Teorema del Peso Máximo

Autor: Leandro Ginés Egea
Director: Dr. Aroldo Kaplan
28 de Septiembre de 2010

Resumen

Este trabajo es sobre la clasificación, módulo equivalencia, de las representaciones irreducibles de dimensión finita de álgebras de Lie complejas semisimples de dimensión finita. El Teorema del Peso Máximo describe a las clases de equivalencia como un octante (pesos dominantes) de un reticulado (pesos enteros), en el dual de una subálgebra de Cartan del álgebra de Lie. De este teorema, también se deduce la clasificación de todas las representaciones irreducibles de grupos de Lie compactos.

Códigos

Tema Primario
22E60 *Lie algebras of Lie Groups*

Tema Secundario
17B10 *Representations, algebraic theory (weights)*

Palabras Claves

Álgebras de Lie semisimples, representaciones, peso máximo, grupos de Lie compactos
Semisimple Lie algebras, representations, highest weight, compact Lie group

Índice general

Introducción

La clasificación de las representaciones lineales de grupos, álgebras y otras estructuras, módulo equivalencia, es un problema fundamental en matemáticas. Si bien las nociones de "representación" y "equivalencia" dependen del contexto, el objetivo es siempre el mismo: parametrizar un subconjunto distinguido de representaciones "básicas" (irreducibles, por ejemplo) de la manera más simple posible —mediante números, n-tuplas de números, matrices, etc.— y especificar cómo una representación "arbitraria" se construye a partir de las básicas.

El problema es casi siempre difícil, sino imposible, de resolver completamente. Aquí presentamos dos casos en los cuales esto sí es posible: los grupos de Lie compactos, conexos y semisimples, representados en espacios complejos; y las representaciones complejas de dimensión finita de álgebras de Lie semisimples complejas.

Brevemente, toda tal representación resulta equivalente a una suma directa de representaciones irreducibles, y éstas se parametrizan por medio del "hiperoctante positivo" Λ en un reticulado (de pesos) en el dual de una subálgebra de Cartan. Esta afirmación se hace precisa en el Teorema del Peso Máximo. El resultado para grupos de Lie compactos se obtiene aplicando el anterior a la complexificación de las álgebras de Lie correspondientes.

El enunciado del Teorema requiere una descripción de la estructura de las álgebras de Lie complejas semisimples, que tratamos en el Capítulo 3. Ésta se basa en el estudio de una representación especial, la adjunta, que permite ver al álgebra dada como una combinación de copias de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ (descomposición raíz). Una vez conocidas las representaciones irreducibles de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, que describimos en el Capítulo 2, el Teorema se deduce a partir de la estructura definida por la descomposición raíz en el álgebra envolvente del álgebra dada (Capítulo 4). El pasaje a grupos de Lie compactos conexos se efectúa complexificando sus álgebras de Lie; la subálgebra de Cartan es la complexificacion del álgebra de Lie de un toro maximal del grupo; y las representaciones irreducibles del grupo resultan ser parametrizadas por un sub-hiperoctante positivo del Λ asociado al álgebra de Lie complexificada (Capítulo 5).

En el Capítulo 6 mostramos cómo funciona el Teorema en tres ejemplos. El primero es el álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$, el más simple después del de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, ya tratado. El segundo es el grupo $\mathrm{SU}(2)$; por ser simplemente conexo, sus representaciones irreducibles se corresponden biunívocamente con las de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) = \mathbb{C}\otimes\mathfrak{su}(2)$, y resultan parametrizadas por los enteros positivos. El tercero es el grupo $\mathrm{SO}(3) = \mathrm{SU}(2)/\mathbb{Z}_2$ que ilustra el caso no simplemente conexo; sus representaciones irreducibles son las de $\mathrm{SU}(2)$ correspondientes a enteros pares.

Este trabajo combina principalmente los tratamientos del tema por parte de Knapp [5], Kirillov [4] y Humphreys [3], tratando de minimizar el material necesario. Por ejemplo, y en contra de lo que se podría suponer de la lectura de estos y otros textos, vemos que los resultados principales no dependen ni de propiedades finas de la matriz de Cartan o de la topología de grupos de Lie, ni (esencialmente) de los teoremas de conjugación .

Capítulo 1

Generalidades sobre las álgebras de Lie y sus representaciones

En este primer capítulo recordaremos definiciones y resultados generales sobre las álgebras de Lie y sus representaciones. Consideraremos álgebras de Lie de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$.

Definición 1.1.

1. Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es *simple* si es no abeliana y no tiene ideales propios no nulos.
2. Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es *semisimple* si no tiene ideales propios solubles no nulos.

Proposición 1.2.

1. *Si* $\mathfrak{g}$ *es simple entonces* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.
2. *Si* $\mathfrak{g}$ *es simple entonces es semisimple.*
3. $\mathfrak{g}/rad\ \mathfrak{g}$ *es semisimple para toda álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$*, donde rad* $\mathfrak{g}$ *es el ideal soluble maximal.*

Definición 1.3.

(a) Una *representación* de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V es un homomorfismo de álgebras de Lie $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(V)$.

(b) Dado $x \in \mathfrak{g}$, definimos $\mathrm{ad}\, x : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ por $\mathrm{ad}\, x(y) = [x, y]$. Llamamos *representación adjunta* de $\mathfrak{g}$ al homomorfismo de álgebras de Lie ad: $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathfrak{g})$, dado por $x \longrightarrow \mathrm{ad}\, x$.

Definición 1.4. Si φ y φ' son dos representaciones de $\mathfrak{g}$ sobre V y V', respectivamente, decimos que φ y φ' son *equivalentes* si existe $L : V \longrightarrow V'$ isomorfismo tal que $L \circ \varphi = \varphi'$.

Definición 1.5. Sea $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K}$ dada por $B(x, y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, x\ \mathrm{ad}\, y)$. B se denomina *forma de Killing* de $\mathfrak{g}$. B satisface:

- $B(x, y) = B(y, x)$, es decir, B es simétrica.
- $B([x, y], z) = B(y, [x, z])$, es decir, B es invariante respecto de la adjunta.

Teorema 1.6 (Criterio de Cartan). *$\mathfrak{g}$ es semisimple $\Longleftrightarrow$ la forma de Killing de $\mathfrak{g}$ es no degenerada.*

Teorema 1.7. *$\mathfrak{g}$ es semisimple $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_r$ con $\mathfrak{g}_i$ ideales simples. En este caso, la descomposición es única y los únicos ideales de $\mathfrak{g}$ son sumas de $\mathfrak{g}_i$'s.*

Corolario 1.8.

1. *$\mathfrak{g}$ semisimple $\Longrightarrow [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.*
2. *Si $\mathfrak{g}$ semisimple, $\mathfrak{a}$ un ideal en $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{a}^\perp$ su complemento respecto de la forma de Killing, entonces $\mathfrak{a}^\perp$ es un ideal y $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$.*
3. *Todo ideal, cociente y suma de semisimples es semisimple.*

Definición 1.9.

(a) Una *derivación* D de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es una aplicación lineal $D : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ que satisface $D([x, y]) = [D(x), y] + [x, D(y)]$. Denotamos por $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ a las derivaciones de $\mathfrak{g}$.

(b) Una derivación D de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se denomina *interna* si $D = \mathrm{ad}\, x$ para algún $x \in \mathfrak{g}$.

Teorema 1.10. *Si $\mathfrak{g}$ semisimple entonces toda derivación de $\mathfrak{g}$ es interna.*

Corolario 1.11. *Si $\mathfrak{g}$ es semisimple entonces ad: $\mathfrak{g} \longrightarrow$ Der$(\mathfrak{g})$ es un isomorfismo de álgebras de Lie.*

Definición 1.12. Sea $\mathfrak{g}$ semisimple, $x \in \mathfrak{g}$. Entonces

- x es *nilpotente* si $\mathrm{ad}\, x$ es nilpotente.
- x es *semisimple* si $\mathrm{ad}\, x$ es semisimple, es decir, si $\mathrm{ad}\, x$ diagonaliza en una extensión algebraicamente cerrada de $\mathbb{K}$.

Teorema 1.13 (Descomposición de Jordan-Chevalley). *Si $\mathfrak{g}$ es semisimple entonces todo elemento $x \in \mathfrak{g}$ se puede escribir de manera única como $x = s + n$ con n nilpotente, s semisimple y $[s, n] = 0$. Más aún, todo elemento $y \in \mathfrak{g}$ que conmuta con x también conmuta con s y n.*

Teorema 1.14. *Sea* $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ *una representación de un álgebra de Lie semisimple. Si* x *es nilpotente (resp. semisimple) entonces* $\varphi(x)$ *también.*

Definición 1.15. Sea $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ una representación de $\mathfrak{g}$

- $U \subset V$ se dice *invariante* por φ si $\varphi(\mathfrak{g})(U) \subseteq U$.
- La representación se llama *irreducible* si $V \neq 0$ y los únicos subespacios invariantes son 0 y V.
- φ se dice *completamente reducible* si es suma directa de representaciones irreducibles, es decir, $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_j$ con U_i subespacios invariantes y $\varphi|_{U_i}$ irreducible.

Proposición 1.16. *Si* $\varphi_i : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(V_i),\ i = 1, 2$ *son representaciones irreducibles de un álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$*, entonces* $\varphi_1 \oplus \varphi_2$ *es una representación irreducible de* $\mathfrak{g}$ *sobre el espacio vectorial* $V_1 \oplus V_2$*.*

Proposición 1.17 (Lema de Schur). *Supongamos que* φ *y* φ' *son dos representaciones irreducibles de* $\mathfrak{g}$*, sobre* V *y* V'*, respectivamente. Si* $L : V \longrightarrow V'$ *es una transformación lineal tal que* $\varphi'(x)L = L(\varphi(x))$ *para todo* $x \in \mathfrak{g}$*, entonces* L *es una biyección o* $L = 0$*.*

Demostración. Sea $v \in \mathrm{Ker}(L)$. Luego $L(\varphi(x))v = \varphi'(x)(L(v)) = 0\ \forall\ x \in \mathfrak{g}$. Luego, $\mathrm{Ker}(L)$ es un subespacio invariante de V. De manera análoga se demuestra que $\mathrm{Im}(L)$ es un subespacio invariante de V'. Como las representaciones son irreducibles, se tiene que L es inyectiva y sobre, ó $L = 0$. □

Corolario 1.18. *Sea* φ *una representación irreducible de* $\mathfrak{g}$ *sobre un espacio vectorial complejo* V *de dimensión finita. Si* $L : V \longrightarrow V$ *es una transformación lineal tal que* $\varphi(x)L = L\varphi(x)\ \forall\ x \in \mathfrak{g}$*, entonces* L *es un múltiplo de la identidad.*

Demostración. Sea λ un autovalor de L. Entonces $L - \lambda I$ no es inyectiva ni sobre, pero conmuta con $\varphi(x)\ \forall\ x \in \mathfrak{g}$. Por el lema de Schur, $L = \lambda I$. □

Teorema 1.19 (Teorema de Weyl). *Toda representación compleja de dimensión finita de un álgebra de Lie semisimple compleja* $\mathfrak{g}$ *es completamente reducible.*

Si bien es posible dar una demostración puramente algebraica de este resultado, es mucho más simple deducirlo de un resultado análogo para grupos de Lie compactos, el cual demostramos en el Capítulo 5.

Capítulo 2

Representaciones de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

En esta capítulo estudiaremos las representaciones del álgebra de Lie

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \{x \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}) : \operatorname{tr}(x) = 0\}.$$

Es un álgebra de Lie simple (por lo tanto semisimple) de dimensión 3. El estudio de esta álgebra y sus representaciones de dimensión finita nos brindará herramientas para analizar y estudiar las álgebras de Lie semisimples generales.

Sean e, f, h los elementos de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ definidos por

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

El conjunto $\{e, f, h\}$ es una base de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ que satisface

$$[e, f] = h, \qquad [h, e] = 2e, \qquad [h, f] = -2f.$$

Observemos que $\operatorname{ad} h$ tiene tres autovalores: -2, 0, 2. Por lo tanto, h es un elemento semisimple de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

Sea $\varphi : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \operatorname{End}(V)$ una representación de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ sobre un espacio vectorial complejo V de dimensión finita. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Sea $V(\lambda)$ el autoespacio de $\varphi(h)$ asociado al autovalor λ. Es decir

$$V(\lambda) = \{v \in V : \varphi(h)v = \lambda v\}.$$

Lema 2.1. *Sea* $\varphi : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \operatorname{End}(V)$ *una representación de* $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$*. Entonces:*

- $\varphi(e)(V(\lambda)) \subset V(\lambda + 2)$.
- $\varphi(f)(V(\lambda)) \subset V(\lambda - 2)$.

Demostración. Sea $v \in V(\lambda)$. Entonces

$$\varphi(h)(\varphi(e)v) = \varphi[h, e]v + \varphi(e)(\varphi(h)v) = 2\varphi(e)v + \lambda\varphi(e)v = (2 + \lambda)\varphi(e)v.$$

Luego, $\varphi(e)v \in V(\lambda + 2)$. La demostración para $\varphi(f)$ es similar. $\square$

Teorema 2.2. *Toda representación de dimensión finita de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ sobre un espacio vectorial complejo V se puede escribir de la forma*

$$V = \bigoplus_{\lambda} V(\lambda).$$

Demostración. Como toda representación de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ es completamente reducible, basta probar este resultado para representaciones irreducibles. Sea φ una representación irreducible de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ sobre V. Sea $V^{'} = \sum_{\lambda} V(\lambda)$ el espacio vectorial generado por los vectores propios de $\varphi(h)$. Sabemos que autovectores correspondientes a distintos autovalores son linealmente independiente, por la tanto, $V^{'} = \bigoplus_{\lambda} V(\lambda)$. Por el lema anterior, $V^{'}$ es invariante por la acción de $\varphi(e), \varphi(f)$ y $\varphi(h)$. Luego $V^{'}$ es un subespacio invariante por φ. Como la representación es irreducible y $V^{'} \neq 0$ ($\varphi(h)$ tiene al menos un autovector) entonces $V^{'} = V$. □

El resultado principal de esta capítulo es la clasificación de las representaciones irreducibles de dimensión finita de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Por el resto de la sección, φ denotará una tal representación de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ sobre un espacio vectorial complejo V.

Sea λ un autovalor de $\varphi(h)$ que es maximal en el siguiente sentido:

$$\text{Re } \lambda \geq \text{Re } \lambda^{'} \quad \text{para todo autovalor } \lambda^{'} \text{ de } \varphi(h).$$

Como las representaciones son de dimensión finita y h es semisimple, siempre existe este λ.

Lema 2.3. *Sea $v \in V(\lambda)$ con λ autovalor máximo de $\varphi(h)$. Entonces*

1. *$\varphi(e)v = 0$.*
2. *Si definimos*
$$v_k = \frac{1}{k!}(\varphi(f))^k v, \quad \textit{para } k \geq 0,$$
entonces:
$$\begin{aligned} \varphi(h)v_k &= (\lambda - 2k)v_k \\ \varphi(f)v_k &= (k+1)v_{k+1} \\ \varphi(e)v_k &= (\lambda - k + 1)v_{k-1} \qquad k > 0. \end{aligned}$$

Demostración. Sabemos que $\varphi(e)v \in V(\lambda + 2)$. Como λ es el autovalor máximo de $\varphi(h)$, entonces $V(\lambda + 2) = 0$. Esto prueba la primera parte.

Para probar la segunda parte, notar que la expresión para la acción de $\varphi(f)$ es inmediata por la definición de v_k, y la expresión de la acción de $\varphi(h)$ sigue del lema anterior. Por lo tanto, solo necesitamos demostrar la expresión para $\varphi(e)$.

