

Modelado de tasas de interés. El modelo Libor market con varianza gaussiana cuadrática

por Karem Meier

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación como parte de los requerimientos para la obtención del grado de Doctor en Matemática de la

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

©FAMAF-UNC 2019

Directora: Dra. Noemí Patricia Kisbye



Modelado de tasas de interés. El modelo Libor market con varianza gaussiana cuadrática por Meier Karem se distribuye bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional

Resumen

Esta tesis se divide en dos partes, comenzamos con el estudio de modelos continuos de tasas forward y la consistencia con los modelos de tasa short. Las curvas de Nelson y Siegel son muy usadas para ajustar la estructura a término observada en un día en particular. Por otro lado, hay numerosos modelos para describir la dinámica de las tasas short que permiten ajustar la curva forward inicial observada como los modelos de Ho-Lee y Hull-White. En este trabajo presentamos dos variedades de curvas de Nelson y Siegel extendidas que son consistentes con los modelos de Ho-Lee y Hull-White. De esta manera, probamos que las curvas forward generadas por los modelos de tasa short pertenecen en realidad a una familia parametrizada de curvas que pueden verse como una extensión de la familia de curvas de Nelson y Siegel. Concluimos que la evolución de la curva forward tiene un crecimiento lineal o exponencial dependiendo del modelo de tasa short que estemos considerando. Tras esta extensión del trabajo de Bjork y Christensen, nos centramos en el estudio de los llamados modelos Libor Market.

En la segunda parte nos centramos en el estudio de modelos más realistas que asumen la existencia de una cantidad finita de bonos cupón cero. Proponemos un modelo Libor market diferente donde asumimos que la varianza de la tasa forward sigue un modelo Gaussiano cuadrático. Damos la definición de este nuevo modelo y estudiamos la existencia de una única solución en un mundo libre de arbitraje. Describimos las propiedades estadísticas de la varianza y deducimos una fórmula para el precio de la caplet. La fórmula obtenida para valorar las caplets de forma analítica no es una fórmula cerrada por lo que valoramos las caplets de forma numérica. Para ello utilizamos dos métodos, el método Alternating Direction Implicit (ADI) y el método de Monte Carlo al cual le aplicamos la variación de muestras antitéticas con el fin de reducir la varianza del estimador. Mostramos los resultados obtenidos para la valoración de las caplets con ambos métodos. Posteriormente mostramos la fórmula para valorar swaptions según nuestro modelo. Por último, nos centramos en el estudio de las sonrisas de volatilidad que se pueden obtener. Observamos que este modelo permite una gran flexibilidad de curvas de volatilidad de acuerdo a los parámetros considerados.

Palabras claves: Modelos de Tasas de Interés, Consistencia, Modelo Libor Market, Modelo Gaussiano Cuadrático.

2010 Mathematics subject Classification: 37A50, 37H10, 91G30, 91G60.

Abstract

The thesis consists of two parts. The first part of this thesis addresses questions related to the study of continuous forward rate models and consistency with the short rate models. The Nelson and Siegel curves are widely used to adjust the term structure observed on a particular day. On the other hand, there are many models used to describe the dynamics of short interest rates that can adjust the observed initial forward curve, as the Ho-Lee and Hull-White models. In this paper we will introduce two varieties of extended Nelson and Siegel family curves that are consistent with the Ho-Lee and Hull-White models. By doing it so, we will prove that the forward curves generated by the specific short rate models belonging to a parameterized family of curves can be seen as an extension of the Nelson and Siegel family of curves. We conclude that the evolution of the forward curve has either a linear or an exponential growth depending on the short rate model that we are considering. After this extension of Bjork and Christensens work, we will focus on the study of the Libor Market models.

In the second part of this thesis we will focus on the study of more realistic models that assume the existence of a finite amount of zero-coupon bonds. We propose a different Libor market model where we assume that the variance of the forward rate follows a quadratic Gaussian model. We give the definition of this new model and prove the existence of a unique solution in a free arbitrage world. We describe the statistical properties of the variance and deduce a formula for the price of the caplet. The formula obtained to assess the caplets analytically is not a closed formula, so we value the caplets numerically. We choose to use two methods, the Alternating Direction Implicit method (ADI) and the Monte Carlo method to which we apply the variation of antithetical samples in order to reduce the estimator variance. We present the results obtained for the valuation of the caplets with both methods. Later we set the formula to evaluate swaptions according to our model. Finally, we focus on the study of the volatility smiles that can be obtained. We note that this model allows great flexibility of volatility curves according to the parameters considered.

Key words: Interest rates models, Consistency, Libor Market model, Quadratic Gaussian model.

2010 Mathematics subject Classification: 37A50, 37H10, 91G30, 91G60.

Agradecimientos

Quiero agradecer a los jurados: Georgina Flesia, Manuel Maurette y Andrés Barrea por su tiempo, las devoluciones, sugerencias y aportes que realizaron.

A mis papás y mis hermanos por haberme apoyado desde el primer día que dije que iba a estudiar matemática.

A mis suegros, cuñados, tíos y tías postizas por todas sus palabras de aliento.

A Federico, mi esposo, por robarme una sonrisa todos los días, incluso cuando eso no ha sido tarea fácil.

A Elena, Elisa, Karina, Romina y Damián por hacer de los almuerzos un momento muy divertido del día y un cargador de baterías.

A mis amigas por estar siempre y acompañarme los días que parecía que este momento no iba a llegar nunca.

A Oscar Bustos, quien me dictó los cursos de posgrado y me permitió tener el privilegio de aprender un poquito de su inmensa sabiduría.

A Elisa Ravassi, quien junto a Patricia fueron las que iniciaron el estudio de las matemáticas aplicadas a finanzas en esta Facultad.

Por último, pero no por eso menos importante, quiero agradecerle profundamente a quien me enseñó mucho más que matemática y me acompañó en este camino mucho antes de empezar el doctorado. Quien además de haber sido mi directora es una excelente profesional y una hermosa persona. Es para mí un ejemplo a seguir. Muchas gracias Patricia Kisbye.

Índice general

Resumen	3
Abstract	5
Agradecimientos	7
Introducción	13
1. Conceptos Básicos Financieros	19
1.1. Hipótesis de no arbitraje	19
1.2. Introducción a las tasas de interés	19
1.2.1. Tasas spot	20
1.2.2. Tasas forward	22
1.3. Derivados de tasas de interés	24
1.3.1. FRA	25
1.3.2. Swap	27
1.3.3. Caplet y Floorlet	27
1.3.4. Swaption	28
1.4. Mercados Completos	29
2. Marco teórico	31
2.1. Conceptos generales de probabilidad	31
2.2. Cambio de medidas	32
2.3. Procesos estocásticos	33
2.4. Valor esperado condicional	34
2.5. Martingalas	34
2.6. Movimiento Browniano	36

2.7.	Cálculo estocástico de Itô	37
2.7.1.	Integral de Itô	37
2.7.2.	Proceso estocástico de Itô	39
2.8.	Teorema de Girsanov	41
2.9.	Variación cuadrática	41
2.10.	Integral de Stratonovich	45
2.11.	Calculo estocástico multidimensional	46
3.	Introducción a la Valoración de Derivados	49
3.1.	Dinámica de un portfolio	49
3.2.	Hipótesis de no arbitraje	50
3.3.	Numerarios	51
3.4.	Valoración de derivados y mercados completos	52
3.5.	Medidas	53
3.6.	Valoración de Caplets	55
3.6.1.	Fórmula de Black-Scholes	56
3.7.	Valoración de Swaptions	56
4.	Modelos Continuos de Tasas de Interés	59
4.1.	Modelos continuos de tasa short	59
4.1.1.	Modelo Vasicek	62
4.1.2.	Modelo de Hull y White	63
4.1.3.	Modelo de Ho-Lee	63
4.2.	Modelos continuos de tasa forward	64
4.2.1.	Modelo de Heath Jarrow y Merton	64
4.2.2.	Nelson y Siegel	66
4.3.	Relación entre las dinámicas de tasa short, tasa forward y los bonos cupón cero	66
5.	Consistencia de la familia extendida de curvas de Nelson y Siegel con los modelos de tasa short Ho-Lee y Hull-White	69
5.1.	Consistencia	69
5.2.	Modelo de Ho Lee para la tasa short	71
5.3.	Consistencia entre el modelo de Ho-Lee y la variedad de curvas forward	73
5.4.	Modelo de Hull y White para la tasa short	74

5.5. Consistencia entre el modelo de Hull-White y la variedad de curvas forward	77
5.6. Conclusiones	78
6. Modelo Libor market	79
6.1. Dinámica del modelo	79
6.2. Función de volatilidad	82
7. Modelo Gaussiano cuadrático	85
7.1. Dinámica del modelo	85
7.2. Propiedades estadísticas del proceso Gaussiano cuadrático	86
8. Modelo Libor market con varianza Gaussiana cuadrática	93
8.1. Definición del modelo	93
8.2. Valoración analítica de caplets	95
8.3. Valoración numérica de caplets	105
8.3.1. Método ADI (Alternating Direction Implicit)	105
8.3.2. Método Monte Carlo	109
8.3.3. ADI vs Monte Carlo	113
8.4. Valoración de Swaptions	116
8.5. Sonrisa de Volatilidad	117
8.6. Conclusiones	119
A. Transformada de Fourier	121
A.1. Definición y aplicaciones	121
B. Códigos implementados	125
B.1. Código ADI	125
B.2. Código Monte Carlo	128
B.2.1. Sonrisa de volatilidad	130
Bibliografía	133

Introducción

El concepto de Tasa de Interés, su uso y comprensión es tan antiguo como el dinero mismo. Representa, a grandes rasgos, el pago por el arrendamiento del dinero. Es importante no confundir usura con interés, puesto que en la antigüedad ambos términos solían mezclarse. El interés es un componente clave y necesario en una economía sana y su consiguiente mercado de crédito, mientras la usura es una desviación perversa y que sólo puede provocar daño. Curiosamente, nos dicen Ekelund y Hébert en su clásico "Historia de la Teoría Económica y de su Método"[16], que la palabra interés proviene del latín *interesse*, cuyo significado es "pérdida" empleado aquí en el sentido de reparación ante la imposibilidad del prestamista de poder disponer de su dinero; en tanto la palabra latina *usura* significa pago por el uso del dinero en una transacción que produce una ganancia, es decir, un beneficio neto para el prestamista.

En la actualidad las tasas de interés se nos presentan en un contexto regulado bajo un marco legal. Cuando depositamos una cantidad de dinero en una cuenta bancaria esperamos que esa cantidad se incremente a medida que el tiempo pasa. El hecho de que el dinero tiene un valor en el tiempo y no es equivalente recibir una cantidad de dinero hoy a recibirla mañana está profundamente arraigado en el conocimiento colectivo.

A lo largo de la historia, como veremos, también se han comercializado diversos derivados financieros. Un derivado es un contrato cuyo valor depende del precio de otro activo llamado subyacente. Veremos ahora algunos antecedentes históricos de tasas de interés, derivados, futuros y opciones.

Es conocida cierta parte del antiguo testamento, citada en numerosos artículos periodísticos y de divulgación, que refiere ya a la usura y el interés: (Deuteronomio 23:19, 23:20) "19. *No debes hacer que tu hermano pague interés, interés por dinero. . .* 20. *Podrás hacer que un extranjero pague interés, pero a tu hermano no le debes hacer pagar interés. . .*" y continúa el texto explicando que es a los fines de obtener la bendición de Dios. La prohibición de la usura a los coterráneos de la misma religión apela simplemente a un castigo divino para combatirla, sin mayor explicación. No es de extrañar que a lo largo del tiempo intelectuales y filósofos hayan intentado explicar racionalmente la naturaleza del dinero, del interés y de comprender el entramado en que se insertan y funciona la economía de un lugar, así como su conveniencia y necesidad. Estos filósofos y pensadores se abocaron a estudiar estas cuestiones, pero no como una ciencia o tópico aparte, sino más bien entremezclado con cuestiones de orden político, social y religioso. En la antigua Grecia, Jenofonte (427- 355 a.C.), discípulo de Sócrates, reconoce que quienes persiguen el beneficio eran buenos administradores y justifica en cierta forma el préstamo y el interés sobre el mismo, entendiendo que el dinero sobrante, en manos de quien lo necesita y puede obtener un provecho de él, es un bien, desarrollando la concepción de la utilidad subjetiva [24].

Es Platón (427-327 a.C.) quien ve en el beneficio y en el interés, es decir, el beneficio sobre el

dinero, amenazas a la sociedad, que deben ser reglados [16]. Aristóteles también se ocupó del asunto considerando al interés como un rendimiento no natural, entendiendo que el uso natural del dinero era gastarlo y no su acumulación. Sin acumulación no hay ahorro, ni el subsiguiente préstamo, y se desprende también una natural condena al interés [2].

En la Edad Media, la Iglesia Católica estableció en qué condiciones se permitía el interés y ya en el siglo IV, durante el Concilio de Nicea, prohibía a los sacerdotes y monjes dar préstamos con interés. Luego, se extendería la prohibición a toda la población cristiana en general. Sin embargo, los prestamistas profesionales existieron siempre en la Europa Medieval y, donde operaban abiertamente, lo hacían con permiso y licencia del estado al cual pagaban por este derecho [19].

Hay que esperar a la recuperación occidental de Aristóteles gracias al Islam, una vez finalizada la Edad Oscura, para volver a encontrar un tratamiento profundo del dinero y el interés. Alberto Magno (1206- 1280 d.C.) nos habla de la regulación del precio en función del costo, del sacrificio necesario para obtener el bien, el dinero, y Tomás de Aquino (1225- 1274 d.C) del precio justo, a la vez que censuraba la usura en tanto consideraba que el precio de toda cosa debía regirse por un “precio justo”, donde el precio debía igualar al valor del bien. Aquino considera al cobro de intereses como un cobro doble, por la cosa y el uso de la cosa [29].

Ya llegados al siglo XIII, los depósitos bancarios eran una generalizada forma de inversión, donde los banqueros pagaban por intereses por los depósitos. Nos dice Raymond De Roover [13] que los prestamistas de menor tamaño eran perseguidos por estas leyes contra la usura, pero los grandes banqueros no sólo desarrollaban su actividad con tranquilidad, sino que se denominaban a sí mismos los banqueros y prestamistas del Papa.

Sucedida la reforma protestante, iniciada en el siglo XVI por Martín Lutero, se instaló una visión por la cual el éxito en los negocios, por medio del comercio y los préstamos con interés, era un signo de elección divina. Con la reforma protestante los préstamos de dinero pasaron a ser una actividad digna y al amparo de la ley y dedicarse a comerciar mercancías o prestar dinero a interés tenía la aprobación de Dios y la sociedad. Es en la reforma que se discrimina en forma generalizada el interés de la denominada usura, dejando bien diferenciados ambos conceptos [29].

A comienzos del siglo XVII comienza una verdadera revolución en las finanzas a nivel mundial, con la fundación en 1602 de la Compañía Unida de las Indias Orientales, la primera empresa por acciones con autorización gubernamental. Tan solo 7 años después se fundaba el Amsterdam Wisselbank, primer banco central europeo. Nos dice el historiador de las finanzas Edward Chancellor [11] que si bien emitía billetes sólo contra sus reservas de oro y no daba préstamos, su sola existencia permitía a los comerciantes de todo el globo presentar sus cuentas en una moneda universalmente aceptada. Así, a principios del siglo XVII se invertía capital de toda Europa en activos financieros holandeses, propiedades, anualidades, bonos municipales, letras de cambio y préstamos de mediano plazo. Los contratos de futuros, acuerdos para distribuir o aceptar la distribución de un producto a un precio fijo en una fecha futura, ya eran comunes, si bien rudimentarios. También se cambiaban en la bolsa lo que hoy llamaríamos opciones sobre acciones, que daban al comprador el derecho pero no la obligación de comprar acciones a precio fijo al vencimiento del contrato. Así es como en Holanda, entre 1630 y 1637, el mercado de tulipanes se transformó en una rueda de contratos de futuros y opciones con vencimientos anuales.

Curiosamente, no es en Europa sino en Japón donde se observa el surgimiento del primer mercado formalmente organizado de futuros: el Mercado Dojima de Arroz, en Osaka, en el año 1697, entendiéndose como un mercado formal donde hay una negociación con una contraparte central,

liquidación periódica de pérdidas y ganancias y contratos modelos. Por supuesto, y como se desprende de su nombre, el original y principal subyacente, pero no el único a medida que fue pasando el tiempo, era el arroz. La liquidación final de los contratos, y esto constituía verdaderamente una novedad respecto a Occidente, era mediante compensación neta de resultados. Asimismo, cada casa que comerciaba futuros debía tener seguros contractuales en caso de cesación de pagos de una de las partes [28] y [12]. El siguiente hito en el que coinciden historiadores y estudiosos de la materia es la creación en la ciudad de Chicago en los Estados Unidos de América, de la Chicago Board of Trade (CBOT) en el año 1848, siendo el primer mercado de futuros organizado en Estados Unidos. Se comerciaba principalmente granos, pues se había transformado la ciudad de Chicago, por su ubicación, en el mayor centro de acopio y comercio de granos en Estados Unidos [35]. El salto de modernidad de la CBOT vendría en el año 1858, con la creación de un departamento para clasificar y certificar los granos, elaborando un sistema donde una de las clasificaciones de los granos era la "standard". Luego, en 1865, se agregarían tres novedades más: la creación de un área específica para la realización de contratos de futuros sobre commodities agrícolas, la estandarización de los contratos en términos de cantidad, calidad, en función del grano "standard", tiempo y lugar de entrega y finalmente la introducción de un sistema de márgenes.

Notemos que hasta el momento los futuros que se comerciaban tomaban como subyacentes el valor de un commodity agrícola, luego también de la acción de una empresa y productos mineros.

El cambio crucial vino dado por la creación, por parte de la CBOT, de la Chicago Board Option Exchange (CBOE) en 1973. En 1975 se introduce por primera vez contratos a futuros sobre tasas de interés. Es en la CBOE donde se comienzan a comercializar las opciones modernas sobre tasas de interés, índices de mercados, tipos de cambio, etc. Por primera vez se usaban computadores del tamaño de un salón para realizar cálculos sobre la conveniencia o no de la compra de una opción. Los derivados modernos se diferenciaban de sus predecesores en que estaban específicamente diseñados para objetivizar y ponerle un precio al riesgo financiero. Las opciones eran un producto totalmente novedoso pero fue recibido con escepticismo, ganando terreno poco a poco. Hoy, alrededor del 95 % de las 500 empresas más grandes del mundo usan derivados financieros.

Pero ¿qué modelos matemáticos se utilizan en las finanzas modernas y cuál es su origen? Actualmente, estos modelos contienen aplicaciones de ecuaciones diferenciales y teoría de la probabilidad, y se aplican en la práctica financiera diaria. Los orígenes de la matemática aplicada a finanzas se remontan al matemático francés Louis Bachelier, quien en 1900 presentó su trabajo "The Theory of Speculation" [3]. Analizando los precios de opciones, Bachelier encuentra dos derivaciones de la ecuación diferencial en derivadas parciales para la densidad probabilística de lo que hoy llamamos proceso de Wiener o movimiento browniano. En este trabajo del 1900, Bachelier modela por primera vez el proceso estocástico que ahora llamamos movimiento browniano y lo usa para valorar opciones sobre acciones, siendo la primera vez de la que se tenga registro que se utilizaba matemáticas avanzadas para el estudio de las finanzas. En una serie de trabajos realizados entre 1918 y 1923, el matemático Norbert Wiener construyó un modelo matemático del movimiento browniano. Wiener también desarrolló una integral múltiple, pero no es lo que hoy conocemos como Integral Múltiple de Wiener: fue el matemático japonés Kiyosi Itô quien en 1951 refinó y mejoró las ideas de Wiener [22]. Si bien su primer trabajo sobre integración estocástica se había publicado en 1944, fue en 1951 cuando estableció y probó lo que hoy se conoce como la fórmula de Itô.

En 1965, Paul Samuelson publica un trabajo donde, con la ayuda del matemático Henry McKean, quien escribió el apéndice matemático, llega a la conclusión de que un buen modelo para describir las variaciones de precios de las acciones es el modelo de movimiento browniano geométrico [36]. Paul

Samuelson y Henry McKean notaron que el modelo de Bachelier falla en asegurar que el precio de las acciones es siempre positivo, mientras que el movimiento browniano geométrico evita cometer este error [14]. Ese mismo año McKean publicaría junto a, precisamente, Ito, el libro "Diffusion Processes and Their Sample Paths"[23]. Finalmente, arribamos al año 1973, de vital importancia para los modelos de opciones y sus mercados.

En abril de 1973 comenzó a operar la ya mencionada Chicago Board Options Exchange (CBOE) y un mes después se publicaría un crucial trabajo desarrollado por Fischer Black y Myron Scholes, donde se formula, por primera vez, el modelo Black-Scholes. El trabajo en cuestión, [7], revolucionaría por completo las finanzas. La conocida ecuación de Black-Scholes es una fórmula que permite bajo ciertas hipótesis obtener el precio justo de una opción sobre una acción que no reparte dividendos. Esta fórmula fue la base para múltiples desarrollos matemáticos para la valoración de derivados más complejos.

En parte de este trabajo nos centraremos en opciones sobre tasas de interés. En este caso, a diferencia de las acciones, el subyacente no se puede comprar y vender. Estos contratos de opciones donde el subyacente es una tasa de interés reciben el nombre de caplet o floorlet según estemos considerando una opción en donde pagamos o recibimos una tasa de interés determinada sobre un monto establecido. Para ello veremos ciertos modelos de tasas de interés. Uno de ellos, el más antiguo, es el llamado modelo de Vasicek (1977). Su origen es particularmente curioso y nuevamente los nombres de Black y Scholes aparecen en escena. En 1970 el banco Wells Fargo, que tenía un departamento de investigación y desarrollo donde trabajaba el matemático Oldrich Vasicek, decide dar comienzo a un ciclo de conferencias cerradas de tópicos que fuesen novedosos en las finanzas. En su primera edición de 1970 invitaron a Fischer Black y Myron Scholes, quienes ya estaban trabajando en el problema de valorar opciones. El efecto sobre Vasicek fue inmediato, quien empezó a trabajar en una serie de iniciativas, publicando en 1977 el trabajo que lo catapultaría a la fama, [37]. Este modelo de tasa short se conoce como modelo de Vasicek. Posteriores variaciones de este modelo dan origen a los modelos de Ho-Lee [18] y Hull-White [20].

Tuvieron que pasar diez años para que apareciera el modelo Nelson and Siegel, propuesto en un trabajo de 1987 por Charles Nelson y Andrew Siegel [32]. Este modelo, de extendido uso en todo el mundo, propone un modelo paramétrico para la curva de rendimiento. Dada la simplicidad de su estimación, el modelo se hizo popular entre analistas tanto de mercado como de bancos centrales. El modelo de Nelson y Siegel fue originalmente propuesto como una herramienta de ajuste de curva, en contraste con haber sido obtenido desde un marco teórico que no permite el arbitraje.

El modelo de Heath, Jarrow y Morton, si bien fue difundido por vez primera en 1987, no se publicó hasta el año 1992, en una edición revisada [17]. Estos autores proponen un marco de trabajo para modelar las dinámicas de las tasas forward. Este modelo busca capturar la dinámica completa de la curva de tasas de interés, mientras que en los modelos de tasa short solo capturan la dinámica de un punto sobre la curva.

Por otro lado, el modelo Libor Market fue desarrollado a finales de los 90, siendo introducido por primera vez en forma rigurosa en 1997 por Brace, Gatarek y Musiela [8]. Este modelo tiene la ventaja de modelar un producto directamente observable en el mercado, las tasas Libor (London Interbank Offer Rate). Esto fue lo que hizo que este modelo sea popular y más realistas que los modelos propuestos hasta el momento.

Como decíamos anteriormente, tras este breve paso y repaso introductorios de la historia del interés, derivados, opciones y de los modelos de tasas de interés; en este trabajo nos ocuparemos

de ciertos modelos de tasa de interés, y luego, en una segunda etapa, de los modelos Libor market específicamente.

Esta tesis está dirigida a estudiantes de matemática a un nivel de grado y supone un interés por las finanzas cuantitativas. Presentaremos las definiciones de los conceptos financieros y el marco teórico matemático necesarios para el desarrollo de la misma.

Comenzaremos con el estudio de los modelos de tasa short. Tras considerar estos modelos que describen la dinámica de las denominadas tasas short deduciremos las curvas forward correspondientes según cada modelo. Considerando una fecha en particular, también podemos ajustar las curvas forward, utilizando los modelos de Nelson y Siegel que ya hemos mencionado brevemente. Estudiaremos entonces la evolución de estas curvas forward generadas por los modelos de tasa short cuando la curva inicial es del tipo de Nelson y Siegel e intentaremos probar que las subsiguientes curvas forward obtenidas a partir de los modelos de tasa short pertenecen a la variedad generada por las curvas de Nelson y Siegel. Para ello nos basaremos en el trabajo de Bjork y Christensen en su artículo "Interest Rate Dynamics and Consistent Forward Rate Curves"[5] donde dan la definición de consistencia entre los modelos de tasa short y las variedades de tasas forward. No sólo eso, Bjork y Christensen prueban también que los modelos de tasa short de Ho-Lee y Hull-White no son consistentes con la variedad de curvas forward de Nelson y Siegel.

En esta tesis presentaremos dos variedades de curvas de Nelson y Siegel extendidas para que sean consistentes con los modelos de Ho-Lee y Hull-White. De esta manera, probaremos que las curvas forward generadas por los modelos de tasa short pertenecen en realidad a una familia parametrizada de curvas que pueden verse como una extensión de la familia de curvas de Nelson y Siegel. Concluiremos que la evolución de la curva forward tiene un crecimiento lineal o exponencial dependiendo del modelo de tasa short que estemos considerando. Tras esta extensión del trabajo de Bjork y Christensen, nos centraremos en el estudio de los llamados modelos Libor Market.

A diferencia de los modelos de tasa short descritos anteriormente, el modelo Libor Market asume la existencia de una cantidad finita de bonos cupón cero en el mercado, lo cual hace que este tipo de modelos sean más realistas. Los modelos Libor Market, en principio, describen la volatilidad con una constante o una función determinística del tiempo. Luego, con el fin de obtener una mayor variedad de curvas de volatilidad, proponen modelarla con modelos estocásticos de reversión a la media. En este trabajo consideraremos una dinámica estocástica para la varianza de las tasas forward, pero, a diferencia de los modelos propuestos en la literatura, propondremos modelar la varianza con un modelo Gaussiano cuadrático. Para ello realizamos un análisis estadístico del modelo de la varianza y luego calculamos de forma analítica la prima de la caplet. No pudimos obtener una forma cerrada para valorar las caplets, pero sí desarrollamos soluciones numéricas con el método Alternating Direction Implicit y el método de Monte Carlo con la variación de muestras antitéticas para reducir la varianza del estimador sin incrementar el tamaño de la muestra. Así y por último mostramos que la curva de volatilidad obtenida en nuestro modelo tiene una gran flexibilidad para ajustarse a una gran variedad de curvas de volatilidad.

El trabajo se encuentra organizado de la siguiente manera:

En el primer capítulo damos una introducción a los conceptos financieros que utilizaremos a lo largo del trabajo. Presentamos las tasas spot y las tasas forward, describimos los derivados de tasas de interés que se pueden encontrar en los mercados y enunciamos de forma coloquial las dos hipótesis que nos permitirán valorar los derivados.

En el capítulo dos presentamos el marco teórico matemático que necesitaremos para describir

la dinámica de las tasas de interés y valorar derivados sobre las mismas, mostramos resultados de cálculo estocástico indispensables para el desarrollo de los modelos sobre tasas de interés y enunciaremos dos resultados de la teoría de la transformada de Fourier que nos serán de gran utilidad para obtener la fórmula analítica de las caplets.

En el capítulo tres presentamos una introducción a la valoración de derivados. Comenzamos con la dinámica de un portfolio, luego enunciaremos formalmente las hipótesis de no arbitraje y de mercados completos enunciadas de manera coloquial en el primer capítulo. Mostramos las diferentes medidas que podemos considerar y cómo se simplifican de manera considerable los cálculos si elegimos la medida adecuada para la valoración de derivados como Caplets y Swaptions.

En el capítulo cuatro nos centramos en el estudio de los modelos continuos de tasas de interés. Estos modelos asumen la existencia de una familia de bonos cupón cero con vencimiento en cada instante de tiempo. Dividimos el capítulo en tres secciones, en la primera describimos los modelos para la dinámica de las tasas short. En la siguiente sección describimos los modelos que se utilizan para modelar el comportamiento de las tasas forward. Por último mostramos cómo se relacionan las dinámicas de las tasas short, las tasas forward y los bonos cupón cero.

El capítulo cinco contiene los resultados publicados en el artículo "Consistency of Extended Nelson-Siegel Curve Families with the Ho-Lee and Hull and White Short Rate Models"[27], en el cual luego de describir los conceptos de consistencias entre modelos de tasa short y variedades de curvas forward propuestos por Bjork y Christensen [5] mostramos la existencia de dos variedades de Nelson y Siegel extendidas que son consistentes con los modelos de tasa short de Ho-Lee y Hull-White.

El capítulo seis pertenece a lo que hemos descripto como la segunda parte de este trabajo en donde nos centramos en el estudio de los modelos Libor Market. En este capítulo describimos las propiedades estadísticas del modelo Gaussiano cuadrático. Calculamos la función de densidad y de probabilidad de un proceso que sigue este modelo, así como también el valor esperado y la varianza condicional a una filtración dada.

En el capítulo siete mostramos la dinámica del modelo Libor Market y sus características. Mostramos las funciones de volatilidad existentes en la literatura que se utilizan en estos modelos.

En el octavo y final capítulo proponemos un modelo diferente para describir la varianza de las tasas forward en el modelo Libor Market con un modelo Gaussiano cuadrático. Damos la definición de este nuevo modelo y estudiamos la existencia de una única solución en un mundo libre de arbitraje. Posteriormente calculamos de manera analítica la prima de la caplet. La fórmula obtenida para valorar las caplets de forma analítica no es una fórmula cerrada por lo que en la siguiente sección valoramos las caplets de forma numérica. Para ello utilizamos dos métodos, el método Alternating Direction Implicit (ADI) y el método de Monte Carlo al cual le aplicamos la variación de muestras antitéticas con el fin de reducir la varianza del estimador. Mostramos los resultados obtenidos para la valoración de las caplets con ambos métodos. Posteriormente mostramos la fórmula para valorar swaptions según nuestro modelo. Por último nos centramos en el estudio de las sonrisas de volatilidad que se pueden obtener. Observamos que este modelo permite una gran flexibilidad de curvas de volatilidad de acuerdo a los parámetros considerados.

En el apéndice se muestran los códigos realizados en Python para valorar las caplets y para obtener las sonrisas de volatilidad.

Capítulo 1

Conceptos Básicos Financieros

El primer capítulo tiene como objetivo dar una introducción a las tasas de interés y los derivados financieros que consideraremos a lo largo del trabajo. En el siguiente capítulo formalizaremos matemáticamente los conceptos que presentaremos en primera instancia de forma coloquial con el fin de dar una visión intuitiva de los conceptos financieros. Describiremos las características de los contratos de futuro y los contratos de opción y presentaremos las dos hipótesis que permitirán valorar derivados, la hipótesis de no arbitraje y la hipótesis de mercado completo.

1.1. Hipótesis de no arbitraje

Una de las hipótesis fundamentales para el desarrollo de la teoría financiera es la que asumieron Black y Scholes [32] y consiste en la ausencia de oportunidades de arbitraje en el mercado financiero. Formalizaremos matemáticamente este concepto en el Capítulo 2. En términos coloquiales esta hipótesis de ausencia de arbitraje es equivalente a que es imposible invertir \$0 hoy y recibir una cantidad positiva en un tiempo futuro con probabilidad positiva. En otras palabras, dos inversiones con el mismo tiempo al vencimiento que en el futuro tendrán el mismo valor deben valer lo mismo hoy, de lo contrario podemos asegurarnos ganar dinero sin correr ningún riesgo.

Esta hipótesis es la base para poder definir tasas de interés futuras y poder valorar los derivados financieros existentes en el mercado.

1.2. Introducción a las tasas de interés

Existen diferentes tasas de interés en el mercado. En este capítulo tenemos como objetivo dar una noción intuitiva de los conceptos financieros así como presentar las definiciones y la notación, es por esto que no le agregaremos complejidad matemática y asumiremos que las tasas de interés son determinísticas a lo largo del tiempo. En los capítulos posteriores generalizaremos estos conceptos a tasas de interés estocásticas. En primer lugar presentaremos las tasas spot, es decir las tasas que podemos observar en el instante de tiempo que estamos considerando. Posteriormente presentaremos las tasas forward, estas tasas son tasas futuras que podemos deducir su valor debido a que estamos asumiendo que estamos en un mundo libre de arbitraje.

1.2.1. Tasas spot

En primer lugar asumamos que depositamos una cantidad de dinero en el banco en una cuenta que paga intereses, este tipo de inversiones asumiremos que son libres de riesgo crediticio, es decir tenemos la certeza que el banco devolverá el capital y pagará los intereses. La cantidad de intereses que recibiremos depende de tres factores: la tasa de interés, el tiempo que tendremos el dinero depositado y el tercer factor es cómo paga el banco los intereses. Casi todos los bancos capitalizan los intereses. Hay tres maneras de capitalizar los intereses: de manera simple, compuesta discreta o compuesta continua.

La capitalización simple asume que solo se pagará intereses por el monto de capital invertido durante un periodo de tiempo. Así, por ejemplo si el capital inicial es $B(0)$ y la tasa de interés anual es constante r al final del primer año tendremos:

$$B(0)(1 + r).$$

La capitalización compuesta discreta requiere además que especifiquemos una frecuencia, puede ser diaria, mensual, etc. Asume que no solo se pagará intereses por el monto invertido sino que los intereses generados en un día, un mes, etc serán sumados al capital para el cálculo del próximo pago intereses. En este caso si consideramos una frecuencia de n períodos al año al finalizar el primer año, el capital acumulado está dado por:

$$B(0) \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n.$$

La capitalización compuesta continua asume que la frecuencia con la que capitalizamos los intereses es cada instante de tiempo, es decir al finalizar el primer año, $T = 1$ obtendremos:

$$B(0)e^{\int_0^T r(s)ds}.$$

Llamaremos *cuenta de moneda* y la denotaremos con B a este tipo de inversiones libre de riesgo donde la ganancia es capitalizada compuesta continua en el tiempo a una tasa r . Esta tasa la llamaremos *tasa libre de riesgo* ya que consideramos que está libre de riesgo crediticio y por lo tanto tenemos la certeza que al vencimiento se pagará el monto invertido más los intereses.

Definición 1.2.1. Definimos $B(t)$ al valor de la cuenta de moneda en el tiempo $t \geq 0$ y asumimos $B(0) = 1$. El valor de la cuenta de moneda en el tiempo t está dado por:

$$B(t) = e^{\int_0^t r(s)ds}. \quad (1.1)$$

La función r usualmente es llamada la *tasa spot instantánea* o *tasa short*.

Cuando queremos calcular el valor en el tiempo t de una unidad de dinero que se pagará en el futuro T necesitamos lo que llamamos factor de descuento y se define de la siguiente manera. En este caso la unidad de medida es la cuenta de moneda es por esto que el factor de descuento lleva el subíndice B .

Definición 1.2.2. El factor de descuento simple está dado por:

$$D_B(t, T) = \frac{B(t)}{B(T)} = \frac{1}{1 + r(T - t)}. \quad (1.2)$$

Definición 1.2.3. El factor de descuento continuo está dado por:

$$D_B(t, T) = \frac{B(t)}{B(T)} = e^{-\int_t^T r(s)ds}. \quad (1.3)$$

Otro tipo de tasas de interés presentes en los mercados financieros son las que están implícitas en los bonos. Los bonos son títulos de deuda que pueden ser emitidos por gobiernos o corporaciones y pueden presentar una gran diversidad de características. Estos instrumentos pueden pagar una renta periódica que se conoce como cupones de un bono o solo el principal al vencimiento, conocidos como bonos cupón cero. Existen en el mercado bonos a tasa fija o a tasa variable y a diferentes vencimientos.

Llamaremos *bono cupón cero* con madurez T a un título de deuda que paga \$1 en el tiempo T , sin pagos intermedios.

Notación 1.2.4. Denotaremos $P(t, T)$ el valor en el tiempo $t < T$ de un bono cupón cero con vencimiento en T . Por lo tanto, $P(T, T) = 1$ para todo T .

Para un t fijo, $P(t, T)$ es una función de T . Esta función nos muestra en un t fijo todos los precios de los bonos para todos los vencimientos T . El gráfico de esta función es llamada estructura a término en t .

Observación 1.2.5. El precio de un bono cupón cero es no negativo, es decir, $P(t, T) \geq 0 \forall t$ y $\forall T$.

Asumimos además que P es una función continua y derivable respecto del vencimiento T , no así del tiempo t . Los bonos cupón cero tienen implícita una tasa de capitalización que denotaremos con $L(t, T)$ cuando sea capitalización simple y con $R(t, T)$ en el caso de capitalización compuesta. Para el caso de la capitalización simple $L(t, T)$ es la tasa constante que satisface:

$$P(t, T) = P(T, T) \frac{1}{1 + L(t, T)(T - t)}, \quad (1.4)$$

y en el caso de capitalización compuesta continua $R(t, T)$ es la tasa de interés constante en el período $[t, T]$ que satisface:

$$P(t, T) = P(T, T) e^{-\int_t^T R(t, T)ds} = P(T, T) e^{-R(t, T)(T-t)}. \quad (1.5)$$

Definición 1.2.6. La tasa de interés spot simple desde un tiempo t hasta T está dada por:

$$L(t, T) = \frac{1 - P(t, T)}{(T - t)P(t, T)}. \quad (1.6)$$

Definición 1.2.7. La tasa de interés spot continuamente compuesta desde un tiempo t hasta T está dada por:

$$R(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{(T - t)}. \quad (1.7)$$

Si consideramos como unidad de medida los bonos y queremos conocer el precio en t de un derivado que pagará una unidad en el tiempo futuro T necesitamos el factor de descuento que se define de la siguiente manera:

Definición 1.2.8. El factor de descuento considerando los bonos como unidad de medida está dado por:

$$D_P(t, T) = \frac{P(t, T)}{P(T, T)} = P(t, T). \quad (1.8)$$

1.2.2. Tasas forward

Las tasas presentadas hasta el momento son tasas que se pueden observar o deducir de productos para los cuales se observa un precio en el tiempo t . Consideremos ahora la situación en la que estamos interesados en comprar en un tiempo futuro T un bono cupón cero con vencimiento en $T + \tau$ y queremos conocer cual sería o debería ser el precio de ese bono en el tiempo $t < T$.

Dado que asumimos un mundo libre de arbitraje podemos construir un producto equivalente que consiste en vender en t un bono cupón cero con madurez en T y comprar la cantidad $\frac{P(t, T + \tau)}{P(t, T)}$ de bonos cupón cero con madurez en $T + \tau$. En el tiempo t esta estrategia tiene costo 0 dado que

$$-P(t, T + \tau) + \frac{P(t, T + \tau)}{P(t, T)}P(t, T) = 0. \quad (1.9)$$

En el momento T recibimos \$1 y en $T + \tau$ deberíamos pagar $\frac{P(t, T + \tau)}{P(t, T)}$ por lo tanto el \$1 que recibiremos en $t = T$ lo debemos invertir a una determinada tasa, llamada tasa forward para poder realizar el pago en $T + \tau$. De allí sabemos que el precio forward del bono para un período $[T, T + \tau]$ visto en el tiempo t , el cual denotaremos con $P(t, T, T + \tau)$, es el precio que debería tener un bono cupón cero en t que se emitirá en T y vencerá en $T + \tau$ y debería ser:

$$P(t, T, T + \tau) = \frac{P(t, T + \tau)}{P(t, T)} \quad \tau > 0. \quad (1.10)$$

Usualmente τ es llamado tenor del bono y está expresado en años. Notemos que para definir el precio forward de un bono necesitamos tres tiempos diferentes, t es el tiempo presente, en T se emitirá el bono que vencerá en $T + \tau$. Análogamente a las tasas spot estos bonos tienen implícita una tasa de interés y de acuerdo al tipo de capitalización que consideremos podemos definir las siguientes tasas forward.

Definición 1.2.9. *La tasa forward simple $L(t, T, T + \tau)$ es la tasa de interés para un período futuro $[T, T + \tau]$ vista en el momento $t < T$ dada por:*

$$L(t, T, T + \tau) = \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{P(t, T, T + \tau)} - 1 \right) \quad \tau > 0. \quad (1.11)$$

La tasa Libor (London InterBank Offered Rate) es una tasa forward de referencia diaria basada en las tasas de interés a la cual los bancos ofrecen fondos no asegurados, es decir, sin una garantía de por medio, a otros bancos en el mercado monetario mayorista o mercado interbancario. Estas tasas motivan la elección de la notación L .

