TESIS DOCTORAL

Soluciones positivas para problemas que involucran al ϕ-Laplaciano

Leandro Agustin Milne
Director: Uriel Kaufmann

Universidad Nacional de Córdoba
Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación
Marzo del 2022

Positive solutions for problems involving the ϕ-Laplacian

(Abstract)

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ be a smooth bounded domain, let $h_\lambda : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ be a Carathéodory function, let $\lambda > 0$ be a real parameter and let $\phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ be a continuous and strictly monotone function such that $\phi(x) = \varphi(|x|)x$ for all $x \in \mathbb{R}^N$ where $\varphi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ satisfies some appropriate conditions. In this thesis we study the existence of positive solutions for problems of the form

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \phi(\nabla u) = h_\lambda(x, u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

with three different classes of nonlinearities. First, we study a generalization of the logistic equation, setting $h_\lambda(x, u) = \lambda m(x) f(u) - n(x) g(u)$ with $f, g, m, n \geq 0$. In this case we obtain existence and uniqueness results using the sub and supersolution method and comparison arguments.

Second, we study the one-dimensional problem with $h_\lambda(x, u) = \lambda m(x) f(u)$ for $m \in L^1(\Omega)$ with $m^+ \not\equiv 0$ and f a nonnegative function. In this case we consider the sublinear and the superlinear cases of f with respect to ϕ. The existence results for this nonlinearities were obtained using the Krasnosel'skiĭ's fixed point Theorem.

Finally, we study a one-dimensional problem of concave-convex type where we consider the nonlinearities $h_\lambda(x, u) = \lambda m(x) f(u) + n(x) g(u)$ with $m, n \geq 0$. Here f, g are nonnegative functions. Combining the sub and supersolution method and Krasnosel'skiĭ's fixed point Theorem, we demonstrate the existence of two different positive solutions for $\lambda \approx 0$.

Key words: elliptic problems, ϕ-Laplacian, positive solutions, sub and supersolutions, fixed point.

MSC 2020: 34B15, 34B18, 35J25, 35J60.

Soluciones positivas para problemas que involucran al ϕ-Laplaciano

(Resumen)

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio suave y acotado, $h_\lambda : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función Carathéodory, $\lambda > 0$ un parámetro real y $\phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ una función continua estrictamente monótona que satisface $\phi(x) = \varphi(|x|)x$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, donde $\varphi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ cumple ciertas hipótesis apropiadas. En esta tesis estudiamos la existencia de soluciones positivas a problemas del tipo

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \phi(\nabla u) = h_\lambda(x, u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

con tres clases de no linealidades h_λ distintas. En primer lugar, estudiamos una generalización de la ecuación logística, considerando $h_\lambda(x, u) = \lambda m(x)f(u) - n(x)g(u)$ con $f, g, m, n \geq 0$. En este caso obtenemos resultados de existencia y unicidad mediante el método de sub y supersoluciones y argumentos de comparación.

En segundo lugar, estudiamos el problema unidimensional con $h_\lambda(x, u) = \lambda m(x)f(u)$ para $m \in L^1(\Omega)$ con $m^+ \not\equiv 0$ y f una función no negativa. En este caso consideramos tanto el caso sublineal como superlineal de f con respecto a ϕ. Los resultados de existencia para esta no linealidad se obtuvieron usando el Teorema de punto fijo de Krasnosel'skiĭ.

Por último, estudiamos un problema unidimensional del tipo cóncavo-convexo donde consideramos la no linealidad $h_\lambda(x, u) = \lambda m(x)f(u)+n(x)g(u)$ con $m, n \geq 0$. Aquí f, g son funciones no negativas. Combinando el método de sub y supersoluciones y el teorema de punto fijo de Krasnosel'skiĭ, demostramos la existencia de dos soluciones positivas distintas para $\lambda \approx 0$.

Palabras claves: problemas elípticos, ϕ-Laplaciano, soluciones positivas, sub y supersoluciones, punto fijo.

MSC 2020: 34B15, 34B18, 35J25, 35J60.

Índice general

Introducción

En esta tesis estudiamos la existencia de soluciones positivas a problemas del tipo

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\phi(\nabla u) = h_\lambda(x,u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio suave y acotado, $h_\lambda : \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ es una función Carathéodory (esto es, $h_\lambda(\cdot,\xi)$ medible para todo $\xi \in \mathbb{R}$ y $h_\lambda(x,\cdot)$ continua para *c.t.p.* $x \in \Omega$), $\lambda > 0$ es un parámetro real y $\phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ es una función continua estrictamente monótona que satisface

$$\phi(x) = \varphi(|x|)x \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N,$$

donde $\varphi(x) : (0,\infty) \to (0,\infty)$ es una función C^1 tal que:

(ϕ_1) $\lim_{t\to 0^+} \varphi(t)t = 0$, $\lim_{t\to\infty} \varphi(t)t = \infty$, y $(\varphi(t)t)' > 0$ para todo $t > 0$.

La existencia de soluciones no negativas o positivas a problemas del tipo (1), también llamados problemas que involucran al ϕ-Laplaciano, ha sido estudiada durante los últimos 30 años, mediante diferentes métodos, debido a su interés tanto teórico como en aplicaciones. Este tipo de problemas generaliza tanto al Laplaciano como al p-Laplaciano, pues tomando $\phi(x) = x$ y $\phi(x) = |x|^{p-2}x$, respectivamente, obtenemos dichos operadores. Como es sabido, el Laplaciano es un operador lineal, mientras que el p-Laplaciano es homogéneo. Al generalizar no tendremos, necesariamente, un operador homogéneo y mucho menos uno lineal, lo cual hace más interesante al problema.

En este trabajo utilizamos el método de sub y supersoluciones, el teorema de punto fijo de Krasnosel'skiĭ y argumentos de comparación usando estimaciones a problemas relacionados para obtener nuestros resultados.

Los problemas del tipo (1) tienen soluciones (débiles) que viven naturalmente en espacios de Orlicz-Sobolev, los cuales describimos en el **Capítulo 1**. Cabe aclarar que en el caso unidimensional ($N = 1$) la naturaleza del operador hace que no sea necesario involucrar dichos espacios en el estudio de estos problemas, es más son de clase C^1 (Ver Observación 3.1).

A lo largo de esta tesis estudiamos tres clases distintas de no linealidades h_λ. En el **Capítulo 4** consideramos $h_\lambda(x,u) := \lambda m(x)f(u) - n(x)g(u)$ donde m, n son funciones no negativas y m solo se anula donde n lo hace, mientras que f y g pueden ser modeladas por $f(t) = t^q$ y $g(t) = t^r$ con $0 < q < r$. Los resultados principales de este Capítulo son el Teoremas 4.1 (caso unidimensional), el Teorema 4.8 (caso N-dimensional con $N \geq 2$) y el Teorema 4.13 (resultado de unicidad).

Por otro lado, en el **Capítulo 5** consideramos el problema unidimensional con la no linealidad $h_\lambda(x,u) = \lambda m(x)f(u)$ con m una función que cambia de signo y $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ continua con $f(0) = 0$, $lim_{t\to\infty} f(t) = \infty$. Estudiamos los casos donde f es superlineal o sublineal con respecto de ϕ; esto es en el caso superlineal que f decrece más rápido que ϕ a cero y crece más rápido que ϕ a infinito, mientras que el sublineal el comportamiento es opuesto. En este Capítulo obtuvimos como resultados existencia de soluciones no negativas siempre que la parte negativa de m sea pequeña. Dichos resultados se encuentran en el Teorema 5.3 (caso superlineal) y el Teorema 5.7 (caso sublineal).

Por último, en el **Capítulo 6** consideramos $N = 1$ y la no linealidad $h_\lambda(x,u) = \lambda m(x)f(u) + n(x)g(u)$ con $m, n \in L^1$ no negativas y no idénticamente nulas y $f, g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ funciones continuas. Para este tipo de no linealidad probamos en el Teorema 6.2 que para $\lambda \approx 0$ existen dos soluciones positivas distintas.

Para finalizar con la introducción desarrollamos brevemente los capítulos que no han sido mencionados anteriormente.

En el **Capítulo 2** enunciamos las nociones de Fréchet diferenciable y Gâteaux diferenciable para operadores (no necesariamente lineales) y resultados básicos sobre las mismas. Además, definimos y demostramos la existencia del índice de punto fijo de un operador, lo cual utilizamos para enunciar y probar el Teorema de punto fijo de Krasnosel'skiĭ (Teorema 2.15), el cual será utilizado para probar los resultados de los Capítulos 5 y 6.

En el **Capítulo 3** enunciamos y probamos resultados que valen en el caso unidimensional. Entre estos resultados se encuentra el Teorema 3.4, el cual es un resultado original y contiene desigualdades que usamos para probar los resultados de existencia de los Capítulos 4, 5 y 6. Además, enunciamos resultados que nos serán útiles en el caso N-dimensional con $N \geq 2$, los cuales utilizamos en el Capítulo 4. Por último, están enunciados y probados los métodos de sub y supersoluciones tanto para el caso unidimensional (Teorema 3.10), como para el caso N-dimensional con $N \geq 2$ (Teorema 3.13). Este método será usado en los Capítulos 4 y 6.

En el **Capítulo 7** introducimos los índices de los espacios de Orlicz, los cuales permitirán comparar nuestras hipótesis con las de otros autores.

También se introducen varios ejemplos de funciones ϕ para el caso superlineal y el sublineal, algunos de las cuales cumplen nuestras hipótesis, pero no las de los trabajos de los otros autores.

Algunos de los resultados de los Capítulos 3, 4 y 5 aparecen en los trabajos [KM18a], [KM18b] y [KM19].

Capítulo 1

Espacios de Orlicz-Sobolev

En la primera sección de este Capítulo, introduciremos las N-funciones (también conocidas como funciones de Young), ya que el operador diferencial de los problemas a estudiar, estará asociado a la derivada de una N-función. En la segunda sección, definiremos y enunciaremos algunas propiedades de los espacios de Orlicz, los cuales son una generalización de los espacios de Lebesgue. En la tercera y última sección de este Capítulo, definiremos los espacios de Orlicz-Sobolev. En algunos de estos espacios vale una desigualdad de Poincaré la cual esta enunciada en el Teorema 1.8. Los temas tratados en este Capítulo nos ayudarán a entender al operador diferencial y el método de sub y supersoluciones en el caso N-dimensional (ver las secciones 3.2 y 3.3.2 del Capítulo 3, respectivamente). Además, en el Capítulo 4 utilizaremos lo tratado en este Capítulo junto con los temas del Capítulo 3 mencionados anteriormente.

El objetivo de este Capítulo es enunciar lo necesario para probar lo mencionado en el párrafo anterior. Para más detalles recomendamos los libros [KR61, RR91] donde se estudian estos espacios en profundidad.

Cabe aclarar que en el caso unidimensional, no hace falta involucrar estos espacios por la naturaleza del operador (para más detalles ver la Sección 3.1 del Capítulo 3). A pesar de esto, el operador diferencial seguirá asociado a una N-función.

1.1. N-Funciones

Definición 1.1. Diremos que $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una *N-función* (o una *función de Young*) si

$$\Phi(t) = \int_0^{|t|} \varphi(s)ds, \tag{1.1}$$

donde la función $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ satisface las siguientes propiedades:

(a) $\varphi(0) = 0$;

(b) $\varphi(s) > 0$ para $s > 0$;

(c) φ es continua a derecha para cualquier $s \geq 0$, esto es, si $s \geq 0$, entonces $\lim\limits_{t\to s^+} \varphi(t) = \varphi(s)$;

(d) φ es no decreciente en $[0,\infty)$;

(e) $\lim\limits_{s\to\infty} \varphi(s) = \infty$.

Bajo esas condiciones, diremos que Φ es una N-función representada por φ. Notar que la monotonía de φ implica que Φ es una función convexa.

El siguiente Teorema provee una definición equivalente a la anterior.

Teorema 1.2 (Ver [KR61]). *Una función convexa y continua $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una N-función si y solamente si, satisface las siguiente propiedades:*

(i) Φ *es par;*

(ii) Φ *es estrictamente creciente en* $[0,\infty)$;

(iii) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\Phi(t)}{t} = 0$*;*

(iv) $\lim\limits_{t\to \infty} \dfrac{\Phi(t)}{t} = \infty$.

Si una función convexa satisface las condiciones del Teorema, entonces puede ser representada como en (1.1) tomando su derivada a derecha como φ.

Ejemplos. Las siguientes funciones son ejemplos de N-funciones:

- $\Phi(t) := \frac{|t|^p}{p}, 1 < p < \infty$;
- $\Phi(t) := e^{t^2} - 1$;
- $\Phi(t) := e^{|t|} - |t| - 1$;
- $\Phi(t) := (1 + |t|)\log(1 + |t|) - |t|$.

Dada una función φ que satisface las propiedades (a)-(e) de la definición 1.1, se define

$$\widetilde{\varphi}(s) = \sup\{t : \varphi(t) \leq s\}, \text{ para } s \geq 0. \tag{1.2}$$

Esta función también satisface las propiedades (a)-(e). Además, se tienen las siguientes desigualdades:

$$\widetilde{\varphi}(\varphi(t)) \geq t \text{ para todo } t \geq 0,$$
$$\varphi(\widetilde{\varphi}(s)) \geq s \text{ para todo } s \geq 0,$$

y para $\varepsilon > 0$

$$\widetilde{\varphi}[\varphi(t) - \varepsilon] \leq t, \text{ y } \varphi[\widetilde{\varphi}(s) - \varepsilon] \leq s.$$

Si φ es estrictamente creciente $\widetilde{\varphi} = \varphi^{-1}$. En el caso general, la función $\widetilde{\varphi}$ se llama la *inversa a derecha* de φ. Se puede ver que φ es la inversa a derecha de $\widetilde{\varphi}$, es decir, se cumple la siguiente igualdad

$$\varphi(t) = \sup\{s : \widetilde{\varphi}(s) \leq t\}. \tag{1.3}$$

Las N-funciones Φ y $\widetilde{\Phi}$ dadas por

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(\tau)d\tau, \quad \widetilde{\Phi}(s) = \int_0^s \widetilde{\varphi}(\sigma)d\sigma$$

se dicen *complementarias*. Ejemplos de dicho par de funciones complementarias son:

- $\Phi(t) = \dfrac{t^p}{p}$, $\widetilde{\Phi}(s) = \dfrac{s^{p'}}{p'}$, con $1 < p < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$; y
- $\Phi(t) = e^t - t - 1$, $\widetilde{\Phi}(s) = (1 + s)\ln(1 + s) - s$.

Si Φ y $\widetilde{\Phi}$ son un par de N-funciones complementarias, entonces se cumple la siguiente desigualdad,

$$ts \leq \Phi(t) + \widetilde{\Phi}(s) \text{ para todo } t, s \in \mathbb{R}, \tag{1.4}$$

la cual es conocida como la *desigualdad de Young*.

Teorema 1.3 (Ver Proposición 1.9 de [Mor14]). *Sean Φ y $\widetilde{\Phi}$ un par de N-funciones complementarias. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $\Phi(\alpha t) \leq \alpha\Phi(t)$ *para* $\alpha \in [0, 1]$;
2. $\Phi(t) < t\varphi(t)$ *para todo* $t > 0$;

3. $\Phi(\beta t) > \beta\Phi(t)$ *para todo* $\beta > 1$ *y* $t \neq 0$*;*

4. $\widetilde{\Phi}(\varphi(t)) \leq \Phi(2t)$ *para todo* $t \geq 0$*;*

5. $\widetilde{\Phi}\left(\frac{\Phi(t)}{t}\right) < \Phi(t)$ *para todo* $t > 0$*;*

6. $t < \Phi^{-1}(t)\widetilde{\Phi}^{-1}(t)$ *para todo* $t > 0$.

Definición 1.4. Diremos que una N-función Φ satisface la condición Δ_2 si existen constantes $k > 0$ y $t_0 \geq 0$ tales que

$$\Phi(2t) \leq k\Phi(t) \text{ para } t \geq t_0.$$

Equivalentemente, Φ satisface la condición Δ_2 si y solamente si, para todo $l > 1$ existen $k = k(l) > 0$ y $t_0 \geq 0$ tales que

$$\Phi(lt) \leq k\Phi(t) \text{ para } t \geq t_0.$$

Observación 1.5. Otra condición necesaria y suficiente para que una N-función Φ satisfaga la condición Δ_2, es que existan constantes $\alpha > 1$ y $t_0 > 0$ tales que

$$\frac{t\varphi(t)}{\Phi(t)} < \alpha, \quad \text{para todo } t \geq t_0 \tag{1.5}$$

(ver [Mor14, Lema 1.13]).
De la desigualdad anterior podemos deducir que

$$\ln\left(\frac{\Phi(t)}{\Phi(1)}\right) = \int_1^t \frac{\varphi(r)}{\Phi(r)}dr \leq \int_1^t \frac{\alpha}{r}dr = \ln(t)^\alpha.$$

Por lo tanto, $\Phi(t) \leq Ct^\alpha$ para todo $t \geq 1$ y alguna constante $\alpha > 1$. Es decir, una N-función que satisface la condición Δ_2 está acotada superiormente por una función polinomial para t suficientemente grande. Como consecuencia de esto las N-funciones $e^{|t|} - |t| - 1$ y $e^{t^2} - 1$ no satisfacen la condición Δ_2, pues ambas tienden a infinito más rápido que cualquier polinomio.

Además, se puede probar (ver [Mor14, Lemas 1.16 y 1.17]) que la función complementaria $\widetilde{\Phi}$ satisface la condición Δ_2 si y solo si existen constantes $\beta > 1$ y $t_0 > 0$ tal que

$$\frac{t\varphi(t)}{\Phi(t)} \geq \beta, \ t \geq t_0.$$

1.2. Espacios de Orlicz

Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$ y sea Φ una N-función. La *clase de Orlicz* $K_\Phi(\Omega)$ es el conjunto de todas las (clases de equivalencias módulo la igualdad c.t.p. en Ω de) funciones medibles $u : \Omega \to \mathbb{R}$ que satisfacen

$$\int_\Omega \Phi(|u(x)|)dx < \infty.$$

Como Φ es convexa $K_\Phi(\Omega)$ es siempre un conjunto convexo de funciones. Pero podría no ser un espacio vectorial; puede ocurrir que exista $u \in K_\Phi(\Omega)$ y $\lambda > 0$ tal que $\lambda u \notin K_\Phi(\Omega)$.

Queremos remarcar que se podría quitar la condición de acotación al dominio Ω. Pero puesto que los problemas a trabajar en los siguientes capítulos van a ser planteados sobre dominios acotados preferimos suponer Ω dominio acotado en este capítulo.

Lema 1.6. *$K_\Phi(\Omega)$ es un espacio vectorial si y solo si Φ satisface la condición Δ_2.*

Para la prueba ver [AF03, Lemma 8.8].

El *espacio de Orlicz* $L_\Phi(\Omega)$ es la cápsula lineal de la clase de Orlicz $K_\Phi(\Omega)$, es decir, el menor espacio vectorial que contiene a $K_\Phi(\Omega)$. Evidentemente, $K_\Phi(\Omega) \subset L_\Phi(\Omega)$, y estos conjuntos son iguales si y solo si Φ satisface la condición Δ_2.

Uno puede ver que el funcional

$$\|u\|_\Phi = \|u\|_{\Phi,\Omega} = \text{ínf}\left\{k > 0 : \int_\Omega \Phi\left(\frac{|u(x)|}{k}\right)dx \le 1\right\}$$

es una norma en $L_\Phi(\Omega)$ llamada la norma de Luxemburgo. Este ínfimo se alcanza. De hecho, si k decrece hacia $\|u\|_\Phi$ de la desigualdad

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{|u(x)|}{k}\right)dx \le 1, \tag{1.6}$$

obtenemos por el Teorema de la convergencia monótona

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{|u(x)|}{\|u\|_\Phi}\right)dx \le 1. \tag{1.7}$$

La desigualdad puede ser estricta en (1.7) pero si vale la igualdad en (1.6), entonces $k = \|u\|_\Phi$.

El espacio de Orlicz $L_\Phi(\Omega)$ provisto con la norma $\|\cdot\|_\Phi$ resulta un espacio de Banach.

Notemos que cuando $\Phi(t) = t^p/p$ con $1 < p < \infty$ se tiene que

$$L^p(\Omega) = L_\Phi(\Omega) = K_\Phi(\Omega).$$

Además, $\|u\|_\Phi = p^{-1/p}\|u\|_p$ donde $\|\cdot\|_p$ es la norma usual del espacio de Lebesgue $L^p(\Omega)$. Por lo tanto, los espacios de Orlicz son una generalización de los espacios de Lebesgue.

Mencionaremos para concluir esta sección que vale una *desigualdad de Hölder* en este contexto que podemos enunciar como sigue:

Si Φ y $\widetilde{\Phi}$ son N-funciones complementarias vale que

$$\left|\int_\Omega u(x)v(x)dx\right| \leq 2\|u\|_\Phi \|v\|_{\widetilde{\Phi}}. \tag{1.8}$$

Esta desigualdad se puede obtener aplicando la desigualdad de Young (1.4) a $|u(x)|/\|u\|_\Phi$ y $|v(x)|/\|v\|_{\widetilde{\Phi}}$ e integrando sobre Ω.

Teorema 1.7. *Dada una N-función Φ, existe una constante positiva C tal que*

$$\|u\|_1 \leq C\|u\|_\Phi \quad \textit{para todo } u \in L_\Phi(\Omega).$$

En otras palabras, la inmersión de $L_\Phi(\Omega)$ en $L^1(\Omega)$ es continua.

Demostración. Sea $\widetilde{\Phi}$ la N-función complementaria de Φ. Como $|\Omega| < \infty$, las funciones constantes pertenecen a $L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$. En particular, $v \equiv 1$ pertenece a $L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$. Entonces, utilizando la desigualdad (1.8) obtenemos para $u \in L_\phi(\Omega)$ que

$$\int_\Omega |u| = \int_\Omega |u|\, v \leq 2\|u\|_\Phi \|v\|_{\widetilde{\Phi}}.$$

Tomando $C = 2\|v\|_{\widetilde{\Phi}}$ se sigue que

$$\|u\|_1 \leq C\|u\|_\Phi,$$

como queríamos probar. □

1.3. Espacios de Orlicz-Sobolev

Diremos que un vector $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ es un *multi-índice* si $\alpha_j \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ para todo $j = 1, \ldots, N$, y su orden es $|\alpha| = \sum_{j=1}^N \alpha_j$.

Dados un dominio Ω en $\mathbb{R}^N$ y una N-función Φ, definimos el *espacio de Orlicz-Sobolev* $W^m L_\Phi(\Omega)$ como el conjunto de aquellas (clases de equivalencia de) funciones $u \in L_\Phi(\Omega)$ cuya derivada en el sentido distribucional $D^\alpha u$, también pertenece a $L_\Phi(\Omega)$ para todo multi-índice α con $|\alpha| \leq m$. Se puede ver que $W^m L_\Phi(\Omega)$ es un espacio de Banach con respecto a la norma

$$\|u\|_{m,\Phi} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_\Phi . \tag{1.9}$$

Si $1 < p < \infty$ y $\Phi_p(t) = t^p$, entonces $W^m L_{\Phi_p}(\Omega)$ es el espacio de Sobolev clásico $W^{m,p}(\Omega)$.

Como en el caso de espacios de Sobolev clásicos, el espacio $W_0^m L_\Phi(\Omega)$ es definido como la clausura de $C_c^\infty(\Omega)$ en $W^m L_\Phi$. El espacio $W_0^m L_\Phi(\Omega)$ junto la norma definida en (1.9) resulta un espacio de Banach.

A continuación enunciaremos una desigualdad de Poincaré valida para el espacio $W_0^1 L_\Phi(\Omega)$. Para la prueba ver [Gos74, Lemma 5.7] o [GHLMS99, Lemma 2.1].

Teorema 1.8. *Sea $u \in W_0^1 L_\Phi(\Omega)$, entonces*

$$\int_\Omega \Phi(|u(x)|)dx \leq \int_\Omega \Phi(2d\,|\nabla u(x)|)dx, \tag{1.10}$$

donde d es el diámetro de Ω. Como consecuencia, $\|\nabla u\|_\Phi$ define una norma equivalente en $W_0^1 L_\Phi(\Omega)$.

Capítulo 2

Operadores en espacios de Banach y Teoremas de punto fijo

Este Capítulo consta de dos secciones principales. En la primera enunciamos las nociones de Fréchet diferenciable y Gâteaux diferenciable para operadores (no necesariamentes lineales) y resultados básicos sobre las mismas. Este tipo de diferenciabilidad nos sera útil ya que calcularemos la diferencial de Fréchet del operador de energía asociado a los problemas que estudiaremos (ver Lema 3.9). Así como también, para probar el método de sub y supersoluciones cuando $N \geq 2$ (ver la sección 3.3.2) y el resultado de unicidad del Capítulo 4 de la sección 4.3. Por otro lado, en la sección 2.2 definiremos y demostraremos la existencia del índice de punto fijo de un operador, lo cual utilizaremos para enunciar y probar el Teorema principal de esta sección: el Teorema 2.15. Este Teorema lo utilizaremos para probar nuestros resultados de existencia en los Capítulos 5 y 6.

2.1. Calculo diferencial

Dados X, Y dos espacios de Banach, denotaremos por $\mathcal{B}(X, Y)$ al conjunto de todos los operadores lineales $A : X \to Y$ continuos. Sea U un subconjunto abierto de X. Diremos que un operador $I : U \to Y$ (no necesariamente lineal) es *Fréchet diferenciable* en $u \in U$ si existe $A \in \mathcal{B}(X, Y)$ tal que

$$\lim_{v \to 0} \frac{I(u + v) - I(u) - Av}{\|v\|} = 0. \tag{2.1}$$

Tal A esta únicamente determinado y lo llamaremos la *diferencial de Fréchet* de I (o simplemente la diferencial de I) en u y la denotaremos por

$$A = I'(u).$$

Si I es diferenciable en todo $u \in U$ diremos que I es diferenciable en U.

Notar que si I es diferenciable en u entonces

$$I(u+h) = I(u) + I'(u)h + o(\|h\|)$$

e I es continua en dicho punto. Recíprocamente, si $I \in C(U,Y)$ no es necesario pedir la continuidad al operador A. De hecho, la continuidad de I implica la continuidad de A pues

$$A(h) = I(u+h) - I(u) - o(\|h\|).$$

Por otro lado, es necesario remarcar que la definición de diferenciabilidad no depende de la norma pero si de las topologías de X e Y. Esto es que si por ejemplo $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$ son dos normas equivalentes sobre X, entonces I es diferenciable en u en $(X, \|\cdot\|)$ si y solo si I lo es en $(X, |||\cdot|||)$ y las diferenciales coinciden.

De ahora en más escribiremos $\langle I'(u), v\rangle$ en lugar de $I'(u)v$ para todo $v \in X$, por conveniencia.

Ejemplos

1. El operador constante $I(u) = c$ es diferenciable en cualquier u y $I'(u) = 0$.

2. Sea $A \in B(X,Y)$. Como $A(u+h) - A(u) = A(h)$, se sigue que A es diferenciable en X y $A'(u) = A$.

3. Sea $B : X \times Y \to Z$ un operador bilineal. Resulta que

   $$B(u+h, v+k) - B(u,v) = B(h,v) + B(u,k) + B(h,k).$$

   De la continuidad en el origen se sigue que

   $$\|B(h,k)\| \leq c\,\|h\|\,\|k\|\,.$$

   Entonces B es diferenciable en cualquier $(u,v) \in X \times Y$ y $\langle B'(u,v), (h,k)\rangle = B(h,v) + B(u,k)$.

4. Sea H un espacio de Hilbert con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y consideremos el funcional $I(u) = \|u\|^2 = \langle u, u \rangle$. Como

$$\|u + h\|^2 - \|u\|^2 = 2\langle u, h \rangle + \|h\|^2$$

se sigue que I es diferenciable en cualquier u y $\langle I'(u), h \rangle = 2\langle u, h \rangle$. Notar que $\|\cdot\|$ no es diferenciable en $u = 0$.

5. Si $X = \mathbb{R}$, $U = (a, b)$ y $I : U \to Y$ es diferenciable en $t \in U$, la diferencial $I'(t)$ puede identificarse con $\langle I'(t), 1 \rangle \in Y$ mediante el isomorfismo canónico $i : B(\mathbb{R}, Y) \to Y$, $i(A) = A(1)$. Por ejemplo, si $Y = \mathbb{R}^N$ y $I(t) = (I_1(t), \ldots, I_N(t))$, $I'(t)$ es el vector con componentes dI_i/dt.

En la siguiente proposición están enunciadas las principales reglas de la diferenciación.

Proposición 2.1.

(i) (Linealidad) Sean $I, J : U \to Y$. Si I y J son diferenciables en $u \in U$ entonces $aI + bJ$ es diferenciable en u para todo par $a, b \in \mathbb{R}$ y

$$\langle (aI + bJ)'(u), h \rangle = a\langle I'(u), h \rangle + b\langle J'(u), h \rangle.$$

(ii) (Regla de la cadena) Sea $I : U \to Y$ y $J : V \to Z$ con $I(U) \subset V$, U y V subconjuntos abiertos de X e Y, respectivamente. Consideremos el operador compuesto

$$J \circ I : U \to Z, \ \ J \circ I(u) := J(I(u)).$$

Si I es diferenciable en $u \in U$ y J es diferenciable en $v := I(u) \in V$, entonces $J \circ I$ es diferenciable en u y

$$\langle (J \circ I)'(u), h \rangle = \langle J'(v), \langle I'(u), h \rangle \rangle.$$

En otras palabras, la diferencial de $J \circ I$ en u es la composición de los operadores lineales $I'(u)$ y $J'(v)$ con $v = I(u)$.

La prueba de estos incisos no difiere de las aquellas que se realizan para las reglas de diferenciación en $\mathbb{R}^N$.

Definición 2.2. Sea $I : U \to Y$ diferenciable en U. El mapa $I' : U \to B(X, Y)$ se llama la *derivada (de Fréchet)* de I. Si I' es continuo como un mapa de U en $B(X, Y)$ diremos que I es C^1 y escribiremos $I \in C^1(U, Y)$.

Como para las funciones en $\mathbb{R}^N$, tambien podemos definir en este contexto las derivadas direccionales usualmente llamadas el *diferencial de Gâteaux*.

Definición 2.3. Sea $I : U \to Y$ dado y $u \in U$. Decimos que I es *Gâteaux diferenciable* en u si existe $A \in B(X, Y)$ tal que para todo $h \in X$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{I(u + \varepsilon h) - I(u)}{\varepsilon} = Ah. \tag{2.2}$$

El mapa A esta unívocamente determinado, es llamado el *diferencial de Gâteaux* de I y lo denotaremos por $I'_G(u)$.

Claremente, si I es Fréchet diferenciable en u entonces I es Gâteaux diferenciable en u y ambas diferenciales coinciden. Reciprocamente, la diferenciabilidad Gâteaux no implica ni siquiera la continuidad de I. Recordar el ejemplo del análisis de varias variables $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por

$$F(s,t) = \left(\frac{s^2 t}{s^4 + t^2} \right)^2 \text{ si } t \neq 0,$$
$$F(s,0) = 0.$$

El siguiente resultado nos da un criterio de diferenciabilidad Fréchet, el cual puede ser visto como una generalización de aquel resultado del análisis en varias variables que nos asegura la diferenciación de una función para la cual existen y son continuas las derivadas direccionales en el contexto que estamos tratando en este capítulo. Para los detalles de la prueba ver [AP93, Theorem 1.9].

Teorema 2.4. *Sea $I : U \to Y$ Gâteaux diferenciable en cualquier punto de U. Supongamos que su diferencial de Gâteaux $I'_G : U \to B(X, Y)$ es continuo en u. Entonces I es Fréchet diferenciable en u y $I'(u) = I'_G(u)$.*

2.2. Teoremas de punto fijo

Sea X un espacio de Banach. Un subconjunto no vacío, cerrado y convexo K de X se llama un *cono* si satisface las siguiente condiciones:

1. Si $x \in K, \lambda \geq 0$ entonces $\lambda x \in K$;

2. Si $x \in K, -x \in K$ entonces $x = 0$, i.e., $K \cap -K = \{0\}$.

Todo cono K en X define un *orden parcial* en X dado por

$$x \leq y \text{ sii } y - x \in K. \tag{2.3}$$

Escribiremos $x < y$ cuando $x \neq y$, $x \leq y$.

El siguiente Teorema enuncia una propiedad útil que usaremos más adelante, para la prueba ver [GL88, Teorema 1.4.1].

Teorema 2.5. *Si X es un espacio de Banach separable y K un cono en X, entonces existe $T_0 \in X^*$ tal que $T_0(x) > 0$ para todo $x \in K \setminus \{0\}$.*

2.2.1. Teorema de extensión de Dugundji

Definición 2.6. Sean dos espacios topológicos X e Y, $A \subset X$, $f : A \to Y$ y $F : X \to Y$ funciones continuas. Diremos que F es una *extensión* de f si $F(a) = f(a)$ para todo $a \in A$.

El siguiente Teorema, conocido como Teorema de extensión de Dugundji, surge cuando dicho matemático en [Dug51] da una generalización del Teorema de extensión de Tietze (para la prueba ver dicho artículo, sección 4).

Teorema 2.7 (Teorema de extensión de Dugundji)**.** *Sean X un espacio métrico, A un subconjunto cerrado de X, K subconjunto convexo de un espacio vectorial topológico localmente convexo y $f : A \to K$ una función continua. Entonces existe $F : X \to K$ una extensión de f. Más aún, $F(X) \subset co(f(A))$, donde $co(f(A))$ denota la cápsula convexa del conjunto $f(A)$.*

2.2.2. Grado de Leray-Schauder

En esta sección enunciaremos las principales propiedades del grado de Leray-Schauder, el lector interesado en ver como se definen y prueban las siguientes propiedades puede consultar [Dei85] capítulo 2, sección 8.

Primero daremos unas definiciones. Sea X un espacio de Banach. Un subconjunto $A \subset X$ se dice un *retracto* de X si existe una función continua $r : X \to A$. Además diremos que la función r es una *retracción* si $r(x) = x$ para todo $x \in A$. Por el Teorema de extensión de Dugundji 2.7, todo subconjunto convexo y no vacío de X es un retracto de X (tomando r como la extensión de la función identidad de A en A). En particular, todo cono de X es un retracto de X.

Sean X, Y espacios de Banach. Diremos que $F : X \to Y$ es una función *completamente continua* si, para toda sucesión débilmente convergente $\{x_n\} \subset X$, se tiene que $\{F(x_n)\}$ es convergente en Y.

