



Facultad de Matemática,
Astronomía, Física y
Computación



UNC

Universidad
Nacional
de Córdoba

TÉCNICAS DE MODELADO MATEMÁTICO. DESARROLLO Y APLICACIONES.

por

BRUNO ADOLFO BUFFA

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación como parte de los requerimientos para la obtención del grado de Doctor en Matemática de la

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Agosto, 2022

Director: DR. ANDRÉS ALBERTO BARREA

Tribunal Especial:

Dra. Marta Cecilia VIDAL (UTN, FRBB)

Dra. Noemí Patricia KISBYE (FAMAFA)

Dr. Juan Ignacio PEROTTI (FAMAFA)

Suplentes:

Dra. Claudia Maricel GARIBOLDI (FCEFQN - UNRC)

Dra. Silvia María OJEDA (FAMAFA)



Este trabajo se distribuye bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional.

*A mi mamá,
por todo.*

Resumen

Los modelos matemáticos se utilizan para el estudio, análisis y comprensión de diferentes fenómenos abordados por las ciencias exactas y de la salud, como así también en ciencias sociales. Un *modelo* puede ser definido como la representación de algún sistema real o abstracto que tiene por fin último resolver un problema o responder cierta pregunta relacionada a ese sistema. En términos generales, el objetivo del proceso de modelado es entender el funcionamiento, explicar patrones observados y predecir el comportamiento frente a eventuales cambios en el sistema estudiado. Tradicionalmente, el enfoque estándar para el modelado matemático se apoyó en modelos basados en ecuaciones diferenciales, pero sin embargo en la literatura de los últimos años se destaca la implementación de nuevas perspectivas. Este trabajo se orienta al estudio de distintos tipos de modelización a través de herramientas matemáticas que se apartan de los cánones usuales de modelado, para lo cual se presentan tres enfoques de modelización *no convencionales*.

En primer lugar nos concentramos en el *modelado basado en agentes* o también llamado por algunos autores simulación basada en agentes. En este tipo de modelos el foco está puesto en las entidades individuales, es decir los agentes, que al interactuar entre sí y con su entorno de acuerdo a un cierto conjunto de reglas - mayoritariamente estocásticas- dan lugar a un fenómeno macroscópico emergente que denominamos *dinámica global* del sistema. En pos de introducir los Modelos Basados en Agentes (MBA) y un posible camino a seguir para su abordaje, se implementa y analiza el prototípico MBA *SugarScape*. Dicho modelo se plantea en una versión modificada respecto de su formulación original en la que se preserva la heterogeneidad espacial y la dinámica local pero se agregan elementos de control mediante la incorporación de una estructura impositiva que es aplicada a los agentes a través de impuestos. Del análisis del modelo surgen diversas preguntas/problemas que pueden ser abordadas a través del enfoque de la *optimización*. En este sentido, se plantea un problema multiobjetivo el cual es abordado mediante un método globalizado para encontrar su *Frente de Pareto* y, a fin de evitar

la utilización de herramientas heurísticas frecuentemente empleadas en la bibliografía, se implementa aquí el denominado *Globalized and Bounded Nelder-Mead Method* para encontrar soluciones optimales del problema mencionado.

En la segunda parte de esta tesis el foco estará puesto en los llamados modelos cinéticos y en particular en aquellos que se agrupan bajo el enfoque de la *Teoría Cinética de las Partículas Activas* (KTAP). Este apartado se propone abordar la problemática de la distribución de riqueza en una sociedad con población no constante e intercambios no conservativos de riqueza mediante la construcción de un modelo según la perspectiva de modelización adoptada en la KTAP. Dicho enfoque consiste esencialmente en subdividir un sistema constituido por un gran número de partículas interactuantes en subsistemas funcionales. El estado individual de las partículas se describe a través una variable llamada *actividad* que en general manifiesta o expresa su habilidad para desarrollar una cierta estrategia. En especial, se presenta un modelo de distribución de riqueza para el cual se desarrolla un análisis cualitativo del mismo centrado en los comportamientos asintóticos y la medición de la desigualdad mediante el coeficiente de *Gini*. Complementariamente, se proponen algunos estudios de casos concretos para realizar experimentos numéricos que permitan validar dicho modelo y así poder caracterizar las sociedades involucradas e investigar los comportamientos emergentes.

Finalmente, en la tercera parte de este trabajo se construye y se implementa de manera original un *modelo computacional* complejo para representar lo observado en un experimento psico-cognitivo de singular interés. En este sentido, aquí recuperamos y modelamos una investigación experimental referida al análisis de comportamientos, decisiones e interacciones de sujetos frente a distintas clases de estímulos que hemos denominado como el fenómeno de *percepción cruzada*. Luego de la construcción e implementación de dicho modelo se realiza un análisis detallado del fenómeno representado, de los procedimientos (algoritmos) involucrados y de sus respectivos parámetros.

Palabras claves:

• *Modelización Matemática* • *Modelos Basados en Agentes* • *Teoría Cinética de Partículas Activas* • *Modelos Computacionales* • *Optimización y Control*.

Abstract

Mathematical models are used for the study, analysis and understanding of different phenomena in the exact and health sciences, as well as in the social sciences. A *model* can be defined as the representation of some real or abstract system whose ultimate purpose is to solve a problem or answer a certain question related to that system. In general terms, the objective of the modeling process is to understand the functioning, explain observed patterns and predict behavior in the face of eventual changes in the system under study. Traditionally, the standard approach to mathematical modeling has relied on models based on differential equations, but in the literature of recent years, the implementation of new perspectives has been highlighted. This work is oriented to the study of different types of modeling through mathematical tools that depart from the usual modeling canons, for which three *non-conventional* modelling approaches are presented.

First we concentrate on *agent-based modeling*, also called agent-based simulation by some authors. In this type of models the focus is on individual entities, i.e. agents, which interact with each other and with their environment according to a certain set of rules - mostly stochastic - giving rise to an emergent macroscopic phenomenon that we call *global dynamics* of the system. In order to introduce Agent-Based Models (MBA) and a possible way forward for their approach, the prototypical MBA *SugarScape* is implemented and analyzed. This model is presented in a modified version of its original formulation in which spatial heterogeneity and local dynamics are preserved but control elements are added through the incorporation of a tax structure that is applied to agents through taxes. Several questions/problems arise from the analysis of the model that can be addressed through the *optimization* approach. In this sense, a multi-objective problem is posed which is approached through a globalized method to find its *Pareto Frontier* and, in order to avoid the use of heuristic tools frequently employed in the literature, the so-called *Globalized and Bounded Nelder-Mead Method* is implemented here to find optimal solutions of the mentioned problem.

In the second part of this thesis the focus will be on the so-called kinetic

models and in particular on those grouped under the *Kinetic Theory of Active Particles* (KTAP) approach. This section aims to address the problem of wealth distribution in a society with a non-constant population and non-conservative exchanges of wealth by constructing a model according to the modeling perspective adopted in KTAP. This approach consists essentially in subdividing a system consisting of a large number of interacting particles into functional subsystems. The individual state of the particles is described by a variable called *activity* which in general manifests or expresses their ability to develop a certain strategy. In particular, a model of wealth distribution is presented for which a qualitative analysis is developed focusing on asymptotic behaviors and the measurement of inequality by means of the *Gini* coefficient. In addition, some specific case studies are proposed to carry out numerical experiments to validate the model and thus characterize the societies involved and investigate emerging behaviors.

Finally, in the third part of this work we build and implement in an original way a complex *computational model* to represent what was observed in a psychocognitive experiment of singular interest. In this sense, here we recover and model an experimental investigation referred to the analysis of behaviors, decisions and interactions of subjects in front of different kinds of stimuli that we have denominated as the phenomenon of *cross-perception*. After the construction and the implementation of this model, a detailed analysis of the represented phenomenon, the procedures (algorithms) involved and their respective parameters is carried out.

Key words: • *Mathematical Modeling* • *Agent-Based Models* • *Kinetic Theory of Active Particles* • *Computational Models* • *Optimization and Control*.

Agradecimientos

Esta tesis es el fruto de un proceso que iniciara en 2014 cuando comencé a trabajar con Andrés Barrea, quien luego sería mi director de doctorado. Quiero agradecer en primer lugar a él, por su guía invaluable para recorrer el camino que culmina con esta tesis, pero que sus enseñanzas fueron mucho más allá de lo académico y marcaron fuertemente mis formas de transitar la vida.

Quiero agradecer también a los profesores del FaMAF por el esfuerzo constante que hacen para que quienes nos formamos allí tengamos una educación de grandísimo nivel a pesar de que muchas veces las condiciones no son las mejores. En especial, quiero agradecerles a los integrantes del GANyC y sobre todo a Elvio Pilotta, nuestro “jefe” del grupo, por su predisposición y ayuda permanente a lo largo de estos años.

Merecen una mención distinguida mis profesores y colegas, Germán Torres y Damián Knopoff por incluirme y permitirme colaborar con ellos en su investigación, la cual fue incluida en gran parte de esta tesis. El tiempo compartido con ellos, además de su cálida compañía, fue un constante aprendizaje, y como si fuera poco, fue a su lado que fui descubriendo de qué se trataba el trabajo científico al acompañarme en mis primeros pasos en esta maravillosa profesión.

Y naturalmente, quiero agradecerles a los miembros del Tribunal Evaluador, Juan Ignacio Perotti, Patricia Kisbye y Marta Vidal, por su esfuerzo y dedicación a la hora de leer, corregir y ayudar a mejorar la calidad de la versión final de este trabajo.

Deseo agradecer a mi familia. A mi papá y a mi mamá que siempre estuvieron para darme el amor y el sustento imprescindible cuando el camino se volvía complicado y que con su apoyo constante lograron transmitirme el valor del esfuerzo en mi construcción como persona. A mis hermanas, quienes me enseñaron, básicamente, todo lo que se de la vida. A Marcelo y Camilo por estar cerca en todo momento, especialmente cuando todo se pone muy duro y más nos necesitamos.

Finalmente destaco a CONICET, organismo que me dio el apoyo económico necesario para realizar mi doctorado y sin el cual esta tesis no podría haber sido

realizada. En particular quiero agradecer al CIEM, que me albergó como lugar de trabajo y a toda la oficina 324, por los hermosos momentos compartidos y hacer del día a día un grato disfrute durante todos estos años.

Índice general

Resumen	III
Abstract	v
Agradecimientos	IX
Introducción	XV
Parte I Modelos Basados en Agentes	1
1. Un Modelo Basado en Agentes	3
1.1. Modelado basado en agentes	3
1.1.1. Aspectos generales	3
1.1.2. Formulación del modelo	5
1.2. MBA SugarScape	6
1.2.1. Presentación del modelo	7
1.2.2. Incorporando variables de control	9
2. Implementación y Optimización	11
2.1. Modelo matemático de ecuaciones en diferencias	11
2.2. Resultados de implementación y aproximación	13
2.3. Control y optimización	15
2.3.1. Variables de control y función objetivo	16
2.3.2. Resultados de optimización	17

Parte II Modelos Basados en la Teoría Cinética de Partículas Activas **23**

3. Un Modelo Cinético Para Distribución de Riqueza	25
3.1. Teoría Cinética de Partículas Activas	25
3.1.1. Aspectos generales	27
3.1.2. Interacciones microscópicas	29
3.1.3. Estructuras matemáticas y caso discreto	32
3.2. Un modelo matemático de distribución de riqueza y desigualdad .	35
3.2.1. Introducción	35
3.2.2. Presentación del modelo	38
4. Análisis Cualitativo y Optimización	45
4.1. Análisis cualitativo	45
4.1.1. Análisis cualitativo de comportamientos asintóticos	45
4.1.2. Desigualdad y coeficiente de Gini	50
4.2. Estimación de parámetros	55
4.2.1. Definición del problema de optimización	56
4.2.2. Resultados numéricos	57

Parte III Modelos Computacionales **63**

5. Un Modelo Computacional de Interacciones Perceptuales	65
5.1. Modelización computacional	66
5.2. Experimento psico-cognitivo de interacciones perceptuales	68
5.2.1. Resultados del experimento de interacciones perceptuales	70
5.3. Modelo de Percepción Cruzada	71
5.3.1. Presentación del modelo	72
5.3.2. Dinámica iterativa	74
5.3.3. Políticas de acción	78
6. Implementación y Resultados del MPC	81
6.1. Implementación computacional del MPC	81
6.2. Resultados de implementación	84
6.2.1. Simulación I	84
6.2.2. Simulación II	91
6.2.3. Simulación III	96

7. Conclusiones	101
Parte IV Apéndices	105
A 1. Contenidos auxiliares del Modelo SugarScape	107
A 1.1. Background	107
A 1.1.1. Protocolo ODD	107
A 1.1.2. Método de Nelder-Mead	109
A 1.2. Protocolo ODD para el MBA SugarScape	109
A 1.3. Sistema de Ecuaciones en Diferencias y Algoritmo de Actualización	113
A 2. Anexos al Modelo de Distribución de Riqueza	117
A 2.1. Resultados numéricos para datos generados por el modelo	117
A 2.2. Resultados numéricos para datos reales de Estados Unidos	121
A 3. Complementos del Modelo de Percepción Cruzada	123
A 3.1. Estructuras de <i>Modo</i>	123
A 3.2. Algoritmo MPC	130
A 3.3. Parámetros del MPC	134
Bibliografía	147

Introducción

Un **modelo** puede ser definido como la representación de algún sistema real o abstracto que tiene por fin último la intención de resolver un problema o responder cierta pregunta relacionada a ese sistema. En términos generales, el objetivo del proceso de modelado es entender el funcionamiento, explicar patrones observados y predecir el comportamiento frente a eventuales cambios en el sistema estudiado.

Todo modelo es una simplificación del sistema en la cual sólo se incluyen los aspectos que son relevantes para lograr el objetivo del modelado; es decir que se tienen en cuenta únicamente aquellos aspectos que estén relacionados con la pregunta que se quiera responder a través de la construcción del modelo. De esta manera, el problema que se intenta resolver, en otras palabras el propósito del modelo, funciona como un filtro para incluir o no cierta característica del sistema real estudiado en dicho modelo ([Railsback and Grimm, 2019]).

Dado que el modelo es una simplificación del sistema, es necesario establecer criterios, basados en las principales características y regularidades que identifican dicho sistema, para decidir si el modelo es considerado una buena representación del mismo. En este sentido, los autores Calvetti y Somersalo manifiestan que un modelo es siempre una simplificación y es considerado un buen modelo aquel que logre captar las características esenciales de la realidad y dejar fuera aquellos aspectos no esenciales ([Calvetti and Somersalo, 2012]).

Profundizando en esta perspectiva, en el trabajo de Railsback y Grimm citado previamente se sugieren ciertos pasos inherentes a un proceso de modelado, al que denominan como el *Ciclo de Modelado*. Este hace referencia a una serie de tareas que se deben realizar sistemáticamente y de forma iterativa para mejorar en cada paso el modelo planteado e incluso poder replantear el problema que se busca resolver y el interrogante que se intenta responder. Este Ciclo de Modelado consta de cinco etapas que consisten en: 1) Formular el problema o pregunta que se quiere responder; 2) Plantear las hipótesis sobre los procesos y estructuras esenciales del sistema real que se está estudiando; 3) Construir el modelo propiamente dicho mediante la elección de escalas, entidades u objetos, variables de estado,

procesos y parámetros; 4) Implementar el modelo, paso en el cual se utiliza la matemática y los programas de computación para traducir el modelo “verbal” en objetos formales que poseen una dinámica independiente regida por la lógica interna del modelo; 5) Analizar, evaluar y revisar el modelo, etapa en la que se debe corroborar si se responde la pregunta que ha guiado todo el proceso de modelado y comprobar si el camino elegido es óptimo a fin de resolver el problema, para luego repetir el proceso con el fin de mejorar el modelo e incluso poder replantear el problema que se buscaba resolver originalmente.

En otro orden de ideas, en el artículo referido anteriormente, Calvetti y Somersalo proponen una caracterización de los **modelos matemáticos** específicamente. En efecto, dichos autores establecen que los modelos matemáticos son aquellos que expresan particularidades significativas del fenómeno real estudiado en términos matemáticos, sabiendo desde un inicio que los interrogantes de interés pueden ser respondidos más exacta y definitivamente usando dicha clase de herramientas. Por esto es que ellos manifiestan que el modelado matemático es un trabajo de traducción del lenguaje natural no matemático y cualitativo a una forma matemática rigurosa que es generalmente cuantitativa. Además, este trabajo de modelado implica decidir qué tipo de herramientas matemáticas son necesarias para el manejo de tal modelo, evaluar si es posible encontrar una solución adecuada y valorar cuán precisa se puede esperar que sea esta solución.

Tradicionalmente, el enfoque estándar para el modelado matemático se apoyó en modelos basados en ecuaciones diferenciales, ya sea tanto a través de sistemas de ecuaciones ordinarias como de ecuaciones en derivadas parciales. Sin embargo, en la literatura de los últimos años dedicada a esta clase de investigación se destaca el desarrollo de nuevas perspectivas alternativas. En este sentido, con el objetivo de indagar en técnicas contemporáneas de modelado *no convencionales*, la presente tesis se orienta al estudio de distintos tipos de modelización a través de herramientas matemáticas que se apartan de los cánones usuales de modelado.

A fin de abordar la tarea mencionada, se presentarán a lo largo de este trabajo tres enfoques de modelización que podemos denominar no-estándar. Por esta razón, la presente tesis está dividida en tres partes, que si bien pertenecen a líneas de investigación independientes, todas ellas corresponden conceptualmente al campo de la modelización matemática.

En primer lugar nos ocuparemos del **modelado basado en agentes** o también llamado por algunos autores simulación basada en agentes. En este tipo de modelos el foco está puesto en las entidades individuales, es decir los agentes, que al interactuar entre sí y con su entorno de acuerdo a un cierto conjunto de reglas - mayoritariamente estocásticas- dan lugar a un fenómeno macroscópico emergente que denominamos *dinámica global* del sistema. De esta manera, con el objetivo de investigar y desarrollar técnicas de modelización matemática para el tratamiento

de fenómenos provenientes del ámbito social y biológico, en esta parte del trabajo realizamos un estudio profundo sobre diversos aspectos de los Modelos Basados en Agentes (MBA).

A partir de lo comentado, en pos de introducir dicha forma de modelización junto a un posible camino a seguir para su abordaje, en los capítulos 1 y 2 de esta tesis se implementa y analiza mediante herramientas matemáticas usuales el prototípico MBA *SugarScape*. Dicho modelo está planteado en una versión modificada respecto de su formulación original en la que se preserva la heterogeneidad espacial y la dinámica local pero se agregan elementos de control mediante la incorporación de una estructura impositiva que es aplicada a los agentes a través de impuestos. Del análisis del modelo surgen diversas preguntas/problemas que pueden ser abordadas a través del enfoque de la *optimización*, razón por la cual se aproxima con un *sistema de ecuaciones en diferencias* que hace posible la aplicación de diferentes métodos adecuados para su resolución. En particular, se plantea un problema de optimización multiobjetivo que es abordado mediante un método globalizado para encontrar su *Frente de Pareto*. Por consiguiente, a fin de evitar la utilización de métodos heurísticos presentes en la bibliografía relacionada a este tipo de modelos, se implementa aquí el denominado *Globalized and Bounded Nelder-Mead Method* para encontrar soluciones óptimas del problema mencionado. Finalmente, se concluye el análisis mediante la discusión de diferentes alternativas en el cronograma del cobro impositivo y sus posibles contribuciones a la búsqueda de mejores soluciones particulares al problema planteado originalmente.

En la segunda parte del presente trabajo el eje estará puesto en los llamados *modelos cinéticos*, y en particular en aquellos que se agrupan bajo el enfoque de la **Teoría Cinética de las Partículas Activas** (KTAP por sus siglas en inglés). En efecto, en los capítulos 3 y 4 de esta tesis, se aborda la problemática de la distribución de riqueza en una sociedad con población no constante e intercambios no conservativos de riqueza mediante la construcción de un modelo según la perspectiva adoptada en la KTAP. Dicho enfoque consiste esencialmente en subdividir un sistema constituido por un gran número de partículas interactuantes en subsistemas funcionales. El estado individual de las partículas se describe a través una variable llamada *actividad* que expresa su habilidad para desarrollar una cierta estrategia. En particular, en el trabajo que desarrollaremos aquí se presenta un modelo de distribución de riqueza para el cual se realiza un análisis cualitativo del mismo centrado en los comportamientos asintóticos y la medición de la desigualdad mediante el coeficiente de *Gini*. Complementariamente, se proponen también algunos estudios de casos concretos para realizar experimentos numéricos que permitan validar dicho modelo y así poder caracterizar las sociedades involucradas e investigar los comportamientos emergentes.

Por último, en los capítulos 5 y 6 de la tercera parte de esta tesis, se construye

y se implementa de manera original un **modelo computacional** complejo para representar lo observado en un experimento psico-cognitivo de singular interés. En este sentido, luego de establecer lo que entendemos por modelización computacional, recuperamos y modelamos una investigación experimental publicada en [Auvray et al., 2009] referida al análisis de comportamientos, decisiones e interacciones de sujetos frente a distintas clases de estímulos que hemos denominado como el fenómeno de *percepción cruzada*. Seguido de la construcción y posterior implementación de dicho modelo se realiza un análisis detallado del fenómeno representado, de los procedimientos (algoritmos) involucrados y de sus respectivos parámetros.

Parte I

Modelos Basados en Agentes

1. Un Modelo Basado en Agentes

En la primera parte de esta tesis el foco central estará puesto en estudiar detalladamente los denominados *Modelos Basados en Agentes*. Teniendo en cuenta este objetivo, luego de dar una caracterización de los mencionados modelos, desarrollaremos y analizaremos en profundidad un ejemplo paradigmático perteneciente a la literatura actual, el cual está encuadrado bajo este particular enfoque.

1.1. Modelado basado en agentes

Como señalamos previamente, en esta parte de nuestro trabajo nos focalizaremos en un tipo particular de modelado que es el *modelado basado en agentes* o modelado basado en individuos –como se los denomina generalmente en el ámbito de la biología y ecología. Los modelos basados en agentes (MBA) son aquellos que, en vez de modelar al sistema en su totalidad (como en el paradigma de modelado con ecuaciones diferenciales), modelan a los **agentes individuales** que lo constituyen. Por esto se destaca que el punto de vista fundamental de este tipo de modelos es que el complejo **fenómeno macroscópico** emerge de la acción de los agentes individuales que sumados constituyen el sistema (ver [Calvetti and Somersalo, 2012]).

1.1.1. Aspectos generales

En términos generales, los agentes -o individuos- pueden representar a seres humanos, instituciones, organismos, células, etc. puesto que en los MBA los individuos son descriptos como entidades **únicas** y **autónomas** que interactúan con todas las demás y con su entorno local. Se entiende que en tanto entidades únicas y autónomas, los agentes se diferencian entre sí mediante características particulares como pueden ser el tamaño, la ubicación o su riqueza, a la vez que cada uno de ellos actúa independientemente de los demás y persigue sus propios objetivos.

Otra característica importante atribuida a los agentes es que poseen una **conducta adaptativa**, es decir que se les otorga la capacidad de ajustar su comportamiento dependiendo de su estado actual, el de los demás agentes y el de su entorno. Por todo esto, en los MBA la dinámica propia del sistema surge a partir de las interacciones de los componentes individuales entre sí y con su entorno a partir del cumplimiento de un conjunto de reglas -estocásticas o deterministas- que definen cómo serán esas interacciones ([Railsback and Grimm, 2019]). Fundamentándose en esta caracterización, la mayoría de los trabajos en los que se construyen y estudian este tipo de modelos utilizan la *simulación computacional* y la *estadística* como las principales herramientas para analizar y evaluar la evolución del sistema en su nivel macroscópico.

Para otros autores (ver los trabajos [Izquierdo et al., 2008] y [Hinkelmann, 2011]), los MBA se pueden caracterizar como **modelos computacionales** que consisten en agentes individuales, los cuales siguen un conjunto de reglas que definen cómo interactuar con los otros agentes y con su ambiente. En esta caracterización, también la simulación computacional es exclusivamente usada para analizar y evaluar la evolución del sistema como un todo.

Entre los ejemplos que podemos encontrar de modelos multiagentes donde los elementos constitutivos (agentes) interactúan entre sí, se destacan procesos inherentemente discretos tales como células inmunitarias individuales interactuando entre ellas en una porción de tejido (ver [Castiglione et al., 2007], [Eubank et al., 2004], [Pogson et al., 2006], [Wang et al., 2009], [Pe'Er et al., 2005]). En otros trabajos: [Enderling et al., 2010], [An, 2004], [Mansury et al., 2002] se pueden encontrar MBA más sofisticados, los cuales simulan sistemas biológicos como el crecimiento tumoral y problemas relativos al sistema inmunitario.

Por lo expuesto hasta aquí, es claro que la simulación y el modelado basado en agentes es un paradigma de modelización útil para estudiar fenómenos en una amplia gama de disciplinas, desde la economía hasta la sociología, como así también en biología y ecología. Sin embargo, actualmente, no existe un acuerdo en la forma estándar de especificar dichos modelos. De hecho, las descripciones de los modelos no suelen estar dadas en términos matemáticos, haciendo difícil la tarea de utilizar herramientas matemáticas para estudiarlos, lo cual se realiza habitualmente a través de simulaciones y análisis estadístico de las mismas. Teniendo en cuenta estos inconvenientes y siguiendo el razonamiento de [Hinkelmann et al., 2011], es notoria la conveniencia de encontrar un marco suficientemente riguroso y general de modo que la mayoría de los modelos discretos puedan ser formulados dentro de este marco y que, además, sea convenientemente rico como para proporcionar herramientas teóricas y computacionales útiles en la práctica permitiendo así el análisis del modelo.

De esta manera, a partir de las dificultades señaladas, al trabajar con un MBA

en particular se hace evidente la necesidad de formularlo mediante un marco matemático que capte de la manera más precisa posible sus características esenciales a la vez que sea capaz de proporcionar herramientas teóricas y técnicas desarrolladas previamente que permitan un análisis exhaustivo y riguroso del fenómeno estudiado. Ejemplos de esto son los trabajos [Christley et al., 2017], [Oremland and Laubenbacher, 2015] y [Jalalimanesh et al., 2017].

Ahora bien, volviendo sobre lo que se planteó anteriormente, es importante ocuparnos de una de las principales problemáticas encontradas a la hora de abordar los modelos basados en agentes. Actualmente, una de las desventajas cruciales de los MBA es su falta de **descripción formal**, de modo que se favorezca la aplicación de herramientas matemáticas para su estudio. De hecho, muchas de las descripciones de estos modelos presentes en la literatura son incompletas, haciendo improbable una nueva ejecución del modelo y de esa forma imposibilitando la réplica de sus resultados. Por otra parte, a menudo se encuentran MBA descriptos mediante la utilización de una gran cantidad de palabras y de forma superflua, quitando la simplicidad y claridad necesaria para la comprensión tanto del modelo como de sus resultados. Frente a estos inconvenientes, un camino que puede resultar beneficioso para superarlos es la **estandarización** en la manera de formular y describir los MBA. Efectivamente, en pos de lograr un acuerdo en una forma estándar para la descripción de este tipo de modelos, en el año 2006 un grupo de investigadores especializados en modelización desarrollaron el denominado “**Protocolo ODD**” (ver [Grimm et al., 2006]) para la especificación de los modelos basados en agentes. En términos generales, el uso de este protocolo tiene el propósito de crear descripciones prácticas que se puedan comprender de manera rápida y sencilla, así como también, ayudarle al autor a organizar la información que tiene disponible de forma consistente y ordenada. En el apéndice A 1.1.1 se incluye, de forma resumida, una caracterización de los elementos constitutivos del mencionado Protocolo ODD.

1.1.2. Formulación del modelo

En un proceso de modelado, y particularmente en el modelado basado en agentes, se observa que una etapa fundamental es la *formulación del modelo*. En este sentido, los autores Grimm y Railsback (ver [Railsback and Grimm, 2019]) manifiestan que este paso está referido al avance desde la forma heurística del modelo en la que se piensa y delibera sobre el problema y las hipótesis que se tienen sobre el mismo, hacia una primera representación **formal** y **rigurosa** del modelo. En relación a esto, se establece que para la formulación de un modelo se deben tomar una serie de decisiones relacionadas a la estructura del mismo que consisten en diagramar ideas sobre éste, escribir palabras claves para explicar hipótesis y procesos, enunciar y formular ecuaciones, etc.

Siguiendo este razonamiento, dichos autores plantean que dentro de un proceso de modelado, se pueden identificar dos objetivos esenciales para las tareas de formulación y descripción del modelo. En primer lugar, le sirve al autor para identificar las decisiones que debe tomar a la hora de diseñar el modelo; ya que a partir de observarlo explícitamente, tiene mayores posibilidades de pensar y deliberar acerca de todas las partes del mencionado sistema. En cuanto a los objetivos de la formulación del modelo, se presenta el hecho de sentar las bases para la **implementación** del mismo. En el caso que se deba implementar dicha formulación en código computacional, es de suma relevancia tener una descripción completa y clara respecto de cada uno de sus aspectos fundamentales para poder hacer una traducción al código sin ambigüedades. Por último, el objetivo más importante de la etapa de formulación es sentar las bases que hacen posible la **comunicación**. En efecto, a partir de la comunicación del modelo a colegas y demás destinatarios, existe la posibilidad de que estos otros lo re-implementen, agreguen aspectos e incluso lo modifiquen, contribuyendo así a potenciar el conocimiento científico que se pueda obtener a partir del modelo y su análisis.

Con el objetivo de ilustrar e implementar las ideas desarrolladas hasta aquí, en esta parte de nuestro trabajo proponemos, en un primer momento, implementar el famoso MBA llamado *SugarScape* y resolver un problema de optimización a partir de dicho modelo. En este sentido, apoyándonos en la propuesta realizada por Oremland y Laubenbacher en el artículo [Oremland and Laubenbacher, 2014], se busca aproximar el MBA con un modelo matemático discreto -específicamente a través de un sistema de *Ecuaciones en Diferencias*. Dicha aproximación y su consecuente tratamiento en términos matemáticos, hará posible la aplicación de diversos métodos para resolver un problema de optimización biobjetivo -el que surgirá de manera natural- y de esta forma encontrar el *Frente de Pareto* de dicho problema permitiéndonos así conocer sus soluciones optimales.

1.2. MBA SugarScape

Con la finalidad de presentar e implementar un marco matemático que nos provea de herramientas útiles, rigurosas y previamente desarrolladas para el estudio y la resolución de los problemas de optimización que surgen de los modelos basados en agentes, nos enfocaremos sobre un modelo en particular denominado *SugarScape* ([Epstein and Axtell, 1996]). Específicamente, introduciremos una versión de este famoso y paradigmático MBA ya que es considerado un modelo notablemente representativo, puesto que fue el primero en formularse a gran escala y a la vez pudo ser aplicado en una amplia variedad de contextos como por ejemplo en estudios de biología, economía, sociología y antropología (ver por ejemplo los tra-

bajos: [Rahman et al., 2007], [Dascalu et al., 1998], [Dean et al., 2000], etc.). En la versión modificada que presentamos en este trabajo se preserva la heterogeneidad espacial y la dinámica local del modelo original pero se agregan variables de **control** representadas mediante la aplicación de *impuestos* a los agentes. Cabe destacar que la incorporación de estos nuevos elementos de control a nuestro modelo da lugar al surgimiento de problemas íntimamente relacionados al ámbito de la **optimización**, como lo son, entre otros, *estructuras impositivas óptimas que minimicen las muertes de los agentes*.

Con el objetivo de contar con una mayor especificidad en la presentación del modelo, luego de interiorizarse en la descripción del SugarScape dada en esta sección, el lector interesado puede encontrar en el apéndice A 1.2 una descripción completa del mismo en términos del Protocolo ODD mencionado en la sección anterior.

1.2.1. Presentación del modelo

En términos generales, el modelo basado en agentes SugarScape consiste en un terreno que es recorrido por sus habitantes en busca de riqueza. En este sentido, se puede pensar que este modelo se compone de hormigas -los agentes- que a medida que transcurre el tiempo van recorriendo un **paisaje gradiente** donde van recolectando azúcar y almacenándola en su reserva personal. El terreno es una grilla de 48×48 celdas -o parches- que se divide en 4 regiones verticales (de 48×12 celdas cada una) según la cantidad de azúcar contenida. En la primera región, cada uno de los parches que la conforman contiene una unidad de azúcar, en la segunda región hay 2 unidades de azúcar por cada parche, en la tercera tres y en la cuarta 4 unidades de azúcar (ver Figura 1.1 Der.).

En cada paso temporal, los agentes observan la cantidad de azúcar disponible en las casillas contiguas ubicadas en las 4 direcciones principales y en la casilla donde se ubican en ese momento. Luego, se mueven a la que contenga la mayor cantidad de azúcar, si hubiera más de una con cantidad máxima de azúcar deben elegir **aleatoriamente** entre dichas casillas (ver Figura 1.1 Izq.). Cabe destacar que se considera al terreno verticalmente como un toro en el que se identifican el borde superior con el inferior pero acotado horizontalmente. Efectivamente, si por ejemplo un individuo está ubicado en cualquier celda de la última *fila* inferior (fila 48) y decide moverse hacia abajo, entonces en el tiempo siguiente se ubicará en la correspondiente columna de la primera fila, pero en el caso que estuviera en la última *columna* de la derecha (columna 48), entonces no se le va a permitir mover a la derecha y por lo tanto sólo va a poder moverse hacia una celda de la misma columna donde está ubicado o de la columna anterior hacia su izquierda (columna 47). De forma análoga sucede en los movimientos desde la fila 1 hacia arriba y

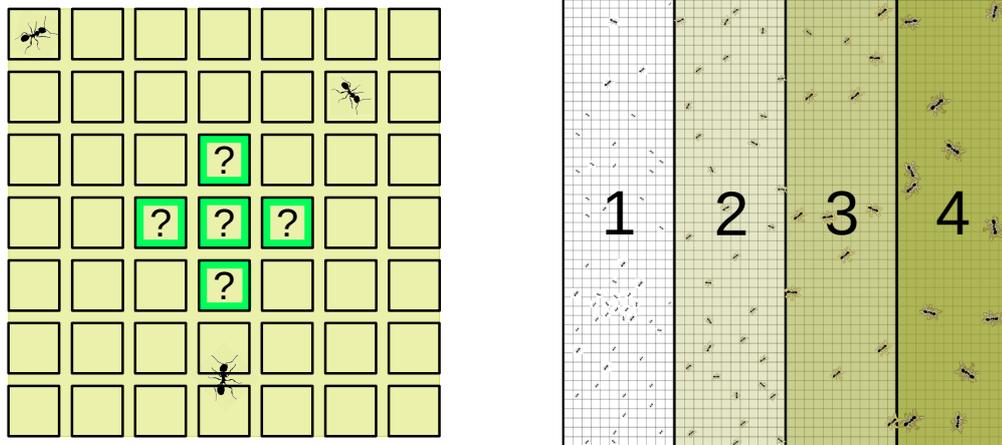


Figura 1.1: IZQ. Dinámica local de los agentes. DER. Paisaje con sus habitantes dividido en regiones según la cantidad de azúcar contenida

desde la columna 1 hacia la izquierda.

Es importante señalar que los individuos considerados en este modelo pueden pertenecer a dos clases distintas según cierto atributo que hemos denominado **metabolismo**. En efecto, luego de moverse, las hormigas recolectan la cantidad de azúcar correspondiente a la celda que arribaron, almacenan el azúcar recolectada y luego pierden una cantidad fija dependiendo su “clase de metabolismo” (una o dos unidades de azúcar en cada paso temporal dependiendo de cuál sea su tipo de clase). Las celdas pueden estar ocupadas por varias hormigas en un mismo instante de tiempo y la cantidad de azúcar en ellas no se agota ni se reduce. Una hormiga “muere” instantáneamente si su cantidad total de azúcar almacenada se acaba, es decir que luego de cualquier deducción en la reserva de riqueza de los agentes se debe verificar que la cantidad restante sea mayor que cero para que el agente continúe en el modelo, de lo contrario es eliminado.

Finalmente, se mencionan las condiciones iniciales y de finalización de nuestras implementaciones del MBA SugarScape. El modelo es iniciado con 64 individuos distribuidos aleatoriamente en todo el paisaje disponiendo de una cantidad aleatoria de azúcar entre 5 y 25 unidades. Cada uno de ellos puede acumular un máximo de 50 unidades de azúcar. Además, también de forma aleatoria, cada hormiga es asignada a una clase con cierto metabolismo (1 o 2) el cual permanece fijo en todo el transcurso de cada implementación del modelo. Se deja correr el sistema descrito durante 51 pasos temporales iterativos y al finalizar se observa tanto la disposición final de los agentes en el terreno como su acumulación total de azúcar.

1.2.2. Incorporando variables de control

A partir de la descripción del modelo realizada anteriormente es posible conocer sus distintos estados, observar cómo se comporta y estudiar las particularidades del sistema representado a lo largo de los pasos temporales. En efecto, las herramientas utilizadas más frecuentemente para realizar dichas tareas son la simulación computacional y la aplicación de técnicas estadísticas para analizar los distintos resultados arrojados por dichas reproducciones del modelo. Sin embargo, además de la mera observación de la evolución del modelo y de las conclusiones que se pudieran obtener al analizarlo, resulta de especial interés para nosotros tener la posibilidad de **dirigir** y manipular el modelo mediante la incorporación de elementos controlados de manera **externa** al propio sistema. Este proceso generalmente se lleva a cabo a través de la inclusión de las denominadas *variables de control*, procedimiento que a su vez abre el camino a la formulación y resolución de problemas intrínsecamente ligados al ámbito de la **optimización**.

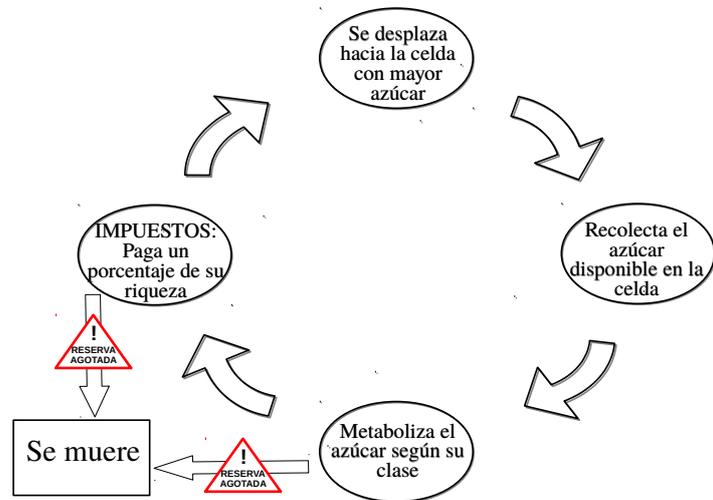
En particular, en la versión del MBA SugarScape que presentamos en este trabajo, se incorporan variables de control representadas a través de la aplicación de **impuestos** que se recaudan sobre los agentes en distintos momentos a lo largo de cada implementación del modelo. Es decir, en intervalos regulares de tiempo -cada 5 pasos temporales- se le cobra a cada individuo una fracción de su riqueza total que puede ser: 0; 1/4; 1/2; 3/4 o 1. Cabe aclarar que dicho monto es elegido dependiendo el *momento* particular en que se realice el cobro y de la *región* del terreno en la que se encuentre el agente a quien se le está aplicando el impuesto.

Finalmente, al disponer de una descripción completa del MBA SugarScape con el que se trabaja en esta parte de la tesis y sobre el que se desarrollarán los estudios y análisis del siguiente capítulo, presentamos en la Figura 1.2 un diagrama con sus componentes más relevantes exhibiendo así la **visión general** del modelo a partir de lo realizado por los agentes en cada paso temporal.

Una pregunta/problema bioobjetivo

Ahora bien, a partir del MBA presentado en este capítulo, es posible plantearnos diversos interrogantes enfocados principalmente en los efectos de la aplicación de impuestos producidos sobre la evolución del modelo en general y más precisamente a la relación existente entre las muertes de los individuos y la elección de las tasas aplicadas a cada región del terreno. Algunas de estas preguntas/problemas que nos servirán de guía para desarrollar una **aproximación matemática rigurosa** del MBA SugarScape y una posterior resolución mediante métodos de optimización, son por ejemplo: ¿Es relevante diferenciar las tasas de impuestos según la *región* y el *tiempo* en que son aplicadas? ¿Qué sucede si los impuestos son muy altos en alguna región?, ¿los agentes abandonan ese sector?

Figura 1.2: Diagrama de evolución de cada agente en el SugarScape



¿Cuán elevados pueden ser los impuestos sin que mueran todos los agentes?; etc.

En este sentido, apoyándonos en la propuesta de [Oremland and Laubenbacher, 2014] y teniendo en cuenta las preguntas formuladas anteriormente, destacamos un problema lo suficientemente amplio para enfocar nuestro trabajo y que a la vez puede ser utilizado de guía a la hora de aplicar los métodos de optimización necesarios para su resolución. En efecto, el interrogante que buscaremos resolver en el próximo capítulo es el siguiente: *¿Que política de impuestos **maximiza** el monto recaudado **minimizando** la cantidad de muertes de los agentes?* Cabe destacar que dicha pregunta plantea claramente un problema de *optimización biobjetivo* donde ambos objetivos están contrapuestos.

2. Implementación y Optimización

Teniendo en cuenta los interrogantes propuestos en el apartado anterior, en este capítulo nos planteamos como objetivo responder de manera rigurosa tales preguntas de optimización, para lo cual será fundamental establecer una **formulación matemática** del modelo y del problema a resolver. En efecto, con el propósito de sortear las limitaciones provocadas por el hecho de contar únicamente con la *simulación computacional* y el *análisis estadístico* para la resolución del problema planteado, construiremos un modelo matemático de ecuaciones que aproxime al MBA SugarScape y de esta forma disponer de una amplia gama de métodos estables de optimización previamente implementados en la literatura y fundamentados teóricamente.

En particular, en este capítulo se utilizará un modelo de **aproximación** del MBA construido a partir de ecuaciones de tiempo discreto -denominadas *ecuaciones en diferencias*- que recrearán al SugarScape y permitirán posteriormente abordar el interrogante planteado mediante un método directo de optimización aplicado a un problema multiobjetivo.

2.1. Modelo matemático de ecuaciones en diferencias

Para realizar una aproximación precisa al modelo basado en agentes, necesitamos contar con cierta información específica del sistema y actualizada sistemáticamente. En tal sentido, la **ubicación** de los agentes en cada paso temporal y la distribución de su **riqueza** diferenciada por región del terreno será fundamental en la construcción del sistema de ecuaciones. Además, el modelo de ecuaciones en diferencias definido tiene que ser planteado de manera que permita configurar una función que admita como entrada algún objeto matemático que represente a las diferentes **políticas de impuestos**, y de esta forma, luego será posible optimizar sobre el conjunto total de dichas políticas.

A continuación, para favorecer una mejor comprensión del modelo matemático de aproximación mostramos un breve resumen de las ecuaciones en tiempo discreto utilizadas para replicar el MBA y colocamos los detalles específicos junto al algoritmo de implementación y actualización del modelo en el apéndice A 1.3. Como se mencionó anteriormente, habrá principalmente dos tipos de ecuaciones, una de ellas serán las ecuaciones que captarán la ubicación de la población de hormigas en el paisaje y las otras se enfocarán en la cantidad de azúcar acumulada en cada región por parte de los agentes.

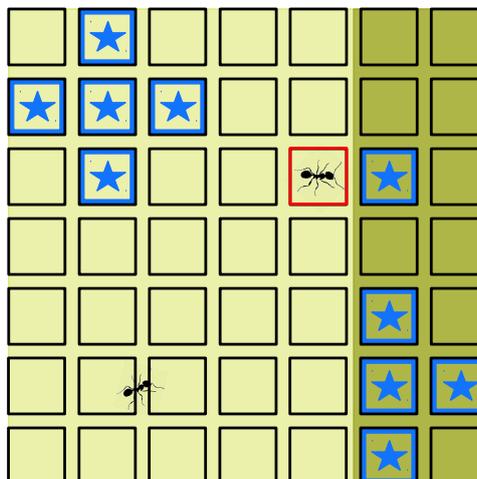
Dado que la información relevante para resolver nuestro problema se encuentra en la cantidad de individuos situados en cada una de las cuatro regiones del espacio -y su correspondiente reserva personal de azúcar-, sólo se establecerán **ecuaciones de ubicación** que lleven registro del número de hormigas en cada una de las 48 *columnas* del terreno y por consiguiente no se contabilizarán los movimientos de una fila a otra ya que estos desplazamientos no afectan a la cantidad de agentes en la región en general. En efecto, sea la función $u_i(t)$ para $1 \leq i \leq 48$ representando a la cantidad de hormigas en la columna i -ésima en el tiempo t , se tienen las consiguientes ecuaciones para el tiempo $t + 1$. A modo de ejemplo representativo se muestran las ecuaciones correspondientes a una columna del interior de una región -en este caso u_{41} representa una columna en el medio de la cuarta región- y otras dos columnas que delimitan la frontera de otro sector - u_{24} y u_{25} delimitan la segunda y la tercera región- (ver la Figura 2.1 para una mejor comprensión del contenido de las ecuaciones):

$$u_1, \dots, u_{48} : \begin{cases} u_{41}(t+1) = \frac{1}{5}u_{40}(t) + \frac{3}{5}u_{41}(t) + \frac{1}{5}u_{42}(t), \\ u_{24}(t+1) = \frac{1}{5}u_{23}(t), \\ u_{25}(t+1) = u_{24}(t) + \frac{3}{4}u_{25}(t) + \frac{1}{5}u_{26}(t). \end{cases}$$

De manera similar se construyen las **ecuaciones de riqueza**, es decir aquellas que se focalizan en el azúcar disponible en la reserva personal de cada agente teniendo en cuenta la región en la que están situados. Definiendo la función $R_{r,c,s}(t)$ para $1 \leq r \leq 4$, $1 \leq c \leq 2$ y $0 \leq s \leq 50$ como la cantidad de individuos de clase de metabolismo c en la región r con una reserva de azúcar s al tiempo t , se establecen relaciones válidas para el tiempo siguiente $t + 1$. Ejemplos de estas son las siguientes:

$$R_{r,c,s} : \begin{cases} R_{r,c,s}(t+1) = R_{r,c,s-(r-c)}(t) & \text{para } s \leq 49, \\ R_{r,c,50}(t+1) = \sum_{i=50-(r-c)}^{50} R_{r,c,i}(t), \end{cases}$$

Figura 2.1: Posibles movimientos de las hormigas según el área de la región que están ocupando.



para $(r, c) \in \{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2\}$, por lo que se observa que hay $408 = 4 \times 2 \times 51$ ecuaciones de riqueza en total.

