

TESIS DOCTORAL

---

ÁLGEBRAS DE PRE-NICHOLS DE DIMENSIÓN DE  
GELFAND-KIRILLOV FINITA.

---



UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA  
FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA, FÍSICA Y COMPUTACIÓN

AUTOR: LIC. EMILIANO CAMPAGNOLO  
DIRECTOR: DR. IVÁN EZEQUIEL ANGIO



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons  
Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional.



# Resumen

Esta tesis trata sobre la clasificación de las álgebras de pre-Nichols de dimensión de Gelfand-Kirillov finita. Las álgebras de Nichols de tipo diagonal de dimensión finita con diagrama de Dynkin conexo se pueden reagrupar en 5 familias. Los nombres de las familias de las respectivas trenzas son los siguientes:

- Tipo Cartan.
- Tipo Súper.
- Tipo Standard.
- Tipo (súper)modular.
- Tipo indefinido (ufo).

Andruskiewitsch y Sanmarco introdujeron en 2019 la noción de álgebra de pre-Nichols eminente de una trenza de tipo diagonal; ésta es un elemento mínimo del conjunto parcialmente ordenado de álgebras de pre-Nichols de dimensión de Gelfand-Kirillov finita. Encontrar álgebras de pre-Nichols eminentes de una trenza reduce el problema de encontrar todas las álgebras de pre-Nichols de dimensión de Gelfand-Kirillov finita a encontrar cocientes de dicha álgebra. En el mismo trabajo Andruskiewitsch y Sanmarco probaron que si la trenza es de tipo Cartan, salvo algunos casos excepcionales, entonces el álgebra de pre-Nichols distinguida es la respectiva álgebra de pre-Nichols eminente. Para uno de los casos excepcionales encontraron el álgebra de pre-Nichols eminente correspondiente.

En la primera parte de esta tesis presentaremos un resultado análogo para el resto de las familias de trenzas, es decir, el álgebra de pre-Nichols eminente es igual a la respectiva álgebra de pre-Nichols distinguida salvo algunos casos excepcionales. Posteriormente usaremos el resultado obtenido para clasificar las respectivas álgebras de pre-Nichols graduadas de una trenza de tipo súper como así de otros ejemplos con pocas raíces de Cartan.

En la segunda parte presentaremos, para cada caso excepcional, una nueva álgebra de pre-Nichols de dimensión de Gelfand-Kirillov finita y probaremos que es el álgebra de pre-Nichols eminente correspondiente. Además veremos que estos nuevos ejemplos son una extensión central de su correspondiente álgebra de pre-Nichols distinguida.

# Agradecimientos

*A mi director Iván Angiono, Un excelente compañero de trabajo. Sus ideas y enseñanzas fueron fundamentales para mi crecimiento académico estos años. El privilegio de trabajar con él fue enorme.*

*A los integrantes del grupo de Teoría de Lie, que de todos los que conocí aprendí muchas cosas. En especial a Nicolás Andruskiewitsch con quien tomé varios cursos y me aportó ideas que no se encuentran en los libros.*

*A Guillermo Sanmarco y Héctor Peña Pollastri quienes estuvieron siempre a su disposición para darme una mano en estos años.*

*A mi familia, un sostén indispensable en todo momento.*

*A Juan Pablo Rossetti, quién me animó a estudiar matemática y nunca perder la motivación.*

*A los integrantes del Festival de Matemática de Córdoba que con ellos además de divertirme, descubrí mi otra vocación: la divulgación.*

*A mis compañeros y amigos dentro de la facultad.*

*A Iván Maldeman, por prestarme su computadora en momentos claves.*

*A Pedro, Vero y Diego, por abastecerme de comida.*

*A Benja que siempre me distrae con algún partido de Squash.*

*A Cindy y Ro que cuento con ellas para planes desconcertantes.*

# Índice

<b>Resumen</b>	<b>2</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>8</b>
1.1 Álgebras asociativas y coálgebras . . . . .	8
1.2 Biálgebras y álgebras de Hopf . . . . .	13
1.3 Dimensión de Gelfand-Kirillov . . . . .	14
1.4 Categorías tensoriales trenzadas . . . . .	15
1.5 Espacios vectoriales trenzados, álgebras de Nichols y módulos de Yetter-Drinfeld	19
1.6 Palabras de Lyndon y bases PBW . . . . .	23
1.7 Álgebras de pre-Nichols distinguidas . . . . .	25
1.8 Series de Hilbert y extensiones de álgebras de Hopf . . . . .	28
1.9 Resultados preliminares sobre álgebras de Nichols . . . . .	29
<b>2 Resultados generales de álgebras de pre-Nichols con GKdim finita.</b>	<b>31</b>
2.1 Estrategia general . . . . .	31
2.2 Relaciones cuánticas de Serre . . . . .	32
2.3 Relaciones que aparecen frecuentemente . . . . .	36
2.4 Relaciones poco frecuentes . . . . .	45
<b>3 Álgebras de pre-Nichols distinguidas que son eminentes</b>	<b>50</b>
3.1 Resultado principal . . . . .	50
3.2 Álgebras de Nichols de dim infinita y GKdim finita . . . . .	51
3.3 Aplicación del Teorema 3.1.1 . . . . .	51
<b>4 Álgebras de pre-Nichols eminentes que no son distinguidas</b>	<b>53</b>
4.1 Tipo Cartan $A_2$ con $q \in \mathbb{G}'_3$ . . . . .	53
4.2 Tipo $A_3(q \{2\})$ . . . . .	54
4.3 Tipo $A_3(q \{1, 2, 3\})$ . . . . .	57
4.4 Tipo $\mathfrak{g}(2, 3)$ , con diagrama de Dynkin (4.0.1) . . . . .	60
4.5 Tipo $\mathfrak{g}(2, 3)$ , con diagrama de Dynkin (4.0.2) . . . . .	62

# Introducción

Las álgebras de Hopf son álgebras asociativas con unidad y cierta estructura adicional: un coproducto coasociativo, una counidad y una función llamada antípoda que admiten ciertas condiciones de compatibilidad. Una primera versión de esa estructura se introdujo en un artículo de Heinz Hopf en 1941. En la década de los 60 varios autores dieron una definición de álgebra de Hopf similar a la contemporánea. Armand Borel, uno de dichos autores, trabajó con una estructura algebraica relacionada con cohomología de grupos de Lie, a dicha estructuras las definió como “Álgebras de Hopf” en honor a Heinz Hopf. En 1961 Sweedler dio la definición actual e introdujo su respectiva teoría general. En simultáneo se estudiaron las álgebras de funciones  $\mathcal{O}_X$  de un grupo algebraico  $X$  que resultaron ser ejemplos de álgebras de Hopf, además de las álgebras envolventes de las álgebras de Lie.

Los ejemplos anteriores, provenientes de la teoría de Lie, dieron lugar a los primeros resultados de clasificación. Por ejemplo, si el cuerpo subyacente  $\mathbb{k}$  es algebraicamente cerrado y de característica 0 se probó que un álgebra de Hopf conmutativa es el álgebra de funciones polinomiales en un grupo pro-algebraico. Además Cartier y Gabriel demostraron que (bajo las mismas hipótesis sobre  $\mathbb{k}$ ) toda álgebra de Hopf coconmutativa es producto semidirecto entre un álgebra de un grupo  $\mathbb{k}G$  (donde  $G$  es el conjunto de elementos de tipo grupo) y el álgebra envolvente de un álgebra de Lie  $U(\mathfrak{g})$  (dónde  $\mathfrak{g}$  es el conjunto de elementos primitivos).

En la década de 1970 Taft introdujo un álgebra de dimensión  $N^2$  a partir de una raíz de la unidad de orden  $N$  que satisfacía una propiedad que no cumplía ninguno de los ejemplos hasta el momento, no era conmutativa ni coconmutativa y de dimensión finita. En la década de los 80 Drinfeld [D] y Jimbo [J] introdujeron lo que conocemos actualmente como grupos cuánticos que son otros ejemplos de álgebras de Hopf no conmutativas y no coconmutativas, que surgieron como parte de su búsqueda de comprender ciertos fenómenos físicos. Más adelante Lusztig [L1, L2] consideró ciertas variantes de los grupos cuánticos en los que el parámetro se evalúa en raíces de la unidad dando lugar a la aparición de nuevas álgebras de Hopf de dimensión finita: los grupos cuánticos pequeños.

Uno de los enfoques en los que se avanzó significativamente las últimas dos décadas es la clasificación de álgebras de Hopf  $H$  punteadas (en especial las de dimensión finita): aquellas que satisfacen que la mayor subcoálgebra semisimple  $H_0$  de  $H$  (conocida como el coradical de  $H$ ) coincide con la subálgebra generada por los elementos de tipo grupo. Este enfoque usa lo siguiente: Si  $H$  es un álgebra de Hopf punteada con coradical  $\mathbb{k}G$ , entonces  $H$  admite una filtración de coálgebras  $\{H_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$  con  $H_0 = \mathbb{k}G$ ; el álgebra de Hopf graduada  $\text{gr } H$  admite morfismos de álgebras de Hopf  $\pi : \text{gr } H \rightarrow \mathbb{k}G$  y  $\iota : \mathbb{k}G \rightarrow \text{gr } H$  con  $\pi \circ \iota = \text{id}$ , de modo que  $\text{gr } H \simeq \mathbb{k}G \# R$ , donde  $R = \bigoplus_{n \geq 0} R(n)$  es un álgebra de Hopf graduada en la categoría  ${}_{\mathbb{k}G}^{\mathbb{k}G} \mathcal{YD}$  tal que  $R(0) = \mathbb{k}1$ . Sea  $V := R(1) \in {}_{\mathbb{k}G}^{\mathbb{k}G} \mathcal{YD}$ : la subálgebra de  $R$  generada por  $V$  se conoce como el álgebra de Nichols de  $V$  y es también un álgebra de Hopf graduada en  ${}_{\mathbb{k}G}^{\mathbb{k}G} \mathcal{YD}$  que sólo depende de  $V$ . Basados en estos invariantes, Andruskiewitsch y Schneider en [AS] dieron un programa (conocido como *Método del Levante*) para la clasificación de álgebras de Hopf punteadas de coradical  $\mathbb{k}G$  con  $G$  un grupo finito fijo:

1. Clasificar todos los módulos de Yetter-Drinfeld  $V$  sobre  $G$  tales que  $\dim \mathcal{B}(V) < \infty$ .

2. Para cada uno de los módulos  $V$  del ítem anterior encontrar una presentación por relaciones y generadores del álgebra de Nichols  $\mathcal{B}(V)$ .
3. Determinar si, dada un álgebra de Hopf de dimensión finita  $H$  con cocorradical isomorfo a  $\mathbb{k}G$  y trenza infinitesimal isomorfa a la de  $V$ , el álgebra de Hopf graduada asociada a la filtración corradical satisface  $\text{gr } H \simeq \mathcal{B}(V) \# \mathbb{k}G$ .
4. Clasificar las álgebras de Hopf que se obtienen como deformación de  $\mathcal{B}(V) \# \mathbb{k}G$ .

En esta dirección se obtuvieron varios avances, siendo [AS2] el primer resultado completo de clasificación: se logra bajo la hipótesis de que los primos 2, 3, 5, 7 no dividen al orden de  $G$  y  $G$  es abeliano. Para  $G$  abeliano en general, el programa fue completado en su totalidad por Heckenberger (1), Angiono (2, 3 y 4) y García Iglesias (4), siguiendo los lineamientos presentados en el trabajo presentado por Andruskiewitsch y Schneider.

Otro avance en este contexto fue realizado por Heckenberger en [H3] clasificando todos los  $V$  cuando tienen estructura de espacio vectorial trenzado de tipo diagonal y dimensión finita a través de su sistema de raíces. En [AAn] Andruskiewitsch y Angiono organizaron dicha clasificación en las siguientes familias

- Tipo Cartan,
- Tipo Súper,
- Tipo Standard,
- Tipo (súper)modular,
- Tipo indefinido (ufo).

En una dirección similar, se busca un resultado análogo para el caso en el que  $\dim H = \infty$  pero con crecimiento controlado: su dimensión de Gelfand-Kirillov es finita. La clasificación de álgebras de Hopf puntuadas con corradical  $\mathbb{k}G$  se lograría al realizar el método del Levante, con las siguientes preguntas iniciales:

1. Clasificar todos los módulos de Yetter-Drinfeld  $V$  sobre  $G$  tales que  $\text{GKdim } \mathcal{B}(V) < \infty$ .
2. Para cada  $V$  obtenido, calcular todas las álgebras de post-Nichols de  $V$ .

Cuando  $V$  es de tipo Cartan o bien un espacio cuántico (el diagrama de Dynkin de  $V$  no tiene aristas), Andruskiewitsch y Sanmarco probaron que salvo en algunas excepciones toda álgebra de pre-Nichols de  $\mathcal{B}(V)$  es el cociente del álgebra de pre-Nichols distinguida  $\widetilde{\mathcal{B}}(V)$  de  $\mathcal{B}(V)$  (definida en [An4]). Además para una de las excepciones encontraron un reemplazo de  $\widetilde{\mathcal{B}}(V)$  que satisfacía la misma condición. En esta tesis presentaremos los resultados obtenidos en [AnCSa, AnCSa2] que concluye algo similar sobre  $\widetilde{\mathcal{B}}(V)$  para las restantes familias de la clasificación en [AAn].

Para uno de los resultados principales que presentaremos requerimos la siguiente conjetura:

**Conjetura.** [AAnH1, Conjecture 1.5] *El sistema de raíces de un álgebra de Nichols de tipo diagonal con  $\text{GKdim}$  finita es finito.*

Sea  $(V, c)$  un espacio vectorial trenzado, en [AAnH1] se prueba la conjetura en los siguientes dos casos:

- $\dim V = 2$
- $V$  es de tipo Cartan-afín

y posteriormente en [AnG2] se prueba los siguientes dos casos:

- $\dim V = 3$
- $V$  es de tipo Cartan

Las álgebras de Nichols de tipo diagonal con  $\text{GKdim}$  finita y sistema de raíces finito están clasificadas. Por lo que, en caso de que la conjetura sea cierta, las álgebras de Nichols de tipo diagonal y  $\text{GKdim}$  finita estarían clasificadas.

Los resultados principales de este trabajo se encuentran enunciados en los capítulos 3 y 4 y junto a [ASa] se pueden resumir en el siguiente Teorema :

**Teorema 0.0.1.** *Sea  $\mathbf{q}$  la matriz de una trenza tal que  $\dim \mathcal{B}_{\mathbf{q}} < \infty$  y el diagrama de Dynkin  $\mathbf{q}$  es conexo. Asumimos la conjetura 1.9.4.*

(i) *Si  $\mathbf{q}$  no es de tipo*

- *Cartan  $A_\theta$  o  $D_\theta$  con  $q = -1$ ,*
- *$A_2$  con  $q \in \mathbb{G}'_3$ ,*
- *$\mathbf{A}_3(q|\{2\})$  o  $\mathbf{A}_3(q|\{1, 2, 3\})$ , con  $q \in \mathbb{G}_\infty$ ,*
- *$\mathfrak{g}(2, 3)$  con alguno de los siguientes diagramas de Dynkin*

$$d_1 : \begin{array}{ccccccc} & -1 & & \xi^2 & & \xi & \\ & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \\ & & & & & & \end{array}, \quad d_2 : \begin{array}{ccccccc} & -1 & & \xi & & -1 & \\ & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \\ & & & & & & \end{array},$$

*entonces el álgebra de pre-Nichols distinguida  $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  es eminente.*

(ii) *[ASa, Proposition 4.11] Si  $\mathbf{q}$  de tipo  $A_2$  con  $q \in \mathbb{G}'_3$ , entonces*

$$\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}} := \mathcal{B}_{\mathbf{q}} / \langle x_{1112}, x_{2112}, x_{2221}, x_{1221} \rangle.$$

*es la única álgebra de pre-Nichols eminente de  $\mathcal{B}_{\mathbf{q}}$ . Además  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  es una extensión central trezada de  $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  por un álgebra de polinomios de una variable y  $\text{GKdim } \widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}} = 5$ .*

(iii) *Si es  $\mathbf{q}$  de tipo  $\mathbf{A}_3(q|\{2\})$ , entonces*

$$\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}} := T(V) / \langle x_2^2, x_{13}, x_{112}, x_{332} \rangle.$$

*es el álgebra de pre-Nichols eminente de  $\mathcal{B}_{\mathbf{q}}$ . Además  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  es una extensión central trezada de  $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  por un álgebra de polinomios de una variable y  $\text{GKdim } \widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}} = 3$ .*

(iv) *Si  $\mathbf{q}$  es de tipo  $\mathbf{A}_3(q|\{1, 2, 3\})$  con  $q \in \mathbb{G}_\infty$ , entonces,*

$$\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}} := T(V) / \langle x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_{213}, [x_{123}, x_2]_c \rangle.$$

*es el álgebra de pre-Nichols eminente de  $\mathcal{B}_{\mathbf{q}}$ . Además  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  es una extensión central trezada de  $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  por un álgebra de polinomios de una variable y  $\text{GKdim } \widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}} = 3$ .*

(v) *Si  $\mathbf{q}$  es de tipo  $\mathfrak{g}(2, 3)$  con diagrama  $d_1$ , entonces el álgebra de pre-Nichols eminente  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  es una extensión central trezada de  $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  por un álgebra de polinomios de una variable.*

(vi) *Si  $\mathbf{q}$  es de tipo  $\mathfrak{g}(2, 3)$  con diagrama  $d_2$ , entonces  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  es una extensión central trezada de  $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  por un álgebra de polinomios de dos variables.*

Esta tesis esta organizada de la siguiente manera:

El primer capítulo contiene contenidos preliminares que serán utilizados para el resto de los capítulos: Álgebras de Hopf, Categorías tensoriales trezadas, Espacios vectoriales trezados, álgebras de Nichols, módulos de Yetter-Drinfeld, Álgebras de pre-Nichols

distinguidas, palabras de Lyndon, bases PBW, series de Hilbert y extensiones de álgebras de Hopf.

El segundo capítulo contiene el desarrollo previo para la demostración del Teorema 3.1.1. Se desarrolla en distintos Lemas donde cada uno describe cómo se comporta cada una de las relaciones que aparecen en las álgebras de pre-Nichols distinguidas en las álgebras de pre-Nichols con  $\text{GKdim} < \infty$ .

El tercer capítulo contiene el enunciado y la demostración de uno de los resultados principales de la tesis: Salvo algunas excepciones el álgebra de pre-Nichols distinguida es eminente. Posteriormente se desarrolla una aplicación de dicho resultado.

El cuarto capítulo contiene un desarrollo de algunas de las excepciones del resultado del capítulo anterior, para cada una de estas excepciones se presenta su correspondiente álgebra de pre-Nichols eminente y su base PBW.

# 1 | Preliminares

En este capítulo recordaremos las definiciones y aspectos generales de teoría de álgebras de Hopf, espacios vectoriales trenzados, álgebras de Nichols, en particular nos interesa el caso en el que la trenza es de tipo diagonal, dimensión de Gelfand-Kirillov y otros temas afines. Para más información referiremos a [R, A, AAn, HS, T].

## Notación

Dado  $\theta \in \mathbb{N}_0$  denotaremos  $\mathbb{I}_\theta = \{1, \dots, \theta\}$ ; si  $\theta$  está sobreentendido, escribiremos sencillamente  $\mathbb{I}$ . Para cada  $N \geq 2$ , denotaremos por  $\mathbb{G}_N$  al conjunto de las raíces  $N$ -ésimas de la unidad, y por  $\mathbb{G}'_N$  al conjunto de las raíces primitivas  $N$ -ésimas de la unidad. Denotamos además  $\mathbb{G}_\infty = \bigcup_{N \geq 2} \mathbb{G}_N$ .

Fijemos  $\mathbb{k}$  un cuerpo algebraicamente cerrado de característica 0. Si  $t \in \mathbb{k}$  y  $n \in \mathbb{N}$  los  $q$ -números están definidos por  $(n)_q := 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}$ . Salvo que se indique lo contrario todo espacio vectorial, álgebra, etc., será sobre  $\mathbb{k}$  y el producto tensorial será  $\otimes_{\mathbb{k}} = \otimes$ . Si  $W$  es un  $\mathbb{k}$ -espacio vectorial, el grupo de operadores lineales invertibles de  $W$  lo denotamos por  $\text{GL}(W)$ . Dada  $A$  una álgebra asociativa,  $\mathcal{M}_A$  ( ${}_A\mathcal{M}$ ) será la categoría de  $A$ -módulos a derecha (a izquierda). Si  $V$  y  $W$  son dos espacios vectoriales, el *flip* es el morfismo lineal  $\tau_{VW} : V \otimes W \rightarrow W \otimes V$  dado por

$$\tau_{VW}(v \otimes w) = w \otimes v, \quad \text{para todo par } v, w \in V. \quad (1.0.1)$$

Usualmente escribiremos  $\tau$  omitiendo el correspondiente subíndice.

La base canónica del grupo abeliano libre  $\mathbb{Z}^\theta$  la denotaremos por  $\{\alpha_i : i \in \mathbb{I}\}$  y un elemento  $\sum_{i \in \mathbb{I}} b_i \alpha_i$  lo denotaremos por  $1^{b_1} 2^{b_2} \dots \theta^{b_\theta}$ . Dados  $\beta = 1^{b_1} 2^{b_2} \dots \theta^{b_\theta}$  y  $\gamma = 1^{c_1} 2^{c_2} \dots \theta^{c_\theta}$ , diremos que  $\beta \leq \gamma$  si, y sólo si,  $b_i \leq c_i$  para todo  $i \in \mathbb{I}$ ; de esta forma obtenemos un orden parcial en  $\mathbb{Z}^\theta$  que será al que haremos referencia posteriormente.

Si  $U$  es un espacio vectorial graduado por un monoide  $G$ , denotaremos por  $U^\alpha$  a la  $\alpha$ -componente de la graduación, para cada  $\alpha \in G$ .

## 1.1 | Álgebras asociativas y coálgebras

**Definición 1.1.1.** Una  $\mathbb{k}$ -álgebra (asociativa) es una tripleta  $(A, \cdot, 1_A)$ , donde  $A$  es un  $\mathbb{k}$ -espacio vectorial,  $\cdot : A \times A \rightarrow A$  y  $1_A \in A$  que satisfacen:

- $\cdot : A \times A \rightarrow A$  es bilineal.
- (Asociatividad)  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$  para todo  $a, b, c \in A$ .
- (Unidad)  $1_A \cdot a = a \cdot 1_A = a$  para todo  $a \in A$ .

$A \cdot$  se lo conoce como producto del álgebra y a  $1_A$  su unidad. Cuando esté sobreentendido el producto escribiremos  $ab$  en vez de  $a \cdot b$  y 1 en vez de  $1_A$ .

Notar que la bilinealidad de  $\cdot : A \times A \rightarrow A$  es equivalente a tener un morfismo lineal  $m : A \otimes A \rightarrow A$  tal que  $m(a \otimes b) = a \cdot b$  para todo  $a, b \in A$ . De esta manera tenemos la siguiente definición de álgebra equivalente:

**Definición 1.1.2.** Una  $\mathbb{k}$ -álgebra (asociativa) es una tripleta  $(A, m, u)$ , donde  $A$  es un  $\mathbb{k}$ -espacio vectorial y  $m : A \otimes A \rightarrow A$ ,  $u : \mathbb{k} \rightarrow A$  satisfacen que los siguientes diagramas conmutan:

- (Asociatividad)

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{\text{id} \otimes m} & A \otimes A \\
 \downarrow m \otimes \text{id} & & \downarrow m \\
 A \otimes A & \xrightarrow{m} & A
 \end{array}$$

- (Unidad)

$$\begin{array}{ccc}
 & A \otimes A & \\
 u \otimes \text{id} \nearrow & \downarrow m & \nwarrow \text{id} \otimes u \\
 \mathbb{k} \otimes A & & A \otimes \mathbb{k} \\
 \searrow & & \swarrow \\
 & A & 
 \end{array}$$

donde las flechas inferiores  $\mathbb{k} \otimes A \rightarrow A$  y  $A \otimes \mathbb{k} \rightarrow A$  son los isomorfismos canónicos. En este caso  $m$  es la multiplicación y  $u$  la unidad, además  $u(1) = 1_A$ .

La definición de coálgebra es la definición dual de álgebra:

**Definición 1.1.3.** Una  $\mathbb{k}$ -coálgebra es una tripleta  $(C, \Delta, \epsilon)$ , donde  $C$  es un  $\mathbb{k}$ -espacio vectorial y  $\Delta : C \rightarrow C \otimes C$ ,  $\epsilon : C \rightarrow \mathbb{k}$  que satisfacen:

- (Coasociatividad)

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{\Delta} & C \otimes C \\
 \downarrow \Delta & & \downarrow \text{id} \otimes \Delta \\
 C \otimes C & \xrightarrow{\Delta \otimes \text{id}} & C \otimes C \otimes C
 \end{array}$$

- (Counidad)

$$\begin{array}{ccc}
 & C & \\
 \swarrow & \downarrow m & \searrow \\
 \mathbb{k} \otimes C & & C \otimes \mathbb{k} \\
 \epsilon \otimes \text{id} \nwarrow & & \swarrow \text{id} \otimes \epsilon \\
 & C \otimes C & 
 \end{array}$$

donde las flechas superiores  $C \rightarrow \mathbb{k} \otimes C$  y  $C \rightarrow C \otimes \mathbb{k}$  son los isomorfismos canónicos. En este caso  $\Delta$  es la comultiplicación y  $\epsilon$  la counidad. Además, denotamos  $C^+ = \ker \epsilon$ . En algunos casos hablaremos simplemente de una coálgebra  $C$  sin mencionar al coproducto y a la counidad.

La conmutatividad de los diagramas de la definición anterior nos dice que:

- (coasociatividad)  $(\Delta \otimes \text{id})\Delta = (\text{id} \otimes \Delta)\Delta$ .
- (counidad)  $(\epsilon \otimes \text{id})\Delta = (\text{id} \otimes \epsilon)\Delta = \text{id}$

**Ejemplo 1.1.4.** Sean  $S$  un conjunto no vacío y  $\mathbb{k}S$  el  $\mathbb{k}$ -espacio vectorial de base  $S$ . Entonces  $\mathbb{k}S$  es una coálgebra cuyo coproducto  $\Delta$  y counidad  $\epsilon$  están dados por  $\Delta(s) = s \otimes s$  y  $\epsilon(s) = 1$  para todo  $s \in S$ .

**Ejemplo 1.1.5.** Un cuerpo  $\mathbb{k}$  es una coálgebra con el coproducto  $\Delta : \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k} \otimes \mathbb{k}$  el isomorfismo canónico,  $\Delta(\alpha) = \alpha \otimes 1$  para todo  $\alpha \in \mathbb{k}$  y con la counidad  $\epsilon : \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k}$  la identidad.

**Ejemplo 1.1.6.** Sean  $(C, \Delta_C, \epsilon_C)$  y  $(D, \Delta_D, \epsilon_D)$  dos coálgebras. Entonces  $(C \otimes D, (\text{id}_C \otimes \tau \otimes \text{id}_D)(\Delta_C \otimes \Delta_D), \epsilon_C \otimes \epsilon_D)$  es una coálgebra, donde  $\tau$  es el flip, ver (1.0.1).

**Ejemplo 1.1.7.** Sea  $H$  un espacio vectorial con base  $\{c_m | m \in \mathbb{N}_0\}$ . Entonces  $H$  es una coálgebra con comultiplicación  $\Delta$  y counidad  $\epsilon$  definidos por:

$$\Delta(c_m) = \sum_{i=0}^m c_i \otimes c_{m-i}, \quad \epsilon(c_m) = \delta_{0m}, \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

A  $H$  se la conoce como coálgebra de potencias divididas.

**Ejemplo 1.1.8.** Sea  $(S, \leq)$  un conjunto localmente finito y parcialmente ordenado (es decir si  $x, y \in S$  y  $x \leq y$ , entonces  $\{z | x \leq z \leq y\}$  es finito). Sea  $T = \{(x, y) \in S \times S | x \leq y\}$  y  $V$  un espacio vectorial de base  $T$ . Entonces  $V$  es una coálgebra con comultiplicación  $\Delta$  y counidad  $\epsilon$  definidos por:

$$\Delta(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} (x, z) \otimes (z, y), \quad \epsilon(x, y) = \delta_{xy}, \quad (x, y) \in T.$$

**Ejemplo 1.1.9.** Sea  $n \geq 1$  un entero positivo, y  $M^c(n, \mathbb{k})$  un  $\mathbb{k}$ -espacio vectorial de dimensión  $n^2$ . Denotamos por  $(e_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  una base de  $M^c(n, \mathbb{k})$ . Definimos la siguiente comultiplicación  $\Delta$  y counidad  $\epsilon$  en  $M^c(n, \mathbb{k})$  por:

$$\Delta(e_{ij}) = \sum_{1 \leq p \leq n} e_{ip} \otimes e_{pj}, \quad \epsilon(e_{ij}) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

En este caso  $M^c(n, \mathbb{k})$  es una coálgebra llamada la coálgebra de matrices.

**Ejemplo 1.1.10.** Sea  $C$  un espacio vectorial con base  $\{g_i, d_i | i \in \mathbb{N}\}$ . Definimos:  $\Delta : C \rightarrow C \otimes C$  y  $\epsilon : C \rightarrow \mathbb{k}$  por:

$$\Delta(g_i) = g_i \otimes g_i, \quad \Delta(d_i) = g_i \otimes d_i + d_i \otimes g_{i+1}, \quad \epsilon(g_i) = 1, \quad \epsilon(d_i) = 0.$$

Entonces  $(C, \Delta, \epsilon)$  es una coálgebra.

**Definición 1.1.11.** Sea  $(C, \Delta, \epsilon)$  una coálgebra. Definimos recursivamente  $\Delta_n : C \rightarrow C^{\otimes n}$ :

$$\Delta_1 = \Delta, \quad \Delta_{n+1} = (\Delta \otimes \text{id}^{\otimes n})\Delta_n, \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Sea  $A$  un álgebra, gracias a la asociatividad de  $\cdot$  podemos denotar por  $a \cdot b \cdot c$  al producto iterado de tres elementos de  $A$  en cualquier orden, es decir  $a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ . De igual manera cualquier producto iterado de  $n$  elementos es igual y lo denotamos sin indicar los paréntesis. En el caso de las coálgebras gracias a la coasociatividad tenemos un resultado similar que veremos a continuación.

**Proposición 1.1.12.** Sea  $C$  una coálgebra, entonces para todo  $n \geq 2$  y todo  $r \in \{0, \dots, n-1\}$  se satisface:

$$\Delta_n = (\text{id}^{\otimes r} \otimes \Delta \otimes \text{id}^{\otimes n-1-r})\Delta_{n-1}.$$

Sea  $(C, \Delta, \epsilon)$  una coálgebra y  $c \in C$ , denotamos:

$$\Delta(c) = c_{(1)} \otimes c_{(2)}$$

La notación anterior se extiende para todo  $n \geq 1$ :

$$\Delta_n(c) = c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes \dots \otimes c_{(n)}.$$

Se conoce como “Notación de Sweedler”. De esta manera la coasociatividad y la propiedad de la counidad se pueden reescribir:

- (coasociatividad)  $c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)} = c_{(1)_{(1)}} \otimes c_{(1)_{(2)}} \otimes c_{(2)} = c_{(1)} \otimes c_{(2)_{(1)}} \otimes c_{(2)_{(2)}}$ .
- (counidad)  $\epsilon(c_{(1)})c_{(2)} = c_{(1)}\epsilon(c_{(2)}) = c$ .

Veremos a continuación una versión “dual” de la noción de álgebra conmutativa.

**Definición 1.1.13.** Sea  $(C, \Delta, \epsilon)$  una coálgebra.

- Sea  $\Delta^{op} = \tau\Delta$ . La coálgebra *coopuesta* de  $(C, \Delta, \epsilon)$  es  $(C, \Delta^{op}, \epsilon)$ , se la denota  $C^{op}$ .
- $(C, \Delta, \epsilon)$  es *coconmutativa* si  $\Delta = \Delta^{op}$ .

De manera análoga a lo que ocurre con álgebras, las coálgebras forman una categoría, que denotaremos  $\mathbb{k}\text{-Coalg}$ ; daremos a continuación los morfismos de la misma.

**Definición 1.1.14.** Sean  $(C, \Delta_C, \epsilon_C)$  y  $(D, \Delta_D, \epsilon_D)$  dos coálgebras. Un morfismo lineal  $g : C \rightarrow D$  es un *morfismo de coálgebras* si los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{g} & D \\ \Delta_C \downarrow & & \downarrow \Delta_D \\ C \otimes C & \xrightarrow{g \otimes g} & D \otimes D \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{g} & D \\ \epsilon_C \searrow & & \swarrow \epsilon_D \\ & \mathbb{k} & \end{array}$$

En notación de Sweedler,  $(g \otimes g)(c_{(1)} \otimes c_{(2)}) = g(c_{(1)}) \otimes g(c_{(2)})$  para todo  $c \in C$ .

A continuación recordaremos la definición de producto de convolución. En particular, esto nos dará una estructura de álgebra para el espacio dual de una coálgebra.

**Definición 1.1.15.** Sean  $C$  una coálgebra,  $A$  un álgebra. El *producto de convolución* en  $\text{Hom}(C, A)$  está definido por el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{f * g} & A \\
 \Delta \downarrow & & \uparrow m \\
 C \otimes C & \xrightarrow{f \otimes g} & A \otimes A
 \end{array}
 \quad .$$

$f, g \in \text{Hom}(C, A)$

En notación de Sweedler,  $(f * g)(c) = f(c_{(1)}) \otimes g(c_{(2)})$  para todo  $c \in C$ .

Se puede probar fácilmente que  $(\text{Hom}(C, A), *, u \circ \epsilon)$  es un álgebra asociativa.

**Ejemplo 1.1.16.** Si  $A = \mathbb{k}$  en la Definición 1.1.15, entonces  $C^* = \text{Hom}(C, A)$  es un álgebra con producto  $*$   $= {}^t\Delta : C^* \otimes C^* \rightarrow C^*$ . Además, si  $f : C \rightarrow D$  es un morfismo de coálgebras entonces  ${}^t f : D^* \rightarrow C^*$  es un morfismo de álgebras.

Ahora listaremos algunos subespacios y elementos distinguidos de las coálgebras que serán relevantes a lo largo de la tesis.

**Definición 1.1.17.** Sean  $(C, \Delta, \epsilon)$  y  $D$  un subespacio vectorial de  $C$ . Decimos que:

- $D$  es una subcoálgebra de  $C$  si  $\Delta(D) \subset D \otimes D$ . De esta forma  $(D, \Delta|_{D \otimes D}, \epsilon|_D)$  es una coálgebra.
- $D$  es un co-ideal a izquierda (respectivamente, a derecha) de  $C$  si  $\Delta(D) \subset C \otimes D$  (respectivamente,  $\Delta(D) \subset D \otimes C$ )
- $D$  es un co-ideal de  $C$  si  $\Delta(D) \subset C \otimes D + D \otimes C$  y  $\epsilon(D) = 0$

**Ejemplo 1.1.18.** Sea  $f : C \rightarrow D$  un morfismo de coálgebras. Entonces  $\ker(f)$  es un coideal de  $C$  y  $\text{Im}(f)$  es una subcoálgebra de  $D$ .