Notación 1.2.10. *Sean $T = T_0 < T_1 < \dots < T_n$ un conjunto arbitrario de fechas. Utilizaremos $L_j(t)$ para referirnos a la tasa forward simple $L(t, T_j, T_{j+1})$ para todo $j < n - 1$.*

Definición 1.2.11. *La tasa forward continuamente compuesta $R(t, T, T + \tau)$ es la tasa de interés para un período futuro $[T, T + \tau]$ vista en el momento $t < T$ dada por:*

$$R(t, T, T + \tau) = -\frac{\ln P(t, T, T + \tau)}{\tau} \quad \tau > 0. \quad (1.12)$$

Los precios forward de los bonos cupón cero pueden reconstruirse con composición simple de las tasas forward como se muestra en el siguiente Lema.

Lema 1.2.12. Sean $T = T_0 < T_1 < \dots < T_n$ un conjunto arbitrario de fechas . Asumimos la existencia de n bonos cupón cero con vencimiento en cada T_i para $i = 0, \dots, n$ Entonces

$$P(t, T, T_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 + (T_i - T_{i-1})L(t, T_{i-1}, T_i)}. \quad (1.13)$$

Demostración. Para $n = 1$ utilizando (1.10) y la definición (1.2.9) tenemos

$$P(t, T, T_1) = \frac{P(t, T_1)}{P(t, T)} = \frac{1}{1 + (T_1 - T)L(t, T, T_1)} \quad (1.14)$$

Para $n > 1$ se sigue inductivamente que

$$P(t, T, T_n) = \frac{P(t, T_n)}{P(t, T)} = \frac{P(t, T_n)}{P(t, T_{n-1})} \frac{P(t, T_{n-1})}{P(t, T_{n-2})} \cdots \frac{P(t, T_1)}{P(t, T)} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 + (T_i - T_{i-1})L(t, T_{i-1}, T_i)}. \quad (1.15)$$

□

Observación 1.2.13. Bajo la hipótesis de que el precio de un bono cupón cero es una función diferenciable respecto de la variable que expresa el vencimiento T tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{S \rightarrow T} L(t, T, S) &= \lim_{S \rightarrow T} \frac{1}{(S - T)} \left(\frac{1}{P(t, T, S)} - 1 \right) \\ &= -\frac{1}{P(t, T)} \frac{\partial P(t, T)}{\partial T} \\ &= -\frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T} \\ &= \lim_{S \rightarrow T} R(t, T, S) \end{aligned}$$

donde $\tau = S - T$.

Cuando consideramos $\tau \rightarrow 0$ surge la definición de la tasa forward instantánea. Intuitivamente, la tasa forward instantánea es una tasa forward vista en t para un período de tiempo futuro muy pequeño, $f(t, T) = L(t, T, T + \Delta T)$ donde ΔT es muy pequeño. Estas tasas son fundamentales en la teoría de tasas de interés. Presentaremos más adelante la dinámica propuesta por Heath, Jarrow y Morton [17] para describir el comportamiento de estas tasas.

Definición 1.2.14. Definimos la tasa forward instantánea $f(t, T)$ como el límite cuando τ tiende a cero de la tasa forward, es decir

$$f(t, T) = \lim_{\tau \rightarrow 0} L(t, T, T + \tau) = \lim_{\tau \rightarrow 0} R(t, T, T + \tau) = -\frac{\partial \log P(t, T)}{\partial T}. \quad (1.16)$$

Observación 1.2.15. Notemos además que podemos expresar el precio de un bono cupón cero en t con vencimiento en T en términos de la tasa forward instantánea de la siguiente manera:

$$P(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, u) du}, \quad (1.17)$$

ya que

$$e^{-\int_t^T \lim_{\tau \rightarrow 0} L(t, u, u + \tau) du} = e^{-\int_t^T -\frac{\partial \ln P(t, u)}{\partial u} du} = P(t, T). \quad (1.18)$$

Observación 1.2.16. La tasa forward instantánea se relaciona con la tasa short de la siguiente manera

$$r(t) = f(t, t). \quad (1.19)$$

1.3. Derivados de tasas de interés

En los últimos 50 años los derivados han incrementado considerablemente su importancia en los mercados. Los derivados son productos financieros cuyo valor depende del valor de otro producto al que llamaremos subyacente. Estos subyacentes pueden ser acciones, commodities, tasas de interés, etc. Unos de los objetivos por los cuales se modelan las tasas de interés es poder valorar los productos financieros que se derivan de ellas. A continuación presentamos los derivados sobre tasas de interés que se pueden encontrar tanto en los mercados organizados como en el mercado conocido como OTC por sus siglas en inglés, Over The Counter, el cual es un mercado entre particulares y no proporciona las mismas garantías que los mercados organizados.

Para cada tipo de contrato daremos el payoff correspondiente. El *payoff* es el valor del derivado en función del subyacente, indica la ganancia (o pérdida) del contrato al vencimiento. En otras palabras el payoff es el valor del derivado en el vencimiento. Para conocer el valor en tiempo presente de un derivado que vence en un tiempo futuro utilizaremos nuevamente la hipótesis de no arbitraje considerando a los bonos como unidad de medida, en el siguiente capítulo veremos que la unidad de medida es llamada *numerario* y la definiremos matemáticamente. Debido a que nos encontramos en un mundo sin arbitraje podemos asegurar que el valor de un derivado hoy es el valor descontado del payoff, es decir es el factor de descuento multiplicado por el payoff del contrato.

Presentaremos dos tipos de derivados, los contratos a plazo y los contratos de opción. El FRA y Swap son contratos a plazo, donde ambas partes están obligadas a cumplir con los intercambios establecidos al momento de inicio del contrato.

Por otro lado presentaremos la Caplet, Floorlet y Swaption que son contratos de opción. Una *opción* es un instrumento financiero que otorga el derecho de comprar o vender (call o put) un subyacente S a un precio prefijado K en un tiempo futuro T . El precio K es conocido como precio Strike y el tiempo T es la madurez. Estos contratos tienen un valor inicial denominado prima, que es el precio al cual compra el contrato quien adquiere el derecho a comprar o vender el subyacente. El valor de este contrato en su madurez en función del subyacente es el payoff de la opción. Las opciones que se negocian en los mercados formales se denominan opciones vanilla o estándar mientras que las que se negocian en los mercados OTC son conocidas como opciones exóticas y presentan características muy diversas. Dentro de las opciones vanilla se diferencian dos tipos, las europeas, que son aquellas cuyo ejercicio puede ocurrir sólo en la fecha de madurez ó las americanas que pueden ser ejercidas en cualquier momento previo al vencimiento. Dentro de las opciones exóticas podemos encontrar una gran variedad de contratos con diferentes especificaciones como las look-back, las asiáticas, las barrera, etc. El payoff de las opciones depende de la trayectoria que haya seguido el subyacente, por lo que establecer el valor hoy de un contrato de opción no es tan sencillo como en el caso de los contratos a plazo. En este caso el valor hoy del contrato de opción es el valor descontado del valor esperado del payoff. En 1973 Black y Scholes publican [32] donde presentan un resultado que revolucionó la matemática financiera. Presentan una ecuación que permite obtener el valor inicial o prima de una opción sobre una acción que no paga dividendos. Este trabajo sirvió de base para la valoración de un gran número de derivados. Las opciones surgen como derivados sobre commodities y sobre acciones, es decir el subyacente se puede comercializar en el mercado. Cuando el subyacente es una tasa de interés y no es un activo que se compra y se vende los contratos de opción reciben los nombres de Caplet, Floorlet, Cap, Floor y Swaption. Describiremos los detalles de estos contratos en esta sección.

1.3.1. FRA

Un *FRA* (Forward Rate Agreement) para un periodo $[T_1, T_2]$ es un contrato que intercambia un pago basado en una tasa fija K contra un pago basado en una tasa flotante (por ejemplo la tasa Libor) que se fija en T_1 . El intercambio de pagos se realiza en T_2 . En estos contratos distinguimos tres momentos:

- $t = 0$: fecha en que se establece el contrato y queda determinada la tasa fija K ,
- $t = T_1$: fecha en la que se conoce la tasa flotante L y comienza a correr el interés,
- $t = T_2$: fecha en que se realiza el intercambio de pagos y finaliza el contrato,

donde $0 < T_1 < T_2$. Consideremos K la tasa fija, $L_1(T_1) = L(T_1, T_1, T_2)$ la tasa flotante y N el nominal, entonces el payoff del FRA para el que paga la tasa flotante, es decir, quien entra vendido o short al FRA, está dado por:

$$\text{Payoff}_{FRA_S} = N \cdot (K - L_1(T_1)) \cdot (T_2 - T_1), \quad (1.20)$$

y para quien paga la tasa fija, es decir, quien entra comprado o long al FRA:

$$\text{Payoff}_{FRA_L} = N \cdot (L_1(T_1) - K) \cdot (T_2 - T_1). \quad (1.21)$$

La tasa fija del FRA se establece de tal forma que el contrato tiene valor 0 al inicio, por lo que la tasa fija es la tasa forward en t para el periodo $[T_1, T_2]$

$$K_{FRA} = L(0, T_1, T_2).$$

Si K fuera otro valor, podríamos hacer un arbitraje, es decir ganar dinero sin correr ningún riesgo. A continuación describimos las estrategias que podríamos realizar en el caso en que K sea menor o mayor que $L(0, T_1, T_2)$.

Comenzemos considerando el caso en que $K < L(0, T_1, T_2)$. Podemos realizar la siguiente estrategia en $t = 0$:

- Entrar comprado o long a al FRA sobre un nominal N .
- Vender el bono cupón cero con vencimiento en T_1 por un nominal de N .
- Comprar el bono cupón cero con vencimiento T_2 por un nominal de $\frac{P(0, T_1)}{P(0, T_2)}N$.

Notemos que esta estrategia tiene costo \$0 en $t = 0$. En $t = T_1$ tenemos que:

- Pagar N , correspondiente al bono con vencimiento en T_1 que habíamos vendido.
- Vender el bono con vencimiento en T_2 por un nominal N^* tal que $P(T_1, T_2)N^* = N$.

En $t = T_2$ por último tenemos que:

- Pagar $K \cdot N \cdot (T_2 - T_1)$, correspondiente al FRA comprado en $t = 0$.
- Recibir $N \cdot L(T_1, T_2) \cdot (T_2 - T_1)$, correspondiente al FRA comprado en $t = 0$.
- Recibir $\frac{P(0, T_1)}{P(0, T_2)} N = L(0, T_1, T_2) \cdot N$, correspondiente al bono comprado en $t = 0$.
- Pagar $N^* = N \cdot L(T_1, T_2)$, correspondiente al bono vendido en T_1 .

Entonces el pago que debemos realizar correspondiente al bono vendido en T_1 se compensa con el monto que recibimos correspondiente al FRA. El monto $K \cdot N$ que debemos pagar correspondiente al FRA es menor que lo que recibimos $L(0, T_1, T_2) \cdot N$ correspondiente al bono comprado en $t = 0$ ya que $K < L(0, T_1, T_2)$. Por lo tanto tenemos una ganancia de dinero asegurada sin correr ningún riesgo. Es por esto que en un mundo sin arbitraje no puede ocurrir que $K < L(0, T_1, T_2)$.

Consideremos ahora el caso en que $K > L(0, T_1, T_2)$. En esta situación podemos realizar la siguiente estrategia en $t = 0$:

- Entrar vendido o short al FRA sobre un nominal N .
- Comprar el bono cupón cero con vencimiento en T_1 por un nominal de N .
- Vender el bono cupón cero con vencimiento T_2 por un nominal de $\frac{P(0, T_1)}{P(0, T_2)} N$.

Notemos que al igual que en el caso anterior esta estrategia vale \$0 en $t = 0$. En $t = T_1$ tenemos que:

- Recibir N , correspondiente al bono comprado en $t = 0$.
- Comprar el bono que vence en T_2 por un nominal N^* tal que $P(T_1, T_2) \cdot N^* = N$.

Por último en T_2 tenemos:

- Pagar $N \cdot L(T_1, T_2) \cdot (T_2 - T_1)$, correspondiente al FRA.
- Recibir $N \cdot K \cdot (T_2 - T_1)$, correspondiente al FRA.
- Pagar $\frac{P(0, T_1)}{P(0, T_2)} N = L(0, T_1, T_2) \cdot N$, correspondiente al bono vendido en $t = 0$.
- Recibir $N^* = N \cdot L(T_1, T_2)$, correspondiente al bono comprado en $t = T_1$.

Por lo tanto tenemos que lo que debemos abonar en el FRA se netea con lo que recibimos del bono comprado en $t = T_1$ y el monto que debemos pagar por el bono vendido en $t = 0$ es menor que lo que recibiremos del FRA ya que asumimos que $K > L(0, T_1, T_2)$. Por lo tanto obtenemos una ganancia sin haber corrido ningún riesgo. Es por esto que bajo la hipótesis de no arbitraje no se puede cumplir $K > L(0, T_1, T_2)$.

1.3.2. Swap

Un *swap* es un acuerdo entre dos contrapartes para intercambiar dinero en tiempos previamente definidos. Un swap plain vanilla es un acuerdo en donde una de las partes paga una tasa fija y la otra paga una tasa variable (usualmente la tasa variable es la tasa Libor). El swap es similar al FRA, sólo que implica un intercambio de una renta con cuotas a una tasa fija y una renta con cuotas sujeta a una tasa flotante.

Para el caso del swap con una sucesión de n pagos existen $n + 2$ fechas asociadas:

$$0 < T_1 < T_2 < \dots < T_n < T_{n+1}.$$

En 0 comienza el contrato con una tasa fija K , en T_1 se conoce la primera tasa flotante, en T_2 se realiza el primer pago y se conoce la tasa flotante para el siguiente período, y así siguiendo en T_n se recibe el pago fijado en T_{n-1} y se conoce la tasa flotante para el último período, en T_{n+1} se efectúa el último intercambio de dinero. Si el swap se paga sobre un nominal N , y consideramos la tasa fija K y las tasas flotantes para cada período L_j con $j = 1, \dots, n$ tenemos que quien paga la tasa flotante es decir entra short en el swap recibe en caso de ser positivo o paga en caso de ser negativo la siguientes cantidades:

$$\begin{aligned} \text{En } T_2: & \quad N \cdot (K - L_1(T_1)) \cdot (T_2 - T_1). \\ \text{En } T_3: & \quad N \cdot (K - L_2(T_2)) \cdot (T_3 - T_2). \\ & \quad \dots \\ \text{En } T_{n+1}: & \quad N \cdot (K - L_n(T_n)) \cdot (T_{n+1} - T_n). \end{aligned}$$

Por lo tanto el payoff de un swap comprado o short está dado por

$$\text{Payoff}_{\text{swaps}} = N \cdot \sum_{j=1}^n (K - L_j(T_j)) \cdot (T_{j+1} - T_j). \quad (1.22)$$

Al igual que en el FRA, la tasa fija elegida es tal que el valor del swap es 0 al iniciar el contrato, esta tasa es conocida como *tasa swap*.

$$K_{\text{swap}} = \frac{\sum_{j=1}^n P(t, T_{j+1})(T_{j+1} - T_j)L_j(t)}{\sum_{j=1}^n P(t, T_{j+1})(T_{j+1} - T_j)}. \quad (1.23)$$

1.3.3. Caplet y Floorlet

Una *caplet* (*floorlet*) es un contrato que da el derecho a recibir (pagar) una tasa de interés determinada K llamada strike por un período $[T_1, T_2]$, sobre un monto nominal N , con vencimiento en T_1 y pago en T_2 . Notemos que al igual que en el FRA aquí también tenemos tres fechas relevantes:

- $t = 0$: fecha en que se establece el contrato.
- $t = T_1$: fecha de vencimiento de la opción, se decide si ejercer o no.
- $t = T_2$: si se ejerció se realiza el cobro o pago de la cantidad de dinero correspondiente.

Donde $0 < T_1 < T_2$.

Las caplet y floorlet se diferencian de las opciones call y put sobre acciones ya que en estas últimas el subyacente puede comercializarse y las tasas de interés no pueden comprarse o venderse en los mercados. Observemos que las caplet son de tipo europeo, en T_1 se decide si se ejerce o no la opción y en caso de ejercerla el pago se recibe en T_2 .

El payoff de la caplet en la posición long con nominal N y strike K está dado por:

$$\text{Payoff}_{\text{caplet}} = N \cdot \text{máx}(L_1 - K, 0) \cdot (T_2 - T_1). \quad (1.24)$$

A continuación veamos un ejemplo.

Supongamos que es febrero de 2019 y que hemos comprado una caplet sobre la tasa Libor a 6 meses en USD del 2.7% con un nominal de 1 millón de dólares y con vencimiento el 1 de Abril de 2019. Si la tasa Libor a 6 meses en USD el 1 de Abril es de 3% entonces recibiremos el 1 de Octubre

$$\text{Payoff} = \$1000000 \cdot \text{máx}(0,03 - 0,027, 0) \cdot 0,5 = \$1500.$$

Notar que el 0,5 representa los 6 meses ya que las tasas se expresan de forma anual.

Si en cambio, el 1 de abril la tasa Libor a 6 meses en USD es de 2.5% entonces el 1 de Octubre recibiremos

$$\text{Payoff} = \$1000000 \cdot \text{máx}(0,025 - 0,027, 0) \cdot 0,5 = \$0.$$

Notemos que el payoff de este contrato es una variable aleatoria. A diferencia del FRA y del Swap que tienen costo \$0 en $t = 0$, en la caplet y floorlet se establece un contrato en donde una parte tiene un derecho mientras que la contraparte tiene una obligación, es por esto que el contrato tiene un costo, llamado prima. En el capítulo 3 presentaremos una introducción a la valoración de derivados y mostraremos como obtener la prima de caplets y floorlets.

Una sucesión de caplets es un *cap* y una sucesión de floorlets es un *floor*. Así en un cap o en un floor puede ejercerse la opción en algunos de los periodos y en otros no. Asumamos que estamos en $t = 0$ y consideremos una partición equidistante del intervalo $[0, T]$

$$0 = T_0 < T_1 < \dots < T_n = T.$$

En T_0 se establece el contrato con un strike fijo K para todas las caplets, en T_1 se decide si se ejerce o no la primera caplet, en T_2 se recibe el pago y se decide si se ejerce o no la siguiente caplet, así siguiendo en T_n se recibe el pago si la opción en T_{n-1} fue ejercida y se decide si se ejerce o no la última opción, en caso de ser ejercida el pago se recibe en T_{n+1} .

Al igual que en la caplet, un cap tiene un costo inicial, el cual desarrollaremos en el Capítulo 3.

1.3.4. Swaption

Un *swaption* Europeo es un contrato que otorga el derecho de entrar en un swap en una fecha futura a una tasa fija K . El swaption pagador da el derecho al comprador a entrar en un swap donde pagará una tasa fija y recibirá una tasa de interés variable. El swaption receptor en cambio es quien tiene el derecho de entrar en un swap donde pagará una tasa de interés variable y recibirá una tasa fija.

Para el swaption pagador por ejemplo, tenemos diferentes fechas asociadas:

- $t = 0$: fecha en que se establece el contrato.
- $t = T_0$: fecha de vencimiento de la opción, se decide si se entra o no en el swap
- $T_1 < T_2 < \dots < T_n < T_{n+1}$: fechas equidistantes para el cual, si se ejerció la opción, se realizarán los intercambios de dinero correspondiente.

Donde $0 < T_0 < T_1 < \dots < T_n < T_{n+1}$. El payoff de un swaption pagador, es decir el valor de la opción en su vencimiento T_0 será:

$$\text{Payoff}_{\text{Swaption}} = \max(\text{Valor del swap}(T_0), 0) = \max\left(\sum_{j=1}^n P(t, T_{j+1}) \cdot (L_j(T_j) - K) \cdot (T_{j+1} - T_j), 0\right). \quad (1.25)$$

Si el Payoff del Swaption es 0 entonces no se ejercerá y si es positivo entonces se ejercerá y el comprador del swaption entrará en un swap y en cada T_j con $j = 2, \dots, n + 1$ recibirá o pagará de acuerdo a como evolucione la tasa flotante la cantidad correspondiente como describimos anteriormente.

En este tipo de contratos también estamos adquiriendo un derecho y la otra parte tiene una obligación, es por esto que el contrato en el tiempo inicial tiene un costo, la prima del swaption, la cual presentaremos en el Capítulo 3 luego de introducir el marco teórico necesario para su desarrollo.

1.4. Mercados Completos

La hipótesis de que estamos considerando un mercado completo junto a la hipótesis de no arbitraje son fundamentales para el desarrollo de valoración de derivados.

Para desarrollar este concepto primero definiremos lo que llamaremos *contingent claim* como un contrato financiero cuyo payoff es una variable aleatoria que puede tomar valores positivos y negativos. Un FRA es un ejemplo de contingent claim. Luego, para ponerle un precio a este contingent claim podemos replicar el payoff del contingent claim en todos los estados futuros posibles utilizando un conjunto de activos disponibles en el mercado, es decir, armar una estrategia que tenga el mismo valor que el contingent claim cualquiera sea el escenario que ocurra en el futuro. Lo que realizamos con el FRA en orden de demostrar que la $K_{FRA} = L(0, T_1, T_2)$ fue replicar el FRA con activos que tenemos disponible en el mercado, los bonos. Notemos que gracias a la hipótesis de no arbitraje, si el contingent claim tiene el mismo payoff que la estrategia que lo replica en todos los estados futuros, entonces deben tener el mismo precio al inicio.

Finalmente, definimos un mercado completo como un mercado en el que cualquier contingent claim puede replicarse con un conjunto de activos existentes en el mercado. En el Capítulo 3 presentaremos la definición matemática de este concepto que es esencial en la valoración de derivados.

Capítulo 2

Marco teórico

Describir el comportamiento de las tasas de interés y establecer modelos para la valuación de los derivados financieros desde un punto de vista matemático nos lleva a presentar este capítulo. Desarrollaremos las nociones básicas del cálculo estocástico y los resultados de probabilidad y estadística que utilizaremos para el desarrollo del trabajo.

Presentaremos los conceptos generales de probabilidad, movimiento Browniano y martingala así como los teoremas más relevantes en la teoría del cálculo estocástico desarrollada por Itô. Presentaremos también dentro del marco del cálculo estocástico la integral de Stratonovich y el Teorema de Girsanov que será de gran utilidad posteriormente para valorar derivados sobre tasas de interés [10].

2.1. Conceptos generales de probabilidad

Establecer modelos para las tasas de interés anteriormente mencionadas que se ajusten al comportamiento observado de las mismas ha sido objeto de estudio de los últimos años. En el capítulo anterior y solo con la intención de favorecer la intuición consideramos tasas de interés determinísticas. A partir de ahora consideraremos que las tasas de interés son aleatorias en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ donde Ω es el espacio muestral, \mathcal{F} una σ -álgebra sobre Ω y \mathbb{P} una medida de probabilidad definida en \mathcal{F} . Presentaremos a continuación las definiciones básicas del cálculo estocástico.

Definición 2.1.1. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Una variable aleatoria es una función X a valores reales definida sobre Ω con la propiedad de que para todo subconjunto Borel de \mathbb{R} , el subconjunto de Ω dado por:*

$$\{X \in B\} = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \in B\}$$

es una σ -álgebra de \mathcal{F} .

Dada una variable aleatoria X definida en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ podemos definir el valor esperado de X de la siguiente manera:

Definición 2.1.2. *Sea X una variable aleatoria en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. El valor*

esperado de X lo denotaremos con $\mathbb{E}[X]$ y se define de la siguiente manera:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega).$$

Esta definición tiene sentido si X es integrable, es decir, si

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} |X(\omega)| d\mathbb{P}(\omega) < \infty$$

ó si $X \geq 0$ casi seguramente. De lo contrario $\mathbb{E}[X]$ es ∞ .

2.2. Cambio de medidas

En capítulos posteriores valoraremos derivados de tasas de interés, para ello será de gran utilidad los cambios de medida ya que nos permitirán simplificar considerablemente la complejidad del cálculo.

El siguiente teorema nos muestra como podemos construir una nueva medida de probabilidad.

Teorema 2.2.1. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y Z una variable aleatoria no negativa tal que $\mathbb{E}[Z] = 1$. Para todo $A \in \mathcal{F}$ se define*

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A Z(\omega) d\mathbb{P}(\omega). \quad (2.1)$$

Entonces $\tilde{\mathbb{P}}$ es una medida de probabilidad. Más aún, si X es una variable aleatoria no negativa entonces

$$\tilde{\mathbb{E}}[X] = \mathbb{E}[XZ], \quad (2.2)$$

donde $\tilde{\mathbb{E}}$ es el valor esperado bajo la medida $\tilde{\mathbb{P}}$. Si Z es estrictamente positiva excepto en un conjunto de medida nula, tenemos

$$\mathbb{E}[Y] = \tilde{\mathbb{E}} \left[\frac{Y}{Z} \right] \quad (2.3)$$

para toda variable aleatoria Y no negativa.

Definición 2.2.2. *Sea Ω un conjunto no vacío y \mathcal{F} una σ -álgebra de subconjuntos de Ω . Dos medidas de probabilidad \mathbb{P} y $\tilde{\mathbb{P}}$ en (Ω, \mathcal{F}) se dicen equivalentes si cumplen que $\mathbb{P}(A) = 0$ si y solo si $\tilde{\mathbb{P}}(A) = 0$ para todo $A \in \mathcal{F}$.*

A continuación presentaremos un importante resultado de teoría de la medida que establece que dos medidas equivalentes están relacionadas de una única manera.

Teorema 2.2.3. *(Radon-Nikodym) Sean \mathbb{P} y $\tilde{\mathbb{P}}$ medidas equivalentes de probabilidad en un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}) . Existe una única variable aleatoria positiva Z con $\mathbb{E}[Z] = 1$ tal que*

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A Z(\omega) d\mathbb{P}(\omega) \quad \text{para todo } A \subset \mathcal{F}.$$

Notación 2.2.4. *Diremos que Z es la derivada de Radon-Nikodym de $\tilde{\mathbb{P}}$ respecto de \mathbb{P} y la denotaremos por*

$$Z = \frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}.$$

2.3. Procesos estocásticos

Como mencionamos al inicio del capítulo consideraremos que las tasas de interés son estocásticas por lo que utilizaremos procesos estocásticos para describir la dinámica de las tasas de interés.

Definición 2.3.1. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Un proceso estocástico es una familia $\{X(t, \omega); t \in I \text{ y } \omega \in \Omega\}$ con $I \subseteq \mathbb{R}$ donde X es conjuntamente medible.

Dado un proceso estocástico, se tiene que $X(t, \cdot)$ es una variable aleatoria y para cada ω fijo $X(\cdot, \omega)$ se denomina una trayectoria del proceso. En nuestro caso t será la variable temporal por lo que $I = [0, \infty)$. Habitualmente se ignora en la notación la variable ω . A lo largo del trabajo usaremos la siguiente notación.

Notación 2.3.2. Denotaremos a los procesos estocásticos por $\{X(t); t \geq 0\}$.

Definición 2.3.3. Sea Ω un conjunto no vacío. Sea T un número positivo fijo, y asumamos que para cada $t \in [0, T]$ tenemos una σ -álgebra $\mathcal{F}(t)$ de subconjuntos de Ω . Asumamos que si $s \leq t$ entonces todo conjunto en $\mathcal{F}(s)$ está también en $\mathcal{F}(t)$. Entonces la colección de σ -álgebras $\{\mathcal{F}(t) : 0 \leq t \leq T\}$ es una filtración.

Definición 2.3.4. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y X una variable aleatoria en este espacio de probabilidad. Definimos la σ -álgebra generada por X de la siguiente manera:

$$\sigma(X) = \{X^{-1}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

donde $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ es la familia de conjuntos Borel.

Definición 2.3.5. Sea X una variable aleatoria definida en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Sea \mathcal{G} una σ -álgebra de subconjuntos de Ω . Si todo conjunto $\sigma(X)$ está también en \mathcal{G} diremos que X es \mathcal{G} -medible.

Definición 2.3.6. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y sea $\mathcal{F}(t)$, $t \geq 0$ una filtración con $\mathcal{F}(t) \in \mathcal{F}$ para todo $t \geq 0$. Sea $\{X(t); t \geq 0\}$ proceso estocástico. Diremos que este proceso es un proceso adaptado a la filtración si, para cada t la variable aleatoria $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$ -medible.

Cuando una variable aleatoria es medible con respecto a una σ -álgebra \mathcal{F} , la información contenida en \mathcal{F} es suficiente para determinar el valor de la variable aleatoria. Por otro lado cuando la variable aleatoria es independiente de la σ -álgebra la información que esta contiene no determina el valor de la variable aleatoria.

Definición 2.3.7. Sea Ω un conjunto, \mathcal{F} y \mathcal{G} dos σ -álgebras sobre Ω . Diremos que \mathcal{G} es una sub- σ -álgebra de Ω si $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$.

Definición 2.3.8. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y sean \mathcal{G} y \mathcal{H} dos sub- σ -álgebras de \mathcal{F} . Diremos que estas dos σ -álgebras son independientes si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \text{ para todo } A \in \mathcal{G}, B \in \mathcal{H}.$$

Sean X e Y dos variables aleatorias en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Diremos que dos variables aleatorias son independientes si las σ -álgebras que generan, $\sigma(X)$ y $\sigma(Y)$, son independientes. Diremos que una variable aleatoria X es independiente de la σ -álgebra \mathcal{G} si $\sigma(X)$ y \mathcal{G} son independientes.

2.4. Valor esperado condicional

Definición 2.4.1. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, una sub- σ -álgebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ y X una variable aleatoria con valor esperado finito. Definimos el valor esperado condicional de X dado \mathcal{G} como cualquier variable aleatoria Y que satisfaga:

- $Y \in \mathcal{G}$, es decir, es \mathcal{G} -medible.
- Para todo $A \in \mathcal{G}$, $\int_A X d\mathbb{P} = \int_A Y d\mathbb{P}$.

Cualquier Y que satisfaga estas dos condiciones diremos que es una versión del valor esperado de X condicional a la sub- σ -álgebra \mathcal{G} , y se denota como $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$. Este valor esperado condicional existe y es único salvo un conjunto de probabilidad nula. Para más detalles ver [15].

El siguiente teorema enuncia algunas de las propiedades de la esperanza condicional.

Teorema 2.4.2. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y sea \mathcal{G} una sub- σ -álgebra de \mathcal{F} .

- (Linealidad) Si X e Y son variables aleatorias con valor esperado finito y c_1 y c_2 son constantes, entonces

$$\mathbb{E}[c_1X + c_2Y|\mathcal{G}] = c_1\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] + c_2\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]. \quad (2.4)$$

- (Medibilidad) Si X, Y y XY son variables aleatorias con valor esperado finito y X es \mathcal{G} -medible, entonces

$$\mathbb{E}[XY|\mathcal{G}] = X\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]. \quad (2.5)$$

- (Condicionalidad iterada) Sea \mathcal{H} una sub- σ -álgebra de \mathcal{G} y X una variable aleatoria con valor esperado finito, entonces:

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}]. \quad (2.6)$$

- (Independencia) Sea X una variable aleatoria con valor esperado finito. Si X es independiente en \mathcal{G} entonces

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]. \quad (2.7)$$

Lema 2.4.3. (Independencia) Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y \mathcal{G} una sub- σ -álgebra de \mathcal{F} . Supongamos que las variables aleatorias X_1, \dots, X_K son \mathcal{G} -medibles y las variables aleatorias Y_1, \dots, Y_L son independientes en $\hat{\mathcal{F}}$. Sea $f(x_1, \dots, x_K, y_1, \dots, y_L)$ una función de las variables x_1, \dots, x_K e y_1, \dots, y_L y definimos

$$g(x_1, \dots, x_K) = \mathbb{E}[f(x_1, \dots, x_K, Y_1, \dots, Y_L)]. \quad (2.8)$$

Entonces

$$\mathbb{E}[f(X_1, \dots, X_K, Y_1, \dots, Y_L)|\hat{\mathcal{F}}] = g(X_1, \dots, X_K). \quad (2.9)$$

2.5. Martingalas

Definición 2.5.1. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. El proceso estocástico $\{X(t); t \geq 0\}$ adaptado a la filtración $\mathcal{F}(t)$ recibe el nombre de martingala si

$$\mathbb{E}[X(t)|\mathcal{F}(s)] = X(s), \quad (2.10)$$

para $s \leq t$.

En otras palabras, un proceso estocástico es una martingala si el valor esperado en el tiempo t condicionado por la información conocida en $s \leq t$ es precisamente el valor de la variable aleatoria en el tiempo s .

Definición 2.5.2. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $\mathcal{F}(t)$ una filtración definida para $0 \leq t \leq T$, donde T es un tiempo final fijo. Sea Z una variable aleatoria positiva excepto en un conjunto de medida nula que satisface $\mathbb{E}[Z] = 1$ y definimos $\tilde{\mathbb{P}}$ como en (2.1). Se define para cada t el proceso de derivadas de Radon-Nikodym o densidad de Radon-Nikodym dado por

$$Z(t) = \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}(t)], \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.11)$$

Lema 2.5.3. El proceso de derivadas de Radon-Nikodym es una martingala.

Demostración. Por la propiedad (2.6) del valor esperado condicional tenemos que:

$$\mathbb{E}[Z(t)|\mathcal{F}(s)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z|\mathcal{F}(t)]|\mathcal{F}(s)] = \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}(s)] = Z(s). \quad (2.12)$$

□

Lema 2.5.4. Sea Y una variable aleatoria $\mathcal{F}(t)$ -medible y sea $0 \leq t \leq T$. Entonces

$$\tilde{\mathbb{E}}[Y] = \mathbb{E}[YZ(t)]. \quad (2.13)$$

donde $\tilde{\mathbb{E}}$ es el valor esperado en la medida $\tilde{\mathbb{P}}$ definida como en (2.1).

Demostración. Utilizaremos el Teorema (2.2.1) y luego la definición de $Z(t)$,

$$\tilde{\mathbb{E}}[Y] = \mathbb{E}[YZ] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[YZ|\mathcal{F}(t)]] = \mathbb{E}[Y\mathbb{E}[Z|\mathcal{F}(t)]] = \mathbb{E}[YZ(t)]. \quad (2.14)$$

□

Lema 2.5.5. Sea Y una variable aleatoria $\mathcal{F}(t)$ -medible y sea $0 \leq s \leq t \leq T$. Entonces

$$\tilde{\mathbb{E}}[Y|\mathcal{F}(s)] = \frac{1}{Z(s)}\mathbb{E}[YZ(t)|\mathcal{F}(s)]. \quad (2.15)$$

Demostración. Notemos que $\frac{1}{Z(s)}\mathbb{E}[YZ(t)|\mathcal{F}(s)]$ es $\mathcal{F}(s)$ -medible. Solo resta probar que

$$\int_A \frac{1}{Z(s)}\mathbb{E}[YZ(t)|\mathcal{F}(s)]d\tilde{\mathbb{P}} = \int_A Yd\tilde{\mathbb{P}} \text{ para todo } A \in \mathcal{F}(s). \quad (2.16)$$

El lado izquierdo de la ecuación puede escribirse como

$$\tilde{\mathbb{E}}[\mathbb{I}_A \frac{1}{Z(s)}\mathbb{E}[YZ(t)|\mathcal{F}(s)]]. \quad (2.17)$$

Luego usando el lema anterior tenemos:

$$\tilde{\mathbb{E}}[\mathbb{I}_A \frac{1}{Z(s)}\mathbb{E}[YZ(t)|\mathcal{F}(s)]] = \mathbb{E}[\mathbb{I}_A \mathbb{E}[YZ(t)|\mathcal{F}(s)]] \quad (2.18)$$

$$= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbb{I}_A YZ(t)|\mathcal{F}(s)]] \quad (2.19)$$

$$= \mathbb{E}[\mathbb{I}_A YZ(t)|\mathcal{F}(s)] \quad (2.20)$$

$$= \tilde{\mathbb{E}}[\mathbb{I}_A Y] \quad (2.21)$$

$$= \int_A Yd\tilde{\mathbb{P}}. \quad (2.22)$$

Con lo cual queda probado el Lema. □

2.6. Movimiento Browniano

En esta sección presentaremos la definición y las propiedades de martingala y de proceso de Markov del movimiento Browniano.

Definición 2.6.1. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Sea $\{W(t), t \geq 0\}$ un proceso estocástico. Diremos que este proceso es un movimiento browniano si

- $W(0) = 0$.
- W tiene incrementos estacionarios e independientes con distribución normal. Esto es, si $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ e $Y_j = W(t_j) - W(t_{j-1})$ para $j = 1, \dots, n$ entonces Y_1, Y_2, \dots, Y_n son variables aleatorias independientes y tienen distribución normal con

$$E[Y_j] = 0 \text{ y } \text{Var}[Y_j] = (t_j - t_{j-1}) \text{ para } j = 1, \dots, n.$$

Definición 2.6.2. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad en el cual está definido un movimiento Browniano $\{W(t), t \geq 0\}$. Una filtración generada por el movimiento Browniano o la filtración asociada a un movimiento Browniano es una colección de σ -álgebras $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ que satisface:

- (Acumulación de Información) Para $0 \leq s < t$, todo conjunto en $\mathcal{F}(s)$ está también en $\mathcal{F}(t)$.
- (Adaptabilidad) Para cada $t \geq 0$ el movimiento Browniano en el tiempo t , $W(t)$, es $\mathcal{F}(t)$ -medible.
- (Independencia de incrementos futuros) Para $0 \leq t < u$ el incremento $W(u) - W(t)$ es independiente de $\mathcal{F}(t)$.

Observación 2.6.3. En adelante cuando nos refiramos a filtración $\mathcal{F}(t)$ estaremos considerando la filtración asociada al movimiento Browniano $\{W(t); t \geq 0\}$.

Teorema 2.6.4. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad en el cual está definido un movimiento Browniano $\{W(t), t \geq 0\}$. El movimiento Browniano es una martingala.

Demostración. Sea $0 \leq s \leq t$ dado. Entonces utilizando las propiedades de linealidad (2.4), la propiedad 2.5) y el Lema de independencia (2.4.3) tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W(t)|\mathcal{F}(s)] &= \mathbb{E}[(W(t) - W(s)) + W(s)|\mathcal{F}(s)] \\ &= \mathbb{E}[W(t) - W(s)|\mathcal{F}(s)] + \mathbb{E}[W(s)|\mathcal{F}(s)] \\ &= \mathbb{E}[W(t) - W(s)] + W(s) \\ &= W(s) \end{aligned}$$

□

Definición 2.6.5. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, sea T un número positivo fijo, y sea $\mathcal{F}(t)$ una filtración de sub- σ -álgebras de \mathcal{F} . Consideremos un proceso adaptado $X(t)$. Asumimos que para todo $0 \leq s \leq t \leq T$ y para toda función medible no negativa f existe otra función medible Borel g tal que:

$$\mathbb{E}[f(X(t))|\mathcal{F}(s)] = g(X(s)). \quad (2.23)$$

Entonces decimos que X es un proceso de Markov.

Teorema 2.6.6. Sea $\{W(t), t \geq 0\}$ un movimiento Browniano y sea $\mathcal{F}(t)$ la filtración generada por este movimiento Browniano. Entonces $\{W(t), t \geq 0\}$ es un proceso de Markov.

Demostración. De acuerdo a la definición debemos probar que dada una función medible Borel f , existe otra función medible Borel g tal que

$$\mathbb{E}[f(W(t))|\mathcal{F}(s)] = g(W(s)). \quad (2.24)$$

Para esto escribimos

$$\mathbb{E}[f(W(t))|\mathcal{F}(s)] = \mathbb{E}[f(W(t) - W(s) + W(s))|\mathcal{F}(s)]. \quad (2.25)$$

La variable aleatoria $W(t) - W(s)$ es independiente de $\mathcal{F}(s)$ y la variable aleatoria $W(s)$ es $\mathcal{F}(s)$ -medible. Esto nos permite utilizar el Lema de Independencia (2.4.3). Para computar el valor esperado condicional del lado derecho de (2.25) reemplazamos $W(s)$ por una variable x para mantenerla constante y luego tomar el valor esperado sin condicionar de la variable aleatoria restante. Es decir, definimos $g(x) = \mathbb{E}[f(W(t) - W(s) + x)]$. Sabemos que $W(t) - W(s)$ tiene distribución normal con media cero y varianza $t - s$. Por lo tanto,

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega + x) e^{-\frac{\omega^2}{2(t-s)}} d\omega. \quad (2.26)$$

El Lema de Independencia nos dice que si tomamos la función $g(x)$ definida en (2.26) y reemplazamos la variable x por la variable aleatoria $W(s)$, la ecuación (2.24) se cumple. \square

2.7. Cálculo estocástico de Itô

2.7.1. Integral de Itô

Durante la segunda guerra mundial, en 1944, el matemático Kiyosi Itô publicó su artículo llamado Integral Estocástica [21] en la Universidad Imperial de Tokyo. Allí comenzó la historia del cálculo estocástico de Itô. Desde entonces el cálculo estocástico de Itô es una de las herramientas más útiles en matemática financiera ya que sirven para modelar precios de activos, tasas de interés, etc.

En esta sección definiremos y daremos las propiedades de la integral de Itô. Presentaremos también un resultado de gran utilidad para la valoración de derivados, el Lemma de Itô. Este lema presenta un resultado análogo a la regla de la cadena del cálculo determinístico desarrollado por Leibniz.