Antes de continuar con el análisis de los resultados obtenidos a partir del sistema utilizado para la aproximación del modelo, consideramos importante señalar dos cuestiones respecto al **orden de actualización** para las ecuaciones presentadas. En primer lugar se debe notar que las ecuaciones de riqueza están afectadas tanto por la aplicación de *impuestos* como por el *movimiento* de los individuos en el terreno, dado que al trasladarse estos se llevan consigo el azúcar almacenada. A su vez, aquellas que registran la ubicación de la población están condicionadas por el nivel de riqueza que poseen los agentes -información proporcionada por las ecuaciones antes mencionadas- ya que todos los que alcancen un nivel de azúcar nulo deben ser eliminados del modelo. Como es evidente, estas consideraciones no están incluidas directamente en las ecuaciones propiamente dichas si no que se tienen en cuenta para el ajuste de las mismas en pasos intermedios entre sus actualizaciones. Todo lo señalado al respecto está contemplado en el algoritmo de actualización del sistema que es mostrado en el apéndice A 1.3.

2.2. Resultados de implementación y aproximación

Con el objetivo de evaluar si el modelo de ecuaciones que aproxima al modelo basado en agentes es adecuado, se comparan el promedio de 100 simulaciones del MBA con el resultado arrojado a partir de la implementación del sistema de ecuaciones. En este sentido, con la intención de realizar la comparación de forma exhaustiva, se analizan dos casos posibles: en el primer caso se cotejan ambos modelos *sin la aplicación de impuestos* y en el segundo se realiza el proceso

aplicando cierta *política de impuestos fija* elegida aleatoriamente. De manera similar a lo obtenido en el trabajo de [Oremland and Laubenbacher, 2014], el MBA SugarScape se comporta -en promedio- de manera casi idéntica a los resultados alcanzados por nuestras ecuaciones en diferencias. Por este motivo se concluye que tanto la construcción del modelo de aproximación como su implementación son precisas y rigurosas a la hora de reproducir los aspectos fundamentales del modelo basado en agentes.

Para evidenciar este hecho, se presentan diferenciadamente por un lado los gráficos comparativos entre el MBA y el sistema de ecuaciones donde no intervienen las variables de control -i.e. los impuestos- (ver Figura 2.2) y posteriormente aquellos en los que se ha implementado una política de impuestos fija e idéntica en ambos modelos (ver Figura 2.3). Cabe la aclaración que, en ambas figuras, las líneas continuas muestran los resultados del modelo matemático de aproximación y el resto de los símbolos marcadores exhiben, según el sector del espacio, lo arrojado por el promedio de las 100 simulaciones del modelo. Además, en el gráfico de la izquierda de cada figura están representados el número de individuos por cada una de las cuatro regiones del terreno en función del tiempo t y en el de la derecha el total de azúcar existente en cada sector del paisaje en cada instante temporal -i.e. la suma de las reservas personales de cada agente diferenciados por la región donde están ubicados en cada tiempo t , hasta $t = 51$.

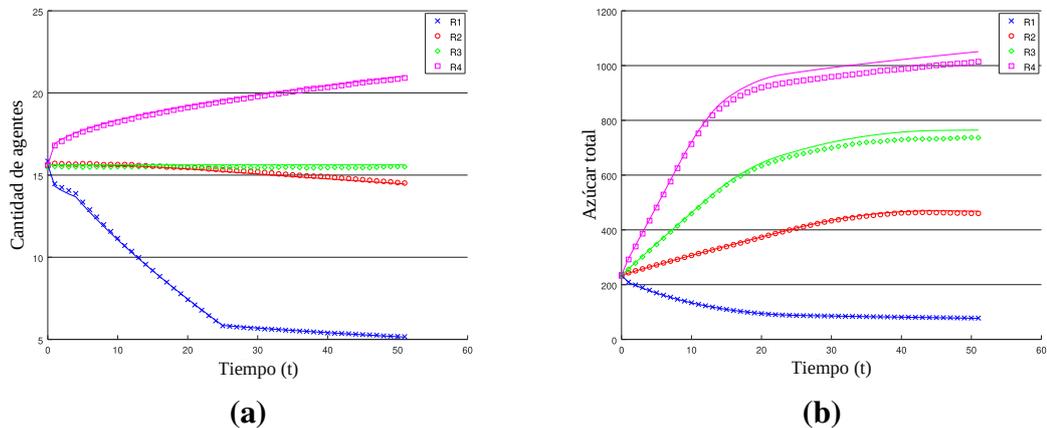


Figura 2.2: Gráficos comparativos entre el MBA y el modelo de ecuaciones en diferencias *sin aplicación de impuestos*. **(a)** Número de individuos por región en función del tiempo. **(b)** Cantidad de azúcar total por región en función del tiempo.

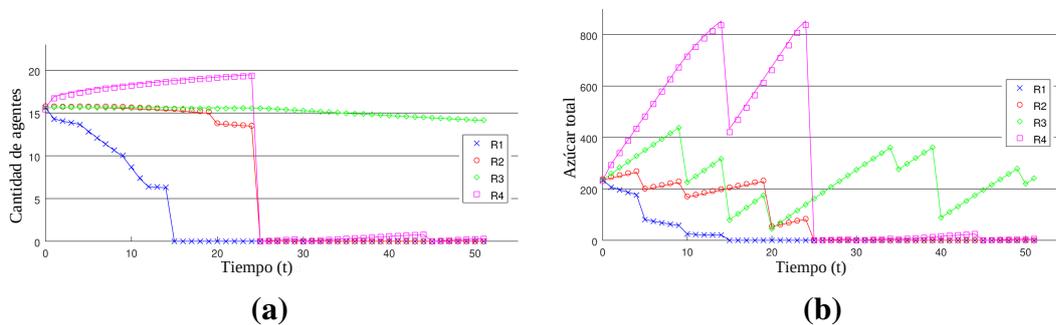


Figura 2.3: Gráficos comparativos entre el MBA y el modelo de ecuaciones en diferencias *con aplicación de impuestos*. **(a)** Número de individuos por región en función del tiempo. **(b)** Cantidad de azúcar total por región en función del tiempo.

2.3. Control y optimización

Como se ha visto hasta aquí, a lo largo de las secciones anteriores hemos aproximado una versión del MBA SugarScape mediante un sistema de ecuaciones de tiempo discreto con la finalidad de disponer de un marco matemático riguroso que posibilite el abordaje adecuado del problema de **optimización biobjetivo** propuesto. En este sentido, a diferencia del artículo de [Oremland and Laubenbacher, 2014] donde se utiliza un método de resolución enmarcado dentro de los denominados *Algoritmos Evolutivos*, en la presente sección nos ocuparemos de encontrar soluciones que resuelvan de manera optimal el interrogante formulado en el apartado 1.2.2 por medio de un clásico **método directo** de optimización al cual se le ha agregado una estrategia *globalizadora*. Finalmente, se discuten distintas alternativas en la elección de lo que llamaremos *cronograma de aplicación* de las variables de control (estructuras impositivas) y sus posibles contribuciones en la búsqueda de mejorar las soluciones alcanzadas.

Ahora bien, como primera consideración hacia la resolución de nuestro problema, elegimos implementar un método de optimización **sin derivadas**. Esta elección está fundamentada en el hecho de que nuestra función objetivo no está dada a través de una fórmula que nos permita conocer sus propiedades de diferenciableidad a la vez que tampoco tenemos la posibilidad de calcular su derivada en las áreas del dominio donde la posea. Por otro lado, en la bibliografía relacionada con nuestro problema, comúnmente se implementan métodos heurísticos para encontrar soluciones optimales al problema biobjetivo planteado.

Al considerar estos dos motivos principales optamos por utilizar un método **determinístico** de optimización desarrollado, esencialmente, a partir del reconocido algoritmo de *Nelder-Mead* al que se le ha agregado una estrategia de globali-

zación con la intención de mejorar la búsqueda de mínimos globales de la función objetivo. Es para destacar que el método original de Nelder-Mead que estamos haciendo referencia -basado fundamentalmente en las denominadas **búsquedas simpliciales**-, es considerablemente sencillo en su aplicación, lo que facilita en gran medida su implementación y por lo que ha sido extensamente utilizado (y citado) en numerosos trabajos desde su publicación original ([Nelder and Mead, 1965]). Con el fin de interiorizar al lector respecto del funcionamiento de este famoso algoritmo, en el apéndice A 1.1.2 se deja un pequeño resumen de sus procedimientos específicos.

El método de búsqueda directa que emplearemos en este trabajo implementa una **estrategia globalizadora** del tipo *local-global* y fue denominado por sus autores como **Algoritmo de Nelder-Mead Globalizado y Acotado** (GBNM por sus siglas en inglés). En términos generales, el mismo consiste en una combinación eficiente entre un método local (Nelder-Mead modificado para espacios acotados) con una estrategia de detección de óptimos globales basada en *reinicios probabilísticos*. Además de los beneficios respecto a la posibilidad del uso de este algoritmo sin contar con información del gradiente de nuestra función objetivo, se destaca lo mencionado en la sección 3.2 del artículo [Luersen and Le Riche, 2004]. De este modo, el trabajo citado hace referencia a una comparación favorable del GBNM frente a un algoritmo de optimización evolutiva en términos de *velocidad* de convergencia, *precisión* de los resultados y capacidad para encontrar *óptimos globales*.

2.3.1. Variables de control y función objetivo

Como hemos señalado en la sección 1.2.2 del capítulo anterior, cada 5 pasos temporales del modelo se aplica el cobro de un porcentaje de la riqueza total de cada agente en concepto de lo que pueden considerarse *impuestos* a los individuos. Esta recaudación consiste en, cada cierto intervalo de tiempo, deducir una determinada porción (0, 1/4, 1/2, 3/4 o 1) del total de azúcar almacenada por las hormigas dependiendo la región del terreno donde se encuentre y pudiendo variar también según el momento en que se realice el cargo. De esta manera, cada elección posible respecto de cuál será el esquema completo de recolección sobre el total de los agentes presentes en cada región constituye la **política de impositiva** elegida.

Ahora bien, dado que el cobro de impuestos a los individuos a lo largo de cada implementación del modelo se realiza en 10 momentos específicos en el tiempo y que se aplica una tasa diferenciada según las 4 regiones del terreno, es posible representar a cada política de impuestos mediante una matriz $x \in \mathbb{R}^{4 \times 10}$ con $0 \leq x_{ij} \leq 1$. Además, cabe destacar que a partir del sistema de ecuaciones discretas construido en una sección previa, se conocen las cantidades $F_1(x)$ y $F_2(x)$

representando el *Número total de agentes muertos* y la *Cantidad total de azúcar recolectada* respectivamente en función de la política impositiva elegida x . De esta forma, para cada $0 \leq \lambda \leq 1$, se construye la **función objetivo**:

$$F_\lambda(x) \doteq \lambda F_1(x) - (1 - \lambda)F_2(x). \quad (2.1)$$

Es importante observar que a partir de la asignación de cada valor específico al **peso** λ , se está considerando cuánta importancia se le quiere otorgar a cada meta contrapuesta. En consecuencia, a partir de la definición de 2.1, estamos optando por intercambiar un problema multicriterio de dos funciones objetivo por un problema de optimización donde se busca satisfacer un único objetivo, es decir que vamos a minimizar una sola función (*función de escalarización*). Esto es lo que se denomina como el método de las **sumas ponderadas** para resolver un problema multiobjetivo.

Se observa entonces que las respuestas frente al interrogante planteado al término del capítulo anterior serán las soluciones del problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{mín}_{x \in \Omega} \quad F_\lambda(x) \\ \Omega \quad \doteq \quad [0, 1]^{40} \end{array} \right. \quad (2.2)$$

para cada $0 \leq \lambda \leq 1$ elegido. Es decir que, dependiendo la prioridad asignada a cada objetivo -representada mediante la elección de λ - se obtienen **soluciones óptimas** del problema de minimización de la forma x_λ . Vale destacar que, dado que uno de nuestros objetivos es *maximizar* el azúcar recolectada, el término que involucra a $F_2(x)$ aparece con signo negativo en la función que buscaremos minimizar.

Finalmente, una vez que hemos definido en términos matemáticos el problema que deseamos resolver, es necesario establecer un procedimiento para encontrar sus posibles soluciones de manera rigurosa. A diferencia del artículo [Oremland and Laubenbacher, 2014] donde se implementa el método de *Algoritmos Genéticos*, en la presente sección nos ocuparemos de encontrar respuestas que satisfagan de manera óptima la pregunta planteada en el apartado 1.2.2 -y reformulada recientemente- por medio del mencionado Método de Nelder-Mead Globalizado y Acotado. Para profundizar sobre el funcionamiento del método citado, y en particular sobre lo que respecta a su estrategia globalizadora de *restarts probabilísticos*, se puede consultar el artículo [Luersen and Le Riche, 2004].

2.3.2. Resultados de optimización

En el apartado final de la primera parte de esta tesis, procedemos a resumir los resultados obtenidos respecto a las posibles respuestas de la pregunta/problema

propuesta en el capítulo anterior sobre el MBA SugarScape. En este sentido, se muestran las Figuras 2.4, 2.5 y 2.6 donde se presentan los gráficos de lo arrojado por las distintas resoluciones del método de optimización introducido en la sección anterior y ejecutado en la plataforma MATLAB para ser aplicado a nuestra función objetivo.

Para llevar a cabo las diferentes implementaciones del proceso de optimización se debió **discretizar** el espacio donde pertenece λ para hacer posible la asignación de distintos valores a dicho peso. En particular, se eligió partir el intervalo $[0, 1]$ en 40 sub-intervalos de igual longitud y así establecer $\lambda \in \{0, \frac{1}{40}, \frac{2}{40}, \dots, \frac{39}{40}, 1\}$. Es decir que el peso de la función objetivo adoptó en cada implementación del método un valor de entre 41 opciones posibles. De esta manera se obtuvo una política impositiva óptima que minimiza la cantidad de *muertes* de los agentes maximizando el total de *impuestos* recaudados por cada λ elegido.

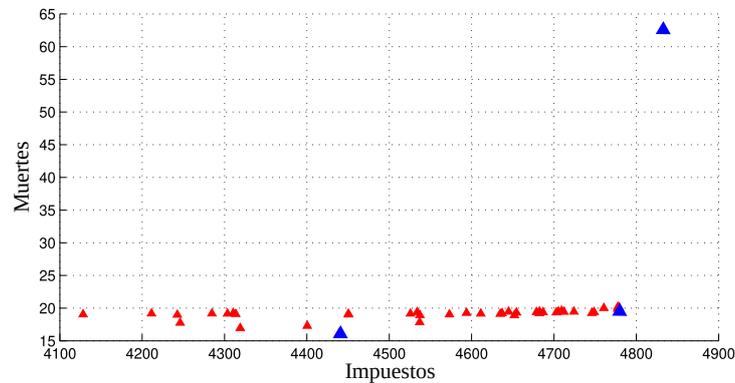
Por otro lado, como se explicará más adelante, se realizó una variación en los **cronogramas de actualización** a la hora de optimizar sobre las estructuras impositivas con el propósito de mejorar los resultados obtenidos en una primera instancia. Además, señalamos que en cada gráfico se muestran en distinto color determinados puntos que se consideran de especial interés para el estudio específico abordado.

Resultados según la estrategia de optimización

Cronograma completo En primer lugar, siguiendo el planteo del apartado anterior, para cada λ elegido entre los 41 posibles se corrió el GBNM sobre el espacio completo de variables ($x \in \Omega = [0, 1]^{40}$) y se obtuvieron 41 políticas de impuestos como resultado de cada implementación. En otras palabras, para cada uno de los pesos propuestos se buscó el valor donde se alcanza el óptimo de la función objetivo 2.2 -su mínimo- haciendo variar el argumento por el **espacio 40-dimensional** Ω -i.e. el conjunto admisible general. Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 2.4, donde se grafican la cantidad de muertes ocurridas versus los impuestos totales recolectados para cada una de las mencionas políticas impositivas encontradas según el λ elegido.

Al observar lo obtenido como resultado de la estrategia que hemos denominado de *cronograma completo*, se destacan tres puntos para tener en cuenta, los cuales están marcados en el gráfico 2.4 con color azul. El primero de ellos se corresponde con la política de impuestos que hace mínima la cantidad de muertes de los agentes, luego destacamos aquel punto correspondiente al máximo de los impuestos recaudados y finalmente resaltamos aquella política impositiva que logra, a nuestro criterio, un equilibrio razonable entre ambos objetivos. Los valores obtenidos por cada una de estas marcas, luego del redondeo pertinente, son: 16

Figura 2.4:
Implementación
del método con un cro-
nograma impositivo
completo.



muertes y 4439 unidades de azúcar recolectadas en impuestos para la primera, 62 muertes (el total de hormigas) y 4831 de impuestos en la segunda y finalmente 20 muertes y 4779 de azúcar recaudada para la última.

Cronogramas *hacia adelante* y *hacia atrás* Luego de buscar soluciones óptimas a nuestro problema mediante la aplicación del GBNM de la manera descrita, implementamos otras dos estrategias que designamos bajo el nombre de *cronogramas de actualización hacia adelante* y *cronogramas de actualización hacia atrás*. En términos generales, dichas metodologías consistieron en partir el conjunto Ω en 10 subconjuntos 4-dimensionales para optimizar **secuencialmente** sobre cada uno de ellos.

En efecto, dado que los impuestos son aplicados en 10 momentos (o etapas) determinadas a lo largo del modelo y se diferencian según la región del terreno donde son aplicados, es posible tomar sub-conjuntos de **4 variables** del conjunto total Ω y así representar precisamente la elección de las tasas de impuestos que serán cargados sobre los individuos en un momento específico en el tiempo. De esta manera, la estrategia de actualizar el cronograma impositivo *hacia adelante* consistió en optimizar, en primer lugar, sobre las primeras 4 variables que están representando las tasas de impuestos que se aplicarán en la etapa inicial. A continuación, una vez que se fijan dichas tasas óptimas, se procede a buscar los valores óptimos para el siguiente subconjunto de 4 variables y así poder fijarlos a la hora recaudar los impuestos de segundo término. Prosiguiendo de este modo, luego de avanzar sobre los 10 conjuntos de 4 variables, se completa la política de impuestos buscada para las 10 etapas de cobro.

De la misma forma descrita en el párrafo anterior se procede en la estrategia de actualización del cronograma *hacia atrás* pero comenzando a partir de la etapa final de recaudación -i.e. se optimiza en primer lugar sobre las últimas 4 variables- para luego ir “retrocediendo” una a una hacia la búsqueda de los valores óptimos que se asignarán a los impuestos que deberían cobrarse en etapas previas.

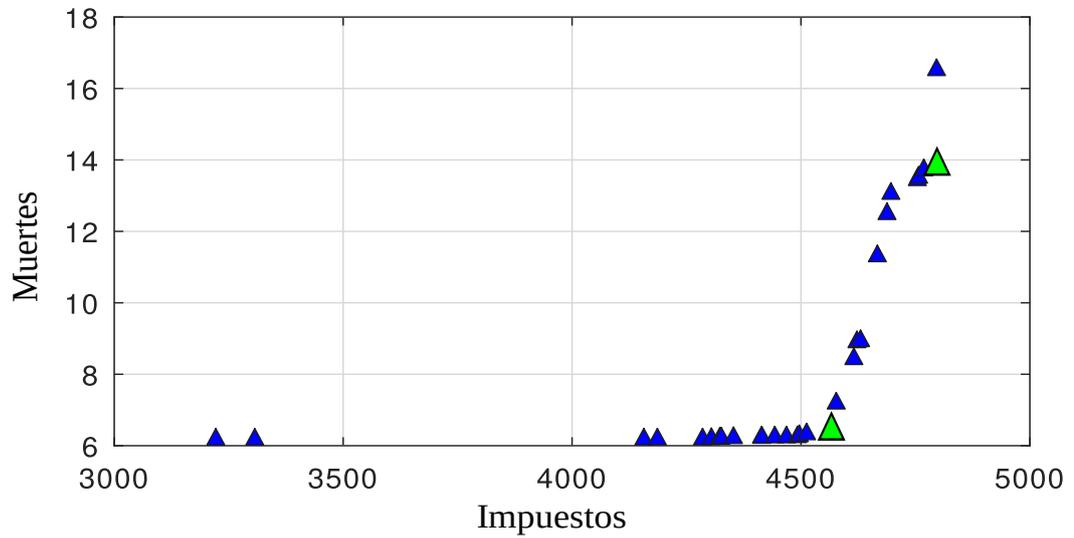


Figura 2.5: Implementación del método con un cronograma impositivo hacia adelante.

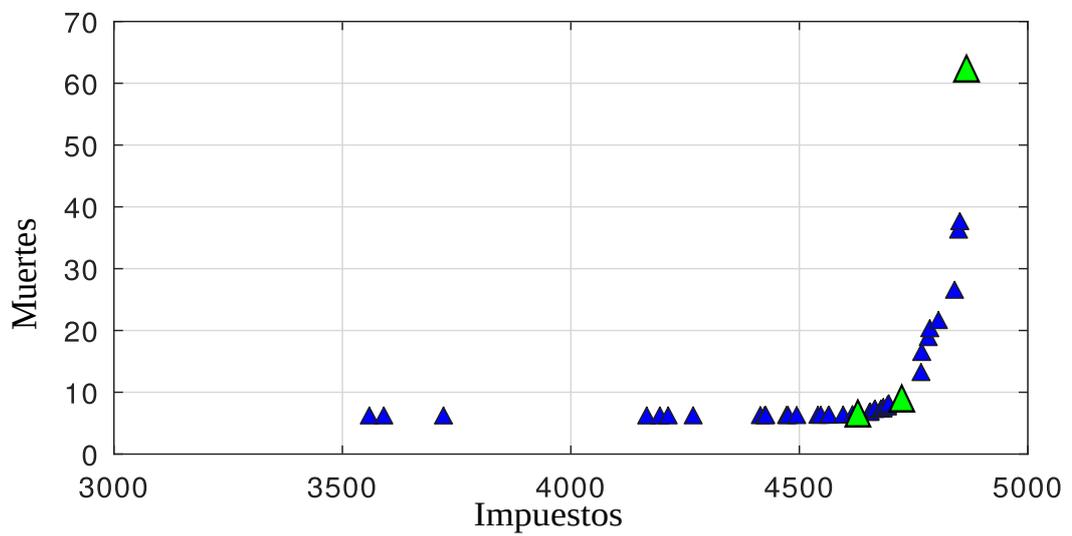


Figura 2.6: Implementación del método con un cronograma impositivo hacia atrás.

Frente a estas dos estrategias para la determinación de **valores óptimos** en la elección de una política impositiva que satisfaga el problema 2.2, observamos que ambos objetivos pudieron ser mejorados de manera significativa. En este sentido, en el gráfico 2.5 (cronograma hacia adelante), se destacan dos políticas encontradas, cada una de ellas relacionada a la preponderancia en el objetivo de minimizar las muertes y luego el de maximizar el azúcar recolectada. La primera de ellas mostró resultados que alcanzaron las 6 muertes y 4569 unidades de riqueza recaudada en tanto que la otra arrojó 14 muertes y 4795 de impuestos recogidos. Por otro lado, en la Figura 2.6 (cronograma hacia atrás), se advierten mejores resultados aún, los cuáles presentan valores de 6 muertes y 4629 unidades de azúcar recolectada en un caso, de 62 muertes con 4864 impuestos cobrados en otro y el último punto mostrando solo 8 muertes para las 4693 unidades de riqueza recaudada.

Para finalizar la Parte I de esta tesis, observamos que a partir de los resultados logrados se obtiene el **Frente de Pareto** del problema de optimización biobjetivo planteado inicialmente. Esto se muestra en la Figura 2.7, donde los valores del gráfico se obtienen como resultado de los distintos cronogramas impositivos utilizados. Además, se incorporan en la figura distintas anotaciones con la intención de destacar las políticas de impuestos que producen los “mejores resultados” en términos del cumplimiento de los objetivos contrapuestos que se desean alcanzar. Finalmente, señalamos que se incluyen entre dichas notas una mención sobre los resultados más destacados que se pueden encontrar en el artículo [Oremland and Laubenbacher, 2014], sirviendo de referencia para la comparación con nuestros propios resultados y así poder evidenciar que en todos los casos hemos conseguido encontrar políticas de impuestos que mejoran ambos objetivos.

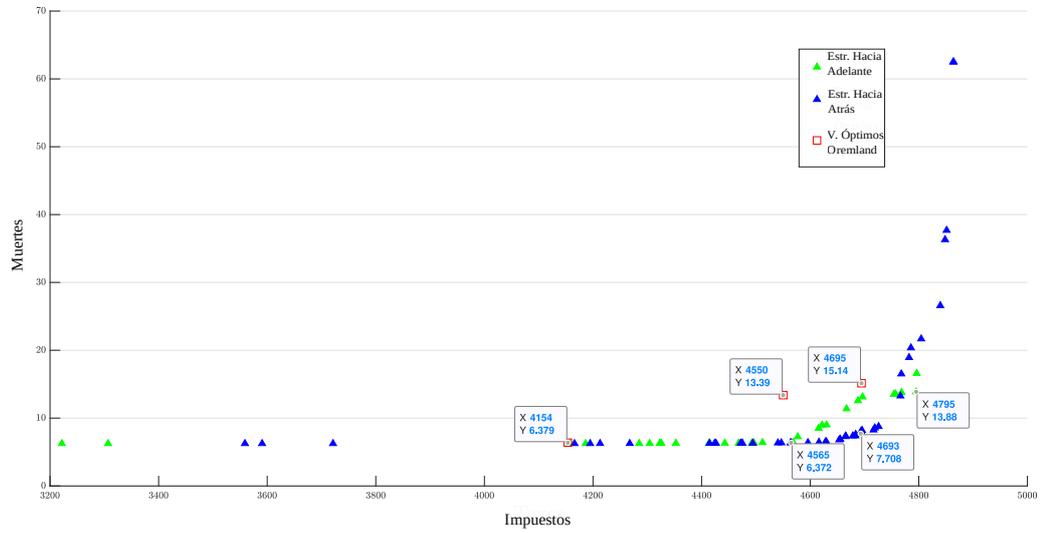


Figura 2.7: Frente de Pareto elaborado con las estrategias de actualización hacia adelante y hacia atrás.

Parte II

Modelos Basados en la Teoría Cinética de Partículas Activas

3. Un Modelo Cinético Para Distribución de Riqueza

La desigualdad mundial constituye un problema global importante y creciente. Mientras los mercados bursátiles en auge, las fusiones gigantescas y la especulación financiera proporcionan enormes recompensas a una pequeña minoría, una gran parte de la población mundial no se beneficia de los sistemas económicos de crecimiento y desarrollo. Para muchos, según el Global Policy Forum, el nivel de vida se ha estancado o ha disminuido, mientras que la carga de trabajo y la inseguridad han aumentado. Además, la desigualdad de ingresos y el atractivo de un trabajo bien remunerado en un país rico es uno de los motores más poderosos de la migración internacional [Knopoff, 2013, General Assembly, 2006]. Por ello, el aumento de la desigualdad se ha convertido en una prioridad para los responsables políticos y las partes interesadas de muchos países.

En un informe reciente, la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) señaló que, dentro de los países miembros, el 10% más rico de la población gana más de nueve veces los ingresos del 10% más pobre [Keeley, 2015]. Por poner un ejemplo, según [Wolff, 2016], el 20% más rico de las familias estadounidenses posee casi el 90% de la riqueza del país, mientras que la mayoría de los países se enfrentan a una situación aún peor.

En este contexto, en la segunda parte de esta tesis nos proponemos estudiar un modelo sobre distribución de la riqueza y desigualdad, el cual se ha abordado a través del enfoque teórico denominado bajo el nombre de *Teoría Cinética de Partículas Activas*.

3.1. Teoría Cinética de Partículas Activas

Para modelar sistemas vivientes, a diferencia del procedimiento sobre fenómenos físicos o químicos, se ha considerado pertinente recurrir a la **Teoría Cinética**

de Partículas Activas (KTAP de acuerdo a sus siglas en inglés). La misma posibilita la representación de sistemas complejos constituidos por un gran número de entidades vivas que interactúan espacialmente o mediante estructuras de redes. De acuerdo a los desarrollos postulados en la tesis doctoral: *Modelos matemáticos aplicados a problemas biomédicos y sistemas complejos* ([Knopoff, 2012]), frente a la complejidad de los sistemas vivientes, se requiere del desarrollo de técnicas matemáticas que superen a las agrupadas bajo la denominada Teoría Cinética Clásica.

En la presente sección se recuperarán los principales aspectos de la KTAP desarrollados por Knopoff y que se constituyen en antecedentes de lo que se propone abordar en este trabajo.

En este sentido, los métodos matemáticos de la Teoría Cinética Clásica se han empleado para modelar la evolución de sistemas constituidos por un gran número de partículas clásicas que interactúan entre sí (en física una partícula clásica es un cuerpo puntual con masa o carga). En particular, se han desarrollado para describir la dinámica de fluidos desde el punto de vista de la mecánica estadística, en lugar del enfoque tradicional de la mecánica del continuo.

Sin embargo, el enfoque clásico deja de ser válido cuando se desea representar y modelar un sistema constituido por un gran número de partículas, que además son entidades vivientes -ocasionalmente llamadas sujetos o individuos- como podrían ser, por ejemplo, células en un sistema biológico, individuos en una población socialmente activa, o conductores de vehículos en una ruta.

En la KTAP el estado microscópico de las partículas incluye, al igual que en la Teoría Cinética Clásica, variables geométricas (que identifican la posición y forma) y variables mecánicas (relacionadas a la velocidad). Sin embargo, para sistemas vivientes, la identificación del estado microscópico requiere variables adicionales específicas al sistema en cuestión. Por ejemplo, una variable relacionada a la función biológica en el caso de poblaciones celulares, o al estado social en el caso de dinámica poblacional.

De esta manera y siguiendo lo que se sostiene en [Bellomo, 2008a, Bellomo et al., 2009], es posible afirmar que la Teoría Cinética de Partículas Activas puede aplicarse a sistemas que exhiben las siguientes características:

- (i) El sistema está constituido por un gran número de entidades que interactúan, llamadas **partículas activas**, cuyo estado microscópico incluye, además de variables geométricas y mecánicas, una variable adicional llamada **actividad**, que representa la habilidad individual para expresar una función o estrategia específica. Los sistemas vivientes son capaces de desarrollar comportamientos que no pueden explicarse solamente mediante las leyes de la mecánica clásica y, en algunos casos, pueden generar procesos proliferativos y/o destructivos. Estos comportamientos no son simplemente expresio-

nes individuales y aisladas, sino que generalmente dependen de la interacción con todos los demás individuos.

- (ii) Debido a la **heterogeneidad** característica de los sistemas vivientes, la actividad distribuida sobre las partículas activas es diversa a la vez que se tiene la habilidad de expresar la misma función con diferentes intensidades. El estado global del sistema se describe por medio de una función de distribución sobre el estado microscópico de las partículas.
- (iii) Un **subsistema funcional** es un conjunto de partículas activas caracterizado por comprender a todas ellas que expresen la misma estrategia. De este modo, el sistema en su totalidad está constituido por varios subsistemas funcionales interactuantes. En general, la descomposición en subsistemas funcionales depende del fenómeno específico bajo estudio.
- (iv) Las **interacciones** modifican el estado de las entidades interactuantes, mientras que su estrategia puede ser modificada de acuerdo a la estructura de su distribución heterogénea. Las interacciones no ocurren solamente por contacto, sino que pueden distribuirse en el espacio o a través de redes y, generalmente, los sistemas vivientes se comunican por distintos medios. Como consecuencia, cada entidad interactúa con todas las demás entidades que se encuentran en un cierto dominio de interacción, que en algunos casos está identificado por una zona de visibilidad mientras que en otros por una red de comunicación.

Finalmente es importante destacar que, al estar considerando sistemas vivientes, se les atribuye a estos tanto una **capacidad de aprendizaje** que produce habilidades estratégicas e interacciones que evolucionan en el tiempo como características de **mutación y adaptación** de los mismos.

3.1.1. Aspectos generales

A la hora de representar un sistema como el descrito anteriormente, una primera cuestión que debe esclarecerse es aquella relacionada a las escalas de observación y representación. En efecto, es posible identificar la **escala microscópica** como aquella que corresponde a la evolución de las variables que permiten describir el estado físico de cada partícula individual. Cuando el número de partículas es suficientemente grande y se pueden obtener promedios locales del estado microscópico tomados en un volumen elemental que tiende a cero, se puede hablar de **escala macroscópica**. Ésta, pues, corresponde a la evolución de variables promediadas localmente, llamadas variables macroscópicas. Entre una y otra escala se encuentran otras variables que podemos atribuir a la llamada **escala mesoscópica**.

En el enfoque de la Teoría Cinética de Partículas Activas la escala microscópica se utiliza para modelar la dinámica de interacción entre dichas partículas activas, mientras que el estado del sistema se describe mediante una función de distribución generalizada sobre el estado microscópico. A continuación se formalizan estas ideas.

Definición 1. El estado de cada partícula activa es descrito por una variable física llamada **estado microscópico**, denotado por \mathbf{w} :

$$\mathbf{w} = \{\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{u}\} \in D_{\mathbf{w}} = D_{\mathbf{x}} \times D_{\mathbf{v}} \times D_{\mathbf{u}},$$

donde \mathbf{x} es el estado microscópico geométrico, \mathbf{v} es el estado microscópico mecánico y \mathbf{u} denota la actividad. El espacio de los estados microscópicos $D_{\mathbf{w}}$ se denomina **espacio de estados** e incluye el espacio de estados geométricos $D_{\mathbf{x}}$, el espacio de estados mecánicos $D_{\mathbf{v}}$ y el espacio de actividades $D_{\mathbf{u}}$.

Definición 2. La **función de distribución generalizada** está definida por:

$$f : [0, \infty) \times D_{\mathbf{w}} \rightarrow [0, \infty)$$

la cual otorga la descripción del estado global del sistema. Aquí $f(t, \mathbf{w}) d\mathbf{w}$ denota el número de partículas activas cuyo estado, al tiempo t , se encuentra en el volumen elemental $[\mathbf{w}, \mathbf{w} + d\mathbf{w}]$ del espacio de estados.

Observación. Si el número de partículas activas es constante en el tiempo, entonces la función de distribución se puede normalizar y pensarse como una densidad de probabilidad. En la práctica, es conveniente llevar a cabo esta normalización respecto del número de partículas activas al tiempo $t = 0$.

El conocimiento de f permite el cálculo de cantidades macroscópicas, bajo ciertas condiciones de integrabilidad. En particular, la integración sobre algunas de las componentes de \mathbf{w} da como resultado una densidad marginal. Por ejemplo, momentos de orden cero proveen información sobre el tamaño o población local:

$$n[f](t, \mathbf{x}) = \int_{D_{\mathbf{v}} \times D_{\mathbf{u}}} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{u}) d\mathbf{v} d\mathbf{u},$$

donde los corchetes se utilizan para indicar el hecho que n puede interpretarse como un operador aplicado a la función de distribución f . Si además se integra sobre el conjunto $D_{\mathbf{x}}$, se obtiene el tamaño o población total del sistema:

$$N[f](t) = \int_{D_{\mathbf{x}}} n[f](t, \mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

que puede depender del tiempo debido a procesos de nacimiento y muerte relacionados a las interacciones, así como también al flujo de partículas activas a través

de las fronteras del conjunto. Momentos de primer orden representan cantidades macroscópicas lineales relacionadas a la mecánica o a la actividad del sistema.

Todas las definiciones dadas anteriormente pueden generalizarse de forma inmediata al caso de sistemas constituidos por n poblaciones interactuantes o subsistemas funcionales de partículas activas, denotadas por el subíndice $i = 1, \dots, n$, donde cada una de ellas está caracterizada por una cierta forma de organizar su actividad y por diferentes interacciones con las demás poblaciones. En este caso, la descripción del sistema viene dada por la función de distribución:

$$f_i : [0, \infty) \times D_{\mathbf{w}} \rightarrow [0, \infty)$$

de la i -ésima población. El conjunto de las funciones de distribución de todas las poblaciones se denotará por $\mathbf{f} = \{f_i\}$.

Todos los cálculos anteriores se extienden directamente. Por ejemplo, el tamaño local de la población i -ésima en la posición \mathbf{x} al tiempo t viene dado por:

$$n_i[\mathbf{f}](t, \mathbf{x}) = \int_{D_{\mathbf{v}} \times D_{\mathbf{u}}} f_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{u}) d\mathbf{v} d\mathbf{u},$$

el tamaño total de la población i -ésima, al tiempo t , es:

$$N_i(t) = \int_{D_{\mathbf{x}}} n_i[\mathbf{f}](t, \mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

y por lo tanto el tamaño total del sistema es la suma de los tamaños de cada subsistema funcional:

$$N(t) = \sum_{i=1}^n N_i(t).$$

3.1.2. Interacciones microscópicas

El desarrollo de modelos mediante la Teoría Cinética de Partículas Activas requiere, al igual que en el caso de la Teoría Cinética Clásica, estudiar la evolución de las funciones de distribución generalizadas. El primer paso para obtener las ecuaciones de evolución es modelar apropiadamente las interacciones microscópicas, las cuales, expresadas para el caso general de *sistemas de poblaciones*, se refieren esencialmente a tres tipos de partículas activas:

- **Partícula test**, tomada como representante del sistema, que pertenece al subsistema funcional i y cuyo estado microscópico al tiempo t está dado por \mathbf{w} .
- **Partícula candidata**, que pertenece al subsistema funcional h y cuyo estado microscópico al tiempo t está dado por \mathbf{w}_* .

- **Partícula de campo**, perteneciente al subsistema funcional k y cuyo estado microscópico al tiempo t está dado por \mathbf{w}^* .

Donde las interacciones pueden ser de dos tipos:

- *Interacciones conservativas*, que modifican el estado (geométrico, mecánico o actividad) de las partículas involucradas, pero sin cambiar el tamaño de la población.
- *Interacciones no conservativas* (proliferativas o destructivas), que generan nacimiento o muerte de partículas activas.

La dinámica de este tipo de interacciones puede visualizarse en las Figuras 3.1 y 3.2 .

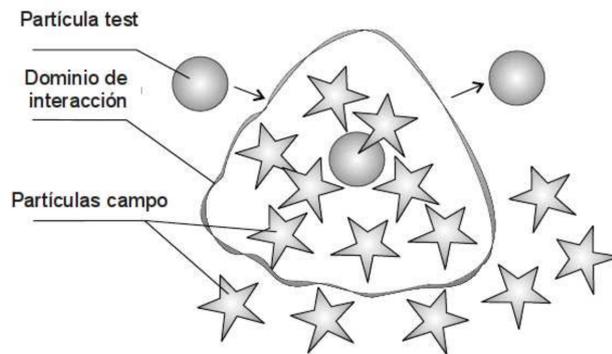


Figura 3.1: Interacciones entre partículas activas.

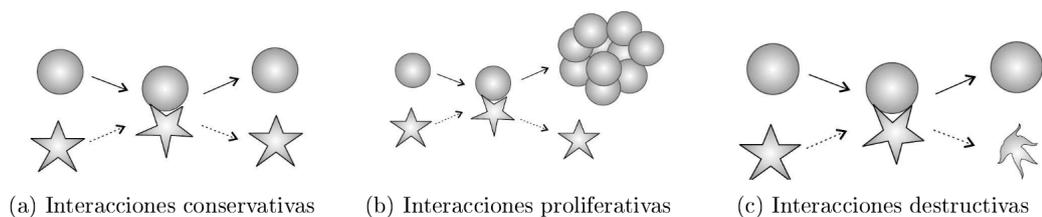


Figura 3.2: Interacciones conservativas y no-conservativas entre partículas activas.

De esta manera, las interacciones microscópicas pueden modelarse teniendo en cuenta las siguientes funciones:

- La **tasa o frecuencia de encuentros** $\eta_{hk}(\mathbf{w}_*, \mathbf{w}^*)$ entre una partícula candidata de la población h con estado \mathbf{w}_* y una partícula de campo de la población

k con estado \mathbf{w}^* , que depende del estado microscópico y del tipo de población al cual pertenecen las partículas que interactúan.

- La **densidad de probabilidad de transición**:

$$\varphi_{hk}^i(\mathbf{w}_*, \mathbf{w}^*; \mathbf{w}) : D_{\mathbf{w}} \times D_{\mathbf{w}} \times D_{\mathbf{w}} \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

donde $\varphi_{hk}^i(\mathbf{w}_*, \mathbf{w}^*; \mathbf{w})$ denota la probabilidad de que una partícula candidata perteneciente a la población h con estado \mathbf{w}_* pase al estado \mathbf{w} de la población i luego de interactuar con una partícula de campo perteneciente a la población k con estado \mathbf{w}^* . El término de interacción φ tiene la estructura de una densidad de probabilidad con respecto a la variable \mathbf{w} , es decir que se cumple la siguiente condición:

$$\forall \mathbf{w}_*, \mathbf{w}^*, \quad \forall h, k, i : \int_{D_{\mathbf{w}}} \varphi_{hk}^i(\mathbf{w}_*, \mathbf{w}^*; \mathbf{w}) d\mathbf{w} = 1. \quad (3.1)$$

Las funciones η , φ y la condición 3.1 permiten calcular los flujos C^+ y C^- para el caso de n poblaciones de partículas activas que entran y salen del elemento de volumen $d\mathbf{w}$ del espacio de estados:

$$C_i^+[\mathbf{f}](t, \mathbf{w}) = \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n \int_{D_{\mathbf{w}} \times D_{\mathbf{w}}} \eta_{hk}(\mathbf{w}_*, \mathbf{w}^*) \varphi_{hk}^i(\mathbf{w}_*, \mathbf{w}^*; \mathbf{w}) f_h(t, \mathbf{w}_*) f_k(t, \mathbf{w}^*) d\mathbf{w}_* d\mathbf{w}^*, \quad (3.2)$$

$$C_i^-[\mathbf{f}](t, \mathbf{w}) = f_i(t, \mathbf{w}) \sum_{k=1}^n \int_{D_{\mathbf{w}}} \eta_{ik}(\mathbf{w}, \mathbf{w}^*) f_k(t, \mathbf{w}^*) d\mathbf{w}^*, \quad (3.3)$$

Si consideramos ahora interacciones no conservativas entre la partícula test (o candidata) y la partícula de campo, que ocurren con la misma tasa de encuentros η recién definida, debemos tener en cuenta la existencia de eventos proliferativos y/o destructivos. Para ello, se definen las tasas de proliferación y destrucción:

- La **tasa de proliferación** $\mu_{hk}^i(\mathbf{w}_*, \mathbf{w}^*; \mathbf{w})$ generada por la interacción de la partícula candidata perteneciente a la población h con estado \mathbf{w}_* , y la partícula de campo perteneciente a la población k con estado \mathbf{w}^* . La proliferación da lugar a una nueva entidad que pertenece a la población i y tiene el estado \mathbf{w} de la partícula test.

- La **tasa de destrucción** $v_{ik}(\mathbf{w}, \mathbf{w}^*)$ generada por la interacción entre la partícula test de la población i con estado \mathbf{w} y la partícula de campo de la población k con estado \mathbf{w}^* . Nuevamente aquí, se asume que la partícula destruida desaparece en el mismo estado de la partícula test.

De este modo, el flujo neto en el elemento de volumen $d\mathbf{w}$ del espacio de estados de la partícula test debido a procesos proliferativos y destructivos puede escribirse, respectivamente, como:

$$P_i[\mathbf{f}](t, \mathbf{w}) = \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n \int_{D_{\mathbf{w}} \times D_{\mathbf{w}}} \eta_{hk}(\mathbf{w}_*, \mathbf{w}^*) \mu_{hk}^i(\mathbf{w}_*, \mathbf{w}^*; \mathbf{w}) f_h(t, \mathbf{w}_*) f_k(t, \mathbf{w}^*) d\mathbf{w}_* d\mathbf{w}^*, \quad (3.4)$$

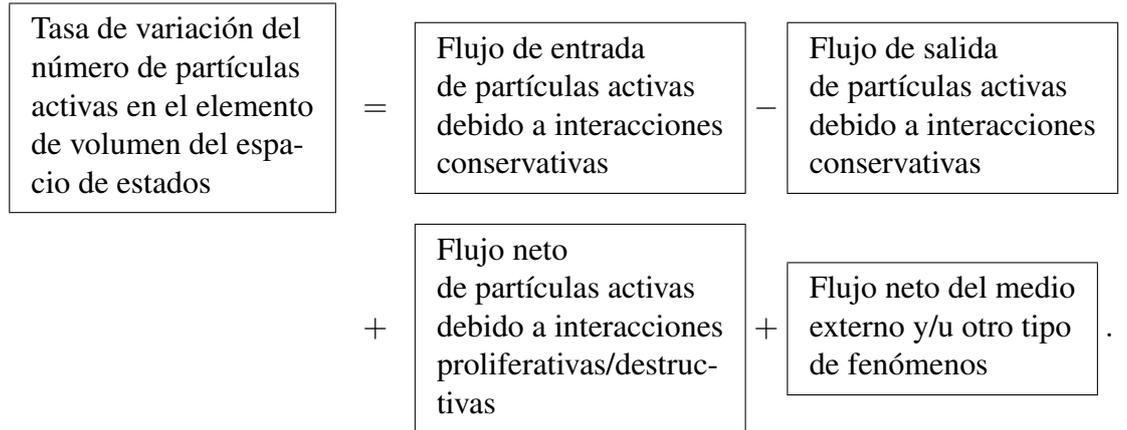
$$D_i[\mathbf{f}](t, \mathbf{w}) = f_i(t, \mathbf{w}) \sum_{k=1}^n \int_{D_{\mathbf{w}}} \eta_{ik}(\mathbf{w}, \mathbf{w}^*) v_{ik}(\mathbf{w}, \mathbf{w}^*) f_k(t, \mathbf{w}^*) d\mathbf{w}^*. \quad (3.5)$$

3.1.3. Estructuras matemáticas y caso discreto

Una vez postulados los principales elementos de la teoría, nos enfocaremos en las aplicaciones de la misma. En este sentido, los modelos matemáticos derivados a partir de la Teoría Cinética de Partículas Activas se basan en un análisis de la evolución de las funciones de distribución generalizadas. La ecuación de evolución puede escribirse formalmente como:

$$\mathcal{L}_i f_i = \mathcal{N}_i f_i, \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

donde \mathcal{L}_i es un operador lineal y \mathcal{N}_i es un operador no lineal, actuando sobre las funciones de distribución generalizadas. Estos operadores pueden obtenerse igualando la tasa de variación de la función de distribución en cada elemento de volumen del espacio de estados a los flujos de entrada y salida debido a interacciones microscópicas:



La expresión anterior puede especificarse de acuerdo a las funciones de interacción definidas en la sección anterior, obteniendo la siguiente ecuación de balance:

$$\frac{df_i}{dt} = C_i^+[\mathbf{f}] - C_i^-[\mathbf{f}] + P_i[\mathbf{f}] - D_i[\mathbf{f}] + E_i, \quad (3.6)$$

para $i = 1, \dots, n$ y donde E_i denota el flujo neto del medio externo y aquel debido a otros fenómenos hasta aquí no considerados. Por consiguiente, al retomar la definición de derivada material como la tasa de cambio de una cierta magnitud física para un elemento material sujeto a un campo de velocidades ([Bird et al., 2006]), se tiene que:

$$\frac{df_i}{dt} = \frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_i,$$

donde el primer término del miembro derecho es la componente local, que denota la variación asociada al cambio temporal en la posición actual; en tanto que el segundo término es la componente convectiva, que corresponde a la variación asociada al cambio de posición de la partícula.