Teorema 2.8. *Sean U un retracto de un espacio de Banach X, $f : \overline{U} \to X$ una función completamente continua y $p \in X \backslash f(\partial U)$. Entonces existe un entero $deg(f, U, p)$ que satisface las siguientes condiciones:*

(i) Normalidad: $deg(i, U, p) = 1$ para todo $p \in U$, donde i es la función identidad.

(ii) Aditividad: $deg(f, U, p) = deg(f, U_1, p) + deg(f, U_2, p)$ siempre que U_1 y U_2 sean subconjuntos abiertos y disjuntos de U tales que p no pertenezca a $f(\overline{U} \setminus (U_1 \cup U_2))$.

(iii) Invarianza homotópica: $deg(h(t, \cdot), U, p)$ es independiente de $0 \leq t \leq 1$ siempre que $h(t, x) = x - H(t, x)$ con $H : [0, 1] \times \overline{U} \to X$ completamente continua y p no pertenezca a $h(t, \partial U)$.

(iv) Cambio de base: $deg(f, U, p) = deg(f - p, U, 0)$.

Más aún, sean

$$M = \{(f, U, p) : U \subset X \text{ acotado }, f : \overline{U} \to X \text{ completamente continua y}$$
$$p \in X \setminus f(\partial U)\}$$

y $\mathbb{Z}$ el conjunto de los enteros. Entonces existe exactamente una función $d : M \to \mathbb{Z}$ que satisface (i)-(iv). En otras palabras, $deg(f, U, p)$ esta unívocamente definido. El entero $deg(f, U, p)$ se llama grado de Leray-Schauder *de f en U con respecto a p.*

Teorema 2.9. *Además de las propiedades anteriores el grado de Leray-Schauder posee la siguiente:*

(v) Escisión: $deg(f, U, p) = deg(f, V, p)$ para todo $V \subset U$ abierto tal que $p \notin f(\overline{U} \setminus V)$.

2.2.3. Índice de punto fijo

Teorema 2.10. *Sea A un retracto de un espacio de Banach X. Entonces, para cada abierto relativamente acotado $U \subset A$ y todo operador continuo y compacto $T : \overline{U} \to A$ sin puntos fijos en ∂U, existe un entero $i(T, U, A)$ que satisface las siguientes condiciones:*

(i) Normalidad: $i(T, U, A) = 1$ si $Tx = y_0 \in U$ para todo $x \in \overline{U}$.

(ii) Aditividad: $i(T, U, A) = i(T, U_1, A) + i(T, U_2, A)$ siempre que U_1 y U_2 sean subconjuntos abiertos y disjuntos de U tales que T no tiene puntos fijos en $\overline{U} \setminus (U_1 \cup U_2)$.

(iii) Invarianza homotópica: $i(H(t,\cdot),U,A)$ *es independiente de* $0 \le t \le 1$ *siempre que* $H : [0,1] \times \overline{U} \to A$ *es continua, compacta y* $H(t,x) \neq x$ *para todo* $(t,x) \in [0,1] \times \partial U$.

(iv) Permanencia: $i(T,U,A) = i(T,U \cap \widetilde{A},\widetilde{A})$ *si* $\widetilde{A}$ *es un retracto de* A *y* $T(\overline{U}) \subset \widetilde{A}$.

Más aún, sean

$$M = \{(T,U,A) : A \text{ es retracto de } X,\ U \text{ es un subconjunto acotado}$$

$$\text{y abierto de } A, T : \overline{U} \to A \text{ continuo, compacto y } Tx \neq x \text{ en } \partial U\}$$

y $\mathbb{Z}$ *el conjunto de los enteros. Entonces existe exactamente una función* $d : M \to \mathbb{Z}$ *que satisface (i)-(iv). En otras palabras,* $i(T,U,A)$ *está unívocamente definido. El entero* $i(T,U,A)$ *se llama* índice de punto fijo *de* T *en* U *con respecto a* A.

Demostración. Primero probaremos la unicidad del índice de punto fijo. Sea $\{i(T,U,A)\}$ cualquier familia que satisfaga las condiciones (i)-(iv). Definimos

$$d(f,U,p) := i(T+p,U,X), \tag{2.4}$$

donde $f = I - T$, U es un subconjunto abierto y acotado de X, $f(x) \neq p$ en ∂U, i.e., $T+p$ no tiene puntos fijos en ∂U. De las condiciones (i)-(iv) y (2.4) es fácil chequear que la función $d(f,U,p)$ posee las cuatro propiedades que caracteriza al grado de Leray-Schauder (ver Teorema 2.8). Entonces, por la unicidad del grado de Leray-Schauder, se tiene que

$$d(f,U,p) = deg(I-T,U,p). \tag{2.5}$$

Tomando $p = 0$ en (2.4) y (2.5), obtenemos que

$$i(T,U,X) = deg(I-T,U,0). \tag{2.6}$$

Supongamos ahora que A es un retracto arbitrario de X y denotemos por $r : X \to A$ una retracción arbitraria. Para un subconjunto abierto U de A, elegimos una bola $B_R = \{x \in X : \|x\| < R\}$ tal que $U \subset B_R$. Entonces, por la propiedad de Permanencia (iv) y (2.6), tenemos que

$$i(T,U,A) = i(T \circ r, B_R \cap r^{-1}(U), X) = deg(I - T \circ r, B_R \cap r^{-1}(U), 0).$$

Luego, la igualdad anterior y la unicidad del grado de Leray-Schauder implican la unicidad del índice de punto fijo.

De la prueba de unicidad que acabamos de hacer, resulta evidente que debemos definir

$$i(T,U,A) := deg(I - T\circ r, B_R \cap r^{-1}(U), 0), \tag{2.7}$$

donde $r : X \to A$ es una retracción y $B_R = \{x \in X : \|x\| < R\} \supset U$. Evidentemente, $B_R \cap r^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto y acotado de X y

$$\overline{B_R \cap r^{-1}(U)} \subset \overline{r^{-1}(U)} \subset r^{-1}(\overline{U}). \tag{2.8}$$

Afirmamos que si

$$x_0 \in r^{-1}(\overline{U}) \text{ y } (T\circ r)(x_0) = x_0 \text{ entonces } x_0 \in U \text{ y } Tx_0 = x_0. \tag{2.9}$$

En efecto, como $T(\overline{U}) \subset A$ y $x_0 = (T\circ r)(x_0)$ tenemos que $x_0 \in A$. Luego, al ser r una retracción se tiene que $r(x_0) = x_0$. Entonces, $x_0 \in \overline{U} \subset A$ y $T(x_0) = x_0$. Además, como $Tx \neq x$ en ∂U, se sigue $x_0 \in U$.

Ahora probaremos que $i(T,U,A)$ definido por (2.7) es independiente de la elección de R y r. Sea $R_1 > R$. Como

$$U \subset B_R \cap r^{-1}(U) \subset B_{R_1} \cap r^{-1}(U),$$

por (2.9) sabemos que $T\circ r$ no posee puntos fijos en $\overline{B_{R_1} \cap r^{-1}(U)} \setminus (B_R \cap r^{-1}(U))$, y en consecuencia, por la propiedad de escisión del grado de Leray-Schauder (ver Teorema 2.9)

$$deg(I - T\circ r, B_R \cap r^{-1}(U), 0) = deg(I - T\circ r, B_{R_1} \cap r^{-1}(U), 0),$$

i.e., $i(T,U,A)$ es independiente de la elección de R. Sea ahora, $r_1 : X \to A$ otra retracción de X y sea $V := B_R \cap r^{-1}(U) \cap r_1^{-1}(U)$. Entonces, V es un subconjunto abierto y acotado de X y $V \supset U$. Por (2.9) sabemos que $T\circ r$ no tiene puntos fijos en $\overline{B_R \cap r^{-1}(U)} \setminus V$ y $T\circ r_1$ no tiene puntos fijos en $\overline{B_R \cap r_1^{-1}(U)} \setminus V$. Luego, por la propiedad de escisión del grado de Leray-Schauder (ver Teorema 2.9), tenemos que

$$deg(I - T\circ r, B_R \cap r^{-1}(U), 0) = deg(I - T\circ r, V, 0) \tag{2.10}$$

y

$$deg(I - T\circ r_1, B_R \cap r_1^{-1}(U), 0) = deg(I - T\circ r_1, V, 0). \tag{2.11}$$

Definamos $h(x,t) := x - H(x,t)$, donde $H(x,t) := r[t(T\circ r)(x) + (1-t)(T\circ r_1)(x)]$. Claramente, $H : [0,1] \times V$ es completamente continua. Probaremos a continuación que $0 \notin h(t, \partial V)$ para ningún $t \in [0,1]$. En efecto, si existieran $t_0 \in [0,1]$ y $x_0 \in \partial V$ tales que $h(t_0, x_0) = 0$, entonces

$$x_0 = r\,[t_0(T\circ r)(x_0) + (1-t_0)(T\circ r_1)(x_0)] \in A.$$

Resultando así que $r(x_0) = x_0$, $r_1(x_0) = x_0$ y $Tx_0 = x_0$. Por (2.9), tenemos que $x_0 \in U \subset V$, lo cual contradice que $x_0 \in \partial V$. Entonces, usando la invarianza homotópica del grado de Leray-Schauder y observando que $H(0,x) = r[(T \circ r_1)(x)] = T \circ r_1(x)$ y $H(1,x) = r[T \circ r(x)] = T \circ r(x)$, obtenemos que

$$deg(I - T \circ r_1, V, 0) = deg(I - T \circ r, V, 0). \tag{2.12}$$

Se sigue de (2.10), (2.11) y (2.12) que

$$deg(I - T \circ r, B_R \cap r^{-1}(U), 0) = deg(I - T \circ r_1, B_R \cap r_1^{-1}(U), 0), \tag{2.13}$$

lo que muestra que $i(T, U, A)$ es independiente de la elección de r.

Para finalizar, veremos que las propiedades básicas del grado de Leray-Schauder nos permiten demostrar fácilmente que el índice de punto fijo definido por (2.7) satisface las propiedades (i)-(iv). En efecto, sean $(T, U, A) \in M$, $r : X \to A$ una retracción de X y $R > 0$ tal que $B_R \supset U$. Además, si suponemos que $Tx = y_0 \in U$ para todo $x \in \overline{U}$, entonces, notando que $(I - T \circ r)(x) = (I - y_0)(x)$ para todo $x \in B_R \cap r^{-1}(U)$ y utilizando la propiedad de cambio de base junto con la normalidad del grado de Leray-Schauder, se tiene que

$$\begin{aligned} deg(I - T \circ r, B_R \cap r^{-1}(U), 0) &= deg(I - y_0, B_R \cap r^{-1}(U), 0) = \\ & deg(I, B_R \cap r^{-1}(U), y_0) = 1. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que el índice de punto fijo está definido por (2.7) se sigue que $i(T, U, A) = 1$. Quedando así probado el inciso (i).

Sean $(T, U, A) \in M$, $r : X \to A$ una retracción de X y $R > 0$ tal que $B_R \supset U$. Sean además U_1, U_2 subconjuntos abiertos y disjuntos de U tales que T no tiene puntos fijos en $\overline{U} \setminus (U_1 \cup U_2)$. Al ser subconjuntos disjuntos, se tiene que $(B_R \cap r^{-1}(U_1)) \cup (B_R \cap r^{-1}(U_2))$ es una unión disjunta. Por otro lado, como T no tiene puntos fijos en $\overline{U} \setminus (U_1 \cup U_2)$ y valen (2.8) y (2.9), sigue que $(I - T \circ r)(x) \neq 0$ para todo $x \in \overline{B_R \cap r^{-1}(U)} \setminus [(B_R \cap r^{-1}(U_1)) \cup (B_R \cap r^{-1}(U_2))]$. Entonces, usando la aditividad del grado de Leray-Schauder se tiene que

$$\begin{aligned} deg(I - T \circ r, & B_R \cap r^{-1}(U), 0) = \\ & deg(I - T \circ r, B_R \cap r^{-1}(U_1), 0) + deg(I - T \circ r, B_R \cap r^{-1}(U_2), 0). \end{aligned}$$

Esta igualdad junto con (2.7) nos dicen que

$$i(T, U, A) = i(T, U_1, A) + i(T, U_2, A).$$

Quedando así probado (ii).

Probemos (iii). Sea $H : [0,1]\times\overline{U} \to A$ completamente continua y $H(t,x) \neq x$ para todo $(t,x) \in [0,1] \times \partial U$. Sea $V := B_R \cap r^{-1}(U)$, el cual es un subconjunto abierto y acotado de X y $V \supset U$. Definamos $h(t,x) = x - H(t, r(x))$. Notemos que $h(t,x) \neq 0$ para todo $(t,x) \in [0,1] \times \partial V$. En efecto, si existiera $t_0 \in [0,1]$ y $x_0 \in \partial V$ tal que $h(t_0, x_0) = 0$, entonces $x_0 = H(t_0, r(x_0))$ de lo cual junto con (2.9) se tiene que $x_0 \in U \subset V$. Lo cual contradice que $x_0 \in \partial V$. Entonces, utilizando la invarianza homotópica del grado de Leray-Schauder se tiene que $deg(h(t,\cdot), V, 0)$ es independiente de t. Y por la definición del índice de punto fijo tenemos que $deg(h(t,\cdot), V, 0) = i(H(t,\cdot), U, A)$, por lo tanto $i(H(t,\cdot), U, A)$ es independiente de t.

Por último, veamos que vale (iv). Sean $(T, U, A) \in M$, $r : X \to A$ una retracción de X y $R > 0$ tal que $B_R \supset U$. Sean también $\widetilde{A}$ un retracto de A tal que $T(\overline{U}) \subset \widetilde{A}$ y $r_0 : A \to \widetilde{A}$ una retracción de A. Entonces $\widetilde{r} := r_0 \circ r : X \to \widetilde{A}$ es una retracción de X y $\widetilde{A}$ es un retracto de X. Definamos ahora, $V := B_R \cap r^{-1}(U) \cap \widetilde{r}^{-1}(U \cap \widetilde{A})$. Claramente, V es un subconjunto abierto y acotado de X y $U \cap \widetilde{A} \subset V$. Por (2.9) sabemos que si $T \circ r$ tiene un punto fijo x_0 en $\overline{B_R \cap r^{-1}(U)} \setminus V$, entonces $x_0 \in U$ y es punto fijo de T. Como $T(\overline{U}) \subset \widetilde{A}$ se sigue que $x_0 \in U \cap \widetilde{A}$ y por lo tanto $x_0 \in \widetilde{r}^{-1}(U \cap \widetilde{A})$. Lo cual contradice que x_0 no pertenece a V. Entonces, $T \circ r$ no tiene puntos fijos en $\overline{B_R \cap r^{-1}(U)} \setminus V$. Por otro lado, la contención de $U \cap \widetilde{A}$ en U junto con (2.9), nos aseguran que $T \circ \widetilde{r}$ no tiene puntos fijos en $\overline{B_R \cap \widetilde{r}^{-1}(U \cap \widetilde{A})} \setminus V$. Luego, por la propiedad de escisión del grado de Leray-Schauder tenemos que

$$deg(I - T \circ r, B_R \cap r^{-1}(U), 0) = deg(I - T \circ r, V, 0) \tag{2.14}$$

y

$$deg(I - T \circ \widetilde{r}, B_R \cap \widetilde{r}^{-1}(U \cap \widetilde{A}), 0) = deg(I - T \circ \widetilde{r}, V, 0). \tag{2.15}$$

Definamos $h(x,t) := x - H(x,t)$, donde $H(x,t) := \widetilde{r}[t(T\circ r)(x) + (1-t)(T \circ \widetilde{r})(x)]$. Claramente, $H : [0,1] \times V$ es completamente continua. Probaremos a continuación que $0 \notin h(t, \partial V)$ para ningún $t \in [0,1]$. En efecto, si existieran $t_0 \in [0,1]$ y $x_0 \in \partial V$ tales que $h(t_0, x_0) = 0$, entonces

$$x_0 = \widetilde{r}\,[t_0(T \circ r)(x_0) + (1 - t_0)(T \circ \widetilde{r})(x_0)] \in \widetilde{A}$$

Resultando así que $r(x_0) = x_0$, $\widetilde{r}(x_0) = x_0$ y $Tx_0 = x_0$. Por (2.9), tenemos que $x_0 \in U \cap \widetilde{A} \subset V$, lo cual contradice que $x_0 \in \partial V$. Por esto último, usando la invarianza homotópica del grado de Leray-Schauder y observando que $H(0,x) = \widetilde{r}[(T \circ \widetilde{r})(x)] = T \circ \widetilde{r}(x)$ y $H(1,x) = \widetilde{r}[T \circ r(x)] = T \circ r(x)$, obtenemos que

$$deg(I - T \circ \widetilde{r}, V, 0) = deg(I - T \circ r, V, 0). \tag{2.16}$$

Se sigue de la definición del indice de punto fijo (2.7), (2.14), (2.15) y (2.16) que

$$i(T, U, A) = i(T, U \cap \widetilde{A}, \widetilde{A}). \qquad \square$$

Teorema 2.11. *Además de (i)–(iv) el índice de punto fijo tiene las siguientes propiedades:*

(v) Propiedad de escisión: $i(T, U, A) = i(T, U_0, A)$ siempre y cuando U_0 sea un subconjunto abierto de U tal que T no tenga puntos fijos en $\overline{U} \setminus U_0$.

(vi) Propiedad de solución: si $i(T, U, A) \neq 0$, entonces T tiene al menos un punto fijo en U.

Demostración. Utilizando la propiedad de aditividad (ii) con $U_1 = U$ y $U_2 = \emptyset$; obtenemos que $i(T, \emptyset, A) = 0$. Teniendo esto en cuenta y utilizando nuevamente la propiedad (ii) tomando esta vez $U_1 = U_0$ y $U_2 = \emptyset$, obtenemos que $i(T, U, A) = i(T, U_0, A)$. Entonces, (v) está probado.

Si T no tiene puntos fijos en U, poniendo $U_0 = \emptyset$ en (v), obtenemos que

$$i(T, U, A) = 0,$$

y por lo tanto (vi) está probado. $\square$

2.2.4. Teoremas de punto fijo en conos de expansión y comprensión

En esta subsección, K será un cono en un espacio de Banach X. Bajo estas condiciones, K es un retracto de X y además es un conjunto convexo, cerrado y estrellado (i.e., existe $x \in K$ tal que para todo $y \in K$ el conjunto $\{tx + (1-t)y : t \in [0, 1]\} \subset K$). Sea Y un subconjunto abierto y acotado de X, entonces $K \cap Y$ es un subconjunto abierto y acotado de K y $\partial(K \cap Y) = K \cap \partial Y$, $\overline{K \cap Y} = K \cap \overline{Y}$.

Lema 2.12. *Sea $T : K \cap \overline{Y} \to K$ completamente continua. Supongamos que $0 \in Y$ y*

$$Tx \neq \mu x, \text{ para todo } x \in K \cap \partial Y, \mu \geq 1. \tag{2.17}$$

Entonces $i(T, K \cap Y, K) = 1$.

Demostración. Sea $H : [0, 1] \times (K \cap \overline{Y}) \to K$ definida por $H(t, x) = tT(x)$. La función H es completamente continua y por (2.17) $H(t, x) \neq x$ para todo $x \in K \cap \partial Y$ y $0 \leq t \leq 1$. Luego, como $0 \in Y$, la invarianza homotópica junto con la normalidad del índice de punto fijo, nos dicen que

$$i(T, K \cap Y, K) = i(0, K \cap Y, K) = 1. \qquad \square$$

Lema 2.13. *Sean* $T : K \cap \overline{Y} \to K$ *y* $S : K \cap \partial Y \to K$ *dos operadores completamente continuos. Supongamos que*

(i) $\inf_{x \in K \cap \partial Y} \|Sx\| > 0$; *y*

(ii) $x - Tx \neq tSx$, *para todo* $x \in K \cap \partial Y$ *y todo* $t \geq 0$,

entonces se tiene que

$$i(T, K \cap Y, K) = 0. \tag{2.18}$$

Demostración. Por el Teorema de extensión 2.7, podemos extender S a un operador completamente continuo de $K \cap \overline{Y}$ a K tal que

$$S(K \cap \overline{Y}) \subset coS(K \cap \partial Y). \tag{2.19}$$

Sea $F = S(K \cap \partial Y)$ y $M = coF$. Probaremos primero que

$$\inf_{y \in \overline{M}} \|y\| > 0. \tag{2.20}$$

Denotemos por X_0 el subespacio de X generado por F. Como S es completamente continuo, F es relativamente compacto y entonces X_0 es separable. Evidentemente, $K_0 = K \cap X_0$ es un cono en X_0 y $F \subset K_0$, $\overline{co}F \subset K_0$. Por virtud del Teorema 2.5, existe $f_0 \in X_0^*$ tal que $f_0(y) > 0$ para cualquier $y \in K_0$ con $y \neq 0$. Afirmamos que

$$\inf_{y \in F} f_0(y) = \sigma > 0. \tag{2.21}$$

En efecto, si $\sigma = 0$ entonces existe $\{y_k\} \subset F$ tal que $f_0(y_k) \to 0$. Por la compacidad relativa de F, existe una subsucesión $\{y_{k_i}\}$ de $\{y_k\}$ tal que $y_{k_i} \to y_0 \in K_0$, y por eso $f_0(y_{k_i}) \to f_0(y_0)$ y $f_0(y_0) = 0$. Por lo tanto $y_0 = 0$ y $\|y_{k_i}\| \to 0$, lo que contradice la hipótesis (i). Entonces vale (2.21).

Para cualquier $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i \in M$, donde $y_i \in F$, $\lambda_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, por (2.21) se tiene que

$$f_0(y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_0(y_i) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma = \sigma,$$

y por lo tanto,

$$f_0(y) \geq \sigma, \ \forall y \in \overline{M}. \tag{2.22}$$

Como $\overline{M} = \overline{co}F$ es compacto , existe $z_0 \in \overline{M}$ tal que

$$\inf_{y \in \overline{M}} \|y\| = \|z_0\| \,. \tag{2.23}$$

Por (2.22), $f_0(z_0) \geq \sigma$, y esto implica que $z_0 \neq 0$. De (2.23) podemos deducir que (2.20) vale. Por (2.19) y (2.20) obtenemos

$$\inf_{x \in K \cap \overline{Y}} \|Sx\| = a > 0. \tag{2.24}$$

Ahora, es fácil mostrar que (2.18) vale. En efecto, si $i(T, K \cap Y, K) \neq 0$, entonces por la hipótesis (ii) y la invarianza homotópica del índice de punto fijo, tenemos que

$$i(T + tS, K \cap Y, K) = i(T, K \cap Y, K) \neq 0, \; \forall t > 0.$$

En particular, eligiendo $t_0 > \frac{b+c}{a}$, donde $b := \sup\limits_{x \in K \cap \overline{Y}} \|x\|$ y $c := \sup\limits_{x \in K \cap \overline{Y}} \|Tx\|$, tenemos que

$$i(T + t_0 S, K \cap Y, K) \neq 0.$$

Entonces, la propiedad de solución del índice de punto fijo nos dice que existe $x_0 \in K \cap Y$ tal que $Tx_0 + t_0 Sx_0 = x_0$. Por lo tanto,

$$t_0 = \frac{\|x_0 - Tx_0\|}{\|Sx_0\|} \leq \frac{b + c}{a},$$

lo cual es una contradicción. □

Corolario 2.14. *Sea $T : K \cap \overline{Y} \to K$ un operador completamente continuo. Supongamos que*

(a) $\sup\limits_{x \in K \cap \partial Y} \|Tx\| > 0$; *y*

(b) $Tx \neq \mu x$, $\forall x \in K \cap \partial Y, 0 < \mu \leq 1$,

entonces vale (2.18).

Demostración. Tomando $S = T$ en el Lema anterior, notamos que la condición (i) de dicho Lema es la misma que la condición (a) de este Corolario. Además, la hipótesis (ii) del Lema en cuestión se satisface. En efecto, si existiera $x_0 \in K \cap \partial Y$ y $t_0 \geq 0$ tal que $x_0 - Tx_0 = t_0 Tx_0$, entonces $Tx_0 = \mu_0 x_0$, donde $\mu_0 = (1 + t_0)^{-1}$. Evidentemente, $0 < \mu_0 \leq 1$, lo cual contradice la condición (b). Luego, (2.18) sigue del Lema 2.13. □

Teorema 2.15 (Teorema de punto fijo en conos de expansión y compresión)**.** *Sean Y_1 y Y_2 dos abiertos acotados en X tal que $0 \in Y_1$ y $\overline{Y}_1 \subset Y_2$. Sea $T : K \cap (\overline{Y}_2 \setminus Y_1) \to K$ un operador completamente continuo. Supongamos que se satisface alguna de las siguientes dos condiciones*

(PF_1) $\quad \|Tx\| \leq \|x\|, \; \forall x \in K \cap \partial Y_1$ *y* $\|Tx\| \geq \|x\|, \; \forall x \in K \cap \partial Y_2$;

y

(PF_2) $\quad \|Tx\| \geq \|x\|, \; \forall x \in K \cap \partial Y_1$ *y* $\|Tx\| \leq \|x\|, \; \forall x \in K \cap \partial Y_2$.

Entonces T tiene al menos un punto fijo en $K \cap (\overline{Y}_2 \setminus Y_1)$.

Demostración. Por el Teorema de extensión de Dugundji 2.7, T puede ser extendido a un operador completamente continuo de $K \cap \overline{Y}_2$ en K. Además, podemos suponer que T no tiene puntos fijos en $K \cap \partial Y_1$ y $K \cap \partial Y_2$.

Supongamos primero que vale (PF_1). Es fácil ver que

$$Tx \neq \mu x,\ \forall x \in K \cap \partial Y_1,\ \mu \geq 1, \tag{2.25}$$

pues en caso contrario, existiría $x_0 \in K \cap \partial Y_1$ y $\mu > 1$ tal que $Tx_0 = \mu_0 x_0$, y $\|Tx_0\| = \mu_0 \|x_0\| > \|x_0\|$, lo que contradice (PF_1). Luego, (2.25) junto al Lema 2.12 nos dicen que

$$i(T, K \cap Y_1, K) = 1. \tag{2.26}$$

Por otro lado, es fácil de verificar que

$$Tx \neq \mu x,\ \forall x \in K \cap \partial Y_2,\ 0 < \mu \leq 1. \tag{2.27}$$

Pues en caso contrario, existiría $x_0 \in K \cap \partial Y_2$ y $0 < \mu_0 < 1$ tal que $Tx_0 = \mu_0 x_0$. Entonces $\|Tx_0\| = \mu_0 \|x_0\| < \|x_0\|$, lo que contradice (PF_1).

Además, teniendo en cuenta que $0 \in Y_2$ junto a la segunda desigualdad de (PF_1) tenemos que

$$\inf_{x \in K \cap \partial Y_2} \|Tx\| \geq \inf_{x \in K \cap \partial Y_2} \|x\| > 0. \tag{2.28}$$

Se sigue de (2.27), (2.28) y el Corolario 2.14 que

$$i(T, K \cap Y_2, K) = 0. \tag{2.29}$$

Luego, utilizando (2.26), (2.29) y la propiedad de aditividad del índice de punto fijo obtenemos que

$$i(T, K \cap (Y_2 \setminus \overline{Y}_1), K) = i(T, K \cap Y_2, K) - i(T, K \cap Y_1, K) = -1 \neq 0.$$

Lo cual junto a la propiedad de solución del índice de punto fijo nos dice que T tiene al menos un punto fijo en $K \cap (Y_2 \setminus \overline{Y}_1)$.

Supongamos ahora (PF_2). Es fácil ver que

$$Tx \neq \mu x\, \forall x \in K \cap \partial Y_1,\ 0 < \mu \leq 1, \tag{2.30}$$

pues en caso contrario, existiría $x_0 \in K \cap \partial Y_1$ y $0 < \mu_0 < 1$ tal que $Tx_0 = \mu_0 x_0$. Lo que implicaría que $\|Tx_0\| = \mu_0 \|x_0\| < \|x_0\|$, contradiciendo (PF_2). Además, teniendo en cuenta que $0 \in Y_1$, resulta de (PF_2) que

$$\inf_{x \in K \cap \partial Y_1} \|Tx\| \geq \inf_{x \in K \cap \partial Y_1} \|x\| > 0. \tag{2.31}$$

Luego, (2.30) y (2.31) junto al Corolario 2.14 implican que

$$i(T, K \cap Y_1, K) = 0. \tag{2.32}$$

También es fácil ver que

$$Tx \neq \mu x, \ \forall x \in K \cap \partial Y_2, \ \mu \geq 1. \tag{2.33}$$

Si existiera $x_0 \in K \cap \partial Y_2$ y $\mu > 1$ tal que $Tx_0 = \mu_0 x_0$, entonces, $\|Tx_0\| = \mu_0 \|x_0\| > \|x_0\|$, lo que contradice (PF_2).

Se sigue de (2.33) y el Lema 2.12 que

$$i(T, K \cap Y_2, K) = 1. \tag{2.34}$$

Finalmente, de (2.32), (2.34) y la propiedad de aditividad del índice de punto fijo se tiene que

$$i(T, K \cap (Y_2 \setminus \overline{Y}_1), K) = i(T, K \cap Y_2, K) - i(T, K \cap Y_1, K) = 1 \neq 0.$$

Luego, la propiedad de solución del índice de punto fijo nos dice que T tiene al menos un punto fijo en $K \cap (Y_2 \setminus \overline{Y}_1)$. $\square$

Capítulo 3

Teoría general para el ϕ-Laplaciano

A lo largo de este Capítulo introduciremos resultados que nos serán de gran ayuda en los Capítulos siguientes. En la sección 3.1, enunciaremos y probaremos resultados que valen en el caso unidimensional. Entre estos resultados se encuentra el Teorema 3.4, el cual es un resultado original y contiene desigualdades que nos serán de utilidad para probar los resultados de existencia de los Capítulos 4, 5 y 6. En la sección 3.2, enunciaremos resultados que nos serán utiles en el caso N-dimensional con $N \geq 2$, los cuales utilizaremos en las secciones 4.2 y 4.3 del Capítulo 4. Por último, en la sección 3.3, están enunciados y probados los métodos de sub y supersoluciones tanto para el caso unidimensional (Teorema 3.10), como para el caso N-dimensional con $N \geq 2$ (Teorema 3.13). Este método será usado en los Capítulos 4 y 6.

3.1. El Operador sobre la recta

Sea $\Omega := (a, b) \subset \mathbb{R}$ con $a < b$ números reales finitos. Sea, además, $\mathcal{L}_\phi$ el operador diferencial dado por

$$\mathcal{L}_\phi u := -\phi(u')'.$$

Consideremos el problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\phi v = h(x) & \text{en } \Omega, \\ v = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

Observación 3.1. Si $h \in L^1(\Omega)$ entonces (3.1) admite una única solución $v \in C^1(\overline{\Omega})$ tal que $\phi(v')$ es absolutamente continua en $\overline{\Omega}$ (o equivalentemente,

$\phi(v') \in W^{1,p}(\Omega))$ y tal que la ecuación vale para *c.t.p.* $x \in \Omega$. De hecho, se puede ver que

$$v(x) = \int_a^x \phi^{-1}\left(c_h - \int_a^y h(t)dt\right) dy, \tag{3.2}$$

donde c_h es la única constante tal que $v(b) = 0$. Más aún, el operador solución $\mathcal{S}_\phi : L^1(\Omega) \to C^1(\overline{\Omega})$ es continuo (ver por ejemplo [DO96] o [MM00]) y monótono creciente por el siguiente Lema.

Lema 3.2. *Sean $f, g \in L^1(\Omega)$, con $f(x) \leq g(x)$ en c.t.p. $x \in \Omega$. Si $u := \mathcal{S}_\phi(f)$ y $v := \mathcal{S}_\phi(g)$, entonces $u \leq v$ en $\overline{\Omega}$.*

Demostración. Supongamos por el absurdo que $A := \{x \in \Omega : u(x) > v(x)\} \neq \emptyset$. Tomemos $A_c := (x_0, x_1)$ una componente conexa de A. Como u y v son continuas en $\overline{\Omega}$ se tiene que $u(x_0) = v(x_0)$ y $u(x_1) = v(x_1)$. Y entonces, al ser $u = \mathcal{S}_\phi(f)$ y $v = \mathcal{S}_\phi(g)$, integrando por partes, se sigue que

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)(u-v) = -\int_{x_0}^{x_1} \phi(u')'(u-v) = \int_{x_0}^{x_1} \phi(u')(u'-v') \text{ y}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} g(x)(u-v) = -\int_{x_0}^{x_1} \phi(v')'(u-v) = \int_{x_0}^{x_1} \phi(v')(u'-v').$$

Restando tenemos que

$$\int_{x_0}^{x_1} (f(x) - g(x))(u-v) = \int_{x_0}^{x_1} (\phi(u') - \phi(v'))(u'-v'). \tag{3.3}$$

Como $f \leq g$ y $u > v$ en (x_0, x_1) se tiene que

$$\int_{x_0}^{x_1} (f(x) - g(x))(u-v) \leq 0. \tag{3.4}$$

Por otro lado, $(\phi(u') - \phi(v'))(u'-v') \geq 0$ pues ϕ es creciente, implicando así que

$$\int_{x_0}^{x_1} (\phi(u') - \phi(v'))(u'-v') \geq 0. \tag{3.5}$$

Luego debe ser,

$$\int_{x_0}^{x_1} (\phi(u') - \phi(v'))(u'-v') = 0 \text{ por (3.3), (3.4) y (3.5).}$$

Entonces es $u = v + cte$ en (x_0, x_1) pero como $u(x_0) = v(x_0)$, resulta $cte = 0$. Por lo tanto, debe ser $A = \emptyset$ y esto concluye la prueba. □

Observación 3.3. Notemos que este Lema nos dice que si v es solución de (3.1) con $h \geq 0$, entonces $v \geq 0$. En otras palabras, vale el principio del máximo débil.