Definición 2.7.1. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, $\{\phi(t), t \geq 0\}$ un proceso estocástico y $\mathcal{F}(t)$ una filtración. Diremos que ϕ pertenece a la clase $L^2[a, b]$ si se satisfacen las siguientes condiciones:

a) $\int_a^b \mathbb{E}[\phi^2(s)] ds < \infty,$

b) el proceso ϕ es adaptado a la filtración $\mathcal{F}(t)$.

Notación 2.7.2. Diremos que ϕ pertenece a la clase L^2 si $\phi \in L^2[0, t]$ para todo $t > 0$.

Dado un número positivo T la integral de Itô busca darle sentido a la expresión:

$$\int_0^T \phi(t) dW(t),$$

donde W es un movimiento Browniano y $\mathcal{F}(t)$ la filtración generada por el mismo. Comenzaremos definiendo la integral de Itô cuando el integrando es un proceso simple $\phi(t)$, es decir, es constante a trozos y extenderemos la definición para el caso en que el integrando sea el límite de procesos simples.

Definición 2.7.3. Sea $\{W(t), t \geq 0\}$ es un movimiento Browniano y $\mathcal{F}(t)$ la filtración generada por el mismo. Sea $\Pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ una partición de $[0, T]$, es decir

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T.$$

Si ϕ es un proceso simple, es decir, es constante en cada intervalo $[t_j, t_{j+1})$ para $j = 0, \dots, n-1$ entonces la integral de Itô para un t tal que $t_k \leq t < t_{k+1}$ se define de la siguiente manera:

$$I(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \phi(t_j)[W(t_{j+1}) - W(t_j)] + \phi(t_k)[W(t) - W(t_k)]. \quad (2.27)$$

Notación 2.7.4. El proceso $I(t)$ en (2.27) es la integral de Itô para un proceso simple ϕ , y la denotaremos como

$$I(t) = \int_0^t \phi(u) dW(u). \quad (2.28)$$

A continuación definiremos la integral de Itô cuando el integrando es un proceso $\phi(t)$ adaptado a la filtración $\mathcal{F}(t)$. Asumiremos además ϕ pertenece a la clase L^2 . Aproximaremos el proceso $\phi(t)$ por procesos simples. En general, es posible elegir una sucesión $\phi_n(t)$ de procesos simples tal que cuando $n \rightarrow \infty$ este proceso converge a $\phi(t)$ es decir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\int_0^T |\phi_n(t) - \phi(t)|^2 dt \right] = 0 \quad (2.29)$$

Para cada $\phi_n(t)$, la integral de Itô $\int_0^t \phi_n(u) dW(u)$ está definida para $0 \leq t \leq T$.

Definición 2.7.5. Sea $\phi(t)$ un proceso adaptado a la filtración $\mathcal{F}(t)$ generada por un movimiento Browniano $W(t)$. Asumimos que ϕ pertenece a la clase L^2 . Sea ϕ_n una sucesión de funciones simples tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\int_0^T |\phi_n(t) - \phi(t)|^2 dt \right] = 0. \quad (2.30)$$

Definimos la integral de Itô de la siguiente manera:

$$\int_0^t \phi(u) dW(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \phi_n(u) dW(u), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.31)$$

donde las integrales del lado derecho están definidas en (2.27).

Teorema 2.7.6. Sea $I(t) = \int_0^t \phi(s) dW(s)$ definida como en (2.31) entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- (Continuidad) Como función del límite superior de integración t , las trayectorias de $I(t)$ son continuas.
- (Adaptabilidad) Para cada t , $I(t)$ es $\mathcal{F}(t)$ -medible.
- (Linealidad) Si $I(t) = \int_0^t \phi(s)dW(s)$ y $J(t) = \int_0^t \gamma(s)dW(s)$ entonces $I(t) \pm J(t) = \int_0^t (\phi(s) \pm \gamma(s))dW(s)$. Para cada constante c , $cI(t) = \int_0^t c\phi(s)dW(s)$.
- (Martingala) $I(t)$ es una martingala.
- (Isometría) $\mathbb{E}[I^2(t)] = \mathbb{E}[\int_0^t \phi^2(s)ds]$.

El siguiente teorema muestra que cuando tenemos una filtración generada por un movimiento Browniano, entonces toda martingala con respecto a esa filtración puede escribirse como una condición inicial más una integral de Itô respecto del movimiento Browniano.

Teorema 2.7.7. (Representación de martingala) Sea $\{W(t), 0 \leq t \leq T\}$ un movimiento Browniano en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y sea $\mathcal{F}(t)$ la filtración generada por el movimiento Browniano. Sea $\{M(t), 0 \leq t \leq T\}$ una martingala respecto de la filtración. Entonces existe un proceso adaptado $\{\Gamma(u), 0 \leq u \leq T\}$, tal que

$$M(t) = M(0) + \int_0^t \Gamma(u)dW(u), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.32)$$

2.7.2. Proceso estocástico de Itô

Definición 2.7.8. Sea $\{W(t), t \geq 0\}$ un movimiento Browniano y sea $\mathcal{F}(t)$ la filtración asociada. Un proceso estocástico $\{X(t); t \geq 0\}$ se dice proceso de Itô si es de la forma:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dW(s) \quad t \geq 0, \quad (2.33)$$

donde $\{a(t), t \geq 0\}$, $\{b(t), t \geq 0\}$ son procesos estocásticos adaptados con $b \in L^2$, la primera integral es una integral de Lebesgue y la segunda integral es una integral de Itô.

Usualmente para expresar los procesos de Itô se utiliza una notación, llamada notación diferencial donde se expresa el proceso de Itô de la siguiente manera:

$$dX(t) = a(t)dt + b(t)dW(t), \quad \text{con } X(0) = X_0$$

Este tipo de ecuaciones son llamadas ecuaciones diferenciales estocásticas donde el término que acompaña a dt es conocido como drift y el término que acompaña a $dW(t)$ como difusión. Se conoce como solución de la ecuación diferencial estocástica al proceso de Itô $X(t)$ definido en (2.33).

El siguiente Teorema nos da las condiciones que debe cumplir el drift y la difusión para que la ecuación (2.33) esté bien definida.

Teorema 2.7.9. Consideremos la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dX(t) = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \quad X(0) = X_0, \quad (2.34)$$

con $\mu : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Asumimos que existe una constante K tal que para todo $t \in [0, T]$ y para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple

$$\begin{aligned} |\mu(t, x) - \mu(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| &\leq K|x - y|, \\ |\mu(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 &\leq K^2(1 + |x|^2). \end{aligned} \quad (2.35)$$

La primera es llamada condición de Lipchitz y la segunda condición de crecimiento. Entonces existe una única solución de (2.34).

El siguiente Lema es un importante resultado en la teoría del cálculo estocástico. La también llamada Formula de Itô es análoga a la regla de la cadena en la teoría de Newton-Leibnitz. Este resultado lo utilizaremos numerosas veces a lo largo del trabajo ya que es de gran utilidad para la valoración de derivados. La demostración puede encontrarse en [33].

Lema 2.7.10. (*Lema de Itô*): Sea $u = u(t, x)$, una función continua definida $u : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con derivadas parciales u_t , u_x , u_{xx} continuas en $[0, \infty) \times \mathbb{R}$. Si $X(t)$ es un proceso estocástico de Itô:

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dW(t) \quad t > 0,$$

donde $\{a(t), t \geq 0\}$, $\{b(t), t \geq 0\}$ son procesos estocásticos adaptados con $b \in L^2$. Entonces $Y(t) = u(t, X(t))$ es un proceso de Itô cuya ecuación diferencial estocástica está dada por:

$$\begin{aligned} dY(t) &= u_t(t, X(t))dt + u_x(t, X(t))dX(t) + \frac{1}{2}u_{xx}(t, X(t))(dX(t))^2 \\ &= u_t(t, X(t))dt + u_x(t, X(t))dX(t) + \frac{1}{2}u_{xx}(t, X(t))b(t, X(t))^2 dt \\ &= \left(u_t(t, X(t)) + u_x(t, X(t))a(t, X(t)) + \frac{1}{2}u_{xx}(t, X(t))b(t, X(t))^2 \right) dt + u_x(t, X(t))b(t, X(t))dW(t). \end{aligned}$$

El siguiente resultado nos dice que bajo ciertas hipótesis podemos expresar la solución de una ecuación diferencial estocástica como el valor esperado de una función de un proceso estocástico.

Teorema 2.7.11. (*Feynman Kac*) Sean μ y σ funciones continuas que satisfacen la condición de Lipschitz, es decir existe un K tal que para todo $t \in [0, T]$ y para todo $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|\mu(t, x) - \mu(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|. \quad (2.36)$$

Sea Φ una función diferenciable y sea F la solución de la siguiente ecuación diferencial con condición de borde:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) + \mu(t, x)\frac{\partial F}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, x)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, x) - rF(t, x) = 0 \quad (2.37)$$

$$F(T, x) = \Phi(x). \quad (2.38)$$

Asumamos además que el proceso $e^{-rs}\sigma(s, X(s))\frac{\partial F}{\partial x}(s, X(s))$ pertenece a L^2 donde X satisface

$$dX(s) = \mu(s, X(s))ds + \sigma(s, X(s))dW(s) \quad (2.39)$$

$$X(t) = x. \quad (2.40)$$

Entonces F satisface

$$F(t, x) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}[\Phi(X(T))|\mathcal{F}(t)]. \quad (2.41)$$

2.8. Teorema de Girsanov

El siguiente teorema, el teorema de Girsanov, describe cómo cambia la dinámica de los procesos estocásticos cuando la medida original se cambia a una medida de probabilidad equivalente. Para construir la medida de probabilidad equivalente se utiliza el ya mencionado Teorema de Radon-Nikodym (2.2.3).

Teorema 2.8.1. (*Girsanov*) Sea $\{W(t); 0 \leq t \leq T\}$ un movimiento Browniano en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y $\mathcal{F}(t)$ la filtración para ese movimiento Browniano. Sea $\{\Theta(t); 0 \leq t \leq T\}$ un proceso adaptado a la filtración. Definimos

$$Z(t) = \exp\left(-\int_0^t \Theta(u)dW(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \Theta^2(u)du\right), \quad (2.42)$$

$$\tilde{W}(t) = W(t) + \int_0^t \Theta(u)du, \quad (2.43)$$

y asumimos que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \Theta^2(u)Z^2(u)du\right] < \infty. \quad (2.44)$$

Entonces $\mathbb{E}[Z(T)] = 1$ y bajo la medida de probabilidad definida por

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A Z(w)d\mathbb{P}(w) \quad \text{para todo } A \in \mathcal{F}, \quad (2.45)$$

el proceso $\{\tilde{W}(t); 0 \leq t \leq T\}$ es un movimiento Browniano.

Observación 2.8.2. A continuación aplicaremos el Lema de Itô (2.7.10) para calcular la ecuación diferencial de $Z(t)$.

Sea $dX(t) = -\frac{1}{2}\Theta^2(u)du - \Theta(u)dW(u)$. Tenemos entonces que $Z(t) = e^{X(t)}$. Sea $f(t, x) = e^x$, calculemos a continuación las derivadas respecto de t y x necesarias para aplicar el lema:

$$f_t(t, x) = 0 \quad f_x(t, x) = e^x \quad f_{xx}(t, x) = e^x. \quad (2.46)$$

Tenemos entonces que

$$dZ(t) = \left(0 - Z(t)\frac{1}{2}\Theta^2(t) + \frac{1}{2}Z(t)\Theta^2(t)\right) dt - Z(t)\Theta(t)dW(t) \quad (2.47)$$

$$= -Z(t)\Theta(t)dW(t). \quad (2.48)$$

Notemos que $Z(t)$ es una martingala en la medida \mathbb{P} por lo tanto el término del drift es cero.

2.9. Variación cuadrática

Definición 2.9.1. Sea $f(t)$ una función definida para $0 \leq t \leq T$. La variación cuadrática de f hasta el tiempo T , la cual denotaremos con $[f, f](T)$ está dada por

$$[f, f](T) = \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} (f(t_{j+1}) - f(t_j))^2, \quad (2.49)$$

donde $\Pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ y $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$.

Teorema 2.9.2. Sea $\{W(t), t \geq 0\}$ un movimiento Browniano. Entonces $[W, W](T) = T$ para todo $T \geq 0$ salvo conjunto de medida nula.

Demostración. Sea $\Pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ una partición de $[0, T]$. Definimos una muestra de variación cuadrática correspondiente a esta partición como

$$Q_\Pi = \sum_{j=0}^{n-1} (W(t_{j+1}) - W(t_j))^2. \quad (2.50)$$

Debemos mostrar que esta muestra de variación cuadrática, la cual es una variable aleatoria, converge a T cuando $|\Pi| \rightarrow 0$. Debemos mostrar que tiene valor esperado T y su varianza converge a cero. Con ello probaremos que converge en media cuadrática y por lo tanto la convergencia vale cualesquiera sea la partición que estemos considerando.

La muestra de variación cuadrática es suma de variables aleatorias independientes. Por lo tanto el valor esperado y la varianza son sumas de los valores esperados y de las varianzas de estas variables. Tenemos entonces

$$\mathbb{E}[(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2] = \text{Var}[W(t_{j+1}) - W(t_j)] = t_{j+1} - t_j, \quad (2.51)$$

lo cual implica

$$E[Q_\Pi] = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}[(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2] = \sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1} - t_j) = T. \quad (2.52)$$

Calcularemos a continuación la varianza

$$\begin{aligned} \text{Var}[(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2] &= \mathbb{E}[(W(t_{j+1}) - W(t_j))^4 - 2(t_{j+1} - t_j)(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2 + (t_{j+1} - t_j)^2] \\ &= \mathbb{E}[(W(t_{j+1}) - W(t_j))^4] - 2(t_{j+1} - t_j)\mathbb{E}[(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2] + (t_{j+1} - t_j)^2. \end{aligned}$$

A continuación utilizaremos la propiedad de que el cuarto momento de una variable aleatoria con media cero es tres veces su varianza al cuadrado

$$\mathbb{E}[(W(t_{j+1}) - W(t_j))^4] = 3(t_{j+1} - t_j)^2,$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2] &= 3(t_{j+1} - t_j)^2 - 2(t_{j+1} - t_j)^2 + (t_{j+1} - t_j)^2 \\ &= 2(t_{j+1} - t_j)^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned} \text{Var}[Q_\Pi] &= \sum_{j=0}^{n-1} \text{Var}[(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2] \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} 2(t_{j+1} - t_j)^2 \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} 2|\Pi|(t_{j+1} - t_j) = 2|\Pi|T \end{aligned}$$

En particular, $\lim_{|\Pi| \rightarrow 0} \text{Var}[Q_\Pi] = 0$ y concluimos que $\lim_{|\Pi| \rightarrow 0} Q_\Pi = \mathbb{E}[Q_\Pi] = T$. \square

Teorema 2.9.3. *La variación cuadrática hasta el tiempo t de la integral de Itô $I(t) = \int_0^t \phi(s)dW(s)$ está dada por*

$$[I, I](t) = \int_0^t \phi^2(u)du. \quad (2.53)$$

Demostración. Calcularemos primero la variación cuadrática para la integral de Itô en uno de los subintervalos $[t_j, t_{j+1}]$ en donde $\phi(u)$ es constante. Para ello, elegimos una partición $t_j = s_0 < s_1 < \dots < s_m = t_{j+1}$, y consideraremos

$$\sum_{i=0}^{m-1} (I(s_{i+1}) - I(s_i))^2 = \sum_{i=0}^{m-1} (\phi(t_j)(W(s_{i+1}) - W(s_i)))^2 \quad (2.54)$$

$$= \phi^2(t_j) \sum_{i=0}^{m-1} (W(s_{i+1}) - W(s_i))^2. \quad (2.55)$$

Cuando $m \rightarrow \infty$ y el tamaño del paso $\max_{i=0, \dots, m-1} (s_{i+1} - s_i)$ se aproxima a cero, el término $\sum_{i=0}^{m-1} (W(s_{i+1}) - W(s_i))^2$ converge a la variación cuadrática del movimiento Browniano entre t_j y t_{j+1} la cuál es $t_{j+1} - t_j$. Por lo tanto el límite de (2.54), lo cual es la variación cuadrática de la integral de Itô entre t_j y t_{j+1} , es

$$\phi^2(t_j)(t_{j+1} - t_j) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \phi^2(u)du,$$

donde nuevamente utilizamos el hecho que $\phi(u)$ es constante para $t_j \leq u < t_{j+1}$. Análogamente la variación cuadrática entre t_k y t es $\int_{t_k}^t \phi^2(u)du$. Sumando todas las partes obtenemos (2.53). \square

Teorema 2.9.4. *Sea $X(t)$ un proceso de Itô definido como en (2.33). La variación cuadrática del proceso de Itô, $[X, X](t)$, está dada por:*

$$[X, X](t) = \int_0^t b^2(u)du. \quad (2.56)$$

Demostración. Llamaremos $R(t) = \int_0^t a(u)du$ e $I(t) = \int_0^t b(u)dW(u)$. Para determinar la variación cuadrática de X en $[0, t]$, elegimos una partición $\Pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ de $[0, t]$, es decir, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ y escribimos una muestra de variación cuadrática de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} [X(t_{j+1}) - X(t_j)]^2 &= \sum_{j=0}^{n-1} [I(t_{j+1}) - I(t_j)]^2 + \sum_{j=0}^{n-1} [R(t_{j+1}) - R(t_j)]^2 \\ &\quad + 2 \sum_{j=0}^{n-1} [I(t_{j+1}) - I(t_j)][R(t_{j+1}) - R(t_j)]. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Cuando $\|\Pi\| \rightarrow 0$, el primer término del lado derecho, $\sum_{j=0}^{n-1} [I(t_{j+1}) - I(t_j)]^2$ converge a la variación cuadrática de I en $[0, t]$, que de acuerdo al Teorema (2.9.3) es $[I, I](t) = \int_0^t b^2(s)ds$. El

valor absoluto del segundo término está acotado por lo siguiente

$$\begin{aligned}
\max_{0 \leq k \leq n-1} |R(t_{k+1}) - R(t_k)| \sum_{j=0}^{n-1} |R(t_{j+1}) - R(t_j)| &= \max_{0 \leq k \leq n-1} |R(t_{k+1}) - R(t_k)| \sum_{j=0}^{n-1} \left| \int_{t_j}^{t_{j+1}} a(u) du \right| \\
&\leq \max_{0 \leq k \leq n-1} |R(t_{k+1}) - R(t_k)| \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} |a(u)| du \\
&= \max_{0 \leq k \leq n-1} |R(t_{k+1}) - R(t_k)| \int_0^t |a(u)| du
\end{aligned}$$

y cuando $\|\Pi\| \rightarrow 0$ esto tiene límite $0 \int_0^t |a(u)| du = 0$ debido a que $R(t)$ es continua.

El valor absoluto del tercer término está acotado de la siguiente manera

$$2 \max_{0 \leq k \leq n-1} |I(t_{k+1}) - I(t_k)| \sum_{j=0}^{n-1} |R(t_{j+1}) - R(t_j)| \leq 2 \max_{0 \leq k \leq n-1} |I(t_{k+1}) - I(t_k)| \int_0^t |a(u)| du,$$

y esto tiene límite $0 \int_0^t |a(u)|^2 du = 0$ cuando $\|\Pi\| \rightarrow 0$ debido a que $I(t)$ es continua.

Por lo tanto concluimos que $[X, X](t) = [I, I](t) = \int_0^t b^2(u) du$. □

Teorema 2.9.5. Sean $X(t)$ e $Y(t)$ dos procesos de Itô dados por

$$\begin{aligned}
X(t) &= X(0) + \int_0^t a(u) du + \int_0^t b(u) dW(u) \\
Y(t) &= Y(0) + \int_0^t c(u) du + \int_0^t d(u) dW(u)
\end{aligned}$$

Entonces para todo $T \geq 0$, la variación cuadrática entre X e Y está dada por

$$[X, Y](T) = \int_0^T b(u) d(u) du$$

Demostración. El término $[X, Y](T)$ en el lado izquierdo de la ecuación se define de la siguiente manera. Sea $\Pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ una partición de $[0, T]$, es decir $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$. La variación cuadrática entre ambos procesos estocásticos está dada por

$$\sum_{k=0}^{n-1} [X(t_{k+1}) - X(t_k)][Y(t_{k+1}) - Y(t_k)].$$

Ahora hacemos tender el número de puntos de la partición a infinito y la longitud del intervalo más largo $\|\Pi\| = \max_{0 \leq k \leq n-1} (t_{k+1} - t_k)$ tiende a cero. El límite de la suma (2.9) es $[X, Y](T)$. El límite está dado por el lado derecho de (2.9.5). La prueba de esta última afirmación es similar a la prueba del teorema anterior. □

2.10. Integral de Stratonovich

La integral de Stratonovich es una integral estocástica que a diferencia de la integral de Itô considera los puntos medios de la partición para su definición. La construcción se realiza de la misma manera que la de la integral de Itô, es decir primero se define para procesos simples y luego se extiende para procesos adaptados que pertenecen a la clase L^2 .

Definición 2.10.1. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Sea $[0, T]$ un intervalo y consideremos la siguiente partición $\Pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ del intervalo $[0, T]$. Sea $t_i^* = (t_i + t_{i+1})/2$ $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Sean $\{W(t), t \geq 0\}$ un movimiento Browniano y $\{\phi(t), t \geq 0\}$ un proceso simple, es decir es constante en cada intervalo $[t_j, t_{j+1})$ para $j = 0, \dots, n-1$. Definimos la integral de Stratonovich para $t \in [t_k, t_{k+1})$ de la siguiente manera

$$J(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \phi(t_j^*) [W(t_{j+1}) - W(t_j)] + \phi(t_k^*) [W(t) - W(t_k)] \quad (2.58)$$

Notación 2.10.2. El proceso $J(t)$ en (2.60) es la integral de Stratonovich para un proceso simple $\phi(t)$ y la denotaremos como

$$J(t) = \int_0^t \phi(u) \circ dW(u). \quad (2.59)$$

A continuación generalizamos la definición de la integral de Stratonovich cuando el integrando es un proceso adaptado a la filtración.

Definición 2.10.3. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Sea $[0, T]$ un intervalo y consideremos la siguiente partición $\Pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ del intervalo $[0, T]$ y sea $t_i^* = (t_i + t_{i+1})/2$ $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Sean $\{W(t), t \geq 0\}$ un movimiento Browniano y $\{\phi(t), t \geq 0\}$ un proceso adaptado a la filtración asociada al movimiento Browniano. Asumimos que $\phi(t)$ pertenece a la clase L^2 y que existe una sucesión de procesos simples $\phi_n(t)$ tal que se cumple (2.30). Definimos la integral de Stratonovich de la siguiente manera

$$\int_0^t \phi(u) \circ dW(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \phi_n(u) \circ dW(u), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.60)$$

donde las integrales del lado derecho están definidas en (2.59).

A continuación introducimos la relación existente entre la integral de Itô y la integral de Stratonovich.

Observación 2.10.4. Si $\{X(t); t \leq 0\}$ es un proceso de Itô de la siguiente manera:

$$dX(t) = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \quad (2.61)$$

entonces esta ecuación diferencial estocástica en términos de la integral de Stratonovich queda expresada de la siguiente manera:

$$dX(t) = (\mu(t, X(t)) + [X, X](t))dt + \sigma(t, X(t)) \circ dW(t), \quad (2.62)$$

donde \circ denota la integral de Stratonovich y $[X, X](t)$ está definido como en (2.56).

2.11. Cálculo estocástico multidimensional

En esta sección extenderemos los resultados principales a varias dimensiones. En ocasiones por simplicidad nos referiremos al caso unidimensional pero en la práctica rara vez nos encontramos con problemas en una sola dimensión. Consideraremos un movimiento Browniano multidimensional definido de la siguiente manera:

Definición 2.11.1. *Un movimiento Browniano d -dimensional es un proceso estocástico*

$$W(t) = (W_1(t), \dots, W_d(t))$$

con las siguientes propiedades

- Cada $W_i(t)$ es un movimiento Browniano.
- Para cada t fijo e $i \neq j$ las variables aleatorias $W_i(t)$ y $W_j(t)$ son independientes.

Definición 2.11.2. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad en el cual está definido un movimiento Browniano d -dimensional $\{W(t), t \geq 0\}$. Una filtración generada por el movimiento Browniano o la filtración asociada a un movimiento Browniano d -dimensional es una colección de σ -álgebras $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ que satisface:*

- (Acumulación de Información) Para $0 \leq s < t$, todo conjunto en $\mathcal{F}(s)$ está también en $\mathcal{F}(t)$.
- (Adaptabilidad) Para cada $t \geq 0$ el vector de movimientos Brownianos en el tiempo t , $W(t)$, es $\mathcal{F}(t)$ -medible.
- (Independencia de incrementos futuros) Para $0 \leq t < u$ el vector de incrementos $W(u) - W(t)$ es independiente de $\mathcal{F}(t)$.

Extenderemos los resultados obtenidos en el Teorema de representación de Martingalas para el caso multidimensional.

Teorema 2.11.3. (Representación de martingala multidimensional) *Sea $W = (W_1, \dots, W_d)$ un movimiento Browniano d -dimensional, $\mathcal{F}(t)$ la filtración asociada al movimiento Browniano. Sea $\{M(t), 0 \leq t \leq T\}$ una martingala con respecto a la filtración. Entonces existe un proceso adaptado d -dimensional $\Gamma(u) = (\Gamma_1(u), \dots, \Gamma_d(u))$, $0 \leq u \leq T$ tal que*

$$M(t) = M(0) + \int_0^t \Gamma(u) dW(u), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.63)$$

A continuación daremos la versión multidimensional del teorema (2.7.9) el cuál da las condiciones para que la ecuación (2.33) esté bien definida.

Teorema 2.11.4. *Consideremos la siguiente ecuación diferencial estocástica*

$$dX(t) = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \quad X(0) = X_0, \quad (2.64)$$

con $\mu : [0, T] \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$, $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{p \times d}$. Asumimos que existe una constante K tal que para todo $t \in [0, T]$ y para todo $x, y \in \mathbb{R}^p$ se cumple

$$\begin{aligned} |\mu(t, x) - \mu(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| &\leq K|x - y|, \\ |\mu(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 &\leq K^2(1 + |x|^2). \end{aligned} \quad (2.65)$$

La primera es llamada condición de Lipchitz y la segunda condición de crecimiento. Entonces existe una única solución de (2.64).

Teorema 2.11.5. (Girsanov multidimensional) Sea T un número real positivo y sea $\Theta(t) = (\Theta_1(t), \dots, \Theta(t))$ un proceso d -dimensional adaptado. Definimos

$$Z(t) = \exp\left(-\int_0^t \Theta(u)dW(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \|\Theta(u)\|^2 du\right) \quad (2.66)$$

$$\tilde{W}_j(t) = W_j(t) + \int_0^t \Theta_j(u)du, \quad j = 1, \dots, d \quad (2.67)$$

y asumimos que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \|\Theta(u)\|^2 Z^2(u)du\right] < \infty. \quad (2.68)$$

Sea $Z = Z(T)$. Entonces $\mathbb{E}[Z] = 1$, y bajo la medida de probabilidad $\tilde{\mathbb{P}}$ dada por

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A Z(\omega)d\mathbb{P}(\omega) \quad A \in \mathcal{F}, \quad (2.69)$$

el proceso $\tilde{W}(t) = (\tilde{W}_1(t), \dots, \tilde{W}_d(t))$ es un movimiento Browniano d -dimensional.

Observación 2.11.6. La integral de Itô en (2.66) está dada por

$$\int_0^t \Theta(u)dW(u) = \int_0^t \sum_{j=1}^d \Theta_j(u)dW_j(u) = \sum_{j=1}^d \int_0^t \Theta_j(u)dW_j(u). \quad (2.70)$$

También en (2.66), $\|\Theta(u)\|$ denota la norma Euclidea y está dada por

$$\|\Theta(u)\| = \left(\sum_{j=1}^d \Theta_j^2(u)\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.71)$$

Capítulo 3

Introducción a la Valoración de Derivados

En este capítulo formalizaremos matemáticamente los conceptos financieros presentados en el Capítulo 1. Describiremos la dinámica que asumiremos para un portfolio y definiremos las diferentes medidas que nos permitirán reducir los cálculos a la hora de valorar un derivado. En las dos últimas secciones nos centramos en la valoración de caplets y swaptions.

3.1. Dinámica de un portfolio

Consideremos un horizonte temporal $T > 0$, un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}_0)$, un movimiento Browniano d -dimensional $W(t) = (W_1(t), \dots, W_d(t))$ y $\mathcal{F}(t)$ una filtración asociada al movimiento Browniano. Asumamos que estamos en una economía que no paga dividendos y que los activos son comercializados en tiempo continuo desde 0 hasta T . El precio de estos activos será modelado por un proceso $K+1$ dimensional adaptado $S = \{S(t) : 0 \leq t \leq T\}$ donde $S(t) = (S_0(t), S_1(t), \dots, S_K(t))$ cuyas componentes $\{S_j\}$ con $j = 1, \dots, K$ son procesos estocásticos no negativos. Consideraremos que el primer activo es la cuenta de moneda y la dinámica de precio está dada por

$$dS_0(t) = r(t)S_0(t)dt \quad (3.1)$$

con $S_0(0) = 1$ y $r(t)$ la tasa instantánea a corto plazo en el tiempo t . En la notación del Capítulo 1 tenemos que $S_0(t) = B(t)$.

Definición 3.1.1. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}_0)$ y $\mathcal{F}(t)$ una filtración. Diremos que el proceso $\phi = \{\phi(t), 0 \leq t \leq T\}$ es predecible si $\phi : \Omega \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ es medible con respecto a la σ -álgebra generada por todos los procesos adaptados continuos a izquierda.

Notación 3.1.2. Si S sigue la siguiente dinámica

$$dS(t) = \mu(t, x)dt + \sigma(t, x)dW(t). \quad (3.2)$$

Entonces cuando escribamos $\int_0^t \phi(u)dS(u)$ nos estaremos refiriendo a lo siguiente:

$$\int_0^t \phi(u)dS(u) = \int_0^t \phi(u)[\mu(t, u)dt + \sigma(t, u)dW(t)] = \int_0^t \phi(u)\mu(t, u)dt + \int_0^t \phi(u)\sigma(t, u)dW(t). \quad (3.3)$$

Definición 3.1.3. Un portfolio es un proceso adaptado $K+1$ -dimensional $\phi = \{\phi(t), 0 \leq t \leq T\}$ cuyas componentes $\phi(t) = (\phi_0(t), \phi_1(t), \dots, \phi_K(t))$ son predecibles. El valor del proceso asociado a la estrategia ϕ está definido por

$$V(\phi(t)) = \phi(t)S(t) = \sum_{k=0}^K \phi_t^k S_t^k \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.4)$$

y el proceso de ganancias asociado a la estrategia ϕ está dado por

$$G(\phi(t)) = \int_0^t \phi(u) dS(u) \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.5)$$

Diremos que un portfolio es autofinanciante si su valor solo se modifica debido a cambio de precios del activo, en otras palabras no tenemos aportes o retiros de dinero luego del tiempo inicial de la estrategia. Esto se traduce matemáticamente en la siguiente definición:

Definición 3.1.4. Un portfolio ϕ es autofinanciante si

$$V(\phi(t)) = V(\phi(0)) + G(\phi(t)) \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.6)$$

Observación 3.1.5. El precio de cualquiera de nuestros $K + 1$ activos $S_j(t)$ con $j = 0, \dots, K$ es un portfolio autofinanciante ya que

$$S_j(t) = S_j(0) + \int_0^t dS_j = S_j(0) + S_j(t) - S_j(0). \quad (3.7)$$

3.2. Hipótesis de no arbitraje

El concepto de arbitraje que introducimos de forma coloquial en el primer capítulo se puede traducir matemáticamente de la siguiente manera.

Definición 3.2.1. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}_0)$ un espacio de probabilidad, ϕ un portfolio autofinanciante y V definido como en la Definición 3.1.3. Decimos que un portfolio es un arbitraje si $V(\phi(0)) = 0$ y en $T > 0$ tenemos que $\mathbb{Q}_0(V(\phi(T)) > 0) > 0$ y $\mathbb{Q}_0(V(\phi(T)) < 0) = 0$ ó $\mathbb{Q}_0(V(\phi(T)) < 0) > 0$ y $\mathbb{Q}_0(V(\phi(T)) = 0) = 0$.

A continuación queremos caracterizar las condiciones bajo las cuales podemos considerar que nuestra economía es libre de arbitraje. Esto nos lleva a presentar el concepto de deflator y de medidas equivalentes de martingala.

Definición 3.2.2. Llamaremos deflator π a un proceso de Itô estrictamente positivo.

Un deflator se utiliza para normalizar un proceso de precios, si $\pi(t)$ es un deflator y $S(t)$ es un proceso de precios entonces el proceso de precios normalizado está dado por $S^\pi(t) = \left(\frac{S_1(t)}{\pi(t)}, \dots, \frac{S_p(t)}{\pi(t)} \right)$.

Definición 3.2.3. Una medida equivalente de martingala \mathbb{Q}^π respecto de \mathbb{Q}_0 inducida por el deflator π es una medida de probabilidad en el espacio (Ω, \mathcal{F}) tal que:

- \mathbb{Q}^π y \mathbb{Q}_0 son medidas equivalentes, esto es si $\mathbb{Q}_0(A) = 0$ si y solo si $\mathbb{Q}^\pi(A) = 0$ para todo $A \in \mathcal{F}$.
- La derivada de Radon-Nikodym $d\mathbb{Q}^\pi/d\mathbb{Q}_0$ pertenece a la clase $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}_0)$.
- El proceso normalizado $S^\pi(t) = \frac{S(t)}{\pi(t)}$ es una martingala respecto de la medida \mathbb{Q}^π , esto es $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\pi}[S^\pi(t)|\mathcal{F}(u)] = S^\pi(u)$ para todo $0 \leq u \leq t \leq T$ donde $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\pi}$ denota el valor esperado bajo la medida \mathbb{Q}^π .

El siguiente resultado probado por Musiela y Rutkowski [31] nos muestra la importancia de la existencia de medidas de martingala equivalentes

Teorema 3.2.4. *Sea π un deflator, si existe una medida de martingala equivalente \mathbb{Q}^π inducida por π entonces el mercado es libre de arbitraje.*

3.3. Numerarios

Al comenzar este capítulo establecimos que nuestra economía estaba constituida por $K + 1$ activos. Si consideramos como deflator a una estrategia autofinanciante entonces este recibe el nombre de numerario. Un numerario puede verse como un activo de referencia o una combinación de activos que se toma como unidad de medida. Elegido un numerario N en vez de considerar el proceso de precios S consideraremos el proceso de precios normalizados S/N .

Definición 3.3.1. *Sea π un deflator, diremos que π es un numerario si $\pi = S^j$ para algún $0 \leq j \leq K$ ó $\pi = V(\phi(t))$ donde ϕ es un portfolio autofinanciante definido como en (3.6).*

Observación 3.3.2. *No podemos utilizar como numerario las tasas de interés, índices bursátiles o activos que repartan dividendos.*

El teorema de Radon-Nikodym es una herramienta fundamental para poder cambiar de medida para cada elección de un numerario.

Lema 3.3.3. *Sea N un numerario y π un deflator tal que $N(t)/\pi(t)$ es una martingala en la medida \mathbb{Q}^π . Entonces en la medida \mathbb{Q}^N definida utilizando la siguiente densidad de Radon-Nikodym*

$$Z(t) = (N(t)/\pi(t))/(N(0)/\pi(0)) \quad (3.8)$$

se cumple

$$N(t)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^N} \left[\frac{Y(T)}{N(T)} | \mathcal{F}(t) \right] = \pi(t)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\pi} \left[\frac{Y(T)}{\pi(T)} | \mathcal{F}(t) \right]. \quad (3.9)$$

Demostración. Para cualquier variable $Y(T)$ que sea $\mathcal{F}(T)$ -medible tenemos, utilizando el Lema (2.5.5) tenemos la siguiente relación:

$$N(t)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^N} \left[\frac{Y(T)}{N(T)} | \mathcal{F}(t) \right] = N(t)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\pi} \left[\frac{Y(T)}{N(T)} \frac{Z(T)}{Z(t)} | \mathcal{F}(t) \right] \quad (3.10)$$

$$= N(t)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\pi} \left[\frac{Y(T)}{N(T)} \frac{N(T)\pi(t)}{\pi(T)N(t)} | \mathcal{F}(t) \right] \quad (3.11)$$

$$= \pi(t)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\pi} \left[\frac{Y(T)}{\pi(T)} | \mathcal{F}(t) \right]. \quad (3.12)$$

□

3.4. Valoración de derivados y mercados completos

En esta sección veremos como se establece el precio de un derivado en un tiempo anterior a su vencimiento asumiendo que estamos en un mercado libre de arbitraje y completo.

Definición 3.4.1. *Un contingent claim es un contrato financiero cuyo payoff en T es una variable aleatoria $X(T)$ $\mathcal{F}(T)$ -medible con varianza finita.*

Observación 3.4.2. *Los derivados son contingent claim.*

Definición 3.4.3. *Diremos que un contingent claim es replicable si existe un portfolio autofinanciante ϕ talque*

$$X(T) = \phi(T)S(T) = V(\phi(T)). \quad (3.13)$$

Denotaremos con $X(t)$ al valor del contingent claim en $0 \leq t \leq T$. Bajo la hipótesis de no arbitraje tenemos que el valor en $t = 0$ del contingent claim debe ser igual al valor del portfolio autofinanciante en $t = 0$, es decir

$$X(0) = V(\phi(0)), \quad (3.14)$$

más generalmente tenemos que para todo $t \in [0, T]$ se debe cumplir

$$X(t) = V(\phi(t)). \quad (3.15)$$

Es por esto que la hipótesis de no arbitraje es fundamental a la hora de valorar derivados ya que permite obtener el precio en $t = 0$ calculando el valor esperado bajo una medida de martingala equivalente como veremos a continuación.

Sea $X(T)$ un contingent claim. Consideremos π un deflator y asumamos la existencia de una medida de martingala equivalente \mathbb{Q}^π inducida por π . La existencia de esta medida garantiza la ausencia de arbitraje en el mercado. Luego, por la propiedad de martingala de $\frac{V(\phi(t))}{\pi(t)}$ en la medida \mathbb{Q}^π

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\pi} \left[\frac{X(T)}{\pi(T)} \mid \mathcal{F}(t) \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\pi} \left[\frac{V(\phi(T))}{\pi(T)} \mid \mathcal{F}(t) \right] = \frac{V(\phi(t))}{\pi(t)}. \quad (3.16)$$

Definición 3.4.4. *Definiremos el valor libre de arbitraje en $0 \leq t \leq T$ del contingent claim como $X(t) = V(\phi(t))$.*

Definición 3.4.5. *El mercado se dice completo si todo contingent claim se puede replicar.*

Teorema 3.4.6. *En ausencia de arbitraje, el mercado es completo si y solo si existe un deflator que induce una única medida de martingala.*

Observación 3.4.7. *Del Teorema (3.4.6) y la ecuación (3.9) se sigue que en un mercado completo y sin arbitraje el precio de un derivado es único independientemente del numerario que se considere.*

En las aplicaciones posteriores elegiremos el numerario de tal forma que se simplifique los cálculos. El siguiente resultado será una herramienta útil a la hora de cambiar de numerario.

Proposición 3.4.8. *Asumamos la existencia de un numerario N y de una medida de martingala \mathbb{Q}^N equivalente a una medida inicial \mathbb{Q}_0 , es decir si S es un activo en el mercado tenemos*

$$\frac{S(t)}{N(t)} = \mathbb{E}^N \left[\frac{S(T)}{N(T)} | \mathcal{F}(t) \right] \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.17)$$

Sea U un numerario arbitrario. Entonces existe una medida \mathbb{Q}^U , equivalente a la inicial \mathbb{Q}_0 , tal que el precio de cualquier contingent claim $Y(T)$ normalizado por U es una martingala bajo \mathbb{Q}^U , es decir,

$$\frac{Y(t)}{U(t)} = \mathbb{E}^U \left[\frac{Y(T)}{U(T)} | \mathcal{F}(t) \right] \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.18)$$

Demostración. Se sigue de la ecuación (3.9). □

Teorema 3.4.9. *Consideremos dos numerarios $N(t)$ y $U(t)$ y las medidas \mathbb{Q}^N y \mathbb{Q}^U inducidas por $N(t)$ y $U(t)$. Si el mercado es completo entonces la densidad de la derivada de Radon Nikodym que relaciona las dos medidas es única y está dada por*

$$Z(t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^N} \left[\frac{d\mathbb{Q}^U}{d\mathbb{Q}^N} | \mathcal{F}(t) \right] = \frac{U(T)N(0)}{U(0)N(T)}. \quad (3.19)$$

3.5. Medidas

Como mencionamos en la Observación (3.4.7), asumiendo que estamos en un mercado completo y en ausencia de arbitraje tenemos que el valor de un derivado $X(t)$ definido como en la definición (3.4.4) es el mismo en las distintas medidas de martingalas equivalentes inducidas por el numerario que estemos considerando. En esta sección presentaremos los distintos numerarios que consideraremos a lo largo del trabajo. Comenzaremos considerando como numerario la cuenta de moneda, los bonos y combinaciones de bonos como definiremos en esta sección.