De este modo, la sustitución de las ecuaciones (3.2)-(3.5) en (3.6) da como resultado la siguiente expresión general:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \right) f_i(t, \mathbf{w}) = \\ & \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n \int_{D_{\mathbf{w}} \times D_{\mathbf{w}}} \eta_{hk}(\mathbf{w}_*, \mathbf{w}^*) \varphi_{hk}^i(\mathbf{w}_*, \mathbf{w}^*; \mathbf{w}) f_h(t, \mathbf{w}_*) f_k(t, \mathbf{w}^*) d\mathbf{w}_* d\mathbf{w}^* \\ & \quad - f_i(t, \mathbf{w}) \sum_{k=1}^n \int_{D_{\mathbf{w}}} \eta_{ik}(\mathbf{w}, \mathbf{w}^*) f_k(t, \mathbf{w}^*) d\mathbf{w}^* \\ & + \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n \int_{D_{\mathbf{w}} \times D_{\mathbf{w}}} \eta_{hk}(\mathbf{w}_*, \mathbf{w}^*) \mu_{hk}^i(\mathbf{w}_*, \mathbf{w}^*; \mathbf{w}) f_h(t, \mathbf{w}_*) f_k(t, \mathbf{w}^*) d\mathbf{w}_* d\mathbf{w}^* \\ & \quad - f_i(t, \mathbf{w}) \sum_{k=1}^n \int_{D_{\mathbf{w}}} \eta_{ik}(\mathbf{w}, \mathbf{w}^*) v_{ik}(\mathbf{w}, \mathbf{w}^*) f_k(t, \mathbf{w}^*) d\mathbf{w}^* + E_i. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Ahora bien, para continuar con los aspectos centrales de la KTAP, los cuales resultan esenciales para el abordaje del trabajo que presentaremos a continuación, es necesario hacer mención al caso particular de los **modelos discretos**. En efecto, algunos sistemas complejos tales como sistemas celulares o sociales, pueden ser caracterizados por una variable discreta. Entre las causas que pueden motivar la discretización de la variable actividad (ver por ejemplo [Bellouquid and Delitala, 2006]) encontramos que el hecho de reducir la complejidad de las ecuaciones continuas puede resultar útil a la hora del tratamiento computacional. Otras veces, es el propio análisis biológico el que sugiere discretizar, esto ocurre cuando el estado microscópico, en lugar de ser representado por

una distribución continua, puede tomar únicamente una cantidad finita de valores. Como veremos a continuación, la ecuación de evolución para el caso discreto es un sistema de ecuaciones diferenciales parciales correspondiente al sistema íntegro-diferencial (3.7) y en el caso de homogeneidad espacial se convierte en un sistema de ecuaciones ordinarias.

Sistemas discretos espacialmente homogéneos

A raíz de las necesidades conceptuales de las secciones subsiguientes, a continuación indagaremos más precisamente en el caso particular de modelos discretos espacialmente homogéneos, donde la ecuación de evolución se expresará como un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDOs). Para más detalles, remitimos al lector a los trabajos [Bellouquid and Delitala, 2006, Bertotti and Delitala, 2004a].

En efecto, consideremos un sistema formado por n poblaciones en el cual las interacciones dominantes son de tipo biológico. Un modelo discreto en el caso espacialmente homogéneo es aquel en el cual la dependencia espacial y mecánica puede despreciarse y la variable actividad se discretiza dentro de un conjunto de valores:

$$I_u = \{u_1, \dots, u_j, \dots, u_m\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Así, la ecuación de evolución se referirá a las funciones de distribución f_{ij} correspondientes a la población i -ésima y al estado j -ésimo (es decir u_j). De este modo, el sistema original de n ecuaciones íntegro-diferenciales (3.7) se sustituye por un sistema de $n \times m$ EDO's.

La derivación de las ecuaciones sigue la misma línea que para el caso general continuo. El primer paso consiste en representar las interacciones microscópicas en las que intervienen la partícula *test*, representante del sistema, perteneciente a la población i con estado u_j ; la partícula *candidata* perteneciente a la población h con estado u_p ; y la partícula de *campo* perteneciente a la población k con estado u_q . Dichas interacciones vienen descritas por las siguientes funciones:

- La **tasa o frecuencia de encuentros** η_{hk}^{pq} , que depende de las poblaciones h, k de las partículas interactuantes, así como también de sus estados microscópicos u_p, u_q .

- La **densidad de probabilidad de transición** $\mathcal{B}_{hk}^{pq}(i, j)$ que denota la densidad de probabilidad de que una partícula candidata de la población h con estado u_p experimente una transición al estado u_j de la población i , luego de una interacción con una partícula de campo de la población k con estado u_q . Esta función tiene la estructura de una densidad de probabilidad con respecto al estado de la partícula test:

$$\forall u_p, u_q \in I_u, \quad \forall h, k = 1, \dots, n: \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mathcal{B}_{hk}^{pq}(i, j) = 1.$$

• La **tasa de proliferación** $\mu_{hk}^{pq}(i, j)$ corresponde al nacimiento de partículas en el estado u_j de la población i , debido a la interacción entre una partícula candidata de la población h con estado u_p y una partícula de campo perteneciente a la población k con estado u_q .

• La **tasa de destrucción** ν_{ik}^{jq} corresponde a la desaparición de una partícula de la población i con estado u_j como consecuencia de un encuentro con una partícula de la población k con estado u_q .

Teniendo en cuenta el balance (3.6) realizado para el caso continuo, se obtiene para este caso el siguiente sistema de EDO's:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f_{ij}(t) &= \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m \eta_{hk}^{pq} \mathcal{B}_{hk}^{pq}(i, j) f_{hp}(t) f_{kq}(t) \\ &- f_i^j(t) \sum_{k=1}^n \sum_{q=1}^m \eta_{ik}^{jq} f_{kq}(t) \\ &+ \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m \eta_{hk}^{pq} \mu_{hk}^{pq}(i, j) f_{hp}(t) f_{kq}(t) \\ &- f_i^j(t) \sum_{k=1}^n \sum_{q=1}^m \eta_{ik}^{jq} \nu_{ik}^{jq} f_{kq}(t) + E_{ij}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde E_{ij} representa el flujo externo o debido a otro tipo de fenómenos en el estado u_j de la población i .

3.2. Un modelo matemático de distribución de riqueza y desigualdad ¹

3.2.1. Introducción

El término desigualdad puede ser a veces ambiguo, ya que se refiere a la amplitud de la distribución de los recursos disponibles para cada individuo. En el

¹Esta sección fue elaborada, fundamentalmente, a partir del artículo de Buffa, et. al. publicado bajo el título: *Parameter Estimation and Measurement of Social Inequality in a Kinetic Model for Wealth Distribution* (ver [Buffa et al., 2020]). Se recupera aquí lo desarrollado en el apartado: "Mathematical Model of Wealth Distribution"

libro [Hurst et al., 2016] se ofrece un excursus detallado sobre las múltiples formas de desigualdad, desde la desigualdad de condiciones (por ejemplo, ingresos, riqueza, bienes materiales, etc.) hasta la desigualdad de oportunidades (por ejemplo, el acceso a la educación y la salud, etc.). Por lo tanto, si bien es necesario adoptar una variedad de enfoques para una comprensión completa del problema, las desigualdades económicas se han estudiado hasta ahora en el contexto de los ingresos y la riqueza [Yakovenko and Rosser Jr, 2009, Chakrabarti et al., 2013].

Para describir cuantitativamente estas situaciones, una de las medidas de desigualdad más utilizadas en la literatura especializada es el índice (o coeficiente) de **Gini**. En pocas palabras, el coeficiente de Gini (g) mide la dispersión estadística de la distribución de la renta o la riqueza de la población de un país. En efecto, g es un número entre 0 y 1, de manera tal que se cumple que $g = 0$ corresponde a una situación de perfecta igualdad, donde los valores de riqueza son iguales entre sí (por ejemplo, donde todos los individuos tienen los mismos ingresos). Por el contrario, $g = 1$ expresa la máxima desigualdad entre dichos valores, por ejemplo una situación en la que sólo una persona dispone de todos los ingresos mientras que los demás no tienen ninguno. Cabe mencionar que, aunque los términos renta y riqueza suelen utilizarse indistintamente, no son exactamente lo mismo ya que la riqueza representa lo que las personas poseen, mientras que la renta está referida a lo que ganan. En este sentido es posible afirmar que, a largo plazo, los ingresos generan riqueza al ser gestionados adecuadamente.

Teniendo en cuenta lo antes expuesto, en esta sección trataremos con un modelo matemático sobre distribución de la riqueza con la intención primordial de captar algunas características -por demás complejas- de los sistemas sociales. El enfoque del modelo se basa en las herramientas de la **Teoría Cinética de las Partículas Activas** descriptas con precisión en la sección 3.1, cuyas características esenciales para este caso particular se pueden resumir como sigue. El sistema global se subdivide en *subsistemas funcionales* constituidos por entidades, denominadas *partículas activas*, cuyo estado individual se denomina *actividad*; el estado de cada subsistema funcional se define mediante una función de distribución sobre la variable de actividad; las interacciones son, en general, deslocalizadas y no linealmente aditivas, y se modelan mediante “juegos estocásticos”, en los que el estado de las partículas que interactúan y el resultado de las interacciones sólo pueden conocerse en probabilidad. Por último, la evolución de la distribución de probabilidad se obtiene mediante un equilibrio de partículas dentro de volúmenes elementales del espacio de los estados microscópicos, donde la dinámica de entrada y salida de partículas está relacionada con las interacciones a escala microscópica.

Este enfoque se ha aplicado hasta ahora para derivar una variedad de modelos de sistemas complejos en ciencias de la vida, como la formación de opinión [Dolfin and Lachowicz, 2015, Knopoff, 2014], el aprendizaje colectivo

[Burini and De Lillo, 2019, Burini et al., 2016], y la economía del comportamiento [Dolfin et al., 2017], entre muchos otros. Más específicamente relacionado con la distribución de la riqueza, el modelo pionero basado en KTAP fue propuesto por Bertotti y Delitala en [Bertotti and Delitala, 2004b], y luego desarrollado en [Bertotti and Delitala, 2008], donde las subpoblaciones se describen por clases sociales y los individuos interactúan y experimentan transiciones conservativas entre estas clases. En [Knopoff, 2013] este modelo se especializó para dar cuenta de la migración de una nación a otra. Además, [Bellomo et al., 2013] introduce parámetros dependientes del tiempo, y [Knopoff and Torres, 2018] propone una técnica para obtenerlos como soluciones de problemas de control óptimo adecuados. También, es interesante advertir al lector sobre [Furioli et al., 2017], que presenta ecuaciones de tipo Fokker-Planck para modelar fenómenos socioeconómicos y las recientes contribuciones [Furioli et al., 2020, Lim and Min, 2020] centradas en ecuaciones cinéticas no maxwellianas que modelan la evolución de la distribución de la riqueza.

En la literatura podemos encontrar varios modelos que tratan la distribución de la riqueza y la desigualdad. Como ejemplo, tenemos los modelos de dinastía [Quadrini and Rios-Rull, 1997] y los modelos de ciclo de vida [De Nardi and Fella, 2017] en varias versiones. La principal ventaja de los **modelos cinéticos** es que manejan diferentes *escalas*: microscópica (donde se realiza la modelización), mesoscópica (funciones de distribución) y macroscópica (promedios de las funciones de distribución). Por ejemplo, modelando la interacción individual (escala microscópica) podemos obtener el número de individuos de cada clase social (escala mesoscópica), y finalmente, la riqueza, la riqueza per-cápita y el coeficiente de Gini (escala macroscópica).

En cuanto a los modelos que tienen en cuenta la *distribución de la riqueza* a un nivel más granular, uno de los primeros modelos fue propuesto por Thomas Schelling en [Schelling, 1971] en el que los agentes se dividen en dos clases que representan una división social binaria. En [Benard and Willer, 2007] se amplía el modelo de Schelling, incorporando la riqueza y el estatus de los agentes y la conveniencia y asequibilidad de las residencias. Además, en [Hatna and Benenson, 2012] los autores se preguntan si el modelo de Schelling puede reproducir algunos patrones de las ciudades israelíes, investigando la dinámica del modelo en términos de dependencia de los umbrales de tolerancia específicos de cada grupo y de la relación de tamaños de dos grupos de agentes. Otra extensión del modelo de Schelling se encuentra en [Hazan and Randon-Furling, 2013], donde se estudia el comportamiento de una clase de Schelling introduciendo el concepto de agentes cambiantes. Finalmente, en [Chuang et al., 2019] se presenta un modelo de red basado en agentes para estudiar las interacciones “anfitriones” e “invitados”, identificando las condiciones bajo las cuales surgen sociedades cooperativas o no-cooperativas.

Como mencionamos anteriormente, en el desarrollo que se presentará a continuación consideramos una población *espacialmente homogénea* dividida en subsistemas funcionales -en este caso interpretados como *clases sociales*-, caracterizados por su riqueza. Las interacciones entre los individuos generan, con ciertas probabilidades, *intercambios no-conservativos* que pueden permitirles cambiar su estatus social. Además, y con el fin de estudiar la dinámica en intervalos de tiempo largos, se permite que el tamaño de la población cambie con el tiempo introduciendo así una *tasa de proliferación neta*. Con ello, el modelo se caracterizará principalmente por las probabilidades de transición de una clase social a otra y por la introducción de un umbral que tendrá como fin la distinción entre los comportamientos altruistas de los competitivos, lo que básicamente delimitará la equidad de la distribución de la riqueza en la sociedad. De esta manera, nuestro principal objetivo es generalizar el modelo original [Bertotti and Delitala, 2004b] relajando los supuestos sobre la conservación de los momentos cero-ésimo y de primer orden y realizar un análisis cualitativo del modelo, haciendo hincapié en el papel del coeficiente de Gini.

El desarrollo y análisis que realizaremos sobre el modelo mencionado está organizado de la siguiente manera. En la sección 3.2.2 se presenta el modelo matemático y se introducen las variables y parámetros clave. Seguidamente, en la primera sección del capítulo 4 se realiza un análisis cualitativo del modelo, estudiando en primer lugar algunas características de los estados de equilibrio y asintóticos y, a continuación, la influencia de los parámetros del modelo en el coeficiente de Gini. Por último, la sección 4.2 está dedicada a distintos experimentos numéricos con el objetivo de analizar la robustez del modelo mediante la estimación de sus parámetros a partir de datos empíricos.

3.2.2. Presentación del modelo

Consideremos una gran población de individuos homogéneamente distribuidos en el espacio. Dichos sujetos son considerados como las denominadas **partículas activas** y se caracterizan mediante una variable escalar discreta $u \in I_u = \{u_1, \dots, u_n\}$ tal que $u_1 < \dots < u_n$. Como hemos visto en la primer sección de este capítulo, tal variable se denomina **actividad** y en este caso está representando la clase social (relacionada con la riqueza o los ingresos) de los sujetos. Las partículas (o individuos) con clase social u_1 representan la clase más pobre, y los individuos con clase social u_n representan la clase más rica. Así, $n \in \mathbb{N}$ es el número de clases sociales en que puede dividirse la población.

Es importante notar que el uso de una variable discreta es técnicamente conveniente, ya que los niveles sociales se identifican, en la práctica, sólo dentro de los intervalos correspondientes a los estados discretos.

El estado global del sistema se describe mediante las **funciones de distribu-**

ción generalizadas:

$$f_i : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad \text{para } i = 1, \dots, n, \quad (3.9)$$

de forma que $f_i(t)$ denota el número de partículas activas que, al tiempo t , tienen el estado u_i . Tener en cuenta que aquí estamos identificando el subsistema funcional al cual pertenece cada individuo con el estado de su variable actividad, por lo cual las funciones de distribución generalizadas quedan completamente definidas mediante un solo subíndice. El valor $T > 0$ representa el tiempo máximo de observación y podría ser eventualmente $T = \infty$. El vector $[f_1(t), \dots, f_n(t)]^T \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ se denota por $\mathbf{f}(t)$. De este modo, el tamaño total $N(t)$ del sistema completo viene dado por la suma de todos sus componentes:

$$N(t) \doteq \sum_{i=1}^n f_i(t). \quad (3.10)$$

Además, los momentos de orden superior permiten calcular otras variables macroscópicas. Por ejemplo, la **riqueza total** $W(t)$ viene dada por el momento de primer orden:

$$W(t) \doteq \sum_{i=1}^n u_i f_i(t), \quad (3.11)$$

y la **riqueza per-cápita** se denota por:

$$V(t) \doteq \frac{W(t)}{N(t)}. \quad (3.12)$$

En los modelos existentes [Bertotti and Delitala, 2004b, Knopoff, 2013, Bellomo et al., 2013], se asume que tanto la riqueza como la población son constantes en el tiempo. Sin embargo, este supuesto no siempre es cierto, al menos cuando se observan períodos de tiempo más largos. De hecho, medir los cambios en la riqueza permite medir la sustentabilidad del desarrollo: por ejemplo, el valioso informe [Jarvis et al., 2011] del Banco Mundial afirma que, entre los años 1995 y 2005, la riqueza mundial aumentó, en términos per-cápita, un 17% en *dólares estadounidenses constantes* de 2005.

Se resume ahora brevemente el modelo cinético social que ha sido construido en base al enfoque general presentado en la sección 3.1 (remitirse a [Bertotti and Delitala, 2004b, Knopoff, 2013, Bellomo et al., 2013]) para más detalles). En efecto, las interacciones consideradas en este modelo implican tres tipos de partículas, a saber, las partículas test, candidatas y de campo. Más concretamente, nos centramos en el estado de una **partícula test**, la cual es representativa del sistema y cuya función de distribución es f_i . Esta partícula puede interactuar con una **partícula de campo** -con función de distribución f_k - y perder su estado

con una probabilidad determinada. Por otro lado, una **partícula candidata** con función de distribución f_h también puede interactuar con partículas de campo y ganar, con cierta probabilidad, el estado test. Se sugiere al lector interesado que consulte el artículo [Bellomo, 2008b] para profundizar en los detalles más precisos del modelo referido.

La estructura matemática que describe la evolución temporal de las funciones de distribución f_i se obtiene igualando la tasa de variación de las partículas en un determinado subsistema funcional i , con la diferencia entre los flujos de entrada y salida respectivos a este estado. De esta manera, la **ecuación de equilibrio** puede enunciarse como:

$$f_i'(t) = J_i[\mathbf{f}](t) \doteq G_i[\mathbf{f}](t) - L_i[\mathbf{f}](t) + P_i[\mathbf{f}](t), \quad \text{para } i = 1, \dots, n, \quad (3.13)$$

donde $J_i[\mathbf{f}](t)$ es el flujo neto de partículas que caen en el estado u_i , $G_i[\mathbf{f}](t)$ y $L_i[\mathbf{f}](t)$ denotan, respectivamente, el flujo de entrada y salida, en el tiempo t , hacia adentro (y hacia afuera) del subsistema funcional i , y $P_i[\mathbf{f}](t)$ es la tasa de proliferación neta (cantidad de nacimientos menos número de muertes) al momento t dentro del subsistema funcional i .

En este caso particular, el marco matemático para describir las interacciones microscópicas entre subsistemas queda descrito mediante las funciones:

- **Tasa de encuentro** η_{hk} , que describe la frecuencia de interacciones entre una partícula candidata (o test) h y una partícula de campo k .
- **Densidad de probabilidad de transición** \mathcal{B}_{hk}^i , que describe la densidad de probabilidad de que una partícula candidata h pase al estado u_i tras una interacción con una partícula de campo k . Esta función satisface la condición:

$$\sum_{i=1}^n \mathcal{B}_{hk}^i = 1, \quad \text{para } h, k = 1, \dots, n. \quad (3.14)$$

Por otra parte, considerando el caso más simple de crecimiento exponencial de la población [Cohen, 1995] y suponiendo que la proliferación neta tiene lugar dentro de cada subsistema funcional i con tasa r_i , la ecuación que describe la **evolución** de las funciones de distribución puede escribirse como sigue:

$$f'_i(t) = \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n \eta_{hk} \mathcal{B}_{hk}^i f_h(t) f_k(t) - f_i(t) \sum_{k=1}^n \eta_{ik} f_k(t) + r_i f_i(t), \quad \text{para } i = 1, \dots, n. \quad (3.15)$$

Ahora bien, al revisar la literatura sobre las funciones de interacción, es posible advertir que se han propuesto diferentes enfoques para modelar las mencionadas funciones. En el caso de la tasa de encuentro, se comparte la idea de [Knopoff, 2013], donde se asumió que depende de la diferencia entre los estados sociales de las partículas, teniendo en cuenta que cuanto más cercanos son los estados de las partículas que interactúan, mayor es la frecuencia de su interacción.

Por lo expuesto en el párrafo anterior, para $0 \leq \eta_0 \leq 1$ y para $0 \leq \varepsilon \leq 1$ se propone la siguiente definición para la tasa de encuentro η_{hk} :

$$\eta_{hk} \doteq \eta_0 (1 - \varepsilon |u_h - u_k|), \quad \text{para } h, k = 1, \dots, n. \quad (3.16)$$

Con respecto a las densidades de probabilidad de transición, tomamos aquí el *paradigma cooperativo-competitivo* presentado en [Bertotti and Delitala, 2004b]. El mismo afirma que existe un **umbral social** $\gamma \in 0, \dots, n-1$ tal que si la distancia $|h-k|$ entre dos clases sociales diferentes que interactúan es menor o igual que γ , entonces los individuos se someten a una interacción competitiva: el más rico aumenta su estado social mientras que el más pobre lo disminuye. Por otro lado, si el caso fuera que $|h-k| > \gamma$, entonces se observa el efecto contrario (altruista) donde a través de interacciones cooperativas el más rico disminuye su estado social mientras que el más pobre lo aumenta.

Para hacer posibles los intercambios no-conservativos, es decir, interacciones que no preservan la riqueza, introducimos dos parámetros $\alpha, \beta \in (0, 1]$, de forma que la densidad de **probabilidad de transición** \mathcal{B}_{hk}^i queda definida como:

Tabla 3.1: Lista de símbolos.

Símbolo	Descripción
n	Cantidad de clases sociales
$u_i, \quad i = 1, \dots, n$	Estados sociales
$f_i, \quad i = 1, \dots, n$	Cantidad de individuos con el estado social u_i
T	Tiempo máximo de observación
N	Población total
W	Riqueza total
V	Riqueza per-cápita
$\eta_{hk}, \quad h, k = 1, \dots, n$	Tasas de encuentro
$\mathcal{B}_{hk}^i, \quad h, k, i = 1, \dots, n$	Densidades de probabilidad de transición
$r_i, \quad i = 1, \dots, n$	Tasas de proliferación neta
γ	Umbral social
α	Probabilidad de descender una clase social
β	Probabilidad de ascender una clase social
W_∞	Valor asintótico de W cuando $t \rightarrow \infty$
V_∞	Valor asintótico de V cuando $t \rightarrow \infty$
$f_{i\infty}$	Valor asintótico de f_i cuando $t \rightarrow \infty$
g	Coefficiente de Gini

4. Análisis Cualitativo y Optimización ¹

4.1. Análisis cualitativo

A continuación presentaremos un análisis cualitativo realizado sobre el modelo desarrollado en el capítulo anterior. Dicho análisis cuenta en primer lugar con un estudio respecto de los estados de equilibrio y comportamientos asintóticos para luego introducir el coeficiente de *Gini* e indagar en la forma que los parámetros de nuestro modelo lo afectan.

4.1.1. Análisis cualitativo de comportamientos asintóticos

Como se ha evidenciado oportunamente, el modelo introducido en el capítulo anterior es una extensión del presentado originalmente por Bertotti y Delitala en [Bertotti and Delitala, 2004b], incluyendo ahora dos aspectos clave sobre la dinámica de la distribución de la riqueza, a saber: *la población y la riqueza no son consideradas constantes*. Algunos análisis cualitativos interesantes sobre el modelo original fueron propuestos en [Bertotti and Delitala, 2008], donde los autores investigan la existencia de comportamientos asintóticos y obtienen equilibrios sólo para el caso $n = 5$ y $\gamma = 2$.

Esta sección está dedicada a un estudio analítico más general del modelo no-conservativo con $\alpha \neq \beta$ y $r_i \neq 0$. Nuestra primera observación es que en el caso $r_1, \dots, r_n > 0$, podemos garantizar que no existe un estado asintótico $f_{i\infty} \doteq \lim_{t \rightarrow \infty} f_i(t)$ para todo i , ya que el tamaño total de la población crece al ∞ . Sin embargo, se pueden obtener algunos resultados interesantes para $W(t)$ y $V(t)$.

¹Los desarrollos aquí presentados recuperan lo trabajado en las secciones: “Qualitative Analysis” y “Parameter Estimation from Empirical Data” del artículo de Buffa, et. al. (2020), op. cit.

En efecto, derivando la Ec. (3.11) con respecto a t , utilizando la Ec. (3.15) y, a partir de ahora, asumiendo que la tasa de proliferación neta es constante para todos los subsistemas (i.e. $r_i \doteq r$ para todo i), obtenemos:

$$\begin{aligned} W'(t) &= \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n u_i \mathcal{B}_{hk}^i \right) \eta_{hk} f_h(t) f_k(t) - \sum_{i=1}^n u_i f_i(t) \sum_{k=1}^n \eta_{ik} f_k(t) + rW(t) \\ &= \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n u_i \mathcal{B}_{hk}^i - u_h \right) \eta_{hk} f_h(t) f_k(t) + rW(t). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Ahora, sean S_0 , S_+ y S_- los subconjuntos de $\{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$ definidos como:

$$\begin{aligned} S_0 &\doteq \{(h, k) : \mathcal{B}_{hk}^h = 1\}, \\ S_+ &\doteq \{(h, k) : \mathcal{B}_{hk}^{h+1} = \beta \wedge \mathcal{B}_{hk}^h = 1 - \beta\}, \\ S_- &\doteq \{(h, k) : \mathcal{B}_{hk}^{h-1} = \alpha \wedge \mathcal{B}_{hk}^h = 1 - \alpha\}. \end{aligned}$$

Observación 1. Notar que:

- $S_0 \cup S_+ \cup S_- = \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$.
- $(h, k) \in S_+ \Leftrightarrow (k, h) \in S_-$.

Observación 2. Si los u_i se eligen equidistantes con tamaño de paso Δu , entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

- Si $(h, k) \in S_0$, entonces $\sum_{i=1}^n u_i \mathcal{B}_{hk}^i = u_h$.
- Si $(h, k) \in S_+$, entonces $\sum_{i=1}^n u_i \mathcal{B}_{hk}^i = \beta \Delta u + u_h$.
- Si $(h, k) \in S_-$, entonces $\sum_{i=1}^n u_i \mathcal{B}_{hk}^i = -\alpha \Delta u + u_h$.

Teniendo en cuenta las Observaciones 1 y 2 y el hecho de que las tasas de interacción son simétricas, la Ec. (4.1) puede reescribirse como:

$$W'(t) = (\beta - \alpha) \Delta u \sum_{(h,k) \in S_+} \eta_{hk} f_h(t) f_k(t) + rW(t). \quad (4.2)$$

Como podemos ver, del primer término de la Ec. (4.2) se deduce que si $\beta > \alpha$ y $r \geq 0$, la riqueza total W crecerá.

Asumamos primero $r = 0$. Entonces, tenemos que, o bien $W'(t) \geq 0$, o bien $W'(t) \leq 0$, para todo t , dependiendo de la diferencia $\beta - \alpha$. Dado que $u_i \in I_u$, que es un conjunto acotado, tenemos que $W(t)$ dado por la Ec. (3.11) permanece acotado entre $u_1 N(0)$ y $u_n N(0)$ y, en consecuencia, tenemos que $\lim_{t \rightarrow \infty} W'(t) = 0$. Esto demuestra que $W(t)$ alcanza un valor asintótico W_∞ en el caso de población constante.

Consideremos ahora que $r \neq 0$. La tasa de cambio de la riqueza per-cápita $V(t) = \frac{W'(t)}{N(t)}$ es:

$$V'(t) = \frac{W'(t) - rW(t)}{N(t)} = \frac{1}{N(t)} (\beta - \alpha) \Delta u \sum_{(h,k) \in S_+} \eta_{hk} f_h(t) f_k(t). \quad (4.3)$$

Siguiendo un razonamiento similar al anterior, $V(t)$ está acotado entre u_1 y u_n y $V'(t)$ es o bien no negativa o bien no positiva. Entonces, $V(t)$ alcanza un valor asintótico V_∞ .

Notar que el razonamiento anterior no depende del signo de r , incluso en el caso $r < 0$ la población puede llegar a extinguirse y la existencia de un estado asintótico es trivial.

Por lo tanto, hemos demostrado lo siguiente:

Proposición 1. Para el modelo de dinámica social (3.15)-(3.17), asumamos que $I_u = \{u_1, \dots, u_n\}$ es un conjunto finito tal que $u_{i+1} - u_i = \frac{u_n - u_1}{n-1} \doteq \Delta u$ para todo $i = 1, \dots, n$. Entonces, en el escenario de población *conservativa* con $r = 0$, existe un valor asintótico para la riqueza total W_∞ . En el caso *general* en el que $r \neq 0$, la riqueza per-cápita alcanza el valor asintótico V_∞ . Además, la dinámica de la riqueza y de la riqueza per-cápita depende de la diferencia $\beta - \alpha$.

Mencionemos algunas consideraciones adicionales sobre la Ec. (4.2), en el caso de $r = 0$, y la Ec. (4.3) en el caso general. Si $\alpha = \beta$, entonces la riqueza permanece constante, como en el modelo original. Pero si $\alpha \neq \beta$, entonces el equilibrio se alcanza cuando la sumatoria es cero. A priori, este razonamiento aparenta cierta complejidad, pero muestra que, en el equilibrio, $f_{i\infty} = 0$, excepto para los únicos subsistemas funcionales “sobrevivientes” $\{h_1, \dots, h_m\}$ tales que $(h_i, h_j) \in S_0$. Este hecho se resume en el siguiente resultado:

Corolario 1. Cuando $t \rightarrow \infty$, $f_i(t) \rightarrow 0$, excepto eventualmente para aquellos subsistemas $\{h_1, \dots, h_m\}$ tales que $(h_i, h_j) \in S_0$

A continuación se ofrece una interpretación gráfica del Corolario 1. Partimos de la distribución inicial de la población en clases sociales como se muestra en la Figura 4.1, en una sociedad con parámetros $\alpha = 0,4$, $\beta = 0,1$ y $r = 0,01$.

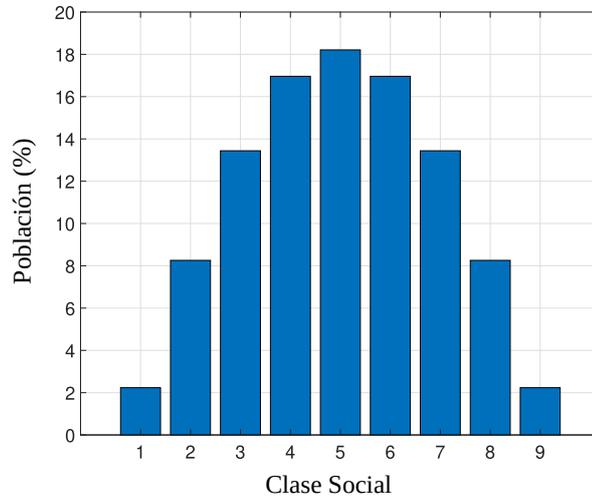


Figura 4.1: Distribución inicial de la población.

Los estados asintóticos de \mathbf{f}_∞ que se muestran en la Figura 4.2 (a) y (b) corresponden, respectivamente, a $\gamma = 2$ y $\gamma = 4$. Nótese que en el primer caso $(1, 3) \in S_0$ y $f_{i\infty} = 0$ para $i \neq 1, 3$, mientras que en el segundo caso $(1, 5) \in S_0$ y $f_{i\infty} = 0$ para $i \neq 1, 5$.

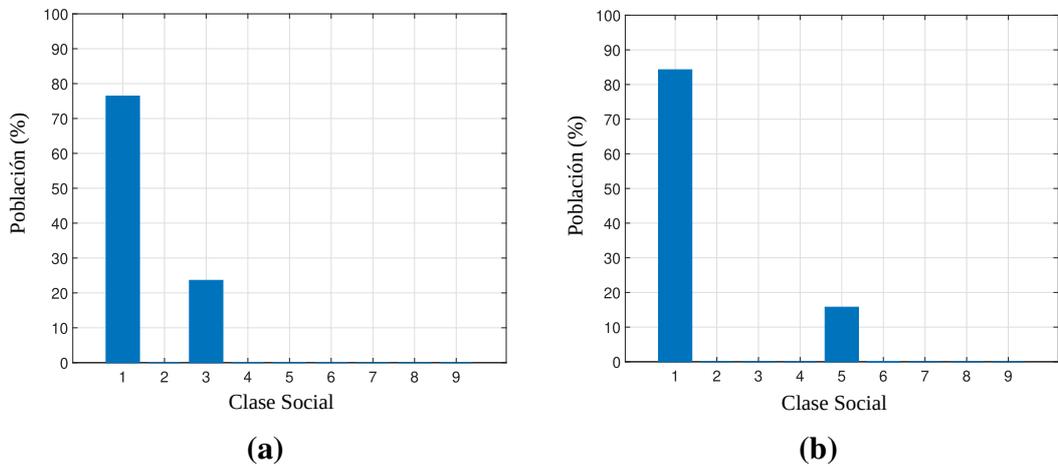


Figura 4.2: Estados de equilibrio alcanzados mediante simulación para la sociedad con distribución inicial mostrada en la Fig. 4.1. Las simulaciones fueron ejecutadas para $\alpha = 0,4$, $\beta = 0,1$, $r = 0,01$ y para: (a) $\gamma = 2$ (b) $\gamma = 4$, hasta alcanzar los estados asintóticos.

Aunque encontrar estados de equilibrio de forma explícita es una tarea difícil,

como se expone claramente en [Bertotti and Delitala, 2008], se pueden buscar algunas características generales de los mismos. En particular, nos preguntamos por la dependencia de W_∞ (o V_∞) con respecto a los parámetros α y β . La siguiente proposición muestra que el estado asintótico no depende de cada valor del parámetro, sino de su cociente.

Proposición 2. Los valores asintóticos W_∞ (para el caso de población constante $r = 0$) y V_∞ (para el caso general) dependen de α/β .

Ahora bien, buscar soluciones de equilibrio de la Ec. (3.15) con $r = 0$ significa buscar soluciones del sistema de ecuaciones algebraicas $f'_i = 0$, para $i = 1, \dots, n$. Donde:

$$\begin{aligned} f'_i &= \sum_{k:(i,k) \in S_0} \eta_{ik} f_i f_k + \sum_{k:(i,k) \in S_+} (1-\beta) \eta_{ik} f_i f_k + \sum_{k:(i,k) \in S_-} (1-\alpha) \eta_{ik} f_i f_k \\ &+ \sum_{k:(i-1,k) \in S_+} \beta \eta_{i-1,k} f_{i-1} f_k + \sum_{k:(i+1,k) \in S_-} \alpha \eta_{i+1,k} f_{i+1} f_k - \sum_{k=1}^n \eta_{ik} f_i f_k. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Al advertir que el último término del lado derecho de (4.4) es igual a las contribuciones positivas de los tres primeros términos, obtenemos que:

$$\begin{aligned} f'_i &= \beta \left(- \sum_{k:(i,k) \in S_+} \eta_{ik} f_i f_k + \sum_{k:(i-1,k) \in S_+} \eta_{i-1,k} f_{i-1} f_k \right) \\ &+ \alpha \left(- \sum_{k:(i,k) \in S_-} \eta_{ik} f_i f_k + \sum_{k:(i+1,k) \in S_-} \eta_{i+1,k} f_{i+1} f_k \right), \end{aligned} \quad (4.5)$$

que es igual a cero si:

$$\frac{- \sum_{k:(i,k) \in S_+} \eta_{ik} f_i f_k + \sum_{k:(i-1,k) \in S_+} \eta_{i-1,k} f_{i-1} f_k}{\sum_{k:(i,k) \in S_-} \eta_{ik} f_i f_k - \sum_{k:(i+1,k) \in S_-} \eta_{i+1,k} f_{i+1} f_k} = \frac{\alpha}{\beta}, \quad (4.6)$$

mostrando que los puntos de equilibrio $f_{i\infty}$ dependen del cociente α/β . Por lo tanto, $W_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n u_i f_i(t)$ depende de α/β .

En el caso $r \neq 0$, definamos $\tilde{f}_i \doteq \frac{f_i}{N}$. Entonces:

$$\begin{aligned} \left(\frac{f_i}{N}\right)' &= \frac{f_i'}{N} - \frac{f_i}{N} \cdot \frac{N'}{N} \\ &= \frac{f_i'}{N} - \frac{f_i}{N} \cdot r \\ &= \frac{1}{N} \left(\sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n \eta_{hk} \mathcal{B}_{hk}^i f_h f_k - f_i \sum_{k=1}^n \eta_{ik} f_k + r f_i \right) - \frac{f_i}{N} \cdot r \\ &= \frac{1}{N} \left(\sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n \eta_{hk} \mathcal{B}_{hk}^i f_h f_k - f_i \sum_{k=1}^n \eta_{ik} f_k \right), \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la derivada de un cociente, la Ec. (3.15) y la suposición de que $r_i = r$ para $i = 1, \dots, n$. Procediendo como hemos hecho en la Ec. (4.4), se obtiene que:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i' &= \frac{1}{N} \left[\beta \left(- \sum_{k:(i,k) \in \mathcal{S}_+} \eta_{ik} f_i f_k + \sum_{k:(i-1,k) \in \mathcal{S}_+} \eta_{i-1,k} f_{i-1} f_k \right) \right. \\ &\quad \left. + \alpha \left(- \sum_{k:(i,k) \in \mathcal{S}_-} \eta_{ik} f_i f_k + \sum_{k:(i+1,k) \in \mathcal{S}_-} \eta_{i+1,k} f_{i+1} f_k \right) \right], \end{aligned}$$

que de nuevo es igual a 0 si se cumple la Ec. (4.6). Por lo tanto, $V_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n u_i \tilde{f}_i$ también depende de α/β .

La Figura 4.3 muestra un ejemplo numérico de la Proposición 2 para diferentes combinaciones de α y β tales que su cociente α/β produzca un mismo valor.

4.1.2. Desigualdad y coeficiente de Gini

Como hemos señalado en la sección 1, el coeficiente de Gini es una de las medidas de desigualdad más utilizadas universalmente. Suele definirse en relación con la curva de *Lorenz*, la cual grafica la proporción de la riqueza total de la población (eje vertical) que es ganada acumulativamente por la porción acumulada de la población (eje horizontal), véase la Figura 4.4. Precisamente, la línea a 45 grados representa la *perfecta igualdad* en la distribución de la riqueza. Sean A el área entre las curvas de igualdad perfecta (azul) y de Lorenz (naranja), y B el área bajo la curva de Lorenz. Resulta evidente entonces que, al normalizar los porcentajes a proporciones, $A + B = 1/2$ ya que este valor representa la superficie del triángulo con ambos lados perpendiculares e iguales a 1. Entonces, $g = A/(A + B) = A/(1/2) = 2A$, como se muestra en la Figura 4.4. Dado que estamos tratando

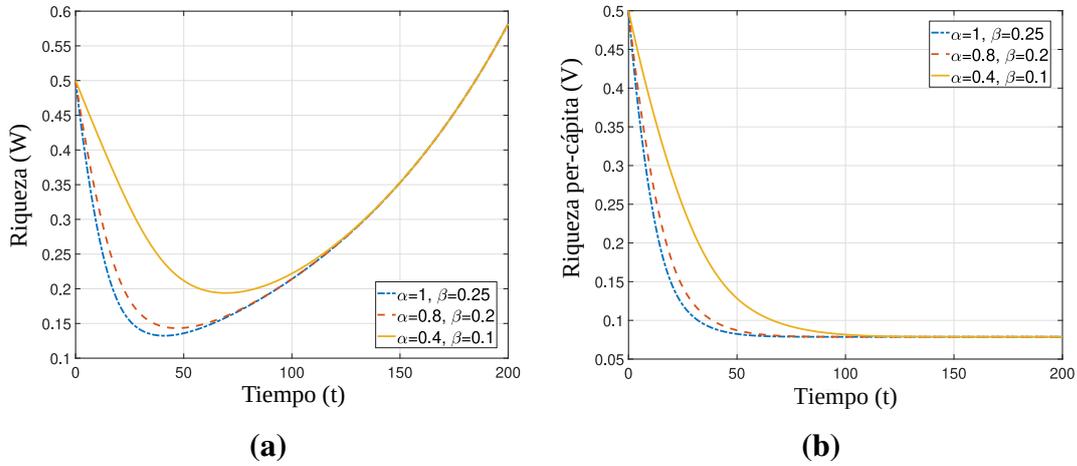


Figura 4.3: Valores asintóticos para la riqueza **(a)** y la riqueza per-cápita **(b)** del sistema con la condición inicial mostrada en la Fig. 4.1, con $r = 0,01$, $\gamma = 4$ y tres combinaciones diferentes de α y β tales que $\alpha/\beta = 4$.

con valores de actividad discretos, se calcula el coeficiente de Gini utilizando la regla del trapecio para calcular las áreas mencionadas. Un cálculo sencillo arroja como resultado:

$$g(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{2 \sum_{j=1}^i u_j f_j(t) - u_i f_i(t)}{W(t)} \frac{f_i(t)}{N(t)}, \quad (4.7)$$

que nos permite obtener el **coeficiente de Gini** para cada tiempo t .

Obsérvese que, por ejemplo, $g = 0$ puede corresponder incluso a una situación en la que toda la población pertenece a la clase social más alta o a la más baja, por lo que una nación no se puede caracterizar sólo por el coeficiente de Gini g , por lo que proponemos incluir también en nuestro análisis a la **riqueza total** (W), como se muestra en la Figura 4.5 para el caso de 9 clases sociales.

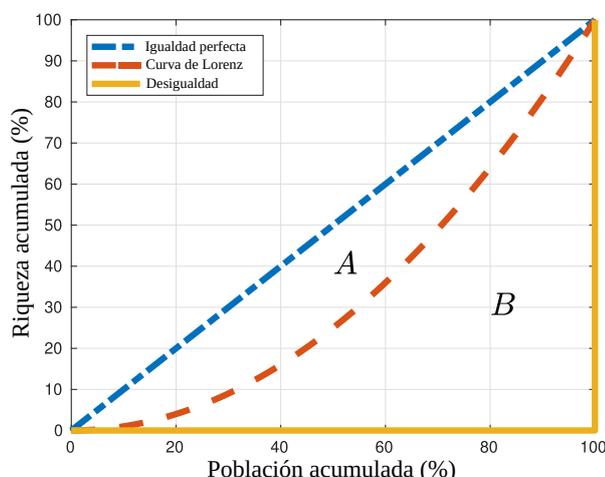


Figura 4.4: Representación gráfica del coeficiente de Gini. A es el área entre las curvas de Lorenz e igualdad perfecta, B es el área entre las curvas de Lorenz y de la desigualdad. El coeficiente de Gini se calcula mediante el cociente $A/(A+B)$.

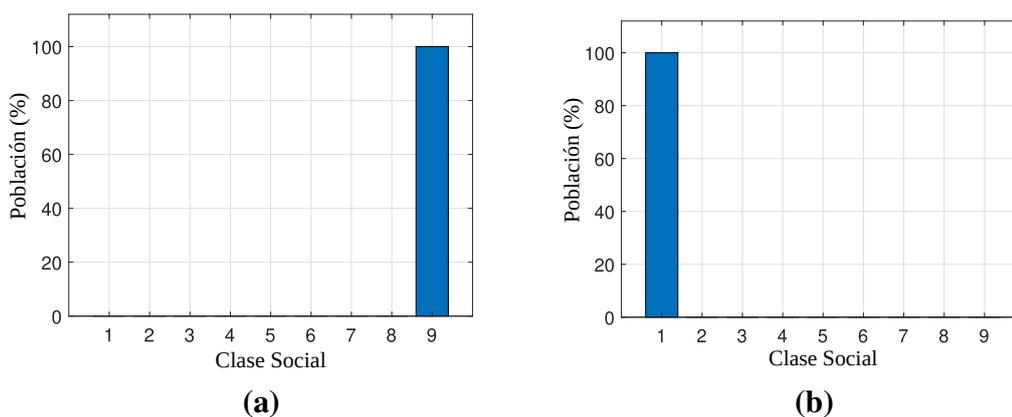


Figura 4.5: Dos posibles distribuciones de la riqueza en una sociedad. En **(a)** toda la población pertenece a la clase social más alta, mientras que en **(b)** toda la población pertenece a la más baja. Sin embargo, en ambas se cumple que el coeficiente $g = 0$.

