Categorías tensoriales: representaciones y extensiones

Luz Adriana Mejía Castaño

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía y Física como parte de los requerimientos para la obtención de grado de Doctor en Matemática de la Universidad Nacional de Córdoba.

31 de julio de 2014

Director de Tesis: ***Martín Mombelli***

Índice general

Agradecimientos

Como en todos los logros de mi vida, siempre he tenido a mis padres y a mi hermano apoyándome incondicionalmente, siempre tienen la palabra correcta para mí, no solo en los buenos momentos, también en los malos. Siempre han confiado en mí, en mis decisiones. Gracias a ellos soy la persona de hoy. Este trabajo no hubiese llegado a su fin sin el valioso apoyo del Dr. Martín Mombelli, mi director, excelente persona que conozco hace ya más de 5 años, y a quien con el paso del tiempo le tengo mucho más afecto. Me ha guiado a lo largo de este sinuoso camino, indicándome los pasos correctos y ayudándome a salir adelante cuando todo se nublaba. Siempre tengo en mente al Dr. Nicolas Andruskiewitsch, quien a lo largo de sus cursos y reuniones nos imprime a todos un especial afecto por esta disciplina, es difícil olvidar sus palabras, las llevo grabadas y siempre son motivo de orgullo.

Al llegar a Córdoba, me sentí como en casa, es una ciudad mágica, en ella he pasado de los mejores momentos de mi vida, madure como persona y como matemática. Son demasiados los nombres que vienen a mi cabeza en este momento, a todos ellos simplemente gracias.

Introducción

Una *categoría tensorial finita* es una categoría Abeliana $\Bbbk$-lineal rígida dotada de un producto tensorial y un objeto unidad, sujetos a ciertos axiomas de asociatividad, unidad y finitud.

Ejemplos básicos provienen de la teoría de representaciones de un grupo finito y, más generalmente, de las representaciones de álgebras de Hopf de dimensión finita. La ubicuidad de las categorías tensoriales finitas tanto en matemática como en física matemática hace que el problema de su clasificación sea tanto altamente interesante como difícil. Sus aplicaciones llegan a diversas áreas de la matemática: variedades topológicas de dimensión baja [**BK**], computación cuántica [**F**], [**FKLW**], [**Ki1**], [**Ki2**], teoría racional y logarítmica de campos [**FS1**], [**FS2**], mecánica estadística, teoría de subfactores [**Oc**], álgebras de Hecke afines [**B**], [**BO**], y teoría de álgebras de Hopf.

Para atacar el problema de clasificar las categorías tensoriales uno intenta construir, a partir de familias conocidas, nuevas categorías tensoriales. Una construcción estudiada en [**ENO**] es la extensión de categorías tensoriales por grupos finitos.

Sea G un grupo finito. Una *categoría tensorial G-graduada* es una categoría tensorial $\mathcal{C}$, con producto tensorial $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, dotada de una graduación $\mathcal{C} = \oplus_{g \in G} \mathcal{C}_g$ tal que

- $\otimes : \mathcal{C}_g \times \mathcal{C}_h \to \mathcal{C}_{gh}$ para todo $g, h \in G$ y
- $* : \mathcal{C}_g \to \mathcal{C}_{g^{-1}}$.

En particular $\mathcal{C}_1$ es una subcategoría tensorial de $\mathcal{C}$ y las componentes $\mathcal{C}_g$ son $\mathcal{C}_1$-bimódulos invertibles. Se dice que $\mathcal{C}$ es una *G-extensión de $\mathcal{C}_1$*. Notar que se tiene un morfismo de grupos

$$c : G \to \mathrm{BrPic}(\mathcal{C}_1), \quad g \mapsto \mathcal{C}_g.$$

Aquí $\mathrm{BrPic}(\mathcal{C}_1)$ es el llamado *grupo de Brauer-Picard* de $\mathcal{C}_1$ y es el conjunto de clases de equivalencia de $\mathcal{C}_1$-bimódulos invertibles con producto dado por el producto tensorial de Deligne.

En [**ENO**], dada una categoría tensorial $\mathcal{D}$ y un grupo finito G, se clasifican las G-extensiones de $\mathcal{D}$ en términos de un morfismo de grupos $c : G \to \mathrm{BrPic}(\mathcal{D})$ y ciertos datos cohomológicos.

Aún para ejemplos simples, el grupo de Brauer-Picard $\mathrm{BrPic}(\mathcal{D})$ y los datos cohomológicos son difíciles de calcular. Algunos cálculos del grupo de Brauer-Picard para ciertas categorías tensoriales pueden encontrarse en [**GS**], [**NR**], [**M2**]. Esto hace que la determinación explícita de la G-extensión sea un problema complicado.

Una simplificación importante de esta clasificación fue estudiada en [**G**]. El autor estudia G-extensiones donde $\mathcal{C}_g \simeq \mathcal{C}_1$ para todo $g \in G$ como $\mathcal{C}_1$-bimódulos, y se denominan *productos G-cruzados* de $\mathcal{C}_1$. En *loc. cit.* el autor obtiene el siguiente resultado:

TEOREMA 0.1. *Sea G un grupo finito y $\mathcal{D}$ una categoría tensorial finita. Los productos G-cruzados de $\mathcal{D}$ están clasificados por acciones coherentes.*

Expliquemos brevemente qué es una acción coherente de un grupo finito G en una categoría tensorial.

Una forma compacta de definir una acción coherente es la siguiente. Una acción coherente es un funtor monoidal $\rho : \underline{G} \to 2\mathrm{Out}(\mathcal{D})$ que satisface cierta condición. Aquí $\underline{G}$ es la categoría monoidal cuyos objetos son los elementos de G, las flechas son identidades y el producto tensorial es el producto del grupo. La categoría monoidal $2\mathrm{Out}(\mathcal{D})$ es la categoría de clases de isomorfismos de equivalencias monoidales $F : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$, las flechas entre dos funtores son clases de equivalencias de isomorfismos pseudo-naturales y el producto tensorial está inducido por la composición. Esta categoría proviene de una 2-categoría de autoequivalencias exteriores de $\mathcal{D}$.

Expliquemos más en detalle la definición de acción coherente. Una acción coherente es una colección $((a_*, \xi^a), (U_{a,b}, \sigma^{a,b}), \gamma_{abc})_{a,b,c \in G}$ donde:

- $(a_*, \xi^a) : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ son autoequivalencias monoidales, con estructuras monoidales dadas por
$$\xi^a_{X,Y} : a_*(X \otimes Y) \to a_*(X) \otimes a_*(Y), \quad X, Y \in \mathcal{D};$$
- objetos invertibles $U_{a,b} \in \mathcal{C}$;
- isomorfismos naturales
$$\sigma^{a,b}_X : a_* b_*(X) \otimes U_{a,b} \to U_{a,b} \otimes (ab)_* X, \quad X \in \mathcal{D};$$
- isomorfismos $\gamma_{a,b,c} : a_*(U_{b,c}) \otimes U_{a,bc} \to U_{a,b} \otimes U_{ab,c}$,

que deben satisfacer ciertos axiomas de compatibilidad.

El presente trabajo esta dedicado a la construcción explícita de acciones coherentes de un grupo finito en la categoría Comod(H) de corepresentaciones de dimensión finita de un álgebra de Hopf de dimensión finita H. Se muestran ejemplos concretos cuando dicho grupo es el grupo cíclico de orden 2 y H es un álgebra de supergrupo. *A fortiori* se construyen explícitamente ejemplos nuevos de categorías tensoriales finitas no semisimples que aparecen como productos G-cruzados. Se calcula la dimensión de Frobenius-Perron de dichas categorías y se demuestra que ellas provienen de representaciones de álgebras cuasi-Hopf. La mayoría de los resultados de esta tesis provienen de los trabajos [**FMM**], [**MM**].

En el caso particular que la categoría tensorial es Comod(H), para H un álgebra de Hopf, los funtores tensoriales

$$\{(a_*, \xi^a) : \mathrm{Comod}(H) \to \mathrm{Comod}(H)\}_{a \in G}$$

forman un subgrupo del grupo BiGal(H) de clases de isomorfismos de objetos H-biGalois. Para la determinación de acciones coherentes , entonces debemos calcular el grupo BiGal(H). Esta tarea solo había sido realizada para ciertas álgebras de Hopf, ver [**S1**], [**S2**], [**S3**], [**S4**]. En este trabajo se desarrolla una técnica que permite el cálculo de este grupo para diversas álgebras de Hopf punteadas. En particular determinamos el grupo BiGal(H) para H un álgebra de supergrupo.

Los isomorfismos $\sigma^{a,b}$ son transformaciones pseudonaturales en ciertas 2-categorías. Ellas establecen una relación de equivalencia en el grupo BiGal(H). Para la determinación de estas transformaciones naturales debemos estudiar la relación de equivalencia que determinan en el grupo BiGal(H). Dicha relación de equivalencia fue obtenida en [**FMM**].

Los objetos $U_{a,b}$, al ser invertibles, deben estar en correspondencia con elementos de tipo grupo de H. En particular son de dimensión 1. En consecuencia los isomorfimos $\gamma_{a,b,c}$ son escalares no nulos que deben satisfacer una condición de 3-cociclo.

Los contenidos del trabajo son los siguientes. En el capítulo 1 y 2 se introduce toda la notación y nociones básicas que se usarán a lo largo del trabajo, con el espíritu de que el mismo sea lo más autocontenido posible. El capítulo 3 está dedicado a la clasificación de los objetos biGalois sobre las álgebras de super-grupo, vía datos compatibles. En el capítulo 4 se presentan todos los bicomódulos álgebras sobre el álgebra de Taft.

El capítulo 5 está dedicado a la definición de categoría tensorial. También se muestran propiedades generales y algunos ejemplos importantes, como las extensiones por grupos. Se introducen las dimensiones de Frobenius-Perron. En el capítulo 6 se introduce la definición de categorías módulo y bimódulo y algunos ejemplos provenientes de álgebras de Hopf. Además se da la clasificación de todos los bimódulos sobre el álgebra de Taft. Se describe de forma explícita un subgrupo del grupo $\mathrm{BrPic}(\mathrm{Rep}(T_q))$. Se espera que la determinación de dicho subgrupo ayude en la búsqueda de nuevas extensiones de la categoría $\mathrm{Rep}(T_q)$.

El capítulo 7 sigue de cerca el trabajo [**B**], introduciendo la teoría de bicategorías. En la sección 2.1 se considera la bicategoría con un solo objeto, y se da un criterio para saber si dos funtores tensoriales son equivalentes pseudo-naturalmente, resultado que forma parte del trabajo [**FMM**]. En la sección 3 se introduce la bicategoría con dos objetos. En la sección 4 se define la bicategoría de pseudo-funtores y se muestra como se puede reconstruir una categoría monoidal a partir de la 2-categoría de representaciones y un pseudo-funtor de olvido, resultado obtenido en [**N**].

El capítulo 8 sigue de cerca el trabajo [**G**], se definen sistemas cruzados en el caso específico de la categoría de corepresentaciones de un álgebra de Hopf. Los resultados de la sección 2.1 forman parte del trabajo [**MM**], donde se presentan ejemplos explícitos de C_2-extensiones de la categoría de corepresentaciones de cierta álgebra de Hopf (un álgebra de super-grupo) no-semisimple de dimensión finita.

Capítulo 1

Notación y preliminares

Denotaremos por $\Bbbk$ un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero. Muchos de los resultados son ciertos sin asumir $\Bbbk$ algebraicamente cerrado o de característica cero. En este capítulo se enuncian resultados ampliamente conocidos sobre grupos, categorías y comódulos. En particular se introduce el grupo de Grothendieck de una categoría y el producto de Deligne. La idea de estos primeros capítulos es hacer el trabajo presente lo más autocontenido posible.

La siguiente proposición es conocida como el Teorema de Frobenius-Perron, y es clave en la definición de ciertas dimensiones de categorías tensoriales.

Proposición 0.2. [**Ga**] *Sea A una matriz cuadrada con entradas no-negativas en $\Bbbk$.*

(1) A tiene un autovalor real no-negativo. El más grande autovalor real no-negativo $\lambda(A)$ de A domina los valores absolutos de los otros autovalores de A.

(2) Si A tiene entradas estrictamente positivas , entonces $\lambda(A)$ es un autovalor positivo simple, y el correspondiente autovector puede ser normalizado para que tenga entradas estrictamente positivas.

(3) Si A tiene un autovector f con entradas estrictamente positivas, entonces el correspondiente autovalor es $\lambda(A)$.

$\square$

1. Nociones de teoría de grupos

Si G es un grupo finito y $\psi \in Z^2(G, \Bbbk^\times)$ es un 2-cociclo, entonces existe otro 2-cociclo ψ' en la misma clase de cohomología de ψ tal que

$$\psi'(g,1) = \psi'(1,g) = 1, \quad \psi'(g,g^{-1}) = 1, \quad \psi'(g,h)^{-1} = \psi'(h^{-1}, g^{-1}), \tag{1}$$

para todo $g, h \in G$. De ahora en adelante, todo elemento en $Z^2(G, \Bbbk^\times)$ representará alguna clase en $H^2(G, \Bbbk^\times)$ que satisface las ecuaciones en (1).

Sea n natural, denotar por C_n el grupo cíclico de orden n y por G'_n las n-raíces primitivas de la unidad.

2. Nociones básicas de categorías

Por completitud se enuncian a continuación definiciones y notaciones necesarias sobre categorías. Las definiciones básicas de categorías, funtores y transformaciones naturales se asumirán como conocidas. El lector puede referirse a [**Mc**] para dichas nociones. Se introduce el grupo de Grothendieck de una categoría y el producto tensorial de Deligne entre categorías.

Si A es un álgebra, denotar por $\mathcal{M}_A$ la categoría de A-módulos a derecha de dimensión finita, y por ${}_A\mathcal{M}$ la categoría de módulos a izquierda de dimensión finita. Además denotar por $\mathfrak{M}_A$ la categoría de A-módulos a derecha (de dimensión arbitraria) y por ${}_A\mathfrak{M}$ la de A-módulos a izquierda. Denotar por $\mathrm{vect}_{\Bbbk}$ la categoría de $\Bbbk$-espacios vectoriales de dimensión finita. Estas categorías serán nombradas a lo largo de todo el trabajo y juegan un papel importante. Serán dotadas de más estructura en el Capítulo 5.

Dada $\mathcal{C}$ una categoría es posible construir una nueva categoría, denotada por $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ y es llamada la *categoría opuesta* donde

- $\mathrm{Obj}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$,
- si $X, Y \in \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, entonces $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$, es decir las flechas vienen dadas de intercambiar el dominio y el codominio de cada flecha en $\mathcal{C}$.

Así si $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ son flechas en $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, entonces la composición $\circ^{\mathrm{op}}$ en $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ está dada por $f \circ^{\mathrm{op}} g = g \circ f$. Es decir, se intercambia el orden de la composición. Algunos autores suelen llamarla categoría dual y la denotan por $\mathcal{C}^*$.

Definición 2.1. Un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ se dice *fiel*, respectivamente *pleno*, si para todo par de objetos X, Y de $\mathcal{C}$ la aplicación

$$F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)),$$

es inyectiva, respectivamente suryectiva. El funtor F se dice *denso* si para todo objeto $Z \in \mathcal{D}$ existe un objeto X de $\mathcal{C}$ tal que $F(X) \simeq Z$.

Decimos que dos monomorfismos $\iota_1 : X_1 \to X$ y $\iota_2 : X_2 \to X$ (en la categoría $\mathcal{C}$) son *equivalentes* si existe un isomorfismo $u : X_1 \to X_2$

que hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "\iota_1"'] & & X_2 \arrow[dl, "\iota_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

sea conmutativo. Un *subobjeto* de X es una clase de equivalencia de monomorfismos a X. Si X, Y son dos objetos, denotaremos $X \subseteq Y$ si X es un subobjeto de Y.

Dos epimorfismos $q_1 : X \to X_1$, $q_2 : X \to X_2$ son equivalentes si existe un isomorfismo $u : X_1 \to X_2$ que hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "q_1"] \arrow[dr, "q_2"'] & & X_1 \arrow[dl, "u"] \\ & X_2 & \end{tikzcd}$$

sea conmutativo. Un *cociente* de X es una clase de equivalencia de epimorfismos desde X. Un *subcociente* de un objeto X es un subobjeto de un cociente de X.

Definición 2.2. Un morfismo $f : X \to Y$ se dice *esencial* si es un epimorfismo y para todo morfismo $g : Z \to X$ tal que $f \circ g$ es epimorfismo , entonces g es epimorfismo. Un objeto P es *proyectivo* si para todo morfismo sobreyectivo $f : Y \to X$ y todo morfismo $g : P \to X$ existe un morfismo $h : P \to Y$ tal que $fh = g$. Un *cubrimiento proyectivo* de un objeto X es un par (P, f) donde $f : P \to X$ es esencial y P es un objeto proyectivo.

2.1. Categorías finitas sobre un cuerpo. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Introduciremos el concepto de categoría Abeliana y algunas propiedades de estas. Para un panorama más completo el lector es referido a [**Mc**].

Un objeto distinto a cero $S \in \mathcal{C}$ se dice *simple* si todo subobjeto de S es isomorfo a 0 o a S. Una sucesión $X = X_0 \supset X_1 \supset \cdots \supset X_{n-1} \supset X_n = 0$ en $\mathcal{C}$ es una *serie de composición* si X_i/X_{i+1} es simple para $0 \leq i < n$. Los objetos X_i/X_{i+1} son llamados *factores de composición*.

Proposición 2.3. [**KS**, Ejercicio 8.20] *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) Existe una serie de composición $X = X_0 \supset X_1 \supset \cdots \supset X_{n-1} \supset X_n = 0$.

(b) Existe un entero n tal que para toda sucesión $X = X_0 \supsetneq X_1 \supsetneq \cdots \supsetneq X_{m-1} \supsetneq X_m = 0$, entonces $m \leq n$.

(c) Toda sucesión decreciente $X = X_0 \supset X_1 \supset \cdots \supset X_{m-1} \supset X_m \supset \cdots$ es estacionaria (e.d. $X_m = X_{m+1}$ para m lo suficientemente grande) y toda sucesión creciente $X_0 \subset \cdots \subset X_m \subset \cdots \subset X$ es estacionaria.

(d) Para todo conjunto S de subobjetos de X ordenados por inclusión, si S es filtrante , entonces S tiene un elemento más grande, y si S es cofiltrante , entonces S tiene un elemento más pequeño.

$\square$

Se puede probar que el entero n en (a) sólo depende de X. Si alguna de las anteriores condiciones se satisface, se dice que X tiene *longitud finita* y el entero n es llamado la *longitud de X*.

Definición 2.4. Sea $\mathcal{C}$ una categoría.

- $\mathcal{C}$ es *preaditiva* si para todo $X, Y \in \mathcal{C}$ el conjunto $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ posee una estructura de grupo abeliano compatible con la composición de morfismos y un objeto nulo 0.
- $\mathcal{C}$ es *aditiva* si es preaditiva y admite sumas directas.
- $\mathcal{C}$ es *Abeliana* si es aditiva, todo morfismo f en $\mathcal{C}$ posee núcleo y conúcleo, todo monomorfismo es un núcleo y todo epimorfismo es un conúcleo.
- $\mathcal{C}$ es $\Bbbk$-lineal si es Abeliana, para todo $X, Y \in \mathcal{C}$ el grupo $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ es un $\Bbbk$-espacio vectorial y la composición es $\Bbbk$-bilineal.
- $\mathcal{C}$ se dice *localmente finita* si es Abeliana $\Bbbk$-lineal esencialmente pequeña (las clases de isomorfismos de objetos forman un conjunto), todo objeto tiene longitud finita y si para todo $X, Y \in \mathcal{C}$
$$\dim(Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)) < \infty.$$
- $\mathcal{C}$ se dice *finita* si es Abeliana $\Bbbk$-lineal, todo objeto tiene longitud finita y posee cubrimiento proyectivo, si para todo $X, Y \in \mathcal{C}$
$$\dim(Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)) < \infty,$$
y la cantidad de clases de isomorfismos de objetos simples es finita.

Observación 2.5. 1) El Teorema de Freyd-Mitchell [**Mi**] afirma que las categorías Abelianas se pueden caracterizar como subcategorías plenas de categorías de módulos a izquierda sobre anillos, las cuales son cerradas bajo sumas directas, núcleos, conúcleos e imágenes de morfismos. Esto permite visualizar los principales conceptos de la teoría de categorías Abelianas en términos de teoría clásica de módulos sobre anillos. En esto radica la importancia de las categorías de representaciones.

2) Es bien sabido que toda categoría finita es equivalente a la categoría ${}_A\mathcal{M}$ donde A es una $\Bbbk$-álgebra de dimensión finita.

Un producto de dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, es una tripla $(\mathcal{M}, P, Q)$ donde $\mathcal{M}$ es una categoría, $P : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ y $Q : \mathcal{M} \to \mathcal{D}$ funtores que satisfacen: Dada otra categoría $\mathcal{N}$ y dos funtores $\mathcal{C} \stackrel{R}{\leftarrow} \mathcal{N} \stackrel{T}{\rightarrow} \mathcal{D}$ existe un único funtor $F : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ con $PF = R, QF = T$. Dicho producto es único salvo equivalencia, y se denota por $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$.

Explícitamente, la categoría $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ se puede construir de la siguiente forma: Los objetos son pares (c, d) donde c es un objeto de $\mathcal{C}$ y d es un objeto de $\mathcal{D}$. Una flecha $(c, d) \to (c', d')$ es un par de flechas (f, g) donde $f : c \to c'$ y $g : d \to d'$ y la composición de tales flechas está dada por

$$(f, g) \circ (f', g') = (f \circ f', g \circ g')$$

si $(c, d) \xrightarrow{(f,g)} (c', d') \xrightarrow{(f',g')} (c'', d'')$ son flechas en $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$.

Los funtores $\mathcal{C} \stackrel{P}{\leftarrow} \mathcal{C} \times \mathcal{D} \stackrel{Q}{\rightarrow} \mathcal{D}$, llamados las *proyecciones del producto*, se definen sobre objetos $P(c, d) = c$ y $Q(c, d) = d$ y en flechas $P(f, g) = f$ y $Q(f, g) = g$. Más aún, si $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ son preaditivas (resp. aditivas, Abelianas, finitas) , entonces $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ también lo es, y se denota por $\mathcal{C} \oplus \mathcal{D}$.

Dadas dos categorías Abelianas deseamos saber como son los proyectivos en la suma directa de dichas categorías.

Teorema 2.6. *Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías Abelianas.*

Si $X \in \mathcal{C}$ y $P(X)$ es su cubrimiento proyectivo, entonces el cubrimiento proyectivo de $(X, 0)$ en $\mathcal{C} \oplus \mathcal{D}$ es $(P(X), 0)$.

Si $X \in \mathcal{D}$ y $Q(X)$ es su cubrimiento proyectivo, entonces el cubrimiento proyectivo de $(0, X)$ en $\mathcal{C} \oplus \mathcal{D}$ es $(0, Q(X))$.

Demostración. Si $X \in \mathcal{C}$, el cubrimiento proyectivo de X es el par $(P(X), \Pi)$ donde $\Pi : P(X) \to X$ es esencial. El objeto $(P(X), 0)$ es proyectivo ya que $P(X)$ lo es. Además $p = (\Pi, 0) : (P(X), 0) \to (X, 0)$ es esencial ya que Π lo es; por tanto $((P(X), 0), p)$ es el cubrimiento proyectivo de $(X, 0)$. De igual modo se prueba la segunda afirmación. $\square$

Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías Abelianas, un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ se dice *exacto* si preserva sucesiones exactas cortas, esto es si

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0$$

es una sucesión exacta en $\mathcal{C}$, entonces la sucesión $0 \to F(X) \to F(Y) \to F(Z) \to 0$ es exacta en $\mathcal{D}$.

Si $\mathcal{C}$ es una categoría Abeliana, una *subcategoría Serre de* $\mathcal{C}$ es una subcategoría $\mathcal{D}$ Abeliana plena de $\mathcal{C}$ cerrada por subcocientes y por extensiones. Si $\mathcal{D}$ es una subcategoría Serre de $\mathcal{C}$ entonces el funtor inclusión $I : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ es exacto.

2.2. Grupo de Grothendieck de una categoría. Sea $\mathcal{C}$ una categoría localmente finita. Definimos a continuación un importante invariante categórico, que permitirá más adelante calcular ciertas dimensiones.

Sea $\mathfrak{F}(\mathcal{C})$ el grupo abeliano libre generado por las clases de isomorfismos de objetos de $\mathcal{C}$. Denotar por $[X]$ la clase de isomorfismo de $X \in \mathcal{C}$. Sea $\mathfrak{R}(\mathcal{C})$ el subgrupo de $\mathfrak{F}(\mathcal{C})$ generado por los elementos $[Z]-[X]-[Y]$ cada vez que exista una sucesión exacta corta $0 \to X \to Z \to Y \to 0$ en $\mathcal{C}$.

Definición 2.7. El grupo de Grothendieck de $\mathcal{C}$ es

$$\mathfrak{K}_0(\mathcal{C}) = \mathfrak{F}(\mathcal{C})/\mathfrak{R}(\mathcal{C}).$$

Para todo $X \in \mathcal{C}$, denotaremos por $\langle X \rangle$ la clase de X en $\mathfrak{K}_0(\mathcal{C})$.

Es posible describir a este grupo usando las clases de isomorfismo de objetos simples. Para esto usaremos las series de composición.

Proposición 2.8. [**EGNO**, Proposición 1.12.2] *En una categoría localmente finita* $\mathcal{C}$*:*

- $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) = 0$ *si* X, Y *son simples y no-isomorfos.*
- $Hom_{\mathcal{C}}(X, X) = \Bbbk$ *para todo objeto simple* $X \in \mathcal{C}$*.*

□

Luego si $\mathcal{C}$ es una categoría localmente finita todo objeto tiene una serie de composición, y es válido el Teorema de Jordan-Hölder, e.d. los factores de composición no dependen de la serie de composición, el cual es una consecuencia de la anterior Proposición.

COROLARIO 2.9. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría localmente finita y $X \in \mathcal{C}$. Considerar las siguientes series de composición*

$$X = X_0 \supset X_1 \supset \cdots \supset X_{n-1} \supset X_n = 0,$$
$$X = Y_0 \supset Y_1 \supset \cdots \supset Y_{m-1} \supset Y_m = 0.$$

Entonces para cada $i = 0, \ldots, n-1$ existe $j \in \{0, \ldots, m-1\}$ tal que $X_i/X_{i+1} \simeq Y_j/Y_{j+1}$ y $n = m$.

□

Como se dijo anteriormente, en estas categorías es posible dar una descripción alternativa del grupo de Grothendieck.

TEOREMA 2.10. *Si $\mathcal{C}$ es una categoría localmente finita, el grupo de Grothendieck $\mathfrak{K}_0(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ está generado por las clases de isomorfismos de objetos simples.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\{X_i\}$ un conjunto de representantes de las clases de isomorfismos de objetos simples, y $\mathfrak{G}$ el grupo Abeliano libre generado por las clases $[X_i]$ de isomorfismos.

Considerar $\phi : \mathfrak{G} \to \mathfrak{K}_0(\mathcal{C})$ el morfismo de grupos dado por $[X] \mapsto \langle X \rangle$. Veamos que es una biyección.

Sea $Y \in \mathcal{C}$ con serie de composición $Y = Y_0 \supset Y_1 \supset \cdots \supset Y_{n-1} \supset Y_n = 0$, luego $\langle Y \rangle = \sum_{0 \leq i < n} \langle Y_i/Y_{i+1} \rangle$, es decir la clase de Y en $\mathfrak{K}_0(\mathcal{C})$ es la suma de las clases de sus factores de composición. Por tanto $\langle Y \rangle = \phi(\sum_{0 \leq i < n} [Y_i/Y_{i+1}])$ ya que los factores de composición son simples. Así ϕ es sobreyectiva.

Considerar $\Pi : \mathfrak{K}_0(\mathcal{C}) \to \mathfrak{G}$ el morfismo de grupos dado por $\langle Y \rangle \mapsto \sum_{0 \leq i < n} [Y_i/Y_{i+1}]$, donde Y_i/Y_{i+1} son los factores de composición. Veamos que Π está bien definida. Para esto es necesaria la siguiente afirmación.

AFIRMACIÓN 2.10.1. *Sea $0 \to A \to B \to C \to 0$ una sucesión exacta, entonces los factores de composición de B son los de A y los de C.*

Demostración de la Afirmación. Podemos considerar A como subobjeto de B y $C \simeq B/A$ donde B/A es el conúcleo de la inclusión de A en B. Por tanto toda serie de composición de C se puede levantar a una de B dando lugar a una filtración de $A \subset B$ con factores simples. Concatenando esta filtración a la serie de composición de A obtenemos una serie para B: Es decir, sean

$$0 = A_n \subset A_{n-1} \subset \cdots \subset A_1 \subset A_0 = A,$$
$$0 = C_m \subset C_{m-1} \subset \cdots \subset C_1 \subset C_0 = C \simeq B/A,$$

las respectivas series de composición. Luego existen subobjetos C_i' donde $C_i'/A \simeq C_i$. Así

$$0 = A_n \subset A_{n-1} \subset \cdots \subset A_1 \subset A_0 = A \subset C_m' \subset \ldots \subset C_1' \subset B$$

es la serie de composición buscada. Como los factores de composición son únicos, Corolario 2.9, entonces queda demostrada la afirmación. $\square$

La anterior Afirmación y el hecho de que los factores de composición son únicos implica que Π está bien definida.

Como $\Pi \circ \phi = \mathrm{id}$, entonces ϕ es inyectiva, y por tanto es biyectiva. $\square$

2.3. Producto tensorial de Deligne. En el mundo de las categorías Abelianas es posible definir un nuevo producto, llamado producto de Deligne, el cual permite generalizar la exactitud en cada variable, de igual modo que el producto tensorial permite generalizar la linealidad en cada variable. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías Abelianas $\Bbbk$-lineales.

Un *producto tensorial* de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ es una categoría Abeliana $\Bbbk$-lineal $\mathcal{A}$ dotada de un funtor $F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ exacto a derecha tal que para toda categoría Abeliana $\Bbbk$-lineal $\mathcal{M}$ el funtor

$$Fun_{e.d.}(\mathcal{A}, \mathcal{M}) \xrightarrow{G \mapsto GF} BiFun_{e.d.}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}, \mathcal{M})$$

es una equivalencia de categorías. Aquí la categoría $BiFun_{e.d.}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}, \mathcal{M})$ denota los bifuntores exactos a derecha en cada variable, y la categoría $Fun_{e.d.}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ denota los funtores exactos a derecha.

Si el producto tensorial de dos categorías Abelianas $\Bbbk$-lineales $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ existe es único salvo equivalencia y se denota por $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ y es llamado *producto tensorial de Deligne.*

Proposición 2.11. [**De**] *Si $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ son categorías Abelianas $\Bbbk$-lineales finitas. Entonces*

- *el producto tensorial de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ existe;*
- *el funtor $\boxtimes : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ es exacto en cada variable;*
- *para toda toda categoría Abeliana $\Bbbk$-lineal $\mathcal{M}$ existe una equivalencia de categorías*

$$Fun_{e.}(\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}, \mathcal{M}) \xrightarrow{G \mapsto GF} BiFun_{e.}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}, \mathcal{M});$$

- *la transformacion natural*

$$Hom_{\mathcal{C}}(X_1, Y_1) \otimes_{\Bbbk} Hom_{\mathcal{D}}(X_2, Y_2) \to Hom_{\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}}(X_1 \boxtimes X_2, Y_1 \boxtimes Y_2)$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

$\square$

3. Coálgebras y Comódulos

En más sea C una coálgebra. Se asume conocida la definición de comódulo sobre una coálgebra, la cual se puede consultar en [**M**]. Usaremos la notación introducida por Sweedler omitiendo el símbolo de sumatoria en el coproducto Δ, esto es

$$\Delta(x) = x_1 \otimes x_2, \quad x \in C.$$

Si M es un C-comódulo a derecha (respectivamente a izquierda) con estructura dada por $\rho : M \to M \otimes_{\Bbbk} C$ (resp. $\lambda : M \to C \otimes_{\Bbbk} M$) usaremos la notación:

$$\rho(m) = m_0 \otimes m_1$$

(resp. $\lambda(m) = m_{-1} \otimes m_0$) para todo $m \in M$.

Sea $M^{\mathrm{co}C} = \{x \in M | \rho(x) = x \otimes 1\}$ el *conjunto de coinvariantes a derecha de* M, si M es un C-comódulo a derecha; y ${}^{\mathrm{co}C}M = \{x \in M | \lambda(x) = 1 \otimes x\}$ el *conjunto de coinvariantes a izquierda de* M, si M es un C-comódulo a izquierda.

Una coálgebra es $\mathbb{N}_0$-*graduada*, o simplemente graduada, si $C = \oplus_{i \in \mathbb{N}_0} C_i$ es la suma directa de subcoálgebras y el coproducto satisface

$$\Delta(C_i) \subset \bigoplus_k C_k \otimes C_{i-k}.$$

Dadas C coálgebra y A álgebra, $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(C, A)$ es un álgebra con el *producto de convolución* dado por

$$f * g(c) = f(c_1) g(c_2), \quad c \in C.$$

Este producto será usado para construir ejemplos de ciertas álgebras a partir de otras.

Denotar por $\mathcal{M}^C$ la categoría de C-comódulos a derecha de dimensión finita, por ${}^C\mathcal{M}$ la categoría de comódulos a izquierda de dimensión finita, por $\mathfrak{M}^C$ la de C-comódulos a derecha (de dimensión arbitraria) y por ${}^C\mathfrak{M}$ la de C-comódulos a izquierda. Estas categorías serán dotadas de más estructura en el Capítulo 5.

De manera análoga a como se define el producto tensorial entre módulos se puede definir un producto para comódulos.

Definición 3.1. Sean C una coálgebra, $V \in \mathcal{M}^C$ y $W \in {}^C\mathcal{M}$ vía $\lambda : V \to V \otimes_{\Bbbk} C$ y $\delta : W \to C \otimes_{\Bbbk} W$. Definir $\alpha = \lambda \otimes_{\Bbbk} \mathrm{id}_W$ y $\beta = \mathrm{id}_V \otimes_{\Bbbk} \delta$.

El *producto cotensorial* $V\square_C W$ está definido como el ecualizador en ${}_{\Bbbk}\mathcal{M}$ de α y β, es decir

$$0 \to V\square_C W \to V\otimes_{\Bbbk} W \rightrightarrows^{\alpha}_{\beta} W\otimes_{\Bbbk} C\otimes_{\Bbbk} W.$$

En otras palabras, es una subespacio de $V\otimes_{\Bbbk} W$ donde los elementos son sumas finitas $\sum v^i\otimes w^j$ tales que $\sum v^i_0\otimes v^i_1\otimes w^i = \sum v^i\otimes w^i_{-1}\otimes w^i_0$.

Más aún, es un álgebra con producto dado por $(x\otimes y)(v\otimes w) = xv\otimes yw$ (si $x\otimes y, v\otimes w \in V\square_C W$), el inducido del producto de $V\otimes_{\Bbbk} W$. Se encuentra bien definido ya que

$$\begin{aligned}(xv)_0\otimes(xv)_1\otimes yw &= x_0v_0\otimes x_1v_1\otimes yw = xv\otimes y_{-1}w_{-1}\otimes y_0w_0\\ &= xv\otimes(yw)_{-1}\otimes(yw)_0.\end{aligned}$$

El producto cotensorial de bicomódulos es nuevamente un bicomódulo:

LEMA 3.2. *Sean C, D coálgebras. Si $V \in {}^D\mathcal{M}^C$ y $W \in {}^C\mathcal{M}^D$. Entonces $V\square_C W \in {}^D\mathcal{M}^D$.*

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis, $(V,\rho) \in {}^D\mathcal{M}$ y $(W,\lambda) \in \mathcal{M}^D$.

- $(V\square_C W, \rho\otimes_{\Bbbk} id) \in {}^D\mathcal{M}$: Sea $v\otimes w \in V\square_C W$ luego

  $$v_{-1}\otimes v_{00}\otimes v_{01}\otimes w = v_{-1}\otimes v_0\otimes v_1\otimes w = v_{-1}\otimes v_0\otimes w_{-1}\otimes w_0,$$

  así $v_{-1}\otimes v_0\otimes w \in D\otimes V\square_C W$, y por tanto la coacción está bien definida.
- $(V\square_C W, id\otimes_{\Bbbk}\lambda) \in \mathcal{M}^D$: Sea $v\otimes w \in V\square_C W$ luego

  $$v\otimes w_{0(-1)}\otimes w_{00}\otimes w_1 = v\otimes w_{-1}\otimes w_0\otimes w_1 = v_0\otimes v_1\otimes w_0\otimes w_1,$$

  así $v\otimes w_0\otimes w_1 \in V\square_C W\otimes_{\Bbbk} D$, y por tanto la coacción está bien definida.

$\square$

Capítulo 2

Álgebras de Hopf

Para la teoría general de álgebras de Hopf usamos como referencia principal [**M**], [**K**]; en los cuales se pueden consultar las definiciones básicas de álgebras de Hopf, comódulos y bicomódulos. Recordaremos algunas nociones y definiciones básicas en la primera Sección de este capítulo.

Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita con comultiplicación Δ, counidad ϵ y antípoda $\mathcal{S}$. Sea $G(H) = \{g \in H | \Delta(g) = g \otimes g, \ \ \epsilon(g) = 1\}$ el conjunto de elementos tipo grupo, el cual a su vez resulta ser un grupo con la multiplicación de H.

Introduciremos ejemplos de álgebras de Hopf, y los comódulos sobre estás. Además como ejemplos de comódulos se presentan los objetos Galois y biGalois, los cuales son realmente importantes en este trabajo, ya que permiten clasificar ciertos funtores.

1. Nociones básicas

Se denotará por H^{op} el álgebra de Hopf que como coálgebra es H y como álgebra tiene el producto opuesto, es decir $m_{H^{op}}(h, k) = m_H(k, h)$ para todo $h, k \in H$. Se denotará por H^{cop} el álgebra de Hopf que como álgebra es H y como coálgebra tiene el coproducto opuesto.

Definición 1.1.
- El *corradical* H_0 *sobre* H es la suma de todas las subcoálgebras simples de H.
- H es *punteada* si toda subcoálgebra simple es de dimensión uno. En particular, H es punteada si y sólo sí su corradical $H_0 = \Bbbk G(H)$, es el álgebra de grupo del grupo de elementos de tipo grupo de H.
- H es *conexa* si H_0 es de dimensión uno.

Sea $H_n = \Delta^{-1}(H \otimes_{\Bbbk} H_{n-1} + H_0 \otimes_{\Bbbk} H)$ para $n > 0$, luego la colección $\{H_n | n \geq 0\}$ se llama la *filtración corradical de* H y satisface que para todo $n > 0$

$$H_n \subset H_{n+1}, \quad H = \cup_{n \geq 0} H_n, \quad \Delta(H_n) \subset \sum_{i=0}^{n} H_i \otimes_{\Bbbk} H_{n-i}.$$

Estas definiciones son introducidas para hacer el trabajo lo más autocontenido posible.

Si A es un H-módulo álgebra a izquierda, el *álgebra producto cruzado* ó *bosonización* $A\#H$ se define como sigue, si $a, b, \in A$ y $h, k \in H$: como $\Bbbk$-espacio es $A\otimes_{\Bbbk} H$ y multiplicación dada por

$$(a\#h)(b\#k) = \sum a(h_1 \cdot b)\#h_2k,$$

donde $a\#h$ denota $a\otimes h$. Está álgebra generaliza la noción del producto cruzado de grupos.

DEFINICIÓN 1.2. Un *módulo de Yetter-Drinfeld a izquierda* es un $\Bbbk$-espacio vectorial M el cual es un H-módulo a izquierda y H-comódulo a izquierda que satisface para todo $h \in H, m \in M$

$$\sum h_1 m_{-1} \otimes h_2 \cdot m_0 = \sum (h_1 \cdot m)_{-1} h_2 \otimes (h_1 \cdot m)_0.$$

La categoría de módulos Yetter-Drinfeld a izquierda es denotada por ${}^H_H\mathcal{YD}$.

EJEMPLO 1.3. **1)** Álgebra de Grupo: Sea G un grupo, $\Bbbk G$ el *álgebra de grupo* es un álgebra de Hopf con estructura dada por $\Delta(g) = g\otimes g$ y $S(g) = g^{-1}$ para todo $g \in G$.

2) Álgebra de Taft: Fijar $q \in G'_n$. Sea $T_q = \langle x, g | x^n = 0, g^n = 1, gx = qxg\rangle$ el *álgebra de Taft* con estructura de álgebra de Hopf dada por $\Delta(x) = x\otimes 1 + g\otimes x$ y $\Delta(g) = g\otimes g$; y filtración corradical

$$(T_q)_m = \langle g^i x^j | 0 \leq i \leq n-1, 0 \leq j \leq m\rangle.$$

Más aún $T_{q^{-1}} \simeq T_q^{\mathrm{cop}}$ como álgebras de Hopf, donde el isomorfismo está dado por $g \mapsto g$ y $x \mapsto xg^{-1}$.

3) Álgebra de Super-grupo: Sea G un grupo Abeliano finito, $u \in G$ un elemento de orden 2 y V un G-módulo de dimensión finita tal que $u \cdot v = -v$ si $v \in V$. El espacio V tiene estructura de módulo de Yetter-Drinfeld sobre $\Bbbk G$ con coacción dada por $\delta : V \to \Bbbk G\otimes_{\Bbbk} V$ donde $\delta(v) = u\otimes v$, si $v \in V$.

El álgebra de Nichols de V (ver [**AS**]) es el álgebra exterior $\mathfrak{B}(V) = \wedge(V)$. La bosonización $\wedge(V)\#\Bbbk G$ es llamada en [**AEG**] un *álgebra de super-grupo finita* y es denotada por $\mathcal{A}(V, u, G)$. Denotar el elemento $v\#g$ simplemente por vg, si $v \in V, g \in G$.

Como álgebra, $\mathcal{A}(V, u, G)$ está generada por los elementos $v \in V, g \in G$ sujetos a las relaciones

$$vw + wv = 0, \quad gv = (g \cdot v)g, \text{ si } v, w \in V, g \in G.$$

El coproducto y la antípoda son determinadas si $v \in V, g \in G$ por

$$\Delta(v) = v \otimes 1 + u \otimes v, \quad \Delta(g) = g \otimes g, \quad \mathcal{S}(v) = -uv, \quad \mathcal{S}(g) = g^{-1}.$$

LEMA 1.4. *El morfismo de álgebras $\phi : \mathcal{A}(V, u, G) \to \mathcal{A}(V, u, G)^{cop}$ determinado por*

$$\phi(v) = vu, \quad \phi(g) = g,$$

es un isomorfismo de álgebras de Hopf. □

Estas álgebras representan un papel fundamental en el presente trabajo, y su estudio será retomado en próximos capítulos.

A continuacíon describimos un método para construir álgebras de Hopf, el cual es pieza fundamental en muchas de las construcciones que presentamos a lo largo de este trabajo.

1.1. Deformaciones de álgebras de Hopf. Dada H un álgebra de Hopf, podemos construir otra de la siguiente forma: Sea σ un *2-cociclo de Hopf para* H, esto es una aplicación invertible por convolución $\sigma : H \otimes_{\Bbbk} H \to \Bbbk$, tal que si $x, y, z \in H$

$$\sigma(x_{(1)}, y_{(1)})\sigma(x_{(2)}y_{(2)}, z) = \sigma(y_{(1)}, z_{(1)})\sigma(x, y_{(2)}z_{(2)}), \tag{2}$$

$$\sigma(x, 1) = \varepsilon(x) = \sigma(1, x). \tag{3}$$

El *álgebra de Hopf $H^{[\sigma]}$ twisteada de H* es $H^{[\sigma]} = H$ como coálgebra, con producto

$$x \cdot_{[\sigma]} y = \sigma(x_{(1)}, y_{(1)})\sigma^{-1}(x_{(3)}, y_{(3)})\ x_{(2)}y_{(2)}, \qquad x, y \in H. \tag{4}$$

Sea H un álgebra de Hopf. $J \in H \otimes_{\Bbbk} H$ es un *twist para* H si es un elemento inversible tal que

$$(\Delta \otimes_{\Bbbk} id_H)J(J \otimes 1) = (id_H \otimes_{\Bbbk} \Delta)J(1 \otimes J), \quad (\varepsilon \otimes_{\Bbbk} id)J = 1 = (id \otimes_{\Bbbk} \varepsilon)J.$$

Se usa la notación $J = J_1 \otimes J_2$ y $J^{-1} = J^{-1} \otimes J^{-2}$. Si $x \in H$ es un elemento tal que $\varepsilon(x) = 1$ y J es un twist , entonces $J^x := \Delta(x)J(x^{-1} \otimes x^{-1})$ es también un twist. En este caso, diremos que J y J^x son *equivalentes*.

Si J es un twist para H , entonces existe una nueva álgebra de Hopf H^J con la misma estructura de álgebra y la misma counidad que H, pero con comultiplicación y antípoda determinadas por

$$\Delta^J(h) = J^{-1}\Delta(h)J, \quad \mathcal{S}^J(h) = Q_J^{-1}\mathcal{S}(h)Q_J, \quad h \in H,$$

donde $Q_J = \mathcal{S}(J^1)J^2$ es un elemento inversible de H con inverso $Q_J^{-1} = J^{-1}\mathcal{S}(J^{-2})$.

Si J y J' son twists equivalentes , entonces las álgebras de Hopf H^J, $H^{J'}$ son isomorfas vía

$$\phi : H^J \to H^{J'}, \quad \phi(h) = xhx^{-1}, \quad \text{para todo } h \in H.$$

1.2. Álgebras de Hopf corradicalmente graduadas. Un *álgebra de Hopf graduada* es un álgebra de Hopf H dotada de una graduación

$$H = \oplus_{i=0}^{m} H(i)$$

tal que es un álgebra graduada y una coálgebra graduada. Un álgebra de Hopf graduada H se dice *corradicalmente graduada* si la filtración corradical esta dada por

$$H_n = \oplus_{i=0}^{n} H(i), \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}_0.$$

Si $\mathrm{gr}(H)$ es la coálgebra asociada graduada de H con respecto a la filtración corradical, en otras palabras $\mathrm{gr}(H) = \oplus_{n\geq 1} H_n/H_{n-1}$, entonces $\mathrm{gr}(H)$ es una coálgebra corradicalmente graduada. Si además el corradical H_0 es una subálgebra de H , entonces $\mathrm{gr}(H)$ posee una estructura de álgebra de Hopf corradicalmente graduada. Para más detalles ver [**AS**].

Dada un álgebra de Hopf corradicalmente graduada $H = \oplus_{i=0}^{m} H(i)$, decimos que una subálgebra coideal a izquierda $K \subseteq H$ es *homogénea* si su álgebra graduada $K = \oplus_{i=0}^{m} K(i)$ satisface $K(i) \subseteq H(i)$.

Si H es punteada y corradicalmente graduada con corradical $\Bbbk G$, G un grupo finito, y $\psi \in Z^2(G, \Bbbk^\times)$ es un 2-cociclo; entonces existe un 2-cociclo de Hopf $\sigma_\psi : H \otimes_{\Bbbk} H \to \Bbbk$ tal que para todo elemento homogéneo $x, y \in H$

$$\sigma_\psi(x, y) = \begin{cases} \psi(x, y), & \text{si } x, y \in H(0); \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \tag{5}$$

la condición (2) se satisface ya que ψ es un 2-cociclo, la condición (3) es equivalente a la primera igualdad de (1) del primer capítulo. Además es invertible por convolución con inversa

$$\tau_\psi(x, y) = \begin{cases} \psi(x, y)^{-1}, & \text{si } x, y \in H(0); \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

2. H-comódulos

Como en la Teoría de Grupos es esencial el estudio de sus módulos, acá es necesario el estudio de módulos y comódulos sobre las álgebras de Hopf, ya que estas categorías aportan valiosa información sobre el álgebra en sí.

Sea H un álgebra de Hopf, y V, W H-comódulos a derecha con coacción ρ_V y ρ_W, respectivamente. Luego $V\otimes_{\Bbbk}W$ es un H-comódulo vía

$$\rho_{V\otimes_{\Bbbk}W}(v\otimes w) = v_0\otimes w_0\otimes v_1w_1, \quad v\otimes w \in V\otimes_{\Bbbk}W.$$

Sea (A, λ) un H-comódulo álgebra a izquierda, es decir un H-comódulo que también es un álgebra tal que la coacción es un morfismo de álgebras. La *serie de Loewy sobre* A está dada por $A_n = \lambda^{-1}(H_n\otimes_{\Bbbk}A)$, $n = 1, \dots, m$. El álgebra graduada asociada

$$\mathrm{gr}A := \oplus_{n\geq 1}A_n/A_{n-1}$$

es nuevamente un H-comódulo álgebra a izquierda. Si el corradical H_0 es una subálgebra de Hopf , entonces A_0 es un H_0-comódulo álgebra a izquierda.

Definición 2.1. Un H-comódulo álgebra A se dice *H-simple a derecha* si no tiene ideales a derecha H-coestables no-triviales.

Ejemplo 2.2. **1)** Sea A un H-comódulo álgebra a izquierda y σ un 2-cociclo de Hopf. Definir $A_\sigma = A$ como comódulo con producto

$$a._\sigma b = \sigma(a_{(-1)}, b_{(-1)})\, a_{(0)}.b_{(0)}, \quad a, b \in A. \tag{6}$$

Más aún, A_σ (con la misma estructura de comódulo) es un $H^{[\sigma]}$-comódulo álgebra a izquierda.

2) Si $g \in G(H)$ es un elemento de tipo-grupo, denotar por $\Bbbk_g$ el H-comódulo a izquierda donde $\Bbbk_g = \Bbbk$ el $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión uno generado por el vector w_g y con coacción dada por $w_g \mapsto g\otimes w_g$.

Sea $H = \oplus_{i=0}^m H(i)$ un álgebra de Hopf punteada graduada de dimensión finita, con corradical el álgebra de grupo $H_0 = \Bbbk G$ de un grupo finito. Si A es H-simple a derecha , entonces A_0 es $\Bbbk G$-simple a derecha [**M1**, Proposición 4.4], por tanto existe un subgrupo $F \subseteq G$ y un 2-cociclo $\psi \in Z^2(F, \Bbbk^\times)$ tal que $A_0 = \Bbbk_\psi F$.