**Definición 1.1.19.** Sea  $\pi : C \rightarrow D$  un morfismo de coálgebras. El conjunto de *coinvariantes* (a derecha) de  $\pi$  es

$$C^{\text{co}\pi} = \{c \in C : (\text{id} \otimes \pi)\Delta(c) = c \otimes 1\}.$$

**Definición 1.1.20.** Sea  $C$  una coálgebra.

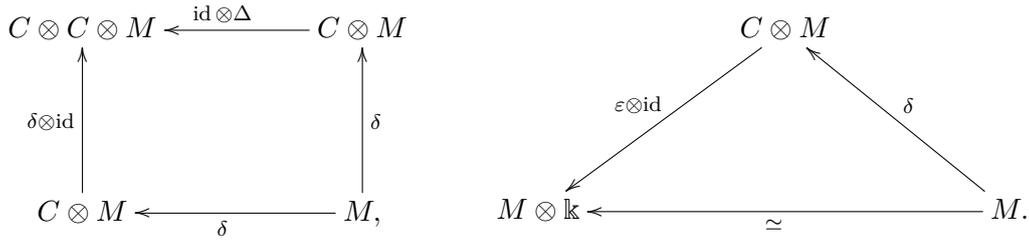
- Los elementos  $g \in C$  tales que  $\Delta(g) = g \otimes g$  se dicen de *tipo grupo*. El conjunto de los elementos tipo grupo de  $C$  se denota por  $G(C)$ .
- Los elementos  $x \in C$  tales que  $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$  se dicen *primitivos*. El conjunto de los elementos primitivos de  $C$  se denota por  $\mathcal{P}(C)$ .

A diferencia de las álgebras asociativas, las coálgebras son *localmente finitas*. Es decir:

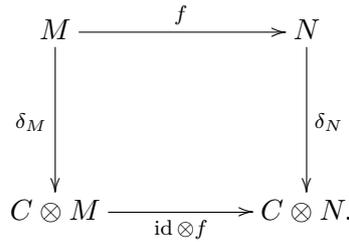
**Teorema 1.1.21.** (Teorema Fundamental de las Coálgebras) Sea  $(C, \Delta, \epsilon)$  una coálgebra. Entonces todo elemento  $x \in C$  pertenece a alguna subcoálgebra de dimensión finita de  $C$ .

También existe una definición dual a la de módulo que daremos a continuación junto a los correspondientes morfismos.

**Definición 1.1.22.** Sea  $(C, \Delta, \epsilon)$  una coálgebra. Un  $C$ -comódulo a izquierda es un par  $(M, \delta)$ , donde  $M$  es un espacio vectorial y  $\delta: M \rightarrow C \otimes M$  es un morfismo lineal (llamado *coacción*) tal que los siguientes diagramas conmutan



Si  $(M, \delta_M)$  y  $(N, \delta_N)$  son dos comódulos entonces un morfismo lineal  $f: M \rightarrow N$  se dice morfismo de comódulos si el siguiente diagrama conmuta:



Denotaremos por  ${}^C\mathcal{M}$  a la categoría cuyos objetos son los comódulos a izquierda y cuyas flechas son los morfismos de comódulos. Existen nociones análogas para comódulos a derecha.

Dado  $x \in C$ , la correspondiente notación de Sweedler para comódulos es

$$\delta(x) = x_{(-1)} \otimes x_{(0)}.$$

*Observación 1.1.23.* Existe una versión análoga del Teorema 1.1.21 para comódulos.

**Ejemplo 1.1.24.** Sea  $f: C \rightarrow D$  un morfismo de coálgebras. Entonces  $C$  es un  $D$ -comódulo con coacción dada por  $(f \otimes \text{id})\Delta$ .

## 1.2 | Biálgebras y álgebras de Hopf

Como es de esperar, una biálgebra es un espacio vectorial junto con una estructura de álgebra y una de coálgebra, junto con una condición de compatibilidad. Para la compatibilidad de estructuras es necesario notar que si  $C$  es una coálgebra entonces  $C \otimes C$  y  $\mathbb{k}$  también son coálgebras por los ejemplos 1.1.6 y 1.1.5.

**Definición 1.2.1.** Una biálgebra es una 5-tupla  $(B, m, u, \Delta, \epsilon)$  tal que:

- $(B, m, u)$  es un álgebra.

- $(B, \Delta, \epsilon)$  es una coálgebra.
- $\Delta : B \rightarrow B \otimes B$  y  $\epsilon : B \rightarrow \mathbb{k}$  son morfismos de álgebras.

Se puede probar que la última condición es equivalente a que  $m$  y  $u$  sean morfismos de coálgebras. Si  $\dim B < \infty$ , entonces  $(B^*, *, {}^t\epsilon, {}^tM, {}^tu)$  tiene estructura de bi-álgebra. Si  $\dim B = \infty$  entonces  $(B \otimes B)^* \not\cong B^* \otimes B^*$ , por lo que  $(B, *, {}^t\epsilon)$  no es un álgebra asociativa: existe una versión distinta de dual conocida como *dual de Sweedler*, ver [R].

A continuación recordaremos cuál es la estructura adicional que convierte a una biálgebra en un álgebra de Hopf.

**Definición 1.2.2.** Un álgebra de Hopf es una 6-tupla  $(B, M, u, \Delta, \epsilon, \mathcal{S})$  tal que

- $(B, M, u, \Delta, \epsilon)$  es una biálgebra.
- $\mathcal{S} : H \rightarrow H$  es un morfismo  $\mathbb{k}$ -lineal (llamado *antípoda*) tal que:

$$\mathcal{S}(h_{(1)})h_{(2)} = h_{(1)}\mathcal{S}(h_{(2)}) = \epsilon(h)1, \quad \text{para todo } h \in H. \quad (1.2.1)$$

*Observación 1.2.3.* La condición (1.2.1) es equivalente a que  $\mathcal{S}$  sea la inversa de la identidad para el producto de convolución en  $\text{Hom}(H, H)$ .

**Ejemplo 1.2.4.** Sea  $S$  un monoide. Entonces  $\mathbb{k}S$ , el espacio vectorial de base  $S$ , tiene estructura de álgebra, cuyo producto se extiende linealmente al de  $S$  y la unidad correspondiente es  $1 \in S$ . Por 1.1.4  $\mathbb{k}S$  es una coálgebra y más aún resulta ser una biálgebra.

Si además  $S$  con su respectivo producto es un grupo definimos  $\mathcal{S} : \mathbb{k}S \rightarrow \mathbb{k}S$  por  $\mathcal{S}(g) = g^{-1}$ ,  $g \in S$ , y así  $\mathbb{k}S$  tiene estructura de álgebra de Hopf.

**Ejemplo 1.2.5.** Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie. Entonces  $U(\mathfrak{g})$ , el álgebra envolvente de  $\mathfrak{g}$  munido con  $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ ,  $\epsilon(x) = 0$  y  $\mathcal{S}(x) = -x$  para todo  $x \in \mathfrak{g}$  es un álgebra de Hopf.

**Ejemplo 1.2.6.** Sea  $\xi \in \mathbb{k}$  una raíz de la unidad de orden  $n$ . El álgebra de Taft  $T$  es el álgebra asociativa definida por los generadores  $x, c$  y las relaciones

$$c^n = 1 \quad x^n = 1 \quad xc = \xi cx,$$

que tiene estructura de álgebra de Hopf con el coproducto  $\Delta$  dado por

$$\Delta(x) = c \otimes x + x \otimes 1 \quad \Delta(c) = c \otimes c,$$

y la antípoda  $\mathcal{S}$  dada por

$$\mathcal{S}(x) = -cx^{-1} \quad \mathcal{S}(c) = c^{-1}$$

### 1.3 | Dimensión de Gelfand-Kirillov

Sea  $A$  un álgebra asociativa y denotemos  $A^r = A \cdot A \cdot A \cdots A$  ( $r$  veces) y  $A_s = \sum_{r=1}^s A^r$ . La dimensión de Gelfand Kirillov de  $A$  esta definida por:

$$\text{GKdim } A = \limsup_{n \rightarrow \infty} \log_n \dim A_n$$

**Ejemplo 1.3.1.** En los siguientes ejemplos tenemos información sobre la dimensión de Gelfand-Kirillov:

- Si  $A$  es un álgebra de dimensión finita, entonces  $\text{GKdim } A = 0$ .
- Si  $V$  es un espacio vectorial, entonces el álgebra tensorial de  $V$  satisface  $\text{GKdim } T(V) = \infty$ .
- $\text{GKdim } \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n] = n$  y por lo tanto, si  $V$  es un espacio vectorial de dimensión  $n$ , entonces  $\text{GKdim } S(V) = n$ .
- Si  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie, entonces el álgebra envolvente universal de  $\mathfrak{g}$  satisface  $\text{GKdim } U(\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{g}$ .
- Si  $A, B$  son dos álgebras, entonces  $\text{GKdim } A \otimes B \leq \text{GKdim } A + \text{GKdim } B$ . Además, si alguna de las dos es finitamente generada entonces vale la igualdad.
- Si  $A$  admite una filtración de álgebras ascendente  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  y  $\text{gr } A$  es el álgebra graduada asociada a la filtración, entonces  $\text{GKdim } \text{gr } A \leq \text{GKdim } A$ . Además si  $\text{gr } A$  es finitamente generada entonces vale la igualdad.

## 1.4 | Categorías tensoriales trenzadas

Una propiedad remarcable de las representaciones de un grupo fijo, o más en general de un álgebra de Hopf, es que el producto tensorial de dos representaciones y el espacio dual de una representación son naturalmente representaciones. En este contexto es natural un estudio sistemático de categorías que posean objetos como antes, llamadas categorías tensoriales, que definiremos a continuación. Para más información referimos a [A, EGNO]; para teoría general de categorías abelianas referimos a [EGNO, §1].

**Definición 1.4.1.** Una *categoría monoidal* es una colección  $(\mathcal{C}, \otimes, a, \mathbf{1}, l, r)$  donde

- $\mathcal{C}$  es una categoría y  $\mathbf{1}$  es un objeto en  $\mathcal{C}$ , llamado *unidad*;
- $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  es un bifunctor, llamado *producto tensorial*;
- $a_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \rightarrow X \otimes (Y \otimes Z)$ ,  $r_X : X \otimes \mathbf{1} \rightarrow X$ , y  $l_X : \mathbf{1} \otimes X \rightarrow X$  son isomorfismos naturales en  $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ ,

tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc}
 ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W & \xrightarrow{a_{X \otimes Y, Z, W}} & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes W) \\
 \downarrow a_{X, Y, Z} \otimes \text{id}_W & & \downarrow a_{X, Y, Z \otimes W} \\
 (X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes W & & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes W)) \\
 \searrow a_{X, Y \otimes Z, W} & & \swarrow \text{id}_X \otimes a_{Y, Z, W} \\
 & X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes W), & 
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
(X \otimes \mathbf{1}) \otimes Y & \xrightarrow{a_{X,\mathbf{1},Y}} & X \otimes (\mathbf{1} \otimes Y) \\
& \searrow r_X \otimes \text{id}_Y & \swarrow \text{id}_X \otimes l_Y \\
& & X \otimes Y.
\end{array}$$

A continuación introducimos la noción de functor monoidal.

**Definición 1.4.2.** Sean  $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \otimes, a, \mathbf{1}, l, r)$  y  $\mathcal{C}' = (\mathcal{C}', \otimes', a', \mathbf{1}', l', r')$  categorías monoidales. Un *functor monoidal* de  $\mathcal{C}$  a  $\mathcal{C}'$  es una terna  $(F, F^0, F^2)$  donde:

- $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  es un functor;
- $F^0: \mathbf{1}' \rightarrow F(\mathbf{1})$  es un isomorfismo; y
- $F^2: \otimes' \circ (F \times F) \rightarrow F \circ \otimes$  es un isomorfismo natural,

tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc}
(F(X) \otimes' F(Y)) \otimes' F(Z) & \xrightarrow{a'_{F(X),F(Y),F(Z)}} & F(X) \otimes' (F(Y) \otimes' F(Z)) \\
\downarrow F^2_{X,Y} \otimes' \text{id}_{F(Z)} & & \downarrow \text{id}_{F(X)} \otimes' F^2_{Y,Z} \\
F(X \otimes Y) \otimes' F(Z) & & F(X) \otimes' F(Y \otimes Z) \\
\downarrow F^2_{X \otimes Y, Z} & & \downarrow F^2_{X, Y \otimes Z} \\
F((X \otimes Y) \otimes Z) & \xrightarrow{F(a_{X,Y,Z})} & F(X \otimes (Y \otimes Z)),
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{1}' \otimes' F(X) & \xrightarrow{l'_{F(X)}} & F(X) \\
\downarrow F^0 \otimes \text{id}_{F(X)} & & \downarrow F(l_X)^{-1} \\
F(\mathbf{1}) \otimes' F(X) & \xrightarrow{F^2_{\mathbf{1},X}} & F(\mathbf{1} \otimes X),
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
F(X) \otimes' \mathbf{1}' & \xrightarrow{r'_{F(X)}} & F(X) \\
\downarrow \text{id}_{F(X)} \otimes u & & \downarrow F(r_X)^{-1} \\
F(X) \otimes' F(\mathbf{1}) & \xrightarrow{F^2_{X,\mathbf{1}}} & F(X \otimes \mathbf{1}).
\end{array}$$

Una *equivalencia de categorías monoidales* es un functor monoidal  $(F, F^0, F^2)$  tal que  $F$  es una equivalencia de categorías.

Otro elemento presente para definir categorías tensoriales son los duales.

**Definición 1.4.3.** Sean  $\mathcal{C}$  una categoría monoidal y  $X$  un objeto en  $\mathcal{C}$ . Un *dual a izquierda* de  $X$  es una terna  $(X^*, \text{ev}_X, \text{coev}_X)$  donde  $X^*$  es un objeto en  $\mathcal{C}$ ,  $\text{ev}_X: X^* \otimes X \rightarrow \mathbf{1}$  y  $\text{coev}_X: \mathbf{1} \rightarrow X \otimes X^*$  son morfismos en  $\mathcal{C}$  tales que las composiciones

$$X \simeq \mathbf{1} \otimes X \xrightarrow{\text{coev}_X \otimes \text{id}_X} (X \otimes X^*) \otimes X \xrightarrow{a_{X,X^*,X}} X \otimes (X^* \otimes X) \xrightarrow{\text{id}_X \otimes \text{ev}_X} X \otimes \mathbf{1} \simeq X,$$

$$X^* \simeq X^* \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{\text{id}_{X^*} \otimes \text{coev}_X} X^* \otimes (X \otimes X^*) \xrightarrow{a_{X^*,X,X^*}^{-1}} (X^* \otimes X) \otimes X^* \xrightarrow{\text{ev}_{X^*} \otimes \text{id}_{X^*}} \mathbf{1} \otimes X^* \simeq X^*$$

son las identidades de  $X$  y  $X^*$  respectivamente.

De forma similar, un *dual a derecha* de  $X$  es una terna  $({}^*X, \text{ev}'_X, \text{coev}'_X)$  donde  ${}^*X$  es un objeto en  $\mathcal{C}$ ,  $\text{ev}'_X: X \otimes {}^*X \rightarrow \mathbf{1}$  y  $\text{coev}'_X: \mathbf{1} \rightarrow {}^*X \otimes X$  son morfismos en  $\mathcal{C}$  tales que las composiciones

$$X \simeq X \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{\text{id}_X \otimes \text{coev}'_X} X \otimes ({}^*X \otimes X) \xrightarrow{a_{X, {}^*X, X}^{-1}} (X \otimes {}^*X) \otimes X \xrightarrow{\text{ev}'_X \otimes \text{id}_X} \mathbf{1} \otimes X \simeq X,$$

$${}^*X \simeq \mathbf{1} \otimes {}^*X \xrightarrow{\text{coev}'_X \otimes \text{id}_X} ({}^*X \otimes X) \otimes {}^*X \xrightarrow{a_{{}^*X, X, {}^*X}} {}^*X \otimes (X \otimes {}^*X) \xrightarrow{\text{id}_{{}^*X} \otimes \text{ev}'_X} {}^*X \otimes \mathbf{1} \simeq {}^*X$$

son las identidades de  $X$  y  ${}^*X$  respectivamente.

En general si hay un morfismo  $f: X \rightarrow Y$  entre dos objetos con duales a izquierda, entonces se puede definir  $f^*: Y^* \rightarrow X^*$  el morfismo dual por la composición

$$f^* = (\text{ev}_Y \otimes \text{id}_{X^*}) \circ (\text{id} \otimes f \otimes \text{id}) \circ (\text{id}_{Y^*} \otimes \text{coev}_X).$$

De forma análoga se puede definir  ${}^*f$  para duales a derecha.

**Definición 1.4.4.** Una categoría monoidal se dice *rígida* si todo objeto posee duales a derecha e izquierda.

**Definición 1.4.5.** Una categoría  $\mathcal{C}$  se dice *multitensorial* si

- es abeliana  $\mathbb{k}$ -lineal;
- es localmente finita (es decir,  $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(X, Y)$  es de dimensión finita para todo par de objetos  $X, Y$ , y todo objeto tiene longitud finita);
- es monoidal rígida;
- el bifunctor  $\times: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  es bilineal en morfismos.

Si además  $\text{end}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}) \simeq \mathbb{k}$  entonces  $\mathcal{C}$  es una *categoría tensorial*.

Ahora ilustramos estas nociones con una serie de ejemplos que serán de vital importancia en este trabajo. Habrá otros ejemplos importantes más adelante que tendrán su propia sección.

**Ejemplo 1.4.6.** La categoría  $\text{vec}_{\mathbb{k}}$  de espacios vectoriales de dimensión finita es tensorial.

**Ejemplo 1.4.7.** Si  $H$  es un álgebra de Hopf, entonces la categoría de los  $H$ -módulos de dimensión finita a izquierda es tensorial donde el producto tensorial entre dos objetos  $M, N$  es el producto tensorial de espacios vectoriales  $M \otimes N$  con la siguiente coacción:

$$h \cdot (m \otimes n) = h_{(1)} \cdot m \otimes h_{(2)} \cdot n, \quad h \in H, v \in X, w \in Y.$$

El dual  $M^*$  es el mismo que para espacios vectoriales con estructura de  $H$ -módulo dada por

$$(h \cdot f)(m) = f(\mathcal{S}(h) \cdot m), \quad h \in H, \quad m \in M, \quad f \in M^*.$$

**Ejemplo 1.4.8.** Dado un grupo finito  $G$ , denotamos por  $\text{vec}_G$  a la categoría de espacios vectoriales  $G$ -graduados de dimensión finita  $V = \bigoplus_{g \in G} V_g$ . Entonces  $\text{vec}_G$  es una categoría tensorial, donde el producto tensorial entre dos objetos  $X, Y \in \text{vec}_G$  es el producto tensorial de espacios vectoriales  $X \otimes Y$  con la siguiente  $G$ -graduación:

$$(X \otimes Y)_g = \bigoplus_{h \in G} X_h \otimes Y_{h^{-1}g}, \quad g \in G.$$

Además  $X^*$  también admite  $G$ -graduación  $(X^*)_g = \{f \in X^* : \bigoplus_{h \neq g^{-1}} X_h \subset \ker f\}$ .

La definición de categoría monoidal puede verse como una versión categórica de la idea de monoide. En la misma dirección, presentaremos una versión de conmutatividad: dados dos objetos  $X, Y$  se requiere un isomorfismo entre  $X \otimes Y$  y  $Y \otimes X$ .

**Definición 1.4.9.** Una *categoría monoidal trenzada* es una categoría monoidal  $\mathcal{C}$  provista de un isomorfismo natural  $c_{X,Y}: X \otimes Y \rightarrow Y \otimes X$ ,  $X, Y \in \mathcal{C}$ , tal que:

$$\begin{array}{ccccc} (X \otimes Y) \otimes Z & \xrightarrow{a_{X,Y,Z}} & X \otimes (Y \otimes Z) & \xrightarrow{c_{X,Y \otimes Z}} & (Y \otimes Z) \otimes X \\ c_{X,Y} \otimes \text{id}_Z \downarrow & & & & \downarrow a_{Y,Z,X} \\ (Y \otimes X) \otimes Z & \xrightarrow{a_{Y,X,Z}} & Y \otimes (X \otimes Z) & \xrightarrow{\text{id}_Y \otimes c_{X,Z}} & Y \otimes (Z \otimes X), \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} X \otimes (Y \otimes Z) & \xrightarrow{a_{X,Y,Z}^{-1}} & (X \otimes Y) \otimes Z & \xrightarrow{c_{X \otimes Y,Z}} & Z \otimes (X \otimes Y) \\ \text{id}_X \otimes c_{Y,Z} \downarrow & & & & \downarrow a_{Z,X,Y}^{-1} \\ X \otimes (Z \otimes Y) & \xrightarrow{a_{X,Z,Y}^{-1}} & (X \otimes Z) \otimes Y & \xrightarrow{c_{X,Z} \otimes \text{id}_Y} & (Z \otimes X) \otimes Y. \end{array}$$

Una categoría tensorial trenzada es una categoría tensorial cuya estructura monoidal subyacente es trenzada.

**Ejemplo 1.4.10.** La categoría de espacios vectoriales es tensorial trenzada considerando al flip como la respectiva trenza.

La importancia de las categorías monoidales, es que es posible definir la noción de álgebra y coálgebra en esas categorías. Para definir álgebras de Hopf en una categoría tensorial se requiere la estructura trenzada.

Damos las definiciones a continuación, pero omitiendo los morfismos de asociatividad para mayor sencillez.

**Definición 1.4.11.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría monoidal. Un *álgebra en  $\mathcal{C}$*  es una terna  $(A, m, u)$ , donde  $A$  es un objeto de  $\mathcal{C}$ , y  $m: A \otimes A \rightarrow A$ ,  $u: \mathbf{1} \rightarrow A$  son morfismos en  $\mathcal{C}$ , tales que

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{m \otimes \text{id}} & A \otimes A \\ \text{id} \otimes m \downarrow & & \downarrow m \\ A \otimes A & \xrightarrow{m} & A, \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & A \otimes A & \\ u \otimes \text{id} \nearrow & \downarrow m & \nwarrow \text{id} \otimes u \\ \mathbf{1} \otimes A & & A \otimes \mathbf{1} \\ \searrow \simeq & & \swarrow \simeq \\ & A & \end{array}$$

Una *coálgebra en  $\mathcal{C}$*  es una terna  $(C, \varepsilon, \Delta)$  donde  $C$  es un objeto de  $\mathcal{C}$ , y  $\varepsilon: C \rightarrow \mathbf{1}$ ,  $\Delta: C \rightarrow C \otimes C$  son morfismos en  $\mathcal{C}$  llamados *counidad* y *comultiplicación* respectivamente, tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\Delta} & C \otimes C \\ \Delta \downarrow & & \downarrow \Delta \otimes \text{id} \\ C \otimes C & \xrightarrow{\text{id} \otimes \Delta} & C \otimes C \otimes C, \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & C & \\ \simeq \swarrow & \downarrow \Delta & \searrow \simeq \\ \mathbf{1} \otimes C & & C \otimes \mathbf{1} \\ \varepsilon \otimes \text{id} \swarrow & & \searrow \text{id} \otimes \varepsilon \\ & C \otimes C & \end{array}$$

*Observación 1.4.12.* Si  $\mathcal{C}$  es una categoría monoidal trenzada, la trenza da lugar a una estructura monoidal en la categoría de álgebras en  $\mathcal{C}$ . En efecto, si  $(A, m_A, u_A)$  y  $(B, m_B, u_B)$  son álgebras en  $\mathcal{C}$ , entonces  $A \otimes B = (A \otimes B, m_{A \otimes B}, u_{A \otimes B})$  también lo es, donde  $m_{A \otimes B}$  y  $u_{A \otimes B}$  están dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &\xrightarrow{\cong} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{u_A \otimes u_B} A \otimes B, \text{ y} \\ A \otimes B \otimes A \otimes B &\xrightarrow{\text{id}_A \otimes c_{B,A} \otimes \text{id}_B} A \otimes A \otimes B \otimes B \xrightarrow{m_A \otimes m_B} A \otimes B. \end{aligned}$$

Dualmente, el producto tensorial de dos coálgebras es una coálgebra.

**Definición 1.4.13.** Un *biálgebra* en una categoría monoidal trenzada  $\mathcal{C}$  es una colección  $(R, m, u, \Delta, \varepsilon)$ , donde  $R$  es un objeto de  $\mathcal{C}$  con estructuras  $(R, m, u)$  de álgebra en  $\mathcal{C}$  y  $(R, \Delta, \varepsilon)$  de coálgebra en  $\mathcal{C}$  que son compatibles en el sentido de que

$$\Delta: R \rightarrow R \otimes R \text{ y } \varepsilon: R \rightarrow \mathbf{1} \text{ son morfismos de álgebras en } \mathcal{C}.$$

Si además existe un morfismo  $\mathcal{S}: R \rightarrow R$  tal que conmuta el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & R \otimes R & \xrightarrow{\mathcal{S} \otimes \text{id}} & R \otimes R & & \\ & \Delta \nearrow & & & & \searrow m & \\ R & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbf{1} & \xrightarrow{u} & R & & \\ & \Delta \searrow & & & & \nearrow m & \\ & & R \otimes R & \xrightarrow{\text{id} \otimes \mathcal{S}} & R \otimes R & & \end{array},$$

entonces  $R$  es un *álgebra de Hopf* sobre  $\mathcal{C}$ .

## 1.5 | Espacios vectoriales trenzados, álgebras de Nichols y módulos de Yetter-Drinfeld

Daremos a continuación dos definiciones relevantes, que están relacionadas entre sí: espacios vectoriales trenzados y módulos de Yetter-Drinfeld. Ellos nos darán el marco para introducir los objetos centrales de este trabajo, las álgebras de Nichols.

**Definición 1.5.1.** Un *espacio vectorial trenzado* es una dupla  $(V, c)$ , donde  $V$  es un espacio vectorial y  $c \in \text{GL}(V \otimes V)$  satisface la ecuación de trenzas:

$$(c \otimes \text{id})(\text{id} \otimes c)(c \otimes \text{id}) = (\text{id} \otimes c)(c \otimes \text{id})(\text{id} \otimes c). \tag{1.5.1}$$

Diremos que  $c$  es la *trenza* de  $V$ .

**Definición 1.5.2.** Un *módulo de Yetter-Drinfeld* sobre un álgebra de Hopf  $H$  es un espacio vectorial  $V$  con una estructura de  $H$ -módulo  $\cdot: H \otimes V \rightarrow V$  y una de  $H$ -comódulo  $\delta: V \rightarrow H \otimes V$ , que satisfacen la siguiente condición de compatibilidad:

$$\delta(h \cdot v) = h_{(1)} v_{(-1)} \mathcal{S}(h_{(3)}) \otimes h_{(2)} \cdot v_{(0)}, \quad h \in H, v \in V.$$

Un morfismo de módulos de Yetter-Drinfeld es una aplicación lineal que preserva la estructura de módulo y comódulo. Los módulos de Yetter-Drinfeld sobre  $H$  conforman una categoría tensorial con el producto tensorial sobre  $\mathbb{k}$ , que denotaremos por  ${}^H_H\mathcal{YD}$ . Más aún, es una categoría tensorial trenzada, donde  $c_{V,W} : V \otimes W \rightarrow W \otimes V$  está dado por

$$c(x \otimes y) = x_{(-1)} \cdot y \otimes x_{(0)}, \quad x \in V, y \in W.$$

*Observación 1.5.3.* Dado  $V \in {}^H_H\mathcal{YD}$ ,  $c = c_{V,V}$  satisface la ecuación de Yang-Baxter. Por lo tanto  $(V, c)$  es un espacio vectorial trenzado.

Recíprocamente, todo espacio vectorial trenzado  $(V, c)$  puede realizarse como módulo de Yetter-Drinfeld sobre un álgebra de Hopf  $H$  si y sólo si  $c$  es rígida, ver [T].

En esta dirección, una biálgebra trenzada es un espacio vectorial trenzado  $(R, c)$ , tal que  $R$  es simultáneamente un álgebra y una coálgebra, que satisfacen la compatibilidad de la Definición 1.4.13; de modo análogo se define un álgebra de Hopf trenzada.

**Definición 1.5.4.** Un álgebra de Hopf trenzada  $(R, c)$  admite una *representación adjunta a izquierda*  $\text{ad}_c : R \rightarrow \text{End } R$ ,

$$(\text{ad}_c x)y = m(m \otimes \mathcal{S})(\text{id} \otimes c)(\Delta \otimes \text{id})(x \otimes y), \quad x, y \in R.$$

Además, el corchete trenzado  $[\cdot, \cdot]_c : R \otimes R \rightarrow R$  es el mapa dado por

$$[x, y]_c = m(\text{id} - c)(x \otimes y), \quad x, y \in R.$$

Notar que  $(\text{ad}_c x)y = [x, y]_c$  si  $x \in \mathcal{P}(R)$ .

**Ejemplo 1.5.5.** Sea  $V \in {}^H_H\mathcal{YD}$ . El álgebra tensorial  $T(V)$  con el coproducto  $\Delta : T(V) \otimes T(V) \rightarrow T(V)$  y la antípoda  $\mathcal{S} : T(V) \rightarrow T(V)$  dados por

$$\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1 \quad x \in V \quad \mathcal{S}(x) = -x \quad x \in V$$

es un álgebra de Hopf en  ${}^H_H\mathcal{YD}$ .

El grupo de trenzas de  $n$  hebras  $\mathbb{B}_n$  está definido por generadores  $\{\sigma_i\}_{1 \leq i \leq n-1}$  y relaciones:

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i, & |i - j| &> 1, \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i &= \sigma_j \sigma_i \sigma_j, & |i - j| &= 1. \end{aligned} \tag{1.5.2}$$

Daremos algunas propiedades de este grupo.

- Si  $(V, c)$  es un espacio vectorial trenzado, entonces existe una (única) representación  $\rho_n : \mathbb{B}_n \rightarrow \text{GL}(V^{\otimes n})$  que satisface

$$\rho_n(\sigma_i) = \text{id}_{V^{\otimes i-1}} \otimes c \otimes \text{id}_{V^{\otimes n-i-1}}.$$

- El grupo simétrico en  $n$  letras tiene una presentación por generadores  $\{\sigma_i\}_{1 \leq i \leq n-1}$  y relaciones (1.5.2) y  $\sigma_i^2 = 1$ . De este modo, existe una proyección canónica  $\pi_n : \mathbb{B}_n \twoheadrightarrow \mathbb{S}_n$ .
- Existe una sección conjuntista  $M_n : \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{B}_n$  que identifica los respectivos generadores llamada *sección de Matsumoto*.

- Dado  $(V, c)$  un espacio vectorial trenzado, el  $n$ -ésimo *simetrizador cuántico* se define por  $\Omega_n = \sum_{x \in \mathbb{S}_n} \rho_n(M_n(x)) \in \text{End}(V^{\otimes n})$ . Denotamos  $\mathcal{J}^n = \ker \Omega_n$ .

A partir de los ingredientes anteriores podemos introducir las álgebras de Nichols.

**Definición 1.5.6.** Sea  $(V, c)$  un espacio vectorial trenzado. El *álgebra de Nichols* de  $V$  es el espacio vectorial graduado  $\mathcal{B}(V) = \mathbb{k} \oplus V \oplus \bigoplus_{n \geq 2} \mathcal{B}^n(V)$  donde  $\mathcal{B}^n(V) = T^n(V)/\mathcal{J}^n$ .

Si  $\mathcal{J}(V) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{J}^n$ , entonces  $\mathcal{B}(V) = T(V)/\mathcal{J}(V)$ ; además  $\mathcal{J}(V)$  resulta ser un ideal de Hopf de  $T(V)$ , con lo cual  $\mathcal{B}(V)$  es un álgebra de Hopf trenzada.

*Observación 1.5.7.* Sean  $H$  un álgebra de Hopf y  $V \in {}^H_H\mathcal{YD}$ . Por la Observación 1.5.3,  $(V, c)$  es un espacio trenzado, y podemos considerar la correspondiente álgebra de Nichols  $\mathcal{B}(V)$ . Como  $c$  es un morfismo de módulos de Yetter-Drinfeld,  $\mathcal{J}(V)$  es un submódulo de Yetter-Drinfeld. Luego,  $\mathcal{B}(V)$  es un álgebra de Hopf en  ${}^H_H\mathcal{YD}$ .

**Definición 1.5.8.** Sea  $(V, c)$  un espacio vectorial trenzado.

Un álgebra de pre-Nichols de  $(V, c)$  es un álgebra de Hopf trenzada graduada  $\mathcal{B} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{B}^n$  tal que  $\mathcal{B}^1 \simeq V$  y  $V$  genera a  $\mathcal{B}$  como álgebra. Por lo tanto, existen epimorfismos de álgebras de Hopf trenzadas graduadas

$$T(V) \twoheadrightarrow \mathcal{B} \twoheadrightarrow \mathcal{B}(V)$$

Un álgebra de post-Nichols de  $(V, c)$  es un álgebra de Hopf trenzada graduada  $\mathcal{E} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{E}^n$  tal que  $\mathcal{E}^1 \simeq V$  es el subespacio de elementos primitivos. Por lo tanto existen monomorfismos de álgebras de Hopf trenzadas graduadas

$$\mathcal{B}(V) \hookrightarrow \mathcal{E} \hookrightarrow T^c(V)$$

Notemos que la única álgebra de pre-Nichols de  $(V, c)$  que también es de post-Nichols es  $\mathcal{B}(V)$ .

**Definición 1.5.9.** Sea  $(V, c)$  un espacio vectorial trenzado. La familia de todas las álgebras de pre-Nichols de  $V$  forman un poset  $\mathfrak{Pre}(V)$  con  $T(V)$  minimal y  $\mathcal{B}(V)$  maximal.

Asumimos ahora que  $\text{GKdim } \mathcal{B}(V) < \infty$ . Denotamos  $\mathfrak{Pre}_{\text{GKd}}(V)$  al subposet de  $\mathfrak{Pre}(V)$  de todas las álgebras de pre-Nichols de GK-dimensión finita. Decimos que un álgebra de pre-Nichols es *eminente* si es mínimo en  $\mathfrak{Pre}_{\text{GKd}}(V)$ .

De modo análogo pueden definirse los posets  $\mathfrak{Post}(V)$  y  $\mathfrak{Post}_{\text{fGK}}(V)$  para álgebras de post-Nichols.

A continuación introduciremos los espacios vectoriales trenzados en los que enfocaremos nuestro trabajo.

**Definición 1.5.10.** Sea  $\mathbf{q} = (q_{ij})_{i,j \in \mathbb{I}_\theta} \in (\mathbb{k}^\times)^{\theta \times \theta}$  y  $(x_i)_{i \in \mathbb{I}_\theta}$  una base de un espacio vectorial  $V$ . Definimos  $c^{\mathbf{q}} \in \text{GL}(V \otimes V)$  por:

$$c^{\mathbf{q}}(x_i \otimes x_j) = q_{ij} x_j \otimes x_i, \quad i, j \in \mathbb{I}_\theta.$$

Notar que  $c^{\mathbf{q}}$  satisface la ecuación de trenzas. Si un espacio vectorial trenzado  $(V, c)$  satisface que  $c = c^{\mathbf{q}}$  para alguna  $\mathbf{q} \in (\mathbb{k}^\times)^{\theta \times \theta}$ , diremos que  $(V, c)$  es de *tipo diagonal*, o bien que  $c$  es de tipo diagonal, con *matriz de trenza*  $\mathbf{q}$ . Si  $\mathbf{q}$  está sobreentendida escribiremos  $c$  en vez de  $c^{\mathbf{q}}$ .