A continuación, para realizar un análisis cualitativo de nuestro modelo, consideraremos dos sociedades con $n = 9$, $I_u = \{u_1 = 0, \dots, u_9 = 1\}$, y distribuciones de riqueza iniciales mostradas en las Figuras 4.6 **(a)** y **(b)**, y sus correspondientes coeficientes de Gini presentados en **(c)** y **(d)**. En lo que sigue nos referiremos a estas distribuciones idealizadas como Sociedad I y Sociedad II. Es importante notar que la Sociedad I tiene una distribución simétrica con respecto a la clase media,

siendo esta clase la dominante. Por otro lado, la Sociedad II es una sociedad con mayor desigualdad, con más individuos en las clases bajas que en las altas.

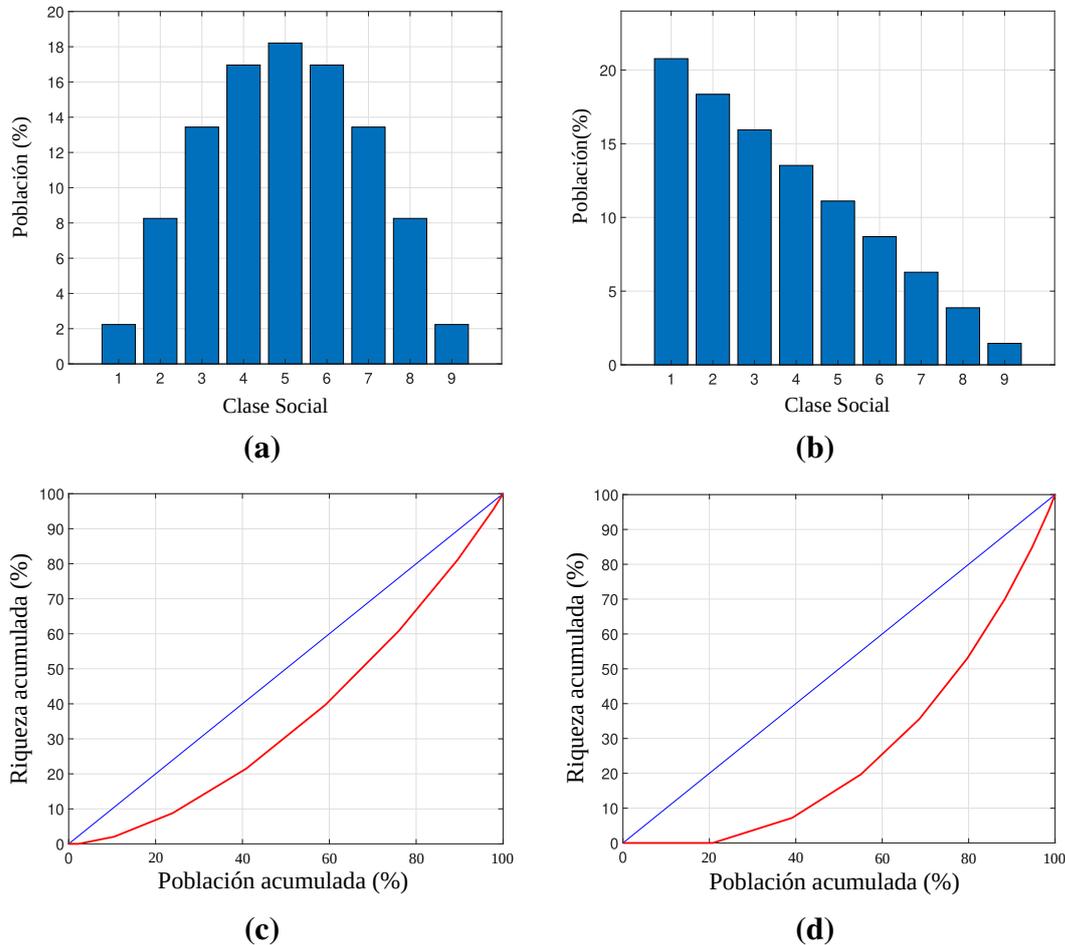


Figura 4.6: Distribución de la riqueza, en $t = 0$, de dos sociedades y sus correspondientes coeficientes de Gini. **Sociedad I:** coeficiente de Gini = 0,27. **Sociedad II:** coeficiente de Gini = 0,47.

Consideremos en primer lugar el caso más simple $r = 0$ y $\alpha = \beta$, que mantiene la población y la riqueza total invariables. La Figura 4.7 muestra la evolución temporal del coeficiente de Gini en cada sociedad, para diferentes elecciones del parámetro γ , manteniendo α fijo e igual a 0,5. Obsérvese que el comportamiento monótono de g depende del valor de γ , ya que para valores pequeños de este parámetro la riqueza tiende a distribuirse más equitativamente (Gini decreciente). La gráfica 4.8 muestra el coeficiente de Gini para un tiempo suficientemente grande, en el que ya se ha alcanzado el estado asintótico, en función de γ . Obsérvese

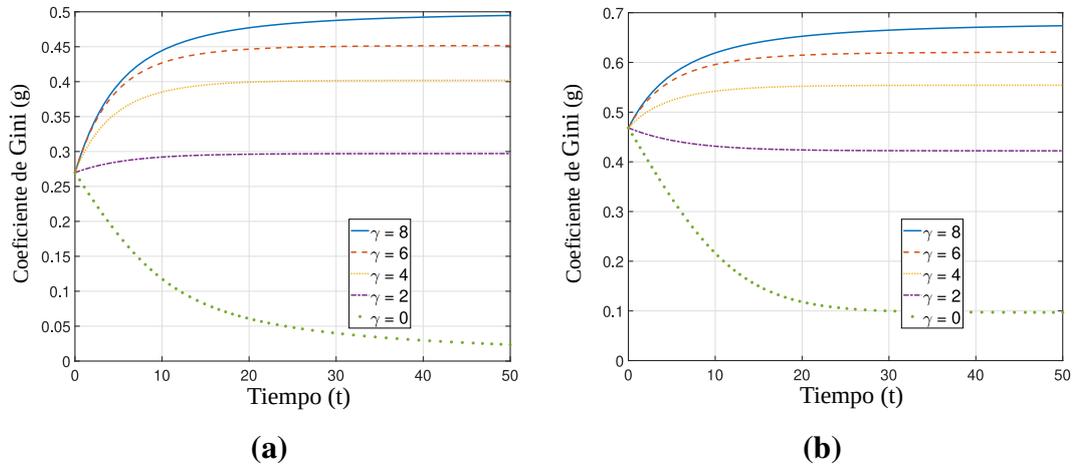


Figura 4.7: Evolución temporal (en años) del coeficiente de Gini para diferentes valores de γ , con $\alpha = 0,5$ fijo, para la Sociedad I y la Sociedad II.

también que existe una clara correlación entre el **umbral social** γ y el coeficiente de Gini g , lo que confirma el hecho de que valores cada vez mayores del umbral social γ corresponden a sociedades más desiguales. Además, si se modifica la probabilidad de cambio de estado social α para γ fija, no cambian ni el comportamiento monótonico ni los estados asintóticos, sino que tal parámetro influye directamente en la rapidez con que cambia el coeficiente de Gini (el valor de la derivada $g'(t)$), como se muestra en la Figura 4.9.

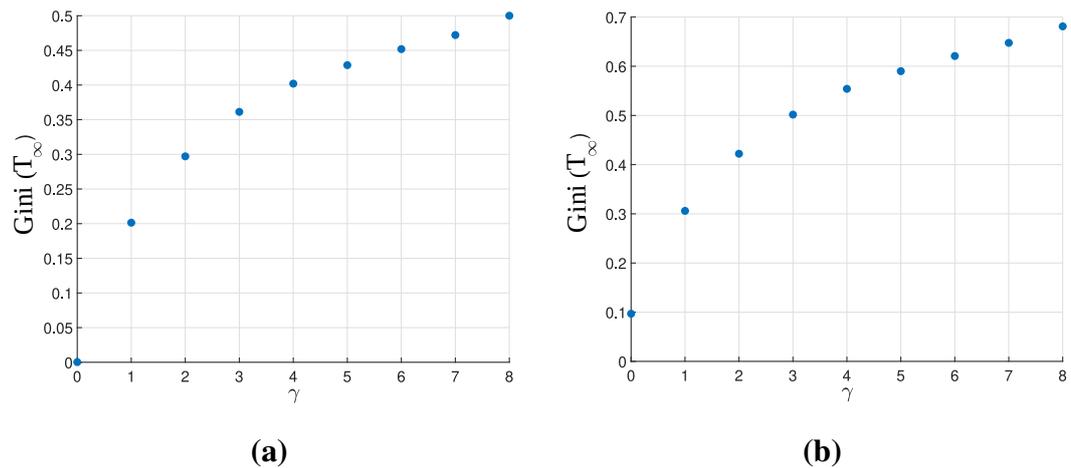


Figura 4.8: Valor asintótico del coeficiente de Gini en función de γ , con $\alpha = 0,5$ fijo, para la Sociedad I y la Sociedad II.

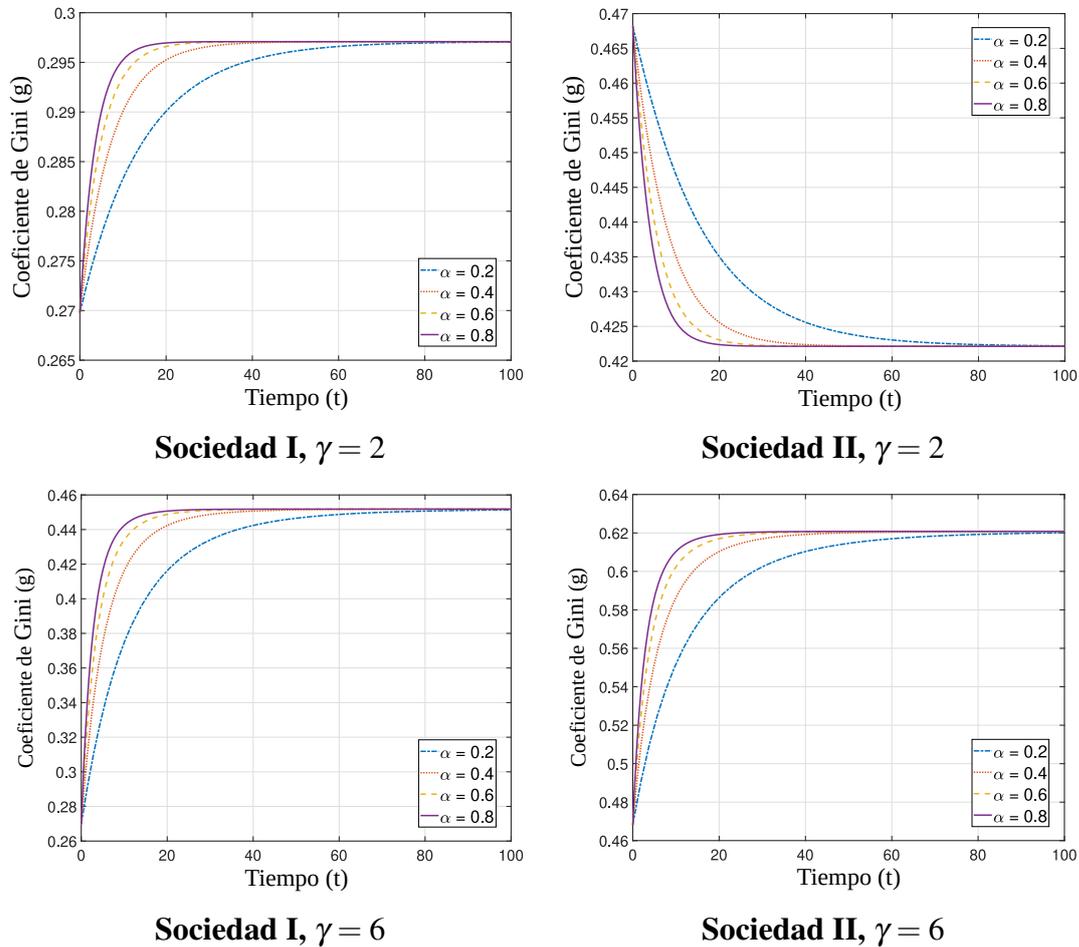


Figura 4.9: Evolución temporal (en años) del coeficiente de Gini para varios casos.

4.2. Estimación de parámetros

Esta sección estará dedicada a la validación del modelo mediante el estudio de su capacidad para reproducir y recuperar datos provenientes de la *realidad*. En este sentido, queremos encontrar los parámetros del modelo que mejor se ajusten a los datos empíricos en cuanto a la distribución de la riqueza. En el caso que se disponga de datos publicados que muestren los porcentajes de población pertenecientes a cada clase social a lo largo del tiempo, podríamos buscar los parámetros del modelo, descritos en la Ec. (3.15), que proporcionen los perfiles de riqueza (\mathbf{f}) que mejor se aproximen a los dados por los datos reales. Si no se dispusiera explícitamente de dichos datos, se podría intentar aproximar la cantidad total de

riqueza o el coeficiente de Gini de una determinada sociedad a lo largo del tiempo. A partir de este razonamiento, construiremos la función objetivo y definiremos un problema de optimización.

4.2.1. Definición del problema de optimización

Sean $N^*(t)$, $W^*(t)$, $\mathbf{f}^*(t)$ y $g^*(t)$ la población total, la riqueza, la distribución de la riqueza y el coeficiente de Gini, respectivamente, en una determinada nación según los datos que oportunamente se dispongan públicamente. A partir de ellos intentaremos obtener el conjunto de parámetros del modelo que logre el mejor *ajuste* a estos datos.

En primer lugar, es importante notar que nuestro parámetro r sólo se asocia a la población total y, por lo tanto, únicamente puede recuperarse utilizando $N^*(t)$. Recordemos que la ecuación $N'(t) = rN(t)$ corresponde a un *modelo exponencial* de evolución de la población. En este sentido, la tasa de proliferación r puede obtenerse en primera instancia mediante la resolución de un problema de *mínimos cuadrados*.

Con el fin de recuperar los otros parámetros del modelo, escribimos la Ec. (3.13) como un problema de valores iniciales:

$$\begin{aligned}\mathbf{f}'(t) &= \mathbf{J}(\mathbf{f}(t), a), \quad t \in [0, T], \\ \mathbf{f}(0) &= \mathbf{f}_0,\end{aligned}\tag{4.8}$$

donde $\mathbf{J} = [J_1, \dots, J_n]$, poniendo de relieve la dependencia respecto de los parámetros del modelo a través del vector $a \doteq (\alpha, \beta, \gamma)$.

Para encontrar el conjunto de parámetros que mejor ajustan la información disponible $W^*(t)$, $g^*(t)$ y $\mathbf{f}^*(t)$, definimos la **función objetivo**:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(a) &= \omega_1 \sum_{i=1}^n \int_0^T (f_i(t) - f_i^*(t))^2 dt + \omega_2 \int_0^T (W(t) - W^*(t))^2 dt \\ &\quad + \omega_3 \int_0^T (g(t) - g^*(t))^2 dt \\ &= \int_0^T (\omega_1 \|\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}^*(t)\|_2^2 + \omega_2 (W(t) - W^*(t))^2 + \omega_3 (g(t) - g^*(t))^2) dt,\end{aligned}\tag{4.9}$$

siendo ω_1 , ω_2 y ω_3 los *pesos* no-negativos.

De esta manera planteamos el siguiente **problema de optimización**:

$$\begin{aligned} & \underset{a}{\text{minimizar}} \quad \mathcal{J}(a) \\ & \text{sujeto a} \quad \mathbf{f}'(t) = \mathbf{J}(\mathbf{f}(t), a), \quad t \in [0, T], \\ & \quad \mathbf{f}(0) = \mathbf{f}_0, \\ & \quad a \in A, \end{aligned} \tag{4.10}$$

donde al definir el *conjunto admisible* como $A = [0, 1] \times [0, 1] \times \{0, \dots, n - 1\}$ produce que las dos primeras variables $-\alpha$ y β - sean continuas, y la tercera $-\gamma$ - sea entera.

4.2.2. Resultados numéricos

Caso I: Datos generados por el modelo

Consideremos primero el problema de optimización dado por la ecuación (4.10), en el que \mathbf{f}^* , W^* y g^* son generados por la resolución del **problema directo** (4.8), para una determinada elección de los parámetros del modelo. La intención con este caso de prueba es investigar cuán cerca se puede recuperar el valor original de cada parámetro. No obstante, esto no es trivial, ya que no se puede demostrar analíticamente si el problema de optimización tiene una solución o no y, más aún, en caso que la tuviera no es posible demostrar si la misma es única.

En particular, en este caso se resuelve primero el problema directo con $\alpha = 0,4$, $\beta = 0,3$ (por tanto $\alpha/\beta = 4/3$), $\gamma = 4$ y $r = 0,01$ con un tiempo máximo dado por $T = 50$ años y para los dos posibles escenarios iniciales dados por la Sociedad I y II presentados en la Figura 4.6. Puesto que las mediciones empíricas suelen estar afectadas por perturbaciones, normalmente aleatorias, añadimos un **ruido aleatorio gaussiano** a la solución del problema directo. Como se afirma en [Guzman, 2017], es válido, en general, considerar un 2% de ruido aleatorio gaussiano para este tipo de datos. En consecuencia, realizamos nuestros experimentos en tres fases, añadiendo a la solución de salida del problema directo un 2%, 5% y 10% de ruido aleatorio respectivamente.

A través de la elección de diferentes combinaciones de pesos en la *función objetivo* dada por la Ec. (4.9), para todos los niveles de ruido se realizaron diferentes experimentos con el fin de probar la calidad e incidencia de la información proporcionada por las variables \mathbf{f}^* , W^* y g^* . En este sentido, ejecutamos cada problema de optimización 100 veces para cada experimento utilizando diferentes valores aleatorios iniciales de los parámetros (a) mediante un algoritmo genético que tiene en cuenta la naturaleza mixta de las restricciones, tal como es explicado en [Knopoff and Torres, 2018]. Los resultados arrojados por este método se

muestran en las tablas A 2.1, A 2.2 y A 2.3 presentadas en el apéndice A 2. Para cada experimento y distribución de riqueza inicial, las tablas presentan los valores recuperados de α , β , γ , $\alpha - \beta$, α/β y el error relativo de las estimaciones. Es conveniente señalar que los primeros experimentos (1, 2 y 3) corresponden a un único peso distinto de cero en la función objetivo (4.9), mientras que el resto de los mismos consideran combinaciones mixtas en las que se elige un orden de magnitud diferente de los pesos con el fin de compensar el orden de magnitud de cada término en la Ec. (4.9). A continuación se resumen los resultados más relevantes:

- En general, el **error relativo** en la recuperación de los parámetros a partir de datos con ruido de 2% es menor que para los casos de ruido de 5% y 10%. Sin embargo, es interesante notar que incluso con el nivel más alto de distorsión aleatoria de los datos obtenemos resultados razonables en la mayoría de los casos, por lo que los resultados siguen siendo robustos a pesar de aumentar el ruido.
- La mejor situación posible en términos de recuperar los parámetros de nuestro modelo es disponer de datos reales en relación a las **funciones de distribución f^*** . En efecto, el conocimiento de estas distribuciones permite también calcular el coeficiente de Gini y la riqueza. Por ello, los experimentos 1 y 6, que dan prioridad a ω_1 , dan por lo general buenos resultados.
- En los casos que $\omega_1 \neq 0$ u $\omega_3 \neq 0$, el **parámetro γ** se recupera con precisión y, por el contrario, la peor aproximación de dicho parámetro se obtiene en el Experimento 2. Hay que tener en cuenta que es razonable obtener estos resultados debido a la estrecha relación entre γ y la desigualdad, como se ha hecho mención en la sección 4.1.2.
- Cuando se considera la riqueza por encima de los perfiles completos *-i.e.* se consideran valores mayores de ω_2 , los resultados pierden precisión y la calidad de la recuperación de datos empeora. En consecuencia, ω_2 no debería ser mayor que las demás ponderaciones. Sin embargo, algunos países pueden tener información disponible sólo sobre riqueza total o PBI y no sobre los perfiles sociales completos. Si esta es la situación, la disponibilidad de información sobre los **coeficientes de Gini** puede mejorar claramente los resultados, específicamente sobre el parámetro γ . En efecto, al observar los Experimentos 7 y 8 es evidente que allí se obtienen mejores resultados que en el Experimento 2.
- Cabe destacar que, en general, aunque α y β no se recuperan con precisión, su **diferencia** y su **cociente** dan resultados altamente satisfactorios. Esto es esperable ya que, a partir del análisis detallado realizado en el apartado

4.1.1, se muestra que la dinámica depende profundamente de estas cantidades.

Caso II: Datos de Estados Unidos

En este caso de estudio los esfuerzos estarán orientados a validar nuestro modelo, mediante la técnica de optimización mencionada anteriormente, para datos propios de Estados Unidos. En efecto, se escogió realizar la validación para el caso de este país gracias a que en la literatura se dispone de gran cantidad de datos para el mismo y, particularmente en [Census Bureau, 2020], se proporciona la distribución de la población dentro de clases sociales desde 1967 hasta 2018. Es importante notar aquí que cuando nos referimos a clases sociales estamos caracterizándolas por los rangos de ingresos, en un total de 9 intervalos. En la Figura 4.10 (a) y (b) mostramos la distribución de la población en 1967 y 2018, respectivamente. Los valores de u_i se eligen tomando el valor medio de cada intervalo.

Esta información, junto con la riqueza total y los coeficientes de Gini para cada año -que pueden ser calculados directamente de los datos disponibles-, son las entradas de nuestro problema de optimización, el cual arroja como salida el cálculo de los parámetros específicos para este caso particular agrupados en a . De esta manera, se elijen las dos mejores combinaciones de pesos para reemplazar en la función objetivo (4.9) y así se estima el conjunto completo de parámetros del modelo que mejor se ajusta a los datos estadounidenses.

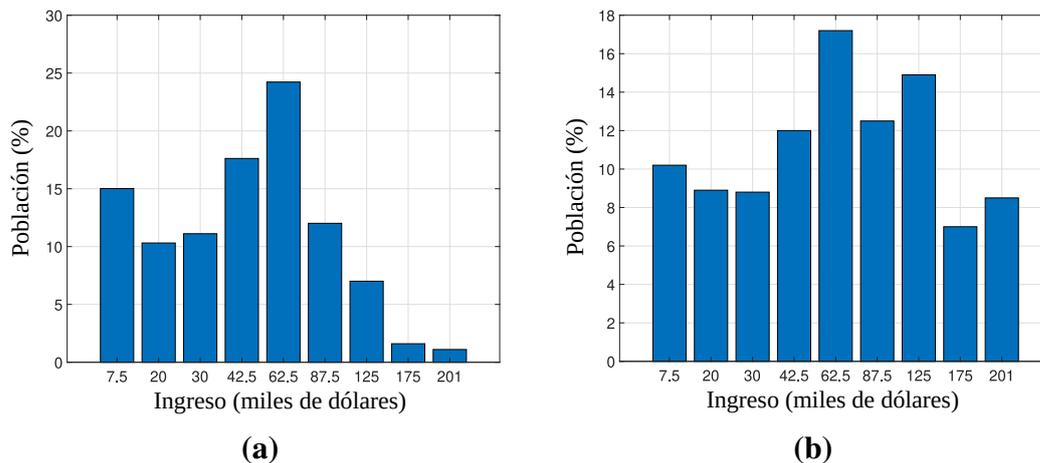


Figura 4.10: Distribución de los ingresos anuales en EE.UU. en (a) 1967 y (b) 2018 según datos disponibles públicamente

Las Figuras 4.11 (a) y (b) muestran la distribución de riqueza final en 2018 para las dos opciones diferentes de pesos, comparando los datos reales y los simulados.

Además, las Figuras 4.12 y 4.13 muestran tanto el coeficiente de Gini real como el calculado y la riqueza a lo largo del tiempo. Obsérvese que EE.UU. tiene una mayor similitud con la Sociedad I que con la Sociedad II, ya que todas las clases, excepto la segunda, responden a un patrón similar al de la Sociedad I, con una clase media predominante.

Los resultados mencionados se resumen en la Tabla A 2.4, donde se muestran los valores de los parámetros recuperados. En ambos casos, el parámetro α es menor que β confirmando el hecho de que la *riqueza muestra una tendencia creciente* en el largo plazo para el caso de EE.UU. Es relevante notar que los valores obtenidos respecto del *parámetro γ* , junto con el *coeficiente medio de Gini*, para EE.UU. (Figura 4.12), se corresponden con la correlación observada en la Figura 4.8 (a).

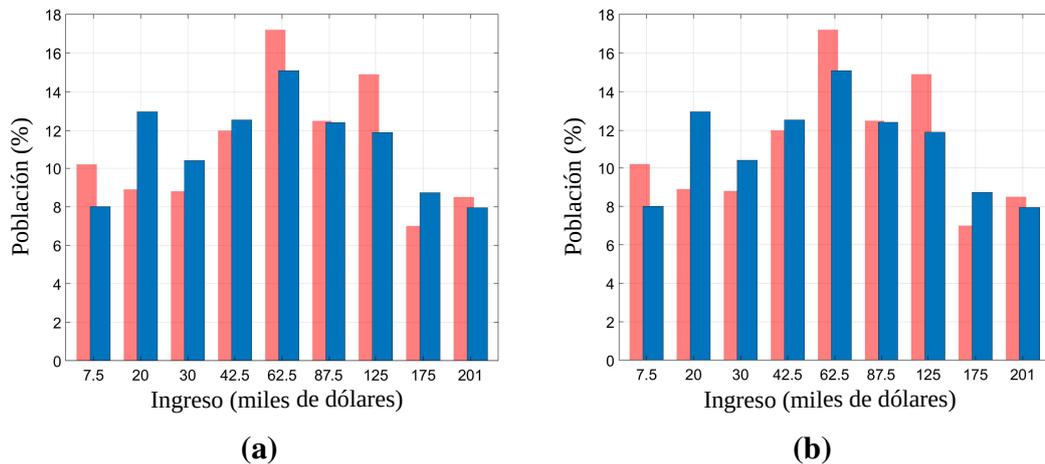


Figura 4.11: Resultados de la simulación para la distribución de la renta anual en 2018 utilizando (a) $\omega_1 = 1$ y $\omega_2 = \omega_3 = 0$ y (b) $\omega_1 = 10$, $\omega_2 = 100$, $\omega_3 = 10$. Las barras rojas de la izquierda representan los datos reales, mientras que las barras azules de la derecha corresponden a los resultados simulados.

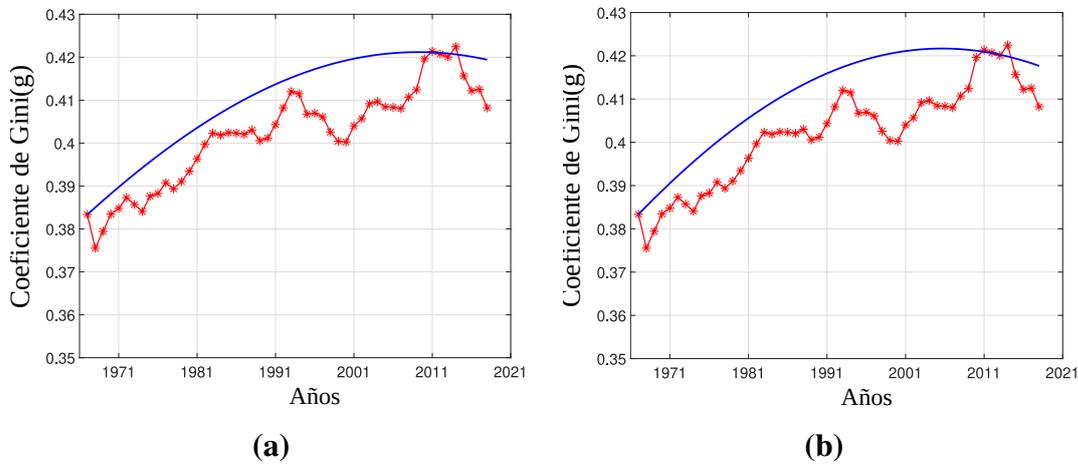


Figura 4.12: Resultados de la simulación para el coeficiente de Gini (línea continua) frente a coeficiente de Gini real (*) utilizando (a) $\omega_1 = 1$ y $\omega_2 = \omega_3 = 0$ y (b) $\omega_1 = 10$, $\omega_2 = 100$, $\omega_3 = 10$.

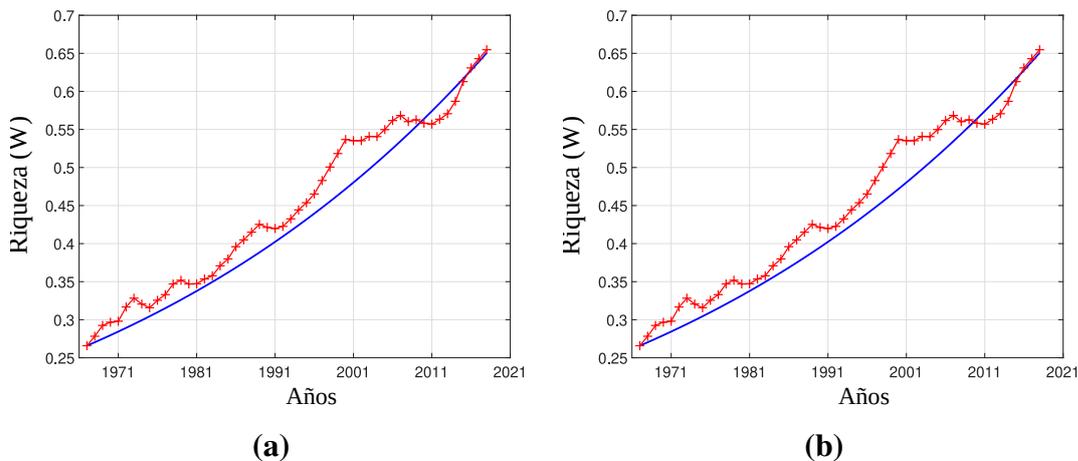


Figura 4.13: Resultados de la simulación para la riqueza (línea continua) frente a la riqueza real (+) utilizando (a) $\omega_1 = 1$ y $\omega_2 = \omega_3 = 0$ y (b) $\omega_1 = 10$, $\omega_2 = 100$, $\omega_3 = 10$.

Para concluir lo desarrollado en la segunda parte de esta tesis, se resumen a continuación los aspectos de mayor relevancia que se han abordado. En efecto, en el capítulo 3 se presenta un modelo cinético sobre la distribución de la riqueza en una sociedad, que incluyó ciertas particularidades tales como población no-constante a lo largo del tiempo e intercambios no-conservativos entre clases so-

ciales. Además, los análisis cualitativos y las simulaciones numéricas del capítulo 4 evidencian que el modelo es capaz de reproducir los datos observados con suficiente confianza. Finalmente, se considera significativo hacer notar que, aunque se ha introducido un parámetro adicional (β) respecto a los modelos anteriores [Bertotti and Delitala, 2004b, Bellomo et al., 2013, Knopoff and Torres, 2018], se ha demostrado que tanto α como β pueden sustituirse por α/β para recabar información útil del sistema estudiado y de esta manera se evita añadir más complejidad al modelo.

Parte III

Modelos Computacionales

5. Un Modelo Computacional de Interacciones Perceptuales

En la tercera y última parte de esta tesis el foco estará puesto en los denominados modelos computacionales. A tal efecto, inicialmente se hará referencia a lo que entendemos por dicha modelización y sus particularidades en comparación con otros tipos de modelos (concretos, matemáticos). Posteriormente se implementarán técnicas de modelización computacional para construir un modelo completamente *original* destinado a representar el fenómeno observado en una experiencia psico-cognitiva de singular interés. En este sentido, aquí se recupera una investigación experimental ampliamente reconocida, referida al análisis de comportamientos, decisiones e interacciones de sujetos frente a distintas clases de estímulos. El experimento citado fue publicado originalmente en el artículo [Auvray et al., 2009] y el mismo ha resultado de relevancia en la literatura sobre el tema en tanto habilitó diferentes líneas de estudio en el campo de la modelización. Otros trabajos donde se investiga esta problemática se pueden encontrar en: [Di Paolo et al., 2008] y [Froese et al., 2014].

Antes de introducirnos directamente en el tema que trataremos en este capítulo, resulta necesario señalar una cuestión sobre las decisiones que fueron tomadas para llevar a cabo el trabajo actual. En efecto, es importante destacar que en la experiencia comentada en el párrafo anterior los autores eligieron abordarla desde un enfoque *interaccionista* y, específicamente, enmarcado dentro del estudio de las *actividades perceptivas compartidas*; en contraposición a un punto de vista *individualista*. En contraste con esto, en el presente trabajo tratamos el fenómeno presenciado en el experimento original a través de un camino distinto al elegido por sus autores. En vez de encuadrar lo observado a partir de un enfoque teórico proveniente de la psicología, aquí se optó por construir y utilizar un modelo (computacional) para esa tarea, lo cual permitió parametrizar y cuantificar distintos eventos que, según nuestro punto de vista, logran representar y reproducir lo esencial del fenómeno mencionado. En este sentido, al llevar a cabo nuestra mo-

delización del acontecimiento abordado, se hará evidente que nuestra intención será explicarlo de una forma diferente a la dada por los datos arrojados en la experiencia original y su respectivo análisis estadístico, la cual es la manera usual de tratar con esta clase de fenómenos.

A continuación, luego de dar una breve introducción sobre lo que entendemos por *modelización computacional*, procederemos a presentar el experimento que se pretende modelar en esta parte de la tesis. Seguidamente, se construirá el modelo propiamente dicho y por último (ya en el capítulo 6), se proporcionará una implementación del mismo y algunos resultados arrojados por dichas realizaciones.

5.1. Modelización computacional

De acuerdo a la clasificación propuesta por el filósofo de la ciencia Michael Weisberg, es posible distinguir entre tres categorías de modelos, estos son: los *concretos*, los *matemáticos* y los *computacionales*. Según el autor, esencialmente los tres tipos de modelos consisten en una “*estructura interpretada*” que se puede utilizar para representar un fenómeno real o imaginario (ver [Weisberg, 2012]). Además, propone que los primeros son objetos físicos cuyas propiedades físicas pueden estar potencialmente en relación de representación con los fenómenos del mundo real. Por otro lado, los modelos matemáticos son estructuras abstractas cuyas propiedades pueden entrar en contacto con representaciones matemáticas de los fenómenos mientras que los **modelos computacionales** son conjuntos de procedimientos que pueden relacionarse con una descripción computacional del comportamiento del sistema. En consecuencia, Weisberg plantea que las distintas categorías de modelos son formados por una estructura particular, pero lo que al fin y al cabo los constituye como tal es la interpretación que realizan los modeladores sobre ellos. Así, estas interpretaciones nos dicen de qué se trata el modelo y establecen las relaciones de denotación y referencia entre los modelos y sus sistemas representados.

En relación a las tres categorías de modelos propuestas, el autor expresa: La literatura filosófica precedente se ha centrado principalmente en los modelos matemáticos, con menciones ocasionales a los modelos concretos. Sin embargo, estos últimos siguen teniendo aplicaciones científicas, especialmente en las ciencias aplicadas y la ingeniería. Al mismo tiempo, los modelos computacionales se están convirtiendo rápidamente en la principal forma de modelo científico, y son especialmente frecuentes en las ciencias biológicas y sociales ([Weisberg, 2012], p. 7).

Con respecto a estos últimos, Weisberg plantea que el tipo de estructura computacional relevante es el **algoritmo**, al que define como una serie de instrucciones para llevar a cabo un procedimiento. De esta forma, los modelos compu-

tacionales conforman un conjunto de procedimientos que toman un estado inicial como *entrada* y especifican cómo cambia este estado produciendo finalmente una *salida*. Desde este punto de vista, el autor advierte que hay poca diferencia entre los modelos matemáticos y computacionales y, en un nivel abstracto, se puede afirmar que los modelos computacionales son un subconjunto de los modelos matemáticos, aunque un subconjunto especialmente importante. De todas maneras, lo distintivo de los modelos computacionales es que el procedimiento en sí mismo es el componente central del modelo. En este sentido, apoyándose en lo planteado por [Kimbrough, 2003], el trabajo antes mencionado sostiene que la **estructura procedimental** es la configuración en virtud de la cual se pueden explicar las partes constitutivas del sistema/objetivo (es decir, del fenómeno establecido como objetivo del proceso de modelado).

Profundizando en este aspecto, Weisberg considera que si bien las estructuras matemáticas podrían desempeñar el papel del procedimiento, hay varias características de las estructuras computacionales que las hacen especialmente adecuadas para esta tarea. Una de esas características es su **estructura condicional**. En sus términos: “This kind of conditionality is very naturally represented procedurally, but difficult to represent in many kinds of commonly used mathematical structures, including the functions represented by differential equations.” [Este tipo de condicionalidad se representa de forma muy natural en el procedimiento, pero es difícil de representar en muchos tipos de estructuras matemáticas de uso común, incluidas las funciones representadas por ecuaciones diferenciales] ([Weisberg, 2012], p. 30).

Otra característica clave que se puede incluir en las estructuras computacionales son las **transiciones probabilísticas**. La razón es que el sistema/objetivo previsto por los modeladores se comporta de manera probabilística. En realidad, en la mayoría de los casos el fenómeno modelado es determinista, pero presenta una alta complejidad para ser representado de manera determinística debido a las limitaciones informativas o computacionales. En tales casos, los modeladores pueden implementar reglas de transición probabilísticas y luego estudiar las distribuciones de resultados alcanzadas al tomar como punto de partida conjuntos de valores generados aleatoriamente.

Finalmente, la última característica señalada de las estructuras computacionales considerablemente útil para explicar los sistemas modelados es su capacidad para representar **procesos paralelos**, donde múltiples elementos del procedimiento se llevan a cabo al mismo tiempo. Los procesos sociales de muchos tipos tienen lugar al mismo tiempo, y los individuos toman decisiones simultáneas e independientes basadas en la información que tuvieran disponible en ese momento. Esto se puede modelar con una estructura computacional paralela, lo que produce una verdadera concurrencia.

Para concluir esta línea de razonamiento, se ofrece una recapitulación de lo

planteado en palabras de Weisberg: Las estructuras computacionales, en el corazón de los modelos computacionales, son procedimentales. Representan propiedades causales de sus (sistemas/)objetivos al relacionar estas causas con los procedimientos. Pueden ser condicionales, probabilísticos y paralelos, todos los cuales son difíciles de representar utilizando estructuras no procedimentales ([Weisberg, 2012], p. 31).

5.2. Experimento psico-cognitivo de interacciones perceptuales

En esta sección se describe el experimento original presentado en el artículo [Auvray et al., 2009] a partir del cual se construye el modelo biológico-computacional que llamaremos *Modelo de Percepción Cruzada*, con el cual se trabajará en la totalidad de la tercera parte de la presente tesis. A su vez, se mencionan los componentes fundamentales que se considerarán para la construcción del modelo propiamente dicho y los elementos constitutivos que determinarán su dinámica.

Para precisar lo señalado anteriormente, es conveniente conocer algunos detalles del estudio puesto en práctica por los autores Auvray, Lenay y Stewart, al que denominamos *experimento psico-cognitivo de interacciones perceptuales*.

Motivados por una experiencia previa presentada en el trabajo de [Murray and Trevarthen, 1985], Auvray et al. llevaron a cabo el mencionado experimento. En líneas generales, dicha investigación experimental consistió en ubicar a dos personas en un mismo *espacio perceptual virtual* durante un determinado lapso de tiempo y, mediante una red proporcionada por un pequeño dispositivo de sustitución sensorial táctil, se observó su interacción.

En este sentido, cada participante inmerso en el mencionado escenario podía mover un *avatar* -entendido como la representación de su propio cuerpo dentro del entorno virtual- a través del cual era capaz de percibir los objetos circundantes en ese entorno y, a su vez, gracias a él era susceptible de ser detectado por el otro participante. En términos generales, dentro de este espacio virtual los participantes podían relacionarse con tres tipos de objetos: el avatar de la otra persona, un *objeto fijo* ubicado en el terreno y uno móvil llamado *señuelo*, el cual tenía la misma forma y se desplazaba de la misma manera que el avatar del otro participante tal como si fuera una sombra de su cuerpo pero sin tener la capacidad de percibir. En este contexto se les solicitaba a los participantes que al sentir un estímulo táctil pudieran reconocer cuándo se trataba de un encuentro con el avatar del otro participante.

La experiencia fue implementada para veinte participantes en total de entre 20

y 42 años que tomaban parte de a dos por vez mediante una versión adaptada del dispositivo *Tactos* (ver [Lenay et al., 2003]), el cual hacía posible su encuentro en un espacio virtual perceptual común. Dicho espacio era de carácter unidimensional, con 600 píxeles de largo y sus bordes estaban unidos formando un *toro*.

Como mencionamos previamente, cada participante, por medio de un mouse de computadora, era capaz de mover un cursor de 4 píxeles de ancho (avatar) dentro del espacio virtual que estaba compartiendo con el otro participante. Dicho avatar se corresponde con lo que llamamos *cuerpo receptor*, dado que a través de él (y solamente de él), los participantes podían recibir un estímulo táctil (vibración en su mano) cuando se superponían con al menos un píxel perteneciente a algún cuerpo del entorno circundante. En efecto, dentro de dicho entorno virtual los participantes eran capaces de tomar contacto (y por ello recibir un estímulo) con tres tipos de objetos:

1. El **avatar** del otro participante. Notemos que, siguiendo el razonamiento previo, cuando se daba una interacción de este tipo, ambos participantes recibían un estímulo táctil al mismo tiempo.
2. Un **objeto fijo**, del mismo ancho que el avatar pero ubicado permanentemente en una determinada posición del terreno unidimensional. Para cada participante había un objeto fijo que le correspondía y estaban ubicados en distinto sitio uno respecto del otro. Dichos objetos solo eran perceptibles por el participante a quien pertenecían.
3. Un objeto móvil, de 4 píxeles de ancho, denominado **señuelo**. Este objeto se ubicaba en todo momento a una distancia constante respecto del avatar del otro participante, por lo que repetía sus trayectorias y desplazamientos de manera idéntica. Es importante notar que, cuando se daban encuentros entre el avatar de un participante y el señuelo del otro, el choque solo era capaz de ser percibido por el primer participante. Esto se debe a que, por más de que el señuelo estuviera solapado con algún objeto del espacio, el participante a quien correspondía dicho señuelo no recibía ningún estímulo táctil y por lo tanto el participante no tenía registro de dicho encuentro.

Cada instancia del experimento, donde intervinieron de a dos participantes por vez, se dividió en dos fases. La primera, que se denomina como fase de *aprendizaje*, se basó en colocar a los participantes durante un breve lapso de tiempo frente a distintos tipos de objetos (quietos y en movimiento) para que pudieran familiarizarse con ellos y así favorecer su identificación. En efecto, esta fase consistió en entrenar a cada participante por separado en la exploración, en primer lugar, del espacio en presencia de un objeto fijo, luego, de un cuerpo moviéndose a velocidad constante de 15 píxeles por segundo y finalmente, del mismo cuerpo

desplazándose a 30 píxeles por segundo. Cada uno de estos entrenamientos duró 1 minuto.

A continuación se puso en práctica la segunda fase, denominada por los autores como *sesión de evaluación*, llevada a cabo separadamente por pares de participantes que realizaban el experimento una sola vez cada uno. Esta parte del estudio duraba 15 minutos en total y la única información que se les ofreció a los participantes antes de comenzar fue que en el espacio virtual donde estaban situados había tres tipos de objetos táctiles: el avatar del otro participante, objetos fijos y objetos móviles, sin especificar la relación existente entre ellos. A su vez, a cada uno se les dio la instrucción de que debían hacer clic con el mouse toda vez que consideraran que un estímulo táctil percibido haya sido proveniente del contacto con el avatar del otro participante.

Para finalizar con la descripción del experimento, es importante recalcar dos cuestiones de relevancia. Por un lado notar que durante el transcurso del estudio los participantes no disponían de ningún tipo de información respecto al desarrollo del experimento ni de las acciones del otro participante más allá de los estímulos táctiles emitidos por el dispositivo personal de cada uno de ellos. Más aún, cada participante tenía los ojos tapados en todo momento del desarrollo de su intervención. Por otro lado, como remarcan los autores, la tarea propuesta a los participantes no implicaba un objetivo de percepción mutua ni una competición entre ellos, sino simplemente el reconocimiento de las situaciones en las que los estímulos táctiles que recibían se debían a haber contactado el avatar del otro participante.

5.2.1. Resultados del experimento de interacciones perceptuales

A los fines de una futura validación del modelo que se busca construir en esta parte de la tesis, a continuación se ofrece un resumen donde se recuperan los resultados y análisis estadísticos obtenidos en el experimento protagonizado por los 20 participantes presentado en el apartado anterior. Entonces, atendiendo al objetivo principal de nuestro trabajo, se expone aquí un sumario de los resultados generales recabados por sus autores ya que serán pertinentes a la hora de la construcción y evaluación del modelo que desarrollaremos en la siguiente sección.

De esta manera, el análisis de los datos generales arroja que aproximadamente el 52 % de los **estímulos totales** del experimento fueron ocasionados por el contacto entre el cuerpo de un participante con el avatar del otro, mientras que el 33 % se debieron al encuentro con el objeto fijo y el 15 % con el señuelo. Por otra parte, al estudiar las *causas de cada clic* se encontró que el 66 % aproximadamente de todos los clics realizados se debieron a estimulaciones ocasionadas por el cuer-

po del otro participante, el 23 % fueron clics siguiendo percepciones dadas por la presencia del señuelo móvil y solo el 11 % fueron por el objeto fijo. Cabe aclarar que para este análisis se consideraron todos los estímulos percibidos en un lapso de 2 segundos previos a la concreción de cada clic y se tomó como la causa del mismo al tipo de estímulo más ocurrido en ese período. Finalmente, se dividen estos porcentajes por la porción de ocurrencias según la categoría de estímulo al que pertenecen y se obtiene, en palabras de los autores, la *probabilidad relativa de clics* para cada tipo de percepción. Así, observamos que la proporción de clics realizados a causa del objeto fijo sobre el porcentaje de estímulos provenientes de dicho objeto es mucho menor en comparación con el cociente calculado para los demás objetos -siendo de aproximadamente 0.33-, mientras que para el resto de los estímulos es de 1.26 (avatar del otro participante) y 1.51 (señuelo).