Para definir las diferentes medidas de probabilidad equivalentes consideraremos $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}_0)$ un espacio de probabilidad, un movimiento Browniano K -dimensional $W(t) = (W_1(t), \dots, W_d(t))$, $\mathcal{F}(t)$ una filtración asociada al movimiento Browniano y se $X(T)$ un contingent claim. Recordemos que notamos con $P(t, T)$ al precio del bono cupón cero en el tiempo t con vencimiento en T .

Definición 3.5.1. *Definimos la medida neutral al riesgo \mathbb{Q}^B como la medida inducida por la cuenta de moneda $B(t)$.*

Denotando con $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^B}$ el valor esperado condicional con respecto a la filtración $\mathcal{F}(t)$ bajo la medida \mathbb{Q}^B tenemos que $X(t)/B(t)$ es una martingala bajo la medida \mathbb{Q}^B . Se cumple que, para todo $t \leq T$,

$$X(t) = B(t) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^B} \left[\frac{X(T)}{B(T)} | \mathcal{F}(t) \right]. \quad (3.20)$$

Definición 3.5.2. *La medida T -forward \mathbb{Q}^T es la medida inducida por $P(t, T)$.*

Denotando con \mathbb{E}^T el valor esperado condicional con respecto a la filtración $\mathcal{F}(t)$ bajo la medida \mathbb{Q}^T tenemos que $X(t)/P(t, T)$ es una martingala bajo la medida \mathbb{Q}^T . Cumple que, para todo $t \leq T$,

$$X(t) = P(t, T) \mathbb{E}^T \left[\frac{X(T)}{P(T, T)} | \mathcal{F}(t) \right] = P(t, T) \mathbb{E}^T [X(T) | \mathcal{F}_t] \quad \forall t \leq T. \quad (3.21)$$

Recordemos del Capítulo 1 la Definición (1.2.9) de la tasa Libor forward:

$$L(t, T, T + \tau) = \frac{1}{\tau} \left(\frac{P(t, T)}{P(t, T + \tau)} - 1 \right), \quad \tau > 0. \quad (3.22)$$

La tasa Libor forward $L(t, T, T + \tau)$ con $t \leq T$ y $\tau \geq 0$ es una martingala bajo la medida $(T + \tau)$ -forward $\mathbb{Q}^{T+\tau}$. Este resultado se prueba en el siguiente Lema.

Lema 3.5.3. *La tasa Libor forward $L(t, T, T + \tau)$ es una martingala en la medida $(T + \tau)$ -forward $\mathbb{Q}^{T+\tau}$. Por lo tanto tenemos la siguiente ecuación:*

$$L(t, T, T + \tau) = \mathbb{E}^{T+\tau}[L(T, T, T + \tau)|\mathcal{F}(t)] \quad t \leq T, \quad (3.23)$$

para $\tau > 0$.

Demostración. Por definición la tasa Libor forward está dada por

$$1 + \tau L(t, T, T + \tau) = \frac{1}{P(t, T, T + \tau)} = \frac{P(t, T)}{P(t, T + \tau)}. \quad (3.24)$$

Equivalentemente tenemos

$$L(t, T, T + \tau) = \frac{1}{\tau} \left[\frac{P(t, T)}{P(t, T + \tau)} - 1 \right]. \quad (3.25)$$

Calculemos ahora el valor esperado condicional en la medida $(T + \tau)$ -forward

$$\mathbb{E}^{T+\tau}[L(s, T, T + \tau)|\mathcal{F}_t] = \frac{1}{\tau} \left[\mathbb{E}^{T+\tau} \left[\frac{P(s, T)}{P(s, T + \tau)} | \mathcal{F}_t \right] - 1 \right]. \quad (3.26)$$

Como $P(s, T)$ es un activo comercializable, entonces si lo normalizamos por un numerario es una martingala, $P(s, T)/P(s, T + \tau)$ es una martingala bajo la medida $(T + \tau)$ -forward. Por lo tanto tenemos que

$$\mathbb{E}^{T+\tau}[L(t, T, T + \tau)|\mathcal{F}(t)] = \frac{1}{\tau} \left[\frac{P(t, T)}{P(t, T + \tau)} - 1 \right] = L(t, T, T + \tau). \quad (3.27)$$

□

Definiremos ahora la medida spot. Para ello definimos previamente el proceso de precios $\hat{B}(t)$.

Definición 3.5.4. *Consideremos el conjunto de tiempos $0 = T_0 < T_1 < \dots < T_N$ y llamaremos $\tau_n = T_{n+1} - T_n$. Definimos el proceso $\hat{B}(t)$ de la siguiente manera:*

$$\hat{B}(t) = \begin{cases} P(t, T_{i+1}) \prod_{n=0}^i (1 + \tau_n L_n(T_n)) & \text{si } t > 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases} \quad (3.28)$$

donde i es tal que $T_i < t < T_{i+1}$ y

$$L_n(T_n) = L(T_n, T_n, T_{n+1}). \quad (3.29)$$

Notemos que la ecuación (3.28) es equivalente a

$$\hat{B}(t) = P(t, T_{i+1}) \prod_{n=0}^i \frac{1}{P(T_n, T_{n+1})}. \quad (3.30)$$

El proceso $\hat{B}(t)$ es el equivalente en tiempo discreto a la cuenta de moneda continuamente compuesta $B(t)$.

Definición 3.5.5. *La medida spot $\mathbb{Q}^{\hat{B}}$ es la medida inducida por $\hat{B}(t)$.*

Denotando con $\mathbb{E}^{\hat{B}}$ el valor esperado condicional con respecto a la filtración $\mathcal{F}(t)$ bajo la medida $\mathbb{Q}^{\hat{B}}$ tenemos que $X(t)/\hat{B}(t)$ es una martingala. Esto es,

$$X(t) = \hat{B}(t) \mathbb{E}^{\hat{B}} \left[\frac{X(T)}{\hat{B}(T)} \middle| \mathcal{F}(t) \right]. \quad (3.31)$$

A continuación definiremos el numerario que utilizaremos para inducir la medida swap.

Definición 3.5.6. *Sea A dado por*

$$A(t) = \sum_{j=1}^{n+1} (T_{j+1} - T_j) P(t, T_{j+1}). \quad (3.32)$$

La medida swap \mathbb{Q}^A es la medida inducida por A .

Denotando con \mathbb{E}^A es el valor esperado condicional a la filtración \mathcal{F}_t bajo la medida swap \mathbb{Q}^A tenemos que $X(t)/A(t)$ es una martingala. Esto es,

$$X(t) = A(t) \mathbb{E}^A \left[\frac{X(T)}{A(T)} \middle| \mathcal{F}(t) \right]. \quad (3.33)$$

3.6. Valoración de Caplets

Como presentamos en el primer capítulo, una caplet con strike K , vencimiento en T_1 y nominal N es una opción sobre una tasa L que en caso de ser ejercida paga en T_2 la siguiente cantidad:

$$\text{Caplet}(T_2) = N \cdot \max(L_1 - K, 0) \cdot (T_2 - T_1). \quad (3.34)$$

Notemos que $\text{Caplet}(T_2)$ es un contingent claim por lo que obtener el valor hoy de la caplet significa obtener el valor esperado descontado del payoff, donde el valor esperado se calcula en la medida de martingala correspondiente con el fin de simplificar el cálculo. Como mostramos en el Lema 3.5.3 la tasa forward $L(t, T_1, T_2)$ es una martingala en la medida T_2 -forward. Por lo que

$$\text{Caplet}(t) = N(T_2 - T_1) P(t, T_2) \mathbb{E}^{T_2} \left[\frac{\max(L_1(T_1) - K, 0)}{P(T_2, T_2)} \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (3.35)$$

$$= N(T_2 - T_1) P(t, T_2) \mathbb{E}^{T_2} [\max(L_1(T_1) - K, 0) | \mathcal{F}_t]. \quad (3.36)$$

De acuerdo al modelo que se asuma que siga L_1 este valor esperado tiene una forma cerrada o se puede realizar una aproximación numérica.

3.6.1. Fórmula de Black-Scholes

Black y Scholes realizaron un importante avance en la valoración de opciones. En su artículo [7] proporcionan bajo ciertas hipótesis una fórmula cerrada para valorar opciones sobre acciones. En su trabajo consideran una economía con sólo dos activos, la cuenta de moneda $B(t)$ y una acción S que no paga dividendos y asumiendo que estos dos activos siguen la siguiente dinámica en un mundo sin arbitraje, y sin costos de transacción

$$dB(t) = B(t)r dt, \quad (3.37)$$

$$B(0) = 1, \quad (3.38)$$

y

$$dS(t) = \mu S(t) dt + \sigma S(t) dW(t), \quad S(0) = S_0, \quad (3.39)$$

donde μ y σ son constantes.

La conocida fórmula de Black-Scholes establece que el precio de una opción call sobre una acción que no paga dividendos y sigue la dinámica antes descrita con strike K y vencimiento en T está dada por:

$$c(t) = S(t)\Phi(d_+) - KP(t, T)\Phi(d_-), \quad (3.40)$$

donde $\Phi(\cdot)$ es la función de distribución acumulada normal y

$$d_{\pm} = \frac{\ln(S(t)/K) + (r \pm \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \quad (3.41)$$

A partir de este importante resultado se han obtenido numerosas variaciones y es posible encontrar una fórmula cerrada para caplets cuando L sigue determinadas dinámicas.

Una de estas variaciones es la conocida fórmula de Black en honor al trabajo realizado por Black [6], la cual asume que las acciones pagan una tasa de dividendos $q(t)$, la tasa short $r(t) = q(t)$ y que σ puede ser una función determinística. Por lo tanto la fórmula del precio de la call en este caso está dada por:

$$c(t) = P(t, T)(S(t)\Phi(d_+) - K\Phi(d_-)), \quad (3.42)$$

donde $\Phi(\cdot)$ es la función de distribución acumulada normal y

$$d_{\pm} = \frac{\ln(S(t)/K) \pm \frac{1}{2} \int_t^T \sigma(s)^2 ds}{\sqrt{\int_t^T \sigma(s)^2 ds}}. \quad (3.43)$$

3.7. Valoración de Swaptions

Consideremos un swaption Europeo pagador con vencimiento en T_0 . Como mostramos en el Capítulo 1, el payoff está dado por

$$\text{Payoff}_{\text{Swaption}} = \max(\text{Valor del swap}(T_0), 0) = \max\left(\sum_{j=1}^n P(t, T_{j+1}) \cdot (L_j(T_j) - K) \cdot (T_{j+1} - T_j), 0\right). \quad (3.44)$$

Considerando $A(t)$ como en (3.32) y

$$G(t) = \frac{\sum_{j=1}^{n+1} (T_{j+1} - T_j) P(t, T_{j+1}) L_j(t)}{\sum_{j=1}^{n+1} (T_{j+1} - T_j) P(t, T_{j+1})}, \quad (3.45)$$

podemos reescribir el payoff del swaption como

$$\text{Payoff}_{\text{Swaption}} = A(T_0) \max(G(T_0) - K, 0). \quad (3.46)$$

Para valorar el swaption utilizaremos la medida swap \mathbb{Q}^A por lo que

$$\text{Swaption}(t) = A(t) \mathbb{E}^A \left[\frac{A(T_0) \max(G(T_0) - K, 0)}{A(T_0)} \mid \mathcal{F}_t \right] = A(t) \mathbb{E}^A [\max(G(T_0) - K, 0) \mid \mathcal{F}_t]. \quad (3.47)$$

Estas fórmulas serán retomadas en capítulos posteriores para valorar derivados con el modelo que presentaremos en el Capítulo 8.

Capítulo 4

Modelos Continuos de Tasas de Interés

Con el fin de valorar derivados de tasas de interés y caracterizar su comportamiento introduciremos diferentes modelos de tasas de interés existentes en la bibliografía. En la primera sección presentaremos algunos de los modelos que buscan explicar el comportamiento de las tasas a corto plazo o tasas short, mientras que en la segunda sección presentaremos los modelos para la tasa forward. En los modelos para la tasa forward introduciremos los de tiempo continuo que asumen que existe un bono con vencimiento en cada instante de tiempo, en el Capítulo 7 presentaremos un modelo más realista que solo asume la existencia de una cantidad finita de bonos.

Para el desarrollo de los modelos de tasa short y de tasa forward consideraremos $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}^B)$ un espacio de probabilidad, donde \mathbb{Q}^B es la medida inducida por la cuenta de moneda. Sea $\{W(t), t \geq 0\}$ un movimiento Browniano unidimensional y $\mathcal{F}(t)$ la filtración asociada al mismo. Solo con el fin de simplificar la notación consideraremos un movimiento Browniano unidimensional. Todos los resultados que mostraremos en este capítulo pueden ser extendidos cuando consideramos un movimiento Browniano d-dimensional. Además consideraremos la siguiente suposición.

Hipótesis 4.0.1. *Asumiremos lo siguiente:*

- *La existencia de la familia de bonos cupón cero $\{P(t, T) : t \in [0, T], T \geq 0\}$.*
- *La relación $P(t, t) = 1$ se cumple para todo $t, 0 \leq t \leq T$.*
- *Para cada t fijo el precio del bono cupón cero $P(t, T)$ es diferenciable respecto del vencimiento T .*

4.1. Modelos continuos de tasa short

Como presentamos en la Definición 1.2.1 llamamos tasa short al proceso estocástico r que satisface

$$B(t) = e^{\int_0^t r(s) ds}, \quad (4.1)$$

donde B es la cuenta de moneda.

Asumimos que r es un proceso estocástico que sigue la siguiente dinámica

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW(t). \quad (4.2)$$

Considerando la medida inducida por la cuenta de moneda podemos establecer la siguiente relación entre la tasa short y el precio un bono cupón cero:

$$P(t, T) = B(t)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^B} \left[\frac{P(T, T)}{B(T)} \middle| \mathcal{F}(t) \right] = B(t)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^B} \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \middle| \mathcal{F}(t) \right]. \quad (4.3)$$

Dado que $\int_0^t r(s)ds$ es $\mathcal{F}(t)$ medible entonces por el Teorema 2.4.2 Fórmula (2.5) resulta

$$P(t, T) = B(t)e^{-\int_0^t r(s)ds}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^B} \left[e^{-\int_t^T r(s)ds} \middle| \mathcal{F}(t) \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^B} \left[e^{-\int_t^T r(s)ds} \middle| \mathcal{F}(t) \right]. \quad (4.4)$$

Observación 4.1.1. Sea $R(t, T)$ dada por la Definición 1.2.7 Si la tasa short r es un proceso determinístico entonces

$$R(t, T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T r(s)ds, \quad (4.5)$$

por lo que la tasa spot continuamente compuesta puede verse como un promedio de las tasas short.

Los modelos que presentaremos en esta sección describen la dinámica del proceso de tasa de interés a corto plazo o proceso de tasa short r y pertenecen a la clasificación de modelos affine de tasa short.

Definición 4.1.2. Un modelo de tasa short es affine si la familia de bonos cupón cero $\{P(t, T) \mid 0 \leq t \leq T, T > 0\}$ puede expresarse como:

$$P(t, T) = e^{A(t, T) - r(t)B(t, T)} \quad (4.6)$$

para ciertas funciones determinísticas A y B .

La siguiente proposición es una herramienta útil para probar que un modelo sea affine.

Proposición 4.1.3. Asumamos que μ y σ tienen la siguiente forma

$$\mu(t, r) = \alpha(t)r + \beta(t) \quad (4.7)$$

$$\sigma(t, r) = \sqrt{\gamma(t)r + \delta(t)} \quad (4.8)$$

y que r sigue la ecuación diferencial estocástica (4.2). Entonces el modelo es affine, es decir el precio del bono está dado por (4.6). En particular las funciones A y B satisfacen los siguientes sistemas

$$B_t(t, T) + \alpha(t)B(t, T) - \frac{1}{2}\gamma(t)B^2(t, T) = -1 \quad (4.9)$$

$$B(T, T) = 0, \quad (4.10)$$

$$A_t(t, T) = \beta(t)B(t, T) - \frac{1}{2}\gamma(t)B^2(t, T) \quad (4.11)$$

$$A(T, T) = 0 \quad (4.12)$$

donde B_t y A_t son las derivadas parciales de B y A respecto de la primera variable.

Demostración. Daremos un esbozo de la demostración para probar que A y B deben ser las soluciones de (4.11) y (4.9). Para ello utilizaremos el Teorema de Feynman Kac (2.7.11) el cual nos dice que $F(t, r) = P(t, T)$ satisface

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, r) + \mu(t, r)\frac{\partial F}{\partial r}(t, r) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, r)\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(t, r) = 0 \quad (4.13)$$

$$F(T, r) = 1 \quad (4.14)$$

Calculamos las derivadas correspondientes:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, r) = e^{A(t, T) - rB(t, T)} A_t(t, T) - (1 + B_t(t, T))r \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial F}{\partial r}(t, r) = e^{A(t, T) - rB(t, T)} (-B(t, T)) \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(t, r) = e^{A(t, T) - rB(t, T)} B^2(t, T) \quad (4.17)$$

Por lo tanto tenemos que

$$A_t(t, T) - (1 + B_t(t, T))r + \mu(t, r)(-B(t, T)) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, r)B^2(t, T) = 0 \quad (4.18)$$

$$e^{A(T, T) - rB(T, T)} = 1 \quad (4.19)$$

Utilizando el hecho de que μ y σ son como en (4.7) y agrupando los términos tenemos que continen r y los que no obtenemos los siguientes sistemas:

$$B_t(t, T) + \alpha(t)B(t, T) - \frac{1}{2}\gamma(t)B^2(t, T) = -1 \quad (4.20)$$

$$B(T, T) = 0, \quad (4.21)$$

$$A_t(t, T) = \beta(t)B(t, T) - \frac{1}{2}\gamma(t)B^2(t, T) \quad (4.22)$$

$$A(T, T) = 0 \quad (4.23)$$

□

Otra característica que presentan los modelos que describiremos a continuación es la de reversión a la media.

Definición 4.1.4. Diremos que un proceso estocástico de Itô $\{X(t), t \geq 0\}$ tiene reversión a la media si el límite del valor esperado del proceso tiende a una constante cuando t tiende a infinito, es decir,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = k \quad (4.24)$$

donde k es una constante.

4.1.1. Modelo Vasicek

El modelo de Vasicek [37] asume que bajo la medida neutral al riesgo \mathbb{Q}^B inducida por la cuenta de moneda la tasa short sigue la siguiente dinámica:

$$dr(t) = k(\theta - r(t))dt + \sigma dW(t) \quad (4.25)$$

$$r(0) = r_0 \quad (4.26)$$

donde r_0 , k , θ y σ son constantes positivas y $W(t)$ es un movimiento Browniano en la medida \mathbb{Q}^B .

Las componentes de esta ecuación diferencial estocástica tienen la siguiente interpretación económica:

θ : se denomina también "media a largo plazo". Todas las trayectorias futuras de r evolucionarán en torno a este nivel. Reversión a la media.

k : conocida como "velocidad de reversión". Este parámetro caracteriza la velocidad a la que las trayectorias se reagrupan alrededor de θ .

σ : este parámetro mide la volatilidad.

El precio de un bono cupón cero asumiendo que r sigue la dinámica propuesta en el modelo de Vasicek está dada por (4.6) donde A y B resuelven (4.11) y (4.9) y están dadas por:

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-k(T-t)}}{k} \quad (4.27)$$

$$A(t, T) = \left(\theta - \frac{\sigma^2}{2k^2}\right)(B(t, T) - (T - t)) - \frac{\sigma^2 B(t, T)^2}{4k}. \quad (4.28)$$

Como presentamos en la Definición 1.2.14 la tasa forward está dada por

$$f(t, T) = -\frac{\partial \log P(t, T)}{\partial T}. \quad (4.29)$$

Definición 4.1.5. *Llamaremos curva de tasas forward en un t fijo al conjunto $\{f(t, \cdot), T \in \mathbb{R}_{>0}\}$, es decir es el conjunto de tasas forward para un t fijo y todos los vencimientos.*

Llamaremos curva forward inicial al conjunto $\{f(0, \cdot), T \in \mathbb{R}_{>0}\}$.

Notemos que en el modelo de Vasicek $P(0, T)$ queda completamente determinado por k , θ y σ por lo cual no puede ajustarse a cualquier tipo de curva forward inicial. Los dos modelos que presentaremos a continuación permiten ajustar la curva forward inicial.

Si la tasa short sigue un modelo de Vasicek entonces el proceso tiene reversión a la media ya que

$$\mathbb{E}[r(t)] = \theta + (r(0) - \theta)e^{-kt} \quad (4.30)$$

por lo tanto cuando tomamos el límite obtenemos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[r(t)] = \theta \quad (4.31)$$

4.1.2. Modelo de Hull y White

El modelo de Hull y White [20], en adelante HW es una extensión del modelo de Vasicek ya que asume que la dinámica de la tasa short en la medida neutral al riesgo \mathbb{Q}^B inducida por la cuenta de moneda es la siguiente:

$$dr(t) = (\theta(t) - a r(t))dt + \sigma dW(t) \quad (4.32)$$

$$r(0) = r_0 \quad (4.33)$$

donde a y σ son constantes positivas y θ es una función determinística del tiempo. Usualmente θ se elige de tal forma que se ajuste a la curva forward formada por los bonos cupón cero $\{P(0, T); T > 0\}$, es decir, si $f^*(0, \cdot)$ es una curva forward particular observada en $t = 0$, luego θ se define como:

$$\theta(t) = \frac{\partial f^*(0, T)}{\partial T} + a f^*(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2at}). \quad (4.34)$$

El precio de un bono cupón cero asumiendo que r sigue este modelo está dado por (4.6) donde las soluciones de (4.11) y (4.9) están dadas por:

$$B(t, T) = \frac{1}{a} (1 - e^{-a(T-t)}) \quad (4.35)$$

$$A(t, T) = \int_t^T \left(\frac{1}{2} \sigma^2 B^2(s, T) - \theta(s) B(s, T) \right) ds. \quad (4.36)$$

4.1.3. Modelo de Ho-Lee

El modelo de Ho-Lee [18], en adelante HL, asume que la tasa short sigue la siguiente dinámica en la medida \mathbb{Q}^B inducida por la cuenta de moneda

$$dr(t) = \theta(t)r(t)dt + \sigma dW(t) \quad (4.37)$$

$$r(0) = r_0 \quad (4.38)$$

donde σ es una constante positiva y θ es una función determinística del tiempo que se ajusta a la curva inicial observada en el mercado

$$\theta(t) = \sigma^2 t + \frac{\partial f^*(0, T)}{\partial T} \quad (4.39)$$

donde $f^*(0, \cdot)$ es una curva forward particular observada en $t = 0$.

En este modelo el precio del bono cupón cero está dado por (4.6) donde las soluciones de (4.11) y (4.9) están dadas por:

$$B(t, T) = T - t \quad (4.40)$$

$$A(t, T) = \int_t^T \theta(s)(s - T) ds + \frac{\sigma^2 (T - t)^3}{6}. \quad (4.41)$$

4.2. Modelos continuos de tasa forward

Retomando la Definición 1.2.14 la tasa forward está dada por

$$f(t, T) = -\frac{\partial \log P(t, T)}{\partial T}. \quad (4.42)$$

En esta sección presentaremos el modelo HJM el cual proporciona una dinámica para la tasa forward. Los autores no proponen un modelo específico como lo hace por ejemplo Vasicek con la tasa short, proponen un marco de trabajo en donde todo modelo de tasa short tiene su formulación equivalente en términos de la tasa forward.

4.2.1. Modelo de Heath Jarrow y Merton

Heath, Jarrow and Morton [17], en adelante HJM, asumieron la tasa forward instantánea $f(t, T)$ para un T fijo sigue la siguiente dinámica en la medida de martingala \mathbb{Q}^B inducida por la cuenta de moneda

$$df(t, T) = \alpha(t, T)dt + \sigma(t, T)dW(t) \quad (4.43)$$

$$f(0, T) = f^*(0, T), \quad (4.44)$$

donde $f^*(0, T)$ es la curva de tasas forward en el tiempo $t = 0$ y $\alpha(t, T)$ y $\sigma(t, T)$ son procesos adaptados a la filtración $\mathcal{F}(t)$.

La medida de martingala automáticamente nos proporciona el cumplimiento de la hipótesis de no arbitraje, pero se presenta la siguiente situación. Podemos expresar el precio del bono de estas dos maneras:

$$P(0, T) = e^{-\int_0^T f(0, s)ds} \quad (4.45)$$

$$P(0, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^B} \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \right], \quad (4.46)$$

donde la tasa short r y la tasa forward f se relacionan por $r(t) = f(t, t)$. Para que estas dos fórmulas se cumplan simultáneamente debemos imponer una relación entre α y σ en la dinámica de la tasa forward. El resultado se enuncia a continuación y es conocido como la condición de drift de HJM.

Proposición 4.2.1. *Bajo la medida de martingala \mathbb{Q}^B los procesos α y σ en (4.43) deben satisfacer la siguiente relación para todo t y todo $T \geq t$*

$$\alpha(t, T) = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, s)ds. \quad (4.47)$$

Con lo cual tenemos que

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \sigma(u, T) \int_u^T \sigma(u, s)dsdu + \int_0^t \sigma(s, T)dW(s). \quad (4.48)$$

Demostración. Sea $f(t, T)$ la tasa forward instantánea que sigue la siguiente dinámica en la medida \mathbb{Q}^B inducida por la cuenta de moneda:

$$df(t, T) = \alpha(t, T)dt + \sigma(t, T)dW(t) \quad (4.49)$$

$$f(0, T) = f^*(0, T), \quad (4.50)$$

Por otro lado tenemos que se cumple

$$P(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, s)ds} \quad (4.51)$$

Sea

$$Y(t) = \log P(t, T) = -\int_t^T f(t, s)ds.$$

Por lo tanto considerando que $f(t, t) = r(t)$ y utilizando la regla de Leibniz tenemos que:

$$dY(t) = f(t, t)dt - \int_t^T df(t, s)ds \quad (4.52)$$

$$= r(t)dt - \int_t^T (\alpha(t, u)dt + \sigma(t, s)dW(t)) ds \quad (4.53)$$

Llamaremos $\alpha^*(t, T) = \int_t^T \alpha(t, s)ds$ y $\sigma^*(t, T) = \int_t^T \sigma(t, s)ds$. Aplicando el teorema de Fubini obtenemos:

$$dY(t) = (r(t) - \alpha^*(t, T))dt - \sigma^*(t, T)dW(t). \quad (4.54)$$

Tenemos ahora que

$$P(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, s)ds} = e^{Y(t)}$$

A continuación utilizaremos el Lema de Itô (2.7.10) para calcular $dP(t, T)$, para ello sea $F(t, y) = P(t, T) = e^y$ por lo tanto las derivadas son

$$F_t(t, y) = 0 \quad F_y(t, y) = e^y \quad F_{yy}(t, y) = e^y, \quad (4.55)$$

con lo cual tenemos:

$$dP(t, T) = (0 + P(t, T)(r(t) - \alpha^*(t, T)) + \frac{1}{2}P(t, T)\sigma^{*2}(t, T))dt - P(t, T)\sigma^*(t, T)dW(t). \quad (4.56)$$

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = \left(r(t) - \alpha^*(t, T) + \frac{1}{2}\sigma^{*2}(t, T) \right) dt - \sigma^*(t, T)dW(t). \quad (4.57)$$

A continuación utilizaremos que $\frac{dP(t, T)}{P(t, T)}$ es martingala en la medida \mathbb{Q}^B por lo tanto

$$\alpha^*(t, T) = \frac{1}{2}\sigma^{*2}(t, T)$$

Derivando respecto de s tenemos que

$$\alpha(t, T) = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, s)ds. \quad (4.58)$$

□

La curva de tasas forward queda completamente determinada una vez que se conoce σ .

Brace y Musiela [9] proponen una parametrización para describir el proceso de la curva forward en términos del tiempo al vencimiento $\tau = T - t$ y de t de la siguiente manera:

$$f_r(t, \tau) = f(t, t + \tau) \quad (4.59)$$

y $r(t) = f_r(t, 0)$. Bajo esta parametrización, la ecuación (4.43) puede ser expresada de la siguiente manera:

$$df_r(t, \tau) = \left(\frac{\partial}{\partial \tau} f_r(t, \tau) + \sigma(t, \tau) \int_0^\tau \sigma'(t, s) ds \right) dt + \sigma(t, \tau) dW(t), \quad (4.60)$$

donde $\sigma(t, \tau) = \sigma_0(t, t + \tau)$.

En particular, el proceso de tasas forward (4.60) puede expresarse en términos de la integral de Stratonovich definida en (2.60) de la siguiente manera:

$$df_r(t, \tau) = \left(\frac{\partial}{\partial \tau} f_r(t, \tau) + \sigma(t, \tau) \int_0^\tau \sigma'(t, s) ds + \phi(t, \tau) \right) dt + \sigma(t, \tau) \circ dW(t). \quad (4.61)$$

4.2.2. Nelson y Siegel

Nelson y Siegel en su artículo [32] proponen un modelo paramétrico de ajuste de curvas donde asumen que la curva de tasas forward observada en t puede expresarse de la siguiente manera:

$$f(0, \tau) = z_1 + z_2 e^{-\lambda \tau} + z_3 \tau e^{-\lambda \tau}, \quad (4.62)$$

donde $\tau = T - t$ y z_1 , z_2 y z_3 son números reales.

La curva forward de Nelson y Siegel puede descomponerse en tres factores: 1, $e^{-\lambda(T-t)}$ y $(T-t)e^{-\lambda(T-t)}$. El factor constante está relacionado con el nivel de la tasa de interés a largo plazo. El decaimiento exponencial es el segundo factor el cual se relaciona con la pendiente de la curva que puede ser positiva o negativa dependiendo del signo de z_2 . El tercer factor está relacionado con la curvatura. Por último λ es llamado el parámetro de forma y es determinado por el punto donde el tercer factor en la curva de rendimientos alcanza el máximo.

4.3. Relación entre las dinámicas de tasa short, tasa forward y los bonos cupón cero

A continuación veremos como se relacionan las tasas short forward y los bonos cupón cero. Para ello consideraremos las siguientes hipótesis.

Hipótesis 4.3.1. ■ *Consideremos las dinámicas de la siguiente manera:*

- *Dinámica para la tasa short:*

$$dr(t) = a(t)dt + b(t)dW(t) \quad (4.63)$$

- *Dinámica para el precio del bono cupón cero:*

$$dP(t, T) = P(t, T)m(t, T)dt + P(t, T)v(t, T)dW(t) \quad (4.64)$$

- *Dinámica para la tasa forward:*

$$df(t, T) = \alpha(t, T)dt + \sigma(t, T)dW(t) \quad (4.65)$$

- *Para cada w y t fijos asumimos que $m(t, T)$, $v(t, T)$, $\alpha(t, T)$ y $\sigma(t, T)$ son funciones continuas y diferenciables en la variable T . Las derivadas parciales las denotaremos con el subíndice T , por ejemplo, $m_T(t, T)$.*
- *Asumiremos que todos los procesos son lo suficientemente regulares para permitir diferenciar bajo el signo de integral así como para cambiar el orden de integración.*

El siguiente resultado nos relaciona las dinámicas de la tasa short, la tasa forward y los bonos cupón cero.

Proposición 4.3.2. ▪ *Si $P(t, T)$ satisface (4.64) entonces la dinámica de la tasa forward está dada por*

$$df(t, T) = \alpha(t, T)dt + \sigma(t, T)dW(t) \quad (4.66)$$

donde α y σ están dadas por

$$\alpha(t, T) = v_T(t, T)v(t, T) - m_T(t, T) \quad (4.67)$$

$$\sigma(t, T) = -v_T(t, T) \quad (4.68)$$

- *Si $f(t, T)$ satisface (4.65) entonces la tasa short satisface*

$$dr(t) = a(t)dt + b(t)dW(t) \quad (4.69)$$

donde

$$a(t) = f_T(t, t) + \alpha(t, t) \quad (4.70)$$

$$b(t) = \sigma(t, t) \quad (4.71)$$

- *Si $f(t, T)$ satisface (4.65) entonces $P(t, T)$ satisface*

$$dP(t, T) = P(t, T) \left(r(t) + A(t, T) + \frac{1}{2} \|S(t, T)\|^2 \right) dt + P(t, T)S(t, T)dW(t) \quad (4.72)$$

donde $\|\cdot\|$ denota la norma Euclidea y

$$A(t, T) = - \int_t^T \alpha(t, s)ds \quad (4.73)$$

$$S(t, T) = - \int_t^T \sigma(t, s)ds \quad (4.74)$$

La demostración de esta Proposición se puede encontrar en [4].

Capítulo 5

Consistencia de la familia extendida de curvas de Nelson y Siegel con los modelos de tasa short Ho-Lee y Hull-White

Las curvas de Nelson y Siegel son utilizadas para ajustarse a la estructura a plazo observada de las tasas de interés en una fecha en particular. Por otro lado, se han desarrollado varios modelos de tasa short en los cuales se puede ajustar la curva forward inicial a la observada en el mercado, como los modelos de Hull-White y Ho Lee presentados en el capítulo anterior. En este capítulo presentaremos los resultados publicados en [27] y en [25] en donde estudiamos la evolución de las curvas forward generadas por los modelos de tasa short cuando la curva inicial es del tipo de Nelson y Siegel. Concluiremos que las curvas forward generadas por los modelos de tasa short pertenecen a una familia parametrizada de curvas que pueden verse como una extensión de la familia de curvas de Nelson y Siegel. Mostraremos que la evolución de la curva forward tiene un crecimiento lineal o exponencial dependiendo del modelo de tasa short que estemos considerando.

5.1. Consistencia

La definición de consistencia entre los modelos de tasa short y las variedades de tasas forward fue presentada por Bjork y Christensen en [5].

Sea \mathcal{M} un modelo para el proceso de tasa short que especifica un proceso de tasas forward $f_r(t, \cdot)$. En términos de la parametrización de Musiela (4.59), f_r satisface la siguiente ecuación diferencial

$$df_r(t, \tau) = \left(\frac{\partial}{\partial \tau} f_r(t, \tau) + \alpha(t, \tau) \right) dt + \sigma(t, \tau) dW(t) \quad (5.1)$$

para $t \geq 0$, $\tau \geq 0$, donde α y σ son procesos adaptados. En particular la condición de drift de HJM implica que $\alpha(t, x) = \sigma(t, x) \int_t^x \sigma(t, s) ds$. Luego, utilizando la forma integral de Stratonovich (2.60), la ecuación (5.1) puede escribirse cómo

$$df_r(t, \tau) = \left(\frac{\partial}{\partial \tau} f_r(t, \tau) + \sigma(t, x) \int_t^\tau \sigma(t, s) ds + \phi(t, \tau) \right) dt + \sigma(t, \tau) \circ dW(t). \quad (5.2)$$

donde $\phi(t, \tau)$ es el término de variación cuadrática.

Bjork y Christensen [5] establecen las siguientes definiciones de consistencia entre un modelo de tasa short y una familia parametrizable de curvas. Sea $\mathcal{Z} \in \mathbb{R}^d$ un conjunto de parámetros y sea $G : \mathcal{Z} \rightarrow C[0, \infty)$ una función derivable. La variedad de curvas forward \mathcal{G} es definida cómo $\mathcal{G} = \text{Im}(G)$. Esto es,

$$\mathcal{G} = \{G(\cdot, z) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}\}, \quad (5.3)$$

donde realizando un abuso de notación $G(\cdot, z)$ denota la función $G(z)$.

Definición 5.1.1. (*Invarianza*). Consideremos un modelo de tasas \mathcal{M} , que especifica un proceso de tasas forward $f_r(t, \cdot)$ y una variedad de curvas forward \mathcal{G} . Diremos que \mathcal{G} es invariante bajo la acción de f_r si, para todo tiempo inicial fijo s la condición $f_r(s, \cdot) \in \mathcal{G}$ implica que $f_r(t, \cdot) \in \mathcal{G}$ para todo $t \geq s$.

A continuación introduciremos un concepto más restrictivo de invarianza, la f_r -invarianza. Al concepto de invarianza le agregaremos algunas condiciones de suavidad al mapeo \mathcal{G} .

Definición 5.1.2. (*f_r -invarianza*). Sea \mathcal{M} un modelo de tasa short dado que especifica un proceso de tasas forward $f_r(t, \cdot)$ como en (5.2) y sea \mathcal{G} la variedad de curvas forward. Diremos que \mathcal{G} es f_r -invariante bajo la acción del proceso de curvas forward $f_r(t, \cdot)$ si existe un proceso estocástico Z con procesos de estado \mathcal{Z} que posee una diferencial de Stratonovich de la forma

$$dZ(t) = \gamma(t, Z(t))dt + \psi(t, Z(t)) \circ dW(t)$$

tal que para una elección de un tiempo inicial s , cuando $y(s, \cdot) \in \mathcal{G}$, el proceso estocástico definido por

$$y(t, \tau) = G(\tau, Z(t))$$

para todo $t \geq s$, $\tau \geq 0$ satisface la ecuación diferencial estocástica 5.2 con condición inicial $f_r(s, \cdot) = y(s, \cdot)$.

En este caso diremos que el modelo de tasa short \mathcal{M} y la variedad de curvas forward \mathcal{G} son consistentes.

Observación 5.1.3. f_r -invarianza implica invarianza.

Bjork y Christensen [5] prueban el siguiente teorema

Teorema 5.1.4. La variedad de curvas forward G es f_r -invariante para el proceso de tasas forward $f_r(t, \cdot)$ en \mathcal{M} si y solo si

$$G_\tau(\cdot, z) + \sigma(t, \cdot) \int_0^{(\cdot)} \sigma'(t, s) ds + \phi(t, \cdot) \in \text{Im}[G_z(\cdot, z)] \quad (5.4)$$

$$\sigma(t, \cdot) \in \text{Im}[G_z(\cdot, z)] \quad (5.5)$$

para todo $(t, z) \in [0, \infty) \times \mathcal{Z}$. G_τ y G_z denotan las derivadas de Frechet de G con respecto a τ y z , las cuales asumimos que existen.

A partir de este Teorema Bjork y Christensen [5] enuncian la siguiente definición de consistencia entre un modelo de tasas de interés y una variedad de curvas forward.

Definición 5.1.5. *Un modelo de tasas de interés \mathcal{M} es consistente con la variedad de curvas forward G si las condiciones de consistencia de drift (5.4) y de consistencia de volatilidad (5.5) se cumplen.*

5.2. Modelo de Ho Lee para la tasa short

El modelo de tasa short propuesto por Ho Lee, como presentamos en el Capítulo 4 está dado por

$$dr(t) = \theta(t)dt + \sigma dW(t), \quad (5.6)$$

donde $\{W(t), t \geq 0\}$ es un movimiento Browniano, $\sigma > 0$ y θ una función determinística.

Dado que este modelo pertenece a la familia de modelos affine y la relación entre la tasa forward y el precio del bono cupón cero (4.42) tenemos que

$$f(t, T) = -\frac{\partial \ln(P(t, T))}{\partial T} = -\frac{\partial A(t, T)}{\partial T} + \frac{\partial B(t, T)r(t)}{\partial T} \quad (5.7)$$

donde A y B están dados por (4.41) y (4.40) respectivamente.

Luego, reemplazando A y B por sus expresiones (4.41) y (4.40) obtenemos:

$$f(t, T) = \frac{\partial}{\partial T} \left(-\int_t^T \theta(s)(s-T)ds - \frac{\sigma^2(T-t)^3}{6} \right) + r(t) \frac{\partial}{\partial T}(T-t) \quad (5.8)$$

$$= -\left(\theta(T)T - \int_t^T \theta(s)ds - T\theta(T) \right) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)^2 + r(t) \quad (5.9)$$

$$= \int_t^T \theta(s)ds - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)^2 + r(t). \quad (5.10)$$

En particular se cumple que $f(t, t) = r(t)$. Si $T \rightarrow f^*(0, T)$ es la curva forward inicial observada, y θ es definido como

$$\theta(t) = \sigma^2 t + \frac{\partial f^*}{\partial T}(0, t), \quad (5.11)$$

entonces $f(0, T) = f^*(0, T)$. Esto implica que los parámetros del modelo pueden ajustarse de manera que se ajusten a la curva inicial observada.

Asumiremos ahora que la curva forward inicial está dada por la forma paramétrica propuesta por Nelson y Siegel. Esto es

$$f^*(0, T) = z_1 + z_2 e^{-\lambda T} + z_3 T e^{-\lambda T} \quad T \geq 0, \quad (5.12)$$

donde z_1, z_2, z_3 y λ son números reales fijos, $\lambda > 0$. Nuestro objetivo es estudiar la evolución de la curva forward inicial en la variable t . Con esta elección particular de f^* , θ está dada por

$$\theta = \sigma^2 t + (z_3 - z_2 \lambda) e^{-\lambda t} - z_3 \lambda t e^{-\lambda t} \quad (5.13)$$

y la solución de la ecuación diferencial de Ho Lee (5.6) está dada por

$$r(t) = r(0) + \frac{\sigma^2 t^2}{2} - \frac{z_3 - z_2 \lambda}{\lambda} e^{-\lambda t} - \frac{z_3}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t} (\lambda t + 1)) + \sigma W(t) \quad (5.14)$$

$$= r(0) + \frac{\sigma^2 t^2}{2} - \frac{z_3}{\lambda} + (z_2 + z_3 t) e^{-\lambda t} + \sigma W(t), \quad (5.15)$$

donde $r(0)$ es la tasa short valuada en el tiempo $t = 0$.