En este caso, si  $i \neq j$  denotamos  $\tilde{q}_{ij} = q_{ij}q_{ji}$ .

Dado  $(V, c^{\mathfrak{q}})$  un espacio vectorial trenzado de tipo diagonal, daremos algunas definiciones relacionadas a éste.

**Definición 1.5.11.** Definimos el *diagrama (generalizado) de Dynkin* asociado a  $\mathfrak{q}$  por el grafo (con etiquetas) que cumple las siguientes condiciones:

- El conjunto de vértices es  $\mathbb{I}_\theta$ ; además, el vértice  $i$  está indexado por  $q_{ii}$ .
- Los vértices  $i, j$  están conectados por una arista si y sólo si  $\tilde{q}_{ij} \neq 1$ . Además la arista  $ij$  está indexada por  $\tilde{q}_{ij}$ .

**Definición 1.5.12.** Denotamos

$$a_{ij}^{\mathfrak{q}} := -\min\{n \in \mathbb{N}_0 : (n+1)_{q_{ii}}(q_{ii}^n \tilde{q}_{ij} - 1) = 0\}, \quad i \neq j,$$

y  $m_{ij}^{\mathfrak{q}} = -a_{ij}^{\mathfrak{q}}$ . Omitiremos escribir  $\mathfrak{q}$  en ambas notaciones si  $\mathfrak{q}$  está sobreentendida.

**Definición 1.5.13.** Definimos  $\mathbf{q} : \mathbb{Z}^\theta \times \mathbb{Z}^\theta \rightarrow \mathbb{k}$  la forma bilineal tal que

$$\mathbf{q}(\alpha_i, \alpha_j) := q_{ij}, \quad \text{para todo } i, j \in \mathbb{I}.$$

Para cada par  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^\theta$  también usaremos la notación  $q_{\alpha\beta} := \mathbf{q}(\alpha, \beta)$ .

Si  $\mathcal{B}$  es una álgebra de pre-Nichols de  $\mathfrak{q} \mathbb{N}_0^{\mathbb{I}}$ -graduada, se cumplen las siguientes igualdades:

$$[u, vw]_c = [u, v]_c w + q_{\alpha\beta} v[u, w]_c, \quad (1.5.3)$$

$$[uv, w]_c = q_{\beta\gamma} [u, w]_c v + u[v, w]_c, \quad (1.5.4)$$

$$[[u, v]_c, w]_c = [u, [v, w]_c]_c - q_{\alpha\beta} v[u, w]_c + q_{\beta\gamma} [u, w]_c v, \quad (1.5.5)$$

para todos los elementos homogéneos  $u \in \mathcal{B}^\alpha$ ,  $v \in \mathcal{B}^\beta$ ,  $w \in \mathcal{B}^\gamma$ .

Dados al menos dos índices  $i_1, \dots, i_k \in \mathbb{I}$ , denotamos

$$x_{i_1 \dots i_k} := (\text{ad}_c x_{i_1}) x_{i_2 \dots i_k} = x_{i_1} x_{i_2 \dots i_k} - q_{i_1 i_2} \dots q_{i_1 i_k} x_{i_2 \dots i_k} x_{i_1} \quad (1.5.6)$$

como un elemento del álgebra tensorial o de cualquier álgebra de pre-Nichols.

Finalizaremos esta sección recordando la definición de espacios trenzados de tipo Cartan. Para ello, necesitamos previamente recordar la siguiente noción:

**Definición 1.5.14.** Decimos que una matriz  $\mathbf{a} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq \theta} \in \mathbb{Z}^{\theta \times \theta}$  es una matriz generalizada de Cartan si satisface las siguientes condiciones:

- $a_{ii} = 2$  si  $i \in \mathbb{I}_\theta$ .
- $a_{ij} \leq 0$  si  $i, j \in \mathbb{I}_\theta$ .
- $a_{ij} = 0 \iff a_{ji} = 0$  si  $i, j \in \mathbb{I}_\theta, i \neq j$ .

**Definición 1.5.15.** Decimos que un espacio de tipo diagonal  $(V, c^{\mathfrak{q}})$  es de *tipo Cartan* (o bien  $c^{\mathfrak{q}}$  es una trenza de tipo Cartan) si existe una matriz generalizada de Cartan  $\mathbf{a}$  tal que  $\tilde{q}_{ij} = q_{ii}^{a_{ij}}$  para todo par  $i \neq j$ , donde  $-a_{ij} = \min\{n \in \mathbb{N}_0 : \tilde{q}_{ij} q_{ii}^n = 1\}$ .

Sea  $\chi_j \in \widehat{\mathbb{Z}^{\mathbb{I}_\theta}}$  tal que  $\chi_j(g_i) = q_{ij}$ . Así tenemos una realización de  $V$  como módulo de Yetter-Drinfeld sobre  $\mathbb{k}\widehat{\mathbb{Z}^{\mathbb{I}_\theta}}$  tal que  $x_i \in V_{g_i}^{\chi_i}$ .

## 1.6 | Palabras de Lyndon y bases PBW

El resultado principal de esta sección establece la existencia de bases PBW para ciertas álgebras de Hopf trenzadas, en particular para álgebras de Nichols de tipo diagonal. La existencia de las bases PBW proviene de la combinatoria de las palabras de Lyndon. Como dato adicional obtendremos una fórmula que describe el coproducto de los generadores de la base PBW. Para esta sección referimos a [Kh].

**Definición 1.6.1.** Sea  $A$  un álgebra,  $P, S \subset A$  y  $h : S \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ . Consideremos  $<$  un orden lineal sobre  $S$ . Denotaremos por  $B(P, S, <, h)$  al conjunto

$$\{ps_1^{e_1} \cdots s_r^{e_r} : r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, s_1 > s_2 > \cdots > s_r, s_i \in S, 0 < e_i \leq h(s_i), p \in P\}$$

Si  $B(P, S, <, h)$  es una base de  $A$  como espacio vectorial, diremos que  $(P, S, <, h)$  es un conjunto de generadores PBW con altura  $h$ , y que  $B(P, S, <, h)$  es una base PBW de  $A$ .

A continuación daremos una forma de describir bases PBW para ciertas álgebras.

Sean  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  un conjunto de variables y  $P(X)$  el conjunto de palabras de alfabeto  $X$ . Consideremos en  $P(X)$  el orden lexicográfico fijando el orden  $x_1 > \cdots > x_n$  en  $X$ . Dado  $u \in P(X)$  la longitud de  $u$  la denotaremos por  $\ell(u)$ .

**Definición 1.6.2.** Decimos que  $u \in P(X)$  es una *palabra de Lyndon* si para todos  $u_1, u_2 \in P(X)$ ,  $u_1, u_2 \neq 1$  tales que  $u = u_1 u_2$  entonces  $u_2 u_1 > u$ . Denotamos por  $L$  al conjunto de palabras de Lyndon.

*Observación 1.6.3.* 1.  $u \in P(X)$  es de Lyndon si y sólo si es menor a cualquiera de sus finales propios.

2. Si  $u_1, u_2 \in L$  y  $u_1 < u_2$  entonces  $u_1 u_2 \in L$ .

3. Para todo  $u \in P(X) - \{1\}$  existen únicas  $u_1, \dots, u_r \in L$  tales que  $u = u_1 u_2 \dots u_r$  y  $u_r \leq \cdots \leq u_2 \leq u_1$ . La descomposición  $u = u_1 u_2 \dots u_r$  se conoce como descomposición de Lyndon.

4. Si  $u, v \in P(X) - \{1\}$  entonces  $u$  y  $v$  se pueden identificar como elementos de  $P(L)$  vía la descomposición de Lyndon considerando a  $L$  como alfabeto cuyo orden es el correspondiente en  $P(X)$ . Además  $u \leq v$  en  $P(X)$  si, y sólo si,  $u \leq v$  en  $P(L)$ .

5. [Kh, p.6, Shirshov Theorem] Si  $u \in P(X) - X$  entonces  $u \in L$  si, y sólo si, existen  $u_1, u_2 \in L$  tales que  $u = u_1 u_2$ . Entre todas las descomposiciones de este tipo  $u = u_1 u_2$  con  $u_1, u_2 \in L$ , la que posee el menor final propio  $u_2$  se la conoce como la descomposición de Shirshov.

Sea  $V$  el espacio vectorial de base  $X$ . Notar que el espacio vectorial  $\mathbb{k}P(X)$  de base  $P(X)$  se identifica con el álgebra tensorial  $T(V)$ .

**Ejemplo 1.6.4.** La descomposición de Lyndon implica que  $T(V)$  tiene una base PBW donde  $L$  es el conjunto de generadores,  $P = \{1\}$  y todo elemento de  $L$  tiene altura infinita.

En lo que sigue fijaremos  $(V, c)$  un espacio vectorial trenzado y  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_\theta\}$  una base de  $V$ .

**Definición 1.6.5.** Se define en  $\mathbb{k}P(X)$  el endomorfismo  $[-]_c$  recursivamente de la siguiente manera:

$$[u]_c = \begin{cases} u & \text{si } u = 1 \text{ o } u \in X. \\ [[v]_c, [w]_c]_c & \text{si } u \in L, \ell(u) > 1 \text{ y } u = vw \text{ es la descomposición de Shirshov.} \\ [u_1]_c [u_2]_c \dots [u_r]_c & \text{si } u \in P(X) - L \text{ y su descomposición de Lyndon es } u_1 u_2 \dots u_r. \end{cases}$$

**Definición 1.6.6.** • La hiperletra correspondiente a  $l \in L$  es  $[l]_c$ . Denotamos  $\mathbb{L}$  al conjunto de hiperletras.

- Una hiperpalabra es un elemento de  $P(\mathbb{L})$ .
- Una hiperpalabra monótona es una hiperpalabra de la forma  $[l_1]_c [l_2]_c \dots [l_r]_c$  tal que  $l_1 > l_2 > \dots > l_r$ .

Notar que como  $[-, -]_c$  preserva la  $\mathbb{Z}^\theta$ -graduación entonces para todo  $u \in L$  resulta que  $[u]_c$  es una combinación lineal de elementos con el mismo grado que  $u$ .

Fijemos  $I$  un ideal propio de  $T(V)$ . Definimos  $G_I := \{u \in P(X) : u \notin X_{>u} + I\}$ . Notar que si  $u \in G_I$  y  $u = vw$ , entonces  $v, w \in G_I$  y por lo tanto  $u$  se descompone como producto no creciente de palabras de Lyndon en  $G_I$ . Supongamos ahora que  $I$  es un ideal de Hopf, definimos  $S_I = G_I \cap L$  y  $h_I : S_I \rightarrow \mathbb{Z}_{>0} \cup \{\infty\}$  dada por

$$h_I(u) = \min\{t \in \mathbb{N} : u^t \in \mathbb{k}P(X)_{>ut} + I\}.$$

De esta forma tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 1.6.7.** [Kh, Theorem 2]  $B'_I = B(\{1 + I\}, [S_i]_c + I, \langle, h_I)$  es una base PBW de  $T(V)/I$ .

Para probar la independencia lineal de la base PBW propuesta en el teorema anterior se usa el siguiente resultado:

**Proposición 1.6.8.** [Kh, Lemma 8] Para toda palabra de Lyndon  $w$ ,

$$\Delta([w]_c) = [w]_c \otimes 1 + 1 \otimes [w]_c + \sum_i \alpha_i W'_i \otimes W''_i,$$

donde para cada  $i$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{k}$ , cada  $W'_i$  es una hiperpalabra cuyas hiperletras son menores que  $[w]_c$  y la suma de los grados de  $W'_i$  y  $W''_i$  es el grado de  $[w]_c$ .

*Observación 1.6.9.* Sea  $(V, c^{\mathfrak{q}})$  un espacio vectorial trenzado de tipo diagonal tal que  $\mathcal{B}_{\mathfrak{q}}$  es de dimensión finita. A partir de [H1],  $\mathcal{B}_{\mathfrak{q}}$  admite una base PBW tal que cada par de elementos del conjunto de palabras de Lyndon  $S$  tiene distinto  $\mathbb{N}_0^\theta$ -grado. Además, el conjunto  $\Delta_+^{\mathfrak{q}}$  de grados de esas palabras de Lyndon no depende de la base elegida, y se conoce como el conjunto de raíces positivas de  $\mathfrak{q}$ . Para cada  $\beta \in \Delta_+^{\mathfrak{q}}$ , denotaremos por  $x_\beta$  a la correspondiente hiperletra de grado  $\beta$ . Se tiene además que

$$N_\beta := h_{\mathcal{J}_{\mathfrak{q}}}(x_\beta) = \text{ord } q_{\beta\beta} < \infty.$$

## 1.7 | Álgebras de pre-Nichols distinguidas

En esta sección fijamos  $(V, c^{\mathfrak{q}})$  un espacio vectorial trenzado de tipo diagonal tal que  $\mathcal{B}_{\mathfrak{q}}$  es de dimensión finita.

**Definición 1.7.1.** • Diremos que  $i \in \mathbb{I}$  es un vértice de tipo Cartan de  $\mathfrak{q}$  si  $\tilde{q}_{ij} = q_{ii}^{\alpha_{ij}^{\mathfrak{q}}}$  para todo  $i \neq j$ .

- El conjunto de raíces de Cartan de  $\mathfrak{q}$  se define por la unión disjunta  $\mathcal{O}^{\mathfrak{q}} := \mathcal{O}_+^{\mathfrak{q}} \cup \mathcal{O}_-^{\mathfrak{q}} \subset \mathbb{Z}^{\theta}$  donde  $\mathcal{O}_+^{\mathfrak{q}} = -\mathcal{O}_-^{\mathfrak{q}}$  y  $\mathcal{O}_+^{\mathfrak{q}}$  es el conjunto que contiene a las composiciones de reflexiones en el grupoide de Weyl de  $\mathfrak{q}$  evaluadas en  $\alpha_i$  con  $i$  vértice de Cartan. Para más detalles sobre el grupoide de Weyl de  $\mathfrak{q}$  referimos a [H1, CuH, AAn] y sus referencias.

El algebra de Nichols  $\mathcal{B}_{\mathfrak{q}}$  admite por definición una presentación implícita por el ideal  $\mathcal{J}_{\mathfrak{q}}$ . Para muchas aplicaciones, por ejemplo el problema trabajado en esta tesis, es necesario contar con una presentación explícita, que daremos en el siguiente resultado.

**Teorema 1.7.2.** [An2, Theorem 3.1] Sea  $(V, c)$  un espacio vectorial trenzado de dimensión finita con matriz  $\mathbf{q} = (q_{ij})_{1 \leq i, j \leq \theta}$ , y fijamos una base  $\{x_1, \dots, x_{\theta}\}$  de  $V$  tal que  $c(x_i \otimes x_j) = q_{ij} x_j \otimes x_i$ . Supongamos que el sistema de raíces  $\Delta_+^{\mathfrak{q}}$  es finito. Entonces el álgebra de Nichols  $\mathcal{B}_{\mathfrak{q}}$  admite la siguiente presentación:

1.  $x_{\beta}^{N_{\beta}} = 0$  si  $\beta \in \mathcal{O}_+^{\mathfrak{q}}$ .
2.  $(\text{ad}_c x_i)^{m_{ij}+1} x_j = 0$  si  $q_{ij}^{m_{ij}+1} \neq 1$ .
3.  $x_i^{N_i} = 0$  si  $i$  no es un vértice de Cartan.
4.  $x_{ij}^2 = 0$  si  $i, j \in \{1, \dots, \theta\}$  satisfacen que  $q_{ii} = \tilde{q}_{ij} = q_{jj} = -1$ , y existe  $k \neq i, j$  tal que  $\tilde{q}_{ik}^2 \neq 1$  o  $\tilde{q}_{jk}^2 \neq 1$ .
5.  $[x_{ijk}, x_j]_c = 0$  si  $i, j, k \in \{1, \dots, \theta\}$  satisfacen que  $q_{jj} = -1$ ,  $\tilde{q}_{ik} = \tilde{q}_{ij}\tilde{q}_{jk} = 1$ ,  $\tilde{q}_{ij} \neq -1$ .
6.  $[x_{iij}, x_{ij}]_c = 0$  si  $i, j \in \{1, \dots, \theta\}$  satisfacen que  $q_{jj} = -1$ ,  $q_{ii}\tilde{q}_{ij} \in \mathbb{G}_6$ ,  $\tilde{q}_{ij} \neq -1$ , y además  $q_{ii} \in \mathbb{G}_3$  o  $m_{ij} \geq 3$ .
7.  $[x_{iijk}, x_{ij}]_c = 0$  si  $i, j, k \in \{1, \dots, \theta\}$  satisfacen que  $q_{ii} = \pm \tilde{q}_{ij} \in \mathbb{G}_3$ ,  $\tilde{q}_{ik} = 1$ , y además  $-q_{jj} = \tilde{q}_{ij}\tilde{q}_{jk} = 1$  o  $q_{jj}^{-1} = \tilde{q}_{ij} = \tilde{q}_{jk} \neq -1$ .

8.

$$x_{ijk} - \frac{1 - \tilde{q}_{jk}}{q_{kj}(1 - \tilde{q}_{ik})} [x_{ik}, x_j]_c - q_{ij}(1 - \tilde{q}_{jk}) x_j x_{ik}; \quad (1.7.1)$$

si  $i, j, k \in \{1, \dots, \theta\}$  satisfacen que  $\tilde{q}_{ik}, \tilde{q}_{ij}, \tilde{q}_{jk} \neq 1$ ,

9.  $[[x_{ij}, x_{ijk}]_c, x_j]_c = 0$  si  $i, j, k \in \{1, \dots, \theta\}$  satisfacen alguna de las siguientes condiciones:

- $q_{ii} = q_{jj} = -1$ ,  $\tilde{q}_{ij}^2 = \tilde{q}_{jk}^{-1}$ ,  $\tilde{q}_{ik} = 1$ .
- $\tilde{q}_{ij} = q_{jj} = -1$ ,  $q_{ii} = -\tilde{q}_{jk}^2 \in \mathbb{G}_3$ ,  $\tilde{q}_{ik} = 1$ .
- $q_{kk} = \tilde{q}_{jk} = q_{jj} = -1$ ,  $q_{ii} = -\tilde{q}_{ij} \in \mathbb{G}_3$ ,  $\tilde{q}_{ik} = 1$ .

- $q_{jj} = -1, \widetilde{q}_{ij} = q_{ii}^{-2}, \widetilde{q}_{jk} = -q_{ii}^{-3}, \widetilde{q}_{ik} = 1.$
  - $q_{ii} = q_{jj} = q_{kk} = -1, \pm \widetilde{q}_{ij} = \widetilde{q}_{jk} \in \mathbb{G}_3, \widetilde{q}_{ik} = 1.$
10.  $[[x_{ijk}, x_j]_c x_j]_c = 0$  si  $i, j, k \in \{1, \dots, \theta\}$  satisfacen que  $q_{jj} = \widetilde{q}_{ij}^2 = \widetilde{q}_{jk} \in \mathbb{G}_3, \widetilde{q}_{ik} = 1.$
11.  $[[x_{iij}, x_{iijk}]_c, x_{ij}]_c = 0$  si  $i, j, k \in \{1, \dots, \theta\}$  satisfacen que  $q_{kk} = q_{jj} = \widetilde{q}_{ij}^{-1} = \widetilde{q}_{jk}^{-1} \in \mathbb{G}_9, \widetilde{q}_{ik} = 1, q_{ii} = q_{kk}^6.$
- 12.
- $$[[x_{ijk}, x_j]_c, x_k]_c - (1 + \widetilde{q}_{jk})^{-1} q_{jk} [[x_{ijk}, x_k]_c, x_j]_c;$$
- si  $i, j, k \in \{1, \dots, \theta\}$  satisfacen que  $q_{ii} = \widetilde{q}_{ij}^{-1} \in \mathbb{G}_9, q_{jj} = \widetilde{q}_{jk}^{-1} = q_{ii}^5, \widetilde{q}_{ik} = 1, q_{kk} = q_{ii}^6.$
13.  $[[[x_{ijk}, x_j]_c, x_j]_c, x_j]_c = 0$  si  $i, j, k \in \{1, \dots, \theta\}$  satisfacen que  $q_{jj} = \widetilde{q}_{ij}^3 = \widetilde{q}_{jk} \in \mathbb{G}_4, \widetilde{q}_{ik} = 1.$
14.  $[x_{ij}, x_{ijk}]_c = 0$  si  $i, j, k \in \{1, \dots, \theta\}$  satisfacen que  $q_{ii} = \widetilde{q}_{ij} = -1, q_{jj} = \widetilde{q}_{jk}^{-1} \neq -1, \widetilde{q}_{ik} = 1.$
- 15.
- $$[x_i, x_{jjk}]_c - (1 + q_{jj}^2) q_{kj}^{-1} [x_{ijk}, x_j]_c - (1 + q_{jj}^2)(1 + q_{jj}) q_{ij} x_j x_{ijk};$$
- si  $i, j, k \in \{1, \dots, \theta\}$  satisfacen que  $q_{ii} = q_{kk} = -1, \widetilde{q}_{ik} = 1, \widetilde{q}_{ij} \in \mathbb{G}_3, q_{jj} = -\widetilde{q}_{jk} = \pm \widetilde{q}_{ij}.$
16.  $[[[x_{ijkl}, x_k]_c, x_j]_c, x_k]_c = 0$  si  $i, j, k, l \in \{1, \dots, \theta\}$  satisfacen que  $q_{jj} \widetilde{q}_{ij} = q_{jj} \widetilde{q}_{jk} = 1, q_{kk} = -1, \widetilde{q}_{ik} = \widetilde{q}_{il} = \widetilde{q}_{jl} = 1, \widetilde{q}_{jk}^2 = \widetilde{q}_{lk}^{-1} = q_{ll}.$
17.  $[x_{ijk}, [x_{ijkl}, x_k]_c, x_{jk}]_c = 0$  si  $i, j, k, l \in \{1, \dots, \theta\}$  satisfacen que  $\widetilde{q}_{jk} = \widetilde{q}_{ij} = q_{jj}^{-1} \in \mathbb{G}'_4 \cup \mathbb{G}'_6, q_{ii} = q_{kk} = -1, \widetilde{q}_{ik} = \widetilde{q}_{il} = \widetilde{q}_{jl} = 1, \widetilde{q}_{jk}^3 = \widetilde{q}_{lk}.$
18.  $[[[x_{ijk}, x_j]_c, [x_{ijkl}, x_j]_c, x_{jk}]_c = 0$  si  $i, j, k, l \in \{1, \dots, \theta\}$  satisfacen que  $q_{ll} = \widetilde{q}_{lk}^{-1} = q_{kk} = \widetilde{q}_{jk}^{-1} = q^2, \widetilde{q}_{ij} = q_{ii}^{-1} = q^3$  for some  $q \in \mathbb{k}^\times, q_{jj} = -1, \widetilde{q}_{ik} = \widetilde{q}_{il} = \widetilde{q}_{jl} = 1.$
- 19.
- $$[[x_{ijkl}, x_j]_c, x_k]_c - q_{jk} (\widetilde{q}_{ij}^{-1} - q_{jj}) [[x_{ijkl}, x_k]_c, x_j]_c;$$
- si  $i, j, k, l \in \{1, \dots, \theta\}$  satisfacen alguna de las siguientes condiciones
- $q_{kk} = -1, q_{ii} = \widetilde{q}_{ij}^{-1} = q_{jj}^2, \widetilde{q}_{kl} = q_{ll}^{-1} = q_{jj}^3, \widetilde{q}_{jk} = q_{jj}^{-1}, \widetilde{q}_{ik} = \widetilde{q}_{il} = \widetilde{q}_{jl} = 1.$
  - $q_{ii} = \widetilde{q}_{ij}^{-1} = -q_{ll}^{-1} = -\widetilde{q}_{kl}, q_{jj} = \widetilde{q}_{jk} = q_{kk} = -1, \widetilde{q}_{ik} = \widetilde{q}_{il} = \widetilde{q}_{jl} = 1.$
- 20.
- $$[x_i, [x_{ij}, x_{ik}]_c]_c + q_{jk} q_{ik} q_{ji} [x_{iik}, x_{ij}]_c + q_{ij} x_{ij} x_{iik};$$
- si  $i, j, k \in \{1, \dots, \theta\}$  satisfacen que  $\widetilde{q}_{jk} = 1, q_{ii} = \widetilde{q}_{ij} = -\widetilde{q}_{ik} \in \mathbb{G}_3.$
21.  $[x_{iijk}, x_{ijk}]_c = 0$  si
22.  $[x_{iijk}, x_{ijk}]_c = 0$  si  $i, j, k \in \{1, \dots, \theta\}$  satisfacen que  $q_{jj} = q_{kk} = \widetilde{q}_{jk} = -1, q_{ii} = -\widetilde{q}_{ij} \in \mathbb{G}_3, \widetilde{q}_{ik} = 1.$

23.

$$(1 - \widetilde{q}_{ij})q_{jj}q_{ji} [x_i, [x_{ij}, x_j]_c]_c - (1 + q_{jj})(1 - q_{jj}\widetilde{q}_{ij})x_{ij}^2;$$

si  $i, j \in \{1, \dots, \theta\}$  satisfacen que  $-q_{ii}, -q_{jj}, q_{ii}\widetilde{q}_{ij}, q_{jj}\widetilde{q}_{ij} \neq 1$ .

24.

$$\left[ x_i, x_{3\alpha_i+2\alpha_j} \right]_c - \frac{1 - q_{ii}\widetilde{q}_{ij} - q_{ii}^2\widetilde{q}_{ij}^2q_{jj}}{(1 - q_{ii}\widetilde{q}_{ij})q_{ji}} x_{ii}^2$$

si  $i, j \in \{1, \dots, \theta\}$  satisfacen que that  $m_{ij} \in \{4, 5\}$ , or  $q_{jj} = -1$ ,  $m_{ij} = 3$ ,  $q_{ii} \in \mathbb{G}_4$ ,

25.

$$x_{4\alpha_i+3\alpha_j} = [x_{3\alpha_i+2\alpha_j}, x_{ij}]_c$$

si  $i, j \in \{1, \dots, \theta\}$  satisfacen que  $4\alpha_i + 3\alpha_j \notin \Delta_+^X$ ,  $q_{jj} = -1$  or  $m_{ji} \geq 2$ , and also  $m_{ij} \geq 3$ .

26.  $[x_{ii}, x_{3\alpha_i+2\alpha_j}]_c = 0$  si  $i, j \in \{1, \dots, \theta\}$  satisfacen que  $3\alpha_i + 2\alpha_j \in \Delta_+^X$ ,  $5\alpha_i + 3\alpha_j \notin \Delta_+^X$ , and  $q_{ii}^3\widetilde{q}_{ij}, q_{ii}^4\widetilde{q}_{ij} \neq 1$ .

27.

$$x_{5\alpha_i+4\alpha_j} = [x_{4\alpha_i+3\alpha_j}, x_{ij}]_c$$

si  $i, j \in \{1, \dots, \theta\}$  satisfacen que  $4\alpha_i + 3\alpha_j \in \Delta_+^X$ ,  $5\alpha_i + 4\alpha_j \notin \Delta_+^X$

28.  $[[x_{iii}, x_{ii}], x_{ii}]_c = 0$  si  $i, j \in \{1, \dots, \theta\}$  satisfacen que  $5\alpha_i + 2\alpha_j \in \Delta_+^X$ ,  $7\alpha_i + 3\alpha_j \notin \Delta_+^X$ .

29.

$$[x_{ii}, x_{4\alpha_i+3\alpha_j}]_c - \frac{b - (1 + q_{ii})(1 - q_{ii}\zeta)(1 + \zeta + q_{ii}\zeta^2)q_{ii}^6\zeta^4}{a q_{ii}^3q_{ij}^2q_{ji}^3} x_{3\alpha_i+2\alpha_j}^2$$

donde  $\zeta = \widetilde{q}_{ij}$ ,  $a = (1 - \zeta)(1 - q_{ii}^4\zeta^3) - (1 - q_{ii}\zeta)(1 + q_{ii})q_{ii}\zeta$ ,  $b = (1 - \zeta)(1 - q_{ii}^6\zeta^5) - a q_{ii}\zeta$ ; si  $i, j \in \{1, \dots, \theta\}$  satisfacen que  $q_{jj} = -1$ ,  $5\alpha_i + 4\alpha_j \in \Delta_+^X$ .

La siguiente definición (ver [An4]) es crucial para el resultado principal de esta tesis.

**Definición 1.7.3.** Denotaremos por  $\mathcal{I}_{\mathbf{q}}$  al ideal generado por las relaciones de la presentación dada en [An2, Theorem 3.1] para  $\mathcal{B}_{\mathbf{q}}$ , a menos de los siguientes cambios:

- exceptuamos las relaciones de tipo  $x_{\alpha}^{N_{\alpha}} = 0$  con  $\alpha$  raíz de Cartan;
- adicionamos las relaciones  $(\text{ad}_c x_i)^{m_{ij}+1} x_j = 0$  con  $i \neq j$  sólo cuando  $q_{ii}^{-m_{ij}} = \widetilde{q}_{ij} = q_{ii}$ .

Diremos que  $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}} = T(V)/\mathcal{I}_{\mathbf{q}}$  es el álgebra de pre-Nichols distinguida de  $\mathcal{B}_{\mathbf{q}}$ .

*Observación 1.7.4.* El álgebra de pre-Nichols distinguida  $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  admite una base PBW con los mismos generadores  $x_{\beta}$ ,  $\beta \in \Delta_+^{\mathbf{q}}$ , definidos en la Observación 1.6.9 y donde

$$\widetilde{N}_{\beta} := h_{\mathcal{I}_{\mathbf{q}}}(x_{\beta}) = \begin{cases} \infty, & \beta \in \mathcal{O}_+^{\mathbf{q}}, \\ N_{\beta}, & \beta \notin \mathcal{O}_+^{\mathbf{q}}. \end{cases}$$

**Ejemplo 1.7.5.** Fijemos  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie semisimple de dimensión finita,  $A = (a_{ij})$  su matriz de Cartan (de tipo finito),  $(d_i) \in \mathbb{N}^\theta$  mínimos tal que  $d_i a_{ij} = d_j a_{ji}$  para todo par  $i, j \in \mathbb{I}$  y  $q \in \mathbb{G}_N$ ,  $N$  es impar y comprimo con 3. Si  $q_{ij} = q^{d_i a_{ij}}$ , entonces  $\mathfrak{q} = (q_{ij})$  es de tipo Cartan,  $\mathcal{B}_{\mathfrak{q}}$  es la parte positiva del grupo cuántico pequeño  $u_q^+(\mathfrak{g})$  y  $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$  es la parte positiva del álgebra envolvente cuantizada  $U_q^+(\mathfrak{g})$ .

Se puede deducir que  $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$  es efectivamente un álgebra de pre-Nichols de  $\mathcal{B}_{\mathfrak{q}}$ . Además,  $\text{GKdim } \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}} < \infty$  y por lo tanto  $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}} \in \mathfrak{Pre}_{\text{GKd}}(V)$ . Por lo tanto es natural preguntarse si el álgebra de pre-Nichols distinguida es eminente. Veremos a lo largo de la tesis que ésto no ocurre en general pero sí en la mayoría de los casos. En particular cuando  $\mathfrak{q}$  es de tipo Cartan tenemos el siguiente resultado en [ASa]:

**Teorema 1.7.6.** *Sea  $\mathfrak{q}$  una matriz de tipo Cartan con matriz de Cartan  $X$  y parámetro  $q \in \mathbb{G}'_N$ ,  $N \geq 2$ . Si  $(X, N)$  es diferente a  $(A_\theta, 2)$ ,  $(D_\theta, 2)$  y  $(A_2, 3)$ , entonces el álgebra de pre-Nichols distinguida  $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$  es el álgebra de pre-Nichols eminente de  $\mathcal{B}_{\mathfrak{q}}$ .  $\square$*

## 1.8 | Series de Hilbert y extensiones de álgebras de Hopf

Dado que las álgebras de Nichols de tipo diagonal son  $\mathbb{N}_0^\theta$ -graduadas, es relevante para este trabajo estudiar objetos graduados. Además las álgebras de pre-Nichols distinguidas pueden presentarse como una extensión central de las álgebras de Nichols asociadas. Daremos a continuación algunas nociones y resultados en estas direcciones.

**Definición 1.8.1.** Sea  $U$  un espacio vectorial  $\mathbb{N}_0^\theta$ -graduado cuyas componentes homogéneas tienen dimensión finita, la serie de Hilbert-Poincaré está definida por

$$\mathcal{H}_U = \sum_{(a_1, \dots, a_\theta) \in \mathbb{N}_0^\theta} \dim U^{(a_1, \dots, a_\theta)} t_1^{a_1} \dots t_\theta^{a_\theta} \in \mathbb{N}_0[[t_1, \dots, t_\theta]].$$

Sea  $W$  es otro espacio vectorial  $\mathbb{N}_0^\theta$ -graduado con las mismas características. Diremos que  $\mathcal{H}_U \leq \mathcal{H}_W$  si

$$\dim U^{(a_1, \dots, a_\theta)} \leq \dim W^{(a_1, \dots, a_\theta)} \quad \text{para todo } (a_1, \dots, a_\theta) \in \mathbb{N}_0^\theta.$$

**Ejemplo 1.8.2.** Sea  $(V, c^{\mathfrak{q}})$  un espacio vectorial trenzado de tipo diagonal tal que  $\mathcal{B}_{\mathfrak{q}}$  es de dimensión finita. A partir de la Observación 1.7.4 se tiene que

$$\mathcal{H}_{\mathcal{B}_{\mathfrak{q}}} = \prod_{\alpha \in \Delta_+^{\mathfrak{q}}} \frac{1 - t^{N_\alpha \alpha}}{1 - t^\alpha}, \quad \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}} = \prod_{\alpha \in \mathcal{O}_+^{\mathfrak{q}}} \frac{1}{1 - t^\alpha} \prod_{\alpha \in \Delta_+^{\mathfrak{q}} - \mathcal{O}_+^{\mathfrak{q}}} \frac{1 - t^{N_\alpha \alpha}}{1 - t^\alpha}.$$

**Ejemplo 1.8.3.** Sean  $A$  y  $B$  dos espacios vectoriales  $\mathbb{N}_0^\theta$ -graduados cuyas componentes homogéneas tienen dimensión finita. Entonces  $A \otimes B$  también es  $\mathbb{N}_0^\theta$ -graduado, ver el Ejemplo 1.4.8, y además

$$\mathcal{H}_{A \otimes B} = \mathcal{H}_A \cdot \mathcal{H}_B,$$

donde el producto del segundo término corresponde al producto usual de series formales.