Haremos inducción en k. Para $k = 1$, tenemos

$$\varphi(e)v_1 = \varphi(e)\varphi(f)v = \varphi[e,f]v + \varphi(f)\varphi(e)v = \varphi(h)v = \lambda v.$$

Supongamos que vale para k

$$\begin{aligned}
\varphi(e)v_{k+1} &= \frac{1}{k+1}\varphi(e)\varphi(f)v_{k+1} \\
&= \frac{1}{k+1}(\varphi(h)v_k + \varphi(f)\varphi(e)v_k) \\
&= \frac{1}{k+1}((\lambda - 2k)v_k + (\lambda - k + 1)\varphi(f)v_{k-1}) \\
&= \frac{1}{k+1}(\lambda - 2k + (\lambda - k + 1)k)v_k \\
&= (\lambda - k)v_k.
\end{aligned}$$

□

Como V es de dimensión finita, solo una cantidad finita de v_k son distinto de cero. Sin embargo, es conveniente considerar a V como un cociente de un espacio vectorial de dimensión infinita con base v_k.

Lema 2.4. *Sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Sea M un espacio vectorial de dimensión infinita con base $v_0, v_1, \ldots$*

1. *Las fórmulas del lema anterior definen en M una estructura de representación (de dimensión infinita) de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.*

2. *Si V es una representación finita irreducible de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ con un vector no nulo asociado al autovalor máximo λ, entonces $V = M/W$, para algún subespacio invariante W.*

Demostración. La demostración de este lema es inmediata del lema anterior. □

Teorema 2.5.

1. *Para cualquier $n \geq 0$, sea V_n el espacio vectorial de dimensión finita con base $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$. Definimos la acción de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ por*

   $\varphi(h)v_k = (n - 2k)v_k$

   $\varphi(f)v_k = (k + 1)v_{k+1}, \qquad k < n; \qquad \varphi(f)v_n = 0$

   $\varphi(e)v_k = (n - k + 1)v_{k-1}, \quad k > 0, \quad \varphi(e)v_0 = 0$

   Entonces $\varphi : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{End}(V_n)$ es una representación irreducible de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

2. *Para $n \neq m$, las representaciones V_n y V_m no son isomorfas.*

3. *Toda representación finita irreducible de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ es isomorfa a una representación V_n.*

Demostración. Consideremos la representación infinita M definida en el lema anterior. Si $\lambda = n$ un entero no negativo, consideremos el subespacio $M^{'} \subset M$ generado por los vectores $v_{n+1}, v_{n+2}, \ldots$. Entonces este subespacio es invariante. En efecto, es inmediato por las definiciones que es invariante por las acciones de $\varphi(h)$ y $\varphi(f)$, solo tenemos que verificar que $\varphi(e)v_{n+1} \in M^{'}$. Pero $\varphi(e)v_{n+1} = (n + 1 - (n + 1))v_n = 0$.

De esta manera, el espacio cociente $M/M^{'} = V_n$ es una representación de dimensión finita de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Este espacio tiene como base a $\{v_0, \ldots, v_n\}$ y la acción de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ está dada por el lema anterior.

Probemos ahora que esta representación es irreducible. Cualquier subespacio invariante tiene que ser generado por algún subconjunto de $\{v_0, \ldots, v_n\}$. Pero por la acción de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, este subconjunto genera todo el espacio V_n. Por lo tanto, la representación es irreducible. Y además, como la dim $V = n + 1$, entonces si $n \neq m$, los espacios V_n y V_m no son isomorfos.

Veamos que toda representación irreducible es de esta forma. Sea V una representación irreducible de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ y sea $v \in V(\lambda)$ un vector asociado al autovalor máximo. Por el lema anterior, V es un cociente de M, en otras palabras, es generado por los vectores $v_k = \frac{1}{k!}\varphi(f)^k v$. Como los v_k's están asociados a diferentes autovalores, si son distintos de cero, deben ser linealmente independientes. Por otro lado, como la dimensión de V es finita, solo una cantidad finita de v_k's son distintos de cero. Sea n el máximo entero no negativo tal que $v_n \neq 0$. Los vectores $v_0, \ldots, v_n$ son todos distintos de cero y corresponden a diferentes autovalores, luego son linealmente independientes. Por lo tanto, forman una base de V.

Como $v_{n+1} = 0$, tenemos que $\varphi(e)v_{n+1} = 0$. Por otro lado, tenemos que $\varphi(e)v_{n+1} = (\lambda - n)v_n$. Como $v_n \neq 0$, esto implica que $\lambda = n$ es un entero no negativo. De esta manera, V es una representación de la forma V_n. ☐

V_n se denomina *la representación irreducible de peso máximo n.*

Teorema 2.6. *Sea V una representación compleja de dimensión finita de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.*

1. *V admite una descomposición en autoespacios con autovalores enteros:*

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}} V(\lambda).$$

2. *dim $V(\lambda)$ = dim $V(-\lambda)$. Más aún, para $\lambda \geq 0$, las transformaciones*

$$\varphi(e)^{\lambda} : V(\lambda) \longrightarrow V(-\lambda)$$
$$\varphi(f)^{\lambda} : V(\lambda) \longrightarrow V(-\lambda)$$

son isomorfismos.

Demostración. Como toda representación es completamente reducible, es suficiente probar este teorema para $V = V_n$ una representación irreducible. En este caso, el resultado sigue del Teorema anterior. ☐

Corolario 2.7. *Si φ es una representación de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ de dimensión finita sobre V, entonces $\varphi(h)$ es diagonalizable, todos sus autovalores son enteros, y la multiplicidad de un autovalor k es igual a la de $-k$.*

Demostración. Es inmediata del Teorema de Weyl y del Teorema 2.5. □

Corolario 2.8. *Sea φ es una representación de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ sobre V (no necesariamente de dimensión finita), y supongamos que cada vector $v \in V$ está en un subespacio invariante de dimensión finita, entonces V es la (posiblemente infinita) suma directa de subespacios invariantes de dimensión finita, sobre los cuales la acción de φ es irreducible.*

Demostración. Por hipótesis y por el Teorema del Weyl cada elemento de V está en una suma directa finita de subespacios irreducibles invariantes. Luego, $V = \sum_{s\in S} U_s$, donde S es algún (posiblemente infinito) conjunto de índices y cada U_s es un subespacio de dimensión finita irreducible invariante. Denominamos a un subconjunto R de S independiente si la suma $\sum_{s\in R} U_s$ es directa. Esta condición es equivalente a que para cualquier subconjunto finito $\{r_1, \dots, r_n\}$ de R, y cualquier conjunto de elementos $u_i \in U_{r_i}$, la ecuación

$$u_1 + \cdots + u_n = 0$$

implica que cada u_i es 0. Entonces la unión de cualquier cadena creciente de subconjuntos independientes de S es independiente. Por en Lema de Zorn existe un subconjunto independiente maximal T de S. Por definición, la suma $V_0 = \sum_{t\in T} U_t$ es directa. Veamos que $V_0 = V$. Para demostrarlo, mostremos que para cada $s \in S$, $U_s \subseteq V_0$. Si $s \in T$, es claro que se cumple. Supongamos que s no está en T. La maximalidad de T implica que $T \cup \{s\}$ no es independiente. Consecuentemente, la suma $U_s + V_0$ no es directa, y entonces $U_s \cap V_0 \neq 0$. Pero esta intersección es un subespacio invariante de U_s. Como U_s es irreducible, y la intersección no es 0, la intersección debe ser U_s. Luego sigue que $U_s \subseteq V_0$, como queríamos probar. □

Capítulo 3

Estructura de las álgebras de Lie semisimples

Es este capítulo veremos que toda álgebra de Lie semisimple compleja $\mathfrak{g}$ se puede obtener como cierta "combinación" de subálgebras tridimensionales isomorfas a $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. En todo el capítulo, $\mathfrak{g}$ denotará un álgebra de Lie semisimple compleja de dimensión finita.

3.1. Subálgebras de Cartan

Definición 3.1. Una subálgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ es una *subálgebra de Cartan* si es abeliana maximal y todos sus elementos son semisimples.

Se puede definir subálgebra de Cartan para un álgebra de Lie general. Se define como una subálgebra nilpotente y que coincide con su normalizador. Cuando el álgebra es semisimple, las dos definiciones son equivalentes. Para nuestro fin, es conveniente usar la primera definición.

Sea $x \in \mathfrak{g}$ un elemento cualquiera del álgebra de Lie semisimple $\mathfrak{g}$. Por la descomposición de Jordan-Chevalley, sabemos que $x = s + n$, con s un elemento semisimple y con n un elemento nilpotente. Si todo elemento semisimple es cero, entonces todo elemento de $\mathfrak{g}$ sería nilpotente. Por el Teorema de Engel, $\mathfrak{g}$ sería nilpotente. Pero esto es una contradicción ya que $\mathfrak{g}$ es semisimple. Luego, existe en $\mathfrak{g}$ una subálgebra tal que todos sus elementos son semisimples. A estas subálgebras se las denomina *toral*.

Proposición 3.2. *Toda subálgebra toral es abeliana.*

Demostración. Sea $\mathfrak{t}$ toral. Tenemos que demostrar que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{t}}\, x = 0$ para todo $x \in \mathfrak{t}$. Como $\mathrm{ad}_{\mathfrak{t}}\, x$ es diagonalizable, es equivalente probar que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{t}}\, x$ no tiene autovalores no nulos. Supongamos, por el contrario, que $[x, y] = \lambda y$, con $\lambda \in \mathbb{C}$, no nulo, para algún $y \in \mathfrak{t}$. Luego $\mathrm{ad}_{\mathfrak{t}}\, y(x) = -\lambda y$ es un vector propio de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{t}}\, y$, con autovalor 0. Por otro lado, podemos escribir a x como una combinación lineal de vectores propios de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{t}}\, y$, es decir, $x = \sum \lambda_i y_i$.

Entonces $[x, y] = \sum \lambda_i [y_i, y] = \sum c_j y_j$, con $[y_j, y] \neq 0$. Luego $\mathrm{ad}_{\mathfrak{t}}\, y([x, y]) \neq 0$. Absurdo. Luego $\mathfrak{t}$ es abeliana. □

Teorema 3.3. *Dada $\mathfrak{g}$, existe $\mathfrak{h}$ subálgebra de Cartan.*

Demostración. Sabemos que existen las subálgebras con todos sus elementos semisimples, y por la proposición anterior, estas subálgebras son abelianas. Como $\mathfrak{g}$ es de dimensión finita, existe una subálgebra abeliana maximal cuyos elementos son semisimples. Por lo tanto, existe la subálgebra de Cartan. □

El teorema anterior nos asegura existencia de las subálgebras de Cartan, pero no dice nada respecto de la unicidad. Sin embargo, existe un resultado que dice que dadas dos subálgebras de Cartan, $\mathfrak{h}_1$ y $\mathfrak{h}_2$, existe un automorfismo interno $a \in \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$, tal que $a(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$. Recordemos que $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ es el subgrupo de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ generado por los automorfismos $\exp(\mathrm{ad}\, X)$, con $X \in \mathfrak{g}$ nilpotente. Para el Teorema del Peso Máximo, este resultado no es estrictamente necesario.

3.2. Descomposición Raíz

Fijamos una subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$.

Teorema 3.4. *$\mathfrak{g}$ se puede descomponer como*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$$

donde

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_\alpha &= \{y \in \mathfrak{g} : (adx - \alpha(x)I)y = 0 \quad \forall\, x \in \mathfrak{h}\} \\ \Delta &= \{\alpha \in \mathfrak{h}^* - \{0\} : \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}. \end{aligned}$$

Demostración. Por definición, $\mathrm{ad}\, x$ es un operador diagonalizable para todo $x \in \mathfrak{h}$. Como todos los operadores $\mathrm{ad}\, x$ conmutan, son diagonalizables simultáneamente. Luego $\mathfrak{g}$ se descompone como suma directa de subespacios $\mathfrak{g}_\alpha$ con $\alpha \in \mathfrak{h}^*$. Notar que $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$, y que como la dimensión de $\mathfrak{g}$ es finita, $\mathfrak{g}_\alpha = 0$ salvo para una cantidad finita de α's, por lo que Δ es finito. □

Δ se denomina *sistema de raíces* de $\mathfrak{g}$ y los elementos α de Δ *raíces*; los subespacios $\mathfrak{g}_\alpha$ se llaman *subespacios raíz*; y la descomposición de $\mathfrak{g}$ se denomina *descomposición raíz.*

Teorema 3.5. *Sean $\mathfrak{g}_1 \dots \mathfrak{g}_n$ álgebras de Lie simples y sea $\mathfrak{g} = \bigoplus_i \mathfrak{g}_i$.*

1. *Sea $\mathfrak{h}_i \subset \mathfrak{g}_i$ subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}_i$ y sea $\Delta_i \subset \mathfrak{h}^*$ el correspondiente sistema de raíces de $\mathfrak{g}_i$. Entonces $\mathfrak{h} = \bigoplus \mathfrak{h}_i$ es una subálgebra de Cartan en $\mathfrak{g}$ y el correspondiente sistema de raíces es $\Delta = \sqcup \Delta_i$.*

2. *Cada subálgebra de Cartan de* $\mathfrak{g}$ *tiene la forma* $\mathfrak{h} = \bigoplus_i \mathfrak{h}_i$ *donde* $\mathfrak{h}_i \subset \mathfrak{g}_i$ *es una subálgebra de Cartan de* $\mathfrak{g}_i$.

Demostración.

1. Como la suma es directa y cada $\mathfrak{h}_i$ es abeliana, entonces $\mathfrak{h}$ es abeliana. Sea $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathfrak{h}$. Entonces $\operatorname{ad} x|\mathfrak{g}_i = \operatorname{ad} x_i$. Luego, como cada x_i es semisimple, se tiene que $\operatorname{ad} x$ es diagonalizable. Luego x es semisimple.

   Por otro lado, sea $y = (y_1, ..., y_n)$ en el centralizador de $\mathfrak{h}$. Entonces $[y, \mathfrak{h}] = 0$. Esto implica que $[y_i, \mathfrak{h}_i] = 0$ para todo i. Luego $y_i \in \mathfrak{h}_i$. Por lo tanto, $y \in \mathfrak{h}$. Por lo tanto, $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$.

2. Sea $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$. Sea $\mathfrak{h}_i = \pi_i(\mathfrak{h})$. Cada $\mathfrak{h}_i$ es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}_i$ por ser π_i un homomorfismo de álgebras. Por otro lado, tenemos que $\mathfrak{h} \subset \bigoplus \mathfrak{h}_i$. Como $\mathfrak{h}$ es maximal, sigue que $\mathfrak{h} = \bigoplus \mathfrak{h}_i$.

□

Proposición 3.6.

1. $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.

2. *Si* α *y* β *están en* $\Delta \cup \{0\}$ *y satisfacen* $\alpha + \beta \neq 0$, *entonces* $\mathfrak{g}_\alpha$ *y* $\mathfrak{g}_\beta$ *son ortogonales respecto de la forma de Killing.*

3. *La restricción de la forma de Killing a* $\mathfrak{h}$ *es no degenerada.*

Demostración.

1. Sean $y \in \mathfrak{g}_\alpha$, $z \in \mathfrak{g}_\beta$.

$$\begin{aligned} adx([y,z]) &= [x,[y,z]] = [[x,y],z] + [y,[x,z]] = \alpha(x)[y,z] + \beta(x)[y,z] \\ &= (\alpha(x) + \beta(x))[y,z]. \end{aligned}$$

   Luego $[y, z] \in \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.

2. Sean $y \in \mathfrak{g}_\alpha$, $z \in \mathfrak{g}_\beta$ y $x \in \mathfrak{h}$. Como la forma de Killing es invariante, tenemos que

$$B([x,y],z) + B(y,[x,z]) = (\alpha(x) + \beta(x))B(y,z) = 0.$$

   Como $\alpha + \beta \neq 0$ y como vale para todo $x \in \mathfrak{h}$, entonces $B(y, z) = 0$.

3. Sea $x \in \mathfrak{h}$. Como B es no degenerada, existe $y \in \mathfrak{g}$ tal que $B(x, y) \neq 0$. Por el item anterior, y tiene que estar en $\mathfrak{h}$. Luego, B restringida a $\mathfrak{h}$ es no degenrada.