Lema 2.3. [**M2**, Lema 5.4] *Si A es H-simple a derecha , entonces existe un 2-cociclo $\widehat{\psi} \in Z^2(G, \Bbbk^\times)$ tal que $\widehat{\psi}$ restringido a F es igual a ψ y $(grA)_{\sigma_{\widehat{\psi}}}$ es isomorfo a la subálgebra coideal homogénea a izquierda de $H^{[\sigma_{\widehat{\psi}}]}$ como $H^{[\sigma_{\widehat{\psi}}]}$-comódulos álgebras a izquierda.* $\square$

3. Objetos Galois

Una familia de ejemplos clave de comódulos son los llamados objetos Galois, los cuales permiten clasificar ciertos funtores monoidales.

En más sea H un álgebra de Hopf, (A,λ) un H-comódulo álgebra a derecha y $B = A^{\mathrm{co}H} = \{a \in A | a_0 \otimes a_1 = a \otimes 1\}$ el conjunto de *coinvariantes* de la coacción. La *función canónica* κ *para* λ satisface

$$\kappa : A \otimes_B A \to A \otimes_{\Bbbk} H$$
$$\kappa(x \otimes y) = (x \otimes 1)\lambda(y).$$

La extensión $B \subset A$ es H*-Galois a derecha* si κ es biyectiva; y si además $B = A^{\mathrm{co}(H)} = \Bbbk$, se dice que A es un *objeto* H*-Galois a derecha.* De igual modo se define a izquierda.

Un *morfismo* de extensiones Galois es un morfismo de comódulos álgebras. Es posible describir los isomorfismos entre los objetos Galois.

Proposición 3.1. *Si A, B son objetos H-Galois a izquierda (derecha), cualquier morfismo de H-comódulos álgebras de A en B es un isomorfismo.*

Demostración. Sea $f : A \to B$ un morfismo de H-comódulos álgebras. Dotar a B con estructura de A-módulo a izquierda vía f, es decir con acción $A \otimes_{\Bbbk} B \to B$ donde $a \cdot b = f(a)b$.

El siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A\otimes_{\Bbbk} B \xrightarrow{f\otimes_{\Bbbk}\mathrm{id}} B\otimes_{\Bbbk} B & \xrightarrow{\kappa_B} & H\otimes_{\Bbbk} B \\ \mathrm{id}\otimes_{\Bbbk} g \downarrow\simeq & & \simeq\downarrow \mathrm{id}\otimes_{\Bbbk} g \\ A\otimes_{\Bbbk} A\otimes_A B & \xrightarrow{\kappa_A\otimes_A \mathrm{id}} & H\otimes A\otimes_A B \end{array}$$

donde κ_A, κ_B son las funciones canónicas para las coacciones de A y B; y el isomorfismo que desciende es $g(b) = 1 \otimes b$ con inversa $a \otimes_A b \mapsto a \cdot b$. El diagrama conmuta ya que por el camino superior se obtiene

$$a \otimes b \mapsto f(a) \otimes b \mapsto f(a)_{-1} \otimes f(a)_0 b = a_{-1} \otimes f(a_0) b$$
$$= a_{-1} \otimes a_0 \cdot b \mapsto a_{-1} \otimes 1 \otimes a_0 \cdot b,$$

y por el camino inferior se obtiene

$$a \otimes b \mapsto a \otimes 1 \otimes b \mapsto a_{-1} \otimes a_0 \otimes b = a_{-1} \otimes 1 \otimes a_0 \cdot b.$$

Como κ_A, κ_B, g son isomorfismos, entonces f es un isomorfismo. □

Sea A un álgebra, se dice que H *mide a* A si existe una aplicación $\Bbbk$-lineal $H \otimes_{\Bbbk} A \to A$ donde $h \otimes a \mapsto h \cdot a$ tal que para todo $h \in H, a, b \in A$

$$h \cdot 1 = \varepsilon(h)1, \quad h \cdot (ab) = \sum (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b).$$

Un *2-cociclo* σ es una aplicación invertible en $Hom_{\Bbbk}(H\otimes_{\Bbbk}H, A)$ tal que si $h, k, m \in H$

$$\sigma(h,1) = \sigma(1,h) = \varepsilon(h)1,$$
$$(h_1 \cdot \sigma(k_1, m_1))\sigma(h_2, k_2m_2) = \sigma(h_1, k_1)\sigma(h_2k_2, m).$$

Definición 3.2. Sea A un álgebra, σ un 2-cociclo y suponer que H mide a A. El *producto σ-cruzado de A con H* es $A\#_\sigma H := A\otimes_{\Bbbk}H$ como espacio vectorial con producto

$$(a\#h)(b\#k) = \sum a(h_1 \cdot b)\sigma(h_2, k_1)\#h_3k_2, \quad \text{si } h, k \in H, a, b \in A.$$

El siguiente Teorema nos será útil para clasificar ciertos objetos Galois.

Teorema 3.3. [**DT**] *Sea B un H-comódulo álgebra y $A = B^{co(H)}$. Son equivalentes*

- *Existe un 2-cociclo σ tal que $B \simeq A\#_\sigma H$ como B-módulos a izquierda y H-comódulos a derecha.*
- *B es H-Galois y $B \simeq A\otimes_{\Bbbk}H$ en ${}_B\mathcal{M}^H$.*

Donde la B-acción a izquierda sobre $A\#_\sigma H$ y $A\otimes_{\Bbbk}H$ es la acción sobre el primer tensorando vía multiplicación, y la H-coacción a derecha sobre $A\#_\sigma H$ y $A\otimes_{\Bbbk}H$ es la coacción sobre el segundo tensorando vía el coproducto.

$\square$

Una extensión de anillos $A \subset B$ es *plana* si el funtor $-\otimes_A B$ es exacto en $\mathcal{M}_A$ y es *coplana* si el funtor $-\square_A B$ es exacto en $\mathcal{M}^A$. Por último es *fielmente plana* si el funtor $-\otimes_A B$ es exacto y fiel.

En general el producto cotensorial no es asociativo. En la siguiente Proposición se enuncian algunos casos en los cuales si es asociativo.

Proposición 3.4. [**S1**, Sección 2] *Sean C Y D coálgebras.*

1. Sean M un álgebra, $V \in \mathcal{M}^C$ y $W \in {}^C\mathcal{M}$. Si M es un $\Bbbk$-módulo, ó, si C es $\Bbbk$-plano y W es C-coplano, entonces existe un isomorfismo canónico (de $\Bbbk$-espacios vectoriales)

$$M\otimes_{\Bbbk}(V\square_C W) \simeq (M\otimes_{\Bbbk}V)\square_C W.$$

2. Sean $U \in {}^C\mathcal{M}$, $V \in {}^C\mathcal{M}^D$ y $W \in {}^D\mathcal{M}$. No necesariamente se cumple

$$(U\square_C V)\square_D W \simeq U\square_C(V\square_D W).$$

Tal isomorfismo canónico existe si C es un álgebra de Hopf y U es un objeto C-Galois a derecha fielmente plano. $\square$

4. Objetos biGalois

Para más detalle en las definiciones y proposiciones enunciadas en esta Sección, ver [**S1**]. Los objetos biGalois sobre un álgebra de Hopf, juegan un papel importante en diversas clasificaciones. Como se verá más adelante, permiten clasificar ciertos funtores entre ciertas categorías. De ahí su vital importancia en este trabajo.

En más sean H, L álgebras de Hopf. Un *objeto* (H, L)*-biGalois* A es una extesión H-Galois a izquierda L-Galois a derecha tal que las dos coacciones hacen de A un (H, L)-bicomódulo y los coinvariantes son triviales. Un *morfismo de objetos biGalois* es un morfismo de (H, L)-bicomódulos álgebras.

OBSERVACIÓN 4.1. Recordar que A es un (H, L)-bicomódulo álgebra vía $\lambda_1 : A \to H \otimes_{\Bbbk} A$ y $\lambda_2 : A \to A \otimes_{\Bbbk} L$ si y sólo sí A es un $H \otimes_{\Bbbk} L^{\mathrm{cop}}$-comódulo álgebra a derecha vía $\lambda : A \to H \otimes_{\Bbbk} L^{\mathrm{cop}} \otimes_{\Bbbk} A$:

- Dada λ, definir
$$\lambda_1 = (\mathrm{id}_H \otimes_{\Bbbk} \varepsilon \otimes_{\Bbbk} \mathrm{id}_A)\lambda,$$
$$\lambda_2 = \tau(\varepsilon \otimes_{\Bbbk} \mathrm{id}_{L \otimes_{\Bbbk} A})\lambda,$$
donde $\tau : L^{\mathrm{cop}} \otimes_{\Bbbk} A \to A \otimes_{\Bbbk} L$ satisface $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$ si $a \otimes b \in L \otimes_{\Bbbk} A$.
- Dadas λ_i si $i = 1, 2$, definir
$$\lambda(a) = (\mathrm{id}_H \otimes_{\Bbbk} \tau)(\mathrm{id}_H \otimes_{\Bbbk} m_A \otimes_{\Bbbk} \mathrm{id}_L)(\lambda_1(a) \otimes_{\Bbbk} \lambda_2(a))$$
si $a \in A$ y m_A es la multiplicación de A.

El siguiente Lema se usará para clasificar objetos biGalois sobre ciertas álgebras.

LEMA 4.2. *Si A es un objeto (H, H)-biGalois , entonces A no tiene ideales biláteros $H \otimes_{\Bbbk} H^{cop}$-coestables.*

DEMOSTRACIÓN. Como A es una extensión H-Galois a derecha (e izquierda) y $A^{\mathrm{co}H} = \Bbbk$, entonces A no tiene ideales biláteros H-coestables ([**M**, Corolario 8.3.10]).

Sea $I \subset A$ un ideal bilátero $H \otimes_{\Bbbk} H^{\mathrm{cop}}$-coestable, es decir
$$\lambda(I) \subset H \otimes_{\Bbbk} H^{\mathrm{cop}} \otimes_{\Bbbk} I,$$
luego $\lambda_1(I) = (\mathrm{id} \otimes_{\Bbbk} \varepsilon \otimes_{\Bbbk} \mathrm{id})\lambda(I) \subset H \otimes_{\Bbbk} I$, esto implica que I es H-coestable y por tanto $I = 0$. $\square$

Si (A, λ) es un H-comódulo álgebra a izquierda y $\{H_i | i \geq 0\}$ es la filtración corradical de H, entonces

$$\{A_i = \lambda^{-1}(H_i \otimes_{\Bbbk} A) | i \geq 0\}$$

es una filtración sobre A. Más aún, $A^{\mathrm{co}H} \subset A_0$ y tomando coinvariantes nuevamente $A^{\mathrm{co}H} \subset A_0^{\mathrm{co}H}$. Esto implica que si $A_0^{\mathrm{co}H} = \Bbbk$, entonces $A^{\mathrm{co}H} = \Bbbk$.

A continuación damos la familia de objetos biGalois sobre el álgebra de Taft.

Ejemplo 4.3. Fijar $q \in G_n'$. Sea $H = T_q$ el álgebra de Taft. Para $\mu \in \Bbbk$ y $\xi \in \Bbbk^{\times}$ definimos

$$A_{\mu,\xi} = \langle y, h | y^n = \mu, h^n = 1, hy = qyh \rangle.$$

Proposición 4.4. [**S2**, Teorema 2.2] *$A_{\mu,\xi}$ es un objeto (T_q, T_q)-biGalois y todos son de esta forma. Más aún, $A_{\mu,\xi} \simeq A_{\mu',\xi'}$ si y sólo sí $\mu = \mu'$ y $\xi' = s^n \xi$ para algún $s \in \Bbbk^{\times}$.*

Demostración. Consideremos la estructura de comódulo álgebra sobre $A_{\mu',\xi'}$ dada por $\lambda : A_{\mu',\xi'} \to T_q \otimes_{\Bbbk} T_q^{\mathrm{cop}} \otimes_{\Bbbk} A_{\mu',\xi'}$ donde $\lambda(h) = g \otimes g \otimes h$ y $\lambda(y) = \xi x \otimes 1 \otimes 1 + g \otimes x \otimes h + g \otimes 1 \otimes y$, la cual está bien definida:

$$\begin{aligned}
\lambda(y)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q (g \otimes 1 \otimes y + \xi x \otimes 1 \otimes 1)^k (g \otimes x \otimes h)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{k}_q \binom{k}{i}_q (\xi x \otimes 1 \otimes 1)^i (g \otimes 1 \otimes y)^{k-i} (g \otimes x \otimes h)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{k}_q \binom{k}{i}_q \xi^i x^i g^{n-i} \otimes x^{n-k} \otimes y^{k-i} h^{n-k} \\
&= x^0 g^n \otimes x^n \otimes y^0 h^n + x^0 g^0 \otimes x^0 \otimes y^n h^0 + x^n g^0 \otimes x^0 \otimes y^0 h^0 \\
&= 1 \otimes 1 \otimes y^n = \mu = \lambda(\mu), \\
\lambda(h)^n &= 1 \otimes 1 \otimes 1 = 1 = \lambda(1), \\
\lambda(hy) &= \xi g x \otimes g \otimes h + g^2 \otimes g x \otimes h^2 + g^2 \otimes g \otimes hy \\
&= \xi q x g \otimes g \otimes h + g^2 \otimes q x g \otimes h^2 + g^2 \otimes g \otimes q y h \\
&= q(\xi x \otimes 1 \otimes 1 + g \otimes x \otimes h + g \otimes 1 \otimes y)(g \otimes g \otimes h) = q \lambda(yh).
\end{aligned}$$

Además es de comódulos:

$$\begin{aligned}
(Id\otimes\lambda)\lambda(h) &= g\otimes g\otimes g\otimes g\otimes h = (\Delta\otimes Id)\lambda(h),\\
(Id\otimes\lambda)\lambda(y) &= (Id\otimes\lambda)(\xi x\otimes 1\otimes 1 + g\otimes x\otimes h + g\otimes 1\otimes y)\\
&= \xi x\otimes 1\otimes 1\otimes 1\otimes 1 + g\otimes x\otimes g\otimes g\otimes h + g\otimes 1\otimes(\xi x\otimes 1\otimes 1\\
&+ g\otimes x\otimes h + g\otimes 1\otimes y)\\
&= \xi(x\otimes 1\otimes 1\otimes 1 + g\otimes 1\otimes x\otimes 1)\otimes 1 + (g\otimes 1\otimes g\otimes x\\
&+ g\otimes x\otimes g\otimes g)\otimes h + g\otimes 1\otimes g\otimes 1\otimes y\\
&= (\Delta\otimes Id)\lambda(y),
\end{aligned}$$

ya que $\Delta(x\otimes 1) = x\otimes 1\otimes 1\otimes 1 + g\otimes 1\otimes x\otimes 1$, $\Delta(g\otimes x) = g\otimes 1\otimes g\otimes x + g\otimes x\otimes g\otimes g$ y $\Delta(g\otimes 1) = g\otimes 1\otimes g\otimes 1$.

Las coacciones a izquierda y derecha son $\lambda_1 : A_{\mu',\xi'} \to T_q\otimes_{\Bbbk} A_{\mu',\xi'}$ y $\lambda_2 : A_{\mu',\xi'} \to A_{\mu',\xi'}\otimes_{\Bbbk} T_q$ y satisfacen

$$\begin{aligned}
\lambda_1(h) &= g\otimes h, & \lambda_2(h) &= h\otimes g,\\
\lambda_1(y) &= \xi x\otimes 1 + g\otimes y, & \lambda_2(y) &= h\otimes x + y\otimes 1.
\end{aligned}$$

Calculemos los coinvariantes de cada coacción:

$$\begin{aligned}
{}^{\mathrm{co}(T_q)}(A_{\mu',\xi'})_0 &={}^{\mathrm{co}(T_q)} (\lambda_1^{-1}Q), & (A_{\mu',\xi'})_0^{\mathrm{co}(T_q)} &= (\lambda_2^{-1}W)^{\mathrm{co}(T_q)}\\
&={}^{\mathrm{co}(T_q)} (\Bbbk\langle h\rangle) & &= (\Bbbk\langle h\rangle)^{\mathrm{co}(T_q)}\\
&= \Bbbk. & &= \Bbbk.
\end{aligned}$$

Sí $Q = (T_q)_0\otimes_{\Bbbk} A_{\mu',\xi'}$ y $W = A_{\mu',\xi'}\otimes_{\Bbbk}(T_q)_0$. Así ${}^{\mathrm{co}(T_q)}(A_{\mu',\xi'}) = \Bbbk = (A_{\mu',\xi'})^{\mathrm{co}(T_q)}$, es decir tienen coinvariantes triviales.

Por otro lado si κ_1 y κ_2 son las funciones canónicas de λ_1 y λ_2 , entonces

$$\kappa_1(y\otimes 1 - h\otimes h^{-1}y) = x\otimes 1, \quad \kappa_1(h\otimes h^{-1}) = g\otimes 1,$$

$$\kappa_2(h^{-1}\otimes h) = 1\otimes g, \quad \kappa_2((\xi h)^{-1}\otimes y - h^{-1}y\otimes 1) = 1\otimes x,$$

lo cual implica que κ_1, κ_2 son sobreyectivas, y como $\dim(T_q) < \infty$, entonces son biyectivas. □

Retomaremos el estudio sobre estos objetos en capítulos posteriores. Más aún, se probará este mismo resultado usando teoría de representaciones de categorías.

De igual modo, damos los objetos biGalois sobre el álgebra de un grupo abeliano.

Ejemplo 4.5. Sean $H = \Bbbk\Gamma$ con Γ un grupo abeliano y $\psi \in Z^2(\Gamma, \Bbbk^\times)$. Definir $A_\psi := \Bbbk_\psi\Gamma = \Bbbk\Gamma$ como espacio vectorial, con producto dado por

$$e_g e_h = \psi(g,h)e_{gh}, \quad g,h \in \Gamma.$$

Proposición 4.6. *A_ψ es un objeto $(\Bbbk\Gamma, \Bbbk\Gamma)$-biGalois, y todo objeto $(\Bbbk\Gamma, \Bbbk\Gamma)$-biGalois es de la forma A_ψ para algún $\psi \in Z^2(\Gamma, \Bbbk^\times)$.*

Demostración. La estructura de bicomódulo álgebra esta dada por $\lambda : A_\psi \to H \otimes_\Bbbk A_\psi$ y $\rho : A_\psi \to A_\psi \otimes_\Bbbk H$ donde $\lambda(e_g) = g \otimes e_g$ y $\rho(e_g) = e_g \otimes g$ para $g \in \Gamma$. Están bien definidas:

$$\lambda(e_g e_h) = gh \otimes e_g e_h = \psi(g,h) gh \otimes e_{gh} = \psi(g,h)\lambda(e_{gh}),$$
$$\rho(e_g e_h) = e_g e_h \otimes gh = \psi(g,h) e_{gh} \otimes gh = \psi(g,h)\rho(e_{gh}).$$

Son de comódulos:

$$(Id \otimes_\Bbbk \lambda)\lambda(e_g) = g \otimes g \otimes e_g = (\Delta \otimes_\Bbbk Id)\lambda(e_g),$$
$$(\rho \otimes_\Bbbk Id)\rho(e_g) = e_g \otimes g \otimes g = (Id \otimes_\Bbbk \Delta)\rho(e_g).$$

Además ${}^{\mathrm{co}(H)}A_\psi = \{a \in A_\psi | \lambda(a) = 1 \otimes a\} = \Bbbk e_1$ y $A_\psi^{\mathrm{co}(H)} = \Bbbk e_1$; es decir tienen coinvariantes triviales.

Si κ_λ y κ_ρ son las funciones canónicas de λ y ρ respectivamente, entonces si $g,h \in G$, $\kappa_\lambda(e_g \otimes e_h) = g \otimes e_g e_h = \psi(g,h) g \otimes e_{gh}$ y $\kappa_\rho(e_g \otimes e_h) = \psi(g,h) e_{gh} \otimes h$.

Tienen por inversas

$$\kappa_\lambda^{-1}(g \otimes e_h) = \psi(g, hg^{-1})^{-1} e_g \otimes e_{hg^{-1}},$$

$$\kappa_\rho^{-1}(e_g \otimes h) = \psi(g, hg^{-1})^{-1} e_{g^{-1}h} \otimes e_h;$$

luego son isomorfismos. Por tanto A_ψ es un objeto (H,H)-biGalois.

Por otro lado sea B un objeto $(\Bbbk\Gamma, \Bbbk\Gamma)$-biGalois, en particular es $\Bbbk\Gamma$-Galois a derecha y satisface $\Bbbk\Gamma \simeq B$ en ${}_\Bbbk\mathcal{M}^{\Bbbk\Gamma}$ luego por el Teorema (3.3), existe un 2-cociclo σ tal que $B \simeq A_\sigma$ como comódulos, por tanto lo son como objetos biGalois. $\square$

Los objetos biGalois se pueden multiplicar, vía el producto cotensorial, y así se pueden obtener nuevos objetos.

Lema 4.7. [**S1**, Sección 3.2] *Sean H, L, R álgebras de Hopf. Si A es un objeto (L,H)-biGalois y B uno (H,R)-biGalois; entonces $A \square_H B$ es un objeto (L,R)-biGalois.*

□

Sea <u>*BiGal*</u> la categoría donde los objetos son las álgebras de Hopf, los morfismos de H a L son las clases de isomorfismos de objetos (H, L)-biGalois y la composición de morfismos está dada por el producto cotensorial.

Dado A un objeto L-Galois a derecha, existe una única álgebra de Hopf H tal que A es un objeto (H, L)-biGalois donde

$$H = \{\sum a_i \otimes b_i \in A \otimes_{\Bbbk} A^{op} | \sum a_i \otimes b_{i0} \otimes b_{i1} = \sum a_{i0} \otimes b_i \otimes S(a_{i1})\}.$$

Análogamente dado A un objeto H-Galois a izquierda, existe una única álgebra de Hopf L tal que A es un objeto (H, L)-biGalois donde

$$L = \{\sum a_i \otimes b_i \in A^{op} \otimes_{\Bbbk} A | \sum a_{i(-1)} \otimes a_{i0} \otimes b_i = \sum S(b_{i(-1)}) \otimes a_i \otimes b_{i0}\}.$$

PROPOSICIÓN 4.8. [**S1**, Teorema 3.2.2]*Sean H, L álgebras de Hopf. <u>BiGal</u> es un grupoide, esto es, para cada A objeto (H, L)-biGalois existe un objeto A^{-1} (L, H)-biGalois tal que $A \square_L A^{-1} \simeq H$ como (H, H)-bicomódulos álgebras y $A^{-1} \square_H A \simeq L$ como (L, L)-bicomódulos álgebras.*

Si las antípodas de H y L son biyectivas $A^{-1} = A^{op}$ con coacción a izquierda dada por $a \mapsto S^{-1}(a_1) \otimes a_0$ y a derecha dada por $a \mapsto a_0 \otimes S^{-1}(a_{-1})$.

DEMOSTRACIÓN. Si las antípodas no son biyectivas, ver [**S1**].

Sea $\phi : H \to A \square_L A^{-1}$ dada por $\phi(x \otimes y) = x \otimes y$. Basta ver que está bien definida: Si $\sum x_i \otimes y_i \in H$, entonces

$$\sum x_{i0} \otimes x_{i1} \otimes y_i = \sum x_i \otimes S^{-1}(y_{i1}) \otimes y_{i0} = \sum x_i \otimes y_{i(-1)} \otimes y_{i0},$$

por tanto ϕ es un isomorfismo de álgebras. Es de comódulos a izquierda ya que la coacción en ambos lados es sobre el primer tensor y de comódulos a derecha ya que la coacción es sobre el segundo tensor.

De igual modo se define $\psi : L \to A^{-1} \square_H A$ y satisface si $\sum x_i \otimes y_i \in L$, entonces $\sum x_{i0} \otimes x_{i1} \otimes y_i = \sum x_i \otimes S^{-1}(x_{i(-1)}) \otimes y_i = \sum x_i \otimes y_{i(-1)} \otimes y_{i0}$.

□

4.1. Clases de equivalencias. Es conocido que los isomorfismos entre objetos biGalois, dan lugar a una relación de equivalencia que me genera una partición sobre todo el conjunto de objetos biGalois. Definimos a continuación otra relación de equivalencia fundamental para describir cierta bicategoría.

LEMA 4.9. *Si A es un objeto (L, H)-biGalois y $g \in G(L)$, entonces A^g es un objeto (L, H)-biGalois donde $A^g = A$ como H-comódulos a derecha y si $\delta_A(a) = a_{-1} \otimes a_0 \in L \otimes_{\Bbbk} A$, entonces $\delta_{A^g}(a) = g^{-1} a_{-1} g \otimes a_0$.*

Demostración. Es claro que A^g es un (L,H)-bicomódulo álgebra ya que
$$g^{-1}a_{0(-1)}g\otimes a_{00}\otimes a_1 = g^{-1}a_{-1}g\otimes a_{00}\otimes a_{01}.$$
Por definición A^g es un objeto H-Galois a derecha, ya que A lo es.

Veamos que los coinvariantes a izquierda son triviales: Sea $x \in^{\mathrm{co}(L)} A^g$, es decir
$$1\otimes x = (g^{-1}x_{-1}g)\otimes x_0,$$
entonces $g\otimes x = x_{-1}g\otimes x_0$ y $gg^{-1}\otimes x = x_{-1}\otimes x_0$ y como ${}^{co(L)}A = \Bbbk$, entonces $x \in \Bbbk$.

Por hipótesis la función canónica $\kappa_A : A\otimes_{\Bbbk} A \to L\otimes_{\Bbbk} A$ de δ, la cual satisface $\kappa(x\otimes y) = x_{-1}\otimes x_0 y$ es biyectiva. Luego para $h \in H, x \in A(= A^g)$ existe $l \in A\otimes_{\Bbbk} A$ tal que $\kappa_A(l) = ghg^{-1}\otimes x$, luego $\kappa_{A^g}(l) = h\otimes x$ y esto implica que κ_{A^g} es sobreyectiva (acá κ_{A^g} es la función canónica de δ_{A^g}).

Además si $\sum g^{-1}x^i_{-1}g\otimes x^i_0 y^i = 0$, entonces
$$\sum x^i_{-1}\otimes x^i_0 y^i = g0g^{-1}\otimes 0 = 0$$
y como κ_A es 1-1 esto implica que $\sum x^i\otimes y^i = 0$ por tanto κ_{A^g} es 1-1; y A^g resulta un objeto L-Galois, y por tanto (L,H)-biGalois. $\square$

Lo anterior da lugar a la siguiente relación de equivalencia: Dos objetos A, B biGalois se dicen *equivalentes* y se denota por $A \sim B$ si existe un elemento $g \in G(H)$ tal que $A^g \simeq B$ como objetos biGalois.

Si $\mathrm{BiGal}(H)$ denota el grupo de clases de isomorfismos de objetos (H,H)-biGalois, $\mathrm{InnbiGal}(H)$ denota el subgrupo de $\mathrm{BiGal}(H)$ consistente de los objetos H-biGalois equivalentes a H y $\mathrm{OutbiGal}(H) = \mathrm{BiGal}(H)/\,\mathrm{InnbiGal}(H)$.

Capítulo 3

Álgebras de super-grupo

Presentaremos a continuación un ejemplo de álgebra de Hopf no semisimple. Uno de los objetivos del trabajo es construir extensiones de la categoría $\mathrm{Comod}(H)$ donde H es un álgebra de super-grupo. Para construir estas extensiones requeriremos saber cierta información sobre dichas álgebras de Hopf como por ejemplo los comódulos simples y los objetos biGalois. Esto se presentará en este capítulo.

Recordemos la definición de las álgebras de super-grupo, dada en el Ejemplo 1.3(3), del Capítulo 2. Partimos de los siguientes datos:

- un grupo Abeliano finito G;
- $u \in G$ un elemento de orden 2;
- V un G-módulo de dimensión finita tal que $u \cdot v = -v$ si $v \in V$.

Las álgebras de super-grupo $\mathcal{A}(V, u, G)$ están generadas, como álgebra, por los elementos $v \in V, g \in G$ sujetos a las relaciones

$$vw + wv = 0, \quad gv = (g \cdot v)g, \text{ si } v, w \in V, g \in G.$$

El coproducto y la antípoda son determinadas si $v \in V, g \in G$ por

$$\Delta(v) = v \otimes_{\Bbbk} 1 + u \otimes_{\Bbbk} v, \quad \Delta(g) = g \otimes_{\Bbbk} g, \quad \mathcal{S}(v) = -uv, \quad \mathcal{S}(g) = g^{-1}.$$

Otra forma de ver al álgebra de Hopf $\mathcal{A}(V, u, G)$ es la siguiente. El espacio vectorial V posee una estructura de módulo de Yetter-Drinfeld sobre G con la acción de G y la siguiente coacción:

$$\delta : V \to \Bbbk G \otimes_{\Bbbk} V, \quad \delta(v) = u \otimes v,$$

para todo $v \in V$. El álgebra de Nichols de V es el álgebra exterior $\wedge V$ y $\mathcal{A}(V, u, G)$ es la bosonización $\wedge V \# \Bbbk G$.

1. Comódulos simples

Lo primero será describir todos los comódulos simples sobre el álgebra $\mathcal{A}(V, u, G)$ y sus cubrimientos proyectivos, datos que necesitaremos para el cálculo de ciertas dimensiones.

Si $g \in G$, el comódulo $\Bbbk_g$ definido en el Ejemplo 2.2(2) (del Capítulo 2) es un $\mathcal{A}(V, u, G)$-comódulo simple, donde la coacción está dada por

$$w_g \to g \otimes w_g, \qquad \text{si } \Bbbk_g = \Bbbk\langle w_g \rangle.$$

Sea $P_g = \wedge(V)\otimes_{\Bbbk}\Bbbk\langle g\rangle$ el $\mathcal{A}(V,u,G)$-comódulo con coacción determinada por la restricción al coproducto, esto es

$$vg \mapsto vg\otimes g + ug\otimes vg, \quad g \mapsto g\otimes g, \quad v \in V.$$

Más específicamente si $t = 2,\dots,k$, la coacción está dada como sigue. Considerar el subconjunto de $\mathbb{N}^t$

$$\mathcal{L}_t = \{(1,\dots,t),(t,1,\dots,t-1),(t-1,t,1,\dots,t-2),\dots,(2,3,\dots,t,1)\},$$

así sí $\breve{i} = (i_1,\dots,i_t)$

$$v_1\cdots v_t g \mapsto v_1\cdots v_t g\otimes g + u^t g\otimes v_1\cdots v_t g + \sum_{\breve{i}\in\mathcal{L}_t} v_{i_1}\cdots v_{i_{t-1}} ug\otimes v_{i_t} g +$$
$$\sum_{\breve{i}\in\mathcal{L}_t} v_{i_1}\cdots v_{i_{t-2}} u^2 g\otimes v_{i_{t-1}} v_{i_t} g + \cdots + \sum_{\breve{i}\in\mathcal{L}_t} v_{i_1} u^{t-1} g\otimes v_{i_2}\cdots v_{i_t} g.$$

A continuación damos la familia de comódulos simples y sus respectivos cubrimientos proyectivos.

TEOREMA 1.1. [**MM**, Teorema 3.2] *Sea $\{v_1,\dots,v_k\}$ una base de V.*

1. *La familia $\{\Bbbk_g : g \in G\}$ es un conjunto completo de clases de isomorfismos de $\mathcal{A}(V,u,G)$-comódulos simples.*
2. *El cubrimiento proyectivo del comódulo $\Bbbk_{u^k g}$ es P_g.*
3. *Si $g,h \in G$, $\Bbbk_g\otimes_{\Bbbk}\Bbbk_h \simeq \Bbbk_{gh}$ y $P_g\otimes_{\Bbbk}\Bbbk_h \simeq P_{gh}$ como $\mathcal{A}(V,u,G)$-comódulos.*

DEMOSTRACIÓN. 1) Como $\mathcal{A}(V,u,G)$ es punteada, todo comódulo simple tiene dimensión uno y proviene de un elemento tipo-grupo de $\mathcal{A}(V,u,G)$. Esto prueba (1).

2) Como $\mathcal{A}(V,u,G) = \oplus_{g\in G} P_g$, como $\mathcal{A}(V,u,G)$-comódulos a izquierda, entonces P_g es un comódulo proyectivo para todo $g \in G$.

Sea $p_g : P_g \to \Bbbk_{u^k g}$ el epimorfismo de $\mathcal{A}(V,u,G)$-comódulos dado por

$$p_g(x) = \begin{cases} w_{u^k g} & \text{si } x = v_1\dots v_k\otimes g, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{7}$$

Veamos que esta proyección es esencial: Sea L cualquier $\mathcal{A}(V,u,G)$-comódulo junto a un morfismo de comódulos $\psi : L \to P_g$ tal que $p_g \circ \psi$ es un epimorfismo. Sea $y \in L$ tal que $p_g\circ\psi(y) = w_{u^k g}$, entonces $\psi(y) = z + \alpha\, v_1\dots v_k\otimes g$ para algún $z \in \ker(p_g)$ y $0 \neq \alpha \in \Bbbk$.

Notar que P_g es el subcomódulo generado por $z+\alpha\ v_1 \dots v_k \otimes g$. Como la imagen de ψ es un subcomódulo que contiene a $z+\alpha\ v_1 \dots v_k \otimes g$, entonces debe ser todo P_g. Así ψ es suryectiva y el morfismo p_g es esencial. Así P_g es el cubrimiento proyectivo del comódulo $\Bbbk_{u^k g}$.

3) Si $g, h \in G$, sean $\gamma : \Bbbk_g \otimes_{\Bbbk} \Bbbk_h \to \Bbbk_{gh}$ y $\beta : P_g \otimes_{\Bbbk} \Bbbk_h \to P_{gh}$ las funciones dadas por

$$\gamma(w_g \otimes w_h) = w_{gh}, \quad \beta(v \otimes g \otimes w_h) = v \otimes gh, \quad v \in V;$$

las cuales son isomorfismos de comódulos. □

El siguiente resultado será usado para computar ciertas dimensiones de ciertas categorías.

COROLARIO 1.2. [**MM**, Corolario 3.3] *Asumir que* $\dim(V) = 2$. *Si* $g \in G$ *tenemos que*

$$\langle P_g \rangle = 2\langle \Bbbk_g \rangle + 2\langle \Bbbk_{ug} \rangle,$$

donde $\langle P_g \rangle$ *está en el grupo de Grothendieck de la categoría de comódulos sobre* $\mathcal{A}(V, u, G)$ *a izquierda de dimensión finita.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{v, w\}$ una base de V. Recordar la proyección $p_g : P_g \to \Bbbk_g$ descrita en (7). En este caso P_g está generado por $\{vw \otimes g, v \otimes g, w \otimes g, 1 \otimes g\}$ como espacio vectorial, luego el núcleo de p_g está generado como espacio vectorial por $\{v \otimes g, w \otimes g, 1 \otimes g\}$. Definir $f : \ker(p_g) \to \Bbbk_{ug}$ el epimorfismo de $\mathcal{A}(V, u, G)$-comódulos

$$f(x) = \begin{cases} w_{ug} & \text{si } x = w \otimes g, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sea $f_1 : \ker(f) \to \Bbbk_{ug}$ el epimorfismo de $\mathcal{A}(V, u, G)$-comódulos dado por

$$f_1(x) = \begin{cases} w_{ug} & \text{si } x = v \otimes g, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La serie de composición para P_g está dada por

$$P_g \supseteq \ker(p_g) \supseteq \ker(f) \supseteq \ker(f_1) \supseteq 0,$$

y los factores de composición son

$$\begin{array}{cc} P_g/\ker(p_g) \simeq \Bbbk_g, & \ker(p_g)/\ker(f) \simeq \Bbbk_{ug}, \\ \ker(f)/\ker(f_1) \simeq \Bbbk_{ug}, & \ker(f_1) \simeq \Bbbk_g. \end{array}$$

Por el Teorema 2.10, la clase $\langle P_g \rangle$ es igual a las clases de sus factores de composición. □

2. Objetos biGalois

Los objetos biGalois sobre un par de álgebras de Hopf H, L fueron introducidos por Schauenburg [**S1**]. Estos objetos clasifican ciertos funtores monoidales entre las categorías de comódulos sobre H y L, de ahí su gran importancia a lo largo de este trabajo. En los trabajos [**S1**], [**S2**], [**S3**], [**S4**] se clasificaron los objetos biGalois para algunas álgebras de Hopf como las álgebras de Taft y las álgebras de grupos. En esta sección clasificaremos los objetos biGalois para las álgebras de supergrupo usando una técnica distinta a la utilizada por Schauenburg. Esta clasificación nos permite clasificar ciertos funtores, que son pieza fundamental en la construcción de ciertas categorías llamadas productos cruzados.

La idea que usaremos para clasificar los objetos H-biGalois es la siguiente: Primero clasificar todos los comódulos álgebras $H\otimes_{\Bbbk}H^{\rm cop}$-simples a izquierda con coinvariantes triviales. Los objetos H-biGalois están dentro de esta familia. Entonces usando un argumento de dimensión podemos detectar los objetos biGalois. Los resultados para $H = \mathcal{A}(V, u, G)$, dados en estas secciones provienen de los trabajos [**FMM**], [**MM**].

Primero analicemos la estructura del álgebra $H\otimes_{\Bbbk}H^{\rm cop}$.

2.1. El producto tensorial $\mathcal{A}(V, u, G)\otimes_{\Bbbk}\mathcal{A}(V, u, G)^{\rm cop}$. Sean G_1, G_2 grupos finitos y $u_i \in G_i$ elementos centrales de orden 2. Para $i = 1, 2$ sea V_i un G_i-módulo de dimensión finita, tal que u_i actúa en V_i como -1.

Definir $\mathcal{A}(V_1, V_2, u_1, u_2, G_1, G_2) = \mathcal{A}(V_1, u_1, G_1)\otimes_{\Bbbk}\mathcal{A}(V_2, u_2, G_2)$ con la estructura de álgebra de Hopf del producto tensorial. Por simplicidad, denotar

$$\mathcal{B}(V, u, G) = \mathcal{A}(V, V, u, u, G, G).$$

Definir $D = G_1 \times G_2$. Ambos espacios vectoriales V_1, V_2 son D-módulos vía

$$(g, h) \cdot v_1 = g \cdot v_1, \quad (g, h) \cdot v_2 = h \cdot v_2, \quad (g, h) \in D, v_i \in V_i; i = 1, 2.$$

El álgebra $\mathcal{A}(V_1, V_2, u_1, u_2, G_1, G_2)$ es generada por los elementos de V_1, V_2, D sujetos a las relaciones si $g \in D$, $v_i, w_i \in V_i$, $i = 1, 2$

$$v_1w_1 + w_1v_1 = 0, \;\; v_2w_2 + w_2v_2 = 0, \;\; v_1v_2 = v_2v_1,$$

$$gv_1 = (g \cdot v_1)g, \quad gv_2 = (g \cdot v_2)g.$$

Si $(g_1, g_2) \in D$, $v_i \in V_i$, $i = 1, 2$, la estructura de álgebra de Hopf está determinada por

$$\Delta(v_1) = v_1 \otimes 1 + (u_1, 1) \otimes v_1, \quad \Delta(v_2) = v_2 \otimes 1 + (1, u_2) \otimes v_2,$$
$$\Delta(g_1, g_2) = (g_1, g_2) \otimes (g_1, g_2).$$

Definiremos una familia de álgebras de Hopf que son deformaciones por cociclo del producto tensorial de álgebras de super-grupo. Sea $(V_1, V_2, u_1, u_2, G_1, G_2)$ un dato como antes y $V = V_1 \oplus V_2$.

Definir $\mathcal{H}(V_1, V_2, u_1, u_2, G_1, G_2) = \wedge(V) \otimes_{\Bbbk} \Bbbk D$ con producto determinado por

$$vw + wv = 0, \quad gv = (g \cdot v)g, \text{ si } v, w \in V_1 \oplus V_2, g \in D,$$

y coproducto determinado para todo $v_i \in V_i$, $i = 1, 2$ por

$$\Delta(v_1) = v_1 \otimes 1 + (u_1, 1) \otimes v_1, \quad \Delta(v_2) = v_2 \otimes 1 + (1, u_2) \otimes v_2.$$

Lema 2.1. [**MM**, Lema 3.4] *Sea* $H = \mathcal{A}(V_1, V_2, u_1, u_2, G_1, G_2)$, $\psi \in Z^2(D, \Bbbk^\times)$ *y* $\sigma_\psi : H \otimes_{\Bbbk} H \to \Bbbk$ *el 2-cociclo de Hopf definido en* (5) *del capítulo 2. Denotar*

$$\xi = \psi((u_1, 1), (1, u_2)) \psi((1, u_2), (u_1, 1))^{-1}.$$

Entonces

(i) *si* $\xi = 1$ *tenemos* $H^{[\sigma]} \simeq \mathcal{A}(V_1, V_2, u_1, u_2, G_1, G_2)$*;*
(ii) *si* $\xi = -1$ *, entonces* $H^{[\sigma]} \simeq \mathcal{H}(V_1, V_2, u_1, u_2, G_1, G_2)$.

Demostración. Sean $v \in V_1, w \in V_2$, entonces

$$(\mathrm{id} \otimes_{\Bbbk} \Delta)\Delta(v) = v \otimes 1 \otimes 1 + (u_1, 1) \otimes v \otimes 1 + (u_1, 1) \otimes (u_1, 1) \otimes v,$$
$$(\mathrm{id} \otimes_{\Bbbk} \Delta)\Delta(w) = w \otimes 1 \otimes 1 + (1, u_2) \otimes w \otimes 1 + (1, u_2) \otimes (1, u_2) \otimes w.$$

Así, usando (4), se sigue que para todo $v_1, w_1 \in V_1$, $v_2, w_2 \in V_2$

$$v_1 \cdot_{[\sigma]} w_1 + w_1 \cdot_{[\sigma]} v_1 = 0, \quad v_2 \cdot_{[\sigma]} w_2 + w_2 \cdot_{[\sigma]} v_2 = 0, \quad v_1 \cdot_{[\sigma]} w_2 - \xi \; w_2 \cdot_{[\sigma]} v_1 = 0.$$

Además si $g \in G$, $i = 1, 2$

$$g \cdot_{[\sigma]} v_1 = \psi(g, (u_1, 1))\, g v_1, \quad v_1 \cdot_{[\sigma]} g = \psi((u_1, 1), g)\, v_1 g,$$
$$g \cdot_{[\sigma]} v_2 = \psi((1, u_2), g)\, g v_2, \quad v_2 \cdot_{[\sigma]} g = \psi((1, u_2), g)\, v_2 g.$$

Por tanto si $v \in V$

$$g \cdot_{[\sigma]} v \cdot_{[\sigma]} g^{-1} = g v g^{-1}.$$

De estas relaciones, y como el coproducto no se cambió, se deduce que si $\xi = 1$, entonces $H^{[\sigma]} \simeq \mathcal{A}(V_1, V_2, u_1, u_2, G_1, G_2)$ y si $\xi = -1$, entonces $H^{[\sigma]} \simeq \mathcal{H}(V_1, V_2, u_1, u_2, G_1, G_2)$. ☐

Como segundo paso, damos los comódulos simples sobre esta álgebra producto.

2.2. Comódulos álgebras simples sobre $\mathcal{B}(V, u, G)$. Recordemos la descripción de todos los comódulos álgebras $\mathcal{B}(V, u, G)$-simples a izquierda presentados en [**M2**].

La idea de clasificar comódulos álgebras H-simples a izquierda, para un álgebra de Hopf H graduada de dimensión finita, es en términos generales la siguiente. Si A es un comódulo álgebra simple a izquierda, su álgebra graduada gr$A$, con respecto a la filtración de Loewy, es también simple. Un torcimiento o twist de gr$A$, por cierto 2-cociclo de Hopf σ, es isomorfo a un coideal subálgebra homogéneo dentro de $H^{[\sigma]}$. Entonces, se deben clasificar coideales subálgebra homogéneos dentro de $H^{[\sigma]}$. Por último, se computan todos los *levantes* de gr$A$.

Presentaremos una familia de comódulos álgebras $\mathcal{B}(V, u, G)$-simples a izquierda y luego demostraremos que estas son todas. Estas álgebras las parametrizamos mediante ciertas colecciones, llamadas compatibles.

Definición 2.2. Una colección $(W^1, W^2, W^3, \beta, F, \psi)$ es *compatible* con (V, u, G) si

- $W^1, W^2 \subseteq V$, $W^3 \subseteq V \oplus V$ son subespacios, tal que
$$W^3 \cap W^1 \oplus W^2 = W^3 \cap V \oplus \{0\} = W^3 \cap \{0\} \oplus V = 0;$$
- $F \subseteq G \times G$ es un subgrupo que deja invariantes los subespacios W^i, $i = 1, 2, 3$;
- si $W^3 \neq 0$ se requiere que $(u, u) \in F$;
- si $W = W^1 \oplus W^2 \oplus W^3$, entonces $\beta : W \times W \to \Bbbk$ es una forma bilineal estable bajo la acción de F, tal que si $w_i \in W^i$, $i = 1, 2, 3$,
$$\beta(w_1, w_2) = -\beta(w_2, w_1),\ \beta(w_1, w_3) = \beta(w_3, w_1),$$
$$\beta(w_2, w_3) = -\beta(w_3, w_2),$$
y β restringida a $W^i \times W^i$ es simétrica si $i = 1, 2, 3$;
- si $(u, u) \notin F$, entonces β restringida a $W^1 \times W^2$ y $W^2 \times W^3$ es nula;
- $\psi \in H^2(F, \Bbbk^\times)$.

Si $(W^1, W^2, W^3, \beta, F, \psi)$ es compatible con (V, u, G), el $\mathcal{B}(V, u, G)$-comódulo álgebra a izquierda $\mathcal{K}(W, \beta, F, \psi)$ es definido como sigue. El álgebra $\mathcal{K}(W, \beta, F, \psi)$ está generada por W y $\{e_f : f \in F\}$, sujeta a las relaciones
$$e_f e_h = \psi(f, h)\, e_{fh}, \quad e_f w = (f \cdot w) e_f,$$
$$w_i w_j + w_j w_i = \beta(w_i, w_j) 1, \quad w_i \in W^i, w_j \in W^j,$$
si $(i, j) \in \{(1, 1), (2, 2), (1, 3), (3, 3)\}$, y relaciones
$$w_2 w_3 - w_3 w_2 = \beta(w_2, w_3)\, e_{(u,u)},\ \text{si } w_2 \in W^2, w_3 \in W^3,$$

$$w_1w_2 - w_2w_1 = \beta(w_1, w_2)\, e_{(u,u)}, \text{ si } w_1 \in W^1, w_2 \in W^2.$$

Definir $\delta : \mathcal{K}(W, \beta, F, \psi) \to \mathcal{B}(V, u, G) \otimes_{\Bbbk} \mathcal{K}(W, \beta, F, \psi)$ sobre los generadores

$$\begin{aligned} \delta(e_f) = f \otimes e_f, \quad \delta(w_1) &= w_1 \otimes 1 + (u, 1) \otimes w_1, \quad \text{si } f \in F, w_1 \in W^1, \\ \delta(w_2) &= w_2 \otimes 1 + (1, u) \otimes w_2, \qquad \text{si } w_2 \in W^2, \\ \delta(v, w) = v \otimes 1 + w(u, u) &\otimes e_{(u,u)} + (u, 1) \otimes (v, w), \qquad \text{si } (v, w) \in W^3. \end{aligned}$$

Lema 2.3. *El álgebra $\mathcal{K}(W, \beta, F, \psi)$ es un $\mathcal{B}(V, u, G)$-comódulo a izquierda.*

Demostración. La coacción δ a izquierda está bien definida ya que

$$\begin{aligned} \delta(e_f e_h) &= fh \otimes e_f e_h = fh \otimes \psi(f, h) e_{fh} \\ &= \psi(f, h) \delta(e_{fh}), \\ \delta(e_f w) &= fv \otimes e_f + fw(u, u) \otimes e_f e_{(u,u)} + f(u, 1) \otimes e_f (v, w) \\ &= (f \cdot v) f \otimes e_f + (f \cdot w(u, u)) f \otimes (f \cdot e_{(u,u)}) e_f \\ &+ (f \cdot (u, 1)) f \otimes (f \cdot (u, w)) e_f \\ &= f \cdot (v \otimes 1 + w(u, u) \otimes e_{(u,u)} + (u, 1) \otimes (v, w))(f \otimes e_f) \\ &= \delta((f \cdot w) e_f), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta((v, w)(a, z) + (a, z)(v, w)) &= (v \otimes 1 + w(u, u) \otimes e_{(u,u)} + (u, 1) \otimes (v, w)) \\ &(a \otimes 1 + z(u, u) \otimes e_{(u,u)} + (u, 1) \otimes (a, z)) + (a \otimes 1 + z(u, u) \otimes \\ &e_{(u,u)} + (u, 1) \otimes (a, z))(v \otimes 1 + w(u, u) \otimes e_{(u,u)} + (u, 1) \otimes (v, w)) \\ &= w(u, u)(u, 1) \otimes e_{(u,u)}(a, z) + (u, 1) w(u, u) \otimes (a, z) e_{(u,u)} + (u, 1)^2 \\ &\otimes ((v, w)(a, z) + (a, z)(v, w)) + z(u, u)(u, 1) \otimes e_{(u,u)}(v, w) \\ &+ (u, 1) z(u, u) \otimes (v, w) e_{(u,u)} \\ &= \beta((v, w), (a, z)) 1 + w(u, u)(u, 1) \otimes (e_{(u,u)} y + y e_{(u,u)}) + z(u, u) \\ &(u, 1) \otimes (e_{(u,u)} x + x e_{(u,u)}) \\ &= \beta((v, w), (a, z)) 1, \end{aligned}$$

si $(v, w), (a, z) \in W^i$ para $i = 1, 2, 3$. De igual modo, se prueba que satisface las otras dos relaciones, y por tanto $\mathcal{K}(W, \beta, F, \psi)$ es un comódulo sobre $\mathcal{B}(V, u, G)$ a izquierda. $\square$

Definición 2.4. Si $(W^1, W^2, W^3, \beta, F, \psi)$ es un dato compatible con (V, u, G) tal que $W^1 = W^2 = 0$, denotar por

$$\mathcal{L}(W, \beta, F, \psi) := \mathcal{K}(W, \beta, F, \psi).$$

Si (W, β, F, ψ) es una colección compatible con (V, u, G), entonces la familia $\{\mathcal{K}(W, \beta, F, \psi)\}$ resulta ser un conjunto completo de comódulos álgebras $\mathcal{B}(V, u, G)$-simple a izquierda con coinvariantes triviales, ver [**M2**, Proposición 7.4 y Teorema 7.10].