Sea  $H$  un álgebra de Hopf con antípoda biyectiva. Consideremos la siguiente sucesión de morfismos de álgebras de Hopf en  $\frac{H}{H} \mathcal{YD}$ :

$$\mathbb{k} \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} C \xrightarrow{\pi} B \longrightarrow \mathbb{k}. \quad (1.8.1)$$

Diremos que (1.8.1) es una *extensión de álgebras de Hopf trenzadas* (ver [AN, §2.5]) si

- (a)  $\iota$  es inyectiva, (c)  $\ker \pi = C\iota(A^+)$  y  
 (b)  $\pi$  es sobreyectiva, (d)  $A = C^{\text{co}\pi}$ , o equivalentemente  $A = {}^{\text{co}\pi}C$ .

Por simplicidad denotaremos  $A \xrightarrow{\iota} C \xrightarrow{\pi} B$  en lugar de (1.8.1).

Asumamos que  $C$  es conexa (es decir el corradical de  $C$  es  $\mathbb{k}$ ), esto implica que para cualquier extensión  $A \xrightarrow{\iota} C \xrightarrow{\pi} B$ , tanto  $A$  como  $B$  son conexas. Para caracterizar extensiones en este contexto veamos el siguiente resultado.

**Proposición 1.8.4.** *[A+, Proposition 3.6] Sea  $R$  un álgebra de Hopf en  ${}^H_H\mathcal{YD}$ . Entonces*

$$B \longmapsto R/RB^+, \quad T \longmapsto R^{\text{co}T}$$

es una biyección entre conjuntos de subálgebras coideales a izquierda  $B$  de  $R$  y el conjunto de cocientes  $R$ -módulos a derecha coalgebras  $T$  de  $R$ .

Si  $B$  y  $T$  se corresponden vía la biyección anterior, entonces existe un isomorfismo  $B$ -lineal a derecha y  $T$ -colineal a izquierda  $T \otimes B \xrightarrow{\cong} R$ .

Por lo tanto, para obtener extensiones de  $C$  conexa, es suficiente considerar una de las siguientes opciones:

- un morfismo suryectivo de álgebras de Hopf  $C \xrightarrow{\pi} B$  y fijar  $A = C^{\text{co}\pi}$ , o
- una subálgebra de Hopf normal  $A$  de  $C$ ,  $\iota$  la inclusión y fijar  $B = CA^+$ .

En cualquier caso existe un isomorfismo  $B$ -colineal a izquierda y  $A$ -lineal a derecha  $B \otimes A \simeq C$ .

**Lema 1.8.5.** *Sea  $A \xrightarrow{\iota} C \xrightarrow{\pi} B$  una extensión que preserva la graduación de álgebras de Hopf conexas, trenzadas y  $\mathbb{N}_0^\theta$ -graduadas con componentes homogéneas de dimensión finita. Entonces  $\mathcal{H}_C = \mathcal{H}_A\mathcal{H}_B$ .*

*Demostración.* Consideramos el álgebra de Hopf  $\widehat{H} = \mathbb{k}\mathbb{Z}^\theta \otimes H$ . Entonces todo objeto  $\mathbb{N}_0^\theta$ -graduado  $U \in {}^H_H\mathcal{YD}$  es canónicamente un módulo de Yetter-Drinfeld sobre  $\widehat{H}$ , donde

- la acción de  $H$  en  $U$  se extiende a una acción de  $\widehat{H}$  dejando  $\mathbb{Z}^\theta$  actuar trivialmente;
- para cada  $\beta \in \mathbb{N}_0^\theta$  y  $u \in U_\beta$ , la coacción en  $u$  está dada por

$$\delta(u) = \beta \otimes u_{-1} \otimes u_0 \in \mathbb{N}_0^\theta \otimes H \otimes U \subset \widehat{H} \otimes U.$$

Como  $\iota$  y  $\pi$  preserva los grados,  $A \xrightarrow{\iota} C \xrightarrow{\pi} B$  es una extensión en la categoría de  $\widehat{H}$ -módulos de Yetter-Drinfeld y podemos aplicar[A+, Proposition 3.6 (d)]: existe un isomorfismo  $\widehat{H}$ -colineal  $B \otimes A \xrightarrow{\cong} C$ , de donde tenemos que  $\mathcal{H}_C = \mathcal{H}_A\mathcal{H}_B$ .  $\square$

## 1.9 | Resultados preliminares sobre álgebras de Nichols

En esta sección recordaremos algunos resultados sobre álgebras de Nichols, especialmente de tipo diagonal, que serán pertinentes para el desarrollo de esta tesis.

En general usaremos el siguiente Lema que vale para espacios trenzados en general.

**Lema 1.9.1.** Sean  $\mathcal{B}$  un álgebra de pre-Nichols de  $V$  tal que  $\text{GKdim } \mathcal{B} < \infty$  y  $W$  un subespacio trenzado de  $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ . Entonces  $\text{GKdim } \mathcal{B}(W) < \infty$ .

Los siguientes resultados son de espacios vectoriales trenzados  $V$  de tipo diagonal, donde  $\mathbf{q}$  denotará a la matriz de la respectiva trenza de  $V$ .

**Lema 1.9.2.** [ASa] Sean  $v, w \in T(V)$  elementos primitivos, no nulos y  $\mathbb{Z}^\theta$ -homogéneos. Entonces  $(\text{ad}_c v)w$  es primitivo si y sólo si  $\mathbf{q}(\deg v, \deg w)\mathbf{q}(\deg w, \deg v) = 1$ .

**Lema 1.9.3.** [AAnH1, Proposition 4.16] Sea  $W$  un subespacio trenzado de  $\mathcal{B}$  que tiene un subdiagrama de la forma  $\begin{smallmatrix} 1 \\ \circ \end{smallmatrix} \xrightarrow{p} \begin{smallmatrix} q \\ \circ \end{smallmatrix}$ ,  $p \neq 1$ . Entonces  $\text{GKdim } \mathcal{B}(V) = \infty$ .

A continuación daremos la conjetura que asumiremos en la tesis y resultados relacionados con ella. Recordar la definición de sistema de raíces y que en particular tener un sistema de raíces finito significa tener una base PBW con finito generadores.

**Conjetura 1.9.4.** [AAnH1, Conjecture 1.5] El sistema de raíces de un álgebra de Nichols de tipo diagonal con  $\text{GKdim}$  finita es finito.

**Teorema 1.9.5.** [AAnH4, AnG2] La conjetura 1.9.4 es verdadera en los siguientes casos:

- $\dim V \leq 3$ ;
- $V$  es de tipo Cartan.

Por el Teorema anterior y dado que asumimos la Conjetura 1.9.4, buscamos condiciones necesarias (y rápidas de identificar en el diagrama de Dynkin) sobre  $\mathbf{q}$  para que el sistema de raíces de  $\mathcal{B}_{\mathbf{q}}$  sea finito.

El siguiente corolario refiere a un diagrama de rango 2 que aparecerá repetidas veces en el capítulo siguiente.

**Corolario 1.9.6.** Sea  $W$  un espacio vectorial trenzado con diagrama de Dynkin  $\begin{smallmatrix} q \\ \circ \end{smallmatrix} \xrightarrow{q^2} \begin{smallmatrix} -q \\ \circ \end{smallmatrix}$ ,  $q \neq \pm 1$ . Entonces  $\text{GKdim } \mathcal{B}(W) = \infty$ .

El siguiente Lema refiere a los diagramas de rango 3, cuyo grafo es el 3-ciclo, que aparecerá repetidas veces en el capítulo siguiente.

**Lema 1.9.7.** [H3, Lemma 9 (ii)] Si  $\mathbf{q}$  es una matriz de rango tres con sistema de raíces finito y vértices 1, 2, 3 tales que  $\tilde{q}_{ij} \neq 1$  para todo par  $1 \leq i < j \leq 3$ , entonces

$$\tilde{q}_{12}\tilde{q}_{13}\tilde{q}_{23} = 1, \quad (\tilde{q}_{12} + 1)(\tilde{q}_{13} + 1)(\tilde{q}_{23} + 1) = 0.$$

Además, si  $q_{11} = -1$ , entonces  $q_{22}\tilde{q}_{12} = q_{33}\tilde{q}_{13} = 1$ .

El siguiente Lema será de utilidad cuando supongamos la Conjetura 1.9.4.

**Lema 1.9.8.** [H3, Lemma 23] Si  $\mathbf{q}$  tiene sistema de raíces finito, entonces su diagrama generalizado de Dynkin no tiene  $N$ -ciclos, para todo  $N \geq 4$ .

## 2 | Resultados generales de álgebras de pre-Nichols con GKdim finita.

En este capítulo,  $\mathbf{q} = (q_{ij})_{i,j \in \mathbb{I}_\theta}$  es una matriz de trenza con diagrama de Dynkin conexo tal que  $\dim \mathcal{B}_{\mathbf{q}} < \infty$ . En particular el sistema de raíces es finito por [H1, §3], y cada  $q_{ii}$  es una raíz de la unidad de orden  $N_i \geq 2$  (ver Lema 1.9.3). Tal como recordamos en el capítulo anterior, a partir del Teorema 1.7.2 se puede obtener una lista de relaciones junto con ciertas condiciones que determinan una presentación para cada álgebra de pre-Nichols distinguida.

El objetivo de este capítulo es probar bajo qué condiciones cada una de las relaciones de la lista del Teorema 1.7.2 es anulada en toda álgebra de pre-Nichols  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{B}_{\mathbf{q}}$  tal que  $\text{GKdim } \mathcal{B} < \infty$ . Cada relación listada se estudiará en un lema por separado, aquellos que no tengan por hipótesis las condiciones originales del Teorema 1.7.2 darán lugar posteriormente a una excepción del Teorema 0.0.1. Notemos que todas las relaciones son  $\mathbb{N}_0^\theta$ -homogéneas, por lo cual las denotaremos por  $x_\beta$ , donde  $\beta \in \mathbb{N}_0^\theta$  es su grado.

### 2.1 | Estrategia general

Sea  $\mathcal{B}$  un álgebra de pre-Nichols de  $\mathbf{q}$  tal que  $\text{GKdim } \mathcal{B} < \infty$ . Para cada uno de los siguientes lemas asumimos que  $\mathbf{q}$  satisface las condiciones requeridas en [An2, Theorem 3.1] para incluir cierta relación  $x_\beta$  (o las relaciones cuánticas de Serre que se adicionan para dar la presentación del álgebra de pre-Nichols distinguida) en la presentación de  $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$ . Supongamos que (la imagen de)  $x_\beta$  no se anula en  $\mathcal{B}$ ; tal como explicaremos a continuación,  $x_\beta$  es primitivo en  $\mathcal{B}$ , ver el Lema 2.1.2. Tenemos así un espacio vectorial trenzado de tipo diagonal  $V^{\mathbf{q}} \oplus \mathbb{k}x_\beta \subset \mathcal{P}(\mathcal{B})$  que satisface  $\text{GKdim } \mathcal{B}(V^{\mathbf{q}} \oplus \mathbb{k}x_\beta) < \infty$  por el Lema 1.9.1. Por otro lado computamos el diagrama de Dynkin de  $V^{\mathbf{q}} \oplus \mathbb{k}x_\beta$  (o de cierto subespacio trenzado de  $V^{\mathbf{q}} \oplus \mathbb{k}x_\beta$ ), esta tarea es rutinaria usando la bilinealidad de  $\mathbf{q}$ . Por el Teorema 1.9.5 y la Conjetura 1.9.4, este diagrama debe estar dentro de los listados en la clasificación dada en [H3]; sin embargo esto no ocurre, lo cual da lugar a una contradicción. A veces obtenemos un diagrama de Dynkin que pertenece a un caso en la que se sabe que la conjetura es verdadera, por lo que no necesitamos dicha suposición adicional.

El siguiente ejemplo ilustra la estrategia empleada en el Teorema 3.1.1 del próximo capítulo, empleando los lemas desarrollados en este capítulo.

**Ejemplo 2.1.1.** Sea  $\mathbf{q}$  de tipo  $\mathbf{A}_3(q|\{2, 3\})$ ,  $q \in \mathbb{G}_N$ ,  $N \geq 3$ . Su diagrama de Dynkin es:

$$\begin{array}{ccccc} q^{-1} & & q & & -1 & & q^{-1} & & -1 \\ \circ & \text{---} & & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ \\ 1 & & & & 2 & & & & 3 \end{array}$$

El álgebra de Nichols distinguida  $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  está presentada por generadores  $x_1, x_2, x_3$ , y relaciones

$$\begin{aligned} x_{13} &= 0, & x_{112} &= 0, \\ x_2^2 &= 0, & x_3^2 &= 0, & [x_{123}, x_2]_c &= 0. \end{aligned}$$

Sea  $\mathcal{B}$  un álgebra de pre-Nichols de  $\mathfrak{q}$  con GKdim finita. Observando la presentación de  $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$  notemos que  $x_2^2, x_3^2$  y  $x_{13}$  son minimales (respecto al grado). Luego, por el Lema 2.1.2 tenemos que  $x_2^2, x_3^2, x_{13} \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$ . De este modo los Lemas 2.3.1 y 2.2.1 implican que  $x_2^2 = x_3^2 = x_{13} = 0$  en  $\mathcal{B}$ . Observando nuevamente la presentación de  $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$  notamos que todas las relaciones de menor  $\mathbb{N}_0^\theta$ -grado que  $[x_{123}, x_2]_c$  (es decir,  $x_2^2, x_{13}$ ) se anulan en  $\mathcal{B}$ , luego por el Lema 2.1.2 deducimos que  $[x_{123}, x_2]_c \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$ . Ahora, usando que  $[x_{123}, x_2]_c \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$  y el Lema 2.3.4 tenemos que  $[x_{123}, x_2]_c = 0$  en  $\mathcal{B}$ . Como todas las relaciones de la presentación de  $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$  son anuladas en  $\mathcal{B}$  entonces existe una proyección  $\pi : \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}} \rightarrow \mathcal{B}$  que es morfismo de álgebras de Hopf trenzadas graduadas. Como  $\mathcal{B}$  era un álgebra de pre-Nichols con GKdim  $< \infty$  arbitraria, entonces  $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$  es álgebra de pre-Nichols eminente de  $\mathfrak{q}$ .

Como lo hemos mencionado, la primera tarea a realizar en este capítulo es chequear si las relaciones de todas las álgebras de pre-Nichols con GKdim  $< \infty$  son primitivas. Para ello nos será útil el siguiente resultado, que nos permitirá probar este hecho de modo recursivo en el grado de la relación. Versiones similares de este resultado aparecieron en [AnG1, An2].

**Lema 2.1.2.** *Sean  $I \subset J$  dos ideales de Hopf  $\mathbb{N}_0^\theta$ -graduados de  $T(V)$ ,  $\mathcal{B} := T(V)/I$ , y  $S$  un sistema de generadores  $\mathbb{N}_0^\theta$ -homogéneos de  $J$ . Consideremos un elemento homogéneo  $\mathbf{x} \in J$ , y sea  $\mathbb{Y}_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{y} \in S : \deg(\mathbf{y}) < \deg(\mathbf{x})\}$ . Si  $\mathbb{Y}_{\mathbf{x}} \subset I$ , entonces  $\mathbf{x} \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$ .*

*Demostración.* Como  $J$  es un coideal y el coproducto es  $\mathbb{N}_0^\theta$ -homogéneo, entonces existen  $a_{\mathbf{y}}, b_{\mathbf{y}}, c_{\mathbf{y}}, d_{\mathbf{y}}, e_{\mathbf{y}}, f_{\mathbf{y}} \in T(V)$  tales que

$$\Delta(\mathbf{x}) = 1 \otimes \mathbf{x} + \mathbf{x} \otimes 1 + \sum_{\mathbf{y} \in \mathbb{Y}_{\mathbf{x}}} a_{\mathbf{y}} \mathbf{y} b_{\mathbf{y}} \otimes c_{\mathbf{y}} + d_{\mathbf{y}} \otimes e_{\mathbf{y}} \mathbf{y} f_{\mathbf{y}} \in T(V) \otimes T(V). \quad (2.1.1)$$

Sabemos que  $\mathbf{y} = 0$  en  $\mathcal{B}$  para todo  $\mathbf{y} \in \mathbb{Y}_{\mathbf{x}}$  entonces  $\mathbf{x} \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$ .  $\square$

En particular, podemos aplicar el Lema 2.1.2 en  $J = \widetilde{\mathcal{I}}_{\mathfrak{q}}$ , el ideal que define el álgebra de pre-Nichols distinguida. Ésto nos permitirá probar que los elementos que definen el ideal del álgebra de pre-Nichols distinguida son primitivos en cualquier álgebra de pre-Nichols con GKdim finita (salvo quizá en los casos excepcionales estudiados en el último capítulo).

## 2.2 | Relaciones cuánticas de Serre

A continuación, analizaremos distintos casos de la relación cuántica de Serre: en los primeros casos cuando  $m_{ij} = 0$ , y luego algunos casos en que  $m_{ij} > 0$ . Notar que  $(\text{ad}_c x_i)^{m_{ij}+1} x_j$  es primitivo en  $\mathcal{B}_{\mathfrak{q}}(V)$  por [H4, (4.45)], ver también [AS2, Lemma A.1].

### 2.2.1 | Relaciones cuánticas de Serre con $m_{ij} = 0$

**Lema 2.2.1.** *Sean  $i, j \in \mathbb{I}_\theta$  tales que  $m_{ij} = 0$ . Asumamos que se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

- (a)  $\text{ord } q_{ii} + \text{ord } q_{jj} > 4$ ,
- (b)  $q_{ii} q_{jj} = 1$  y existe  $k \in \mathbb{I}_\theta - \{i, j\}$  tal que  $\tilde{q}_{ik} \tilde{q}_{jk} \neq 1$ .

Entonces  $x_{ij} = 0$  en  $\mathcal{B}$ .

*Demostración.* Sean  $x_\beta := x_{ij} \neq 0$  y  $\mathbf{q}'$  la matriz asociada a la trenza de  $V + \mathbb{k}x_\beta$ . Notar que:

$$\tilde{q}_{i\beta} = q_{ii}^2 \quad \tilde{q}_{j\beta} = q_{jj}^2 \quad q_{\beta\beta} = q_{ii}q_{jj}$$

(a) Asumiremos la Conjetura 1.9.4. Como el diagrama Dynkin es conexo, existe  $r \geq 1$  y vértices  $i_1, i_2, \dots, i_r$  tales que  $\tilde{q}_{ii_1} \neq 1 \neq \tilde{q}_{i_r j}$  y  $\tilde{q}_{i_s i_{s+1}} \neq 1$  para todo  $1 \leq s \leq r-1$ . Notar que  $q_{ii}^2 = 1$  o  $q_{jj}^2 = 1$ : de lo contrario, el subgrafo formado por los vértices  $\beta, i, i_1, i_2, \dots, i_r, j$  en el diagrama de  $\mathbf{q}'$  es un  $(r+3)$ -ciclo, lo cual no es posible por el Lema 1.9.8. Podemos suponer sin perder generalidad que  $q_{ii}^2 = 1$ , luego por el Lema 1.9.3 tenemos que  $q_{ii} = -1$ . Por hipótesis  $\text{ord } q_{jj} \geq 3$ , además el diagrama de Dynkin de  $\mathbb{k}x_j \oplus \mathbb{k}x_\beta$  es

$$\begin{array}{ccc} q_{jj} & \xrightarrow{q_{jj}^2} & -q_{jj} \\ \circ & & \circ \\ j & & \beta \end{array}$$

que no se encuentra en [H3, Table 1], lo que contradice el Teorema 1.9.5 luego  $x_\beta \neq 0$ .

(b) Como  $\tilde{q}_{k\beta} = \tilde{q}_{ik}\tilde{q}_{jk}$  el diagrama de Dynkin del subespacio trenzado  $\mathbb{k}x_\beta \oplus \mathbb{k}x_k$  es

$$\begin{array}{ccc} q_{kk} & \xrightarrow{\tilde{q}_{ik}\tilde{q}_{jk}} & 1 \\ \circ & & \circ \\ k & & \beta \end{array}$$

luego el Lema 1.9.3 nos conduce a un absurdo y por lo tanto  $x_\beta = 0$ .  $\square$

*Observación 2.2.2.* Las hipótesis de este lema contienen las condiciones extras (a) o (b), que no están presentes en el Teorema 1.7.2. Por inspección, el único diagrama de la clasificación de [H3] que tiene la relación  $x_{ij} = 0$  en su presentación pero que no satisface las condiciones anteriores es  $\mathbf{A}_3(q\{1, 2, 3\})$  con  $q \in \mathbb{G}_\infty$ .

## 2.2.2 | Relaciones cuánticas de Serre, $m_{ij} > 0$ , $q_{ii}^{m_{ij}+1} \neq 1$

Primero requerimos el siguiente Lema auxiliar.

**Lema 2.2.3.** Sean  $i, j \in \mathbb{I}_\theta$  tales que:

- $m_{ij} > 0$ ,
- $\text{ord } q_{ii} = m_{ij} + 2$ ,
- $q_{ii}^{-m_{ij}(m_{ij}+1)} q_{jj}^2 = 1$ .

Entonces  $q_{ii} = q_{jj} = \tilde{q}_{ij}^{-1} \in \mathbb{G}'_3$  y  $m_{ij} = 1$ .

*Demostración.* Utilizando las hipótesis fijadas:

$$1 = q_{ii}^{-m_{ij}(m_{ij}+1)} q_{jj}^2 = \left(q_{ii}^{(m_{ij}+1)}\right)^{-m_{ij}} q_{jj}^2 = (q_{ii}^{-1})^{-m_{ij}} q_{jj}^2 = q_{ii}^{m_{ij}} q_{jj}^2 = q_{ii}^{-2} q_{jj}^2.$$

Entonces  $q_{ii} = \pm q_{jj}$ . Si  $q_{jj} = -q_{ii}$ , el diagrama de Dynkin de  $\mathbb{k}x_i + \mathbb{k}x_j$  es  $\begin{array}{ccc} q_{ii} & \xrightarrow{q_{ii}^{-m_{ij}}} & -q_{ii} \\ \circ & & \circ \end{array}$  y no se encuentra en [H3, Table 1]. Luego  $q_{ii} = q_{jj}$  y nos queda el subdiagrama de Dynkin

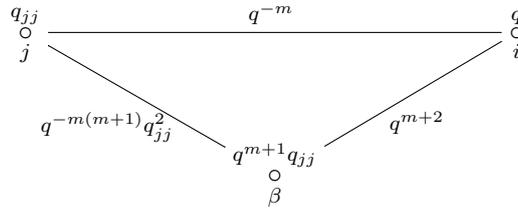
$\begin{array}{ccc} q_{ii} & \xrightarrow{q_{ii}^{-m_{ij}}} & q_{ii} \\ \circ & & \circ \end{array}$ , que es de tipo Cartan con matriz de Cartan  $\begin{pmatrix} 2 & -m_{ij} \\ -m_{ij} & 2 \end{pmatrix}$ . Como  $\text{GKdim } \mathcal{B}_{\mathbf{q}} < \infty$ , resulta  $m_{ij} = 1$  y así  $q_{ii} = q_{jj} = \tilde{q}_{ij}^{-1} \in \mathbb{G}'_3$ .  $\square$

**Lema 2.2.4.** Sean  $i, j \in \mathbb{I}_\theta$  tales que  $m_{ij} > 0$  y  $q_{ii}^{m_{ij}+1} \neq 1$ . Asumamos que se cumple alguna de las siguientes condiciones:

- (a) El diagrama de Dynkin de  $\mathbb{k}x_i \oplus \mathbb{k}x_j$  es diferente a  $\begin{array}{c} q \\ \circ \\ \hline \circ \\ q \end{array}$ ,  $q \in \mathbb{G}'_3$ ,
- (b)  $m_{ij} = 1$ ,  $q_{ii} = q_{jj} = \tilde{q}_{ij}^{-1} \in \mathbb{G}'_3$ , y existe  $k \in \mathbb{I}_\theta - \{i, j\}$  tal que  $\tilde{q}_{ik}^2 \tilde{q}_{jk} \neq 1$ .

Entonces  $(\text{ad}_c x_i)^{m_{ij}+1} x_j = 0$  en  $\mathcal{B}$ .

*Demostración.* (a) Denotemos  $q = q_{ii}$ ,  $m = m_{ij}$ . Supongamos que  $x_\beta := (\text{ad}_c x_i)^{m+1} x_j \neq 0$ . Por definición de  $m$  tenemos que  $q^m \tilde{q}_{ij} = 1$ , además, por hipótesis del diagrama de Dynkin y por el Lema 2.2.3 entonces  $q^{m+2} \neq 1$  ó  $q^{-m(m+1)} q_{jj}^2 \neq 1$ . Luego el diagrama de Dynkin del subespacio vectorial trenzado  $\mathbb{k}x_i \oplus \mathbb{k}x_j \oplus \mathbb{k}x_\beta$  es



Analizaremos distintos casos que surgen al considerar cuántas aristas existen (es decir, cuántos  $\tilde{q}_{rt}$  no son 1): notemos que  $q^{-m} \neq 1$  ya que  $m > 0$  por hipótesis.

**Caso 1**  $\tilde{q}_{rt} \neq 1$  para todos  $r, t \in \{i, j, \beta\}$ ,  $r \neq t$ . Por el Lema 1.9.7,

$$1 = \tilde{q}_{ij} \tilde{q}_{j\beta} \tilde{q}_{i\beta} = q^{-m} q^{m+2} q^{-m(m+1)} q_{jj}^2 = q^{2-m(m+1)} q_{jj}^2.$$

Además, entre los valores  $q_{jj}$ ,  $q$  y  $q^{m+1} q_{jj}$  hay un  $-1$ .

- $q = -1$ . Como  $m > 0$  y  $m \leq \text{ord } q - 1 = 1$ , se tiene que  $m = 1$ . Pero entonces  $q_{ii}^{m_{ij}+1} = (-1)^2 = 1$ , lo cual es una contradicción.
- $q_{jj} = -1$ . Por el Lema 1.9.7,  $m = 1$  y  $1 = (q^{m+1} q_{jj})(q^{-m(m+1)} q_{jj}^2) = -q^{1-m^2} = -1$ , que es un absurdo.
- $q^{m+1} q_{jj} = -1$ . Por el Lema 1.9.7,  $1 = q q^{m+2} = q^{m+3}$  y

$$1 = (q_{jj})(q^{-m(m+1)} q_{jj}^2) = q^{-m(m+3)+2m} q_{jj}^3 = q^{2m} q_{jj}^3.$$

Entonces  $-1 = (-1)^3 = (q^{m+1} q_{jj})^3 = (q^{3m+3} q^{-2m}) = q^{m+3} = 1$ , absurdo.

**Caso 2**  $q^{m+2} = 1$ . Por hipótesis,  $\tilde{q}_{j\beta} = q^{-m(m+1)} q_{jj}^2 \neq 1$ . Nos queda el diagrama:

$$\begin{array}{c} q \\ \circ \\ \hline \circ \\ q \end{array} \xrightarrow{q^2} \begin{array}{c} q_{jj} \\ \circ \\ \hline \circ \\ j \end{array} \xrightarrow{q^{-2} q_{jj}^2} \begin{array}{c} q^{-1} q_{jj} \\ \circ \\ \hline \circ \\ \beta \end{array},$$

que no corresponde a ningún diagrama de [H3, Table 2] notando que:

- $q_{ii} \neq q_{jj}$ .
- $q_{ii} \neq -1 \neq q_{\beta\beta}$ .
- $q_{ii} q_{\beta\beta} = q_{jj}$  y  $\tilde{q}_{ij} \tilde{q}_{j\beta} = q_{jj}^2$ .

- Si  $q_{ii} = \tilde{q}_{ij}^{-1}$  y  $q_{jj} = -1$ , entonces  $q_{ii}^3 = 1$  y  $q_{\beta\beta}\tilde{q}_{j\beta} = -1 \neq 1$  ( $q_{\beta\beta} \neq \tilde{q}_{j\beta}^{-1}$ ).

**Caso 3**  $q^{-m(m+1)}q_{jj}^2 = 1$ ; es decir,  $q_{jj} = \pm q^{\frac{m(m+1)}{2}}$ . Por hipótesis,  $q^{m+2} \neq 1$ . Luego el diagrama de Dynkin de  $\mathbb{k}x_i \oplus \mathbb{k}x_j \oplus \mathbb{k}x_\beta$  es conexo, más aún es el siguiente

$$vq \begin{array}{c} \frac{(m+1)(m+2)}{2} \\ \circ \\ \beta \end{array} \xrightarrow{q^{m+2}} \begin{array}{c} q \\ \circ \\ i \end{array} \xrightarrow{q^{-m}} vq \begin{array}{c} \frac{m(m+1)}{2} \\ \circ \\ j \end{array}, \quad v \in \{-1, 1\}.$$

Se puede ver que no está en [H3, Table 2] notando que:

- $q_{ii} \neq -1$ .
- $q_{ii}^2 = \tilde{q}_{ij}\tilde{q}_{i\beta}$ .
- $q_{\beta\beta} = \tilde{q}_{ij}\tilde{q}_{i\beta}q_{ii}$

Así los tres casos posibles nos llevan a un absurdo, con lo cual  $x_\beta = 0$ .

(b) Supongamos que  $x_\beta \neq 0$ . Tenemos que  $\tilde{q}_{k\beta} = \tilde{q}_{ik}^2\tilde{q}_{jk}$ , entonces el subdiagrama de Dynkin de  $\mathbb{k}x_\beta + \mathbb{k}x_k$  es  $\begin{array}{c} q_{kk} \\ \circ \\ \beta \end{array} \xrightarrow{\tilde{q}_{ik}^2\tilde{q}_{jk}} \begin{array}{c} 1 \\ \circ \\ k \end{array}$ . Así obtenemos un absurdo por el Lema 1.9.3.  $\square$

*Observación 2.2.5.* Las hipótesis de este lema difieren de las de la relación correspondiente dadas en [An2, Theorem 3.1]. Por inspección, el único diagrama de la clasificación de [H3] que tiene la relación  $(\text{ad}_c x_i)^{m_{ij}+1}x_j = 0$  en su presentación pero que no satisface las hipótesis anteriores es el de tipo Cartan  $A_2$  con  $q \in \mathbb{G}'_3$ .

### 2.2.3 | Relaciones cuánticas de Serre, $m_{ij} > 0$ , $q_{ii}^{m_{ij}+1} = 1$

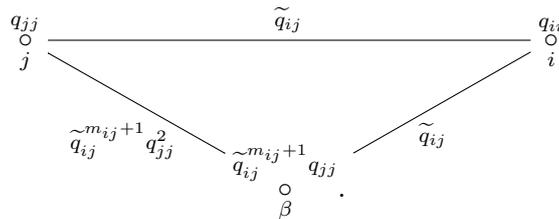
A continuación nos ocuparemos de las relaciones cuánticas de Serre  $(\text{ad}_c x_i)^{m_{ij}+1}x_j$  cuando  $q_{ii}^{m_{ij}+1} = 1$ . Con estas condiciones estas relaciones aparecen en la presentación de las álgebras de pre-Nichols distinguidas.

**Lema 2.2.6.** Sean  $i, j \in \mathbb{I}_\theta$  tales que  $q_{ii}^{-m_{ij}} = \tilde{q}_{ij} = q_{ii}$ . Asumamos que se cumple alguna de las siguientes condiciones:

- (a)  $q_{jj} \neq -1$ ,
- (b)  $m_{ij} \geq 2$ ,
- (c)  $m_{ij} = 1$ ,  $q_{ii} = -1$  y existen  $k \in \mathbb{I}_\theta - \{i, j\}$  tales que  $\tilde{q}_{jk}, \tilde{q}_{ik}^2\tilde{q}_{jk} \neq 1$ .

Entonces  $(\text{ad}_c x_i)^{m_{ij}+1}x_j = 0$  en  $\mathcal{B}$ .

*Demostración.* Supongamos que  $x_\beta := (\text{ad}_c x_i)^{m_{ij}+1}x_j \neq 0$ . Notemos que  $\tilde{q}_{j\beta} = \tilde{q}_{ij}^{m_{ij}+1}q_{jj}^2$ ,  $\tilde{q}_{i\beta} = \tilde{q}_{ij}$  y  $q_{\beta\beta} = \tilde{q}_{ij}^{m_{ij}+1}q_{jj}$ . Así el diagrama de Dynkin del subespacio vectorial trenzado  $\mathbb{k}x_j + \mathbb{k}x_i + \mathbb{k}x_\beta$  es



Si  $q_{jj} \neq -1$ , entonces  $\tilde{q}_{ij}, \tilde{q}_{i\beta}, \tilde{q}_{j\beta} \neq 1$ . Si  $q_{ii} \neq -1$ , entonces los 3 vértices tienen etiqueta distinta de  $-1$  y el Lema 1.9.7 implica que  $\text{GKdim } \mathcal{B}_{\mathbf{q}'} = \infty$ . Si  $q_{ii} = -1$ , entonces es rápido chequear que el diagrama no está en [H3, Table 2].

Si  $q_{jj} = -1$ , entonces  $m_{ij} \geq 2$ , luego  $\text{ord } q_{ii} \geq 3$  y nos queda el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} -1 & & q_{ii} & & q_{ii} & & -1 \\ \circ & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & \circ \\ j & & & & i & & \beta \end{array},$$

que no está en [H3, Table 2]. En ambos casos obtenemos un absurdo. Así  $x_\beta = 0$ .

(c) Supongamos que  $x_\beta := (\text{ad}_c x_i)^2 x_j \neq 0$ . Tenemos que  $q_{k\beta} = \tilde{q}_{ik}^2 \tilde{q}_{jk} \neq 1$  y  $\tilde{q}_{i\beta} = q_{ii}^5 = -1$ . Como  $\tilde{q}_{jk} \neq 1$ , el diagrama del subespacio vectorial trenzado  $\mathbb{k}x_i + \mathbb{k}x_j + \mathbb{k}x_k + \mathbb{k}x_\beta$  contiene un 4-ciclo, lo que contradice el Lema 1.9.8. Por lo tanto  $x_\beta = 0$ .  $\square$

*Observación 2.2.7.* Las hipótesis de este lema difieren de las de la relación correspondiente dadas en [An2, Theorem 3.1]. Por inspección, los únicos diagramas de la clasificación de [H3] que tienen la relación  $(\text{ad}_c x_i)^{m_{ij}+1} x_j = 0$  en su presentación pero que no satisfacen las hipótesis anteriores son de tipo Cartan  $A_\theta$  o  $D_\theta$  con  $q = -1$ .

## 2.3 | Relaciones que aparecen frecuentemente

A continuación estudiamos otras relaciones que no son de Serre pero que aparecen en muchas de las presentaciones de las álgebras de Nichols clasificadas en [H3].