□

Sea B la forma de Killing de $\mathfrak{g}$. Como la restricción de B a $\mathfrak{h}$ es no degenerada, define un isomorfismo de $\mathfrak{h}$ a $\mathfrak{h}^*$ y una forma bilineal no degenerada sobre $\mathfrak{h}^*$, que denotamos $(\ ,\ )$, dada por $(\alpha, \beta) = B(x_\alpha, x_\beta)$, donde $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$ y x_α, x_β son sus correspondientes elementos en $\mathfrak{h}$.

Observación 3.7. Dado $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ existe un único $x_\alpha \in \mathfrak{h}$ tal que $\alpha(v) = B(x_\alpha, v)\ \forall\ v \in \mathfrak{h}$. Este es el isomorfismo entre $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{h}^*$.

Lema 3.8. *Sean $E \in \mathfrak{g}_\alpha$, $F \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, $x_\alpha \in \mathfrak{h}$. Entonces $[E, F] = B(E, F)x_\alpha$.*

Demostración. Sea $x \in \mathfrak{h}$. Como la forma de Killing es invariante, tenemos que

$$B([E, F], x) = B(E, [F, x]) = -B(E, [x, F]) = \alpha(x)B(E, F) = B(E, F)B(x_\alpha, x).$$

Como B es no degenerada en $\mathfrak{h}$, entonces $[E, F] = B(E, F)x_\alpha$. □

Lema 3.9.

1. *Sea $\alpha \in \Delta$. Entonces $(\alpha, \alpha) = B(x_\alpha, x_\alpha) \neq 0$.*

2. *Sea $E \in \mathfrak{g}_\alpha$, $F \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tal que $B(E, F) = 2/(\alpha, \alpha)$, y sea*

$$H_\alpha = \frac{2x_\alpha}{(\alpha, \alpha)}.$$

Entonces $\alpha(H_\alpha) = 2$ y los elementos E, F, H_α satisfacen

$$[E, F] = H_\alpha, \quad [H_\alpha, E] = 2E, \quad [H_\alpha, F] = -2F.$$

La subálgebra generada por estos elementos la denotamos por $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_\alpha$.

Demostración.

1. Supongamos que $(\alpha, \alpha) = 0$. Entonces $\alpha(x_\alpha) = 0$. Elegimos $E \in \mathfrak{g}_\alpha$, $F \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tal que $B(E, F) \neq 0$. Sea $H = [E, F] = B(E, F)x_\alpha$ y considerar el álgebra $\mathcal{A}$ generada por E, F, H. Entonces $[H, E] = \alpha(H)E = 0$, $[H, F] = -\alpha(H)F = 0$; luego $\mathcal{A}$ es soluble. Por el Teorema de Lie, podemos elegir una base de $\mathfrak{g}$ tal que los operadores $\operatorname{ad} E$, $\operatorname{ad} F$, $\operatorname{ad} H$ son triangular superior. Como $H = [E, F]$, $\operatorname{ad} H$ tiene que ser estrictamente triangular superior. Pero como $H \in \mathfrak{h}$, es también semisimple. Luego, $H = 0$. Por otra parte, $H = B(E, F)x_\alpha \neq 0$. Contradicción. Por lo tanto, $(\alpha, \alpha) \neq 0$.

2. Es inmediata de las definiciones y del lema anterior.

□

Teorema 3.10. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie semisimple, $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Cartan. Consideremos la descomposición raíz $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_\alpha$. Sea B la forma de Killing de $\mathfrak{g}$. Entonces:*

1. *Δ genera $\mathfrak{h}^*$ como espacio vectorial, y los elementos H_α, $\alpha \in \Delta$ generan $\mathfrak{h}$ como espacio vectorial.*

2. *Para cada $\alpha \in \Delta$, el subespacio raíz $\mathfrak{g}_\alpha$ tiene dimensión 1.*

3. *Para cualquier par de raíces α y β, el número*

$$\beta(H_\alpha) = 2\frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}$$

   es entero.

4. *Para $\alpha \in \Delta$, sea $s_\alpha : \mathfrak{h}^* \longrightarrow \mathfrak{h}^*$*

$$s_\alpha(\lambda) = \lambda - \lambda(H_\alpha)\alpha = \lambda - \frac{2(\alpha, \lambda)}{(\alpha, \alpha)}\alpha.$$

   Entonces, para cualquier par de raíces α y β, $s_\alpha(\beta)$ es también una raíz.

5. *Para cualquier raíz α, los únicos múltiplos de α que también son raíces son $\pm\alpha$.*

6. *Si α, β son raíces tal que $\alpha + \beta$ también es raíz, entonces $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.*

Demostración.

1. Supongamos que Δ no genera a $\mathfrak{h}^*$; entonces existe $x \in \mathfrak{h}, x \neq 0$ tal que $\alpha(x) = 0$ para todo $\alpha \in \Delta$. Pero entonces, la descomposición raíz de $\mathfrak{g}$ implica que ad $x = 0$. Luego estaría en el centro de $\mathfrak{g}$, pero como $\mathfrak{g}$ es semisimple, no tiene centro. Contradicción. Por lo tanto, Δ genera $\mathfrak{h}^*$. El hecho que H_α genera $\mathfrak{h}$ sigue inmediatamente de la identificación de $\mathfrak{h}$ con $\mathfrak{h}^*$ vía la forma de Killing; los elementos H_α se identifican con múltiplos no nulos de α.

2. Sea α una raíz. Supongamos que dim $\mathfrak{g}_\alpha > 1$. Sea $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ no nulo. Entonces existe un $E \in \mathfrak{g}_\alpha$ tal que $B(E, y) = 0$. Sea $F \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ y $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ como en Lema 3.9, y sea $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_\alpha$ la subálbegra generada por $\{E, F, H_\alpha\}$ isomorfa $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Consideremos la representación φ de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ en $\mathfrak{g}$ dada por la composición de la adjunta con el isomorfismo entre $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_\alpha$ y $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Entonces $\varphi(e)y = [E, y] = B(E, y)x_\alpha = 0$. Por otro lado, $\varphi(h)y = [H_\alpha, y] = -\alpha(H_\alpha)y = -2y$. Pero esto es una contradicción, ya que si un vector es anulado por $\varphi(e)$, entonces es un autovector de $\varphi(h)$ con autovalor no negativo. Por la tanto, la dim $\mathfrak{g}_\alpha = 1$.

3. Consideremos a $\mathfrak{g}$ como una representación de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_\alpha$. Los elementos de $\mathfrak{g}_\beta$ tienen autovalor igual a $\beta(H_\alpha)$. Pero por Teorema 2.5 los autovalores de cualquier representación de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ son enteros.

4. Supongamos que $\beta(H_\alpha) = n \geq 0$. Luego, los elementos de $\mathfrak{g}_\beta$ tienen autovalor n respecto de la acción de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_\alpha$. Por Teorema 2.6, el operador $(\varphi(f))^n_\alpha$ es un isomorfismo del subespacio vectorial asociado al autovalor n con el de autovalor $-n$. En particular, esto significa que si $v \in \mathfrak{g}_\beta$ es no nulo, entonces $(\varphi(f))^n_\alpha(v) \in \mathfrak{g}_{\beta-n\alpha}$ es también no nulo. Por lo tanto, $\beta - n\alpha = s_\alpha(\beta) \in \Delta$. Para el caso $n \leq 0$, la demostración es similar, usando $(\varphi(e))^{-n}_\alpha$ en lugar de $(\varphi(f))^n_\alpha$.

5. Sea α una raíz y supongamos que $\beta = c\alpha$ es también una raíz. Luego $\beta(H_\alpha) = 2c \in \mathbb{Z}$ y $\alpha(H_\beta) = \frac{1}{2}c \in \mathbb{Z}$. Esto implica que $c \in \{\pm 1, \pm 2, \pm\frac{1}{2}\}$. Denotamos por φ la representación de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ en $\mathfrak{g}$ dado por la adjunta compuesta con el isomorfismo entre $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ y $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_\alpha$. Sea $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-2\alpha}$. Este subespacio es invariante por φ. Los autovalores no nulos de $\varphi(h)$ son $\{\pm 2, \pm 4\}$, con multiplicidad 1. Por otro lado, $\varphi(e)\mathfrak{g}_\alpha = 0$, lo que implica que los vectores de $\mathfrak{g}_\alpha$ tienen autovalor máximo. Pero estos vectores tienen autovalor 2 ($\alpha(H_\alpha) = 2$). Contradicción. Por lo tanto, c no es 2. Ahora, intercambiando α con $-\alpha$ y con β, obtenemos que c $= \pm 1$.

6. Sabemos que $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$. Como la dim $\mathfrak{g}_{\alpha+\beta} = 1$, solo necesitamos mostrar que existen elementos no nulos $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ y $X_\beta \in \mathfrak{g}_\beta$ tal que $[X_\alpha, X_\beta] \neq 0$. Como $\alpha + \beta$ es raíz, $\alpha \neq \pm\beta$. Entonces
$$V = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta+k\alpha}$$
es una representación irreducible de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_\alpha$. Si $v \in V_k$ es no nulo, y $V_{k+2} \neq 0$, entonces $\varphi(e)v \neq 0$.

□

Teorema 3.11.

1. *Sea $\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{h}$ el espacio vectorial real generado por H_α, $\alpha \in \Delta$. Entonces $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \oplus i\mathfrak{h}_0$, y la restricción de la forma de Killing a $\mathfrak{h}_0$ es definida positiva.*

2. *Sea $\mathfrak{h}_0^* \subset \mathfrak{h}^*$ el espacio vectorial real generado por $\alpha \in \Delta$. Entonces $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{h}_0^* \oplus i\mathfrak{h}_0^*$. Además, $\mathfrak{h}_0^* = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* : \lambda(x) \in \mathbb{R}\ \forall\ x \in \mathfrak{h}_0\} = (\mathfrak{h}_0)^*$.*

Demostración. Veamos primero que la forma de Killing restringida a $\mathfrak{h}_0$ es real y definida positiva.
$$B(H_\alpha, H_\beta) = tr(adH_\alpha\ adH_\beta) = \sum_{\gamma\in\mathfrak{h}^*} \gamma(H_\alpha)\gamma(H_\beta).$$
Por el teorema anterior, $\gamma(H_\alpha)$ y $\gamma(H_\beta)$ son entero. Luego $B(H_\alpha, H_\beta) \in \mathbb{Z}$.

Sea ahora $H = \sum c_\alpha H_\alpha \in \mathfrak{h}_0$. Entonces $\gamma(H) = \sum c_\alpha \gamma(H_\alpha) \in \mathbb{R}$ para cualquier raíz γ. Entonces
$$B(H,H) = tr(adH\ adH) = \sum_\gamma \gamma(H)^2 \geq 0.$$
Luego, B es definida positiva sobre $\mathfrak{h}_0$.

Como la forma de Killing es definida positiva sobre $\mathfrak{h}_0$, entonces es definida negativa sobre $i\mathfrak{h}_0$, luego $\mathfrak{h}_0 \cap i\mathfrak{h}_0 \neq \{0\}$, lo que implica que $dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{h}_0 \leq \frac{1}{2}dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{h} = r$, donde r es la dimensión compleja de $\mathfrak{h}$. Por otro lado, como H_α genera $\mathfrak{h}$ sobre $\mathbb{C}$, tenemos que $dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{h}_0 \geq r$. Entonces $dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{h}_0 = r$. Luego $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \oplus i\mathfrak{h}_0$.

La segunda parte es análoga. □

Como la restricción de la forma de Killing a $\mathfrak{h}_0$ es definida positiva, tenemos un producto interno en $\mathfrak{h}_0$, que podemos llevarlo a $\mathfrak{h}_0^*$ vía el isomorfismo entre $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{h}^*$. Denotamos por $\langle\ ,\ \rangle$ este producto interno en el dual de $\mathfrak{h}_0$.

3.3. Sistema de raíces simples

Definición 3.12. Sea $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ un sistema de raíces. Un subconjunto Π de Δ se denomina *sistema de raíces simples* si satisface las siguientes propiedades:

- Π es base ordenada de $\mathfrak{h}^*$ como espacio vectorial.
- Cada raíz $\beta \in \Delta$ puede ser escrita como combinación lineal

$$\beta = \sum_{\alpha \in \Pi} m_\alpha \alpha$$

  donde los coeficientes m_α son todos enteros del mismo signo (es decir, todos no negativos, o todos no positivos).

Los elementos $\alpha \in \Pi$ se denominan *raíces simples*.

Teorema 3.13. *Dado Δ, existe un sistema de raíces simples Π.*

En lugar de demostrar este teorema, probaremos un resultado más general. Sea $x \in \mathfrak{h}$ tal que $\alpha(x) \neq 0$ para toda $\alpha \in \Delta$. Sea Δ_x^+ el conjunto de todas las raíces α's tales que $\alpha(x) > 0$. Entonce tenemos que $\Delta = \Delta_x^+ \cup (-\Delta_x^+)$. Un elemento $\alpha \in \Delta_x^+$ se denomina *descomponible* si existen $\beta, \gamma \in \Delta_x^+$ tal que $\alpha = \beta + \gamma$. Caso contrario, α se denomina *no descomponible*. Sea Π_x el conjunto de elementos no descomponibles de Δ_x^+.

Proposición 3.14. Π_x *es un sistema de raíces simples de Δ. Recíprocamente, si* Π *es un sistema de raíces simples de Δ, y si $x \in \mathfrak{h}$ es tal que $\alpha(x) > 0$ para todo $\alpha \in \Pi$, entonces* $\Pi = \Pi_x$.

Para demostrar este resulado necesitaremos un serie de lemas.

Lema 3.15. *Cada elemento de Δ_x^+ es una combinación lineal de elementos de Π_x, con coeficientes enteros no negativos.*

Demostración. Sea I el conjunto de raíces contenido en Δ_x^+ tal que no es combinación lineal entera no negativa de elementos de Π_x. Si I es no vacío, existe un elemento $\alpha \in I$ tal que $\alpha(x)$ es mínimo. Este elemento α es descomponible, pues de lo contrario tendría que pertenecer a Π_x. Si escribimos $\alpha = \beta + \gamma$ con $\beta, \gamma \in \Delta_x^+$, tenemos

$$\alpha(x) = \beta(x) + \gamma(x).$$

Como $\beta(x), \gamma(x) > 0$, son estrictamente menores a $\alpha(x)$. Entonces $\beta, \gamma \notin I$. Luego $\alpha \notin I$. Contradicción. Por lo tanto I es vacío, es decir, los elementos de Δ_x^+ son combinaciones lineales enteras no negativas de los elementos de Π_x. $\square$

Lema 3.16. *Si $\alpha, \beta \in \Pi_x$ entonces $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$.*

Demostración. Supongamos que $\langle \alpha, \beta \rangle > 0$. Entonces $\gamma = \alpha - \beta$ es una raíz. Si $\gamma \in \Delta_x^+$ entonces $\alpha = \beta + \gamma$ sería descomponible; y si $-\gamma \in \Delta_x^+$, entonces $\beta = \alpha + (-\gamma)$ sería descomponible. En ambos casos llegamos a una contradicción. Luego, $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$. $\square$

Lema 3.17. *Sean $x \in \mathfrak{h}$ y $\mathcal{A} \subset \mathfrak{h}^*$ tal que*

(a) $\alpha(x) > 0$ *para todo $\alpha \in \mathcal{A}$.*

(b) $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$ *para todos $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$.*

Entonces los elementos de $\mathcal{A}$ son linealmente independientes.

Demostración. Sea $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ y supongamos que se puede escribir como

$$\lambda = \sum y_\beta \beta = \sum z_\gamma \gamma$$

donde los coeficientes y_β, z_γ son no negativos, y donde los elementos β's y γ's pertenecen a subconjuntos disjuntos. Entonces

$$\langle \lambda, \lambda \rangle = \sum y_\beta z \gamma \langle \beta, \gamma \rangle.$$

Luego, $\langle \lambda, \lambda \rangle \leq 0$ por (b). Por lo tanto, $\lambda = 0$.