3.1.1. Desigualdades útiles

Para $h \in L^1(\Omega)$ con $0 \leq h \not\equiv 0$ definimos

$$\mathcal{A}_h := \{x \in \Omega : h(y) = 0 \text{ para } c.t.p.\ y \in (a, x)\},$$
$$\mathcal{B}_h := \{x \in \Omega : h(y) = 0 \text{ para } c.t.p.\ y \in (x, b)\},$$

y además

$$\alpha_h := \begin{cases} \sup \mathcal{A}_h & \text{si } \mathcal{A}_h \neq \emptyset \\ a & \text{si } \mathcal{A}_h = \emptyset, \end{cases} \qquad \beta_h := \begin{cases} \text{ínf } \mathcal{B}_h & \text{si } \mathcal{B}_h \neq \emptyset \\ b & \text{si } \mathcal{B}_h = \emptyset, \end{cases}$$
$$\overline{\theta}_h := \frac{\alpha_h + \beta_h}{2}, \qquad \underline{\theta}_h := \text{mín}\left\{\frac{1}{\beta_h - a}, \frac{1}{b - \alpha_h}\right\}. \tag{3.6}$$

Escribimos también

$$\delta_\Omega(x) := dist(x, \partial\Omega) = min(x - a, b - x).$$

Teorema 3.4. *Sea $0 \leq h \in L^1(\Omega)$ tal que $h \not\equiv 0$. Entonces*
(i) En $\overline{\Omega}$ se tiene que

$$\mathcal{S}_\phi(h) \leq \phi^{-1}(\int_a^b h)\delta_\Omega. \tag{3.7}$$

(ii) En $\overline{\Omega}$ se tiene que

$$\mathcal{S}_\phi(h) \geq \underline{\theta}_h \,\text{mín}\left\{\int_a^{\overline{\theta}_h} \phi^{-1}(\int_y^{\overline{\theta}_h} h)dy, \int_{\overline{\theta}_h}^b \phi^{-1}(\int_{\overline{\theta}_h}^y h)dy\right\}\delta_\Omega. \tag{3.8}$$

(iii) Sea además $K > 0$ constante, entonces

$$\mathcal{S}_\phi(Kh) \geq c\phi^{-1}(cK)\delta_\Omega, \tag{3.9}$$

donde $c > 0$ es una constante que no depende de K.

Demostración. Sea $v := \mathcal{S}_\phi(h)$. Como ϕ^{-1} es creciente y $h \geq 0$ en Ω, usando (3.2), vemos que $v'(x) = \phi^{-1}(c_h - \int_a^x h(t)dt)$ es monótona decreciente y por lo tanto v es cóncava en Ω. Luego, al ser $v = 0$ en $\partial\Omega$ y $v \not\equiv 0$, debemos tener que $v'(b) < 0 < v'(a)$ y por lo tanto

$$0 < c_h < \int_a^b h(t)dt. \tag{3.10}$$

Usando nuevamente que ϕ es creciente y (3.10) deducimos que

$$v'(a), |v'(b)| \leq \phi^{-1}\left(\int_a^b h\right)$$

y entonces por la concavidad de v obtenemos (3.7).

Probemos ahora (ii). Afirmamos primero que

$$v \geq \underline{\theta}_h \|v\|_\infty \delta_\Omega \qquad \text{en } \overline{\Omega}. \tag{3.11}$$

En efecto, sea $\xi \in \Omega$ algún punto donde v alcanza su máximo (y por lo tanto $v'(\xi) = 0$). Si fuera $\mathcal{A}_h \neq \emptyset$, por (3.2), tendríamos que $v(x) = \phi^{-1}(c_h)(x-a)$ para todo $x \in (a, \alpha_h)$, con $\phi^{-1}(c_h) > 0$ por (3.10). Luego debe ser, $\xi > \alpha_h$. Recordando ahora la concavidad de v se tiene que para $x \in [\xi, b]$,

$$v(x) \geq \frac{v(\xi)(b-x)}{b-\xi} \geq \frac{\|v\|_\infty}{b-\alpha_h}\delta_\Omega(x).$$

Análogamente, para $x \in [a, \xi]$,

$$v(x) \geq \frac{v(\xi)(x-a)}{\xi-a} \geq \frac{\|v\|_\infty}{\beta_h - a}\delta_\Omega(x)$$

y queda probada la afirmación.

Supongamos ahora que $\xi \geq \overline{\theta}_h$. Como ϕ es un homeomorfismo con $\phi(0) = 0$, y como $v'(x) = \phi^{-1}(c_h - \int_a^x h)$ y $v'(\xi) = 0$, resulta que $c_h = \int_a^\xi h$. Luego, recordando (3.2) y que ϕ es creciente,

$$\begin{gathered} v(\overline{\theta}_h) = \int_a^{\overline{\theta}_h} \phi^{-1}\left(\int_a^\xi h - \int_a^y h\right) dy = \\ \int_a^{\overline{\theta}_h} \phi^{-1}\left(\int_y^\xi h\right) dy \geq \int_a^{\overline{\theta}_h} \phi^{-1}\left(\int_y^{\overline{\theta}_h} h\right) dy. \end{gathered} \tag{3.12}$$

Supongamos ahora que $\xi \leq \overline{\theta}_h$. Es fácil comprobar que podemos reescribir v, como

$$v(x) = \int_x^b \phi^{-1}\left(\widetilde{c}_h - \int_y^b h(t)dt\right) dy,$$

donde $\widetilde{c}$ es la única constante tal que $v(a) = 0$. Más aún, razonando como en el párrafo anterior vemos que $\widetilde{c}_h = \int_\xi^b h$. Entonces,

$$\begin{gathered} v(\overline{\theta}_h) = \int_{\overline{\theta}_h}^b \phi^{-1}\left(\int_\xi^b h - \int_y^b h\right) dy = \\ \int_{\overline{\theta}_h}^b \phi^{-1}\left(\int_\xi^y h\right) dy \geq \int_{\overline{\theta}_h}^b \phi^{-1}\left(\int_{\overline{\theta}_h}^y h\right) dy. \end{gathered} \tag{3.13}$$

Teniendo en cuenta (3.11), (3.12) y (3.13) deducimos (3.8) y esto termina la prueba de (ii).

Para finalizar probemos (iii). Notar que $\underline{\theta}_{Kh} = \underline{\theta}_h$ y $\overline{\theta}_{Kh} = \overline{\theta}_h$. Usando la cota inferior (3.8) tenemos que

$$S_\phi(Kh) \geq \underline{\theta}_h \min\left\{ \int_a^{\overline{\theta}_h} \phi^{-1}(K\int_y^{\overline{\theta}_h} h(t)dt)dy, \int_{\overline{\theta}_h}^b \phi^{-1}(K\int_{\overline{\theta}_h}^y h(t)dt)dy \right\} \delta_\Omega.$$

Sea $H(y) := \int_y^{\overline{\theta}_h} h(t)dt$. Como $h \in L^1(\Omega)$ resulta que $H \in C(\Omega)$. Vamos a mostrar que

$$\underline{\theta}_h \int_a^{\overline{\theta}_h} \phi^{-1}(KH(y))dy \geq c\phi^{-1}(cK). \tag{3.14}$$

Por la definición de $\overline{\theta}_h$, $\varepsilon := H(a) > 0$, luego podemos encontrar $\eta \in (a, \overline{\theta}_h)$ tal que $H(y) > \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $y \in (a, \eta)$. Usando que ϕ^{-1} es creciente tenemos que

$$\int_a^{\overline{\theta}_h} \phi^{-1}(KH(y))dy \geq \int_a^\eta \phi^{-1}(K\frac{\varepsilon}{2})dy = (\eta - a)\phi^{-1}(K\frac{\varepsilon}{2}).$$

Por otro lado, definimos $G(y) := \int_{\overline{\theta}_h}^y h(t)dt$, $G \in C(\Omega)$, pues $h \in L^1(\Omega)$. Vamos a mostrar que

$$\underline{\theta}_h \int_{\overline{\theta}_h}^b \phi^{-1}(KG(y))dy \geq c\phi^{-1}(cK). \tag{3.15}$$

Por la definición de $\overline{\theta}_h$, $\varepsilon_0 := G(b) > 0$, luego podemos encontrar $\eta_0 \in (\overline{\theta}_h, b)$ tal que $G(y) > \frac{\varepsilon_0}{2}$ para todo $y \in (\eta_0, b)$. Usando que ϕ^{-1} es creciente tenemos que

$$\int_{\overline{\theta}_h}^b \phi^{-1}(KG(y))dy \geq \int_{\eta_0}^b \phi^{-1}(K\frac{\varepsilon_0}{2})dy = (b - \eta_0)\phi^{-1}(K\frac{\varepsilon_0}{2}).$$

Tomando

$$c := \min\{\underline{\theta}_h(\eta - a), \underline{\theta}_h(b - \eta_0), \varepsilon_0/2, \varepsilon/2\},$$

quedan probados (3.14) y (3.15). Gracias a estas dos desigualdades y junto con la primer desigualdad escrita en la prueba de este item queda probado (3.9). □

Observación 3.5. (i) Notar que (por la definición de $\overline{\theta}_h$) la constante que aparece en el miembro derecho de (3.8) es siempre estrictamente positiva.

(ii) Sea $h \in L^1(\Omega)$ con $0 \leq h \not\equiv 0$. Para cualquier $g \in C(\overline{\Omega})$ con $g > 0$ en Ω se tiene que $\alpha_h = \alpha_{hg}$ y $\beta_h = \beta_{hg}$ y por lo tanto la parte (*ii*) del Teorema 3.4 es válida también para $\mathcal{S}_\phi(hg)$ con $\overline{\theta}_h$ y $\underline{\theta}_h$ dados por (3.6).

(iii) Se puede deducir de la definición de $\underline{\theta}_h$ y de (3.8) que

$$\|\mathcal{S}_\phi(h)\|_\infty \geq \frac{1}{2} \min \left\{ \int_a^{\bar{\theta}_h} \phi^{-1}(\int_y^{\bar{\theta}_h} h)dy, \int_{\bar{\theta}_h}^b \phi^{-1}(\int_{\bar{\theta}_h}^y h)dy \right\}. \quad (3.16)$$

En efecto, la desigualdad de arriba es consecuencia de la monotonía de la norma infinito sobre las funciones no negativas y que se tiene que

$$\underline{\theta}_h \|\delta_\Omega\|_\infty = \underline{\theta}_h \frac{b-a}{2} \geq \frac{1}{2}.$$

Para ver esto último, basta notar que

$$b - a \geq \beta_h - a \ \text{ y } \ b - a \geq b - \alpha_h,$$

lo que implica $\underline{\theta}_h (b-a) \geq 1$.

(iv) Queremos destacar que para h como en el Teorema 3.4, $\mathcal{S}_\phi(h)$ pertenece al cono interior positivo de $C_0^1(\overline{\Omega}) := \{u \in C^1(\overline{\Omega}) : u = 0 \text{ en } \partial\Omega\}$, el cual denotamos por

$$\mathcal{P}^\circ := \{u \in C^1(\overline{\Omega}) : u > 0 \text{ en } \Omega \text{ y } u'(b) < 0 < u'(a)\}.$$

(v) Dado $v \in \mathcal{P}^\circ$ existe K_0 tal que $\mathcal{S}_\phi(Kh) - v \in \mathcal{P}^\circ$ para todo $K \geq K_0$. En efecto, basta tomar K_0 tal que

$$c\phi^{-1}(cK_0)\delta_\Omega \geq v \text{ en } \Omega,$$

lo cual es posible porque vale (3.9) y $\phi^{-1}(t) \to \infty$ cuando $t \to \infty$.

3.2. Operador N-dimensional $N \geq 2$

En esta sección, Ω será un dominio suave y acotado de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$. Consideraremos en esta sección problemas del tipo

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \phi(\nabla u) = h(x) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.17)$$

donde $h \in L^\infty(\Omega)$, $\phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ es una función continua estrictamente monótona que satisface algunas condiciones. Precisamente, asumiremos que

$$\phi(x) = \varphi(|x|)x \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N,$$

donde $\varphi(x) : (0, \infty) \to (0, \infty)$ es una función C^1 tal que:

(ϕ_1) $\lim\limits_{t\to 0^+} \varphi(t)t = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t)t = \infty$, y $(\varphi(t)t)' > 0$ para todo $t > 0$,

(ϕ_2) Existen constantes $l_1, l_2 > 1$ tal que

$$l_1 \leq \frac{\Phi'(t)t}{\Phi(t)} \leq l_2 \text{ para todo } t > 0, \text{ donde } \Phi(t) := \int_0^{|t|} \varphi(s)sds. \quad (3.18)$$

Más aún, para poder obtener los resultados de existencia necesitamos la siguiente condición adicional:

(ϕ_3) Existen $l_3, l_4 > 0$ tales que

$$l_3 \leq \frac{\Phi''(t)t}{\Phi'(t)} \leq l_4 \text{ para todo } t > 0.$$

El siguiente Lema nos da algunas desigualdades útiles que se obtienen gracias a estás hipótesis sobre φ. Para la prueba ver [Mor14, Lemma 1.48]

Lema 3.6. *Supongamos que valen (ϕ_1), (ϕ_2) y(ϕ_3). Consideremos para $t \geq 0$ las siguientes funciones,*

$$\eta_1(t) := \min\{t^{l_1}, t^{l_2}\}, \ \eta_2(t) := \max\{t^{l_1}, t^{l_2}\},$$
$$\eta_3(t) := \min\{t^{l_3}, t^{l_4}\} \ y \ \eta_4(t) := \max\{t^{l_3}, t^{l_4}\}.$$

Entonces,

1. $\eta_1(\rho)\Phi(t) \leq \Phi(\rho t) \leq \eta_2(\rho)\Phi(t)$ *para todo* $\rho, t \geq 0$,
2. $\eta_1(\|u\|_\Phi) \leq \int_\Omega \Phi(|u|) \leq \eta_2(\|u\|_\Phi)$ *para toda* $u \in L_\Phi(\Omega)$ *y*
3. $\eta_3(\rho)\Phi'(t) \leq \Phi'(\rho t) \leq \eta_4(\rho)\Phi'(t)$ *para todo* $\rho, t \geq 0$.

Otra desigualdad útil que resulta como consecuencia de suponer que ϕ satisface (ϕ_1) y (ϕ_2) es la siguiente:

$$\int_\Omega (\phi(\nabla u) - \phi(\nabla v))\nabla(u - v) > 0 \quad \forall u, v \in C^1(\Omega) \quad (3.19)$$

siempre que $u \not\equiv v$.

Recordamos que la función complementaria de Φ esta dada por

$$\widetilde{\Phi}(t) := \max_{t\geq 0}\{st - \Phi(t)\}.$$

Las condiciones (ϕ_1) y (ϕ_2) junto a la Observación 1.5 nos permiten ver que Φ y $\widetilde{\Phi}$ son N-funciones que satisfacen la condición Δ_2. Además, la N-función

Φ nos define los espacios de Orlicz-Sobolev $W_0^1 L_\Phi(\Omega)$ y $W^1 L_\Phi(\Omega)$, los cuales ya hemos descrito en el Capítulo 1.

Decimos que $v \in W_0^1 L_\Phi(\Omega)$ es una solución (débil) de (3.17) si

$$\int_\Omega \varphi(|\nabla v(x)|)\nabla v(x).\nabla z(x)dx = \int_\Omega h(x)z(x)dx \text{ para todo } z \in W_0^1 L_\Phi(\Omega). \tag{3.20}$$

Mediante la definición y convexidad de $\widetilde{\Phi}$ y la condición Δ_2 para Φ se puede verificar que $\varphi(\nabla v)\,|\nabla v| \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$. Empleando la desigualdad de Hölder se comprueba que las integrales en (3.20) son finitas (ver [FN07, prueba del Lema 3.1] para el cálculo).

Como en la sección anterior, consideraremos el espacio $C_0^1(\overline{\Omega}) := \{u \in C^1(\overline{\Omega}) : u = 0 \text{ en } \partial\Omega\}$, y el interior de su cono positivo el cual es

$$\mathcal{P}^\circ := \{u \in C_0^1(\overline{\Omega}) : u > 0 \text{ en } \Omega \text{ y } \partial u/\partial\nu < 0 \text{ en } \partial\Omega\},$$

donde ν es la normal exterior unitaria a $\partial\Omega$.

Teorema 3.7. *Supongamos que valen (ϕ_1), (ϕ_2) y (ϕ_3). Entonces, para toda $h \in L^\infty(\Omega)$ existe una única solución v de (3.17). Más aún, $v \in C_0^1(\overline{\Omega})$, y existe una constante $\kappa_h > 0$ que depende de $\|h\|_\infty$ tal que*

$$\|v\|_\infty \leq \kappa_h,$$

y κ_h tiende a 0 cuando $\|h\|_\infty$ lo hace. Además, el principio del máximo fuerte y el Lema de Hopf valen para (3.17), i.e.: si $0 \leq h \not\equiv 0$ entonces $v > 0$ en Ω y $\partial v/\partial\nu < 0$ en $\partial\Omega$. En otras palabras, para tales h, $v \in \mathcal{P}^\circ$.

Para la prueba ver [FN07, Lemas 3.1, 3.3, 3.4 y 3.5].

Proposición 3.8. *Supongamos que vale (ϕ_2). Entonces existe una constante $K > 0$ tal que*

$$\Phi(t+s) \leq K(\Phi(t) + \Phi(s)) \textit{ para todo } t, s \geq 0.$$

Demostración. Como vale (ϕ_2), se tiene por el Lema 3.6 que,

$$\Phi(2t) \leq 2^{l_2}\phi(t) \text{ para todo } t \geq 0.$$

Usando la convexidad de Φ y la desigualdad anterior se sigue que

$$\Phi(t+s) \leq \frac{1}{2}\Phi(2t) + \frac{1}{2}\Phi(2s) \leq 2^{l_2-1}(\Phi(t) + \Phi(s)).$$

Tomando $K = 2^{l_2-1}$ obtenemos la desigualdad deseada. $\square$

Lema 3.9. *Supongamos que valen* (ϕ_1) *y* (ϕ_2). *El funcional* $I : W_0^1 L_\Phi(\Omega) \to (-\infty, \infty)$ *dado por*

$$I(u) = \int_\Omega \Phi(|\nabla u|) \tag{3.21}$$

es Frechet diferenciable y

$$\langle I'(u), v\rangle = \int_\Omega \varphi(|\nabla u|)\nabla u \cdot \nabla v.$$

Demostración. En efecto, calculemos la derivada de Gâteaux de I. Consideremos la función $w : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definida por $w(x) := \Phi(|x|)$. Esta es una función C^1 y $\nabla w(x) = \Phi'(x)\frac{x}{|x|} = \varphi(|x|)x$, entonces para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{t\to 0} \frac{w(x+ty) - w(x)}{t} = \varphi(|x|)x \cdot y.$$

Como una consecuencia, si $u, v \in W_0^1 L_\Phi(\Omega)$,

$$\lim_{t\to 0} \frac{\Phi(|\nabla u(x) + t\nabla v(x)|) - \Phi(|\nabla u(x)|)}{t} = \varphi(|\nabla u(x)|)\nabla u(x) \cdot \nabla v(x), \tag{3.22}$$

para casi todo $x \in \Omega$. Dado $x \in \Omega$ y t con $|t| < 1$, por medio del teorema del valor medio podemos encontrar $\theta_x \in (0, 1)$ tal que

$$\left|\frac{\Phi(|\nabla u + t\nabla v|) - \Phi(|\nabla u|)}{t}\right| \leq \varphi(|\nabla u + t\theta_x \nabla v|)|\nabla u + t\theta_x \nabla v||\nabla v|.$$

Como $|\nabla u + t\theta_x \nabla v| \leq |\nabla u| + |\nabla v|$, usando el crecimiento de $\varphi(s)s$, deducimos que

$$\varphi(|\nabla u + t\theta_x \nabla v|)|\nabla u + t\theta_x \nabla v| \leq \varphi(|\nabla u| + |\nabla v|)(|\nabla u| + |\nabla v|).$$

Luego, como vale (ϕ_2), se tiene que

$$\begin{aligned}\left|\frac{\Phi(|\nabla u + t\nabla v|) - \Phi(|\nabla u|)}{t}\right| &\leq \varphi(|\nabla u| + |\nabla v|)(|\nabla u| + |\nabla v|)\,|\nabla v| \\ &\leq \varphi(|\nabla u| + |\nabla v|)(|\nabla u| + |\nabla v|)^2 \qquad (3.23) \\ &\leq l_2 \Phi(|\nabla u| + |\nabla v|) \in L^1(\Omega).\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (3.22) y (3.23), y usando el teorema de la convergencia dominada tenemos

$$\lim_{t\to 0} \int_\Omega \frac{\phi(|\nabla u + t\nabla v|) - \Phi(|\nabla u|)}{t} = \int_\Omega \varphi(|\nabla u|)\nabla u \cdot \nabla v.$$

Ahora vamos a probar que $I'_G : W_0^1 L_\Phi(\Omega) \to [W_0^1 L_\Phi(\Omega)]'$ es continua. Para esto tomemos una sucesión $\{u_k\}$ en $W_0^1 L_\Phi(\Omega)$ tal que $u_k \to u$ en $W_0^1 L_\Phi(\Omega)$. Podemos asumir, pasando a una subsucesión de ser necesario, que $\nabla u_k(x) \to \nabla u(x)$ para casi todo $x \in \Omega$. Tenemos que

$$\langle I'_G(u) - I'_G(u_k), v\rangle = \int_\Omega \left(\varphi(|\nabla u|)\nabla u - \varphi(|\nabla u_k|)\nabla u_k\right) \nabla v,$$

y usando la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega \left(\varphi(|\nabla u|)\nabla u - \varphi(|\nabla u_k|)\nabla u_k\right) \nabla v\right| \\
&\qquad\qquad \leq 2 \left\|\varphi(|\nabla u|)\nabla u \, - \, \varphi(|\nabla u_k|)\nabla u_k\right\|_{\tilde{\Phi}} \|\nabla v\|_\Phi \\
&\qquad\qquad = 2 \left\|\varphi(|\nabla u|)\nabla u \, - \, \varphi(|\nabla u_k|)\nabla u_k\right\|_{\tilde{\Phi}} \|v\|_{W_0^1 L_\Phi} .
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\|I'_G(u) - I'_G(u_k)\| &= \sup\left\{|\langle I'_G(u) - I'_G(u_k), v\rangle| : v \in W_0^1 L_\Phi(\Omega), \|v\|_{W_0^1 L_\Phi} = 1\right\} \\
&\leq 2 \left\|\varphi(|\nabla u|)\nabla u - \varphi(|\nabla u_k|)\nabla u_k\right\|_{\tilde{\Phi}} .
\end{aligned}$$

Como $\tilde{\Phi}$ es continua y $\tilde{\Phi}(0) = 0$, se tiene que

$$\tilde{\Phi}\left(|\varphi(|\nabla u|)\nabla u - \varphi(|\nabla u_k|)\nabla u_k|\right) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ para casi todo } x \in \Omega. \tag{3.24}$$

Además, al ser $\widetilde{\Phi}$ creciente, convexa y la N-función complementaria de Φ, usando el inciso 4 del Teorema 1.3 junto con la Proposición 3.8, tenemos que

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Phi}\left(|\varphi(|\nabla u|)\nabla u - \varphi(|\nabla u_k|)\nabla u_k|\right) &\leq \widetilde{\Phi}\left(\varphi(|\nabla u|)\,|\nabla u| + \varphi(|\nabla u_k|)\,|\nabla u_k|\right) \\
&\leq K\left[\widetilde{\Phi}\left(\varphi(|\nabla u|)\,|\nabla u|\right) + \widetilde{\Phi}\left(\varphi(|\nabla u_k|)\,|\nabla u_k|\right)\right] \\
&\leq K\left[\Phi\left(2\,|\nabla u|\right) + \Phi\left(2\,|\nabla u_k|\right)\right] \\
&\leq K\left[\Phi\left(|\nabla u|\right) + \Phi\left(|\nabla u_k|\right)\right],
\end{aligned} \tag{3.25}$$

donde estamos considerando K como una constante acumulativa. Como $u_k \to u$ en $W_0^1 L_\Phi(\Omega)$, considerando una subsucesión si fuera necesario, existe $w \in L^1(\Omega)$ tal que

$$\Phi(|\nabla u_k - \nabla u|) \leq w, \quad \text{para casi todo punto en } \Omega. \tag{3.26}$$

Por lo tanto, de (3.25) y (3.26) obtenemos que

$$\widetilde{\Phi}\left(|\varphi(|\nabla u|)\nabla u - \varphi(|\nabla u_k|)\nabla u_k|\right) \leq K[w + \Phi(|\nabla u|)] \in L^1(\Omega),$$

donde nuevamente K es una constante acumulativa. Teniendo en cuenta esto y (3.24), el Teorema de la convergencia dominada nos dice que

$$\int_\Omega \widetilde{\Phi}\left(|\varphi(|\nabla u|)\nabla u - \varphi(|\nabla u_k|)\nabla u_k|\right) \to 0. \tag{3.27}$$

Como $\widetilde{\Phi}$ satisface Δ_2, se sigue de (3.27) que

$$\|\varphi(|\nabla u|)\nabla u - \varphi(|\nabla u_k|)\nabla u_k\|_{\widetilde{\Phi}} \to 0.$$

Por lo tanto,

$$\|I'_G(u) - I'_G(u_k)\| \to 0,$$

lo que concluye la prueba. □

3.3. Método de sub y supersoluciones

3.3.1. Caso $N = 1$

Dado $U \subset \mathbb{R}$, denotaremos $AC_{loc}(U)$ al conjunto de todas las funciones absolutamente continuas en cada intervalo compacto $K \subset U$.

Sea $h : \Omega\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función Carathéodory (esto es, $h(\cdot,\xi)$ medible para todo $\xi \in \mathbb{R}$ y $h(x,\cdot)$ continua para *c.t.p.* $x \in \Omega$). Consideraremos problemas de la forma

$$\begin{cases} -\phi(u')' = h(x,u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.28}$$

Diremos que $v \in C(\overline{\Omega})$ es una *subsolución* de (3.28) si existe un conjunto finito $\Sigma \subset \Omega$ tal que $\phi(v') \in AC_{loc}(\overline{\Omega}\setminus\Sigma)$, los limites laterales $v'(\tau^+) := \lim_{x\to\tau^+} v'(x)$ y $v'(\tau^-) := \lim_{x\to\tau^-} v'(x)$ existen para cada $\tau \in \Sigma$ y

$$\begin{cases} \phi(v')' \le h(x, v(x)) & c.t.p.\ x \in \Omega, \\ v \le 0 \text{ en } \partial\Omega, & v'(\tau^-) < v'(\tau^+) \text{ para cada } \tau \in \Sigma. \end{cases} \tag{3.29}$$

Si las desigualdades en (3.29) son invertidas, diremos que v es una *supersolución* de (3.28).

Teorema 3.10. *Sea $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función Carathéodory. Sean v y w sub y supersoluciones respectivamente de (3.28) tal que $v(x) \le w(x)$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. Supongamos que existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que*

$$|f(x,\xi)| \le g(x) \ \textit{para c.t.p. } x \in \Omega \textit{ y todo } \xi \in [v(x), w(x)],$$

entonces existe $u \in C^1(\overline{\Omega})$ solución de (3.28) con $v \le u \le w$ en $\overline{\Omega}$.

Antes de probar este Teorema enunciaremos el Teorema de punto fijo de Schauder (para la prueba ver [Eva10] Teorema 3, Página 538), el cual usaremos para probar un Teorema de existencia que nos será útil para demostrar el Teorema 3.10.

Teorema 3.11. *(Punto fijo de Schauder) Sea X un espacio de Banach y $\emptyset \neq K \subset X$ un cerrado, acotado y convexo. Si $F : K \to K$ es un operador continuo y compacto, entonces existe un punto fijo de F.*

Teorema 3.12. *Sea $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función Carathéodory. Supongamos que existe $h \in L^1(\Omega)$ tal que*

$$|f(x,\xi)| \leq h(x) \text{ para c.t.p. } x \in \Omega \text{ y todo } \xi \in \mathbb{R}. \tag{3.30}$$

Entonces el problema

$$\begin{cases} -\phi(u')' = f(x,u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.31}$$

tiene solución.

Demostración. Para cada $g \in C(\overline{\Omega})$ definimos $\psi_g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$\psi_g(x) = \int_a^b \phi^{-1}(x + g(s))ds.$$

Como ϕ es un homeomorfismo creciente con $\phi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, resulta que la función ψ_g es continua, creciente y $\psi_g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Luego, existe un único $x := \Lambda(g) \in \mathbb{R}$ tal que $\psi_g(\Lambda(g)) = 0$. Esto nos define un funcional $\Lambda : C(\overline{\Omega}) \to \mathbb{R}$.

Veamos que $\Lambda(\mathcal{M})$ es acotado para cada $\mathcal{M}$ acotado en $C(\overline{\Omega})$. En efecto, tomemos $\mathcal{M} \subset C(\overline{\Omega})$ acotado, sea $c \in (0,\infty)$ tal que $\|g\|_\infty \leq c$ para cada $g \in \mathcal{M}$. Si existiera una sucesión $\{g_n\} \subset \mathcal{M}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda(g_n) = \infty \text{ o } \lim_{n\to\infty} \Lambda(g_n) = -\infty$$

entonces, para el primer caso tenemos

$$0 = \lim_{n\to\infty} (\psi_{g_n}(\Lambda(g_n))) \geq \lim_{n\to\infty} (b-a)\phi^{-1}(\Lambda(g_n) - c) = \infty,$$

lo cual es una contradicción. Análogamente, si ocurriera lo segundo llegaríamos a una contradicción similar. Por lo tanto, $\Lambda(\mathcal{M})$ es acotado.

Ahora veamos que Λ es continua. Sea $\{g_n\} \subset C(\overline{\Omega})$ una sucesión y supongamos que

$$\lim_{n\to\infty} g_n = g_0 \text{ en } C(\overline{\Omega}).$$

Por lo anterior, resulta que $\{\Lambda(g_n)\} \subset \mathbb{R}$ es acotado, por lo tanto existe una subsucesión tal que $\lim_{k_n \to \infty} \Lambda(g_{k_n}) = x_0 \in \mathbb{R}$. Se tiene entonces que

$$0 = \psi_{g_{k_n}}(\Lambda(g_{k_n})) = \int_a^b \phi^{-1}(\Lambda(g_{k_n}) + g_{k_n}(t))dt,$$

tomando límite cuando $n \to \infty$ en la igualdad anterior resulta que

$$0 = \int_a^b \phi^{-1}(x_0 + g_0(t))dt.$$

Luego, al ser $\Lambda(g_0)$ el único real tal que $\psi_{g_0}(\Lambda(g_0)) = 0$ debe ser $x_0 = \Lambda(g_0)$. Por lo tanto, cualquier subsucesión convergente de $\Lambda(g_n)$ tiene el mismo límite $\Lambda(g_0)$, y al ser $\Lambda(g_n)$ acotado, se sigue que $\Lambda(g_0) = \lim_{n\to\infty} \Lambda(g_n)$.

Definamos ahora dos operadores, $\mathcal{N} : C(\overline{\Omega}) \to C(\overline{\Omega})$ y $\mathcal{F} : C^1(\overline{\Omega}) \to C^1(\overline{\Omega})$ dados por

$$(\mathcal{N}(u))(x) = -\int_a^x f(t, u(t))dt,$$

$$(\mathcal{F}(u))(x) = \int_a^x \phi^{-1}(\Lambda(\mathcal{N}(u)) + (\mathcal{N}(u))(t))dt.$$

Se deduce de (3.2) que u es solución de (3.31) si y solo si $u \in C^1(\overline{\Omega})$ y satisface que

$$u(x) = \int_a^x \phi^{-1}(\phi(u'(0)) + (\mathcal{N}(u))(t))dt, \ \phi(u'(0)) = \Lambda(\mathcal{N}(u)).$$

Luego, u es solución de (3.31) si y solo si u es un punto fijo del operador $\mathcal{F}$.

Veamos entonces que $\mathcal{F}$ posee un punto fijo. Como Λ y $\mathcal{N}$ son operadores continuos, se tiene que $\mathcal{F}$ también es continuo. Tomemos una sucesión $\{u_n\} \subset C^1(\overline{\Omega})$ y sea $v_n = \mathcal{F}(u_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$v_n'(x) = \phi^{-1}(\Lambda(\mathcal{N}(u_n)) + (\mathcal{N}(u_n)(x))), \ \forall\, x \in \overline{\Omega} \text{ y } \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Por la hipótesis (3.30), existe una constante c_1 positiva tal que $\|(\mathcal{N}(u_n))\|_\infty \leq c_1$. En efecto, dado $x \in \overline{\Omega}$,

$$|(\mathcal{N}(u_n))(x)| = \left| \int_a^x f(t, u(t))dt \right| \leq$$
$$\leq \int_a^x |f(t, u(t))| \leq \int_a^x h(t)dt \leq \|h\|_1 = c_1.$$

Esto implica que las sucesiones $\{v_n\}$ y $\{v_n'\}$ son acotadas. En consecuencia resulta que $\{v_n\}$ es equicontinua en $\overline{\Omega}$. Y más aún, para $x_1, x_2 \in [a,b]$ es

$$|\phi(v_n'(x_1)) - \phi(v_n'(x_2))| = |(\mathcal{N}(u)(x_1)) - (\mathcal{N}(u)(x_2))| \leq \left|\int_{x_1}^{x_2} h(t)dt\right|.$$

Es decir, la sucesión $\{\phi(v_n')\}$ es acotada y equicontinua en $\overline{\Omega}$. Por el Teorema de Arzelà-Ascoli existen subsucesiones $\{v_{k_n}\}$ y $\{\phi(v_{k_n}')\}$ uniformemente convergentes en $\overline{\Omega}$. Entonces $\{v_{k_n}'\}$ es uniformemente convergente en $\overline{\Omega}$ y por eso, $\{v_{k_n}\}$ es convergente en $C^1(\overline{\Omega})$. Hemos probado que el operador $\mathcal{F}$ es compacto. Luego, por el Teorema de punto fijo de Schauder, $\mathcal{F}$ tiene un punto fijo, el cual es una solución de (3.31). $\square$

Demostración del Teorema 3.10. Construyamos primero un problema auxiliar. Para *c.t.p.* $x \in \Omega$ y todo $\xi \in \mathbb{R}$ definimos,

$$\overline{f}(x,\xi) := \begin{cases} f(x,v(x)) + \frac{v(x)-\xi}{v(x)-\xi+1} & \text{si } \xi < v(x), \\ f(x,\xi) & \text{si } v(x) \leq \xi \leq w(x), \\ f(x,w(x)) - \frac{\xi-w(x)}{\xi-w(x)+1} & \text{si } \xi > w(x). \end{cases}$$

Tenemos que $\overline{f} : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función Carathéodory. Además, se tiene que $|\overline{f}(x,\xi)| \leq g(x) + 1 =: \overline{g}(x) \in L^1(\Omega)$. Por el Teorema 3.12 existe u solución de (3.28) con $\overline{f}$ en lugar de f.