**Lema 2.3.1.** *Sea  $i \in \mathbb{I}_\theta$  un vértice que no es de Cartan tal que  $q_{ii} \in \mathbb{G}'_N$ ,  $N \geq 2$ . Entonces  $x_i^N = 0$ .*

*Demostración.* Como  $i$  no es de Cartan, existe  $j \neq i$  tal que  $\tilde{q}_{ij} \notin \{q_{ii}^{-n} : n \in \mathbb{N}_0\} = \mathbb{G}_N$ . Supongamos que  $x_\beta := x_i^N \neq 0$ . Entonces  $\mathbb{k}x_\beta + \mathbb{k}x_j \subset \mathcal{P}(\mathcal{B})$  es un subespacio trenzado de tipo diagonal con diagrama de Dynkin:  $\begin{array}{ccc} 1 & & q_{jj} \\ \circ & \xrightarrow{\tilde{q}_{ij}^N} & \circ \end{array}$ . Como  $\tilde{q}_{ij}^N \neq 1$ ,  $\text{GKdim } \mathcal{B}(W) = \infty$  por el Lema 1.9.3. Pero esto es una contradicción del Lema 1.9.1. Por lo tanto  $x_\beta = 0$ .  $\square$

**Lema 2.3.2.** *Sean  $i, j \in \mathbb{I}_\theta$  tales que  $q_{ii} = \tilde{q}_{ij} = q_{jj} = -1$ . Asumamos que existe  $k \in \mathbb{I}_\theta - \{i, j\}$  tal que  $\tilde{q}_{ik}^2 \tilde{q}_{jk}^2 \neq 1$ , entonces  $x_{ij}^2 = 0$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $x_\beta := x_{ij}^2 \neq 0$ . Computando el diagrama de Dynkin del subespacio vectorial trenzado  $\mathbb{k}x_k + \mathbb{k}x_\beta$  tenemos que  $q_{\beta\beta} = 1$ ,  $\tilde{q}_{\beta k} = \tilde{q}_{ik}^2 \tilde{q}_{jk}^2 \neq 1$ . Luego por el Lema 1.9.3 tenemos una contradicción, entonces  $x_{ij}^2 = 0$ .  $\square$

*Observación 2.3.3.* Las hipótesis de este lema difieren de las de la relación correspondiente dadas en [An2, Theorem 3.1]. Por inspección, los únicos diagramas de la clasificación de [H3] que tienen la relación  $x_{ij}^2 = 0$  en su presentación pero que no satisfacen las hipótesis anteriores son de tipo Cartan  $A_\theta$  o  $D_\theta$  con  $q = -1$ .

**Lema 2.3.4.** *Sean  $i, j, k \in \mathbb{I}_\theta$  tales que  $q_{jj} = -1$ ,  $\tilde{q}_{ik} = \tilde{q}_{ij} \tilde{q}_{jk} = 1$  y  $\tilde{q}_{ij} \neq \pm 1$ . Supongamos que vale alguna de las siguientes condiciones:*

- (a)  $q_{ii} = -1$  o  $q_{kk} = -1$ ,
- (b)  $q_{ii} q_{kk} = 1$  y existe un  $\ell \in \mathbb{I}_\theta - \{i, j, k\}$  tal que  $\tilde{q}_{i\ell} \neq 1 = \tilde{q}_{j\ell} = \tilde{q}_{k\ell}$ ,

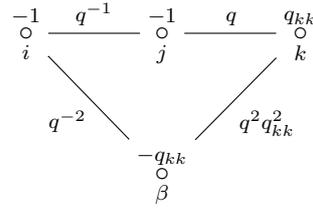
(c)  $q_{ii}q_{kk} = 1$  y existe un  $\ell \in \mathbb{I}_\theta - \{i, j, k\}$  tal que  $\tilde{q}_{j\ell}^2 \neq 1 = \tilde{q}_{i\ell} = \tilde{q}_{k\ell}$ ,

(d)  $q_{ii}q_{kk} = 1$  y existe un  $\ell \in \mathbb{I}_\theta - \{i, j, k\}$  tal que  $\tilde{q}_{k\ell} \neq 1 = \tilde{q}_{j\ell} = \tilde{q}_{i\ell}$ .

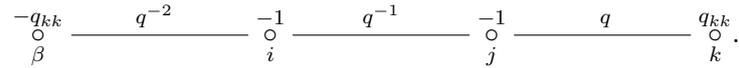
Entonces  $[x_{ijk}, x_j]_c = 0$  en  $\mathcal{B}$ .

*Demostración.* Asumiremos la Conjetura 1.9.4. Supongamos que  $x_\beta := [x_{ijk}, x_j]_c \neq 0$ . Denotemos  $q = \tilde{q}_{jk} = \tilde{q}_{ij}^{-1}$ .

(a) Supongamos sin pérdida de generalidad que  $q_{ii} = -1$ . El diagrama de Dynkin del subespacio vectorial trenzado  $\mathbb{k}x_i + \mathbb{k}x_j + \mathbb{k}x_k + \mathbb{k}x_\beta$  es



Si  $q^2 q_{kk}^2 \neq 1$ , el diagrama anterior es un 4-ciclo, luego por el Lema 1.9.8 tenemos una contradicción. Asumimos entonces que  $q^2 q_{kk}^2 = 1$ , es decir  $q_{kk} = \pm q^{-1}$ , con lo cual el diagrama de Dynkin de  $\mathbb{k}x_i + \mathbb{k}x_j + \mathbb{k}x_k + \mathbb{k}x_\beta$  es



Este diagrama no aparece en [H3, Table 3] ya que no hay diagramas tales que

- Los vértices centrales son  $-1$ .
- Los vértices de los extremos son opuestos y ambos distintos de  $-1$ .

De esta forma  $x_\beta = 0$  en  $\mathcal{B}$ .

Ahora probemos (b), (c) y (d). Computando el diagrama de Dynkin de  $\mathbb{k}x_\beta + \mathbb{k}x_\ell$ ,  $q_{\beta\beta} = q_{ii}q_{kk} = 1$  y  $\tilde{q}_{\ell\beta} = \tilde{q}_{i\ell}\tilde{q}_{j\ell}^2\tilde{q}_{k\ell} \neq 1$  lo que contradice el Lema 1.9.3. Así,  $x_\beta = 0$  en  $\mathcal{B}$ .  $\square$

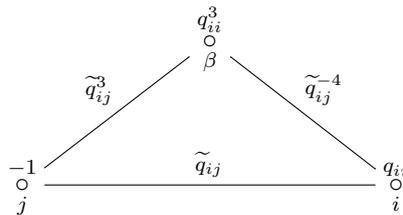
*Observación 2.3.5.* Las hipótesis de este lema difieren de las de la relación correspondiente dadas en [An2, Theorem 3.1]. Por inspección, los únicos diagramas de la clasificación de [H3] que tienen la relación  $[x_{ijk}, x_j]_c = 0$  en su presentación pero que no satisfacen las hipótesis anteriores son de tipo Cartan  $A_\theta$  o  $D_\theta$  con  $q = -1$ , y  $\mathbf{A}_3(q|\{2\})$ , con  $q \in \mathbb{G}_\infty$ .

**Lema 2.3.6.** Sean  $i, j \in \mathbb{I}_\theta$  tales que:

$$q_{ii}\tilde{q}_{ij} \in \mathbb{G}'_3 \cup \mathbb{G}'_6, \quad q_{jj} = -1, \quad \text{o bien } q_{ii} \in \mathbb{G}'_3 \text{ o } m_{ij} \geq 3,$$

entonces  $[x_{iij}, x_{ij}]_c = 0$ .

*Demostración.* La prueba sigue los mismos pasos que [An2, Lemma 4.3 (i)]. Supongamos que  $x_\beta := [x_{iij}, x_{ij}]_c \neq 0$ . El diagrama de Dynkin de  $\mathbb{k}x_i + \mathbb{k}x_j + \mathbb{k}x_\beta$  es:



Si  $q_{ii} \in \mathbb{G}'_3$ , llegamos a un absurdo por el Lema 1.9.3, ya que  $\tilde{q}_{ij}^3 \neq 1$  o  $\tilde{q}_{ij}^4 \neq 1$ .

Asumimos ahora  $m_{ij} \geq 3$ : el diagrama anterior es conexo, luego, por el Teorema 1.9.5 debería aparecer en [H3, Table 2]. Este hecho no es posible observando que el único diagrama en [H3, Table 2] con algún  $m_{rs} \geq 3$  es el primero de la fila 7. Eso forzaría  $\tilde{q}_{ij}^3 = 1$  (para desconectar  $j$  con  $\beta$ ),  $\tilde{q}_{ij} = q_{ii}^{-3} = -1$  (para que el subdiagrama de  $i$  y  $j$  sea de tipo Cartan  $G_2$ ), lo cual es un absurdo. Por lo tanto  $x_\beta = 0$ .  $\square$

**Lema 2.3.7.** Sean  $i, j, k \in \mathbb{I}_\theta$  tales que  $q_{ii} = \pm \tilde{q}_{ij} \in \mathbb{G}'_3$ ,  $\tilde{q}_{ik} = 1$  y vale una de las siguientes condiciones:

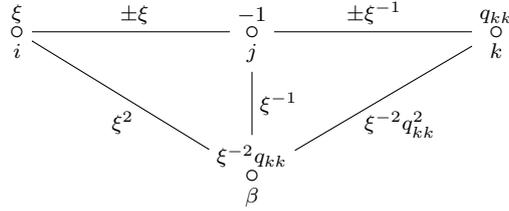
$$(a) \quad q_{jj} = -1, \tilde{q}_{ij} = \tilde{q}_{jk}^{-1}. \quad (b) \quad q_{jj}^{-1} = \tilde{q}_{ij} = \tilde{q}_{jk} \neq -1.$$

Entonces  $[x_{iij}, x_{ij}]_c = 0$ .

*Demostración.* Asumiremos la Conjetura 1.9.4. Supongamos que  $x_\beta := [x_{iij}, x_{ij}]_c \neq 0$  y denotemos  $\xi = q_{ii}$ . Tenemos que en  $\mathbb{k}x_i + \mathbb{k}x_j + \mathbb{k}x_k + \mathbb{k}x_\beta$ :

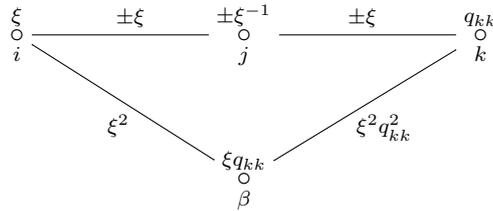
$$\begin{aligned} \tilde{q}_{k\beta} &= \tilde{q}_{jk}^2 q_{kk}^2, & \tilde{q}_{j\beta} &= q_{jj}^4 \tilde{q}_{ij}^3 \tilde{q}_{jk}, \\ \tilde{q}_{i\beta} &= q_{ii}^6 \tilde{q}_{ij}^2 = \xi^2 \neq 1, & q_{\beta\beta} &= q_{ii}^9 q_{jj}^4 q_{kk} \tilde{q}_{ij}^6 \tilde{q}_{jk}^2 = q_{jj}^4 q_{kk} \tilde{q}_{jk}^2. \end{aligned}$$

Asumimos primero que vale (a). En este caso el diagrama de Dynkin de  $\mathbb{k}x_i + \mathbb{k}x_j + \mathbb{k}x_k + \mathbb{k}x_\beta$  es



Luego  $i, j, \beta$  forman un 3-ciclo: por el Lema 1.9.7  $q_{ii} \tilde{q}_{ij} = \pm \xi^2 = 1$ . Absurdo.

Asumimos ahora que vale (b). El diagrama de Dynkin de  $\mathbb{k}x_i + \mathbb{k}x_j + \mathbb{k}x_k + \mathbb{k}x_\beta$  es:



Si  $\tilde{q}_{k\beta} = \xi^2 q_{kk}^2 \neq 1$ , entonces el diagrama es un 4-ciclo, lo que contradice el Lema 1.9.8.

Si  $q_{kk} = \xi^{-1}$ , entonces  $q_{\beta\beta} = 1$  y  $\tilde{q}_{i\beta} \neq 1$  que contradice el Lema 1.9.3. Finalmente, sea  $q_{kk} = -\xi^{-1}$ . El diagrama de Dynkin de  $\mathbb{k}x_i + \mathbb{k}x_j + \mathbb{k}x_k + \mathbb{k}x_\beta$  es:

$$\begin{array}{ccccccc} -1 & & \xi^2 & & \xi & & \pm \xi^{-1} & & \pm \xi & & -\xi^{-1} \\ \circ & \text{---} & \circ \\ \beta & & i & & j & & k & & & & \end{array}$$

que no pertenece a [H3, Table 3] notando que:

- Sólo un vértice tiene etiqueta = -1, y es un vértice de un extremo.
- $q_{\beta\beta} = -1$ ,  $q_{ii} = \tilde{q}_{i\beta}^{-1} \in \mathbb{G}'_3$  y  $q_{kk} \in \mathbb{G}'_6$ .

En cualquier caso obtenemos un absurdo, de donde  $x_\beta = 0$ . □

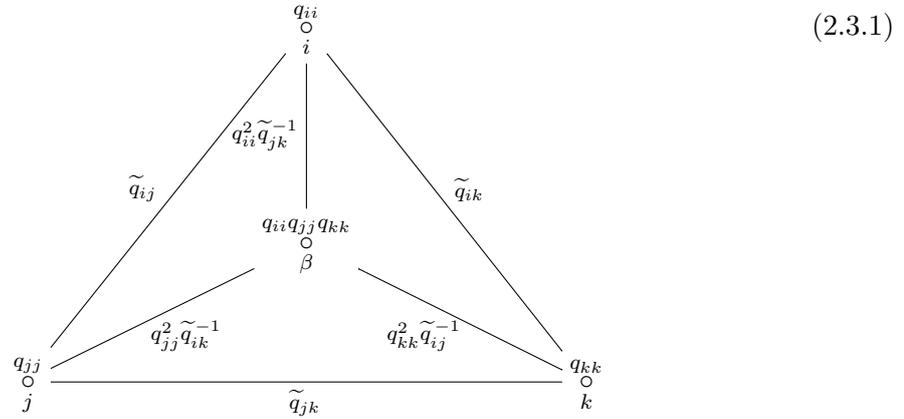
**Lema 2.3.8.** Sean  $i, j, k \in \mathbb{I}_\theta$  tales que  $\tilde{q}_{ij}, \tilde{q}_{ik}, \tilde{q}_{jk} \neq 1$ . Entonces

$$x_{ijk} = q_{ij}(1 - \tilde{q}_{jk})x_jx_{ik} - \frac{1 - \tilde{q}_{jk}}{q_{kj}(1 - \tilde{q}_{ik})}[x_{ik}, x_j]_c.$$

*Demostración.* Asumiremos la Conjetura 1.9.4. Supongamos que

$$x_\beta := x_{ijk} - q_{ij}(1 - \tilde{q}_{jk})x_jx_{ik} + \frac{1 - \tilde{q}_{jk}}{q_{kj}(1 - \tilde{q}_{ik})}[x_{ik}, x_j]_c \neq 0.$$

Entonces el diagrama de Dynkin del subespacio vectorial trenzado  $\mathbb{k}x_i + \mathbb{k}x_j + \mathbb{k}x_k + \mathbb{k}x_\beta$  es:

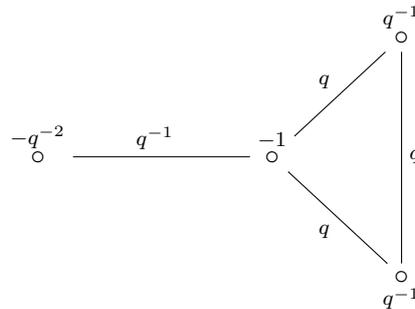


Por el Lema 1.9.7 existe  $\ell \in \{i, j, k\}$  tal que  $q_{\ell\ell} = -1$ . Supongamos que existen  $\ell_1, \ell_2 \in \{i, j, k\}$  distintos tales que  $q_{\ell_1\ell_1} = q_{\ell_2\ell_2} = -1$ : entonces  $\tilde{q}_{\beta\ell_1}, \tilde{q}_{\beta\ell_2} \neq 1$  y por lo tanto 2.3.1 contiene un 4-ciclo, lo cual contradice el Lema 1.9.8. Así existe un único  $\ell \in \{i, j, k\}$  tal que  $q_{\ell\ell} = -1$ : por la simetría en 2.3.1 podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $q_{ii} = -1 \neq q_{jj}, q_{kk}$ .

Por el Lema 1.9.7 tenemos que  $q_{jj}\tilde{q}_{ij} = 1 = q_{kk}\tilde{q}_{ik}$ . Además,  $q_{i\beta} = \tilde{q}_{jk}^{-1} \neq 1$ . Como 2.3.1 no puede contener 4-ciclos, se tiene que  $q_{jj}^2\tilde{q}_{ik}^{-1} = 1 = q_{kk}^2\tilde{q}_{ij}^{-1}$ . Denotemos  $q = \tilde{q}_{jk}$ . Entonces

$$1 = q_{jj}^2\tilde{q}_{ik}^{-1} = \tilde{q}_{ij}^{-2}\tilde{q}_{ik}^{-1} = \tilde{q}_{ij}^{-1}q, 1 = q_{kk}^2\tilde{q}_{ij}^{-1} = \tilde{q}_{ik}^{-2}\tilde{q}_{ij}^{-1} = \tilde{q}_{ik}^{-1}q,$$

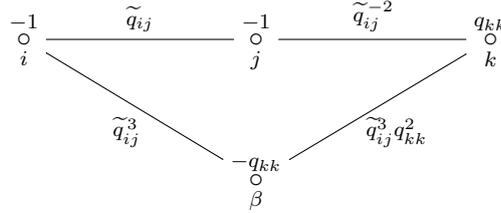
con lo cual  $\tilde{q}_{ij} = \tilde{q}_{ik} = q$ . Además  $q_{jj} = q_{kk} = q^{-1}$ ,  $q_{\beta\beta} = -q^{-2}$  y  $1 = \tilde{q}_{ij}\tilde{q}_{ik}\tilde{q}_{jk} = q^3$ . El diagrama de Dynkin de  $\mathbb{k}x_i + \mathbb{k}x_j + \mathbb{k}x_k + \mathbb{k}x_\beta$  es



que no pertenece a [H3, Table 3]: en efecto, la única etiqueta igual a  $-1$  la tiene el vértice de grado 3. Así  $x_\beta = 0$ .  $\square$

**Lema 2.3.9.** Sean  $i, j, k \in \mathbb{I}_\theta$  tales que  $\tilde{q}_{ik} = 1$ ,  $q_{jj} = q_{ii} = -1$  y  $\tilde{q}_{ij}^2 = \tilde{q}_{jk}^{-1} \neq 1$ . Si  $q_{kk} \neq -1$  o  $\tilde{q}_{ij}^3 \neq 1$ , entonces  $[[x_{ij}, x_{ijk}]_c, x_j]_c = 0$ .

*Demostración.* Asumiremos la Conjetura 1.9.4. Supongamos que  $x_\beta := [[x_{ij}, x_{ijk}]_c, x_j]_c \neq 0$ . El diagrama de Dynkin de  $\mathbb{k}x_i + \mathbb{k}x_j + \mathbb{k}x_k + \mathbb{k}x_\beta$  es



- Si  $q_{kk} = -1$ , entonces  $\tilde{q}_{ij}^3 \neq 1$  por hipótesis: el subdiagrama determinado por  $i$  y  $u$  es como en el Lema 1.9.3, absurdo.
- Si  $\tilde{q}_{ij}^3 = 1$ , entonces  $q_{kk}^2 \neq 1$ , y el subdiagrama determinado por  $i$  y  $u$  es como en el Corolario 1.9.6, absurdo.
- Si  $q_{kk}^2, \tilde{q}_{ij}^3 \neq 1$ ,  $i, j, k, \beta$  forman un 4-ciclo, absurdo por el Lema 1.9.8.

Del análisis de todos los casos, concluimos que  $x_\beta = 0$  en  $\mathcal{B}$ .  $\square$

*Observación 2.3.10.* Las hipótesis de este lema difieren de las de la relación correspondiente dadas en [An2, Theorem 3.1]. Por inspección, el único diagrama de la clasificación de [H3] que tienen la relación  $[[x_{ij}, x_{ijk}]_c, x_j]_c = 0$  en su presentación pero que no satisface las hipótesis anteriores es de tipo  $\mathfrak{g}(2, 3)$ :

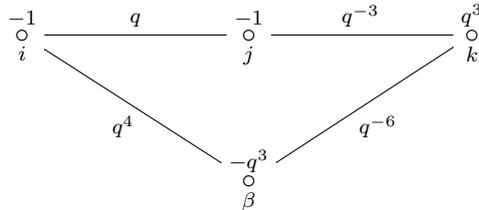
$$\begin{array}{c} -1 & \xi & -1 & \xi & -1 \\ \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ \end{array}.$$

**Lema 2.3.11.** Sean  $i, j, k \in \mathbb{I}_\theta$  y  $q \in \mathbb{k} - (\mathbb{G}_2 \cup \mathbb{G}_3)$  tales que

$$q_{ii} = q_{jj} = -1, \quad \tilde{q}_{ij} = q, \quad q_{kk}^{-1} = q^{-3} = \tilde{q}_{jk}, \quad \tilde{q}_{ik} = 1.$$

Entonces  $[[x_{ij}, [x_{ij}, x_{ijk}]_c], x_j]_c = 0$ .

*Demostración.* Asumiremos la Conjetura 1.9.4. Supongamos que  $x_\beta := [[x_{ij}, [x_{ij}, x_{ijk}]_c], x_j]_c \neq 0$ . El diagrama de Dynkin asociado a  $\mathbb{k}x_i + \mathbb{k}x_j + \mathbb{k}x_k + \mathbb{k}x_\beta$  es

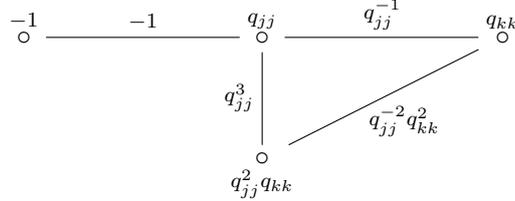


Si  $q \notin \mathbb{G}'_6$  entonces el subdiagrama de vértices  $k, \beta$  es  $\begin{array}{c} q^3 & q^{-6} & -q^3 \\ \circ & \text{---} & \circ \end{array}$  con  $q^3 \neq \pm 1$ , contradicción proveniente del Corolario 1.9.6.



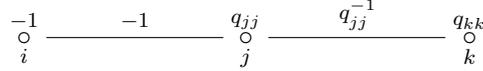
**Lema 2.3.15.** Sean  $i, j, k \in \mathbb{I}_\theta$  tales que  $q_{ii} = \tilde{q}_{ij} = -1$ ,  $q_{jj} = \tilde{q}_{jk}^{-1} \neq -1$  y  $\tilde{q}_{ik} = 1$ . Entonces  $[x_{ij}, x_{ijk}]_c = 0$ .

*Demostración.* Asumiremos la Conjetura 1.9.4. Supongamos que  $x_\beta := [x_{ij}, x_{ijk}]_c \neq 0$ . El diagrama de Dynkin de  $\mathbb{k}x_i + \mathbb{k}x_j + \mathbb{k}x_k + \mathbb{k}x_\beta$  es



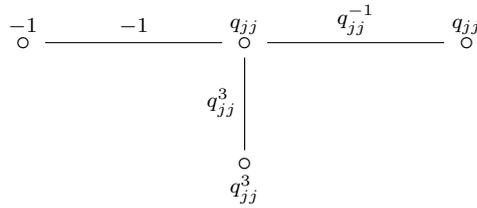
Notemos que  $q_{kk} \neq -q_{jj}$ , pues en caso contrario el subdiagrama determinado por  $j$  y  $k$  no está en [H3, Table 1]. Por inspección, hay 3 casos posibles:

- $q_{jj}^3 \neq 1$ ,  $q_{kk}^2 \neq q_{jj}^2$ : Los vértices  $i, j, \beta$  forman un triángulo. Por el Lema 1.9.7,  $1 = \tilde{q}_{jk} \tilde{q}_{k\beta} \tilde{q}_{j\beta} = q_{kk}^2$ , luego  $q_{kk} = -1$ . Nuevamente por el Lema 1.9.7 tenemos  $1 = \tilde{q}_{k\beta} q_{\beta\beta} = -1$ , absurdo.
- $q_{jj}^3 = 1$ ,  $q_{kk}^2 \neq q_{jj}^2$ . Tenemos el siguiente diagrama de Dynkin



Mirando [H3, Table 2], la única posibilidad es  $q_{kk} = -1$ . Luego el diagrama de Dynkin de  $\mathbb{k}x_k + \mathbb{k}x_\beta$  es  $\begin{array}{cc} \circ & \xrightarrow{q_{jj}^{-2}} \circ \\ -1 & \end{array}$  que no pertenece a [H3, Table 1].

- $q_{jj}^3 \neq 1$ ,  $q_{kk}^2 = q_{jj}^2$ : El diagrama de Dynkin de  $\mathbb{k}x_i + \mathbb{k}x_j + \mathbb{k}x_k + \mathbb{k}x_\beta$  es

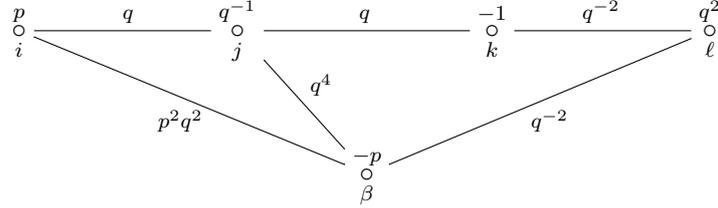


y no pertenece a [H3, Table 3] ya que el vértice de grado 3 tiene una etiqueta distinta de  $-1$  y una de las aristas tiene etiqueta  $-1$ .

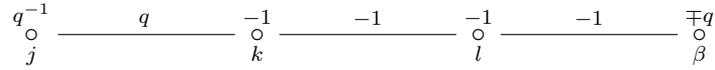
En cualquier caso se obtiene un absurdo. Así se deduce que  $x_\beta = 0$ . □

**Lema 2.3.16.** Sean  $i, j, k, \ell \in \mathbb{I}_\theta$   $q_{kk} = -1$ ,  $q_{jj} \tilde{q}_{ij} = q_{jj} \tilde{q}_{jk} = 1$ ,  $\tilde{q}_{ik} = \tilde{q}_{il} = \tilde{q}_{j\ell} = 1$  y  $\tilde{q}_{jk}^2 = \tilde{q}_{k\ell}^{-1} = q_{\ell\ell}$ . Entonces  $[[x_{ijkl}, x_k]_c, x_j]_c, x_k]_c = 0$ .

*Demostración.* Asumiremos la Conjetura 1.9.4. Supongamos que  $x_\beta := [[[x_{ijkl}, x_k]_c, x_j]_c, x_k]_c \neq 0$ . Denotemos  $q = \tilde{q}_{ij}$  y  $p = q_{ii}$ . El diagrama de Dynkin de  $\mathbb{k}x_i + \mathbb{k}x_j + \mathbb{k}x_k + \mathbb{k}x_\ell + \mathbb{k}x_\beta$  es



Por el Lema 1.9.8 tenemos que  $q \in \mathbb{G}'_4$ ,  $p = \pm q \in \mathbb{G}'_4$ . Luego el diagrama de Dynkin de  $\mathbb{k}x_j + \mathbb{k}x_k + \mathbb{k}x_\ell + \mathbb{k}x_\beta$  es



Este diagrama no pertenece a [H3, Table 3] pues:

- Los vértices de grado 1 tienen por etiqueta una raíz de orden 4.
- Los vértices de grado 2 tienen etiqueta igual a  $-1$ , al igual que la arista central.
- Uno de los vértices de grado uno satisface que el producto de su etiqueta por la etiqueta de su arista adyacente no es igual a 1.

Absurdo, luego  $x_\beta = 0$ . □

**Lema 2.3.17.** Sean  $i, j, k, \ell \in \mathbb{I}_\theta$  y  $q \in \mathbb{k} - (\mathbb{G}_2 \cup \mathbb{G}_3)$  tales que

$$q_{\ell\ell} = \tilde{q}_{k\ell}^{-1} = q_{kk} = \tilde{q}_{jk}^{-1} = q^2, \quad q_{jj} = -1, \quad q_{ii} = \tilde{q}_{ij}^{-1} = q^{-3}, \quad \tilde{q}_{ik} = \tilde{q}_{i\ell} = \tilde{q}_{j\ell} = 1.$$

Entonces  $[[[x_{ijk}, x_j]_c, [x_{ijkl}, x_j]_c, x_k]_c = 0$ .

*Demostración.* Supongamos que  $x_\beta := [[[x_{ijk}, x_j]_c, [x_{ijkl}, x_j]_c, x_k]_c \neq 0$ . Entonces en  $\mathbb{k}x_i + \mathbb{k}x_j + \mathbb{k}x_k + \mathbb{k}x_\ell + \mathbb{k}x_\beta$  tenemos que:

$$\tilde{q}_{i\beta} = q_{ii}^4 \tilde{q}_{ij}^5 = q^{-3} \neq 1, \quad \tilde{q}_{\ell\beta} = q_{\ell\ell}^2 \tilde{q}_{k\ell}^3 = q^{-2} \neq 1$$

Luego  $i, j, k, \ell, \beta$  forman un 5-ciclo lo que contradice el Lema 1.9.8. Así  $x_\beta = 0$ . □

**Lema 2.3.18.** Sean  $i, j, k, \ell \in \mathbb{I}_\theta$  y  $q \in \mathbb{k} - (\mathbb{G}_2 \cup \mathbb{G}_3)$  tales que

$$q_{ii} = \tilde{q}_{ij}^{-1} = q^2, \quad q_{kk} = -1, \quad q_{\ell\ell}^{-1} = \tilde{q}_{k\ell} = q^3, \quad \tilde{q}_{jk}^{-1} = q_{jj} = q, \quad \tilde{q}_{ik} = \tilde{q}_{i\ell} = \tilde{q}_{j\ell} = 1.$$

Entonces

$$[[[x_{ijkl}, x_j]_c, x_k]_c - q_{jk}(q^2 - q)[[x_{ijkl}, x_k]_c, x_j]_c = 0.$$

*Demostración.* Asumiremos la Conjetura 1.9.4. Supongamos que  $x_\beta := [[x_{ijkl}, x_j]_c, x_k]_c - q_{jk}(q^2 - q)[x_{ijkl}, x_k]_c, x_j]_c \neq 0$ . El diagrama de Dynkin de  $\mathbb{k}x_i + \mathbb{k}x_j + \mathbb{k}x_k + \mathbb{k}x_\ell + \mathbb{k}x_\beta$  es

$$\begin{array}{ccccccc} q^2 & & q^{-2} & & q & & q^{-1} & & -1 & & q^3 & & q^{-3} \\ \circ & & \circ \\ i & & j & & k & & \ell & & & & & & \\ & & & & & & & & q & & & & \\ & & & & & & & & | & & & & \\ & & & & & & & & q & & & & \\ & & & & & & & & \circ & & & & \\ & & & & & & & & \beta & & & & \end{array}$$

El subdiagrama de vértices  $j, k, \ell, \beta$  no pertenece a [H3, Table 3]: en efecto, la única etiqueta igual a  $-1$  la tiene el vértice de grado 3 y  $q_{\beta\beta} = \tilde{q}_{k\beta}$ . Contradicción, por lo tanto  $x_\beta = 0$ .  $\square$

**Lema 2.3.19.** Sean  $i, j, k \in \mathbb{I}_\theta$  y  $q \in \mathbb{k} - (\mathbb{G}_2 \cup \mathbb{G}_3)$  tales que

$$q_{ii} = -q^{-1} \quad q_{jj} = -1, \quad \tilde{q}_{ij} = q^2, \quad \tilde{q}_{jk} = q^{-3} = q_{kk}^{-1}, \quad \tilde{q}_{ik} = 1.$$

Entonces

$$[x_i, [x_{ijk}, x_j]_c]_c - \frac{q_{ij}q_{kj}}{1+q}[x_{ij}, x_{ijk}]_c + (q^{-1} - q^{-2})q_{ij}q_{ik}x_{ijk}x_{ij} = 0.$$

*Demostración.* Asumiremos la Conjetura 1.9.4. Supongamos que  $x_\beta \neq 0$ . El diagrama de Dynkin de  $\mathbb{k}x_i + \mathbb{k}x_j + \mathbb{k}x_k + \mathbb{k}x_\beta$  es

$$\begin{array}{ccccccc} -q^{-1} & & q^2 & & -1 & & q^{-3} & & q^3 \\ \circ & & \circ & & \circ & & \circ & & \circ \\ i & & j & & k & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & q \\ & & & & & & & & | \\ & & & & & & & & q \\ & & & & & & & & \circ \\ & & & & & & & & \beta \end{array}$$

Este diagrama no pertenece a [H3, Table 3]: si  $q \in \mathbb{G}'_6$  se tiene que  $m_{j\beta} = 5$ , y si  $q \notin \mathbb{G}'_6$  la única etiqueta igual a  $-1$  la tiene el vértice de grado 3,  $q_{\beta\beta} = \tilde{q}_{j\beta}$ . Así  $x_\beta = 0$ .  $\square$

**Lema 2.3.20.** Sean  $i, j, k \in \mathbb{I}_\theta$  tales que se cumple alguna de las siguientes condiciones:

- (a)  $\tilde{q}_{ij} = q_{jj} = -1$  y  $q_{ii} = -\tilde{q}_{jk}^2 \in \mathbb{G}'_3$ ,  $\tilde{q}_{ik} = 1$ ;
- (b)  $q_{kk} = \tilde{q}_{jk} = q_{jj} = -1$  y  $q_{ii} = -\tilde{q}_{ij} \in \mathbb{G}'_3$ ,  $\tilde{q}_{ik} = 1$ ;
- (c)  $q_{jj} = -1$ ,  $\tilde{q}_{ij} = q_{ii}^{-2} \neq 1$ ,  $q_{kk} = \tilde{q}_{jk}^{-1} = -q_{ii}^3$ ,  $\tilde{q}_{ik} = 1$ ;
- (d)  $q_{ii} = q_{jj} = q_{kk} = -1$ ,  $-\tilde{q}_{ij} = \tilde{q}_{jk} \in \mathbb{G}'_3$ ,  $\tilde{q}_{ik} = 1$ .

Entonces  $[[x_{ij}, x_{ijk}]_c, x_j]_c = 0$  en  $\mathcal{B}$ .

*Demostración.* Supongamos que  $x_\beta := [[x_{ij}, x_{ijk}]_c, x_j]_c \neq 0$ .

- (a) Tenemos que  $\tilde{q}_{i\beta} = -q_{ii} \neq 1$ ,  $\tilde{q}_{j\beta} = \tilde{q}_{jk} \neq 1$ , entonces el diagrama de Dynkin de  $\mathbb{k}x_i \oplus \mathbb{k}x_j \oplus \mathbb{k}x_\beta$  es un (conexo) triángulo. Como  $\text{GKdim } \mathcal{B} < \infty$ , el Lema 1.9.7 implica que  $\tilde{q}_{ij}\tilde{q}_{j\beta}\tilde{q}_{i\beta} = 1$ , pero esto significa que  $q_{ii}\tilde{q}_{jk} = 1$  que contradice  $q_{ii} = -\tilde{q}_{jk}^2 \in \mathbb{G}'_3$ .
- (b) Asumiremos la Conjetura 1.9.4. En este caso  $\tilde{q}_{i\beta} = -q_{ii}$  y  $\tilde{q}_{k\beta} = -1$ , entonces el Diagrama de Dynkin de  $\mathbb{k}x_i \oplus \mathbb{k}x_j \oplus \mathbb{k}x_k \oplus \mathbb{k}x_\beta$  contiene un 4-ciclo, esto contradice el Lema 1.9.8. (c) Como  $\tilde{q}_{i\beta} = q_{ii}^{-2} \neq 1$  y  $\tilde{q}_{k\beta} = q_{kk}^{-1} \neq 1$ , el argumento anterior se aplica nuevamente.
- (d) En este caso  $q_{\beta\beta} = 1$  y  $\tilde{q}_{i\beta} = -1$ , entonces el álgebra de Nichols  $\mathbb{k}x_i \oplus \mathbb{k}x_\beta$  tiene dimensión de GK infinita por el Lema 1.9.3.  $\square$

**Lema 2.3.21.** Sean  $i, j, k \in \mathbb{I}_\theta$  tales que  $q_{kk} = q_{jj} = \tilde{q}_{ij}^{-1} = \tilde{q}_{jk}^{-1} \in \mathbb{G}'_9$ ,  $\tilde{q}_{ik} = 1$  y  $q_{ii} = q_{kk}^6$ . Entonces  $[[x_{ii}, x_{iij}], x_j]_c = 0$  en  $\mathcal{B}$ .