Por otro lado, tenemos que

$$0 = \lambda(x) = \sum y_\beta \beta(x).$$

Entonces por (a), tenemos que $y_\beta = 0$ para todo β. Y análogamente, $z_\gamma = 0$ para todo γ. Por lo tanto, los elementos de $\mathcal{A}$ son linealmente independientes. $\square$

Demostración. (**De la Proposición**) Los lemas anteriores muestran que Π_x es un sistema de raíces simple de Δ. Recíprocamente, sea Π un sistema de raíces simple de Δ y sea $x \in \mathfrak{h}$ tal que $\alpha(x) > 0$ para todo $\alpha \in \Pi$. Si Δ^+ denota el conjunto de combinaciones linelaes con coeficientes enteros no negativos de elementos de Π, entonces tenemos que $\Delta^+ \subset \Delta_x^+$ y que $(-\Delta^+) \subset (-\Delta_x^+)$. Y como Δ es la unión de Δ^+ y $-\Delta^+$, tenemos que $\Delta^+ = \Delta_x^+$. Entonces, los elementos de Π son no descomponibles en Δ_x^+, por lo que tenemos que $\Pi \subset \Pi_x$. Pero como Π y Π_x tienen la misma cantidad de elementos, obtenemos que $\Pi = \Pi_x$. $\square$

Definición 3.18. Sea Π un sistema simple de raíces. Una raíz α se dice *positiva* si se escribe como combinación lineal entera no negativa de los elementos de Π.

Dado un sistema de raíces simples $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$, todo elemento de $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ se escribe como combinación lineal de las raíces simples. Esto nos permite definir un orden *lexicográfico* en $\mathfrak{h}^*$ dado por: λ es *positiva* si el primer coeficiente no nulo respecto de la base ordenada $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ es positivo; y $\lambda > \mu$ si $\lambda - \mu$ es positiva.

3.4. Grupo de Weyl

Sea $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ el sistema de raíces de $\mathfrak{g}$. Sea $s_\alpha : \mathfrak{h}^* \longrightarrow \mathfrak{h}^*$, con $\alpha \in \Delta$, dada por

$$s_\alpha(\lambda) = \lambda - \frac{2\langle \alpha, \lambda \rangle}{|\alpha|^2}\alpha.$$

Las transformaciones s_α se denominan *reflexiones*. Cada reflexión mapea Δ en sí mismo, y además, cada transformación es ortogonal.

Definición 3.19. El grupo de Weyl $W = W(\Delta)$ es el subgrupo del grupo ortogonal sobre $\mathfrak{h}^*$ generado por las reflexiones s_α.

Proposición 3.20. *Sea s_α una reflexión, y sea r un transformación ortogonal de $\mathfrak{h}^*$. Entonces $s_{r\alpha} = r s_\alpha r^{-1}$.*

Demostración.

$$s_{r\alpha}(r(\lambda)) = r(\lambda) - \frac{2\langle r(\alpha), r(\lambda) \rangle}{|r(\alpha)|^2} r(\alpha) = r(\lambda) - \frac{2\langle \alpha, \lambda \rangle}{|\alpha|^2} r(\alpha) = r(s_\alpha(\lambda)).$$

□

Lema 3.21. *Sea $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ un sistema de raíces simples de Δ y sea α una raíz positiva. Entonces*

$$s_{\alpha_j}(\alpha) \ \textit{es} \ \begin{cases} -\alpha & \textit{si } \alpha = \alpha_j \textit{ o } \alpha = 2\alpha_j \\ > 0 & \textit{caso contrario.} \end{cases}$$

Demostración. Si $\alpha = \sum c_j \alpha_j$. Entonces

$$s_{\alpha_i}(\alpha) = \sum_{j=1}^{l} c_j \alpha_j - \frac{2\langle \alpha, \alpha_i \rangle}{|\alpha_i|^2}\alpha_i.$$

Si al menos un c_j es positivo para $j \neq i$, entonces $s_{\alpha_i}(\alpha)$ tiene el mismo coeficiente para α_j que para α, y $s_{\alpha_i}(\alpha)$ debe ser positivo. En el otro caso, α es un múltiplo de α_i, entonces α debe ser α_i o $2\alpha_i$. □

Proposición 3.22. *Sea* $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ *un sistema de raíces simples. Entonces* $W(\Delta)$ *es generado por las reflexiones* s_{α_j} *para* $\alpha_j \in \Pi$. *Si* α *es una raíz, entonces existe* $\alpha \in \Pi$ *y* $s \in W$ *tal que* $s(\alpha_j) = \alpha$.

Demostración. Sea $W' \subseteq W$ el grupo generado por s_{α_j} para $\alpha_j \in \Pi$. Vamos a probar que toda raíz positiva α es de la forma $s\alpha_j$ con $S \in W'$. Escribiendo a $\alpha = \sum n_j\alpha_j$, hacemos inducción de $\sum n_j = \text{nivel}(\alpha)$. Si $\sum n_j = 1$, entonces $\alpha = \alpha_j$ con α_j simple. Luego, tomamos $s = 1$. Supongamos que vale para nivel $<$ nivel(α), con nivel$(\alpha) > 1$. Como

$$0 < |\alpha|^2 = \sum n_j\langle\alpha, \alpha_j\rangle,$$

existe $i = i_0$ con $\langle\alpha, \alpha_i\rangle > 0$. Por hipótesis, α es distinta de α_{i_0} y de $2\alpha_{i_0}$. Entonces $\beta = s_{\alpha_{i_0}}(\alpha)$ es positiva por Lema 3.21 y tenemos

$$\beta = \sum_{j\neq i_0} n_j\alpha_j + \Big(n_{i_0} - \frac{2\langle\alpha, \alpha_{i_0}\rangle}{|\alpha_{i_0}|^2}\Big)\alpha_{i_0}.$$

Como $\langle\alpha, \alpha_{i_0}\rangle > 0$, nivel$(\beta) <$ nivel(α). Por hipótesis inductiva, $\beta = s'\alpha_j$ para algún $s \in W'$ y algún índice j. Luego $\alpha = s_{\alpha_{i_0}}\beta = s_{\alpha_{i_0}}s'\alpha_j$, con $s_{\alpha_{i_0}}s'$ en W'. Esto completa la inducción.

Para completar la demostración, tenemos que mostrar que $s_\alpha \in W'$ para cada $\alpha \in \Delta$. Escribimos $\alpha = s\alpha_j$ con $s \in W'$. Por la Proposición 3.20, tenemos que $s_\alpha = ss_\alpha s^{-1}$, y además está en W'. Como W es generado por las reflexiones s_α con $\alpha \in \Delta$, $W \subseteq W'$, y por lo tanto, $W = W'$. □

Teorema 3.23. *Si* Π *y* Π' *son dos sistemas de raíces simples para* Δ, *entonces existe uno y sólo un elemento* $s \in W$ *tal que* $s\Pi = \Pi'$.

Demostración.

EXISTENCIA. Sean Δ^+ y $\Delta^{+'}$ el conjunto de las respectivas raíces positivas. Tenemos $|\Delta^+| = |\Delta^{+'}| = \frac{1}{2}|\Delta| = q$. Además, $\Delta^+ = \Delta^{+'}$ si y sólo si $\Pi = \Pi'$, y $\Delta^+ \neq \Delta^{+'}$ implica que $\Pi \nsubseteq \Delta^{+'}$ y $\Pi' \nsubseteq \Delta^+$. Sea $r = |\Delta^+ \cap \Delta^{+'}|$. Hacemos inducción hacia abajo sobre r. El caso $r = q$, se cumple tomando $s = I$. Sea $r < q$. Elegimos $\alpha_i \in \Pi$ con $\alpha_i \notin \Delta^{+'}$, entonces $-\alpha_i \in \Delta^{+'}$. Si β está en $\Delta^+ \cap \Delta^{+'}$, entonces $s_\alpha(\beta) \in \Delta^+$ por Lema 3.21 Luego, $s_{\alpha_i}(\beta)$ est'a en $\Delta^+ \cap s_{\alpha_i}\Delta^{+'}$. Además, $\alpha_i = s_{\alpha_i}(\alpha_i)$ est'a en $\Delta^+ \cap s_{\alpha_i}\Delta^{+'}$. Por lo tanto, $|\Delta^+ \cap s_{\alpha_i}\Delta^{+'}| \geq r + 1$. Luego, $s_{\alpha_i}\Delta^{+'}$ corresponde al sistema simple $s_{\alpha_i}\Pi'$, y por hipótesis inductiva, podemos encontrar $t \in W$ con $t\Pi = s_{\alpha_i}\Pi'$. Por lo tanto, $s_{\alpha_i}t\Pi = \Pi'$.

UNICIDAD. Supongamos que $s\Pi = \Pi$, y probemos que $s = I$. Escribimos $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$, y ponemos $s_{\alpha_j} = s_j$. Para $s = s_{i_m} \cdots s_{i_1}$, probemos por inducción en m que $s\Pi = \Pi$ implica que $s = I$. Si $m = 1$, entonces $s = s_i$ y claramente por Lema 3.21, $s = I$. Si $m = 2$, obtenemos que $s_{i_2}\Pi = s_{i_1}\Pi$, donde $-\alpha_{i_2}$ está en $s_{i_1}\Pi$, y entonces $-\alpha_{i_2} = -\alpha_{i_1}$ por Lema 3.21, y por lo tanto, $s = I$. Supongamos que $t\Pi = \Pi$ con $t = s_{j_r} \cdots s_{j_1}$ implica que $t = I$ con $r < m$, y sea $s = s_{i_m} \cdots s_{i_1}$ satisface $s\Pi = \Pi$ con $m > 2$. Escribimos $s' = s_{i_{m-1}} \cdots s_{i_1}$, entonces $s = s_{i_m}s'$. Luego $s' \neq I$. □

Proposición 3.24. *Si α es una raíz simple, entonces $s_\alpha(\delta) = \delta - \alpha$ y $2\langle\delta, \alpha\rangle/|\alpha|^2 = 1$, donde $\delta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta^+} \alpha$.*

Demostración. Por el Lema 3.21, s_α permuta las raíces positivas distintas a α, y manda α en $-\alpha$. Por lo tanto

$$s_\alpha(2\delta) = s_\alpha(2\delta - \alpha) + s_\alpha(\alpha) = (2\delta - \alpha) - \alpha = 2(\delta - \alpha),$$

y entonces $s_\alpha(\delta) = \delta - \alpha$. Usando la definición de s_α, vemos que $2\langle\delta, \alpha\rangle/|\alpha|^2 = 1$. $\square$

3.5. Pesos

Sea φ una representación sobre un espacio vectorial complejo V. Si $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ definimos

$$V(\lambda) = \{v \in V : \ \varphi(x)v = \lambda(x)v \ \ \forall\ x \in \mathfrak{h}\}.$$

Si $V(\lambda) \neq 0$, entonces $V(\lambda)$ se denomina *espacio de peso* λ y λ se denomina *peso de la representación*. Los $v \in V(\lambda)$ se denominan *vectores de peso* λ.

Proposición 3.25. *Sea Δ el conjunto de raíces de $\mathfrak{h}$ y sea $\mathfrak{h}_0$ el espacio vectorial real generado por H_α, $\alpha \in \Delta$. Si φ es una representación de $\mathfrak{g}$ sobre un espacio vectorial complejo V, entonces:*

1. *$\varphi(\mathfrak{h})$ actúa diagonalmente sobre V; y V es la suma directa de todos los espacios de pesos.*

2. *Todo peso es una funcional lineal a valores reales sobre $\mathfrak{h}_0$ y satisface*

$$2\frac{\langle\lambda, \alpha\rangle}{|\alpha|^2} \in \mathbb{Z}\ \forall\ \alpha \in \Delta.$$

3. *Las raíces y los pesos están relacionados vía $\varphi(\mathfrak{g}_\alpha)V(\lambda) \subseteq V(\lambda + \alpha)$.*

Demostración. Sea α una raíz y sean $E \in \mathfrak{g}_\alpha$ y $F \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$. El conjunto $\{E, F, H_\alpha\}$ genera una subálgebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_\alpha$ de $\mathfrak{g}$ isomorfa a $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, con $2|\alpha|^{-2}H_\alpha$ correspondiendo a $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Luego, la restricción de φ a $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_\alpha$ es una representación de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_\alpha$. Por los resultados de representación de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, obtenemos que $\varphi(2|\alpha|^{-2}H_\alpha)$ es diagonalizable con autovalores enteros. Esto prueba 1, y que los pesos son a valores reales. Si λ es un peso y $v \in V(\lambda)$ no nulo, entonces, por lo de recién, $\varphi(2|\alpha|^{-2}H_\alpha)v = 2|\alpha|^{-2}\langle\lambda, \alpha\rangle v$ es un múltiplo entero de v. Luego, $2|\alpha|^{-2}\langle\lambda, \alpha\rangle \in \mathbb{Z}$.

Por otro lado, sea $E \in \mathfrak{g}_\alpha$, $v \in V(\lambda)$, y sea $x \in \mathfrak{h}$. Entonces

$$\begin{aligned} \varphi(x)\varphi(E)v &= \varphi(e)\varphi(x)v + \varphi([x, E])v \\ &= \lambda(x)\varphi(E)v + \alpha(x)\varphi(E)v \\ &= (\lambda + \alpha)(x)\varphi(E)v. \end{aligned}$$

Luego, $\varphi(E)v \in V(\lambda + \alpha)$. $\square$

Vamos a denotar $P(\mathfrak{g}) = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* : 2\langle\lambda, \alpha\rangle/|\alpha|^2 \in \mathbb{Z} \ \forall \ \alpha \in \Delta\}$. $\mathrm{P}(\mathfrak{g})$ se denomina *reticulado de pesos* y los elementos de $\mathrm{P}(\mathfrak{g})$ se denominan *pesos enteros*. Además, vamos a denotar $\mathrm{P}(\mathfrak{g})_r$ como el grupo abeliano generado por las raíces simples Π de $\mathfrak{h}$. Notemos que $\mathrm{P}(\mathfrak{g})_r \subseteq \mathrm{P}(\mathfrak{g})$.

Definición 3.26. Sea $\{\alpha_1, \ldots \alpha_k\}$ el conjunto de raíces simples. Definimos los *pesos fundamentales* $\omega_i \in \mathfrak{h}^*$ por

$$2\frac{\langle\omega_i, \alpha_j\rangle}{|\alpha_j|^2} = \delta_{ij}.$$

Definición 3.27. Sea $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Decimos que λ es *dominante* si $\langle\lambda, \alpha\rangle \geq 0$ para toda raíz simple α.

Notemos que, por definición, los pesos fundamentales son enteros dominantes, y que además cumplen que $\mathrm{P}(\mathfrak{g}) = \bigoplus \mathbb{Z}\omega_i$.

Proposición 3.28. *Las funcionales lineales dominantes son combinaciones lineales no negativas de los pesos fundamentales.*

Demostración. Sea λ un peso dominate. Como los pesos fundamentales son base de $\mathfrak{h}^*$, podemos escribir $\lambda = \sum n_i\omega_i$ con $n_i \in \mathbb{C}$. Sea α_j una raíz simple. Entonces

$$0 \leq 2\frac{\langle\lambda, \alpha_j\rangle}{|\alpha_j|^2} = \frac{2}{|\alpha_j|^2}\langle\sum_i n_i\omega_i, \alpha_j\rangle = n_j.$$

□

Denotamos por $\Lambda(\mathfrak{g})$ al conjunto de pesos enteros dominantes.

Proposición 3.29. *El conjunto $\Lambda(\mathfrak{g})$ es igual al conjunto de combinaciones lineales enteras no negativas de los pesos fundamentales.*

Demostración. Sea λ un peso entero dominante, $\lambda = \sum n_i\omega_i$ con $n_i \in \mathbb{C}$ y ω_i pesos fundamentales. Por la proposición anterior, $n_j \geq 0$. Como λ es entero, $n_j = 2\frac{\langle\lambda,\alpha_j\rangle}{|\alpha_j|^2} \in \mathbb{Z}$. La recíproca es inmediata por la definición de los pesos fundamentales. □

Capítulo 4

Teorema del Peso Máximo

En esta capítulo, $\mathfrak{g}$ denotará un álgebra de Lie semisimple compleja, $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Cartan. Sean $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ el conjunto de raíces y Π el sistema de raíces simples. Sea $\mathfrak{h}_0$ la forma real de $\mathfrak{h}$ sobre la cual todas las raíces son reales, y sea B la forma de Killing de $\mathfrak{g}$, que es definida positiva sobre $\mathfrak{h}_0$.