Si vemos que $v \leq u \leq w$ obtenemos lo propuesto. Sea $\theta(x) = u(x) - w(x)$, $x \in \overline{\Omega}$ y supongamos por el absurdo que $\max\{\theta(x) : x \in \overline{\Omega}\} = \theta(x_0) > 0$. Como $u(a) = u(b) = 0$ y $w(a), w(b) \geq 0$, se tiene que $x_0 \in (a,b)$. Como w es supersolución se tiene que $\theta'(\tau^-) = u'(\tau) - w'(\tau^-) < u'(\tau) - w'(\tau^+) = \theta'(\tau^+)$ para todo $\tau \in \Sigma$. Por lo tanto, $x_0 \in (a,b)\backslash\Sigma$ y $\theta'(x_0) = 0$, esto nos garantiza que existe un $x_1 \in (x_0, b)$ tal que

$$\theta(x) > 0, \ |\theta'(x)| < \frac{\theta(x)}{\theta(x)+1} < 1$$

para $x \in [x_0, x_1]$ y $[x_0, x_1] \cap \Sigma = \emptyset$. Entonces,

$$\begin{gathered} \phi(u'(x))' - \phi(w'(x))' = -\bar{f}(x,u(x)) - \phi(w'(x))' = \\ -f(x,w(x)) + \frac{\theta(x)}{\theta(x)+1} - \phi(w'(x))' \geq \\ -f(x,w(x)) + |\theta'(x)| - \phi(w'(x))' \geq 0 \end{gathered}$$

para *c.t.p.* $x \in [x_0, x_1]$ pues $-\phi(w'(x))' \geq f(x,w(x))$. Luego,

$$0 < \int_{x_0}^{x} \phi(u'(t))' - \phi(w'(t))'dt = \phi(u'(x)) - \phi(w'(x)), \text{ para } c.t.p.\ x \in (x_0, x_1].$$

Por lo tanto $\theta'(x) > 0$, para *c.t.p.* $x \in (x_0, x_1]$ contradiciendo nuestra suposición de que x_0 es un máximo de θ. Análogamente se puede probar que $v(x) \leq u(x)$, terminando así la prueba. $\square$

3.3.2. Caso $N \geq 2$

Introduciremos a continuación la definición de sub y supersoluciones para problemas de la forma

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \phi(\nabla u) = h(x,u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.32}$$

donde $h : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función Carathéodory tal que $h \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R})$. Como nosotros vamos a trabajar con sub y supersoluciones que son suaves, para evitar complicaciones innecesarias nos vamos a restringir al caso de sub y supersoluciones continuas. El lector interesado puede consultar [Fan12, TF13] para ver casos más generales.

Diremos que $v \in W^1 L_\Phi(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ es una *subsolución* (débil) de (3.32) si $v \leq 0$ en $\partial\Omega$ y

$$\int_\Omega \varphi(|\nabla v(x)|) \nabla v(x). \nabla z(x) dx \leq \int_\Omega h(x) z(x) dx \tag{3.33}$$

para todo $z \in W_0^1 L_\Phi(\Omega)$; y $w \in W^1 L_\Phi(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ es una *supersolución* de (3.32) si $w \geq 0$ en $\partial\Omega$ y la desigualdad en (3.33) esta invertida.

Teorema 3.13. *Supongamos que valen (ϕ_1), (ϕ_2) y (ϕ_3) y sea $h : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función Carathéodory. Sean v y w sub y supersoluciones respectivamente de (3.32) tal que $v \leq w$ en Ω. Supongamos que existe $g \in L^\infty(\Omega)$ tal que*

$$|h(x,\xi)| \leq g(x) \ \ \textit{para c.t.p. } x \in \Omega \textit{ y todo } \xi \in [v(x), w(x)].$$

Entonces existe $u \in C_0^1(\overline{\Omega})$ solución (débil) de (3.32) con $v \leq u \leq w$ en Ω.

Demostración. Definimos

$$\widetilde{h}(x,t) := \begin{cases} h(x,v(x)) & \text{si } t \leq v(x), \\ h(x,t) & \text{si } v(x) \leq t \leq w(x), \\ h(x,w(x)) & \text{si } t \geq w(x). \end{cases}$$

Tenemos que $\widetilde{h}$ es una función Carathéodory que pertenece a $L^\infty(\Omega \times \mathbb{R})$. Como valen (ϕ_1) y (ϕ_2), tenemos que

$$I(u) = \int_\Omega \Phi(|\nabla u|) dx - \int_\Omega \widetilde{H}(x,u) dx, \ \ u \in W_0^1 L_\Phi(\Omega),$$

está bien definido e $I \in C^1(W_0^1 L_\Phi, \mathbb{R})$, donde

$$\widetilde{H}(x,t) = \int_0^t \widetilde{h}(x,s)ds, \ t \in \mathbb{R}.$$

Notar que podemos acotar $\widetilde{H}$. En efecto, como $\widetilde{h} \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R})$ tenemos que

$$\widetilde{H}(x,t) = \int_0^t \widetilde{h}(x,s)ds \leq \|\widetilde{h}\|_\infty t, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}. \tag{3.34}$$

Además, podemos ver gracias a la desigualdad de arriba, el inciso (ii) del Lema 3.6, la desigualdad de Poincaré y de la inmersión $L_\Phi \subset L^1$ (ver Teorema 1.7) que I es coercivo, puesto que

$$\begin{aligned} I(u) \geq & \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx - \|\widetilde{h}\|_\infty \int_\Omega |u|\, dx \geq \eta_1(\|u\|_{1,\Phi}) - \|\widetilde{h}\|_\infty \|u\|_1 \\ \geq & \eta_1(\|u\|_{1,\Phi}) - C\|u\|_{1,\Phi} \to \infty \text{ cuando } \|u\|_{1,\Phi} \to \infty \end{aligned}$$

donde C es una constante positiva.

Por otro lado, I es débilmente semicontinuo inferiormente. Veamos que el primer término lo es. Como Φ es una función convexa el funcional $P : W_0^1 L_\Phi(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por

$$P(u) := \int_\Omega \Phi(|\nabla u|),$$

es convexo. Luego, tenemos que

$$P(u_n) \geq P(u) + \langle P'(u), u_n - u\rangle.$$

Si $u_n \to u$ de manera débil en $W_0^1 L_\Phi(\Omega)$

$$\begin{aligned} \varliminf_{n\to\infty} P(u_n) \geq & \varliminf_{n\to\infty} [P(u) + \langle P'(u), u_n - u\rangle] \\ = & P(u) + \varliminf_{n\to\infty} \langle P'(u), u_n - u\rangle = P(u). \end{aligned}$$

Veamos que el segundo termino es débilmente continuo. Usando la inmersión continua de L_Φ en L^1, podemos deducir que la inmersión de $W_0^1 L_\Phi(\Omega)$ en $W_0^{1,1}(\Omega)$, también es continua. Además, por el Teorema de Rellich-Kondrachov (ver [AF03, Teorema 6.3]), la inmersión de $W_0^{1,1}(\Omega)$ en $L^1(\Omega)$ es compacta. Entonces, dada una sucesión $\{u_n\}$ que converge débilmente a u en $W_0^1 L_\Phi(\Omega)$, podemos afirmar que converge en norma a u en $L^1(\Omega)$. Por lo tanto, usando (3.34), tenemos que

$$\left| \int_\Omega \widetilde{H}(x,u) - \int_\Omega \widetilde{H}(x,u_n) \right| \leq \|\widetilde{h}\| \int_\Omega |u - u_n|.$$

Como $u_n \to u$ en $L^1(\Omega)$, se sigue que el funcional $u \to \displaystyle\int_\Omega \widetilde{H}(x,u)$ es débilmente continuo.

Resumiendo hemos probado que I es un funcional coercivo y débilmente semicontinuo inferiormente. Luego, como $W_0^1 L_\Phi$ es un espacio reflexivo existe un $u \in W_0^1 L_\Phi$ tal que

$$I'(u) = 0 \text{ y } I(u) = \min_{v \in W_0^1 L_\Phi} I(v).$$

En otras palabras, u es solución débil de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\phi(\nabla u) = \widetilde{h}(x,u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.35}$$

Ahora veremos que $v \leq u \leq w$ para casi todo punto de Ω. En efecto, tomamos $(u-w)^+ \in W_0^1 L_\Phi(\Omega)$ como función de prueba y usando que w es supersolución de (3.35) tenemos que

$$\int_\Omega \phi(\nabla u)\nabla(u-w)^+ dx = \int_\Omega \widetilde{h}(x,u)(u-w)^+ dx =$$
$$\int_{\{u \geq w\}} \widetilde{h}(x,u)(u-w)^+ dx = \int_{\{u \geq w\}} h(x,w)(u-w)^+ dx =$$
$$\int_\Omega h(x,w)(u-w)^+ dx \leq \int_\Omega \phi(\nabla w)\nabla(u-w)^+ dx.$$

Esto implica que

$$\int_{\{u \geq w\}} \phi(\nabla u) - \phi(\nabla w)\nabla(u-w) dx \leq 0.$$

Teniendo en cuenta (3.19) el lado izquierdo de la desigualdad de arriba es positivo siempre que $u \not\equiv w$ en $\{u \geq w\}$. Luego, se sigue que $u \leq w$ en Ω. De manera análoga , obtenemos que $v \leq u$. La regularidad de u se sigue del Lema 3.7. $\square$

Capítulo 4

Ecuación logística generalizada

Sean Ω un dominio suave y acotado en $\mathbb{R}^N$ con $N \geq 1$, $m, n : \Omega \to \mathbb{R}$ no negativas y $\phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ una función continua y estrictamente monótona. En este capítulo estudiaremos la existencia y la no existencia de soluciones positivas en problemas no lineales de la forma

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\phi(\nabla u) = \lambda m(x)f(u) - n(x)g(u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

donde $\lambda > 0$ es un parámetro real, y $f, g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ son funciones continuas modeladas por $f(t) = t^q$ y $g(t) = t^r$ con $0 < q < r$. Los resultados principales de este Capítulo son los Teoremas 4.1, 4.8 y 4.13.

Cuando $\phi(x) = |x|^{p-2} x$ con $p > 1$, $f(t) = t^q$ y $g(t) = t^r$ con $0 < q < r$, el problema (4.1) se transforma en

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda m(x)u^q - n(x)u^r & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.2}$$

donde $\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ es el operador conocido como el p-Laplaciano. Cuando $p = 2$ (4.2) es la conocida ecuación logística. Esta ecuación ha recibido muy buena atención desde que este tipo de no linealidades se usó para modelar procesos de reacción-difusión y problemas logísticos en dinámicas de población, en estás aplicaciones las soluciones positivas suelen ser las únicas relevantes. De acuerdo con el valor de q, (4.2) recibe los siguientes nombres: **subdifusiva** ($q < p - 1$), **equidifusiva** ($q = p - 1$) y **superdifusiva** ($q > p - 1$). En los últimos años muchos artículos han sido dedicados al estudio del problema (4.2), citamos algunos [HTT12, HQK16, PS16] (caso subdifusivo), [DH01, HTT12, HQK16, KP11, PP12, PS16] (caso equidifusivo) y [APS10, BIU08, Don05, FOP10, HTT12, IP11, PS16, Tak01] (caso superdifusivo).

Por otro lado, algunos autores han extendido en [GOP15, GP14, GP16, PW14] los artículos mencionados en el párrafo anterior a problemas de la forma (4.1) con $f(t) = t^q$ y $g(t) = t^r$. Las hipótesis en estos trabajos implican que

$$|\phi(\eta)| \leq c(1 + |\eta|^{p-1})$$

para todo $\eta \in \mathbb{R}^N$, algún $c > 0$ y $p > 1$. Nos referiremos a [GOP15, PW14] para el caso $q \leq p - 1$ y a [GP14, GP16] para $q > p - 1$. Mencionamos que en [GOP15, GP14, PW14] se asume que $m \equiv 1$ y $\operatorname{infess}_\Omega n > 0$, mientras que en [GP16] los autores trataron el caso $\operatorname{infess}_\Omega m, n > 0$. Además, en todos estos artículos se requiere que $r > p - 1$ y con excepción de [PW14]. En este trabajo, la ecuación (4.1) solo es estudiada para λ grande, y se asume que u^r tiene un crecimiento subcrítico, i.e., $r < p^* - 1$ (donde como es usual $p^* = Np/(N - p)$ si $p < N$). Queremos remarcar que los resultados en estos artículos fueron obtenidos principalmente con métodos variacionales.

Siguiendo un enfoque diferente, en este capítulo estudiaremos problemas del tipo (4.1), extendiendo en varias direcciones los artículos mencionados en el párrafo anterior. Por un lado, no pondremos ninguna restricción sobre r, y en el caso unidimensional no asumiremos ninguna condición sobre ϕ (además de ser un homeomorfismo creciente e impar de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$) para obtener los resultados de existencia y no existencia. Por otro lado, permitiremos que m y n tengan ínfimo esencial igual a cero o que se anulen en Ω en ciertas situaciones.

Para ser más precisos, dada $0 \leq h \in L^1(\Omega)$, definimos

$$\Omega_0^h := \Omega \backslash (\operatorname{supp} h), \text{ donde } \operatorname{supp} h := \text{soporte de } h,$$

$$\Omega_+^h := \text{el mayor subconjunto abierto de } \Omega \text{ donde } h > 0 \text{ para } c.t.p.$$

Escribiremos además $|Z|$ la medida de Lebesgue N-dimensional de $Z \subset \mathbb{R}^N$. Dadas $0 \leq h_1, h_2 \in L^1(\Omega)$ con $h_1 \not\equiv 0$, denotaremos por (H_{h_1,h_2}) a la hipótesis dada por

$$\Omega_0^{h_1} \subset \Omega_0^{h_2}, \quad |(\operatorname{supp} h_1) \backslash \Omega_+^{h_1}| = 0, \quad \text{y} \quad \frac{h_2}{h_1} \in L^\infty(\Omega_+^{h_1}). \qquad (H_{h_1,h_2})$$

Notar que la segunda condición implica que $\Omega = \Omega_0^{h_1} \cup \Omega_+^{h_1} \cup Z$ con $|Z| = 0$. En efecto, $Z = (\Omega \backslash \Omega_0^{h_1}) \backslash \Omega_+^{h_1}$ pues $\Omega_0^{h_1} \cap \Omega_+^{h_1} = \emptyset$. Por definición de $\Omega_0^{h_1}$ se tiene que $\Omega \backslash \Omega_0^{h_1} = \operatorname{supp} h_1$, entonces $Z = \operatorname{supp} h_1 \backslash \Omega_+^{h_1}$ el cual tiene medida cero.

Para el problema subdifusivo, para probaremos nuestros teoremas suponiendo $(H_{m,n})$, y en el caso equidifusivo y superdifusivo supondremos $(H_{m,n})$ y $(H_{n,m})$. En el primer caso podemos considerar con la situación particular $n \equiv 0$ y ahí nuestros resultados también mejoran la literatura existente, incluso cuando $N = 1$. Para más detalles ver la Observación 4.4. Más aún, según nuestros conocimientos, los resultados al menos en este caso son nuevos incluso para el problema N-dimensional que involucra al p-Laplaciano.

El resto de este capítulo esta organizado como describiremos a continuación. En la siguiente sección nos enfocaremos en el problema unidimensional: empezamos recordando cosas de los capítulos anteriores que usaremos para probar el resultado principal de la sección, el Teorema 4.1. En la sección 4.2 nos enfocaremos en el caso N-dimensional con $N \geq 2$. Los resultados principales de esta sección son presentados en el Teorema 4.8. Estos serán obtenidos por medio del método de sub y supersoluciones combinado con algunas estimaciones de problemas no lineales relacionados. Por último, en la sección 4.3 demostraremos un resultado de unicidad para este tipo de problemas.

Queremos mencionar que si bien la mayoría de los resultados (de hecho, todos excepto los incisos (i1) y (i2) del Teorema 4.1) obtenidos en el problema unidimensional tienen su contraparte en el N-dimensional, en el último caso son necesarias más hipótesis sobre ϕ y más regularidad sobre m y n. Esto se debe principalmente a que en el caso unidimensional las soluciones satisfacen la ecuación puntualmente, lo que permite evitar el uso de los espacios de Orlicz-Sobolev.

4.1. Caso $N = 1$

En esta sección asumiremos que $\Omega := (a, b)$ con $-\infty < a < b < \infty$.

Empezamos recordando asuntos tratados en el Capítulo 1. Una función convexa y continua $\Phi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ es llamada un *N-función* si es par, $\Phi(t) = 0$ si y solo si $t = 0$, y satisface que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\Phi(t)}{t} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t\to\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = \infty.$$

Una N-función Φ satisface la condición Δ_2 (globalmente) si existe $k > 0$ tal que

$$\Phi(2t) \leq k\Phi(t) \text{ para todo } t \geq 0,$$

o equivalentemente, si y solo si para todo $s > 1$ existe $k = k(s) > 0$ tal que

$$\Phi(st) \leq k\Phi(t) \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Recordamos además que, si Φ es una N-función, tenemos la siguiente desigualdad de Poincaré:

$$\int_a^b \Phi(|u|) \leq \int_a^b \Phi(2|\Omega||u'|) \quad \text{para todo } u \in W_0^1 L_\Phi(\Omega). \tag{4.3}$$

Recordamos un par de desigualdades del capítulo 3 que nos serán de gran utilidad para probar los resultados de esta sección. Denotamos por $\mathcal{S}_\phi : L^1(\Omega) \to C^1(\overline{\Omega})$ al operador solución del problema

$$\begin{cases} -\phi(v')' = h(x) & \text{en } \Omega, \\ v = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Este operador es continuo y monótono creciente. Además, dadas una constante $K > 0$ y un función $h \in L^1(\Omega)$ con $0 \leq h \not\equiv 0$ valen las siguientes desigualdades

$$\mathcal{S}_\phi(h) \leq \phi^{-1}\Big(\int_a^b h\Big)\delta_\Omega \text{ en } \Omega, \tag{4.4}$$

y

$$\mathcal{S}_\phi(Kh) \geq c\phi^{-1}(cK)\delta_\Omega \text{ en } \Omega, \tag{4.5}$$

donde $c > 0$ es una constante que no depende de K. Para las pruebas de estas desigualdades ver el Teorema 3.4.

Por último recordamos que

$$\mathcal{P}^\circ = \{u \in C_0^1(\overline{\Omega}) : u > 0 \text{ en } \Omega \text{ y } u'(b) < 0 < u'(a)\}.$$

Dada $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un homeomorfismo impar y creciente, estudiaremos el siguiente problema

$$\begin{cases} -\phi(u')' = \lambda m(x) f(u) - n(x) g(u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_λ}$$

donde $\lambda > 0$, $0 \leq m, n \in L^1(\Omega)$ y $f, g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ son funciones continuas que satisfacen algunas de las siguientes hipótesis.

H1. Vale $(H_{m,n})$ si $n \not\equiv 0$ y existen $c_1, t_1 > 0$ y $0 < q_1 < r_1$ tales que

$$f(t) \geq c_1 t^{q_1} \quad \text{y} \quad g(t) \leq \frac{1}{c_1} t^{r_1} \quad \text{para todo } t \in [0, t_1]. \tag{4.6}$$

H2. Vale $(H_{n,m})$ y

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{f(t)}{g(t)} = 0. \tag{4.7}$$

H3. Existen $c_2, q_2 > 0$ tales que

$$f(t) \leq c_2 t^{q_2} \quad \text{para todo } t > 0, \quad \text{y} \quad \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{t^{q_2}}{\phi(t)} = 0 \tag{4.8}$$

o

$$f \text{ es no decreciente} \quad \text{y} \quad \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{f(Ct)}{\phi(t)} = 0, \text{ para todo } C > 0. \tag{4.9}$$

H4. Existe $c_f > 0$ tal que

$$f(t) \leq c_f \phi(t) \quad \text{para todo } t \geq 0. \tag{4.10}$$

H5. Vale $(H_{n,m})$ y existen $c > 0$ y $1 < \beta < \mu$ tales que

$$f(t) \leq c\phi(t)^\beta \quad \text{y} \quad g(t) \geq \frac{1}{c}\phi(t)^\mu \quad \text{para todo } t \geq 0. \tag{4.11}$$

Teorema 4.1. *Sean* $0 \leq m, n \in L^1(\Omega)$.

(i) Supongamos que vale H1 *y también vale* H2 *o* H3*. Existe* $\Lambda \geq 0$ *tal que* (P_λ) *tiene una solución* $u_\lambda \in \mathcal{P}^\circ$ *para todo* $\lambda > \Lambda$*, y* (P_λ) *no tiene soluciones en* $\mathcal{P}^\circ$ *para* $0 < \lambda < \Lambda$*. Más aún, si* $\Lambda < \lambda_1 < \lambda_2$*, podemos elegir* u_{λ_2} *con* $u_{\lambda_2} \geq u_{\lambda_1}$ *en* Ω*. Además:*

1. *Si vale (4.6) para todo* $t \geq 0$*, entonces para cualquier* $M > 0$ *y* Ω_0 *abierto con* $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$ *existe* u_λ *con*

$$u_\lambda(x) > M \text{ para todo } x \in \Omega_0. \tag{4.12}$$

2. *Supongamos que para algún* $p > 1$ *con* $q_1 < p - 1$ *vale que* $\underline{\lim}_{t\to 0^+} t^{p-1}/\phi(t) > 0$ *y* $\overline{\lim}_{t\to 0^+} t^{p-1}/\phi(t) < \infty$ *en caso que* $n \not\equiv 0$*, entonces*

$$\Lambda = 0 \quad y \quad \lim_{\lambda \to 0^+} \|u_\lambda\|_\infty = 0.$$

(ii) Sea $\Phi(t) := \int_0^{|t|} \phi(s)ds$*. Supongamos* $0 \not\equiv m \in L^\infty(\Omega)$*, y que* Φ *satisface la condición* Δ_2 *si* $|\Omega| > \frac{1}{4}$*.*

1. *Supongamos que vale la hipótesis* H4*, entonces existe* $k = k(|\Omega|) > 0$ *tal que*

$$\Lambda \geq \frac{k}{c_f \|m\|_\infty} \quad si\ |\Omega| > \frac{1}{4}, \quad y \quad \Lambda \geq \frac{1}{c_f\|m\|_\infty} \quad si\ |\Omega| \leq \frac{1}{4}.$$

2. *Supongamos que vale la hipótesis* H5*, entonces* $\Lambda > 0$*.*

Observación 4.2. Queremos resaltar que asumir H1 y H2 requiere que valgan $(H_{m,n})$ y $(H_{n,m})$ simultáneamente.

Observación 4.3. Vamos a asumir en esta observación que, $f(t) = t^q$ y $g(t) = t^r$ con $0 < q < r$; y $ct^{p-1} \leq \phi(t) \leq c^{-1}t^{p-1}$ para algún $c > 0$ y $p > 1$.

1. Observamos que las últimas condiciones en (4.8) y (4.9) se satisfacen si $q < p - 1$. Es decir, H3 corresponde al caso subdifusivo. Más aún, el inciso (ii) del Teorema anterior nos dice que en tal caso $\Lambda = 0$ y $\lim_{\lambda \to 0^+} \|u_\lambda\|_\infty = 0$.

2. La hipótesis H4 corresponde con el caso equidifusivo. Queremos agregar que cuando ϕ es el p-Laplaciano, es decir, $\phi(t) = |t|^{p-2}t$, se puede probar que $\Lambda = \lambda_1(m)$, donde $\lambda_1(m)$ es el (único) autovalor principal positivo con respecto al peso m (ver [KP11, Theorem 3.3] para el caso de m cambiando de signo y $n \geq n_0 > 0$ c.t.p. en Ω).

3. Es fácil comprobar que la condición (4.11) en H5 corresponde al caso superdifusivo.

Observación 4.4. Notar que cuando valen H1 y H3, podemos considerar la situación particular $n \equiv 0$, es decir problemas de la forma

$$\begin{cases} -\phi(u')' = \lambda m(x) f(u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.13}$$

donde, en términos generales, f es sublineal con respecto a ϕ. Los problemas unidimensionales como (4.13) con esa clase de no linealidades han sido estudiados previamente pero bajo hipótesis demasiado fuertes tanto como para ϕ y m (ver por ejemplo, [BDM07, Corollary 3.4], [Wan03a, Theorem 1.1] y [XL14, Theorem 2]), nosotros en [KM18b, Theorem 3.2] extendimos estos resultados para cualquier $0 \leq m \not\equiv 0$ en Ω, pero aún requerimos algunas condiciones sobre ϕ. El Teorema 4.1 mejora estos trabajos sin pedir ninguna hipótesis sobre ϕ para obtener la existencia de soluciones positivas en $\mathcal{P}^\circ$ para todo λ suficientemente grande. Además, la condición necesaria en el Teorema 4.1 para probar que $\Lambda = 0$ es más débil que las requeridas en [KM18b]. Más aún, la estimación (4.12) nos permite concluir que podemos elegir las soluciones de manera tal que sus normas tiendan a infinito cuando $\lambda \to \infty$, resultado que no pudimos obtener en nuestro trabajo citado.

Observación 4.5. Queremos mencionar que para todo $\lambda > 0$ la existencia de soluciones en $\mathcal{P}^\circ$ para el problema "sublineal"

$$\begin{cases} -\phi(u')' + n(x)\phi(u) = \lambda m(x) f(u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.14}$$

fue probada en [KM18b]. En dicho artículo se asume que o bien, $n \leq m$ en Ω o $m, n \in L^\infty(\Omega)$ y $\operatorname{essinf}_\Omega m > 0$; además se requiere que existan constantes $\bar{t}, C > 0$ tales que

$$\phi(tx) \leq C\phi(t)\phi(x) \text{ para todo } t \in [0, \bar{t}], x \in \left[0, \frac{b-a}{2}\right].$$

Notamos que el Teorema 4.1 proporciona nuevos resultados para (4.14). De hecho, por simplicidad supongamos que ϕ y f son como en la Observación 4.3, y tomando $g := \phi$. Entonces el Teorema 4.1 (i) (con H1 y H3 como hipótesis) dice que (4.14) tiene solución en $\mathcal{P}^\circ$ para todo $\lambda > 0$ si $m, n \in L^1(\Omega)$ y $(H_{m,n})$ se satisface.

Para la prueba del Teorema 4.1 necesitaremos los dos siguientes lemas.

Lema 4.6. *Supongamos que vale* H1*.*

(i) El problema (P_λ) *tiene una subsolución* $v \in \mathcal{P}^\circ$ *para todo* $\lambda > 0$ *suficientemente grande.*

(ii) Supongamos que existe $p > 1$ *con* $q_1 < p - 1$ *tal que*

$$\varliminf_{t \to 0^+} \frac{t^{p-1}}{\phi(t)} > 0, \quad y \quad \varlimsup_{t \to 0^+} \frac{t^{p-1}}{\phi(t)} < \infty \text{ siempre que } n \not\equiv 0. \tag{4.15}$$

Entonces (P_λ) *tiene una subsolución* $v \in \mathcal{P}^\circ$ *para todo* $\lambda > 0$*.*

Demostración. Sean c_1, q_1, r_1, t_1 dados por (4.6). Empezaremos probando (i). Por la continuidad de ϕ^{-1} y el hecho que $\phi^{-1}(0) = 0$, existe un $\overline{\sigma} > 0$ tal que

$$\phi^{-1}(\sigma \int_a^b m\delta_\Omega^{q_1}) \leq \frac{t_1}{c_\Omega} \tag{4.16}$$

para todo $\sigma \in (0, \overline{\sigma}]$. Para esos σ's definimos $v := S_\phi(\sigma m \delta_\Omega^{q_1}), c_\sigma := c\phi^{-1}(c\sigma)$ y $C_\sigma := \phi^{-1}(\sigma \int_a^b m\delta_\Omega^{q_1})$ donde c es la constante de (4.5) tomando $h = m\delta_\Omega^{q_1}$. Empleando las desigualdades (4.4) y (4.5) obtenemos

$$C_\sigma \delta_\Omega \geq v \geq c_\sigma \delta_\Omega. \tag{4.17}$$

Como $\delta_\Omega \leq c_\Omega$ observamos que la primer desigualdad en (4.17) junto con (4.16) nos dicen que $\|v\|_\infty \leq t_1$. Sea

$$\lambda_0 = c_\sigma^{-q_1} c_1^{-1} \left(\sigma + \left\| \frac{n}{m} \right\|_{L^\infty(\Omega_+^m)} \frac{1}{c_1} C_\sigma^{r_1} \left(\frac{(b-a)}{2} \right)^{r_1 - q_1} \right) > 0.$$

Se sigue de (4.6), (4.17) que para $\lambda \geq \lambda_0$

$$\lambda m(x) f(v) - n(x) g(v) \geq \lambda m(x) c_1 v^{q_1} - n(x) \frac{1}{c_1} v^{r_1} \geq$$

$$\lambda m(x)c_1c_\sigma^{q_1}\delta_\Omega^{q_1} - n(x)\frac{1}{c_1}C_\sigma^{r_1}\delta_\Omega^{r_1} = m(x)\delta_\Omega^{q_1}\left(\lambda c_1 c_\sigma^{q_1} - \frac{n(x)}{m(x)}\frac{1}{c_1}C_\sigma^{r_1}\delta_\Omega^{r_1-q_1}\right) \geq$$
$$m(x)\delta_\Omega^{q_1}\left(\lambda c_1 c_\sigma^{q_1} - \left\|\frac{n}{m}\right\|_{L^\infty(\Omega_+^m)}\frac{1}{c_1}C_\sigma^{r_1}\left(\frac{(b-a)}{2}\right)^{r_1-q_1}\right) \geq \sigma m(x)\delta_\Omega^{q_1},$$

en Ω_+^m. Además, como vale $(H_{m,n})$, tenemos que $\left|\operatorname{supp} m \setminus \Omega_+^m\right| = 0$ y n se anula donde m lo hace. Teniendo esto en cuenta junto con la desigualdad de arriba obtenemos que

$$\lambda m(x)f(v) - n(x)g(v) \geq \sigma m(x)\delta_\Omega^{q_1} \text{ en } \Omega.$$

Por lo tanto, v es una subsolución de (P_λ).

Probemos (ii). Sea $\lambda > 0$. Supongamos primero que $n \not\equiv 0$. Por la continuidad de ϕ^{-1} y la igualdad $\phi^{-1}(0) = 0$ existe $\overline{\varepsilon}$ tal que

$$\phi^{-1}(\varepsilon\int_a^b m(x)\delta_\Omega^{q_1}dx) \leq \frac{t_1}{c_\Omega}, \tag{4.18}$$

para todo $\varepsilon \in (0, \overline{\varepsilon}]$. Por (4.15) podemos encontrar un $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$\left(\phi^{-1}(\varepsilon c)\right)^{p-1} \geq K\varepsilon \tag{4.19}$$

y

$$\left(\phi^{-1}(\varepsilon\int_a^b m(x)\delta_\Omega^{q_1}dx)\right)^{p-1} \leq \frac{\varepsilon}{K}, \tag{4.20}$$

para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ y alguna constante $K > 0$, donde c es la constante de (4.5) tomando $h = m\delta_\Omega^{q_1}$.

Definimos $v := S_\phi(\sigma m\delta_\Omega^{q_1})$. Si $\sigma \leq \overline{\varepsilon}$ y como $\delta_\Omega \leq c_\Omega$, la desigualdad (4.18) junto a la (4.4) nos dice que $\|v\|_\infty \leq t_1$. Luego, teniendo en cuenta que $q_1 < \min(r_1, p-1)$, (4.19), (4.20) y empleando las cotas (4.4), (4.5) y (4.6), para todo $\sigma > 0$ suficientemente chico deducimos que

$$\lambda m(x)f(v) - n(x)g(v) \geq \lambda m(x)c_1v^{q_1} - n(x)c_1^{-1}v^{r_1} \geq$$
$$\lambda m(x)c_1\left[c\phi^{-1}(\sigma c)\delta_\Omega\right]^{q_1} - n(x)c_1^{-1}\left[\phi^{-1}(\sigma\int_a^b m(x)\delta_\Omega^{q_1})dx)\delta_\Omega\right]^{r_1} \geq$$
$$\lambda m(x)c_1c^{q_1}(K\sigma)^{\frac{q_1}{p-1}}\delta_\Omega^{q_1} - n(x)c_1^{-1}(\frac{\sigma}{K})^{\frac{r_1}{p-1}}\delta_\Omega^{r_1} \geq$$
$$\sigma^{\frac{q_1}{p-1}}m(x)\delta_\Omega^{q_1}\left(\lambda c_1c^{q_1}(cK)^{\frac{q_1}{p-1}} - \sigma^{\frac{r_1-q_1}{p-1}}\left\|\frac{n}{m}\right\|_{L^\infty(\Omega_+^m)}\frac{c_\Omega^{r_1-q_1}}{c_1K^{r_1/p-1}}\right) \geq$$
$$\sigma m(x)\delta_\Omega^{q_1} = -\phi(v')' \text{ en } \Omega.$$

Entonces, v es una subsolución de (P_λ).

Supongamos ahora que $n \equiv 0$. Para

$$\sigma \leq \text{mín}\left\{\overline{\varepsilon}, \varepsilon_0, \left(\lambda K^{\frac{q_1}{p-1}} c_1 c^{q_1}\right)^{\frac{p-1}{p-1-q_1}}\right\}, \tag{4.21}$$

definimos $v := S_\phi(\sigma m \delta_\Omega^{q_1})$. Como $\delta_\Omega \leq c_\Omega$ y $\sigma \leq \overline{\varepsilon}$, la desigualdad (4.18) junto a la cota (4.4) nos muestran que $\|v\|_\infty \leq t_1$. Usando (4.6), la cota (4.5), (4.19) y (4.21) obtenemos

$$\lambda m(x) f(v) \geq \lambda c_1 m(x) v^{q_1} \geq \lambda c_1 m(x) \left[c\phi^{-1}(\sigma c)\delta_\Omega\right]^{q_1} \geq$$

$$\lambda c_1 c^{q_1} K^{\frac{q_1}{p-1}} \sigma^{\frac{q_1}{p-1}} m(x) \delta_\Omega^{q_1} \geq \sigma m(x) \delta_\Omega^{q_1} = -\phi(v')' \text{ en } \Omega,$$

por lo tanto, v es una subsolución de (P_λ). □

Lema 4.7. *Sean $\lambda > 0$ y $v \in \mathcal{P}^\circ$.*

(i) Supongamos que vale H2, *entonces existe $w \in C^1(\overline{\Omega})$ supersolución de (P_λ) tal que $w \geq v$ en $\overline{\Omega}$.*

(ii) Supongamos que vale H3, *entonces existe $w \in \mathcal{P}^\circ$ supersolución de (P_λ) tal que $w \geq v$ en $\overline{\Omega}$.*

Demostración. Primero probemos *(i)*. Usando (4.7) podemos encontrar $K \geq \|v\|_\infty$ tal que

$$\frac{g(K)}{f(K)} \geq \lambda \left\|\frac{m}{n}\right\|_{L^\infty(\Omega_+^n)}. \tag{4.22}$$

Sea $w := K$ en Ω. Por la elección de K se tiene que $w \geq v$. Además, notar que $\phi(w')' = 0$ pues w es constante. Debemos probar que

$$\lambda m(x) f(K) - n(x) g(K) \leq 0 \; c.t.p. \; x \in \Omega.$$

Si $x \in \Omega_0^n$, entonces el lado izquierdo de la desigualdad anterior es 0, luego no hay nada que probar. Por otra parte, si $x \in \Omega_+^n$ tenemos que

$$\lambda m(x) f(K) - n(x) g(K) = f(K) n(x) \left(\lambda \frac{m(x)}{n(x)} - \frac{g(K)}{f(K)}\right) \leq$$

$$\leq f(K) n(x) \left(\lambda \left\|\frac{m}{n}\right\|_{L^\infty(\Omega_n^+)} - \frac{g(K)}{f(K)}\right) \leq 0$$

donde la última desigualdad se obtiene de (4.22). Como $\Omega = \Omega_0^n \cup \Omega_+^n \cup Z$ con $|Z| = 0$, obtenemos lo deseado.