Calculando la integral en (5.8)

$$\int_t^T \theta(s) ds = \int_t^T \sigma^2 s + (z_3 - z_2 \lambda) e^{-\lambda s} - z_3 \lambda t e^{-\lambda s} ds \quad (5.16)$$

$$= \frac{\sigma^2}{2} (T^2 - t^2) + (z_2 + z_3 T) e^{-\lambda T} - (z_2 + z_3 t) e^{-\lambda t}. \quad (5.17)$$

Podemos ahora derivar la fórmula explícita para el proceso de la curva de tasas forward

$$f(t, T) = \frac{\sigma^2}{2} (T^2 - t^2) + (z_2 + z_3 T) e^{-\lambda T} - (z_2 + z_3 t) e^{-\lambda t} - \frac{\sigma^2}{2} (T - t)^2 + r(t) \quad (5.18)$$

$$= \sigma^2 t (T - t) + (z_2 + z_3 T) e^{-\lambda T} - (z_2 + z_3 t) e^{-\lambda t}. \quad (5.19)$$

Los cálculos realizados hasta el momento nos permiten enunciar el siguiente teorema

Teorema 5.2.1. *Sea r la dinámica de HL para la tasa short como en (5.6). Entonces, si la curva forward inicial es una curva paramétrica de Nelson y Siegel como en (5.12) la correspondiente curva de tasas forward en el tiempo t está dada por la fórmula*

$$f(t, T) = r(t) + \sigma^2 t (T - t) + (z_2 + z_3 T) e^{-\lambda T} - (z_2 + z_3 t) e^{-\lambda t} \quad (5.20)$$

Sea $\tau = T - t$ el tiempo al vencimiento. Usando la parametrización de Brace y Musiela, denotamos la curva forward por f_{HL} a la curva dada por $f_{HL}(t, \tau) = f(t, t + \tau)$. Entonces la curva de tasas forward f_{HL} tiene la siguiente expresión

$$f_{HL}(t, \tau) = \sigma^2 t \tau + C_1(t) + C_2(t) e^{-\lambda \tau} + C_3(t) \tau e^{-\lambda \tau}, \quad t \geq 0, \quad \tau \geq 0 \quad (5.21)$$

donde C_1, C_2, C_3 son coeficientes que dependen de t y de los parámetros de la curva de Nelson y Siegel:

$$C_1(t) = r(t) - (z_2 + z_3 t) e^{-\lambda t} \quad (5.22)$$

$$C_2(t) = (z_2 + z_3 t) e^{-\lambda t} \quad (5.23)$$

$$C_3(t) = z_3 e^{-\lambda t}. \quad (5.24)$$

Demostración. La prueba se sigue reagrupando los términos luego de reemplazar T por $\tau + t$ en la ecuación (5.18). \square

Observemos que la expresión de la función $\tau \rightarrow f_{HL}(t, \tau)$ dada en la fórmula (5.21) es una suma de una función lineal y la curva paramétrica de Nelson y Siegel, esto nos motiva a introducir el concepto de curva de Nelson y Siegel extendida.

Definición 5.2.2. Sea $\lambda > 0$ y $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$g(\tau) = z_0\tau + z_1 + z_2e^{-\lambda\tau} + z_3e^{-\lambda\tau} \quad (5.25)$$

donde z_0, z_1, z_2 y z_3 son números reales positivos. Lamaremos a g la curva de Nelson y Siegel extendida.

En particular en la próxima sección estudiaremos la consistencia del modelo de Ho Lee con la variedad de la familia de curvas forward \mathcal{G}^λ generada por la curva de Nelson y Siegel extendida.

5.3. Consistencia entre el modelo de Ho-Lee y la variedad de curvas forward

La curva de tasas forward f dada por (5.8) satisface la condición de drift de Heath, Jarrow y Morton

$$\alpha(t, T) = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, s) ds = \sigma^2(T - t) \quad (5.26)$$

y la ecuación diferencial estocástica

$$df(t, T) = \alpha(t, T)dt + \sigma(t, T)dW(t) = \sigma^2(T - t)dt + \sigma dW(t) \quad (5.27)$$

con $T \geq 0$ y $0 \leq t \leq T$. En términos de la parametrización de Brace y Musiela f_{HL} satisface:

$$df_{HL}(t, \tau) = \left(\frac{\partial}{\partial \tau} f_{HL}(t, \tau) + \sigma^2 \tau \right) dt + \sigma dW(t) \quad (5.28)$$

$t \geq 0$, $\tau \geq 0$. Considerando las ecuaciones (5.21) y (5.28) nuestra conjetura es que existe una variedad de curvas forward que contiene las curvas extendidas de Nelson y Siegel que es consistente con el modelo HL. Este hecho es el que probamos en el siguiente teorema.

Teorema 5.3.1. Sea $\mathcal{Z} = \mathbb{R}^4$, $\lambda > 0$ y

$$G^\lambda(\tau; \beta) = \beta_0\tau + \beta_1 + \beta_2e^{-\lambda\tau} + \beta_3\tau e^{-\lambda\tau}, \quad \tau \geq 0 \quad (5.29)$$

Sea $f_{HL}(t, \cdot)$ el proceso de Ho Lee para la tasa forward. Entonces, para cada $\lambda > 0$ la variedad de curvas forward \mathcal{G}^λ es f_{HL} -invariante.

Demostración. Debemos aplicar el Teorema (5.1.4) para ver que \mathcal{G}^λ es f_{HL} -invariante. Debido a que el término de volatilidad en (5.28) es determinístico, la ecuación diferencial estocástica en la formulación de Stratonovich es la misma que en la formulación de Itô. Las derivadas de Frechet de G^λ están dadas por:

$$G_\beta^\lambda(\tau, \beta) = [\tau, 1, e^{-\lambda\tau}, \tau, e^{-\lambda\tau}] \quad (5.30)$$

$$G_\tau^\lambda(\tau, \beta) = \beta_0 + (-\beta_2\lambda + \beta_3)e^{-\lambda\tau} - \beta_3\lambda\tau e^{-\lambda\tau}. \quad (5.31)$$

Para probar que \mathcal{G}^λ es f_{HL} -invariante debemos comprobar las condiciones de drift y volatilidad (5.4-5.5). Debemos primero probar que $G_\tau^\lambda(\cdot, \beta) + \sigma^2(\cdot)$ pertenece a la $IM[G_\beta^\lambda(\cdot, \beta)]$. Esto significa que deberá haber números reales A, B, C y D tales que

$$\beta_0 + (-\beta_2\lambda + \beta_3)e^{-\lambda\tau} - \beta_3\lambda\tau e^{-\lambda\tau} + \sigma^2\tau = A\tau + B + Ce^{-\lambda\tau} + D\tau e^{-\lambda\tau}. \quad (5.32)$$

De hecho esto es posible tomando

$$A = \sigma^2 \quad (5.33)$$

$$B = \beta_0 \quad (5.34)$$

$$C = -\beta_2\lambda + \beta_3 \quad (5.35)$$

$$D = -\beta_3\lambda, \quad (5.36)$$

de manera tal que la condición (5.5) se satisface. Para probar la condición (5.4) debemos encontrar A, B, C y D de manera tal que

$$\sigma = A\tau + B + Ce^{-\lambda\tau} + D\tau e^{-\lambda\tau} \quad (5.37)$$

y esto puede obtenerse tomando $A = C = D = 0$ y $B = \sigma$. \square

El Teorema 5.3.1 implica que la variedad de curvas forward G^λ es f_{HL} -invariante, por lo que se sigue el siguiente Corolario:

Corollary 5.3.2. *Para cada $\lambda > 0$, la variedad de curvas forward G^λ es consistente con el modelo de Ho Lee de tasas short.*

El Corolario 5.3.2 implica que, en el caso particular en el que θ en (5.6) es elegida de tal forma que la curva forward inicial sea del tipo de Nelson y Siegel

$$f^*(0, \tau) = z_1 + z_2e^{-\lambda\tau} + z_3\tau e^{-\lambda\tau}, \quad \tau \geq 0 \quad (5.38)$$

entonces, para cada $t \geq 0$ la correspondiente curva forward $f_{HL}(t, \tau)$ puede ser escrita como una curva de Nelson y Siegel extendida. Esto es:

$$f_{HL}(t, \tau) = \beta_0\tau + \beta_1 + \beta_2e^{-\beta_4\tau} + \beta_3\tau e^{-\beta_4\tau}, \quad \tau \geq 0. \quad (5.39)$$

Debemos considerar $\beta_4 = \lambda$ para que la condición de drift se satisfaga.

5.4. Modelo de Hull y White para la tasa short

El modelo para de la tasa short propuesto por Hull y White, en adelante HW, también conocido como modelo de Vasicek extendido, como presentamos en el capítulo anterior, propone que la tasa short sigue la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dr(t) = (\theta(t) - ar(t))dt + \sigma dW(t) \quad (5.40)$$

donde a, σ son números reales positivos y θ una función determinística. La función θ puede ser elegida de manera tal que la curva forward inicial $f(0, \cdot)$ se ajuste a la curva forward observada en

el tiempo inicial $t = 0$. Sea $f^*(0, \cdot)$ una curva forward particular observada en $t = 0$. Entonces θ está definida como

$$\theta(t) = \frac{\partial}{\partial T} f^*(0, t) + a f^*(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2at}). \quad (5.41)$$

Como mencionamos en el capítulo anterior este modelo pertenece a la familia de modelos affine por lo que el precio del bono cupón cero está dado por (4.6) y A y B están dados por (4.36) y (4.35) respectivamente. De la ecuación (4.42) se deduce que la correspondiente curva forward está dada por

$$f(t, T) = -\frac{\partial A(t, T)}{\partial T} + \frac{\partial B(t, T)r(t)}{\partial T} \quad (5.42)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial T} \left(\int_t^T \left(\frac{1}{2} \sigma^2 B^2(s, T) - \theta(s) B(s, T) \right) ds \right) + r(t) e^{-a(T-t)}. \quad (5.43)$$

Luego, por la regla de Leibniz tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial T} \left(\int_t^T \frac{1}{2} \sigma^2 B^2(s, T) ds \right) = \frac{1}{2} \sigma^2 B^2(T, T) + \int_t^T \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial B^2(s, T)}{\partial T} ds \quad (5.44)$$

$$= \sigma^2 \int_t^T B(s, T) \frac{\partial B(s, T)}{\partial T} ds \quad (5.45)$$

$$= \sigma^2 \int_t^T \frac{1 - e^{-a(T-s)}}{a} e^{-a(T-s)} ds \quad (5.46)$$

$$= -\frac{1}{2} \sigma^2 B^2(t, T) = -\frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-a(T-t)})^2 \quad (5.47)$$

$$\frac{\partial}{\partial T} \left(\int_t^T \theta(s) B(s, T) \right) = \theta(T) B(T, T) + \int_t^T \theta(s) \frac{\partial}{\partial T} B(s, T) ds \quad (5.48)$$

$$= \int_t^T \theta(s) e^{-a(T-s)} ds. \quad (5.49)$$

Asumimos ahora que la curva forward inicial es ajustada por la curva paramétrica de Nelson y Siegel

$$f^*(0, T) = z_1 + z_2 e^{-\lambda T} + z_3 T e^{-\lambda T}, \quad T \geq 0. \quad (5.50)$$

Entonces la solución de (5.40) está dada por:

$$r(t) = r(0) e^{-at} + \int_0^t e^{-a(t-u)} \theta(u) du + \sigma \int_0^t e^{-a(t-u)} dW(u) \quad (5.51)$$

$$= r(0) e^{-at} + \alpha(t) - \alpha(0) e^{-at} + \sigma \int_0^t e^{-a(t-u)} dW(u), \quad (5.52)$$

y la función θ dada por:

$$\theta(t) = az_1 + (z_3 - z_2\lambda + az_2) e^{-\lambda t} + (az_3 - z_3\lambda) t e^{-\lambda t} + \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2at}) \quad (5.53)$$

donde

$$\alpha(t) = f^*(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-at})^2. \quad (5.54)$$

Computamos ahora explícitamente

$$\int_t^T \theta(s)e^{-a(T-s)} ds = \alpha(T) - \alpha(t)e^{-a(T-t)} \quad (5.55)$$

$$= f^*(0, T) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-aT})^2 - \alpha(t)e^{-a(T-t)}. \quad (5.56)$$

Reemplazando las expresiones (5.44) y (5.55) en la fórmula para la curva forward (5.42) tenemos:

$$f(t, T) = -\frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-a(T-t)})^2 + f^*(0, T) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-aT})^2 - \alpha(t)e^{-a(T-t)} + r(t)e^{-a(T-t)}. \quad (5.57)$$

Con los cálculos realizados hasta el momento arribamos al siguiente teorema.

Teorema 5.4.1. *Sea r la tasa short que sigue el modelo propuesto por Hull y White con la dinámica (5.40). Entonces, si la curva forward inicial es del tipo de curva de Nelson y Siegel parametrizada como en (5.12), la correspondiente curva forward en el tiempo t está dada por*

$$f(t, T) = -\frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-a(T-t)})^2 + f^*(0, T) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-aT})^2 - \alpha(t)e^{-a(T-t)} + r(t)e^{-a(T-t)}. \quad (5.58)$$

Sea $\tau = T - t$ el tiempo al vencimiento. Utilizando la parametrización de Brace y Musiela, denotamos con f_{HW} la curva forward dada por $f_{HW}(t, \tau) = f(t, t + \tau)$. Entonces la curva forward f_{HW} tiene la siguiente expresión

$$f_{HW}(t, \tau) = C_1(t)e^{-a\tau} + C_2(t)e^{-2a\tau} + C_3(t) + C_4(t)e^{-\lambda\tau} + C_5(t)\tau e^{-\lambda\tau}, \quad (5.59)$$

donde C_1, C_2, C_3, C_4 y C_5 son coeficientes que dependen de $t, r(t)$ y de los parámetros de la curva de Nelson y Siegel:

$$C_1(t) = \frac{\sigma^2}{a^2}(1 - e^{-at}) - \alpha(t) + r(t), \quad (5.60)$$

$$C_2(t) = \frac{\sigma^2}{2a^2}(e^{-2at} - 1), \quad (5.61)$$

$$C_3(t) = z_1, \quad (5.62)$$

$$C_4(t) = z_2e^{-\lambda t} + z_3te^{-\lambda t}, \quad (5.63)$$

$$C_5(t) = z_3e^{-\lambda t}. \quad (5.64)$$

La expresión de la función $\tau \rightarrow f_{HW}(t, \tau)$ dada por la fórmula (5.59) es una suma de una función exponencial y una curva paramétrica de Nelson y Siegel.

Definición 5.4.2. *Sea $\lambda > 0$ y $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida cómo*

$$g(\tau) = c_1e^{-a\tau} + c_2e^{-2a\tau} + z_0\tau + z_1 + z_2e^{-\lambda\tau} + z_3e^{-\lambda\tau}, \quad (5.65)$$

con c_1, c_2, z_0, z_1, z_2 y z_3 constantes reales positivas. Llamaremos a g la curva de Nelson y Siegel extendida exponencial.

En particular, en la siguiente sección estudiaremos la consistencia del modelo de Hull y White con la variedad de la familia de curvas forward \mathcal{G}^λ generada por las curvas de Nelson y Siegel extendidas exponencial.

5.5. Consistencia entre el modelo de Hull-White y la variedad de curvas forward

La dinámica del proceso de curvas forward está dado en términos de la integral de Itô de la siguiente manera

$$df(t, T) = \frac{\sigma^2}{a} e^{-a(T-t)} (1 - e^{-a(T-t)}) dt + \sigma e^{-a(T-t)} dW(t), \quad (5.66)$$

$0 \leq t < T < \infty$, y aplicando la parametrización de Musiela $\tau = T - t$,

$$df_{HW}(t, \tau) = \left(\frac{\partial}{\partial \tau} f_{HW}(t, \tau) + \frac{\sigma^2}{a} e^{-a\tau} (1 - e^{-a\tau}) \right) dt + \sigma e^{-a\tau} \quad (5.67)$$

$\tau \geq 0, t \geq 0$. Debido a que el término de volatilidad es una función determinística, la formulación de la integral de Stratonovich es la misma a la formulación de la integral de Itô. Con lo cual arribamos al siguiente Teorema.

Teorema 5.5.1. *Sea $\mathcal{Z} = \mathbb{R}^5$ y para cada $\lambda > 0$ sea $G^\lambda : \mathcal{Z} \rightarrow C(0, \infty)$ definida cómo*

$$G^\lambda(t, \tau) = \beta_1 e^{-a\tau} + \beta_2 e^{-2a\tau} + \beta_3 + \beta_4 e^{-\lambda\tau} + \beta_5 \tau e^{-\lambda\tau}. \quad (5.68)$$

Sea $f_{HW}(t, \cdot)$ el proceso de tasa forward de Hull y White dado por la ecuación diferencial estocástica (5.67). Entonces, la variedad de curvas forward \mathcal{G}^λ es f_{HW} -invariante.

Demostración. Las derivadas de Frechet G_β^λ y G_β^τ están dadas por:

$$G_\beta^\lambda(\tau; \beta) = [e^{-a\tau}, e^{-2a\tau}, 1, e^{-\lambda\tau}, \tau e^{-\lambda\tau}], \quad (5.69)$$

$$G_\tau^\lambda(\tau; \beta) = \beta_1(-a)e^{-a\tau} + \beta_2(-2a)e^{-2a\tau} + (-\beta_4\lambda + \beta_5)e^{-\lambda\tau} - \beta_5\lambda\tau e^{-\lambda\tau}. \quad (5.70)$$

Probaremos primero que $G_\tau^\lambda(\cdot, \beta) + \frac{\sigma^2}{a} e^{-a(\cdot)} (1 - e^{-a(\cdot)}) \in \text{Im}[G_\beta^\lambda(\cdot, \beta)]$. Por lo que buscamos números reales A, B, C, D y E tal que

$$\beta_1(-a)e^{-a\tau} + \beta_2(-2a)e^{-2a\tau} + (-\beta_4\lambda + \beta_5)e^{\lambda\tau} - \beta_5\lambda\tau e^{-\lambda\tau} + \frac{\sigma^2}{a} e^{-a\tau} (1 - e^{-a\tau}) \quad (5.71)$$

$$= Ae^{-a\tau} + Be^{-2a\tau} + C + De^{-\lambda\tau} + E\tau e^{-\lambda\tau}. \quad (5.72)$$

Esto se cumple tomando

$$A = -\alpha\beta_1 + \frac{\sigma^2}{a}, \quad (5.73)$$

$$B = -2a\beta_2 - \frac{\sigma^2}{a}, \quad (5.74)$$

$$C = 0, \quad (5.75)$$

$$D = -\beta_4\lambda + \beta_5, \quad (5.76)$$

$$E = -\beta_5\lambda. \quad (5.77)$$

Probaremos ahora que $\sigma e^{-a(\cdot)} \in \text{Im}[G_\beta(\cdot, \beta)]$ o equivalentemente, buscamos números reales tal que

$$\sigma e^{-a\tau} = Ae^{-a\tau} + Be^{-2a\tau} + C + De^{-\lambda\tau} + E\tau e^{-\lambda\tau}. \quad (5.78)$$

Tomando $A = \sigma$ y $B = C = D = E = 0$ se sigue la identidad. \square

Como conclusión obtenemos el siguiente Corolario

Corollary 5.5.2. *Para cada $\lambda > 0$, el modelo para la tasa short de Hull y White es consistente con la variedad de curvas forward \mathcal{G}^λ dada en (5.68).*

Observación 5.5.3. *Como en el caso del modelo HL observamos que si la curva forward inicial es una curva de Nelson y Siegel, luego las siguientes curvas forward son del tipo de Nelson y Siegel extendido exponencial perteneciendo a una variedad particular \mathcal{G}^λ . Debemos notar que, aún cuando el proceso de curvas forward se mueve en una variedad más amplia \mathcal{H} con un conjunto de parámetros $\mathcal{Z} = \mathbb{R}^6$,*

$$H(\tau; \beta) = \beta_1 e^{-a\tau} + \beta_2 e^{-2a\tau} + \beta_3 + \beta_4 e^{-\beta_6 \tau} + \beta_5 \tau e^{-\beta_6 \tau}, \quad \tau \geq 0, \quad (5.79)$$

no es cierto que esta variedad particular es consistente con HW. El parámetro β_6 debe ser igual al parámetro λ en (5.12) para que se satisfaga la condición de consistencia de drift

5.6. Conclusiones

En este capítulo presentamos los resultados publicados en "Consistency of extended Nelson-Siegel curve families with the Ho-Lee and Hull-White short rate models"[27] y en las actas del congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial [25]. Estudiamos la evolución de las curvas forward generadas por los modelos de tasa short de Ho-Lee y Hull-White cuando la curva inicial es del tipo de Nelson y Siegel.

Presentamos los conceptos de invarianza y consistencia presentados por Bjork y Christensen [5]. En este artículo los autores prueban que el modelo de Ho-Lee y el modelo de Hull-White para la tasa short no son consistentes con el modelo de Nelson y Siegel. Es decir, si la tasa short sigue el modelo de Ho-Lee o el modelo de Hull-White asumiendo que la curva forward inicial es del tipo de Nelson-Siegel, Bjork y Christensen prueban que las curvas forward siguientes no son del tipo de Nelson y Siegel. En nuestro artículo [27] encontramos las variedades consistentes con los modelos de tasa short de Ho-Lee y Hull-White.

En el caso de que la tasa short siga el modelo de Ho-Lee, asumiendo que la curva forward inicial es del tipo de Nelson y Siegel la dinámica de las siguientes curvas forward está dado por la suma de una función lineal y la curva paramétrica de Nelson y Siegel lo que llamamos curva de Nelson y Siegel extendida.

En el caso en que la tasa short siga el modelo de Hull-White, considerando que la curva forward inicial es del tipo de Nelson-Siegel entonces las siguientes curvas forward siguen la dinámica de las curvas de Nelson y Siegel extendida exponencial, es decir una función exponencial sumada a una función de Nelson y Siegel.

Capítulo 6

Modelo Libor market

El modelo Libor Market (LMM) es un modelo para las tasas forward Libor. También es conocido como el modelo Brace-Gatarek-Musiela (BGM) en honor a sus autores. Los modelos que describen la tasa short instantánea como los modelos de Hull-White [20], Ho-Lee [18], o los que describen la dinámica de la tasa forward instantánea como los modelos de Heath-Jarrow-Morton [17] tienen la desventaja de modelar una tasa que no es observable en el mercado. A diferencia de estos últimos, el modelo LMM modela la tasa Libor que es un producto directamente observable. Esto hace que este modelo sea popular entre los profesionales del mercado. Otra ventaja es que el LMM es consistente con el enfoque estándar de aproximar el valor de la cap utilizando la fórmula de Black (3.42).

El LMM puede utilizarse para determinar el precio de cualquier instrumento cuyo payoff pueda descomponerse en un conjunto de tasas futuras. El modelo supone que la dinámica de cada tasa forward es lognormal. Cada tasa forward tiene una volatilidad dependiente del tiempo y una correlación con las otras tasas forward.

El LMM lognormal estándar no produce la sonrisa de volatilidad observada de la caplet en el mercado. Para obtener esta sonrisa el LMM puede extenderse para incorporar un modelo de volatilidad estocástica. En el siguiente capítulo presentaremos el modelo Gaussiano cuadrático el cual propondremos en el Capítulo 8 para modelar la varianza en el modelo Libor Market.

6.1. Dinámica del modelo

Consideraremos una estructura de tenores $0 < T_0 < T_1 < \dots < T_N$ con N fijo y llamaremos como antes $\tau_n = T_{n+1} - T_n$ con $n = 0, \dots, N - 1$. El valor de τ es usualmente entre 3 y 6 meses y está asociado a las tasas Libor observadas en el mercado. Consideraremos también los bonos cupón cero $P(t, T_n)$, $0 \leq t \leq T_n$ con vencimiento en cada T_n . Notemos que a medida que el t se hace más grande tenemos menos cantidad de bonos cupón cero en vigencia, y el conjunto queda vacío cuando $T_N < t$. Denotaremos con $q(t)$ el menor subíndice en la estructura de tenor que sigue en vigencia. Para $q(t) < n < N - 1$ tenemos la tasa Libor definida como en (3.25)

$$L(t, T_n, T_{n+1}) = L_n(t) = \frac{1}{\tau_n} \left[\frac{P(t, T_n)}{P(t, T_{n+1})} - 1 \right] \quad (6.1)$$

donde el precio del bono cupón cero está dado por

$$P(t, T_n) = P(t, T_{q(t)}) \prod_{i=q(t)}^{n-1} \frac{1}{1 + \tau_i L_i(t)}. \quad (6.2)$$

Notemos que podemos reescribir el proceso de precios (3.28) como

$$B(t) = P(t, T_{q(t)}) \prod_{n=0}^{q(t)-1} (1 + \tau_n L_n(T_n)). \quad (6.3)$$

Consideremos el conjunto de tasas forward Libor $L_{q(t)}(t), L_{q(t)+1}(t), \dots, L_{N-1}(t)$. Recordemos que para todo $n > q(t)$, $L_n(t)$ es una martingala bajo la medida T_{n+1} -forward $\mathbb{Q}^{T_{n+1}}$ como se demostró en el Lema (3.5.3). Por lo tanto la dinámica de la tasa forward no tiene drift y sigue la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dL_n(t) = \sigma_n(t)^\top dW^{n+1}(t), \quad (6.4)$$

donde W^{n+1} es un movimiento Browniano en la medida $\mathbb{Q}^{T_{n+1}}$.

La elección de la medida apropiada puede simplificar considerablemente las cuentas a la hora de valorar un derivado financiero. Es por esto que a continuación veremos como queda expresada la ecuación diferencial estocástica de la tasa Libor forward en las distintas medidas.

Lema 6.1.1. *Sea $L_n(t)$ la tasa forward Libor que satisface (6.4). En la medida \mathbb{Q}^{T_n} el proceso para $L_n(t)$ está dado por*

$$dL_n(t) = \sigma_n(t)^\top \left(\frac{\tau_n \sigma_n(t)}{1 + \tau_n L_n(t)} dt + dW^n(t) \right) \quad (6.5)$$

donde W^n es un movimiento Browniano m -dimensional en la medida \mathbb{Q}^{T_n} .

Demostración. Por el Teorema (3.4.9) tenemos que la densidad $Z(t)$ de Radon Nikodym que relaciona las medidas $\mathbb{Q}^{T_{n+1}}$ y \mathbb{Q}^{T_n} está dada por

$$\begin{aligned} Z(t) &= \mathbb{E}^{T_n} \left(\frac{d\mathbb{Q}^{T_n}}{d\mathbb{Q}^{T_{n+1}}} | \mathcal{F}(t) \right) = \frac{P(t, T_n)/P(0, T_n)}{P(t, T_{n+1})/P(0, T_{n+1})} \\ &= (1 + \tau_n L_n(t)) \frac{P(0, T_{n+1})}{P(0, T_n)}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Por lo tanto tenemos que

$$dZ(t) = \frac{P(0, T_{n+1})}{P(0, T_n)} \tau_n dL_n(t). \quad (6.7)$$

Utilizando la ecuación (6.4) tenemos

$$dZ(t) = \frac{P(0, T_{n+1})}{P(0, T_n)} \tau_n \sigma_n(t)^\top dW^{n+1}(t). \quad (6.8)$$

Luego

$$\frac{dZ(t)}{Z(t)} = \frac{\tau_n \sigma_n(t)^\top dW^{n+1}(t)}{1 + \tau_n L_n(t)}. \quad (6.9)$$

Recordemos la observación (2.8.2) que nos permite identificar que en nuestro caso $\Theta = -\frac{\tau_n \sigma_n(t)}{1 + \tau_n L_n(t)}$. Aplicando el Teorema de Girsanov (2.8.1) tenemos:

$$W^n(t) = W^{n+1}(t) - \frac{\tau_n \sigma_n(t)}{1 + \tau_n L_n(t)} \quad (6.10)$$

es un movimiento Browniano en la medida \mathbb{Q}^{T_n} . Escrito en notación diferencial tenemos que

$$dW^n(t) = dW^{n+1}(t) - \frac{\tau_n \sigma_n(t)}{1 + \tau_n L_n(t)} dt \quad (6.11)$$

Reemplazando la ecuación (6.11) en (6.4) obtenemos el resultado. \square

Veamos ahora como queda expresado el proceso de $L_n(t)$ en lo que llamamos medida terminal \mathbb{Q}^{T_N} .

Lema 6.1.2. *Sea $L_n(t)$ la tasa forward Libor que satisface (6.4). En la medida \mathbb{Q}^{T_N} el proceso para $L_n(t)$ está dado por*

$$dL_n(t) = \sigma_n(t)^\top \left(- \sum_{j=n+1}^{N-1} \frac{\tau_j \sigma_j(t)}{1 + \tau_j L_j(t)} dt + dW^N(t) \right) \quad (6.12)$$

donde W^N es un movimiento Browniano m -dimensional en la medida \mathbb{Q}^{T_N} .

Demostración. La ecuación (6.11) nos muestra cómo relacionar los movimientos Brownianos en las medidas \mathbb{Q}^{T_n} y $\mathbb{Q}^{T_{n+1}}$ para $n = 0, \dots, N$. Con lo cual podemos expresar el movimiento Browniano en la medida \mathbb{Q}^{T_N} , $W^N(t)$, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} W^N(t) &= W^{N-1}(t) + \frac{\tau_{N-1} \sigma_{N-1}(t)}{1 + \tau_{N-1} L_{N-1}(t)} \\ &= W^{N-2}(t) + \frac{\tau_{N-2} \sigma_{N-2}(t)}{1 + \tau_{N-2} L_{N-2}(t)} + \frac{\tau_{N-1} \sigma_{N-1}(t)}{1 + \tau_{N-1} L_{N-1}(t)}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Continuando de esta manera llegamos a que

$$W^N(t) = W^{n+1}(t) + \sum_{j=n+1}^{N-1} \frac{\tau_j \sigma_j(t)}{1 + \tau_j L_j(t)}. \quad (6.14)$$

Utilizando (6.4) obtenemos la expresión de $L_n(t)$ en la medida terminal \mathbb{Q}^{T_N} . \square

Veamos ahora como queda expresada la ecuación diferencial estocástica de la tasa Libor forward en la medida \mathbb{Q}^B .

Lema 6.1.3. Sea $L_n(t)$ la tasa forward Libor que satisface (6.4). En la medida \mathbb{Q}^B el proceso para $L_n(t)$ está dado por

$$dL_n(t) = \sigma_n(t)^\top \left(\sum_{j=q(t)}^n \frac{\tau_j \sigma_j(t)}{1 + \tau_j L_j(t)} dt + dW^B(t) \right) \quad (6.15)$$

donde W^B es un movimiento Browniano m -dimensional en la medida \mathbb{Q}^B

Demostración. Recordemos de la definición (3.28) que

$$B(t) = P(t, T_{q(t)}) \prod_{n=0}^{q(t)-1} (1 + \tau_n L_n(T_n)). \quad (6.16)$$

Por lo tanto, para cualquier tiempo t ver la dinámica de la tasa Libor forward en la medida \mathbb{Q}^B es equivalente a establecer la dinámica en la medida $\mathbb{Q}^{T_{q(t)}}$ ya que el numerario para cualquier t es $P(t, T_{q(t)})$. Aplicando la misma idea que utilizamos en la ecuación (6.11) tenemos

$$\begin{aligned} W^{n+1}(t) &= W^n(t) + \frac{\tau_{n-1} \sigma_{n-1}(t)}{1 + \tau_{n-1} L_{n-1}(t)} \\ &= W^{n-1}(t) + \frac{\tau_{n-2} \sigma_{n-2}(t)}{1 + \tau_{n-2} L_{n-2}(t)} + \frac{\tau_{n-1} \sigma_{n-1}(t)}{1 + \tau_{n-1} L_{n-1}(t)}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Continuando de esta manera llegamos a que:

$$\begin{aligned} W^{n+1}(t) &= W^{q(t)}(t) + \sum_{j=q(t)}^n \frac{\tau_j \sigma_j(t)}{1 + \tau_j L_j(t)} \\ &= W^B(t) + \sum_{j=q(t)}^n \frac{\tau_j \sigma_j(t)}{1 + \tau_j L_j(t)}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

En notación diferencial tenemos:

$$dW^{n+1}(t) = dW^B(t) + \sum_{j=q(t)}^n \frac{\tau_j \sigma_j(t)}{1 + \tau_j L_j(t)} dt. \quad (6.19)$$

Nuevamente utilizando la ecuación (6.4) obtenemos el resultado. \square

6.2. Función de volatilidad

En la bibliografía (ver por ejemplo [1]) se han planteado diferentes expresiones para la volatilidad $\sigma_n(t)$. Una hipótesis muy común es tomar

$$\sigma_n(t) = \lambda_n(t) \phi(L_n(t)) \quad (6.20)$$

donde λ_n es una función vectorial determinística y $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función la cual tiene alguna parametrizaciones estandar como se muestra a continuación:

- Log-normal: $\phi(x) = x$.
- CEV (Elasticidad constante de la varianza): $\phi(x) = x^p \quad 0 < p < 1$.
- LCEV (CEV Limitado): $\phi(x) = x \cdot \min(\epsilon^{p-1}, x^{p-1}) \quad 0 < p < 1, \epsilon > 0$.
- Log-normal desplazada: $\phi(x) = bx + a \quad b > 0, a \neq 0$.

Estas funciones de volatilidad no representan con precisión las dinámicas de las sonrisas de volatilidad de las caps que se observan en el mercado. Es por esto que se han desarrollado otras alternativas en donde $\sigma_n(t)$ está escalado por un proceso estocástico y en las cuales se asume que la tasa forward Libor sigue un proceso del siguiente tipo:

$$\begin{aligned}
 dL_n(t) &= \sqrt{z(t)} \phi(L_n(t)) \lambda_n(t)^\top (\sqrt{z(t)} \mu_n(t) dt + dW^B(t)) \\
 \mu_n(t) &= \sum_{j=q(t)}^n \frac{\tau_j \phi(L_j(t)) \lambda_j(t)}{1 + \tau_j L_j(t)} \\
 dz(t) &= \theta(z_0 - z(t)) dt + \eta \psi(z(t)) dZ(t) \quad z(0) = z_0.
 \end{aligned} \tag{6.21}$$

En el Capítulo 8 desarrollamos nuestra propuesta que consiste en asumir que la varianza sigue un modelo Gaussiano cuadrático. En el siguiente capítulo analizamos las propiedades del modelo Gaussiano cuadrático.

Capítulo 7

Modelo Gaussiano cuadrático

En este capítulo describiremos y estudiaremos las propiedades estadísticas del modelo Gaussiano cuadrático. Utilizaremos este modelo en el Capítulo 8 para describir la varianza del proceso de tasas Libor forward. Comenzaremos dando la función de densidad y de probabilidad del proceso que sigue este modelo y calcularemos el valor esperado y la varianza condicional a la filtración generada por el movimiento Browniano.

7.1. Dinámica del modelo

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ un espacio de probabilidad, $\{W(t), t \geq 0\}$ un movimiento Browniano definido en 2.6.1 y $\mathcal{F}(t)$ la filtración generada por el movimiento Browniano. El modelo Gaussiano cuadrático asume que el proceso $z(t)$ sigue la siguiente dinámica

$$z(t) = a(t)y(t)^2 + b(t)y(t) + c(t), \quad (7.1)$$

donde $y(t)$ sigue la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dy(t) = g(t)dW(t) \quad z(0) = 0, \quad (7.2)$$

y asumiremos $a > 0$ y $b^2 - 4ac > 0$ para asegurar que la varianza sea positiva.

Este modelo puede ser expresado mediante un cambio de variables en término de variables de estado con reversión a la media. Recordemos de la Definición 4.1.4 que un proceso tiene reversión a la media si el límite del valor esperado del proceso tiende a una constante.

Sean $x(t) = H(t)y(t)$ y $\tilde{a}(t) = H(t)^{-1}a(t)H(t)^{-1}$ donde $H(t)$ es una función inversible. Tenemos entonces que

$$z(t) = \tilde{a}(t)x(t)^2 + x(t) + c(t) \quad (7.3)$$

donde, aplicando el Lema de Itô (2.7.10), tenemos que considerando $f(t, y) = H(t)y$, las derivadas están dadas por $\frac{df(t, y)}{dt} = \frac{dH(t)}{dt}y$, $\frac{df(t, y)}{dy} = H(t)$, y $\frac{df(t, y)^2}{dy^2} = 0$ y

$$\begin{aligned} dx(t) &= \left(\frac{dH(t)}{dt}y(t) + H(t)0 + \frac{1}{2}0g(t)^2 \right) dt + g(t)H(t)dW(t) \\ &= -K(t)x(t)dt + g(t)H(t)dW(t) \end{aligned} \quad (7.4)$$

donde $K(t) = -\frac{dH(t)}{dt}H(t)^{-1}$.

Tomando el límite del valor esperado tenemos que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[x(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[H(t)y(t)] = 0. \quad (7.5)$$

por lo que el proceso $x(t)$ tiene reversión a la media.

7.2. Propiedades estadísticas del proceso Gaussiano cuadrático

En esta sección estudiaremos la densidad y distribución del proceso $z(t)$ y posteriormente el valor esperado y la varianza condicionales a la filtración generada por el movimiento Browniano.

Proposición 7.2.1. *Sea $z(t)$ un proceso que sigue el modelo Gaussiano cuadrático como en (7.1), entonces la función de densidad de $z(t)$ está dada por*

$$f_{z(t)}(z) = A \left[\exp \left(-\frac{\left(\sqrt{\left(z - c(t) + \frac{b(t)^2}{4a(t)} \right) \frac{1}{a(t)} - \frac{b(t)}{2a(t)}} \right)^2}{2\sigma_y^2} \right) + \exp \left(-\frac{\left(\sqrt{\left(z - c(t) + \frac{b(t)^2}{4a(t)} \right) \frac{1}{a(t)} + \frac{b(t)}{2a(t)}} \right)^2}{2\sigma_y^2} \right) \right] \quad (7.6)$$

donde $A = \frac{1}{2a(t)} \left(\left(z - c(t) + \frac{b(t)^2}{4a(t)} \right) \frac{1}{a(t)} \right)^{-1/2} I_{V_i}(z) \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}}$. La distribución de $z(T)$ está dada por

$$P(z(T) < x) = \Phi \left(0, 1; \frac{\sqrt{\left(x - c(T) + \frac{b(T)^2}{4a(T)} \right) \frac{1}{a(T)} - \frac{b(T)}{2a(T)}}}{\sigma_y} \right) - 1 + \Phi \left(0, 1; \frac{\sqrt{\left(x - c(T) + \frac{b(T)^2}{4a(T)} \right) \frac{1}{a(T)} + \frac{b(T)}{2a(T)}}}{\sigma_y} \right) \quad (7.7)$$

donde $\Phi(\mu, \sigma, x)$ representa la función de distribución acumulada hasta x de una normal con media μ , desvío σ .

Para demostrar la Proposición 7.2.1 usaremos el siguiente resultado:

Teorema 7.2.2. *Sea $X = (X_1, X_2, \dots, X_k)$ un vector aleatorio absolutamente continuo con densidad f_X . Sean U_1, U_2, \dots, U_m abiertos disjuntos en \mathbb{R}^k tales que $P_X(\bigcup_{i=1}^m U_i) = 1$. Sea $h : \bigcup_{i=1}^m U_i \rightarrow \mathbb{R}^k$ una función tal que es inyectiva y diferenciable en U_i con $J_h(x) \neq 0$ para todo $x \in U_i$. Luego el vector $Y = h(X)$ también es absolutamente continuo y su densidad está dada por*

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^h f_X(h_i^{-1}(y)) |J_{h_i^{-1}}(y)| I_{V_i}(y), \quad (7.8)$$

donde $V_i = h(U_i)$, $h_i = h|_{U_i}$, y $h_i^{-1} : V_i \rightarrow U_i$ es la inversa de h_i .

La demostración de este Teorema puede encontrarse en [38].

Demostración. Proposición 7.2.1.

Sea $z(t)$ como en (7.1) donde $y(t)$ tiene distribución normal con media cero y varianza $\int_0^t |g(t)|^2 dt$ con densidad f_Y . Llamaremos $a = a(t)$, $b = b(t)$, $c = c(t)$ y $\sigma_y^2 = \int_0^t |g(t)|^2 dt$. Sean $U_1 = \{y : y < -\frac{b}{2a}\}$ y $U_2 = \{y : y > -\frac{b}{2a}\}$. Sea $h : U_1 \cup U_2 \rightarrow \mathbb{R}^k$ inyectiva y diferenciable en U_i . Por el Teorema (7.2.2), la densidad de z está dada por

$$f_{z(t)}(z) = \sum_{i=1}^2 f_Y(h_i^{-1}(z)) |J_{h_i^{-1}}(z)| I_{V_i}(z)$$

donde $V_i = h(U_i) = \{z > c - \frac{b^2}{4a}\}$.