Definición 4.1. Dada una representación φ sobre un espacio vectorial V, un peso λ se dice *peso máximo* si es el mayor respecto del orden inducido por el sistema de raíces simples.

Teorema 4.2 (**Teorema del Peso Máximo**). *Salvo equivalencia, las representaciones irreducibles φ de dimensión finita de $\mathfrak{g}$ están en correspondencia uno a uno con las funcionales lineales λ en $\Lambda(\mathfrak{g})$. La correspondencia es que λ es el peso máximo de φ_λ. El peso máximo λ de φ_λ tiene además estas propiedades:*

(a) λ depende solo del sistema simple Π y no del orden de la raíces simples en la base ordenada Π.

(b) El espacio de peso $V(\lambda)$ tiene dimensión 1.

(c) Cada vector $E \in \mathfrak{g}_\alpha$ para una arbitraria raíz positiva anula todos los miembros de $V(\lambda)$; y los miembros de $V(\lambda)$ son los únicos vectores con esta propiedad.

(d) Todo peso de φ_λ es de la forma $\lambda - \sum_{i=1}^{l} n_i \alpha_i$ con enteros ≥ 0 y α's en Π.

Demostración. EXISTENCIA DE LA CORRESPONDENCIA. Sea φ una representación finita irreducible de $\mathfrak{g}$ sobre V. La representación tiene pesos, y sea λ el mayor peso respecto del orden inducido por el sistema simple Π. Luego, λ está en $\mathrm{P}(\mathfrak{g})$ por Proposición 3.25.

Si α es uan raíz positiva, entonces $\lambda + \alpha$ excede a λ y no puede ser un peso. Entonces, si $E \in \mathfrak{g}_\alpha$ y $v \in V(\lambda)$, tenemos que $\varphi(E)v = 0$ por Proposición 3.25. Esto prueba la primera parte de (c).

Recordemos que el álgebra universal de $\mathfrak{g}$ es $U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/J$, donde $T(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} T^k(\mathfrak{g})$, con $T^k(\mathfrak{g})$ el producto tensorial de $\mathfrak{g}$, k veces; y J es el ideal bilátero generado por todos los elementos $X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y]$, con X e Y en $\mathfrak{g}$. Recordemos también que dada una representación φ de $\mathfrak{g}$ sobre un espacio vectorial V, ésta induce una representación lineal de $U(\mathfrak{g})$ en $\mathrm{End}(V)$ como álgebras asociativas con unidad, que continuaremos denotando por φ.

Extendemos φ multiplicativamente hasta que esté definida en todo $U(\mathfrak{g})$ con $\varphi(1) = 1$. Como φ es irreducible, $\varphi(U(\mathfrak{g}))v = V$ para cada $v \neq 0$ en V. Sea $\beta_1, \ldots, \beta_k$ una enumeración de Δ^+, y sean $H_1, \ldots, H_l$ una base de $\mathfrak{h}$. Por el teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt los monomios

$$E_{-\beta_1}^{q_1} \cdots E_{-\beta_k}^{q_k} H_1^{m_1} \cdots H_l^{m_l} E_{\beta_1}^{p_1} \cdots E_{\beta_k}^{p_k} \tag{4.1}$$

forman una base de $U(\mathfrak{g})$. Apliquemos φ a cada uno de estos monomios y luego a $v \in V(\lambda)$. Los E_β's dan cero, los H's son multiplicados por constantes, y los $E_{-\beta}$'s bajan el peso del vector. Sea $w \in V_\lambda$ no nulo. Como v genera a V, existe un monomio tal que φ en ese monomio, aplicado a v, da w. Por la acción de φ en los monomios, tenemos que $w = 0$, ó que $w \notin V(\lambda)$, o bien que $w = cv$ con $c \in \mathbb{C}$. Como w es un vector no nulo en $V(\lambda)$, tenemos que $w = cv$. Por lo tanto, $V(\lambda)$ tiene dimensión uno, y esto prueba (b).

El efecto de φ en (4.1) aplicado a v en $V(\lambda)$ es dar vectores de peso

$$\lambda - \sum_{j=1}^{k} q_j \beta_j, \qquad q \in \mathbb{N} \tag{4.2}$$

y estos vectores de peso generan V. Entonces, los pesos obtenidos en (4.2) son los únicos pesos de φ, y (d) sigue del hecho que toda raíz positiva es combinación lineal entera no negativa de las raíces simples. Por otra parte, observemos que (d) implica (a).

Para probar la segunda parte de (c), sea $v \notin V(\lambda)$ tal que $\varphi(E_\alpha)v = 0$ para toda raíz positiva α. Substrayendo la componente en $V(\lambda)$, podemos suponer que v tiene componente 0 en $V(\lambda)$. Sea λ_0 el peso máximo tal que v tiene componente distinta de 0 en $V(\lambda_0)$, y sea v' esa componente. Entonces $\varphi(E_\alpha)v' = 0$ para todo $\alpha \in \Delta^+$, y $\varphi(\mathfrak{h})v' \subseteq \mathbb{C}v'$. Aplicando φ a (4.1), tenemos que

$$V = \sum \mathbb{C}\varphi(E_{-\beta_1})^{q_1} \ldots \varphi(E_{-\beta_k})^{q_k} v'.$$

Entonces, si miramos el lado derecho de esta igualdad, nos dice que todo peso de la representación es estrictamente menor que λ. Pero esto es una contradicción, ya que λ es un peso de la representación. Por lo tanto, los vectores v en $V(\lambda)$ son los únicos con la propiedad $\varphi(E_\alpha)v = 0$ para toda raíz positiva α.

Probemos ahora que λ es dominante. Sea $\alpha \in \Delta^+$, y definimos H_α, E_α, y F_α tal que estos vectores generen la subálgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_\alpha$ de $\mathfrak{g}$, isomorfa a $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, por medio del isomorfismo que lleva H_α a $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Para $v \neq 0$ en $V(\lambda)$, el subespacio de V generado por todos

$$\varphi(F_\alpha)^p \varphi(H_\alpha)^q \varphi(E_\alpha)^r v$$

es estable bajo $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_\alpha$, y (c) muestra que es el mismo que el generado por todos los $\varphi(F_\alpha)^p v$. Sobre estos vectores, $\varphi(H_\alpha)$ actúa con autovalor

$$(\lambda - p\alpha)(H_\alpha) = \frac{2\langle\lambda,\alpha\rangle}{|\alpha|^2} - 2p.$$

Entonces el mayor autovalor de $\varphi(H_\alpha)$ es $\frac{2\langle\lambda,\alpha\rangle}{|\alpha|^2}$, y por el Teorema 2.5, el máximo autovalor de $\varphi(H_\alpha)$ es no negativo, lo que implica que $\langle\lambda,\alpha\rangle \geq 0$. Por lo tanto, λ es dominante.

LA CORRESPONDENCIA ES UNO A UNO. Sean φ y φ' representaciones irreducibles de $\mathfrak{g}$ sobre V y V', respectivamente, ambas con peso máximo λ. Sean v_0 y v_0' vectores no nulos de peso máximo. Consideremos la representación $\varphi \oplus \varphi'$ sobre $V \oplus V'$. Definimos

$$S = (\varphi \oplus \varphi')(U(\mathfrak{g}))(v_0 \oplus v_0').$$

Veamos que S es un subespacio invariante irreducible de $V \oplus V'$. Que S es invariante es claro. Sea $T \subseteq S$ un subespacio invariante irreducible, y sea $v \oplus v'$ un vector de peso máximo. Para $\alpha \in \Delta^+$, tenemos

$$0 = (\varphi \oplus \varphi')(E_\alpha)(v \oplus v') = \varphi(E_\alpha)v \oplus \varphi'(E_\alpha)v'.$$

Luego, $\varphi(E_\alpha)v = 0$ y $\varphi'(E_\alpha)v'$. Por (c), $v = cv_0$ y $v' = c'v_0'$. Por lo tanto, $v \oplus v' = cv_0 \oplus c'v_0'$. Este vector, por hipótesis, está en $(\varphi \oplus \varphi')(U(\mathfrak{g}))(v_0 \oplus v_0')$. Al aplicar $(\varphi \oplus \varphi')$ a (4.1) y luego a $v_0 \oplus v_0'$, los E_β's dan 0, mientras que los H's son multiplicados por contantes, es decir,

$$(\varphi \oplus \varphi')(H)(v_0 \oplus v_0') = \varphi(H)v_0 \oplus \varphi'(H)v_0' = \lambda(H)(v_0 \oplus v_0').$$

Además, los $E_{-\beta}$'s bajan el peso del vector por proposición anterior. Luego $c = c'$. Por lo tanto, $T = S$, y S es irreducible.

La proyección de S a V conmuta con la representación y no es identicamente cero. Por el Lema de Schur, $\varphi \oplus \varphi'|_S$ es equivalente a φ. Análogamente, $\varphi \oplus \varphi'|_S$ es equivalente a φ'. Por lo tanto, φ y φ' son equivalentes. □

Hemos demostrado que todo representación irreducible tiene asociado un único peso entero máximo dominante. Nos resta probar que dado una funcional lineal λ entera dominante, existe una representación irreducible cuyo peso máximo es λ. Para demostrar esto, necesitaremos previamente una serie de resultados.

Sea V un espacio vectorial complejo que es $U(\mathfrak{g})$-módulo unitario a izquierda. V no es necesariamente de dimensión finita. Existe una correspondencia uno a uno entre representaciones de $\mathfrak{g}$ y $U(\mathfrak{g})$-módulo unitario a izquierda. Entonces si $\mu \in \mathfrak{h}^*$, la noción de espacio de peso μ, $V(\mu)$, es la misma que anteriormente, es decir,

$$V(\mu) = \{v \in V : Xv = \mu(X)v \ \forall \ X \in \mathfrak{h}\},$$

Además, se sigue cumpliendo que

$$\mathfrak{g}_\alpha V(\mu) \subseteq V(\mu+\alpha) \tag{4.3}$$

con $\alpha \in \Delta$. Más aún, tenemos que

$$\mathfrak{g}\Big(\bigoplus_{\mu\in\mathfrak{h}^*} V(\mu)\Big) \subseteq \Big(\bigoplus_{\mu\in\mathfrak{h}^*} V(\mu)\Big) \tag{4.4}$$

Por otro lado definimos:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{n} &= \bigoplus_{\alpha\in\Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha \\
\mathfrak{n}^- &= \bigoplus_{\alpha\in\Delta^+} \mathfrak{g}_{-\alpha} \\
\mathfrak{b} &= \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n} \\
\delta &= \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta^+} \alpha.
\end{aligned}$$

$\mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}^-$ y $\mathfrak{b}$ son subálgebras de $\mathfrak{g}$, y además $\mathfrak{g} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{n}^-$ como suma directa de espacios vectoriales.

Un *vector de peso máximo* en V es por definición un vector $v \neq 0$ que satisface $\mathfrak{n}v = 0$. Un *módulo de peso máximo* es un $U(\mathfrak{g})$-módulo generado por un vector de peso máximo.

Proposición 4.3. *Sea M un $U(\mathfrak{g})$-módulo de peso máximo y sea v un vector de peso máximo que genera M. Supongamos que v tiene peso λ. Entonces:*

(a) $M = U(\mathfrak{n}^-)v$.

(b) $M = \bigoplus_{\mu\in\mathfrak{h}^*} M(\mu)$ *con cada* $M(\mu)$ *de dimensión finita y con dim* $M(\lambda) = 1$.

(c) Todo peso de M es de la forma $\lambda - \sum_{i=1}^{l} n_i\alpha_i$ con los α's en Π y con cada n_i un entero no negativo.

Demostración.

(a) Tenemos que $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$. Por el teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt, $U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{n}^-)U(\mathfrak{h})U(\mathfrak{n})$. Por definición de $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{n}$ tenemos que $U(\mathfrak{h})v \subseteq \mathbb{C}v$ y $U(\mathfrak{n})v = 0$. Luego, $U(\mathfrak{g})v = U(\mathfrak{n}^-)v$. Como v genera a M, entonces $M = U(\mathfrak{n}^-)v$.

(b, c) Por (4.4), $\bigoplus M(\mu)$ es invariante por $U(\mathfrak{g})$, y contiene a v. Como $M = U(\mathfrak{g})v$, entonces $M = \bigoplus M(\mu)$. Por (a), $M = U(\mathfrak{n}^-)v$, y (4.3) muestra que cualquier expresión

$$E_{-\beta_1}^{q_1} \dots E_{-\beta_k}^{q_k} v \tag{4.5}$$

con todos los $\beta_j \in \Delta^+$, es un vector de peso con peso $\mu = \lambda - q_1\beta_1 - \cdots - q_k\beta_k$, lo que implica (c). Evidentemente, hay sólo una cantidad finita de vectores de la forma (4.5) para los cuales $\sum q_j\beta_j$ es igual a $\sum_{i=1}^{l} k_i\alpha_i$. Por (a), el espacio generado por estos vectores es $M(\mu)$. Además, el único vector de la forma (4.5) que tiene peso $\mu = \lambda$ es v. Por lo tanto, probamos (c).

$\square$

Sea $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, y consideramos a $\mathbb{C}$ como un $U(\mathfrak{b})$-módulo a izquierda definiendo

$$\begin{array}{rcll} Hz & = & (\lambda - \delta)(H)z & \text{para} \;\; H \in \mathfrak{h}, \;\; z \in \mathbb{C} \\ Xz & = & 0 & \text{para} \;\; X \in \mathfrak{n}. \end{array}$$

Denotamos por $\mathbb{C}_{\lambda-\delta}$ a $\mathbb{C}$ considerado como un $U(\mathfrak{b})$-módulo a izquierda. Por otro lado, el álgebra $U(\mathfrak{g})$ es en sí misma un $U(\mathfrak{b})$-módulo a izquierda y un $U(\mathfrak{g})$-módulo a derecha bajo la multiplicación. Definimos el **módulo de Verma** como

$$V(\lambda) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_{\lambda-\delta} = \frac{U(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\lambda-\delta}}{I},$$

donde I es el subespacio generado por todos los elementos de la forma $XY \otimes z - X \otimes Yz$, con $X \in U(\mathfrak{g})$, $Y \in U(\mathfrak{b})$ y $z \in \mathbb{C}_{\lambda-\delta}$.

Proposición 4.4. *Sea $\lambda \in \mathfrak{h}^*$*

(a) $V(\lambda)$ es un $U(\mathfrak{g})$-módulo de peso máximo, y es generado por $1 \otimes 1$, que tiene peso $\lambda - \delta$.

(b) La aplicación de $U(\mathfrak{n}^-)$ en $V(\lambda)$ dada por $u \longrightarrow u(1 \otimes 1)$ es uno a uno y sobre.

(c) Si M es un $U(\mathfrak{g})$-módulo de peso máximo generado por un vector de peso máximo $v \neq 0$ de peso $\lambda - \delta$, entonces existe uno y sólo un $U(\mathfrak{g})$-homomorfismo $\widetilde{\psi}$ de $V(\lambda)$ en M tal que $\widetilde{\psi}(1 \otimes 1) = v$. Este homomorfismo es sobre. Además, es uno a uno si y sólo si $u \neq 0$ en $U(\mathfrak{n}^-)$ implica $u(v) \neq 0$ en M.

Demostración.

(a) Claramente $V(\lambda) = U(\mathfrak{g})(1 \otimes 1)$. Además

$$\begin{array}{rcll} H(1 \otimes 1) & = & H \otimes 1 = 1 \otimes H(1) = (\lambda - \delta)H(1 \otimes 1) & \text{para} \;\; H \in \mathfrak{h} \\ X(1 \otimes 1) & = & X \otimes 1 = 1 \otimes X(1) = 0 & \text{para} \;\; X \in \mathfrak{n}. \end{array}$$

Luego $1 \otimes 1$ es un vector de peso máximo de peso $\lambda - \delta$.