Probemos ahora *(ii)*. Supongamos primero que vale (4.8) y sean c_2, q_2 dados por (4.8). Notar que la condición sobre ϕ es equivalente a

$$\overline{\lim_{t \longrightarrow \infty}} \frac{(\phi^{-1}(\rho t))^{q_2}}{t} = 0 \text{ para todo } \rho > 0.$$

Luego, existe $T > 0$ tal que para todo $t \geq T$,

$$\left(\phi^{-1}(t \int_a^b m(x)dx)\right)^{q_2} \leq \frac{t}{\lambda c_2 c_\Omega^{q_2}}. \tag{4.23}$$

Definimos $w := S_\phi(Km(x)) \in \mathcal{P}^\circ$. Usando la hipótesis sobre f, la desigualdad (4.4) y teniendo en cuenta (4.23), obtenemos

$$\lambda m(x) f(w) - n(x) g(w) \leq$$

$$\lambda m(x) c_2 w^{q_2} \leq \lambda c_2 m(x) \left[\phi^{-1}(\int_a^b Km(x)dx)\delta_\Omega\right]^{q_2} \leq$$

$$\lambda c_2 c_\Omega^{q_2} \frac{K}{\lambda c_2 c_\Omega^{q_2}} m(x) = Km(x) = -\phi(w')'.$$

Supongamos ahora que vale (4.9). Entonces, $\overline{\lim}_{t\to\infty} f(c_\Omega \phi^{-1}(t\rho))/t = 0$ para todo $\rho > 0$. Se sigue que existe $K_0 > 0$ tal que

$$\frac{f(c_\Omega \phi^{-1}(K \int_a^b m(x)dx))}{K} \leq \frac{1}{\lambda} \text{ para todo } K \geq K_0.$$

Sea $w := S_\phi(Km)$ como antes. Por la cota (4.4), se tiene que

$$w \leq \phi^{-1}(K \int_a^b m(x)dx)\delta_\Omega \leq \phi^{-1}(K \int_a^b m(x)dx) c_\Omega.$$

Luego, utilizando (4.9) y las dos desigualdades anteriores obtenemos que

$$\lambda m(x) f(w) - n(x) g(w) \leq \lambda m(x) f(w) \leq$$

$$\lambda m(x) f\left(\phi^{-1}(K \int_a^b m(x)dx) c_\Omega\right) \leq Km(x) = -\phi(w')' \text{ en } c.t.p.\ x \in \Omega.$$

Por lo tanto, bajo cualquiera de las hipótesis (4.8) o (4.9), $w \in \mathcal{P}^\circ$ es una supersolución de (P_λ). Además, gracias a la desigualdad (4.5) dada $v \in \mathcal{P}^\circ$ podemos encontrar w tal que $w \geq v$ en $\overline{\Omega}$. $\square$

Demostración del Teorema 4.1. Supongamos primero que valen las hipótesis H1 junto con H2 o H3. Por el Teorema 3.10 y los Lemas 4.6 y 4.7, para todo λ suficientemente grande existe una solución $u_\lambda \in \mathcal{P}^\circ$. A continuación definimos

$$\Lambda := \text{ínf}\{\lambda > 0 : (P_\lambda) \text{ tiene una solución } u_\lambda \in \mathcal{P}^\circ\}.$$

Dado $\lambda_2 > \Lambda$ podemos encontrar λ_1 tal que (P_{λ_1}) admite una solución $u_{\lambda_1} \in \mathcal{P}^\circ$ y $\Lambda < \lambda_1 < \lambda_2$. Notar que, u_{λ_1} es una subsolución de (P_{λ_2}). Por el Lema 4.7 concluimos que existe $w \in \mathcal{P}^\circ$ supersolución de (P_{λ_2}) con $w \geq u_{\lambda_1}$. Luego, el Teorema 3.10 nos asegura que existe $u_{\lambda_2} \in \mathcal{P}^\circ$ solución de (P_{λ_2}) con $u_{\lambda_2} \geq u_{\lambda_1}$.

Sean $M > 0$ y Ω_0 un abierto tal que $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$. La segunda desigualdad de (4.17) nos dice que podemos encontrar una subsolución $v \in \mathcal{P}^\circ$ tal que

$$v(x) \geq c_\sigma \delta_\Omega(x) > 0 \text{ en } \Omega_0.$$

Como vale (4.6) para todo $t > 0$ no necesitamos que se cumpla (4.16), luego, podemos tomar σ tan grande como queramos. Más aún, para $\sigma \gg 0$ se tiene que $c_\sigma \delta_\Omega > M$ en Ω_0 pues $c_\sigma \to \infty$ cuando σ tiende a ∞. Luego, $v > M$ en Ω_0. Además, gracias al Lema 4.7 podemos encontrar una supersolución w tal que $w \geq v$. Se sigue utilizando una vez más el Teorema 3.10 que existe una solución u_λ tal que $u_\lambda > M$ en Ω_0.

Probemos (i)2. Podemos deducir del Lema 4.6 (ii) que para todo $\lambda > 0$ existe $v \in \mathcal{P}^\circ$ subsolución de (P_λ) y del Lema 4.7 existe $w \in \mathcal{P}^\circ$ supersolución de (P_λ) tal que $w \geq v$. Además, usando de nuevo el Teorema 3.10 concluimos que existe u_λ solución de (P_λ) con $w \geq u_\lambda \geq v$ para todo $\lambda > 0$. Luego, $\Lambda = 0$.

Finalmente, probemos que $\|u_\lambda\|_\infty \to 0$ cuando $\lambda \to 0^+$. Tomemos $\lambda_0 > 0$ fijo, y consideremos $\lambda \in (0, \lambda_0)$. Primero observemos que las soluciones u_λ pueden ser elegidas de manera tal que $\|u_\lambda\|_\infty \leq C$ con C independiente de λ. En efecto, u_{λ_0} es una supersolución de (P_λ) para $\lambda \in (0, \lambda_0)$ y podemos construir gracias al Lema 4.6 (ii) subsoluciones arbitrariamente pequeñas que (convergen a 0 en $C(\overline{\Omega})$ cuando $\sigma \to 0$) tales que sean menores o iguales que u_{λ_0}. Entonces, gracias al Teorema 3.10 podemos encontrar soluciones u_λ tales que $u_\lambda \leq u_{\lambda_0}$. Por lo tanto, $\|u_\lambda\|_\infty \leq \|u_{\lambda_0}\|_\infty = C$ como afirmamos. Teniendo esto en cuenta, junto con la monotonía del operador solución y la cota superior dada por (4.4) obtenemos

$$0 \leq u_\lambda = S_\phi\left(\lambda m f(u_\lambda) - n g(u_\lambda)\right) \leq S_\phi(\lambda m f(u_\lambda)) \leq$$
$$\phi^{-1}\left(\lambda \int_a^b m f(u_\lambda)\right) \delta_\Omega(x) \to 0,$$

uniformemente en $\overline{\Omega}$ cuando $\lambda \to 0^+$ y entonces $\lim_{\lambda\to 0^+} \|u_\lambda\|_\infty = 0$.

A continuación, probaremos (ii). Sea $\lambda > 0$ tal que existe $u \in \mathcal{P}^\circ$ solución de (P_λ). Por las propiedades de ϕ se sigue que Φ es una N-función. Además, al ser ϕ creciente es fácil chequear que

$$\Phi(t) \leq \phi(t)t \leq \Phi(2t) \text{ para todo } t \geq 0. \tag{4.24}$$

Consideremos primero (i). Multiplicando (P_λ) por u y usando (4.10), obtenemos que

$$-\phi(u')'u \leq \lambda m(x) f(u)u \leq \lambda m(x) c_f \phi(u)u \leq \lambda \|m\|_\infty c_f \phi(u)u \text{ en } \Omega.$$

Luego, integrando por partes, usando (4.24) y desigualdad de Poincaré (4.3) obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_a^b \phi(u')u' \leq \lambda\|m\|_\infty c_f \int_a^b \phi(u)u \leq \\ \lambda\|m\|_\infty c_f \int_a^b \Phi(2u) \leq \lambda\|m\|_\infty c_f \int_a^b \Phi(4|\Omega||u'|). \end{aligned} \tag{4.25}$$

Supongamos que $|\Omega| \leq \frac{1}{4}$. Como Φ es creciente para $t \geq 0$, $\Phi(4|\Omega||u'|) \leq \Phi(|u'|)$. Y entonces de (4.25) resulta

$$\int_a^b \phi(u')u' \leq \lambda\|m\|_\infty c_f \int_a^b \Phi(|u'|).$$

Al valer (4.24), podemos deducir que

$$\lambda \geq \frac{1}{c_f\|m\|_\infty}$$

para todo $\lambda > 0$ tal que existe $u \in \mathcal{P}^\circ$ solución de (P_λ). Luego, la desigualdad anterior vale para Λ.

Supongamos ahora que $|\Omega| > \frac{1}{4}$, entonces Φ satisface la condición Δ_2. En particular, existe $k = k(|\Omega|) > 0$ tal que

$$\Phi(4|\Omega||u'|) \leq \frac{1}{k}\Phi(|u'|). \tag{4.26}$$

Utilizando nuevamente la desigualdad (4.25) y (4.26) se concluye que

$$\int_a^b \phi(u')u' \leq \frac{\lambda\|m\|c_f}{k} \int_a^b \Phi(|u'|).$$

Luego, al valer (4.24) deducimos que

$$\lambda \geq \frac{k}{c_f\|m\|_\infty},$$

para todo $\lambda > 0$ tal que existe $u \in \mathcal{P}^\circ$ solución de (P_λ). Luego, la desigualdad anterior vale para Λ.

Para probar $(ii)2$, procederemos por contradicción, i.e., asumiremos que $\lambda > 0$ puede ser arbitrariamente pequeño. Consideremos

$$\mathcal{O} := \{x \in \Omega : \phi(u) \leq 1\} \ \text{ y } \ \mathcal{O}^c = \Omega \backslash \mathcal{O},$$

y denotemos por χ_Z a la función característica de $Z \subset \mathbb{R}^N$. Teniendo en cuenta (4.11) y eligiendo λ suficientemente pequeño podemos deducir que

$$\begin{aligned} -\phi(u')' = \lambda m(x) f(u) - n(x) g(u) &\leq \lambda m(x) c\phi(u)^\beta - n(x)\frac{1}{c}\phi(u)^\mu \\ &\leq \lambda m(x) c\phi(u)^\beta \chi_{\mathcal{O}} + \left[\lambda m(x) c\phi(u)^\beta - n(x)\frac{1}{c}\phi(u)^\mu\right]\chi_{\mathcal{O}^c} \\ &\leq \lambda m(x) c\phi(u)^\beta \chi_{\mathcal{O}} \leq \lambda m(x) c\phi(u). \end{aligned}$$

Si a continuación multiplicamos la desigualdad anterior por u e integramos por partes, podemos argumentar como en el párrafo anterior obteniendo así una cota inferior positiva para λ. Lo cual es una contradicción. $\square$

4.2. Caso $N \geq 2$

Sean $N \geq 2$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado y suave. Consideraremos el problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \phi(\nabla u) = \lambda m(x) f(u) - n(x) g(u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{Q_λ}$$

donde $\phi : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ es una función continua y estrictamente monótona que satisface algunas condiciones apropiadas. Más precisamente, asumiremos que

$$\phi(x) := \varphi(|x|)x \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N,$$

donde $\varphi : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ es una función C^1. Sean también:

(ϕ_1) $\lim\limits_{t \to 0^+} \varphi(t)t = 0$, $\lim\limits_{t \to \infty} \varphi(t)t = \infty$, y $(\varphi(t)t)' > 0$ para todo $t > 0$.

(ϕ_2) Existen $l_1, l_2 > 1$ tal que

$$l_1 \leq \frac{\Phi'(t)t}{\Phi(t)} \leq l_2 \text{ para todo } t > 0, \text{ donde } \Phi(t) := \int_0^{|t|} \varphi(s)s ds.$$

(ϕ_3) Existe $l_3, l_4 > 0$ tal que

$$l_3 \leq \frac{\Phi''(t)t}{\Phi'(t)} \leq l_4 \text{ para todo } t > 0.$$

Recordemos algunas cosas sobre los espacios de Orlicz L_Φ y los espacios Orlicz-Sobolev $W^1 L_\Phi$ y $W_0^1 L_\Phi$ (para más detalles ver el Capítulo 1). Como siempre definimos la N-función complementaria de Φ como

$$\widetilde{\Phi}(s) = \max_{t \geq 0}\{st - \Phi(t)\} \text{ para } s \geq 0.$$

Como valen (ϕ_1) y (ϕ_2), de la Observación 1.5 podemos ver que tanto Φ como $\widetilde{\Phi}$ son N-funciones que satisfacen la condición Δ_2. Esto es que para todo $l > 1$ existe $k = k(l) > 0$ tales que

$$\Phi(lt) \leq k\Phi(t) \text{ para } t > 0.$$

Además, recordamos que vale la siguiente desigualdad de Poincaré:

$$\int_\Omega \Phi(|u|) \leq \int_\Omega \Phi(2d|\nabla u|) \quad \text{para todo } u \in W_0^1 L_\Phi(\Omega). \tag{4.27}$$

donde d es el diámetro de Ω.

Por último, recordamos que

$$\mathcal{P}^\circ := \{u \in C_0^1(\overline{\Omega}) : u > 0 \text{ en } \Omega \text{ y } \partial u/\partial \nu < 0 \text{ en } \partial\Omega\},$$

donde ν es la normal exterior unitaria a $\partial\Omega$.

Antes de enunciar el Teorema principal de esta sección recordamos que la condición (H_{h_1,h_2}) está definida al principio de este Capítulo, que H1 y H2 son definidas en la sección anterior, y establecemos las hipótesis análogas a H3-H5 como sigue:

H3'. Existen constantes $c_2, q_2 > 0$ tal que

$$f(t) \leq c_2 t^{q_2} \text{ para todo } t > 0, \text{ y } \varlimsup_{t\to\infty} \frac{t^{q_2}}{\varphi(t)t} = 0, \tag{4.28}$$

o

$$f \text{ es no decreciente y } \varlimsup_{t\to\infty} \frac{f(Ct)}{\varphi(t)t} = 0, \text{ para todo } C > 0. \tag{4.29}$$

H4'. Existen $c_f > 0$ tales que

$$f(t) \leq c_f \varphi(t) t \text{ para todo } t \geq 0. \tag{4.30}$$

H5'. Vale $(H_{n,m})$ y existen $c > 0$ y $1 < \beta < \mu$ tal que

$$f(t) \leq c(\varphi(t)t)^{\beta} \text{ y } g(t) \geq \frac{1}{c}(\varphi(t)t)^{\mu} \text{ para todo } t \geq 0. \tag{4.31}$$

Teorema 4.8. *Supongamos que valen $(\phi_1), (\phi_2)$ y sea $0 \leq m, n \in L^{\infty}(\Omega)$.*

(i) Supongamos que valen (ϕ_3), H1 *y además vale* H2 *o* H3'. *Entonces existe $\Lambda \geq 0$ tal que (Q_λ) tiene solución $u_\lambda \in \mathcal{P}^{\circ}$ para todo $\lambda > \Lambda$ y no tiene soluciones no negativas (no triviales) para $0 < \lambda < \Lambda$. Más aún, si $\Lambda < \lambda_1 < \lambda_2$, podemos elegir u_{λ_2} con $u_{\lambda_2} \geq u_{\lambda_1}$ en Ω.*

(ii) Sea $d := diam(\Omega)$.

1. Si vale H4', *entonces existe $k = k(d) > 0$ tal que*

$$\Lambda \geq \frac{k}{c_f \|m\|_{\infty}} \quad si\ d > \frac{1}{4} \quad y \quad \Lambda \geq \frac{1}{c_f \|m\|_{\infty}} \quad si\ d \leq \frac{1}{4}.$$

2. Si vale H5', *entonces $\Lambda > 0$.*

Observación 4.9. Al igual que en el caso unidimensional (ver la Observación 4.4) cuando valen H1 y H3', podemos considerar la situación particular $n \equiv 0$, es decir problemas de la forma

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \phi(\nabla u) = \lambda m(x) f(u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.32}$$

donde, en términos generales, f es sublineal con respecto a ϕ. Este tipo de problemas fue estudiado en [Wan03b], donde el autor probó la existencia de soluciones radiales positivas bajo hipótesis fuertes sobre ϕ y m.

Para probar el Teorema 4.8, primero enunciaremos y demostraremos unos Lemas donde mostraremos que bajo ciertas condiciones existen sub y super-soluciones para (Q_λ).

Lema 4.10. *Supongamos que valen $(\phi_1), (\phi_2)$,* H1 *y sea $0 \leq m, n \in L^{\infty}(\Omega)$. Entonces (Q_λ) tiene una subsolución $v \in \mathcal{P}^{\circ}$ para todo $\lambda > 0$ suficientemente grande.*

Demostración. Sean c_1, t_1, q_1, r_1 como en (4.6). Sea v la solución de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\phi(\nabla v)) = \sigma m \delta_\Omega^{q_1} & \text{en } \Omega, \\ v = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.33}$$

donde σ es suficientemente pequeño de manera tal que $\|v\|_\infty \leq t_1$. Además, por el Teorema 3.7, $v \in \mathcal{P}^\circ$. Esto implica que existe constantes $C_\sigma, c_\sigma > 0$ tales que

$$c_\sigma \delta_\Omega \leq v \leq C_\sigma \delta_\Omega. \tag{4.34}$$

Sea

$$\lambda_0 = c_\sigma^{-q_1} c_1^{-1} \left(\sigma + \left\| \frac{n}{m} \right\|_{L^\infty(\Omega_+^m)} \frac{1}{c_1} C_\sigma^{r_1} c_\Omega^{r_1 - q_1} \right) > 0,$$

donde $c_\Omega = \text{máx}\{\delta_\Omega(x) : x \in \overline{\Omega}\}$. Se sigue de (4.6), que para $\lambda \geq \lambda_0$

$$\lambda m(x) f(v) - n(x) g(v) \geq \lambda m(x) c_1 v^{q_1} - n(x) \frac{1}{c_1} v^{r_1}$$

$$\geq \lambda m(x) c_1 c_\sigma^{q_1} \delta_\Omega^{q_1} - n(x) \frac{1}{c_1} C_\sigma^{r_1} \delta_\Omega^{r_1} = m \delta_\Omega^{q_1} \left(\lambda c_1 c_\sigma^{q_1} - \frac{n(x)}{m(x)} \frac{1}{c_1} C_\sigma^{r_1} \delta_\Omega^{r_1 - q_1} \right) \geq$$

$$\geq m \delta_\Omega^{q_1} \left(\lambda c_1 c_\sigma^{q_1} - \left\| \frac{n}{m} \right\|_{L^\infty(\Omega_+^m)} \frac{1}{c_1} C_\sigma^{r_1} c_\Omega^{r_1 - q_1} \right) \geq \sigma m \delta_\Omega^{q_1} \text{ en } \Omega_+^m.$$

Luego, teniendo en cuenta que vale $(H_{m,n})$ la desigualdad

$$\lambda m(x) f(v) - n(x) g(v) \geq \sigma m \delta_\Omega^{q_1}$$

vale en todo Ω. Si multiplicamos la desigualdad anterior por cualquier función $0 \leq z \in W_0^1 L_\Phi(\Omega)$ e integramos en Ω, al ser v solución de (4.33) se sigue que v es una subsolución de (Q_λ). □

Lema 4.11. *Sea $\lambda > 0$ y $v \in \mathcal{P}^\circ$. Supongamos que valen $(\phi_1), (\phi_2)$, y sea $0 \leq m, n \in L^\infty(\Omega)$.*

(i) Supongamos que vale H2. *Entonces existe $w \in C^1(\overline{\Omega})$ supersolución de (P_λ) tal que $w \geq v$ en $\overline{\Omega}$.*

*(ii) Supongamos que vale*H3*'. Entonces existe $w \in \mathcal{P}^\circ$ supersolución de (P_λ) tal que $w \geq v$ en $\overline{\Omega}$*

Demostración. Primero probemos (i). Sea $v \in \mathcal{P}^\circ$. Usando (4.7) podemos encontrar $K \geq \|v\|_\infty$ tal que

$$\frac{g(K)}{f(K)} \geq \lambda \left\| \frac{m}{n} \right\|_{L^\infty(\Omega_n^+)}. \tag{4.35}$$

Sea $w := K$ en Ω. Notar que $-\mathrm{div}(\phi(\nabla w)) = 0$ pues w es constante. Entonces, tenemos que probar que

$$\lambda m(x)f(K) - n(x)g(K) \leq 0 \text{ en } \Omega.$$

Si $x \in \Omega_0^n$, el lado derecho de la desigualdad anterior es 0, luego no hay nada que probar. Para $x \in \Omega_+^n$ tenemos

$$\lambda m(x)f(K) - n(x)g(K) = f(K)n(x)\left(\lambda \frac{m(x)}{n(x)} - \frac{g(K)}{f(K)}\right) \leq$$

$$\leq f(K)n(x)\left(\lambda \left\|\frac{m}{n}\right\|_{L^\infty(\Omega_n^+)} - \frac{g(K)}{f(K)}\right) \leq 0.$$

donde la última desigualdad se obtiene de (4.35).

Probemos ahora (ii). Sea $B_R(0)$ la bola abierta con centro cero y radio R. Sea $\psi(s) = \varphi(s)s$. Para $R > R_0 := \text{máx}\{|x| : x \in \overline{\Omega}\}$ y $K > 0$, definimos

$$\tilde{w}(r) := \int_r^R \psi^{-1}\left(\frac{Kt}{N}\right) dt \quad \text{ para } r \in [0, R], \text{ y } w(x) := \tilde{w}(|x|).$$

Se tiene que $w \in C^1\left(\overline{B_R(0)}\right)$, $w > 0$ y al ser ψ^{-1} creciente

$$(R - R_0)\psi^{-1}\left(\frac{KR_0}{N}\right) \leq w(x) \leq R\psi^{-1}\left(\frac{KR}{N}\right) \text{ para todo } x \in \overline{B}_R(0) \supset \Omega. \tag{4.36}$$

La segunda desigualdad es obvia. Mientras que para la primera, hay que percatarse de un par de detalles simples pero que no son visibles a primera vista. Separamos en dos casos:

- $|x| \geq R_0$. Simplemente usamos que $(|x|, R) \subset (R_0, R)$ obteniendo que

  $$w(x) = \int_{|x|}^R \psi^{-1}\left(\frac{Kt}{N}\right) dt \geq \int_{R_0}^R \psi^{-1}\left(\frac{Kt}{N}\right) dt \geq (R - R_0)\psi^{-1}\left(\frac{KR_0}{N}\right),$$

  donde la última desigualdad es cierta por la condición de crecimiento de ψ^{-1}.

- $|x| < R_0$. Aquí escribiremos $(|x|, R) = (|x|, R_0] \cup [R_0, R)$ obteniendo así que

  $$w(x) = \int_{R_0}^R \psi^{-1}\left(\frac{Kt}{N}\right) dt + \int_{|x|}^{R_0} \psi^{-1}\left(\frac{Kt}{N}\right) dt \geq \int_{R_0}^R \psi^{-1}\left(\frac{Kt}{N}\right) dt,$$

  esta desigualdad vale pues el integrando es una función positiva. U sando nuevamente que ψ^{-1} es creciente obtenemos la desigualdad deseada.

Usando la primer desigualdad de (4.36), dado $v \in \mathcal{P}^\circ$ podemos encontrar K de manera tal que $\|v\|_\infty \leq w(x)$ para todo $x \in B_R(0)$.

Por otro lado, se tiene

$$-\operatorname{div} \phi(\nabla w)(x) = K \quad \text{para todo } x \in B_R(0). \tag{4.37}$$

En efecto, teniendo en cuenta que

$$\varphi(s) = \frac{\psi(s)}{s} \quad \text{para } s > 0, \quad \nabla w(x) = -\psi^{-1}\left(\frac{K\,|x|}{N}\right)\frac{x}{|x|}$$

para todo $x \in B_R(0)$ e integrando por partes obtenemos que para toda $z \in W_0^1 L_\Phi(B_r(0))$ no negativa

$$\begin{aligned}\int_{B_R(0)} \varphi(|\nabla w|)\nabla w \cdot \nabla z &= \int_{B_R(0)} \frac{\psi(|\nabla w|)}{|\nabla w|}\nabla w \cdot \nabla z \\ &= -\frac{K}{N}\int_{B_R(0)} x \cdot \nabla z = K\int_{B_R(0)} z.\end{aligned}$$

Veamos a continuación que w es supersolución. Empecemos suponiendo primero que vale (4.28). Notar que el límite en (4.28) es equivalente a

$$\overline{\lim_{t \longrightarrow \infty}} \frac{(\psi^{-1}(\rho t))^{q_2}}{t} = 0 \text{ para todo } \rho > 0.$$

Luego existe $K > 0$ tal que,

$$\left[\psi^{-1}\left(\frac{KR}{N}\right)\right]^{q_2} \leq \frac{K}{\lambda\,\|m\|_\infty c_2}. \tag{4.38}$$

Teniendo en cuenta (4.38) y la segunda desigualdad de (4.36) y usando la hipótesis sobre f obtenemos

$$\lambda m(x)f(w) - n(x)g(w) \leq \lambda m(x)c_2 w^{q_2} \leq \lambda c_2 m(x)\left[R\psi^{-1}\left(\frac{KR}{N}\right)\right]^{q_2} \leq K$$

en Ω. Teniendo en cuenta (4.37), podemos concluir que w es supersolución de (Q_λ).

Por otro lado, si vale (4.29) para K suficientemente grande se tiene que

$$f\left(R\psi^{-1}\left(\frac{KR}{N}\right)\right) \leq \frac{K}{\lambda\,\|m\|_\infty}. \tag{4.39}$$

Luego, usando la segunda desigualdad de (4.36), el no decrecimiento de f y (4.39) obtenemos

$$\lambda m(x)f(w) - n(x)g(w) \leq \lambda m(x)f(w) \leq \lambda m(x)f\left(R\psi^{-1}\left(\frac{KR}{N}\right)\right) \leq K$$

en Ω. Teniendo en cuenta (4.37), podemos concluir que w es supersolución de (Q_λ). □

Prueba del Teorema 4.8. Empecemos por (i). Gracias a los Lemas 4.10, 4.11 y el Teorema 3.13 se sigue que existe solución $u_\lambda \in \mathcal{P}^\circ$ de (Q_λ) para todo $\lambda > 0$ suficientemente grande. Si definimos

$$\Lambda := \text{ínf}\{\lambda > 0 : \text{ existe } u_\lambda \in \mathcal{P}^\circ \text{ solución de } (Q_\lambda)\}$$

y argumentamos como al principio de la prueba del Teorema 4.1 podemos que ver que el inciso (i) es verdadero.

Probemos (ii). Sea $\lambda > 0$, y $0 \leq u \in C_0^1(\overline{\Omega})$ con $u \not\equiv 0$ una solución de (Q_λ). Supongamos primero H4'. Usando u como función de prueba y la hipótesis H4', procediendo como en (4.25) obtenemos que

$$\int_\Omega \Phi(|\nabla u(x)|)dx \leq \lambda c_f \|m\|_\infty \int_\Omega \Phi(2u(x))dx.$$

Entonces, de la desigualdad de Poincaré (4.27) concluimos que

$$\lambda \geq \frac{\int_\Omega \Phi(|\nabla u(x)|)dx}{c_f \|m\|_\infty \int_\Omega \Phi(4d\,|\nabla u(x)|)dx}.$$

Ahora, la prueba de $(ii1)$ puede finalizarse como en el Teorema 4.1. Más aún, si vale H5', el inciso $(ii2)$ también puede ser demostrado (con algunos pequeños cambios) como en dicho Teorema. □

Observación 4.12. Queremos resaltar que los incisos $(i1)$ y $(i2)$ del Teorema 4.1 (caso $N = 1$) no los hemos podido extender para el caso $N \geq 2$. Podemos notar que la desigualdad (4.5) es fundamental para probar esos incisos, la cual es consecuencia de la cota del inciso (ii) del Teorema 3.4. Por lo tanto, si existiera una cota inferior similar cuando $N > 1$, uno podría proceder como en la sección 4.1 y probar esos incisos. Sin embargo, no es fácil dar una cota inferior de ese estilo, ni siquiera para el p-Laplaciano. Si $\phi(\xi) = \xi$, i.e., en el caso del Laplaciano, entonces es sabido que la única solución de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\phi(\nabla u) = h(x) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

(cuando $h \geq 0$) satisface que

$$u \geq c_\Omega \left(\int_\Omega h(x)\delta_\Omega(x)dx \right) \delta_\Omega \text{ en } \Omega, \tag{4.40}$$

para algún $c_\Omega > 0$ dependiendo solo de Ω, ver [BC98, Lemma 3.2]. Sin embargo, la prueba que allí realizan utiliza las propiedades del valor medio para funciones superarmónicas y no es claro como adaptarlas para el p-Laplaciano (y por supuesto, aun menos lo es para el ϕ-Laplaciano). En cualquier caso, creemos que es un interesante problema abierto obtener una estimación similar a (4.40) (que probablemente involucre la inversa de la función $\varphi(s)s$) que valga para el ϕ-Laplaciano.

4.3. Un resultado de unicidad

Antes del enunciado mencionamos que las condiciones (ϕ_1) y (ϕ_2) están enunciadas en la Sección anterior. Recordamos además, que si se cumple la condición (ϕ_2), entonces existe $K > 0$ tal que vale la siguiente desigualdad

$$\Phi(t+s) \leq K(\Phi(t) + \Phi(s)) \text{ para todo } t, s \geq 0. \tag{4.41}$$

Para la prueba ver la Proposición 3.8.

Teorema 4.13. *Sean $0 \leq m, n \in L^\infty(\Omega)$ si $N \geq 2$ o $0 \leq m, n \in L^1(\Omega)$ en el caso que $N = 1$. Supongamos que valen (ϕ_1), (ϕ_2) y que existe $p > 1$ tal que, para $t > 0$,*

$$t \to \frac{\varphi(t)t}{t^{p-1}} \text{ es no decreciente y} \tag{4.42}$$

$$t \to \frac{\lambda m(x)f(t) - n(x)g(t)}{t^{p-1}} \text{ es decreciente c.t.p.} x \in \Omega. \tag{4.43}$$

Entonces (4.1) tiene a lo sumo una solución en $\mathcal{P}^\circ$.

Observación 4.14. Queremos señalar que cuando $f(t) = t^q$, $g(t) = t^r$ con $0 < q < r$ y $ct^{p-1} \leq \phi(t) \leq c^{-1}t^{p-1}$ la hipótesis (4.42) del Teorema de arriba solo puede valer en el caso subdifusivo o en el equidifusivo. Por otro lado, para el problema superdifusivo con λ suficientemente grande existen dos soluciones en $\mathcal{P}^\circ$ (ver [IP11, Theorem 3.9], donde prueban este hecho para $\phi(t) = |t|^{p-2}t$, y m, n con cotas inferiores positivas para c.t.p en Ω). Por lo cual, no debería ser posible probar la unicidad en el caso superdifusivo.

Lema 4.15. *Supongamos que valen* (ϕ_1) *y* (ϕ_2). *Entonces, el funcional* $J : L^1(\Omega) \to (-\infty, \infty]$ *dado por*

$$J(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \Phi(|\nabla u^{1/p}|), & u \geq 0, u^{1/p} \in W_0^1 L_\Phi(\Omega), \\ \infty, & \text{si no}, \end{cases} \tag{4.44}$$

es convexo. Además,

$$\langle J'(u), v\rangle = \int_\Omega \varphi(|\nabla u^{1/p}|)\nabla u \nabla \left(\frac{v}{u^{\frac{p-1}{p}}}\right).$$

Demostración. Por comodidad denotaremos por $D(J)$ al conjunto $\{u \in L^1(\Omega) : u^{1/p} \in W_0^1 L_\Phi(\Omega)\}$.

Sean $w_1, w_2 \in D(J)$, $z_1 := w_1^{1/p}$ y $z_2 := w_2^{1/p}$. Definimos además $z_3 := (tw_1 + (1-t)w_2)^{1/p}$ donde $t \in [0, 1]$. Entonces,

$$\nabla z_3 = \frac{t\nabla w_1 + (1-t)\nabla w_2}{pz_3^{p-1}}.$$

Pasando el denominador multiplicando al lado izquierdo, tomando norma, usando la desigualdad triangular y teniendo en cuenta que $\nabla w_i = pz_i^{p-1}\nabla z_i$ para $i = 1, 2$ obtenemos que

$$\begin{aligned} pz_3^{p-1}|\nabla z_3| &\leq t|\nabla w_1| + (1-t)|\nabla w_2| \\ &\leq p(tz_1^{p-1}|\nabla z_1| + (1-t)z_2^{p-1}|\nabla z_2|. \end{aligned}$$

Dividiendo por p y usando la desigualdad de Hölder obtenemos que

$$\begin{aligned} z_3^{p-1}|\nabla z_3| &\leq t^{\frac{p-1}{p}} z_1^{p-1} t^{\frac{1}{p}}|\nabla z_1| + (1-t)^{\frac{p-1}{p}} z_2^{p-1}(1-t)^{\frac{1}{p}}|\nabla z_2| \\ &\leq (tz_1^p + (1-t)z_2^p)^{\frac{p-1}{p}}(t|\nabla z_1|^p + (1-t)|\nabla z_2|^p)^{\frac{1}{p}} \\ &= z_3^{p-1}(t|\nabla z_1|^p + (1-t)|\nabla z_2|^p)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \tag{4.45}$$

Además, si calculamos obtenemos que

$$\frac{d}{dt}\Phi(t^{1/p}) = \frac{1}{p}\Phi'(t^{\frac{1}{p}})t^{\frac{1-p}{p}} = \frac{1}{p}\frac{\phi(t^{\frac{1}{p}})}{t^{\frac{p-1}{p}}}$$

Luego, al ser $t \to t^{1/p}$ una función creciente para $t > 0$ por (4.42) se tiene que $\frac{d}{dt}\Phi(t^{1/p})$ es no decreciente. Entonces, $t \to \Phi(t^{\frac{1}{p}})$ es convexa para $t > 0$.

