), 2643–2671.

[Ang5] ——— *Distinguished pre-Nichols algebras*, Transf. Groups **21** (2016), 1–33.

[AY] I. Angiono, H. Yamane. *The R-matrix of quantum doubles of Nichols algebras of diagonal type*, J. Math. Phys. **56** (2015), 1–19.

[BaW1] J. W. Barrett, B. W. Westbury. *Spherical Categories*, Adv. Math. **143** (1999), 357–375.

[BaW2] ——— *Invariants of piecewise-linear 3-manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), 3997–4022.

[BD] Y. Bespalov, B. Drabant. *Cross Product Bialgebras Part II*, J. Algebra **240** (2001), 445–504.

[Ca] P. Cartier. *Hyperalgèbres et groupes de Lie formels*, Séminaire "Sophus Lie" 2e année: 1955/56, 1957.

[CH] M. Cuntz, I. Heckenberger. *Weyl groupoids with at most three objects*, J. Pure Appl. Algebra **213** (2009), 1112–1128.

[DN] S. Dascalescu, C. Nastasescu. *Coactions on spaces of morphisms*, Algebr. Represent. Theory **12** (2009), 193–198.

[DNR] S. Dascalescu, C. Nastasescu, S. Raianu. *Hopf algebras: an introduction*, Pure and Applied Mathematics **235**, Marcel Dekker, New York, 2001.

[DK] C. De Concini, V. Kac. *Representations of quantum groups at roots of* 1, Operator algebras, unitary representations, enveloping algebras, and invariant theory (Paris, 1989), Progr. Math., **92** (1990), Birkhauser, Boston, 471–506.

[DKP] C. De Concini, V. Kac, C. Procesi. *Quantum coadjoint action*, J. Am. Math. Soc. **5** (1992), 151–189.

[DL] C. De Concini, V. Lyubashenko. *Quantum function algebra at roots of 1*, Adv. Math. **108** (1994), 205–262.

[DP] C. De Concini, C. Procesi. *Quantum groups*, D-modules, representation theory, and quantum groups, 31–140, Lecture Notes in Math. **1565**, Springer, 1993.

[Dr] V. G. Drinfeld. *Quantum groups*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, (Berkeley, Calif., 1986), 798–820, Amer. Math. Soc., 1987.

[EGNO] P. Etingof, S. Gelaki, D. Nikshych,V. Ostrik. *Tensor categories*, Lectures notes of the MIT course “Tensor categories” by P. Etingof, `http://www-math.mit.edu/etingof/tenscat.pdf`

[GK] S. Gelfand, D. Kazhdan. *Examples of tensor categories*, Invent. Math. **109** (1992), 595–617.

[GG] J. Guccione, J. Guccione. *Theory of braided Hopf crossed products*, J. Algebra **261** (2003), 54–101.

[GZ] X. Guo, S. Zhang. *Integrals of braided Hopf algebras*, J. Math. Res. Exposition **26** (2006), 3–17.

[H1] I. Heckenberger. *The Weyl groupoid of a Nichols algebra of diagonal type*, Invent. Math. **164** (2006), 175–188.

[H2] ______ *Classification of arithmetic root systems*, Adv. Math. **220** (2009), 59–124.

[H3] ______ *Lusztig isomorphisms for Drinfel'd doubles of bosonizations of Nichols algebras of diagonal type*, J. Algebra **323** (2010), 2130–2180.

[HY] ______ *Drinfel'd doubles and Shapovalov determinants*, Rev. Un. Mat. Argentina **51** (2010), 107–146.

[J] M. Jimbo. *A q-difference analogue of* $U(\mathfrak{g})$ *and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **10** (1985), 63–69.

[Jo] A. Joseph. *Quantum groups and their primitive ideals*, Springer-Verlag, 1995.

[Kh] V. Kharchenko. *A quantum analogue of the Poincaré-Birkhoff-Witt theorem*, Algebra and Logic **38** (1999), 259–276.

[Kn] K. Knop. *Tensor envelopes of regular categories*, Adv. Math. **214** (2007), 571–617.

[KL] G. Krause, T. Lenagan. *Growth of algebras and Gelfand-Kirillov dimension*, Revised edition. Graduate Studies in Mathematics **22**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[L] B. I-Peng Lin. *Semiperfect coalgebras*, J. Algebra **49** (1977), 357–373.

[Lu1] G. Lusztig. *Quantum groups at roots of* 1, Geom. Dedicata **35** (1990), 89–113.

[Lu2] ______ *Finite dimensional Hopf algebras arising from quantized universal enveloping algebras*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 257–296.

[Lu3] ______ *Modular representations and quantum groups.*, Contemp. Math. **82** (1989), 59–77.

[Lu4] ______ *Introduction to quantum groups*, Birkhäuser, 1993.

[Ma] S. Majid. *Crossed products by braided groups and bosonization*, J. Algebra **163** (1994), 165–190.

[M] A. Masuoka. *Abelian and non-abelian second cohomologies of quantized enveloping algebras*, J. Algebra **320** (2008), 1–47.

[MS] A. Milinski, H. Schneider. *Pointed indecomposable Hopf algebras over Coxeter groups*, en New trends in Hopf algebra theory (La Falda, 1999), volume **267** of Contemp. Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, 215–236.

[Mo] S. Montgomery. *Hopf algebras and their actions on rings*, CBMS Regional Conference Series in Math. **82** (1993).

[Ra] D. Radford. *The structure of Hopf algebras with a projection*, J. Algebra **92** (1985), 322–347

[RT1] N. Y. Reshetikhin, V. G. Turaev. *Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups*, Comm. Math. Phys. **127** (1990), 1–26.

[RT2] ______ N. Y. Reshetikhin, V. G. Turaev. *Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups*, Invent. Math. **103** (1991), 547–597.

[Ro] M. Rosso. *Quantum groups and quantum shuffles*, Inv. Math. **133** (1998), 399–416.

[Sch] H. Schneider. *Normal basis and transitivity of crossed products for Hopf algebras*, J. Algebra **152** (1992), 289–312.

[Sw] M. Sweedler. *Hopf algebras*, Benjamin, New York, 1969.

[T] M. Takeuchi. *Survey of braided Hopf algebras*, Contemp. Math. **267** (2000), 301–323.

[U] S. Ufer. *PBW bases for a class of braided Hopf algebras*, J. Algebra **280** (2004), 84–119.