A partir de los mencionados datos de probabilidad relativa de clics por cada clase de estímulo, es posible realizar algunas conjeturas significativas. A priori, una hipótesis razonable para explicar por qué los participantes efectúan clic frente al objeto fijo en forma sustancialmente menor respecto que a otro tipo de cuerpos -incluso a pesar de recibir un porcentaje considerable de estímulos ocasionados por este objeto- es la capacidad desarrollada para diferenciar entre cuerpos móviles y estáticos. Se debe recordar aquí que en la primer fase del experimento los participantes fueron familiarizados con distintas clases de objetos presentes en el entorno virtual unidimensional donde luego se desarrollaría el estudio. Por otro lado, se observa que la diferencia entre la probabilidad relativa de los clics correspondientes al avatar del otro sujeto y su señuelo es prácticamente insignificante, lo que nos estaría indicando que los participantes no son capaces de discriminar entre los distintos tipos de objetos móviles.

5.3. Modelo de Percepción Cruzada

Sobre la base del experimento de interacciones perceptuales presentado anteriormente, en esta sección nos orientaremos a la construcción de un modelo de producción enteramente propia y original que hemos denominado **Modelo de Percepción Cruzada** (MPC). En este sentido, con la finalidad de reproducir y estudiar desde un punto de vista inédito el fenómeno presentado en un primer momento en el marco del experimento psico-cognitivo de [Auvray et al., 2009], se construye el modelo que se desarrollará en las secciones subsiguientes.

Antes de enfocarnos plenamente en el MPC, estimamos relevante observar una cuestión relativa al enfoque general desde el cual se plantea su construcción. En virtud de lo indicado a cada participante del experimento respecto a lo que deben realizar una vez que se desarrolla la experiencia de la que forman parte, es posible considerar que cada uno adopta en ese instante un objetivo a cumplir. Es decir, tras

señalarles a los participantes que tienen que efectuar un clic con el mouse cuando crean estar en contacto con el avatar del otro, se está generando una meta que ellos deben alcanzar, creando así una *función de utilidad* correspondiente a cada uno de ellos a la cual buscan satisfacer. Por lo tanto, desde el momento que se tiene una función de utilidad que se quiere maximizar es posible suponer que estamos frente a la dinámica característica de un **juego**. Al mismo tiempo, es importante notar que debido a que en este juego se van a representar *acciones* y, sobre todo, *decisiones* de los jugadores, no será suficiente utilizar únicamente transiciones -o reglas- determinísticas sino que será necesario tener en cuenta aquellas de tipo *estocástico*.

De esta manera, se procede en primera instancia a realizar una breve exposición general de dicho modelo para luego mostrar los resultados obtenidos y finalmente llevar a cabo el análisis correspondiente de los mismos. A su vez, se ofrece como anexo en el Apéndice A 3 una descripción exhaustiva de los detalles de construcción e implementación, además de los parámetros específicos del MPC junto al algoritmo y pseudocódigo computacional utilizados para su puesta en práctica.

5.3.1. Presentación del modelo

A fin de construir un modelo que reproduzca fehacientemente el fenómeno presentado en la sección previa y a la vez que sea posible su implementación mediante la simulación computacional, se propone representar la situación a través de un *juego*. En el mismo participarán dos jugadores compartiendo un escenario común en el que se desarrollarán sus acciones durante un cierto período de tiempo. Cabe aclarar que la dimensión temporal se considerará de carácter discreto, es decir que la dinámica del modelo se desarrollará a partir de sucesivos pasos temporales sincrónicos y finitos.

En líneas generales, el MPC representará un juego en el que, a cada paso temporal t , dos jugadores situados en un mismo escenario realizarán ciertas acciones que estarán guiadas y motivadas tanto por sus características personales como por sus observaciones circunstanciales.

El **escenario** donde se desarrollará nuestro modelo es un tablero unidimensional dividido en 600 casilleros (o píxeles) los cuales serán ocupados por los jugadores (y otros objetos) durante todo el transcurso del juego, pudiendo darse el caso de que ambos compartieran la posición de algún casillero. En cada paso temporal las **acciones** que podrá realizar el jugador están divididas en dos tipos, las acciones de *movimiento* y las de *cliqueo*, es decir que los jugadores a cada momento podrán desplazarse en el tablero y adicionalmente, si lo desean, podrán hacer clic.

De la misma manera que en el experimento de la sección anterior, además de

los cuerpos de los jugadores, en el escenario se ubicarán un **Objeto Fijo** (OF) y uno móvil (**señuelo**) pertenecientes cada uno de ellos. Esto es, por un lado habrá un objeto ubicado a determinada distancia (constante) de cada jugador y el cual se moverá exactamente de la misma manera que lo hace el jugador correspondiente y por otro tendremos un objeto que estará inamovible en un lugar determinado del tablero durante todo el juego. Cabe recordar que dicho objeto fijo solo podrá ser percibido por el jugador al cual pertenece, a diferencia del señuelo que es reconocible por el otro jugador. En la Figura 5.1 se muestran los objetos referidos dispuestos de manera esquemática en una porción del tablero donde se desarrolla el juego que reproduce el Modelo de Percepción Cruzada.

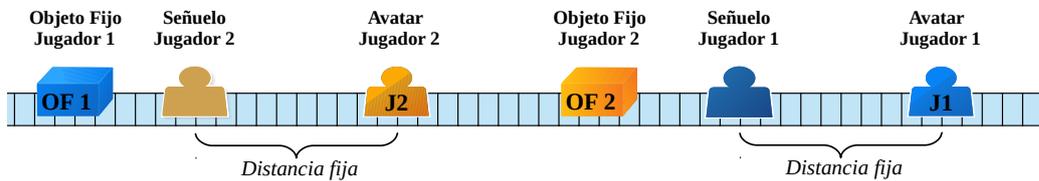


Figura 5.1: Diagrama ilustrativo del escenario y los jugadores del MPC.

Como se mencionó anteriormente, los participantes dispondrán de *observaciones* personales que irán actualizando a medida que se desarrollan los acontecimientos durante el transcurso del juego. A partir de ellas los jugadores tomarán decisiones a la hora de realizar sus acciones correspondientes en cada paso temporal. Dichas observaciones consisten esencialmente en la percepción de las superposiciones que se pudieran dar con otro cuerpo, ya sean contactos con otro jugador, con su objeto fijo o bien con el objeto móvil del otro participante, aunque a priori no podrán distinguir de cuál de estos tipos de encuentros provienen ya que no se les otorga esa información. Además, cada jugador dispone de su propia capacidad de almacenar un determinado número de observaciones a lo largo del tiempo, esto es lo que llamaremos su *memoria* y estará representada a través del parámetro m .

Adicionalmente a la memoria, cada jugador posee un conjunto de características personales que lo definirán y mediante las cuales se desenvolverá su accionar a lo largo del juego. Dichas características serán fijadas previamente antes de iniciar el proceso iterativo y se proporcionarán al modelo como un conjunto de parámetros de entrada propios de cada jugador. En el Apéndice A 3 se encuentra una descripción detallada referida a dichos parámetros y a su interrelación dentro del juego.

5.3.2. Dinámica iterativa

El inicio del proceso es considerado como el instante de tiempo $t = 0$ y el juego se desarrollará durante $T_{MAX} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ unidades temporales. Los jugadores inician el procedimiento en una posición aleatoria del tablero con su cuerpo ocupando 4 casilleros (o píxeles), sin que haya inicialmente una superposición entre sí ni con ningún otro cuerpo. Además, para cada uno de ellos, en el terreno se encontrarán ubicados dos objetos más. Por un lado, habrá un objeto fijo que permanecerá en una posición inamovible durante todo el proceso iterativo, ocupando 4 casillas y siendo perceptible únicamente por el jugador al que pertenece. Asimismo, habrá otro cuerpo llamado señuelo (o sombra) que se moverá idénticamente que el jugador al que está asociado, ocupando este también 4 píxeles y ubicándose en todo momento a una distancia constante de dicho jugador. Cabe aclarar que tanto el cuerpo de un participante como el señuelo que tiene asociado son susceptibles de ser percibidos por el otro jugador cuando se superpongan con su cuerpo en algún casillero del tablero. Diversas situaciones características de posibles encuentros -y sus consiguientes **percepciones**- entre los distintos objetos asociados a cada participante son mostrados a modo de ejemplo en las Figuras 5.2, 5.3 y 5.4.

Describimos ahora el desarrollo iterativo para los jugadores en cada paso temporal del modelo. En primer lugar es posible que el jugador reciba un estímulo proveniente de una superposición ya sea con su objeto fijo, con el cuerpo de otro jugador o con su señuelo. Esta percepción que registra es guardada en una lista de **observaciones históricas** (O), ordenada en función del tiempo en que fueron percibidas. En efecto, los jugadores registran en cada instante temporal t tanto si hubo un estímulo proveniente de un encuentro (observación positiva) como si no lo hubo (observación negativa) y, como mencionamos anteriormente, cada uno de ellos tiene la capacidad de guardar una cierta cantidad máxima (m) de observaciones hacia el pasado (ver apéndice A 3.2). De esta manera, los jugadores en todo instante de tiempo que transcurra el juego tendrán asociada una lista con m anotaciones indicando lo que percibió en los últimos m pasos temporales.

En segundo lugar los jugadores proceden a llevar a cabo sus **acciones**, las cuales constan de dos instancias. La primera de ellas es la posibilidad de hacer *clic* (en caso de que consideren estar en presencia del otro jugador) para luego, en una segunda instancia, proceder a realizar su *movimiento*. En efecto, en cada instante temporal t los participantes deberán decidir si van a efectuar o no un clic y luego se moverán hacia algún casillero circundante a su ubicación en el tablero. En todo momento los participantes pueden tomar como acción de movimiento tanto quedarse en el lugar donde se encontraban originalmente o bien moverse hacia la derecha o izquierda una cantidad de casilleros menor o igual al número $v \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (ver parámetro *velocidad máxima* (v) en el apéndice A 3.3).

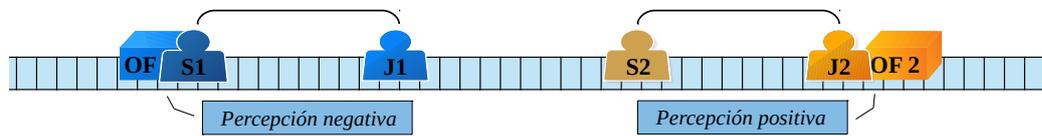


Figura 5.2: A la izquierda se produce un encuentro entre el *señuelo* del **Jugador 1** y su *objeto fijo*, lo que no produce una percepción para este jugador. A la derecha el **Jugador 2** si recibe un estímulo al superponer su *avatar* con su objeto fijo.

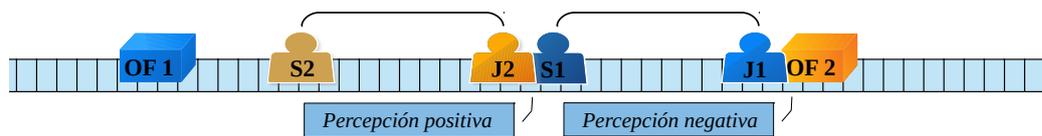


Figura 5.3: A la izquierda el **Jugador 2** percibe un estímulo al contactar con su cuerpo la sombra del Jugador 1, el cual no reconoce este encuentro. A la derecha el **Jugador 1** atraviesa el objeto fijo del otro participante y por lo tanto no recibe percepción alguna.

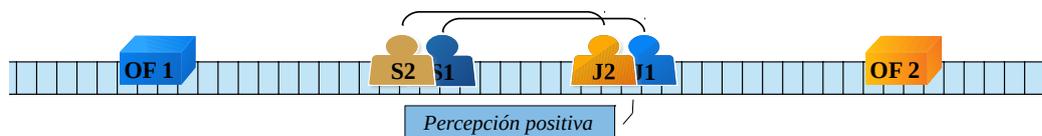


Figura 5.4: Los dos jugadores toman contacto con el cuerpo del otro y por lo tanto ambos tienen percepciones positivas.

Es importante aclarar que ambas acciones se realizan siguiendo una **política** de *clics* y *movimientos* específica para el instante en el que se desarrolle la acción. Dichas políticas, que registrarán completamente el accionar de los participantes, están

íntimamente ligadas a las características personales de los jugadores (representadas a través de sus parámetros) y principalmente a una estructura denominada *modo*. Los modos son un atributo dinámico que poseerán los jugadores en todo instante de tiempo que transcurra el modelo y representarán su *estado personal de duración intermedia*. En este sentido, decimos que toda acción que realice un jugador a lo largo del juego será guiada por ciertas políticas que a su vez estarán determinadas tanto por el *modo* en el que se encuentre dicho jugador al momento de concretar dicha acción como por los parámetros propios que lo definen. Complementariamente, dichas políticas también estarán afectadas de manera eventual y temporal por ciertos atributos auxiliares llamados *alertas* (ver sección 5.3.3 y apéndice A 3.1 - Modo 0 y Modo 1).

Luego de que se llevan a cabo las acciones de cada jugador se *actualiza el tiempo* $t \leftarrow t + 1$ y así se procede al paso temporal siguiente. Posteriormente los jugadores tendrán sus percepciones provocadas por los acontecimientos del instante t y de esta manera se continua de forma **iterativa** lo expuesto anteriormente hasta que se cumplen el total de iteraciones fijadas en un comienzo del proceso (i.e. hasta que se cumpla $t = T_{MAX}$).

Es valioso señalar en este punto que sólo el administrador externo del modelo recopila la información completa sobre todos los movimientos y clics de los jugadores a lo largo del juego, como así también la información sobre cuándo los participantes acertaron o se equivocaron en el objetivo de cliquer estando en contacto con el cuerpo del otro jugador. Por esta razón los participantes no cuentan con nada más que sus percepciones (y lo que recuerden de ellas) para tomar las decisiones sobre cómo actuar en cada paso temporal del proceso iterativo que constituye el juego descripto.

En la Figura 5.5 se presenta un diagrama del proceso detallado en esta sección donde se muestra, de forma abreviada, la evolución de la *dinámica* del Modelo de Percepción Cruzada para dos jugadores. Resulta relevante notar que los procesos de cada participante, si bien se desarrollan en forma paralela, **no son independientes** uno del otro. En efecto, como se ve en el esquema de la Figura 5.5, en cada paso temporal se actualizan las observaciones de los jugadores, para lo cual es determinante tanto su estado instantáneo propio como el del otro participante ya que se debe verificar si hubo algún tipo superposición entre sus cuerpos o con el señuelo. En dicho diagrama se utilizan las siguientes denominaciones: *estado* del jugador (S), es la posición que ocupa el participante en el tablero junto a la condición en la que se encuentra su modo; *observación* del jugador (O), vector de observaciones históricas y *acción* del jugador (a), es lo realizado tanto en términos de movimiento como de clics.

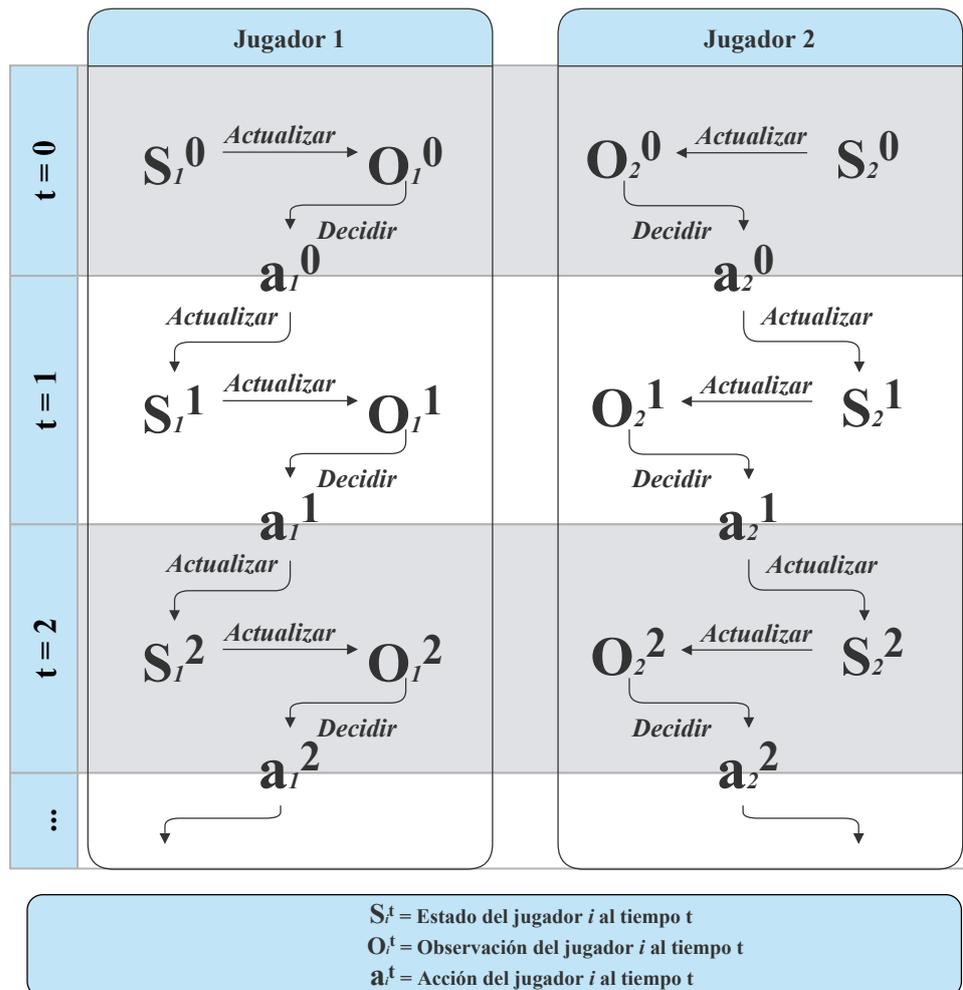


Figura 5.5: Proceso iterativo del MPC.

5.3.3. Políticas de acción

En cada instante del juego que se describió en la sección anterior, los participantes se encontrarán en algún estado personal dinámico de duración intermedia al que llamaremos “**modo**”. Este estado regirá, junto con otros parámetros personales, las *políticas de acción* de clics y de movimientos. Es decir, el *modo* en el que se encuentre un jugador al momento de realizar una acción, determinará la política que adoptará para llevarla a cabo. Dicho procedimiento para la selección de las políticas de acción se repite en cada paso temporal del proceso iterativo por el que transcurre el MPC.

A continuación se expone un breve resumen de las características generales y el funcionamiento dentro de la dinámica del modelo por parte de los posibles modos en los que cada jugador se puede encontrar durante el transcurso del juego. Además, se ofrece en el Apéndice A 3.1 una especificación precisa de los mismos y junto al anexo A 3.3 se proporciona una descripción detallada de todos los parámetros que intervienen y determinan los mencionados “modos”.

Los posibles modos en los que puede estar cada jugador son el *Modo 0* o “modo normal” y el *Modo 1* o también llamado “modo para la identificación de objetos fijos”. Es importante aclarar que, así como las observaciones históricas mencionadas en la sección anterior, los estados personales y los parámetros propios de cada jugador; el *modo* en el que se encuentren será también un **atributo** que poseerán los participantes en cada instante temporal. A su vez, los jugadores irán cambiando dicho atributo o estado a medida que se va desarrollando el juego y los cambios de un modo a otro dependerán esencialmente de sus percepciones respecto al contacto con otro objeto -las cuales están representadas mediante el vector O de observaciones históricas- y del conjunto de parámetros propios que definen las características de cada jugador.

En líneas generales diremos que el *modo normal* (Modo 0) es el estado base con el que todo jugador inicia el juego y en el cual permanecerá la mayor parte del tiempo a excepción de situaciones particulares en las que se “activará” el Modo 1. En este sentido, motivados en la primer fase del experimento descrito al comenzar este capítulo, el Modo 1 tiene como objetivo modelar situaciones en las que el jugador procura determinar cuándo está en presencia de un objeto fijo del tablero.

En efecto, el *modo para la identificación de objetos fijos* pretende captar aquellos posibles escenarios donde los jugadores advierten una percepción de un objeto externo luego de haber pasado un tiempo considerable sin haber tenido ninguna de estas observaciones e intentan distinguir de qué tipo de objeto se trata. En otras palabras, se supone que en una situación como la señalada anteriormente, hay una cierta probabilidad de que un jugador al moverse y captar un estímulo pretenda reconocer si dicha percepción proviene del encuentro con un objeto fijo o, en caso contrario, se trate de uno móvil y así asegurarse de estar en presencia del otro

participante. El transcurso de la situación en la que un jugador intenta hacer esta identificación se modelará mediante el denominado Modo 1, el cual regirá -a través de los parámetros específicos de cada participante relativos a dicho modo- las acciones que realizará el jugador durante todo el proceso que dure el reconocimiento. Finalmente, una vez que se haya logrado decidir de qué tipo de objeto se trata, el jugador vuelve al modo normal y continúa con sus acciones establecidas por las políticas del Modo 0.

Como señalamos anteriormente, se ofrece en el apéndice A 3.1 una descripción exhaustiva y detallada de cada uno de estos Modos, tanto de su funcionamiento con respecto a la dinámica propia del MPC como de su relación e incidencia en las políticas de acción que adoptan los jugadores a lo largo del juego. Así, junto a los anexos A 3.2 (algoritmo del MPC) y A 3.3 (parámetros del MPC) es posible alcanzar un entendimiento acabado del desarrollo del modelo propuesto, tanto en términos de su proceso y dinámica iterativa como de sus detalles más específicos relacionados a las políticas de acción que pueden llevar a cabo los jugadores.

6. Implementación y Resultados del MPC

El presente capítulo estará destinado tanto al desarrollo y ejecución de las implementaciones del MPC como a la presentación de todos aquellos resultados obtenidos de las mismas en pos de validar y analizar con un grado mayor de profundidad el modelo construido en esta tercera parte de la tesis.

6.1. Implementación computacional del MPC

La implementación del modelo detallado en el capítulo anterior se realizó mediante un programa computacional desarrollado en lenguaje Python, elaborado originalmente para esta tesis. En la concreción de dicho programa los esfuerzos estuvieron centrados en captar de la manera más fehaciente posible la totalidad de las características constitutivas y los aspectos fundamentales del MPC, aunque esto pudiera acarrear, en algunos casos, una mayor complejidad para su desarrollo y ejecución.

En este sentido, el programa mencionado es la representación a través de la **simulación computacional** de una instancia de puesta en práctica del MPC. De la misma manera que en el modelo, para el desarrollo del programa se consideraron dos participantes, definidos exclusivamente a través de sus parámetros personales, que se desenvuelven en un hipotético escenario común y que para la realización de sus acciones siguen las reglas y consideraciones establecidas en el capítulo anterior. Es decir, para una cierta cantidad ($T_{MAX} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) de pasos temporales establecidos por el usuario del programa, es posible simular computacionalmente el proceso iterativo del MPC en el que ambos participantes desarrollan su accionar, interactuando entre sí mediante sus *percepciones cruzadas* y con su entorno a través de los encuentros con los distintos tipos de objetos.

Del mismo modo en que se especificó previamente respecto al modelo propia-

mente dicho, las simulaciones llevadas a cabo por esta implementación establecen que el accionar de los jugadores en cada instante temporal depende solamente de la información con la que cuenta dicho participante en ese momento, representada mediante un vector de **observaciones**, y por sus parámetros determinantes. En efecto, los únicos argumentos de entrada del programa construido para la simulación del MPC son -además del número total de pasos temporales que durará el proceso- los parámetros específicos de cada jugador.

En resumen, a la hora de ejecutar una simulación del Modelo de Percepción Cruzada, el usuario debe especificar un valor numérico T_{MAX} que determinará la cantidad total de instantes para los que se simularán las acciones de los jugadores, junto a dos grupos de parámetros correspondientes a las caracterizaciones de cada uno de ellos, los cuales están detallados en el apéndice A 3.3. Al finalizar cada ejecución del programa se obtienen almacenados en memoria el conjunto total de acciones efectuadas, posiciones y estados alcanzados por cada jugador para todo instante de tiempo durante los que tuvo lugar el proceso iterativo completo -simulado- del modelo. En la Figura 6.1 se muestra un diagrama del procedimiento llevado a cabo por el programa mencionado para la ejecución de las simulaciones.

Es importante aclarar que dicha implementación computacional no admite jugadores reales sino que los mismos son considerados únicamente a través del conjunto de **parámetros** que especifican y representan sus características y, al fin y al cabo, condicionan íntegramente su accionar. Como se mencionó anteriormente, además de simular la dinámica iterativa del MPC para dos jugadores, el programa lleva un registro completo de los estados en los que, dentro de la simulación, cada jugador se encontró en todo instante temporal. Por otra parte, también se almacena la totalidad de las acciones -tanto de clics como de movimiento- de cada uno de ellos, por lo que es posible conocer con absoluto detalle todos los eventos desarrollados en cada simulación llevada a cabo por el usuario. En el apéndice A 3.2 se dejan el algoritmo general y el pseudo-código específico para el Modo 1 que sigue el programa al que se está haciendo referencia en esta sección, además se especifica la dirección web donde se puede encontrar el código computacional Python, libre y completo, de dicho programa.

Finalmente, nos parece importante destacar que, a partir de los registros almacenados, es posible obtener datos referidos tanto a los movimientos simultáneos de los participantes a lo largo del transcurso del juego como a la información que relativa al acierto de los jugadores en su intento de identificar cuándo se encuentran en contacto con el otro participante. De esta manera es posible validar nuestro modelo en relación a los resultados mostrados por [Auvray et al., 2009] en el experimento psico-cognitivo de interacciones perceptuales, presentados en la sección 5.2.1 de esta tesis. A fin de complementar y así favorecer la comprensión sobre la implementación del MPC, en la próxima sección se muestran gráficos y resultados de las ejecuciones llevadas a cabo para ciertos parámetros específicos.

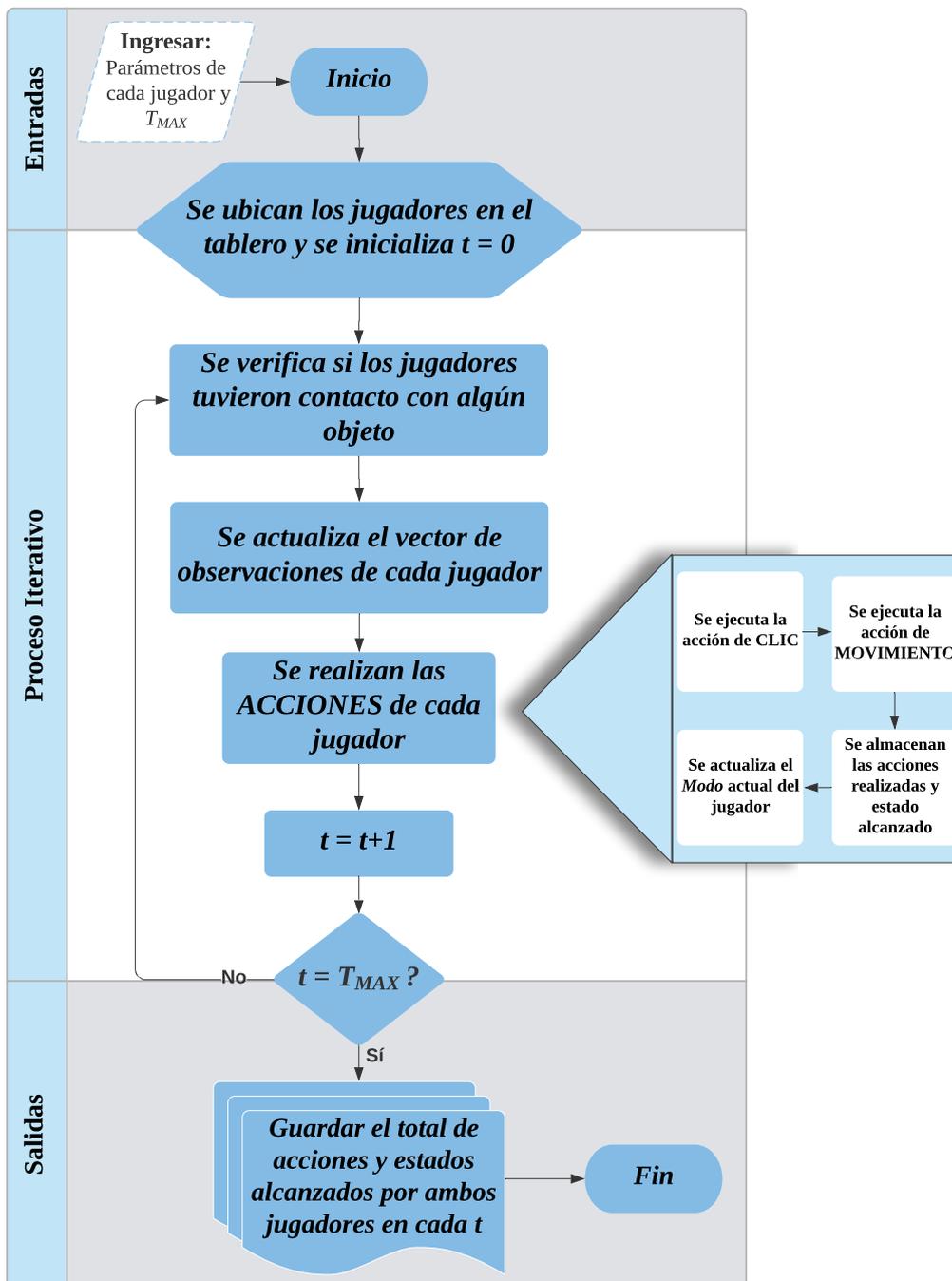


Figura 6.1: Diagrama del algoritmo general seguido por el programa para la simulación computacional del MPC.

6.2. Resultados de implementación

Con el fin de ilustrar con un grado mayor de profundidad y precisión la forma de funcionamiento y los alcances del Modelo de Percepción Cruzada, en esta sección se buscará mostrar -y graficar- los resultados obtenidos a partir de determinadas implementaciones del programa mencionado. Es pertinente en este punto aclarar que, como se puede ver en el apéndice A 3.3, dado el gran número de parámetros específicos que definen el accionar de los jugadores, las simulaciones aquí presentadas han sido ejecutadas para reflejar el papel de ciertos parámetros que consideramos con un alto nivel de representatividad y, en algunos casos, mayor relevancia, dejando prefijados e inamovibles el resto de ellos.

Para cada una de las simulaciones que se exponen en este apartado se mostrará un gráfico del *recorrido* llevado a cabo por cada jugador y su sombra (o señuelo) en el terreno unidimensional a lo largo de la totalidad de pasos temporales en los que transcurre el proceso iterativo, especificando en cada caso cuáles fueron los parámetros elegidos para realizarla. Además, junto a estos gráficos, se ilustrarán con mayor detalle algunas etapas del desarrollo de las simulaciones haciendo foco en determinados períodos en los que se evidencien situaciones que se consideren de relevancia para llevar a cabo un análisis particular y pormenorizado. En última instancia se exponen los resultados referentes a las acciones de *movimiento* y *clics* -tanto aciertos como fallos- para que sea posible contrastarlos con lo presentado en el trabajo [Auvray et al., 2009] sobre el experimento descrito en el capítulo 5.

6.2.1. Simulación I

El objetivo principal de esta simulación es, por un lado visualizar en un ejemplo concreto cómo se da en la práctica cada implementación del MPC, además mostrar una elección usual del conjunto total de parámetros y finalmente señalar ciertos períodos de características “especiales” dentro de una simulación típica. En efecto, la misma se ejecutó a lo largo de 3000 pasos temporales ($T_{MAX} = 3000$) y los parámetros elegidos para darle identidad a cada uno de los jugadores -indicando en su supraíndice a cuál de ellos corresponde- se muestran en la Tabla 6.1. Ahora bien, si consideramos que cada instancia del experimento original se prolongó durante 15 minutos, entonces 10 pasos temporales en nuestra representación equivalen a 3 segundos reales. Al combinar esta elección con el valor escogido para v (*velocidad máxima* del jugador), se establece que cada participante puede recorrer a lo sumo 20 píxeles cada 3 segundos. En ese mismo sentido, si observamos lo determinado para el parámetro m (*memoria* del jugador), se evidencia que cada participante puede “recordar” lo acontecido un tiempo equivalente a 24 segundos hacia el pasado.

Tabla 6.1: Parámetros Simulación I.

Parámetro	Descripción	Jugador 1	Jugador 2
$m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$	Memoria del jugador.	$m^{(1)}=80$	$m^{(2)}=80$
$v \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$	Velocidad máxima.	$v^{(1)}=2$	$v^{(2)}=2$
$p \in [0, 1]$	Prob. inercial.	$p^{(1)}=0,9$	$p^{(2)}=0,9$
$P \in [0, 1]$	Prob. inercial especial.	$P^{(1)}=0,999$	$P^{(2)}=0,999$
$\rho \in (0, 1)$	Parám. de movimiento no-inercial.	$\rho^{(1)}=0,2$	$\rho^{(2)}=0,2$
$y_1, q_1 \in \mathbb{Z}_{>0} \times [0, 1]$	Paráms. Modo 0 - E I.	$y_1^{(1)}=2$ $q_1^{(1)}=0,8$	$y_1^{(2)}=3$ $q_1^{(2)}=0,8$
$y_2, q_2 \in \mathbb{Z}_{>0} \times [0, 1]$	Paráms. Modo 0 - E II.	$y_2^{(1)}=8$ $q_2^{(1)}=0,999$	$y_2^{(2)}=8$ $q_2^{(2)}=0,999$
$q_3 \in [0, 1]$	Parám. Modo 0 - E III.	$q_3^{(1)}=10^{-4}$	$q_3^{(2)}=10^{-4}$
$y_3 \in \mathbb{Z}_{>0}$	Parám. aux. Modo 0.	$y_3^{(1)}=8$	$y_3^{(2)}=5$
$p_1, z \in [0, 1] \times \mathbb{Z}$	Paráms. de ingreso a Modo 1.	$p_1^{(1)}=0,999$ $z^{(1)}=3$	$p_1^{(2)}=0,8$ $z^{(2)}=3$
$p_2 \in [0, 1]$	Parám. de reconocimiento del OF.	$p_2^{(1)}=0,05$	$p_2^{(2)}=0,05$
$p_3, \zeta_1, \zeta_2 \in [0, 1] \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	Paráms. de asignación del tamaño del OF.	$p_3^{(1)}=0,5$ $\zeta_1^{(1)}=1$ $\zeta_2^{(1)}=1$	$p_3^{(2)}=0,5$ $\zeta_1^{(2)}=1$ $\zeta_2^{(2)}=1$
$p_4, e \in [0, 1] \times \mathbb{Z}$	Paráms. específicos de Modo 1.	$p_4^{(1)}=0,9$ $e^{(1)}=3$	$p_4^{(2)}=0,9$ $e^{(2)}=3$
$p_5, \zeta_3 \in [0, 1] \times \mathbb{Z}$	Paráms. específicos de Modo 1.	$p_5^{(1)}=0,5$ $\zeta_3^{(1)}=1$	$p_5^{(2)}=0,5$ $\zeta_3^{(2)}=1$
$p_6, \zeta_4, \zeta_5 \in [0, 1] \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	Paráms. de chequeo del tamaño del OF.	$p_6^{(1)}=0,5$ $\zeta_4^{(1)}=1$ $\zeta_5^{(1)}=1$	$p_6^{(2)}=0,5$ $\zeta_4^{(2)}=1$ $\zeta_5^{(2)}=1$
$p_7, \sigma \in [0, 1] \times \mathbb{Z}_{\geq 1}$	Paráms. específicos de Modo 1.	$p_7^{(1)}=0,8$ $\sigma^{(1)}=1,5$	$p_7^{(2)}=0,8$ $\sigma^{(2)}=1,5$
$p_8 \in [0, 1]$	Prob. de clic sin motivo específico.	$p_8^{(1)}=0$	$p_8^{(2)}=0$

Antes de continuar con la visualización y análisis de los resultados obtenidos en relación a las posiciones, interacciones, movimientos y clics de los jugadores, es pertinente dar cuenta de la forma (heurística) en que se ha elegido la función $f_{m,\rho}(k)$. Como se señala en el apéndice A 3.1, la función $f_{m,\rho}$ hace referencia a la probabilidad que tiene un jugador que se encuentra en Modo 0 (normal) de *volver en sentido opuesto al movimiento que está realizando* dependiendo de cuántos pasos temporales (k) transcurrieron desde que tuvo su última percepción positiva. En este marco, considerando que m -por su naturaleza global- tiene un valor prefijado, el rol que cumple el parámetro ρ es el de modelar el *máximo* de f . En otras palabras, ρ , al determinar el valor de k^* tal que $\max_k f_{m,\rho}(k) = f_{m,\rho}(k^*)$, establece cuándo se dará la máxima probabilidad de que el jugador regrese en dirección contraria y conjuntamente define cuál será la magnitud de dicha probabilidad.

En ese sentido, en la Figura 6.2 se muestra con un gráfico para distintos valores de ρ la elección que hemos realizado en la especificación particular de la función $f_{m,\rho}$ que utilizaremos tanto en la simulación referida en este apartado como en el resto de las ejecuciones mostradas en este capítulo. Es para destacar que, como se observa en dicha figura, a medida que el valor de ρ crece y se acerca a $\rho_{max} = 1$, se producen dos hechos notables. En primer lugar se advierte que la probabilidad de que el jugador *regrese* sobre sus pasos en busca de un objeto dejado atrás disminuye de manera más pronunciada con el correr del tiempo. Junto a esto se observa también que $f_{m,\rho}(k^*)$ reduce su valor a medida que ρ crece.

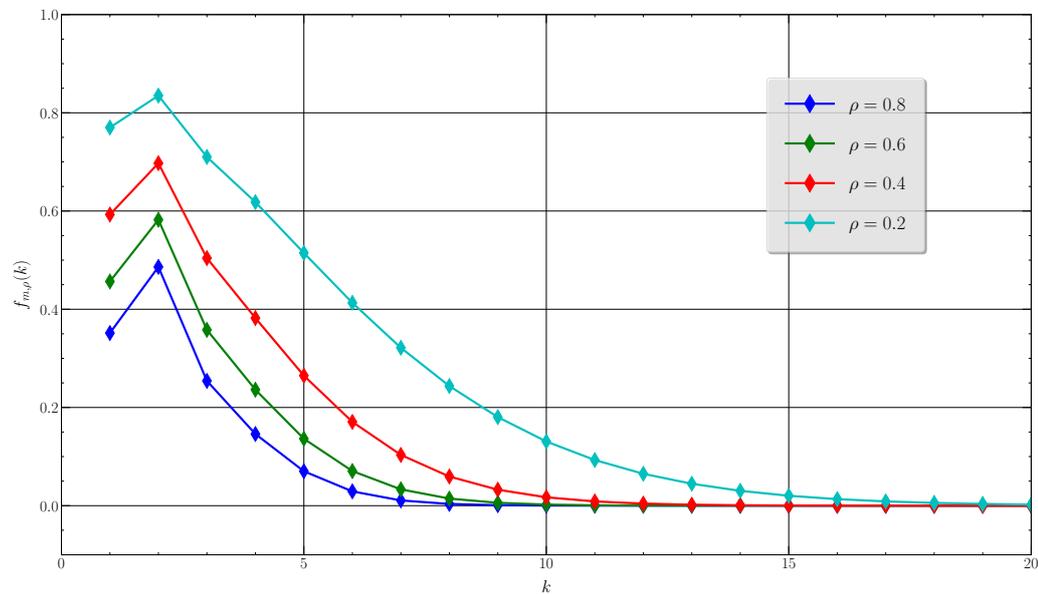


Figura 6.2: Gráfico para distintos valores de ρ de $f_{m,\rho}$ en función de k con $m = 80$.

Ahora bien, puestos en evidencia la totalidad de los parámetros implicados, procedemos a presentar lo referente a las *interacciones* propias del proceso iterativo del MPC. Desde este punto de vista, consideramos en primera instancia la Figura 6.3, la cual nos muestra en un mismo gráfico la disposición a lo largo del tiempo del conjunto total de los objetos presentes en el escenario unidimensional que comparten, poniendo así de manifiesto la evolución de la *dinámica* general del modelo. Como remarcaremos más adelante, en la mencionada gráfica se observan períodos de “exploración” del terreno unidimensional por parte de los jugadores y períodos de interacción con algún cuerpo de su entorno. Por cierto, entre las interacciones referidas se destacan aquellas producidas por el contacto entre los cuerpos propiamente dichos de los jugadores, entre el avatar de un participante y la sombra del otro y finalmente se incluyen las interacciones de los jugadores con el objeto fijo correspondiente a cada uno de ellos.

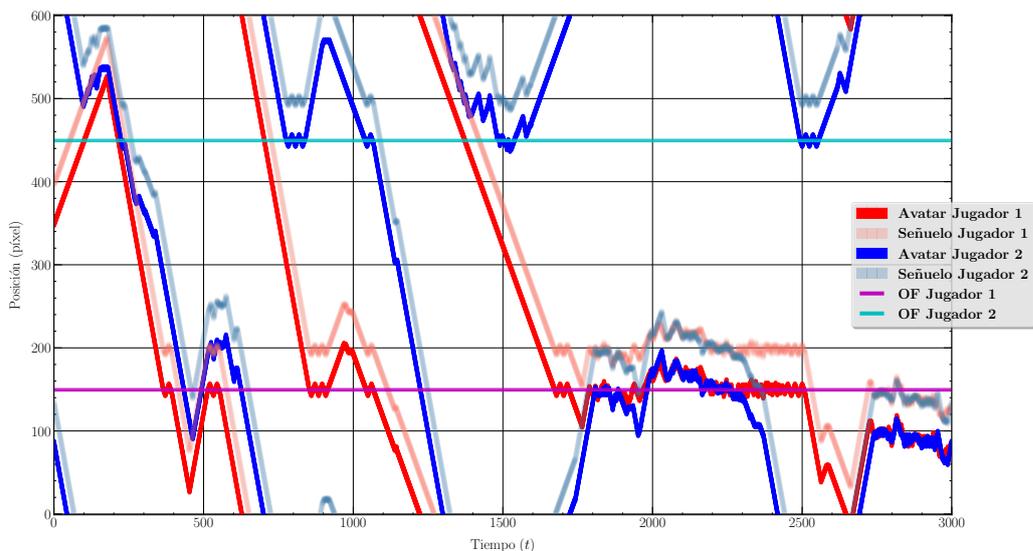


Figura 6.3: Gráfico de las posiciones a lo largo del tiempo de todos los cuerpos intervinientes en una implementación del Modelo de Percepción Cruzada.

Con el fin de profundizar lo mostrado en el gráfico anterior, a continuación se presentan en la Figura 6.4 los movimientos de todos los objetos constituyentes del MPC a lo largo del total de pasos temporales divididos en tres etapas, permitiendo así detallar con un mayor grado de precisión los procesos involucrados en cada una de ellas.

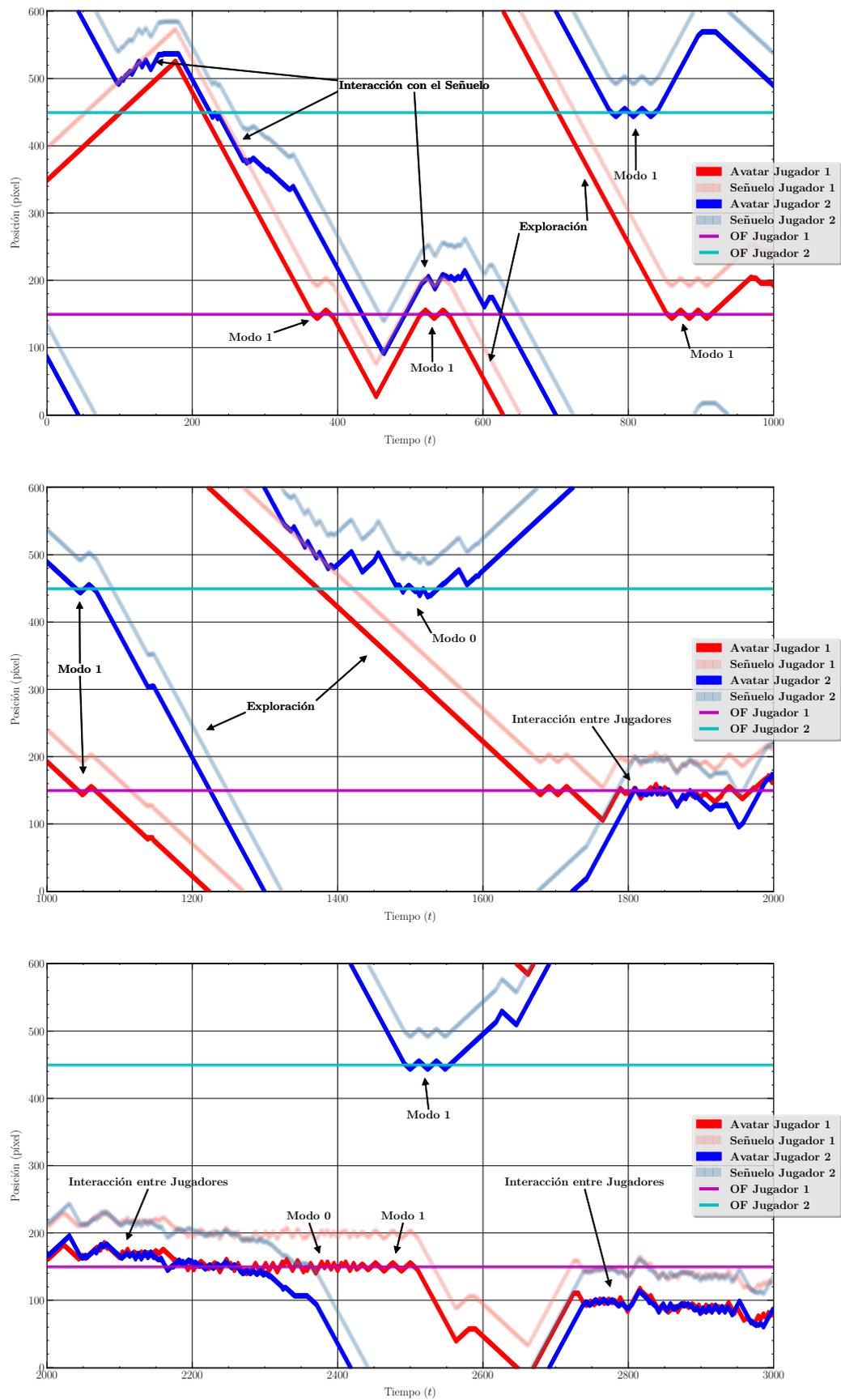


Figura 6.4: Implementación del MPC visualizada en tres tramos.