Teniendo en cuenta eso y usando (4.45) se sigue que

$$\begin{aligned}J(tw_1+(1-t)w_2) &= \int_\Omega \Phi(|\nabla z_3|)dx \\ &\leq \int_\Omega \Phi((t|\nabla z_1|^p+(1-t)|\nabla z_2|^p)^{\frac{1}{p}})dx \\ &= tJ(w_1)+(1-t)J(w_2)\end{aligned}$$

mostrando así que J es un funcional convexo.

Calculemos ahora J'. Notemos que $J(u)=I(F(u))$, donde $F(u)=u^{1/p}$ y $I(u):=\int_\Omega \Phi(|\nabla u|)$. Luego, por el inciso (ii) de la Proposición 2.1 tenemos que

$$\langle J'(u),v\rangle = \left\langle I'(u^{1/p}),F'(u)v\right\rangle.$$

Además por el Lema 3.9 sabemos que

$$\langle I'(u),v\rangle = \int_\Omega \varphi'(|\nabla u|)\nabla u\cdot\nabla v. \qquad \square$$

Prueba del Teorema 4.13. Sean $u_1,u_2\in\mathcal{P}^\circ$ soluciones de (4.1). Asumamos que $\Omega_0:=\{x\in\Omega : u_1(x)>u_2(x)\}$ tiene medida positiva. Definamos $w_i=(u_1^p-u_2^p)^+/u_i^{p-1}$, $i=1,2$, se tiene que $w_1=w_2=0$ en Ω_0^c y

$$\begin{aligned}\nabla w_1 &= \left[1+(p-1)\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^p\right]\nabla u_1 - p\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^{p-1}\nabla u_2, \\ \nabla w_2 &= \left[1+(p-1)\left(\frac{u_1}{u_2}\right)^p\right]\nabla u_2 - p\left(\frac{u_1}{u_2}\right)^{p-1}\nabla u_1.\end{aligned}$$

Notemos que $u_i/u_j\in L^\infty(\Omega)$ para $i\neq j$, ya que $u_1,u_2\in\mathcal{P}^\circ$. Como $\Omega_0\subset\Omega$ se sigue que $u_i/u_j\in L^\infty(\Omega_0)$ para $i\neq j$. Teniendo esto en cuenta y utilizando la desigualdad 4.41 y el crecimiento de Φ obtenemos que

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \Phi(|\nabla w_i|) = \int_{\Omega_0}\Phi(|\nabla w_i|) \\ &\leq \int_{\Omega_0}\Phi\left(\left[1+(p-1)\left\|\frac{u_j}{u_i}\right\|_\infty^p\right]|\nabla u_i| + p\left\|\frac{u_j}{u_i}\right\|_\infty^{p-1}\nabla u_j\right) \\ &\leq K\int_{\Omega_0}\left[\Phi\left(\left[1+(p-1)\left\|\frac{u_j}{u_i}\right\|_\infty^p\right]|\nabla u_i|\right)+\Phi\left(p\left\|\frac{u_j}{u_i}\right\|_\infty^{p-1}|\nabla u_j|\right)\right]<\infty.\end{aligned}$$

Por lo tanto, w_1,w_2 son funciones test admisibles.

Entonces, se sigue de la convexidad de J, usando w_i como función test y el hecho que $u_1^p, u_2^p \in D(J)$, que

$$0 \leq \langle J'(u_1^p) - J'(u_2^p), u_1^p - u_2^p \rangle = \int_\Omega \phi(\nabla u_1)\nabla w_1 - \phi(\nabla u_2)\nabla w_2 dx. \quad (4.46)$$

Como u_1, u_2 son soluciones de (P_λ), se sigue de (4.46) y del hecho que

$$t \to \frac{\lambda m(x) f(t) - n(x) g(t)}{t^{p-1}}$$

es decreciente para casi todo $x \in \Omega$ que

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_\Omega \phi(\nabla u_1)\nabla w_1 - \phi(\nabla u_2)\nabla w_2 dx \\
&= \int_{\Omega_0} (\lambda m(x) f(u_1) - n(x) g(u_1))\, w_1 - (\lambda m(x) f(u_2) - n(x) g(u_2))\, w_2 dx \\
&= \int_{\Omega_0} \left(\frac{\lambda m(x) f(u_1) - n(x) g(u_1)}{u_1^{p-1}} - \frac{\lambda m(x) f(u_2) - n(x) g(u_2)}{u_2^{p-1}} \right) (u_1^p - u_2^p)\, dx \\
&< 0,
\end{aligned}$$

lo cual es imposible. Por lo tanto Ω_0 tiene medida nula, concluyendo así la prueba y este capítulo. $\square$

Capítulo 5

Problemas indefinidos

Sean $\Omega := (a, b) \subset \mathbb{R}$, $m \in L^1(\Omega)$ con $m^+ \not\equiv 0$ y $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un homeomorfismo impar y creciente. En este capítulo estudiaremos la existencia de soluciones positivas de la ecuación

$$\begin{cases} -\phi(u')' = m(x) f(u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.1}$$

mediante el uso de los teoremas de punto fijo para operadores compresores o expansivos, i.e., usando los teoremas de punto fijo enunciados en la sección 2.2, donde $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ es una función continua.

El problema (5.1) con no linealidades del tipo sublineal o superlineal ha sido estudiado en [BDM07, Corollary, 3.4], [Wan03a, Theorem 1.1] y [XL14, Theorem 2], donde piden fuertes hipótesis tanto para m y ϕ (para el caso especial $\phi(x) = x$ con no linealidades sublineales o superlineales ver [GK13] y [FZ15] respectivamente, y sus referencias). Más precisamente, en [BDM07] se asume que $m \in C(\overline{\Omega})$ con $\min_{\overline{\Omega}} m > 0$, mientras que en [Wan03a, XL14] se pide que $m \geq 0$ en Ω y $m \not\equiv 0$ en ningún subintervalo de Ω. Y respecto a las condiciones para ϕ en estas publicaciones no contemplan no linealidades del tipo exponencial o logarítmicas. Por otro lado, en [KM18b], estudiamos el caso sublineal donde mejoramos dichos resultados con condiciones más débiles para ϕ y m con respecto a los otros artículos mencionados. Mencionamos que en el Capítulo anterior mejoramos aún más dichos resultados con hipótesis aun más débiles sobre ϕ (ver el Teorema 4.1 y la Observación 4.4).

Los resultados principales de este Capítulo son el Teorema 5.3 (caso superlineal) y el Teorema 5.7 (caso sublineal). En este Capítulo permitiremos que m **cambie de signo en** Ω siempre que su parte negativa sea pequeña, y también podemos tratar con no linealidades ϕ que no eran tratadas en [BDM07, Wan03a, XL14] (Para ejemplos de tales no linealidades ver el Capítulo 7). Queremos mencionar que en el caso sublineal cuando m es no negativa (y no idénticamente nula), el mejor resultado obtenido es el del Capítulo 4 mencionado al final del párrafo anterior.

Antes de continuar recordaremos algunas definiciones y desigualdades del Capítulo 3. Empezamos recordando que $\mathcal{S}_\phi : L^1(\Omega) \to C^1(\overline{\Omega})$ es el operador solución del problema

$$\begin{cases} -\phi(v')' = h(x) & \text{en } \Omega, \\ v = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Este operador es continuo y monótono creciente. Además, para $h \in L^1(\Omega)$ con $0 \leq h \not\equiv 0$ definimos

$$\mathcal{A}_h := \{x \in \Omega : h(y) = 0 \text{ para } c.t.p.\ y \in (a, x)\},$$
$$\mathcal{B}_h := \{x \in \Omega : h(y) = 0 \text{ para } c.t.p.\ y \in (x, b)\},$$

y además

$$\alpha_h := \begin{cases} \sup \mathcal{A}_h & \text{si } \mathcal{A}_h \neq \emptyset \\ a & \text{si } \mathcal{A}_h = \emptyset, \end{cases} \qquad \beta_h := \begin{cases} \inf \mathcal{B}_h & \text{si } \mathcal{B}_h \neq \emptyset \\ b & \text{si } \mathcal{B}_h = \emptyset, \end{cases}$$
$$\overline{\theta}_h := \frac{\alpha_h + \beta_h}{2}, \qquad \underline{\theta}_h := \text{mín}\left\{\frac{1}{\beta_h - a}, \frac{1}{b - \alpha_h}\right\}.$$

Sea $M > 0$ constante y h como arriba. Entonces valen las siguientes desigualdades:

$$\mathcal{S}_\phi(h) \leq \phi^{-1}(\int_a^b h)\delta_\Omega \text{ en } \Omega; \tag{5.2}$$

$$\text{mín}\left\{\int_a^{\overline{\theta}_h} \phi^{-1}(M\int_y^{\overline{\theta}_h} h)dy, \int_{\overline{\theta}_h}^b \phi^{-1}(M\int_{\overline{\theta}_h}^y h)dy\right\} \geq c\phi^{-1}(cM), \tag{5.3}$$

donde $c > 0$ es a constante que no depende de M. La desigualdad anterior será útil en combinación con esta otra

$$\|\mathcal{S}_\phi(h)\|_\infty \geq \frac{1}{2}\,\text{mín}\left\{\int_a^{\overline{\theta}_h} \phi^{-1}(\int_y^{\overline{\theta}_h} h)dy, \int_{\overline{\theta}_h}^b \phi^{-1}(\int_{\overline{\theta}_h}^y h)dy\right\}. \tag{5.4}$$

Además se tiene que

$$\mathcal{S}_\phi(h) \geq \underline{\theta}_h \|\mathcal{S}_\phi(h)\|_\infty \delta_\Omega \text{ en } \Omega. \tag{5.5}$$

Para la prueba de (5.2) ver el Teorema 3.4, para la de (5.3) ver la prueba del item (iii) del Teorema 3.4, para la de (5.4) ver la Observación 3.5 (iii) y para la de (5.5) ver la desigualdad (3.11) en la prueba del Lema 3.4.

Si $h \in L^1(\Omega)$ con $0 \leq h \not\equiv 0$ y $g \in C(\overline{\Omega})$ con $g > 0$ en Ω. Entonces se tiene que

$$\overline{\theta}_h = \overline{\theta}_{hg} \text{ y } \underline{\theta}_h = \underline{\theta}_{hg}. \tag{5.6}$$

Recordamos que

$$\mathcal{P}^\circ = \{u \in C_0^1(\overline{\Omega}) : u > 0 \text{ en } \Omega \text{ y } u'(b) < 0 < u'(a)\}.$$

Como es usual escribiremos $m = m^+ - m^-$ con $m^\pm := \text{máx}(\pm m, 0)$. Además, dado $\delta > 0$ escribiremos $m_\delta := m^+ - \delta m^-$ y sea K el cono dado por

$$K := \{u \in C(\overline{\Omega}) : u \geq \frac{\underline{\theta}_{m^+}}{2} \|u\|_\infty \delta_\Omega\}. \tag{5.7}$$

Para $v \in K$ definimos $T_\delta v := \mathcal{S}_\phi(m_\delta f(v))$. Observamos que, $C_0^1(\overline{\Omega}) \cap (K \setminus \{0\}) \subset \mathcal{P}^\circ$.

Para poder probar nuestros resultados necesitamos primero el siguiente Lema, el cual utilizaremos tanto en el caso superlineal, como en el sublineal.

Lema 5.1. *Sea $m \in L^1(\Omega)$ con $m^+ \not\equiv 0$. Dados $R > r > 0$ supongamos que existe $c = c(r) > 0$ tal que*

$$f(v) \geq c\delta_\Omega \text{ para todo } v \in K \setminus B_r(0). \tag{5.8}$$

Entonces existe δ_0 tal que para todo $\delta \in [0, \delta_0]$ el operador

$$T_\delta : K \cap \left(\overline{B_R(0)} \setminus B_r(0)\right) \to K$$

es completamente continuo.

Demostración. Por comodidad dado $\delta \geq 0$ escribiremos $u_\delta = \mathcal{S}_\phi(m_\delta f(v))$ y $C := \max\limits_{[0,R]} f(t)$. Primero mostraremos que $u_\delta \to u_0$ en $C^1(\overline{\Omega})$. Como $\mathcal{S}_\phi$ es completamente continuo de $L^1(\Omega) \to C^1(\overline{\Omega})$ y

$$\int_a^b \left|m_\delta f(v) - m^+ f(v)\right| \leq \delta C \int_a^b m^- \text{ para toda } v \in K \cap \overline{B_R(0)}$$

entonces dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $\delta_\varepsilon = \delta(\varepsilon, m^-, C)$ tal que

$$\|u_\delta - u_0\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leq \varepsilon \text{ para todo } \delta \in [0, \delta_\varepsilon]. \tag{5.9}$$

Para $v \in K \setminus B_r(0)$ utilizando las desigualdades (5.4) y (5.8) obtenemos que existe una constante $\widetilde{c} > 0$ (que depende de r y Ω pero no de v) tal que

$\|u_0\|_\infty \geq \widetilde{c}$. Entonces podemos tomar $0 < \eta < \frac{\underline{\theta}_{m^+}}{2} \|u_0\|_\infty$. Luego, teniendo en cuenta (5.9) y (5.5) deducimos que

$$u_\delta \geq u_0 - \eta\delta_\Omega \geq (\underline{\theta}_{m^+} \|u_0\|_\infty - \eta)\delta_\Omega \geq \frac{\underline{\theta}_{m^+}}{2} \|u_0\|_\infty \delta_\Omega \geq \frac{\underline{\theta}_{m^+}}{2} \|u_\delta\|_\infty \delta_\Omega \text{ en } \overline{\Omega} \tag{5.10}$$

para todo $\delta \in [0, \delta_0]$, para algún δ_0 (que no depende de v). Por lo tanto, para tales δ, tenemos que $T_\delta(v) \in K$ como queríamos probar. Además notamos que al ser $v \to m_\delta f(v)$ una función continua de $C(\overline{\Omega})$ a $L^1(\Omega)$, y el operador $\mathcal{S}_\phi$ es completamente continuo, se sigue que T_δ también es completamente continuo. □

Observación 5.2. Teniendo en cuenta (5.10), (5.6) y (5.4) podemos deducir que

$$\begin{aligned} u_\delta &\geq \frac{\underline{\theta}_{m^+}}{2} \|u_0\|_\infty \delta_\Omega \\ &\geq \frac{\underline{\theta}_{m^+}}{4} \min\left\{ \int_a^{\overline{\theta}_{m^+}} \phi^{-1}\Big(\int_y^{\overline{\theta}_{m^+}} m^+ f(v)\Big)dy, \int_{\overline{\theta}_{m^+}}^b \phi^{-1}\Big(\int_{\overline{\theta}_{m^+}}^y m^+ f(v)\Big)dy \right\} \delta_\Omega. \end{aligned}$$

Juntando la desigualdad de arriba con $\underline{\theta}_{m^+} \|\delta_\Omega\|_\infty \geq \frac{1}{2}$ (ver el inciso (iii) de la Observación 3.5) deducimos que

$$\|u_\delta\|_\infty \geq \frac{1}{8} \min\left\{ \int_a^{\overline{\theta}_{m^+}} \phi^{-1}\Big(\int_y^{\overline{\theta}_{m^+}} m^+ f(v)\Big)dy, \int_{\overline{\theta}_{m^+}}^b \phi^{-1}\Big(\int_{\overline{\theta}_{m^+}}^y m^+ f(v)\Big)dy \right\}, \tag{5.11}$$

desigualdad que nos sera útil a lo largo del capítulo.

5.1. Caso superlineal

Introducimos la siguiente hipótesis:
F1. Existen constantes $c_1, c_2, q_1, q_2, t_1 > 0$ tales que

$$c_1 t^{q_1} \geq f(t) \text{ para } 0 \leq t \leq t_1; \tag{5.12}$$
$$c_2 t^{q_2} \leq f(t) \text{ para } t \geq 0. \tag{5.13}$$

Teorema 5.3. *Sea $m \in L^1(\Omega)$, $m^+ \not\equiv 0$. Supongamos que vale* F1 *con*

$$\overline{\lim_{t\to 0^+}} \frac{t^{q_1}}{\phi(t)} = 0 \quad y \quad \underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{t^{q_2}}{\phi(t)} = \infty. \tag{5.14}$$

Entonces existe δ_0 tal que para todo $\delta \in [0, \delta_0]$ el problema

$$\begin{cases} -\phi(u')' = (m^+(x) - \delta m^-(x))f(u) & en\ \Omega \\ u = 0 & en\ \partial\Omega \end{cases} \tag{5.15}$$

admite una solución $u \in \mathcal{P}^\circ$.

Observación 5.4. En el caso particular del p-Laplaciano, i.e., $\phi(t) = |t|^{p-2}\, t$ con $p > 1$, la condición (5.14) se satisface si y solo si $q_1, q_2 > p-1$, obteniendo así la condición de crecimiento que caracteriza los problemas superlineales (Para más ejemplos ver Sección 7.2).

Demostración. Sean K y T_δ como en la sección anterior. Dado $r > 0$ al valer (5.13) existe $c > 0$ tal que $f(v) \geq c\delta_\Omega$ para toda $v \in K \setminus B_r(0)$. Entonces para cualquier $R > r$ tenemos gracias al Lema 5.1 que existe δ_0 tal que $T_\delta : K \cap (\overline{B_R(0)} \setminus B_r(0)) \to K$ es completamente continua para todo $\delta \in [0, \delta_0]$.

Notemos que el primer límite en (5.14) implica que

$$\overline{\lim_{t \to 0^+}} \frac{\phi^{-1}(\rho t^{q_1})}{t} = 0 \text{ para todo } \rho > 0,$$

esto nos permite encontrar $\underline{t} > 0$ tal que

$$\phi^{-1}\left(c_1 \int_a^b m^+(x)dx t^{q_1}\right) \leq \frac{t}{c_\Omega} \tag{5.16}$$

para todo $t \leq \underline{t}$, donde $c_\Omega = (b-a)/2$. Luego, si tomamos $r \leq \min\{\underline{t}, t_1\}$, usando (5.12), la monotonía del operador solución, la cota (5.2) y por último (5.16) se obtiene que para $v \in K \cap \partial B_r(0)$

$$\begin{aligned} T_\delta v &= \mathcal{S}_\phi(m_\delta(x)f(v)) \\ &\leq \mathcal{S}_\phi(m^+ f(v)) \leq \mathcal{S}_\phi(c_1 m^+(x) v^{q_1}) \\ &\leq \mathcal{S}_\phi(c_1 m^+(x) \|v\|_\infty^{q_1}) \\ &\leq \phi^{-1}\left(c_1 \int_a^b m^+(x)dx \|v\|_\infty^{q_1}\right) \delta_\Omega \\ &\leq \frac{\|v\|_\infty}{c_\Omega} \delta_\Omega \text{ en } \Omega. \end{aligned}$$

Como $\|\delta_\Omega\|_\infty = c_\Omega$ se sigue que $\|T_\delta v\|_\infty \leq \|v\|_\infty$ para todo $v \in K \cap \partial B_r(0)$.

Por otro lado, consideremos la función $h = c_2 \left(\frac{\theta_{m^+}}{2}\right)^{q_2} m^+ \delta_\Omega^{q_2}$. Usando la desigualdad (5.3) y teniendo en cuenta (5.6) podemos encontrar una constante $\hat{c} > 0$ tal que para todo $M > 0$

$$\min\left\{ \int_a^{\bar{\theta}_{m^+}} \phi^{-1}(M \int_y^{\bar{\theta}_{m^+}} h)dy, \int_{\bar{\theta}_{m^+}}^b \phi^{-1}(M \int_{\bar{\theta}_{m^+}}^y h)dy \right\} \geq \hat{c}\phi^{-1}(\hat{c}M). \tag{5.17}$$

Notamos que el segundo límite en (5.14) implica que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\phi^{-1}(\rho t^{q_2})}{t} = \infty$$

para todo $\rho > 0$, esto nos permite encontrar $\bar{t} > 0$ tal que

$$\phi^{-1}(\hat{c}t^{q_2}) \geq \frac{8t}{\hat{c}} \tag{5.18}$$

para todo $t \geq \bar{t}$. Luego, si tomamos $R > \max\{2r, \bar{t}\}$, teniendo en cuenta (5.11), (5.13), la monotonía de ϕ^{-1}, (5.17) y por último (5.18) se obtiene que para $v \in K \cap \partial B_R(0)$

$$\begin{aligned}
&\|T_\delta v\|_\infty \geq \\
&\geq \frac{1}{8}\min\left\{ \int_a^{\bar{\theta}_{m^+}} \phi^{-1}\left(\int_y^{\bar{\theta}_{m^+}} m^+ f(v)\right)dy, \int_{\bar{\theta}_{m^+}}^b \phi^{-1}\left(\int_{\bar{\theta}_{m^+}}^y m^+ f(v)\right)dy \right\}\\
&\geq \frac{1}{8}\min\left\{ \int_a^{\bar{\theta}_{m^+}} \phi^{-1}\left(c_2\int_y^{\bar{\theta}_{m^+}} m^+ v^{q_2}\right)dy, \int_{\bar{\theta}_{m^+}}^b \phi^{-1}\left(c_2\int_{\bar{\theta}_{m^+}}^y m^+ v^{q_2}\right)dy \right\}\\
&\geq \frac{1}{8}\min\left\{ \int_a^{\bar{\theta}_{m^+}} \phi^{-1}\left(c_2\left(\frac{\theta_{m^+}}{2}\|v\|_\infty\right)^{q_2}\int_y^{\bar{\theta}_{m^+}} m^+ \delta_\Omega^{q_2}\right)dy,\right.\\
&\qquad \left.\int_{\bar{\theta}_{m^+}}^b \phi^{-1}\left(c_2\left(\frac{\theta_{m^+}}{2}\|v\|_\infty\right)^{q_2}\int_{\bar{\theta}_{m^+}}^y m^+ \delta_\Omega^{q_2}\right)dy \right\}\\
&\geq \frac{1}{8}\hat{c}\phi^{-1}(\hat{c}\,\|v\|_\infty^{q_2})\\
&\geq \|v\|_\infty .
\end{aligned}$$

Entonces $\|T_\delta v\|_\infty \geq \|v\|_\infty$ para todo $v \in K \cap \partial B_R(0)$.

Aplicando el Teorema de punto fijo de Krasnosel'skiĭ podemos concluir que existe $u \in K \cap (\overline{B_R(0)} \setminus B_r(0))$ punto fijo de T. □

Escribamos $m_\delta = m^+ - \delta m^-$ como antes. Como una consecuencia inmediata del Teorema 5.3 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 5.5. *Sean m, ϕ y f como en el Teorema 5.3, y sea $\lambda > 0$. Entonces existe δ_0 (que puede depender de λ) tal que para todo $\delta \in [0, \delta_0]$ el problema*

$$\begin{cases} -\phi(u')' = \lambda m_\delta f(u) & en\ \Omega, \\ u = 0 & en\ \partial\Omega, \end{cases}$$

posee una solución $u = u_\lambda \in \mathcal{P}^\circ$. Más aún, las soluciones u_λ pueden ser elegidas de manera tal que

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \|u_\lambda\|_{C(\overline{\Omega})} = \infty. \tag{5.19}$$

Demostración. La existencia de tales soluciones es inmediata del Teorema anterior. Supongamos ahora que (5.19) no vale. Luego, dado $M > 0$ existe una sucesión $\{\lambda_n\}$ tal que $\lambda_n \to 0$ cuando n tiende a infinito y $\|u_{\lambda_n}\|_{C(\overline{\Omega})} \leq M$. Recordando que $\mathcal{S}_\phi$ es no decreciente y la desigualdad (5.2) obtenemos que

$$\begin{aligned} 0 \leq u_{\lambda_n} = \mathcal{S}_\phi(\lambda_n m_\delta f(u_{\lambda_n})) \leq & \mathcal{S}_\phi(\lambda_n m^+ f(u_{\lambda_n})) \\ \leq & \phi^{-1}\left(\lambda_n \int_a^b m^+ f(u_{\lambda_n})\right) \delta_\Omega \to 0 \end{aligned}$$

uniformemente en Ω cuando $n \to \infty$. En otras palabras, $u_{\lambda_n} \to 0$ en $C(\overline{\Omega})$. Pero esto no es posible porque en la prueba del teorema anterior podemos elegir r uniformemente lejos de 0 para todo λ cercano a 0. □

Observación 5.6. En [KM18a] obtuvimos los mismos resultados suponiendo que vale F1 y que existen homeomorfismos crecientes $\psi_1 : [0, \underline{t}] \to [0, \psi_1(\underline{t})]$ y $\psi_2 : [\overline{t}, \infty) \to [\overline{t}, \infty)$ tales que

$$\phi(tx) \geq \psi_1(t)\phi(x) \text{ para todo } t \in [0, \underline{t}], x \geq 0; \tag{5.20}$$

$$\phi(tx) \leq \psi_2(t)\phi(x) \text{ para todo } t \in [\overline{t}, \infty), x \geq 0. \tag{5.21}$$

y en vez de los límites de (5.14) que relacionan F1 con ϕ necesitamos que se satisfagan los siguientes límites

$$\varlimsup_{t \to 0^+} \frac{t^{q_1}}{\psi_1(t)} = 0 \quad y \quad \varliminf_{t \to \infty} \frac{t^{q_2}}{\psi_2(t)} = \infty \tag{5.22}$$

Notamos que si se satisface (5.20) y vale el primer límite de (5.22) entonces vale el primer límite de (5.14). En efecto, como $\phi(tx) \geq \psi_1(t)\phi(x)$ para $t \in [0, \underline{t}]$ y $x \geq 0$. Tomando $x = 1$, obtenemos para $t \neq 0$ que

$$\frac{1}{\psi_1(t)} \geq \frac{\phi(1)}{\phi(t)} \geq 0.$$

Multiplicando por t^{q_1} en ambos lados y luego tomando límite superior cuando t tiende a cero por derecha se tiene que

$$0 = \overline{\lim_{t\to 0^+}} \frac{t^{q_1}}{\psi_1(t)} \geq \phi(1) \overline{\lim_{t\to 0^+}} \frac{t^{q_1}}{\phi(t)}.$$

Análogamente, si vale (5.21) y el segundo límite de (5.22) entonces vale el segundo límite en (5.14).

5.2. Caso sublineal

Introducimos la siguiente hipótesis:
F2. Existen c_1, c_2, t_1, q_1 y $q_2 > 0$ tales que

$$c_1 t^{q_1} \leq f(t) \text{ para todo } 0 \leq t \leq t_1, \tag{5.23}$$
$$f(t) \leq c_2 t^{q_2} \text{ para todo } t \geq 0. \tag{5.24}$$

Teorema 5.7. *Sea $m \in L^1(\Omega)$, $m^+ \not\equiv 0$. Supongamos que vale* F2 *con*

$$\underline{\lim_{t\to 0^+}} \frac{t^{q_1}}{\phi(t)} = \infty \quad y \quad \overline{\lim_{t\to \infty}} \frac{t^{q_2}}{\phi(t)} = 0 \tag{5.25}$$

Entonces, existe δ_0 tal que para todo $\delta \in [0, \delta_0]$ el problema

$$\begin{cases} -\phi(u')' = (m^+(x) - \delta m^-(x)) f(u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{5.26}$$

admite una solución $u \in \mathcal{P}^\circ$.

Observación 5.8. En el caso particular del p-Laplaciano, i.e., $\phi(t) = |t|^{p-2}\, t$ con $p > 1$, la condición (5.25) se satisface si y solo si $q_1, q_2 < p - 1$. Por lo tanto, obtenemos la condición de crecimiento que caracteriza los problemas sublineales.

Demostración. Sean c_1, c_2, q_1, q_2, t_1 dados por F2. Dado $\delta \geq 0$ por comodidad escribiremos $m_\delta = m^+ - \delta m^-$. Recordar que

$$K := \left\{ u \in C(\overline{\Omega}) : u \geq \frac{\theta_{m^+}}{2} \|u\|_\infty \delta_\Omega \right\}.$$

Para $v \in K$ definimos $T_\delta v := \mathcal{S}_\phi(m_\delta f(v))$. Dados $R > r > 0$, queremos ver que existe δ tal que $T_\delta : K \cap (\overline{B_R(0)} \setminus B_r(0)) \to K$ es completamente continua. Como vale (5.23) si tomamos $r \leq t_1$ podemos encontrar $c > 0$ tal que para toda $v \in K \setminus B_r(0)$ se cumple que $f(v) \geq c\delta_\Omega$ en Ω. Esto nos permite utilizar el Lema 5.1 el cual prueba lo que queríamos sobre T_δ.

Consideremos la función $h = c_1 (\underline{\theta}_{m^+})^{q_1} m^+ \delta_\Omega^{q_1}$. Usando la desigualdad (5.3) y teniendo en cuenta (5.6) podemos encontrar una constante $\hat{c} > 0$ tal que para todo $M > 0$

$$\min\left\{\int_a^{\bar{\theta}_{m^+}} \phi^{-1}(M \int_y^{\bar{\theta}_{m^+}} h)dy, \int_{\bar{\theta}_{m^+}}^b \phi^{-1}(M \int_{\bar{\theta}_{m^+}}^y h)dy\right\} \geq \hat{c}\phi^{-1}(\hat{c}M). \tag{5.27}$$

Además, notemos que el primer límite en (5.25) implica

$$\varliminf_{t\to 0^+} \frac{\phi^{-1}(\rho t^{q_1})}{t} = \infty \quad \text{para todo } \rho > 0,$$

esto nos permite encontrar $\underline{t} > 0$ tal que

$$\phi^{-1}\left(\hat{c}t^{q_1}\right) \geq \frac{8t}{\hat{c}} \quad \text{para todo } t \leq \underline{t}. \tag{5.28}$$

Luego, si tomamos $r \leq \min\{\underline{t}, t_1\}$, teniendo en cuenta (5.11), (5.23), la monotonía de ϕ^{-1}, (5.27) y por último (5.28) se obtiene que para $v \in K \cap \partial B_r(0)$

$$\begin{aligned}
&\|T_\delta v\|_\infty = \|S(m_\delta f(v))\|_\infty \\
&\geq \frac{1}{8}\min\left\{\int_a^{\bar{\theta}_{m^+}} \phi^{-1}\left(\int_y^{\bar{\theta}_{m^+}} m^+ f(v)\right)dy, \int_{\bar{\theta}_{m^+}}^b \phi^{-1}\left(\int_{\bar{\theta}_{m^+}}^y m^+ f(v)\right)dy\right\} \\
&\geq \frac{1}{8}\min\left\{\int_a^{\bar{\theta}_{m^+}} \phi^{-1}\left(c_1\int_y^{\bar{\theta}_{m^+}} m^+ v^{q_1}\right)dy, \int_{\bar{\theta}_{m^+}}^b \phi^{-1}\left(c_1\int_{\bar{\theta}_{m^+}}^y m^+ v^{q_1}\right)dy\right\} \\
&\geq \frac{1}{8}\min\left\{\int_a^{\bar{\theta}_{m^+}} \phi^{-1}\left(c_1\left(\frac{\underline{\theta}_{m^+}}{2}\|v\|_\infty\right)^{q_1}\int_y^{\bar{\theta}_{m^+}} m^+\delta_\Omega^{q_1}\right)dy,\right. \\
&\left.\int_{\bar{\theta}_{m^+}}^b \phi^{-1}\left(c_1\left(\frac{\underline{\theta}_{m^+}}{2}\|v\|_\infty\right)^{q_1}\int_{\bar{\theta}_{m^+}}^y m^+\delta_\Omega^{q_1}\right)dy\right\} \\
&\geq \frac{1}{8}\hat{c}\phi^{-1}(\hat{c}\,\|v\|_\infty^{q_1}) \\
&\geq \|v\|_\infty\,.
\end{aligned}$$

Entonces $\|T_\delta v\|_\infty \geq \|v\|_\infty$ para tales v.

Por otro lado, el segundo límite en (5.25) implica que

$$\varlimsup_{t\to \infty} \frac{\phi^{-1}(\rho t^{q_2})}{t} = 0 \quad \text{para todo } \rho > 0,$$

esto nos permite encontrar $\bar{t} > 0$ tal que

$$\phi^{-1}(c_2 t^{q_2} \int_a^b m^+) \leq \frac{t}{c_\Omega} \quad \text{para todo } t \geq \bar{t}. \tag{5.29}$$

Recordamos que $c_\Omega = \max_\Omega \delta_\Omega$. Luego, si tomamos $R > \max\{2r, \bar{t}\}$, usando (5.24), la monotonía del operador solución, la cota superior de (5.2) y por último (5.29) se obtiene que para $v \in K \cap \partial B_R(0)$

$$\begin{aligned}
T_\delta v &\leq \mathcal{S}_\phi(m^+(x) f(v)) \\
&\leq \mathcal{S}_\phi(c_2 m^+(x) v^{q_2}) \\
&\leq \mathcal{S}_\phi(c_2 m^+(x) \|v\|_\infty^{q_2}) \\
&\leq \phi^{-1}(c_2 \|v\|_\infty^{q_2} \int_a^b m^+) \delta_\Omega \\
&\leq c_\Omega^{-1} \|v\|_\infty \delta_\Omega \text{ en } \Omega.
\end{aligned}$$

Se sigue que $\|T_\delta v\|_\infty \leq \|v\|_\infty$ para todo $v \in K \cap \partial B_R(0)$.

Entonces por el Teorema 2.15 existe $u \in K \cap (\overline{B_R(0)} \setminus B_r(0))$ punto fijo de T. $\square$

Observación 5.9. Este resultado es nuevo solo para pesos m que cambian de signo cuya parte negativa sea pequeña y $m^+ \not\equiv 0$. Pues en el caso que $m \geq 0$ y no equivalentemente cero los resultados probados en [KM18b] son mejores dado que solo piden un comportamiento para ϕ en cero. Más precisamente, en dicho trabajo se suponen dos hipótesis independientes:

1. Existen $t_1 > 0$ y un homeomorfismo ψ definido en $[0, t_1]$ tal que ψ es creciente, $\psi(0) = 0$ y

$$\phi(tx) \leq \psi(t)\phi(x) \qquad \text{para todo } t \in [0, t_1], x \geq 0. \tag{5.30}$$

2. Existe $p > 0$ tal que

$$\underline{\lim}_{t \to 0^+} \frac{\phi(t)}{t^p} > 0, \qquad \text{y además} \tag{5.31}$$
$$\overline{\lim}_{t \to \infty} \frac{\phi(c_\Omega t)}{\phi(t)} < \infty, \qquad \text{donde } c_\Omega := \frac{b-a}{2}.$$

De todas formas, para pesos no negativos en el Capítulo anterior hemos obtenido mejores resultados que en [KM18b] (ver Teorema 4.1 y la observación 4.4).