(b) Por el teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt tenemos que $U(\mathfrak{g}) \cong U(\mathfrak{n}^-) \otimes_{\mathbb{C}} U(\mathfrak{b})$, y este isomorfismo es un isomorfismo de $U(\mathfrak{n}^-)$-módulos a izquierda. De esta manera obtenemos una cadena de isomorfismos de $U(\mathfrak{n}^-)$-módulos a izquierda

$$\begin{array}{rcl} V(\lambda) & = & U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{C} \cong (U(\mathfrak{n}^-) \otimes_{\mathbb{C}} U(\mathfrak{b})) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{C} \\ & \cong & U(\mathfrak{n}^-) \otimes_{\mathbb{C}} (U(\mathfrak{b}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{C}) \cong U(\mathfrak{n}^-) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \cong U(\mathfrak{n}^-). \end{array}$$

Luego, sigue (b)

(c) Considerar la aplicación bilineal de $U(\mathfrak{g}) \times \mathbb{C}_{\lambda-\delta}$ en M dada por $(u, z) \mapsto u(zv)$. En términos de la acción de $U(\mathfrak{b})$ sobre $\mathbb{C}_{\lambda-\delta}$, comprobamos para b en $\mathfrak{h}$ y después para b en $\mathfrak{n}$ que

$$\begin{array}{rcl} (u, b(z)) & \mapsto & u(b(z)v) = zu((b(1))v) \\ (ub, z) & \mapsto & ub(zv) = zub(v) = zu((b(1))v). \end{array}$$

Por la propiedad de la aplicación universal, existe una y sólo una aplicación lineal

$$\widetilde{\psi} : U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_{\lambda-\delta} \longrightarrow M$$

tal que $u(zv) = \widetilde{\psi}(u \otimes z)$ para todo $u \in U(\mathfrak{g})$ y $z \in \mathbb{C}$, es decir, tal que $u(v) = \widetilde{\psi}(u(1 \otimes 1))$. Esta condición implica que $\widetilde{\psi}$ es un $U(\mathfrak{g})$-homomorfismo y que lleve $1 \otimes 1$ a v. Esto muestra la existencia y la unicidad. Además, claramente es sobre.

Sea $u \in U(\mathfrak{n}^-)$. Si $u(v) = 0$ con $u \neq 0$, entonces $\widetilde{\psi}(u(1 \otimes 1)) = 0$, mientras que $u(1 \otimes 1) \neq 0$ por (b). Por lo tanto, $\widetilde{\psi}$ no es uno a uno. Recíprocamente, si $\widetilde{\psi}$ no es uno a uno, entonces por Proposición 4.3a existe $u \in U(\mathfrak{n}^-)$ con $u \neq 0$ y $\widetilde{\psi}(u \otimes 1) = 0$. Entonces

$$u(v) = u(\widetilde{\psi}(1 \otimes 1)) = \widetilde{\psi}(u(1 \otimes 1)) = \widetilde{\psi}(u \otimes 1) = 0.$$

□

Proposición 4.5. *Sea λ en $\mathfrak{h}^*$, y sea $V(\lambda)_+ = \bigoplus_{\mu \neq \lambda-\delta} V(\lambda)_\mu$. Entonces todo $U(\mathfrak{g})$-submódulo propio de $V(\lambda)$ está contenido en $V(\lambda)_+$. Consecuentemente, la suma S de todos los $U(\mathfrak{g})$-submódulos propios es un $U(\mathfrak{g})$-submódulo propio, y $L(\lambda) = V(\lambda)/S$ es un $U(\mathfrak{g})$- módulo irreducible. Más aún, $L(\lambda)$ es un módulo de peso máximo de peso máximo $\lambda - \delta$.*

Demostración. Si N es un $U(\mathfrak{h})$-submódulo, entonces $N = \bigoplus_\mu (N \cap V(\lambda)_\mu)$. Como $V(\lambda)_{\lambda-\delta}$ tiene dimensión 1 y genera $V(\lambda)$ (proposición anterior), el término $\lambda - \delta$ debe ser 0 en la suma para N, si N es propio. Luego, $N \subseteq V(\lambda)_+$. Como S es propio maximal, $L(\lambda) = V(\lambda)/S$ es irreducible. La imagen de $1 \otimes 1$ en $L(\lambda)$ no es 0, es anulado por $\mathfrak{n}$, y $\mathfrak{h}$ actúa con peso $\lambda - \delta$. Luego, $L(\lambda)$ es un módulo de peso máximo de peso máximo $\lambda - \delta$. □

Teorema 4.6. *Supongamos que $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ es una funcional lineal entera dominate a valores reales sobre $\mathfrak{h}_0$. Entonces el módulo irreducible de peso máximo $L(\lambda + \delta)$ es una representación irreducible de dimensión finita de $\mathfrak{g}$ con peso máximo λ.*

El teorema 4.6 completa la demostración del Teorema del Peso Máximo. Para demostrarlo necesitamos dos lemas.

Lema 4.7. *En $U(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$, $[e, f^n] = nf^{n-1}(h - 1(n - 1))$.*

Demostración. Sea

$$\begin{aligned} Lf &= \text{multiplicar a izquierda por } f \text{ en } U(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})) \\ Rf &= \text{multiplicar a derecha por } f \\ \operatorname{ad} f &= Lf - Rf. \end{aligned}$$

Entonces $Rf = Lf - \operatorname{ad} f$, los términos de la derecha conmutan. Por el desarrollo binomial

$$\begin{aligned} (Rf)^n e &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{k} (Lf)^{n-j}(-\operatorname{ad} f)^j e \\ &= (Lf)^n e + n(Lf)^{n-1}(-\operatorname{ad} f)e + \frac{n(n-1)}{2}(Lf)^{n-2}(-\operatorname{ad} f)^2 e \end{aligned}$$

ya que $(\operatorname{ad} f)^3 = 0$. Luego, tenemos que

$$\begin{aligned} (Rf)^n e &= (Lf)^n e + nf^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2} f^{n-2}(-2f) \\ &= (Lf)^n e + nf^{n-1}(h-(n-1)). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$[e, f^n] = (Rf)^n e - (Lf)^n e = nf^{n-1}(h-(n-1)).$$

□

Lema 4.8. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie semisimple compleja, sea $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, sea α una raíz simple, y supongamos que $m = 2\langle\lambda,\alpha\rangle/|\alpha|^2$ es un entero positivo. Sea $v_{\lambda-\delta}$ el generador de $V(\lambda)$, y sea M el $U(\mathfrak{g})$-submódulo generado por $(F_\alpha)^m v_{\lambda-\delta}$, donde F_α es un vector no nulo con raíz $-\alpha$. Entonces M es isomorfo a $V(s_\alpha\lambda)$.*

Demostración. El vector $v = (F_\alpha)^m v_{\lambda-\delta}$ es no nulo por Proposición 4.4b. Como $s_\alpha\lambda = \lambda - m\alpha$, v está en $V(\lambda)_{\lambda-\delta-m\alpha} = V(\lambda)_{s_\alpha\lambda-\delta}$. Entonces el resultado sigue de la Proposición 4.4c si demostramos que $E_\beta v = 0$ para cualquier raíz simple β. Para $\beta \neq \alpha$, $[E_\beta, E_\alpha] = 0$ pues $\beta - \alpha$ no es una raíz. Luego

$$E_\beta v = E_\beta(E_{-\alpha})^m v_{\lambda-\delta} = (E_{-\alpha})^m E_\beta v_{\lambda-\delta} = 0.$$

Para $\beta = \alpha$, consideramos E_α , F_α y H_α tal que la subálgebra generada por ellos es isomorfa a $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, y recordemos que $[E_\alpha, F_\alpha] = 2|\alpha|^{-2}H_\alpha$. Entonces, aplicando el lema anterior tenemos que

$$\begin{aligned} E_\alpha(F_\alpha)^m v_{\lambda-\delta} &= [E_\alpha, F_\alpha^m] v_{\lambda-\delta} \\ &= m(F_\alpha)^{m-1}(2|\alpha|^{-2}H_\alpha - (m-1))v_{\lambda-\delta} \\ &= m\left(\frac{2\langle\lambda-\delta,\alpha\rangle}{|\alpha|^2} - (m-1)\right)F_\alpha^{m-1}v_{\lambda-\delta} \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Demostración. (Del Teorema 4.6) Sea $v_\lambda \neq 0$ un vector de peso máximo en $L(\lambda+\delta)$, con peso λ. Vamos a proceder en tres pasos.

Primero mostramos: Para cada raíz simple α, $F_\alpha^n v_\lambda = 0$ para todo n suficientemente grande, con F_α un vector raíz no nulo de raíz $-\alpha$. En efecto, para

$$n = \frac{2\langle \lambda+\delta, \alpha\rangle}{|\alpha|^2}$$

que es positivo por Proposición 3.24, el elemento $F_\alpha^n(1\otimes 1)$ de $V(\lambda+\delta)$ vive en un $U(\mathfrak{g})$-submódulo propio, de acuerdo al Lema anterior, y por lo tanto en el submódulo S de la Proposición 4.5. Luego, $F_\alpha^n v_\lambda = 0$ en $L(\lambda+\delta)$.

Segundo mostramos: El conjunto de pesos es estable bajo el grupo de Weyl $W = W(\Delta)$. En efecto, sea α una raíz simple, y sea $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_\alpha$ la copia de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ generada por $\{H_\alpha, E_\alpha, F_\alpha\}$; sea $v_i = F_\alpha^i v_\lambda$ y sea n el mayor entero tal que $v_n \neq 0$. Luego, $\mathbb{C}v_0 + \cdots + \mathbb{C}v_n$ es estable bajo $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_\alpha$. La suma de todos los $U(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_\alpha)$-submódulos de dimensión finita contiene a $v_0 = v_\lambda$, y afirmamos que es invariante por $\mathfrak{g}$. En efecto, si T es un $U(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_\alpha)$-submódulo de dimensión finita, entonces

$$\mathfrak{g}T = \left\{ \sum Xt : X \in \mathfrak{g} \text{ y } t \in T \right\}$$

es de dimensión finita, y para $Y \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_\alpha$ y $X \in \mathfrak{g}$

$$YXt = XYt + [Y,X]t = Xt' + [Y,X]t \ \in \mathfrak{g}T.$$

Luego, $\mathfrak{g}T$ es invariante por $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_\alpha$, y queda demostrada la afirmación.

Como la suma de todos los $U(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_\alpha)$-submódulos de dimensión finita de $L(\lambda+\delta)$ es $\mathfrak{g}$-invariante, la irreducibilidad de $L(\lambda+\delta)$ implica que esta suma es todo $L(\lambda+\delta)$. Luego es la suma directa de $U(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_\alpha)$-submódulos irreducibles de dimensión finita, por Proposición 2.8.

Sea μ un peso, y sea $t \neq 0$ en V_μ. Acabamos de demostrar que t vive en una suma directa finita de $U(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_\alpha)$-submódulos irreducibles de dimensión finita. Escribimos $t = \sum_{i\in I} t_i$ con t_i en un $U(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_\alpha)$-submódulo T_i no nulos. Entonces

$$\sum H_\alpha t_i = H_\alpha t = \mu(H_\alpha)t = \sum \mu(H_\alpha) t_i$$

y entonces

$$\frac{2H_\alpha}{|\alpha|^2} t_i = \frac{2\langle \mu, \alpha\rangle}{|\alpha|^2} t_i \qquad \text{para cada } i \in I.$$

Si $\langle \mu,\alpha\rangle > 0$, sabemos que $(F_\alpha)^{2\langle\mu,\alpha\rangle/|\alpha|^2} t_i \neq 0$. Por lo tanto, $(F_\alpha)^{2\langle\mu,\alpha\rangle/|\alpha|^2} t \neq 0$, y vemos que

$$\mu - \frac{2\langle \mu, \alpha\rangle}{|\alpha|^2}\alpha = s_\alpha \mu$$

es un peso. Por otro lado, si $\langle \mu,\alpha\rangle < 0$, sabemos $(E_\alpha)^{-2\langle\mu,\alpha\rangle/|\alpha|^2} t_i \neq 0$. Por lo tanto, $(E_\alpha)^{-2\langle\mu,\alpha\rangle/|\alpha|^2} t \neq 0$, y además

$$\mu - \frac{2\langle \mu, \alpha\rangle}{|\alpha|^2}\alpha = s_\alpha \mu$$

es un peso. Si $\langle \mu, \alpha \rangle = 0$, entonces $s_\alpha \mu = \mu$. En cualquier caso, $s_\alpha \mu$ es un peso. Por lo tanto, el conjunto de pesos es estable bajo cada reflexión s_α para α simple, y por la Proposición 3.22 el conjunto de pesos es estable por W.

Tercero mostramos: El conjunto de pesos de $L(\lambda+\delta)$ es finito, y $L(\lambda+\delta)$ es de dimensión finita. En efecto, por el Teorema 3.23 cualquier funcional lineal sobre $\mathfrak{h}_0$ es W conjugada a una dominante. Como el conjunto de pesos es estable bajo W, el número de pesos es a lo sumo $|W|$ veces el número de pesos dominantes, que son de la forma $\lambda - \sum_{i=1}^{l} n_i \alpha_i$ por Proposición 4.3c. Cada una de estas formas dominantes deben satisfacer

$$\langle \lambda, \delta \rangle \geq \sum_{i=1}^{l} n_i \langle \alpha_i, \delta \rangle$$

y la Proposición 3.24 implica que $\sum n_i$ es acotado; luego el número de pesos dominantes es finito. Por lo tanto $L(\lambda + \delta)$ es de dimensión finita por Proposición 4.3b. $\square$

Capítulo 5

Grupos de Lie compactos

En este capítulo aplicaremos los resultados obtenidos a los grupos de Lie compactos.

5.1. Álgebras de Lie compactas

Definición 5.1. Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie real. Decimos que $\mathfrak{g}$ es una *álgebra de Lie compacta* si el grupo $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ es compacto.

Proposición 5.2. *El álgebra de Lie de un grupo de Lie compacto es compacta.*

Demostración. Si G un grupo de Lie compacto, entonces $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(G)$ es también compacto. Los grupos $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(G)$ y $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ son ambos subgrupos de Lie (conexos) de $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ con la misma álgebra de Lie $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$. Luego son isomorfos como grupos de Lie. Por lo tanto, $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ es compacto. □

Proposición 5.3. *Sea G un grupo de Lie compacto y sea $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. Entonces el espacio vectorial real $\mathfrak{g}$ admite un producto interno $(\cdot\,,\cdot)$ que es invariante por $Ad(G)$, es decir, $(Ad(g)u, Ad(g)v) = (u, v)$ para todo $g \in G$. Relativo a este producto interno, los miembros de $Ad(G)$ actúan por transformaciones ortogonales; y los miembros de $ad(\mathfrak{g})$ actúan por transformaciones antisimétricas.*

Demostración. Caso particular del Teorema 5.12. □

Corolario 5.4. *Si G es un grupo de Lie compacto, entonces su álgebra de Lie se descompone como $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, donde $\mathfrak{z}$ es el centro de $\mathfrak{g}$, y $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ es semisimple.*

Demostración. Sea $(\cdot\,,\cdot)$ el producto interno definido en la proposición anterior. Los subespacios invariantes de $\mathfrak{g}$ por $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ son ideales de $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{a}$ es un ideal, entonces $\mathfrak{a}$ es un subespacio invariante. $\mathfrak{a}^{\perp}$ relativo a este producto interno es un subespacio invariante, y por lo tanto, es un ideal. Luego $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^{\perp}$. Por lo tanto, tomando $\mathfrak{a} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, sale el colorario. □

Corolario 5.5. *Si G es un grupo de Lie compacto, entonces la forma de Killing de $\mathfrak{g}$ es semidefinida negativa.*

Demostración. Consideramos el producto interno definido en la Proposición 5.3. Por la misma proposición, $\operatorname{ad} X$ es una transformación antisimétrica para $X \in \mathfrak{g}$. Los autovalores de $\operatorname{ad} X$ son, por lo tanto, imaginarios puros, por lo que los autovalores de $(\operatorname{ad} X)^2$ son ≤ 0. Si B es la forma de Killing de $\mathfrak{g}$, entonces $B(X, X) = tr((\operatorname{ad} X)^2)$ es ≤ 0. □

Definición 5.6. Decimos que un grupo de Lie G es *semisimple* si Lie(G) es semisimple. Si G es compacto, esto es equivalente a decir que $\mathfrak{z} = 0$.