TEOREMA 2.5. *Si* $(W^1, W^2, W^3, \beta, F, \psi)$ *es un dato compatible con* (V, u, G), *entonces*

$$\dim \mathcal{K}(W, \beta, F, \psi) = \dim W |F|.$$

El álgebra $\mathcal{K}(W, \beta, F, \psi)$ *es un comódulo álgebra* $\mathcal{B}(V, u, G)$*-simple a izquierda con coinvariantes triviales. Más aún, todo* $\mathcal{B}(V, u, G)$*-comódulo álgebra* $\mathcal{B}(V, u, G)$*-simple a izquierda con coinvariantes triviales es isomorfo a* $\mathcal{K}(W, \beta, F, \psi)$ *para algún dato compatible* (W, β, F, ψ). $\square$

Como tercer paso, damos una descripción explícita de una subfamilia de estos comódulos que resultan ser todos los objetos biGalois sobre $\mathcal{A}(V, u, G)$.

2.2.1. Comódulos $\mathcal{L}(W, \beta, F, \psi)$. Daremos a continuación explícitamente las coacciones a izquierda y derecha del álgebra $\mathcal{L}(W, \beta, \psi)$, introducidas en la Definición 2.4.

Todo $\mathcal{B}(V, u, G)$-comódulo a izquierda es un $\mathcal{A}(V, u, G)$-bicomódulo donde la coacción a derecha es obtenida usando la proyección canónica

$$\epsilon \otimes_{\Bbbk} \mathrm{id} : \mathcal{B}(V, u, G) = \mathcal{A}(V, u, G) \otimes_{\Bbbk} \mathcal{A}(V, u, G) \twoheadrightarrow \mathcal{A}(V, u, G),$$

compuesta con el isomorfismo $\phi : \mathcal{A}(V, u, G) \to \mathcal{A}(V, u, G)^{\mathrm{cop}}$ dado en el Lema 1.4.

La estructura de $\mathcal{A}(V, u, G)$-bicomódulo sobre $\mathcal{L}(W, \beta, F, \psi)$ es dada por las coacciones a izquierda y derecha (sea $H = \mathcal{A}(V, u, G)$) si $(g, f) \in F$, $(v, w) \in W$

$$\begin{aligned} &\lambda : \mathcal{L}(W, \beta, F, \psi) \to H \otimes_{\Bbbk} \mathcal{L}(W, \beta, F, \psi) \\ &\qquad \lambda(v, w) = v \otimes 1 + u \otimes (v, w), \quad \lambda(e_{(g,f)}) = g \otimes e_{(g,f)}; \\ &\rho : \mathcal{L}(W, \beta, F, \psi) \to \mathcal{L}(W, \beta, F, \psi) \otimes_{\Bbbk} H \\ &\qquad \rho(v, w) = e_{(u,u)} \otimes w + (v, w) \otimes 1, \quad \rho(e_{(g,f)}) = e_{(g,f)} \otimes f. \end{aligned}$$

Con esta estructura, estos comódulos resultan ser objetos biGalois.

PROPOSICIÓN 2.6. *Si* $F \subseteq G \times G$ *es un subgrupo y* $W \subseteq V \oplus V$ *es un subespacio estable bajo la acción de* F *tales que*

1. $(u, u) \in F$,
2. $|F| = |G|$,

3. $F \cap G \times \{1\} = \{1\} = F \cap \{1\} \times G$,
4. $\dim W = \dim V$,
5. $W \cap V \oplus 0 = 0 = W \cap 0 \oplus V$;

entonces los comódulos álgebras $\mathcal{L}(W, \beta, F, \psi)$ son objetos $\mathcal{A}(V, u, G)$-biGalois.

Demostración. Por el Teorema 2.5, $\mathcal{L}(W, \beta, F, \psi)$ es un bicomódulo álgebra sobre $\mathcal{A}(V, u, G)$ con coinvariantes triviales. Considerar las siguientes funciones canónicas de ρ y λ respectivamente

$$\kappa_d : \mathcal{L}(W, \beta, F, \psi) \otimes_{\Bbbk} \mathcal{L}(W, \beta, F, \psi) \to \mathcal{L}(W, \beta, F, \psi) \otimes_{\Bbbk} \mathcal{A}(V, u, G),$$

$$\kappa_i : \mathcal{L}(W, \beta, F, \psi) \otimes_{\Bbbk} \mathcal{L}(W, \beta, F, \psi) \to \mathcal{A}(V, u, G) \otimes_{\Bbbk} \mathcal{L}(W, \beta, F, \psi).$$

Si $(v, w) \in W, (g, f) \in F$, entonces

$$(v, w) \otimes 1 = \kappa_d((v, w), e_{(1,1)}),$$

$$e_{(g,f)} \otimes 1 = \kappa_d(e_{(g,f)}, e_{(1,1)}).$$

Afirmación 2.6.1. *Dados $v \in V$, $g \in G$ existen $w, w' \in V$ y $h, h' \in G$ tales que $(v, w), (w', v) \in W$ y $(g, h), (h', g) \in F$.*

Demostración de la Afirmación. Considerar las siguientes transformaciones lineales

$$\Pi_1 : W \to V, \qquad \Pi_2 : W \to V$$

$$(v, w) \mapsto v \qquad (v, w) \mapsto w.$$

Son inyectivas ya que $W \cap V \oplus 0 = 0 = W \cap 0 \oplus V$, y como $\dim(V) = \dim(W)$ son sobreyectivas. De manera análoga se prueba la otra parte. Esto concluye la demostración de la afirmación. □

Por tanto, dados $g \in G$ y $w \in V$ existen $h \in G, v \in V$ tales que $(h, f) \in F$ y $(v, w) \in W$. Luego

$$1 \otimes g = \kappa_d(e^{-1}_{(h,g)}, e_{(h,g)}),$$

$$1 \otimes w = \kappa_d((e_{(u,u)}, (v, w)) - (e_{(u,u)}(v, w), e_{(1,1)}),$$

por tanto κ_d es biyectiva. De igual modo si $e = e_{(u,u)}$

$$1 \otimes (v, w) = \kappa_i(e_{(1,1)}, (v, w)), \quad 1 \otimes e_{(g,f)} = \kappa_i(e_{(1,1)}, e_{(g,f)}),$$

$$g \otimes 1 = \kappa_i(e_{(g,h)}, e^{-1}_{(g,h)}), \qquad v \otimes 1 = \kappa_i(((v, w), e_{(1,1)}) - (e, e(v, w))),$$

por tanto κ_i es biyectiva y $\mathcal{L}(W, \beta, F, \psi)$ es un objeto $\mathcal{A}(V, u, G)$-biGalois. □

Como cuarto paso, se prueba que estas álgebras son todos los objetos biGalois sobre las álgebras de super-grupo.

2.3. Objetos BiGalois sobre $\mathcal{A}(V, u, G)$. Usaremos la descripción de comódulos álgebras $\mathcal{B}(V, u, G)$-simples a izquierda dada anteriormente. A continuación, se muestra como son todos los objetos biGalois sobre esta álgebra.

TEOREMA 2.7. [**MM**, Teorema 4.5] *Cualquier objeto $\mathcal{A}(V, u, G)$-biGalois es isomorfo a un álgebra de la forma $\mathcal{L}(W, \beta, F, \psi)$, donde*

- *$F \subseteq G \times G$ es un subgrupo tal que $F \cap G \times \{1\} = \{1\} = F \cap \{1\} \times G$, $|F| = |G|$, $(u, u) \in F$;*
- *$W \subseteq V \oplus V$ es un subespacio estable bajo la acción de F tal que*
$$\dim W = \dim V, \quad W \cap V \oplus 0 = 0 = W \cap 0 \oplus V;$$
- *$\beta : W \times W \to \Bbbk$ es una forma bilineal simétrica F-invariante;*
- *y $\psi \in H^2(G, \Bbbk^\times)$ es un 2-cociclo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea A un objeto $\mathcal{A}(V, u, G)$-biGalois. Entonces es un $\mathcal{B}(V, u, G)$-comódulo álgebra con coinvariantes triviales $\mathcal{B}(V, u, G)$-simple a izquierda. Así existe un dato compatible $(W^1, W^2, W^3, \beta, F, \psi)$ tal que
$$A \simeq \mathcal{K}(W, \beta, F, \psi).$$
Como los coinvariantes de A son triviales, entonces $W^1 = W^2 = 0$ y $W = W^3$.

Las condiciones sobre F y W se deben satisfacer ya que los coinvariantes de A son triviales y porque la $\dim A = \dim \mathcal{A}(V, u, G) = \dim V|G|$. □

Ahora, daremos una descripción alternativa del dato compatible (W, β, F, ψ) tal que el comódulo álgebra $\mathcal{L}(W, \beta, F, \psi)$ es un objeto biGalois.

Una colección (T, β, α, ψ) es también llamada un *dato compatible* si

- $\alpha : G \to G$ es un isomorfismo de grupos tal que $\alpha(u) = u$;
- $T : V \to V$ es un isomorfismo lineal tal que
$$T(g \cdot v) = \alpha(g) \cdot T(v), \quad v \in V, g \in G;$$
- $\beta : V \times V \to \Bbbk$ es una forma bilineal simétrica G-invariante;
- $\psi \in H^2(G, \Bbbk^\times)$ es un 2-cociclo.

LEMA 2.8. [**MM**, Lema 4.6] *Existe una correspondencia biyectiva entre*

- *El conjunto de datos compatibles (T, β, α, ψ).*
- *Las colecciones (W, β, F, ψ) que satisfacen las condiciones del Teorema 2.7.*

DEMOSTRACIÓN. Dado (T,β,α,ψ) un dato compatible, definir

- $W = \{(T(v), v) : v \in V\}$,
- $F = \{(\alpha(g), g) : g \in G\}$,
- La forma bilineal $\widehat{\beta}((T(v), v),(T(w), w)) = \beta(v, w)$,
- el 2-cociclo $\widehat{\psi}((\alpha(g), g),(\alpha(f), f)) = \psi(g, f)$,

si $v, w \in V, g, f \in G$. Esta aplicación da lugar a la correspondencia biyectiva. $\square$

DEFINICIÓN 2.9. Si (T,β,α,ψ) es un dato compatible, denotar $\mathcal{L}(T,\beta,\alpha,\psi)$ el álgebra $\mathcal{L}(W,\beta,F,\psi)$ donde la colección (W,β,F,ψ) es la asociada al dato (T,β,α,ψ) bajo la correspondencia del Lema 2.8. Si (T,β,α,ψ), $(T',\beta',\alpha',\psi')$ son datos compatibles, definir

$$(T,\beta,\alpha,\psi) \bullet (T',\beta',\alpha',\psi') = (T \circ T', \beta+\beta', \alpha\circ\alpha', \psi\psi').$$

Si $g \in G$ definir $T_g : V \to V$ el isomorfismo $T_g(v) = g \cdot v$ si $v \in V$. Entonces $(T_g, 0, \mathrm{id}, 1)$ es un dato compatible si $g \in G$.

Luego $\bullet$ dota al conjunto de datos compatibles de una estructura de grupo.

LEMA 2.10. [**MM**, Lema 4.8] *Sean (T,β,α,ψ), $(T',\beta',\alpha',\psi')$ datos compatibles.*

1. *La colección $(T \circ T', \beta+\beta', \alpha\circ\alpha', \psi\psi')$ es un dato compatible.*
2. *El conjunto de datos compatibles con el producto*

$$(T,\beta,\alpha,\psi) \bullet (T',\beta',\alpha',\psi') = (T \circ T', \beta+\beta', \alpha\circ\alpha', \psi\psi') \tag{8}$$

es un grupo con identidad $(Id, 0, id, 1)$.

DEMOSTRACIÓN. 1. La demostración es directa.

2. Si (T,β,α,ψ) es un dato compatible, entonces $(T^{-1}, -\beta, \alpha^{-1}, \psi^{-1})$ también lo es y es el inverso de (T,β,α,ψ). $\square$

DEFINICIÓN 2.11. Definir el grupo $\mathfrak{R}(V,u,G)$ como el cociente del conjunto de datos compatibles (T,β,α,ψ) con el producto descrito en (8) módulo el subgrupo de orden dos generado por el elemento $(T_u, 0, \mathrm{id}, 1)$.

El conjunto de datos compatibles $\{(T_g, 0, \mathrm{id}, 1) : g \in G\}$ es un subgrupo normal de $\mathfrak{R}(V,u,G)$. Denotar el grupo cociente por

$$\mathfrak{R}(V,u,G)/\{(T_g, 0, \mathrm{id}, 1) : g \in G\} =: \mathfrak{O}(V,u,G).$$

En la siguiente Proposición, se calcula explícitamente el producto cotensorial entre dos de estos objetos biGalois, y se da un criterio para saber cuándo son isomorfos.

Proposición 2.12. [**MM**, Proposición 4.10] *Considerar los datos compatibles* (T,β,α,ψ), $(T',\beta',\alpha',\psi')$.

1. *Existe un isomorfismo*
$$\mathcal{L}(T,\beta,\alpha,\psi)\simeq\mathcal{L}(T',\beta',\alpha',\psi')$$
de objetos biGalois sobre $\mathcal{A}(V,u,G)$ *si y sólo sí las colecciones*
$$(T,\beta,\alpha,\psi)=(T',\beta',\alpha',\psi') \text{ ó } (T_u\circ T,\beta,\alpha,\psi)=(T',\beta',\alpha',\psi').$$
2. $\mathcal{L}(T,\beta,\alpha,\psi)\in \mathrm{InnbiGal}(\mathcal{A}(V,u,G))$ *si y sólo sí*
$$(T,\beta,\alpha,\psi)=(T_g,0,id,1), \text{ para algún } g\in G.$$
3. *Existe un isomorfismo de* $\mathcal{B}(V,u,G)$*-comódulos álgebras*
$$\mathcal{L}(T,\beta,\alpha,\psi)\square_{\mathcal{A}(V,u,G)}\mathcal{L}(T',\beta',\alpha',\psi')\simeq\mathcal{L}(T\circ T',\beta+\beta',\alpha\circ\alpha',\psi\psi').$$

Demostración. 1). Sea $f:\mathcal{L}(T,\beta,\alpha,\psi)\to\mathcal{L}(T',\beta',\alpha',\psi')$ un isomorfismo de comódulos álgebras sobre $\mathcal{B}(V,u,G)$. Esto implica que si $g\in G$
$$\delta f(e_{(g,\alpha(g))})=(\mathrm{id}\otimes_{\Bbbk}f)\delta(e_{(g,\alpha(g))})=g\otimes f(e_{(g,\alpha(g))}),$$
entonces $f(e_{(g,\alpha(g))})=\chi_g\, e_{(g,\alpha(g))}$ para algún $\chi_g\in\Bbbk$.

Como
$$f(e_ge_h)=f(e_g)f(e_h),\quad \psi(g,h)f(e_{gh})=\chi_g\chi_h\psi'(g,h)e_{gh},$$
así $\psi=\psi'$ en $H^2(G,\Bbbk^\times)$. Más aún $e_{(u,u)}^2=1$ implica que $\chi_u=\pm1$.

Denotar por (W,β,ψ), (W',β',ψ') las colecciones asociadas a los datos compatibles (T,β,α,ψ) y $(T',\beta',\alpha',\psi')$, respectivamente, bajo la correspondencia del Lema 2.8. Se sigue inmediatamente que $f(W)=W'$. Si $f(x,y)=(x',y')$ para $(x,y)\in W$, entonces, como f es un morfismo de $\mathcal{B}(V,u,G)$-comódulos, se tiene la siguiente igualdad
$$x'\otimes1+y'(u,u)\otimes e_{(u,u)}+(u,1)\otimes(x',y')=x\otimes1+\chi_u\, y(u,u)\otimes e_{(u,u)}$$
$$+(u,1)\otimes(x',y').$$
Así $f(x,y)=(x,\chi_u\, y)$.

Si $\chi_u=1$, entonces ambas colecciones (W,β,ψ), (W',β',ψ') son iguales.

Si $\chi_u=-1$, entonces $(T_u\circ T,\beta,\alpha,\psi)=(T',\beta',\alpha',\psi')$.

2). Se sigue de 1) y de la definición de $\mathrm{InnbiGal}(\mathcal{A}(V,u,G))$.

3). Definir el morfismo de álgebras para $g \in G, v \in V$

$$\vartheta : \mathcal{L}(T \circ T', \beta + \beta', \alpha \circ \alpha', \psi\psi') \to \mathcal{L}(T, \beta, \alpha, \psi)\square_{\mathcal{A}(V,u,G)}\mathcal{L}(T', \beta', \alpha', \psi')$$
$$\vartheta(T \circ T'(v), v) = (T \circ T'((v), T'(v))\otimes 1 + e_{(u,u)}\otimes(T'(v), v),$$
$$\vartheta(e_{(\alpha\circ\alpha'(g),g)}) = e_{(\alpha\circ\alpha'(g),\alpha'(g))}\otimes e_{(\alpha'(g),g)}.$$

Luego la imagen de ϑ está dentro de

$$\mathcal{L}(T, \beta, \alpha, \psi)\square_{\mathcal{A}(V,u,G)}\mathcal{L}(T', \beta', \alpha', \psi'),$$

por un cálculo directo. El morfismo de álgebras ϑ es inyectivo, y como ambas álgebras tienen la misma dimensión, ϑ es un isomorfismo. $\square$

Observación 2.13. La demostración de la parte (1) de la Proposición 2.12 provee una descripción de los posibles isomorfismos de bicomódulos álgebras entre dos objetos biGalois. Esto hecho será usado luego.

Ejemplo 2.14. Asumir que V es un espacio vectorial de dimensión dos generado por $\{v_1, v_2\}$ y tomar $G = C_2 =< u >$ el grupo cíclico con dos elementos. Entonces, V es un C_2-módulo con acción determinada declarando $u \cdot v_i = -v_i$ si $i = 1, 2$. Para $\xi \in \Bbbk$ definir $T_\xi : V \to V$ la transformación lineal

$$T_\xi(v_1) = v_1, \quad T_\xi(v_2) = \xi v_1 - v_2.$$

Por el Lema 2.8, el dato compatible $(T_\xi, 0, \mathrm{id}, 1)$ da lugar a una extensión $\mathcal{A}(V, u, C_2)$-biGalois que denotaremos por $\mathbf{U}_\xi$. De la Proposición 2.12 (3) se sigue que $\mathbf{U}_\xi$ tienen orden dos, esto es, existe un isomorfismo de bicomódulos álgebras

$$\mathcal{A}(V, u, C_2) \simeq \mathbf{U}_\xi\square_{\mathcal{A}(V,u,C_2)}\mathbf{U}_\xi,$$

dado por $v \mapsto (v, x)\otimes 1 + e_{(u,u)}\otimes(x, v)$ y $f \mapsto e_{(f,f)}\otimes e_{(f,f)}$, donde $v \in V, f \in C_2$.

Esta Proposición permite describir los elementos de los grupos BiGal y OutbiGal en términos de datos compatibles.

Corolario 2.15. [**MM**, Corolario 4.12] *Existen isomorfismos de grupos*

$$\mathfrak{R}(V, u, G) \simeq \mathrm{BiGal}(\mathcal{A}(V, u, G)), \quad \mathfrak{O}(V, u, G) \simeq \mathrm{OutbiGal}(\mathcal{A}(V, u, G)).$$

$\square$

Lema 2.16. [**MM**, Lema 4.14] *Sea (T, β, α, ψ) un dato compatible y $g \in G$. Existe un isomorfismo $\mathcal{L}(T, \beta, \alpha, \psi)\square_{\mathcal{A}(V,u,G)}\Bbbk_g \simeq \Bbbk_{\alpha(g)}$ de $\mathcal{A}(V, u, G)$-comódulos a izquierda.*

Demostración. Si $a\otimes r \in \mathcal{L}\square_H \Bbbk_g$, entonces $\rho(a) = a\otimes g$, por tanto

$$\rho(ae_{(\alpha(g^{-1}),g^{-1})}) = (a\otimes g)(e_{(\alpha(g^{-1}),g^{-1})}\otimes g^{-1}) = ae_{(\alpha(g^{-1}),g^{-1})}\otimes 1,$$

así $ae_{(\alpha(g^{-1}),g^{-1})} \in \Bbbk 1 = \mathcal{L}(T,\beta,\alpha,\psi)^{\mathrm{co}\mathcal{A}(V,u,G)}$, y $a = \zeta e_{(\alpha(g),g)}$ para algún $\zeta \in \Bbbk$. □

Recordar la relación de equivalencia $\backsim$ definida sobre objetos biGalois. En el caso de los objetos biGalois sobre las álgebras de super-grupo, sabemos explícitamente quiénes son estos nuevos objetos A^g.

Lema 2.17. *Sea $\mathcal{A}(V,u,G)$ un álgebra de super-grupo y (T,β,α,ψ) un dato compatible, entonces si $a \in G$*

$$\psi : \mathcal{L}(T,\beta,\alpha,\psi)^a \simeq \mathcal{L}(T_aT,\beta,\alpha,\psi)$$

es un isomorfismo de objetos biGalois, donde $(T(w),w) \mapsto (T_aT(w),w)$ y $e_{(\alpha(f),f)} \mapsto e_{(\alpha(f),f)}$ si $w \in V$ y $f \in G$.

Demostración. ψ es de $\mathcal{A}(V,u,G)$-comódulos a izquierda ya que

$$\begin{aligned}\delta_a\psi(T(w),w) &= a\cdot T(w)\otimes 1 + u\otimes(T_aT(w),w),\\ (\mathrm{id}\otimes_\Bbbk\psi)\delta(T(w),w) &= (\mathrm{id}\otimes_\Bbbk\psi)(a\cdot T(w)\otimes 1 + u\otimes(T(w),w))\\ &= a\cdot T(w)\otimes 1 + u\otimes(T_aT(w),w),\end{aligned}$$

si δ,δ_a son las coacciones a izquierda de $\mathcal{L}(T_aT,\beta,\alpha,\psi)$ y $\mathcal{L}(T,\beta,\alpha,\psi)^a$ respectivamente. □

Capítulo 4

Bicomódulos álgebras sobre álgebras de Taft

Los resultados de este capítulo provienen del trabajo [**FMM**]. Este tema será retomado en capítulos posteriores. Sea T_q el álgebra de Taft. Uno de los objetivos de este trabajo es encontrar categorías $\operatorname{Rep}(T_q)$-bimódulos invertibles, las cuales son $\operatorname{Rep}(T_q \otimes T_q^{cop})$-módulos a izquierda. De acuerdo con [**Sk**, Teorema 6.1] toda subálgebra coideal de un álgebra de Hopf de dimensión finita H es un comódulo álgebra H-simple. Su *levante* es de este mismo tipo y por tanto este determina una categoría $\operatorname{Rep}(H)$-bimódulo exacta indescomponible. Más aún, toda categoría módulo exacta indescomponible proviene de esta forma. Esto explica por qué es una pieza fundamental de la información que necesitamos para computar $\operatorname{Rep}(T_q)$-bimódulos exactos la clasificación de sus subálgebras coideales.

El primer paso, es conocer la estructura de $T_q \otimes T_{q^{-1}}$, sus subálgebras coideales homogéneas y dentro de estas hallar sus comódulos. Esta es la esencia de este capítulo.

Fijemos primero algunas notaciones, que serán altamente usadas en este y otros capítulos. Sean V_1 y V_2 espacios vectoriales de dimensión uno generados por x e y respectivamente, $C_n = \langle g \rangle = \langle g^{-1} \rangle$ con $g^n = 1$ y $G = C_n \times C_n = \langle g \rangle \times \langle g \rangle$. Los espacios vectoriales V_1 y V_2 son G-módulos vía

$$(g^i, g^j) \cdot x = g^i \cdot x = q^i x \quad \text{y} \quad (g^i, g^j) \cdot y = g^j \cdot y = q^j y, \quad 0 \le i, j \le n.$$

El álgebra $T_q \otimes T_q^{cop}$ es generada por los elementos $\{f \in G, x, y\}$ sujetos a las relaciones

$$x^n = 0 = y^n, \quad xy = yx, \quad fx = (f \cdot x)f, \quad fy = (f \cdot y)f;$$

con estructura de álgebra de Hopf dada por

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + (g, 1) \otimes x, \quad \Delta(y) = y \otimes 1 + (1, g^{-1}) \otimes y, \quad \Delta(f) = f \otimes f.$$

En otras palabras, $T_q \otimes T_q^{cop} = \mathcal{B}(V) \# \Bbbk G$ donde $\mathcal{B}(V)$ es el álgebra de Nichols del módulo de Yetter-Drinfeld $V = V_1 \oplus V_2$ sobre $\Bbbk G$. La coacción $\delta : V_1 \oplus V_2 \to \Bbbk G \otimes_{\Bbbk} (V_1 \oplus V_2)$ está dada por

$$\delta(v) = (g, 1) \otimes v, \quad \delta(w) = (1, g^{-1}) \otimes w, \quad v \in V_1, w \in V_2.$$

Ahora definiremos una nueva álgebra de Hopf que se usará luego. Si $\chi_1, \chi_2 : G \to \Bbbk$ son caracteres entonces V tiene una nueva acción de G dada por

$$f \triangleright v = \chi_1(f)\ f \cdot v, \quad f \triangleright w = \chi_2(f)\ f \cdot w, \quad f \in G, v \in V_1, w \in V_2.$$

Si suponemos que χ_1, χ_2 satisfacen $\chi_1(1, g^{-1})\chi_2(g, 1) = 1$, entonces V con la nueva acción y la misma coacción es un módulo de Yetter-Drinfeld sobre $\Bbbk G$ que denotamos por $V_{(\chi_1,\chi_2)}$. Observar que V y $V_{(\chi_1,\chi_2)}$ son espacios cuánticos lineales, ver [**AS**].

Si $\chi_1, \chi_2 : G \to \Bbbk$ son caracteres tales que $\chi_1(1, g^{-1})\chi_2(g, 1) = 1$, denotar

$$H_{(\chi_1,\chi_2)} = \mathcal{B}(V_{(\chi_1,\chi_2)})\#\Bbbk G.$$

Como álgebra $H_{(\chi_1,\chi_2)}$ está generada por los elementos $\{f \in G, x, y\}$ sujetos a las relaciones

$$x^n = 0 = y^n, \quad xy = \chi_2(g, 1)\ yx, \quad fx = (f \triangleright x)f, \quad fy = (f \triangleright y)f.$$

Su coproducto es el mismo que el de $T_q \otimes T_q^{cop}$.

Primero analizaremos ciertos torcimientos del álgebra en cuestión. Recordar que $T_q^{\text{cop}} \simeq T_{q^{-1}}$, Ejemplo 1.3(2).

1. Torcimientos de $T_q \otimes T_{q^{-1}}$

Recordar que dado un 2-cociclo de Hopf, es posible producir una nueva álgebra de Hopf, procedimiento desarrollado en el Ejemplo 1.3(4). A continuación investigaremos el álgebra $(T_q \otimes T_{q^{-1}})^{[\sigma]}$ para 2-cociclos de Hopf σ obtenidos como en (5). Sea $\psi \in Z^2(G, \Bbbk^\times)$ y $H = T_q \otimes T_{q^{-1}}$.

Definir $\chi_1, \chi_2 : G \to k^\times$ caracteres sobre G, vía

$$\chi_1(f) = \frac{\psi(f, (g, 1))}{\psi((g, 1), f)} \quad \text{y} \quad \chi_2(f) = \frac{\psi(f, (1, g^{-1}))}{\psi((1, g^{-1}), f)}. \tag{9}$$

Más aún, el álgebra $H^{[\sigma]}$ obtenida por este procedimiento y $H_{(\chi_1,\chi_2)}$ son isomorfas.

Proposición 1.1. [**FMM**, Proposición 5.3] *Sea $\psi \in Z^2(G, k^\times)$ un 2-cociclo, $\sigma : H \otimes H \to \Bbbk$ el 2-cociclo proveniente de ψ como en* (5) *y χ_1, χ_2 los caracteres en G definidos en* (9)*. Existe un isomorfismo de álgebras de Hopf*

$$H^{[\sigma]} \simeq H_{(\chi_1,\chi_2)}.$$

□

1.1. Subálgebras $T_q \otimes T_{q^{-1}}$-coideales homogéneas. El primer paso a desarrollar es encontrar familias de subálgebras coideales de T_q, lo cual lo haremos a través de datos subálgebras coideales. Estas darán lugar a familias de comódulos álgebras simples. En más, sea $H = T_q \otimes T_{q^{-1}}$.

Notar que $H(1) = (V_1 \oplus V_2) \otimes \Bbbk G$. Para $(v_1, v_2) = (\alpha x, \beta y) \in V_1 \oplus V_2$, con $\alpha, \beta \in \Bbbk$, denotar

$$[(v_1, v_2)] = v_1 + v_2(g, g) \in H(1) \quad \text{y} \quad [\widetilde{(v_1, v_2)}] = v_2 + v_1(g^{-1}, g^{-1}) \in H(1).$$

Observación 1.2. Son válidas las siguientes ecuaciones:

$$[(v_1, v_2)]^n = [\widetilde{(v_1, v_2)}]^n = 0 \tag{10}$$

$$\Delta([(v_1, v_2)]) = v_1 \otimes 1 + v_2(g, g) \otimes (g, g) + (g, 1) \otimes [(v_1, v_2)] \tag{11}$$

(12)

$$\Delta([\widetilde{(v_1, v_2)}]) = v_2 \otimes 1 + v_1(g^{-1}, g^{-1}) \otimes (g^{-1}, g^{-1}) + (1, g^{-1}) \otimes [\widetilde{(v_1, v_2)}].$$

Notar que si K es una subálgebra de H homógenea coideal a izquierda y $[(v_1, v_2)] \in K$ ó $[\widetilde{(v_1, v_2)}] \in K$ donde algún v_i es no nulo , entonces, como (11) y (12) son elementos en $H(0) \otimes K(1) \oplus H(1) \otimes K(0)$, se sigue que $(g, g) \in K(0)$.

Definición 1.3. Un *dato subálgebra coideal* es una colección (W^1, W^2, W^3, F) tal que

- $W = W^1 \oplus W^2 \oplus W^3$ es un subespacio de $V_1 \oplus V_2$ tal que
$$W \cap V_1 = W^1, \quad W \cap V_2 = W^2;$$
- $W^3 \subseteq V_1 \oplus V_2$ es un subespacio tal que
$$W^3 \cap W^1 \oplus W^2 = 0, \quad W^3 \cap V_1 = 0 = W^3 \cap V_2;$$
- $F \subseteq G$ es un subgrupo que deja invariante todos los subespacios W^i, $i = 1, 2, 3$;
- si $W^3 \neq 0$, entonces $(g, g) \in F$.

Denotar por $C(W^1, W^2, W^3, F)$ la subálgebra de H generada por $\Bbbk F$, los elementos en $W^1 \oplus W^2$ y $\{[w], \widetilde{[w]} \ : w \in W^3\}$.

Si $\chi_1, \chi_2 : G \to \Bbbk$ son caracteres tales que

$$\chi_1(1, g^{-1})\chi_2(g, 1) = 1$$

y (W^1, W^2, W^3, F) es un dato subálgebra coideal, denotar por

$$C_{(\chi_1, \chi_2)}(W^1, W^2, W^3, F)$$

la subálgebra de $H_{(\chi_1,\chi_2)}$ generada por $\Bbbk F$, los elementos en $W^1 \oplus W^2$ y $\{[w], \widetilde{[w]} \ : w \in W^3\}$.

Observación 1.4. Considerar (W^1, W^2, W^3, F) un dato subálgebra coideal, se concluye que si $W^3 \neq 0$, entonces $W^1 = W^2 = 0$:

Si $W^3 \neq 0$ y $W^1 \neq 0$, entonces $W^1 \oplus W^3 = W$ y $(W^1 \oplus W^3) \cap V_2 \neq 0$, ya que V_1 tiene dimensión 1. Esto implica que $W^2 \neq 0$, pero si $W^1 \neq 0$ y $W^2 \neq 0$, entonces $W^3 = 0$, una contradicción.

Se sigue que las álgebras $C(W^1, W^2, W^3, F)$ y $C_{(\chi_1,\chi_2)}(W^1, W^2, W^3, F)$ son coideales de H o $H_{(\chi_1,\chi_2)}$, respectivamente.

Lema 1.5. [**FMM**, Lema 5.7] *El álgebra $C(W^1, W^2, W^3, F)$ es una subálgebra homogénea coideal a izquierda de H.*

El álgebra $C_{(\chi_1,\chi_2)}(W^1, W^2, W^3, F)$ es una subálgebra homogénea coideal a izquierda de $H_{(\chi_1,\chi_2)}$. □

Más aún todas son de esta forma. Es decir estos datos clasifican todas las subálgebras coideales.

Teorema 1.6. [**FMM**, Teorema 5.8] *Toda subálgebra homogénea coideal a izquierda*

$$K = \oplus_{i=0}^{m} K(i) \text{ en } H$$

es de la forma $K = C(W^1, W^2, W^3, F)$ para algún dato subálgebra coideal (W^1, W^2, W^3, F).

Toda subálgebra homogénea coideal a izquierda

$$K = \oplus_{i=0}^{m} K(i) \text{ en } H_{(\chi_1,\chi_2)}$$

es de la forma $K = C_{(\chi_1,\chi_2)}(W^1, W^2, W^3, F)$ para algún dato subálgebra coideal (W^1, W^2, W^3, F).

Demostración. Asumamos que χ_1, χ_2 son triviales, ya que la demostración para el caso no trivial es completamente análoga. Como $K(0) \subseteq \Bbbk G$ es una subálgebra coideal a izquierda, entonces $K(0) = \Bbbk F$ para algún subgrupo $F \subseteq G$. Si $K(1) = 0$, entoces $K = \Bbbk F$. Además, si $x \in K(2)$, entonces

$$\Delta(x) \in H(0) \otimes K(2) \ \oplus \ H(2) \otimes K(0),$$

así $x \in H(0) \oplus H(1)$, y como $(H(0) \oplus H(1)) \cap H(2) = 0$, se sigue que $x = 0$. Similarmente se demuestra que $K(n) = 0$ para todo n.

Supongamos que $K(1) \neq 0$. El espacio vectorial $K(1)$ es un $\Bbbk G$-subcomódulo de $(V_1 \oplus V_2) \otimes \Bbbk G$ vía

$$(\pi \otimes \mathrm{id})\Delta : K(1) \to \Bbbk G \otimes K(1),$$

donde $\pi : H \to \Bbbk G$ es la proyección canónica. Podemos escribir $K(1) = \oplus_{f \in G} K(1)_f$ donde $K(1)_f = \{x \in K(1) | (\pi \otimes \mathrm{id})\Delta(x) = f \otimes x\}$. Luego

$$K(1)_f \subseteq V_1 \otimes \Bbbk\langle (g^{-1}, 1)f \rangle \ \oplus \ V_2 \otimes \Bbbk\langle (1, g)f \rangle.$$

En particular se tiene:

$$K(1)_{(g,1)} = W^1 \oplus \widetilde{W}^2(g, g) \oplus U^3, \quad K(1)_{(1,g^{-1})} = W^2 \oplus \widetilde{W}^1(g^{-1}, g^{-1}) \oplus \widetilde{U}^3.$$

Acá W^1 es la intersección de $K(1)_{(g,1)}$ con V_1, $\widetilde{W}^2(g, g)$ es la intersección de $K(1)_{(g,1)}$ con $V_2 \otimes \Bbbk\langle (g, g) \rangle$, y U^3 es un complemento directo. Concretamente, U^3 es el subespacio de $V_1 \oplus V_2 \otimes \Bbbk\langle (g, g) \rangle$ que tiene por elementos $[w]$, donde $w \in W^3$ y $W^3 \subseteq V_1 \oplus V_2$. Como $U^3 \cap W^1 \oplus \widetilde{W}^2(g, g) = 0$, se sigue que $W^3 \cap W^1 \oplus \widetilde{W}^2 = 0$.

Análogamente, para $K(1)_{(1,g^{-1})}$ se tiene que W^2 es la intersección de $K(1)_{(1,g^{-1})}$ con V_2, $\widetilde{W}^1(g^{-1}, g^{-1})$ es la intersección de $K(1)_{(1,g^{-1})}$ con $V_1 \otimes k\langle (g^{-1}, g^{-1}) \rangle$, y $\widetilde{U}^3$ es un complemento directo. Los elementos de $\widetilde{U}^3$ son de la forma $\widetilde{[w]}$, con $w \in \widetilde{W}^3$ y $\widetilde{W}^3 \subseteq V_1 \oplus V_2$.

Probemos a continuación los siguientes dos resultados:

Afirmación 1.6.1. *1) Si alguno de* $\widetilde{W}^1, \widetilde{W}^2, \widetilde{W}^3$ *ó* W^3 *es diferente de* 0*, entonces* $(g, g) \in F$*. Si* $\widetilde{W}^1 \neq 0$*, entonces* $\widetilde{W}^1 = W^1$*.*
2) Si $\widetilde{W}^2 \neq 0$*, entonces* $\widetilde{W}^2 = W^2$*.*

Demostración de la Afirmación. Tomar $0 \neq (v_1, v_2) \in W^3$, luego $0 \neq [(v_1, v_2)] \in U^3$ y por (1.2) $(g, g) \in F$. La prueba es análoga si $\widetilde{W}^1, \widetilde{W}^2$ ó $\widetilde{W}^3$ son diferentes de cero.

Para la segunda afirmación, tomar $w \in \widetilde{W}^1$, así $w(g^{-1}, g^{-1}) \in K(1)_{(1,g^{-1})}$ y $w \in K(1)_{(g,1)}$ y por tanto $w \in W^1$. Similarmente, se prueba la otra inclusión y se obtiene $\widetilde{W}^1 = W^1$. Con un razonamiento similar, la otra igualdad se prueba. □

Afirmación 1.6.2. *$K(1) = W^1F \oplus W^2F \oplus U^3F$.*

Demostración de la Afirmación. Tomar $f \in G$ y $0 \neq x \in K(1)_f$. Para algún $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$ se tiene

$$x = v_1(g^{-1}, 1)f + v_2(1, g)f,$$

y

$$\Delta(x) = v_1(g^{-1}, 1)f \otimes (g^{-1}, 1)f + v_2(1, g)f \otimes (1, g)f + f \otimes x$$

es un elemento en $H(0) \otimes K(1) \ \oplus \ H(1) \otimes K(0)$.

Si $v_1 \neq 0$, entonces $(g^{-1},1)f \in F$ y por tanto $xf^{-1}(g,1) \in K(1)_{(g,1)}$ y

$$x \in K(1)_{(g,1)}F \subseteq W^1F \oplus \widetilde{W}^2(g,g)F \oplus U^3F \subseteq W^1F \oplus W^2F \oplus U^3F,$$

la otra inclusión se debe a la Afirmación 1.6.1. Si $v_1 = 0$, entonces $v_2 \neq 0$ y $(1,g)f \in F$. Así $xf^{-1}(1,g^{-1}) \in K(1)_{(1,g^{-1})}$.

Si $\widetilde{W}^1 = \widetilde{U}^3 = 0$, entonces $xf^{-1}(1,g^{-1}) \in W^2$ y $x \in W^2F$, y por tanto la Afirmación es cierta. Si alguno de $\widetilde{W}^1$ ó $\widetilde{U}^3$ es no cero, entonces $(g,g) \in F$. Pero , entonces

$$(g^{-1},1)f = (g^{-1},g^{-1})(1,g)f \in F \text{ y } xf^{-1}(g,1) \in K(1)_{(g,1)}.$$

Se sigue que $x \in K(1)_{(g,1)}F$, el cual probamos que es un subespacio de $W^1F \oplus W^2F \oplus U^3F$. $\square$

Para terminar la prueba del Teorema, debemos probar que K está generada como álgebra por $K(0)$ y $K(1)$, lo cual implica que $K = C(W^1,W^2,W^3,F)$. Sea $B = \{b_i\}$ una base de $V_1 \oplus V_2$. Para $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$, se tiene que

$$(v_1,0) = \sum_i \alpha_i b_i \text{ y } (0,v_2) = \sum_i \beta_i b_i,$$

para algunos $\alpha_i, \beta_i \in k$. Entonces

$$v_1 = \sum_i \alpha_i [b_i], \quad v_2 = \sum_i \beta_i [b_i](g^{-1},g^{-1}).$$

Luego H está generada como álgebra por el conjunto

$$\{[b_i], f : \ b_i \in B, f \in G\}.$$

Ahora, sea $\{b_1,...,b_r\}$ una base de $W = W^1 \oplus W^2 \oplus W^3$ y extenderla a una base $\{b_1,...,b_t\}$ de $V_1 \oplus V_2$ con $r \leq t$. Si $n > 1$, $x \in K(n)$ tiene la forma

$$x = \sum_{\substack{s_j \in \{0,1\} \\ f_i \in G}} \alpha_{s_1,\dots,s_t,i}[b_1]^{s_1}[b_2]^{s_2}\cdots[b_t]^{s_t} f_i$$

para algún $\alpha_{s_1,\dots,s_t,i} \in k$, donde $s_1 + ... + s_t = n$. Sea $p : H \to H(1)$ la proyección canónica. Entonces

$$(\mathrm{id}\otimes p)\Delta(x) = \sum_l \sum_{\substack{s_j \in \{0,1\} \\ f_i \in G}} \alpha_{s_1,\dots,s_t,i} h_{s_1,\dots,s_t,i,l} \otimes [b_l] f_i$$

para algún $0 \neq h_{s_1,\dots,s_t,i,l} \in H(n-1)$, resulta ser un elemento en $H(n-1)\otimes K(1)$. Luego si $l > r$ con $s_l = 1$ se tiene que $\alpha_{s_1,\dots,s_t,i} = 0$ y $K(n)$ está generado como álgebra por $K(1)$. $\square$

Observación 1.7. Un dato subálgebra coideal depende de si es sobre H ó $H_{(\chi_1,\chi_2)}$.

Como V_1, V_2 son espacios vectoriales de dimensión 1, podemos dar una descripción de todos los posibles datos de subálgebras coideales.

Sea (W^1, W^2, W^3, F) un dato subálgebra coideal (para H ó $H_{(\chi_1,\chi_2)}$). Entonces W^3 es nulo ó de dimensión 1. Si $W^3 \neq 0$, usando la Observación 1.4, obtenemos que $W^1 = W^2 = 0$ y

$$(W^1, W^2, W^3) = (0, 0, < \xi\, x + y >_{\Bbbk})$$

para algún $0 \neq \xi \in \Bbbk$. Llamaremos a este dato de *tipo* ξ.

Si $W^3 = 0$, entonces

$$(W^1, W^2, W^3) = (< \delta_1\, x >_{\Bbbk}, < \delta_2\, y >_{\Bbbk}, 0)$$

para algún $\delta_1, \delta_2 \in \{0, 1\}$. Llamaremos a este dato de *tipo* (δ_1, δ_2).

Ya observamos que si $W^3 \neq 0$, entonces $(g, g) \in F$. Asumir que (W^1, W^2, W^3, F) es un dato subálgebra coideal para $H_{(\chi_1,\chi_2)}$. Sea $f = (g^i, g^j) \in F$. Como F deja invariante el subespacio W^3, entonces

$$f \cdot (\xi\, x + y) = \xi q^i \chi_1(f)\, x + q^j \chi_2(f)\, y \in < \xi\, x + y >_{\Bbbk} .$$

Por tanto

$$q^i \chi_1(f) = q^j \chi_2(f), \quad f \in F. \tag{13}$$

En particular, $\chi_1 = \chi_2$ implica $i = j$. Así F contiene al grupo cíclico generado por (g, g).

Como segundo paso, clasificamos los comódulos álgebras sobre esta álgebra, usando lo anterior.

1.2. $T_q \otimes T_{q^{-1}}$**-comódulos álgebras.** Denotar $H = T_q \otimes T_{q^{-1}}$. Introduciremos familias de H-comódulos álgebras a izquierda no equivalentes H-simples a derecha y *a fortiori*, familias de $\mathrm{Rep}(H)$-módulos exactos indescomponibles, que dan lugar a una clasificación de estos. Los definiremos por generadores y relaciones extendiendo la información de subálgebras coideal de la anterior sección. Obtendremos que las familias formadas son levantes de las anteriores.

Definición 1.8. Dado un subgrupo $F \subseteq C_n \times C_n$, decimos que el 2-cociclo $\psi \in Z^2(C_n \times C_n, \Bbbk^\times)$ es *compatible* con F si

$$q^i \frac{\psi((g,1), f)}{\psi(f, (g,1))} = q^j \frac{\psi((1, g^{-1}), f)}{\psi(f, (1, g^{-1}))}, \quad f = (g^i, g^j) \in F. \tag{14}$$

Decimos que el 2-cociclo $\psi \in Z^2(F, \Bbbk^\times)$ es *compatible* con F si la correstricción (ver [**Br**, Página 81]) de ψ en $Z^2(G, \Bbbk^\times)$ satisface (14).

Observación 1.9. La Ecuación (14) se obtiene reemplazando los valores de χ_1, χ_2 dados en (9), usando ψ^{-1}, en la ecuación (13).

Ahora introduciremos cinco familias de H-comódulos álgebras a izquierda.

- Sea $F \subseteq C_n \times C_n$ un subgrupo tal que $(g, g) \in F$, $\psi \in Z^2(F, \Bbbk^\times)$ un 2-cociclo compatible con F, $\xi, \mu \in \Bbbk$ con $\xi \neq 0$. Definir $\mathcal{L}(\xi, \mu, F, \psi)$ como el álgebra generada por los elementos $\{w, e_f : f \in F\}$ sujetos a relaciones
$$w^n = \mu 1, \quad e_f e_{f'} = \psi(f, f')\, e_{ff'}, \quad e_f w = \tau_f\, w e_f.$$
Acá $\tau_f = q^i$ si $f = (g^i, g^j)$. La estructura de comódulo a izquierda $\lambda : \mathcal{L}(\xi, \mu, F, \psi) \to H \otimes_\Bbbk \mathcal{L}(\xi, \mu, F, \psi)$ está dada por
$$\lambda(e_f) = f \otimes e_f, \quad \lambda(w) = \xi\, x \otimes 1 + y(g, g) \otimes e_{(g,g)} + (g, 1) \otimes w, \quad f \in F.$$
- Sea $a, b, \xi \in \Bbbk$, $F \subseteq G$ un subgrupo, $\psi \in Z^2(F, \Bbbk^\times)$. Definir $\mathcal{K}_{11}(a, b, \xi, F, \psi)$ como el álgebra generada por elementos $\{z, u, e_f : f \in F\}$ sujetos a relaciones
$$z^n = a\,1, \quad u^n = b\,1, \quad zu - uz = \xi\, e_{(g,g^{-1})}, \quad e_f e_{f'} = \psi(f, f')\, e_{ff'},$$
$$e_{(g^i,g^j)} z = q^i\, z e_{(g^i,g^j)}, \quad e_{(g^i,g^j)} u = q^j\, w e_{(g^i,g^j)} \quad \text{si } (g^i, g^j) \in F.$$
Si $(g, g^{-1}) \notin F$, entonces $\xi = 0$. La coacción
$$\lambda : \mathcal{K}_{11}(a, b, \xi, F, \psi) \to H \otimes_\Bbbk \mathcal{K}_{11}(a, b, \xi, F, \psi)$$
está definida por
$$\lambda(e_f) = f \otimes e_f, \quad \lambda(z) = x \otimes 1 + (g, 1) \otimes z, \quad \lambda(u) = y \otimes 1 + (1, g^{-1}) \otimes u.$$
- El álgebra $\mathcal{K}_{01}(a, F, \psi)$ es el subcomódulo álgebra generada por los elementos $\{z, e_f : f \in F\}$ dentro de $\mathcal{K}_{11}(a, b, \xi, F, \psi)$.
- El álgebra $\mathcal{K}_{10}(b, F, \psi)$ es el subcomódulo álgebra generada por los elementos $\{u, e_f : f \in F\}$ dentro de $\mathcal{K}_{11}(a, b, \xi, F, \psi)$.
- Sea $F \subseteq C_n \times C_n$ un subgrupo, $\psi \in Z^2(F, \Bbbk^\times)$ un 2-cociclo, entonces $\Bbbk_\psi F$ es el álgebra de grupo twisteada o torcida.

Observación 1.10. La primera familia de comódulos álgebras se relaciona con el dato subálgebra coideal de tipo ξ y las otras cuatro familias están relacionadas a los datos subálgebras coideales de tipo $(1, 1)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ y $(0, 0)$ respectivamente.

Se sigue que estas álgebras son simples con coinvariantes triviales.

LEMA 1.11. [**FMM**, Lema 5.15] *Las álgebras*

$$\mathcal{L}(\xi, \mu, F, \psi), \quad \mathcal{K}_{11}(a, b, \xi, F, \psi), \quad \mathcal{K}_{01}(a, F, \psi), \quad \mathcal{K}_{10}(b, F, \psi)$$

son H-comódulos álgebras a izquierda y H-simples a derecha con coinvariantes triviales.

DEMOSTRACIÓN. Es suficiente notar que

$$\Bbbk_\psi F = \mathcal{L}(\xi, \mu, F, \psi)_0 = \mathcal{K}_{11}(a, b, \xi, F, \psi)_0 = \mathcal{K}_{01}(a, F, \psi)_0 = \mathcal{K}_{10}(b, F, \psi)_0$$

y usar [**M1**, Proposición 4.4]. □

Sea $\psi \in Z^2(C_n \times C_n, \Bbbk^\times)$ y $\sigma_\psi : H \otimes_\Bbbk H \to \Bbbk$ el 2-cociclo de Hopf asociado. Sea χ_1, χ_2 los caracteres en $C_n \times C_n$ definidos en (9) y sea (W^1, W^2, W^3, F) un dato coideal subálgebra para $H_{(\chi_1, \chi_2)}$.