Capítulo 6

Problema cóncavo-convexo

Sean $\Omega := (a, b) \subset \mathbb{R}$, $m, n \in L^1(\Omega)$ y $\lambda > 0$ un parámetro real. En este capítulo consideramos problemas de tipo cóncavos-convexos no lineales de la siguiente forma,

$$\begin{cases} -\phi(u')' = \lambda m(x) f(u) + n(x) g(u) & x \in \Omega, \\ u > 0 & x \in \Omega, \\ u = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{6.1}$$

donde $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un homeomorfismo creciente e impar y $f, g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ son funciones continuas. El problema (6.1) cuando $\phi(x) = x$ fue propuesto por Ambrosetti, Brezis y Cerami en [ABC94]. En dicho artículo estudiaron el problema N-dimensional

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u^q + u^p & x \in \Omega, \\ u > 0 & x \in \Omega, \\ u = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

con $0 < q < 1 < p$ y Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$. Probaron la existencia de $\Lambda > 0$ tal que: si $\lambda \in (0, \Lambda)$, entonces el problema anterior posee al menos dos soluciones positivas; y si $\lambda = \Lambda$, entonces posee al menos una solución positiva; por último, si $\lambda > \Lambda$, entonces no tiene soluciones positivas.

Varios autores han estudiado generalizaciones de dicho problema, por ejemplo en [AGP96] [SU00], [PS16] obtuvieron resultados para el p-Laplaciano.

En cuanto al problema del ϕ-Laplaciano unidimensional que trataremos en este Capítulo, Wang en [Wan03a, Teorema 1.2] y en [Wan03b, Teorema 1.2] probó que existen $\lambda_0 > 0$ y λ_1 tal que si $\lambda \in (0, \lambda_0)$, entonces el problema (6.1) posee al menos dos soluciones positivas; y si $\lambda > \lambda_1$, entonces no hay soluciones positivas. En dicho artículo se piden condiciones mucho más fuertes para ϕ que las que pediremos en este capítulo. Más precisamente, asume la existencia homeomorfismos crecientes $\psi_1, \psi_2 : [0,\infty) \to [0,\infty)$ tales que $\psi_1(t)\phi(x) \leq \phi(tx) \leq \psi_2(t)\phi(x)$, para todo $t, x > 0$. Mientras que nosotros solo compararemos su comportamiento en 0 y en ∞ con funciones potencia.

En este capítulo utilizaremos el método de sub y supersoluciones (ver Capítulo 3) y los teoremas de punto fijo de Guo-Krasnoselskiĭ (ver Sección 2.2) junto a algunas estimaciones del Capítulo 3 para probar que existen al menos dos soluciones positivas para $\lambda \approx 0$.

6.1. Resultados principales

Empecemos introduciendo las siguientes hipótesis.

(F). Existen constantes $c_0, t_0, q > 0$ tales que

$$f(t) \geq c_0 t^q \text{ para todo } t \in [0, t_0] \text{ y } \varliminf_{t\to 0^+} \frac{t^q}{\phi(t)} = \infty. \tag{6.2}$$

(G1). Existen constantes $c_1, t_1, r_1 > 0$ tales que

$$g(t) \leq c_1 t^{r_1} \text{ para todo } t \in [0, t_1] \text{ y } \varlimsup_{t\to 0^+} \frac{t^{r_1}}{\phi(t)} = 0. \tag{6.3}$$

(G2). Existen constantes $c_2, t_2, r_2 > 0$ tales que

$$g(t) \geq c_2 t^{r_2} \text{ para } t \geq t_2 \text{ y } \varliminf_{t\to \infty} \frac{t^{r_2}}{\phi(t)} = \infty. \tag{6.4}$$

Observación 6.1. (i) Cuando $\phi(t) = |t|^{p-2}t$, $f(u) = u^q$ y $g(u) = u^r$, los límites en (F) y (G1) se satisfacen si y solo si $0 < q < p-1 < r$.

(ii) Las funciones ϕ cuyo comportamiento cerca de cero es similar al de las funciones exponenciales o logarítmicas no satisfacen los límites en (F) y (G1) simultáneamente.

Recordemos que

$$\mathcal{P}^\circ = \{u \in C_0^1(\overline{\Omega}) : u > 0 \text{ en } \Omega \text{ y } u'(b) < 0 < u'(a)\}.$$

Teorema 6.2. *Sean $0 \leq m, n \in L^1(\Omega)$.*

(I) Supongamos que $m \not\equiv 0$ y valen (F) y (G1), entonces existe $\lambda_0 > 0$ tal que el problema (6.1) tiene solución $u_\lambda \in \mathcal{P}^\circ$ para todo $0 < \lambda < \lambda_0$. Más aún, las soluciones u_λ pueden ser escogidas de manera tal que

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \|u_\lambda\|_\infty = 0. \tag{6.5}$$

(II) Supongamos que valen (G1) y (G2). Entonces existe $\lambda_1 > 0$ tal que el problema (6.1) tiene una solución $v_\lambda \in \mathcal{P}^\circ$ para todo $0 < \lambda < \lambda_1$. Más aún, existe $\rho > 0$ tal que $\|v_\lambda\|_\infty > \rho$ para todo $0 < \lambda < \lambda_1$.

(III) Supongamos que $\{\lambda > 0 :$ (6.1) posee solución en $\mathcal{P}^\circ\} \neq \emptyset$ y que vale (F) con para todo $t_0 > 0$. Sea

$$\Lambda := \sup\{\lambda > 0 : (6.1) \text{ posee solución en } \mathcal{P}^\circ\}.$$

Entonces para $0 < \lambda < \Lambda$, el problema (6.1) tiene al menos una solución en $\mathcal{P}^\circ$.

Corolario 6.3. *Sean $0 \leq m, n \in L^1(\Omega)$ con $m \not\equiv 0$. Supongamos que valen (F), (G1) y (G2). Entonces el problema (6.1) tiene al menos dos soluciones positivas distintas para $\lambda \approx 0$.*

6.1.1. Prueba del item (I)

Recordamos que $\mathcal{S}_\phi : L^1(\Omega) \to C^1(\overline{\Omega})$ es el operador solución del problema

$$\begin{cases} -\phi(v')' = h(x) & \text{en } \Omega, \\ v = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Este operador es continuo y monótono creciente. Además, dada $0 \leq h \in L^1(\Omega)$ valen las siguiente desigualdades

$$\mathcal{S}_\phi(h) \leq \phi^{-1}(\int_a^b h)\delta_\Omega \text{ en } \Omega, \tag{6.6}$$

y dada $K > 0$ constante vale que

$$\mathcal{S}_\phi(Kh) \geq c\phi^{-1}(cK)\delta_\Omega \text{ en } \Omega, \tag{6.7}$$

donde $c > 0$ es a constante que no depende de K. Para las pruebas de estás desigualdades ver el Teorema 3.4.

Como al item (I) lo demostraremos utilizando el método de sub y supersoluciones, enunciaremos y probaremos, primero, dos Lemas que nos proveerán sub y supersoluciones para el problema (6.1).

Lema 6.4. *Sean $m, n \in L^1(\Omega)$ tal que $m + n \geq 0$ y $m + n \not\equiv 0$. Supongamos que vale (G1), entonces existen y $\lambda_0 > 0$ tal que el problema (6.1) tiene una supersolución $w \in \mathcal{P}^\circ$ w para todo $0 < \lambda < \lambda_0$.*

Demostración. Sean c_1, t_1, r_1 dados por (G1). Definamos $c_\Omega := \max_{\overline{\Omega}} \delta_\Omega$. Observamos que al ser ϕ^{-1} una función continua y $\phi^{-1}(0) = 0$, existe $K_0 > 0$ tal que

$$\phi^{-1}(\kappa \int_a^b m(s) + n(s)ds) \leq \frac{t_1}{c_\Omega} \text{ para todo } \kappa \leq K_0 \tag{6.8}$$

y por la segunda condición en (6.3), para cualquier $\rho > 0$ fijo se tiene

$$\varliminf_{t \to 0^+} \frac{[\phi^{-1}(\rho t)]^{r_1}}{t} = 0. \tag{6.9}$$

Ahora, definimos

$$\epsilon := \frac{1}{c_1 c_\Omega^{r_1}}, \quad \rho := \int_a^b m(s) + n(s)ds.$$

Podemos deducir de (6.9) que existe $K_1 = K_1(\epsilon, \rho) > 0$ tal que

$$[\phi^{-1}(\kappa\rho)]^{r_1} \leq \kappa\epsilon \text{ para todo } \kappa \leq K_1. \tag{6.10}$$

Elijamos

$$0 < \kappa \leq \min\{K_0, K_1\} \tag{6.11}$$

y para tal κ definimos $w := \mathcal{S}_\phi(\kappa(m+n))$. Como $\kappa \leq K_0$ la desigualdad (6.6) y (6.8) nos dice que $\|w\|_\infty \leq t_1$.

Sea, ahora, $C = \max_{[0,t_1]} f(t)$ y elijamos $\lambda_0 > 0$ tal que

$$\lambda_0 C \leq \kappa. \tag{6.12}$$

Teniendo en cuenta (6.10), (6.11) y (6.12), empleando (G1) y (6.6) deducimos que para $0 < \lambda < \lambda_0$

$$\begin{aligned} &\lambda m(x) f(w) + n(x) g(w) \\ &\leq \lambda m(x) C + c_1 n(x) w^{r_1} \\ \leq \kappa m(x) + c_1 n(x) &\left[\phi^{-1}(\kappa \int_a^b m(s) + n(s)ds)\delta_\Omega\right]^{r_1} \\ &\leq \kappa(m(x) + n(x)) = -\phi(w')' \text{ en } \Omega, \end{aligned}$$

y por lo tanto w es una supersolución de (6.1).

$\square$

Lema 6.5. *Sean $0 \leq m, n \in L^1(\Omega)$ con $m \not\equiv 0$. Supongamos que vale (F), entonces el problema (6.1) tiene una subsolución $v \in \mathcal{P}^\circ$ para todo $\lambda > 0$.*

Demostración. Sea $\lambda > 0$. Sean c_0, t_0, q dados por (F). Recordar que $c_\Omega := \max_{\overline{\Omega}} \delta_\Omega$. Observamos que como ϕ^{-1} es una función continua y $\phi^{-1}(0) = 0$, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$\phi^{-1}(\varepsilon \int_a^b m(s)\delta_\Omega^q(s)ds) \leq \frac{t_0}{c_\Omega} \text{ para todo } \varepsilon \leq \varepsilon_0 \tag{6.13}$$

y por la segunda condición de (6.2), para cualquier $\rho > 0$ fijo

$$\varliminf_{t\to 0^+} \frac{[\phi^{-1}(\rho t)]^q}{t} = \infty \tag{6.14}$$

Definamos ahora

$$M := \frac{1}{\lambda c_0 c^q},$$

donde c es la constante en (6.7) con $h = m\delta_\Omega^q$. Se sigue de (6.14) que existe $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(M, \rho)$ tal que

$$[\phi^{-1}(\varepsilon\rho)]^q \geq M\varepsilon \text{ para todo } \varepsilon \leq \varepsilon_1. \tag{6.15}$$

Elijamos

$$0 < \varepsilon < \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\} \tag{6.16}$$

y para tal ε definimos $v := \mathcal{S}_\phi(\varepsilon m \delta_\Omega^q)$. Como $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, la desigualdad (6.6) y (6,13) nos dicen que $\|v\|_\infty \leq t_0$. En consecuencia, si tomamos en cuenta (6.15) y (6.16), empleamos (F) y (6.7) deducimos que

$$\begin{aligned} \lambda m(x)f(v) + n(x)g(v) &\geq \lambda c_0 m(x)v^q \\ \geq \lambda c_0 m(x)[c\phi^{-1}(c\varepsilon)\delta_\Omega]^q &\geq \varepsilon m(x)\delta_\Omega^q \text{ en } \Omega. \end{aligned}$$

En otras palabras, v es una subsolución de (6.1). □

Prueba del inciso (I). Sean λ_0 y w como en el Lema 6.4, y sea v como en Lema 6.5 con ε tal que $\varepsilon m(x)\delta_\Omega^q(x) \leq \kappa(m(x) + n(x))$ para *c.t.p.x* $\in \Omega$. Entonces, v, w son un par bien ordenado de sub y supersolución de (6.1). Luego, el Teorema 3.10 nos dice que existe una solución de (6.1) $u_\lambda \in \mathcal{P}^\circ$ para $0 < \lambda < \lambda_0$.

Por último probemos (6.5). Notar que si w y λ_0 son como en el Lema 6.4. Al ser $0 \leq u_\lambda \leq w$, para $\lambda \in (0, \lambda_0)$, tenemos que $\|u_\lambda\|_\infty \leq C$ con C independiente de λ. Teniendo esto en cuenta, y usando la desigualdad (6.6) podemos ver que

$$0 \leq u_\lambda(x) = \mathcal{S}_\phi(\lambda m f(u_\lambda))(x) \leq \phi^{-1}\left(\int_a^b \lambda m f(u_\lambda)\right)\delta_\Omega(x) \to 0$$

uniformemente $\overline{\Omega}$ cuando $\lambda \to 0^+$ y por lo tanto $\lim_{\lambda\to 0^+} \|u_\lambda\|_\infty = 0$. □

6.1.2. Prueba del item (II)

Antes de demostrar el item (II) recordamos que dada $h \in L^1(\Omega)$ con $0 \leq h \not\equiv 0$ definimos

$$\mathcal{A}_h := \{x \in \Omega : h(y) = 0 \text{ para } c.t.p.\ y \in (a, x)\},$$
$$\mathcal{B}_h := \{x \in \Omega : h(y) = 0 \text{ para } c.t.p.\ y \in (x, b)\},$$

y además

$$\alpha_h := \begin{cases} \sup \mathcal{A}_h & \text{si } \mathcal{A}_h \neq \emptyset \\ a & \text{si } \mathcal{A}_h = \emptyset, \end{cases} \qquad \beta_h := \begin{cases} \inf \mathcal{B}_h & \text{si } \mathcal{B}_h \neq \emptyset \\ b & \text{si } \mathcal{B}_h = \emptyset, \end{cases}$$
$$\overline{\theta}_h := \frac{\alpha_h + \beta_h}{2}, \qquad \underline{\theta}_h := \text{mín}\left\{\frac{1}{\beta_h - a}, \frac{1}{b - \alpha_h}\right\}.$$

Mencionamos además que dada cualquier $g \in C(\overline{\Omega})$ con $g > 0$ en Ω se tiene por las definiciones de arriba que

$$\overline{\theta}_h = \overline{\theta}_{hg} \text{ y } \underline{\theta}_h = \underline{\theta}_{hg}. \tag{6.17}$$

También recordamos que vale la siguiente desigualdad

$$\|\mathcal{S}_\phi(h)\|_\infty \geq \frac{1}{2} \text{mín}\left\{\int_a^{\overline{\theta}_h} \phi^{-1}(\int_y^{\overline{\theta}_h} h)dy, \int_{\overline{\theta}_h}^b \phi^{-1}(\int_{\overline{\theta}_h}^y h)dy\right\}. \tag{6.18}$$

Para la prueba de esta desigualdad ver la Observación 3.5 (iii).

Por otro lado, dada $M > 0$ constante se tiene que

$$\text{mín}\left\{\int_a^{\overline{\theta}_h} \phi^{-1}(M\int_y^{\overline{\theta}_h} h)dy, \int_{\overline{\theta}_h}^b \phi^{-1}(M\int_{\overline{\theta}_h}^y h)dy\right\} \geq c\phi^{-1}(cM), \tag{6.19}$$

donde $c > 0$ es a constante que no depende de M. Para la prueba de esta desigualdad ver la prueba del item (iii) en el Teorema 3.4.

Demostración. Para probar este inciso, usaremos el Teorema 2.15 con el operador

$$Tv := \mathcal{S}_\phi(\lambda m(x)f(v) + n(x)g(v)),$$

el cono

$$\mathcal{K} := \{v \in C(\overline{\Omega}) : v \geq \underline{\theta}_n \|v\|_\infty \delta_\Omega\}$$

y los conjuntos abiertos $B_R(0), B_\rho(0) \subset C(\overline{\Omega})$ para algún par ρ y R con $0 < \rho < R$. Observamos que $C_0^1(\overline{(\Omega)}) \cap (\mathcal{K} \setminus \{0\}) \subset \mathcal{P}^\circ$.

Sean c_2, t_2 y r_2 dados por (G2). Consideremos la función $h = c_2\,(\underline{\theta}_n)^{q_2}\, n\delta_\Omega^{r_2}$. Teniendo en cuenta (6.17) y usando la desigualdad (6.19), podemos encontrar una constante $c > 0$ tal que para todo $M > 0$

$$\text{mín}\left\{\int_a^{\overline{\theta}_n} \phi^{-1}(M\int_y^{\overline{\theta}_n} h)dy, \int_{\overline{\theta}_n}^b \phi^{-1}(M\int_{\overline{\theta}_n}^y h)dy\right\} \geq c\phi^{-1}(cM), \tag{6.20}$$

Por otro lado, la segunda condición en (6.4) es equivalente a

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\phi^{-1}(\rho t^{r_2})}{t} = \infty,$$

para todo $\rho > 0$ fijo, entonces existe $\overline{t} > 0$ tal que

$$\phi^{-1}(\hat{c}t^{q_2}) \geq \frac{2t}{c}, \tag{6.21}$$

para todo $t \geq \overline{t}$. Fijemos $R > \text{máx}\{t_2, \overline{t}\}$, teniendo en cuenta que $\mathcal{S}_\phi$ y ϕ^{-1} son no decrecientes, la desigualdad (6.18), (G2), (6.20) y (6.21) obtenemos que para $v \in \mathcal{K} \cap \partial B_R(0)$

$$\begin{aligned}
\|Tv\|_\infty =& \|\mathcal{S}_\phi(\lambda m(x)f(v)) + n(x)g(v))\| \geq \|S_\phi(n(x)g(v))\|_\infty \\
\geq& \frac{1}{2}\,\text{mín}\left\{\int_a^{\overline{\theta}_n} \phi^{-1}\left(\int_y^{\overline{\theta}_n} ng(v)\right)dy, \int_{\overline{\theta}_n}^b \phi^{-1}\left(\int_{\overline{\theta}_n}^y ng(v)\right)dy\right\} \\
\geq& \frac{1}{2}\,\text{mín}\left\{\int_a^{\overline{\theta}_n} \phi^{-1}\left(c_2\int_y^{\overline{\theta}_n} nv^{r_2}\right)dy, \int_{\overline{\theta}_n}^b \phi^{-1}\left(c_2\int_{\overline{\theta}_n}^y nv^{r_2}\right)dy\right\} \\
\geq& \frac{1}{2}\,\text{mín}\left\{\int_a^{\overline{\theta}_n} \phi^{-1}\left(c_2\,(\underline{\theta}_n\,\|v\|_\infty)^{r_2}\int_y^{\overline{\theta}_n} n\delta_\Omega^{r_2}\right)dy,\right. \\
&\left.\int_{\overline{\theta}_n}^b \phi^{-1}\left(c_2\,(\underline{\theta}_n\,\|v\|_\infty)^{r_2}\int_{\overline{\theta}_n}^y n\delta_\Omega^{r_2}\right)dy\right\} \\
\geq& \frac{1}{2}\hat{c}\phi^{-1}(\hat{c}\,\|v\|_\infty^{r_2}) \\
\geq& \|v\|_\infty\,.
\end{aligned}$$

Resultando que $\|Tv\|_\infty \geq \|v\|_\infty$ para tales v.

Por otro lado, sea $N = c_1\int_a^b n(x)dx$. La segunda condición en (6.3) implica que dado un número real $\mathcal{N} > 0$ existe $\underline{t} > 0$ tal que $\phi(t) > \mathcal{N}t^{r_1}$ para todo $t \in (0, \underline{t})$, entonces si $t \in (0, c_\Omega\underline{t})$ obtenemos que $\phi(t/c_\Omega) \geq \frac{\mathcal{N}}{c_\Omega^{r_1}}t^{r_1}$. En particular para $\mathcal{N} = Nc_\Omega^{r_1}$.

Sean $C := \max_{[0,R]} f(t)$ y $M := \int_a^b m(x)dx$, fijemos $0 < \rho < \min\{c_\Omega \underline{t}, R/2, t_1\}$ y definamos

$$\lambda_1 := \frac{\phi(\rho/c_\Omega) - N\rho^{r_1}}{MC}. \tag{6.22}$$

Notar que $\lambda_1 > 0$ por la elección de $\underline{t}$.

Por lo tanto, si tenemos en cuenta (6.6), (G1) y (6.22) y que ϕ^{-1} es no decreciente podemos ver que para $0 < \lambda \leq \lambda_1$ y para todo $v \in \mathcal{K} \cap \partial B_\rho(0)$

$$\begin{aligned} Tv &\leq \phi^{-1}\left(\int_a^b \lambda m(x)f(v) + n(x)g(v)dx\right)\delta_\Omega \\ &\leq \phi^{-1}\left(\lambda C \int_a^b m(x)dx + c_1 \int_a^b n(x)v^{r_1}dx\right)\delta_\Omega \\ &\leq \phi^{-1}\left(\lambda_1 MC + N\rho^{r_1}\right)\delta_\Omega \\ &\leq \rho \text{ en } \Omega. \end{aligned}$$

Lo que nos dice que $\|Tv\|_\infty \leq \rho = \|v\|_\infty$ para todo $v \in \mathcal{K} \cap \partial B_\rho(0)$.

Ahora, el Teorema 2.15 nos dice que T posee un punto fijo en $\mathcal{K} \cap (\overline{B_R(0)} \setminus B_\rho(0))$. $\square$

6.1.3. Prueba del item (III)

Para probar el último item utilizaremos el Lema 6.5 y la siguiente desigualdad que vale para c.t.p en Ω y toda $h \in L^1(\Omega)$,

$$\mathcal{S}_\phi(h) \geq \theta_m \|\mathcal{S}_\phi(h)\|_\infty \delta_\Omega. \tag{6.23}$$

Para la prueba de esta desigualdad ver la prueba del inciso (ii) del Lema 3.4.

Demostración. Sea $0 < \lambda < \Lambda$. Por definición de Λ existe $\overline{\lambda} \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda < \overline{\lambda} \leq \Lambda$ y existe $u_{\overline{\lambda}} \in \mathcal{P}^\circ$ solución del problema (6.1) asociado a $\overline{\lambda}$. Como $\lambda < \overline{\lambda}$ se sique que $u_{\overline{\lambda}}$ es supersolución del problema asociado a λ. Ahora bien, gracias al Lema 6.5 existe $\varepsilon > 0$ tal que $v = \mathcal{S}_\phi(\varepsilon m \delta_\Omega^q)$ es subsolución del problema asociado a λ. Más aún, achicando ε si es necesario se tiene que $v \leq u_{\overline{\lambda}}$. Veamos esta última afirmación, como $\mathcal{S}_\phi$ es monótono creciente basta probar que

$$\varepsilon m(x)\delta_\Omega(x)^q \leq \overline{\lambda} m(x) f(u_{\overline{\lambda}}) + n(x)g(u_{\overline{\lambda}}).$$

Lo cual ocurre siempre que

$$\varepsilon \leq \overline{\lambda} c_0 (\theta_m \|u_{\overline{\lambda}}\|_\infty)^q.$$

En efecto, como $f(t) \leq c_0 t^q$ para todo $t \geq 0$, $n \geq 0$ y usando la desigualdad (6.23) tenemos que

$$\begin{aligned}
&\overline{\lambda} m(x) f(u_{\overline{\lambda}}) + n(x) g(u_{\overline{\lambda}}) \geq \overline{\lambda} c_0 m(x) u_{\overline{\lambda}}^q \\
&\geq \overline{\lambda} c_0 m(x) (\theta_m \left\| u_{\overline{\lambda}} \right\|_\infty \delta_\Omega)^q \geq \varepsilon m(x) \delta_\Omega(x)^q.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, v y $u_{\overline{\lambda}}$ son un par de sub y supersolucion bien ordenado del problema asociado a λ. Luego, el Teorema 3.10 nos asegura que existe $u_\lambda \in \mathcal{P}^\circ$ solución del problema asociado a λ. $\square$

Capítulo 7

Ejemplos y comentarios finales sobre las hipótesis

Por comodidad solo consideraremos el problema:

$$\begin{cases} -\phi(u')' = m(x)f(u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{7.1}$$

Introducimos las siguientes hipótesis sobre m y ϕ:

(M) $m \in C(\Omega)$ con $m \geq 0$ y $m \not\equiv 0$ en ningún subintervalo de Ω.

(M') $m \in C(\Omega)$ con $\min_{\overline{\Omega}} m > 0$.

(Φ) Existen homeomorfismos crecientes $\psi_1, \psi_2 : [0, \infty) \to [0, \infty)$ tales que $\psi_1(t)\phi(x) \leq \phi(tx) \leq \psi_2(t)\phi(x)$, para todo $t, x > 0$.

(Φ') Existen $p, q \in (0, \infty)$ tales que $t^q\phi(x) \leq \phi(tx) \leq t^p\phi(x)$ para $t \in [0, 1]$ y todo $x > 0$.

Bajo algunas condiciones de crecimiento estándar sobre f (que contemplan los casos sublineales y superlineales) y suponiendo (M) y (Φ), se probó que (7.1) posee solución para todo $\lambda > 0$ (Ver [Wan03b, Theorem 1.1]) y recientemente en [XL14, Theorem 2]) los autores extendieron estos resultados a ciertas $m \in L^1_{loc}(\Omega)$ y sin requerir que $\psi_2(0) = 0$. Estás hipótesis imponen fuertes restricciones en

$$l(t) := \varliminf_{x\to\infty} \frac{\phi(tx)}{\phi(x)} \quad y \quad L(t) := \varlimsup_{x\to\infty} \frac{\phi(tx)}{\phi(x)}$$

En efecto, la existencia de ψ_1 implica que $l(t) > 0$ para todo $t \in (0, 1)$ y $\lim_{t\to\infty} l(t) = \infty$. Mientras que la existencia de ψ_2 implica $L(t) < \infty$ para todo $t > 1$. Notamos que la primera y última condición no son satisfechas por no linealidades con comportamiento exponencial, mientras que la condición restante no se satisface para funciones del tipo logarítmico.

Por otro lado, un resultado similar está enunciado en [BDM07, Corolario 3.4] suponiendo (Φ') y (M'). Notamos que la primer desigualdad en (Φ') también implica que $l(t) > 0$ para todo $t \in (0,1)$, mientras que la segunda desigualdad implica que $\lim_{t\to 0^+} L(t) = 0$.

Nosotros pudimos tratar problemas de este tipo en los Capítulos 4 y 5 (Ver Teoremas 4.1 y 5.7 para el caso sublineal y Teorema 5.3 para el superlineal) En cuanto a m, en el Capítulo 4 solo suponemos que $m \in L^1(\Omega)$ con $0 \le m \not\equiv 0$ mientras que en el Capítulo 5 permitimos que la parte negativa de m sea pequeña.

En este Capítulo introduciremos algunos ejemplos de funciones ϕ que **no** satisfacen Φ ni (Φ'), entre los cuales se encuentran funciones con comportamiento logarítmico y exponencial.

7.1. Índice de los espacios de Orlicz

Definición 7.1. Diremos que una función $\nu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *subaditiva* si

$$\nu(x+y) \le \nu(x) + \nu(y) \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

La demostración del siguiente Teorema se puede encontrar en [HP74, Teorema 7.6.2] o en [Mal89, Teorema 11.1].

Teorema 7.2. *Sea $\nu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función subaditiva . Si*

$$\inf_{t>0} \frac{\nu(t)}{t} = \beta \quad y \quad \sup_{t<0} \frac{\nu(t)}{t} = \alpha,$$

entonces $-\infty < \alpha \le \beta < \infty$,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\nu(t)}{t} = \beta \quad y \quad \lim_{t\to-\infty} \frac{\nu(t)}{t} = \alpha.$$

Definición 7.3. Diremos que una función $v : (0,\infty) \to [0,\infty)$ es *submultiplicativa* si $v \not\equiv 0$ y

$$v(xy) \le v(x)v(y) \text{ para todo } x, y \in (0,\infty).$$

Dada una función submultiplicativa v podemos definir una función subaditiva $\nu(t) = \ln v(e^t)$. Luego, aplicando el Teorema anterior tenemos el siguiente resultado.

Teorema 7.4. *Para toda función submultiplicativa, medible* $v : (0, \infty) \to [0, \infty)$*, existen números reales* α *y* β *tales que* $\alpha \leq \beta$ *y*

$$v(t) \geq t^{\alpha} \text{ para todo } t \leq 1 \quad v(t) \geq t^{\beta} \text{ para todo } t > 1. \tag{7.2}$$

Para $\varepsilon > 0$*, se cumple que* $v(t) \leq t^{\alpha-\epsilon}$ *para* t *suficientemente pequeño y* $v(t) \leq t^{\beta+\epsilon}$ *para* t *suficientemente grande. Más aún,*

$$\alpha := \lim_{t \to 0^+} \frac{\ln v(t)}{\ln t} = \sup_{0<t<1} \frac{\ln v(t)}{\ln t}, \quad \beta := \lim_{t \to \infty} \frac{\ln v(t)}{\ln t} = \inf_{t>1} \frac{\ln v(t)}{\ln t}. \tag{7.3}$$

Observación 7.5. Si v es como en el Teorema anterior con $v(1) = 1$ y además es no decreciente, entonces $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \infty$.

Dada una función $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ continua, creciente y no acotada tal que $\phi(0) = 0$, definimos:

$$M(t, \phi) := \sup_{x>0} \frac{\phi(tx)}{\phi(x)}.$$

Esta función resulta ser no decreciente y submultiplicativa que toma el valor 1 cuando $t = 1$. Entonces por el Teorema y la Observación de arriba. Los límites

$$\alpha_\phi := \lim_{t \to 0^+} \frac{\ln M(t, \phi)}{\ln t}, \quad \beta_\phi := \lim_{t \to \infty} \frac{\ln M(t, \phi)}{\ln t}$$

existen. Estos números son llamados **índices de los espacios de Orlicz** o **índices de Matuszewska-Orlicz**, quienes los introdujeron en 1960.

Observación 7.6. (i) Para $\varepsilon > 0$, existe $t_1 > 0$ tal que $\phi(tx) \leq t^{\alpha_\phi - \varepsilon} \phi(x)$ para todo $x > 0$ y $t \in [0, t_1]$.

(ii) Supongamos que $\beta_\phi < \infty$. Entonces para $\varepsilon > 0$, existe $t_2 > 0$ tal que $\phi(tx) \leq t^{\beta_\phi + \varepsilon} \phi(x)$ para todo $x > 0$ y $t \in [t_2, \infty)$.

(iii) Si $x^{-p}\phi(x)$ es no decreciente para todo $x > 0$, entonces $\alpha_\phi \geq p$.

(iv) Si $x^{-p}\phi(x)$ es no creciente para todo $x > 0$, entonces $\beta_\phi \leq p$.

Teorema 7.7 (Ver [Mal89] Teorema 11.5)**.** *Se tiene la siguiente relación entre los índices de* ϕ *y su inversa:*

$$\alpha_{\phi^{-1}} = \frac{1}{\beta_\phi} \text{ y } \beta_{\phi^{-1}} = \frac{1}{\alpha_\phi}$$

(por convención $1/0 = \infty$ *y* $1/\infty = 0$*).*

Corolario 7.8. *(i) Supongamos que $\alpha_\phi > 0$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe $t_1 > 0$ tal que $\phi(tx) \geq t^p\phi(x)$ para todo $x > 0$ y $t > t_1$, donde $p = (\beta_{\phi^{-1}} + \varepsilon)^{-1}$.*

(ii) Supongamos que $\beta_\phi < \infty$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ tal que $\alpha_{\phi^{-1}} - \varepsilon > 0$, existe $t_1 > 0$ tal que $\phi(tx) \geq t^q\phi(x)$ para todo $x > 0$ y todo $t \in [0, t_1]$, donde $q = (\alpha_{\phi^{-1}} - \varepsilon)^{-1}$.

Demostración. Empecemos probando (i). Como $\alpha_\phi > 0$, por el Teorema anterior se tiene que $\beta_{\phi^{-1}} < \infty$. Luego, por la Observación 7.6 (ii) tenemos que para $\varepsilon > 0$, existe $s_0 > 0$ tal que

$$\phi^{-1}(sy) \leq s^{\beta_{\phi^{-1}}+\varepsilon}\phi^{-1}(y) \text{ para todo } y > 0 \text{ y } s \in [s_0, \infty).$$

Sea $t_1 = s_0^{\beta_{\phi^{-1}}+\varepsilon}$. Dados $x > 0$ y $t \in [t_1, \infty)$, definimos $y = \phi(x)$ y $s = t^p$ con $p = (\beta_{\phi^{-1}} + \varepsilon)^{-1}$. Aplicando la desigualdad de arriba obtenemos que

$$\phi^{-1}(t^p\phi(x)) \leq tx \text{ para todo } x > 0 \text{ y } t > t_1.$$

Como ϕ es creciente se sigue que

$$t^p\phi(x) \leq \phi(tx) \text{ para todo } x > 0 \text{ y } t > t_1.$$

Como queríamos probar.