*Demostración.* Supongamos que  $x_\beta := [[x_{ii}, x_{iij}], x_j]_c \neq 0$ . Como  $q_{\beta\beta} = q_{kk}^7$  y  $\tilde{q}_{k\beta} = q_{kk}^{-1} = (q_{kk}^7)^{-4}$  la trenza de  $W := \mathbb{k}x_k \oplus \mathbb{k}x_\beta \subset \mathcal{P}(\mathcal{B})$  es de tipo Cartan Afín  $A_2^{(2)}$ . Entonces  $\text{GKdim } \mathcal{B}(W) = \infty$  por [AAnH4, Theorem 1.2 (a)], contradicción.  $\square$

## 2.4 | Relaciones poco frecuentes

Ahora consideremos las relaciones restantes en [An2, Theorem 3.1]: cada una de ellas aparece para muy pocos diagramas con sistema de raíces finito.

**Lema 2.4.1.** Sean  $i, j, k \in \mathbb{I}_\theta$  tales que  $q_{ii} = \tilde{q}_{ij}^{-1} \in \mathbb{G}'_9$ ,  $q_{jj} = \tilde{q}_{jk}^{-1} = q_{ii}^5$ ,  $\tilde{q}_{ik} = 1$  y  $q_{kk} = q_{ii}^6$ . Entonces  $[[x_{ijk}, x_j]_c, x_k]_c = (1 + \tilde{q}_{jk})^{-1} q_{jk} [[x_{ijk}, x_k]_c, x_j]_c$  en  $\mathcal{B}$ .

*Demostración.* Si  $x_\beta = [[x_{ijk}, x_j]_c, x_k]_c - (1 + \tilde{q}_{jk})^{-1} q_{jk} [[x_{ijk}, x_k]_c, x_j]_c \neq 0$ , entonces  $W := \mathbb{k}x_k \oplus \mathbb{k}x_\beta \subset \mathcal{P}(\mathcal{B})$  tiene el siguiente diagrama de Dynkin  $\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} q \text{---} \\ \circ \end{array}$  donde  $q := q_{ii}^5 \in \mathbb{G}'_9$ .

Como este diagrama no aparece en [H3, Table 1], [AAnH4, Theorem 1.2 (b)] asegura que  $\text{GKdim } \mathcal{B}(W) = \infty$ , lo que contradice  $\text{GKdim } \mathcal{B} < \infty$ .  $\square$

**Lema 2.4.2.** Sean  $i, j, k \in \mathbb{I}_\theta$  tales que  $q_{ii} = q_{kk} = -1$ ,  $\tilde{q}_{ik} = 1$ ,  $\tilde{q}_{ij} \in \mathbb{G}'_3$  y  $q_{jj} = -\tilde{q}_{jk} = \pm \tilde{q}_{ij}$ . Entonces  $[x_i, x_{jjk}]_c = (1 + q_{jj}^2) q_{kj}^{-1} [x_{ijk}, x_j]_c + (1 + q_{jj}^2)(1 + q_{jj}) q_{ij} x_j x_{ijk}$  en  $\mathcal{B}$ .

*Demostración.* Asumiremos la Conjetura 1.9.4. Supongamos que

$$x_\beta := [x_i, x_{jjk}]_c - (1 + q_{jj}^2) q_{kj}^{-1} [x_{ijk}, x_j]_c - (1 + q_{jj}^2)(1 + q_{jj}) q_{ij} x_j x_{ijk} \neq 0.$$

Entonces en el diagrama de Dynkin de  $\mathbb{k}x_i \oplus \mathbb{k}x_j \oplus \mathbb{k}x_k \oplus \mathbb{k}x_\beta$  se tiene que  $\tilde{q}_{\beta i} = \tilde{q}_{\beta k} = \tilde{q}_{ij}^2$  y por lo tanto contiene un 4-ciclo. Contradicción, luego  $x_\beta = 0$  en  $\mathcal{B}$ .  $\square$

**Lema 2.4.3.** Sean  $i, j, k, \ell \in \mathbb{I}_\theta$  tales que  $\tilde{q}_{jk} = \tilde{q}_{ij} = q_{jj}^{-1} \in \mathbb{G}'_4 \cup \mathbb{G}'_6$ ,  $q_{ii} = q_{kk} = -1$ ,  $\tilde{q}_{ik} = \tilde{q}_{il} = \tilde{q}_{j\ell} = 1$  y  $\tilde{q}_{j\ell}^3 = \tilde{q}_{\ell k}$ . Entonces  $[[x_{ijk}, [x_{ijkl}, x_k]_c]_c, x_j]_c = 0$  en  $\mathcal{B}$ .

*Demostración.* Si  $x_\beta := [[x_{ijk}, [x_{ijkl}, x_k]_c]_c, x_j]_c \neq 0$ , entonces  $\mathbb{k}x_i \oplus \mathbb{k}x_j \oplus \mathbb{k}x_\beta$  tiene el siguiente diagrama de Dynkin:

$$\begin{array}{ccc} & \circ & \\ & \text{---} q^{-1} \text{---} & \\ & \circ & \\ & \text{---} q^{-1} \text{---} & \\ \circ & & \circ \\ i & & j \end{array}$$

$$q := q_{jj} \in \mathbb{G}'_4 \cup \mathbb{G}'_6,$$

que no tiene sistema de raíces finito pues  $\tilde{q}_{i\beta} \tilde{q}_{j\beta} \tilde{q}_{ij} = q^{-7} \neq 1$  lo que contradice el Lema 1.9.7. Luego  $x_\beta = 0$  en  $\mathcal{B}$ .  $\square$

**Lema 2.4.4.** Sean  $i, j, k, \ell \in \mathbb{I}_\theta$  tales que se satisface alguna de las siguientes condiciones:

- (i)  $q_{kk} = -1$ ,  $q_{ii} = \tilde{q}_{ij}^{-1} = q_{jj}^2$ ,  $\tilde{q}_{k\ell} = q_{\ell\ell}^{-1} = q_{jj}^3$ ,  $\tilde{q}_{jk} = q_{jj}^{-1}$  y  $\tilde{q}_{ik} = \tilde{q}_{il} = \tilde{q}_{j\ell} = 1$ ;

$$(ii) \quad q_{ii} = \tilde{q}_{ij}^{-1} = -q_{\ell\ell}^{-1} = -\tilde{q}_{kl}, \quad q_{jj} = \tilde{q}_{jk} = q_{kk} = -1 \quad \text{y} \quad \tilde{q}_{ik} = \tilde{q}_{il} = \tilde{q}_{j\ell} = 1;$$

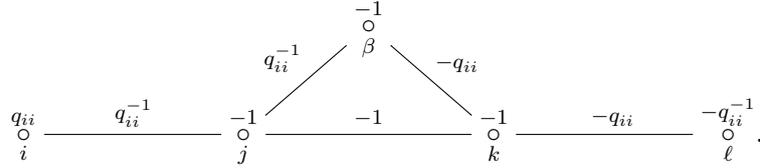
$$(iii) \quad q_{jj} = \tilde{q}_{jk}^{-1} \in \mathbb{G}'_3, \quad q_{ii} = \tilde{q}_{ij}^{-1} = q_{\ell\ell} = \tilde{q}_{kl}^{-1} = -q_{jj}, \quad q_{kk} = -1 \quad \text{y} \quad \tilde{q}_{ik} = \tilde{q}_{il} = \tilde{q}_{j\ell} = 1.$$

Entonces  $[[x_{ijkl}, x_j]_c, x_k]_c = q_{jk}(\tilde{q}_{ij}^{-1} - q_{jj})[[x_{ijkl}, x_k]_c, x_j]_c$  en  $\mathcal{B}$ .

*Demostración.* Supongamos que  $x_\beta := [[x_{ijkl}, x_j]_c, x_k]_c - q_{jk}(\tilde{q}_{ij}^{-1} - q_{jj})[[x_{ijkl}, x_k]_c, x_j]_c \neq 0$ .

(i) Esto es [AnCSa, Lemma 3.24].

(ii) Asumiremos la Conjetura 1.9.4. Tenemos que  $\mathbb{k}x_i \oplus \mathbb{k}x_j \oplus \mathbb{k}x_k \oplus \mathbb{k}x_\ell \oplus \mathbb{k}x_\beta \subset \mathcal{P}(\mathcal{B})$  tiene diagrama de Dynkin



Por inspección este diagrama no aparece en [H3, Table 4]. Contradicción, por lo tanto  $x_\beta = 0$  en  $\mathcal{B}$ .

(iii) El espacio vectorial trenzado  $\mathbb{k}x_j \oplus \mathbb{k}x_\beta$  tiene sistema de raíces finito por el Teorema 1.9.5 pero el respectivo diagrama de Dynkin es  $\overset{q_{jj}}{\circ} \xrightarrow{-q_{jj}} \overset{q_{jj}}{\circ}$ , no pertenece a [H3, Table 1].

Contradicción, por lo tanto  $x_\beta = 0$  en  $\mathcal{B}$ .  $\square$

**Lema 2.4.5.** Sean  $i, j, k \in \mathbb{I}_\theta$  tales que  $\tilde{q}_{jk} = 1$ ,  $q_{ii} = \tilde{q}_{ij} = -\tilde{q}_{ik} \in \mathbb{G}'_3$ . Entonces  $[x_i, [x_{ij}, x_{ik}]_c]_c = -q_{jk}q_{ik}q_{ji}[x_{iik}, x_{ij}]_c - q_{ij}x_{ij}x_{iik}$  en  $\mathcal{B}$ .

*Demostración.* Como  $\mathbb{k}x_j \oplus \mathbb{k}x_i \oplus \mathbb{k}x_k$  tiene un sistema de raíces finito, [H3, Table 2] implica que  $q_{jj} = -1$  y  $q_{kk} \in \{-1, -q_{ii}^{-1}\}$ .

Supongamos que  $x_\beta := [x_i, [x_{ij}, x_{ik}]_c]_c + q_{jk}q_{ik}q_{ji}[x_{iik}, x_{ij}]_c + q_{ij}x_{ij}x_{iik} \neq 0$ . El diagrama de Dynkin de  $\mathbb{k}x_i \oplus \mathbb{k}x_\beta$  es  $d := \overset{q_{ii}}{\circ} \xrightarrow{-q_{ii}^2} \overset{-q_{kk}}{\circ}$ . Si  $q_{kk} = -1$ , entonces  $\text{GKdim } \mathcal{B}(\mathbb{k}x_i \oplus \mathbb{k}x_\beta) = \infty$  por el Lema 1.9.3. En este caso  $q_{kk} = -q_{ii}^{-1}$ , el sistema de raíces de  $d$  es infinito por [H3, Table 1], luego  $\text{GKdim } \mathcal{B}(\mathbb{k}x_i \oplus \mathbb{k}x_\beta) = \infty$  por el Teorema 1.9.5.  $\square$

**Lema 2.4.6.** Sean  $i, j, k \in \mathbb{I}_\theta$  tales que  $q_{jj} = q_{kk} = \tilde{q}_{jk} = -1$ ,  $q_{ii} = -\tilde{q}_{ij} \in \mathbb{G}'_3$  y  $\tilde{q}_{ik} = 1$ . Entonces  $[x_{iijk}, x_{ijk}]_c = 0$  en  $\mathcal{B}$ .

*Demostración.* Supongamos que  $x_\beta := [x_{iijk}, x_{ijk}]_c \neq 0$ . El grado de  $[x_{iijk}, x_{ijk}]_c$  es  $\beta := 3\alpha_i + 2\alpha_j + 2\alpha_k$ . Como  $q_{\beta\beta} = 1$  y  $\tilde{q}_{i\beta} = q_{ii}^2 \neq 1$ , se sigue por el Lema 1.9.3 que  $x_\beta = 0$ .  $\square$

**Lema 2.4.7.** Sean  $i, j \in \mathbb{I}_\theta$  tales que  $-q_{ii}, -q_{jj}, \tilde{q}_{ij}, q_{ii}\tilde{q}_{ij}, q_{jj}\tilde{q}_{ij} \neq 1$ . Entonces la relación  $[x_i, [x_{ij}, x_j]_c]_c = \frac{(1+q_{ij})(1-q_{jj}\tilde{q}_{ij})}{(1-\tilde{q}_{ij})q_{ii}q_{ji}}x_{ij}^2$  es válida en  $\mathcal{B}$ .

*Demostración.* Por [H2, Corollary 13] el diagrama  $\overset{q_{ii}}{\circ} \xrightarrow{\tilde{q}_{ij}} \overset{q_{jj}}{\circ}$  no se puede extender a un diagrama conexo de rango 3 con sistema de raíces finito. Además [H2, Proposition 9 (i)] garantiza que  $q_{ii}\tilde{q}_{ij}^2q_{jj} = -1$  y también que  $q_{ii} \in \mathbb{G}'_3$  o  $q_{jj} \in \mathbb{G}'_3$ . Por simetría podemos

asumir que  $q_{ii} \in \mathbb{G}'_3$ . Supongamos que  $x_\beta := [x_i, [x_{ij}, x_j]_c]_c - \frac{(1+q_{ij})(1-q_{jj}\tilde{q}_{ij})}{(1-q_{ij})q_{ii}q_{ji}} x_{ij}^2 \neq 0$ ; entonces el álgebra de Nichols de  $\mathbb{k}x_i \oplus \mathbb{k}x_j \oplus \mathbb{k}x_\beta$  tiene GKdim finita por el Lema 1.9.1. Por lo tanto, su diagrama no es conexo por el argumento anterior, pero por otro lado  $\tilde{q}_{i\beta} = -q_{jj}^{-1} \neq 1$ . Absurdo, por lo tanto  $x_\beta = 0$  en  $\mathcal{B}$ .  $\square$

*Observación 2.4.8.* La única matriz de la trenza  $\mathbf{q}$  con diagrama de Dynkin conexo y de rango mayor o igual a 3, con sistema de raíces finito y tal que  $3\alpha_i + 2\alpha_j \in \Delta_+^{\mathbf{q}}$  es

$$\begin{array}{c} -1 \\ \circ \end{array} \xrightarrow{q^{-1}} \begin{array}{c} q \\ \circ \end{array} \xrightarrow{q^{-3}} \begin{array}{c} q^3 \\ \circ \end{array}, \quad \text{ord } q > 3, \quad (2.4.1)$$

que es de tipo  $\mathbf{G}(3)$ . Además, este también es el único  $\mathbf{q}$  tal que  $m_{ij} \geq 3$  para algún  $i, j \in \mathbb{I}_3$ , ver [H3, Table 2]. Además, para todo  $\mathbf{q}$  en [H3, Table 2],  $4\alpha_i + 3\alpha_j, 5\alpha_i + 3\alpha_j, 5\alpha_i + 4\alpha_j \notin \Delta_+^{\mathbf{q}}$ . Usaremos esto frecuentemente en los siguientes resultados.

**Lema 2.4.9.** *Supongamos que el diagrama de Dynkin de  $\mathbf{q}$  es alguno de los siguientes:*

$$\begin{array}{ll} \text{brj}(2, 3) : \begin{array}{c} -\zeta^2 \\ \circ \end{array} \xrightarrow{\zeta} \begin{array}{c} -1 \\ \circ \end{array} \xrightarrow{j}, \zeta \in \mathbb{G}'_9; & \text{ufo}(9) : \begin{array}{c} \zeta \\ \circ \end{array} \xrightarrow{\zeta^{-5}} \begin{array}{c} -1 \\ \circ \end{array} \xrightarrow{j}, \zeta \in \mathbb{G}'_{24}; \\ \text{brj}(2, 5) : \begin{array}{c} -\zeta^{-2} \\ \circ \end{array} \xrightarrow{\zeta^{-2}} \begin{array}{c} -1 \\ \circ \end{array} \xrightarrow{j}, \zeta \in \mathbb{G}'_5; & \text{Standard } \mathbf{G}_2 : \begin{array}{c} \zeta^2 \\ \circ \end{array} \xrightarrow{-\zeta^{-1}} \begin{array}{c} -1 \\ \circ \end{array} \xrightarrow{j}, \zeta \in \mathbb{G}'_8; \\ \text{ufo}(10) : \begin{array}{c} -\zeta^{-2} \\ \circ \end{array} \xrightarrow{\pm\zeta^3} \begin{array}{c} -1 \\ \circ \end{array} \xrightarrow{j}, \zeta \in \mathbb{G}'_{20}; & \text{ufo}(11) : \begin{array}{c} \zeta^3 \\ \circ \end{array} \xrightarrow{-\zeta^4} \begin{array}{c} -\zeta^{-4} \\ \circ \end{array} \xrightarrow{j}, \zeta \in \mathbb{G}'_{15}; \\ \text{ufo}(11) : \begin{array}{c} \zeta^3 \\ \circ \end{array} \xrightarrow{-\zeta^2} \begin{array}{c} -1 \\ \circ \end{array} \xrightarrow{j}, \zeta \in \mathbb{G}'_{15}; & \text{ufo}(12) : \begin{array}{c} -\zeta^{-2} \\ \circ \end{array} \xrightarrow{-\zeta^3} \begin{array}{c} -1 \\ \circ \end{array} \xrightarrow{j}, \zeta \in \mathbb{G}'_7. \end{array}$$

Entonces  $[x_i, x_{3\alpha_i+2\alpha_j}]_c = \frac{1-q_{ii}\tilde{q}_{ij}-q_{ii}^2\tilde{q}_{ij}^2q_{jj}}{(1-q_{ii}q_{ij})q_{ii}} x_{ij}^2$  en  $\mathcal{B}$ .

*Demostración.* Notar primero que  $m_{ij} \in \{4, 5\}$  o bien  $m_{ij} = 3, q_{jj} = -1, q_{ii} \in \mathbb{G}'_4$ . Para  $\mathbf{q}$  de tipo standard  $\mathbf{G}_2$ , esta afirmación es probada en [AnCSa, Lemma 6.8]. Para el resto de los casos, supongamos que  $x_\beta := [x_i, x_{3\alpha_i+2\alpha_j}]_c - \frac{1-q_{ii}\tilde{q}_{ij}-q_{ii}^2\tilde{q}_{ij}^2q_{jj}}{(1-q_{ii}q_{ij})q_{ii}} x_{ij}^2 \neq 0$ . El diagrama de Dynkin de  $\mathbb{k}x_i \oplus \mathbb{k}x_j \oplus \mathbb{k}x_\beta$  es conexo pues  $\tilde{q}_{j\beta} \neq 1$  donde  $q_{jj} = -1$ , o bien  $\tilde{q}_{i\beta} \neq 1$  con  $q_{jj} \neq -1$ . Esto es una contradicción con la Observación 2.4.8 y por lo tanto  $x_\beta = 0$ .  $\square$

**Lema 2.4.10.** *Supongamos que el diagrama de Dynkin de  $\mathbf{q}$  es alguno de los siguientes:*

$$\begin{array}{ll} \text{ufo}(7) : \begin{array}{c} -\bar{\zeta}^2 \\ \circ \end{array} \xrightarrow{\bar{\zeta}} \begin{array}{c} \zeta \\ \circ \end{array}, \zeta \in \mathbb{G}'_{12}, & \text{ufo}(8) : \begin{array}{c} -\zeta^2 \\ \circ \end{array} \xrightarrow{\zeta^3} \begin{array}{c} -1 \\ \circ \end{array}, \zeta \in \mathbb{G}'_{12}, \\ \text{ufo}(9) : \begin{array}{c} \zeta^6 \\ \circ \end{array} \xrightarrow{\zeta} \begin{array}{c} \bar{\zeta} \\ \circ \end{array}, \zeta \in \mathbb{G}'_{24}, & \text{ufo}(11) : \begin{array}{c} -\zeta \\ \circ \end{array} \xrightarrow{-\bar{\zeta}^3} \begin{array}{c} \zeta^5 \\ \circ \end{array}, \zeta \in \mathbb{G}'_{15}, \\ \text{brj}(2, 3) : \begin{array}{c} -\zeta \\ \circ \end{array} \xrightarrow{\bar{\zeta}^2} \begin{array}{c} \zeta^3 \\ \circ \end{array}, \zeta \in \mathbb{G}'_9, & \mathbf{G}_2 : \begin{array}{c} \zeta \\ \circ \end{array} \xrightarrow{-1} \begin{array}{c} -1 \\ \circ \end{array}, \zeta \in \mathbb{G}'_6. \end{array}$$

Entonces  $[x_{3\alpha_i+2\alpha_j}, x_{ij}]_c = 0$  en  $\mathcal{B}$ .

*Demostración.* Notar que en todos los casos  $3\alpha_i + 2\alpha_j \in \Delta_+^{\mathfrak{q}}$  pero  $4\alpha_i + 3\alpha_j \notin \Delta_+^{\mathfrak{q}}$ . Para  $\mathfrak{q}$  de tipo Cartan  $\mathbf{G}_2$ , la afirmación está probada en [AnCSa, Lemma 4.2]. Para el resto de los casos, supongamos que  $x_\beta \neq 0$ . Consideremos  $\mathbb{k}x_i \oplus \mathbb{k}x_j \oplus \mathbb{k}x_\beta$ . Como  $\tilde{q}_{i\beta} = q_{ii}^8 \tilde{q}_{ij}^3 \neq 1$  se puede verificar, caso por caso, que el diagrama de ese subespacio es conexo. Pero esto contradice la Observación 2.4.8, ya que ninguno de estos cinco diagramas de rango dos es subdiagrama de 2.4.1. Concluimos que  $x_\beta = 0$ .  $\square$

**Lema 2.4.11.** *Supongamos que el diagrama de Dynkin de  $\mathfrak{q}$  es alguno de los siguientes:*

$$\text{ufo}(11) : \begin{array}{c} -\zeta^3 \quad -\zeta^4 \quad \bar{\zeta}^4 \\ \circ \quad \text{---} \quad \circ \end{array}, \zeta \in \mathbb{G}'_{15}, \quad \text{brj}(2,3) : \begin{array}{c} \zeta^3 \quad \bar{\zeta} \quad -1 \\ \circ \quad \text{---} \quad \circ \end{array}, \zeta \in \mathbb{G}'_9.$$

Entonces  $x_\beta := [x_{ij}, x_{3\alpha_i+2\alpha_j}]_c = 0$  en  $\mathcal{B}$ .

*Demostración.* En estos casos  $3\alpha_i + 2\alpha_j \in \Delta_+^{\mathfrak{q}}$  pero  $5\alpha_i + 3\alpha_j \notin \Delta_+^{\mathfrak{q}}$ . Supongamos que  $x_\beta \neq 0$ . Si  $\mathfrak{q}$  es de tipo  $\text{brj}(2,3)$  entonces  $\tilde{q}_{j\beta} = \zeta^4 \neq 1$ , y si es de tipo  $\text{ufo}(11)$ ,  $\tilde{q}_{i\beta} = -\bar{\zeta}^4 \neq 1$ . Luego el diagrama de Dynkin de  $\mathbb{k}x_i \oplus \mathbb{k}x_j \oplus \mathbb{k}x_\beta \subset \mathcal{P}(\mathcal{B})$  es conexo, lo que contradice la Observación 2.4.8. Entonces  $x_\beta = 0$ .  $\square$

**Lema 2.4.12.** *Supongamos que el diagrama de Dynkin de  $\mathfrak{q}$  es alguno de los siguientes:*

$$\begin{array}{ll} \text{ufo}(10) : \begin{array}{c} \zeta \quad \pm\bar{\zeta}^3 \quad -1 \\ \circ \quad \text{---} \quad \circ \end{array}, \zeta \in \mathbb{G}'_{20}, & \text{ufo}(11) : \begin{array}{c} \zeta^3 \quad -\zeta^4 \quad -\bar{\zeta}^4 \\ \circ \quad \text{---} \quad \circ \end{array}, \zeta \in \mathbb{G}'_{15}, \\ \text{ufo}(11) : \begin{array}{c} \zeta^5 \quad -\bar{\zeta}^2 \quad -1 \\ \circ \quad \text{---} \quad \circ \end{array}, \zeta \in \mathbb{G}'_{15}, & \text{brj}(2,5) : \begin{array}{c} \zeta \quad \zeta^2 \quad -1 \\ \circ \quad \text{---} \quad \circ \end{array}, \zeta \in \mathbb{G}'_5. \end{array}$$

Entonces  $x_\beta := [x_{4\alpha_i+3\alpha_j}, x_{ij}]_c = 0$  en  $\mathcal{B}$ .

*Demostración.* En ambos casos  $4\alpha_i + 3\alpha_j \in \Delta_+^{\mathfrak{q}}$  y  $5\alpha_i + 4\alpha_j \notin \Delta_+^{\mathfrak{q}}$ . Supongamos que  $x_\beta \neq 0$ . Chequeando caso por caso que  $\tilde{q}_{i\beta} = q_{ii}^{10} \tilde{q}_{ij}^4 \neq 1$ , entonces el diagrama de Dynkin de  $\mathbb{k}x_i \oplus \mathbb{k}x_j \oplus \mathbb{k}x_\beta$  es conexo, contradiciendo la Observación 2.4.8. Luego  $x_\beta = 0$ .  $\square$

**Lema 2.4.13.** *Supongamos que el diagrama de Dynkin de  $\mathfrak{q}$  es alguno de los siguientes:*

$$\text{ufo}(10) : \begin{array}{c} -\bar{\zeta}^2 \quad \pm\zeta^3 \quad -1 \\ \circ \quad \text{---} \quad \circ \end{array}, \zeta \in \mathbb{G}'_{20}, \quad \text{ufo}(11) : \begin{array}{c} \zeta^3 \quad -\zeta^4 \quad -\bar{\zeta}^4 \\ \circ \quad \text{---} \quad \circ \end{array}, \zeta \in \mathbb{G}'_{15}.$$

Entonces  $x_\beta := [[x_{iij}, x_{ij}]_c, x_{ij}]_c = 0$  en  $\mathcal{B}$ .

*Demostración.* Si  $x_\beta \neq 0$ , consideremos  $\mathbb{k}x_i \oplus \mathbb{k}x_j \oplus \mathbb{k}x_\beta$ , que tiene diagrama de Dynkin conexo con  $\tilde{q}_{\beta i} = q_{ii}^{14} \tilde{q}_{ij}^3 \neq 1$ . Pero este diagrama tiene un sistema de raíces infinito, pues no aparece en [H3, Table 2]. Contradicción, luego  $x_\beta = 0$ .  $\square$

**Lema 2.4.14.** *Supongamos que el diagrama de Dynkin de  $\mathfrak{q}$  es alguno de los siguientes:*

$$\text{ufo}(9) : \begin{array}{c} -\bar{\zeta}^4 \quad \zeta^5 \quad -1 \\ \circ \quad \text{---} \quad \circ \end{array}, \zeta \in \mathbb{G}'_{24}, \quad \text{ufo}(12) : \begin{array}{c} -\zeta \quad -\bar{\zeta}^3 \quad -1 \\ \circ \quad \text{---} \quad \circ \end{array}, \zeta \in \mathbb{G}'_7.$$

Entonces  $x_\beta := [x_{ij}, x_{4\alpha_i+3\alpha_j}]_c = \mathbf{c}_{\mathfrak{q}} x_{3\alpha_i+2\alpha_j}^2$  en  $\mathcal{B}$ , donde  $\mathbf{c}_{\mathfrak{q}} \in \mathbb{k}$  se puede ver en [An2, (3.29)].

*Demostración.* Supongamos que  $x_\beta \neq 0$ . Como  $\tilde{q}_{\beta i} = q_{ii}^{12} \tilde{q}_{ij}^4 \neq 1$ , el diagrama de Dynkin de  $\mathbb{k}x_i \oplus \mathbb{k}x_j \oplus \mathbb{k}x_\beta$  es conexo. Además,  $5\alpha_i + 4\alpha_j$  pertenece al conjunto de raíces de  $\mathbb{k}x_i \oplus \mathbb{k}x_j \oplus \mathbb{k}x_\beta$ , por lo que el álgebra de Nichols de este espacio tiene  $\text{GKdim} = \infty$  por la Observación 2.4.8. Contradicción, luego  $x_\beta = 0$ .  $\square$

# 3 | Álgebras de pre-Nichols distinguidas que son eminentes

En este capítulo presentaremos uno de los resultados principales de la tesis y una aplicación del mismo. Describiremos todas las matrices  $\mathbf{q}$  tales que el álgebra de pre-Nichols distinguida es eminente.

## 3.1 | Resultado principal

**Teorema 3.1.1.** *Si  $\mathbf{q}$  no es de alguno de los siguientes tipos*

- Cartan  $A_\theta$  o  $D_\theta$  con  $q = -1$ ,
- Cartan  $A_2$  con  $q \in \mathbb{G}'_3$ ,
- $\mathbf{A}_3(q|\{2\})$  o  $\mathbf{A}_3(q|\{1, 2, 3\})$ , con  $q \in \mathbb{G}_\infty$ ,
- $\mathfrak{g}(2, 3)$  con alguno de los siguientes diagramas de Dynkin

$$d_1 : \begin{array}{c} -1 \\ \circ \end{array} \xrightarrow{\xi} \begin{array}{c} -1 \\ \circ \end{array} \xrightarrow{\xi} \begin{array}{c} -1 \\ \circ \end{array}, \quad d_2 : \begin{array}{c} -1 \\ \circ \end{array} \xrightarrow{\xi^2} \begin{array}{c} \xi \\ \circ \end{array} \xrightarrow{\xi} \begin{array}{c} -1 \\ \circ \end{array},$$

entonces  $\mathcal{B}_{\mathbf{q}}$  tiene una única álgebra de pre-Nichols eminente y coincide con el álgebra de pre-Nichols distinguida  $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$ .

*Demostración.* Cuando  $\mathbf{q}$  es tipo Cartan la prueba está completa, ver el Teorema 1.7.6.

Asumimos entonces que  $\mathbf{q}$  no es de tipo Cartan. La presentación del álgebra de Nichols de  $\mathbf{q}$  dada en el Teorema 1.7.2 consiste en una lista de 29 relaciones, cada una de ellas acompañada de condiciones específicas en los escalares de  $\mathbf{q}$  que determinan si las relaciones deben incluirse o no. De la definición de álgebra de pre-Nichols distinguida, una presentación de  $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  está dada por esa misma lista adicionando ocasionalmente relaciones cuánticas de Serre. En el capítulo anterior determinamos condiciones suficientes en  $\mathbf{q}$  para asegurar que algunas de estas relaciones se cumplen en cualquier álgebra pre-Nichols de  $\mathbf{q}$  con  $\text{GKdim dim}$  finita, en algunos casos bajo algunos supuestos adicionales a los de [An2, Theorem 3.1]. Estas condiciones adicionales sólo excluyeron los casos referidos en el enunciado del teorema (ver las observaciones 2.2.2, 2.3.5, 2.3.10 y 2.3.13). De esta forma toda álgebra de pre-Nichols de tipo diagonal y dimensión finita  $\mathcal{B}_{\mathbf{q}}$  que no pertenece a la lista satisface que el álgebra de pre-Nichols distinguida  $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  se proyecta canónicamente en toda álgebra de pre-Nichols con  $\text{GKdim} < \infty$ , o equivalentemente el álgebra de pre-Nichols distinguida es el álgebra de pre-Nichols eminente de  $\mathcal{B}_{\mathbf{q}}$ .  $\square$

### 3.2 | Álgebras de Nichols de dim infinita y GKdim finita

En 3.2.1 tenemos una respuesta a cuál es el álgebra de pre-Nichols eminente cuando  $\dim \mathcal{B}_{\mathbf{q}} < \infty$ . De manera muy similar se prueba el siguiente teorema:

**Teorema 3.2.1.** [C] Sea  $\mathbf{q}$  la matriz de una trenza tal que  $\dim \mathcal{B}_{\mathbf{q}} = \infty$ ,  $\text{GKdim } \mathcal{B}_{\mathbf{q}} < \infty$  y el diagrama de Dynkin  $\mathbf{q}$  es conexo. Asumimos [Conjecture 1.1,AAH]. Si  $\mathbf{q}$  no es de tipo

- $\mathbf{A}_3(q|\{2\})$  o  $\mathbf{A}_3(q|\{1, 2, 3\})$ , con  $q \notin \mathbb{G}_{\infty}$ ,
- $D(2, 1, \alpha)$  tal que dos de los tres parámetros  $q, r, s$  no son raíces de la unidad.

entonces  $\mathcal{B}_{\mathbf{q}}$  es el álgebra de pre-Nichols eminente de  $\mathcal{B}_{\mathbf{q}}$ .

### 3.3 | Aplicación del Teorema 3.1.1

El Teorema 3.1.1 reduce el problema de calcular las álgebras de pre-Nichols de GKdim finita de  $\mathcal{B}_{\mathbf{q}}$  a calcular cocientes de  $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$ . En esta sección indagaremos de como se puede obtener los cocientes de  $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  cuando  $\mathcal{O}_+^{\mathbf{q}}$  tiene pocos elementos.

**Ejemplo 3.3.1.** Si  $\mathbf{q}$  es de tipo  $\text{uf}(7)$  se tiene que  $\mathcal{O}_+^{\mathbf{q}} = \emptyset$  y por lo tanto  $\mathcal{B}_{\mathbf{q}} = \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$ . Luego el poset  $\mathfrak{Pr}_{\text{GKd}}(V)$  de  $\mathbf{q}$  solo tiene un elemento.

**Ejemplo 3.3.2.** Si  $\mathbf{q}$  satisface que  $\mathcal{O}_+^{\mathbf{q}} = \{\alpha\}$  y no es alguna de las excepciones del Teorema 3.1.1 entonces el poset  $\mathfrak{Pr}_{\text{GKd}}(V)$  de  $\mathbf{q}$  solo posee los elementos  $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  y  $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}/\langle x_{\alpha}^{N_{\alpha}} \rangle \simeq \mathcal{B}_{\mathbf{q}}$ .

Ésto ocurre cuando  $\mathbf{q}$  es de uno de los siguientes tipos:  $\mathbf{A}_2(q|\{2\})$ ,  $q \in \mathbb{G}_N$ ,  $\text{uf}(4)$  y  $\text{uf}(8)$ .

*Observación 3.3.3.* Más en general, sea  $\mathbf{q}$  tal que  $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  es la única álgebra de pre-Nichols eminente de  $\mathcal{B}_{\mathbf{q}}$ . Sea

$$\mathcal{Z}_{\mathbf{q}} = \langle x_{\alpha}^{N_{\alpha}} : \alpha \in \mathcal{O}_+^{\mathbf{q}} \rangle.$$

Tenemos los siguientes morfismos en la categoría de módulos de Yetter-Drinfeld

$$\mathcal{Z}_{\mathbf{q}} \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}_{\mathbf{q}}$$

Sea  $x \in \{x_{\alpha}^{N_{\alpha}} : \alpha \in \mathcal{O}_+^{\mathbf{q}}\}$  con grado minimal, luego  $x \in \mathcal{P}(\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}) \cap \ker(\pi)$  y

$$(\text{id} \otimes \pi)\Delta(x) = (\text{id} \otimes \pi)(1 \otimes x + 1 \otimes x) = x \otimes 1$$

así  $x \in \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}^{\text{co}\pi}$  y por lo tanto  $x \in \mathcal{P}(\mathcal{Z}_{\mathbf{q}})$ . Luego  $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}/\langle x \rangle$  es un álgebra de pre-Nichols de  $\mathcal{B}_{\mathbf{q}}$  con GKdim finita.