En primer lugar observamos la gráfica superior, donde se tienen - predominantemente- períodos de exploración del escenario junto a interacciones entre los jugadores y sus respectivos objetos fijos. En efecto, como se señala en la imagen, se pueden ver tres tipos de comportamiento característicos, identificados como *interacción con el señuelo*, fase de *exploración* e ingreso al *Modo 1* (Modo de Reconocimiento de Objetos Fijos). El primero de ellos se produce a lo largo de la primera mitad de los pasos temporales mostrados en el gráfico y se da entre el Jugador número 2 y la sombra del Jugador 1. Es importante notar que este proceso está determinado por la capacidad -en este caso del Jugador 2- de percibir el señuelo del otro participante, que a su vez, al no tener ningún estímulo fruto de este encuentro, continúa desarrollando su accionar independientemente del contacto producido. Por otro lado, en la segunda mitad se observa un largo período de exploración del escenario por parte del Jugador 1, comenzando luego de reconocer su objeto fijo y recorriendo completamente el terreno para finalizar cuando alcanza nuevamente la posición de dicho objeto. Por último se resaltan 4 típicas instancias donde los jugadores ingresan en Modo 1 y luego de proceder como lo indica el algoritmo definido (ver Apéndice A 3.2) identifican que se encuentran en presencia de su objeto fijo y continúan su accionar en *Modo Normal*.

En segundo lugar tenemos el gráfico intermedio, el cual se caracteriza por dar comienzo, después de una larga etapa de exploración, a la fase de interacción entre ambos avatares de los jugadores. Como se indica al comienzo de la gráfica, luego de reconocer a sus respectivos objetos fijos mediante el ingreso al Modo 1, ambos participantes emprenden sendos períodos de exploración del escenario recorriendo el terreno a diferentes velocidades entre sí. Una vez concluido este proceso se da paso al inicio del mayor lapso de *interacción entre los cuerpos* propiamente dichos de los jugadores, el cual culminará en la imagen final de la Figura 6.4. Aquí estimamos que es interesante destacar lo señalado sobre el accionar del Jugador 2 para $t \approx 1500$. En efecto, para dicho tiempo se observa que el participante experimenta una situación de *interacción con su objeto fijo*, pero a diferencia de lo ocurrido usualmente al interactuar con este tipo de objetos, la misma se da sin estar regida por el Modo 1, es decir que el jugador se encontró en todo este momento en Modo 0.

El tercer período comienza con una prolongada interacción entre los jugadores la cual se había originado en el gráfico anterior y se desarrolla en las cercanías al objeto fijo correspondiente al Jugador 1. A continuación el primer participante, al ser el único con la capacidad para percibir dicho objeto, permanece en la zona del tablero referida mientras que el Jugador 2 comienza a alejarse hasta dar con su propio objeto fijo. Es así que luego de entrar en Modo 1 y reconocer que está en presencia del objeto mencionado, ingresa en una fase exploratoria del escenario que lo lleva al sector donde se encuentra en ese momento el otro participante, el cual al percibir la sombra del Jugador 2 que se está acercando comienza a seguirlo.

A raíz del proceso descrito, dado que los jugadores están muy próximos entre sí, comienza un segundo período de prolongada interacción que dura hasta el final de la simulación.

Antes de finalizar el análisis referido a los *movimientos* de los participantes en la Simulación I, consideramos valioso remarcar un evento advertido en el momento en que el Jugador 1 comienza a interactuar con su objeto fijo en el paso temporal $t \approx 2380$. Como se apunta en el gráfico final de la Figura 6.4, a diferencia de lo ocurrido en la mayoría de los casos observados, la interacción del jugador con dicho cuerpo empieza con una etapa en la que permanece en Modo 0 para luego recién de un lapso considerable de tiempo cambiar al Modo de Reconocimiento de Objetos Fijos. Una posible interpretación de lo ocurrido la podemos hallar en el hecho de que al inicio del período que estamos analizando, el jugador además de reconocer la presencia de su objeto fijo, está percibiendo un objeto móvil (la sombra del otro jugador), con lo cuál se podría pensar que esa interferencia está llevando a originar el comportamiento inusual que mencionamos.

En relación a los *clics* de los jugadores en esta simulación, se observa que el número total de realizaciones de este tipo de acciones fue de 52 clics por parte del Jugador 1 y de 64 por el Jugador 2. Además, se destaca que el primero concretó *ejecuciones correctas* (es decir que efectuó un clic en presencia del avatar del otro jugador) en 42 oportunidades mientras que el segundo lo hizo solo en 34 ocasiones. De esta manera, se pone en evidencia que el *porcentaje de clics correctos* sobre el total de los realizados es del 65,5%, y diferenciando esta proporción para cada participante se obtiene que la misma fue de 80,8% para el Jugador 1 y de 53,1% para el Jugador 2.

Para profundizar este análisis, se busca indagar sobre las posibles causas que originaron las acciones de clics de ambos participantes. En este sentido, se observa que -obviamente- el 100% de los clics correctos se produjeron en períodos señalados en la Figura 6.4 bajo la etiqueta de *interacción entre jugadores*. Por otro lado, se advierte que la cantidad de clics incorrectos efectuados en etapas de interacción entre el cuerpo de un jugador con la *sombra* del otro participante fue de 28 clics sobre un total de 40 ejecuciones incorrectas. Este hecho implica que el 70% de las equivocaciones por parte de un jugador a la hora de realizar clic se debió a que el mismo estaba percibiendo el señuelo del otro participante en lugar de encontrarse en contacto con su avatar. Por consiguiente, el número de clics incorrectos debido a la interacción del jugador con su *objeto fijo* fue de 12 clics, representando así el 30% del total de los mismos. Es importante aclarar que, de la misma manera que ocurrió en el experimento de interacciones perceptuales presentado en el capítulo anterior, en ningún instante del total de pasos temporales de esta simulación se observó la ejecución de un clic sin que el mismo esté motivado por algunas de las causas recientemente señaladas.

6.2.2. Simulación II

A continuación, se presenta lo obtenido en el segundo conjunto de simulaciones realizadas del MPC a partir de la variación de un parámetro de especial relevancia analítica. En efecto, esta serie de simulaciones fueron producidas con el objetivo de visualizar el impacto causado a partir de la modificación del parámetro p -**probabilidad inercial**-, el cual está íntimamente relacionado a las acciones de movimiento del *Modo 0*. Para ello, se muestran en este apartado los resultados generados a través de la ejecución del modelo utilizando exactamente los mismos parámetros de la Simulación I pero modificando el valor asignado a la probabilidad inercial del Jugador 2 ($p^{(2)}$). Específicamente, se analizan los casos para $p^{(2)} = 0,2$, $p^{(2)} = 0,0001$ y, a modo de ejemplo complementario, se exhibirá también lo obtenido para la elección de $p^{(1)} = p^{(2)} = 0,0001$.

En la Figura 6.5 se muestra la dinámica general de una implementación del MPC donde la probabilidad inercial del Jugador 2 disminuyó considerablemente su magnitud frente a su valor fijado en la Simulación I, siendo $p^{(2)} = 0,2$. En virtud de lo observado en relación a las *trayectorias* seguidas por los cuerpos de cada jugador, se ponen de manifiesto tres variaciones sustanciales respecto a la simulación original. Las diferencias significativas se presentaron en las siguientes situaciones: I) en los períodos de interacción entre los avatares de los participantes, II) en el desarrollo de las fases de exploración del Jugador 2 y III) en la vinculación del Jugador 2 con su Objeto Fijo (OF).

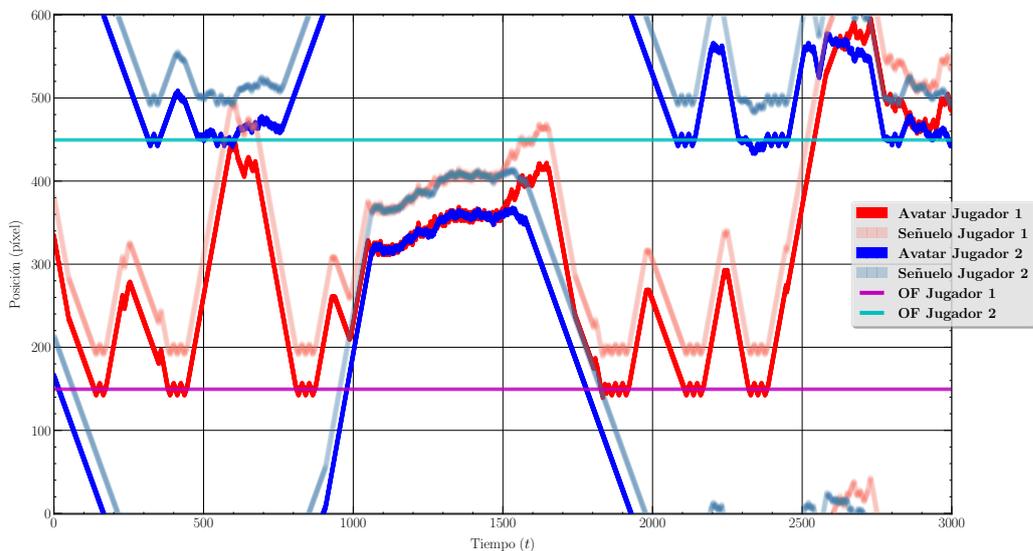


Figura 6.5: Gráfico de la posición de los objetos en función del tiempo para la simulación del MPC con $p^{(2)} = 0,2$.

En relación a lo mencionado anteriormente respecto a la *interacción entre los cuerpos* de los jugadores, se ofrece en la Figura 6.6 una vista más detallada del período señalado. Se puede observar aquí que la vinculación entre los avatares se asemeja a la interacción del Jugador 1 con un objeto fijo. Es decir, en esta parte de la simulación se advierte que los movimientos del Jugador 2 están caracterizados por quedarse quieto o dar marcha atrás recurrentemente provocando que su desplazamiento en términos absolutos sobre el escenario unidimensional sea muy poco pronunciado y pareciera estar casi estático. Entonces, el Jugador 1 lo atraviesa en uno y otro sentido repetidamente como si estuviera interactuando con un objeto inmóvil, exhibiendo así un cambio sustancial en la dinámica que caracteriza a períodos del mismo tipo de la Simulación I.

En líneas generales, lo que provoca el traslado “errático” de ida y vuelta recurrente por parte del Jugador 2 es que su *probabilidad de movimiento inercial* es ahora muy bajo. Es decir, el jugador tiene chances bajas de tomar una dirección de desplazamiento y mantenerla por un lapso de tiempo ya que los movimientos de este tipo en el Modo 0 están regidos, en su gran mayoría, por $p^{(2)}$. En otras palabras, el Jugador 2 no se mueve casi nunca de manera *inercial*, entonces las direcciones elegidas para sus desplazamientos no se repiten ni siquiera por breves períodos de tiempo causando que las trayectorias se vean casi aleatorias. Como se mostrará más adelante, a medida que disminuye el valor de p , esta aleatoriedad en los movimientos se verá incrementada.

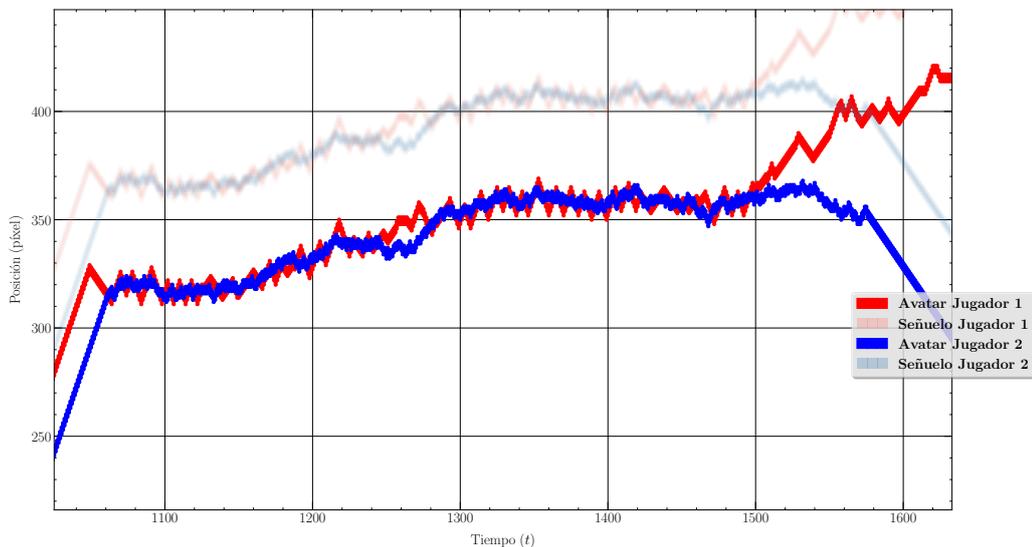


Figura 6.6: Visualización del período de interacción entre los avatares de los jugadores.

En segundo lugar nos enfocamos en los cambios observados en referencia a la *fase de exploración* del Jugador 2 en contraste con su equivalente de la Simulación I. Como se advierte en la Figura 6.7, al salir del Modo 1 se activa la *alerta 1* del Jugador 2 y comienza un período exploratorio (política de movimiento inercial de probabilidad $P^{(2)} = 0,999$). Esta etapa dura aproximadamente $50 (\frac{2}{3}m)$ pasos temporales (ver Apéndice A 3.1). Cuando concluye la fase mencionada el jugador comienza a desplazarse con política inercial de probabilidad $p^{(2)}$ y, a diferencia de lo observado en la Simulación I, su movimiento se vuelve casi aleatorio de manera semejante a lo detallado en el párrafo anterior. Luego, al no tener ninguna percepción en todo este lapso de tiempo, se completa su memoria ($m^{(2)} = 80$) con observaciones negativas, lo que implica comenzar una nueva fase de exploración que finalmente se interrumpe al percibir la presencia de un objeto.

En tercer y último lugar haremos referencia a la variación en la forma que en interactúa el Jugador 2 con su *Objeto Fijo* mientras permanece en *Modo 0*. A posteriori de lo explicado en el párrafo anterior, en la Figura 6.7 se puede observar que el Jugador 2 comienza a interactuar con su OF luego de una fase de exploración y sin ninguna percepción en la memoria -i.e. su vector O tiene todas sus componentes nulas. Como mencionamos, el participante no ingresó en el Modo 1 luego del contacto y permanece al momento señalado en Modo 0. De este modo, como tiene una percepción positiva en el tiempo actual (t), se le asigna probabilidad $p^{(2)} = 0,2$ al movimiento que estaba realizando en el instante $t - 1$ y $\frac{1-p^{(2)}}{4} = 0,2$ al resto de los movimientos (incluido entre ellos *no moverse*). Es decir que la acción de movimiento que va a realizar en el paso temporal t será elegida de manera completamente aleatoria ya que todas las posibilidades tienen igual chance de ocurrencia. Seguidamente, el participante continúa efectuando sus acciones de movimiento de manera similar durante 4 pasos temporales hasta que decide quedarse quieto en el tiempo $t = 2292$. A partir de esto, como en ese instante está recibiendo un estímulo positivo mientras permanece inmóvil, la probabilidad asignada a continuar detenido es de $1 - p^{(2)} = 0,8$ mientras que las chances de desplazarse en cualquier dirección son de $\frac{p^{(2)}}{4} = 0,05$. Por esta razón, en la mayor parte de los siguientes 19 pasos de tiempo el jugador permanece inmóvil. Como será puesto en evidencia en los ejemplos subsiguientes, este tipo de interacción entre el Jugador 2 con su OF será observado de forma recurrente.

En otro orden de ideas, se repasan brevemente los resultados referidos a las acciones de *clic* en la Simulación II. El número total de realizaciones fue de 46 clics por parte de cada participante, donde el Jugador 1 concretó *ejecuciones correctas* en 18 oportunidades mientras que el Jugador 2 lo hizo en 21 ocasiones. De esta manera, el *porcentaje de clics correctos* sobre el total de los realizados es del 42,4%. Diferenciando esta proporción para cada participante se obtiene que la misma fue de 39,1% para el primer jugador y de 45,7% para el segundo.

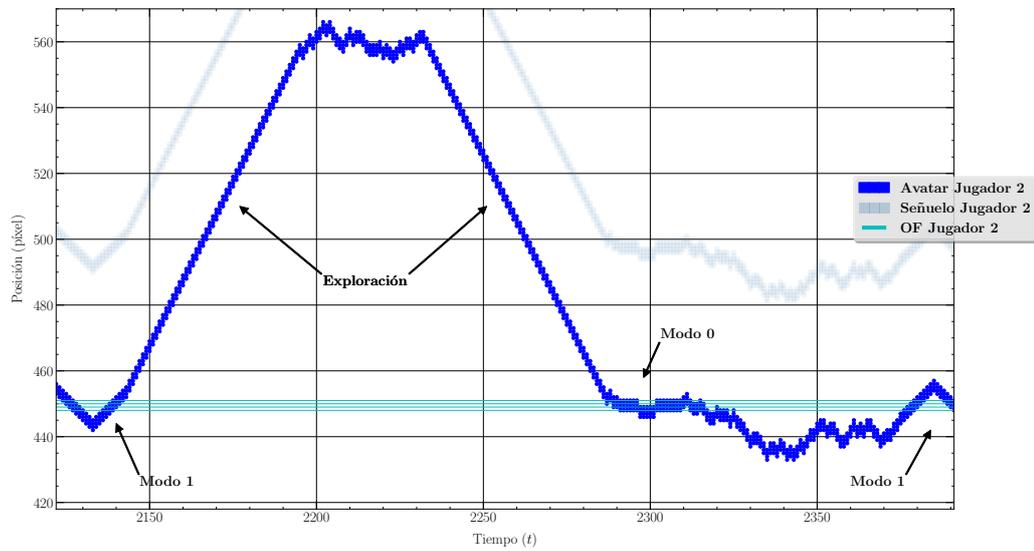


Figura 6.7: Fase exploratoria e interacción con el OF del Jugador 2.

Para finalizar este apartado, consideramos importante destacar el hecho de que a medida que la probabilidad inercial decrece, los procesos detallados previamente cobran mayor magnitud e intensidad. Para dar cuenta de ello, se presentan a continuación algunas gráficas donde se muestra la dinámica del MPC a lo largo del tiempo realizadas mediante simulaciones para las que se escogieron los valores $p^{(2)} = 0,0001$ (Figuras 6.8 y 6.9) y $p^{(1)} = p^{(2)} = 0,0001$ (Figuras 6.9 y 6.10).

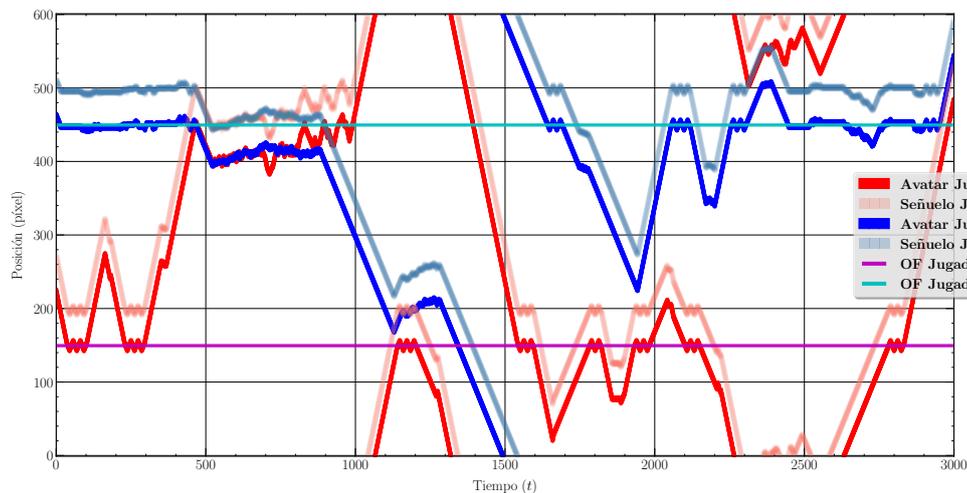


Figura 6.8: Dinámica del MPC para una simulación con $p^{(2)} = 0,0001$.

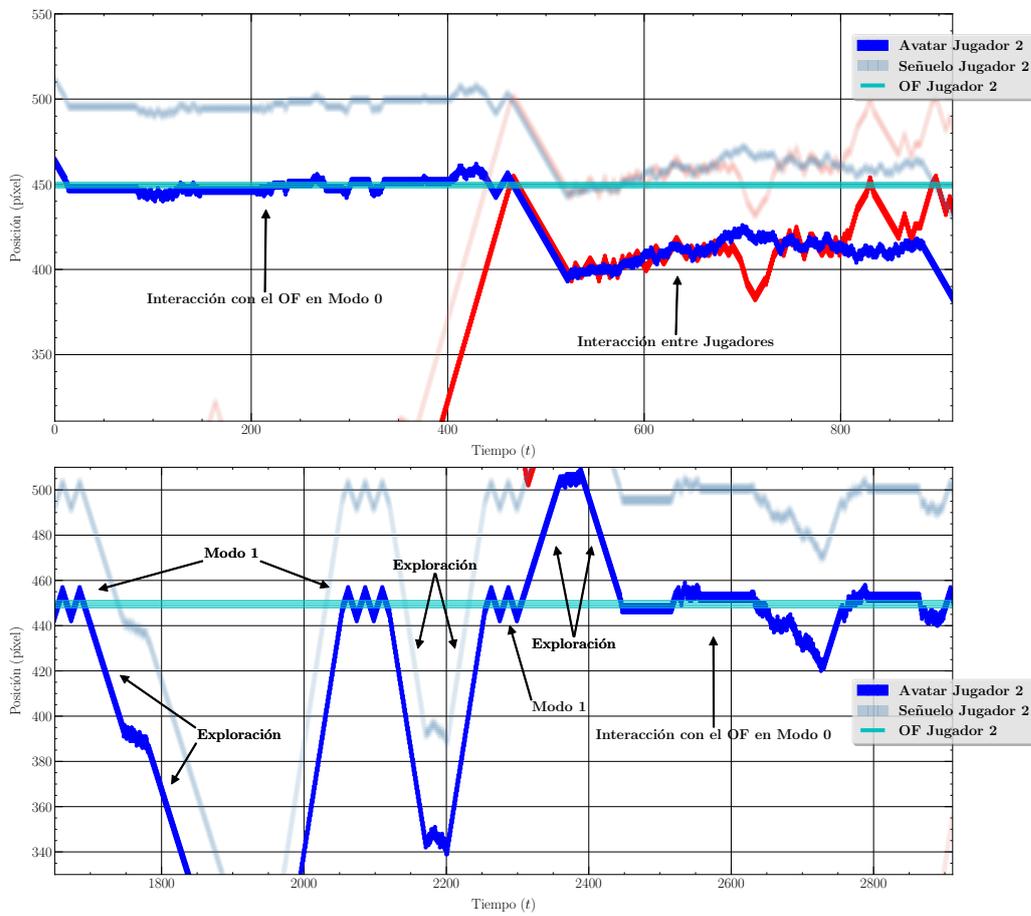


Figura 6.9: Simulación del MPC con $p^{(2)} = 0,0001$ visualizada en dos partes.

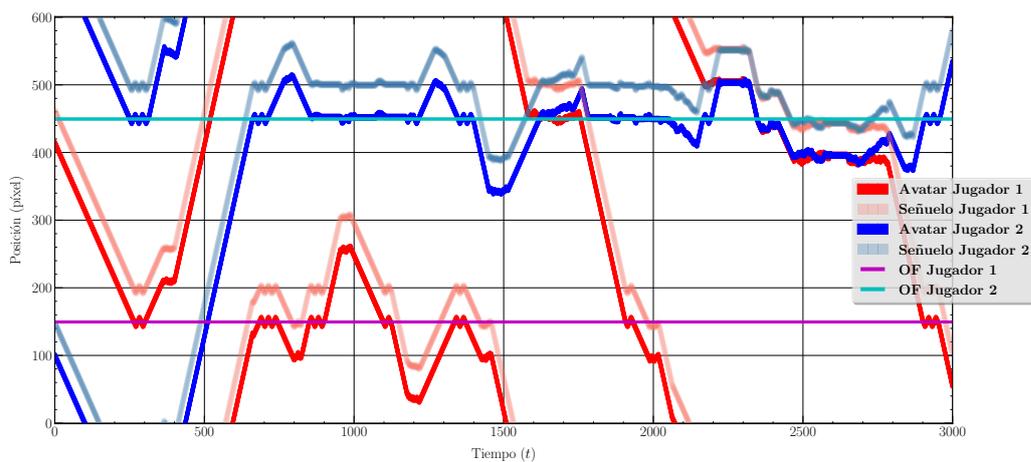


Figura 6.10: Dinámica del MPC para una simulación con $p^{(1)} = p^{(2)} = 0,0001$.

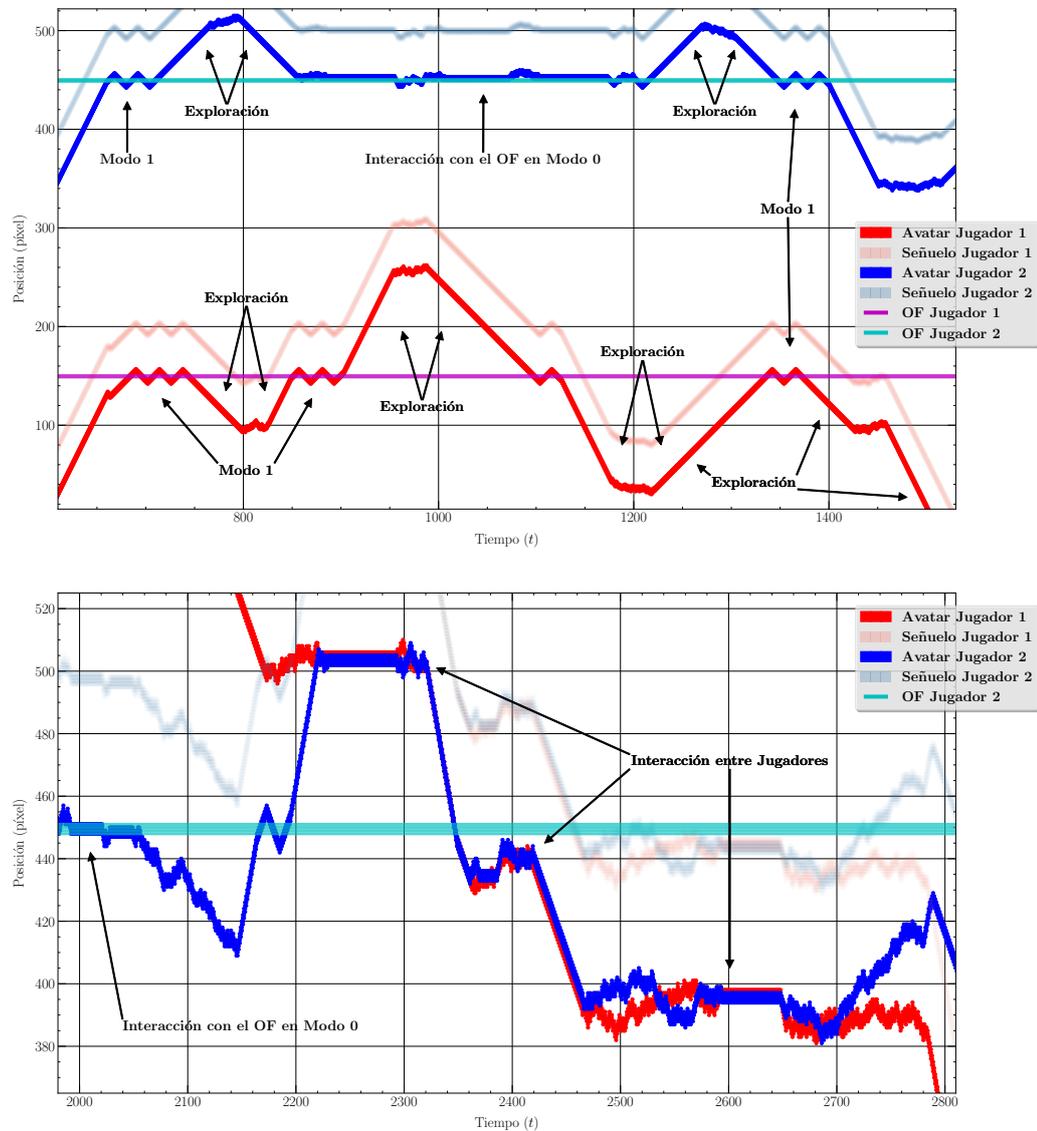


Figura 6.11: Simulación del MPC con $p^{(1)} = p^{(2)} = 0,0001$ visualizada en dos partes.

6.2.3. Simulación III

Para concluir el desarrollo correspondiente a los resultados del Modelo de Percepción Cruzada, a continuación nos enfocaremos en la incidencia del parámetro denominado **probabilidad inercial especial** (P) el cual es determinante en los procesos que hemos llamado *fase de exploración* de los jugadores (ver Apéndice A 3.1). Para ello, en este apartado se analizará lo obtenido a partir de una serie de implementaciones computacionales del MPC donde se varió únicamente el valor

numérico asignado a dicho parámetro, dejando el resto invariantes e idénticos a lo fijado en la Simulación I (ver Tabla 6.1).

De manera similar a lo realizado en la Simulación II, en primer lugar nos enfocaremos en los resultados generados a partir de la variación del parámetro P unicamente para el Jugador 2. A tal efecto se analizarán las simulaciones del MPC en las que se tomaron los valores $P^{(2)} = 0,5$ y luego $P^{(2)} = 0,0001$.

Al disminuir en gran medida la magnitud de $P^{(2)}$ respecto al valor que se le asignó tanto en la Simulación I como en la Simulación II, se provoca la desaparición de los períodos denominados como fases de exploración para el jugador implicado. Este hecho, a su vez, desencadena una serie de efectos relacionados que se precisarán a lo largo de esta sección y pueden ser observados en las gráficas 6.12 y 6.13.

En líneas generales, como se puede ver en la Figura 6.12, es claro que los movimientos del Jugador 2 no siguen una dirección determinada y sostenida a lo largo del tiempo. De hecho, sus desplazamientos muestran una forma de comportamiento a medida que transcurren los pasos temporales que luce sumamente aleatoria. Esto implica que el participante permanezca en una región del escenario (de aproximadamente 300 píxeles) durante la totalidad del transcurso de la simulación, dejando gran parte del terreno sin recorrer. De la misma manera, si se reduce aun más el valor de $P^{(2)}$, se observa una intensificación del comportamiento descrito por el Jugador 2 generando que sus movimientos se vean completamente erráticos (ver Figura 6.13).

El proceso detallado en el párrafo anterior trae como consecuencia una significativa diferencia con respecto a lo observado en las simulaciones anteriores. En efecto, si el primer jugador toma contacto con el señuelo del Jugador 2, se puede dar comienzo a una larga fase de interacción entre el Jugador 1 y la sombra del otro participante, produciendo así un gran número de clics incorrectos por parte del primero. Es importante señalar que en contraste con lo antes mencionado, en la Simulación I cuando un jugador inicia una fase de interacción con la sombra del otro jugador, la misma suele tener una duración relativamente corta. Este hecho se debe a que uno de los participantes no tiene conocimiento de que se está produciendo la interacción y, al no reconocer ningún estímulo, es probable que abandone la zona donde se está produciendo el contacto al entrar en una fase de exploración del terreno. Aquí, al no existir los períodos exploratorios por parte del Jugador 2, se provocan largas interacciones entre su señuelo y el otro participante. Por esta razón, si bien en las simulaciones anteriores se generaban acciones de clic incorrectas por este tipo de circunstancia, la cantidad de las mismas era mucho menos significativa que lo observado en el caso donde se ha achicado el valor de $P^{(2)}$. En la simulación para el caso de $P^{(2)} = 0,5$, la proporción de clics correctos del Jugador 1 fue del 40% y 65,2% para el Jugador 2, mientras que para $P^{(2)} = 0,0001$, los porcentajes fueron 67,6% y 93,8% respectivamente.

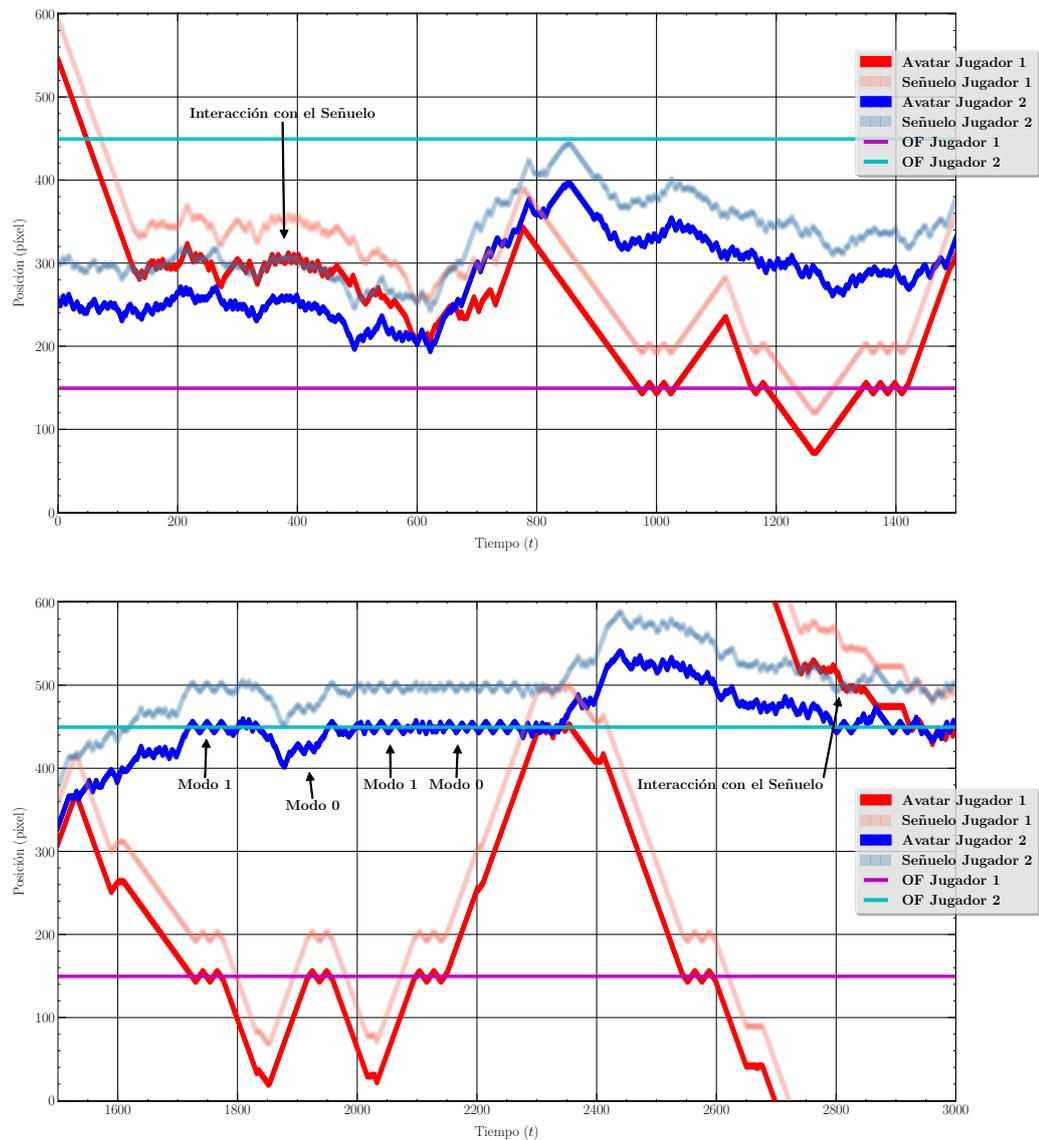


Figura 6.12: Simulación del MPC con $P^{(2)} = 0,5$ visualizada en dos partes.

Por otro lado, se considera importante destacar una diferencia sustancial entre los resultados obtenidos en la simulación tratada en esta sección frente a la Simulación I respecto de las interacciones con el Objeto Fijo. Se observa en la Figura 6.12 que las interacciones del Jugador 2 con su OF se dan de manera uniforme donde el participante atraviesa de forma simétrica al objeto de ida y vuelta repetidamente durante un largo número de pasos temporales. Cada cierto intervalo de tiempo, luego de ingresar en Modo 1 y reconocer que se encuentra en presencia de su OF, a diferencia de lo observado en las simulaciones anteriores, el jugador no

se aleja de la zona del tablero cercana al mencionado objeto. Este proceso propicia que se vuelva bastante probable que el participante tome contacto nuevamente con el OF, dando lugar así a un nuevo ciclo de interacciones como las descritas anteriormente.

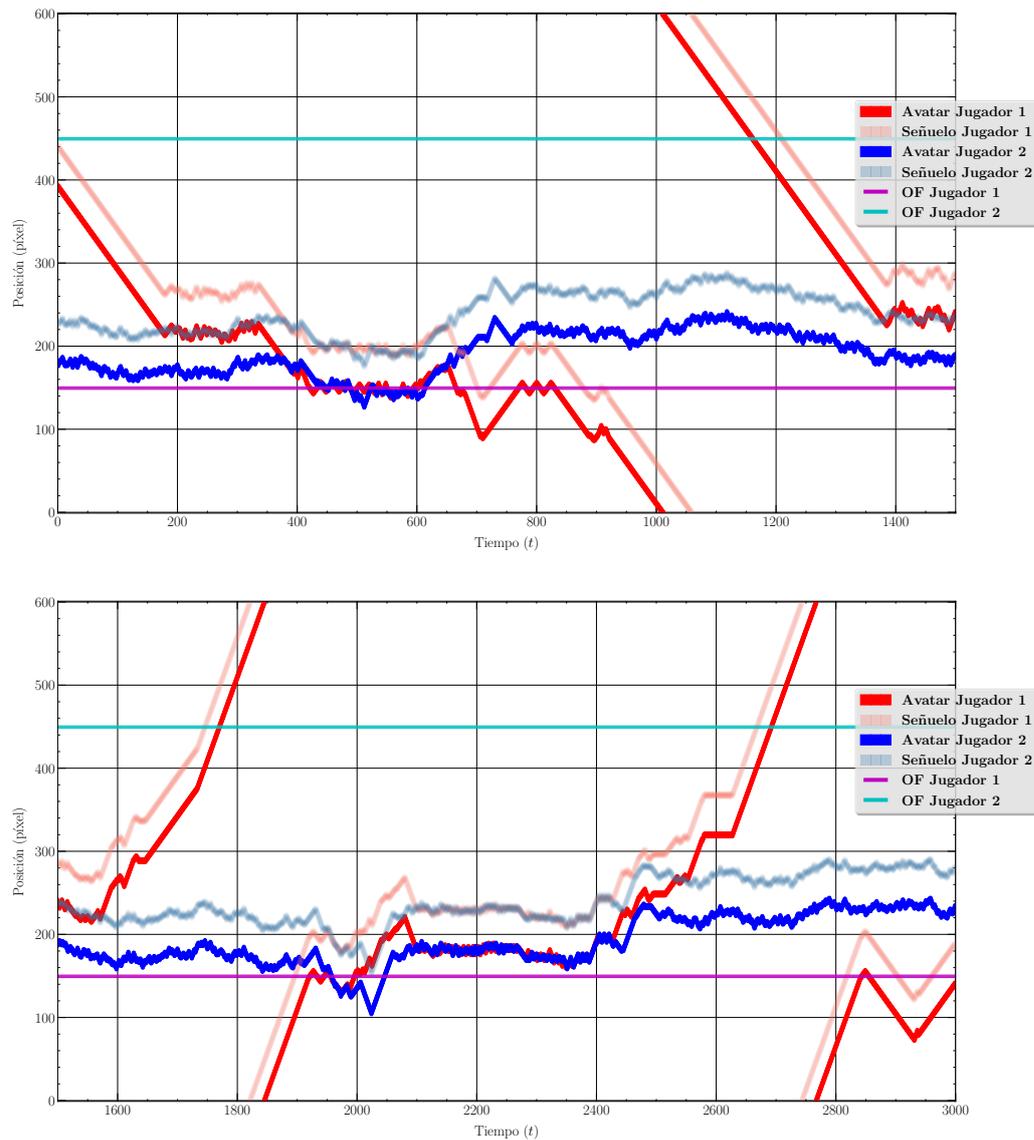


Figura 6.13: Simulación del MPC con $P^{(2)} = 0,0001$ visualizada en dos partes.

Finalmente, es interesante mostrar cómo se desarrolla la dinámica del MPC en un caso extremo donde a los parámetros de probabilidad inercial especial para ambos jugadores se les asigne un valor muy bajo. Como se ve en la Figura 6.14, los

comportamientos descritos a lo largo de toda esta sección se ven magnificados drásticamente.

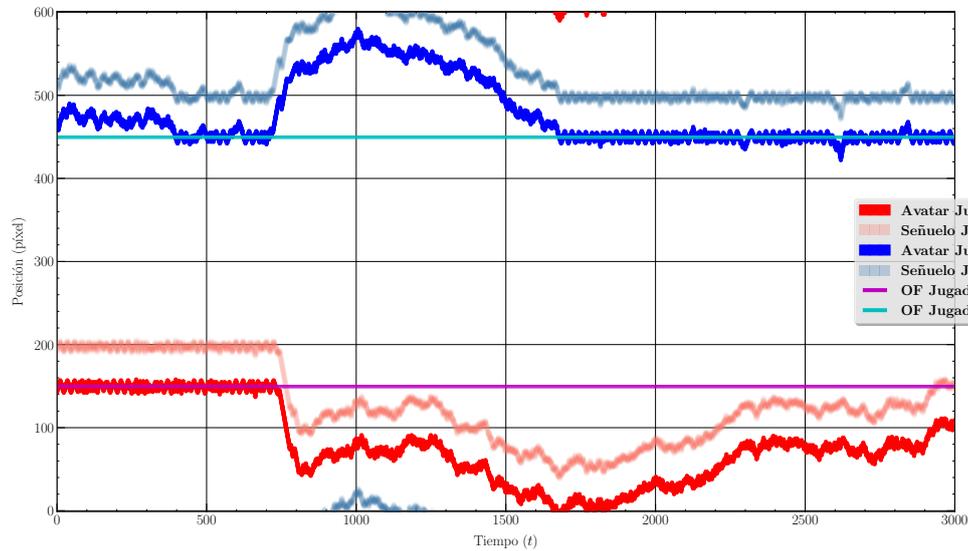


Figura 6.14: Dinámica del MPC para una simulación con $P^{(1)} = P^{(2)} = 0,0001$.

De esta forma, a lo largo de este capítulo se pudieron mostrar y analizar los resultados obtenidos a partir de la simulación computacional del MPC para tres conjuntos diferentes de parámetros. De acuerdo a lo señalado en estas tres implementaciones, quedó en evidencia el importante papel que desempeñan los parámetros característicos del *Modo 0* -probabilidad inercial p y probabilidad inercial especial P - en la dinámica tanto de movimientos como de clics de cada jugador.

7. Conclusiones

Esta tesis buscó estudiar, desarrollar y aplicar técnicas de modelado matemático no convencionales. En primer lugar se trataron los Modelos Basados en Agentes, posteriormente se abordó un modelo cinético de distribución de riqueza y finalmente se construyó un modelo computacional para reproducir un experimento psico-cognitivo de interacciones perceptuales. A continuación se presentan las conclusiones obtenidas de mayor relevancia junto a las perspectivas de posibles líneas de investigación a futuro que se abren a partir de ellas.

La primera parte de este trabajo se ocupó del armado e implementación de una versión modificada del prototípico modelo basado en agentes *SugarScape* en la que se agregaron elementos de control mediante la incorporación de una estructura impositiva. Del análisis del modelo surgieron interrogantes relativos a un problema de optimización biobjetivo, razón por la cual se aproximó dicho MBA con un modelo matemático de ecuaciones en tiempo discreto.

A partir de esta aproximación mediante un sistema de ecuaciones en diferencias, se aplicó un método directo de optimización global para encontrar el Frente de Pareto del problema. Finalmente, se discutieron distintas alternativas en la elección de la estructura de aplicación del cronograma impositivo -estrategias hacia *adelante* y hacia *atrás*- y sus contribuciones en la mejoría de las soluciones óptimas del problema planteado.

Se extrajeron conclusiones positivas referidas al marco matemático utilizado para la aproximación y optimización del *SugarScape* en tanto permitió mejorar los resultados alcanzados en otras investigaciones presentes en la literatura relacionada a este modelo.

Además se destaca entre los principales aportes de nuestro trabajo la implementación y factibilidad del método directo de optimización global aplicado a un problema biobjetivo planteado sobre un modelo basado en agentes con heterogeneidad espacial y variables de control.

En desarrollos futuros es importante tener en cuenta que, debido a su gran

tamaño, el sistema de ecuaciones en diferencias presenta un grado de complejidad elevado en lo relativo a su implementación computacional. De este hecho surge como alternativa la aproximación del MBA por medio de un *Proceso de Decisión de Markov*, debido a la proximidad de sus componentes y conceptos centrales. Esta propuesta se fundamenta también en la búsqueda de un marco conceptual matemático que disponga de una mayor cantidad de herramientas ya desarrolladas para su análisis y resolución computacional.

En la segunda parte de este trabajo se presentó un modelo cinético sobre distribución de la riqueza en una sociedad incorporando dos aspectos clave: población no-constante a lo largo del tiempo e intercambios no-conservativos entre clases sociales. Los análisis cualitativos y las simulaciones numéricas desarrolladas mostraron que el modelo es capaz de reproducir datos concretos de un ejemplo real con suficiente confianza y, por lo tanto, se considera que el modelo puede ser utilizado para la toma de decisiones.

Por otro lado, es importante destacar que, si bien se incorporó un parámetro adicional (β) respecto a los modelos desarrollados en la bibliografía tomada como antecedente, se ha probado que α y β pueden ser reemplazados por el cociente α/β para obtener información valiosa respecto del sistema estudiado sin agregar mayor complejidad al modelo.