Probemos ahora (ii). Como $\beta_\phi < \infty$, por el Teorema anterior se tiene que $\alpha_{\phi^{-1}} > 0$. Luego, por la Observación 7.6 (i) tenemos que para $\varepsilon > 0$ con $(\alpha_{\phi^{-1}} - \varepsilon) > 0$, existe $\underline{s} > 0$ tal que

$$\phi^{-1}(sy) \leq s^{\alpha_{\phi^{-1}}-\varepsilon}\phi^{-1}(y) \text{ para todo } y > 0 \text{ y } s \in [0, \underline{s}].$$

Sea $\underline{t} = \underline{s}^{\alpha_{\phi^{-1}}-\varepsilon}$. Dados $x > 0$ y $t \in [0, \underline{t}]$, definimos $y = \phi(x)$ y $s = t^q$ con $q = (\alpha_{\phi^{-1}} + \varepsilon)^{-1}$. Aplicando la desigualdad de arriba obtenemos que

$$\phi^{-1}(t^q\phi(x)) \leq tx \text{ para todo } x > 0 \text{ y } t \in [0, \underline{t}].$$

Como ϕ es creciente se sigue que

$$t^q\phi(x) \leq \phi(tx) \text{ para todo } x > 0 \text{ y } t \in [0, \underline{t}].$$

Como queríamos probar. □

Corolario 7.9 (Ver [GP77] página 34)**.** *Si $0 < \alpha_\phi \leq \beta_\phi < \infty$. Entonces existen $C, p, q > 0$ tales que*

$$C^{-1}\min\{t^p, t^q\}\phi(x) \leq \phi(tx) \leq C\max\{t^p, t^q\}\phi(x)$$

para todo $t, x \geq 0$.

Recordamos que una función ϕ satisface la condición Δ_2 si existe una constante $k > 0$ tal que

$$\phi(2x) \leq k\phi(x) \text{ para } x \geq 0.$$

Teorema 7.10. *(Ver [Mal89, Teorema 11.7]) Se tiene que ϕ satisface la condición Δ_2 si y solo si $\beta_\phi < \infty$.*

Teorema 7.11. *Las siguientes hipótesis sobre ϕ son equivalentes:*

- $0 < \alpha_\phi \leq \beta_\phi < \infty$.
- (Φ).
- (Φ) *pero sin pedir que* $\psi_2(0) = 0$.
- (Φ').

Demostración. El Corolario anterior demuestra que $0 < \alpha_\phi \leq \beta_\phi < \infty$ implica los otros tres items. Veamos las recíprocas.

Como $\alpha_\phi = 1/\beta_{\phi^{-1}}$ el Teorema anterior nos dice que $\alpha_\phi > 0$ si y solo si ϕ^{-1} satisface Δ_2. Veamos que la primer desigualdad de (Φ) implica que ϕ^{-1} satisface Δ_2. En efecto, teniendo en cuenta que vale la desigualdad

$$\psi_1(t)\phi(x) \leq \phi(xt) \text{ para todo } t, x > 0,$$

tomando $y = \phi(x)$ y $s = \psi(t)$ tenemos que

$$sy \leq \phi(\psi_1^{-1}(s)\phi^{-1}(y)) \text{ para todo } s, y > 0.$$

Como ϕ^{-1} es creciente se sigue que

$$\phi^{-1}(sy) \leq \psi_1^{-1}(s)\phi^{-1}(y) \text{ para todo } s, y > 0.$$

Esto implica que ϕ^{-1} satisface Δ_2. Por lo tanto, $\alpha_\phi > 0$. Además, la segunda desigualdad de (Φ) (indiferentemente si $\psi_2(0) = 0$ o no) implica que ϕ satisface Δ_2. Luego, $\beta_\phi < \infty$.

Para finalizar veamos que (Φ') implica que $0 < \alpha_\phi \leq \beta_\phi < \infty$. Notar que la segunda desigualdad de (Φ') implica que

$$M(t, \phi) \leq t^p \text{ para } t \in (0, 1).$$

Por lo tanto, $\alpha_\phi = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln M(t,\phi)}{\ln t} \geq p$. Lo que implica que $\alpha_\phi > 0$. Por otro lado, razonando como en el párrafo anterior podemos ver que la primer desigualdad de (Φ') implica que

$$\phi^{-1}(sy) \leq s^{\frac{1}{q}}\phi^{-1}(y) \text{ para } s \in (0, 1) \text{ y } x > 0.$$

Luego, razonando como recién esta desigualdad implica que $\alpha_{\phi^{-1}} > 0$. Por lo tanto, $\beta_\phi < \infty$. □

Teorema 7.12. *Sea $q > 0$.*

(i) Si $\lim_{t\to 0^+} \dfrac{t^q}{\phi(t)} = 0$ *entonces* $\alpha_\phi \leq q$.

(ii) Si $\lim_{t\to \infty} \dfrac{t^q}{\phi(t)} = 0$ *entonces* $\beta_\phi \geq q$.

(iii) Si $\lim_{t\to 0^+} \dfrac{t^q}{\phi(t)} = \infty$ *entonces* $\beta_\phi \geq q$.

(iv) Si $\lim_{t\to \infty} \dfrac{t^q}{\phi(t)} = \infty$ *entonces* $\alpha_\phi \leq q$.

Demostración. Empecemos probando (i). Si $\alpha_\phi > q$, por la Observación 7.6 (i) se tiene que existe $t_1 > 0$ tal que

$$\phi(tx) \leq t^q \phi(x) \quad \text{para todo } x > 0 \text{ y } t \in (0, t_1).$$

Definamos $C = \phi(1)^{-1}$ y fijemos $x = 1$. Utilizando la desigualdad anterior se tiene que

$$C \leq \frac{t^q}{\phi(t)} \quad \text{para todo } t \in (0, t_1).$$

Lo cual contradice que $\lim_{t\to 0^+} \dfrac{t^q}{\phi(t)} = 0$. Por lo tanto, debe ser $\alpha_\phi \leq q$.

Si $\beta_\phi < q$, por la Observación 7.6 (ii) tenemos que existe $t_1 > 0$ tal que

$$\phi(tx) \leq t^q \phi(x) \text{ para todo } x > 0,\ t > t_1$$

Definamos $C = \phi(1)^{-1}$ y fijemos $x = 1$. Utilizando la desigualdad anterior se tiene que

$$C \leq \frac{t^q}{\phi(t)} \quad \text{para todo } t < t_1.$$

Lo cual contradice que $\lim_{t\to \infty} \dfrac{t^q}{\phi(t)} = 0$. Por lo tanto, debe ser $\beta_\phi \geq q$.

Por otro lado, (iii) se sigue de (i) notando que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{t^q}{\phi(t)} = \infty \text{ si y solo si } \lim_{t\to 0^+} \frac{t^{1/q}}{\phi^{-1}(t)} = 0.$$

En efecto, si vale el primer límite entonces existe una sucesión $\{t_k\}$ con $t_k > 0$ y $t_k \to 0$, tal que

$$\frac{t_k^q}{\phi(t_k)} \to \infty.$$

Tomando $s_k = \phi(t_k)$, resulta que $s_k > 0$, $s_k \to 0$ y

$$\frac{[\phi^{-1}(s_k)]^q}{s_k} \to \infty.$$

Como la función $h(t) = t^{1/q}$ es continua y tiende a infinito cuando t lo hace, se sigue que

$$\frac{\phi^{-1}(s_k)}{s_k^{1/q}} \to \infty,$$

lo cual es equivalente a

$$\frac{s_k^{1/q}}{\phi^{-1}(s_k)} \to 0.$$

Al ser $0 \leq \dfrac{t^{1/q}}{\phi^{-1}(t)}$ para todo $t > 0$ se sigue que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{t^{1/q}}{\phi^{-1}(t)} = 0.$$

Como $\beta_\phi \geq q$ si y solo si $\alpha_{\phi^{-1}} \leq 1/q$, queda probado (iii).
Análogamente, (iv) se sigue de (ii) notando que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^q}{\phi(t)} = \infty \text{ si y solo si } \lim_{t\to\infty} \frac{t^{1/q}}{\phi^{-1}(t)} = 0;$$

y teniendo en cuenta que $\alpha_\phi \leq q$ si y solo si $\beta_{\phi^{-1}} \geq 1/q$. □

Teorema 7.13. *(i) Si $q < \alpha_\phi$ entonces* $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{t^q}{\phi(t)} = \infty$.

(ii) Si $q > \beta_\phi$ entonces $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{t^q}{\phi(t)} = \infty$.

(iii) Si $q < \alpha_\phi$ entonces $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{t^q}{\phi(t)} = 0$.

(iv) Si $q > \beta_\phi$ entonces $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{t^q}{\phi(t)} = 0$.

Demostración. Empecemos probando (i). Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\alpha_\phi - \varepsilon > q$. Por la Observación 7.6 (i) existe $t_1 > 0$ tal que

$$\phi(tx) \leq t^{\alpha_\phi - \varepsilon}\phi(x) \text{ para todo } x > 0 \text{ y } t < t_1.$$

Tomando $x = 1$ obtenemos que

$$\frac{1}{t^{\alpha_\phi - \varepsilon}} \leq \frac{\phi(1)}{\phi(t)} \quad \text{para } t < t_1.$$

Multiplicando por t^q en ambos lados y tomando límite cuando t tiende a 0 por derecha se sigue que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{t^q}{t^{\alpha_\phi - \varepsilon}} \leq \lim_{t\to 0^+} \frac{\phi(1)t^q}{\phi(t)}.$$

Como $q < \alpha_\phi - \varepsilon$, el primer límite es infinito. Luego, el segundo también lo es.

Análogamente, sea $\varepsilon > 0$ tal que $\beta_\phi + \varepsilon < q$. Por la Observación 7.6 (ii) existe $t_1 > 0$ tal que

$$\phi(tx) \leq t^{\beta_\phi - \varepsilon}\phi(x) \text{ para todo } x > 0 \text{ y } t > t_1.$$

Tomando $x = 1$ obtenemos que

$$\frac{1}{t^{\beta_\phi - \varepsilon}} \leq \frac{\phi(1)}{\phi(t)} \quad \text{para } t < t_1.$$

Multiplicando por t^q en ambos lados y tomando límite cuando t tiende a infinito se sigue que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^q}{t^{\beta_\phi + \varepsilon}} \leq \lim_{t\to\infty} \frac{\phi(1)t^q}{\phi(t)}.$$

Como $q > \beta_\phi + \varepsilon$, el primer límite es infinito. Luego, el segundo también lo es. Quedando así probado (ii).

Por otro lado, (iii) se sigue de (ii) notando que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^q}{\phi(t)} = 0 \text{ si y solo si } \lim_{t\to\infty} \frac{t^{1/q}}{\phi^{-1}(t)} = \infty;$$

y teniendo en cuenta que $\alpha_\phi > q$ si y solo si $\beta_{\phi^{-1}} < 1/q$.

Análogamente, (iv) se sigue de (i) notando que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{t^q}{\phi(t)} = 0 \text{ si y solo si } \lim_{t\to 0^+} \frac{t^{1/q}}{\phi^{-1}(t)} = \infty.$$

y teniendo en cuenta que $\beta_\phi < q$ si y solo si $\alpha_{\phi^{-1}} > 1/q$. □

Observación 7.14. Queremos mencionar que las recíprocas de los items (i) y (ii) no son ciertas (Ver el ejemplo a.3 de la siguiente sección).

7.2. Caso superlineal

En el caso superlineal obtuvimos nuestros resultados (Teorema 5.3) suponiendo que

F1. Existen constantes $c_1, c_2, q_1, q_2, t_1 > 0$ tales que

$$c_1 t^{q_1} \geq f(t) \text{ para } 0 \leq t \leq t_1;$$
$$c_2 t^{q_2} \leq f(t) \text{ para } t \geq 0.$$

y que la función ϕ satisface los siguientes limites

$$\overline{\lim_{t\to 0^+}} \frac{t^{q_1}}{\phi(t)} = 0 \quad \text{y} \quad \underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{t^{q_2}}{\phi(t)} = \infty. \tag{7.4}$$

Mientras que en nuestro trabajo [KM18a] supusimos que existen homeomorfismos crecientes $\psi_1 : [0, \underline{t}] \to [0, \psi_1(\underline{t})]$ y $\psi_2 : [\overline{t}, \infty) \to [\overline{t}, \infty)$ tales que

$$\phi(tx) \geq \psi_1(t)\phi(x) \text{ para todo } t \in [0, \underline{t}], x \geq 0; \tag{7.5}$$
$$\phi(tx) \leq \psi_2(t)\phi(x) \text{ para todo } t \in [\overline{t}, \infty), x \geq 0, \tag{7.6}$$

y en vez de los límites de (7.4) que relacionan F1 con ϕ, necesitamos que se satisfagan los siguientes límites

$$\overline{\lim_{t\to 0^+}} \frac{t^{q_1}}{\psi_1(t)} = 0 \quad y \quad \underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{t^{q_2}}{\psi_2(t)} = \infty \tag{7.7}$$

Como mencionamos en la Observación 5.6, las hipótesis (7.5), (7.6) y (7.7) implican (7.4). Además, tenemos las siguientes relaciones de β_ϕ con nuestras hipótesis:

- $\beta_\phi < \infty$ es equivalente a que existan dos homeomorfismos crecientes $\psi_1 : [0, \underline{t}] \to [0, \psi_1(\underline{t})]$ y $\psi_2 : [\overline{t}, \infty) \to [\overline{t}, \infty)$ que cumplen (7.5) y (7.6) respectivamente. Más aún, dichos homeomorfismos son funciones potencia (Ver la Observación 7.6 (ii) junto al Corolario 7.8).

- $\beta_\phi < \infty$ implica (7.4) (Ver Teorema 7.13).

Para finalizar esta sección incluimos algunos ejemplos.

Supondremos $x \geq 0$ y extenderemos por imparidad.

a. Sea $\eta : [0, \infty) \to [0.\infty)$ una función continua y no creciente. Si $\phi(x) = x^p \eta(x)$ con $0 < p < \infty$. Se tiene que $\beta_\phi \leq p < \infty$ (Por la observación 7.6 (iv)). Luego, por lo mencionado arriba ϕ satisface nuestras hipótesis.

   Dentro de este tipo de ejemplos podemos destacar los siguientes:

a.1 $\phi(x) = x^{p_1} + x^{p_2}$ con $p_1 \geq p_2 > 0$, pues $\phi(x)/x^{p_1}$ es no creciente.

a.2 $\phi(x) = \frac{x^{p_1}}{1+x^{p_2}}$ con $p_1 > p_2 > 0$, pues $\phi(x)/x^{p_1}$ es no creciente.

a.3 Sea $\phi(x) = (\ln(x+1))^p$ con $p > 0$. Se tiene que $(\ln(x+1))^p/x^p$ es no creciente. Veamos que, efectivamente, $(\ln(x+1))^p/x^p$ es no creciente. Como elevar a la potencia p es un homeomorfismo, basta ver que $g(x) = \ln(x+1)/x$ es no creciente. Para esto veremos que su derivada es no positiva. Como

$$g'(x) = \frac{\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2},$$

basta ver que $x-(x+1)\ln(x+1) \leq 0$. Notemos que $1 \leq 1+\ln(x+1)$ para todo $x \geq 0$. Integrando es $x \leq (x+1)\ln(x+1)$, de lo cual se deduce que $g'(x) \leq 0$. Además, esta función ϕ **no** satisface las hipótesis (Φ) y (Φ') de la introducción de este Capítulo ya que $\alpha_\phi = 0$. En efecto, como

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^q}{\ln(t+1)} = \infty \quad \text{para todo } q > 0,$$

el Teorema 7.12 (iv) nos dice que $\alpha_\phi = 0$.
Por otro lado, como $\ln(x+1)/x$ es no creciente, $\beta_\phi \leq 1$ y al ser

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{t^q}{\ln(t+1)} = \infty \quad \text{para todo } q < 1,$$

por el Teorema 7.12, se sigue que $\beta_\phi = 1$. Luego, esta función ϕ muestra que **no** son ciertas las recíprocas de los items (i) y (ii) del Teorema 7.13.

a.4 Sea $\phi(x) := \operatorname{arcsinh}(x)$, entonces, $\phi(x)/x$ es decreciente.

a.5 Sea $\phi(x) = x\,(|\ln x| + 1)$ y $\phi(x) := x - \ln(x+1)$. En ambos casos $\phi(x)/x^2$ son decrecientes.

a.6 Sea $\beta : [0,\infty) \to [0,\infty)$ una función continua y cóncava. Para cualquier $p > 0$ se tiene que $\phi(x) := x^p\beta(x)$ satisface las hipótesis ya que $\beta(x)/x$ es no creciente.

7.3. Caso sublineal

Como hemos mencionado en las Observaciones 4.4 y 5.9 de los Capítulos 4 y 5, el mejor resultado obtenido para el caso sublineal cuando $m \geq 0$ es el

Teorema 4.1. En este Teorema pedimos las siguientes hipótesis (Notar que están adaptadas al caso $n \equiv 0$):

H1. Existe $c_1, t_1 > 0$ y $0 < q_1$ tal que

$$f(t) \geq c_1 t^{q_1} \text{ para todo } t \in [0, t_1].$$

H3. Existe $c_2, q_2 > 0$ tal que

$$f(t) \leq c_2 t^{q_2} \quad \text{para todo } t > 0, \quad \text{y} \quad \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{t^{q_2}}{\phi(t)} = 0$$

o

$$f \text{ es no decreciente} \quad \text{y} \quad \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{f(Ct)}{\phi(t)} = 0, \quad \text{para todo } C > 0.$$

Además, para ver que $\Lambda = 0$ se suponía que

$$\underline{\lim}_{t\to 0^+} t^{p-1}/\phi(t) > 0,$$

donde $p > 1$ y $q_1 < p - 1$.

Por otro lado, en el Capítulo 5 pedimos que se satisfagan:

F2. Existen c_1, c_2, t_1, q_1 y $q_2 > 0$ tales que

$$c_1 t^{q_1} \leq f(t) \text{ para todo } 0 \leq t \leq t_1, \text{ y } \underline{\lim}_{t\to 0^+} \frac{t^{q_1}}{\phi(t)} = \infty \tag{7.8}$$

$$f(t) \leq c_2 t^{q_2} \text{ para todo } t \geq 0, \text{ y } \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{t^{q_2}}{\phi(t)} = 0. \tag{7.9}$$

Mientras que en [KM18b] las hipótesis para ϕ eran las siguientes:

J1. Existen $t_1 > 0$ y un homeomorfismo ψ definido en $[0, t_1]$ tal que ψ es creciente, $\psi(0) = 0$ y

$$\phi(tx) \leq \psi(t)\phi(x) \text{ para todo } t \in [0, t_1], x \geq 0. \tag{7.10}$$

J2. Existe $p > 0$ tal que

$$\overline{\text{lím}}_{t\to 0^+} \frac{\phi(t)}{t^p} < \infty, \text{ y además} \tag{7.11}$$

$$\overline{\text{lím}}_{t\to\infty} \frac{\phi(c_\Omega t)}{\phi(t)} < \infty, \text{ donde } c_\Omega := \frac{b-a}{2}. \tag{7.12}$$

JF1. Existen $\bar{t}, k_1, k_2, q > 0$ tales que

$$k_1 t^q \leq f(t) \text{ para } t \in [0, \bar{t}] \text{ y } f(t) \leq k_2 t^q \text{ para todo } t \geq 0.$$

JF2. Existen $\bar{t}, k_1, k_2, q_1, q_2 > 0$ tales que

$$k_1 t^{q_1} \leq f(t) \text{ para todo } t \in \left[0, \bar{t}\right] \text{ y } f(t) \leq k_2 \phi(t)^{q_2} \text{ para todo } t \geq 0.$$

Se asumen J1 y JF1 relacionados por medio del siguiente límite

$$\varliminf_{t \to 0^+} \frac{t^q}{\psi(t)} = \infty. \tag{7.13}$$

Mientras que J2 y JF2 pedimos que $q_1 \in (0, p)$ y $q_2 \in (0, 1)$. Notar que estas condiciones implican que

$$\varliminf_{t \to 0^+} \frac{t^{q_1}}{\phi(t)} = \infty \text{ pues } \phi \text{ es comparable con } t^p,$$

y

$$\varlimsup_{t \to \infty} \frac{f(t)}{\phi(t)} = 0.$$

Tenemos las siguientes relaciones entre las hipótesis con el índice α_ϕ.

- J1 es equivalente a pedir $\alpha_\phi > 0$.
- $\alpha_\phi > 0$ implica F2 (Ver Teorema 7.13).
- $\alpha_\phi > 0$ implica el primer límite de H3.

Supongamos $x \geq 0$ ya que podemos extender ϕ por imparidad.

(a) Sea $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ continua y monótona creciente, con φ estrictamente creciente en $(0, x_0)$ para algún $x_0 > 0$, en el caso que $\varphi(0) = 0$. Definimos

$$\phi(x) := x^p \varphi(x), \qquad p > 0. \tag{7.14}$$

Gracias a la Observación 7.6 (iii) podemos ver que $\alpha_\phi > 0$. Luego, ϕ satisfiace J1 y F2.

Mostramos a continuación algunos casos particulares interesantes:

(a1) Sea

$$\phi(x) := x^{p_1} + x^{p_2}, \qquad p_1 \geq p_2 > 0.$$

Como $\phi(x)/x^{p_2}$ es creciente, del primer párrafo en (a) resulta que $\alpha_\phi > 0$.

(a2) Sea

$$\phi(x) := e^{x^p} - 1, \qquad p > 0.$$

Un pequeño cálculo muestra que $\varphi := \phi(x)/x^p$ es creciente, en efecto, como

$$\varphi'(x) = \frac{p x^{p-1} \left(e^{x^p} x^p - e^{x^p} + 1\right)}{x^{2p}}$$

basta ver que $e^{x^p}x^p - e^{x^p} + 1 \geq 0$ lo cual es cierto pues $g(x) := e^{x^p}x^p - e^{x^p} + 1$ es una función creciente para $x \geq 0$ cuyo mínimo se alcanza en $x = 0$, y es $g(0) = 0$. Luego, $\alpha_\phi > 0$. Notar además que si $|\Omega| > 2$ entonces no vale (7.12) y por lo tanto ϕ no cumple J2. Y para cualquier Ω, ϕ **tampoco** satisface la hipótesis (Φ) ni (Φ') de la introducción de este Capítulo, ya que $\beta_\phi = \infty$. En efecto,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^q}{e^{t^p} - 1} = 0 \text{ para todo } q > 0,$$

lo que implica gracias al Teorema 7.12 (ii) que $\beta_\phi = \infty$.

(a3) Sea

$$\phi(x) := e^x - x - 1.$$

Veamos que $\varphi(x) := \phi(x)/x^2$ es creciente,

$$\varphi'(x) = \frac{(e^x - 1)x^2 - 2x(e^x - x - 1)}{x^4}.$$

Como para todo $y \leq 0$ es $1 \geq e^y(1-y)$ resulta que $e^y x \geq e^y - 1$, sumando $e^y - 1$ en la desigualdad anterior obtenemos que $e^y y + e^y - 1 \geq 2e^y - 2$. Integrando entre $[0, x]$ es $(e^x - 1)x \geq 2(e^x - x - 1)$ y finalmente multiplicando a esta última desigualdad por x obtenemos que $\varphi'(x) \geq 0$ y por lo tanto ϕ cumple J1. Observamos que ϕ **no** satisface la condición (Φ) ni (Φ') de la introducción, ya que podemos ver que $\beta_\phi = \infty$.

(a4) Sea

$$\phi(x) := \frac{x^{p_1}}{1 + x^{p_2}}, \qquad p_1 > p_2 > 0.$$

Como $\phi(x)/x^{p_1 - p_2}$ es creciente, deducimos que vale J1.

(b) Sea

$$\phi(x) := x(|\ln x| + 1).$$

Se puede ver que ϕ **no** puede ser escrita como en (7.14) con $p > 0$ y φ monótona creciente. Veamos sin embargo que ϕ cumple J1. Sea $p \in (0, 1)$. Elegimos $t_1 > 0$ tal que $|\ln x| \leq 1/t^{p-1} - 1$ para todo $t \in [0, t_1]$. Entonces para tales t y todo $x \geq 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} \phi(tx) \leq tx(|\ln t| + |\ln x| + 1) \leq \\ tx[(1/t^{1-p} - 1)(|\ln x| + 1) + (|\ln x| + 1)] = t^p \phi(x), \end{aligned} \tag{7.15}$$

y vale J1.

(c) Sea

$$\phi(x) := x - \ln(x + 1).$$

Es fácil ver que ϕ cumple (7.11) con $p = 1$ y también (7.12), es decir, satisface J2. A pesar de eso, también vale J1 con $t_1 = 1$ y $\psi(t) = ct$ para algún $c > 0$ suficientemente grande. En efecto, para $x > 0$ fijo sea

$$H(t) := \frac{xt - \ln(xt+1)}{x - \ln(x+1)}, \quad t \in [0,1].$$

Como $H(0) = 0$, si vemos que $H'(t) \leq c$ para alguna $c > 0$ que no dependa de x, obtendríamos que vale J1. Es

$$H'(t) = \frac{1}{x - \ln(x+1)} \left(x - \frac{x}{xt+1} \right) = \frac{x^2 t}{(x - \ln(x+1))(xt+1)}.$$

Si $x \geq 1$, al ser $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x - \ln(x+1)} = 1$ y $xt < xt + 1$ resulta que

$$\frac{x^2 t}{(x - \ln(x+1))(xt+1)} \leq \frac{x}{x - \ln(x+1)} \leq c_1,$$

donde $c_1 > 0$ es una constante que no depende de x.
Por otro lado, si $0 < x < 1$ la función $g(x) := \frac{x^2}{x - \ln(x+1)}$ está acotada y al ser $t \in [0,1]$ $h(t) := \frac{t}{xt+1}$ también, entonces al ser $H'(t) = g(x)h(t)$ resulta que existe $c_2 > 0$ constante que no depende de x tal que $H'(t) \leq c_2$. Luego, tomando $c \geq \max\{c_1, c_2\}$ obtenemos que $H'(t) \leq c$, como queríamos probar.

(d) Sea

$$\phi(x) := (\ln(x+1))^p, \qquad p > 0.$$

Es obvio que ϕ cumple (7.11) y (7.12) y por lo tanto ϕ cumple J2. Notamos además que es fácil ver que ϕ **no** cumple J1 (y por lo tanto **tampoco** cumple las hipótesis (Φ) o (Φ') de la introducción del Capítulo) ya que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{t^q}{\phi(t)} = \infty \quad \text{para todo } q > 0$$

y luego $\alpha_\phi = 0$ (por el Teorema 7.12 (iv)). Por último, notamos que esta función ϕ no cumple el primer límite de H3 ni el segundo límite de F2.

Bibliografía

[ABC94] A. Ambrosetti, H. Brezis, and G. Cerami. Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems. *Journal of Functional Analysis*, 122(2):519 – 543, 1994.

[AF03] Robert A. Adams and John J. F. Fournier. *Sobolev Spaces*, volume 140 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Oxford, 2003.

[AGP96] Antonio Ambrosetti, Jesus Garcia Azorero, and Ireneo Peral. Multiplicity results for some nonlinear elliptic equations. *J. Funct. Anal.*, 137(1):219–242, 1996.

[AP93] Antonio Ambrosetti and Giovanni Prodi. *A primer of nonlinear analysis*. Number 34 in Cambrigde Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambrigde, 1993.

[APS10] Sergiu Aizicovici, NS Papageorgiou, and Vasile Staicu. Multiple positive solutions for a p-laplacian dirichlet problem with superdiffusive reaction. *Houston Journal of Mathematics*, 36:313–333, 01 2010.

[BC98] Haïm Brezis and Xavier Cabré. Some simple nonlinear pde's without solutions. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, 1-B(2):223–262, 6 1998.

[BDM07] A. Benmezaï, S. Djebali, and T. Moussaoui. Positive solutions for ϕ- Laplacian Dirichlet BVPs. *Fixed Point Theory*, 8:167–186, 2007.

[BIU08] Friedemann Brock, Leonelo Iturriaga, and Pedro Ubilla. A multiplicity result for the p-laplacian involving a parameter. *Annales Henri Poincaré*, 9(7):1371–1386, Nov 2008.

[Dei85] Klaus Deimling. *Nonlinear functional analysis*. Springer, 1985.

[DH01] P. Drábek and J. Hernández. Existence and uniqueness of positive solutions for some quasilinear elliptic problems. *Nonlinear Analysis*, 44:189–204, 2001.

[DO96] H. Dang and S. Oppenheimer. Existence and uniqueness results for some nonlinear boundary problems. *J. Math Anal. Appl.*, 198:35–48, 1996.

[Don05] Wei Dong. A priori estimates and existence of positive solutions for a quasilinear elliptic equation. *Journal of the London Mathematical Society*, 72(3):645–662, 2005.

[Dug51] J. Dugundji. An extension of tietze's theorem. *Pacific J. Math.*, 1(3):353–367, 1951.

[Eva10] L. Evans. *Partial Diferential Equations*. Number 19 in Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, R.I., 2010.

[Fan12] Xianling Fan. Differential equations of divergence form in musielak–sobolev spaces and a sub-supersolution method. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 386(2):593 – 604, 2012.

[FN07] N. Fukagai and K. Narukawa. On the existence of multiple positive solutions of quasilinear elliptic eigenvalue problems. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 186:539–564, 2007.

[FOP10] M. Filipakis, D. O'Regan, and N. Papageorgiou. Positive solutions and bifurcation phenomena for nonlinear elliptic equations. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 9:1507–1527, 2010.

[FZ15] Guglielmo Feltrin and Fabio Zanolin. Multiple positive solutions for a superlinear problem: a topological approach. *Journal Differential Equations*, (259):925–963, 2015.

[GHLMS99] M. García-Huidobro, V.K. Le, R. Manásevich, and K. Schmitt. On principal eigenvalues for quasilinear elliptic differential operators: an orlicz-sobolev space setting. *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*, 6(2):207–225, May 1999.

[GK13] Tomas Godoy and Uriel Kaufmann. On strictly positive solutions for some semilinear elliptic problems. *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*, 20, 06 2013.

[GL88] Dajun Guo and V. Lakshmikantham. *Nonlinear Problems in Abstract Cones*, volume 5 of *Notes and Reports in Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, 1988.

[GOP15] Leszek Gasiński, Donal O'Regan, and Nikolaos S Papageorgiou. A variational approach to nonlinear logistic equations. *Communications in Contemporary Mathematics*, 17(03):1450021, 2015.

[Gos74] Jean-Pierre Gossez. Nonlinear elliptic boundary-value problems with rapidly (or slowly) increasing coefficients. *Transactions of the American Mathematical Society*, 190:163–205, 01 1974.

[GP77] Jan Gustavsson and Jaak Peetre. Interpolation of Orlicz spaces. *Stud. Math.*, 60:33–59, 1977.

[GP14] Leszek Gasiński and Nikolaos S Papageorgiou. On generalized logistic equations with a non-homogeneous differential operator. *Dynamical Systems*, 29(2):190–207, 2014.

[GP16] Leszek Gasiński and Nikolaos S Papageorgiou. Positive solutions for the generalized nonlinear logistic equations. *Canadian Mathematical Bulletin*, 59(1):73–86, 2016.

[HP74] Einar Hille and Ralph S. Phillips. *Functional analysis and semigroups. 3rd printing of rev. ed. of 1957*, volume 31. American Mathematical Society (AMS), Providence, RI, 1974.

[HQK16] Nguyen Bich Huy, Bui The Quan, and Nguyen Huu Khanh. Existence and multiplicity results for generalized logistic equations. *Nonlinear Analysis*, 144:77 – 92, 2016.

[HTT12] Nguyen Bich Huy, Nguyen Duy Thanh, and Tran Dinh Thanh. On the structure of unbounded positive solutions to the quasilinear logistic equation. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 75(8):3682 – 3690, 2012.

[IP11] Antonio Iannizzotto and Nikolaos Papageorgiou. Positive solutions for generalized nonlinear logistic equations of superdiffusive type. *Topological methods in nonlinear analysis*, 38:95–113, 09 2011.

[KM18a] Uriel Kaufmann and Leandro Milne. On one-dimensional superlinear indefinite problems involving the ϕ -laplacian. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 20:134, 09 2018.

[KM18b] Uriel Kaufmann and Leandro Milne. Positive solutions for nonlinear problems involving the one-dimensional ϕ-laplacian. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 461(1):24 – 37, 2018.

[KM19] Uriel Kaufmann and Leandro Milne. Positive solutions of generalized nonlinear logistic equations via sub-super solutions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 471(1):653–670, 2019.

[KP11] Sophia Th. Kyritsi and Nikolaos S. Papageorgiou. A bifurcation theorem for the p-logistic equation. *Applied Mathematics and Computation*, 217(18):7504 – 7508, 2011.

[KR61] M. Krasnosel'skiĭ and J. Rutickiĭ. *Convex functions and Orlicz spaces. Translated from the first Russian edition by Leo F. Boron*. P. Noordhoff Ltd., Groningen, 1961.

[Mal89] Lech Maligranda. *Orlicz spaces and interpolation*. Campinas, SP: Univ. Estadual de Campinas, Dep. de Matemática, 1989.

[MM00] R. Manásevich and J. Mawhin. Boundary value problems for nonlinear pertubations of vector p-Laplacian-like operators. *J. Korean Math. Society*, 37:665–685, 2000.

[Mor14] Lais Moreira dos Santos. Mínimos em c^1 versus orlicz-sobolev e multiplicidade global de soluções positivas para problemas elípticos quasilineares, 2014.

[PP12] Nikolaos S. Papageorgiou and Francesca Papalini. Constant sign and nodal solutions for logistic-type equations with equidiffusive reaction. *Monatshefte für Mathematik*, 165(1):91–116, Jan 2012.

[PS16] Nikolaos S. Papageorgiou and George Smyrlis. Positive solutions for parametric p-laplacian equations. *Communications on Pure & Applied Analysis*, 15(1534-0392-2016-5-1545):1545, 2016.

[PW14] Nikolaos S Papageorgiou and Patrick Winkert. On a parametric nonlinear dirichlet problem with subdiffusive and equidiffusive reaction. *Advanced Nonlinear Studies*, 14(3):565–591, 2014.

[RR91] M. Rao and Z. Ren. *Theory of Orlicz spaces*. Number 146 in Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker, Inc., New York, 1991.

[SU00] Justino Sánchez and Pedro Ubilla. One-dimensional elliptic equation with concave and convex nonlinearities. *Electron. J. Differ. Equ.*, 2000:9, 2000. Id/No 50.

[Tak01] Shingo Takeuchi. Multiplicity result for a degenerate elliptic equation with logistic reaction. *Journal of Differential Equations*, 173(1):138 – 144, 2001.

[TF13] Zhong Tan and Fei Fang. Orlicz–sobolev versus hölder local minimizer and multiplicity results for quasilinear elliptic equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 402(1):348 – 370, 2013.

[Wan03a] H. Wang. On the number of positive solutions of nonlinar systems. *J. Math Anal. Appl.*, 281:287–306, 2003.

[Wan03b] H. Wang. On the structure of positive radial solutions for quasilinear equations in annular domains. *Adv. Differential Equations*, 8:111–128, 2003.

[XL14] X. Xu and Y. Lee. Some existence results of positive solutions for ϕ-Laplacian systems. *Abstr. Appl. Anal.*, 2014(Article ID 814312):11 pages, 2014.