En nuestro caso

$$h(y) = a \left(y + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

Utilizaremos la hipótesis $a > 0$ y $b^2 - 4ac > 0$. Las inversas de h restringidas a U_1 y U_2 están dadas por:

$$h_1^{-1}(z) = \sqrt{\left(z - c + \frac{b^2}{4a} \right) \frac{1}{a} - \frac{b}{2a}} \quad \text{si } y > -\frac{b}{2a}$$

$$h_2^{-1}(z) = -\sqrt{\left(z - c + \frac{b^2}{4a} \right) \frac{1}{a} - \frac{b}{2a}} \quad \text{si } y < -\frac{b}{2a}$$

y los Jacobianos están dados por:

$$J_{h_1^{-1}}(z) = \frac{1}{2a} \left(\left(z - c + \frac{b^2}{4a} \right) \frac{1}{a} \right)^{-1/2}$$

$$J_{h_2^{-1}}(z) = -\frac{1}{2a} \left(\left(z - c + \frac{b^2}{4a} \right) \frac{1}{a} \right)^{-1/2}.$$

Tenemos entonces que la función de densidad de $z(t)$ está dada por

$$\begin{aligned} f_{z(t)}(z) &= f_Y \left(\sqrt{\left(z - c + \frac{b^2}{4a} \right) \frac{1}{a}} \right) \frac{1}{2a} \left(\left(z - c + \frac{b^2}{4a} \right) \frac{1}{a} \right)^{-1/2} I_{V_1}(z) \\ &\quad + f_Y \left(-\sqrt{\left(z - c + \frac{b^2}{4a} \right) \frac{1}{a}} \right) \frac{1}{2a} \left(\left(z - c + \frac{b^2}{4a} \right) \frac{1}{a} \right)^{-1/2} I_{V_2}(z) \\ &= \frac{1}{2a} \left(\left(z - c + \frac{b^2}{4a} \right) \frac{1}{a} \right)^{-1/2} I_{V_i}(z) \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} \\ &\quad \left[\exp \left(\frac{-\left(\sqrt{\left(z - c + \frac{b^2}{4a} \right) \frac{1}{a}} - \frac{b}{2a} \right)^2}{2\sigma_y^2} \right) + \exp \left(\frac{-\left(-\sqrt{\left(z - c + \frac{b^2}{4a} \right) \frac{1}{a}} - \frac{b}{2a} \right)^2}{2\sigma_y^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Llamaremos $A = \frac{1}{2a} \left(\left(z - c + \frac{b^2}{4a} \right) \frac{1}{a} \right)^{-1/2} I_{V_i}(z) \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}}$.

Entonces podemos expresar la densidad de $z(t)$ de la siguiente manera:

$$f_{z(t)}(z) = A \left[\exp \left(- \frac{\left(\sqrt{\left(z - c + \frac{b^2}{4a} \right) \frac{1}{a}} - \frac{b}{2a} \right)^2}{2\sigma_y^2} \right) + \exp \left(- \frac{\left(\sqrt{\left(z - c + \frac{b^2}{4a} \right) \frac{1}{a}} + \frac{b}{2a} \right)^2}{2\sigma_y^2} \right) \right]. \quad (7.9)$$

Calculemos a continuación la distribución de $z(T)$

$$P(z(T) < x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{2a} \left(\left(u - c + \frac{b^2}{4a} \right) \frac{1}{a} \right)^{-1/2} I_{V_i}(u) \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} \left[\exp \left(- \frac{\left(\sqrt{\left(u - c + \frac{b^2}{4a} \right) \frac{1}{a}} - \frac{b}{2a} \right)^2}{2\sigma_y^2} \right) + \exp \left(- \frac{\left(\sqrt{\left(u - c + \frac{b^2}{4a} \right) \frac{1}{a}} + \frac{b}{2a} \right)^2}{2\sigma_y^2} \right) \right] du.$$

Sea $w = \sqrt{\left(u - c + \frac{b^2}{4a} \right) \frac{1}{a}}$ y $dw = \frac{1}{2wa} du$.

$$\begin{aligned} P(z(T) < x) &= \int_0^{\sqrt{\left(x - c + \frac{b^2}{4a} \right) \frac{1}{a}}} \frac{1}{2a\sigma_y \sqrt{2\pi} w} \left[\exp \left(- \frac{\left(w - \frac{b}{2a} \right)^2}{2\sigma_y^2} \right) + \exp \left(- \frac{\left(w + \frac{b}{2a} \right)^2}{2\sigma_y^2} \right) \right] 2awdw \\ &= \int_0^{\sqrt{\left(x - c + \frac{b^2}{4a} \right) \frac{1}{a}}} \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} \left[\exp \left(- \frac{\left(w - \frac{b}{2a} \right)^2}{2\sigma_y^2} \right) + \exp \left(- \frac{\left(w + \frac{b}{2a} \right)^2}{2\sigma_y^2} \right) \right] dw \\ &= \int_0^{\sqrt{\left(x - c + \frac{b^2}{4a} \right) \frac{1}{a}}} \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} \exp \left(- \frac{\left(w - \frac{b}{2a} \right)^2}{2\sigma_y^2} \right) dw + \int_0^{\sqrt{\left(x - c + \frac{b^2}{4a} \right) \frac{1}{a}}} \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} \exp \left(- \frac{\left(w + \frac{b}{2a} \right)^2}{2\sigma_y^2} \right) dw. \end{aligned}$$

Realizamos un cambio de variable $\hat{w} = -w$, $d\hat{w} = -dw$ en el segundo término de la ecuación anterior y lo volvemos a llamar w .

$$\begin{aligned} P(z(T) < x) &= \int_0^{\sqrt{\left(x - c + \frac{b^2}{4a} \right) \frac{1}{a}}} \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} \exp \left(- \frac{\left(w - \frac{b}{2a} \right)^2}{2\sigma_y^2} \right) dw - \int_0^{-\sqrt{\left(x - c + \frac{b^2}{4a} \right) \frac{1}{a}}} \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} \exp \left(- \frac{\left(w - \frac{b}{2a} \right)^2}{2\sigma_y^2} \right) dw \\ &= \Phi \left(\frac{b}{2a}, \sigma_y, \sqrt{\left(x - c + \frac{b^2}{4a} \right) \frac{1}{a}} \right) - \Phi \left(\frac{b}{2a}, \sigma_y, -\sqrt{\left(x - c + \frac{b^2}{4a} \right) \frac{1}{a}} \right) \\ &= \Phi \left(0, 1; \frac{\sqrt{\left(x - c + \frac{b^2}{4a} \right) \frac{1}{a}} - \frac{b}{2a}}{\sigma_y} \right) - \Phi \left(0, 1; \frac{-\sqrt{\left(x - c + \frac{b^2}{4a} \right) \frac{1}{a}} - \frac{b}{2a}}{\sigma_y} \right) \\ &= \Phi \left(0, 1; \frac{\sqrt{\left(x - c + \frac{b^2}{4a} \right) \frac{1}{a}} - \frac{b}{2a}}{\sigma_y} \right) - 1 + \Phi \left(0, 1; \frac{\sqrt{\left(x - c + \frac{b^2}{4a} \right) \frac{1}{a}} + \frac{b}{2a}}{\sigma_y} \right) \end{aligned}$$

donde $\Phi(\mu, \sigma, x)$ representa la función de distribución acumulada hasta x de una normal con media μ , desvío σ . \square

Calcularemos a continuación el valor esperado y la varianza de $z(T)$ condicional a $z(t)$.

Proposición 7.2.3. *Sea $z(t)$ un proceso que sigue el modelo Gaussiano cuadrático como en (7.1), entonces el valor esperado y la varianza de $z(T)$ condicional a la filtración $\mathcal{F}(t)$ están dados por:*

$$E[z(T)|\mathcal{F}(t)] = a(T)(\hat{\sigma}_y^2 + y^2(t)) + b(T)y(t) + c(T) \quad (7.10)$$

$$Var[z(T)|\mathcal{F}(t)] = 2a(T)^2 \left[\hat{\sigma}_y^4 + 2\hat{\sigma}_y^2 \left(y(t) + \frac{b(T)}{2a(T)} \right)^2 \right]. \quad (7.11)$$

Demostración. Comenzaremos calculando el valor esperado condicional a la filtración $\mathcal{F}(t)$:

$$\begin{aligned} E[z(T)|\mathcal{F}(t)] &= E[a(T)y^2(T) + b(T)y(T) + c(T)|z(t)] \\ &= a(T)E(y^2(T)|z(t)) + b(T)E(y(T)|z(t)) + c(T). \end{aligned}$$

Tenemos que

$$E[y(T)|\mathcal{F}(t)] = y(t). \quad (7.12)$$

Queremos calcular $E[y^2(T)|z(t)]$ tomando en consideración que

$$Var[y(T)|\mathcal{F}(t)] = E[y^2(T)|\mathcal{F}(t)] - (E[y(T)|\mathcal{F}(t)])^2. \quad (7.13)$$

Por lo tanto tenemos

$$E[y^2(T)|\mathcal{F}(t)] = \hat{\sigma}_y^2 + y^2(t) \quad (7.14)$$

$$E[z(T)|\mathcal{F}(t)] = a(T)(\hat{\sigma}_y^2 + y^2(t)) + b(T)y(t) + c(T). \quad (7.15)$$

Para el cálculo de la varianza condicional de $z(t)$ tenemos, siguiendo la notación anterior

$$\begin{aligned} Var[z(T)|\mathcal{F}(t)] &= Var\left[a\left(y(T) + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \mid \mathcal{F}(t)\right] \\ &= a^2 Var\left[\left(y(T) + \frac{b}{2a}\right)^2 \mid \mathcal{F}(t)\right] \\ &= a^2 \left(E\left[\left(y(T) + \frac{b}{2a}\right)^4 \mid \mathcal{F}(t)\right] - \left(E\left[\left(y(T) + \frac{b}{2a}\right)^2 \mid \mathcal{F}(t)\right]\right)^2 \right). \end{aligned}$$

Solo nos resta calcular

$$E\left[\left(y(T) + \frac{b}{2a}\right)^4 \mid \mathcal{F}(t)\right]. \quad (7.16)$$

Utilizando el Lema (2.4.3) sea

$$f(y) = \left(y + \frac{b}{2a}\right)^4 \quad (7.17)$$

y

$$E[f(y(T))|\mathcal{F}(t)] = E[f(y(T) - y(t) + y(t))|\mathcal{F}(t)] \quad (7.18)$$

sea

$$g(\hat{x}) = E[f(y(T) - y(t) + x)]. \quad (7.19)$$

Entonces

$$E[f(y(T))|\mathcal{F}(t)] = g(y(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}_y^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(w + \frac{b}{2a} + y(t)\right)^4 \exp\left(-\frac{w^2}{2\hat{\sigma}_y^2}\right) dw, \quad (7.20)$$

donde $\hat{\sigma}_y^2 = \int_t^T |g(u)|^2 du$.

Resolviendo la integral

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left(w + \frac{b}{2a} + y(t)\right)^4 \exp\left(-\frac{w^2}{2\hat{\sigma}_y^2}\right) dw &= \left[\frac{\sqrt{\pi d}}{8} (3d^2 + 12df^2 + 4f^4) \operatorname{erf}\left(\frac{w}{\sqrt{d}}\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} d \exp\left(-\frac{w^2}{d}\right) (8df + 3dw + 8f^3 + 12f^2w + 8fw^2 + 2w^3) \right]_{-\infty}^{\infty} \end{aligned}$$

donde $d = 2\hat{\sigma}_y^2$, $f = \frac{b}{2a} + y(t)$ y $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt$.

Tomando los límites correspondientes tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(w + \frac{b}{2a} + y(t)\right)^4 \exp\left(-\frac{w^2}{2\hat{\sigma}_y^2}\right) dw = 2 \left[\frac{\sqrt{\pi d}}{8} (3d^2 + 12df^2 + 4f^4) \right].$$

Reemplazando esto en (7.20) obtenemos

$$E[f(y(T))|\mathcal{F}(t)] = E\left[\left(y(T) + \frac{b(T)}{2a(T)}\right)^4 \middle| \mathcal{F}(t)\right] \quad (7.21)$$

$$= 3\hat{\sigma}_y^2 + 6\hat{\sigma}_y^2 \left(y(t) + \frac{b(T)}{2a(T)}\right)^2 + \left(y(t) + \frac{b(T)}{2a(T)}\right)^4. \quad (7.22)$$

Por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}[z(T)|\mathcal{F}(t)] &= a(T)^2 \left(3\hat{\sigma}_y^4 + 6\hat{\sigma}_y^2 \left(y(t) + \frac{b(T)}{2a(T)}\right)^2 + \left(y(t) + \frac{b(T)}{2a(T)}\right)^4 - \left(\hat{\sigma}_y^2 + y^2(t) + \frac{b(T)}{a(T)}y(t) + \frac{b(T)^2}{4a^2(T)}\right)^2 \right) \\ &= a(T)^2 \left(3\hat{\sigma}_y^4 + 6\hat{\sigma}_y^2 \left(y(t) + \frac{b(T)}{2a(T)}\right)^2 + \left(y(t) + \frac{b(T)}{2a(T)}\right)^4 - \left(\hat{\sigma}_y^2 + \left(y(t) + \frac{b(T)}{2a(T)}\right)^2\right)^2 \right) \\ &= a(T)^2 \left[2\hat{\sigma}_y^4 + 4\hat{\sigma}_y^2 \left(y(t) + \frac{b(T)}{2a(T)}\right)^2 \right]. \end{aligned}$$

En conclusión tenemos que

$$E[z(T)|\mathcal{F}(t)] = a(T)(\hat{\sigma}_y^2 + y^2(t)) + b(T)y(t) + c(T) \quad (7.23)$$

$$Var[z(T)|\mathcal{F}(t)] = 2a(T)^2 \left(\hat{\sigma}_y^4 + 2\hat{\sigma}_y^2 \left(y(t) + \frac{b(T)}{2a(T)} \right)^2 \right). \quad (7.24)$$

□

De esta manera hemos obtenido la función de densidad y de probabilidad del proceso que sigue un modelo Gaussiano cuadrático y calculamos el valor esperado y la varianza condicional a la filtración generada por el movimiento Browniano.

Capítulo 8

Modelo Libor market con varianza Gaussiana cuadrática

En este capítulo presentaremos un nuevo modelo Libor Market Model con varianza Gaussiana cuadrática para la dinámica de las tasas forward. Este modelo asume la existencia de un número finito de bonos cupón cero lo que lo hace más realista que los modelos desarrollados en el Capítulo 4. A la vez asume una volatilidad estocástica y a diferencia de los modelos existentes en la literatura, el modelo propuesto describe la dinámica de la varianza con un modelo Gaussiano cuadrático.

Estudiaremos las propiedades del modelo y calcularemos la prima de la caplet. Luego daremos soluciones numéricas para valorar las caplets con el método de diferencias finitas ADI (Alternating Direction Implicit) y el método de Monte Carlo. Por último estudiaremos la sonrisa de volatilidad que genera nuestro modelo y observaremos la variedad de curvas que se pueden obtener y realizaremos un análisis de sensibilidad a los parámetros del modelo. Los resultados se encuentran publicados en [26].

8.1. Definición del modelo

Para el desarrollo del modelo consideraremos al igual que en Capítulo 6 una estructura de tenores $0 < T_0 < T_1 < \dots < T_N$ con N fijo y llamaremos nuevamente $\tau_n = T_{n+1} - T_n$ con $n = 0, \dots, N-1$. Consideraremos también la existencia de bonos cupón cero $P(t, T_n)$ para cada vencimiento T_n . A medida que el t se incrementa tenemos una menor cantidad de bonos cupón cero en vigencia, y el conjunto queda vacío cuando $T_N < t$. Denotaremos con $q(t)$ al menor subíndice en la estructura de tenores que sigue en vigencia. El modelo Gaussiano cuadrático presentado en el Capítulo 7 lo utilizaremos para modelar la varianza de las tasas Libor forward.

Definición 8.1.1. Sea \mathbb{Q}^B la medida inducida por la cuenta de moneda. Diremos que la tasa Libor L_n sigue un Libor Market Model con varianza Gaussiana cuadrática si sigue la siguiente dinámica:

$$\begin{aligned} dL_n(t) &= \sigma_n(t)(\sqrt{z(t)}\mu_n(t)dt + dW^B(t)) \\ \sigma_n(t) &= \sqrt{z(t)}\phi(L_n(t))\lambda_n(t)^\top \\ \mu_n(t) &= \sum_{j=q(t)}^n \frac{\tau_j\phi(L_j(t))\lambda_j(t)}{1 + \tau_j L_j(t)}, \end{aligned} \tag{8.1}$$

donde $z(t)$ sigue un modelo Gaussiano cuadrático dado por

$$\begin{aligned} z(t) &= a(t)y(t)^2 + b(t)y(t) + c(t) & z(0) &= z_0 \\ dy(t) &= g dZ^B(t) & y(0) &= 0. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Las funciones reales a , b and c son tales que cumplen $b(t)^2 - 4a(t)c(t) \geq 0$, g es una constante positiva, el vector λ_n está dado por $\lambda_n = (\lambda_n^1, \dots, \lambda_n^m)$. $W^B = (W_1^B, \dots, W_m^B)$ y Z^B son movimientos Brownianos m -dimensional y unidimensional respectivamente en la medida \mathbb{Q}^B . La correlación entre los movimientos Brownianos W^B y Z^B está dada por ρ . La función $\phi(x) = px + (1-p)S$ con p y S constantes positivas.

Como vimos en el Capítulo 6 ϕ puede tomar diferentes formas. Nos concentraremos en el estudio de una en particular:

$$\phi(x) = px + (1-p)S, \quad (8.3)$$

donde p es una constante positiva y S es llamado parámetro de nivel y usualmente es tomado $S = L_n(0)$. Esta elección de ϕ nos permite asegurar la existencia de una solución única libre de arbitraje para $L_n(t)$ bajo todas las medidas \mathbb{Q}^{T_i} con $q(t) < i < N$ como se muestra a continuación.

Proposición 8.1.2. *Sea L_n como en (8.1) con ϕ como en (8.3), entonces existe una solución única, $L_n(t)$, bajo todas las medidas \mathbb{Q}^{T_i} con $q(t) < i < N$.*

Demostración. Aplicando el Teorema (2.11.4) para probar la existencia de una única solución tenemos que probar que se cumplen las condiciones de Lipschitz y de crecimiento para asegurar la existencia de la solución $L_n(t)$.

En nuestro caso $\mu(t, L_n(t))$ y $\sigma(t, L_n(t))$ están dados por

$$\begin{aligned} \mu(t, L_n(t)) &= z(t)\phi(L_n(t))\lambda_n(t)\mu_n(t) \\ \sigma(t, L_n(t)) &= \sqrt{z(t)}\phi(L_n(t))\lambda_n(t), \end{aligned} \quad (8.4)$$

donde $\phi(x) = px + (1-p)S$.

Comencemos con la primera condición

$$\begin{aligned} &|z(t)\lambda_n(t)\mu_n(t)(\phi(x) - \phi(y))| + |\sqrt{z(t)}\lambda_n(t)(\phi(x) - \phi(y))| \\ &= |z(t)\lambda_n(t)\mu_n(t)p(x-y)| + |\sqrt{z(t)}\lambda_n(t)p(x-y)| \\ &\leq \left(|z(t)\lambda_n(t)\mu_n(t)p| + |\sqrt{z(t)}\lambda_n(t)p| \right) |(x-y)|. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Para corroborar la segunda condición tenemos:

$$\begin{aligned} &|z(t)\lambda_n(t)\mu_n(t)\phi(x)|^2 + |\sqrt{z(t)}\lambda_n(t)\phi(x)|^2 \\ &\leq |z(t)\lambda_n(t)\mu_n(t)|^2 |px + (1-p)S|^2 + |\sqrt{z(t)}\lambda_n(t)|^2 |px + (1-p)S|^2 \\ &= \left(|z(t)\lambda_n(t)\mu_n(t)|^2 + |\sqrt{z(t)}\lambda_n(t)|^2 \right) |px + (1-p)S|^2. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Por lo tanto existe una solución única, $L_n(t)$ bajo todas las medidas \mathbb{Q}^{T_i} con $q(t) < i < N$. \square

8.2. Valoración analítica de caplets

Recordemos de la Sección 3.6 del Capítulo 3, una caplet con strike K , vencimiento en T_n y nominal N es una opción sobre una tasa L_n que en el tiempo $t \leq T_n$ vale

$$C(t) = N(T_{n+1} - T_n)P(t, T_{n+1})\mathbb{E}^{T_{n+1}}[\text{máx}(L_n(T_n) - K, 0)|\mathcal{F}_t] \quad (8.7)$$

donde el valor esperado condicional a la filtración \mathcal{F}_t es en la medida $\mathbb{Q}^{T_{n+1}}$.

Como demostramos en el Lema 3.5.3, L_n es una martingala en la medida $\mathbb{Q}^{T_{n+1}}$,

$$dL_n(t) = \lambda_n^\top(t)\phi(L_n(t))\sqrt{z(t)}dW^{n+1}(t) \quad (8.8)$$

y la dinámica de $z(t)$ en la medida $\mathbb{Q}^{T_{n+1}}$ queda expresada de la siguiente manera:

$$z(t) = a(t)y^2(t) + b(t)y(t) + c(t) \quad (8.9)$$

$$dy(t) = \left[g\rho\sqrt{z(t)}\mu_n(t)^\top \right] dt + g dZ^{n+1}(t), \quad (8.10)$$

donde ρ representa la correlación entre los movimientos Brownianos W^B y Z^B , μ_n es como en (8.1) y Z^{n+1} es un movimiento Browniano en la medida $\mathbb{Q}^{T_{n+1}}$.

En primer lugar aplicaremos una transformación con el fin de trabajar con un movimiento Browniano unidimensional equivalente. En la medida $\mathbb{Q}^{T_{n+1}}$ podemos reescribir el modelo (8.8) de la siguiente manera:

$$dL_n(t) = \sqrt{z(t)}(pL_n(t) + (1-p)S)\|\lambda_n(t)\|dY^{n+1}(t) \quad (8.11)$$

donde $Y^{n+1}(t)$ es un movimiento Browniano unidimensional en la medida $\mathbb{Q}^{T_{n+1}}$ independiente de $Z^{n+1}(t)$. Específicamente Y^{n+1} está dado por

$$Y^{n+1}(t) = \int_0^t \frac{\lambda_n(t)}{\|\lambda_n(t)\|} dW^{n+1} = \frac{1}{\|\lambda_n(t)\|} \left(\lambda_n^1(t) \int_0^t dW_1^{n+1} + \lambda_n^2(t) \int_0^t dW_2^{n+1} + \dots + \lambda_n^m(t) \int_0^t dW_m^{n+1} \right). \quad (8.12)$$

Para poder calcular el valor esperado condicional en (8.7) debemos conocer la distribución del $\text{máx}(L_n(T_n) - K, 0)$, para simplificar el cálculo aplicaremos una transformación como se realiza en [1] y obtendremos una variable que tiene distribución lognormal como se muestra en la siguiente proposición.

Proposición 8.2.1. *En el modelo (8.8), tenemos que*

$$L_n(t) = \frac{1}{p}[(pL_n(0) + (1-p)S)X(t) - (1-p)S]$$

donde

$$dX(t)/X(t) = \|\lambda_n(t)\|p\sqrt{z(t)}dY^{n+1}(t)$$

con $X(0) = 1$, es decir

$$\ln X(t) = p \int_0^t \sqrt{z(s)}\|\lambda_n(s)\|dY^{n+1}(s) - \frac{1}{2}p^2 \int_0^t z(s)\|\lambda_n(s)\|^2 ds. \quad (8.13)$$

Demostración. Aplicaremos el Lema de Itô (2.7.10) a $\ln(pL_n(t) + (1-p)S)$.

Sea $f(x) = \ln(px + (1-p)L_n(0))$, a continuación calcularemos las derivadas:

$$f'(x) = \frac{p}{px - (1-p)S},$$

$$f''(x) = -\frac{p^2}{(px - (1-p)S)^2}.$$

Entonces el Lema de Itô nos dice que

$$df(L_n(t)) = d\ln(X(t)) = -\frac{\|\lambda_n(t)\|^2 p^2}{2} z(t) dt + p \|\lambda_n(t)\| \sqrt{z(t)} dY^{n+1}(t).$$

Reescribiendo la ecuación anterior en forma integral obtenemos (8.13). \square

Para conocer el precio de la caplet aplicaremos el Teorema A.1.2. Este teorema nos proporciona el siguiente resultado

$$E[\text{máx}(e^\epsilon - e^k)] = \Psi(1) - \frac{e^k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-k(\alpha+iw)} \Psi(\alpha+iw)}{(\alpha+iw)(1-\alpha-iw)} dw,$$

para cualquier $0 < \alpha < 1$ para el cual el lado derecho exista. Donde ϵ una variable aleatoria en el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) , $k \in \mathbb{R}$ y Ψ la función generadora de momentos

$$\Psi(u) = E[e^{u\epsilon}].$$

En nuestro caso tenemos que calcular

$$E^{T_{n+1}}[\text{máx}(L_n(T_n) - K, 0) | \mathcal{F}_t],$$

por lo que luego de realizar unas transformaciones que detallaremos en la demostración del Teorema 8.2.5 necesitaremos calcular:

$$E^{T_{n+1}}[\text{máx}(e^{\ln X(T_n)} - e^{\ln(K'/S')}, 0)]$$

Para ello aplicaremos el Teorema A.1.2 tomando $\epsilon = \ln X(T_n)$ y $k = \ln(K'/S')$.

Previo a presentar este resultado calcularemos la función generadora de momentos de $\ln X(t)$ para el caso en que $\lambda_n(t)$ es una función dependiente del tiempo y posteriormente presentaremos el resultado para λ_n constante.

Proposición 8.2.2. *Definimos*

$$\Psi_X(u; t) \triangleq E^{T_{n+1}}(e^{u \ln X(t)}) = E^{T_{n+1}}(X(t)^u), \quad (8.14)$$

donde $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ y $u \in \mathbb{C}$. En el modelo (8.8), para cualquier $u \in \mathbb{C}$ para el cual el lado derecho de (8.27) exista, tenemos:

$$\Psi_X(u, t) = \psi_{z\lambda_n^2} \left(\frac{1}{2} p^2 u(u-1), u; t \right),$$

donde denotamos

$$\psi_{z\lambda_n^2}(v, u; t) \triangleq E^{\tilde{P}}(e^{v z \overline{\lambda_n^2}(t)}), \quad \overline{z\lambda_n^2}(t) \triangleq \int_0^t z(s) \|\lambda_n(s)\|^2 ds. \quad (8.15)$$

Demostración. De (8.13) tenemos que

$$E^{T_{n+1}}(e^{u \ln X(t)}) = E^{T_{n+1}}(e^{up \int_0^t \sqrt{z(s)} \|\lambda_n(s)\| dY^{n+1}(s) - \frac{1}{2} up^2 \int_0^t z(s) \|\lambda_n(s)\|^2 ds}). \quad (8.16)$$

Sumamos y restamos en el exponente $\frac{1}{2} u^2 p^2 \int_0^t z(s) \|\lambda_n(s)\|^2 ds$

$$E^{T_{n+1}}(e^{u \ln X(t)}) = E^{T_{n+1}}(e^{up \int_0^t \sqrt{z(s)} \|\lambda_n(s)\| dY^{n+1}(s) - \frac{1}{2} u^2 p^2 \int_0^t z(s) \|\lambda_n(s)\|^2 ds} e^{\frac{1}{2} u(u-1) p^2 \int_0^t z(s) \|\lambda_n(s)\|^2 ds}). \quad (8.17)$$

Sea $M(t) = e^{up \int_0^t \sqrt{z(s)} \|\lambda_n(s)\| dY^{n+1}(s) - \frac{1}{2} u^2 p^2 \int_0^t z(s) \|\lambda_n(s)\|^2 ds}$, entonces

$$E^{T_{n+1}}(e^{u \ln X(t)}) = E^{T_{n+1}}[M(t) e^{\frac{1}{2} u(u-1) p^2 \int_0^t z(s) \|\lambda_n(s)\|^2 ds}].$$

En la medida $Q^{T_{n+1}}$, $\ln(X(t))$ tiene media $\int_0^t -\|\lambda_n(s)\| p \sqrt{z(s)} ds$. Utilizaremos el teorema de Girsanov (2.8.1) para cambiar de medida.

Sea $\tilde{Y}^{T_{n+1}} = Y^{T_{n+1}} + \int_0^t \theta(s) ds$ donde $\theta(t) = -\|\lambda_n(t)\| p \sqrt{z(t)}$.

Definimos la medida \tilde{P} de forma que

$$E^{T_{n+1}}[\tilde{Y}^{n+1} M(t)] = 0 = E^{\tilde{P}}[\tilde{Y}^{n+1}].$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} E^{T_{n+1}}(e^{u \ln X(t)}) &= E^{\tilde{P}}[e^{\frac{1}{2} u(u-1) p^2 \int_0^t z(s) \|\lambda_n(s)\|^2 ds}] \\ &= E^{\tilde{P}}[e^{v z \lambda_n^2(t)}]. \end{aligned}$$

□

A continuación calcularemos la función generadora de momentos para nuestro modelo. Para ello consideraremos $u = \frac{1}{2} + iw$. Esta hipótesis es común en la práctica y aparece para dar resultados robustos y estables.

Queremos calcular

$$\Psi_X(u, T) = \psi_{z \lambda_n^2}(\frac{1}{2} p^2 u(u-1), u, T) = \psi_{z \lambda_n^2}(\frac{1}{2} p^2 (-\frac{1}{4} - w^2), \frac{1}{2} + iw, T).$$

Llamaremos $-v = -\frac{1}{2} p^2 (\frac{1}{4} + w^2)$ donde $v > 0$ por lo que

$$\psi_{z \lambda_n^2}(\frac{1}{2} p^2 (-\frac{1}{4} - w^2), \frac{1}{2} + iw, T) = E^{\tilde{P}}(e^{-v z \lambda_n^2}) = E^{\tilde{P}}(e^{-v \int_0^T z(s) \|\lambda(s)\|^2 ds}).$$

Llamaremos

$$u(y, t, T) = E^{\tilde{P}}(e^{-v \int_0^T z(s) \|\lambda(s)\|^2 ds}).$$

En la medida \tilde{P} el proceso $y(t)$ está dado por:

$$dy(t) = \left[g\rho\sqrt{z(t)}\mu_n(t)^\top + g\tilde{\rho}|\lambda_n(t)||b\sqrt{z(t)} \right] dt + g d\tilde{Z}(t)$$

donde \tilde{Z} es un movimiento Browniano en la medida \tilde{P} Por lo tanto, utilizando el teorema de Feynman-Kac (2.7.11) tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(y, t, T)}{\partial t} + g\sqrt{z(t)}[\rho\mu_n(t) + \tilde{\rho}|\lambda_n(t)||b] \frac{\partial u(y, t, T)}{\partial y} + \frac{1}{2}g^2 \frac{\partial^2 u(y, t, T)}{\partial y^2} - \\ v(a(t)y^2(t) + b(t)y(t) + c(t))|\lambda_n(t)|^2 u(x, t) = 0. \end{aligned}$$

Debido a que el modelo Gaussiano cuadrático es affin proponemos como solución

$$u(y, t, T) = e^{C(t,T) - B(t,T)y(t) - A(t,T)y^2(t)}.$$

Observemos que $u(y, T, T) = 1$. Dado que $y(t)$ es un proceso estocástico esto implica que los coeficientes

$$A(T, T) = 0, \quad (8.18)$$

$$B(T, T) = 0, \quad (8.19)$$

$$C(T, T) = 0. \quad (8.20)$$

Tenemos entonces

$$\frac{\partial u(y, t, T)}{\partial t} = u(y, t, T)[C_t(t, T) - B_t(t, T)y - A_t(t, T)y^2],$$

$$\frac{\partial u(y, T, T)}{\partial y} = u(y, t, T)[-B(t, T) - 2A(t, T)y],$$

$$\frac{\partial^2 u(y, t, T)}{\partial y^2} = u(y, t, T)[-B(t, T) - 2A(t, T)y]^2 + u(y, t, T)[-2A(t, T)].$$

Reemplazando en la ecuación diferencial obtenemos

$$\begin{aligned} C_t(t, T) - B_t(t, T)y - A_t(t, T)y^2 + g\sqrt{z(t)}[\rho\mu_n(t) + \tilde{\rho}|\lambda_n(t)||p] [-B_t(t, T) - 2A(t, T)y] \\ + \frac{1}{2}g^2[[-B(t, T) - 2A(t, T)y]^2 + P(t, T)[-2A(t, T)]] - v(a(t)y^2 + b(t)y + c(t)) = 0. \end{aligned}$$

Agrupando los términos con y^2 , y y los términos independientes obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$-A_t(t, T) + 2g^2(t)A^2(t, T) - va(t)\|\lambda_n(t)\|^2 = 0, \quad (8.21)$$

$$-B_t - g\sqrt{z(t)}[\rho\mu_n(t) + \tilde{\rho}\|\lambda_n(t)\|p]2A(t, T) + 2g^2(t)B(t, T)A(t, T) - vb(t)\|\lambda_n(t)\|^2 = 0, \quad (8.22)$$

$$C_t(t, T) - g\sqrt{z(t)}[\rho\mu_n(t) + \tilde{\rho}\|\lambda_n(t)\|p]B(t, T) + \frac{1}{2}g^2B^2(t, T) - g^2A(t, T) - vc(t)\|\lambda_n(t)\|^2 = 0. \quad (8.23)$$

Si asumimos $\rho = \tilde{\rho} = 0$ las ecuaciones anteriores quedan de la siguiente manera:

$$-A_t(t, T) + 2g^2A^2(t, T) - va(t)\|\lambda_n(t)\|^2 = 0, \quad (8.24)$$

$$-B_t(t, T) + 2g^2B(t, T)A(t, T) - vb(t)\|\lambda_n(t)\|^2 = 0, \quad (8.25)$$

$$C_t(t, T) + \frac{1}{2}g^2B^2(t, T) - g^2A(t, T) - vc(t)\|\lambda_n(t)\|^2 = 0. \quad (8.26)$$

Este sistema puede ser resuelto numéricamente usando el método de Runge Kutta, para más detalles ver [34]. En la práctica es común que el término $\lambda_n(t)$ sea tomado constante a trozos,

$$\lambda_n(t) = \lambda_{n,i} \quad t \in (t_{i-1}, t_i).$$

Para el caso en que consideremos λ constante veremos que la función generadora de momentos queda expresada como se presenta en la siguiente Proposición.

Proposición 8.2.3. *Definimos*

$$\Psi_X(u; t) \triangleq E^{T_{n+1}}(e^{u \ln X(t)}) = E^{T_{n+1}}(X(t)^u). \quad (8.27)$$

En el modelo (8.8), para cualquier $u \in \mathbb{C}$ para el cual el lado derecho exista, tenemos:

$$\Psi_X(u; t) = \psi_{\bar{z}(t)}\left(\frac{1}{2}(\|\lambda_n\|p)^2u(u-1), u; t\right),$$

donde denotamos

$$\psi_{\bar{z}}(v, u; t) \triangleq E^{\tilde{P}}(e^{v\bar{z}(t)}), \quad \bar{z}(t) \triangleq \int_0^t z(s)ds. \quad (8.28)$$

Demostración. De (8.13) tenemos que

$$E^{T_{n+1}}(e^{u \ln X(t)}) = E^{T_{n+1}}(e^{u\|\lambda_n\|p \int_0^t \sqrt{z(s)}dY^{n+1}(s) - \frac{1}{2}u\|\lambda_n\|^2p^2 \int_0^t z(s)ds}). \quad (8.29)$$

Sumamos y restamos en el exponente $\frac{1}{2}u^2\|\lambda_n\|^2p^2 \int_0^t z(s)ds$,

$$E^{T_{n+1}}(e^{u \ln X(t)}) = E^{T_{n+1}}(e^{u \|\lambda_n\| p \int_0^t \sqrt{z(s)} dY^{n+1}(s) - \frac{1}{2} u^2 \|\lambda_n\|^2 p^2 \int_0^t z(s) ds} e^{\frac{1}{2} u(u-1) \|\lambda_n\|^2 p^2 \int_0^t z(s) ds}). \quad (8.30)$$

Sea $M(t) = e^{u \|\lambda_n\| p \int_0^t \sqrt{z(s)} dY^{n+1}(s) - \frac{1}{2} u^2 \|\lambda_n\|^2 p^2 \int_0^t z(s) ds}$, entonces

$$E^{T_{n+1}}(e^{u \ln X(t)}) = E^{T_{n+1}}[M(t) e^{\frac{1}{2} u(u-1) \|\lambda_n\|^2 p^2 \int_0^t z(s) ds}].$$

En la medida $Q^{T_{n+1}}$, $\ln(X(t))$ tiene media $\int_0^t -\|\lambda_n\| p \sqrt{z(s)} ds$. Utilizaremos el teorema de Girsanov (2.8.1) para cambiar de medida.

Sea $\tilde{Y}^{T_{n+1}} = Y^{T_{n+1}} + \int_0^t \theta(s) ds$ donde $\theta(t) = -\|\lambda_n\| p \sqrt{z(t)}$.

Definimos la medida \tilde{P} de forma que

$$E^{T_{n+1}}[\tilde{Y}^{n+1} M(t)] = 0 = E^{\tilde{P}}[\tilde{Y}^{n+1}].$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} E^{T_{n+1}}(e^{u \ln X(t)}) &= E^{\tilde{P}}[e^{\frac{1}{2} u(u-1) \|\lambda_n\|^2 p^2 \int_0^t z(s) ds}] \\ &= E^{\tilde{P}}[e^{v \tilde{z}(t)}]. \end{aligned}$$

□

A continuación daremos de forma explícita la función generadora de momentos para nuestro modelo. Nuevamente consideraremos $u = \frac{1}{2} + iw$.

Teorema 8.2.4. *Asumimos que $X(t)$ sigue la dinámica descrita en (8.13) y los parámetros a y λ en (8.2) constantes no nulas. Consideraremos $u = \frac{1}{2} + iw$. Entonces la función generadora de momentos está dada por:*

$$\Psi_X(u, T) = e^{C(0, T) - B(0, T)y(0) - A(0, T)y^2(0)}, \quad (8.31)$$

donde

$$\begin{aligned} A(0, T) &= -\frac{\sqrt{av}}{\sqrt{2g}} \tanh(-\sqrt{2avg}T), \\ B(0, T) &= \operatorname{sech}(-\sqrt{2avg}T) \int_0^T vb(s) \cosh(-\sqrt{2avg}(T-s)) ds, \\ C(0, T) &= -\int_0^T vc(s) - \frac{1}{2}g^2 B(s, T) + g^2 A(s, T) ds. \end{aligned}$$

Demostración. Queremos calcular

$$\Psi_X(u, T) = \psi_{\tilde{z}}\left(\frac{1}{2}(\|\lambda_n\| p)^2 u(u-1), u, T\right) = \psi_{\tilde{z}}\left(\frac{1}{2}(\|\lambda_n\| p)^2 \left(-\frac{1}{4} - w^2\right), \frac{1}{2} + iw, T\right).$$

Llamaremos $-v = -\frac{1}{2}(\|\lambda_n\|p)^2(\frac{1}{4} + w^2)$ donde $v > 0$ por lo que

$$\psi_{\bar{z}}(\frac{1}{2}(\|\lambda_n\|p)^2(-\frac{1}{4} - w^2), \frac{1}{2} + iw, T) = E^{\tilde{P}}(e^{-v\bar{z}(T)}) = E^{\tilde{P}}(e^{-v\int_0^T z(s)ds}).$$

Definimos

$$u(y, t, T) = E^{\tilde{P}}(e^{-v\int_t^T z(s)ds}),$$

entonces

$$\psi_{\bar{z}}(\frac{1}{2}(\|\lambda_n\|p)^2(-\frac{1}{4} - w^2), \frac{1}{2} + iw, T) = E^{\tilde{P}}(e^{-v\int_0^T z(s)ds}) = u(y, 0, T).$$

Utilizaremos el teorema de Feynman Kac (2.7.11) para obtener $u(y, t, T)$. En nuestro caso tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(y, t, T)}{\partial t} + g\sqrt{z(t)}[\rho\mu_n(t) + \tilde{\rho}\|\lambda_n\|b] \frac{\partial u(y, t, T)}{\partial y} + \frac{1}{2}g^2 \frac{\partial^2 u(y, t, T)}{\partial y^2} \\ -v(a(t)y^2(t) + b(t)y(t) + c(t))u(y, t, T) = 0. \end{aligned} \quad (8.32)$$

Debido a que el modelo Gaussiano cuadrático es affin proponemos como solución

$$u(y, t, T) = e^{C(t,T) - B(t,T)y(t) - A(t,T)y^2(t)}.$$

Observemos que $u(y, T, T) = 1$. Dado que $y(t)$ es un proceso estocástico esto implica que los coeficientes A, B y C satisfacen:

$$A(T, T) = 0, \quad (8.33)$$

$$B(T, T) = 0, \quad (8.34)$$

$$C(T, T) = 0. \quad (8.35)$$

Tenemos entonces

$$\frac{\partial u(y, t, T)}{\partial t} = u(y, t, T)[C_t(t, T) - B_t(t, T)y - A_t(t, T)y^2],$$

$$\frac{\partial u(y, t, T)}{\partial y} = u(y, t, T)[-B(t, T) - 2A(t, T)y],$$

$$\frac{\partial^2 u(y, t, T)}{\partial y^2} = u(y, t, T)[-B(t, T) - 2A(t, T)y]^2 + u(y, t, T)[-2A(t, T)].$$

Reemplazando en la ecuación diferencial obtenemos

$$\begin{aligned} C_t(t, T) - B_t(t, T)y - A_t(t, T)y^2 + g\sqrt{z(t)}[\rho\mu_n(t) + \tilde{\rho}\|\lambda_n\|p][-B_t(t, T) - 2A_t(t, T)y] \\ + \frac{1}{2}g^2[[-B(t, T) - 2A(t, T)y]^2 + u(y, t, T)[-2A(t, T)]] - v(a(t)y^2 + b(t)y + c(t)) = 0. \end{aligned}$$

Agrupando los términos con y^2 , y y los términos independientes obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$-A_t(t, T) + 2g^2(t)A^2(t, T) - va(t) = 0, \quad (8.36)$$

$$-B_t - g(t)\sqrt{z(t)}[\rho\mu_n(t) + \tilde{\rho}|\lambda_n||p]2A(t, T) + 2g^2(t)B(t, T)A(t, T) - vb(t) = 0, \quad (8.37)$$

$$C_t(t, T) - g(t)\sqrt{z(t)}[\rho\mu_n(t) + \tilde{\rho}|\lambda_n||p]B(t, T) + \frac{1}{2}g^2(t)B^2(t, T) - g^2(t)A(t, T) - vc(t) = 0. \quad (8.38)$$

Si asumimos $\rho = \tilde{\rho} = 0$ las ecuaciones anteriores resultan:

$$-A_t(t, T) + 2g^2(t)A^2(t, T) - va(t) = 0, \quad (8.39)$$

$$-B_t(t, T) + 2g^2(t)B(t, T)A(t, T) - vb(t) = 0, \quad (8.40)$$

$$C_t(t, T) + \frac{1}{2}g^2(t)B^2(t, T) - g^2(t)A(t, T) - vc(t) = 0. \quad (8.41)$$

Veamos que en el caso que a y g son constantes distintas de 0 estas ecuaciones tienen solución cerrada.

$$-A_t(t, T) + 2g^2A^2(t, T) - va = 0, \quad (8.42)$$

$$-B_t(t, T) + 2g^2B(t, T)A(t, T) - vb(t) = 0, \quad (8.43)$$

$$C_t(t, T) + \frac{1}{2}g^2B^2(t, T) - g^2A(t, T) - vc(t) = 0. \quad (8.44)$$

La ecuación (8.42) es una ecuación diferencial no lineal, conocida como ecuación de Ricatti. La solución está dada por:

$$A(t, T) = -\frac{\sqrt{av} \tanh(-\sqrt{2vag}(T-t))}{\sqrt{2g}}, \quad (8.45)$$

y se cumple que $A(T, T) = 0$.