LEMA 1.12. [**FMM**, Lema 5.16] *Si $W^3 = 0$, existe un isomorfismo de comódulos álgebras*

$$C_{(\chi_1, \chi_2)}(W^1, W^2, 0, F)_{\sigma_\psi^{-1}} \simeq \mathcal{K}_{ij}(0, 0, 0, F, \psi^{-1})$$

para algunos $i, j \in \{0, 1\}$.

Si $W^3 \neq 0$, entonces

$$C_{(\chi_1, \chi_2)}(0, 0, W^3, F)_{\sigma_\psi^{-1}} \simeq \mathcal{L}(\xi, 0, F, \psi^{-1})$$

para algún $\xi \in \Bbbk^\times$. □

En la Sección 3, del capítulo de Representaciones de categorías tensoriales, retomaremos esta clasificación, para describir familias de $\mathrm{Rep}(H)$-módulos exactos indescomponibles.

Capítulo 5

Categorías tensoriales

Por completitud, se darán las definiciones básicas y ejemplos de categorías tensoriales finitas. Esta noción es central en este trabajo. En pocas palabras una categoría tensorial es una categoría Abeliana $\Bbbk$-lineal rígida dotada de un producto tensorial y un objeto unidad, sujetos a ciertos axiomas de asociatividad, unidad y finitud.

Como primer paso se introducen las categorías monoidales, estrictas, rígidas y trenzadas y ejemplos de estas. Describimos los funtores monoidales entre las categorías de representaciones de álgebras de Hopf, [**S1**]. También se dará la definición de la dimensión de Frobenius-Perron de una categoría tensorial.

1. Categorías monoidales

Daremos la definición de categoría monoidal e importantes ejemplos, tales como las categorías de representaciones y corepresentaciones de álgebras de Hopf. Las cuales son quizá las categorías más importantes en este trabajo.

Definición 1.1. Una tupla $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a)$ es una *categoría monoidal*, si

- $\mathcal{C}$ es una categoría, $1 \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ un objeto en $\mathcal{C}$;
- $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es un bifuntor;
- $\{a_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z) | X, Y, Z \in \mathrm{obj}(\mathcal{C})\}$ es una familia de isomorfismos naturales;
- $\{r_X : X \otimes \mathbf{1} \to X : X \in \mathrm{obj}(\mathcal{C})\}$ es una familia de isomorfismos naturales;
- $\{l_X : \mathbf{1} \otimes X \to X : X \in \mathrm{obj}(\mathcal{C})\}$ es una familia de isomorfismos naturales;

tales que para todo objeto X, Y, Z, W en $\mathcal{C}$ se satisface,

- El *axioma del pentágono*,

$$a_{X \otimes Y,Z,W}\ a_{X,Y,Z \otimes W} = (a_{X,Y,Z} \otimes \mathrm{id}_W)\ a_{X,Y \otimes Z,W}\ (\mathrm{id}_X \otimes a_{Y,Z,W}),$$

- El *axioma del triángulo*,

$$(\mathrm{id}_X \otimes l_Y)\, a_{X,\mathbf{1},Y} = r_X \otimes \mathrm{id}_Y.$$

Es decir que los diagramas

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& ((X\otimes Y)\otimes Z)\otimes W \arrow[dl, "a_{X,Y,Z}\otimes \mathrm{id}"'] \arrow[dr, "a_{X\otimes Y,Z,W}"] & \\
(X\otimes (Y\otimes Z))\otimes W \arrow[d, "a_{X,Y\otimes Z,W}"] & & (X\otimes Y)\otimes (Z\otimes W) \arrow[d, "a_{X,Y,Z\otimes W}"'] \\
X\otimes ((Y\otimes Z)\otimes W) \arrow[rr, "\mathrm{id}\otimes a_{Y,Z,W}"] & & X\otimes (Y\otimes (Z\otimes W))
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
(X\otimes \mathbf{1})\otimes \mathbf{Y} \arrow[rr, "a_{X,\mathbf{1},\mathbf{Y}}"] \arrow[dr, "r_X\otimes \mathrm{id}"] & & X\otimes (\mathbf{1}\otimes \mathbf{Y}) \arrow[dl, "\mathrm{id}\otimes l_Y"'] \\
& X\otimes Y &
\end{tikzcd}$$

son conmutativos para todo objeto X, Y, Z, W en $\mathcal{C}$.

Ejemplo 1.2. **1.** Si H es una biálgebra, la categoría ${}_H\mathfrak{M}$ de H-módulos a izquierda es una categoría monoidal con producto dado por: si $(V,\rho), (W,\varrho)$ son H-módulos , entonces

$$(V,\rho)\otimes(W,\varrho) := (V\otimes_{\Bbbk} W, \tau),$$

donde $\tau(h\otimes v\otimes w) = \rho(h_1\otimes v)\varrho(h_2\otimes w)$ para todo $h\in H, v\in V, w\in W$. La unidad es $\Bbbk$.

De manera análoga las categorías de módulos a derecha y comódulos $\mathfrak{M}_H$, ${}^H\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}^H$ resultan categorías monoidales, y también las de módulos y comódulos de dimensión finita ${}_H\mathcal{M}$,$\mathcal{M}_H$, ${}^H\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}^H$ son categorías monoidales.

2. Si $H = \Bbbk$, entonces ${}_{\Bbbk}\mathcal{M}$ es la categoría de $\Bbbk$-espacios vectoriales de dimensión finita.

3. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Sobre $\mathrm{End}(\mathcal{C})$, la categoría de endofuntores de $\mathcal{C}$, podemos definir dos estructuras distintas de categoría monoidal:

- Definir el producto en los endofuntores vía la composición y si $\tau : F \to G$ y $\tau' : F' \to G'$ son transformaciones naturales , entonces $\tau\otimes\tau' : F\circ F' \to G\circ G'$ $(\tau\otimes\tau')_X = G(\tau'_X)\circ\tau_{F'(X)}$ para todo $X \in \mathcal{C}$, y satisface:

$$\begin{aligned}((\tau\otimes\tau')\otimes\tau'')_X &= GG'(\tau''_X)\circ(\tau\otimes\tau')_{F''(X)}\\ &= GG'(\tau''_X)\circ G(\tau'_{F''(X)})\circ\tau_{F'F''(X)}\\ &= G(G'(\tau''_X)\circ\tau'_{F''(X)})\circ\tau_{F'F''(X)}\\ &= G(\tau'\otimes\tau'')_X\circ\tau_{F'F''(X)} = (\tau\otimes(\tau'\otimes\tau''))_X.\end{aligned}$$

Denotar esta categoría por $\mathrm{End}^{\diamondsuit}(\mathcal{C})$.

- Definir el producto en los endofuntores vía la composición y si $\tau : F \to G$ y $\tau' : F' \to G'$ son transformaciones naturales , entonces $\tau\otimes\tau' : F\circ F' \to G\circ G'$ $(\tau\otimes\tau')_X = \tau_{G'(X)}\circ F(\tau'_X)$ para todo $X \in \mathcal{C}$, y satisface el axioma de asociatividad. Denotar esta categoría por $\mathrm{End}(\mathcal{C})$.

En breve se verá que estas dos estructuras resultan las mismas en cierto sentido.

4. La categoría $\mathrm{End}_e(\mathcal{C})$ de endofuntores exactos de $\mathcal{C}$ también es una categoría monoidal con producto inducido de $\mathrm{End}(\mathcal{C})$.

5. Toda categoría aditiva es monoidal, declarando el producto como la suma directa y el objeto $\mathbf{1}$ con el objeto cero.

6. Si $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ son categorías monoidales, su producto de Deligne $\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{D}$ es también monoidal.

En más sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías monoidales. Un *funtor monoidal* de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$ es una tripla (F, f, ϕ) donde

- $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un funtor;
- $\{f_{X,Y} : F(X\otimes Y) \to F(X)\otimes F(Y) | X, Y \in \mathrm{obj}(\mathcal{C})\}$ es una familia de isomorfismos naturales;
- $\phi : F(\mathbf{1}_{\mathcal{C}}) \to \mathbf{1}_{\mathcal{D}}$ es un isomorfismo en $\mathcal{D}$;

tales que para todo $X, Y, Z \in \mathcal{C}$

$$(\mathrm{id}\otimes f_{Y,Z})f_{X,Y\otimes Z}F(a_{X,Y,Z}) = a_{F(X),F(Y),F(Z)}(f_{X,Y}\otimes\mathrm{id})f_{X\otimes Y,Z}, \tag{15}$$

$$\mathfrak{l}_{F(X)} = F(\mathfrak{l}_X)f^{-1}_{\mathbf{1},X}(\phi^{-1}\otimes\mathrm{id}_{F(X)}), \tag{16}$$

$$\mathfrak{r}_{F(X)} = F(\mathfrak{r}_X)f^{-1}_{X,\mathbf{1}}(\mathrm{id}_{F(X)}\otimes\phi^{-1}). \tag{17}$$

Una *transformación natural monoidal* $\tau : (F, f, \phi) \to (F', f', \phi')$ entre dos funtores monoidales es una transformación natural $\tau : F \to F'$ tal que para cualquier $X, Y \in \mathcal{C}$

$$\tau_{\mathbf{1}}\phi = \phi', \quad \tau_{X\otimes Y}f_{X,Y} = f'_{X,Y}(\tau_X\otimes\tau_Y). \tag{18}$$

Un *isomorfismo monoidal natural* es una transformación monoidal natural que es un isomorfismo natural. Una *equivalencia monoidal* entre dos categorías monoidales $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ es un funtor monoidal $(F, f, \phi) : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tal que existe otro funtor monoidal

$$(F', f', \phi') : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$$

e isomorfismos naturales monoidales $\tau' : F \circ F' \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}, \tau' : F' \circ F \to \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$. En este caso se dice que las categorías monoidales $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son *monoidalmente equivalentes*.

Ahora, es posible probar que las dos estructuras dadas para la categoría de endomorfismos son esencialmente la misma.

Proposición 1.3. *Las categorías End($\mathcal{C}$) y End$^{\diamondsuit}$($\mathcal{C}$) son monoidalmente equivalentes.*

Demostración. Considerar el funtor $\mathrm{Id} : \mathrm{End}(\mathcal{C}) \to \mathrm{End}^{\diamondsuit}(\mathcal{C})$, el cual es monoidal con estructura dada por

$$\alpha_{F,G} = \mathrm{id}_{FG} : FG \to FG, \quad \phi = \mathrm{id} : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \quad F, G \in \mathrm{End}(\mathcal{C}).$$

Sea $Y = (\mathrm{Id}, \alpha, \phi)$. De igual modo $X = (\mathrm{Id}, \mathrm{id}, \mathrm{id}) : \mathrm{End}^{\diamondsuit}(\mathcal{C}) \to \mathrm{End}(\mathcal{C})$ es un funtor monoidal. Debemos ver que existen isomorfismos naturales $XY \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Id}_{\mathrm{End}(\mathcal{C})}$ y $YX \xrightarrow{\delta} \mathrm{Id}_{\mathrm{End}^{\diamond}(\mathcal{C})}$ que satisfacen la Ecuación (18):

Como $XY = \mathrm{Id}_{\mathrm{End}(\mathcal{C})}$, entonces tomar $\gamma = \mathrm{id}$. Como $YX = \mathrm{Id}_{\mathrm{End}^{\diamond}(\mathcal{C})}$, δ debe satisfacer

$$\delta_{FG} = \delta_F \otimes \delta_G,$$

donde $\otimes$ es el producto tensorial de $\mathrm{End}^{\diamondsuit}(\mathcal{C})$. Si $C \in \mathcal{C}$, $(\delta_F \otimes \delta_G)_C = F((\delta_G)_C) \circ (\delta_F)_{G(C)} : FG(C) \to FG(C)$, luego basta definir $\delta = \mathrm{id}$.

$\square$

Damos a continuación ejemplos de funtores monoidales y categorías monoidales construidos a partir de un álgebra de Hopf y un twist.

Ejemplo 1.4. Se H un álgebra de Hopf y J un twist para H.

1. Se puede construir una nueva estructura para el funtor de olvido F de la siguiente manera:

   El funtor $(F, \xi) : {}_H\mathcal{M} \to \mathrm{vect}_{\Bbbk}$ es monoidal, si para todo $X, Y \in {}_H\mathcal{M}$, $x \in X, y \in Y$ la estructura monoidal está dada por

$$\xi_{X,Y} : X \otimes_{\Bbbk} Y \to X \otimes_{\Bbbk} Y, \quad \xi_{X,Y}(x \otimes y) = J^1 \cdot x \otimes J^2 \cdot y.$$

2. A partir de la categoría ${}_H\mathcal{M}$, se puede construir una nueva estructura dada por el twist, y a esta categoría la denotamos por ${}_{H^J}\mathcal{M}$. Resulta que las categorías ${}_H\mathcal{M}$, ${}_{H^J}\mathcal{M}$ son monoidalmente equivalentes.

Retomaremos este Ejemplo en la Subsección 1.1.

1.1. Funtores monoidales para álgebras de Hopf. Los objetos Galois y biGalois sobre un álgebra de Hopf dada dan lugar a una extensa familia de funtores monoidales, y clasifican los funtores de estas familias [**U**],[**S1**].

Definición 1.5. Sean R una $\Bbbk$-álgebra y H un álgebra de Hopf. Si A es una extensión H-Galois a derecha de R, definir el funtor monoidal $\mathcal{F}_A : {}^H\mathcal{M} \to {}_R\mathcal{M}_R$ donde $\mathcal{F}_A(X) = A\square_H X$, y la estructura de R-bimódulo está inducida por el producto de A, esto es si $r \in R, a\otimes x \in A\square_H X$, entonces $r \cdot (a\otimes x) = ra\otimes x$ y $(a\otimes x)\cdot r = ar\otimes x$, y están bien definidas ya que $R = A^{\mathrm{co}(H)}$. Además la estructura monoidal está dada por

$$\xi^A_{X,Y} : A\square_H(X\otimes_\Bbbk Y) \to (A\square_H X)\otimes_\Bbbk(A\square_H Y), \quad X, Y \in \mathcal{M}^H,$$

donde

$$(\xi^A_{X,Y})^{-1}(a\otimes x\otimes a'\otimes y) = (aa'\otimes x\otimes y), \quad a, a' \in A, x \in X, y \in Y. \tag{19}$$

Las extensiones H-Galois de R permiten clasificar ciertos funtores ${}^H\mathcal{M} \xrightarrow{F} {}_R\mathcal{M}_R$.

Proposición 1.6. [**U**, Teorema 1.7] *Sea R una $\Bbbk$-álgebra y H un álgebra de Hopf.*

1) Todo funtor monoidal exacto y fiel

$$F : {}^H\mathcal{M} \to {}_R\mathcal{M}_R$$

que preserva sumas directas arbitrarias es naturalmente isomorfo a $\mathcal{F}_A$ como funtor monoidal donde A es una extensión H-Galois a derecha de R.

2) Recíprocamente, si $R \subset A$ extensión H-Galois fielmente (co)plana , entonces $A\square_H-$ es un funtor monoidal que conmuta con sumas directas arbitrarias.

$\square$

De manera similar, si H, L son álgebras de Hopf, los objetos (L, H)-biGalois permiten clasificar ciertos funtores $F : {}^H\mathcal{M} \to {}^L\mathcal{M}$.

Proposición 1.7. [**S1**, Lema 3.2.5]*Sean H, L álgebras de Hopf.*

- *Todo funtor monoidal $\Bbbk$-lineal exacto*
$$F : {}^H\mathcal{M} \to {}^L\mathcal{M}$$
que conmuta con colímites arbitrarios tiene la forma $\mathcal{F}_A$ para un (L, H)-bicomódulo álgebra que es un objeto H-Galois. Si F es una equivalencia , entonces A es un objeto (L, H)-biGalois. Además todo objeto (L, H)-biGalois genera un funtor de estos.
- *Todo funtor monoidal $\Bbbk$-lineal exacto*
$$F : \mathcal{M}^H \simeq \mathcal{M}^L$$
que conmuta con colímites arbitrarios tiene la forma $F(V) = V\square_H A$ para un (H, L)-bicomódulo álgebra. Si F es una equivalencia , entonces A es un objeto (H, L)-biGalois. Además todo objeto (H, L)-biGalois genera un funtor de estos.

La estructura monoidal del funtor $-\square_H A$ es
$$\psi^A_{X,Y} : (X\otimes_\Bbbk Y)\square_H A \to (X\square_H A)\otimes_\Bbbk(Y\square_H A), \quad X, Y \in \mathcal{M}^H,$$
donde
$$(\psi^A_{X,Y})^{-1}(x\otimes a\otimes y\otimes a') = (x\otimes y\otimes aa'), \quad a, a' \in A, x \in X, y \in Y. \tag{20}$$

□

1.2. Categorías estrictas, rígidas y trenzadas. Dentro de las categorías monoidales, tenemos ciertas subfamilias ampliamente conocidas y de vital importancia, estas son las categorías estrictas, las categorías rígidas y las categorías trenzadas.

En más sea $(\mathcal{C}, \mathbf{1}, a, \mathfrak{l}, \mathfrak{r})$ una categoría monoidal. Se dice que $\mathcal{C}$ es *estricta* si para todo $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ se tienen igualdades $(X\otimes Y)\otimes Z = X\otimes(Y\otimes Z)$ y $X\otimes\mathbf{1} = X = \mathbf{1}\otimes X$; y los isomorfismos de asociatividad y unidad son identidades.

Ejemplo 1.8. **1)** La categoría $\mathrm{End}(\mathcal{C})$ de endofuntores de una categoría $\mathcal{C}$ es estricta.
2) La categoría $\mathrm{vect}_\Bbbk$ de espacios vectoriales no es estricta.
3) Si H es una biálgebra, las categorías de módulos son estrictas.

La siguiente Proposición es conocida como el Teorema de *estrictificación* de MacLane.

Proposición 1.9. [**JS**] *Toda categoría monoidal es monoidalmente equivalente a una categoría monoidal estricta.*

□

Si $\mathcal{C}$ es una categoría monoidal estricta, $X \in \mathcal{C}$ es un objeto *invertible* si existe $Y \in \mathcal{C}$ tal que $X\otimes Y = \mathbf{1} = Y\otimes X$.

Dado $X \in \mathcal{C}$ en una categoría monoidal, un *dual a derecha de* X es una tripla $(X^*, \mathrm{ev}_X, \mathrm{coev}_X)$ tal que $X^* \in \mathcal{C}$ es un objeto, $\mathrm{ev}_X : X^* \otimes X \to \mathbf{1}$ y $\mathrm{coev}_X : \mathbf{1} \to X \otimes X^*$ son morfismos en $\mathcal{C}$ tales que

$$\mathfrak{r}_X(\mathrm{id}\otimes \mathrm{ev}_X)a_{X,X^*,X}(\mathrm{coev}_X \otimes \mathrm{id})\mathfrak{l}_X^{-1} = \mathrm{id}_X,$$

$$\mathfrak{l}_{X^*}(\mathrm{ev}_X \otimes \mathrm{id})a^{-1}_{X^*,X,X^*}(\mathrm{id}\otimes \mathrm{coev}_X)\mathfrak{r}^{-1}_{X^*} = \mathrm{id}_{X^*}.$$

Análogamente se define un *dual a izquierda de* X como la tripla $({}^*X, \mathrm{ev}_X, \mathrm{coev}_X)$ donde ${}^*X \in \mathcal{C}$, $\mathrm{ev}_X : X \otimes {}^*X \to \mathbf{1}$ y $\mathrm{coev}_X : \mathbf{1} \to {}^*X \otimes X$ morfismos en $\mathcal{C}$ tales que

$$\mathfrak{l}_X(\mathrm{ev}_X \otimes \mathrm{id})a^{-1}_{X,{}^*X,X}(\mathrm{id}\otimes \mathrm{coev}_X)\mathfrak{r}_X^{-1} = \mathrm{id}_X,$$

$$\mathfrak{r}_{{}^*X}(\mathrm{id}\otimes \mathrm{ev}_X)a_{{}^*X,X,{}^*X}(\mathrm{coev}_X \otimes \mathrm{id})\mathfrak{l}^{-1}_{{}^*X} = \mathrm{id}_{{}^*X}.$$

Definición 1.10. Una categoría monoidal es *rígida* si todo objeto tiene duales a izquierda y a derecha.

Ejemplo 1.11. **1)** La categoría $\mathrm{vect}_{\Bbbk}$ de $\Bbbk$-espacios vectoriales de dimensión finita es rígida: el dual a derecha e izquierda es el espacio vectorial dual. Definir $\mathrm{ev}_V : V^* \otimes_{\Bbbk} V \to \Bbbk$ como la evaluación, es decir $\mathrm{ev}_V(f\otimes v) = f(v)$ si $f \otimes v \in V^* \otimes V$. Definir $\mathrm{coev}_V : \Bbbk \to V \otimes_{\Bbbk} V^*$ la inclusión.

2) La categoría de todos los $\Bbbk$-espacios vectoriales (de dimensión arbitraria) no es rígida; ya que para espacios de dimensión infinita no existe función de coevaluación.

3) Sea A un álgebra. La categoría de A-bimódulos es rígida si y sólo sí todo bimódulo es un módulo proyectivo finitamente generado tanto a izquierda como a derecha.

4) Si H es una biálgebra, la categoría ${}_H\mathcal{M}$ de H-módulos a izquierda de dimensión finita es rígida, donde el dual de V es V^* como espacio vectorial con acción determinada por $(h \cdot f)v = f(S(h)\cdot v)$ donde $v \in V, f \in V^*, h \in H$.

Definición 1.12. Una *categoría trenzada* es un par $(\mathcal{C}, c)$ donde $\mathcal{C}$ es una una categoría monoidal y $\{c_{V,W} : V \otimes W \to W \otimes V | V, W \in \mathcal{C}\}$ es una familia de isomorfismos naturales tal que para todo par de morfismos $f : V \to V', g : W \to W'$ en $\mathcal{C}$ se satisface

- $(g\otimes f)c_{V,W} = c_{V',W'}(f \otimes g)$,
- Los *axiomas del hexágono*:

$$a_{VWU} \circ c_{U,V\otimes W} \circ a_{UVW} = (\mathrm{id}_V \otimes c_{U,W})a_{VUW}(c_{U,V}\otimes \mathrm{id}_W),$$
$$a^{-1}_{WUV} \circ c_{U\otimes V,W} \circ a^{-1}_{UVW} = (c_{U,W}\otimes \mathrm{id}_V)a^{-1}_{UWV}(\mathrm{id}_U \otimes c_{V,W}).$$

Si $\mathcal{C}$ es estricta los axiomas del hexágono son equivalentes a

$$c_{U,V\otimes W} = (\mathrm{id}_V \otimes c_{U,W})(c_{U,V}\otimes \mathrm{id}_W),$$

$$c_{U\otimes V,W} = (c_{U,W}\otimes \mathrm{id}_V)(\mathrm{id}_U \otimes c_{V,W}).$$

Se sabe que una categoría monoidal $\mathcal{C}$ tiene una estructura trenzada si y sólo sí el funtor inducido por el producto monoidal $\otimes : \mathcal{C}\times\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ resulta ser un funtor monoidal.

Un ejemplo de categoría trenzada es el centro de una categoría.

Ejemplo 1.13. Sea $\mathcal{C}$ una categoría monoidal. Definir $Z(\mathcal{C}) = \{(V, c_{-,V})|V \in \mathcal{C}\}$ el *centro de la categoría* $\mathcal{C}$, donde $c_{-,V}$ es una familia de isomorfismos naturales tal que para todo $X, Y \in \mathcal{C}$, $c_{X,V} : X\otimes V \to V\otimes X$, y satisface

$$c_{X\otimes Y,V} = (c_{X,V}\otimes \mathrm{id}_Y)(\mathrm{id}_X\otimes c_{Y,V}).$$

Un morfismo de $(V, c_{-,V})$ a $(W, c_{-,W})$ es un morfismo $f : V \to W$ en $\mathcal{C}$ tal que

$$(f\otimes \mathrm{id}_X)c_{X,V} = c_{X,W}(\mathrm{id}_X\otimes f).$$

Proposición 1.14. [**K**, Teorema XIII.4.2] *Si $\mathcal{C}$ es una categoría monoidal estricta , entonces $Z(\mathcal{C})$ es una categoría monoidal trenzada estricta donde*

$$(V, c_{-,V})\otimes(W, c_{-,W}) = (V\otimes W, (id_V\otimes c_{-,W})(c_{-,V}\otimes id_W)),$$

y en los morfismos es el producto tensorial usual. La unidad es $(\mathbf{1}, id)$ y la trenza está dada por

$$c_{V,W} : (V, c_{-,V})\otimes(W, c_{-,W}) \to (W, c_{-,W})\otimes(V, c_{-,V}).$$

□

2. Categorías tensoriales

En esta sección damos la definición concreta de Categoría tensorial, que es quizá el concepto más importante a lo largo de este trabajo. La necesidad del estudio de este objeto radica en las variadas aplicaciones en diversas áreas de la matemática tales como variedades topológicas de dimensión baja [**BK**], computación cuántica [**F**], [**FKLW**], [**Ki1**], [**Ki2**], teoría racional y logarítmica de campos [**FS1**], [**FS2**], mecánica estadística, teoría de subfactores [**Oc**], álgebras de Hecke afines [**B**], [**BO**], y teoría de álgebras de Hopf.

Uno de los objetivos de este trabajo es construir ejemplos de categorías tensoriales, a partir de una categoría y un grupo dados.

Una *categoría tensorial* es una categoría Abeliana $\Bbbk$-lineal monoidal y rígida tal que los funtores involucrados en las estructuras monoidal y rígida son aditivos $\Bbbk$-lineales, y el objeto unidad es simple. Una *categoría tensorial finita* es una categoría tensorial cuya categoría Abeliana subyacente es finita, es decir es equivalente, como categorías Abelianas, a la categoría de módulos de dimensión finita sobre una $\Bbbk$-álgebra de dimensión finita.

Un *funtor tensorial* entre dos categorías tensoriales es un funtor monoidal $\Bbbk$-lineal. Una *transformación natural tensorial* entre dos funtores tensoriales es una transformación natural $\Bbbk$-lineal.

Ejemplo 2.1. Sea H un álgebra de Hopf.

1) La categoría de H-módulos a izquierda de dimensión finita posee una estructura tensorial finita dada por, si $V, W \in_H \mathcal{M}$

- $V \otimes W := V \otimes_{\Bbbk} W$ donde la acción está inducida por la comultiplicación de H (se suele decir que tal acción es *diagonal*),
- El objeto unidad es $\Bbbk$ con acción inducida por la counidad de H,
- El dual de V es V^* como espacio vectorial con acción determinada por $(h \cdot f)v = f(S(h) \cdot v)$ donde $v \in V, f \in V^*, h \in H$.

A esta categoría la denotaremos por $\mathrm{Rep}(H)$.

2) La categoría $\mathcal{M}^H$ de H-comódulos a derecha de dimensión finita denotada por $\mathrm{Comod}(H)$ resulta una categoría tensorial.

3) Si $\mathcal{C}$ es una categoría tensorial, denotar por $\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}$ la categoría tensorial cuya categoría Abeliana subyacente es $\mathcal{C}$; con producto tensorial dado por $X \otimes^{\mathrm{rev}} Y = Y \otimes X$, si $X, Y \in \mathcal{C}$; y asociatividad dada por $a^{\mathrm{rev}}_{X,Y,Z} = a^{-1}_{Z,Y,X}$ para $X, Y, Z \in \mathcal{C}$.

4) Si $\mathcal{C} = \mathrm{Rep}(H)$, entonces $\mathcal{C}^{\mathrm{rev}} = \mathrm{Rep}(H^{\mathrm{cop}})$. Más aún si H' es otra álgebra de Hopf

$$\mathrm{Rep}(H) \boxtimes \mathrm{Rep}(H') \simeq \mathrm{Rep}(H \otimes_{\Bbbk} H')$$

como categorías tensoriales.

3. Dimensiones de Frobenius-Perron

Para más detalle sobre dimensión de Frobenius-Perron, ver [**EGNO**]. La dimensión de Frobenius-Perron es un invariante categórico altamente importante que permite dar bastante información de la categoría.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial finita. Definir la función $FPdim$: $\mathcal{C} \to \mathbb{C}$, llamada la *dimensión de Frobenius-Perron*, como sigue: para $X \in \mathcal{C}$, sea $FPdim(X)$ el máximo autovalor no-negativo de la matriz de multiplicación a izquierda por X en $\mathfrak{K}_0(\mathcal{C})$ el grupo de Grothendieck de $\mathcal{C}$ (su existencia la garantiza el Teorema 0.2 de Frobenius-Perron).

PROPOSICIÓN 3.1. [**ENO**, Teorema 8.6] *La aplicación*

$$X \to FP\dim(X)$$

se extiende a un homomorfismo de grupos de $\mathfrak{K}_0(\mathcal{C}) \to \mathbb{R}$.

$\square$

Sean X_i para $i \in I$ las clases de isomorfismos de objetos simples y P_i sus cubrimientos proyectivos. Si $\mathcal{C}$ es una categoría finita tensorial , entonces la *dimensión de Frobenius-Perron de* $\mathcal{C}$ es

$$FPdim(\mathcal{C}) := \sum_{i \in I} FPdim(Xi)FPdim(Pi).$$

Si H es un álgebra de Hopf, como $\Bbbk$ es algebraicamente cerrado se tiene que $H \simeq \oplus_i P_i^{X_i}$ donde $X_i, P_i \in \mathrm{Rep}(H)$ son representantes de las clases de isomorfismos de objetos simples y de sus respectivos cubrimientos proyectivos. Por tanto se obtiene el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 3.2. [**EGNO**, Ejemplo 1.45.6] *Si H es una quasi-álgebra de Hopf, entonces*

$$FP\dim(Rep(H)) = \dim(H).$$

$\square$

4. Γ-extensiones

Uno de los mayores problemas en Teoría de categorías es clasificar las categorías tensoriales. Una aproximación a este problema es intentar construir, a partir de familias conocidas, nuevas categorías tensoriales. Una de estas construcciones es estudiada en [**ENO**], y es la extensión de categorías tensoriales por grupos finitos.

Sea Γ un grupo finito. Una Γ-*extensión de una categoría tensorial* $\mathcal{C}$ es una descomposición en subcategorías plenas Abelianas $\mathcal{C} = \oplus_{g\in\Gamma}\mathcal{C}_g$ tal que si $g, h \in \Gamma$

- el bifuntor inducido por el producto tensorial satisface $\otimes : \mathcal{C}_g \times \mathcal{C}_h \to \mathcal{C}_{gh}$,
- el funtor inducido por tomar duales satisface $* : \mathcal{C}_g \to \mathcal{C}_{g^{-1}}$.

Decimos que la extensión es *fiel* si $\mathcal{C}_g \neq 0$ para todo $g \in \Gamma$. En este caso se dice que $\mathcal{C}$ es una categoría Γ-*extendida.* Si $\mathcal{C}$ es categoría Γ-extendida , entonces $\mathcal{C}_1$ resulta una categoría tensorial y $\mathcal{C}_g$ una categoría $\mathcal{C}_1$-módulo a izquierda y derecha, cuya definición se verá en el Capítulo 6.

DEFINICIÓN 4.1. Si $\mathcal{C}$ es una categoría Γ-extendida y todo $\mathcal{C}_g$ tiene un objeto invertible multiplicativamente, se dice que $\mathcal{C}$ es un *producto* Γ-*cruzado de categorías tensoriales*. Estas extensiones son llamadas también quasi-triviales por algunos autores.

LEMA 4.2. *Si $\mathcal{C}$ es un producto* Γ-*cruzado de categorías tensoriales , entonces $\mathcal{C}_1 \simeq \mathcal{C}_g$ para todo $g \in \Gamma$ como categorías abelianas.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $g \in \Gamma$ y $X_g, Y_g \in \mathcal{C}_g$ tales que

$$X_g \otimes Y_g \simeq \mathbf{1} \simeq Y_g \otimes X_g.$$

Definir los siguientes funtores $F : \mathcal{C}_g \to \mathcal{C}_1$ y $H : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_g$ vía $F(V) = Y_g \otimes V$ y $H(W) = X_g \otimes W$ en los objetos, y en los morfismos:

Si $f : V \to V'$ en $\mathcal{C}_g$, $F(f) = \mathrm{id}_{Y_g} \otimes f$ y si $g : W \to W'$ en $\mathcal{C}_1$, entonces $G(g) = \mathrm{id}_{X_g} \otimes g$.

Luego $HF(V) = H(Y_g \otimes V) = X_g \otimes (Y_g \otimes V) \simeq V$ y $FH(W) \simeq W$ si $V \in \mathcal{C}_g, W \in \mathcal{C}_1$. □

En más $\mathcal{C}$ denotará una categoría tensorial estricta finita. En [**G**] clasifican todos los productos Γ-cruzados de categorías tensoriales en términos de ciertos datos y se da la estructura tensorial de la extensión asociada Γ-extendida de $\mathcal{C}$. Retomaremos este tema en el Capítulo 8.

Capítulo 6

Representaciones de categorías tensoriales

De forma análoga como se construyen representaciones para grupos o álgebras, podemos construir representaciones de categorías tensoriales, las cuales fueron definidas por primera vez en [**P**], lo cual permite extraer información importante de la categoría. Introduciremos definiciones, ejemplos y se detallará el caso en que la categoría es la categoría de módulos sobre un álgebra de Hopf.

También se introduce la noción de categoría bimódulo, el grupo de Brauer-Picard y como ejemplo de esto la clasificación de los bimódulos sobre el álgebra de Taft.

1. Categorías módulos

En más, sea $(\mathcal{C}, \otimes, a, \mathfrak{r}, \mathfrak{l}, \mathbf{1})$ una categoría tensorial finita sobre $\Bbbk$. En este capítulo todos los funtores serán aditivos $\Bbbk$-lineales.

Definición 1.1. Una colección $(\mathcal{M}, \overline{\otimes}, m, l)$ es un $\mathcal{C}$-*módulo* a izquierda si

- $\mathcal{M}$ es una categoría Abeliana $\Bbbk$-lineal;
- $\overline{\otimes}$ es un funtor exacto en cada variable $\overline{\otimes} : \mathcal{C} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ llamado la acción;
- $\{m_{X,Y,M} : (X \otimes Y)\overline{\otimes} M \to X\overline{\otimes}(Y\overline{\otimes} M) : X, Y \in \mathcal{C}, M \in \mathcal{M}\}$, y $\{l_M : \mathbf{1}\overline{\otimes} M \to M : M \in \mathcal{M}\}$ son familias de isomorfismos naturales tales que para todo $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ y $M \in \mathcal{M}$

$$m_{X,Y,Z\overline{\otimes}M}\ m_{X\otimes Y,Z,M} = (id_X\overline{\otimes} m_{Y,Z,M})\ m_{X,Y\otimes Z,M}\ (a_{X,Y,Z}\overline{\otimes} id_M), \tag{21}$$

$$(id_X\overline{\otimes} l_M)m_{X,\mathbf{1},M} = r_X\overline{\otimes} id_M. \tag{22}$$

Es decir que los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
& ((X \otimes Y) \otimes Z)\overline{\otimes} M \arrow[dl, "a_{X,Y,Z}\overline{\otimes} id"'] \arrow[dr, "m_{X\otimes Y,Z,M}"] & \\
(X \otimes (Y \otimes Z))\overline{\otimes} M \arrow[d, "m_{X,Y\otimes Z,M}"] & & (X \otimes Y)\overline{\otimes}(Z\overline{\otimes} M) \arrow[d, "m_{X,Y,Z\overline{\otimes} M}"'] \\
X\overline{\otimes}((Y \otimes Z)\overline{\otimes} M) \arrow[rr, "id\otimes m_{Y,Z,M}"] & & X\overline{\otimes}(Y\overline{\otimes}(Z\overline{\otimes} M))
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes 1)\overline{\otimes} M \arrow[rr, "m_{X,1,M}"] \arrow[dr, "\mathfrak{r}_X\overline{\otimes} id"'] & & X\overline{\otimes}(1\overline{\otimes} M) \arrow[dl, "id\overline{\otimes} l_M"] \\
& X\overline{\otimes} M. &
\end{tikzcd}$$

para todo $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ y $M \in \mathcal{M}$.

Observación 1.2. En la literatura los $\mathcal{C}$-módulos M son llamados también *categorías módulos sobre* $\mathcal{C}$ o *representaciones de* $\mathcal{C}$.

Definición 1.3. Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ $\mathcal{C}$-módulos a izquierda. Un *funtor de* $\mathcal{C}$*-módulos* entre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ es un par (F, c), donde

- $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ es un funtor y
- $c_{X,M} : F(X\overline{\otimes} M) \to X\overline{\otimes} F(M)$ es una familia de isomorfismos naturales tales que

$$m_{X,Y,F(M)}c_{X\otimes Y,M} = (id_X\overline{\otimes} c_{Y,M})c_{X,Y\overline{\otimes} M}F(m_{X,Y,M}), \tag{23}$$

$$l_{F(M)}c_{\mathbf{1},M} = F(l_M), \tag{24}$$

para todo $X, Y \in \mathcal{C}$ y para todo $M \in \mathcal{M}$. Denotaremos por ${}_{\mathcal{C}}\,\mathrm{Mod}$ la categoría que tiene por objetos los $\mathcal{C}$-módulos y por flechas los funtores de $\mathcal{C}$-módulos.

Sean $(F, c), (G, d) : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ funtores de $\mathcal{C}$-módulos. Una *transformación natural de* $\mathcal{C}$*-módulos* es una transformación natural $\theta : F \to G$ que hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
F(X\overline{\otimes} M) \arrow[r, "\theta_{X\overline{\otimes} M}"] \arrow[d, "c_{X,M}"'] & G(X\overline{\otimes} M) \arrow[d, "d_{X,M}"] \\
X\overline{\otimes} F(M) \arrow[r, "id_X\otimes\theta_M"'] & X\overline{\otimes} G(M),
\end{tikzcd} \tag{25}$$

sea conmutativo para todo $X \in \mathcal{C}, M \in \mathcal{M}$.

La categoría de los funtores de $\mathcal{C}$-módulos entre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ es denotada por $\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{N})$. Diremos que los funtores (F,c) y (G,d) son *equivalentes como funtores de $\mathcal{C}$-módulos*, y se denotará $(F,c)\simeq(G,d)$, si existe un isomorfismo natural $\theta : F \to G$ que es de $\mathcal{C}$-módulos.

Si $(F,c) : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ y $(G,d) : \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_3$ son funtores de $\mathcal{C}$-módulos, entonces $(G\circ F, b) : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_3$ es un funtor de $\mathcal{C}$-módulos, donde $b_{X,M} := d_{X,F(M)}G(c_{X,M})$, para todo $X\in\mathcal{C}, M\in\mathcal{M}_1$.

Dos $\mathcal{C}$-módulos $\mathcal{M},\mathcal{N}$ son *equivalentes* si existen funtores $\mathcal{M} \xrightarrow{(F,c)} \mathcal{N}$ y $\mathcal{N} \xrightarrow{(G,d)} \mathcal{M}$ de $\mathcal{C}$-módulos tales que las composiciones $F\circ G$ y $G\circ F$ son equivalentes como funtores de $\mathcal{C}$-módulos a los respectivos funtores identidad.

Sean $\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2$ dos $\mathcal{C}$-módulos. La suma directa de categorías $\mathcal{M}_1\oplus\mathcal{M}_2$ es nuevamente un $\mathcal{C}$-módulo donde la acción es

$$\overline{\otimes} : \mathcal{C}\times\mathcal{M}_1\oplus\mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_1\oplus\mathcal{M}_2, \quad X\overline{\otimes}(M,N) = (X\overline{\otimes}M, X\overline{\otimes}N).$$

Definición 1.4. Sea $\mathcal{M}$ un $\mathcal{C}$-módulo.

- $\mathcal{M}$ se dice *indescomponible* si no es equivalente a la suma directa de dos $\mathcal{C}$-módulos no nulos.
- Un *$\mathcal{C}$-submódulo* de $\mathcal{M}$ es una subcategoría Serre $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ tal que el funtor inclusión $\mathcal{N}\hookrightarrow\mathcal{M}$ es de $\mathcal{C}$-módulos.
- $\mathcal{M}$ se dice *simple* si no es nula y no posee $\mathcal{C}$-submódulos no triviales.

Es posible probar una versión extendida de la Proposición 1.9 de estricticidad de MacLane para $\mathcal{C}$-módulos. La demostración se encuentra en [**Gr**]. En teoría de grupos, una acción de un grupo se puede ver como un morfismo del grupo en los endomorfismos de cierto $\Bbbk$-espacio vectorial. Esto también es posible para $\mathcal{C}$-módulos.

Lema 1.5. *$\mathcal{M}$ es un $\mathcal{C}$-módulo si y sólo sí existe un funtor tensorial*

$$(F,g,\phi) : \mathcal{C} \to End_e(\mathcal{M})$$

exacto y fiel, donde $End_e(\mathcal{M})$ es la categoría de endofuntores exactos de $\mathcal{M}$.

Demostración. Sea $(\mathcal{M},\overline{\otimes},m,l)$ un $\mathcal{C}$-módulo. Definir $F:\mathcal{C}\to \mathrm{End}_e(\mathcal{M})$ por $F(X)(M) = X\overline{\otimes}M$ para todo $X\in\mathcal{C}, M\in\mathcal{M}$. Los funtores $F(X)$ y F son exactos para todo $X\in\mathcal{C}$ debido a la exactitud de $\overline{\otimes} : \mathcal{C}\times\mathcal{M}\to\mathcal{M}$ en ambos argumentos. Para todo $X,Y\in\mathcal{C}$ sea

$$g_{X,Y} : F(X)\circ F(Y) \to F(X\otimes Y),$$

definida por $(g_{X,Y})_M = m^{-1}_{X,Y,M}$ para todo $M \in \mathcal{M}$. Sea $\phi : \mathrm{id} \to F(\mathbf{1})$ dada por $\phi_M = l^{-1}_M$. La identidad (21) y (22) son equivalentes a las de la definición de funtor monoidal. Luego $(F, g, \phi) : \mathcal{C} \to \mathrm{End}_e(\mathcal{M})$ es tensorial. Que F sea fiel sigue de la exactitud de $\overline{\otimes}$.

Recíprocamente se construye la acción de $\mathcal{C}$ sobre $\mathcal{M}$ y se obtiene que $\mathcal{M}$ es un $\mathcal{C}$-módulo. $\square$

Ejemplo 1.6. Sea $(F, \xi, \phi) : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor tensorial.

- Si F es exacto, la categoría $\mathcal{D}$ es un $\mathcal{C}$-módulo vía F: si $X, Y \in \mathcal{C}$, y $M \in \mathcal{D}$ definir

$$\overline{\otimes} : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}, \qquad l_M : \mathbf{1}\otimes M \to M$$
$$X\overline{\otimes}M = F(X)\otimes M, \qquad l_M = l^{\mathcal{D}}_M(\phi\otimes id_M),$$

$$m_{X,Y,M} : F(X\otimes Y)\otimes M \to F(X)\otimes(F(Y)\otimes M)$$

$$m_{X,Y,M} = a^{\mathcal{D}}_{F(X),F(Y),M}(\xi^{-1}_{X,Y}\otimes id_M).$$

- Sea $(\mathcal{M}, \overline{\otimes}, m)$ un $\mathcal{D}$-módulo. Denotaremos por $\mathcal{M}^F$ el $\mathcal{C}$-módulo $(\mathcal{M}, \overline{\otimes}^F, m^F)$ cuya categoría Abeliana subyacente es $\mathcal{M}$ y con acción y asociatividad dados por:

$$X\overline{\otimes}^F M = F(X)\overline{\otimes}M, \quad m^F_{X,Y,M} = m_{F(X),F(Y),M}(\xi^{-1}_{X,Y}\overline{\otimes}\, id_M),$$

  para todo $X, Y \in \mathcal{C}$, $M \in \mathcal{M}$.

- Si $\mathcal{C}$ es una categoría tensorial y $A \in \mathcal{C}$ es un álgebra , entonces la categoría de A-módulos a derecha $\mathcal{C}_A$ es un $\mathcal{C}$-módulo a izquierda. La acción $\overline{\otimes} : \mathcal{C} \times \mathcal{C}_A \to \mathcal{C}_A$ es el producto tensorial de $\mathcal{C}$. Si $X \in \mathcal{C}, M \in \mathcal{C}_A$ la acción a derecha de A en $X\otimes M$ es sobre el segundo tensorando.

- Si $\mathcal{M}$ es un $\mathcal{C}$-módulo a derecha, , entonces $\mathcal{M}^{\mathrm{op}}$ denota la categoría Abeliana opuesta con acción a izquierda dada por

$$\mathcal{C} \times \mathcal{M}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{M}^{\mathrm{op}}$$
$$(M, X) \mapsto M\overline{\otimes}X^*,$$

  e isomorfismos de asociatividad $m^{\mathrm{op}}_{X,Y,M} = m^{-1}_{Y^*,X^*,M}$ para $X, Y \in \mathcal{C}$, $M \in \mathcal{M}$. De igual modo se puede definir si $\mathcal{M}$ es un $\mathcal{C}$-módulo a izquierda.

De manera análoga, se define categoría módulo a derecha: Un $\mathcal{C}$-*módulo a derecha* es una categoría Abeliana $\mathcal{M}$ equipada con un bifuntor exacto $\overline{\otimes} : \mathcal{M} \times \mathcal{C} \to \mathcal{M}$ e isomorfismos naturales $\widetilde{m}_{M,X,Y} : M\overline{\otimes}(X\otimes Y) \to (M\overline{\otimes}X)\overline{\otimes}Y$, $r_M : M\overline{\otimes}1 \to M$ tales que

$$\widetilde{m}_{M\overline{\otimes}X,Y,Z}\, \widetilde{m}_{M,X,Y\otimes Z}(id_M\overline{\otimes}a_{X,Y,Z}) = (\widetilde{m}_{M,X,Y}\overline{\otimes}id_Z)\, \widetilde{m}_{M,X\otimes Y,Z}, \tag{26}$$

$$(r_M\overline{\otimes}id_X)\widetilde{m}_{M,1,X} = id_M\overline{\otimes}l_X. \tag{27}$$

Definición 1.7. Sean $(\mathcal{M},\mu)$ y $(\mathcal{N},\eta)$ $\mathcal{C}$-módulos a derecha e izquierda, respectivamente. Un funtor $F : \mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N} \to \mathcal{A}$ se dice $\mathcal{C}$-*balanceado* si existen isomorfismos naturales

$$\{b_{M,X,N} : F((M\overline{\otimes}X)\boxtimes N) \to F(M\boxtimes(X\overline{\otimes}N))|M \in \mathcal{M}, X \in \mathcal{C}, N \in \mathcal{N}\}$$

tales que

$$\eta_{X,Y,N}b_{M,X\otimes Y,N} = b_{M,X,Y\overline{\otimes}N}b_{M\overline{\otimes}X,Y,N}\mu_{M,X,Y}.$$

Los $\mathcal{C}$-módulos admiten un producto entre ellos: Sean $\mathcal{N},\mathcal{M}$ $\mathcal{C}$-módulos a izquierda y a derecha, respectivamente, el producto de $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ consiste de una categoría Abeliana $\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N}$ y un funtor exacto a derecha $\mathcal{C}$-balanceado $B : \mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N} \to \mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N}$ universal para los funtores exactos a derecha $\mathcal{C}$-balanceados de $\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$; esto es, para todo funtor exacto a derecha $\mathcal{C}$-balanceado $F : \mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N} \to \mathcal{A}$ existe un único funtor $\overline{F} : \mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N} \to \mathcal{A}$ exacto a derecha tal que $F = \overline{F} \circ B$.

Se tiene que $\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N}, B$ son únicos salvo equivalencia. En el caso semisimple, se tiene que $\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N}$ es equivalente al centro $Z_{\mathcal{C}}(\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N})$, ver [**ENO**, Poposición 3.8].

1.1. Representaciones sobre álgebras de Hopf. Se darán familias de ejemplos de Rep(H)-módulos para H un álgebra de Hopf de dimensión finita.

Sea (K,λ) un H-comódulo álgebra a izquierda. Entonces la categoría ${}_K\mathcal{M}$ de K-módulos a izquierda, es un Rep(H)-módulo como sigue:

$$\begin{aligned} \otimes : \mathrm{Rep}(H) \times {}_K\mathcal{M} &\to {}_K\mathcal{M}, \\ (X, V) &\mapsto X\otimes_{\Bbbk}V, \end{aligned}$$

y la acción de K sobre $X\otimes_{\Bbbk}V$ es $k\cdot(x\otimes v) := k_{-1}\cdot x\otimes k_0\cdot v$. Los morfismos de asociatividad y unidad son los triviales.

Proposición 1.8. *Si K es un H-comódulo álgebra a izquierda, entonces ${}_K\mathcal{M}$ es un Rep(H)-módulo indescomponible si y sólo sí no existen ideales biláteros I, J H-coestables tales que $K = I \oplus J$.*

Demostración. Asumamos que K posee ideales biláteros I, J H-coestables tales que $K = I \oplus J$. Como I, J son ideales H-subcomódulos, las álgebras cocientes K/I y K/J son H-comódulos álgebras a izquierda. Los $\mathrm{Rep}(H)$-módulos ${}_{K/I}\mathcal{M}$ y ${}_{K/J}\mathcal{M}$ son subcategorías módulos de ${}_K\mathcal{M}$.

Dado $M \in {}_K\mathcal{M}$, sean $M_1 = \{m \in M : I.m = 0\}$, $M_2 = \{m \in M : J.m = 0\}$; claramente, $M_1 \in {}_{K/I}\mathcal{M}$ y $M_2 \in {}_{K/J}\mathcal{M}$. Descomponer $1 = i + j$ con $i \in I$, $j \in J$; si $m \in M$, entonces $m = im + jm$. Ya que $IJ \subset I \cap J = 0$, $jm \in M_1$, y similarmente $im \in M_2$, por lo tanto $M = M_1 + M_2$.

Además si $m \in M_1 \cap M_2$, entonces $m = 0$. Esto muestra que $M = M_1 \oplus M_2$, así

$${}_K\mathcal{M} \simeq {}_{K/I}\mathcal{M} \times {}_{K/J}\mathcal{M}.$$

Por tanto, probamos que si ${}_K\mathcal{M}$ es un $\mathrm{Rep}(H)$-módulo indescomponible , entonces no existen ideales biláteros I, J H-coestables tales que $K = I \oplus J$.