Lo realizado en esta parte de la tesis nos permite identificar algunas perspectivas para futuras investigaciones en el campo de la KTAP en general, y en el modelo cinético de distribución de riqueza en particular. En primer lugar, sería relevante poder realizar un estudio analítico más profundo de la desigualdad social. Específicamente, aunque la obtención de puntos de equilibrio para el caso general es una tarea difícil (ver [Bertotti and Delitala, 2008]), sería útil estudiar el comportamiento cualitativo del coeficiente de Gini desde la perspectiva de los sistemas dinámicos, obteniendo comportamientos monotónicos, bifurcaciones y puntos de inflexión.

Un aspecto adicional que vale la pena analizar en el futuro está referido a la dinámica espacial, la cual puede introducirse a través de una estructura de *red*. Esta característica también está relacionada con la acción a macro-escala en los distintos nodos de las redes exógenas sobre los individuos, como se propone en [Knopoff, 2014]. El artículo [Dolfín and Lachowicz, 2015] también ofrece algunas pistas útiles al mostrar cómo la dinámica en una red mejora el consenso. Esta estructura también puede utilizarse para estudiar la interacción entre la dinámica del bienestar y los fenómenos migratorios (ver [Knopoff, 2013, Chuang et al., 2018]), con el objetivo de comprender mejor los fenómenos que impulsan la inmigración, las formas de controlar y detectar los flujos entrantes y las maneras de ayudar a una mejor adaptación de los inmigrantes a las sociedades de acogida.

Por último, se considera importante enfocar los esfuerzos en lograr avances respecto a la aplicación del modelo. En este sentido, son necesarias colaboraciones multidisciplinarias para estudiar la relación entre los parámetros del modelo y los procesos concretos de toma de decisiones por parte de los posibles interesados.

En la última parte de esta tesis se ha construido un modelo computacional destinado a representar el fenómeno observado en la experiencia psico-cognitiva de *interacciones perceptuales*. En este caso se optó por desarrollar e implementar de manera original mediante herramientas computacionales un modelo para reproducir lo registrado en dicho experimento, lo cual permitió parametrizar y cuantificar los distintos eventos que constituyen lo esencial del fenómeno mencionado.

Es importante hacer notar que tanto el fenómeno abordado como el enfoque de modelado utilizado en los Capítulos 5 y 6 es totalmente diferente a lo llevado a cabo en las partes precedentes de esta tesis. En efecto, en los primeros capítulos de la misma nos ocupamos de modelos enmarcados en diversas teorías previamente desarrolladas, a diferencia de ello, el modelo de autoría propia incluido en la última parte de este trabajo constituye otro tipo de modelización donde se puede apreciar el trabajo completo del modelador desde el primer momento en que inicia su tarea.

Tal como se ilustra en el Capítulo 6, se mostró a partir de las simulaciones realizadas que los resultados presentan en gran medida comportamientos esperados en tanto reproducen cualitativamente lo revelado en el experimento de interacciones perceptuales. Sin embargo, se evidencia que el próximo paso en este sentido debe ser la validación rigurosa de los resultados arrojados por el Modelo de Percepción Cruzada al contrastarlos con lo obtenido en la investigación experimental original.

Es interesante destacar que este trabajo deja abiertas diversas posibilidades y líneas de estudio a futuro. Teniendo en cuenta que el MPC se encuentra en una primera etapa de modelado es posible orientar posteriormente, de manera similar a lo realizado con el MBA SugarScape, su aproximación por un modelo matemático estándar para el cual existan más herramientas para su análisis y/u optimización. Para esta tarea se debe considerar como opción viable la posibilidad de plantear al MPC como un *juego de Markov* debido a la cercanía de sus elementos constitutivos.

Además, es pertinente contemplar futuras implementaciones para diferentes elecciones de parámetros que permitan representar distintas características de los jugadores y así poder estudiar la manera en que interactúan entre sí y la eficacia relativa a los clics efectuados. En profunda relación a este análisis, la siguiente etapa sería plantear un problema de optimización para encontrar los parámetros que logren la mayor efectividad de un jugador -o de ambos jugadores a la vez- en su objetivo de reconocer cuándo se encuentran en presencia del otro participante.

Para el abordaje del problema de optimización mencionado es oportuno considerar la aplicación de herramientas propias del campo del *aprendizaje automático*.

Para finalizar esta línea de razonamientos, es interesante hacer una reflexión sobre la complejidad del MPC. En este sentido, resulta valioso preguntarse si es posible representar de manera fehaciente y suficientemente aproximada mediante un modelo “sencillo” del tipo de los que se usan en áreas como la física o la biología, un fenómeno de la naturaleza como el que se ha tratado aquí. Además, es importante destacar que, en virtud de ciertas elecciones y configuraciones de su amplia variedad de parámetros, es posible convertir al MPC en un modelo mucho más elemental y rudimentario. Por consiguiente, es apropiado pensar que este modelo puede ofrecer submodelos más pequeños y simples gracias a su extensa gama de posibilidades brindadas por sus parámetros pero que a su vez dichos submodelos se vuelven más “rígidos” en relación a los escenarios plausibles de representar.

Llegados a esta instancia y para concluir esta tesis podemos afirmar que los objetivos propuestos al iniciar la misma, relativos a exponer distintos tipos de modelado y contribuir al desarrollo de herramientas consistentes y rigurosas para su abordaje, han sido alcanzados y a la vez este trabajo se constituye en insumo para futuras indagaciones respecto de otros modelos aplicables a nuevas temáticas.

Parte IV

Apéndices

A 1. Contenidos auxiliares del Modelo SugarScape

A 1.1. Background

A 1.1.1. Protocolo ODD

Las siglas ODD están referidas a los componentes clave del “Protocolo ODD” y corresponden a los términos en inglés: “Overview, Design concepts and Details”, lo que se puede traducir como: “visión general, conceptos de diseño y detalles”.

El protocolo está compuesto por siete elementos principales que son aquellos que un modelador debe establecer y diseñar a la hora de construir un MBA. A estos siete elementos se los pueden agrupar en referencia a cada uno de los componentes clave mencionados anteriormente. Los primeros tres (propósito; entidades, variables de estado y escalas; visión general de los procesos y programación), se relacionan con la *visión general* acerca de qué es y cómo está diseñado el modelo. En segundo lugar, se encuentran los *conceptos de diseño*, los cuales representan las características esenciales del MBA. Finalmente, se encuentran tres elementos (inicialización, entradas, submodelos) que tienen el objetivo de establecer los *detalles* necesarios para completar la descripción del modelo.

A continuación, se enuncian detalladamente los elementos constitutivos del protocolo ODD:

Propósito: Contiene una descripción general del proceso que se intenta captar a través del modelo junto con un desarrollo claro y conciso del interrogante o problema que se pretende resolver con dicho modelo. En otras palabras, se busca responder: qué sistema se está modelando y qué se intenta aprender de él.

Entidades, Variables de Estado y Escalas: En este paso se deben determinar las *entidades* del modelo, es decir el tipo de objetos que se van a representar en él; las *variables de estado* que caracterizan y cuantifican a las entidades; y las

escalas temporales y espaciales elegidas. En otras palabras, en esta etapa se deben especificar los componentes fundamentales del sistema y las variables de estado que los caracterizan; intentando de esta forma, describir el estado del modelo en cada momento.

En la mayoría de los MBA hay tres tipos de entidades: Los agentes, que pueden ser de una o más especies; el entorno (espacial) donde interactúan dichos agentes; y el ambiente global, que en general, es externo a los agentes y afecta a todos ellos. Usualmente, las variables de estado asociadas a los agentes contemplan sus propiedades o atributos (por ejemplo edad, tamaño, opinión, etc.) y su comportamiento estratégico. A su vez, las variables atribuidas al entorno espacial generalmente establecen el lugar preciso donde se encuentran los agentes mediante la partición del espacio en una malla formada por parcelas. Finalmente, el ambiente global hace referencia a las variables externas a los agentes, las cuales no se ven afectadas por la interacción de los mismos; habitualmente estas variables de estado varían en el tiempo pero no necesariamente en el espacio ([Railsback and Grimm, 2019]). Ejemplos de éstas son el clima o variables ambientales como la contaminación.

Visión general de los procesos y programación: Esta etapa se ocupa de los procesos que afectan a las variables de estado asociadas a las entidades del modelo. La tarea en este paso es enumerar, a grandes rasgos, todos los procesos que modifiquen el estado de los componentes del sistema representado y así describir en primera instancia la dinámica de las entidades del modelo. Asimismo, el protocolo ODD incluye también una descripción de los procesos de observación y recopilación de datos utilizados para la construcción realizada por el autor del modelo.

Por otra parte, la programación hace referencia a la importancia de otorgarle un orden a la sucesión de los procesos que afectan al comportamiento del sistema modelado.

Conceptos de diseño: En esta sección se establecen un conjunto de propiedades y conceptos básicos que se deben tener en cuenta a la hora de implementar el modelo; los cuales son muy importantes para su configuración y para la descripción de las características esenciales de un MBA. Algunas de las nociones para el diseño de un modelo propuestas por el protocolo ODD que se usarán en este trabajo son: 1) *Adaptación*, en referencia a cómo se adecuan las entidades al estado de las demás y a las variables ambientales; 2) *Interacción*, relativa a la dependencia entre las variables de estado y a las reglas de actualización de las mismas; 3) *Estocasticidad*, referida a si las reglas de actualización de las variables son determinísticas o estocásticas.

Inicialización: Este es el primer punto del apartado “Detalles” y está referido a las condiciones iniciales establecidas en el proceso de simulación. En otras palabras, en esta etapa se debe fijar la configuración del “mundo” modelado para dar

comienzo a la implementación del modelo. Algunos ejemplos de posibles condiciones iniciales son: el número de agentes creados, los valores iniciales dados a las variables de estado, la disposición de los agentes en el entorno espacial, etc.

Entradas: Es necesario especificar cuáles son las entradas indispensables para detallar el estado de todas las variables y para computar las actualizaciones de dichas variables.

Submodelos: Esta última tarea consiste en dar una descripción detallada de las ecuaciones, reglas lógicas, algoritmos y parámetros del modelo. También se debe incluir aquí una justificación de las decisiones tomadas para todas las elecciones realizadas en relación a dichas construcciones.

A 1.1.2. Método de Nelder-Mead

En esta sección se realizará una breve descripción del método Nelder-Mead tal como se lo presentó originalmente en el artículo [Nelder and Mead, 1965].

Dado un conjunto de $n + 1$ puntos en \mathbb{R}^n , digamos x_1, x_2, \dots, x_n , se define el *simplex n-dimensional* para tales puntos (que forman sus vértices) como el conjunto $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \text{ con } 0 \leq \lambda_i \leq 1 \text{ y } \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1\}$.

La idea general del método es empezar con un simplex dado por un conjunto de $n + 1$ vértices, de forma tal que al ir desarrollando las sucesivas iteraciones del algoritmo, se va modificando el simplex inicial de manera que los valores de la función objetivo en los vértices nuevos va disminuyendo respecto a los del simplex anterior. Para conseguir esto, el algoritmo se basa en 4 operaciones admitidas para la deformación y variación del simplex inicial, las mismas son: *Reflexión*, *Expansión*, *Contracción* y *Encogimiento*.

Con el objetivo de mostrar, a grandes rasgos, lo realizado por el método, se deja en la Figura A 1.1 el diagrama de flujo del algoritmo de Nelder-Mead donde intervienen dichas operaciones.

A 1.2. Protocolo ODD para el MBA SugarScape

A continuación procederemos a detallar lo que respecta tanto a la *Visión General*, los *Conceptos de Diseño* y los *Detalles* del modelo basado en agentes SugarScape.

Propósito: El modelo que tratamos en este trabajo es una versión simplificada del MBA SugarScape ([Epstein and Axtell, 1996]), un modelo en el que las entidades abstractas o agentes (en este caso hormigas) recorren un paisaje hecho de azúcar. Aquí, todos los agentes tienen la misma capacidad de visión, pero sus metabolismos varían, es decir que todas las hormigas pueden ver e identificar la

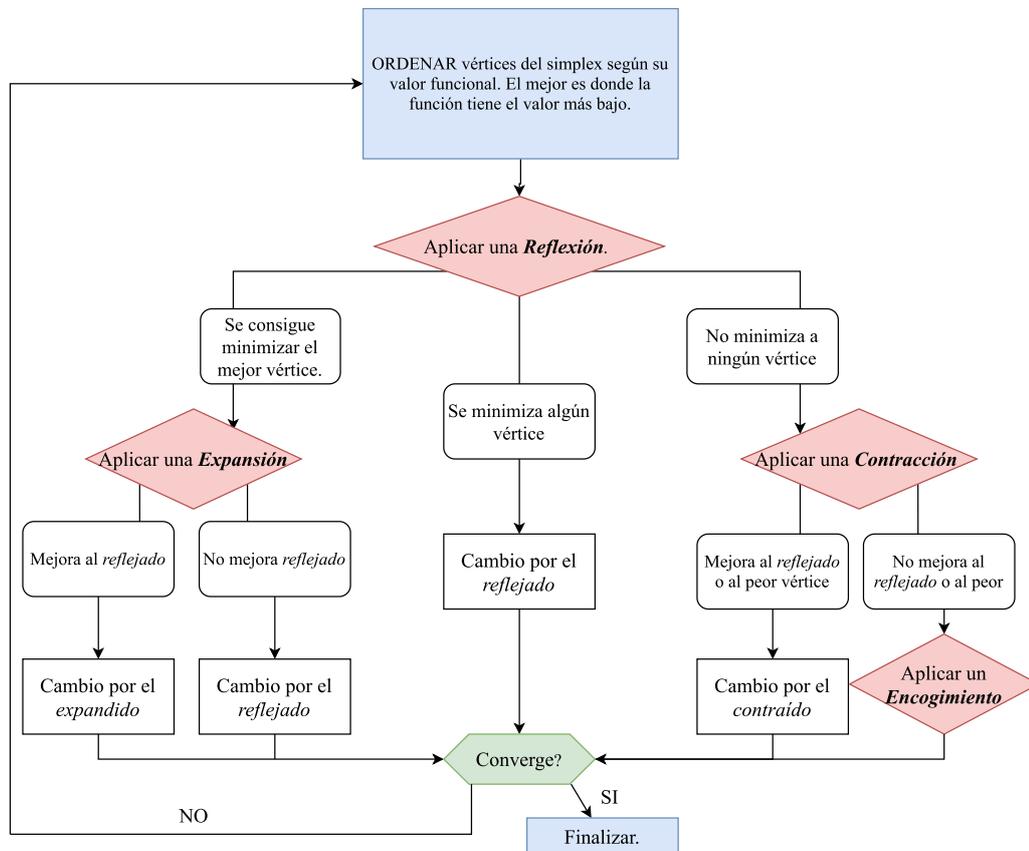


Figura A 1.1: Diagrama de flujo del método de Nelder-Mead original.

misma cantidad de celdas a su alrededor pero hay dos tipos de individuos clasificados según cuanta azúcar consumen en cada paso temporal (su metabolismo). Las hormigas que consiguen llegar a las regiones ricas en azúcar a la derecha del terreno tienden a sobrevivir, mientras que las que no lo hacen tienen más probabilidades de quedarse sin azúcar y morir. Además, periódicamente se aplica un impuesto sobre el azúcar almacenada de cada individuo, las tasas impositivas pueden ser del 0%, 25%, 50%, 75% o 100%, son fijadas por regiones (de ahí que las regiones con más azúcar puedan tener impuestos más altos, por ejemplo) y en cada ciclo fiscal pueden cambiar.

El objetivo de este modelo es investigar los efectos de diversas políticas impositivas sobre los ingresos fiscales y la población de las hormigas. En particular, el modelo se utiliza para investigar la siguiente pregunta: ¿cuál es la política de impuestos óptima para maximizar los ingresos recaudados y minimizar las muertes de los agentes?

Entidades, Variables de Estado y Escalas: El paisaje es una grilla de 48×48 celdas que contienen distintos niveles de azúcar. De la misma forma que el *toro* (variedad diferencial), el paisaje se envuelve verticalmente pero no horizontalmente; por lo tanto la única manera de llegar a una región con más azúcar es viajando hacia la derecha. Cuando las hormigas consumen el azúcar presente en una celda alcanzada de la cuadrícula, el azúcar no se agota. Por lo tanto, los niveles de azúcar del terreno se conservan a lo largo de cada simulación. Dada la naturaleza abstracta del modelo, el tiempo y el espacio no tienen unidades. Una simulación consta de un número finito de pasos temporales y, en intervalos regulares, se recaudan los impuestos dependiendo de la política fiscal aplicada.

Los impuestos se recaudan cada 5 pasos de tiempo, formando un total de 10 ciclos impositivos, y las tasas aplicadas pueden ser diferentes en cada región y en cada ciclo fiscal. Por lo tanto, una política impositiva es una matriz 4×10 donde la entrada (i, j) indica la tasa recaudada en la región i durante el j -ésimo ciclo impositivo. De esta manera, hay un total de $5^{40} \approx 9 \times 10^{27}$ políticas fiscales posibles y para cada una de ellas se almacena el número resultante de muertes y la cantidad de impuestos recaudados.

Las hormigas tienen capacidad de visión fija correspondiente a 1 celda de la cuadrícula durante el total de la duración de la simulación: esto significa que las hormigas pueden advertir cuánta azúcar hay en exactamente una celda en cada una de las cuatro direcciones principales, es decir hacia arriba, hacia abajo, hacia la izquierda y hacia la derecha (a menos que estén en un extremo horizontal del mapa, en cuyo caso la visión estará restringida por dicho borde). Además, cada hormiga tiene un metabolismo fijo que determina la cantidad de azúcar que pierde en cada paso de tiempo, pudiendo ser de una o dos unidades de azúcar por paso temporal. El movimiento de los agentes está regido por su visión: una hormiga se mueve a la celda de la cuadrícula dentro de su visión con la máxima cantidad de azúcar y en caso de haber más de una celda en esa condición debe elegir aleatoriamente entre las mismas. Varios individuos pueden ocupar la misma celda de la grilla; cada hormiga obtiene toda la cantidad de azúcar en ese lugar (es decir, el azúcar no se agota). Finalmente, las hormigas pueden acumular hasta 50 unidades de azúcar y se mueren si el nivel de azúcar en su reserva personal se agota.

Visión general de los procesos y programación: El orden de los eventos del modelo se desarrolla como es mostrado en la Figura 1.2 del Capítulo 2 de esta tesis. Los acontecimientos referidos al movimiento, recolección y metabolismo de las hormigas y, por otro lado, a los impuestos, son ejecutados completamente por un agente y luego por otro, es decir, secuencialmente. Esto significa que las variables de estado se actualizan asincrónicamente y los pasos de tiempo son unidades discretas al igual que el movimiento: las hormigas saltan directamente del centro de una celda al centro de otra.

Conceptos de diseño: El modelo SugarScape puede estudiarse y ser aplicado en una gran cantidad y diversidad de contextos, como son la sociología, la ecología, la economía y la antropología. La motivación principal de esta versión es indagar sobre los efectos de diversas políticas impositivas en un entorno abstracto. Se espera que el modelo proporcione información sobre la relación entre las políticas fiscales y la dinámica de la población, y a su vez que esta información pueda extrapolarse a algún sistema del mundo real.

A continuación enunciaremos algunos conceptos más específicos referidos al diseño del MBA. En primer lugar observamos que el único objetivo de las hormigas es trasladarse a una celda dentro de su campo de visión con la máxima cantidad de azúcar. No hay ninguna otra consideración respecto a este punto, y las hormigas no tienen conocimiento de los impuestos pasados o futuros en ningún lugar.

Por otro lado, se establece que los agentes conocen el nivel de azúcar y la ocupación de cada celda de la cuadrícula dentro de su visión pero no conocen las propiedades de ninguna otra hormiga, incluidas las que están dentro de su visión.

Seguidamente se efectúan algunas consideraciones respecto a la *estocasticidad* del SugarScape. El movimiento de las hormigas es parcialmente estocástico: si hay varias celdas dentro de su visión con el mismo nivel máximo de azúcar, la hormiga se moverá a alguna de estas al azar. Esta estocasticidad es vital para la distribución de las poblaciones: si las hormigas eligen la celda más cercana, por ejemplo, las poblaciones tienden a agruparse en el límite de cada región. La agrupación afecta gravemente a los patrones migratorios, ya que las hormigas no se ven animadas a explorar el paisaje.

Por último, se observa que cada simulación tiene lugar durante un número finito de pasos de tiempo y a lo largo de cada una de ellas se recaban distintos datos específicos. En cada uno de los pasos temporales se recoge la siguiente información: el número de hormigas en cada región y la distribución de su riqueza en cada una de ellas, la cantidad total de impuestos recaudados, el número de muertes que se producen en cada región y finalmente se registra la política fiscal aplicada a lo largo de la simulación.

Detalles: El modelo se inicializa con una media de 62,5 hormigas las cuales se colocan en un lugar aleatorio del paisaje. Comienzan con una cantidad aleatoria de azúcar, entre 5 y 25 unidades, y este valor es diferente para cada hormiga elegido a partir de una distribución de probabilidad uniforme. Los agentes se inicializan con visión 1 y metabolismo 1 o 2 y estas características no cambian a lo largo de cada simulación.

Para concluir esta enumeración nos referimos a las entradas del modelo, es decir a la política impositiva. En efecto, la política fiscal puede elegirse especificándola directamente mediante la manipulación del código o de forma aleatoria,

teniendo en cuenta que debe cumplir con las consideraciones vistas anteriormente. Notar que dicha política debe ser elegida antes de cada simulación, constituyéndose así en la única entrada del modelo.

A 1.3. Sistema de Ecuaciones en Diferencias y Algoritmo de Actualización

Cómo se ha señalado anteriormente, siguiendo la propuesta de [Oremland and Laubenbacher, 2014], a continuación se presenta el total de las ecuaciones discretas junto al método de actualización e implementación para la aproximación del MBA SugarScape.

Ecuaciones de ubicación

Sea $u_i(t)$ la cantidad de hormigas en la columna i -ésima en el tiempo t para $1 \leq i \leq 48$, se tienen:

$$\begin{aligned}
 u_1(t+1) &= \frac{3}{4}u_1(t) + \frac{1}{5}u_2(t), \\
 u_a(t+1) &= u_{a-1}(t) + \frac{3}{4}u_a(t) + \frac{1}{5}u_{a+1}(t), & a \in \{13, 25, 37\} \\
 u_b(t+1) &= \frac{1}{4}u_{b-1}(t) + \frac{3}{5}u_b(t) + \frac{1}{5}u_{b+1}(t), & b \in \{2, 14, 26, 38\} \\
 u_c(t+1) &= \frac{1}{5}u_{c-1}(t) + \frac{3}{5}u_c(t) + \frac{1}{5}u_{c+1}(t), & c \in \{3, \dots, 10, \\
 & & 15, \dots, 22, \\
 & & 27, \dots, 34, \\
 & & 39, \dots, 46\} \\
 u_d(t+1) &= \frac{1}{5}u_{d-1}(t) + \frac{3}{5}u_d(t), & d \in \{11, 23, 35\} \\
 u_e(t+1) &= \frac{1}{5}u_{e-1}(t), & e \in \{12, 24, 36\} \\
 u_{47}(t+1) &= \frac{1}{5}u_{46}(t) + \frac{3}{5}u_{47}(t) + \frac{1}{4}u_{48}(t), \\
 u_{48}(t+1) &= \frac{1}{5}u_{47}(t) + \frac{3}{4}u_{48}(t).
 \end{aligned}$$

Ecuaciones de riqueza

Sea $R_{r,c,s}(t)$ la cantidad de individuos de metabolismo c en la región r con una reserva de azúcar s al tiempo t para $1 \leq r \leq 4$, $1 \leq c \leq 2$ y $0 \leq s \leq 50$. Entonces:

$$\begin{aligned}
R_{1,1,0}(t+1) &= 0, \\
R_{1,1,a}(t+1) &= R_{1,1,a}(t) && a \in \{1, \dots, 50\}, \\
R_{1,2,b}(t+1) &= R_{1,2,b+1}(t) && b \in \{0, \dots, 49\}, \\
R_{1,2,50}(t+1) &= 0, \\
R_{2,1,0}(t+1) &= 0, \\
R_{2,1,a}(t+1) &= R_{2,1,a-1}(t) && a \in \{1, \dots, 49\}, \\
R_{2,1,50}(t+1) &= R_{2,1,49}(t) + R_{2,1,50}(t), \\
R_{2,2,0}(t+1) &= 0, \\
R_{2,2,b}(t+1) &= R_{2,2,b}(t) && b \in \{1, \dots, 50\}, \\
R_{3,1,a}(t+1) &= 0 && a \in \{0, 1\}, \\
R_{3,1,b}(t+1) &= R_{3,1,b-2}(t) && b \in \{2, \dots, 49\}, \\
R_{3,1,50}(t+1) &= R_{3,1,48}(t) + R_{3,1,49}(t) + R_{3,1,50}(t), \\
R_{3,2,0}(t+1) &= 0, \\
R_{3,2,c}(t+1) &= R_{3,2,c-1}(t) && c \in \{1, \dots, 49\}, \\
R_{3,2,50}(t+1) &= R_{3,2,49}(t) + R_{3,2,50}(t), \\
R_{4,1,a}(t+1) &= 0 && a \in \{0, 1, 2\}, \\
R_{4,1,b}(t+1) &= R_{4,1,b-3}(t) && b \in \{3, \dots, 49\}, \\
R_{4,1,50}(t+1) &= R_{4,1,47}(t) + R_{4,1,48}(t) + R_{4,1,49}(t) \\
&\quad + R_{3,1,50}(t), \\
R_{4,2,c}(t+1) &= 0 && c \in \{0, 1\}, \\
R_{4,2,d}(t+1) &= R_{4,2,d-2}(t) && d \in \{2, \dots, 49\}, \\
R_{4,2,50}(t+1) &= R_{4,2,48}(t) + R_{4,2,49}(t) + R_{4,2,50}(t).
\end{aligned}$$

Algoritmo de actualización

Dado que en las ecuaciones presentadas recientemente no se tienen en cuenta los movimientos de una región a otra ni la aplicación de impuestos a los agentes -en el caso que corresponda-, es necesario establecer pasos intermedios de re-escalamiento entre las actualizaciones de cada tipo de ecuaciones. Además de esto, en el algoritmo mostrado a continuación se indican los momentos en cuales se deben almacenar las distintas cantidades relevadas que determinan el proceder del modelo de aproximación. Se observa finalmente que los pasos indicados en el Algoritmo 1 deben repetirse un total de veces como pasos temporales sean definidos para el MBA (en nuestras implementaciones ese valor es establecido en 51 pasos temporales).

Algoritmo 1 Algoritmo de implementación del Sistema de Ecuaciones en Diferencias para la aproximación del MBA SugarScape

- 1: **Actualizar** las *ecuaciones de ubicación* de la población en función de los movimientos.
 - 2: **Almacenar** cuántas hormigas abandonaron cada región.
 - 3: **Ajustar** las ecuaciones de riqueza en función de cuántas hormigas salieron de esa región.
 - 4: **Actualizar** las *ecuaciones de riqueza* en función de la recolección de azúcar y el metabolismo de los agentes.
 - 5: **Ajustar** las ecuaciones de riqueza en función de los impuestos (en caso de existir).
 - 6: **Almacenar** la cantidad de impuestos recaudados y el número de muertes.
 - 7: **Ajustar** las ecuaciones de ubicación en función de la suma de las ecuaciones de riqueza por región (los impuestos y el metabolismo hacen que algunas hormigas mueran)
-

A 2. Anexos al Modelo de Distribución de Riqueza

A continuación se presentan los resultados obtenidos en los experimentos numéricos para la estimación de parámetros del modelo estudiado en la segunda parte de la presente tesis.

A 2.1. Resultados numéricos para datos generados por el modelo

Para este caso, en primer lugar se produjo la generación de datos artificiales mediante la resolución del problema directo (ecuación 4.8) determinado por los siguientes valores particulares de los parámetros: $\alpha = 0,4$, $\beta = 0,3$, $\gamma = 4$, $r = 0,01$ y $T = 50$. Es decir, una vez que se fijaron los parámetros mencionados se resuelve el problema directo y se obtienen como datos de salida las cantidades: $W^*(t)$, $\mathbf{f}^*(t)$ y $g^*(t)$. Cabe destacar que para encontrar una solución de 4.8 es necesario también definir una condición inicial $\mathbf{f}(0) = \mathbf{f}_0$, lo cual se realiza, en estos casos particulares, utilizando los perfiles de distribución de riqueza denominados como *Sociedad I* y *Sociedad II*.

En segundo lugar se implementó el método de estimación de parámetros descrito en el capítulo 4 aplicado a los datos mencionados anteriormente a los cuales previamente se les agregó ruido aleatorio gaussiano de distinta magnitud.

Tabla A 2.1: Datos generados con ruido del 2%.

Experimento		Sociedad I	E(%)	Sociedad II	E(%)	
1	$\omega_1 = 1$ $\omega_2 = 0$ $\omega_3 = 0$	α	0.4099	2.48	0.4306	7.65
		β	0.3088	2.93	0.3292	9.73
		γ	4.0000	0.00	4.0000	0.00
		α/β	1.3274	0.45	1.3080	1.90
		$\beta - \alpha$	-0.1011	1.10	-0.1014	1.40
2	$\omega_1 = 0$ $\omega_2 = 1$ $\omega_3 = 0$	α	0.5688	42.20	0.5440	36.00
		β	0.4372	45.73	0.4141	38.03
		γ	5.3000	32.50	5.2400	31.00
		α/β	1.3010	2.43	1.3137	1.47
		$\beta - \alpha$	-0.1316	31.60	-0.1299	29.90
3	$\omega_1 = 0$ $\omega_2 = 0$ $\omega_3 = 1$	α	0.4391	9.78	0.4296	7.40
		β	0.3425	14.17	0.3327	10.90
		γ	4.3800	9.50	4.3600	9.00
		α/β	1.2820	3.85	1.2913	3.16
		$\beta - \alpha$	-0.0966	3.40	-0.0969	3.10
4	$\omega_1 = 10$ $\omega_2 = 100$ $\omega_3 = 10$	α	0.4359	8.98	0.4564	14.10
		β	0.3347	11.57	0.3551	18.37
		γ	4.0000	0.00	4.0000	0.00
		α/β	1.3024	2.32	1.2853	3.60
		$\beta - \alpha$	-0.1012	1.20	-0.1013	1.30
5	$\omega_1 = 10$ $\omega_2 = 100$ $\omega_3 = 0$	α	0.4521	13.03	0.4382	9.55
		β	0.3509	16.97	0.3370	12.33
		γ	4.0000	0.00	4.0000	0.00
		α/β	1.2884	3.37	1.3003	2.48
		$\beta - \alpha$	-0.1012	1.20	-0.1012	1.20
6	$\omega_1 = 10$ $\omega_2 = 0$ $\omega_3 = 1$	α	0.3973	0.68	0.4030	0.75
		β	0.2963	1.23	0.3019	0.63
		γ	4.0000	0.00	4.0000	0.00
		α/β	1.3409	0.57	1.3349	0.12
		$\beta - \alpha$	-0.1010	1.00	-0.1011	1.10
7	$\omega_1 = 0$ $\omega_2 = 10$ $\omega_3 = 1$	α	0.4978	24.45	0.5070	26.75
		β	0.3955	31.83	0.4048	34.93
		γ	4.1000	2.50	4.0800	2.00
		α/β	1.2587	5.60	1.2525	6.07
		$\beta - \alpha$	-0.1023	2.30	-0.1022	2.20
8	$\omega_1 = 0$ $\omega_2 = 1$ $\omega_3 = 10$	α	0.4928	23.20	0.5080	27.00
		β	0.3918	30.60	0.4070	35.67
		γ	4.0200	0.50	4.0600	1.50
		α/β	1.2578	5.67	1.2482	6.39
		$\beta - \alpha$	-0.1010	1.00	-0.1010	1.00

Tabla A 2.2: Datos generados con ruido del 5%.

Experimento		Sociedad I	E(%)	Sociedad II	E(%)	
1	$\omega_1 = 1$ $\omega_2 = 0$ $\omega_3 = 0$	α	0.4120	3.00	0.4102	2.55
		β	0.3108	3.60	0.3091	3.03
		γ	4.0000	0.00	4.0000	0.00
		α/β	1.3256	0.58	1.3271	0.47
		$\beta - \alpha$	-0.1012	1.20	-0.1011	1.10
2	$\omega_1 = 0$ $\omega_2 = 1$ $\omega_3 = 0$	α	0.5708	42.70	0.5828	45.70
		β	0.4396	46.53	0.4485	49.50
		γ	5.2700	31.75	5.4000	35.00
		α/β	1.2985	2.62	1.2994	2.54
		$\beta - \alpha$	-0.1312	31.20	-0.1343	34.30
3	$\omega_1 = 0$ $\omega_2 = 0$ $\omega_3 = 1$	α	0.4252	6.30	0.4321	8.03
		β	0.3301	10.03	0.3359	11.97
		γ	4.5500	13.75	4.4300	10.75
		α/β	1.2881	3.39	1.2864	3.52
		$\beta - \alpha$	-0.0951	4.90	-0.0962	3.80
4	$\omega_1 = 10$ $\omega_2 = 100$ $\omega_3 = 10$	α	0.4266	6.65	0.4453	11.33
		β	0.3254	8.47	0.3440	14.67
		γ	4.0000	0.00	4.0000	0.00
		α/β	1.3108	1.69	1.2943	2.93
		$\beta - \alpha$	-0.1012	1.20	-0.1013	1.30
5	$\omega_1 = 10$ $\omega_2 = 100$ $\omega_3 = 0$	α	0.4563	14.08	0.4290	7.25
		β	0.3550	18.33	0.3279	9.30
		γ	4.0000	0.00	4.0000	0.00
		α/β	1.2854	3.60	1.3083	1.86
		$\beta - \alpha$	-0.1013	1.30	-0.1011	1.10
6	$\omega_1 = 10$ $\omega_2 = 0$ $\omega_3 = 1$	α	0.3972	0.70	0.3970	0.75
		β	0.2966	1.13	0.2959	1.37
		γ	4.0000	0.00	4.0000	0.00
		α/β	1.3392	0.44	1.3417	0.63
		$\beta - \alpha$	-0.1006	0.60	-0.1011	1.10
7	$\omega_1 = 0$ $\omega_2 = 10$ $\omega_3 = 1$	α	0.5089	27.23	0.5022	25.55
		β	0.4065	35.50	0.4004	33.47
		γ	4.1100	2.75	4.0500	1.25
		α/β	1.2519	6.11	1.2542	5.93
		$\beta - \alpha$	-0.1024	2.40	-0.1018	1.80
8	$\omega_1 = 0$ $\omega_2 = 1$ $\omega_3 = 10$	α	0.4726	18.15	0.4915	22.88
		β	0.3717	23.90	0.3907	30.23
		γ	4.0700	1.75	4.0900	2.25
		α/β	1.2715	4.64	1.2580	5.65
		$\beta - \alpha$	-0.1009	0.90	-0.1008	0.80

Tabla A 2.3: Datos generados con ruido del 10 %.

Experimento		Sociedad I	E(%)	Sociedad II	E(%)	
1	$\omega_1 = 1$ $\omega_2 = 0$ $\omega_3 = 0$	α	0.4344	8.60	0.4069	1.73
		β	0.3293	9.77	0.2978	0.73
		γ	4.0000	0.00	4.0000	0.00
		α/β	1.3191	1.07	1.3663	2.47
		$\beta - \alpha$	-0.1051	5.09	-0.1091	9.09
2	$\omega_1 = 0$ $\omega_2 = 1$ $\omega_3 = 0$	α	0.5210	30.25	0.4872	21.81
		β	0.4177	39.23	0.3259	8.62
		γ	4.2000	5.00	5.5000	37.50
		α/β	1.2474	6.45	1.4952	12.14
		$\beta - \alpha$	-0.1033	3.33	-0.1614	61.38
3	$\omega_1 = 0$ $\omega_2 = 0$ $\omega_3 = 1$	α	0.4294	7.34	0.3002	24.95
		β	0.3297	9.89	0.2016	32.81
		γ	4.2000	5.00	4.6000	15.00
		α/β	1.3024	2.32	1.4894	11.70
		$\beta - \alpha$	-0.0997	0.31	-0.0986	1.36
4	$\omega_1 = 10$ $\omega_2 = 100$ $\omega_3 = 10$	α	0.4764	19.10	0.4140	3.49
		β	0.3762	25.39	0.3031	1.03
		γ	4.0000	0.00	4.0000	0.00
		α/β	1.2665	5.01	1.3658	2.44
		$\beta - \alpha$	-0.1002	0.25	-0.1109	10.87
5	$\omega_1 = 10$ $\omega_2 = 100$ $\omega_3 = 0$	α	0.4272	6.79	0.4141	3.53
		β	0.3274	9.14	0.3033	1.09
		γ	4.0000	0.00	4.0000	0.00
		α/β	1.3047	2.15	1.3655	2.42
		$\beta - \alpha$	-0.0998	0.24	-0.1109	10.86
6	$\omega_1 = 10$ $\omega_2 = 0$ $\omega_3 = 1$	α	0.4328	8.20	0.4101	2.53
		β	0.3278	9.26	0.3009	0.28
		γ	4.0000	0.00	4.0000	0.00
		α/β	1.3204	0.97	1.3632	2.24
		$\beta - \alpha$	-0.1050	5.02	-0.1093	9.28
7	$\omega_1 = 0$ $\omega_2 = 10$ $\omega_3 = 1$	α	0.5896	47.40	0.4514	12.86
		β	0.4884	62.81	0.3382	12.75
		γ	4.1000	2.50	4.1000	2.50
		α/β	1.2071	9.47	1.3346	0.10
		$\beta - \alpha$	-0.1012	1.17	-0.1132	13.19
8	$\omega_1 = 0$ $\omega_2 = 1$ $\omega_3 = 10$	α	0.4215	5.38	0.3851	3.73
		β	0.3213	7.10	0.2739	8.70
		γ	4.2000	5.00	4.1000	2.50
		α/β	1.3120	1.60	1.4060	5.45
		$\beta - \alpha$	-0.1002	0.23	-0.1112	11.19

A 2.2. Resultados numéricos para datos reales de Estados Unidos

De la misma forma que en el apartado anterior, se proporcionan en la siguiente tabla los resultados obtenidos en la estimación del conjunto total de parámetros del modelo, calculados a partir de datos reales de Estados Unidos.

Tabla A 2.4: Resultados para datos de Estados Unidos.

Pesos	Parámetro	Valor
	α	0.0012
$\omega_1 = 1$	β	0.0448
$\omega_2 = 0$	γ	4.000
$\omega_3 = 0$	α/β	0.0272
	$\beta - \alpha$	0.0435
	α	0.0017
$\omega_1 = 10$	β	0.0502
$\omega_2 = 100$	γ	4.000
$\omega_3 = 10$	α/β	0.0344
	$\beta - \alpha$	0.0485

A 3. Complementos del Modelo de Percepción Cruzada

Este apéndice tiene por finalidad profundizar sobre todos aquellos detalles referidos al modelo expuesto en el capítulo 5.3 de esta tesis y que por razones de índole práctica se optó por separarlos del cuerpo principal para reunirlos en este apartado. En efecto, se precisarán las especificaciones respecto del *Modo 0* y *Modo 1* en relación a las políticas de acción y la dinámica del Modelo de Percepción Cruzada, luego se presentará el algoritmo propio del modelo y finalmente se proporcionará una descripción detallada de todos los parámetros que constituyen el MPC.

A 3.1. Estructuras de *Modo*

Modo 0

Modo *normal*, aquel en el que todo jugador se encuentra al iniciar el juego. Los parámetros propios de cada jugador que inciden específicamente en este modo se dividen en dos grupos: aquellos que determinan la estrategia que seguirá el participante a la hora de hacer **clic** y los parámetros que guiarán su **movimiento**. Entre los primeros identificamos a: $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{Z}_{>0}$ y $q_1, q_2, q_3 \in [0, 1]$; mientras que en el segundo grupo ubicamos a $p, P \in [0, 1]$ y a $\rho \in (0, 1)$. Es importante tener presente que además de los mencionados, en este modo así como en todo momento del juego, intervienen otros parámetros de carácter **global** como lo son la *memoria* (m) y la *velocidad máxima* del jugador (v). Para mayor detalle dirigirse a la sección A 3.3 de este apéndice.

Clics

A continuación se describe la política de acción que seguirá un participante para la realización de clics en este modo.

Si un jugador se encuentra en Modo 0 efectuará un clic con cierta probabilidad dependiendo en cuál de los siguientes escenarios posibles presentados a continuación se ubique. Notar que todas estas situaciones están determinadas por los parámetros y_1 , y_2 e y_3 .

- E I. El jugador que está en movimiento tuvo una percepción positiva en el instante actual (t) y además no se registró ninguna otra observación positiva en los últimos m/y_1 pasos temporales. En esta situación la probabilidad de que el participante haga clic es $q_1/(c_t + 1)$ donde c_t es la cantidad de clics realizados en los últimos m/y_3 instantes temporales previos.
- E II. El jugador está quieto en el instante actual y (repentinamente) tiene una percepción positiva mientras que en el instante anterior no había percibido ningún estímulo, o bien al moverse tuvo observaciones positivas continuas ininterrumpidas en los últimos m/y_2 pasos temporales anteriores. Las probabilidades con las que el participante hará clic serán q_2 en la primer situación y $q_2/(c_t + 1)$ en la segunda.
- E III. Si no se está en ninguna de las situaciones anteriores, la probabilidad de que el jugador efectúe un clic es q_3 .

Por un lado, a partir de la situación I, es importante notar que el parámetro q_1 determina las chances de hacer clic que tiene un jugador cuando percibe algún estímulo luego de un periodo considerable de tiempo sin haber tenido ninguna observación. Esta probabilidad irá disminuyendo a medida que el participante haya realizado una mayor cantidad de clics en los instantes previos inmediatos.

Por otra parte, si nos enfocamos en la primer situación del escenario II, advertimos que q_2 es la probabilidad de que un jugador haga clic por haber advertido que un objeto arribó a la posición en la que él estaba ubicado. Por otro lado, la segunda situación está identificada con la detección de un elemento extraño durante mucho tiempo seguido, lo que implica que dicho objeto se estaría desplazando a la par de su propio movimiento. En otras palabras, se ve que q_2 está íntimamente relacionado a la probabilidad de realizar un clic luego de haber reconocido un *objeto móvil*.

Movimiento

Seguidamente se procede a detallar la dinámica para las acciones de movimiento que respectan a este modo.

Un jugador que en el instante t se encuentre en Modo 0 va a moverse en algún sentido (derecha o izquierda) y a cierta velocidad (número de casilleros o píxeles) dependiendo de la situación en la que se encuentre en el momento que va a realizar el movimiento. Dicha situación estará determinada conjuntamente por m , v , las observaciones históricas del jugador (vector O), el movimiento realizado en el paso anterior y por los parámetros específicos p , P y ρ .

En primer lugar, notemos que si la velocidad máxima de un jugador es el número entero $v \geq 0$, entonces este tiene exactamente $2v + 1$ posibilidades de movimiento en cada instante de tiempo. En efecto, si rotulamos con el número 0 al casillero o píxel donde está situado actualmente el jugador y consideramos que los píxeles a su derecha son los números positivos y los que se encuentran a su izquierda son los negativos, el conjunto de posibles casilleros entre los que el jugador deberá elegir moverse en cada paso temporal se identifica con el conjunto $M \doteq \{-v, -v + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, v - 1, v\}$, el cual tiene $2v + 1$ elementos.

Ahora bien, una política de movimiento consiste esencialmente en asignar una distribución de probabilidad en cada paso temporal al conjunto M definido recientemente. Es a partir de esta asignación de probabilidades que el jugador podrá tomar la decisión respecto del casillero al que se moverá en ese instante de tiempo.

Por ejemplo, si se le asigna probabilidad igual a 0,9 al píxel $-v$, 0,1 al píxel 0 y probabilidad nula al resto de las posibilidades, el jugador tendrá 90% de chances de moverse al casillero que se encuentra a una distancia v hacia la izquierda de donde está situado actualmente y un 10% de chances de quedarse quieto. Por lo tanto, los jugadores en cada momento del juego elijen a dónde moverse dependiendo la *política de movimiento* que estén siguiendo y la cual determina la *distribución de probabilidad* sobre el conjunto total de movimientos posibles.

La política de movimiento que regirá a un jugador que se encuentre en Modo 0 está dividida en dos casos generales, por un lado el movimiento **inercial**, que está afectado por los parámetros p -*probabilidad inercial*- y P -*probabilidad inercial especial*-; y por el otro, el movimiento **no-inercial**, en cual interviene ρ .

Movimiento inercial: Esta política de movimiento se activará cuando el jugador que está en Modo 0 se encuentre en alguna de estas dos situaciones posibles: recibe una percepción en el instante actual (t) o no *recuerda* haber advertido ningún estímulo hacia el pasado. En otras palabras, dentro del Modo 0 un jugador incurre en la política de movimiento inercial si bien tiene una observación positiva en t o bien todas las *observaciones* de su memoria (O) son negativas. En el primer caso, se le asigna probabilidad p al mismo movimiento que el jugador había realizado en $t - 1$ (instante inmediato anterior) y a cada uno del resto de los posibles movimientos se les adjudica probabilidad $(1 - p)/2v$. En el segundo, se asigna

probabilidad P al movimiento que venía realizando anteriormente el jugador y $(1 - P)/2v$ a los demás movimientos posibles.

Complementariamente, relacionados a cada una de estas situaciones descritas, se incorporan al estado de los jugadores dos atributos auxiliares llamados *alerta 0* y *alerta 1*. En efecto, el atributo **alerta 0** se *activará* cada vez que el participante que esté en Modo 0 cambie el sentido de su movimiento y permanecerá activo durante 3 pasos temporales. Un jugador que tenga activa una alerta 0 se moverá con política inercial de *probabilidad* p en cada instante mientras dure la alerta. La **alerta 1** se activará luego de que el participante abandone el Modo 1 y se mantendrá durante $\frac{2}{3}m$ pasos temporales en los que la política inercial de movimiento será con *probabilidad* P .

A continuación se ejemplifican situaciones de movimiento inercial. Supongamos que un jugador en Modo 0 con velocidad máxima propia de $v = 2$ y memoria $m = 40$ se movió en el instante $t - 1$ dos píxeles a la derecha. Entonces, siguiendo la política de movimiento inercial, en el instante t se tiene una probabilidad p de que se mueva nuevamente dos casilleros a la derecha y probabilidad $(1 - p)/4$ al resto de las opciones. Es decir que los movimientos: dos píxeles a la izquierda, un píxel a la izquierda, quedarse quieto y un píxel a la derecha tienen todos chance igual a $(1 - p)/4$ de ocurrir.