De la ecuación (8.43) tenemos

$$B_t(t, T) = -\sqrt{2avg}B(t, T)\tanh(-\sqrt{2avg}(T-t)) - vb(t),$$

por lo que

$$B(t, T) = \operatorname{sech}(-\sqrt{2avg}(T-t)) \left(\int_0^t -vb(s) \cosh(-\sqrt{2avg}(T-s)) ds \right) + D_1 \operatorname{sech}(-\sqrt{2avg}(T-t)). \quad (8.46)$$

D_1 debe ser tal que $B(T, T) = 0$ por lo que

$$D_1 = \int_0^T vb(s) \cosh(-\sqrt{2vag}(T-s)) ds,$$

y de (8.44) nos queda

$$C(t, T) = \int_0^t (vc(s) - \frac{1}{2}g^2B^2(s, T) + g^2A(s, T))ds + D_2, \quad (8.47)$$

donde

$$D_2 = - \int_0^T (vc(s) - \frac{1}{2}g^2B^2(s, T) + g^2A(s, T))ds.$$

En conclusión tenemos que

$$\psi_{\bar{z}(T)}\left(\frac{1}{2}(\|\lambda_n\|p)^2(-\frac{1}{4}-w^2), \frac{1}{2}+iw, T\right) = E^{\tilde{P}}(e^{-v \int_0^T z(s)ds}) = u(y, 0, T) = e^{C(0, T) - B(0, T)y(0) - A(0, T)y^2(0)}, \quad (8.48)$$

donde

$$\begin{aligned} A(0, T) &= -\frac{\sqrt{av}}{\sqrt{2g}} \tanh(-\sqrt{2av}gT), \\ B(0, T) &= \operatorname{sech}(-\sqrt{2av}gT) \int_0^T vb(s) \cosh(-\sqrt{2av}g(T-s))ds, \\ C(0, T) &= - \int_0^T vc(s) - \frac{1}{2}g^2B(s, T) + g^2A(s, T)ds. \end{aligned}$$

□

Tenemos ahora todos los elementos necesarios para obtener el precio de una opción call Europea donde el subyacente sigue el modelo propuesto considerando λ constante.

Teorema 8.2.5. *El precio de una caplet, $c_{CG}(0, L_n, T_n, K)$, en $t = 0$, con nominal N , strike K , vencimiento en T_n sobre una tasa forward L_n que sigue el modelo (8.1)-(8.2) está dado por:*

$$\begin{aligned} c_{CG}(0, L_n, T_n, K) &= \frac{1}{p}c_B(0, L'_n, T_n, K', \lambda b) \\ &\quad - N\tau_n P(0, T_{n+1}) \frac{K'}{2\pi p} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(1/2+iw)\ln(L'_n/K')} q(1/2+iw)}{w^4 + 1/4} dw, \end{aligned} \quad (8.49)$$

donde $\tau_n = T_{n+1} - T_n$ y $c_B(0, L'_n, T_n, K', \sigma)$ es la fórmula de Black para una tasa spot inicial L'_n , strike K' , expiración T_n y volatilidad σ , con

$$L'_n = pL_n(0) + (1-p)S, \quad K' = pK + (1-p)S$$

donde S es el parámetro de nivel como en la fórmula (8.3), $q(1/2+iw)$ está dado por:

$$q(u) = \psi_{\bar{z}}\left(\frac{1}{2}(\|\lambda_n\|p)^2 u(u-1), u, T_n\right) - e^{\frac{1}{2}\|\lambda_n\|^2 p^2 z_0 T_n u(u-1)} \quad (8.50)$$

$$u = \frac{1}{2} + iw \quad (8.51)$$

donde $\psi_{\bar{z}}$ es la definida en (8.31).

Demostración. Denotaremos con c_{CG} al valor de la caplet en el modelo (8.1)-(8.2), como presentamos en el Capítulo 3, sección 3.6, el precio de la caplet en $t = 0$ está dado por:

$$c_{CG}(0, L_n, T_n, K) = N\tau_n P(0, T_{n+1}) \mathbb{E}^{T_{n+1}}[\text{máx}(L_n(T_n) - K, 0)]. \quad (8.52)$$

Con el fin de poder aplicar el Teorema A.1.2 para resolver el valor esperado consideramos la transformación realizada en la Proposición 8.2.1 la cual nos permite expresar el valor de la caplet de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} c_{CG}(0, L_n, T_n, K) &= N\tau_n P(0, T_{n+1}) \mathbb{E}^{T_{n+1}}[\text{máx}(L_n(T_n) - K, 0)] \\ &= N\tau_n P(0, T_{n+1}) \frac{1}{p} \mathbb{E}^{T_{n+1}}[\text{máx}(L'_n e^{\ln X(T)} - K', 0)] \\ &= N\tau_n P(0, T_{n+1}) \frac{L'_n}{p} \mathbb{E}^{T_{n+1}}[\text{máx}(e^{\ln X(T_n)} - e^{\ln(K'/S')}, 0)] \end{aligned} \quad (8.53)$$

Aplicando el teorema (A.1.2) con $\epsilon = \ln X(T_n)$ y $k = \ln(K'/S')$ tenemos que

$$c_{CG}(0, L_n, T_n, K) = N\tau_n P(0, T_{n+1}) \frac{L'_n}{p} \left(\Psi_X(1, T_n) - \frac{K'}{L'_n 2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(\frac{1}{2}+iw)\ln(\frac{K'}{L'_n})} \Psi_X(\frac{1}{2}+iw, T_n)}{(\frac{1}{2}+iw)(\frac{1}{2}-iw)} dw \right). \quad (8.54)$$

Recordemos de la Definición 8.27:

$$\Psi_X(1, T_n) = \psi_{\bar{z}(t)}\left(\frac{1}{2}(\|\lambda\|/p)^2 1(1-1); 1; T_n\right) = \psi_{\bar{z}(t)}(0; 1; T_n) = \mathbb{E}^P[e^{0\bar{z}(t)}] = 1, \quad (8.55)$$

Por lo tanto tenemos que

$$c_{CG}(0, L_n, T_n, K) = N\tau_n P(0, T_{n+1}) \frac{1}{p} \left(L'_n - \frac{K'}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(1/2+iw)\ln(K'/L'_n)} \Psi_X(1/2+iw, T_n)}{(1/2+iw)(1/2-iw)} dw \right),$$

Aplicando nuevamente el Teorema A.1.2 con nuestro modelo con $g = 0$, es decir, anulando la parte aleatoria de la varianza,

$$\begin{aligned} dL_n(t) &= \sigma_n(t)(\sqrt{z(t)}\mu_n(t)dt + dW^B(t)) \\ \sigma_n(t) &= \sqrt{z(t)}\phi(L_n(t))\lambda_n(t)^\top \\ \mu_n(t) &= \sum_{j=q(t)}^n \frac{\tau_j \phi(L_j(t))\lambda_j(t)}{1 + \tau_j L_j(t)}, \end{aligned} \quad (8.56)$$

donde $z(t)$ es ahora determinística

$$z(t) = c(t) \quad z(0) = z_0, \quad (8.57)$$

encontramos el valor de la opción en el modelo log-normal con volatilidad determinística $c_{DLN}(0, L_n, T_n, K)$ dado por

$$c_{DLN}(0, L_n, T_n, K) = N\tau_n P(0, T_{n+1}) \frac{1}{p} \left(L'_n - \frac{K'}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(\frac{1}{2}+iw)\ln(\frac{K'}{L'_n})} \Psi_X^0(\frac{1}{2}+iw, T_n)}{(\frac{1}{2}+iw)(\frac{1}{2}-iw)} dw \right)$$

donde

$$\Psi_X^0(u, T_n) = E \left[e^{u(\|\lambda_n\|p\sqrt{z_0}W(T_n) - \frac{1}{2}\|\lambda_n\|^2 p^2 z_0 T_n)} \right] = e^{\frac{1}{2}\|\lambda_n\|^2 p^2 z_0 T_n (u^2 - u)}.$$

Por otro lado, si la volatilidad es determinística entonces podemos utilizar la fórmula de Black 3.42 para valorar la opción,

$$c_{DLN}(0, L_n, T_n, K) = \frac{1}{b} c_B(0, L'_n, T_n, K', \|\lambda_n\|p),$$

donde c_B denota la prima de la opción obtenida con la fórmula de Black (3.42), por lo que:

$$\frac{1}{b} c_B(0, L'_n, T_n, K', \|\lambda_n\|p) - N\tau_n P(0, T_{n+1}) \frac{1}{p} \left(L'_n - \frac{K'}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(\frac{1}{2}+iw)\ln(\frac{K'}{L'_n})} \Psi_X^0(\frac{1}{2}+iw, T_n)}{(\frac{1}{2}+iw)(\frac{1}{2}-iw)} dw \right) = 0.$$

Sumando la parte derecha de esta identidad, la cual es cero, al lado derecho de la ecuación (8.54) obtenemos

$$c_{CG}(0, L_n, T_n, K) = \frac{1}{p} c_B(0, L'_n, T_n, K', \|\lambda_n\|p) - N\tau_n P(0, T_{n+1}) \frac{K'}{2\pi p} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(1/2+iw)\ln(K'/L'_n)} q(1/2+iw)}{(1/2+iw)(1/2-iw)} dw, \quad (8.58)$$

donde $q(u) = \Psi_X(u, T_n) - \Psi_X^0(u, T_n)$ y se sigue el resultado. □

8.3. Valoración numérica de caplets

La fórmula presentada en la sección anterior para encontrar el precio de una caplet no es una fórmula cerrada por lo que en la práctica para poder valorar caplets debemos recurrir a métodos numéricos. A continuación presentamos dos métodos el método Alternating Direction Implicit (ADI) y el método de Monte Carlo para la valoración de caplets.

8.3.1. Método ADI (Alternating Direction Implicit)

El método ADI es un método de diferencias finitas que se utiliza para encontrar soluciones numéricas de grandes sistemas de ecuaciones diferenciales. En una solución por diferencias finitas,

las derivadas son reemplazadas por aproximaciones en diferencias finitas, convirtiendo el problema de ecuaciones diferenciales en un problema algebraico que se puede resolver mediante el uso de matrices.

Este método es un ejemplo de los llamados operadores splitting ya que divide el problema original en dos subproblemas más sencillos con el fin de reducir la cantidad de operaciones.

Consideremos una caplet sobre una tasa de interés L_n con strike K . Es decir paga en el tiempo T_{n+1} la cantidad $\max(L_n(T_n) - K, 0)$. Como vimos en la Sección 3.6y en 8.7, el precio de la caplet C en el momento t está dado por:

$$\begin{aligned} C(t) &= N P(t, T_{n+1}) \tau_n E^{T_{n+1}} [\max(L_n(T_n) - K, 0) | \mathcal{F}_t] \\ &= P(t, T_{n+1}) \tau_n G(t, L_n(t), y(t)). \end{aligned}$$

Utilizando el teorema de Feynman-Kac (2.7.11) la función $G(t, L_n, y) = G$ satisface la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} g^2 \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \phi(L_n)^2 (ay^2 + by + c) \lambda^2 \frac{\partial^2 G}{\partial L^2} = 0, \quad (8.59)$$

con condición final dada por $G(T_n, L_n, y) = \max(L_n - K, 0)$.

A continuación utilizaremos el método ADI [30] para resolver numéricamente esta ecuación diferencial. El método ADI es un método de diferencias finitas por lo que en primer lugar debemos crear las grillas correspondientes.

Sea $\{L_{j_1}\}_{j_1=0}^{m_1+1}$ una grilla para L_n y $\{y_{j_2}\}_{j_2=0}^{m_2+1}$ la grilla para y . Las derivadas segundas las podemos aproximar por los siguientes operadores:

$$\delta_{LL} G(t, L_{j_1}, y_{j_2}) = \frac{G(t, L_{j_1+1}, y_{j_2}) + G(t, L_{j_1-1}, y_{j_2}) - 2G(t, L_{j_1}, y_{j_2})}{\Delta_L^2}, \quad (8.60)$$

$$\delta_{yy} G(t, L_{j_1}, y_{j_2}) = \frac{G(t, L_{j_1}, y_{j_2+1}) + G(t, L_{j_1}, y_{j_2-1}) - 2G(t, L_{j_1}, y_{j_2})}{\Delta_y^2}, \quad (8.61)$$

las cuales llamaremos diferencias centradas. Denotaremos con $G_{j_1, j_2}(t) = G(t, L_{j_1}, y_{j_2})$.

La ecuación en derivadas parciales (8.59) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = F(G, L, y, t, \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 G}{\partial L^2}). \quad (8.62)$$

Utilizaremos el método de Crank Nicolson para la discretización de la variable temporal. Este método es una combinación del método de Euler explícito

$$\frac{G_{j_1, j_2}(t_{i+1}) - G_{j_1, j_2}(t_i)}{\Delta t} = F(G, L_{j_1}, y_{j_2}, t_i, \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 G}{\partial L^2}),$$

y el método de Euler implícito

$$\frac{G_{j_1, j_2}(t_{i+1}) - G_{j_1, j_2}(t_i)}{\Delta t} = F(G, L_{j_1}, y_{j_2}, t_{i+1}, \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 G}{\partial L^2}),$$

y propone

$$\frac{G_{j_1, j_2}(t_{i+1}) - G_{j_1, j_2}(t_i)}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left(F(G, L_{j_1}, y_{j_2}, t_{i+1}, \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 G}{\partial L^2}) + F(G, L_{j_1}, y_{j_2}, t_i, \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 G}{\partial L^2}) \right),$$

donde las derivadas parciales respecto a L e y son discretizadas con diferencias centradas como en (8.60).

La ecuación diferencial a resolver está dada por:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2)G = 0,$$

donde los operadores \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 están dados por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= \frac{1}{2}g^2 \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}, \\ \mathcal{L}_2 &= \frac{1}{2}\phi(L_n)^2(ay^2 + by + c)\lambda^2 \frac{\partial^2 G}{\partial L^2}. \end{aligned}$$

Llamaremos $\hat{\mathcal{L}}_1$ y $\hat{\mathcal{L}}_2$ a los operadores obtenidos al reemplazar las derivadas segundas por δ_{yy} y δ_{LL} .

Discretizando la variable tiempo equi-espaciadamente, para el período $[t_i, t_{i+1}]$ tenemos:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\Delta t(\hat{\mathcal{L}}_1 + \hat{\mathcal{L}}_2)\right) G_{j_1, j_2}(t_i) = \left(1 + \frac{1}{2}\Delta t(\hat{\mathcal{L}}_1 + \hat{\mathcal{L}}_2)\right) G_{j_1, j_2}(t_{i+1}) + e_i^{i+1},$$

donde

$$e_i^{i+1} = O(\Delta t(\Delta_y^2 + \Delta_L^2 + \Delta_t^2)).$$

Por lo tanto nos resta resolver este esquema para $m_1 m_2$ puntos interiores $G_{j_1, j_2}(t_i)$ con $j_1 = 1, \dots, m_1$ y $j_2 = 1, \dots, m_2$. Resolver este sistema requiere $O(m_1^2 m_2^2)$ operaciones.

El método propone realizar la siguiente aproximación

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2}\Delta t(\hat{\mathcal{L}}_1 + \hat{\mathcal{L}}_2)\right) &\sim \left(1 - \frac{1}{2}\Delta t\hat{\mathcal{L}}_1\right) \left(1 - \frac{1}{2}\Delta t\hat{\mathcal{L}}_2\right), \\ \left(1 + \frac{1}{2}\Delta t(\hat{\mathcal{L}}_1 + \hat{\mathcal{L}}_2)\right) &\sim \left(1 + \frac{1}{2}\Delta t\hat{\mathcal{L}}_1\right) \left(1 + \frac{1}{2}\Delta t\hat{\mathcal{L}}_2\right). \end{aligned}$$

El error que estamos cometiendo al hacer esta aproximación es del mismo orden que e_i^{i+1} , es decir es del orden de $O(\Delta t(\Delta_y^2 + \Delta_L^2 + \Delta_t^2))$, con lo cual no estamos agregando órdenes de error al problema.

Tenemos entonces que el problema a resolver está dado por:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\Delta t\hat{\mathcal{L}}_1\right) \left(1 - \frac{1}{2}\Delta t\hat{\mathcal{L}}_2\right) G_{j_1, j_2}(t_i) = \left(1 + \frac{1}{2}\Delta t\hat{\mathcal{L}}_1\right) \left(1 + \frac{1}{2}\Delta t\hat{\mathcal{L}}_2\right) G_{j_1, j_2}(t_{i+1}).$$

Este problema es dividido en dos sub-problemas:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2}\Delta t\hat{\mathcal{L}}_1\right) U_{j_1, j_2} &= \left(1 + \frac{1}{2}\Delta t\hat{\mathcal{L}}_2\right) G_{j_1, j_2}(t_{i+1}), \\ \left(1 - \frac{1}{2}\Delta t\hat{\mathcal{L}}_2\right) G_{j_1, j_2}(t_i) &= \left(1 + \frac{1}{2}\Delta t\hat{\mathcal{L}}_1\right) U_{j_1, j_2}, \end{aligned}$$

donde U_{j_1, j_2} es un valor intermedio auxiliar.

El procedimiento a realizar es el siguiente:

- Fijamos j_2 .
- Sea $U_1^{j_2} = (U_{1,j_2}, U_{2,j_2}, \dots, U_{m_1,j_2})$.
- El primer paso es resolver

$$\left(1 - \frac{1}{2}\Delta_t \hat{\mathcal{L}}_1\right) U_{j_1,j_2} = \left(1 + \frac{1}{2}\Delta_t \hat{\mathcal{L}}_2\right) G_{j_1,j_2}(t_{i+1}),$$

lo cual es equivalente a resolver

$$\left(I - \frac{1}{2}\Delta_t A_1^{j_2} \left(\frac{t_{i+1} + t_i}{2}\right)\right) U_1^{j_2} = M_2^{j_2} \left(\frac{t_{i+1} + t_i}{2}\right),$$

donde

$$\begin{aligned} M_2^{j_2} \left(\frac{t_{i+1} + t_i}{2}\right) &= \left(1 + \frac{1}{2}\Delta_t \hat{\mathcal{L}}_2\right) G_{j_1,j_2}(t_{i+1}) \\ &= \frac{1}{4} \frac{\Delta_t}{\Delta_L^2} \phi(L_n)^2 (ay^2 + by + c) \lambda^2 G_{j_1,j_2-1}(t_{i+1}) \\ &\quad + \frac{1}{4} \frac{\Delta_t}{\Delta_L^2} \phi(L_n)^2 (ay^2 + by + c) \lambda^2 G_{j_1,j_2+1}(t_{i+1}) \\ &\quad + \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta_t}{\Delta_L^2} \phi(L_n)^2 (ay^2 + by + c) \lambda^2\right) G_{j_1,j_2}(t_{i+1}). \end{aligned}$$

- $A_1^{j_2}$ es una matriz $(m_1 \times m_1)$ de la forma

$$A_1^{j_2}(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) & u_1(t) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_2(t) & c_2(t) & u_2(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & l_3(t) & c_3(t) & u_3(t) & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & l_{m_1-1}(t) & c_{m_1-1}(t) & u_{m_1-1}(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l_{m_1}(t) & c_{m_1}(t) \end{pmatrix} \quad (8.63)$$

donde los coeficientes c_j, u_j, l_j están dados por

$$\begin{aligned} c_j(t) &= -g^2 \Delta_y^{-2}, \\ u_j(t) &= \frac{1}{2} g^2 \Delta_y^{-2}, \\ l_j(t) &= \frac{1}{2} g^2 \Delta_y^{-2}. \end{aligned}$$

Conociendo el valor de $G(t_{i+1})$ resolvemos el primer sistema tridiagonal obteniendo el valor de $U_1^{j_2}$ en $O(m_1)$ operaciones. Repetimos este procedimiento para $j_2 = 1, \dots, m_2$ obteniendo U_{j_1,j_2} para todo $j_1 = 1, \dots, m_1$, y $j_2 = 1, \dots, m_2$ con un costo computacional del orden de $O(m_1 m_2)$

Luego de resolver la primera etapa procedemos a resolver el segundo sistema:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\Delta_t \hat{\mathcal{L}}_2\right) G_{j_1,j_2}(t_i) = \left(1 + \frac{1}{2}\Delta_t \hat{\mathcal{L}}_1\right) U_{j_1,j_2}.$$

Para ello realizamos los siguientes pasos:

- Fijamos j_1 .
- Sea $G_2^{j_1}(t) = (G_{j_1,1}(t), G_{j_1,2}(t), \dots, G_{j_1,m_2}(t))^\top$.
- Al igual que antes podemos escribir

$$\left(1 - \frac{1}{2}\Delta_t \hat{\mathcal{L}}_2\right) G_{j_1,j_2}(t_i) = \left(1 + \frac{1}{2}\Delta_t \hat{\mathcal{L}}_1\right) U_{j_1,j_2}$$

como

$$\left(I - \frac{1}{2}\Delta_t A_2^{j_1} \left(\frac{t_{i+1} + t_i}{2}\right)\right) G_2^{j_1}(t_i) = M_1^{j_1} \left(\frac{t_{i+1} + t_i}{2}\right),$$

donde $A_2^{j_1}$ es una matriz tridiagonal ($m_2 \times m_2$) análoga a (8.63) donde los coeficientes están dados por:

$$\begin{aligned} c_j(t) &= -\phi(L_n)^2(ay^2 + by + c)\lambda^2\Delta_y^{-2}, \\ u_j(t) &= \frac{1}{2}\phi(L_n)^2(ay^2 + by + c)\lambda^2\Delta_y^{-2}, \\ l_j(t) &= \frac{1}{2}\phi(L_n)^2(ay^2 + by + c)\lambda^2\Delta_y^{-2}, \end{aligned}$$

y $M_1^{j_1}$ está dado por:

$$\begin{aligned} M_1^{j_1} \left(\frac{t_{i+1} + t_i}{2}\right) &= \left(1 + \frac{1}{2}\Delta_t \hat{\mathcal{L}}_1\right) U_{j_1,j_2} \\ &= \frac{1}{4} \frac{\Delta_t}{\Delta_y^2} g^2 U_{j_1-1,j_2} + \frac{1}{4} \frac{\Delta_t}{\Delta_y^2} g^2 U_{j_1+1,j_2} + \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta_t}{\Delta_y^2} g^2\right) U_{j_1,j_2}. \end{aligned}$$

Para cada j_1 dado, resolvemos el sistema tridiagonal para $G_2^{j_1}$ en $O(m_2)$ operaciones. Realizamos este procedimiento para los m_1 valores de j_1 . Obtenemos la matriz G_{j_1,j_2} con un costo computacional de $O(m_1 m_2)$.

El código fue realizado en Python y se muestra en el Apéndice.

8.3.2. Método Monte Carlo

El método de Monte Carlo es un método estadístico usado para aproximar expresiones matemáticas complejas y costosas de evaluar con exactitud, como por ejemplo, el cálculo de integrales definidas o aproximaciones del número π . El método fue popularizado por los científicos Stanislaw Ulam, Enrico Fermi, John von Neuman y Nicholas Metropolis entre otros, quienes ya trabajaban sobre muestreos estadísticos. El nombre y el desarrollo sistemático de los métodos de Monte Carlo datan aproximadamente de 1944 y mejoran enormemente con el desarrollo de la computadora.

En nuestro caso en particular utilizaremos el método de Monte Carlo para valorar caplets 8.7 que sigan la dinámica planteada por nuestro modelo (8.1-8.2).

Con el fin de presentar la metodología consideremos un derivado Europeo V con vencimiento T y payoff $V(T)$, donde $V(T)$ es una variable aleatoria \mathcal{F}_T -medible. La base para poder aplicar este

método en este caso es la relación de martingala existente, es decir, si $N(\cdot)$ es un numerario tenemos que

$$V(t) = N(t)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^N} [V(T)/N(T)|\mathcal{F}(t)], \quad (8.64)$$

donde \mathbb{Q}^N es la medida inducida por el numerario. Para poder aproximar este valor esperado el método se basa en un importante resultado, la ley fuerte de los grandes números.

Teorema 8.3.1. Sean Y_1, Y_2, \dots una sucesión de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas con valor esperado $\mu < \infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea \bar{Y}_n la media muestral:

$$\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i. \quad (8.65)$$

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{Y}_n = \mu, \quad (8.66)$$

donde la convergencia es casi seguramente.

El método de Monte Carlo se basa en aproximar el valor esperado generando realizaciones independientes de $V(T)/N(T)$ en la medida \mathbb{Q}^N y tomando el promedio de las mismas. Por lo tanto si $V_1/N_1, \dots, V_n/N_n$ denotan n muestras independientes de $V(T)/N(T)$ entonces el estimador que propone el método de Monte Carlo para el valor del derivado en $t = 0$ es el siguiente:

$$\bar{V}(0) = N(0) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i/N_i. \quad (8.67)$$

Para poder utilizar este resultado tenemos que generar muestras de la distribución de $V(T)/N(T)$, esto nos lleva a presentar otro de los resultados fundamentales de la estadística, el Teorema central del límite.

Teorema 8.3.2. Sean Y_1, Y_2, \dots una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con valor esperado μ y desviación estándar $\sigma < \infty$. Sea la media muestral \bar{Y} definida como en (8.65). Entonces para $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\bar{Y}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1), \quad (8.68)$$

donde $\mathcal{N}(0, 1)$ es la distribución normal estándar y la convergencia es en distribución. Más aún, si definimos

$$s_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}_n)^2}, \quad (8.69)$$

entonces también se cumple

$$\frac{\bar{Y}_n - \mu}{s_n/\sqrt{n}} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1), \quad (8.70)$$

donde la convergencia es en distribución.

Para aplicar el método de Monte Carlo a nuestro caso debemos simular caminos independientes de una colección de tasas Libor a lo largo del tiempo y para cada camino, descontar el valor del payoff del activo que estemos considerando y realizar un promedio entre ellos. Dada una medida de probabilidad y una curva forward inicial de tasas Libor en el tiempo t , queremos saber cómo se moverá la curva forward completa en el tiempo $t + \Delta$, $\Delta > 0$, de forma que siga la dinámica propuesta por nuestro modelo.

Asumimos que comenzamos en t , queremos conocer la manera en la que avanzaremos de t a $t + \Delta$ para construir una muestra de $L_{q(t+\Delta)}(t + \Delta), \dots, L_{N-1}(t + \Delta)$. Asumiendo que estamos en la medida spot \mathbb{Q}^B según nuestro modelo tenemos que la dinámica de la tasa Libor está dada por (8.1-8.2). Para resolver lo planteado introduciremos el esquema de Euler.

Consideremos una ecuación diferencial estocástica general

$$dX(t) = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t). \quad (8.71)$$

El esquema de Euler o también conocido como esquema de Euler-Maruyama propone discretizar la variable temporal. Es decir, considerando $\Delta = \frac{T}{m}$ dividimos el intervalo $[0, T]$ en subintervalos $[i\Delta, (i+1)\Delta]$ para $i = 0, 1, \dots, m-1$ y evaluamos los coeficientes de la ecuación diferencial estocástica en cada paso de tiempo en el punto derecho del intervalo. Comenzando en un punto inicial $\hat{X}_0 = X(0)$ tenemos

$$\hat{X}_{i+1} = \hat{X}_i + \mu(i\Delta, \hat{X}_i)\Delta + \sigma(i\Delta, \hat{X}_i)(W(i\Delta + \Delta) - W(i\Delta)), \quad (8.72)$$

para $i = 0, 1, \dots, m-1$.

Con este esquema podemos generar los caminos necesarios para la simulación de Monte Carlo reemplazando los incrementos $W(i\Delta + \Delta) - W(i\Delta)$ por $Z_i\sqrt{\Delta}$ donde Z_i son muestras de una variable aleatoria normal estandar.

Esta forma de discretización asigna probabilidad no negativa al hecho de que \hat{X} sea negativo. En el contexto de las tasas de interés durante un largo periodo de tiempo se estudiaron modelos que no permitían tasas de interés negativas. Dadas las últimas crisis económicas en algunos países como Suiza, Suecia, Dinamarca, Japón tienen tasas de interés negativas por lo que los modelos que permiten estas tasas se han vuelto de interés.

En el caso en que nos quisieramos restringir a las tasas de interés positivas podemos utilizar el esquema de log-Euler para discretizar la ecuación diferencial estocástica. Consideremos nuevamente la ecuación (8.71) y consideremos $X(t) = e^{Y(t)}$, es decir, $Y(t) = \ln X(t)$. Para conocer la dinámica de $Y(t)$ aplicamos el Lema de Itô (2.7.10) usando $f(t, x) = e^x$ e $Y(t) = f(t, X(t))$:

$$dY(t) = \left(\frac{\mu(t, X(t))}{X(t)} - \frac{1}{2} \frac{\sigma(t, X(t))^2}{X(t)^2} \right) dt + \frac{\sigma(t, X(t))}{X(t)} dW(t). \quad (8.73)$$

Aplicando el esquema de Euler implícito para Y y realizando la transformación $\hat{X}_i = \exp \hat{Y}_i$ tenemos el llamado esquema de log-Euler para X :

$$\hat{X}_{i+1} = \hat{X}_i \exp \left(\left(\frac{\mu(i\Delta + \Delta, \hat{X}_i)}{\hat{X}_i} - \frac{1}{2} \frac{\sigma(i\Delta + \Delta, \hat{X}_i)^2}{\hat{X}_i^2} \right) \Delta + \frac{\sigma(i\Delta + \Delta, \hat{X}_i)}{\hat{X}_i} Z_i \sqrt{\Delta} \right), \quad (8.74)$$

donde $Z_i \sim N(0, 1)$.

En nuestro caso tenemos que discretizar las tasas de interés (8.1) y el proceso de volatilidad (8.2). Simularemos las trayectorias de $L_n(t)$, $0 \leq t \leq T_{k+1}$, conjuntamente con la trayectoria de z_n discretizando los procesos en el tiempo: $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T_{k+1}$. Para el caso de la volatilidad tenemos la discretización según el esquema de Euler y log Euler:

$$\hat{y}_n(t + \Delta) = \hat{y}_n(t) + g\sqrt{\Delta}Z \quad (8.75)$$

$$\hat{y}_n(t + \Delta) = \hat{y}_n(t) \exp\left(\frac{g}{\hat{y}_n(t)}\sqrt{\Delta}Z\right) \quad (8.76)$$

donde Z es una variable aleatoria normal estandar. Discretizada la variable y construimos z :

$$\hat{z}_n(t + \Delta) = a(t)\hat{y}_n(t + \Delta)^2 + b(t)\hat{y}_n(t + \Delta) + c(t). \quad (8.77)$$

Por último discretizamos la ecuación diferencial que describe la dinámica de la tasa Libor forward de la siguiente manera según sigamos el esquema de Euler o el esquema de log-Euler:

$$\hat{L}_n(t + \Delta) = \hat{L}_n(t) + \sqrt{\hat{z}_n(t + \Delta)}\phi(\hat{L}_n(t))\lambda_n(t) \left(\sqrt{\hat{z}_n(t + \Delta)}\mu_n(t)\Delta + \sqrt{\Delta}W \right) \quad (8.78)$$

$$\hat{L}_n(t + \Delta) = \hat{L}_n(t)e^{\left(\frac{\sqrt{\hat{z}_n(t + \Delta)}\phi(\hat{L}_n(t))\lambda_n(t)}{\hat{L}_n(t)} \left(\left(\sqrt{\hat{z}_n(t + \Delta)}\mu_n(t) - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\hat{z}_n(t + \Delta)}\phi(\hat{L}_n(t))\lambda_n(t)}{\hat{L}_n(t)} \right) \Delta + \sqrt{\Delta}W \right) \right)} \quad (8.79)$$

donde μ_n es como en (8.1) y W es una variable aleatoria normal estandar.

Ambos esquemas avanzan de a un paso de tiempo a la vez, por lo que crear la curva completa a lo largo del tiempo requiere repetir el procedimiento para los períodos de tiempo t_0, t_1, \dots .

A continuación introduciremos una técnica que nos permitirá reducir la varianza de nuestra estimación.

Muestras antitéticas

La técnica de muestras antitéticas se utiliza para reducir la varianza del estimador de la media utilizado para aproximar el valor esperado sin incrementar el tamaño de la muestra.

Consideremos una variable aleatoria $Y = f(Z)$ que puede expresarse como función de una variable aleatoria normal Z . Estamos interesados en reducir la varianza del estimador del valor esperado de Y dado por

$$\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(Z_i) \quad (8.80)$$

donde Z_1, \dots, Z_n son m realizaciones de la variable aleatoria normal Z .

Para ello consideremos la variable aleatoria auxiliar $X = f(-Z)$, donde Z es una variable aleatoria normal. El estimador del valor esperado de X es la media muestral:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(-Z_i) \quad (8.81)$$

donde Z_1, \dots, Z_n son m realizaciones de la variable aleatoria normal Z .

Debido a que Z y $-Z$ están igualmente distribuidos las variables aleatoria Y y X tienen el mismo valor:

$$E[Y] = E[X] = \mu$$

La técnica de muestras antitéticas propone estimar el valor esperado de Y como un promedio de dos estimadores de la media muestral de dos variables aleatorias que tienen el mismo valor esperado:

$$\bar{Y}_n^a = \frac{1}{2}(\bar{Y}_n + \bar{X}_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{f(Z_i) + f(-Z_i)}{2}. \quad (8.82)$$

Propone incluir el conjunto $-Z_1, \dots, -Z_n$ al conjunto Z_1, \dots, Z_n en las simulaciones de Monte Carlo. Este nuevo estimador \bar{Y}_n^a resulta insesgado

$$\mathbb{E}[\bar{Y}_n^a] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[X + Y] = \mu. \quad (8.83)$$

Tenemos también que $f(Z)$ y $f(-Z)$ tienen la misma varianza por lo tanto:

$$Var(\bar{Y}_n^a) = \frac{1}{n} \left[\frac{1}{2}Var(Y) + \frac{1}{2}Cov(f(Z), f(-Z)) \right] = \frac{Var(Y)}{n} \frac{(1 + \rho)}{2} = Var(\bar{Y}_n) \frac{(1 + \rho)}{2} \quad (8.84)$$

donde ρ es la correlación entre $f(Z)$ y $f(-Z)$.

Por lo tanto tenemos $Var(\bar{Y}_n^a) < Var(\bar{Y}_n)$ si $\rho < 1$, con lo cual se reduce la varianza sin incrementar el número de la muestra.

Para realizar nuestras simulaciones aplicamos la técnica de muestras antitéticas como se observa en el código de python en la sección Monte Carlo del Apéndice, generando las variables aleatorias normales estándar Z y W y construyendo según los esquemas de Euler considerando Z , $-Z$, W y $-W$ con el fin de reducir la varianza de nuestra estimación sin incrementar el número de pasos en el tiempo.

8.3.3. ADI vs Monte Carlo

A continuación, en el Cuadro (8.1) se muestra los precios de las caplets at-the money obtenidas por el método ADI y por el método Monte Carlo. Consideraremos una estructura de tenor en años dada por $0 = T_0 < T_1 < \dots < T_{n+1}$ donde $d = T_{j+1} - T_j = 0,5$ para todo $j = 1, \dots, n$.

Consideremos $L_n(0) = 6\%$ para todo n . Podemos deducir el precio de los bonos cupón cero para cada vencimiento en la estructura de tenores.

$$L_k(0) = \frac{1}{d} \left(\frac{P(0, T_k)}{P(0, T_{k+1})} - 1 \right). \quad (8.85)$$

Entonces tenemos que para $k=0$

$$L_0(0)d + 1 = \frac{P(0, 0)}{P(0, T_1)}, \quad (8.86)$$

con lo cual en nuestro caso

$$P(0, T_1) = \frac{1}{1,03} \quad (8.87)$$

En general tenemos

$$P(0, T_{k+1}) = \frac{1}{(L_n(0) d + 1)^{k+1}}. \quad (8.88)$$

Para aplicar MonteCarlo si tenemos una caplet donde el subyacente es la tasa Libor forward con vencimiento en j años entonces la prima de la caplet está dada por:

$$Caplet(0) = P(0, T_{2j+1}) d \mathbb{E}^{T_{2j+1}}[\max(L_{2j}(T_{2j}) - c, 0)], \quad (8.89)$$

donde L_n sigue el modelo (8.8).

Para el modelo de tasa forward Libor consideraremos los siguientes parámetros

$$\lambda_n(t) = 4\% \text{ para todo } n \text{ y } t, \quad \Phi(x) = p x + (1 - p)L(0), \quad p = 0,1. \quad (8.90)$$

Para modelar la volatilidad consideraremos

$$a = 1, \quad b(t) = b_1 t + b_2, \quad b_1 = 0,2, \quad b_2 = 1,5, \quad c = b^2/4, \quad g = 5\%. \quad (8.91)$$

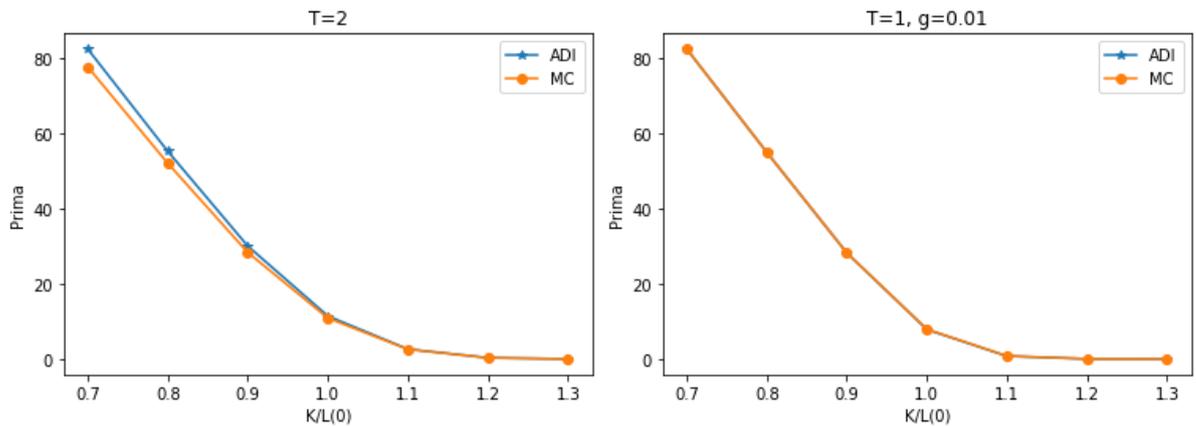
En Monte Carlo realizamos 50000 caminos independientes con muestras antitéticas. Para aplicar el método ADI consideramos una grilla de 120 pasos para la tasa, 120 pasos para la volatilidad y 100 pasos en el tiempo. En la tabla a continuación se muestran los resultados obtenidos para las caplets at-the-money para distintos vencimientos. En la fila ADI se muestran los precios de las caplets obtenidas por este método. En las filas MC (DS) se muestra el resultado obtenido en Monte Carlo y la desviación estandar del estimador entre paréntesis. Las filas de Error muestran la diferencia entre el resultado obtenido por el método ADI y la prima de la caplet obtenida por MonteCarlo. Las primas de la caplet se encuentra expresados en puntos básicos $\frac{1}{10000}$.