Recíprocamente, asumamos que ${}_K\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$, donde $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ son subcategorías módulos de ${}_K\mathcal{M}$. Para todo $M \in {}_K\mathcal{M}$ existen $M_1 \in \mathcal{M}_1$ y $M_2 \in \mathcal{M}_2$ tales que $M = M_1 \oplus M_2$. Si $\varphi : M \to N$ es un morfismo en ${}_K\mathcal{M}$, entonces $\varphi(M_1) \subseteq N_1$, $\varphi(M_2) \subseteq N_2$.

Considerando $K \in {}_K\mathcal{M}$, existen $J \in \mathcal{M}_1$, $I \in \mathcal{M}_2$ tales que $K = J \oplus I$. Claramente I y J son H-subcomódulos ideales a izquierda de K. Sean $j \in J$ y $\eta_j : K \to K$ la expansión de j, es decir $\eta_j(x) = xj$, $x \in K$. Como η_j es un morfismo de K-módulos, $\eta_j(I) \subseteq I$. Luego, $IJ \subseteq I$ y I son ideales biláteros. Similarmente, J es un ideal bilátero.

Probando luego la otra implicación. Notar que estas construcciones son una la inversa de la otra.

□

Otra construcción de representaciones de $\mathrm{Rep}(H)$ provienen de twist. Considerar el funtor tensorial $F : \mathrm{Rep}(H) \to \mathrm{vect}_{\Bbbk}$ construido en 1.4. De acuerdo al Ejemplo 1.6 existe un $\mathrm{Rep}(H)$-módulo, que denotaremos por $\mathcal{M}_J$, cuya categoría Abeliana subyacente es la categoría de espacios vectoriales de dimensión finita (tiene rango 1).

Si J^x es un twist equivalente a J , entonces los $\mathrm{Rep}(H)$-módulos $\mathcal{M}_J, \mathcal{M}_{J^x}$ son equivalentes, vía el funtor $(F, c) : \mathcal{M}_J \to \mathcal{M}_{J^x}$, donde $F(M) = M$ y para todo $V \in \mathrm{Rep}(H), M \in \mathcal{M}_J$, los isomorfismos $c_{V,M} : V \otimes_{\Bbbk} M \to V \otimes_{\Bbbk} M$ están definidos por

$$c_{V,M}(v \otimes m) = x^{-1} \cdot v \otimes m, \quad v \in V, m \in M.$$

En lo que sigue estudiaremos los funtores de $\mathrm{Rep}(H)$-módulos entre los $\mathrm{Rep}(H)$-módulos ${}_R\mathcal{M}$ y ${}_S\mathcal{M}$, donde R y S son dos H-comódulos álgebras a izquierda sobre H. Denotaremos las estructuras de comódulos en R y S por $\lambda_R : R \to H \otimes_{\Bbbk} R$ y $\lambda_S : S \to H \otimes_{\Bbbk} S$, respectivamente.

Sea P un (S, R)-bimódulo y también un H-comódulo a izquierda vía $\lambda : P \to H \otimes_{\Bbbk} P$. Diremos que P es un *bimódulo equivariante* si λ es un morfismo de R-módulos a derecha y de S-módulos a izquierda, donde la acción de R y S sobre $H \otimes_{\Bbbk} P$ vienen dadas vía λ_R y λ_S respectivamente.

Definamos el funtor $F : {}_R\mathcal{M} \to {}_S\mathcal{M}$ por $F(V) = P \otimes_R V$ con estructura de S-módulo sobre el primer tensorando. Además para cada $X \in \mathrm{Rep}(H)$, $V \in {}_R\mathcal{M}$ sea $c_{X,V} : P \otimes_R (X \otimes_{\Bbbk} V) \to X \otimes_{\Bbbk} (P \otimes_R V)$ el isomorfismo dado por

$$c_{X,V}(m \otimes x \otimes v) = m_{(-1)} \cdot x \otimes m_{(0)} \otimes v, \quad m \in P, x \in X, v \in V. \tag{28}$$

Se tiene el siguiente resultado.

Lema 1.9. *Si P es un bimódulo equivariante , entonces existe un funtor de $\mathrm{Rep}(H)$-módulos*

$$(F, c) : {}_R\mathcal{M} \to {}_S\mathcal{M}.$$

Demostración. La buena definición del isomorfismo natural c es consecuencia de que λ es de R-módulos a derecha. Además para todo $X \in \mathrm{Rep}(H), V \in {}_R\mathcal{M}$ el morfismo $c_{X,V}$ es un morfismo en ${}_S\mathcal{M}$ ya que λ es un morfismo de S-módulos a izquierda. Las identidades (23) y (24) son inmediatas. □

2. Categorías bimódulos

En más sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías monoidales. Igual que en módulos se entrelazan las definiciones de módulo a izquierda y a derecha, para categorías se realiza análogamente.

Una *categoría $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$-bimódulo* $\mathcal{M}$ es una categoría $\mathcal{C}$-módulo a izquierda y $\mathcal{D}$-módulo a derecha con acciones μ^l, μ^r respectivamente, dotada de una familia de isomorfismos naturales

$$\gamma_{X,M,Y} : (X \otimes M) \otimes Y \to X \otimes (M \otimes Y), \quad X \in \mathcal{C}, Y \in \mathcal{D},$$

tales que los siguientes pentágonos conmutan

$$
\begin{tikzcd}
((XY)M)Z \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\mu^l\otimes id"'] & (XY)(MZ) \arrow[dd, "\mu^l"] \\
(X(YM))Z \arrow[d, "\gamma"'] & \\
X((YM)Z) \arrow[r, "id\otimes\gamma"'] & X(Y(MZ))
\end{tikzcd}
,\quad
\begin{tikzcd}
(XM)(YZ) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\mu^r"'] & X(M(YZ)) \arrow[dd, "id\otimes\mu^r"] \\
((XM)Y)Z \arrow[d, "\gamma\otimes id"'] & \\
(X(MY))Z \arrow[r, "\gamma"'] & X((MY)Z)
\end{tikzcd}
,\quad
\begin{tikzcd}
(\mathbf{1}M)\mathbf{1} \arrow[r, "\gamma_{\mathbf{1},M,\mathbf{1}}"] \arrow[d, "\ell_M"'] & \mathbf{1}(M\mathbf{1}) \arrow[dd, "r_M"] \\
M1 \arrow[d, "r_M"'] & \\
M & 1M \arrow[l, "\ell_M"]
\end{tikzcd}
.
$$

Una definición alternativa de categoría bimódulo viene dada usando el producto tensorial de Deligne, la cual facilita un poco la escritura.

Teorema 2.1. [**Gr**] *$\mathcal{M}$ es un $(\mathcal{C},\mathcal{D})$-bimódulo si y sólo sí $\mathcal{M}$ es un $\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{D}^{rev}$-módulo.*

$\square$

Si $(\mathcal{M},\mu)$ es un $\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{D}^{\mathrm{rev}}$-módulo, definir $\gamma_{X,M,Y}=\mu_{X\boxtimes 1,1\boxtimes Y,M}$ sobre las subyacentes estructuras de categoría módulo a izquierda y derecha. De este modo se obtiene que $\mathcal{M}$ es un $(\mathcal{C},\mathcal{D})$-bimódulo.

Un *morfismo de* $(\mathcal{C},\mathcal{D})$*-bimódulos* es un morfismo de $\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{D}^{\mathrm{rev}}$-módulos. Una *equivalencia de* $(\mathcal{C},\mathcal{D})$*-bimódulos* es una equivalencia de $\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{D}^{\mathrm{rev}}$-módulos. Una categoría $(\mathcal{C},\mathcal{D})$-bimódulo es *reducible* si es la suma directa de dos $(\mathcal{C},\mathcal{D})$-bimódulos no-triviales; es *irreducible* si no es reducible. Es *exacta* si lo es a izquierda como $\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{D}^{\mathrm{rev}}$-módulo, esto es, si para todo proyectivo P en la categoría y todo objeto M, el objeto $P\otimes M$ es proyectivo.

Ejemplo 2.2. **1)** Si $\mathcal{C}$ es una categoría monoidal, entonces $\mathcal{C}$ es un $(\mathcal{C},\mathcal{C})$-bimódulo con la estructura trivial, inducida por el producto monoidal de $\mathcal{C}$.

2) Sean $(G,\zeta),(F,\xi):\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ autoequivalencias monoidales y $\mathcal{M}$ un $(\mathcal{C},\mathcal{D})$-bimódulo, entonces ${}^F\mathcal{M}^G$ es un nuevo bimódulo (Ver Ejemplo 1.6). Más específicamente, la categoría Abeliana subyacente es $\mathcal{M}$, con acciones y asociatividades a izquierda y derecha dadas por

$$X\overline{\otimes}M=F(X)\overline{\otimes}M,\quad M\overline{\otimes}Y=M\overline{\otimes}G(Y),\quad X\in\mathcal{C},Y\in\mathcal{D},M\in\mathcal{M};$$

$$m^F_{X,Y,M}=m^l_{X,Y,M}(\xi^{-1}_{X,Y}\otimes\mathrm{id}_M),\quad m^G_{M,X,Y}=m^r_{M,X,Y}(\mathrm{id}_M\otimes\zeta^{-1}_{X,Y}).$$

Acá m^l es la asociatividad a izquierda (resp. derecha) de $\mathcal{M}$. Si G es el funtor identidad denotar ${}^F\mathcal{M}^G$ por ${}^F\mathcal{M}$, igual si F es la identidad.

3) Si $\mathcal{M}$ es un $(\mathcal{C},\mathcal{D})$-bimódulo , entonces $\mathcal{M}^{\mathrm{op}}$ es un $(\mathcal{D},\mathcal{C})$-bimódulo [**Gr1**, Proposición 2.15].

El producto de categorías bimódulos, da lugar a categorías bimódulos:

PROPOSICIÓN 2.3. [**Gr**, Proposición 3.13] *Sea $\mathcal{M}$ un $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$-bimódulo y $\mathcal{N}$ un $(\mathcal{D}, \mathcal{A})$-bimódulo. Entonces $\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{D}} \mathcal{N}$ es un $(\mathcal{C}, \mathcal{A})$-bimódulo y B es un funtor de $(\mathcal{C}, \mathcal{A})$-bimódulos.*

□

Si la categoría base es estricta, se conoce bien quién es el producto:

PROPOSICIÓN 2.4. [**Gr**, Teorema 3.20] *Sea $\mathcal{C}$ una categoría monoidal estricta. Si $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ son $\mathcal{C}$-módulos a derecha e izquierda respectivamente, existe una equivalencia canónica*

$$\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N} \simeq Fun_e(\mathcal{M}^{op}, \mathcal{N}).$$

Si $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ son bimódulos categorías la equivalencia es de bimódulos.

□

Acá $\mathrm{Fun}_e(\mathcal{M}^{\mathrm{op}}, \mathcal{N})$ es la categoría de funtores de $\mathcal{C}$-módulos exactos a derecha.

Explícitamente, si $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{A}$ son categorías monoidales estrictas, $\mathcal{M}$ es un $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$-bimódulo y $\mathcal{N}$ es un $(\mathcal{D}, \mathcal{A})$-bimódulo , entonces $\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{D}} \mathcal{N} = \mathrm{Fun}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}^{\mathrm{op}}, \mathcal{N})$ es un $(\mathcal{C}, \mathcal{A})$-bimódulo, con acciones, si $X \in \mathcal{C}, Y \in \mathcal{A}, F \in \mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{D}} \mathcal{N}, M \in \mathcal{M}$, dadas por:

$$\begin{aligned} {}'\overline{\otimes} : \mathcal{C} \times \mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{D}} \mathcal{N} \to \mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{D}} \mathcal{N}, &\quad \overline{\otimes}' : \mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{D}} \mathcal{N} \times \mathcal{A} \to \mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{D}} \mathcal{N} \\ (X'\overline{\otimes} F)(M) = F(M \overline{\otimes} X) &\qquad\qquad (F \overline{\otimes}' Y)(M) = F(M) \overline{\otimes} Y. \end{aligned}$$

Un $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$-bimódulo $\mathcal{M}$ es llamado *invertible* si existen equivalencias de bimódulos entre $\mathcal{M}^{\mathrm{op}} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{M} \simeq \mathcal{D}$ y $\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{D}} \mathcal{M}^{\mathrm{op}} \simeq \mathcal{C}$.

PROPOSICIÓN 2.5. [**ENO**, Proposición 4.2] *Si $\mathcal{M}$ un $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$-bimódulo exacto, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- *$\mathcal{M}$ es invertible.*
- *Existe una equivalencia de $\mathcal{D}$-bimódulos $\mathcal{M}^{op} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{M} \simeq \mathcal{D}$.*
- *Existe una equivalencia de $\mathcal{C}$-bimódulos $\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{D}} \mathcal{M}^{op} \simeq \mathcal{C}$.*
- *El funtor $R : \mathcal{D}^{op} \to Fun_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$, $R(X)(M) = M \overline{\otimes} X$, para $X \in \mathcal{D}, M \in \mathcal{M}$, es una equivalencia de categorías tensoriales.*
- *El funtor $L : \mathcal{C} \to Fun_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$, $L(Y)(M) = Y \overline{\otimes} M$, para $Y \in \mathcal{C}, M \in \mathcal{M}$, es una equivalencia de categorías tensoriales.*

□

Es conocido que un $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$-bimódulo invertible da lugar a una equivalencia Morita entre dichas categorías.

LEMA 2.6. [**FMM**, Lema 2.4] *Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías tensoriales. Son equivalentes.*

1. *$\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son Morita equivalentes; esto es, existe un $\mathcal{C}$-módulo indescomponible exacto a izquierda $\mathcal{M}$ y una equivalencia tensorial $\mathcal{D}^{rev} \simeq End_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$.*
2. *Existe un $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$-bimódulo invertible.*

DEMOSTRACIÓN. (2) implica (1) es parte de [**ENO**, Proposición 4.2]. Asumamos que las categorías tensoriales $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ son Morita equivalentes. Sea $\Phi : \mathcal{D}^{\mathrm{rev}} \xrightarrow{\simeq} \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ la equivalencia tensorial. Como $\mathcal{M}$ es un $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$-módulo a izquierda indescomponible exacto, es entonces un $\mathcal{D}$-módulo a derecha indescomponible exacto. La $\mathcal{D}$-acción a derecha satisface:

$$\mathcal{M} \times \mathcal{D} \to \mathcal{M}, \quad M \overline{\otimes} Y = \Phi(Y)(M), \quad M \in \mathcal{M}, Y \in \mathcal{D}.$$

Como $\mathcal{M}$ resulta un $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$-bimódulo exacto, el funtor Φ es una equivalencia de $(\mathcal{D}, \mathcal{D})$-bimódulos. Luego, $\mathcal{M}$ es un $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$-bimódulo invertible. $\square$

2.1. Grupo de Brauer-Picard. Sea Γ un grupo finito. Para clasificar Γ-extensiones de una categoría tensorial $\mathcal{C}$, por [**ENO**] otro ingrediente necesario radica en conocer morfismos de grupos

$$c : \Gamma \to \mathrm{BrPic}(\mathcal{C}),$$

donde $\mathrm{BrPic}(\mathcal{C})$ es el grupo de clases de equivalencia de $\mathcal{C}$-bimódulos invertibles exactos, llamado *grupo de Brauer-Picard*. Algunos cálculos de tal grupo se pueden encontrar en [**GS**], [**NR**], [**M2**].

Tal grupo no depende de la clase Morita de la categoría; esto es si $\mathcal{D}$ es otra categoría tensorial Morita equivalente a $\mathcal{C}$ existe un isomorfismo $\mathrm{BrPic}(\mathcal{C}) \simeq \mathrm{BrPic}(\mathcal{D})$ dado por:

Sea $\mathcal{M}$ un $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$-bimódulo invertible. Definir

$$\Phi : \mathrm{BrPic}(\mathcal{C}) \to \mathrm{BrPic}(\mathcal{D}), \Phi([\mathcal{N}]) = [\mathcal{M}^{\mathrm{op}} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{M}], \tag{29}$$

si $[\mathcal{N}] \in \mathrm{BrPic}(\mathcal{C})$ denota la clase de equivalencia del módulo $\mathcal{N}$.

3. Clasificación de bimódulos sobre el álgebra de Taft

Los resultados de este capítulo provienen de [**FMM**]. El objetivo de esta sección es encontrar un subgrupo de $\mathrm{BrPic}(\mathrm{Rep}(T_q))$, el grupo de Brauer-Picard de la categoría de representaciones del álgebra de Taft. La descripción de dicho subgrupo es explícita. Se espera que estos resultados ayuden en la determinación de extensiones no triviales de la categoría $\mathrm{Rep}(T_q)$.

En la Sección 1.2, se clasificaron los $T_q \otimes T_{q^{-1}}$-comódulos álgebras T_q-simples. Estos comódulos determinan a su vez una categoría $\mathrm{Rep}(T_q)$-bimódulo exacta indescomponible. Más aún, toda categoría módulo exacta indescomponible proviene de esta forma. Esto sustenta los resultados de tal Sección.

3.1. Clasificación de Rep$(T_q \otimes T_{q^{-1}})$-módulos exactos. En esta sección damos la clasificación de $\mathrm{Rep}(T_q)$-bimódulos exactos indescomponibles. Los resultados de esta sección se siguen de [**FMM**], son resultados nuevos e interesantes. Esto nos permitirá conocer el grupo de Brauer-Picard del álgebra de Taft. En el siguiente Teorema se describe tal clasificación. Recordar las familias de álgebras introducidas en la Subsección 1.2 del Capítulo 4. Sea $G = C_n \times C_n$.

TEOREMA 3.1. [**FMM**, Teorema 5.15] *Sea $\mathcal{M}$ un Rep(T_q)-bimódulo exacto indescomponible. Entonces $\mathcal{M}$ es equivalente a una de las siguientes categorías:*

- ${}_{\Bbbk_\psi F}\mathrm{Mod}$ *para algún subgrupo $F \subseteq G$ y $\psi \in Z^2(F, \Bbbk^\times)$;*
- ${}_{\mathcal{L}(\xi,\mu,F,\psi)}\mathrm{Mod}$ *para algunos $F \subseteq G$ subgrupo tal que $(g, g) \in F$; $\psi \in Z^2(F, \Bbbk^\times)$ compatible con F; y $\xi, \mu \in \Bbbk$ con $\xi \neq 0$;*
- ${}_{\mathcal{K}_{11}(a,b,\xi,F,\psi)}\mathrm{Mod}$ *para algunos $a, b, \xi \in \Bbbk$; $F \subseteq G$ subgrupo y $\psi \in Z^2(F, \Bbbk^\times)$;*
- ${}_{\mathcal{K}_{01}(a,F,\psi)}\mathrm{Mod}$ *para algunos $a \in \Bbbk$, $F \subseteq G$ subgrupo y $\psi \in Z^2(F, \Bbbk^\times)$;*
- ${}_{\mathcal{K}_{10}(b,F,\psi)}\mathrm{Mod}$ *para algunos $a \in \Bbbk$, $F \subseteq G$ subgrupo y $\psi \in Z^2(F, \Bbbk^\times)$.*

DEMOSTRACIÓN. Por el Lema 1.11 del Capítulo 4, todos los módulos de la anterior lista son exactos indescomponibles.

Sea $\mathcal{M}$ un $\mathrm{Rep}(T_q)$-bimódulo indescomponible exacto, entonces es un $\mathrm{Rep}(H)$-módulo indescomponible exacto. Por [**AM**, Teorema 3.3] existe un comódulo álgebra a izquierda con coinvariantes triviales H-simple a derecha (A, λ), donde $\lambda : A \to H \otimes_{\Bbbk} A$, tal que $\mathcal{M} = {}_A\mathcal{M}$ como $\mathrm{Rep}(H)$-módulos.

Como H es corradicalmente graduada , entonces gr$A$ es un comódulo álgebra a izquierda H-simple a derecha también con coinvariantes triviales. Por tanto, existe un subgrupo $F \subseteq G$ y $\psi \in Z^2(F, \Bbbk^\times)$ tal que $\mathrm{gr}A_0 = \Bbbk_\psi F$.

Abusando de la notación, denotar por $\psi \in Z^2(G, \Bbbk^\times)$ el 2-cociclo tal que restringuido a F es igual a ψ. Como $(\mathrm{gr}A)_{\sigma_\psi^{-1}}$ es un comódulo álgebra Loewy-graduado en $H^{[\sigma_\psi^{-1}]}$, se sigue de [**M2**, Lema 5.5] que $(\mathrm{gr}A)_{\sigma_\psi^{-1}}$ es isomorfo a una subálgebra de $H^{[\sigma_\psi^{-1}]}$ homogénea coideal.

Sean χ_1, χ_2 los caracteres en G definidos en (9) usando ψ^{-1}. Entonces

$$H^{[\sigma_\psi^{-1}]} = H_{(\chi_1,\chi_2)}$$

y por el Teorema 1.6 (Capítulo 4) $(\mathrm{gr}A)_{\sigma_\psi^{-1}} = C_{(\chi_1,\chi_2)}(W^1, W^2, W^3, F)$ para algún dato subálgebra coideal (W^1, W^2, W^3, F). Entonces

$$\mathrm{gr}A = C_{(\chi_1,\chi_2)}(W^1, W^2, W^3, F)_{\sigma_\psi},$$

y por el Lema 1.12 (Capítulo 4) hay dos opciones: $W^3 = 0$ y $W^3 \neq 0$.

Analicemos el caso cuándo $W^3 \neq 0$, ya que el otro caso es similar. Si $W^3 \neq 0$ por el Lema 1.12 (Capítulo 4), $\mathrm{gr}A = \mathcal{L}(\xi, 0, F, \psi)$.

Afirmación 3.1.1. *Existe un elemento $w \in A$ tal que*

$$\lambda(w) = \xi\, x \otimes 1 + y(g,g) \otimes e_{(g,g)} + (g,1) \otimes w. \tag{30}$$

Demostración. Como $\mathrm{gr}A = \mathcal{L}(\xi, 0, F, \psi)$ existe un elemento $\overline{w} \in A_1/A_0$ tal que

$$\overline{\lambda}(\overline{w}) = \xi\, x \otimes 1 + y(g,g) \otimes e_{(g,g)} + (g,1) \otimes \overline{w}.$$

Acá $\overline{\lambda} : \mathrm{gr}A \to H \otimes_{\Bbbk} \mathrm{gr}A$ es la coacción inducida de λ, [**M1**, Sección 4]. Denotar por $w' \in A_1$ un elemento representativo en la clase de $\overline{w}$. Por la definición de la coacción inducida $\overline{\lambda}$ existe un morfismo $\lambda_1 : \mathrm{gr}A \to \Bbbk G \otimes_{\Bbbk} \Bbbk_\psi F$ tal que

$$\lambda(w') = \xi\, x \otimes 1 + y(g,g) \otimes e_{(g,g)} + (g,1) \otimes w' + \lambda_1(w').$$

Sea $\lambda_1(w') = \sum_{h \in G, f \in F} a_{h,f}\ h \otimes e_f$, para algún $a_{h,f} \in \Bbbk$. Por la coasociatividad de λ tenemos que $(g,1) \otimes \lambda_1(w') + (\mathrm{id} \otimes \lambda)\lambda_1(w') = (\Delta \otimes \mathrm{id})\lambda_1(w')$, si

$$\lambda_1(w') = \sum_{f \in F, f \neq (g,1)} \beta_f\ ((g,1) - f) \otimes e_f.$$

Entonces, si $z = \sum_{f \in F, f \neq (g,1)} \beta_f\ e_f \in A_0$ se tiene que $\lambda_1(w') = (g,1) \otimes z - \lambda(z)$. El elemento $w = w' + z$ satisface la ecuación (30). $\square$

Podemos elegir $w \in A$ tal que $e_f w = (f \cdot w) e_f$, donde la acción $\cdot : F \times W^3 \to W^3$ es la restricción de la acción de G sobre $V_1 \oplus V_2$. El conjunto $\{f w^i : f \in F, 0 \leq i < n\}$ es una base para A. Como

$$\lambda(w^n) = 1 \otimes w^n,$$

existe $\mu \in \Bbbk$ tal que $w^n = \mu 1$. Por tanto, existe una proyección $\mathcal{L}(\xi, \mu, F, \psi) \to A$ que es un isomorfismo ya que ambas álgebras tienen la misma dimensión. $\square$

Analicemos cuando los módulos de la lista dada en el Teorema 3.1 son equivalentes.

PROPOSICIÓN 3.2. *Se satisface:*

1. ${}_{\Bbbk_{\psi}F}\mathrm{Mod} \simeq {}_{\Bbbk_{\psi'}F'}\mathrm{Mod}$ *si y sólo sí* $F = F'$ *y* $\psi = \psi'$ *en* $H^2(F, \Bbbk^\times)$*;*
2. ${}_{\mathcal{L}(\xi,\mu,F,\psi)}\mathrm{Mod} \simeq {}_{\mathcal{L}(\xi',\mu',F',\psi')}\mathrm{Mod}$ *si y sólo sí* $\xi = q^i\xi'$ *para algún* $i \in \mathbb{N}$*,* $\mu = \mu'$*,* $F = F'$ *y* $\psi = \psi'$ *en* $H^2(F, \Bbbk^\times)$*;*
3. ${}_{\mathcal{K}_{11}(a,b,\xi,F,\psi)}\mathrm{Mod} \simeq {}_{\mathcal{K}_{11}(a',b',\xi',F',\psi')}\mathrm{Mod}$ *si y sólo sí* $(a, b, \xi, F, \psi) = (a', b', \xi', F', \psi')$*;*
4. *si* $(i, j) \in \{(0, 1), (1, 0)\}$*,* ${}_{\mathcal{K}_{ij}(a,F,\psi)}\mathrm{Mod} \simeq {}_{\mathcal{K}_{ij}(a',F',\psi')}\mathrm{Mod}$ *si y sólo sí* $(a, F, \psi) = (a', F', \psi')$*.*

DEMOSTRACIÓN. Probaremos (2). El resto es análogo.
Si existe un isomorfismo de H-comódulos álgebras a izquierda

$$\mathcal{L}(\xi, \mu, F, \psi) \simeq \mathcal{L}(\xi', \mu', F', \psi'),$$

entonces $\xi = q^a\xi'$, $\mu = \mu'$, para algún $a \in \mathbb{N}$ y $F = F'$, $\psi = \psi'$.

Se sigue de [**GM**, Teorema 4.2] que ${}_{\mathcal{L}(\xi,\mu,F,\psi)}\mathrm{Mod} \simeq {}_{\mathcal{L}(\xi',\mu',F',\psi')}\mathrm{Mod}$ si y sólo sí existe $f \in G$ tal que $\mathcal{L}(\xi, \mu, F, \psi) \simeq \mathcal{L}(\xi', \mu', F', \psi')^f$ como H-comódulos álgebras a izquierda, donde la estructura del comódulo álgebra de la derecha está dada por $a \mapsto f^{-1}a_{-1}f \otimes a_0$.

Además si $f \in G$, entonces $\mathcal{L}(\xi', \mu', F', \psi')^f = \mathcal{L}(q^i\xi', \mu', F', \psi')$ para algún $i \in \mathbb{N}$. □

Una de las consecuencias de la Proposición anterior es la clasificación de los objetos T_q-biGalois; la cual como vimos en la Proposición 4.4 fue obtenida por Schauenburg [**S2**], y acá la obtenemos mediante otro método.

COROLARIO 3.3. [**FMM**, Corolario 5.20] *Si* A *es un objeto* T_q*-biGalois , entonces* $A \simeq \mathcal{L}(\xi, \mu, diag(G), 1)$ *como* T_q*-bicomódulos álgebras para algún* $0 \neq \xi, \mu \in \Bbbk$*.*

DEMOSTRACIÓN. Sea A un objeto T_q-biGalois. Entonces A como $T_q \otimes_{\Bbbk} T_q^{\mathrm{cop}}$-comódulo álgebra a izquierda no tiene ideales no-triviales T_q-coestables:

Sea $I \subseteq A$ un ideal H-coestable. Luego I es un ideal T_q-coestable y como A es biGalois, se tiene que $I = 0$ ó $I = A$.

Entonces A debe ser una de las álgebras enlistadas anteriormente. Si observamos estas álgebras como T_q-bicomódulos, se tiene que la única familia de álgebras que son T_q-biGalois es $\mathcal{L}(\xi, \mu, \mathrm{diag}(G), 1)$ para algún $0 \neq \xi, \mu \in \Bbbk$ (teniendo en cuenta que T_q es de dimensión finita y que todo objeto biGalois es isomorfo a T_q como bicomódulo). □

Siguiendo la notación de la Proposición 4.4, obtenemos que $\mathcal{A}_{\mu,\xi} \simeq \mathcal{L}(\xi, \mu, \mathrm{diag}(G), 1)$ para $0 \neq \xi, \mu \in \Bbbk$, donde el isomorfismo está dado por $y \mapsto w$ y $h \mapsto e_{(g,g)}$.

Justo como en esa Proposición obtenemos que $\mathcal{A}_{\mu,\xi} \simeq \mathcal{A}_{\mu',\xi'}$ si y sólo sí $\mu = \mu', \xi = q^i\xi'$ para algún $i \in \mathbb{N}$.

Recordar la definición de la relación de equivalencia $\sim$ dada entre objetos biGalois. Luego $\mathcal{A}_{\mu,\xi} \sim \mathcal{A}_{\mu',\xi'}$ si y sólo sí $\mu = \mu', \xi = q^i\xi'$ para algún $i \in \mathbb{N}$. Como $T_q \simeq \mathcal{A}_{0,1}$, se tiene:

Corolario 3.4. [**FMM**, Corolario 5.21] *El subgrupo* $\mathrm{InnbiGal}(T_q)$ *es trivial y la aplicación*

$$\phi : \mathrm{BiGal}(T_q) \to \mathit{BrPic}(\mathit{Rep}(T_q)), \quad \phi([A]) = [{}_A\,\mathrm{Mod}]$$

es un morfismo de grupos inyectivo.

□

3.2. $\mathbf{Rep}(T_q)$-bimódulos invertibles. Como una consecuencia de los resultados anteriores podemos dar explícitamente una familia de $\mathrm{Rep}(T_q)$-bimódulos exactos invertibles que forman un subgrupo dentro de $\mathrm{BrPic}(\mathrm{Rep}(T_q))$.

Definir el grupo $\Bbbk^\times \ltimes \Bbbk^+$ como el conjunto $\Bbbk - \{0\} \times \Bbbk$ y producto dado por

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, cb + d), \quad (a, b), (c, d) \in \Bbbk^\times \times \Bbbk.$$

Si G_n denota el subgrupo de $\Bbbk^\times$ de n-raíces de la unidad, entonces $\Bbbk^\times/\mathbb{G}_n \ltimes \Bbbk^+$ es un grupo con el producto

$$(\overline{a}, b) \cdot (\overline{c}, d) = (\overline{ac}, c^n b + d), \quad (\overline{a}, b), (\overline{c}, d) \in \Bbbk^\times/\mathbb{G}_n \times \Bbbk.$$

El morfismo

$$\phi : \Bbbk^\times/\mathbb{G}_n \ltimes \Bbbk^+ \to \Bbbk^\times \ltimes \Bbbk^+$$

dado por $\phi(\overline{\xi}, \mu) = (\xi^n, \mu)$ es un isomorfismo de grupos.

Schauenburg [**S1**, Teorema 2.5] probó que existe un isomorfismo de grupos

$$\mathrm{BiGal}(T_q) \simeq \Bbbk^\times \ltimes \Bbbk^+.$$

Daremos otra demostración de este resultado, principalmente por dos razones: la primera es que nuestra descripción de los objetos biGalois es diferente de la dada en [**S1**] y la segunda es que queremos mostrar un subgrupo explícito dentro de $\mathrm{BrPic}(\mathrm{Rep}(T_q))$.

TEOREMA 3.5. [**FMM**, Teorema 5.22] *Sean* $\xi, \mu, \xi', \mu' \in \Bbbk$, $\xi', \xi \neq 0$. *Existe un isomorfismo de* $T_q \otimes_{\Bbbk} T_{q^{-1}}$*-comódulos álgebras*

$$\mathcal{A}_{\mu',\xi'} \square_{T_q} \mathcal{A}_{\mu,\xi} \simeq \mathcal{A}_{\xi^n \mu' + \mu, \xi' \xi}.$$

DEMOSTRACIÓN. La estructura de $T_q \otimes_{\Bbbk} T_{q^{-1}}$-comódulo a izquierda sobre el producto cotensorial está dada por

$$l \otimes k \mapsto \pi(l_{-1}) \otimes \pi(k_{-1}) \otimes l_0 \otimes k_0, \quad l \otimes k \in \mathcal{A}_{\mu',\xi'} \square_{T_q} \mathcal{A}_{\mu,\xi}, \tag{31}$$

donde π es la proyección en el primer tensor.

Sea

$$\gamma : \mathcal{A}_{\xi^n \mu' + \mu, \xi' \xi} \to \mathcal{A}_{\mu',\xi'} \square_{T_q} \mathcal{A}_{\mu,\xi}$$

el morfismo de álgebras determinado por

$$\gamma(w) = \xi \, w \otimes 1 + e_{(g,g)} \otimes w, \quad \gamma(e_f) = e_f \otimes e_f, \quad f \in \operatorname{diag}(G).$$

Notar que estamos abusando de la notación al denotar con el mismo nombre a los generadores de las álgebras $\mathcal{A}_{\mu,\xi}, \mathcal{A}_{\mu',\xi'}$ y $\mathcal{A}_{\xi^n \mu' + \mu, \xi' \xi}$.

γ está bien definida ya que $\gamma(w^n) = (\xi^n \mu' + \mu) \, 1$, $\gamma(e_{(g,g)} w) = q \, \gamma(w e_{(g,g)})$. Además la imagen de γ está contenida en $\mathcal{A}_{\mu',\xi'} \square_{T_q} \mathcal{A}_{\mu,\xi}$ y γ es un morfismo inyectivo de comódulos.

Para probar que γ es biyectiva, veremos que tienen las mismas dimensiones como espacios vectoriales. Como T_q tiene dimensión finita, por el Teorema 3.3, $\mathcal{A}_{\mu,\xi} \simeq T_q$ como T_q-comódulo a izquierda y a derecha. Por tanto, existen isomorfirmos lineales

$$\mathcal{A}_{\mu',\xi'} \square_{T_q} \mathcal{A}_{\mu,\xi} \simeq T_q \square_{T_q} T_q \simeq T_q.$$

Así $\dim(\mathcal{A}_{\mu',\xi'} \square_{T_q} \mathcal{A}_{\mu,\xi}) = \dim(\mathcal{A}_{\xi^n \mu' + \mu, \xi' \xi})$. $\square$

Como consecuencia de este Teorema existe un isomorfismo de grupos $\Bbbk^\times \ltimes \Bbbk^+ \to \operatorname{BiGal}(T_q)$ dado por $(\xi, \mu) \mapsto [\mathcal{L}(\phi^{-1}(\xi, \mu))]$.

COROLARIO 3.6. [**FMM**, Corolario 5.23] *Existe un homomorfismo inyectivo de grupos* $\alpha : \Bbbk^\times \ltimes \Bbbk^+ \to BrPic(Rep(T_q))$ *dado por*

$$\alpha(\xi, \mu) = [{}_{\mathcal{L}(\phi^{-1}(\xi,\mu))}\mathcal{M}], \quad (\xi, \mu) \in \Bbbk^\times \ltimes \Bbbk^+.$$

$\square$

Capítulo 7

Bicategorías

Introducimos el concepto de Bicategoría y daremos algunos ejemplos. En términos generales una bicategoría es una categoría donde $\mathrm{Hom}(A,B)$ no es solamente un conjunto sino una categoría. Esta noción, un poco tosca en una primera revisión, nos proporciona el caldo de cultivo para dar ejemplos de categorías tensoriales que son extensiones de categorías conocidas.

Las últimas tres secciones están dedicadas al estudio riguroso de 3 ejemplos de bicategorías esenciales en este trabajo. La primera es aquella que codifica toda la información de una categoría monoidal, la segunda codifica una categoría módulo y la tercera permite reconstruir una categoría monoidal a partir de su bicategoría de representaciones y cierto pseudo-funtor.

1. Nociones de bicategorías

En esta sección se busca dar definiciones básicas y ejemplos de bicategorías, para más detalle ver [**B**].

Definición 1.1. Una *bicategoría* $\mathfrak{B}$ consiste de los siguientes datos

- Un conjunto de objetos $\mathrm{obj}(\mathfrak{B})$ llamados 0-celdas.
- Para cada dupla $A,B \in \mathrm{obj}(\mathfrak{B})$ una categoría $\mathfrak{B}(A,B)$ donde sus objetos son llamados 1-celdas y sus morfismos 2-celdas, y se denotan por $\Rightarrow$ y $\Rrightarrow$ respectivamente.
- Para cada tripla $A,B,C \in \mathrm{obj}(\mathfrak{B})$ un bifuntor

$$\overline{\circ}^{ABC} : \mathfrak{B}(A,B) \times \mathfrak{B}(B,C) \to \mathfrak{B}(A,C).$$

- Para cada 0-celda A una 1-celda $I_A \in \mathfrak{B}(A,A)$.
- Para cada cuádrupla $A,B,C,D \in \mathrm{obj}(\mathfrak{B})$ un isomorfismo natural (llamado asociatividad)

$$\alpha^{ABCD} : \overline{\circ}^{ACD}(\overline{\circ}^{ABC} \times \mathrm{Id}) \to \overline{\circ}^{ABD}(\mathrm{Id} \times \overline{\circ}^{BCD}),$$

  donde Id es el funtor identidad.
- Para cada dupla $A,B \in \mathrm{obj}(\mathfrak{B})$ unos isomorfismos naturales

$$\mathfrak{l}^{AB} : \overline{\circ}^{AAB}(I_A \times \mathrm{Id}) \to \mathrm{Id}, \qquad \mathfrak{r}^{AB} : \overline{\circ}^{ABB}(\mathrm{Id} \times I_B) \to \mathrm{Id}.$$

Sujetos a los siguientes axiomas: Si A, B, C, D, E son 0-celdas y

- Si (S, T, U, V) es un objeto de la categoría $\mathfrak{B}(A,B)\times\mathfrak{B}(B,C)\times\mathfrak{B}(C,D)\times\mathfrak{B}(D,E)$ entonces
$$(\alpha^{ABCD}_{STU}\bar{\circ}\mathrm{id})(\alpha^{ABDE}_{S,T\bar{\circ}U,V})(\mathrm{id}\bar{\circ}\alpha^{BCDE}_{TUV}) = (\alpha^{ACDE}_{S\bar{\circ}T,U,V})(\alpha^{ABCE}_{S,T,U\bar{\circ}V}),$$
- Si (S,T) es un objeto de $\mathfrak{B}(A,B)\times\mathfrak{B}(B,C)$, entonces
$$(\mathrm{id}\bar{\circ}\mathfrak{l}(T))\alpha^{ABBC}_{SI_BT} = \mathfrak{r}(S)\bar{\circ}\mathrm{id}.$$

Si $\alpha, \mathfrak{l}, \mathfrak{r}$ son identidades, entonces $\mathfrak{B}$ se llama una *2-categoría.*

A continuación daremos algunos ejemplos para entender mejor el concepto de bicategoría.

1.1. Ejemplos.

- Sea $\mathfrak{A}$ la 2-categoría de anillos con unidad: las 0-celdas son anillos con unidad; si $A, B, C, D \in \mathrm{obj}(\mathfrak{A})$ definir $\mathfrak{A}(A,B)$ como la categoría de (A,B)-bimódulos, $\bar{\circ}^{ABC} := \otimes_B$, $I_A := A$ y $\alpha_{ABCD} := \mathrm{id}$.

- Sea Cat la 2-categoría de todas las categorías: las 0-celdas son categorías; si $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathrm{obj}(\mathrm{Cat})$ definir $\mathrm{Cat}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ como la categoría de funtores de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$ (luego las 2-celdas son transformaciones naturales), $\bar{\circ}$ es la composición de funtores y transformaciones, $I_{\mathcal{C}} := \mathcal{C}$ y $\alpha := \mathrm{id}$.

- Sea $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1})$ una categoría monoidal, definir la 2-categoría ${}_{\mathcal{C}}\,\mathrm{Mod}$ de $\mathcal{C}$-módulos a izquierda (derecha): las 0-celdas son las categorías $\mathcal{C}$-módulo, las 1-celdas son los funtores de $\mathcal{C}$-módulos, las 2-celdas son las transformaciones naturales de $\mathcal{C}$-módulos, $\bar{\circ}$ la composición de funtores y transformaciones naturales, $\alpha := \mathrm{id}$ y $\mathfrak{l} := \mathrm{id} =: \mathfrak{r}$.

- Sea $\mathcal{C}$ una categoría monoidal, definir la 2-categoría $\mathcal{M}'(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$-módulos a izquierda donde la categoría subyacente es aditiva $\Bbbk$-lineal (no necesariamente Abeliana).

- Definir la 2-categoría $\mathfrak{A}(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$-álgebras: las 0-celdas son álgebras en $\mathcal{C}$; si A, B, C y D son álgebras en $\mathcal{C}$ definir $\mathfrak{A}(\mathcal{C})(A,B)$ la categoría de morfismos de álgebras de A en B:

  Si $f, g : A \Rightarrow B$ son morfismos de álgebras, definir las 2-celdas $R : f \Rrightarrow g$ como las funciones $R : 1 \to B$ tales que
$$m_B \circ (R\otimes f) = m_B \circ (g\otimes R),$$
  donde m_B es el producto de B. En $\mathfrak{A}(\mathcal{C})(A,B)$ la composición en 1-celdas es la composición de $\mathcal{C}$ y en 2-celdas está dada por:

Sean $R : f \Rrightarrow g$ y $T : g \Rrightarrow h$ 2-celdas, definir $T \cdot R = m_B(R \otimes T)$; y está bien definida:

$$\begin{aligned} m_B((T \cdot R) \otimes f) &= m_B(m_B(R \otimes T) \otimes f) = m_B(R \otimes m_B(T \otimes f)) \\ &= m_B(R \otimes m_B(g \otimes T)) = m_B(m_B(R \otimes g) \otimes T) \\ &= m_B(m_B(h \otimes R) \otimes T) = m_B(h \otimes (T \cdot R)). \end{aligned}$$

Ahora definamos $\overline{\circ}$: en las 1-celdas es la composición de $\mathcal{C}$; si $R : f \Rrightarrow g$, con $f, g : A \Rightarrow B$ y $T : f' \Rrightarrow g'$ con $f', g' : B \Rightarrow C$ son 2-celdas, definir $R \overline{\circ} T = m_C(T \otimes f'R)$ y está bien definida:

$$\begin{aligned} m(R \overline{\circ} T \otimes f'f) &= m(m(T \otimes f'R) \otimes f'f) = m(T \otimes m(f'R \otimes f'f)) \\ &= m(T \otimes f'm(R \otimes f)) = m(T \otimes f'm(g \otimes R)) \\ &= m(T \otimes m(f'g \otimes f'R)) = m(m(T \otimes f'g) \otimes f'R) \\ &= m(m(T \otimes f')g \otimes f'R) = m(m(g' \otimes T)g \otimes f'R) \\ &= m(m(g'g \otimes T) \otimes f'R) = m(g'g \otimes m(T \otimes f'R)) \\ &= m(g'g \otimes R \overline{\circ} T). \end{aligned}$$

Si consideramos $S : f'' \Rrightarrow g''$ con $f'', g'' : C \Rightarrow D$ otra 2-celda, se satisface:

$$\begin{aligned} (R \overline{\circ} T) \overline{\circ} S &= m_C(T \otimes f'R) \overline{\circ} S = m_D(S \otimes f'' m_C(T \otimes f'R)) \\ &= m_D[S \otimes m_D(f''T \otimes f''f'R)] = m_D[m_D(S \otimes f''T) \otimes f''f'R] \\ &= R \overline{\circ} m_C(S \otimes f''T) = R \overline{\circ} (T \overline{\circ} S). \end{aligned}$$

Finalmente tomar $\alpha := \mathrm{id}$ y se obtiene que $\mathfrak{A}(\mathcal{C})$ es una 2-categoría.

- Si $\mathfrak{B}$ es una bicategoría existen tres tipos de simetría:

  I) La conjugada $\mathfrak{B}^c$ donde las 0-celdas son las de $\mathfrak{B}$, la categoría $\mathfrak{B}^c(A, B) := \mathfrak{B}(A, B)^{\mathrm{op}}$ es la categoría opuesta, $(\overline{\circ}^c)^{ABC} := (\overline{\circ}^{ABC})^{\mathrm{op}}$, $I^c_A := I_A$ y $\alpha^c_{ABCD} := \alpha^{-1}_{ABCD}$. Es decir, se invierte el orden de las 2-celdas.

  II) La transpuesta $\mathfrak{B}^t$ donde las 0-celdas son las de $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}^c(A, B) := \mathfrak{B}(B, A)$, $(\overline{\circ}^t)^{ABC} := \tau \overline{\circ}^{CBA}$, $I^t_A := I_A$ y $\alpha^t_{ABCD} := \alpha^{-1}_{DCBA}$ donde τ es el flip. Es decir, se invierte el orden de las 1-celdas.

  III) La simétrica $\mathfrak{B}^s := \mathfrak{B}^{ct}$.

- Sea $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, \mathfrak{l}, \mathfrak{r})$ una categoría monoidal; esta da lugar a una bicategoría $\underline{\mathcal{C}}$ con un único objeto, más especficamente:

obj($\underline{\mathcal{C}}$) := $\{0\}$, $\underline{\mathcal{C}}(0,0) := \mathcal{C}$, $\overline{\circ}^{000} := \otimes$, $I_0 := \mathbf{1}$, $\alpha^{0000} := a$, $\mathfrak{l}^{00} := \mathfrak{l}$ y $\mathfrak{r}^{00} := \mathfrak{r}$. Esta bicategoría codifica la estructura de la categoría monoidal. Su estudio será retomado más adelante.

Observación 1.2. Sea $\mathfrak{B}$ una bicategoría y A una 0-celda. Definir $\otimes := \overline{\circ}^{AAA}, \mathbf{1} := I_A, a := \alpha^{AAAA}$ esto determina sobre $\mathfrak{B}(A,A)$ una estructura de categoría monoidal llamada la *inducida de* $\mathfrak{B}$. Si $\mathfrak{B}$ es una 2-categoría , entonces la inducida es una categoría monoidal estricta. En particular si $\mathfrak{B} = Cat$ obtenemos la estructura multiplicativa de la categoría de endofuntores.

1.2. Pseudo-funtores, transformaciones pseudo-naturales y modificaciones. En más, sean $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$ bicategorías. Como es usual, es posible definir algún tipo de flecha entre estos nuevos objetos. En categorías se definen los funtores, luego no es sorprendente, definir entre bicategorías *pseudo-funtores*.

Definición 1.3. Un *pseudo-funtor* (Θ, θ) de $\mathfrak{B}$ en $\mathfrak{B}'$ consiste de los siguientes datos

- Una función $\Theta : \text{obj}(\mathfrak{B}) \to \text{obj}(\mathfrak{B}')$.
- Para cada dupla $A, B \in \text{obj}(\mathfrak{B})$ un funtor $\Theta_{AB} : \mathfrak{B}(A,B) \to \mathfrak{B}'(\Theta(A), \Theta(B))$.
- Para cada tripla $A, B, C \in \text{obj}(\mathfrak{B})$ un isomorfismo natural

$$\theta^{ABC} : \Theta_{AC}\overline{\circ}^{ABC} \to \overline{\circ}^{\Theta(A)\Theta(B)\Theta(C)}(\Theta_{AB} \times \Theta_{BC}),$$

Sujeto a los siguientes axiomas:

Si A, B, C, D son 0-celdas , entonces

- $\Theta_{AA}(I_A) = I'_{\Theta(A)}$.
- Si (S, T, U) es un objeto de $\mathfrak{B}(A,B) \times \mathfrak{B}(B,C) \times \mathfrak{B}(C,D)$:

$$(\theta^{ABC}\overline{\circ}\text{id})\theta^{ACD}\Theta_{AD}(\alpha^{ABCD}_{STU}) = \alpha'^{A'B'C'D'}_{S'T'U'}(\text{id}\overline{\circ}\theta^{BCD})\theta^{ABD}, \tag{32}$$

como funciones de

$$\Theta_{AD}(S\overline{\circ}(T\overline{\circ}U)) \to (\Theta_{AB}(S)\overline{\circ}\Theta_{BC}(T))\overline{\circ}\Theta_{CD}(U),$$

donde $\Theta(A) = A', \Theta(B) = B', \Theta(C) = C', \Theta(D) = D'$ y $\Theta_{AB}(S) = S'$, $\Theta_{BC}(T) = T', \Theta_{CD}(U) = U'$.

- Si S es un objeto de $\mathfrak{B}(A,B)$, entonces $\theta^{ABB}_{SI_B} = \text{id}_{\Theta_{AB}(S)}$ y $\theta^{AAB}_{I_AS} = \text{id}_{\Theta_{AB}(S)}$.

Un *op-pseudo-funtor* es aquel que reversa el orden en las 2-celdas.

Los pseudo-funtores se pueden componer de la siguiente forma: Sean $(\Theta, \theta) : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}'$ y $(\Pi, \pi) : \mathfrak{B}' \to \mathfrak{B}''$ pseudo-funtores. La composición en 0-celdas es $\Pi \circ \Theta$:obj($\mathfrak{B}$) $\to$obj($\mathfrak{B}''$). En 1-celdas y 2-celdas

$$(\Pi \circ \Theta)_{AB} = \Pi_{\Theta A, \Theta B} \circ \Theta_{AB} : \mathfrak{B}(A,B) \to \mathfrak{B}''(\Pi\Theta(A), \Pi\Theta(B)).$$

Además $(\pi \circ \theta)^{ABC}_{ST} = \pi^{\Theta A, \Theta B, \Theta C}_{\Theta S, \Theta T} \circ \Pi_{\Theta A, \Theta C}(\theta^{ABC}_{ST}) : (\Pi \circ \Theta)_{AC}(S \bar{\circ} T) \to \Pi\Theta_{AB}(S) \bar{\circ} \Pi\Theta_{BC}(T)$.