**Ejemplo 3.3.4.** Sea  $\mathbf{q}$  de tipo  $\mathbf{A}_3(q|\{2, 3\})$ ,  $q \in \mathbb{G}_N$ ,  $N \geq 3$ , ver Ejemplo 2.1.1. En este caso,  $\mathcal{O}_+^{\mathbf{q}} = \{\alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\}$ . Por la Obsevación 3.3.3,

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}/\langle x_1^N \rangle, \quad \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}/\langle x_{23}^N \rangle$$

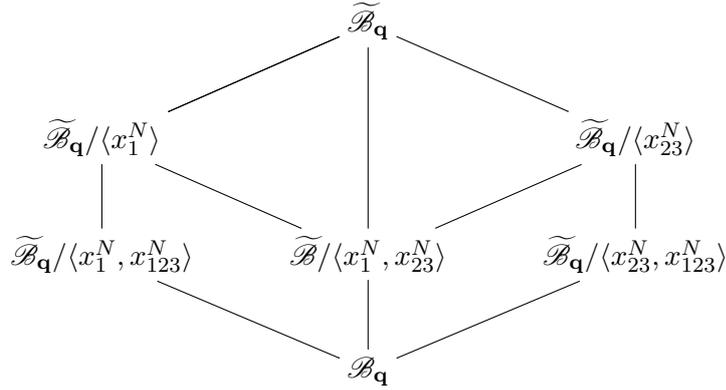
son dos álgebras de pre-Nichols tales que su GKdim es 2. También  $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}/\langle x_1^N, x_{23}^N \rangle$  lo es, y en este caso  $\text{GKdim} = 1$ . Además, por [An4, Proposition 35],

$$\Delta(x_{123}^N) = x_{123}^N \otimes 1 + 1 \otimes x_{123}^N + (1 - q)^N q_{12}^{\frac{N(N-1)}{2}} q_{13}^{\frac{N(N-1)}{2}} x_1^N \otimes x_{23}^N.$$

De aquí,  $x_{123}^N$  es un elemento primitivo en toda álgebra de pre-Nichols tal que, o bien  $x_1^N = 0$ , o bien  $x_{23}^N = 0$ . Luego, otros dos ejemplos de álgebras de pre-Nichols con  $\text{GKdim} = 1$  son

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}/\langle x_1^N, x_{123}^N \rangle, \quad \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}/\langle x_{23}^N, x_{123}^N \rangle.$$

Así, un subposet de  $\mathfrak{Pre}_{\text{GKd}}(V)$  es



Se espera que dicho subposet contenga todas las álgebras de pre-Nichols de  $\mathfrak{Pre}_{\text{GKd}}(V)$  que son  $\mathbb{N}_0^3$ -graduadas.

*Observación 3.3.5.* Hay más ejemplos en los que el álgebra de Lie subyacente es la misma que la de  $\mathbf{A}(3|\{2,3\})_q$  y por lo tanto el poset de las álgebras de pre-Nichols de  $\mathfrak{Pre}_{\text{GKd}}(V)$  que son  $\mathbb{N}_0^3$ -graduadas es el mismo.

# 4 | Álgebras de pre-Nichols eminentes que no son distinguidas

De acuerdo al Teorema 3.1.1, el álgebra de pre-Nichols distinguida es eminente, excepto cuando  $\mathfrak{q}$  es de alguno de los siguientes tipos: Cartan  $A_\theta$  o  $D_\theta$  con  $q = -1$ ; Cartan  $A_2$  con  $q \in \mathbb{G}'_3$ ;  $\mathbf{A}_3(q|\{2\})$  o  $\mathbf{A}_3(q|\{1, 2, 3\})$ , con  $q \in \mathbb{G}_\infty$ ;  $\mathfrak{g}(2, 3)$  con alguno de los siguientes diagramas de Dynkin

$$\begin{array}{c} \overset{-1}{\circ} \text{---} \xi \text{---} \overset{-1}{\circ} \text{---} \xi \text{---} \overset{-1}{\circ} \end{array} \quad \xi \in \mathbb{G}_3 \quad (4.0.1)$$

$$\begin{array}{c} \overset{-1}{\circ} \text{---} \bar{\xi} \text{---} \overset{\xi}{\circ} \text{---} \xi \text{---} \overset{-1}{\circ} \end{array} \quad \xi \in \mathbb{G}_3 \quad (4.0.2)$$

Para tipo Cartan  $A_\theta$  o  $D_\theta$  con  $q = -1$ , no se conoce si existe un álgebra de pre-Nichols eminente; algunos cálculos parciales están presentes en [ASa]. En el mismo trabajo se calculó el álgebra de pre-Nichols eminente para  $\mathfrak{q}$  de tipo Cartan  $A_2$  con  $q \in \mathbb{G}'_3$ , que cubre propiamente al álgebra de pre-Nichols distinguida y que recordaremos a continuación. Para los restantes 4 tipos, probaremos la existencia de un álgebra de pre-Nichols eminente  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$ , que también difiere del álgebra de pre-Nichols distinguida  $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$ .

## 4.1 | Tipo Cartan $A_2$ con $q \in \mathbb{G}'_3$

Sea  $\mathfrak{q}$  de tipo  $A_2$  con parámetro  $q \in \mathbb{G}'_3$ . El diagrama de Dynkin de  $\mathfrak{q}$  es:

$$\begin{array}{c} \overset{q}{\circ} \text{---} q^{-1} \text{---} \overset{q}{\circ} \\ \underset{1}{\circ} \end{array}$$

y el álgebra de pre-Nichols distinguida es

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}} = T(V)/\langle x_{112}, x_{221} \rangle.$$

En ese caso el álgebra de pre-Nichols distinguida no es eminente, y se tiene el siguiente resultado:

**Proposición 4.1.1.** [ASa, Proposition 4.11] Sea  $\mathfrak{q}$  de tipo  $A_2$  con  $q \in \mathbb{G}'_3$ . Sea

$$\widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}} = T(V)/\langle x_{1112}, x_{2112}, x_{2221}, x_{1221} \rangle.$$

Entonces  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$  es un álgebra de pre-Nichols eminente de  $\mathcal{B}_{\mathfrak{q}}$  tal que  $\text{GKdim } \widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}} = 5$ .

## 4.2 | Tipo $\mathbf{A}_3(q|\{2\})$ .

Sea  $\mathbf{q}$  de tipo  $\mathbf{A}_3(q|\{2\})$ . El diagrama de Dynkin de  $\mathbf{q}$  es:

$$\begin{array}{ccccc} q^{-1} & & q & & -1 & & q^{-1} & & q \\ \circ & \text{---} & & \text{---} & \circ & \text{---} & & \text{---} & \circ \\ 1 & & & & 2 & & & & 3 \end{array}$$

y el álgebra de pre-Nichols distinguida tiene la siguiente presentación:

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}} = T(V)/\langle x_2^2, x_{13}, x_{112}, x_{332}, [x_{123}, x_2]_c \rangle.$$

Consideremos el álgebra

$$\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}} = T(V)/\langle x_2^2, x_{13}, x_{112}, x_{332} \rangle. \quad (4.2.1)$$

Notemos que  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  es un álgebra de Hopf trenzada, ya que el ideal por el cual cocientamos está generado por elementos primitivos de  $T(V)$ . Además las proyecciones desde  $T(V)$  inducen un morfismo suryectivo de álgebras de Hopf trenzadas

$$\pi : \widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}.$$

Probaremos a continuación que  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  es eminente.

**Proposición 4.2.1.** *Sea  $\mathbf{q}$  de tipo  $\mathbf{A}_3(q|\{2\})$ . Entonces  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  es un álgebra de pre-Nichols eminente de  $\mathcal{B}_{\mathbf{q}}$  con base*

$$B = \{x_3^a x_{23}^b x_2^c x_{\beta}^d x_{123}^e x_{12}^f x_1^g : b, c, e, f \in \{0, 1\}, a, d, g \in \mathbb{N}_0\}, \quad (4.2.2)$$

donde  $x_{\beta} = [x_{123}, x_2]_c$ . Por lo tanto,  $\text{GKdim } \widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}} = 3$ .

*Demostración.* La prueba de este resultado se realizará en varios pasos. En primer lugar:

*Paso 1.* Sea  $\mathcal{B}$  un álgebra de pre-Nichols de  $\mathbf{q}$  tal que  $\text{GKdim } \mathcal{B} < \infty$ . Entonces la proyección  $T(V) \rightarrow \mathcal{B}$  induce una proyección  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}} \rightarrow \mathcal{B}$  de álgebras de Hopf trenzadas.

En efecto, las relaciones que definen a  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  deben ser 0 en  $\mathcal{B}$  por los Lemas 2.3.1, 2.2.1 y 2.2.4.

Luego, para probar que  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  es eminente, basta probar que  $\text{GKdim } \widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}} < \infty$ . Para ello, hallaremos una base PBW y expresaremos a  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  como una extensión central que involucra al álgebra de pre-Nichols distinguida.

*Paso 2.* Las siguientes relaciones valen en  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$ :

$$x_{12}^2 = 0, \quad x_{123}^2 = 0, \quad x_{23}^2 = 0. \quad (4.2.3)$$

De  $x_{112} = 0$  obtenemos

$$(1 + q_{11})x_1 x_2 x_1 = q_{12}^{-1} x_1^2 x_2 + q_{11} q_{12} x_2 x_1^2.$$

Usando esta igualdad y que  $x_2^2 = 0$ ,

$$(1 + q_{11})x_{12}^2 = (1 + q_{11})(x_1 x_2 x_1 x_2 - q_{12} x_2 x_1^2 x_2 + q_{12}^2 x_2 x_1 x_2 x_1)$$

$$= q_{11}q_{12}x_2x_1^2x_2 - q_{12}(1 + q_{11})x_2x_1^2x_2 + q_{12}x_2x_1^2x_2 = 0$$

Como  $q_{11} \neq -1$  se tiene que  $x_{12}^2 = 0$ . Análogamente  $x_{332} = 0$  implica que  $x_{23}^2 = 0$ .

Notemos que

$$x_{123} = x_1x_2x_3 - q_{23}x_1x_3x_2 - q_{12}x_2x_1x_3 + q_{12}q_{13}q_{23}x_3x_2x_1 = x_{12}x_3 - q_{13}q_{23}x_3x_{12}, \quad (4.2.4)$$

Por otro lado, de  $x_{112} = 0$  y  $x_{13} = 0$  se tiene que

$$x_1x_{12} = q_{11}q_{12}x_{12}x_1, \quad x_1x_3 = q_{13}x_3x_1, \quad (4.2.5)$$

con lo cual

$$x_1x_{123} = x_1(x_{12}x_3 - q_{13}q_{23}x_3x_{12}) = q_{11}q_{12}q_{13}x_{123}x_1 \quad (4.2.6)$$

Es decir,  $(\text{ad}_c x_1)x_{123} = 0$ . Luego, como  $\text{ad}_c x_1$  es una derivación torcida,

$$\begin{aligned} 0 &= (\text{ad}_c x_1)^2(x_{23}^2) = (\text{ad}_c x_1)(x_{123}x_{23} + q_{12}q_{13}x_{23}x_{123}) \\ &= q_{11}q_{12}q_{13}x_{123}^2 + q_{12}q_{13}x_{123}^2 = (1 + q_{11})q_{12}q_{13}x_{123}^2. \end{aligned}$$

Como  $q_{11} \neq -1$ , se tiene que  $x_{123}^2 = 0$ .

*Paso 3.*  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  está generado por  $B$ .

Sea  $I$  el subespacio generado por  $B$ . Probaremos que  $I$  es un ideal a izquierda de  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  (y esto es suficiente pues  $1 \in B$ ). Por lo tanto, queremos ver que  $x_i I \subset I$  para todo  $i \in \mathbb{I}_3$ : notar que  $x_3 I \subset I$  por definición.

De  $x_{332} = 0$  se tiene que  $x_{23}x_3 = q_{23}q_{33}x_3x_{23}$ , con lo cual  $x_{23}I \subset I$ . Además

$$x_2x_3 = x_{23} + q_{23}x_3x_2, \quad x_2x_{23} = -q_{23}x_{23}x_2,$$

por definición de  $x_{23}$  y porque  $x_2^2 = 0$ . Por lo tanto  $x_2 I \subset I$ .

Resta probar que  $x_1 I \subset I$ . A partir de las relaciones que definen a  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  y a los generadores de  $B$  deducimos que valen (4.2.4), (4.2.5), (4.2.6) y las siguientes:

$$\begin{aligned} x_1x_{23} &= x_{123} + q_{12}q_{13}x_{23}x_1, \\ x_1x_2 &= x_{12} + q_{12}x_2x_1, \\ x_1x_\beta &= q_{11}q_{12}^2q_{13}x_\beta x_1, \\ x_{12}x_3 &= x_{123} + q_{13}q_{23}x_3x_{12}, \\ x_{12}x_{23} &= q_{12}(\tilde{q}_{23} - 1)x_2x_{123} - q_{12}q_{13}q_{23}x_{23}x_{12} - q_{23}x_\beta, \\ x_{12}x_2 &= -q_{12}x_2x_{12}, \\ x_{12}x_{123} &= -q_{13}q_{23}x_{123}x_{12}, \\ x_{123}x_3 &= -q_{13}q_{23}x_3x_{123}, \\ x_{123}x_{23} &= -q_{12}q_{13}x_{23}x_{123}, \\ x_{123}x_2 &= x_\beta + q_{12}q_{22}q_{32}x_2x_{123}, \\ x_{12}x_\beta &= x_{12}(x_{123}x_2 - q_{12}q_{22}q_{32}x_2x_{123}) = q_{12}q_{13}q_{23}x_u x_{12}, \\ x_{123}x_\beta &= -q_{12}q_{22}q_{32}x_\beta x_{123}, \\ x_\beta x_3 &= q_{13}q_{23}^2q_{33}x_3x_\beta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_\beta x_{23} &= q_{12}q_{13}q_{23}x_{23}x_\beta, \\x_\beta x_2 &= q_{12}q_{32}x_2x_\beta.\end{aligned}$$

Por lo tanto  $x_1 I \subset I$  dado que siempre se pueden reordenar los generadores de la base al multiplicar a izquierda por  $x_1, x_{12}, x_{123}$  y  $x_\beta$ . En efecto,  $I$  es un ideal que contiene a 1, con lo cual  $I = \widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$ . Ahora expresaremos a  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  como una extensión de álgebras de Hopf trenzadas, lo cual nos permitirá ver que  $B$  es una base y hallar la dimensión de  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$ . Sea  $\mathcal{Z}$  el álgebra generada por  $x_\beta = [x_{123}, x_2]_c$ .

*Paso 4.*  $\mathcal{Z}$  es una subálgebra de Hopf central isomorfa a  $\mathbb{k}[x_\beta]$ .

Como  $x_\beta$  es primitivo,  $\mathcal{Z}$  es subálgebra de Hopf de  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$ . Además,

$$c(x_\beta \otimes x_\beta) = q_{11}\tilde{q}_{12}^2\tilde{q}_{13}q_{22}^4\tilde{q}_{23}^2q_{33}x_\beta \otimes x_\beta = x_\beta \otimes x_\beta,$$

con lo cual  $\mathcal{Z}$  es isomorfa al álgebra de polinomios en una variable. La centralidad se deduce de las relaciones  $x_i x_\beta = q_{i1}q_{i2}^2q_{i3}x_\beta x_i$  probadas en el Paso anterior, pues  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  está generada por  $x_i, i \in \mathbb{I}_3$ , como álgebra.

*Paso 5.*  $\mathcal{Z} = \widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}^{\text{co}\pi}$ . Por lo tanto,

$$\mathcal{Z} \longrightarrow \widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}} \xrightarrow{\pi} \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$$

es una extensión de álgebras de Hopf trenzadas  $\mathbb{N}_0^3$ -graduadas.

Sea  $\mathcal{Z}' = \widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}^{\text{co}\pi}$ . Vimos que  $\mathcal{Z}$  es normal y está generada por  $x_\beta$ . Como  $\pi(x_\beta) = 0$  se tiene que  $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Z}'$ . Del Lema 1.8.5 y la base PBW de  $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  se tiene que

$$\mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}} = \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}} \mathcal{H}_{\mathcal{Z}'} \geq \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}} \mathcal{H}_{\mathcal{Z}} = \frac{(1+t_2t_3)(1+t_2)(1+t_1t_2t_3)(1+t_1t_2)}{(1-t_3)(1-t_1)} \cdot \frac{1}{1-t_1t_2^2t_3}.$$

Por otro lado, el hecho que  $B$  genera a  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  nos dice que

$$\mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}} \leq \frac{(1+t_2t_3)(1+t_2)(1+t_1t_2t_3)(1+t_1t_2)}{(1-t_3)(1-t_1)(1-t_1t_2^2t_3)}.$$

Luego, se tiene una igualdad de las series anteriores

$$\mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}} = \frac{(1+t_2t_3)(1+t_2)(1+t_1t_2t_3)(1+t_1t_2)}{(1-t_3)(1-t_1)(1-t_1t_2^2t_3)}. \quad (4.2.7)$$

lo cual implica que  $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}'$ , y por lo tanto se tiene la extensión antes mencionada.

*Paso 6.*  $B$  es una base de  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  y  $\text{GKdim } \widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}} = 3$ .

Sabemos que  $B$  genera a  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$ . De (4.2.7) se deduce que  $B$  es linealmente independiente: en cada componente homogénea tiene tantos términos como los de la expresión anterior de la serie de Hilbert. Así  $B$  es una base PBW de  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$ . También, la descomposición anterior de la serie de Hilbert nos dice que  $\text{GKdim } \widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}} = \text{GKdim } \mathcal{Z} + \text{GKdim } \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}} = 3$ .  $\square$

4.3 | Tipo  $\mathbf{A}_3(q|\{1, 2, 3\})$ 

Fijemos  $\mathbf{q}$  de tipo  $\mathbf{A}_3(q|\{1, 2, 3\})$ , cuyo diagrama de Dynkin es

$$\begin{array}{ccccc} -1 & & q^{-1} & & -1 \\ \circ & \text{---} & & \text{---} & \circ \\ 1 & & 2 & & 3 \end{array}$$

y el álgebra de pre-Nichols distinguida tiene la siguiente presentación:

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}} = T(V)/\langle x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_{13}, [x_{123}, x_2]_c \rangle.$$

El siguiente lema nos permitirá definir el álgebra que buscamos:

**Lema 4.3.1.** Sean  $i, j, k \in \mathbb{I}_\theta$  tales que  $q_{jj} = -1$ ,  $\tilde{q}_{ik} = 1$  y  $\tilde{q}_{ij} = \tilde{q}_{jk}^{-1} \neq \pm 1$ . Entonces:

- (a)  $x_{jik} = 0$ . (b)  $[x_{ijk}, x_j]_c \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$ .

*Demostración.* (a) Notar que  $x_{jik} \in \mathcal{P}(T(V))$  por el Lema 1.9.2, pues  $x_{ik}$  es primitivo y  $\tilde{q}_{j,ik} = 1$ . Además:

$$\tilde{q}_{ikj,ikj} = -q_{ii}q_{kk}, \quad \tilde{q}_{ikj,t} = q_{jt}q_{tj} \text{ para todo } t \in \{i, j, k\}.$$

Sea  $q = \tilde{q}_{jk}$ . Si  $x_{jik} \neq 0$  en  $\mathcal{B}$ , entonces  $\mathbb{k}x_i \oplus \mathbb{k}x_j \oplus \mathbb{k}x_k \oplus \mathbb{k}x_{jik}$  tiene el siguiente diagrama de Dynkin

$$\begin{array}{ccccc} & & -q_{ii}q_{kk} & & \\ & & \circ & & \\ & & jik & & \\ & q^{-1} & & q & \\ q_{ii} & & & & q_{kk} \\ \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ \\ i & & j & & k \end{array}$$

Ahora, [H3, Lemma 12] implica que este diagrama de Dynkin no tiene sistema de raíces finito. Asumiendo la Conjetura 1.9.4, por el Lema 1.9.1 tenemos que  $\text{GKdim } \mathcal{B} = \infty$ .

(b) Tenemos que

$$\begin{aligned} \Delta([x_{ijk}, x_j]_c) &= [x_{ijk}, x_j]_c \otimes 1 + 1 \otimes [x_{ijk}, x_j]_c + (1 - \tilde{q}_{ij})\tilde{q}_{ij}q_{kj} x_i \otimes x_{jjk} \\ &\quad + (1 - \tilde{q}_{jk})q_{kj} [x_{ij}, x_j]_c \otimes x_k - (1 - \tilde{q}_{jk})q_{ij}^2 q_{kj} x_j \otimes x_{jik} + 2(1 - \tilde{q}_{jk})q_{ij}^2 q_{kj} x_j^2 \otimes x_{ik}. \end{aligned}$$

Luego basta probar que  $x_j^2 = x_{jji} = x_{jjk} = [x_{ij}, x_j]_c = 0$ . Para ello notamos que  $j \in \mathbb{I}_\theta$  no es un vértice de Cartan, luego por el Lema 2.3.1 tenemos  $x_j^2 = 0$ . De allí se deduce  $x_{jji} = x_{jjk} = [x_{ij}, x_j]_c = 0$ .  $\square$

*Observación 4.3.2.* Sea  $\mathcal{B}$  un álgebra de pre-Nichols de  $\mathbf{q}$  tal que  $\text{GKdim } \mathcal{B} < \infty$ . Entonces las relaciones

$$x_1^2 = x_2^2 = x_3^2 = 0, \quad x_{213} = 0, \quad [x_{123}, x_2]_c = 0$$

son válidas en  $\mathcal{B}$  por los Lemas 2.3.1, 4.3.1 (a) y 2.3.4.

*Observación 4.3.3.* Consideremos el álgebra

$$\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}} = T(V)/\langle x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_{213}, [x_{123}, x_2]_c \rangle.$$

Notar que el ideal que define a  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  es en realidad un ideal de Hopf, ver las prueba de los Lemas 2.1.2 y 4.3.1. Entonces  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  es un álgebra de pre-Nichols de  $\mathbf{q}$ , a continuación veremos que es eminente.

**Proposición 4.3.4.** *El álgebra de pre-Nichols  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  es eminente, con  $\text{GKdim } \widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}} = 3$  y base*

$$B = \{x_3^a x_{23}^b x_2^c x_{13}^d x_{123}^e x_{12}^f x_1^g : a, c, e, g \in \{0, 1\}, b, d, f \in \mathbb{N}_0\}. \quad (4.3.1)$$

*Demostración.* Por la Observación 4.3.2, toda álgebra de pre-Nichols con  $\text{GKdim}$  finita de  $\mathbf{q}$  está cubierta por  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$ . El resto de la demostración se realiza en varias partes.

*Paso 1.* Las siguientes relaciones valen en  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$ :

$$x_{1123} = 0; \quad x_{ijj} = 0, \quad i \neq j; \quad (4.3.2)$$

$$[x_{23}, x_{13}]_c = 0, \quad [x_{123}, x_{23}]_c = 0, \quad [x_{123}, x_{13}]_c = 0, \quad x_{123}^2 = 0. \quad (4.3.3)$$

(4.3.2) Las relaciones  $x_{ijj} = 0$  con  $i \neq j$  valen por la condición  $q_{ii} = -1$  y el hecho de que  $x_i^2 = 0$ . Similarmente,

$$x_{1123} = x_1^2 x_{23} - q_{12} q_{13} (1 + q_{11}) x_1 x_{23} x_1 + q_{11} q_{12}^2 q_{13}^3 x_{23} x_1^2 = 0.$$

(4.3.3) Notar que  $x_{313} = 0 = x_{213}$  implica que  $[x_{23}, x_{13}]_c = 0$ ; esta última igualdad junto con  $[x_{23}, x_3]_c = 0$  da

$$[x_{123}, x_3]_c = [x_1, [x_{23}, x_3]_c]_c - q_{12} q_{13} x_{23} x_{13} + q_{23} q_{33} x_{13} x_{23} = q_{23} q_{33} (1 - \tilde{q}_{12}) x_{13} x_{23}.$$

Como  $x_{213} = 0 = x_{223}$ , se sigue  $[x_2, [x_{123}, x_3]_c]_c = 0$ . Entonces

$$\begin{aligned} [x_{123}, x_{23}]_c &= [[x_{123}, x_2]_c, x_3]_c + q_{12} q_{22} q_{32} x_2 [x_{123}, x_3]_c - q_{23} [x_{123}, x_3]_c x_2 \\ &= q_{12} q_{22} q_{32} [x_2, [x_{123}, x_3]_c]_c = 0. \end{aligned}$$

Luego, usando  $[x_{23}, x_{13}]_c = 0 = x_{113}$  se tiene que

$$[x_{123}, x_{13}]_c = [x_1, [x_{23}, x_{13}]_c]_c - q_{12} q_{13} x_{23} x_{113} + q_{21} q_{23} q_{31} q_{33} x_{113} x_{23} = 0.$$

Finalmente, usando  $x_{123} x_1 = -(q_{12} q_{13})^{-1} x_1 x_{123}$  y  $x_{123} x_{23} = q_{12} q_{13} \tilde{q}_{23} x_{23} x_{123}$  obtenemos

$$x_{123}^2 = x_{123} (x_1 x_{23} - q_{12} q_{13} x_{23} x_1) = -\tilde{q}_{23} (x_1 x_{23} - q_{12} q_{13} x_{23} x_1) x_{123} = -\tilde{q}_{23} x_{123}^2.$$

Como  $N = \text{ord } \tilde{q}_{23} > 2$ , esto implica que  $x_{123}^2 = 0$ .

*Paso 2.*  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  está generado por  $B$ .

Basta con demostrar que  $L$  es un ideal a izquierda de  $B$ . La inclusión  $x_3 L \subset L$  es trivial, y  $x_2 L \subset L$  se sigue de la conmutación  $x_{223} = 0$ , cf. (4.3.2). Para ver que  $x_1 L \subset L$ , argumentar inductivamente sobre  $b \geq 1$  tenemos

$$x_1 x_{23}^b = (q_{12} q_{13})^{b-1} (b)_{\tilde{q}_{23}} x_{23}^{b-1} x_{123} + (q_{12} q_{13})^b x_{23}^b x_1,$$

$$x_1 x_3 x_{23}^b = (q_{12} q_{13} q_{32} q_{33})^b x_{23}^b x_{13} + q_{12}^{b-1} q_{13}^b (b)_{\tilde{q}_{23}} x_3 x_{23}^{b-1} x_{123} + q_{12}^b q_{13}^{b+1} x_3 x_{23}^b x_1.$$

Ahora, las relaciones  $x_{213} = 0 = [x_{123}, x_2]_c$  de  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  implican que

$$\begin{aligned} x_1 x_{23}^b x_2 &= -q_{12}^b q_{13}^{b-1} q_{32} (b)_{\tilde{q}_{23}} x_{23}^{b-1} x_2 x_{123} + (q_{12} q_{13})^b x_{23}^b x_{12} + (q_{12} q_{13})^b q_{12} x_{23}^b x_2 x_1, \\ x_1 x_3 x_{23}^b x_2 &= q_{12}^{b+1} (q_{13} q_{32} q_{33})^b q_{32} x_{23}^b x_2 x_{13} - q_{12}^b q_{13}^b q_{32} (b)_{\tilde{q}_{23}} x_3 x_{23}^{b-1} x_2 x_{123} \\ &\quad + q_{12}^b q_{13}^{b+1} x_3 x_{23}^b x_{12} + (q_{12} q_{13})^{b+1} x_3 x_{23}^b x_2 x_1. \end{aligned}$$

Notar que en estas últimas cuatro ecuaciones los elementos de la forma  $x_\alpha$  que aparece en el lado derecho de cada monomio  $q$ -conmuta con (cualquier potencia de)  $x_{13}$ ,  $x_{123}$  y  $x_{12}$ . Esto muestra que  $x_1 x_3^a x_{23}^b x_2^c x_{13}^d x_{123}^e x_{12}^f x_1^g \in L$  para todo  $a, c, e, g \in \{0, 1\}$  y  $b, d, f \in \mathbb{N}_0$ .

*Paso 3.* La subálgebra  $\mathcal{Z}$  de  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  generada  $x_{13}$  es una subálgebra de Hopf  $q$ -central isomorfa al álgebra de polinomios  $\mathbb{k}[x_{13}]$ .

El generador de  $\mathcal{Z}$  es anulado por la acción de la adjunta de  $x_i$ ,  $i \in \mathbb{I}_3$ . En efecto,  $(\text{ad}_c x_i) x_{13} = 0$  valen en  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  ya sea por definición (si  $i = 2$ ) o por (4.3.2) (si  $i = 1, 3$ ). Por el Lemma 1.9.2 el generador  $x_{13}$  es primitivo, luego  $\mathcal{Z}$  es una subálgebra de Hopf. Como  $x_{13}$  es un elemento primitivo no nulo con  $q_{13,13} = 1$ , entonces genera un álgebra de polinomios.

*Paso 4.* Hay una extensión que preserva el grado de las álgebras de Hopf trenzadas  $\mathcal{Z} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}} \twoheadrightarrow \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$ .

Sean  $\pi: \widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}} \twoheadrightarrow \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  la proyección canónica y  $\mathcal{Z}' = \widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}^{\text{co}} \pi$ . Notemos que  $\mathcal{Z} \subset \mathcal{Z}'$  pues  $x_{13} = 0$  y el Lema 1.8.5 nos dice que

$$\mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}} = \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}} \mathcal{H}_{\mathcal{Z}'} \geq \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}} \mathcal{H}_{\mathcal{Z}} = \frac{(1+t_3)(1+t_2)(1+t_1 t_2 t_3)(1+t_1)}{(1-t_2 t_3)(1-t_1 t_2)} \cdot \frac{1}{1-t_1 t_3}.$$

Por otro lado, como  $B$  genera a  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  tenemos que

$$\mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}} \leq \frac{(1+t_3)(1+t_2)(1+t_1 t_2 t_3)(1+t_1)}{(1-t_2 t_3)(1-t_1 t_3)(1-t_1 t_2)}.$$

Las últimas dos ecuaciones implican que

$$\mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}} = \frac{(1+t_3)(1+t_2)(1+t_1 t_2 t_3)(1+t_1)}{(1-t_2 t_3)(1-t_1 t_3)(1-t_1 t_2)}, \quad (4.3.4)$$

y ésto nos garantiza que  $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}'$ .

*Paso 5.* El conjunto  $B$  es una base de  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$ , que tiene dimensión de Gelfand-Kirillov igual a 3.

Esto se sigue como en la demostración de la Proposición 4.2.1. □

*Observación 4.3.5.* Sea  $\mathcal{Z}_{\mathbf{q}}$  la subálgebra de  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  generada por  $x_{13}$ ,  $x_{12}^N$  y  $x_{23}^N$ . Se puede verificar que  $\mathcal{Z}_{\mathbf{q}}$  es una subálgebra  $q$ -central (más precisamente, es anulado por la acción adjunta de  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$ ), luego hay una extensión que conserva el grado de álgebras de Hopf trenzadas  $\mathbb{k} \rightarrow \mathcal{Z}_{\mathbf{q}} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}} \twoheadrightarrow \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}} \twoheadrightarrow \mathcal{B}_{\mathbf{q}} \rightarrow \mathbb{k}$ .

#### 4.4 | Tipo $\mathfrak{g}(2, 3)$ , con diagrama de Dynkin (4.0.1)

Sea  $\mathfrak{q}$  de tipo  $\mathfrak{g}(2, 3)$  con diagrama de Dynkin (4.0.1). En este caso, el álgebra de pre-Nichols distinguida tiene la siguiente presentación:

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}} = T(V)/\langle x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_{13}, [[x_{12}, x_{123}]_c, x_2]_c, [[x_{123}, x_{23}]_c, x_2]_c \rangle$$

Notar que el Lema 2.3.20 trata con las dos últimas relaciones, pero bajo supuestos adicionales que no se cumplen para  $\mathfrak{q}$ . Mostraremos que, en particular, existe un álgebra de pre-Nichols con GKdim finita donde estos elementos no se anulan. Sean

$$x_u := [[x_{12}, x_{123}]_c, x_2]_c, \quad \text{y} \quad x_v := [[x_{123}, x_{23}]_c, x_2]_c. \quad (4.4.1)$$

Como  $x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_{13}$  son primitivos en  $T(V)$ , entonces generan el ideal de Hopf  $I := \langle x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_{13} \rangle$  de  $T(V)$ . Ahora  $x_u, x_v \in \mathcal{B} := T(V)/I$  son elementos primitivos por el Lema 2.1.2. Por el Lema 1.9.2 tenemos que  $[x_1, x_u]_c, [x_u, x_3]_c, [x_1, x_v]_c$  y  $[x_v, x_3]_c$  son primitivos en  $\mathcal{B}$ .

**Lema 4.4.1.** *Sea  $\mathcal{B}$  un álgebra de pre-Nichols de  $\mathcal{B}_{\mathfrak{q}}$  con GKdim finita. Entonces*

$$[x_1, x_u]_c = [x_v, x_3]_c = [x_u, x_3]_c = [x_1, x_v]_c = 0 \text{ en } \mathcal{B}.$$

*Demostración.* Sea  $x_{\beta} \in \{[x_1, x_u]_c, [x_v, x_3]_c, [x_u, x_3]_c, [x_1, x_v]_c\}$ . Como  $\mathcal{B} \twoheadrightarrow \mathcal{B}$  y  $x_{\beta}$  es primitivo en  $\mathcal{B}$ , entonces también lo es en  $\mathcal{B}$ . Supongamos que  $x_{\beta} \neq 0$  en  $\mathcal{B}$ . Computando el diagrama de Dynkin de  $\mathbb{k}x_1 \oplus \mathbb{k}x_2 \oplus \mathbb{k}x_3 \oplus \mathbb{k}x_{\beta} \subset \mathcal{P}(\mathcal{B})$ :

$$\begin{array}{ccccc} & & \begin{array}{c} -1 \\ \circ \\ \beta \\ \xi \\ | \end{array} & & \\ & & \xi & & \\ \begin{array}{c} -1 \\ \circ \\ 1 \end{array} & \xrightarrow{\quad \xi \quad} & \begin{array}{c} -1 \\ \circ \\ 2 \end{array} & \xrightarrow{\quad \xi \quad} & \begin{array}{c} -1 \\ \circ \\ 3 \end{array}, \end{array}$$

que no está en [H3, Table 3], contradiciendo  $\text{GKdim } \mathcal{B} < \infty$  (aquí asumimos la Conjetura 1.9.4).  $\square$

Ahora tenemos un candidato para álgebra pre-Nichols eminente:

$$\widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}} = T(V)/\langle x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_{13}, [x_1, x_u]_c, [x_1, x_v]_c, [x_u, x_3]_c, [x_v, x_3]_c \rangle. \quad (4.4.2)$$

Notar que  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$  es un álgebra de Hopf trenzada, pues es un cociente de  $\mathcal{B}$  por un ideal generado por elementos primitivos.