		1 año	2 años	4 años	8 años	10 años
	ADI	7.84	10.77	14.31	16.28	18.37
$\Delta = \frac{1}{2}$	MC (SD)	7.94 (0.119)	10.99 (0.164)	14.56 (0.217)	16.70 (0.249)	18.93 (0.282)
	Error	0.1	0.22	0.25	0.42	0.56
$\Delta = \frac{1}{4}$	MC (SD)	7.94 (0.117)	10.85 (0.160)	14.44 (0.214)	16.49 (0.245)	18.72 (0.279)
	Error	0.1	0.08	0.13	0.21	0.35
$\Delta = \frac{1}{8}$	MC (SD)	7.93 (0.117)	10.82 (0.159)	14.41 (0.213)	16.46 (0.244)	18.49 (0.276)
	Error	0.09	0.05	0.10	0.18	0.12

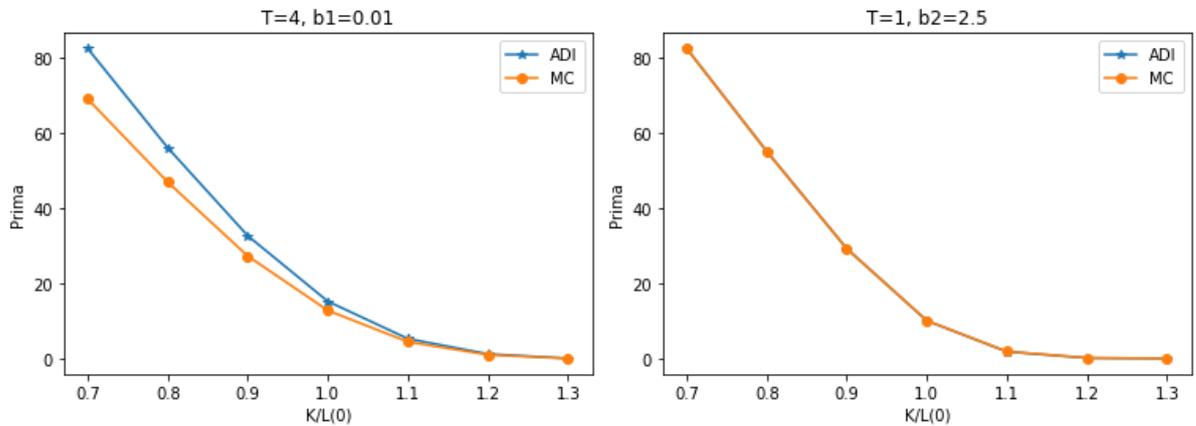
Cuadro 8.1: Se muestran las primas de las caplet at-the-money, expresadas en puntos básicos, para diferentes vencimientos: 1 año, 2 años, 4 años, 8 años y 10 años, considerando los siguientes parámetros $\lambda_n(t) = 4\%$ para todo n y t , $\Phi(x) = p x + (1 - p)L(0)$ $p = 0,1$, $a = 1$, $b(t) = b_1 t + b_2$, $b_1 = 0,2$, $b_2 = 1,5$, $c = b^2/4$, $g = 5\%$. Para las simulaciones de Monte Carlo se consideraron 50000 caminos independientes con muestras antitéticas y pasos en el tiempo $\Delta = \frac{1}{2}$, $\Delta = \frac{1}{4}$ y $\Delta = \frac{1}{8}$. Entre paréntesis se encuentra expresado la desviación estandar del estimador. El Error muestra la diferencia entre la prima de la caplet obtenida por el método de Monte Carlo y el método ADI.

En la Figura 8.1 se muestran otros ejemplos the caplets out-the-money, at-the-money e in-the-money asumiendo los parámetros presentados en (8.90-8.91) variando sólo el parámetro que se indica en la parte superior del gráfico. En Monte Carlo estamos considerando $\Delta = \frac{1}{8}$.

Como podemos observar los precios de las caplets obtenidos por el método ADI y el método Monte Carlo son muy similares siendo el error cometido menor a 0,15 puntos básicos en el caso que



(a) Parámetros considerados: $a = 1, b_1 = 0,2, b_2 = 1,5, c = b^2/4, g = 5\%, p = 0,1, \lambda_n(t) = 4\%$ y $T = 2$.
 (b) Parámetros considerados: $a = 1, b_1 = 0,2, b_2 = 1,5, c = b^2/4, g = 1\%, p = 0,1, \lambda_n(t) = 4\%$ y $T = 1$.



(c) Parámetros considerados: $a = 1, b_1 = 0,01, b_2 = 1,5, c = b^2/4, g = 5\%, p = 0,1, \lambda_n(t) = 4\%$ y $T = 4$.
 (d) Parámetros considerados: $a = 1, b_1 = 0,2, b_2 = 2,5, c = b^2/4, g = 5\%, p = 0,1, \lambda_n(t) = 4\%$ y $T = 1$.

Figura 8.1: Prima de las caplets para diferentes strikes

consideramos $\Delta = \frac{1}{8}$ en las caplets at the money. El método de Monte Carlo tiene la ventaja de ser más rápido en términos de tiempo computacional respecto del método ADI.

8.4. Valoración de Swaptions

Como presentamos en la Sección 1.3.4 un swaption es un contrato que otorga el derecho de entrar en un swap en una fecha futura a una tasa fija K . Recordemos también la medida swap \mathbb{Q}^A dada en la Definición 3.5.6 donde A está dado por

$$A(t) = \sum_{j=1}^{n+1} (T_{j+1} - T_j) P(t, T_{j+1}). \quad (8.92)$$

Proposición 8.4.1. *Asumiendo que la dinámica de la tasa forward en la medida inducida por la cuenta de moneda está dada por (8.1-8.2). Sea \mathbb{Q}^A la medida inducida por A dada en (8.92). Definimos la tasa swap forward*

$$S(t) = S_{j,k-j}(t) = \frac{P(t, T_j) - P(t, T_k)}{A(t)}. \quad (8.93)$$

Entonces la dinámica de la tasa forward en la medida \mathbb{Q}^A está dada por

$$dS(t) = \sqrt{z(t)} \phi(S(t)) \sum_{n=j}^{k-1} w_n(t) \lambda_n(t)^\top dW^A(t), \quad (8.94)$$

donde W^A es un movimiento browniano en la medida \mathbb{Q}^A y

$$w_n(t) = \frac{\phi(L_n(t))}{\phi(S(t))} \frac{\partial S(t)}{\partial L_n(t)} = \quad (8.95)$$

$$= \frac{\phi(L_n(t))}{\phi(S(t))} \frac{S(t)(T_{n+1} - T_n)}{1 + (T_{n+1} - T_n)} \left[\frac{P(t, T_k)}{P(t, T_j) - P(t, T_k)} + \frac{\sum_{i=n}^{k-1} (T_{i+1} - T_i) P(t, T_{i+1})}{A(t)} \right]. \quad (8.96)$$

Demostración. Se sigue de (3.33) que $S(t)$ es una martingala en la medida \mathbb{Q}^A , con lo cual el drift del proceso para $S(t)$ debe ser cero en esta medida. $S(t)$ es función de $L_j(t), L_{j+1}(t), \dots, L_{k-1}(t)$ por lo que aplicando el Lema de Itô (2.7.10) tenemos que

$$dS(t) = \sum_{n=j}^{k-1} \sqrt{z(t)} \phi(L_n(t)) \frac{\partial S(t)}{\partial L_n(t)} \lambda_n(t)^\top dW^A(t)$$

y evaluando las derivadas parciales queda probada la proposición. \square

Proposición 8.4.2. *El precio en $t = 0$ de un swaption está dado por*

$$V_{swaption}(0) = A(0) \mathbb{E}^A[\max(S(T_j) - K, 0)]. \quad (8.97)$$

Sean $w_n(t)$ como en la proposición anterior y sea

$$\lambda_S(t) = \sum_{n=j}^{k-1} w_n(0) \lambda_n(t). \quad (8.98)$$

La dinámica de la tasa swap en la proposición anterior puede aproximarse por

$$dS(t) \sim \sqrt{z(t)}\phi(S(t))\|\lambda_S\|dY^A(t), \quad (8.99)$$

donde z es como en (8.2), Y^A es un movimiento browniano en la medida Q^A y

$$\|\lambda_S(t)\|dY^A(t) = \sum_{n=j}^{k-1} w_n(0)\lambda_n(t)^\top dW^A(t). \quad (8.100)$$

Para valorar los swaptions podemos utilizar Monte Carlo o ADI para aproximar el valor esperado modificando el numerario considerado que en el caso de los swaptions el numerario es A .

8.5. Sonrisa de Volatilidad

En la fórmula de Black (3.42), el valor teórico de una opción plain vanilla es una función monótona creciente de la volatilidad σ . Además, salvo en el caso de las opciones americanas con dividendos, el precio es una función estrictamente creciente de volatilidad. Esto significa que por lo general es posible derivar una única volatilidad, llamada volatilidad implícita, de un precio de mercado determinado para una opción. La volatilidad implícita está definida como la volatilidad que iguala la prima teórica de la caplet con la prima de mercado.

Cuando consideramos opciones con diferentes strikes para un mismo subyacente y tiempo al vencimiento, y calculamos las volatilidades implícitas para cada una de ellas, al graficarlas respecto de los strike se obtienen curvas con forma de "U" o sonrisa o curvas decrecientes, de ahí el nombre de sonrisas de volatilidad. La sonrisa de volatilidad es la curva dada por la volatilidad implícita en función del strike K .

Uno de los propósitos de modelar la varianza de la tasa Libor con un proceso no determinístico es que permite obtener una mayor variedad de sonrisas de volatilidad. Siendo que [1] proponen el modelo cuadrático Gaussiano para las tasas short como una alternativa para obtener ciertas curvas de volatilidad implícita, esto nos motiva a suponer que este modelo para la volatilidad estocástica pueda también tener propiedades interesantes.

Por otro lado, una desventaja de modelar con un proceso estocástico, es la dificultad para encontrar fórmulas explícitas para la prima de la caplet por lo cual es necesario recurrir a expresiones asintóticas o aproximaciones por métodos numéricos.

Presentaremos algunos resultados de la sensibilidad de las sonrisas de volatilidades a los diferentes parámetros y la variedad de curvas que se pueden obtener con nuestro modelo calculadas utilizando el método Monte Carlo.

Consideramos los parámetros descritos en (8.90) y (8.91) modificando solamente los parámetros que se encuentran en la parte superior de cada Figura.

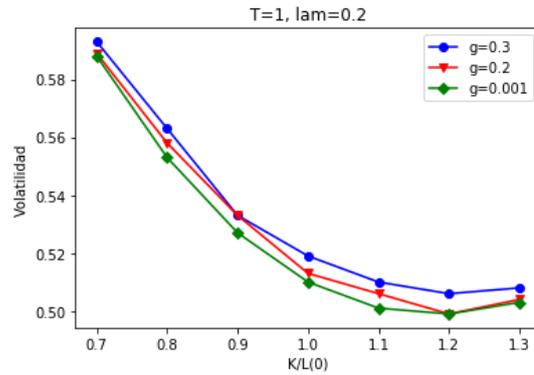
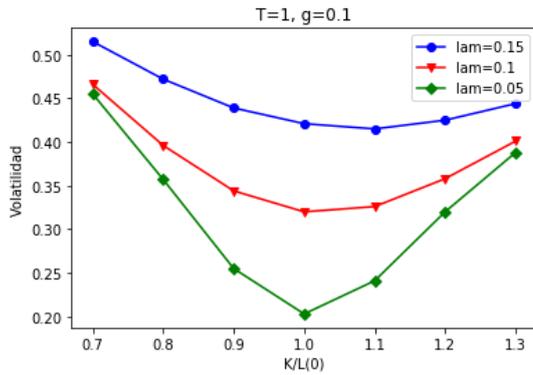


Figura 8.2: Sensibilidad a λ . Parámetros considerados: $a = 1$, $b_1 = 0,2$, $b_2 = 1,5$, $c = b^2/4$, $g = 10\%$, $p = 0,1$ y $T = 1$.

Figura 8.3: Sensibilidad a g . Parámetros considerados: $a = 1$, $b_1 = 0,2$, $b_2 = 2,5$, $c = b^2/4$, $p = 0,1$, $\lambda_n(t) = 20\%$ y $T = 1$.

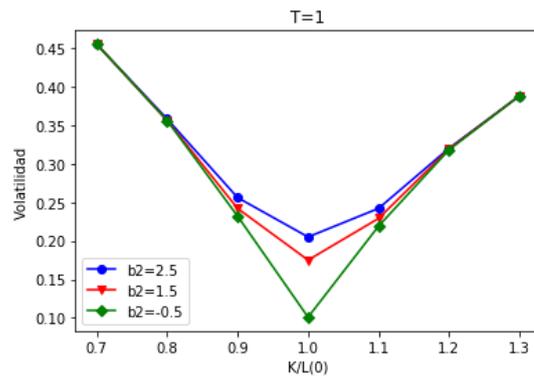
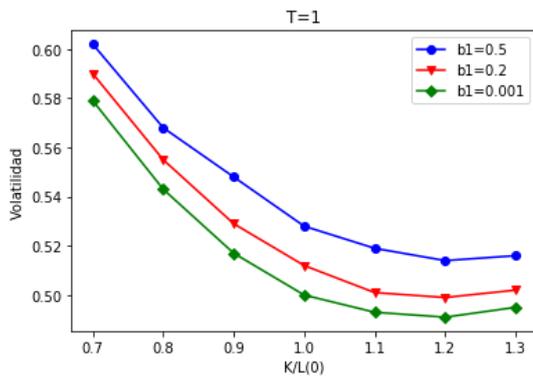


Figura 8.4: Sensibilidad a b_1 . Parámetros considerados: $a = 1$, $b_2 = 2,5$, $c = b^2/4$, $g = 5\%$, $p = 0,1$, $\lambda_n(t) = 4\%$ y $T = 1$

Figura 8.5: Sensibilidad a b_2 . Parámetros considerados: $a = 1$, $b_1 = 0,2$, $c = b^2/4$, $g = 5\%$, $p = 0,1$, $\lambda_n(t) = 4\%$ y $T = 1$

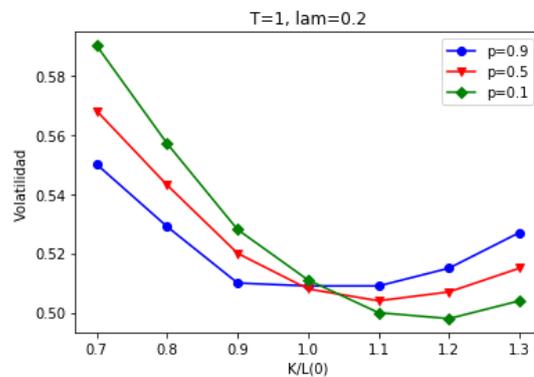
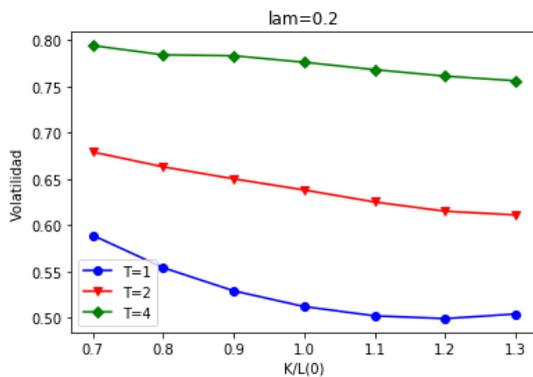


Figura 8.6: Sensibilidad a T . Parámetros considerados: $a = 1$, $b_1 = 0,2$, $b_2 = 2,5$, $c = b^2/4$, $g = 5\%$, $p = 0,1$ y $\lambda_n(t) = 20\%$.

Figura 8.7: Sensibilidad a p . Parámetros considerados: $a = 1$, $b_1 = 0,2$, $b_2 = 2,5$, $c = b^2/4$, $g = 5\%$, $\lambda_n(t) = 20\%$ y $T = 1$

Como podemos observar en las Figuras variando los parámetros podemos obtener una gran variedad de sonrisas de volatilidad. El parámetro λ afecta en la curvatura de la sonrisa mientras que b_2 hace que la volatilidad de las opciones at the money se mayor a medida que incrementamos este parámetro dejando el resto de la curva prácticamente constante. Los parámetros g y b_1 producen movimientos paralelos de la curva. Como es de esperarse, la volatilidad de las opciones se incrementa si el vencimiento T es mayor. Por último el parámetro p nos permite ajustar la pendiente de la sonrisa de volatilidad. Este modelo tiene una gran flexibilidad para adaptarse a numerosas formas de curvas de volatilidad.

8.6. Conclusiones

En la segunda parte del trabajo nos centramos en el estudio de modelos más realistas para las tasas forward, los modelos Libor market. A diferencia de los modelos de tasa short descritos en el Capítulo 4, el modelo Libor Market asume la existencia de una cantidad finita de bonos cupón cero en el mercado. En el Capítulo 6 presentamos la dinámica del modelo y las funciones de volatilidad que se han planteado en la bibliografía. Los modelos Libor Market, en principio, describen la volatilidad con una constante o una función determinística del tiempo. Luego, con el fin de obtener una mayor variedad de curvas de volatilidad, proponen modelarla con modelos estocásticos de reversión a la media como mencionamos en el Capítulo 6. Nuestra propuesta consiste en modelar la varianza con un modelo Gaussiano cuadrático, es por esto que en el Capítulo 7 exponemos la dinámica del modelo Gaussiano cuadrático así como sus propiedades estadísticas.

En este capítulo presentamos un nuevo modelo que combina el modelo Libor Market con un modelo Gaussiano cuadrático para describir la varianza de las tasas de interés forward. Consideramos una dinámica estocástica para la varianza de las tasas forward, pero, a diferencia de los modelos propuestos en la literatura, modelamos la varianza con un modelo Gaussiano cuadrático. Presentamos la dinámica del modelo y el resultado que asegura la existencia de la solución de la ecuación diferencial estocástica propuesta para describir la dinámica de las tasas forward Libor. Luego nos centramos en el estudio de valoración de caplets. Para ello aplicamos una transformación a la tasa Libor forward con el fin de obtener una variable con distribución lognormal. Posteriormente calculamos las funciones generadoras de momentos considerando el parámetro λ constante y como una función determinística dependiente del tiempo. Por último aplicamos un resultado de la teoría de la transformada de Fourier y obtuvimos una expresión analítica para las caplets sobre tasas de interés que sigan el modelo propuesto. La expresión que obtuvimos no es una fórmula cerrada por lo que posteriormente presentamos la valoración numérica de caplets.

La valoración numérica de las caplets la realizamos utilizando dos métodos: ADI (Alternating Direction Implicit) y Monte Carlo. Presentamos ambos métodos, el método ADI es un método de diferencias finitas que se utiliza para encontrar soluciones numéricas de grandes sistemas de ecuaciones diferenciales con un bajo costo computacional. Monte Carlo en cambio es un método estadístico utilizado para aproximar expresiones matemáticas complejas y costosas de evaluar con exactitud. Realizamos los programas en Python para obtener la valoración de las caplets con ambos métodos y mostramos algunos resultados considerando algunos parámetros en particular. Ambos métodos nos proporcionaron primas de las caplets muy similares, con un error menor a 0.15 puntos básicos para los parámetros particulares seleccionados. El método de Monte Carlo tiene la ventaja de ser más rápido en términos de tiempo computacional respecto del método ADI. Estos resultados fueron publicados en las actas del congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial[26].

Posteriormente presentamos la fórmula de valuación de swaptions donde nuevamente podemos utilizar los métodos numéricos ADI o Monte Carlo para obtener la prima de los mismos.

Modelar la varianza de la tasa Libor con un modelo Gaussiano cuadrático nos permite obtener una gran variedad de sonrisas de volatilidad. Presentamos los resultados obtenidos al sensibilizar los diferentes parámetros del modelo. Observamos que se pueden obtener una gran variedad de formas de curvas de volatilidad implícita. En estudios posteriores nos centraremos en un análisis más detallado de sensibilidad de la sonrisa de volatilidad a los parámetros del modelo ya que en este trabajo lo realizamos para elecciones particulares de los parámetros.

Apéndice A

Transformada de Fourier

A.1. Definición y aplicaciones

Presentaremos primero la definición de la transformada de Fourier y luego dos resultados que serán de gran utilidad a la hora de calcular el precio de la Caplet con el modelo que propondremos más adelante.

Definición A.1.1. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$, esto es $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrable Lebesgue. Se define la transformada de Fourier de f a la función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx. \quad (\text{A.1})$$

Teorema A.1.2. Sea ϵ una variable aleatoria en un espacio de probabilidad (Ω, P) . Asumimos la existencia de la función generadora de momentos Ψ :

$$\Psi(u) = E[e^{u\epsilon}] \quad u \in \mathbb{R}.$$

Entonces para $k \in \mathbb{R}$,

$$E[(e^\epsilon - e^k)^+] = \Psi(1) - \frac{e^k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-k(\alpha+iw)} \Psi(\alpha+iw)}{(\alpha+iw)(1-\alpha-iw)} dw,$$

para cualquier $0 < \alpha < 1$ para el cual el lado derecho exista.

Demostración. Sea

$$c(k) = E[(e^\epsilon - e^k)^+].$$

Para imponer regularidad en el eventual esquema numérico, reescribimos la función no acotada $(e^\epsilon - e^k)^+$ con una componente acotada $\min(e^{\epsilon-k}, 1)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} c(k) &= E[(e^\epsilon - e^k, 0)] \\ &= E[e^\epsilon - e^k \min(e^{\epsilon-k}, 1)] \\ &= \Psi(1) - e^k E[\min(e^{\epsilon-k}, 1)]. \end{aligned}$$

La intención ahora es aplicar la transformada de Fourier en el cálculo de $E[\text{mín}(e^{\epsilon-k}, 1)]$. La función $\text{mín}(e^{\epsilon-k}, 1)$ es acotada pero no es integrable. Es igual a 1 para todo $x \geq k$. Para trabajar en esto, sea $p(x)$ la densidad de ϵ ,

$$E[\text{mín}(e^{\epsilon-k}, 1)] = e^{-\alpha k} \int_{-\infty}^{\infty} [\text{mín}(e^{-(k-x)}, 1)e^{\alpha(k-x)}][e^{\alpha x}p(x)]dx, \quad (\text{A.2})$$

donde $\alpha > 0$ es una clásica constante de amortiguación. Notemos que esta integral es una convolución

$$(f_1 * f_2)(k) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} f_1(k-x)f_2(x)dx$$

de dos funciones

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \text{mín}(e^{-x}, 1)e^{\alpha x}, \\ f_2(x) &= e^{\alpha x}p(x), \end{aligned}$$

evaluada en k . Sea \mathcal{F} la transformada de Fourier y \mathcal{F}^{-1} la transformada inversa, es decir

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}f)(w) &\doteq \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwx}f(x)dx, \\ (\mathcal{F}^{-1}g)(x) &\doteq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx}g(w)dw. \end{aligned}$$

La transformada de Fourier de una convolución es el producto de las transformadas, por lo que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} [\text{mín}(e^{-(k-x)}, 1)e^{\alpha x}p(x)]dx &= (f_1 * f_2)(x) \\ &= (\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f_1 * f_2)))(k) \\ &= (\mathcal{F}^{-1}(g_1(w)g_2(w)))(k), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} g_1(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwx} \text{mín}(e^{-x}, 1)e^{\alpha x} dx, \\ g_2(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwx} e^{\alpha x} p(x) dx. \end{aligned}$$

Un simple cálculo muestra que

$$\begin{aligned} g_1(w) &= \int_{-\infty}^0 e^{x(\alpha+iw)} dx + \int_0^{\infty} e^{x(-1+\alpha+iw)} dx \\ &= \frac{1}{\alpha+iw} - \frac{1}{\alpha-1+iw} \\ &= \frac{1}{(\alpha+iw)(1-\alpha-iw)}, \\ g_2(w) &= \Psi(\alpha+iw), \end{aligned}$$

donde la convergencia de las integrales se sigue del hecho que $0 < \alpha < 1$. Por lo tanto,

$$E[\text{mín}(e^{\epsilon-k}, 1)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-k(\alpha+iw)} \Psi(\alpha+iw)}{(\alpha+iw)(1-\alpha-iw)} dw \quad (\text{A.3})$$

y se sigue el teorema. □

A continuación veamos un resultado para una opción call Europea sobre ϵ en vez de e^ϵ .

Teorema A.1.3. *Sea ϵ una variable aleatoria en un espacio de probabilidad (Ω, P) . Asumimos la existencia de la función generadora de momentos Ψ . Entonces para $k \in \mathbb{R}$ tenemos*

$$E[(\epsilon - k)^+] = \left. \frac{d\Psi(k)}{dk} \right|_{k=0} - k + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-k(-\alpha+iw)} \Psi(-\alpha+iw)}{(-\alpha+iw)^2} dw,$$

para cualquier $\alpha > 0$ para el cual el lado derecho exista.

Demostración. Como en la prueba del teorema anterior denotamos

$$c(k) = E[(\epsilon - k)^+].$$

Manipulamos esta expresión para obtener un payoff acotado dentro del valor esperado,

$$\begin{aligned} c(k) &= E[\text{máx}(\epsilon - k, 0)] \\ &= E[\epsilon - \text{mín}(\epsilon, k)] \\ &= \Psi'(0) - k - E[\text{mín}(\epsilon - k, 0)], \end{aligned}$$

donde $\Psi'(\cdot)$ es la derivada de primer orden de la función generadora de momentos.

Eligiendo $\alpha > 0$ podemos escribir

$$E[(\epsilon - k)^+] = \Psi'(0) - k - e^{\alpha k} \int_{-\infty}^{\infty} (\text{mín}(-(k-x), 0) e^{-\alpha(k-x)}) (e^{-\alpha x} p(x)) dx,$$

donde $p(x)$ es la densidad de ϵ . Por el mismo argumento del teorema anterior tenemos

$$E[(\epsilon - k)^+] = \Psi'(0) - k - e^{\alpha k} (\mathcal{F}^{-1}(g_1(w)g_2(w)))(k),$$

donde

$$\begin{aligned} g_1(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwx} \text{mín}(-x, 0) e^{-\alpha x} dx, \\ g_2(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwx} e^{-\alpha x} p(x) dx. \end{aligned}$$

Mediante un simple cálculo obtenemos

$$g_1(w) = - \int_0^{\infty} x e^{x(-\alpha+iw)} dx = - \frac{1}{(-\alpha + iw)^2},$$
$$g_2(w) = \Psi(-\alpha + iw),$$

y se sigue el teorema.

□

Apéndice B

Códigos implementados

B.1. Código ADI

A continuación se presenta el código en Python utilizado para valorar las caplets con el método Alternating Direction Implicit.

```
import numpy as np
import scipy.stats as st
from time import time
import matplotlib.pyplot as plt

def SistTridiagonal(c,u,l,M2):
#####Resolvemos el sistema tridiagonal Ax=M2#####
    n = len(M2) # n mero de filas
    # Modificamos los coeficientes de la primera fila
    u[0] /= c[0] # Posible divisi n por cero
    M2[0] /= c[0]

    for i in range(1, n):
        ptemp = c[i] - (l[i] * u[i-1])
        u[i] /= ptemp
        M2[i] = (M2[i] - l[i] * M2[i-1])/ptemp
    # Sustituci n hacia atr s
    x = [0 for i in range(n)]
    x[-1] = M2[-1]

    for i in range(-2, -n-1, -1):
        x[i] = M2[i] - u[i] * x[i+1]
    return x
#####
#####
#####
```

```

def ADI(T,K):
    #Parametros del modelo
    g = 0.05
    a = 1
    b1 =0.2
    b2 = 1.5
    L0 = 0.06
    lam= 0.04
    #Asumimos  $\Phi(u)=p*u+(1-p)L(0)$ 
    p = 0.1

    #####
    # Datos Grilla
    nt=150
    nL=120
    ny=120
    Lmin= 0.
    Lmax= 0.12
    deltaL=(Lmax-Lmin)/nL
    ymin = 0.0
    ymax = 10.0
    deltay=(ymax-ymin)/ny
    #####
    #Cuadrícula 100 pasos de tiempo, nL pasos en L y ny pasos en y.
    #Tiempo
    h=T/nt

    #Grilla para la tasa de interes
    L = []
    for i in range(0,nL+2):
        L.append( Lmin + i*deltaL)
    #Grilla para la volatilidad
    y = []
    for i in range(0,ny+2):
        y.append(ymin + i*deltay)

    #####
    #Condicion de borde
    G = np.zeros((ny+2,nL+2))
    for j2 in range(nL+2):
        for j1 in range(ny+2):
            G[j1 ,j2] = max(L[j2]-K,0)

    #####

```

```

    for t in range(nt):
        b = b1*t*h+b2
        cz =(b ** 2.) / 4
        U = np.zeros((ny+2,nL+2))
#Construimos los vectores que conforman la matriz tridiagonal A.
c es la diagonal, u la supradiagonal y l la subdiagonal
y el vector solucion M2
    for j2 in range (1,nL+1):
        c = [0]*nL
        u = [0]*nL
        l = [0]*nL
        M2 = [0]*nL
        aux = 1/2*h*( -g**2 /deltay**2 )
        for j1 in range(1,ny+1):
            c[j1-1] = 1 +aux
            u[j1-1] = -1/2 * aux
            l[j1-1] = -1/2 *aux
            z = h/(deltaL**2) * ( L[j2]*p+(1-p)*L0)**2 *
                (a*y[j1]**2 + b*y[j1]+d) * lam**2)
            M2[j1-1] = 1/4 *z * G[j1 ,j2-1] + 1/4 *z *
                G[j1 ,j2+1] + (1-1/2 *z)* G[j1 ,j2]

        M2[-1] -= (L[j2] - K)*u[-1]

#####Resolvemos el sistema tridiagonal Ax=M2#####
x=SistTridiagonal(c,u,l,M2)
#####
    for j1 in range (1,ny+1):
        U[j1 ,j2] = x[j1-1]

        U[0 ,j2] = 2*U[1 ,j2] - U[2 ,j2]
        U[ny+1,j2] = -U[ny-1,j2]+2*U[ny ,j2]
    for j1 in range(1,ny+1):
        U[j1 ,0] = G[j1 ,0]
        U[j1 ,nL+1] = G[j1 ,nL+1]

#####
#Construimos los vectores que conforman la matriz tridiagonal A1.
c1 es la diagonal, u1 la supradiagonal y l1 la subdiagonal
y el vector solucion M1
    for j1 in range(1,ny+1):
        c1 = [0]*ny
        u1 = [0]*ny
        l1 = [0]*ny
        M1 = [0]*ny
        for j2 in range(1,nL+1):

```

```

aux = 1/2*h*((L[j2]*p+(1-p)*L0)**2*(a*y[j1]**2+b*y[j1]+d)
      *lam**2 /deltaL**2 )
c1[j2-1] = 1+ aux
u1[j2-1] = -1/2* aux
l1[j2-1] = -1/2*aux
z2 = h/deltay**2 *( g **2/2)
M1[j2-1] = 1/4 *z2 * U[j1-1,j2] + 1/4 *z2 * U[j1+1,j2]
          + (1-1/2 *z2)* U[j1 ,j2]

```

```

#####Resolvemos el sistema tridiagonal A1.x1=M1#####
x1=SistTridiagonal(c1 ,u1 ,l1 ,M1)

```

```

#####

```

```

for j2 in range(1,nL+1):
    G[j1 ,j2] = x1[j2-1]

```

```

j1 = 0
while y[j1] <1.:
    j1 += 1
j2 = 0
while L[j2] <0.06:
    j2 += 1
return G, y, L,j1 ,j2

```

B.2. Código Monte Carlo

A continuación se presenta el código en Python utilizado para valorar las caplets con el método de Monte Carlo.

```

import numpy as np
import math as mt
from random import gauss
import scipy.stats as st
import matplotlib.pyplot as plt

```

```

def MonteCarloCuad(T,n,K):
    #Par metros del modelo
    lam = 0.2
    d = 0.5
    L_0 = 0.06
    z_0 = 1.

    g =0.05
    a = 1
    b1 = -0.1

```

```

b2 = -0.5
p = 0.1

n2 = n*T
deltat =1/n
Strike = K
Numerario = 1/1.03**(T*2+1)
G2 = []
G2a = []

for _ in range(50000):
    #Condiciones iniciales
    y=1
    ya = 1
    z = z_0
    za = z_0
    L = L_0
    La = L_0
    for t in range(1,n2+1):
        b = b1*t/n+b2
        c =(b ** 2.) / 4
        Z = gauss(0,1)
        W = gauss(0,1)
        Za = -Z
        Wa = -W

        y = y*mt.exp( (g/y)* mt.sqrt(deltat)* Z)
        z = a*y **2 + b* y +c

        ya = ya*mt.exp(( g/ya)* mt.sqrt(deltat) * Za)
        za = a*ya**2 + b* ya +c

        if L != 0:
            sigma = mt.sqrt(z)* (L*p+(1-p)*L_0)* lam
            L = L * mt.exp(sigma /L *(-1/2 * sigma /L *deltat
            + mt.sqrt(deltat)*W ))

        if La != 0:
            sigmaa = mt.sqrt(za)* (La*p+(1-p)*L_0)* lam
            La = La * mt.exp( (sigmaa/La) *( -1/2 * sigmaa /La *deltat
            + mt.sqrt(deltat)*Wa ))

        G2.append(max(L-Strike ,0)*d*Numerario)
        G2a.append(max(La-Strike ,0)*d*Numerario)

Prom = (sum(G2)+sum(G2a))/( len(G2)+len(G2a))
G =[G2 , G2a]

```

```
print('Strike=',K,'Desvio=',np.std(np.array(G)), 'n=',n,'T=',T)
return Prom
```

B.2.1. Sonrisa de volatilidad

```
#####Sonrisa de Volatilidad#####
precision = 0.000001
sonrisaMCuad = []
Kes = []
PrecioMonteCarlo = []
T=1
Numerario = 1/1.03**(T*2+1)
d = 0.5
sigmamin= []
for k in range(7):
    K = 0.06*(0.7+k*0.1)
    Kes.append(K/0.06)
    Precio = MonteCarloCuad(T,8,K)
    PrecioMonteCarlo.append(Precio)
    sigmaimp = 0.01
    error = 1.
    errormin = error
    busquedas = 1000000
    while errormin > precision and busquedas>0:
        busquedas -= 1
        sigmaimp += 0.001
        Y = np.log(0.06/K)
        dmas = (Y + sigmaimp**2*T/2)/(sigmaimp*mt.sqrt(T))
        dmenos = (Y-sigmaimp**2*T/2)/(sigmaimp*mt.sqrt(T))
        precioBS = (0.06*st.norm.cdf(dmas)-K*st.norm.cdf(dmenos))*d*Numerario
        error = abs(precioBS-Precio)
        if error < errormin:
            errormin = error
            sigmamin = sigmaimp
    sonrisasMCuad.append(sigmamin)

plt.plot(Kes,sonrisasMCuad,marker='o', linestyle='-',color='r')
plt.xlabel('K/L(0)')
plt.ylabel('Volatilidad')
plt.title('T=1')
```

Bibliografía

- [1] L. Andersen and V. Piterbarg. *Interest Rate Modeling*. Number v. 1, v. 2. Atlantic Financial Press, 2010.
- [2] Aristóteles. *Ética Nicomaquea*. Gredos, 2000.
- [3] L. Bachelier. *The Theory of Speculation*. Annales scientifiques de l'Ecole Normale Superieure, 1900.
- [4] T. Bjork. *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford, 2009.
- [5] T. Bjork and B. Christensen. "Interest Rate Dynamics and Consistent Forward Rate Curves". *Mathematical Finance*, 9:323–348, 1999.
- [6] F. Black. "The Pricing of Commodity Contracts". *Journal of Financial Economics*, 3:167–179, 1976.
- [7] F. Black and M. Scholes. "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *Journal of Political Economy*, 81(3):637–654, 1973.
- [8] A. Brace, D. Gatarek, and M. Marek. "The Market Model of Interest Rate Dynamics". *Mathematical Finance*, (7).
- [9] M. Brace. "A Multifactor Gauss Markov Implementation of Heath, Jarrow and Morton". *Mathematical Finance*, 4:259–283, 1976.
- [10] D. Brigo and F. Mercurio. *Interest Rate Models - Theory and Practice*. Springer Finance. Springer, 2001.
- [11] E. Chancellor. *Sálvese quien pueda. Una historia de la especulación financiera*. Granica, 2000.
- [12] E. Chancellor. *Antecedentes Históricos de los Mercados de Futuros y Opciones: Cobertura y Especulación*. Revista Invenio, 2014.
- [13] R. de Roover. "The Scholastics, Usury, and Foreign Exchange". *Business History Review*, 41(3):257–271, 1967.
- [14] S. Dunbar. "Stochastic Processes and Advanced Mathematical Finance, Brief History of Mathematical Finance". *University of Nebraska Lincoln*.
- [15] R. Durrett. *Martingales*, pages 221–273. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, 4 edition, 2010.

- [16] R. Ekelund and H. Robert. *Historia de la Teoría Económica y de su Método*. Mcgrw-Hill Interamericana de México, 2005.
- [17] D. Heath, R. Jarrow, and A. Morton. "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation." *Econometrica*, 60(1):77–105, 1992.
- [18] T. Ho and S. Lee. "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims". *The Journal of Finance*, 41:1011–1029, 1986.
- [19] S. Homer. *A History of Interest Rates*. Rutgers University Press, 1977.
- [20] J. Hull and A. White. "Pricing Interest Rate Derivatives Securities". *The Review of Financial Studies*, 3:573–592, 1990.
- [21] K. Itô. "Stochastic Integral". *Proceedings of the Imperial Academy*, 20(8):519–524, 1944.
- [22] K. Itô. "Multiple Wiener Integral". *J. Math. Soc. Japan*, 3(1):157–169, 05 1951.
- [23] K. Itô and J. McKean, H. P. *Diffusion Processes and Their Sample Paths*. Springer-Verlag, 1965.
- [24] Jenofonte. *Recuerdos de Sócrates. Económico. Banquete. Apología de Sócrates*. Gredos, 1993.
- [25] P. Kisbye and K. Meier. "Sobre la Consistencia del Modelo de Cox, Ingersoll, Ross con Modelos Paramétricos de Tasas Forward". *VI MACI 2017 - Sexto Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial 2 al 5 de mayo de 2017 - Comodoro Rivadavia, Chubut, Argentina*, pages 102–105.
- [26] P. Kisbye and K. Meier. "Sonrisas de Volatilidad en un Modelo de Tasas Libor con Varianza Cuadrático Gaussiana". *VII MACI 2019 - Séptimo Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial 8 al 10 de mayo de 2019 - Rio Cuarto, Córdoba, Argentina*, pages 153–156.
- [27] P. Kisbye and K. Meier. "Consistency of Extended Nelson-Siegel Curve Families with the Ho-Lee and Hull and White Short Rate Models". *Journal of Mathematical Finance*, 41:919–933, 2017.
- [28] S. Kummer and C. Pauletto. *The History of Derivatives: a Few Milestones*. EFTA Seminar on Regulation of Derivatives Markets, Zürich, 2012.
- [29] E. A. Martínez. *El interés y la usura*. Universidad Nacional de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Económicas, 1963.
- [30] G. Mitchell. *The finite Difference Method in Partial Equations*.
- [31] R. Musiela. *Martingale Methods in Financial Modelling*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2005.
- [32] C. Nelson and A. Siegel. Parsimonious modeling of yield curves. *The Journal of Business*, 60(4):473–489, 1987.
- [33] B. Oksendal. *Stochastic Differential Equations*. Springer, 2014.
- [34] W. Press. *Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing*.
- [35] R. Roberts. *Wall Street. Mercados, mecanismos y participantes*. Cuatro Media Inc., 2008.

- [36] P. Samuelson. "Rational Theory of Warrant Pricing". *Industrial Management Review*, (6):13–39, 1965.
- [37] O. Vasicek. An Equilibrium Characterization of the Term Structure. *Journal of Financial Economics*, 5(2):177 – 188, 1977.
- [38] V. Yohai. *Notas de Probabilidades y Estadística*. 2008.