Ejemplo 1.4. 1) Sea $\mathcal{C}$ una categoría monoidal, definir $\mathcal{F} : \mathcal{M}(\mathcal{C}) \to$ Cat, el *pseudo-funtor de olvido*, el cual envía 0-celdas, 1-celdas y 2-celdas en la categoría, funtor y transformación natural subyacente respectivamente.

2) Definir el op-pseudo-funtor $\mathfrak{G} : \mathfrak{A}(\mathcal{C}) \to$ Cat, el cual envía una $\mathcal{C}$-álgebra A en la categoría de A-módulos y a un morfismo de álgebras $f : A \to B$ al funtor

$$
\begin{aligned}
&{}_f\mathcal{M} :_B \mathcal{M} \to_A \mathcal{M} \\
&{}_f\mathcal{M}(M, \mu) = (M, \mu(f \otimes \mathrm{id})).
\end{aligned}
$$

3) Sea $\mathfrak{B}$ una bicategoría, $\mathbb{I}_{\mathfrak{B}} : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ es el *pseudo-funtor identidad* donde $\mathbb{I}(B) = B$, $\mathbb{I}_{AB}(S) = S$ y $\mathbb{I}_{AB}(f) = f$ si A, B, C son 0-celdas, S 1-celda y f 2-celda.

Definición 1.5. Sean $(\Theta, \theta), (\Pi, \pi)$ pseudo-funtores entre las bicategorías $\mathfrak{B}_1$ y $\mathfrak{B}_2$. Una *transformación pseudo-natural* $\sigma : (\Theta, \theta) \to (\Pi, \pi)$ consiste de los siguientes datos:

- Para cada 0-celda A en $\mathfrak{B}_1$, una 1-celda $\sigma_A \in \mathfrak{B}_2(\Theta(A), \Pi(A))$.
- Para $A, B \in \mathrm{obj}(\mathfrak{B}_1)$ y cada 1-celda $V \in \mathfrak{B}_1(A, B)$ una transformación natural

$$\sigma_V : \bar{\circ}^{\Theta(A)\Theta(B)\Pi(B)}(\Theta_{AB}(V) \times \sigma_B) \to \bar{\circ}^{\Theta(A)\Pi(B)\Pi(B)}(\sigma_A \times \Pi_{AB}(V)).$$

Sujetos a los siguientes axiomas:
Si A, B, C son 0-celdas , entonces

- $\sigma_{I_A} = (\mathfrak{r}^{AA}_{\sigma_A})^{-1} \circ \mathfrak{l}^{AA}_{\sigma_A} : I_{\Theta(A)} \bar{\circ} \sigma_A = \Theta(I_A) \bar{\circ} \sigma_A \to \sigma_A \bar{\circ} \Pi(I_A) = \sigma_A \bar{\circ} I_{\Pi(A)}$.
- Si (S, T) es un objeto de $\mathfrak{B}(A, B) \times \mathfrak{B}(B, C)$, entonces (omitiendo asociatividades para hacer la notación más accesible)

$$(\mathrm{id} \bar{\circ} \pi^{ABC}) \sigma_{ST} = (\sigma_S \bar{\circ} \mathrm{id})(\mathrm{id} \bar{\circ} \sigma_T)(\theta^{ABC} \bar{\circ} \mathrm{id})$$

como funciones entre

$$\Theta^{AC}(ST) \bar{\circ} \sigma_C \to \sigma_A \bar{\circ} \Pi^{AB}(S)\Pi^{BC}(T).$$

Ejemplo 1.6. Sea (Θ, θ) un pseudo-funtor entre las bicategorías $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{B}'$, definir el isomorfismo pseudo-natural $\mathrm{Id} : (\Theta, \theta) \to (\Theta, \theta)$ donde si A, B son 0-celdas de $\mathfrak{B}$ y V una 1-celda en $\mathfrak{B}(A, B)$

- $\mathrm{Id}_A = I_{\Theta(A)} \in \mathfrak{B}'(\Theta(A), \Theta(A))$.
- $\mathrm{Id}_V = (\mathfrak{l}^{\Theta(A)\Theta(B)})^{-1} \circ \mathfrak{r}^{\Theta(A)\Theta(B)} : \Theta_{AB}(V) \bar{\circ} I_{\Theta(B)} \to I_{\Theta(A)} \bar{\circ} \Theta_{AB}(V)$.

Las transformaciones pseudo-naturales se pueden componer:

si $\sigma : (\Theta, \theta) \to (\Pi, \pi)$ y $\tau : (\Pi, \pi) \to (\Xi, \xi)$ son transformaciones pseudo-naturales, se define la transformación pseudo-natural $\sigma \overline{\circ} \tau : (\Theta, \theta) \to (\Xi, \xi)$ donde $(\sigma \overline{\circ} \tau)_A = \sigma_A \overline{\circ} \tau_A$ y

$$(\sigma \overline{\circ} \tau)_V = \alpha_{\sigma_B, \tau_B, \Xi(V)} (id \overline{\circ} \tau_V) \alpha^{-1}_{\sigma_B, \Pi(V), \tau_A} (\sigma_V \overline{\circ} id) \alpha_{\Theta(V), \sigma_A, \tau_A}.$$

Aquí A es una 0-celda y V una 1-celda.

Una transformación pseudo-natural $(\sigma_0, \sigma) : (\Theta, \theta) \to (\Pi, \pi)$ es *invertible* si existe $(\tau_0, \tau) : (\Pi, \pi) \to (\Theta, \theta)$ tal que $\sigma \overline{\circ} \tau = \mathrm{id} = \tau \overline{\circ} \sigma$. Una *equivalencia pseudo-natural* entre $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{B}'$ son dos pseudo-funtores $\mathbb{F} : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}'$ y $\mathbb{G} : \mathfrak{B}' \to \mathfrak{B}$ tal que existen transformaciones pseudo-naturales $\sigma : \mathbb{F} \circ \mathbb{G} \to \mathbb{I}_{\mathfrak{B}'}$ y $\sigma' : \mathbb{G} \circ \mathbb{F} \to \mathbb{I}_{\mathfrak{B}}$. En este caso se dice que las bicategorías $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{B}'$ son *equivalentes*.

Una *modificación* entre dos transformaciones pseudo-naturales $\Gamma : \sigma \to \widetilde{\sigma}$ consiste de 2-celdas $\Gamma_A : \sigma_A \to \widetilde{\sigma}_A$ tal que para toda 1-celda $V \in \mathfrak{B}(A, B)$ se satisface

$$(\Gamma_A \overline{\circ} \mathrm{id}) \sigma_V = \widetilde{\sigma}_V (\mathrm{id} \overline{\circ} \widetilde{\sigma}_B).$$

Observación 1.7. Dadas dos bicategorías $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$, podemos definir la 2-categoría $Pseudo(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}')$ donde las 0-celdas son los pseudo-funtores, las 1-celdas las transformaciones pseudo-naturales y las 2-celdas las modificaciones.

Más explícitamente, si $\mathfrak{B} = \mathcal{M}'(\mathcal{D}), \mathfrak{B}' = \mathcal{M}'(\mathcal{C})$, las bicategorías definidas en el Ejemplo 1.1(4), y $\Phi, \Psi : \mathcal{M}'(\mathcal{D}) \to \mathcal{M}'(\mathcal{C})$ son pseudo-funtores , entonces las 1-celdas son pares (b, β) donde si $f : M \to N$ en $\mathcal{M}'(\mathcal{D})$, entonces

$$b_M : \Phi(M) \to \Psi(M), \quad \beta_f : \Phi(f) \circ b_N \to b_M \circ \Psi(f),$$

son morfismos e isomorfismos naturales de $\mathcal{C}$-módulos, respectivamente. Las 2-celdas entre (b, β) y (a, α) están dadas por $\gamma_M : b_M \to a_M$ transformación natural de $\mathcal{C}$-módulos.

Se volverá en este ejemplo más adelante, en la Sección 4.

2. Bicategorías provenientes de categorías monoidales

Los resultados de este capítulo provienen de los trabajos [**FMM**], [**MM**]. En más sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías monoidales, recordar la bicategoría $\underline{\mathcal{C}}$ con un solo objeto, definida en el Ejemplo 1.1. En esta sección se analizará toda la estructura de tal bicategoría, daremos explícitamente los pseudo-funtores y transformaciones pseudo-naturales. Por un lado resulta un ejemplo práctico y fácil para entender este nuevo concepto;

y por otro lado da lugar a resultados muy interesantes en la teoría de módulos sobre categorías, como por ejemplo el Teorema 2.4.

El primer paso es analizar los pseudo-funtores $(\mathbb{F},\mathbf{f}) : \underline{\mathcal{C}} \to \underline{\mathcal{D}}$, obteniendo que no es más que un funtor monoidal entre las categorías monoidales $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$:

Proposición 2.1. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías monoidales. Existe una correspondencia biyectiva entre pseudo-funtores de $\underline{\mathcal{C}}$ en $\underline{\mathcal{D}}$, y funtores monoidales de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$.*

Demostración. Sea $(\mathbb{F},\mathbf{f}) : \underline{\mathcal{C}} \to \underline{\mathcal{D}}$ un pseudo-funtor. Tomando $F = \mathbb{F}_{00}$, $f = \mathbf{f}^{000}$ y $X, Y, Z \in \mathcal{C}$, entonces

$$\begin{aligned}(f_{Y,Z}\otimes id)f_{X,Y\otimes Z}F(a_{X,Y,Z}) &= (\mathbf{f}^{000}_{Y,Z}\otimes id)\mathbf{f}^{000}_{X,Y\otimes Z}\mathbb{F}_{00}(\alpha^{0000}_{X,Y,Z})\\ &= \alpha^{0000}_{\mathbb{F}_{00}(X),\mathbb{F}_{00}(Y),\mathbb{F}_{00}(Z)}(id\otimes \mathbf{f}^{000}_{X,Y})\mathbf{f}^{000}_{X\otimes Y,Z}\\ &= a_{F(X),F(Y),F(Z)}(id\otimes f_{X,Y})f_{X\otimes Y,Z};\end{aligned}$$

usando la Ecuación (32) en el segundo igual; por tanto $(F, f) : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un funtor monoidal. Recíprocamente, dado el funtor monoidal (F, f) definir $\mathbb{F} : \underline{\mathcal{C}} \to \underline{\mathcal{D}}$ vía $\mathbb{F}(0) = 0$, $\mathbb{F}_{00} = F$ y $\mathbf{f}^{000} = f$; y $(\mathbb{F},\mathbf{f})$ resulta un pseudo-funtor. $\square$

En más, asumir que $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ son categorías tensoriales estrictas. Sean $(F, \xi), (G, \zeta) : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores monoidales, una *transformación pseudo-natural* (entre las bicategorías $\underline{\mathcal{C}}$ y $\underline{\mathcal{D}}$) entre estos funtores es un par $(\eta_0, \eta) : (F, \xi) \to (G, \zeta)$ donde $\eta_0 \in \mathcal{D}$ es un objeto y para todo $X \in \mathcal{C}$ transformaciones naturales

$$\eta_X : F(X)\otimes\eta_0 \to \eta_0\otimes G(X),$$

tales que $\eta_{\mathbf{1}} = \mathrm{id}_{\eta_0}$ y para todo $X, Y \in \mathcal{C}$

$$(\mathrm{id}_{\eta_0}\otimes\zeta_{X,Y})\eta_{X\otimes Y} = (\eta_X\otimes\mathrm{id}_{G(Y)})(\mathrm{id}_{F(X)}\otimes\eta_Y)(\xi_{X,Y}\otimes\mathrm{id}_{\eta_0}). \tag{33}$$

Dadas dos transformaciones pseudo-naturales

$$(F, \xi) \xrightarrow{(\eta_0,\eta)} (G, \zeta) \xrightarrow{(\sigma_0,\sigma)} (H, \chi)$$

su composición está dada por

$$(\eta_0\otimes\sigma_0, (\mathrm{id}_{\eta_0}\otimes\sigma)(\eta\otimes\mathrm{id}_{\sigma_0})) : (F, \xi) \to (H, \chi), \tag{34}$$

y su producto tensorial esta dado por

$$(F(\sigma_0)\otimes\eta_0, (\mathrm{id}_{F(\sigma_0)}\otimes\eta_{H(-)})(\xi^{-1}_{\sigma_0,H(-)}\otimes\mathrm{id}_{\eta_0})(F(\sigma)\xi_{G(-),\sigma_0}\otimes\mathrm{id}_{\eta_0})). \tag{35}$$

Un par (η_0, η) es un *isomorfismo pseudo-natural* si existe otra transformación pseudo-natural (σ_0, σ) tal que

$$(\eta_0, \eta)(\sigma, \sigma_0) = (\mathbf{1}_{\mathcal{D}}, \mathrm{id}_F), \quad (\sigma_0, \sigma)(\eta_0, \eta) = (\mathbf{1}_{\mathcal{D}}, \mathrm{id}_G).$$

Consecuentemente, el objeto η_0 es invertible en $\mathcal{D}$, esto es, existe un objeto $\overline{\eta_0} \in \mathcal{D}$ tal que $\eta_0 \otimes \overline{\eta_0} = \mathbf{1}_{\mathcal{D}} = \overline{\eta_0} \otimes \eta_0$.

Si $(\eta_0, \eta), (\sigma_0, \sigma)$ son transformaciones pseudo-naturales, una *modificación* $\gamma : (\eta_0, \eta) \rightrightarrows (\sigma_0, \sigma)$ es un morfismo $\gamma \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\eta_0, \sigma_0)$ tal que para todo $V \in \mathcal{C}$

$$(\gamma \otimes \mathrm{id}_{G(V)})\eta_V = \sigma_V(\mathrm{id}_{F(V)} \otimes \gamma). \tag{36}$$

γ es una *modificación invertible* si existe otra modificación $\overline{\gamma}$ tal que $\gamma \circ \overline{\gamma} = \mathrm{id}_{\eta_0}$ y $\overline{\gamma} \circ \gamma = \mathrm{id}_{\sigma_0}$.

Queremos saber si existe alguna correspondencia entre transformaciones naturales monoidales y transformaciones pseudo-naturales.

PROPOSICIÓN 2.2. [**FMM**, Lema 3.1] *1) Toda transformación natural monoidal es una transformación pseudo-natural.*

2) Si $(\mathcal{D}, c)$ es una categoría monoidal trenzada estricta, existe una correspondencia biyectiva entre isomorfismos naturales monoidales e isomorfismos pseudo-naturales.

DEMOSTRACIÓN. 1) Sea $\tau : (F, f) \to (G, g)$ una transformación natural monoidal, donde $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ son funtores monoidales. Entonces $(\mathbf{1}_{\mathcal{D}}, \tau) : (F, f) \to (G, g)$ es una transformación pseudo-natural ya que $\tau_{\mathbf{1}_{\mathcal{C}}} = \mathrm{id}_{\mathbf{1}_{\mathcal{D}}}$ (la categoría es estricta) y para todo $S, T \in \mathcal{C}$

$$(\mathrm{id}_{\mathbf{1}_{\mathcal{D}}} \otimes g)\tau_{ST} = g \circ \tau_{ST} = (\tau_S \otimes \tau_T) f = (\tau_S \otimes \mathrm{id}_{F(T)})(\mathrm{id}_{F(S)} \otimes \tau_T)(f \otimes \mathrm{id}_{\mathbf{1}_{\mathcal{D}}}).$$

2) Recíprocamente, si $(\sigma_0, \sigma) : (F, f) \to (G, g)$ es un isomorfismo pseudo-natural, definir $\mu : (F, f) \to (G, g)$ como la composición para todo $X \in \mathcal{C}$

$$F(X) \xrightarrow{=} F(X) \otimes \sigma_0 \otimes \overline{\sigma_0} \xrightarrow{\sigma_X \otimes \mathrm{id}} \sigma_0 \otimes G(X) \otimes \overline{\sigma_0} \xrightarrow{c_{\sigma_0, G(X)} \otimes \mathrm{id}} G(X) \otimes \sigma_0 \otimes \overline{\sigma_0} \xrightarrow{=} G(X).$$

Aquí $\overline{\sigma_0}$ es el objeto inverso de σ_0. Se tiene que μ es una transformación natural. Veamos que es monoidal: (omitiendo algunos $\otimes$ en $\mathcal{C}$)

$$\begin{aligned}
g_{X,Y}\mu(XY) &= \big((g_{X,Y} \otimes \mathrm{id}_{\sigma_0})(c_{\sigma_0, G(XY)} \circ \sigma_{XY}) \otimes \mathrm{id}_{\overline{\sigma_0}}\big)\,(\mathrm{id}_{F(XY)} \otimes \sigma_0 \otimes \overline{\sigma_0}) \\
&= \big((\mathrm{id}_{G(X)} \otimes c_{\sigma_0, G(Y)})(c_{\sigma_0, G(X)} \otimes \mathrm{id}_{G(Y)})(\mathrm{id}_{\sigma_0} \otimes_{X,Y})\sigma_{XY} \otimes \mathrm{id}_{\overline{\sigma_0}}\big) \circ \\
&\quad (\mathrm{id}_{F(XY)} \otimes \sigma_0 \otimes \overline{\sigma_0}) \\
&= \Big((\mathrm{id}_{G(X)} \otimes \mathrm{id}_{\sigma_0 \otimes \overline{\sigma_0}} \otimes c_{\sigma_0, G(Y)})(c_{\sigma_0, G(X)} \otimes \mathrm{id}_{\overline{\sigma_0} \otimes \sigma_0} \otimes \mathrm{id}_{G(Y)})(\sigma_X \otimes \mathrm{id}_{\overline{\sigma_0} \otimes \sigma_0} \\
&\quad \otimes \mathrm{id}_{G(Y)})(\mathrm{id}_{F(X)} \otimes \sigma_0 \otimes \overline{\sigma_0} \otimes \sigma_Y)(\xi_{X,Y} \otimes \mathrm{id}_{\sigma_0}) \otimes \mathrm{id}_{\overline{\sigma_0}}\Big)(\mathrm{id}_{F(XY)} \otimes \sigma_0 \otimes \overline{\sigma_0}) \\
&= \Big(\big((c_{\eta_0, G(X)} \otimes \eta_X) \otimes \mathrm{id}_{\overline{\eta_0}}\big)\,(\mathrm{id}_{F(X)} \otimes \eta_0 \otimes \overline{\eta_0}) \otimes \big((c_{\eta_0, G(Y)} \circ \eta_Y) \otimes \mathrm{id}_{\overline{\eta_0}}\big) \\
&\quad (\mathrm{id}_{F(Y)} \otimes \eta_0 \otimes \overline{\eta_0})\Big) f_{X,Y} \\
&= (\mu(X) \otimes \mu(Y)) f_{X,Y},
\end{aligned}$$

para todo $X, Y \in \mathcal{C}$. La segunda igualdad se cumple por la naturalidad de la trenza y la tercera es debido a la Ecuación (33) y ya que $\eta_0 \otimes \overline{\eta_0} = \mathbf{1}$. □

Observación 2.3. En la anterior Proposición la categoría $\mathcal{D}$ no necesariamente debe ser trenzada. Observar que es suficiente que el objeto σ_0 esté equipado con una familia de isomorfismos naturales $c_{\eta_0,X} : \eta_0 \otimes X \to X \otimes \eta_0$ que satisfacen para todo $X, Y \in \mathcal{D}$

$$c_{\eta_0, X\otimes Y} = (X \otimes c_{\eta_0,Y})(c_{\eta_0,X} \otimes Y).$$

2.1. Transformaciones pseudo-naturales para Comod(H). Sean $\mathcal{C} = \mathcal{D} = \mathrm{Comod}(H)$ la categoría de corepresentaciones de H un álgebra de Hopf. Por la Proposición 1.7, todo funtor tensorial es de la forma $\mathcal{F}_A$ (funtor introducido en la Definición 1.5del Capítulo 5) para algún objeto (H, H)-biGalois.

La existencia de una transformación pseudo-natural entre $\mathcal{F}_A$ y $\mathcal{F}_B$ si A, B son objetos biGalois, por [**G**, Lema 6.1], implica que como Comod(H)-bimódulos son equivalentes

$$\mathrm{Comod}(H)^{\mathcal{F}_A} \simeq \mathrm{Comod}(H)^{\mathcal{F}_B},$$

donde el módulo $\mathrm{Comod}(H)^{\mathcal{F}_B}$ fue introducido en el Ejemplo 1.6. Luego una transformación pseudo-natural inmediatamente nos proporciona una equivalencia de bimódulos, permitiéndonos acercarnos cada vez más a la clasificación de tales objetos.

Sean H, L álgebras de Hopf, en [**S1**, Corolario 5.7] prueban que $A \simeq B$ como (H, L)-bicomódulos álgebras si y sólo sí existe un isomorfismo natural monoidal entre los funtores tensoriales $\mathcal{F}_A \to \mathcal{F}_B$. La relación de equivalencia sobre los objetos biGalois dada por el isomorfismo de comódulos álgebras da lugar a una relación sobre los endofuntores monoidales de Comod(H), la cual no es otra que ser isomorfos monoidal y naturalmente. Luego la nueva relación de equivalencia, denotada por $\sim$, da lugar a una nueva relación, que no es otra que ser isomorfos pseudo-naturalmente. Es decir obtenemos las clases de isomorfismos pseudo-naturales sobre el conjunto de endofuntores monoidales de Comod(H). Este hecho es demostrado en el siguiente Teorema.

El conocimiento de estas clases permitirá describir las extensiones de categorías que se expondrán más adelante.

Teorema 2.4. [**FMM**, Teorema 4.5] *Sean A, B objetos (H, H)-biGalois. Los siguientes enunciados son equivalentes.*

1. *$A \sim B$;*
2. *existe una equivalencia Comod(H)$^{\mathcal{F}_A} \simeq$ Comod(H)$^{\mathcal{F}_B}$ de categorías de Comod(H)-bimódulos;*

3. *existe una equivalencia* ${}_A\mathcal{M} \simeq {}_B\mathcal{M}$ *de categorías de* Rep(H)-*bimódulos;*
4. *existe un isomorfismo pseudo-natural* $(\eta, \eta_0) : \mathcal{F}_A \to \mathcal{F}_B$.

Demostración. La equivalencia entre (2) y (4) está dada en [**G**, Lema 6.1]. La equivalencia entre (2) y (3) se sigue de [**FMM**, Proposición 4.2]. Veamos que (1) es equivalente a (4).

Asumir que existe un elemento tipo-grupo $g \in G(H)$ y un isomorfismo de bicomódulos álgebras $f : A^g \to B$. Definir $\eta_0 := \Bbbk_g$ y para todo $X \in \mathrm{Comod}(H)$

$$\eta_X : \mathcal{F}_A(X) \otimes_\Bbbk \eta_0 \to \eta_0 \otimes_\Bbbk \mathcal{F}_B(X), \quad \eta_X(a \otimes x \otimes 1) = 1 \otimes f(a) \otimes x,$$

para todo $a \otimes x \in \mathcal{F}_A(X)$. Como f es un morfismo de H-comódulos a derecha la aplicación η_X está bien definida. Sean $X, Y \in \mathrm{Comod}(H)$, $a \otimes x \in \mathcal{F}_A(X)$, $b \otimes y \in \mathcal{F}_A(Y)$, entonces

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}_{\eta_0} \otimes_\Bbbk (\xi^B_{X,Y})^{-1})(\eta_X \otimes_\Bbbk \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes_\Bbbk \eta_Y)(a \otimes x \otimes b \otimes y \otimes 1) &= 1 \otimes f(a) f(b) \otimes x \otimes y \\ &= 1 \otimes f(ab) \otimes x \otimes y \\ &= \eta_{X \otimes_\Bbbk Y}((\xi^A_{X,Y})^{-1} \otimes_\Bbbk \mathrm{id}_{\eta_0})(a \otimes x \otimes b \otimes y \otimes 1).\end{aligned}$$

Así (33) se cumple y (η, η_0) es una transformación pseudo-natural.

Ahora, asumamos que existe un isomorfismo pseudo-natural $(\eta, \eta_0) : \mathcal{F}_A \to \mathcal{F}_B$. Como $\eta_0 \in \mathrm{Comod}(H)$ es un objeto invertible tiene dimensión uno. Por tanto, existe un elemento tipo-grupo $g \in G(H)$ tal que la coacción $\eta_0 \to H \otimes_\Bbbk \eta_0$ está dada por $1 \mapsto g \otimes 1$. Definir $f : A \to B$ como la composición

$$A \xrightarrow{\iota} A \otimes_\Bbbk \eta_0 \xrightarrow{\rho \otimes_\Bbbk \mathrm{id}} A \square_H H \otimes_\Bbbk \eta_0 \xrightarrow{\eta_H} \eta_0 \otimes_\Bbbk B \square_H H \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes_\Bbbk \epsilon} \eta_0 \otimes_\Bbbk B \xrightarrow{\pi} B.$$

Debemos ver que f es un morfismo de H-bicomódulos y de álgebras.

Afirmación 2.4.1. *$f : A \to B$ es un morfismo de álgebras.*

Demostración de la Afirmación. Es suficiente probar que η_H es un morfismo de álgebras. Observar que $A \square_H H$ es una subálgebra de $A \otimes_\Bbbk H$ y la estructura de álgebra sobre $A \square_H H \otimes_\Bbbk \eta_0$ es la del álgebra del producto tensorial. Denotar por

$$m_1 : \mathcal{F}_A(H) \otimes_\Bbbk \eta_0 \otimes_\Bbbk \mathcal{F}_A(H) \otimes_\Bbbk \eta_0 \to \mathcal{F}_A(H) \otimes_\Bbbk \eta_0,$$

$$m_2 : \eta_0 \otimes_\Bbbk \mathcal{F}_B(H) \otimes_\Bbbk \eta_0 \otimes_\Bbbk \mathcal{F}_B(H) \to \eta_0 \otimes_\Bbbk \mathcal{F}_B(H),$$

las estructuras de álgebra. Definir los isomorfismos

$$\gamma_0 : \eta_0 \otimes_{\Bbbk} \mathcal{F}_B(H) \otimes_{\Bbbk} \mathcal{F}_B(H) \to \eta_0 \otimes_{\Bbbk} \mathcal{F}_B(H) \otimes_{\Bbbk} \eta_0 \otimes_{\Bbbk} \mathcal{F}_B(H)$$
$$\gamma_0(1 \otimes a \otimes b) = 1 \otimes a \otimes 1 \otimes b,$$
$$\gamma_1 : \mathcal{F}_A(H) \otimes_{\Bbbk} \mathcal{F}_A(H) \otimes_{\Bbbk} \eta_0 \to \mathcal{F}_A(H) \otimes_{\Bbbk} \eta_0 \otimes_{\Bbbk} \mathcal{F}_A(H) \otimes_{\Bbbk} \eta_0$$
$$\gamma_1(x \otimes y \otimes 1) = x \otimes 1 \otimes y \otimes 1,$$
$$\gamma_2 : \mathcal{F}_A(H) \otimes_{\Bbbk} \eta_0 \otimes \mathcal{F}_B(H) \to \mathcal{F}_A(H) \otimes_{\Bbbk} \eta_0 \otimes_{\Bbbk} \eta_0 \otimes_{\Bbbk} \mathcal{F}_B(H)$$
$$\gamma_2(x \otimes 1 \otimes b) = x \otimes 1 \otimes 1 \otimes b,$$

para todo $a, b \in \mathcal{F}_B(H)$, $x, y \in \mathcal{F}_A(H)$. No es difícil probar que

$$(\mathrm{id}_{\mathcal{F}_A(H)} \otimes_{\Bbbk} \mathrm{id}_{\eta_0} \otimes_{\Bbbk} \eta_H)\gamma_1 = \gamma_2(\mathrm{id}_{\mathcal{F}_A(H)} \otimes_{\Bbbk} \eta_H), \tag{37}$$

$$(\eta_H \otimes_{\Bbbk} \mathrm{id}_{\eta_0} \otimes_{\Bbbk} \mathrm{id}_{\mathcal{F}_B(H)})\gamma_2 = \gamma_0(\eta_H \otimes_{\Bbbk} \mathrm{id}_{\mathcal{F}_B(H)}). \tag{38}$$

Denotar por $m : H \otimes_{\Bbbk} H \to H$ el producto de H. Como m es un morfismo en $\mathrm{Comod}(H)$, la naturalidad de η implica que

$$(\mathrm{id}_{\eta_0} \otimes_{\Bbbk} \mathcal{F}_B(m))\eta_{H \otimes_{\Bbbk} H} = \eta_H(\mathcal{F}_A(m) \otimes_{\Bbbk} \mathrm{id}_{\eta_0}).$$

Las siguientes igualdades son fácilmente verificables:

$$\mathcal{F}_A(m) \otimes_{\Bbbk} \mathrm{id}_{\eta_0} = m_1 \gamma_1(\xi^A_{H,H} \otimes_{\Bbbk} \mathrm{id}_{\eta_0}), \ \ \mathrm{id}_{\eta_0} \otimes_{\Bbbk} \mathcal{F}_B(m) = m_2 \gamma_0(\mathrm{id}_{\eta_0} \otimes_{\Bbbk} \xi^B_{H,H}). \tag{39}$$

Como η es pseudo-natural, entonces

$$(\eta_H \otimes_{\Bbbk} \mathrm{id}_{\mathcal{F}_B(H)})(\mathrm{id}_{\mathcal{F}_A(H)} \otimes_{\Bbbk} \eta_H)(\xi^A_{H,H} \otimes_{\Bbbk} \mathrm{id}_{\eta_0}) = (\mathrm{id}_{\eta_0} \otimes_{\Bbbk} \xi^B_{H,H})\eta_{H \otimes_{\Bbbk} H}. \tag{40}$$

Denotar por $\phi = \gamma_1(\xi^A_{H,H} \otimes_{\Bbbk} \mathrm{id}_{\eta_0})$ este isomorfismo. Tenemos que

$$\begin{aligned}(\eta_H \otimes_{\Bbbk} \eta_H)\phi &= (\eta_H \otimes_{\Bbbk} \mathrm{id}_{\eta_0 \otimes_{\Bbbk} \mathcal{F}_B(H)})(\mathrm{id}_{\mathcal{F}_A(H) \otimes_{\Bbbk} \eta_0} \otimes_{\Bbbk} \eta_H)\gamma_1(\xi^A_{H,H} \otimes_{\Bbbk} id_{\eta_0}) \\ &= (\eta_H \otimes_{\Bbbk} \mathrm{id}_{\eta_0 \otimes_{\Bbbk} \mathcal{F}_B(H)})(\gamma_2(\mathrm{id}_{\mathcal{F}_A(H)} \otimes_{\Bbbk} \eta_H))(\xi^A_{H,H} \otimes_{\Bbbk} \mathrm{id}_{\eta_0}) \\ &= \gamma_0(\eta_H \otimes_{\Bbbk} \mathrm{id}_{\mathcal{F}_B(H)})(\mathrm{id}_{F(H)} \otimes_{\Bbbk} \eta_H)(\xi^A_{H,H} \otimes_{\Bbbk} \mathrm{id}_{\eta_0}) \\ &= \gamma_0(id_{\eta_0} \otimes_{\Bbbk} \xi^B_{H,H})\eta_{H \otimes_{\Bbbk} H}.\end{aligned}$$

La segunda igualdad se sigue de (37), la tercera igualdad de (38) y la última igualdad sigue de (40). Ahora, tenemos que

$$\begin{aligned}\eta_H m_1 \phi &= \eta_H(\mathcal{F}_A(m) \otimes_{\Bbbk} \mathrm{id}_{\eta_0}) = (\mathrm{id}_{\eta_0} \otimes_{\Bbbk} \mathcal{F}_B(m))\eta_{H \otimes_{\Bbbk} H} \\ &= m_2 \gamma_0(\mathrm{id}_{\eta_0} \otimes_{\Bbbk} \xi^B_{H,H})\eta_{H \otimes_{\Bbbk} H} = m_2(\eta_H \otimes_{\Bbbk} \eta_H)\phi.\end{aligned}$$

La primera y tercera igualdad se sigue de (39). Por tanto $\eta_H m_1 = m_2(\eta_H \otimes_{\Bbbk} \eta_H)$ y η_H es un morfismo de álgebras. Que $\eta_H(1 \otimes 1 \otimes 1) = 1 \otimes 1 \otimes 1$ se sigue de la naturalidad de η (ya que $A \square_H \Bbbk = \Bbbk$, esto es $\eta_{\Bbbk} = \mathrm{id}_{\Bbbk}$). $\square$

Dado un espacio vectorial V, denotar por V^t al mismo espacio vectorial V con la H-coacción trivial a izquierda: $\lambda^t : V^t \to H\otimes_{\Bbbk}V^t$, $\lambda^t(v) = 1\otimes v$ para $v \in V$. Entonces $A\square_H V^t = V^t$ y η es aditiva, ya que para todo espacio vectorial V tenemos que $\eta_{V^t} = \mathrm{id}_V$.

Afirmación 2.4.2. *$f : A \to B$ es un morfismo de H-comódulos a derecha.*

Demostración de la Afirmación. Los espacios $A\square_H H\otimes_{\Bbbk}\eta_0$ y $\eta_0\otimes_{\Bbbk}B\square_H H$ tienen una estructura de H-comódulo a derecha como sigue:

$$\rho_1 : A\square_H H\otimes_{\Bbbk}\eta_0 \to A\square_H H\otimes_{\Bbbk}\eta_0\otimes_{\Bbbk}H, \quad \rho_2 : \eta_0\otimes_{\Bbbk}B\square_H H \to \eta_0\otimes_{\Bbbk}B\square_H H\otimes_{\Bbbk}H,$$
$$\rho_1(a\otimes h\otimes 1) = a\otimes h_{(1)}\otimes 1\otimes h_{(2)}, \qquad \rho_2(1\otimes b\otimes h) = 1\otimes b\otimes h_{(1)}\otimes h_{(2)},$$

si $a\otimes h \in A\square_H H$, $b\otimes h \in B\square_H H$. Con estas estructuras, los morfismos $\iota, \rho\otimes_{\Bbbk}\mathrm{id}, \mathrm{id}\otimes_{\Bbbk}\epsilon$ y π son morfismos de comódulos. Por tanto, es suficiente probar que η_H es un morfismo de H-comódulos a derecha. Primero notar que

$$\rho_1 = (\mathrm{id}\otimes_{\Bbbk}\eta_{H^t})(\xi^A_{H,H^t}\otimes_{\Bbbk}\mathrm{id}_{\eta_0})(\mathrm{id}\otimes_{\Bbbk}\Delta\otimes_{\Bbbk}\mathrm{id}),$$
$$\rho_2 = (\mathrm{id}_{\eta_0}\otimes_{\Bbbk}\xi^B_{H,H^t})(\mathrm{id}\otimes_{\Bbbk}\mathrm{id}\otimes_{\Bbbk}\Delta).$$

Tenemos

$$\begin{aligned}(\eta_H\otimes_{\Bbbk}\mathrm{id}_H)\rho_1 &= (\eta_H\otimes_{\Bbbk}\mathrm{id}_H)(\mathrm{id}\otimes_{\Bbbk}\eta_{H^t})(\xi^A_{H,H^t}\otimes_{\Bbbk}\mathrm{id}_{\eta_0})(\mathrm{id}\otimes_{\Bbbk}\Delta\otimes_{\Bbbk}\mathrm{id})\\ &= (\mathrm{id}_{\eta_0}\otimes_{\Bbbk}\xi^B_{H,H^t})\eta_{H\otimes_{\Bbbk}H^t}(\mathrm{id}\otimes_{\Bbbk}\Delta\otimes_{\Bbbk}\mathrm{id})\\ &= (\mathrm{id}_{\eta_0}\otimes_{\Bbbk}\xi^B_{H,H^t})(\mathrm{id}\otimes_{\Bbbk}\mathrm{id}\otimes_{\Bbbk}\Delta)\eta_H = \rho_2\eta_H.\end{aligned}$$

La segunda igualdad se sigue de (33), y la tercera se sigue de la naturalidad de η ya que $\Delta : H \to H\otimes_{\Bbbk}H^t$ es un morfismo de H-comódulos a izquierda. $\square$

Afirmación 2.4.3. *$f : A^g \to B$ es un morfismo de H-comódulos a izquierda.*

Demostración de la Afirmación. Si $\lambda : C \to H\otimes_{\Bbbk}C$ e un H-comódulo a izquierda y $g \in G(H)$, definir el H-comódulo a izquierda $C^{(g)}$ y ${}^{(g)}C$ como sigue: Como espacio vectorial $C^{(g)} = {}^{(g)}C = C$, las estructuras de comódulo a izquierda $\lambda^{(g)} : C^{(g)} \to H\otimes_{\Bbbk}C^{(g)}$, ${}^{(g)}\lambda : {}^{(g)}C \to H\otimes_{\Bbbk}{}^{(g)}C$ son definidas por

$$\lambda^{(g)}(c) = c_{(-1)}g\otimes c_{(0)}, \quad {}^{(g)}\lambda(c) = gc_{(-1)}\otimes c_{(0)}, \quad c \in C.$$

Notar que $f : A^g \to B$ es un morfismo de H-comódulos a izquierda si y sólo sí $f : A^{(g)} \to {}^{(g)}B$ es un morfismo de H-comódulos a izquierda. Es suficiente observar que $\iota : A^{(g)} \to A\otimes_{\Bbbk}\eta_0$ y $\pi : \eta_0\otimes_{\Bbbk}B \to {}^{(g)}B$ son morfismos de comódulos. $\square$

$\square$

Por último, las modificaciones invertibles vienen dadas por escalares no nulos.

COROLARIO 2.5. *Las modificaciones invertibles $\gamma : \sigma \to \tau$ provienen de escalares no nulos y si existen las transformaciones pseudo-naturales resultan iguales, esto es $\sigma = \tau$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\gamma : (\eta_0, \eta) \to (\eta_0', \eta')$ una modificación invertible. Por lo anterior las transformaciones pseudo-naturales son de la forma $(\Bbbk_g, \eta)$ para algún $g \in G(H)$. Luego si $g, h \in G(H)$, entonces $\gamma : \Bbbk_g \to \Bbbk_h \in {}^H\mathcal{M}$ y como ambos son espacios vectoriales de dimensión uno, se tiene que $\gamma \in \Bbbk^\times$.

Esto implica que $\delta_{\Bbbk_h}\gamma(1) = (\mathrm{id}\otimes_\Bbbk \gamma)\delta_{\Bbbk_g}(1)$, ya que γ es una modificación, es decir $g\otimes\gamma = h\otimes\gamma$ y $g = h$.

Así la modificación satisface $\gamma : (\Bbbk_g, \eta) \to (\Bbbk_g, \eta')$ y $\gamma\eta_V = \eta_V'\gamma$ viendo a $\gamma \in \Bbbk^\times$ por tanto $\eta_V = \eta_V'$, es decir las transformaciones pseudo-naturales resultan iguales. $\square$

3. Bicategorías provenientes de categorías módulos

Otro ejemplo de bicategoría proviene de considerar una categoría módulo. Sean $(\mathcal{C}, \otimes_\mathcal{C}, \mathbf{1}, a_\mathcal{C}, l_\mathcal{C}, r_\mathcal{C})$ una categoría monoidal y una categoría $(\mathcal{M}, m_\mathcal{M}, l_\mathcal{M}, r_\mathcal{M})$ $\mathcal{C}$-módulo a izquierda con acción dada por $\overline{\otimes} : \mathcal{C}\otimes\mathcal{M} \to \mathcal{M}$. Si $V \in \mathrm{obj}(\mathcal{M})$, considerar el isomorfismo $\iota : V\otimes\mathbf{1} \overset{\simeq}{\to} \mathbf{1}\otimes V$. Consideremos la siguiente bicategoría $\underline{\mathcal{M}}$:

- $\mathrm{obj}(\underline{\mathcal{M}}) = \{0, 1\}$.
- $\underline{\mathcal{M}}(0,1) = \mathcal{M}$, $\underline{\mathcal{M}}(1,0) = \emptyset$ la categoría vacía, $\underline{\mathcal{M}}(0,0) = \mathcal{C}$ y $\underline{\mathcal{M}}(1,1) = \mathbb{1}$ la categoría con un único elemento (un único morfismo), llamada categoría terminal.
- Para cada tripla $A, B, C \in \mathrm{obj}(\underline{\mathcal{M}})$, el bifuntor
$$\overline{\circ}^{ABC} = \begin{cases} \otimes_\mathcal{C} & A = B = C = 0, \\ \overline{\otimes} & A = B = 0, C = 1, \\ \mathrm{Id} & A = 0, B = C = 1 \text{ ó } A = B = C = 1. \end{cases}$$
En el resto de casos no está definido.
- $I_1 = 1 \in \mathbb{1}$ y $I_0 = 1_\mathcal{C}$.
- Para cada cuádrupla $A, B, C, D \in \mathrm{obj}(\underline{\mathcal{M}})$, el isomorfismo natural
$$\alpha^{ABCD} = \begin{cases} a_\mathcal{C} & A = B = C = D = 0, \\ m_\mathcal{M} & A = B = C = 0, D = 1, \\ \mathrm{id} & (A, B, C, D) \in \{(0,0,1,1), (0,1,1,1), (1,1,1,1)\}. \end{cases}$$
En el resto de casos no está definido.

Como antes, se busca saber cómo son los pseudo-funtores entre estas bicategorías.

PROPOSICIÓN 3.1. *Existe una correspondencia biyectiva entre funtores de $\mathcal{C}$-módulos de $\mathcal{M} \to \mathcal{N}$, y pseudo-funtores de $\underline{\mathcal{M}}$ en $\underline{\mathcal{N}}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $(F, f) : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ un funtor de $\mathcal{C}$-módulos, definir el siguiente pseudo-funtor $(\mathbb{F}, \mathbf{f}) : \underline{\mathcal{M}} \to \underline{\mathcal{N}}$:

- $\mathbb{F}(0) = 0$ y $\mathbb{F}(1) = 1$.
- Para cada dupla $A, B \in \text{obj}(\underline{\mathcal{M}})$, el funtor
$$\mathbb{F}_{AB} = \begin{cases} F & A = 0, B = 1, \\ Id & \text{en otro caso.} \end{cases}$$
- Para cada tripla $A, B, C \in \text{obj}(\underline{\mathcal{M}})$, el isomorfismo natural
$$\mathbf{f}^{ABC} = \begin{cases} f & A = B = 0, C = 1, \\ id & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Recíprocamente ,sea $(\Psi, \psi) : \underline{\mathcal{M}} \to \underline{\mathcal{N}}$ un pseudo-funtor. Asumir que $\Psi(0) = 0$ y $\Psi(1) = 1$. Sea $\Phi = \Psi_{01}$; luego, por definición es un funtor de categorías. Para $(X \times M) \in \mathcal{M} \times \mathcal{C}$ necesitamos ϕ_{XM} : $\Phi(X \otimes M) \xrightarrow{\cong} X \otimes \Phi(M)$.

Sabemos que $\psi_{I_A, S} = \Psi(S)$ si $S \in \underline{\mathcal{M}}(A, B)$. Si $A = B = 0$, tenemos que $\psi_{I_0, S} = \text{id}(S)$; luego, $\Psi_{00}(S) = S$. Así
$$\psi^{000}_{XM} : \Psi_{01}(X \cdot M) \overset{\rightarrow}{\cong} \Psi_{00}(X) \overline{\circ} \Psi_{00}(M) = X \overline{\circ} \Psi_{00}(M),$$
esto implica que si $\phi_{XM} = \psi^{000}_{XM}$, entonces $(\Phi, \phi) = (\Psi_{01}, \psi^{000})$ es un funtor de $\mathcal{C}$-módulos. $\square$

Ahora, analizaremos las transformaciones pseudo-naturales entre estas bicategorías. Sea $\sigma : (F, f) \to (G, g)$ transformación pseudo-natural con $F, G : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ funtores de $\mathcal{C}$-módulos. Luego

- Se tiene $\sigma_0 \in \mathcal{C}$ fijo y $\sigma_1 = 1 \in \mathbf{1}$,
- Si $A = B = 0$ y $V \in \mathcal{C}$, entonces $\sigma_V : V \otimes_{\mathcal{C}} \sigma_0 \to \sigma_0 \otimes_{\mathcal{C}} V$,
- Si $A = 0, B = 1$ y $X \in \mathcal{M}$, entonces $\sigma_X : (F(X) = F(X)\overline{\circ}1) \to \sigma_0 \cdot G(X)$,

Por tanto una *transformación pseudo-natural* es un tripla $(\sigma_0, \sigma, \overline{\sigma})$ donde $\sigma_0 \in \mathcal{C}$, $\{\sigma_V : V \otimes_{\mathcal{C}} \sigma_0 \to \sigma_0 \otimes_{\mathcal{C}} V | V \in \mathcal{C}\}$ y $\{\overline{\sigma}_M : F(M) \to \sigma_0 \overline{\otimes} G(M) | M \in \mathcal{M}\}$ familias de transformaciones naturales que satisfacen para $S, T \in \mathcal{C}, M \in \mathcal{M}$
$$(\sigma_{S \otimes T}) = (\sigma_S \otimes id_T)(id_S \otimes \sigma_T),$$
$$(id_{\sigma_0} \otimes g_{S,T}) \overline{\sigma}_{S \cdot M} = (\sigma_S \otimes id_{G(M)})(id_S \otimes \overline{\sigma}_M) f_{S,M}.$$

COROLARIO 3.2. *Toda transformación natural da lugar a una transformación pseudo-natural*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\lambda : F \to H$ una transformación natural con F, H funtores de $\mathcal{C}$-módulos de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$. Tomar $\sigma_0 = \mathbf{1} \in \mathcal{C}$, $\sigma_V = \mathrm{id}_V$ y $\overline{\sigma} = \lambda$. Luego la transformación pseudo-natural $\Lambda : F \to H$ es

- $\Lambda_0 = 1_{\mathcal{C}}$ y $\Lambda_1 = 1 \in \imath$.
- Para cada dupla $A, B \in \mathrm{obj}(\underline{\mathcal{M}})$ y cada 1-celda $V \in \mathcal{M}(A, B)$ un isomorfismo natural Λ_V que satisface $\Lambda_V = \iota$ si $A = B = 0$ y $\Lambda_V = \lambda$ si $A = 0, B = 1$.

$\square$

4. Bicategorías provenientes de pseudo-funtores

Como en categorías, es posible construir la categoría de funtores o endofuntores, acá en bicategorías es tambien posible realizar esto. Introducimos estas nuevas bicategorías con la intención de ambientar [**N**, Corolario 4.12], donde someramente se afirma que se puede reconstruir una categoría monoidal conociendo su bicategoría de representaciones y cierto pseudo-funtor.

También es posible, con este lenguaje, decir cuándo dos categorías son Morita equivalentes.

Sean $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{B}'$ dos bicategorías, definimos la *bicategoría de pseudo-funtores* $\underline{\mathcal{D}} = \lceil \mathfrak{B}, \mathfrak{B}' \rceil$ donde las 0-celdas son pseudo-funtores de $\mathfrak{B}$ en $\mathfrak{B}'$, las 1-celdas son transformaciones pseudo-naturales y las 2-celdas son modificaciones invertibles (Recordar la bicategoría definida en la Observación 1.7 donde las 2-celdas son modificaciones no necesariamente invertibles).

Más precisamente si F, G, H son pseudo-funtores

- La categoría $\underline{\mathcal{D}}(F, G)$ de equivalencias pseudo-naturales está definida así:

  Sean τ, σ, χ transformaciones pseudo-naturales, definir la composición de los objetos vía $\bullet : \mathrm{Hom}(\tau, \sigma) \times \mathrm{Hom}(\sigma, \chi) \to \mathrm{Hom}(\tau, \chi)$ tal que $(\Gamma \bullet \Gamma')_A = \Gamma'_A \Gamma_A$ la composición y satisface

$$\begin{aligned}
\chi_V(\mathrm{id}\overline{\circ}(\Gamma \bullet \Gamma')_B) &= \chi_V(\mathrm{id}\overline{\circ}\Gamma'_B)(\mathrm{id}\overline{\circ}\Gamma_B) \\
&= (\Gamma'_A\overline{\circ}\mathrm{id})(\Gamma_A\overline{\circ}\mathrm{id})\tau_V \\
&= ((\Gamma \bullet \Gamma')_A\overline{\circ}\mathrm{id})\tau_V,
\end{aligned}$$

  por tanto es una modificación invertible. Además si τ es una transformación pseudo-natural $(1_\tau)_A := \mathrm{id}_{\tau_A}$.

- Definir $\overline{\circ}^{FGH}:\underline{\mathcal{D}}(F,G)\times\underline{\mathcal{D}}(G,H)\to\underline{\mathcal{D}}(F,H)$ el bifuntor
$$(\sigma\overline{\circ}\tau)_V=\alpha_{\sigma_B,\tau_B,H(V)}(\mathrm{id}\overline{\circ}\tau_V)\alpha^{-1}_{\sigma_B,G(V),\tau_A}(\sigma_V\overline{\circ}\mathrm{id})\alpha_{F(V),\sigma_A,\tau_A}$$
en 1-celdas y en las 2-celdas vía $(\Gamma\overline{\circ}\Gamma')_A=\Gamma_A\overline{\circ}\Gamma'_A$ la 2-celda en $\underline{\mathcal{D}}$. No es difícil comprobar que es una modificación.
- Para cada 0-celda F definir una 1-celda $I_F:=Id_F\in\underline{\mathcal{D}}(F,F)$.
- Finalmente α viene dado por $\alpha_{\mathfrak{B}'}$ y satisface los axiomas ya que $\alpha_{\mathfrak{B}'}$ los s satisface.

Si consideramos las 1-celdas equivalencias pseudo-naturales, obtenemos también una bicategoría, la cual se denotará $[\mathfrak{B},\mathfrak{B}']$.