Corolario 5.7. *Si G es un grupo de Lie compacto semisimple, entonces la forma de Killing de $\mathfrak{g}$ es definida negativa.*

Demostración. Existe un producto interno tal que cada $\operatorname{ad} X$ es antisimétrica. Luego

$$-B(X, X) = -tr(\operatorname{ad}(X) \operatorname{ad}(X)) = tr(\operatorname{ad}(X)^t \operatorname{ad}(X)) \geq 0$$

Escribiendo $\operatorname{ad} X$ en una base ortonormal, $tr(\operatorname{ad}(X)^t \operatorname{ad}(X)) > 0$ salvo que $\operatorname{ad} X \equiv 0$. Pero $\operatorname{ad} X = 0$ implica que $X \in \mathfrak{z}$. Como $\mathfrak{g}$ es semisimple, su centro es cero. Luego $X = 0$. Por lo tanto, B es definida negativa. □

5.2. Toros Maximales

$\mathbb{T}$ denotará el espacio cociente $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ con su estructura natural de grupo.

Definición 5.8. Un *toro* en un grupo de Lie G es un subgrupo T de G isomorfo a $\mathbb{T}^k$ para algún entero positivo k. Un toro maximal es un toro T tal que si T' es otro toro con $T \subset T'$, entonces $T = T'$.

Proposición 5.9. *Sea G un grupo de Lie compacto. Entonces los toros maximales son exactamente los subgrupos correspondientes a las subálgebras abelianas maximales del álgebra de Lie de G.*

Demostración. Sea T un toro maximal y $\mathfrak{t}_0$ su álgebra de Lie. Como T es abeliano, entonces $\mathfrak{t}_0$ es abeliana. Sea $\mathfrak{h}_0$ una subálgebra abeliana estrictamente mayor que $\mathfrak{t}_0$. El subgrupo H correspondiente a $\mathfrak{h}_0$ es abeliano y contiene estrictamente a T. Por lo tanto, $\overline{H}$ es un toro que contiene estrictamente a T. Contradicción.

Recíprocamente, si $\mathfrak{t}_0$ es una subálgebra abeliana maximal de $\mathfrak{g}_0$, entonces el correspondiente subgrupo T es abeliano. Si T no fuese cerrado, entonces $\overline{T}$ tiene un álgebra de Lie estrictamente mayor que $\mathfrak{t}_0$, en contradicción con la maximilidad. Por lo tanto, T es cerrado y es un toro maximal. □

Dado un grupo de Lie compacto, puede haber más de un toro maximal. Sin embargo, existe un resultado que dice que los toros maximales son conjugados unos a otros. Como para el Teorema del Peso Máximo este resultado no es estrictamente necesario, no será demostrado.

5.3. Representaciones de Grupos de Lie compactos

Definición 5.10. Una representación compleja de G es un par (V, ψ) donde V es un espacio vectorial complejo y $\psi : G \longrightarrow GL(V)$ es un homomorfismo de grupos de Lie.

Dada una representación compleja (V, ψ) de dimensión finita de un grupo de Lie compacto G, induce un homomorfismo de grupos de Lie $\psi' : G \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$. Llamaremos a ψ' representación matricial de G.

Definición 5.11. Si (V, ψ) es una representación compleja de G, un producto interno Hermitiano de $V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$, $(u, v) \longrightarrow \langle u, v\rangle$ se dice *G-invariante* si $\langle \psi(g)u, \psi(g)v\rangle = \langle u, v\rangle$ para todo $g \in G$. Una representación con un producto interno G-invariante se denomina *representación unitaria*.

Si eligimos una base ortonormal de un espacio vectorial V de dimensión finita de una representación unitaria, entonces la representación matricial es un homomorfismo de $G \longrightarrow U(n)$. Recíprocamente, cualquier homomorfismo continuo de estos define una representación unitaria sobre $\mathbb{C}^n$ con su producto interno usual.

Teorema 5.12. *Sea (V, ψ) una representación de un grupo de Lie compacto G. Entonces V posee un producto interno G-invariante.*

Demostración. Sea $(\cdot\, , \cdot) : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ un producto interno en V y definimos

$$\langle u, v\rangle = \int_G (\psi(g)u, \psi(g)v)\ dg$$

donde la integral es la de Haar invariante a izquierda y normalizada. Entonces, este producto es lineal respecto de u, lineal conjugado repecto de v, es G-invariante pues la integral es invariante a izquierda, y es definido positivo porque la integral de una función continua positiva es positiva. Luego, $\langle\cdot\, , \cdot\rangle$ es un producto interno G-invariante en V. □

Definición 5.13. Sea (V, ψ) una representación de G. Entonces definimos

- $U \subset V$ se dice *invariante* por ψ si $\psi(U) \subseteq U$.
- La representación se llama *irreducible* si $V \neq 0$ y los únicos subespacios invariantes son 0 y V.
- φ se dice *completamente reducible* si es suma directa de representaciones irreducibles, es decir, $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_j$ con U_i subespacios invariantes y $\psi|_{U_i}$ irreducible.

Teorema 5.14. *Toda representación irreducible de un grupo de Lie compacto es de dimensión finita.*

Observación 5.15. Para la demostración de este teorema usamos este resultado: La 1-esfera S de un espacio prehilbert V es compacta sii V es de dimensión finita. Más generalmente, un subconjunto C de S está contenido en un compacto sii el espacio generado por C es de dimensión finita.

Demostración. Sea (V, ψ) una representación irreducible de un grupo de Lie compacto G. Sea $v \in V$ un elemento no nulo. Consideremos el subespacio generado por $\psi(G)v$. Como la representación es irreducible, $\psi(G)v = V$. Consideramos en V un producto interno G-invariante y tomamos v de norma 1. $\psi(G)v$ está contenido en la esfera de radio 1 de V, y además es un compacto. Pero esto implica que la dimensión de V es finita. □

Proposición 5.16. *Sea G un grupo de Lie compacto y sea (V, ψ) una representación. Si U es un subespacio de V, invariante por ψ, entonces existe un subespacio W de V tal que es invariante por ψ y $V = U \oplus W$. Más aún, toda representación de G es completamente reducible.*

Demostración. Elegimos un producto interno G-invariante en V. Sea W el complemento ortogonal a U respecto de este producto interno. Claramente W es invariante por ψ y se cumple que $V = U \oplus W$. Para demostrar que la representación es completamente reducible, hacemos inducción en la dimensión de V. Si la dim $V = 1$, no tenemos nada que probar. Si la dim $V = 2$, es inmediata. Supongamos que la dim $V = n$, y sea U un subespacio invariante. Como la dim $U <$ dim V, y $(U, \psi|_U)$ es una representación de G, por hipótesis inductiva, esta representación es completamente reducible. Por otro lado, sea W el complemento de U respecto del producto interno en V. $(W, \psi|_W)$ es una representación completamente reducible pues la dim $W <$ dim V. Como $V = U \oplus W$, la representación (V, ψ) es completamente reducible. □

Proposición 5.17. *Una representación irreducible de una grupo de Lie abeliano es de dimensión uno.*

Demostración. Sea (V, ψ) una representación irreducible de un grupo de Lie abeliano G. Como G es abeliano, entonces por el lema de Schur, $\psi(g) = \lambda(g)Id$, con $\lambda(g) \in \mathbb{C}$, Id la identidad de V, para todo $g \in G$. Entonces todo subespacio de V es invariante por la representación. Por la irreducibilidad de la representación, se sigue que la dim $V = 1$. □

Definición 5.18. Una representación irreducible de T se denomina *carácter*.

Un carácter de S^1 puede ser elegido unitario y es un homomorfismo

$$\psi : S^1 \longrightarrow U(1).$$

Dado $n \in \mathbb{Z}$, la aplicación $z \longrightarrow z^n$ es una carácter de S^1. Más aún, todo carácter es de esta forma.

Como $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$ es abeliano, las representaciones irreducibles son de dimensión 1. Por lo tanto, $V = \mathbb{C}$. Por otro lado, como $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$ es compacto, la representación matricial es un homomorfismo de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n \longrightarrow U(1) = S^1$. Como $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$ es producto directo de S^1, es claro que los caracteres del toro son las representaciones $\tau_k : (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n \longrightarrow S^1$ dada por

$$x = (x_1, \dots, x_n) \longrightarrow x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}, \qquad \text{para cada } \; k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n.$$

Sea G un grupo de Lie compacto y semisimple. Sea $\mathfrak{g}_0$ su álgebra de Lie. Fijamos un toro maximal T, y sea $\mathfrak{t}_0$ su álgebra de Lie. Sabemos que $\mathfrak{g}_0$ es semisimple y $\mathfrak{t}_0$ es una subálgebra abeliana maximal. Sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{t}$ las complexificaciones de $\mathfrak{g}_0$ y de $\mathfrak{t}_0$, respectivamente.

El álgebra $\mathfrak{t}$ es una subálgebra abeliana maximal de $\mathfrak{g}$. Por otro lado, los miembros de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{t}_0)$ son diagonalizables sobre $\mathbb{C}$ por Proposición 5.3, y por lo tanto, los miembros de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$ son diagonalizables. Luego, $\mathfrak{t}$ es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$.

Consideremos las descomposición raíz de $\mathfrak{g}$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{t})} \mathfrak{g}_\alpha \tag{5.1}$$

Sea $(\cdot\,,\cdot)$ el producto interno sobre $\mathfrak{g}_0$ obtenido el Proposición 5.3. Extendemos este producto interno a un producto interno hermitiano sobre $\mathfrak{g}$. La familia $\mathrm{Ad}(T)$ es una familia conmutativa de operadores unitarios sobre $\mathfrak{g}$. Entonces, el espacio $\mathfrak{g}$ se descompone en autoespacios simultáneos para $\mathrm{Ad}(T)$, y esa descomposición es (5.1).

La acción de $\mathrm{Ad}(T)$ sobre los espacios $\mathfrak{g}_\alpha$ es una representación de T de dimensión 1, y necesariamente de la forma

$$Ad(t)X = \xi_\alpha(t)X \qquad \text{para } t \in T$$

donde $\xi_\alpha : T \longrightarrow S^1$ es un homomorfismo continuo de T en el grupo de los números complejos de módulo 1, es decir, ξ_α es un carácter del toro. En efecto,

$$(X, X) = (Ad(t)X, Ad(t)X) = (\xi_\alpha(t)X, \xi_\alpha(t)X) = |\xi_\alpha(t)|^2(X, X).$$

Por otro lado, la diferencial de ξ_α es $\alpha|_{\mathfrak{t}_0}$. En particular, $\alpha|_{\mathfrak{t}_0}$ es a valores imaginarios. En efecto, si $x \in \mathfrak{t}_0$

$$\alpha(x)(y, y) = (\alpha(x)y, y) = (ad(x)y, y) = -(y, ad(x)y) = -\overline{\alpha(x)}(y, y)$$

lo que implica que $\alpha(x) = -\overline{\alpha(x)}$. Luego, $\alpha|_{\mathfrak{t}_0}$ es a valores imaginarios. Por lo tanto, las raíces son a valores reales sobre $i\mathfrak{t}_0$. Definimos $\mathfrak{t}_\mathbb{R} = i\mathfrak{t}_0$; y esta es una forma real de $\mathfrak{t}$ sobre la cual todas las raíces son a valores reales. La forma de Killing B, que es definida negativa sobre $\mathfrak{t}_0$, induce una forma definida positiva sobre $\mathfrak{t}_\mathbb{R}$. Para $\lambda \in \mathfrak{t}_\mathbb{R}^*$, sea H_λ el elemento de $\mathfrak{t}_\mathbb{R}$ tal que

$$\lambda(H) = B(H, H_\lambda) \qquad \text{para } H \in \mathfrak{t}_\mathbb{R}.$$

La transformación resultante $\lambda \longrightarrow H_\lambda$ es un isomorfismo de espacio vectorial de $\mathfrak{t}_\mathbb{R}^*$ con $\mathfrak{t}_\mathbb{R}$. El producto interno sobre $\mathfrak{t}_\mathbb{R}$ induce un producto interno sobre $\mathfrak{t}_\mathbb{R}^*$, denotado por $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$.

Consideremos el conjunto Δ de las raíces de $\mathfrak{g}$. Cada raíz α tiene asociado un carácter del toro ξ_α que satisface

$$(d\xi_\alpha)_e = \alpha|_{\mathfrak{t}_o}$$

o equivalentemente,

$$\xi_\alpha(\exp H) = e^{\alpha(H)} \qquad \forall\ H \in \mathfrak{t}_0.$$

Proposición 5.19. *Si $\lambda \in \mathfrak{t}^*$, las siguientes condiciones sobre λ son equivalentes:*

(i) Cuando $H \in \mathfrak{t}_0$ satisface $\exp H = 1$, entonces $\lambda(H)$ está en $2\pi i\mathbb{Z}$.

(ii) Existe un carácter ξ_λ de T con $\xi_\lambda(\exp H) = e^{\lambda(H)}$ para todo $H \in \mathfrak{t}_0$.

Además, todas las raíces tienen estas propiedades. Y si λ tiene estas propiedades, entonces λ es a valores reales sobre $\mathfrak{t}_\mathbb{R}$.

Demostración. Si $\mathbb{R}^n$ el cubrimiento universal del grupo T, entonces $\exp : \mathfrak{t}_0 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo y $\widetilde{\xi_\lambda}(\exp\ H) = e^{\lambda(H)}$ es un homomorfismo bien definido de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{C}^\times$. Luego, $\widetilde{\xi_\lambda}$ desciende a T si y sólo si se cumple (i), y por lo tanto (i) y (ii) son equivalentes. Si $\widetilde{\xi_\lambda}$ desciende a ξ_λ sobre T, entones ξ_λ tiene una imagen compacta en $\mathbb{C}^\times$, y esta imagen es el círculo unidad. Luego se sigue que λ es a valores reales sobre $\mathfrak{t}_\mathbb{R}$. □

Vamos a denotar

$$\Lambda_W = \{\lambda \in \mathfrak{t}^* : \exists\ \xi_\lambda \ \text{ carácter tal que } \ \xi_\alpha(\exp\ H) = e^{\alpha(H)}\ \forall\ H \in \mathfrak{t}_0\}.$$

Proposición 5.20. *Si $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ está en Λ_W, entonces λ satisface que*

$$\frac{2\langle\lambda,\alpha\rangle}{|\alpha|^2} \qquad \text{está en } \mathbb{Z} \text{ para cada } \alpha \in \Delta.$$

En particular, λ es un peso entero.