**Proposición 4.4.2.** *Sea  $\mathfrak{q}$  de tipo  $\mathfrak{g}(2, 3)$  con diagrama de Dynkin (4.0.1). Entonces*

(a) *El álgebra de pre-Nichols  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$  definida en (4.4.2) es eminente, con  $\text{GKdim } \widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}} = 6$ .*

(b) *Denotemos*

$$x_{12^23^2} = [x_{123}, x_{23}]_c, \quad x_{12^23} = [x_{123}, x_2]_c, \quad x_{1^22^33^2} = [x_{123}, x_{12^23}]_c, \quad x_{1^22^23} = [x_{12}, x_{123}]_c.$$

*Entonces una base de  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$  esta dada por*

$$B = \{x_3^{n_1} x_{23}^{n_2} x_v^{n_3} x_2^{n_4} x_{12^23^2}^{n_5} x_{12^23}^{n_6} x_{1^22^33^2}^{n_7} x_{123}^{n_8} x_u^{n_9} x_{1^22^23}^{n_{10}} x_{12}^{n_{11}} x_1^{n_{12}} : \\ n_1, n_4, n_5, n_7, n_{10}, n_{12} \in \{0, 1\}, n_i \in \mathbb{N}_0 \text{ de lo contrario}\}.$$

- (c) Hay una extensión álgebras de Hopf trenzadas  $\mathbb{N}_0^3$ -homogéneas:  $\mathcal{Z} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$ , donde  $\mathcal{Z}$  es la subálgebra de  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$  generada por  $x_u$  y  $x_v$ . La acción adjunta de  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$  en  $\mathcal{Z}$  es trivial, y  $\mathcal{Z}$  es un álgebra de polinomios en dos variables.

*Demostración.* Los Lemas 2.3.1, 2.2.1 y 4.4.1 implican que la proyección de  $T(V)$  sobre cada álgebra de pre-Nichols  $\mathcal{B}$  de  $\mathfrak{q}$  con GKdim finita induce una proyección de  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$  en  $\mathcal{B}$ . Para finalizar la prueba de (a), todavía tenemos que demostrar que  $\text{GKdim } \widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}} = 6$ . Esto lo realizaremos en varios pasos donde simultáneamente probaremos en (b) y (c).

*Paso 1.* Los elementos  $x_u$  y  $x_v$  no se anulan en  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$ .

Consideremos la siguiente representación de  $\underline{\mathcal{B}}$ ,  $\rho : \underline{\mathcal{B}} \longrightarrow \mathbb{k}^{4 \times 4}$ ,

$$\rho(x_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(x_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces  $\rho(x_u) \neq 0$ ,  $\rho(x_v) \neq 0$  pues las primeras filas de  $\rho(x_u), \rho(x_v)$  no son 0; luego  $x_u, x_v \neq 0$  en  $\underline{\mathcal{B}}$ . Como  $\underline{\mathcal{B}}^n = \widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}^n$  si  $n \leq 6$ , tenemos que  $x_u, x_v \neq 0$  en  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$ .

*Paso 2.* La acción adjunta de  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$  en  $\mathcal{Z}$  es trivial, y  $\mathcal{Z}$  tiene base  $\{x_u^m x_v^n : m, n \in \mathbb{N}_0\}$ .

*Demostración.* Por el paso 1,  $x_u, x_v \neq 0$ . Además  $x_u^n, x_v^n \neq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  ya que son elementos primitivos tales que  $q_{uu} = q_{vv} = 1$ , y  $\mathcal{Z}$  es un álgebra de  $q$ -polinomios en las variables  $x_u, x_v$ .

Por definición de  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$ ,  $(\text{ad}_c x_i)x_u = (\text{ad}_c x_i)x_v = 0$  para  $i = 1, 3$ , y  $[x_u, x_2]_c = [x_v, x_2]_c = 0$  ya que  $x_2^2 = 0$  en  $\widehat{\mathcal{B}}$ . Entonces  $(\text{ad}_c x)x_u = (\text{ad}_c x)x_v = 0$  para todo elemento homogéneo  $x \in \widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$  de grado positivo.  $\square$

*Paso 3.*  $B$  genera a  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$ .

Basta comprobar que el subespacio  $I$  generado por  $B$  es un ideal a izquierda de  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$ . Como  $[x_1, x_u]_c = [x_v, x_3]_c = 0$  y (1.5.5) tenemos las siguientes igualdades:

$$x_{12}^3 x_3 = q_{13}^3 q_{23}^3 x_3 x_{12}^3, \quad x_1 x_{23}^3 = q_{12}^3 q_{13}^3 x_{23}^3 x_1.$$

De estas igualdades obtenemos lo siguiente:

$$[x_{12}, x_{12^2 23}]_c = 0, \quad [x_{12^2 3^2}, x_{23}]_c = 0. \quad (4.4.3)$$

Usando (1.5.5) nuevamente y  $x_{13} = x_1^2 = x_3^2 = 0$  tenemos además que

$$\begin{aligned} [x_{23}, x_3]_c &= [x_{123}, x_3]_c = 0, & [x_{12^2 23}, x_3]_c &= \zeta^2 q_{13} q_{23} x_{123}^2, \\ [x_1, x_{12}]_c &= [x_1, x_{123}]_c = 0, & [x_1, x_{12^2 3^2}]_c &= \zeta^2 q_{12} q_{13} x_{123}^2. \end{aligned}$$

Usando la última igualdad, junto con  $[x_u, x_3]_c = 0$ , (1.5.3) y (1.5.5), tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= [x_1, [x_u, x_3]_c]_c = [x_1, [[x_{12^2 23}, x_2]_c, x_3]_c]_c \\ &= \left[ x_1, [x_{12^2 23}, x_{23}]_c + q_{12}^2 q_{13} x_2 x_{123}^2 - \zeta^2 q_{13} q_{23}^2 x_{123}^2 x_2 \right]_c \\ &= q_{12}^2 q_{13} x_{12^2 23} x_{123} + \zeta q_{12}^2 q_{13} q_{23} x_{123} x_{12^2 23} + q_{12}^2 q_{13} x_{12} x_{123}^2 - \zeta^2 q_{12}^2 q_{13}^3 q_{23}^2 x_{123}^2 x_{12} \\ &= 2q_{12}^2 q_{13} x_{12} x_{123}^2 - 2\zeta^2 q_{13}^3 q_{23}^2 q_{12}^2 x_{123}^2 x_{12}; \end{aligned}$$

por lo tanto  $x_{12}x_{123}^2 = \zeta^2 q_{13}^2 q_{23}^2 x_{123}^2 x_{12}$ . Análogamente,  $x_{123}^2 x_{23} = \zeta^2 q_{12}^2 q_{13}^2 x_{23} x_{123}^2$ . De estas dos igualdades obtenemos que:

$$[x_{12^2 23}, x_{123}]_c = 0, \quad [x_{123}, x_{12^2 3^2}]_c = 0.$$

Usando la primera ecuación y la primera de (4.4.3).

$$x_{12^2 23}^2 = x_{12^2 23}(x_{12}x_{123} - \zeta q_{13}q_{23}x_{123}x_{12}) = -(x_{12}x_{123} - \zeta q_{13}q_{23}x_{123}x_{12})x_{12^2 23} = -x_{12^2 23}^2.$$

Este cálculo y uno análogo para  $x_{12^2 3^2}$  implica que  $x_{12^2 23}^2 = x_{12^2 3^2}^2 = 0$ . A continuación comprobamos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} [x_1, x_{12^2 3^2}]_c &= q_{12}q_{32}x_{12^2 23} + (\zeta - 1)q_{13}q_{23}x_{123}x_{12}, \\ [x_1, x_{12^2 3^2 3^2}]_c &= -q_{12}q_{13}x_{123}[x_1, x_{12^2 3^2}]_c + \zeta^2 q_{12}q_{32}[x_1, x_{12^2 3^2}]_c x_{123} = 0. \end{aligned}$$

De manera similar obtenemos las igualdades:

$$\begin{aligned} [x_{12^2 3^2}, x_2]_c &= 0, & [x_{12^2 3^2 3^2}, x_2]_c &= (1 - \zeta^2)q_{12}q_{32}x_{12^2 23}, \\ [x_{12^2 3^2}, x_3]_c &= x_{12^2 23}, & [x_{12^2 3^2 3^2}, x_3]_c &= 0. \end{aligned}$$

Usando las relaciones que involucran  $x_{12^2 3^2}$  obtenemos que  $x_{12^2 3^2 3^2}^2 = 0$ .

Una prueba recursiva y rutinaria muestra que  $x_\alpha x_\beta = q_{\alpha\beta} x_\beta x_\alpha$  + productos ordenados de generadores PBW intermedios para cada par de raíces  $\alpha < \beta$ , por lo que el paso está probado.

*Paso 4.* Hay una extensión de álgebras de Hopf trenzadas que preserva la graduación:  $\mathcal{Z} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$ . Además  $B$  es una base de  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  y  $\text{GKdim } \widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}} = \text{GKdim } \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}} + \text{GKdim } \mathcal{Z} = 6$ .

Sea  $\mathcal{Z}' = \widehat{\mathcal{B}}^{\text{co}\pi}$  de  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$ . Como  $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Z}'$ , por el Lema 1.8.5 tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}} &= \mathcal{H}_{\mathcal{Z}'} \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}} \geq \mathcal{H}_{\mathcal{Z}} \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}} \geq \\ &\geq \frac{1}{(1 - t_1^2 t_2^3 t_3)(1 - t_1 t_2^3 t_3^2)} \frac{(1 + t_1)(1 + t_2)(1 + t_1^2 t_2^2 t_3)(1 + t_1^2 t_2^3 t_3^2)(1 + t_1 t_2^2 t_3^2)(1 + t_3)}{(1 - t_1 t_2)(1 - t_1 t_2^2 t_3)(1 - t_2 t_3)(1 - t_2 t_3)(1 - t_2 t_3)}. \end{aligned}$$

Por otro lado  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  esta generado por  $B$ , luego

$$\mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}} \leq \frac{(1 + t_1)(1 + t_2)(1 + t_1^2 t_2^2 t_3)(1 + t_1^2 t_2^3 t_3^2)(1 + t_1 t_2^2 t_3^2)(1 + t_3)}{(1 - t_1 t_2)(1 - t_1 t_2^2 t_3)(1 - t_2 t_3)(1 - t_2 t_3)(1 - t_1^2 t_2^3 t_3)(1 - t_1 t_2^3 t_3^2)}$$

Estas desigualdades entre series de Hilbert nos dicen que

$$\mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}} = \frac{(1 + t_1)(1 + t_2)(1 + t_1^2 t_2^2 t_3)(1 + t_1^2 t_2^3 t_3^2)(1 + t_1 t_2^2 t_3^2)(1 + t_3)}{(1 - t_1 t_2)(1 - t_1 t_2^2 t_3)(1 - t_2 t_3)(1 - t_2 t_3)(1 - t_1^2 t_2^3 t_3)(1 - t_1 t_2^3 t_3^2)}$$

entonces  $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}'$ ,  $B$  es una base de  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  y  $\text{GKdim } \widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}} = \text{GKdim } \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}} + \text{GKdim } \mathcal{Z} = 4 + 2 = 6$ .  $\square$

#### 4.5 | Tipo $\mathfrak{g}(2, 3)$ , con diagrama de Dynkin (4.0.2)

Sea  $\mathbf{q}$  de tipo  $\mathfrak{g}(2, 3)$  con diagrama de Dynkin (4.0.2). En este caso, el álgebra de pre-Nichols distinguida tiene la siguiente presentación:

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}} = T(V) / \langle x_1^2, x_3^2, x_{13}, [x_{223}, x_{23}]_c, x_{221}, x_{2223}, [[x_{123}, x_2]_c, x_2]_c \rangle.$$

Notar que en el Lema 2.3.12 se menciona a la relación  $x_u := [[x_{123}, x_2]_c, x_2]_c$  pero bajo dichos supuestos adicionales no se cumplen para  $\mathfrak{q}$  (ver Observación 2.3.13). Veremos que  $x_u$  no se anula en al menos una álgebra pre-Nichols con GKdim finita. Sean:

$$x_{1223} = [x_{123}, x_2]_c, \quad x_{1223^2} = [x_{123}, x_{23}]_c, \quad x_{1233^2} = [x_{123^2}, x_2]_c, \quad x_v = [x_{123}, x_{1223}]_c. \quad (4.5.1)$$

Consideremos el álgebra:

$$\widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}} = T(V)/\langle x_1^2, x_3^2, x_{13}, [x_{223}, x_{23}]_c, x_{221}, x_{2223}, [x_v, x_3]_c, [x_{1233^2}, x_2]_c, [x_{1233^2}, x_3]_c \rangle. \quad (4.5.2)$$

A continuación probaremos que  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$  es un álgebra de pre-Nichols eminente.

**Proposición 4.5.1.** *Sea  $\mathfrak{q}$  de tipo  $\mathfrak{g}(2, 3)$  con diagrama de Dynkin (4.0.2). Entonces*

- (a) *El álgebra  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$  definida en (4.5.2) es un álgebra de pre-Nichols de  $\mathfrak{q}$ , con  $\text{GKdim } \widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}} = 6$ .*
- (b) *Una base de  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$  esta dada por*

$$B = \{x_3^{n_1} x_{23}^{n_2} x_{223}^{n_3} x_2^{n_4} x_{1233^2}^{n_5} x_{1223^2}^{n_6} x_u^{n_7} x_{1223}^{n_8} x_{123}^{n_9} x_v^{n_{10}} x_{12}^{n_{11}} x_1^{n_{12}} : n_1, n_3, n_5, n_6, n_{10}, n_{11} \in \{0, 1\}\}$$

- (c) *Hay una extensión álgebras de Hopf trenzadas  $\mathbb{N}_0^3$ -homogéneas:  $\mathcal{Z} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}} \twoheadrightarrow \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$ , donde  $\mathcal{Z}$  es la subálgebra de  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$  generada por  $x_u$  y  $x_v$ . La acción adjunta de  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$  en  $\mathcal{Z}$  es trivial, y  $\mathcal{Z}$  es un álgebra de polinomios en dos variables.*

*Demostración.* Procedemos en varios pasos. Los primeros dos pasos están dedicados a verificar que el ideal que define a  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$  es de Hopf, y además  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$  se proyecta en cualquier álgebra de pre-Nichols  $\mathcal{B}$  con GKdim finita. Consideremos la siguiente álgebra auxiliar:

$$\underline{\mathcal{B}} := T(V)/\langle x_1^2, x_3^2, x_{13}, x_{221}, x_{2223}, [x_{223}, x_{23}]_c, [x_v, x_3]_c \rangle.$$

*Paso 1.*  $\underline{\mathcal{B}}$  es un álgebra de Hopf trenzada y dada un álgebra de pre-Nichols de  $\mathfrak{q}$  con GKdim finita tenemos que la proyección canónica  $T(V) \rightarrow \underline{\mathcal{B}}$  induce el siguiente morfismo de álgebras de Hopf  $\pi : \underline{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{B}$ . Además,  $x_u$  y  $x_v$  son primitivos.

Sea  $\mathcal{B}' = T(V)/\langle x_1^2, x_3^2, x_{13}, x_{221}, x_{2223}, [x_{223}, x_{23}]_c \rangle$ . Como  $x_1^2, x_3^2, x_{13}, x_{221}, x_{2223}$  son primitivos en  $T(V)$ ,  $J = \langle x_1^2, x_3^2, x_{13}, x_{221}, x_{2223} \rangle$  es un ideal de Hopf de  $T(V)$ . Además,  $[x_{223}, x_{23}]_c \in T(V)/J$  es primitivo por el Lema 2.1.2, entonces  $\mathcal{B}'$  es un álgebra de Hopf trenzada. Por los Lemas 2.2.1, 2.2.4, 2.3.1, 2.3.6, la proyección canónica  $T(V) \rightarrow \mathcal{B}$  induce un morfismo de álgebras de Hopf  $\mathcal{B}' \twoheadrightarrow \mathcal{B}$ .

Ahora probaremos que  $x_v$  es primitivo en  $\mathcal{B}'$ . Por (2.1.1) aplicado en  $\mathcal{B}' \twoheadrightarrow \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{q}}$ ,

$$\Delta(x_v) \in 1 \otimes x_v + x_v \otimes 1 + \mathcal{B}' \otimes \langle x_u \rangle + \langle x_u \rangle \otimes \mathcal{B}'.$$

Además,  $x_u$  es primitivo en  $\mathcal{B}'$  por el Lema 2.1.2, y usando GAP,

$$[x_u, x_1]_c = [x_u, x_3]_c = 0. \quad (4.5.3)$$

Notar que  $x_u$  y  $x_v$  son las superletras asociadas a las palabras de Lyndon  $x_1 x_2 x_3 x_2^2$  y  $x_1 x_2 x_3 x_1 x_2 x_3 x_2$ . Por la Proposición 1.6.8 y estas relaciones, existen  $a, b, c \in \mathbb{k}$  tales que

$$\Delta(x_v) = 1 \otimes x_v + x_v \otimes 1 + ax_1 \otimes x_u x_3 + bx_1 x_u \otimes x_3 + cx_1 x_3 \otimes x_u.$$

Desarrollando  $(\Delta \otimes \text{id})\Delta(x_v) = (\text{id} \otimes \Delta)\Delta(x_v)$  obtenemos fácilmente que  $a = b = c = 0$ . Ahora,  $[x_v, x_3]_c$  es primitivo en  $\mathcal{B}'$  por el Lema 1.9.2 entonces  $\mathcal{B}$  es un álgebra de Hopf.

Finalmente, supongamos que  $x_\beta := [x_v, x_3]_c \neq 0$  en  $\mathcal{B}$ . Por inspección, si el diagrama de Dynkin de la matriz  $\mathbf{q}'$  es conexo y contiene a (4.0.2), entonces  $\mathbf{q}'$  no está en [H3, Table 3]; por lo tanto  $\text{GKdim } \mathcal{B}_{\mathbf{q}'} = \infty$ , asumiendo la Conjetura 1.9.4. Ahora, el diagrama de Dynkin de  $\mathbb{k}x_1 \oplus \mathbb{k}x_2 \oplus \mathbb{k}x_3 \oplus \mathbb{k}x_u$  es conexo, pues  $\tilde{q}_{2\beta} = \zeta$ . Contradicción.

*Paso 2.*  $[x_{12^33^2}, x_2]_c, [x_{12^33^2}, x_3]_c$  son primitivos en  $\mathcal{B}$ , por lo tanto  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  es un álgebra de Hopf graduada. La proyección canónica  $T(V) \rightarrow \mathcal{B}$  induce un morfismo de álgebras de Hopf sobreyectivo  $\pi : \widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}} \rightarrow \mathcal{B}$ .

Como  $x_{221} = x_{2223} = 0$  tenemos que  $x_1x_2^3 = q_{12}^3x_2^3x_1$  y  $x_3x_2^3 = q_{32}^3x_2^3x_3$ . Por las últimas dos igualdades deducimos lo siguiente:

$$[x_u, x_2]_c = [[[x_{123}, x_2]_c, x_2]_c, x_2]_c = x_{123}x_2^3 - q_{12}^3q_{32}^3x_2^3x_{123} = 0. \quad (4.5.4)$$

Como en la prueba del Paso 1, usamos la Proposición 1.6.8 para ver que  $[x_{12^33^2}, x_2]_c$  y  $[x_{12^33^2}, x_3]_c$  son primitivos, luego  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  es un álgebra de Hopf trenzada, pues tenemos que  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}} = \mathcal{B}/\langle [x_{12^33^2}, x_2]_c, [x_{12^33^2}, x_3]_c \rangle$ .

Supongamos que  $x_\beta = [x_{12^33^2}, x_i]_c \neq 0, i \in \mathbb{I}_{2,3}$ . El diagrama de Dynkin de  $\mathbb{k}x_1 \oplus \mathbb{k}x_2 \oplus \mathbb{k}x_3 \oplus \mathbb{k}x_\beta$  es conexo pues  $\tilde{q}_{2\beta} \neq 1$ ; el Paso 1 conduce a una contradicción ya que asumimos Conjetura 1.9.4.

Por el Paso 2, basta probar que  $\text{GKdim } \widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}} < \infty$ . Para ello, veremos que  $B$  es una base de  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  en tres pasos.

*Paso 3.* La acción adjunta de  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  en  $\mathcal{Z}$  es trivial, y  $\mathcal{Z}$  tiene la siguiente base  $\{x_u^m x_v^n : m, n \in \mathbb{N}_0\}$ .

Usando GAP se chequea que  $x_u, x_v \neq 0$  en el álgebra de pre-nichols  $\mathcal{B}'$  introducida en el Paso 1; además  $x_u, x_v \neq 0$  en  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  luego  $(\mathcal{B}')^\alpha = \widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}^\alpha$  para todo  $\alpha \leq 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3$ . Por lo tanto,  $x_u^n, x_v^n \neq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  como  $x_u$  y  $x_v$  son primitivos y  $q_{uu} = q_{vv} = 1$ ; entonces  $\{x_u^m x_v^n : m, n \in \mathbb{N}_0\}$  es una base de  $\mathcal{Z}$ , y  $\mathcal{Z}$  es una subálgebra de Hopf. Por (4.5.3) y (4.5.4), entonces  $(\text{ad}_c x_i)x_u = 0$  para todo  $i \in \mathbb{I}_3$ ; por lo tanto  $(\text{ad}_c x)x_u = 0$  para todo  $x \in \widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  homogéneo de grado  $> 0$ .

*Paso 4.*  $B$  es base de  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$ .

Para probar el enunciado, veremos que el subespacio  $I$  generado por  $B$  es un ideal a izquierda de  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$ . Como  $x_1^2 = x_3^2 = 0$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} x_1x_{12} &= -q_{12}x_{12}x_1, & x_1x_{123} &= -q_{12}q_{13}x_{123}x_1, \\ x_{23}x_3 &= -q_{23}x_3x_{23}, & x_{123}x_3 &= -q_{13}q_{23}x_3x_{123}. \end{aligned}$$

Como  $(\text{ad}_c x_2)^3x_3 = [x_{223}, x_{23}]_c = 0$  deducimos la siguiente igualdad:

$$x_{223}^2 = x_{223}(x_2x_{23} - \xi q_{23}x_{23}x_2) = -\xi^{-2}(x_2x_{23} - \xi q_{23}x_{23}x_2)x_{223} = -\xi^{-2}x_{223}^2.$$

Por lo tanto  $x_{223}^2 = 0$ .

Como  $x_{221} = 0$  tenemos que  $[x_{12}, x_2]_c = 0$ . Usando esta relación y  $x_1^2 = 0$  comprobamos que  $x_{12}^2 = 0$ ; por lo tanto,

$$x_{12}x_{123} = x_{12}(x_{12}x_3 - q_{13}q_{23}x_3x_{12}) = -q_{13}q_{23}(x_{12}x_3 - q_{13}q_{23}x_3x_{12})x_{12} = -q_{13}q_{23}x_{123}x_{12}.$$

Usando las relaciones ya probadas, (1.5.6), (4.5.1) y (1.5.5), tenemos además las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} [x_{12}, x_{1223}]_c &= 0, & [x_{12^23^2}, x_3]_c &= 0, & [x_{12^33^2}, x_{23}]_c &= 0, \\ [x_{12^33^2}, x_{223}]_c &= 0, & [x_{12^23^2}, x_{23}]_c &= 0, & [x_{12^23^2}, x_{223}]_c &= 0. \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} [x_{223}, x_3]_c &= \xi^2 q_{23} x_{23}^2, & [x_{1223}, x_3]_c &= x_{12^23^2}, \\ [x_1, x_{1223}]_c &= (\xi^2 - 1) q_{12} q_{13} x_{123} x_{12}, & [x_1, x_{12^23^2}]_c &= (\xi^2 - 1) q_{12} q_{13} x_{123}^2, \\ [x_{12}, x_{23}]_c &= (\xi - 1) q_{12} x_2 x_{123} - \xi q_{23} x_{12^23}, & [x_{12^23}, x_{23}]_c &= -q_{23} x_{12^33^2} - q_{12} q_{32} x_2 x_{12^23^2}. \end{aligned}$$

Usando (1.5.5) y  $[x_v, x_3]_c = 0$  deducimos que  $[x_{123}, x_{12^23^2}]_c = 0$ ; además,

$$x_{12^23^2}^2 = (x_{123} x_{23} - q_{123,23} x_{23} x_{123}) x_{12^23^2} = -x_{12^23^2} (x_{123} x_{23} - q_{123,23} x_{23} x_{123}) = -x_{12^23^2}^2.$$

Por lo tanto  $x_{12^23^2}^2 = 0$ . Hasta ahora comprobamos que  $[x_{12^23^2}, x_{12^33^2}]_c = 0$ ; esta relación y  $[x_{12^33^2}, x_2]_c = 0$  implican que  $x_{12^33^2}^2 = 0$ .

Nuevamente, probamos recursivamente que  $x_\alpha x_\beta = q_{\alpha\beta} x_\beta x_\alpha +$  productos ordenados de generadores PBW intermedios para cada par de raíces  $\alpha < \beta$ , luego el Paso está probado.

*Paso 5.* Hay una extensión que conserva el grado de las álgebras de Hopf trenzadas  $\mathcal{Z} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$ . Además  $B$  es una base de  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  y  $\text{GKdim } \widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}} = \text{GKdim } \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}} + \text{GKdim } \mathcal{Z} = 6$ .

La demostración es análoga al paso correspondiente en la Proposición 4.4.2. Por supuesto, el Paso 3 dice que  $\mathcal{Z}$  es una subálgebra de Hopf central de  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  con base  $\{x_u^m x_v^n : m, n \in \mathbb{N}_0\}$ . Si  $\mathcal{Z}' := \widehat{\mathcal{B}}^{\text{co}\pi}$ , entonces  $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Z}'$  y el Lema 1.8.5 implica que  $\mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}} = \mathcal{H}_{\mathcal{Z}'} \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}} \geq \mathcal{H}_{\mathcal{Z}} \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}}$ . Por otro lado  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  es generada por  $B$ , entonces tenemos la siguiente igualdad entre series de Hilbert:

$$\mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}} = \mathcal{H}_{\mathcal{Z}} \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}} = \frac{(1+t_1)(1+t_1 t_2)(1+t_1 t_2^2 t_3^2)(1+t_1 t_2^3 t_3^2)(1+t_2^2 t_3)(1+t_3)}{(1-t_1 t_2 t_3)(1-t_1 t_2^2 t_3)(1-t_1^2 t_2^3 t_3^2)(1-t_1 t_2^3 t_3)(1-t_2)(1-t_2 t_3)}.$$

Por lo tanto  $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}'$ ,  $B$  es una base de  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}}$  y  $\text{GKdim } \widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}} = \text{GKdim } \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{q}} + \text{GKdim } \mathcal{Z} = 6$ .  $\square$

# Bibliografía

- [A] Andruskiewitsch, N. *An Introduction to Nichols Algebras*. In Quantization, Geometry and Noncommutative Structures in Mathematics and Physics. A. Cardona et al., eds., pp. 135–195, Springer (2017).
- [An1] I. Angiono. *On Nichols algebras with standard braiding*. Algebra Number Theory, Vol. 3 (2009), 35-106.
- [An2] I. Angiono. *On Nichols algebras of diagonal type*, J. Reine Angew. Math. **683** (2013), 189–251.
- [An3] I. Angiono. *A presentation by generators and relations of Nichols algebras of diagonal type and convex orders on root systems*. J. Eur. Math. Soc. **17** 2643–2671 (2015).
- [An4] I. Angiono. *Distinguished Pre-Nichols algebras*. Transf. Groups **21** (2016), 1-33.
- [AAAn] N. Andruskiewitsch and I. Angiono. *On Finite dimensional Nichols algebras of diagonal type*. Bull. Math. Sci. **7** 353–573 (2017).
- [A+] N. Andruskiewitsch, I. Angiono, A. García Iglesias, A. Masuoka, C. Vay, *Lifting via cocycle deformation*. J. Pure Appl. Alg. **218** (4), 684–703 (2014).
- [AAAnH1] N. Andruskiewitsch, I. Angiono y I. Heckenberger. *On finite GK-dimensional Nichols algebras over abelian groups*. Mem. Amer. Math. Soc. Volume 271, Number 1329 (2021).
- [AAAnH2] N. Andruskiewitsch, I. Angiono y I. Heckenberger. *Liftings of Jordan and super Jordan planes*. Proc. Edinb. Math. Soc., II. Ser., **61** (3) 661–672 (2018).
- [AAAnH3] N. Andruskiewitsch, I. Angiono and I. Heckenberger. *Examples of finite-dimensional Nichols algebras over abelian groups in positive characteristic*, In Representation Theory, Mathematical Physics and Integrable Systems, in honor of Nicolai Reshetikhin, editors A. Alexeev, E. Frenkel, M. Rosso, B. Webster and M. Yakimov Progr. Math. 340, pp 1-38 (2021). Birkhauser, Cham.
- [AAAnH4] N. Andruskiewitsch, I. Angiono and I. Heckenberger. *On finite GK-dimensional Nichols algebras of diagonal type*. Contemp. Math. **728** 1–23 (2019).
- [AAAnR] N. Andruskiewitsch, I. Angiono, F. Rossi Bertone. *The divided powers algebra of a finite-dimensional Nichols algebra of diagonal type*, Math. Res. Lett. **24** (2017), 619–643.
- [AnCSa] I. Angiono, E. Campagnolo and G. Sanmarco. *Finite GK-dimensional pre-Nichols algebras of super and standard type*, [arXiv:2009.04863](https://arxiv.org/abs/2009.04863).

- [AnCSa2] I. Angiono, E. Campagnolo and G. Sanmarco. *Finite GK-dimensional pre-Nichols algebras of (super)modular and unidentified type*, arXiv:2110.11217.
- [AD] N. Andruskiewitsch y J. Devoto. *Extensions of Hopf algebras*. Algebra i Analiz, **7** (1) 22-61 (1995); St. Petersburg Math. J. **7** (1) 17–52 (1995).
- [AG] N. Andruskiewitsch, M. Graña. *Braided Hopf algebras over non-abelian finite groups*. Bol. Acad. Nac. Cienc. (Córdoba) **63** 45-78 (1999).
- [AnG1] I. Angiono, A. García Iglesias, *Pointed Hopf algebras with standard braiding are generated in degree one*. Contemporary Mathematics **537**, 57-70 (2011).
- [AnG2] I. Angiono, A. García Iglesias. *On finite GK-dimensional Nichols algebras of diagonal type: rank 3 and Cartan type*, arXiv:2106.10143
- [AnG3] I. Angiono, A. García Iglesias. , in preparation.
- [AN] N. Andruskiewitsch, S. Natale. *Braided Hopf algebras arising from matched pairs of groups*. J. Pure Appl. Alg. **182** (2003), 119–149.
- [AS] N. Andruskiewitsch and H.J. Schneider. *Finite quantum groups and Cartan matrices*, Adv. Math. **154** (2000), 1–45
- [AS2] N. Andruskiewitsch and H.J. Schneider. *On the classification of finite-dimensional pointed Hopf algebras*. Ann. of Math. (2) **171** (2010), no. 1 , 375–417.
- [ASa] N. Andruskiewitsch and G. Sanmarco *Finite GK-dimensional pre-Nichols algebras of quantum linear spaces and of Cartan type*.
- [C] E. Campagnolo. *Pre-Nichols algebras of one-parameter families of finite Gelfand-Kirillov dimension, in preparation*.
- [CuH] M. Cuntz, I. Heckenberger, *Finite Weyl groupoids of rank three*. Trans. Amer. Math. Soc. **364** (2012), 1369–1393.
- [D] V. G. Drinfeld. *Quantum groups*. Proc. ICM, Berkeley. pp. 798-820 (1986).
- [DT] Y. Doi y M. Takeuchi. *Multiplication alteration by two-cocycles-The quantum version*. Comm. Algebra **22** (14) 5715–5732 (1994).
- [EGNO] P. Etingof, S. Gelaki, D. Nikshych, V. Ostrik. *Tensor categories*. Math. Surv. Monog series. Volumen 205, 2015.
- [G] M. Graña. *A freeness theorem for Nichols algebras*. J. Algebra **231** 235-257 (2000).
- [GZB] M.D. Gould, R.B. Zhang y A.J. Bracken. *Quantum Double Construction for Graded Hopf-Algebras*. Bull. Aust. Math. Soc. **47** 353–375 (1993).
- [H1] I. Heckenberger. *The Weyl groupoid of a Nichols algebra of diagonal type*, Invent. Math. **164** (2006), 175–188.

- [H2] I. Heckenberger. *Classification of arithmetic root systems of rank 3*, in: Actas del XVI Coloquio Latinoamericano de Álgebra, Colonia, Uruguay (2005), 227–252.
- [H3] I. Heckenberger. *Classification of arithmetic root systems*, Adv. Math. **220** (2009), 59–124.
- [H4] I. Heckenberger. *Lusztig isomorphisms for Drinfeld doubles of bosonizations of Nichols algebras of diagonal type*. J. Algebra **323** 2130–2182 (2010).
- [Ho] I. Hofstetter. *Extensions of Hopf algebras and their cohomological description*. J. Algebra **164** 264–298 (1994).
- [HS] I. Heckenberger, H. S. Schneider. *Hopf Algebras and Root Systems*. Mathematical Surveys and Monographs **247**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2020. xix+582 pp.
- [J] M. Jimbo, *A  $q$ -difference analogue of  $U(\mathfrak{g})$  and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **10**, 63–69 (1985).
- [Kh] V. Kharchenko, *A quantum analog of the Poincaré-Birkhoff-Witt theorem*. Algebra Logic **38** (1999), 259–276.
- [KL] G. KRAUSE, T. LENAGAN. *Growth of algebras and Gelfand-Kirillov dimension*. Revised edition. Graduate Studies in Mathematics, **22**. Amer. Math. Soc. (2000).
- [L1] G. Lusztig. *Finite dimensional Hopf algebras arising from quantized universal enveloping algebras*. J. Amer. Math. Soc. **3**. pp. 257-296 (1990).
- [L2] G. Lusztig. *Quantum groups at roots of 1*. Geom. Dedicata **35**. pp. 89-114 (1990).
- [M] A. Masuoka. *Hopf algebraic techniques applied to super algebraic groups*. Algebra Symposium Report 2013, Math. Soc. Japan. [arXiv:1311.1261](https://arxiv.org/abs/1311.1261).
- [Ma] Matsumoto, H. *Générateurs et relations des groupes de Weyl généralisés*. C. R. Acad. Sci. Paris, Volume 258, 1964. Páginas 3419-3422.
- [N] Emmy Noether, *Invariante Variations probleme Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, Math. Phys. Kl, 235 (1918)
- [R] Radford, D. E., *Hopf algebras*, Series on Knots and Everything 49. Hackensack, NJ: World Scientific. xxii, 559 p. (2012).
- [Sch] H.-J. Schneider. *Some remarks on exact sequences of quantum groups*. Comm. Algebra **21** (9) 3337–3358 (1993).
- [T] M. Takeuchi. *Survey of braided Hopf algebras*. Contemp. Math. **267**, 301–324 (2000).