Definición 4.1. Si $\mathfrak{B}$ es una bicategoría, definir $\mathrm{Bieq}(\mathfrak{B})=[\mathfrak{B},\mathfrak{B}]$. Si $\mathfrak{B}=\underline{\mathcal{C}}$ es la bicategoría definida a partir de una categoría monoidal $\mathcal{C}$ (Ver Sección 2), denotar $\mathrm{Bieq}(\underline{\mathcal{C}})$=$\mathrm{Bieq}(\mathcal{C})$, entonces en $\mathrm{Bieq}(\mathcal{C})$ tenemos

- Las 0-celdas son endofuntores monoidales.
- Las 1-celdas son duplas $(\sigma_0,\sigma):(F,f)\to(G,g)$ si $(F,f),(G,g)$ endofuntores monoidales, donde $\sigma_0\in\mathcal{C}$ y un isomorfismo natural $\sigma_V:F(V)\otimes\sigma_0\to\sigma_0\otimes G(V)$ tal que $\sigma_{\mathbf{1}}=\mathrm{id}$ y $(g\otimes id)\sigma_{S\otimes T}=(\sigma_S\otimes\sigma_T)(id\otimes f)$.
- Las 2-celdas son morfismos invertibles $\Gamma_0:\sigma_0\to\widetilde{\sigma}_0$ en $\mathcal{C}$ tal que $(\Gamma_0\otimes\mathrm{id})\sigma_V=\widetilde{\sigma}_V(\mathrm{id}\otimes\Gamma_0)$.

Sobre $\mathrm{Bieq}(\mathcal{C})$ podemos definir el pseudo-funtor $\overline{\otimes}:\mathrm{Bieq}(\mathcal{C})\times\mathrm{Bieq}(\mathcal{C})\to\mathrm{Bieq}(\mathcal{C})$ dado por

*) En las 0-celdas es la composición de funtores monoidales;

*) Sean $(\theta_0,\theta):H\to H',(\theta'_0,\theta'):K\to K'$ 1-celdas, si (H,h), (H',h'), (K,k), (K',k') son endofuntores monoidales; definir el pseudo-funtor en las 1-celdas vía

$$(\theta'\overline{\otimes}\theta)_0=K(\theta_0)\otimes\theta'_0, \tag{41}$$
$$(\theta'\overline{\otimes}\theta)_V=(\mathrm{id}\otimes\theta'_{H'(V)})(k_{\theta_0,H'(V)}K(\theta_V)k^{-1}_{H(V),\theta_0}\otimes\mathrm{id}),\quad V\in\mathcal{C}, \tag{42}$$

asumiendo que $\mathcal{C}$ es estricta. En el caso que $\mathcal{C}$ no sea estricta, obtenemos
$$\begin{aligned}(\theta'\overline{\otimes}\theta)_V=&\,a_{K(\theta),\theta',K'H'(V)}(\mathrm{id}\otimes\theta'_{H'(V)})a^{-1}_{K(\theta),KH'(V),\theta'}\circ\\&(k_{\theta_0,H'(V)}K(\theta_V)k^{-1}_{H(V),\theta_0}\otimes\mathrm{id})a_{KH(V),K(\theta),\theta'}.\end{aligned}$$

*) En las 2-celdas $\Gamma_0\overline{\otimes}\Gamma'_0=K(\Gamma'_0)\otimes\Gamma_0$.

Observación 4.2. 1) $\mathrm{Bieq}(\mathcal{C})(\mathrm{Id},\mathrm{Id})$ es una categoría monoidal donde los objetos son las tranformaciones pseudo-naturales del funtor Id en sí mismo, y las flechas las modificaciones invertibles entre estas. El producto tensorial se define así $(\sigma_0,\sigma)\otimes(\tau_0,\tau) := (\sigma_0\otimes\tau_0, (\mathrm{id}\otimes\tau)(\sigma\otimes\mathrm{id}))$ con unidad $(\mathbf{1},\mathrm{id})$.

2) De igual modo $\mathrm{Pseudo}(\underline{\mathcal{C}},\underline{\mathcal{C}})(\mathrm{Id},\mathrm{Id}) := \widetilde{\mathcal{C}}$ es una categoría monoidal donde los objetos son las tranformaciones pseudo-naturales del funtor Id en sí mismo, y las flechas las modificaciones entre estas.

Usando teoría de bicategorías es posible reconstruir el centro de una categoría monoidal.

Proposición 4.3. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría monoidal, entonces $\widetilde{\mathcal{C}} \simeq Z(\mathcal{C})$ como categorías monoidales.*

Demostración. Por definición $\mathrm{Obj}(\widetilde{\mathcal{C}}) = \{(\sigma_0,\sigma)\}$ donde $\sigma_0 \in \mathcal{C}$ y σ es una transformación natural tal que $\sigma_V : V\otimes\sigma_0 \to \sigma_0\otimes V$ y $\sigma_{V\otimes T} = (\sigma_V\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\sigma_T)$.

Sea $F : \widetilde{\mathcal{C}} \to Z(\mathcal{C})$ donde $F(\sigma_0,\sigma) = (\sigma_0, c_{-,\sigma_0})$ y c_{-,σ_0} se define como σ; y $F(\Gamma_0) = \Gamma_0$ el funtor identidad el cual es una equivalencia de categorías.

El producto de $\widetilde{\mathcal{C}}$ está dado por

$$(\tau_0,\tau)\otimes(\sigma_0,\sigma) = (\sigma_0\otimes\tau_0, (\mathrm{id}\otimes\tau)(\sigma\otimes\mathrm{id})).$$

Sea $\xi_{\sigma,\sigma'} : (\sigma_0'\otimes\sigma_0, (\mathrm{id}\otimes\sigma)(\sigma'\otimes\mathrm{id})) \to (\sigma_0\otimes\sigma_0', (\mathrm{id}\otimes\sigma')(\sigma\otimes\mathrm{id}))$ en $Z(\mathcal{C})$ la trenza de dicha categoría, luego (F,ξ) define una equivalencia de categorías monoidales. $\square$

Más aún la subcategoría del $Z(\mathcal{C})$ en la que se consideran morfismos invertibles resulta isomorfa a $\mathrm{Bieq}(\mathcal{C})(\mathrm{Id},\mathrm{Id})$.

Usando la teoría de bicategorías, podemos reconstruir una categoría monoidal $\mathcal{C}$ a partir de sus representaciones y cierto pseudo-funtor. Recordar la bicategoría $\mathcal{M}'(\mathcal{C})$ dada en el Ejemplo 1.1(4).

Considerar el pseudo-funtor de olvido dado por $w : \mathcal{M}'(\mathcal{C}) \to \mathcal{M}'(\mathrm{vect}_{\Bbbk})$ donde $\mathrm{vect}_{\Bbbk}$ es la categoría de $\Bbbk$-espacios vectoriales de dimensión finita, el cual envía $\mathcal{C}$-módulos, funtores y transformaciones de $\mathcal{C}$-módulos en sus respectivas categoría aditiva, funtor o transformación subyacente.

Ahora, recordar la bicategoría $Pseudo(\mathcal{M}'(\mathcal{C}), \mathcal{M}'(\mathrm{vect}_{\Bbbk}))$ definida en la Observación 1.7. Por la Observación 1.2, $\mathrm{PsNat}(w,w) := Pseudo(\mathcal{M}'(\mathcal{C}), \mathcal{M}'(\mathrm{vect}))(w,w)$ tiene una estructura de categoría monoidal.

PROPOSICIÓN 4.4. [**N**, Corolario 4.12] *Sea $\mathcal{C}$ una categoría monoidal. Existe una equivalencia de categorías monoidales $\mathcal{C} \simeq PsNat(w, w)$.* □

Este resultado muestra cómo las categorías módulos son un invariante muy fuerte de las categorías monoidales. Con este mismo lenguaje de bicategorías es posible saber cuándo dos categorías tensoriales son Morita equivalentes.

TEOREMA 4.5. [**FMM**, Teorema 3.4] *Dos categorías finitas tensoriales $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son Morita equivalentes si y sólo sí existe una equivalencia pseudo-natural $(\mathcal{H}, \mathfrak{h}) : {}_{\mathcal{D}}\mathrm{Mod} \to {}_{\mathcal{C}}\mathrm{Mod}$.*

Acá ${}_{\mathcal{D}}\mathrm{Mod}$ es la bicategoría definida en el Ejemplo 1.1(3).

DEMOSTRACIÓN. Sea $(\mathcal{H}, \mathfrak{h}) : {}_{\mathcal{D}}\mathrm{Mod} \to {}_{\mathcal{C}}\mathrm{Mod}$ una equivalencia pseudo-natural. Si $\mathcal{N}, \mathcal{L}$ son 0-celdas en ${}_{\mathcal{D}}\mathrm{Mod}$ (es decir $\mathcal{D}$-módulos) tenemos la siguiente equivalencia funtorial

$$\mathcal{H}_{\mathcal{N},\mathcal{L}} : \mathrm{Fun}_{\mathcal{D}}(\mathcal{N}, \mathcal{L}) \to \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{H}(\mathcal{N}), \mathcal{H}(\mathcal{L}))$$

dotada de una estructura monoidal $\mathfrak{h}$ para la composición de 1-celdas.

Sean $\mathcal{N}, \mathcal{L}, \mathcal{P} \in {}_{\mathcal{D}}\mathrm{Mod}$, $\mathbb{F} : \mathcal{N} \to \mathcal{L}$ y $\mathbb{G} : \mathcal{L} \to \mathcal{P}$ dos 1-celdas. Existe un isomorfismo natural

$$\mathfrak{h}^{\mathcal{N},\mathcal{L},\mathcal{P}} : \mathcal{H}_{\mathcal{N},\mathcal{P}}(\mathbb{F} \bar{\circ} \mathbb{G}) \to \mathcal{H}_{\mathcal{N},\mathcal{L}}(\mathbb{F}) \bar{\circ} \mathcal{H}_{\mathcal{L},\mathcal{P}}(\mathbb{G}), \tag{43}$$

(usualmente escribimos estas composiciones con el orden invertido entre $\mathbb{F}$ y $\mathbb{G}$). Entonces

$$\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{H}(\mathcal{D})) = \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{H}(\mathcal{D}), \mathcal{H}(\mathcal{D})) \simeq \mathrm{Fun}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}, \mathcal{D}) \simeq \mathcal{D}$$

como categorías monoidales, por tanto $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son Morita equivalentes.

Por otro lado, sí $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son Morita equivalentes, por el Lema 2.6, existe un $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$-bimódulo invertible $\mathcal{M}$ el cual da lugar a la siguiente equivalencia pseudo-natural $(\mathcal{H}, \mathfrak{h}) : {}_{\mathcal{D}}\mathrm{Mod} \to {}_{\mathcal{C}}\mathrm{Mod}$,

- Sobre 0-celdas se define $\mathcal{H} = \mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{D}} - : {}_{\mathcal{D}}\mathrm{Mod} \to {}_{\mathcal{C}}\mathrm{Mod}$, esto es $\mathcal{H}(\mathcal{N}) = \mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{D}} \mathcal{N}$ sí $\mathcal{N} \in {}_{\mathcal{D}}\mathrm{Mod}$.
- Si $\mathcal{N}, \mathcal{L}$ son 0-celdas, definir el funtor

  $$\mathcal{H}_{\mathcal{N},\mathcal{L}} : \mathrm{Fun}_{\mathcal{D}}(\mathcal{N}, \mathcal{L}) \to \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{H}(\mathcal{N}), \mathcal{H}(\mathcal{L}))$$

  por $\mathcal{H}_{\mathcal{N},\mathcal{L}} = \mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{D}} -$, e.d. sí $\mathbb{F} : \mathcal{N} \to \mathcal{L}$ es un funtor de $\mathcal{D}$-módulos tenemos

  $$\mathcal{H}_{\mathcal{N},\mathcal{L}}(\mathbb{F}) = \mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{D}} \mathbb{F} : \mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{D}} \mathcal{N} \to \mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{D}} \mathcal{L},$$

  donde sí $M \in \mathcal{M}, N \in \mathcal{N}$, entonces

  $$(\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{D}} \mathbb{F})(M \boxtimes_{\mathcal{D}} N) = M \boxtimes_{\mathcal{D}} \mathbb{F}(N).$$

Además sí $\mathbb{F}$ es un funtor de $\mathcal{D}$-módulos a izquierda , entonces $\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{D}}\mathbb{F}$ es un funtor de $\mathcal{C}$-módulos a izquierda con el isomorfismo canónico

$$\begin{aligned}\tilde{c}_{Y,M\boxtimes_{\mathcal{D}}N} : (\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{D}}\mathbb{F})(Y\overline{\otimes}(M\boxtimes_{\mathcal{D}}N)) \to & Y\overline{\otimes}(\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{D}}\mathbb{F})(M\boxtimes_{\mathcal{D}}N) \\ &= Y\overline{\otimes}(M\boxtimes_{\mathcal{D}}\mathbb{F}(N))\end{aligned}$$

sí $Y \in \mathcal{C}$ y $M \in \mathcal{M}, N \in \mathcal{N}$. El objeto de salida de $\tilde{c}_{Y,M\boxtimes_{\mathcal{D}}N}$ es isomorfo a $(Y\overline{\otimes}M)\boxtimes_{\mathcal{D}}\mathbb{F}(N)$ [**FMM**, Observación 3.3], el cual es isomorfo al objeto de llegada.

- Si $\mathbb{F}, \mathbb{G} : \mathcal{N} \to \mathcal{L}$ son 1-celdas y $\alpha : \mathbb{F} \to \mathbb{G}$ es una 2-celda, definir $\mathcal{H}_{\mathcal{N},\mathcal{L}}(\alpha) = \mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{D}}\alpha : \mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{D}}\mathbb{F} \to \mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{D}}\mathbb{G}$ por:

  Observar que todo objeto en ${}_{\mathcal{C}}\,\mathrm{Mod}$ es isomorfo a $\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{D}}\mathcal{L}$ para algún $\mathcal{L} \in {}_{\mathcal{D}}\,\mathrm{Mod}$, ya que $\mathcal{H}$ es una biyección.

  Entonces es suficiente definir

$$(\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{D}}\alpha)(M\boxtimes_{\mathcal{D}}N) = M\boxtimes_{\mathcal{D}}\alpha(N) : M\boxtimes_{\mathcal{D}}\mathbb{F}(N) \to M\boxtimes_{\mathcal{D}}\mathbb{G}(N).$$

  Se sigue de [**FMM**, Observación 3.3], que la transformación natural $\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{D}}\alpha$ satisface la condición de compatibilidad

$$(Y\overline{\otimes}(\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{D}}\alpha)(M\boxtimes_{\mathcal{D}}N))\tilde{c}_{Y,M\boxtimes_{\mathcal{D}}N} = \tilde{d}_{Y,M\boxtimes_{\mathcal{D}}N}(\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{D}}\alpha)(Y\overline{\otimes}(M\boxtimes_{\mathcal{D}}N)),$$

  y también del hecho de que $\tilde{c}_{Y,M\boxtimes_{\mathcal{D}}N}$ y $\tilde{d}_{Y,M\boxtimes_{\mathcal{D}}N}$ son isomorfismos canónicos.

Observar que la estructura monoidal $\mathfrak{h}$ para la composición de 1-celdas (43) en este caso es un isomorfismo de

$$\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{D}}(\mathbb{F}\overline{\circ}\mathbb{G}) \to (\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{D}}\mathbb{F})\overline{\circ}(\mathcal{M}\boxtimes_{\mathcal{D}}\mathbb{G}).$$

Pero estos dos funtores son iguales, así podemos tomar $\mathfrak{h}^{\mathcal{N},\mathcal{L},\mathcal{P}}$ la identidad para $\mathcal{N}, \mathcal{L}, \mathcal{P} \in {}_{\mathcal{D}}\,\mathrm{Mod}$. Como $\mathcal{M}$ es invertible, el pseudo-funtor $(\mathcal{H}, \mathfrak{h})$ es una equivalencia. $\square$

Capítulo 8

Γ-extensiones para Comod(H)

Sea Γ un grupo finito. Un método para construir categorías tensoriales son las Γ-extensiones, estudiadas en [**ENO**]. Su clasificación depende fuertemente de la determinación del grupo de Brauer-Picard de la categoría inicial. Pero aún para ejemplos simples, este grupo es difícil de calcular. Esto hace que la determinación explícita de la Γ-extensión sea un problema complicado. Por tal razón, se considera una subfamilia de las Γ-extensiones, llamados *productos* Γ*-cruzados*.

La construcción de estos productos Γ-cruzados, se realiza mediante ciertos datos, llamados acciones coherentes externas. Las cuales en el caso Comod(H) son fácilmente descriptibles.

En [**G**] clasifican todos los productos Γ-cruzados de categorías tensoriales en lenguaje de bicategorías. Dicha clasificación es descrita en este capítulo, traducida en lenguaje de categorías. Finalmente, usando herramientas de bicategorías se describe una familia de Γ-extensiones de la categoría de corepresentaciones del álgebra de super-grupo, la cual es un álgebra de Hopf no semi-simple. Tal familia resulta finita, y por un cálculo directo de sus dimensiones de Frobenius-Perron se concluye que cada una de estas categorías es en efecto la categoría de representaciones de una quasi-álgebra de Hopf.

1. Producto Γ-cruzado

En más sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial estricta finita. La asumimos estricta para hacer la notación más accesible, pero casi todos los resultados son ciertos sin necesidad de que sea estricta. En esta sección recopilamos la información del trabajo [**G**], y la introducimos en lenguaje de categorías.

Definición 1.1. Un dato $((a_*, \xi^a), (U_{a,b}, \sigma^{a,b}), \gamma_{abc})_{a,b,c\in\Gamma}$ es un *sistema cruzado de* Γ *sobre* $\mathcal{C}$ sí para $X, Y \in \mathcal{C}$ y todo $a, b, c \in \Gamma$

- $(a_*, \xi^a) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ son autoequivalencias monoidales, con $\xi^a_{X,Y} : a_*(X\otimes Y) \to a_*(X)\otimes a_*(Y)$ la estructura monoidal;

- objetos $U_{a,b} \in \mathcal{C}$ e isomorfismos naturales

$$\sigma_X^{a,b} : a_*b_*(X) \otimes U_{a,b} \to U_{a,b} \otimes (ab)_*X;$$

- isomorfismos $\gamma_{a,b,c} : a_*(U_{b,c}) \otimes U_{a,bc} \to U_{a,b} \otimes U_{ab,c}$;

tales que

(44)
$$\sigma_{\mathbf{1}}^{a,b} = \mathrm{id}_{U_{a,b}},\ \ 1_* = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}},\ \ (U_{1,a}, \sigma^{1,a}) = (\mathbf{1}, \mathrm{id}_{a_*}) = (U_{a,1}, \sigma^{a,1}),\ \ a_*(\mathbf{1}) = \mathbf{1},$$

(45)
$$\gamma_{a,1,b} = \gamma_{1,a,b} = \gamma_{a,b,1} = \mathrm{id}_{U_{a,b}},$$

(46)
$$(\mathrm{id}_{U_{a,b}} \otimes \xi_{X,Y}^{ab}) \sigma_{X \otimes Y}^{a,b} =$$
$$(\sigma_X^{a,b} \otimes \mathrm{id}_{(ab)_*(Y)})(\mathrm{id}_{a_*b_*(X)} \otimes \sigma_Y^{a,b})(\xi^a_{b_*X, b_*Y} a_*(\xi^b_{X,Y}) \otimes \mathrm{id}_{U_{a,b}}),$$

(47)
$$(\gamma_{a,b,c} \otimes \mathrm{id}_{(abc)_*(X)})(\mathrm{id}_{a_*(U_{b,c})} \otimes \sigma_X^{a,bc})(\xi^a_{U_{b,c},(bc)_*(X)} \circ a_*(\sigma_X^{b,c}) \otimes \mathrm{id}_{U_{a,bc}}) =$$
$$= (\mathrm{id}_{U_{a,b}} \otimes \sigma_X^{ab,c})(\sigma_{c_*X}^{a,b} \otimes \mathrm{id}_{U_{ab,c}})(\mathrm{id}_{a_*b_*c_*(X)} \otimes \gamma_{a,b,c})(\xi^a_{b_*c_*(X),U_{bc}} \otimes \mathrm{id}_{U_{a,bc}}).$$

Observación 1.2. 1. La condición (46) implica que $(U_{a,b}, \sigma^{a,b})$ es un isomorfismo pseudo-natural en la bicategoría $\underline{\mathcal{C}}$ con un solo objeto. En particular el objeto $U_{a,b}$ es invertible en $\mathcal{C}$ con inverso $\overline{U_{a,b}}$, es decir $\overline{U_{a,b}} \otimes U_{a,b} = \mathbf{1}$.

2. La condición (47) implica que $\gamma_{a,b,c}$ es una modificación invertible en la misma bicategoría.

3. La condición (45) se pide ya que la categoría $\mathcal{C}$ es estricta.

Definición 1.3. Un sistema cruzado

$$\Sigma = ((a_*, \xi^a), (U_{a,b}, \sigma^{a,b}), \gamma_{a,b,c})_{a,b,c \in \Gamma}$$

es una Γ-*acción coherente externa sobre* $\mathcal{C}$ sí para todo $a, b, c, d \in \Gamma$

(48)
$$(\gamma_{a,b,c} \otimes \mathrm{id}_{U_{abc,d}})(\mathrm{id}_{a_*(U_{b,c})} \otimes \gamma_{a,bc,d})(\xi^a_{U_{bc},U_{bc,d}} a_*(\gamma_{b,c,d}) \otimes \mathrm{id}_{U_{a,bcd}}) =$$
$$(\mathrm{id}_{U_{a,b}} \otimes \gamma_{ab,c,d})(\sigma^{a,b}_{U_{cd}} \otimes \mathrm{id}_{U_{ab,cd}})(\mathrm{id}_{a_*b_*(U_{cd})} \otimes \gamma_{a,b,cd})(\xi^a_{b_*(U_{c,d}),U_{b,cd}} \otimes \mathrm{id}_{U_{a,bcd}}).$$

En este caso, se dice que Γ *actúa* sobre la categoría.

Si Γ actúa sobre $\mathcal{C}$ vía un sistema cruzado Σ, entonces el *producto* Γ-*cruzado*, introducido en [**G**], asociado a esta acción es $\mathcal{C}(\Sigma)$, donde

$$\mathcal{C}(\Sigma) = \oplus_{a \in \Gamma} \mathcal{C}_a$$

como categorías Abelianas y $\mathcal{C}_a = \mathcal{C}$ sí $a \in \Gamma$. Denotar por $[V, a]$ el objeto $V \in \mathcal{C}_a$. Los morfismos de $\oplus_{a\in\Gamma}[V_a, a]$ a $\oplus_{a\in\Gamma}[W_a, a]$ están dados por $\oplus_{a\in\Gamma}[f_a, a]$ donde $f_a : V_a \to W_a$ es un morfismo en $\mathcal{C}$ sí $a \in \Gamma$.

Es posible dotar de estructura de categoría tensorial a este producto Γ-cruzado.

TEOREMA 1.4. [**G**, Sección 3.3] *Sean $\mathcal{C}$ una categoría tensorial estricta finita y Γ un grupo finito. Considerar Σ una Γ-acción externa coherente sobre $\mathcal{C}$, luego $\mathcal{C}(\Sigma)$ es una categoría tensorial con producto tensorial $\otimes : \mathcal{C}(\Sigma) \times \mathcal{C}(\Sigma) \to \mathcal{C}(\Sigma)$ definido por*

$$[V,a]\otimes[W,b] = [V\otimes a_*(W)\otimes U_{a,b}, ab] \text{ en objetos,} \tag{49}$$

$$[f,a]\otimes[g,b] = [f\otimes a_*(g)\otimes id_{U_{a,b}}, ab] \text{ en morfismos,} \tag{50}$$

sí $a, b \in \Gamma$, con objeto unidad $[\mathbf{1}_{\mathcal{C}}, 1]$, y asociatividad dada por

$$\alpha_{[V,a][W,b][Z,c]} = (id_{V\otimes a_*W}\otimes\sigma_Z^{a,b}\otimes id_{U_{ab,c}})(id_{V\otimes a_*W\otimes a_*b_*Z}\otimes\gamma_{a,b,c})\circ \tag{51}$$
$$(id_{V\otimes a_*W}\otimes\xi^a_{b_*Z,U_{b,c}}\otimes id_{U_{a,bc}})(id_V\otimes\xi^a_{W,b_*Z\otimes U_{b,c}}\otimes id_{U_{a,bc}}).$$

Además $\mathfrak{l}_{[V,a]} = [\mathfrak{r}_V(\mathfrak{l}_V\otimes id_{\mathbf{1}}), a] = Id$ y $\mathfrak{r}_{[V,a]} = [\mathfrak{r}_V(\mathfrak{r}_V\otimes id_{\mathbf{1}}), a] = Id.$

Los objetos duales son dados por $([V,1])^* = [V^*,1]$ y $([\mathbf{1},a])^* = [\overline{U_{a,a^{-1}}}, a^{-1}]$.

DEMOSTRACIÓN. Denotar por $[V] := [V,1]$ y $[a] := [\mathbf{1}, a]$ sí $V \in \mathcal{C}$ y $a \in \Gamma$. Análogamente para las funciones. Si $A, B, C, D \in \mathcal{C}(\Sigma)$ denotar por $P(A,B,C,D)$ la ecuación

$$(\alpha_{A,B,C}\otimes\mathrm{id}_D)\alpha_{A,BC,D}(\mathrm{id}_A\otimes\alpha_{B,C,D}) = \alpha_{AB,C,D}\alpha_{A,B,CD}.$$

Entonces

- $P([a][V][W][Z])$ se satisface ya que (a_*, ξ^a) es un funtor monoidal,
- $P([a][b][W][Z])$ se satisface ya que $(U_{a,b}\sigma^{a,b})$ es una equivalencia pseudo-natural (Ecuación (46)),
- $P([a][b][c][Z])$ se satisface ya que $\gamma_{a,b,c}$ es una modificación invertible,
- $P([a][b][c][d])$ se satisface ya que Γ actúa sobre $\mathcal{C}$,
- el resto de las ecuaciones se satisfacen usando la definición de la asociatividad α y la Ecuación (45).

Los duales están bien definidos ya que $\gamma_{a,a^{-1},a} : a_*(U_{a^{-1},a}) \to U_{a,a^{-1}}$. Los morfismos de evaluación y coevaluación están dados por

$$\begin{aligned}
ev_{[V,1]} &= [ev_V, 1],\\
coev_{[V,1]} &= [coev_V, 1],\\
ev_{[\mathbf{1},a]} &= [\mathrm{id}_{\overline{U_{a,a^{-1}}}}\otimes((a^{-1})_*)^{-1}\gamma^{-1}_{a^{-1},a,a^{-1}}, 1],\\
coev_{[\mathbf{1},a]} &= [(\mathrm{id}\otimes(a_*)^{-1})\xi^a_{\overline{U_{a,a^{-1}}},U_{a,a^{-1}}}, 1],
\end{aligned}$$

y satisfacen sí $X=[V,1]$

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{r}_X(\mathrm{id}_X\cdot ev_X)\alpha^{-1}_{X,X^*,X}(coev_X\cdot\mathrm{id}_X)\mathfrak{l}^{-1}_X &= \mathfrak{r}_X(\mathrm{id}_X\cdot ev_X)(coev_X\cdot id_X)\mathfrak{l}^{-1}_X\\
&= [\mathfrak{r}_V(\mathfrak{r}_V\otimes\mathrm{id}_1)\circ\mathrm{id}_V\otimes ev_V\otimes\mathrm{id}_{1\otimes 1}\circ coev_V\otimes\mathrm{id}_{V\otimes 1}\circ(\mathfrak{l}^{-1}_V\otimes\mathrm{id}_1)\mathfrak{r}^{-1}_V,1]\\
&= [\mathfrak{r}_V\mathrm{id}_V\mathfrak{r}^{-1}_V,1]=\mathrm{id}_{[V,1]},
\end{aligned}
$$

$$\mathfrak{l}_{X^*}(ev_X\cdot\mathrm{id}_{X^*})\alpha_{X^*,X,X^*}(\mathrm{id}_{X^*}\cdot coev_X)\mathfrak{r}^{-1}_X=\mathrm{id}_{X^*}.$$

Las mismas ecuaciones se satisfacen si $X=[\mathbf{1},a]$. □

Más aún, por la definición de la asociatividad en esta categoría se tiene que

(52)
$$[\xi^a_{V,W},a]=\alpha_{[a],[V],[W]},\quad [\sigma^{a,b}V,ab]=\alpha_{[a],[b],[V]},\quad [\gamma_{a,b,c},abc]=\alpha_{[a],[b],[c]},$$

si $a,b,c\in\Gamma, V,W\in\mathcal{C}$.

El siguiente resultado explica cuándo para dos acciones coherentes externas Σ,Σ', las categorías tensoriales $\mathcal{C}(\Sigma),\mathcal{C}(\Sigma')$ son monoidalmente equivalentes.

Teorema 1.5. [**G**, Teorema 4.1] *Sean Σ,Σ' dos Γ-acciones coherentes externas sobre $\mathcal{C}$ donde $\Sigma=((a_*,\varrho^a),(U_{a,b},\sigma^{a,b}),\gamma_{a,b,c})_{a,b,c\in\Gamma}$, $\Sigma'=((a',\zeta^a),(U'_{a,b},\tau^{a,b}),\gamma'_{a,b,c})_{a,b,c\in\Gamma}$. Una equivalencia monoidal $F:\mathcal{C}(\Sigma)\to\mathcal{C}(\Sigma')$ viene de un dato $((H,\xi),f,(\theta_a,\beta^a),\chi_{a,b})_{a,b\in\Gamma}$ con:*

- *$(H,\xi):\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ es una equivalencia monoidal;*
- *$f:\Gamma\to\Gamma$ es un isomorfismo de grupos;*
- *si $a\in\Gamma$, el par $(\theta_a,\beta^a):H\circ a_*\to f(a)'\circ H$ es un isomorfismo pseudo-natural tal que $(\theta_1,\beta^1)=(\mathbf{1},id)$;*
- *$\chi_{a,b}:H(U_{a,b})\otimes\theta_{ab}\to\theta_a\otimes f(a)'(\theta_b)\otimes U'_{f(a),f(b)}$ es un morfismo invertible en $\mathcal{C}$ tal que $\chi_{a,1}=\chi_{1,a}=id_{\theta_a}$ y*

$$p_V(id_{H(a_*b_*(V))}\otimes\chi_{a,b})=(\chi_{a,b}\otimes id_{f(ab)'(H(V))})q_V,\quad V\in\mathcal{C}, \tag{53}$$

donde

$$
\begin{aligned}
p_V&=(id_{\theta_a}\otimes(id_{f(a)'(\theta_b)}\otimes\tau^{f(a),f(b)}_{H(V)})(s_V\otimes id_{U'_{f(a),f(b)}}))\circ\\
&\quad(\beta^a_{b_*(V)}\otimes id_{f(a)'(\theta_b)\otimes U'_{f(a),f(b)}}),\\
s_V&=\zeta^{f(a)}_{\theta_b,f(b)'(H(V))}\circ f(a)'(\beta^b)\circ(\zeta^{f(a)}_{H(b_*(V)),\theta_b})^{-1},\\
q_V&=(id_{H(U_{a,b})}\otimes\beta^{ab}_V)(\xi_{U_{a,b},(ab)_*(V)}\circ H(\sigma^{ab}_V)\circ(\xi_{a_*b_*(V),U_{ab}})^{-1}\otimes id_{\theta_{ab}}).
\end{aligned}
$$

Observación 1.6. 1) $\chi_{a,b}$ es una modificación invertible de

$$(H(U_{a,b})\otimes\theta_{ab},q)\to(\theta_a\otimes f(a)'(\theta_b)\otimes U'_{f(a),f(b)},p).$$

2) En [**G**] el autor define sistemas cruzados en términos de clases de equivalencia de funtores monoidales, salvo isomorfismos monoidales, y clases de equivalencia de isomorfismos pseudo-naturales, bajo modificaciones invertibles. El autor lo realiza de este modo, ya que él prueba que las clases de equivalencia de productos cruzados que son extensiones de una categoría tensorial $\mathcal{C}$ por el grupo Γ están clasificadas por sistemas cruzados. Como nosotros solo estamos interesados en dar ejemplos, nuestra definición de sistema cruzado es un representante del sistema cruzado definido en [**G**].

Demostración. Dado el dato $(H, f, (\theta_a, \beta^a), \chi_{a,b})$, definir el funtor monoidal $(F, \phi) : \mathcal{C}(\Sigma) \to \mathcal{C}(\Sigma')$ si $V, W \in \mathcal{C}, a, b \in \Gamma$ como

- $F([V, a]) := [H(V) \otimes \theta_a, f(a)]$,
- $F([t, a]) := [H(t) \otimes \mathrm{id}_{\theta_a}, f(a)]$ si $t : V \to W$ en $\mathcal{C}$,
- $\phi_{[V,a],[W,b]} := (\mathrm{id}_{H(V)\theta_a} \otimes \zeta^{f(a)}_{H(W),\theta_a} \otimes \mathrm{id}_{U'_{a,b}})(\mathrm{id}_{H(V)}\beta^a_W \otimes \mathrm{id}_{f(a)'(\theta_a)U'_{a,b}})$ $\circ(\xi_{V,a_*(W)} \otimes \tau_{a,b})(\xi_{V\otimes a_*(W),U_{a,b}} \otimes \mathrm{id}_{\theta_{a,b}})$.

Por un cálculo directo se tiene que F es monoidal ya que H lo es, y que ϕ es monoidal ya que ξ lo es y además (θ_a, β^a) es una transformación pseudo-natural y $\chi_{a,b}$ es una modificación. □

Más aún si $(F, \phi) : \mathcal{C}(\Sigma) \to \mathcal{C}(\Sigma')$ es una equivalencia monoidal que satisface $F([V, g]) = [H(V) \otimes \theta_g, f(g)]$, donde $(H, \xi) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es una equivalencia monoidal con $\xi_{V,W} = \phi_{[V,1],[W,1]}$, $\theta_g \in \mathcal{C}$ y $f : \Gamma \to \Gamma$ es un isomorfismo de grupos.

Proposición 1.7. *Definir para* $a, b \in \Gamma, V \in \mathcal{C}$

$$[\theta_a, f(a)] := F([\mathbf{1}, a]), \quad [\beta^a_V, f(a)] := \phi_{[\mathbf{1},a],[V,1]}, \quad [\chi_{a,b}, f(ab)] := \phi_{[\mathbf{1},a],[\mathbf{1},b]}.$$

Entonces (θ_a, β^a) *y* $\chi_{a,b}$ *resultan morfismos pseudo-naturales y modificaciones.*

Demostración. Veamos que (θ_a, β^a) es una transformación pseudo-natural:

$$\begin{aligned}
&[(\mathrm{id}_{\theta_a} \otimes \zeta^{f(a)}_{HV,HW} f(a)'(\xi_{V,W}))\beta^a_{V\otimes W}, f(a)] \\
&\qquad = \alpha'_{F[a],F[V],F[W]}(\mathrm{id}_{F[a]}\phi_{[V],[W]})\phi_{[a],[VW]} \\
&\qquad = (\phi_{[a],[V]}\mathrm{id}_{F[W]})\phi_{[a][V],[W]}F(\alpha_{[a],[V],[W]}) \\
&\qquad = (\phi_{[a_*V],[a]}\mathrm{id}_{F[W]})\phi_{[a_*V][a],[W]}F(\alpha_{[a_*V],[a],[W]}) \\
&\qquad = \alpha'_{F[a_*V],F[a],F[W]}(\mathrm{id}_{F[a_*V]} \otimes \phi_{[a],[W]})\phi_{[a_*V],[a][W]} \\
&\qquad = (\mathrm{id}_{F[a_*V]} \otimes \phi_{[a],[W]})\phi_{[a_*V],[a][W]} \\
&\qquad = (\phi_{[a],[V]}\mathrm{id}_{F[W]})(\mathrm{id}_{F[a_*V]} \otimes \phi_{[a],[W]})\phi_{[a_*V],[a][W]}F(\alpha_{[a_*V],[a],[W]}) \\
&\qquad = [(\beta^a_V \otimes \mathrm{id}_{f(a)'HW})(\mathrm{id}_{Ha_*V} \otimes \beta^a_W)(\xi_{a_*V,a_*W}H(\varrho_{V,W}) \otimes \mathrm{id}_{\theta_a}), f(a)].
\end{aligned}$$

El primer igual y el último son por definición; el segundo, el cuarto y el sexto se deben a que ϕ es monoidal, el tercero a que $[a][V]=[a_*V][a]$; y el quinto a que esa asociatividad es trivial, donde α es la asociatividad de $\mathcal{C}(\Sigma)$ y α' la de $\mathcal{C}(\Sigma')$.

Veamos que $\chi_{a,b}$ es una modificación:

$$
\begin{aligned}
&[p_V(\mathrm{id}_{Ha_*b_*V}\otimes\chi_{a,b}), f(ab)]\\
&\quad=[(\mathrm{id}_{\theta_a\otimes f(a)'\theta_b}\tau_{HV}^{f(a),f(b)})(\mathrm{id}_{\theta_a}\zeta^{f(a)}_{\theta_b,f(b)'HV}\mathrm{id}_{U'_{f(a),f(b)}})\\
&\qquad\circ(\mathrm{id}_{\theta_a}f(a)'\beta_V^b\mathrm{id}_{U'_{f(a),f(b)}})(\mathrm{id}_{\theta_a}(\zeta^{f(a)}_{Hb_*V,\theta_b})^{-1}\mathrm{id}_{U'_{f(a),f(b)}})\\
&\qquad\circ(\beta^a_{b_*V}\otimes\mathrm{id}_{f(a)'\theta_b\otimes U'_{f(a),f(b)}})(\mathrm{id}_{Ha_*b_*V}\otimes\chi_{a,b}), f(ab)]\\
&\quad=\alpha'_{(F[a])[\theta_b],[f(b)],F[V]}\alpha'_{(F[a]),[\theta_b],[f(b)](F[V])}\\
&\qquad\circ(\mathrm{id}_{F[a]}\phi_{[b],[V]})(\alpha'_{F[a],F[b_*V],F[b]})^{-1}\\
&\qquad\circ(\phi_{[a][b_*V]}\mathrm{id}_{F[b]})(\mathrm{id}_{F[a_*b_*V]}\phi_{[a],[b]})\\
&\quad=(\alpha'_{(F[a]),[\theta_b],[f(b)]}\mathrm{id}_{F[V]})\alpha'_{(F[a]),[\theta_b][f(b)],(F[V])}(\mathrm{id}_{F[a]}\alpha'_{[\theta_b],[f(b)],F[V]})\\
&\qquad\circ(\mathrm{id}_{F[a]}\phi_{[b],[V]})(\alpha'_{F[a],F[b_*V],F[b]})^{-1}(\phi_{[a][b_*V]}\mathrm{id}_{F[b]})(\mathrm{id}_{F[a_*b_*V]}\phi_{[a],[b]})\\
&\quad=\alpha'_{(F[a]),[\theta_b][f(b)],(F[V])}(\mathrm{id}_{F[a]}\phi_{[b],[V]})\\
&\qquad\circ(\alpha'_{F[a],F[b_*V],F[b]})^{-1}(\phi_{[a][b_*V]}\mathrm{id}_{F[b]})(\mathrm{id}_{F[a_*b_*V]}\phi_{[a],[b]})\\
&\quad=(\phi_{[a],[b]}\mathrm{id}_{F[V]})\phi_{[a][b],[V]}\circ F(\alpha_{[a],[b],[V]})\circ(\phi_{[a],[b][V]})^{-1}\\
&\qquad\circ(\alpha'_{F[a],F[b_*V],F[b]})^{-1}(\phi_{[a][b_*V]}\mathrm{id}_{F[b]})(\mathrm{id}_{F[a_*b_*V]}\phi_{[a],[b]})\\
&\quad=(\phi_{[a],[b]}\mathrm{id}_{F[V]})(\mathrm{id}_{F[U_{a,b}]}\phi_{[ab],[V]})\phi_{[U_{a,b}],[ab][V]}F(\alpha_{[a],[b],[V]})\\
&\qquad\circ(\phi_{[a],[b][V]})^{-1}(\alpha'_{F[a],F[b_*V],F[b]})^{-1}(\phi_{[a][b_*V]}\mathrm{id}_{F[b]})(\mathrm{id}_{F[a_*b_*V]}\phi_{[a],[b]})\\
&\quad=(\phi_{[a],[b]}\mathrm{id}_{F[V]})(\mathrm{id}_{F[U_{a,b}]}\phi_{[ab],[V]})\phi_{[U_{a,b}],[ab][V]}F(\alpha_{[a],[b],[V]})\\
&\qquad\circ F(\alpha_{[a_*b_*V],[a],[b]})^{-1}(\phi_{[a_*b_*V,a],[b]})^{-1}(\mathrm{id}_{F[a_*b_*V]}\phi_{[a],[b]})\\
&\quad=(\phi_{[a],[b]}\mathrm{id}_{F[V]})(\mathrm{id}_{F[U_{a,b}]}\phi_{[ab],[V]})\phi_{[U_{a,b}],[ab][V]}F(\alpha_{[a],[b],[V]})\\
&\qquad\circ(\phi_{[a_*b_*V],[U_{a,b},ab]})^{-1}\\
&\quad=[(\chi_{a,b}\mathrm{id}_{f(ab)'HV})(\mathrm{id}_{H(U_{a,b})}\beta_V^{ab})(\xi_{U_{a,b},(ab)_*V}\mathrm{id}_{\theta_{ab}})\\
&\qquad\circ(H(\sigma_V^{a,b})\mathrm{id}_{\theta_{ab}})((\xi_{a_*b_*V,U_{a,b}})^{-1}\mathrm{id}_{\theta_{ab}}), f(ab)]\\
&\quad=[(\chi_{a,b}\mathrm{id}_{f(ab)'HV})q_V, f(ab)],
\end{aligned}
$$

el primer igual es la definición de p; el segundo es por definición y usando el hecho de que $\alpha'_{F[a_*b_*V],F[a],F[b]}=\mathrm{id}=\alpha'_{[\theta_b],[f(b)],F[V]}$, $F[b_*V]F[b]=F([b][V])$, $F[b]=[\theta_b][f(b)]$; el tercero es el pentágono de la asociatividad α', el cuarto es debido a q esas asociatividades son triviales; el quinto, octavo y el sexto salen del hecho que ϕ es monoidal y $[a][b]=[U_{a,b}][ab]$,

$\alpha_{[U_{a,b}],[ab],[V]} = \mathrm{id} = \alpha'_{F[U_{a,b}],F[ab],F[V]}$ y $F[U_{a,b}]F[ab] = F([a][b])$; el séptimo se sigue de que ϕ es monoidal y $[a]([b][V]) = [a_*b_*V][U_{a,b}, ab]$, $F[b_*V]F[b] = F([b][V])$; y los dos últimos por definición. $\square$

A continuación se muestra una forma de dado un sistema cruzado construir otro tal que sus respectivas categorías cruzadas sean isomorfas.

Proposición 1.8. *Para todo $a \in \Gamma$, sean $(a_*, \xi^a), (a', \zeta^a) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ equivalencias monoidales y $\beta^a : a_* \to a'$ una equivalencia natural monoidal. Si $\Sigma = ((a_*, \xi^a), (U, \sigma), \gamma)$ es un sistema cruzado de Γ sobre $\mathcal{C}$, entonces $\Sigma' = ((a', \zeta^a), (U, \tau), \gamma')$ es un sistema cruzado de Γ sobre $\mathcal{C}$ donde*

- $\tau_V^{a,b} = (id_{U_{a,b}} \otimes \beta_V^{ab})\sigma_V^{a,b}((\beta^a_{b_*V})^{-1}a'(\beta_V^b)^{-1} \otimes id_{U_{a,b}})$,
- $\gamma'_{a,b,c} = ((\beta^a_{U_{b,c}})^{-1} \otimes id_{U_{a,bc}})\gamma_{a,b,c}$,

Además $\mathcal{C}(\Sigma) \simeq \mathcal{C}(\Sigma')$ si Σ es una Γ-acción externa coherente.

Demostración. Veamos que en efecto τ es una transformación pseudo-natural:

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{id}_{U_{a,b}}\zeta^{ab}_{V,W})\tau^{a,b}_{V,W} = (\mathrm{id}_{U_{a,b}}\zeta^{ab}_{V,W})(\mathrm{id}_{U_{a,b}}\beta^{ab}_{V\otimes W})\sigma^{a,b}_{V\otimes W}\\
&\quad\circ((\beta^a_{b_*(V\otimes W)})^{-1}\mathrm{id}_{U_{a,b}})(a'(\beta^b_{V\otimes W})^{-1}\mathrm{id}_{U_{a,b}})\\
&= (\mathrm{id}_{U_{a,b}}\beta^{ab}_V\beta^{ab}_W)(\mathrm{id}_{U_{a,b}}\xi^{ab}_{V,W})\sigma^{a,b}_{V\otimes W}((\beta^a_{b_*(V\otimes W)})^{-1}\mathrm{id}_{U_{a,b}})\\
&\quad\circ(a'(\beta^b_{V\otimes W})^{-1}\mathrm{id}_{U_{a,b}})\\
&= (\mathrm{id}_{U_{a,b}}\beta^{ab}_V)[(\sigma^{a,b}_V\mathrm{id}_{(ab)'W})(\mathrm{id}_{a_*b_*V\otimes U_{a,b}}\beta^{a,b}_W)((\sigma^{a,b}_V)^{-1}\mathrm{id}_{(ab)_*W})]\\
&\quad\circ(\mathrm{id}_{U_{a,b}}\xi^{ab}_{V,W})\sigma^{a,b}_{V\otimes W}((\beta^a_{b_*(V\otimes W)})^{-1}\mathrm{id}_{U_{a,b}})(a'(\beta^b_{V\otimes W})^{-1}\mathrm{id}_{U_{a,b}})\\
&= (\mathrm{id}_{U_{a,b}}\beta^{ab}_V)(\sigma^{a,b}_V\mathrm{id}_{(ab)'W})[((\beta^a_{b_*V})^{-1}\mathrm{id}_{U_{a,b}\otimes(ab)'W})(a'(\beta^b_V)^{-1}\mathrm{id}_{U_{a,b}\otimes(ab)'W})\\
&\quad\circ(\mathrm{id}_{a'b'V\otimes U_{a,b}}\beta^{ab}_W)(a'(\beta^b_V)\mathrm{id}_{U_{a,b}\otimes(ab)_*W})((\beta^a_{b_*V})\mathrm{id}_{U_{a,b}\otimes(ab)_*W})]\\
&\quad\circ((\sigma^{a,b}_V)^{-1}\mathrm{id}_{(ab)_*W})(\mathrm{id}_{U_{a,b}}\xi^{ab}_{V,W})\sigma^{a,b}_{V\otimes W}((\beta^a_{b_*(V\otimes W)})^{-1}\mathrm{id}_{U_{a,b}})\\
&\quad\circ(a'(\beta^b_{V\otimes W})^{-1}\mathrm{id}_{U_{a,b}})\\
&= (\tau^{a,b}_V\mathrm{id}_{(ab)'W})(\mathrm{id}_{a'b'V\otimes U_{a,b}}\beta^{ab}_W)[(\mathrm{id}_{a'b'V}\sigma^{a,b}_W)(a'(\beta^b_V)\mathrm{id}_{a_*b_*W\otimes U_{a,b}})\\
&\quad\circ(\beta^a_{b_*V}\mathrm{id}_{a_*b_*W\otimes U_{a,b}})(\mathrm{id}_{a_*b_*V}(\sigma^{a,b}_W)^{-1})]((\sigma^{a,b}_W)^{-1}\mathrm{id}_{(ab)_*V})(\mathrm{id}_{U_{a,b}}\xi^{ab}_{V,W})\\
&\quad\circ\sigma^{a,b}_{V\otimes W}((\beta^a_{b_*(V\otimes W)})^{-1}\mathrm{id}_{U_{a,b}})(a'(\beta^b_{V\otimes W})^{-1}\mathrm{id}_{U_{a,b}})\\
&= (\tau^{a,b}_V\mathrm{id}_{(ab)'W})(\mathrm{id}_{a'b'V\otimes U_{a,b}}\beta^{ab}_W)(\mathrm{id}_{a'b'V}\sigma^{a,b}_W)[(\mathrm{id}_{a'b'V}(\beta^a_{b_*W})^{-1}\mathrm{id}_{U_{a,b}})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\circ (\mathrm{id}_{a'b'V} a'(\beta^b_W)^{-1}\mathrm{id}_{U_{a,b}})(a'(\beta^b_V)a'(\beta^b_W)\mathrm{id}_{U_{a,b}})(\beta^a_{b_*V}\beta^a_{b_*W}\mathrm{id}_{U_{a,b}})] \\
&\circ (\mathrm{id}_{a_*b_*V}(\sigma^{a,b}_W)^{-1})((\sigma^{a,b}_V)^{-1}\mathrm{id}_{(ab)_*W})(\mathrm{id}_{U_{a,b}}\xi^{ab}_{V,W})\sigma^{a,b}_{V\otimes W} \\
&\circ ((\beta^a_{b_*(V\otimes W)})^{-1}\mathrm{id}_{U_{a,b}})(a'(\beta^b_{V\otimes W})^{-1}\mathrm{id}_{U_{a,b}}) \\
= {}& (\tau^{a,b}_V\mathrm{id}_{(ab)'W})(\mathrm{id}_{a'b'V\otimes U_{a,b}}\beta^{ab}_W)(\mathrm{id}_{a'b'V}\sigma^{a,b}_W)(\mathrm{id}_{a'b'V}(\beta^a_{b_*W})^{-1}\mathrm{id}_{U_{a,b}}) \\
&\circ (\mathrm{id}_{a'b'V} a'(\beta^b_W)^{-1}\mathrm{id}_{U_{a,b}})[((\zeta^a_{b'V,b'W})\mathrm{id}_{U_{a,b}})(a'(\zeta^b_{V,W})\mathrm{id}_{U_{a,b}}) \\
&\circ (a'(\beta^b_{V\otimes W})\mathrm{id}_{U_{a,b}})(a'(\xi^b_{V\otimes W})^{-1}\mathrm{id}_{U_{a,b}})((\zeta^a_{b_*V,b_*W})^{-1}\mathrm{id}_{U_{a,b}})] \\
&\circ (\beta^a_{b_*V}\beta^a_{b_*W}\mathrm{id}_{U_{a,b}})(\mathrm{id}_{a_*b_*V}(\sigma^{a,b}_W)^{-1})((\sigma^{a,b}_V)^{-1}\mathrm{id}_{(ab)_*W})(\mathrm{id}_{U_{a,b}}\xi^{ab}_{V,W}) \\
&\circ \sigma^{a,b}_{V\otimes W}((\beta^a_{b_*(V\otimes W)})^{-1}\mathrm{id}_{U_{a,b}})(a'(\beta^b_{V\otimes W})^{-1}\mathrm{id}_{U_{a,b}}) \\
= {}& (\tau^{a,b}_V\mathrm{id}_{(ab)'W})(\mathrm{id}_{a'b'V}\tau^{a,b}_W)((\zeta^a_{b'V,b'W})\mathrm{id}_{U_{a,b}})(a'(\zeta^b_{V,W})\mathrm{id}_{U_{a,b}}) \\
&\circ (a'(\beta^b_{V\otimes W})\mathrm{id}_{U_{a,b}})[(\beta^a_{b_*(V\otimes W)}\mathrm{id}_{U_{a,b}})(a_*(\xi^b_{V,W})^{-1}\mathrm{id}_{U_{a,b}}) \\
&\circ ((\xi^a_{b_*V,b_*W})^{-1}\mathrm{id}_{U_{a,b}})](\mathrm{id}_{a_*b_*V}(\sigma^{a,b}_W)^{-1})((\sigma^{a,b}_V)^{-1}\mathrm{id}_{(ab)_*W}) \\
&\circ (\mathrm{id}_{U_{a,b}}\xi^{ab}_{V,W})\sigma^{a,b}_{V\otimes W}((\beta^a_{b_*(V\otimes W)})^{-1}\mathrm{id}_{U_{a,b}})(a'(\beta^b_{V\otimes W})^{-1}\mathrm{id}_{U_{a,b}}) \\
= {}& (\tau^{a,b}_V\mathrm{id}_{(ab)'W})(\mathrm{id}_{a'b'V}\tau^{a,b}_W)((\zeta^a_{b'V,b'W})\mathrm{id}_{U_{a,b}})(a'(\zeta^b_{V,W})\mathrm{id}_{U_{a,b}}) \\
&\circ (a'(\beta^b_{V\otimes W})\mathrm{id}_{U_{a,b}})(\beta^a_{b_*(V\otimes W)}\mathrm{id}_{U_{a,b}})[(\sigma^{a,b}_{V\otimes W})^{-1}(\mathrm{id}_{U_{a,b}}(\xi^{ab}_{V,W})^{-1}) \\
&\circ (\sigma^{a,b}_V\mathrm{id}_{(ab)_*W})]((\sigma^{a,b}_V)^{-1}\mathrm{id}_{(ab)_*W})(\mathrm{id}_{U_{a,b}}\xi^{ab}_{V,W})\sigma^{a,b}_{V\otimes W} \\
&\circ ((\beta^a_{b_*(V\otimes W)})^{-1}\mathrm{id}_{U_{a,b}})(a'(\beta^b_{V\otimes W})^{-1}\mathrm{id}_{U_{a,b}}) \\
= {}& (\tau^{a,b}_V\mathrm{id}_{(ab)'W})(\mathrm{id}_{a'b'V}\tau^{a,b}_W)((\zeta^a_{b'V,b'W})\mathrm{id}_{U_{a,b}})(a'(\zeta^b_{V,W})\mathrm{id}_{U_{a,b}}).
\end{aligned}
$$

El primer igual, el quinto y el octavo son definición; el segundo se debe a que β es monoidal, el tercero y el sexto a que σ es natural, en el cuarto se compone con unas identidades, el séptimo se debe a la naturalidad de ζ, el noveno se debe a la naturalidad de β y ξ, el décimo a que σ es pseudo-natural.