Demostración. La barra denotará la conjugación de $\mathfrak{g}$ con respecto a $\mathfrak{g}_0$, y extendemos B a una forma bilineal sobre $\mathfrak{g}$. Fijamos $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ y sea E_α un vector raíz. Como $B(E_\alpha, \overline{E_\alpha}) < 0$, podemos normailzar E_α de modo que $B(E_\alpha, \overline{E_\alpha}) = -2/|\alpha|^2$. Escribimos $E_\alpha = X_\alpha + iY_\alpha$, con X_α y Y_α en $\mathfrak{g}_0$. Sea $Z_\alpha = -i|\alpha|^{-2}H_\alpha \in \mathfrak{g}_0$. Luego X_α, Y_α y Z_α están en $\mathfrak{g}_0$, y se cumple

$$[Z_\alpha, X_\alpha] = \frac{i}{|\alpha|^2}[X_\alpha, H_\alpha] = \frac{i}{|\alpha|^2}(-i\alpha(H_\alpha)Y_\alpha) = Y_\alpha$$

y

$$[X_\alpha, Y_\alpha] = \frac{1}{2i}\frac{2}{|\alpha|^2}H_\alpha = Z_\alpha.$$

Análogamente

$$[Y_\alpha, Z_\alpha] = \frac{i}{|\alpha|^2}[H_\alpha, \frac{1}{2i}(E_\alpha - \overline{E_\alpha})] = \frac{1}{2|\alpha|^2}\alpha(H_\alpha)(E_\alpha + \overline{E_\alpha}) = X_\alpha.$$

Mediante la correspondencia

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow X_\alpha, \qquad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow Y_\alpha, \qquad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \longleftrightarrow Z_\alpha$$

obtenemos un isomorfismo

$$\mathfrak{su}(2) \cong \mathbb{R}X_\alpha + \mathbb{R}Y_\alpha + \mathbb{R}Z_\alpha. \tag{5.2}$$

Como SU(2) es simplemente conexo, existe un homomorfismo $\Phi : SU(2) \longrightarrow G$ cuya diferencial realiza el isomorfismo (5.2). Bajo la complexificación de (5.2), $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ va a parar a $2iZ_\alpha = 2|\alpha|^{-2}H_\alpha$. Luego, $d\Phi(ih) = -2Z_\alpha = 2i|\alpha|^{-2}H_\alpha$. Por propiedad de la exponencial, tenemos que

$$1 = \Phi(1) = \Phi(\exp 2\pi ih) = \exp(d\Phi(2\pi ih)) = \exp(2\pi i(2|\alpha|^{-2}H_\alpha)).$$

Como $\lambda \in \Lambda_W$, (i) de la proposición anterior muestra que $\lambda(2\pi i(2|\alpha|^{-2}H_\alpha))$ está en $2\pi i\mathbb{Z}$. Esto quiere decir que $2\langle\lambda, \alpha\rangle/|\alpha|^2$ está en $\mathbb{Z}$. □

Combinando las Proposiciones 5.19 y 5.20, obtenemos

$$\sum_{\alpha\in\Delta} \mathbb{Z}\alpha \subseteq \Lambda_W \subseteq P(\mathfrak{g}).$$

Cada uno de estos conjuntos puede ser considerado como un grupo aditivo de $\mathfrak{t}^*_{\mathbb{R}}$.

A partir de ahora, G denotará un grupo de Lie conexo compacto y semisimple.

Proposición 5.21. *Si $\widetilde{G}$ es un cubrimiento (automáticamente finito) de G, entonces el índice del grupo Λ_W de G en el grupo Λ_W de $\widetilde{G}$ es igual al orden del núcleo de la aplicación del cubrimiento $\widetilde{G} \longrightarrow G$.*

Demostración. Por maximalidad, el centro Z_G está contenido en todo toro maximal. Combinando este hecho con la Proposición 5.19, se sigue esta proposición. □

Proposición 5.22. *Si G tiene centro trivial, entonces $\sum_{\alpha\in\Delta} \mathbb{Z}\alpha = \Lambda_W$.*

Demostración. Sea $\lambda \in \Lambda_W$. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ el sistema de raíces simples, y definimos $H_j \in \mathfrak{t}_0$ por $\alpha_i(H_j) = 2\pi i\delta_{ij}$. Si $\alpha = \sum_m n_m\alpha_m$ es una raíz y $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, entonces

$$Ad(exp\ H_j)X = e^{ad\ H_j}X = e^{\alpha(H_j)}X = e^{\sum n_m\alpha_m(H_j)}X = e^{2\pi in_j}X = X.$$

Entonces $exp\ H_j$ está en Z_G, y por lo tanto es 1. Como $\lambda \in \Lambda_W$, $\lambda(H_j)$ está en $2\pi i\mathbb{Z}$. Escribimos $\lambda = \sum c_m\alpha_m$. Evaluando ambos lados en H_j, obtenemos que $c_j 2\pi i$ está en $2\pi i\mathbb{Z}$. Por lo tanto, $c_j \in \mathbb{Z}$, lo que implica que λ es combinación lineal entera de las raíces. □

Lema 5.23. *Si ψ es una representación de dimensión finita de G y si λ es un peso de la diferencial de ψ, entonces $\lambda \in \Lambda_W$.*

Demostración. $\psi|_T$ es suma directa de subespacios invariantes de dimensión 1, con ψ_T actuando en cada subespacio por un carácter ξ_{λ_j}. Luego los pesos son los λ_j's. Como cada peso es la diferencial de un carácter de T, cada peso está en Λ_W. $\square$

Teorema 5.24. *Si G es simplemente conexo, T un toro maximal de G y $\mathfrak{t}$ la complexificación del álgebra de Lie de T, entonces todo peso de $\mathfrak{t}^*$ está en Λ_W.*

Demostración. Sea $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ un peso entero. Entonces λ es a valores reales sobre $i\mathfrak{t}_0$, y el subespacio real generado por las raíces es $(i\mathfrak{t}_0)^*$ por semisimplicidad de $\mathfrak{g}$. Por lo tanto, λ está en el subespacio real de las raíces. Por el Teorema 4.23, existe un sistema simple de raíces tal que λ es dominante. Por el Teorema del Peso Máximo, existe una representación irreducible de dimensión finita φ de $\mathfrak{g}$ con peso máximo λ. Como G es simplemente conexo, existe una representación de dimensión finita irreducible ψ de G con diferencial $\varphi|_{\mathfrak{g}_0}$. Por el lema anterior, λ está en Λ_W. $\square$

Corolario 5.25. *El orden del grupo fundamental de G es igual al índice del grupo Λ_W en el grupo de pesos enteros, es decir,*

$$\Pi_1(G) \cong P(\mathfrak{g})/\Lambda_W.$$

5.4. Teorema del Peso Máximo

Sea $\psi : G \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ una representación compleja de dimensión finita. Sea T un toro maximal y sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{t}$ las complexificaciones de las álgebras de Lie de G y T, respectivamente. Sea Δ el conjunto de raíces de $\mathfrak{g}$.

Definición 5.26. Un vector $v \in V$ es un *vector de peso máximo* si $(d\psi)_e(\mathfrak{g}_\alpha)v = 0$ para toda $\alpha \in \Delta^+$.

Teorema 5.27 (**Teorema del Peso Máximo**)**.** *Sea G un grupo de Lie conexo compacto semisimple y simplemente conexo, con álgebra de Lie complexificada $\mathfrak{g}$; sea T un toro maximal con álgebra de Lie complexificada $\mathfrak{t}$. Salvo equivalencia, las representaciones irreducibles de dimensión finita ψ de G están en correspondencia uno a uno con las funcionales lineales λ en $\Lambda(\mathfrak{g})$. La correspondencia es que λ es el peso máximo de ψ.*

Existe una versión más general de este teorema; vale para grupos de Lie G conexos compactos semisimples. La correspondencia de las representaciones irreducibles son con los funcionales lineales λ dominantes pertenecientes a Λ_W.

Demostración. Sea ψ una representación irreducible, entonces el peso máximo λ es un peso entero. Para ver que es dominante, sea φ la diferencial de ψ. Extendemos φ compleja y linealmente de $\mathfrak{g}_0$ a $\mathfrak{g}$. El peso máximo de φ es λ, que es dominate por el Teorema del Peso Máximo.

Si λ es un peso entero y dominante, por el Teorema del Peso Máximo existe una única representación irreduciblle φ_λ con peso máximo λ. Como G es simplemente conexo existe una única representación del grupo ψ_λ cuya diferencial es φ_λ. Luego, ψ_λ es irreducible de peso máximo λ. $\square$

Capítulo 6

Ejemplos

En este capítulo mostramos cómo funciona el Teorema del Peso Máximo en tres ejemplos. El primero es el álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$, el más simple después del de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. El segundo es el grupo SU(2), que ilustra el caso simplemente conexo. El tercero es el grupo $\mathrm{SO}(3) = \mathrm{SU}(2)/\mathbb{Z}_2$ que muestra el caso no simplemente conexo; veremos cuáles representaciones de su cubrimiento universal SU(2) bajan a SO(3).

6.1. Representaciones de $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$

En esta sección estudiaremos el álgebra de Lie

$$\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(3,\mathbb{C}) : \mathrm{tr}X = 0\}.$$

Esta es un álgebra de Lie semisimple de dimensión 8, y es la más chica después de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. La primera gran diferencia entre ellas es que las subálgebras de Cartan de $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ tienen dimensión 2.

Sean

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

en $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$. X_1 y X_2 son elementos semisimples del álgebra que conmutan. Sea $\mathfrak{h}$ el álgebra de Lie (compleja) generada por X_1 y X_2. Entonces $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ de dimensión 2. Por la descomposición raíz de $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$, existen 6 raíces.

Sea $\alpha \in \mathfrak{h}^* - \{0\}$. Consideremos el subespacio

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{y \in \mathfrak{g} : [x,y] = \alpha(x)y \ \ \forall\, x \in \mathfrak{h}\}.$$

Obtenemos lo siguiente

$$
\begin{array}{lcllll}
\mathfrak{g}_{\alpha_1} & = & \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \ z \in \mathbb{C} \right\} & \text{con} & \alpha_1(X_1) = 1 & \alpha_1(X_2) = 2 \\
\mathfrak{g}_{\alpha_2} & = & \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 \end{pmatrix} : \ z \in \mathbb{C} \right\} & \text{con} & \alpha_2(X_1) = -2 & \alpha_2(X_2) = -1 \\
\mathfrak{g}_{\alpha_3} & = & \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \ z \in \mathbb{C} \right\} & \text{con} & \alpha_3(X_1) = -1 & \alpha_3(X_2) = 1 \\
\mathfrak{g}_{\alpha_4} & = & \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \end{pmatrix} : \ z \in \mathbb{C} \right\} & \text{con} & \alpha_4(X_1) = -1 & \alpha_4(X_2) = -2 \\
\mathfrak{g}_{\alpha_5} & = & \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \ z \in \mathbb{C} \right\} & \text{con} & \alpha_5(X_1) = 2 & \alpha_5(X_2) = 1 \\
\mathfrak{g}_{\alpha_6} & = & \left\{ \begin{pmatrix} 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \ z \in \mathbb{C} \right\} & \text{con} & \alpha_6(X_1) = 1 & \alpha_6(X_2) = -1.
\end{array}
$$

Las raíces simples son $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ y el conjunto de raíces positivas es $\Delta^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ y tenemos que $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3$. Calculemos los pesos fundamentales asociados al sistema simple $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2\}$. Busco w_1, w_2 tal que $2\frac{\langle w_i, \alpha_j \rangle}{|\alpha_j|^2} = \delta_{ij}$. Como Π es base, $w_1 = a\alpha_1 + b\alpha_2$ y $w_2 = c\alpha_1 + d\alpha_2$. Realizando los cálculos necesarios, obtenemos que

$$
\begin{aligned}
w_1 &= \frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2 \\
w_2 &= \frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_2.
\end{aligned}
$$

Queremos encontrar todos los pesos enteros dominantes. Sea $\lambda = aw_1 + bw_2$. λ es dominante si $\langle \lambda, \alpha_j \rangle \geq 0$ para $j = 1, 2, 3$. Esto implica que a y b tienen que ser no negativos. Por otro lado, se tiene que cumplir que $2\ \frac{\langle \lambda, \alpha_j \rangle}{|\alpha_j|^2}$ sea entero para $j = 1, 2, 3$, lo que implica que a y b tienen que ser enteros. Por lo tanto, a y b tienen que ser enteros no negativos. Es decir, el conjunto de pesos que tienen asociadas representaciones irreducibles es

$$\Lambda(\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})) = \{\lambda = aw_1 + bw_2 \ : a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}.$$

Observemos que $\alpha_3 = \omega_1 + \omega_2$ es entera y dominante. Entonces por el Teorema del Peso Máximo, existe una única, salvo equivalencia, representación irreducible de dimensión finita de peso máximo α_3. Por otro lado, las raíces α's son los pesos correspondienes a la representación adjunta, y α_3 es el peso máximo. Lo que implica que la adjunta es una representación irreducible de peso máximo α_3, de dimensión 8.

6.2. Representaciones de SU(2) y SO(3)

Por lo visto en el Capítulo 5, todo carácter de un toro maximal de un grupo de Lie compacto semisimple está contenido en el reticulado de pesos del álgebra de Lie asociada. Cuando el grupo es simplemente conexo, entonces todo peso en el reticulado se corresponde con un carácter. Cuando el grupo no es simplemente conexo, solo algunos pesos se corresponden con los carácteres. En este capítulo analizaremos el grupo de Lie compacto SO(3) y el de su cubrimiento universal SU(2). Veremos con este ejemplo cuáles pesos del reticulado de SU(2) se correspoden con los carácteres se SO(3).

El grupo

$$\mathrm{SO}(3) = \{A \in GL(3,\mathbb{R}) : \ \det(A) = 1 \text{ y } AA^t = I\}$$

es un grupo de Lie compacto, conexo, semisimple, no simplemente conexo de dimensión 3, con álgebra de Lie

$$\mathfrak{so}(3) = \{X \in \mathfrak{gl}(3,\mathbb{R}) : \ X = -X^t\}.$$

Es un álgebra de Lie real semisimple, que es una forma (real) compacta de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. El cubrimiento universal de SO(3) es

$$\mathrm{SU}(2) = \{A \in GL(2,\mathbb{C}) : \ \det(A) = 1 \text{ y } AA^* = I\}.$$

Es un grupo de Lie compacto, conexo, semisimple y simplemente conexo; es difeomorfo a la esfera S^3; y es isomorfo al grupo $\mathbb{H}_1$ de los cuaterniones de norma 1. Su álgebra de Lie es

$$\mathfrak{su}(2) = \{X \in \ \mathfrak{gl}(2,\mathbb{C}) : \ \text{y } X = -X^*\}.$$

Es un álgebra de Lie real, isomorfa a $\mathfrak{so}(3)$.

Consideremos el toro maximal T de S^3 definido por

$$T = \{\tau(\theta) = \cos\theta + \sin\theta i : \theta \in \mathbb{R}\}$$

Como $\mathfrak{so}(3) \cong \mathfrak{su}(2)$ es una forma real de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, se tiene que el reticulado de pesos dominantes de $\mathfrak{so}(3)$ son los enteros no negativos, es decir, para cada $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ existe una única representación irreducible de $\mathfrak{so}(3)$, salvo isomorfismo, de peso máximo n. Por lo tanto, los carácteres correspondienes de $T \in \mathrm{S}^3$ son las aplicaciones $\xi_n : T \longrightarrow \mathrm{S}^1$ dadas por $\tau \longrightarrow \tau^n$ para cada $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

La proyeción de T a SO(3) es

$$T' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ 0 & -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} : \quad \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

Sea $\mathfrak{t}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & -\gamma & 0 \end{pmatrix} : \quad \gamma \in \mathbb{R} \right\}$ el álgebra de Lie de T'. Sea $\mathfrak{t}_\mathbb{R} = i\mathfrak{t}_0$, y sea $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_\mathbb{R} \oplus i\mathfrak{t}_\mathbb{R} \cong \mathbb{C}$. Queremos ver cuales carácteres de T pasan a serlo también de T'.

Sea $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Sea $X \in \mathfrak{t}_0$ tal que $\exp(X) = I$. Esto implica que $\theta = \pi$. Luego n es un carácter de T' si $n(X) \in 2\pi \mathrm{i}\mathbb{Z}$. Por lo tanto,

$$n(X) = \mathrm{i}nX = \mathrm{i}n\pi \in 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z} \iff n \in 2\mathbb{Z}$$

Lo que implica que los carácteres asociados a los n pares no negativos se corresponden con las representaciones irreducibles del grupo SO(3).

Bibliografía

[1] T. Bröcker, T. Dieck, *Representations of Compact Lie Groups*, Spinger-Verlag, 1985.

[2] R. Goodman, N. Wallach, *Representation and Invariants of the Classical Groups*, 1998.

[3] J. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer-Verlag, 1994.

[4] A. Kirillov, *Introduction to Lie Groups and Lie Algebras*, Board, 2008.

[5] A. Knapp, *Lie Groups. Beyond an Introduction*, Birkhäuser, 1996.

[6] J. P. Serre, *Complex Semisimple Lie Algebras*, Spinger-Verlag, 2001.

[7] B. Simon, *Representation of Finite and Compact Groups*, Amarican Mathematical Society, 1996.