Ahora supongamos que el mismo jugador estando en Modo 0 no tuvo ninguna percepción en los últimos 40 pasos temporales y en el instante $t - 1$ se movió un píxel hacia la izquierda. Por lo tanto, obedeciendo a la política inercial, habrá probabilidad P de que en el instante t también se mueva un casillero a la izquierda y las probabilidades de que se mueva a cada una de las cuatro posibilidades restantes será de $(1 - P)/4$.

Consiguientemente, es importante notar que la primer situación intenta representar la tendencia de un jugador a seguir realizando una misma acción mientras que al hacerlo perduren las percepciones positivas. En este sentido, si además consideramos que esta situación representa para el participante el contacto con un objeto externo dentro del juego, es posible afirmar que mediante el parámetro p se está modelando en qué medida un jugador es propenso a permanecer realizando una acción guiada por la inercia de seguir recibiendo un estímulo perceptual. En efecto, si un participante tiene la característica de poseer el parámetro p tal que se cumpla que $p > 1/(2v + 1)$ y se encuentra en la situación descrita, dicho jugador tendrá más chances de seguir efectuando el mismo movimiento que lo condujo hasta allí que cualquier otro dentro de sus posibilidades.

Por otro lado, la segunda situación de las mencionadas anteriormente y que nos puede llevar a adoptar una política de movimiento inercial, nos permitirá montar un escenario de lo que llamamos “exploración del terreno”. En efecto, para este caso se asume que un jugador que durante un tiempo prolongado no haya percibido ningún tipo de estímulo proveniente del exterior, comenzará -en mayor o

menor medida dependiendo de la magnitud de su parámetro P - a *explorar* el tablero en busca de otros participantes. Por este motivo es que aquellos jugadores que sus parámetros cumplan las relaciones: $P \gg p > 1/(2v + 1)$, serán propensos a recorrer el todo terreno hasta dar con alguna observación proveniente de la percepción de un estímulo externo.

Es importante además recalcar que aquellos jugadores tales que sus parámetros cumplan las igualdades: $p = 1/(2v + 1) = P$, cuando se encuentren en Modo 0, le asignarán la misma probabilidad a cualquier movimiento. Es decir que en todo momento, mientras estén en este Modo, se moverán de manera aleatoria.

Movimiento no-inercial: Esta política de movimiento se activará cuando un jugador en Modo 0 no haya percibido ningún estímulo en el instante actual pero si recuerde alguna percepción en el pasado. En otras palabras, cuando un participante en Modo 0 tenga una observación negativa en el instante t pero en su vector de observaciones históricas hubiera al menos una positiva, el jugador realizará su acción de movimiento siguiendo una política no-inercial.

Llamemos k a la cantidad de pasos temporales desde que el participante percibió la última observación positiva y consideremos una función f que dependa de los parámetros m , ρ y k , que cumpla $0 < f(m, \rho, k) < 1$. Entonces, la política de movimiento no-inercial asignará probabilidad $f_{m,\rho}(k) \doteq f(m, \rho, k)$ al movimiento *opuesto* respecto del que el jugador haya realizado en el instante anterior y probabilidad $(1 - f_{m,\rho}(k))/2v$ a cada uno de los movimientos posibles restantes.

Ahora bien, consideremos que para m y ρ fijos, $f_{m,\rho}$ alcanza su valor máximo en k^* . Entonces, a raíz de lo expuesto anteriormente, se observa que si un jugador que se encuentra en Modo 0 tiene un política no-inercial duante k^* pasos temporales consecutivos, en ese instante se da la probabilidad máxima de que su movimiento se oriente hacia la dirección donde se encontraba cuando tuvo su última percepción positiva. Siguiendo con este razonamiento, si pensamos que el parámetro m está pre-fijado de antemano ya que es una característica global del jugador, entonces se hace evidente que el parámetro ρ -al determinar k^* - está modelando la cantidad de tiempo que le lleva al jugador volver a buscar un objeto (móvil o fijo) que percibió en el pasado. En otras palabras, dependiendo del valor que se le haya asignado a ρ , sabremos cuándo se dará la máxima chance de que el participante vuelva a buscar el último estímulo recibido (valor de k^*) y también cuán alta es esa probabilidad de regresar ($f_{m,\rho}(k^*)$). En definitiva, la influencia del parámetro ρ -específico de esta política de movimiento- es modelar el tiempo de volver en busca de un objeto que quedó atrás.

El lector que esté interesado en profundizar sobre los detalles tanto de esta política de movimiento (por ejemplo sobre cuáles son las características de $f_{m,\rho}$) como de la política inercial y todos los parámetros que intervienen, debe dirigirse

al Apéndice A 3.3 y en complementación a la sección 6.2 -donde se muestran ejemplos concretos y resultados de implementación.

Modo 1

También llamado *modo para la identificación de objetos fijos*, el Modo 1 dará un marco para modelar un posible escenario en el que el jugador, luego de percibir un estímulo externo, intenta reconocer si se encuentra en presencia de un objeto fijo o uno móvil, teniendo como objetivo final poder decidir si hará clic o no frente a dicho estímulo.

La totalidad de parámetros intervinientes en este modo se denotará mediante el vector $F = (F_1, F_2)$ donde se tiene que $F_1 = (p_1, p_2, \dots, p_8) \in [0, 1]^8$, $F_2 = (z, \sigma, e, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_5) \in \mathbb{Z}^8$ y $\sigma \geq 1$. De esta manera, a continuación se hará una breve descripción general sobre la dinámica de acciones -tanto de clics como de movimientos- por parte de un jugador en Modo 1 y de los principales parámetros que lo determinan. Se deja para las siguientes secciones una referencia detallada de todos los parámetros involucrados y del algoritmo seguido en este modo para la concreción de todas las acciones llevadas a cabo por el jugador.

En primer lugar, es conveniente dejar en claro cuál es el conjunto de factores o situaciones posibles que pueden llevar a un jugador pasar de encontrarse en modo normal (Modo 0) a estar en Modo 1. Y es en este punto que jugarán un rol fundamental los parámetros específicos p_1 y z , ya que a partir de ellos se determinarán las condiciones para la concreción, o no, por parte de cada jugador de comenzar la tarea de buscar o identificar un objeto fijo.

Como mencionamos en el capítulo 5.3, un participante puede *ingresar* a Modo 1 si al moverse percibe un estímulo en el instante actual (t) luego de un tiempo considerable sin haber recibido ninguna señal del exterior, ese “tiempo considerable” es medido a partir del parámetro z . En efecto, diremos que un jugador entrará en el Modo 1 con probabilidad p_1 si tiene una observación positiva en el paso temporal t pero sus observaciones entre los instantes $t - 1$ y $t - m/z$ son todas negativas. Además, se agrega la condición de que ningún jugador puede pasar a estar en Modo 1 si ya lo hizo en algún instante entre el paso temporal actual y $t - m/z$ pasos hacia el pasado.

Es importante recalcar en este momento lo traído a colación en el capítulo 5.3 con respecto a la primera fase del experimento psico-cognitivo de interacciones perceptuales. En particular, apoyándonos en la mencionada fase de *aprendizaje* para el reconocimiento de objetos fijos en el tablero, se observa que el parámetro p_1 , junto con z , está representando en qué medida el jugador estará predispuesto y “entrenado” para concretar dicho proceso de detección.

Al margen de este razonamiento se encuentra lo que podemos llamar *efectividad* del proceso de detección. En efecto, a medida que transcurren las acciones

del jugador en Modo 1, se pone en consideración cuán efectivo pueda llegar a ser ese jugador para acertar en la identificación del objeto que quiere realizar, precisamente para modelar esa efectividad se tienen el resto de los parámetros específicos de este modo. En otras palabras, se hace hincapié en que, por un lado se tienen los parámetros p_1 y z para modelar en qué medida un jugador a lo largo del proceso iterativo intentará ocasionalmente identificar objetos fijos, y por el otro, se cuenta con el resto de los parámetros para representar cuán eficazmente se realiza esa actividad.

En términos generales, cuando un jugador que se está trasladando en el tablero con cierta dirección, percibe un estímulo e ingresa en Modo 1, seguirá un patrón de acción delimitado en gran medida por sus parámetros personales. Dicha pauta de movimiento consiste en continuar su desplazamiento hasta que las percepciones dejen de ocurrir para, en ese momento, volver hacia atrás hasta repetir el encuentro con el objeto percibido anteriormente y así poder confirmar que se trata de un cuerpo inmóvil en el terreno. Dependiendo de sus características personales -las cuales están modeladas mediante sus parámetros propios-, los participantes pueden repetir este proceso de traspasar en una y otra dirección al objeto que se cree fijo hasta poder concluir si se trata, efectivamente de un objeto estático, o si de lo contrario creen estar frente a un cuerpo móvil y así finalizar la fase de detección para volver al modo 0 y realizar un clic con cierta probabilidad.

Asimismo, dentro del marco general delineado por el patrón de movimiento que sigue un jugador en Modo 1, existen situaciones especiales que al concretarse modificarán el desarrollo de las acciones realizadas por dicho jugador. En este sentido, luego de traspasar lo que a priori considera que es un objeto fijo (OF), es posible que el participante al regresar -tomando la dirección opuesta para reencontrarse con el objeto dejado atrás- advierta que ya no se encuentra o que si hay un cuerpo externo pero de un tamaño o en una posición diferente a la percibida en el contacto anterior. En un escenario de este tipo el jugador automáticamente abandonará el Modo 1 y, dependiendo del caso en el que se encuentre, hará clic con cierta probabilidad determinada por sus parámetros personales. Otra situación especial se da cuando un jugador en Modo 1, luego de haber percibido lo que cree que es un objeto fijo se dispone a regresar pero antes de cambiar el sentido de su movimiento observa un nuevo estímulo externo. En este caso el participante también deja el Modo 1 para pasar a Modo 0 y, por supuesto, hará clic con cierta probabilidad.

En las siguientes secciones de este capítulo se profundizará sobre los detalles específicos de implementación, tanto del Modo 1 como de la dinámica completa del modelo. Se presentará el algoritmo general del MPC junto al específico del Modo 1 y finalmente se muestra una lista completa de todos los parámetros intervinientes donde se especifican las relaciones existentes entre ellos y se describe la mecánica a partir de la cual inciden en la dinámica iterativa del MPC.

A 3.2. Algoritmo MPC

En esta sección nos dedicaremos a enunciar de forma sintética el algoritmo subyacente al modelo descrito en el capítulo 5.3. Se señala en primer lugar que se agrupará bajo el nombre de **atributo del jugador** a toda característica, estado y condición perteneciente a cada uno de ellos, ya sea de carácter fijo o transitorio. De esta manera, a continuación se destacan algunos de los atributos de mayor relevancia que cada participante tendrá en todo instante del juego:

- *Vector de Observaciones Históricas*: Vector de tamaño m que almacena las observaciones percibidas en los últimos m pasos temporales. Se inicializa con el vector $O = (0, \dots, 0)$ para luego colocar 1 o 0 en la componente que corresponda según su percepción sea positiva o negativa respectivamente.
- *Acciones Históricas*: Lista de las últimas m acciones realizadas por el jugador. Cada acción es una dupla donde se especifica el movimiento efectuado y si la acción de clic ha sido positiva o negativa.
- *Estado Actual*: Valor numérico que indica la posición en el instante actual.
- *Modo Actual*: Valor numérico indicador del modo en el que se encuentra el jugador al tiempo actual, pudiendo ser 0 o 1.

Algoritmo General

Algoritmo 2 Algoritmo del Modelo de Percepción Cruzada

Entradas: Valor de T_{MAX} y de los parámetros propios de cada jugador.

- 1: Ubicar los dos jugadores aleatoriamente en el tablero unidimensional e inicializar sus atributos.
 - 2: Establecer $t \leftarrow 0$.
 - 3: Actualizar el atributo *Observaciones Históricas* de cada jugador verificando la superposición de su avatar con: el OF, el cuerpo del otro jugador o señuelo.
 - 4: Ejecutar las *Acciones* y actualizar los atributos restantes. Dependiendo del modo en el que se encuentre, de sus observaciones históricas y de la últimas acciones efectuadas, cada jugador realiza lo siguiente:
 - a. Ejecuta la acción de clic, ya sea positiva o negativa.
 - b. Ejecuta la acción de movimiento y se actualiza su *Estado Actual*.
 - c. Se actualiza su atributo *Acciones Históricas* por lo realizado en **a** y **b**.
 - d. Se actualiza su atributo *Modo Actual*.
 - 5: Si $t = T_{MAX}$ salir del proceso, sino establecer $t \leftarrow t + 1$ y volver a la línea 3.
-

Algoritmo Modo 1

Antes de continuar con la formulación del algoritmo que describe el accionar de todo jugador en Modo 1, se destacan algunas consideraciones significativas con la finalidad de lograr un entendimiento acabado del mismo. En primer lugar se recuerda que hay dos posibilidades para que un participante se encuentre en este Modo. Estas son, o bien el jugador estaba en Modo 0 en el instante anterior y luego de tener una observación positiva se cumplen las condiciones específicas para que ingrese en Modo 1 (ver apéndice A 3.1) o bien estaba en Modo 1 y por lo sucedido en el instante anterior se ha indicado que debe permanecer en este Modo un tiempo más. Estas dos situaciones tendrán distintas implicancias en el comienzo del algoritmo como se observará luego en la inicialización del mismo.

Por otro lado, es importante destacar que únicamente en caso que se den alguna de las dos situaciones descriptas en el párrafo anterior, el algoritmo que se presenta a continuación se deberá ejecutar en la línea 4 -antes de realizar el apartado **a**- del Algoritmo General. De esta manera, el algoritmo 3 se constituye como un subproceso del algoritmo 2 del cual se obtiene lo necesario para llevar a cabo todos los apartados de la mencionada línea 4.

Adicionalmente se hace notar que los movimientos en Modo 1 siempre serán con velocidad 1, es decir que sólo variará la dirección hacia la cual se mueve el jugador con desplazamientos de un píxel por tiempo y no se permitirá que se quede quieto. Además, se establece que no se podrá permanecer más de m pasos temporales consecutivos en este Modo y se recuerda que los parámetros determinantes del proceso son: $F = (F_1, F_2)$ donde $F_1 = (p_1, p_2, \dots, p_8) \in [0, 1]^8$ y $F_2 = (z, \sigma, e, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_5) \in \mathbb{Z}^8$.

Finalmente, en pos de una plena comprensión del algoritmo 3, se torna de vital importancia reparar en las *salidas* -o resultados- producidos por el mismo. En efecto, lo que se obtiene luego de cada ejecución de dicho algoritmo es, por un lado las decisiones relativas a la posterior realización de las acciones requeridas en la línea 4 del algoritmo 2, es decir las instrucciones sobre qué se debe hacer en la siguiente acción de clic y de movimiento y además la orden sobre si se debe permanecer en el Modo 1 o salir del mismo. De igual manera, en cada ejecución de este algoritmo también se guardarán en memoria determinadas variables temporales que serán utilizadas a la hora de volver a ejecutar dicho algoritmo en el próximo instante de tiempo, como se observará en el inicio del código, estas variables son: T, d y C .

Con la intención de clarificar en la mayor medida posible el pseudocódigo presentado a continuación, se aclaran algunas cuestiones de forma y notación. Las variables que almacenarán las salidas producidas por el algoritmo serán: $clic \in [0, 1]$ referida a la probabilidad con la que el jugador hará clic; $mov \in \{-1, 1\}$ señalando la dirección de su movimiento y finalmente $salir \in \{\text{True}, \text{False}\}$ que

manifiesta si en el paso temporal siguiente el jugador debe salir del Modo 1 o si por el contrario debe permanecer en el mismo. Complementariamente, a lo largo del pseudocódigo se encontrarán sentencias precedidas por el símbolo \triangleright lo que indicará que se trata de un comentario y no se consideran pasos del algoritmo.

Algoritmo 3 Algoritmo del Modo para la Identificación de Objetos Fijos

Entradas: F , t y a donde F son los parámetros del jugador; t es el paso temporal actual y a es el movimiento realizado en el paso $t - 1$.

if en el paso $t - 1$ el jugador estaba en Modo 0 **then**

 | Establecer $T \leftarrow 0$, $d \leftarrow 0$ y $C = [c_1, c_2] \leftarrow [0, 0]$

else

 | Recuperar de la memoria T , d y C y establecer $T \leftarrow T + 1$ $\triangleright T$ cuenta los pasos transcurridos desde el ingreso a Modo 1.

if $d = 0$ y la obs. en el paso t es positiva **then**

 | $mov = \text{sgn}(a)$

 | **if** $O_t^+ > 7 + \zeta_1$ donde O_t^+ son las observaciones positivas consecutivas al tiempo t **then**

 | $salir = \text{True}$; $clic = p_3$

 | **else**

 | $salir = \text{False}$; $clic = p_8$

 | **return** mov , $salir$, $clic$

else if $d = 0$ y la obs. en el paso t es negativa **then**

 | **if** $O_t^+ < 7 - \zeta_2$ **then**

 | $mov = -\text{sgn}(a)$; $salir = \text{True}$; $clic = p_3$

 | **else**

 | $mov = \text{sgn}(a)$; $salir = \text{False}$; $clic = p_8$; $d = O_t^+$ $\triangleright d$ es el tamaño del OF percibido por el jugador.

 | **return** mov , $salir$, $clic$

else if $d \neq 0$ **then** \triangleright En este caso el jugador identificó el tamaño del OF en algún paso anterior.

 | **if** la obs. en el paso t es positiva **then**

 | Sean: c_1 el total de cambios en la dirección de movimiento desde el ingreso a Modo 1 y c_2 la cantidad de pasos temporales desde el último cambio.

 | **if** $c_1 = 0$ **then**

 | $mov = \text{sgn}(a)$; $salir = \text{True}$; $clic = p_4$

 | **else** \triangleright Ya hubo cambios en la dirección de movimiento.

 | **if** $c_2 < e - \zeta_3$ **then**

 | $mov = \text{sgn}(a)$; $salir = \text{True}$; $clic = p_5$

```

else
  if la obs. en el paso  $t - 1$  es negativa then
    if  $TP < c_2$  donde  $TP$  es el tiempo transcurrido desde la
obs. positiva previa a la actual then
       $mov = \text{sgn}(a)$ ;  $salir = \text{True}$ ;  $clic = p_4$ 
    else
       $mov = \text{sgn}(a)$ ;  $salir = \text{False}$ ;  $clic = p_7 / (\sigma c_1)$ 
    else  $\triangleright$  En este caso la obs. es positiva en  $t$  y en  $t - 1$ .
      if  $OP > d + \zeta_4$  then
         $mov = \text{sgn}(a)$ ;  $salir = \text{True}$ ;  $clic = p_6$ 
      else
         $mov = \text{sgn}(a)$ ;  $salir = \text{False}$ ;  $clic = p_8$ 
else  $\triangleright$  En este caso la obs. es negativa en  $t$ .
  if  $c_1 = 0$  then
    if  $O_t^- = e$  donde  $O_t^-$  son las observaciones negativas consecuti-
vas al tiempo  $t$  then
       $c_1 = 1$ ;  $mov = -\text{sgn}(a)$ ;  $salir = \text{False}$ ;  $clic = p_8$ 
    else
       $mov = \text{sgn}(a)$ ;  $salir = \text{False}$ ;  $clic = p_8$ 
    else  $\triangleright$  Ya hubo cambios en la dirección de movimiento.
      if la obs. en el paso  $t - 1$  es negativa then
        if  $c_2 \leq e + \zeta_3$  then
           $mov = \text{sgn}(a)$ ;  $salir = \text{False}$ ;  $clic = p_8$ 
        else
          if  $O_t^- > e + \zeta_3$  then
             $mov = \text{sgn}(a)$ ;  $salir = \text{True}$ ;  $clic = p_8$ 
          else if  $O_t^- = e$  then
             $c_1 = c_1 + 1$ ;  $mov = -\text{sgn}(a)$ ;  $salir = \text{False}$ ;  $clic =$ 
 $p_8$ 
          else if  $O_t^- < e$  then
             $mov = \text{sgn}(a)$ ;  $salir = \text{False}$ ;  $clic = p_8$ 
        else  $\triangleright$  En este caso la obs. es negativa en  $t$  y positiva en  $t - 1$ .
          if  $O_{t-1}^+ < d - \zeta_5$  then
             $mov = -\text{sgn}(a)$ ;  $salir = \text{True}$ ;  $clic = p_6$ 
          else
             $q = p_2 c_1^2$ 
             $mov = \text{sgn}(a)$ ;  $salir = \mathbf{B}(q)$ ;  $clic = p_8$   $\triangleright \mathbf{B}(q)$  es la
realización de una variable aleatoria de distribución Bernoulli y parámetro  $q$ .
      return  $mov, salir, clic$ 

```

A 3.3. Parámetros del MPC

Como mencionamos en el capítulo 5.3 de esta tesis, el parámetro T_{MAX} indica la cantidad total de pasos temporales en los que se desarrollará el proceso iterativo del Modelo de Percepción Cruzada. Además, entre los parámetros propios de cada participante se encuentran aquellos que intervienen globalmente en la totalidad de su accionar, tanto si se encuentran en Modo 0 o Modo 1, estos son: su *memoria* - m - y su *velocidad máxima* - v - (ver Tabla A 3.1).

Tabla A 3.1: Parámetros globales

Parámetro	Tipo	Descripción
T_{MAX}	$\in \mathbb{Z}_{\geq 0}$	Número total de pasos temporales en los que se desarrolla el modelo.
m	$\in \mathbb{Z}_{\geq 0}$	<i>Memoria del jugador.</i> Indica cuántas observaciones -hacia el pasado- puede almacenar el jugador.
v	$\in \mathbb{Z}_{\geq 0}$	<i>Velocidad máxima del jugador.</i> Indica el número máximo de píxeles que puede moverse el jugador en cada instante temporal.

Por otra parte se encuentran los parámetros de cada jugador específicos de las acciones de movimiento y de clickeo cuando se encuentra en modo normal (Modo 0), los que se detallan en la Tabla A 3.2, y de las acciones en el modo para el reconocimiento de objetos fijos (Modo 1), descritos en la Tabla A 3.3.

Los parámetros relativos al desarrollo del accionar de un jugador en Modo 1 se dividen en dos grupos según su tipo, los cuales están denotados como: $F_1 = (p_1, p_2, \dots, p_8) \in [0, 1]^8$ y $F_2 = (z, \sigma, e, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_5) \in \mathbb{Z}^8$. En líneas generales, los agrupados en F_1 estarán relacionados a las diferentes probabilidades con las que el jugador hará clic luego de cada paso transcurrido en Modo 1. En efecto, dependiendo de las acciones desarrolladas previamente, el jugador en cada instante de tiempo puede encontrarse en tres situaciones posibles. Dichas situaciones pueden describirse de la siguiente manera: haber confirmado hallarse en presencia del OF, estar en un paso intermedio previo a la identificación y por lo tanto no ser capaz de determinar la naturaleza del objeto contactado o puede que el proceso de reconocimiento haya concluido que no se trataba del OF y por ende sea un objeto móvil. Según en cuál de ellas se encuentre el jugador se asignarán determinados parámetros relacionados a la probabilidad de que el jugador efectúe un clic. Por ejemplo, p_7 y σ están relacionados a la primer situación, p_8 a la segunda y los relativos a la tercera son p_3, p_4, p_5 y p_6 (ver la Tabla A 3.3).

Tabla A 3.2: Parámetros Modo 0

Parámetro	Tipo	Descripción
p	$\in [0, 1]$	<i>Probabilidad inercial.</i> Es la probabilidad de que el jugador se siga moviendo en la misma dirección y velocidad que tiene en el instante anterior.
P	$\in [0, 1]$	<i>Probabilidad inercial especial.</i> Es la probabilidad de exploración cuando el jugador intenta recorrer todo el espacio en busca del otro participante. Es usada en lugar de p en casos especiales.
ρ	$\in (0, 1)$	<i>Parámetro característico del movimiento no-inercial.</i> Junto a m , determina $f_{m,\rho}(k)$ i.e. la probabilidad de moverse en sentido opuesto al realizado en el instante anterior, siendo k el número de observaciones negativas luego de la última observación positiva.
y_1, q_1	$\in \mathbb{Z}_{>0} \times [0, 1]$	<i>Parámetros específicos del Escenario I (E I).</i> En el caso de que el jugador luego de realizar un movimiento tiene una observación positiva en el instante actual y observaciones negativas en los m/y_1 pasos anteriores, se determina que la probabilidad de efectuar clic es $q_1/(c_t + 1)$ -ver parámetro y_3 .
y_2, q_2	$\in \mathbb{Z}_{>0} \times [0, 1]$	<i>Parámetros específicos del Escenario II (E II).</i> En la situación en la que el jugador no se movió y tuvo un observación positiva en el instante actual con una observación negativa en el instante anterior se establece que la probabilidad de efectuar clic es q_2 . En el caso de recibir observaciones positivas ininterrumpidas en los últimos m/y_2 pasos anteriores y estar en movimiento, se determina que la probabilidad de hacer clic es $q_2/(c_t + 1)$.
q_3	$\in [0, 1]$	<i>Parámetro específico del Escenario III (E III).</i> En el caso de que el jugador no se encuentre en ninguna de las situaciones anteriores (E I o E II), se determina que la probabilidad de efectuar clic es q_3 .
y_3	$\in \mathbb{Z}_{>0}$	Parámetro auxiliar utilizado en el cálculo del valor de c_t interviniente en E I, siendo c_t es la cantidad de clics realizados en los últimos m/y_3 pasos temporales.

Tabla A 3.3: Parámetros Modo 1

Parámetro	Tipo	Descripción
p_1, z	$\in [0, 1] \times \mathbb{Z}$	<i>Parámetros de ingreso a Modo 1.</i> En el caso de que el jugador no haya ingresado en Modo 1 en los últimos m/z pasos temporales y además, luego de realizar un movimiento, tiene una observación positiva en el instante actual y observaciones negativas en los m/z pasos anteriores, se determina que la probabilidad de ingresar a Modo 1 es p_1 .
p_2	$\in [0, 1]$	<i>Parámetro de reconocimiento del OF.</i> El parámetro p_2 relaciona la cantidad de veces que el jugador percibe un estímulo en una posición fija con la probabilidad de identificar el OF y por ende abandonar el Modo 1. Así, en la situación que el jugador se encuentre en Modo 1 y contacte 2 o más veces un cuerpo de igual tamaño en un posición fija, se establece que la probabilidad de que salga y vuelva a Modo 0 es: $q \doteq p_2 c^2$ donde c es el número de veces que cambió de dirección en su movimiento desde que ingresó por última vez en Modo 1. En este caso la probabilidad de que realice clic es p_8 .
p_3, ζ_1, ζ_2	$\in [0, 1] \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	<i>Parámetros para la asignación del tamaño del OF (d).</i> Luego de ingresar en Modo 1, en primer lugar el jugador intentará comprobar si el objeto que percibió tiene el tamaño adecuado, propio del OF -tener en cuenta que moviéndose a velocidad constante de un píxel por paso se perciben exactamente 7 estímulos consecutivos cuando se está en presencia de dicho objeto. En este sentido, si al ingresar en Modo 1 el jugador tiene observaciones positivas consecutivas durante d pasos temporales con $7 - \zeta_2 \leq d \leq 7 + \zeta_1$, identificará y almacenará el valor de d como el tamaño del objeto contactado (candidato a ser el OF buscado). En caso de que d no cumpla tales condiciones se considera que no está en presencia del OF, entonces el jugador abandonará el Modo 1 y hará clic con probabilidad p_3 .
p_4, e	$\in [0, 1] \times \mathbb{Z}$	En los casos en que d ya tenga un valor asignado ($d \neq 0$), inmediatamente después de contactar y atravesar un objeto que cumple con las características del OF, el jugador continúa su movimiento en la misma dirección durante e pasos temporales antes de volver en sentido opuesto. Si en el transcurso de tales movimientos tiene una percepción, abandonará el Modo 1 y hará clic con probabilidad p_4 .

Parámetro	Tipo	Descripción
p_5, ζ_3	$\in [0, 1] \times \mathbb{Z}$	Luego de haber atravesado el objeto que es candidato a ser el OF y haber continuado moviéndose en igual dirección durante e pasos temporales sin percibir nada, el jugador cambia el sentido del movimiento para volver sobre sus pasos e intentar contactar nuevamente dicho objeto. Entonces, si al redirigirse hacia tal objeto tuviera una percepción en menos de $e - \zeta_3$ pasos temporales o no tuviera ninguna observación positiva al cabo de $e + \zeta_3$ tiempos, abandonará el Modo 1 y hará clic con probabilidad p_5 .
p_6, ζ_4, ζ_5	$\in [0, 1] \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	<i>Parámetros de chequeo del tamaño del OF.</i> Considerando que ya se ha fijado el valor de d producto de haber atravesado al menos una vez el objeto que se está tratando de identificar, el jugador que lo vuelva a contactar -en principio supondrá que es el mismo objeto-, procederá a verificar su tamaño. En efecto, a partir de la segunda instancia en que el jugador atraviese con su avatar el objeto candidato a ser el OF, va a chequear que el tamaño del mismo se corresponde con el valor asignado a d , esto es, que sea un valor mayor a $d - \zeta_5$ y menor a $d + \zeta_4$. En caso contrario abandonará el Modo 1 y hará clic con probabilidad p_6 .
p_7, σ	$\in [0, 1] \times \mathbb{Z}_{\geq 1}$	Como lo descrito en el caso anterior, una vez que el jugador ya ha asignado un valor para d y contacta nuevamente el objeto que está tratando de identificar como el OF, procede a chequear su tamaño. En caso de que se cumplan las condiciones en dicha verificación y el tamaño del objeto sea el correcto, el jugador igualmente podrá hacer clic con probabilidad $p_7/(\sigma c)$ donde c es la cantidad de veces que cambió el sentido del movimiento desde que ingresó por última vez en Modo 1.
p_8	$\in [0, 1]$	<i>Probabilidad de hacer clic sin ningún motivo específico.</i> Para cada instante t tal que el jugador esté en Modo 1 y no se encuentre en ninguna de las situaciones contempladas anteriormente, se establece que la probabilidad de efectuar clic es p_8 .

Para finalizar con lo referido a los detalles del Modelo de Percepción Cruzada, precisemos algunas cuestiones respecto a ciertos parámetros de la tabla A 3.3. En primer lugar se observa que en la descripción de p_2 aparece la variable c definida como el *número de veces que el jugador cambió de dirección en su movimiento*. Es importante destacar que tal variable es naturalmente identificable con el *número de veces que el jugador contactó/atravesó el OF* y por esa razón c aparece como divisor en la fórmula para el cálculo de q (en el mismo sentido c también está dividiendo a la probabilidad de hacer clic en la descripción de p_7 y σ).

Por otro lado, es importante notar que dicha fórmula para el cálculo de q puede dar como resultado un valor mayor a uno. En ese caso se tomará, obviamente, $q = 1$. Además, nos gustaría aclarar que a fines prácticos y con la intención de no complejizar demasiado la parametrización, hemos fijado el valor del exponente de c en 2, lo cual no es un valor estrictamente inamovible que no pueda ser modificado en las eventuales simulaciones de nuestro modelo.

El código escrito en lenguaje Python del programa donde se implementan tanto los algoritmos mostrados en la sección anterior como las simulaciones donde intervienen el total de los parámetros mencionados se puede encontrar en el siguiente repositorio: https://github.com/brunobuffa/MPC_V0/tree/main.

Bibliografía

- [An, 2004] An, G. (2004). In silico experiments of existing and hypothetical cytokine-directed clinical trials using agent-based modeling. *Critical care medicine*, 32(10):2050–2060.
- [Auvray et al., 2009] Auvray, M., Lenay, C., and Stewart, J. (2009). Perceptual interactions in a minimalist virtual environment. *New ideas in psychology*, 27(1):32–47.
- [Bellomo, 2008a] Bellomo, N. (2008a). *Modeling complex living systems: a kinetic theory and stochastic game approach*. Springer Science & Business Media.
- [Bellomo, 2008b] Bellomo, N. (2008b). *Modeling complex living systems: a kinetic theory and stochastic game approach*. Springer Science & Business Media.
- [Bellomo et al., 2009] Bellomo, N., Bianca, C., and Delitala, M. (2009). Complexity analysis and mathematical tools towards the modelling of living systems. *Physics of Life Reviews*, 6(3):144–175.
- [Bellomo et al., 2013] Bellomo, N., Herrero, M. A., and Tosin, A. (2013). On the dynamics of social conflicts: looking for the black swan. *Kinetic Related Models*, 6(3):459–479.
- [Bellouquid and Delitala, 2006] Bellouquid, A. and Delitala, M. (2006). *Mathematical modeling of complex biological systems*. Springer.
- [Benard and Willer, 2007] Benard, S. and Willer, R. (2007). A wealth and status-based model of residential segregation. *Mathematical Sociology*, 31(2):149–174.
- [Bertotti and Delitala, 2004a] Bertotti, M. L. and Delitala, M. (2004a). From discrete kinetic and stochastic game theory to modelling complex systems in

- applied sciences. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 14(07):1061–1084.
- [Bertotti and Delitala, 2004b] Bertotti, M. L. and Delitala, M. (2004b). From discrete kinetic and stochastic game theory to modelling complex systems in applied sciences. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 14(07):1061–1084.
- [Bertotti and Delitala, 2008] Bertotti, M. L. and Delitala, M. (2008). Conservation laws and asymptotic behavior of a model of social dynamics. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 9(1):183–196.
- [Bird et al., 2006] Bird, R. B., Stewart, W. E., and Lightfoot, E. N. (2006). *Transport phenomena*, volume 1. John Wiley & Sons.
- [Buffa et al., 2020] Buffa, B. A., Knopoff, D., and Torres, G. (2020). Parameter estimation and measurement of social inequality in a kinetic model for wealth distribution. *Mathematics*, 8(5):786.
- [Burini and De Lillo, 2019] Burini, D. and De Lillo, S. (2019). On the complex interaction between collective learning and social dynamics. *Symmetry*, 11(8):967.
- [Burini et al., 2016] Burini, D., De Lillo, S., and Gibelli, L. (2016). Collective learning modeling based on the kinetic theory of active particles. *Physics of life reviews*, 16:123–139.
- [Calvetti and Somersalo, 2012] Calvetti, D. and Somersalo, E. (2012). *Computational mathematical modeling: an integrated approach across scales*, volume 17. Siam.
- [Castiglione et al., 2007] Castiglione, F., Duca, K., Jarrah, A., Laubenbacher, R., Hochberg, D., and Thorley-Lawson, D. (2007). Simulating epstein-barr virus infection with c-immSim. *Bioinformatics*, 23(11):1371–1377.
- [Census Bureau, 2020] Census Bureau, U. S. (2020). United states census. *disponible en: <https://www.census.gov/en.html> [accedido en marzo de 2020]*.
- [Chakrabarti et al., 2013] Chakrabarti, B. K., Chakraborti, A., Chakravarty, S. R., and Chatterjee, A. (2013). *Econophysics of income and wealth distributions*. Cambridge University Press.
- [Christley et al., 2017] Christley, S., Neilan, R. M., Oremland, M., Salinas, R., and Lenhart, S. (2017). Optimal control of sugarscape agent-based model

- via a pde approximation model. *Optimal Control Applications and Methods*, 38(4):473–497.
- [Chuang et al., 2019] Chuang, Y.-L., Chou, T., and D’Orsogna, M. R. (2019). A network model of immigration: Enclave formation vs. cultural integration. *Networks & Heterogeneous Media*, 14(1).
- [Chuang et al., 2018] Chuang, Y.-L., Chou, T., and D’Orsogna, M. R. (2018). Age-structured social interactions enhance radicalization. *The Journal of Mathematical Sociology*, 42(3):128–151.
- [Cohen, 1995] Cohen, J. E. (1995). Population growth and earth’s human carrying capacity. *Science*, 269(5222):341–346.
- [Dascalu et al., 1998] Dascalu, M., Franti, E., and Stefan, G. (1998). Modeling production with artificial societies: the emergence of social structure. In *Cellular Automata: Research Towards Industry*, pages 218–229. Springer.
- [De Nardi and Fella, 2017] De Nardi, M. and Fella, G. (2017). Saving and wealth inequality. *Review of Economic Dynamics*, 26:280–300.
- [Dean et al., 2000] Dean, J. S., Gumerman, G. J., Epstein, J. M., Axtell, R. L., Swedlund, A. C., Parker, M. T., and McCarroll, S. (2000). Understanding ana-sazi culture change through agent-based modeling. *Dynamics in human and primate societies: Agent-based modeling of social and spatial processes*, pages 179–205.
- [Di Paolo et al., 2008] Di Paolo, E. A., Rohde, M., and Iizuka, H. (2008). Sensitivity to social contingency or stability of interaction? modelling the dynamics of perceptual crossing. *New ideas in psychology*, 26(2):278–294.
- [Dolfin et al., 2017] Dolfin, M., Knopoff, D., Leonida, L., and Patti, D. M. A. (2017). Escaping the trap of ‘blocking’: a kinetic model linking economic development and political competition. *Kinetic Related Models*, 10:423–443.
- [Dolfin and Lachowicz, 2015] Dolfin, M. and Lachowicz, M. (2015). Modeling opinion dynamics: how the network enhances consensus. *Networks & Heterogeneous Media*, 10(4):877.
- [Enderling et al., 2010] Enderling, H., Chaplain, M. A., and Hahnfeldt, P. (2010). Quantitative modeling of tumor dynamics and radiotherapy. *Acta biotheoretica*, 58(4):341–353.
- [Epstein and Axtell, 1996] Epstein, J. M. and Axtell, R. (1996). *Growing artificial societies: social science from the bottom up*. Brookings Institution Press.

- [Eubank et al., 2004] Eubank, S., Guclu, H., Kumar, V. A., Marathe, M. V., Srinivasan, A., Toroczkai, Z., and Wang, N. (2004). Modelling disease outbreaks in realistic urban social networks. *Nature*, 429(6988):180.
- [Froese et al., 2014] Froese, T., Iizuka, H., and Ikegami, T. (2014). Embodied social interaction constitutes social cognition in pairs of humans: a minimalist virtual reality experiment. *Scientific reports*, 4(1):1–10.
- [Furioli et al., 2017] Furioli, G., Pulvirenti, A., Terraneo, E., and Toscani, G. (2017). Fokker–planck equations in the modeling of socio-economic phenomena. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 27(01):115–158.
- [Furioli et al., 2020] Furioli, G., Pulvirenti, A., Terraneo, E., and Toscani, G. (2020). Non-maxwellian kinetic equations modeling the dynamics of wealth distribution. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 30(04):685–725.
- [General Assembly, 2006] General Assembly, U. N. (18 May 2006). International migration and development, report of the secretary-general. *disponible en: <https://www.refworld.org/docid/44ca2d934.html> [accedido en marzo de 2020]*.
- [Grimm et al., 2006] Grimm, V., Berger, U., Bastiansen, F., Eliassen, S., Ginot, V., Giske, J., Goss-Custard, J., Grand, T., Heinz, S. K., Huse, G., et al. (2006). A standard protocol for describing individual-based and agent-based models. *Ecological modelling*, 198(1-2):115–126.
- [Guzman, 2017] Guzman, G. G. (2017). *Household income: 2016*. US Department of Commerce, Economics and Statistics Administration, US
- [Hatna and Benenson, 2012] Hatna, E. and Benenson, I. (2012). The schelling model of ethnic residential dynamics: Beyond the integrated-segregated dichotomy of patterns. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, 15(1):6.
- [Hazan and Randon-Furling, 2013] Hazan, A. and Randon-Furling, J. (2013). A schelling model with switching agents: decreasing segregation via random allocation and social mobility. *The European Physical Journal B*, 86(10):1–9.
- [Hinkelmann et al., 2011] Hinkelmann, F., Murrugarra, D., Jarrar, A. S., and Laubenbacher, R. (2011). A mathematical framework for agent based models of complex biological networks. *Bulletin of mathematical biology*, 73(7):1583–1602.
- [Hinkelmann, 2011] Hinkelmann, F. B. (2011). *Algebraic theory for discrete models in systems biology*. PhD thesis, Virginia Tech.

- [Hurst et al., 2016] Hurst, C., Gibbon, H. F., and Nurse, A. (2016). *Social inequality: Forms, causes, and consequences*. Routledge.
- [Izquierdo et al., 2008] Izquierdo, L. R., Galán, J. M., Santos, J. I., and Del Olmo, R. (2008). Modelado de sistemas complejos mediante simulación basada en agentes y mediante dinámica de sistemas. *EMPIRIA. Revista de Metodología de las Ciencias Sociales*, (16):85–112.
- [Jalalimanesh et al., 2017] Jalalimanesh, A., Haghghi, H. S., Ahmadi, A., and Soltani, M. (2017). Simulation-based optimization of radiotherapy: Agent-based modeling and reinforcement learning. *Mathematics and Computers in Simulation*, 133:235–248.
- [Jarvis et al., 2011] Jarvis, M., Lange, G. M., and Hamilton, K. (2011). The changing wealth of nations: measuring sustainable development in the new millennium. *The World Bank: Washington, DC, USA*.
- [Keeley, 2015] Keeley, B. (2015). *Income Inequality*.
- [Kimbrough, 2003] Kimbrough, S. O. (2003). Computational modeling and explanation. In *Computational Modeling and Problem Solving in the Networked World*, pages 31–57. Springer.
- [Knopoff, 2012] Knopoff, D. (2012). *Modelos matemáticos aplicados a problemas biomédicos y sistemas complejos*. [Tesis de doctorado, Universidad Nacional de Córdoba]. <https://www.famaf.unc.edu.ar/documents/1144/DMat71.pdf>.
- [Knopoff, 2013] Knopoff, D. (2013). On the modeling of migration phenomena on small networks. *Mathematical Models & Methods Applied Sciences*, 23:541–563.
- [Knopoff, 2014] Knopoff, D. (2014). On a mathematical theory of complex systems on networks with application to opinion formation. *Mathematical Models & Methods in Applied Sciences*, 24(02):405–426.
- [Knopoff and Torres, 2018] Knopoff, D. and Torres, G. (2018). On an optimal control strategy in a kinetic social dynamics model. *Communications in Applied and Industrial Mathematics*, 9(2):22–33.
- [Lenay et al., 2003] Lenay, C., Hanneton, S., Gapenne, O., Marque, C., and Vanhoutte, C. (2003). Procédé permettant à au moins un utilisateur, notamment un utilisateur aveugle, de percevoir une forme et dispositif pour la mise en oeuvre du procédé [procedure allowing at least one user, notably a blind user, to perceive a form, and device allowing the procedure]. Technical report, Patent US-2004-0241623-A1.

- [Lim and Min, 2020] Lim, G. and Min, S. (2020). Analysis of solidarity effect for entropy, pareto, and gini indices on two-class society using kinetic wealth exchange model. *Entropy*, 22(4):386.
- [Luersen and Le Riche, 2004] Luersen, M. A. and Le Riche, R. (2004). Globalized nelder–mead method for engineering optimization. *Computers & structures*, 82(23-26):2251–2260.
- [Mansury et al., 2002] Mansury, Y., Kimura, M., Lobo, J., and Deisboeck, T. S. (2002). Emerging patterns in tumor systems: simulating the dynamics of multicellular clusters with an agent-based spatial agglomeration model. *Journal of Theoretical Biology*, 219(3):343–370.
- [Murray and Trevarthen, 1985] Murray, L. and Trevarthen, C. (1985). Emotional regulations of interactions between two-month-olds and their mothers. In Field, T. M. and Fox, N. A., editors, *Social perception in infants*, pages 177–197. Ablex Pub.
- [Nelder and Mead, 1965] Nelder, J. A. and Mead, R. (1965). A simplex method for function minimization. *The computer journal*, 7(4):308–313.
- [Oremland and Laubenbacher, 2014] Oremland, M. and Laubenbacher, R. (2014). Using difference equations to find optimal tax structures on the sugarscape. *Journal of Economic Interaction and Coordination*, 9(2):233–253.
- [Oremland and Laubenbacher, 2015] Oremland, M. and Laubenbacher, R. (2015). Optimal harvesting for a predator-prey agent-based model using difference equations. *Bulletin of mathematical biology*, 77(3):434–459.
- [Pe’Er et al., 2005] Pe’Er, G., Saltz, D., and Frank, K. (2005). Virtual corridors for conservation management. *Conservation Biology*, 19(6):1997–2003.
- [Pogson et al., 2006] Pogson, M., Smallwood, R., Qwarnstrom, E., and Holcombe, M. (2006). Formal agent-based modelling of intracellular chemical interactions. *Biosystems*, 85(1):37–45.
- [Quadrini and Rios-Rull, 1997] Quadrini, V. and Rios-Rull, J.-V. (1997). Models of the distribution of wealth. *Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review*, 21:1–21.
- [Rahman et al., 2007] Rahman, A., Setayeshi, S., and SHAMSAEI, Z. M. (2007). An analysis to wealth distribution based on sugarscape model in an artificial society. *Internarional Journal of Engineering*, 20(3):211–224.

- [Railsback and Grimm, 2019] Railsback, S. F. and Grimm, V. (2019). *Agent-based and individual-based modeling: a practical introduction*. Princeton university press.
- [Schelling, 1971] Schelling, T. C. (1971). Dynamic models of segregation. *Journal of mathematical sociology*, 1(2):143–186.
- [Wang et al., 2009] Wang, Z., Birch, C. M., Sagotsky, J., and Deisboeck, T. S. (2009). Cross-scale, cross-pathway evaluation using an agent-based non-small cell lung cancer model. *Bioinformatics*, 25(18):2389–2396.
- [Weisberg, 2012] Weisberg, M. (2012). *Simulation and similarity: Using models to understand the world*. Oxford University Press.
- [Wolff, 2016] Wolff, E. (2016). Household wealth trends in the united states, 1962 to 2013: What happened over the great recession? *RSF: The Russell Sage Foundation Journal of the Social Sciences*, 2(6):24–43.
- [Yakovenko and Rosser Jr, 2009] Yakovenko, V. M. and Rosser Jr, J. B. (2009). Colloquium: Statistical mechanics of money, wealth, and income. *Reviews of modern physics*, 81(4):1703.