De igual modo se prueba que γ' es una modificación. Además si Σ es una Γ-acción externa coherente, Σ' también lo es.

Por el Teorema 1.5, basta definir $H := \mathrm{Id}$, $\xi^H := \mathrm{id}$, $f := \mathrm{id}$, $\theta_a := \mathbf{1}$ y $\tau = \mathrm{id}$; obteniendo $\mathcal{C}(\Sigma) \simeq \mathcal{C}(\Sigma')$. □

2. Acciones coherentes externas para **Comod**(H)

Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita. Daremos una descripción explícita para acciones coherentes externas sobre la categoría tensorial Comod(H) de H-comódulos a izquierda de dimensión finita en términos de un dato Hopf-algebraico, lo cual es el objetivo de este trabajo. Para la determinación de tales acciones, es necesario el cálculo del grupo BiGal(H). Tal grupo ha sido ampliamente estudiado por Schauenburg en [**S1**], [**S2**], [**S3**], [**S4**]. Recordar que estas acciones dan lugar a productos Γ-cruzados que son extensiones de la categoría Comod(H).

En este caso particular, los funtores tensoriales de la Definición 1.1

$$\{(a_*, \xi^a) : \mathrm{Comod}(H) \to \mathrm{Comod}(H)\}_{a\in\Gamma}$$

forman un subgrupo del grupo BiGal(H) de clases de isomorfismo de objetos H-biGalois (se sigue de la Observación 1.2(1)). Luego para la determinación de acciones coherentes se debe calcular el grupo BiGal(H), el cual es conocido para varias álgebras de Hopf.

En la siguiente Sección, se muestran ejemplos concretos de C_2-extensiones, cuando H es un álgebra de supergrupo. Dichas categorías resultan ser tensoriales finitas no semisimples.

Sea Γ un grupo finito. Fijemos la siguiente notación. Si $a \in \Gamma$, $g \in G(H)$ y L_a es un objeto (H, H)-biGalois , entonces el producto cotensorial $L_a \square_H \Bbbk_g$ tiene dimensión uno. Sea $\phi(L_a, g) \in \Gamma$ el elemento tipo-grupo tal que $L_a \square_H \Bbbk_g \simeq \Bbbk_{\phi(L_a,g)}$ como H-comódulos a izquierda.

Lema 2.1. [**MM**, Lema 5.7] *De una colección*

$$\Upsilon = (L_a, (g(a, b), f^{a,b}), \gamma_{a,b,c})_{a,b,c\in\Gamma}$$

donde

- *para $a \in \Gamma$, L_a es un objeto (H, H)-biGalois;*
- *$g(a, b) \in G(H)$ es un elemento tipo-grupo y*

$$f^{a,b} : (L_a \square_H L_b)^{g(a,b)} \to L_{ab}$$

  es un isomorfismo de bicomódulo algebra;
- *$\gamma_{a,b,c} \in \Bbbk^\times$,*

tal que para todo $a, b, c \in \Gamma$:

$$L_1 = H, \quad (g(1, a), f^{1,a}) = (1, id_{L_a}) = (g(a, 1), f^{a,1}); \tag{54}$$

$$\phi(L_a, g(b, c))g(a, bc) = g(a, b)g(ab, c); \tag{55}$$

$$\gamma_{a,1,b} = \gamma_{1,a,b} = \gamma_{a,b,1} = 1; \tag{56}$$

$$(f^{a,b} \otimes_\Bbbk id_{L_c})f^{ab,c} = (id_{L_a} \otimes_\Bbbk f^{b,c})f^{a,bc}; \tag{57}$$

existe un sistema cruzado asociado $\overline{\Upsilon}$ de Γ sobre Comod(H). Más aún, el sistema cruzado $\overline{\Upsilon}$ es un acción coherente externa sobre Comod(H) si y sólo sí γ es un 3-cociclo, esto es, si $a, b, c, d \in \Gamma$

$$\gamma_{a,b,c}\gamma_{a,bc,d}\gamma_{b,c,d} = \gamma_{ab,c,d}\gamma_{a,b,cd}. \tag{58}$$

Demostración. Si $a, b \in \Gamma$ definir $U_{a,b} = \Bbbk_{g(a,b)}$ y el funtor monoidal

$$a_* : \mathrm{Comod}(H) \to \mathrm{Comod}(H)$$
$$a_* = L_a \square_H - .$$

Definir los isomorfismos pseudo-naturales $(\Bbbk_{g(a,b)}, \sigma^{a,b}) : a_* \circ b_* \to (ab)_*$ como aquellos que provienen de isomorfismos de bicomódulos álgebras $f^{a,b} : (L_a \square_H L_b)^{g(a,b)} \to L_{ab}$ siguiendo la demostración del Teorema 2.4.

La existencia del isomorfismo $\gamma_{a,b,c} : L_a \square_H \Bbbk_{g(b,c)} \to \Bbbk_{g(a,b)g(ab,c)}$ es equivalente a

$$\phi(L_a, g(b,c))g(a,bc) = g(a,b)g(ab,c).$$

Como ambos espacios vectoriales $L_a \square_H \Bbbk_{g(b,c)} \otimes_{\Bbbk} \Bbbk_{g(a,bc)}$ y $\Bbbk_{g(a,b)} \otimes_{\Bbbk} \Bbbk_{g(ab,c)}$ tiene dimensión uno, el morfismo $\gamma_{a,b,c} : \Bbbk \to \Bbbk$ está dado por la multiplicación de un escalar $\gamma_{a,b,c} \in \Bbbk^{\times}$.

La Ecuación (44) es equivalente a (54), (45) es equivalente a (56), y la Ecuación (47) es equivalente a (57). Como $f^{a,b}$ es un morfismo de álgebras , entonces la Ecuación (46) se satisface. La Ecuación (58) se sigue de (48). $\square$

Definición 2.2. Dada una colección Υ como la del Lema anterior, definir la categoría tensorial $\mathrm{Comod}(H)(\Upsilon) := \mathrm{Comod}(H)(\overline{\Upsilon})$ el producto Γ-cruzado asociado a la acción coherente externa $\overline{\Upsilon}$.

El siguiente Lema es consecuencia directa del Teorema 1.5 aplicado a $\mathcal{C} = \mathrm{Comod}(H)$.

Lema 2.3. [**MM**, Lema 5.9] *Si* $\Upsilon = (L_a, (g(a,b), f^{a,b}), \gamma_{a,b,c})_{a,b,c \in \Gamma}$ *y* $\Upsilon' = (L'_a, (g'(a,b), z^{a,b}), \gamma'_{a,b,c})_{a,b,c \in \Gamma}$ *son colecciones que satisfacen las condiciones del Lema 2.1 (esto es* $\overline{\Upsilon}, \overline{\Upsilon'}$ *son* Γ*-acciones coherentes externas), entonces toda equivalencia monoidal*

$$F : \mathit{Comod}(H)(\Upsilon) \to \mathit{Comod}(H)(\Upsilon')$$

proviene de una colección $(L, f, (h(a), h^a), \tau_{a,b})_{a,b \in \Gamma}$ *donde*

- L *es un objeto* (H,H)*-biGalois,*
- $f : \Gamma \to \Gamma$ *es un isomorfismo de grupos,*
- $h(a) \in G(H)$ *es un elemento tipo grupo y* $h^a : (L \square_H L_a)^{h(a)} \to L'_{f(a)} \square_H L$ *es un isomorfismo de objetos biGalois, con*

$$(h(1), h^1) = (1, id),$$

- $\tau_{a,b} \in \Bbbk^{\times}$ *tal que* $\tau_{a,1} = \tau_{1,a} = 1,$

los cuales satisfacen que

$$\phi(L, g(a,b))h(ab) = h(a)\phi(L'_{f(a)}, h(b))g'(f(a), f(b)), \tag{59}$$

$$h^{ab}(id_L \otimes_{\Bbbk} f^{a,b}) = (z^{f(a),f(b)} \otimes_{\Bbbk} id_L)(id_{L'_{f(a)}} \otimes_{\Bbbk} h^b)(h^a \otimes_{\Bbbk} id_{L_b}). \tag{60}$$

Si $[V, a] \in$ *Comod*$(H)(\Sigma)$*, la equivalencia monoidal tiene la forma*

$$F[V, a] = [(L\Box_H V)\otimes_{\Bbbk}\Bbbk_{h(a)}, f(a)].$$

Demostración. Consideremos el siguiente dato

$$((T, \xi), f, (\theta_a, \beta^a), \tau_{a,b})$$

donde

- $T = L\Box_H -$ es el funtor monoidal inducido por el producto cotensorial con L,
- (θ_a, β^a) es la equivalencia pseudo-natural asociada al isomorfismo de objetos biGalois $h^a : (L\Box_H L_a)^{h(a)} \to L'_{f(a)}\Box_H L$.

Como $T(U_{a,b})\otimes_{\Bbbk}\theta_{ab} = L\Box_H \Bbbk_{g(a,b)}\otimes_{\Bbbk}\Bbbk_{h(ab)} \simeq \Bbbk_{\phi(L,g(a,b))}\otimes_{\Bbbk}\Bbbk_{h(ab)} \simeq \Bbbk_{\phi(L,g(a,b))h(ab)}$ y

$$\begin{aligned}\theta_a\otimes_{\Bbbk} f(a)'(\theta_b)\otimes_{\Bbbk} U'_{f(a),f(b)} &= \Bbbk_{h(a)}\otimes_{\Bbbk} L'_{f(a)}\Box_H \Bbbk_{h(b)}\otimes_{\Bbbk}\Bbbk_{g'(f(a),f(b))}\\ &\simeq \Bbbk_{h(a)}\otimes_{\Bbbk}\Bbbk_{\phi(L'_{f(a)},h(b))}\otimes_{\Bbbk}\Bbbk_{g'(f(a),f(b))}\\ &\simeq \Bbbk_{h(a)\phi(L'_{f(a)},h(b))g'(f(a),f(b))},\end{aligned}$$

y consideramos $\tau_{a,b} \in \Bbbk^{\times}$, entonces

$$\phi(L, g(a,b))h(ab) = h(a)\phi(L'_{f(a)}, h(b))g'(f(a), f(b)).$$

Esta colección satisface las condiciones del Teorema 1.5: la Ecuación (53) es equivalente a (60). Luego existe una equivalencia monoidal Comod$(H)(\Upsilon) \simeq$ Comod$(H)(\Upsilon')$. □

3. C_2-extensiones de Comod(H)

Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita. Describiremos datos que dan lugar a C_2-extensiones de Comod(H) en el caso particular en el cual los elementos tipo-grupo del álgebra de Hopf H es el grupo cíclico de orden 2 generado por u. Los resultados de estas secciones provienen de los trabajos [**FMM**], [**MM**].

En las siguientes secciones se calcula la dimensión de Frobenius-Perron de estas extensiones y se demuestra que provienen de representaciones de álgebras cuasi-Hopf.

Asumir que (L, g, f, γ) es una colección donde

- L es un objeto (H, H)-biGalois;
- $g \in G(H)$ es un elemento tipo-grupo tal que $\varpi : L\square_H \Bbbk_g \simeq \Bbbk_g$ como H-comódulos a izquierda;
- $f : (L\square_H L)^g \to H$ es un isomorfismo de bicomódulos álgebras,
- $\gamma \in \Bbbk^\times$, $\gamma^2 = 1$.

De acuerdo al Lema 2.1, del dato (L, g, f, γ) obtenemos un sistema cruzado de C_2 sobre Comod(H):

Tomar $L_u = L$, $L_1 = H$, $g(u, u) = g$, $1 = g(1, u) = g(u, 1) = g(1, 1)$, $f^{u,u} = f$, $f^{1,u} = f^{u,1} = f^{1,1} = \mathrm{id}$ y $\gamma_{a,b,c} = 1 \in \Bbbk$ si $a, b, c \in C_2$ excepto $\gamma_{u,u,u} := \gamma$. Denotar este sistema cruzado por Υ.

La categoría Comod(H)(Υ) como categoría Abeliana es

$$\mathrm{Comod}(H) \oplus \mathrm{Comod}(H).$$

La estructura monoidal de la categoría Comod(H)(Υ), dada por el Teorema 1.4 se describe explícitamente así: Si $V, W, Z \in \mathrm{Comod}(H)$ y $b \in C_2$:

$$\begin{aligned}
[V, 1]\otimes[W, b] &= [V\otimes_\Bbbk W, b],\\
[V, u]\otimes[W, 1] &= [V\otimes_\Bbbk(L\square_H W), u],\\
[V, u]\otimes[W, u] &= [V\otimes_\Bbbk(L\square_H W)\otimes_\Bbbk \Bbbk_g, 1],
\end{aligned}$$

El objeto unidad es $[\Bbbk, 1]$ y los objetos duales están dados por

$$([V, 1])^* = [V^*, 1], \quad ([\Bbbk, 1])^* = [\Bbbk, 1] \quad \text{y} \quad ([\Bbbk, u])^* = [\Bbbk_{g^{-1}}, u].$$

Finalmente la asociatividad está dada por

$$\begin{aligned}
&\alpha_{[V,u][W,u][Z,u]}\\
&\quad = \gamma(\mathrm{id}_{V\otimes_\Bbbk L\square_H W}\otimes_\Bbbk f\square_H \mathrm{id}_Z\otimes_\Bbbk \mathrm{id}_{\Bbbk_g})(\mathrm{id}_{V\otimes_\Bbbk L\square_H W\otimes_\Bbbk L\square_H L\square_H Z}\otimes_\Bbbk \varpi)\circ\\
&\qquad (\mathrm{id}_{V\otimes_\Bbbk L\square_H W}\otimes_\Bbbk \xi_{L\square_H Z,\Bbbk_g})(\mathrm{id}_V\otimes_\Bbbk \xi_{W,L\square_H Z\otimes_\Bbbk \Bbbk_g}),
\end{aligned}$$

y las otras son triviales. Acá $\xi = (\xi^L)^{-1}$ es el morfismo definido en la Ecuación (19).

3.1. C_2-extensiones de Comod($\mathcal{A}(V, u, C_2)$). Daremos ejemplos explícitos de categorías tensoriales que son C_2-extensiones de la categoría tensorial Comod($\mathcal{A}(V, u, C_2)$) con V un espacio vectorial de dimensión dos.

Sea $H = \mathcal{A}(V, u, C_2)$ un álgebra super-grupo con V un espacio vectorial de dimensión dos. Usando los resultados de la anterior sección, describiremos familias de sistemas cruzados de C_2 sobre la categoría Comod($\mathcal{A}(V, u, C_2)$). Estos sistemas provienen de una colección (L, g, f, γ) como la presentada en la Sección 3.

Presentamos dos familias que dependen del objeto biGalois L. Para la primera familia el objeto biGalois L es el presentado en el Ejemplo 2.14 del Capítulo 3 y para la segunda familia el objeto biGalois L es trivial.

LEMA 3.1. [**MM**, Teorema 6.1] *Sean* $\xi, \gamma \in \Bbbk, g \in C_2$, *y* $f \in$ *Hom*(H^g, H) *un isomorfismo de comódulos álgebras. Asumir* $\gamma^2 = 1$.

1. *La colección* (ξ, g, f, γ) *tiene asociada una* C_2*-acción coherente externa sobre* *Comod*$(\mathcal{A}(V, u, C_2))$ *y se denota por* $\mathcal{C}_\xi(g, f, \gamma)$ *la correspondiente categoría tensorial producto* C_2*-cruzado.*
2. *La colección* (g, f, γ) *tiene asociada una* C_2*-acción coherente externa sobre* *Comod*$(\mathcal{A}(V, u, C_2))$ *y se denota por* $\mathcal{D}(g, f, \gamma)$*la correspondiente categoría tensorial producto* C_2*-cruzado.*

DEMOSTRACIÓN. (1). Sea $L = \mathbf{U}_\xi$ el objeto (H, H)-biGalois definido en el Ejemplo 2.14. Se sigue del Lema 2.16 que $\mathbf{U}_\xi \square_H \Bbbk_g \simeq \Bbbk_g$.

(2). Siguiendo la misma idea, tomar $L = H$. Entonces $H \square_H \Bbbk_g \simeq \Bbbk_g$. $\square$

Queremos ser más explícitos en la determinación del isomorfismo de comódulos álgebras $f : H^g \to H$ que aparece en el Lema 3.1. Sea (ξ, g, f, γ) una colección como en el Lema 3.1. Existen dos opciones:

- Si $g = 1$, entonces $f : H \to H$. Sea
$$\delta : H \to \mathcal{L}(diag(V), 0, diag(C_2), 1)$$
el isomorfismo canónico $h \mapsto (h, h)$ y definir $\overline{f} := \delta \circ f \circ \delta^{-1}$. Por la Proposición 2.12
$$\overline{f} : \mathcal{L}(diag(V), 0, diag(C_2), 1) \to \mathcal{L}(diag(V), 0, diag(C_2), 1),$$
satisface que $\overline{f}(x, y) = (x, y)$ si $(x, y) \in diag(V)$ lo cual implica que $f(x) = x$ si $x \in V$. Más aún $\overline{f}(e_{1,1}) = \chi_1 e_{1,1} = e_{1,1}$ y $\overline{f}(e_{u,u}) = \chi_u e_{u,u} = e_{u,u}$. Luego $f = \mathrm{id}_H$.
- Si $g = u$, entonces $f : H^u \to H$. Por (la demostración de la) Proposición 2.12 (1)
$$\overline{f} : \mathcal{L}(diag(V)^u, 0, diag(C_2), 1) \to \mathcal{L}(diag(V), 0, diag(C_2), 1),$$
satisface que $\overline{f}(x, y) = (x, -y)$ si
$$(x, y) \in diag(V)^u = \{(u \cdot v, v) | v \in V\}$$
lo cual implica que $f(x) = u \cdot x = -x$ si $x \in V$. Más aún $\overline{f}(e_{1,1}) = e_{1,1}$ y $\overline{f}(e_{u,u}) = \chi_u e_{u,u} = -e_{u,u}$, luego $f(u) = -u$.

Denotar por $\iota : H^u \to H$ este único isomorfismo de bicomódulos algebras.

Con esta determinación de f, obtenemos cuatro familias de productos C_2-cruzados

$$\mathcal{C}_\xi(1, \mathrm{id}, \gamma), \mathcal{C}_\xi(u, \iota, \gamma), \mathcal{D}(1, \mathrm{id}, \gamma), \mathcal{D}(u, \iota, \gamma), \tag{61}$$

parametrizadas por $\xi, \gamma \in \Bbbk$ tal que $\gamma^2 = 1$. Algunas de estas categorías tensoriales son equivalentes. Usaremos el Lema 2.3 para distinguirlas entre ellas.

Teorema 3.2. [**MM**, Teorema 6.2] *Sean $\xi, \xi', \gamma, \gamma' \in \Bbbk$ con $\gamma^2 = 1 = (\gamma')^2$. como categorías tensoriales*

$$\mathcal{C}_\xi(1, id, \gamma) \not\cong \mathcal{C}_{\xi'}(u, \iota, \gamma'), \quad \mathcal{C}_\xi(1, id, \gamma) \cong \mathcal{C}_0(1, id, \gamma'), \quad \mathcal{C}_\xi(u, \iota, \gamma) \cong \mathcal{C}_0(u, \iota, \gamma'),$$
$$\mathcal{D}(1, id, \gamma) \not\cong \mathcal{D}(u, \iota, \gamma'), \quad \mathcal{D}(1, id, \gamma) \not\cong \mathcal{C}_0(1, id, \gamma'), \quad \mathcal{D}(u, \iota, \gamma) \not\cong \mathcal{C}_0(u, \iota, \gamma').$$

Demostración. $\diamond$) Usando el Lema 2.3, existe una equivalencia tensorial $\mathcal{C}_\xi(g, f, \gamma) \simeq \mathcal{C}_{\xi'}(g', f', \gamma')$ si existen

- $L = \mathcal{L}(T, 0, \alpha, 1)$ un objeto biGalois sobre H,
- $h := h(u) \in C_2$ y $h^u : \mathcal{L}(T_h T T_\xi, 0, \mathrm{id}, 1) \to \mathcal{L}(T_{\xi'} T, 0, \mathrm{id}, 1)$ un isomorfismo de objetos biGalois,
- $\tau := \tau_{u,u} \in \Bbbk^\times$,

que satisfacen

$$\alpha(g) = g', \quad \Phi(\mathrm{id}_L \otimes_\Bbbk f) = (f' \otimes_\Bbbk \mathrm{id}_L)(\mathrm{id}_{\mathbf{U}_{\xi'}} \otimes_\Bbbk h^u)(h^u \otimes_\Bbbk \mathrm{id}_{\mathbf{U}_\xi}), \tag{62}$$

donde $\Phi : L \square_H H \to H \square_H L$ es el isomorfismo dado por $l \otimes h \mapsto l_{-1} \otimes l_0 \varepsilon(h)$.

La segunda condición de (62) viene de la Ecuación (60), y la primera condición de la Ecuación (59) proviene de:

Si $a, b \in C_2$, $L \square_h \Bbbk_{g(a,b)} \simeq \Bbbk_{\alpha g(a,b)}$ y $L'_a \square_H \Bbbk_{h(b)} \simeq \Bbbk_{h(b)}$, entonces la Ecuación (59) implica que $\alpha(g(a,b))h(ab) = h(a)h(b)g'(a,b)$. Para $a = 1$ ó $b = 1$ esta ecuación es válida. Para $a = u = b$, obtenemos $\alpha(g) = h^2 g' = g'$.

Como $\alpha = \mathrm{id}$, entonces $\mathcal{C}_\xi(1, \mathrm{id}, \gamma) \not\cong \mathcal{C}_{\xi'}(u, \iota, \gamma')$.

Por el Lema 2.12(1), h^u es un isomorfismo si y sólo sí $T_h T T_\xi = T_{\xi'} T$ or $T_u T_h T T_\xi = T_{\xi'} T$.

Para probar que $\mathcal{C}_\xi(1, \mathrm{id}, \gamma) \simeq \mathcal{C}_0(1, \mathrm{id}, \gamma')$ elegir $h = 1$ y $h^u = \mathrm{id}$, entonces $TT_\xi = T_0 T$ si T está dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & \xi/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solo falta ver que

$$\Phi(\mathrm{id}_L \otimes_{\Bbbk} \varphi_2) = (\varphi_3 \otimes_{\Bbbk} \mathrm{id}_L)(\mathrm{id}_{U_0} \otimes_{\Bbbk} \varphi_1)(\varphi_1 \otimes_{\Bbbk} \mathrm{id}_{\mathbf{U}_\xi}),$$

donde

- $\varphi_1 : L\square_H \mathbf{U}_\xi \to \mathbf{U}_0 \square_H L$, viene de $h^u = \mathrm{id} : \mathcal{L}(TT_\xi, 0, \mathrm{id}, 1) \to \mathcal{L}(T_0 T, 0, \mathrm{id}, 1)$ componiendo con los isomorfismos $L\square_H \mathbf{U}_\xi \simeq \mathcal{L}(TT_\xi, 0, \mathrm{id}, 1), \mathcal{L}(T_0 T, 0, \mathrm{id}, 1) \simeq \mathbf{U}_0 \square_H L$,
- $\varphi_2 : \mathbf{U}_\xi \square_H \mathbf{U}_\xi \to H$, viene de

  $$\mathrm{id} : \mathcal{L}(T_\xi T_\xi, 0, \mathrm{id}, 1) \to \mathcal{L}(\mathrm{id}, 0, \mathrm{id}, 1),$$

  y satisface $(\varphi_2)^{-1}(v) = (T_\xi T_\xi(v), T_\xi(v)) \otimes_{\Bbbk} 1 + e_{u,u} \otimes (T_\xi(v), v)$ y $(\varphi_2)^{-1}(e_{g,g}) = e_{g,g} \otimes e_{g,g}$ si $v \in V$, $g \in C_2$,
- $\varphi_3 : \mathbf{U}_0 \square_H \mathbf{U}_0 \to H$ viene de $\mathrm{id} : \mathcal{L}(T_0 T_0, 0, \mathrm{id}, 1) \to \mathcal{L}(\mathrm{id}, 0, \mathrm{id}, 1)$ (componiendo con ciertos isomorfismos).

Sea $v \in V$. Si $a = (TT_\xi(v), T_\xi(v)) \otimes 1 + e_{u,u} \otimes (T_\xi(v), v) \in L\square_H \mathbf{U}_\xi$, entonces $\varphi_1(a) = (T_0 T(v), T(v)) \otimes 1 + e_{u,u} \otimes (T(v), v)$:

Sea $\zeta_1 : \mathcal{L}(TT_\xi, 0, \mathrm{id}, 1) \to L\square_H \mathbf{U}_\xi$ y $\zeta_2 : \mathcal{L}(T_0 T, 0, \mathrm{id}, 1) \to \mathbf{U}_0 \square_H L$ el isomorfismo dado en el Lema 2.12(3), el cual satisface

$$\zeta_1(TT_\xi(v), v) = TT_\xi(v), T_\xi(v)) \otimes 1 + e_{u,u} \otimes (T_\xi(v), v),$$

$$\zeta_2(T_0 T(v), v) = (T_0 T(v), T(v)) \otimes 1 + e_{u,u} \otimes (T(v), v).$$

Por definición de φ_1, tenemos que $\varphi_1 \circ \zeta_1 = \zeta_2 \circ \mathrm{id}_{\mathcal{L}(TT_\xi, 0, \mathrm{id}, 1)}$, y esto implica la afirmación.

Por un argumento similar, si

$$b = (T_0 T_0(v), T_0(v)) \otimes 1 + e_{u,u} \otimes (T_0(v), v) \in \mathbf{U}_0 \square_H \mathbf{U}_0$$

entonces $\varphi_3(b) = v$.

Más aún $\Phi = \alpha_1 \circ \alpha_2$ donde $\alpha_1 : L \to H\square_H L$, $\alpha_2 : L\square_H L \to L$ y $(\alpha_1)^{-1}(h \otimes l) = \varepsilon(h) l$ y $(\alpha_2)^{-1}(l) = l_0 \otimes l_1$.

Sea $x = (T(w), w) \in L$, luego

$$(\alpha_1)^{-1}(\varphi_3 \otimes_{\Bbbk} \mathrm{id}_L)(\mathrm{id}_{\mathbf{U}_0} \otimes_{\Bbbk} \varphi_1)(\varphi_1 \otimes_{\Bbbk} \mathrm{id}_{\mathbf{U}_\xi})(\mathrm{id}_L \otimes_{\Bbbk} (\varphi_2)^{-1})(\alpha_2)^{-1}(x) = x,$$

ya que

$$\begin{aligned}
x &\mapsto e_{u,u}\otimes w + (T(w), w)\otimes 1\\
&\mapsto e_{u,u}\otimes e_{u,u}\otimes(T_\xi(w), w) + e_{u,u}\otimes(T_\xi T_\xi(w), T_k(w))\otimes 1 + (T(w), w)\otimes 1\otimes 1\\
&\mapsto e_{u,u}\otimes e_{u,u}\otimes(T_\xi(w), w) + (T_0TT_\xi(w), TT_\xi(w))\otimes 1\otimes 1\\
&+ e_{u,u}\otimes(TT_\xi(w), T_\xi(w))\otimes 1\\
&\mapsto (T_0TT_\xi(w), TT_\xi(w))\otimes 1\otimes 1 + e_{u,u}\otimes(T_0T(w), T(w))\otimes 1\\
&+ e_{u,u}\otimes e_{u,u}\otimes(T(w), w)\\
&\mapsto u\otimes(T(w), w) + T(w)\otimes 1\\
&\mapsto x.
\end{aligned}$$

Del mismo modo, $(g, g) \mapsto (g, g)$ si $g \in C_2$; lo cual implica que $\mathcal{C}_\xi(1, \mathrm{id}, \gamma) \simeq \mathcal{C}_0(1, \mathrm{id}, \gamma')$.

Para probar que $\mathcal{C}_\xi(u, \iota, \gamma) \simeq \mathcal{C}_0(u, \iota, \gamma')$, es suficiente tomar $h = u$ y si $x, y \in V$ entonces definir el morfismo

$$\begin{aligned}
h^u : \mathcal{L}(T_uTT_k, 0, \mathrm{id}, 1) &\to \mathcal{L}(T_0T, 0\mathrm{id}, 1)\\
h^u(x, y) &= (x, -y),\\
h^u(e_{u,u}) &= -e_{u,u}.
\end{aligned}$$

$\diamond$) Por el Lema 2.3, $\mathcal{D}(1, \mathrm{id}, \gamma) \simeq \mathcal{D}(u, \iota, \gamma')$ como categorías tensoriales si y sólo sí existe $M = \mathcal{L}(R, 0, \alpha, 1)$ un objeto biGalois sobre H, $h \in C_2$, $h^u : \mathcal{L}(T_hR, 0, \mathrm{id}, 1) \to \mathcal{L}(R, 0, \mathrm{id}, 1)$ un isomorfismo de objetos biGalois y $\tau \in \Bbbk^\times$. Como antes, debe satisfacer que $\alpha(1) = u$, pero $\alpha = \mathrm{id}$. Esto prueba que $\mathcal{D}(1, \mathrm{id}, \gamma) \not\simeq \mathcal{D}(u, \iota, \gamma')$.

$\diamond$) Por el Lema 2.3, $\mathcal{D}(1, \mathrm{id}, \gamma) \simeq \mathcal{C}_0(1, \mathrm{id}, \gamma')$ como categorías tensoriales si y sólo sí existe $M = \mathcal{L}(R, 0, \alpha, 1)$ un objeto biGalois sobre H, $h \in C_2$, $h^u : \mathcal{L}(T_hR, 0, \mathrm{id}, 1) \to \mathcal{L}(T_0R, 0, \mathrm{id}, 1)$ un isomorfismo de objetos biGalois y $\tau \in \Bbbk^\times$.

Por el Lema 2.12(3), h^u es un isomorfismo si y sólo sí $T_hR = T_0R$ ó $T_uT_hR = T_0R$, pero estas dos ecuaciones no tienen solución para T invertible. Luego $\mathcal{D}(1, \mathrm{id}, \gamma) \not\simeq \mathcal{C}_0(1, \mathrm{id}, \gamma')$ y $\mathcal{D}(u, \iota, \gamma) \not\simeq \mathcal{C}_0(u, \iota, \gamma')$. □

En conclusión, obtenemos ocho categorías tensoriales dos a dos no-equivalentes

$$\begin{aligned}
&\mathcal{C}_0(1, \mathrm{id}, 1), \mathcal{C}_0(1, \mathrm{id}, -1), \mathcal{C}_0(u, \iota, 1), \mathcal{C}_0(u, \iota, -1),\\
&\mathcal{D}(1, \mathrm{id}, 1), \mathcal{D}(1, \mathrm{id}, -1), \mathcal{D}(u, \iota, 1), \mathcal{D}(u, \iota, -1).
\end{aligned} \tag{63}$$

3.1.1. Descripción explícita de la estructura monoidal. Usando el Teorema 1.4, podemos describir explícitamente el producto tensorial y la asociatividad para las ocho anteriores categorías tensoriales. Recordar que estas categorías tienen la misma categoría Abeliana subyacente Comod$(\mathcal{A}(V,u,C_2))\oplus$Comod$(\mathcal{A}(V,u,C_2))$ donde V es el $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión dos. Las asociatividades que describiremos son las no-triviales.

Sea $V,W,Z\in$ Comod$(\mathcal{A}(V,u,C_2))$ y $g\in C_2$.

• El producto tensorial, objetos duales y asociatividad en la categoría $\mathcal{C}_0(1,\mathrm{id},\pm 1)$ están dados por

$$[V,1][W,g]=[V\otimes_{\Bbbk}W,g], \qquad [V,u][W,g]=[V\otimes_{\Bbbk}\mathbf{U}_0\square_H W,ug],$$
$$[V,1]^*=[V^*,1], \qquad [\mathbf{1},u]^*=[\Bbbk,u],$$

$$\alpha_{[V,u],[W,u],[Z,u]}=[\pm(\mathrm{id}_{V\otimes_{\Bbbk}\mathbf{U}_0\square W}\otimes_{\Bbbk}\epsilon\varphi_2\otimes_{\Bbbk}\mathrm{id}_Z)(\mathrm{id}_V\otimes_{\Bbbk}\xi_{W,\mathbf{U}_0\square Z}),u].$$

Acá $\xi=(\xi^{\mathbf{U}_0})^{-1}$ es el morfismo definido in la Ecuación (19).

• El producto tensorial, objetos duales y asociatividad en la categoría $\mathcal{C}_0(u,\iota,\pm 1)$ están dados por

$$[V,1][W,1]=[V\otimes_{\Bbbk}W,1], \qquad [V,u][W,u]=[V\otimes_{\Bbbk}\mathbf{U}_0\square_H W\otimes_{\Bbbk}\Bbbk_u,1],$$
$$[V,1][W,u]=[V\otimes_{\Bbbk}W,u], \qquad [V,u][W,1]=[V\otimes_{\Bbbk}\mathbf{U}_0\square_H W,u],$$
$$[V,1]^*=[V^*,1], \qquad [\mathbf{1},u]^*=[\Bbbk_u,u],$$

$$\alpha_{[V,u],[W,u],[Z,u]}=[\pm(\mathrm{id}_{V\otimes_{\Bbbk}\mathbf{U}_0\square W}\otimes_{\Bbbk}(\epsilon\iota\varphi_2\otimes_{\Bbbk}\mathrm{id}_{Z\otimes_{\Bbbk}\mathbf{U}_0\square\Bbbk_u})(\xi_{\mathbf{U}_0\square Z,\Bbbk_u}))$$
$$(\mathrm{id}_V\otimes_{\Bbbk}\xi_{W,\mathbf{U}_0\square Z\otimes_{\Bbbk}\Bbbk_u}),u].$$

• El producto tensorial, objetos duales y asociatividad en la categoría $\mathcal{D}(1,\mathrm{id},\pm 1)$ están dados por

$$[V,1][W,g]=[V\otimes_{\Bbbk}W,g], \qquad [V,u][W,g]=[V\otimes_{\Bbbk}W,ug],$$
$$[V,1]^*=[V^*,1], \qquad [\mathbf{1},u]^*=[\Bbbk,u],$$

$$\alpha_{[V,u],[W,u],[Z,u]}=[\pm(\mathrm{id}_{V\otimes_{\Bbbk}W\otimes_{\Bbbk}Z},u].$$

• El producto tensorial, objetos duales y asociatividad en la categoría $\mathcal{D}(u,\iota,\pm 1)$ están dados por

$$[V,1][W,1]=[V\otimes_{\Bbbk}W,1], \qquad [V,u][W,u]=[V\otimes_{\Bbbk}W\otimes_{\Bbbk}\Bbbk_u,1],$$
$$[V,1][W,u]=[V\otimes_{\Bbbk}W,u], \qquad [V,u][W,1]=[V\otimes_{\Bbbk}W,u],$$
$$[V,1]^*=[V^*,1], \qquad [\mathbf{1},u]^*=[\Bbbk_u,u],$$

$$\alpha_{[V,u],[W,u],[Z,u]}=[\pm(\mathrm{id}_{V\otimes_{\Bbbk}W}\otimes_{\Bbbk}\epsilon\iota\otimes_{\Bbbk}\mathrm{id}_{Z\otimes_{\Bbbk}\Bbbk_u},u].$$

3.1.2. Dimensiones de Frobenius-Perron de las categorías producto C_2-cruzado. Finalmente calculamos las dimensiones de Frobenius-Perron de las categorías anteriormente listadas, esto con el fin de saber si son ó no la categoría de Representaciones de una quasi-álgebra de Hopf.

Sean $\Bbbk_1, \Bbbk_u$ los $\mathcal{A}(V, u, C_2)$-comódulos simples definidos en el Ejemplo 2.2(3) y P_1, P_u sus respectivas cubiertas proyectivas. Para las categorías del anterior apartado 3.1.1, las clases de isomorfismos de objetos simples son

$$\langle[\Bbbk_1, 1]\rangle, \quad \langle[\Bbbk_1, u]\rangle, \quad \langle[\Bbbk_u, 1]\rangle, \quad \langle[\Bbbk_u, u]\rangle,$$

y sus respectivas cubiertas proyectivas son

$$\langle[P_1, 1]\rangle, \quad \langle[P_1, u]\rangle, \quad \langle[P_u, 1]\rangle, \quad \langle[P_u, u]\rangle,$$

donde $\langle\Bbbk_1\rangle$ denota la clase de $\Bbbk_1$ en el grupo de Grothendieck de la respectiva categoría.

Más aún si $g, h \in C_2$, $\langle[\Bbbk_g, h]\rangle = [\langle\Bbbk_g\rangle, h]$ y $\langle[P_g, h]\rangle = [\langle P_g\rangle, h] = [2\langle\Bbbk_1\rangle + 2\langle\Bbbk_u\rangle, h]$, usando el Corolario 1.2.

Teorema 3.3. [**MM**, Teorema 6.3] $FPdim(\mathcal{C}_0(1, id, \pm 1)) = 4^2 = FPdim(\mathcal{D}(1, id, \pm 1)) = FPdim(\mathcal{C}_0(u, \iota, \pm 1)) = FPdim(\mathcal{D}(u, \iota, \pm 1))$.

Demostración. Para $g, h \in C_2$, $FPdim[\langle\Bbbk_g\rangle, h] = 1$ y además $FPdim[\langle P_g\rangle, h] = 4$, lo cual se obtiene de la siguiente tabla:

Sea A la matriz de multiplicación a izquierda del correspondiente simple en el grupo de Grothendieck y λ su respectiva dimensión de Frobenius-Perron.

Sea B la matriz de multiplicación a izquierda en el grupo de Grothendieck del respectivo cubrimiento proyectivo y μ su respectiva dimensión de Frobenius-Perron.

$\mathcal{C}_0(1, \mathrm{id}, \pm 1)$	$\langle[\Bbbk_1, 1]\rangle$	$\langle[\Bbbk_1, u]\rangle$	$\langle[\Bbbk_u, 1]\rangle$	$\langle[\Bbbk_u, u]\rangle$
A	id	$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$
λ	1	1	1	1
Cub. proy.	$\langle[P_1, 1]\rangle$	$\langle[P_1, u]\rangle$	$\langle[P_u, 1]\rangle$	$\langle[P_u, u]\rangle$
B	$\begin{pmatrix}2&0&2&0\\0&2&0&2\\2&0&2&0\\0&2&0&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&2&0&2\\2&0&2&0\\0&2&0&2\\2&0&2&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&0&2&0\\0&2&0&2\\2&0&2&0\\0&2&0&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&2&0&2\\2&0&2&0\\0&2&0&2\\2&0&2&0\end{pmatrix}$
μ	4	4	4	4

Entonces $FPdim(\mathcal{C}_0(1, \mathrm{id}, \pm 1)) = 4^2$.

De igual modo $FPdim(\mathcal{D}(1,\mathrm{id},\pm 1)) = 4^2$. Además,

$\mathcal{C}_0(u,\iota,\pm1)$	$\langle[\mathbb{k}_1,1]\rangle$	$\langle[\mathbb{k}_1,u]\rangle$	$\langle[\mathbb{k}_u,1]\rangle$	$\langle[\mathbb{k}_u,u]\rangle$
A	id	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$
λ	1	1	1	1
Cub. proy.	$\langle[P_1,1]\rangle$	$\langle[P_1,u]\rangle$	$\langle[P_u,1]\rangle$	$\langle[P_u,u]\rangle$
B	$\begin{pmatrix}2&0&2&0\\0&2&0&2\\2&0&2&0\\0&2&0&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&2&0&2\\2&0&2&0\\0&2&0&2\\2&0&2&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&0&2&0\\0&2&0&2\\2&0&2&0\\0&2&0&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&2&0&2\\2&0&2&0\\0&2&0&2\\2&0&2&0\end{pmatrix}$
μ	4	4	4	4

Entonces $FPdim(\mathcal{C}_0(u,\iota,\pm 1)) = 4^2$.
De igual modo $FPdim(\mathcal{D}(u,\iota,\pm 1)) = 4^2$.

$\square$

Se sigue de [**EGNO**, Proposición 1.48.2] que cada una de las categorías tensoriales enlistadas en (63) son isomorfas a una categoría de representaciones de una álgebra quasi-Hopf.

Bibliografía

[AEG] N. Andruskiewitsch, P. Etingof y S. Gelaki. *Triangular Hopf algebras with the Chevalley property*. Michigan Math. J. Volúmen **49-2** (2001), 277–298.

[AM] N. Andruskiewitsch y M. Mombelli. *On module categories over finite-dimensional Hopf algebras*. J. Algebra **314** (2007), 383–418.

[AS] N. Andruskiewitsch y H.-J. Schneider. *Pointed Hopf algebras*. New directions in Hopf algebras, MSRI series Cambridge Univ. Press (2002), 1–68.

[B] J. Bénabou. *Introduction to bicategories*. Lecture notes in mathematics, Reports of the Midwest Category Seminar I. **47** (1967).

[BK] B. Bakalov y A. Jr. Kirillov . *Lectures on Tensor categories and Modular Functors*. University Lecture Series **21**, AMS Providence, RI (2001).

[BO] R. Bezrukavnikov y V. Ostrik. *On tensor categories attached to cells in affine Weyl groups II*. Advanced Studies in Pure Mathematics **40** (2004), 101–119.

[BL] J. Baez y A. Lauda. *Higher-dimensional algebra V:2-groups*. Theory Appl. Categ. **12-14** (2004), 423-491.

[Br] K. Brown. *Cohomology of groups*. New York: Springer-Verlag, 1982. Print.

[DR] A. Davydov y . I. Runkel. *Z_2-extensions of Hopf algebra module categories by their base categories*. arXiv:1207.3611.

[De] P. Deligne. *Catègories tannakiennes*. The Grothendieck Festschrift, Vol. **II**, Progr. Math. **87** (1990), 111–195.

[DT] Y. Doi y M. Takeuchi. *Cleft comodule algebras for a bialgebra*. Comm. Algebra. **14** (1986), 801–818.

[EGNO] P. Etingof, S. Gelaki, D. Nikshych y V. Ostrik. *Tensor categories*. Lectures notes. (2009) 80–83.

[ENO] P. Etingof, D. Nikshych y V. Ostrik. *Fusion categories and homotopy theory*. Quantum Topol. **1-3** (2010), 209–273.

[FMM] B. Femic, A. Mejía y M. Mombelli. *Invertible bimodule categories over the representation category of Hopf algebras*. Aceptado en J. Pure Appl. Algebra. Preprint arxiv: 1402.2955.

[F] M. H. Freedman. *P/NP, and the quantum field computer*. Proc. Natl. Acad. Sci. USA **95-1** (1998), 98–101.

[FKLW] M. Freedman, A. Kitaev, M. Larsen y Z. Wang. *Topological quantum computation*. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 40-1 (2003), 31–38.

[FS1] J. Fuchs y C. Schweigert. *Category theory for conformal boundary conditions*. Vertex Operator Algebras in Mathematics and Physics, Fields Institute Comm. **39** (2003) 25–70.

[FS2] J. Fuchs y C. Schweigert. *Hopf algebras and finite tensor categories in conformal field theory*. ZMP-HH/10-11, Hamburger Beitrage zur Mathematik bf 372, `arXiv:1004.3405`.

[G] C. Galindo, *Crossed product tensor categories*. J. Algebra. **337-1** (2011), 233–252.

[Ga] F. R. Gantmacher, *The theory of matrices*. AMS Chelsea Publishing, Providence, (1998).

[GM] A. García Iglesias y M. Mombelli. *Representations of the category of modules over pointed Hopf algebras over* $\mathbb{S}_3$ *and* $\mathbb{S}_4$. Pacific J. Math. vol **252-2** (2011) 343–378.

[Gr] J. Greenough,*Bimodule Categories and Monoidal 2-Structure*. Tesis de Doctorado. Universidad de New Hampshire.

[Gr1] ———, *Monoidal 2-structure of Bimodule Categories*. J. Algebra. **324** (2010), 1818–1859.

[GS] P. Grossman y N.Snyder. *The Brauer-Picard group of the Asaeda-Haagerup fusion categories*. Preprint arXiv:1202.4396.

[JS] A. Joyal y R. Street. *Braided tensor categories*. Adv. Math., 102, 20-78 (1993).

[Ki1] A. Kitaev. *Fault-tolerant quantum computation by anyons*. Ann. Physics 303-1 (2003), 2–30.

[Ki2] A. Kitaev. *Anyons in an exactly solved model and beyond*. Ann. Physics 321-1 (2006), 2–111.

[KS] M. Kashiwara y P. Schapira, *Categories and sheaves*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **332**, A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, Springer-Verlag (2006), 205.

[K] C. Kassel. *Quantum Groups*. Graduate texts in Mathematics **115**, Springer-Verlag (1995).

[KK] A. Kitaev y L. Kong. *Models for gapped boundaries and domain walls*. Commun. Math. Phys. 313-2 (2012), 351–373 .

[Mc] S. Mac Lane. *Categories for the working mathematician*. Springer, Graduate texts in mathematics, volume 5 (1971).

[MM] A. Mejía y M. Mombelli. *Crossed extension of the corepresentation category of finite supergroup algebras*. Preprint arXiv:1405.0979.

[Mi] B. Mitchell. *The full imbedding theorem*. The Johns Hopkins University Press (1964).

[M1] M. Mombelli. *Module categories over pointed Hopf algebras*. Math. Z. **266-2** (2010), 319–344.

[M2] ———. *The Brauer-Picard group of the representation category of finite supergroup algebras*. Aceptado in Rev. Unión Mat. Argent.

[M] S. Montgomery. *Hopf algebras and their actions on rings*. AMS CBMS. **82** (1992).

[N] M. Neuchl. *Representation theory of Hopf categories*. Tesis de Doctorado. Universidad de Munich (LMU) Alemania, Fakultt fr Mathematik, **vii-100**, 1997. Por aparecer en Adv. in Math. bajo el título *Higher-dimensional algebra VI: Hopf categories*.

[NR] D. Nikshych y B. Riepel. *Categorical Lagrangian Grassmannians and Brauer-Picard groups of pointed fusion categories*. Preprint arXiv:1309.5026.

[Oc] A. Ocneanu. *The classification of subgroups of quantum $SU(N)$*. Quantum symmetries in theoretical physics and mathematics (Bariloche, 2000). Contemp. Math. 294 (2002), 133–159.

[P] B. Pareigis. *Non-additive ring and module theory II, General theory of monoids*. Math Debrecen. **24** (1977), 189–204.

[S1] P. Schauenburg. *Hopf Galois and biGalois extensions*. Fields Inst. Commun. **00-0000** (1991).

[S2] ______. *Hopf bigalois extensions*. Commun. Algebra. **24-12** (1996), 3797–3825.

[S3] ______. *BiGalois objects over the Taft algebras*. Isr. J. Math. **115** (2000), 101–123.

[S4] ______. *Galois objects over generalized Drinfeld doubles with an application to $u_q(sl_2)$*, J. Algebra 217 (1999), 584–598.

[Sk] S. Skryabin. *Projectivity and freeness over comodule algebras*. Trans. Am. Math. Soc. **359-6** (2007) 2597–2623.

[U] K. Ulbrich. *Galois extensions as functors of comodules*. Manuscripta Math. **59** (1987), 391–397.